



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

**ΑΥΤΟΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ**



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΛΙΒΑΝΟΥ ΤΑΝΙΑ

Επιβλέπων Καθηγητής: Τριανταφύλλου Σάββας, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα Νοέμβριος, 2021

«This research has been supported by the ADDOPTML project: “ADDitively Manufactured OPTimized Structures by means of Machine Learning” (No: 101007595) belonging to the Marie Skłodowska-Curie Actions (MSCA) Research and Innovation Staff Exchange (RISE) H2020-MSCA-RISE-2020»

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Όλα ξεκίνησαν πέντε χρόνια πριν όπου εντάχθηκα στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Κάθε πρόκληση με την οποία ήρθα αντιμέτωπη με προετοίμαζε για να φέρω εις πέρας την μεγαλύτερη αυτών, δηλαδή τη Διπλωματική εργασία που έχετε τώρα μπροστά σας.

Χωρίς δεύτερη σκέψη το άτομο που θα ήθελα να ευχαριστήσω είναι ο Επίκουρος Καθηγητής κύριος Τριανταφύλλου Σάββας. Ο συγκεκριμένος άνθρωπος άκουσε τις ακαδημαϊκές μου ανησυχίες καθώς και τα ενδιαφέροντά μου και σύμφωνα με αυτά διαμόρφωσε το θέμα της εργασίας. Η καθοδήγηση και η υποστήριξη του σε κάθε βήμα ήταν καθοριστική για το αποτέλεσμα της Διπλωματικής και για την επίτευξη των στόχων της. Σε μια ερευνητική εργασία είναι πιθανό να φτάνει κανείς σε αδιέξοδα και να μη γνωρίζει πως να τα ξεπεράσει. Παρόλα αυτά ο κύριος Τριανταφύλλου, με ψυχραιμία και αισιοδοξία ήταν εκεί για να τα αντιμετωπίσουμε.

Εννοείται δε μπορώ να μην ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους στενούς μου φίλους, οι οποίοι ήταν συνοδοιπόροι σε αυτό το ταξίδι μου στη σχολή Πολιτικών Μηχανικών. Στάθηκαν δίπλα μου σε δύσκολες στιγμές αλλά χάρηκαν και μαζί μου σε κάθε επίτευγμά μου.

Λιβανού Τάνια

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στον τομέα των κατασκευών έχει καθοριστική σημασία η ποιότητα, η αντοχή, η στατικότητα, η ασφάλεια καθώς και το κόστος της ίδιας της κατασκευής. Δεν αρκούν όμως μόνο αυτά. Αλληλένδετη σχέση με τα προαναφερθέντα έχει και η αισθητική του έργου, δηλαδή το σχέδιο και η οπτική πλευρά. Λόγω των εκθετικά αυξανόμενων αναγκών για πολύπλοκα σχέδια, άρα και γεωμετρίες, εντοπίζεται εκτενής χρήση των επιφανειών ελεύθερης μορφής, παρέχοντας όλο και περισσότερες δυνατότητες και ελευθερίες στο σχεδιαστή. Οι λεπτότοιχες επιφάνειες ελεύθερης μορφής αποτέλεσαν το επόμενο, πιο εξελιγμένο, στοιχείο των μαθηματικά ορισμένων κελυφών.

Άμεση σύνδεση με την ανάπτυξη των επιφανειών ελεύθερης μορφής έχει ο παραμετρικός σχεδιασμός και οι ασταμάτητα αυξανόμενες δυνατότητες που παρέχονται από τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Έτσι, ο χρήστης απέκτησε την ικανότητα ελέγχου και τροποποίησης της γεωμετρίας με σχετικά μεγάλη ευκολία.

Το πλεονέκτημα αυτών των επιφανειών ελεύθερης μορφής είναι ότι μπορούν να καλύπτουν μεγάλες επιφάνειες χωρίς ενδιάμεσες στηρίξεις. Από την άλλη όμως, οι προκλήσεις που προκύπτουν στη συγκεκριμένη περίπτωση άπτονται της δυσκολίας διακριτοποίησής τους με τη χρήση απλών εμπορικών προγραμμάτων, όπως το ADINA ή το Abaqus. Πιο συγκεκριμένα, είναι πιθανό να βρεθεί τρόπος να πραγματοποιηθεί τριγωνική διακριτοποίηση σε ορισμένες γεωμετρίες με τη χρήση του Dynamo σε συνδυασμό με το πρόγραμμα Robot Structural Analysis. Με αυτόν τον τρόπο όμως, περιορίζεται η ανάλυση στη χρήση τριγωνικών στοιχείων κελύφους. Ωστόσο, αυτό εμποδίζει την υπολογιστική απόδοση του σταδίου ανάλυσης καθώς τα τυπικά τετραπλευρικά στοιχεία παρέχουν ταχύτερους ρυθμούς σύγκλισης.

Για την επίτευξη των παραπάνω στόχων, χρησιμοποιήθηκε ένα περιβάλλον γραφικού προγραμματισμού, το Dynamo όπου καταστρώθηκε αλγόριθμος για την παραγωγή διακριτοποίησης τετραπλευρικών στοιχείων. Για την ανάλυση διαμορφώθηκε κώδικας πεπερασμένων στοιχείων όπου χρησιμοποιεί το στοιχείο κελύφους MITC4+.

Επιπλέον, διαμορφώθηκε κώδικας Matlab για τον υπολογισμό των εξισώσεων της Μembranική θεωρία συμμετρικών κελυφών με συμμετρική φόρτιση. Τα αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκαν για λόγους επαλήθευσης των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το στοιχείο MITC4+. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται έλεγχος της συμβατότητας του προγράμματος με τη θεωρία. Τέλος, πραγματοποιήθηκαν παραμετρικές αναλύσεις για ποικίλο αριθμό στοιχείων ανά πλευρά και για διαφορετικά πάχη.

ABSTRACT

In the field of construction, the quality, durability, statics, safety and the cost of the building itself are of vital importance. But just the above are not enough. The aesthetic of the work, which means the design and the visual aspect, are interrelated with the other mentioned qualities. Due to the exponentially growing needs for complex designs, and therefore geometries, extensive use of free-form surfaces is being identified, providing a lot of freedom to the designers. Thin free-form surfaces were the next more advanced element of mathematically defined shells.

The development of parametric design and the ever-increasing capabilities of computer science are vitally connected with the development of free-form surfaces and their application in large scale construction. As a result, the user obtains the ability to control and modify relatively easy the geometry of the structure.

The undeniable advantage of free-form shells is their ability to cover a large surface without the need of intermediate supports. On the other hand, the challenges that arise in order to analyze these surfaces are related to the difficulty in discretization while using commercial programs, such as ADINA and Abaqus. More specifically, it is possible to find a way to perform triangular discretization for some geometries, using Dynamo and Robot Structural Analysis. This however limits the analysis stage into employing triangular shell elements. However, this hinders the computational efficiency of the analysis stage as typically quadratic elements provide faster convergence rates.

To achieve the above, a visual programming language for Revit was used, called Dynamo, where an algorithm was developed to generate discretized quadrilateral elements. For the analysis of the surfaces a new finite element program had to be created using MITC4+ shells.

A Matlab script was created to solve the equilibrium equations of the Membrane theory of symmetrical shells with symmetric loading. The results were used for verification purposes vis-à-vis the results obtained from the MITC4+ element. In this way the compatibility of the program with the theory is being checked. Finally, parametric analyses were performed for different number of elements per side and for a variety of thicknesses.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	III
ABSTRACT	IV
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ	V
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	1
1.2 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	1
1.3 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ	1
1.4 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ.....	2
1.5 ΔΟΜΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	3
2 FREEFORM TO PARAMETRIC DESIGN	4
2.1 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ.....	6
2.2 ΛΟΓΙΣΜΙΚΑ.....	7
3 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ	9
3.1 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.....	9
3.1.1 Πολυωνυμική Καμπύλη	9
3.1.2 Καμπύλη Bézier.....	11
3.1.3 Καμπύλη B-Spline	14
3.1.4 NURBS Καμπύλες.....	18
3.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΛΥΦΩΝ.....	18
3.2.1 Καμπτική Θεωρία κελυφών.....	19
3.2.2 Μεμβρανική θεωρία κελυφών.....	21
3.2.3 Πεπερασμένα στοιχεία κελύφους.....	46
4 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΕΛΥΦΩΝ	55
4.1 ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ	55
4.1.1 Ανάλυση κυλίνδρου με τη χρήση του <i>Dynamo</i> και του <i>Robot Structural Analysis</i>	55
4.1.2 Ανάλυση κυλίνδρου με τη χρήση του <i>Dynamo</i> και ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+	59
4.2 ΚΕΛΥΦΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ	61
4.2.1 Ανάλυση κελύφους παραβολικού τόξου με τη χρήση του <i>Dynamo</i> και του <i>Robot Structural Analysis</i>	61
4.2.2 Ανάλυση κελύφους παραβολικού τόξου με τη χρήση του <i>Dynamo</i> και ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+	65
4.3 ΚΕΛΥΦΟΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΑΡΧΗΣ ΚΑΙ ΤΕΛΟΥΣ	67
4.3.1 Ανάλυση κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους με τη χρήση του <i>Dynamo</i> και του <i>Robot Structural Analysis</i>	67

4.3.2	Ανάλυση κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους με τη χρήση του <i>Dynamo</i> και ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+	69
4.4	ΣΦΑΙΡΑ ΜΕ ΑΝΟΙΓΜΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ	71
4.4.1	Ανάλυση σφαίρας με τη χρήση του <i>Dynamo</i> και του <i>Robot Structural Analysis</i>	71
4.4.2	Ανάλυση σφαίρας με τη χρήση του <i>Dynamo</i> και ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+	71
4.5	ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	73
4.5.1	Ανάλυση επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας με τη χρήση του <i>Dynamo</i> και του <i>Robot Structural Analysis</i> .	73
4.5.2	Ανάλυση επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας με τη χρήση του <i>Dynamo</i> και ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+.....	77
4.6	ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ HEYDAR ALIYEV ΤΗΣ ZAHA HADID	78
4.6.1	Ανάλυση της γεωμετρίας εμπνευσμένης από το <i>Heydar Aliyev</i> με τη χρήση του <i>Dynamo</i> και ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+	81
5	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.....	84
5.1	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΤΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ	84
5.1.1	Κύλινδρος	84
5.1.2	Κέλυφος παραβολικού τόξου	85
5.1.3	Κέλυφος με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους	86
5.1.4	Σφαίρα με άνοιγμα στην κορυφή	88
5.1.5	Επιφάνεια ελεύθερης γεωμετρίας	89
5.1.6	Γεωμετρία του κέντρου πολιτισμού <i>Heydar Aliyev</i> της <i>Zaha Hadid</i>	90
5.2	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΤΟ ΠΑΧΟΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ	91
5.2.1	Κύλινδρος	91
5.2.2	Κέλυφος παραβολικού τόξου	92
5.2.3	Κέλυφος με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους	92
5.2.4	Σφαίρα με άνοιγμα στην κορυφή	94
5.2.5	Επιφάνεια ελεύθερης γεωμετρίας	95
5.2.6	Γεωμετρία του κέντρου πολιτισμού <i>Heydar Aliyev</i> της <i>Zaha Hadid</i>	96
6	ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗ ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΥΤΩΝ ΜΕ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ.....	98
6.1	ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ	98
6.2	ΣΦΑΙΡΑ	100
7	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	104
8	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	105

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Περιγραφή του προβλήματος

1.2 Αντικείμενο Εργασίας

Αντικείμενο της εργασίας είναι η ανάπτυξη μιας αυτοματοποιημένης διαδικασίας για την ανάλυση πολύπλοκων κατασκευών χρησιμοποιώντας εργαλεία που άπτονται της τεχνολογίας BIM. Παραδείγματα αυτών των κατασκευών είναι κελύφη, επιφανειακοί φορείς ελεύθερης γεωμετρίας και γεωμετρίες που προκύπτουν από τις καμπύλες NURBS. Σημαντικό κομμάτι της εργασίας αποτελεί η σύγκριση των αναλυτικών λύσεων της Μεμβρανικής θεωρίας για ορισμένες βασικές γεωμετρίες με τα αποτελέσματα που συλλέγονται από την παραπάνω διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, διατίθενται αναλυτικές λύσεις για ειδικές περιπτώσεις κελυφών, δηλαδή για συμμετρικά κελύφη τα οποία υπόκεινται σε συμμετρική φόρτιση.

1.3 Ερευνητικοί Στόχοι

Απώτερος σκοπός της διπλωματικής εργασίας ήταν η ανάπτυξη μιας ολοκληρωμένης και αυτοματοποιημένης διαδικασίας ανάλυσης καμπυλόγραμμων επιφανειακών φορέων στη βάση της αρχής της παραμετρικής προσομοίωσης. Προς επίτευξη αυτού του σκοπού καθορίστηκαν οι ακόλουθοι ερευνητικοί στόχοι.

1. Μια εκτενής βιβλιογραφική διερεύνηση για την τεχνολογία παραμετροποιημένων αναλύσεων μέσω BIM.
2. Μια εκτενής βιβλιογραφική διερεύνηση της μηχανικής συμπεριφοράς κελυφών.
3. Η ανάπτυξη κατάλληλων πακέτων εργασίας χρησιμοποιώντας τη γλώσσα γραφικού προγραμματισμού σε Dynamo για την παραγωγή παραμετροποιημένων επιφανειακών γεωμετριών.
4. Η ανάπτυξη κατάλληλης διαδικασίας διακριτοποίησης των γεωμετριών με τετραπλευρικά πεπερασμένα στοιχεία.
5. Η προσομοίωση των κατασκευών αυτών χρησιμοποιώντας πεπερασμένα στοιχεία κελύφους και ο έλεγχος των αποτελεσμάτων στη βάση γνωστών αναλυτικών λύσεων.

1.4 Μεθοδολογία

Παραγωγή παραμετροποιημένων επιφανειακών φορέων μέσω της χρήσης της γλώσσας γραφικού προγραμματισμού Dynamo.

Διαμόρφωση μιας αυτοματοποιημένης ροής μεταξύ Dynamo και Robot Structural Analysis για την ανάλυση των επιφανειών, διαδικασία που δεν παρείχε ελευθερία προσομοίωσης.

Διαμόρφωση αυτοματοποιημένης διαδικασίας διακριτοποίησης των επιφανειών σε τετραπλευρικά πεπερασμένα στοιχεία μέσω του Dynamo.

Αξιοποίηση προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση των επιφανειών, το οποίο χρησιμοποιεί το στοιχείο κελύφους MITC4+.

Λήψη και ανάγνωση αποτελεσμάτων στο ParaView.

Παραμετρική ανάλυση με τον αριθμό στοιχείων ανά πλευρά και επιθυμία σύγκλισης αποτελεσμάτων.

Παραμετρική ανάλυση με το πάχος της επιφάνειας και επιθυμία σύγκλισης αποτελεσμάτων

Σύγκριση αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το πρόγραμμα με τα αποτελέσματα των αναλυτικών λύσεων της Μεμβρανικής θεωρίας για συμμετρικά κελύφη εκ περιστροφής με συμμετρική φόρτιση.

1.5 Δομή Εργασίας

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η σημασία των επιφανειών ελεύθερης μορφής καθώς και η συμβολή τους στην ανάπτυξη του παραμετρικού σχεδιασμού. Επίσης, γίνεται αναφορά στα λογισμικά που ενδείκνυται να χρησιμοποιηθούν για το σχεδιασμό και την ανάλυση επιφανειών ελεύθερης μορφής. Όσον αφορά το 3^ο κεφάλαιο, πραγματοποιείται μια βιβλιογραφική διερεύνηση. Πιο αναλυτικά, γίνεται αναφορά στο πως από τις πολυωνμικές καμπύλες διαμορφώθηκαν οι Bézier καμπύλες, στη συνέχεια έκαναν την εμφάνισή τους οι B-Spline καμπύλες, οδηγώντας εν τέλη στην ανάπτυξη των NURBS καμπυλών, προκειμένου να καλυφθούν οι ανάγκες διαμόρφωσης πολύπλοκων γεωμετριών στον τομέα της κατασκευής και όχι μόνο. Ακόμη, γίνεται περεταίρω εμβάθυνση στα κελύφη, τα οποία ανήκουν στην ταξινόμια των λεπτότοιχων επιφανειών ελεύθερης μορφής, διατυπώνοντας την Καμπτική και Μembranική θεωρία τους. Δόθηκαν και αναλυτικές εξισώσεις κελυφών εκ περιστροφής και για ειδικές κατηγορίες αυτών, όπως για τους κυλίνδρους και τις σφαίρες.

Τέλος γίνεται αναφορά στα πεπερασμένα στοιχεία, στην θεωρία Typical Kirchhoff Love Shell element, στα ισοπαραμετρικά στοιχεία καθώς και στη μέθοδο MITC στην οποία βασίστηκε και το πρόγραμμα ανάλυσης που διαμορφώθηκε για την ανάλυση των επιφανειών. Στο 4^ο κεφάλαιο, παρουσιάζεται εκτενέστατα η παραμετρική προσομοίωση των γεωμετριών που επιλέχθηκαν για τις αναλύσεις καθώς και τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Στο 5^ο κεφάλαιο γίνεται μια παραμετρική ανάλυση ως προς διαφορετικές διακριτοποιήσεις και ποικίλα πάχη. Τα αποτελέσματα και οι συγκρίσεις παρουσιάζονται σε μορφή διαγραμμάτων. Στο κεφάλαιο 6 πραγματοποιείται σύγκριση αποτελεσμάτων του προγράμματος με αυτών που προκύπτουν στις αναλυτικές λύσεις της Μembranικής θεωρίας, και συγκεκριμένα για τις γεωμετρίες κυλίνδρου και σφαίρας. Τέλος, στο 7^ο κεφάλαιο αναγράφονται συγκεντρωτικά όλα τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την παρούσα εργασία.

2 FREEFORM TO PARAMETRIC DESIGN

Στον τομέα των κατασκευών, πέρα από τη σημασία της ποιότητας, της αντοχής, της στατικότητας, της ασφάλειας και του κόστους, καθοριστικό ρόλο στο αποτέλεσμα διαθέτει και η αισθητική πλευρά, το οπτικά όμορφο. Το αισθητικό κομμάτι είναι η υλοποίηση της ιδέας του σχεδιαστή η οποία προϋποθέτει και μια παράλληλη διαδικασία εναρμόνισής της με τους κανονισμούς.

Οι επιφάνειες ελεύθερης μορφής έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς στον τομέα της κατασκευής (Σχ. 1- Σχ. 4). Αυτό οφείλεται στην ικανότητά τους να προσομοιάζουν οπτικά αντικείμενα με πολύπλοκο σχήμα και γεωμετρία, ειδικά όταν αυτή δε μπορεί να αναπαρασταθεί με ακρίβεια από αναλυτικές συναρτήσεις. Οδήγησαν δηλαδή στην απελευθέρωση του σχεδιασμού των κατασκευών από τα κανονικά ορισμένα σχήματα με μαθηματικές σχέσεις. Επιπλέον, η επιφάνειες αυτές ενδέχεται να καλύπτουν μεγάλες εκτάσεις χωρίς να χρειάζονται ενδιάμεσες στηρίξεις, πράγμα που απαιτείται για αρχιτεκτονικούς και πρακτικούς λόγους αξιοποίησης του χώρου.



Σχ. 1 Heydar Aliyev Center στο Μπακού Αζερμπαϊτζάν, πηγή yatcher.com

Ο σχεδιασμός των επιφανειών ελεύθερης μορφής είναι άμεσα συνδεδεμένος με τον παραμετρικό σχεδιασμό. Η εξέλιξη της τεχνολογίας των υπολογιστών έχει συμβάλει σε μεγάλο βαθμό στην αύξηση της ζήτησης για παραμετρικό σχεδιασμό και στον τομέα της κατασκευής. Αυτό οφείλεται στο ότι ο πυρήνας της μοντελοποίησης μιας ελεύθερης επιφάνειας μέσω της χρήσης των μαθηματικών μεθόδων έγκειται στη βοήθεια που παρέχεται από τον υπολογιστή για την εκτέλεση της επεξεργασίας των διατιθέμενων δεδομένων.

Ο παραμετρικός σχεδιασμός πληροί ικανοποιητικά τις απαιτήσεις για την παρουσίαση και τον σχεδιασμό της γεωμετρίας και ταυτοχρόνως διευκολύνει τη μεταφορά και αποθήκευση της πληροφορίας σχετικά με τη γεωμετρία και την επιφάνεια του προϊόντος. Μια από τις πρώτες συνεισφορές σε αυτό το αντικείμενο είχαν οι πολυωνυμικές καμπύλες, οι οποίες οδήγησαν στις καμπύλες τύπου Bézier. Ειδικά τις τελευταίες δεκαετίες, η μοντελοποίηση των ελεύθερων επιφανειών συνοδεύεται από τον παραμετρικό σχεδιασμό των NURBS καμπυλών. Οι καμπύλες αυτές λαμβάνουν πραγματική υπόσταση στον τομέα της κατασκευής μέσω των έργων της αρχιτέκτονας Zaha Hadid, της οποίας εύλογα αποδόθηκε ο τίτλος ‘Queen of Curves’, μιας και οι καμπύλες διέθεταν κυρίαρχο ρόλο στα έργα της. Ορισμένα παράδειγμα αυτών είναι το Heydar Aliyev Center, στο Μπακού Αζερμπαϊτζάν (Σχ. 1), το Leesa SOHO Tower (Σχ. 12) και το Crest, που βρίσκεται στο Λονδίνο (Σχ. 26). Επιπλέον, ζωντανά παραδείγματα της παρουσίας ιδιαίτερων καμπυλών στην αρχιτεκτονική αποτελούν η ξύλινη στέγη στο πανεπιστήμιο της Στουτγάρδης που παρουσιάζεται στο Σχ. 2, το έργο Chapel Bosjes, το οποίο βρίσκεται στην κοιλάδα Breedekloof κοντά στο Ceres (Σχ. 3) καθώς και το Temple of light (Σχ. 4), το οποίο σχεδιάστηκε από τους αρχιτέκτονες Patkau.



Σχ. 2 BUGA ξύλινη στέγη στο πανεπιστήμιο της Στουτγάρδης



Σχ. 3 Chapel BOSJES, στην κοιλάδα Breedekloof κοντά στο Ceres



Σχ. 4 Temple of light, Patkau Architects

2.1 Παραμετρικός σχεδιασμός

Ο παραμετρικός σχεδιασμός είναι μια διαδικασία βασισμένη σε αλγοριθμικό τρόπο σκέψης, ο οποίος επιτρέπει την έκφραση παραμέτρων και κανόνων. Ο κατάλληλος συνδυασμός των τελευταίων ορίζει και τη σχέση μεταξύ πρόθεσης σχεδίου (design intent) και απόκρισης σχεδίου (design response). Πιο αναλυτικά, ο παραμετρικός σχεδιασμός συμβάλλει στη διαχείριση και ενημέρωση σχεδίων με πολύπλοκες γεωμετρίες και δομές. Μια κατασκευή με ιδιαίτερη μορφή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μη γραμμικό, δυναμικό σύστημα, του οποίου η απόδοση επηρεάζεται από τη συνεργασία ποικίλων παραμέτρων. Η χρήση του όρου «παραμετρική», απευθύνεται στον κλάδο των μαθηματικών και υποδηλώνει τη χρήση παραμέτρων ή και μεταβλητών, των οποίων η επεξεργασία οδηγεί στην αλλαγή και διαχείριση του τελικού αποτελέσματος. Μια κατασκευή με ιδιαίτερη γεωμετρία δύναται να αντιμετωπιστεί ως ένα μη γραμμικό (nonlinear) δυναμικό σύστημα, το οποίο καθορίζεται μέσω

συσχετισμένων παραμέτρων. Άρα, ο παραμετρικός σχεδιασμός είναι ένας αποτελεσματικός και αντικειμενικός τρόπος δομικού σχεδιασμού, βασισμένο στις αρχές του παραμετρικού συστήματος και στην εξελιγμένη τεχνολογία των υπολογιστών.

Στο Σχ. 5 παρουσιάζεται η ιδέα της Clément Loyer για το σχεδιασμό ενός πάγκου εμπνευσμένου από τη ρευστότητα του βυθού της θάλασσας και του σχήματος των οργανισμών που ζουν εκεί. Η ιδέα βασίστηκε στις αρχές του παραμετρικού σχεδιασμού.



Σχ. 5 Curviling bench, πηγή Clément Loyer

2.2 Λογισμικά

Για το σχεδιασμό και την ανάλυση επιφανειών ελεύθερης μορφής, δύναται να χρησιμοποιηθούν τα ακόλουθα λογισμικά:

- Autodesk Revit: είναι ένα λογισμικό μοντελοποίησης πληροφοριών (BIM), δηλαδή παράγει τρισδιάστατα παραμετρικά μοντέλα που περιλαμβάνουν πληροφορίες γεωμετρικού σχεδιασμού και μη, της κατασκευής. Συμβάλει στη μοντελοποίηση πληροφοριών ενός κτιρίου σε 4D περιβάλλον που αφορούν τον σχεδιασμό, την κατασκευή αλλά και την παρακολούθηση διαφόρων σταδίων του κύκλου ζωής του κτιρίου, μέχρι και τη συντήρηση και την κατεδάφιση.
- Rhinoceros (Rhino ή Rhino3D): είναι ένα 3D σχεδιαστικό πρόγραμμα, το οποίο παρέχεται εντός του περιβάλλοντος του υπολογιστή. Η γεωμετρία που χρησιμοποιείται βασίζεται κατά κύριο λόγο στα μαθηματικοποιημένα μοντέλα NURBS.
- Grasshopper: είναι μια εικονική γλώσσα προγραμματισμού η οποία στεγάζεται εντός του περιβάλλοντος του Rhinoceros 3D. Η διαμόρφωση του επιθυμητού προγράμματος επιτυγχάνεται σέρνοντας ορισμένα στοιχεία στον καμβά.

- Blender: είναι ένα ανοιχτό λογισμικό (open source) που δίνει τη δυνατότητα διαμόρφωσης γραφικών μέσω της χρήσης του υπολογιστή. Χρησιμοποιείται για τη δημιουργία ταινιών κινουμένων σχεδίων, εικονικών εφέ, γραφικών, 3D printed μοντέλων και παιχνιδιών μέσω του υπολογιστή.
- Dynamo: είναι ένα περιβάλλον γραφικού προγραμματισμού το οποίο δίνει τη δυνατότητα διαχείρισης των δεδομένων, διαμόρφωσης της γεωμετρίας, εξερεύνησης επιλογών στη γεωμετρία, αυτοματοποίησης διαδικασιών και διασύνδεσης πολλών εφαρμογών μεταξύ τους.
- Robot Structural Analysis: είναι ένα λογισμικό ανάλυσης δομικού φορτίου το οποίο μπορεί να ανταλλάσσει δεδομένα με το Revit. Συμβάλλει στη διαμόρφωση πιο ακριβών σχεδίων το οποία στη συνέχεια συνδέονται με το BIM.
- ParaView: είναι μια εφαρμογή ανοιχτής πηγής και συμβάλει στην ανάλυση δεδομένων από πολλές εφαρμογές και στην οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων. Είναι εφικτό να δημιουργηθούν άμεσα οπτικοποιήσεις για να αναλυθούν δεδομένα, μέσω της χρήσης ποιοτικών και ποσοτικών τεχνικών.

3 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

3.1 Παραμετρική απεικόνιση γεωμετρίας

Από τον 20^ο αιώνα και μετά, στον τομέα των κατασκευών εμφανίστηκε η ανάγκη διαμόρφωσης πολύπλοκων σχεδίων άρα και κατά συνέπεια πολύπλοκων γεωμετριών. Για να είναι εφικτό να διαμορφωθούν αυτές οι γεωμετρίες οδηγηθήκαμε στην ανάπτυξη πιο εξελιγμένων καμπυλών, οι οποίες με τη σειρά τους άρχισαν σιγά-σιγά να ανταποκρίνονται στις νεο-εμφανιζόμενες απαιτήσεις. Έτσι από τις πολυωνυμικές καμπύλες διαμορφώθηκαν οι Bézier καμπύλες, στη συνέχεια έκαναν την εμφάνισή τους οι B-Spline καμπύλες, θέτοντας γόνιμο έδαφος για την ανάπτυξη των NURBS καμπυλών.

3.1.1 Πολυωνυμική Καμπύλη

Ορισμός πολυωνύμου

Το πολυώνυμο είναι η πιο απλή μαθηματική έκφραση και αποτελεί αλγεβρική παράσταση μεταβλητών και σταθερών. Η πιο συνήθης μεταβλητή είναι το x και το πολυώνυμο συμβολίζεται με $P(x)$. Μια γενική μορφή του πολυωνύμου είναι εξής:

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_k x^k + \dots + \alpha_1 x^1 + \alpha_0$$

Βασικό στοιχείο διαχωρισμού των πολυωνύμων αποτελεί ο βαθμός τους, ο οποίος ισούται με το μεγαλύτερο βαθμό των όρων του. Ένα παράδειγμα πολυωνύμου 4^{ου} βαθμού, παραμετρικά διατυπωμένου, είναι: $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$. Αυτό σημαίνει πως για τον ορισμό του πολυωνύμου αυτού απαιτείται ο προσδιορισμός πέντε παραμέτρων ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$), δηλαδή $n+1$ παραμέτρων, όπου n ο βαθμός του πολυωνύμου.

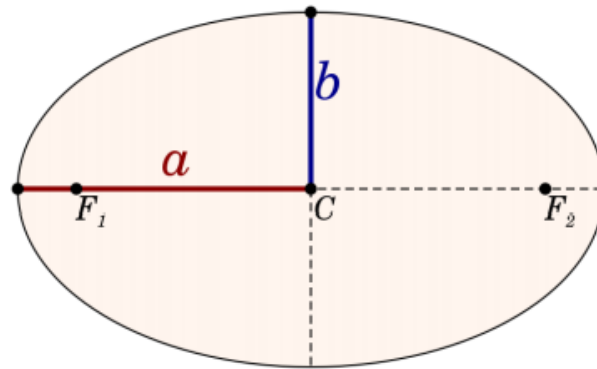
Εξισώσεις

Η θεμελιώδης αναπαράσταση καμπυλών και επιφανειών, εκτελείται με τη βοήθεια πεπλεγμένων και παραμετρικών εξισώσεων. Η πεπλεγμένη εξίσωση μιας καμπύλης στο καρτεσιανό επίπεδο XY δίνεται από την εξίσωση:

$$f(x, y) = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει τη σχέση μεταξύ x και y συντεταγμένων κάθε σημείου που έγκειται πάνω στην καμπύλη. Ένα παράδειγμα πεπλεγμένης εξίσωσης είναι της έλλειψης, η οποία διαθέτει την ακόλουθη μορφή:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$



Σχ. 6 Έλλειψη

Σε αντίθεση με την περίπτωση των πεπλεγμένων, η παραμετρική μορφή παρέχει ξεχωριστές εξισώσεις για κάθε μια συντεταγμένη των σημείων της καμπύλης, συναρτήσει μιας ανεξάρτητης παραμέτρου t :

$$C(t) = (x(t), y(t)) \quad t_0 \leq t < t_1$$

Με τη χρήση της παραμετρικής μορφής, η εξίσωση της έλλειψης γράφεται ως εξής:

$$x(t) = a \cos(t)$$

$$y(t) = b \sin(t) \quad 0 \leq t < 2\pi$$

Συγκρίνοντας αυτές τις δύο μορφές εξισώσεων, γίνεται αντιληπτό πως η πεπλεγμένη μορφή αδυνατεί να παρέχει ευθέως σημεία που ανήκουν στην καμπύλη, ενώ την ίδια στιγμή εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από το ισχύον σύστημα συντεταγμένων. Κατά συνέπεια καθίσταται αρκετά δύσκολη η μεταφορά τους σε άλλο σύστημα συντεταγμένων. Στην περίπτωση της παραμετρικής μορφής, κάθε σημείο της καμπύλης προκύπτει άμεσα από τις εξισώσεις, ακόμα και αν οι εξισώσεις παριστάνουν μια κλειστή ή πολλαπλών τιμών καμπύλη. Το βασικό μειονέκτημα της παραμετρικής μορφής είναι πως δεν είναι εύκολο να ελεγχθεί αν ένα σημείο ανήκει στην καμπύλη.

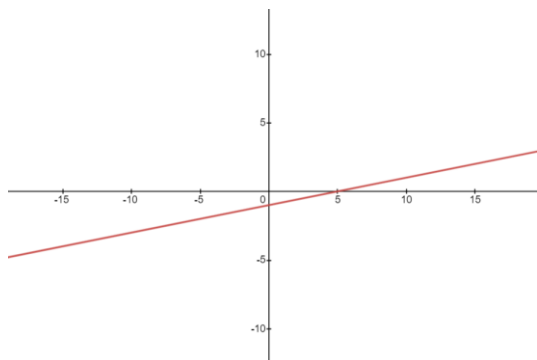
Η πιο συνήθης μορφή παραμετρικής καμπύλης προκύπτει ως άθροισμα δυνάμεων μιας παραμέτρου u , πολλαπλασιασμένων με ισοδύναμους πολυωνυμικούς συντελεστές α_i . Η γενική εξίσωση αυτής είναι η ακόλουθη:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot u^i$$

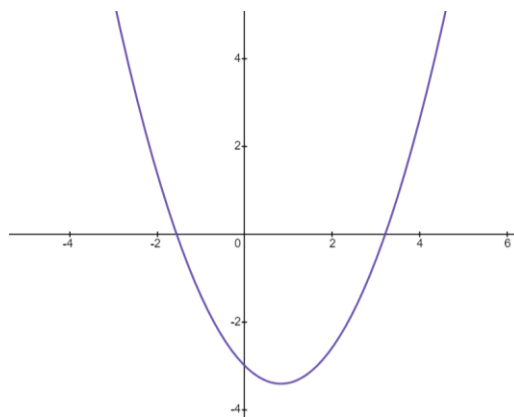
Μια καμπύλη ορίζεται ως πολυωνυμική όταν μπορεί να παραμεριστεί από πολυωνυμικές συναρτήσεις $R[x]$. Η συγκεκριμένη καμπύλη καθιστά ειδική περίπτωση ρητών καμπυλών (rational curve), ο βαθμός της οποίας ισούται με το μεγαλύτερο βαθμό των πολυωνύμων που την αναπαριστούν.

Γραφήματα

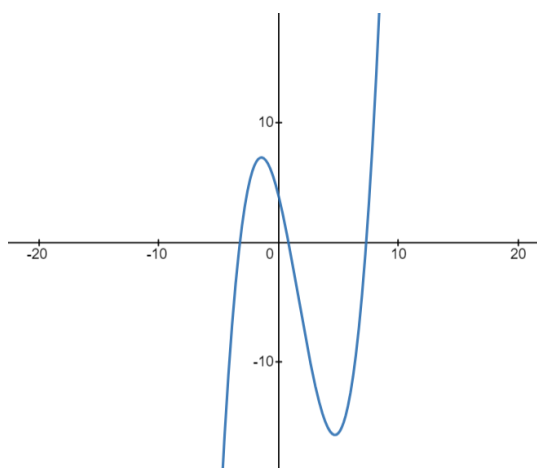
Παρακάτω παρουσιάζονται οι καμπύλες πολυωνύμων με διαφορετικούς βαθμούς:



Πολυώνυμο πρώτου βαθμού: $-x + 5$

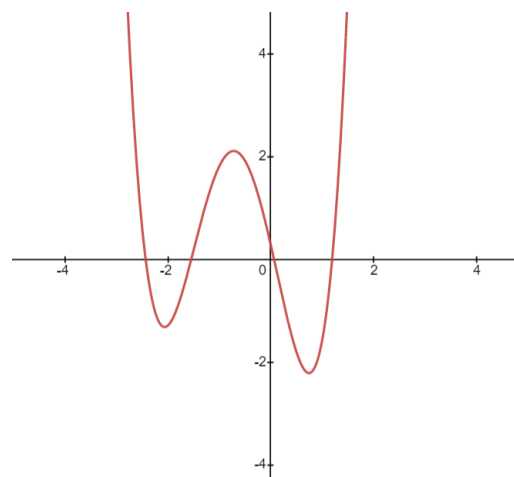


Πολυώνυμο δευτέρου βαθμού: $0.6x^2 - x - 3$



Πολυώνυμο τρίτου βαθμού:

$$0.2x^3 - x^2 - 4x + 4$$



Πολυώνυμο τετάρτου βαθμού:

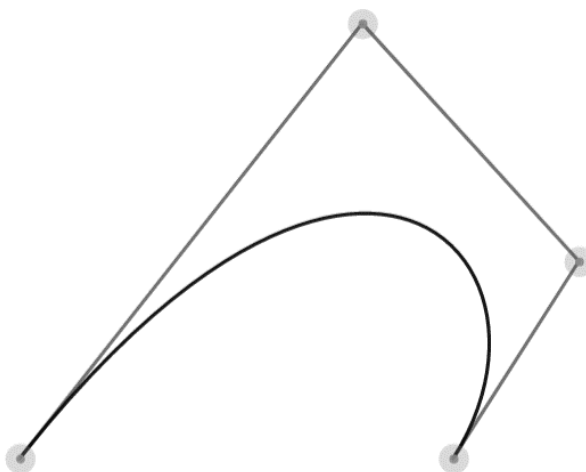
$$x^4 + 2.7x^3 - 1.2x^2 - 4.4x + 0.3$$

Ορισμένα από τα ανεπιθύμητα στοιχεία των καμπυλών αυτών είναι ότι απαιτούν τον προσδιορισμό πολλών συντελεστών, σε συνδυασμό με το ότι δε παραμένουν αναλλοίωτες σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς.

3.1.2 Καμπύλη Bézier

Οι Bézier καμπύλες παρουσιάστηκαν από τον Pierre Bézier το 1960, ως ένα σχεδιαστικό εργαλείο για την επισκευή αμαξιών. Θεωρούνται μαθηματικά ισοδύναμες με τις βασικές πολυωνυμικές καμπύλες n-οστού βαθμού. Την ίδια στιγμή όμως, συμβάλουν στην αντιμετώπιση ορισμένων ελαττωμάτων των βασικών πολυωνύμων.

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι καμπύλες Bézier αποτελούν έναν συσχετισμένο συνδυασμό των σημείων ελέγχου τους (control points). Τα σημεία ελέγχου, στη σχεδίαση με τη χρήση του υπολογιστή (Computer Aided Design), ορίζονται ως τα καρτεσιανά σημεία που καθορίζουν το σχήμα της γεωμετρίας. Ο αριθμός n των σημείων αυτών που απαιτείται για τη διαμόρφωση της καμπύλης, είναι άμεσα συνδεδεμένος με το βαθμό του πολυωνύμου p και ισχύει η δεσμευτική σχέση: αριθμός σημείων ελέγχου = βαθμός καμπύλης + 1. Ως αποτέλεσμα αυτού, επιτυγχάνεται εξομάλυνση των καμπυλών λόγω της αύξησης του πολυωνυμικού βαθμού. Στο Σχ. 7 απεικονίζεται καμπύλη Bézier πολυωνυμικού βαθμού τρία, η οποία αποτελείται από τέσσερα σημεία ελέγχου.



Σχ. 7 Bézier καμπύλη πολυωνυμικού βαθμού $p=3$, αποτελούμενη από 4 σημεία ελέγχου, πηγή desmos.com

Άρα το σχήμα της καμπύλης εξαρτάται μόνο από τα σημεία ελέγχου. Κατά συνέπεια, με την μετακίνηση ενός μικρού αριθμού σημείων, επιτυγχάνεται αλλαγή του σχήματος της καμπύλης καθιστώντας πιο εύκολα υλοποιήσιμες τις επιθυμητές μεταβολές.

Η γενική μορφή των καμπυλών Bézier n -οστού βαθμού, με P_i τα απαιτούμενα σημεία ελέγχου, δίνεται ως εξής:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) P_i$$

όπου $0 \leq u \leq 1$ και $B_{i,n}$ είναι τα πολυώνυμα Bernstein τα οποία ορίζονται ως:

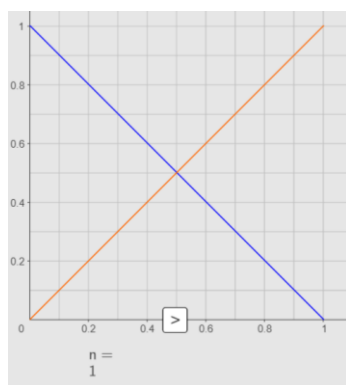
$$B_{i,n} = D(n, i) u^i (1 - u)^{n-i}$$

και $D(n, i)$ είναι οι διωνυμικοί συντελεστές:

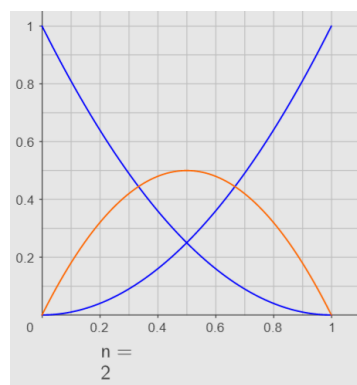
$$D(n, i) = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Σε σύγκριση με τις πολυωνυμικές καμπύλες, λόγω της αύξησης του πολυωνυμικού βαθμού, γίνεται εφικτός ο σχηματισμός πιο πολύπλοκων σχημάτων. Ταυτόχρονα όμως η αύξηση αυτή αποτελεί μειονέκτημα των Bézier καμπυλών. Πιο αναλυτικά, από τη στιγμή που απαιτούνται n σημεία ελέγχου για τον προσδιορισμό μιας καμπύλης Bézier, με $n-1$ να είναι ο πολυωνυμικός βαθμός, είναι προφανές ότι η αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού οδηγεί στην αύξηση των σημείων ελέγχου. Στην πράξη όμως, οι καμπύλες Bézier με βαθμό μεγαλύτερο από πέντε δε χρησιμοποιούνται. Ο λόγος είναι ότι με την αύξηση του βαθμού παρατηρείται μια αστάθεια στους αλγορίθμους, δηλαδή γίνεται λιγότερο αποδοτικός ο υπολογισμός. Αυτό οφείλεται στο ότι πραγματοποιούνται περισσότερα βήματα γραμμικής παρεμβολής, πράγμα που πιθανότητα να οδηγήσει στην εμφάνιση προβλημάτων που αφορούν την αριθμητική ακρίβεια. Επιπλέον, το γεγονός ότι η επιρροή που διαθέτει κάθε σημείο ελέγχου αφορά ολόκληρο το μήκος της καμπύλης καθιστά δύσκολη την τμηματική τροποποίησή της. Κατά συνέπεια δεν είναι εύκολη η διαμόρφωση ενός επιθυμητού σχήματος με μόλις μια καμπύλη Bézier. Το συγκεκριμένο μειονέκτημα επιλύθηκε εν μέρη με την ομαλή συνένωση πολλών καμπυλών μαζί.

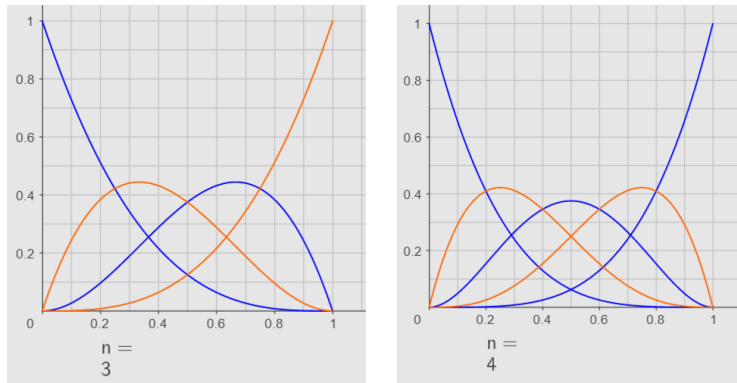
Στο Σχ. 8 δίνεται ένα παράδειγμα των πολυωνύμων Bernstein που χρησιμοποιήθηκαν για ποικίλους πολυωνυμικούς βαθμούς. Όπως έχει προαναφερθεί, υπάρχει άμεση σύνδεση μεταξύ του πολυωνυμικού βαθμού της καμπύλης και του αριθμού των συναρτήσεων σχήματος ή ισοδύναμων σημείων ελέγχου. Για παράδειγμα, για πολυωνυμικό βαθμό 2, απαιτούνται τρία πολυώνυμα Bernstein για την αξιολόγηση της καμπύλης. Οι συναρτήσεις είναι προσδιορισμένες στο διάστημα $[0,1]$, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $x=0.5$ και οι τιμές τους είναι θετικές.



(a) Linear $n=1$



(b) Quadratic $n=2$



(c) Cubic $n=3$

(d) Quadratic $n=4$

Σχ. 8 Bernstein πολυώνυμα για ποικίλους πολυωνυμικούς βαθμούς, πηγή Bernstein-Polynomials 2 GeoGebra

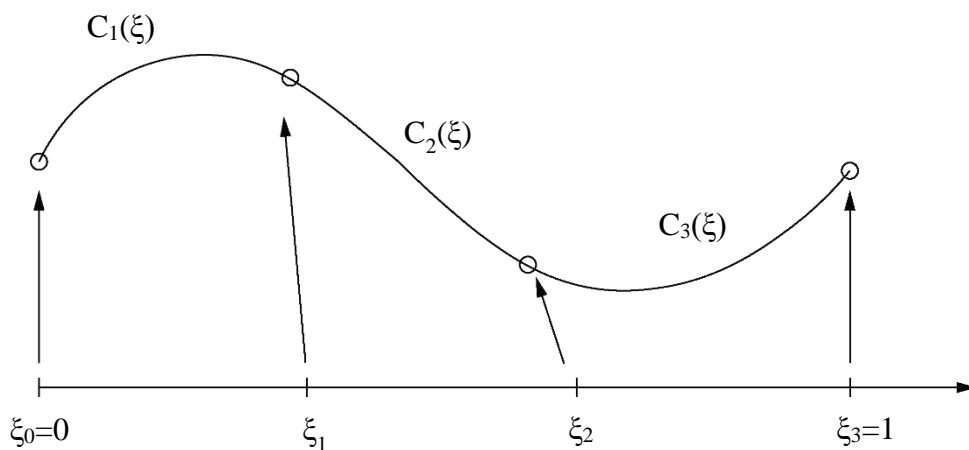
Στην προσπάθεια διευκόλυνσης της διαδικασίας διαμόρφωσης πιο πολύπλοκων σχημάτων, οι Βέζιερ καμπύλες συνέβαλλαν στην εμφάνιση των B-Splines καμπυλών.

3.1.3 Καμπύλη B-Spline

Οι B-Splines καμπύλες p -βαθμού, αποτελούν γενίκευση των καμπυλών Βέζιερ, οπότε εύλογα μπορεί να εντοπιστεί μια άμεση σύνδεση μεταξύ των δύο καμπυλών αυτών. Πιο συγκεκριμένα, κάθε B-Spline καμπύλη μπορεί να χωριστεί σε πολλαπλά Βέζιερ τμήματα τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με C^2 συνέχεια. Και αντιστρόφως, πολλά τμήματα Βέζιερ καμπυλών συνδέονται διαμορφώνοντας μια ενιαία B-Spline καμπύλη. Το θετικό της προαναφερθείσας αλλαγής είναι ότι επιτεύχθηκε η απεμπλοκή του αριθμού των σημείων ελέγχου από τον πολυωνυμικό βαθμό της καμπύλης, και έγινε εφικτός ο έλεγχος μεμονωμένων τμημάτων της καμπύλης. Έτσι, μπορούν να περιγραφούν πολύπλοκες γεωμετρίες διατηρώντας σχετικά ένα χαμηλό πολυωνυμικό βαθμό και άρα επιτυγχάνεται μια πιο ελέγξιμη συμπεριφορά.

Για τη διαμόρφωση μιας B-Spline καμπύλης αρκεί να συνδυαστούν συναρτήσεις βάσης $N_{i,p}(\xi)$ p -βαθμού, οι οποίες είναι μηδενικές για τον μεγαλύτερο αριθμό των παραμέτρων ξ . Με αυτόν τον τρόπο έχει παραχθεί μια ενιαία και μονοκόμματη καμπύλη συγκεκριμένου βαθμού. Η συνέχεια της ίδια της καμπύλης είναι δεδομένη.

Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται μια καμπύλη $C(\xi)$ η οποία αποτελείται από $m=3$ πολυωνυμικά τμήματα.



Σχ. 9 Καμπύλη B-Spline με τρία τμηματικά συνεχή πολυώνυμα

Σημεία ελέγχου

Οι B-splines αποτελούνται από σημεία ελέγχου B_i , το πλήθος των οποίων, σε αντίθεση με τις Bézier καμπύλες, δεν προσδιορίζεται από το βαθμό της B-Spline. Οπότε, αν ο βαθμός της B-Spline είναι p , τα σημεία ελέγχου ανέρχονται στα $n + 1$ στον αριθμό. Επιπλέον, διαθέτουν ένα θετικό αριθμό που ονομάζεται βάρος (weight). Όταν τα σημεία ελέγχου όλων των καμπυλών έχουν το ίδιο βάρος και αυτό είναι ίσο με 1, τότε η καμπύλη ονομάζεται non-rational.

Knot value vectors

Την ίδια στιγμή, η εισαγωγή των κόμβων k (knots), $p + 1$ στο αριθμό, όπου p είναι πολυωνυμικός βαθμός, δίνει το πλεόνασμα στον σχεδιαστή να υλοποιεί απότομες αλλαγές στη συνέχεια της γεωμετρίας, ελέγχοντας μεμονωμένα τμήματα της καμπύλης.

Το μέτρο διανύσματος κόμβου σε μια διεύθυνση είναι μια ακολουθία μη μειούμενων συντεταγμένων, το οποίο γράφεται ως $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, όπου $\xi_i \in \mathbb{R}$ είναι ο κόμβος στην i σειρά, $i = 1, 2, \dots, n+p+1$ είναι ο δείκτης των κόμβων, όπου n είναι ο αριθμός των βασικών συναρτήσεων που συντελούν την B-Spline καμπύλη.

Οπότε στην περίπτωση πολυωνυμικού βαθμού 3, το μέτρο διανύσματος κόμβου προκύπτει: $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4\}$ και το διάνυσμα κόμβου είναι: $\Xi' = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Οι αριθμοί που αποτελούν το μέτρο διανύσματος πρέπει είτε να παραμένουν ίδιοι είτε να αυξάνονται καθώς προχωράει κανείς στη λίστα, και την ίδια στιγμή ο αριθμός των επαναλήψεων μιας τιμής να περιορίζεται σε αριθμό ίσο ή μικρότερο από το βαθμό ελευθερίας $p+1$. Η πρώτη και η τελευταία τιμή του διανύσματος μπορεί να επαναληφθεί $p+1$ φορές. Ο συγκεκριμένος αριθμός, δηλαδή των επαναλήψεων μιας τιμής, αποκαλείται πολυπλοκότητα του κόμβου (knot's multiplicity). Αν η τιμή ενός

κόμβου επαναληφθεί τόσες φορές όσο ο βαθμός ελευθερίας, τότε έχουμε full-multiplicity. Αν όμως η τιμή του κόμβου εμφανιστεί μόνο μια φορά τότε έχουμε single knot. Εάν οι κόμβοι ισαπέχουν, τότε επιτυγχάνεται ομοιόμορφη παραμετροποίηση και χαρακτηρίζονται ως ομοιόμορφοι (uniform), ενώ στην αντίθετη περίπτωση αποκαλούνται μη-ομοιόμορφοι κόμβοι (non-uniform).

Βασικές συναρτήσεις

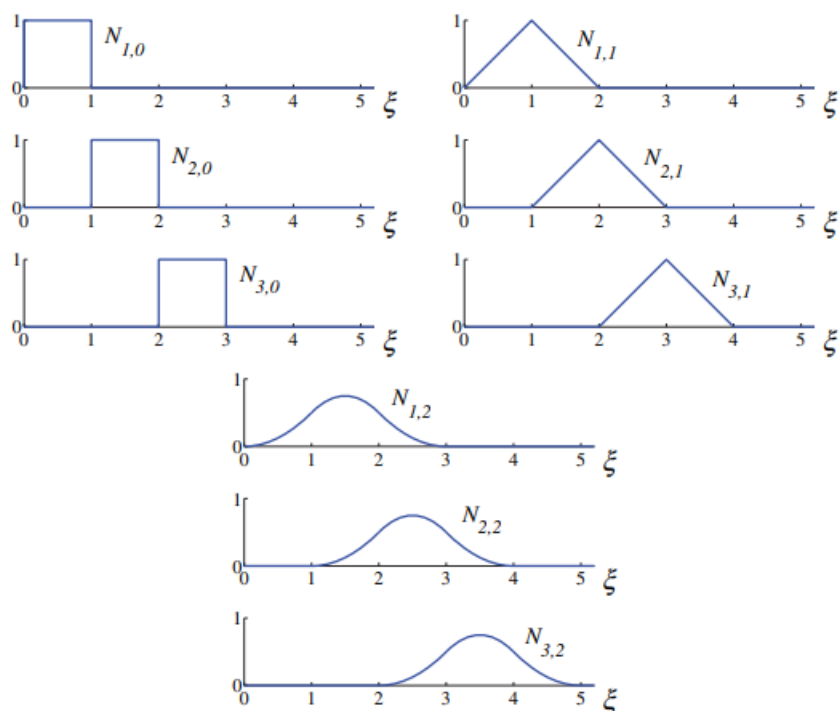
Οι βασικές συναρτήσεις βαθμού p (τάξης $p+1$) των B-Spline ορίζονται ως εξής:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0, & \text{σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.} \end{cases}$$

Για βαθμό $p = 1, 2, 3, \dots$ προσδιορίζεται η βασική συνάρτηση ως:

$$N_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_i^{p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi_i}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(\xi), \quad p \geq 1.$$

Τα αποτελέσματα των παραπάνω συναρτήσεων παρουσιάζονται στο σχήμα εδώ:

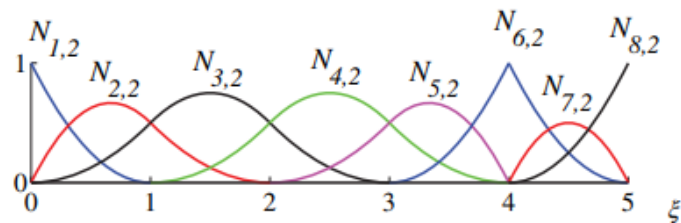


Σχ. 10 Βασικές συναρτήσεις βαθμών 0,1,2 για ομοιόμορφα διανύσματα κόμβων $\Xi = \{0,1,2,3,4,\dots\}$, πηγή HCBO

Για δεδομένο αριθμό n βασικών συναρτήσεων $N_{i,p}$ με $i = 1, 2, \dots, n$ και σημεία ελέγχου $B_i \in \mathbb{R}^d$, η πολυωνυμική B-Spline καμπύλη ορίζεται ως:

$$C(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi)) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i$$

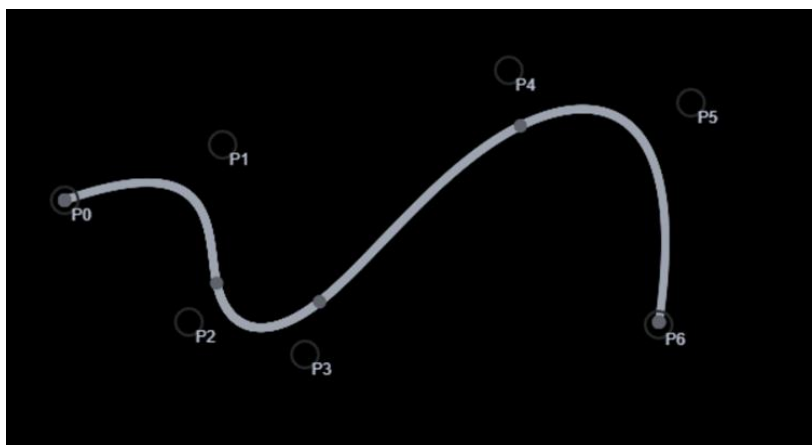
όπου $x(\xi)$, $y(\xi)$ και $z(\xi)$ αποτελούν τις καρτεσιανές συντεταγμένες της καμπύλης C συναρτήσει της παραμέτρου ξ . Ένα παράδειγμα κυβικών βασικών συναρτήσεων για μη ομοιόμορφο διάλυμα κόμβου παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Παράδειγμα κυβικών βασικών συναρτήσεων για μη ομοιόμορφο διάλυμα κόμβου $\Xi = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$, πηγή HCBO

Βαθμός ελευθερίας (degree)

Είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός p που κυμαίνεται συνήθως μεταξύ 1 και 5. Είναι πιθανό να αυξηθεί ο βαθμός ελευθερίας και να μην αλλάξει το σχήμα της καμπύλης, ενώ σε περίπτωση μείωσης του βαθμού ελευθερίας άμεση συνέπεια αυτού είναι η αλλαγή του σχήματος της καμπύλης. Ο βαθμός ελευθερίας είναι ανεξάρτητος του αριθμού των control points.



Σχ. 11 B-Spline, πηγή utexas.edu

○ P_i : control Points

• Dots: Knots

Οι B-Splines καμπύλες δε διαθέτουν την ικανότητα να αναπαραστήσουν κωνικές τομές. Έτσι διαμορφώθηκε η ανάγκη ανάπτυξης μιας νέας, πιο εξελιγμένης τεχνολογίας σχεδίασης.

3.1.4 NURBS Καμπύλες

Οι καμπύλες NURBS, μη ομοιόμορφες ρητές B-Splines, είναι μαθηματικές αναπαραστάσεις της τρισδιάστατης γεωμετρίας, τα οποία μπορούν να περιγράψουν με ακρίβεια οποιοδήποτε σχήμα, είτε είναι γραμμή, κύκλος, τόξο είτε μια ιδιαίτερης γεωμετρίας τρισδιάστατη επιφάνεια ή και στερεό. Έχουν ευρεία χρήση στον τομέα των υπολογιστικών γραφικών για την αναπαράσταση καμπυλών και επιφανειών. Ταυτίζονται με τις ρητές καμπύλες B-Spline με τυχαία ακολουθία κόμβων. Για να οριστεί μια καμπύλη NURBS, απαιτούνται τέσσερα στοιχεία: ο βαθμός ελευθερίας (degree), τα σημεία ελέγχου, οι κόμβοι και ο άξονα αξιολόγησης (evaluation rule).

Μια καμπύλη NURBS p-βαθμού δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i},$$

όπου w_i είναι τα αντίστοιχα βάρη των σημείων ελέγχου.

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) B_i$$

Μια σημαντική ιδιότητα των καμπυλών αυτών είναι ότι οποιονδήποτε μετασχηματισμός, είτε αυτός είναι μεταφορά, παραμόρφωση, περιστροφή είτε αλλαγή κλίμακας, εφαρμόζεται στην καμπύλη μέσω της μετακίνησης των σημείων ελέγχου. Οι καμπύλες NURBS είναι αμετάβλητες υπό προοπτικούς/συσχετισμένους μετασχηματισμούς. Επίσης μπορούν να προσδιορίσουν οποιαδήποτε κωνική διατομή και άλλες αναλυτικές συναρτήσεις.

3.2 Ανάλυση κελυφών

Τα κελύφη ελεύθερης μορφής βασίζονται στη βελτιστοποιημένη συμπεριφορά των λεπτών κελυφών της Μεμβρανικής θεωρίας. Ο όρος «ελεύθερη» αφορά τα γεωμετρικά σχήματα που δε μπορούν να παρασταθούν από μαθηματικούς τύπους, πράγμα που τα διαφοροποιεί από τα κυλινδρικά και κωνικά κελύφη. Με άλλα λόγια, οι λεπτότοιχες free form επιφάνειες συνέβαλαν στη βελτιστοποίηση των μαθηματικά ορισμένων κελυφών. Άρα, από δομοστατικής απόψεως, οι λεπτότοιχες free form επιφάνειες ανήκουν στην ταξινομία των κελυφών.

Τα κελύφη διέθεταν καθοριστικό ρόλο στο σχεδιασμό δομικών έργων κατά την πάροδο των δεκαετιών. Πέρα από την εντυπωσιακή εμφάνισή τους, διαθέτουν ενδιαφέρουσες τεχνικές ιδιότητες, όμως η

συμπεριφορά τους δύσκολα αναλύεται. Ορισμένες φορές, η συμπεριφορά τους μπορεί να χαρακτηριστεί ως απρόβλεπτη μιας και μικρές αλλαγές στη γεωμετρία ή στις στηρίξεις ενδέχεται να οδηγήσουν σε μεγάλες αλλαγές στα αποτελέσματα.

Τα κελύφη είναι λεπτοί, επιφανειακοί φορείς των οποίων η μέση επιφάνεια είναι καμπύλη. Το πάχος τους, όπως και των πλακών, είναι πολύ μικρότερο συγκριτικά με τις άλλες δύο διαστάσεις καθώς και της ακτίνας καμπυλότητας. Κατά συνέπεια η γεωμετρία τους είναι δυνατόν να παρασταθεί από τη μέση επιφάνειά τους (Σχ. 13) και το πάχος σε κάθε σημείο της μέσης επιφάνειας. Από κάθε σημείο της μέσης επιφάνειας διέρχεται ένα εφαπτομενικό επίπεδο και η κάθετος επί του επιπέδου αυτού ορίζει τον άξονα Z του συστήματος συντεταγμένων του σημείου. Η ιδιαιτερότητα του κελύφους βασίζεται στο συνδυασμό της συμπεριφοράς του δίσκου ως προς τη μεμβρανική του λειτουργία, και της συμπεριφοράς της πλάκας, ως προς την καμπτική του λειτουργία.



Σχ. 12 Leesa SOHO Tower από Zaha Hadid Architects

3.2.1 Καμπτική Θεωρία κελυφών

Το ενδιαφέρον με την Καμπτική θεωρία είναι ότι εμφανίζεται μόνο σε συγκεκριμένα σημεία του κελύφους, όπου δηλαδή οι μεμβρανικές τάσεις δεν είναι επαρκείς για να παραλάβουν τα επιβαλλόμενα φορτία. Είναι σημαντικό να τονιστεί πως οι αναπτυσσόμενες ροπές κάμψης στις περιοχές αυτές έχουν μόνο ρόλο αντιστάθμισης της ανεπάρκειας της συμπεριφοράς των μεμβρανών και δε φέρουν φορτίο. Η ύπαρξη συγκεντρωμένων δυνάμεων αναπτύσσει ροπές κάμψης στη συγκεκριμένη περιοχή. Η περιοχή αυτή προσδιορίζεται από το μήκος επιρροής “influence length” (l_i) και το υπόλοιπο κέλυφος διατηρεί τις ιδιότητες μιας μεμβράνης.

Αυτή η συμπεριφορά των κελυφών είναι που τράβηξε το ενδιαφέρον των σχεδιαστών καθώς τονίζει τη δομική αποτελεσματικότητά τους. Πιο πρακτικά, δίνεται η δυνατότητα σχεδιασμού λεπτών κελυφών

ακόμα και αν δεν είναι απολύτως συμβατά με τις προϋποθέσεις της Μεμβρανικής θεωρίας. Δηλαδή, είναι εφικτό να βρεθούν τρόποι βελτιστοποίησης ή άλλες πιθανές δομικές λύσεις για να αντιμετωπιστούν αυτές οι συνθήκες, ενώ την ίδια στιγμή αναμένεται ένα μεγάλο τμήμα του κελύφους να συμπεριφέρεται σαν κανονική μεμβράνη.

Στην πραγματικότητα όμως, επιθυμητή είναι η μεμβρανική συμπεριφορά των κελυφών. Κατά συνέπεια, η καμπτική συμπεριφορά των κελυφών συνήθως αποφεύγεται.

Θεωρείται ένα απομονωμένο διαφορικό στοιχείο κελύφους, το οποίο οριοθετείται από ζεύγος αξόνων α και β (Σχ. 13). Σκοπός είναι η διαμόρφωση των εξισώσεων ισορροπίας, λαμβάνοντας υπόψιν τα εξωτερικά και εσωτερικά φορτία. Το επιφανειακό φορτίο p αναλύεται στις συνιστώσες p_1 , p_2 και p_3 στις τρεις διευθύνσεις e_1 , e_2 και e_3 . Οπότε:

$$p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 \quad (3.1)$$

Αντί να εξετασθεί η ισορροπία του τρισδιάστατου στοιχείου (Σχ. 13), ενδείκνυται η μελέτη της ισορροπίας του δισδιάστατου στοιχείου της μέσης επιφάνειας (Σχ. 14). Παρακάτω διατυπώνονται οι εξισώσεις δυνάμεων και ροπών:

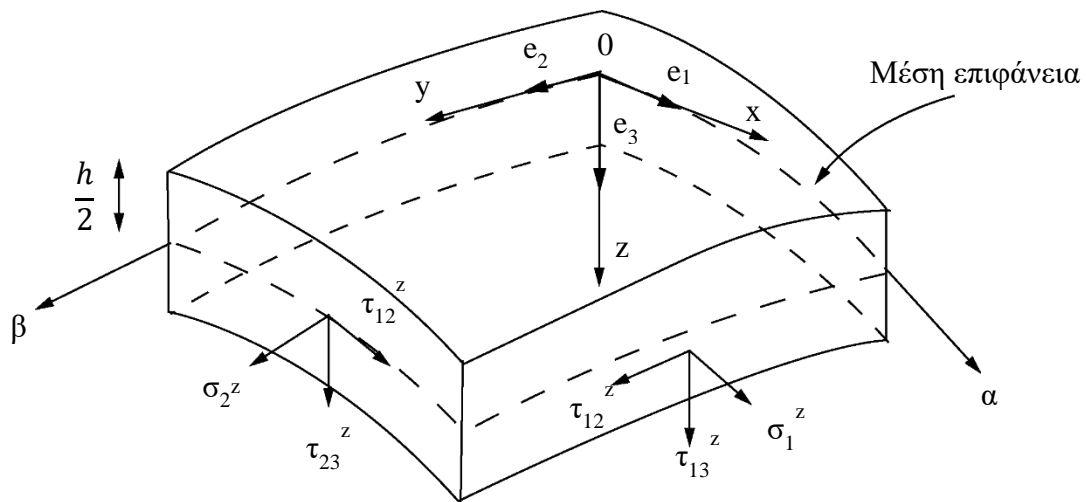
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta} (N_{21} A) + N_{12} \frac{\partial A}{\partial \beta} - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - Q_1 \frac{AB}{R_1} + p_1 AB &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (N_2 A) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_{12} B) + N_{21} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - Q_2 \frac{AB}{R_2} + p_2 AB &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (Q_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta} (Q_2 A) + N_1 \frac{AB}{R_1} + N_2 \frac{AB}{R_2} + p_3 AB &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_{12}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_2) - M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + M_{21} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - Q_2 AB = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (AM_{21}) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_1) - M_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + M_{12} \frac{\partial A}{\partial \beta} - Q_1 AB = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (AM_{21}) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_1) - M_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + M_{12} \frac{\partial A}{\partial \beta} - Q_1 AB = 0,$$

$$N_{12} - N_{21} - \frac{M_{12}}{R_1} + \frac{M_{21}}{R_2} = 0. \quad (3.3)$$



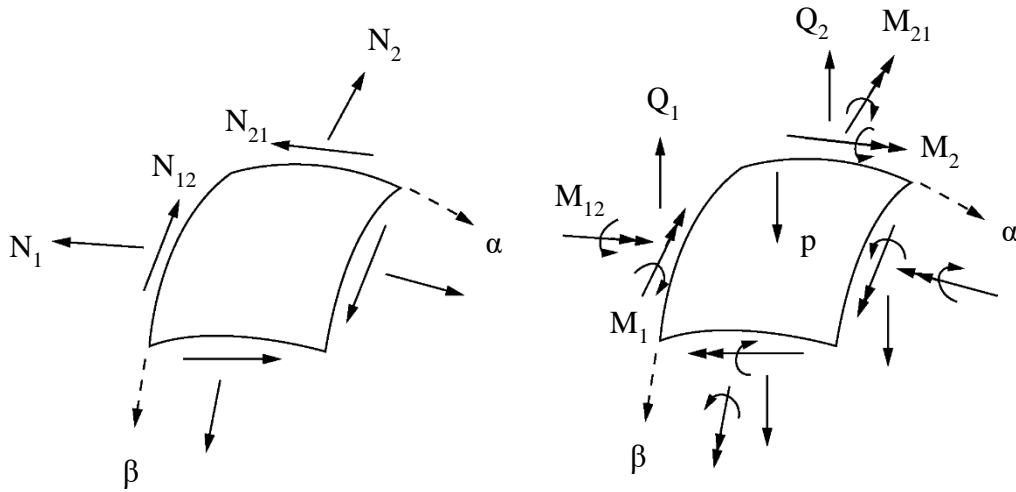
Σχ. 13

3.2.2 Μεμβρανική θεωρία κελυφών

Ένα λεπτό ελαστικό κέλυφος παραλαμβάνει τα εξωτερικά φορτία μέσω μεμβρανικής, καμπτικής και στρεπτικής δράσης. Είναι δυνατό για συγκεκριμένους τύπους γεωμετρίας, υπό κατάλληλες συνθήκες φόρτισης και στήριξης, να αναπτυχθούν πολύ μικρές ή και μηδενικές ροπές κάμψης και στρέψης, με αποτέλεσμα να είναι αποδεκτό να αμεληθούν. Πιο πρακτικά, τα συγκεκριμένα κελύφη μπορούν να αντισταθούν στα εξωτερικά φορτία μόνο μέσω των μεμβρανικών δυνάμεων. Σε αυτήν την περίπτωση για την ανάλυση κελυφών μπορεί να εφαρμοστεί και η Μεμβρανική θεωρία κελυφών.

Κατά συνέπεια, ισχύει:

$$M_1 = M_2 = H = 0. \quad (3.4)$$



Σχ. 14 Θετικές διευθύνσεις των συνισταμένων των τάσεων και ροπών

Η αμέληση των ροπών κάμψης οδηγεί στον εκμηδενισμό και των διατμητικών δυνάμεων. Επομένως ισχύει:

$$M_1 = M_2 = H = Q_1 = Q_2 = 0. \quad (3.5)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (A^2 S) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + ABp_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (N_2 B) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B^2 S) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + ABp_2 &= 0, \\ N_1 \frac{1}{R_1} + N_2 \frac{1}{R_2} + p_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

όπου $N_{12} = N_{21} = S$ μιας και $H = 0$.

Σε αυτό το σύστημα, ο αριθμός των αγνώστων είναι ίσος με τον αριθμό των εξισώσεων, οπότε το πρόβλημα της Μεμβρανικής θεωρίας των κελυφών είναι στατικά ορισμένο. Άρα αν τα εξωτερικά φορτία p_1 , p_2 και p_3 είναι γνωστά, οι μεμβρανικές δυνάμεις και οι τάσεις για το κέλυφος αυτό είναι καθορισμένα από τις εξισώσεις (3.6).

Έχοντας προσδιορίσει τις μεμβρανικές δυνάμεις, είναι εφικτό να υπολογιστούν οι μετατοπίσεις. Οι τρεις εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων είναι οι εξής:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh} (N_1 - \nu N_2), \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} (N_2 - \nu N_1),$$

$$\gamma_{12} = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{A} \right) = \frac{2(1+\nu)}{Eh} S.$$

Για απολύτως εύκαμπτα κελύφη, από τη στιγμή που δεν υπάρχει αντίσταση σε κάμψη, εφαρμόζεται μόνο η Μεμβρανική θεωρία. Επιπλέον, η συγκεκριμένη θεωρία επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί μόνο για κελύφη τα οποία δεν λυγίζουν, ή για κελύφη που εμφανίζουν πολύ μικρές καμπτικές ροπές.

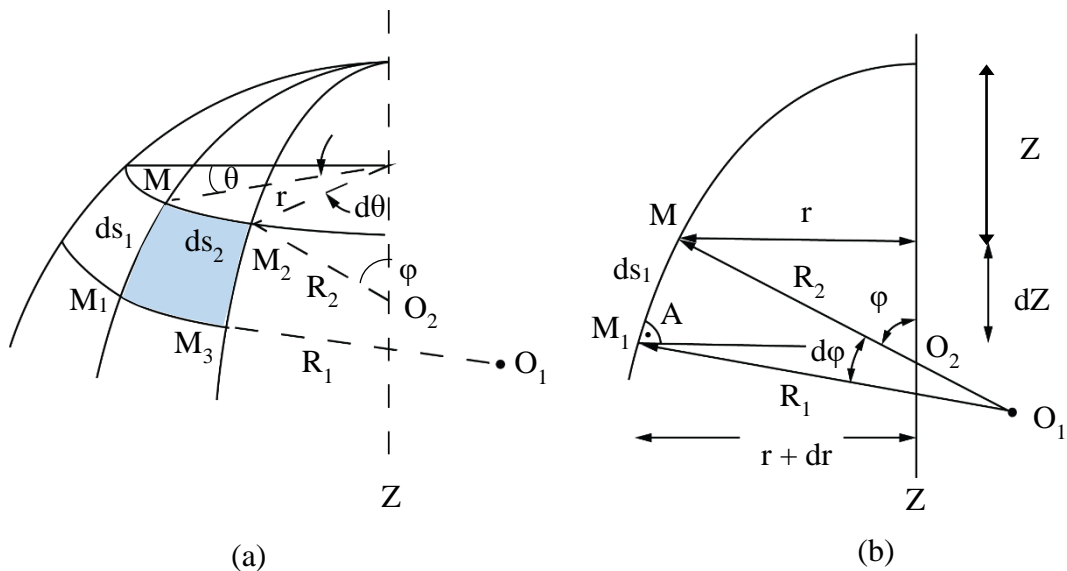
Επομένως, η Μεμβρανική θεωρία είναι ορθή υπό τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- οι καμπτικές και διατμητικές δυσκαμψίες είναι αμελητέες,
- η επιφάνεια είναι C^2 συνέχειας, δηλαδή η καμπυλότητα της επιφάνειας είναι παντού συνεχής,
- να μην εμφανίζονται απότομες αλλαγές στο πάχος του κελύφους,
- να μην υπάρχουν σημειακά φορτία αλλά μόνο κατανεμημένα
- και οι κατανεμημένες φορτίσεις κατά μήκος των πλευρών να αναπτύσσονται κατά τις κύριες διευθύνσεις της επιφάνειας. Τυπική περίπτωση τέτοιας φόρτισης αποτελούν οι αντιδράσεις στήριξης.

Στην προσπάθεια συγκεκριμενοποίησης και απλοποίησης της Μεμβρανικής θεωρίας, παρακάτω θα παρουσιαστούν οι εξισώσεις ισορροπίας κελυφών με τυπικές γεωμετρίες. Πιο συγκεκριμένα θα γίνει αναφορά σε κελύφη εκ περιστροφής, όπως ο κύλινδρος και η σφαίρα.

3.2.2.1 Μεμβρανική θεωρία για κελύφη εκ περιστροφής

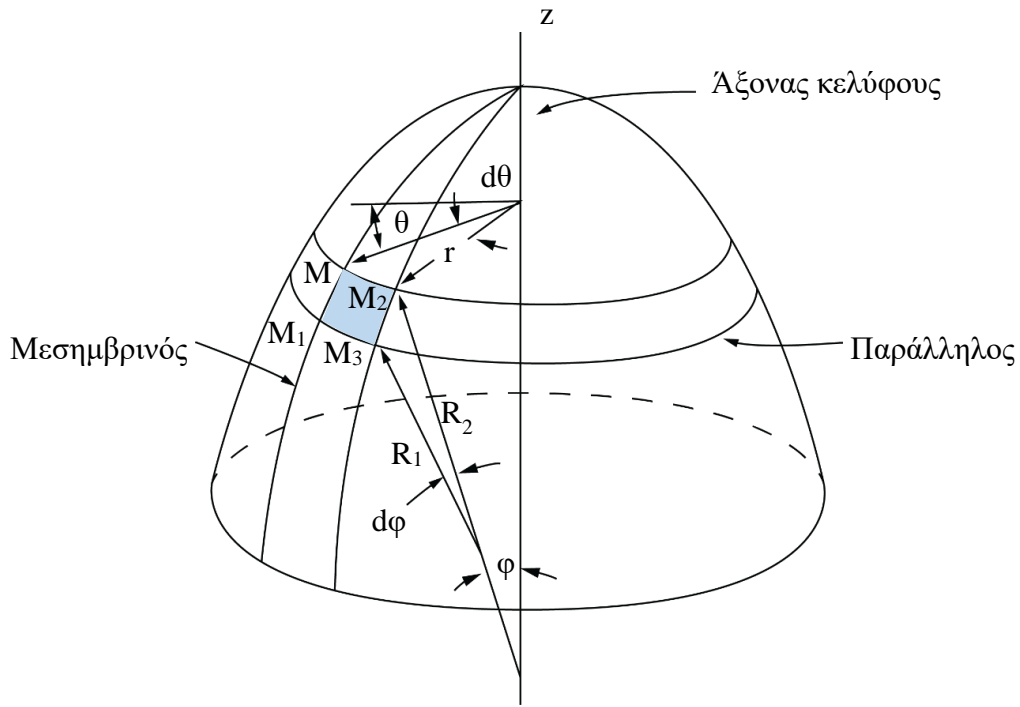
Ένα κέλυφος εκ περιστροφής (Σχ. 15) σχηματίζεται από την περιστροφή της μεσημβρινής καμπύλης (meridian curve) κατά τον άξονα που βρίσκεται εντός της καμπύλης, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση του άξονα του κελύφους Z.



Σχ. 15 Επιφάνεια εκ περιστροφής

Έστω ένα τυχαίο στοιχείο, τοποθετημένο στην επιφάνεια του κελύφους με σφαιρικές συντεταγμένες φ και θ , όπου φ είναι η μεσημβρινή γωνία, ορίζοντας τη θέση του σημείου κατά μήκος του μεσημβρινού, ενώ θ είναι η περιμετρική γωνία που προσδιορίζει τη θέση ενός σημείου κατά μήκος της παραλλήλου.

Το στοιχείο $MM_1M_2M_3$ (Σχ. 16) περιορίζεται από δύο μεσημβρινούς και δύο παράλληλα τμήματα, με κύριες ακτίνες καμπυλότητας R_1 και R_2 του μεσημβρινού και του παράλληλου κύκλου και r είναι η ακτίνα αυτού του παράλληλου κύκλου. Τα μήκη τόξου των πλευρών MM_1 και M_2M_3 στο σχήμα εκφράζονται ως $L_{MM_1} = r d\theta$ and $L_{M_2M_3} = R_1 d\varphi$.



Σχ. 16

Από το Σχ. 16 προκύπτει:

$$r = R_2 \sin\varphi \quad (\alpha)$$

$$AM_1 = dr = \frac{dr}{d\varphi} d\varphi \approx MM_1 \cos\varphi = R_1 d\varphi \cos\varphi \quad (3.8)$$

ή

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} (R_2 \sin\varphi) = R_1 \cos\varphi \quad (\beta)$$

Οπότε από τις εξισώσεις (3.8)α και (3.8)β προκύπτει:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{R_1}{R_2} \cot\varphi. \quad (\gamma)$$

Θεωρώντας $A = R_1$ και $B = r$, από τις εξισώσεις (3.6) και (3.8):

$$R_1 \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r N_1) - N_2 R_1 \cos\varphi + r R_1 p_1 = 0, \quad (3.9)$$

$$R_1 \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2 S) + r R_1 p_2 = 0,$$

$$\kappa_1 N_1 + \kappa_2 N_2 + p_3 = 0,$$

όπου:

$$\kappa_1 = \frac{1}{R_1} \quad \text{και} \quad \kappa_2 = \frac{1}{R_2}.$$

Η τελευταία εξίσωση της (3.9) είναι γνωστή ως εξίσωση Laplace.

Με τη χρήση των εξισώσεων (3.8), οι (3.9) γράφονται:

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial N_1}{\partial \varphi} + \frac{N_1 - N_2}{R_2} \cot \varphi + \frac{1}{R_2 \sin \varphi} \frac{\partial S}{\partial \theta} + p_1 = 0, \quad (\alpha)$$

$$\frac{1}{R_2 \sin \varphi} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial S}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \varphi}{R_2} S + p_2 = 0, \quad (\beta) \quad (3.10)$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + p_3 = 0 \quad (\gamma)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (3.10)γ για το N_2 και αντικαθιστώντας την στις εξισώσεις (3.10)α και (3.10)β προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \frac{\partial N_1}{\partial \varphi} + N_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cot \varphi + \frac{1}{R_2 \sin \varphi} \frac{\partial S}{\partial \theta} &= -p_1 - p_3 \cot \varphi, \\ -\frac{1}{R_1 \sin \varphi} \frac{\partial N_1}{\partial \theta} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial S}{\partial \varphi} + 2 \frac{\cot \varphi}{R_2} S &= \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial p_3}{\partial \theta} - p_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Οι μεταβλητές U και V αντικαθιστούν τις N_1 και S , ως εξής:

$$N_1 = \frac{U}{R_2 \sin^2 \varphi}, \quad S = \frac{V}{R_2^2 \sin^2 \varphi}. \quad (3.12)$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.11):

$$\begin{aligned} \frac{R_2^2 \sin \varphi}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \theta} &= -(p_3 \cos \varphi + p_1 \sin \varphi) R_2^3 \sin^2 \varphi, \\ -\frac{R_2}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \left(\frac{\partial p_3}{\partial \theta} - p_1 \sin \varphi \right) R_2^3 \sin^2 \varphi, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη εξίσωση (3.13) ως προς φ και τη δεύτερη ως προς θ , και αφαιρώντας τη δεύτερη από την πρώτη εξίσωση προκύπτει η διαφορική εξίσωση του U:

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_2^2 \sin \varphi}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{R_1 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = F(\theta, \varphi), \quad (3.14)$$

όπου,

$$F(\theta, \varphi) = - \frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[R_2^3 \sin^2 \varphi (p_3 \cos \varphi + p_1 \sin \varphi) \right] + R_2 \left(\frac{\partial p_2}{\partial \theta} \sin \varphi - \frac{\partial^2 p_3}{\partial \theta^2} \right). \quad (3.15)$$

Η εξίσωση (3.14) μπορεί να γραφτεί ως:

$$LU = F(\theta, \varphi) \quad (3.16)$$

όπου ο διαφορικός τελεστής L έχει την εξής μορφή:

$$L(\dots) \equiv \frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_2^2 \sin \varphi}{R_1} \frac{\partial (\dots)}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{R_1 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\dots). \quad (3.17)$$

Οι κινηματικές εξισώσεις για τις μετατοπίσεις ενός κελύφους εκ περιστροφής με σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{w}{R_1} &= \frac{1}{Eh} (N_1 - \omega N_2) = \varepsilon_1, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \cos \varphi - \frac{w}{R_2} &= \frac{1}{Eh} (N_1 - \omega N_2) = \varepsilon_2, \\ \frac{r}{R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{S}{Gh} = \gamma_{12}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

Εισάγοντας τις συναρτήσεις:

$$\xi = \frac{u}{\sin \varphi}, \quad \eta = \frac{v}{R_2 \sin \varphi}, \quad (3.19)$$

και κάνοντας διαδοχικές αντικαταστάσεις ώστε να απαλειφθεί η μετακίνηση και αργότερα η ξ , το σύστημα των εξισώσεων (3.18) μπορεί να μειωθεί σε μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως για την άγνωστη συνάρτηση η . Κατά συνέπεια προκύπτει:

$$L\eta = f(\theta, \varphi), \quad (3.20)$$

όπου:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \left\{ \frac{1}{Gh} \frac{\partial(R_2 S)}{\partial \varphi} - \frac{1}{Eh R_1} (R_1^2 + R_2^2 + 2\nu R_1 R_2) \frac{\partial N_1}{\partial \theta} - \frac{R_2}{Eh} (R_2 + \nu R_1) \frac{\partial p_3}{\partial \theta} \right\}, \quad (3.21)$$

και ο τελεστής L δίνεται από τη σχέση (3.17). Οι εξισώσεις (3.16) και (3.20) μπορούν να λυθούν με τη χρήση της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών.

Οι συνιστώσες p_1 , p_2 και p_3 του εξωτερικού κατανεμημένου φορτίου μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{1n} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} p_{1n}^* \sin n\theta, \\ p_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} \sin n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}^* \cos n\theta, \\ p_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{3n} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} p_{3n}^* \sin n\theta \end{aligned} \quad (3.22)$$

όπου τα p_{1n} , . . . , p_{3n}^* είναι συναρτήσεις του φ μόνο. Το πρώτο μέρος του κάθε αθροίσματος αντιπροσωπεύει το μέρος του φορτίου που είναι συμμετρικό, ενώ το δεύτερο αντιπροσωπεύει το αντισυμμετρικό τμήμα. Για την ανάλυση του κελύφους αρκεί να επιλυθεί κάθε αρμονική φόρτιση ξεχωριστά (τριγωνομετρική συνάρτηση), όπως για παράδειγμα $p_i^{(n)}$,

$$p_1^{(n)} = p_{1n} \cos n\theta, \quad p_2^{(n)} = p_{2n} \sin n\theta, \quad p_3^{(n)} = p_{3n} \cos n\theta \quad (3.23)$$

Στη συνέχεια, μια λύση μπορεί να προκύψει λόγω επαλληλίας, αθροίζοντας τις μεμβρανικές δυνάμεις, μετατοπίσεις κλπ. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.23) στην εξίσωση (3.14) και εισάγοντας την έκφραση:

$$U = U_n \cos n\theta, \quad (3.24)$$

προκύπτει η γενική περίπτωση, κανονικών διαφορικών εξισώσεων με μη σταθερούς συντελεστές:

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{R_2^2 \sin \varphi}{R_1} \frac{dU_n}{d\varphi} \right) - \frac{n^2}{R_1 \sin^2 \varphi} U_n = F_n(\varphi), \quad (3.25)$$

όπου:

$$F_n(\varphi) = -\frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} [(p_{3n} \cos \varphi + p_{1n} \sin \varphi) R_2^3 \sin^2 \varphi] + R_{2n} (p_{2n} \sin \varphi + n p_{3n}) \quad (3.26)$$

Η έκφραση για το V μπορεί να είναι η ακόλουθη:

$$V = V_n \sin n\theta. \quad (3.27)$$

Λύνοντας την εξίσωση (3.25) και υπολογίζοντας την έκφραση U_n μπορούν να εισαχθούν οι εκφράσεις (3.23), (3.24) και (3.27) στην εξίσωση (3.13). Επιλύοντας την εξίσωση, προκύπτει:

$$V_n = -\frac{R_2^2 \sin \varphi}{n R_1} \frac{dU_n}{d\varphi} - (p_{3n} \cos \varphi + p_{1n} \sin \varphi) R_2^3 \sin^2 \varphi. \quad (3.28)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.12) και την (3.10)γ, οι μεμβρανικές δυνάμεις για την υπόψη αρμονική φόρτιση, προσδιορίζεται ως εξής:

$$N_1^{(n)} = N_{1n} \cos n\theta, \quad N_2^{(n)} = N_{2n} \cos n\theta, \quad S^{(n)} = S_n \sin n\theta. \quad (3.29)$$

Ακολουθεί ο προσδιορισμός των μετατοπίσεων. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού, παρουσιάζεται ξανά η συνάρτηση η :

$$\eta^{(n)} = \eta_n \sin n\theta \quad (3.30)$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις (3.30), (3.29) και (3.23) στη (3.20), προκύπτει μια συνήθης διαφορική εξίσωση για το η_n . Αντικαθιστώντας το U_n με η_n και $F_n(\varphi)$ με $f_n(\varphi)$, διαμορφώνεται:

$$f_n(\varphi) = \frac{1}{R_1 R_1 \sin \varphi} \left[\frac{1}{Gh} \frac{dR_2 S_n}{d\varphi} + n \frac{N_{1n}}{Eh R_1} (R_1^2 + R_2^2 + 2\theta R_1 R_2) + \frac{R_2}{Eh} (R_2 + \nu R_1) n p_{3n} \right] \quad (3.31)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης για το η_n περιλαμβάνει τέσσερις σταθερές ολοκλήρωσης: δύο από την εξίσωση (3.25) για τις δυνάμεις και δύο από την εξίσωση των μετατοπίσεων.

Χρησιμοποιώντας τη λύση που προκύπτει από το η_n , σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (3.18) και (3.19), εισάγοντας τις μετατοπίσεις με αυτή την μορφή:

$$u^{(n)} = u_n \cos n\theta, \quad v^{(n)} = v_n \sin n\theta, \quad w^{(n)} = w_n \cos n\theta, \quad (3.32)$$

μπορούν να καθοριστούν οι εκφράσεις των u_n , v_n και w_n καταλήγοντας στον υπολογισμό των μετατοπίσεων καθ' αυτών. Όπου η μετατόπιση:

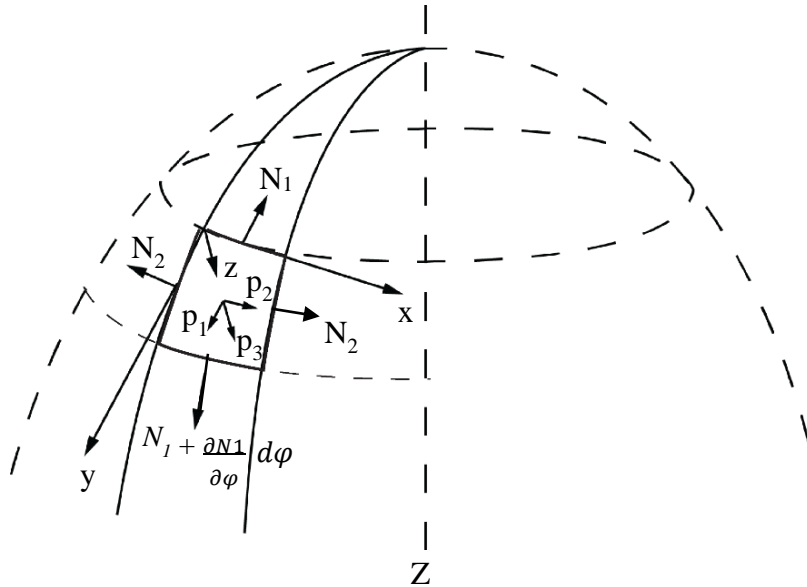
- u είναι εφαπτόμενη στη μεσημβρινή καμπύλη,
- v είναι κατά μήκος της μεσημβρινής καμπύλης και
- w είναι κάθετη στη μεσημβρινή καμπύλη.

3.2.2.2 Κελύφη εκ περιστροφής υπό συμμετρική φόρτιση

Λαμβάνεται η θεώρηση ότι τα κελύφη εκ περιστροφής υπόκεινται σε συμμετρικές φορτίσεις ως προς τον άξονα του κελύφους (όπως για παράδειγμα ο z). Παραδείγματα αυτών των φορτίσεων αποτελούν το ίδιο βάρος και το φορτίο του χιονιού. Κατά συνέπεια οι διαφορικές εξισώσεις της Μεμβρανικής θεωρίας απλοποιούνται κατάλληλα. Ως αποτέλεσμα αυτού, οι παράγωγοι ως προς το θ εξαλείφονται και οι μεμβρανικές δυνάμεις και οι μετατοπίσεις δεν αλλάζουν κατά την περιμετρική διεύθυνση. Τα εξωτερικά εφαρμοζόμενα φορτία ανά μονάδα επιφάνειας της μέσης επιφάνειας προσδιορίζονται σε οποιοδήποτε σημείο με τις συνιστώσες p_1 και p_3 κατά τη διεύθυνση των τοπικών αξόνων y και z αντίστοιχα, όπου ο άξονας y των σημείων είναι εφαπτόμενος κατά μήκος του μεσημβρινού και ο z άξονας είναι κάθετος ως προς τη μέση επιφάνεια στο σημείο αυτό (Σχ. 17). Η συνιστώσα p_2 , που δρα κατά μήκος του άξονα x , λαμβάνεται ίση με μηδέν. Η παρουσία αυτού του στοιχείου υποδηλώνει ότι το κέλυφος είναι στραμμένο ως προς τον άξονά του. Αν το $p_2=0$ και οι δυνάμεις παρειάς στην περιφερειακή κατεύθυνση είναι επίσης μηδενικές, τότε όπως υποδηλώνεται από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος εξισώσεων (3.9), στην περίπτωση αξονικής συμμετρικής φόρτισης:

$$S = N_{12} = N_{21} = 0 \quad (3.33)$$

Οι μη μηδενικές μεμβρανικές δυνάμεις παρουσιάζονται στο Σχ. 17.



Σχ. 17 Μη μηδενικές μεμβρανικές δυνάμεις

Η πρώτη και τρίτη εξίσωση από τις εξισώσεις (3.9), μετά από τροποποιήσεις, απαλείφοντας το N_2 και λαμβάνοντας υπόψιν τις εξισώσεις (3.8), προκύπτει:

$$\frac{d}{d\varphi} (N_1 r \sin\varphi) + r R_1 (p_1 \sin\varphi + p_3 \cos\varphi) = 0. \quad (3.34)$$

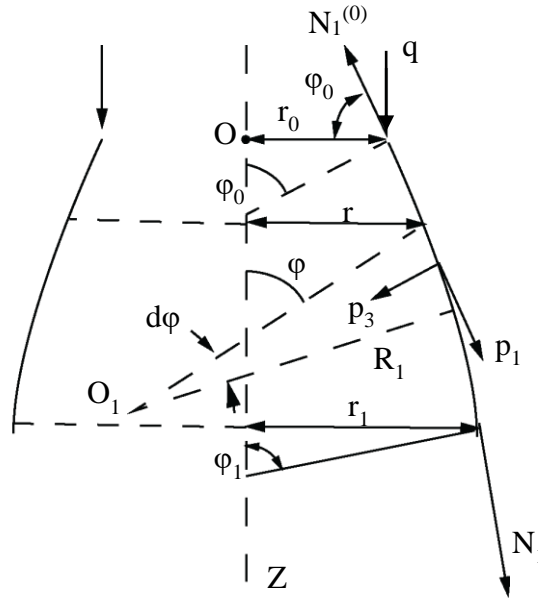
Παραγωγίζοντας την εξίσωση από φ_0 μέχρι φ , τότε:

$$[N_1 r \sin\varphi]_{\varphi_0}^{\varphi} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} r R_1 (p_1 \sin\bar{\varphi} + p_3 \cos\bar{\varphi}) d\bar{\varphi} \quad (3.35)$$

ή

$$N_1 r \sin\varphi = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} r R_1 (p_1 \sin\bar{\varphi} + p_3 \cos\bar{\varphi}) d\bar{\varphi} + N_1^{(0)} b \sin\varphi_0 \quad (3.36)$$

όπου φ_0 είναι η γωνία που αντιστοιχεί στην άκρη του κελύφους (όπως για παράδειγμα στην κορυφή) όπου οι συνθήκες στήριξης είναι προκαθορισμένες: $N_1^{(0)}$ και $r_0 = b$ είναι η δύναμη εφαπτόμενη στο μεσημβρινό, και η ακτίνα του παράλληλου κύκλου, στην αιχμή του κελύφους $\varphi = \varphi_0$ (Σχ. 18) και η $\bar{\varphi}$ είναι μια εικονική μεταβλητή (dummy variable).



Σχ. 18

Επιλύοντας την εξίσωση (3.36) ως προς N_1 και λαμβάνοντας υπόψιν την εξίσωση (3.8)α, προκύπτει:

$$N_1 = - \frac{1}{R_2 \sin^2 \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} R_1 R_2 (p_1 \sin \bar{\varphi} + p_3 \cos \bar{\varphi}) \sin \bar{\varphi} d\bar{\varphi} + \frac{N_1^{(0)} R_2^{(0)} \sin^2 \varphi_0}{R_2 \sin^2 \varphi} \quad (3.37)$$

όπου $b = R_2^{(0)} \sin \varphi_0$. Το $R_2^{(0)}$ είναι η βασική ακτίνα καμπυλότητας στην παρειά του κελύφους $\varphi = \varphi_0$.

Ένα κέλυφος, πέρα από τις συνιστώσες (components) του επιφανειακού φορτίου p_1 και p_3 , υπόκειται και σε ένα γραμμικό φορτίο q ανά μονάδα μήκους του παράλληλου κύκλου, $\varphi = \varphi_0$. Όπως για παράδειγμα, το βάρος του φεγγίτη ενός θόλου. Από το Σχ. 18 είναι προφανές ότι $N_1^{(0)} = -q / \sin \varphi_0$, το οποίο κάνοντάς το αντικατάσταση στην εξίσωση (3.36) δίνει:

$$N_1 r \sin \varphi = - \left[\int_{\varphi_0}^{\varphi} r R_1 (p_{1,y} \sin \bar{\varphi} + p_{3,z} \cos \bar{\varphi}) d\bar{\varphi} + qb \right]. \quad (3.38)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με 2π :

$$N_1 (2\pi r) \sin \varphi = -2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} r R_1 (p_1 \sin \bar{\varphi} + p_3 \cos \bar{\varphi}) d\bar{\varphi} - 2\pi b q. \quad (3.39)$$

Από το Σχ. 18 προκύπτει το συμπέρασμα ότι το αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι η κατακόρυφη συνιστώσα των μεμβρανικών δυνάμεων N_1 κατά μήκος του παράλληλου κύκλου, που καθορίζεται από τη γωνία φ . Το $2\pi R_1 d\varphi$ αποτελεί την περιοχή ενός στοιχειώδους δακτύλου που αντιστοιχεί σε απειροελάχιστη γωνία $d\varphi$, και $p_1 \sin \varphi$ και $p_3 \cos \varphi$ είναι οι κατακόρυφες συνιστώσες του επιφανειακού φορτίου. Συνεπώς, η ολοκλήρωση της εξίσωσης (3.39) αντιπροσωπεύει την κατακόρυφη συνιστώσα

του επιφανειακού φορτίου που αντιστοιχεί σε στοιχειώδες δακτύλιο $d\varphi$. Ολοκληρώνοντας ως προς φ , υπολογίζεται η κατακόρυφη συνιστώσα του αποτελέσματος όλων των επιφανειακών φορτίων που ασκούνται στο κέλυφος ακριβώς πάνω από τον παράλληλο κύκλο φ όπου πρόκειται να προσδιοριστεί η N_1 . Ως εκ τούτου η (3.39) ξαναγράφεται ως εξής:

$$N_1 (2\pi r) \sin\varphi = -F,$$

άρα:

$$N_1 = -\frac{F}{2\pi r \sin\varphi} \quad (3.40)$$

όπου:

$$F = 2\pi \left[\int_{\varphi_e}^{\varphi} r R_1 (p_1 \sin \bar{\varphi} + p_3 \cos \bar{\varphi}) d\bar{\varphi} + qb \right] \quad (3.41)$$

είναι οι κατακόρυφη συνιστώσα όλων των επιβαλλόμενων φορτίων πάνω στον παράλληλο κύκλο φ του κελύφους όπου πρόκειται να υπολογιστεί η N_1 . Η εξίσωση (3.39) αντιπροσωπεύει την κατάσταση στατικής ισορροπίας, δηλαδή το άθροισμα των δυνάμεων στη διεύθυνση του άξονα του κελύφους είναι μηδενικό. Ένα κέλυφος κλειστό στην κορυφή του έχει $\varphi_0 = 0$ και η N_1 γίνεται:

$$N_1 = -\frac{1}{r \sin \varphi} \int_0^{\varphi} r R_1 (p_1 \sin \bar{\varphi} + p_3 \cos \bar{\varphi}) d\bar{\varphi} \quad (3.42)$$

Από την εξίσωση (3.9) καθορίζεται η N_2 :

$$N_2 = -R_2 \left(p_3 + \frac{N_1}{R_1} \right). \quad (3.43)$$

Συνεχίζοντας με τις μετατοπίσεις σε περίπτωση συμμετρικά φορτιζόμενου κελύφους εκ περιστροφή. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση, $v = 0$ και $\gamma_{12} = 0$ οπότε το σύστημα εξισώσεων (3.18) απλοποιείται:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \frac{du}{d\varphi} - \frac{w}{R_1} &= \frac{1}{Eh} (N_1 - \nu N_2) = \varepsilon_1, \\ \frac{u}{R_2} \cot \varphi - \frac{w}{R_2} &= \frac{1}{Eh} (N_2 - \nu N_1) = \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (3.44)$$

όπου u και w είναι οι μετατοπίσεις κατά μήκος της εφαπτόμενης και της κάθετης στην καμπύλη του μεσημβρινού (ή κατά μήκος των y και z αξόνων, όπως απεικονίζεται στο Σχ. 17), αντίστοιχα. Γνωρίζοντας τα N_1 και N_2 για δεδομένο πρόβλημα κελύφους, εύκολα μπορούν να υπολογιστούν οι ε_1 και ε_2 , και στη συνέχεια τα u και w από τις εξισώσεις (3.44). Οπότε, απαλείφοντας το w από τις εξισώσεις αυτές οδηγείται σε:

$$\frac{1}{R_2} \left(\frac{du}{d\varphi} - u \cot \varphi \right) = \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (3.45)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το $R_2 \csc \varphi$, και μετά από ορισμένες απλοποιήσεις προκύπτει:

$$\frac{d}{d\varphi} (u \csc \varphi) = f_1(\varphi), \quad (\alpha) \quad (3.46)$$

όπου:

$$f_1(\varphi) = \frac{R_2}{\sin \varphi} \left(\frac{R_1}{R_2} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right) \quad (\beta)$$

Προκειμένου να προσδιοριστεί η $f_1(\varphi)$ απαιτείται πρώτα να καθοριστούν τα N_1 και N_2 . Παραγωγίζοντας την εξίσωση (3.46)α, προκύπτει η παρακάτω έκφραση του w :

$$u = \sin \varphi \int f_1(\varphi) d\varphi + C_1 \sin \varphi, \quad (3.47)$$

όπου το C_1 είναι σταθερά ολοκλήρωσης. Κάνοντας αντικατάσταση του u από την εξίσωση (3.47) στην δεύτερη εξίσωση (3.44), προκύπτει η έκφραση του w :

$$w = \cos \varphi \int f_1(\varphi) d\varphi + C_1 \cos \varphi - \varepsilon_2 R_2. \quad (3.48)$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης καθορίζεται σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες είτε της κορυφής είτε της βάσης του κελύφους: για $\varphi = \varphi_0$ ή $\varphi = \varphi_1$.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί πως οι μετατοπίσεις w κατά την κάθετη στην επιφάνεια διεύθυνση για διάφορα σημεία του κελύφους, συμπεριλαμβανομένων και των άκρων, συνδέονται με τις εφαπτομενικές μετατοπίσεις στη μεσημβρινή u . Για αυτόν τον λόγο, σε μεμβρανικά κελύφη, οι οριακές συνθήκες δεν πρέπει να επιβάλλονται ταυτόχρονα και στο u και στο w .

Σε αναλύσεις κατασκευών που αποτελούνται από κελύφη λεπτών επιφανειών εκ περιστροφής και άλλων δομικών μελών, οι οριζόντιες μετατοπίσεις και οι στροφές εφαπτόμενες στο μεσημβρινό του κελύφους έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις συνθήκες στήριξής του.

Ξεκινώντας με τον καθορισμό της συστολής ή διαστολής στα άκρα του κελύφους, ξ :

$$\xi = r \varepsilon_2 = \frac{r}{Eh} (N_2 - \nu N_1) \quad (\alpha)$$

ή

$$\xi = \frac{R_2 \sin \varphi}{Eh} (N_2 - \nu N_1) \quad (\beta) \quad (3.49)$$

Προσαρμόζοντας την εξίσωση σε κέλυφος με $R_1 = R_2 = R$, γίνεται:

$$\xi = \frac{R \sin \varphi}{Eh} (N_2 - \nu N_1) \quad (\gamma)$$

Όπως για παράδειγμα, στην περίπτωση προσδιορισμού της οριζόντιας διαστολής του άκρου της σφαίρας $\varphi = \varphi_1$ υπό εσωτερική πίεση p . Λαμβάνοντας υπόψιν τη συμμετρία του κελύφους και του φορτίου, $N_1 = N_2 = N$, και θέτοντας $p_3 = p$ λόγω εσωτερικής πίεσης, η τρίτη εξίσωση της (3.9) γράφεται ως εξής: $N = p R/2$.

Με αντικατάσταση της N στην εξίσωση (3.49)α:

$$\xi = p \frac{R^2 \sin \varphi_1}{2Eh} (1 - \nu) \quad (\alpha)$$

Σε περίπτωση ημισφαιρίου, με $\varphi_1 = \pi/2$, τότε το ξ γράφεται:

$$\xi = p \frac{R^2}{2Eh} (1 - \nu) \quad (\beta) \quad (3.50)$$

Συνεχίζοντας με τον καθορισμό της στροφής εφαπτόμενης στο μεσημβρινό, βγαίνει το συμπέρασμα πως ισούται με τη στροφή κάθετη στη μέση επιφάνεια κατά τη μετατόπιση κατά μήκος του άξονα, εφαπτόμενου στον παράλληλο κύκλο. Οπότε:

$$\theta_1 = \frac{1}{R_1} \left(u + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \quad (\alpha) \quad (3.51)$$

Η παραγωγή της εξίσωσης (3.48) βγάζει:

$$\frac{dw}{d\varphi} = \cos \varphi \cdot f_1(\varphi) - \sin \varphi \int f_1(\varphi) d\varphi - C_1 \sin \varphi - \varepsilon_2 \frac{dR_2}{d\varphi} - R_2 \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi}. \quad (\beta)$$

Η μετατόπιση w δίνεται από την εξίσωση (3.47). Εισάγοντάς της τα αριστερά μέλη των εξισώσεων (3.51)β και (3.48), η θ_1 γράφεται:

$$\theta_1 = \frac{1}{R_1} \left(\cos \varphi \cdot f_1(\varphi) - \varepsilon_2 \frac{dR_2}{d\varphi} - R_2 \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} \right),$$

και κάνοντας αντικατάσταση το $f_1(\varphi)$ από τις εξισώσεις (3.46)β προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$\theta_1 = \cot \varphi \left(\varepsilon_1 - \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_2 \right) - \frac{\varepsilon_2}{R_1} \frac{dR_2}{d\varphi} - \frac{R_2}{R_1} \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} \quad (\alpha) \quad (3.52)$$

Στην ειδική περίπτωση σφαιρικού κελύφους με $R_1 = R_2 = R$, τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\theta_1 = \cot \varphi (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi}. \quad (\beta)$$

Εισάγοντας και τις παραμορφώσεις σε όρους $N_{1,\varphi}$ και $N_{2,\theta}$ στην εξίσωση, προκύπτει η παρακάτω έκφραση της θ_1 για σφαίρα:

$$Eh\theta_1 = \cot \varphi (1 + \nu) (N_{1,\varphi} - N_{2,\theta}) - \frac{dN_{2,\theta}}{d\varphi} + \nu \frac{dN_{1,\varphi}}{d\varphi}. \quad (\gamma)$$

3.2.2.3 Οροφή κυλινδρικού κελύφους

Τα κυκλικά κυλινδρικά κελύφη χρησιμοποιούνται συχνά στις κατασκευές ως οροφές. Μια τέτοια δομή οροφής αποτελείται από ένα ανοιχτό κυλινδρικό κέλυφος που έχει δυο καμπυλόγραμμες και δύο ευθείες άκρες, όπως εικονίζεται στο Σχ. 19 α. Ένας τρόπος στήριξης αυτών των κελυφών είναι κατά μήκος των καμπύλων γραμμών μέσω της χρήσης άκαμπτων καμάρων (αψίδων), πλαίσια ή συμπαγή στηρίγματα στον τοίχο τα οποία είναι άκαμπτα έναντι παραμορφώσεων στο επίπεδό τους αλλά είναι σχεδόν εύκαμπτα για παραμορφώσεις κάθετες στο επίπεδό τους, τα οποία καλούνται διαφράγματα. Ο άλλος τρόπος στήριξης είναι κατά μήκος των ευθύγραμμων άκρων με την τοποθέτηση ακραίων δοκών.

Έστω ένα κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος μήκους L που υπόκειται στο ίδιο του βάρος (Σχ. 19 α). Εάν p είναι το ίδιο βάρος ανά μονάδα επιφάνειας, μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες, η μια κάθετη στην επιφάνεια του κελύφους p_3 και η άλλη κάθετη στην περιφερειακή κατεύθυνση, δηλαδή εφαπτόμενη στην επιφάνεια του κελύφους p_2 .

Οπότε:

$$p_3 = p \cos\theta, \quad p_2 = p \sin\theta, \quad (3.53)$$

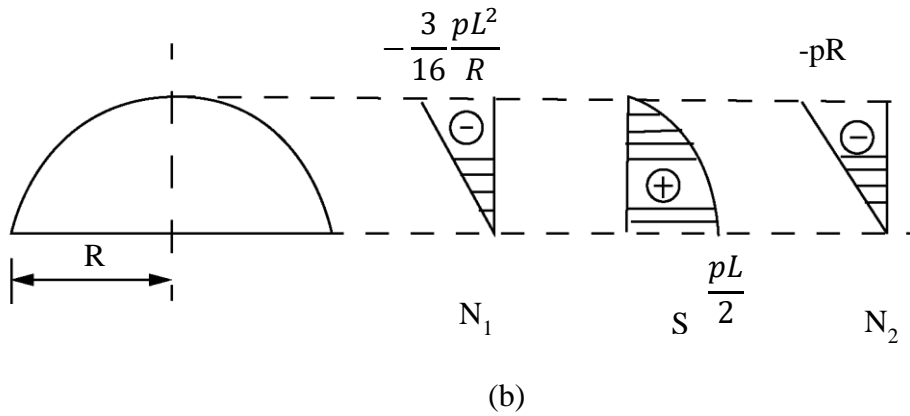
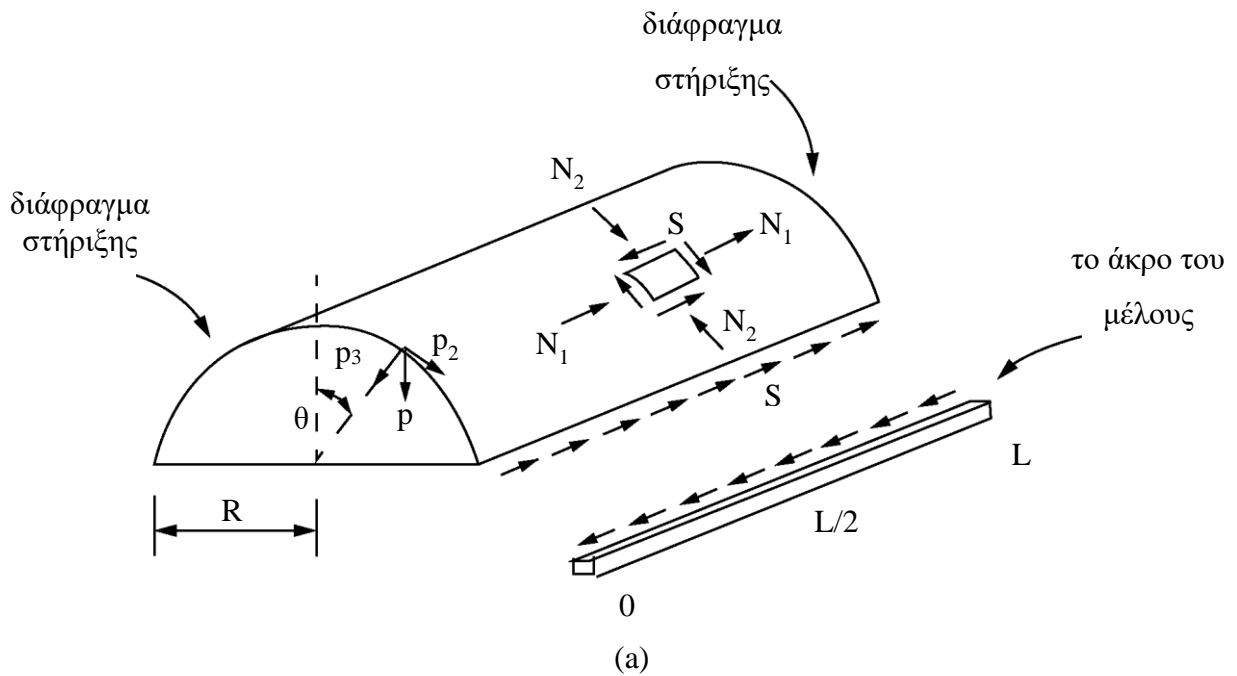
$$N_2 = -pR \cos\theta,$$

$$S = -x F(\theta) + f_1(\theta), \quad (3.54)$$

$$N_1 = \frac{x^2}{2R} \frac{dF}{d\theta} - \frac{x}{R} \frac{df_1}{d\theta} + f_2(\theta)$$

όπου:

$$F(\theta) = p_2 - \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} (p_3 R). \quad (3.55)$$



Σχ. 19

Οι άγνωστες συναρτήσεις $f_1(\theta)$ και $f_2(\theta)$ μπορούν να αξιολογηθούν από τις προκαθορισμένες συνοριακές συνθήκες των άκρων του κελύφους, για $x = 0$ και $x = L$. Οι παραπάνω συνθήκες για κελύφη που στηρίζονται σε διαφράγματα στις άκρες, για $x = 0$ και $x = L$ μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

$$N_1 = 0 \Big|_{x=0}^{x=L} \quad (\alpha) \quad (3.56)$$

Εισάγοντας αυτά τα δύο στην τρίτη εξίσωση (3.53), για $x = 0$ και $x = L$ οι μεμβρανικές δυνάμεις κατά το μήκος L προκύπτουν:

$$N_1(0) = f_2(\theta) = 0, \quad N_1(L) = \frac{L^2}{2R} \frac{dF}{d\theta} - \frac{L}{R} \frac{df_1}{d\theta} = 0.$$

Ακολουθώντας,

$$f_1(\theta) = \frac{L}{2} F(\theta) + C. \quad (3.57)$$

Για δεδομένη φόρτιση κατά μήκος του x , αναμένεται οι μεμβρανικές δυνάμεις N_1 και N_2 να είναι συμμετρικές, ενώ το S θα είναι αντισυμμετρικό ως προς το μέσον του ανοίγματος του κελύφους, όπως για παράδειγμα για $x = L/2$:

$$S = 0 \Big|_{x=L/2} \quad (\beta) \quad (3.56)$$

Αντικαθιστώντας τα p_3 και p_2 από εξίσωση (3.53) στην εξίσωση (3.55), προκύπτει:

$$F(\theta) = p \sin\theta + \frac{p}{R} R \sin\theta = 2p \sin\theta, \quad (3.58)$$

και εισάγοντας τα παραπάνω σε συνδυασμό με την εξίσωση (3.57) στην δεύτερη εξίσωση της (3.54), η S γράφεται ως εξής:

$$S = -2p x \sin\theta + \frac{L}{2} R \sin\theta = 2p \sin\theta, \quad (3.59)$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3.56)β: $C = 0$.

Τελικά, οι μεμβρανικές δυνάμεις για την προαναφερθείσα φόρτιση γράφονται ως:

$$N_1 = -\frac{px}{R} (L-x) \cos\theta, \quad N_2 = -p R \cos\theta, \quad S = 2p \left(\frac{L}{2} - x\right) \sin\theta, \quad (3.60)$$

3.2.2.4 Κύλινδρος

Οι κύλινδροι (Σχ. 20) αποτελούν παραδείγματα επιφανειών με μηδενική καμπυλότητα Gauss. Αυτό οφείλεται στο ότι η ακτίνα καμπυλότητας είναι $r_1 = \infty$, $r_2 = r_0 = a$ και $\varphi = \text{const} = \frac{\pi}{2}$. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει καμπυλότητα στη διεύθυνση του μεσημβρινού, ορίζεται η παράμετρος s που τρέχει κατά μήκος του διαμήκους άξονα του κυλινδρικού κελύφους. Οι εκφράσεις που προκύπτουν για τον κύλινδρο του Σχ. 20, συνοψίζονται παρακάτω:

Μεμβρανικές δυνάμεις:

$$N_1 = - \int_{s_0}^s p_s ds \quad (3.61)$$

$$N_2 = \alpha p_z \quad (3.62)$$

Μετατοπίσεις:

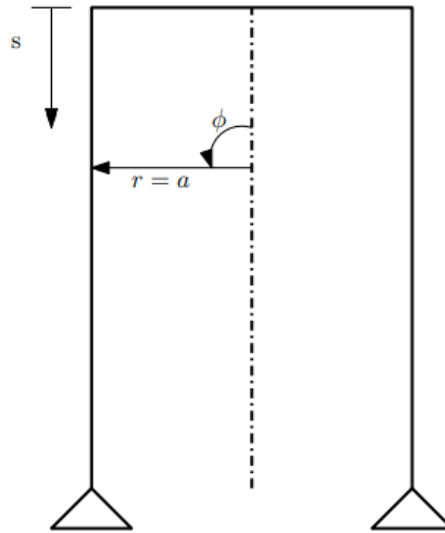
$$u = \frac{1}{Eh} \int_0^s (N_1 - \nu N_2) ds + c \quad (3.63)$$

$$w = \frac{1}{Eh} (N_2 - \nu N_1) \quad (3.64)$$

Σχετικές μετατοπίσεις:

$$\delta = w = \frac{\alpha}{Eh} (N_2 - \nu N_1) \quad (3.65)$$

$$V = \frac{dw}{ds} = \frac{\alpha}{Eh} \frac{d}{ds} (N_2 - \nu N_1) \quad (3.66)$$



Σχ. 20 Κυλινδρική διαμόρφωση

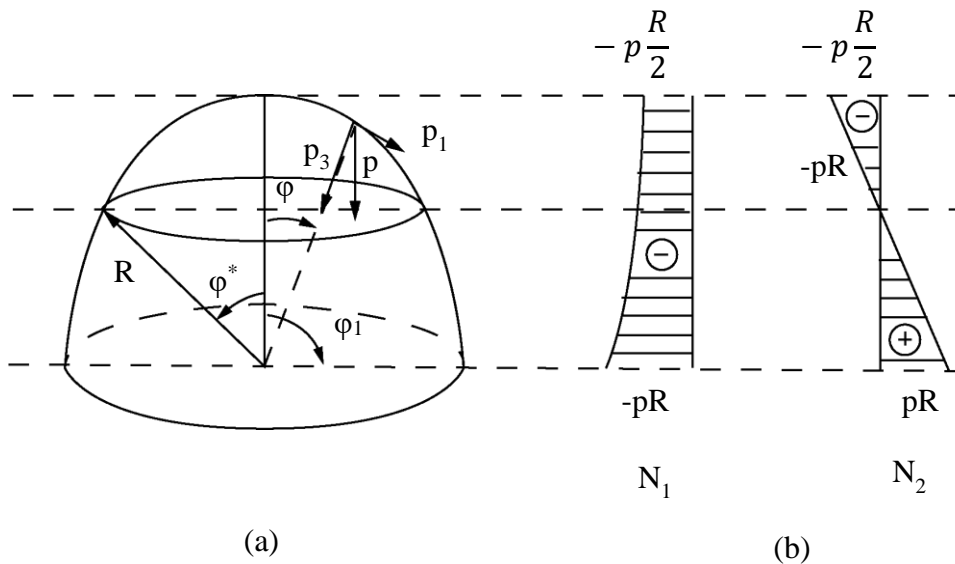
3.2.2.5 Σφαιρικοί αξονοσυμμετρικά φορτιζόμενοι θόλοι: κινητό φορτίο ή φορτίο χιονιού

Το κινητό φορτίο ή το χιόνι εφαρμόζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο πάνω στην επίπεδη περιοχή της επιφάνειας του κελύφους σε αντίθεση με το φορτίο του ίδιου βάρους, το οποίο είναι κατανεμημένο πάνω σε όλη την επιφάνεια. Αν q είναι το φορτίο ορισμένο στην επίπεδη περιοχή (Σχ. 22a), προκύπτει ένα ισοδύναμο φορτίο p ορισμένο στην επιφάνεια του κελύφους:

$$pRd\varphi = (qRd\varphi)\cos\varphi \quad \text{ή} \quad p = q \cos\varphi. \quad (3.67)$$

Οπότε από τις εξισώσεις των φορτίων $p_3 = p \cos\varphi$ και $p_1 = p \sin\varphi$, όπου p είναι το ίδιο βάρος, p_1 η συνιστώσα στην εφαπτομενική διεύθυνση και p_3 η συνιστώσα κάθετη στην επιφάνεια του κελύφους (Σχ. 21), προκύπτει:

$$p_3 = q \cos^2\varphi, \quad p_1 = q \sin\varphi \cos\varphi. \quad (3.68)$$



Σχ. 21 Ίδιο βάρος σε σφαιρικό αξονοσυμμετρικά φορτιζόμενο θόλο

Αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στην εξίσωση (3.42) και ορίζοντας ξανά $R_1 = R_2 = R$ καθώς και $r = R \sin \varphi$, οι μεσημβρινές δυνάμεις προκύπτουν:

$$N_1 = -\frac{1}{R \sin^2 \varphi} \int_0^\varphi q R^2 (\sin^2 \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} + \cos^3 \bar{\varphi}) \sin \bar{\varphi} d\bar{\varphi}$$

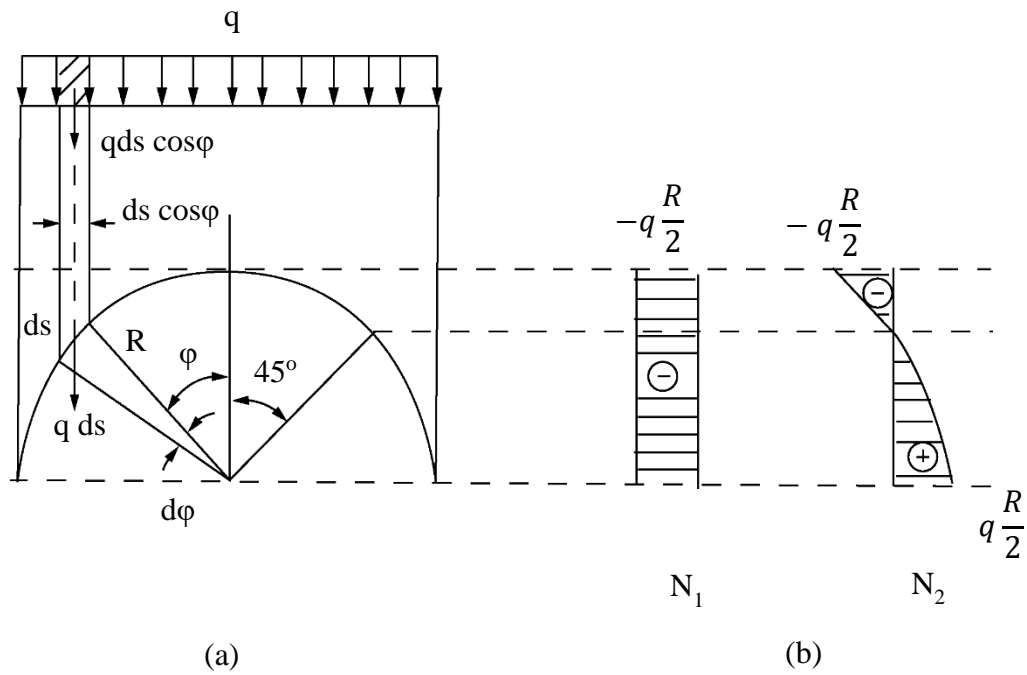
Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά ώστε τελικά να ισχύει:

$$N_1 = -\frac{q R}{2}. \quad (3.69)$$

Αντικαθιστώντας τη N_1 στην εξίσωση (3.43), υπολογίζεται η περιμετρική δύναμη N_2 :

$$N_2 = -\frac{q R}{2} \cos 2\varphi. \quad (3.70)$$

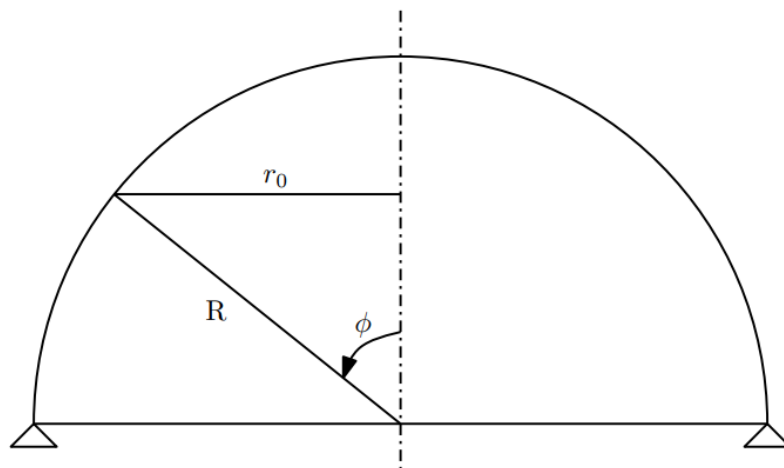
Οι μεσημβρινές και οι περιμετρικές κατανομές δυνάμεων, παρουσιάζονται στο Σχ. 22 b. Μέσω αυτών των διαγραμμάτων γίνεται εμφανές πως η N_1 είναι θλιπτική στο θόλο για φ μεταξύ 0° και 90° , ενώ το N_2 είναι εφελκυστική για γωνία φ μεγαλύτερη των 45° .



Σχ. 22 Μεσημβρινές και οι περιμετρικές κατανομές δυνάμεων σε σφαιρικό αξονοσυμμετρικά φορτιζόμενο θόλο,

3.2.2.6 Σφαίρα

Οι σφαίρες (Σχ. 23) έχουν κύρια ακτίνα καμπυλότητας $r_1 = r_2 = R$. Η ακτίνα των κύκλων r_0 υπολογίζεται από τη σχέση $r_0 = R \sin \phi$. Παρακάτω αναγράφονται οι εκφράσεις που προκύπτουν για τη σφαίρα.



Σχ. 23 Σφαιρική διαμόρφωση

Μεμβρανικές δυνάμεις:

$$N_1 = - \int_{s_0}^s \sin \phi (p_1 \sin \phi - p_3 \cos \phi) d\phi + C \quad (3.71)$$

$$N_1 = - \int_{s_0}^s \sin\varphi (p_1 \sin\varphi - p_3 \cos\varphi) d\varphi + C \quad (3.72)$$

Μετατοπίσεις:

$$u = \frac{\sin\varphi}{Eh} (1 + \nu)R \left[\int_{\varphi} \frac{N_1 - N_2}{\sin\varphi} d\varphi + c \right] \quad (3.73)$$

$$w = \frac{R}{Eh} (N_2 - \nu N_1) - \nu \cot\varphi \quad (3.74)$$

Σχετικές μετατοπίσεις:

$$\delta = \frac{R \sin\varphi}{Eh} (N_2 - \nu N_1) \quad (3.75)$$

$$V = \frac{1}{Eh} \left[\frac{\partial}{\partial\varphi} (N_2 - \nu N_1) - (1 + \nu) \cot\varphi (N_1 - N_2) \right] \quad (3.76)$$

3.2.2.7 Κυλινδρικά κελύφη

Ένας κύλινδρος παράγεται με τη μετακίνηση μιας ευθείας γραμμής κατά μήκος μιας καμπύλης διατηρώντας τον προσανατολισμό της ως προς την αρχική της θέση. Η γραμμή αυτή καλείται generator του κυλίνδρου.

Έστω κυλινδρικά κελύφη με αυθαίρετο σχήμα διατομής, όπως για παράδειγμα κυκλικά, ελλειπτικά, παραβολικά ή και κύλινδροι ανοιχτού ή κλειστού τύπου. Δεδομένου ότι οι γεννήτρες των κυλινδρικών κελυφών είναι ίδιες, τέτοια κελύφη έχουν μηδενικές καμπύλες Gauss και επομένως αναπτύσσουν επιφάνειες.

Η R_2 είναι η δεύτερη κύρια ακτίνα καμπυλότητας, ενώ η πρώτη ακτίνα καμπυλότητας R_1 είναι άπειρη, $R_1 = \infty$. Οπότε οι παράμετροι Lamé για ένα κυλινδρικό κέλυφος είναι οι ακόλουθοι:

$$A = 1, B = R_2.$$

Συγκεκριμένα, για ένα κυκλικό κέλυφος ισχύει $R_2 = \text{const} = R$, όπου R είναι η ακτίνα της διατομής του κυλίνδρου. Οπότε, οι παράμετροι Lamé για ένα κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος προκύπτουν:

$$A = 1, B = R = \text{const}.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, εξίσωση ισοροπίας αποκτά την εξής μορφή:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial y}{\partial x} + p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + p_2 = 0, \quad (3.77)$$

$$N_2 + R_2 p_3 = 0,$$

όπου p_1 , p_2 και p_3 είναι οι συνιστώσες του φορτίου στη διεύθυνση του μήκους, εφαπτόμενα στο προφίλ και κάθετα στη μέση επιφάνεια του κυλίνδρου, αντίστοιχα.

Η σχέση μεταξύ παραμορφώσεων και μετατοπίσεων δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} (N_1 - \nu N_2),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{R_2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} (N_2 - \nu N_1), \quad (3.78)$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{R_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{Gh} S = \frac{2(1+\nu)}{E} S.$$

Το διάνυσμα μετατοπίσεων προκύπτει:

$$\varepsilon = \{ \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \gamma_{12} \}^T$$

Μια γενική λύση για τις εξισώσεις (3.77) μπορεί να ληφθεί ξεκινώντας από την τρίτη εξίσωση της (3.77), λαμβάνοντας την περιφερειακή δύναμη N_2 ίση με:

$$N_2 = -R_2 p_3. (\alpha) \quad (3.79)$$

Οι απομένουσες εξισώσεις (3.77) μπορούν να λυθούν με μια απλή ολοκλήρωση ως προς το μήκος x του κυλίνδρου:

$$S = - \int \left(p_2 + \frac{1}{R_2} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} \right) dx + f_1(\theta), (\beta)$$

$$N_1 = - \int \left(p_1 + \frac{1}{R_2} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) dx + f_2(\theta), (\gamma)$$

όπου $f_1(\theta)$ και $f_2(\theta)$ είναι οι άγνωστες συναρτήσεις της θ , οι οποίες καθορίζονται από τις συνθήκες στήριξης.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών (3.79)β και (3.79)γ στις εξισώσεις (3.47) αντίστοιχα, προκύπτουν οι ακόλουθες συνιστώσες των μετατοπίσεων:

$$u = \frac{1}{Eh} \int (N_1 - \nu N_2) dx + f_3(\theta)$$

$$w = \frac{\partial v}{\partial \theta} - r(N_2 - \nu N_1) \quad (3.80)$$

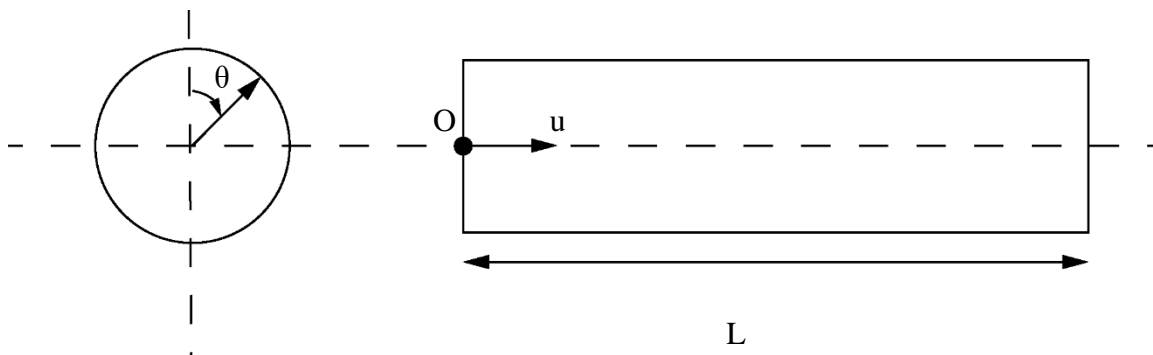
$$v = \frac{2(1 + \nu)}{Eh} \int S dx - \frac{1}{r} \int \frac{\partial u}{\partial \theta} dx + f_4(\theta)$$

Επιλύοντας το ίδιο πρόβλημα για εσωτερική πίεση οι δυνάμεις προκύπτουν:

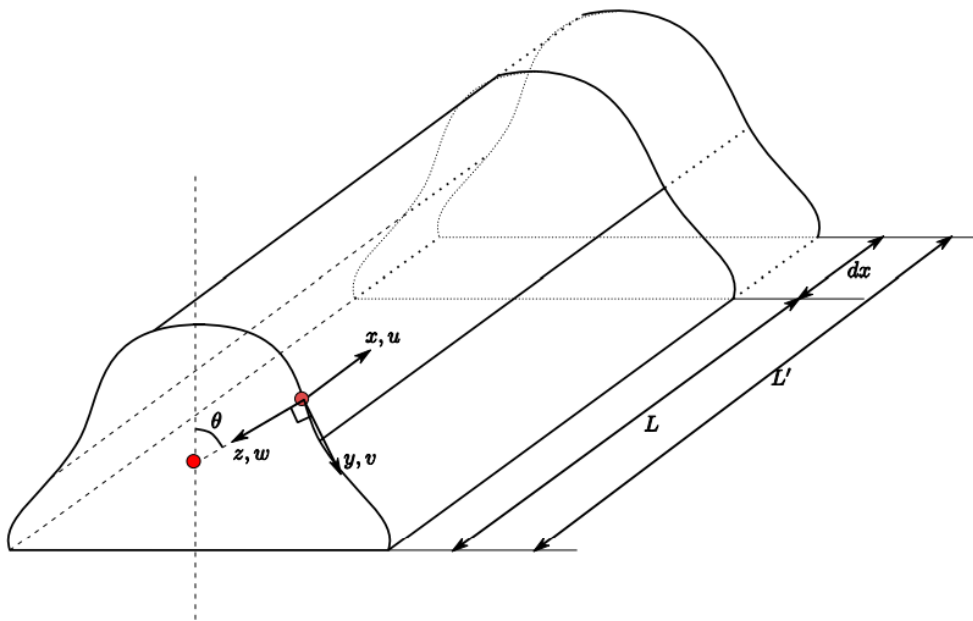
$$N_1 = 0$$

$$N_2 = p_0 r$$

$$S = 0$$



Σχ. 24



Σχ. 25 Διεύθυνση μετατοπίσεως του κυλίνδρου

3.2.2.8 Συμπέρασμα Μembrανικής Θεωρίας

Σε περίπτωση που είτε δεν ισχύουν οι προαναφερθείσες προϋποθέσεις είτε υπάρχουν μη επιθυμητά φορτία ή συνθήκες στήριξης, τότε η Μembrανική θεωρία δεν επαρκεί. Το ελάττωμα της Μembrανικής θεωρίας είναι ότι αποτυγχάνει στην παροχή των επιθυμητών λύσεων που ανταποκρίνονται στις πραγματικές συνθήκες παραμόρφωσης για τις περισσότερες πρακτικές συνθήκες. Επομένως εκεί είναι που απαιτείται η Καμπτική θεωρία.

3.2.3 Πεπερασμένα στοιχεία κελύφους

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων επινοήθηκε και εφευρέθηκε για την ανάλυση στατικών φορέων. Σύντομα όμως απέκτησε καθολική εφαρμογή σε προβλήματα που αφορούσαν ευρύτερα τους μηχανικούς, όπως στη ρευστομηχανική, στην ακουστική, στη μεταφορά θερμότητας και όχι μόνο. Η θεμελιώδης αρχή στην οποία βασίζεται η μέθοδος είναι η αντικατάσταση του γεωμετρικά σύνθετου πεδίου του προβλήματος με ένα σύνολο απλούστερων υποπεδίων, τα αποκαλούμενα ως πεπερασμένα στοιχεία. Το σύνολο αυτών των στοιχείων ονομάζεται δίκτυο ή πλέγμα και η προσομοίωση του φορέα με το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων ονομάζεται διακριτοποίηση του φορέα. Στην ανάπτυξη της μεθόδου συνέβαλλαν οι ενεργειακές μέθοδοι της μηχανικής, η θεωρία προσεγγίσεων των μαθηματικών και τα πληροφοριακά συστήματα σχεδιασμού Computer Aided Design.

Τα κελύφη και οι πλάκες αποτελούν από τα πιο συνήθη δομικά μέλη στις μοντέρνες κατασκευές, πράγμα που καθιστά επιτακτική την ανάγκη ολοκληρωμένης προσέγγισης της ανάλυσής τους. Αυτή η ανάγκη αντικατοπτρίζεται σε σχετικές θεωρίες και μεθοδολογίες, στις οποίες γίνεται αναφορά παρακάτω.



Σχ. 26 Crest, Zaha Hadid Architects

3.2.3.1 Typical Kirchhoff Love Shell element

Η κλασική θεωρία λεπτών πλακών και κελυφών βασίζεται στη θεωρία Kirchhoff–Love και είναι αντίστοιχη της θεωρίας Euler-Bernoulli για δοκούς. Οι απαιτούμενες παραδοχές που λαμβάνονται στη θεωρία αυτή είναι:

- Το πάχος της πλάκας ή του κελύφους είναι μικρό σε σχέση με τις άλλες δύο διαστάσεις.
- Η βύθιση της πλάκας είναι μικρή σε σύγκριση με τα πάχος της και οι στροφές της παραμορφωμένης μέσης επιφάνειας είναι μικρές συγκριτικά με τη μονάδα. Αυτή η υπόθεση μας επιτρέπει να θεωρούμε απαραμόρφωτη και ασυμπίεστη τη μέση επιφάνεια.
- Οι επίπεδες επιφάνειες κάθετες στη μέση επιφάνεια της πλάκας πριν τη παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση και κάθετες στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια (Σχ. 27).
- Οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις στα επίπεδα XZ και YZ είναι μηδενικές, πράγμα που δηλώνει ότι οι εγκάρσιες τάσεις διάτμησης απουσιάζουν σε ισότροπα και σύνθετα υλικά. Κατά συνέπεια, τα κελύφη και οι πλάκες βρίσκονται σε κατάσταση επίπεδης έντασης (plane stress).
- Αν το πάχος παραμένει σταθερό τότε η παραμόρφωση ϵ_z είναι μηδενική.
- Η κατακόρυφη ορθή τάση σ_z είναι και αυτή μηδενική (transverse normal stress).

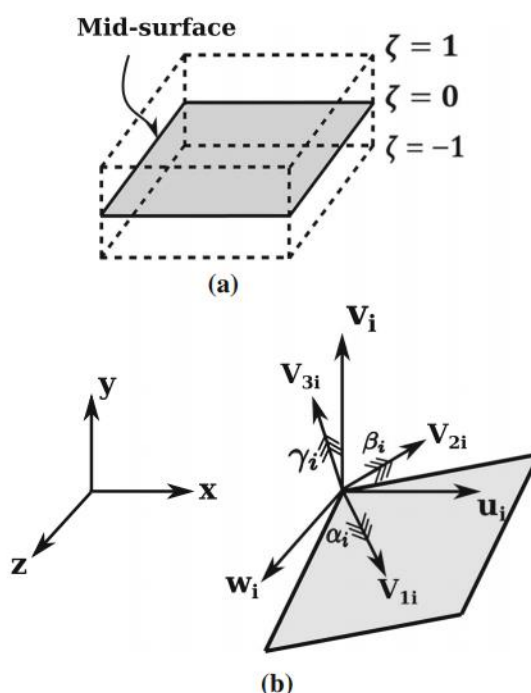
Το σημείο αναφοράς για την ακόλουθη ανάλυση αποτελεί το εκφυλισμένο στοιχείο κελύφους 4 κόμβων Reisser-Mindlin. Το στοιχείο περιλαμβάνει 6 τοπικούς βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή 3 μετατοπίσεις και 3 περιστροφές (Σχ. 28).

Το διάνυσμα των τοπικών βαθμών ελευθερίας για κάθε κόμβο i είναι $d_i = [u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i]$ (Σχ. 28 b). Οι βαθμοί ελευθερίας της μετατόπισης, δηλαδή $[u_i, v_i, w_i]$ εκφράζονται ως προς τον καθολικό άξονα συντεταγμένων xyz . Οι βαθμοί ελευθερίας που αφορούν τη στροφή, πιο συγκεκριμένα $[\alpha_i, \beta_i, \gamma_i]$, ορίζονται κατά τη διεύθυνση των τοπικών διανυσμάτων κατεύθυνσης του κελύφους, V_{1i} , V_{2i} και V_{3i} , αντίστοιχα. Το διάνυσμα V_{3i} είναι κάθετο στη μέση επιφάνεια του κελύφους, ενώ τα συνεπίεδα διανύσματα V_{1i} , V_{2i} , είναι κάθετα στο V_{3i} .

Οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου x εντός της επιφάνειας του στοιχείου του κελύφους εκφράζονται σύμφωνα με τις συντεταγμένες της μέσης επιφάνειας όπως αναγράφεται στην παρακάτω εξίσωση (3.81):

$$x = \sum_i^4 N_i x_i + \sum_{i=1}^4 N_i \zeta \frac{t_i}{2} V_{3i} \quad (3.81)$$

όπου, t_i είναι το πάχος του κελύφους, N_i και $x_i = [u_i, v_i, w_i]^T$ είναι η συνάρτηση σχήματος και διάνυσμα συντεταγμένων για κόμβους στη μέση επιφάνεια, αντίστοιχα. Τέλος, το ζ είναι παράμετρος κατά μήκος της διεύθυνσης του πάχους ($\zeta \in [-1,1]$) (Σχ. 28 a).



Σχ. 28 Εκφυλισμένο στοιχείο κελύφους 4 κόμβων Reisser-Mindlin, πηγή: «Phase-field modelling of brittle fracture in thin shell elements based on the MITC4+ approach» :

(a) μέση επιφάνεια κελύφους,

(b) βαθμοί ελευθερίας και το τοπικό σύστημα αξόνων

Κινηματική

Η μετατόπιση οποιουδήποτε σημείου P που βρίσκεται είτε πάνω είτε κάτω από τη μέση επιφάνεια (Σχ. 28 a), προκύπτει σε σχέση με τη μέση επιφάνεια σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση (3.82):

$$u_P = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum N_i \left(\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \zeta \frac{t_i}{2} [\mu_i] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} \right) \quad (3.82)$$

όπου μ_i περιέχει τα συνημίτονα κατεύθυνσης (direction cosines) των διανυσμάτων του κελύφους V_{1i} και V_{2i} και προϋποθέτει τα ακόλουθα από την εξίσωση (3.83):

$$[\mu_i] = \left[-\frac{V_{2i}}{|V_{2i}|}, \frac{V_{1i}}{|V_{1i}|}, 0 \right] = \begin{bmatrix} -l_{2i} & l_{1i} & 0 \\ -m_{2i} & m_{1i} & 0 \\ -n_{2i} & n_{1i} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

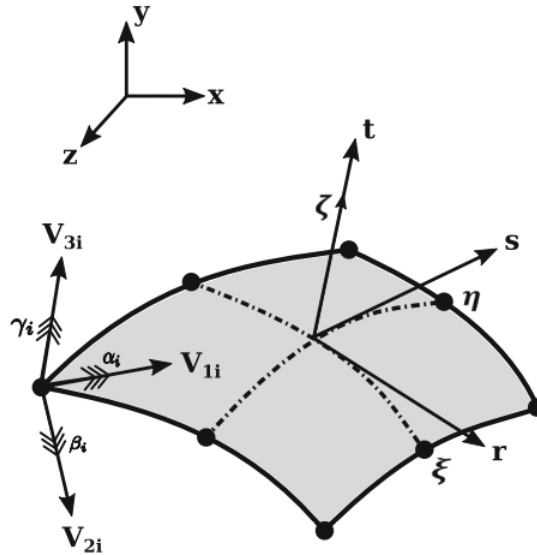
Το διάνυσμα παραμορφώσεων $[\varepsilon]_{xyz}$ στο καθολικό σύστημα αξόνων καθορίζεται σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$$[\varepsilon]_{xyz} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T = \sum_{i=1}^4 [B_i^u] d_i \quad (3.84)$$

όπου το $[B_i^u]$ είναι ένα 6×6 μητρώο παραμόρφωσης - μετατόπισης σε κάθε κόμβου i του κελύφους.

Για πρακτικούς λόγους, στην έκφραση της κινηματικής ενός στοιχείου κελύφους, εισάγεται το παρακάτω συστήματα αξόνων (Σχ. 29):

- Καθολικό καρτεσιανό σύστημα αξόνων $[x, y, z]$.
- Παραμετρικό σύστημα αξόνων $[\xi, \eta, \zeta]$ το οποίο χρησιμεύει στον προσδιορισμό του παραμετρικού χώρου του στοιχείου.
- Σύστημα συντεταγμένων το οποίο είναι ευθυγραμμισμένο με το κέλυφος $[1, 2, 3]$ βασισμένο στο τοπικό διάνυσμα της μέσης επιφάνειας $[V_1, V_2, V_3]$ το οποίο χρησιμεύει στον προσδιορισμό των διευθύνσεων των βαθμών ελευθερίας που αφορούν τη στροφή $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.
- Συνεκτικό σύστημα αξόνων $[r, s, t]$ στο οποίο οι τροποποιήσεις της MITC4+ εφαρμόζονται. Αυτό έχει οριστεί ως $r = g_1/|g_1|$, $s = g_2/|g_2|$ και $t = g_3/|g_3|$. Το $g_i = x_{,\zeta_i}$ είναι τα εφαπτόμενα διανύσματα προς την επιφάνεια του κελύφους σε ένα τυχαίο σημείο με διάνυσμα θέσης x , όπου $\zeta_i \in \{\xi, \eta, \zeta\}$ αντιπροσωπεύει την παραμετρική διεύθυνση.



Σχ. 29 Απεικόνιση διαφόρων συστημάτων αξόνων που χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση του στοιχείου κελύφους Reissner – Mindlin, πηγή: «Phase-field modelling of brittle fracture in thin shell elements based on the MITC4+ approach»

Διατύπωση MITC4/ MITC4+

Σε αυτό το τμήμα γίνεται αναφορά στις τροποποιημένες συνθήκες για τις εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις στοιχείων βάση της προσέγγιση MITC4+. Εξετάζεται το στοιχείο κελύφους τεσσάρων κόμβων, Σχ. 29, με τα μεταφερόμενα και ευθυγραμμισμένα προς την επιφάνεια του κελύφους συστήματα αξόνων, δηλαδή τα $[r, s, t]$ και $[1, 2, 3]$ αντίστοιχα

Στην κλασσική θεωρία της MITC4, οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις ε_{st} και ε_{rt} λαμβάνονται σταθερές κατά μήκος των άκρων και κάθετες στους άξονες r και s , αντίστοιχα (Σχ. 28 a). Επιπλέον, αντί της χρήσης της μετατόπισης βασισμένη στην παρεμβολή που παρουσιάζεται στην εξίσωση (3.84), η συνιστώσα της εγκάρσιας διατμητικής παραμόρφωσης σε οποιοδήποτε τυχαίο σημείο εντός του στοιχείου παρεμβάλλονται με βάση τις τιμές παραμόρφωσης σε ένα προκαθορισμένο σύνολο σημείων σύνδεσης $\{A, B, C, D\}$ (Σχ. 28 a):

$$\varepsilon_{rt} = \frac{1}{2} (1 + \eta) \varepsilon_{rt}^{(A)} + \frac{1}{2} (1 - \eta) \varepsilon_{rt}^{(B)}$$

$$\varepsilon_{st} = \frac{1}{2} (1 + \xi) \varepsilon_{st}^{(C)} + \frac{1}{2} (1 - \xi) \varepsilon_{st}^{(D)}$$
(3.85)

Οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις σε αυτά τα σημεία σύνδεσης, δηλαδή τα $\{\varepsilon_{rt}^{(A)}, \varepsilon_{rt}^{(B)}, \varepsilon_{st}^{(D)}, \varepsilon_{st}^{(C)}\}$, υπολογίζονται σύμφωνα με την εξίσωση (3.84):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rt}^{(TP)} &= (\varepsilon_{rt})_{\text{at TP using DI}} \\ \varepsilon_{st}^{(TP)} &= (\varepsilon_{st})_{\text{at TP using DI}}\end{aligned}\tag{3.86}$$

όπου $TP \in \{A, B, C, D\}$ υποδηλώνει το σημεία σύνδεσης και DI υποδηλώνει την άμεση παρεμβολή με βάση τη μετατόπιση, ανάλογη της εξίσωσης (3.84).

Ομοίως, η MITC4+ διατύπωση για τις συνιστώσες των μεμβρανικών παραμορφώσεων $\{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{ss}, \varepsilon_{rs}\}$ παρεμβάλλονται με τη χρήση των παραμορφώσεων στα σημεία σύνδεσης $\{A, B, C, D, E\}$, Σχ. 28b.

Μετασχηματισμός συντεταγμένων (Coordinate transformations)

Για τη διαμόρφωση των μητρώων του τοπικού στοιχείου και των συστατικών σχέσεων, το διάλυμα παραμορφώσεων στην εξίσωση (3.84) πρέπει να μετασχηματιστεί στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων που είναι ευθυγραμμισμένο με το κέλυφος $[1, 2, 3]$. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης του μητρώου μετασχηματισμού της παραμόρφωσης T_ε , σύμφωνα με τη σχέση (3.85):

$$[\varepsilon]_{123} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{23} \ \gamma_{13}]^T = T_\varepsilon [\varepsilon]_{xyz}\tag{3.87}$$

Οι παραμορφώσεις που παρουσιάζονται στην εξίσωση (3.85) προσδιορίζονται σύμφωνα με το συναλοίο σύστημα συντεταγμένων $[r, s, t]$, ενώ οι παραμορφώσεις στην εξίσωση (3.87), εκφράζονται σε σχέση με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων $[1, 2, 3]$. Κατά συνέπεια, για την επιβολή της MITC4+ τροποποίησης, οι ευθυγραμμισμένες με το κέλυφος τοπικές παραμορφώσεις $[\varepsilon]_{123}$ πρώτα μετασχηματίζονται στις συναλοιώτες παραμορφώσεις $[\varepsilon]_{rst}$. Εξαιτίας της επίπεδης γεωμετρίας των τεσσάρων κόμβων Mindlin στοιχείων κελύφους, οι εντός επιπέδου διευθύνσεις και για τα δύο συστήματα αξόνων $[r, s]$ και $[1, 2]$ είναι συνεπίεδα αλλά έχουν περιστραφεί το ένα σε σχέση με το άλλο. Η μετατροπή των εγκάρσιων διατμητικών παραμορφώσεων $[\gamma_{12} \ \gamma_{23}]^T$ στις μετασχηματισμένες συντεταγμένες $[r, s, t]$ γίνεται σύμφωνα με την εξίσωση (3.88):

$$[\gamma_{rt} \ \gamma_{st}]^T = [R][\gamma_{12} \ \gamma_{23}]^T\tag{3.88}$$

όπου:

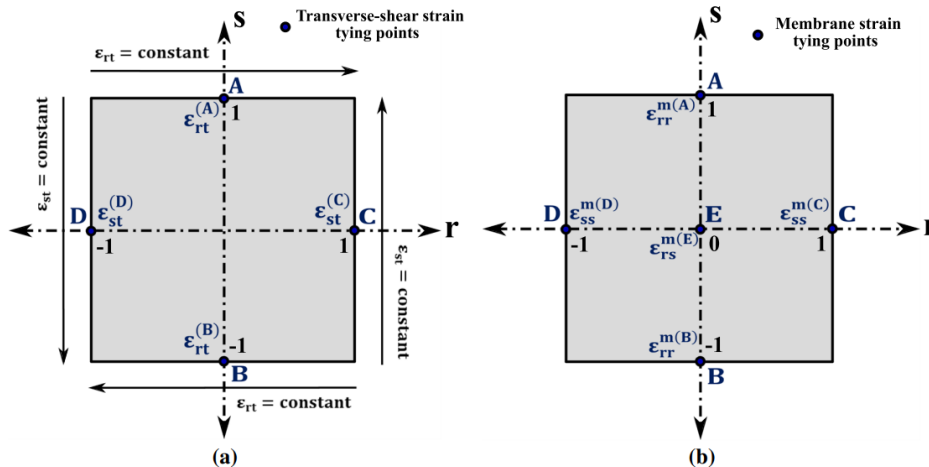
$$[R] = \begin{bmatrix} \sin \beta & -\sin \alpha \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}^{-1}.\tag{3.89}$$

Με α και β συμβολίζονται οι γωνίες μεταξύ των αξόνων r και V_1 , και των s και V_1 , αντίστοιχα.

Οι εντός επιπέδου μετασχηματισμένες συνιστώσες της παραμόρφωσης $[\epsilon_{rr}, \epsilon_{ss}, \gamma_{rs}]$ διαμορφώνονται σύμφωνα με την εξίσωση (3.90):

$$[\epsilon_{rr}, \epsilon_{ss}, \gamma_{rs}]^T = [T_\epsilon'] [\epsilon]_{123} \quad (3.90)$$

όπου το $[\epsilon]_{123}$ υπολογίζεται από την εξίσωση (3.85).



Σχ. 27 Οι θέσεις των σημείων σύνδεσης που χρησιμοποιούνται στην υπόθεση

(a) των εγκάρσιων διατμητικών παραμορφώσεων,

(c) των μεμβρανικών παραμορφώσεων εντός της MITC4+ προσέγγισης,

πηγή: «Phase-field modelling of brittle fracture in thin shell elements based on the MITC4+ approach»

Μετά την εφαρμογή των τροποποιήσεων της MITC4+ στις τροποποιημένες εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις $\{\gamma_{rt}, \gamma_{st}\}$ και στις εντός επιπέδου μεμβρανικές τάσεις $\{\epsilon_{rr}, \epsilon_{ss}, \gamma_{rs}\}$, το καθολικό τροποποιημένο διάνυσμα παραμορφώσεων $[\epsilon]_{rst}$ μετασχηματίστηκε ξανά στο ευθυγραμμισμένο σύστημα αξόνων $[\epsilon]_{123}$, με την εφαρμογή του αντιστρόφου των γραμμικών μετασχηματισμών που παρουσιάζονται στις εξισώσεις (3.88) με (3.90).

Το ευθυγραμμισμένο με το κέλυφος τοπικό διάνυσμα παραμορφώσεων εκφράζεται ως:

$$[\epsilon]_{123} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{23} \ \gamma_{13}]^T \quad (3.91)$$

Στο στοιχείο κελύφους της MITC4+ ισχύουν οι παραδοχές των εντός επιπέδου παραμορφώσεων, δηλαδή η εφελκυστική τάση $\sigma_{33} = 0$ στο ευθυγραμμισμένο με το κέλυφος τοπικό σύστημα αξόνων $[1, 2, 3]$. Οπότε η έκφραση της εκτός επιπέδου εφελκυστικής παραμόρφωσης προκύπτει ως εξής:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (3.92)$$

όπου ν είναι ο λόγος Poisson ενός υλικού.

Οι μετασχηματισμένοι βαθμοί ελευθερίας $[u_i, v_i, w_i]$ έχουν οριστεί σε σχέση με τα καθολικά καρτεσιανά διανύσματα $[x, y, z]$. Παρόλα αυτά, οι βαθμοί ελευθερίας που αφορούν τη στροφή $[\alpha_i, \beta_i, \gamma_i]$ προσδιορίζονται στη διεύθυνση των τοπικών διανυσμάτων του κελύφους $[V_1, V_2, V_3]$.

Κατά συνέπεια, το διάνυσμα των τοπικών βαθμών ελευθερίας $d_{loci} = [u_i, v_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i]$ μετασχηματίζεται στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων σύμφωνα με την εξίσωση (3.93):

$$d_{glob} = [T_{rot}]^T d_{loc} \quad (3.93)$$

με,

$$T_{rot} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & 0 & 0 & l_2 & m_2 & n_2 \\ 0 & 0 & 0 & l_3 & m_3 & n_2 \end{bmatrix}$$

όπου $d_{glob} = [u_{xi}, u_{yi}, w_{zi}, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}]$ είναι το καθολικό διάνυσμα των βαθμών ελευθερίας.

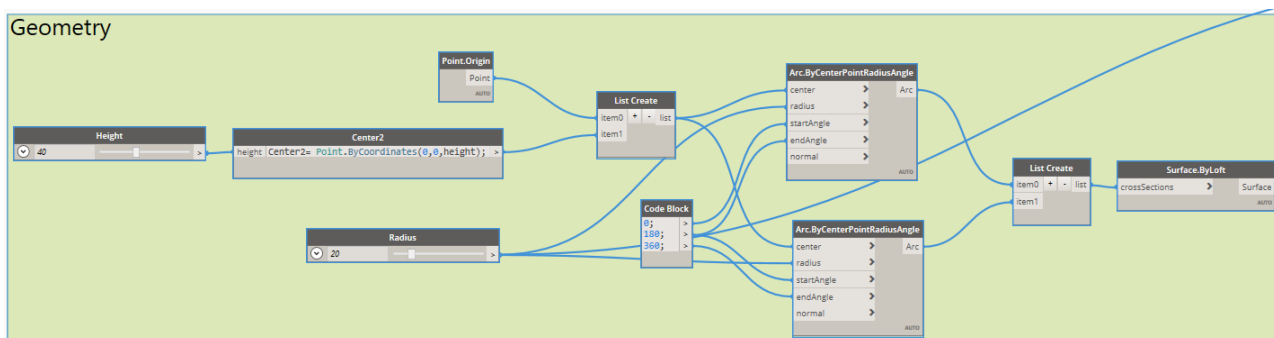
4 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΕΛΥΦΩΝ

Πρώτο βήμα αποτελεί η διαμόρφωση της γεωμετρίας της επιφάνειας που πρόκειται να μελετηθεί. Παρακάτω περιγράφονται οι εξής παραμετροποιημένες γεωμετρίες: κυλινδρικό κέλυφος κυκλικής διατομής, κέλυφος παραβολικού τόξου, κέλυφος με διαφορετική καμπύλη αρχής και τέλους, σφαίρα με μικρό άνοιγμα στην κορυφή, επιφάνεια ελεύθερης γεωμετρίας και μια γεωμετρία εμπνευσμένη από το κέντρο πολιτισμού Heydar Aliyev.

4.1 Κύλινδρος Κυκλικής Διατομής

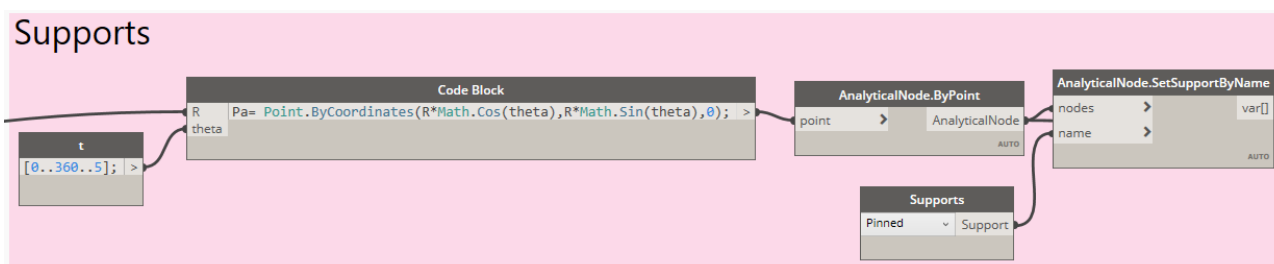
4.1.1 Ανάλυση κυλίνδρου με τη χρήση του Dynamo και του Robot Structural Analysis

Για να μπορέσει το Robot Structural Analysis να αντιληφθεί την ενιαία γεωμετρία ενός κυλίνδρου, χρειάστηκε να χωριστεί ο κύλινδρος σε δύο κελύφη με ημικυκλική διατομή. Επομένως διαμορφώθηκαν δύο τόξα με τέτοιο τρόπο ώστε το ένα να ξεκινάει εκεί που τελειώνει το άλλο, ορίζοντας το κέντρο τους, την ακτίνα τους και τη γωνία αρχής και τέλους. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ορίζονται πανομοιότυπα τόξα σε ύψος h του κυλίνδρου. Ενώνοντας αυτούς του δύο κύκλους που έχουν σχηματιστεί, διαμορφώνεται η επιφάνεια του κυλίνδρου Σχ. 35 (α). Η διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχ. 30.



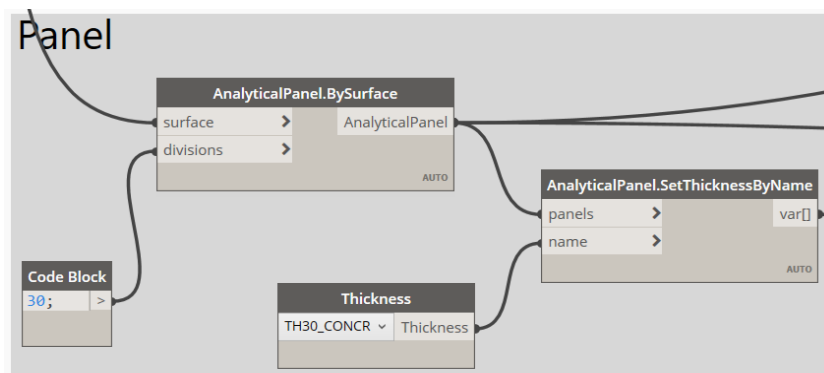
Σχ. 30 Διαμόρφωση παραμετροποιημένης γεωμετρίας κυλίνδρου

Για τη στήριξη του κυλίνδρου είναι απαραίτητη η τοποθέτηση μιας σειράς αρθρώσεων στη βάση του. Προκειμένου να διαμορφωθούν οι αρθρώσεις κατά μήκος του κύκλου, ορίζεται η παραμετρική συνάρτηση κύκλου και οι αρθρώσεις τοποθετούνται με βήμα 5 μοιρών (Σχ. 31).



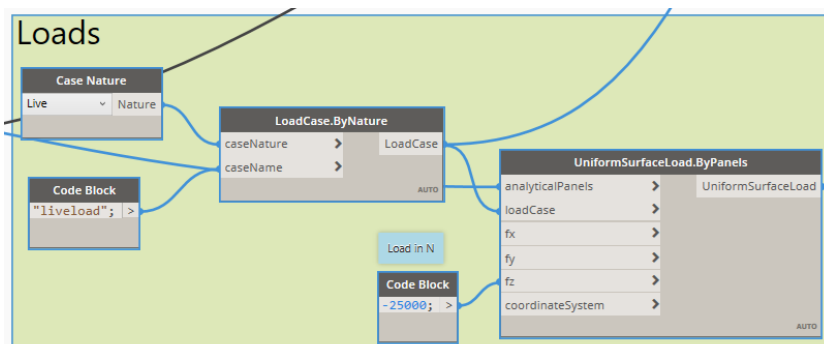
Σχ. 31 Διαμόρφωση στηρίξεων

Επόμενο βήμα είναι η μεταφορά της σχηματιζόμενης γεωμετρίας στο Robot Structural Analysis (Σχ. 32). Έχοντας εγκαταστήσει το Robot Structural Analysis 2021, η σύνδεσή του με το Dynamo επιτυγχάνεται μέσω της εγκατάστασης του πακέτου Structural Analysis for Dynamo. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται εφικτή η διαμόρφωση ενός δομικού μοντέλου στο Robot Structural Analysis μέσω ροών εργασίας που παρέχονται από το λογισμικό του Dynamo Σχ. 35 (β).



Σχ. 32

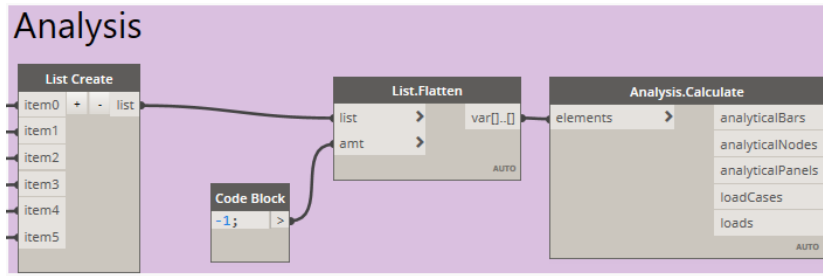
Εφαρμόστηκε ένα κινητό φορτίο 25 kN κατά την αρνητική διεύθυνση του άξονα z, δηλαδή παράλληλα στην επιφάνεια του κυλίνδρου (Σχ. 33).



Σχ. 33 Εφαρμογή φορτίων

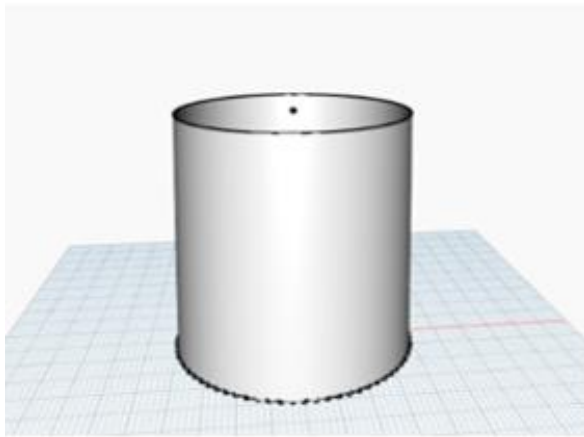
Τρέχοντας το πρόγραμμα (Σχ. 34) αυτομάτως γίνεται μεταφορά της γεωμετρίας στο Robot Structural Analysis, όπου και πραγματοποιείται η ανάλυση του κυλίνδρου. Μέσω του προγράμματος αυτού, δίνεται η δυνατότητα γραφικής παρουσίασης των κατανομών των τάσεων, των αξονικών δυνάμεων καθώς και των ροπών.

Δυστυχώς, μέσω της διαδικασίας αυτής εντοπίζεται αδυναμία επιλογής υλικού.

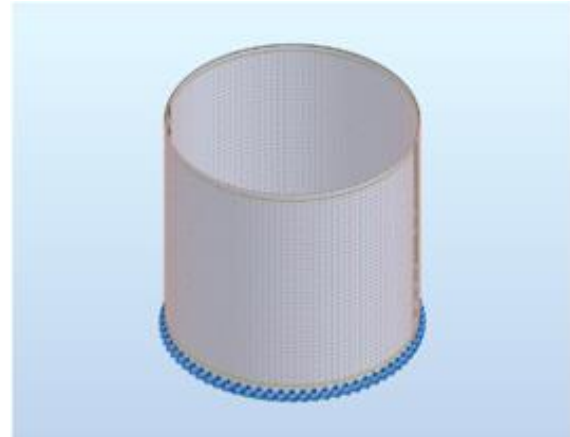


Σχ. 34

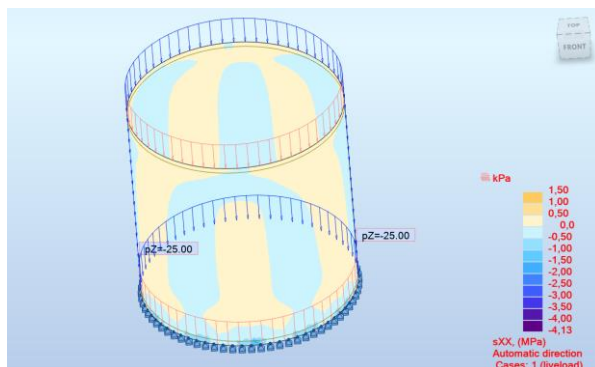
Στο Σχ. 35(γ) παρουσιάζεται η τάση σ_{xx} σε MPa, η οποία είναι εφαπτόμενη στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Στο Σχ. 35(δ) είναι η σ_{yy} τάση, κάθετη στην επιφάνεια του κυλίνδρου, και στο Σχ. 35(ε) η διατμητική σ_{xy} τάση. Στο Σχ. 35(στ) παρουσιάζεται η αξονική δύναμη N_{xx} , δηλαδή η δύναμη εφαπτόμενη της επιφάνειας του κυλίνδρου. Όσον αφορά την αξονική δύναμη N_{yy} Σχ. 35(ζ) είναι η κάθετη στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Η αξονική N_{xy} βρίσκεται στο Σχ. 35 (η), η ροπή M_{xx} στο Σχ. 35(θ), η ροπή M_{yy} στο Σχ. 35(ι) και τέλος η ροπή M_{xy} είναι στο σχήμα Σχ. 35(κ).



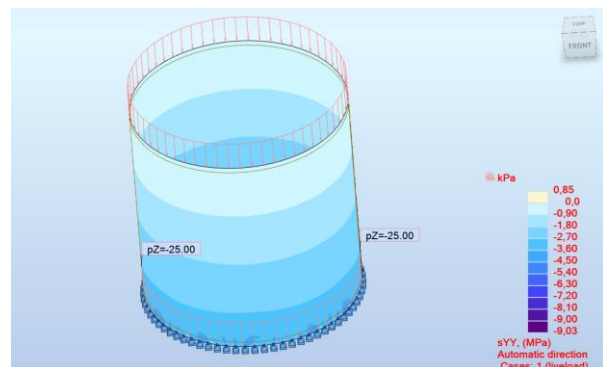
(α) Dynamo



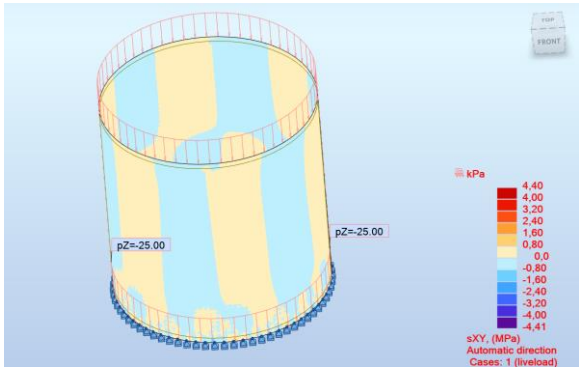
(β) Robot Structural Analysis



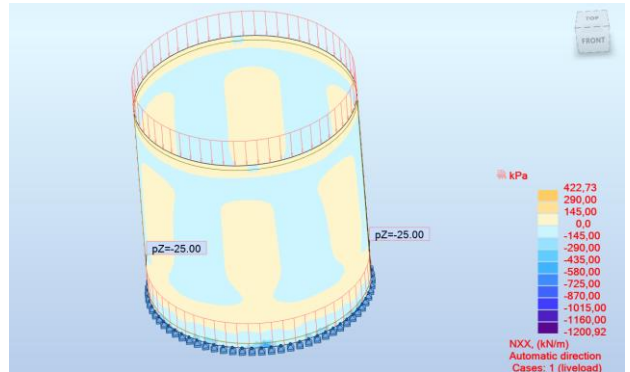
(γ) σ_{xx} (kPa)



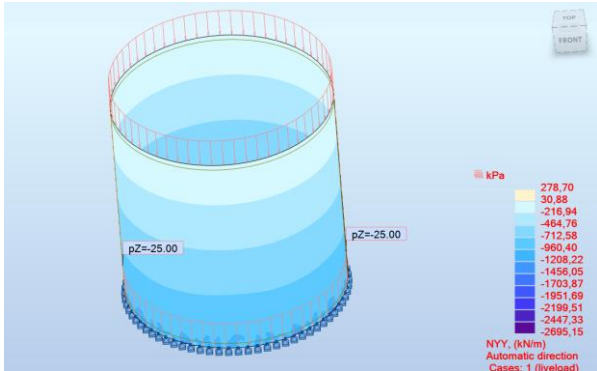
(δ) σ_{yy} (kPa)



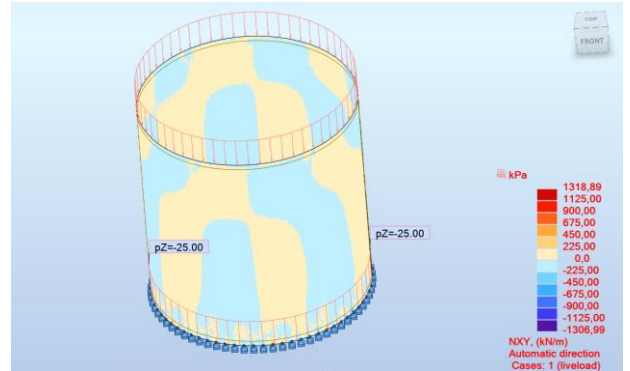
(ε) s_{XY} (kPa)



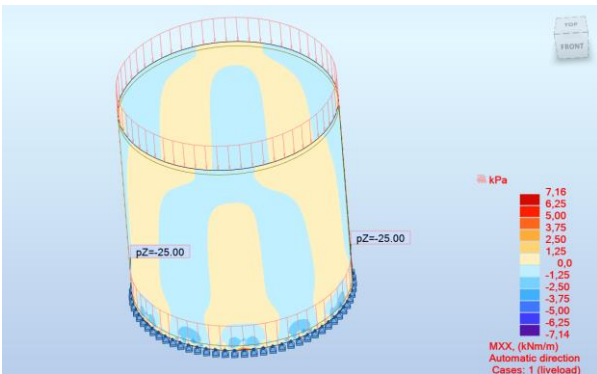
(στ) N_{XX} (kN/m)



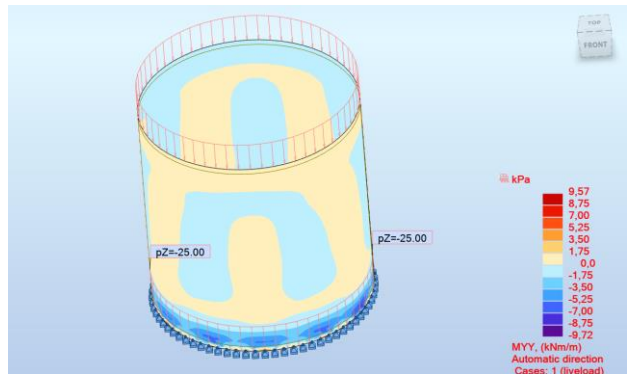
(ζ) N_{YY} (kN/m)



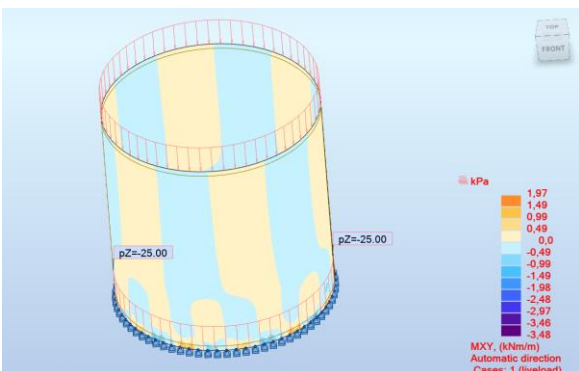
(η) N_{XY} (kN/m)



(θ) M_{XX} (kNm/m)



(ι) M_{YY} (kNm/m)



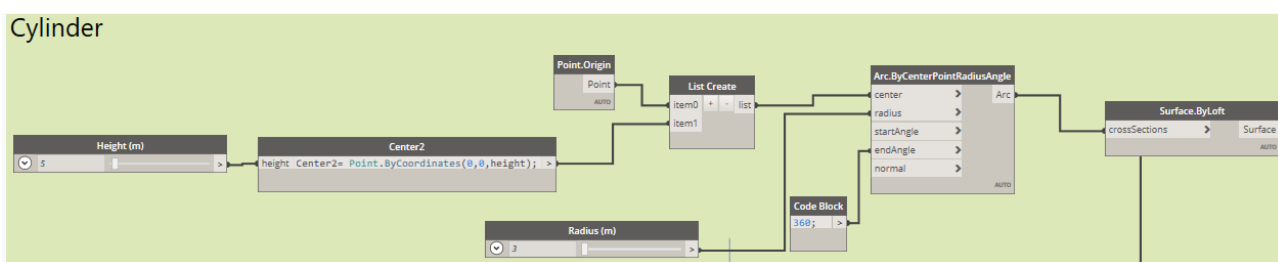
(κ) M_{XY} (kNm/m)

Σχ. 35 Αποτελέσματα ανάλυσης του κυλίνδρου

4.1.2 Ανάλυση κυλίνδρου με τη χρήση του Dynamo και ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+

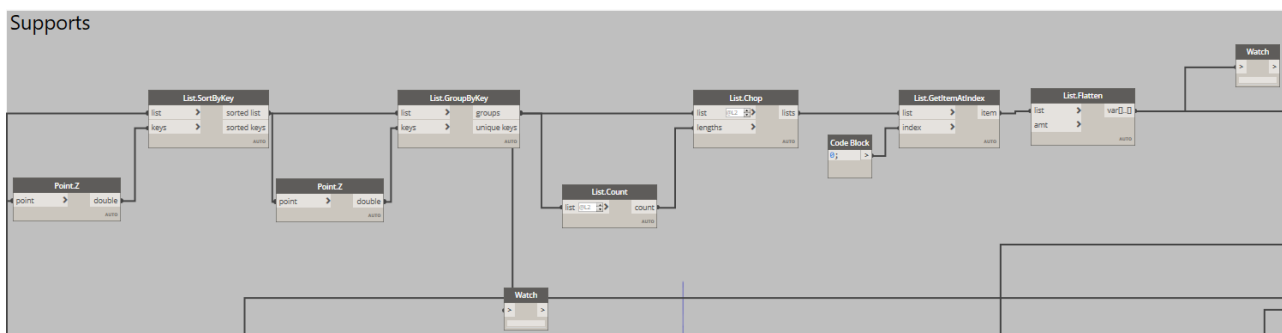
Προκειμένου να αναλυθεί η γεωμετρία από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων, πρέπει πρώτα η ενιαία επιφάνεια να διακριτοποιηθεί σε τετραπλευρικά στοιχεία (Σχ. 38). Στην προκειμένη περίπτωση η ανάλυση πραγματοποιήθηκε για σταθερή εσωτερική πίεση ίση με 1 kN/m^2 . Τα αποτελέσματα διαβάζονται χειροκίνητα από το ParaView.

Για τη διαμόρφωση του κυλινδρικού κελύφους κυκλικής διατομής, απαιτείται να οριστεί το κέντρο του, η ακτίνα του R και η γωνία αρχής και τέλους (Σχ. 36).

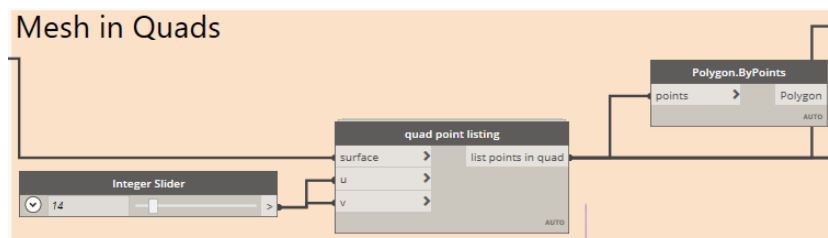


Σχ. 36 Διαμόρφωση παραμετροποιημένης γεωμετρίας κυλίνδρου

Οι αρθρώσεις τοποθετούνται στα ήδη διαμορφωμένα σημεία στη βάση του κυλίνδρου, τα οποία προέκυψαν μέσω της διαδικασίας διακριτοποίησης (Σχ. 37).

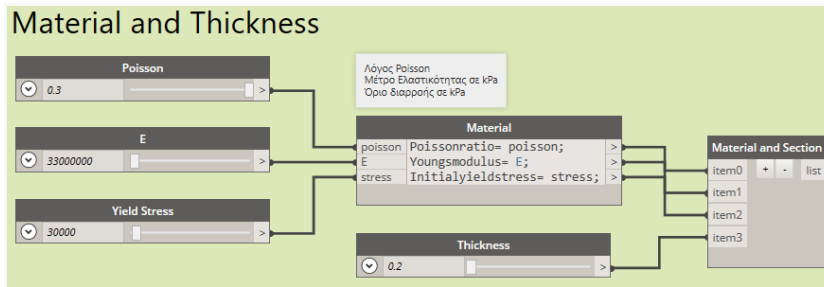


Σχ. 37 Επιλογή σημείων στήριξης

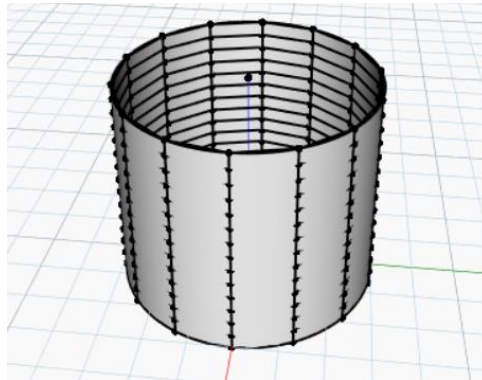


Σχ. 38 Διαδικασία διακριτοποίησης

Σε σύγκριση με την προηγούμενη μέθοδο ανάλυσης, τώρα είναι εφικτός ο ορισμός υλικού καθώς και πάχους της γεωμετρίας Σχ. 39.

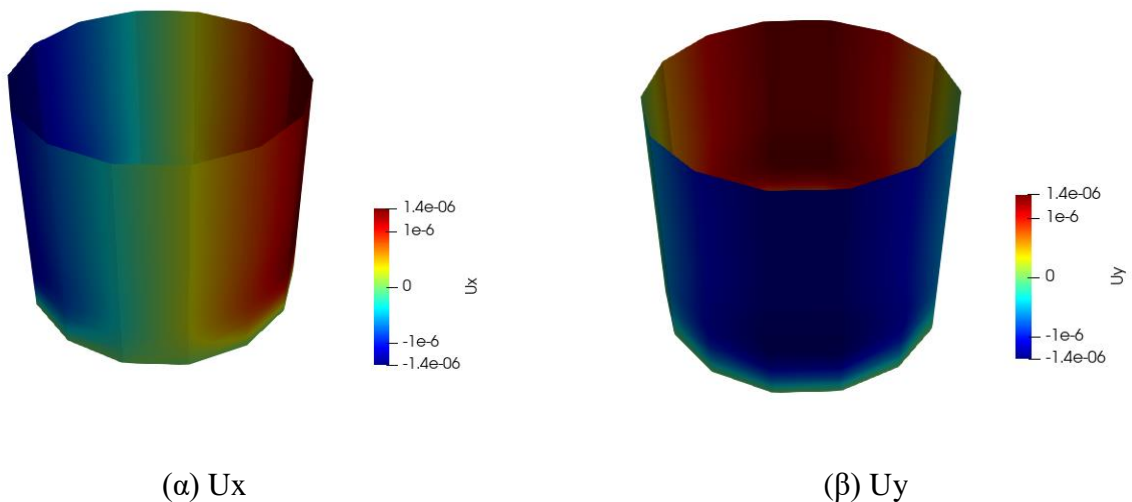


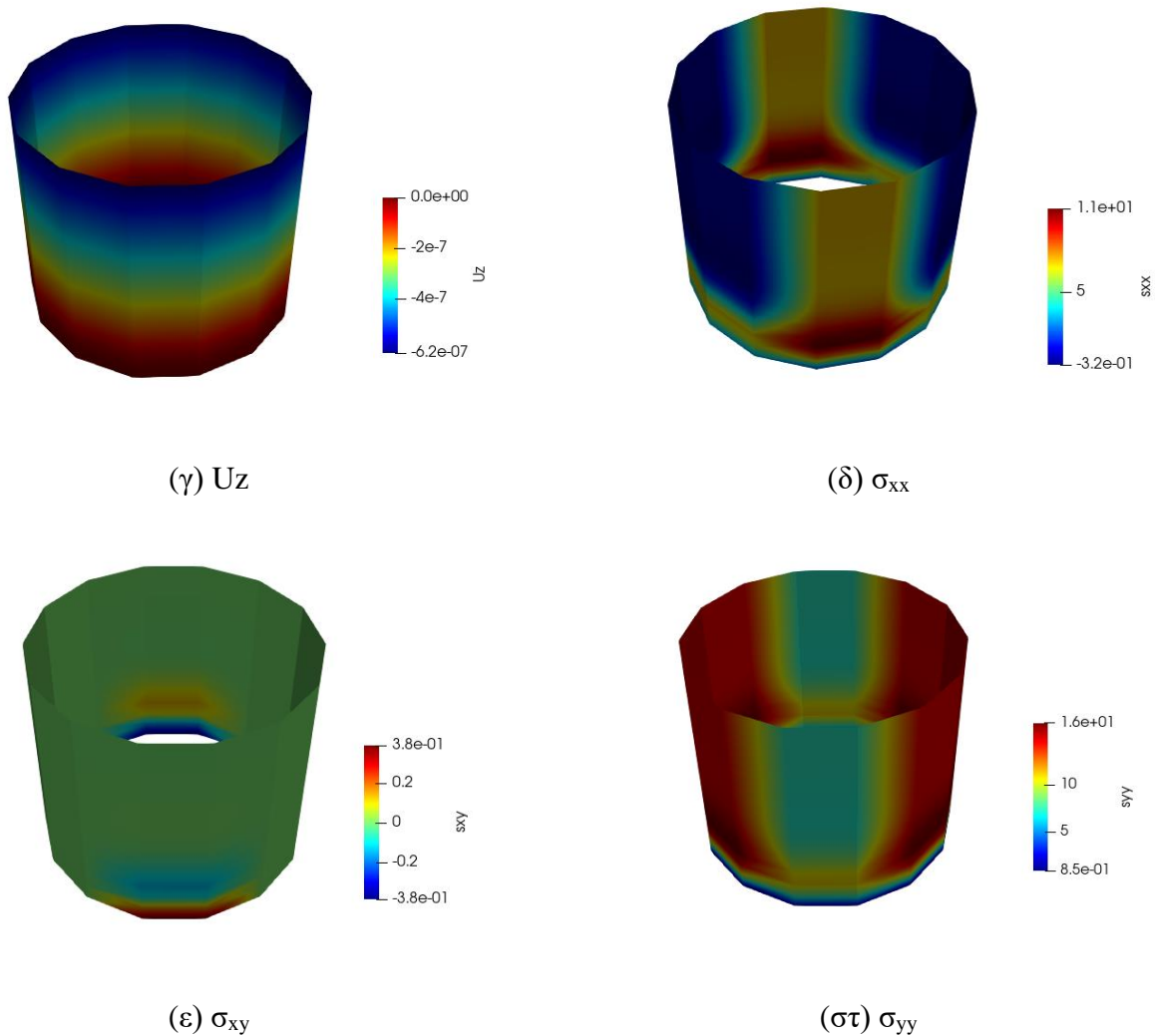
Σχ. 39 Επιλογή υλικού και πάχους



Σχ. 40 Κύλινδρος χωρισμένος σε πεπερασμένα στοιχεία

Στο Σχ. 41 (α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x δηλαδή η ακτινική. Στο Σχ. 41 (β) είναι η v , U_y η εφαπτόμενη στην όψη του κυλίνδρου. Η μετατόπιση u , U_z είναι η παράλληλη στο διαμήκη άξονα του κυλίνδρου και εικονίζεται στο Σχ. 41 (γ). Συνεχίζοντας με τις τάσεις, στο Σχ. 41 (δ) παρουσιάζεται η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 41 (ε) η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 41 (στ) η διατμητική τάση σ_{xy} .



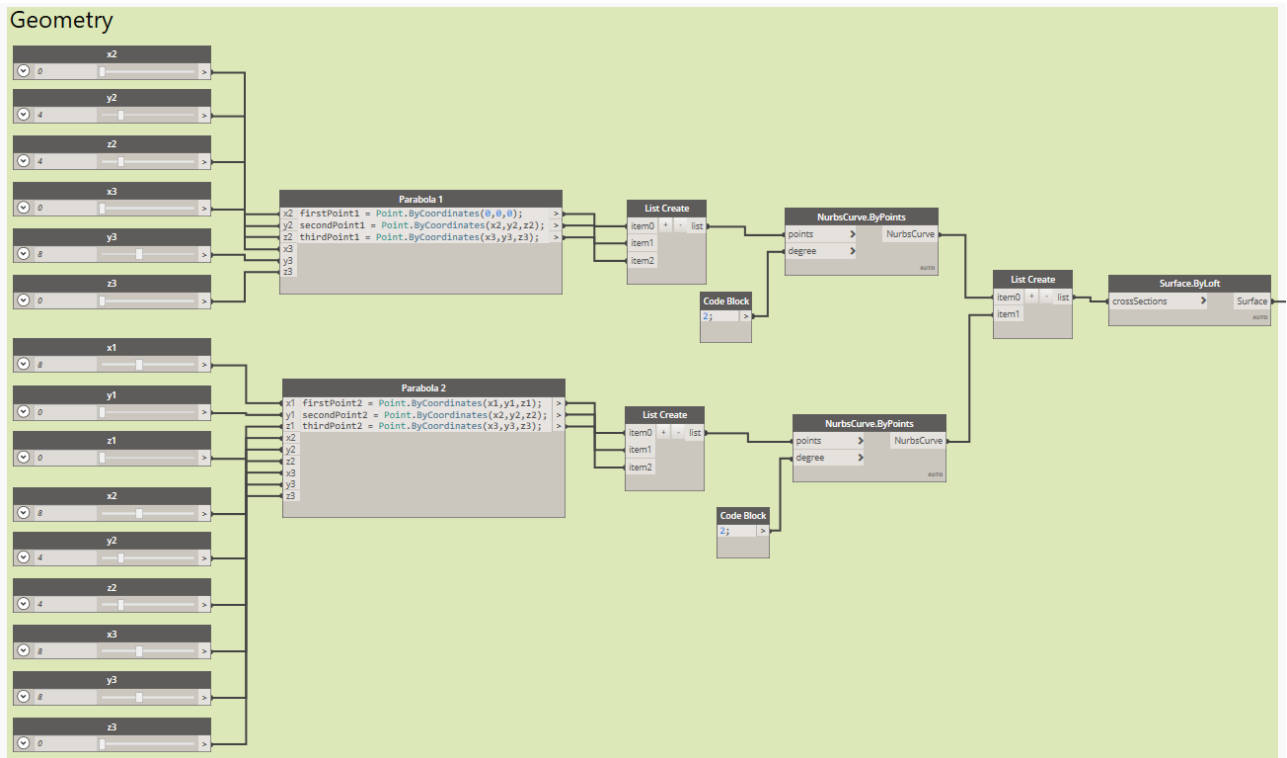


Σχ. 41 Αποτελέσματα αναλύσεων στο ParaView

4.2 Κέλυφος παραβολικού τόξου

4.2.1 Ανάλυση κελύφους παραβολικού τόξου με τη χρήση του Dynamo και του Robot Structural Analysis

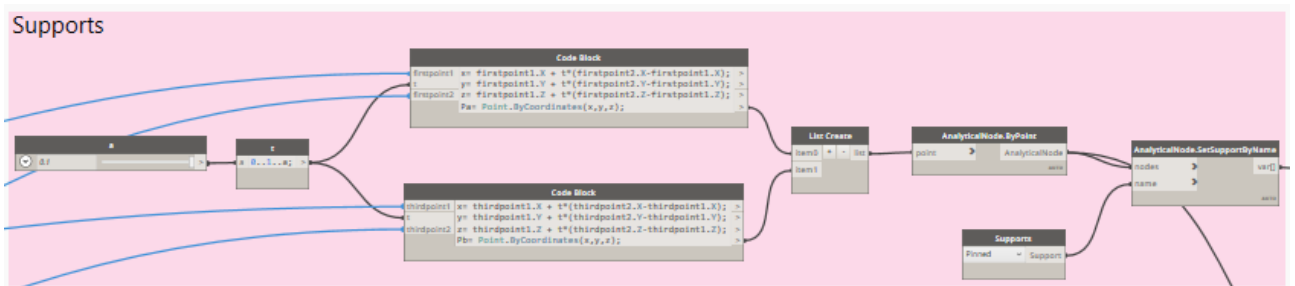
Για τη διαμόρφωση του κελύφους παραβολικού τόξου, απαιτήθηκαν δύο NURBS καμπύλες, μια στην αρχή του κελύφους και μια στο τέλος του. Οι καμπύλες αυτές ορίζονται μέσω τριών σημείων, οι οποίες στη συνέχεια ενώνονται σχηματίζοντας την επιθυμητή γεωμετρία (Σχ. 42) όπως φαίνεται στο Σχ. 47 (α).



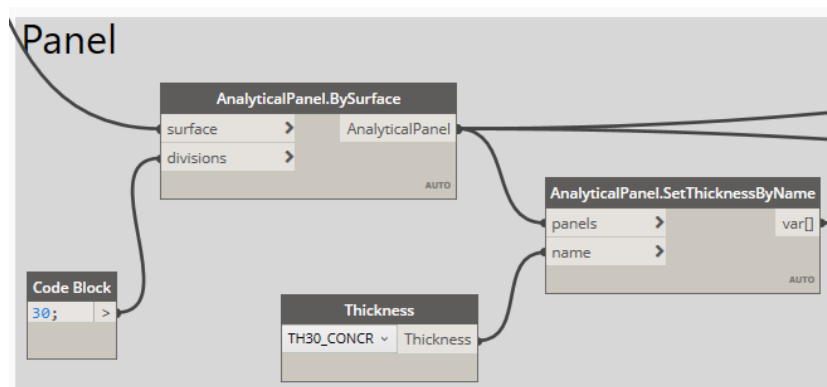
Σχ. 42 Διαμόρφωση παραμετροποιημένης γεωμετρίας του παραβολικού κελύφους

Για τη στήριξη του κελύφους τοποθετήθηκαν αρθρώσεις κατά μήκος των οριζόντιων πλευρών, δηλαδή των παράλληλων στο έδαφος. Για την προσομοίωσή τους έγινε χρήση της παραμετρικής συνάρτησης της ευθείας (Σχ. 43): $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$, $z = 0$, $0 \leq t \leq 1$

Με την παράμετρο t ορίζεται πόσο πυκνή ή όχι θα είναι η τοποθέτηση των αρθρώσεων.

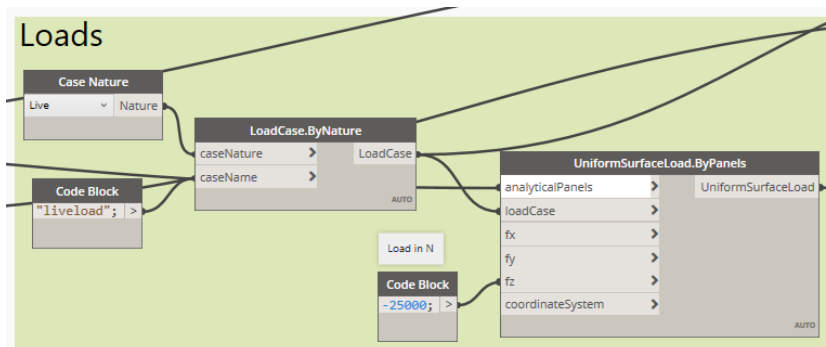


Σχ. 43 Επιλογή σημείων στήριξης



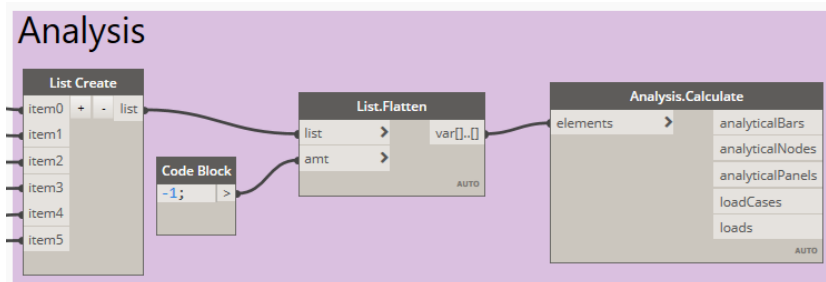
Σχ. 44

Εφαρμόστηκε ένα κινητό φορτίο και ένα φορτίο 25 kN κατά την αρνητική διεύθυνση του άξονα z (Σχ. 45).



Σχ. 45 Εφαρμογή φορτίων

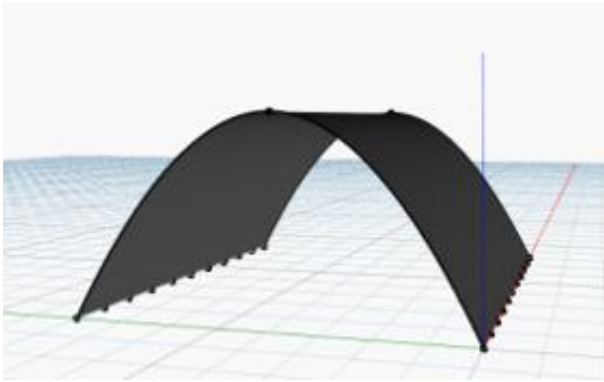
Στη συνέχεια, πραγματοποιείται η ανάλυσή της (Σχ. 46).



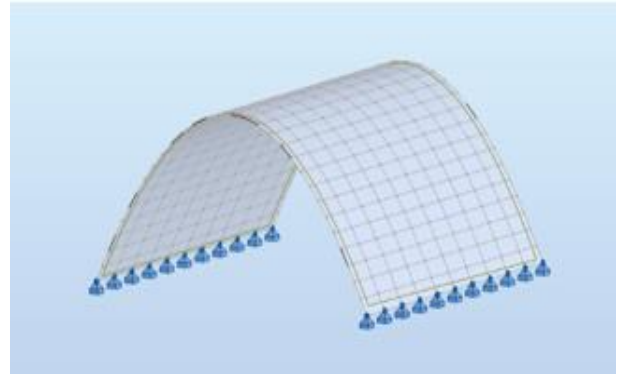
Σχ. 46

Στο Σχ. 47(α) παρουσιάζεται η προσομοίωση στο Dynamo ενώ στο Σχ. 47(β) η αντίστοιχη προσομοίωση στο Robot Structural Analysis.

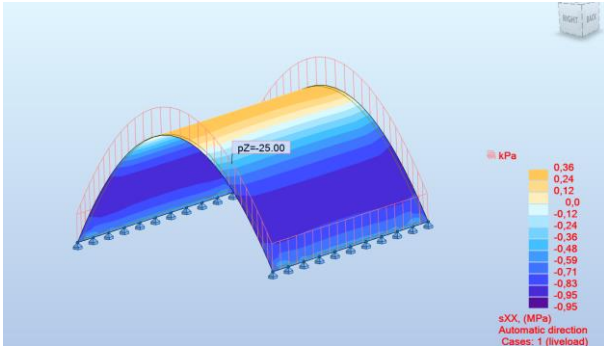
Στο Σχ. 47(γ) παρουσιάζεται η τάση σ_{xx} σε MPa, η οποία είναι εφαπτόμενη στην επιφάνεια του κελύφους. Στο Σχ. 47(δ) είναι η σ_{yy} τάση, κάθετη στην επιφάνεια του κελύφους, και στο Σχ. 47(ε) η διατμητική σ_{xy} τάση. Στο Σχ. 47(στ) παρουσιάζεται η αξονική δύναμη N_{xx} , δηλαδή η δύναμη εφαπτόμενη της επιφάνειας του κελύφους. Όσον αφορά την αξονική δύναμη N_{yy} Σχ. 47(ζ) είναι η κάθετη στην επιφάνεια του κελύφους. Η αξονική N_{xy} βρίσκεται στο Σχ. 47(η), η ροπή M_{xx} στο Σχ. 47(θ), η ροπή M_{yy} στο Σχ. 47 (ι) και τέλος η ροπή M_{xy} είναι στο σχήμα Σχ. 47(κ).



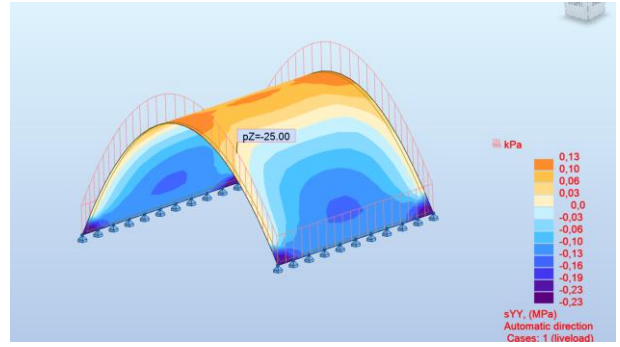
(α) Dynamo



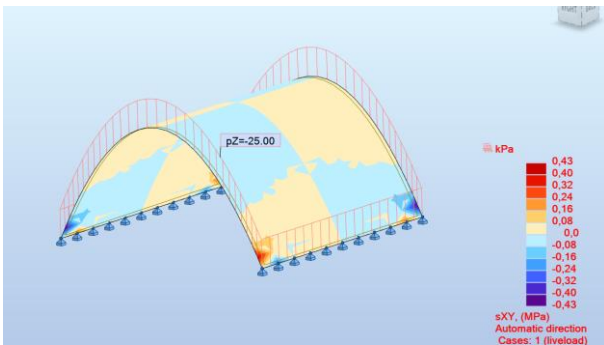
(β) Robot Structural Analysis



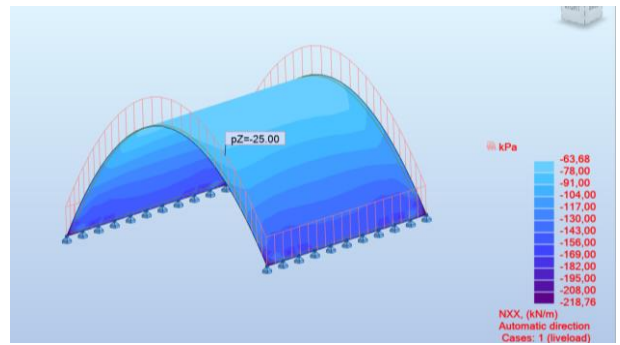
(γ) σ_{xx} (kPa)



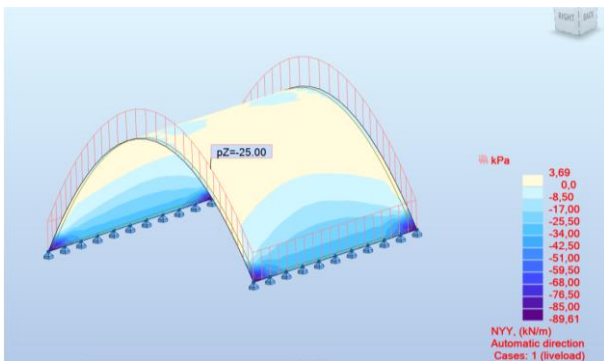
(δ) σ_{yy} (kPa)



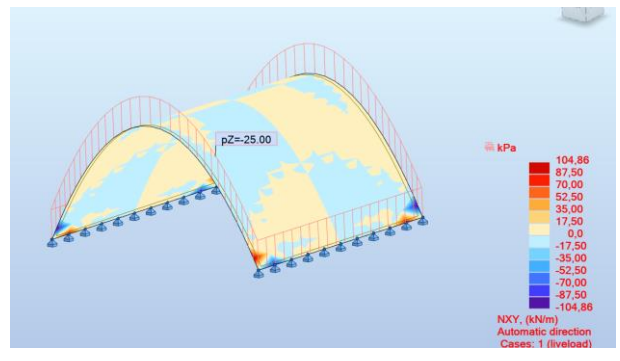
(ε) σ_{xy} (kPa)



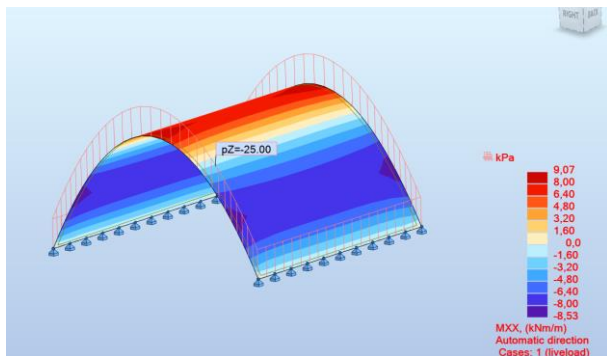
(σ) N_{xx} (kN/m)



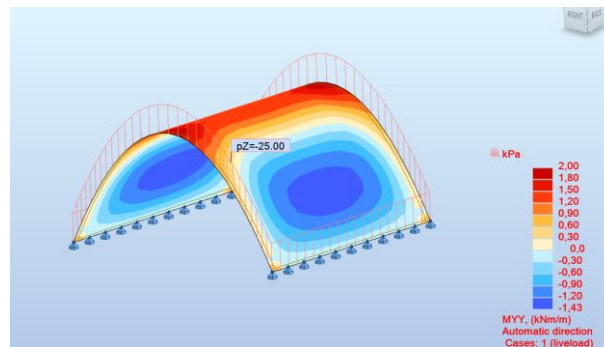
(ζ) N_{yy} (kN/m)



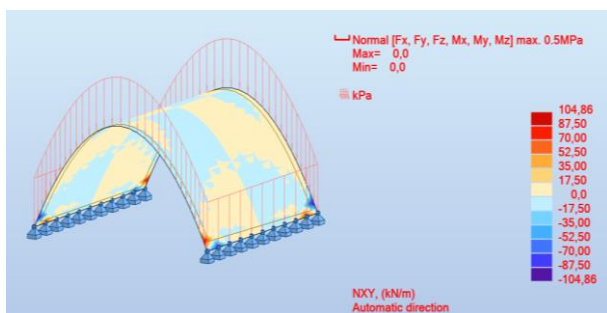
(η) N_{xy} (kN/m)



(θ) M_{XX} (kNm/m)



(ι) M_{YY} (kNm/m)

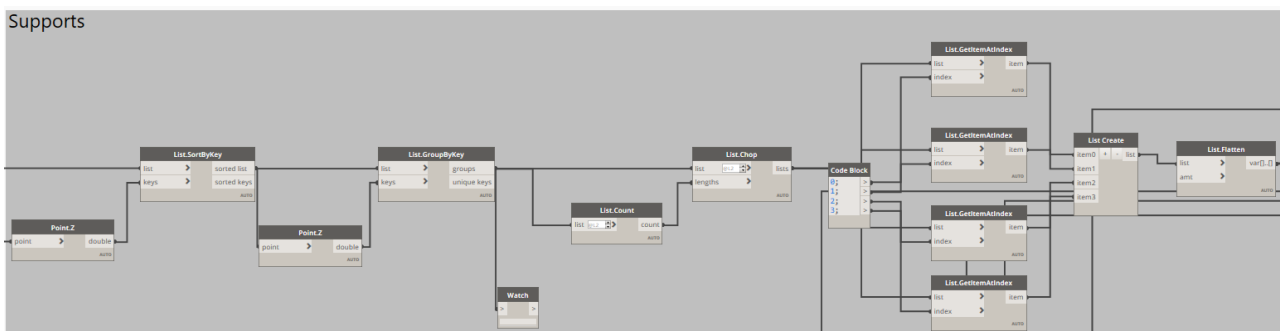


(κ) M_{XY} (kNm/m)

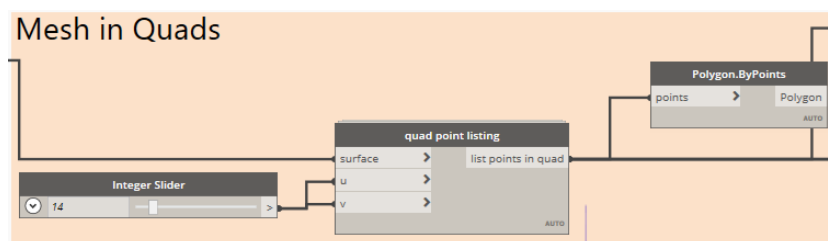
Σχ. 47 Αποτελέσματα ανάλυσης του κελύφους παραβολικού τόξου

4.2.2 Ανάλυση κελύφους παραβολικού τόξου με τη χρήση του Dynamo και ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+

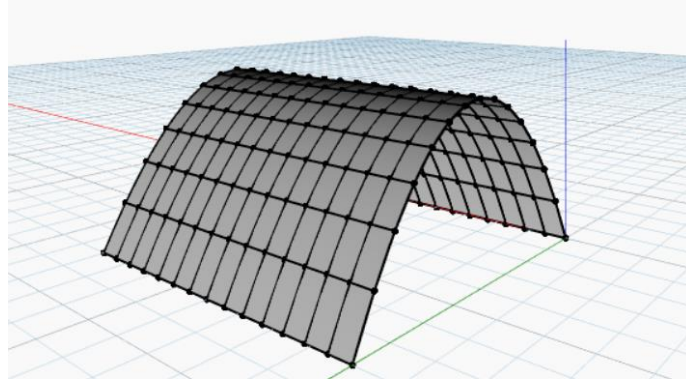
Οι αρθρώσεις τοποθετούνται στα ήδη διαμορφωμένα σημεία στη βάση του κελύφους, τα οποία προέκυψαν μέσω της διαδικασίας διακριτοποίησης (Σχ. 48).



Σχ. 48 Επιλογή σημείων στήριξης

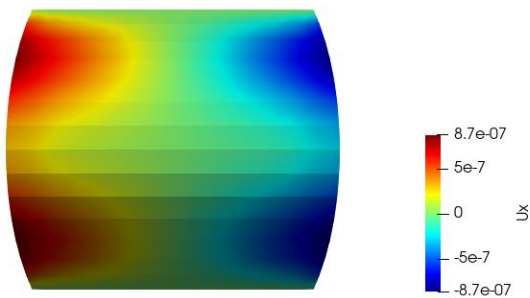


Σχ. 49 Διαδικασία διακριτοποίησης

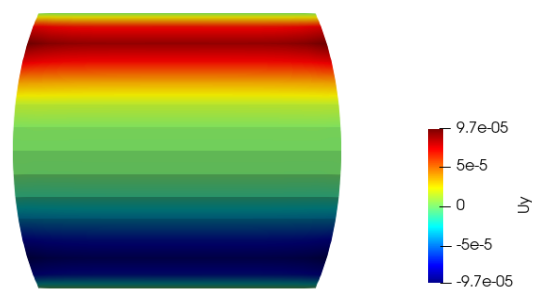


Σχ. 50 Διακριτοποιημένο κέλυφος

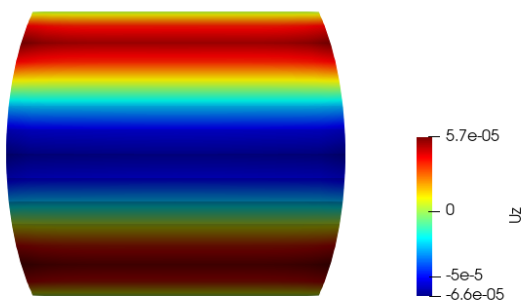
Στο Σχ. 51(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x δηλαδή η ακτινική. Στο Σχ. 51(β) είναι η v , U_y η εφαπτόμενη στην όψη του κελύφους. Η μετατόπιση u , U_z η παράλληλη στο διαμήκη άξονα του κελύφους εικονίζεται στο Σχ. 51(γ). Συνεχίζοντας με τις τάσεις, στο Σχ. 51(δ) παρουσιάζεται η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 51(ε) η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 51(στ) η διατμητική τάση σ_{xy} .



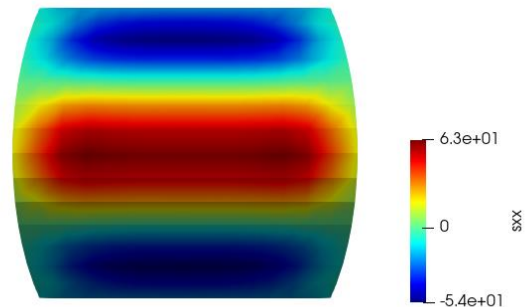
(α) U_x



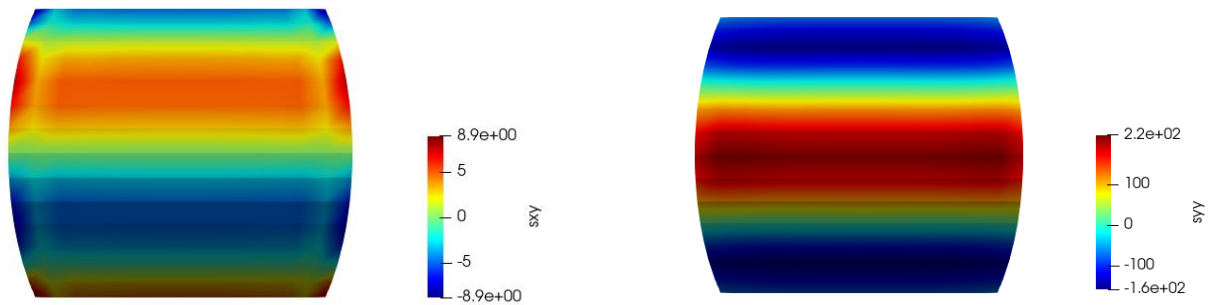
(β) U_y



(γ) U_z



(δ) σ_{xx}



(ε) σ_{xy}

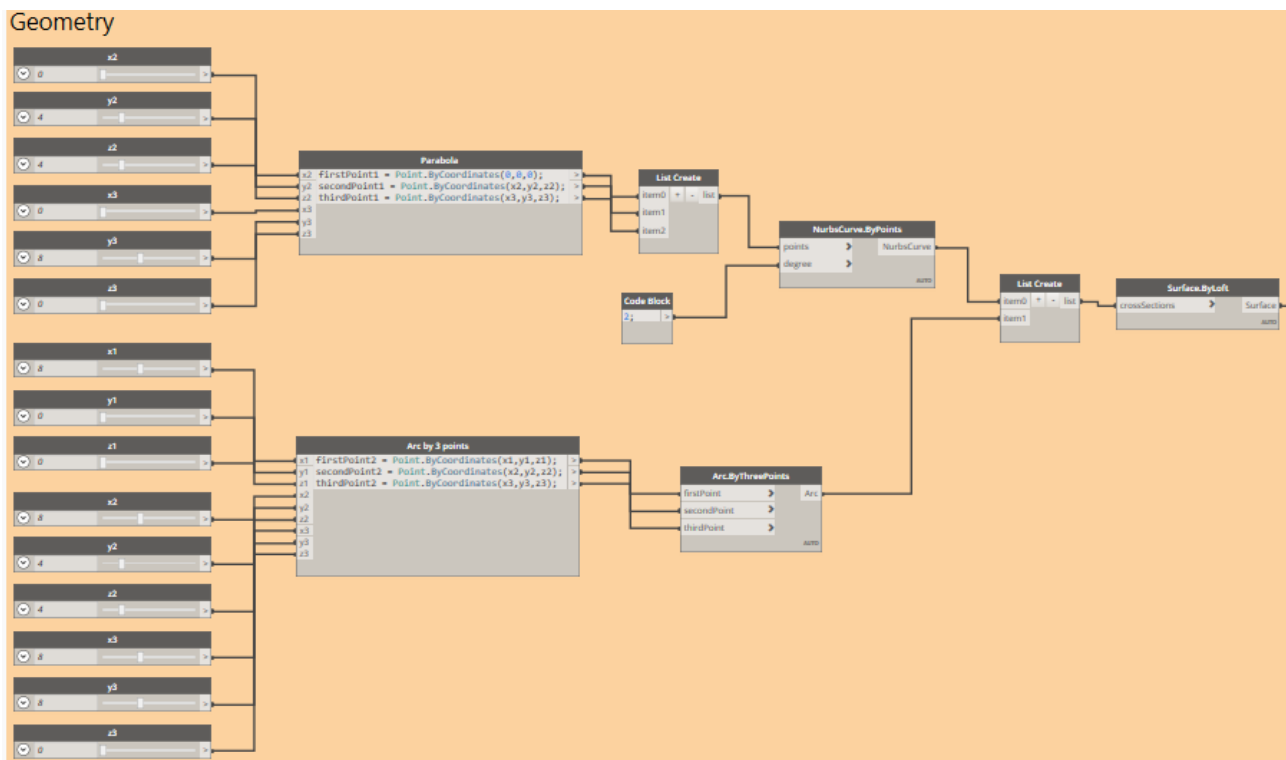
(στ) σ_{yy}

Σχ. 51 Αποτελέσματα αναλύσεων στο ParaView

4.3 Κέλυφος με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους

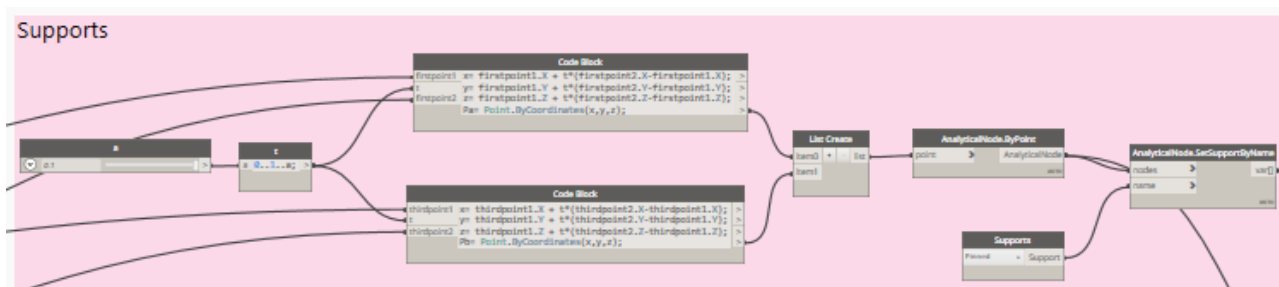
4.3.1 Ανάλυση κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους με τη χρήση του Dynamo και του Robot Structural Analysis

Αρχικά διαμορφώθηκαν μια παραβολή και ένα τόξο (Σχ. 52). Ενώνοντας τις δύο αυτές καμπύλες σχηματίστηκε η επιφάνεια Σχ. 54(α).



Σχ. 52 Διαμόρφωση παραμετροποιημένης γεωμετρίας του κελύφους διαφορετικής γεωμετρίας αρχής και τέλους

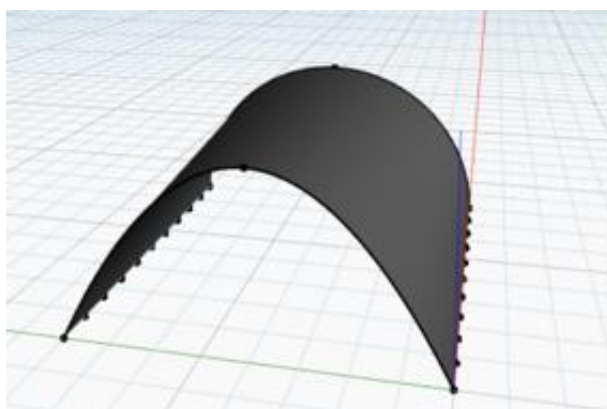
Για τη στήριξη του κελύφους είναι απαραίτητη η τοποθέτηση μιας σειράς αρθρώσεων κατά μήκος των οριζοντίων πλευρών. Απαιτείται η παραμετρική συνάρτηση μιας ευθείας: $x = x_0 + t (x_1 - x_0)$, $y = y_0 + t (y_1 - y_0)$, $z = 0$, $0 \leq t \leq 1$



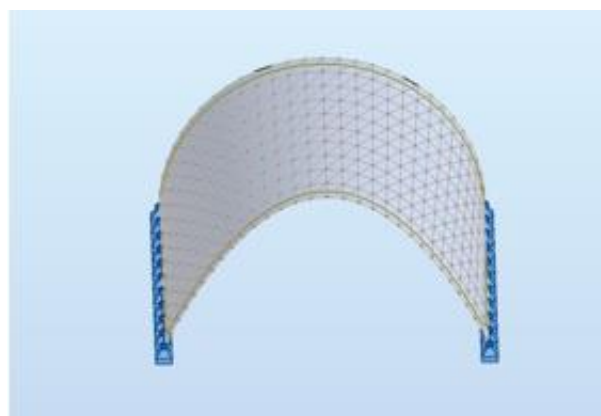
Σχ. 53 Επιλογή σημείων στήριξης

Στο Σχ. 54 (β) παρουσιάζεται η προσομοίωση στο Robot Structural Analysis.

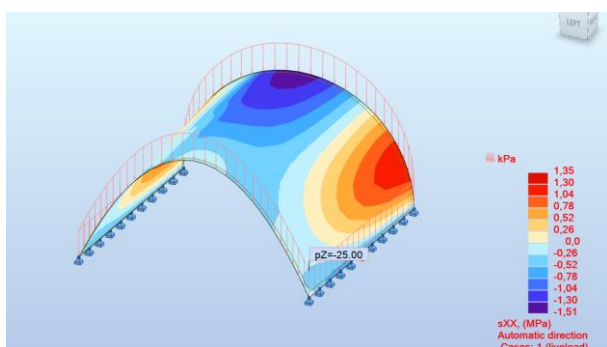
Στο Σχ. 54 (γ) παρουσιάζεται η τάση ορθή σ_{xx} σε MPa, η οποία είναι εφαπτόμενη στην επιφάνεια του κελύφους. Στο Σχ. 54 (δ) είναι η ορθή τάση σ_{yy} , κάθετη στην επιφάνεια του κελύφους, και στο Σχ. 54(ε) η διατμητική σ_{xy} τάση. Στο Σχ. 54(στ) παρουσιάζεται η αξονική δύναμη N_{xx} , δηλαδή η δύναμη εφαπτόμενη της επιφάνειας του κελύφους. Όσον αφορά την αξονική δύναμη N_{yy} Σχ. 54 (ζ) είναι η κάθετη στην επιφάνεια του κελύφους. Η αξονική N_{xy} βρίσκεται στο Σχ. 54(η), η ροπή M_{xx} στο Σχ. 54(θ), η ροπή M_{yy} στο Σχ. 54(ι) και τέλος η ροπή M_{xy} είναι στο σχήμα Σχ. 54(κ).



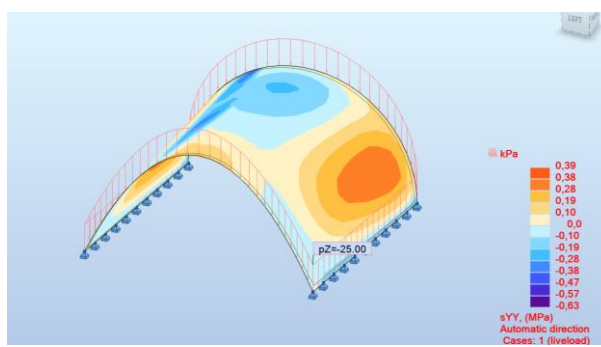
(α) Dynamo



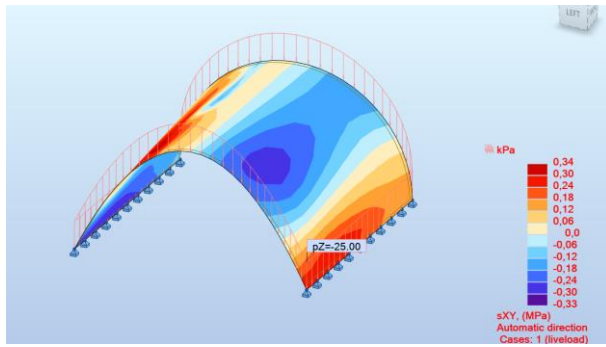
(β) Robot Structural Analysis



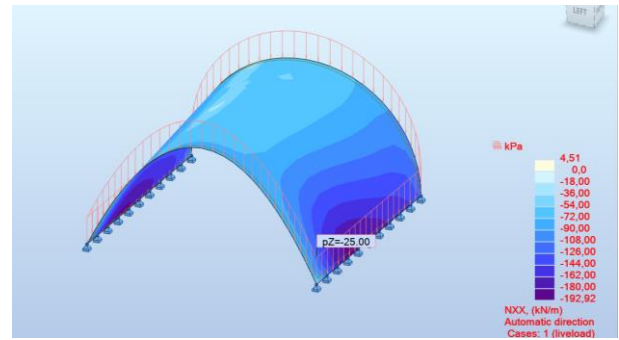
(γ) σ_{xx} (kPa)



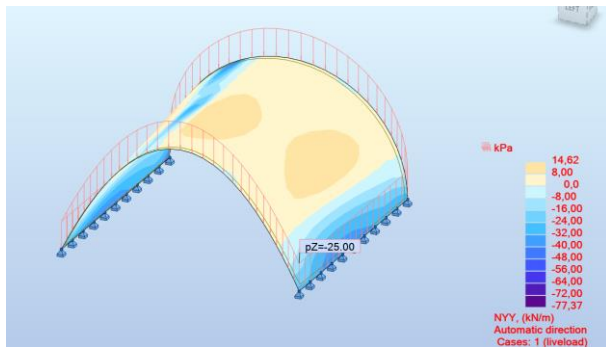
(δ) σ_{yy} (kPa)



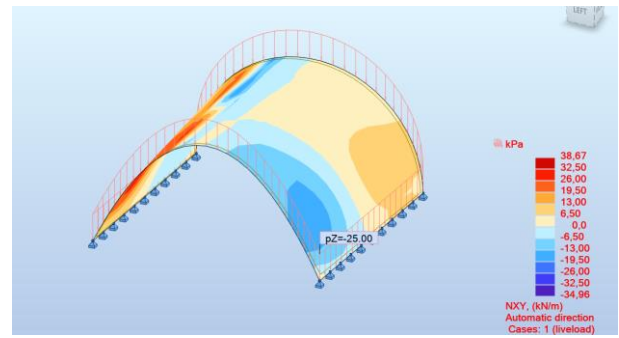
(ε) σ_{XY} (kPa)



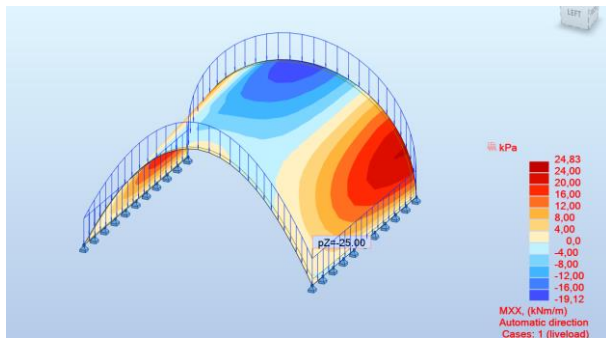
(στ) N_{XX} (kN/m)



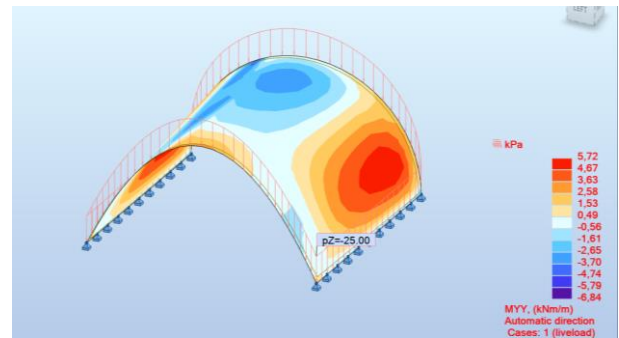
(ζ) N_{YY} (kN/m)



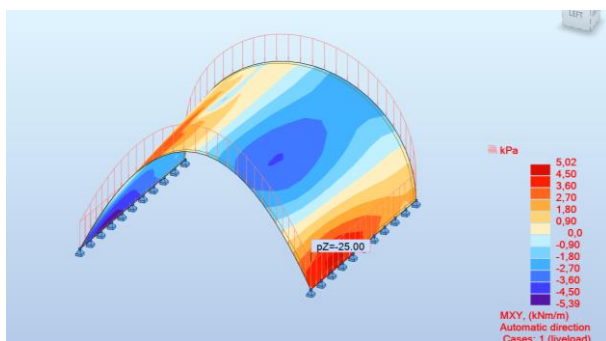
(η) N_{XY} (kN/m)



(θ) M_{XX} (kNm/m)



(ι) M_{YY} (kNm/m)

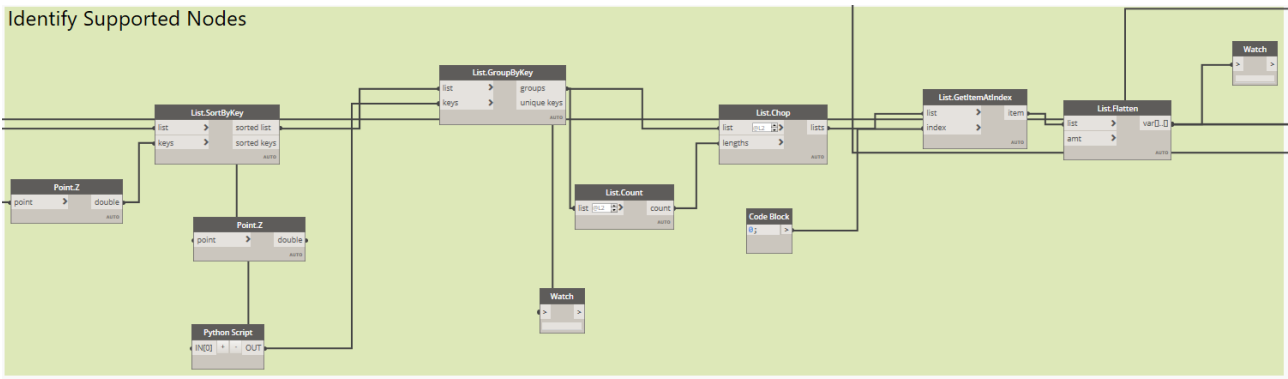


(κ) M_{XY} (kNm/m)

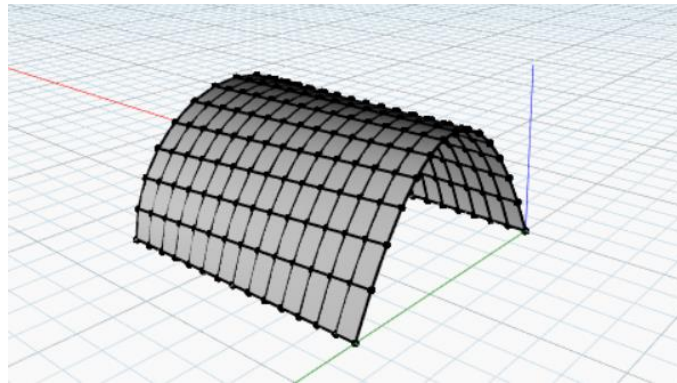
Σχ. 54 Αποτελέσματα ανάλυσης του κελύφους

4.3.2 Ανάλυση κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους με τη χρήση του Dynamo και ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+

Οι αρθρώσεις τοποθετούνται στα ήδη διαμορφωμένα σημεία στη βάση του κελύφους, τα οποία προέκυψαν μέσω της διαδικασίας διακριτοποίησης (Σχ. 55).

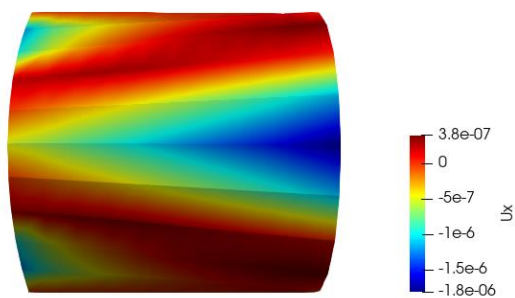


Σχ. 55 Επιλογή σημείων στήριξης

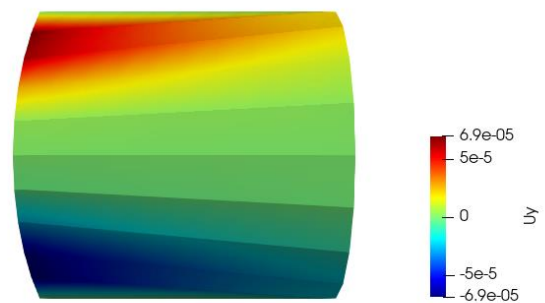


Σχ. 56 Διακριτοποιημένο κέλυφος

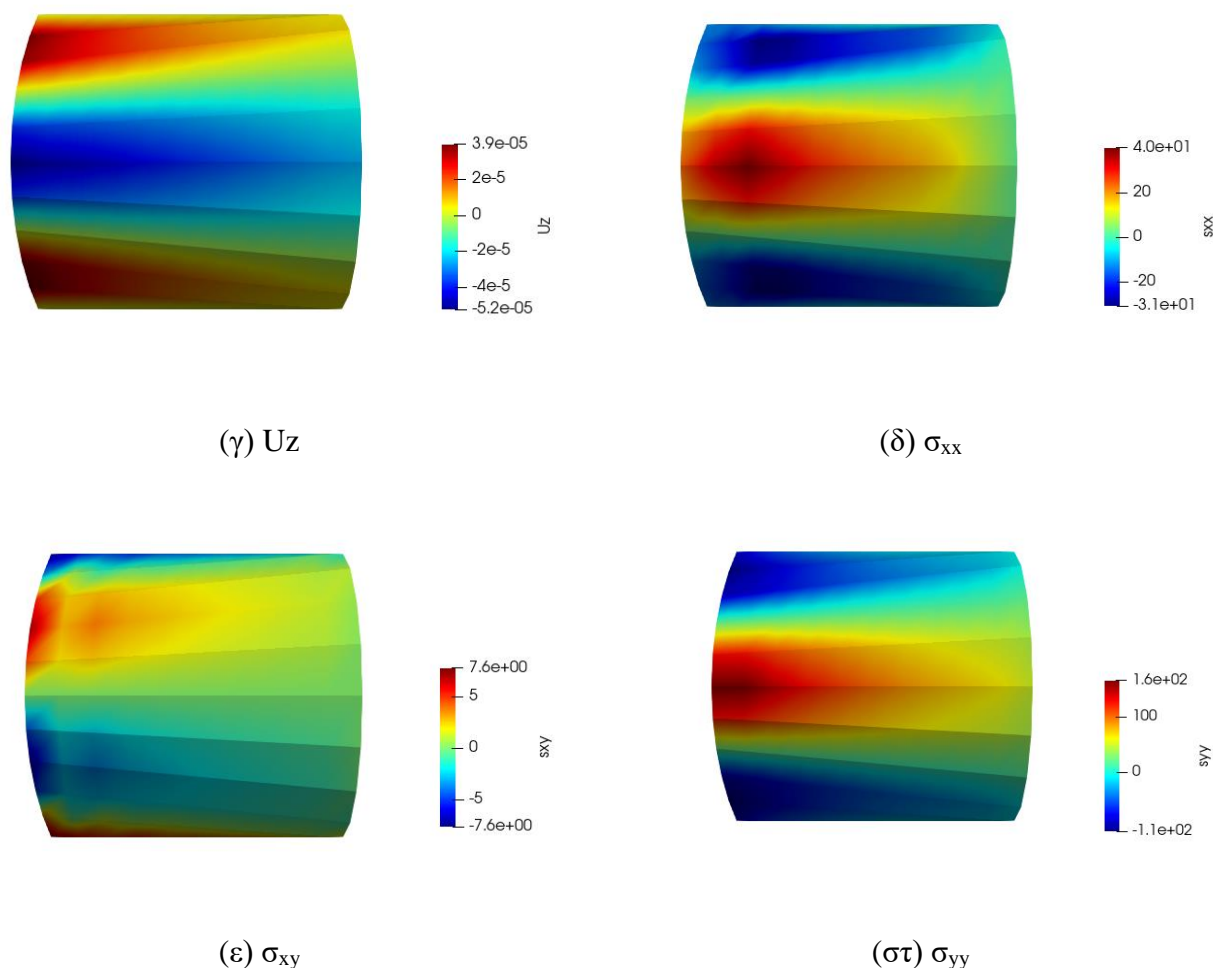
Στο Σχ. 57(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x δηλαδή η ακτινική. Στο Σχ. 57(β) είναι η v , U_y η εφαπτόμενη στην όψη του κελύφους. Η μετατόπιση u , U_z η παράλληλη στο διαμήκη άξονα του κελύφους εικονίζεται στο Σχ. 57(γ). Συνεχίζοντας με τις τάσεις, στο Σχ. 57(δ) παρουσιάζεται η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 57(ε) η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 57(στ) η διατμητική τάση σ_{xy} .



(α) U_x



(β) U_y



Σχ. 57 Αποτελέσματα αναλύσεων στο ParaView

4.4 Σφαίρα με άνοιγμα στην κορυφή

Για τη προσδιορισμό μιας σφαίρας είναι απαραίτητο να οριστεί η γωνία φ που έχει ως αφετηρία τον άξονα z , η γωνία θ , δηλαδή η γωνία γύρω από τη σφαίρα που ξεκινάει από τον άξονα x , το μήκος της ακτίνας και το κέντρο της.

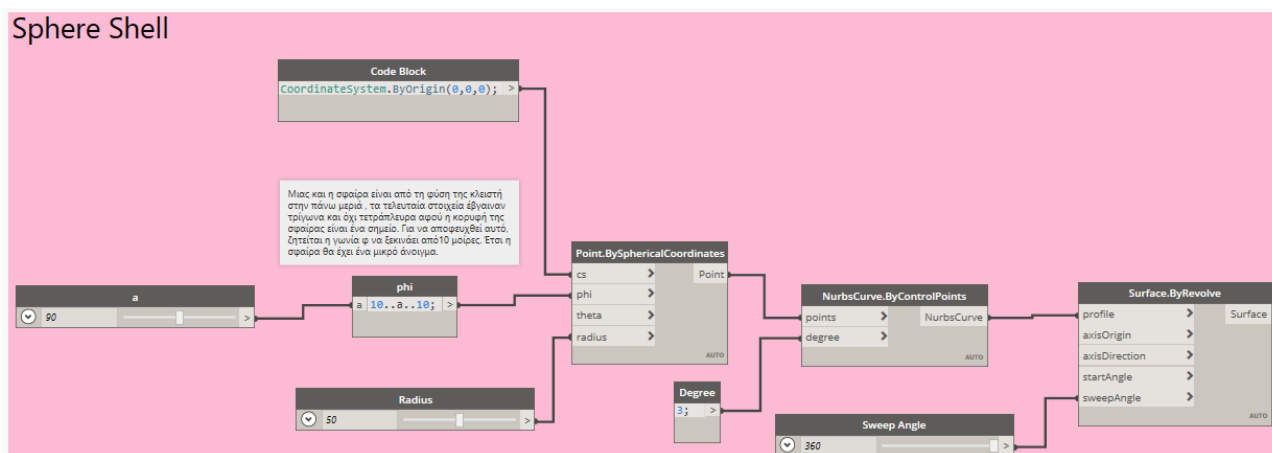
4.4.1 Ανάλυση σφαίρας με τη χρήση του Dynamo και του Robot Structural Analysis

Η σφαίρα σαν γεωμετρία δεν ήταν εφικτό να την αντιληφθεί το Robot Structural Analysis, με αποτέλεσμα να μην βγάζει αποτελέσματα. Οπότε επιλέχθηκε ο επόμενος τρόπος ανάλυσης δηλαδή το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων.

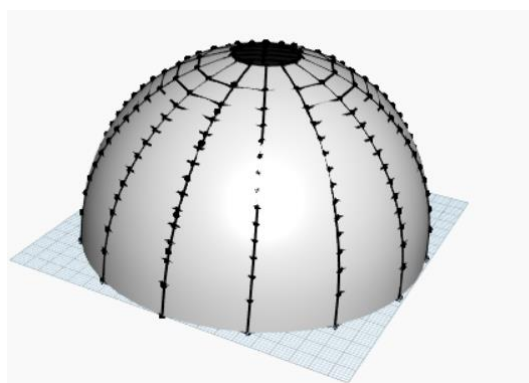
4.4.2 Ανάλυση σφαίρας με τη χρήση του Dynamo και ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+

Αρχικά έγινε προσπάθεια ανάλυσης μιας σφαίρας χωρίς άνοιγμα στην κορυφή της. Το πρόβλημα που προέκυψε ήταν πως λόγω του ότι η κορυφή της σφαίρας ήταν ένα σημείο, δεν ήταν εφικτό να διαμορφώσει τετραπλευρική διακριτοποίηση κοντά στην κορυφή. Με άλλα λόγια, ένα τμήμα της κατάφερνε να διακριτοποιηθεί σε τετραπλευρικά στοιχεία και ένα άλλο τμήμα σε τριγωνικά στοιχεία,

καθιστώντας αδύνατη την ανάλυσή της. Για αυτόν τον λόγο, διαμορφώθηκε μια σφαίρα με ένα μικρό άνοιγμα στην κορυφή. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η γωνία ϕ της σφαίρας ξεκινάει από τις 10° μοίρες και φτάνει τις 90° μοίρες (Σχ. 58).

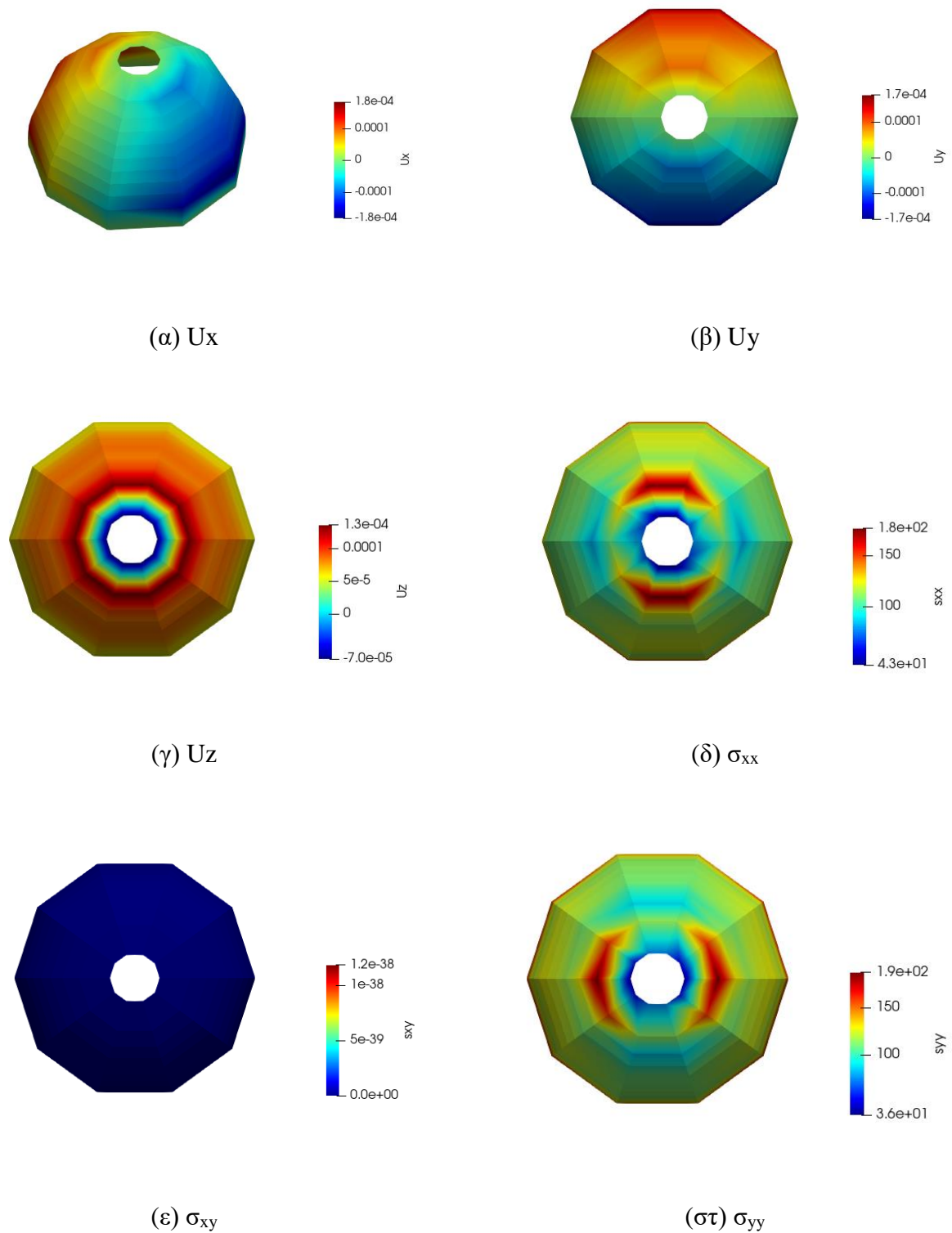


Σχ. 58 Διαμόρφωση παραμετροποιημένης γεωμετρίας σφαίρας



Σχ. 59 Διακριτοποιημένη επιφάνεια σφαίρας

Στο Σχ. 60(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x δηλαδή η ακτινική (κάθετη στη μεσημβρινή καμπύλη). Στο Σχ. 60(β) είναι η v , U_y κατά μήκος της μεσημβρινής καμπύλης. Η μετατόπιση u , U_z η εφαπτόμενη στη μεσημβρινή καμπύλη της σφαίρας εικονίζεται στο Σχ. 60(γ). Συνεχίζοντας με τις τάσεις, στο Σχ. 60(δ) παρουσιάζεται η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 60 (ε) η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 60 (στ) διατμητική τάση σ_{xy} .

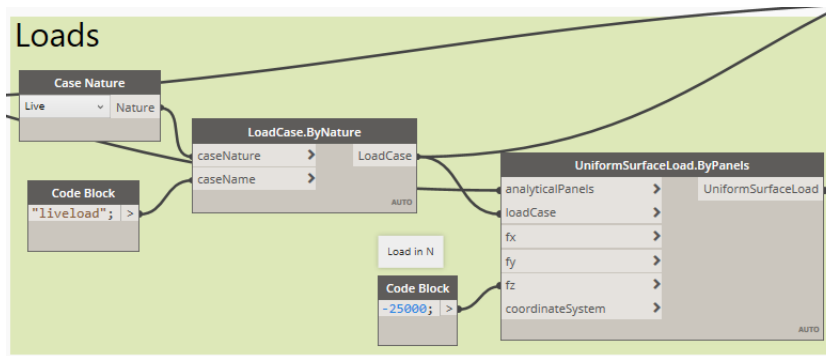


Σχ. 60 Αποτελέσματα αναλύσεων στο ParaView

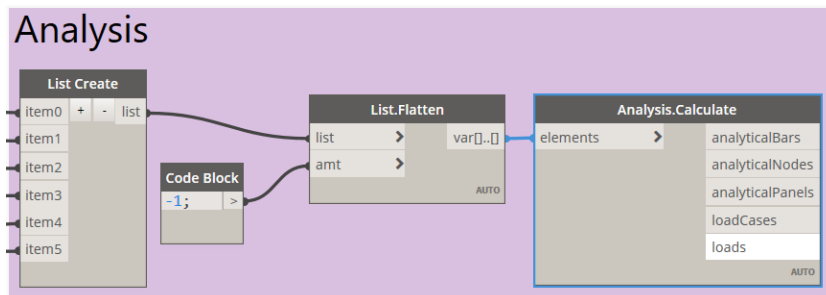
4.5 Επιφάνεια ελεύθερης γεωμετρίας

4.5.1 Ανάλυση επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας με τη χρήση του Dynamo και του Robot Structural Analysis

Η συγκεκριμένη επιφάνεια ελεύθερης μορφής αποτελεί έμπρακτο παράδειγμα εφαρμογής των NURBS καμπυλών. Βασισμένη στη θεωρία των προαναφερόμενων καμπυλών, σχεδιάστηκαν τα σημεία ελέγχου



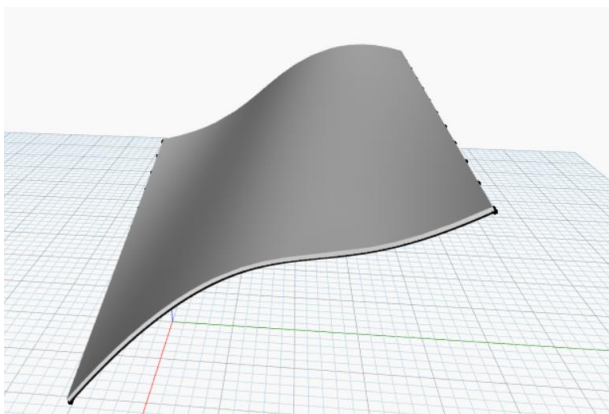
Σχ. 64 Ορισμός φορτίων



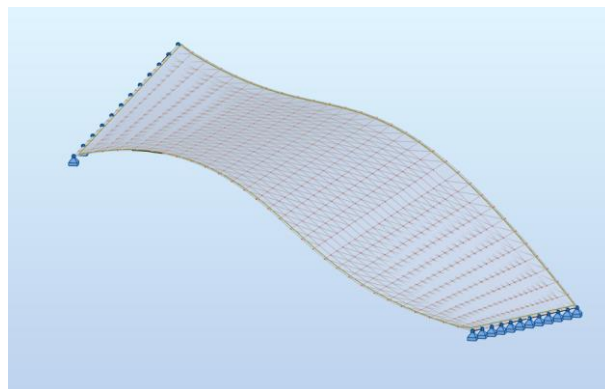
Σχ. 65

Στο Σχ. 66(α) παρουσιάζεται η προσομοίωση της επιφάνειας στο Dynamo ενώ στο Σχ. 66(β) παρουσιάζεται η προσομοίωση στο Robot Structural Analysis.

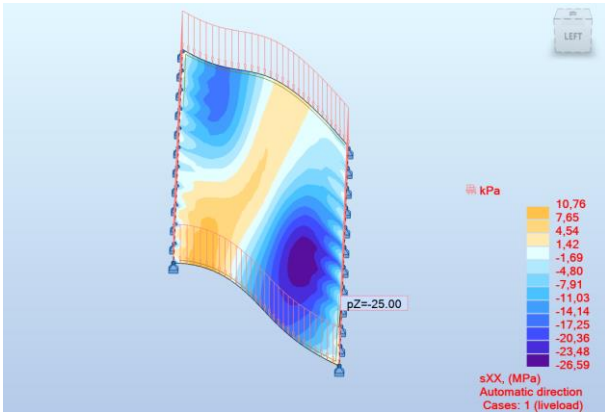
Στο Σχ. 66(γ) παρουσιάζεται η τάση ορθή σ_{xx} σε MPa, η οποία είναι εφαπτόμενη στην επιφάνεια. Στο Σχ. 66 (δ) είναι η ορθή τάση σ_{yy} , κάθετη στην επιφάνεια, και στο Σχ. 54(ε) η διατμητική σ_{xy} τάση. Στο Σχ. 66 (στ) παρουσιάζεται η αξονική δύναμη N_{xx} , δηλαδή η δύναμη εφαπτόμενη της επιφάνειας. Όσον αφορά την αξονική δύναμη N_{yy} Σχ. 66 (ζ) είναι η κάθετη στην επιφάνεια. Η αξονική N_{xy} βρίσκεται στο Σχ. 54 (η), η ροπή M_{xx} στο Σχ. 54 (θ), η ροπή M_{yy} στο Σχ. 54 (ι) και τέλος η ροπή M_{xy} είναι στο σχήμα Σχ. 54 (κ).



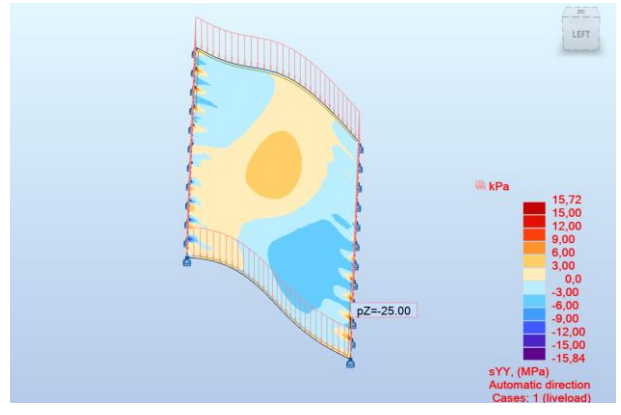
(α) Dynamo



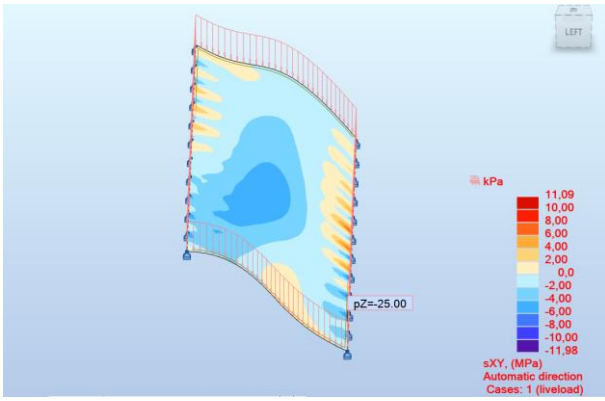
(β) Robot Structural Analysis



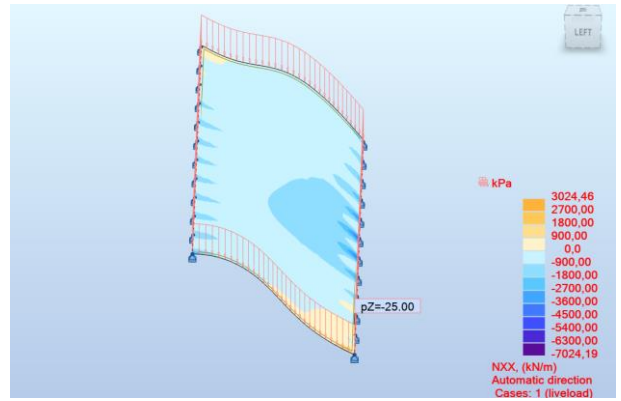
(γ) σ_{XX} (kPa)



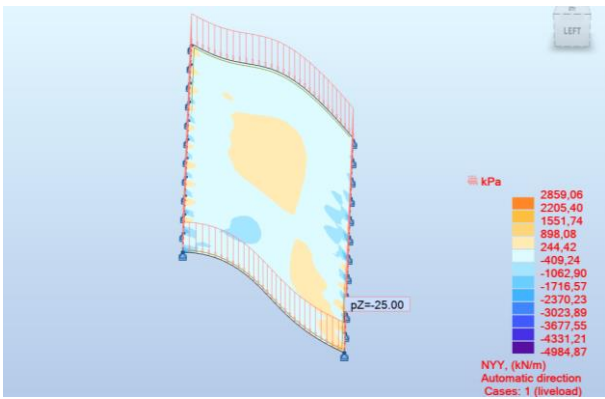
(δ) σ_{YY} (kPa)



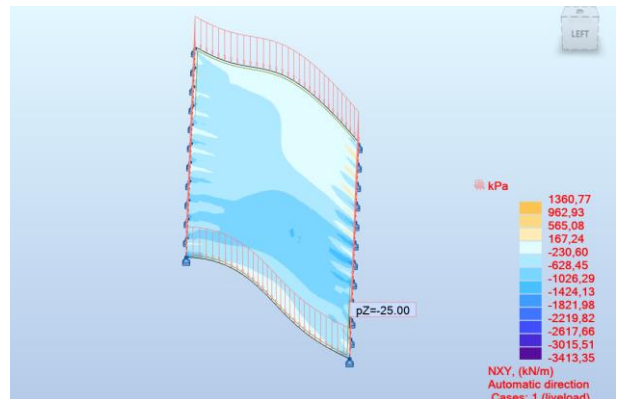
(ε) σ_{XY} (kPa)



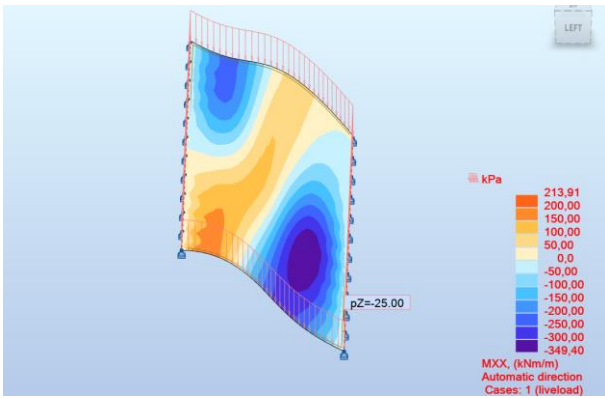
(σ) N_{XX} (kN/m)



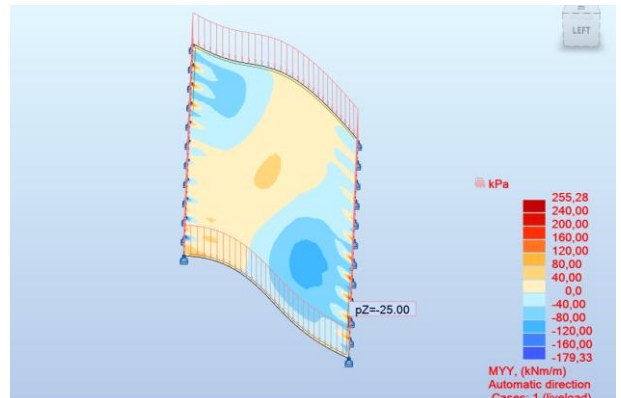
(ζ) N_{YY} (kN/m)



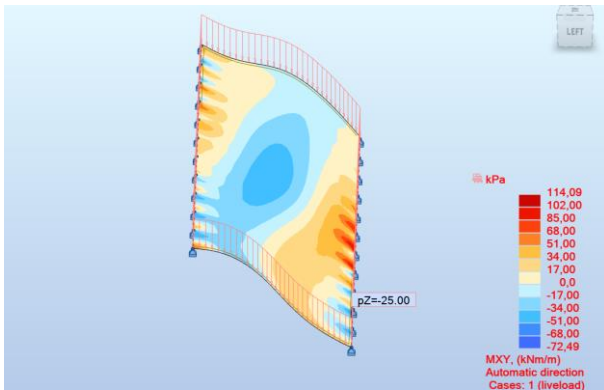
(η) N_{XY} (kN/m)



(θ) M_{XX} (kNm/m)



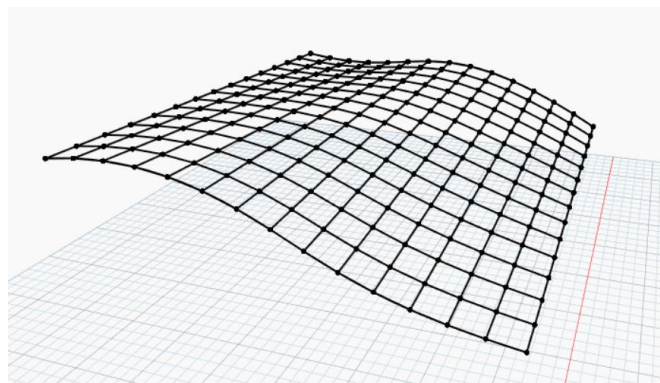
(ι) M_{YY} (kNm/m)



(κ) M_{XY} (kNm/m)

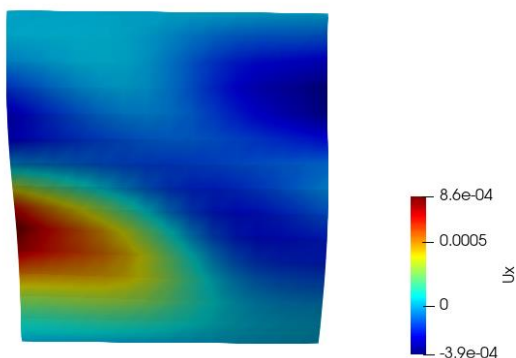
Σχ. 66 Αποτελέσματα ανάλυσης της επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας

4.5.2 Ανάλυση επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας με τη χρήση του Dynamo και ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+

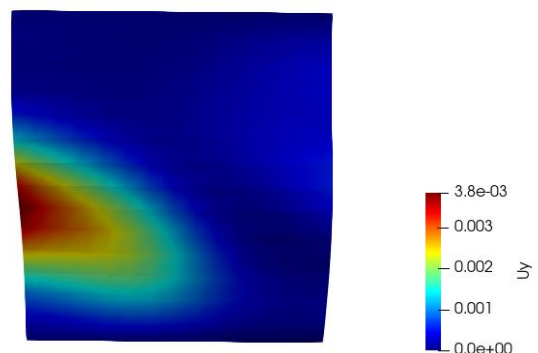


Σχ. 67 Διακριτοποιημένη επιφάνεια

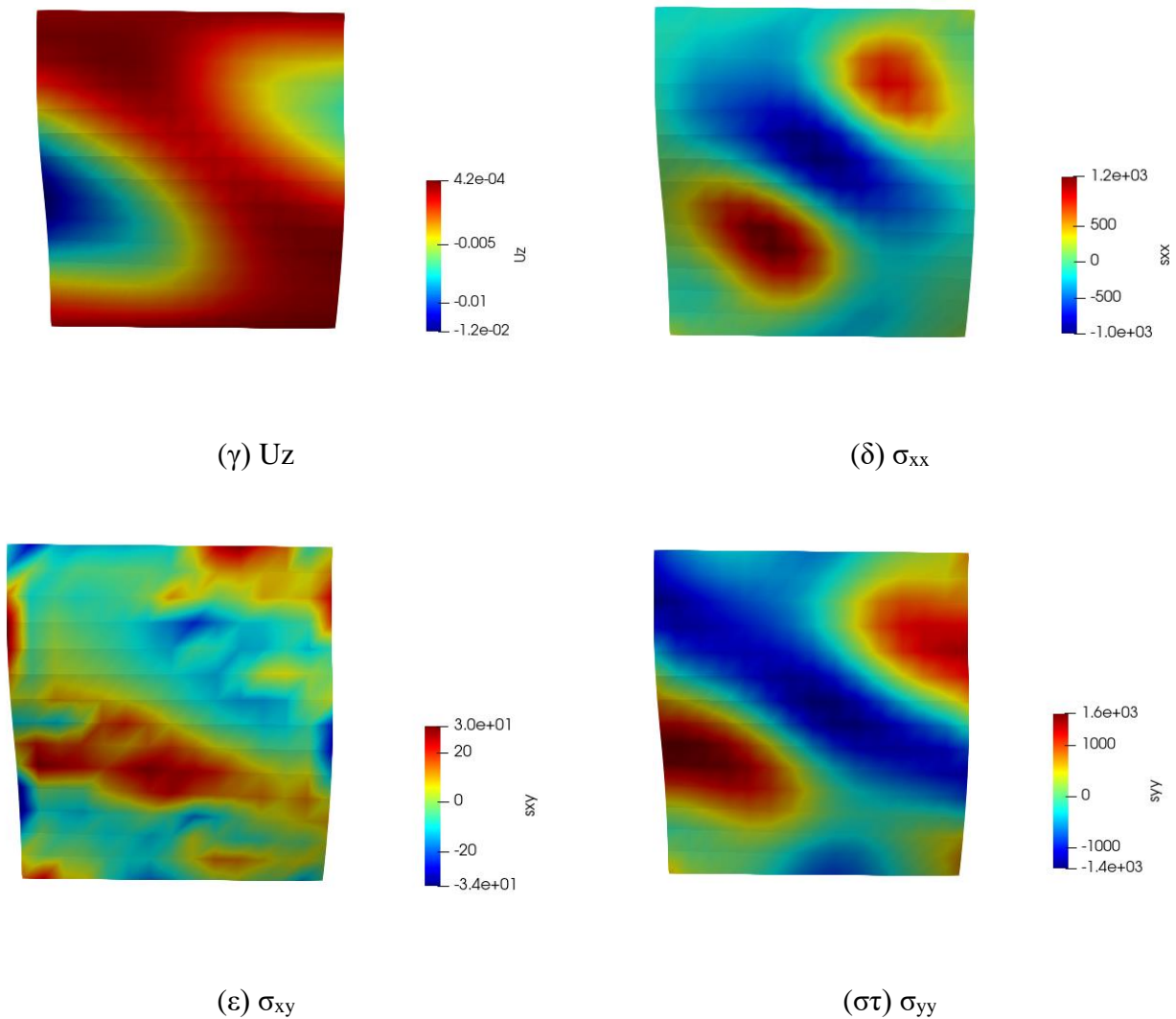
Στο Σχ. 68(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x , στο Σχ. 68(β) είναι η v , U_y μετατόπιση ενώ η u , U_z εικονίζεται στο Σχ. 68(γ). Συνεχίζοντας με τις τάσεις, στο Σχ. 68(δ) παρουσιάζεται η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 68(ε) η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 68(στ) η διατμητική τάση σ_{xy} .



(α) U_x



(β) U_y



Σχ. 68 Αποτελέσματα αναλύσεων στο ParaView

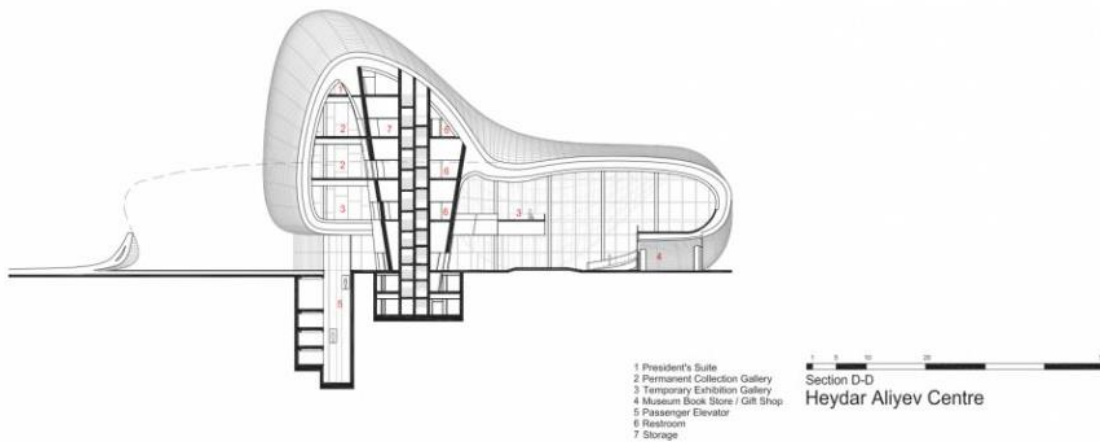
4.6 Γεωμετρία του κέντρου πολιτισμού Heydar Aliyev της Zaha Hadid

Το Heydar Aliyev είναι ένα κέντρο πολιτισμού, το οποίο εδράζεται στο Μπακού στο Αζερμπαϊτζάν. Σχεδιάστηκε από την αρχιτέκτονα Zaha Hadid και φημίζεται για την ιδιαίτερη και εντυπωσιακή αρχιτεκτονική του. Ολοκληρώθηκε η κατασκευή του στις 10 Μαΐου 2012 και περιλαμβάνει αίθουσα συνεδριάσεων, γκαλερί και μουσείο. Το ίδιο το κτήριο δίνει την εντύπωση μιας ρευστής μάζας, που αναδύεται και εντάσσεται στην ευρύτερη τοπογραφία.

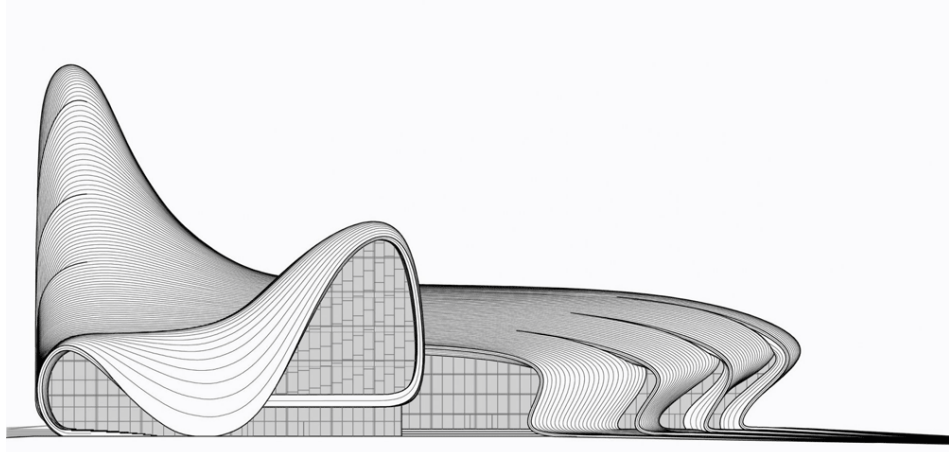


Σχ. 69 Heydar Aliyev

Το εικονιζόμενο τμήμα στο Σχ. 69 αποτελεί το μουσείο, η γεωμετρία του οποίου αποτέλεσε και την έμπνευση για το προσομοίωμα στο Dynamo της συγκεκριμένης εργασίας. Οι διαστάσεις ορίστηκαν κατά προσέγγιση από τους χάρτες που διατίθενται από το αρχιτεκτονικό γραφείο της Zaha Hadid Σχ. 70.



(α) Τομή του Heydar Aliyev μουσείου



(β) Heydar Aliyev όψη μουσείου

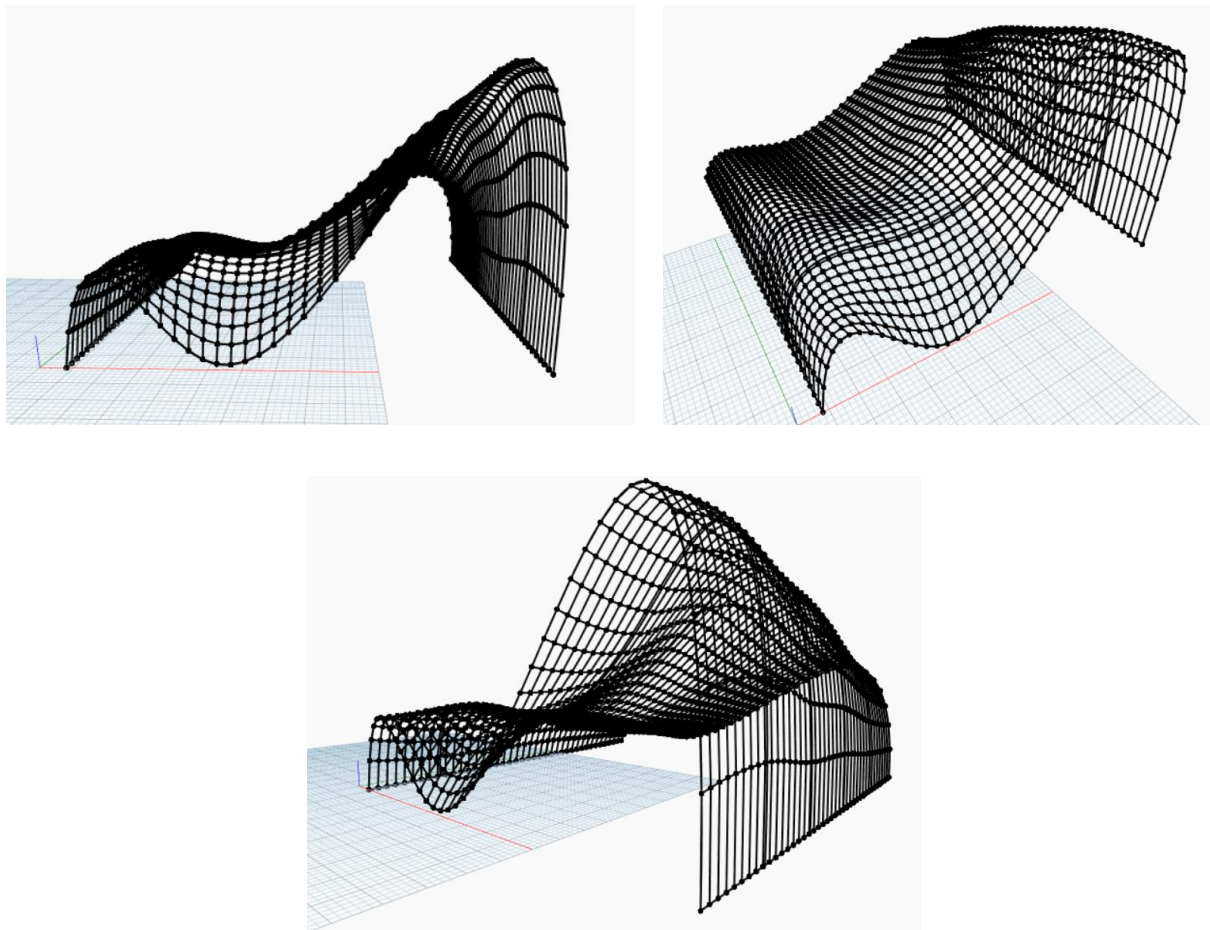


(γ) Heydar Aliyev κάτοψη

Σχ. 70

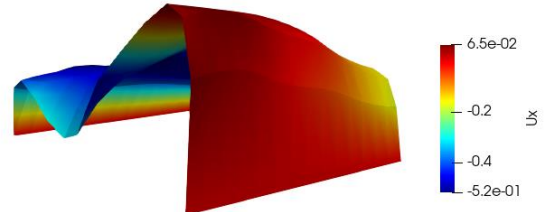
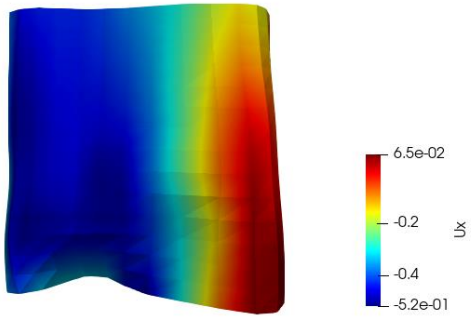
4.6.1 Ανάλυση της γεωμετρίας εμπνευσμένης από το Heydar Aliyev με τη χρήση του Dynamo και ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+

Η προσομοίωση έγινε με τη χρήση καμπυλών NURBS, έχοντας λάβει τις διαστάσεις προσεγγιστικά από τους παραπάνω χάρτες. Η διακριτοποιημένη γεωμετρία που προέκυψε είναι η εξής Σχ. 71.

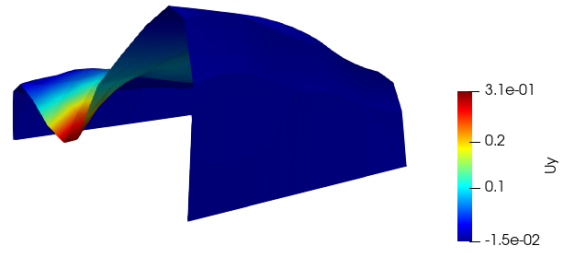
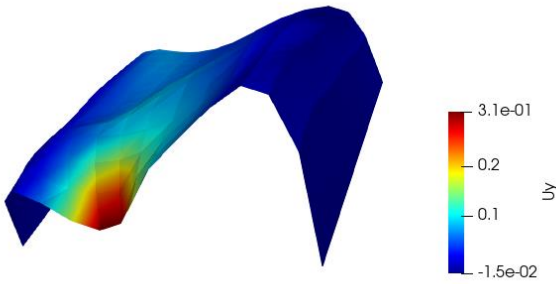


Σχ. 71 Διακριτοποιημένη γεωμετρία του Heydar

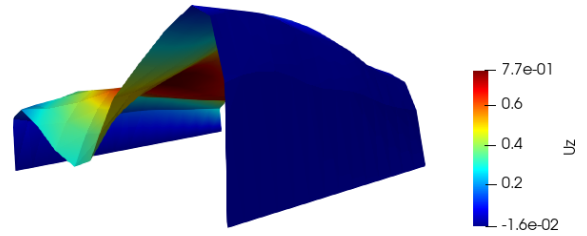
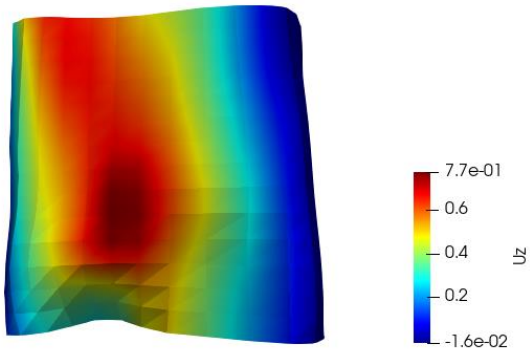
Στο Σχ. 72(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x , στο Σχ. 72(β) είναι η v , U_y μετατόπιση ενώ η u , U_z εικονίζεται στο Σχ. 72 (γ). Συνεχίζοντας με τις τάσεις, στο Σχ. 72(δ) παρουσιάζεται η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 72(ε) η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 72(στ) η διατμητική τάση σ_{xy} .



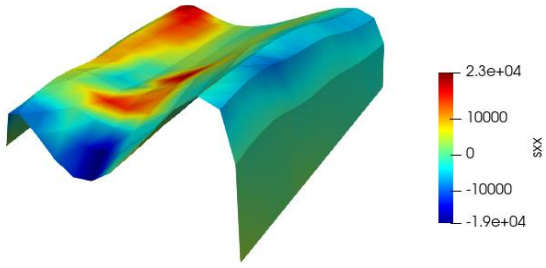
(α) U_x



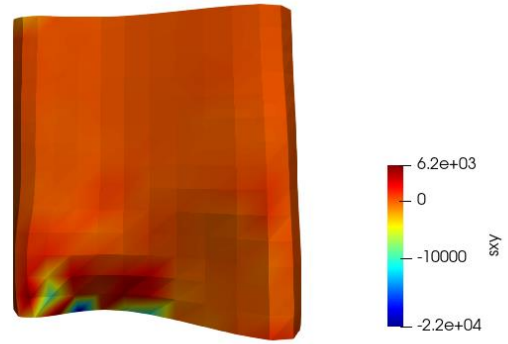
(β) U_y



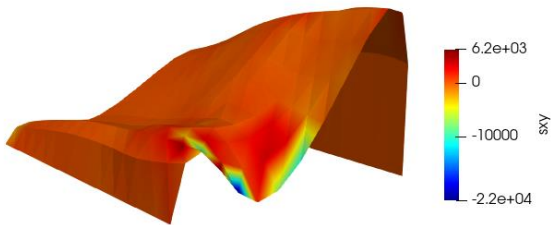
(γ) U_z



(δ) σ_{xx}



(ε) σ_{xy}



(στ) σ_{yy}

Σχ. 72 Αποτελέσματα αναλύσεων στο ParaView

5 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πραγματοποιήθηκαν δύο διαφορετικές παραμετρικές αναλύσεις με τη χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+. Ο πρώτη παραμετρική ανάλυση αφορά τον αριθμό των στοιχείων ανά πλευρά, άρα την πυκνότητα της διακριτοποίησης ενώ η δεύτερη σχετίζεται με το πάχος της επιφάνειας.

Το υλικό που επιλέχθηκε σε όλες τις αναλύσεις είναι το σκυρόδεμα με μέτρο ελαστικότητας E ίσο με 33000000 kN/m^2 , και λόγο Poisson ν ίσο με 0.3 .

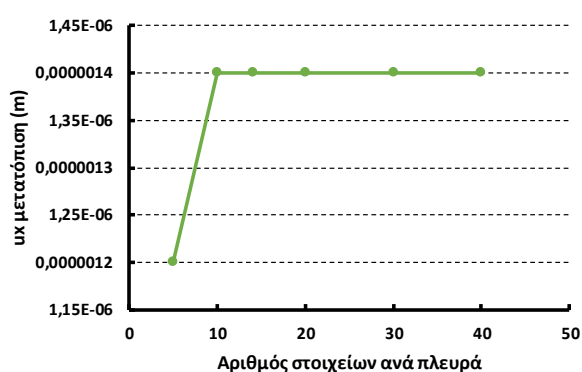
5.1 Παραμετρική ανάλυση με τη διακριτοποίηση

Οι αναλύσεις έγιναν αρχικά για διακριτοποίηση 14 στοιχείων ανά πλευρά, μετά 5, 10, 20, 30 και φτάνοντας τα 40 στοιχεία ανά πλευρά.

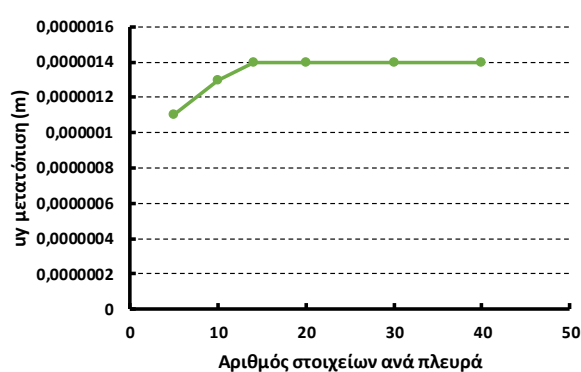
5.1.1 Κύλινδρος

Το πάχος του κυλίνδρου είναι 0.2 m , το ύψος 5 m και η ακτίνα 3 m .

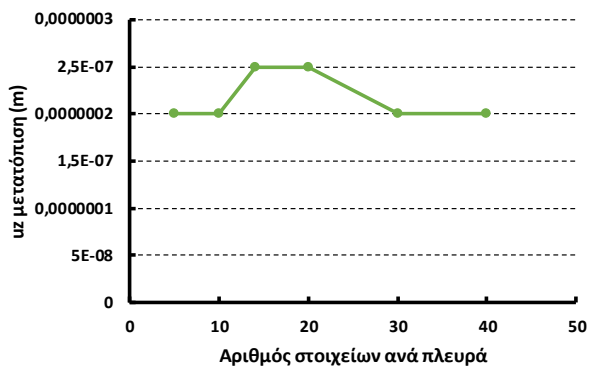
Για ένα σημείο περίπου στο μέσον του κυλίνδρου λήφθηκαν χειροκίνητα οι τιμές από το ParaView. Στο Σχ. 73(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x σε m δηλαδή η ακτινική, στο Σχ. 73(β) η μετατόπιση v , U_y η οποία είναι εφαπτόμενη στην όψη του κυλίνδρου και στο Σχ. 73(γ) η u , U_z η παράλληλη στον άξονα του κυλίνδρου. Στο Σχ. 73(δ) είναι η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 73(ε) η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 73(στ) εικονίζεται η διατμητική τάση σ_{xy} .



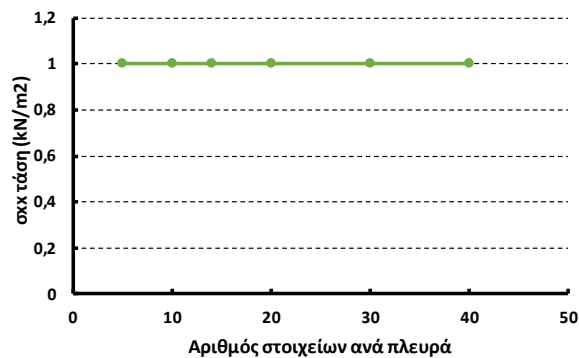
(α) U_x κυλίνδρου



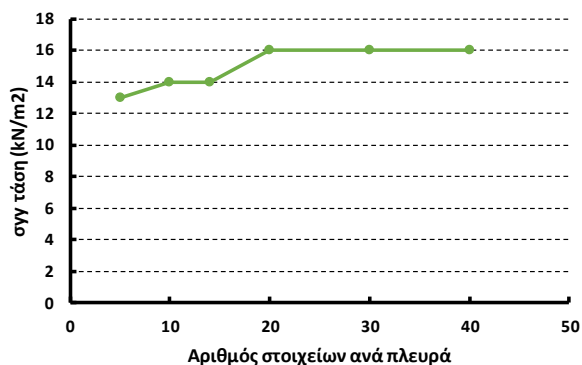
(β) U_y κυλίνδρου



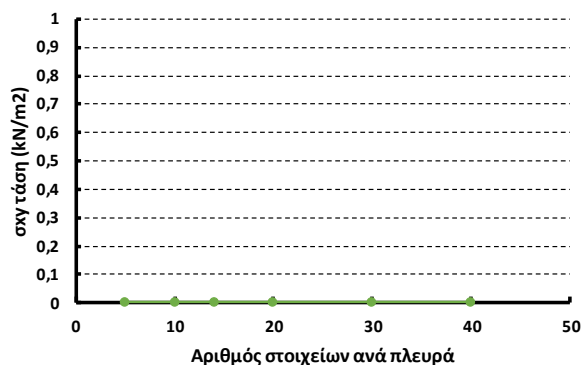
(γ) U_z κυλίνδρου



(δ) σ_{xx} κυλίνδρου



(ε) σ_{yy} κυλίνδρου



(στ) σ_{xy} κυλίνδρου

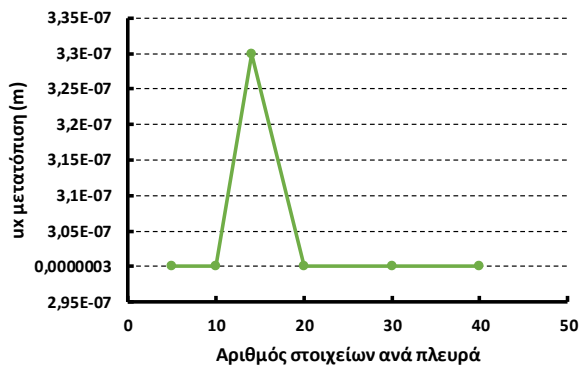
Σχ. 73 Παραμετρική ανάλυση κυλίνδρου για ποικίλες διακριτοποιήσεις

Παρατηρείται ότι με την αύξηση του αριθμού στοιχείων ανά πλευρά παρουσιάζεται σύγκλιση των τιμών και άρα πιο ακριβή αποτελέσματα. Επίσης, η διατμητική τάση σε συμμετρικά κελύφη με συμμετρική φόρτιση ισούται με μηδέν, το οποίο επαληθεύεται και στα αποτελέσματα στο Σχ. 73(στ).

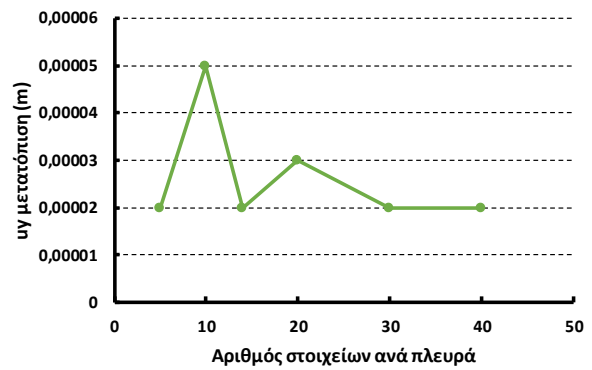
5.1.2 Κέλυφος παραβολικού τόξου

Το κέλυφος έχει άνοιγμα 8 m, ύψος 4 m και μήκος 8 m. Το πάχος της επιφάνειας είναι 0.2 m.

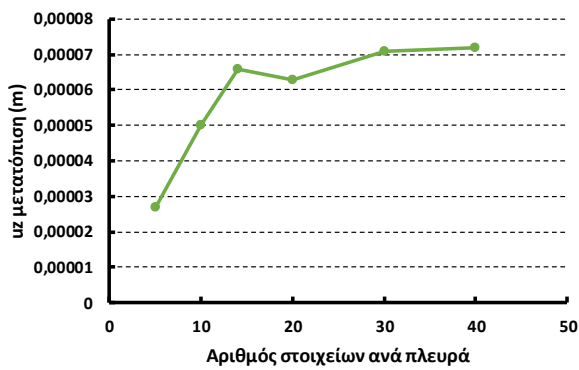
Για ένα σημείο περίπου στην κορυφή του κελύφους πάρθηκαν χειροκίνητα οι τιμές από το ParaView. Στο Σχ. 74(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x σε m δηλαδή η ακτινική, στο Σχ. 74(β) η μετατόπιση v , U_y η οποία είναι εφαπτόμενη στην όψη του κελύφους και στο Σχ. 74(γ) η u , U_z η παράλληλη στον άξονα του κελύφους. Στο Σχ. 74(δ) είναι η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 74(ε) είναι η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 74(στ) εικονίζεται η διατμητική τάση σ_{xy} .



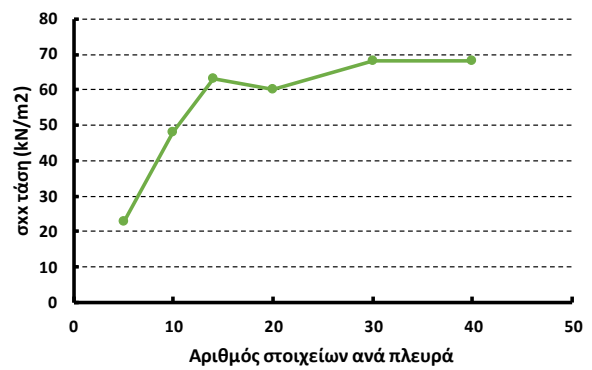
(α) u_x κελύφους παραβολικού τόξου



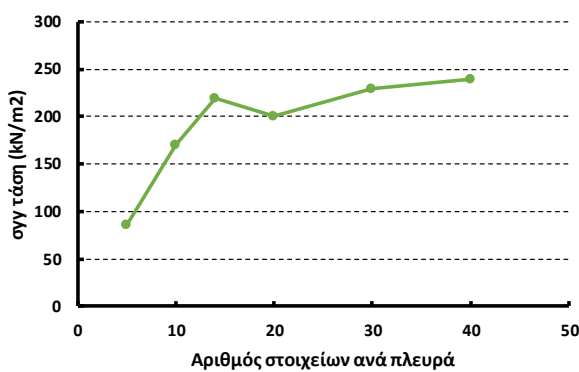
(β) u_y κελύφους παραβολικού τόξου



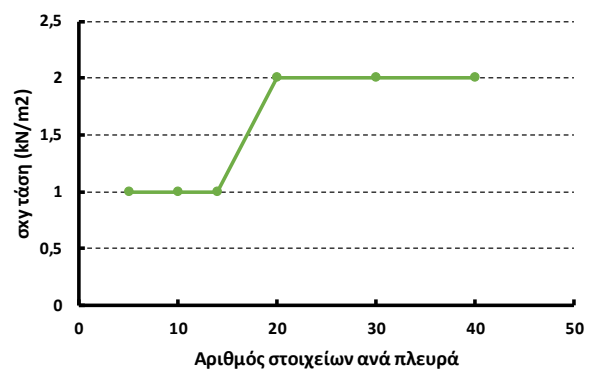
(γ) u_z κελύφους παραβολικού τόξου



(δ) σ_{xx} κελύφους παραβολικού τόξου



(ε) σ_{yy} κελύφους παραβολικού τόξου



(στ) σ_{xy} κελύφους παραβολικού τόξου

Σχ. 74 Παραμετρική ανάλυση κελύφους παραβολικού τόξου για ποικίλες διακριτοποιήσεις

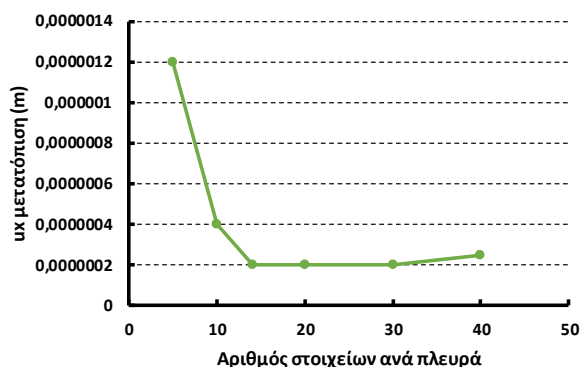
Όσον αυξάνεται η διακριτοποίηση παρατηρείται μείωση της κλίσης των ευθειών μεταξύ των τιμών, άρα και μια συνεχή τάση σύγκλισης των αποτελεσμάτων.

5.1.3 Κέλυφος με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους

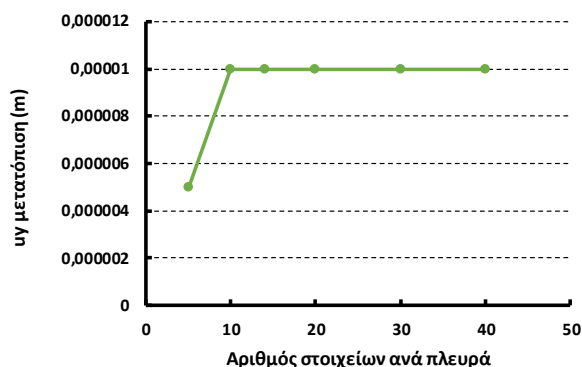
Το κέλυφος αυτό διαθέτει ως γεωμετρία αρχής μια παραβολή και γεωμετρία τέλους ένα τόξο. Το άνοιγμά του είναι 8m, το ύψος του 4m και το μήκος του 8m.

Στο Σχ. 75(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x σε m δηλαδή η ακτινική, στο Σχ. 75(β) η μετατόπιση v , U_y η οποία είναι εφαπτόμενη στην όψη του κελύφους και στο Σχ. 75(γ) η u , U_z η παράλληλη στον

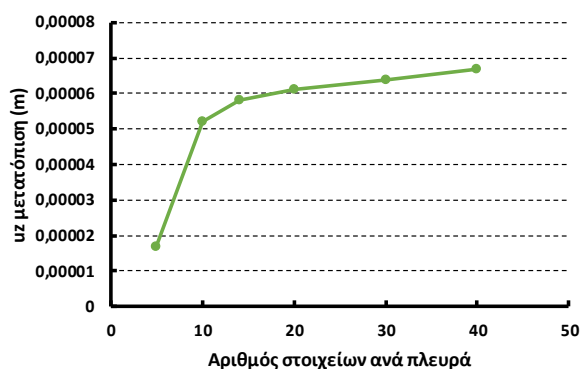
άξονα του κελύφους. Στο Σχ. 75(δ) είναι η ορθή τάση σ_{xx} σε kN/m^2 , στο Σχ. 75(ε) είναι η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 75(στ) εικονίζεται η διατμητική τάση σ_{xy} .



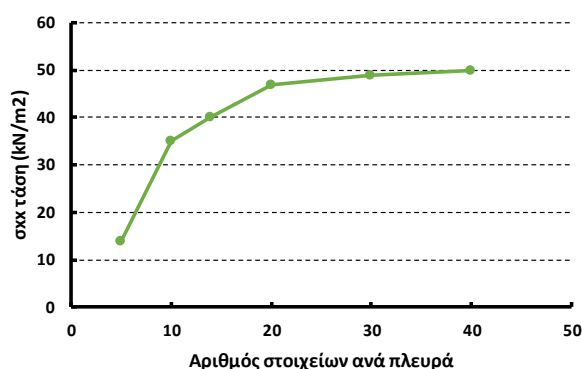
(α) u_x κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους



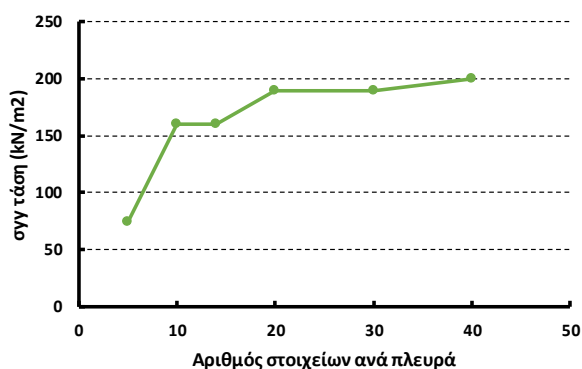
(β) u_y κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους



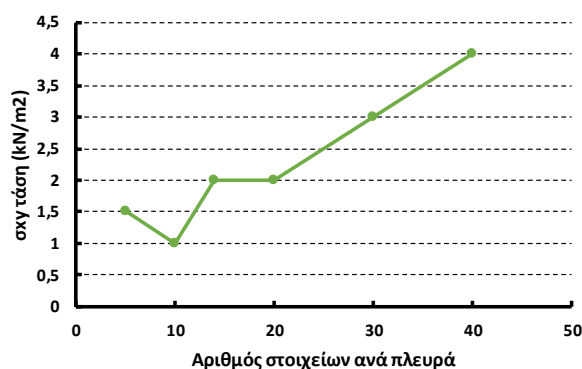
(γ) u_z κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους



(δ) σ_{xx} κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους



(ε) σ_{yy} κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους



(στ) σ_{xy} κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους

Σχ. 75 Παραμετρική ανάλυση κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους για ποικίλες διακριτοποιήσεις

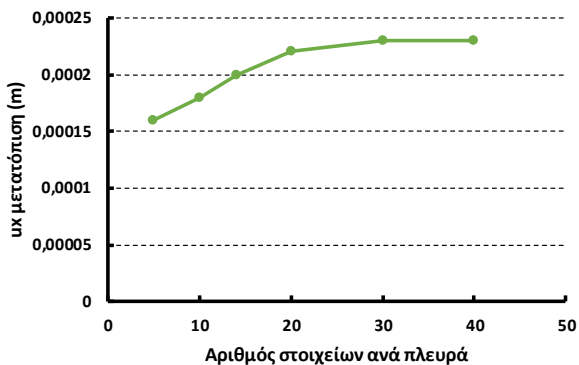
Στη συγκεκριμένη ανάλυση, λόγω της μη συμμετρικής γεωμετρίας αναπτύσσεται διατμητική τάση Σχ. 75(στ).

5.1.4 Σφαίρα με άνοιγμα στην κορυφή

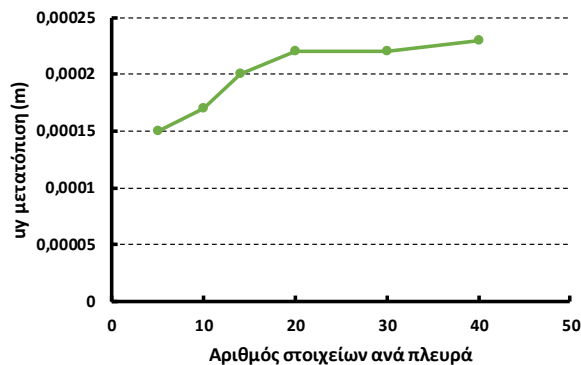
Η σφαίρα που αναλύθηκε έχει ακτίνα 50m και η γωνία της φ ξεκινάει από 10° μοίρες και φτάνει τις 90° .

Στο Σχ. 76(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x η ακτινική δηλαδή η κάθετη στη μεσημβρινή καμπύλη.

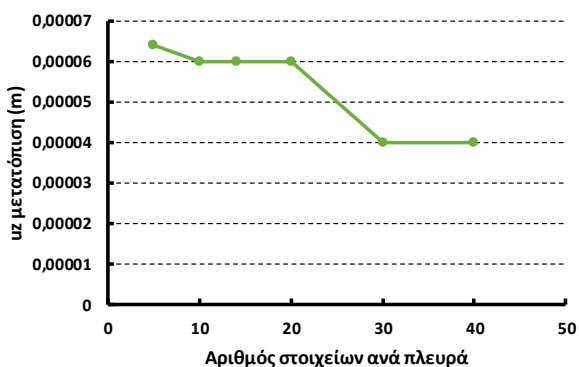
Στο Σχ. 76(β) είναι η v , U_y κατά μήκος της μεσημβρινής καμπύλης. Η μετατόπιση u , U_z η εφαπτόμενη στη μεσημβρινή καμπύλη της σφαίρας εικονίζεται στο Σχ. 76(γ). Συνεχίζοντας με τις τάσεις, στο Σχ. 76(δ) παρουσιάζεται η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 76 (ε) η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 76(στ) η διαμητική τάση σ_{xy} .



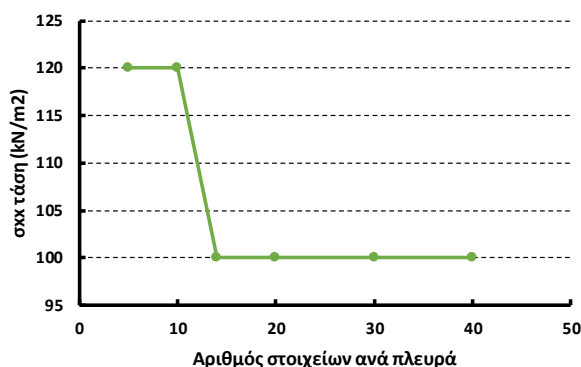
(α) U_x σφαίρας



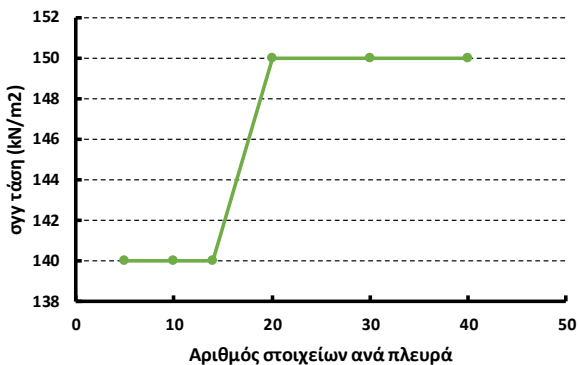
(β) U_y σφαίρας



(γ) U_z σφαίρας



(δ) σ_{xx} σφαίρας



(ε) σ_{yy} σφαίρας



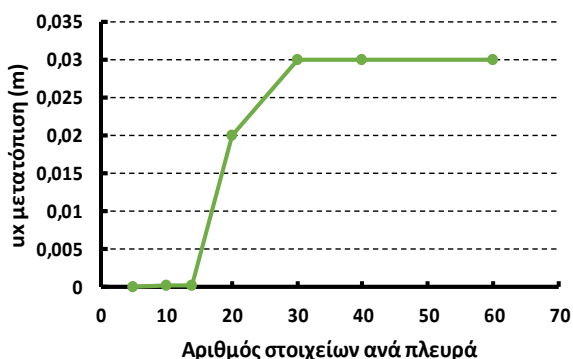
(στ) σ_{xy} σφαίρας

Σχ. 76 Παραμετρική ανάλυση σφαίρας για ποικίλες διακριτοποιήσεις

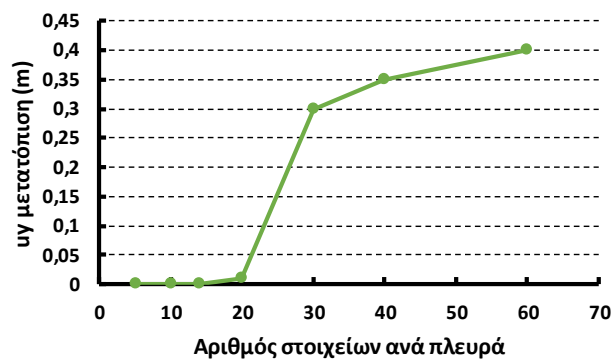
5.1.5 Επιφάνεια ελεύθερης γεωμετρίας

Η επιφάνεια ελεύθερης γεωμετρίας σχεδιάστηκε με άνοιγμα 23.5m, πλάτος 22m, διαφορά ύψος στη μια πλευρά ίση με 6m και διαφορά ύψους στην άλλη πλευρά ίση με 4m.

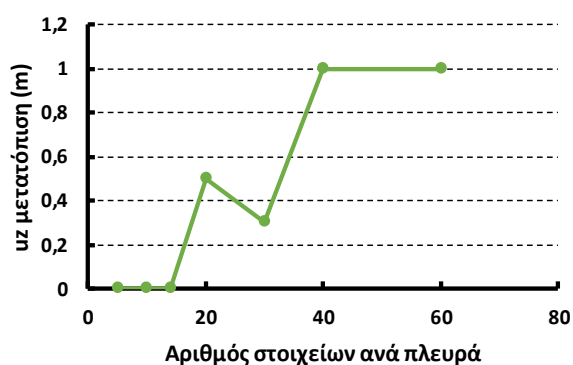
Για ένα σημείο στο μέσον της επιφάνειας πάρθηκαν χειροκίνητα οι τιμές από το ParaView. Στο Σχ. 77(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x σε m δηλαδή η ακτινική, στο Σχ. 77 (β) η μετατόπιση v , U_y και στο Σχ. 77(γ) η u , U_z μετατόπιση. Στο Σχ. 77 (δ) είναι η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 77(ε) είναι η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 77 (στ) εικονίζεται η διατμητική τάση σ_{xy} .



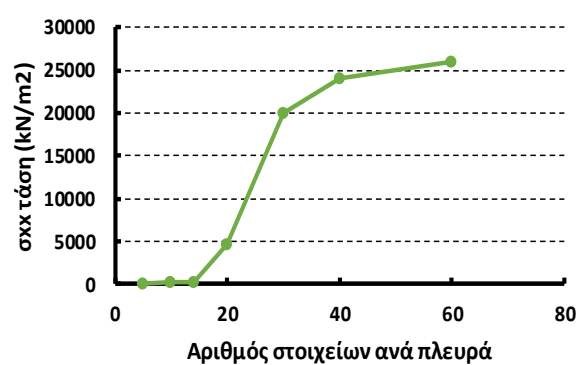
(α) u_x επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας



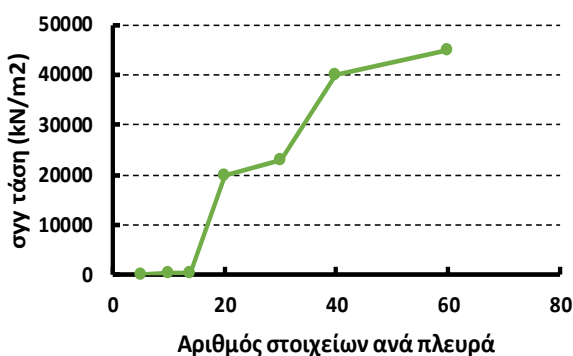
(β) u_y επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας



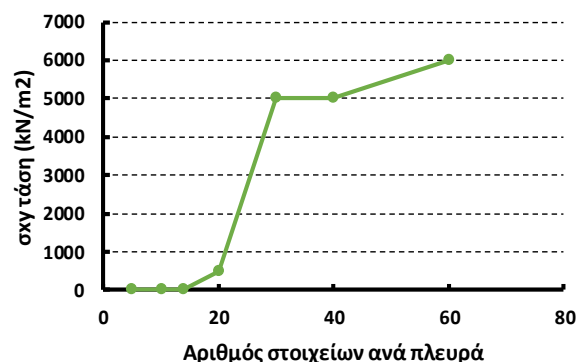
(γ) u_z επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας



(δ) σ_{xx} επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας



(ε) σ_{yy} επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας



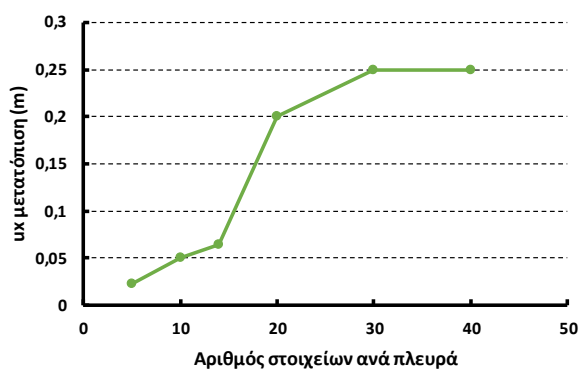
(στ) σ_{xy} επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας

Σχ. 77 Παραμετρική ανάλυση επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας για ποικίλες διακριτοποιήσεις

5.1.6 Γεωμετρία του κέντρου πολιτισμού Heydar Aliyev της Zaha Hadid

Το προσομοίωμα του κέντρου πολιτισμού Heydar Aliyev ορίστηκε με άνοιγμα 75m, μέγιστο ύψος 62m και μήκος 75m.

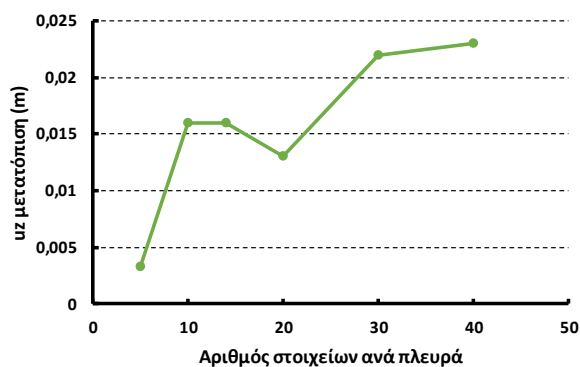
Στο Σχ. 78(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x σε m δηλαδή η ακτινική, στο Σχ. 78(β) η μετατόπιση v , U_y και στο Σχ. 78(γ) η u , U_z μετατόπιση. Στο Σχ. 78(δ) είναι η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 78(ε) είναι η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 78(στ) εικονίζεται η διατμητική τάση σ_{xy} .



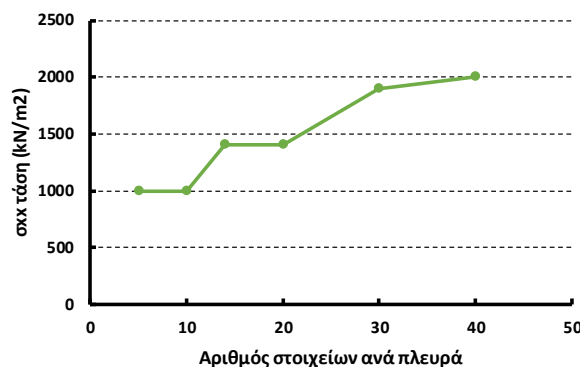
(α) u_x Heydar



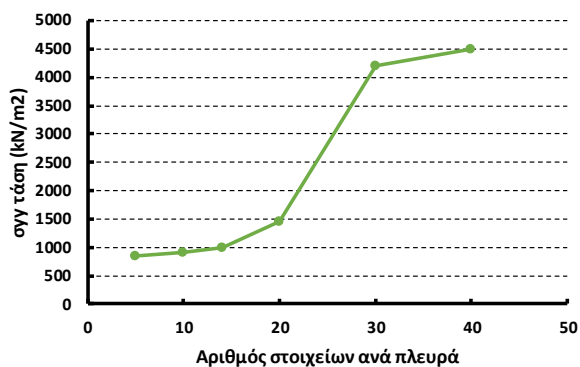
(β) u_y Heydar



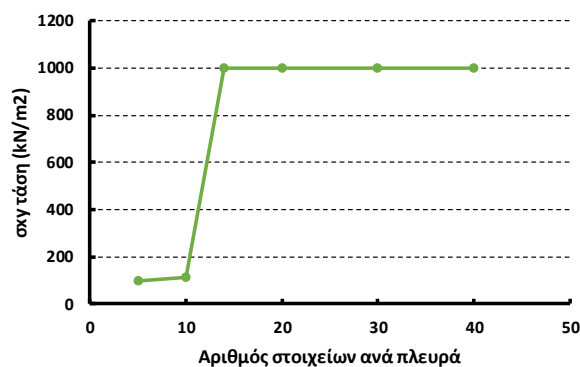
(γ) u_z Heydar



(δ) σ_{xx} Heydar



(ε) σ_{yy} Heydar



(στ) σ_{xy} Heydar

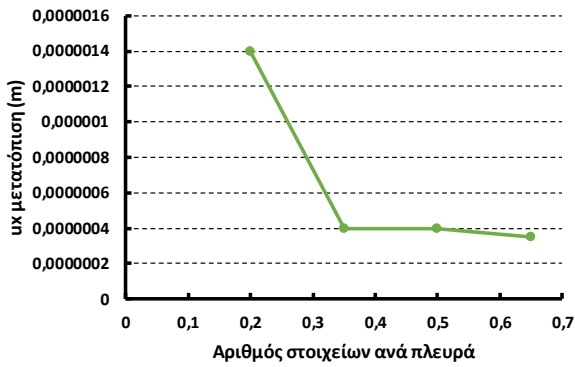
Σχ. 78 Παραμετρική ανάλυση προσομοιώματος του κέντρου πολιτισμού Heydar Aliyev της Zaha Hadid για ποικίλες διακριτοποιήσεις

5.2 Παραμετρική ανάλυση με το πάχος της επιφάνειας

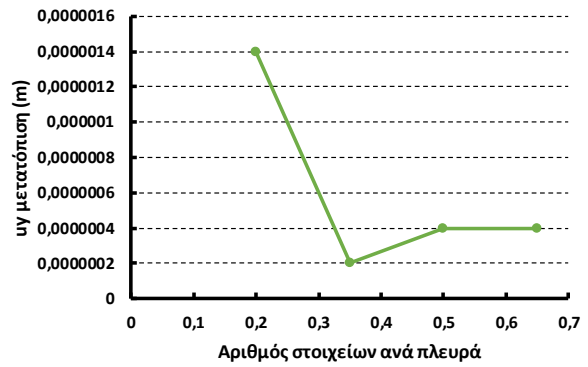
Τα πάχη που επιλέχθηκαν είναι 0.2 m, 0.35 m, 0.5 m και 0.65 m.

5.2.1 Κύλινδρος

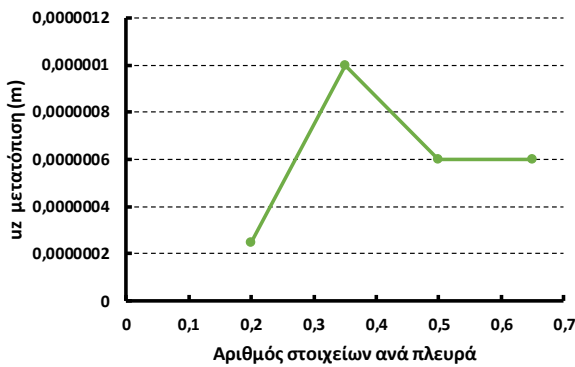
Στο Σχ. 79(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x σε m δηλαδή στην ακτινική διεύθυνση, στο Σχ. 79(β) η μετατόπιση v , U_y η οποία είναι εφαπτόμενη στην όψη του κυλίνδρου και στο Σχ. 79(γ) η u , U_z η παράλληλη στον άξονα του κυλίνδρου. Στο Σχ. 79(δ) είναι η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 79(ε) είναι η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 79(στ) εικονίζεται η διατμητική τάση σ_{xy} .



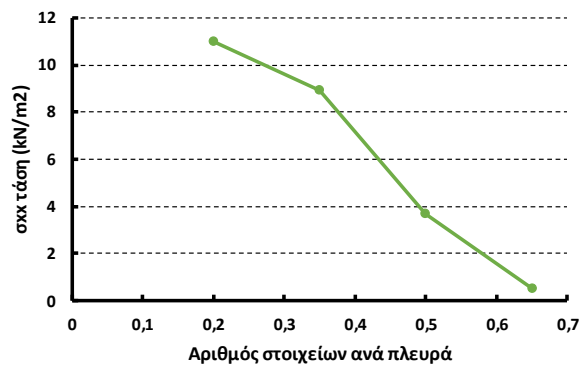
(α) u_x κυλίνδρου



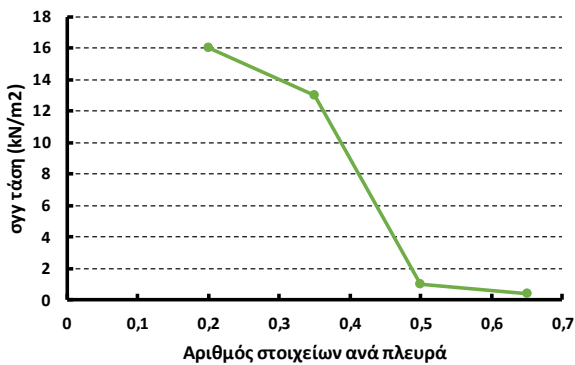
(β) u_y κυλίνδρου



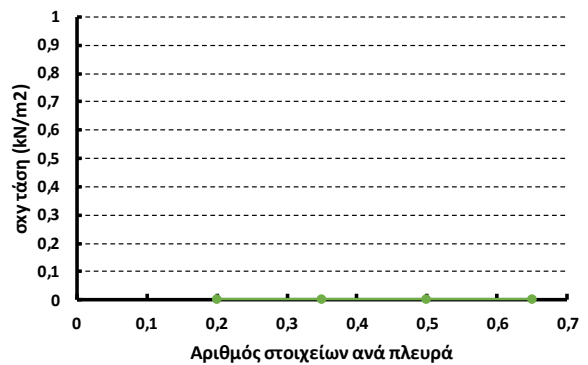
(γ) u_z κυλίνδρου



(δ) σ_{xx} κυλίνδρου



(ε) σ_{yy} κυλίνδρου

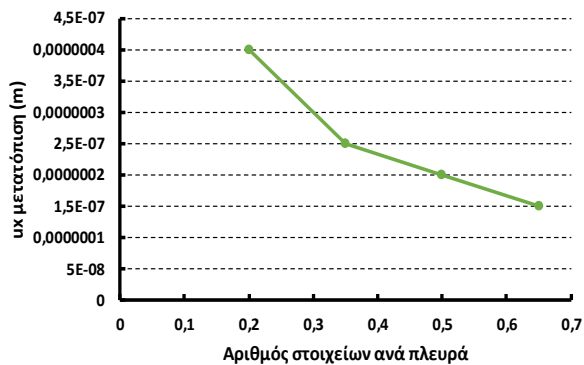


(στ) σ_{xy} κυλίνδρου

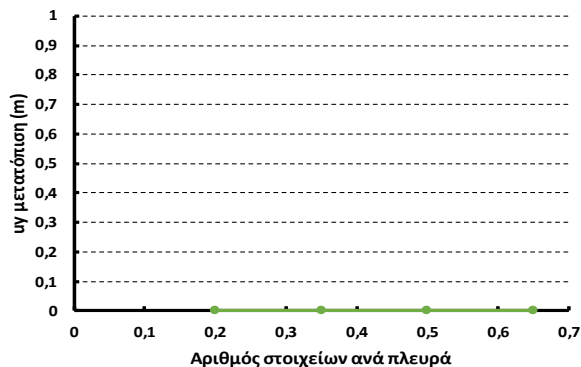
Σχ. 79 Παραμετρική ανάλυση κυλίνδρου για ποικίλα πάχη

5.2.2 Κέλυφος παραβολικού τόξου

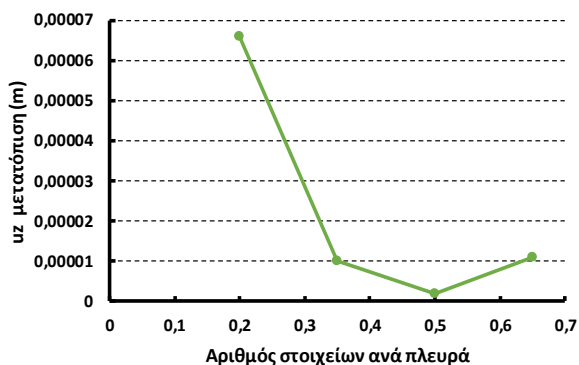
Στο Σχ. 80(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x σε m δηλαδή η ακτινική, στο Σχ. 80(β) η μετατόπιση v , U_y η οποία είναι εφαπτόμενη στην όψη του κελύφους και στο Σχ. 80(γ) η u , U_z η παράλληλη στον άξονα του κελύφους. Στο Σχ. 80(δ) είναι η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 80(ε) είναι η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 80(στ) εικονίζεται η διατμητική τάση σ_{xy} .



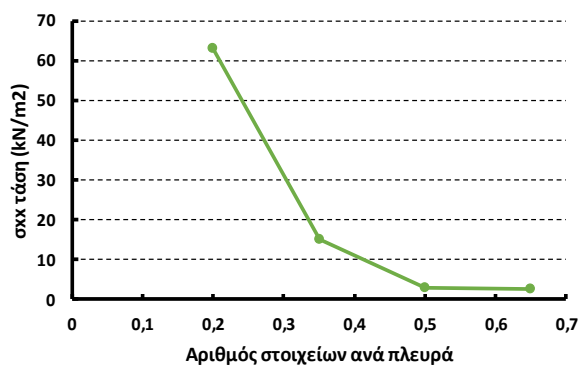
(α) u_x κελύφους παραβολικού τόξου



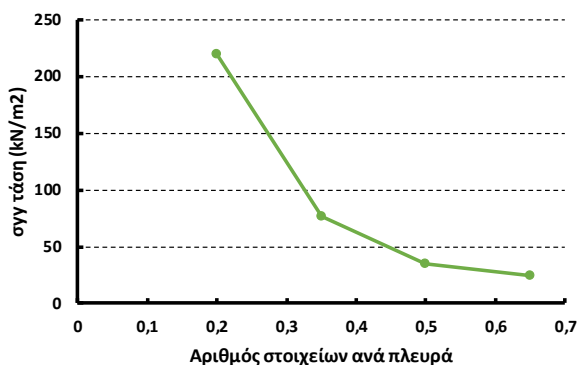
(β) u_y κελύφους παραβολικού τόξου



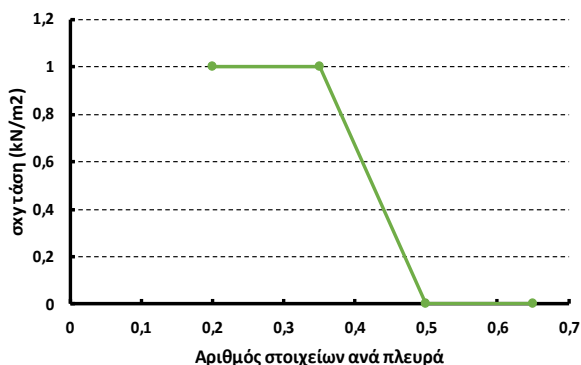
(γ) u_z κελύφους παραβολικού τόξου



(δ) σ_{xx} κελύφους παραβολικού τόξου



(ε) σ_{yy} κελύφους παραβολικού τόξου



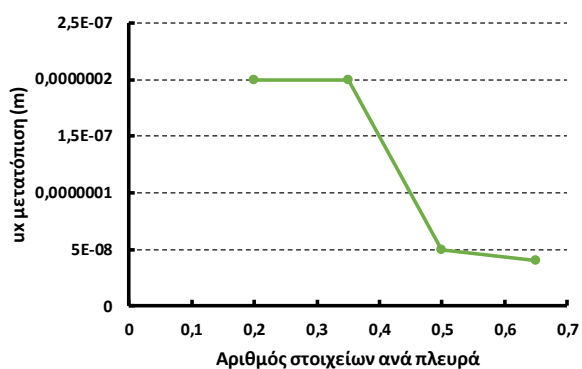
(στ) σ_{xy} κελύφους παραβολικού τόξου

Σχ. 80 Παραμετρική ανάλυση κελύφους παραβολικού τόξου για ποικίλα πάχη

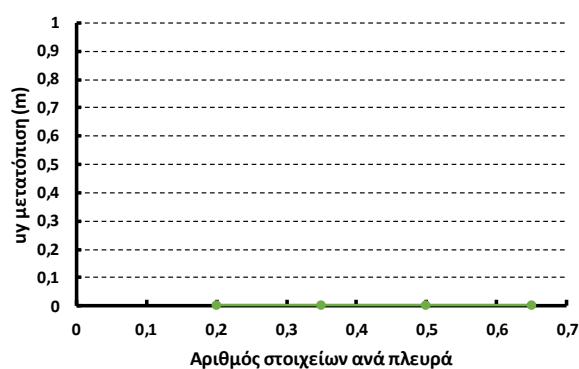
5.2.3 Κέλυφος με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους

Οι τιμές πάρθηκαν για σημείο περίπου στην κορυφή του κελύφους. Στο Σχ. 81(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x σε m δηλαδή κατά την ακτινική διεύθυνση, στο Σχ. 81(β) η μετατόπιση v , U_y η οποία

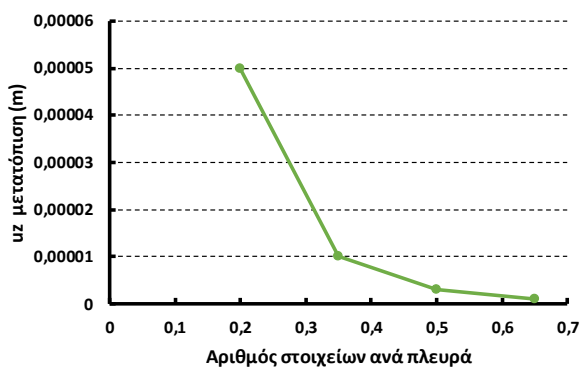
είναι εφαπτόμενη στην όψη του κελύφους και στο Σχ. 81(γ) η u_x , U_z η παράλληλη στον άξονα του κελύφους. Στο Σχ. 81(δ) είναι η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 81(ε) είναι η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 81(στ) εικονίζεται η διατμητική τάση σ_{xy} .



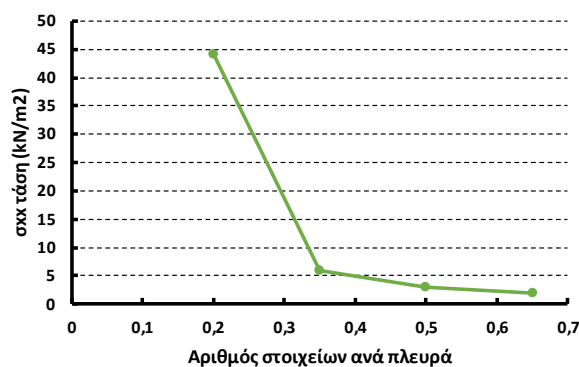
(α) u_x κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους



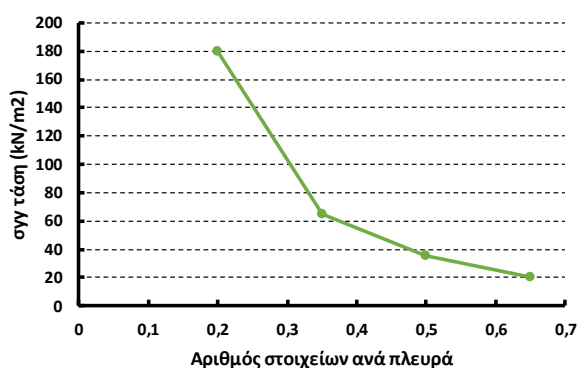
(β) u_y κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους



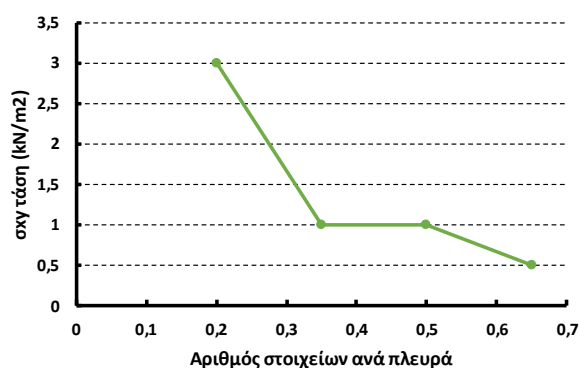
(γ) u_z κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους



(δ) σ_{xx} κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους



(ε) σ_{yy} κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους

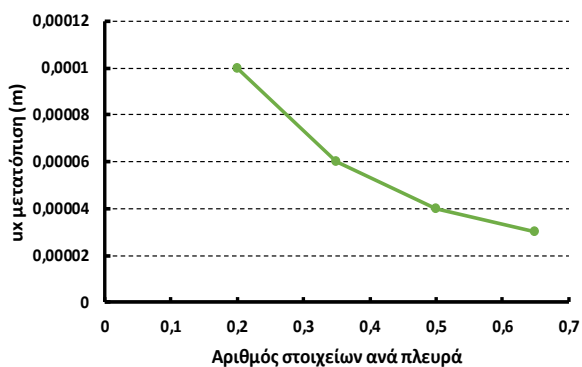


(στ) σ_{xy} κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους

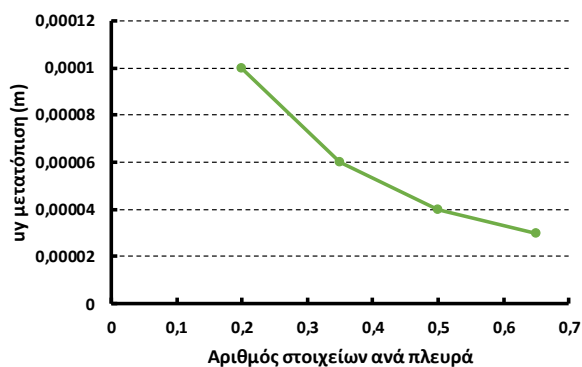
Σχ. 81 Παραμετρική ανάλυση κελύφους με διαφορετική γεωμετρία αρχής και τέλους για ποικίλα πάχη

5.2.4 Σφαίρα με άνοιγμα στην κορυφή

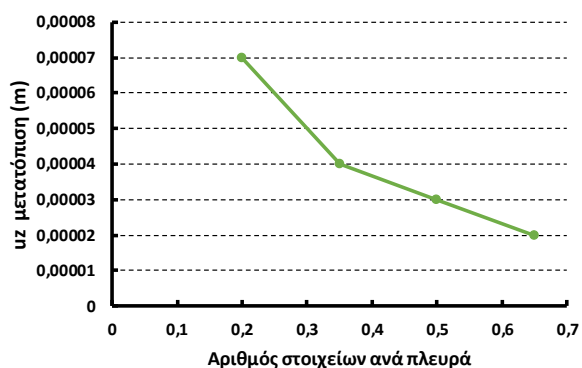
Για ένα σημείο περίπου στη μέση της σφαίρας καθ' ύψος πάρθηκαν οι τιμές μετατοπίσεων και τάσεων. Στο Σχ. 82(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x δηλαδή η ακτινική (κάθετη στη μεσημβρινή καμπύλη). Στο Σχ. 82(β) είναι η v , U_y κατά μήκος της μεσημβρινής καμπύλης. Η μετατόπιση u , U_z η εφαπτόμενη στη μεσημβρινή καμπύλη της σφαίρας εικονίζεται στο Σχ. 82(γ). Συνεχίζοντας με τις τάσεις, στο Σχ. 82(δ) παρουσιάζεται η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 82(ε) η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 82(στ) η διαμητική τάση σ_{xy} .



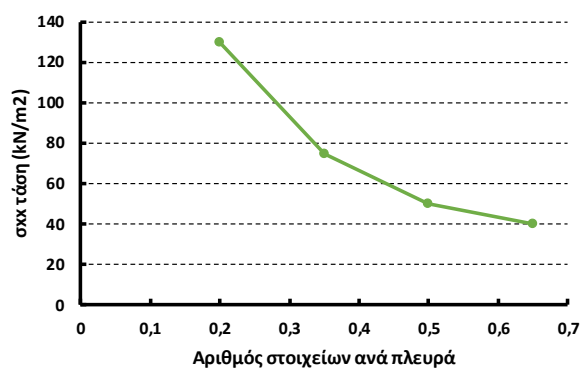
(α) u_x σφαίρας



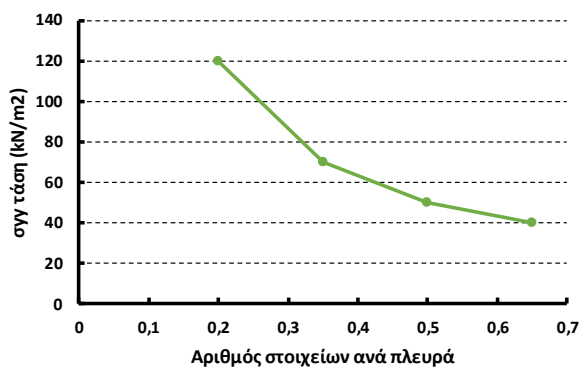
(β) u_y σφαίρας



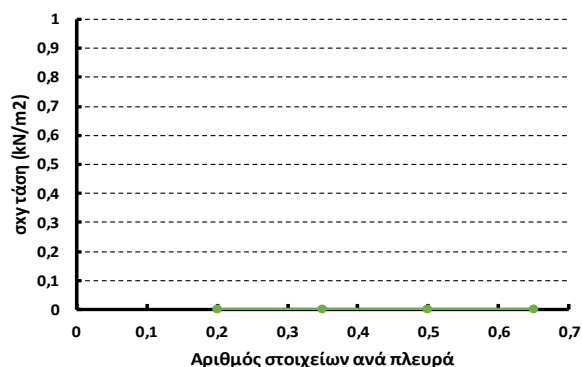
(γ) u_z σφαίρας



(δ) σ_{xx} σφαίρας



(ε) σ_{yy} σφαίρας



(στ) σ_{xy} σφαίρας

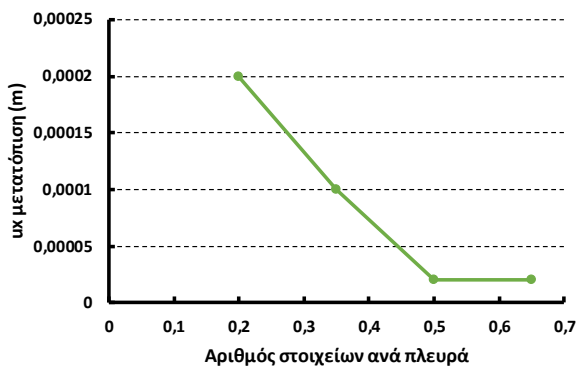
Σχ. 82 Παραμετρική ανάλυση σφαίρας για ποικίλα πάχη

Ομοίως και εδώ παρατηρείται μείωση των μετατοπίσεων και άρα και των τάσεων με την αύξηση του πάχους. Στον παρακάτω πίνακα αναγράφονται τα ποσοστά μείωσης των μεγεθών ανάλογα με τα ποσοστά αύξησης του πάχους.

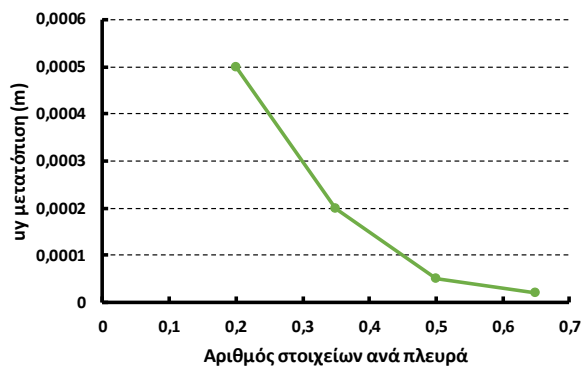
Ποσοστό αύξησης πάχους	Ποσοστό μείωσης εντατικών μεγεθών					
	u_x	u_y	u_z	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xy}
75%	-40%	-40%	-43%	-42%	-42%	0%
43%	-33%	-33%	-25%	-33%	-29%	0%
30%	-25%	-25%	-33%	-20%	-20%	0%

5.2.5 Επιφάνεια ελεύθερης γεωμετρίας

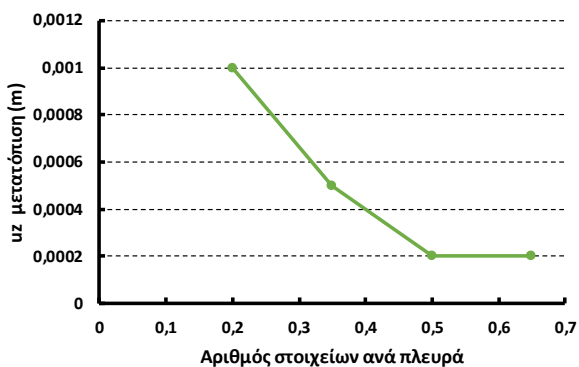
Στο Σχ. 83(α) παρουσιάζεται η μετατόπιση w , U_x , στο Σχ. 83(β) η μετατόπιση v , U_y και στο Σχ. 83(γ) η u , U_z μετατόπιση. Στο Σχ. 83(δ) είναι η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 83(ε) είναι η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 83(στ) εικονίζεται η διατμητική τάση σ_{xy} .



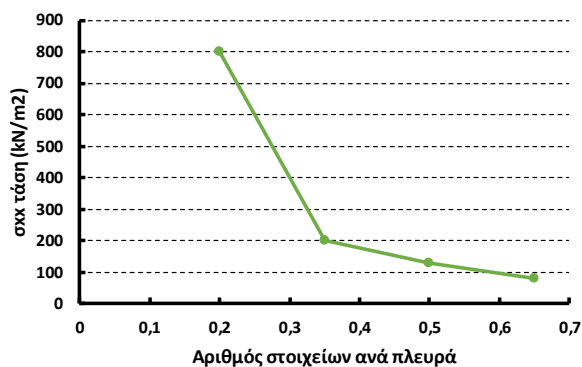
(α) u_x επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας



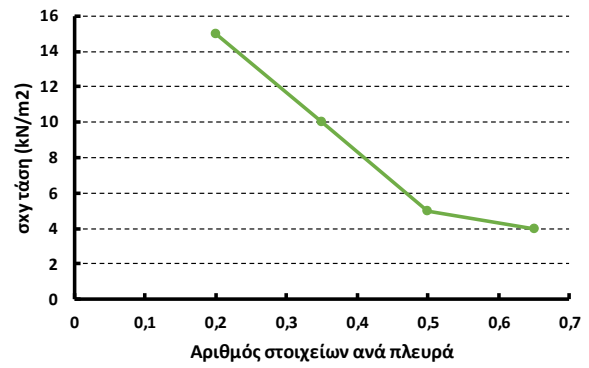
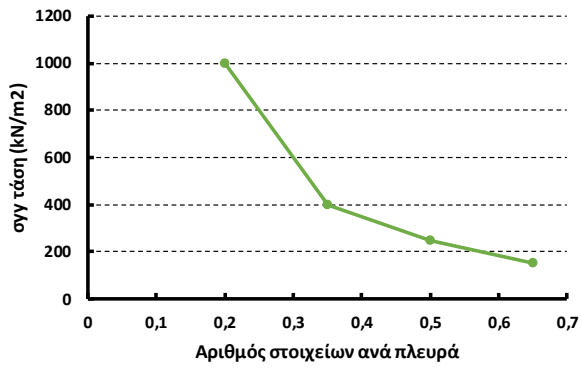
(β) u_y επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας



(γ) u_z επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας



(δ) σ_{xx} επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας



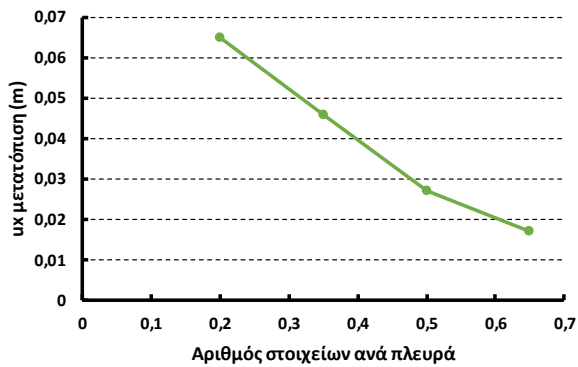
(ε) σ_{yy} επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας

(στ) σ_{xy} επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας

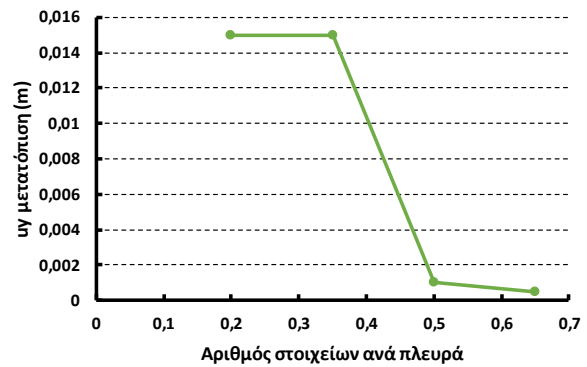
Σχ. 83 Παραμετρική ανάλυση επιφάνειας ελεύθερης γεωμετρίας για ποικίλα πάχη

5.2.6 Γεωμετρία του κέντρου πολιτισμού Heydar Aliyev της Zaha Hadid

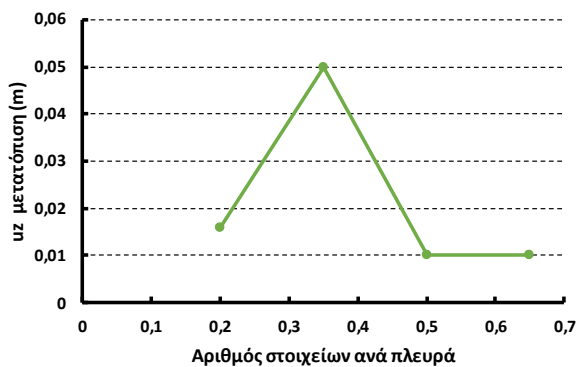
Στο Σχ. 84(α) εικονίζεται η μετατόπιση w , U_x σε m δηλαδή η ακτινική, στο Σχ. 84(β) η μετατόπιση v , U_y και στο Σχ. 84(γ) η u , U_z μετατόπιση. Στο Σχ. 84(δ) είναι η ορθή τάση σ_{xx} , στο Σχ. 84(ε) είναι η ορθή τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 84(στ) εικονίζεται η διατμητική τάση σ_{xy} .



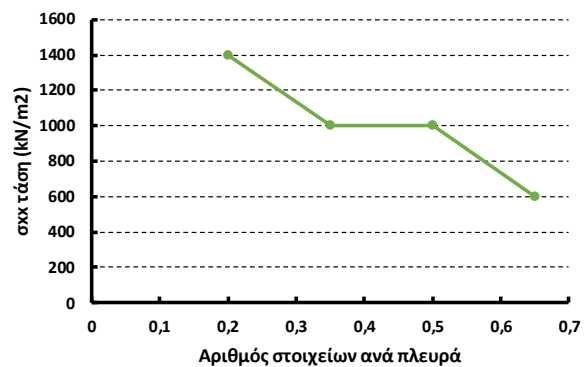
(α) u_x Heydar



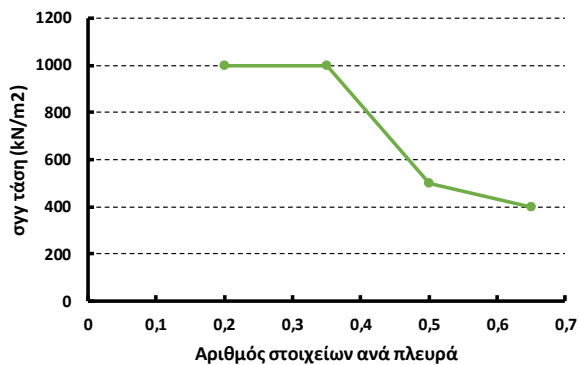
(β) u_y Heydar



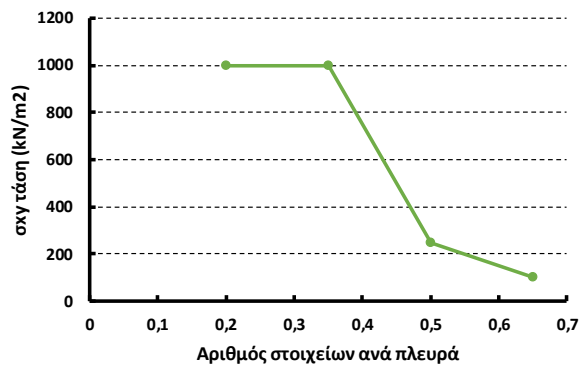
(γ) u_z Heydar



(δ) σ_{xx} Heydar



(ε) σ_{yy} Heydar



(στ) σ_{xy} Heydar

Σχ. 84 Παραμετρική ανάλυση προσομοιώματος του κέντρου πολιτισμού Heydar Aliyev της Zaha Hadid για ποικίλα πάχη

ΣΥΠΕΡΑΣΜΑ

Αρχικά, προκύπτει το συμπέρασμα πως με την αύξηση του αριθμού στοιχείων ανά πλευρά παρατηρείται μια τάση σύγκλισης των τιμών μετατοπίσεων και τάσεων. Αυτό, σε ορισμένες αναλύσεις, επιτυγχάνεται με σχετικά μεγάλη ακρίβεια, δηλαδή από ένα αριθμό στοιχείων και μετά υπήρχε οριακά ταύτιση των τιμών. Στις υπόλοιπες αναλύσεις παρατηρήθηκε μείωση των κλίσεων των ευθειών που ενώνουν τις τιμές, το οποίο σημαίνει πως άμα αυξηθεί και άλλο ο αριθμός στοιχείων ανά πλευρά θα επιτυγχάνεται όλο και μεγαλύτερη σύγκλιση. Δεν πρέπει να αμεληθεί το γεγονός ότι το ParaView δε δίνει τη δυνατότητα λήψης τιμών για ένα συγκεκριμένο σημείο της επιφάνειας, οπότε οι τιμές λήφθηκαν χειροκίνητα μέσω της ανάγνωσης της κλίμακας η οποία αντιστοιχεί χρώματα με τιμές.

Επιπρόσθετα, η αύξηση του πάχους, όπως ήταν αναμενόμενο, συνέβαλε στη μείωση των μετατοπίσεων και κατά συνέπεια στη μείωση και των τάσεων.

6 ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗ ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΥΤΩΝ ΜΕ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Προκειμένου να ελεγχθεί η αποτελεσματικότητα των αναλύσεων με τη χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην αριθμητική προσομοίωση κελυφών με τη μέθοδο MITC4+, έγινε σύγκριση αποτελεσμάτων με τις αναλυτικές λύσεις της Μεμβρανικής θεωρίας για κύλινδρο και σφαίρα. Για τον λόγο αυτό, διαμορφώθηκε κώδικας Matlab ο οποίος επιλύει τις διαφορικές εξισώσεις της Μεμβρανικής θεωρίας και δίνει τα εντατικά μεγέθη των κελυφών.

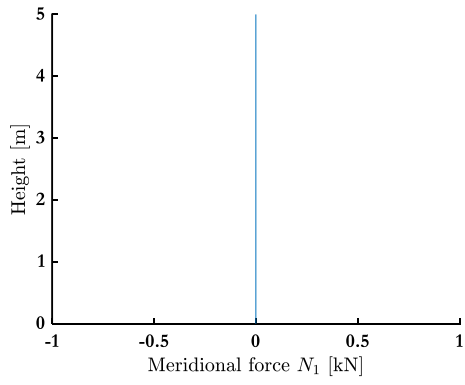
6.1 Κύλινδρος κυκλικής διατομής

Τα αποτελέσματα προέκυψαν για κύλινδρο μήκους 5m, ακτίνας 3m και πάχους 0.2m. Η σύγκριση με τα αποτελέσματα του ParaView γίνεται για διακριτοποίηση 40 στοιχείων ανά πλευρά. Στο Σχ. 85 παρουσιάζονται οι τιμές των μετατοπίσεων σε m και των τάσεων σε kN/m² για την τομή σε μήκος s ίσο με 5m που προέκυψαν από το ParaView και τον κώδικα του Matlab.

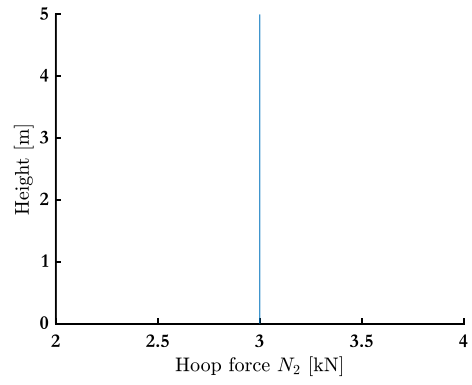
Μεγέθη	Αποτελέσματα από το ParaView	Αποτελέσματα από το Matlab
$u - U_z$ (m)	$-3.3 \cdot 10^{-8}$	$-6.8182 \cdot 10^{-7}$
$w - U_x$ (m)	$-1.3 \cdot 10^{-6}$	$-1.3636 \cdot 10^{-6}$
$b - U_y$ (m)	0	0
σ_{xx} (kN/m ²)	3.4	-1.6933
σ_{yy} (kN/m ²)	15	15
σ_{xy} (kN/m ²)	0	0

Σχ. 85

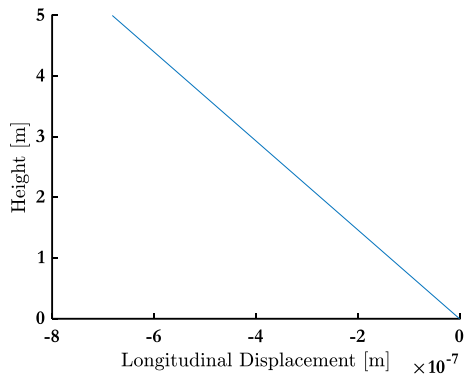
Στην ανάλυση με το Matlab, διαμορφώθηκαν και τα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών συναρτήσει του ύψους του κυλίνδρου. Στο Σχ. 86(α) παρουσιάζεται η δύναμη N_1 , στο Σχ. 86(β) η δύναμη N_2 , στο Σχ. 86(γ) η μετατόπιση u , στο Σχ. 86(δ) η μετατόπιση w , στο Σχ. 86(ε) η παραμόρφωση ϵ_1 , στο Σχ. 86(στ) η παραμόρφωση ϵ_2 , στο Σχ. 86(ζ) η τάση σ_{xx} , στο Σχ. 86(η) η τάση σ_{yy} και τέλος στο Σχ. 86(θ) η τάση σ_{xy} όλα συναρτήσει του ύψους του κυλίνδρου.



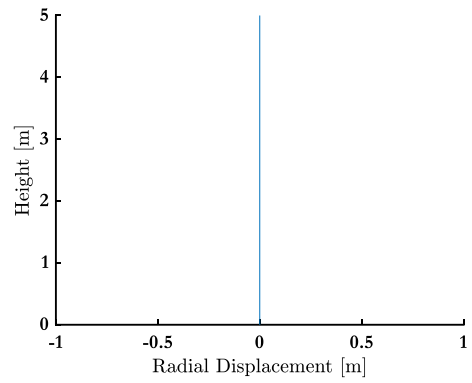
(α) $N_1 - \Upsilon\psi\sigma\varsigma$



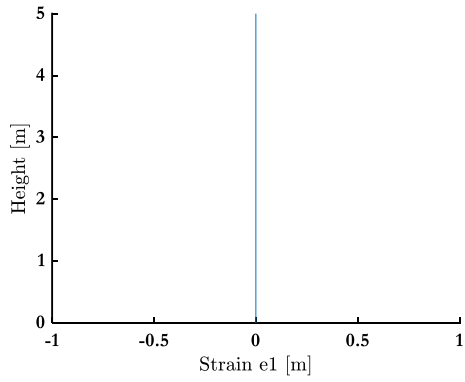
(β) $N_2 - \Upsilon\psi\sigma\varsigma$



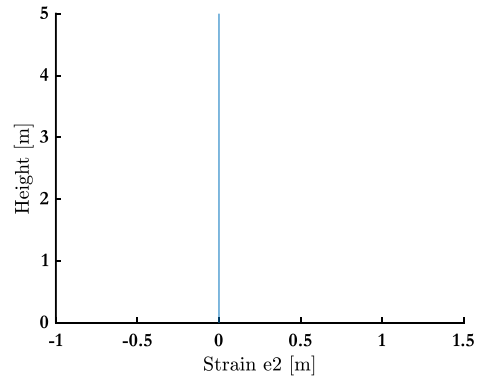
(γ) $u - \Upsilon\psi\sigma\varsigma$



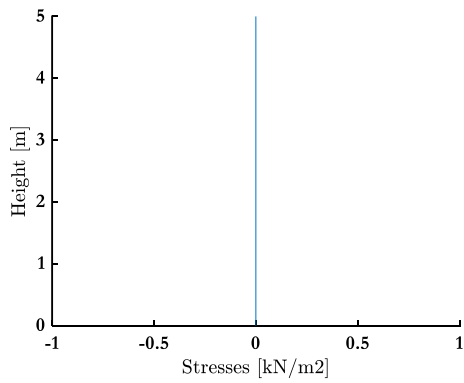
(δ) $w - \Upsilon\psi\sigma\varsigma$



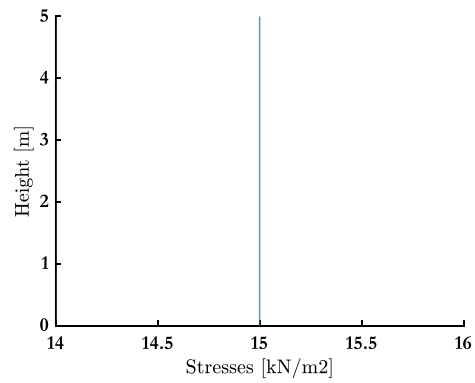
(ε) $\epsilon_1 - \Upsilon\psi\sigma\varsigma$



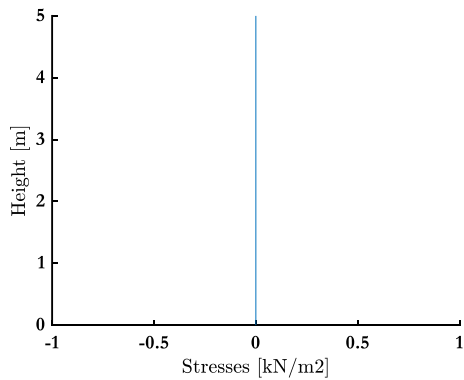
(στ) $\epsilon_2 - \Upsilon\psi\sigma\varsigma$



(ζ) σ_{xx} - Ύψος



(η) σ_{yy} - Ύψος



(θ) σ_{xy} - Ύψος

Σχ. 86

6.2 Σφαίρα

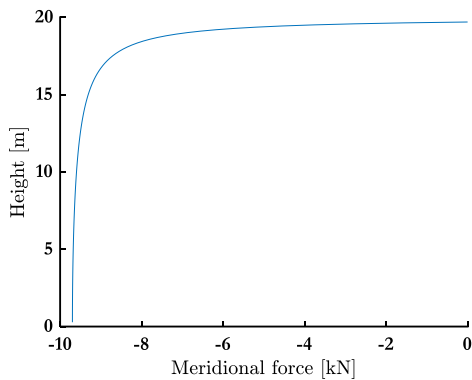
Τα αποτελέσματα προέκυψαν για σφαίρα ακτίνας 20m και πάχους 0.2m. Η σφαίρα αναλύθηκε στο ParaView για διακριτοποίηση 40 στοιχείων ανά πλευρά. Στο Σχ. 87 παρουσιάζονται οι τιμές των μετατοπίσεων σε m και των τάσεων σε kN/m^2 για την τομή σε γωνία $\varphi=90^\circ$ που προέκυψαν από το ParaView και τον κώδικα του Matlab.

Μεγέθη	Αποτελέσματα από το ParaView	Αποτελέσματα από το Matlab
$u - U_z$ (m)	0	0
$w - U_x$ (m)	$-2.4 \cdot 10^{-5}$	$-2.24 \cdot 10^{-5}$
$b - U_y$ (m)	0	0
σ_{xx} (kN/m^2)	55	-48.4923

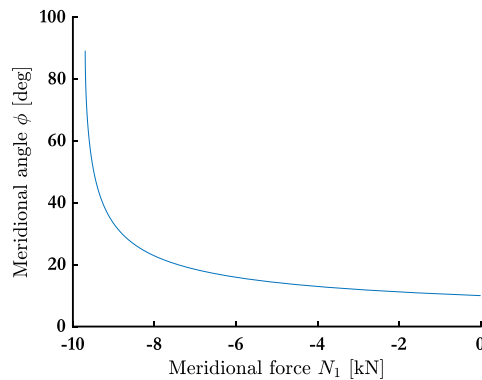
σ_{yy} (kN/m ²)	50	-51.5077
σ_{xy} (kN/m ²)	0	0

Σχ. 87

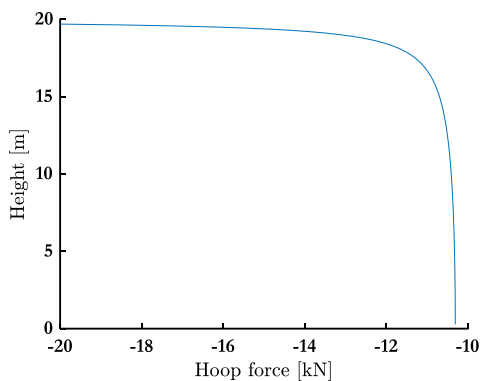
Στην ανάλυση με το Matlab, διαμορφώθηκαν και τα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών συναρτήσει της γωνίας ϕ της σφαίρας και του ύψους της σφαίρας. Στο Σχ. 88(α) παρουσιάζεται η δύναμη N_1 συναρτήσει του ύψους, στο Σχ. 88(β) παρουσιάζεται η δύναμη N_1 συναρτήσει της γωνίας ϕ , στο Σχ. 88(γ) η δύναμη N_2 συναρτήσει του ύψους, , στο Σχ. 88(δ) η δύναμη N_2 συναρτήσει της γωνίας ϕ , στο Σχ. 88(ε) η μετατόπιση u συναρτήσει του ύψους, στο Σχ. 88(στ) η μετατόπιση w συναρτήσει του ύψους, στο Σχ. 88(ζ) η παραμόρφωση ϵ_1 συναρτήσει του ύψους, στο Σχ. 88(η) η παραμόρφωση ϵ_2 συναρτήσει του ύψους, στο Σχ. 88(θ) η τάση σ_{xx} συναρτήσει του ύψους, στο Σχ. 88(ι) η τάση σ_{yy} συναρτήσει του ύψους και τέλος στο Σχ. 88(κ) η τάση σ_{xy} συναρτήσει του ύψους.



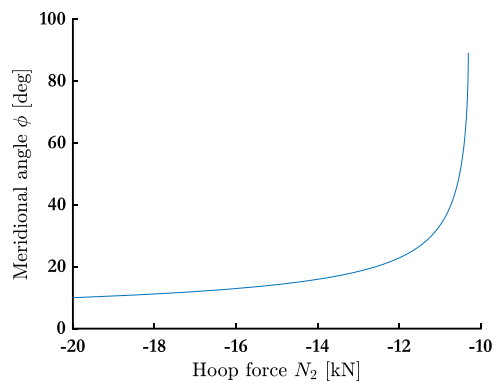
(α) N_1 – Ύψος



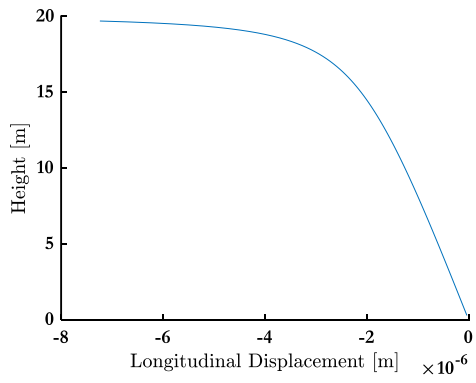
(β) N_1 – Γωνία ϕ



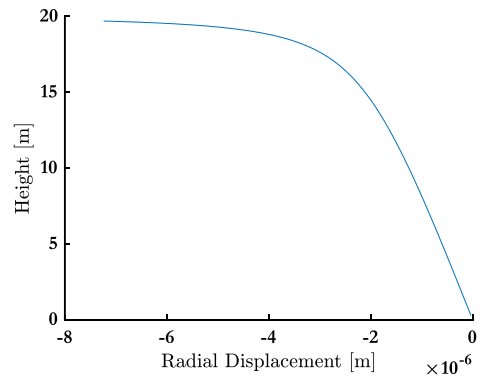
(γ) N_2 – Ύψος



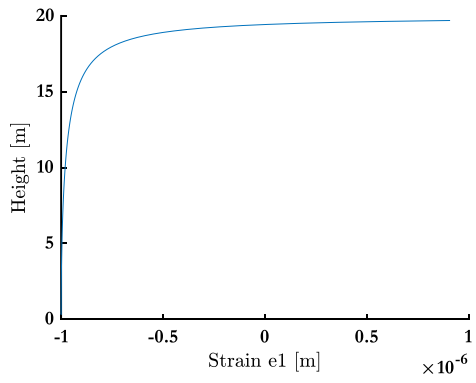
(δ) N_2 – Γωνία ϕ



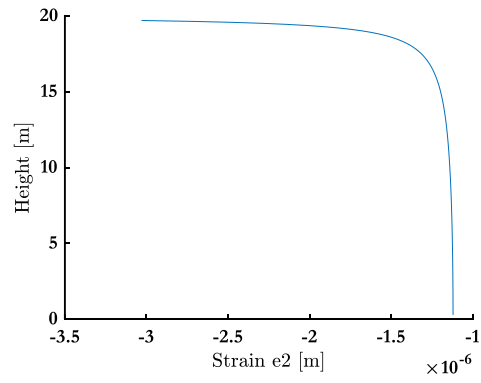
(ε) $u - \Upsilon\psi\sigma\varsigma$



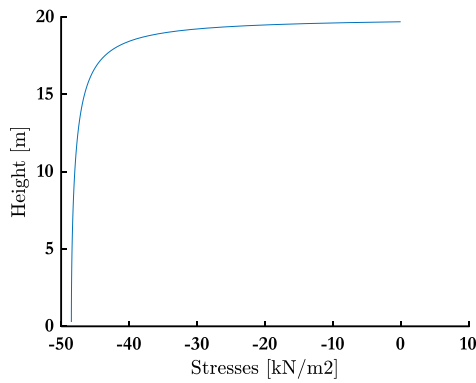
(στ) $w - \Upsilon\psi\sigma\varsigma$



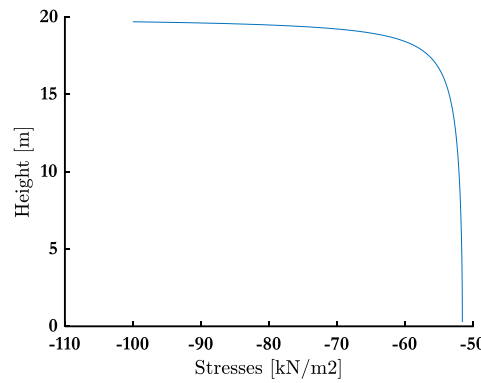
(ζ) $\varepsilon_1 - \Upsilon\psi\sigma\varsigma$



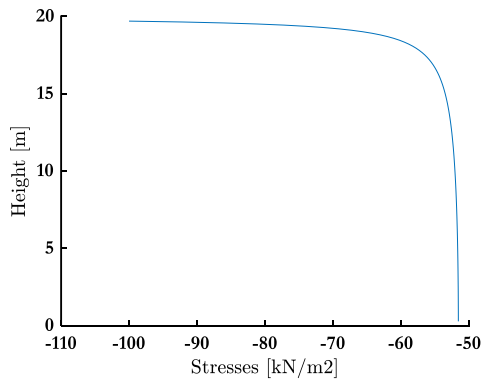
(η) $\varepsilon_2 - \Upsilon\psi\sigma\varsigma$



(θ) $\sigma_{xx} - \Upsilon\psi\sigma\varsigma$



(ι) $\sigma_{yy} - \Upsilon\psi\sigma\varsigma$



(κ) σ_{xy} - Ψοζ

Σχ. 88

7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ως προς τη διαδικασία παραμετρικής ανάλυσης, το Dynamo δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας μιας καθολικής ροής πληροφοριών από το CAD αρχείο στο πρόγραμμα στατικής ανάλυσης του φορέα. Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε η δυνατότητα παραγωγής παραμετροποιημένων γεωμετριών, οι οποίες μπορούν να ενημερώσουν τόσο τα CAD αρχεία όσο και τα αρχεία της στατικής ανάλυσης. Με αυτόν τον τρόπο παρέχεται μεγαλύτερη ευχέρεια τροποποιήσεων των γεωμετριών.

Η διαδικασία ενημέρωσης της γεωμετρίας CAD στη βάση των αποτελεσμάτων της στατικής ανάλυσης είναι επίσης εφικτή αλλά δεν αποτέλεσε αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Θα είχε όμως ενδιαφέρον σε μία διαδικασία βέλτιστου σχεδιασμού ή/και ανάλυσης σχήματος μιας κατασκευής.

Η διαδικασία προετοιμασίας των παραμετροποιημένων επιφανειών πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας ένα περιβάλλον γραφικού προγραμματισμού, το Dynamo.

Μια σημαντική συμβολή της παρούσας εργασίας ήταν η κατάστρωση αλγορίθμου για την παραγωγή διακριτοποίησης τετραπλευρικών στοιχείων στο Dynamo καθώς το τελευταίο παρείχε τη δυνατότητα τριγωνισμού επιφανειών μόνον. Έτσι οποιαδήποτε ελεύθερη γεωμετρία είναι δυνατόν με ευκολία να διακριτοποιηθεί σε τετραπλευρικά στοιχεία.

Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με κώδικα πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιεί το στοιχείο κελύφους MITC4+. Στις περιπτώσεις συμμετρικών κελυφών με συμμετρική φόρτιση που εξετάστηκαν, τα αποτελέσματα που προέκυψαν συγκρίνονται ικανοποιητικά με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη Μεμβρανική θεωρία κελυφών. Διαφορές εντοπίζονται κυρίως στην περιοχή των στηρίξεων οι οποίες όταν δεν είναι προσανατολισμένες στις κύριες διευθύνσεις του κελύφους μοιραία το κάμπτουν. Σε αυτές τις περιπτώσεις η μεμβρανική θεωρία δεν ισχύει.

Πραγματοποιήθηκαν παραμετρικές αναλύσεις που αφορούσαν τον αριθμό των στοιχείων ανά πλευρά και το πάχος των επιφανειών. Με την αύξηση του αριθμού στοιχείων ανά πλευρά παρατηρείται σύγκλιση των τιμών μετατοπίσεων και τάσεων, το οποίο σε ορισμένες αναλύσεις επιτυγχάνεται με μεγάλη ακρίβεια. Η αύξηση του πάχους συνέβαλε στη μείωση των μετατοπίσεων και κατά συνέπεια στη μείωση των τάσεων.

Πραγματοποιήθηκε και προσπάθεια διακριτοποίησης και ανάλυσης των επιφανειών με τη χρήση του Robot Structural Analysis. Μέσω της συγκεκριμένης μεθόδου δεν ήταν εφικτό το Dynamo να λάβει τα αποτελέσματα της ανάλυσης του Robot Structural Analysis για κελύφη και επιφάνειες με σκοπό τη βελτιστοποίηση της γεωμετρίας. Επιπλέον, όσον αφορά τη διακριτοποίηση, το Dynamo παρείχε μόνο τη δυνατότητα τριγωνισμού επιφανειών.

8 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Hughes, T. J., Cottrell, J. A., & Bazilevs, Y. (2005). Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(39-41), 4135-4195.

Breen, D., Regli, W., & Peysakhov, M. (2009). B-splines and Nurbs. *Lecture, Geometric and Intelligent Computing Laboratory, Department of Computer Science*, 42.

Pillai, U., Triantafyllou, S. P., Ashcroft, I., Essa, Y., & de la Escalera, F. M. (2020). Phase-field modelling of brittle fracture in thin shell elements based on the MITC4+ approach. *Computational Mechanics*, 65.

Hauso, A. (2014). *Analysis methods for thin concrete shells of revolution* (Master's thesis, Institutt for konstruksjonsteknikk).

Ventsel, E., Krauthammer, T., & Carrera, E. J. A. M. R. (2002). Thin plates and shells: theory, analysis, and applications. *Appl. Mech. Rev.*, 55(4), B72-B73.

Sü-Gül, Z., & Çalışkan, M. (2010, August). Acoustical design of inner galleries in Heydar Aliyev Center. In *Proceedings of 20th International Congress on Acoustics, ICA 2010* (pp. 23-27).

Παπαδρακάκης, Μ. (2001). Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. *Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα*, 2.