

# ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΙΣΟΣΚΕΛΩΝ ΓΩΝΙΑΚΩΝ ΘΕΡΜΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΗ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

# Θάνος Γ. Τουρλούκης-Πραμαντιώτης

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Γαντές

Αθήνα, Νοέμβριος 2021 ΕΜΚ ΔΕ 2021 17

Τουρλούκης-Πραμαντιώτης Θ. Γ. (2021). ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΙΣΟΣΚΕΛΩΝ ΓΩΝΙΑΚΩΝ ΘΕΡΜΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΗ Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ ΔΕ 2021 17 Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Tourloukis-Pramantiotis Th. G. (2021). BEHAVIORAL INVESTIGATION OF EQUILATERAL HOT ROLLED ANGLE SECTION MEMBERS UNDER COMPLEX STRESS Diploma Thesis EMK ΔE 2021 17 Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece.

# Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη	2
Abstract	3
Ευχαριστίες	4
1 Εισαγωγή	5
<ul> <li>2 ADINA – Χαρακτηριστικά του Προγράμματος</li> <li>2.1 Περιγραφή Δυνατοτήτων</li> <li>2.2 Εργαλεία του ADINA που Χρησιμοποιήθηκαν</li> <li>2.3 Λίγα Σχόλια του Μελετητή</li> </ul>	6 6 6 7
<ul> <li>3 Μόρφωση του Γωνιακού</li></ul>	8 8 . 10 . 15
<ul> <li>4 Βαθμονόμηση του Προγράμματος (Calibration)</li></ul>	. 17 . 17 . 17 . 19
<ul> <li>5 Χρήση του Μοντέλου για Προσομοίωση των Εργαστηριακών Δοκιμών</li></ul>	. 23 . 23 . 23 . 23 . 23 . 23 . 23 . 23
<ul> <li>5 Συμπεράσματα – Προτάσεις</li></ul>	. 49 . 49 . 49 . 50 . 50 . 50 . 51 . 51 . 55
Βιβλιογραφία	. 57
Τυπολόγιο	. 59

#### ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

#### ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΜΚ ΔΕ 2021 17

# ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΙΣΟΣΚΕΛΩΝ ΓΩΝΙΑΚΩΝ ΘΕΡΜΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΗ

Τουρλούκης-Πραμαντιώτης Θ. Γ. (Επιβλέπων: Γαντές Χ.)

# Περίληψη

Στην παρούσα εργασία ελέγχεται η συμπεριφορά δοκών πρότυπης γωνιακής διατομής (τύπου L) υπό έκκεντρη και μη αξονική φόρτιση και κάμψη υπό σημειακό φορτίο στο μέσο αυτών, με χρήση του προγράμματος ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων ADINA. Ακολουθεί, σε κάθε περίπτωση, η σύγκριση των αποτελεσμάτων με βάση εργαστηριακά πειράματα, τα οποία είχαν διεξαχθεί στο Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, ώστε να διαπιστωθεί η εγκυρότητά τους.

Επίσης, αναλύεται ο τρόπος διαμόρφωσης του μοντέλου των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιείται κατά περίπτωση, καθώς και ο τρόπος βαθμονόμησής του για να είναι όσον το δυνατόν πλησιέστερα στην πραγματική συμπεριφορά των δοκών υπό τις συγκεκριμένες φορτίσεις.

Τέλος, γίνεται αναφορά των πλεονεκτημάτων και των μειονεκτημάτων των μοντέλων που χρησιμοποιούνται σε κάθε δοκιμή, ώστε να συμβιβάζονται κάθε φορά η ακρίβεια και εγκυρότητα των αποτελεσμάτων με την ταχύτητα διεκπεραίωσης των αναλύσεων μέσω του προγράμματος.

#### NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS FACULTY OF CIVIL ENGINEERING INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES

DIPLOMA THESIS EMK ΔE 2021 17

# BEHAVIORAL INVESTIGATION OF EQUILATERAL HOT ROLLED ANGLE SECTION MEMBERS UNDER COMPLEX STRESS

Tourloukis-Pramantiotis Th. G. (supervised by Gantes Ch.)

#### Abstract

In the present paper we examine the behavior of steel columns with angle section (type L) under axial depression (eccentric and non) and bending, through the use of the finite element analysis program *ADINA*. Following this analysis, we compare the program's results with the laboratory test results of the same experiment that took place in the Institute of Steel Structures of the National Technical University of Athens, to determine their credibility.

We describe in detail the steps used in constructing the finite element models that were used in each case, and also, the method used in order to calibrate the model so that it would correspond as close as possible in the real behavior of such column specimens under these loads.

Finally, we reference the pros and cons of the models which are used in each case, in order to establish a balance between result accuracy and elapsed time per analysis.

# Ευχαριστίες

Ένα θερμό «ευχαριστώ» στο δάσκαλο και καθοδηγητή μου Ανδρέα Σπηλιόπουλο για τη μεγάλη του βοήθεια καθ' όλη την πορεία της παρούσας εργασίας, καθώς και για τα πολύτιμα διδάγματά του στον τομέα των μεταλλικών κατασκευών σε εμένα και τους συμφοιτητές μου.

# 1 Εισαγωγή

Η αρχική σκέψη ήταν να ελεγχθεί η συμπεριφορά δοκών πρότυπης γωνιακής διατομής θερμής έλασης L70.7 υπό έκκεντρη και μη αξονική φόρτιση και κάμψη υπό σημειακό φορτίο στο μέσο αυτών με χρήση προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων. Στη συνέχεια θα διαπιστωνόταν η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων με βάση εργαστηριακά πειράματα, τα οποία είχαν διεξαχθεί στο Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Σε πρώτο στάδιο αναζητήθηκε η μορφή ενός μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων, που αφενός θα απέδιδε ορθά τα θεωρητικώς αναμενόμενα αποτελέσματα υπό πρότυπες φορτίσεις (π.χ. Αξονική Δύναμη Διαρροής, Φορτίο Λυγισμού Euler) και αφετέρου θα ήταν πιστό στη γεωμετρία της πραγματικής εκάστοτε δοκού, ώστε να μπορούν στη συνέχεια να προσομοιωθούν οι εργαστηριακές δοκιμές μέσω του προγράμματος.

Το δεύτερο στάδιο ήταν η βαθμονόμηση (calibration) του προγράμματος και του μοντέλου ανάλυσης βάσει των οδηγιών και διατάξεων του Ευρωκώδικα 3, ώστε τα αποτελέσματα που θα προκύπτουν να είναι αξιόπιστα, όχι πλέον λόγω σωστής διαμόρφωσης των πεπερασμένων στοιχείων, αλλά και λόγω τήρησης του Κανονισμού.

Το τρίτο στάδιο ήταν η αναζήτηση της στήριξης και του τρόπου φόρτισης του μοντέλου, τέτοια ώστε να προσεγγίζουν κατά το δυνατόν τις πραγματικές συνθήκες υπό τις οποίες διεξήχθησαν τα πειράματα. Αυτό έγινε με γνώμονα την διατήρηση της απλότητας του μοντέλου, ώστε να δύναται η ανάλυσή του να γίνεται σε ικανοποιητικό χρόνο, δίχως να εμπλέκονται ταυτόχρονα πολλοί δευτερεύοντες παράγοντες για τους οποίους δεν θα υπήρχε σαφής εικόνα συνεισφοράς στις δοκιμές. Εν συνεχεία, έγιναν οι ίδιες δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν εργαστηριακά και ακολούθησε σύγκριση των αποτελεσμάτων τόσο όσον αφορά στις ακραίες τιμές, αλλά και στη γενικότερη πορεία της συμπεριφοράς των δοκιμίων.

Κλείνοντας, συνοψίζονται οι παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα επί των αποτελεσμάτων όσον αφορά στα γωνιακά αλλά και στο πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε. Επίσης προτείνεται ένας αλγόριθμος σχεδιασμού γωνιακών διατομών στη γενική περίπτωση όπου οι διαστάσεις τους διαφέρουν από τη μελετώμενη, με σκοπό να διασφαλίζεται η πιστότητα της γεωμετρίας τους με ταυτόχρονη σωστή διαστασιολόγηση των πεπερασμένων στοιχείων που θα τις διαμορφώνουν.

# 2 ADINA – Χαρακτηριστικά του Προγράμματος

# 2.1 Περιγραφή Δυνατοτήτων



Το Πρόγραμμα Ανάλυσης Πεπερασμένων Στοιχείων ADINA (Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis) χρησιμοποιείται παγκοσμίως από Μηγανικούς όλων των κλάδων για πολλούς σκοπούς. Ανάμεσά τους η στατική και δυναμική ανάλυση στερεών είναι: κατασκευών, η ρευστομηχανική, η θερμοδυναμική, η αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής ή ρευστούκατασκευής, η εύρεση φορτίων λυγισμού και ιδιομορφών, αλληλεπίδραση μεταξύ κατασκευών, κα. Βάση των αναλύσεών του αποτελούν θεμελιώδεις θεωρίες που γρησιμοποιούν Μηγανικοί. καθολικά οι Συνεγώς ενημερώνεται με αναβαθμίσεις λογισμικού, ώστε το θεωρητικό του υπόβαθρο να παραμένει επίκαιρο και ταυτόγρονα να προσαρμόζεται στην ραγδαία εξέλιξη των υπολογιστικών δυνατοτήτων των ηλεκτρονικών υπολογιστών, με αποτέλεσμα όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστα και γρήγορα αποτελέσματα. Ταυτόχρονα, διαθέτει εργαλεία απευθείας διαμόρφωσης της γεωμετρίας ενός μοντέλου, ενώ είναι συμβατό με άλλα σχεδιαστικά προγράμματα

(όπως τα CAD) από τα οποία μπορεί να γίνει εισαγωγή περισσότερο πολύπλοκων μοντέλων και να ακολουθήσει η μόρφωσή τους με πεπερασμένα στοιχεία. Τα παραπάνω καθιστούν το ADINA ένα από τα πλέον χρησιμοποιούμενα Προγράμματα Ανάλυσης Πεπερασμένων Στοιχείων στους διάφορους κλάδους της Μηχανικής.

# 2.2 Εργαλεία του ADINA που Χρησιμοποιήθηκαν

Δεδομένης της ανάγκης του γεωμετρικού σχεδιασμού των μοντέλων προς μελέτη και ανάλυση, το πρώτο εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε είναι το ADINA MODELER (εν συντομία ADINA-M). Αυτό δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να σχεδιάσει σε 2 ή 3 διαστάσεις βασικά γεωμετρικά σχήματα και ακολούθως κατ' ανάγκη να τα μετατρέψει μέσω κατάλληλων εντολών σε πιο σύνθετα σχήματα. Έτσι, αρχικά σχεδιάστηκε η ακραία διατομή L70.7 των δοκών που επρόκειτο να μελετηθούν και έγινε προβολή της στο χώρο κατά τον διαμήκη άξονα x των δοκών στο απαραίτητο μήκος, ώστε να μορφωθεί το κάθε δοκίμιο.

Στη συνέχεια έγινε εκτεταμένη χρήση του εργαλείου ADINA STRUCTURES, με το οποίο δόθηκαν στο μοντέλο:

1) οι απαραίτητοι βαθμοί ελευθερίας και οι όποιες οριακές συνθήκες

2) ο τρόπος φόρτισης

3) ο τρόπος στήριξης

4) το υλικό (με τα απαραίτητα χαρακτηριστικά του)

5) το είδος των πεπερασμένων στοιχείων που θα το απαρτίζουν (επιφανειακά SHELL ή χωρικά 3D-SOLID)

6) οι απαιτούμενες αρχικές παραδοχές, ώστε η ακόλουθες αναλύσεις να βγάζουν ορθά αποτελέσματα (παραδοχή μεγάλων μετακινήσεων, παραδοχή μεγάλων πλαστικών παραμορφώσεων)

7) οι όποιες αρχικές ατέλειες

 τα βήματα που θα ακολουθούσε η ανάλυση βάσει των απαιτήσεων ακριβείας που ζητούνταν

9) ο τύπος της ανάλυσης που θα γινόταν κάθε φορά, δηλαδή Στατική Γραμμική Ανάλυση (Statics), Στατική Μη Γραμμική Ανάλυση (Collapse Analysis) ή αναζήτηση Ιδιομορφών και Φορτίων Λυγισμού (Linearized Buckling)

Τέλος, έγινε χρήση των προαναφερθέντων τύπων αναλύσεων από αυτές που παρέχει το πρόγραμμα, ώστε να μελετηθούν αναλόγως τα μοντέλα που είχαμε σχεδιάσει. Το ADINA διαθέτει για αυτή ακριβώς την επεξεργασία των αποτελεσμάτων των αναλύσεων το εργαλείο *Post-Processing*. Με αυτό μπορεί ο μελετητής να δει τι συμβαίνει στο μοντέλο σε κάθε βήμα της ανάλυσης (όπως αυτά ετέθησαν προηγουμένως), όπως:

1) Κατανομές τάσεων και παραμορφώσεων

2) Αντιδράσεις στηρίξεων

3) Μέγιστα επιβαλλόμενα φορτία και τελική αντοχή στη δοθείσα φόρτιση

4) Μορφή των διαφόρων ιδιομορφών και τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία

5) Προβολή διαγραμμάτων συσχέτισης μεταξύ δύο εκ των αναλυθέντων μεγεθών ακόμη και μεταξύ δύο διαφορετικών σημείων του μοντέλου (π.χ. Δύναμη-Βύθιση, Ροπή-Στροφή, κλπ.). Να αναφερθεί στο σημείο αυτό ότι το πρόγραμμα διαθέτει εργαλείο Εξαγωγής των διαγραμμάτων αυτών σε αρχεία μορφής .txt, ώστε να είναι εύκολη η περεταίρω επεξεργασία τους με άλλα προγράμματα (π.χ. Excel).

# 2.3 Λίγα Σχόλια του Μελετητή

Το ADINA διαθέτει στα διάφορα προς ανάγνωση αρχεία του μία πληθώρα παραδειγμάτων (Tutorials), στα οποία γίνεται αναλυτική περιγραφή των διαφόρων λειτουργιών του προγράμματος και δίνονται οδηγίες στον χρήστη βήμα προς βήμα, ώστε να γίνουν οι αναλύσεις που παρουσιάζονται σε αυτά. Οι οδηγίες είναι επαρκώς αναλυτικές και δεν απαιτείται από το χρήστη προηγούμενη γνώση επί του προγράμματος. Ο πίνακας των εργαλείων του προγράμματος (User Interface) είναι αρκετά κατανοητός δεδομένου ότι τα παραδείγματα παρουσιάζουν ένα μεγάλο κομμάτι του, εξηγώντας έτσι τις διάφορες παραμέτρους. Το σχεδιαστικό εργαλείο ADINA-M είναι περιορισμένο, αλλά διαθέτει πολλές σημαντικές εντολές ώστε να είναι δυνατή η μόρφωση πολύπλοκων γεωμετριών, σε χρόνο όμως μεγαλύτερο απ' ότι θα χρειαζόταν εάν είχε χρησιμοποιηθεί άλλο εξειδικευμένο πρόγραμμα σχεδίασης. Επειδή ακριβώς το πρόγραμμα διαθέτει πολλούς τρόπους ανάλυσης και πολλές δυνητικές παραμέτρους που μπορούν να τεθούν στο μοντέλο και να επηρεάσουν τα αποτελέσματα, ο χρήστης πρέπει να έχει επαρκή γνώση του θεωρητικού υποβάθρου που διέπει την εκάστοτε ανάλυση για να είναι σε θέση να κρίνει την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων. Τέλος, να σημειωθεί ότι για την αποθήκευση των αποτελεσμάτων των αναλύσεων (οι οποίες αν περιέχουν μεγάλο αριθμό πεπερασμένων στοιχείων και πολύπλοκους φορείς διαρκούν πολλά λεπτά ή ακόμα και ώρες) χρειάζεται μεγάλος αποθηκευτικός χώρος, της τάξης των εκατοντάδων Gb (Gigabyte).

# 3 Μόρφωση του Γωνιακού

# 3.1 Υλικό

Το σημαντικότερο ίσως βήμα κατά τη διαμόρφωση ενός μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων είναι η σωστή επιλογή του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί από το πρόγραμμα, ώστε να αποτυπώσει ορθότερα τη συμπεριφορά του πραγματικού υλικού κατά τις αναλύσεις. Στα πειράματα που διεξήχθησαν χρησιμοποιήθηκε χάλυβας S235 και έγινε δοκιμή εφελκυσμού σε 8 δοκίμια της οποίας τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 3.1. Ο μέσος όρος της αρχικής τάσης διαρροής  $f_y$  ήταν 315MPa, ενώ η μέση μέγιστη τάση (θραύσης)  $f_u$  ήταν 410MPa.



Σχήμα 3.1: Αποτελέσματα δοκιμών εφελκυσμού (σε διάγραμμα Τάσεων-Παραμορφώσεων) σε 8 δοκίμια (TT) από χάλυβα S235, που χρησιμοποιήθηκε κατά τα πειράματα που διεξήχθησαν στο Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών του ΕΜΠ στα πλαίσια της μελέτης «Experimental tests on members made from rolled angle sections».

Γενικώς, χρησιμοποιούνται 4 τύποι υλικού για την προσομοίωση του χάλυβα στα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων. Αυτοί είναι:

#### 1. Απολύτως Ελαστικό Υλικό (Elastic Isotropic)

Ο τύπος αυτός είναι μια υπεραπλούστευση της λειτουργίας του χάλυβα στην ελαστική του περιοχή, αλλά έχει το πλεονέκτημα γρήγορων αποτελεσμάτων όταν γίνεται στατική ανάλυση όπου ισχύει η παραδοχή μικρών παραμορφώσεων και οι τάσεις δεν πλησιάζουν το όριο διαρροής fy.

#### 2. Ελαστοπλαστικό Διγραμμικό Υλικό (Plastic-Elastic Bilinear)

Αυτή είναι η συνηθέστερη μορφή που χρησιμοποιείται σε στατικές αναλύσεις (ακόμα και κατά την εκπαίδευση των μηχανικών) που απλουστεύει χωρίς όμως να αποκλίνει σημαντικά από την ελαστοπλαστική συμπεριφορά του χάλυβα, είτε λαμβάνεται υπόψη η κράτυνση, είτε όχι. Ο χρόνος ανάλυσης είναι επίσης σχετικά γρήγορος, όπως συμβαίνει με το απολύτως ελαστικό υλικό. Μειονέκτημά του είναι ότι η πραγματική συμπεριφορά του χάλυβα δεν είναι καθόλου διγραμμική με αποτέλεσμα να μην περιγράφει σωστά το τι συμβαίνει στο μοντέλο τις κρίσιμες στιγμές κοντά στην αστοχία.

#### 3. Ελαστοπλαστικό Πολυγραμμικό Υλικό (Plastic-Elastic Multilinear)

Αυτός ο τύπος υλικού μπορεί να δώσει αποτελέσματα πολύ κοντά στην πραγματικότητα με τον όρο ότι η ανάλυση είναι στατική και όχι δυναμική. Εδώ πλέον, αναλόγως με τον βαθμό και την έκταση των παραμορφώσεων, ο χρόνος ανάλυσης αυξάνεται εμφανώς.

#### 4. Ελαστοπλαστικό Κυκλικό Υλικό (Plastic-Elastic Cyclic)

Ο τελευταίος τύπος περιγράφει ακριβέστερα τον χάλυβα και είναι απαραίτητη η χρήση του σε περίπτωση δοκιμών κοπώσεως ή δυναμικών φορτίσεων, με το μειονέκτημα να αυξάνει κατά πολύ το χρόνο διεξαγωγής των αναλύσεων, ειδικά όταν υπάρχει μεγάλος αριθμός πεπερασμένων στοιχείων και πολλοί κύκλοι φορτίσεων.

Εφόσον οι δοκιμές που πρόκειται να γίνουν περιέχουν μία σταθερώς αυξανόμενη φόρτιση και η ανάλυση θα είναι στατική, ο ακριβέστερος και ταυτόχρονα αποδοτικότερος χρονικά τύπος υλικού είναι ο τρίτος, ο οποίος και επιλέχθηκε για να περιγράψει τον εργοστασιακό χάλυβα S235 της συγκεκριμένης παρτίδας δοκιμίων. Η καμπύλη τάσεων-παραμορφώσεων φαίνεται στο Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Διάγραμμα Τάσεων-Παραμορφώσεων Ελαστοπλαστικού Πολυγραμμικού Υλικού που χρησιμοποιήθηκε στο ADINA για την περιγραφή/προσομοίωση του συγκεκριμένου εργοστασιακού χάλυβα S235 των εργαστηριακών πειραμάτων.

Τα χαρακτηριστικά του πολυγραμμικού ελαστοπλαστικού υλικού το οποίο εν συντομία θα ονομάζουμε χάλυβα "s315" είναι:

- Μέτρο Ελαστικότητας Ε=210GPa
- Λόγος του Poisson v=0,3
- Τάση πρώτης διαρροής fy=315MPa
- Τάση θραύσης (Μέγιστη Τάση) fu=410MPa

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι ο όρος "s315" δεν έχει καμμιά σχέση με τον πραγματικό εργοστασιακό χάλυβα S315, ο οποίος θα μπορούσε να φτάνει σε πολύ υψηλότερες τάσεις διαρροής και θραύσης από το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε και που οι τιμές του θα είναι πάντα σταθερές. Εμείς θέλουμε απλά η συμπεριφορά του εικονικού υλικού να παραμένει πιστή στο μέσον όρο των τιμών του πραγματικού χάλυβα, όπως έδειξαν οι 8 δοκιμές εφελκυσμού.

# 3.2 Σχεδιασμός Διατομής και Μόρφωση Πλέγματος Πεπερασμένων Στοιχείων

Τα εργοστασιακά γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής L70.7 που θα μελετήσουμε δίνονται λεπτομερώς με ακρίβεια δέκατου του χιλιοστού στους πίνακες πρότυπων διατομών του Ευρωκώδικα 3. Η γεωμετρία της διατομής είναι σχετικά απλή και αποτελείται από δύο ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαστάσεων 70x7mm που αποτελούν τα πέλματα του γωνιακού στα οποία στη συνέχεια γίνονται 3 στρογγυλεύσεις 90° (2 μικρές στα άκρα και 1 μεγαλύτερη στη εσωτερική θέση ένωσής τους), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3: Πραγματική γεωμετρία της Πρότυπης Διατομής L70.7 που αποτελείται από δύο ορθογώνια πέλματα διαστάσεων 70mm x 7mm. Οι ακτίνες των στρογγυλεύσεων δίνονται από τους πίνακες Πρότυπων Διατομών του ΕΚ3.

Εδώ φτάνουμε στην πρώτη δυσκολία της μοντελοποίησης, που είναι η απόδοση των καμπύλων τμημάτων. Σημειώνεται ότι τα πεπερασμένα στοιχεία είναι είτε πολυγωνικά (όταν πρόκειται για επιφανειακά), είτε πρισματικά (όταν πρόκειται για χωρικά). Συνεπώς, πρέπει να προσεγγίσουμε τις τρεις καμπύλες με ευθύγραμμα τμήματα, αρκετά πυκνά ώστε να μην αλλάζει το εμβαδό ή η θέση του κέντρου βάρους της διατομής, αλλά και τόσα ώστε κατά τη δημιουργία των πεπερασμένων στοιχείων (meshing) να μην προκύπτουν μεγάλες διαφοροποιήσεις μεγεθών μεταξύ τους.

Έτσι, επελέχθησαν 6 σημεία επί των μικρών καμπυλοτήτων και 7 επί της μεγάλης (συμπεριλαμβανομένων των άκρων), ώστε να μπορεί να γίνει η μόρφωση του πλέγματος με τη ζητούμενη ακρίβεια. Αντίστοιχα, οι εξωτερικές ευθυγραμμίες χωρίστηκαν σε 10 ίσα τμήματα και οι εσωτερικές σε 8, όπως φαίνεται λεπτομερώς στο Σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Τελική διαμόρφωση της Γραμμικής Περιφέρειας της Διατομής L70.7, όπου απεικονίζονται όλα τα σημεία (nodes) που θα αποτελέσουν τις κορυφές των πεπερασμένων στοιχείων.

Ακολούθησε η μόρφωση του πλέγματος των επιφανειακών πεπερασμένων της διατομής, η οποία θα αποτελούσε και τη βάση όλων των δοκών που θα εξετάζονταν με χρήση χωρικών πεπερασμένων στοιχείων (3D-SOLID). Αυτό θα γίνεται με προβολή και επανάληψη της μορφωμένης διατομής κατά τον διαμήκη άξονα x, όπως θα περιγράψουμε παρακάτω. Λεπτομερέστερα, η μόρφωση έγινε με free-form meshing, 4-πλευρα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία και ρυθμό ανάπτυξης (growth rate) 1,5 (ελαφρώς μικρότερο από το default του προγράμματος 1,8 ώστε να μην υπάρχει μεγάλη διαφορά μεγέθους μεταξύ γειτονικών στοιχείων). Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 3.5. Οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους της διατομής ελήφθεισαν από τους πίνακες πρότυπων διατομών του Ευρωκώδικα.



Σχήμα 3.5: Μορφωμένη διατομή L70.7 με πεπερασμένα στοιχεία με χαρακτηριστικά: free-form meshing, 4-πλευρα και growth rate 1.5. Με μπλε χρώμα είναι σχεδιασμένες οι πλευρές των στοιχείων και με πορτοκαλί η περίμετρος της διατομής.

Τα χωρικά πεπερασμένα στοιχεία είναι η ακριβέστερη μορφή πεπερασμένων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει με λεπτομέρεια τη συμπεριφορά ενός τρισδιάστατου μοντέλου, όπως αυτό της γωνιακής δοκού. Παρ' όλ' αυτά, τίθεται το θέμα του χρόνου διεξαγωγής των αναλύσεων, που καθώς ο φόρτος τους αυξάνεται, η καθυστέρηση μπορεί να γίνει απαγορευτική. Τα χωρικά στοιχεία πάντως παραμένουν η πιο αξιόπιστη λύση όταν γινονται περιορισμένες αναλύσεις και δεν έχουμε σαφή εικόνα για το τι αποτελέσματα αναμένουμε (πχ όταν γίνεται μελέτη κοντά στην περιοχή αστοχίας ή εμπλέκεται τοπικός λυγισμός).

Συνηθίζεται πάντως να χρησιμοποιούνται για τη μελέτη δοκών πρότυπων διατομών επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία (που απεικονίζουν κορμούς και πέλματα), καθώς ο χρόνος ανάλυσής τους είναι πολύ πιο γρήγορος από εκείνον των χωρικών και στις περισσότερες περιπτώσεις τα αποτελέσματα είναι ακριβώς τα ίδια. Για να χρησιμοποιηθούν όμως εξαρχής με ασφάλεια, θα πρέπει ο μελετητής να γνώρίζει ποιοι τρόποι φόρτισης δεν αναλύονται ικανοποιητικά ή πολλές φορές σωστά από τα επιφανειακά πεπερασμένα και εκεί να χρησιμοποιούνται αναγκαστικά τα χωρικά.

Έτσι, διαμορφώθηκε και μία διατομή του L70.7 με σκοπό να χρησιμοποιηθεί για τα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία (SHELL ELEMENTS). Αυτή αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα που αντιπροσωπεύουν τα πέλματα της διατομής και γεωμετρικά το ποθετούνται στο μέσο αυτών, κάθετα μεταξύ τους και μήκους 66,5mm. Στη συνέχεια χωρίστηκαν σε 10 τμήματα που θα όριζαν τους κόμβους των πεπερασμένων στοιχείων (Σχήμα 3.6).



Σχήμα 3.6: Διαμόρφωση της διατομής L70.7 για χρήση της με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία SHELL ELEMENTS. Αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα μήκους 66,5mm διαιρεμένα σε 10 τμήματα (10 στοιχεία ανά πέλμα). Τα SHELL ELEMENTS διαθέτουν πάχος το οποίο δεν αποτυπώνεται στο σχήμα.



Σχήμα 3.7: Η διατομή του Σχήματος 3.6 όπως την "αντιλαμβάνεται" το πρόγραμμα. Στα 2 πέλματα έχει δοθεί πάχος 7,07mm (για διατήρηση του πραγματικού εμβαδού) το οποίο όμως παρότι λαμβάνεται υπόψη κατά τις δοκιμές του προγράμματος δεν απεικονίζεται στην οθόνη (τα πέλματα των SHELL ELEMENTS παρουσιάζονται σαν άπαχες λάμες).

Στην ουσία διαμορφώσαμε τη διατομή του Σχήματος 3.7 (παραπάνω), η οποία αποτελείται από 2 ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαστάσεων 66,5x7,07mm τα οποία ενώνονται κάθετα στο μέσο των μικρών τους πλευρών. Η αύξηση του πάχους των πελμάτων από 7mm σε 7,07mm έγινε για να διατηρηθεί σωστό το εμβαδό της διατομής του γωνιακού στα 9,40cm<sup>2</sup>. Το κέντρο βάρους της συγκεκριμένης διατομής βρίσκεται 0,425mm πιο μακριά (ανά συντεταγμένη y και z) από εκείνο της πραγματικής γωνιακής διατομής, αλλά λήφθηκε υπόψη ώστε στο μοντέλο των επιφανειακών να μην υπάρχει καθόλου εκκεντρότητα όταν φορτίζεται αξονικά και κεντροβαρικά.

Έχοντας, λοιπόν, τη βάση των διατομών που θα χρησιμοποιούμε από επιφανειακά και χωρικά στοιχεία, μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στη μόρφωση της τρισδιάστατης δοκού.

#### 3.3 Διαμόρφωση των Δοκών

Μετά την κατασκευή της διατομής, που ήταν και το δυσκολότερο από τα βήματα μόρφωσης του γωνιακού, ακολουθεί η "σάρωσή" της στο χώρο κατά τον διαμήκη άξονα x της δοκού, ώστε αυτή να πάρει το τελικό της σχήμα. Πόσες όμως επαναλήψεις-προβολές της αρχικής διατομής είναι επαρκείς, ώστε το μοντέλο να δίνει ακριβή αποτελέσματα; Τα χωρικά πεπερασμένα στοιχεία δίνουν πιο αξιόπιστα αποτελέσματα, όταν οι διαστάσεις τους διαφέρουν όσο γίνεται λιγότερο μεταξύ τους (δηλαδή ιδανικώς να είναι κυβικά) και η ακρίβεια αυξάνεται με την αύξηση του πλήθους τους. Η μεγαλύτερη διάσταση πεπερασμένου στοιχείου που υπάρχει πάνω στην κατασκευασμένη διατομή είναι 7mm (βάσει της διακριτοποίησης των εξωτερικών ευθυγραμμιών). Συνεπώς, μια αρχική σκέψη είναι να χρησιμοποιήσουμε βήμα 7mm για να κατασκευάσουμε τη δοκό και σταδιακά να το μειώνουμε (αυξάνοντας έτσι τον αριθμό των πεπερασμένων στοιχείων), έως ότου το όποιο αποτέλεσμα μιας δοκιμής να συγκλίνει. Η δοκιμή που επιλέχθηκε είναι η εύρεση του κρίσιμου αξονικού φορτίου λυγισμού κατά Euler σε αμφιέρειστη δοκό. Από τα μήκη που επρόκειτο να εξεταστούν επιλέχθηκε το μικρότερο, αυτό των 650mm, για λόγους ταχύτητας. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8: Διάγραμμα επιρροής των βημάτων σάρωσης της αρχικής διατομής πάνω στο φορτίο λυγισμού Euler που υπολογίζει το πρόγραμμα στη δοκό των 650mm. Σύγκλιση αποτελεσμάτων στα 200 βήματα.

Παρατηρούμε ότι μετά τα 200 βήματα δεν υπάρχει σημαντική διαφοροποίηση, που σημαίνει ότι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων που προκύπτει από την επανάληψη της αρχικής διατομής 200 φορές είναι αρκετός. Ενδεικτικά, έγινε και μία δοκιμή με πολύ λίγες επαναλήψεις (46) για να φανεί πόσο "έξω" μπορούν να πέσουν οι υπολογισμοί αν χρησιμοποιηθούν λίγα βήματα και άρα ανεπαρκής αριθμός πεπερασμένων.

Εφόσον τα 200 βήματα δίνουν ικανοποιητική ακρίβεια, έχουμε: 650mm÷200=3,25mm, το οποίο θα είναι και το μήκος του βήματος που θα χρησιμοποιηθεί για να καθορίζει τον αριθμό των επαναλήψεων της αρχικής διατομής για τη διαμόρφωση οποιουδήποτε μήκους δοκού. Μια γρήγορη διερεύνηση της μεθόδου αυτής σε μεγαλύτερα μήκη, έδειξε ότι μπορούμε για μεγαλύτερη ευκολία και απλοποίηση να στρογγυλοποιήσουμε το παραπάνω βήμα στα 3,5mm χωρίς να αλλάζει η ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Το βήμα αυτό αντιστοιχεί στο 5% του πλάτους του πέλματος του γωνιακού. Στο Σχήμα 3.9 φαίνεται η τελική μορφή της δοκού των 650mm, όπως αυτή προέκυψε από τον κανόνα βήματος 5% του πέλματος.



Σχήμα 3.9: Τελική μορφή της δοκού μήκους 650mm με βήμα σάρωσης της αρχικής διατομής τα 3,5mm (5% του πέλματος).

# 4 Βαθμονόμηση του Προγράμματος (Calibration)

### 4.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο 6.3.1 του Ευρωκώδικα 3 που αναφέρεται στην αντοχή μελών σταθερής διατομής έναντι καμπτικού λυγισμού, γίνεται κατάταξη διατομών βάσει της γεωμετρίας τους και του υλικού τους (ποιότητα χάλυβα) σε καμπύλες λυγισμού οι οποίες συνδέουν την ανηγμένη λυγηρότητα  $\overline{\lambda}$  μιας δοκού με ένα μειωτικό συντελεστή  $\chi$  ο οποίος και "διορθώνει" την θλιπτική αντοχή του μέλους (που λόγω ισότροπης συμπεριφοράς θα ήταν ίση με την εφελκυστική βάσει του τύπου  $f_y$ : Α όπου A το εμβαδό της διατομής). Ο μειωτικός συντελεστής  $\chi$  λαμβάνει υπόψη και όποια αρχική ατέλεια ή παραμένουσες τάσεις δύναται να έχει το μέλος, πέραν της γεωμετρίας και του υλικού. Γίνεται λοιπόν προφανές ότι η τέλεια γεωμετρία που δημιουργήσαμε με τα πεπερασμένα στοιχεία δεν πρόκειται να αντικατοπτρίζει τι συμβαίνει στην πραγματικότητα σε δοκιμές θλίψης, και συγκεκριμένα αναμένονται αρκετά υψηλότερες τιμές από αυτές που θα προέκυπταν βάσει Ευρωκώδικα. Έτσι καλούμαστε να ορίσουμε ένα βαθμό αρχικών ατελειών στο μοντέλο, ώστε αυτό να δίνει αποτελέσματα αποδεκτά βάσει Ευρωκώδικα 3.

# 4.2 Δοκιμές Θλίψης Δοκού με Αρχικές Ατέλειες

Οι δοκιμές έγιναν στα τέσσερα μήκη τα οποία χρησιμοποιήθηκαν και στα εργαστηριακά πειράματα: 650mm, 1170mm, 1750mm και 2300mm, και αναζητήθηκε η αρχική ατέλεια που πρέπει να επιβάλλουμε στη δοκό υπό θλίψη, ώστε να έχουμε αποτελέσματα συνεπή κατά τον Ευρωκώδικα. Για ταχύτερη ανάλυση λόγω του πλήθους των δοκιμών που διεξήχθησαν, έγινε χρήση διγραμμικού ελαστοπλαστικού υλικού με fy=235MPa και αγνοήθηκε η κράτυνση (εξάλλου αναζητούσαμε το φορτίο της πρώτης αστοχίας, οπότε το υλικό δε θα περνούσε στην πλαστική του περιοχή).

Η δυσκολία υπήρξε στον τρόπο με τον οποίο θα ασκούταν η αξονική δύναμη, καθώς κατά πρώτον το κέντρο βάρους της διατομής βρίσκεται εκτός αυτής και κατά δεύτερον εφαρμόζοντας σημειακή δύναμη σε υλικό με χαρακτηριστικά εντός λογικών πλαισίων θα εμφανιζόταν πρόωρη αστοχία ή και διάτρηση του υλικού στη θέση εφαρμογής της. Το εμπόδιο αυτό ξεπεράστηκε με τη χρήση θεωρητικών συνδέσεων (rigid links) μεταξύ του κέντρου βάρους και της διατομής οι οποίες έχουν άπειρη στιβαρότητα και επιπλέον επιτρέπουν στο ένα άκρο να "παρακολουθεί" τις μετατοπίσεις βάσει των βαθμών ελευθερίας του άλλου άκρου (Σχήμα 4.5). Η μέθοδος αυτή έχει δύο μειονεκτήματα. Το πρώτο είναι ότι με τη σύνδεση αυτή δεν επιτρέπουμε στις ακραίες διατομές να παραμορφωθούν στο επίπεδό τους. Αυτή όμως η παραδοχή είναι πολύ κοντά στην πραγματικότητα αφού για να επιτευχθεί κεντροβαρική φόρτιση σε τέτοιου είδους διατομή θα πρέπει είτε να συγκολληθεί εγκάρσια λεπίδα, οπότε πάλι δεν θα επιτρέπεται η παραμόρφωση της ακραίας διατομής στη θέση συγκολλήσεως, είτε η δύναμη να ασκηθεί με χρήση επίπεδης πρέσας (χάνοντας πλέον την αρθρωτή στήριξη) όπου και πάλι οι τεράστιες τριβές που θα αναπτυχθούν δεν θα επιτρέψουν την παραμόρφωση των επιφανειών επαφής στο επίπεδό τους. Το δεύτερο μειονέκτημα των rigid links είναι ότι κατά την άσκηση του σημειακού φορτίου αναπτύσσονται τοπικές ροπές στην περιοχή της στήριξης που οδηγούν το πρόγραμμα σε συμπέρασμα πρόωρης αστοχίας (που δεν έχει να κάνει με λυγισμό ή τη γενικότερη πορεία θλίψης της δοκού). Έτσι, στην περιοχή των στηρίξεων (περί το 5% του μήκους της δοκού) δόθηκε στο υλικό μόνο ελαστική συμπεριφορά (Σχήμα 4.6), ώστε οι όποιες τάσεις που αναπτύσσονται στα άκρα λόγω στηρίξεων να μην θεωρούνται από το πρόγραμμα ως αστοχία κατά την ανάλυση.

Τα αποτελέσματα των ελέγχων αξονικής θλίψεως φαίνονται στους πίνακες 4.1, 4.2, 4.3 και 4.4. Σε κάθε μήκος δοκιμών έχει επισημανθεί η αρχική ατέλεια που πρέπει να δοθεί στη δοκό, ώστε η αντοχή της να είναι αυτή που υποδεικνύει ο Ευρωκώδικας όταν ληφθεί υπόψη ο μειωτικός συντελεστής χ.

ΔΟΚΟΣ 650mm λ̄=0,507			ΔΟΚΟΣ 1170mm λ̄=0,913		
ΑΡΧΙΚΗ ΑΤΕΛΕΙΑ	ANTOXH (kN)		ΑΡΧΙΚΗ ΑΤΕΛΕΙΑ	ANTOXH (kN)	
0	220,9		0	220,9 168.5	
L/1000	208,5		L/1000		
L/750	204,7		, I /750	160 5	
L/500	197,6		L/700	100,5	
L/450	195,4		L/500	148,1	
L/435	194,6		L/444	144,2	
L/400	192,7		L/400	140,7	
L/250	179,9		L/250	124,3	

Πίνακες 4.1, 4.2, 4.3 και 4.4: Διερεύνηση απαιτούμενης αρχικής ατέλειας ανά μελετώμενη δοκό, ώστε να προκύπτει η αντοχή της διορθωμένη κατά ΕΚ3.

ΔΟΚΟΣ 1750mm λ =1,366		ΔΟΚΟΣ 2300mm λ =1,795		
ΑΡΧΙΚΗ ΑΤΕΛΕΙΑ	ANTOXH (kN)	ΑΡΧΙΚΗ ΑΤΕΛΕΙΑ	ANTOXH (kN)	
0	119,6	0	68,9	
L/1000	100,1	L/1000	61,7	
L/750	96	L/750	59,9	
L/500	89,5	L/500	56,7	
L/450	87,6	L/455	55,9	
L/400	85,4	L/450	55,8	
L/250	76,1	L/250	49,7	

Παρατηρούμε ότι για αρχική ατέλεια περί την τιμή L/450 (όπου L το μήκος της δοκού) παίρνουμε τα ζητούμενα αποτελέσματα βάσει Ευρωκώδικα. Να σημειωθεί εδώ ότι ως "αρχική ατέλεια" ορίζουμε: την αρχική μετατόπιση που έχει υποστεί το κέντρο βάρους της μεσαίας διατομής τείνοντας η δοκός να πάρει το σχήμα της 1<sup>ης</sup> ιδιομορφής λυγισμού <sup>1</sup> της (τοξοειδής), καθώς αυτή αποκλίνει στην αφόρτιστη κατάστασή της από την πλήρη ευθυγραμμία. Ο Ευρωκώδικας αναφέρει ότι για μέλη με ανηγμένη λυγηρότητα μικρότερη

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Όπως θα δούμε παρακάτω, δεν έχουν όλα τα μήκη των γωνιακών ως 1<sup>η</sup> ιδιομορφή το αναμενόμενο ημιτονοειδές τόξο. Αυτό παρουσιάζεται ως 2<sup>η</sup> ιδιομορφή, ταυτίζεται με το φορτίο της θεωρητικής 1<sup>ης</sup> ιδιομορφής κατά Euler, ενώ η πραγματική 1<sup>η</sup> ιδιομορφή έχει στρεβλωτή μορφή.

ή ίση με 0,2 δεν χρειάζεται να γίνει έλεγχος έναντι λυγισμού. Στη δοκό με διατομή L70.7 αυτή επιτυγχάνεται σε μήκος 256mm, από το οποίο και κάτω δε χρειάζεται προσθήκη αρχικής ατέλειας στο μοντέλο, αν και η χρήση ενός τέτοιου μέλους είναι σπάνια, αν όχι ανύπαρκτη, σε έργα Πολιτικού Μηχανικού.

Η βαθμονόμηση επιλέχθηκε να γίνει με επιβολή αρχικής ατέλειας και όχι αρχικών παραμενουσών τάσεων. Ο βασικότερος λόγος είναι ότι η αρχική ατέλεια είναι ένας παράγων απολύτως ελεγχόμενος από το μελετητή ως προς τη γεωμετρία του και τη δυσμενέστερη μορφή του, ενώ η επιβολή παραμενουσών τάσεων είναι και πιο δύσκολη και πιο αφηρημένη (δηλαδή πού θα τεθούν και σε τι βαθμό). Ο δεύτερος λόγος είναι ότι η ανάλυση γίνεται πολύ γρηγορότερα όταν επιβάλλονται αρχικές γεωμετρικές ατέλειες απ' ότι αρχικές υπάρχουσες τάσεις στο υλικό.

# 4.3 Παρατηρήσεις για τη Συμπεριφορά Δοκών Γωνιακής Διατομής σε Αξονική Θλίψη

Αρχικά είχε επιλεγεί οι δύο στηρίξεις της αμφιέρειστης δοκού να έχουν τους εξής βαθμούς ελευθερίας:

- Αρθρωση: δέσμευση μετακίνησης κατά x, y, z, δέσμευση περιστροφής κατά x
- Κύλιση: δέσμευση μετακίνησης κατά y, z, δέσμευση περιστροφής κατά x

Οι στηρίξεις αυτές εφαρμόζονταν στα κέντρα βάρους των ακραίων διατομών και το θλιπτικό φορτίο εφαρμοζόταν στην κύλιση κατά *x*.

Είναι απαραίτητο στο σημείο αυτό να ορίσουμε, πέραν των γεωμετρικών αξόνων x, y, z, και τους δύο βασικούς για τη διατομή άξονες, τον ισχυρό u και τον ασθενή v. Όλοι οι άζονες παρουσιάζονται συνοπτικά στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Αναπαράσταση των βασικών αξόνων της Διατομής L70.7

Ο άξονας x δεν φαίνεται στο Σχήμα 4.1 γιατί βρίσκεται κάθετα σε αυτό και περνά από το σημείο τομής των υπολοίπων, που είναι και το κέντρο βάρους της διατομής.

Οι ημιτονοειδείς ιδιομορφές λυγισμού που δύναται να πάρει η δοκός αναμένονταν, όπως και συνέβη, να γίνουν περί του ασθενή άξονα ν, δηλαδή οι μετατοπίσεις των διαφόρων σημείων της δοκού να γίνουν πάνω στον ισχυρό άξονα u. Η 1<sup>η</sup> ιδιομορφή, η οποία και εξετάστηκε καθώς είναι η πιο κρίσιμη και είναι αυτή βάσει της οποίας δίνεται η αρχική ατέλεια, φαίνεται στο Σχήμα 4.2.

Όλες οι δοκιμές έδειξαν αυτό το σχήμα (Σχήμα 4.2) ως 1<sup>η</sup> ιδιομορφή, δηλαδή την δυνητικότητα της δοκού να εκτραπεί από την ευθυγραμμία της προς τα θετικά του άξονα *u* καθώς πλησιάζουμε το φορτίο λυγισμού κατά Euler. Δεν παρατηρήθηκε καμμιά φορά εκτροπή προς τα αρνητικά του άξονα *u* (όπως π.χ. θα συνέβαινε σε διατομή Διπλού Ταυ κατά ισχυρό άξονα *y*) και αυτό γιατί στη γωνιακή διατομή ο ασθενής άξονας *v* δεν είναι άξονας συμμετρίας της.

Είναι, όμως, σωστό το συμπέρασμα ότι η 1<sup>η</sup> ιδιομορφή λυγισμού έχει πάντοτε την μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 4.2; Τι θα συμβεί αν στην κύλιση που θέσαμε προηγουμένως απελευθερώσουμε την περιστροφή περί τον άξονα x; (μιας και η σταθερότητα του μοντέλου εξασφαλίζεται επαρκώς, έχοντας δεσμεύσει την ανεξέλεγκτη περιστροφή της δοκού περί x μόνο στο άκρο της άρθρωσης).

Μια δεύτερη διερεύνηση της 1<sup>ης</sup> ιδιομορφής λυγισμού, έχοντας πλέον ελεύθερη την περιστροφή περί x του άκρου της δοκού στην κύλιση, έδειξε ότι η δοκός έχει την δυνητικότητα να στρεβλωθεί περί τον διαμήκη της άξονα x προτού συμβεί η ημιτονοειδής καμπύλωση και μάλιστα σε φορτίο πολύ μικρότερο από εκείνο που υπολογίζεται κατά Euler. Η πραγματική 1<sup>η</sup> ιδιομορφή λυγισμού της δοκού των 650mm φαίνεται στο Σχήμα 4.3. Να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι το φαινόμενο της στρέβλωσης των κοντών μελών γωνιακής διατομής είχε παρατηρηθεί και εργαστηριακά. Το φορτίο που δίνει πλέον τη δυνατότητα στη δοκό να λυγίσει στρεβλά είναι σχεδόν το μισό του φορτίου που απαιτείται για να λυγίσει τοξωτά (Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.2: 1<sup>η</sup> ιδιομορφή λυγισμού (ημιτονοειδής) που συμβαίνει στη δοκό κοντά στο κρίσιμο φορτίο Euler.



Σχήμα 4.3: Ιδιάζουσα ιδιομορφή λυγισμού γωνιακής διατομής (στρεβλώδης) που αναλόγως το μήκος της δοκού μπορεί να συμβεί πριν το κρίσιμο φορτίο Euler.

Ταυτόχρονα, παρατηρήθηκε ότι το παραπάνω φαινόμενο δε συνέβαινε σε όλα τα μήκη των γωνιακών, ούτε η διαφορά του απαιτούμενου φορτίου μεταξύ των δύο ιδιομορφών ήταν σταθερή. Σε μεγαλύτερα μήκη η ημιτονοειδής ιδιομορφή συνέβαινε 1<sup>η</sup> (π.χ. >1500mm), ενώ σε κοντότερα μέλη η στρεβλή ιδιομορφή προηγούταν (π.χ. <1000mm). Αναζητήθηκε λοιπόν μέσω πολλών δοκιμών η κρίσιμη λυγηρότητα στην οποία οι δύο ιδιομορφές απαιτούσαν ίσο φορτίο ώστε να συμβούν. Το μήκος στο οποίο οι δύο ιδιομορφές συμβαίνουν με το ίδιο φορτίο βρέθηκε στα 1186mm (Σχήμα 4.4) που για τη συγκεκριμένη διατομή που εξετάζουμε αντιστοιχεί σε ανηγμένη λυγηρότητα  $\overline{\mathbf{A}}$ =0,9255.



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα Κρίσιμου Φορτίου Λυγισμού συναρτήσει του Μήκους της δοκού. Η μορφή της 1<sup>ης</sup> ιδιομορφής εξαρτάται από το μήκος του γωνιακού.



Σχήμα 4.5: Σύνδεση των ακραίων διατομών με το αντίστοιχο κέντρο βάρους τους μέσω στιβαρών συνδέσμων (άπειρης δυσκαμψίας) Rigid Links.



Σχήμα 4.6: Απαγόρευση αστοχίας (πλήρως ελαστικό υλικό) στην περιοχή των στιβαρών συνδέσμων Rigid Links σε μήκος 5% του μήκους L της δοκού.

# 5 Χρήση του Μοντέλου για Προσομοίωση των Εργαστηριακών Δοκιμών

# 5.1 Εισαγωγή

Έχοντας διαμορφώσει το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιήσουμε, θέτοντας το κατάλληλο υλικό και βαθμονομώντας με τον κατάλληλο βαθμό αρχικής ατέλειας, μπορούμε να προχωρήσουμε στην προσομοίωση των εργαστηριακών δοκιμών έκκεντρης αξονικής θλίψης και των δοκιμών κάμψης. Γνωρίζοντας πώς ακριβώς διεξήχθησαν τα πειράματα όσον αφορά στον τρόπο εφαρμογής του θλιπτικού φορτίου, στον τρόπο προσομοίωσης των αρθρωτών στηρίξεων, αλλά και στο μέγεθος των μετρημένων αρχικών ατελειών των δοκιμίων που εξετάστηκαν, θα πρέπει αντίστοιχα να κάνουμε κάποιες τροποποιήσεις στο μοντέλο μας κατά τη διάρκεια των δοκιμών. Οι τροποποιήσεις αυτές θα αφορούν μόνο τις συγκεκριμένες δοκιμές που προσπαθούμε να προσομοιώσουμε και δεν μπορεί να γίνει γενικευμένη εφαρμογή τους στο μοντέλο που έχουμε κατασκευάσει, σε αντίθεση με την βαθμονόμηση που έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

# 5.2 Παράγοντες που Οδήγησαν στην Τροποποίηση του Μοντέλου

#### 5.2.1 Βαθμός Αρχικών Ατελειών

Τα δοκίμια των εργαστηριακών πειραμάτων μετρήθηκαν εκτενώς με όργανα υψηλής ακρίβειας (όπως το Mitutoyo micrometer το οποίο φτάνει ακρίβεια ±0.01mm). Οι αρχικές ατέλειες που αφορούσαν στην τοξοειδή μορφή των δοκών ήταν της τάξης του L/5000, και άρα αμελητέες για να τις θέσουμε στο μοντέλο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της ευθυγραμμίας των δοκιμίων ήταν ότι σε κεντρική αξονική φόρτιση, ένα από τα δοκίμια μήκους 2300mm έφτασε σε αντοχή τα 215kN όταν το θεωρητικό κρίσιμο φορτίο λυγισμού του κατά Euler είναι 68.5kN! Επίσης, τα πλάτη και πάχη των πελμάτων ήταν τέτοια που δεν χρειάστηκε επέμβαση στις διαστάσεις και τη γεωμετρία του μοντέλου μας, ώστε να μειώσουμε ή να αυξήσουμε το εμβαδόν της διατομής του.

#### 5.2.2 Αρθρωτές Στηρίξεις

Αναφέραμε στο κεφάλαιο βαθμονόμησης του μοντέλου ότι για τις δοκιμές λυγισμού των δοκών χρησιμοποιήσαμε μία άρθρωση και μία κύλιση (αμφιέρειστη στήριξη). Στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων, οι αρθρώσεις και οι κυλίσεις συμπεριφέρονται ακριβώς όπως στα θεωρητικά μοντέλα, δηλαδή δεν φέρνουν καμμιά απολύτως αντίσταση στους μη δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας τους. Οι αρθρώσεις έχουν μηδενική ροπή και οι κυλίσεις μηδενική τριβή. Κάτι τέτοιο στην πραγματικότητα δεν συμβαίνει και μάλιστα όταν σε μία πραγματική άρθρωση συγκεντρωθεί πολύ μεγάλο φορτίο, τόσο αυτή τείνει να αντισταθεί στην όποια περιστροφή. Στα προγράμματα ανάλυσης συνηθίζεται να τοποθετείται στροφικό ελατήριο στη θέση των αρθρώσεων με σταθερά ελατηρίου

κατάλληλη ώστε η άρθρωση να συμπεριφέρεται εντός του προγράμματος όπως στην πραγματικότητα. Βεβαίως, αυτή η προσέγγιση εμπεριέχει κινδύνους. Πρώτον, πόση θα είναι αυτή η σταθερά του ελατηρίου; Δεύτερον, όντως, η πραγματική άρθρωση φέρνει κάποια αντίσταση, αλλά είναι λογικό καθώς η περιστροφή θα αυξάνεται να αυξάνεται αντίστοιχα και η αντίσταση; Αν συνέβαινε αυτό τότε σε μεγάλες στροφές η μοντελοποιημένη άρθρωση κάθε άλλο παρά "άρθρωση" θα παρίστανε. Για μεγάλες στροφές πρέπει να χρησιμοποιείται στροφικό ελατήριο με μη γραμμική συμπεριφορά, δηλαδή να φτάνει μια μέγιστη τιμή αντίστασης και μετά, συνήθως, να την διατηρεί σταθερή. Στις συγκεκριμένες δοκιμές που εξετάζουμε, οι στροφές των άκρων είναι τόσο μικρές (της τάξης των 10-30 mrad) που το γραμμικώς συμπεριφερόμενο ελατήριο να φέρνει την θεωρητική μας άρθρωση πολύ κοντά στην πραγματική. Πόση, όμως, θα είναι η σταθερά του; Επειδή, ο συγκεκριμένος παράγων είναι άγνωστος και στην πραγματικότητα δεν είναι ούτε σταθερός (π.χ. δεν έχουν όλες οι δοκιμές τον ίδιο βαθμό λίπανσης των στηρίξεων), κρίθηκε σκόπιμο να παραμείνει εκτός δοκιμών μέγρις ότου καταλήξουμε στις τροποποιήσεις του μοντέλου βάσει των άλλων δύο παραγόντων (αρχικές ατέλειες, τρόπος άσκησης φορτίου), και στη συνέχεια να προστεθεί συμπληρωματικώς στο βαθμό που χρειάζεται.

#### 5.2.3 Τρόπος Άσκησης του Φορτίου

Στα εργαστηριακά πειράματα έγινε προσεγμένη προσπάθεια επίτευξης της άσκησης σημειακού αξονικού φορτίου επί των ζητούμενων έκκεντρων αξόνων.

Στα άκρα κάθε δοκού συγκολλήθηκαν λεπίδες παχους 37mm και 47mm και μεγάλης επιφάνειας 210x210mm, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση που κάνει το μοντέλο μας με την χρήση των rigid links είναι πολύ κοντά στην πραγματικότητα, αφού οι λεπίδες αυτές είναι πολύ πιο άκαμπτες από τη δοκό και λόγω συγκόλλησης δεν επιτρέπουν στις ακραίες διατομές να παραμορφωθούν.

Στην επιθυμούμενη θέση άσκησης του φορτίου τοποθετήθηκε επί των παραπάνω λεπίδων μία κεφαλή με σφαιρική άνω επιφάνεια ακτίνας 85mm η οποία και θα ερχόταν σε επαφή με την επίπεδη οριζόντια επιφάνεια της υδραυλικής πρέσας που θα ασκούσε το θλιπτικό φορτίο. Το υλικό της κεφαλής και των λεπίδων επιλέχθηκε κατάλληλα ώστε οι παραμορφώσεις του σε σχέση με το υλικό της δοκού να είναι ελάχιστες και ασήμαντες (μεγαλύτερο Μέτρο Ελαστικότητας).

Το συνολικό μήκος αυτής της κατασκευής είχε το εκάστοτε μελετώμενο μήκος (απόσταση μεταξύ ανωτέρων σημείων των δύο σφαιρικών κεφαλών).

Πράγματι, η δομή αυτή πετύχαινε την αμφιέρειστη στήριξη του δοκιμίου στον επιθυμητό άξονα φόρτισης, όπως αυτός οριζόταν μεταξύ των δύο ανωτέρων σημείων των σφαιρικών κεφαλών.



Κατά τη διαδικασία, όμως, της φόρτισης του δοκιμίου, και κυρίως όταν αυτό πλησίαζε το μέγιστο της αντοχής του, τα άκρα του στρέφονταν περί τους άξονες y και z, καθώς το δοκίμιο έχανε σταδιακά την ευθυγραμμία του.

Η στροφή αυτή άλλαζε συνεχώς αυτά τα "ανώτερα" σημεία των σφαιρικών επιφανειών τα οποία έρχονταν σε επαφή με την επιφάνεια της πρέσας, με αποτέλεσμα τη μεταφορά του άξονα φόρτισης του δοκιμίου. (Σχήμα 5.1, Σχήμα 5.2)



Σχήμα 5.1: Αρχική θέση σημείου επαφής κεφαλής-πρέσας. Ο άξονας φόρτισης διέρχεται ακριβώς από το σημείο που επιθυμούμε να φορτίσουμε.



Σχήμα 5.2: Τελική θέση σημείου επαφής κεφαλής-πρέσας τη στιγμή της αστοχίας. Λόγω λυγισμού του μέλους, η κεφαλή έχει στραφεί με αποτέλεσμα ο άξονας φόρτισης να έχει μετατοπιστεί από την αρχική του επιθυμητή θέση.

Στα Σχήματα 5.1 και 5.2 φαίνεται με κόκκινο ο άξονας φόρτισης του δοκιμίου, και στο Σχήμα 5.2 είναι πλέον ορατή η μετατόπισή του από την αρχική του θέση λόγω αλλαγής του σημείου επαφής μεταξύ σφαιρικής κεφαλής και πρέσας.

Έτσι, το δοκίμιο κατέληγε να αστοχεί σε εκκεντρότητα διαφορετική από εκείνη που είχε αρχικά τεθεί στην κατασκευή. Η μετατόπιση του σημείου επαφής στους άξονες y και z ήταν τέτοια όση και η στροφή της κεφαλής περί τους άξονες z και y αντίστοιχα (σε rad) επί την ακτίνα της σφαιρικής επιφάνειας. Δηλαδή:

 $\Delta y = \Delta \varphi_z(rad) \cdot 85(mm)$ 

 $\Delta z = \Delta \varphi_y(rad) \cdot 85(mm)$ 

Η θέση που μας ενδιέφερε ήταν εκείνη της αντοχής του δοκιμίου. Επειδή, οι συνδέσεις των rigid links που χρησιμοποιούμε δεν επιτρέπουν την σταδιακή μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης ως προς την επιφάνεια που συνδέεται σε αυτό, έπρεπε η αρχική εκκεντρότητα να διορθωθεί. Συνεπώς, σε κάθε δοκιμή έτρεχε πρώτα μία δοκιμαστική ανάλυση από την οποία βλέπαμε τη στροφή της κεφαλής κατά την ανάπτυξη της μέγιστης θλιπτικής αντοχής του δοκιμίου (που ήταν της τάξης των 10 με 40 mrad ανάλογα την δοθείσα εκκεντρότητα). Στη συνέχεια, με χρήση των παραπάνω τύπων γινόταν διόρθωση της επιβαλλόμενης εκκεντρότητας στο δοκίμιο βάσει εκείνης της θέσης αστοχίας που προέκυπτε από τη δοκιμαστική ανάλυση. Ακολουθούσε μία δεύτερη ανάλυση της οποίας την αντοχή συγκρίναμε με την αντίστοιχη πειραματική τιμή.

Τέλος, γινόταν συμπλήρωση του μοντέλου με το προαναφερθέν στροφικό ελατήριο, ώστε να ληφθεί υπόψη και ο τελευταίος σημαντικός παράγων που μέχρι τώρα ήταν άγνωστη η τιμή του. Όπως και ήταν αναμενόμενο, η σταθερά του στροφικού ελατηρίου διέφερε από δοκιμή σε δοκιμή, αλλά η τιμή της παρέμενε σχετικά μικρή (1-15kNm/rad) και λαμβάνοντας υπόψη το μέγεθος των στροφών (10-40mrad) οι ροπές που έδινε ήταν μικρές και ανταποκρίνονταν στην πραγματικότητα.

## 5.3 Δοκιμές Έκκεντρης Αξονικής Θλίψης Δοκών Διατομής L70.7



Σχήμα 5.3: Συμβολισμός αξόνων της Διατομής L70.7. Ο διαμήκης (στο μέλος) άξονας x διέρχεται κάθετα στο επίπεδο της διατομής στο σημείο τομής των υπολοίπων αξόνων (δηλαδή από το κέντρο βάρους της)

Οι εκκεντρότητες δόθηκαν πάνω στους άξονες *u*, *v* και *y* (Σχήμα 5.3) σε αποστάσεις από το κέντρο βάρους που καθόριζαν τα εργαστηριακά πειράματα.

Τα μήκη που εξετάστηκαν ήταν:

- **-** 650 mm
- 1170 mm
- 1750 mm
- 2300 mm

Η πρώτη δοκός που εξετάστηκε ήταν η 650 και η ανάλυση έγινε με χωρικά πεπερασμένα στοιχεία. Στη συνέχεια, εξετάστηκε ξανά με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία και διαπιστώθηκε ότι με εξαίρεση την εκκεντρότητα κατά τον ασθενή άξονα ν (συμπεριφορά που θα αναλύσουμε στη συνέχεια) αυτά έδιναν ίδιες καμπύλες συμπεριφοράς με τα χωρικά. Έτσι, η ανάλυση συνεχίστηκε και στα υπόλοιπα μήκη με χρήση επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων, με μόνη εξαίρεση τις εκκεντρότητες κατά άξονα ν όπου και έγινε χρήση του μοντέλου των χωρικών πεπερασμένων.

#### 5.3.1 Αποτελέσματα Δοκού Μήκους 650mm

Με μπλε φαίνεται η αρχική δοκιμαστική καμπύλη όπου ελέγχεται η στροφή των ακρών και με πορτοκαλί η τελική καμπύλη συμπεριφοράς με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο στις στηρίξεις (Σχήμα 5.4). Ο όρος "ecc u22" σημαίνει δοθείσα εκκεντρότητα φόρτισης-στήριξης 22mm από το κέντρο βάρους της διατομής επί του άξονα u. Τα διαγράμματα συσχετίζουν τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής του φορτίου κατά άξονα x με το μέγεθος του φορτίου αυτού (μετρούμενο σε kN):



Σχήμα 5.4: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 650mm με εκκεντρότητα 22mm κατά u. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.

Παρατηρούμε αμέσως πόσο επηρέαζε την αντοχή του δοκιμίου η μικρή αλλαγή της εκκεντρότητας κατά την πορεία του εργαστηριακού πειράματος καθώς και η συμπεριφορά των πραγματικών αρθρώσεων (παρότι σε μικρότερο βαθμό). Ακολουθούν οι αντίστοιχες καμπύλες για τις εκκεντρότητες v22 και y35 (Σχήμα 5.5 και Σχήμα 5.6):



Σχήμα 5.5: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 650mm με εκκεντρότητα 22mm κατά ν. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.



Σχήμα 5.6: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 650mm με εκκεντρότητα 35mm κατά y. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.

Οι τελικές καμπύλες δοκιμών μέσω του προγράμματος φαίνονται συγκεντρωτικά παρακάτω (Σχήμα 5.7 και Πίνακας 5.1):



Σχήμα 5.7: Συγκεντρωτικό διάγραμμα απόκρισης της δοκού των 650mm για τις διάφορες εκκεντρότητες που εξετάστηκαν.

Πίνακας 5.1: Συγκεντρωτιι	κός πίνακας με τι <u>ς</u>	ελάχιστες και	μέγιστες τιμέ	ς των αντίστοιχων
εργαστηριακών π	ειραμάτων (F exp	erimental) στη	<u>δοκό των 6</u> 50	)mm.

	Fmax (kN)	Fexp		
u22	135,73	134,61 - 139,78		
v22	177,16	172,72 - 185,51		
y35	93,26	93,32 - 95,19		

Όπως και ήταν αναμενόμενο, η εκκεντρότητα κατά τον ασθενή άξονα v επηρεάζει λιγότερο την αντοχή της δοκού (177.16kN), της οποίας η διατομή διαρρέει υπό κεντρική αξονική θλίψη στα 296.1kN, και βάσει Ευρωκώδικα 3 αυτή μειώνεται στα 260.85kN. Επίσης, φαίνεται από την ομαλότητα ή μη της αλλαγής της κλίσης των καμπυλών ότι για εκκεντρότητες κατά τους γεωμετρικούς άξονες y (και z λόγω συμμετρίας) και τον ισχυρό άξονα u η δοκός έχει μια αρκετά πλάστιμη συμπεριφορά κατά την αστοχία της σε αντίθεση με την εκκεντρότητα κατά τον ασθενή άξονα v όπου η αστοχία είναι ελαστική και συμβαίνει λυγισμός (θα ελέγξουμε στη συνέχεια τι είδους).

Η εκκεντρότητα λοιπόν κατά ν, όταν χρησιμοποιήθηκαν επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία (SHELL ELEMENT), δεν απέδιδε ακριβώς την αναμενόμενη καμπύλη αντοχής, όπως αυτή είχε προκύψει από το εργαστηριακό πείραμα και το μοντέλο των χωρικών πεπερασμένων (3D-SOLID). Πιο συγκεκριμένα, η φόρτιση ήταν τέτοια ώστε το ένα πέλμα

να κάμπτεται περί τον τοπικό του ασθενή άξονα (που είναι παράλληλος στον καθολικό z) με αποτέλεσμα τα επιφανειακά στοιχεία να οδηγούν, λίγο πριν την μέγιστη πλαστική παραμόρφωση που μπορούσε να φτάσει το πέλμα αυτό, σε τοπικό λυγισμό του, όπως φαίνεται παρακάτω (Σχήμα 5.8):



Σχήμα 5.8: Αστοχία δοκού 650mm σε θλίψη κατά εκκεντρότητα στον άξονα ν λόγω τοπικού λυγισμού με χρήση επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων (SHELL). Αυτό το φαινόμενο ΔΕΝ παρατηρήθηκε στο εργαστήριο.

Η δυσκαμψία του δοκιμίου ήταν τέτοια που αυτός ο τοπικός λυγισμός δεν ήταν ικανός να σταματήσει την ανοδική πορεία της καμπύλης αντοχής, η οποία συνέχιζε μέχρι το αναμενόμενο από το εργαστηριακό πείραμα μέγιστο με πολύ μικρότερη κλίση σχεδόν σαν πλατό. Τέτοιος λυγισμός όμως δεν είχε παρατηρηθεί στα πειράματα που είχαν διεξαχθεί στο εργαστήριο. Την απάντηση για την ακριβή συμπεριφορά του δοκιμίου υπό τη συγκεκριμένη φόρτιση την έδωσαν τα χωρικά πεπερασμένα στοιχεία (3D-SOLID ELEMENTS), δίνοντας την τελική καμπύλη που παρουσιάστηκε προηγουμένως και η παραμόρφωση του δοκιμίου φαίνεται παρακάτω (Σχήμα 5.9):



Σχήμα 5.9: Αστοχία δοκού 650mm σε θλίψη κατά εκκεντρότητα στον άξονα ν με χρήση χωρικών πεπερασμένων στοιχείων (3D-SOLID). ΔΕΝ συμβαίνει τοπικός λυγισμός.

Στο Σχήμα 5.9 φαίνεται, παρά την πολύ δυσμενή για το κάτω πέλμα φόρτιση, ότι αυτό δεν παθαίνει τοπικό λυγισμό, αλλά δύναται να φτάσει κοντά στο όριο διαρροής του σε μεγάλο κομμάτι του όγκου του (κόκκινη περιοχή), πριν συμβεί στη δοκό καμπτικός λυγισμός περί τον ασθενή άξονα. Στην εικόνα φαίνεται η κατανομή των ενεργών ορθών τάσεων και η μορφή της δοκού την στιγμή που ασκείται σε αυτήν το μέγιστο φορτίο αντοχής της. Πρέπει πάντως να τονίσουμε ότι η διαφορά μεταξύ επιφανειακών και χωρικών πεπερασμένων στοιχείων βρίσκεται στην περιγραφή της μη γραμμικής συμπεριφοράς της δοκού. Ο ελαστικός κλάδος καθώς και το μέγιστο θλιπτικό φορτίο της δοκού παραμένουν ίδια και στα δύο μοντέλα.

Γνωρίζοντας πλέον ποιο μοντέλο πεπερασμένων περιγράφει ορθότερα τη συμπεριφορά της δοκού διατομής L70.7 στην εκάστοτε εκκεντρότητα, το εφαρμόσαμε και στα υπόλοιπα μήκη.

#### 5.3.2 Αποτελέσματα Δοκού Μήκους 1170mm

Ξανά, με μπλε φαίνεται η αρχική δοκιμαστική καμπύλη όπου ελέγχεται η στροφή των ακρών και με πορτοκαλί η τελική καμπύλη συμπεριφοράς με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο στις στηρίξεις (Σχήματα 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15).



Σχήμα 5.10: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 1170mm με εκκεντρότητα 5mm κατά u. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.



Σχήμα 5.11: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 1170mm με εκκεντρότητα 15mm κατά u. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.



Σχήμα 5.12: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 1170mm με εκκεντρότητα 22mm κατά u. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.







Σχήμα 5.14: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 1170mm με εκκεντρότητα 35mm κατά y. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.



Οι τελικές καμπύλες δοκιμών για κάθε δοθείσα εκκεντρότητα φαίνονται συγκεντρωτικά στο Σχήμα 5.15:

Σχήμα 5.15: Τελικό Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 1170mm για κάθε εκκεντρότητα που εξετάστηκε.

-0,004

-0,005

-0,006

-0,007

<sup>-0,003</sup> m

-0,001

0,000

-0,002

Παρατίθεται πάλι συγκριτικός πίνακας (Πίνακας 5.2) με τις μέγιστες τιμές των αντίστοιχων εργαστηριακών πειραμάτων. Ο Πίνακας 5.2 περιέχει κυρίως μονές τιμές και όχι εύρος τιμών όπως ο Πίνακας 5.1 της δοκού μήκους 650mm και αυτό διότι στη δοκό των 1170mm διεξήχθη από μία μόνο δοκιμή ανά εκκεντρότητα (πλην της u15). Παρατηρούμε τη μεγάλη διαφορά στη δοκιμή αντοχής κατά v22. Το πιθανότερο είναι πως έγινε κάποια λάθος μέτρηση ή καταγραφή κατά τη διεξαγωγή του εργαστηριακού πειράματος, καθώς η αντοχή 182.64kN των 1170mm υπερβαίνει την αντοχή κατά την ίδια εκκεντρότητα της δοκού των 650mm που βρέθηκε εργαστηριακά μόνο στα 172.72kN. Επιπλέον, δεν παρατηρήθηκε άλλη τέτοια απόκλιση κατά τις υπόλοιπες αναλύσεις, όσον αφορά στην εκκεντρότητα κατά ν.

	Fmax (kN)	Fexp
u5	165,31	165,17
u15	123,85	123,37 - 125,92
u22	102,42	101,29
v22	137,48	182,64
y35	75,27	74,87

Πίνακας 5.2: Συγκεντρωτικός πίνακας με τις ελάχιστες και μέγιστες τιμές των αντίστοιχων εργαστηριακών πειραμάτων (F experimental) στη δοκό των 1170mm.

#### 5.3.3 Αποτελέσματα Δοκού Μήκους 1750mm

Ομοίως με τα προηγούμενα παρατίθενται τα Σχήματα 5.16, 5.17, 5.18, 5.19 και 5.20 (με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση της δοκού και με πορτοκαλί η τελική της απόκριση):



Σχήμα 5.16: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 1750mm με εκκεντρότητα 30mm κατά u. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.



Σχήμα 5.17: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 1750mm με εκκεντρότητα 30mm κατά v. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.







Σχήμα 5.19: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 1750mm με εκκεντρότητα 5mm κατά u. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.



Σχήμα 5.20: Τελικό Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 1750mm για κάθε εκκεντρότητα που εξετάστηκε.

Ακολουθεί ο Πίνακας 5.3 όπου συγκρίνονται πάλι οι τιμές αντοχών που προέκυψαν από τις δοκιμές του προγράμματος με εκείνες των εργαστηριακών δοκιμών.

	Fmax (kN)	Fexp		
<b>u30</b> 57,78		55,13 - 56,69		
<b>v30</b> 110,01		116,54 - 119,63		
y35	<b>y35</b> 56,93 56,3			
u5	120,51	114,02 - 125,62		

Πίνακας 5.3: Συγκεντρωτικός πίνακας με τις ελάχιστες και μέγιστες τιμές των αντίστοιχων εργαστηριακών πειραμάτων (F experimental) στη δοκό των 1750mm.

### 5.3.4 Αποτελέσματα Δοκού Μήκους 2300mm

Ομοίως με τα προηγούμενα παρατίθενται τα Σχήματα 5.21, 5.22, 5.23, 5.24 και 5.25 (με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση της δοκού και με πορτοκαλί η τελική της απόκριση):



Σχήμα 5.21: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 2300mm με εκκεντρότητα 5mm κατά u. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.



Σχήμα 5.22: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 2300mm με εκκεντρότητα 30mm κατά u. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.



Σχήμα 5.23: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 2300mm με εκκεντρότητα 35mm κατά y. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.



Σχήμα 5.24: Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 2300mm με εκκεντρότητα 30mm κατά v. Με μπλε φαίνεται η αρχική απόκριση του μέλους χωρίς διορθώσεις, ενώ με πορτοκαλί η οριστική δοκιμή με διορθωμένη εκκεντρότητα και στροφικό ελατήριο.



Σχήμα 5.25: Τελικό Διάγραμμα Ασκούμενης Δύναμης – Μετατόπισης (κατά x) στη δοκό των 2300mm για κάθε εκκεντρότητα που εξετάστηκε.

Ακολουθεί ο Πίνακας 5.4 όπου συγκρίνονται και πάλι οι τιμές αντοχών που προέκυψαν από τις δοκιμές του προγράμματος με εκείνες των εργαστηριακών δοκιμών.

	Fmax (kN)	Fexp
u5	80,7	76,71 - 84,60
u30	40,3	38,79 - 40,99
y35	41,34	41,17 - 43,32
v30	76,04	76,47 - 78,10

Πίνακας 5.4: Συγκεντρωτικός πίνακας με τις ελάχιστες και μέγιστες τιμές των αντίστοιχων εργαστηριακών πειραμάτων (F experimental) στη δοκό των 2300mm.

# 5.4 Δοκιμές Κάμψης Δοκών Διατομής L70.7

Η κάμψη των δοκών έγινε με συγκεντρωμένο εγκάρσιο φορτίο στο μέσο τους, κατά τους άξονες *u*, *v* και *y*. Μετρήθηκε το μέγιστο φορτίο που μπορούσε να παραλάβει η δοκός, απ' όπου υπολογίστηκε η μέγιστη ροπή στο μέσο της. Στη συνέχεια έγινε γραφική συσχέτιση κατακόρυφης βύθισης του σημείου εφαρμογής της δύναμης με το μέτρο αυτής, καθώς και συσχέτιση ροπής με την στροφή των άκρων της δοκού περί τον άξονα της

ροπής. Τα μήκη που μετρήθηκαν στα εργαστηριακά πειράματα ήταν 750mm και 1500mm. Παρότι εργαστηριακώς δεν έγινε φόρτιση κατά άξονα γ, κρίθηκε σκόπιμο για λόγους πληρότητας να γίνει και αυτή η δοκιμή μέσω του προγράμματος πεπερασμένων στοιγείων, ώστε να διερευνηθεί η συμπεριφορά της δοκού στη φόρτιση αυτή, η οποία είναι αρκετά συνήθης για τη γωνιακή διατομή.

Η αμφιέρειστη στήριξη των δοκών επετεύχθη εργαστηριακώς με συγκόλληση ορθογωνικών λεπίδων στα άκρα τους, οι οποίες και "πατούσαν" σε επίπεδες, οριζόντιες και ανένδοτες επιφάνειες. Η διάταξη για το μήκος των 750mm φαίνεται στο Σχήμα 5.26.



Σχήμα 5.26: Εργαστηριακή διάταξη των δοκιμίων (εδώ αυτό των 750mm) με ορθογωνικές λεπίδες στήριξης εκατέρωθεν.

Έτσι, όταν οι λεπίδες στηρίζονταν στις μεγάλες τους ακμές γινόταν δοκιμή κάμψης περί τον ασθενή άξονα ν (δηλαδή εγκάρσιο φορτίο κατά u), ενώ όταν αυτές στηρίζονταν στις μικρές τους ακμές γινόταν δοκιμή κάμψης περί τον ισχυρό άξονα u (φορτίο κατά v). Στο μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων έγινε ξανά η χρήση των άκαμπτων συνδέσεων rigid links μεταξύ των εκάστοτε σημείων στηρίξεως και της αντίστοιχης ακραίας διατομής. Η εργαστηριακή διάταξη ήταν τέτοια που δεν χρειάστηκε περαιτέρω τροποποίηση του μοντέλου (όπως ήταν απαραίτητο στις δοκιμές θλίψης) για την ορθή προσομοίωση των πειραμάτων. Ακολουθεί ο Πίνακας 5.5 με τιμές των Ελαστικών και Πλαστικών Ροπών Αντίστασης ( $W_{el}$  και  $W_{pl}$ ) της διατομής L70.7 περί των αξόνων u, v και z από τους Πίνακες Πρότυπων Διατομών, καθώς και με τις αντίστοιχες τιμές των Ελαστικών και Πλαστικών Ροπών Αντοχής (Mel και Mpl) αυτής της διατομής για τάση διαρροής fy=31.5kN/cm<sup>2</sup> (δηλαδή βάσει του χάλυβα s315 που έχουμε θέσει στο πρόγραμμα) (βλέπε Τυπολόγιο).

Πίνακας 5.5: τιμές των Ελαστικών και Πλαστικών Ροπών Αντίστασης Wel και Wpl της διατομής L70.7 περί των αξόνων u, v, z και οι αντίστοιχες τιμές των Ελαστικών και Πλαστικών Ροπών Αντοχής  $M_{el}$  και  $M_{pl}$  αυτής της διατομής για τάση διαρροής  $f_v=31.5$ kN/cm<sup>2</sup>.

	W <sub>el</sub> (cm³)	W <sub>pl</sub> (cm <sup>3</sup> )		M <sub>el</sub> (kNm)	M <sub>pl</sub> (kNm)
z	8,41	15,36	Z	2,65	4,84
u	13,55	21,57	u	4,27	6,79
v	6,28	11,09	v	1,98	3,49

Τέλος, σημειώνεται ότι η ανάλυση έγινε με χρήση του μοντέλου των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων, εξαιρουμένης της φόρτισης κατά τον ασθενή άξονα ν. Εκεί χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο των χωρικών πεπερασμένων στοιχείων. Ο λόγος ήταν ότι η εγκάρσια φόρτιση κατά τον άξονα ν ωθεί τη δοκό σε παραμορφωσιακή κατάσταση παρόμοια με την άσκηση της αξονικής θλιπτικής εκκεντρότητας κατά τον ίδιο άξονα. Όπως είχε όμως παρατηρηθεί, τα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία δεν είχαν τη δυνατότητα ορθής περιγραφής της συμπεριφοράς της δοκού όταν αυτή φορτιζόταν επί του ασθενή άξονα. Στη συνέχεια θα γίνει γραφική σύγκριση των δύο αναλύσεων που προέκυψαν από τα δύο μοντέλα κατά τη συγκεκριμένη δοκιμή κάμψης για να γίνει σαφέστερη η διαφορά στην οποία αναφερόμαστε.

Τα αποτελέσματα όλων των δοκιμών φαίνονται στα ακόλουθα διαγράμματα (Σχήμα 5.28 έως 5.35), ενώ παρατίθενται σκαριφήματα τομών στις διατομές φόρτισης για σαφή εικόνα της κάθε δοκιμής (Σχήμα 5.27). Αρχικά έγινε δύο φορές κάμψη περί τον άξονα ν, μία όπου τα άκρα των πελμάτων θλίβονταν (δηλαδή  $M_{\nu}$ -) και μία όπου αυτά εφελκύονταν  $(M_{\nu}+)$ , και ακολούθησε η κάμψη περί τους άξονες u  $(M_u)$  και z  $(M_z)$ .



Σχήμα 5.27: Σκαριφήματα τομών στις διατομές φόρτισης για τους 4 τρόπους εγκάρσιας φόρτισης των δοκών.



Σχήμα 5.28: Διάγραμμα Δύναμης – Μετατόπισης (Βέλους Κάμψης) στο σημείο εφαρμογής των δοκών 750mm και 1500mm για Κάμψη περί τον άξονα ν (ελεύθερα άκρα πελμάτων σε θλίψη)



Σχήμα 5.29: Διάγραμμα Μέγιστης Ροπής (στο μέσο) – Περιστροφής των Άκρων των δοκών 750mm και 1500mm για Κάμψη περί τον άξονα ν (ελεύθερα άκρα πελμάτων σε θλίψη)



Σχήμα 5.30: Διάγραμμα Δύναμης – Μετατόπισης (Βέλους Κάμψης) στο σημείο εφαρμογής των δοκών 750mm και 1500mm για Κάμψη περί τον άξονα ν (ελεύθερα άκρα πελμάτων σε εφελκυσμό)



Σχήμα 5.31: Διάγραμμα Μέγιστης Ροπής (στο μέσο) – Περιστροφής των Άκρων των δοκών 750mm και 1500mm για Κάμψη περί τον άξονα ν (ελεύθερα άκρα πελμάτων σε εφελκυσμό)



Σχήμα 5.32: Διάγραμμα Δύναμης – Μετατόπισης (Βέλους Κάμψης) στο σημείο εφαρμογής των δοκών 750mm και 1500mm για Κάμψη περί τον άξονα z



Σχήμα 5.33: Διάγραμμα Μέγιστης Ροπής (στο μέσο) – Περιστροφής των Άκρων των δοκών 750mm και 1500mm για Κάμψη περί τον άξονα z



Σχήμα 5.34: Διάγραμμα Δύναμης – Μετατόπισης (Βέλους Κάμψης) στο σημείο εφαρμογής των δοκών 750mm και 1500mm για Κάμψη περί τον άξονα *u* 



Σχήμα 5.35: Διάγραμμα Μέγιστης Ροπής (στο μέσο) – Περιστροφής των Άκρων των δοκών 750mm και 1500mm για Κάμψη περί τον άξονα *u* 

Παρατηρούμε ότι σε κάμψη περί τον ασθενή άξονα v και τον γεωμετρικό άξονα z, η διατομή συμπεριφέρεται ως Κατηγορίας 2, ενώ περί τον ισχυρό άξονα u ως Κατηγορίας 3. Ακόμη όμως και στην περίπτωση της κάμψης περί άξονα u βλέπουμε ότι η διατομή περνά στο βάθος της πλάστιμης περιοχής της εμφανίζοντας καθολικά μια πολύ καλή συμπεριφορά όσον αφορά στην αντοχή της.

Παρατηρήθηκε κατά διεξαγωγή των δοκιμών (καθώς τα αποτελέσματά τους συγκρίνονταν με εκείνα των εργαστηριακών πειραμάτων) ότι: φόρτιση του γωνιακού τέτοια ώστε η δοκός να κάμπτεται ή να λυγίζει (όταν επρόκειτο για εκκεντρότητα κατά άξονα ν) περί τον ισχυρό της άξονα u, έδινε διαφορετική συμπεριφορά του μέλους όταν εκείνο πλησίαζε την κατάσταση αστοχίας του, αναλόγως αν είχαν χρησιμοποιηθεί επιφανειακά ή χωρικά πεπερασμένα στοιχεία για την ανάλυση. Μια πρώτη εικόνα της διαφοράς φαίνεται από την μορφή που έπαιρνε το μέλος αμέσως μετά την αστοχία του, όπως φαίνεται στα Σχήματα 5.36 και 5.37 (δοκιμή κάμψης περί άξονα u):



Σχήμα 5.36: Τελική Παραμόρφωση της δοκού των 750mm για Κάμψη περί τον άξονα *u* όπως αποδόθηκε με χρήση χωρικών πεπερασμένων στοιχείων (*3D-SOLID*)



Σχήμα 5.37: Τελική Παραμόρφωση της δοκού των 750mm για Κάμψη περί τον άξονα *u* όπως αποδόθηκε με χρήση επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων (SHELL)

Στη δεύτερη εικόνα (Σχήμα 5.37) φαίνεται μία σαφώς πιο έντονη τοπική παραμόρφωση στη θέση φόρτισης, η οποία προκαλούσε στο δοκίμιο πρόωρη αστοχία και η διαφορά στις τιμές αυτής της αστοχίας φαίνεται στο Σχήμα 5.38. Η διαφορά δεν είναι τέτοια ώστε να οδηγούμαστε σε λανθασμένα συμπεράσματα για την γενικότερη συμπεριφορά του μέλους, ούτε για την τάξη μεγέθους της αντοχής του στη συγκεκριμένη φόρτιση, αλλά σε περίπτωση απαίτησης μεγάλης ακρίβειας τα χωρικά πεπερασμένα δίνουν εικόνα πλησιέστερη στην πραγματική. Να σημειωθεί εδώ ότι οι καμπύλες που προέκυψαν από τους υπόλοιπους τρόπους φόρτισης δεν έδωσαν καμπύλες όπου τα επιφανειακά στοιχεία να απέχουν φανερά από τα χωρικά, τουλάχιστον όχι για την κλίμακα και το εύρος των τιμών που εξετάζουμε.



Σχήμα 5.38: Διάγραμμα Δύναμης – Μετατόπισης (Βέλους Κάμψης) στο σημείο εφαρμογής της δοκού των 750mm για Κάμψη περί τον άξονα *u*, με χρήση επιφανειακών (μπλε) και χωρικών (πορτοκαλί) στοιχείων.

# 6 Συμπεράσματα – Προτάσεις

#### 6.1 Εισαγωγή

Η προσομοίωση των εργαστηριακών πειραμάτων μέσω του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ADINA ήταν επιτυχής. Τα αποτελέσματα ήταν ικανοποιητικώς κοντά στα πραγματικά. Η αναζήτηση αυτής ακριβώς της ταύτισης των αποτελεσμάτων βοήθησε στο να κατανοήσουμε σε βάθος τον μηχανισμό αστοχίας των δοκών γωνιακής διατομής υπό θλίψη και κάμψη, αλλά και τους βασικούς παράγοντες που υπεισήλθαν κατά την έκβαση των δοκιμών για να προκύψει η συγκεκριμένη αστοχία. Ακολουθούν παρατηρήσεις σχετικά με τον σχεδιασμό των παρουσών δοκιμών, τόσο πάνω στα γωνιακά όσο και στο ίδιο το πρόγραμμα, προβληματισμοί πάνω στη γενικότερη χρήση τέτοιων προγραμμάτων για την προσομοίωση εργαστηριακών δοκιμών, και συμπερασματικές προτάσεις για περαιτέρω μελέτη γωνιακών διατομών μέσω του ADINA.

## 6.2 Σχετικά με το ADINA

Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 2, το ADINA παρέχει πληθώρα οδηγιών με στόχο την εξοικείωση του χρήστη με τις βασικές λειτουργίες του προγράμματος. Παρ' όλ' αυτά, οι βασικές αυτές γνώσεις δεν επαρκούν για την τελική ορθή χρήση του προγράμματος, εκτός εάν κατά τύχη, η χρήση που επιθυμούμε τυγχάνει να γίνεται επακριβώς μέσω κάποιου παραδείγματος που παρέχεται. Έτσι, απαιτείται εξάσκηση για να αποκτήσει ο χρήστης ικανότητα χειρισμού των λειτουργιών και να προβαίνει σε σωστές αναλύσεις.

Το ADINA ενδείκνυται για την εύρεση ιδιομορφών και αστοχιών απλών μοντέλων, αφενός διότι είναι χρονοβόρο στην ανάλυση πολύπλοκων μοντέλων και αφετέρου διότι το σχεδιαστικό υποπρόγραμμα που περιέχει είναι πολύ περιορισμένο σε δυνατότητες, αλλά και στην χρήση σε σύγκριση με άλλα αμιγώς σχεδιαστικά προγράμματα. Το βασικό όμως στοιχείο του προγράμματος είναι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων του που, σε συνδυασμό με έναν καλό αρχικό σχεδιασμό μοντέλου, επιτυγχάνει εύστοχες και έγκυρες αναλύσεις.

#### 6.3 Προσομοίωση του Χάλυβα

Η σωστή επιλογή τύπου και χαρακτηριστικών του υλικού που επιλέγουμε για να προσομοιώσουμε το πραγματικό (στην προκειμένη περίπτωση το χάλυβα) είναι ίσως η βασικότερη απόφαση που καλούμαστε να πάρουμε. Οι επιτρεπόμενες αποκλίσεις είναι μικρές μιας και διαφορετικά υλικά δεν συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο και αλλάζοντας τα χαρακτηριστικά του υλικού προκύπτουν πολύ διαφορετικά αποτελέσματα απ' ότι παραδείγματος χάρη εάν άλλαζαν άλλοι παράγοντες όπως λεπτομέρειες στη γεωμετρία του μοντέλου ή το μέγεθος της φόρτισης.

Το πρόβλημα έγκειται στο ότι τα υλικά στη φύση δεν είναι τέλεια και εξιδανικευμένα όπως αυτά που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα. Οι ιδιότητές τους κυμαίνονται, άλλες περισσότερο και άλλες λιγότερο, και φυσικά επηρεάζουν με διαφορετικό τρόπο τη συμπεριφορά του υλικού. Έτσι, για να γίνει ορθή επιλογή των παραμέτρων του εικονικού υλικού που θα χρησιμοποιηθεί, επιβάλλεται να έχουμε έναν ικανό μέσο όρο για την κάθε ιδιότητα βάσει του πραγματικού υλικού (π.χ. τάση διαρροής fy) ή να χρησιμοποιήσουμε 2 διαφορετικά υλικά στην προσομοίωση, με ελάχιστες και μέγιστες τιμές αντίστοιχα (ανάλογα με την ευμένεια ή δυσμένειά τους επί του ζητούμενου αποτελέσματος). Στην παρούσα εργασία είχαμε την πληροφορία των πραγματικών τιμών μέσων όρων για το Χάλυβα S235. Αν αυτό δεν ήταν δυνατό, θα ήταν ιδιαίτερα δύσκολη η επιλογή μιας τιμής για της τάση διαρροής fy και φυσικά δε θα θέταμε τα 235MPa μιας και το 95% των πραγματικών δοκιμίων θα ξεπερνούσε αυτή την τιμή, ενώ ο εικονικός χάλυβας που θα χρησιμοποιούσε το πρόγραμμα θα διέρρεε πάντα στα 235MPa. Μια τέτοια προσέγγιση θα ήταν συντηρητική, αλλά δε θα αντιπροσώπευε καθόλου την πραγματικότητα, οδηγώντας εν γένει και κατ' επέκταση σε ασφαλείς αλλά αντιοικονομικές λύσεις όσον αφορά σε έργα Πολιτικού Μηχανικού.

## 6.4 Μόρφωση της Διατομής και του Μοντέλου

Προκειμένου να ασκηθεί κεντρική αξονική θλίψη (επί του άξονα που διέρχεται από το κέντρο βάρους), ήταν απαραίτητες οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους της διατομής. Αυτές παρέχονται με ακρίβεια δέκατου του χιλιοστού από τους πίνακες πρότυπων διατομών του Ευρωκώδικα. Δυστυχώς, οι δυνάμεις που ασκούσαμε επί της δοκού ήταν αρκετά μεγάλες, ώστε διατηρώντας αρχικά τις τέλειες αρθρωτές στηρίξεις, να προκαλούνται μικροροπές που προκαλούσαν πρόωρο λυγισμό. Χρειάστηκαν μερικές τέτοιες δοκιμές θλίψης, ώστε να προσδιοριστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια το κέντρο βάρους της διατομής και έτσι να έχουμε την τέλεια φόρτιση χωρίς εκκεντρότητα. Η εύρεση του ακριβούς κ.β. ήταν και η μεγαλύτερη δυσκολία κατά τη διαμόρφωση του μοντέλου και ήταν αναγκαία διότι βάσει αυτού του σημείου θα γίνονταν όλες οι επιβολές των φορτίων. Αυτό χρειάστηκε μόνο στη διαμόρφωση της δοκού με χωρικά πεπερασμένα στοιχεία, αφού το κέντρο βάρους της διατομής με επιφανειακά στοιχεία βρισκόταν με απλή γεωμετρία (να υπενθυμίσουμε ότι η δεύτερη αυτή διατομή ήταν απλώς δύο ίσα και κάθετα μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα).

Εν συνεχεία, η προσέγγιση των καμπύλων τμημάτων της διατομής με πολυγωνικές γραμμές ήθελε ιδιαίτερη προσοχή ούτως ώστε να μη μεταβληθεί το εμβαδό της (μιας και αυτό δίνει την τελική αντοχή της δοκού σε θλίψη βάσει του τύπου  $F_{max} = f_y \cdot A$ ). Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η διαδικασία αυτή προηγήθηκε της εύρεσης των ακριβών συντεταγμένων του κ.β. διότι οι μικρομεταβολές της περιμέτρου επηρέαζαν την τελική του θέση.

Τέλος, υπήρξε δυσκολία στην άσκηση συγκεντρωμένων φορτίων. Στα σημεία αυτά η τάση γινόταν γρήγορα πολύ μεγάλη (απειριζόταν λόγω μηδενικής επιφάνειας) με αποτέλεσμα το πρόγραμμα να σταματά την ανάλυση δηλώνοντας αστοχία υλικού. Το πρόβλημα ξεπεράστηκε με τρόπο που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4 (rigid links).

## 6.5 Σχόλια επί των Αποτελεσμάτων

#### 6.5.1 Εκτίμηση των Αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης των εργαστηριακών πειραμάτων ήταν ικανοποιητικά. Σε αυτό συνέβαλε καθοριστικά η σωστή εκτίμηση των παραγόντων που τα επηρέαζαν, καθώς και ο βαθμός επιρροής τους. Η εκτίμηση αυτή, όμως, έγινε διότι είχαμε

εκ των προτέρων τα δεδομένα αποτελέσματα από τα πειράματα που είγαν ήδη διεξαγθεί και γνωρίζαμε λεπτομερώς τον τρόπο που διεξήχθησαν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η συνεχής μετατόπιση του άξονα φόρτισης καθώς το δοκίμιο περνούσε στη φάση του λυγισμού που, όπως εξηγήθηκε λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 5, αύξανε την τελική αντοχή του δοκιμίου. Μη έχοντας πλήρη γνώση του εργαστηριακού τρόπου στήριξης των δοκών, δε θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε μια τέτοια μεταβολή της φόρτισης και θα οδηγούμασταν σε εικασίες περί σημαντικής συνεισφοράς άλλων παραγόντων (π.γ. τριβές στηρίξεων) ή λανθασμένα θα εκτιμούσαμε ότι το πρόγραμμα δεν μπορεί να αποδώσει με σαφήνεια τι πραγματικά συμβαίνει κατά τις δοκιμές έκκεντρης αξονικής θλίψης. Ένα ακόμη παράδειγμα αποτελέσματος που θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως «ελαττωματικό» είναι η στρεβλή ιδιομορφή λυγισμού των κοντών δοκών. Πράγματι, αν δεν είχαμε επίγνωση ότι το συγκεκριμένο φαινόμενο παρατηρήθηκε και εργαστηριακά, θα το απορρίπταμε ως «κακό υπολογισμό» της ανάλυσης του προγράμματος. Συνεπώς, γρειάζεται βαθιά κατανόηση του τι συμβαίνει λεπτομερώς σε ένα φαινόμενο που μελετάμε μέσω προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων, ώστε να είμαστε σε θέση να κρίνουμε τα αποτελέσματα που παίρνουμε από αυτά.

#### 6.5.2 Τελικά, Χωρικά ή Επιφανειακά Πεπερασμένα Στοιχεία;

Αναμφισβήτητα, τα χωρικά πεπερασμένα στοιχεία δίνουν ακριβέστερα αποτελέσματα, μιας και επιτρέπουν την ακριβέστερη αποτύπωση της πραγματικής γεωμετρίας ενός μοντέλου. Στο συγκεκριμένο μοντέλο που μελετήσαμε, η στρογγύλευση παραδείγματος χάρη των άκρων των πελμάτων αλλά και της μεταξύ τους ένωσης προσέδιδε μεγαλύτερη σταθερότητα στη δοκό και διευκόλυνε τη ομαλότερη μετάδοση των τάσεων από το ένα πέλμα στο άλλο. Στην περίπτωση των επιφανειακών στοιχείων, προσομοιώνοντας τα δύο πέλματα με δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα, το γωνιακό έχανε τη σταθερότητα αυτή. Ήταν λοιπόν απαραίτητο να διαπιστωθεί με δοκιμές εάν η χαμένη αυτή ιδιότητα οδηγούσε σε ανακριβή αποτελέσματα. Στην περίπτωση της θλίψης και της κάμψης δοκών γωνιακής διατομής η διαφορά των δύο μοντέλων ήταν τόσο μικρή ώστε κρίθηκαν κατάλληλα και τα δύο. Έτσι, έχοντας υπόψη την ταχύτητα ανάλυσης των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων σε σχέση με τα χωρικά, καταλήξαμε να χρησιμοποιούμε μόνο τα πρώτα. Τα χωρικά στοιχεία είναι μονόδρομος όταν γίνεται ανάλυση στο βάθος της πλαστικής ζώνης όπου οι παραμορφώσεις γίνονται πολύ μεγάλες και το περιορισμένο εύρος των τάσεων (είναι όλες «κοντά» στην τάση διαρροής) πρέπει να ακολουθεί στενά την ακριβή γεωμετρία του φορέα (π.γ. έλεγγος κογλιώσεων, συγκολλήσεις).

# 6.6 Προτάσεις για τη Μελέτη Άλλων Γωνιακών

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη διαμόρφωση της διατομής L70.7 και ύστερα του σώματος της δοκού μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για τη διαμόρφωση γωνιακών διαφορετικών διαστάσεων. Πιο συγκεκριμένα, εάν πρόκειται για ισοσκελή γωνιακά, μπορούν να ακολουθηθούν οι οδηγίες του Κεφαλαίου 3 κατά γράμμα, ενώ με μικρές τροποποιήσεις μπορούν να διαμορφωθούν οι διατομές ακόμη και ανισοσκελών γωνιακών. Σε κάθε περίπτωση προσπαθούμε να επιτύχουμε όσο το δυνατόν πιο ίσα σε μέγεθος και σχήμα πεπερασμένα στοιχεία ώστε να υπάρχει μια καθολικώς ισότροπη συμπεριφορά στο μοντέλο/φορέα.

Έτσι, στη γενική περίπτωση όπου θέλουμε να διαμορφώσουμε ένα ανισοσκελές γωνιακό με εξωτερικά πλάτη πελμάτων (εξωτερικές ευθυγραμμίες) b<sub>1</sub> και b<sub>2</sub> (με έστω

 $b_1 < b_2$ ), εσωτερικές ευθυγραμμίες  $c_1$  και  $c_2$  και με πάχη  $t_1$  και  $t_2$  αντίστοιχα, στην περίπτωση των χωρικών πεπερασμένων στοιχείων (3D-SOLID) κάνουμε τα εξής:

- Χωρίζουμε το b<sub>1</sub> σε 10 τμήματα ή σε ακραίες περιπτώσεις πολύ λεπτών πελμάτων μπορεί να χωριστεί σε:
   x<sub>1</sub>= integer{b<sub>1</sub>/t<sub>1</sub>}
- Χωρίζουμε την εσωτερική ευθυγραμμία c1 σε: 1+integer{x1·c1/b1}, όπου x1 τα τμήματα που χωρίσαμε το b1
- Χωρίζουμε το b<sub>2</sub> σε: x<sub>2</sub>= integer{x<sub>1</sub>·b<sub>2</sub>/b<sub>1</sub>}
- Χωρίζουμε τη c<sub>2</sub> σε: 1+integer{ $x_2$ ·c<sub>2</sub>/b<sub>2</sub>}, όπου x<sub>2</sub> τα τμήματα που χωρίσαμε το b<sub>2</sub>
- Ορίζουμε τις καμπύλες μεταξύ των ευθυγραμμιών με 6 ή 7 σημεία (δηλαδή 5 ή 6 ευθύγραμμα τμήματα) ανάλογα το μέγεθός τους.

Τώρα η διατομή είναι έτοιμη για διαμόρφωση (meshing). Για το σώμα της δοκού καλό είναι να χρησιμοποιείται το βήμα του 5% του πλάτους του μικρού πέλματος b<sub>1</sub> (ή το μισό του πάχους του t<sub>1</sub> στην περίπτωση λεπτότοιχων διατομών), ώστε να τηρείται η σχετική ομοιομορφία των πεπερασμένων στοιχείων. Δυστυχώς, το πρόβλημα της ακριβούς θέσης του κέντρου βάρους παραμένει και εάν απαιτείται η εύρεσή του (πέραν των δοθεισών συντεταγμένων από τους πίνακες πρότυπων διατομών) χρειάζονται κάποιες δοκιμές κεντρικής αξονικής θλίψης σε μέλη μεγάλου μήκους και κάθε φορά μετατοπίζουμε το κέντρο βάρους κατά τη διεύθυνση που ξεκίνησε να συμβαίνει ο πρόωρος λυγισμός.

Στην περίπτωση που θέλουμε να διαμορφώσουμε την παραπάνω διατομή με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία (SHELL), ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Ορίζουμε τα νέα μήκη των πελμάτων βάση των τύπων:
  - $b'_1 = b_1 t_2$
  - $b'_2 = b_2 t_1$

 $\mathbf{Z}_1$ 

- Επιλύουμε το σύστημα (1)-(2) για την εύρεση των τροποποιημένων παχών t'1 και t'2:
  - $t_2 t'_1 t_1 t'_2 = 0$  (1)  $b'_1 t'_1 + b'_2 t'_2 = E$  (2)

όπου Ε το εμβαδόν της πραγματικής διατομής (δοθέν από πίνακες)

Το κέντρο βάρους βρίσκεται με απλή γεωμετρία. Αρχικά, θα βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο ευθύγραμμων τμημάτων που αντιπροσωπεύουν τα πέλματα, δηλαδή τα b'<sub>1</sub> και b'<sub>2</sub>. Η ακριβής θέση του κ.β. θα χωρίζει αυτό το ευθύγραμμο τμήμα (έστω μήκους z) σε δύο τμήματα μηκών z<sub>1</sub> και z<sub>2</sub> τα οποία προσδιορίζονται από το σύστημα (3)-(4):

$$+ z_2 = z \tag{3}$$

 $(b'_1 t'_1) z_1 - (b'_2 t'_2) z_2 = 0$  (4)

με το  $z_1$  να μετρά από το μέσον του b'<sub>1</sub> και το  $z_2$  από το μέσον του b'<sub>2</sub>.

- Χωρίζουμε το b΄<sub>1</sub> σε 10 τμήματα ή σε ακραίες περιπτώσεις πολύ λεπτών πελμάτων πάλι σε:
  - $x'_1 = integer\{b'_1/t'_1\}$
- Χωρίζουμε το b'<sub>2</sub> σε:
  - $\mathbf{x'}_{2} = \text{integer}\{\mathbf{x'}_{1} \cdot \mathbf{b'}_{2} / \mathbf{b'}_{1}\}$

Και πάλι συνίσταται η διαμόρφωση του σώματος της δοκού με βήμα 5% του πραγματικού πλάτους b<sub>1</sub> του μικρού πέλματος. Να σημειωθεί ότι στις περισσότερες περιπτώσεις γωνιακών διατομών τα πάχη t<sub>1</sub> και t<sub>2</sub> των πελμάτων είναι ίσα.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να διαμορφώσουμε με χωρικά πεπερασμένα στοιχεία τη ανισοσκελή διατομή L(75x100).7 (Σχήμα 6.1) με χαρακτηριστικά:

b<sub>1</sub>=75mm

b<sub>2</sub>=100mm

 $t_1 = t_2 = 7mm$ 

 $r_1=5mm$ 

 $r_2=10mm$ 

Τα κυκλικά τόξα θα οριστούν με 6 και 7 σημεία αντίστοιχα του μεγέθους τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.1. Μετρούνται οι εξωτερικές και εσωτερικές ευθυγραμμίες για να γίνει χρήση του αλγορίθμου. Έτσι έχουμε:

 $c_1 = b_1 - r_1 - r_2 - t_2 = 75 - 5 - 10 - 7 = 53 \text{mm}$ 

 $c_2=b_2-r_1-r_2-t_1=100-5-10-7=78mm$ 

 $x_1 = int\{b_1/t_1\} = int\{75/7\} = 10$  τμήματα στην εξωτερική ευθ/μία των 75mm

 $1+int{x_1 \cdot c_1/b_1}=int{10.53/75}+1=7+1=8$  τμήματα στην εσωτερική των 53mm

 $x_2 = int\{x_1 \cdot b_2/b_1\} = int\{10 \cdot 100/75\} = 13$  τμήματα στην εξωτερική των 100mm

 $1+int{x_2 \cdot c_2/b_2}=int{13 \cdot 78/100}+1=10+1=11$  τμήματα στην εσωτερική των 53mm

Ο τελικός διαχωρισμός των τεσσάρων ευθυγραμμιών πριν την τελική μορφοποίηση φαίνεται στο Σχήμα 6.2. Να σημειωθεί εδώ ότι ο χωρισμός των τμημάτων βάσει του παραπάνω αλγόριθμου είναι καθοδηγητικός και δεν είναι απαραίτητη η ακριβής τήρησή του. Συγκεκριμένα, προτείνεται ο πειραματισμός με προσθήκη ±1 τμήματος στις δύο ευθυγραμμίες του μεγαλύτερου πέλματος ούτως ώστε να γίνει όσο το δυνατόν πιο ομοιογενής η τελική μορφοποίηση της διατομής. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η μορφοποίηση ήταν πολύ ικανοποιητική και δεν χρειάστηκε κάποια αλλαγή στα αποτελέσματα του αλγόριθμου (Σχήμα 6.3). Η μορφοποίηση της διατομής (meshing) γίνεται με τα στοιχεία που δίδονται στο Κεφάλαιο 3.



Σχήμα 6.1: Βασική σχεδίαση της ανισοσκελούς διατομής L(75x100).7



Σχήμα 6.2: Διαχωρισμός των ευθυγραμμιών σε τμήματα της ανισοσκελούς διατομής L(75x100).7



Σχήμα 6.3: Τελική μορφοποίηση της ανισοσκελούς διατομής L(75x100).7

## 6.7 Σχόλια Πάνω στη Συμπεριφορά των Γωνιακών

Ο Ευρωκώδικας 3 πολύ ορθά κατατάσσει τις διατομές τύπου L (γωνιακές) στην Κατηγορία 3, της οποίας τα μέλη μπορούν και φτάνουν την πλαστική ροπή αντοχής τους, εξαντλώντας την ελαστική τους ζώνη πριν συμβεί λυγισμός. Το «αδύνατο σημείο» των γωνιακών διατομών είναι τα εκτεθειμένα ή πιο σωστά προεξέχοντα πέλματά τους. Στα άκρα αυτών μπορεί να συμβεί τοπικός λυγισμός αν αυτά βρεθούν υπό θλίψη. Στην περίπτωση όμως που η φόρτιση είναι τέτοια ώστε αυτά τα άκρα να μην θλίβονται, αλλά η θλίψη της διατομής να περιορίζεται στην περιοχή της γωνίας-ένωσης των πελμάτων, οι δοκοί παρουσιάζουν εξαιρετική συμπεριφορά μελών Κατηγορίας 2. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι με λεπτομερή σχεδιασμό μπορούμε να εκμεταλλευτούμε πλήρως το υλικό δίχως να προβούμε σε χρήση άλλου τύπου ή μεγαλύτερου μεγέθους διατομών, έχοντας υπόψη ότι η σύνδεση μελών τύπου L είναι απλούστερη από άλλους τύπους, ενώ ακόμη και η μεταφορά μελών γωνιακής διατομής είναι ευκολότερη (στοίχιση της μιας εντός της επομένης για μεγάλη εξοικονόμηση χώρου). Ένα ακόμη «καλό» χαρακτηριστικό των γωνιακών διατομών είναι ότι η διακύμανση μεταξύ μέγιστης και ελάχιστης Ροπής Αδράνειας ανάμεσα στους δύο κύριους άξονες είναι σχετικά μικρή. Συγκεκριμένα ο λόγος Imax/Imin είναι της τάξης του 3.5 για διατομές τύπου L, ενώ για παράδειγμα σε διατομές τύπου U είναι 5.5 και σε Διπλά Ταυ είναι >10, δηλαδή ευνοούν τη μη προσανατολισμένη τοποθέτηση σε αντίθεση με άλλους τύπους που απαιτούν σωστό προσανατολισμό για την ορθή τους λειτουργία.

# Βιβλιογραφία

- Experimental tests on members made from rolled angle sections by Andreas Spiliopoulos, Maria-Eleni Dasiou, Pavlos Thanopoulos, Ioannis Vayas (DOI: 10.1002/stco.201710023)
- Ευρωκώδικας ΕΝ 1993: Σχεδιασμός Μεταλλικών Κατασκευών Από Χάλυβα (Ευρωκώδικας 3)
- 3. ΣΙΔΗΡΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ Ανάλυση και διαστασιολόγηση, Ιωάννης Κ. Βάγιας (εκδόσεις ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ)
- 4. ADINA Manuals ( http://www.adina.com/manuals.shtml )
- 5. ADINA Primer ( http://www.adina.com/adinadownloads/primer/intro.pdf )

# Τυπολόγιο

## Εφελκυστική Αντοχή μέλους σταθερής διατομής

F<sub>max</sub>= f<sub>y</sub>·A όπου: f<sub>y</sub> η τάση διαρροής του υλικού A το εμβαδόν της διατομής

## Θλιπτική Αντοχή μέλους σταθερής διατομής (Κατηγορίας 3) (EN1993-1-1 §6.3.1)

## Ελαστική Αντίσταση και Ροπή Αδράνειας διατομής

 $W_{el}{=}$  I/h όπου h η απόσταση του άξονα από την πλέον εφελκυόμενη ίνα  $M_{el}{=}$   $W_{el}{\cdot}f_y$ 

## Πλαστική Αντίσταση και Ροπή Αδράνειας διατομής

 $W_{pl}$ : (υπάρχει έτοιμη στους πίνακες πρότυπων διατομών) είναι το άθροισμα των στατικών ροπών των ημιδιατομών ως προς τον πλαστικό ουδέτερο άξονα της διατομής που χωρίζει τη διατομή σε δύο τμήματα ίσου εμβαδού, ενώ η στατική ροπή επιφάνειας ως προς άξονα είναι το γινόμενο του εμβαδού της επί την απόσταση του κ.β. της από τον άζονα

 $M_{pl} = W_{pl} \cdot f_y$ 

# Μέγιστη Ροπή αμφιέρειστης δοκού υπό σημειακό φορτίο στο μέσον της

M<sub>max</sub>=P·L/4 όπου: P το φορτίο L το μήκος της