ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παναγιώτης Παπαδόπουλος

Αναλυτικά Σύνολα και το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin

ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ:

ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Βασίλειος Γρηγοριάδης, Επίκουρος Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Αλέξανδρος Αρβανιτάκης, Επίκουρος Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Βασίλειος Γρηγοριάδης, Επίκουρος Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Βασίλειος Κανελλόπουλος, Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΑΘΗΝΑ, Οκτώβριος, 2021

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πρώτα απ’ όλα τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Γρηγοριάδη για όλη την βοήθεια που μου προσέφερε κατα τη διάρκεια της δημιουργίας αυτής της εργασίας και για όλο το χρόνο που αφιέρωσε για να με βοηθήσει και να με καθοδηγήσει στο τελικό αποτέλεσμα.
Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Αρβανιτάκη και κύριο Κανελλόπουλο για την παρουσία τους στην τριμελή επιτροπή αλλά και για τα μαθηματικά εφόδια που προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια μου στη σχολή μέσω των μαθημάτων τους.
Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου που με στήριξαν ο καθένας με τον δικό του τρόπο όλον αυτό τον καιρό.

. . . .

Όνομα Επώνυμο

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία βρίσκεται στην περιοχή της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων και πιο συγκεκριμένα ασχολείται με τα Αναλυτικά σύνολα καθως και με ένα απο τα θεμελιώδη θεωρήματα της, το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin.

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίζονται κάποιες βασικές έννοιες, όπως οι Πολωνικοί χώροι πάνω στους οποίους θα δουλέψουμε σε όλη την εργασία, αλλά και αποδεικνύονται κάποια σημαντικά αποτελέσματα που θα μας βοηθήσουν στη συνέχεια.
Έπειτα στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζονται τρεις σημαντικές κατηγορίες ομάδων συνόλων οι οποίες είναι οι κλάσεις των Borel συνόλων σε τοπολογικούς χώρους, οι κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης σε Πολωνικούς χώρους και οι προβολικές κλάσεις συνόλων σε Πολωνικούς χώρους. Στην τελευταία ομάδα συνόλων βρίσκονται και τα αναλυτικά σύνολα για τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια κάποιες ιδιότητες τους καθώς και κάποια σημαντικά παραδείγματα.
Τέλος καταλήγουμε στο τελευταίο κεφάλαιο όπου παρουσιάζεται και αποδεικνύεται το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin καθώς και κάποια αποτελέσματα που προκύπτουν απο το θεώρημα αυτό με σημαντικότερο το Θεώρημα του Souslin.

Λέξεις Κλειδιά.
Πολωνικοί Χώροι

Χώρος Baire

Δένδρα

Borel Σύνολα

Αναλυτικά Σύνολα

Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin

Θεώρημα Souslin

Abstract

This thesis is in the field of Descriptive Set Theory and more specifically, it is about the Analytic sets and one of the fundamental theorems of this field, the Lusin's Separation Theorem.

In the first chapter we give some basic notions, like Polish spaces, that we will work on in the sequel. We also prove some useful results.
In the second chapter we define three basic classes of sets, the classes of Borel sets in topological spaces , the Borel classes of finite order in Polish spaces and the classes of projective sets in Polish spaces. The analytic sets specifically belong in the classes of projective sets. For this sets we present some fundamental properties and some important examples.
In the last chapter we present the Lusin's Separation Theorem with its proof and also we give some important corollaries from this theorem like the Suslin's theorem.

Keywords.
Polish Spaces

Baire Space

Trees

Borel Sets

Analytic Sets

Lusin's Separation Theorem

Suslin Theorem

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1. Γενικές πληροφορίες

Η περιγραφική θεωρία συνόλων είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που μελετά τα υποσύνολα πλήρων και διαχωρίσιμων μετρικών χώρων τα οποία ορίζονται με βάση τους γνωστούς συνολοθεωρηρικούς τελεστές ξεκινώντας από σχετικά απλά σύνολα, όπως για παράδειγμα τα ανοικτά σύνολα. Ένα από τα πρώτα θεμελιώδη άρθρα στην περιοχή είναι το [**Leb05**].

Πέραν του δικού της ανεξάρτητου ενδιαφέροντος η περιγραφική θεωρία συνόλων έχει βρει εφαρμογές σε άλλες περιοχές των μαθηματικών. Μερικά κλασσικά συγγράμματα είναι τα [**Lus72**], [**Mos09**], [**Kec95**], και [**Kur66**].

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία ασχολούμαστε με ένα από τα θεμελιώδη αποτελέσματα της περιοχής: το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin. Παράλληλα παρουσιάζουμε τις βασικές έννοιες στην περιγραφική θεωρία συνόλων και μελετάμε τις ιεραρχίες κλάσεων των Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης καθώς και των κλάσεων του Lusin. Σε όλη την εργασία ακολουθούμε την προσέγγιση των σημειώσεων [**Gre21**] και του συγγράμματος [**Mos09**].

Όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε είναι γνωστά στην περιοχή.

1.2. Πολωνικοί χώροι

Ορισμός 1.2.1. Ένας τοπολογικός χώρος (X, $\mathcal{T}$) λέγεται **Πολωνικός χώρος** αν υπάρχει μετρική d η οποία παράγει την τοπολογία T και ο χώρος (X, d) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Θα συμβολίζουμε τους Πολωνικούς χώρους ως $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$.

Μερικά παραδείγματα Πολωνικών χώρων είναι ο $\mathbb{R}$, ο $\mathbb{C}$ με τη συνήθη τοπολογία και κλειστά υποσύνολα τους όπως το $[a, b], a < b$.

Πρόταση 1.2.2. *Αν ο $\mathcal{X}$ είναι ένας Πολωνικός χώρος και ο Y είναι ένας τοπολογικά ισομορφικός χώρος με τον $\mathcal{X}$ τότε και ο Y είναι Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $f\colon Y \to (\mathcal{X}, d)$ ένας τοπολογικός ισομορφισμός και d κατάλληλη μετρική στον $\mathcal{X}$. Ορίζουμε την μετρική $\rho\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ με $\rho(y_1.y_2) = d(f(y_1), f(y_2))$ δηλαδή ορίζουμε τη ρ έτσι ώστε η f να είναι ισομετρία και επί. Η πληρότητα διατηρείται κάτω απο επί ισομετρίες, και αφού $\mathcal{X}, Y$ τοπολογικά ισομορφικοί τότε και ο Y είναι διαχωρίσιμος. Τέλος μένει να δείξουμε ότι η ρ παράγει την τοπολογία του Y. Αρχικά για κάθε

$A \subseteq Y$ ανοικτό στην τοπολογία του Y το σύνολο $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$ είναι $d-$ανοικτό καθώς η $f^{-1}\colon (\mathcal{X}, d) \to Y$ είναι συνεχής επομένως η αντίστροφή της μεταφέρει ανοικτά συνολα από τον Y σε ανοικτά του $\mathcal{X}$. Επομένως το σύνολο $A = f^{-1}[f[A]]$ είναι ρ-ανοικτό επειδή η $f\colon (Y, \rho) \to (\mathcal{X}, d)$ είναι συνεχής. Αντίστροφα τώρα, έστω $B \subseteq Y$ είναι ρ-ανοικτό. Τότε επειδή η $f^{-1}\colon (\mathcal{X}, d) \to (Y, \rho)$ είναι συνεχής το σύνολο $(f^{-1})^{-1}[B] = f[B]$ είναι $d-$ανοικτό και αφού η $f\colon Y \to (\mathcal{X}, d)$ είναι συνεχής, το $B = f^{-1}[f[B]]$ είναι ανοικτό στην τοπολογία του Y. □

Πόρισμα 1.2.3. *Το ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ με την τοπολογία που παράγει η συνήθης μετρική είναι Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, όπου $f() = tan(x)$ είναι ένας τοπολογικός ισομορφισμός και απο την Πρόταση 1.2.2 το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι Πολωνικός χώρος και μία μετρική που θα μπορούσαμε να πάρουμε είναι η $\rho(x, y) = |tan(x) - tan(y)|$.
Η συνάρτηση $g\colon (0, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, όπου $g(x) = -\frac{\pi}{2} + \pi x$, είναι ένας τοπολογικός ισομορφισμός και άρα το $(0, 1)$ είναι Πολωνικός χώρος. □

Γενικότερα κάθε ανοικτό (a, b) με $a < b$, υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι Πολωνικός χώρος.

Παρατήρηση 1.2.4. Έστω $\mathcal{X}$ ένας Πολωνικός χώρος, τότε ο $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο είναι και αυτός Πολωνικός χώρος.
Αν $d_{\mathcal{X}}$ είναι η μετρική στον χώρο $\mathcal{X}$ τότε η

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1^n} \cdot \frac{d_{\mathcal{X}}(x_n, y_n)}{1 + d_{\mathcal{X}}(x_n, y_n)}$$

είναι η συμβατή μετρική στον $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$.

Οι χώροι $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο είναι Πολωνικοί χώροι.

Ορισμός 1.2.5 (Πεπερασμένες ακολουθίες)**.** Έστω ένα Χ $\neq \emptyset$. Μία συνάρτηση u : {i $\in \mathbb{N}$ | i $<$ n } $\to$ Χ για κάποιο n $\in \mathbb{N}$ ονομάζεται πεπερασμένη ακολουθία στο Χ. Συμβολίζουμε τον χώρο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών στον Χ ως $X^{<\mathbb{N}}$ και τα στοιχεία του u με $(u(0), \ldots, u(n-1))$.
Το μήκος μιας πεπερασμένης ακολουθίας $u\colon \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} \to X$ συμβολίζεται με $|u|$ και ισούται με το n.

Πεπερασμένη ακολουθία θεωρείται και η κενή ακολουθία η οποία συμβολίζεται ως Λ και έχει μήκος 0.

Με το σύμβολο $*$ ορίζουμε την παράθεση της $u \in X^{<\mathbb{N}}$ με την $w \in X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$u * w = (u(0), \ldots, u(n-1), w(0), \ldots, w(n-1))$$

Για παράδειγμα αν $u = (a, b, c)$ και $w = (d)$ τότε

$$u * w = (a, b, c, d) \text{ και } w * u = (d, a, b, c)$$

Με το σύμβολο $\sqsubseteq$ ορίζουμε μια διμελή σχέση στο σύνολο $X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$w \sqsubseteq u \iff |w| \leq |u| \text{ και } \forall i < |w| \; (w(i) = u(i)).$$

Για παράδειγμα $(a, b) \sqsubseteq (a, b, c)$, ενώ είναι προφανές ότι ισχύει $\Lambda \sqsubseteq u$ για κάθε $X^{<\mathbb{N}}$.
Επίσης για την σχέση $\sqsubseteq$ ισχύουν οι ιδιότητες της διάταξης:

(i) $u \sqsubseteq u$

(ii) $(u \sqsubseteq w \;\&\; w \sqsubseteq u) \Rightarrow u = w$

(iii) $(u \sqsubseteq v \;\&\; v \sqsubseteq w) \Rightarrow u \sqsubseteq w$

για κάθε $u, w, v \in X^{<\mathbb{N}}$. Τέλος ορίζουμε το αυστηρό μέρος της $\sqsubseteq$ με το σύμβολο $\sqsubset$. Δηλαδή

$$w \sqsubset u \iff w \sqsubseteq u \;\&\; w \neq u.$$

Ορισμός 1.2.6. Συνάρτηση κωδικοποίησης θα ονομάζεται η συνάρτηση $\langle\, .\, \rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ όπου για $u = (u(0), \ldots, u(n-1)) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $\langle u \rangle = \langle (u(0), \ldots, u(n-1)) \rangle = p_0^{u(0)+1} \cdot \ldots \cdot p_{|u|-1}^{u(|u|-1)+1}$, αν $u \neq \Lambda$.
$p_0, \ldots, p_n$ είναι η απαρίθμιση των πρώτων αριθμών σε αύξουσα σειρά.
Αν $u = \Lambda$ τότε $\langle \Lambda \rangle = 1$.

Για παράδειγμα έστω $u = (0, 4, 3)$ τότε $\langle u \rangle = \langle 0, 4, 3 \rangle = 2^1 \cdot 3^5 \cdot 5^4 = 303750$

Ορισμός 1.2.7. (Ο χώρος του Baire)
Συμβολίζουμε το σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ όλων των άπειρων ακολουθιών ως $\mathcal{N}$ και τα στοιχεία του με ελληνικά γράμματα π.χ. α , $\beta, \ldots$. Για καθε α , $\beta \in \mathcal{N}$, αν $\alpha \neq \beta$ τότε θέτουμε $n(\alpha,\beta)$ =ο ελάχιστος n $\in \mathcal{N}$ όπου α(n) $\neq \beta$(n). Ορίζουμε τώρα μια συνάρτηση $d_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ όπου παίρνει τις ακόλουθες τιμές.

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2^{-n(\alpha,\beta)}, & \text{αν } \alpha \neq \beta \\ 0, & \text{αν } \alpha = \beta \end{cases}$$

Αποδεικνύεται παρακάτω οτι η συνάρτηση που μόλις ορίσαμε είναι μία μετρική. Τότε ο μετρικός χώρος ($\mathcal{N}$, $d_{\mathcal{N}}$) ονομάζεται χώρος του Baire, καθώς επίσης και ο τοπολογικός που παράγεται από την μετρική $d_{\mathcal{N}}$.

Ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ συμβολίζεται και ως $(\alpha(0), ..., \alpha(n), ...)$, ενώ ορίζουμε τις $*$ και $\sqsubseteq$ ανάμεσα σε πεπερασμένες και άπειρες ακολουθίες ως εξης:
$u * \alpha = (u(0), ..., u(|u|-1), \alpha(0), ..., \alpha(n), ...)$
$u \sqsubseteq \alpha \iff \forall i < |u|,\; u(i) = \alpha(i)$
όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $\alpha \in \mathcal{N}$.
Ορίζεται επιπλέον για $\alpha \in \mathcal{N}$ και $n \in \mathbb{N}$ η παρακάτω σχέση:
$\alpha|n = (\alpha(0), \ldots, \alpha(n-1)) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Επίσης ορίζουμε για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ την βασική περιοχή

$$\mathcal{N}_u = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid u \sqsubseteq \alpha\} = \{u(0)\} \times ...\{u(|u|-1)\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ...\}$$

Παρατηρούμε ότι για $\alpha \in \mathcal{N}$ και $r > 0$ αν πάρουμε μια ανοικτή μπάλα στον χώρο του Baire

$$B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, r) = \{\beta \in \mathcal{N} \mid d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) < r\}$$

υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ το οποίο είναι το ελάχιστο ώστε $2^{-n} < r$ και αυτό έχει ως αποτέλεσμα για κάθε $\beta \in B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, r)$ να ισχύει ότι $\forall i < n \;\; \alpha(i) = \beta(i)$. Επομένως είναι φανερό ότι

$$B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, r) = \mathcal{N}_{\alpha|n} = \{\alpha(0)\} \times ...\{\alpha(n-1)\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ...$$

και αν $n = 0$ τότε $\mathcal{N}_{\alpha|n} = \mathcal{N}_\Lambda = \mathcal{N}$
Έτσι κάθε ανοικτή μπάλα στον $\mathcal{N}$ είναι ένα σύνολο της μορφής $\mathcal{N}_u$ και κάθε σύνολο της μορφής $\mathcal{N}_u$ είναι μια ανοικτή μπάλα. Έτσι να $\mathcal{N}_u$ αποτελούν βάσης της τοπολογίας του ΄χωρου του Baire και επιπλέον αφού τα μονοσύνολα αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathbb{N}$ έχουμε ότι τα $\mathcal{N}_u$ αποτελούν βάση για την τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Δηλαδή η τοπολογία στον χώρο του Baire είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Τέλος για κάθε ακολουθία $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{N}$ και κάθε στοιχείο $\alpha \in \mathcal{N}$ ισχύει ότι

$$\alpha_i \to \alpha \iff \forall n \lim_{i\to\infty} \alpha_i(n) = \alpha(n).$$

Παρατήρηση 1.2.8. Η συνάρτηση $d_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ όπου παίρνει τις ακόλουθες τιμές.

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2^{-n(\alpha,\beta)}, & \text{αν } \alpha \neq \beta \\ 0, & \text{αν } \alpha = \beta, \end{cases}$$

$n(\alpha,\beta)$ =ο ελάχιστος n $\in \mathcal{N}$ που α(n) $\neq$ β(n), είναι μια μετρική.

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει ότι $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$.
Επίσης $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = d_{\mathcal{N}}(\beta, \alpha)$ καθώς $n(\alpha,\beta)$ =ο ελάχιστος n $\in \mathcal{N}$ που α(n) $\neq$ β(n) είναι ίδιος με τον $n(\beta, \alpha)$.
Αν $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 0$ τότε $\alpha = \beta$
Και τέλος ισχύει ότι

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) \leq d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma) + d_{\mathcal{N}}(\gamma, \beta)$$

επειδή έστω $n_0 = n(\alpha, \beta), n_1 = n(\alpha, \gamma)$ και $n_2 = n(\gamma, \beta)$.
Τότε αν $n_1 = n_0$ συνεπάγεται ότι $n_0 \geq n + 2$ και $2^{-n_0} \leq 2^{n_0} + 2^{n_2}$
Αν $n_1 < n_0$ τότε $n_1 = n_2 < n_0$ και $2^{-n_0} \leq 2^{n_1} + 2^{n_2}$
Αν $n_1 > n_0$ τότε $n_2 = n + 0$ και $2^{-n_0} \leq 2^{n_0} + 2^{n_0}$
Έτσι αποδείχθηκε ότι η $d_{\mathcal{N}}$ είναι μια μετρική. □

Πρόταση 1.2.9. *Ο $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Επομένως ο χώρος του Baire είναι Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Αρχικά βλέπουμε ότι η οικογένεια $(\mathcal{N}_u)_{u\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ είναι αριθμήσιμη και αποτελεί βάση του $\mathcal{N}$. Επομένως έχουμε ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσυνολο και ο χώρος είναι διαχωρίσιμος. Για την πληρότητα θα πάρουμε μια $d_{\mathcal{N}} - Cauchy$ ακολουθία $(\alpha(i))_{i\in\mathbb{N}}$. Για $n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει ένα i_n τέτοιο ώστε για κάθε $i, j \geq i_n$ έχουμε ότι $d_{\mathcal{N}}(\alpha(i), \alpha(i)) < 2^{-n}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\alpha_i(k) = \alpha_j(k)$ για κάθε $k = 0, ..., n$ και κάθε $i, j \geq i_n$. Βλέπουμε λοιπόν ότι η ακολουθία $(\alpha_i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή και ίση με το $\alpha_{i_n}(n)$. Επομένως ορίζουμε μία $\alpha \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ως εξης : $\alpha(n) = \lim_{i\to\infty} \alpha_i(n) = \alpha_{i_n}(n)$. Έτσι βλέπουμε ότι $\alpha_i(k) = \alpha_{i_n}(n) = \alpha(n)$ για κάθε $i \geq i_n$ και κάθε $k = 0, ..., n$ επομένως η ακολουθία α_i συγκλίνει στο α. Βλέπουμε λοιπόν ότι ο $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι διαχωρίσιμος και πλήρης μετρικός σώρος άρα Πολωνικός.

□

Θεώρημα 1.2.10. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας συνεχής επιμορφισμός $\pi \colon \mathcal{N} \to \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Παίρνουμε ένα $D = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ (ξέρουμε ότι υπάρχει καθώς $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος) και μία κατάλληλη μετρική d στον $\mathcal{X}$. Κάθε $x \in \mathcal{X}$ είναι όριο μιας ακολουθίας $(r_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ από τα στοιχεία $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του D.
Η ιδέα της απόδειξης είναι να ορίσουμε ως $\alpha = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{N}$ καθώς άπειρη ακολουθία άρα ανήκει στον χώρο του Baire. Τότε μπορούμε να πούμε ότι $(r_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} = (r_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ και επομένως για το $x \in \mathcal{X}$ ισχύει ότι $x = \lim_{n\to\infty} r_{\alpha(n)}$. Έτσι για την συνάρτηση $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ να έχουμε ότι $\pi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} r_{\alpha(n)} = x$.
Αυτό που πρέπει να κάνουμε τώρα είναι ορίσουμε την π έτσι ώστε να είναι συνεχής και επίσης το όριο $\lim_{n\to\infty} r_{\alpha(n)}$ να υπάρχει για κάθε τυχαίο $\alpha \in \mathcal{N}$. Για να το κάνουμε αυτό αρχικά θα ορίσουμε μία οικογένεια στοιχείων του $\mathcal{X}$ την $(x_u)_{u\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\setminus\{\Lambda\}}$ με επαγωγή στο μήκος $|u|$ του u $\in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \setminus \{\Lambda\}$. Για $|u| = 1$ τότε $u = k_0$, ορίζουμε $x_u = x_{(k_0)} = r_{k_0}$. Τώρα υποθέτουμε ότι για κάποιο $n > 1$ έχουμε ορίσει τα x_w για κάθε $w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $1 \leq |w| \leq n$. Παίρνουμε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = n$. Τότε θέτουμε $w = (u(0), \ldots, u(n-2))$ και $k = u(|u|-1)$ έτσι ώστε $u = w * (k)$. Είναι προφανές ότι $|w| = n - 1$ και από την επαγωγική υπόθεση το x_w έχει οριστεί. Οπότε τώρα ορίζουμε το x_u ως εξής

$$x_u = \begin{cases} r_k, & \text{αν } d(x_w, r_k) < 2^{-n}, \\ x_w, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έτσι ορίζεται η οικογένεια $(x_u)_{u\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\setminus\{\Lambda\}}$.
Επίσης φαίνεται ότι $d(x_w, x_u) < 2^{-|u|}$, όπου $w * u(|u|-1)$. Προκύπτει λοιπόν ότι για κάθε $w \sqsubset u$ με $u = w * (k_0, \ldots, k_m)$ ισχύει

$$\begin{aligned} d(x_w, x_u) \leq & d(x_w, x_{w*k_0}) + \cdots + d(x_{w*(k_0,\ldots,k_{m-1})}, x_u) \\ < & 2^{|w|+1} + \cdots + 2^{|u|} \\ < & \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-(|w|+i)} = 2^{-|w|}. \end{aligned}$$

Επομένως βλέπουμε ότι για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ και κάθε $1 \leq n \leq m$ ισχύει $d(x_{\alpha|n}, x_{\alpha|m}) < 2^{-n}$. Άρα για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ η ακολουθία $(x_{\alpha|n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d-Cauchy και αφού ο χώρος $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης τότε οι Cauchy ακολουθίες συγκλίνουν και άρα ορίζεται η συνάρτηση $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ με $\pi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|n}$.
Αν τώρα πάρουμε στη σχέση $d(x_{\alpha|n}, x_{\alpha|m}) < 2^{-n}$ το $m \to \infty$ τότε έχουμε $d(x_{\alpha|n}, \pi(\alpha)) \leq 2^{-n}$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Επομένως για ένα $\beta \in \mathcal{N}_{\alpha|n}$ (αυτό σημαίνει ότι $\beta|n = \alpha|n$) ισχύει $d(\pi(\alpha), \pi(\beta)) \leq d(\pi(\alpha), x_{\alpha|n}) + d(x_{\alpha|n}, \pi(\beta)) \leq 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{-n+1}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Είναι τότε φανερό ότι η π είναι συνεχής.
Τέλος θέλουμε να δείξουμε ότι η π είναι επιμορφισμός. Για $x \in \mathcal{X}$ ορίζουμε το $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ως εξής $\alpha(n)$ είναι ο ελάχιστος $k \in \mathbb{N}$ με $d(r_k, x) < 2^{-n+2}$. Τότε $d(r_{\alpha(n)}, x) < 2^{-n+2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $d(r_{\alpha(n-1)}, r_{\alpha(n)}) \leq d(r_{\alpha(n-1)}, x) + d(x, r_{\alpha(n)}) < 2^{-n+1} + 2^{-n+2} < 2^{-n}$ για κάθε $n \leq 1$.
Προκύπτει με επαγωγή ότι $x_{\alpha|(n+1)=r_{\alpha(n)}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$\pi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|n} = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|(n+1)} = \lim_{n\to\infty} r_{\alpha|n} = x$$

και η π είναι επιμορφισμός. □

Ορισμός 1.2.11 (Ο χώρος του Cantor)**.** Το σύνολο των άπειρων δυαδικών ακολουθιών είναι το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, το συμβολίζουμε με $2^{\mathbb{N}}$ και είναι υποσύνολο του χώρου του Baire.
Ο χώρος του Cantor είναι το $2^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία που λαμβάνει απο τον χώρο του Baire.
Η μετρική η οποία θεωρούμε για τον χώρο του Cantro είναι η $d_{2^{\mathbb{N}}} = d_{\mathcal{N}|(2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{N}})}$.

Παρατήρηση 1.2.12. Ο χώρος του Cantor $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος ως αριθμήσιμο γινόμενο συμπαγών χώρων και συνεπώς είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου του Baire και άρα είναι και Πολωνικός χώρος.

1.3. Δέντρα

Ορισμός 1.3.1 (Δένδρα)**.** Έστω X $\neq \emptyset$. Δένδρο στον X ορίζεται ένα σύνολο T $\subseteq X^{<\mathbb{N}}$ το οποίο είναι μη κενό και κλειστό προς τα κάτω ως προς την διάταξη $\sqsubseteq$, δηλαδή αν u $\in$ T και w $\sqsubseteq$ u τότε w $\in$ T.

Από τον ορισμό του δένδρου είναι φανερό ότι η κενή ακολουθία Λ ανήκει σε κάθε δένδρο, καθώς $\Lambda \sqsubseteq u$ για κάθε $u \in T$, και την ονομάζουμε ρίζα του T. Επίσης τα στοιχεία του T ονομάζονται κόμβοι. Ένας κόμβος u του T για τον οποίο ισχύει ότι για κάθε $w \in T$ με $u \sqsubseteq w$ τότε $u = w$, λέγεται τερματικός κόμβος. Το δένδρο T λέγεται περικομμένο αν δεν έχει τερματικούς κόμβους. Έπειτα ως άπειρο κλαδι του T ορίζουμε μια συνάρτηση $f \colon \mathbb{N} \to X$ για την οποία ισχύει ότι $(f(0), ..., f(n)) \in T$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τέλος το σύνολο των άπειρων κλαδίων του δένδρου T ονομάζεται σώμα του T και συμβολίζεται [T]. Είναι φανερό ότι $[T] \subseteq X^{\mathbb{N}}$ και για $X = \mathbb{N}$, $[T] \subseteq \mathcal{N}$. Αν $[T] = \emptyset$ τότε το δέντρο ονομαζεται θεμελιωμένο ενώ αν $[T] \neq \emptyset$ ονομάζεται μη θεμελιωμένο.

Κάποια απλά παραδείγματα δένδρων στον X είναι τα:
$T = \{\Lambda\}$
Για $X = \mathbb{N}$, $T = \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$
Για $a, b, c \in X$, $T = \{\Lambda, (a), (a, b), (c)\}$

Σχετικά με την τοπολογια στον $X^{\mathbb{N}}$, είναι φανερό ότι αν το T είναι δένδρο στον X τότε $[T] \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Θεωρούμε στον χώρο X την διακτριτή μετρική. Ο $X^{\mathbb{N}}$ παίρνει την μετρική γινόμενο και η τοπολογία του είναι η τοπολογία γινόμενο.
Μια βάση για την τοπολογία του $X^{\mathbb{N}}$ είναι η οικογένεια όλων των συνόλων:

$$\{x_0\} \times \cdots \times \{x_{n-1}\} \times X \times X \dots$$

όπου $x_0, \dots, x_{n-1} \in X$.
Για την σύγκλιση στον $X^{\mathbb{N}}$ έστω μια ακολουθία $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία του $X^{\mathbb{N}}$ και μια $f \in X^{\mathbb{N}}$. Η προηγούμενη αολουθία συγκλίνει στην f αν και μόνο αν για κάθε $n \in N$ έχουμε ότι $f_i(n) \to f(n)$. Δηλαδή για κάθε $n \in N$ και μεγάλα i ισχύει ότι $f_i(n) = f(n)$.

Πρόταση 1.3.2. *Έστω $X \neq \emptyset$ με τη διαρτιτή μετρική. Θεωρούμε το $X^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο. Ένα σύνολο $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$ ειναι κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T στο X με $F = [T]$.*
Ειδικότερα τα κλειστά υποσύνολα του $\mathcal{N}$ είναι ακριβώς τ σώματα δέντρων στο $\mathbb{N}$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω κλειστό σύνολο $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Αν $F = \emptyset$ τότε προφανώς έχουμε ότι $F = [\{\Lambda\}] = \emptyset$.
Έστω τώρα ότι $F \neq \emptyset$. Για $u \in X^{<\mathbb{N}}$ και $f \in X^{\mathbb{N}}$ θα ορίσουμε τώρα ένα δένδρο ως εξής:

$$u \in T \iff \exists f \in F, u \sqsubseteq f \tag{1.1}$$

Αφού το $T \neq \emptyset$ τότε προφανώς έχουμε ότι $\Lambda \in T$ και άρα $T \neq \emptyset$. Επίσης είναι άμεσο από τον ορισμό πως ισχύει η ιδιότητα για κάθε $u \in T$ αν $w \sqsubseteq u$ τότε $w \in T$ και άρα το T είναι δένδρο.
Τώρα για να δείξουμε ότι το $F = [T]$, έστω $g \in F$ και $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει $f \in F$ τέτοιο ώστε $(g(0), \ldots, g(n)) \sqsubseteq f$ καθώς μπορούμε να πάρουμε $f = g$. Άρα απο (1.1) $(g(0), \ldots, g(n)) \in T$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g \in [T]$.
Για το αντίστροφο έστω $g \in [T]$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $(g(0), \ldots, g(n)) \in T$ και από (1.1) υπάρχει $f_n \in F$ με $(g(0), \ldots, g(n)) \sqsubseteq f_n$. Τώρα βλέπουμε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο g καθώς για κάθε $k \in N$, παίρνοντας ότι $n_0 = k$, για κάθε $n \leq n_0$ έχουμε ότι $f_n(k) = g(k)$ αφού $(g(0), \ldots, g(n)) \sqsubseteq f_n$. Άρα τα $f_n(k) \to g(k)$ για κάθε $k \in N$ επομένως $f_n \to g$. Αφού λοιπόν το F είναι κλειστό ισχύει ότι $g \in F$. Καταλήξαμε λοιπόν ότι $F = [T]$.
($\Leftarrow$) Από υπόθεση ξέρουμε ότι υπάρχει T στο X έτσι ώστε $F = [T]$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το F είναι κλειστό. Έστω μια ακολουθία $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του $[T]$ η οποία συγκλινει σε ένα $f \in X^{\mathbb{N}}$. Για κάθε n, υπάρχει ένα i_0 έτσι ώστε για κάθε $i \geq i_0$ ισχύει ότι $f_i(k) = f(k)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι $(f(0), \ldots, f(n)) \sqsubseteq f_{i_0}$ και επομένως $(f(0), \ldots, f(n)) \in T$. Έτσι έχουμε ότι $f \in [T]$ και άρα $[T] = F$ είναι κλειστό σύνολο. $\square$

Πόρισμα 1.3.3. *Ενα σύνολο $F \subseteq \mathcal{N}$ είναι κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο στο $\mathbb{N}$ με $F = [T]$.*

Απόδειξη. Το Πόρισμα είναι αποτέλεσμα της Πρότασης 1.3.2 για $X = \mathbb{N}$. $\square$

Ορισμός 1.3.4. Ορίζουμε το σύνολο Tr των όλων των δένδρων στο χώρο $\mathbb{N}$:

$$Tr = \{T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid T \text{ δένδρο στο } \mathbb{N}\}$$

Θεωρούμε μια απαρίθμηση $(u_s)_{s \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε δένδρο $T \in Tr$ ορίζουμε $\alpha_T \in 2^{\mathbb{N}}$ όπου $\alpha_T(s) = 1 \iff u_s \in T$ και άρα $\alpha_T(s) = 0 \iff u_s \notin T$. Τότε η συνάρτηση $f\colon Tr \to 2^{\mathbb{N}}$, όπου $f(T) = \alpha_T$, είναι μονομορφισμός. Επίσης είναι προφανές ότι το σύνολο $\mathcal{X} = \{\alpha \mid \text{ υπάρχει } T \text{ δένδρο ώστε } \alpha = \alpha_T\}$ είναι υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$ και $f\colon Tr \to \mathcal{X}$, όπου $f(T) = \alpha_T$, είναι εκτός απο μονομορφισμός και επί.
Επίσης ορίζουμε τη συνάρτηση $\rho\colon (Tr \times Tr) \to \mathbb{R}$ στο ως εξής:

$$\rho(T_1, T_2) = d_{\mathcal{N}}(f(T_1), f(T_2)) = d_{\mathcal{N}}(\alpha_{T_1}, \alpha_{T_2})$$

Η ρ επομένως είναι μια μετρική στο Tr και ο Tr με την τοπολογία της ρ είναι ο χώρος των δένδρων στο $\mathbb{N}$. Τότε η f εκτός από μονομορφισμός και επί είναι και αμφισυνεχής καθώς και ισομετρία. Έτσι μπορούμε να ταυτίσουμε το σύνολο Tr με το σύνολο $\mathcal{X}$.

Πρόταση 1.3.5. *Ο χώρος Tr είναι συμπαγής Πολωνικός χώρος*

Απόδειξη. Ο $2^{\mathbb{N}}$ ξέρουμε ότι είναι συμπαγής Πολωνικός χώρος. Αν δείξουμε ότι το σύνολο $\{\alpha_T \mid T \in Tr\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$ τότε θα είναι και συμπαγές και άρα Πολωνικός χώροςμ επομένως θα έχουμε δείξει το ζητούμενο, καθώς ταυτίζεται με

τον χώρο Tr.
Έστω ένα $\alpha \notin \{\alpha_T \mid T \in Tr\}$ και $s_0 \in \mathbb{N}$ όπου $u_{s_0} = \Lambda$. Αν $\alpha(s_0) = 0$ τότε για κάθε $\beta \in T$ όπου $\beta(s_0) = \alpha(s_0)$ έχουμε ότι $\beta \notin \{\alpha_T \mid T \in Tr\}$, γιατί άν $\beta = \alpha_T$ τότε η Λ δεν θα ανήκει στο T. Επομένως θεωρούμε ότι $\alpha(s_0) = 1$. Αν για κάθε s με $\alpha(s) = 1$ και κάθε t όπου $u_t \sqsubseteq u_s$ ισχύει ότι $\alpha(t) = 1$, τότε $\alpha = \alpha_T$ όπου T είναι το ακόλουθο δένδρο

$$T = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid \exists s \, (u = u_s \,\&\, \alpha(s) = 1)\}$$

το οποίο είναι άτοπο καθώς $\alpha \notin \{\alpha_T \mid T \in Tr\}$. Επομένως υπάρχει s, t με $\alpha(s) = 1$, $u_t \sqsubseteq u_s$ και $\alpha(t) = 0$. Τότε για κάθε $\beta \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\beta(i) = \alpha(i)$ όπου $i \leq max\{s, t\}$, έχουμε ότι $\beta \notin \{\alpha_T \mid T \in Tr\}$. Έχουμε επομένως ότι $2^{\mathbb{N}} \setminus \{\alpha_T \mid T \in Tr\}$ είναι ανοικτό υποσύνολοτου $2^{\mathbb{N}}$ και άρα το $\{\alpha_T \mid T \in Tr\}$ είναι κλειστό. □

Βάση της τοπολογίας του Tr. Αρχικά παρατηρούμε ότι στον $2^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο , μία βάση περιοχών είναι τα:

$$W(k_0, \ldots, k_{n-1}) = \{k_0\} \times \cdots \times \{k_{n-1}\} \times 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \times \ldots$$

όπου $k_i \in \{0, 1\}$ για κάθε $i \in (0, \ldots, n-1)$.
Παίρνοντας τη συνάρτηση f που ορίσαμε στον ορισμο του Tr έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f^{=1}[W(k_0, \ldots, k_{n-1})] &= \{T \in Tr \mid f(T) = \alpha_T \in W(k_0, \ldots, k_{n-1})\} \\ &= \{T \in Tr \mid \forall i < n \; \alpha_T(i) = k_i\} \\ &= \{T \in Tr \mid \forall i < n \; (u_i \in T \iff k_i = 1) \& (u_i \notin T \iff k_i = 0)\} \end{aligned}$$

Παίρνουμε λοιπόν τα σύνολα:

$$B(v_0, \ldots, v_{m-1}, w_0, \ldots, w_{t-1}) = \{T \in Tr \mid \forall i < m \; v_i \in T \;\;\&\;\; \forall j < t \; w_j \notin T\}$$

όπου $v_0, \ldots, v_{m-1}, w_0, \ldots, w_{t-1} \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.
Άρα η οικογένεια αυτών των B συνόλων αποτελεί βάση για την τοπολογία του Tr.

Σύγκλιση στον Tr. Έστω μια ακολουθία $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στον Tr και $T \in Tr$. Τότε

$$\begin{aligned} T_i \to T &\iff \alpha_{T_i} \to \alpha_T \iff \forall s \in \mathbb{N} \; \alpha_{T_i}(s) \to \alpha_T(s) \\ &\iff \forall s \; \exists i_s \; \forall i \geq i_s \alpha_{T_i} = \alpha_T \iff \forall s \; \exists i_s \; \forall i \geq i_s (u_s \in T_i \iff u_s \in T) \\ &\iff \forall u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \exists i_u \; \forall i \geq i_u \; (u \in T_i \iff u \in T) \end{aligned}$$

Ορισμός 1.3.6. Ορίζουμε τα σύνολα

$$WF = \{T \in Tr \mid [T] \neq \emptyset\}$$
$$IF = \{T \in Tr \mid [T] = \emptyset\}$$

τω θεμελιωμένων και μη θεμελιωμένων δένδρων στο $\mathbb{N}$ αντίστοιχα.

Λήμμα 1.3.7 (Το Βασικό Λήμμα Αναπαράστασης Κλειστών Συνόλων)**.** *Θεωρούμε ένα Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με την διακτριτή μετρική. Τότε ισχύει ότι το P είναι κλειστό σύνολο να και μόνο αν υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες ότι για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το σύνολο $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$*

είναι δένδρο στο $\mathbb{N}$ *και ότι*

$$P = \{(x,\alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid \alpha \in [T(x)]\}$$

Δηλαδή αν συμβολίσουμε με

$$P_x = \{\alpha \in \mathcal{N} | (x,\alpha) \in P\}$$

τότε $P_x = [T(x)]$ *για κάθε* $x \in \mathcal{X}$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ είναι κλειστό. Παίρνουμε μια αριθμήσιμη βάση $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{X}$. Το συμπλήρωμα του P στον $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$, δηλαδή το cP είναι ανοικτό (αφού P κλειστό) και ισχύει ότι

$$cP = \bigcup_{n\in I, u\in J} V_n \times \mathcal{N}_u \tag{1.2}$$

όπου $I \subseteq \mathbb{N}$ και $J \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Lambda \notin J$ καθώς σε αντίθετη περίπτωση κάθε $V_n \times \mathcal{N}_\Lambda \subseteq cP, n \in \mathbb{N}$ μπορεί να αντικατασταθεί με την έσωση $\bigcup_{i\in N} V_n \times \mathcal{N}_i$ γιατί ισχύει ότι $V_n \times \mathcal{N}_\Lambda = V_n \times \mathcal{N} = V_n \times \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_{(i)} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(V_n \times \mathcal{N}_{(i)})$. Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε το J με το $J' = (J \setminus \Lambda) \cup \{(i) \mid \ \in \mathbb{N}\}$.
Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι $V_0 = \emptyset$ καθώς σε οποιαδίποτε περίπτωση μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ακολουθία $(V_0, V_1, \dots, V_n, \dots)$ με την ακολουθία $(\emptyset, (V_0, V_1, \dots, V_n, \dots))$. Ορίζουμε το σύνολο T ως εξης:

$$(x,u) \in T \iff \forall w \in J\, \forall n \in I \text{ με } n \leq |u| \ (x \notin V_n \ \& \ w \not\sqsubseteq u). \tag{1.3}$$

Το σύνολο T είναι κλειστό. Για να δείξουμε ότι είναι κλειστό παίρνουμε μια ακολουθία $((x_i,u_i))_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του T και ένα $(x,u) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $(x_i,u_i) \to (x,u)$, δηλαδή $x_i \to x$ και $u_i \to u$. Στο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ έχουμε τη διακριτή μετρική και άρα ισχύει ότι $u_i = u$ για τα όλα $i \in \mathbb{N}$ και επομένως χωρίς πρόβλημα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(x_i, u) \in T$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τώρα έστω $w \in J$ και $n \in I$ με $n \leq |u|$. Επειδή έχουμε ότι $(x_0,u) \in T$ τότε απο την (1.3) $w \not\sqsubseteq u$. Πρέπει να δείξουμε και ότι $x \notin V_n$. Αφού $(x_i,u) \in T$ τότε έχουμε ότι $x_i \in \mathcal{X} \setminus V_n$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Το σύνολο $\mathcal{X} \setminus V_n$ είναι κλειστό και άρα το όριο της ακολουθίας $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ θα βρίσκεται μέσα στο $\mathcal{X} \setminus V_n$, δηλαδή

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x \in \mathcal{X} \setminus V_n$$

και άρα $(x,u) \in T$, επομένως T είναι κλειστό σύνολο.
Θα δείξουμε τώρα ότι το $T(x)$ είναι δένδρο. Παίρνουμε ένα $x \in \mathcal{X}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι το από την (1.3) ότι $\Lambda \in T(x)$ καθώς για $n \leq |\Lambda| = 0$ τότε $n = 0$ και άρα $x \notin V_0 = \emptyset$, ενώ επίσης για κάθε $w \in J$ έχουμε ότι $w \not\sqsubseteq \Lambda$ επειδή $\Lambda \notin J$. Επομένως αφού $\Lambda \in T(x)$ το $T(x) \neq \emptyset$. Τώρα έστω $u \in T(x)$ και $u' \sqsubseteq u$. Τότε για κάθε $w \in J$ και για κάθε $n \in I$ με $n \leq |u|$ ίσχύει πάλι από την (1.3) ότι $x \notin V_n$ και $w \not\sqsubseteq u$. Έτσι βλέπουμε ότι για κάθε $w \in J$ και κάθε $n \leq |u'| \leq |u|$ ισχύει ότι $x \notin V_n$ και $w \not\sqsubseteq u'$. Αυτό έχεις ως αποτέλεσμα $u' \in T(x)$ και άρα το $T(x)$ είναι δένδρο.
Τώρα θέλουμε να δείξουμε την ισότητα για το P που έχουμε στο Λήμμα. Έστω $(x,\alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Αν $(x,\alpha) \notin P$ τότε $(x,\alpha) \in cP$ και άρα υπάρχει $n \in$ με $x \in V_n$. Από την (1.3) προκύπτει ότι για κάθε $u \in T(x)$ θα πρέπει το μήκος της u να είναι μικρότερο από n και αυτό συνεπάγεται ότι το σώμα $[T(x)] = \emptyset$, έτσι προφανώς $\alpha \notin [T(x)]$.

Αν $(x, \alpha) \in P$ τότε για κάθε $n \in I$ και κάθε $w \in J$ έχουμε ότι $x \notin V_n$ και $\alpha \notin \mathcal{N}_w$, δηλαδή $w \not\sqsubseteq \alpha$. Άρα

$$\forall t \in \mathbb{N}\, \forall w \in J \ \ (w \not\sqsubseteq \alpha|t)$$

και αφού επίσης $x \notin \bigcup_{n \in I} V_n$ τότε ισχύει ότι

$$\forall t \in \mathbb{N}\, \forall w \in J\, \forall n \in I\, (x \notin V_n \ \&\ w \not\sqsubseteq \alpha|t).$$

Βλέπουμε λοιπόν από (1.3) ότι το $(x, \alpha|t) \in T$ και άρα $\alpha|t \in T(x)$ για κάθε $t \in \mathbb{N}$, επομένως $\alpha \in [T(x)]$.
($\Leftarrow$) Θεωρούμε ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με

$$P = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid \alpha \in [T(x)]\}.$$

Τότε έχουμε ότι:

$$(x, \alpha) \in P \iff \forall t\ \alpha|t \in T(x) \iff \forall t\ (x, \alpha|t) \in T$$

Μπορούμε να πάρουμε την συνάρτηση $f_t \colon \mathcal{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, όπου $f_t(\alpha) = \alpha|t$ η οποία είναι συνεχής και καθώς το T είναι κλειστό τότε και το P είναι κλειστό.΄ □

Δένδρο ζευγών στο $\mathbb{N}$ είναι ένα δένδρο $\mathrm{T} \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^{<\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Δηλαδή τα στοιχεία του είναι της μορφής $((a_0, c_0), (a_1, c_1), ..., (a_{n-1}, c_{n-1}))$. Ένα άπειρο κλαδί $f \in [T]$ έχει την μορφή $f = ((a_0, c_0), (a_1, c_1), ..., (a_{n-1}, c_{n-1}))$. Ταυτίζουμε το f με το ζεύγος άπειρων ακολουθιών: $(a_0, a_1, ..., a_n, ..., c_0, c_1, ..., c_n, ...)$. Μπορούμε να θέσουμε $\alpha = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ και $\gamma = (c_0, c_1, ..., c_n, ...)$, τότε το κλαδί f ταυτίζεται με το (α, γ). Δηλαδή με αυτή την ταύτιση τα άπειρα κλαδιά του Τ είναι ζεύγη στοιχείων του $\mathcal{N}$. Επίσης μπορούμε να συμβολίσουμε το
$((a_0, c_0), (a_1, c_1), ..., (a_{n-1}, c_{n-1}))$ πιο απλά με $(a_0, c_0, ..., a_{n-1}, c_{n-1})$ όπου και πάλι το μήκος ισούται με n.

1.4. Τελεστές

Ορισμός 1.4.1 (Τελεστές)**.** Τελεστής συνόλων ορίζεται οποιαδίποτε πράξη μεταξύ συνόλων.

Ακολουθούμε τη μέθοδο των [**Gre21**] και [**Mos09**] για τον ορισμό των τελεστών.

Έχουμε τους παρακάτω τελεστές:

Ο τελεστής της διάζευξης $\vee$. Αν έχουμε $P, Q \subseteq \mathcal{X}$ ορίζουμε το σύνολο της διάζευξης $P \vee Q \subseteq \mathcal{X}$ με $x \in P \vee Q \iff x \in P$ ή $x \in Q$. Παρατηρούμε ότι το $P \vee Q$ είναι η συνολοθεωρητική ένωση $P \cup Q$. (Η διαφορά των δύο τελεστών είναι ότι ο τελετής της διάζευξης εφαρμόζεται σε υποσύνολα του ίδιου χώρου ενώ η ένωση μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδίποτε σύνολα.)

Ο τελεστής της σύζευξης &. Αν έχουμε $P, Q \subseteq \mathcal{X}$ ορίζουμε το σύνολο της σύζευξης $P \,\&\, Q \subseteq \mathcal{X}$ με $x \in P \,\&\, Q \iff x \in P$ και $x \in Q$. Παρατηρούμε ότι το $P \,\&\, Q$ είναι η συνολοθεωρητική τομή $P \cap Q$ υποσυνόλων του ίδιου χώρου.

Ο τελεστής του συμπληρώμστος c. Αν $P \subseteq \mathcal{X}$ τότε ορίζουμε το συμπλήρωμα $c_{\mathcal{X}}P$ του P στον $\mathcal{X}$ ως το σύνολο $\mathcal{X} \setminus P$. $x \in c_{\mathcal{X}}P \iff \neg (x \in P)$

Ο τελεστής άπειρης αριθμίσιμης ένωσης $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Αν έχουμε μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ τότε ορίζουμε το σύνολο της άπειρης ένωσης $\bigvee_{\mathbb{N}}(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής, $x \in \bigvee_{\mathbb{N}}(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \exists\, n$ ώστε $x \in P_n$.
Δηλαδή με άλλα λόγια ο τελεστής $\bigvee_{\mathbb{N}}(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η άπειρη ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ υποσυνόλων του ίδιου Πολωνικού χώρου.

Ο τελεστής άπειρης αριθμίσιμης σύζευξης $\bigwedge_{\mathbb{N}}$. Αν έχουμε μια ακολουθία συνόλων $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ τότε ορίζουμε το σύνολο της άπειρης σύζευξης $\bigwedge_{\mathbb{N}}(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής, $x \in \bigwedge_{\mathbb{N}}(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall n \in \mathbb{N} x \in P_n$
Δηλαδή με άλλα λόγια η άπειρη σύζευξη $\bigwedge_{\mathbb{N}}(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η άπειρη τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$ υποσυνόλων του ίδιου Πολωνικού χώρου.

Ο τελεστής πεπερασμένης ένωσης $\bigvee_{\leq}$. Αν έχουμε πεπερασμένο το πλήθος υποσύνολα $P_0, \ldots, P_n$ του $\mathcal{X}$, τότε ορίζουμε το σύνολο της πεπερασμένης ένωσης ως εξής $\bigvee_{\leq}(P_0, \ldots, P_n) = P_0 \cup \cdots \cup P_n$.
Δηλαδή ο τελεστής $\bigvee_{\leq}$ είναι η πεπερασμένη ένωση υποσυνόλων του ίδιου χώρου.

Ο τελεστής πεπερασμένης σύζευξης $\bigwedge_{\leq}$. Αν έχουμε πεπερασμένο το πλήθος υποσύνολα $P_0, \ldots, P_n$ του $\mathcal{X}$, τότε ορίζουμε το σύνολο της πεπερασμένης τομής ως εξής $\bigwedge_{\leq}(P_0, \ldots, P_n) = P_0 \cap \cdots \cap P_n$.
Δηλαδή ο τελεστής $\bigwedge_{\leq}$ είναι η πεπερασμένη τομή υποσυνόλων του ίδιου χώρου.

Ο τελεστής υπαρξιακού ποσοδείκτη $\exists^{\mathcal{Y}}$ υπεράνω του $\mathcal{Y}$. Αν έχουμε ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ορίζουμε το σύνολο $\exists^{\mathcal{Y}}P = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists y \ (x, y) \in P\}$. Το $\exists^{\mathcal{Y}}P$ δηλαδή είναι η προβολή, $pr[P]$ του P στον $\mathcal{X}$ υπεράνω του $\mathcal{Y}$, όπου $pr\colon \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ και $pr(x, y) = x$.

Ο τελεστής του καθολικού ποσοδείκτη $\forall^{\mathcal{Y}}$ υπεράνω του $\mathcal{Y}$. Αν έχουμε ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ορίζουμε το σύνολο $\forall^{\mathcal{Y}}P = \{x \in \mathcal{X} \mid \forall y \ (x, y) \in P\}$. Δηλαδή $\forall^{\mathcal{Y}}P = \mathrm{C}_{\mathcal{X}}(\exists^{\mathcal{Y}}\mathrm{C}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}P)$

Ο τελεστής του φραγμένου υπαρξιακού ποσοδείκτη $\exists^{\leq}$. Αν έχουμε ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο $\exists^{\leq}P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ ως εξής $(x, n) \in \exists^{\leq}P \iff \exists m \leq n\, (x, m) \in P$. Παρατηρούμε ότι ο τελεστής αυτός προσομοιάζει την πεπερασμένη ένωση συνόλων, με επιπλέον στοιχείο την μεταβλητή του μήκους.

Ο τελεστής του φραγμένου καθολικού ποσοδείκτη $\forall^{\leq}$. Αν έχουμε ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο $\forall^{\leq}P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ ως εξής $(x, n) \in \forall^{\leq}P \iff \forall m \leq n\, (x, m) \in P$. Παρατηρούμε ότι ο τελεστής αυτός προσομοιάζει την πεπερασμένη τομή συνόλων, με επιπλέον στοιχείο την μεταβλητή του μήκους.

1.5. Κλάσεις συνόλων

Ορισμός 1.5.1. (Κλάσεις συνόλων)
Με τον όρο κλάσεις συνόλων εννοούμε τη συλλογή όλων των συνόλων σε μετρικούς χώρους που χαρακτηρίζονται από κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα.
Για κάθε μετρικο χώρο X και κάθε κλάση Γ ορίζουμε $\Gamma|X = \{A \subseteq X \mid A \in \Gamma\}$

Αν Φ ένας από τους προηγούμενους τελεστές τότε συμβολίζουμε με ΦΓ την κλάση που προκύπτει από όλα τα σύνολα της μορφής ΦP όπου το P ανήκει στην Γ και μπορεί να εφαρμοστεί πάνω του ο Φ.
Για παράδειγμα $\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma =$ η συλλογή όλων των $\exists^{\mathcal{Y}} P$ για τα οποία ισχύει ότι $P \in \Gamma|(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$, για κάποιους Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$.

Θα λέμε ότι η κλάση Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή Φ αν η εφαρμογή του τελεστή στα σύνολα της Γ που βρίσκονται στο πεδίο εφαρμογής του τελεστή δημιουργεί σύνολα στη Γ. Ισοδύναμα $\Phi\Gamma \subseteq \Gamma$.

Επίσης μια κλάση Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση αν για κάθε συνεχή συνάρτηση $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και κάθε σύνολο $Q \in \Gamma|\mathcal{Y}$ έχουμε ότι $f^{-1}[Q] \in \Gamma|\mathcal{X}$. Ισοδύναμα το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$, που ορίζεται ως $x \in P \iff f(x) \in Q$, ανήκει στην Γ.
Για παράδειγμα η κλάση των ανοικτών συνόλων είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση καθώς οι συνεχείς συναρτήσεις αντιστρέφουν ανοικτά σύνολα σε ανοικτά.

Ορισμός 1.5.2. Παίρνουμε δύο Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Η συμάρτηση $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ονομάζεται Γ-μετρήσιμη αν για κάθε ανοικτό $V \subseteq \mathcal{Y}$ το σύνολο $f^{-1}[V]$ ανήκει στην κλάση $\Gamma|\mathcal{X}$.

Πρόταση 1.5.3. *Για κάθε κλάση Γ η οποία είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ανήκει στην κλάση Γ τότε για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ η y-τομή $P_y = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, y) \in P\}$ ανήκει επίσης στην κλάση Γ.*

(ii) *Ισχύει η συνεπαγωγή ,*

$$\Gamma\colon \textit{Κλειστή ως προς } \bigvee\nolimits_{\mathbb{N}} \Rightarrow \Gamma\colon \textit{Κλειστή ως προς } \exists^{\mathbb{N}}.$$

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε ένα $y \in \mathcal{Y}$ και βλέπουμε ότι

$$x \in P_y \iff (x, y) \in P \iff a_{\mathcal{X},y}(x) \in P \iff x \in a_{\mathcal{X},y}^{-1}[P]$$

όπου $a_{\mathcal{X},y}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ και $a_{\mathcal{X},y}(x) = (x, y)$. Η συνάρτηση $a_{\mathcal{X},y}$ είναι συνεχής και επομένως απο την κλειστότητα της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση και λόγω του ότι το P ανήκει στην Γ τότε το P_y ανήκει στην Γ για κάθε $y \in \mathcal{Y}$.

(ii) Παίρνουμε ένα $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ το οποίο ανήκει στην κλάση Γ η οποία είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση καθώς και ως προς τον τελεστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η κλάση Γ ειναι κλειστή και ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$.

$$x \in \exists^{\mathbb{N}} P \iff \exists\, n\, (x, n) \in P \iff \exists\, n\, x \in P_n.$$

όπου P_n είναι η n-οστή τομή $\{x \in \mathcal{X} \mid (x,n) \in P\}$. Από το (i) για $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ ισχύει οτι κάθε P_n ανήκει στην Γ . $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} a^{-1}_{\mathcal{X},y}[P_n]$ και από την κλειστότητα της Γ ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ έχουμε ότι $\exists^{\mathbb{N}} P$ ανήκει στην Γ. □

Παρατήρηση 1.5.4. Τα αποτελέσματα της Πρότασης 1.5.3 ισχύουν ακόμα και για κλάσεις όπου είναι κλειστές ως προς την αντικατάσταση από μία μικρή συλλογή συνεχών συναρτήσεων. Για παράδειγμα στην προηγούμενη πρόταση αρκεί η υπόθεση οτι η κλάση Γ είναι κλειστή ως προς Γ′-αντικατάσταση , όπου Γ′ είναι η κλάση όλων των συναρτίσεων $a_{\mathcal{X},y}$ που ορίσαμε προηγουμένως.

Πρόταση 1.5.5. *Θεωρούμε μια κλάση* Γ *με την ιδιότητα πως για κάθε Πολωνικό χώρο* $\mathcal{X}$ *και κάθε ακολουθία συνόλων* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *απο σύνολα της* $\Gamma|\mathcal{X}$*, το σύνολο* $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ *που ορίζεται ως εξής:*

$$(x,n) \in P \iff x \in P_n$$

ανήκει στην Γ.
Τότε αν η Γ *είναι κλειστή ως προς τον τελεστή* $\exists^{\mathbb{N}}$*, είναι κλειστή και ως προς τον τελεστή* $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Παίρνουμε μια ακολουθία $(P_n)_{n\in N}$ από υποσύνολα του χώρου $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην κλάση Γ και το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ το οποίο ορίζεται όπως παραπάνω. Από την υπόθεση το P ανήκει και αυτό στην κλάση Γ και επιπλέον ισχύει ότι

$$x \in \bigcup_{\mathbb{N}} P_n \iff \exists\, n\; x \in P_n \iff \exists\, n\; (x,n) \in P. \tag{1.4}$$

Επομένως αν η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$, δηλαδή για το P που ανήκει στην Γ το $\exists^{\mathbb{N}} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists n\, (x,n) \in P\}$ ανήκει στην Γ, από την (1.4) το σύνολο $\bigcup_{\mathbb{N}} P_n$ ανήκει στην Γ και άρα η κλάση Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$. □

Πόρισμα 1.5.6. *Θεωρούμε μια κλάση* Γ *που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και που ικανοπόιεί την ιδιότητα των κλάσεων της Πρότασης 1.5.5 . Τότε ισχύει ότι η κλάση* Γ *είναι κλειστή ως προς τον τελεστή* $\bigvee_{\mathbb{N}}$ *αν και μόνο αν είναι κλειστή ως προς τον τελεστή* $\exists^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Από Πρόταση 1.5.3 και Πρόταση 1.5.5 έχουμε την διπλή συνεπαγωγή για την κλειστότητα ως προς τις κλάσεις $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\mathbb{N}}$. □

Πρόταση 1.5.7. *Η Πρόταση 1.5.3, η Πρόταση 1.5.5 καθώς και το Πόρισμα 1.5.6 ισχύουν για οποιοδίποτε απο τα ζεύγοι τελεστών* $(\exists^{\leq}, \bigvee_{\leq})$, $(\forall^{\mathbb{N}}, \bigwedge_{\mathbb{N}})$ *και* $(\forall^{\leq}, \bigwedge_{\leq})$.

Απόδειξη. Οι αποδείξεις είναι ίδιες με αυτές για $(\bigvee_{\mathbb{N}}, \exists^{\mathbb{N}})$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ειδικές κλάσεις συνόλων

2.1. Κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης

Θα ορίσουμε τις κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης σύμφωνα με το [**Kur66**].

Ορισμός 2.1.1. (Οι κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης)
Ορίζουμε τις παρακάτω κλάσεις συνόλων σε Πολωνικούς χώρους με αναδρομή στο $n \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_1^0 = \text{η κλάση όλων των ανοικτών συνόλων}\\
&\Pi_1^0 = c\Sigma_1^0 = \text{η κλάση όλων των κλειστών συνόλων}\\
&\Sigma_{n+1}^0 = \bigvee_{\mathbb{N}} \Pi_n^0 = \text{οι αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων της } \Pi_n^0\\
&\Pi_{n+1}^0 = c\Sigma_{n+1}^0 = \text{τα συμπληρώματα των συνόλων της } \Sigma_{n+1}^0\\
&\Delta_n^0 = \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0
\end{aligned}
$$

Οι Σ_n^0 ονομάζονται κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης διάταξης, οι κλάσεις Π_n^0 δυϊκές και οι κλάσεις Δ_n^0 αμφίσημες.
Η συλλογή αυτών των κλάσεων ονομάζεται ιεραρχία των Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης.

Είναι φανερό πως για ένα σύνολο $A \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στην Δ_n^0 ισχύει ότι $A \in \Sigma_n^0$ και $\mathcal{X} \setminus A \in \Sigma_n^0$.
Η κλάση Δ_1^0 αποτελείται απο κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Παρατήρηση 2.1.2. Η Σ_2^0 κλάση είναι η κλάση όλων των F_σ συνόλων και η κλάση Π_2^0 είναι η κλάση όλων των G_δ συνόλων.

Πρόταση 2.1.3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι $\Sigma_n^0|\mathcal{X} \subseteq \Delta_{n+1}^0$ και $\Pi_n^0|\mathcal{X} \subseteq \Delta_{n+1}^0$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε με επαγωγή στο $n \geq 1$ ότι $\Sigma_n^0|\mathcal{X} \subseteq \Sigma_{n+1}^0|\mathcal{X}$ και $\Sigma_n^0|\mathcal{X} \subseteq \Pi_{n+1}^0|\mathcal{X}$. Από αυτό προκύπτει προφανώς ότι $\Sigma_n^0|\mathcal{X} \subseteq \Delta_{n+1}^0|\mathcal{X}$.
Για $n = 1$ επειδή ξέρουμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ είναι F_σ και G_δ και επειδή ξέρουμε οτι η κλάση $\Sigma_2^0|\mathcal{X}$ αποτελείται ακριβώς από τα F_σ σύνολα του $\mathcal{X}$ και η κλάση $\Pi_2^0|\mathcal{X}$ ακριβώς απο τα G_δ τότε ισχύει ότι $\Sigma_1^0|\mathcal{X} \subseteq \Sigma_2^0|\mathcal{X}$ και $\Sigma_1^0|\mathcal{X} \subseteq \Pi_2^0|\mathcal{X}$.
Έστω τώρα ότι το παραπάνω ισχύει για κάποιο $n > 1$, θα ελέγξουμε για το $n + 1$. Έστω ένα $A \in \Sigma_{n+1}^0|\mathcal{X}$. Τότε από τον ορισμό των κλάσεων ξέρουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από υποσύνολα του $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην Π_n^0 έτσι ώστε $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Επίσης για κάθε B_i έχουμε ότι $\mathcal{X} \setminus B_i \in \Sigma_n^0|\mathcal{X} \subseteq \Sigma_{n+1}^0|\mathcal{X}$ από επαγωγική υπόθεση. Άρα $\mathcal{X} \setminus B_i \in \Sigma_{n+1}^0|\mathcal{X}$ επομένως $B_i \in \Pi_{n+1}^0|\mathcal{X}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \bigvee_{\mathbb{N}} \Pi_{n+1}^0|\mathcal{X} =$

$\Sigma^0_{n+2}|\mathcal{X}$. Επιπλέον θέτουμε $A_i = A$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και βλέπουμε ότι $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ και $A_i \in \Sigma^0_{n+1}|\mathcal{X}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Επομένως έχουμε ότι $\mathcal{X}\setminus A = \mathcal{X}\setminus\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(\mathcal{X}\setminus A_i) \in \bigvee_{\mathbb{N}} \Pi^0_{n+1}|\mathcal{X} = \Sigma^0_{n+2}|\mathcal{X}$ και άρα $A \in \Pi^0_{n+2}|\mathcal{X}$. Έτσι δείξαμε τις $\Sigma^0_n|\mathcal{X} \subseteq \Sigma^0_{n+1}|\mathcal{X}$ και $\Sigma^0_n|\mathcal{X} \subseteq \Pi^0_{n+1}|\mathcal{X}$. Επίσης παίρνοντας τα συμπληρώματα ισχύει ότι $\Pi^0_n|\mathcal{X} \subseteq \Sigma^0_{n+1}|\mathcal{X}$ και $\Pi^0_n|\mathcal{X} \subseteq \Pi^0_{n+1}|\mathcal{X}$ και αποδειχθηκε η Πρόταση.

□

Λήμμα 2.1.4. *Οι κλάσεις Σ^0_n, Π^0_n και Δ^0_n είναι κλειστές ως προς $\vee, \&$ και συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Αρχικά βλέπουμε ότι οι ιδιότητες κλειστότητας για τις κλάσεις Δ^0_n είναι άμεσες από τις αντίστοιχες των Σ^0_n και Π^0_n καθώς τα σύνολα που ανήκουν στις Δ^0_n ανήκουν και στις Σ^0_n και Π^0_n.
Επίσης βλέπουμε ότι η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση της Σ^0_n είναι ισοδύναμη με την αντίστοιχη για Π^0_n καθώς ξέρουμε ότι για κάθε $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ συνεχή συνάρτηση και κάθε $A \subseteq \mathcal{Y}$ ισχύει ότι $f^{-1}[Y \setminus A] = \mathcal{X} \setminus f^{-1}[A]$, Δηλαδή η f αν αντιστρέφει στοιχεία του Σ^0_n σε στοιχεία του Σ^0_n τότε αντιστρέφει και στοιχεία του Π^0_n σε στοιχεία του Π^0_n και αντίστροφα.
Με επαγωγή τώρα για $n = 1$ η Σ^0_1 είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση καθώς ξέρουμε ότι συνεχεις συναρτήσεις αντιστρέφουν ανοικτά σύνολα σε ανοικ΄τα σύνολα, Έστω τώρα ότι η ιδιότητα ισχύει για κάποιο $n \geq 1$. Θα ελέγξουμε για $n + 1$. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και $A \subseteq \mathcal{Y}$ που ανήκει στην Σ^0_{n+1}. Θέλω να δείξω ότι το $f^{-1}[A]$ ανήκει επίσης στην Σ^0_{n+1}. Από τον ορισμό των κλάσεων ξέρουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, με τα A_i να ανήκουν στην Π^0_n για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Τότε $f^{-1}[A] = f^{-1}[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}[A_i]$ και από την επαγωγική υπόθεση τα $f^{-1}[A_i]$ ανήκουν στην Π^0_n. Επομένως η ένωση τους ανήκει στην Σ^0_{n+1}.
Για τους τελεστές $\vee$ και & βλέπουμε ότι η κλειστότητα της Σ^0_n είναι ισοδυναμή με την κλειστότητα της Π^0_n ως προς τους ίδιους τελεστές και αντίστροφα , λόγω των νόμων του de Morgan. Έτσι θα δείξουμε την κλειστότητα με επαγωγή για την Σ^0_n.
Για $n = 1$ έχουμε ότι η Σ^0_1 είναι κλειστή ως προς τους δύο τελεστές καθώς ειναι γνωστό ότι η πεπερασμένη ένωση και τομή ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Έστω τώρα ότι η κλειστότητα ισχύει για κάποιο $n > 1$. Θα εξετάσουμε αν ισχύει για $n + 1$. Έστω $A, B \subseteq \mathcal{X}$, τα οποία ανήκουν στην Σ^0_{n+1} αυτό που θέλουμε να δειξουμε είναι ότι το $A \cup B$ και $A \cap B$ ανήκουν στην Σ^0_{n+1}. Από τον ορισμό των κλάσεων ξέρουμε ότι υπάρχουν ακολουθίες $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}, (B_i)_{i\in\mathbb{N}}$, με τα A_i, B_i να ανήκουν στην Π^0_n για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ και $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Τότε ισχύουν τα εξής:

$$
\begin{aligned}
A \cup B =& (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \cup (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cup B_i) \\
A \cap B =& (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cap B_i).
\end{aligned}
$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι η κλάση Σ_n^0 είναι κλειστή ως προς τους δύο τελεστές επομένως και η κλάση Π_n^0 είναι αντίστοιχα κλειστή και έτσι

$$(A_i \cup B_i) \in \Pi_n^0$$
$$(A_i \cap B_i) \in \Pi_n^0$$

και από τον ορισμό των κλάσεων οι αριθμήσιμες ενώσεις ανήκουν στην Σ_{n+1}^0 κλάση και αποδείξαμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 2.1.5. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε σύνολο $A \in \Sigma_n^0|\mathcal{X} \times \mathbb{N}$ τα σύνολα $A_i \subseteq \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$ που ορίζονται ως εξής:

$$x \in A_i \iff (x, i) \in A$$

ανήκουν και αυτά στην Σ_n^0. Αυτό ισχύει από την Πρόταση 1.5.3 καθώς τα A_i είναι οι i-τομές του A και οι κλάσεις Σ_n^0 είναι κλειστες ως προς συνεχή αντικατάσταση. Επίσης προφανώς ισχύουν τα ίδια αν αντί της κλάσης Σ_n^0 πάρουμε την Π_n^0.

Λήμμα 2.1.6. [**Mos09**, 1F.7] *Παίρνουμε ένα φυσικό αριθμο $n \geq 1$, ένα Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και μία ακολουθία συνόλων $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ που ανήκουν στην $\Sigma_n^0|\mathcal{X}$. Τότε το σύνολο $B \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που όριζεται ως εξής :*

$$(x, i) \in B \iff x \in B_i$$

ανήκει και αυτό στην $\Sigma_n^0|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$.
Το παραπάνω ισχύει και για την Π_n^0 αντί της Σ_n^0.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το Λήμμα για την Σ_n^0 καθώς η απόδειξη για την Π_n^0 προκύπτει παίρνοντας τα συμπληρώματα για την Σ_n^0.
Ορίζουε τα σύνολα $C_i \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ για $i \in \mathbb{N}$ ως εξής:

$$(x, s) \in C_i \iff x \in B_i \ \&\ s = i$$

Για κάθε i το σύνολο $V_i = \{(x, s) \mid s = i\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και επομένος ανήκει στην κλάση Σ_n^0. Τα σύνολα C_i μπορούν να γραφτουν ως $C_i = B_i \cap V_i$ και από ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων Σ_n^0 τα C_i ανήκουν στην Σ_n^0. Επίσης παρατηρούμε ότι

$$(x, s) \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \iff \exists i\, (x, s) \in C_i \iff \exists i\, (x \in B_i \ \&\ s = i) \iff x \in B_s \iff (x, s) \in B_i$$

δηλαδή $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$.
Για $n = 1$ τότε τα C_i είναι ανοικτά σύνολα επομένως B ανοικτό σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών και άρα $B \in \Sigma_1^0|\mathcal{X}$. Για $n > 1$ τότε για κάθε i υπάρχει ακολουθία από υποσύνολα του $\mathcal{X}$,έστω $(C_i^i)_{j \in \mathbb{N}}$, που ανήκουν στην κλάση Π_n^0 και ισχύει ότι $C_i = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_i^i$.
Επομένως

$$B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_i^i = \bigcup_{i, j \in \mathbb{N}} C_i^i$$

και άρα το B ως αριθμήσιμη ένωση συνόλων που ανήκουν στην Π_{n-1}^0 ανήκει στην Σ_n^0. □

Η παρακάτω Πρόταση μας δίνει ένα χαρακτηρισμό των κλάσεων Σ_n^0 σύμφωνα με την προσέγγιση των [**Kle43**] και [**Mos47**].

Πρόταση 2.1.7. *Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι $\Sigma^0_{n+1} = \exists^{\mathbb{N}}\Pi^0_n$ και επομένως $\Pi^0_{n+1} = \forall^{\mathbb{N}}\Sigma^0_n$.*

Απόδειξη. Για να κάνουμε την απόδειξη θα ορίζουμε αρχικά κάποιες καινούργιες κλάσεις ως εξης:

$$\begin{aligned}
\Sigma^*_1 &= \text{ η κλάση όλων των ανοικτών συνόλων} \\
\Pi^*_1 &= \text{ η κλάση όλων των κλειστών συνόλων} \\
\Sigma^*_{n+1} &= \exists^{\mathbb{N}}\Pi^*_n \\
\Pi^*_{n+1} &= c\Sigma^*_{n+1}
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε με επαγωγή στο $n \geq 1$ ότι ισχύει:

$$\Sigma^0_n|\mathcal{X} = \Sigma^*_n|\mathcal{X} \text{ και } \Pi^0_n|\mathcal{X} = \Pi^0_n|\mathcal{X}.$$

Για $n = 1$ το ζητούμενο είναι προφανές από τον ορισμό των κλάσεων.
Έστω τώρα ότι το ζητούμενο ισχύει για κάποιο $n > 1$, θα δείξουμε το ίδιο για το $n + 1$. Έστω ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ σύνολο που ανήκει στην κλάση $\Sigma^*_{n+1}|\mathcal{X}$. Τότε υπάρχει σύνολο $A \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ το οποίο ανήκει στην $\Pi^*_n|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ και $P = \exists^{\mathbb{N}}A$. Απο την επαγωγική υπόθεση το A θα ανήκει και στην κλάση $\Pi^0_n|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$. Παίρνουμε τώρα τα σύνολα $A_i = \{x \mid (x, i) \in A\}$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και εφαρμόζοντας την Παρατήρηση 2.1.13 βλέπουμε ότι τα σύνολα A_i ανήκουν στην κλάση $\Pi^0_n|\mathcal{X}$. Επίσης βλέπουμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{X}$ ισχύει ότι:

$$x \in P \iff \exists i\, (x, i) \in A \iff \exists i\, x \in A_i$$

άρα $P = \bigcup_{i \in \mathbb{N}}$. Επομένως αφού τα σύνολα A_i ανήκουν στην κλάση $\Pi^0_n|\mathcal{X}$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, τότε το P ανήκει στην κλάση Σ^0_{n+1}. Παίρνοντας τα συμπληρώματα δείχνεται και η ισότητα $\Pi^0_n|\mathcal{X} = \Pi^0_n|\mathcal{X}$ και αποδείχθηκαν τα ζητούμενα. □

Θεώρημα 2.1.8. **[Kur66][Mos09][Gre21]** *[Οι θεμελιώδεις ιδιότητες κλειστότητας των Borel κλάσεων πεπερασμένης τάξης] Για κάθε $n \geq 1$ οι κλάσεις Σ^0_n, Π^0_n και Δ^0_n είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση, τους τελεστές $\vee$, &, $\exists^{\leq}$, $\forall^{\leq}$, $\bigvee_{\leq}$, $\bigwedge_{\leq}$ καθώς επίσης ισχύον και τα παρακάτω:*

(i) *Οι κλάσεις Σ^0_n είναι επιπλέον κλειστές ως προς τους τελεστές $\bigvee_{\mathbb{N}}, \exists^{\mathbb{N}}$ και γενικότερα $\exists^Y$, όπου Y αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος.*

(ii) *Οι κλάσεις Π^0_n είναι επιπλέον κλειστές ως προς τους τελεστές $\bigwedge_{\mathbb{N}}, \forall^{\mathbb{N}}$ και γενικότερα $\exists^Y$, όπου Y αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος.*

(iii) *Οι κλάσεις Δ^0_n είναι επιπλέον κλειστές ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος c.*

Απόδειξη. Η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση και ως προς τους τελεστές $\vee$ και & δείχθηκε στο Λήμμα 2.1.4.
Επίσης η κλειστότητα ως προς τους τελεστές $\bigvee_{\leq}$ και $\bigwedge_{\leq}$ είναι άμεση από την κλειστότητα των τελεστών $\vee$ και & με επαγωγή στο πλήθος της πεπερασμένης ακολουθίας συνόλων που θεωρούμε.
Επιπλέον η κλειστότητα των Σ^0_n, Π^0_n και Δ^0_n ως προς τις κλάσεις $\exists^{\leq}$ και $\forall^{\leq}$ από Πρόταση 1.5.7 και Πρόταση 1.5.3 (καθώς Σ^0_n, Π^0_n και Δ^0_n κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση) είναι συνεπαγωγή της κλειστότητας των κλάσεών μας ως προς τους τελεστές $\bigvee_{\leq}$ και $\bigwedge_{\leq}$ αντιστοιχά.

Για τις περαιτέρω ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων Σ^0_n παίρνουμε αρχικά μια ακολουθία $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην Σ^0_n, ένα σύνολο $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i$ και θα δείξουμε την κλειστότητα ως προς τον τελεστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$ δείχνοντας ότι $P \in \Sigma^0_n$. Για $n = 1$ τα P_i είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και καθώς η αριθμήσιμη ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο τότε το $P \in \Sigma^0_n$. Τώρα για κάποιο $n > 1$ κάθε P_i σύνολο είναι η ένωση μίας ακολουθίας $(Q^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ από Π^0_{n-1} υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Έτσι έχουμε ότι $P_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q^i_j$ και άρα

$$P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q^i_j = \bigcup_{j,i\in\mathbb{N}} Q^i_j.$$

Επομένως το P αριθμήσιμη ένωση στοιχείων του Π^0_{n-1} και άρα ανήκει στην Σ^0_n. Δείξαμε λοιπόν την κλειστότητα ως προς τον τελεστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και λόγω της Πρότασης 1.5.3 συνεπάγεται η κλειστότητας και ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$.
Για την κλειστότητα τώρα ως προς τον τελεστή $\exists^Y$, όπου Y αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος, θα θεωρήσουμε την επί συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to Y$. Το $\mathbb{N}$ θεωρείται με την διακριτή τοποόγία επομένως η f είναι προφανώς συνεχή συνάρτηση. Για κάθε $Q \in \Sigma^0_n | \mathcal{X} \times Y$ έχουμε ότι

$$x \in \exists^Y Q \iff \exists\, y\, (x, y) \in Q \iff \exists\, n\, (x, f(n)) \in Q$$

και λόγω της κλειστότητας της Σ^0_n ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$ και την συνεχή αντικατάσταση το σύνολο $\exists^Y Q$ ανήκει στην Σ^0_n.
Για τις ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων Π^0_n ως προς τους τελεστές $\bigwedge_{\mathbb{N}}, \forall^{\mathbb{N}}$ και $\exists^Y$, όπου Y αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος, προκύπτους από τις αντιστοιχες των Σ^0_n παίρνοντας τον τελεστή του συμπληρώματος c.
Τέλος είναι προφανές ότι οι κλάσεις Δ^0_n είναι κλειστές ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος c καθώς $\Delta^0_n = \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n$ και $\Sigma^0_n = c\Pi^0_n$.

$\square$

Θα δούμε τώρα κάποια παραδείγματα από σύνολα που ανήκουν στις Borel κλάσεις συνόλων πεπερασμένης τάξης.

Παράδειγμα 2.1.9. Θεωρούμε τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{X} = 2^{\mathbb{N}}$ και παίρνουμε το υποσύνολο

$$A = \{\alpha \in 2^{\mathbb{N}} \mid \alpha \text{ είναι τελικά μηδενική ακολουθία}\}$$

Για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \alpha \in A &\iff \exists n_0\, \forall n \geq n_0\; \alpha(n) = 0 \\ &\iff \exists n_0\, \forall n\, (n \geq n_0 \Rightarrow \alpha(n) = 0) \\ &\iff \exists n_0\, \forall n (n < n_0 \vee \alpha(n) = 0) \end{aligned}$$

Επομένως αρχικά λόγω της κλειστότητας των Π^0_1 συνόλων ως προς τον τελεστή $\vee$ έχουμε ότι το σύνολο A ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathbb{N}}(\forall^{\mathbb{N}}\Pi^0_1) = \exists^{\mathbb{N}}\Pi^0_1 = \Sigma^0_2$, από τις ιδιότητες των κλάσεων ως προς τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}, \forall^{\mathbb{N}}$.

Παράδειγμα 2.1.10. Θεωρούμε πάλι τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{X} = 2^{\mathbb{N}}$ και παίρνουμε τώρα το υποσύνολο

$$B = \{\alpha \in 2^{\mathbb{N}} \mid \alpha(n) = 1 \text{ για άπειρα } n\}$$

Το B είναι το συμπλήρωμα του συνόλου A από το Παράδειγμα 2.1.9 στον $2^{\mathbb{N}}$. Επομένως το B ανήκει στην κλάση Π^0_2.

Παράδειγμα 2.1.11. Θεωρούμε τον Πολωνικό χώρο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$ και παίρνουμε το υποσύνολο

$$C = \{((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R} \mid x_n \to x\}$$

Για κάθε $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x) \in C &\iff \forall \varepsilon\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0\ \ |x_n - x| \leq \epsilon \\ &\iff \forall s\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0\, |x_n - x| \leq 2^{-s} \\ &\iff \forall s\, \exists n_0\, \forall n\, (n < n_0\ \vee\ |x_n - x| \leq 2^{-s}) \end{aligned}$$

Αρχικά λόγω της κλειστότητας των Π^0_1 συνόλων ως προς τον τελεστή $\vee$ έχουμε ότι το σύνολο C ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathbb{N}}(\exists^{\mathbb{N}}(\forall^{\mathbb{N}}\Pi^1_0)) = \forall^{\mathbb{N}}(\exists^{\mathbb{N}}\Pi^1_0) = \forall^{\mathbb{N}}\Sigma^0_2 = \Pi^0_3$ από τις ιδιότητες των κλάσεων ως προς τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}, \forall^{\mathbb{N}}$.

Τα παρακάτω είναι κάποια γνωστά παραδείγματα από [**Mos09**] και [**Kec95**].

Παράδειγμα 2.1.12. Θεωρούμε τον Πολωνικό χώρο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και παίρνουμε το υποσύνολο

$$D = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (x_n) \text{ συγκλίνουσες}\}$$

Τότε για κάθε $(x_n) \in \mathbb{R}^(\mathbb{N})$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (x_n) \in D &\iff (x_n) \text{ είναι Cauchy} \\ &\iff \forall s\, \exists n_0\ \ \forall n, m \geq n_0\, |x_n - x_m| < 2^{-s} \\ &\iff \forall s\, \exists n_0\ \ \forall n\, \forall m\, (n < n_0 \vee m < n_0 \vee |x_n - x_m| < 2^{-s}) \end{aligned}$$

Δηλαδή το το D ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathbb{N}}\exists^{\mathbb{N}}\forall^{\mathbb{N}}\forall^{\mathbb{N}}\Pi^0_1 = \forall^{\mathbb{N}}\exists^{\mathbb{N}}\Pi^0_1 = \forall^{\mathbb{N}}\Sigma^0_2 = \Pi^0_3$ από τις ιδιότητες των κλάσεων ως προς τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}, \forall^{\mathbb{N}}$.

Για τα επόμενα παραδείγματα πρώτα θα επισημάνουμε δύο παρατηρήσεις απο την Ανάλυση.

Παρατήρηση 2.1.13. Έστω μία συνάρτηση $g\colon (-r, 0) \cup (0, r) \to \mathbb{R}, r > 0$ η οποία είναι συνεχής και έστω ένα $a \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$a = \lim_{x\to 0} g(x) \iff \forall s\ \ \exists k \text{ ώστε } \forall q \in \mathbb{Q} \text{ με } 0 < |q| < 2^{-k} \text{ ισχύει ότι } |g(q) - a| < 2^{-s}.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Είναι προφανές από τον ορισμό του ορίου.
($\Leftarrow$) Έστω ένα $s \in \mathbb{N}$ και ε τέτοιο ώστε $2^{-s} < \epsilon$. Παίρνουμε k όπως στην υπόθεση. 'Εστω x όπου $0 < |x| < 2^{-k}$. Λόγω πυκνότητας των ρητών στο $\mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία ρητών $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία $q_n \to x$ και $0 < |q_n| < 2^{-k}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από υπόθεση ισχύει ότι

$$|g(q_n) - a| < 2^{-s} \tag{2.1}$$

και καθώς η g είναι συνεχής συνάρτηση τότε $g(q_n) \to g(x)$ για $n \to \infty$. Άρα παίρνοντας όριο στην (2.1) έχουμε ότι

$$|g(x) - a| \leq 2^{-s} < \epsilon$$

και άρα $a = \lim_{x \to 0} g(x)$. □

Παρατήρηση 2.1.14. Έστω μία συνάρτηση $g\colon (-r, 0) \cup (0, r) \to \mathbb{R}, r > 0$ η οποία είναι συνεχής. Ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

Υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \iff$

$\iff \forall s \, \exists k \, \forall p, q \in \mathbb{Q}$ όπου $0 < |p| < 2^{-k}$ και $0 < |q| < 2^{-k}$ ισχύει ότι $|g(p) - g(q)| < 2^{-s}$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Το $\lim_{x \to 0} g(x)$ υπάρχει και έστω $\lim_{x \to 0} g(x) = a$ και $s \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ωστε για κάθε x με $0 < |x| < \delta$ ισχύει ότι $|g(x) - a| < \frac{2^{-s}}{2}$. Παίρνουμε ένα k τέτοιο ώστε $2^{-k} < \delta$. Για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$ με $0 < |p| < 2^{-k}$ και $0 < |q| < 2^{-k}$ ισχύει ότι

$$|g(p) - g(q)| \leq |g(p) - a| + |a - g(q)| < \frac{2^{-s}}{2} + \frac{2^{-s}}{2} = 2^{-s}$$

Επομένως αποδείχθηκε η μια κατεύθυνση.
($\Leftarrow$) Έχουμε τους παρακάτω ισχυρισμούς:

Ισχυρισμός 1: Για κάθε ακολουθία $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όπου $p_n \in \mathbb{Q}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $p_n \to 0$, η ακολουθία $(g(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.
Ισχυρισμός 2: Αν $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $p_n, q_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $p_n \to 0, q_n \to 0$ τότε $|g(p_n) - g(q_n)| \to 0$.

Θα αποδείξουμε τώρα τους ισχυρισμούς.
Απόδειξη ισχυρισμού 1: Έστω ένα $s \in \mathbb{N}$, ένα ϵ ώστε $2^{-s} < \epsilon$ και k όπως στην υπόθεση της παρατήρησης. Από ισχυρισμό έχουμε ακολουθία $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όπου $p_n \in \mathbb{Q}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $p_n \to 0$ και άρα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $0 < |p_n| < 2^{-k}$. Τότε για κάθε $m, n \geq n_0$ ισχύει απο υπόθεση ότι $|g(p_n) - g(p_m)| < 2^{-s} < \epsilon$ και επομένως η $(g(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.
Απόδειξη ισχυρισμόυ 2: Έστω πάλι $s \in \mathbb{N}$ και k όπως στην υπόθεση της παρατήρησης. Τότε υπάρχει $n_0 = \max\{n_p, n_q\}$ (όπου για $n \geq n_p, 0 < |p_n| < 2^{-k}$ και για $n \geq n_q, 0 < |q_n| < 2^{-k}$) τέτοιο ώστε για $n \geq n_0$ έχουμε ότι $0 < |p_n| < 2^{-k}$ και $0 < |q_n| < 2^{-k}$. Από υπόθεση τότε $|g(p_n) - g(q_n)| < 2^{-s}$ για κάθε s επομένως αν ορίσουμε την ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όπου $b_n = g(p_n) - g(q_n)$ βλέπουμε ότι συγκλίνει στο μηδέν και άρα $|g(p_n) - g(q_n)| \to 0$.

Τώρα για την ακολουθία $(2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ απο τον ισχυρισμό 1 το όριο $\lim_{n \to \infty} g(2^{-n})$ υπάρχει και έστω $a = \lim_{n \to \infty} g(2^{-n})$. Επίσης από ισχυρισμό 2 έχουμε ότι για κάθε ακολουθία $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $q_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $q_n \to 0$ το όριο $\lim_{n \to \infty} g(q_n) = a = \lim_{n \to \infty} g(2^{-n})$. Έτσι προκύπτει ότι το όριο $\lim_{\to 0} g(x) = a$ υπάρχει. □

Λήμμα 2.1.15. *Θεωρούμε τον χώρο $C([0,1])$ όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με την νόρμα $\|f\| = sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Θεωρούμε τα σύνολα $P \subseteq C([0,1]) \times [0,1] \times \mathbb{R}$*

και $Q \subseteq C([0,1]) \times [0,1]$ *ως εξής:*

$$(f,x,y) \in P \iff f^{'}(x) = y$$
$$(f,x) \in Q \iff \textit{υπάρχει η } f'(x)$$

Τότε τα σύνολα P *και* Q *ανήκουν στην κλάση* $\Pi^0_3|(C([0,1]) \times [0,1] \times \mathbb{R})$ *και* $\Pi^0_3|C([0,1]) \times [0,1]$ *αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbb{Q} = \{r_m \mid m \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $f \in C([0,1])$ και $x, y \in [0,1]$ από την Παρατήρηση 2.1.13 ισχύει ότι:

$$(f,x,y) \in P \iff \forall s\ \exists k\, \forall m\, [\text{ αν } 0 < |r_m| < 2^{-k} \text{ τότε } |g_x(r_m) - y| \leq 2^{-s}]$$
$$\iff \forall s\ \exists k\, \forall m\, [(|r_m| \leq 2^{-k} \vee r_m = 0) \vee |\frac{f(x+r_m) - f(x)}{r_m} - y| \leq 2^{-s}]$$

όπου $g_x(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
Επομένως βλέπουμε πως τα σύνολα που σχηματίζονται από τις $|r_m| \leq 2^{-k}$, $r_m = 0$ και $|\frac{f(x+r_m)-f(x)}{r_m} - y| \leq 2^{-s}$ είναι κλειστά και άρα ανήκουν στην κλάση Π^0_1 και λόγω της κλειστότητας της Π^0_1 ως προς τον τελεστή $\vee$ έχουμε ότι το P ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathbb{N}}(\exists^{\mathbb{N}}(\forall^{\mathbb{N}}\Pi^0_1)) = \forall^{\mathbb{N}}(\exists^{\mathbb{N}}\Pi^0_1) = \forall^{\mathbb{N}}\Sigma^0_2 = \Pi^0_3$. Επομένως το σύνολο P είναι ένα Π^0_3 σύνολο.

Για το σύνολο Q από την Παρατήρηση 2.1.14 έχουμε ότι:

$x \in Q \iff$

$\forall s\, \exists k\, \forall m, n$ [αν $(0 < |r_m| < 2^{-k}$ και $(0 < |r_n| < 2^{-k})$ τότε $|g_x(r_m) - g_x(r_n)| \leq 2^{-s}]$

$\iff \forall s\, \exists k\, \forall m, n$ ($((|r_m| \leq 2^{-k} \vee r_m = 0) \vee (|r_n \leq 2^{-k} \vee r_n = 0)) \vee\ |g_x(r_m) - g_x(r_n)| \leq 2^{-s}]$)

όπου πάλι $g_x(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
Επομένως όπως πριν το σύνολο Q ανήκει στην κλάση Π^0_3. □

2.2. Borel σύνολα

Ορισμός 2.2.1. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα μη κενό σύνολο X και μία οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ καλείται σ-άλγεβρα στο X αν ικανοποιούνται τα παρακάτω.

(1) $X \in \mathcal{A}$.
(2) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
(3) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Κάποια απλά παραδείγματα σ-αλγεβρών στο X είναι το $\{X, \emptyset\}$, το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ και το $\{X, \emptyset, A, X \setminus A\}$.

Πρόταση 2.2.2. *Έστω* $\mathcal{A}_i, i \in I$ *μία οικογένεια σ-αλγεβρών υποσυνόλων ενός συνόλου X. Τότε η* $\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ *είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε οτι ισχύουν οι τρεις ιδιότητες της σ-άλγεβρας για την $\mathcal{A}$.

(i) $X \in \mathcal{A}$ καθώς $X \in \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$

(ii) Έστω τώρα ένα $A \in \mathcal{A}$ τότε συνεπάγεται ότι $A \in \mathcal{A}_i$, για κάθε $i \in I$ και αφού οι $\mathcal{A}_i$ είναι σ-άλγεβρες τότε και $X \setminus A \in \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$ και άρα $X \setminus A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$.

(iii) Έστω $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $A_n \in \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού οι $\mathcal{A}_i$ είναι σ-άλγεβρες τότε $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$ και άρα $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$.

Επομένως δείχθηκε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. $\square$

Ορισμός 2.2.3. Έστω $\mathcal{C}$ μια οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X και $\mathcal{A}$ η τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την $\mathcal{C}$. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ονομάζεται παραγόμενη απο την $\mathcal{C}$ και την συμβολίζουμε με $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$.

Ορισμός 2.2.4 (Σύνολα Borel)**.** Τα σύνολα τα οποία ανήκουν στην σ-άλγεβρα που παράγεται απο την τοπολογία $\mathcal{T}$ ενός τοπολογικού χώρου , δηλαδή τα σύνολα που ανήκουν στην $\sigma(\mathcal{T})$, ονομάζονται σύνολα Borel. Για παράδειγμα όλα τα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου είναι Borel σύνολα. Την οικογένεια (η οποία είναι σ-άλγεβρα) Borel συνόλων σε ένα χώρο X την συμβολίζουμε ως $\mathcal{B}|X$.

Πρόταση 2.2.5. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι $\Sigma_n^0 \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}|\mathcal{X}$ και $\Pi_n^0 \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}|\mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε την απόδειξη με επαγωγή στο $n \geq 1$.
Έστω ότι είμαστε σε ένα Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Για $n = 1$ η κλάση Σ_1^0 αποτελείται από τα ανοικτά σύνολα του $\mathcal{X}$ επομένως από τον ορισμό της κλάσης των Borel συνόλων έχουμε ότι $\Sigma_1^0 \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}|\mathcal{X}$. Επίσης έχουμε ότι $\Pi_1^0 = c\Sigma_1^0$ και επομένως ισχύει και το $\Pi_1^0 \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}|\mathcal{X}$ από τις ιδιότητες των σ-αλγεβρών. Έστω ότι για $n > 1$ ισχύει $\Sigma_n^0 \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}|\mathcal{X}$. Για $n+1$ έχουμε ότι $\Sigma_{n+1}^0 = \bigvee_{\mathbb{N}} \Pi_n^0$. Επίσης ξέρουμε οτι ισχύει $\Pi_n^0 = c\Sigma_n^0$ και αφού Σ_n^0 αποτελείται από Borel σύνολα τότε το ίδιο ισχύει και για την κλάση Π_n^0. Καταλήγουμε λοιπόν ότι $\Sigma_{n+1}^0 \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}|\mathcal{X}$ αφού αποτελείται από αριθμήσιμες ενώσεις Borel συνόλων. Και τέλος όπως είναι φυσικό $\Pi_{n+1}^0 \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}|\mathcal{X}$ καθώς $\Pi_{n+1}^0 = c\Sigma_{n+1}^0$. $\square$

Λήμμα 2.2.6. *Η κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Παίρνουμε δύο μετρικούς χωρους X, Y και μία συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$. Θα δείξουμε ότι για κάθε A Borel σύνολο στον Y, το $f^{-1}[A]$ είναι Borel σύνολο συον X. Αρχικά παίρνουμε μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{A} = \{A \subseteq Y \mid f^{-1}[A] \in \mathcal{B}|X\}$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{B}|Y \subseteq \mathcal{A}$. $\mathcal{B}|Y$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά σύνολα του Y επομένως αν δείξουμε οτι η $\mathcal{A}$ είναι μια σ-αλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά σύνολα του Y πετύχαμε αυτό που θέλουμε. Έστω $A \subseteq Y$ ανοικτό, τότε αφού f συνεχής $f^{-1}[A]$ ανοικτό υποσύνολο του X άρα Borel στον X. Επομένως $A \in \mathcal{A}$. Άρα οποιοδήποτε ανοικτό υποσύνολο του Y ανήκει στην $\mathcal{A}$ επομένως και $Y \in \mathcal{A}$ ως ανοικτό. Επίσης έστω $A \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A]$ και άρα είναι Borel σύνολο στον X ως κλειστό σύνολο, αφού $f^{-1}[A]$ ανοικτό. Επομένως $Y \setminus A \in \mathcal{A}$.Τέλος έστω $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$. Τότε $f^{-1}[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[A_n]$ όπου είναι Borel σύνολο στον X ως αριθμίσιμη ένωση Borel συνόλων ($f^{-1}[A_n], \forall n \in \mathbb{N}$ είναι Borel). Άρα ικανοποιούνται οι προυποθέσεις η $\mathcal{A}$ να είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y, επομένως για κάθε A

Borel σύνολο στον Y, το $f^{-1}[A]$ είναι Borel σύνολο συον X και άρα η κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. $\square$

Συνοψίζουμε τώρα κάποιες γνωστές ιδιότητες των Borel συνόλων ακολουθόντας όπως πριν την προσέγγιση των [**Mos09**] και [**Gre21**].

Θεώρημα 2.2.7. *(Οι θεμελιώδεις ιδιότητες κλειστότητας τηε κλάσης των Borel συνόλων).*
Η κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων είναι κλειστή ως προς

(i) *συνεχή αντικατάσταση,*

(ii) *τους τελεστές $\vee$, &, $\exists^{\leq}$, $\forall^{\leq}$, $\bigvee_{\leq}$,$\bigwedge_{\leq}$, c_X (X μετρικός χώρος)*

(iii) *τους τελεστές $\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\exists^{\mathbb{N}}$, $\exists^{Y}$, $\bigwedge_{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\forall^{Y}$, όπου Y είναι αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Η κλειστότητα ως προς την συνεχή αντικατάσταση φαίνεται απο το Λήμμα 2.3. Επίσης η κλειστότητα ως προς c_X, όπου X είναι μετρικός χώρος, είναι δεδομένη καθώς η κλάση των Borel συνόλων του μετρικού χώρου X ξέρουμε ότι είναι σ-άλγεβρα επομένως από τις ιδιότητές της σ-άλγεβρας για κάθε $A \in \mathcal{B}|X$ τότε και το $c_X A = X \setminus A \in \mathcal{B}|X$.
Αντίστοιχα απο τις ιδιότητες της σ-άλγεβρας είναι προφανές οτι ισχύει η κλειστότητα για τον τελεστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$, ενώ για τον τελεστή $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ αν πάρουμε μία ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από Borel υποσύνολα του X βλέπουμε ότι $X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n \in \mathcal{B}|X$ καθώς A_n ανήκουν στην σ-άλγεβρα αρα και η ένωση των συμπληρωμάτων ανήκουν στην σ-άλγεβρα. Τέλος αφού $X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}|X$ τότε και $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}|X$ επομένως ισχύει η κλειστότητα και για τον τελεστή $\bigwedge_{\mathbb{N}}$.
Η κλειστότητα ως προς τους τελεστές $\vee$ και $\bigvee_{\leq}$ είναι αποτέλεσμα της κλειστότητας ως προς τον τελεστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$, ενώ αντίστοιχα η κλειστότητα ως προς τους τελεστές & και $\bigwedge_{\leq}$ είναι αποτελεσμα της κλειστότητας ως προς τον τελεστή $\bigwedge_{\mathbb{N}}$.
Τώρα για να δείξουμε την κλειστότητα ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$ ξέρουμε πως η κλάση των Borel είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$, άρα θα χρησιμοποιήσουμε το Πόρισμα 1.5.6. Για να γίνει αυτό θα δείξουμε πρώτα ότι για κάθε X μετρικό χώρο και $(B_s)_{s\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Borel συνόλων στον X το σύνολο $B \subseteq X \times \mathbb{N}$ με

$$(x, s) \in B \iff x \in B_s$$

είναι και αυτό Borel.
Ορίζουμε τα $C_i \subseteq X \times \mathbb{N}$ για $i \in \mathbb{N}$ ω; εξής:

$$(x, s) \in C_i \iff x \in B_i \ \& \ s = i$$

Για κάθε i το σύνολο $V_i = \{(x, s) \mid s = i\}$ είναι Borel και προφανώς και το $C_i = V_i \cap B_i$ είναι Borel. Βλέπουμε λοιπόν ότι

$$(x, s) \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i \iff \exists i \, (x, i) \in C_i \iff \exists i \, (x \in B_i \ \& \ s = i) \iff x \in B_s$$
$$\iff (x, s) \in B$$

Δηλαδή $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$ και άρα B είναι Borel.
Έτσι απο το Πόρισμα 1.5.6 η κλάση των Borel συνόλων είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$ και από την Πρόταση 1.5.7 η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή και ως προς τους τελεστές $\exists^{\leq}$, $\forall^{\mathbb{N}}$ και $\forall^{\leq}$.

Τέλος για κάποιον αριθμήσιμο Πολωνικό χώρο Y παίρνουμε μια απαρίθμηση $f\colon \mathbb{N} \to Y$ και ένα Borel $B \subseteq \mathcal{X} \times Y$ όπου $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε ότι

$$x \in \exists^Y B \iff \exists y \in Y\ (x,y) \in B \iff \exists n\ (x, f(n)) \in B$$

και

$$x \in \forall^Y B \iff \forall y \in Y\ (x,y) \in B \iff \forall n\ (x, f(n)) \in B$$

Ξέρουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή ως προς τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}, \forall^{\mathbb{N}}$ και τη συνεχή αντικατάσταση και αφολυ η f είναι συνεχής τότε $\exists^Y B$ και $\forall^Y B$ είναι Borel και έχουμε την κλειστότητα ως προς τους τεέστές $\exists^Y$ και $\forall^Y$. □

Πρόταση 2.2.8. *Έστω μετρικός χώρος X και $Y \neq \emptyset$, $Y \subseteq X$. Θεωρούμε το Y με τον περιορισμό της μετρικής του X. Τότε ένα $A \subseteq Y$ είναι Borel σύνολο στον Y αν και μόνο αν $A = B \cap Y$ όπου το B είναι Borel στον X.*
Ειδικότερα αν το Y είναι Borel υποσύνολο του X κάθε Borel υποσύνολο του Y είναι Borel υποσύνολο του X.

Απόδειξη. Ορίζουμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{A} = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}|X\}$$

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A} = \mathcal{B}|Y$.
Αρχικά θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του A.
Ισχύει $Y \in \mathcal{A}$ καθώς $Y = X \cap Y$ και το X ως ανοικτό είναι Borel στο X.
Έστω ένα $A \in \mathcal{A}$. Τότε αυτό σημαίνει ότι υπάρχει B_A το οποίο είναι Borel υποσύνολο του X και $A = B_A \cap Y$. Για το συμπλήρωμα του A στο Y έχουμε ότι $Y \setminus A = Y \setminus (B_A \cap Y) = Y \setminus B_A \cup \emptyset = (X \setminus B_A) \cap Y$ όπου αφόυ το B_A είναι Borel τότε και το $X \setminus B_A$ είναι Borel άρα $Y \setminus A \in \mathcal{A}$.
Έστω μία ακολουθία $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ όπου $A_i \in \mathcal{A}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχουν $(B_{A_i})_{i\in\mathbb{N}}$ τα οποία είναι Borel για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $A_i = B_{A_i} \cap Y$. Έχουμε ότι $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(B_{A_i} \cap Y) = (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{A_i}) \cap Y$ και αφού τα B_{A_i} είναι Borel σύνολα τότε και το $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{A_i}$ είναι Borel. Έτσι καταλήξαμε ότι $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ και άρα η $\mathcal{A}$ είναι σ-αλγεβρα. Τέλος για κάθε ανοικτό υποσύνολο του Y ξέρουμε ότι υπάρχει ανοικτό υποσύνολο $U \subseteq X$ τέτοιο ώστε $V = U \cap Y$ και αφόυ U είναι ανοικτό και άρα Borel τότε όλα τα ανοικτά υποσύνολα του Y ανήκουν στην σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$. Οπότε δείχθηκε ότι

$$\mathcal{B}|Y \subseteq \mathcal{A} \tag{2.2}$$

Για να δείξουμε τον ανάποδο εγκλεισμό παίρνουμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{C} = \{B \subseteq X \mid B \cap Y \in \mathcal{B}|Y\}$$

Αν δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα στο X που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X τότε θα έχουμε ότι $\mathcal{B}|X \subseteq C$ και για κάθε $B \in \mathcal{B}|X$ θα ισχύει ότι $B \cap Y \in \mathcal{B}|Y$, δηλαδή $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}|Y$.
Αρχικά το $X \in \mathcal{C}$ αφού προφανώς $X \cap Y = Y \in \mathcal{B}|Y$.
Έστω ένα $B \in \mathcal{C}$ τότε $B \cap Y \in \mathcal{B}|Y$ και άρα $Y \setminus (B \cap Y) \in \mathcal{B}|\mathcal{Y}$. Έχουμε ότι

$$(X \setminus B) \cap Y = (X \cap Y) \setminus (B \cap Y) = Y \setminus (B \cap Y) \in \mathcal{B}|\mathcal{Y}$$

Επομένως $X \setminus B \in \mathcal{B}|X$. Έστω τώρα μια ακολουθία $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ όπου $B_i \in \mathcal{C}$ και $B_i \cap Y \in \mathcal{B}|Y$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

$$(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) \cap Y = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (B_i \cap Y) \in \mathcal{B}|Y$$

διότι έχουμε αριθμήσιμη ένωση Borel υποσυνόλων του Y.
Επομένως το $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα και για κάθε ανοικτό $V \subseteq X$ έχουμε ότι $V \subseteq Y$ είναι ανοικτό στο Υ και άρα Borel στο Υ. Έτσι καταλήγουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά υπο΄συνολα του X και δείχθηκε ότι

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}|Y \tag{2.3}$$

Από (2.2) και (2.3) έχουμε ότι $\mathcal{A} = \mathcal{B}|Y$, δηλαδή $\mathcal{B}|Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}|X\}$.
Τέλος αν το Y είναι Borel υποσύνολο του X και A Borel υποσύνολο του Y τότε $A = B \cap Y$ για κάποιο $B \in \mathcal{B}|X$ και απο την κλειστότητα των Borel συνόλων ως προς τον τελεστή & το A είναι Borel υποσύνολο του X. □

Ορισμός 2.2.9. Θεωρούμε δύο μετρικούς χώρους X και Y. Μία συνάρτηση $f: X \to Y$ ονομάζεται Borel μετρήσιμη αν αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή για κάθε ανοικτό σύνολο $A \subseteq Y$ ισχύει ότι $f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(X)$. Η f είναι δηλαδή Borel-μετρήσιμη με την έννοια του Ορισμού 1.5.2
Κάθε συνεχής συνάρτηση ειναι Borel μετρήσιμη.

Σχόλιο: Για μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση μπορούμε να πούμε ισοδύναμα ότι αντιστρέφει Borel σύνολα σε Borel σύνολα.
Δηλαδή για $f: X \to Y$ Borel-μετρήσιμη αν $A \subseteq Y$ είναι Borel υποσύνολο του Y ισχύει ότι $f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(X)$.

2.3. Προβολικές κλάσεις

Για τα παρακάτω παραπέμπουμε στις ακόλουθες πηγές: [**Lus25c**], [**Lus25b**], [**Lus25a**], [**Sie25**], [**Mos09**]

Ορισμός 2.3.1. Ορίζουμε τις παρακάτω κλάσεις συνόλων σε Πολωνικούς χώρους με αναδρομή στο $n \geq 1$:

$\Sigma^1_1 = \exists^{\mathcal{N}} \Pi^0_1 =$ οι προβολές κλειστών συνόλων$P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ υπεράνω του $\mathcal{X}$,
όπου $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος
$\Pi^1_1 = c\Sigma^1_1 =$ τα συμπληρώματα των Σ^1_1 συνόλων
$\Sigma^1_{n+1} = \exists^{\mathcal{N}} \Pi^1_n =$ οι προβολές Π^1_n συνόλων$P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ υπεράνω του $\mathcal{X}$
$\Pi^1_{n+1} = c\Sigma^1_{n+1} =$ τα συμπληρώματα των Σ^1_{n+1} συνόλων
Επίσης ορίζουμε $\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$.

Οι Σ^1_n ονομάζονται προβολικές κλάσεις ή αλλιως κλάσεις του Lusin. Οι Π^1_n ονομάζονται δυϊκές κλάσεις και οι Δ^1_n αμφίσημες.

Επίσης τα Σ^1_1 σύνολα ονομάζονται αναλυτικά, τα Π^1_1 σύνολα συναναλυτικά και τα Δ^1_1 σύνολα αμφιαναλυτικά.
Τέλος μπορούμε να θέσουμε $\Pi^1_0 = \Pi^0_1$ και $\Sigma^1_0 = \Sigma^0_1$, και έτσι μπορούμε να πούμε ότι $\Sigma^1_n = \exists^{\mathcal{N}}\Pi^1_{n-1}$ και $\Pi^1_n = \forall^{\mathcal{N}}\Sigma^1_{n-1}$.

Λήμμα 2.3.2. *Οι κλάσεις Σ^1_n Π^1_n και Δ^1_n είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση.*

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 2.3.3. ***1)****Αν μία κλάση Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση τότε και η cΓ είναι επίσης κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.*
2)*Αν μία κλάση Γ είναι κλειστη ως προς συνεχή αντικατάσταση τότε και η $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Παίρνουμε $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ Πολωνικούς χώρους.
1) Έστω συνάρτηση $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ συνεχής και $P \subseteq \mathcal{Y}$ που ανήκει στην $c\Gamma$. Τότε $c\Gamma \in \Gamma|\mathcal{Y}$ και άρα $f^{-1}[cP] \in \Gamma|\mathcal{X}$ καθώς από υπόθεση η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Επίσης $f^{-1}[cP] = f^{-1}[\mathcal{Y} \setminus P] = \mathcal{X} \setminus f^{-1}[P] \in \Gamma|\mathcal{X}$ επομένως $f^{-1}[P] \in \Gamma|\mathcal{X}$. Αρα η $c\Gamma$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.
2) Έστω συνάρτηση $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ συνεχής και $P \subseteq \mathcal{Y}$ που ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma$. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}[P] \in \exists^{\mathcal{N}}\Gamma|\mathcal{X}$. Ξέρουμε ότι υπάρχει $Q \in \mathcal{Y} \times \mathcal{N}$ που ανήκει στην Γ έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}}Q$.
Για καθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[P] &\iff f(x) \in P \iff \exists a\, (f(x), a) \in Q \\ &\iff \exists a\, h(x, a) \in Q \iff \exists a\, (x, a) \in h^{-1}[Q] \end{aligned}$$

όπου $h(x, a) = (f(x), a)$ συνεχής συνάρτηση.
Αφού h συνεχής και $Q \in \Gamma$ από υπόθεση $h^{-1}[Q] \in \Gamma$. Επίσης από τις παραπάνω συνεπαγωγές είναι φανερό ότι $f^{-1}[P] = \exists^{\mathcal{N}}h^{-1}[Q]$ επομένως $f^{-1}[P] \in \exists^{\mathcal{N}}\Gamma|\mathcal{X}$. □

Απόδειξη. (Λήμμα 2.3.2) Από τον ορισμό των Σ^1_n και Π^1_n έχουμε ότι $\Pi^1_n = c\Sigma^1_n$, επομένως απο το Λήμμα 2.3.3 αν δείξουμε οτι η μια κλάση είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση τότε ισχύει το ίδιο και για την δεύτερη. Επιπλέον η κλειστότητα για την Δ^1_n ως προς συνεχή αντικατάσταση είναι άμεση απο την ίδια ιδιότητα των Pi^1_n και Σ^1_n αφού $\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$. Θα αποδείξουμε την κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση για την Σ^1_n με επαγωγή στο $n \geq 1$. Για $n = 1$ έχουμε την Σ^1_1 και από τον ορισμό ξέρουμε ότι $\Sigma^1_1 = \exists^{\mathcal{N}}\Pi^0_1$. Η Π^0_1 είναι κλειστή ως προς συναχή αντικατάσταση (απο λημμα θα μπει νουμερο) και απο Λήμμα 3.3 η $\exists^{\mathcal{N}}\Pi^0_1$ είκαι και αυτή κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Επομένως δείξαμε ότι Σ^1_1 κλειστή, άρα τώρα εστω ότι για κάποιο $n \geq 1$ η Σ^1_n κλειστή αυτό σημαίνει οτι και η Π^1_n κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και θα εξετάσουμε την Σ^1_{n+1}. Από τον ορισμό ξερουμε ότι $\Sigma^1_n = \exists^{\mathcal{N}}\Pi^1_n$ και αφού Π^1_n κλειστή τότε και η $\Sigma^1_{n+!}$ κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και αποδείχθηκε το Λήμμα.

□

Πρόταση 2.3.4. *Έστω κλάση Γ μια εκ των Σ^1_n, Π^1_n. Τότε για κάθε ακολοθία $(P_s)_{s\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην κλάση Γ, το σύνολο*

$$P = \{(x,s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid x \in P_s\}$$

ανήκει επίσης στην $\Gamma|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$.
Επίσης ισχύει αντίστροφα και ότι για κάθε $R \in \Gamma|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ και κάθε $s \in N$ το σύνολο

$$R_s = (x \in \mathcal{X} \mid (x,s) \in R)$$

ανήκει στην Γ.

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι οι κλάσεις Σ^1_n και Π^1_n είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση. Το δεύτερο μέρος της Πρότασης έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 1.5.3 (i).
Για να δείξουμε το πρώτο μέρος θα το κάνουμε με επαγωγή στο $n \geq 1$.
Για $n = 1$ παίρνουμε ένα Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ μια ακολουθία $(P_s)_{s\in N}$ από υποσύνολα του χώρου $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην κλάση Σ^1_1 και μια ακολουθία $(Q_s)_{s\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ όπου ισχύει ότι $P_s = \exists^{\mathcal{N}} Q_s$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε επίσης το σύνολο P που έχουμε στην Πρόταση.
Απο το Λήμμα 2.1.6 έχουμε ότι το σύνολο

$$Q = \{(x,\alpha,s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid (x,\alpha) \in Q_s\}$$

ανήκει στην κλάση Π^0_1 αφού τα Q_s ανήκουν στην Π^0_1.
Επίσης για κάθε x, s έχουμε ότι

$$(x,a) \in P \iff x \in P_s \iff \exists\alpha\,(x,\alpha) \in Q \iff \exists\alpha\,(x,\alpha,s) \in Q$$

Επομένως P ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}}\Pi^0_1 = \Sigma^1_1$.
Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n > 1$ ισχύει πως για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε ακολουθία $(P_s)_{s\in\mathbb{N}}$ από υποσύνολα του $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην κλάση Σ^1_n τότε το σύνολο P ανήκει στην κλάση Σ^1_n. Τώρα θα δείξουμε ότι ισχύει το ίδιο για $n + 1$.
Έστω μια ακολουθία $(P_s)_{s\in N}$ από υποσύνολα του χώρου $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην κλάση Σ^1_{n+1} και μια ακολουθία $(Q_s)_{s\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}\times\mathcal{N}$ που ανήκουν στην κλάση Π^1_n και ισχύει ότι $P_s = \exists^{\mathcal{N}} Q_s$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$.
Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση στον Πολωνικό χώρο $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και στην ακολουθία $((\mathcal{X}\times\mathcal{N})\setminus Q_s)_{s\in\mathbb{N}}$, όπου αποτελείται προφανώς από Σ^1_n σύνολα, το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X}\times\mathcal{N}\times\mathbb{N}$ με

$$(x,\alpha,s) \in Q \iff (x,\alpha) \in Q_s$$

ανήκει στην Π^1_n. Επομένως όπως πριν έχουμε ότι

$$(x,s) \in P \iff x \in P_s \iff \exists\alpha\,(x,\alpha) \in Q_s \iff \exists\alpha\,(x,\alpha,s) \in Q$$

Έτσι βλέπουμε ότι το P ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}}\Pi^1_n = \Sigma^1_{n+1}$ και αποδείχθηκε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.3.5. *Για τις κλάσεις Σ^1_n και Π^1_n ο ισχυρισμός ότι είναι κλειστές ως προς τους τελεστές $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\leq}$ είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι είναι κλειστές ως προς τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\leq}$ αντίστοιχα.*
Επίσης ο ισχυρισμός οτι οι κλάσεις Σ^1_n και Π^1_n είναι κλειστές ως προς τους τελεστές $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ και

$\bigwedge_{\leq}$ *είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι είναι κλειστές ως προς τους τελεστές* $\forall^{\mathbb{N}}$ *και* $\forall^{\leq}$ *αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Απο το Πόρισμα 1.5.6 και καθώς οι κλάσεις Σ^1_n και Π^1_n είναι κλειστές ως προς την συνεχή αντικατάσταση καθώς και την Πρόταση 1.5.7 έχουμε την απόδειξη του Πορίσματος. □

Για το παρακάτω Θεώρημα όπως και στα αντίστοιχα προηγούμενα ακολουθούμε την προσέγγιση των [**Mos09**] και [**Gre21**], ενώ επίσης και [**Sie28**].

Θεώρημα 2.3.6 (Ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων του Lusin)**.** *Για κάθε* $n \geq 1$ *οι κλάσεις* Σ^1_n, Π^1_n *και* Δ^1_n *είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση, τους τελεστές* $\vee$, &, $\exists^{\leq}$, $\forall^{\leq}$, $\bigvee_{\leq}$, $\bigwedge_{\leq}$, $\exists^{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ *καθώς επίσης ισχύον και τα παρακάτω:*

(i) *Οι κλάσεις* Σ^1_n *είναι κλειστές ως προς τον τελεστή* $\exists^{\mathcal{Y}}$.

(ii) *Οι κλάσεις* Π^1_n *είναι κλειστες ως προσ τον τελεστή* $\forall^{\mathcal{Y}}$.

(iii) *Οι κλάσεις* Δ^1_n *είναι κλειστές ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος c.*

όπου $\mathcal{Y}$ *Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Η κλειστότητα ως προς συνέχη αντικατάσταση δείχθηκε στο Λήμμα 2.3.2. Πρώτα θα ασχοληθούμε με τις ιδιώτητες κλειστότητας των κλάσεων Σ^1_n. Αρχικά είναι εμφανές ότι αν αποδειχθεί η κλειστότητα των Σ^1_n ως προς τους τελελεστές $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ τότε ισχύει και η κλειστότητα ως προς τους τελεστές πεπερασμένης ένωσης και τομής αντίστοιχα καθώς μπορούν να αναχθούν στις αριθμήσιμες ενώσεις και τομές με την προσθήκη άπειρων κενών συνόλων και άπειρων $\mathcal{X}$ Πολωνικών χώρων (έστω ότι βρισκόμαστε στον Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$) αντίστοιχα. Έτσι η κλειστότητα ως προς τους τελεστές $\vee$, &, $\bigvee_{\leq}$, $\bigwedge_{\leq}$ θα έχει δειχθεί.
Επίσης απο το Πόρισμα 2.3.5 η κλειστότητα ως προς τους τελεστές $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\leq}$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\leq}$ αντίστοιχα, ενώ ισχύει το ιδιο και για την κλειστότητα ως προς τους τελεστές $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ και $\bigwedge_{\leq}$ που ισοδυναμή με την κλειστότητα ως προς τους $\forall^{\mathbb{N}}$, $\forall^{\leq}$.
Επομένως μας αρκεί να δείξουμε την κλειστότητα ως προς τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}, \forall^{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\mathcal{Y}}$, όπου $\mathcal{Y}$ είναι τυχαίος Πολωνικός χώρος.
Υπενθυμίζουμε τους συμβολισμούς

$$\alpha^* = (\alpha(1), \dots, \alpha(n), \dots) \in \mathcal{N}$$
$$(\alpha)_i = (\alpha(\langle i, 0\rangle), \alpha(\langle i, 1\rangle), \dots, \alpha(\langle i, t\rangle), \dots) \in \mathcal{N}$$

όπου $\langle \, . \, \rangle$ η συνάρτηση κωδικοποίησης, $i \in \mathbb{N}$ και $\alpha \in \mathcal{N}$. Επίσης ξερουμε ότι οι συναρτήσεις $(\alpha \to \alpha^*)$ και $((i, \alpha) \to \alpha_i)$ είναι συωεχείς και για κάθε ακολουθία $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία του $\mathcal{N}$ μπορούμε να βρούμε ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε $(\alpha)_i = \alpha_i$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Για παράδειγμα ένα τέτοιο α θα μπορούσε να είναι το

$$\alpha(\langle i, t\rangle) = \alpha_i(t) \text{ και } \alpha(k) = 0 \text{ αν } k \neq \langle i, t\rangle \text{ για κάθε } i, t.$$

Αρχικά λοιπόν θα δείξουμε την κλειστότητα των κλάσεων Σ^1_n ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$. Θεωρούμε ότι $n \geq 1$ και παιρνουμε ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ το οποίοο ανήκει στην κλάση Σ^1_n καθώς και ένα σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N} \times \mathcal{N}$ το οποίο ανήκει στην κλάση Π^1_{n-1} και ισχύει ότι $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε ότι:

$$x \in \exists^{\mathbb{N}} P \iff \exists i \, (x,i) \in P \iff \exists \alpha \, \exists i \, (x,i,\alpha) \in Q \iff \exists \beta \, (x, \beta(0), \beta^*) \in Q,$$

όπου $\beta = (i, \alpha(0), \alpha(1), \dots,)$. Αφού η κλάση Π^1_{n-1} είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση τότε βλέπουμε ότι $\exists^{\mathbb{N}} P \in \exists^{\mathcal{N}} \Pi^1_{n-1} = \Sigma^1_n$. Επομένως συμπεραίνουμε την κλειστότητα των κλάσεων Σ^1_n ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$.
Τώρα για τον τελεστή $\forall^{\mathbb{N}}$ παίρνουμε πάλι τα σύνολα P, Q όπως πριν. Για $x \in \mathcal{X}$ έχουμε ότι:

$$x \in \forall^{\mathbb{N}} P \iff \forall i \, (x,i) \in P \iff \forall i \, \exists \alpha \, (x,i,\alpha) \in Q \iff \exists \alpha \, \forall i \, (x, i, (\alpha)_i)$$

Στην τελευταία ισοδυναμία αν για κάθε i έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $\alpha = \alpha_i$, με (x, i, α_i) τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ ώστε $(\alpha)_i = \alpha_i$ για κάθε i, όπως είδαμε πιο πάνω. Τότε έχουμε ότι για κάθε i , $(x, i, (\alpha)_i) \in Q$. Άρα από τα παραπάνω έχουμε ότι το σύνολο $\forall^{\mathbb{N}} P$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}} \forall^{N} \Pi^1_{n-1}$. Έχουμε δείξει ότι η κλάση Σ^1_{n-1} είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$. (Για $n = 1$ η κλάση $\Sigma^1_0 = \Sigma^0_1$ και ξέρουμε απο τις ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων Σ^0_n ότι είναι κλειστή ω; προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$.) Παίρνοντας το συμπλήρωμα στην κλάση Σ^1_{n-1} έχουμε ότι η κλάση Π^1_{n-1} είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\forall^{\mathbb{N}}$. Επομένως για το σύνολο $\forall^{\mathbb{N}} P$ έχουμε ότι ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}} \forall^{N} \Pi^1_{n-1} = \exists^{\mathcal{N}} \Pi^1_{n-1} = \Sigma^1_n$ και δείχθηκε η κλειστότητα των κλάσεων Σ^1_n ως προς τον τελεστή $\forall^{\mathbb{N}}$.
Τέλος για την κλειστότητα ως προς τον τελεστη $\exists^{\mathcal{Y}}$, όπου $\mathcal{Y}$ είναι τυχαίος Πολωνικός χώρος, θα δούμε πρώτα για τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{N}$. Θεωρούμε $n \geq 1$ και παίρνουμε ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ όπου ανήκει στην κλάση Σ^1_n και ένα σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε ότι

$$x \in \exists^{\mathcal{N}} P \iff \exists \alpha \, (x, \alpha) \in P \iff \exists \beta \, \exists \alpha \, (x, \alpha, \beta) \in Q \iff \exists \gamma \, (x, (\gamma)_0, (\gamma)_1) \in Q$$

Επομένως έχουμε ότι το σύνολο $\exists^{\mathcal{N}} P$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}} \Pi^1_{n-1} = \Sigma^1_n$ και δείχθηκε η κλειστότητα ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{N}}$. Τώρα έστω πάλι ένα $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ όπου ανήκει στην κλάση Σ^1_n και ένα σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{Y}} Q$ (όπου $\mathcal{Y}$ είναι τυχαίος Πολωνικός χώρος). Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε ότι

$$x \in \exists^{\mathcal{Y}} \iff \exists y \, (x, y) \in P \iff \exists \alpha \, (x, \pi(\alpha)) \in P$$

όπου $\alpha \in \mathcal{N}$ και π συνεχής επί συνάρτηση από τον χώρο του Baire $\mathcal{N}$ στον Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ η οποία ξέρουμε ότι υπάρχει από το Θεώρημα 1.2.10. Επομένως από συνέχεια της π και κλειστότητα της Σ^1_n ως προς συνεχή αντικατάσταση και ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{N}}$ έχουμε ότι το σύνολο $\exists^{\mathcal{Y}} P$ ανήκει στην κλάση Σ^1_n και έτσι δειχθηκε η κλειστότητα ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{Y}}$.
Για τις κλάσεις Π^1_n οι ιδιότητες κλειστότητας αποδεικνύονται αντίστοιχα με τις Σ^1_n με χρήσει του τελεστή συμπληρώματος c. Τέλος για τις κλάσεις Δ^1_n η κλειστότητα προς τους τελεστές του θεωρήματος είναι αποτέλεσμα των ιδιοτήτων κλειστότητας των Σ^1_n και Π^1_n, ενώ η κλειστότητα ως προς τον τελεστή c είναι προφανή. □

Πρόταση 2.3.7. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι $\Sigma^1_n | \mathcal{X} \subseteq \Delta^1_{n+1}$ και $\Pi^1_n | \mathcal{X} \subseteq \Delta^1_{n+1}$.*

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ ισχύει ότι $\Pi^0_1 | \mathcal{X} \subseteq \Delta^1_1 | \mathcal{X}$. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $F \subseteq \mathcal{X}$ κλειστό. Παίρνουμε $Q = F \times \mathcal{N}$ κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ ισχύει ότι

$$x \in F \iff \exists\, \alpha\, (x, \alpha) \in Q \Rightarrow F \in (\exists^{\mathcal{N}} \Pi^0_1)|\mathcal{X} = \Sigma^1_1|\mathcal{X}$$

καθώς $F = \exists^{\mathcal{N}} Q$ και το Q είναι κλειστό.
Δείξαμε οτι $F \in \Sigma^1_1|\mathcal{X}$ και τώρα θα δείξουμε ότι $\in \Pi^1_1|\mathcal{X}$. Το F ως κλειστό είναι και G_δ υποσύνολο τπυ $\mathcal{X}$ επομένως υπάρχει ακολουθία $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ με $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Ορίζουμε ένα $V = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid x \in V_{\alpha(0)}\}$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε ότι:

$$x \in F \iff \forall n\, x \in V_n \iff \forall \alpha x \in V_{\alpha(0)} \iff \forall \alpha (x, \alpha) \in V \Rightarrow F \in (\forall^{\mathcal{N}} \Sigma^0_1)|\mathcal{X} = \Pi^1_1|\mathcal{X}.$$

Άρα δείξαμε ότι $F \in \Pi^1_1|\mathcal{X}$ και $F \in \Sigma^1_1|\mathcal{X}$ οπότε καταλήγουμε ότι

$$\Pi^0_1|\mathcal{X} \subseteq \Delta^1_1|\mathcal{X}. \tag{2.4}$$

Τώρα με επαγωγή στο $n \geq 1$ θα δείξουμε ότι για κάθε Πολωνικο χώρο $\mathcal{X}$ ισχύει ότι $\Sigma^1_n|\mathcal{X} \subseteq \Delta^1_{n+1}|\mathcal{X}$. Για $n = 1$ έστω $P \subseteq \mathcal{X}$, που είναι $\Sigma^1_1|\mathcal{X}$ σύνολο. Αφού $P \in \Sigma^1_1|\mathcal{X}$ τότε υπάρχει σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Το σύνολο Q ως κλειστό στον $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ είναι επίσης και $\Delta^1_1|(\mathcal{X} \times \mathcal{N})$ σύνολο από την (2.4). Επομένως ισχύει ότι

$$Q \in \Pi^1_1|(\mathcal{X} \times \mathcal{N}) \Rightarrow P = \exists^{\mathcal{N}} Q \in (\exists^{\mathcal{N}} \Pi^1_1)|\mathcal{X} = \Sigma^1_2|\mathcal{X} \tag{2.5}$$

Επίσης ορίζουμε $R = Q \times \mathcal{N}$ κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Τότε έχουμε

$$x \in P \iff \exists \alpha\, (x, \alpha) \in Q \iff \forall \beta\, \exists\, \alpha (x, \alpha, \beta) \in R$$

Όπου αφού R κλειστό τότε από το παραπάνω έχουμε ότι

$$P \in \forall^{\mathcal{N}} (\exists^{\mathcal{N}} \Pi^0_1)|\mathcal{X} = \forall^{\mathcal{N}} \Sigma^1_1|\mathcal{X} = \Pi^1_2|\mathcal{X}. \tag{2.6}$$

Επομένως καταλήγουμε στο ότι $P \in \Delta^1_2|\mathcal{X}$ από τις (2.4) και (2.6) και άρα δείξαμε ότι $\Sigma^1_1|\mathcal{X} \subseteq \Delta^1_2|\mathcal{X}$. Έστω λοιπόν τώρα ότι για κάποιο $n > 1$ ισχύει ότι $\Sigma^1_n|\mathcal{X} \subseteq \Delta^1_{n+1}|\mathcal{X}$. Θα εξετάσουμε για $n+1$. Έστω πάλι $P \subseteq \mathcal{X}$ το οποίο τώρα ανήκει στην $\Sigma^1_{n+1}|\mathcal{X}$ κλάση. Υπάρχει $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε ανήκει στην κλάση $\Pi^1_n|(\mathcal{X} \times \mathcal{N})$ και επίσης ισχύει ότι $P = \exists^{\mathbb{N}} Q$. Το συμπλήρωμα του Q , cQ θα ανήκει στην κλάση $\Sigma^1_n|(\mathcal{X} \times \mathcal{N})$ και από επαγωγική υπόθεση στον χώρο $(\mathcal{X} \times \mathcal{N})$ το Q ανήκει στην κλάση $\Delta^1_{n+1}|(\mathcal{X} \times \mathcal{N})$. Άρα

$$P \in (\exists^{\mathbb{N}} \Delta^1_{n+1})|\mathcal{X} \subseteq (\exists^{\mathbb{N}} \Pi^1_{n+1})|\mathcal{X} = \Sigma^1_{n+2}|\mathcal{X}. \tag{2.7}$$

Τώρα μένει να δείξουμε ότι το $P \in \Pi^1_{n+2}|\mathcal{X}$. Έχουμε ότι για

$$x \in P \Rightarrow \exists\, \alpha\, (x, \alpha) \in Q$$

όπου $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και Q ανήκει στην κλάση $\Pi^1_n|(\mathcal{X} \times \mathcal{N})$. Παίρνουμε ένα $R = Q \times \mathcal{N}$. Τότε το R ανήκει στην $\Pi^1_n|(\mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N})$ και επομένως έχουμε ότι

$$x \in P \Rightarrow \forall\, \beta\, \exists \alpha\, (x, \alpha, \beta) \in R$$

όπου αφού $R \in \Pi^1_n|(\mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N})$ τότε

$$P \in (\forall^{\mathcal{N}} \exists^{\mathcal{N}} \Pi^1_n)|\mathcal{X} = (\forall^{\mathcal{N}} \Sigma^1_{n+1})|\mathcal{X} = \Pi^1_{n+2}|\mathcal{X}. \tag{2.8}$$

Επομένως καταλήγουμε από (2.7) και (2.8) στο $P \in \Delta^1_{n+2}|\mathcal{X}$ και άρα δείξαμε ότι $\Sigma^1_n|\mathcal{X} \subseteq \Delta^1_{n+1}$. □

Πρόταση 2.3.8. *Κάθε Borel υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ είναι αμφιαναλυτικό. Δηλαδή $\mathcal{B}|\mathcal{X} \subseteq \Delta^1_1|\mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Από Θεώρημα 2.3.6 βλέπουμε ότι για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ η κλάση $\Delta^1_1|\mathcal{X}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις και ως προς τα συμπληρώματα στον $\mathcal{X}$. Επιπλέον από Πρόταση 2.3.7, (για $n = 0$), ξέρουμε ότι κάθε κλειστό και κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ ανήκει στις κλάσεις $\Sigma^1_1|\mathcal{X}, \Pi^1_1|\mathcal{X}$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα προφανώς κάθε κλειστό και κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ να ανήκει στην κλάση $\Delta^1_1|\mathcal{X}$. Βλέπουμε λοιπόν ότι η κλάση $\Delta^1_1|\mathcal{X}$ είναι μία σ-άλγεβρα ($\mathcal{X} \in \Delta^1_1|\mathcal{X}$ αφού είναι ανοικτό) και επίσης περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του χώρου $\mathcal{X}$ επομένως ισχύει ότι $\mathcal{B}|\mathcal{X} \subseteq \Delta^1_1|\mathcal{X}$. □

Πόρισμα 2.3.9. *Για κάθε $n \geq 1$ οι κλάσεις των Σ^1_n αποτελούνται ακριβώς από τις συνεχείς εικόνες Π^1_{n-1} συνόλων.*

Απόδειξη. Κάθε σύνολο που ανήκει στην κλάση Σ^1_n είναι προβολή συνόλου που ανήκει στην κλάση Π^1_{n-1} επομένως είναι συνεχής εικόνα συνολου της Π^1_{n-1}.
Τώρα έστω συνάρτηση $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ συνεχής και σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στην κλάση Π^1_{n-1}. Για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ έχουμε ότι:

$$y \in f[Q] \iff \exists x\, (x \in Q \,\&\, f(x) = y) \iff \exists x\, (x \in Q \,\&\, (x, y) \in Graph(f))$$

Το γράφημα της f είναι κλειστό και άρα από 2.3.7 ανήκει στην κλάση Π^1_{n-1}. Επομένως λόγω της κλειστότητας των κλάσεων Π^1_n ως προς τον τελεστη & έχουμε ότι το σύνολο $f[Q]$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{X}}\Pi^1_{n-1} = \Sigma^1_n$.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αναλυτικά σύνολα και το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin

3.1. Χαρακτηριστικές ιδιότητες και παραδείγματα αναλυτικων συνόλων

Σύμφωνα με το προηγούμενο κεφάλαιο υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ λέγεται αναλυτικό σύνολο αν υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ ισχύει ότι

$$x \in P \iff \exists \alpha\, (x, \alpha) \in F$$

Πρόταση 3.1.1. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ η κλάση $\Sigma_1^1|\mathcal{X}$ των αναλυτικών συνόλων περιέχει τα Borel σύνολα του χώρου. Δηλαδή $\mathcal{B}|\mathcal{X} \subseteq \Sigma_1^1|\mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Έστω ένας Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$. Παίρνουμε μία οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathcal{X} \mid B \text{ και } \mathcal{X} \setminus B \text{ αναλυτικά}\}$$

και για να αποδείξουμε την Πρόταση θα δείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά σύνολα του χώρου $\mathcal{X}$.
Αρχικά το $\mathcal{X}$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ αφού για το $\mathcal{X}$ ισχύει ότι $\mathcal{X} = \exists^{\mathcal{N}}(\mathcal{X} \times \mathcal{N})$ και το $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ ανήκει στην κλάση $\Pi_1^0|(\mathcal{X} \times \mathcal{N})$ επομένως το $\mathcal{X}$ είναι αναλυτικό σύνολο. Αντίστοιχα και το $\emptyset$ είναι αναλυτικό. Έπειτα είναι προφανές ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος. Τέλος έστω $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία απο στοιχεία της $\mathcal{A}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα σύνολα B_i είναι αναλυτικά (άρα και τα $\mathcal{X} \setminus B_n$ είναι αναλυτικά) επομένως από την κλειστότητα των αναλυτικών συνόλων ως προς τον τελεστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$ το $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ είναι αναλυτικό σύνολο. Επίσης το σύνολο $\mathcal{X} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{X} \setminus B_n)$ είναι και αυτό αναλυτικό από τηνκλειστότητα της κλάσης των αναλυτικών συνόλων ως προς τον τελεστή $\bigwedge_{\mathbb{N}}$. Έτσι καταλήγουμε ότι το $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ και επομένως η $\mathcal{A}$ είνια σ-άλγεβρα.
Μας μένει να δείξουμε ότι όλα τα ανοικτά υποσύνολα ανήκουν στην σ-άλγεβρα. Παίρνουμε ένα κλειστό σύνολο $C \subseteq \mathcal{X}$ και την ακολουθία $(0, 0, \dots, 0, \dots)$ την οποία συμβολίζουμε ως $\mathbf{0}$ και προφανώς $\mathbf{0} \in \mathcal{N}$ (το $\{\mathbf{0}\}$ανοικτό-κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$). Το σύνολο $F = C \times \{\mathbf{0}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και για κάθε $x \in \mathcal{X}$ ισχύει ότι

$$x \in C \iff \exists \alpha\, (x, \alpha) \in F$$

Επομένως το σύνολο $C = \exists^{\mathcal{N}} F$ είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Για κάθε ανοικτό $V \subseteq \mathcal{X}$ ισχύει ότι είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ και επομένως είναι αριθμήσιμη ένωση αναλυτικών συνόλων, βάση των παραπάνω, και αφού η κλάση των αναλυτικών συνόλων είναι κλειστή ως προς τον τελέστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$ τότε κάθε ανοικτό V είναι αναλυτικό σύνολο.
Επομένως είδαμε ότι κάθε κλειστό και ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\mathcal{X}$ είναι αναλυτικό σύνολο και άρα η σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του ΄χωρου $\mathcal{X}$. $\square$

Πρόταση 3.1.2. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ κάθε κλάση $\Sigma^1_n|\mathcal{X}$ είναι κλειστή ως προς συνεχείς εικόνες.*

Απόδειξη. Έστω $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, όπου $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Πολωνικοί χώροι, συνεχής συνάρτηση και $P \subseteq \mathcal{X}$ σύνολο που ανήκει στην κλάση $\Sigma^1_n|\mathcal{X}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το σύνολο $f[P]$ ανήκει στην κλάση $\Sigma^1_n|\mathcal{Y}$. Για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ ισχύει ότι:

$$y \in f[P] \iff \exists x\,(x \in P \;\&\; y = f(x)) \iff \exists x\,(x \in P \;\&\; (x,y) \in Graph(f))$$

Η σχέση $(x,y) \in Graph(f)$ περιγράφη ένα κλειστό σύνολο και ξέρουμε ότι $\Pi^0_1 \subseteq \Sigma^1_1 \subseteq \Sigma^1_n$. Λόγω της κλειστότητας των Σ^1_n συνόλων ως προς τους τελεστές & και $\exists^{\mathcal{X}}$, όπου $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος, έχουμε ότι το σύνολο $f[P]$ ανήκει στην κλάση $\Sigma^1_n|Y$. □

Από την παραπάνω Πρόταση βλέπουμε ότι η συνεχής εικόνα αναλυτικού συνόλου είναι αναλυτικό σύνολο.

Για την επόμενη Πρόταση δείτε [**Mos09**] και [**Kec95**].

Πρόταση 3.1.3. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας Πολωνικός χώρος και $P \subseteq \mathcal{X}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το P είναι αναλυτικό σύνολο.*

(ii) *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ με $P = f[\mathcal{N}]$.*

(iii) *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g\colon \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ και Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{N}$ με $P = g[B]$.*

(iv) *Υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $h\colon \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ και Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{N}$ με $P = h[B]$.*

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Το σύνολο P είναι ένα αναλυτικό σύνολο. Υποθέτουμε ότι $P = \exists^{\mathcal{N}} F$, όπου $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ κλειστό. Το F (αφού κλειστό) με τον περιορισμό της τοπολογίας του χώρου $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ είναι Πολωνικός χώρος και επομένως απο Θεώρημα 1.2.10 υπάρχει συνάρτηση $\pi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ η οποία είναι συνεχής και επί. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε ότι

$$x \in P \iff \exists \alpha\,(x,\alpha) \in F \iff \exists \beta\,(\pi(\beta) \in F \;\&\; (pr_1 \circ \pi)(\beta) = x)$$

όπου με pr_1 συμβολίζουμε την συνάρτηση προβολής στην πρώτη συντεταγμένη $pr_1 \equiv pr^{\mathcal{X},\mathcal{N}}\colon \mathcal{X} \times \mathcal{N} \to \mathcal{X}$. Έτσι παίρνουμε ως συνάρτηση $f = pr_1 \circ \pi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{X}$. Η f είναι συνεχής και απο τις παραπάνω ισοδυναμίες φαίνεται ότι $P = f[\mathcal{N}]$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Για g μπορούμε να πάρουμε την f του (ii) και για $B = \mathcal{N}$ είναι Borel έχουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε.
(iii) $\Rightarrow$ (iv). Πάλι μπορούμε να πάρουμε $h = f$ και η απόδειξη είναι προφανή.
(iv) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε πως $P = h[B]$, όπου h είναι η Borel-μετρήσιμη συνάρτηση και $B \subseteq \mathcal{N}$ είναι Borel σύνολο. Παίρνουμε μια αριθμήσιμη βάση $(N_s)_{s\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{X}$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} x \in P &\iff \exists \beta\,(\beta \in B \;\&\; h(\beta) = x) \\ &\iff \exists \beta\,(\beta \in B \;\&\; \forall s\,(x \in N_s \Rightarrow h(\beta) \in N_s) \\ &\iff \exists \beta\,(\beta \in B \;\&\; \forall s\,(x \notin N_s \vee h(\beta) \in N_s)) \end{aligned}$$

Από την τελεύταία ισοδυναμία έχουμε τα σύνολα B, $\mathcal{X} \setminus N_s$ και N_s τα οποία είναι Borel και λόγω της κλειστότητας των Borel ως προς τους τελεστές $\vee, \forall^{\mathbb{N}}$ και &, αλλά και λόγω του ότι τα Borel σύνολα είναι και αναλυτρικά, έχουμε ότι το σύνολο P ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}}\Sigma^1_1|\mathcal{X}$. Έτσι λόγω της κλειστότητας των αναλυτικών συνόλων ω; προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{N}}$ το σύνολο P είναι αναλυτικό. $\square$

Σημείωση: Από την παραπάνω Πρόταση είναι προφανές ότι οι συνεχείς εικόνες Borel συνόλων είναι αναλυτικά σύνολα.

Θα δούμε τώρα κάποια παραδείγματα αναλυτικών και συναναλυτικών συνόλων.

Για τα παραδείγματα αυτά παραπέμπουμε στους [**Mos09**] και [**Kec95**].

Παράδειγμα 3.1.4. Το σύνολο των μη θεμελιωμένων δένδρων $IF = \{T \in Tr \mid [T] \neq \emptyset\}$ είναι αναλυτικό σύνολο καθώς για κάθε $T \in Tr$:

$$T \in IF \iff \exists\alpha\, \forall n\, (\alpha(0), \ldots, \alpha(n)) \in T$$

Βλέπουμε λοιπόν καθώς το σύνολο που δημιουργείται απο το $(\alpha(0), \ldots, \alpha(n)) \in T$ είναι κλειστό, τότε ανήκει στην κλάση Π^0_1 και άρα το σύνολο IF, από την κλειστότητα της κλάσης Π^1_0 ως προς τον τελεστή $\forall^{\mathbb{N}}$, ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}}(\forall^{\mathbb{N}}\Pi^1_0) = \exists^{\mathcal{N}}\Pi^1_0 = \Sigma^1_1$

Παράδειγμα 3.1.5. Το σύνολο των θεμελιωμένων δένδρων $WF = \{T \in Tr \mid [T] = \emptyset\}$ είναι συναναλυτικό σύνολο καθώς για κάθε $T \in Tr$:

$$T \in WF \iff \forall\alpha\, \exists n\, (\alpha(0), \ldots, \alpha(n)) \in T$$

Το σύνολο που δημιουργείται απο το $(\alpha(0), \ldots, \alpha(n)) \in T$ είναι κλειστό-ανοικτό , τότε ανήκει στην κλάση Σ^0_1 και άρα το σύνολο WF, από την κλειστότητα της κλάσης Σ^1_0 ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$, ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathcal{N}}(\exists^{\mathbb{N}}\Sigma^1_0) = \forall^{\mathcal{N}}\Sigma^1_0 = \Pi^1_1$ και επομένως είναι συναναλυτικό.

Παράδειγμα 3.1.6. Έστω μια συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής. Τότε ορίζουμε το σύνολο

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [0,1] \text{ με } f^{'}(x) = y\} \tag{3.1}$$

Το σύνολο R_f είναι αναλυτικό καθώς ισχύει ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}$:

$$y \in R_f \iff \exists x \in [0,1]\, (f, x, y) \in P$$

όπου P είναι το σύνολο του Λήμματος 2.1.15. Από Λήμμα 2.1.15 λοιπόν ξέρουμε ότι το σύνολο P ανήκει στην κλάση Π^0_3. Έτσι το R_f ανήκει στην κλάση $\exists^{[0,1]}\Pi^0_3$. Επίσης τα Π^0_3 σύνολα είναι Borel και από Πρόταση 3.1.3 είναι και αναλυτικά. Επομένως λόγω της κλειστότητας των αναλυτικών συνόλων ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{Y}}$,όπου $\mathcal{Y}$ Πολωνικός χώρος, το σύνολο P είναι αναλυτικό.

Παρατήρηση 3.1.7 (Θεώρημα Poproungenko)**.** Κάθε αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι της μορφής R_f (3.1) για κάποια συνεχή συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.1.8. Έστω ο Πολωνικός χώρος $\mathcal{X} = C([0,1])$ με την νόρμα $\|f\| = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Τότε το σύνολο

$$P = \{f \in \mathcal{X} \mid f \text{ είναι διαφορίσιμη στο } [0,1]\}$$

είναι συναναλυτικό. Αυτό ισχύει καθώς για κάθε $f \in \mathcal{X}$:

$$f \in P \iff \forall x \in [0,1] \text{ τότε } f^{'}(x) \text{ υπάρχει}$$

Από το Λήμμα 2.1.15 βλέπουμε ότι το σύνολο P ανήκει στην κλάση $\forall^{[0,1]}\Pi^0_3$. Επομένως αφού ξέρουμε ότι $\Pi^0_3 \subseteq \Pi^1_1$, καθώς και ότι η κλάση Π^1_1 είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\forall^{\mathcal{Y}}$,όπου $\mathcal{Y}$ Πολωνικός χώρος, τότε το σύνολο P είναι συναναλυτικό.

Παράδειγμα 3.1.9. Έστω $\mathcal{X} = C([0,1])^{\mathbb{N}}$ ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων από το $[0,1]$ στο $\mathbb{R}$. Το σύνολο

$$D = \{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X} \mid (f_n) \text{ συγκλίνει κατά σημείο}\}$$

είναι συναναλυτικό. Αυτό ισχύει διότι για κάθε $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ έχουμε ότι:

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D \iff \forall x\ ((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}) \text{ συγκλίνει} \tag{3.2}$$

Η σχέση $((f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X})$ περιγράφει ένα σύνολο που ανήκει στην κλάση $\Pi^0_3|\mathcal{X}$ από το Παράδειγμα 2.1.12. ¨Οπως ξέρουμε για την κλάση Π^0_3 ισχύει ότι $\Pi^0_3 \subseteq \Pi^1_1$ και άρα το σύνολο D ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathbb{R}}\Pi^1_1 = \Pi^1_1$ λόγω της κλειστότητας της κλάσης Π^1_1 ως προς τον τελεστή $\forall^{\mathcal{Y}}$ όπου $\mathcal{Y}$ Πολωνικός χώρος.

Σημείωση: Για τα παρακάτω παραδείγματα υπενθυμίζουμε ότι, έστω X, Y δύο μιγαδικοί διαχωρίσιμοι χώροι Banach. Έστω ένας τελεστής $T\colon X \to Y$ γραμμικός και φραγμένος. Το φάσμα (spectrum) του τελεστή $\sigma(T)$ ορίζεται ως εξής

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I\colon \text{δεν είναι αντιστρέψιμος}\}$$

Το σημειακό φάσμα (point spectrum) του T συμβολίζεται ως $\sigma_p(T)$ και ορίζεται ως

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists x \neq 0\colon Tx = \lambda x\}$$

Ισχύει ότι $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_(T)$, διότι αν $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \exists x \neq 0$ τέτοιο ώστε $(T - \lambda I)x = 0 = (T - \lambda I)(0)$ συνεπάγεται $T - \lambda I$ δεν είναι 1-1 και άρα συνεπάγεται ότι $T - \lambda I$ μη αντιστρέψιμος που σημαίνει ότι $\lambda \in \sigma(T)$.

Παράδειγμα 3.1.10. Το σημειακό φάσμα $\sigma_p(T)$ ενός γραμμικού και φραγμένου τελεστή $T\colon X \to Y$, όπου X, Y όπως παραπάνω, είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.
Αυτο ισχύει καθώς για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε ότι

$$\lambda \in \sigma_p(T) \iff \exists x\ (x \neq 0\ \&\ Tx = \lambda x)$$

Το $x \neq 0$ περιγράφει ένα ανοικτό σύνολο , επομένως είναι Borel και άρα είναι αναλυτικό. Το $Tx = \lambda x$ περιγράφει ένα κλειστό σύνολο, επομένως είναι Borel και άρα αναλυτικό. Λόγω της κλειστότητας των αναλυτικών συνόλων ως προς τον τελεστή &, αλλά και τον τελεστή $\exists^X$, το $\sigma_p(T)$ ανήκει στην κλάση $\exists^X\Sigma^1_1|\mathbb{C} = \Sigma^1_1|\mathbb{C}$.

Παρατήρηση 3.1.11 (Kaufman)**.** Κάθε αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ είναι της μορφής $\sigma_p(T)$ για κάποιο γραμμικό και φραγμένο τελεστή $T\colon c_0 \to \mathbb{C}$.

Ορισμός 3.1.12. Έστω μια κλάση Γ και ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος. Το P λέγεται Γ-πλήρες αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(i) Το P ανήκει στην Γ.

(ii) Για καθε μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο $\mathcal{Z}$ και κάθε $A \in \Gamma|\mathcal{Z}$, υπάρχει συνάρτηση $f\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ η οποία είναι συνεχής, με $A = f^{-1}[P]$.

Αν για κάποιο σύνολο ισχύει μονο η ιδιότητα (ii) τότε λέγεται Γ-hard και χτησιμοποιούμε τον συμβολισμό $A \leq_w P$.

Σημείωση: Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται μηδενοδιάστατος αν υπάρχει βάση της τοπολογίας του η οποία αποτελείται απο κλειστά-άνοικτά σύνολα.

Θεώρημα 3.1.13 (Το Βασικό Θεώρημα Αναπαράστασης των Αναλυτικών Συνόλων Lusin-Sierpinski)**.** [**LS23**] *Για κάθε αναλυτικό σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος, υπάρχει μια Σ^0_2-μετρήσιμη συνάρτηση $f \colon \mathcal{X} \to Tr$ με την ιδιότητα :*

$$x \in P \iff f(x) \in IF$$

για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και IF το σύνολο των μη θεμελιωμένων δένδρων στο $\mathbb{N}$.
Επίσης αν ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος χώρος τότε μπορούμε να πάρουμε την f να είναι συνεχής συνάρτηση και άρα το σύνολο IF να είναι Σ^1_1-πλήρες.

Απόδειξη. Παίρνουμε ένα κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ για το οποίο ισχύει ότι $P = \exists^{\mathcal{N}} F$ καθώς P είναι αναλυτικό σύνολο. Από το Λήμμα 1.3.7 υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με

$$(x, \alpha) \in F \iff \alpha \in [T(x)]$$

για κάθε $x \in \mathcal{X}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ όπου $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ είναι δένδρο.
Ορίζουμε μια συνάρτηση $f \colon \mathcal{X} \to Tr$ για την οποία έχουμε ότι $f(x) = T(x)$. Η f είναι Σ^0_2-μετρήσιμη, δηλαδή αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε F_σ σύνολα. Για να το δείξουμε αυτό είναι αρκετό να δείξουμε ότι για κάθε $v_0, \ldots, v_{m-1}, w_0, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ η αντίστροφη εικόνα των βασικών συνόλων

$$B(v_0, \ldots, v_{m-1}, w_0, \ldots, w_{t-1}) = \{T \in Tr \mid \forall i < m \; v_i \in T \;\; \& \;\; \forall j < t \; w_j \notin T\}$$

του Tr είναι F_σ υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Αυτό ισχύει καθώς, ορίζοντας για ευκολία ως B το παραπάνω σύνολο, μπορούμε να δούμε ότι για καθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$f(x) \in B \iff \forall i < m \; v_i \in T[x] \;\; \& \;\; \forall j < t \; w_j \notin T[x]$$

Θέτοντας τώρα δύο σύνολα $P_v = \{x \in \mathcal{X} \mid v \in T[x]\}$ και $Q_w = \{x \in \mathcal{X} \mid w \notin T[x]\}$, όπου $v, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ βλέπουμε ότι

$$f^{-1}[B] = \bigcap_{i<m} \bigcap_{j<t} (P_{v_i} \cap Q_{w_j}) = \bigcap_{i<m, j<t} (P_{v_i} \cap Q_{w_j})$$

Για τα P_{v_i} και Q_{w_j}, τα P_v είναι κλειστά διότι έστω μια ακολουθία $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στο P_v η οποία συγκλίνει στο $x \in \mathcal{X}$. Τότε το $(x_i, v) \in T$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και αφού $(x_i, v) \to (x, v)$ τότε $(x, v) \in T$ καθώς T κλειστό. Δηλαδή $x \in P_v$. Επίσης είναι προφανές ότι $Q_w = \mathcal{X} \setminus P_w$ και άρα το Q_w είναι ανοικτό. Ξέρουμε ότι κάθε κλειστό σύνολο είναι F_σ και κάθε ανοικτό σύνολο είναι F_σ και απο την κλειστότητα των F_σ ως προς τις πεπερασμένες τομές τότε το σύνολο $f^{-1}[B]$ είναι και αυτό F_σ.
Σε περίπτωση που είμαστε σε μηδενοδιάστατο χώρο τότε αν $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ βάση του $\mathcal{X}$, κάθε V_i είναι ανοικτό-κλειστό. Έστω τώρα $x \in P_v$ για κάποιο $v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Αν το $v = \Lambda$ τότε το $P_v = \mathcal{X}$ και άρα είναι ανοικτό. Αν έχουμε ότι υπάρχουν n με $n < |v|$ τότε αυτά τα n είναι πεπερασμένα και για κάθε n ισχύει ότι $x \in \mathcal{X} \setminus V_n$, όπου $\mathcal{X} \setminus V_n$ κλειστό-ανοικτό.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο, έστω G, για το οποίο ισχύει ότι

$$x \in G \subseteq \bigcap_{n<|u|} \mathcal{X} \setminus V_n$$

και άρα $x \in G \subseteq P_v$ συνεπάγεται ότι το P_v ανοικτό. Η πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό άρα η f είναι συνεχής καθώς αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά. Τέλος για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι

$$x \in P \iff \exists\alpha\,(x,\alpha) \in F \iff \exists\alpha\,(\alpha \in [T(x)]) \iff f(x) = T(x) \in IF$$

και άρα IF είναι Σ_1^1-πλήρες. □

Πόρισμα 3.1.14. *Γνωρίζοντας ότι:*

(i) *Το σύνολο IF των μη θεμελιωμένων δένδρων είναι Σ_1^1-πλήρες.*

(ii) *Στον χώρο του Baire υπάρχει σύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ το οποίο είναι αναλυτικό αλλά δεν είναι Borel.*

Ισχύει πως το σύνολο IF των μη θεμελιωμένων δένδρων δεν είναι Borel σύνολο.

Για το (ii) του παραπάνω Πορίσματος παραπέμπουμε στις ακόλουθες πηγές [**Lus25c**], [**Leb05**], [**Kur66**].

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f\colon \mathcal{N} \to Tr$ η οποία ειναι συνεχής και παίρνουμε $A = f^{-1}[IF]$ αναλυτικό που δεν είναι Borel (από (i) και (ii) μπορούμε να το κάνουμε αυτό). Έστω ότι το σύνολο IF ήταν Borel τότε αφού η f είναι συνεχής το σύνολο $f^{-1}[IF]$ είναι και αυτό Borel. Άτοπο άρα το σύνολο IF δεν είναι Borel. □

3.2. Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin

Ορισμός 3.2.1. Έστω $A, B \subseteq \mathcal{X}$ ξένα και $C \subseteq \mathcal{X}$. Λέμε ότι το C διαχωρίζει το A από το B αν $A \subseteq C$ και $C \cap B = \emptyset$.

Είναι φανερό ότι αν το C διαχωρίζει το A από το B τότε το $\mathcal{X} \setminus C$ διαχωρίζει το A από το B.

Για το παρακάτω Θεώρημα δείτε [**LS18**], [**LS23**] και [**Lus72**].

Θεώρημα 3.2.2 (Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin)**.** *Έστω $\mathcal{X}$ ένας Πολωνικός χώρος και έστω $A, B \subseteq \mathcal{X}$ δύο ξένα αναλυτικά σύνολα. Τότε υπάρχει ένα Borel σύνολο $C \subseteq \mathcal{X}$ το οποίο διαχωρίζει το A από το B, δηλαδή $A \subseteq C$ και $B \cap C = \emptyset$.*

Απόδειξη. Έστω $A, B \subseteq \mathcal{X}$ τα αναλυτικά σύνολα της εκφώνησης του θεωρήματος για ένα Πολωνικο χώρο $\mathcal{X}$. Από την Πρόταση 3.1.3 αφού A,B αναλυτικά σύνολα ξέρουμε ότι υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις

$$f, g\colon \mathcal{N} \to \mathcal{X} \quad \text{με } A = f[\mathcal{N}] \text{ και } B = g[\mathcal{N}].$$

Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ θέτουμε τα σύνολα

$$A_u = f[\mathcal{N}_u] \;\; \text{και} \;\; B_u = g[\mathcal{N}_u]$$

Είναι προφανές ότι $A_\Lambda = f[\mathcal{N}_\Lambda] = f[\mathcal{N}] = A$ και $B_\Lambda = g[\mathcal{N}_\Lambda] = g[\mathcal{N}] = B$. Επίσης $A_u \subseteq A$ και $B_u \subseteq B$ από τον ορισμό τους. Αφού ξέρουμε ότι τα A και B είναι σύνολα ξένα μεταξύ τους τότε προκύπτει ότι $A_u \cap B_w = \emptyset$ για κάθε $u, w \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Επιπλέον για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x \in A_u &\iff \exists \alpha \in \mathcal{N}\ x = f(a) \iff \exists m\, \exists \alpha \in \mathcal{N}_{u*(m)}\ x = f(\alpha) \\ &\iff \exists m\ x \in f[\mathcal{N}_{u*(m)}] \iff \exists m\ x \in A_{u*(m)}, \end{aligned}$$

όπου έχουμε πάρει $m = \alpha(|u|)$. Επομένως ισχύει ότι

$$A_u = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{u*(m)} \text{ και αντίστοιχα } B_w = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{w*(n)}. \tag{3.3}$$

για κάθε $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε τον παρακάτω ισχυρισμό.

Ισχυρισμός: Δοσμένων $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, αν για κάθε n,m υπάρχει Borel σύνολο $C^{u,w}_{m,n} = C_{m,n}$ (εξαρτάται απο τα m,n,u,w αλλά για ευκολία βάζουμε μόνο τους δείκτες m,n) που διαχωρίζει το $A_{u*(m)}$ από το $B_{w*(n)}$ τότε υπάρχει Borel σύνολο C που διαχωρίζει το A από το B.

Απόδειξη Ισχυρισμού: Θεωρούμε u,w και $C_{m,n}$ όπως στον Ισχυρισμό και ορίζουμε ένα σύνολο

$$C = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{m,n}$$

Το C είναι Borel σύνολο καθώς είναι αριθμησιμες ενώσεις απο αριθμήσιμες τομές Borel συνόλων. Αρχικά θα δείξουμε ότι $A_u \subseteq C$. Έστω $x \in A_u$ τότε από την (3.3) υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ όπου $x \in A_{u*(m)}$. Από την υπόθεση του ισχυρισμού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$A_{u*(m)} \subseteq C_{m,n} \text{ και } B_{w*(n)} \cap C_{m,n} = \emptyset \tag{3.4}$$

Άρα προφανώς $x \in C_{m,n}$ για κάθε $n \in N$, δηλαδή ισχύει ότι $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{m,n} \subseteq C$ και άρα $A_u \subseteq C$. Έπειτα θα δείξουμε ότι $C \cap B_w$. Έστω $x \in C$, τότε απο τον ορισμό του C υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{m,n}$. Επίσης αν $x \in B_w$ τότε απο την (3.3) υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in B_{w*(n)}$. Όμως $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{m,n}$ και $x \in B_{w*(n)}$ συνεπάγεται ότι $C_{m,n} \cap B_{w*(n)} \neq \emptyset$ που όμως αυτο είναι άτοπο απο την (3.4) και άρα $x \notin B_w$. Έτσι ισχύει ότι $C \cap B_w$. Αποδείχθηκε λοιπόν ο ισχυρισμός.

Τώρα υποθέτουμε προς άτοπο ότι δεν υπάρχει Borel σύνολο που να διαχωρίζει το $A = A_\Lambda$ από το $B = B_\Lambda$. Εφαρμόζοντας τον παραπάνω ισχυρισμό για $u = w = \Lambda$ καταλήγουμε ότι υπάρχουν $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε δεν υπάρχει Borel συνόλο που να διαχωρίζει το σύνολο $A_{u*(m_0)} = A_{(m_0)}$ από το σύνολο $B_{w*(n_0)} = B_{(n_0)}$.

Εφαρμόζουμε ξανά τον ισχυρισμό για $u = (m_0)$ και $w = (n_0)$ και παίρνουμε $m_1, n_1 \in N$ έτσι ώστε δεν υπάρχει Borel σύνολο που να διαχωρίζει το σύνολο $A_{u*(m_1)} = A_{(m_0,m_1)}$ από το σύνολο $B_{w*(n_1)} = B_{(n_0,n_1)}$. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία αναδρομικά και έτσι βρίσκουμε δύο στοιχεία του χώρου του Baire ,

$$\gamma = (m_0, m_1, \dots) \text{ και } \delta = (n_0, n_1, \dots)$$

έτσι ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει οτι δεν υπάρχει Borel σύνολο που να διαχωρίζει το σύνολο $A_{(m_0,m_1,\dots,m_{k-1})} = A_{\gamma|k}$ από το σύνολο $B_{n_0,n_1,\dots,n_{k-1})} = B_{\delta|k}$.

Τώρα αφού έχουμε ότι $\gamma, \delta \in \mathcal{N}$ και $A = f[\mathcal{N}]$, $B = [\mathcal{N}]$ ισχύει ότι $f(\gamma) \in A$ και $g(\delta) \in B$. Αφού τα A,B είναι ξένα μεταξύ τους τότε προφανώς $f(\gamma) \neq g(\delta)$. Θεωρούμε

δύο ανοικτές περιοχές $U, W \subseteq \mathcal{X}$ κοντά στα $f(\gamma)$ και $g(\delta)$ αντίστοιχα, με $U \cap W = \emptyset$. Από την συνέχεια των συναρτήσεων f,g έχουμε ότι υπάρχουν $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $\gamma \in \mathcal{N}_u$, $f[\mathcal{N}_u] \subseteq U, \delta \in \mathcal{N}_w$ και $g[\mathcal{N}_w] \subseteq W$. Υποθέτουμε ότι οι u,w έχουν το ίδιο μήκος. Αν δεν είχαν το ίδιο μήκος , έστω $|u| < |w|$, τότε μπορούμε να προεκτείνουμε την u σε μία $u^{'}$ κατά μήκος της γ η οποία έχει ίδιο μήκος με την w και φυσικά ισχύει ότι $\gamma \in \mathcal{N}_{u^{'}}$ και $f[\mathcal{N}_{u^{'}}] \subseteq f[\mathcal{N}_u] \subseteq U$.
Έστω λοιπόν ότι οι u,w έχουν το ίδιο μήκος, τότε αφού $u \sqsubseteq \gamma$ και $w \sqsubseteq \delta$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $\gamma|k = u$ και $\delta|k = w$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$A_u = f[\mathcal{N}_u] \subseteq U \text{ και } B_w \cap U = g[\mathcal{N}_w] \cap U \subseteq W \cap U = \emptyset$$

Δηλαδή έχουμε ότι το ανοικτό (και άρα Borel) σύνολο U διαχωρίζει το $A_u = A_{\gamma|k}$ από το $B_w = B_{\delta|k}$ το οποίο όμως απο την επιλογή των γ και δ είναι άτοπο. Επομένως υπάρχει Borel σύνολο που διαχωρίζει το σύνολο A από το σύνολο B. □

3.3. Αποτελέσματα θεωρήματος Lusin

Θεώρημα 3.3.1 (Το Θεώρημα του Suslin)**.** **[Sus17]** *Ένα $A \subseteq \mathcal{X}$ υποσύνολο του Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ είναι Borel σύνολο αν και μόνο αν ειναι Δ^1_1.*

Απόδειξη. Αρχικά από Πρόταση 3.1.1 ξέρουμε ότι κάθε Borel υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ ανήκει και στην κλάση $\Delta^1_1|\mathcal{X}$. Οπότε αυτό που μας μένει να δείξουμε είναι το αντίστροφο. Εστω $A \subseteq \mathcal{X}$ είναι Δ^1_1 σύνολο. Θεωρούμε το σύνολο $B = \mathcal{X} \setminus A$. Τα A, B είναι προφανώς ξένα μεταξύ τους και καθώς ανήκουν στην κλάση $\Delta^1_1|\mathcal{X}$ ($\Delta^1_1|\mathcal{X}$ κλειστή ως προς τον τελεστη του συμπληρώματος) τότε είναι και αναλυτικά σύνολα. Επομένως απο το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin υπάρχει ένα C Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$ που διαχωρίζει το σύνολο A απο το σύνολο $\mathcal{X} \setminus A$. Είναι προφανές λοιπόν ότι $A = C$ και αφού C Borel τότε το A είναι Borel σύνολο και δείχθηκε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 3.3.2. *Έστω $f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, όπου $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι Πολωνικοί χώροι. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Η f είναι Borel μετρήσιμη.*

(ii) *Το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι Borel σύνολο.*

(iii) *Το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι αναλυτικό σύνολο.*

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$. Παίρνουμε μία αριθμήσιμη βάση $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ του Πολωνικού χώρου $\mathcal{Y}$. Τότε ισχύει ότι:

$$(x, y) \in Graph(f) \iff \forall i \, (y \in V_i \Rightarrow f(x) \in V_i) \iff \forall i \, (y \notin V_i \vee f(x) \in V_i).$$

Επομένως το $Graph(f)$ είναι ένα Borel σύνολο από κλειστότητα των Borel υποσυνόλων του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$,ως προς τους τελεστές $\vee$ και $\forall$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Προφανές καθώς κάθε Borel σύνολο είναι και αναλυτικό.
$(iii) \Rightarrow (i)$. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι Borel μετρήσιμη πρέπει να δείξουμε ότι για κάποιο $B \subseteq \mathcal{Y}$ Borel σύνολο τότε το ΄συνολο $f^{-1}[B]$ είναι επίσης Borel. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε ότι

$$x \in f^{-1}[B] \iff f(x) \in B \iff \exists y \, ((x, y) \in Graph(f) \; \& \; y \in B).$$

Τα σύνολα $Graph(f)$ και B είναι Borel σύνολα αναλυτικά σύνολα (B Borel και άρα αναλυτικό) και λόγω κλειστότητας των αναλυτικών συνόλων ως προς τους τελεστές & και $\exists^{\mathcal{Y}}$ τότε το $f^{-1}[B]$ είναι αναλυτικό σύνολο.
Επιπλέον για $x \in \mathcal{X}$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[B] \iff f(x) \in B &\iff \forall y\, ((x,y) \in Graph(f) \Rightarrow y \in B) \\ &\iff \forall y\, ((x,y) \notin Graph(f) \vee y \in B). \end{aligned}$$

Το σύνολο B είναι Borel άρα και το $\mathcal{Y} \setminus B$ είναι Borel σύνολο. Αφου το $\mathcal{Y} \setminus B$ είναι Borel τότε είναι και αναλυτικό και άρα το σύνολο B είναι συναναλυτικό. Καθώς λοιπόν η κλάση των συναναλυτικών συνόλων είναι κλειστή ως προς τους τελεστές $\vee$ και $\forall^{\mathcal{Y}}$ τότε το σύνολο $f^{-1}[B]$ είναι συναναλυτικό. Έτσι αφού το $f^{-1}[B]$ είναι αναλυτικό και συναναλυτικό τότε είναι αμφιαναλυτικό και άρα απο Θεώρημα του Suslin έιναι Borel σύνολο. Επομένως f Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. □

Ένα γνωστό αποτέλεσμα του Lusin είναι ότι οι 1-1 και συνεχείς εικόνες Borel συνόλων είναι επίσης Borel σύνολα. Αυτό μπορούμε να το δείξουμε για συναρτήσεις που ορίζονται στο $\mathbb{R}$ με τη βοηθεια του Θεωρήματος του Suslin 3.3.1 όπως βλέπουμε παρακάτω.

Πόρισμα 3.3.3. *Έστω $\mathcal{Y}$ Πολωνικός χώρος. Αν συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{Y}$ είναι συνεχής και 1-1 τότε για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ Borel, το σύνολο $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{Y}$ ξέρουμε ότι είναι συνεχής. Για κάθε σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}$ Borel από Πρόταση 3.1.1 ισχύει ότι το B είναι αναλυτικό σύνολο. Λόγω της συνέχειας της f το σύνολο $f[B]$ είναι και αυτό αναλυτικό.
Επίσης ισχύει η ισότητα $f[\mathbb{R} \setminus B] = f[\mathbb{R}] \setminus f[B]]$. Αυτή η ισότητα ισχύει καθώς έστω $y \in f[\mathbb{R} \setminus B]$ τότε υπάρχει $x \notin B$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Για το y αυτό προφανώς ισχύει ότι $y \in f[\mathbb{R}]$. Τώρα αν $y \in f[B]$ υπάρχει ένα $x^{'} \in B$ τέτοιο ώστε $y = f(x^{'})$. Επομένως $f(x) = f(x^{'})$ και αφού η f είναι 1-1 τότε $x = x^{'}$ άτοπο καθώς $x \notin B$ και $x^{'} \in B$. Δείξαμε λοιπόν ότι

$$f[\mathbb{R} \setminus B] \subseteq f[\mathbb{R}] \setminus f[B]. \tag{3.5}$$

Τωρα έστω $y \in f[\mathbb{R} \setminus f[B]]$. Υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $y = f(x)$. Αν $x \in B$ τότε $y = f(x) \in f[A]$ άτοπο αφού $y \in f[\mathbb{R} \setminus f[B]]$. Επομένως $x \notin B \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus B \Rightarrow y = f(x) \in f[\mathbb{R} \setminus B]$ και έτσι δείξαμε ότι

$$f[\mathbb{R}] \setminus f[B] \subseteq f[\mathbb{R} \setminus B] \tag{3.6}$$

Από (3.5) και (3.6) έχουμε ότι

$$f[\mathbb{R} \setminus B] = f[\mathbb{R}] \setminus f[B]. \tag{3.7}$$

Είναι προφανές ότι η παρακάτω ισότητα ισχύει

$$\mathcal{Y} \setminus f[B] = (\mathcal{Y} \setminus f[\mathbb{R}]) \cup (f[\mathbb{R}] \setminus f[B]) = C \cup f[\mathbb{R} \setminus B] \tag{3.8}$$

όπου $C = \mathcal{Y} \setminus f[\mathbb{R}]$.
Για το σύνολο $f[\mathbb{R}]$ έχουμε ότι

$$f[\mathbb{R}] = f[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n,n]] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f[-n,n]$$

Το $[-n, n]$ είναι συμπαγές σύνολο και αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση τότε το $f([-n, n])$ είαι συμπαγές και επομένως κλειστό. Άρα το σύνολο $f[\mathbb{R}]$ ισούται με αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων και είναι F_σ σύνολο επομένως είναι και Borel σύνολο.
Βλέπουμε έτσι ότι αφού το $f[\mathbb{R}]$ είναι Borel σύνολο τότε και το C είναι Borel άρα και αναλυτικό. Επίσης αφού B Borel τότε και το $\mathbb{R} \setminus B$ είναι Borel που συνεπάγεται ότι είναι αναλυτικό και το $f[\mathbb{R} \setminus B]$ είναι επίσης αναλυτικό. Επομένως απο την (3.8) και την κλειστότητα των αναλυτικών συνόλων ως προς τον τελεστη $\vee$ καταλήγουμε ότι το σύνολο $\mathcal{Y} \setminus f[B]$ είναι αναλυτικό σύνολο που συνεπάγεται ότι το $f[B]$ είναι συαναλυτικό και άρα το $f[B]$ είναι αμφιαναλυτκό που έχει ως αποτέλεσμα απο Θεώρημα 3.3.1 ότι το $f[B]$ είναι Borel. $\square$

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[Gre21] Βασίλειος Γρηγοριάδης (Vassilios Gregoriades), *Σημειώσεις στην Περιγραφική Θεωρία Συνόλων*, 2021, Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος διαθέσιμες στο διαδίκτυο.

[Kec95] Alexander S. Kechris, *'classical descriptive set theory'*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, 1995.

[Kle43] S. C. Kleene, *Recursive predicates and quantifiers*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 41–73.

[Kur66] K. Kuratowski, *Topology. Vol. I*, Academic Press, New York-London; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1966, New edition, revised and augmented, Translated from the French by J. Jaworowski. MR 0217751

[Leb05] H. Lebesgue, *Sur les fonctions represéntables analytiquement*, Journal de Mathématiques 6^{e} serie **1** (1905), 139–216.

[LS18] N. Lusin and W. Sierpinski, *Sur quelques proprietés des ensembles (A)*, Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie Série A: Sciences Mathematiques (1918), 35–48.

[LS23] ———, *Sur un ensemble non measurable B*, Journal de Mathématiques 9 e serie **2** (1923), 53–72.

[Lus25a] N. Lusin, *Les proprietes des ensembles projectifs*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **180** (1925), 1817–1819.

[Lus25b] ———, *Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **180** (1925), 1572–1574.

[Lus25c] ———, *Sur un probléme de M. Emile Borel et les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue: les ensembles analytiques*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **180** (1925), 1318–1320.

[Lus72] ———, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Chelsea Publishing Co., New York, 1972, Avec une note de W. Sierpiński, Preface de Henri Lebesgue, Réimpression de l'edition de 1930. MR 0392465

[Mos47] A. Mostowski, *On definable sets of positive integers*, Fund. Math. **34** (1947), 81–112. MR 21923

[Mos09] Y.N. Moschovakis, *Descriptive set theory, second edition*, Mathematical Surveys and Monographs., vol. 155, American Mathematical Society, 2009.

[Sie25] W. Sierpinski, *Sur une classe d'ensembles*, Fundamenta Mathematicae **7** (1925), 237–243.

[Sie28] ———, *Sur les produits des images continue des ensembles C(A)*, Fundamenta Mathematicae **11** (1928), 123–126.

[Sus17] M. Suslin, *Sur une definition des ensembles measurables B sans nombres transfinis*, Comptes Rendus Académie Sciences Paris **164** (1917), 88–91.