Αρχή Μεγίστου & Βέλτιστος Έλεγχος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΘΕΟΔΟΣΗΣ-ΠΑΛΙΜΕΡΗΣ
Α.Μ. : 09490023

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΤΣΙΝΙΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΑΘΗΝΑ 2011

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

... συγκεκριμένα, επειδή το σχήμα του σύμπαντος είναι το τελειότερο, και ακόμη περισσότερο, επειδή είναι σχεδιασμένο από τον σοφότερο δημιουργό τίποτε δεν μπορεί να συμβεί στον κόσμο χωρίς να λάμπει κάπου στο βάθος κάποιος νόμος μεγίστου ή ελαχίστου.

Leonard Euler

Το 1970, στο Παγκόσμιο Συνέδριο στη Νίκαια, ο καθηγητής Pontryagin έδωσε μια ομιλία για διαφορικά παιχνίδια, η οποία είχε επηρεαστεί από ένα απλουστευμένο μοντέλο καταδίωξησ-αποφυγής αεροσκαφών. Μετά την ομιλία ο καθηγητής A. Grothendieck έθεσε μια ρητορική ερώτηση στον Pontryagin. Συγκεκριμένα είπε ότι αν και οι ακροατές είδαν ένα όμορφο κομμάτι μαθηματικών, θα ήθελε να μάθει αν ο ομιλητής αισθάνεται ο ίδιος ηθικά υπεύθυνος για την υποστήριξη των στρατιωτικών τάσεων στην κοινωνία. Η απάντηση του Pontryagin ήταν αρκετά σαφής και χωρίς περιστροφές. Ήταν πεπεισμένος, είπε, ότι σε πνευματικό επίπεδο, οποιαδήποτε προβλήματα θα μπορούσαν να συζητηθούν ανοιχτά σε μια ανεπτυγμένη κοινωνία. Επίσης, αν ακολουθήσουμε το λογικό τέλος της σύστασης του καθηγητή Grothendieck, πρέπει να απαγορευτεί να μιλάμε ανοιχτά για ορισμένα θέματα της αφηρημένης Άλγεβρας, καθώς η Κρυπτογραφία, η οποία έχει πολύ βαθύτερες συσχετίσεις με στρατιωτικά προβλήματα απ΄ ότι τα προβλήματα για τα οποία μίλησε στην ομιλία του, είναι εντελώς βασισμένη στη θεωρία πεπερασμένων πεδίων.

Ο Lev Semevovich Pontryagin (3 Σεπτεμβρίου 1908 - 3 Μαΐου 1988) σε ηλικία 14 ετών, υπέστη ένα ατύχημα και μια έκρηξη τον άφησε τυφλό. Αυτό θα μπορούσε να σημαίνει το τέλος στην εκπαίδευση και την καριέρα του, αλλά η μητέρα του Tat'yana Andreevna αφιέρωσε τον εαυτό της βοηθώντας τον να πετύχει παρά τις δυσκολίες της τύφλωσης. Για πολλά χρόνια εργαζόταν ως προσωπική γραμματέας του, διαβάζοντας του επιστημονικές εργασίες, γράφοντας τύπους στα χειρόγραφα του και διορθώνοντας τις εργασίες του. Χωρίς κανένα μαθηματικό υπόβαθρο, διάβαζε μαθηματικά κείμενα και άρθρα στον Pontryagin περιγράφοντας του τα διάφορα ‘ μυστηριώδη μαθηματικά σύμβολα ’.

Ο Pontryagin μπήκε στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας το 1925 κι έγινε γρήγορα εμφανής στους καθηγητές του ότι ήταν ένας εξαιρετικός φοιτητής. Παρόλο που δεν μπορούσε να δει και να κρατήσει σημειώσεις ήταν ικανός στο να θυμάται ακόμα και τους πιο πολύπλοκους συμβολισμούς. Ακόμα πιο αξιοσημείωτο ήταν το γεγονός ότι μπορούσε να ‘δει ’ πολύ πιο ξεκάθαρα από οποιονδήποτε από τους συμφοιτητές του, το βάθος του νοήματος των θεμάτων που παρουσιάζονταν σ′ αυτόν. Ήταν επηρεασμένος από τον καθηγητή Aleksandrov και για πολλά χρόνια η κατεύθυνση της έρευνας του ήταν αυτή του Aleksandrov.

Το 1927 αν και ήταν ακόμα 19 χρονών, ο Pontryagin είχε αρχίσει να παράγει σημαντικά αποτελέσματα στο θεώρημα δυαδικότητας του Alexander. Το 1932 απέδειξε τη δυαδικότητα μεταξύ ομολογικών ομάδων κλειστών και φραγμένων συνόλων σε Ευκλείδειο χώρο.

Αποφοίτησε το 1929 από το Πανεπιστήμιο της Μόσχας και διορίστηκε στη Σχολή Μηχανικής και Μαθηματικών. Έγινε μέλος του Ινστιτούτου Steklov το 1934 κι ένα χρόνο αργότερα έγινε επικεφαλής του τμήματος Τοπολογίας και Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Εργάστηκε κυρίως σε προβλήματα της Τοπολογίας και της Άλγεβρας. Περιέγραψε το έργο του ως ‘ *προβλήματα όπου αυτά τα δύο πεδία των μαθηματικών ενώνονται* ’. Σημαντικό επίτευγμα του ήταν η απόδειξη του 5ου προβλήματος του Hilbert το 1934 για τοπικά συμπαγής αβελιανές ομάδες.

Το 1952, η κατεύθυνση της έρευνας του Pontryagin άλλαξε εντελώς. Ξεκίνησε να μελετά προβλήματα των εφαρμοσμένων μαθηματικών και κυρίως στους τομείς διαφορικών εξισώσεων και θεωρίας ελέγχου. Αυτή η αλλαγή δεν ήταν εντελώς ξαφνική. Από τη δεκαετία του 1930 είχε φιλικές σχέσεις με το φυσικό A.A. Andronov και είχε τακτικά συζητήσεις μαζί του σε προβλήματα στη θεωρίας ταλαντώσεων και αυτόματου ελέγχου. Το 1932 δημοσίευσε ένα άρθρο στα δυναμικά συστήματα με τον Andronov, αλλά κυρίως η αλλαγή της κατεύθυνσης της έρευνας του έγινε την περίοδο του θανάτου του Andronov το 1952.

Οργάνωσε στο μαθηματικό Ινστιτούτο Steklov ένα σεμινάριο για τα εφαρμοσμένα προβλήματα των μαθηματικών προσκαλώντας θεωρητικούς μηχανικούς ως ομιλητές αφού θεωρούσε απαραίτητο να υπάρχει κάποιος επαγγελματίας να ελέγχει το μηχανικό κομμάτι του προβλήματος που ερευνάται ώστε να υπάρχει και η κατάλληλη μαθηματική ανάπτυξη.

Μετά το σεμινάριο κατέληξαν στη διαμόρφωση δύο μεγάλων μαθηματικών προβλημάτων. Το πρώτο ήταν η γενική θεωρία για διαταραγμένα συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, ενώ το δεύτερο πρόβλημα έφερε την ανακάλυψη της Αρχής Μεγίστου και την ανάδειξη της θεωρίας βέλτιστου ελέγχου.

Ο Pontryagin οδηγήθηκε στη διατύπωση του γενικού προβλήματος βέλτιστου χρόνου, από μια προσπάθεια του να λύσει ένα πέμπτης τάξης συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων με τρεις παραμέτρους ελέγχου που σχετίζονται με τους βέλτιστους ελιγμούς αεροσκάφους. Το πρόβλημα αυτό, προτάθηκε σ' αυτόν από δύο συνταγματάρχες της Πολεμικής Αεροπορίας κατά την επίσκεψη τους στο Ινστιτούτο Steklov στις αρχές της άνοιξης του 1955. Δύο από τις παραμέτρους ελέγχου εισέρχονταν γραμμικά στις εξισώσεις και ήταν φραγμένοι. Επομένως, εξ αρχής ήταν σαφές ότι δεν μπορούσαν να βρεθούν από κλασικές μεθόδους, όπως οι λύσεις των εξισώσεων Euler. Το πρόβλημα ήταν πολύ συγκεκριμένο και σύντομα ο Pontryagin συνειδητοποίησε ότι απαιτούνται γενικές μέθοδοι για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Χαριτολογώντας είχε πει ' *Θα πρέπει να εφεύρουμε ένα νέο Λογισμό Μεταβολών* '.

Το 1961 δημοσίευσε το βιβλίο The Mathematical Theory of Optimal Processes μαζί με τους μαθητές του V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze,και E.F. Mishchenko. Ένα χρόνο μετά μεταφράστηκε στα αγγλικά και ο Pontryagin πήρε το βραβείο Lenin γι αυτό το βιβλίο.

Ο Pontryagin έλαβε πολλές τιμητικές διακρίσεις για το έργο του. Εκλέχτηκε στην Ακαδημία των Επιστημών το 1939 κι έγινε πλήρες μέλος το 1959. Το 1941 ήταν ένας από τους πρώτου αποδέκτες του βραβείου Stalin (αργότερα γνωστό ως State Prize) ενώ το 1970 εκλέχτηκε Αντιπρόεδρος της Διεθνούς Μαθηματικής Ένωσης.

1.1 Ορισμοί και βασικές έννοιες

1.1.1 Το Θεμελιώδες Πρόβλημα

Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \ldots, u_1, \ldots, u_r) = f^i(x, u) \quad , i = 1, \ldots n$$

ή ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \tag{1.1}$$

όπου οι f^i ορίζονται για $x \in \mathbf{X}$ και $u \in U$. Θεωρούμε ότι ο $\mathbf{X}$ είναι διανυσματικός χώρος και U ένα οποιοδήποτε κλειστό υποσύνολο του r-διάστατου Ευκλείδειου χώρου E_r. Η συνάρτηση $u(\cdot)$ ονομάζεται είσοδος ή έλεγχος, ενώ το σύνολο U, αποδεκτός χώρος εισόδων (ή ελέγχων). Υποθέτουμε επίσης ότι οι f^i είναι συνεχείς ως προς τις μεταβλητές $x^1, \ldots, x^n, u$ και συνεχώς διαφορίσιμες ως προς τις $x^1, \ldots, x^n$ στο $\mathbf{X} \times U$.

Ας θεωρήσουμε τώρα, τη συνάρτηση $f^0(x, u) = f^0(x^1, \ldots, x_n, u)$ η οποία είναι συνεχής με συνεχείς παραγώγους στο $\mathbf{X} \times U$.

Θεμελιώδες πρόβλημα*
Μεταξύ όλων των ελέγχων $u = u(t)$ που μας μεταφέρουν το σημείο του χώρου φάσεων από τη θέση x_0 στη θέση x_1, να βρεθεί αυτός έτσι ώστε το συναρτησοειδές

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt \tag{1.2}$$

να παίρνει την ελάχιστη τιμή.
Η $x(t)$ είναι η λύση του συστήματος (1.1) με αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0$ ως προς τον έλεγχο $u(t)$ και t_1 είναι η χρονική στιγμή όπου η λύση περνά από τη θέση x_1.

Παρατήρηση 1.1.1 *Μια ειδική περίπτωση του παραπάνω προβλήματος είναι αυτή όπου $f^0(x, u) \equiv 1$. Τότε το συναρτησοειδές (1.2) παίρνει τη μορφή $J = t_1 - t_0$. Το πρόβλημα εύρεσης του βέλτιστου έλεγχου σε αυτή την περίπτωση, ονομάζεται πρόβλημα βέλτιστου χρόνου (time-optimal problem).*

Θα μετατρέψουμε το πρόβλημα Lagrange σε μια ισοδύναμη μορφή, γνωστή ως πρόβλημα Mayer(σελ. 34).

Εισάγουμε μια νέα μεταβλητή x^0 με

$$\frac{dx^0}{dt} = f^0(x^1, \ldots, x^n, u) \ .$$

Έστω το σύστημα

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \ldots, u_1, \ldots, u_r) = f^i(x, u) \quad , i = 0, \ldots n \tag{1.3}$$

όπου οι f^i είναι ανεξάρτητες του x^0. Θέτοντας

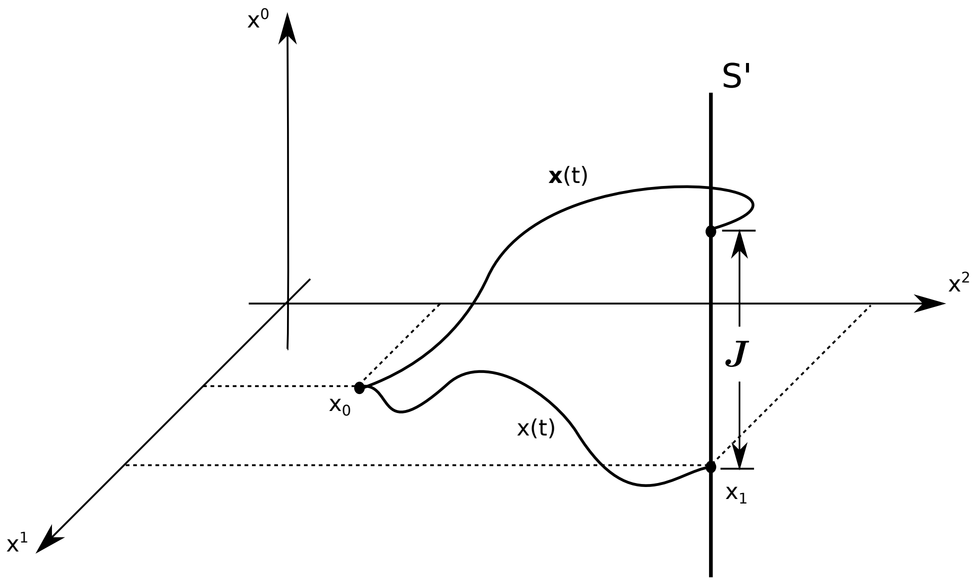
$$\mathbf{x} = (x^0, x^1, \ldots x^n) = (x^0, x)$$

στον διανυσματικό χώρο $\mathbf{X}$ διάστασης $(n+1)$ μπορούμε να γράψουμε το σύστημα (1.3) στη μορφή

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(x, u) \ . \tag{1.4}$$

Θεωρούμε $u(t)$ έναν αποδεκτό έλεγχο που μεταφέρει το x_0 στο x_1 και $x = x(t)$ τη λύση του συστήματος (1.1) με αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0$. Θα συμβολίζουμε με $\mathbf{x}_0$ το σημείο $(0, x_0)$, όπου το $\mathbf{x}_0$ ανήκει στον $\mathbf{X}$ με συντεταγμένες

*Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησοειδούς (1.2) είναι γνωστό ως πρόβλημα Lagrange.



Σχήμα 1.1: Η ευθεία S'.

$0, x_0^1, \ldots, x_0^n$ όπου $x_0^1, \ldots, x_0^n$ οι συντεταγμένες του x_0 στον $\mathbf{X}$. Τότε η λύση του (1.4) με αρχική συνθήκη $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ως προς τον έλεγχο $u(t)$ ορίζεται στο διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$ κι έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} x^0 &= \int_{t_0}^{t} f^0(x(s), u(s))ds \\ x &= x(t) \end{aligned}$$

Όταν $t = t_1$

$$x^0 = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt = J, \quad x = x_1$$

δηλαδή η λύση $\mathbf{x}(t)$ του (1.4) με αρχική συνθήκη $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ περνά από το σημείο $\mathbf{x} = (J, x_1)$ τη χρονική στιγμή $t = t_1$. Με άλλα λόγια, ας θεωρήσουμε την ευθεία S' στον $\mathbf{X}$ που περνά από το σημείο $\mathbf{x} = (0, x_1)$ και είναι παράλληλη στον x^0 άξονα[†] . Τότε η $x(t)$ περνά από ένα σημείο της S' με συντεταγμένη $x_0 = J$ τη χρονική στιγμή $t = t_1$. Αντίστροφα, αν ο $u(t)$ είναι αποδεκτός έλεγχος τέτοιος ώστε η λύση $\mathbf{x}(t)$ του (1.4) με $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = (0, x_0)$ περνά από το $x_1 \in S'$ τη χρονική στιγμή t_1 με συντεταγμένη $x_0 = J$. Τότε ο $u(t)$ μεταφέρει το σημείο του χώρου φάσεων από τη x_0 στο x_1 και το συναρτησοειδές (1.2) παίρνει την ελάχιστη τιμή.

[†]Η ευθεία S' αποτελείτε από όλα τα σημεία (ξ, x_1).

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το προηγούμενο πρόβλημα στην εξής ισοδύναμη μορφή

Στο χώρο φάσεων $\mathbf{X}$, *διάστασης* $n+1$, *θεωρούμε το σημείο* $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$ *και την ευθεία* S' *η οποία είναι παράλληλη στον άξονα* x^0 *και περνά από το σημείο* $(0, x_1)$. *Να βρεθεί ο έλεγχος* $u(t)$ *έτσι ώστε η αντίστοιχη λύση* $x(t)$ *του (1.4) με αρχική συνθήκη* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *που τέμνει την* S' *να έχει τη μικρότερη συντεταγμένη* x^0.

1.1.2 Αποδεκτοί Έλεγχοι

Όπως αναφέραμε το σύνολο U μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο στον r-διάστατο Ευκλείδειο χώρο E_r. Διαλέγοντας ένα στοιχείο $u = (u^1, \ldots, u^r \in U$ είναι ισοδύναμο με το να παίρνουμε ένα αριθμητικό σύστημα από παραμέτρους $u^1, \ldots, u^r$. Στις εφαρμογές το U είναι κλειστό σύνολο του E_r. Για παράδειγμα μπορεί να είναι ένας κύβος στον r-διάστατο χώρο με μεταβλητές $u^1, \ldots, u^r$:

$$|u^j| \leq 1 \quad , j = 1, \ldots, r \quad .$$

Η φυσική ερμηνεία του να θεωρούμε το U κλειστό και φραγμένο είναι προφανής. Η ποσότητα καυσίμων μιας μηχανής, η θερμοκρασία, η τάση, που δεν μπορούν να πάρουν αυθαίρετα μεγάλες τιμές, μπορούν να είναι παράμετροι ελέγχου $u^1, \ldots, u^r$. Θα δώσουμε τώρα έναν πιο ακριβή ορισμό για την κλάση των αποδεκτών ελέγχων.

Θα λέμε ότι οι έλεγχοι που ανήκουν στην κλάση ελέγχων D είναι αποδεκτοί αν ισχύουν οι τρεις εξής συνθήκες.

1. Όλοι οι έλεγχοι $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ που ανήκουν στην κλάση D είναι μετρήσιμοι και φραγμένοι.

2. Αν $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ είναι αποδεκτός έλεγχος, $\upsilon \in U$ και t', t'' τέτοιοι ώστε $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1$, τότε ο έλεγχος $u_1(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ που ορίζεται από
$$u_1(t) = \begin{cases} \upsilon, & \text{για } t' \leq t \leq t'' \\ u_t, & \text{για } t_0 \leq t \leq t' \text{ ή } t'' \leq t \leq t_1 \end{cases}$$
είναι επίσης αποδεκτός.

3. Αν το διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$ χωρίζεται σε ένα πλήθος πεπερασμένων υποδιαστημάτων, σε καθένα από τα οποία ο $u(t)$ είναι αποδεκτός, τότε ο $u(t)$ θα είναι αποδεκτός σε ολόκληρο το διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$

Για παράδειγμα, το σύνολο όλων των φραγμένων και μετρήσιμων ελέγχων ανήκει στην κλάση των αποδεκτών ελέγχων. Όπως επίσης στην κλάση των αποδεκτών ελέγχων ανήκει και το σύνολο των κατά τμήματα συνεχών ελέγχων όπως και το σύνολο των κατά τμήματα σταθερών ελέγχων (οι $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, έτσι ώστε το $t_0 \leq t \leq t_1$ μπορεί να χωριστεί σε ένα πεπερασμένο πλήθος υποδιαστημάτων σε καθένα από τα οποία ο $u(t)$ είναι σταθερός) (συνθήκες (2) και (3)).

Εφόσον είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε μετρήσιμους ελέγχους, θα δώσουμε κάποιες ιδιότητες των μετρήσιμων συναρτήσεων. Έστω $u(t)$ μετρήσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα $a < t < b$ με τιμές στο U. Θα λέμε ότι ένα σημείο ξ του διαστήματος $a < t < b$ είναι κανονικό σημείο (regular point ή Lebesgue point ή density point) για τη συνάρτηση $u(t)$ αν

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\xi}^{\xi+h} [f(x(t), u(t)) - f(x(\xi), u(\xi))] dt = 0 \ .$$

Σχεδόν όλα τα σημεία του διαστήματος $a < t < b$ είναι κανονικά σημεία για την $u(t)$[†].

[†] **Θεώρημα**: Σχεδόν όλα τα σημεία ενός μετρήσιμου συνόλου είναι κανονικά σημεία.[FA.R-N]

Κεφάλαιο 2

Η Αρχή Μεγίστου του Pontryagin

Όπως και στο Κεφάλαιο 1, θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \ldots, u_1, \ldots, u_r) = f^i(x, u), \;\; i = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

ή ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \tag{2.2}$$

όπου $f^i(x^i, u)$, $\frac{\partial f^i(x^i,u)}{\partial x^i}$ δοσμένες και συνεχής στο $\mathbf{X} \times \overline{U}$, όπου $\overline{U}$ η κλειστότητα του U στον Ευκλείδειο χώρο E_r.
Θεωρούμε επίσης το συναρτησοειδές

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt \tag{2.3}$$

με t_1 ελεύθερο. Το θεμελιώδες πρόβλημα μπορεί να γραφεί στην εξής ισοδύναμη μορφή

Στο χώρο φάσεων $\mathbf{X}$, διάστασης $(n+1)$, δίνονται το σημείο $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$ και η ευθεία S' η οποία είναι παράλληλη στον άξονα x^0 και περνά από το σημείο $(0, x_1)$. Μεταξύ όλων των αποδεκτών ελέγχων $u = u(t)$ με την ιδιότητα η αντίστοιχη τροχιά $\mathbf{x}(t)$ του συστήματος (2.1) με αρχική συνθήκη $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ τέμνει την ευθεία S', να βρεθεί αυτός όπου το σημείο τομής με την S' έχει τη μικρότερη συντεταγμένη x^0.

2.1 Κατασκευή της Αρχής Μεγίστου

Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{a=0}^{n} \frac{\partial f^a(x,u)}{\partial x^i}\psi_a \ , \ i = 0,\ldots,n \tag{2.4}$$

για τις $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$, καθώς και τη συνάρτηση

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = (\psi, f(x,u)) = \sum_{a=0}^{n} \psi_a f^a(x,u) \ .$$

Τότε οι (2.1) και (2.4) γράφονται στη μορφή Χαμιλτονιανού συστήματος

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i} \ , \ i = 0,\ldots,n \tag{2.5}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \ , \ i = 0,\ldots,n \tag{2.6}$$

Συνεπώς, για κάποιο έλεγχο $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ της κλάσεως D και με αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0$ μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη τροχιά $\mathbf{x}(t) = (x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))$ που ικανοποιεί το σύστημα (2.5).
Αντικαθιστώντας τις $u(t)$ και $\mathbf{x}(t)$ στη (2.6) παίρνουμε ένα γραμμικό σύστημα για τις άγνωστες $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$. Κάθε λύση

$$\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$$

αυτού του συστήματος θα λέγεται λύση του συστήματος (2.6) ως προς τις συναρτήσεις $u(t)$ και $\mathbf{x}(t)^\dagger$.
Για συγκεκριμένες τιμές των ψ και x, η συνάρτηση $\mathcal{H}$ γίνεται μια συνάρτηση εξαρτώμενη από τη $u \in U$.
Ορίζουμε

$$\mathcal{M}(\psi, x) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\psi, x, u) \ .$$

Θεώρημα 2.1.1 *Αρχή Μεγίστου του Pontryagin (PMP)*
Έστω $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, ένας αποδεκτός έλεγχος έτσι ώστε η αντίστοιχη τροχιά (2.5), η οποία ξεκινά από το σημείο x_0 το η χρονική στιγμή t_0 ορίζεται σε όλο το διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$ και περνά τη χρονική στιγμή t_1 από την ευθεία S'. Αναγκαία συνθήκη για να είναι οι $u(t)$ και $\mathbf{x}(t)$ βέλτιστοι, είναι να υπάρχει μημηδενική και απολύτως συνεχής συνάρτηση $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ ως προς τις $\mathbf{x}(t)$ και $u(t)$ (2.6) έτσι ώστε

† Οι διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{x}(t)$ και $u(t)$ είναι απολύτως συνεχής ως λύσεις συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

1 *Η συνάρτηση $\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u))$ μεγιστοποιείται για $u = u(t)$ σχεδόν παντού στο διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$*

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), x(t)) \tag{2.7}$$

2 *Τη χρονική στιγμή t_1 ικανοποιούνται οι συνθήκες*

$$\begin{aligned} \psi_0(t_1) &\leq 0 \\ \mathcal{M}(\psi(t_1), x(t_1)) &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

3 *Αν οι $\psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$ και $u(t)$ ικανοποιούν τα συστήματα (2.5), (2.6) και τη συνθήκη '1' του PMP , τότε οι $\psi_0(t)$ και $\mathcal{M}(\psi(t), x(t))$ είναι σταθερές.*

2.2 Απόδειξη της Αρχής Μεγίστου

2.2.1 Το σύστημα των μεταβολικών εξισώσεων

Έστω $u(t)$ ένας αποδεκτός έλεγχος στο $t_0 \leq t \leq t_1$ κι έστω

$$\mathbf{x}(t) = (x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)) = (x_0(t), x(t))$$

η λύση του συστήματος (2.1) ως προς τον παραπάνω έλεγχο με αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0$.
Θεωρούμε $\mathbf{y}(t)$ τη λύση του ίδιου συστήματος με τον ίδιο έλεγχο που ξεκινάει στο σημείο

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 + \epsilon\xi_0 + o(\epsilon) \tag{2.9}$$

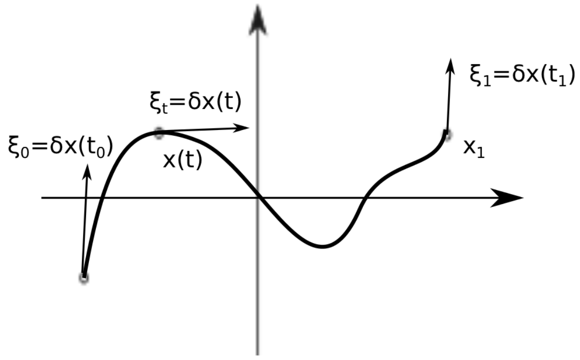
όπου ϵ μικρή θετική παράμετρος και ξ_0 ένα σταθερό διάνυσμα στον $\mathbf{X}$.
Η λύση $\mathbf{y}(t)$ θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \epsilon\delta\mathbf{x}(t) + o(\epsilon) \tag{2.10}$$

όπου $\delta\mathbf{x}(t) = (\delta x^0(t), \delta x^1(t), \ldots, \delta x^n(t))$ είναι ένα διάνυσμα ανεξάρτητο του ϵ και ορίζεται από το σύστημα μεταβολικών εξισώσεων

$$\frac{d\delta x^i}{dt} = \sum_{a=0}^{n} \frac{\partial f^i(x(t), u(t))}{\partial x_a}\delta x^a, \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{2.11}$$

με αρχική συνθήκη $\delta\mathbf{x}(t_0) = \xi_0$.



Σχήμα 2.1

Παρατήρηση 2.2.1

Ποια είναι η ερμηνεία της εξίσωσης (2.11);
Μας επιτρέπει να αντιστοιχίσουμε μια οικογένεια από διανύσματα $\xi_t = \delta\mathbf{x}(t)$, $t > t_0$ σε κάθε διάνυσμα $\xi_0 = \delta\mathbf{x}(t_0)$. Ας θεωρήσουμε ένα διάνυσμα $\xi(t)$ που προέρχεται από το σημείο $\mathbf{x}(t)$. Τότε κάθε διάνυσμα ξ_0, σε ένα σημείο x_0, ορίζει ένα (πεδίο) διανυσμάτων $\{\xi_t\}$ κατά μήκος της τροχιάς $\mathbf{x}(t)$. Δηλαδή τα διανύσματα αυτού του πεδίου λαμβάνονται από το αρχικό διάνυσμα ξ_0 από τη μεταφορά κατά μήκος της τροχιάς $\mathbf{x}(t)$.

Ορίζουμε $\mathbf{X}_t$ να είναι ο χώρος $\mathbf{X}$ με αρχή το $x(t)$. Τότε ο $\mathbf{X}_t$ είναι ο χώρος των διανυσμάτων που πηγάζουν από το $x(t)$ κι έτσι το διάνυσμα $\xi_t = \delta\mathbf{x}(t)$ είναι στοιχείο του $\mathbf{X}_t$.

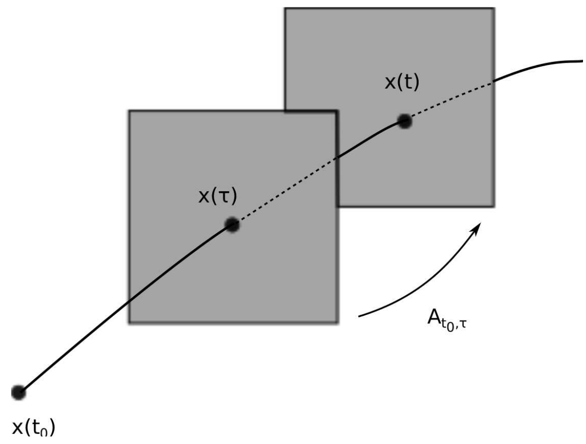
Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση A_{t,t_0} από το $\mathbf{X}_{t_0}$ στο $\mathbf{X}_t$ η οποία μας μεταφέρει κάθε διάνυσμα ξ_0 του $\mathbf{X}_{t_0}$ στο ξ_t του $\mathbf{X}_t$. Εφόσον το σύστημα (2.11) είναι γραμμικό και ομογενές η A_{t,t_0} είναι γραμμική και μη ιδιάζουσα.

Έστω οι χρονικές στιγμές t' και t'' (στο διάστημα όπου ορίζονται οι $\mathbf{x}(t)$ και $u(t)$). Τότε ανάλογα ορίζεται η γραμμική απεικόνιση $A_{t',t''}$ από τον $\mathbf{X}_{t'}$ στον $\mathbf{X}_{t''}$. Η απεικόνιση έχει τις εξής ιδιότητες

$$A_{t',t'} = I \quad A_{t''',t''} \cdot A_{t'',t'} = A_{t''',t'} \ .$$

Συνεπώς, τα διανύσματα $A_{t,t_0}(\xi_0)$ παράγουν μια οικογένεια από διανύσματα τα οποία λαμβάνονται από το ξ_0 κατά τη μεταφορά κατά μήκος της τροχιάς $\mathbf{x}(t)$. Άρα ικανοποιούν το σύστημα (2.11)

$$\frac{d}{dt}[A_{t,t_0}(\xi_0)]^i = \sum_{a=0}^{n} \frac{\partial f^i(x(t),u(t))}{\partial x^a}[A_{t,t_0}(\xi_0)]^a \quad , i = 0,1,\ldots,n \tag{2.12}$$



Σχήμα 2.2

Έτσι η (2.10) μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) &= \epsilon A_{t,t_0} + o(\epsilon) \\ &= A_{t,t_0}[\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)] + o(\epsilon) \end{aligned} \tag{2.13}$$

■

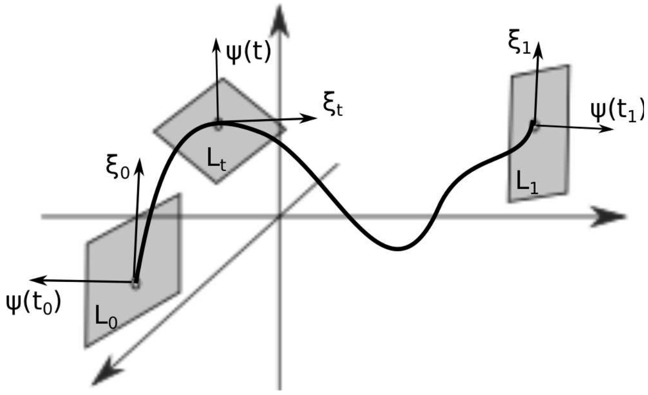
Έστω $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ μια λύση της (2.4) κι έστω $\delta\mathbf{x}(t) = (\delta x^0(t), \delta x^1(t), \ldots, \delta^n(t))$ λύση της (2.11). Τότε το γινόμενο

$$(\psi(t), \delta\mathbf{x}(t)) = \sum_{a=0}^{n} \psi_a(t)\delta x^a(t)$$

είναι σταθερό σε όλο το διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$.
Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum_{a=0}^{n} \psi_a(t)\delta x^a(t) &= \sum_{a=0}^{n} \frac{d\psi_a(t)}{dt}\delta x^a(t) + \sum_{a=0}^{n} \psi_a(t)\frac{d\delta x^a(t)}{dt} \\ &= -\sum_{a,\beta=0}^{n} \frac{\partial f^\beta(x(t),u(t))}{\partial x^a}\psi_\beta(t)\delta x^a(t) \\ &\quad + \sum_{a,\beta=0}^{n} \frac{\partial f^a(x(t),u(t))}{\partial x^\beta}\psi_a(t)\delta x^\beta(t) = 0 \end{aligned}$$

Ας θεωρήσουμε ξ_0 ένα διάνυσμα. Τότε η συνάρτηση $\xi_t = A_{t,t_0}(\xi_0)$ είναι λύση του συστήματος (2.11). Επομένως καταλήγουμε στο επόμενο Λήμμα.



Σχήμα 2.3

Λήμμα 2.2.1 *Αν η $\psi(t)$ είναι λύση του συστήματος (2.4) και ξ_0 ένα διάνυσμα σε ένα σημείο $\mathbf{x}(t_0)$, τότε*

$$(\psi(t), A_{t,t_0}(\xi_0)) = \text{const}$$

στο διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$.

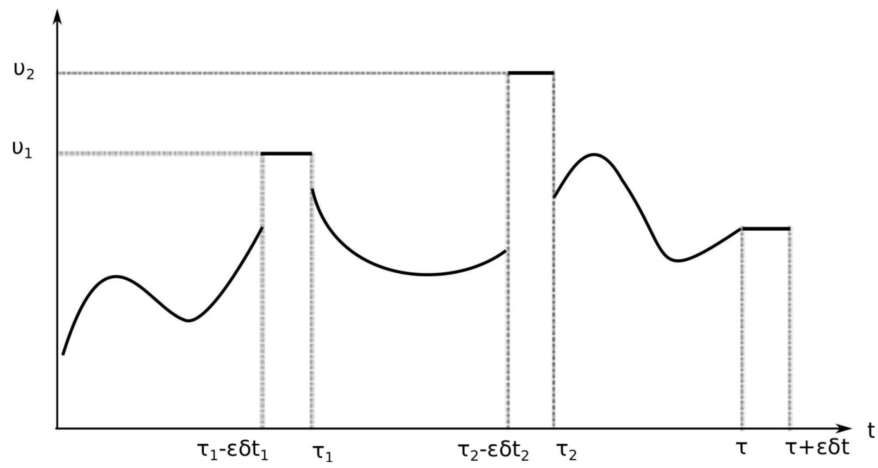
Το Λήμμα (2.2.1) μας βοηθάει να δώσουμε την εξής γεωμετρική ερμηνεία στο σύστημα (2.4). Έστω L_0 ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbf{X}_t$ που περνά από το σημείο $\mathbf{x}_0$. Η A_{t,t_0} μας μεταφέρει το L_0 σε ένα άλλο υπερεπίπεδο L_t το οποίο περνά από το $\mathbf{x}(t)$. Οπότε παράγεται μια οικογένεια από υπερεπίπεδα $\{L_t\}$ τα οποία τα παίρνουμε από τη μεταφορά του L_0 κατά μήκος της τροχιάς $\mathbf{x}(t)$.
Η εξίσωση του L_t μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\sum_{a=0}^{n} \psi_a(t) x^a = 0 \tag{2.14}$$

Θέλουμε να βρούμε τις εξισώσεις $\psi_a(t)$, αν η (2.14) μας ορίζει μια οικογένεια υπερεπιπέδων που μεταφέρθηκαν κατά μήκος της $\mathbf{x}(t)$.
Αν οι $\psi_a(t)$, $a = 0, \ldots, n$ ικανοποιούν το (2.4) και αν το διάνυσμα ξ_0 βρίσκεται στο υπερεπίπεδο

$$\sum_{a=0}^{n} \psi_a(t_0) x^a = 0$$

τότε το γινόμενο $(\psi(t), A_{t,t_0}(\xi_0))$ είναι ίσο με μηδέν για κάθε t. Δηλαδή κάθε διάνυσμα $\xi_t = A_{t,t_0}(\xi_0)$ που λαμβάνεται από το ξ_0 κατά τη μεταφορά πάνω στην τροχιά $\mathbf{x}(t)$, θα βρίσκεται στο ανάλογο υπερεπίπεδο. Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε διάνυσμα ξ_0 που βρίσκεται στο υπερεπίπεδο $\sum_{a=0}^{n} \psi_a(t_0) x^a = 0$, τότε τα υπερεπίπεδα (2.14) λαμβάνονται το ένα από το άλλο κατά τη μεταφορά στο μήκος της $\mathbf{x}(t)$.



Σχήμα 2.4

2.2.2 Διαταραχή του έλεγχου και της τροχιάς

Θεωρούμε $u(t)$ έναν αποδεκτό έλεγχο στο διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$ και τους χρόνους $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s, \tau$ που ικανοποιούν την ανισότητα

$$t_0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_s \leq \tau < t_1 \ .$$

Θεωρούμε επίσης τους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς $\delta t_1, \delta t_2, \ldots, \delta t_s, \delta t$ και $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_s \in U$.
Ορίζουμε τα διαστήματα $I_1, I_2, \ldots, I_s$ ως εξής
Έστω

$$l_i = \begin{cases} \delta t - (\delta t_i + \ldots + \delta t_s), & \text{για } \tau_i = \tau \\ \quad -(\delta t_i + \ldots + \delta t_s), & \text{για } \tau_i = \tau_s < \tau \\ \quad -(\delta t_i + \ldots + \delta t_s), & \text{για } \tau_i = \tau_{i+1} = \ldots = \tau_j < \tau_{j+1} \ (j < s) \end{cases}$$

Ορίζουμε λοιπόν, I_i να είναι το διάστημα

$$\tau_i + \epsilon l_i < t \leq \tau_i + \epsilon(l_i + \delta t_i) \ .$$

Οπότε αν $\tau_i = \tau_{i+1} = \ldots = \tau_j$, τα $I_1, I_{i+1}, \ldots, I_j$ συνορεύουν. Αν το I_k δεν συνορεύει με το επόμενο διάστημα (αν δηλαδή $\tau_k < \tau_{k+1}$ ή $k = s$) τότε το δεξί άκρο του I_k είναι τ_k για $\tau_k < \tau$ και $\tau + \epsilon\delta t$ αν $\tau_k = \tau$. Τέλος, παρατηρούμε ότι το μήκος κάθε διαστήματος I_i είναι $\epsilon\delta t_i$.

Ορίζουμε τώρα τον έλεγχο $u_\epsilon(t)$ στο διάστημα $t_0 \leq t \leq \tau + \epsilon\delta t$ ως εξής

$$u_\epsilon(t) = \begin{cases} u(t), & \text{αν } t \notin I_1, \ldots, I_s \\ \upsilon_i, & \text{αν } t \in I_i \end{cases}$$

Δηλαδή ο έλεγχος $u_\epsilon(t)$ λαμβάνεται από μια διαταραχή του ελέγχου $u(t)$.

Παρατήρηση 2.2.2

Ο $u_\epsilon(t)$ είναι αποδεκτός έλεγχος.

■

Έστω $\mathbf{x} = \xi(\epsilon)$, $0 \leq \epsilon \leq e_0$ η παραμετρική αναπαράσταση μιας λείας καμπύλης που περνά από το x_0 όταν $\epsilon = 0$ με εφαπτόμενο διάνυσμα στο $\mathbf{x}_0$

$$\xi_0 = \frac{d\xi(0)}{d\epsilon} .$$

Έστω $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ η τροχιά με αρχή το $\mathbf{x}_0$, είσοδο $u(t)$ κι έστω $\mathbf{x}_\epsilon(t)$ η τροχιά με αφετηρία το $\xi(\epsilon)$ με είσοδο $u_\epsilon(t)$. Η $\mathbf{x}_\epsilon(t)$ ορίζεται σε όλο το διάστημα $t_0 \leq t \leq \tau + \epsilon\delta t$.

Θα δείξουμε τώρα ότι για κάθε διαταραγμένη λύση $\mathbf{x}_\epsilon(t)$ ισχύει η σχέση

$$\mathbf{x}_\epsilon(\tau + \epsilon\delta t) = \mathbf{x}(\tau) + \epsilon A_{\tau,t_0}(\xi_0) + \epsilon\Delta\mathbf{x} + o(\epsilon) \tag{2.15}$$

όπου $\Delta\mathbf{x}$ είναι ένα διάνυσμα ανεξάρτητο του ϵ και ορίζεται από την εξίσωση

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(x(\tau), u(\tau))\delta t + \sum_{i=1}^{s} A_{\tau,\tau_i}[\mathbf{f}(x(\tau_i), \upsilon_i) - \mathbf{f}(x(\tau_i), u(\tau_i))]\delta t_i \tag{2.16}$$

Θα αποδείξουμε τις δύο παραπάνω σχέσεις με επαγωγή στο s.
Εφόσον το τ είναι κανονικό σημείο (Lebesgue point ή regular point) έχουμε ότι

$$\int_\tau^{\tau+\epsilon\delta t} \mathbf{f}(x(t), u(t))dt = \epsilon\delta t\mathbf{f}(x(\tau), u(\tau)) + o(\epsilon)^* .$$

Επειδή η $\mathbf{x}(t)$ είναι απολύτως συνεχής λύση του (2.1) έχουμε ότι

$$\mathbf{x}(\tau + \epsilon\delta t) = \mathbf{x}(\tau) + \epsilon\mathbf{f}(x(\tau), u(\tau))\delta t + o(\epsilon) \tag{2.17}$$

Αν $\tau_s < \tau$ και ϵ επαρκώς μικρό, το διάστημα $(\tau, \tau + \epsilon\delta t)$ βρίσκεται δεξιά του τ_s. Τότε η $u_\epsilon(t)$ συμπίπτει με τη $u(t)$. Οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\epsilon(\tau + \epsilon\delta t) - \mathbf{x}_\epsilon(\tau) &= \int_\tau^{\tau+\epsilon\delta t} \mathbf{f}(x_\epsilon(t), u_\epsilon(t))dt \\ &= \int_\tau^{\tau+\epsilon\delta t} \mathbf{f}(x_\epsilon(t), u(t))dt \qquad (2.18) \end{aligned}$$

*[MT-F]

Επίσης η $\mathbf{x}_\epsilon(t) \to \mathbf{x}(t)$ ομοιόμορφα στο $t_0 \le t \le \tau + \epsilon\delta t$ καθώς $\epsilon \to 0$.
Οπότε $\mathbf{f}(x_\epsilon(t), u(t)) = \mathbf{f}(x(t), u(t)) + \xi_1(t)$, όπου $\xi_1(t) \to 0$ καθώς $\epsilon \to 0$. Άρα

$$\begin{aligned}
\int_\tau^{\tau+\epsilon\delta t} f(x_\epsilon(t), u(t))dt &= \int_\tau^{\tau+\epsilon\delta t} \mathbf{f}(x(t), u(t))dt + o(\epsilon) \\
&= \mathbf{x}(\tau + \epsilon\delta t) - \mathbf{x}(\tau) + o(\epsilon) \\
&= \epsilon\mathbf{f}(x(\tau), u(\tau))\delta t + o(\epsilon) \ .
\end{aligned}$$

Έτσι η (2.18) γίνεται

$$\mathbf{x}_\epsilon(\tau + \epsilon\delta t) = \mathbf{x}_\epsilon(\tau) + \epsilon\mathbf{f}(x(\tau), u(\tau))\delta t + o(\epsilon) \tag{2.19}$$

Θα βρούμε τη μεταβολή

$$\mathbf{x}_\epsilon \Big|_{I_i} = \mathbf{x}_\epsilon(\tau_i + \epsilon(l_i + \delta t_i)) - \mathbf{x}_\epsilon(\tau_i + \epsilon l_i)$$

στο διάστημα I_i.
Στο διάστημα αυτό έχουμε ότι

$$\mathbf{f}(x_\epsilon(t), u_\epsilon(t)) = \mathbf{f}(x(t), \upsilon_i) + \xi_2(t)$$

όπου $\xi_2 \to 0$ καθώς $\epsilon \to 0$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_\epsilon \Big|_{I_i} &= \int_{I_i} \mathbf{f}(x_\epsilon(t), u_\epsilon(t))dt \\
&= \int_{I_i} \mathbf{f}(x(t), \upsilon_i)dt + o(\epsilon) \\
&= \epsilon\mathbf{f}(x(\tau_i), \upsilon_i)\delta t_i + o(\epsilon)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Θα ξεκινήσουμε τώρα την επαγωγική διαδικασία για την απόδειξη των (2.15) και (2.16).
Για $s = 0$ είναι άμεσο ότι $u_\epsilon(t) = u(t)$.
Άρα

$$\mathbf{x}_\epsilon(\tau) = \mathbf{x}(\tau) + \epsilon A_{\tau,t_0}(\xi_0) + o(\epsilon)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.17) και (2.19) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_\epsilon(\tau + \epsilon\delta t) - \mathbf{x}(\tau + \epsilon\delta t) &= \mathbf{x}_\epsilon(\tau) - \mathbf{x}(\tau) + o(\epsilon) \\
&= \epsilon A_{\tau,t_0}(\xi_0) + o(\epsilon)
\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}
x_\epsilon(\tau + \epsilon\delta t) &= \mathbf{x}(\tau + \epsilon\delta t) + \epsilon A_{\tau,t_0}(\xi_0) + o(\epsilon) \\
&= \mathbf{x}(\tau) + \epsilon\mathbf{f}(x(\tau), u(\tau))\delta t + \epsilon A_{\tau,t_0}(\xi_0) + o(\epsilon)
\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι (2.15) και (2.16) ισχύουν για τα $I_1, I_2, \ldots, I_j$ διαστήματα με $j < s$. Θα δείξουμε ότι ισχύουν για s διαστήματα $I_1, I_2, \ldots, I_s$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\tau_{k+1} = \tau_{k+2} = \ldots = \tau_s$ και $\tau_i = \tau_s$ για $i \leq k$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\epsilon(\tau_s + \epsilon l_{k+1}) &= \mathbf{x}(\tau_s) + \epsilon A_{\tau_s,t_0}(\xi_0) + \epsilon \mathbf{f}(x(\tau_s), u(\tau_s)) l_{k+1} \\ &+ \epsilon \sum_{i=1}^{s} A_{\tau_s,\tau_i}[\mathbf{f}(x(\tau_i), \upsilon_i) - \mathbf{f}(x(\tau_i), u(\tau i))]\delta t_i + o(\epsilon) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Αυτή θα είναι η τιμή του $\mathbf{x}_\epsilon(t)$ στο αριστερό άκρο του I_{k+1}. Τα $I_{k+1}, \ldots, I_s$ συνορεύουν μεταξύ τους, οπότε εάν αθροίσουμε τα $\mathbf{x}_\epsilon \Big|_{I_i}$ για $i = k+1, \ldots, s$ παίρνουμε τη μεταβολή του $\mathbf{x}_\epsilon(t)$ από το αριστερό άκρο του I_{k+1} μέχρι το δεξί άκρο του I_s

$$\mathbf{x}_\epsilon(\tau_s + \epsilon(l_s + \delta t_s)) - \mathbf{x}_\epsilon(\tau_s + \epsilon l_{k+1}) \tag{2.22}$$

Συνδυάζοντας τη σχέση (2.22) με την (2.22) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\epsilon(\tau_s + \epsilon(l_s + \delta t_s)) &= \mathbf{x}(\tau_s) + \epsilon \mathbf{f}(x(\tau_s), u(\tau_s)) l_{k+1} \\ &\quad + \epsilon A_{\tau_s,t_0}(\xi_0) + \epsilon \sum_{i=k+1}^{s} \mathbf{f}(x(\tau_i), \upsilon_i)\delta t_i \\ &\quad + \epsilon \sum_{i=1}^{k} A_{\tau_s,\tau_i}[\mathbf{f}(x(\tau_s), \upsilon_i) - \mathbf{f}(x(\tau_i), u(\tau_i))]\delta t_i + o(\epsilon) \\ &= \mathbf{x}(\tau_s) + \epsilon \mathbf{f}(x(\tau_s), u(\tau_s))(l_{k+1} + \delta t_{k+1} + \ldots + \delta t_s) \\ &\quad + \epsilon A_{\tau_s,t_0}(\xi_0) + \epsilon \sum_{i=k+1}^{s} [\mathbf{f}(x(\tau_i), \upsilon_i) - \mathbf{f}(x(\tau_s), u(\tau_s))]\delta t_i \\ &\quad + \epsilon \sum_{i=1}^{k} A_{\tau_s,\tau_i}[\mathbf{f}(x(\tau_i), \upsilon_i) - \mathbf{f}(x(\tau_i), u(\tau_i))]\delta t_i + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Για $i = k+1, \ldots, s$ έχουμε $\tau_{k+1} = \ldots = \tau_s$ και $A_{\tau_s,\tau_i} = I$. Οπότε η τελευταία σχέση γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\epsilon(\tau_s + \epsilon(l_s + \delta t_s)) &= \mathbf{x}(\tau_s) + \epsilon A_{\tau_s,t_0}(\xi_0) \\ &+ \epsilon \mathbf{f}(x(\tau_s), u(\tau_s))(l_{k+1} + \delta t_{k+1} + \ldots + \delta t_s) \qquad (2.23) \\ &+ \epsilon \sum_{i=1}^{s} [\mathbf{f}(x(\tau_i), \upsilon_i) - \mathbf{f}(x(\tau_i), u(\tau_i))]\delta t_i + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις
Αν $\tau_{k+1} = \tau_s = \tau$ τότε $l_s + \delta t_s = \delta t$ και $l_{k+1} + \delta t_{k+1} + \ldots + \delta t_s = \delta t$. Έτσι η

(2.23) συμπίπτει με τις (2.15) και (2.16).
Αν $\tau_s < \tau$, τότε $l_s + \delta t_s = 0$ και $l_{k+1} + \delta t_{k+1} + \ldots + \delta t_s = 0$. Έτσι η (2.23) τώρα γράφεται

$$\mathbf{x}_\epsilon(\tau_s) = \mathbf{x}(\tau_s) + \epsilon A_{\tau_s,t_0} + \\ +\epsilon \sum_{i=1}^{s} A_{\tau_s,\tau_i}[\mathbf{f}(x(\tau_i), \upsilon_i) - \mathbf{f}(x(\tau_i), u(\tau_i))]\delta t_i + o(\epsilon) \tag{2.24}$$

Σε αυτή την περίπτωση η $u_\epsilon(t)$ συμπίπτει με την $u(t)$ για $\tau_s < t \leq \tau$. Οπότε το διάνυσμα $\mathbf{x}_\epsilon(t) - \mathbf{x}(t)$ για $\tau_s \leq t \leq \tau$ προκύπτει το ένα από το άλλο κατά τη μεταφορά στην τροχιά $\mathbf{x}(t)$.

$$\mathbf{x}_\epsilon(t) - \mathbf{x}(t) = A_{t,\tau_s}(\mathbf{x}_\epsilon(\tau_s) - \mathbf{x}(\tau_s)) + o(\epsilon)$$

Εφαρμόζοντας την απεικόνιση A_{τ,τ_s} η (2.24) γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\epsilon(\tau) - \mathbf{x}(\tau) &= \epsilon A_{\tau,t_0}(\xi_0) \\ &\quad +\epsilon \sum_{i=1}^{n} A_{\tau,\tau_i}[\mathbf{f}(x(\tau_i), \upsilon_i) - \mathbf{f}(x(\tau_i), u(\tau_i))]\delta t_i + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (2.19) καταλήγουμε στις σχέσεις (2.15) και (2.16) στην περίπτωση όπου $\tau_s < \tau$.

2.3 Θεμελιώδη Λήμματα

Όπως είδαμε το διάνυσμα $\Delta\mathbf{x}$, όπως ορίζεται από την (2.16), είναι ανεξάρτητο του ϵ αλλά εξαρτάται από τα σημεία τ_i, υ_i και τ καθώς και από τα δt και δt_i για $i = 1, \ldots, s$.
Υιοθετούμε τον εξής συμβολισμό για το σύνολο των τ_i, υ_i, δt_i, δt

$$a = \{\tau_i,\, \upsilon_i,\, \tau,\, \delta t_i,\, \delta t\}\ .$$

Θα συμβολίζουμε το διάνυσμα που δίνεται από τη σχέση (2.16) με $\Delta\mathbf{x}_a$ για να δώσουμε έμφαση στην εξάρτησή του από τις παραπάνω ποσότητες. Έστω τώρα

$$\begin{aligned} a' &= \{\tau_i,\, \upsilon_i,\, \tau,\, \delta t'_i, \delta t'\} \\ a'' &= \{\tau_i,\, \upsilon_i,\, \tau,\, \delta t''_i, \delta t''\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

όπου τα τ_i, τ, υ_i είναι ίδια για τα a', a'', ... Ορίζουμε το γραμμικό συνδυασμό των a', a'', ... για $\lambda', \lambda'', \ldots \geq 0$ ως εξής

$$\lambda' a' + \lambda'' a'' = \{\tau_i, \upsilon_i, \tau, \lambda'\delta t'_i + \lambda''\delta t''_i + \ldots, \lambda'\delta t' + \lambda''\delta t'' + \ldots\}$$

Για κάποιο έλεγχο $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ και την αντίστοιχη τροχιά $\mathbf{x}(t)$ θεωρούμε τα διανύσματα $\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x}_a$ για διάφορα a. Τότε έχουμε το εξής Λήμμα

Λήμμα 2.3.1 *Αν $a = \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots$ τότε*

$$\Delta\mathbf{x}_a = \lambda' \Delta\mathbf{x}_{a'} + \lambda'' \Delta\mathbf{x}_{a''} + \ldots$$

Η απόδειξη του παραπάνω Λήμματος είναι άμεση αφού τα $\delta t_1, \ldots, \delta t_s, \delta t$ εισέρχονται γραμμικά στη σχέση (2.16).

Θεωρούμε το $\Delta\mathbf{x}$ να είναι ένα διάνυσμα που προέρχεται από το $x(\tau)$ (στοιχείο του $\mathbf{X}_\tau$). Αν πάρουμε όλα τα πιθανά a (για τ σταθερό) τότε το διάνυσμα $\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x}_a$ θα μας δημιουργήσει ένα σύνολο K_τ στον $\mathbf{X}_\tau$. Θα δούμε ότι το σύνολο K_τ είναι ένας κυρτός κώνος στον $\mathbf{X}_\tau$.
Πράγματι, έστω $a' = \Delta\mathbf{x}_{a'}$ και $a'' = \Delta\mathbf{x}_{a''}$ δύο σημεία του $\mathbf{X}_\tau$ που ανήκουν στο K_τ. Τότε για $\lambda', \lambda'' \geq 0$ έχουμε από το Λήμμα (2.3.1)

$$\lambda' a' + \lambda'' a'' = \lambda' \Delta\mathbf{x}_{a'} + \lambda'' \Delta\mathbf{x}_{a''} = \Delta\mathbf{x}_{(\lambda' a' + \lambda'' a'')}$$

Δηλαδή το $\lambda' a' + \lambda'' a''$ επίσης ανήκει στο K_τ. Ονομάζουμε τον K_τ προσιτό κώνο (cone of attainability).

Λήμμα 2.3.2 *Έστω τ, $(t_0 \leq \tau \leq t_1)$ ένα κανονικό σημείο (regular point) για τον έλεγχο $u(t)$ κι έστω $\mathbf{x}(t)$ η αντίστοιχη τροχιά που ξεκινάει στο $\mathbf{x}_0$. Έστω γ μια καμπύλη που ξεκινά από το σημείο $\mathbf{x}(\tau)$ κι έχει εφαπτόμενη ημιευθεία L στο σημείο αυτό. Αν η L ανήκει στο εσωτερικό του κώνου K_τ τότε υπάρχει έλεγχος $u_*(t)$ έτσι ώστε η αντίστοιχη τροχιά $\mathbf{x}_*(t)$, που ξεκινά από το ίδιο σημείο $\mathbf{x}_0$, περνά από κάποιο σημείο της καμπύλης γ διαφορετικό του $\mathbf{x}(\tau)$.*

Απόδειξη

Έστω ένα σημείο A στην ημιευθεία L διαφορετικό του $x(\tau)$. Έστω n κάθετα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ κάθετα στην L από το A, ίδιου μήκους r. Θεωρούμε επίσης τα διανύσματα $\mathbf{f}_i = -\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ τα οποία προέρχονται από το A. Υποθέτουμε ότι το μήκος r των $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{f}_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι επαρκώς μικρό ώστε να ανήκουν εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του κώνου. Τέλος έστω ένα διάνυσμα $\mathbf{c}$ με αρχή το $x(\tau)$ και τέλος το A. Εφόσον τα $\mathbf{c}, \mathbf{c}+\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{c}+\mathbf{e}_n, \mathbf{c}+\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{c}+\mathbf{f}_n$ ανήκουν στο K_τ υπάρχουν $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_1', \ldots, a_n'$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}_{a_0} &= \mathbf{c} \\ \Delta\mathbf{x}_{a_1} &= \mathbf{c}+\mathbf{e}_1 \\ \Delta\mathbf{x}_{a_2} &= \mathbf{c}+\mathbf{e}_2 \\ &\vdots \\ \Delta\mathbf{x}'_{a_1} &= \mathbf{c}+\mathbf{f}_1 \\ \Delta\mathbf{x}'_{a_2} &= \mathbf{c}+\mathbf{f}_2 \\ &\vdots \\ \Delta\mathbf{x}'_{a_n} &= \mathbf{c}+\mathbf{f}_n. \end{aligned}$$

Ορίζουμε τις εξής συναρτήσεις της πραγματικής μεταβλητής ρ

$$h^+(\rho) = \left\{ \begin{array}{ll} \rho, & \rho \geq 0 \\ 0, & \rho < 0 \end{array} \right. , h^-(\rho) = \left\{ \begin{array}{rl} 0, & \rho \geq 0 \\ -\rho, & \rho < 0 \end{array} \right.$$

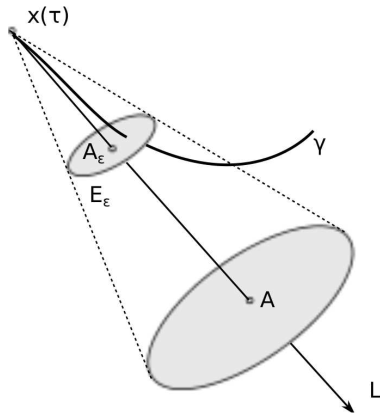
Αν $(\rho_1)^2 + (\rho_2)^2 + \ldots + (\rho_n)^2 \leq 1$ η σχέση

$$\begin{aligned} a &= a(\rho_1, \ldots, \rho_n) \\ &= (1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\rho_i|)a_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^+(\rho_i)a_i \\ &\quad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^-(\rho_i)a'_i \end{aligned}$$

ορίζει το $a(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ το οποίο εξαρτάται από τα ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Τότε το διάνυσμα $\Delta\mathbf{x}$ ως προς το $a = a(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ από το Λήμμα (2.3.1) και τις σχέσεις $\mathbf{f}_i = -\mathbf{e}_i$, $h^+(\rho) + h^-(\rho) = |\rho|$, $h^+(\rho) - h^-(\rho) = \rho$ έχει την εξής μορφή

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}_a &= \Big(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\rho_i|\Big)\mathbf{c} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^+(\rho_i)(\mathbf{c}+\mathbf{e}_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^-(\rho_i)(\mathbf{c}+\mathbf{f}_i) \\ &= [1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (-|\rho_i| + h^+(\rho_i) + h^-(\rho_i))] \\ &\quad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [h^+(\rho_i) - h^-(\rho_i)]\mathbf{e}_i = \mathbf{c} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho_i \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Επομένως καθώς το $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ περιγράφει τη μοναδιαία σφαίρα



Σχήμα 2.5

$$(\rho_1)^2 + \ldots + (\rho_n)^2 \leq 1 \; , \tag{2.25}$$

το $\Delta \mathbf{x}_a$ περιγράφει μια σφαίρα στο $\mathbf{X}_\tau$ διάστασης n. Συγκεκριμένα τη σφαίρα ακτίνας r/n με κέντρο το σημείο A και κάθετη στη L.

Ομοίως το τέλος του διανύσματος $\epsilon\Delta\mathbf{x}_a$ περιγράφει την n-διάστατη σφαίρα E_ϵ κάθετη στην L, με ακτίνα $\epsilon r/n$ και κέντρο το A_ϵ πάνω στην L. Το A_ϵ βρίσκεται σε απόσταση ϵd από το $x(\tau)$ όπου d είναι το μήκος του διανύσματος $\mathbf{c}$.

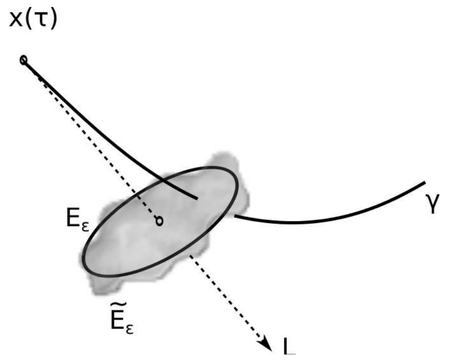
Αφού μόνο τα a που είναι γραμμικός συνδυασμός των a_0, a_i, a'_i, $i = 1, \ldots n$ εισέρχονται στον ισχυρισμό μας, τα τ_j, υ_j θα θεωρούνται τα ίδια για τα $a = a(\rho_1, \ldots \rho_n)$. Επίσης τα $\delta t_1, \ldots \delta t_s, \delta t$, που ορίζουν τον έλεγχο $u^*(t)$, εξαρτώνται από τα $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Οπότε γράφοντας $u^*_a(t)$, δt_a θα δίνουμε έμφαση στην εξάρτηση των $u^*(t)$ και δt από τα $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Επίσης η τροχιά $\mathbf{x}^*(t)$, που ξεκινά από το $\mathbf{x}_0$ με είσοδο $u^*_a(t)$, θα γράφεται $x^*_a(t)$. Τότε η (2.15) θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{x}^*_a(\tau + \epsilon\delta t_a) = x(\tau) + \epsilon\Delta\mathbf{x}_a + o(\epsilon) \tag{2.26}$$

όπου $\xi_0 = 0$, αφού το αρχικό σημείο συμπίπτει με το $\mathbf{x}_0$ για όλα τα ϵ.

Παρατηρούμε ότι η $\mathbf{x}^*_a(t)$ εξαρτάται από τα $\rho_1, \ldots, \rho_n$ όπως επίσης και τα δt_a. Επομένως και το $\mathbf{x}^*_a(\tau + \epsilon\delta t_a)$ εξαρτάται από τα $\rho_1, \ldots \rho_n$. Έτσι καθώς τα $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ περιγράφουν τη σφαίρα (2.25), το σημείο (2.26) περιγράφει κάποιο δίσκο $\tilde{E}_\epsilon$ (συνεχής εικόνα της σφαίρας (2.25)), για σταθερό ϵ. Η απόσταση από ένα σημείο του $\tilde{E}_\epsilon$ στο E_ϵ είναι μικρή, τάξης μεγαλύτερης του ϵ. Το σημείο στο οποίο η σφαίρα τέμνει την γ είναι σε απόσταση τάξης ϵ από το $\mathbf{x}(\tau)$ καθώς και από το σύνορο του E_ϵ. Συνεπώς για επαρκώς μικρό ϵ, η $\tilde{E}_\epsilon$ τέμνει τη γ σε κάποιο σημείο.

Αφού ολόκληρος ο δίσκος $\tilde{E}_\epsilon$ είναι σημεία της μορφής (2.26), η τομή των $\tilde{E}_\epsilon$



Σχήμα 2.6

και γ έχει την εξής ερμηνεία.
Υπάρχουν $\rho_1, \ldots, \rho_n$ τέτοια ώστε $\mathbf{x}_a^*(\tau+\epsilon\delta t_a) \in \gamma$. Δηλαδή αν ορίσουμε τα u_a^*, $\mathbf{x}_a^*$ με $u_*(t)$, $\mathbf{x}_*(t)$ και θέσουμε $\tau+\epsilon\delta t_a = \tau'$ παίρνουμε $\mathbf{x}_*(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_*(t') \in \gamma$.

∎

Λήμμα 2.3.3 *Αν ο έλεγχος $u(t)$ και η αντίστοιχη τροχιά $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ είναι βέλτιστοι τότε για οποιοδήποτε κανονικό σημείο τ, $(t_0 < \tau < t_1)$ η ημιευθεία L_τ που ξεκινά από το $\mathbf{x}(\tau)$ και πηγαίνει προς την κατεύθυνση του αρνητικού x^0 άξονα, δεν ανήκει στο εσωτερικό του κώνου K_τ.*

Απόδειξη
Έστω ότι η L_τ ανήκει στο εσωτερικό του κώνου K_τ για κάποιο τ. Τότε από το Λήμμα (2.3.2) υπάρχει έλεγχος $u_*(t)$ τέτοιος ώστε η αντίστοιχη τροχιά $\mathbf{x}_*(t)$ περνά από ένα σημείο της L_τ για κάποιο $\tau' > t_0$. Δηλαδή

$$x_*^i(\tau') = x^i(\tau), \quad i = 1, \ldots, n \quad x_*^0 < x^0(\tau)$$

Ορίζουμε τον έλεγχο $u_{**}(t)$ στο $t_0 \leq t \leq t_1 + (\tau' - \tau)$ ως εξής

$$u_{**}(t) = \begin{cases} u_*(t), & \text{για } t_0 \leq t \leq \tau', \\ u(t - (\tau' - \tau)), & \text{για } \tau' < t \leq t_1 + (\tau' - \tau). \end{cases}$$

Η αντίστοιχη τροχιά $\mathbf{x}_{**}(t)$ τότε συμπίπτει με την $x_*(t)$ για $t_0 \leq t \leq \tau'$.
Πράγματι

$$\left.\begin{array}{l} x_{**}^i(t') = x^i(\tau) \\ x_{**}^0(\tau') < x^0(\tau) \end{array}\right\} \tag{2.27}$$

για $i = 1, \ldots, n$.
Επιπλέον για $\tau' \leq t \leq t_1 + (\tau - \tau)$, η $x_{**}(t)$ γίνεται

$$\mathbf{x}_{**}(t) = \mathbf{x}(t - (\tau' - \tau)) + p$$

όπου $p = (x^0_{**}(\tau') - x^0(\tau), 0, 0, \ldots, 0)$. (Το διάνυσμα p ορίζεται από τη συνθήκη ότι η τροχιά πρέπει να είναι συνεχής στο τ').
Για $t = t_1 + (\tau' - \tau)$ έχουμε

$$\mathbf{x}_{**}(t_1 + (\tau' - \tau)) = \mathbf{x}(t_1) + p\ .$$

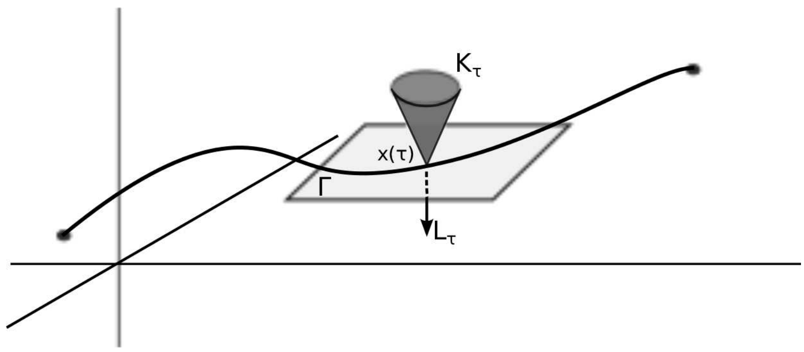
Δηλαδή το $x_{**}(t_1 + (\tau' - \tau))$ ανήκει στην ευθεία S' όπως την ορίσαμε στο Κεφάλαιο 1 (αφού το p είναι παράλληλο στον x^0) κι επιπλέον

$$x^0_{**}(t_1 + (\tau' - \tau)) = x^0(t_1) + x^0_{**}(\tau') - x^0(\tau) < x^0(t_1)$$

Τότε όμως οι $\mathbf{x}(t)$, $u(t)$ δεν είναι βέλτιστοι. Άρα η υπόθεση που κάναμε στην αρχή της απόδειξης είναι λανθασμένη. Επομένως ισχύει το ζητούμενο.

■

2.4 Αποδεικνύοντας το PMP



Σχήμα 2.7

Θεωρούμε $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ βέλτιστη τροχιά και $u(t)$ ο αντίστοιχος βέλτιστος έλεγχος. Έστω τ ένα κανονικό σημείο του $u(t)$. Σύμφωνα με το Λήμμα (2.3.3) το L_τ δεν ανήκει στο εσωτερικό του κώνου K_τ. Επομένως από το Θεώρημα του διαχωρίζοντος υπερεπιπέδου†, υπάρχει υπερεπίπεδο Γ έτσι ώστε ο K_τ να ανήκει εξολοκλήρου σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει το Γ. Η εξίσωση του Γ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha x^\alpha = 0$$

†**Θεώρημα**(Separating Hyperplane Theorem) Έστω C και D δύο κυρτά σύνολα με $C \cup D = \emptyset$. Τότε υπάρχει ένα υπερεπίπεδο που τα διαχωρίζει. Δηλαδή υπάρχει $a \neq 0$ και b έτσι ώστε $a^T x \leq b\ \forall x \in C$ και $a^T x \geq b\ \forall x \in D$. [CO-BV]

Εφόσον πολλαπλασιάζουμε κάθε a_α με τον ίδιο αριθμό χωρίς να αλλάζουμε το Γ, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο K_τ βρίσκεται στο αρνητικό ημιεπίπεδο $\sum a_\alpha x^\alpha \leq 0$. Δηλαδή για κάθε διάνυσμα $\Delta\mathbf{x}$ όπως ορίζεται από την (2.16) ικανοποιείται η εξής ανισότητα

$$(\mathbf{a}, \Delta\mathbf{x}) \leq 0 \tag{2.28}$$

όπου $\mathbf{a}$ είναι το διάνυσμα $(a_0, a_1, \ldots a_n)$. Θέτοντας $\delta t_1 = \ldots = \delta t_s = 0$ στην (2.16) παίρνουμε

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(x(\tau), u(\tau))\delta t$$

Έτσι η (2.28) γίνεται

$$(\mathbf{a}, \mathbf{f}(x(\tau), u(\tau))\delta t) \leq 0$$

ή

$$\mathcal{H}(\mathbf{a}, x(\tau), u(\tau)) = 0 \tag{2.29}$$

Έστω $\psi(t, \mathbf{a}) = (\psi_0(t, \mathbf{a}), \psi_1(t, \mathbf{a}), \ldots, \psi_n(t, \mathbf{a}))$ λύση του (2.4) με αρχική συνθήκη

$$\psi(\tau, \mathbf{a}) = \mathbf{a} \tag{2.30}$$

Η λύση $\psi(t, \mathbf{a})$ ορίζεται σε όλο το $t_0 \leq t \leq t_1$ αφού το (2.4) είναι γραμμικό.

Λήμμα 2.4.1 *Αν ικανοποιείται η (2.28), τότε*

$$\mathcal{H}(\psi(t, \mathbf{a}), x(t), u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t, \mathbf{a}), x(t))$$

σε κάθε κανονικό σημείο της $u(t)$ στο διάστημα $t_0 < t \leq \tau$.

Απόδειξη
Έστω τ_1 ένα κανονικό σημείο για τον έλεγχο $u(t)$, που ανήκει στο διάστημα $t_0 < t \leq \tau$, κι έστω $\upsilon_1 \in U$. Θεωρούμε το σύμβολο a για το σημείο τ_1, με $\delta t_1 = 1$ και $\delta t = 0$

$$a = \{\tau_1, \upsilon_1, \tau, 1, 0\}$$

Τότε το $\Delta\mathbf{x}$ ως προς το a θα είναι

$$\Delta\mathbf{x} = A_{\tau,\tau_1}[\mathbf{f}(x(\tau_1), \upsilon_1) - \mathbf{f}(x(\tau_1), u(\tau_1))] \;.$$

Τότε από τις (2.28) και (2.30) έχουμε

$$(\psi(\tau, \mathbf{a}), A_{\tau,\tau_1}[\mathbf{f}(x(\tau_1), \upsilon_1) - \mathbf{f}(x(\tau_1), u(\tau_1))]) \leq 0 \,.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα (2.2.1) και ότι $A_{\tau_1,\tau_1} = I$ παίρνουμε

$$(\psi(\tau_1, \mathbf{a}), \mathbf{f}(x(\tau_1), \upsilon_1) - \mathbf{f}(x(\tau_1), u(\tau_1))) \leq 0$$

ή

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\psi(\tau_1,\mathbf{a}),x(\tau_1),u(\tau_1)) &= \max_{\upsilon_1\in U} H(\psi(\tau_1,\mathbf{a}),x(\tau_1),\upsilon_1)\\ &= \mathcal{M}(\psi(\tau_1,\mathbf{a}),x(\tau_1))\end{aligned}$$

Παρατήρηση 2.4.1

Αν το $\mathbf{a}$ ικανοποιεί την (2.28) τότε

$$\mathcal{M}(\psi(\tau,\mathbf{a}),x(\tau)) = 0\ .$$

Λήμμα 2.4.2 *Αν η απολύτως συνεχής συνάρτηση $\psi(t)$ ικανοποιεί την (2.4) και τη σχέση*

$$\mathcal{H}(\psi(t),x(t),u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t),x(t)) \tag{2.31}$$

σε κάποιο διάστημα I, τότε η $\mathcal{M}(\psi(t),x(t))$ είναι σταθερή στο I

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\mathcal{M}(\psi(t),x(t))$ είναι κάτω ημισυνεχής στο I. Πράγματι, έστω t' ένα σημείο στο διάστημα μας και $\epsilon > 0$. Τότε (από τον ορισμό άνω φράγματος) υπάρχει $u' \in U$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{H}(\psi(t'),x(t'),u') \geq \mathcal{M}(\psi(t'),x(t')) - \frac{\epsilon}{2}$$

Επειδή για $u = u'$ η συνάρτηση $\mathcal{H}(\psi(t),x(t),u)$ είναι συνεχής στο t, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\mathcal{H}(\psi(t),x(t),u') - \mathcal{H}(\psi(t'),x(t'),u')| < \frac{\epsilon}{2}$$

για $|t - t'| < \delta$.
Επομένως για $|t - t'| < \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\psi(t),x(t)) &= \sup_{u\in U}\mathcal{H}(\psi(t),x(t),u)\\ &\geq \mathcal{H}(\psi(t),x(t),u')\\ &> \mathcal{M}(\psi(t'),x(t')) - \epsilon\end{aligned}$$

Δηλαδή, η $\mathcal{M}(\psi(t),x(t))$ είναι κάτω ημισυνεχής.
Επίσης, αφού ο $u(t)$ είναι αποδεκτός έλεγχος, η εικόνα του I υπό την απεικόνιση u έχει συμπαγή κλειστότητα στο E_τ. Δηλαδή, υπάρχει συμπαγές σύνολο P στο E_τ τέτοιο ώστε $u(t) \in P$ αν $t \in I$.
Θέτουμε

$$m(\psi,x) = \max_{u\in P}\mathcal{H}(\psi,x,u)\ .$$

Τότε

$$\mathcal{M}(\psi, x) \geq m(\psi, x) \tag{2.32}$$

για κάθε x και ψ.
Από τη (2.31) συνεπάγεται ότι

$$m(\psi(t), x(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), x(t))$$

σχεδόν παντού στο I (αφού $u(t) \in P$).
Δηλαδή, αν η $m(\psi, x)$ είναι συνεχής, τότε η $\mathcal{M}(\psi(t), x(t))$ συμπίπτει με την $m(\psi, x)$ στο I, οπότε είναι κι αυτή συνεχής. Θα δείξουμε ότι η $m(\psi(t), x(t))$ είναι απολύτως συνεχής. Έτσι και η $\mathcal{M}(\psi(t), x(t))$ θα είναι απολύτως συνεχής.

Έστω $Q \subset \mathbf{X} \times \mathbb{R}^n$ συμπαγές τέτοιο ώστε $(\psi(t), x(t)) \in Q$ για $t \in I$. Επειδή οι μερικές παράγωγοι της $\mathcal{H}(\psi, x, u)$ είναι συνεχείς ως προς τις ψ, $\mathbf{x}$ και u, τότε θα είναι φραγμένες στο συμπαγές $Q \times P$. Συνεπώς υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(\psi, \mathbf{x}) \in Q$, $(\psi', \mathbf{x}') \in Q$, $u \in P$ να ισχύει

$$|\mathcal{H}(\psi, x, u) - \mathcal{H}(\psi', x', u)| \leq Kd$$

όπου $d = \max\{|\psi_i - \psi_i'|, |x_i - x_i'|,\ i = 0, 1, \ldots, n\}$.
Έστω $(\psi, x), (\psi', x') \in Q$ και $u, u' \in P$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} m(\psi, \mathbf{x}) &= \mathcal{H}(\psi, x, u) \\ m(\psi', \mathbf{x}') &= \mathcal{H}(\psi', x', u') \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\psi, x, u') &\leq \mathcal{H}(\psi, x, u) \\ \mathcal{H}(\psi', x', u) &\leq \mathcal{H}(\psi', x', u') \; . \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} -Kd &\leq \mathcal{H}(\psi, x, u') - \mathcal{H}(\psi', x', u') \\ &\leq \mathcal{H}(\psi, x, u) - \mathcal{H}(\psi', x', u') \\ &\leq \mathcal{H}(\psi, x, u) - \mathcal{H}(\psi', x', u) \leq Kd \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$|m(\psi, x) - m(\psi', x')| \leq Kd$$

ή

$$|m(\psi(t), x(t)) - m(\psi(t'), x(t'))| \leq Kd \; .$$

Από αυτή την ανισότητα και το γεγονός ότι οι $\psi(t)$ και $\mathbf{x}(t)$ είναι απολύτως συνεχείς συνεπάγεται και ότι η $m(\psi(t), x(t))$ είναι απολύτως συνεχής.

■

Θα δείξουμε τώρα ότι η $m(\psi, x)$ είναι σταθερή.
Έστω $t = \tau$ ένα σημείο όπου ισχύει η $m(\psi(t), x(t)) = \mathcal{H}(\psi(t), x(t), u)$ κι έστω t' ένα σημείο στο I διαφορετικό του τ. Τότε

$$m(\psi(t'), x(t')) \geq \mathcal{H}(\psi(t'), x(t'), u(\tau))$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} m(\psi(t'), x(t')) &- m(\psi(\tau), x(\tau)) \geq \\ &\geq \mathcal{H}(\psi(t'), x(t'), u(t)) - \mathcal{H}(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau)) \end{aligned}$$

Έστω ότι $t' \to \tau^+$. Τότε

$$\frac{m(\psi(t'), x(t')) - m(\psi(\tau), x(\tau))}{t' - \tau} \geq \frac{\mathcal{H}(\psi(t'), x(t'), u(\tau)) - \mathcal{H}(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau))}{t' - \tau}$$

Παίρνοντας το όριο για $t' \to \tau^+$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(\psi(t), x(t)) \Bigg|_{t=\tau} &\geq \frac{d}{dt} \mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) \Bigg|_{t=\tau} \\ &= \sum_{a=0}^{n} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_a} \frac{d\psi_a(t)}{dt} \Bigg|_{t=\tau} + \sum_{a=0}^{n} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^a} \frac{dx^a(t)}{dt} \Bigg|_{t=\tau} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Ομοίως για $t' \to \tau^-$ παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} m(\psi(t), x(t)) \Bigg|_{t=\tau} \leq 0 \tag{2.34}$$

Άρα από τις σχέσεις (2.33) και (2.34) παίρνουμε ότι

$$\frac{d}{dt} m(\psi(t), x(t)) = 0$$

στο διάστημα I.

■

Λήμμα 2.4.3 *Αν τ και τ' είναι κανονικά σημεία για τον έλεγχο $u(t)$ με $t_0 < \tau' < \tau < t_1$, τότε $A_{\tau,\tau'}(K_{\tau'}) \subset K_\tau$*

Απόδειξη

Ο $K_{\tau'}$ δημιουργείται από διανύσματα της μορφής (2.16) ή από το άθροισμα των

$$\begin{aligned} \Delta_1 \mathbf{x} &= \mathbf{f}(x(\tau'), u(t'))\delta t \\ \Delta_2 \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{s} A_{\tau',\tau_i}[\mathbf{f}(x(\tau_i), \upsilon_i) - \mathbf{f}(x(\tau_i), u(\tau_i))]\delta t_i \end{aligned}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$A_{\tau,\tau'}(\Delta_1 \mathbf{x}) \in K_\tau \qquad (2.35α')$$

$$A_{\tau,\tau'}(\Delta_2 \mathbf{x}) \in K_\tau\ . \qquad (2.35β')$$

Από τις ιδιότητες της $A_{\tau,\tau'}$ έχουμε ότι

$$A_{\tau,\tau'}(\Delta_2 \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{s} A_{\tau,\tau_i}[\mathbf{f}(x(\tau_i), \upsilon_i) - \mathbf{f}(x(\tau_i), u(\tau_i))]\delta t_i$$

Άρα $A_{\tau,\tau'}(\Delta_2 x) \in K_\tau$ εφόσον $\tau_1 \leq \ldots \leq \tau_s \leq \tau' < \tau$. Άρα για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι $A_{\tau,\tau'}(\Delta_1 \mathbf{x}) \in K_\tau$.

Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει, δηλαδή $A_{\tau,\tau'}(\Delta_1 \mathbf{x}) \notin K_\tau$. Τότε υπάρχει ένα υπερεπίπεδο που διαχωρίζει τον κώνο K_τ με το διάνυσμα $A_{\tau,\tau'}(\Delta_1 \mathbf{x})$. Υπάρχουν αριθμοί $a_0, a_1, \ldots, a_n$ τέτοιοι ώστε το K_τ βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha x^\alpha \leq 0$ ενώ το $A_{\tau,\tau'}(\Delta_1 x)$ στο ανοικτό θετικό ημιεπίπεδο

$$(\mathbf{a}, A_{\tau,\tau'}(\Delta_1 \mathbf{x})) > 0 \qquad (2.36)$$

όπου $\mathbf{a}$ είναι το διάνυσμα $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Έστω $\psi(t, \mathbf{a})$ η λύση του συστήματος (2.4) με αρχική συνθήκη $\psi(\tau, \mathbf{a}) = \mathbf{a}$, στο διάστημα $t_0 \leq t \leq \tau$. Εφόσον ο K_τ βρίσκεται στο αρνητικό ημιεπίπεδο, δηλαδή ικανοποιείται η συνθήκη (2.28), συνεπάγεται από τα Λήμματα (2.4.1), (2.4.2) και την παρατήρηση (2.4.1) ότι $\mathcal{M}(\psi(t, \mathbf{a}), x(t)) \equiv 0$ όταν $t_0 \leq t \leq \tau$. Επιπλέον, αφού το τ' είναι κανονικό σημείο (στο $t_0 < t \leq \tau$) συνεπάγεται από το Λήμμα (2.4.1) ότι

$$\mathcal{H}(\psi(\tau', \mathbf{a}), x(\tau'), u(\tau')) = \mathcal{M}(\psi(\tau', \mathbf{a}), x(\tau')) = 0$$

ή

$$\Big(\psi(\tau', \mathbf{a}), \mathbf{f}(x(\tau'), u(\tau'))\Big) = 0\ .$$

Τότε από το Λήμμα (2.2.1) έχουμε ότι

$$\Big(\psi(\tau', \mathbf{a}), A_{\tau,\tau'}(\mathbf{f}(x(\tau'), u(\tau')))\Big) = 0\ ,$$

σε αντίθεση με τη σχέση (2.36). Συνεπώς $A_{\tau,\tau'}(\Delta_1 \mathbf{x}) \in K_\tau$.

■

Υποθέτουμε ότι το τ είναι ένα κανονικό σημείο για τον έλεγχο $u(t)$ στο διάστημα (t_0, t_1). Θέτουμε

$$K_{t_1}^{(\tau)} = A_{t_1,\tau}(K_\tau) \ .$$

Εφόσον η απεικόνιση $A_{t_1,\tau}$ είναι γραμμική, ο $K_{t_1}^{(\tau)}$ είναι κυρτός κώνος στο $\mathbf{X}_{t_1}$. Επίσης, οι $K_{t_1}^{(\tau)}$ σχηματίζουν μια αύξουσα ακολουθία. Πράγματι, αν τ, τ' κανονικά σημεία με $\tau' < \tau$ συνεπάγεται από το Λήμμα (2.4.3) ότι

$$K_{t_1}^{(\tau')} = A_{t_1,\tau'}(K_{\tau'}) = A_{t_1,\tau}\big(A_{\tau,\tau'}(K_{\tau'})\big) \subset A_{t_1,\tau}(K_\tau) = K_{t_1}^{(\tau)} \ .$$

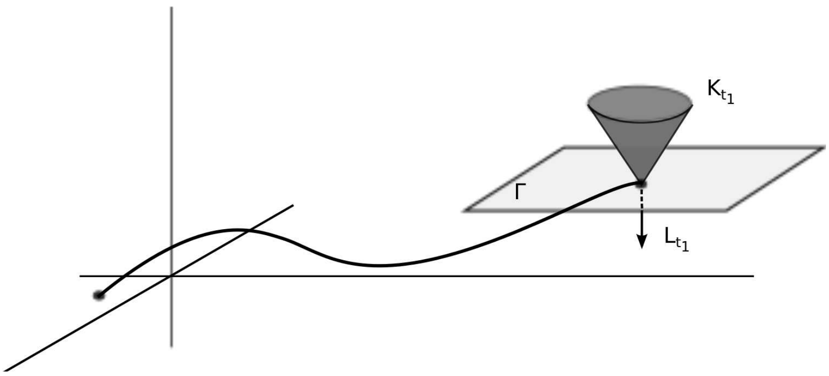
Επομένως, η ένωση για κάθε κανονικό σημείο τ στο (t_0, t_1) όλων των κώνων $K_{t_1}^{(\tau)}$ είναι κυρτός κώνος στον $\mathbf{X}_{t_1}$. Θα θέσουμε αυτό τον κώνο ως K_{t_1} και θα τον ονομάσουμε limiting cone.

Λήμμα 2.4.4 *Αν ο έλεγχος $u(t)$ και η αντίστοιχη τροχιά $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ είναι βέλτιστοι, η ημιευθεία L_{t_1} που ξεκινά από το $\mathbf{x}(t_1)$ με κατεύθυνση τον αρνητικό ημιάξονα x^0 δεν ανήκει στο εσωτερικό του K_{t_1}.*

Απόδειξη
Έστω ότι η L_{t_1} ανήκει στο εσωτερικό του κώνου K_{t_1}. Διαλέγουμε ένα κυρτό πολύεδρο M που να βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του K_{t_1} και να περιέχει ένα σημείο l της L_{t_1}. Κάθε κορυφή του M θα ανήκει στον K_{t_1}, εφόσον ανήκουν σε κάποιον κώνο $K_{t_1}^{(\tau)}$.

Αφού οι $K_{t_1}^{(\tau)}$ σχηματίζουν μια αύξουσα ακολουθία μπορούμε να βρούμε κάποιο σημείο τ έτσι ώστε κάθε κορυφή του M να ανήκει στον $K_{t_1}^{(\tau)}$. Επομένως, ο $K_{t_1}^{(\tau)}$ περιέχει ολόκληρο το πολύεδρο M ή ισοδύναμα η L_{t_1} περιέχεται στο εσωτερικό του $K_{t_1}^{(\tau)}$. Τότε όμως η $A_{t_1,\tau}^{-1}(L_{t_1})$ ανήκει στο εσωτερικό του κώνου $K_t = A_{t_1,\tau}^{-1}(K_{t_1}^{(\tau)})$ (αφού ο $A_{t_1,\tau}^{-1}$ είναι γραμμικός, non-singular και ομοιομορφικός). Δηλαδή η $A_{t_1,\tau}^{-1}(L_{t_1})$ συμπίπτει με την L_τ η οποία ξεκινά από το $x(\tau)$ με κατεύθυνση τον αρνητικό ημιάξονα x^0. Επομένως όλα τα διανύσματα της μορφής $(-1, 0, 0, \ldots, 0)$ που προέρχονται από σημεία της $\mathbf{x}(t)$, λαμβάνονται το ένα από το άλλο κατά τη μεταφορά στην τροχιά $\mathbf{x}(t)$. Συνεπώς η L_τ ανήκει στο εσωτερικό του K_τ. Όμως αυτό έρχεται σε αντίθεση με το Λήμμα (2.3.3).

■



Σχήμα 2.8

Ολοκληρώνοντας την απόδειξη

Θεωρούμε τον βέλτιστο έλεγχο $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ και την αντίστοιχη τροχιά $\mathbf{x}(t)$. Από το Λήμμα (2.4.4) έχουμε ότι η L_{t_1} δεν ανήκει στο εσωτερικό του κώνου K_{t_1}. Επομένως υπάρχει ένα υπερεπίπεδο που τα διαχωρίζει. Δηλαδή υπάρχουν $c_0, c_1, \ldots, c_n$ τέτοια ώστε ο K_{t_1} βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $\sum_{a=0}^{n} c_a x^a \leq 0$ ενώ η L_{t_1} βρίσκεται στο $\sum_{a=0}^{n} c_a x^a \geq 0$. Ισοδύναμα, το διάνυσμα $(-1, 0, 0, \ldots, 0)$ με κατεύθυνση ίδια με του L_{t_1} βρίσκεται στο κλειστό ημιεπίπεδο $\sum_{a=0}^{n} c_a x^a \geq 0$, (δηλαδή $c_0 \leq 0$).

Έστω $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ η λύση του συστήματος (2.4) με αρχική συνθήκη $\psi(t_1) = \mathbf{c}$, όπου $\mathbf{c}$ είναι το διάνυσμα $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$. (Αφού το (2.4) είναι γραμμικό, η $\psi(t)$ ορίζεται σε όλο το διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$. Θα δείξουμε ότι η $\psi(t)$ είναι αυτή που αναφέρθηκε στο PMP.)

Πρώτα απ΄ όλα, οι $\mathbf{x}(t)$ και $\psi(t)$ ικανοποιούν τα συστήματα (3.7) και (2.4) ή ισοδύναμα τα (2.5) και (2.6). Θα δείξουμε ότι η συνθήκη "$1''$, δηλαδή ότι

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), x(t))$$

ικανοποιείται σε κάθε κανονικό σημείο τ του διαστήματος (t_0, t_1).
Αφού ο K_{t_1} και συνεπώς και ο $A_{t_1,\tau}(K_\tau)$, βρίσκεται στο αρνητικό ημιεπίπεδο $\sum_{a=0}^{n} \psi_a(t_1) x^a \leq 0$ συνεπάγεται ότι ο $A_{t_1,\tau}^{-1}(A_{t_1,\tau}(K_\tau)) = K_\tau$ βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $\sum_{a=0}^{n} \psi_a(\tau) x^a \leq 0$. Δηλαδή, το διάνυσμα $\psi(\tau) = \mathbf{a}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (2.28). Τότε η υπόθεση του Λήμματος (2.4.1) ικανοποιείται για $\psi(t, \mathbf{a})$ (η λύση του (2.4)) με αρχική συνθήκη $\psi(t, \mathbf{a}) = \mathbf{a}$. Όμως αυτή η λύση συμπίπτει με την $\psi(t)$. Συγκεκριμένα, αφού το τ είναι κανονικό σημείο έχουμε από την Παρατήρηση 2.4.1

$$\mathcal{H}(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau)) = \mathcal{M}(\psi(\tau), x(\tau)) = 0 \ .$$

Έτσι αποδείχτηκε η πρώτη υπόθεση του PMP.

Για κάθε κανονικό σημείο τ η $\mathcal{M}(\psi(t), x(t))$ μηδενίζεται και $\psi_0(t_1) = c_0 \leq 0$. Άρα για να επαληθεύσουμε τη συνθήκη "$3''$" του PMP αρκεί να δείξουμε ότι οι $\mathcal{M}(\psi(t), x(t))$ και $\psi_0(t)$ είναι σταθερές, εφόσον οι $\psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$ και $u(t)$ ικανοποιούν τα συστήματα (2.5), (2.6) καθώς και τη συνθήκη "$1''$". Αυτό όμως είναι άμεσο από το Λήμμα (2.4.2) και το γεγονός ότι οι συναρτήσεις f^a είναι ανεξάρτητες του x^0. Τότε η πρώτη εξίσωση του συστήματος (2.4) έχει τη μορφή

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0 \ .$$

Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη της *Αρχής Μεγίστου του Pontryagin*.

∎

2.5 Γενικεύσεις

2.5.1 Το πρόβλημα Bolza

Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

με $u(t) \in U$ και το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού

$$J(u) = g(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt \tag{2.37}$$

όπου $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής. Προβλήματα όπου το συναρτησοειδές είναι της μορφής (2.37) είναι γνωστά ως προβλήματα Bolza. Υπάρχουν δύο ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος Bolza. Η πρώτη είναι όταν $g \equiv 0$, όπου έχουμε το πρόβλημα Lagrange και η δεύτερη όταν $f^0 \equiv 0$ γνωστό ως πρόβλημα Mayer. Όλα αυτά τα προβλήματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους[‡]. Πράγματι

$$\begin{aligned} g(x(t_1)) &= g(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dx} g(x(t))dt & (2.38) \\ &= g(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} g_x(x(t))\mathbf{f}(x(t), u(t))dt & (2.39) \end{aligned}$$

Εφόσον το $g(x(t_0))$ είναι σταθερό, ανεξάρτητο του u παίρνουμε ένα ισοδύναμο πρόβλημα στη μορφή προβλήματος Lagrange με

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (g_x f + f^0)dt \ .$$

[‡]Είδαμε στην Ενότητα (1.1.1) (σελ. 6) πως αν εισάγουμε μια νέα μεταβλητή x^0 παίρνουμε το πρόβλημα Mayer.

Θα δώσουμε τώρα την Αρχή Μεγίστου του Pontryagin για το πρόβλημα Bolza.

Θεώρημα 2.5.1 *Έστω $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ αποδεκτός έλεγχος και $\mathbf{x}(t)$ η αντίστοιχη τροχιά με $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Για να είναι οι $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$ βέλτιστοι θα πρέπει να υπάρχει μη μηδενική και συνεχής συνάρτηση $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ λύση της*

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} + \frac{\partial f^0}{\partial x^i} \quad i = 0 \ldots, n$$

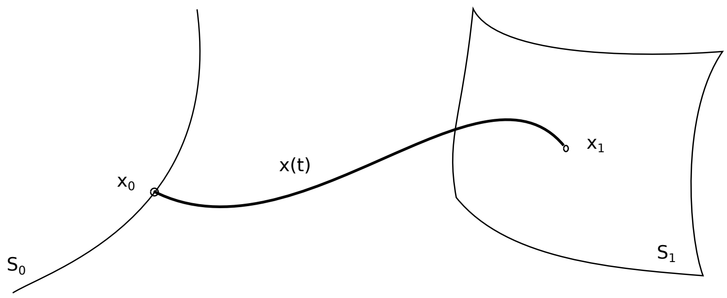
ώστε

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), x(t))$$

για κάθε t στο $t_0 \leq t \leq t_1$ και $\mathcal{M}(\psi(t), x(t))$ σταθερή, όπου $\mathcal{H}(\psi, x, u) = \sum_{a=1}^{n} \psi_a f^a(x, u) + f^0(x, u)$. Επιπλέον

$$\psi(t_1) = \frac{\partial g}{\partial x^i}(x(t_1)) \quad .$$

2.5.2 Αρχή Μεγίστου με μεταβαλλόμενα άκρα



Σχήμα 2.9

Έστω S_0 και S_1 δύο λείες πολλαπλότητες στο $\mathbf{X}$ διάστασης r_0 και r_1 αντίστοιχα. Θέλουμε να βρούμε έναν αποδεκτό έλεγχο $u(t)$ που μεταφέρει το $x_0 \in S_0$ στο $x_1 \in S_1$ ελαχιστοποιώντας το συναρτησοειδές

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt \quad .$$

Θα ονομάζουμε αυτό το πρόβλημα, το βέλτιστο πρόβλημα με μεταβαλλόμενα άκρα. Αν τα S_0 και S_1 εκφυλιστούν σε σημεία, τότε έχουμε το πρόβλημα που ήδη εξετάσαμε. Αν τα x_0 και x_1 είναι γνωστά, τότε έχουμε ένα πρόβλημα με δεδομένα άκρα.

Είναι αναγκαίο να έχουμε κάποιες σχέσεις από τις οποίες να μπορούμε να προσδιορίσουμε τις θέσεις των x_0 και x_1 στα S_0 και S_1 αντίστοιχα. Όπως θα δούμε, οι συνθήκες εγκαρσιότητας είναι τέτοιες σχέσεις. Αυτές οι συνθήκες μας δίνουν $r_0 + r_1$ σχέσεις που περιλαμβάνουν τις συντεταγμένες στα άκρα x_0 και x_1. Αφού υο πλήθος των άγνωστων παραμέτρων αυξάνεται κατά $r_0 + r_1$, η Αρχή Μεγίστου μαζί με τις συνθήκες εγκαρσιότητας, αποτελούν ένα πλήρες σύστημα από σχέσεις για την επίλυση του προβλήματος με μεταβαλλόμενα άκρα.

Έστω $x_0 \in S_0$ και $x_1 \in S_1$ δύο σημεία και T_0, T_1 εφαπτόμενα επίπεδα των S_0 και S_1 στα σημεία x_0 και x_1 διάστασης r_0 και r_1 αντίστοιχα. Θεωρούμε $u(t)$, $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ λύση του προβλήματος για x_0, x_1 καθώς και τη συνάρτηση $\psi(t)$ όπως στο PMP . Λέμε ότι η $\psi(t)$ ικανοποιεί τις συνθήκες εγκαρσιότητας στο $x(t_1)$ αν το $\psi(t_1) = (\psi_1(t_1), \psi_2(t_1), \ldots, \psi_n(t_1))$ είναι ορθογώνιο ως προς το T_1. Δηλαδή $(\psi(t_1), \theta) = 0$ για κάθε $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^n)$ στο T_1.

Θεώρημα 2.5.2 *Έστω $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ αποδεκτός έλεγχος που μεταφέρει το $x_0 \in S_0$ στο $x_1 \in S_1$ κι έστω $\mathbf{x}(t)$ η αντίστοιχη τροχιά που ξεκινά από το $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$. Για να αποτελούν λύση του προβλήματος οι $u(t)$ και $\mathbf{x}(t)$ είναι αναγκαίο να υπάρχει μη-μηδενική και συνεχής συνάρτηση $\psi(t)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες του PMP κι επιπλέον τις συνθήκες εγκαρσιότητας*

$$\begin{array}{lll} (\psi(t_0), \theta_0) = 0 & \textit{για} & \theta_0 \in T_0 \\ (\psi(t_1), \theta_1) = 0 & \textit{για} & \theta_1 \in T_1 \ . \end{array}$$

Απόδειξη

Έστω $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ αποδεκτός έλεγχος και $\mathbf{x}(t)$ η αντίστοιχη τροχιά από το σημείο $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$. Θεωρούμε S_0 μια λεία πολλαπλότητα διάστασης r_0 που περνά από το $\mathbf{x}_0$ και T_0 εφαπτόμενο επίπεδο του S_0 στο σημείο αυτό. Ορίζουμε F_0 το επίπεδο διάστασης r_0, στον $\mathbf{X}$ που αποτελείται από όλα τα σημεία $(0, x)$ με $x \in T_0$. Προφανώς το F_0 περνά από το $\mathbf{x}_0$. Μεταφέροντας το F_0 κατά μήκος της τροχιάς $\mathbf{x}(t)$ στο $\mathbf{x}(\tau)$, όπου $t_0 \leq \tau \leq t_1$, παίρνουμε το επίπεδο $A_{\tau,t_0}(F_0)$ που περνά από το $\mathbf{x}(\tau)$. Αν το τ είναι κανονικό σημείο για τον έλεγχο $u(t)$ τότε ορίζεται ο κώνος K_τ με κορυφή το $\mathbf{x}(\tau)$. Έστω $\mathcal{K}_\tau$ η κυρτή θήκη του συνόλου $A_{\tau,t_0}(F_0) \cup K_\tau$. Τότε ο $\mathcal{K}_\tau$ είναι κυρτός κώνος με κορυφή το $\mathbf{x}(\tau)$.

Λήμμα 2.5.1 *Έστω t $(t_0 < \tau < t_1)$ κανονικό σημείο για τον έλεγχο $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ κι έστω $x(t)$ η αντίστοιχη τροχιά από το $\mathbf{x_0}$. Επιπλέον θεωρούμε Λ μια πολλαπλότητα στον $\mathbf{X}$ διάστασης μικρότερη του n. Υποθέτουμε ότι η Λ έχει σύνορο και ότι το $\mathbf{x}(\tau)$ βρίσκεται εκεί. Ορίζουμε M να είναι το ημιεπίπεδο που είναι εφαπτόμενο στο Λ στο $\mathbf{x}(\tau)$. Αν οι $\mathcal{K}_\tau$ και M δεν είναι διαχωρίσιμοι τότε υπάρχει έλεγχος $u_*(t)$ και σημείο $x_0^* \in S_0$ έτσι ώστε η τροχιά $\mathbf{x}_*(t)$ που ξεκινά από το $\mathbf{x}_0^* = (0, x_0^*)$ περνά από ένα σημείο της Λ όχι στο σύνορο.*

■

Έστω $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ βέλτιστος έλεγχος και $x(t)$ η βέλτιστη τροχιά που είναι λύση του προβλήματος με μεταβαλλόμενα άκρα. Έστω $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ και $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ όπου $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$ και $\mathbf{x}_1 = (x^0(t_1), x_0)$. Θεωρούμε T_1 εφαπτόμενο επίπεδο στο S_1 στο σημείο x_1 και F_1 επίπεδο στον $\mathbf{X}$ που αποτελείται από όλα τα σημεία $(x^0(t_1), x)$ με $x \in T_1$. Θεωρούμε επίσης μια ημιευθεία που περνά από τα σημεία του F_1 με κατεύθυνση του αρνητικού x^0 άξονα. Ορίζουμε με Q το σύνολο των σημείων που δημιουργούνται από όλες αυτές τις ημιευθείες. Τότε το Q είναι ένα ημιεπίπεδο διάστασης $(r_1 + 1)$ με συνοριακά σημεία να ανήκουν στο F_1. Όμοια ορίζουμε τα T_0 και F_0. Έστω $\mathcal{K}_{t_1}$ η κυρτή θήκη του $A_{t_1,t_0}(F_0) \cup K_{t_1}$. Τότε οι κώνοι $\mathcal{K}_t$ με κορυφή στο $x(t)$ ορίζονται για κάθε κανονικό σημείο $t = \tau$ του $u(t)$. Αν $t'' > t'$, $A_{t'',t'}(\mathcal{K}_{t'}) \subset \overline{\mathcal{K}}_{t''}$ (Λήμμα (2.4.3)).

Λήμμα 2.5.2 *Οι κώνοι $\mathcal{K}_{t_1}$ και Q που έχουν κοινή κορυφή στο $\mathbf{x}(t_1)$ είναι διαχωρίσιμοι.*

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ότι οι $\mathcal{K}_{t_1}$ και Q δεν διαχωρίζονται. Εφόσον ο $\mathcal{K}_{t_1}$ είναι υποσύνολο της ένωσης των $A_{t_1,\tau}(\overline{\mathcal{K}}_\tau)$ μπορούμε να βρούμε ένα κανονικό σημείο τ για τον έλεγχο $u(t)$ έτσι ώστε ο $A_{t_1,\tau}(\mathcal{K}_\tau)$ και Q να μη διαχωρίζονται. Έστω ένα τέτοιο τ.

Θεωρούμε Λ_{t_1} πολλαπλότητα με σύνορο που αποτελείται από όλα τα $(x^0, x) \in \mathbf{X}$ με $x^0 \leq x^0(t_1)$ και $x \in S_1$. Τότε το εφαπτόμενο ημιεπίπεδο του Λ_{t_1} στο $x(t_1)$ συμπίπτει με το Q. Έστω $\mathrm{y}(t, \mathbf{n})$ λύση του συστήματος (2.1) με αρχική συνθήκη $\mathrm{y}(t, \mathbf{n}) = \mathbf{n}$ για $\mathbf{n} \in \Lambda_{t_1}$, $\tau \leq t \leq t_1$. Όταν το $\mathbf{n}$ περιγράφει το Λ_{t_1}, η $\mathrm{y}(\tau, \mathbf{n})$ περιγράφει πολλαπλότητα με πλευρά την οποία ορίζουμε με Λ_τ. Τότε το εφαπτόμενο ημιεπίπεδο του Λ_τ στο $x(\tau)$ συμπίπτει με $A^{-1}_{t_1,\tau}(Q)$. Εφόσον οι $A_{t_1,\tau}(\mathcal{K}_\tau)$ και Q δεν διαχωρίζονται τότε και οι $A^{-1}_{t_1,\tau}(A_{t_1,\tau}(\mathcal{K}_\tau)) = \mathcal{K}_\tau$ και $A^{-1}_{t_1,\tau}(Q)$ δεν διαχωρίζονται. Ο $A^{-1}_{t_1,\tau}(Q)$ είναι εφαπτόμενο ημιεπίπεδο του Λ_τ. Επομένως από το Λήμμα (2.5.1) υπάρχει $u_*(t)$ τέτοιος ώστε η $x_*(t)$ που ξεκινά από το $\mathbf{x}^*_0 = (0, x^*_0)$ $(x^*_0 \in S)$ περνά από ένα σημείο της Λ_τ όχι στο σύνορο. Δηλαδή υπάρχει $t' > t_0$ και $\mathbf{n} \in \Lambda_{t_1}$ όχι στο σύνορο έτσι ώστε

$$\mathbf{x}_*(t') = \mathrm{y}(\tau, \mathbf{n}) \ .$$

Ορίζουμε τον έλεγχο $u_{**}(t)$ στο διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1 + (t' - \tau)$

$$u_{**}(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{για } \ t_0 \leq t \leq t' \\ u(t - (t' - \tau)) & \text{για } \ t' < t \leq t_1 + (t' - \tau) \end{cases}$$

Τότε η τροχιά $\mathbf{x}_{**}(t)$ που αντιστοιχεί στον $u_{**}(t)$ έχει τη μορφή

$$\mathbf{x}_{**}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}_*(t) & \text{για } t_0 \leq t \leq t' \\ \mathrm{y}(t-(t'-\tau), \mathbf{n}) & \text{για } t' < t \leq t_1 + (t'-\tau) \end{cases}$$

Συγκεκριμένα $x_{**}(t_1 + (t'-\tau)) = \mathrm{y}(t_1, \mathbf{n}) = \mathbf{n}$. Αλλά το $\mathbf{n} \in \Lambda_{t_1}$ κι έχει τη μορφή $\mathbf{n} = (\eta^0, \eta)$ με $\eta \in S_1$. Εφόσον το $\mathbf{n}$ δεν βρίσκεται στο σύνορο του Λ_{t_1}, $\eta^0 < x^0(t_1)$. Επομένως ο $u_{**}(t)$ μεταφέρει το x_0^* στο $\eta \in S_1$ κι έτσι το συναρτησοειδές (2.3) παίρνει την τιμή η^0 η οποία είναι μικρότερη του $u(t)$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού οι $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$ είναι βέλτιστοι.

■

Αφού οι κώνοι $\mathcal{K}_{t_1}$ και Q διαχωρίζονται υπάρχουν $c_0, \ldots, c_n$ έτσι ώστε ο $\mathcal{K}_{t_1}$ (καθώς και ο $K_{t_1} \subset \mathcal{K}_{t_1}$) βρίσκεται στο $\sum_{a=0}^n c_a x^a \leq 0$ και ο Q στο $\sum_{a=0}^n c_a x^a \geq 0$. Το διάνυσμα L_{t_1} είναι στο $\sum_{a=0}^n c_a x^a \geq 0$. Άρα τα $c_0, \ldots, c_n$ έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες όπως και στην προηγούμενη ενότητα. Επομένως η λύση $\psi(t)$ του (2.4) με $\psi(t_1) = \mathbf{c}$ $(= (c_0, \ldots, c_n))$ ικανοποιεί τις συνθήκες του PMP .

Θα δείξουμε τώρα ότι η $\psi(t)$ ικανοποιεί τις συνθήκες εγκαρσιότητας και στα δύο άκρα. Το επίπεδο F_1 βρίσκεται στο $\sum_{a=0}^n c_a x^a \geq 0$ και συνεπώς στο υπερεπίπεδο $\sum_{a=0}^n c_a x^a = 0$ ή ισοδύναμα στο $\sum_{a=0}^n \psi_a(t_1) x^a = 0$. Αν το $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα του S_1 στο $x(t_1)$, δηλαδή διάνυσμα στο T_1, τότε το $\mathbf{n} = (0, \eta)$ του $\mathbf{X}$ βρίσκεται στο F_1 και συνεπώς στο υπερεπίπεδο $\sum_{a=0}^n \psi(t_1) x^a = 0$. Άρα η $\psi(t)$ ικανοποιεί τις συνθήκες εγκαρσιότητας στο δεξή άκρο της τροχιάς $\mathbf{x}(t)$.

Το επίπεδο $A_{t_1,t_0}(F_0) \subset \mathcal{K}_{t_1}$ βρίσκεται εξολοκλήρου στο $\sum_{a=0}^n c_a x^n \leq 0$ και συνεπώς στο $\sum_{a=0}^n c_a x^a = 0$ ή ισοδύναμα στο υπερεπίπεδο $\sum_{a=0}^n \psi_a(t_1) x^a = 0$. Δηλαδή για κάθε $\xi \in F_0$ το $A_{t_1,t_0}(\xi)$ βρίσκεται στο $\sum_{a=0}^n \psi_a(t_1) x^a = 0$,

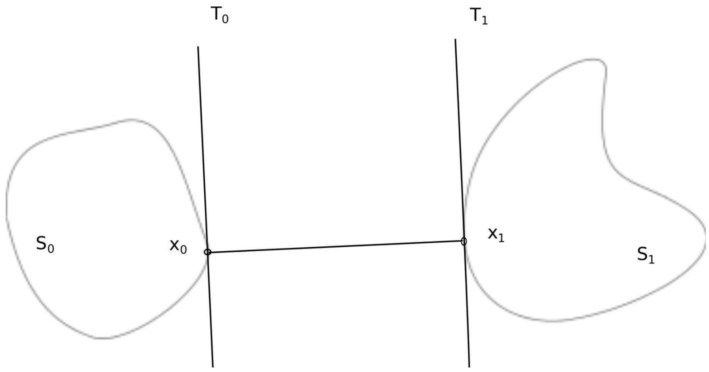
$$(\psi(t_1), A_{t_1,t_0}(\xi)) = 0 \ .$$

Από το Λήμμα (2.2.1) έχουμε $(\psi(t_0), \xi) = 0$. Αλλά κάθε διάνυσμα $\xi \in F_0$ είναι της μορφής $\xi = (0, \xi)$, όπου $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ διάνυσμα στο T_0. Επομένως η σχέση $(\psi(t_0), \xi) = 0$ παίρνει τη μορφή

$$\sum_{\nu=1}^n \psi_\nu(t_0) \xi^\nu = 0 \ .$$

Άρα η συνάρτηση $\psi(t)$ ικανοποιεί τις συνθήκες εγκαρσιότητας και στο αριστερό άκρο της τροχιάς $\mathbf{x}(t)$. Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη.

■



Σχήμα 2.10

Εφαρμογή 2.5.1 *Απόσταση μεταξύ δύο συνόλων.*

Έστω
$$\frac{dx}{dt} = u(t)$$
για $U = B^1$ η μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^2$ με $u \in B^1$ ανν $|u|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$. Θεωρούμε το συναρτησοειδές μήκους τόξου

$$\begin{aligned} J(u) &= -\int_0^T |\dot{x}(t)dt = -\text{ το μήκος της καμπύλης} \\ &= -\int_0^T dt = - \text{ ο χρόνος που χρειάζεται να φτάσει το } S_1 \end{aligned}$$

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το μήκος της καμπύλης. Προφανώς περιμένουμε ότι το ελάχιστο θα είναι η ευθεία γραμμή. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\psi, x, u) &= \psi f(x,u) + f^0 \\ &= \psi \cdot u - 1 = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 - 1 \end{aligned}$$

Επίσης
$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0 \ .$$
Συνεπώς $\psi(t) = \text{const} = \psi^0 \neq 0$. Από το PMP έχουμε

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = \max_{u \in B^1}[-1 + \psi_1^0 u_1 + \psi_2^0 u_2] \ .$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας μεγιστοποιείται για $= \frac{\psi^0}{|\psi^0|}$, ένα μοναδιαίο διάνυσμα με την κατεύθυνση του ψ^0. Επομένως η $u(\cdot) \equiv u^0$ είναι σταθερή στο χρόνο. Άρα $\dot{x} = u^0$. Το οποίο σημαίνει ότι η $\mathbf{x}(\cdot)$ είναι ευθεία γραμμή. Οι συνθήκες εγκαρσιότητας λένε ότι

$$\psi(0) \perp T_1 \text{ και } \psi(t_1) \perp T_1$$

δηλαδή

$$\psi^0 \perp T_0 \text{ και } \psi^0 \perp T_1$$

το οποίο σημαίνει ότι τα εφαπτόμενα επίπεδα T_0 και T_1 είναι παράλληλα.

■

Το Πρόβλημα Bolza για μεταβαλλόμενα άκρα

Θεωρούμε το πιο γενικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησοειδούς

$$J(u) = h(x(t_0)) + g(x(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t))dt$$

όπου και τα δύο άκρα μπορούν να μεταβάλλονται. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f, f^0, g και h είναι συνεχώς διαφορίσιμες ενώ τα S_0, $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ δύο C^1 πολλαπλότητες. Η επόμενη μορφή του PMP μας παρέχει αναγκαίες συνθήκες για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Θεώρημα 2.5.3 *Έστω $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ αποδεκτός έλεγχος και $\mathbf{x}(t)$ η αντίστοιχη τροχιά για το πρόβλημα Bolza με $x(t_0) \in S_0$ και $x(t_1) \in S_1$. Για να είναι οι $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$ βέλτιστοι θα πρέπει να υπάρχει μη μηδενική και συνεχής συνάρτηση $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ που ικανοποιεί την*

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \quad i = 0, \ldots, n$$

με

1 Η $\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u)$ μεγιστοποιείται για $u = u(t)$ στο διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), x(t)) \ ; \ .$$

2 Επιπλέον

$$\begin{aligned} \psi(t_0) &= \psi_0 \nabla h(x(t_0)) + \mathbf{n}_0 \\ \psi(t_1) &= \psi_0 \nabla g(x(t_1)) + \mathbf{n}_1 \end{aligned}$$

για $\mathbf{n}_0$ ορθογώνιο στο S_0 στο $x(t_0)$ και $\mathbf{n}_1$ ορθογώνιο στο S_1 στο $x(t_1)$.

Παρατήρηση 2.5.1 *Τα σύνολα S_0, S_1 περιγράφονται από ένα πεπερασμένο πλήθος εξισώσεων. Για παράδειγμα*

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1(x) = 0, \ldots, a_k(x) = 0\} \ .$$

Υποθέτοντας ότι τα ∇a_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο $x(t_0) \in S_0$, τότε οποιοδήποτε διάνυσμα του S_0 μπορεί να γραφεί

$$\mathbf{n}_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla a_i(x(t_0))$$

για $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Τότε η '2' συνθήκη του PMP γίνεται

$$\psi(t_0) = \psi_0 \nabla h(x(t_0)) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla a_i(x(t_0)) \ .$$

■

2.5.3 Αρχή Μεγίστου για μη αυτόνομα συστήματα

Θεωρούμε το μη-αυτόνομο σύστημα

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t) \ \ i = 1, \ldots, n \tag{2.40}$$

και το συναρτησοειδές

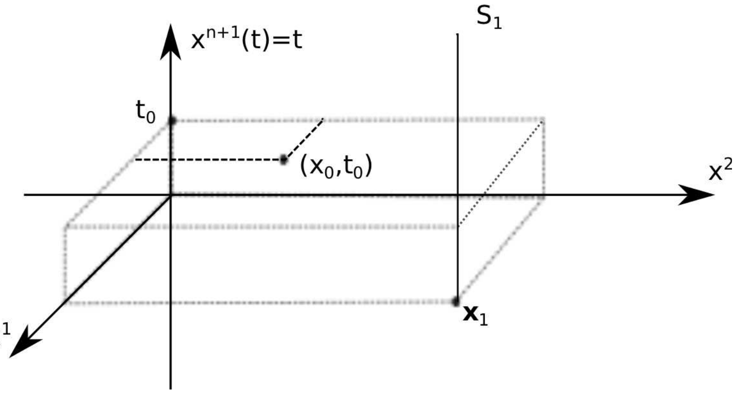
$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t) dt \tag{2.41}$$

όπου t_0 δοθέν και t_1 είναι η χρονική στιγμή που η τροχιά περνά από το x_1. Το Θεμελιώδες πρόβλημα έχει την εξής μορφή

Έστω χώρος $\mathbf{X}$ διάστασης $(n+1)$. Θεωρούμε ότι το σημείο $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$ και η ευθεία που περνά από το $(0, x_1)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x^0 είναι γνωστά. Μεταξύ όλων των ελέγχων $u = u(t)$ που η αντίστοιχη τροχιά τους με αρχική συνθήκη τέμνει την ευθεία S' να βρεθεί αυτός που έχει τη μικρότερη συντεταγμένη x^0.

Γενικά η f εξαρτάται από το t με δύο τρόπους. Άμεσα από το t και έμμεσα μέσω της συνάρτησης $u(\cdot)$. Μπορούμε να απαλείψουμε την άμεση εξάρτηση της f από το t εισάγοντας την μεταβλητή $x^{n+1} = t$ με

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1$$



Σχήμα 2.11

και

$$x^{n+1}(t_0) = t_0 \quad .$$

Τότε, με χρήση αυτής της μεταβλητής το σύστημα (2.40) γίνεται

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= f^i(x, u, x^{n+1}) \\ \frac{dx^{n+1}}{dt} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

για $i = 1, \ldots, n$.

Ορίζουμε $\mathbf{X}^*$ το χώρο με μεταβλητές $x^1, \ldots, x^{n+1}$. Θέλουμε να βρούμε τη βέλτιστη τροχιά που συνδέει το σημείο $(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n, t_0)$ με ένα σημείο της ευθείας S_1, όπου η S_1 περνά από το $(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n, 0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x^{n+1}. Τώρα οι εξισώσεις (2.8) θα έχουν τη μορφή

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{a=0}^{n} \frac{\partial f^a}{\partial x^i}\psi_a \quad i = 0, \ldots, n \tag{2.43}$$

$$\frac{d\psi_{n+1}}{dt} = -\sum_{a=0}^{n} \frac{\partial f^a}{\partial t}\psi_a \tag{2.44}$$

Ορίζουμε

$$\mathcal{H}^*(\psi, x, t, u) = \psi_0 f^0(x, u, x^{n+1}) + \ldots + \psi_n f^n(x, u, x^{n+1}) + \psi_{n+1} \cdot 1$$

και

$$\mathcal{H}(\psi, x, t, u) = \psi_0 f^0(x, u, t) + \psi_1 f^1(x, u, t) + \ldots + \psi_n f^n(x, u, t) \quad .$$

Τότε

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i}$$
$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}$$

για $i = 0, \ldots, n$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $x^{n+1} \equiv t$ έχουμε

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H} + \psi_{n+1}$$

και

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{M} + \psi_{n+1} \quad .$$

Επομένως η σχέση $\mathcal{H}^* = \mathcal{M}^* = 0$ που ικανοποιείται από τη βέλτιστη τροχιά παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), x(t), t) = -\psi_{n+1}(t) \tag{2.45}$$

Η συνθήκη στο δεξί άκρο της τροχιάς δείχνει ότι το S_1 είναι ορθογώνιο ως προς το $(\psi_1(t_1), \ldots, \psi_{n+1}(t_1))$. Δηλαδή $\psi_{n+1}(t_1) = 0$. Επομένως από τις (2.44) και (2.45) έχουμε

$$\mathcal{M}(\psi(t), x(t), t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{a=0}^{n} \frac{\partial f^a(x(s), u(s), s)}{\partial t} \psi_a(s) ds \quad .$$

Έτσι παίρνουμε το εξής Θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.4 *Έστω $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ αποδεκτός έλεγχος με αντίστοιχη τροχιά $x(t)$ που ξεκινά από το x_0 τη χρονική στιγμή t_0 και περνά από ένα σημείο της S' σε χρόνο t_1. Για να είναι οι $u(t)$ και $x(t)$ βέλτιστοι θα πρέπει να υπάρχει μη μηδενική και συνεχής συνάρτηση $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ λύση της (2.43) ώστε*

1 για κάθε t στο $t_0 \leq t \leq t_1$ η $\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u)$ μεγιστοποιείται στο $u = u(t)$

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), x(t), t) \tag{2.46}$$

2 Ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$\left.\begin{aligned} \psi_0(t) &= \text{const} \leq 0 \\ \mathcal{M}(\psi(t), x(t), t) &= \int_{t_1}^{t} \sum_{a=0}^{n} \frac{\partial f^a(x(s), u(s), s)}{\partial t} \psi_a(s) ds \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

Επιπλέον αν οι $\psi(t)$, $x(t)$ και $u(t)$ ικανοποιούν το σύστημα (2.40), (2.43) και τη '1', η $\psi_0(t)$ είναι σταθερή

$$\psi_0(t_1) \leq 0, \quad \mathcal{M}(\psi(t_1), x(t_1), t_1) = 0 \ . \tag{2.48}$$

∎

Παρατήρηση 2.5.2 *Θεωρούμε ότι το συναρτησοειδές (2.41) είναι της μορφής του προβλήματος Bolza, δηλαδή*

$$J(u) = g(t_1, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt \ .$$

Τότε εισάγοντας τη μεταβλητή $x^{n+1} = t$ μπορούμε να απαλείψουμε την άμεση εξάρτηση των f^0 και g από το χρόνο t. Έτσι παίρνουμε και το ανάλογο θεώρημα της Αρχής Μεγίστου για το πρόβλημα Bolza στην περίπτωση μη-αυτόνομου συστήματος.

2.5.4 Προβλήματα καθορισμένου χρόνου

Θεωρούμε το πρόβλημα της υποενότητας (2.5.2) με τη συνθήκη ότι οι χρόνοι t_0 και t_1 είναι δοσμένοι ώστε ο χρόνος $t_1 - t_0$ να είναι καθορισμένος. Έστω

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \ \ i = 1, \dots, n \ \ ,$$

όπου εισάγουμε τη μεταβλητή $x^{n+1} \equiv t$ με $x^{n+1}(t_0) = t_0$ και $\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1$.

Υποθέτουμε ότι τα σημεία (x_0, t_0) και (x_1, t_1) είναι δοσμένα. Θέλουμε να βρούμε έναν έλεγχο $u(t)$που μας μεταφέρει το (x_0, t_0) στο (x_1, t_1) ώστε το συναρτησοειδές

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u, x^{n+1})dt$$

να παίρνει την ελάχιστη τιμή

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H} + \psi_{n+1} = \sum_{a=0}^{n} \psi_a f^a(x, u, x^{n+1}) + \psi_{n+1} \ \ .$$

Επίσης θεωρούμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \\ \frac{d\psi_{n+1}}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \ , \ \ i = 0, \dots, n \tag{2.49}$$

Τότε οι (2.7) και (2.8) του PMP παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) + \psi_{n+1}(t) &= \mathcal{M}(\psi(t), x(t), t) + \psi_{n+1}(t)\\ \psi_0(t_0) \leq 0 &\\ \mathcal{M}(\psi(t), x(t), t) + \psi_{n+1}(t) &= 0\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), x(t), t)) \tag{2.50}$$

$$\psi_0(t_0) \leq 0$$

$$\mathcal{M}(\psi(t), x(t), t) + \psi_{n+1}(t) \equiv 0 \tag{2.51}$$

Αν οι $\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t)$ μηδενίζονται για κάποιο t τότε

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = 0$$

και συνεπώς $\psi_{n+1}(t) = 0$. Αυτό όμως είναι αδύνατο. Άρα η $(\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ είναι μια μη-μηδενική λύση του (2.49). Αυτό μας επιτρέπει να εξαλείψουμε τη συνάρτηση $\psi_{n+1}(t)$ και τη σχέση (2.51).

Θεώρημα 2.5.5 *Έστω $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ αποδεκτός έλεγχος που μας μεταφέρει το x_0 στο x_1 κι έστω $\mathbf{x}(t)$ η αντίστοιχη τροχιά με $x(t_0) = x_0$ και $x(t_1) = x_1$. Για να είναι ο $u(t)$ λύση του προβλήματος με καθορισμένο χρόνο είναι αναγκαίο να υπάρχει μη-μηδενική συνάρτηση $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ έτσι ώστε*

1 *Για κάθε t στο $t_0 \leq t \leq t_1$, η συνάρτηση $\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u)$ μεγιστοποιείται στο $u = u(t)$*

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), x(t), t) \ .$$

2

$$\psi_0(t) = \text{const} \leq 0$$

για t στο $t_0 \leq t \leq t_1$.

∎

Κεφάλαιο 3

Αρχή Μεγίστου και Λογισμός Μεταβολών

Θα εξετάσουμε τη σχέση που έχουν ο Βέλτιστος Έλεγχος και ο Λογισμός Μεταβολών*. Θα δούμε ότι το πρόβλημα που εξετάσαμε είναι μια γενίκευση του προβλήματος του Lagrange στο Λογισμό Μεταβολών και είναι ισοδύναμο με την περίπτωση όπου το U είναι ανοικτό σύνολο σε ένα διανυσματικό χώρο E_r διάστασης r.

3.1 Εξισώσεις Euler-Lagrange

Θεμελιώδες Πρόβλημα του Λογισμού Μεταβολών είναι η εύρεση των ακρότατων του συναρτησοειδούς

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{3.1}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$x(t_0) = x_0 \;\text{ και }\; x(t_1) = x_1 \tag{3.2}$$

Έστω $x(t)$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^{n+1}$ των μεταβλητών $(t, x^1, \ldots, x^n) = (t, x)$ η οποία δίνεται από τις εξισώσεις

$$x^i = x^i(t) \;\; i = 1, \ldots, n \;\; , t_0 \leq t \leq t_1 \;\; .$$

Θεωρούμε ότι οι $x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ είναι απολύτως συνεχείς κι έχουν φραγμένες παραγώγους. Έστω G ένα ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$ κι έστω η συνάρτηση

$$f(t, x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^n) = f(t, x, u)$$

*__Calculus Of Variations__, I.M. Gelfand & S.V. Fomin, Prentice Hall, 1963.

η οποία ορίζεται σε κάθε $(t, x) \in G$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής και συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς όλες τις μεταβλητές. Έστω ότι η $x^i = x^i(t)$ βρίσκεται εξολοκλήρου στο G. Θα λέμε ότι η x^i είναι (ισχυρό) ακρότατο για το συναρτησοειδές αν $\exists \delta > 0$ έτσι ώστε το (3.1) να παίρνει την ελάχιστη τιμή για $\tilde{x}(t)$ με $|x^i(t) - \tilde{x}^i(t)| < \delta$ και ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες (3.2) στο $x = \tilde{x}$.

Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{dx^i}{dt} = u^i \quad , i = 1, \ldots, n \tag{3.3}$$

και το συναρτησοειδές

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^n) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt \quad . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Η $u = (u^1, \ldots, u^n)$ είναι παράμετρος ελέγχου από την κλάση όλων των μετρήσιμων και φραγμένων διανυσματικών συναρτήσεων. Επομένως η περιοχή U συμπίπτει με τον χώρο E_r των μεταβλητών $u^1, \ldots, u^n$.

Οι φραγμένοι και μετρήσιμοι έλεγχοι $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ και η απόλυτα συνεχής τροχιά $x(t)$ του συστήματος (3.3) με συνοριακές συνθήκες (3.2) θα λέγονται βέλτιστοι αν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $J(\tilde{x}, \tilde{u}) > J(x, u)$ για κάθε $\tilde{u}(t)$ για τον οποίο η αντίστοιχη τροχιά $\tilde{x}(t)$ του συστήματος (3.3) ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (3.2) και $|\tilde{x}(t) - x(t)| < \delta$.

Το πρόβλημα (3.3), (3.4) είναι ένα πρόβλημα καθορισμένου χρόνου με σταθερά άκρα. Κάθε βέλτιστη τροχιά του (3.3), (3.4) είναι ακρότατο για το (3.1). Επομένως, η Αρχή Μεγίστου, η οποία είναι αναγκαία συνθήκη για optimality είναι ταυτόχρονα αναγκαία συνθήκη για μια καμπύλη $x(t)$ να είναι ακρότατο του συναρτησοειδούς (3.1).

Από το Θεώρημα (2.5.5) έχουμε

$$\mathcal{H} = \psi_0 f(t, x, u) + \psi_1 u^1 + \psi_2 u^2 + \ldots + \psi_n u^n \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_0}{dt} &= 0 \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= -\psi_0 \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x^i} \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

για $i = 1, \ldots, n$. Τότε

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), y, u(t)) = \max_{u \in E_r} \left\{ \psi_0 f(t, x(t), u) + \sum_{a=1}^{n} \psi_a(t) u^a \right\} \tag{3.7}$$

Εφόσον το U συμπίπτει με τον E_r, το $u = u(t)$ της $\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u)$ είναι σταθερό σημείο της $\mathcal{H}$. Άρα από (3.7) έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = \psi_0 \frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial u^i} + \psi_i(t) = 0 \tag{3.8}$$

για $i = 1, \ldots, n$. Τότε $\psi_0 \neq 0$, διαφορετικά θα είχαμε $\psi_i(t) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$. Αφού $\psi_0 = \text{const} \leq 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε $\psi_0 = -1$. Τότε από η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\psi_i(t) = \frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial u^i} \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.9}$$

ενώ από την (3.6) παίρνουμε με ολοκλήρωση

$$\psi_i(t) = \psi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(s, x(s), u(s))}{\partial x^i} ds \tag{3.10}$$

για $i = 1, \ldots, n$ και $t_0 \leq t \leq t_1$. Συνδυάζοντας τις (3.9) και (3.10) παίρνουμε

$$\frac{\partial f(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial u^i} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(s, x(s), \dot{x}(s))}{\partial x^i} ds + \psi_i(t_0)$$

για $i = 1, \ldots, n$. Παραγωγίζοντας ως προς t την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial u^i}\Big) = 0 \tag{3.11}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $f(t, x, u)$ έχει συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους ως προς τις $u^1, \ldots, u^n$. Τότε, αν η

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u) = -f(t, x(t), u) + \sum_{a=1}^{n} \psi_a(t) u^a$$

μεγιστοποιείται στο $u = u_0$, η τετραγωνική μορφή

$$\sum_{a,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial u^a \partial u^\beta}\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u_0)\xi^a \xi^\beta \quad = \\ -\sum_{a,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial u^a \partial u^\beta} f(t, x(t), u_0)\xi^a \xi^\beta$$

είναι αρνητική. Επομένως από την (3.7) συνεπάγεται ότι

$$\sum_{a,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 f(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial u^a \partial u^\beta} \xi^a \xi^\beta \geq 0$$

σχεδόν για κάθε t στο διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$.

Αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία για μια καμπύλη $x(t)$ να είναι ακρότατο του συναρτησοειδούς (3.1) και είναι γνωστή ως *αναγκαία συνθήκη του Legendre.*

3.2 Κανονικές Εξισώσεις

Όπως και προηγουμένως, έστω $u(t)$ και $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ βέλτιστος έλεγχος και βέλτιστη τροχιά του προβλήματος (3.3), (3.4). Θεωρούμε επίσης $\psi(t) = (-1, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) = (-1, \psi(t))$ μη-μηδενική και απολύτως συνεχής λύση του (3.6). Έστω η $\mathcal{M}(\psi, x, t)$ όπως ήδη την έχουμε ορίσει για καθορισμένο $\psi(x, \psi)$, x και t

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\psi, x, t) &= \sup_{u \in E_r} \mathcal{H}(\psi, x, t, u) \\ &= \sup_{u \in E_r} \left\{ -f(t, x, u) + \sum_{a=1}^{n} \psi_a u^a \right\} \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι η

$$\mathcal{H}(\psi, x, t, u) = \mathcal{M}(\psi, x, t) \tag{3.12}$$

έχει μοναδική λύση

$$u = u(\psi, x, t) \tag{3.13}$$

που ορίζεται για $t_0 \leq t \leq t_1$ και

$$|x^i - x^i(t)| < \delta, \ \ |\psi_i - \psi_i(t)| < \delta, \ \ i = 1, \ldots, n \tag{3.14}$$

όπου $\delta > 0$ επαρκώς μικρό. Υπό αυτές τις συνθήκες οι μεταβλητές $x = (x^1, \ldots, x^n)$ και $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ ονομάζονται κανονικές μεταβλητές και η συνάρτηση

$$H(\psi, x, t) = -f(t, x, u(\psi, x, t)) + \sum_{a=1}^{n} \psi_a u^a(\psi, x, t)$$

Χαμιλτονιανή συνάρτηση.

Εφόσον κάθε έλεγχος $u(t)$ ικανοποιεί την (3.7) στο $t_0 \leq t \leq t_1$ κι αφού η $u(\psi, x, t)$ είναι μοναδική λύση του (3.12), τότε

$$u(t) = u(\psi(t), x(t), t) = \frac{dx(t)}{dt} \tag{3.15}$$

στο $t_0 \leq t \leq t_1$. Από τη (3.12) έχουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της $\mathcal{H}(\psi, x, t, u)$ ως προς τις u^i, $i = 1, \ldots, n$ μηδενίζονται για $u = u(\psi, x, t)$.
Τότε έχουμε

$$-\frac{\partial f(t, x, u(\psi, x, t))}{\partial u^i} + \psi_i = 0 \ \ i = 1, \ldots, n \tag{3.16}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(\psi,x,t)}{\partial \psi_i} &= -\sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^a}\frac{\partial u^a(\psi,x,t)}{\partial \psi_i} + u^i(\psi,x,t) \\
&\quad + \sum_{a=1}^{n} \psi_a \frac{\partial u^a(\psi,x,t)}{\partial \psi_i} \\
&= u^i(\psi,x,t) + \sum_{a=1}^{n}\left(\psi_a - \frac{\partial f}{\partial u^a}\right)\frac{\partial u^a}{\partial \psi_i} \\
&= u^i(\psi,x,t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(\psi,x,t)}{\partial x^i} &= -\frac{\partial f}{\partial x^i} - \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^a}\frac{\partial u^a(\psi,x,t)}{\partial x^i} \\
&\quad + \sum_{a=1}^{n} \psi_a \frac{\partial u^a(\psi,x,t)}{\partial x^i} \\
&= -\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{a=1}^{n}\left(\psi_a - \frac{\partial f}{\partial u^a}\right)\frac{\partial u^a}{\partial x^i} \\
&= -\frac{\partial f(t,x,u(\psi,x,t))}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

Αυτές οι δύο σχέσεις μας οδηγούν στις κανονικές εξισώσεις Euler-Hamilton.

$$\begin{aligned}
\frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \quad i=1,\ldots,n \\
\frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad i=1,\ldots,n
\end{aligned}$$

τις οποίες ικανοποιούν οι $x(t) = (x^1(t),\ldots,x^n(t))$ και $\psi(t) = (\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t))$ στο διάστημα $t_0 \le t \le t_1$.

Παρατήρηση 3.2.1 *Τα παραπάνω ισχύουν ακόμα κι αν υποθέσουμε ότι η $f(t,x,u)$ δεν ορίζεται για όλες τις $u^1,\ldots,u^n$ αλλά μόνο για $u \in U \subset E_r$, όπου U ανοικτό σύνολο του E_r.*

3.3 Πολλαπλασιαστής Lagrange

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f^i(t,x^1,\ldots,x^n,v^1,\ldots v^{n-k}) = f^i(t,x,v) \quad ,i=1,\ldots,k$$

οι οποίες είναι συνεχείς και συνεχώς παραγωγίσιμες ως προς τις $(t, x) \in G$ για $v = (v^1, \ldots, v^r)$, $r = n - k$. Θεωρούμε επίσης το σύστημα των k διαφορικών εξισώσεων για τις n άγνωστες συναρτήσεις $x^1(t), \ldots, x^n(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &- f^i(t, x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^{k+1}, \ldots, \dot{x}^n) \\ &\equiv \phi^i(t, x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n) = 0 \quad i = 1, \ldots, k < n \end{aligned} \tag{3.17}$$

Θα λέμε ότι η απολύτως συνεχής συνάρτηση $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ που βρίσκεται στο G, είναι αποδεκτή αν ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (3.2) και το σύστημα (3.17). Επιπλέον η $x(t)$ θα λέγεται ακρότατο του (3.1) αν υπάρχει $\epsilon > 0$ έτσι ώστε $J(x) \leq J(\tilde{x})$ για κάθε αποδεκτή $\tilde{x}(t)$ με $|\tilde{x}(t) - x(t)| < \epsilon$. Το πρόβλημα Lagrange με συνοριακές συνθήκες (3.2) και το (3.17) συνίσταται στην εύρεση των ακρότατων του συναρτησοειδούς (3.1).

Θα δείξουμε ότι το πρόβλημα αυτό μπορεί να γίνει πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου. Συμβολίζουμε

$$f^0(t, x, v) = f(t, x, f^1(t, x, v), \ldots, f^k(t, x, v), v^1, \ldots, v^r) \tag{3.18}$$

Έστω το σύστημα

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= f^i(t, x, v) \quad i = 1, \ldots, k \\ \frac{dx^{k+j}}{dt} &= v^j \quad j = 1, \ldots, n - k = r \end{aligned} \right\} \tag{3.19}$$

όπου $v = (v^1, \ldots, v^r)$ το διάνυσμα ελέγχου.

Θέλουμε να βρούμε αποδεκτό έλεγχο $v(t)$ έτσι ώστε η τροχιά $x(t)$ του (3.19) ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (3.2) κι ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), v(t)) dt \ .$$

Προφανώς κάθε λύση του βέλτιστου προβλήματος είναι ακρότατο για το πρόβλημα Lagrange.

Έστω $v(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ βέλτιστος έλεγχος και $x(t)$ η αντίστοιχη τροχιά του (3.19) με συνοριακές συνθήκες (3.2). Επιπλέον θεωρούμε $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ μη-μηδενική και απολύτως συνεχής συνάρτηση. Τότε η $\mathcal{H}(\psi, x, t, v)$ έχει τη μορφή

$$\mathcal{H}(\psi, x, t, v) = \psi_0 f^0(t, x, v) + \sum_{a=1}^{k} \psi_a f^a + \sum_{a=1}^{n-k} \psi_{k+a} v^a \ .$$

Από την (3.18) έχουμε

$$\frac{\partial f^0}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^a}\frac{\partial f^a}{\partial x^i} \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial f^0}{\partial v^j} = \frac{\partial f}{\partial u^{k+j}} + \sum_{a=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u^a}\frac{\partial f^a}{\partial v^j} \quad j = 1, \ldots, n-k \tag{3.21}$$

Τότε το σύστημα των ψ_i έχει τη μορφή

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi_0}{dt} = 0 \\ &\frac{d\psi_i}{dt} = -\Big(\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^a}\frac{\partial f^a}{\partial x^i}\Big)\psi_0 - \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f^a}{\partial x^i}\psi_a \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

για $i = 1, \ldots, n$. Από το Θεώρημα (2.5.5) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v^j}\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, v(t)) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial u^{k+j}} + \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^a}\frac{\partial f^a}{\partial v^j}\Big)\psi_0 \\ &\quad + \sum_{a=1}^{k} \frac{\partial f^a}{\partial v^j}\psi_a + \psi_{k+j} = 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

για $j = 1, \ldots, n-k$. Θα συμβολίζουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u^i} &= \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} \\ \frac{\partial f}{\partial u^{k+j}} &= \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{k+j}} \\ \frac{\partial f}{\partial v^j} &= \frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^{k+j}} \end{aligned}$$

για $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n-k$. Επιπλέον από τη (3.17) για $i = 1, \ldots, k$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^i}{\partial \dot{x}^j} &= \delta^i_j \quad 1 \le j \le k \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial \dot{x}^{k+j}} &= -\frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^{k+j}} \quad 1 \le j \le n-k \end{aligned}$$

Έτσι η (3.22) γίνεται

$$\psi_i(t) = \psi_i(t_0) - \int_{t_0}^{t} \Big[\, \frac{\partial f}{\partial x^i}\psi_0 + \sum_{a=1}^{k} \frac{\partial f^a}{\partial x^i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x^a}\psi_0 + \psi_a\Big) \Big]\, ds \tag{3.24}$$

για $i = 1, \ldots, n$, ενώ η (3.23)

$$\psi_{k+j}(t) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{k+j}} \psi_0 + \sum_{a=1}^{k} \frac{\partial f^a}{\partial \dot{x}^{k+j}} \Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^a} \psi_0 + \psi_a \Big) \Big)$$

για $j = 1, \ldots, n-k$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{k+j}} \psi_0 \quad + & \quad \sum_{a=1}^{k} \frac{\partial f^a}{\partial \dot{x}^{k+j}} \Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^a} \psi_0 + \psi_a \Big) = \\ = & \quad \int_{t_0}^{t} \Big[\frac{\partial f}{\partial x^{k+j}} \psi_0 + \sum_{a=1}^{k} \frac{\partial f^a}{\partial x^{k+j}} \Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^a} \psi_0 + \psi_a \Big) \Big] \, ds \qquad (3.25) \\ & \quad -\psi_{k+j}(t_0) \end{aligned}$$

για $j = 1, \ldots, n-k$.

Τέλος θεωρούμε τις k μετρήσιμες και φραγμένες συναρτήσεις $\lambda_i(t)$ στο διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$, $i = 1, \ldots, k$ που ορίζονται ως εξής

$$\lambda_i(t) = \frac{\partial f(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}^i} \psi_0 + \psi_i(t) \;\; i = 1, \ldots, k \qquad (3.26)$$

με χρήση των $\lambda_i(t)$ οι (3.24) και (3.25) μπορούν να γραφούν στην εξής μορφή

$$\psi_i(t) = -\int_{t_0}^{t} \Big(\frac{\partial f}{\partial x^i} \psi_0 + \sum_{a=1}^{k} \lambda_a \frac{\partial f^a}{\partial x^i} \Big) ds + \psi_i(t_0) \;\; , i = 1, \ldots, n \qquad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{k+j}} \psi_0 + \sum_{a=1}^{k} \lambda_a \frac{\partial f^a}{\partial \dot{x}^{k+j}} \quad = & \quad \int_{t_0}^{t} \Big(\frac{\partial f}{\partial x^{k+j}} \psi_0 + \sum_{a=1}^{k} \lambda_a \frac{\partial f^a}{\partial x^{k+j}} \Big) ds \qquad (3.28) \\ & \quad -\psi_{k+j}(t_0) \;\; , j = 1, \ldots, n-k \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.3.1 *(Κανόνας Πολλαπλασιαστών Lagrange)*
Έστω ότι η απολύτως συνεχής καμπύλη $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ είναι ακρότατο για το (3.1) με συνοριακές συνθήκες (3.2) και με δοθέν σύστημα (3.17). Τότε υπάρχουν $i = 1, \ldots, k$ μετρήσιμες και φραγμένες συναρτήσεις $\lambda_i(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (που ονομάζονται πολλαπλασιαστές Lagrange) και σταθερά $\psi_0 \leq 0$ έτσι ώστε η συνάρτηση

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = -\psi_0 f(t, x(t), \dot{x}(t)) + \sum_{a=1}^{k} \lambda_a(t) \psi^a(t, x(t), \dot{x}(t))$$

ικανοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F(s, x(s), \dot{x}(s))}{\partial x^i} ds + c_i$$

$i = 1, \ldots, n$, σχεδόν παντού στο διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$ όπου c_i σταθερές.

Απόδειξη

Ορίζουμε τις $\lambda_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$ όπως στην (3.26). Τότε αν $1 \leq i \leq k$ από τις εξισώσεις (3.26) και (3.27) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} &= -\psi_0 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} + \sum_{a=1}^{k} \lambda_a \frac{\partial \phi_a}{\partial \dot{x}^i} + -\psi_0 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} + \lambda_i \\
&= \psi_i(t) = -\int_{t_0}^{t} \Big(\frac{\partial f}{\partial x^i} \psi_0 + \sum_{a=1}^{k} \lambda_a \frac{\partial f^a}{\partial x^i} \Big) ds + \psi_i(t_0) \\
&= \int_{t_0}^{t} \Big(-\frac{\partial f}{\partial x^i} \psi_0 + \sum_{a=1}^{k} \lambda_a \frac{\partial \phi^a}{\partial x^i} \Big) ds + \psi_i(t_0) \\
&= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial x^i} ds + \psi_i(t_0)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη σχέση (3.28) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{k+j}} &= -\psi_0 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{k+j}} - \sum_{a=1}^{k} \lambda_a \frac{\partial f^a}{\partial \dot{x}^{k+j}} \\
&= -\int_{t_0}^{t} \Big(\frac{\partial f}{\partial x^{k+j}} \psi_0 + \sum_{a=1}^{k} \lambda_a \frac{\partial f^a}{\partial x^{k+j}} \Big) ds + \psi_{k+j}(t_0) \\
&= \int_{t_0}^{t} \Big(-\frac{\partial f}{\partial x^{k+j}} \psi_0 + \sum_{a=1}^{k} \lambda_a \frac{\partial \phi^a}{\partial x^{k+j}} \Big) ds + \psi_{k+j}(t_0) \\
&= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial x^{k+j}} ds + \psi_{k+j}(t_0) \ \ , \ j = 1, \ldots, n-k
\end{aligned}$$

∎

3.4 Η συνθήκη του Weierstrass

Έστω $l = (l_0, l_1, \ldots, l_n)$ διάνυσμα διάστασης $(k+1)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση Weierstrass $\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, \xi, l)$ που εξαρτάται από τα t, $x = (x^1, \ldots, x^n)$,

$\dot{x} = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$, $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ και $l = (l_0, \ldots, l_k)$ ως εξής

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= F(t, x, \xi, l) - F(t, x, \dot{x}, l) \\
&\quad - \sum_{a=1}^{n} (\xi^a - \dot{x}^a) \frac{\partial F(t, x, \dot{x}, l)}{\partial \dot{x}^a}
\end{aligned}$$

όπου

$$F(t, x, \dot{x}, l) = -l_0 f(t, x, \dot{x}) + \sum_{a=1}^{k} l_a \phi^a(t, x, \dot{x}) \quad .$$

Θα συμβολίζουμε τις $n-k$ τελευταίες συντεταγμένες του ξ με $V^1, \ldots, V^{n-k}$. Δηλαδή

$$\begin{aligned}
\xi &= (\xi^1, \ldots, \xi^k, V^1, \ldots, V^{n-k}) \\
V &= (V^1, \ldots, V^{n-k})
\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι η $x = x(t)$ είναι ακρότατο του προβλήματος του Lagrange με τις (3.17), $\dot{x} = dx(t)/dt$, $l = \lambda(t) = (\psi_0, \lambda_1(t), \ldots, \lambda_k(t))$ και οι πρώτες k συντεταγμένες του ξ ικανοποιούν το

$$\xi^i - f^i(t, x(t), V^1, \ldots, V^{n-k}) \equiv \xi^i - f^i(t, x(t), V) = 0 \tag{3.29}$$

για $i = 1, \ldots, k$. Η συνάρτηση

$$u(t) = (v^1(t), \ldots, v^{n-k}(t)) = (\dot{x}^{k+1}(t), \ldots, \dot{x}^n(t))$$

είναι βέλτιστος έλεγχος για την αντίστοιχη τροχιά $x(t)$ του συστήματος (3.19). Από τις σχέσεις (3.17), (3.18) και (3.29) έχουμε

$$\begin{aligned}
F(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda(t)) &= -\psi_0 f(t, x(t), \dot{x}(t)) = -\psi_0 f^0(t, x(t), v(t)) \\
F(t, x(t), \xi, \lambda(t)) &= -\psi_0 f(t, x(t), \xi) + \sum_{a=1}^{k} \lambda_a(t)(\xi^a - f^a(t, x(t), V)) \\
&= -\psi_0 f(t, x(t), \xi) = -\psi_0 f^0(t, x(t), V)
\end{aligned}$$

Επιπλέον αν $i = 1, \ldots, k$, τότε από την (3.26)

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} F(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda(t)) = -\psi_0 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} + \lambda_i = \psi_i(t)$$

ενώ αν $i = k+j$ για $j = 1, \ldots, n-k$ από τις (3.18), (3.21) και (3.23) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} F(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda(t)) &= -\psi_0 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{k+j}} - \sum_{a=1}^{k} \Big(\psi_a(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^a} \psi_0 \Big) \frac{\partial f^a}{\partial \dot{x}^{k+j}} \\
&= -\psi_0 \frac{\partial f^0}{\partial v^j} - \sum_{a=1}^{k} \psi_a \frac{\partial^a}{\partial v^j} \\
&= -\frac{\partial f}{\partial v^j} \mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, v(t)) + \psi_{k+j}(t)
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t,x(t),\dot{x}(t),\xi,\lambda(t)) &= -\psi_0 f^0(t,x(t),V)+\psi_0 f^0(t,x(t),v(t)) \\ &\quad -\sum_{a=1}^{k}\Big(f^a(t,x(t),V)-f^a(t,x(t),v(t))\Big)\psi_a \qquad (3.30) \\ &\quad -\sum_{a=1}^{n-k}\big(V^a-v^a(t)\big)\Big(\psi_{k+a}(t)-\frac{\partial}{\partial v^a}\mathcal{H}(\psi(t),x(t),t,v(t))\Big) \\ &= \mathcal{H}(\psi(t),x(t),t,v(t))-\mathcal{H}(\psi(t),x(t),t,V) \\ &\quad +\sum_{a=1}^{n-k}\Big(V^a-v^a(t)\Big)\frac{\partial}{\partial v^a}\mathcal{H}(\psi(t),x(t),t,v(t))\end{aligned}$$

Αφού η $x(t)$ είναι ακρότατο, οι εξισώσεις (3.23) ικανοποιούνται σχεδόν παντού στο διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$. Επομένως από το Θεώρημα PMP (2.5.5) παίρνουμε ότι

$$\mathcal{E}(t,x(t),\dot{x}(t),\xi,\lambda(t)) \geq 0 \ . \qquad (3.31)$$

Η (3.31) είναι γνωστή ως *αναγκαία συνθήκη του Weierstrass.*

Θεώρημα 3.4.1 *(Αναγκαία συνθήκη του Weierstrass)*
Αν $x(t)$ είναι ακρότατο του προβλήματος του Lagrange τότε υπάρχουν μετρήσιμες και φραγμένες συναρτήσεις $\lambda_i(t)$, $i=1,\ldots,k$ και $\psi_0 = \mathrm{const} \leq 0$ έτσι ώστε η ανισότητα (3.31) ικανοποιείται σχεδόν για κάθε t για ένα διάνυσμα ξ το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες (3.29).

∎

Είδαμε ότι αν το U συμπίπτει με το χώρο E_r ή είναι ανοικτό υποσύνολο του E_r ο κανόνας του πολλαπλασιαστή Lagrange καθώς και η συνθήκη του Weierstrass προκύπτουν από τη Αρχή Μεγίστου. Θα εξετάσουμε τώρα τη σχέση που έχουν η Αρχή Μεγίστου του Pontryagin με τη συνθήκη του Weierstrass στην περίπτωση όπου το U δεν είναι ανοικτό. Θέτουμε $V = v(t)+\Delta v$, όπου Δv απειροελάχιστο. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor, η (3.30) γίνεται

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2}\sum_{a,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2\mathcal{H}(\psi(t),x(t),t,v(t))}{\partial v^a \partial v^\beta}\Delta v^a \Delta v^\beta \qquad (3.32)$$

Έτσι η συνθήκη Weierstrass, $\mathcal{E} > 0$ ισχύει για εσωτερικά σημεία του U. Στα συνοριακά σημεία όμως η $\partial\mathcal{H}/\partial v^i$ δεν μηδενίζεται (στο ανάπτυγμα της $\mathcal{H}(\psi(t),x(t),tv(t)+\Delta v)$ σε αυτά τα σημεία υπάρχουν όροι πρώτης τάξεως στο Δv). Δηλαδή η συνθήκη $\mathcal{E} \geq 0$ δεν είναι πλέον αναγκαία για την $\mathcal{H}$ να μεγιστοποιείται. Επομένως η συνθήκη Weierstrass $\mathcal{E} \geq 0$ δεν ισχύει σε συνοριακά σημεία του U.

Παράδειγμα 3.4.1 *Θεωρούμε ότι το σύστημα*

$$\frac{dx}{dt} = v^2 \quad (|v| \leq 1)$$

περιγράφει την κίνηση ενός υλικού σημείου.

Η κίνηση που ικανοποιεί τις $v \equiv 1$, $x(t) = x_0 + t$ είναι βέλτιστου χρόνου, αφού η ταχύτητα του x που είναι v^2 δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη της μονάδας. Έχουμε

$$f^0 \equiv 1 \ , \quad f^1 = v^2 \ .$$

Τότε, αφού οι f^0 και f^1 είναι ανεξάρτητες του x, οι εξισώσεις ψ_0 και ψ_1 έχουν τη μορφή

$$\psi_0 = \text{const} \ , \quad \psi_1 = \text{const} \ .$$

Έτσι η $\mathcal{H}$ έχει τη μορφή $\mathcal{H} = \psi_0 + \psi_1 v^2$ ή για $v \equiv 1$

$$\mathcal{H} = \psi_0 + \psi_1$$

κι επομένως (λόγω της (2.8), PMP)

$$\psi_0 < 0 \ \text{ και } \ \psi_1 > 0 \ .$$

Τότε από την (3.32) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v^2}(\Delta v)^2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\psi_0 + \psi_1 v^2)}{\partial v^2}(\Delta v)^2 \\ &= -\psi_1(\Delta v)^2 < 0 \end{aligned}$$

αφού $\psi_1 > 0$. Δηλαδή η συνθήκη του Weierstrass $\mathcal{E} \geq 0$ δεν ικανοποιείται.

Κεφάλαιο 4

Ικανές Συνθήκες

4.1 Γενική Περίπτωση

Θεώρημα 4.1.1 *Θεωρούμε το πρόβλημα*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,t,u) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

με $u \in U$ *και*

$$J(u(\cdot)) = \int_0^{t_1} f^0(t,x(t),u(t))dt$$

στο διάστημα $[0,T]$ *με* x_0 *δοσμένο και* $f(t,x,u)$, $f^0(t,x,u)$ *συνεχείς. Ορίζουμε* $\Delta(T)$ *να είναι η κλάση των αποδεκτών ελέγχων που μεταφέρουν το* x_0 *στο* 0 *σε χρόνο* t_1 *με* $0 < t_1 \leq T$ *και θεωρούμε ότι* $\Delta(T) \neq 0$ *καθώς και*

$$|\mathbf{x}(t;x_0,u(\cdot))| \leq a \ \ .$$

Επιπλέον, αν το σύνολο $\mathbf{f}(t,x,\Omega) = \{f^0(x,t,\mathrm{v}), \mathrm{f}^T(x,t,\mathrm{v}) | \mathrm{v} \in \Omega\}$ *είναι κυρτό στον* $\mathbb{R}^{n+1}$*, τότε υπάρχει βέλτιστος έλεγχος.*

Απόδειξη

Αφού $|\mathbf{x}(t)| \leq a$ για κάθε τροχιά και η $f^0 : [0,T] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0,T] \times [-a,a] \times [-1,1]$ συνεπάγεται ότι η $f^0(t,x(t),u(t))$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη για κάθε αποδεκτό έλεγχο. Εφόσον περιοριζόμαστε στο διάστημα $[0,T]$, το $J(u(\cdot))$ είναι κάτω φραγμένο για $u(\cdot) \in \Delta(T)$. Επομένως το $c = \inf J(u(\cdot))$ υπάρχει.

Έστω $\{u_n(\cdot)\}$ μια φθίνουσα ακολουθία για το $J(u(\cdot))$

$$J(u_n(\cdot)) \equiv c_n \downarrow c \ \ .$$

Για κάθε έλεγχο $u(\cdot) \in \Delta(T)$ ορίζουμε το επεκταμένο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^0 \\ \mathrm{x} \end{bmatrix}$$

όπου $\dot{x}^0 = f^0(t,x,u)$, $x^0(0) = 0$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} x^0(t) &= \int_0^t f^0(s, x(s), u(s))ds \\ x^0(t_1) &= J(u(\cdot)) \end{aligned}$$

Κάθε ζεύγος $(u_n(\cdot), x_n(\cdot))$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα $[0, t_1(n)]$ και θεωρούμε ότι $t_1(n) \to t_1 \leq T$. Όποτε $t_1(n) < t_1$ επεκτείνουμε το $x_n(\cdot)$ σε $[t_1(n), t_1]$ όπως το σταθερό διάνυσμα $x_n(t_1(n))$. Το σύστημα μας τώρα είναι

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,t,u) \\ \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} x^0 \\ \mathrm{x} \end{bmatrix} \quad , \ \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f^0 \\ \mathrm{f} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει κατάσταση $x_*(t)$ για το σύστημα η οποία ικανοποιεί την

$$\mathbf{x}_*(t_1) = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \ .$$

Δηλαδή ο αντίστοιχος έλεγχος $u_*(\cdot)$ είναι βέλτιστος.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1.

Η ακολουθία $\{x_n(\cdot)\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής στο διάστημα $[0, t_1]$, επομένως μια υπακολουθία της συγκλίνει ομοιόμορφα στο όριο $x_*(t)$. Αφού $x_n(t_1(n)) = (x_n, 0)^T$ και $t_1(n) \to t_1$ έχουμε ότι $\mathbf{x}_*(t_1) = (c, o)^T$. Άρα, αν η $\mathbf{x}_*(\cdot)$ είναι τροχιά, τότε είναι βέλτιστη.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1

Από την υπόθεση του Θεωρήματος έχουμε ότι $|x_n(t)| \leq a \ \forall t \in [0, t_1]$ για $a > 0$. Επιπλέον για $t_a, t_b \in [0, T]$ με $t_b \geq t_a$ έχουμε

$$\begin{aligned} |x_n(t_b) - x_n(t_a)| &\leq \left| \int_0^{t_b} f(x_n(s), u_n(s))ds - \int_0^{t_a} f(x_n(s), u_n(s))ds \right| \\ &\leq \int_{t_a}^{t_b} |f(x_n(s), u_n(s))|ds \leq l|t_b - t_a| \end{aligned}$$

για $l > 0$.

Δηλαδή η $\{x_n(t)\}$ είναι ισοσυνεχής και ομοιόμορφα φραγμένη στο $[0, t_1]$. Τότε από το Θεώρημα Ascoli* υπάρχει υπακολουθία της $\{x_n(\cdot)\}$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο $x_*(\cdot)$ στο διάστημα $[0, t_1]$ με $x_*(t_1) = (c, 0)^T$.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 2.

Η συνάρτηση $\mathbf{x}_*(t)$ είναι απόλυτα συνεχής και

$$\int_{\mathcal{A}} \Big(\frac{dx_n}{dt}\Big) \to \int_{\mathcal{A}} \Big(\frac{d\mathbf{x}_*}{dt}\Big)$$

για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο $\mathcal{A}$ του διαστήματος $[0, t_1]$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 2

Επειδή η $\mathbf{x}_*(t)$ είναι Lipschitz συνεχής συνεπάγεται ότι είναι και απολύτως συνεχής στο $[0, t_1]$. Αυτό όμως σημαίνει ότι υπάρχει το $d\mathbf{x}_*/dt$ καθώς $n \to \infty$ έχουμε

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t \mathbf{f}_n(s)ds \to x_*(t) = x_0 + \int_0^t \left(\frac{d\mathbf{x}_*}{dt}\right)ds \quad .$$

Τότε

$$\int_0^t \mathbf{f}_n(s)ds \to \int_0^t \left(\frac{d\mathbf{x}_*}{dt}\right)ds$$

για κάθε t στο $0 \leq t \leq t_1$. Δηλαδή

$$\int_I \mathbf{f}_n \to \int_I \left(\frac{d\mathbf{x}_*}{dt}\right)$$

για κάθε διάστημα $I \subset [0, t_1]$
ή

$$\int_{\mathcal{A}} \left(\frac{dx_n}{dt}\right) \equiv \int_{\mathcal{A}} \mathbf{f}_n \to \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{d\mathbf{x}_*}{dt}\right)$$

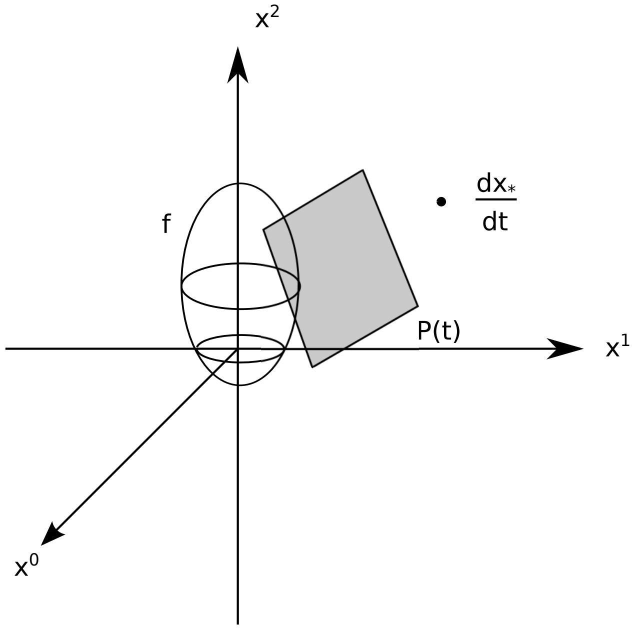
για κάθε $\mathcal{A} \subset [0, t_1]$ μετρήσιμο.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 3.

Η συνάρτηση $\mathbf{x}_*(t)$ ικανοποιεί το διαφορικό εγκλεισμό

$$\frac{d\mathbf{x}_*}{dt} \in \mathbf{f}(t, x_*(t), \Omega)$$

*Θεώρημα Ascoli
Έστω (f_n) ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$. Αν η ακολουθία είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής, τότε υπάρχει υπακολουθία (f_{n_n}) που συγκλίνει ομοιόμορφα.[RA-C]



Σχήμα 4.1

για $0 \leq t \leq t_1$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 3

Θεωρούμε το σύνολο $S = \{t | (dx_*/dt) \notin \mathbf{f}(t, x_*(t), \Omega)\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το μέτρο του S είναι 0, $|S| = 0$.
Ας υποθέσουμε ότι $|S| > 0$. Αφού για κάθε $t \in S$ το σύνολο $\mathbf{f}(t, x_*(t), \Omega)$ είναι κυρτό και συμπαγές, υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{b}$ και αριθμός a έτσι ώστε το υπερεπίπεδο $P(t) = \{x | < \mathbf{b}, x >= a\}$ να διαχωρίζει το dx_*/dt από το $\mathbf{f}(t, x_*(t), \Omega)$ στο $\mathbb{R}^{n+1}$. Επομένως

$$\mathbf{b}^T \frac{d\mathbf{x}_*}{dt} > a$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{f}(t, x_*, \mathrm{v}) \leq a$$

για $\mathrm{v} \in \Omega$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^T \left(\frac{d\mathbf{x}_*}{dt} \right) &> \max_{\mathrm{v}\in\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{f}(t, x_*, \mathrm{v}) \\ &\geq \lim_{j\to\infty} \sup \mathbf{b}^T \mathbf{f}(t, x_*(t), u_j(t)) \qquad (4.1) \\ &= \lim_{j\to\infty} \sup \mathbf{b}^T \mathbf{f}(t, x_j(t), u_j(t)) \end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathcal{A}$, όπου $\mathcal{A} \subset S$. Τότε

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}} \mathbf{b}^T \left(\frac{d\mathbf{x}_*}{dt}\right) &> \int_{\mathcal{A}} \lim_{j\to\infty} \sup \mathbf{b}^T \mathbf{f}(t, x_j, u_j) dt \\ &> \lim_{j\to\infty} \sup \int_{\mathcal{A}} \mathbf{b}^T \left(\frac{dx_j}{dt}\right)\end{aligned}$$

με χρήση του Λήμματος του Fatou†. Αυτό όμως είναι άτοπο από τον Ισχυρισμό 2. Επομένως

$$\left(\frac{d\mathbf{x}_*}{dt}\right) \in \mathbf{f}(t, x_*(t), \Omega) \ .$$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 4

Υπάρχει έλεγχος $u_* \in U$ έτσι ώστε $d\mathbf{x}_*/dt = \mathbf{f}(t, x_*, u_*)$. Δηλαδή ο u_* είναι βέλτιστος με τροχιά $\mathbf{x}_*(t)$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 4

Ο ισχυρισμός 4 θα αποδειχθεί με χρήση του Λήμματος του Fillipov.

Λήμμα 4.1.1 *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ συμπαγές, $g(t,u) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ συνεχής συνάρτηση και $\psi(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ μια φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση με $\psi(t) \in g(t, \Omega)$. Τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $u(\cdot)$ με $u(t) \in \Omega$ για κάθε t τέτοια ώστε $\psi(t) = g(t, u(t))$.*

Απόδειξη του Λήμματος του Fillipov

Θεωρούμε ένα $t \in [0, t_1]$. Τότε το σύνολο

$$\mathcal{E} = \{\mathrm{v} \in \Omega | \psi(t) = g(t, \mathrm{v})\}$$

είναι μη κενό. Επειδή το σύνολο είναι συμπαγές μπορούμε να επιλέξουμε $u(t) = \min \mathcal{E}$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $u(\cdot)$ είναι μετρήσιμη σε κάθε συμπαγές διάστημα $I \subset \mathbb{R}$.

---

†Λήμμα του Fatou

Έστω $f_n : \mathbf{X} \to [0, \infty]$, $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε

$$\int (\lim_{n\to\infty} \inf f_n) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n d\mu \ \text{.[FA.R-N]}$$

Αντίστροφο Λήμμα του Fatou

Έστω f_n μια ακολουθία πραγματικών μετρήσιμων συναρτήσεων ορισμένη σε ένα χώρο μέτρου. Αν υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση g στον Q τέτοια ώστε $f_n \leq g$ για κάθε n, τότε

$$\int_S \lim_{n\to\infty} \sup f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \sup \int_S f_n d\mu \ .$$

Από το Θεώρημα του Lusin†, για $\epsilon > 0$, η $\psi(t)$ είναι συνεχής σε κλειστό υποσύνολο $\mathcal{F}_\epsilon$ του I με $\mu(I - \mathcal{F}_\epsilon) < \epsilon$. Θα δείξουμε ότι η $u(\cdot)$ είναι μετρήσιμη στο $\mathcal{F}_\epsilon$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\mathcal{L}_a = \{t \in \mathcal{F}_\epsilon | u(t) \leq a\}$ είναι κλειστό $\forall\ a \in \mathbb{R}^+$ και για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε υπάρχει ακολουθία $\{t_j\} \in \mathcal{F}_\epsilon$ η οποία συγκλίνει στο $\bar{t} \notin \mathcal{L}_a$ με $u(\bar{t}) > a$.

Αφού το $\mathcal{F}_\epsilon$ είναι κλειστό, $\bar{t} \in \mathcal{F}_\epsilon$. Επίσης, το Ω είναι συμπαγές, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία διανυσμάτων $\{u(t_j)\}$ συγκλίνει στο όριο $\mathrm{v} \in \Omega$ με $\mathrm{v} \leq a$. Επειδή η $\psi(\cdot)$ είναι συνεχής στο $\mathcal{F}_\epsilon$ έχουμε ότι $\psi(t_j) \to \psi(\bar{t})$. Επίσης $\psi(t_j) = g(t_j, u(t_j))$, άρα

$$\psi(\bar{t}) = g(\bar{t}, \mathrm{v}) \ .$$

Τότε όμως $u(\bar{t}) \leq \mathrm{v}$. Δηλαδή $u(\bar{t}) \leq a$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα το $\mathcal{L}_a$ είναι κλειστό για κάθε a. Καταλήγουμε, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και κλειστό υποσύνολο $\mathcal{F}_\epsilon \subset I$ με $\mu(I - \mathcal{F}_\epsilon) < \epsilon$ η $u(t)$ είναι μετρήσιμη στο $\mathcal{F}_\epsilon$. Άρα θα είναι μετρήσιμη στο I.

∎

Θέτοντας $\psi = dx_*/dt$ και $g(t,u) = f(t, x_*(t), u)$ στο Λήμμα του Fillipov αποδεικνύεται ο Ισχυρισμός 4.

∎

4.1.1 Πρόβλημα Bolza

Γενικά, οι συνθήκες του PMP είναι αναγκαίες αλλά όχι ικανές για έναν έλεγχο $u(t)$ να είναι βέλτιστος. Υπάρχουν όμως συνθήκες υπό τις οποίες κάθε έλεγχος που ικανοποιεί το PMP είναι βέλτιστος.

Θεώρημα 4.1.2 *Έστω $u(t) \in U$ και $x(t)$, $\psi(t)$ δύο απολύτως συνεχής συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες του Θεωρήματος (2.5.1) (Πρόβλημα Bolza) όπου επιπλέον υποθέτουμε ότι το σύνολο U είναι κυρτό ενώ οι συναρτήσεις $\mathcal{M}(x, \psi(t))$ και $g(x)$ είναι μη κυρτές†. Τότε ο $u(t)$ είναι βέλτιστος έλεγχος και η $x(t)$ είναι η αντίστοιχη βέλτιστη τροχιά.*

† Θεώρημα του Lusin

Έστω $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $\epsilon > 0$. Τότε $\exists B \subset \mathbf{X}$ συμπαγές και $g : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ συνεχής έτσι ώστε $f|_B = g$ και $\mu(B^c) < \epsilon$. [TRV-N]

† [CO-BV] Μια πραγματική συνάρτηση f λέμε ότι είναι μη κυρτή (concave) αν $\forall x, y$ στο πεδίο ορισμού της και $\forall t \in [0,1]$ ισχύει

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y) \ .$$

Αν η f είναι μη κυρτή και διαφορίσιμη τότε

$$f(y) \leq f(x) + f'(x)(y - x) \ .$$

Απόδειξη

Έστω $u^*(t) \in U$, $t_0 \leq t \leq t_1$ ένας αποδεκτός έλεγχος και $x^*(t)$ η αντίστοιχη τροχιά. Τότε

$$\begin{aligned} J(u^*) - J(u) &= g(x^*(t_1)) - g(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} [f^0(x^*(t), u^*(t)) - f^0(x(t), u(t))]dt \\ &= g(x^*(t_1)) - g(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \Big[\mathcal{H}(\psi(t), x^*(t), u^*(t)) - \psi(t)\dot{x}^*(t) \Big] \\ &\quad - \Big[\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) - \psi(t)\dot{x}(t) \Big] \Big\} \, dt \end{aligned} \tag{4.2}$$

Εφόσον ο u ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος για $t_0 \leq t \leq t_1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) &= \mathcal{M}(\psi(t), x(t)) \\ \mathcal{H}(\psi(t), x^*(t), u^*(t)) &\leq \mathcal{M}(\psi(t), x(t)) \end{aligned}$$

Τότε η (4.2) γίνεται

$$\begin{aligned} J(u^*) - J(u) &\leq g(x^*(t_1)) - g(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \Big[\mathcal{M}(\psi(t), x^*(t)) - \psi(t)\dot{x}^*(t) \Big] \\ &\quad - \Big[\mathcal{M}(\psi(t), x(t)) - \psi(t)\dot{x}(t) \Big] \Big\} \, dt \end{aligned}$$

Επειδή η $\mathcal{M}(\psi(t), x(t))$ είναι μη κυρτή έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\psi(t), x^*(t)) &\leq \mathcal{M}(\psi(t), x(t)) + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x}(\psi(t), x(t))[x^*(t) - x(t)] \\ &= \mathcal{M}(\psi(t), x(t)) - \dot{\psi}(t)[x^*(t) - x(t)] \end{aligned}$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} J(u^*) - J(u) &\leq g(x^*(t_1)) - g(x(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \dot{\psi}(t)[x^*(t) - x(t)] \\ &\quad + \psi(t)[\dot{x}^*(t) - \dot{x}(t)] \Big\} \, dt \\ &= g(x^*(t_1)) - g(x(t_1)) - \Big\{ \psi(t_1)[x^*(t_1) - x(t_1)] \\ &\quad + \psi(t_0)[x^*(t_0) - x(t_0)] \Big\} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

εφόσον ισχύουν οι συνθήκες $x(t_0) = x^*(t_0) = x_0$ και $g(x^*(t_1)) \leq g(x(t_1)) + g_x(x(t_1))[x^*(t_1) - x(t_1)]$.

∎

4.2 Γραμμικά time-optimal συστήματα

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε το γραμμικό πρόβλημα βέλτιστου (ή άριστου) χρόνου. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει το πρόβλημα βέλτιστου χρόνου συνίσταται στην ελαχιστοποίηση του $t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt$. Αφού δώσουμε την Αρχή Μεγίστου, δηλαδή μια αναγκαία συνθήκη, θα εξετάσουμε μια ικανή συνθήκη για ύπαρξη άριστου ελέγχου.

4.2.1 Το PMP για time-optimal problems

Για το πρόβλημα βέλτιστου χρόνου αρκεί να θέσουμε $f^0(x,u) = 1$. Τότε η συνάρτηση $\mathcal{H}$ παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{H} = \psi_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu f^\nu(x,u) \ \ .$$

Για το n-διάστατο διάνυσμα $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ και τη συνάρτηση

$$H(\psi, x, u) = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu f^\nu(x,u)$$

μπορούμε να γράψουμε τις (2.1) και (2.4) του Κεφαλαίου 2 στη μορφή Χαμιλτονιανού συστήματος

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.3}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x^i} \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.4}$$

Για σταθερές τιμές των ψ και x η H είναι συνάρτηση μόνο της u. Ορίζουμε

$$M(\psi, x) = \sup_{u \in U} H(\psi, x, u)$$

Εφόσον $H(\psi, x, u) = \mathcal{H}(\psi, x, u) - \psi_0$ παίρνουμε ότι

$$M(\psi, x) = \mathcal{M}(\psi, x) - \psi_0$$

κι επομένως οι (2.7) και (2.8) του PMP παίρνουν τη μορφή

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)) = -\psi_0 \geq 0 \ \ .$$

Θεώρημα 4.2.1 *Έστω $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, αποδεκτός έλεγχος που μεταφέρει το x_0 στο x_1 κι έστω $x(t)$ η αντίστοιχη τροχιά [(4.3)] έτσι ώστε $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Για να είναι οι $u(t)$ και $x(t)$ time-optimal είναι να αναγκαίο να υπάρχει μη μηδενική, διανυσματική συνάρτηση $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ έτσι ώστε*

1 Για κάθε t στο $t_0 \leq t \leq t_1$, η συνάρτηση $H(\psi(t), x(t), u(t))$ της μεταβλητής $u \in U$ μεγιστοποιείται στο $u = u(t)$

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)) \tag{4.5}$$

2 Στον τελικό χρόνο t_1 ικανοποιείται η σχέση

$$M(\psi(t_1), x(t_1)) \geq 0 \tag{4.6}$$

Επιπλέον αν οι $\psi(t)$, $x(t)$ και $u(t)$ ικανοποιούν το σύστημα (4.3), (4.4) και τη συνθήκη '1', η $M(\psi(t), x(t))$ είναι σταθερή.

■

4.2.2 Μοναδικότητα

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^i x^\nu + \sum_{\rho=1}^{r} b_\rho^i u^\rho \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.7}$$

Θεωρούμε επίσης ότι το σύνολο U είναι κυρτό, κλειστό και φραγμένο πολύεδρο‡ στον r-διάστατο χώρο E_r με συντεταγμένες $u^1, \ldots, u^r$. Η (4.7) μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{4.8}$$

όπου οι $A : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ και $B : E_r \to \mathbf{X}$ είναι γραμμικοί τελεστές που ορίζονται από τους πίνακες (a_j^i) και (b_j^i) αντίστοιχα.

Για κάθε διάνυσμα w, με κατεύθυνση μια από τις κορυφές του U, το διάνυσμα Bw έχει την ιδιότητα ότι δεν ανήκει σε κανένα υπόχωρο του $\mathbf{X}$ ο οποίος είναι αναλλοίωτος ως προς τον A. Δηλαδή τα

$$Bw,\ ABw, \ldots, A^{n-1}Bw$$

‡[CO-BV] Ένα κυρτό και φραγμένο πολύεδρο στον E_r ορίζεται να είναι το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν ένα πεπερασμένο πλήθος ανισώσεων $P = \{x| \sum_{k=1}^{n} a_k^i u^k \leq b^k,\ \ i = 1, \ldots, s$. Είναι δηλαδή η τομή ενός πεπερασμένου πλήθους υπερεπιπέδων.

είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbf{X}$.

Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $H(\psi, x, u)$ έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} H &= (\psi, Ax) + (\psi, Bx) \\ &= \sum_{\mu,\nu} \psi_\mu a^\mu_\nu x^\nu + \sum_{\mu,\rho} \psi_\mu b^\mu_\rho u^\rho \end{aligned} \tag{4.9}$$

και

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{n} a^\nu_j \psi_\nu \quad j = 1, \ldots, n$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^*\psi \tag{4.10}$$

όπου A^* είναι ο συζυγής του A.

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την H ως συνάρτηση του $u \in U$, μεγιστοποιείται παράλληλα με τη συνάρτηση (ψ, Bu). Έστω $P(\psi)$ να είναι το μέγιστο του $(\psi, B(u))$ αν το θεωρήσουμε ως συνάρτηση του $u \in U$. Αν ο $u(t)$ είναι βέλτιστος, τότε υπάρχει λύση $\psi(t)$ της (4.10) τέτοια ώστε

$$(\psi(t), Bu(t)) = P(\psi(t)) \tag{4.11}$$

Αφού η εξίσωση (4.10) δεν περιέχει τις $x(t)$ και $u(t)$, κάθε λύση της μπορεί να βρεθεί και συνεπώς να βρεθούν και όλοι οι έλεγχοι $u(t)$ που είναι λύσεις της (4.11).

Θεώρημα 4.2.2 *Η σχέση (4.11) ορίζει μοναδικά τον έλεγχο $u(t)$ για κάθε μη-τετριμμένη λύση $\psi(t)$ της (4.10). Επιπλέον οι $u(t)$ είναι κατά τμήματα σταθεροί και όλες οι τιμές τους είναι κορυφές του πολυέδρου U.*

Θα λύσουμε τη (4.8) σαν μη-ομογενή εξίσωση. Θεωρούμε

$$\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t) \tag{4.12}$$

να είναι το θεμελιώδες σύστημα λύσεων της ομογενούς εξίσωσης

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $\phi^i_j(t_0) = \delta^i_j$. Έστω $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (4.10) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $\psi^j_i(t_0) = \delta^i_j$. Τότε

$$(\psi^j(t), \phi_i(t)) = \delta^j_i \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{4.13}$$

Επιπλέον

$$\frac{d}{dt}(\psi^j(t), \phi_i(t)) = (-A^*\psi^j(t), \phi_i(t)) + (\psi^j(t), A\phi_i(t)) = 0$$

Θα βρούμε τη γενική λύση της (4.8) στη μορφή

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(t) c^\nu(t) \quad .$$

Με αντικατάσταση στη (4.8) παίρνουμε

$$\sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(t) \frac{dc^\nu(t)}{dt} = Bu(t) \quad .$$

Από την (4.13) έχουμε

$$\frac{dc^i(t)}{dt} = (\psi^j(t), Bu(t)) \quad .$$

Συνεπώς η λύση της (4.8) για αυθαίρετο έλεγχο $u(t)$ και αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots x_0^n)$ γράφεται

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(t) \Big(x_0^\nu + \int_{t_0}^{t} (\psi^\nu(s), Bu(s)) ds \Big) \tag{4.14}$$

Θεώρημα 4.2.3 *Έστω $u_1(t)$ και $u_2(t)$ δύο βέλτιστοι έλεγχοι στα διαστήματα $t_0 \leq t \leq t_1$ και $t_0 \leq t \leq t_2$ αντίστοιχα που μεταφέρουν το x_0 στο x_1. Τότε $u_1(t) \equiv u_2(t)$, $t_1 = t_2$ για $t_0 \leq t \leq t_1$.*

Απόδειξη

Προφανώς $t_1 = t_2$. Αν ίσχυε ότι $t_1 < t_2$ τότε ο έλεγχος $u = u_2(t)$ δεν θα ήταν βέλτιστος. Αφού και οι δύο τροχιές ξεκινάνε από το x_0 ως προς τους ελέγχους $u_1(t)$ και $u_2(t)$ και περνάνε από το x_1 τη χρονική στιγμή $t = t_1$ έχουμε από την (4.14)

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(t_1) \Big(x_0^\nu + \int_{t_0}^{t_1} (\psi^\nu(t), Bu_1(t)) dt \Big) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(t_1) \Big(x_0^\nu + \int_{t_0}^{t_1} (\psi^\nu(t), Bu_2(t)) dt \Big) \end{aligned}$$

ή

$$\sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(t_1) \ \Big[\int_{t_0}^{t_1} (\psi^\nu(t), Bu_1(t)) dt - \int_{t_0}^{t_1} (\psi^\nu(t), Bu_2(t)) dt \Big] = 0 \quad .$$

Εφόσον τα $\phi_1(t_1), \ldots, \phi_n(t_1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα συνεπάγεται ότι

$$\int_{t_0}^{t_1} (\psi^i(t), Bu_1(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} (\psi^i(t), Bu_2(t))dt \;\; i = 1, \ldots, n \tag{4.15}$$

Για τον έλεγχο $u_1(t)$ αντιστοιχεί μια διανυσματική συνάρτηση $\psi(t)$ που ικανοποιεί την (4.11) και είναι λύση της (4.10). Έστω $\psi_0 = (\psi_{1_0}, \ldots, \psi_{n_0})$ η αρχική τιμή της συνάρτησης στο $t = t_0$. Τότε η $\psi(t)$ γράφεται στη μορφή

$$\psi(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{\nu_0} \psi^{\nu}(t) \;\; .$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.15) με ψ_{i_0} για το σύνολο των i παίρνουμε

$$\int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), Bu_1(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), Bu_2(t))dt \tag{4.16}$$

Όμως σύμφωνα με την (4.11) και τον ορισμό του $P(\psi)$ έχουμε στο διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$

$$(\psi(t), Bu_1(t)) = P(\psi(t)) \geq (\psi(t), Bu_2(t)) \;\; .$$

Άρα από την (4.16) παίρνουμε ότι

$$(\psi(t), Bu_1(t)) = (\psi(t), Bu_2(t)) \;\; .$$

Συνεπώς, οι έλεγχοι $u_1(t)$ και $u_2(t)$ ικανοποιούν την (4.11) για την ίδια $\psi(t)$. Άρα $u_1(t) \equiv u_2(t)$.

■

Θα ονομάζουμε έναν έλεγχο $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ ακρότατο αν ικανοποιεί τη συνθήκη (4.11), όπου $\psi(t)$ μια μη τετριμμένη λύση της (4.10). Για να βρούμε το βέλτιστο έλεγχο που μεταφέρει το x_0 στο x_1, θα πρέπει να βρούμε όλους τους ελέγχους που μεταφέρουν το x_0 στο x_1 κι έπειτα να διαλέξουμε το μοναδικό ακρότατο έλεγχο που κάνει τη μεταφορά αυτή στον ελάχιστο χρόνο. *Μπορούν όμως να υπάρχουν πολλοί ακρότατοι έλεγχοι που μεταφέρουν το x_0 στο x_1;* Το επόμενο Θεώρημα μας δίνει μια περίπτωση όπου ο ακρότατος έλεγχος είναι μοναδικός.

Θεώρημα 4.2.4 *Έστω ότι η αρχή του E_r είναι εσωτερικό σημείο του πολυέδρου U. Θεωρούμε $u_1(t)$ και $u_2(t)$ δύο ακρότατους ελέγχους στα διαστήματα $t_0 \leq t \leq t_1$ και $t_0 \leq t \leq t_2$ αντίστοιχα, που μεταφέρουν το x_0 στην αρχή $x_1 = 0$ του $\mathbf{X}$. Τότε $t_1 = t_2$, $u_1(t) \equiv u_2(t)$ για $t_0 \leq t \leq t_1$.*

Απόδειξη

Έστω $x_1(t)$ και $x_2(t)$ τροχιές ως προς τους ελέγχους $u_1(t)$ και $u_2(t)$ που ξεκινάνε από το σημείο $x_)$ το χρόνο t_0. Από υπόθεση $x_1(t_1) = 0$ και $x_2(t_2) = 0$ ή από τη σχέση (4.14)

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(t_1)\Big(x_0^\nu + \int_{t_0}^{t_1} (\psi^\nu(t), Bu_1(t))dt\Big) &= 0 \\ \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(t_2)\Big(x_0^\nu + \int_{t_0}^{t_2} (\psi^\nu(t), Bu_2(t))dt\Big) &= 0\end{aligned}$$

Αφού τα διανύσματα (4.12) είναι γραμμικά ανεξάρτητα παίρνουμε

$$-x_0^i = \int_{t_0}^{t_1} (\psi^i(t), Bu_1(t))dt = \int_{t_0}^{t_2} (\psi^i(t), Bu_2(t))dt \tag{4.17}$$

για $i = 1, \ldots, n$. Ας υποθέσουμε ότι $t_1 > t_2$. Έστω $\psi(t)$ λύση της (4.10) τέτοια ώστε

$$(\psi(t), Bu_1(t)) = P(\psi(t))$$

για $t_0 \le t \le t_1$. Θεωρούμε όπως και στο Θεώρημα (3.2.2)

$$\psi(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{\nu_0}\psi^\nu(t) \ .$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.17) με ψ_{i_0} παίρνουμε

$$\int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), Bu_1(t))dt = \int_{t_0}^{t_2} (\psi(t), Bu_2(t))dt \ . \tag{4.18}$$

Για κάθε λύση $\psi(t)$ της (4.10) έχουμε ότι

$$P(\psi(t)) \ge 0 \ . \tag{4.19}$$

Αφού η αρχή του E_r είναι εσωτερικό σημείο του U, η $(\psi(t), Bu)$ ως συνάρτηση του u είναι ή ταυτοτικά μηδέν είτε μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές.

Από τις (4.18) και (4.19) έχουμε

$$\int_{t_0}^{t_2} (\psi(t), Bu_1(t))dt \le \int_{t_0}^{t_2} (\psi(t), Bu_2(t))dt \ .$$

Άρα, όπως και στο Θεώρημα (3.2.2) παίρνουμε $u_1(t) \equiv u_2(t)$ στο διάστημα $t_0 \le t \le t_2$.

Λαμβάνοντας υπ όψιν την (4.18) έχουμε ότι

$$\int_{t_1}^{t_2} (\psi(t), Bu_1(t))dt = 0 \tag{4.20}$$

Επιπλέον $P(\psi(t)) = 0$ μόνο αν η $(\psi(t), Bu)$ μηδενίζεται στο U. Άρα $P(\psi(t)) = 0$ μόνο για ένα πεπερασμένο πλήθος t. Συνεπώς από τις σχέσεις (4.19) και (4.20) έχουμε ότι $t_1 = t_2$.

∎

Παρατήρηση 4.2.1 *Μέχρι στιγμής χρησιμοποιήσαμε μόνο τη συνθήκη '1' του PMP για time-optimal problems. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η συνθήκη '2' είναι συνέπεια της υπόθεσης του παραπάνω Θεωρήματος. Από τις σχέσεις (4.9), (4.11) και (4.19) καθώς και από την (4.5) έχουμε*

$$\begin{aligned} M(\psi(t_1, x(t_1)) &= H(\psi(t_1), x(t_1), u(t_1)) \\ &= (\psi(t_1), Ax(t_1)) + (\psi(t_1), Bu(t_1)) \\ &= (\psi(t_1), Ax_1) + P(\psi(t_1)) = P(\psi(t_1)) \geq 0 \end{aligned}$$

αφού $x_1 = 0$.

4.2.3 Ύπαρξη

Θεώρημα 4.2.5 *Έστω το σύστημα (4.8). Αν υπάρχει τουλάχιστον ένας έλεγχος που μεταφέρει το σημείο του χώρου φάσεων από το x_0 στο x_1, τότε υπάρχει βέλτιστος έλεγχος που μεταφέρει το σημείο του χώρου φάσεων από το x_0 στο x_1.*

Απόδειξη

Θεωρούμε την κλάση των αποδεκτών ελέγχων D. Ορίζουμε $D_{\max}$ να είναι η μεγαλύτερη κλάση ελέγχων, δηλαδή το σύνολο όλων των μετρήσιμων ελέγχων. Με $D_{\min}$ ορίζουν τη μικρότερη κλάση ελέγχων, δηλαδή το σύνολο όλων των κατά τμήματα σταθερών ελέγχων. Έχουμε $D_{\min} \subset D \subset D_{\max}$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει βέλτιστος έλεγχος στο $D_{\max}$ τέτοιος ώστε να μεταφέρει το σημείο του χώρου φάσεων από το x_0 στο x_1. Έστω Δ το σύνολο όλων των ελέγχων στο $D_{\max}$. Το σύνολο αυτό είναι με κενό από υπόθεση. Σε κάθε έλεγχο $u(t) \in \Delta$ αντιστοιχεί ένας χρόνος μετάβασης από το x_0 στο x_1. Έστω t^* το μεγαλύτερο κάτω φράγμα όλων των χρόνων μετάβασης για $u(t) \in \Delta$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $u^*(t)$ που μεταφέρει το x_0 στο x_1 σε χρόνο t^*. Θεωρούμε ελέγχους στο διάστημα $0 \leq t \leq t_1$.

Διαλέγουμε μια ακολουθία $\{u_k(t)\}$ στο Δ τέτοια ώστε ο $u_k(t)$ να δίνεται στο $0 \le t \le t_k$ όπου

$$\lim_{k\to\infty} t_k = t^* \ .$$

Έστω $x_k(t)$ η τροχιά ως προς τον έλεγχο $u_k(t)$ που ξεκινά από το x_0 το χρόνο $t = 0$. Τότε $x_k(t_k) = x_1$. Έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \big(\phi_\nu(t^*) - \psi_\nu(t_k)\big)\Big(x_0^\nu + \int_0^{t_k} (\psi^\nu(t), Bu_k(t))dt\Big) = 0 \ .$$

Ομοίως

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(t^*)\Big(\int_{t^*}^{t_k} (\psi^\nu(t), Bu_k(t))dt\Big) = 0 \ .$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(t^*)\Big(\int_0^{t^*} (\psi^\nu(t), Bu_k(t))dt\Big) &= \\ = \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(t_k)\Big(x_0^\nu + \int_0^{t_k} (\psi^\nu(t), Bu_k(t))dt\Big) & \\ = \lim_{k\to\infty x_k}(t_k) = x_1 & \end{aligned} \tag{4.21}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (4.14).

Θεωρούμε τώρα τον L_2 όλων των μετρήσιμων και τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[0, t^*]$. Η $u_k^i(t)$ στο $[0, t^*]$ ανήκει στον L_2 (μετρήσιμη και φραγμένη). Όλες οι $u_k^i(t)$ για $k = 1, 2, \ldots$ ανήκει σε κάποια σφαίρα στον L_2. Επομένως η $\{u_k^i(t)\}$ έχει ασθενή συγκλίνουσα υπακολουθία. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία

$$u_1^i(t), u_2^i(t), \ldots, u_k^i(t), \ldots \tag{4.22}$$

συγκλίνει σε κάποια $u^i(t)$ για $i = 1, \ldots, r$. Θα δείξουμε ότι η

$$u^*(t) = (u^1(t), \ldots, u^r(t))$$

ανήκει στο U για όλα τα t.

Έστω η $(r-1)$-διάστασης έδρα Γ του πολυέδρου U κι έστω $L(u) = \sum_{\rho=1}^{r} b_\rho u^\rho$ η γραμμική μορφή σε μεταβλητές $u^1, \ldots, u^r$ τέτοια ώστε η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το Γ έχει τη μορφή $L(u) = b$ και το U βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $L(u) \le b$. Επιπλέον ορίζουμε με m να είναι το σύνολο όλων των $t \in [0, t^*]$ για τα οποία $L(u^*(t)) > b$ και $v(t)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του m. Η συνάρτηση αυτή είναι μετρήσιμη και φραγμένη. Επομένως, λόγω της ασθενούς σύγκλισης της (4.22)

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{t^*} v(t)[L(u^*(t)) - L(u_k(t))]dt = 0 \ .$$

Επίσης, αφού $L(u^*(t))-L(u_k(t)) \geq L(u^*(t))-b > 0$ όταν $t \in m$ $[L(u_k(t)) \leq b]$ έχουμε $\mu(m) = 0$. Άρα σχεδόν για κάθε t στο $0 \leq t \leq t^*$ το $u^*(t)$ βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο, $L(u) \leq b$, με το U. Εφόσον το επιχείρημα αυτό μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε έδρα Γ του U έχουμε ότι $u^*(t) \in U$ σχεδόν για κάθε t.

Αλλάζοντας τις τιμές της $u^*(t)$ σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου δεν θα επηρεάσει την ασθενή σύγκλιση της (4.22) στις συναρτήσεις $u^i(t)$, $i = 1, \ldots, r$. Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u^*(t) \in U$ για κάθε t στο $0 \leq t \leq t^*$. Από τη σχέση (4.21) και την ασθενή σύγκλιση της (4.22) έχουμε

$$\sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(t^*)\Big(x_0^\nu + \int_0^{t^*} (\psi^\nu(t), Bu^*(t))dt\Big) = x_1 \ .$$

Άρα ο $u^*(t)$ είναι μετρήσιμος βέλτιστος έλεγχος που μεταφέρει το x_0 στο x_1, δηλαδή υπάρχει u στο $D_{\max}$. Από την Αρχή Μεγίστου έχουμε ότι υπάρχει λύση $\psi(t)$ της (4.10) έτσι ώστε

$$(\psi(t), Bu^*(t)) = P(\psi(t))$$

σχεδόν παντού στο $0 \leq t \leq t^*$. Συνεπώς από το Θεώρημα (4.2.2) ο $u^*(t)$ μπορεί να θεωρηθεί κατά τμήματα σταθερός, δηλαδή ανήκει στο $D_{\min}$ καθώς και στο D. Αυτός ο έλεγχος μας μεταφέρει το x_0 στο x_1 στον ελάχιστο χρόνο σε σχέση με τους ελέγχους του $D_{\max}$. Άρα υπάρχει βέλτιστος έλεγχος στο D.

Βιβλιογραφία

[AE-T] **Άριστος Έλεγχος**, Σημειώσεις για το μάθημα ‘Μαθηματικός Βέλτιστος έλεγχος ’,Ι. Τσινιάς, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.

[PBGM] **The Mathematical Theory of Optimal Processes**, L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, John Wiley & Sons, 1962.

[OCT-MS] **Introduction to Optimal Control Theory**, Jack Macki, Aaron Straus, Springer, 1982.

[FOC-LM] **Foundations of Optimal Control Theory**, E.B. Lee - L. Markus, Wiley, 1967.

[HJ-B] **Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations and Optimal Control Problems**, Lecture notes, Alberto Bressan, 2011

[MP-G] **Discovery of the Maximum Principle in Optimal Control**, R.V. Gamkrelidze, Journal of Dynamical and Control Systems 5, no.4 (1999).

[RM-Y] **Russian Mathematicians in the 20th Century**, Yakov Sinai, World Scientific, 2003

[FA.R-N] **Functional Analysis**, F. Riesz, B.V. Sz.-Nagy, Blackie & Son Limited, 1955

[MT-F] **Measure Theory**, Volume 2, D.H. Fremlin, 2003

[CO-BV] **Convex Optimization**, S. Boyd - L. Vandenberghe, Cambridge University Press, 2004

[RA-C] **Real Analysis**, N. L. Carothers, Cambridge University Press, 2000

[TRV-N] **Theory of Functions of A Real Variable**, Volume 1, I.P. Natanson, 1964

[CVOC-L] **Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction**, D. Liberzon, 2009

[NDG-B] **A Tutorial to Noncooperative Differential Games**, Alberto Bressan, Lecture Notes, 2010

[GA-LL] **Geometric Approach to Pontryagin's Maximum Principle**, M. Barbero Linan, M.C. Munoz-Lecanda, 2008

[OC-FK] **Optimal Control (Module III)**, Frank Kappel, Lecture Notes, PhD-Course "Optimization", August 29 - September 23, 2011