Το Θεώρημα Ramsey, επεκτάσεις του και εφαρμογές στη Συναρτησιακή Ανάλυση

Αλέξανδρος Γεωργακόπουλος

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων Καθηγητής: Βασίλης Κανελλόπουλος

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2011

Εισαγωγή

Ο σκοπός της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσουμε μερικές εφαρμογές των μεθόδων της άπειρης συνδιαστικής στην Ανάλυση. Στο 1ο κεφάλαιο μελετάμε το Θεώρημα Ramsey και κάποιες παραλλαγές του. Στο 2ο κεφάλαιο αποδεικνύουμε πρώτα το Θεώρημα Nash-Williams και μετά το χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε ένα από τα σημαντικά αποτελέσματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης, το l_1- Θεώρημα του Rosenthal. Τέλος στο 3ο κεφάλαιο μελετάμε μια εφαρμογή του Θεωρήματος Ramsey που οδηγεί στον ορισμό της ακολουθίας spreading model. Από το 2ο κεφάλαιο και έπειτα ο αναγνώστης θα χρειαστεί να γνωρίζει κάποια πράγματα από την Θεωρία Μετρικών Χώρων. Μια μικρή εισαγωγή στη Συναρτησιακής Ανάλυσης υπάρχει στο Παράρτημα.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ.Κανελλόπουλο για το πολύ όμορφο θέμα που μου πρότεινε να ασχοληθώ και για όσα μου έμαθε κατά τη διάρκεια της εργασίας αλλά και των σπουδών μου στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Το Θεώρημα Ramsey

Σε ολόκληρη την εργασία θα μιλάμε για υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών. Έστω $M \subset \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{N}$. Χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς.

$$[M]^{\infty} := \{A \subset M : A \quad \text{άπειρο}\}$$

$$[M]^{<\infty} := \{A \subset M : A \quad \text{πεπερασμένο}\}$$

$$[M]^{k} := \{(n_1, n_2, ..., n_k) : n_1 < n_2 < ... < n_k, n_1, n_2, ...n_k \in M\}$$

Τα στοιχεία του τελευταίου συνόλου θα τα ονομάζουμε και k-σύνολα του M. Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει ότι

$$[M]^{<\infty} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [M]^{k}$$

Όταν έχουμε ένα σύνολο X και δύο ξένα,μη κενά υποσύνολα του A, B με $X = A \cup B$ θα λέμε ότι έχουμε ένα διχρωματισμό του X με τα χρώματα A και B. Αν $Y \subset X$ τέτοιο ώστε $Y \subset A$ ή $Y \subset B$ τότε το Y θα λέγεται μονοχρωματικό.

Έστω τώρα ένας διχρωματισμός του $\mathbb{N}$ με τα χρώματα A και B ή πιο απλά ας πούμε ότι χρωματίζουμε τους φυσικούς αριθμούς με τα χρώματα μπλε και κόκκινο. Τότε σίγουρα άπειροι από αυτούς θα είναι μπλε ή άπειροι θα είναι κόκκινοι. Με άλλα λόγια υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο τους το οποίο είναι μονοχρωματικό. Πράγματι αν δεν υπήρχε τέτοιο σύνολο τότε το σύνολο των μπλε φυσικών θα ήταν πεπερασμένο καθώς επίσης και το σύνολο των κόκκινων θα ήταν πεπερασμένο. Συνεπώς και η ένωση τους (δηλαδή όλοι οι φυσικοί) θα ήταν πεπερασμένο, άτοπο. Αυτή είναι η πιο απλή εκδοχή του Θεωρήματος Ramsey. Παρακάτω θα το γενικεύσουμε με αρκετούς τρόπους.

Θεώρημα Ramsey

Έστω ότι $[\mathbb{N}]^2 = A \cup B$ όπου A, B μη κενά και ξένα υποσύνολα του $[\mathbb{N}]^2$. Τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε είτε $[M]^2 \subset A$ ή $[M]^2 \subset B$.

Απόδειξη

Θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος Ramsey στην πιο απλή περίπτωση που αναφέραμε παραπάνω. Θεωρούμε το σύνολο $P_0 = \{(1, n) : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$ το οποίο είναι υποσύνολο του $[\mathbb{N}]^2$ και άρα από την υπόθεση μας είναι χρωματισμένο με τα χρώματα A και B. Συνεπώς υπάρχει ένα $M_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρο τέτοιο ώστε το $R_0 = \{(1, n) : n \in M_1\}$ να είναι μονοχρωματικό. Έστω τώρα $m_1 := \min M_1$ το οποίο υπάρχει από την αρχή της καλής διάταξης των φυσικών. Έστω $P_1 = \{(m_1, n) : n \in M_1 \setminus \{m_1\}\}$. Παρόμοια υπάρχει $M_2 \subset M_1$ άπειρο τέτοιο ώστε το $R_1 = \{(m_1, n) : n \in M_2\}$ να είναι μονοχρωματικό. Έστω $m_2 := \min M_2$. Με παρόμοιο τρόπο κατασκευάζουμε γνησίως φθίνουσα ακολουθία συνόλων $\mathbb{N} = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$ και αύξουσα ακολουθία αριθμών $1 = m_0 < m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ τέτοιες ώστε $m_i \in M_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Κοιτάμε το σύνολο $\{(m_{i-1}, m_i) : i \in \mathbb{N}\}$. Είναι υποσύνολο του $A \cup B$ και συνεπώς υπάρχει $K \subset \mathbb{N}$ άπειρο τέτοιο ώστε το $\{(m_{i-1}, m_i) : i \in K\}$ να είναι μονοχρωματικό. Υποθέτουμε εδώ χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι έχει το χρώμα A. Έστω $M := \{m_i : i \in K\}$. Το M είναι το ζητούμενο σύνολο. Δηλαδή ισχύει ότι $[M]^2 \subset A$. Πράγματι έστω $(m_i, m_{i+j}) \in [M]^2$. Τότε το στοιχείο αυτό ανήκει στο R_i και συνεπώς έχει το ίδιο χρώμα με το (m_i, m_{i+1}). Το τελευταίο ανήκει στο $\{(m_i, m_{i+1}) : i \in K\}$ συνεπώς έχει το χρώμα A. Οπότε και $(m_i, m_{i+j}) \in A$ όπως θέλαμε.

$\square$

Τέτοιου είδους αποτελέσματα ανήκουν στην Θεωρία Ramsey. Υπάρχει και πεπερασμένη εκδοχή του Θεωρήματος Ramsey το οποίο εμπίπτει στην Θεωρία Γραφημάτων. Στην πιο απλή του εκδοχή λέει ότι σε οποιαδήποτε ομάδα από έξι ανθρώπους είτε υπάρχουν τρεις που γνωρίζονται ανά δύο είτε υπάρχουν τρεις οι οποίοι δεν γνωρίζονται ανά δύο. Με γλώσσα της Θεωρίας Γραφημάτων αν υποθέσουμε ότι έχουμε έξι κορυφές οι οποίες συνδέονται ανά δύο με πλευρές τις οποίες χρωματίζουμε μπλε ή κόκκινες τότε σίγουρα υπάρχει μπλε τρίγωνο ή κόκκινο τρίγωνο.

Δίνουμε τώρα την πρώτη εφαρμογή του Θεωρήματος Ramsey αποδεικνύοντας με όμορφο και απλό τρόπο ένα από τα Θεμελιώδη Θεωρήματα της Πραγματικής Ανάλυσης.

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass

Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αρκεί να δείξουμε ότι έχει μονότονη υπακολουθία. Παρατηρούμε ότι

$$[\mathbb{N}]^2 = \{(i,j) : i < j, a_i \leq a_j\} \cup \{(i,j) : i < j, a_i > a_j\}$$

Από το Θεώρημα Ramsey υπάρχει $M \subset \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $[M]^2 \subset \{(i,j) : i < j, a_i \leq a_j\}$ ή $[M]^2 \subset \{(i,j) : i < j, a_i > a_j\}$. Τότε προφανώς η ακολουθία $(a_n)_{n\in M}$ είναι αύξουσα αν ισχύει το πρώτο ή φθίνουσα αν ισχύει το δεύτερο.

$\square$

Θα δούμε τώρα ότι το Θεώρημα γενικεύεται για k-σύνολα και για r χρώματα. Η ιδέα της απόδειξης παραμένει η ίδια ενώ οι γενικεύσεις θα προκύψουν με επαγωγή.

Θεώρημα Ramsey

Έστω $k, r \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $f : [\mathbb{N}]^k \to \{1, 2, ..., r\}$ υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $i_0 \in \{1, 2, ..., r\}$ τέτοια ώστε $f[[M]^k] = \{i_0\}$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε πρώτα ότι $r = 2$. Για $k = 1$ αν $f : \mathbb{N} \to \{1, 2\}$ τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $i_0 \in \{1, 2\}$ τέτοια ώστε $f[M] = \{i_0\}$ διότι το $\mathbb{N}$ ως άπειρο σύνολο δεν μπορεί να χωριστεί σε δύο πεπερασμένα. Υποθέτουμε τώρα ότι το Θεώρημα αληθεύει για k. Έστω $f : [\mathbb{N}]^{k+1} \to \{1, 2\}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $i_0 \in \{1, 2\}$ τέτοια ώστε $f[[M]^{k+1}] = \{i_0\}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{(1, a_1, ..., a_k) : (a_1, ..., a_k) \in [\mathbb{N}]^k\}$$

Από την υπόθεση υπάρχουν $M_1 \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $i_1 \in \{1, 2\}$ τέτοια ώστε

$$f[\{(1, a_1, ..., a_k) : (a_1, ..., a_k) \in [M_1]^k\}] = \{i_1\}$$

Έστω $m_1 := \min M_1$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A_1 = \{(m_1, a_1, ..., a_k) : (a_1, ..., a_k) \in [M_1 \setminus \{m_1\}]^k\}$$

Από την υπόθεση υπάρχουν $M_2 \in [M_1]^\infty$ και $i_2 \in \{1, 2\}$ τέτοια ώστε

$$f[\{(m_1, a_1, ..., a_k) : (a_1, ..., a_k) \in [M_2]^k\}] = \{i_2\}$$

Έστω $m_2 := \min M_2$. Παρόμοια ορίζουμε

$$A_2 = \{(m_2, a_1, ..., a_k) : (a_1, ..., a_k) \in [M_2 \setminus \{m_2\}]^k\}$$

Έστω $m_3 := \min M_3$. Κατασκευάζουμε με αυτόν τον τρόπο ακολουθία $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset ...$ και αύξουσα ακολουθία φυσικών $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοιες ώστε $m_n = \min M_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω τώρα

$$B = \{(m_n, m_{n+1}, ...m_{n+k}) : n \in \mathbb{N}\} \subset [\mathbb{N}]^{k+1}$$

Από το Θεώρημα για $k = 1$ παίρνουμε ότι υπάρχει $K \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε

$$f[\{(m_n, m_{n+1}, ..., m_{n+k}) : n \in K\}] = \{i_0\}$$

για κάποιο $i_0 \in \{1,2\}$. Ορίζουμε $M := \{m_n : n \in K\}$. Το M είναι το ζητούμενο σύνολο. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $f[[M]^{k+1}] = \{i_0\}$. Έστω $(m_{j_1}, m_{j_2}, ..., m_{j_{k+1}}) \in [M]^{k+1}$ όπου $j_1, j_2, ..., j_{k+1} \in K$. Αφού $j_1 \in K$ ισχύει ότι $f((m_{j_1}, m_{j_1+1}, ..., m_{j_1+k})) = i_0$. Επίσης εκ κατασκευής $m_{j_1}, ..., m_{j_{k+1}} \in M_{j_1}$. Συνεπώς από τον ορισμό του M_{j_1} ισχύει ότι

$$f((m_{j_1}, m_{j_2}, ..., m_{j_{k+1}})) = f((m_{j_1}, m_{j_1+1}, ..., m_{j_1+k})) = i_0$$

όπως θέλαμε. Συνεπώς από επαγωγή το Θεώρημα ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Έστω τώρα ότι το Θεώρημα ισχύει για $r \geq 2$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $r+1$. Έστω $f : [\mathbb{N}]^k \to \{1, 2, ..., r, r+1\}$. Αντιστοιχούμε τα r και $r+1$. Δηλαδή ορίζουμε $g : [\mathbb{N}]^k \to \{1, 2, ..., r\}$ τέτοια ώστε $g(A) = r \Leftrightarrow f(A) = r \quad ή \quad f(A) = r+1$ και $g(A) = f(A)$ όταν $f(A) \neq r$ και $f(A) \neq r+1$ όπου $A \in [\mathbb{N}]^k$. Το Θεώρημα εφαρμόζεται για τη g. Συνεπώς υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $i_o \in \{1, 2, ..., r\}$ τέτοια ώστε $g[[M]^k] = \{i_0\}$. Αν $i_o \neq r$ έχουμε το ζητούμενο διότι τότε η g ταυτίζεται με την f στο $[M]^k$. Αν $i_0 = r$ τότε αντιστοιχούμε το M με το $\mathbb{N}$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα για $k = 2$. Συνεπώς υπάρχει $M_1 \in [M]^\infty] \subset [\mathbb{N}]^\infty$ και $i_1 \in \{r, r+1\}$ τέτοια ώστε $g[[M_1]^k] = i_1$. Τότε ισχύει και $f[[M_1]^k] = i_1$.

$\square$

Από εδώ και πέρα θα αναφερόμαστε σε αυτό ως Θεώρημα Ramsey. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα δούμε μια ακόμα απόδειξη του παραπάνω ως εφαρμογή του Θεωρήματος Nash-Williams. Δίνουμε μια ακόμα εφαρμογή του παίρνοντας μια πρόταση ισχυρότερη από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass.

Πρόταση

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε υπάρχει $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ακολουθία δεικτών τέτοια ώστε οι ακολουθίες $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ και $(a_{n_{k+1} - n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνουν.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι

$$[\mathbb{N}]^3 = \{(i,j,k) : i < j < k, a_i \leq a_j, a_{j-i} \leq a_{k-j}\} \cup$$

$$\cup\{(i,j,k) : i < j < k, a_i \leq a_j, a_{j-i} > a_{k-j}\}\cup$$
$$\cup\{(i,j,k) : i < j < k, a_i > a_j, a_{j-i} \leq a_{k-j}\}\cup$$
$$\cup\{(i,j,k) : i < j < k, a_i > a_j, a_{j-i} > a_{k-j}\}$$

Από το Θεώρημα Ramsey για $k = 3$ και $r = 4$ παίρνουμε ότι υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ το οποίο περιέχεται ολόκληρο σε κάποιο από τα παραπάνω σύνολα. Έστω $M = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Τότε οι ακολουθίες $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ και $(a_{n_{k+1}-n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονες και αφού είναι και φραγμένες συγκλίνουν.

□

Τώρα θα εξετάσουμε χρωματισμούς άλλων υποσυνόλων του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ και θα δούμε αν ισχύουν Θεωρήματα τύπου Ramsey.

Πρόταση

Υπάρχει χρωματισμός του $[\mathbb{N}]^{<\infty}$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε το σύνολο $[M]^{<\infty}$ να είναι μονοχρωματικό.

Απόδειξη

Έστω $A = [\mathbb{N}]^2$ και $B = [\mathbb{N}]^{<\infty} \setminus [\mathbb{N}]^2$. Έστω ότι υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε $[M]^{<\infty} \subset A$. Άτοπο αφού τα υποσύνολα του M με τουλάχιστον τρία στοιχεία ανήκουν στο B. Έστω ότι υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε $[M]^{<\infty} \subset B$. Άτοπο γιατί τα δισύνολα του M ανήκουν στο A. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο M.

□

Συνεπώς εν γένει δεν μπορούμε να βρούμε άπειρο M τέτοιο ώστε όλα τα πεπερασμένα του υποσύνολα να είναι μονοχρωματικά. Μπορούμε όμως να περιοριστούμε σε ειδικά υποσύνολα του M ώστε αυτά να είναι μονοχρωματικά.

Πρόταση

Έστω $[\mathbb{N}]^{<\infty} = A \cup B$ διχρωματισμός των πεπερασμένων υποσυνόλων των φυσικών. Τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε το σύνολο

$$\{F \in [M]^{<\infty} : |F| = \min F\}$$

να είναι μονοχρωματικό.

Απόδειξη

Για $k \in \mathbb{N}$ και $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ορίζουμε $[L]_k^m$ να είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με $m+1$ στοιχεία που έχουν ελάχιστο στοιχείο το k και άλλα m το πλήθος διαφορετικά στοιχεία του συνόλου L. Έστω τώρα $m_1 \in \mathbb{N}$. Τότε $[\mathbb{N}]_{m_1}^{m_1-1} \subset [\mathbb{N}]^{m_1} \subset A \cup B$. Από το Θεώρημα Ramsey για $m_1 - 1$-σύνολα παίρνουμε ότι υπάρχει $M_2 \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε το $[M_2]_{m_1}^{m_1-1}$ να είναι μονοχρωματικό. Έστω $m_2 \in M_2$ με $m_2 > m_1$. Τότε από τη σχέση $[M_2]_{m_2}^{m_2-1} \subset A \cup B$ παίρνουμε ότι υπάρχει $M_3 \subset M_2$ άπειρο ώστε το $[M_3]_{m_2}^{m_2-1}$ να είναι μονοχρωματικό. Κατασκευάζουμε έτσι ακολουθία φυσικών $m_1 < m_2 < m_3 < ...$ και ακολουθία συνόλων $M_2 \supset M_3 \supset M_4 \supset ...$ με $m_n \in M_n$ και το σύνολο $[M_{n+1}]_{m_n}^{m_n-1}$ να είναι μονοχρωματικό για κάθε $n > 1$. Τώρα από την απλούστερη περίπτωση του Θεωρήματος Ramsey υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε

$$[M_{n+1}]_{m_n}^{m_n-1} \subset A \quad \forall n \in L \quad \text{ή} \quad [M_{n+1}]_{m_n}^{m_n-1} \subset B \quad \forall n \in L$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι συμβαίνει το πρώτο. Θέτουμε $M := \{m_n : n \in L\}$. Το M είναι το ζητούμενο σύνολο. Πράγματι έστω $m_{k_1} < m_{k_2} < ... < m_{k_a}$ στοιχεία του M με $a = m_{k_1}$. Τότε ισχύει $[M_{k_1+1}]_{m_{k_1}}^{m_{k_1}-1} \subset A$. Πράγματι $m_{k_2}, ..., m_{k_a} \in M_{k_1+1}$ αφού $M_{k_1+1} \supset M_{k_2} \supset M_{k_3} \supset ... \supset M_{k_a}$. Άρα όλα τα υποσύνολα του M με πλήθος στοιχείων όσο και το ελάχιστο στοιχείο τους ανήκουν στο A.

$\square$

Παρακάτω δείχνουμε ότι όπως για το $[\mathbb{N}]^{<\infty}$ έτσι και για το $[\mathbb{N}]^\infty$ δεν ισχύει κάτι ανάλογο με το Θεώρημα Ramsey.

Πρόταση

Υπάρχει χρωματισμός του $[\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε το σύνολο $[M]^\infty$ να είναι μονοχρωματικό.

Απόδειξη

Για $X, Y \in [\mathbb{N}]^\infty$ ορίζουμε $X \sim Y$ αν το σύνολο $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

είναι πεπερασμένο. Η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας. Από κάθε κλάση ισοδυναμίας επιλέγουμε έναν αντιπρόσωπο με τη βοήθεια του Αξιώματος της Επιλογής. Θέτουμε

$$A = \{X \in [\mathbb{N}]^\infty : |X \triangle L| \quad \text{άρτιος όπου} \quad L \text{ ο αντιπρόσωπος της κλάσης του} X\}$$

και

$$B = \{X \in [\mathbb{N}]^\infty : |X \triangle L| \quad \text{περιττός όπου} \quad L \text{ ο αντιπρόσωπος της κλάσης του} X\}$$

Επειδή προσθέτοντας ένα στοιχείο σε ένα σύνολο αλλάζει το υπόλοιπο της διαίρεσης του $|X \triangle L|$ με το 2 βλέπουμε ότι δεν υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε το $[M]^\infty$ να είναι μονοχρωματικό.

□

Παρακάτω εξετάζουμε και μια πεπερασμένη εκδοχή του Θεωρήματος με την ιδέα στην απόδειξη να παραμένει η ίδια.

Πρόταση

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και σύνολο X με $|X| = 2^{2n}$. Έστω ότι $[X]^2 = A \cup B$ όπου A, B μη κενά και ξένα υποσύνολα του $[X]^2$. Τότε υπάρχει $Y \subset X$ με $|Y| = n$ τέτοιο ώστε $[Y]^2 \subset A$ ή $[Y]^2 \subset B$.

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $X = \{1, 2, 3, ..., 2^{2n}\}$. Έστω $D_1 := \{\{1, m\} : m \in X \setminus \{1\}\}$. Τότε υπάρχει $C_1 \subset X \setminus \{1\}$ με $|C_1| \geq \frac{|X \setminus \{1\}|}{2} = \frac{2^{2n}-1}{2} \Rightarrow |C_1| \geq 2^{2n-1}$ τέτοιο ώστε το $\{\{1, m\} : m \in C_1\}$ να είναι μονοχρωματικό. Έστω $m_1 \in C_1$ και $D_2 := \{\{m_1, m\} : m \in C_1 \setminus \{m_1\}\}$. Τότε υπάρχει $C_2 \subset C_1 \setminus \{m_1\}$ με $|C_2| \geq \frac{|C_1 \setminus \{m_1\}|}{2} = \frac{2^{2n-1}-1}{2} \Rightarrow |C_2| \geq 2^{2n-2}$ τέτοιο ώστε το $\{\{m_1, m\} : m \in C_2\}$ να είναι μονοχρωματικό. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο και κατασκευάζουμε το σύνολο $\{1, m_1, m_2, ..., m_{2n}\}$ και το $\{\{1, m_1\}, \{m_1, m_2\}, ..., \{m_{2n-1}, m_{2n}\}\}$. Το τελευταίο περιέχει $2n$ στοιχεία. Συνεπώς περιέχει ένα υποσύνολο $\{\{m_i, m_{i+1}\} : i \in K\}$ με n στοιχεία το οποίο είναι μονοχρωματικό. Έστω $Y := \{m_i : i \in K\}$. Το $[Y]^2$ είναι μονοχρωματικό. Πράγματι αν $m_i, m_j \in Y$ το $\{m_i, m_j\}$ έχει το ίδιο χρώμα με το $\{m_i, m_{i+1}\}$ διότι $m_j \in C_j \subset C_i \setminus \{m_i, m_{i+1}, ..., m_{j-1}\}$.

□

Κεφάλαιο 2

Το l_1- Θεώρημα του Rosenthal

2.1 Το Θεώρημα Nash-Williams

2.1.1 Το Θεώρημα Nash-Williams

Έστω $A \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $Y \in [\mathbb{N}]^{\infty}$. Λέμε ότι το A είναι αρχικό τμήμα του Y αν $Y \cap \{1, 2, ..., \max A\} = A$. Θεωρούμε ότι το $\emptyset$ είναι αρχικό τμήμα κάθε άπειρου συνόλου. Αν A αρχικό τμήμα του Y συμβολίζουμε $A \sqsubseteq Y$.
Έστω $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $X \in [\mathbb{N}]^{\infty}$. Θα λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι large για το X αν $\forall \quad Y \in [X]^{\infty}$ υπάρχει $F \in [Y]^{<\infty}$ τέτοιο ώστε $F \in \mathcal{A}$. Θα λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι very large για το X αν $\forall \quad Y \in [X]^{\infty}$ υπάρχει $F \sqsubseteq Y$ τέτοιο ώστε $F \in \mathcal{A}$.
Έστω επίσης $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^{<\infty}$ και $F \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Τότε ορίζουμε

$$\mathcal{A}(F) := \{B \in [\mathbb{N}]^{<\infty} : \max F < \min B \quad \text{και} \quad F \cup B \in \mathcal{A}\}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι αν η $\mathcal{A}$ είναι large (very large) για κάποιο X τότε η $\mathcal{A}$ είναι large (very large) για κάθε άπειρο υποσύνολο Y του X λόγω της σχέσης $[Y]^{\infty} \subset [X]^{\infty}$.
Προφανώς αν η $\mathcal{A}$ είναι very large για το X τότε είναι και large για το X.

Παράδειγμα

Η οικογένεια $[\mathbb{N}]^k$ είναι very large για το $\mathbb{N}$ αφού κάθε άπειρο σύνολο έχει αρχικό τμήμα μήκους k.

Προχωράμε τώρα στο Θεώρημα Nash-Williams.

Θεώρημα Nash-Williams

Έστω $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^{<\infty}$ η οποία είναι large για το X. Τότε υπάρχει $X \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η $\mathcal{A}$ να είναι very large για το X.

Απόδειξη

Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο $X.(*)$
Κατασκευάζουμε $x_1 < x_2 < x_3 < ...$ ακολουθία φυσικών και $\mathbb{N} = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset ...$ ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με τις ιδιότητες: $x_n \in X_{n-1}$, δεν υπάρχει $F \subset \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ και δεν υπάρχει $Y \in [X_n]^\infty$ τέτοια ώστε η $\mathcal{A}(F)$ να είναι very large για το $Y.(**)$
Αυτή η κατασκευή γίνεται επαγωγικά. Για το πρώτο βήμα:$X_0 = \mathbb{N}$ και δεν υπάρχει $Y \in [X_0]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{A}(\emptyset) = \mathcal{A}$ να είναι very large για το Y (άμεσο από την $(*)$). Έστω τώρα ότι έχουμε βρει $x_1 < x_2 < ... < x_n, X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n$ και ότι δεν υπάρχουν x_{n+1}, X_{n+1} με τις άνω ιδιότητες. Τότε $\forall y > x_n, y \in X_n$ και $\forall \quad Y \in [X_n]^\infty : \exists F \subset \{x_1, x_2, ..., x_n, y\}$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{A}(F)$ να είναι very large για κάποιο $Z \in [Y]^\infty$. Από την $(**)$ προκύπτει ότι $y \in F$. Θέτουμε $E \cup \{y\} = F$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση κατασκευάζουμε $x_n < y_1 < y_2 < ..., X_n = Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset ...$ τέτοιες ώστε $\forall k : y_k \in Y_{k-1}$ και $\exists E \subset \{x_1, ..., x_n\}, E \cup \{y_k\} = F$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A}(F)$ very large για το $Y_k.(***)$
Τα υποσύνολα του $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ είναι πεπερασμένα στο πλήθος. Συνεπώς από την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχει $W \subset \{y_1, y_2, y_3, ...\}$ τέτοιο ώστε το ίδιο E να προκύπτει στην $(***)$ για κάθε $y_k \in W$.
Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η $\mathcal{A}(E)$ είναι very large για το W. Πράγματι έστω $V \in [W]^\infty, y_i = \min V$. Τότε η $\mathcal{A}(E \cup \{y_i\})$ είναι very large για το Y_i άρα και για το $V \setminus \{y_i\} \subset Y_i$. Δηλαδή το $V \setminus \{y_i\}$ έχει αρχικό τμήμα στην $\mathcal{A}(E \cup \{y_i\})$ οπότε το V έχει αρχικό τμήμα στην $\mathcal{A}(E)$. Άρα δείξαμε τον ισχυρισμό μας, δηλαδή η $\mathcal{A}(E)$ είναι very large για το W. Αυτό όμως είναι άτοπο από την $(**)$. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι δεν υπάρχουν

κατάλληλα x_{n+1}, X_{n+1}. Άρα υπάρχουν τέτοια x_{n+1}, X_{n+1} και η κατασκευή που ξεκινήσαμε στην αρχή της απόδειξης ολοκληρώθηκε.
Έστω τώρα $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$. Η $\mathcal{A}$ γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι είναι large για το $\mathbb{N}$. Άρα περιέχει κάποιο υποσύνολο $L = \{x_{k_1}, x_{k_2}, ...x_{k_m}\}$του X. Θέτουμε $Y = \{x_{k_m+1}, x_{k_m+2}, ...\}$. Παρατηρούμε ότι για $Z \in [Y]^\infty$ το $\emptyset$ είναι αρχικό τμήμα του Z και $L \cup \emptyset \in \mathcal{A}$. Άρα η $\mathcal{A}(F)$ είναι very large για το Y. Αυτό όμως είναι άτοπο από την (∗∗). Άρα δεν ισχύει η (∗) όπως θέλαμε.

□

Το Θεώρημα Ramsey προκύπτει από το Θεώρημα Nash-Williams όπως θα δούμε τώρα.

Θεώρημα Ramsey

Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $[\mathbb{N}]^k = A \cup B$ με $A \cap B = \emptyset$. Τότε υπάρχει M άπειρο υποσύνολο των φυσικών τέτοιο ώστε $[M]^k \subset A$ ή $[M]^k \subset B$.

Απόδειξη

Η A είναι οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$.
Αν η A δεν είναι large για το $\mathbb{N}$ τότε υπάρχει M του οποίου κανένα υποσύνολο δεν ανήκει στην A. Άρα όλα του τα υποσύνολα μαζί και αυτά με k στοιχεία ανήκουν στην B. Άρα $[M]^k \subset B$.
Αν η A είναι large για το $\mathbb{N}$ από το Θεώρημα Nash-Williams υπάρχει M άπειρο τέτοιο ώστε η A να είναι very large για το M. Άρα κάθε L άπειρο υποσύνολο του M έχει αρχικό τμήμα μέσα στην A. Άρα $[M]^k \subset A$ αφού τα στοιχεία της A είναι k-σύνολα και συνεπώς αυτά τα αρχικά τμήματα θα έχουν μήκος k.

□

2.1.2 Η τοπολογία γινόμενο στο σύνολο $[\mathbb{N}]^\infty$

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε μια τοπολογία του σύνολου $[\mathbb{N}]^\infty$ και θα δούμε ένα Θεώρημα τύπου Ramsey για τα ανοικτά σύνολα αυτής της τοπολογίας.

Για κάθε $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ ορίζουμε

$$[a] := \{A \in [\mathbb{N}]^{\infty} : a \sqsubseteq A\}$$

.

Πρόταση

Το σύνολο $\{[a] : a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}\} \cup \{\emptyset\}$ είναι βάση για μια τοπολογία του $[\mathbb{N}]^{\infty}$.

Απόδειξη

Προφανώς $[\emptyset] = [\mathbb{N}]^{<\infty}$ αφού το $\emptyset$ είναι αρχικό τμήμα κάθε άπειρου υποσυνόλου των φυσικών.
Επίσης αν $a, b \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ τότε

$$[a] \cap [b] = \begin{cases} [a], \text{αν} \quad a \sqsubseteq b \\ [b], \text{αν} \quad b \sqsubseteq a \\ \emptyset, \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Συνεπώς από γνωστή πρόταση της τοπολογίας το σύνολο $\{[a] : a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}\} \cup \{\emptyset\}$ είναι βάση για μια τοπολογία του $[\mathbb{N}]^{\infty}$.

□

Από την πρόταση αυτή συμπαιρένουμε ότι ο χώρος $([\mathbb{N}]^{\infty}, \mathcal{T})$ όπου

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup_{a \in \mathcal{F}} [a] : \mathcal{F} \subset [\mathbb{N}]^{<\infty} \right\}$$

είναι τοπολογικός χώρος.

Τώρα για $A, B \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ ορίζουμε $d(A, B) = \frac{1}{n+1}$ όπου n είναι το πλήθος των στοιχείων του μέγιστου κοινού αρχικού τμήματος των A και B. Προφανώς $A = B \Leftrightarrow n = +\infty$.

Πρόταση

Ο $([\mathbb{N}]^{\infty}, d)$ είναι μετρικός χώρος.

Απόδειξη

Η d είναι μετρική. Πράγματι εύκολα βλέπουμε ότι $d(A,B) \geq 0, d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ και $d(A,B) = d(B,A)$.
Έστω $A, B, C \in [\mathbb{N}]^\infty$. Έστω ακόμη ότι x είναι το μέγεθος του μέγιστου κοινού αρχικού τμήματος των A, B, y των B, C και z των A, C. Ισχυρισμός:

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}, (*)$$

Παρατηρούμε ότι αφού τα B, C έχουν y κοινά στοιχεία στην αρχή τους και τα A, C έχουν z κοινά στοιχεία στην αρχή τους τότε τα A, B έχουν τουλάχιστον $\min\{y, z\}$ κοινά στοιχεία στην αρχή τους, δηλαδή $x \geq \min\{y, z\}$. Τότε όμως η $(*)$ είναι προφανής. Δείξαμε λοιπόν και την τριγωνική ανισότητα. Άρα η d είναι μετρική.

$\square$

Πρόταση

Ισχύει ότι $([\mathbb{N}]^\infty, \mathcal{T}) = ([\mathbb{N}]^\infty, d)$ δηλαδή η μετρική d επάγει την τοπολογία $\mathcal{T}$ στον $[\mathbb{N}]^\infty$.

Απόδειξη

Έστω $\mathcal{T}_d$ η τοπολογία που επάγει η d. Αρκεί να δείξουμε ότι τα βασικά ανοικτά των δύο τοπολογιών ταυτίζονται.
Έστω $[a] \in \mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι είναι ανοικτό υποσύνολο του $([\mathbb{N}]^\infty, d)$. Έστω $A \in [a]$. Τότε $B_d(A, \frac{1}{|a|}) \subset [a]$. Πράγματι έστω $B \in B_d(A, \frac{1}{|a|})$. Τότε

$$d(A,B) < \frac{1}{|a|} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{|a|} \Leftrightarrow n > |a| - 1 \Leftrightarrow n \geq |a|$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι το B έχει κοινό αρχικό τμήμα με το A μεγέθους τουλάχιστον $|a|$, συνεπώς $a \sqsubseteq B$, δηλαδή $B \in [a]$. Άρα $[a]$ ανοικτό στη μετρική τοπολογία.
Έστω τώρα $A \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι $B_d(A, \varepsilon) \in \mathcal{T}$. Έστω

$B \in B_d(A, \varepsilon)$. Ισχυρισμός: Υπάρχει $[a]$ τέτοιο ώστε $B \in [a] \subset B_d(A, \varepsilon)$. Έχουμε

$$B \in B_d(A, \varepsilon) \Rightarrow d(A, B) < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Έστω a αρχικό τμήμα του B με $|a| > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Τότε $B \in [a]$. Έστω $C \in [a]$. Είναι:

$$d(A, C) = \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{|a|+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} - 1 + 1} = \varepsilon$$

Άρα $C \in B_d(A, \varepsilon)$. Συνεπώς από τον ισχυρισμό $B_d(A, \varepsilon) \in \mathcal{T}$. Τελικά

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$$

.

□

Αποδεικνύουμε τώρα ένα Θεώρημα τύπου Ramsey για τα ανοικτά σύνολα αυτής της τοπολογίας.

Θεώρημα

Έστω $U \in [\mathbb{N}]^\infty$ ανοικτό σύνολο. Τότε υπάρχει $X \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε είτε $[X]^\infty \subset U$ ή $[X]^\infty \cap U = \emptyset$.

Απόδειξη

Αφού το U είναι ανοικτό σύνολο υπάρχει οικογένεια $\mathcal{F}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$U = \bigcup_{a \in \mathcal{F}} [a]$$

Έστω ότι δεν υπάρχει $X \in [\mathbb{N}]^\infty$ με $[X]^\infty \cap U = \emptyset$. Άρα

$$\forall X \in [\mathbb{N}]^\infty : [X]^\infty \cap U \neq \emptyset, (*)$$

Ισχυρισμός: Η $\mathcal{F}$ είναι large για το $\mathbb{N}$. Πράγματι έστω $X \in [\mathbb{N}]^\infty$. Από την $(*)$ υπάρχει $Y \subset X$ με $Y \in U$. Άρα $Y \in [a]$ για κάποιο $a \in \mathcal{F}$. Τότε

$a \sqsubseteq Y \Rightarrow a \subset X$. Συνεπώς αληθεύει ο ισχυρισμός. Από το Θεώρημα Nash-Williams υπάρχει $X \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{F}$ είναι very large για το X. Το X είναι το ζητούμενο σύνολο, δηλαδή ισχύει ότι $[X]^\infty \subset U$. Πράγματι έστω $L \in [X]^\infty$. Αφού η $\mathcal{F}$ είναι very large για το X υπάρχει $a \sqsubseteq L$ τέτοιο ώστε $a \in \mathcal{F}$. Συνεπώς $L \in [a]$ με $a \in \mathcal{F}$, άρα $L \in U$ όπως θέλαμε.

$\square$

2.2 Ορισμοί και αποτελέσματα από τη Συναρτησιακή Ανάλυση

Στο παράρτημα υπάρχει μια μικρή εισαγωγή στη Συναρτησιακή Ανάλυση. Εδώ θα ασχοληθούμε με έννοιες που εμφανίζονται στο Θεώρημα του Rosenthal που έχουμε σκοπό να αποδείξουμε.

Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν χώρο Banach X λέγεται ασθενώς Cauchy αν η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει για κάθε $f \in X^*$.

Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν απειροδιάστατο χώρο Banach X λέγεται βασική αν για κάθε $x \in \overline{<\{x_n : n \in \mathbb{N}\}>}$ υπάρχει μοναδική ακολουθία συντελεστών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

υπό την έννοια ότι τα μερικά αθροίσματα

$$\sum_{n=1}^{k} a_n x_n$$

συγκλίνουν στο x στην norm τοπολογία.

Αποδεικνύεται ότι μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ είναι βασική αν και μόνο αν υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\|$$

για κάθε ακολουθία συντελεστών $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και για όλους τους φυσικούς $n > m$.

Θυμίζουμε ότι

$$l_1(\mathbb{R}) := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}$$

ο οποίος έχει βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $e_n = (0, ...0, 1, 0, ...)$ με το 1 να βρίσκεται στη θέση n.

Παρατηρούμε ότι η βάση αυτή είναι μια βασική ακολουθία σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε. Πράγματι ικανοποιεί τη συνθήκη του θεωρήματος με σταθερά $K = 1$ αφού για $m < n$ έχουμε

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\| = \sum_{k=1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|$$

Έστω τώρα μια βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν απειροδιάστατο χώρο Banach. Ορίζουμε $x_n^* : \overline{< \{x_n : n \in \mathbb{N}\} >} \to \mathbb{R}$ με

$$x_n^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right) = a_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται η διορθογώνια ακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι καλά ορισμένες διότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

Λήμμα

Οι συναρτήσεις x_n^* είναι γραμμικές και συνεχείς, δηλαδή $x_n^* \in X^*$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Εύκολα βλέπουμε ότι x_n^* είναι γραμμική. Θα δείξουμε ότι είναι και φραγμένη. Αφού η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{\lambda} a_k x_k \right\|$$

για $\lambda > m$. Άρα

$$||a_n x_n|| = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sum_{k=1}^{n-1} (-a_k) x_k \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n-1} (-a_k) x_k \right\| \leq 2K \left\| \sum_{k=1}^{\lambda} a_k x_k \right\|$$

για κάθε $\lambda > n$. Άρα αφού η νόρμα είναι συνεχής συνάρτηση παίρνουμε

$$|a_n| \leq \frac{2K}{||x_n||}\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k\right\|$$

Άρα ο τελεστής x_n^* είναι φραγμένος.

□

Δύο βασικές ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στους χώρους Banach X, Y αντίστοιχα ονομάζονται ισοδύναμες αν για οποιαδήποτε ακολουθία συντελεστών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει ότι η

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

συγκλίνει αν και μόνο αν η

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$$

συγκλίνει.

Στην παρακάτω απόδειξη θα κάνουμε χρήση σημαντικών εργαλείων της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Ας θυμηθούμε και ότι οι κλειστοί υπόχωροι χώρων Banach είναι χώροι Banach.

Πρόταση

Δύο βασικές ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε για όλες τις ακολουθίες συντελεστών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n \neq 0$ για το πολύ πεπερασμένο το πλήθος $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\| \leq C\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_i y_i\right\|$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τον τελεστή $T : \overline{< \{x_n : n \in \mathbb{N}\} >} \to \overline{< \{y_n : n \in \mathbb{N}\} >}$ με

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$$

για κάθε $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο T είναι γραμμικός. Επίσης ο T είναι $1-1$. Πράγματι έστω $x, x' \in \overline{< \{x_n : n \in \mathbb{N}\} >}$ με $T(x) = T(x')$. Υπάρχουν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in$ τέτοια ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, x' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$$

Τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n$$

Από τη μοναδικότητα της γραφής ενός στοιχείου παίρνουμε $a_n = b_n$ και άρα $x = x'$. Ακόμη ο T είναι επί. Πράγματι για

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$$

έχουμε ότι

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = y$$

Για το αντίστροφο της πρότασης, από τις ανισότητες ο T και ο T^{-1} είναι φραγμένοι, άρα οι ακολουθίες είναι ισοδύναμες. Έστω τώρα ότι οι ακολουθίες είναι ισοδύναμες. Θα δείξουμε ότι ο T και ο T^{-1} είναι συνεχής, άρα θα υπάρχει σταθερά $C >$ ώστε να έχουμε τις ανισότητες. Κάνουμε χρήση του Θεωρήματος Κλειστού Γραφήματος. Έστω λοιπόν

$$u_n \to u \in \overline{< \{x_n : n \in \mathbb{N}\} >}, T(u_n) \to v \in \overline{< \{y_n : n \in \mathbb{N}\} >}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $v = T(u)$. Έχουμε ότι

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k, u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{και} \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k$$

Οπότε

$$T(u_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} y_k$$

Από το λήμμα, τα x_n^*, y_n^* είναι συνεχή, άρα από την αρχή της μεταφοράς $a_{n,k} \to a_k$ αλλά και $a_{n,k} \to b_k$. Από την μοναδικότητα του ορίου $a_k = b_k$. Άρα $v = T(x)$. Άρα ο T είναι συνεχής. Επειδή λοιπόν ο T είναι συνεχής,$1-1$ και επί από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης έπεται ότι ο T^{-1} είναι συνεχής. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Έχουμε ορίσει δύο ακολουθίες ισοδύναμες στην περίπτωση που και οι δύο είναι βασικές. Στην απόδειξη του Θεωρήματος παρακάτω γνωρίζουμε ότι μόνο η βάση του l_1 είναι βασική. Όμως όπως θα δούμε αν δύο ακολουθίες είναι ισοδύναμες και η μια είναι βασική τότε είναι και η άλλη. Πράγματι έστω ότι οι $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι C-ισοδύναμες και ότι η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική με σταθερά K. Τότε για $m < n$ και $\forall a_1, a_2, ..., a_n$ έχουμε

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right\| \leq C \left\|\sum_{k=1}^{m} a_k y_k\right\| \leq CK \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k y_k\right\| \leq C^2 K \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\|$$

Άρα και η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

2.3 Το l_1- Θεώρημα του Rosenthal

Σε αυτή την ενότητα διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το Θεώρημα του Rosenthal. Η απόδειξη θα γίνει στην περίπτωση που ο χώρος Banach X είναι διανυσματικός χώρος υπέρ του $\mathbb{R}$. Το Θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που ο χώρος είναι υπέρ του $\mathbb{C}$ με παρόμοια αλλά πιο τεχνική απόδειξη. Εδώ παρουσιάζουμε μια απόδειξη η οποία έχει στοιχεία από αυτές στα [1] και [2]. Η πρώτη απόδειξη που δώθηκε από τον Rosenthal βρίσκεται στο [6].

Θεώρημα Rosenthal

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία σε ένα χώρο Banach X. Τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είτε έχει μια ασθενώς Cauchy υπακολουθία ή έχει μια υπακολουθία ισοδύναμη με την κανονική βάση του l_1.

Απόδειξη

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $||x_n|| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Αυτό γίνεται διότι η ακολουθία είναι φραγμένη. Έστω $\mathcal{B} = \{x^* \in X^* : ||x^*|| \leq 1\}$ η μοναδιαία μπάλα του X^*. Μέσω της κανονικής εμφύτευσης του X στον X^{**}, κάθε x_n είναι μια συνεχής συνάρτηση από το $\mathcal{B}$ στο $\mathbb{R}$ με τη νόρμα στον X να γίνεται η supremum νόρμα στο χώρο $C(\mathcal{B}) \subset X^{**}$. Μια ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ είναι ασθενώς Cauchy αν οι ακολουθίες $(y_n(s))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ είναι Cauchy για κάθε $s \in \mathcal{B}$, δηλαδή αν οι συναρτήσεις $y_n : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν σημειακά. Έστω ότι καμία υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει σημειακά. Θα βρούμε υπακολουθία της που είναι ισοδύναμη με τη βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του l_1.

Ορίζουμε

$$\mathcal{D} = \Big\{(I_1, I_2) : I_1 = (q_1 - r, q_1 + r), I_2 = (q_2 - r, q_2 + r), q_1, q_2, r \in \mathbb{Q}, |q_1 - q_2| > 4r\Big\}$$

Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{D}$ είναι αριθμήσιμο αφού έχει πληθικότητα το πολύ ίση με το σύνολο $\mathbb{Q}^3$. Έστω λοιπόν ότι για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει σημειακά. Τότε υπάρχει $s \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε η $(x_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ έχει τουλάχιστον δύο σημεία συσσώρευσης. Άρα υπάρχει (I_1, I_2) στο $\mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $x_n(s) \in I_1$ για άπειρα $n \in M$ και $x_n(s) \in I_2$ για άπειρα $n \in M$ όπου τα I_1, I_2 εξαρτώνται από το M.

Τώρα θα δείξουμε ότι για μια υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μπορούμε να διαλέξουμε το ίδιο (I_1, I_2) για όλα τα $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Πράγματι έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο (I_1, I_2). Αφού το $\mathcal{D}$ είναι αριθμήσιμο θα ισχύει ότι

$$\mathcal{D} = \{(I_1^k, I_2^k) : k \in \mathbb{N}\}$$

Τότε $\exists M_1$ τέτοιο ώστε για κάθε $s \in \mathcal{B}$ ισχύει $x_n(s) \in I_1^1$ για το πολύ πεπερασμένου πλήθους $n \in M_1$ ή $x_n(s) \in I_2^1$ για το πολύ πεπερασμένου πλήθους $n \in M_1$. Επίσης $\exists M_2 \subset M_1$ τέτοιο ώστε για κάθε $s \in \mathcal{B}$ ισχύει $x_n(s) \in I_1^2$ για το πολύ πεπερασμένου πλήθους $n \in M_2$ ή $x_n(s) \in I_2^2$ για το πολύ πεπερασμένου πλήθους $n \in M_2$. Παρόμοια κατασκευάζουμε μια ακολουθία $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset ...$ στο $[\mathbb{N}]^\infty$ τέτοια ώστε για κάθε $s \in \mathcal{B}$ ισχύει $x_n(s) \in I_1^k$ για το πολύ πεπερασμένου πλήθους $n \in M_k$ ή $x_n(s) \in I_2^k$ για το πολύ πεπερασμένου πλήθους $n \in M_k$. Έστω $m_k \in M_k, m_{k+1} > m_k$ για $k \in \mathbb{N}$ και $M = \{m_1, m_2, ...\}$. Τώρα από την αρχική μας υπόθεση για το M υπάρχει $s \in \mathcal{B}$ και $(I_1^{n_0}, I_2^{n_0}) \in \mathcal{D}$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $x_n(s) \in I_1^{n_0}$ για άπειρα $n \in M$ και $x_n(s) \in I_2^{n_0}$ για άπειρα $n \in M$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού για το M_{n_0} και για κάθε $s \in \mathcal{B}$ ισχύει $x_n(s) \in I_1^{n_0}$ για το πολύ πεπερασμένου πλήθους $n \in M_{n_0}$ ή $x_n(s) \in I_2^{n_0}$ για το πολύ πεπερασμένου πλήθους $n \in M_{n_0}$ (εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε και ότι $M \setminus \{m_1, m_2, ..., m_{n_0}\} \subset M_{n_0}$). Άρα υπάρχει τέτοιο (I_1, I_2) που θέλαμε. Δεν βλάπτει την γενικότητα να υποθέσουμε ότι $q_1 > q_2$ γιατί θα μας χρειαστεί παρακάτω.

Τώρα θα ονομάζουμε το $A = \{n_1 < n_2 < ... < n_k\}$ πιθανό αν υπάρχει $s \in \mathcal{B} : x_{n_i}(s) \in I_1$ για i περιττό και $x_{n_i}(s) \in I_2$ για i άρτιο. Έστω $\mathcal{A}$ η οικογένεια όλων των μη πιθανών συνόλων. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ δεν είναι large για το $\mathbb{N}$. Από το Θεώρημα Nash-Williams αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ δεν είναι very large για κανένα $L \in [\mathbb{N}]^\infty$. Έστω λοιπόν προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{A}$ να είναι very large για το $\mathbb{N}$. Από την υπόθεση μας για το L έχουμε ότι υπάρχει $s \in \mathcal{B}$ με $x_n(s) \in I_1$ για άπειρα $n \in L$ και $x_n(s) \in I_2$ για άπειρα $n \in L$. Φτιάχνουμε το υποσύνολο του L που έχει αυτές τις δύο απειρίες δεικτών. Έστω ότι είναι το $L_1 = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ...\}$. Το L_1 έχει άπειρο υποσύνολο $L_2 = \{k_1 < k_2 < k_3 < ...\}$ τέτοιο ώστε $x_{k_i}(s) \in I_1$ αν i περιττός και $x_{k_i}(s) \in I_2$ αν i άρτιος. Αυτό ισχύει διότι από τις δύο απειρίες που περιγράψαμε προηγουμένως μπορούμε να πηγαίνουμε εναλλάξ από τη μια στην άλλη. Τώρα όμως το L_2 έχει αρχικό τμήμα (και μάλιστα κάθε αρχικό του τμήμα) που είναι πιθανό. Άρα δεν ανήκει στην $\mathcal{A}$. Άτοπο αφού η $\mathcal{A}$ είναι very large για το L και $L_2 \subset L$. Άρα η $\mathcal{A}$ δεν είναι large για το $\mathbb{N}$. Συνεπώς υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του είναι πιθανό.

Έστω $M = \{m_1 < m_2 < m_3 < ...\}$ και $M_2 = \{m_2 < m_4 < m_6 < ...\}$. Θα δείξουμε ότι η $(x_n)_{n \in M_2}$ είναι ισοδύναμη με τη βάση του l_1. Έστω $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Αρχικά έχουμε ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_{m_{2i}} \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| ||x_{m_{2i}}|| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

Άρα έχουμε τη μία από τις δύο ανισότητες για την ισοδυναμία. Ας παρατηρήσουμε ότι αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε φραγμένη ακολουθία. Τώρα θα δείξουμε ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_{m_{2i}} \right\| \geq 2r \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

Αυτή η ανισότητα θα προκύψει λόγω της ειδικής υπακολουθίας που κατασκευάσαμε. Πρώτα δείχνουμε ότι υπάρχει $s \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x_{m_{2i}}(s) \in I_1$ αν $a_i \geq 0$ και $x_{m_{2i}}(s) \in I_2$ αν $a_i < 0$. Ορίζουμε $A \subset \{m_1, m_2, ..., m_{2n}\}$ ως εξής: $m_2, m_4, ...m_{2n} \in A, m_1 \in A$ αν και μόνο αν $a_2 < 0$ και $m_{2i-1} \in A$ αν και μόνο αν $a_i a_{2i-2} \geq 0$. Άρα όταν $a_i \geq 0$ το m_{2i} βρίσκεται σε περιττή θέση στο A ενώ όταν $a_i < 0$ το m_{2i} βρίσκεται σε άρτια θέση στο A. Το A όμως ως υποσύνολο του M είναι πιθανό. Άρα υπάρχει $s \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x_{m_{2i}}(s) \in I_1$ αν $a_i \geq 0$ και $x_{m_{2i}}(s) \in I_2$ αν $a_i < 0$. Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε ότι υπάρχει $t \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x_{m_{2i}}(t) \in I_1$ αν $a_i < 0$ και $x_{m_{2i}}(t) \in I_2$ αν $a_i \geq 0$.

Τώρα κάνουμε τους υπολογισμούς. Έχουμε $||s|| = ||t|| \leq 1$ διότι $s, t \in \mathcal{B}$. Θέτουμε $A = \sum\{a_i : a_i \geq 0\}, B = \{a_i : a_i < 0\}$ και παρατηρούμε ότι

$$A - B = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

Από τον ορισμό της νόρμας του φραγμένου τελεστή

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{m_{2i}}$$

έχουμε

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{m_{2i}}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{m_{2i}}\right\| + \frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{m_{2i}}\right\| \geq$$

$$\frac{1}{2||s||}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{m_{2i}}(s)\right| + \frac{1}{2||t||}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{m_{2i}}(t)\right| \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i x_{m_{2i}}(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i x_{m_{2i}}(t) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{a_i \geq 0} a_i x_{m_{2i}}(s) + \frac{1}{2}\sum_{a_i < 0} a_i x_{m_{2i}}(s) - \frac{1}{2}\sum_{a_i \geq 0} a_i x_{m_{2i}}(t) - \frac{1}{2}\sum_{a_i < 0} a_i x_{m_{2i}}(t) \geq$$

$$\frac{1}{2}A(q_1 - r) + \frac{1}{2}B(q_1 + r) - \frac{1}{2}A(q_2 + r) - \frac{1}{2}B(q_2 - r) =$$

$$\frac{1}{2}(A - B)(q_1 - q_2) \geq 2r(A - B) = 2r\sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Κεφάλαιο 3

Spreading Models

Παρακάτω δίνουμε μια ακόμα ωραία εφαρμογή του Θεώρηματος Ramsey στην Ανάλυση.

Πρόταση

Έστω (K, d) συμπαγής μετρικός χώρος, $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$. Έστω $f : [\mathbb{N}]^k \to K$ τυχαία συνάρτηση. Τότε υπάρχει $X \subset [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε $d(f(A), f(B)) < \varepsilon$ για κάθε $A, B \in [X]^k$.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι
$$K = \bigcup_{x \in K} B\Big(x, \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$
Αφού ο K είναι συμπαγής μετρικός χώρος υπάρχουν $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ τέτοια ώστε
$$K = \bigcup_{i=1}^{n} B\Big(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$
Από το Θεώρημα Ramsey για n χρώματα υπάρχει $X \subset [\mathbb{N}]^\infty$ και $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ τέτοια ώστε
$$f([X]^k) \subset B\Big(x_{i_0}, \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$
Άρα για κάθε $A, B \in [X]^k$ ισχύει
$$d(f(A), f(B)) \leq d(f(A), x_{i_0}) + d(x_{i_0}, f(B)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Παρακάτω μελετάμε το Θεώρημα των Brunel και Sucheston ([7] και [8]), μια ακόμα ουσιαστική εφαρμογή των μεθόδων της άπειρης συνδιαστικής στη Θεωρία Χώρων Banach.

Θεώρημα

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία σε ένα χώρο Banach με την ιδιότητα $||x_n|| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $(x_n)_{n\in M}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε για όλους τους συντελεστές $a_1, a_2, ..., a_k \in [-1, 1]$ και για οποιεσδήποτε ακολουθίες δεικτών $m_1 < m_2 < ... < m_k$ και $n_1 < n_2 < ... < n_k$ από το M ισχύει

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i} \right\| \right| < \varepsilon$$

Απόδειξη

Πρώτα παρατηρούμε ότι για τυχαίους συντελεστές $a_1, a_2, ..., a_k \in [-1, 1]$ και δείκτες $l_1 < l_2 < ... < l_k$ έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{l_i} \right\| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| \leq k$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[0, k]$ σε kn_1 ίσα διαστήματα μήκους $\frac{1}{n_1}$ με $n_1 > \frac{2}{\varepsilon}$. Έστω ότι αυτά είναι τα $I_1, I_2, ..., I_{kn_1}$.

Χωρίζουμε επίσης το διάστημα $[-1, 1]$ σε $2n_2$ ίσα διαστήματα μήκους $\frac{1}{n_2}$ με $n_2 > \frac{4k}{\varepsilon}$. Έστω ότι αυτά είναι τα $L_1, L_2, ..., L_{2n_2}$. Έστω

$$\Sigma := \left\{ \frac{i}{n_1} : i \in \{-n_1, ..., -1, 0, 1, ..., n_1 - 1\} \right\}$$

Αυτό είναι το σύνολο των κάτω άκρων των διαστημάτων $L_1, L_2, ..., L_{2n_2}$. Το σύνολο Σ^k των διατεταγμένων k-άδων με στοιχεία από το Σ έχει $m_0 := (2n_1)^k$ στοιχεία. Έστω ότι

$$\Sigma^k := \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{m_0} \right\}$$

όπου $\vec{a}_i = (a_1^i, ...a_k^i)$ με $a_j^i \in \Sigma$.

Έστω τώρα $F = \{N_1 < ... < N_k\} \in [\mathbb{N}]^k$. Ορίζουμε $\Phi_{\vec{a}_1} : [\mathbb{N}]^k \to [0,k]$ με

$$\Phi_{\vec{a}_1}(F) := \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i^1 x_{N_i} \right\|$$

Από το Θεώρημα Ramsey (ή από την παραπάνω πρόταση αφού το $[0,k]$ είναι συμπαγές) παίνουμε την ύπαρξη ενός $M_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρου και ενός δείκτη i_1 τέτοια ώστε

$$\Phi_{\vec{a}_1}([M_1]^k) \subset I_{i_1}$$

Όμοια ορίζουμε $\Phi_{\vec{a}_2} : [\mathbb{N}]^k \to [0,k]$ με

$$\Phi_{\vec{a}_2}(F) := \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i^2 x_{N_i} \right\|$$

Άρα υπάρχει $M_2 \subset M_1$ άπειρο και δείκτης i_2 τέτοια ώστε

$$\Phi_{\vec{a}_2}([M_2]^k) \subset I_{i_2}$$

Κάνουμε αυτή τη διαδικασία m_0 φορές και παίρνουμε $M_{m_0} \subset M_{m_0-1} \subset ... \subset M_1 \subset \mathbb{N}$ και δείκτες $i_1, i_2, ..., i_{m_0}$ τέτοια ώστε

$$\Phi_{\vec{a}_j}([M_j]^k) \subset I_{i_j}$$

Έστω $M := M_{m_0}$. Η ακολουθία $(x_n)_{n \in M}$ είναι η ζητούμενη. Πράγματι έστω $a_1, a_2, ..., a_k \in [-1,1]$,$m_1 < m_2 < ... < m_k \in M$ και $n_1 < n_2 < ... < n_k \in M$. Κάθε a_i ανήκει σε κάποιο διάστημα L_q. Άρα υπάρχει j τέτοιο ώστε για τις συντεταγμένες του $\vec{a}_j$ να ισχύει ότι $|a_i - a_i^j| < \frac{1}{n_2}$. Τότε έχουμε

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i} \right\| \right| = \left| \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i^j x_{m_i} \right\| + \right.$$

$$\left. \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i^j x_{m_i} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i^j x_{n_i} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i^j x_{n_i} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i} \right\| \right| \leq$$

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i^j x_{m_i} \right\| \right| + \left| \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i^j x_{m_i} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i^j x_{n_i} \right\| \right| +$$

$$\left|\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i^j x_{n_i}\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i}\right\|\right| < \frac{k}{n_2} + \frac{1}{n_1} + \frac{k}{n_2} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Η ανισότητα

$$\left|\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i^j x_{m_i}\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{k} a_i^j x_{n_i}\right\|\right| < \frac{1}{n_1}$$

ισχύει διότι

$$\Phi_{\vec{a}_j}([M_j]^k) \subset I_{i_j}$$

Οι άλλες δύο ανισότητες ισχύουν διότι από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\left|\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i}\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{k} a_i^j x_{m_i}\right\|\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{k} (a_i - a_i^j) x_{m_i}\right\| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i - a_i^j| < \frac{k}{n_2}$$

(όμοια για τα x_{n_i}) και από τον τρόπο που διαλέξαμε τα a_i^j.

□

Το Θεώρημα παίρνει και μια πιο ισχυρή μορφή. Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι υπάρχουν ακολουθίες των οποίων η διαφορά να τείνει στο 0 ενώ ο λόγος τους είναι μη φραγμένος $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$.

Θεώρημα

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία σε ένα χώρο Banach με την ιδιότητα $||x_n|| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $(x_n)_{n\in M}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε για όλους τους συντελεστές $a_1, a_2, ..., a_k \in [-1, 1]$ και για οποιεσδήποτε ακολουθίες δεικτών $m_1 < m_2 < ... < m_k$ και $n_1 < n_2 < ... < n_k$ από το M ισχύει

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i}\right\| \leq (1+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i}\right\|$$

Απόδειξη

Έστω ότι

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i}\right\| = a$$

Αν $a = 0$ τότε

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i} = 0$$

Επειδή η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική έπεται ότι $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$ και η ανισότητα είναι προφανής.

Έστω ότι $a \neq 0$. Τότε εφαρμόζουμε το προηγούμενο Θεώρημα με συντελεστές $a'_i = \frac{a_i}{a}$ και ε το $\frac{\varepsilon}{2}$. Παίρνουμε

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{k} a'_i x_{m_i} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{k} a'_i x_{n_i} \right\| \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Όμως

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} a'_i x_{m_i} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{a} x_{m_i} \right\| = \frac{\left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i} \right\|}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

Άρα

$$\frac{\left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i} \right\|}{\left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i} \right\|} = \frac{\left\| \sum_{i=1}^{k} a'_i x_{m_i} \right\|}{\left\| \sum_{i=1}^{k} a'_i x_{n_i} \right\|} = \frac{1}{\left\| \sum_{i=1}^{k} a'_i x_{n_i} \right\|} < \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{2}} < 1 + \varepsilon$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για $\varepsilon < 1$. Άρα έχουμε την ανισότητα και για κάθε $\varepsilon > 0$ αφού για $\varepsilon \geq 1$ είναι πλέον προφανής.

$\square$

Θεώρημα

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία σε ένα χώρο Banach με την ιδιότητα $||x_n|| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με την ακόλουθη ιδιότητα. Έστω $k \in \mathbb{N}, a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{R}$ και $A_1, A_2, ... \in [\mathbb{N}]^k$

τέτοια ώστε το $\min A_i$ τείνει στο 0 καθώς το i τείνει στο άπειρο. Τότε η ακολουθία

$$c_i = \left\| \sum_{j=1}^{k} a_j y_{n_{ij}} \right\|$$

συγκλίνει όπου $A_i = \{n_{i1} < ... < n_{ik}\}$.

Απόδειξη

Από το προηγούμενο Θεώρημα υπάρχουν υπακολουθίες $S_i = \{x_{i1} < x_{i2} < ...\}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες. Κάθε S_{i+1} είναι υπακολουθία της S_i και κάθε S_i ικανοποιεί το συμπέρασμα του προηγούμενου Θεωρήματος με $k = i$ και $\varepsilon = \frac{1}{i}$. Έστω $S = \{x_{11} < x_{22} < ...\}$. Η S είναι η ζητούμενη υπακολουθία. Πράγματι από την κατασκευή μας η ακολουθία των c_i είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς συγκλίνει.

$\square$

Οδηγούμαστε έτσι στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία σε ένα χώρο Banach με την ιδιότητα $||x_n|| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μια επίσης βασική ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν ενδεχομένως διαφορετικό χώρο Banach Y με την ιδιότητα $||y_n|| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα ονομάζεται spreading model της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν υπάρχει ακολουθία πραγματικών $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο 0 τέτοια ώστε

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \right\| \right| < \delta_n$$

για όλους τους συντελεστές $a_1, ..., a_k \in [-1, 1]$ και για κάθε $n \leq m_1 < ... < m_n$.

Παράρτημα Α΄

Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης

Ένας διανυσματικός χώρος X με μια συνάρτηση $||\cdot|| : X \to [0, +\infty)$ η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$i)$ $||x|| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$
$ii)$ $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
$iii)$ $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ για κάθε $x, y \in X$

ονομάζεται χώρος με νόρμα την $||\cdot||$.

Αν θέσουμε $d(x, y) = ||x - y||$ τότε ο χώρος (X, d) είναι μετρικός χώρος. Αν είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος τότε θα λέμε ότι ο X είναι χώρος Banach.

Κάθε κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Banach είναι χώρος Banach.

Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα. Θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για τις δύο νόρμες. Ο τελεστής $T : X \to Y$ είναι γραμμικός όταν $T(\lambda x + \kappa y) = \lambda T(x) + \kappa T(y)$ για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$. Θα μελετάμε μόνο γραμμικούς τελεστές.

Αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $||T(x)|| \leq M||x||$ για όλα τα $x \in X$ τότε ο τελεστής T λέγεται φραγμένος. Αποδεικνύεται ότι ένας τελεστής είναι φραγμένος αν και μόνο αν είναι συνεχής.

Έστω ένας φραγμένος τελεστής T. Ορίζουμε

$$||T|| = \inf\{M : ||T(x)|| \leq M||x||\}$$

Αποδεικνύεται ότι

$$||T|| = \sup\{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\} = \sup\{||T(x)|| : ||x|| = 1\} = \sup\left\{\frac{||T(x)||}{||x||} : x \neq 0\right\}$$

Η συνάρτηση $||\cdot||$ στο σύνολο των φραγμένων τελεστών αποδεικνύεται ότι είναι νόρμα.

Ο χώρος X^* των φραγμένων γραμμικών τελεστών $x^* : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται δυϊκός χώρος του X.

Μια γραμμική, $1-1$ και επί απεικόνιση $T : X \to Y$ με $||T(x)|| = ||x||$ για κάθε $x \in X$ ονομάζεται ισομετρία. Όταν μεταξύ δύο χώρων υπάρχει μια τέτοια απεικόνιση τότε οι χώροι ονομάζονται ισομετρικά ισόμορφοι.

Ο χώρος X είναι ισομετρικά ισόμορφος με έναν υπόχωρο του X^{**} μέσω της απεικόνισης $\hat{x} : X \to X^{**}$ με $\hat{x}(x^*) = x^*(x)$. Αυτή η απεικόνιση ονομάζεται κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}.

Με χρήση του Θεωρήματος του Baire από την Πραγματική Ανάλυση παίρνουμε τα παρακάτω πολύ σημαντικά Θεωρήματα.

Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης

Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός και επί τελεστής. Τότε ο T είναι ανοικτή απεικόνιση δηλαδή απεικονίζει ανοικτά υποσύνολα του X σε ανοικτά υποσύνολα του Y. Αν ο T είναι $1-1$ έπεται ότι ο T^{-1} είναι φραγμένος.

Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος

Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε το σύνολο $G_T = \{(x, T(x)) : x \in X\}$ να είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$. Τότε ο T είναι φραγμένος.

Έστω $p \geq 1$. Ορίζουμε

$$l_p(\mathbb{R}) := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty \right\}$$

και

$$||(a_n)_{n\in\mathbb{N}}||_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Αποδεικνύεται ότι ο $(l_p(\mathbb{R}), ||\cdot||_p)$ είναι χώρος Banach.

Βιβλιογραφία

[1] W.T.Gowers, *Ramsey Methods in Banach Spaces*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2 , North-Holland, Amsterdam, 2003.

[2] E.Odell, *Applications of Ramsey Theorems to Banach Space Theory*, Notes in Banach spaces, (H.E.Lacey, ed.), Univ. Texas Press, Austin, TX, 1980, pp. 379-404.

[3] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 233, Springer, New York, 2006.

[4] Σ.Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης* (Δεύτερη Έκδοση), Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2004.

[5] Σ.Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης* (Δεύτερη Έκδοση), Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2003.

[6] H. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing* l_1, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 71 1974.

[7] A. Brunel and L. Sucheston, *On B convex Banach spaces*, Math. Systems Th. 7 1974.

[8] A. Brunel and L. Sucheston, *On J-convexity and some ergodic super properties of Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 204 1975.