

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Μεταπτυχιακή Εργασία

Βέλτιστος Σχεδιασμός Σύνθετων Υλικών με Χρήση
Ιδεατών Στοιχείων

Αντώνιος Πουρνάρας

Αθήνα 2021

Αντώνιος Πουρνάρας
Βέλτιστος Σχεδιασμός Σύνθετων Υλικών
με Χρήση Ιδεατών Στοιχείων

Μεταπτυχιακή Εργασία

Υποβλήθηκε στο Τμήμα Χημικών Μηχανικών,

Επιβλέπων

Επίκουρος Καθηγητής Σ. Τριανταφύλλου

Περίληψη

Η μικροδομή ενός κοκκώδους σύνθετου υλικού με γνωστά συστατικά παίζει πρωταρχικό ρόλο στην μηχανική συμπεριφορά του υλικού. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε μια διαδικασία βελτιστοποίησης μικροδομής σε κοκκώδη σύνθετα υλικά που υπόκεινται σε στατική φόρτιση. Για την προσομοίωση της μηχανικής απόκρισης εφαρμόστηκε η μέθοδος των ιδεατών στοιχείων. Κόκκοι διαφόρου μεγέθους διατάσσονται μέσα στο υλικό ώστε να βελτιστοποιούνται συγκεκριμένες μηχανικές ιδιότητες και το κόστος του υλικού. Για την βελτιστοποίηση εφαρμόστηκε μια κατάλληλη ευρεστική μέθοδος ονόματι σμήνος σωματιδίων. Η μελέτη πραγματοποιήθηκε σε ένα ορθογώνιο τεμάχιο με σκοπό την ελαχιστοποίηση του λόγου του όγκου της ενίσχυσης προς τη μήτρα για διάφορες περιπτώσεις φόρτισης.

Abstract

The microstructure of a particulate composite with given ingredients has major influence on its mechanical behavior. In this work, a systematic method was developed and applied for determining the optimum microstructure of particulate composites subject to static loading. The response is captured by numerical computation using the virtual element method. Particles of different sizes are placed in the composite to optimize specific mechanical properties and material cost. Regarding the optimization method, a suitable heuristic algorithm was chosen, named particle swarm methodology. The study was performed in a rectangular structure and the objective was to minimize the volume fraction of reinforcement and matrix for various load cases.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	1
1.1 Καθορισμός του προβλήματος	1
1.2 Σκοπός και οργάνωση της παρούσας εργασίας	2
2 Προηγούμενη Έρευνα	4
3 Μέθοδος Ιδεατών Στοιχείων	7
3.1 Εισαγωγή	7
3.2 Περιγραφή του προβλήματος	8
3.3 Διακριτές εξισώσεις.....	9
3.4 Βαθμοί ελευθερίας.....	11
3.5 Μητρώο στιβαρότητας	13
3.6 Φορτία	16
4 Βελτιστοποίηση μικροδομής	18
4.1 Βελτιστοποίηση σμήνους σωματιδίων	18
4.2 Καθορισμός του προβλήματος βελτιστοποίησης	22
4.3 Δημιουργία μοντέλου	23
4.4 Αριθμητικά αποτελέσματα	26
5 Επίλογος	43
5.1 Σύνοψη-συμπεράσματα	43
5.2 Μελλοντική έρευνα	45

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Καθορισμός του τεχνικού προβλήματος

Μια από τις βασικότερες απαιτήσεις της σύγχρονης βιομηχανίας είναι η μείωση του κόστους μιας κατασκευής με ταυτόχρονη βελτίωση της απόδοσης. Σημαντικό ρόλο σε αυτό έχουν παίξει τα σύνθετα υλικά [1]. Αυτά τα υλικά αποτελούν από τις πιο σημαντικές κατηγορίες υλικών - μετά τους χάλυβες - σε βιομηχανικές εφαρμογές. Σε αυτό συμβάλει το γεγονός ότι προσφέρουν ελκυστικούς συνδυασμούς από στιβαρότητα, σκληρότητα, χαμηλό βάρος και αντοχή στη διάβρωση. Ένα άλλο πλεονέκτημα είναι ότι η δομή τους μπορεί να διαμορφωθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι κατάλληλα και ιδιαίτερα αποδοτικά σε συγκεκριμένες συνθήκες λειτουργίας. Αυτή η ιδέα εφαρμόζεται σε βιολογικά υλικά όπως για παράδειγμα το ξύλο, τα οστά, τα δόντια και το δέρμα, σύνθετα υλικά τα οποία δημιουργήθηκαν (από τους μηχανισμούς της βιολογικής εξέλιξης) ώστε να έχουν κατάλληλες ιδιότητες που τα καθιστούν αποδοτικά σε συγκεκριμένες συνθήκες λειτουργίας.

Τα σύνθετα υλικά αποτελούνται από μίγμα δύο ή και περισσότερων συστατικών. Στις περισσότερες περιπτώσεις το ένα συστατικό (*ενίσχυση*) είναι στιβαρό και σκληρό και εμπεριέχεται σε ένα μαλακότερο και όλκιμο συστατικό το οποίο ονομάζεται *μήτρα*. Ανάλογα με τη γεωμετρία της ενίσχυσης (ίνα ή κόκκος) τα σύνθετα υλικά χωρίζονται σε ινώδη και κοκκώδη. Η διάταξη της ενίσχυσης, ή αλλιώς μικροδομή του υλικού, παίζει πρωταρχικό ρόλο στις μηχανικές ιδιότητες και στην στιβαρότητα της κατασκευής όταν υπόκειται σε συγκεκριμένη φόρτιση.

Συνήθως, το υλικό της ενίσχυσης είναι ακριβότερο από αυτό της μήτρας. Καθώς αυξάνεται το ποσοστό της ενίσχυσης αυξάνεται η στιβαρότητα της κατασκευής, παράλληλα

όμως αυξάνεται και το κόστος της κατασκευής. Επομένως, μέσω κατάλληλων μεθόδων βελτιστοποίησης μπορεί να προσδιοριστεί η διάταξη της ενίσχυσης (θέση, σχήμα, μέγεθος) που βελτιστοποιεί συγκεκριμένες τεχνικές παραμέτρους της κατασκευής όπως για παράδειγμα ελαχιστοποίηση του κόστους ή μεγιστοποίηση της στιβαρότητας, όταν αυτή υπόκειται σε διάφορες φορτίσεις.

1.2 Σκοπός οργάνωση παρούσας εργασίας

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε μια διαδικασία βελτιστοποίησης διάταξης σε κοκκώδη σύνθετα υλικά. Το πρόβλημα αφορά επίπεδη εντατική κατάσταση, η γεωμετρία της κατασκευής είναι ένας ορθογώνιος δίσκος και το σχήμα των κόκκων είναι κυκλικό. Σκοπός είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης διάταξης των κόκκων (θέση και μέγεθος) για διάφορους συνδυασμούς φορτίσεων και συνοριακών συνθηκών ώστε να ελαχιστοποιείται ο λόγος όγκου της ενίσχυσης προς τη μήτρα.

Πιο συγκεκριμένα, για την επίλυση του προβλήματος της βελτιστοποίησης χρειάζεται να αναπτυχθεί μια σειρά από μεθοδολογίες. Αρχικά, αναπτύχθηκε μια αυτοματοποιημένη μέθοδος δημιουργίας ενός μοντέλου πολυγωνικών στοιχείων της κατασκευής έχοντας σαν δεδομένα τη γεωμετρία, τον αριθμό, τη θέση και το μέγεθος των κόκκων. Το μοντέλο περιλαμβάνει τη διακριτοποιημένη γεωμετρία με στοιχεία, τα εξωτερικά φορτία και τις συνοριακές συνθήκες για διάφορες περιπτώσεις μοντελοποίησης. Στη συνέχεια εφαρμόστηκε η μέθοδος των ιδεατών στοιχείων (virtual element method) για την στατική επίλυση του μοντέλου και τον υπολογισμό ορισμένων φυσικών μεγεθών προς βελτιστοποίηση όπως για παράδειγμα μετατοπίσεις και τάσεις. Σε επόμενο στάδιο, η διαδικασία από την εισαγωγή των δεδομένων μέχρι τον υπολογισμό των μεγεθών προς βελτιστοποίηση ενοποιείται σε μία για να χρησιμοποιηθεί ως αντικειμενική συνάρτηση στη βελτιστοποίηση. Τέλος, εφαρμόστηκε μια κατάλληλη ευρεστική μέθοδος για τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης.

Πιο αναλυτικά, στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια βιβλιογραφική διερεύνηση του προβλήματος της βελτιστοποίησης με εφαρμογές στο σχεδιασμό κατασκευών και σύνθετων υλικών. Αρχικά γίνεται μια ανασκόπηση της εξέλιξης των μεθόδων βελτιστοποίησης από την

πλευρά της μαθηματικής ανάλυσης. Ξεκινώντας από μεθόδους του διαφορικού λογισμού και του λογισμού των μεταβολών, συνεχίζοντας με μεθόδους του γραμμικού, μη-γραμμικού, γεωμετρικού και ακέραιου προγραμματισμού και καταλήγοντας σε μοντέρνες μεθοδολογίες που βασίζονται σε βιολογικούς μηχανισμούς, παρουσιάζονται οι σημαντικότερες συνεισφορές. Στην συνέχεια γίνεται μια επισκόπηση της εφαρμογής της βελτιστοποίησης σε προβλήματα σχεδιαμού κατασκευών. Και, τέλος, παρουσιάζονται οι σημαντικότερες εργασίες στην βελτιστοποίηση της μικροδομής σύνθετων υλικών.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η μέθοδος των ιδεατών στοιχείων [14] που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση. Αρχικά περιγράφεται η διατύπωση της μεταβολικής μορφής του προβλήματος που είναι παρόμοια με αυτή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Στη συνέχεια αναπτύσσονται οι διακριτές εξισώσεις μέσω των προβολών των συναρτήσεων σχήματος VEM στον χώρο πολυωνύμων. Έπειτα, παρουσιάζονται οι βαθμοί ελευθερίας του πολυγωνικού στοιχείου. Ακόμα, περιγράφεται ο προσδιορισμός του μητρώου στιβαρότητας αναλύοντας τους όρους συνέπειας και ευστάθειας από τους οποίους αποτελείται. Και τέλος, αναλύεται η παραγωγή των εξωτερικών φορτίων, η σύνθεση των καθολικών μητρώων και αναφέρονται επιγραμματικά τα πλεονεκτήματα της VEM.

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφεται ο ευρεστικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης που χρησιμοποιήθηκε. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του σμήνους σωματιδίων (particle swarm optimization) που βασίζεται στη συμπεριφορά μιας ομάδας έμβιων οργανισμών, όπως για παράδειγμα ένα σμήνος εντόμων ή πτηνών ή ένα κοπάδι ψαριών. Αρχικά ορίζεται το πρόβλημα της βελτιστοποίησης: οι μεταβλητές σχεδιασμού, η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί. Στη συνέχεια παρουσιάζονται διάφορες παραλλαγές στην αντικειμενική, τις μεταβλητές σχεδιασμού και στους περιορισμούς που αντιστοιχούν την κατάστρωση διαφορετικών προβλημάτων βελτιστοποίησης. Τέλος, συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις παραπάνω παραλλαγές.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα κυριότερα ευρήματα και συμπεράσματα που προέκυψαν κατά την εκτέλεση της παρούσας εργασίας, καθώς και προτάσεις για μελλοντική έρευνα σε συναφείς περιοχές.

Κεφάλαιο 2

Προηγούμενη έρευνα

Οι πρώτες μέθοδοι βελτιστοποίησης χρονολογούνται από την εποχή των Newton, Lagrange και Cauchy. Η ανάπτυξη μεθόδων βελτιστοποίησης μέσω του διαφορικού λογισμού κατέστη δυνατή με την συνεισφορά των Newton και Leibnitz. Στην συνέχεια τέθηκαν τα θεμέλια του λογισμού των μεταβολών από τους Bernouli, Euler, Lagrange και Weirstrass, για την βελτιστοποίηση συναρτησιακών. Επιπλέον, ο Lagrange ανέπτυξε τη μέθοδο των ομόνυμων πολλαπλασιαστών Lagrange για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με περιορισμούς. Ο Cauchy εφάρμοσε τη μέθοδο της καθόδου μέγιστης κλίσης (steepest descent) για την επίλυση προβλημάτων ελαχιστοποίησης χωρίς περιορισμούς. Παρόλες τις παραπάνω καινοτομίες, σημειώθηκε ελάχιστη πρόοδος μέχρι τα μέσα του 20^{ου} αιώνα, όταν η ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών επέτρεψε την υλοποίηση των παραπάνω μεθόδων και έδωσε το έναυσμα για περαιτέρω έρευνα. Έπειτα, ακολούθησε πρωτοφανής πρόοδος με πλούσια βιβλιογραφία και επιστημονικές δημοσιεύσεις πάνω σε μεθόδους βελτιστοποίησης.

Εντύπωση κάνει το γεγονός ότι οι κύριες καινοτομίες στις αριθμητικές μεθόδους βελτιστοποίησης έκαναν την εμφάνισή τους στο Ηνωμένο Βασίλειο μόλις τη δεκαετία του 1960. Η ανάπτυξη της μεθόδου Simplex από τον Dantzig το 1947 για το γραμμικό προγραμματισμό και οι εργασίες του Bellman πάνω στο δυναμικό προγραμματισμό άνοιξαν το δρόμο προς την ανάπτυξη νέων μεθόδων βελτιστοποίησης με περιορισμούς. Η εργασία των Kuhn και Tucker το 1951 στις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τη βέλτιστη λύση έθεσε τα θεμέλια για περαιτέρω έρευνα στον μη γραμμικό προγραμματισμό. Σημαντικές ήταν και οι συνεισφορές των Zoutendijk και Rosen στο μη γραμμικό προγραμματισμό. Ο Γεωμετρικός προγραμματισμός αναπτύχθηκε από τους Duffin, Zener και Peterson. Ο Gomory εργάστηκε πάνω στον ακέραιο προγραμματισμό, μια από τις ταχύτερα αναπτυσσόμενες

επιστημονικές περιοχές της βελτιστοποίησης. Ο λόγος για αυτό, είναι ότι τα περισσότερα πραγματικά προβλήματα βελτιστοποίησης εμπίπτουν σε αυτήν την κατηγορία.

Η ανάγκη να βελτιστοποιηθούν περισσότεροι από ένας στόχοι, ενώ ικανοποιούνται οι φυσικοί περιορισμοί οδήγησε στην ανάπτυξη μεθόδων πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης. Ο προγραμματισμός στόχων (goal programming) είναι μια γνωστή μεθοδολογία για επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων. Η τελευταία μέθοδος αρχικά προτάθηκε για γραμμικά προβλήματα από τους Charnes και Cooper το 1961. Ακόμη, τα θεμέλια για τη θεωρία παιγνίων τέθηκαν από τον von Neumann το 1928 και από τότε η μεθοδολογία εφαρμόζεται στην επίλυση μαθηματικών, οικονομικών και στρατιωτικών προβλημάτων.

Εκτός από τις κλασικές μαθηματικές μεθόδους βελτιστοποίησης που αναφέρθηκαν παραπάνω, τις τελευταίες δεκαετίες έκαναν την εμφάνισή τους μοντέρνες (μη-παραδοσιακές) μεθοδολογίες. Αυτές οι μέθοδοι περιλαμβάνουν τους γενετικούς αλγορίθμους (genetic algorithms), την προσομοιωμένη απόπτηση (simulated annealing), τη βελτιστοποίηση σμήνους σωματιδίων (particle swarm optimization), τη βελτιστοποίηση αποικίας μυρμηγκιών (ant colony), την βελτιστοποίηση βασισμένη στα νευρωνικά δίκτυα και την ασαφή (fuzzy) βελτιστοποίηση.

Οι γενετικοί αλγόριθμοι βασίζονται στο μηχανισμό της κληρονομικότητας των γονιδίων και της φυσικής επιλογής και προτάθηκαν από τον John Holland το 1975. Η μέθοδος της προσομοιωμένης απόπτησης βασίζεται στη μηχανική της διαδικασίας σταδιακής ψύξεως λιωμένων μετάλλων μέσω της απόπτησης και προτάθηκε από τους Kirkpatrick, Gelatt και Vecchi. Η βελτιστοποίηση του σμήνους σωματιδίων μιμείται την συμπεριφορά κοινωνικών οργανισμών όπως ένα σμήνος εντόμων ή ένα κοπάδι ψαριών. Ο αλγόριθμος προτάθηκε, αρχικά από τους Kennedy και Eberhart το 1995. Η βελτιστοποίηση αποικίας μυρμηγκιών βασίζεται στην συνεργατική συμπεριφορά των μυρμηγκιών, τα οποία μπορούν να ιχνηλατήσουν τη διαδρομή με την ελάχιστη απόσταση προς την τροφή. Η μέθοδος αναπτύχθηκε από τον Marco Dorigo το 1992. Οι μέθοδοι που βασίζονται στα νευρωνικά δίκτυα βασίζονται στην τεράστια υπολογιστική ισχύ του νευρικού συστήματος για την επίλυση προβλημάτων αντίληψης αξιοποιώντας μεγάλο αριθμό δεδομένων των αισθητήριων οργάνων μέσω της παράλληλης επεξεργαστικής δυνατότητας. Η μέθοδος, αρχικά, εφαρμόστηκε σε βελτιστοποίηση από τους Hopfield και Tank το 1985. Οι μέθοδοι ασαφούς βελτιστοποίησης αναπτύχθηκαν ώστε να αντιμετωπίζουν προβλήματα που οι μεταβλητές σχεδιασμού, η αντικειμενική και οι περιορισμοί περιγράφονται με ανακριβή, αόριστο και γλωσσικό τρόπο. Η μέθοδος παρουσιάστηκε από τον Rao το 1986.

Εξειδικεύοντας, η βελτιστοποίηση των κατασκευών [5] έχει τις ρίζες της στη δεκαετία του 1960 [6]. Πριν από τότε δεν υπήρχε βιβλιογραφία για μη γραμμικό προγραμματισμό. Το μοναδικό εργαλείο για τη βελτιστοποίηση ήταν ο γραμμικός προγραμματισμός. Αφότου αναπτύχθηκε το αντικείμενο του μαθηματικού προγραμματισμού, σημειώθηκε ραγδαία πρόοδος στην περιοχή της βελτιστοποίησης των κατασκευών.

Η εργασία των Bendsøe και Kikuchi [7] έθεσε τα θεμέλια για τη βελτιστοποίηση τοπολογίας. Η βελτιστοποίηση τοπολογίας απαντά στο εξής ερώτημα: πως να τοποθετηθεί το υλικό σε μια κατασκευή ώστε να βελτιστοποιηθεί η κατασκευαστική απόδοση. Μέχρι στιγμής όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης που αναφέρθηκαν παραπάνω αφορούν απλά υλικά. Μόλις μέχρι πρόσφατα η επιστημονική κοινότητα άρχισε να ασχολείται με προβλήματα βελτιστοποίησης της δομής των σύνθετων υλικών. Οι Gurdal, Haftka και Hajela στην εργασία τους [8] ασχολήθηκαν με τη βελτιστοποίηση ινών σύνθετων πολυστρωματικών υλικών ως προς τη στιβαρότητα χρησιμοποιώντας ακέραιο προγραμματισμό. Στην εργασία του [9] ο Delgado ασχολήθηκε με τον κατασκευαστικό βέλτιστο σχεδιασμό πολυστρωματικών ινών σύνθετων και την τοπολογική ανάλυση ευαισθησίας σε ανισοτροπική ελαστικότητα. Στην δημοσίευσή τους [10] ο Huang και άλλοι επέκτειναν τη μέθοδο της εξελικτικής κατασκευαστικής βελτιστοποίησης δύο κατευθύνσεων στο σχεδιασμό σύνθετων υλικών με βέλτιστα βισκοελαστικά χαρακτηριστικά. Με την βελτιστοποίηση της μικροδομής κοκκώδων σύνθετων υλικών ασχολήθηκαν οι Muc και Barski [11] ως προς τις βέλτιστες μαγνητικές, διηλεκτρικές και θερμικές ιδιότητες. Επίσης, ο Da και άλλοι [12] παρουσίασαν ένα πλαίσιο τοπολογικής βελτιστοποίησης σε αντοχή στη θραύση για κοκκώδη σύνθετα υλικά. Τέλος, ο Mushtaq και άλλοι [13] στην εργασία τους ασχολήθηκαν με την βελτιστοποίηση της μικροδομής σε κοκκώδη σύνθετα υλικά με στόχο το βέλτιστο σχεδιασμό ως προς τις φυσικοχημικές ιδιότητες του υλικού.

Κεφάλαιο 3

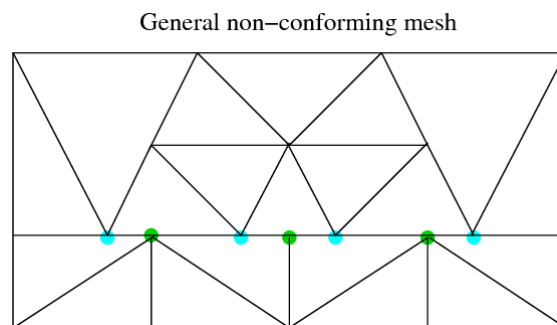
Μέθοδος ιδεατών στοιχείων

3.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος των ιδεατών στοιχείων (virtual element method) (VEM) [14] είναι μια αριθμητική μέθοδος σχεδιασμένη για πολυγωνικές (στις 2 διαστάσεις) ή πολυεδρικές (στις 3 διαστάσεις) διακριτοποιήσεις. Τα μαθηματικά θεμέλια έχουν τεθεί και τα πλεονεκτήματά της μεθόδου έχουν διερευνηθεί σε αρκετές εφαρμογές. Στο παρόν κεφάλαιο θα περιγραφεί η μεθοδολογία από τη σκοπιά του μηχανικού τονίζοντας και χαρακτηριστικά που την καθιστούν πιο ελκυστική από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Εμπνευσμένη από την μιμητική μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, η μέθοδος των ιδεατών στοιχείων τοποθετείται στο πλαίσιο της μεθόδου Galerkin σαν μια γενίκευση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων που επιτρέπει την εφαρμογή πάνω σε πολυτοπικά πλέγματα. Η κύρια ιδέα της μεθόδου VEM είναι ότι οι συναρτήσεις σχήματος προσδιορίζονται έμμεσα. Επιπλέον, οι συναρτήσεις σχήματος κατασκευάζονται σύμφωνα με έναν ακέραιο k , ο οποίος αντιπροσωπεύει τη τάξη σχήματος της προσέγγισης. Σαν παραλλαγή με την p -μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (p -FEM), η VEM δεν περιέχει πολυωνυμικές συναρτήσεις σχήματος. Παρόλο που είναι μια καινούργια μέθοδος, η VEM έχει ήδη τραβήξει την προσοχή της κοινότητας της υπολογιστικής μηχανικής. Η μέθοδος έχει διερευνηθεί στο πλαίσιο ενός μεγάλου αριθμού προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένων προβλημάτων απειροστής και πεπερασμένης παραμόρφωσης γραμμική ελαστικότητα, ανελαστικότητα, βελτιστοποίηση τοπολογίας, κάμψη πλακών, επαφή, γεωμηχανική και μηχανική θραύσης.

Η μέθοδος σχεδιάστηκε για πολυτοπικές διακριτοποιήσεις αυθαίρετου σχήματος, οι οποίες είναι ιδιαίτερα βολικές για παραγωγή πλέγματος σύνθετων γεωμετριών. Αυτό προσδίδει στη VEM απaráμιλλη ευελιξία στο στάδιο προεπεξεργασίας της γεωμετρίας πριν την ανάλυση. Αυτό είναι μακράν το πιο ελκυστικό χαρακτηριστικό της μεθόδου, όχι μόνο επειδή έχει αποδειχθεί ότι η VEM είναι σθεναρή στην παραμόρφωση πλέγματος, αλλά και επειδή τα μη σύμμορφα πλέγματα, στη τυπική FEM, μπορούν να αντιμετωπιστούν με απλό τρόπο στη VEM. Μη σύμμορφο είναι ένα πλέγμα όταν στην πλευρά μεταξύ δύο συνορεύουσων επιφανειών υπάρχουν κόμβοι που ανήκουν σε στοιχεία μόνο της μιας επιφάνειας (Σχήμα 3.1). Η VEM ερμηνεύει έναν ενδιάμεσο κόμβο σε μια πλευρά σαν κορυφή δύο ακμών που σχηματίζουν 180° μεταξύ τους, αυξάνοντας έτσι κατά ένα τον αριθμό των πλευρών των στοιχείων που μοιράζονται αυτόν τον κόμβο. Έτσι, δεν απαιτείται καμία τροποποίηση στη κατάστρωση των εξισώσεων των VEM καθώς αλλάζει ο αριθμός των κόμβων και το στοιχείο αντιμετωπίζεται φυσιολογικά παρόλο που το πλέγμα δεν είναι σύμμορφο. Η αντιμετώπιση μη σύμμορφων πλεγμάτων προσδίδει στη VEM ένα πλεονέκτημα έναντι της τυπικής FEM, καθώς η δημιουργία σύμμορφων πλεγμάτων είναι μια χρονοβόρα διαδικασία που μπορεί ακόμη και να οδηγήσει σε ακατάλληλα πλέγματα για την ανάλυση, όπως για παράδειγμα να περιέχει στοιχεία με κακές αναλογίες διαστάσεων που μπορούν να επηρεάσουν την ακρίβεια της λύσης και να υποβαθμίσουν τον αριθμό κατάστασης του μητρώου στιβαρότητας.



Σχήμα 3.1

3.2 Περιγραφή του προβλήματος

Το πρόβλημα προς επίλυση είναι το πρόβλημα συνοριακών τιμών σε συνεχή περιοχή $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ (Σχήμα 3.2). Μια δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας f ασκείται στην Ω και στο σύνορό της $\partial\Omega$ με κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} το οποίο αποτελείται από δύο περιοχές $\partial\Omega_u$ και $\partial\Omega_t$ πάνω στις οποίες υπάρχουν συνοριακές συνθήκες Dirichlet (γεωμετρικές) και Neumann (φυσικές), αντίστοιχα. Στο σύνορο $\partial\Omega_t$ ασκείται μια επιφανειακή τάση \mathbf{t} (Σχήμα 3.2).

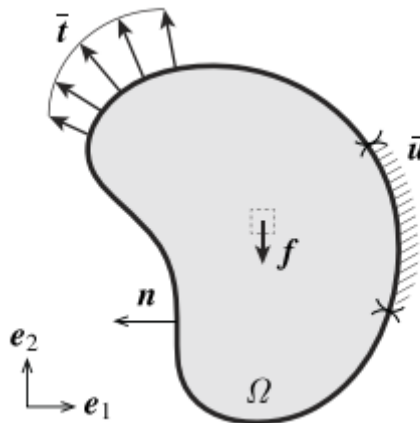
Η ασθενής (μεταβολική) διατύπωση για την κατάσταση ισορροπίας είναι να βρεθεί μια λύση $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ ώστε

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}$$

όπου \mathbf{V} είναι ο διανυσματικός χώρος συναρτήσεων με προβολές $u_{1,2}$ που ανήκουν στον χώρο Sobolev πρώτης τάξης $H^1(\Omega)$ με μηδενική τιμή στο Ω_u και διγραμμικούς και γραμμικούς όρους που αντίστοιχούν στην ενέργεια παραμόρφωσης $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ και στο έργο των εξωτερικών φορτίων $L(\mathbf{v})$ και δίνονται από τις σχέσεις

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega, \quad L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} d\Omega_t$$

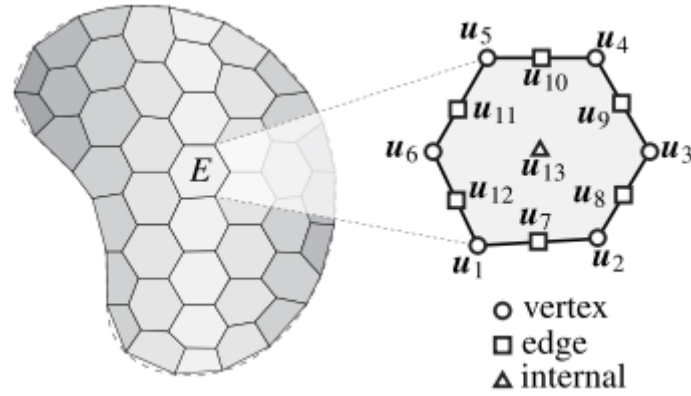
Η τάση Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ στην παραπάνω σχέση ικανοποιεί το νόμο του Hooke $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$, όπου $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ είναι οι απειροστές (γραμμικοποιημένες) παραμορφώσεις.



Σχήμα 3.2

3.3 Διακριτές εξισώσεις

Στη VEM ο τύπος κατά Galerkin της εξίσωσης $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$ παράγεται διαλέγοντας έναν κατάλληλο διακριτό χώρο $\mathbf{V}^h \subset \mathbf{V}$ για την δοκιμαστική λύση \mathbf{u}^h και τη συνάρτηση βάρους \mathbf{v}^h . Αντίθετα με την FEM, εδώ μπορεί να χρησιμοποιηθούν πολύγωνα αυθαίρετου αριθμού πλευρών (κυρτά και μη) και έτσι η περιοχή Ω διακριτοποιείται σε μη αλληλοεπικαλυπτόμενα πολύγωνα E έτσι ώστε $\Omega \approx \Omega^h \equiv \cup_i E_i$ (Σχήμα 3.3). Για να αντιμετωπιστεί το γεγονός ότι τα πολύγωνα έχουν αυθαίρετο αριθμό πλευρών, η VEM χρησιμοποιεί γενικούς χώρους πεπερασμένων στοιχείων που δεν περιλαμβάνουν πολυωνυμικές συναρτήσεις σχήματος. Σε αντίθεση, στην κλασική FEM, απαιτείται αριθμητική ολοκλήρωση στον χώρο του στοιχείου χωρίζοντας το στοιχείο σε τρίγωνο και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά Gauss.



Σχήμα 3.3

Προβολή: Ο τελεστής της προβολής είναι το σημαντικότερο στοιχείο της μεθόδου VEM. Συμβολίζεται ως $V^h(E) \rightarrow P_k(E)$, όπου $V^h(E) \equiv [V^h(E)]^2$ είναι ο τοπικός χώρος των συναρτήσεων σχήματος VEM στο στοιχείο E και $P_k(E) \equiv [P_k(E)]^2$ ο χώρος πολωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με k στο στοιχείο E . Ο τελεστής της προβολής χρησιμοποιείται για την πολωνυμική προβολή των συναρτήσεων σχήματος της VEM χωρίς απώλεια αριθμητικής ακρίβειας. Αυτό γίνεται διότι οι συναρτήσεις σχήματος δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν άμεσα καθώς δεν είναι γνωστές.

Ο τελεστής προβολής αναπτύσσεται τοπικά για κάθε στοιχείο-πολύγωνο ώστε να ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\alpha_E(\mathbf{u}^h - \mathbf{P}\mathbf{u}^h, \mathbf{p}) = 0, \forall \mathbf{p} \in P_k(E)$$

όπου η ολοκλήρωση πραγματοποιείται στην περιοχή E . Η παραπάνω εξίσωση εξηγεί ότι το σφάλμα μεταξύ \mathbf{u}^h και $\mathbf{P}\mathbf{u}^h$ στο E , δεν μπορεί να εντοπιστεί από τον πολωνυμικό χώρο P_k , δηλαδή το σφάλμα είναι ορθογώνιο στον P_k . Στην ορολογία κατά VEM αυτό ονομάζεται k -συνέπεια.

Διακριτή μεταβολική μορφή: Η διακριτή διγραμμική μορφή στο στοιχείο E για μετατοπίσεις $\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h \in V^h$ δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\alpha}_E(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \alpha_E(\mathbf{P}\mathbf{u}^h, \mathbf{P}\mathbf{v}^h) + \tau^h S_E(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h)$$

όπου ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος δεν διαφέρει ιδιαίτερα από τον αντίστοιχο στη FEM ($\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$) μόνο που εδώ προστίθεται ο μετασχηματισμός προβολής. Ο δεύτερος όρος, που πολλαπλασιάζεται με το τ^h , σταθεροποιεί αριθμητικά τη μέθοδο. Εδώ απαιτείται μία προσέγγιση $\widehat{L}_E(\mathbf{v}^h) \approx L_E(\mathbf{v}^h)$ για τον υπολογισμό των γενικευμένων δυνάμεων που προέρχονται από τα εξωτερικά φορτία. Η συνολική συνεισφορά στην ενέργεια παραμόρφωσης και στο έργο των εξωτερικών φορτίων προκύπτει ως

$$\hat{\alpha}(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_{E \in \Omega^h} \widehat{\alpha}_E(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) \text{ και } \widehat{L}(\mathbf{v}^h) = \sum_{E \in \Omega^h} \widehat{L}_E(\mathbf{v}^h)$$

αντίστοιχα. Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, το διακριτό πρόβλημα εκφράζεται ως εξής: να βρεθούν τα $\mathbf{u}^h \in V^h$ έτσι ώστε

$$\hat{a}(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \hat{L}(\mathbf{v}^h), \forall \mathbf{v}^h \in V^h$$

Είναι απαραίτητη μια αριθμητική σταθεροποίηση για τη μέθοδο, που υπολογίζει την ενέργεια παραμόρφωσης που δεν υπολογίστηκε λόγω της προβολής. Πιο συγκεκριμένα, η σταθεροποίηση χρειάζεται για να είναι κάτω φραγμένο το $\hat{a}(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h)$ ώστε να υπάρχει λύση (και να είναι μοναδική). Με άλλα λόγια, ο όρος $\tau^h S_E(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h)$ είναι απαραίτητος γιατί οι συναρτήσεις σχήματος είναι πολυώνυμα μόνο όταν $k=1$, όταν, δηλαδή, το στοιχείο είναι τρίγωνο (στις 2 διαστάσεις) ή τετράεδρο (στις 3 διαστάσεις). Γενικά, σε πολυγωνικά στοιχεία, οι συναρτήσεις σχήματος δεν είναι πολυώνυμα, και ο όρος αριθμητικής ευστάθειας ελέγχει την ενέργεια παραμόρφωσης των όρων μεγαλύτερης τάξης του k .

3.4 Βαθμοί ελευθερίας

Σε κάθε πολύγωνο, μια διανυσματική συνάρτηση δοκιμής στο τοπικό VEM χώρο, $\mathbf{v}^h \in V^h(E)$, έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

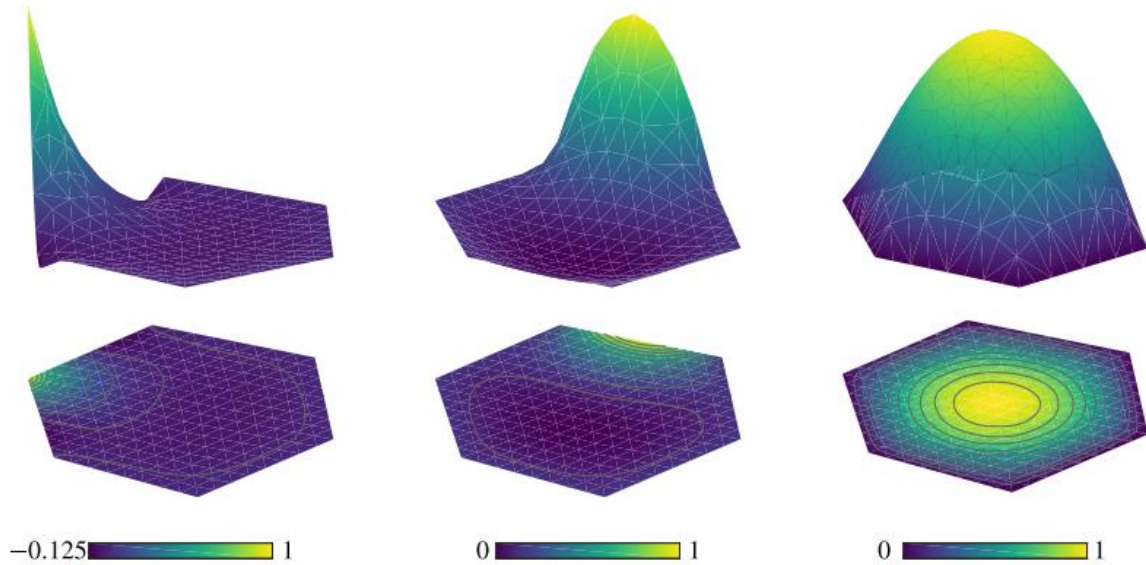
- Η \mathbf{v}^h είναι συνεχής συνάρτηση στο σύνορο του στοιχείου ∂E
- Η \mathbf{v}^h είναι διανυσματική συνάρτηση με πολυωνυμικές προβολές βαθμού k σε κάθε πλευρά του στοιχείου E .
- Οι $\Delta \mathbf{v}^h$ είναι πολυώνυμα $k-2$ βαθμού στο εσωτερικό του E .

Παρόλο που αυτές οι ιδιότητες μας επιτρέπουν να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά του \mathbf{v}^h στο σύνορο ∂E , δεν υπάρχει πληροφορία για το τι συμβαίνει στο εσωτερικό του E . Οι βαθμοί ελευθερίας του πολυγώνου ορίζονται με τέτοιο τρόπο που δεν απαιτείται η γνώση των συναρτήσεων σχήματος, όπως φαίνεται από το όνομα της μεθόδου – *ιδεατά στοιχεία*. Για ένα πολυώνυμο βαθμού k , οι βαθμοί ελευθερίας που σχετίζονται με ένα δεδομένο πολύγωνο είναι (Σχήμα 3.3 για $k=2$):

1. **Βαθμοί ελευθερίας κορυφών:** Για $k \geq 1$, η τιμή του \mathbf{v}^h πάνω στις n_u κορυφές του E (με συντεταγμένες \mathbf{x}_i)
2. **Βαθμοί ελευθερίας πλευρών:** Για $k \geq 2$, η τιμή του \mathbf{v}^h στα $k-1$ σημεία πάνω στο εσωτερικό των πλευρών του E
3. **Εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας:** Για $k \geq 2$, οι ροπές μέχρι τάξης $k-2$ του \mathbf{v}^h στο εσωτερικό του E : $\frac{1}{|E|} \int_E \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{p} dE, \forall \mathbf{p} \in P_{k-2}(E)$

Για τους βαθμούς ελευθερίας τύπου 1 και 2, μια κατάλληλη επιλογή είναι τα $k+1$ σημεία ολοκλήρωσης Gauss-Lobatto σε κάθε πλευρά, καθώς απλοποιούν τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Μιά εναλλακτική επιλογή θα ήταν η αντικατάσταση των βαθμών τύπου 2 με $k-1$ «ροπές» στην πλευρά. Στην πραγματικότητα, οποιοσδήποτε τρόπος θα μπορούσε να εφαρμοστεί για τον μονοσήμαντο προσδιορισμό ενός πολυωνύμου k βαθμού στην πλευρά, παρόλο που η μέθοδος που παρουσιάζεται εδώ μοιάζει αρκετά με αυτή που χρησιμοποιείται στη FEM, ενώ η μέθοδος των «ροπών» παραπέμπει στα πεπερασμένα στοιχεία ανώτερης τάξης (p-FEM). Για ένα δεδομένο πολύγωνο, ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας με μία χωρική διάσταση είναι $n_d = \dim(V^h(E)) = k n_u + k(k-1)/2$, επομένως στις 2 διαστάσεις κάθε πολυγωνικό στοιχείο έχει $2 n_d$ βαθμούς ελευθερίας.

Σε αυτό το σημείο είναι βολικό να οριστεί ο τελεστής dof_i που επιδρά πάνω στο $v^h \in V^h(E)$, ως η τιμή του v^h στον i βαθμό ελευθερίας. Οι συναρτήσεις βάσης για τον τοπικό χώρο VEM σε μία διάσταση συμβολίζονται με φ_i και ορίζονται έτσι ώστε $dof_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$, όπου δ_{ij} είναι ο συντελεστής δέλτα του Kronecker. Το διάνυσμα που περιέχει τις συναρτήσεις σχήματος συμβολίζεται με $\mathbf{N} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_d}]$. Μια γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων που σχετίζονται με κάθε βαθμό ελευθερίας παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4, όπου οι συναρτήσεις που αντιστοιχούν σε βαθμούς ελευθερίας πλευράς και κορυφής (τύπου 1 και 2) έχουν μηδενική μέση τιμή: η τιμή τους στον εσωτερικό βαθμό ελευθερίας είναι μηδεν. Αντίθετα, οι συναρτήσεις που αντιστοιχούν σε εσωτερικό βαθμό έχουν μηδενική τιμή στο σύνορο του στοιχείου. Αυτές οι συναρτήσεις ορίζονται έμμεσα μέσω ενός προβλήματος συνοριακών τιμών στο στοιχείο και έτσι υπολογίστηκαν αριθμητικά για λόγους γραφικής αναπαράστασης. Καθώς είμαστε στις 2 διαστάσεις, συμβολίζεται ως $\boldsymbol{\varphi}$ η διανυσματική συνάρτηση βάσης ως εξής: $\boldsymbol{\varphi}_1 = [\varphi_1, 0]$, $\boldsymbol{\varphi}_2 = [0, \varphi_1]$, ..., $\boldsymbol{\varphi}_{2i-1} = [\varphi_i, 0]$, $\boldsymbol{\varphi}_{2i} = [0, \varphi_i]$ σε κάθε πλευρά του στοιχείου. Έτσι, γειτονικά στοιχεία που μοιράζονται βαθμούς ελευθερίας σε μια κοινή πλευρά ορίζουν συνεχή συνάρτηση μεταξύ δύο στοιχείων ώστε η λύση να είναι συνεχής στην περιοχή Ω^h .



Σχήμα 3.4

3.5 Μητρώο στιβαρότητας

Σε αυτή την ενότητα θα περιγραφεί ο προσδιορισμός του μητρώου στιβαρότητας k_E του στοιχείου. Στην FEM το μητρώο γράφεται ως

$$k_E = \int_E \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dE$$

όπου \mathbf{C} είναι ο καταστατικός τανυστής του υλικού είτε για επίπεδη κατάσταση παραμορφώσεων είτε για επίπεδη εντατική κατάσταση, ανάλογα με το πρόβλημα. \mathbf{B} είναι το μητρώο των παραγωγίσεων των συναρτήσεων βάσης $\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} = [\boldsymbol{\partial} \varphi_1, \boldsymbol{\partial} \varphi_2, \dots, \boldsymbol{\partial} \varphi_{n_d}]$ με

$$\boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} \partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial x_2 \\ \partial x_2 & \partial x_1 \end{bmatrix}$$

Στη VEM, επειδή οι συναρτήσεις σχήματος είναι άγνωστες, η κατασκευή του μητρώου πραγματοποιείται με τη βοήθεια των τοπικών βαθμών ελευθερίας και του τελεστή προβολής που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη ενότητα. Το μητρώο αποτελείται από τους όρους της συνέπειας και της ευστάθειας :

$$k_E = \underbrace{\int_E (\mathbf{B}\hat{\boldsymbol{\Pi}})^T \mathbf{C} (\mathbf{B}\hat{\boldsymbol{\Pi}}) dE}_{k_E^C \text{ συνέπεια}} + \underbrace{k_E^S}_{\text{ευστάθεια}}$$

όπου $\mathbf{B}\hat{\Pi}: \partial\hat{\Pi}\mathbf{N} = [\partial\hat{\Pi}\varphi_1, \partial\hat{\Pi}\varphi_2, \dots, \partial\hat{\Pi}\varphi_{n_d}]$, καθώς μόνο με προσεγγιστικό τρόπο μπορεί να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις σχήματος θεωρώντας $\varphi_i \approx \hat{\Pi}\varphi_i$. Παρόλα αυτά, η προσέγγιση συγκλίνει καθώς ο όρος της συνέπειας είναι ακριβής μέχρι τάξη k , δηλαδή μπορεί να υπολογίσει την ακριβή ενέργεια παραμόρφωσης με πολυώνυμο μέχρι $k-1$ βαθμού.

Όρος συνέπειας: Για ένα παραδεκτό διανυσματικό πεδίο μετατοπίσεων $\mathbf{v} = [v_1, v_2]^T$, οι (μικρές) παραμορφώσεις προσδιορίζονται με τον παρακάτω τελεστή

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} v_1 \\ \partial_{x_2} v_2 \\ \partial_{x_2} v_1 + \partial_{x_1} v_2 \end{bmatrix}$$

Ο τελεστής Π , επιτρέπει τον υπολογισμό του όρου συνέπειας του μητρώου στιβαρότητας προβάλλοντας μια συνάρτηση σχήματος VEM στην πολυωνυμική βάση $\mathbf{P}_k = \{\mathbf{p}_\alpha\} \in P_k(E)$.

$$\Pi(\varphi_i) = \sum_{\alpha=1}^{n_k} s_{i,\alpha} \mathbf{p}_\alpha \in P_k(E), \mathbf{s}_i \in \mathcal{R}^{n_k}$$

Στη συνέχεια η έκφραση ανά μητρικό στοιχείο, εκμεταλλευόμενοι τη γραμμικότητα του τανυστή παραμορφώσεων, δίνει

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_E^C)_{ij} &= \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\Pi(\varphi_i))^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\Pi(\varphi_j)) dE = \int_E \boldsymbol{\varepsilon} \left(\sum_{\alpha=1}^{n_k} s_{i,\alpha} \mathbf{p}_\alpha \right)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \left(\sum_{\beta=1}^{n_k} s_{j,\beta} \mathbf{p}_\beta \right) dE = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_k} s_{i,\alpha} s_{j,\beta} \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}_\alpha)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}_\beta) dE = \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_k} s_{i,\alpha} s_{j,\beta} \alpha_E(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_k} \hat{\Pi}_{i\alpha} \hat{\Pi}_{j\beta} \hat{\mathbf{G}}_{\alpha\beta} = [\hat{\Pi}^T \hat{\mathbf{G}} \hat{\Pi}]_{ij} \end{aligned}$$

όπου το Π δίνεται από

$$\hat{\Pi} = \mathbf{G}^{-1} \bar{\mathbf{B}}$$

με

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_{\beta i} &= \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}_\beta)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\varphi_i) dE \\ \mathbf{G}_{\beta\alpha} &= \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}_\beta)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}_\alpha) dE \end{aligned}$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις μπορούν να ερμηνευτούν ως το δυνατό έργο στο στοιχείο E που προκαλείται από ένα τανυστή τάσεων $\mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}_\beta)$ για δυνατές παραμορφώσεις $\boldsymbol{\varepsilon}(\varphi_i)$ και $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}_\alpha)$

αντίστοιχα. Αν η σχέση για το Π γραφεί $\bar{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{\Pi}}\mathbf{G}$, φαίνεται ότι η προβολή εξασφαλίζει ότι το δυνατό έργο που προκαλείται από τις συναρτήσεις VEM είναι το ίδιο με αυτό που θα προέκυπτε από πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Τέλος, ο όρος συνέπειας του μητρώου προκύπτει ως

$$\mathbf{k}_E^C = \hat{\mathbf{\Pi}}^T \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{\Pi}}$$

όπου $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G}$ αλλά οι πρώτες τρεις γραμμές περιέχουν μηδενικά. Στην πραγματικότητα, αποσυντίθενται οι συναρτήσεις VEM σε πολώνυμα, και στη συνέχεια χρησιμοποιείται το \mathbf{G} .

Όρος ευστάθειας: Αυτός ο όρος δεν εμφανίζεται στην τυπική FEM. Ο τελεστής dof_i που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.4 μπορεί να εφαρμοστεί σε πολώνυμα $\mathbf{p} \in P_k(E)$ καθώς $P_k(E) \subset V^h(E)$. Το μητρώο $\mathbf{D}_{2n_d \times n_k}$ συγκεντρώνει τις τιμές των πολωνύμων \mathbf{p}_α σε βαθμούς ελευθερίας πάνω στο στοιχείο E και ορίζεται ως

$$\mathbf{D}_{i\alpha} = dof_i(\mathbf{p}_\alpha)$$

Η τιμή στο βαθμό ελευθερίας μπορεί να προκύψει από έναν απλό υπολογισμό της τιμής μιας συνάρτησης, στην περίπτωση κορυφής, ή από αριθμητική ολοκλήρωση, στην περίπτωση που ο βαθμός ελευθερίας είναι κάποιο είδος ροπής. Η μητρική έκφραση του τελεστή της προβολής που επιδρά από τον $V^h(E)$ στον εαυτό του μπορεί να πάρει τη παρακάτω μορφή

$$\mathbf{\Pi}_{ij} = dof_i(\mathbf{\Pi}(\varphi_j)) = dof_i\left(\sum_{\alpha=1}^{n_k} s_{i,\alpha} \mathbf{p}_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{n_k} \mathbf{D}_{i\alpha} \hat{\mathbf{\Pi}}_{\alpha j} = [\mathbf{D}\hat{\mathbf{\Pi}}]_{ij} \rightarrow \mathbf{\Pi} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{\Pi}}$$

Και έτσι ο όρος ευστάθειας προσδιορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{k}_E^S = \tau^h tr(\mathbf{k}_E^C)(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^T (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$$

όπου τ^h είναι μια παράμετρος που καθορίζεται από τον χρήστη και επιλέγεται να είναι ίση με $\frac{1}{2}$ για γραμμική ελαστικότητα. Ο όρος της ευστάθειας είναι μια προσέγγιση της εσωτερικής ενέργειας που σχετίζεται με τη διαφορά μεταξύ μιας συνάρτησης μορφής της VEM και της προβολής της. Εφόσον όλα τα πολώνυμα μέχρι k βαθμού συμμετέχουν τον τοπικό χώρο VEM, οι παράγοντες του όρου ευστάθειας είναι μεγαλύτερου βαθμού από το βαθμό διακριτοποίησης k.

3.6 Φορτία

Τα τοπικά φορτία ανά στοιχείο παίρνουν την μορφή

$$\mathbf{r}_E = \int_E \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{f} dE + \int_{\partial E \cap \Omega_t} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{t} d\partial E + \sum_{i=1} \mathbf{v}^h(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{F}_i$$

όπου, εκτός από την δύναμη σώματος και τα επιφανειακά φορτία στο σύνορο, προστίθενται και οι τυπικές συγκεντρωμένες δυνάμεις \mathbf{F}_i που ασκούνται πάνω σε κόμβους και χρησιμοποιούνται συχνά και στη FEM.

Οι δύο τελευταίοι όροι δεν απαιτούν ιδιαίτερη μεταχείριση και ακολουθούν τους κανόνες της FEM. Πιο συγκεκριμένα, τα επιφανειακά φορτία στις συνοριακές συνθήκες Neumann μπορεί να υπολογιστούν όπως στην τυπική FEM καθώς οι συναρτήσεις μορφής VEM στα σύνορα του στοιχείου είναι πολυώνυμα k βαθμού και επομένως γνωστά εκ των προτέρων. Όσον αφορά στα συγκεντρωμένα φορτία, αυτά σχετίζονται με το βαθμό ελευθερίας πάνω στον οποίο ασκούνται, και καθώς αυτοί οι βαθμοί είναι όμοιοι μεταξύ FEM και VEM, όμοια είναι και η αντιμετώπισή τους. Στην περίπτωση που το φορτίο αντιστοιχεί σε βαθμό ελευθερίας τύπου 3 (ενότητα 3.4), εφαρμόζεται η ίδια διαδικασία με τη FEM για γενικευμένες δυνάμεις.

Αντίθετα, ο πρώτος όρος των τοπικών φορτίων χρήζει ιδιαίτερης αντιμετώπισης καθώς εμπεριέχει τις συναρτήσεις μορφής VEM στο εσωτερικό του στοιχείου και επομένως απαιτείται η εφαρμογή του τελεστή προβολής ώστε να εκφραστεί η μετατόπιση κατά VEM \mathbf{v}^h ως πολυώνυμο μέσα στο στοιχείο για να πραγματοποιηθεί η ολοκλήρωση. Έτσι και εδώ, ακολουθείται μία παρόμοια διαδικασία με αυτή του προσδιορισμού του μητρώου στιβαρότητας. Για $k > 2$ εισάγεται η ορθογώνια L^2 προβολή $\Pi_{k-2}: \mathbf{V}_k^h \mathbf{B}(E) \rightarrow P_{k-2}(E)$ ώστε ο πρώτος όρος της φόρτισης να προσεγγιστεί ως

$$\int_E \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{f} dE \approx \int_E \Pi_{k-2}(\mathbf{v}^h) \cdot \mathbf{f} dE$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, παρόλο που η προβολή γίνεται σε πολυώνυμο $k-2$ βαθμού, αυτό αρκεί για την σύγκλιση διότι η προσέγγιση της φόρτισης και της λύσης είναι ίδιου βαθμού. Για $k=2$ εφαρμόζεται η L^2 προβολή Π_k^0 σε πολυωνυμικό χώρο $P_k(E)$ ώστε ο πρώτος όρος της φόρτισης να προσεγγιστεί ως

$$\int_E \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{f} dE \approx \int_E \Pi_k^0(\mathbf{v}^h) \cdot \mathbf{f} dE$$

Τέλος, για $k=1$, ο υπολογισμός πραγματοποιείται με τη μέση τιμή της φόρτισης f στο στοιχείο χρησιμοποιώντας ένα σχήμα ολοκλήρωσης του v^h βασισμένο στις κορυφές.

Από τη στιγμή που έχουν προσδιοριστεί τα μητρώα και τα φορτία για όλα τα πολυγωνικά στοιχεία, η σύνθεση των καθολικών αντίστοιχων μητρώων γίνεται κατά τα γνωστά όπως στην FEM. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι ο αριθμός κατάστασης του μητρώου στιβαρότητας εξαρτάται από τη πολυωνυμική βάση που επιλέχθηκε. Επιλέγεται ορθογώνια βάση για να εξαλείψει τέτοιες ανεπιθύμητες καταστάσεις.

Κλείνοντας, η VEM κατέχει χαρακτηριστικά που την καθιστούν τουλάχιστον το ίδιο κατάλληλη με την FEM για οποιοδήποτε πρόβλημα, ενώ για μερικά προβλήματα η VEM υπερτερεί ξεκάθαρα. Σε αυτά τα προβλήματα ανήκουν πολύπλοκες γεωμετρίες όπου είναι αρκετά δύσκολο να παραχθεί καλής ποιότητας πλέγμα, λύσεις που απαιτούν τοπικές τροποποιήσεις και περιπτώσεις που συνορεύουν δύο περιοχές με διαφορετικά είδη πλέγματος. Τέτοια προβλήματα αναδεικνύουν τη σθεναρότητα της VEM στην ανομοιομορφία του πλέγματος.

Κεφάλαιο 4

Βελτιστοποίηση μικροδομής

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η μέθοδος των ιδεατών στοιχείων και ο λόγος που επιλέχθηκε έναντι της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση του προβλήματος της βελτιστοποίησης. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος της βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (particle swarm optimization) [15]. Στη συνέχεια, καθορίζεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης με τον ορισμό της αντικειμενικής συνάρτησης, των μεταβλητών σχεδιασμού και των περιορισμών. Σε επόμενο στάδιο παρουσιάζονται διάφορες τροποποιήσεις του προβλήματος της βελτιστοποίησης όπως για παράδειγμα αλλαγές στα εξωτερικά φορτία και στις συνοριακές συνθήκες της κατασκευής, στην αντικειμενική συνάρτηση, στις μεταβλητές σχεδιασμού και στους περιορισμούς. Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις παραπάνω διαφορετικές επιλύσεις.

4.1 Βελτιστοποίηση Σμήνους Σωματιδίων

4.1.1 Εισαγωγή

Η βελτιστοποίηση σμήνους σωματιδίων βασίζεται στη συμπεριφορά ενός σμήνους εντόμων όπως π.χ. μέλισσες, σμήνους πουλιών ή ενός κοπαδιού ψαριών. Ο αλγόριθμος μιμείται τη συμπεριφορά των παραπάνω έμβιων οργανισμών. Το σωματίδιο αντιστοιχεί σε μια π.χ. μέλισσα μιας αποικίας ή ένα πουλί σε ένα σμήνος. Κάθε σωματίδιο συμπεριφέρεται με συνδυασμό της δικής του νοημοσύνης αλλά και της συμπεριφοράς του υπόλοιπου πλήθους του σμήνους. Κατ' αυτόν τον τρόπο, αν κάποιο σωματίδιο ανακαλύψει μια καλή διαδρομή που οδηγεί στην τροφή, και το υπόλοιπο σμήνος θα ακολουθήσει τη συγκεκριμένη διαδρομή

ακόμα και αν η θέση τους απέχει αρκετά μέσα στο σμήνος. Η συγκεκριμένη μέθοδος προτάθηκε από τους Kennedy και Eberhart [16].

Ο αριθμός των σωματιδίων του σμήνους θεωρείται σταθερός με κάθε σωματίδιο να βρίσκεται αρχικά σε τυχαία θέση στον πολυδιάστατο χώρο των μεταβλητών σχεδιασμού. Κάθε σωματίδιο χαρακτηρίζεται από δύο ποσότητες: θέση και ταχύτητα. Κάθε σωματίδιο κινείται στον χώρο και θυμάται την καλύτερη θέση (ως προς την τιμή της αντικειμενικής) που έχει συναντήσει. Τα σωματίδια ανταλλάσσουν πληροφορία σχετικά με τις καλές θέσεις και μεταβάλλουν τις θέσεις τους ανάλογα με τις πληροφορίες που λαμβάνουν.

Για παράδειγμα, ας φανταστούμε τη συμπεριφορά ενός σμήνους πτηνών. Παρόλο που κάθε πτηνό έχει περιορισμένη νοημοσύνη, ακολουθεί τους παρακάτω απλούς κανόνες.

1. Προσπαθεί να μην πλησιάσει κοντά σε άλλα πτηνά
2. Κατευθύνεται προς την μέση διεύθυνση των υπόλοιπων πτηνών
3. Προσπαθεί να προσαρμοστεί την μέση θέση μεταξύ των υπόλοιπων πτηνών χωρίς μεγάλα κενά

Έτσι, η συμπεριφορά του σμήνους βασίζεται στο συνδυασμό τριών παραγόντων

1. Συνεκτικότητα – το σμήνος παραμένει μαζεμένο
2. Διάκενα – τα πτηνά κρατάνε αποστάσεις μεταξύ τους
3. Κατεύθυνση – κάθε πτηνό ακολουθεί τη γενική κατεύθυνση του σμήνους

Ο αλγόριθμος βασίζεται στο παρακάτω μοντέλο:

1. Όταν ένα σωματίδιο εντοπίσει την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής, μεταδίδει την πληροφορία στο σμήνος
2. Το σμήνος κινείται προς την βέλτιστη θέση αλλά όχι στο ακριβές σημείο
3. Υπάρχει και συνεισφορά της νοημοσύνης του κάθε πτηνού σε συνδυασμό με την μνήμη του

Επομένως, ο αλγόριθμος προσομοιώνει μια τυχαία αναζήτηση στον χώρο των μεταβλητών σχεδιασμού για την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Έτσι, σταδιακά μετά από πολλές επαναλήψεις, το σμήνος θα βρεί τη θέση της βέλτιστης λύσης.

4.1.2 Υπολογιστική υλοποίηση

Τίθεται το πρόβλημα μεγιστοποίησης χωρίς περιορισμούς

$$\max f(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$$

s.t.

$$\mathbf{X}_l < \mathbf{X} < \mathbf{X}_u$$

όπου X_l και X_u είναι τα κάτω και άνω όρια των μεταβλητών σχεδιασμού X , αντίστοιχα. Τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα εξής:

1. Έστω ότι το μέγεθος του σμήνους (αριθμός σωματιδίων) είναι N . Για να περιοριστεί ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής που χρειάζεται για τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης, απαιτείται ένα σχετικά μικρό πλήθος σωματιδίων. Άλλα αν το πλήθος είναι μικρό τότε θα χρειαστούν πολλές επαναλήψεις για την εύρεση της λύσης ή μπορεί να μην είναι δυνατός ο προσδιορισμός της. Συνήθως επιλέγεται ένα πλήθος από 20 έως 30 σωματίδια.
2. Δημιουργείται ένα αρχικό πλήθος σωματιδίων X_1, X_2, \dots, X_N . Συμβολίζονται ως X_j^i και V_j^i η θέση και ταχύτητα αντίστοιχα του σωματιδίου j στην επανάληψη i . Τα αρχικά σωματίδια είναι τα X_j^0 . Υπολογίζεται η τιμή της αντικειμενικής για κάθε σωματίδιο $f(X_j^0)$.
3. Υπολογίζονται οι ταχύτητες των σωματιδίων σύμφωνα με έναν τύπο παρακάτω. Οι αρχικές ταχύτητες είναι μηδενικές.
4. Στην επανάληψη i υπολογίζονται τα παρακάτω μεγέθη:

a. Η καλύτερη τιμή της αντικειμενικής για κάθε σωματίδιο j , $P_j = \max_i f(X_j^i)$, που υπολογίστηκε σε όλα τα προηγούμενα βήματα i .

b. Η καλύτερη τιμή της αντικειμενικής για όλα τα σωματίδια, $G = \max_{i,j} f(X_j^i)$, που υπολογίστηκε σε όλα τα προηγούμενα βήματα i για όλα τα σωματίδια j .

c. Η ταχύτητα του σωματιδίου j ως εξής:

$$V_j^i = V_j^{i-1} + c_1 r_1 (P_j - X_j^{i-1}) + c_2 r_2 (G - X_j^{i-1})$$

όπου τα c_1 και c_2 είναι ο νοητικός (ατομικός) και κοινωνικός (συλλογικός) ρυθμός μάθησης, αντίστοιχα, και τα r_1 και r_2 ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές μεταξύ 0 και 1. Οι παράμετροι c_1 και c_2 τονίζουν την σχετική συμμετοχή της μνήμης (θέση) του σωματιδίου προς την μνήμη (θέση) του σμήνους. Οι τιμές των c_1 και c_2 είναι συνήθως 2 ώστε οι όροι $c_1 r_1$ και $c_2 r_2$ να εξασφαλίζουν ότι τα σωματίδια θα συναντήσουν την μεχρι στιγμής βέλτιστη λύση, τις μισές φορές.

d. Η θέση του σωματιδίου j υπολογίζεται ως εξής:

$$X_j^i = X_j^{i-1} + V_j^i$$

5. Τέλος, ελέγχεται η σύγκλιση της λύσης. Αν θέση όλων των σωματιδίων συγκλίνει μέσα σε κάποια περιθώρια ανοχής, τότε θεωρείται ότι η μέθοδος συγκλίνει. Αν όχι, επαναλαμβάνεται το βήμα 4 και η επαναληπτική διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να συγκλίνει στη βέλτιστη λύση.

4.1.3 Εισαγωγή περιορισμών

Τίθεται το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max f(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$$

s.t.

$$g_j(\mathbf{X}) < 0, j = 1, 2, \dots, m$$

Η εισαγωγή των περιορισμών γίνεται με τον ορισμό μιας ισοδύναμης συνάρτησης $F(\mathbf{X})$ που περιλαμβάνει σταθερές μεταβλητές ποινής M_j .

$$F(\mathbf{X}, z_j) = f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m M_j |h_j(\mathbf{X}, z_j)|$$

Η παραπάνω μέθοδος ισχύει για περιορισμούς ισότητας. Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσουν περιορισμοί ανισότητας, επομένως, πρέπει να μετατραπούν οι περιορισμοί ανισότητας σε ισότητας. Για να γίνει αυτό εισάγονται κατάλληλες μεταβλητές περίσσειας z_j .

Έτσι οι περιορισμοί ανισότητας $g_j(\mathbf{X})$ μετατρέπονται σε ισότητας $h_j(\mathbf{X}, z_j)$

$$h_j(\mathbf{X}, z_j) = g_j(\mathbf{X}) + z_j^2 = 0$$

Οι μεταβλητές περίσσειας υψώνονται στο τετράγωνο για να εξασφαλιστεί ότι οι περιορισμοί $g_j(\mathbf{X})$ είναι πάντα αρνητικοί. Έτσι, το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς και εφαρμόζεται η μέθοδος που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 4.1.2 με αντικειμενική συνάρτηση την $F(\mathbf{X}, z_j)$:

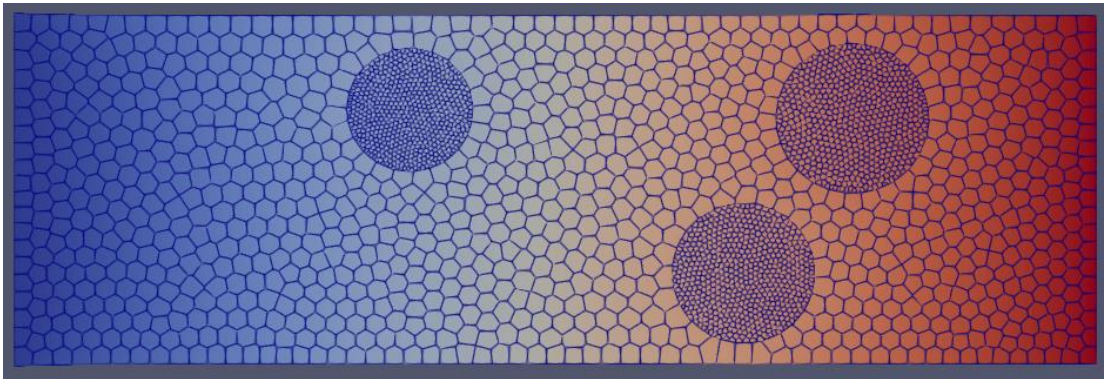
$$\max F(\mathbf{X}, z_j)$$

Σε πρόβλημα μεγιστοποίησης τα M_j είναι αρνητικά ώστε να εξασφαλίσουν ότι οι περιορισμοί ισότητας h_j παραμένουν μηδέν, ενώ σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι θετικά. Η τάξη μεγέθους των M_j προσδιορίζεται με δοκιμές ανάλογα με την προσδιορισθείσα λύση. Συνήθως επιλέγεται μια τιμή 1000 φορές μεγαλύτερη από την τιμή της βέλτιστης λύσης της $f(\mathbf{X})$.

4.2 Καθορισμός του προβλήματος βελτιστοποίησης

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ενός δίσκου. Ο δίσκος έχει ορθογώνιο σχήμα (Σχήμα 4.1) διαστάσεων W , H και αποτελείται από δύο υλικά: την μήτρα και τους κυκλικούς κόκκους που αποτελούν την ενίσχυση του σύνθετου υλικού. Η φόρτιση είναι επίπεδη εντατική κατάσταση και το πρόβλημα βελτιστοποίησης αφορά διαφορετικούς συνδυασμούς από εξωτερικά φορτία και συνοριακές συνθήκες.

Γενικά οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι θέσεις των κέντρων (x_i, y_i) και οι ακτίνες των κυκλικών κόκκων r_i αλλά μπορούν να μεταβληθούν ανάλογα με το πρόβλημα. Επίσης, σε κάθε πρόβλημα ο αριθμός των κόκκων N είναι σταθερός. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης ορίζεται ως η ελαχιστοποίηση του λόγου του όγκου του υλικού της ενίσχυσης προς το συνολικό όγκο του δίσκου (reinforcement volume fraction).



Σχήμα 4.1

Αντικειμενική:

$$\min \frac{\sum_{i=1}^N \pi r_i^2}{W H}$$

Οι περιορισμοί του προβλήματος χωρίζονται σε γεωμετρικούς και μηχανικούς. Οι γεωμετρικοί περιορισμοί περιλαμβάνουν όρια ώστε οι κυκλικοί κόκκοι να βρίσκονται μέσα στη μήτρα. Επίσης, τους αποτρέπουν να μην αλληλοεπικαλύπτονται μεταξύ τους. Αυτοί οι περιορισμοί δημιουργούν μια ασυνέχεια στην αντικειμενική συνάρτηση καθώς σε περίπτωση μη ικανοποίησής τους είναι αδύνατο να δημιουργηθεί το μοντέλο, επομένως η αντικειμενική συνάρτηση επιστρέφει μια ασυνήθιστα μεγάλη τιμή. Οι μηχανικοί περιορισμοί περιλαμβάνουν όρια στις τιμές των μέγιστων μετατοπίσεων που προκύπτουν από κάποια εξωτερικά φορτία.

Περιορισμοί:

(Οι κόκκοι βρίσκονται στα όρια της μήτρας)

$$\varepsilon + r_i - x_i < 0, i = 1, 2, \dots, N$$

$$\varepsilon + r_i - y_i < 0, i = 1, 2, \dots, N$$

$$\varepsilon + r_i + x_i - W < 0, i = 1, 2, \dots, N$$

$$\varepsilon + r_i + y_i - H < 0, i = 1, 2, \dots, N$$

(Οι κόκκοι δεν αλληλοεπικαλύπτονται μεταξύ τους)

$$\varepsilon + r_i + r_j - \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} < 0 \text{ (για κάθε δυωνυμικό ζεύγος } i, j)$$

(Περιορισμοί μετατόπισης – τάσης)

$$u_{max} - U < 0$$

Στις παραπάνω σχέσεις το ε είναι μια σταθερά που εξασφαλίζει μια ορισμένη ανοχή στους περιορισμούς και επιλέγεται από τον χρήστη. Έτσι το πρόβλημα της βελτιστοποίησης γράφεται συγκεντρωτικά ως εξής:

$$\min \frac{\sum_{i=1}^N \pi r_i^2}{W H}$$

s.t.

$$g_j(x_i, y_i, r_i) < 0, j = 1, 2, \dots, m$$

Μετατρέποντας τους περιορισμούς ανισότητας σε ισότητες και εισάγοντάς τους στην αντικειμενική όπως περιγράφηκε στην ενότητα 4.1.3 το πρόβλημα βελτιστοποίησης μετατρέπεται σε μια αντικειμενική χωρίς περιορισμούς:

$$\min \frac{\sum_{i=1}^N \pi r_i^2}{W H} + \sum_{j=1}^m M_j |g_j(x_i, y_i, r_i) + z_j^2|$$

4.3 Δημιουργία μοντέλου

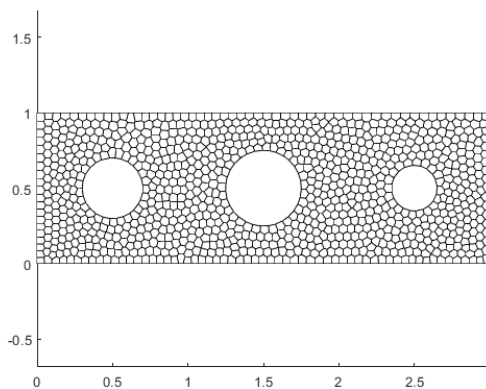
Όπως φαίνεται από την ενότητα 4.2, για τον υπολογισμό της τιμής της αντικειμενικής είναι απαραίτητη η δημιουργία του μοντέλου, η επίλυσή του και η εξαγωγή αριθμητικών αποτελεσμάτων. Για αυτό, αναπτύχθηκαν οι εξής μέθοδοι:

1. Δημιουργία πολυγωνικού πλέγματος μήτρας
2. Δημιουργία πολυγωνικού πλέγματος κόκκων
3. Διασύνδεση πλέγματος μήτρας – κόκκων
4. Εισαγωγή εξωτερικών φορτίων
5. Εισαγωγή συνοριακών συνθηκών

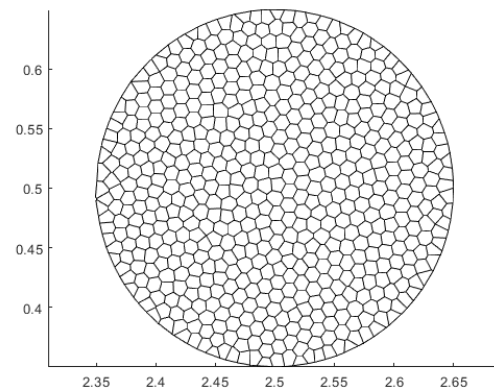
6. Δημιουργία αρχείου επίλυσης
7. Επίλυση
8. Εξαγωγή αποτελεσμάτων
9. Υπολογισμός τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης

Η διαδικασία της βελτιστοποίησης ξεκινάει με την δημιουργία του μοντέλου από τις μεταβλητές σχεδιασμού. Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 4.2, οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι θέσεις και οι ακτίνες των κόκκων. Επομένως, με αυτά υπόψη παράγεται η γεωμετρία μέσα στην οποία θα δημιουργηθεί κατάλληλο πολυγωνικό πλέγμα.

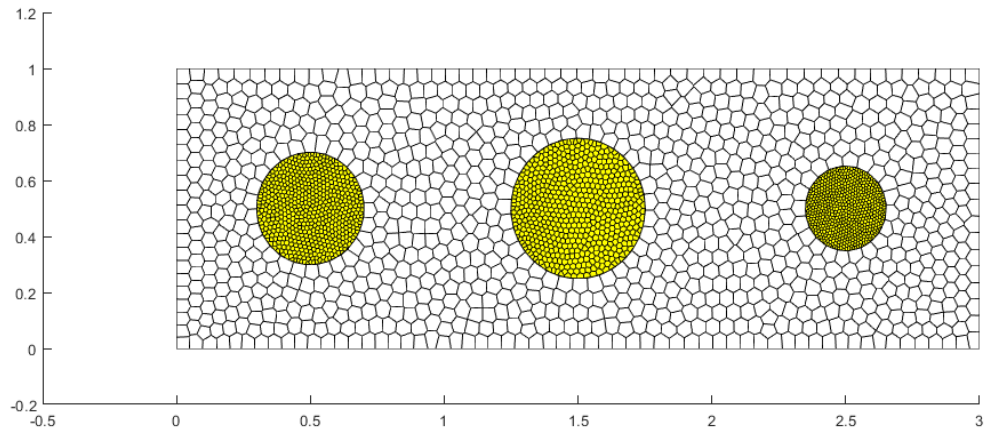
Για τη δημιουργία πολυγωνικών πλεγμάτων χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος PolyMesher [17]. Ο εν λόγω αλγόριθμος εφαρμόζει ιδέες από τα διαγράμματα Voronoi για την παραγωγή κυρτών πολυγώνων μέσα στα όρια ενός γεωμετρικού σχήματος. Σε αυτό το στάδιο έχουν παραχθεί πολυγωνικά πλέγματα για τη μήτρα και τους κόκκους (Σχήματα 4.1, 4.2, 4.3). Το πρόβλημα είναι ότι δεν υπάρχει διασύνδεση μεταξύ τους (Σχήμα 4.4). Στο επόμενο στάδιο αναπτύχθηκε μια σειρά από γεωμετρικούς αλγορίθμους με σκοπό τη δημιουργία νέων κόμβων στα πολύγωνα της μήτρας και των κόκκων με στόχο να διασυνδεθούν (Σχήμα 4.5).



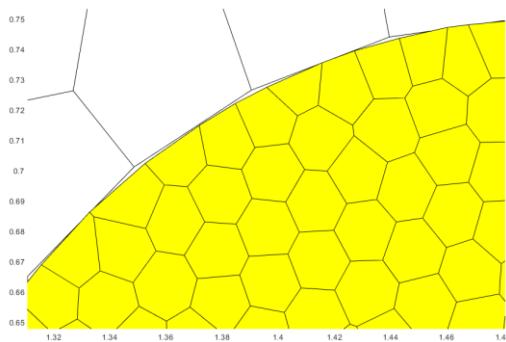
Σχήμα 4.1



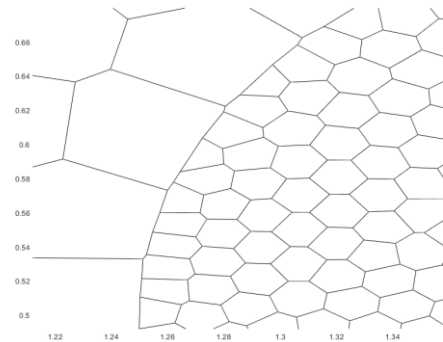
Σχήμα 4.2



Σχήμα 4.3



Σχήμα 4.4



Σχήμα 4.5

Και εδώ τονίζεται το πλεονέκτημα της VEM έναντι της FEM. Στο σχήμα 4.5 φαίνεται ότι τα πλέγματα της μήτρας και της ενίσχυσης δεν είναι σύμμορφα (έχουν διαφορετικό μέγεθος διακριτοποίησης). Αυτό θα ήταν πρόβλημα στη FEM και θα απαιτούσε επιπρόσθετες τροποποιήσεις. Δεν απαιτείται όμως στη VEM καθώς είναι σχεδιασμένη για πολυγωνικά στοιχεία με αυθαίρετο αριθμό πλευρών.

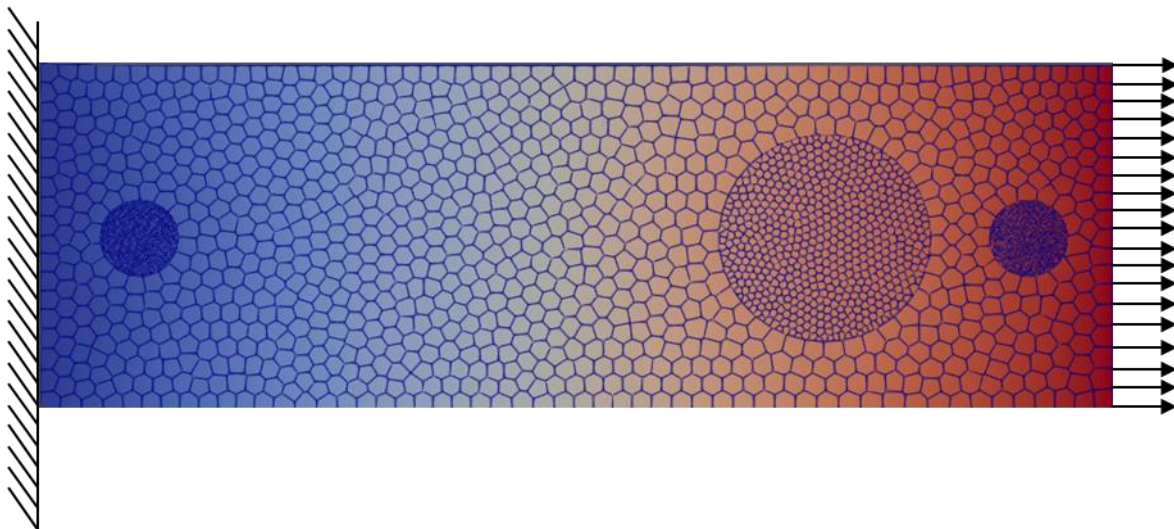
Στη συνέχεια, εισάγονται οι συνοριακές συνθήκες και τα εξωτερικά φορτία. Όλη η πληροφορία εισάγεται σε ένα ειδικό αρχείο το οποίο επιλύεται με υπάρχων εκτελέσιμο κώδικα γραμμένο σε fortran για ταχύτατη επίλυση. Τα αποτελέσματα γράφονται σε αρχείο vtk το οποίο στη συνέχεια αναλύεται ώστε να εξαχθούν οι τιμές για τη μέγιστη μετατόπιση ή την τάση. Τέλος, με όλα τα παραπάνω δεδομένα, μπορεί να υπολογιστεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και έτσι κλείνει ο πολυσύνθετος κύκλος από τον ορισμό των μεταβλητών σχεδιασμού μέχρι τον προσδιορισμό της αντικειμενικής.

4.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

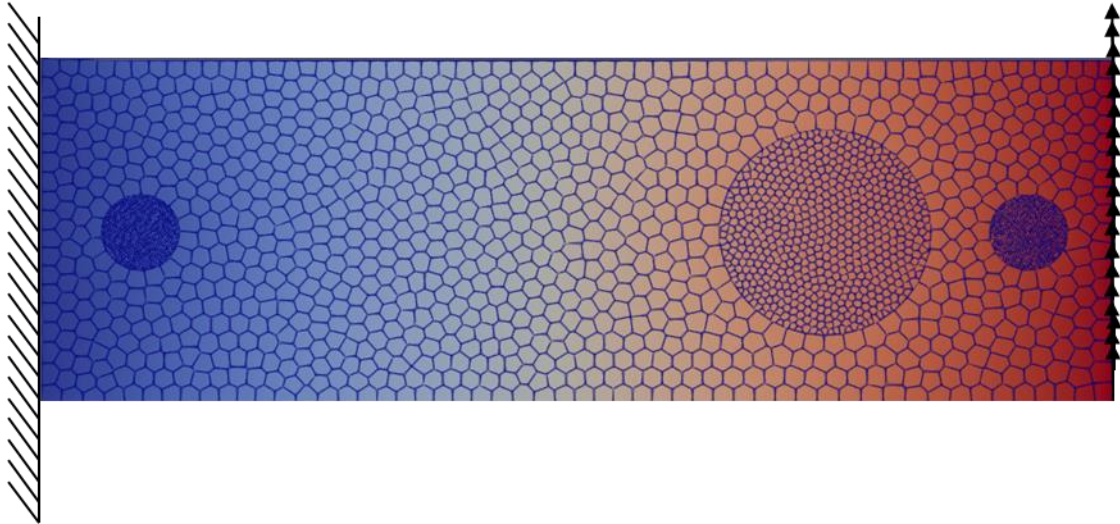
Το δοκίμιο του προβλήματος έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά.

Μήκος τεμαχίου (W)	3 mm
Ύψος τεμαχίου (H)	1 mm
Υλικό μήτρας	Al
Μέτρο ελαστικότητας μήτρας	70000 N/mm ²
Υλικό ενίσχυσης (κόκκων)	SiC
Μέτρο ελαστικότητας ενίσχυσης (κόκκων)	130000 N/mm ²
Λόγος Poisson	0,35

Αρχικά μελετάται το πρόβλημα του εφελκυσμού (Σχήμα 4.6). Το δοκίμιο είναι πακτωμένο στην αριστερή πλευρά και στη δεξιά πλευρά ασκείται μια κατανεμημένη δύναμη. Θα διεξαχθούν αρκετές επιλύσεις για διαφορετικούς συνδυασμούς περιορισμών. Στη συνέχεια μελετάται το πρόβλημα της κάμψης (Σχήμα 4.7).



Σχήμα 4.6



Σχήμα 4.7

4.4.1 Εφελκυσμός με όλους τους περιορισμούς

Εδώ η αντικειμενική είναι η ελαχιστοποίηση του λόγου του όγκου της ενίσχυσης προς τη μήτρα (p). Οι περιορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν είναι γεωμετρικοί και ένας για τη μέγιστη μετατόπιση. Επομένως, το πρόβλημα έχει ως εξής:

Αριθμός κόκκων: 3

Μεταβλητές σχεδιασμού (θέσεις και μέγεθος κόκκων):

$$(x_i, y_i, r_i)$$

Αντικειμενική:

$$\min p = \min \frac{\sum_{i=1}^N \pi r_i^2}{W H}$$

Περιορισμοί:

(Οι κόκκοι βρίσκονται στα όρια της μήτρας)

$$\varepsilon + r_i - x_i < 0, i = 1,2,3$$

$$\varepsilon + r_i - y_i < 0, i = 1,2,3$$

$$\varepsilon + r_i + x_i - W < 0, i = 1,2,3$$

$$\varepsilon + r_i + y_i - H < 0, i = 1,2,3$$

(Οι κόκκοι δεν αλληλοεπικαλύπτονται μεταξύ τους)

$$\varepsilon + r_i + r_j - \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} < 0 \text{ (για κάθε δυωνυμικό ζεύγος } i,j)$$

(Περιορισμός μέγιστης μετατόπισης)

$$u_{max} - 0.07 < 0$$

Αντικειμενική χωρίς περιορισμούς:

$$\min \frac{\sum_{i=1}^N \pi r_i^2}{W H} + \sum_{j=1}^{16} M_j |g_j(x_i, y_i, r_i) + z_j^2|$$

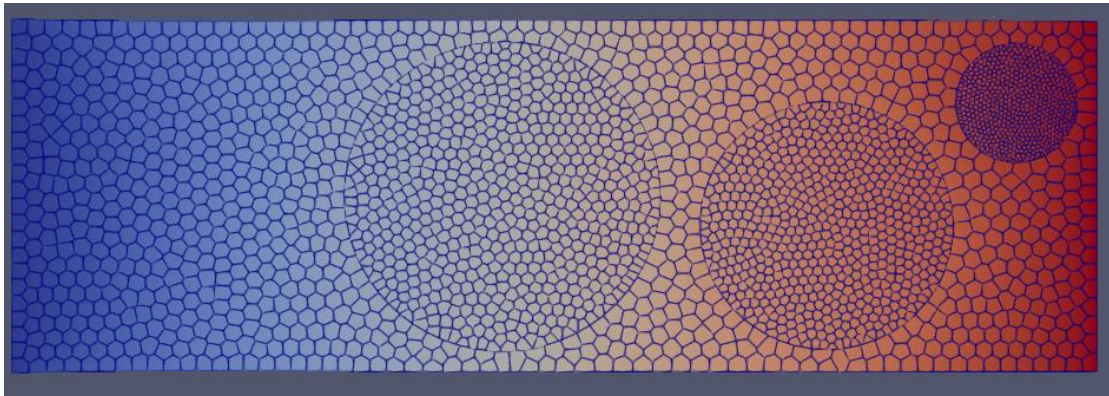
Οι μεταβλητές ποινής που χρησιμοποιήθηκαν στην αντικειμενική είναι:

$M_i = [5000, 5000, 5000, 20000, 20000, 20000, 10000, 10000, 10000, 20000, 20000, 20000, 10000, 10000, 10000, 142800]$

Βέλτιστη λύση (Σχήμα 4.8):

$$p = 0.36$$

$$u_{max} = 0.0609$$



Σχήμα 4.8

Είναι σημαντικό να τονιστεί η διαφορά της φύσης των γεωμετρικών από τους μηχανικούς περιορισμούς. Καθώς ελαττώνεται το ποσοστό της ενίσχυσης, και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ενίσχυση είναι το στιβαρότερο υλικό, η μέγιστη π.χ. μετατόπιση αυξάνεται. Δηλαδή σε όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης η αντικειμενική και οι περιορισμοί έχουν αντίθετη κατεύθυνση καθώς μεταβάλλονται οι μεταβλητές σχεδιασμού. Όταν ένας περιορισμός πλησιάζει στο όριο και η αντικειμενική πλησιάζει στη βέλτιστη λύση. Γενικά, στα προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς ανισοτήτων η βέλτιστη λύση εμφανίζεται όταν κάποιοι περιορισμοί ικανοποιούνται στην ισότητα. Εδώ, από τη φύση του προβλήματος περιμένουμε η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής να συμβεί όταν ο περιορισμός της μέγιστης μετατόπισης ή τάσης να ικανοποιείται στην ισότητα. Αντίθετα, οι γεωμετρικοί περιορισμοί δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιούνται στην ισότητα στο σημείο της βέλτιστης λύσης. Αυτός είναι ακριβώς και ο λόγος που όταν εισάγονται οι γεωμετρικοί περιορισμοί στην

αντικειμενική δεν είναι απαραίτητο η βέλτιστη λύση να εντοπιστεί σε σημείο που ο περιορισμός της μέγιστης μετατόπισης να ικανοποιείται στην ισότητα.

Για να διερευνηθεί ο παραπάνω ισχυρισμός, θα επιλυθεί το πρόβλημα με μοναδικό περιορισμό τη μέγιστη μετατόπιση.

4.4.2 Εφελκυσμός με περιορισμό μέγιστη μετατόπιση

Εδώ η μοναδική διαφορά σε σχέση με το πρόβλημα της προηγούμενης ενότητας είναι η αφαίρεση των γεωμετρικών περιορισμών. Επομένως, το πρόβλημα έχει ως εξής:

Μεταβλητές σχεδιασμού (θέσεις και μέγεθος κόκκων):

$$(x_i, y_i, r_i)$$

Αντικειμενική:

$$\min p = \min \frac{\sum_{i=1}^N \pi r_i^2}{W H}$$

Περιορισμός μέγιστης μετατόπισης:

$$u_{max} - 0.07 < 0$$

Αντικειμενική χωρίς περιορισμούς:

$$\min \frac{\sum_{i=1}^N \pi r_i^2}{W H} + M |g(x_i, y_i, r_i) + z^2|$$

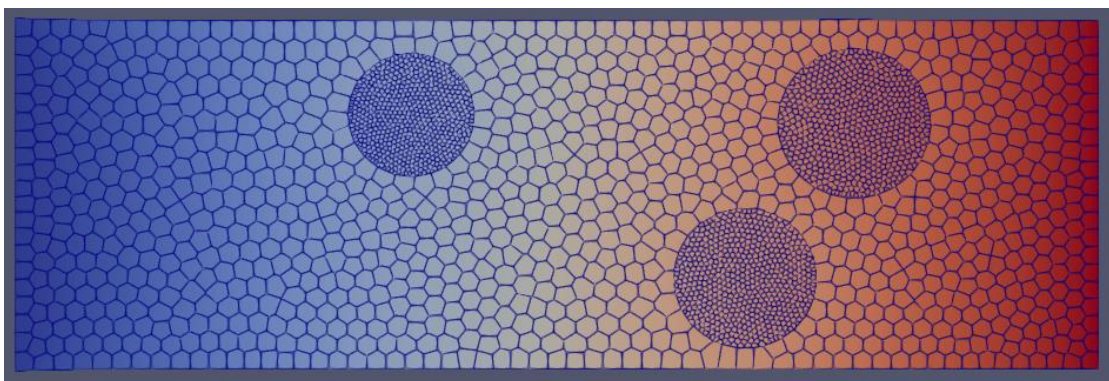
Οι βέλτιστες λύσεις για διαφορετικές τιμές της μεταβλητής ποινής M παρουσιάζονται παρακάτω:

1. $M = 10^6$

1^ο τρέξιμο

$$p = 0.12$$

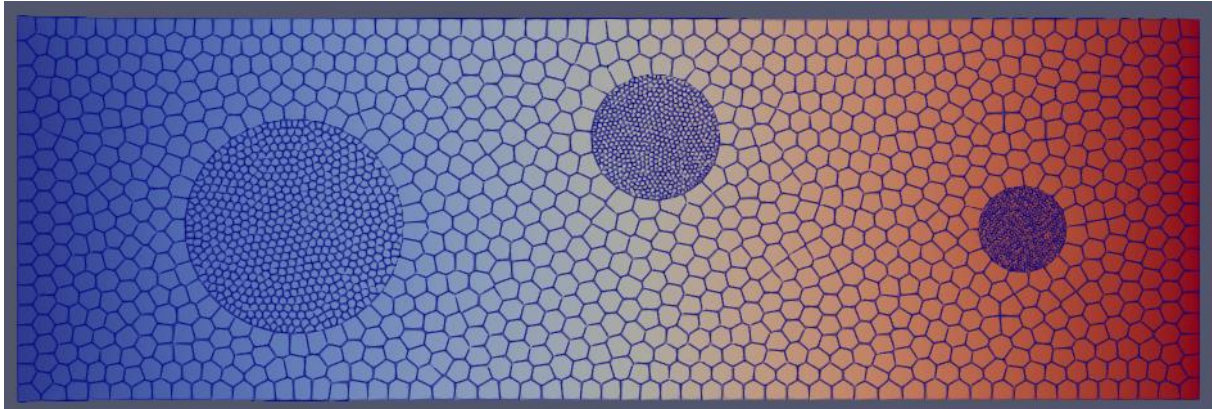
$$u_{max} = 0.07$$



Σχήμα 4.9

2^ο τρέξιμο

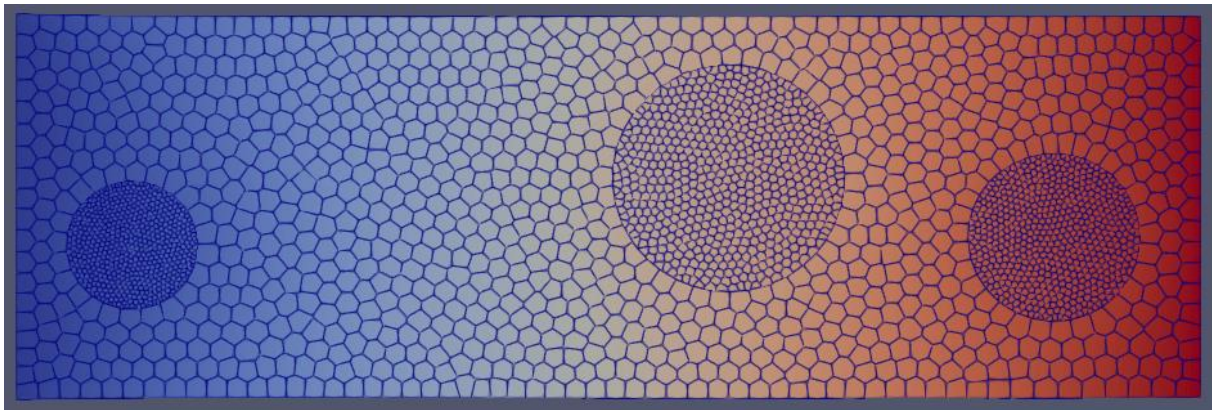
$$p = 0.122$$
$$u_{max} = 0.0697$$



Σχήμα 4.10

3^ο τρέξιμο

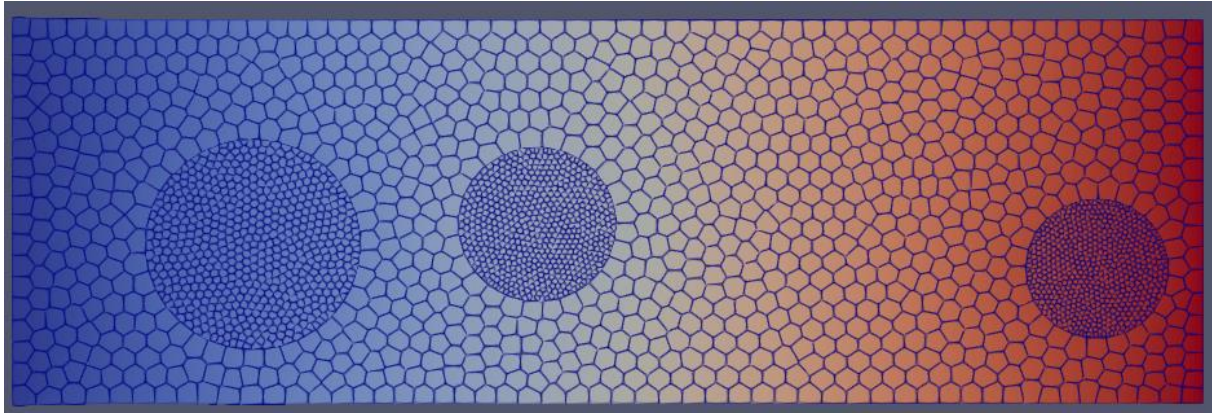
$$p = 0.17$$
$$u_{max} = 0.0678$$



Σχήμα 4.11

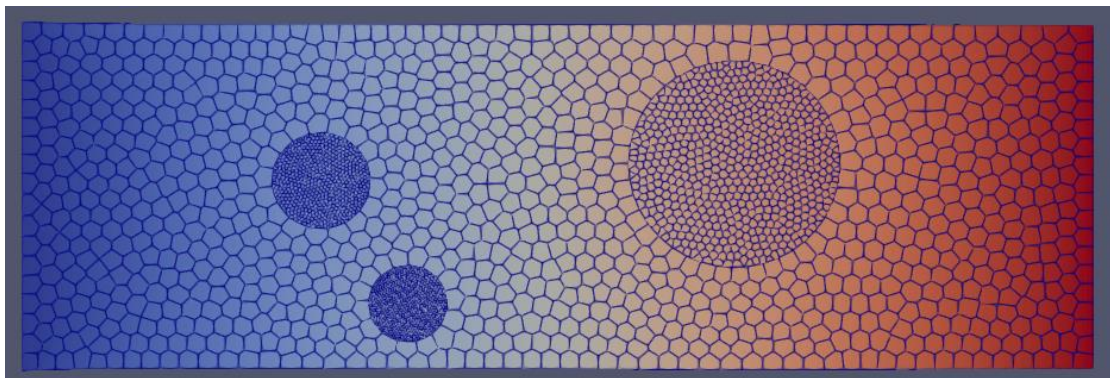
4^ο τρέξιμο

$$p = 0.1528$$
$$u_{max} = 0.0681$$



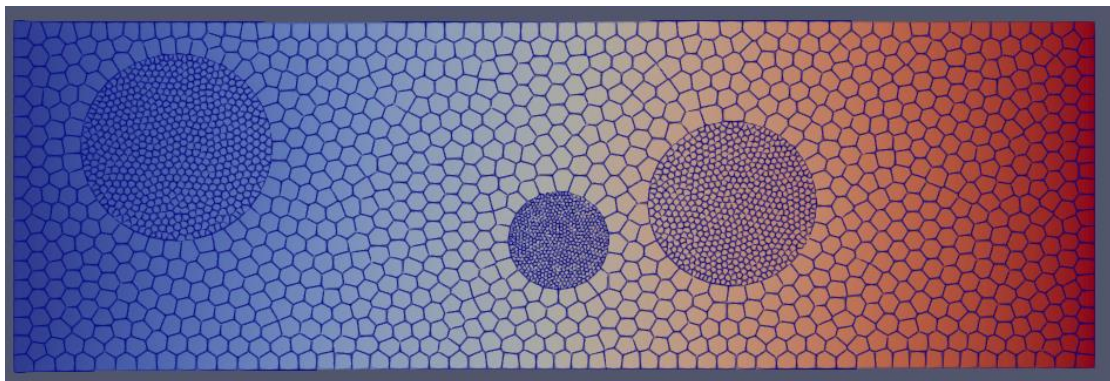
Σχήμα 4.12

2. $M = 10^7$
 $p = 0.125$
 $u_{max} = 0.07$



Σχήμα 4.13

3. $M = 10^8$
 $p = 0.152$
 $u_{max} = 0.0692$



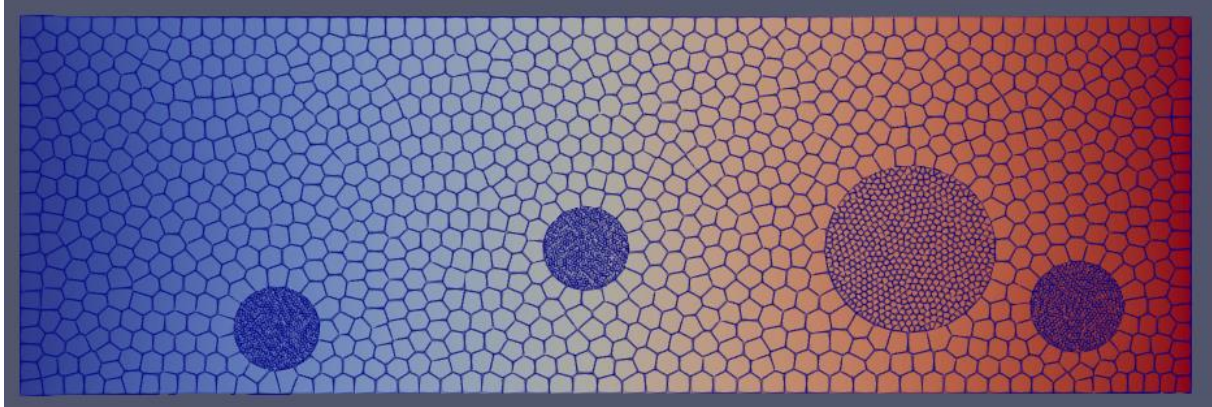
Σχήμα 4.14

Με 4 κόκκους οι λύσεις είναι οι εξής για $M = 10^6$

1^ο τρέξιμο

$$p = 0.09$$

$$u_{max} = 0.071$$

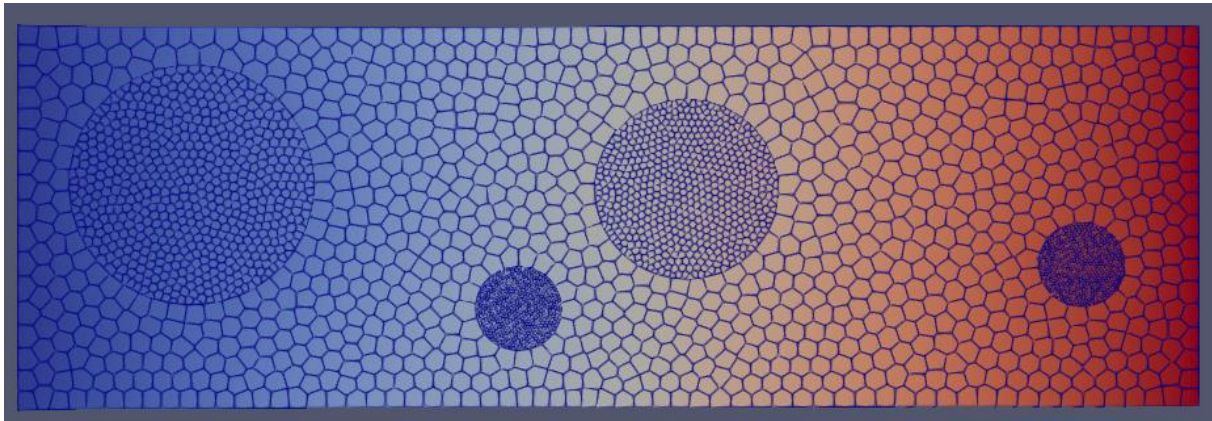


Σχήμα 4.15

2^ο τρέξιμο

$$p = 0.185$$

$$u_{max} = 0.0678$$

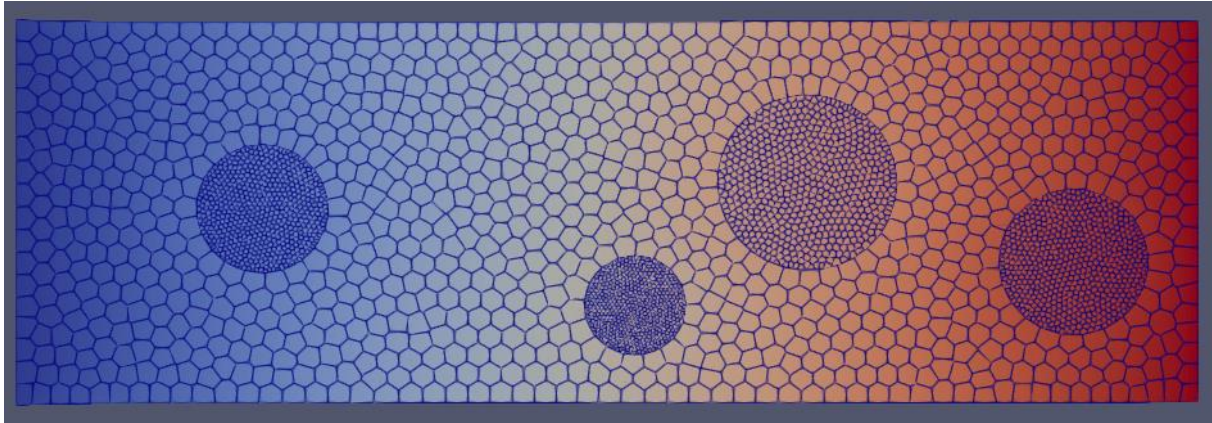


Σχήμα 4.16

3^ο τρέξιμο

$$p = 0.138$$

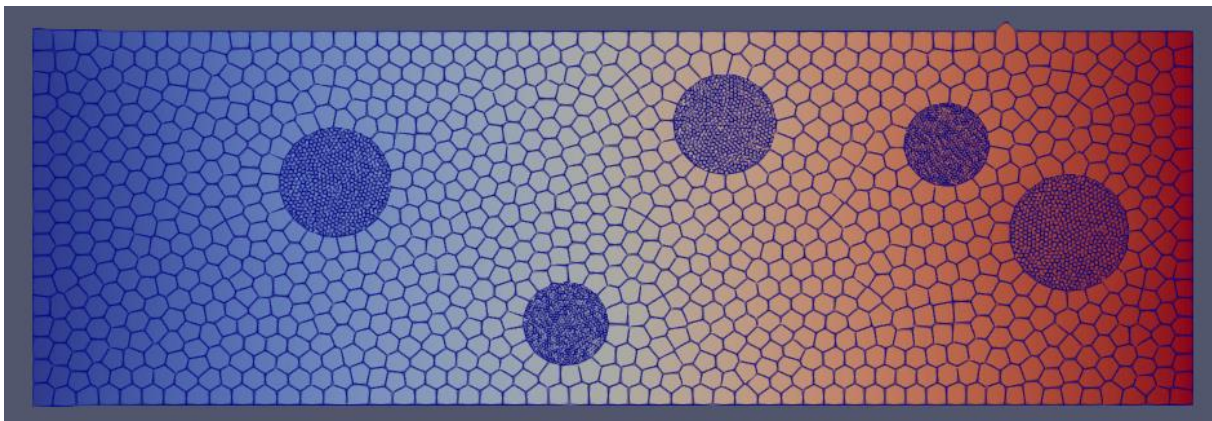
$$u_{max} = 0.0691$$



Σχήμα 4.17

Με 5 κόκκους οι λύσεις είναι οι εξής για $M = 10^6$
1^ο τρέξιμο

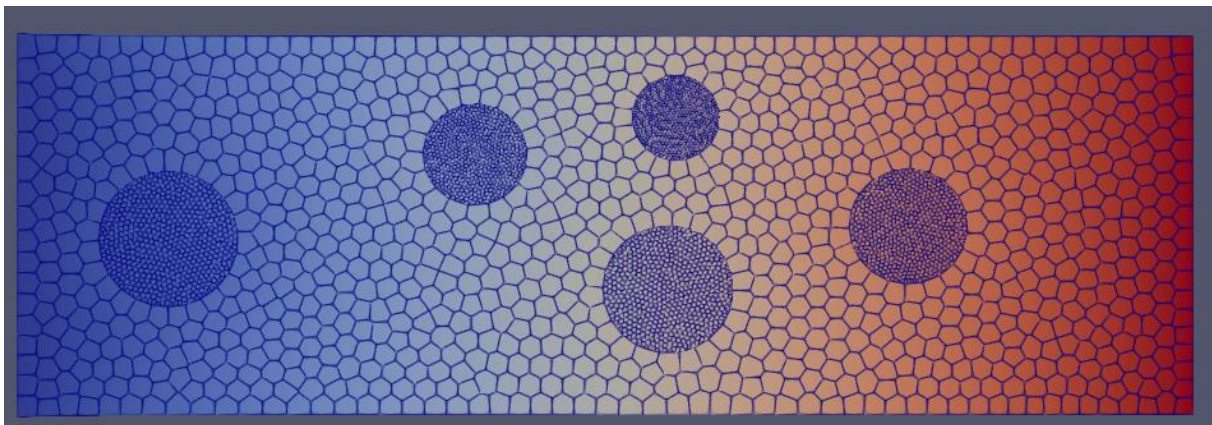
$$p = 0.09$$
$$u_{max} = 0.0709$$



Σχήμα 4.18

2^ο τρέξιμο

$$p = 0.116$$
$$u_{max} = 0.0698$$

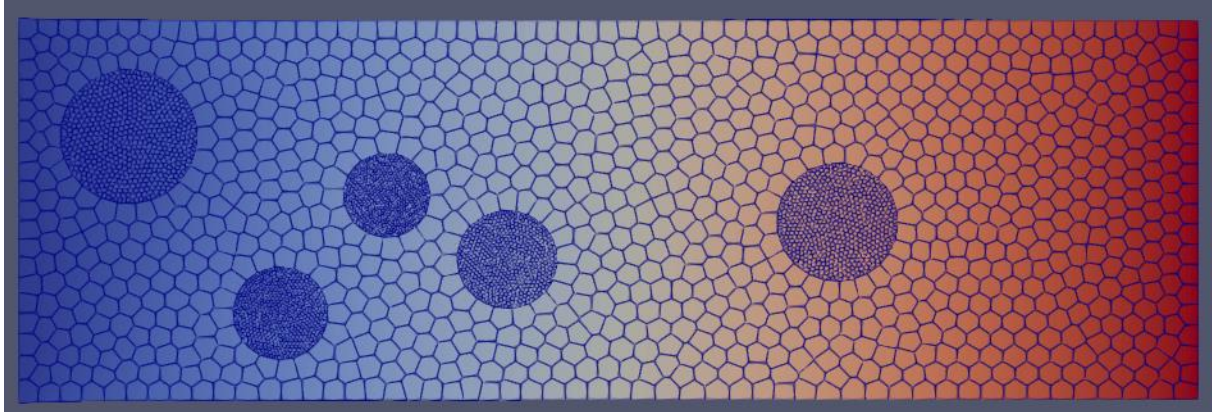


Σχήμα 4.19

3^ο τρέξιμο

$$p = 0.101$$

$$u_{max} = 0.0708$$



Σχήμα 4.20

Παρατηρούμε ότι τώρα που αφαιρέθηκαν οι γεωμετρικοί περιορισμοί, ο περιορισμός της μέγιστης μετατόπισης ικανοποιείται «κοντά» στην ισότητα στο σημείο της βέλτιστης λύσης. Επιπλέον, στο πρόβλημα του εφελκυσμού το πρόβλημα της βελτιστοποίησης έχει πολλές λύσεις, όπως παρουσιάζεται στην περίπτωση για $M = 10^6$. Λαμβάνοντας υπόψη και τη συμμετρία του προβλήματος του εφελκυσμού είναι ενδιαφέρον να περιοριστεί η θέση των κόκκων ώστε να είναι συμμετρική. Στην επόμενη ενότητα το πρόβλημα λύνεται αφαιρώντας τη συντεταγμένη y των κόκκων από τις μεταβλητές σχεδιασμού.

4.4.3 Συμμετρικός εφελκυσμός με περιορισμό τη μέγιστη μετατόπιση

Το πρόβλημα έχει ως εξής:

Μεταβλητές σχεδιασμού (θέσεις και μέγεθος κόκκων):

$$(x_i, r_i)$$

Αντικειμενική:

$$\min p = \min \frac{\sum_{i=1}^N \pi r_i^2}{W H}$$

Περιορισμός μέγιστης μετατόπισης:

$$u_{max} - 0.07 < 0$$

Αντικειμενική χωρίς περιορισμούς:

$$\min \frac{\sum_{i=1}^N \pi r_i^2}{W H} + M |g(x_i, r_i) + z^2|$$

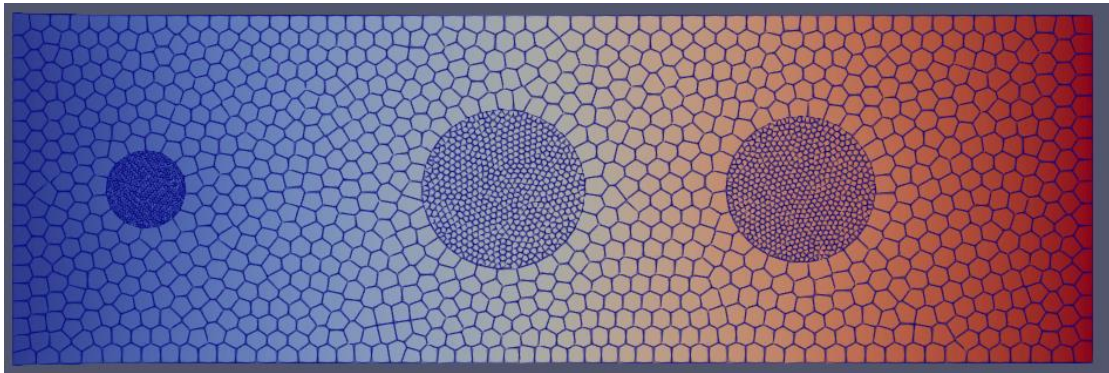
Οι βέλτιστες λύσεις για διαφορετικές τιμές της μεταβλητής ποινής M παρουσιάζονται παρακάτω:

1.

$$M = 10^5$$

$$p = 0.112$$

$$u_{max} = 0.07$$



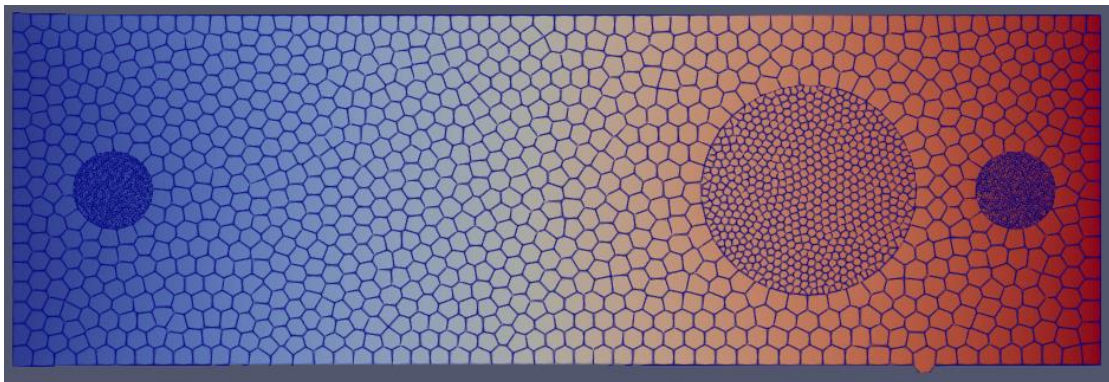
Σχήμα 4.21

2.

$$M = 10^6$$

$$p = 0.118$$

$$u_{max} = 0.0698$$



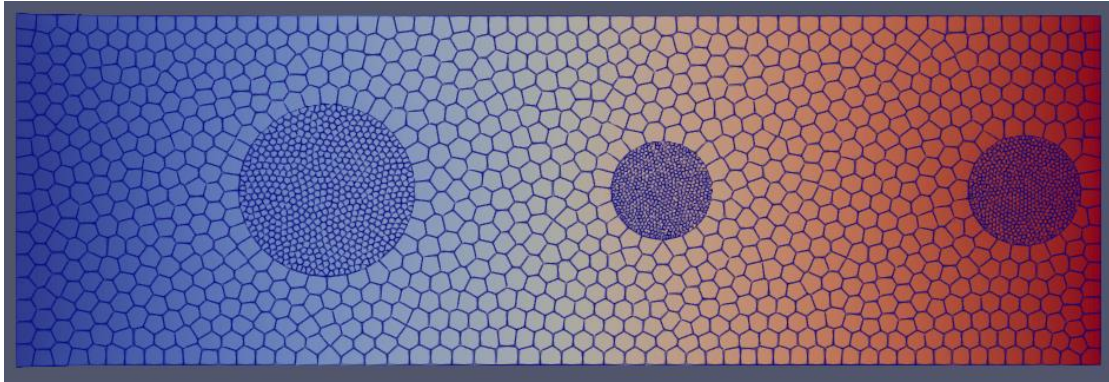
Σχήμα 4.22

3.

$$M = 10^7$$

$$p = 0.108$$

$$u_{max} = 0.07$$



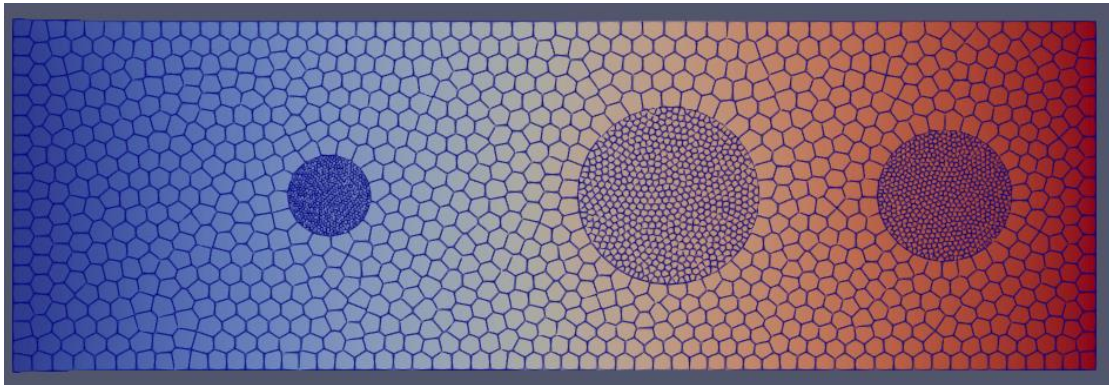
Σχήμα 4.23

4.

$$M = 10^8$$

$$p = 0.116$$

$$u_{max} = 0.0697$$



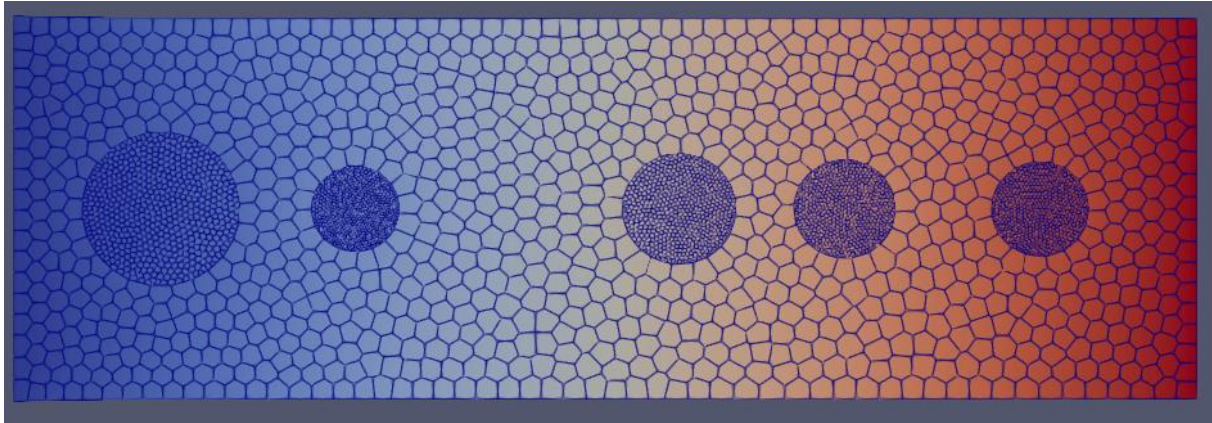
Σχήμα 4.24

Αλλάζοντας τον αριθμό των κόκκων σε 5 έχουμε τη παρακάτω λύση.

$$M = 10^6$$

$$p = 0.108$$

$$u_{max} = 0.0699$$



Σχήμα 4.25

4.4.4 Κάμψη με περιορισμό τη μέγιστη μετατόπιση

Το πρόβλημα έχει ως εξής:

Μεταβλητές σχεδιασμού (θέσεις και μέγεθος κόκκων):

$$(x_i, y_i, r_i)$$

Αντικειμενική:

$$\min p = \min \frac{\sum_{i=1}^N \pi r_i^2}{W H}$$

Περιορισμός μέγιστης μετατόπισης:

$$u_{max} - 0.3 < 0$$

Αντικειμενική χωρίς περιορισμούς:

$$\min \frac{\sum_{i=1}^N \pi r_i^2}{W H} + M |g(x_i, r_i) + z^2|$$

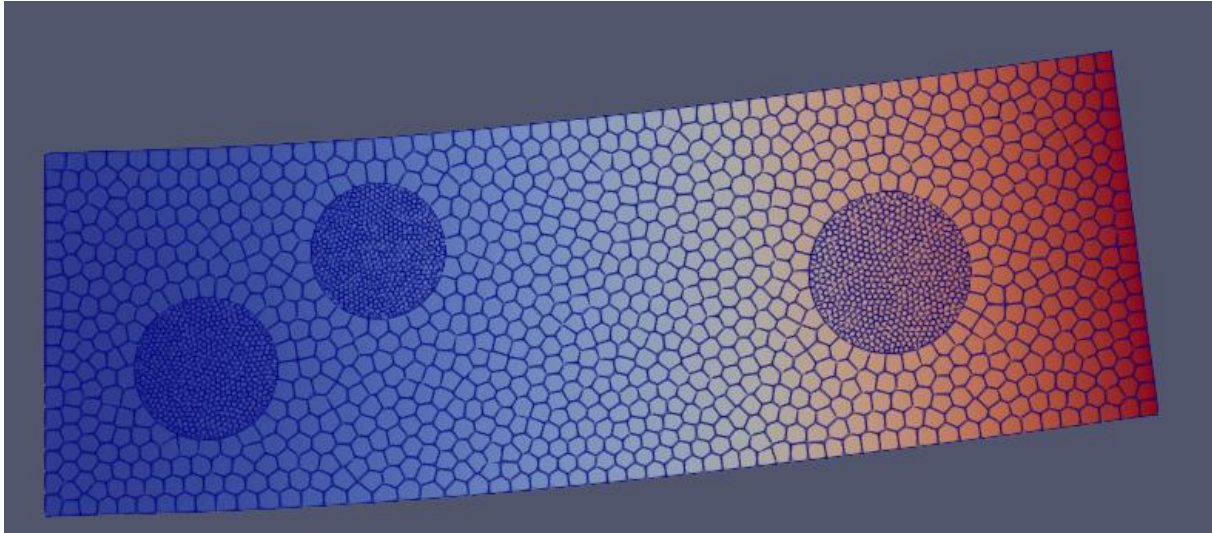
Οι βέλτιστες λύσεις για διαφορετικές τιμές της μεταβλητής ποινής M παρουσιάζονται παρακάτω:

1.

$$M = 10^6$$

$$p = 0.127$$

$$u_{max} = 0.288$$



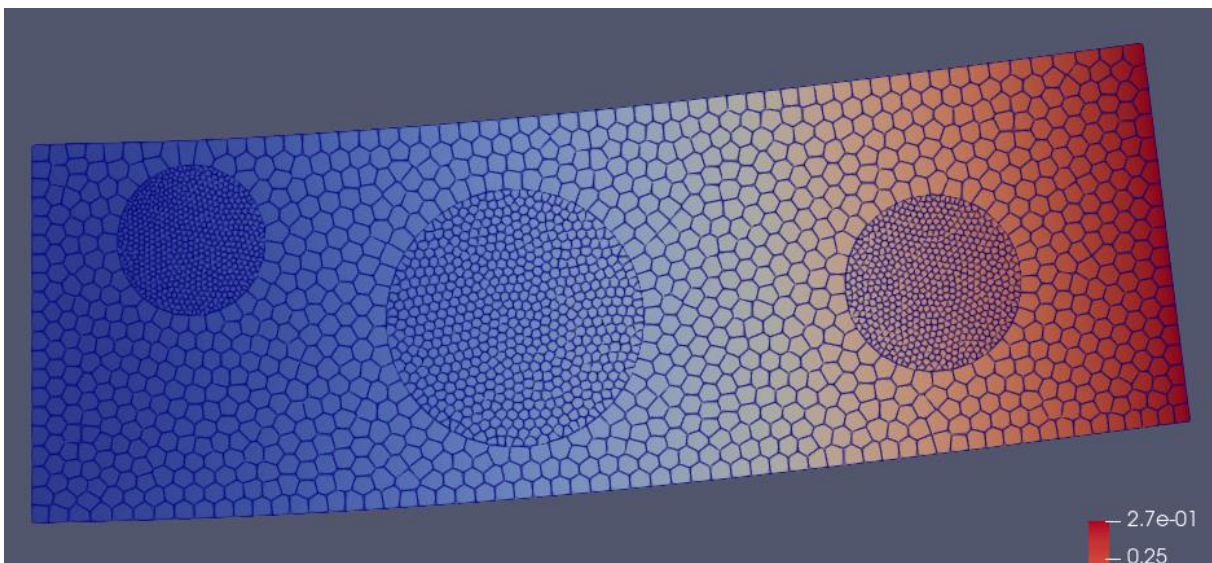
Σχήμα 4.26

2.

$$M = 10^7$$

$$p = 0.216$$

$$u_{max} = 0.278$$



Σχήμα 4.27

4.4.5 Κάμψη με περιορισμό ισότητας στη μέγιστη μετατόπιση

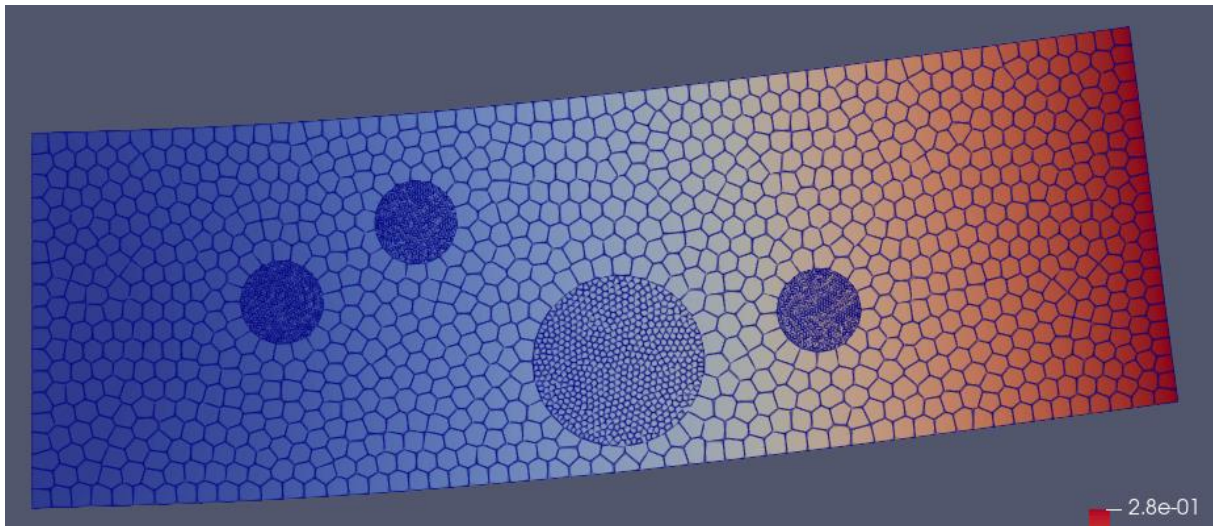
Εδώ ο περιορισμός μέγιστης μετατόπισης γίνεται ισότητα:

$$u_{max} - 0.3 = 0$$

Οι βέλτιστες λύσεις με 4 κόκκους για διαφορετικά τρεξίματα για $M = 10^6$ παρουσιάζονται παρακάτω:

1^ο τρέξιμο

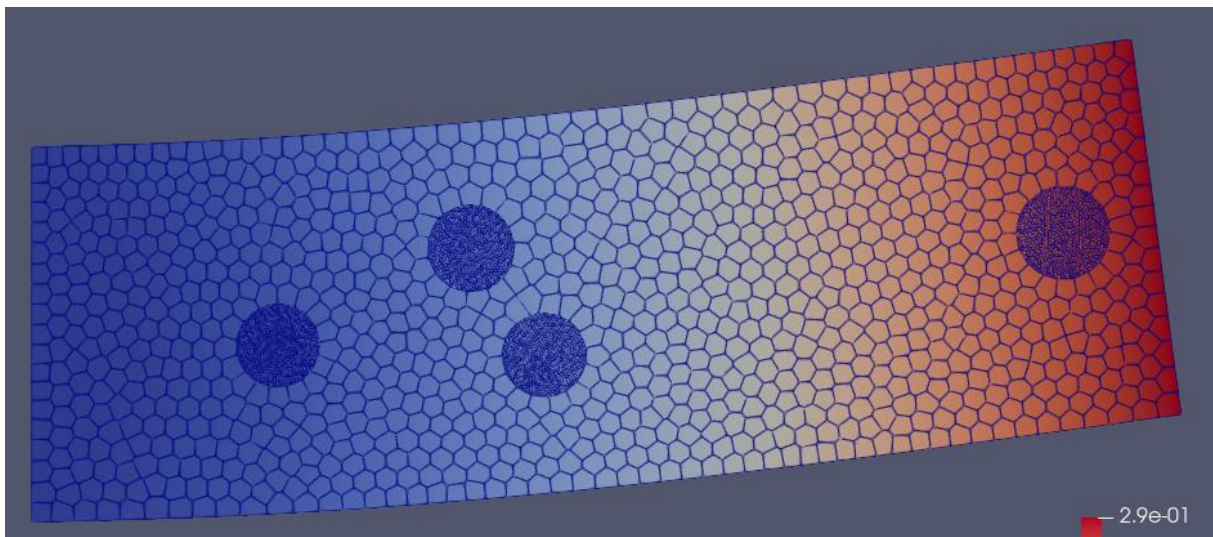
$$p = 0.0913$$
$$u_{max} = 0.2924$$



Σχήμα 4.28

2^ο τρέξιμο

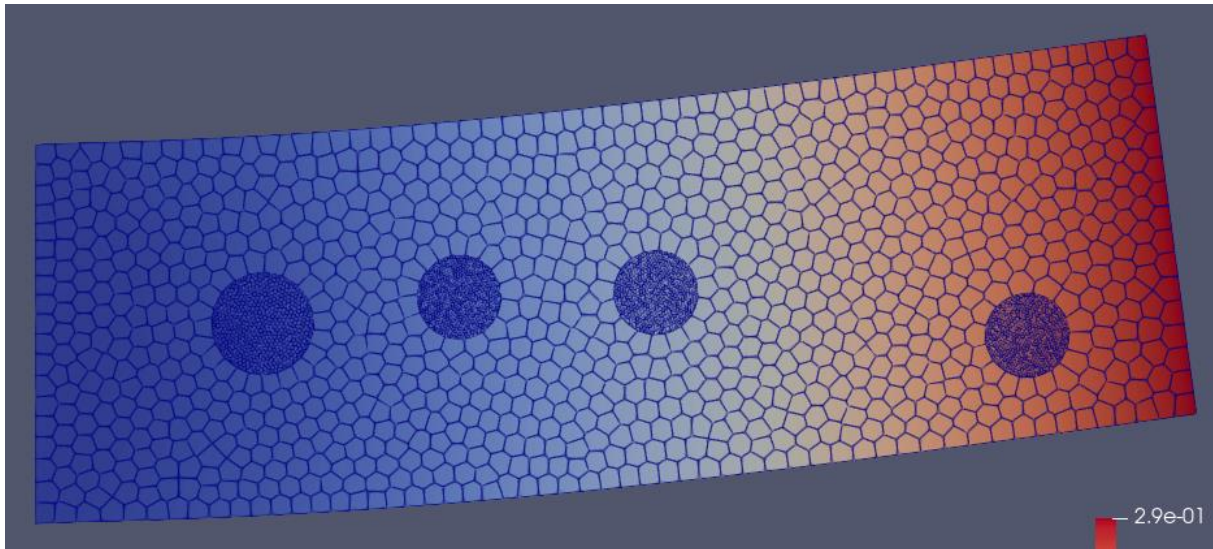
$$p = 0.054$$
$$u_{max} = 0.296$$



Σχήμα 4.29

3^ο τρέξιμο

$$p = 0.054$$
$$u_{max} = 0.297$$

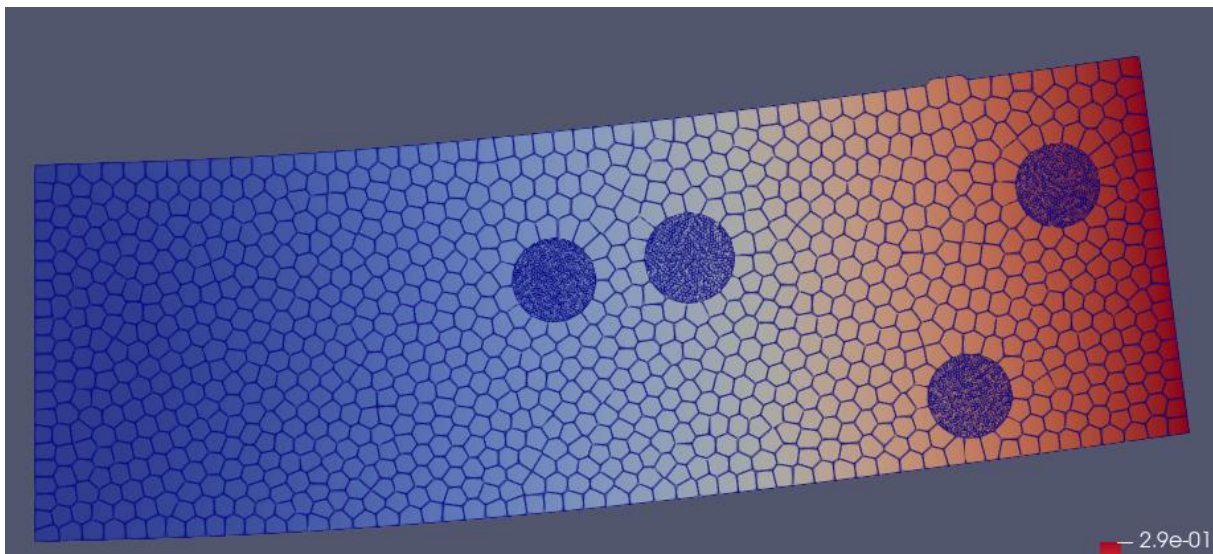


Σχήμα 4.30

4^ο τρέξιμο

$$p = 0.052$$

$$u_{max} = 0.297$$



Σχήμα 4.31

4.4.5 Κάμψη με σταθερό μέγεθος κόκκων

Εδώ οι μεταβλητές σχεδιασμού, όμως, ελαττώνονται σε (x_i, y_i) , το μέγεθος των κόκκων παραμένει σταθερό και ίσο με $r_i = 0.1$. Επομένως, εφόσον το ποσοστό του όγκου της ενίσχυσης προς της μήτρας παραμένει σταθερό, το πρόβλημα βελτιστοποίησης θα διατυπωθεί διαφορετικά:

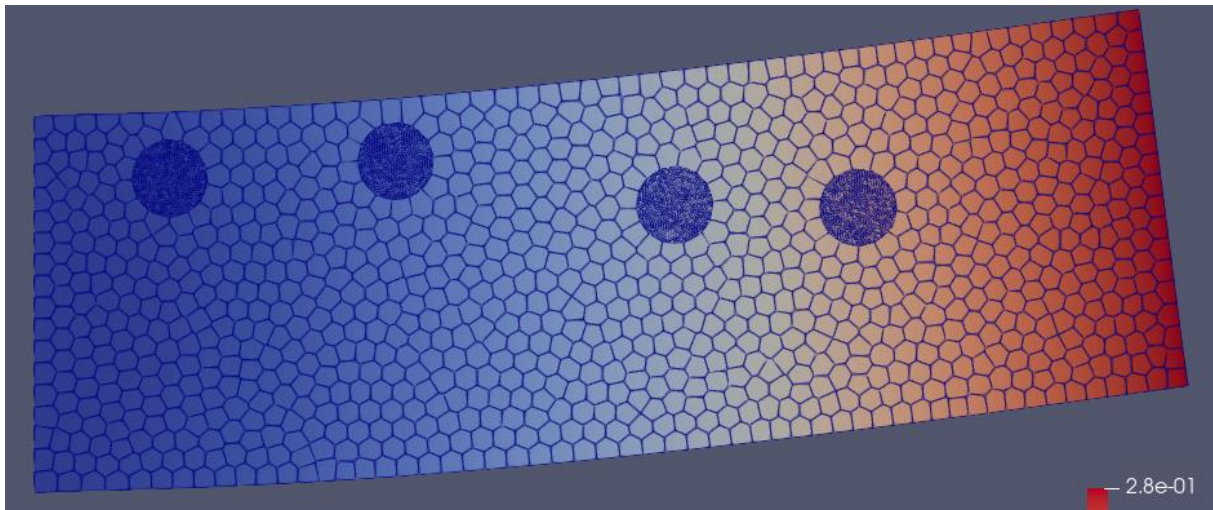
$$\min u_{max}$$

Εδώ δεν υπάρχουν περιορισμοί. Οι βέλτιστες λύσεις με 4 κόκκους για διαφορετικά τρέξιμα παρουσιάζονται παρακάτω:

1^ο τρέξιμο

$$p = 0.0419$$

$$u_{max} = 0.2915$$

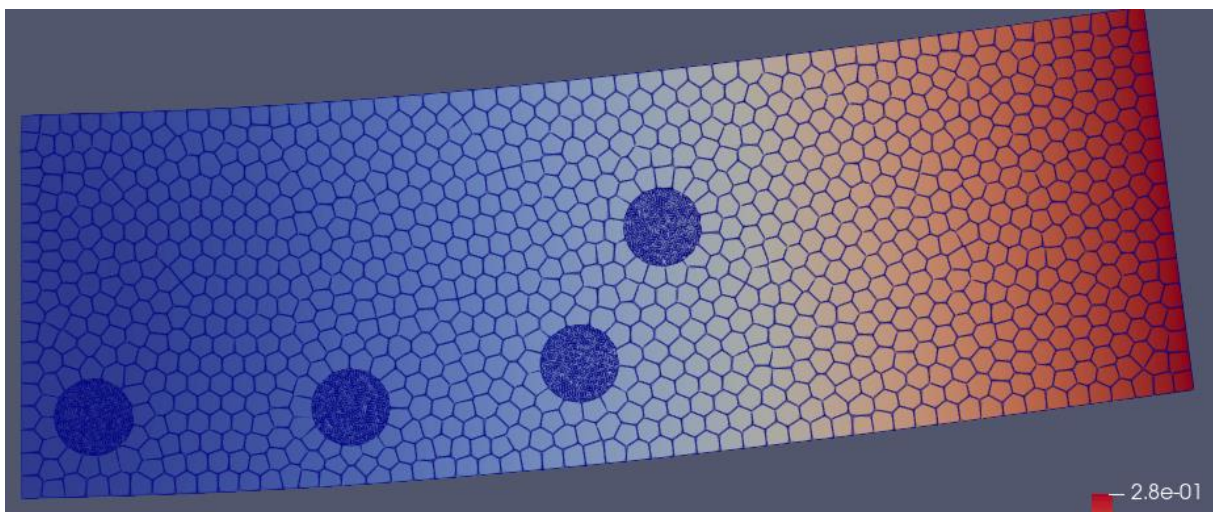


Σχήμα 4.32

2^ο τρέξιμο

$$p = 0.0419$$

$$u_{max} = 0.2924$$

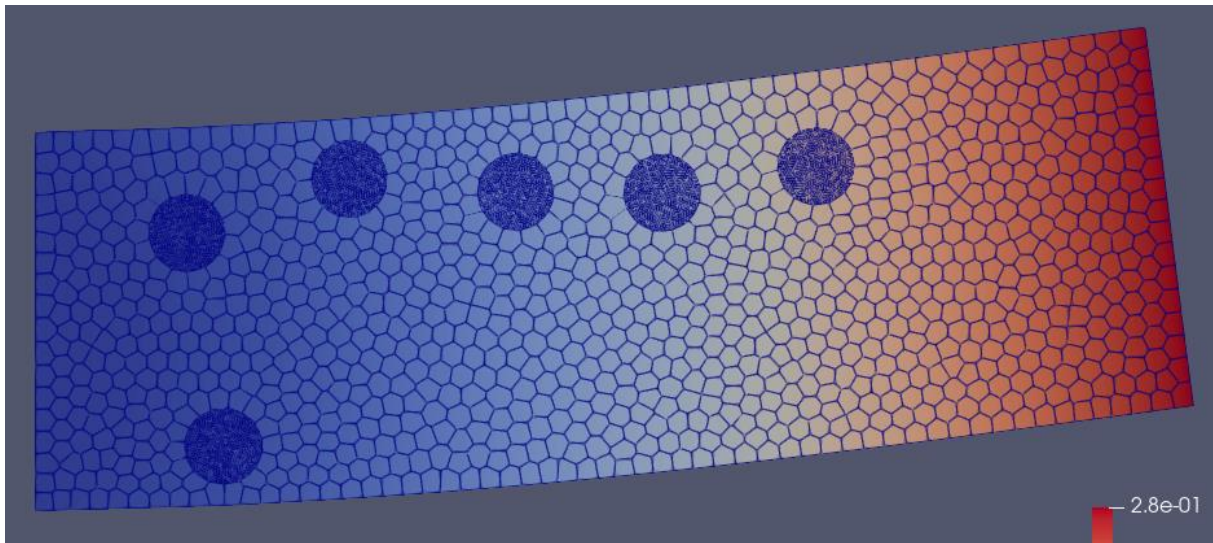


Σχήμα 4.33

Παρακάτω παρουσιάζεται η βέλτιστη λύση για 6 κόκκους:

$$p = 0.0628$$

$$u_{max} = 0.2861$$



Σχήμα 4.34

Κεφάλαιο 5

Επίλογος

5.1 Σύνοψη-συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία, αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε μια διαδικασία βελτιστοποίησης διάταξης σε ένα ορθογωνικό τεμάχιο από κοκκώδες σύνθετο υλικό που υποβάλλεται σε στατική φόρτιση. Το σχήμα των κόκκων είναι κυκλικό. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά αναπτύχθηκε μια αυτοματοποιημένη μέθοδος δημιουργίας ενός μοντέλου πολυγωνικών στοιχείων της κατασκευής έχοντας σαν δεδομένα τη γεωμετρία, τον αριθμό, τη θέση και το μέγεθος των κόκκων. Στη συνέχεια εφαρμόστηκε η μέθοδος των ιδεατών στοιχείων (virtual element method) για την στατική επίλυση του μοντέλου και τον προσδιορισμό μετατοπίσεων και τάσεων. Σε επόμενο στάδιο, αναπτύχθηκε μια διαδικασία που ενοποιεί τα στάδια από την εισαγωγή των δεδομένων μέχρι τον υπολογισμό των μεγεθών προς βελτιστοποίηση για να χρησιμοποιηθεί ως αντικειμενική συνάρτηση στη βελτιστοποίηση. Τέλος, εφαρμόστηκε η μέθοδος του σμήνους σωματιδίων για τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης όταν το τεμάχιο φορτίζεται εφελκυστικά και καμπτικά.

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η επιλογή της μεθόδου των ιδεατών στοιχείων (VEM) έπαιξε κρίσιμο ρόλο στην επίλυση χάρη στη σθεναρότητά της σε ονομοιόμορφα πλέγματα που προέκυψαν από την διεπαφή της μήτρας με τους κόκκους της ενίσχυσης. Κατά τη μοντελοποίηση σύνθετων υλικών προκαλείται ανομοιομορφία στο πλέγμα λόγω της ύπαρξης διαφορετικών συστατικών.

Στις περισσότερες αναλύσεις οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι θέσεις των κέντρων (x_i, y_i) και οι ακτίνες των κυκλικών κόκκων r_i . Όμως, στην περίπτωση της εφελκυστικής

φόρτισης, λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, απαλείφθηκε η συντεταγμένη y ώστε να επιταχυνθεί η επίλυση. Επίσης, ο αριθμός των κόκκων είναι μια παράμετρος του προβλήματος και διατηρείται σταθερός σε κάθε επίλυση.

Η επιλογή των περιορισμών παίζει κυρίαρχο ρόλο στον υπολογιστικό χρόνο προσομοίωσης. Στην περίπτωση που περιλήφθηκαν οι γεωμετρικοί περιορισμοί (ενότητα 4.4.1) ο χρόνος προσομοίωσης ήταν περίπου 15 ώρες, πολύ μεγαλύτερος σε σύγκριση με αυτόν (περίπου 1 ώρα) στην περίπτωση ενός περιορισμού μετατόπισης (ενότητα 4.4.2). Μια συνηθισμένη τεχνική για την επιτάχυνση των υπολογισμών είναι η μείωση των μεταβλητών σχεδιασμού όπως έγινε στο πρόβλημα της ενότητας 4.4.3.

Ως μέθοδος βελτιστοποίησης επιλέχθηκε η βελτιστοποίηση σμήνους σωματιδίων καθώς είναι ένας απλός αλγόριθμος με εφαρμογή σε μεγάλη ποικιλία συναρτήσεων. Δεν απαιτεί τη γνώση των παραγώγων της αντικειμενικής, πράγμα που συμβαίνει στο παρόν πρόβλημα μιας και η τιμή της αντικειμενικής προκύπτει από μια αλληλουχία υπολογιστικών γεωμετρικών και αριθμητικών μεθόδων χωρίς να υπάρχει ακριβής έκφραση για την αντικειμενική συνάρτηση. Βασίζεται στη κοινωνική συμπεριφορά ή με άλλα λόγια στη φυσιολογική εμπειρία. Εξαρτάται από στοχαστικές διαδικασίες καθώς στον υπολογισμό των νέων θέσεων των σωματιδίων εμπεριέχονται τυχαίοι αριθμοί. Αυτοί οι στοχαστικοί παράγοντες επιτρέπουν την αναζήτηση σε χώρους μεταξύ περιοχών που προηγουμένως βρέθηκε ότι είναι «κοντά» στον στόχο, και η εισαγωγή των όρων των ταχυτήτων προκαλεί τη νέα θέση να κάνει «άλλα» σε άγνωστες περιοχές του προβλήματος. Κλείνοντας, αξίζει να σημειωθεί ότι τη μέθοδο την πρότειναν ένας μηχανικός και ένας κοινωνικός ψυχολόγος. Η βελτιστοποίηση σμήνους σωματιδίων υπηρετεί το ίδιο καλά και τις δύο επιστημονικές περιοχές. Ο λόγος που η κοινωνική συμπεριφορά είναι πανταχού παρών στο ζωικό βασίλειο είναι ότι βελτιστοποιεί. Επομένως, ένας καλός τρόπος επίλυσης των προβλημάτων βελτιστοποίησης της μηχανικής είναι να μοντελοποιηθούν σαν κοινωνική συμπεριφορά.

Παρατηρήθηκε ότι σε αρκετά προβλήματα υπήρχαν περισσότερες από μια βέλτιστες λύσεις, ιδιαίτερα στο πρόβλημα του εφελκυσμού. Αυτό συμβαίνει γιατί είναι όχι μόνο συμμετρικό αλλά η τάση είναι σταθερή σε όλο το μήκος του τεμαχίου, γεγονός που καθιστά τη συντεταγμένη x να μην έχει νόημα. Αντίθετα, στο πρόβλημα της κάμψης εξετάστηκε μόνο η επίδραση της θέσης των κόκκων για δυο λόγους. Πρώτον, η απαλοιφή του μεγέθους των κόκκων από τις μεταβλητές σχεδιασμού σε συνδυασμό με την κατάργηση των περιορισμών, επιταχύνει σημαντικά τους υπολογισμούς. Δεύτερον, στο πρόβλημα της κάμψης η ορθή τάση είναι μέγιστη στην άνω και κάτω πλευρά του τεμαχίου και εξαρτάται από την καμπτική ροπή, η οποία στο συγκεκριμένο πρόβλημα αυξάνεται καθώς πλησιάζουμε προς το πακτωμένο

άκρο. Επομένως, περιμένουμε οι κόκκοι να τοποθετηθούν στην άνω (Σχήμα 4.34) ή κάτω (Σχήμα 4.33) πλευρά του τεμαχίου και να βρίσκονται προς το άκρο που υπάρχει πάκτωση.

5.2 Μελλοντική έρευνα

Η παρούσα εργασία μπορεί να αποτελέσει την αρχή μιας σειράς επεκτάσεων. Λόγω της έκτασής της, υπάρχουν πολλά περιθώρια βελτίωσης σε αρκετά σημεία. Οι μεθοδολογίες που αναπτύχθηκαν μπορεί να εφαρμοστούν με στόχο να προσφέρουν σημαντικές πληροφορίες σε διάφορα πεδία έρευνας κατασκευών που περιλαμβάνουν σύνθετα υλικά.

Αρχικά, η μεθοδολογία μπορεί να επεκταθεί για γεωμετρικές τριων διάστασεων. Επίσης, εκτός από την βελτιστοποίηση θέσης και μεγέθους των κόκκων θα μπορούσε να επεκταθεί και στη βελτιστοποίηση του σχήματος των κόκκων, αντί δηλαδή να διατηρηθεί σταθερό το σχήμα όπως είναι στην παρούσα εργασία. Επιπλέον, η βελτιστοποίηση θα μπορούσε να επεκταθεί σε δυναμικά χαρακτηριστικά όπως για παράδειγμα ή οι ιδιοσυχνότητες ή το μέγιστο πλάτος συντονισμού σε περιοδική διέγερση. Μιά άλλη βελτίωση που θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί είναι η παραλληλοποίηση της διαδικασίας παραγωγής πλέγματος η οποία καταναλώνει το μεγαλύτερο ποσοστό του χρόνου επίλυσης. Τέλος, θα μπορούσε να παραλληλοποιηθεί η μέθοδος βελτιστοποίησης ή να εφαρμοστούν αλγόριθμοι που προσφέρονται για παραλληλοποίηση (π.χ. Monte Carlo).

Βιβλιογραφία

- [1] T.W. Clyne, D. Hull, *An Introduction to Composite Materials*, Material Research Society, Cambridge University Press, 2019.
- [2] P.K. Mallick, *Fiber Reinforced Composites - Materials, Manufacturing and Design*, Material Research Society, Cambridge University Press, 2019.
- [3] Valery V. Vasiliev, Evgeny V. Morozov, *Mechanics and Analysis of Composite Materials*, Elsevier, 2001.
- [4] R. F. Gibson, *Principles of Composite Material Mechanics*, CRC Press, 2016.
- [5] W.R. Spillers, K. M. MacBain, *Structural Optimization*, Springer, 2009.
- [6] L.A. Schmidt, *Structural Design by Systematic Synthesis*, Proceedings 2nd Conference on Computation ASCE New York (1960), 105-132.
- [7] M.P. Bendsoe N. Kikuchi, *Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 71 (1988), 197-224.
- [8] Z. Gurdal, R. T. Haftka, P. Hajela, *Design and Optimization of Laminated Composite Materials*, John Wiley & Sons, 1999.
- [9] G. Delgado, *Optimization of Composite Structures: A Shape and Topology Sensitivity Analysis*, Ecole Polytechnique X (2014).
- [10] X. Huang, S. Zhou, G. Sun, G. Li, Y. M. Xie, *Topology Optimization for Microstructures of Viscoelastic Composite Materials*, Compt. Methods Appl. Mech. Engrg. 283 (2015) 503-516, Elsevier
- [11] A. Muc, M. Barski, *Design of Particulate Reinforced Composite Materials*, MDPI Materials 11 234 (2018).
- [12] D. Da, J. Yvonnet, L. Xia, G. Li, *Topology Optimization of Particle-Matrix Composites for Optimal Fracture Resistance Taking into Account Interfacial Damage*, Int J Numer Methods Eng. (2018) 1-23, John Wiley & Sons.
- [13] F. Mushtaq, X. Zhang, K. Y. Fung K. M. Ng, *Product Design: An optimization-based Approach for Targeting of Particulate Composite Microstructure*, Computers and Chemical Engineering 140 (2020), Elsevier.
- [14] M. Mengolini, M. F. Benedetto, A. M. Aragon, *An Engineering Perspective to the Virtual Element Method and its Interplay with the Standard Finite Element Method*, Compt. Methods Appl. Mech. Engrg. 350 (2019) 995-1023, Elsevier
- [15] Singiresu S. Rao, *Engineering Optimization – Theory and Practice*, John Wiley & Sons, 2009.
- [16] J. Kennedy and R. C. Eberhart, *Particle swarm optimization*, Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks, IEEE Service Center, Piscataway NJ, 1995.

- [17] C.Talischi, G. H. Paulino, A. Pereira, I. F. M. Menezes, *PolyMesher : a general purpose mesh generator for polygonal elements written in Matlab*, Struct Multidisc Optim, Springer-Verlag, 2011.