

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



**Δ.Π.Μ.Σ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«Αναλυτική και Υπολογιστική Μελέτη Δοκού σε
Ασύμμετρη Κάμψη Τεσσάρων Σημείων από
Κοκκώδη Σύνθετα Υλικά»**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

Δρ. Ευστάθιος Θεοτόκογλου

Καθηγητής ΕΜΠ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ:

Δημήτριος Βούζιος

ΑΘΗΝΑ 2022

Δημήτριος Βούζιος

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η παρούσα εργασία αφιερώνεται στην οικογένεια μου όπου δείχνουν διαρκώς την απεριόριστη αγάπη τους και στην σύντροφό μου Βικτώρια για την υπομονή της και την συμπαράσταση της στην διάρκεια του Μεταπτυχιακού.

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	9
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	10
ABSTRACT	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ^ο	13
ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ	13
1.1 Γενικά περί σύνθετων υλικών.....	13
1.1.1 Ιστορική εξέλιξη των σύνθετων υλικών.....	13
1.1.2 Ορισμός σύνθετου υλικού	14
1.1.3 Ταξινόμηση των σύνθετων υλικών.....	15
1.1.4 Κοκκώδη σύνθετα υλικά	15
1.1.5 Εποξειδική Ρητίνη.....	16
1.1.6 Τα εγκλείσματα και επίδρασή τους στις ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών	16
1.1.7 Ποιοτικός έλεγχος.....	16
1.1.8 Πλεονεκτήματα των σύνθετων υλικών.....	17
1.2 Προς Μελέτη Σύνθετα Υλικά	18
1.3 Κάμψη Δοκού.....	18
1.3.1 Ορισμός.....	18
1.3.2 Ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων(4) σημείων.....	20
1.4 Αντικειμενικός Σκοπός της Εργασίας	23
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο.....	25
ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ.....	25
2.1 Εισαγωγή στη μέθοδο της Θεωρίας Ελαστικότητας	25
2.1.1 Επίπεδη Θεωρία Ελαστικότητας.....	26
2.1.2 Τασική συνάρτηση του Airy	26
2.1.3 Επίλυση διαφορικής εξίσωσης με την πολυωνυμική μορφή συναρτήσεων ...	29
2.2 Επίλυση της κάμψης τριών σημείων με τη χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας.....	30
2.2.1 Επιλογή κατάλληλου πολυωνύμου ως τασική συνάρτηση για 3-Σημείων.....	30
2.2.2 Οριακές συνθήκες και Τασική συνάρτηση για 3-Σημείων.....	31
2.2.3 Βέλος λόγω κάμψης για 3-Σημείων.....	32
2.2.4 Βέλος λόγω διάτμησης για 3-Σημείων.....	34
2.2.5 Συνολικό βέλος για 3-Σημείων	35

2.3	Επίλυση της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων με τη χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας.....	35
2.3.1	Επιλογή κατάλληλου πολυωνύμου ως τασική συνάρτηση για 4-Σημείων.....	35
2.3.2	Οριακές συνθήκες και Τασική συνάρτηση για 4-Σημείων.....	36
2.3.3	Βέλος λόγω κάμψης για 4-Σημείων.....	38
2.3.4	Βέλος λόγω διάτμησης για 4-Σημείων.....	40
2.3.5	Συνολικό βέλος για 4-Σημείων.....	41
2.4	Σύγκριση παραμέτρων για 4-Σημείων με τη χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας...	41
2.4.1	Σύγκριση βέλους κάμψης με μήκος δοκιμίου.....	42
2.4.2	Σύγκριση βέλους κάμψης με πάχος δοκιμίου.....	43
2.4.3	Σύγκριση βέλους κάμψης με ασκούμενο φορτίο.....	44
2.4.4	Σύγκριση βέλους κάμψης με συντελεστή φόρτισης λ.....	45
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ^ο	47
	ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	47
3.1	Εισαγωγή στη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	47
3.2	Ανάλυση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων με το ANSYS	47
3.3	Μοντελοποίηση Δοκού για 3-Σημείων.....	48
3.3.1	Ανάλυση Ποιότητας Διακριτοποίησης για 3-Σημείων.....	49
3.3.2	Μοντελοποίηση στο ANSYS για 3-Σημείων.....	52
3.3.3	Αποτελέσματα από την ανάλυση με Π.Σ. για 3-Σημείων.....	54
3.4	Μοντελοποίηση Δοκού για 4-Σημείων.....	58
3.4.1	Ανάλυση Ποιότητας Διακριτοποίησης για 4-Σημείων.....	58
3.4.2	Μοντελοποίηση στο ANSYS για 4-Σημείων.....	62
3.4.3	Αποτελέσματα από την ανάλυση με Π.Σ. για 4-Σημείων.....	66
3.4.3.1	Βέλος Κάμψης.....	66
3.4.3.2	Ορθές Τάσεις σ_x	70
3.4.3.3	Ορθές Τάσεις σ_y	74
3.4.3.4	Διατμητικές Τάσεις τ_{xy}	77
3.5	Σύγκριση παραμέτρων για 4-Σημείων με τη χρήση των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	80
3.5.1	Σύγκριση βέλους κάμψης με μήκος δοκιμίου.....	80
3.5.2	Σύγκριση βέλους κάμψης με πάχος δοκιμίου.....	81
3.5.3	Σύγκριση βέλους κάμψης με ασκούμενο φορτίο.....	82
3.5.4	Σύγκριση βέλους κάμψης με συντελεστή φόρτισης λ.....	83
3.5.5	Σύγκριση ορθής τάσης σ_x κατά το πάχος της δοκού	84

3.5.6	Σύγκριση διατμητικής τάσης τ_{xy} κατά το πάχος της δοκού	85
3.5.7	Σύγκριση της κατανομής των διατμητικών τάσεων τ_{xy} κατά το πάχος της δοκού δεξιά και αριστερά από το σημείο Β.....	86
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4°		89
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ		89
4.1	Γενικά.....	89
4.2	Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ των μεθόδων Θεωρίας Ελαστικότητας και Πεπερασμένων Στοιχείων για 4-Σημείων.....	89
4.2.1	Σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 0%	90
4.2.2	Σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%	94
4.2.3	Σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 10%	98
4.2.4	Σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 15%	102
4.2.5	Σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 20%	106
4.2.6	Σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%	110
4.2.7	Συγκεντρωτική σύγκριση της κατανομής των τάσεων κατά το πάχος της δοκού 114	
4.3	Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ 3-Σημείων και 4-Σημείων	116
4.3.1	Σύγκριση βέλους κάμψης.....	117
4.3.2	Σύγκριση των τάσεων	121
4.3.3	Σύγκριση βέλους κάμψης με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος για 3-Σημείων	123
4.3.4	Σύγκριση βέλους κάμψης με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος για 4-Σημείων	124
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5°		125
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....		125
5.1	Συμπεράσματα.....	125
5.2	Δυνατότητες Περαιτέρω Μελέτης	127
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....		129

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Εργασία πραγματοποιήθηκε κατά την φοίτησή μου στο Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών “Υπολογιστική Μηχανική” με κατεύθυνση ροής στα Στερεά του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου με συντονίζουσα τη σχολή των Χημικών Μηχανικών.

Η εργασία χωρίζεται σε δύο κύρια μέρη, όπου και στα δύο επιλύεται το πρόβλημα της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων για ισότροπο κοκκώδες σύνθετο υλικό αλλά με διαφορετική μέθοδο. Στο πρώτο μέρος πραγματοποιείται αναλυτική μελέτη του προβλήματος με την μέθοδο της Θεωρίας Ελαστικότητας, δηλαδή υπολογίζονται το βέλος κάμψης, οι ορθές και οι διατμητικές τάσεις στην δοκό μεταβάλλοντας διάφορες παραμέτρους, όπως είναι ο συντελεστής φόρτισης λ , καθώς και άλλες που αφορούν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δοκού.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας, το πρόβλημα της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων για ισότροπο κοκκώδες σύνθετο υλικό επιλύθηκε με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Ο σκοπός επίλυσης και με τις δύο μεθόδους είναι η σύγκριση της μηχανικής συμπεριφοράς του υλικού.

Η εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. Ε. Ε. Θεοτόκογλου, τον οποίο και ευχαριστώ θερμά για την πολύτιμη βοήθειά του και τον χρόνο που μου αφιέρωσε καθ’ όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον καθηγητή κ. Α. Σιδερίδη για την βοήθεια του στο κομμάτι της αναλυτικής μελέτης των σύνθετων υλικών και για την γενικότερη συμβολή του στην υλοποίηση της παρούσας εργασίας. Επίσης θα ήθελα να τον ευχαριστήσω ως άνθρωπο για τις πολύτιμες συμβουλές, το ακόρεστο ενδιαφέρον και την απέραντη αισιοδοξία και αγάπη που πρόσφερε απλόχερα σε όλο αυτό το χρονικό διάστημα που συνεργαστήκαμε σε αυτή την Μεταπτυχιακή Εργασία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μελέτη της παρούσας εργασίας εστιάζει στην ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων(4) σημείων σε δοκό αποτελούμενη από κοκκώδες σύνθετο, εφαρμόζοντας την παραδοχή ότι είναι μακροσκοπικά ισότροπο. Ακολουθεί η συνοπτική παρουσίαση της δομής της εργασίας καθώς και το περιεχόμενο του κάθε κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 1: Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται μια εισαγωγή στα σύνθετα υλικά, εστιάζοντας στα κοκκώδη υλικά και ακολουθεί μια συνοπτική ανάλυση της μηχανικής τους. Ακόμα, περιλαμβάνει την πρώτη λύση του προβλήματος με την θεωρία της Αντοχής των Υλικών.

Κεφάλαιο 2: Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η επίλυση του προβλήματος της κάμψης τριών(3) σημείων με την μέθοδο της Θεωρία Ελαστικότητας. Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο από το ευκολότερο πρόβλημα που προαναφέρθηκε επιλύουμε το κύριο πρόβλημά μας, αυτό της ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων(4) σημείων.

Κεφάλαιο 3: Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο ακολουθεί η δεύτερη μέθοδος επίλυσης, αυτής των Πεπερασμένων Στοιχείων. Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν με την βοήθεια του λογισμικού πακέτου «ANSYS Mechanical APDL». Επίσης, περιλαμβάνονται και οι χρωματικές απεικονίσεις των μεγεθών που υπολογίζονται από το ANSYS έτσι ώστε να γίνει ευκολότερα αντιληπτή η κατανομή τους στο δοκίμιο.

Κεφάλαιο 4: Σε αυτό το κεφάλαιο πραγματοποιείται η σύγκριση των δύο μεθόδων που προαναφέρθηκαν. Παρατίθενται συγκεντρωτικά διαγράμματα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν και από τις δύο μεθόδους διευκολύνοντας την εξαγωγή συμπερασμάτων ως προς την σύγκλισή τους, καθώς και ερμηνεία των λόγων μη σύγκλισής τους.

Κεφάλαιο 5: Στο τελευταίο κεφάλαιο έχουμε ανακεφαλαίωση των συμπερασμάτων από όλα τα κεφάλαια. Επίσης, αναφέρονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα συμπληρωματική στην παρούσα εργασία.

ABSTRACT

The study of this thesis focuses on the asymmetric four points (4) bending particulate composite beams, applying the assumption that it is macroscopically isotropic. The following is a synopsis of the thesis accompanied by each chapter's content.

Chapter 1: This chapter presents an introduction to composites, emphasizing on particulate materials, followed by a brief analysis of the behavior of those materials. It also includes the first solution of the problem with the theory of Mechanics of Materials.

Chapter 2: This chapter presents the solution of the problem of three (3) points bending with the method of Theory of Elasticity. Then, using the same method from the easiest problem mentioned above, we solve our main problem, that of the asymmetric four points (4) bending.

Chapter 3: In this chapter follows the second method of solving, that of Finite Elements. The calculations were performed with the help of the software package "ANSYS Mechanical APDL". Also, included are chromatic visuals of the sizes calculated by ANSYS so that their distribution in specimen can be more easily understood.

Chapter 4: In this chapter the comparison of the two methods mentioned above is made. Summary diagrams are presented with the results obtained from all two methods, facilitating the drawing of conclusions regarding their convergence, as well as interpretation of the reasons for their non-convergence.

Chapter 5: In the last chapter we have a summary of the conclusions from all the previous chapters. Suggestions for future research complementary to the present thesis are also mentioned.

ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

1.1 Γενικά περί σύνθετων υλικών

1.1.1 Ιστορική εξέλιξη των σύνθετων υλικών

Ο άνθρωπος ξεκίνησε να κατασκευάζει και να χρησιμοποιεί σύνθετα υλικά πριν από χιλιάδες έτη. Σύμφωνα με την Βίβλο οι Εβραίοι προκειμένου να αυξήσουν την αντοχή των λασπότουβλων πρόσθεσαν άχυρο. Επίσης, οι Αιγύπτιοι δημιούργησαν ένα είδος "κόντρα πλακέ" όταν παρατήρησαν ότι ο κατάλληλος συνδυασμός στρωμάτων ξύλου μπορεί να βελτιώσει την αντοχή σε διάφορες κατευθύνσεις. Ακόμα, στην Αίγυπτο και στην Μεσοποταμία χρησιμοποιούσαν σχεδίες κατασκευασμένες από καλάμι παπύρου και άσφαλτο. Οι Ασσύριοι κατασκεύαζαν πλωτές γέφυρες, οι οποίες αποτελούνταν από σανίδες εμποτισμένες με αδιάβροχη άσφαλτο. Κατά την περίοδο του Μεσαίωνα κατασκευάστηκαν όπλα και ασπίδες από στρώματα διαφόρων μετάλλων.

Ωστόσο, τον 20 αιώνα αυξήθηκε ραγδαία η χρήση και ανάπτυξη των σύνθετων υλικών. Η αύξηση της χρήσης τους στην αεροδιαστημική βιομηχανία ξεκίνησε την δεκαετία του 1960 από την αεροπορία των Η.Π.Α. με τη χρήση ινών βορίου. Η εκτεταμένη πλέον χρήση τους παρατηρείται και από το γεγονός ότι το Boeing 767 κατασκευάστηκε από περίπου δύο τόνους σύνθετο υλικό, ενώ και το Antonov 124 κατασκευάστηκε από περίπου πεντέμισι τόνους σύνθετου υλικού. Συνεπώς, καταλαβαίνουμε ότι σε όλα τα αεροσκάφη είναι μεγάλη η χρήση σύνθετων υλικών [1]. Η εκτεταμένη τους όμως χρήση δεν περιορίζεται μόνο στην αεροπορική βιομηχανία αλλά και σε άλλους τομείς της σύγχρονης βιομηχανίας. Για παράδειγμα στα αυτοκίνητα, ναυτικά σκάφη, ποδήλατα, αθλητικά είδη (όπως ρακέτες του τένις κ.ά.) και οποιοδήποτε άλλο εξάρτημα θέλουμε να έχει μικρό βάρος, μεγάλη αντοχή και ακαμψία.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο άνθρωπος από τα πρώτα χρόνια της υπάρξεως του στη γη είχε ενστικτωδώς αντιληφθεί την έννοια του σύνθετου υλικού, δηλαδή ότι

μπορούσε συνδυάζοντας τουλάχιστον δύο υλικά να δημιουργήσει ένα σύνθετο υλικό με καλύτερες ιδιότητες από τα συστατικά του [2].

Τέλος, λόγω της εκτεταμένης χρήση των σύνθετων υλικών την τελευταία εικοσαετία σε κάθε είδους κατασκευαστικές εφαρμογές καθίσταται πλέον επιτακτική η ανάγκη κατανόησης της μηχανικής συμπεριφοράς τους από τους μηχανικούς, οι οποίοι και καλούνται να επιλέξουν ανάμεσα στην πληθώρα τύπων συνθέτων υλικών για τις ανάγκες σχεδιασμού και κατασκευής προηγμένων εφαρμογών [3].

1.1.2 Ορισμός σύνθετου υλικού

Ως σύνθετο υλικό νοείται ένα υλικό που αποτελείται από τουλάχιστον δύο υλικά ή φάσεις. Φάση ονομάζεται κάθε ομογενές τμήμα του συνθέτου υλικού. Ωστόσο απαραίτητη προϋπόθεση για να θεωρείται ένα υλικό σύνθετο είναι αφενός οι ιδιότητες του ενός υλικού να είναι τουλάχιστον πενταπλάσιες από τις ιδιότητες του άλλου και αφετέρου η περιεκτικότητα κατ' όγκο του ενός να μην είναι μικρότερη του 10%. Όσον αφορά τις φυσικές ιδιότητες του σύνθετου υλικού συνήθως είναι καλύτερες από αυτές των επιμέρους υλικών καθώς επίσης μπορεί και να αποκτήσει ιδιότητες που δεν διαθέτε κανένα από τα επιμέρους υλικά. Ένας πιο ολοκληρωμένος ορισμός που μπορούμε να δώσουμε είναι "Σύνθετο υλικό ορίζεται εκείνο το υλικό το οποίο αποτελείται από δύο ή περισσότερα υλικά συνδεδεμένα μακροσκοπικά ή μικροσκοπικά, έτσι ώστε να προκύπτει ένα πολυφασικό σύστημα -το σύνθετο υλικό- με φυσικές ιδιότητες διαφορετικές από τις φυσικές ιδιότητες των αρχικών υλικών, τα οποία δύνανται όμως σε πολλές περιπτώσεις να διατηρούν αρκετές από τις αρχικές τους φυσικές ιδιότητες" [4].

Τα σύνθετα υλικά αποτελούνται από τουλάχιστον μία μήτρα και ένα έγκλεισμα.

Ως μήτρα (Matrix) ορίζεται κάθε συνεχής φάση, η οποία αποτελείται από ένα ή περισσότερα συστατικά του συνθέτου. Ο ρόλος της έγκειται φυσικά στην σύνδεση μεταξύ των εγκλεισμάτων και στην μεταφορά των τάσεων στο εσωτερικό του συνθέτου υλικού.

Ως έγκλεισμα (Reinforcement) ορίζεται κάθε ασυνεχής ή διάχυτη φάση, η οποία αποτελείται από ένα ή περισσότερα συστατικά του συνθέτου. Ο ρόλος του είναι η ενίσχυση του συνθέτου υλικού προσδίδοντάς του υψηλή ακαμψία και αντοχή.

1.1.3 Ταξινόμηση των σύνθετων υλικών

Τα σύνθετα υλικά ταξινομούνται με βάση τις ιδιότητες της μήτρας ή του εγκλείσματος.

Όσον αφορά την μορφή της μήτρας διακρίνονται σε:

- α. Σύνθετα υλικά με μεταλλική μήτρα (mmc: metal matrix composites).
- β. Σύνθετα υλικά με μη μεταλλική μήτρα:
 - Σύνθετα υλικά με κεραμική μήτρα (cmc: ceramic matrix composites).
 - Σύνθετα υλικά με οργανική μήτρα (pmc: polymer matrix composites).

Όσον αφορά την μορφή του εγκλείσματος διακρίνονται σε:

- α. Σύνθετα υλικά με έγκλεισμα υπό μορφή ινών (ινώδη σύνθετα υλικά, fibrous composites).
- β. Σύνθετα υλικά με έγκλεισμα υπό μορφή φύλλων (laminated composites).
- γ. Σύνθετα υλικά με έγκλεισμα σε μορφή κόκκων (κοκκώδη σύνθετα υλικά, particulate composites).
- δ. Συνδυασμός των παραπάνω.

1.1.4 Κοκκώδη σύνθετα υλικά

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά αποτελούνται από έγκλεισμα υπό μορφή κόκκων μέσα σε μια μήτρα, η οποία δύναται να είναι ένα οποιοδήποτε υλικό. Τόσο το έγκλεισμα όσο και η μήτρα μπορούν να είναι μεταλλικοί ή και όχι. Οπότε, οι πιθανοί συνδυασμοί που προκύπτουν μεταξύ του υλικού του εγκλείσματος και της μήτρας είναι οι εξής:

- α. Μεταλλικά εγκλείσματα – Μεταλλική μήτρα, π.χ. κόκκους μόλυβδου σε χαλκό και χάλυβα.
- β. Μεταλλικά εγκλείσματα – Μη μεταλλική μήτρα, π.χ. κόκκους σιδήρου σε εποξειδική ρητίνη.
- γ. Μη μεταλλικά εγκλείσματα – Μη μεταλλική μήτρα, π.χ. κόκκους πέτρας σε τσιμέντο.
- δ. Μη μεταλλικά εγκλείσματα – Μεταλλική μήτρα, π.χ. κόκκους καρβιδίου του βολφραμίου σε κοβάλτιο.

1.1.5 Εποξειδική Ρητίνη

Εποξειδική ρητίνη ονομάζεται κάθε ένωση που δημιουργείται από τουλάχιστον δύο εποξείδια. Ανήκει στην κατηγορία των θερμοσκληρυνόμενων ή θερμοσταθερών πολυμερών καθώς είναι προϊόν ατελούς πολυμερισμού, δηλαδή με την αύξηση της θερμοκρασίας μαλακώνουν ενώ η περαιτέρω αύξηση οδηγεί στον πλήρη πολυμερισμό τους και κατ' επέκταση στην τελική σκλήρυνσή τους. Επίσης, διακρίνονται σε δύο κατηγορίες με βάση την σύστασή τους, σε στερεές και ρευστές.

1.1.6 Τα εγκλείσματα και επίδρασή τους στις ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών

Τα εγκλείσματα είναι ανόργανα υλικά σε μορφή πούδρας σκόνης με μέση διάμετρο 0,15mm. Ακόμα, πρέπει να μην αντιδρούν με τη ρητίνη ή το μέσο σκλήρυνσης, γι' αυτό και είναι ουδέτερα ή ελαφρώς βασικά. Χρησιμοποιούνται μέσα σε μήτρα εποξειδικών ρητινών με σκοπό την βελτίωση των ιδιοτήτων του συνθέτου αλλά και την ελάττωση του κόστους του. Επίσης, η αύξηση της περιεκτικότητάς του εγκλείσματος οδηγεί σε αύξηση του ιξώδους της ρητίνης με αποτέλεσμα την μετατροπή της από υγρή μορφή σε στερεή. Τέλος, κατά την παραγωγή του συνθέτου τα εγκλείσματα θα πρέπει να θερμανθούν πριν ενσωματωθούν στην ρητίνη καθώς είναι πιθανόν να έχουν απορροφήσει υγρασία και αέρα.

1.1.7 Ποιοτικός έλεγχος

Κατά την παρασκευή των σύνθετων υλικών είναι πιθανό να υπάρξουν ατέλειες, οι οποίες επηρεάζουν τόσο την αντοχή όσο και την ακαμψία του σύνθετου υλικού. Συνεπώς, είναι επιτακτική η ανάγκη του ποιοτικού ελέγχου τους για τον καθορισμό αυτών των ατελειών. Ακολουθούν οι πιθανές ατέλειες που παρατηρούνται συχνότερα και επηρεάζουν τις μηχανικές ιδιότητες του σύνθετου υλικού[5]:

- Εγκλείσματα που προέρχονται από ξένα στο σύνθετο σωματίδια.
- Υπερβολική ύπαρξη ρητίνης μεταξύ των στρωμάτων
- Κενά εσωτερικά του συνθέτου, τα οποία προέρχονται από την παγίδευση αέρα ή την αποκόλληση των στρωμάτων ή την έλλειψη ρητίνης.

- Κατεστραμμένες ίνες.
- Ανομοιομορφία ως προς το πάχος.
- Λανθασμένη διεύθυνση των ινών στις στρώσεις.
- Ατελής πολυμερισμός της ρητίνης.
- Ζαρώματα και εξογκώματα, τα οποία προέρχονται από την περιτύλιξη των ινών και την ευθυγράμμιση των στρώσεων.
- Κενά στην μήτρα και δημιουργία πόρωσης.
- Μη αποδεκτές συνδέσεις μεταξύ των στρωμάτων.

1.1.8 Πλεονεκτήματα των σύνθετων υλικών

Κάθε υλικό διαθέτει μηχανικές και μη ιδιότητες, οι οποίες και φυσικά είναι πολύ σημαντικές. Όσο αφορά της μηχανικές ιδιότητες ενός υλικού είναι αυτές που περιγράφουν την συμπεριφορά του κάτω από την επίδραση εξωτερικών φορτίων και είναι οι εξής:

- Αντοχή.
- Ακαμψία.
- Ολκιμότητα.
- Σκληρότητα.
- Ερπυσμός.
- Χαλάρωση.
- Κόπωση.

Από την άλλη, οι μη μηχανικές ιδιότητες ενός υλικού είναι οι εξής:

- Θερμική συμπεριφορά.
- Πυκνότητα.
- Αντίσταση σε διάβρωση.

Τα σύνθετα υλικά συνήθως συνδυάζουν τις καλύτερες ιδιότητες των αρχικών υλικών από τα οποία κατασκευάστηκε καθώς και επιπλέον ιδιότητες, τις οποίες δεν διέθετε κανένα από τα αρχικά υλικά. Οι ιδιότητες των σύνθετων υλικών που προσπαθούμε να τους προσδώσουμε είναι οι εξής : αντοχή, ακαμψία, αντίσταση σε διάβρωση, αντίσταση σε κάθε είδους φθορά κατά τη χρήση τους, χαμηλό κόστος, μικρό βάρος,

καλύτερη συμπεριφορά σε κόπωση, θερμική μόνωση, θερμική αγωγιμότητα και ακουστική μόνωση.

1.2 Προς Μελέτη Σύνθετα Υλικά

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε μοντελοποίηση για σύνθετο υλικό αποτελούμενο από μήτρα εποξειδικής ρητίνης τύπου DGEBA (Diglycidyl Ether of Bisphenol A) και έγκλεισμα κόκκων σκόνης σιδήρου με μέσο μέγεθος κόκκων 0.15mm. Επίσης, έγινε ομοιόμορφη κατανομή του εγκλείσματος στη μήτρα με αποτέλεσμα να θεωρείται το σύνθετο ισότροπο Η περιεκτικότητα κατ' όγκο των εγκλεισμάτων σε σίδηρο μεταβλήθηκε από 0 έως 25%. Ακολουθεί ο πίνακας με τα χαρακτηριστικά του σύνθετου υλικού που χρησιμοποιήθηκε [6].

Ιδιότητες	Σύμβολα	Μονάδες	Σύνθετο					
Περιεκτικότητα κατ'όγκο του εγκλείσματος	U_f	%	0	5	10	15	20	25
Μέτρο Ελαστικότητας	E_c	GPa	3.5	4.33	4.86	5.24	6.17	7.14
Λόγος Poisson	v_c		0.360	0.355	0.351	0.347	0.342	0.337

Πίνακας 1.1

1.3 Κάμψη Δοκού

1.3.1 Ορισμός

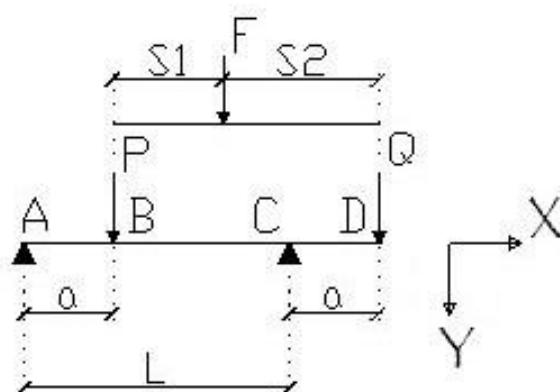
Ως κάμψη ορίζεται η εντατική κατάσταση μιας δοκού όταν της ασκείτε μία εγκάρσια φόρτιση. Μία τέτοια περίπτωση είναι μία αμφιέρεστη δοκό, στην οποία ασκείται ένα εγκάρσιο φορτίο και έχει ως αποτέλεσμα η δοκός να παραμορφωθεί στην διεύθυνση του φορτίου και ο άξονάς της να καμφθεί. Αυτή η παραμόρφωση ονομάζεται βέλος κάμψης. Κατά την κάμψη αναπτύσσονται καμπτικές ροπές που οδηγούν την καμπύλωση της δοκού και εσωτερικές τάσεις. Επίσης, κατά την κάμψη της δοκού

παρατηρούνται δύο ζώνες,. Την άνω ζώνη, η οποία καταπονείται σε θλίψη και την κάτω ζώνη, η οποία καταπονείται σε εφελκυσμό [7].

Λόγω της μη ύπαρξης κενών μεταξύ των θεωρητικών ινών η μετάβαση από την θλίψη στον εφελκυσμό γίνεται βαθμιαία, επομένως διάφορες ίνες σε ενδιάμεσες θέσεις της διατομής δεν καταπονούνται ούτε σε θλίψη ούτε σε εφελκυσμό αλλά σε διάτμηση η οποία πραγματοποιείται από την ολίσθηση κάθε οριζοντίου στρώματος σε σχέση με τα εκατέρωθέν του. Επομένως, η κάμψη μπορεί να αναλυθεί σε εφελκυσμό, θλίψη καθώς και διάτμηση. Οι ίνες που καταπονούνται μόνο σε διάτμηση ονομάζονται ουδέτερες με το επίπεδο που αποτελούν να ονομάζεται ουδέτερο [8].

1.3.2 Ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων(4) σημείων

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται το πρόβλημα της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων [9].



Σχήμα 1.1

Όπως, φαίνεται στο Σχήμα 1.1 στα σημεία A και C βρίσκονται οι στηρίξεις ενώ όσο αφορά τα φορτία στο σημείο B ασκείται το φορτίο P και στο σημείο D το φορτίο Q.

Ακολουθούν οι σχέσεις που ισχύουν:

$$P + Q = F \quad (1.1)$$

$$P(s_1 + s_2) - Fs_2 = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{s_2}{s_1} = \lambda \quad (1.3)$$

$$Q(L + \alpha) - PL + P\alpha = 0 \Leftrightarrow P = \frac{L + \alpha}{L - \alpha} Q \quad (1.4)$$

$$\alpha = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} L \quad (1.5)$$

όπου :

L: η απόσταση μεταξύ των στηρίξεων

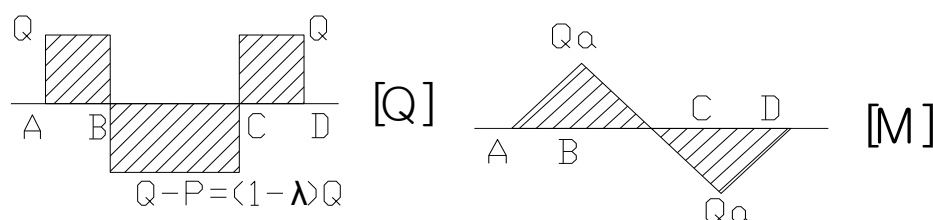
α: η απόσταση μεταξύ στήριξης και σημείου άσκησης του φορτίου

λ: συντελεστής φόρτισης

Ακολουθεί η ανάλυση της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων με την θεωρία της αντοχής των υλικών. Για την απλουστευμένη αυτή προσέγγιση για μικρό πάχος δοκού θα πρέπει να γίνουν οι εξής παραδοχές:

1. Για τις ορθές τάσεις, $\sigma_y = \sigma_z = 0$ και $\sigma_x = E\varepsilon_x$.
2. Για τις διατμητικές τάσεις $\tau_{xy} = 0$ στις επιφάνειες της δοκού και τ_{xy} ανεξάρτητη της z .

Ακολουθούν τα διαγράμματα καμπτικών ροπών και διατμητικών δυνάμεων.



Σχήμα 1.2

Σχήμα 1.3

Από τα ανωτέρω δύο σχήματα συμπεραίνουμε ότι :

1. Η τέμνουσα δύναμη στα τμήματα AB και CD παραμένει σταθερή και ισούται με την τιμή του φορτίου Q.
2. Η τέμνουσα δύναμη στο τμήμα BC παραμένει επίσης σταθερή αλλά ισούται με την τιμή της διαφοράς των φορτίων Q-P.
3. Η καμπτική ροπή λαμβάνει την μέγιστη τιμή της στα σημεία B και C, δηλαδή στο σημείο που ασκείται το φορτίο P και στο σημείο που βρίσκεται η δεύτερη στήριξη αντίστοιχα.

Θεωρώντας το υλικό ισότροπο, με βάση την απλή θεωρία κάμψης η τιμή της ορθής τάσης σ_x μεγιστοποιείται στα σημεία που η ροπή κάμψης μεγιστοποιείται και ισούται με [9] :

$$\max \sigma_x = \frac{6F(\lambda - 1)L}{(\lambda + 1)^2 bt^2} \quad (1.6)$$

όπου:

b: το πλάτος της δοκού.

t: το πάχος της δοκού.

Για την διατμητική τάση τ_{xy} η μέγιστη τιμή εμφανίζεται στον ουδέτερο άξονα της δοκού. Η θέση και η τιμή της εξαρτάται από την τιμή του συντελεστή φόρτισης λ [9]:

- Για $\lambda < 2$, βρίσκεται στο τμήμα AB (ή CD) της δοκού και ισούται με:

$$\max \tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{F}{(1+\lambda)bt} \quad (1.7)$$

- Για $\lambda > 2$, βρίσκεται στο τμήμα BC της δοκού και ισούται με:

$$\max \tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{|(1-\lambda)|F}{(1+\lambda)bt} \quad (1.8)$$

Συνεπώς, καταλαβαίνουμε ότι η αστοχία του υλικού εξαρτάται όχι μόνο από τις κρίσιμες τιμές των σ_x και σ_{xy} αλλά και από την τιμή του συντελεστή φόρτισης λ και του λόγου L/t . Όσο αφορά τον συντελεστή φόρτισης λ περιμένουμε για μικρές τιμές του λ να έχουμε καμπτική αστοχία ενώ για μεγάλες τιμές διατμητική αστοχία. Το αντίστροφο ισχύει για τον λόγο L/t , δηλαδή για μικρές τιμές του λόγου περιμένουμε διατμητική αστοχία ενώ για μεγάλες τιμές καμπτική αστοχία. Οπότε, η αστοχία καθορίζεται από τον συνδιασμό τους.

Διαιρώντας τις σχέσεις (1.6) και (1.8) έχουμε:

$$\frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{4L}{(1+\lambda)t} \quad (1.9)$$

Θα ορίσουμε ως σ_f και τ_f την τάση της καμπτικής και διατμητικής αστοχίας αντίστοιχα και ως σ_m και τ_m την καμπτική και διατμητική τάση αντίστοιχα. Στην συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι το υλικό μας έχει ελαστική συμπεριφορά και θα δημιουργήσουμε τον ακόλουθο λόγο, ο οποίος και προφανώς είναι σταθερός για κάθε υλικό :

$$C = \frac{\sigma_f}{\tau_f} = \frac{4L}{(1+\lambda)t} \quad (1.10)$$

Οπότε, στην περίπτωση καμπτικής αστοχίας, δηλαδή $\sigma_m = \sigma_f$ και $\tau_m < \tau_f$, έχουμε:

$$C < \frac{4L}{(\lambda+1)t} \quad (1.11)$$

ενώ στην περίπτωση διατμητικής αστοχίας, δηλαδή $\tau_m = \tau_f$ και $\sigma_m < \sigma_f$ έχουμε:

$$C > \frac{4L}{(\lambda+1)t} \quad (1.12)$$

Από την θεωρία Bernoulli – Euler το ελαστικό βέλος κάμψης στο σημείο με την μέγιστη ροπή κάμψης υπολογίζεται από την σχέση [10] :

$$\delta_f = \frac{8\lambda(\lambda-1)^2 FL^3}{E(\lambda+1)^5 bt^3} \quad (1.13)$$

Το ελαστικό βέλος λόγω διάτμησης στο ίδιο σημείο είναι :

$$\delta_s = \frac{12\lambda(\lambda-1)FL}{5G(\lambda+1)^3 bt} \quad (1.14)$$

Το συνολικό βέλος είναι το άθροισμα των βελών λόγω κάμψης και διάτμησης, οπότε:

$$\delta_i = \delta_f + \delta_s = \frac{4\lambda(\lambda-1)FL}{E(\lambda+1)^3 bt} \left\{ \frac{2(\lambda-1)}{E(\lambda+1)^2} \left(\frac{L}{t} \right)^2 + \frac{3}{5G} \right\} \quad (1.15)$$

1.4 Αντικειμενικός Σκοπός της Εργασίας

Η κατανόηση εις βάθος, της μηχανικής συμπεριφοράς των κατασκευών με σύνθετα υλικά. Αυτή η ανάγκη προκύπτει από την όλο και αυξανόμενη χρήση τους, η οποία παρατηρείται και από το πλήθος των επιστημονικών μελετών με τα προαναφερόμενα υλικά. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα κοκκώδη σύνθετα υλικά.

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην επίλυση του προβλήματος της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων με δύο μεθόδους. Η πρώτη μέθοδος είναι αναλυτική και χρησιμοποιεί την Θεωρία Ελαστικότητας και η δεύτερη μέθοδος είναι υπολογιστική και γίνεται χρήση των Πεπερασμένων Στοιχείων. Επίσης, πραγματοποιείται σύγκριση μεταξύ αυτών των δύο μεθόδων καθώς και σύγκριση με την κάμψη τριών σημείων.

Η μελέτη επικεντρώνεται κυρίως στο βέλος κάμψης και στον τρόπο που αυτό μεταβάλλεται όταν μεταβάλλονται διάφοροι παράμετροι, όπως είναι η περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος, η τιμή του φορτίου και το σημείο εφαρμογής του καθώς και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δοκού.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

2.1 Εισαγωγή στη μέθοδο της Θεωρίας Ελαστικότητας

Η Θεωρία της Ελαστικότητας αποτελεί μία γενική προσέγγιση του προβλήματος βασισμένη στις αρχές της μηχανικής του συνεχούς μέσου. Η επίλυση εστιάζει στον προσδιορισμό της κατανομής των τάσεων, των τροπών και των μετατοπίσεων σε ένα ελαστικό στερεό σώμα υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων. Η διαδικασία της επίλυσης στηρίζεται σε ένα μαθηματικό μοντέλο που απαιτεί πολύ καλό μαθηματικό υπόβαθρο καθώς γίνεται χρήση συστημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων, τα οποία επιλύονται με διάφορους μεθόδους όπως είναι η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών, η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων, η χρήση Μιγαδικών Συναρτήσεων, η θεωρία του Δυναμικού κ.ά.. Αυτό το μαθηματικό μοντέλο εφαρμόζοντας τις παραδοχές της γραμμικής θεωρίας και των μικρών παραμορφώσεων επέτρεψε την επίλυση προβλημάτων σε πολλά επιστημονικά πεδία. Στον τομέα της Αεροναυπηγικής και της Αεροδιαστημικής γίνεται ανάλυση τάσεων, κόπωσης και θραύσης σε κατασκευές. Στον τομέα των Πολιτικών Μηχανικών πραγματοποιούνται αναλύσεις καταπονήσεων και παραμορφώσεων ράβδων, δοκών, πλακών κ.ά.. Στον τομέα της Μηχανικής των Υλικών γίνεται καθορισμός των τάσεων σε κρυσταλλικές δομές. Στον τομέα των Μηχανολόγων Μηχανικών αξιοποιείται για τον σχεδιασμό και την ανάλυση στοιχείων μηχανών. Τέλος, παρέχει την βάση για την επίλυση δυσκολότερων προβλημάτων μελετώντας την ανελαστική συμπεριφορά, όπως η πλαστικότητα και ιξωδοελαστικότητα [11].

Στην παρούσα διπλωματική εργασία έγινε χρήση των μεθόδων του Δυναμικού και των Πεπερασμένων Στοιχείων και οι παραδοχές που έχουν γίνει είναι οι εξής:

- α. Γραμμική ελαστικότητα
- β. Μικρές παραμορφώσεις
- γ. Ισότροπο σώμα
- δ. Ομογενές σώμα

ε. Συνεχές σώμα

2.1.1 Επίπεδη Θεωρία Ελαστικότητας

Τα προβλήματα που καλούμαστε πάντα να επιλύσουμε είναι φυσικά τρισδιάστατα. Ωστόσο, η επίλυση κλειστής μορφής τρισδιάστατων προβλημάτων έχει πολύ μεγάλη δυσκολία λόγω της πολυπλοκότητας των εξισώσεων του πεδίου της ελαστικότητας. Συνεπώς, τα προβλήματα που επιλέγονται προς επίλυση συνήθως περιλαμβάνουν αξονοσυμμετρία ή έχουν δισδιάστατη μορφή. Επίσης, συχνά γίνεται απλοποίηση των προβλημάτων σε δισδιάστατης μορφής με αποτέλεσμα η λύση να είναι προσεγγιστική. Η ακρίβεια της λύσης του απλοποιημένου προβλήματος εξαρτάται τόσο από την φύση του προβλήματος όσο και από την γεωμετρία του ασκούμενου φορτίου. Η επίλυση επίπεδων προβλημάτων γίνεται με τη χρήση κυρίως δύο θεωριών, αυτή της επίπεδης τάσης και αυτή της επίπεδης παραμόρφωσης. Η κάθε μία θεωρία απευθύνεται σε διαφορετικού τύπου προβλήματα. Ωστόσο, και οι δύο θεωρίες οδηγούν στην ίδια απλοποιημένη μορφή του προβλήματος, δηλαδή σε μία διαφορική εξίσωση με άγνωστη μόνο την τασική συνάρτηση του Airy [11].

2.1.2 Τασική συνάρτηση του Airy

Όπως προαναφέρθηκε η τεχνική της τασικής συνάρτησης του Airy έχει μεγάλη χρησιμότητα καθώς διευκολύνει την επίλυση προβλημάτων επίπεδης ελαστικότητας. Αυτό το επιτυγχάνει μειώνοντας το πρόβλημα σε μία εξίσωση με άγνωστη μόνο την τασική συνάρτηση, η οποία και αποτελεί την αναπαράσταση του τασικού πεδίου.

Αρχικά, για την ανάπτυξη αυτή της θεωρίας θεωρούμε την ύπαρξη καθολικών δυνάμεων, το οποίο δεν μας περιορίζει, και θα επιλέξουμε τις βαρυτικές δυνάμεις, οι οποίες θα αναχθούν ως παράγωγοι ενός δυναμικού, δηλαδή [11]

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.1.1)$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.1.2)$$

Στην συνέχεια θα εισαχθούν στις εξισώσεις ισορροπίας της επίπεδης ελαστικότητας και προκύψουν οι δύο εξισώσεις

$$\frac{\partial(\sigma_x - V)}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y - V)}{\partial y} = 0 \quad (2.1.4)$$

Παρατηρώντας αυτές τις δύο εξισώσεις καταλαβαίνουμε ότι μπορούν να ικανοποιούνται ταυτοτικά αν εισάγουμε την τασική συνάρτηση $\varphi = \varphi(x, y)$ και ορίσουμε τις τάσεις ως εξής:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + V \quad (2.1.5)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + V \quad (2.1.6)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \quad (2.1.7)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας ικανοποιούνται, θα πρέπει όμως να ικανοποιούνται και οι εξισώσεις της συμβιβαστότητας των τροπών όμως σε όρους των τάσεων. Αντικαθιστώντας σε αυτές τις τάσεις όπως ορίστηκαν παραπάνω προκύπτουν οι εξής εξισώσεις, μία για κάθε επίπεδη θεωρία ελαστικότητας:

α. *Επίπεδη παραμόρφωση:*

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.1.8\alpha)$$

β. *Επίπεδη τάση:*

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = -(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.1.8\beta)$$

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις το πρώτο μέλος είναι ίδιο ενώ στο δεύτερο μέλος διαφέρει μόνο ο συντελεστής των καθολικών δυνάμεων. Διατυπώνοντας με άλλο τρόπο τις ανωτέρω εξισώσεις γίνονται

α. *Επίπεδη παραμόρφωση:*

$$\nabla^4 \varphi = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \nabla^2 \quad (2.1.9\alpha)$$

β. *Επίπεδη τάση:*

$$\nabla^4 \varphi = -(1-\nu) \nabla^2 \quad (2.1.9\beta)$$

Θεωρώντας και στις δύο περιπτώσεις τις καθολικές δυνάμεις αμελητέες τότε και οι δύο εξισώσεις ταυτίζονται με την ακόλουθη

$$\nabla^4 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.1.10)$$

Η συγκεκριμένη εξίσωση ονομάζεται διαρμονική και γι' αυτό το λόγο η φ ονομάζεται διαρμονική συνάρτηση ή αλλιώς συνάρτηση Airy. Έτσι, έχουμε καταλήξει σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με άγνωστο μόνο την τασική συνάρτηση Airy. Για την επίλυση του προβλήματος απαιτείται να ορίσουμε και τις οριακές συνθήκες προκειμένου να προσδιορίσουμε την τασική συνάρτηση. Στην συνέχεια θα υπολογιστεί το πεδίο των τροπών και μετέπειτα ολοκληρώνοντάς το τις μετατοπίσεις. Επίσης, παρατηρούμαι στην συγκεκριμένη περίπτωση, δηλαδή χωρίς καθολικές δυνάμεις, ότι η διαφορική εξίσωση που περιλαμβάνει την τασική συνάρτηση Airy είναι ανεξάρτητη των ελαστικών σταθερών. Ωστόσο, δεν συμβαίνει το ίδιο για τις τροπές και τις μετατοπίσεις καθώς για τον υπολογισμό τους εισάγεται και ο γενικευμένος νόμος του Hooke [11].

2.1.3 Επίλυση διαφορικής εξίσωσης με την πολυωνυμική μορφή συναρτήσεων

Για την εφαρμογή αυτής της μεθόδου επίλυσης απαιτείται να ξεκινήσουμε αντίθετα από τον τρόπο που συνήθως λύνονται τα προβλήματα. Πιο αναλυτικά, θεωρούμε κάποια συνάρτηση πολυωνυμικής μορφής και παράλληλα βρίσκουμε τις οριακές συνθήκες, δηλαδή τις τάσεις στα όρια. Στην συνέχεια, καθορίζουμε κάποιο πρόβλημα, το οποίο επιλύεται με τη χρήση του συγκεκριμένου πολυωνύμου.

Η μορφή της πολυωνυμικής τασικής συνάρτησης φ σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι [11]:

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n \quad (2.1.11)$$

όπου το A_{mn} είναι οι σταθεροί συντελεστές που πρέπει να προσδιοριστούν από τις οριακές συνθήκες. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των τάσεων όπως ορίστηκαν παραπάνω και θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν αδρανιακές δυνάμεις αυτές γίνονται [11]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (2.1.12)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (2.1.13)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2.1.14)$$

Εισάγοντας την γενική πολυωνυμική τασική συνάρτηση στις σχέσεις των τάσεων προκύπτουν οι εξής παρατηρήσεις [11]:

- α Οι τρεις χαμηλότερου βαθμού όροι της τασικής συνάρτησης, δηλαδή για $m+n \leq 1$, δεν συνεισφέρουν στις τάσεις και συνεπώς τις παραλείπουμε.
- β Οι δευτέρου βαθμού όροι της τασικής συνάρτησης δημιουργούν ένα σταθερό τασικό πεδίο.
- γ Οι τρίτου βαθμού όροι παράγουν ένα γραμμικό τασικό πεδίο κ.ο..

Όσο αφορά την διαρμονική εξίσωση συμπεραίνουμε ότι:

- α. Οι όροι με $m + n \leq 3$ ικανοποιούν ταυτοτικά την διαρμονική εξίσωση.

β. Οι όροι με $m + n > 3$ για να ικανοποιείται η διαρμονική εξίσωση θα πρέπει οι σταθεροί συντελεστές A_{mn} να συσχετίζονται.

Ολοκληρώνοντας αυτή τη μέθοδο συμπεραίνουμε ότι δημιουργούμε πολυωνυμικά τασικά πεδία, τα οποία φυσικά δεν ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες. Αυτό το πρόβλημα επιλύεται αντικαθιστώντας μία οριακή συνθήκη που είναι σε μη πολυωνυμική μορφή σε μία πολυωνυμική με τη χρήση της αρχής του Saint-Venant. Συνεπώς, η λύση του προβλήματος θα είναι ακριβής στα σημεία που βρίσκονται σε ικανοποιητική απόσταση από την οριακή συνθήκη που προσαρμόστηκε. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα αυτή η μέθοδος να επιλέγεται σε προβλήματα που διαθέτουν τετραγωνική διατομή και έχουν τη μία διάσταση πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με τις άλλες. Γι' αυτό και έχει μεγάλη εφαρμογή στις δοκούς [11].

2.2 Επίλυση της κάμψης τριών σημείων με τη χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας

Σε αυτό το υποκεφάλαιο πραγματοποιείται επίλυση του προβλήματος της κάμψης τριών σημείων με την μέθοδο της Θεωρίας Ελαστικότητας. Το ίδιο πρόβλημα αλλά για την περίπτωση του ανισότροπου υλικού έχει επιλύσει ο Esendemir [13].

2.2.1 Επιλογή κατάλληλου πολυωνύμου ως τασική συνάρτηση για 3-Σημείων

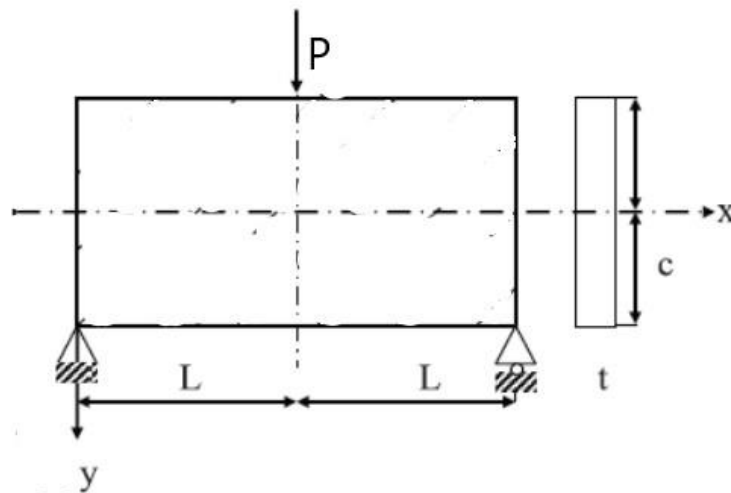
Αρχικά, έγινε επιλογή της κατάλληλης τασικής συνάρτησης σε μορφή πολυωνύμου, η οποία προέκυψε ότι είναι το άθροισμα πολυωνύμων δεύτερου, τρίτου και τέταρτου βαθμού. Συνεπώς, θεωρήσαμε την αυθαίρετη τασική συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \varphi = & \alpha x^4 + \beta x^3 y + \gamma x^2 y^2 + \delta x y^3 + \epsilon y^4 + \zeta x^3 + \eta x^2 y \\ & + \theta x y^2 + \kappa y^3 + \lambda x^2 + \mu x y + \nu y^2 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Στην συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε τους σταθερούς συντελεστές. Αυτό θα γίνει αξιοποιώντας τη διαρμονική εξίσωση και τις οριακές συνθήκες του προβλήματος.

2.2.2 Οριακές συνθήκες και Τασική συνάρτηση για 3-Σημείων

Η κάμψη τριών σημείων περιλαμβάνει μία δοκό όπου στο ένα άκρο έχει μία στήριξη και στο άλλο άκρο μία κύλιση. Στην συγκεκριμένη περίπτωση αριστερά βρίσκεται η στήριξη και δεξιά η κύλιση. Επίσης, στο κέντρο της δοκού ασκείται ένα φορτίο. Ακολουθεί το σχήμα της κάμψης τριών σημείων.



Εικόνα 2.2.1
Κάμψη τριών σημείων

Από το σχήμα προκύπτουν οι ακόλουθες οριακές συνθήκες του προβλήματος:

$$\sigma_y(x, \pm c) = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\tau_{xy}(x, \pm c) = 0 \quad (2.2.3)$$

$$\int_{-c}^{+c} \tau_{xy}(0, y) t dy = \frac{P}{2} \quad (2.2.4)$$

$$\int_{-c}^{+c} \sigma_x(0, y) t dy = 0 \quad (2.2.5)$$

$$\int_{-c}^{+c} \sigma_x(0, y) t y dy = 0 \quad (2.2.6)$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτουν οι ακόλουθοι σταθεροί συντελεστές της τασικής συνάρτησης:

$$\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = \zeta = \eta = \theta = \kappa = \lambda = \nu = 0 \quad (2.2.7\alpha-\gamma,\varepsilon-\lambda,\nu)$$

$$\delta = \frac{P}{8c^3t} \quad (2.2.7\delta)$$

$$\mu = -\frac{3P}{8ct} \quad (2.2.7\mu)$$

Οπότε, έχουμε την τασική συνάρτηση [12]:

$$\varphi = \frac{P}{8c^3t} [xy^3 - 3c^2xy] \quad (2.2.8)$$

η οποία ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες.

Αντικαθιστώντας την τασική συνάρτηση στις σχέσεις των τάσεων έχουμε:

$$\sigma_x = \frac{P}{4c^3t} xy \quad (2.2.9)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (2.2.10)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{8c^3t} (y^2 - c^2) \quad (2.2.11)$$

2.2.3 Βέλος λόγω κάμψης για 3-Σημείων

Από τις τάσεις κάνοντας χρήση του γενικευμένου νόμου του Hooke μπορούμε να υπολογίσουμε τις τροπές και στην συνέχεια ολοκληρώνοντας τις μετατοπίσεις και στις δύο κατευθύνσεις λόγω της κάμψης. Προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$u_x = \frac{3P}{8Ec^3t} x^2y + f(y) \quad (2.2.12)$$

$$u_{y,flexure} = -\frac{3P\nu}{8Ec^3t} xy^2 + g(x) \quad (2.2.13)$$

Για τον υπολογισμό του βέλους λόγω κάμψης εκκρεμεί ο υπολογισμός του αγνώστου $g(x)$. Για τον υπολογισμό του $g(x)$ θα εξισώσουμε τις ακόλουθες δύο εξισώσεις για γραμμικό, ελαστικό και ισότροπο υλικό:

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2.2.14\alpha)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.2.14\beta)$$

και προκύπτει:

$$\frac{3P(1+\nu)}{4Etc^3} (c^2 - y^2) - \frac{3P}{8Etc^3} x^2 - \frac{3P\nu}{8Etc^3} y^2 - g'(x) + f'(y) = 0 \quad (2.2.15)$$

Επειδή όμως η εξίσωση πρέπει να ικανοποιείται για κάθε x, y , το άθροισμα των όρων του x και αντίστοιχα του y θα πρέπει να ισούται με ξεχωριστές σταθερές. Οπότε:

$$A(x) - g'(x) = b \rightarrow g(x) = \int [(A(x) - b)] dx \quad (2.2.16)$$

όπου:

$$A(x) = -\frac{3P}{8Etc^3} x^2 \quad (2.2.17)$$

Από τις δύο εξισώσεις προκύπτει:

$$g(x) = -\frac{P}{8Etc^3} x^3 - bx + c \quad (2.2.18)$$

Όπου, c είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης. Αντικαθιστώντας τώρα την $g(x)$ στο $u_{y,flexure}$ έχουμε την εξίσωση:

$$u_{y,flexure} = -\frac{3P\nu}{8Ec^3t} xy^2 - \frac{P}{8Etc^3} x^3 - bx + c \quad (2.2.19)$$

Τώρα θα αξιοποιήσουμε τις οριακές συνθήκες για να υπολογιστούν οι άγνωστοι όροι, οι οποίες είναι:

$$u_{y,flexure}(0,0) = 0 \quad (2.2.20)$$

$$\frac{\partial u_{y,flexure}}{\partial x}(L, 0) = 0 \quad (2.2.21)$$

Επιλύοντας το σύστημα προκύπτει:

$$b = -\frac{3PL^2}{8Etc^3} \quad (2.2.22)$$

$$c = 0 \quad (2.2.23)$$

Οπότε, αφού υπολογίστηκαν όλοι οι άγνωστοι όροι μπορούμε να υπολογίσουμε το βέλος λόγω κάμψης σε κάθε σημείο της δοκού με την σχέση:

$$u_{y,flexure} = -\frac{3P\nu}{8Ec^3t} xy^2 - \frac{P}{8Etc^3} x^3 + \frac{3PL^2}{8Etc^3} x \quad (2.2.24)$$

Άρα, το βέλος λόγω κάμψης στο κεντρικό σημείο της δοκού, το οποίο και μας ενδιαφέρει, είναι:

$$u_{y,flexure}(L, 0) = \frac{PL^3}{4Etc^3} \quad (2.2.25)$$

2.2.4 Βέλος λόγω διάτμησης για 3-Σημείων

Για τον υπολογισμό του βέλους λόγω διάτμησης θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (2.2.14α) αφού πρώτα αντικαταστήσουμε την τάση (2.2.11). Στη συνέχεια, θα πρέπει να δημιουργήσουμε μία απειροστή απόκλιση της δοκού λόγω διάτμησης. Αυτό θα επιτευχθεί πολλαπλασιάζοντας αρχικά την εξίσωση με ένα απειροστό μήκος της δοκού και ολοκληρώνοντας από $x=x$ έως $x=2L$ ως προς x , και έχουμε:

$$u_{y,shear} = \int_x^{2L} \gamma_{xy} dx \rightarrow u_{y,shear} = \frac{3P(1+\nu)}{4Etc^3} (2c^2L - 2y^2L - c^2x + y^2x) \quad (2.2.25)$$

Άρα, το βέλος λόγω διάτμησης στο κεντρικό σημείο της δοκού, το οποίο και μας ενδιαφέρει, είναι

$$u_{y,shear}(L, 0) = \frac{3PL(1+\nu)}{4Etc} \quad (2.2.26)$$

2.2.5 Συνολικό βέλος για 3-Σημείων

Αφού έχει υπολογιστεί και το βέλος λόγω κάμψης και το βέλος λόγω διάτμησης μπορούμε απλά προσθέτοντάς τα μαζί να υπολογίσουμε το συνολικό βέλος. Άρα, έχουμε:

$$u_{y,total} = u_{y,flexure} + u_{y,shear} \quad (2.2.27)$$

Συνεπώς, το συνολικό βέλος στο κέντρο της δοκού είναι:

$$u_{y,total}(L, 0) = \frac{PL^3}{4Etc^3} + \frac{3PL(1+\nu)}{4Etc} \quad (2.2.28)$$

2.3 Επίλυση της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων με τη χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας

Στο υποκεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται επίλυση του προβλήματος της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων με τη Θεωρία Ελαστικότητας. Συγκριτικά με την κάμψη τριών σημείων το πρόβλημα είναι αρκετά πιο πολύπλοκο. Επίσης, βρέθηκε μόνο μία προσπάθεια επίλυσης της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων και αφορά ανισότροπα υλικά, η οποία πραγματοποιήθηκε από τον Τσούτσουρα [14]. Τα αποτελέσματα της επίλυσης είναι αντίστοιχα με αυτά του Τσούτσουρα, αλλά για ισότροπο υλικό.

2.3.1 Επιλογή κατάλληλου πολωνύμου ως τασική συνάρτηση για 4-Σημείων

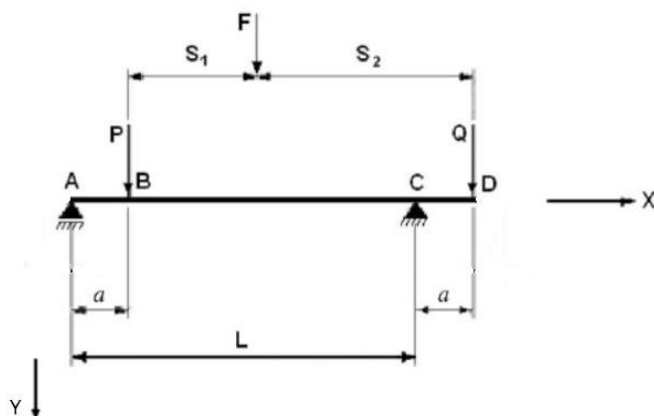
Ως αυθαίρετη τασική συνάρτηση σε μορφή πολωνύμου επιλέχθηκε η ακόλουθη, που αποτελεί το άθροισμα πολωνύμων δεύτερου, τρίτου και τέταρτου βαθμού:

$$\begin{aligned} \varphi = & \alpha x^4 + \beta x^3 y + \gamma x^2 y^2 + \delta x y^3 + \varepsilon y^4 + \zeta x^3 + \eta x^2 y \\ & + \theta x y^2 + \kappa y^3 + \lambda x^2 + \mu x y + \nu y^2 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Στην συνέχεια γίνεται υπολογισμός των σταθερών συντελεστών αξιοποιώντας τη διαμορφική εξίσωση και τις οριακές συνθήκες του προβλήματος.

2.3.2 Οριακές συνθήκες και Τασική συνάρτηση για 4-Σημείων

Όπως προαναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο, η ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων περιλαμβάνει μια δοκό όπου το αριστερό άκρο είναι σε άρθρωση ενώ σε απόσταση L από αυτό το σημείο υπάρχει μία κύλιση. Όσο αφορά τα φορτία, τόσο οι τιμές των φορτίων όσο και το σημείο άσκησης εξαρτώνται από τον συντελεστή φόρτισης λ . Αυτό συμβαίνει γιατί τα φορτία είναι ανάλογα μεταξύ τους και αυτή η αναλογία εξαρτάται από τον συντελεστή φόρτισης λ . Όσο αφορά το σημείο άσκησης των φορτίων, το ένα ασκείται στο σημείο a ($< L$) και το άλλο στο σημείο $L+a$, όμως δεν είναι σταθερό επειδή η μεταβλητή a εξαρτάται από τον συντελεστή φόρτισης λ . Ακολουθεί το σχήμα της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων.



Εικόνα 2.3.1
Ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων

Από το σχήμα προκύπτουν οι ακόλουθες οριακές συνθήκες του προβλήματος:

$$\sigma_y(x, \pm c) = 0 \quad (2.3.2)$$

$$\tau_{xy}(x, \pm c) = 0 \quad (2.3.3)$$

$$\int_{-c}^{+c} \tau_{xy}(0, y) t dy = Q \quad (2.3.4)$$

$$\int_{-c}^{+c} \sigma_x(0, y) t dy = 0 \quad (2.3.5)$$

$$\int_{-c}^{+c} \sigma_x(0, y) t y dy = 0 \quad (2.3.6)$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτουν οι ακόλουθοι σταθεροί συντελεστές της τασικής συνάρτησης:

$$\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = \zeta = \eta = \theta = \kappa = \lambda = \nu = 0 \quad (2.3.7\alpha-\gamma, \varepsilon-\lambda, \nu)$$

$$\delta = \frac{Q}{4c^3 t} \quad (2.3.7\delta)$$

$$\mu = -\frac{3Q}{4ct} \quad (2.3.7\mu)$$

Οπότε, έχουμε την τασική συνάρτηση:

$$\varphi = \frac{Q}{4c^3 t} [xy^3 - 3c^2 xy] \quad (2.3.8)$$

Αντικαθιστώντας την τασική συνάρτηση στις σχέσεις των τάσεων έχουμε:

$$\sigma_x = \frac{3Q}{2c^3 t} xy \quad (2.3.9)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (2.3.10)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3Q}{4c^3 t} (y^2 - c^2) \quad (2.3.11)$$

2.3.3 Βέλος λόγω κάμψης για 4-Σημείων

Από τις τάσεις (2.3.9 - 2.3.10) κάνοντας χρήση του γενικευμένου νόμου του Hooke μπορούμε να υπολογίσουμε τις τροπές και στην συνέχεια ολοκληρώνοντας τις μετατοπίσεις και στις δύο κατευθύνσεις λόγω της κάμψης. Οπότε, έχουμε:

$$u_x = \frac{3Q}{4Ec^3t} x^2 y + f(y) \quad (2.3.12)$$

$$u_{y,flexure} = -\frac{3Q\nu}{4Ec^3t} xy^2 + g(x) \quad (2.3.13)$$

Για τον υπολογισμό του βέλους λόγω κάμψης εκκρεμεί ο υπολογισμός του αγνώστου $g(x)$. Για τον υπολογισμό του $g(x)$ θα εξισώσουμε τις εξισώσεις (2.2.14α) και (2.2.14β) και προκύπτει:

$$\frac{3Q(1+\nu)}{2Etc^3} (c^2 - y^2) - \frac{3Q}{4Etc^3} x^2 + \frac{3Q\nu}{8Etc^3} y^2 - g'(x) + f'(y) = 0 \quad (2.3.14)$$

Επειδή όμως η εξίσωση πρέπει να ικανοποιείται για κάθε x, y , το άθροισμα των όρων του x και αντίστοιχα του y θα πρέπει να ισούται με ξεχωριστές σταθερές. Οπότε:

$$A(x) - g'(x) = b \rightarrow g(x) = \int [(A(x) - b)] dx \quad (2.3.15)$$

όπου:

$$A(x) = -\frac{3Q}{4Etc^3} x^2 \quad (2.3.16)$$

Από τις δύο εξισώσεις προκύπτει:

$$g(x) = -\frac{Q}{4Etc^3} x^3 - bx + c \quad (2.3.17)$$

Όπου, c είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης. Αντικαθιστώντας τώρα την $g(x)$ στο $u_{y,flexure}$ έχουμε την εξίσωση:

$$u_{y,flexure} = -\frac{3Qv}{4Ec^3t}xy^2 - \frac{Q}{4Etc^3}x^3 - bx + c \quad (2.3.18)$$

Τώρα θα αξιοποιήσουμε τις οριακές συνθήκες για να υπολογιστούν οι άγνωστοι όροι. Η πρώτη οριακή συνθήκη που χρησιμοποιήθηκε είναι ότι οι μετατοπίσεις στο $(0,0)$ ισούνται με μηδέν και στον άξονα x και στον άξονα y . Για δεύτερη οριακή συνθήκη αρχικά επιλέχτηκε ότι η κλίση στο μέγιστο βέλος κάμψης, δηλαδή στο σημείο $(a,0)$, θα είναι μηδέν. Ωστόσο, τα αποτελέσματα συγκριτικά με τη μέθοδο της Αντοχής Υλικών και των Πεπερασμένων Στοιχείων δεν ήταν ικανοποιητικά. Τελικά για δεύτερη οριακή συνθήκη επιλέχτηκε ότι η μετατόπιση στο $(0,0)$ στον άξονα y ισούται με μηδέν. Συνεπώς, οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

$$u_{y,flexure}(0,0) = 0 \quad (2.3.19)$$

$$u_{y,flexure}(L,0) = 0 \quad (2.3.20)$$

Επιλύοντας το σύστημα προκύπτει:

$$b = -\frac{QL^2}{4Etc^3} \quad (2.3.21)$$

$$c = 0 \quad (2.3.22)$$

Οπότε, αφού υπολογίστηκαν όλοι οι άγνωστοι όροι μπορούμε να υπολογίσουμε το βέλος λόγω κάμψης σε κάθε σημείο της δοκού με την σχέση:

$$u_{y,flexure} = -\frac{3Qv}{4Ec^3t}xy^2 - \frac{Q}{4Etc^3}x^3 + \frac{QL^2}{4Etc^3}x \quad (2.3.23)$$

Άρα, το βέλος λόγω κάμψης στο σημείο $x=a$ της δοκού, το οποίο και μας ενδιαφέρει, είναι:

$$u_{y,flexure}(\alpha, 0) = -\frac{Q\alpha^3}{4Etc^3} + \frac{QL^2\alpha}{4Etc^3} \quad (2.3.24)$$

Αντικαθιστώντας το φορτίο Q με την γενική δύναμη F και την παράμετρο a με το ισοδύναμό της έχουμε:

$$u_{y,flexure}(\alpha, 0) = \frac{\lambda FL^3(\lambda-1)}{Ec^3t(\lambda+1)^4} \quad (2.3.25)$$

Ακολουθεί ο αντίστοιχος τύπος (1.13) από την Αντοχή Υλικών στο πρώτο κεφάλαιο, αφού πρώτα αλλάξουμε τις παραμέτρους αντίστοιχα προκειμένου να έχουμε κοινές παραμέτρους για να πραγματοποιηθεί σύγκριση μεταξύ των δύο μεθόδων:

$$\delta_f(\alpha, 0) = \frac{\lambda FL^3(\lambda-1)^2}{Ec^3t(\lambda+1)^5} \quad (2.3.26)$$

Συγκρίνοντας τους δύο τύπους για το βέλος κάμψης στο σημείο a παρατηρούμε ότι μοιάζουν αλλά διαφέρουν στις δυνάμεις των παρενθέσεων και συνεπώς θα έχουμε μεγάλες αποκλίσεις για μικρές τιμές του λ , όταν δηλαδή βρισκόμαστε κοντά στην αριστερή άρθρωση. Αυτή η αλλοίωση των αποτελεσμάτων για μικρά λ δικαιολογείται από την αρχή του Saint-Venant.

2.3.4 Βέλος λόγω διάτμησης για 4-Σημείων

Για τον υπολογισμό του βέλους λόγω διάτμησης θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (2.2.14α) αφού πρώτα αντικαταστήσουμε την τάση(2.3.11). Στη συνέχεια, θα πρέπει να δημιουργήσουμε μία απειροστή απόκλιση της δοκού λόγω διάτμησης. Αυτό θα επιτευχθεί πολλαπλασιάζοντας αρχικά την εξίσωση με ένα απειροστό μήκος της δοκού και ολοκληρώνοντας από $x=x$ έως $x=L+a$ ως προς x , και έχουμε:

$$u_{y,shear} = \int_x^{L+a} \gamma_{xy} dx \rightarrow$$

$$u_{y,shear} = \frac{3Q(1+\nu)}{2Etc^3} (c^2(L+a) - y^2(L+a) - c^2x - y^2x) \quad (2.3.27)$$

Άρα, το βέλος λόγω διάτμησης στο σημείο $x=a$ της δοκού, το οποίο και μας ενδιαφέρει, είναι

$$u_{y,shear}(\alpha, 0) = \frac{3QL(1+\nu)}{2Etc} \quad (2.3.28)$$

Αντικαθιστώντας το φορτίο Q με την γενική δύναμη F έχουμε:

$$u_{y,shear}(\alpha, 0) = \frac{3(1+\nu)FL}{2Ect(\lambda+1)} \quad (2.3.29)$$

2.3.5 Συνολικό βέλος για 4-Σημείων

Αφού έχει υπολογιστεί και το βέλος λόγω κάμψης και το βέλος λόγω διάτμησης μπορούμε απλά προσθέτοντάς τα μαζί να υπολογίσουμε το συνολικό βέλος. Άρα, έχουμε:

$$u_{y,total} = u_{y,flexure} + u_{y,shear} \quad (2.3.30)$$

Συνεπώς, το συνολικό βέλος στο σημείο $x=a$ της δοκού είναι:

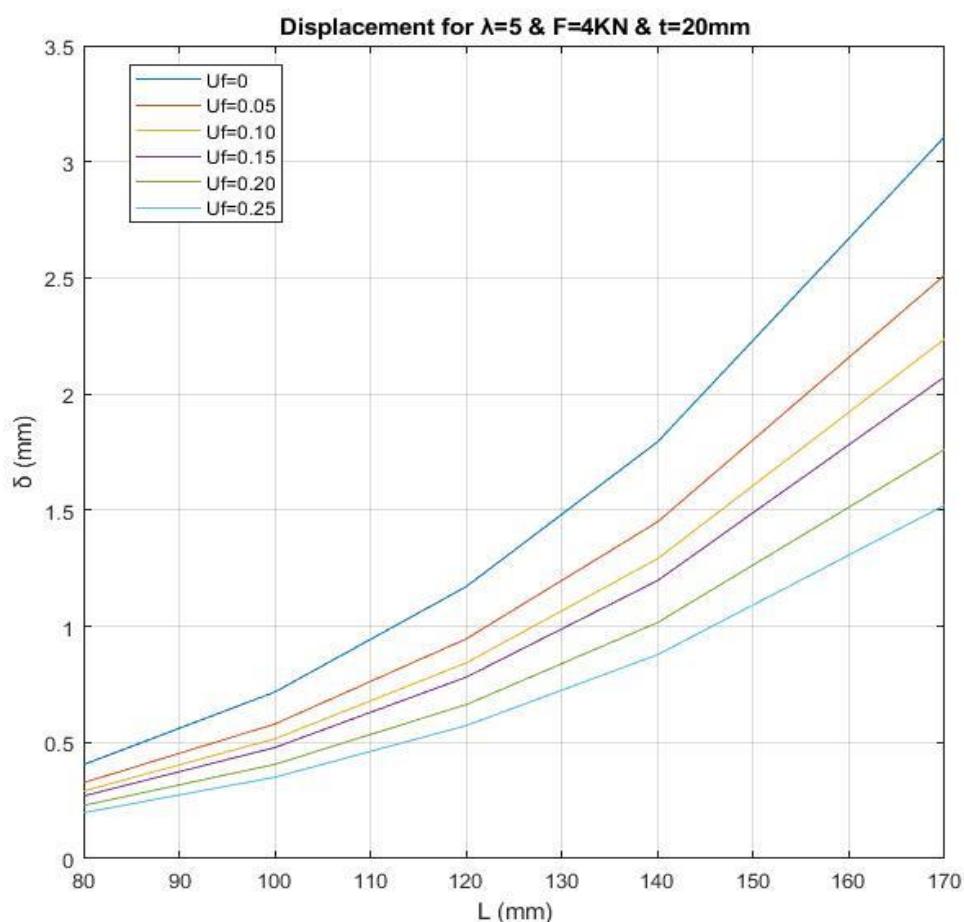
$$u_{y,total}(\alpha, 0) = \frac{\lambda FL^3(\lambda-1)}{Ec^3t(\lambda+1)^4} + \frac{3(1+\nu)FL}{2Ect(\lambda+1)} \quad (2.3.31)$$

2.4 Σύγκριση παραμέτρων για 4-Σημείων με τη χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας

Σε αυτό το υποκεφάλαιο παρουσιάζονται διαγράμματα του βέλους στο σημείο B (Εικόνα 2.3.1) για μεταβολές συγκεκριμένων παραμέτρων προκειμένου να αναλυθούν και να εξαχθούν συμπεράσματα ως προς την επίδρασή τους σε αυτό. Αυτές οι παράμετροι είναι το μήκος του δοκιμίου, το πάχος του δοκιμίου, το ασκούμενο φορτίο και ο συντελεστής φόρτισης λ . Επίσης, σε κάθε διάγραμμα απεικονίζονται όλες οι διαθέσιμες περιεκτικότητες κατ' όγκο του εγκλείσματος.

2.4.1 Σύγκριση βέλους κάμψης με μήκος δοκιμίου

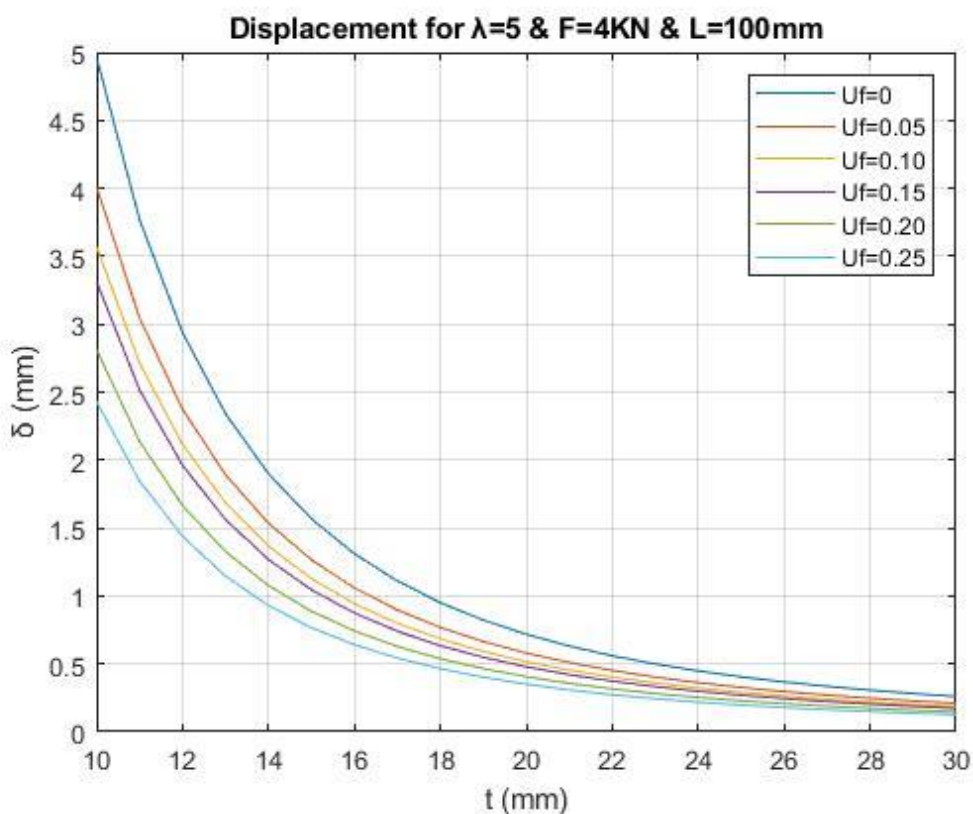
Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=5$, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Μπορούμε να παρατηρήσουμε στο διάγραμμα ότι η αύξηση του μήκους του δοκιμίου έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του βέλους κάμψης. Επίσης, η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος οδηγεί στην μείωση του ρυθμού αύξησης του βέλους κάμψης. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5% έχουμε ραγδαία αύξηση του βέλους κάμψης συγκριτικά με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25% .



Διάγραμμα 2.4.1:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου
για $\lambda=5$, $F=4$ kN, $t=20$ mm, $b=30$ mm

2.4.2 Σύγκριση βέλους κάμψης με πάχος δοκιμίου

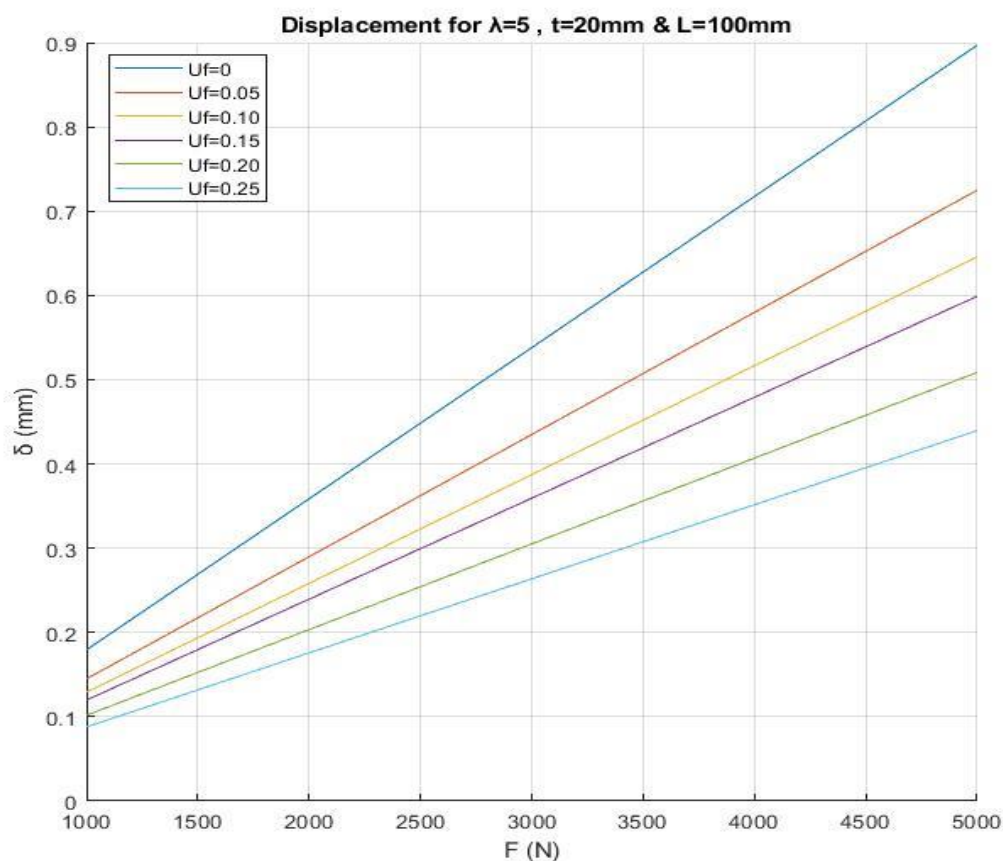
Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=5$, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η αύξηση του πάχους του δοκιμίου οδηγεί σε μείωση του βέλους κάμψης. Ακόμα, παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές του πάχους του δοκιμίου το βέλος κάμψης επηρεάζεται ελάχιστα από την περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος. Συνεπώς, μπορούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι αυξάνοντας περεταίρω το πάχος, οι τιμές του βέλους κάμψης θα συμπίπτουν, δηλαδή θα είναι ανεξάρτητο της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος. Αντίθετα, για μικρές τιμές του πάχους του δοκιμίου παρατηρούμε σημαντική επιρροή στο βέλος κάμψης.



Διάγραμμα 2.4.2:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου
για $\lambda=5$, $F=4\text{kN}$, $L=100\text{mm}$, $b=30\text{mm}$

2.4.3 Σύγκριση βέλους κάμψης με ασκούμενο φορτίο

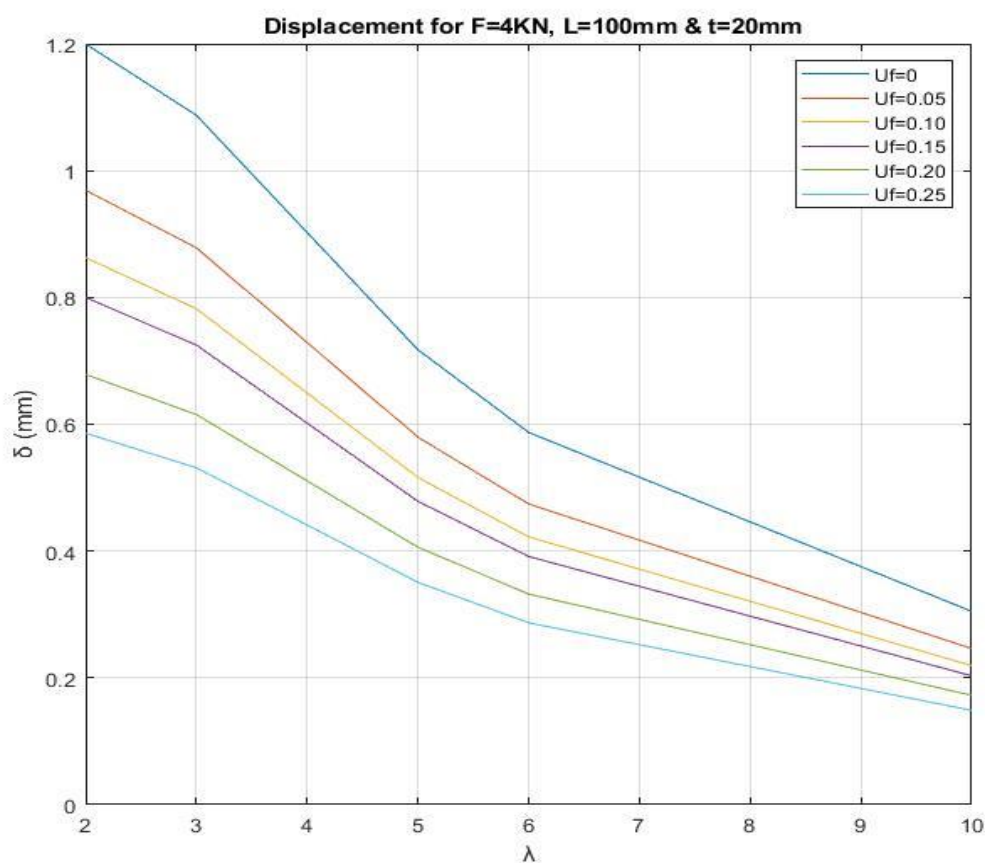
Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=5$, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η αύξηση του φορτίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης. Ακόμα, παρατηρούμε ότι η αύξηση είναι γραμμική, το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι δεν έχουμε συμπεριλάβει στην μελέτη μη γραμμικότητες. Επίσης, η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος οδηγεί στην μείωση του ρυθμού αύξησης του βέλους κάμψης. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5% έχουμε ραγδαία αύξηση του βέλους κάμψης συγκριτικά με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%.



Διάγραμμα 2.4.3:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου
για $\lambda=5$, $t=20$ mm, $L=100$ mm, $b=30$ mm

2.4.4 Σύγκριση βέλους κάμψης με συντελεστή φόρτισης λ

Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ . Έχουμε επιλέξει ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η αύξηση του συντελεστή φόρτισης οδηγεί σε μείωση του βέλους κάμψης. Επίσης, η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος οδηγεί στην μείωση του ρυθμού μείωσης του βέλους κάμψης. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5% έχουμε ραγδαία μείωση του βέλους κάμψης συγκριτικά με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25% .



Διάγραμμα 2.4.4:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ
για $F=4$ kN, $L=100$ mm, $t=20$ mm, $b=30$ mm

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

3.1 Εισαγωγή στη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

Στο παρόν κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε η προσομοίωση με λογισμικό Πεπερασμένων Στοιχείων της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων σε δοκό από σύνθετο υλικό αποτελούμενο από μήτρα ρητίνης ενισχυμένη με έγκλεισμα από κονιοποιημένο σίδηρο.

Με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων πραγματοποιείται προσομοίωση του χώρου ως ένα κάρναβο Πεπερασμένων Στοιχείων, δηλαδή γίνεται μία διακριτοποίηση του χώρου σε μη επικαλυπτόμενους υποχώρους που ονομάζονται Πεπερασμένα Στοιχεία.

Η δημοφιλία αυτής της μεθόδου είναι μεγάλη καθώς επιτρέπει την επίλυση προβλημάτων από πολλές περιοχές των τεχνολογικών εφαρμογών με ικανοποιητική ακρίβεια. Επίσης, αυτή η μέθοδος μπορεί να αναπτυχθεί σε μία αλληλουχία βημάτων, τα οποία στην συνέχεια μπορούν να εισαχθούν σε κάποιο υπολογιστικό πρόγραμμα. Με αυτόν τον τρόπο αυξάνετε ραγδαία η ταχύτητα επίλυσης διαφόρων προβλημάτων αλλάζοντας απλά τις εισαχθέντες παραμέτρους, όπως είναι τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, οι ιδιότητες του υλικού και οι οριακές συνθήκες [15].

Μέσω αυτής της μεθόδου παρέχεται η δυνατότητα της επίλυσης πολύπλοκων τρισδιάστατων μοντέλων με την χρήση κάποιου υπολογιστικού προγράμματος με σκοπό την μελέτη των κατανομών των τάσεων καθώς και του βέλους κάμψης.

Αξιοποιώντας τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου και σε συνδυασμό με του προηγούμενου κεφαλαίου θα διαπιστωθούν οι διαφορές μεταξύ της μεθόδου της Θεωρίας Ελαστικότητας και των Πεπερασμένων Στοιχείων.

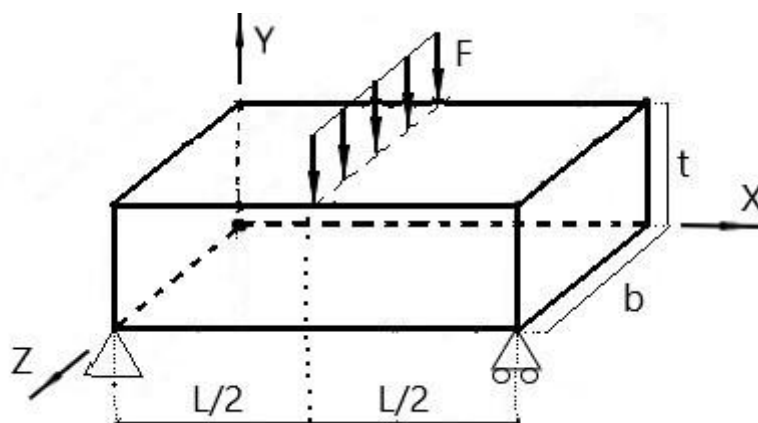
3.2 Ανάλυση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων με το ANSYS

Η μοντελοποίηση του τρέχοντος προβλήματος και η επίλυση του με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων πραγματοποιήθηκε μέσω του λογισμικού πακέτου ANSYS

Student, το οποίο προσφέρει την δυνατότητα δωρεάν χρήσης για φοιτητές με κάποιους περιορισμούς, οι οποίοι δεν επηρέασαν την παρούσα ανάλυση. Αποτελεί ένα από τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα προγράμματα και με μεγάλη ποικιλία εργαλείων. Για τις ανάγκες της παρούσας μελέτης έγινε χρήση του υποπακέτου ANSYS Mechanical APDL.

Για την δημιουργία του τρισδιάστατου μοντέλου προσημείωσης επιλέχθηκε το στοιχείο SOLID 185, το οποίο χρησιμοποιείται για τρισδιάστατα μοντέλα και περιέχει 8 κόμβους όπου ο καθένας έχει από τρεις βαθμούς ελευθερίας. Αυτό το στοιχείο κρίθηκε καταλληλότερο για την εργασία καθώς αφενός τα αποτελέσματα συγκριτικά με την Θεωρία Ελαστικότητας έχουν μικρότερη απόκλιση και αφετέρου γιατί αυτό το στοιχείο εμποδίζει την εμφάνιση του Shear Locking..

3.3 Μοντελοποίηση Δοκού για 3-Σημείων



Εικόνα 3.3.1
Τρισδιάστατη απεικόνιση της κάμψης τριών σημείων

Στην παραπάνω εικόνα παρουσιάζονται τα γενικά χαρακτηριστικά του καννάβου της τρισδιάστατης δοκού σε κάμψη τριών σημείων που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων,

όπου :

L : η απόσταση μεταξύ των στηρίξεων

L/2 : η απόσταση μεταξύ στήριξης – επιβαλλόμενης φόρτισης

b : το πλάτος της δοκού

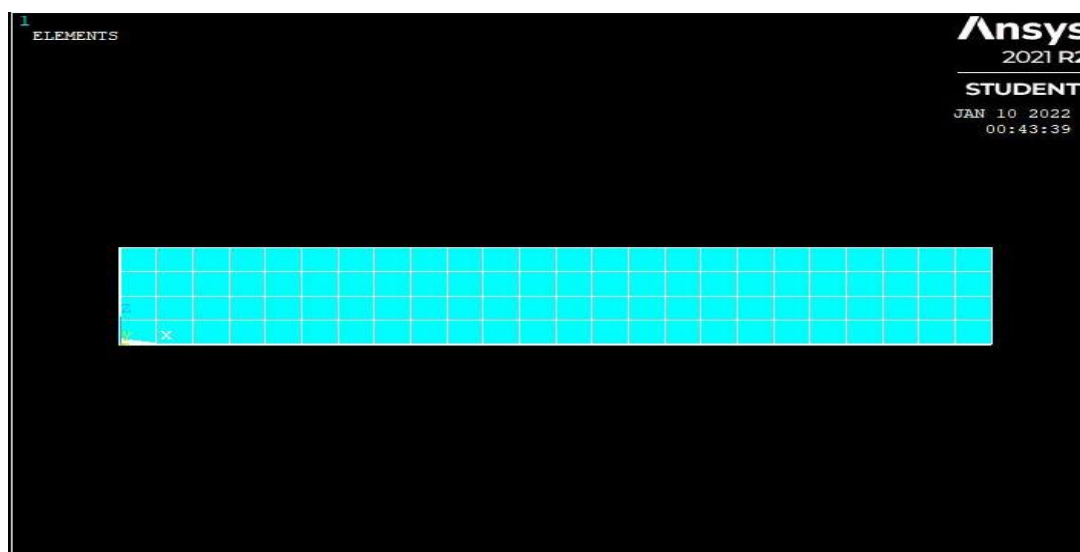
t : το πάχος της δοκού

F : το ασκούμενο φορτίο

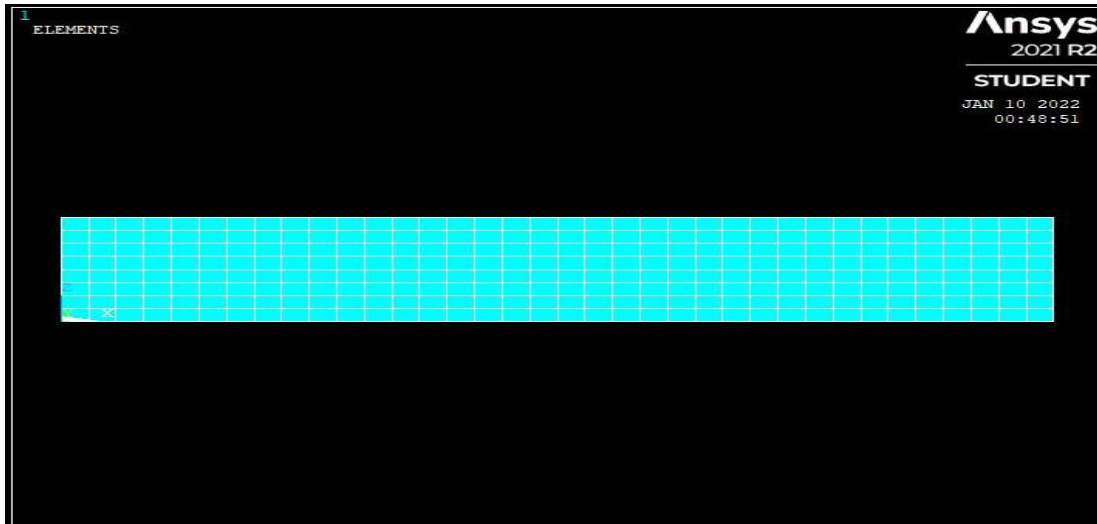
3.3.1 Ανάλυση Ποιότητας Διακριτοποίησης για 3-Σημείων

Αναλύοντας την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων συμπεραίνουμε ότι η αύξηση του αριθμού των πεπερασμένων στοιχείων οδηγεί σε μεγαλύτερη ακρίβεια των αποτελεσμάτων καθώς πλησιάζουμε όλο και περισσότερο στην συνεχή λύση. Όμως η αύξηση των πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί και μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύ, η οποία είναι περιορισμένη, αλλά και περισσότερο χρόνο. Συνεπώς θα πρέπει να βρεθεί η χρυσή τομή μεταξύ αυτών των δύο, έτσι ώστε να έχουμε επαρκή ακρίβεια αποτελεσμάτων με την διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ και τον διαθέσιμο χρόνο.

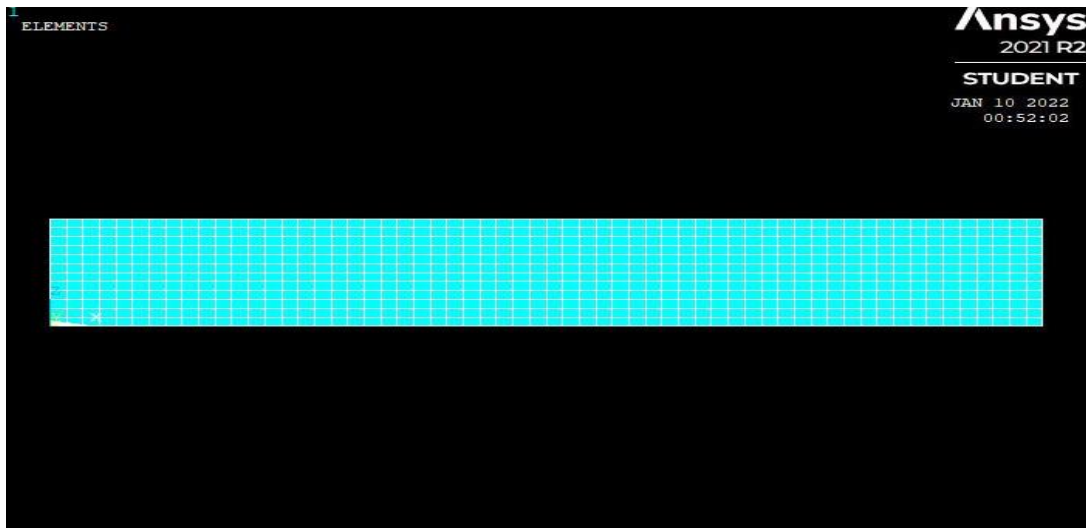
Για την ανάλυση της ποιότητας της διακριτοποίησης θα ελεγχθεί η μεταβολή του βέλους κάμψης, στο οποίο και εστιάζουμε στην παρούσα μελέτη, συναρτήσει του αριθμού των πεπερασμένων στοιχείων. Πραγματοποιήθηκαν έξι διακριτοποιήσεις του μοντέλου και οι τιμές των παραμέτρων που επιλέχθηκαν είναι ασκούμενο φορτίο $F=2$ kN, μήκος δοκιμίου $L=120$ mm, πάχος δοκιμίου $t=10$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm και με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 15% .



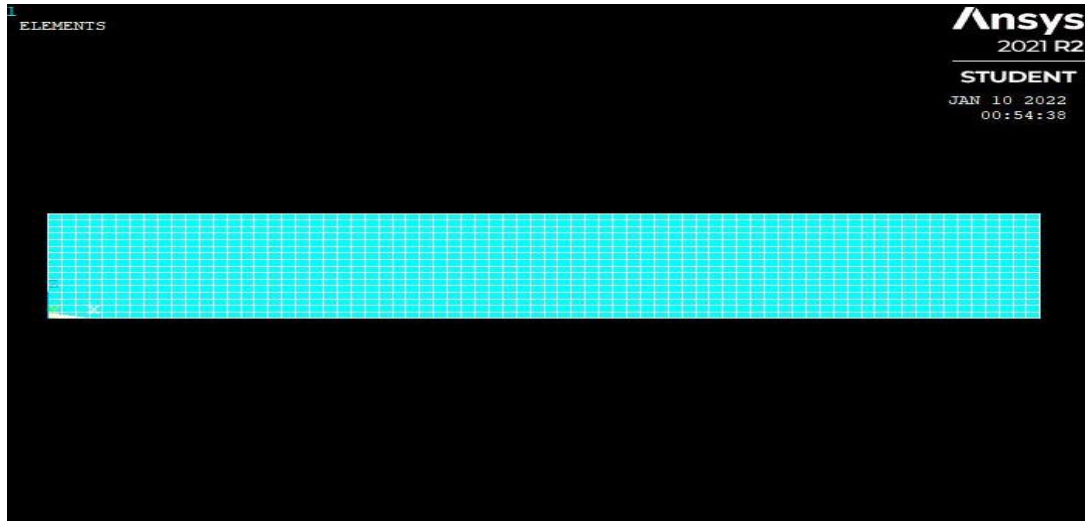
Εικόνα 3.3.2
Διακριτοποίηση με 24 στοιχεία κατά μήκος και 4 στοιχεία κατά πλάτος



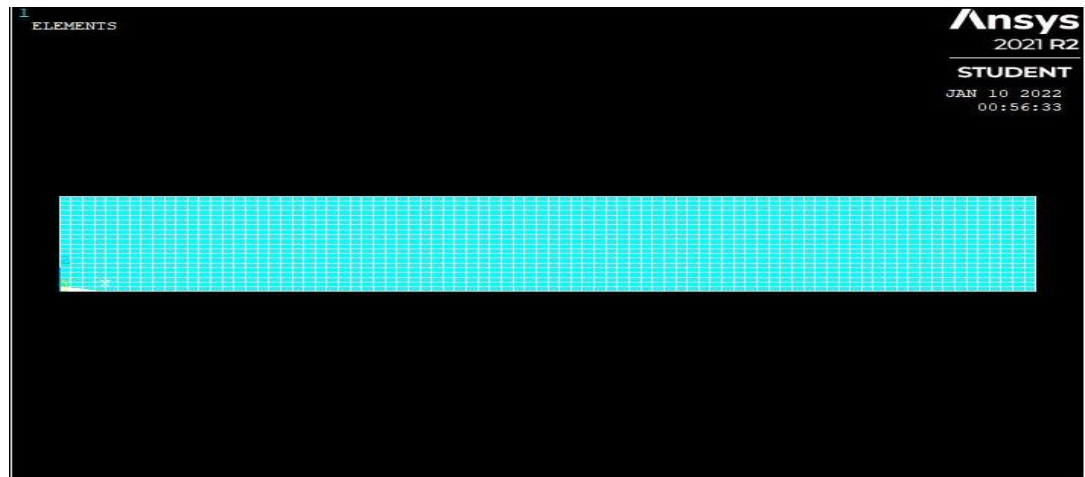
Εικόνα 3.3.3
Διακριτοποίηση με 36 στοιχεία κατά μήκος και 8 στοιχεία κατά πλάτος



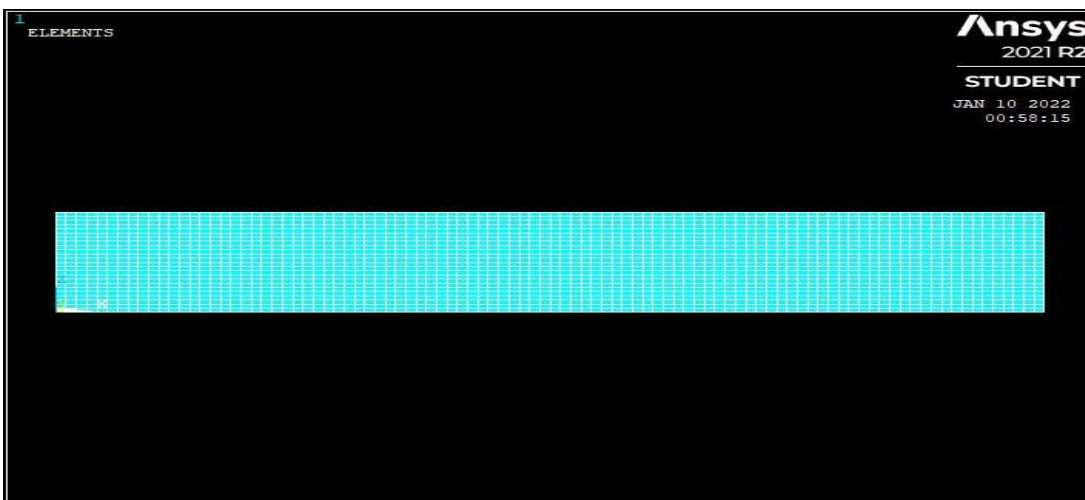
Εικόνα 3.3.4
Διακριτοποίηση με 60 στοιχεία κατά μήκος και 12 στοιχεία κατά πλάτος



Εικόνα 3.3.5
Διακριτοποίηση με 72 στοιχεία κατά μήκος και 16 στοιχεία κατά πλάτος

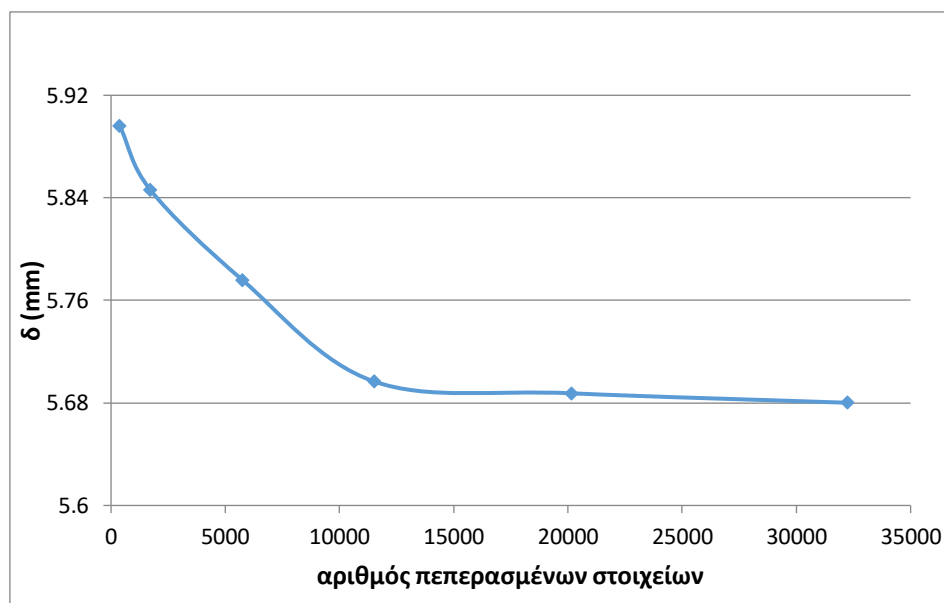


Εικόνα 3.3.6
Διακριτοποίηση με 84 στοιχεία κατά μήκος και 20 στοιχεία κατά πλάτος



Εικόνα 3.3.7
Διακριτοποίηση με 96 στοιχεία κατά μήκος και 24 στοιχεία κατά πλάτος

Ακολουθεί το διάγραμμα για κάθε μια από τις ανωτέρω περιπτώσεις όπου υπολογίστηκαν τα βέλη κάμψης στο σημείο $x=L/2$ καθώς εκεί μας ενδιαφέρει.



Διάγραμμα 3.3.1

Μεταβολή του βέλους κάμψης σε σύγκριση με την αύξηση του αριθμού των Π.Σ. για 3-Σημείων

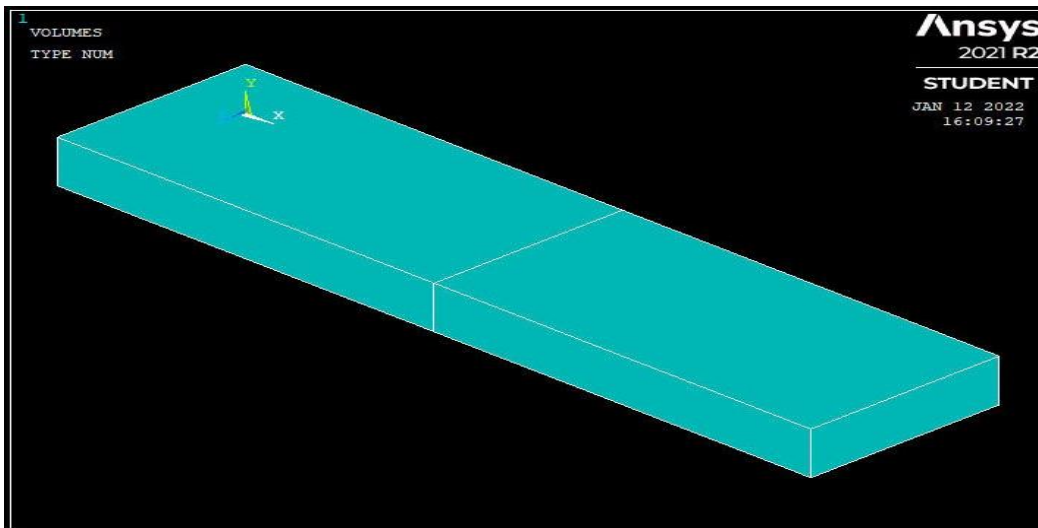
Παρατηρούμε ότι η διακριτοποίηση με τα 72 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 16 κατά πλάτος η ακρίβεια των αποτελεσμάτων θεωρείται ικανοποιητική και συνεπώς δεν απαιτείται περαιτέρω αύξηση των στοιχείων. Άρα, επιλέγουμε τα 72 στοιχεία κατά μήκος και 16 κατά πλάτος με συνολικό αριθμό πεπερασμένων στοιχείων 11520.

3.3.2 Μοντελοποίηση στο ANSYS για 3-Σημείων

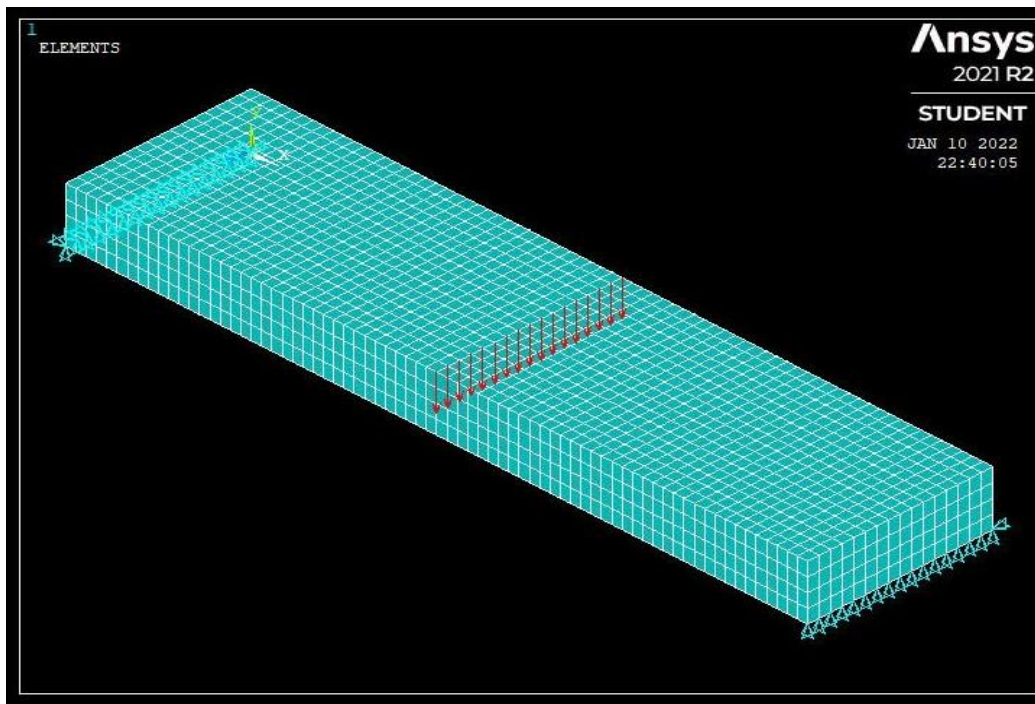
Σε αυτό το υποκεφάλαιο περιγράφεται η διαδικασία μοντελοποίησης της κάμψης τριών σημείων στο ANSYS Mechanical APDL. Για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής εργασίας απαιτείται η εκτέλεση του προγράμματος πάρα πολλές φορές αλλάζοντας κάθε φορά συγκεκριμένες παραμέτρους. Αυτή η διαδικασία διευκολύνεται καθώς το πρόγραμμα παρέχει την δυνατότητα εισαγωγής ενός κώδικα, ο οποίος είναι σε μορφή txt και είναι εύκολη η αλλαγή των τιμών των παραμέτρων.

Προκειμένου να διευκολύνουμε την αναζήτηση των κατάλληλων κόμβων για την εισαγωγή των οριακών συνθηκών θα χωρίσουμε την κατασκευή σε δύο τμήματα. Το κάθε τμήμα θα έχει μήκος $L/2$. Παρατηρώντας την επόμενη εικόνα καταλαβαίνουμε

ότι με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζουμε την ύπαρξη κόμβων στα σημεία που μας ενδιαφέρουν. Η υπόλοιπη διαδικασία της μοντελοποίησης αναλύεται εκτενέστερα παρακάτω στην ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων όπου η κατασκευή είναι όμοια αλλά πολυπλοκότερη καθώς στην κάμψη τριών σημείων η κατασκευή τελειώνει στην κύλιση και το φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα στο κέντρο της, δηλαδή στο σημείο $(L/2,t,z)$.



Εικόνα 3.3.8
Διαχωρισμός της κατασκευής σε δύο τμήματα



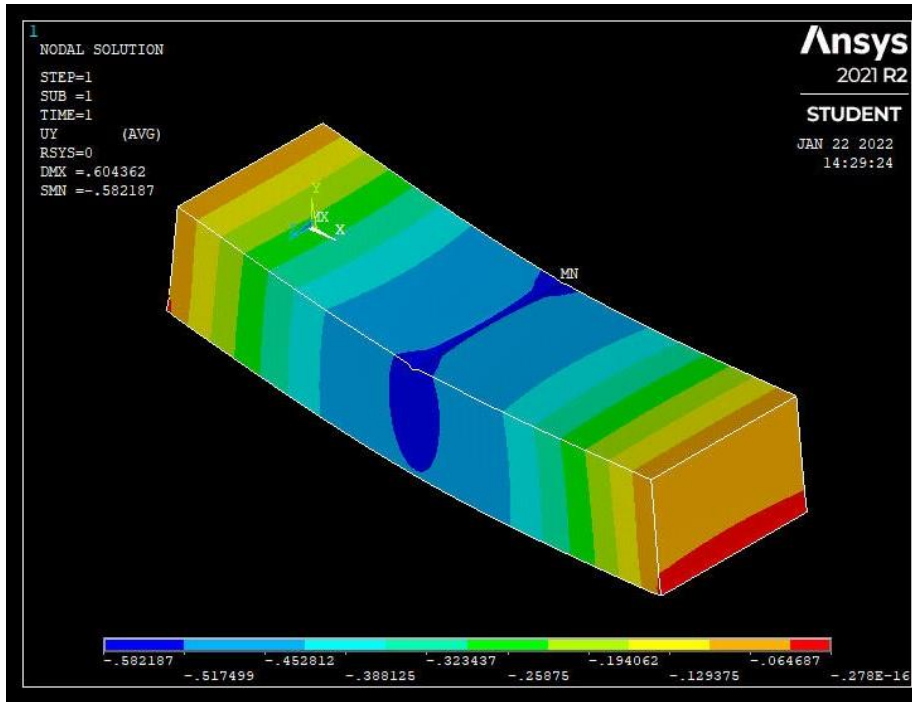
Εικόνα 3.3.9
Μοντελοποίηση της κάμψης τριών σημείων

3.3.3 Αποτελέσματα από την ανάλυση με Π.Σ. για 3-Σημείων

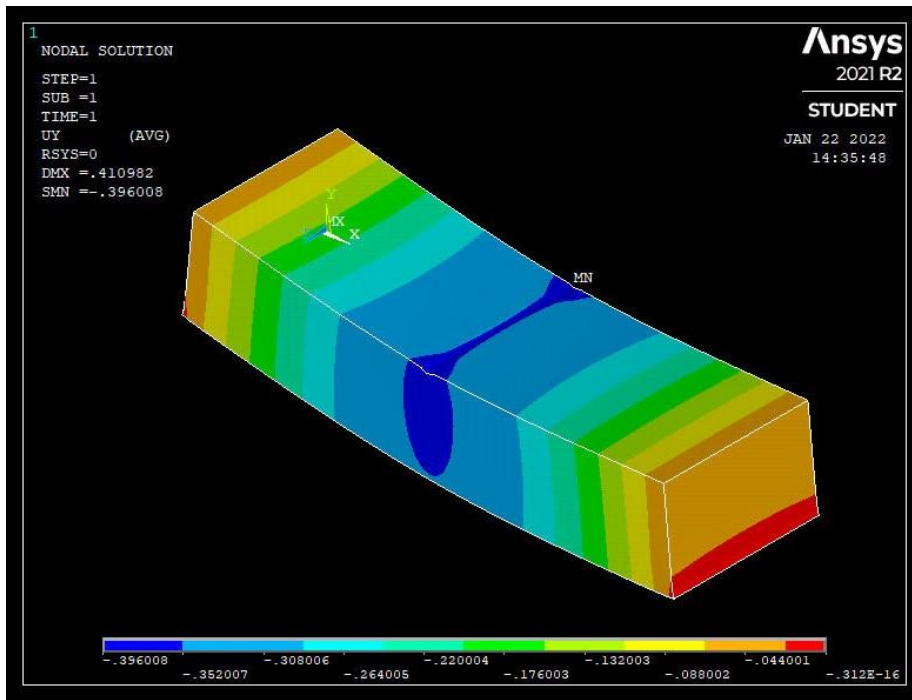
Μετά την μοντελοποίηση του προβλήματος στο ANSYS ακολουθεί η επίλυσή του και η εξαγωγή των αποτελεσμάτων που μας ενδιαφέρουν. Μέσω του προγράμματος μας παρέχετε η δυνατότητα επιλογής του τρόπου παρουσίασης των αποτελεσμάτων, όπου ο καθένας μας βοηθάει να κατανοήσουμε ευκολότερα διαφορετικά συμπεράσματα. Ο πρώτος τρόπος παρουσίασης των αποτελεσμάτων που επιλέγουμε συνήθως είναι ένα χρωματικό διάγραμμα (Contour Plot) έτσι ώστε να παρατηρήσουμε την κατανομή του μεγέθους που μας ενδιαφέρει. Στην συνέχεια, επιλέγουμε την εξαγωγή της τιμής του μεγέθους που μας ενδιαφέρει στον κόμβο που θα επιλέξουμε (Query Result). Επίσης, μας παρέχεται η δυνατότητα εξαγωγής της τιμής ενός μεγέθους σε περισσότερους του ενός κόμβους, π.χ. την τιμή ενός μεγέθους σε έναν συγκεκριμένο κόμβο στο επίπεδο x-y αλλά για όλο το πλάτος ξεχωριστά. Έτσι, μας παρέχεται η δυνατότητα να υπολογίσουμε την κατανομή της τιμής του μεγέθους, στο προηγούμενο παράδειγμα την κατανομή του ως προς το πλάτος του συνθέτου [17].

Ακολουθεί μία σύντομη σύγκριση του βέλους κάμψης με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων με χρωματικά διαγράμματα (Contour Plot). Η σύγκριση πραγματοποιείται μεταξύ των περιεκτικότητας κατ' όγκο 10% και 25%. Οι τιμές των υπόλοιπων κοινών παραμέτρων της δοκού είναι ασκούμενο φορτίο $F=2$ kN, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm.

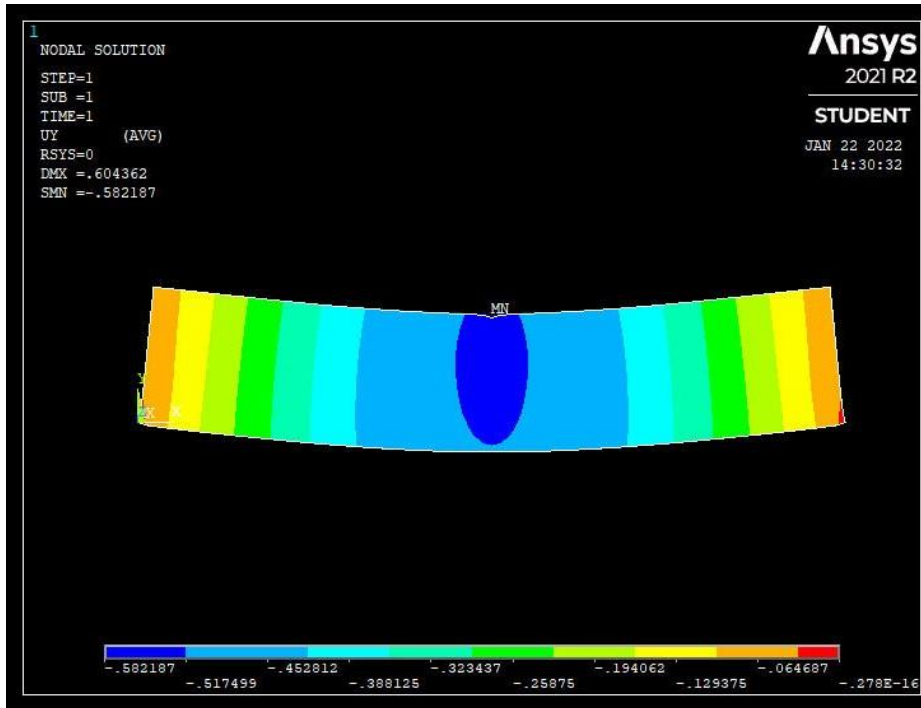
Παρατηρούμε ότι το μέγιστο βέλος κάμψης βρίσκεται στο σημείο εφαρμογής του φορτίου, δηλαδή στο κέντρο της δοκού, το οποίο επιβεβαιώνεται και από την θεωρία. Επίσης, το βέλος κάμψης είναι μεγαλύτερο στην περίπτωση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος 10% απ' ό,τι στην περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%.



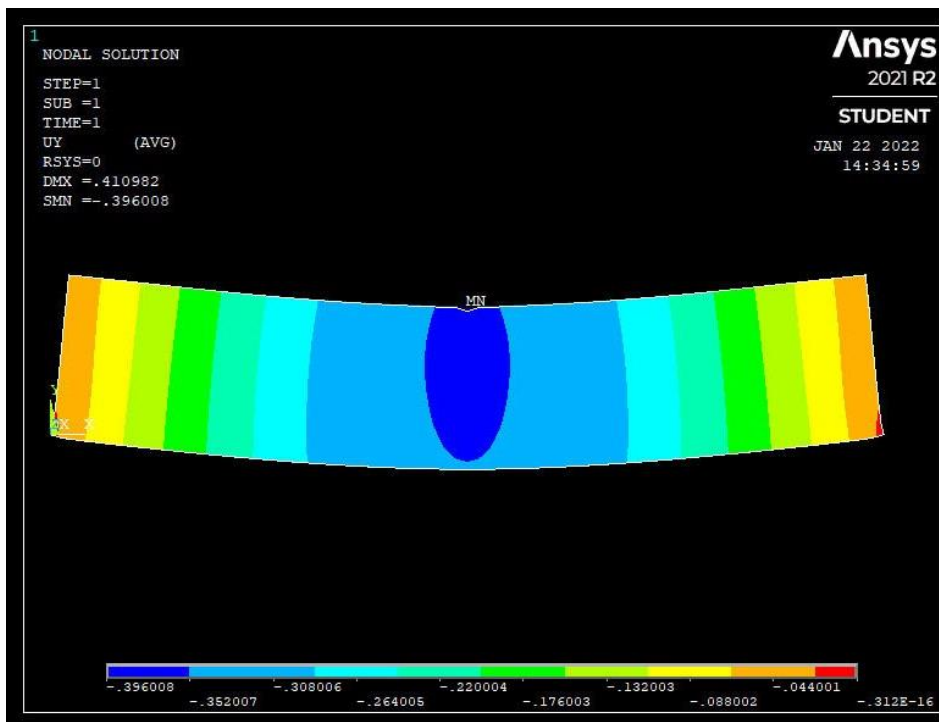
Εικόνα 3.3.10
Κατανομή του βέλους κάμψης στο σύνολο του συνθέτου για
περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 10%



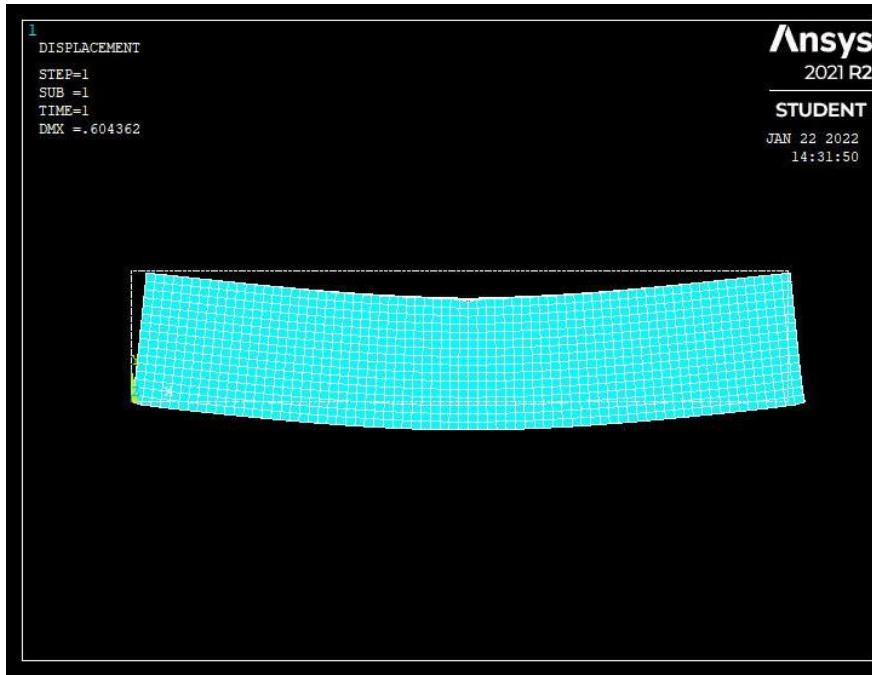
Εικόνα 3.3.11
Κατανομή του βέλους κάμψης στο σύνολο του συνθέτου για
περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%



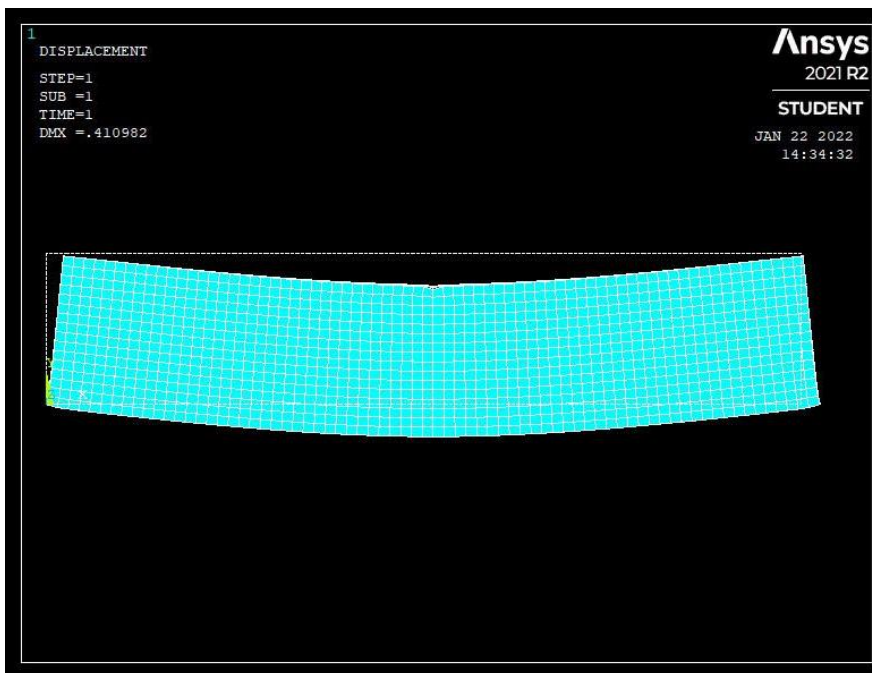
Εικόνα 3.3.12
Κατανομή του βέλους κάμψης στο πάχος του συνθέτου για
περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 10%



Εικόνα 3.3.13
Κατανομή του βέλους κάμψης στο πάχος του συνθέτου για
περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%

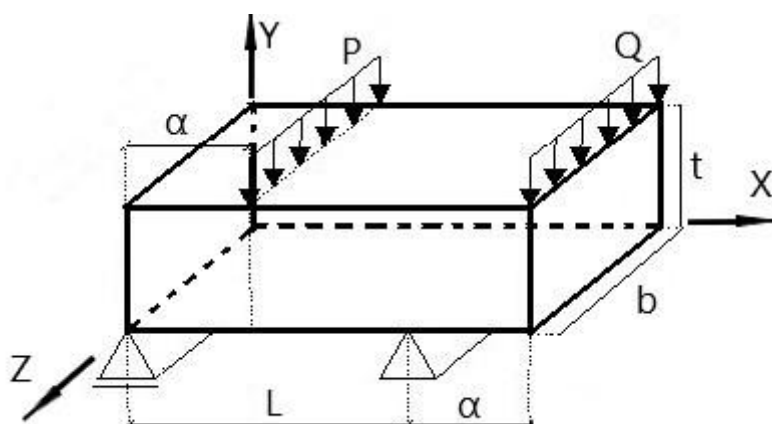


Εικόνα 3.3.14
Μέγιστο βέλος κάμψης στο πάχος του συνθέτου με απεικόνιση
και της απαραμόρφωτης κατάστασης για
περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 10%



Εικόνα 3.3.15
Μέγιστο βέλος κάμψης στο πάχος του συνθέτου με απεικόνιση
και της απαραμόρφωτης κατάστασης για
περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%

3.4 Μοντελοποίηση Δοκού για 4-Σημείων



Εικόνα 3.4.1

Τρισδιάστατη απεικόνιση της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων

Στην παραπάνω εικόνα παρουσιάζονται τα γενικά χαρακτηριστικά του καννάβου της τρισδιάστατης δοκού σε ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, όπου :

L : η απόσταση μεταξύ των στηρίξεων

α : η απόσταση μεταξύ στήριξης – επιβαλλόμενης φόρτισης

b : το πλάτος της δοκού

t : το πάχος της δοκού

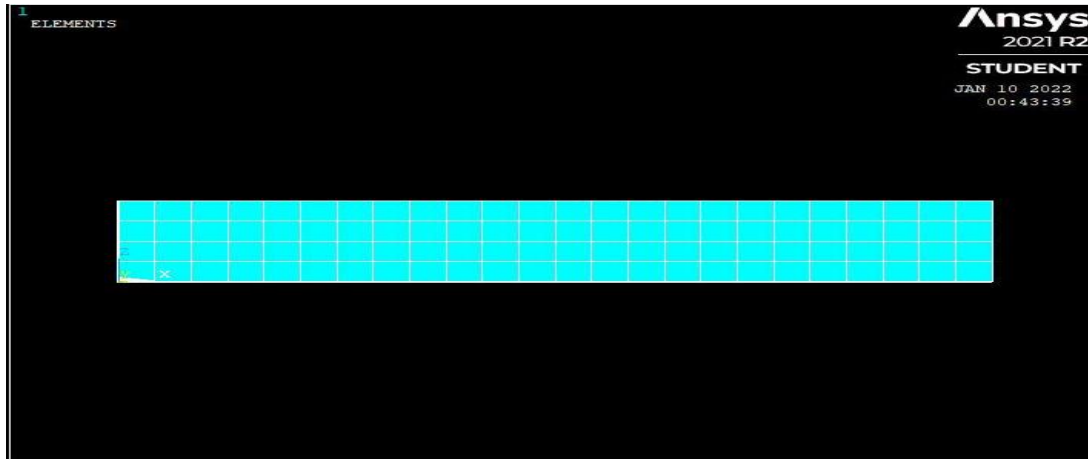
P και Q : τα ασκούμενα φορτία

3.4.1 Ανάλυση Ποιότητας Διακριτοποίησης για 4-Σημείων

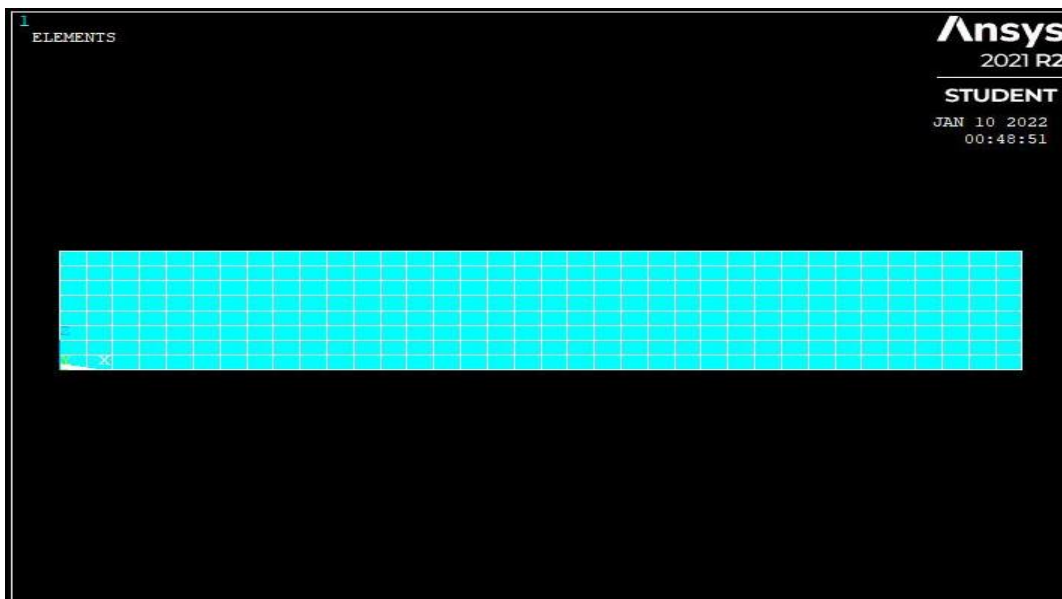
Αναλύοντας την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων συμπεραίνουμε ότι η αύξηση του αριθμού των πεπερασμένων στοιχείων οδηγεί σε μεγαλύτερη ακρίβεια των αποτελεσμάτων καθώς πλησιάζουμε όλο και περισσότερο στην συνεχή λύση. Όμως η αύξηση των πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί και μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύ, η οποία είναι περιορισμένη, αλλά και περισσότερο χρόνο. Συνεπώς θα πρέπει να βρεθεί η χρυσή τομή μεταξύ αυτών των δύο, έτσι ώστε να έχουμε επαρκή ακρίβεια αποτελεσμάτων με την διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ και τον διαθέσιμο χρόνο [16].

Για την ανάλυση της ποιότητας της διακριτοποίησης θα ελεγχθεί η μεταβολή του βέλους κάμψης, στο οποίο και εστιάζουμε στην παρούσα μελέτη, συναρτήσει του

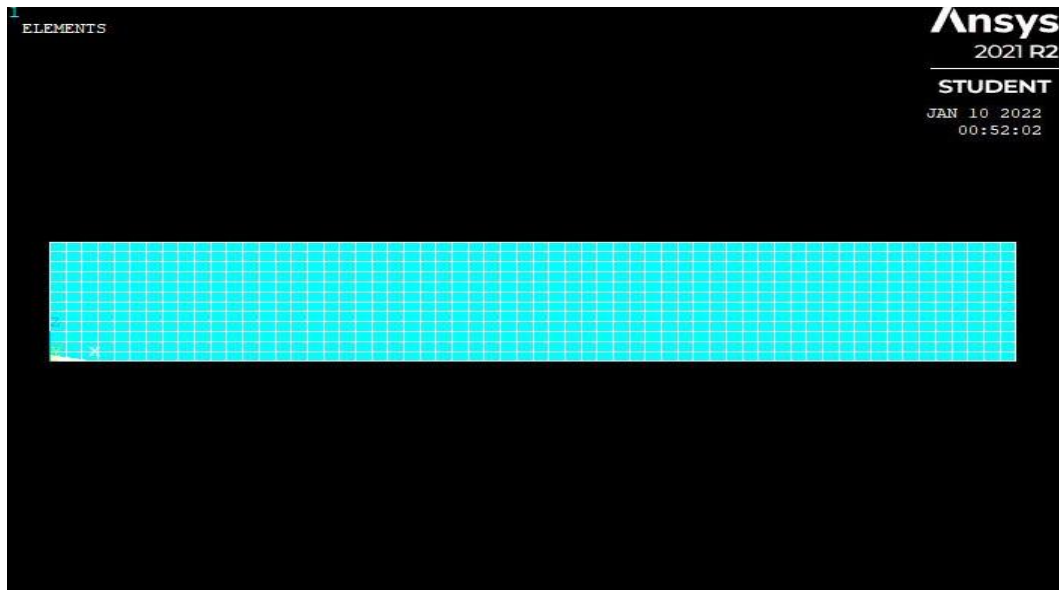
αριθμού των πεπερασμένων στοιχείων. Πραγματοποιήθηκαν έξι διακριτοποιήσεις του μοντέλου και οι τιμές των παραμέτρων που επιλέχθηκαν είναι ασκούμενο φορτίο $F=2$ kN, μήκος δοκιμίου $L=120$ mm, πάχος δοκιμίου $t=10$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm και συντελεστή $\lambda=5$ με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 15%.



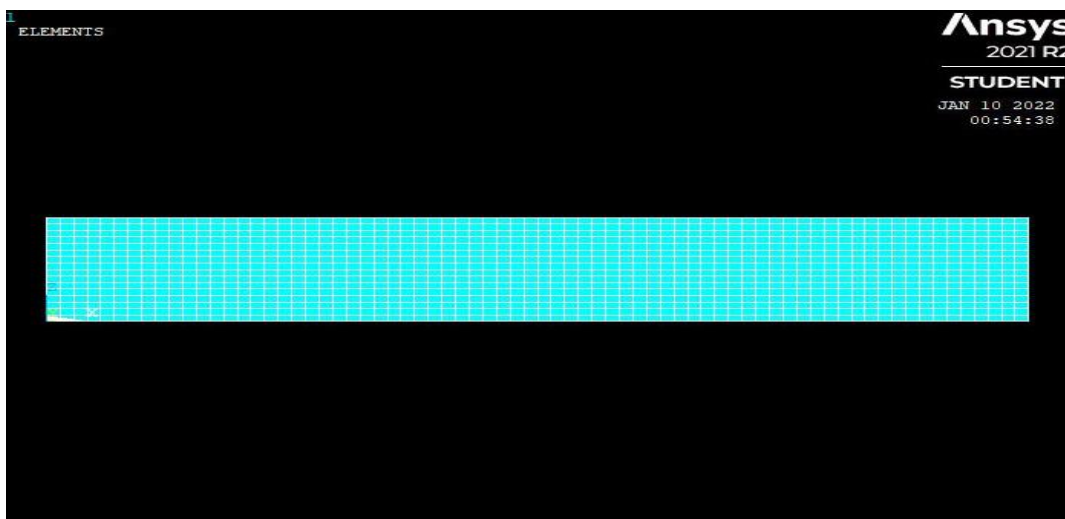
Εικόνα 3.4.2
Διακριτοποίηση με 24 στοιχεία κατά μήκος και 4 στοιχεία κατά πλάτος



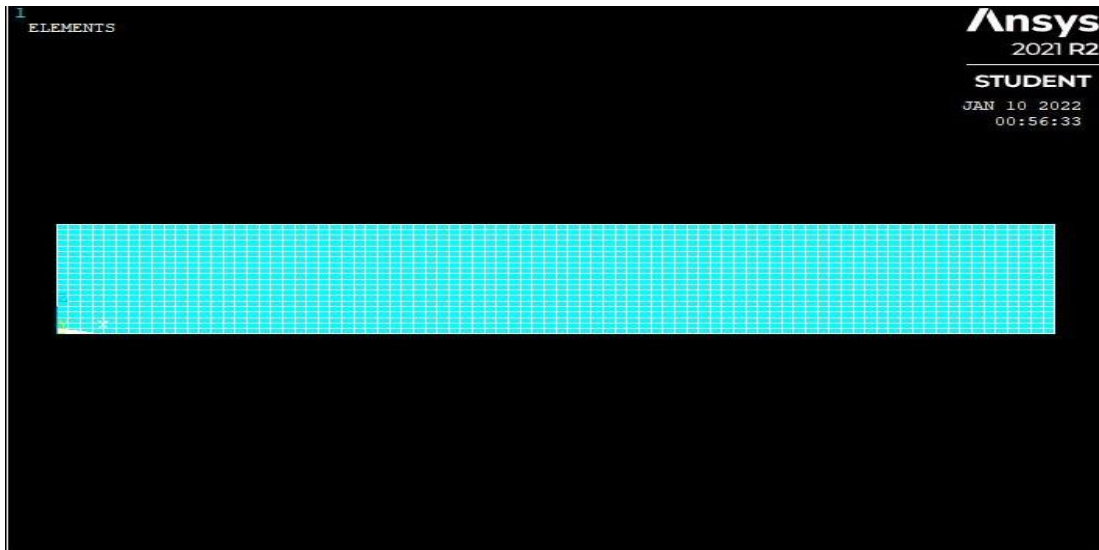
Εικόνα 3.4.3
Διακριτοποίηση με 36 στοιχεία κατά μήκος και 8 στοιχεία κατά πλάτος



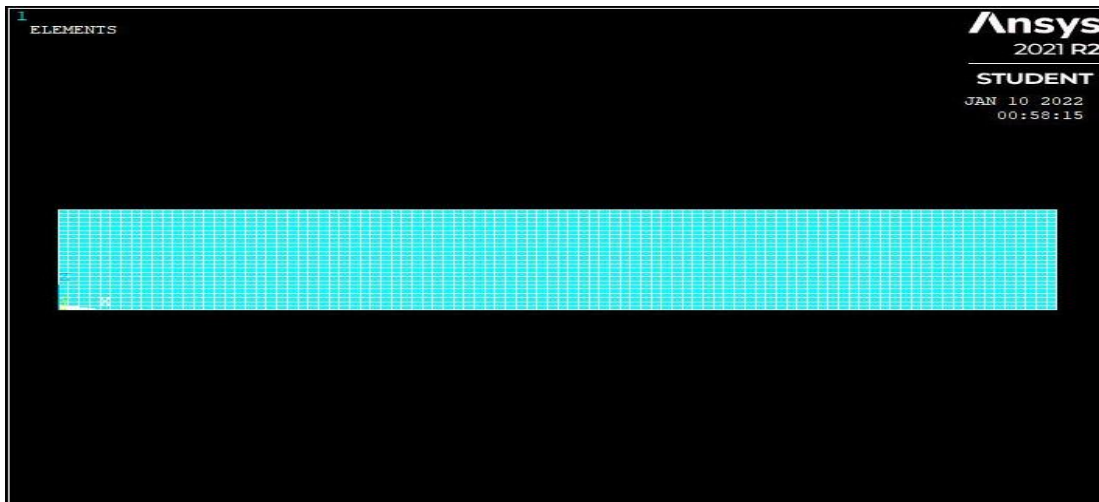
Εικόνα 3.4.4
Διακριτοποίηση με 60 στοιχεία κατά μήκος και 12 στοιχεία κατά πλάτος



Εικόνα 3.4.5
Διακριτοποίηση με 72 στοιχεία κατά μήκος και 16 στοιχεία κατά πλάτος

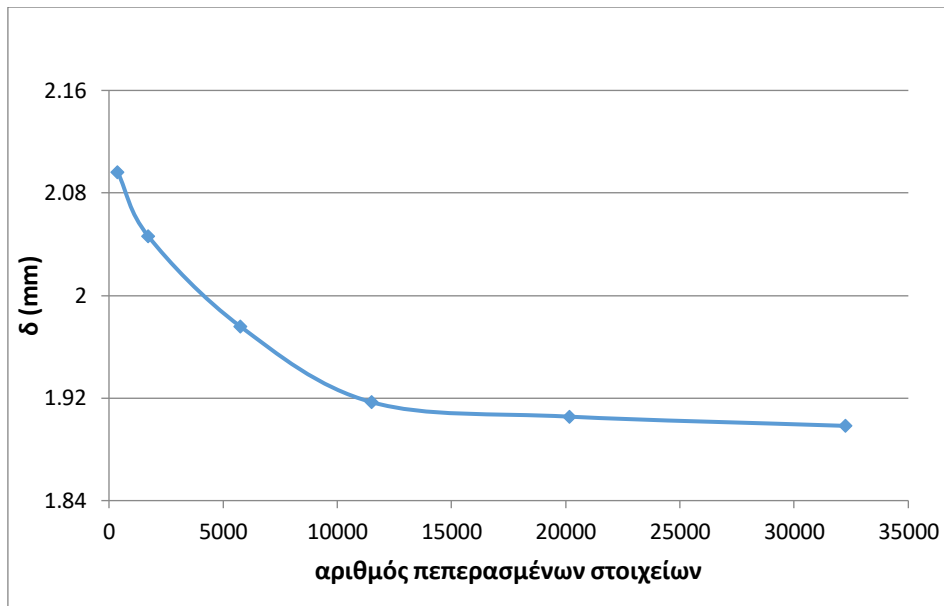


Εικόνα 3.4.6
Διακριτοποίηση με 84 στοιχεία κατά μήκος και 20 στοιχεία κατά πλάτος



Εικόνα 3.4.7
Διακριτοποίηση με 96 στοιχεία κατά μήκος και 24 στοιχεία κατά πλάτος

Ακολουθεί το διάγραμμα για κάθε μια από τις ανωτέρω περιπτώσεις όπου υπολογίστηκαν τα βέλη κάμψης στο σημείο $x=a$ καθώς εκεί μας ενδιαφέρει.



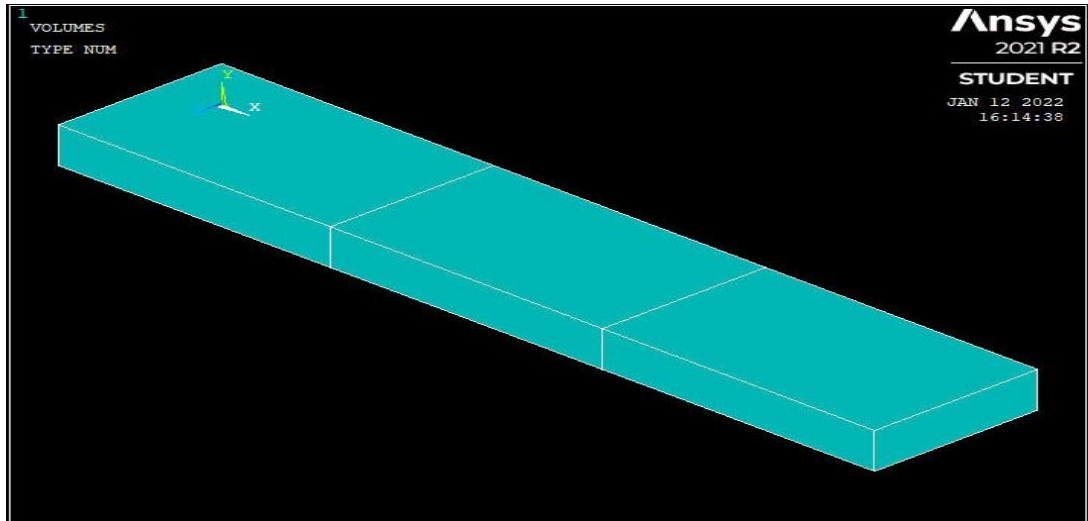
Διάγραμμα 3.4.1

Μεταβολή του βέλους κάμψης σε σύγκριση με την αύξηση του αριθμού των Π.Σ. για 4-Σημείων

Παρατηρούμε ότι η διακριτοποίηση με τα 72 στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 16 κατά πλάτος η ακρίβεια των αποτελεσμάτων θεωρείται ικανοποιητική και συνεπώς δεν απαιτείται περαιτέρω αύξηση των στοιχείων. Άρα, επιλέγουμε τα 72 στοιχεία κατά μήκος και 16 κατά πλάτος με συνολικό αριθμό πεπερασμένων στοιχείων 11520.

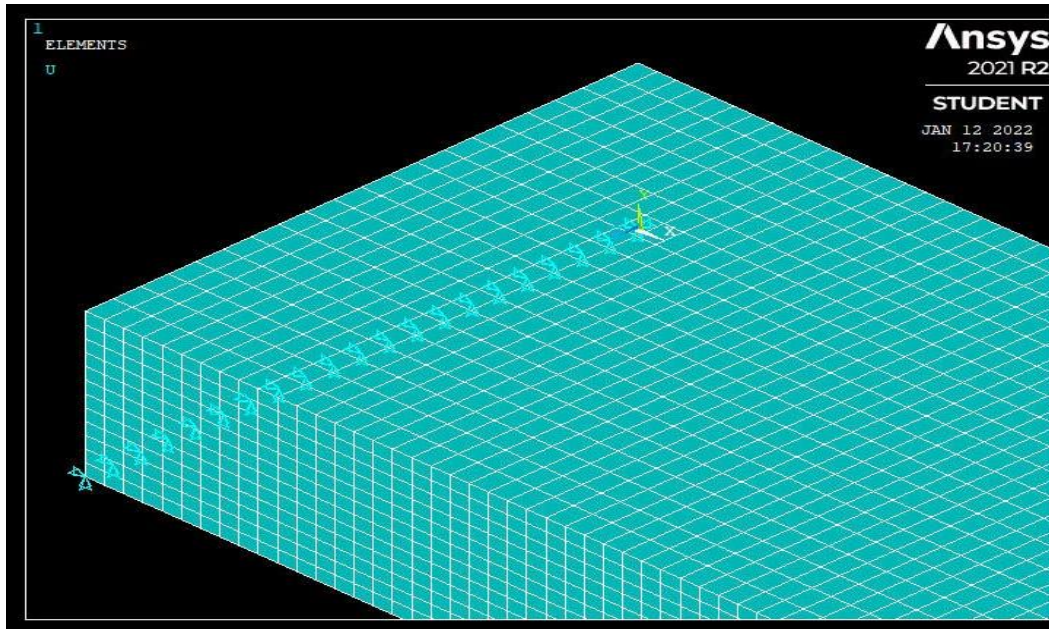
3.4.2 Μοντελοποίηση στο ANSYS για 4-Σημείων

Αρχικά, προκειμένου να διευκολύνουμε την αναζήτηση των κατάλληλων κόμβων για την εισαγωγή των οριακών συνθηκών θα χωρίσουμε την κατασκευή σε τρία τμήματα. Το πρώτο τμήμα θα έχει μήκος a , το δεύτερο $L-a$ και το τρίτο a . Παρατηρώντας την επόμενη εικόνα καταλαβαίνουμε ότι με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζουμε την ύπαρξη κόμβων στα σημεία που μας ενδιαφέρουν.



Εικόνα 3.4.8
Διαχωρισμός της κατασκευής σε τρία τμήματα

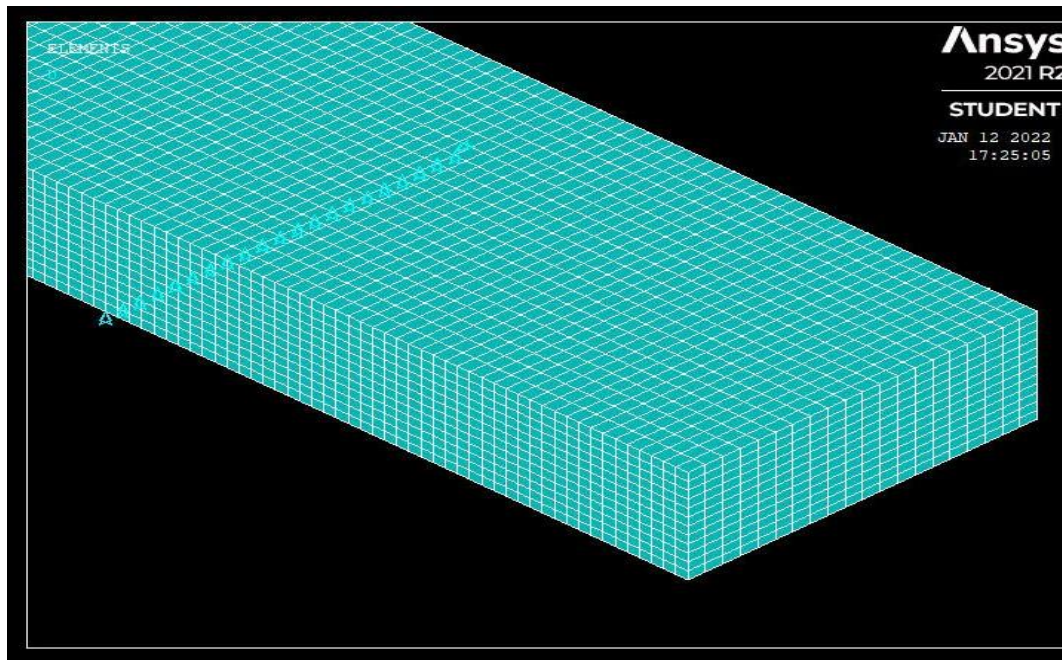
Στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε τις στηρίξεις. Οπότε, στους κόμβους στις θέσεις $(0,0,z)$ έχουμε περιορισμό κίνησης στις κατευθύνσεις των αξόνων x και y . Χρειάζεται να προσθέσουμε και στην θέση $(0,0,0)$ περιορισμό κίνησης στην κατεύθυνση του άξονα z για να μην αναγνωρίσει το πρόγραμμα την κατασκευή ως μηχανισμό.



Εικόνα 3.4.9
Στήριξη του αριστερού άκρου στις δύο κατευθύνσεις x και y καθώς και στην θέση $(0,0,0)$ ως προς την διεύθυνση z

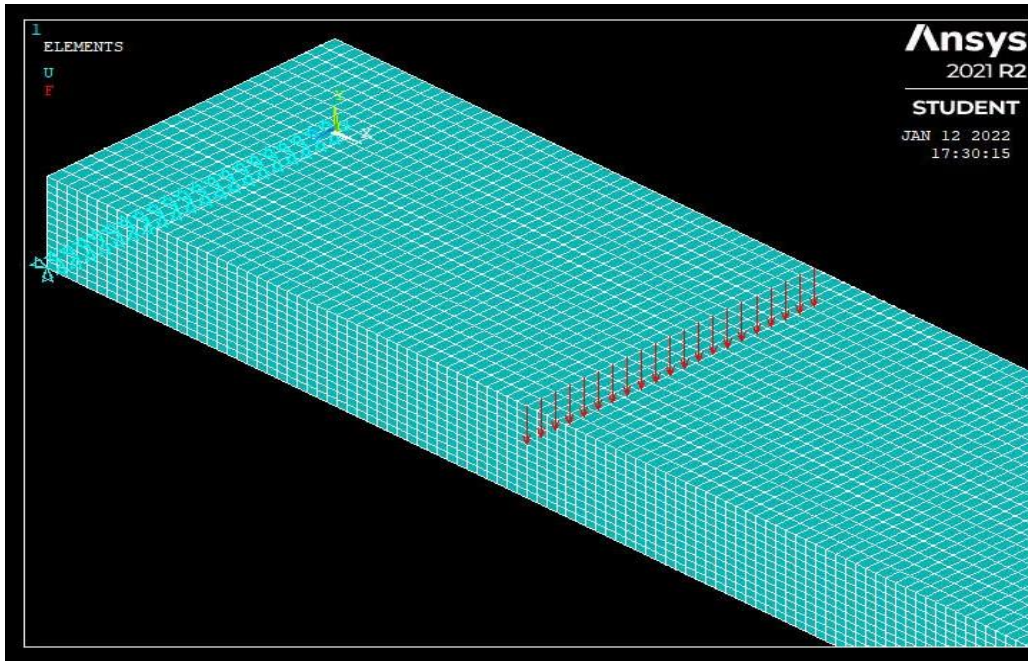
Όσο αφορά την κύλιση, στους κόμβους στις θέσεις $(L,0,z)$ έχουμε περιορισμό κίνησης στην κατεύθυνση του άξονα y . Χρειάζεται ξανά να προσθέσουμε περιορισμό κίνησης

και στην κατεύθυνση του άξονα z όμως στη θέση $(L,0,0)$ για τον ίδιο λόγο που αναφέρθηκε παραπάνω.



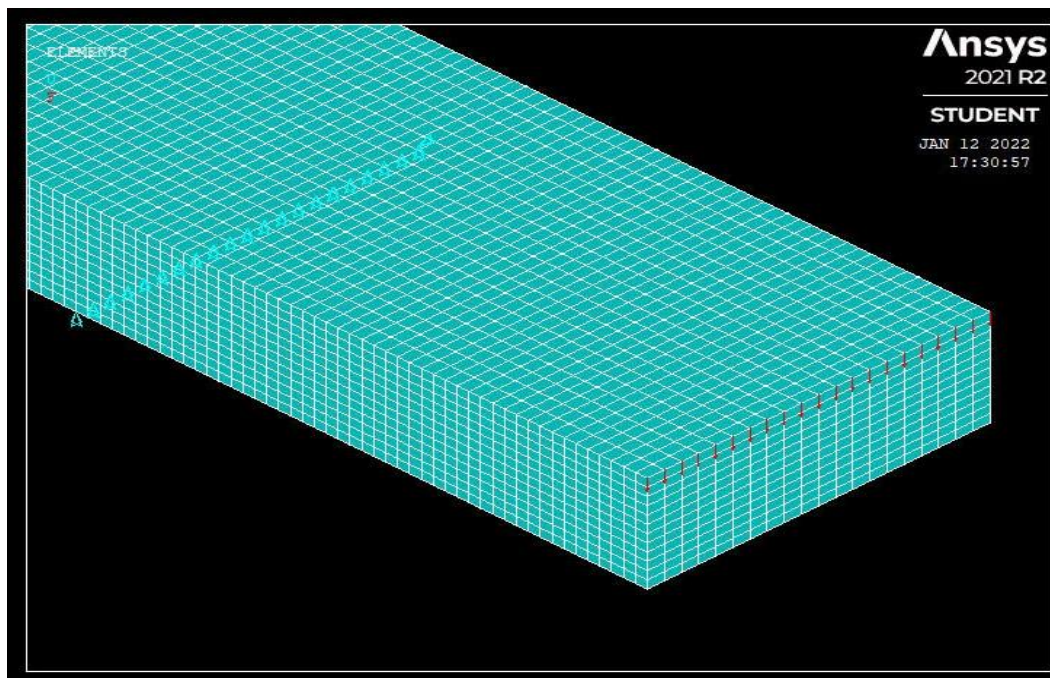
Εικόνα 3.4.10
Κύλιση στις θέσεις $(L,0,z)$ όπου εμποδίζεται η κίνηση στην κατεύθυνση y καθώς και στην θέση $(L,0,0)$ ως προς την διεύθυνση z

Ακολουθεί η εφαρμογή των ασκούμενων φορτίων. Στους κόμβους στις θέσεις (a,t,z) θα κατανέμουμε ομοιόμορφα το φορτίο Q . Αυτό επιτυγχάνεται διαιρώντας το φορτίο Q με τον αριθμό των κόμβων σε αυτές τις θέσεις και στην συνέχεια εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα σε κάθε ένα από αυτούς τους κόμβους.



Εικόνα 3.4.11
Κατανομή του φορτίου Q στις θέσεις (a,t,z)

Το δεύτερο φορτίο, δηλαδή το P θα εφαρμοστεί και αυτό ομοιόμορφα κατανεμημένο, όπως το Q προηγουμένως, όμως στις θέσεις (L+a,t,z).



Εικόνα 3.4.12
Κατανομή του φορτίου P στις θέσεις (L+a,t,z)

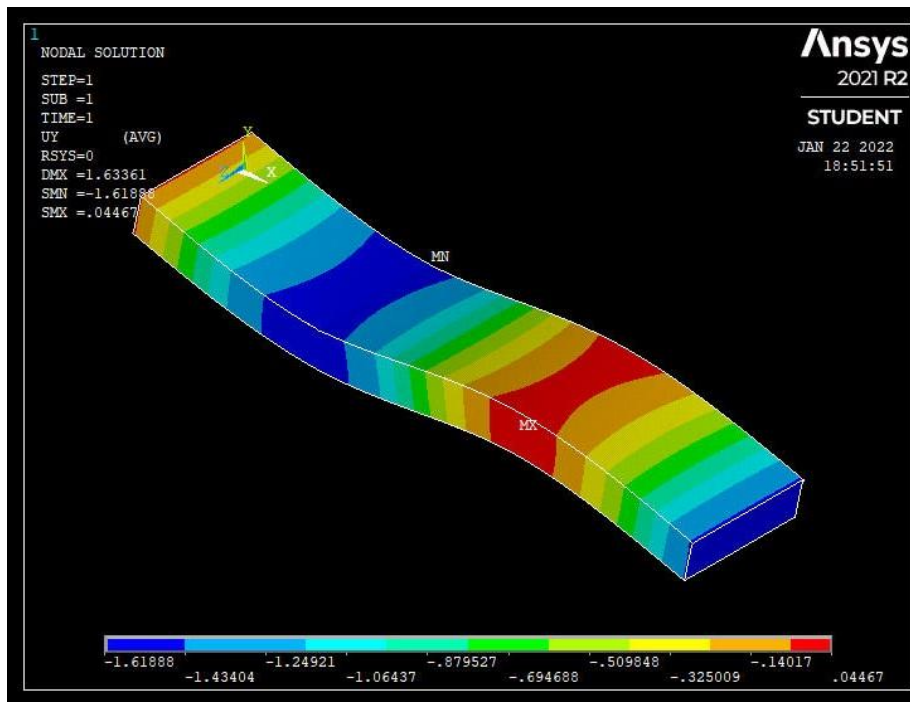
3.4.3 Αποτελέσματα από την ανάλυση με Π.Σ. για 4-Σημείων

Μετά την μοντελοποίηση του προβλήματος στο ANSYS ακολουθεί η επίλυσή του και η εξαγωγή των αποτελεσμάτων που μας ενδιαφέρουν. Μέσω του προγράμματος μας παρέχετε η δυνατότητα επιλογής του τρόπου παρουσίασης των αποτελεσμάτων, όπου ο καθένας μας βοηθάει να κατανοήσουμε ευκολότερα διαφορετικά συμπεράσματα. Ο πρώτος τρόπος παρουσίασης των αποτελεσμάτων που επιλέγουμε συνήθως είναι ένα χρωματικό διάγραμμα (Contour Plot) έτσι ώστε να παρατηρήσουμε την κατανομή του μεγέθους που μας ενδιαφέρει. Στην συνέχεια, επιλέγουμε την εξαγωγή της τιμής του μεγέθους που μας ενδιαφέρει στον κόμβο που θα επιλέξουμε (Query Result). Επίσης, μας παρέχεται η δυνατότητα εξαγωγής της τιμής ενός μεγέθους σε περισσότερους του ενός κόμβους, π.χ. την τιμή ενός μεγέθους σε έναν συγκεκριμένο κόμβο στο επίπεδο x-y αλλά για όλο το πλάτος ξεχωριστά. Έτσι, μας παρέχεται η δυνατότητα να υπολογίσουμε την κατανομή της τιμής του μεγέθους, στο προηγούμενο παράδειγμα την κατανομή του ως προς το πλάτος του συνθέτου.

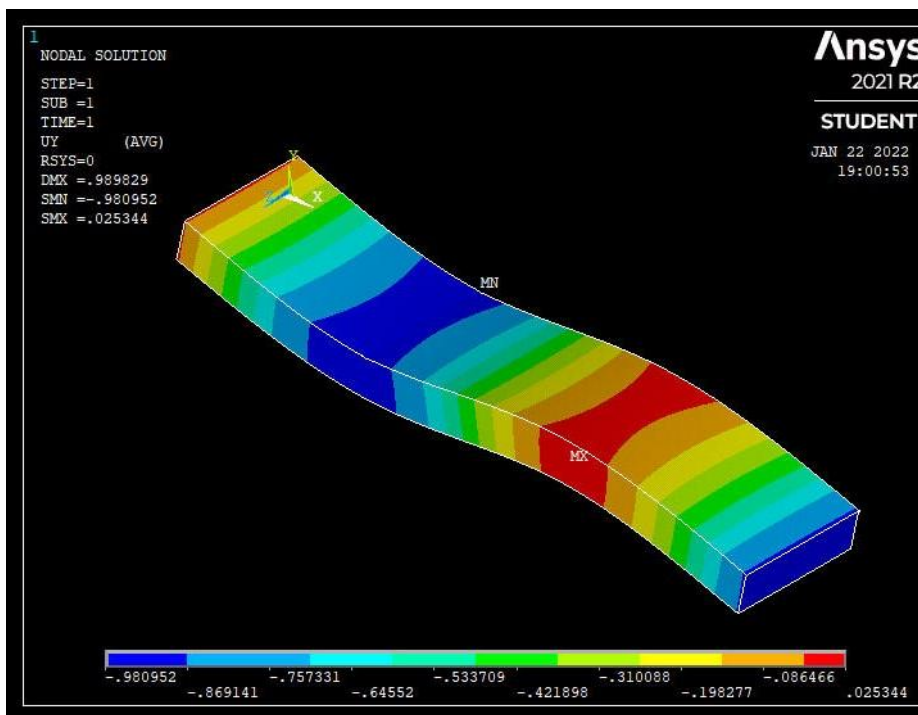
Ακολουθεί μία σύντομη σύγκριση του βέλους κάμψης και των τάσεων με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων με χρωματικά διαγράμματα (Contour Plot). Η σύγκριση πραγματοποιείται μεταξύ των περιεκτικότητας κατ' όγκο 5% και 25%. Οι τιμές των υπόλοιπων κοινών παραμέτρων της δοκού είναι συντελεστή φόρτισης $\lambda=3$, ασκούμενο φορτίο $F=2$ kN, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=10$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm.

3.4.3.1 Βέλος Κάμψης

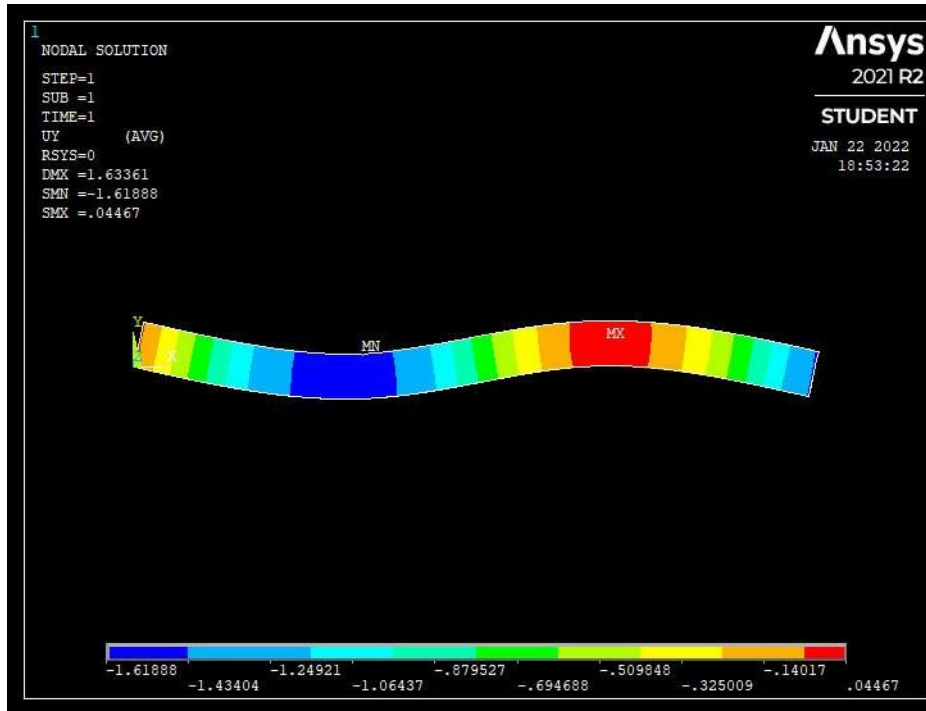
Παρατηρούμε ότι το μέγιστο βέλος κάμψης βρίσκεται στο σημείο B (Εικόνα 2.3.1.) Επίσης, το βέλος κάμψης είναι μεγαλύτερο στην περίπτωση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος 5% απ' ό,τι στην περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%.



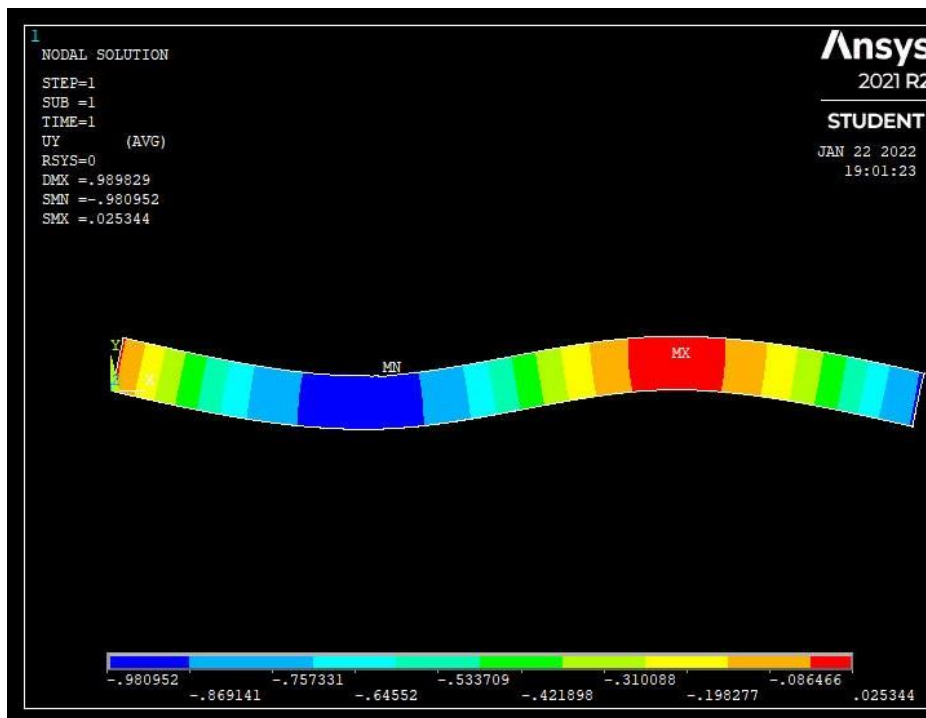
Εικόνα 3.4.13
Κατανομή του βέλους κάμψης στο σύνολο του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%



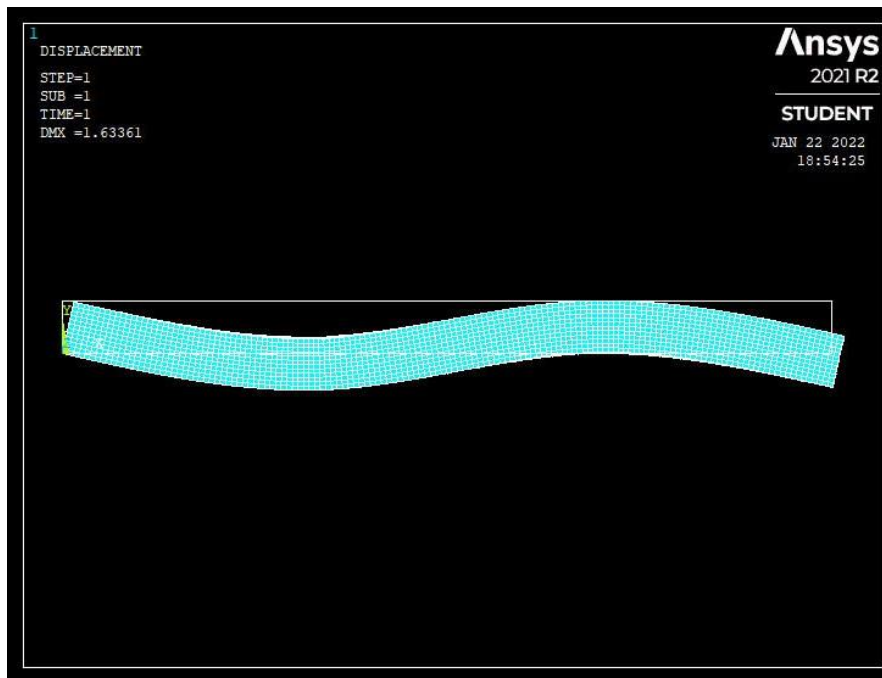
Εικόνα 3.4.14
Κατανομή του βέλους κάμψης στο σύνολο του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%



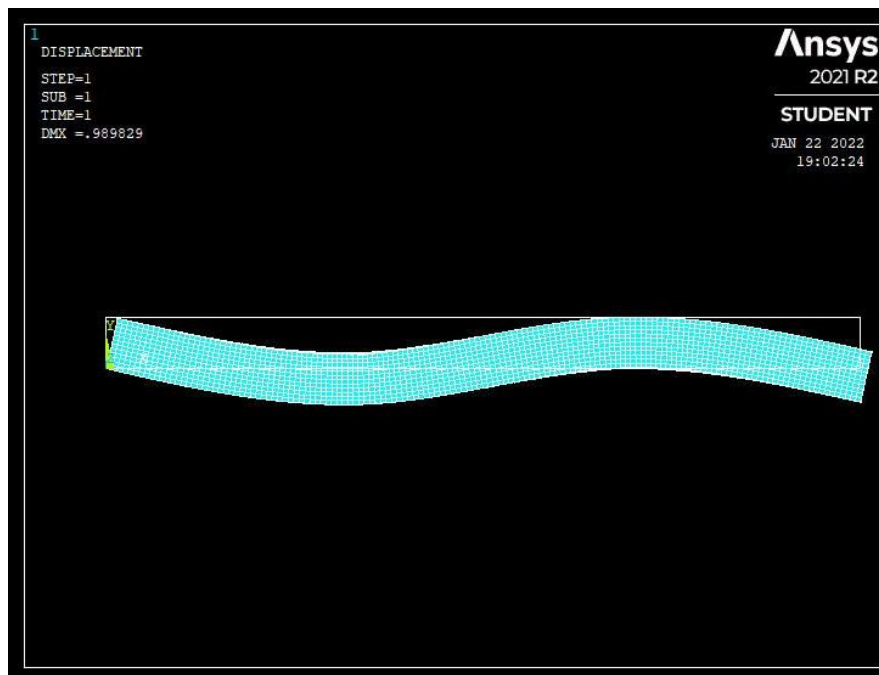
Εικόνα 3.4.15
Κατανομή του βέλους κάμψης στο πάχος του συνθέτου για
περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%



Εικόνα 3.4.16
Κατανομή του βέλους κάμψης στο πάχος του συνθέτου για
περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%



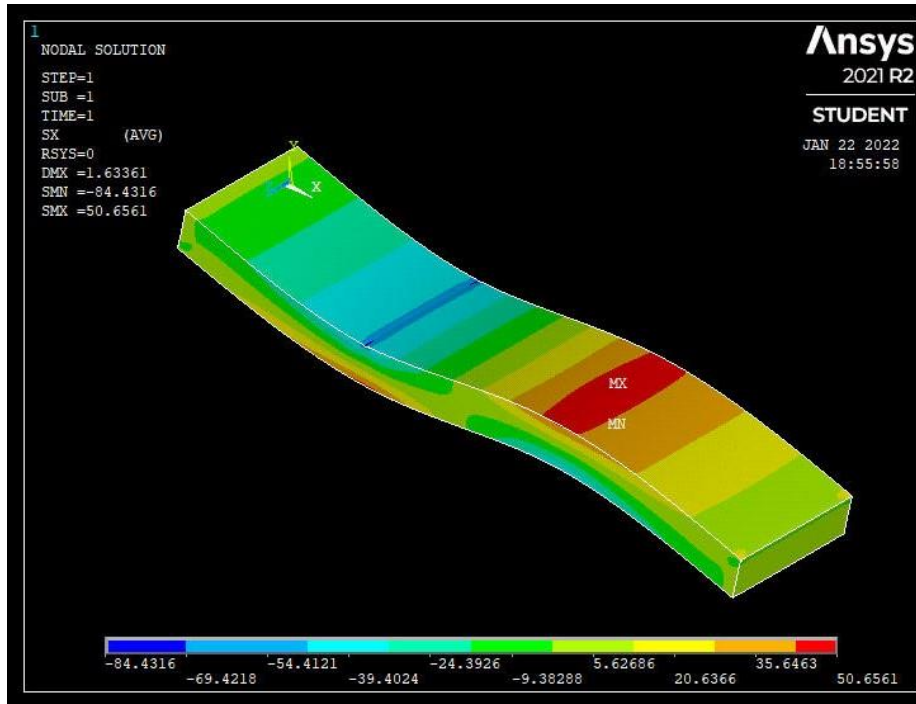
Εικόνα 3.4.17
Μέγιστο βέλος κάμψης στο πάχος του συνθέτου με απεικόνιση
και της απαραμόρφωτης κατάστασης για
περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%



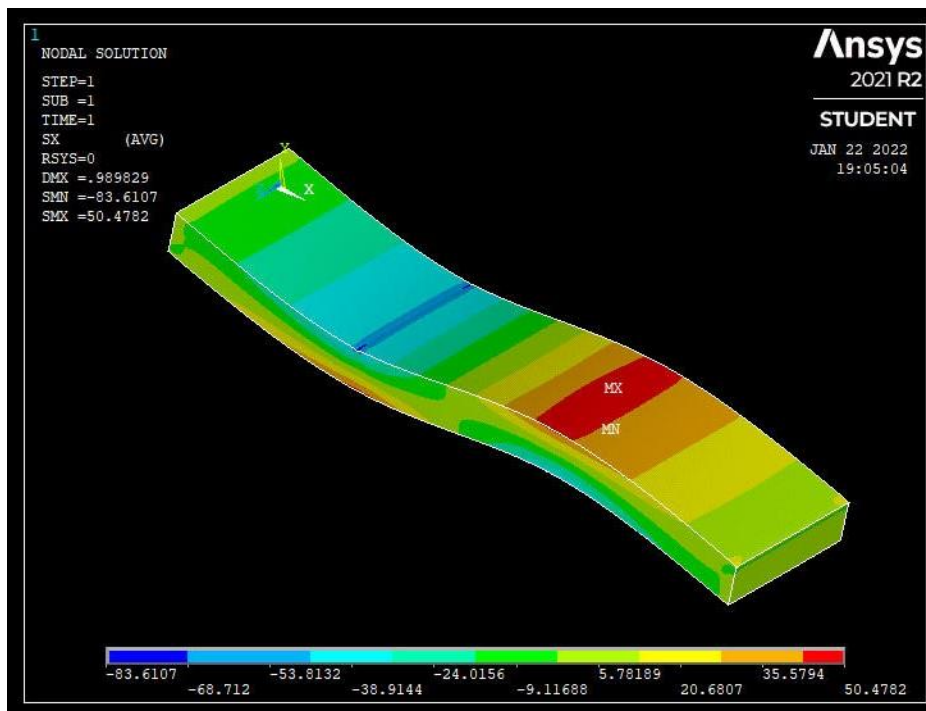
Εικόνα 3.4.18
Μέγιστο βέλος κάμψης στο πάχος του συνθέτου με απεικόνιση
και της απαραμόρφωτης κατάστασης για
περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%

3.4.3.2 Ορθές Τάσεις σ_x

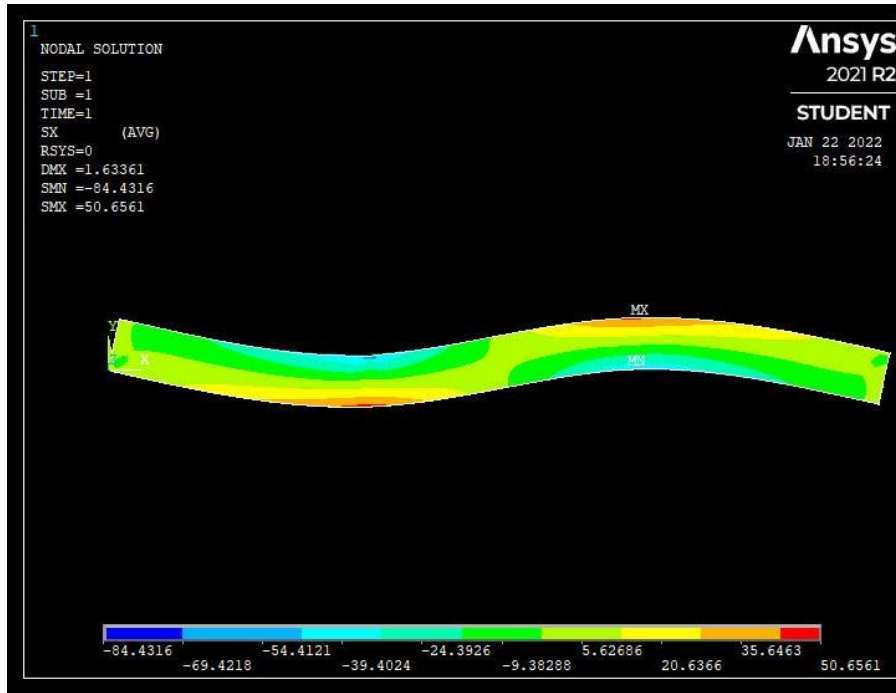
Οι μέγιστες ορθές τάσεις σ_x βρίσκονται στα άνω και κάτω άκρα των σημείων B και C (Εικόνα 2.3.1). Επίσης, παρατηρούμε την αντισυμμετρία των ορθών τάσεων σ_x ως προς το κέντρο του συνθέτου, όπου είναι πολύ μικρές. Όπως αναμέναμε και από την θεωρία η περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος έχει πολύ μικρή επιρροή στις τιμές των ορθών τάσεων σ_x .



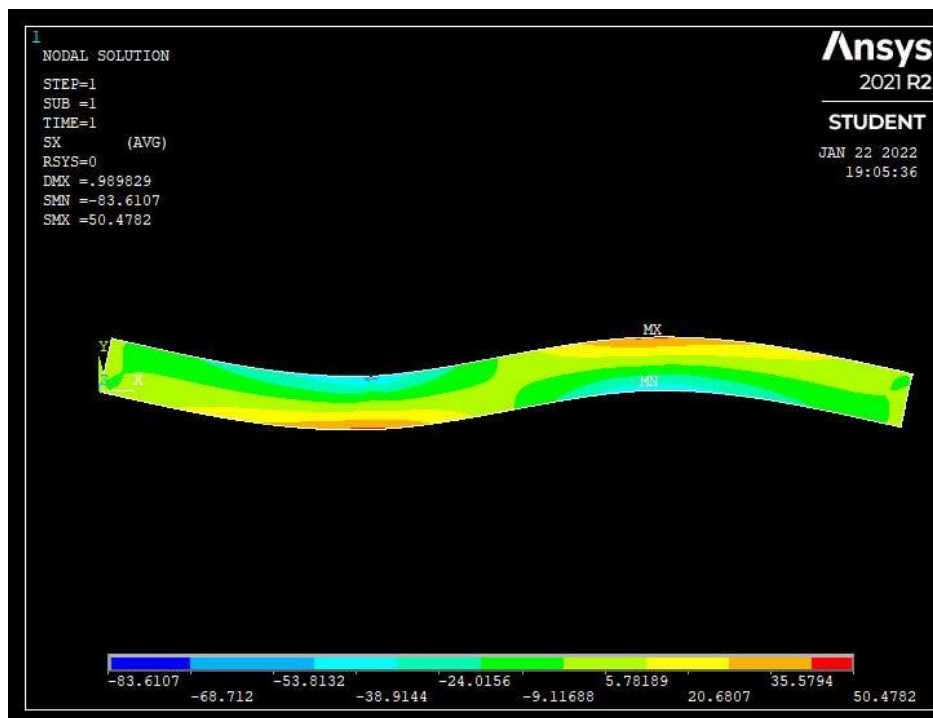
Εικόνα 3.4.19
Κατανομή των ορθών τάσεων σ_x στο σύνολο του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%



Εικόνα 3.4.20
Κατανομή των ορθών τάσεων σ_x στο σύνολο του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%



Εικόνα 3.4.21
Κατανομή των ορθών τάσεων σ_x στο πάχος του συνθέτου για
περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%



Εικόνα 3.4.22
Κατανομή των ορθών τάσεων σ_x στο πάχος του συνθέτου για
περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%



Εικόνα 3.4.23

Κατανομή των ορθών τάσεων σ_x στο επίπεδο x-y της άνω επιφάνειας του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%

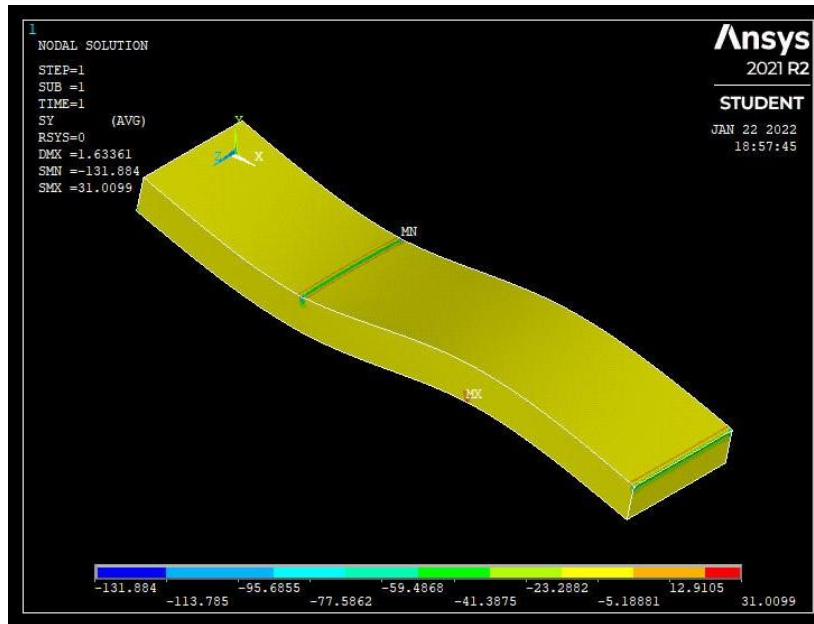


Εικόνα 3.4.24

Κατανομή των ορθών τάσεων σ_x στο επίπεδο x-y της άνω επιφάνειας του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%

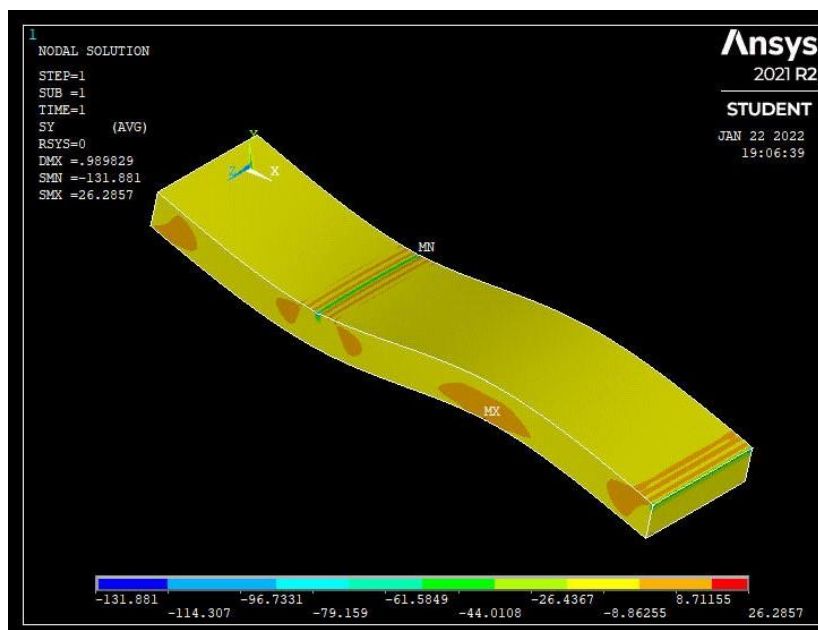
3.4.3.3 Ορθές Τάσεις σ_y

Οι ορθές τάσεις σ_y παρατηρούμε ότι είναι πολύ μικρές συγκριτικά με τις ορθές τάσεις σ_x , το οποίο και αναμέναμε καθώς σύμφωνα με την Θεωρία Ελαστικότητας $\sigma_y = 0$ (2.3.10).



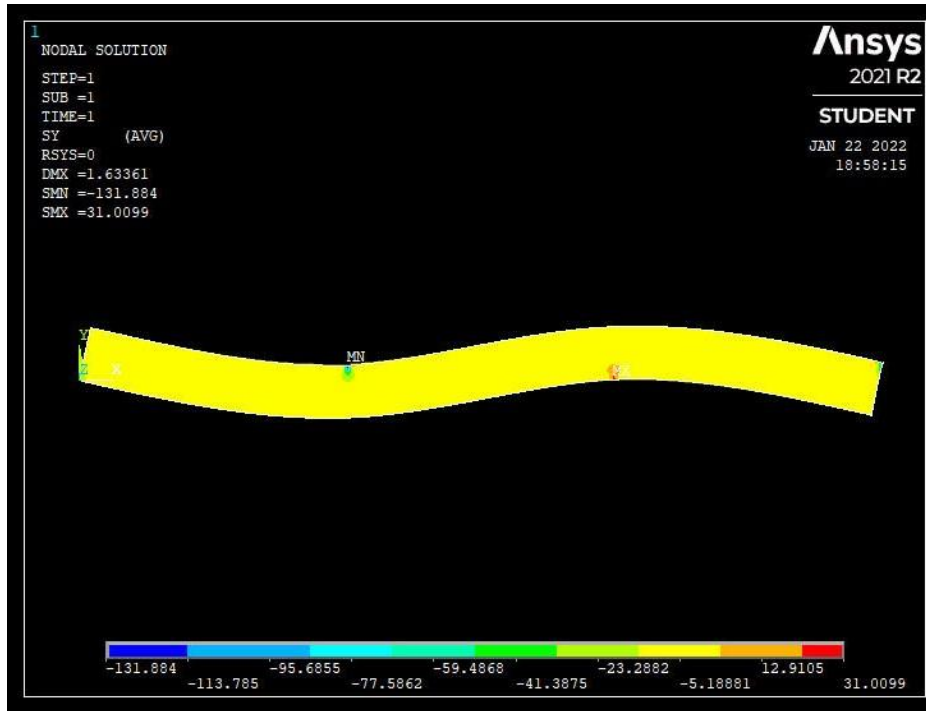
Εικόνα 3.4.25

Κατανομή των ορθών τάσεων σ_y στο σύνολο του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%

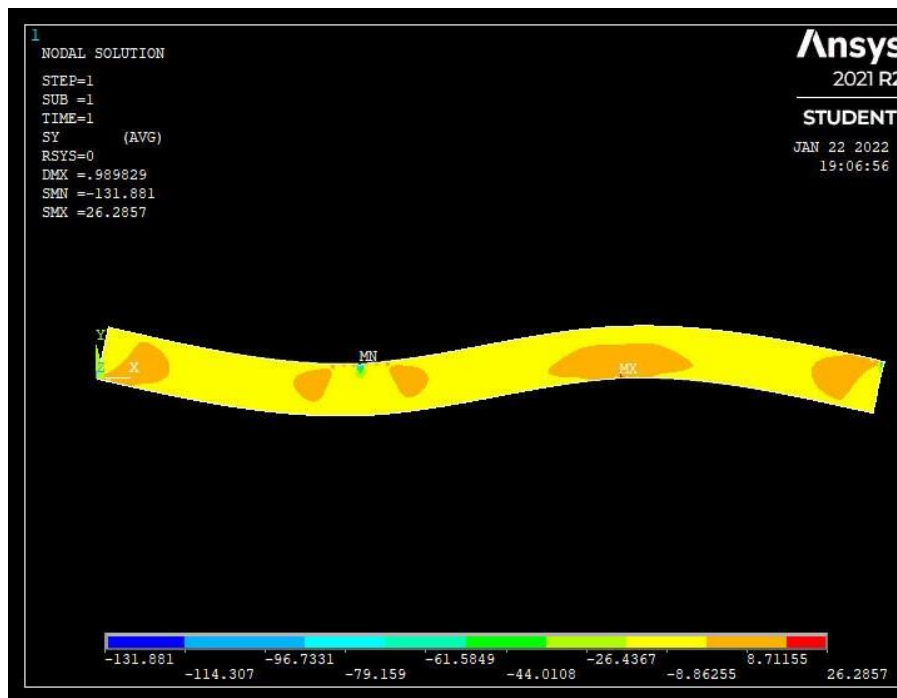


Εικόνα 3.4.26

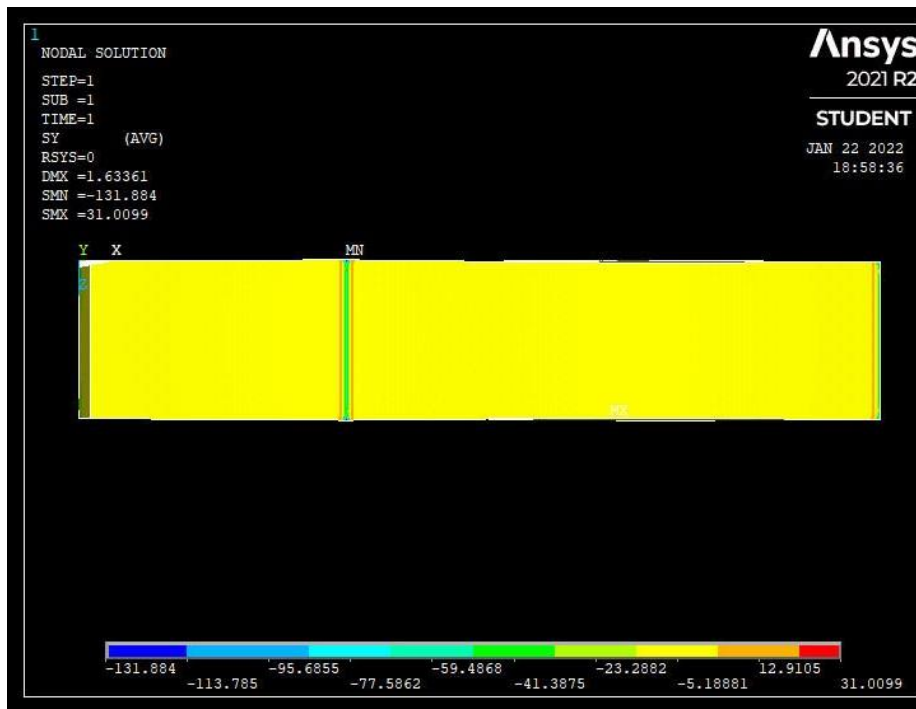
Κατανομή των ορθών τάσεων σ_y στο σύνολο του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%



Εικόνα 3.4.27
Κατανομή των ορθών τάσεων σ_y στο πάχος του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%

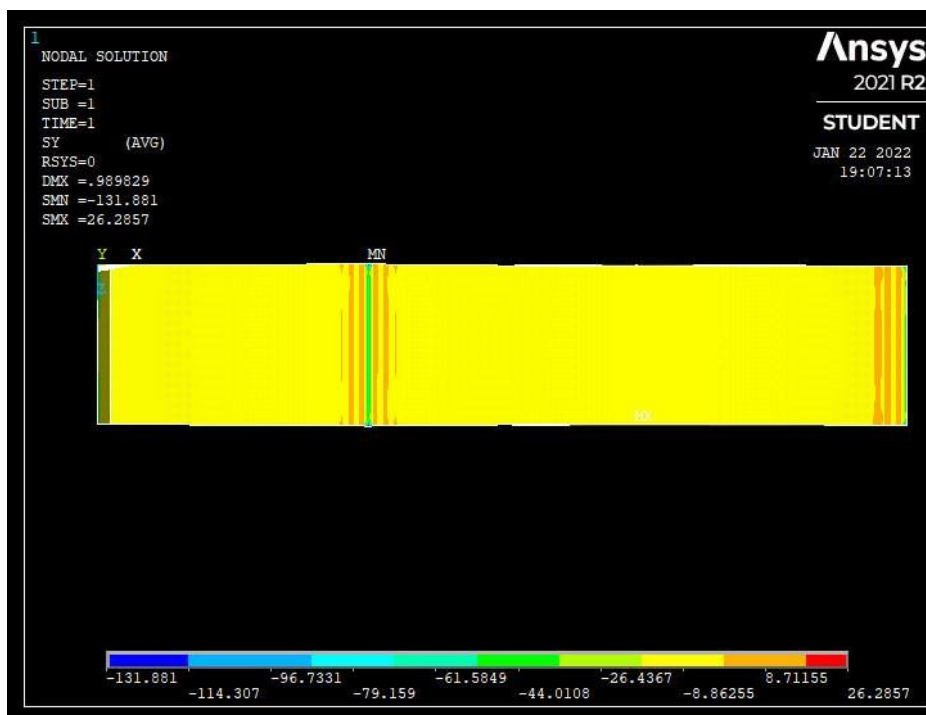


Εικόνα 3.4.28
Κατανομή των ορθών τάσεων σ_y στο πάχος του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%



Εικόνα 3.4.29

Κατανομή των ορθών τάσεων σ_y στο επίπεδο x-y της άνω επιφάνειας του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%

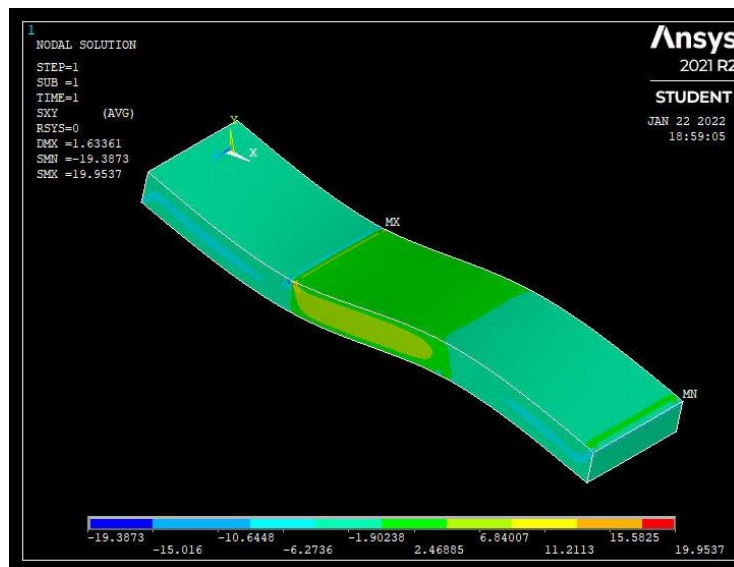


Εικόνα 3.4.30

Κατανομή των ορθών τάσεων σ_y στο επίπεδο x-y της άνω επιφάνειας του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%

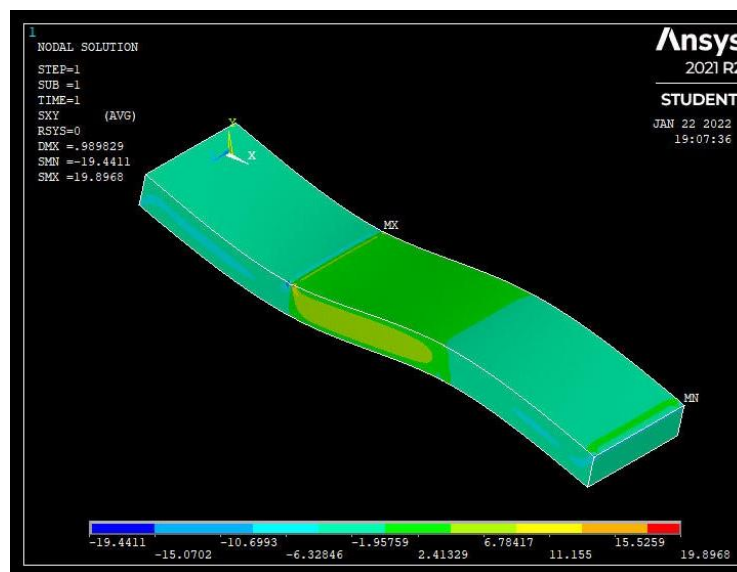
3.4.3.4 Διατμητικές Τάσεις τ_{xy}

Οι διατμητικές τάσεις τ_{xy} παρατηρούμε ότι είναι πολύ μικρές στην επιφάνεια του συνθέτου. Επίσης, οι μεγαλύτερες τιμές παρατηρούνται στην περιοχή που βρίσκεται μεταξύ $x=a$ και $x=L$. Όπως αναμέναμε και από την θεωρία (2.3.9-2.3.11) η περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος έχει πολύ μικρή επιρροή στις τιμές των διατμητικών τάσεων τ_{xy} .



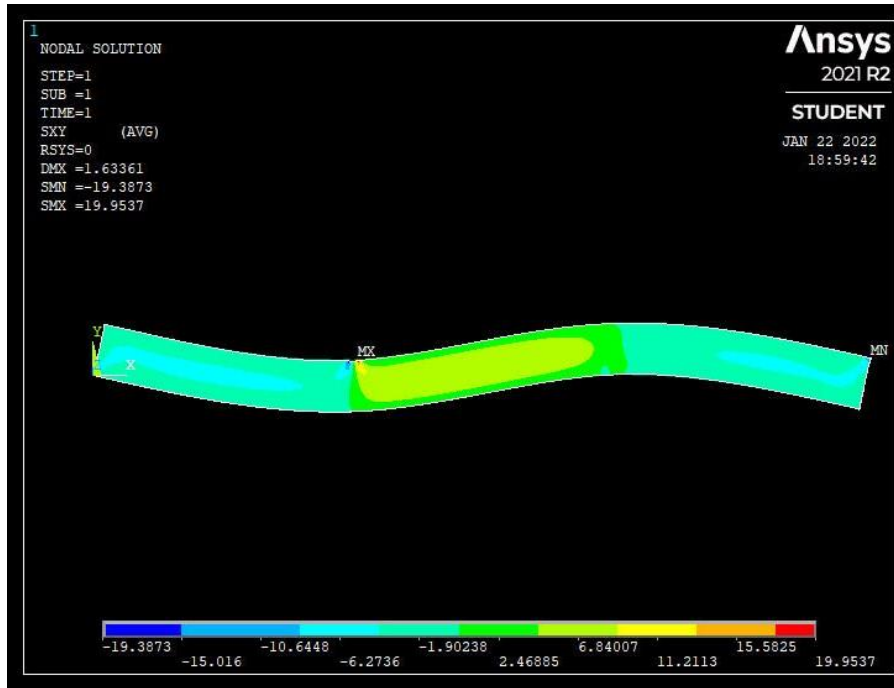
Εικόνα 3.4.25

Κατανομή των διατμητικών τάσεων τ_{xy} στο σύνολο του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%

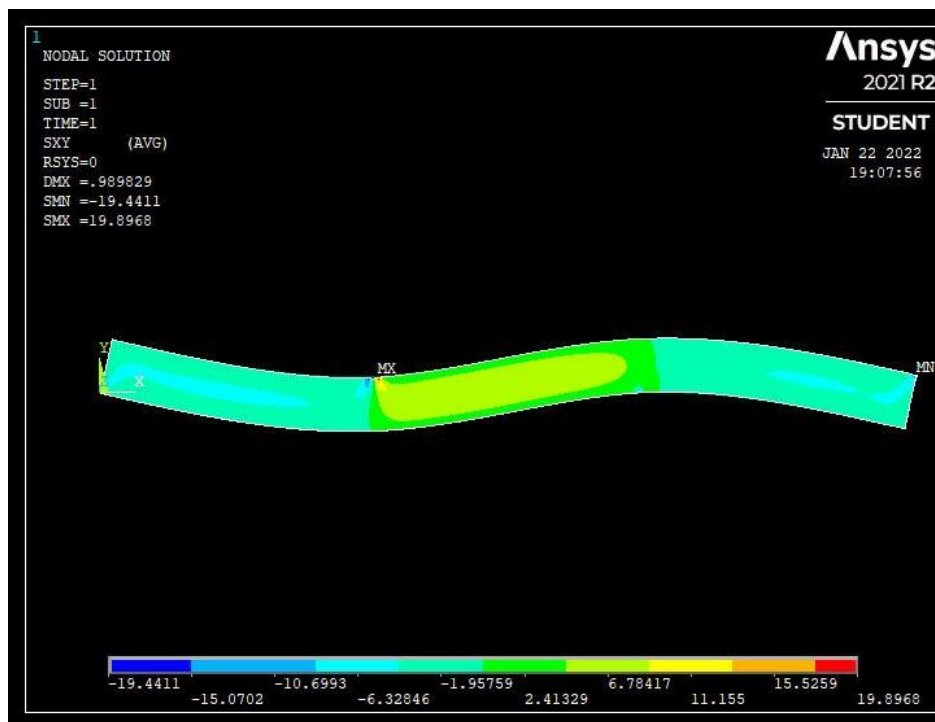


Εικόνα 3.4.26

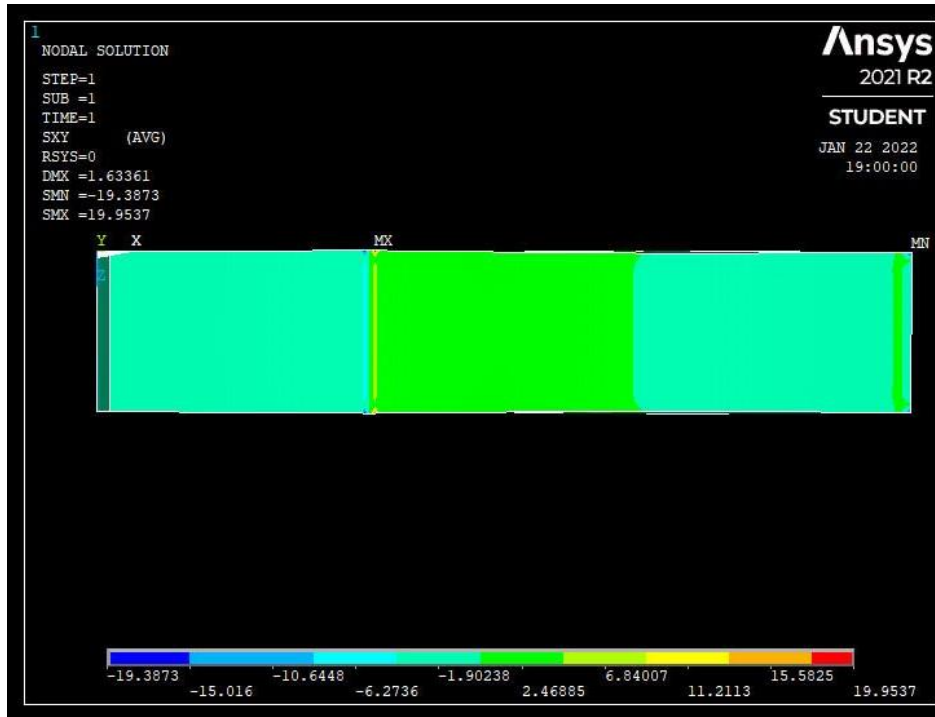
Κατανομή των διατμητικών τάσεων τ_{xy} στο σύνολο του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%



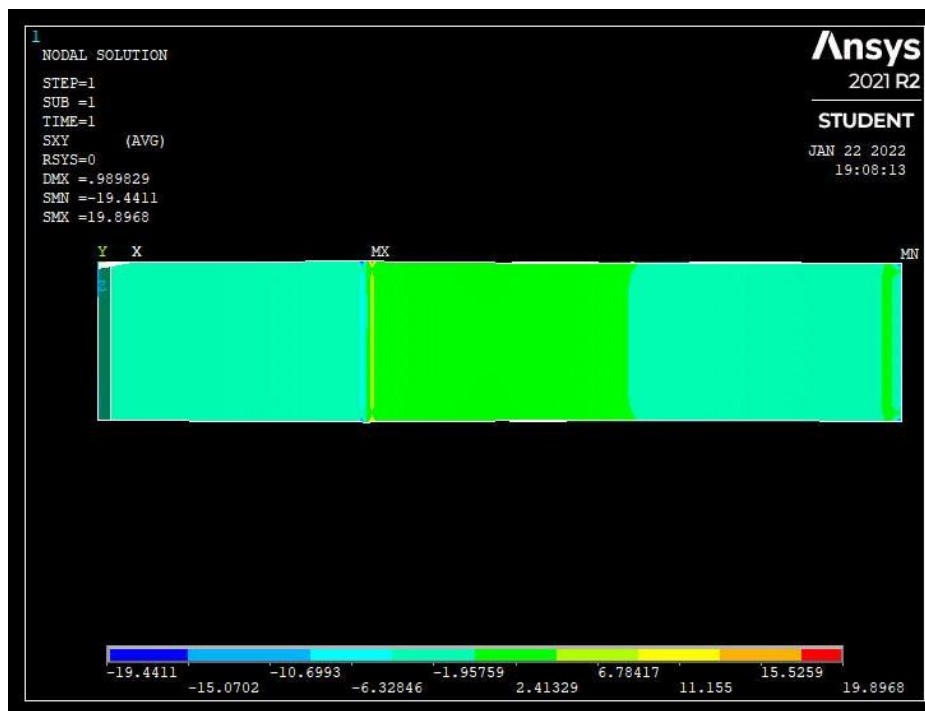
Εικόνα 3.4.27
Κατανομή των διατμητικών τάσεων τ_{xy} στο πάχος του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%



Εικόνα 3.4.28
Κατανομή των διατμητικών τάσεων τ_{xy} στο πάχος του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%



Εικόνα 3.4.29
Κατανομή των διατμητικών τάσεων τ_{xy} στο επίπεδο x-y της άνω επιφάνειας του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%



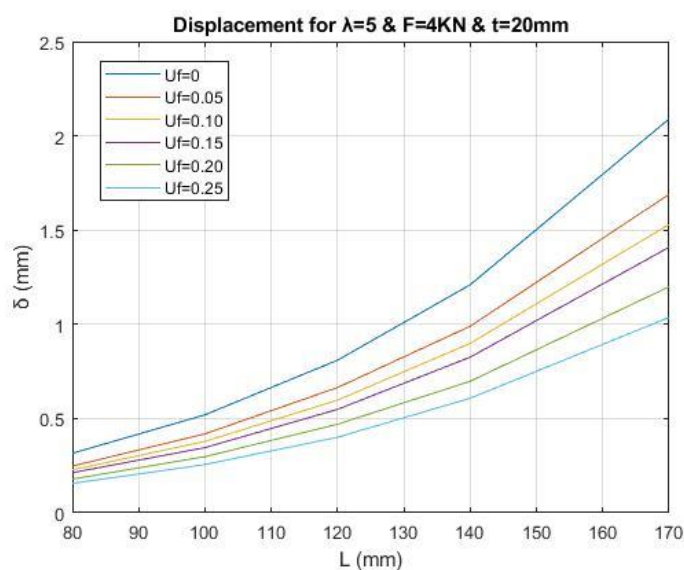
Εικόνα 3.4.30
Κατανομή των διατμητικών τάσεων τ_{xy} στο επίπεδο x-y της άνω επιφάνειας του συνθέτου για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%

3.5 Σύγκριση παραμέτρων για 4-Σημείων με τη χρήση των Πεπερασμένων Στοιχείων

Σε αυτό το υποκεφάλαιο παρουσιάζονται διαγράμματα του βέλους στο σημείο B (Εικόνα 2.3.1) για μεταβολές συγκεκριμένων παραμέτρων προκειμένου να αναλυθούν και να εξαχθούν συμπεράσματα ως προς την επίδρασή τους σε αυτό. Αυτές οι παράμετροι είναι το μήκος του δοκιμίου, το πάχος του δοκιμίου, το ασκούμενο φορτίο και ο συντελεστής φόρτισης λ . Επίσης, σε κάθε διάγραμμα απεικονίζονται όλες οι διαθέσιμες περιεκτικότητες κατ' όγκο του εγκλείσματος.

3.5.1 Σύγκριση βέλους κάμψης με μήκος δοκιμίου

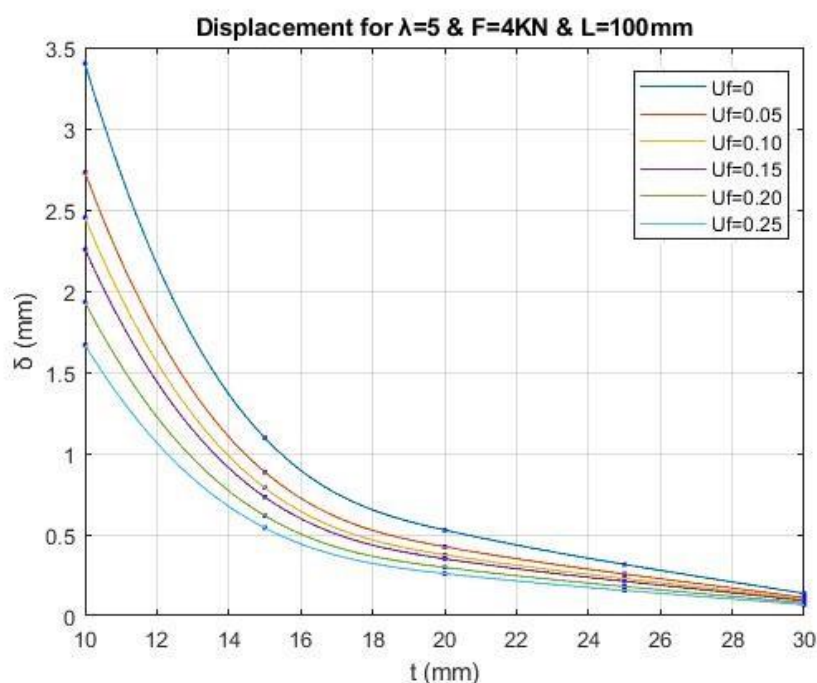
Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=5$, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Μπορούμε να παρατηρήσουμε στο διάγραμμα ότι η αύξηση του μήκους του δοκιμίου έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του βέλους κάμψης. Επίσης, η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος οδηγεί στην μείωση του ρυθμού αύξησης του βέλους κάμψης. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι για περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος 5% έχουμε ραγδαία αύξηση του βέλους κάμψης συγκριτικά με περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος 0.25%.



Εικόνα 3.5.1
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου
για $\lambda=5$, $F=4$ kN, $t=20$ mm, $b=30$ mm

3.5.2 Σύγκριση βέλους κάμψης με πάχος δοκιμίου

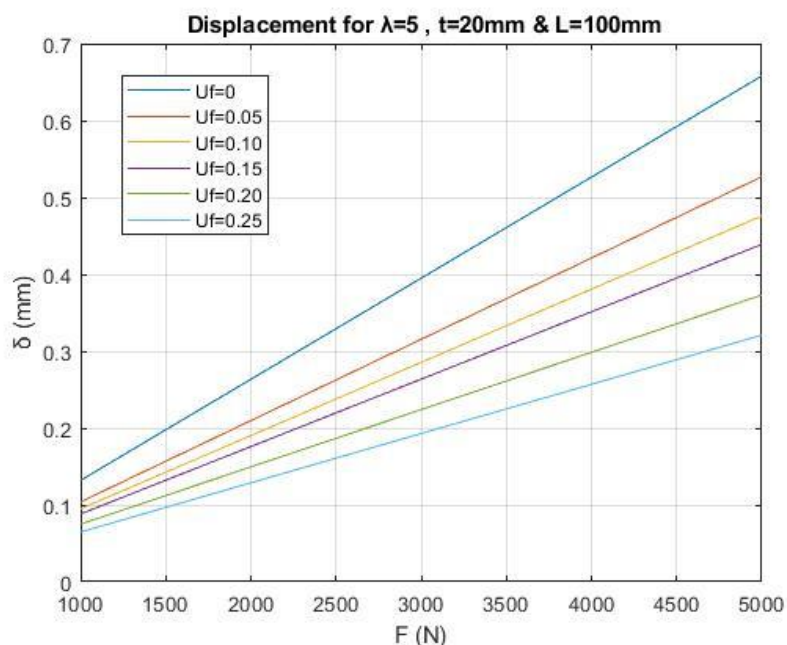
Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=5$, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η αύξηση του πάχους του δοκιμίου οδηγεί σε μείωση του βέλους κάμψης. Ακόμα, παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές του πάχους του δοκιμίου το βέλος κάμψης επηρεάζεται ελάχιστα από την περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος. Συνεπώς, μπορούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι αυξάνοντας περειαίρω το πάχος, οι τιμές του βέλους κάμψης θα συγκλίνουν, δηλαδή θα είναι ανεξάρτητο της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος. Αντίθετα, για μικρές τιμές του πάχους του δοκιμίου παρατηρούμε σημαντική επιρροή στο βέλος κάμψης.



Εικόνα 3.5.2
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου
για $\lambda=5$, $F=4$ kN, $L=100$ mm, $b=30$ mm

3.5.3 Σύγκριση βέλους κάμψης με ασκούμενο φορτίο

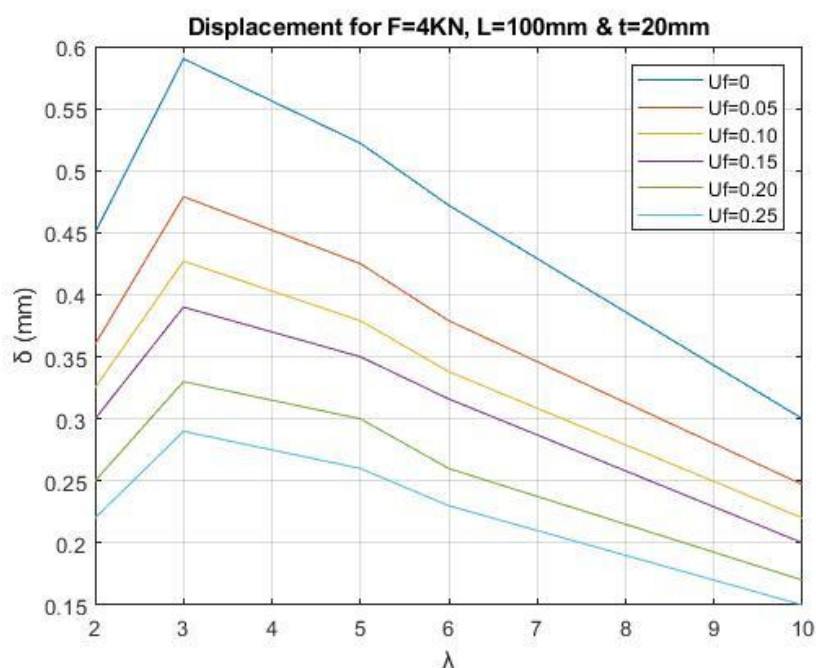
Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=5$, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η αύξηση του φορτίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης. Ακόμα, παρατηρούμε ότι η αύξηση είναι γραμμική, το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι δεν έχουμε συμπεριλάβει στην μελέτη μη γραμμικότητες. Επίσης, η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος οδηγεί στην μείωση του ρυθμού αύξησης του βέλους κάμψης. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι για περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος 5% έχουμε ραγδαία αύξηση του βέλους κάμψης συγκριτικά με περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%.



Εικόνα 3.5.3
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου
για $\lambda=5$, $t=20$ mm, $L=100$ mm, $b=30$ mm

3.5.4 Σύγκριση βέλους κάμψης με συντελεστή φόρτισης λ

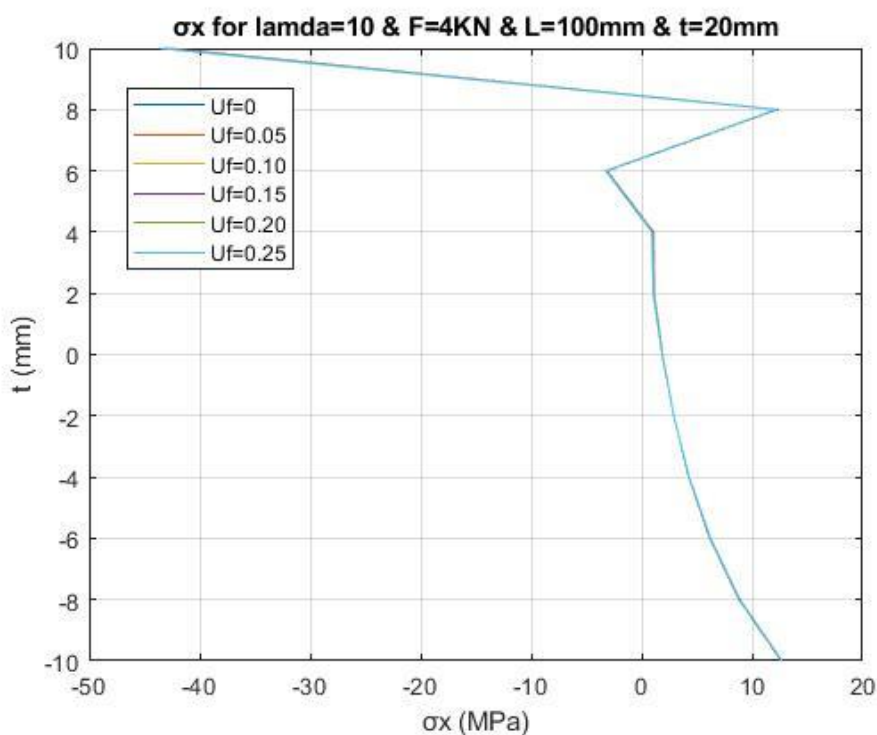
Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ . Έχουμε επιλέξει ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ότι η αύξηση του συντελεστή φόρτισης μέχρι την τιμή τρία οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης ενώ για τιμή μεγαλύτερη του τρία έχουμε μείωση του βέλους κάμψης. Επίσης, η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος οδηγεί στην μείωση του ρυθμού αύξησης και μετά μείωσης του βέλους κάμψης. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι για περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος 5% έχουμε ραγδαία αύξηση και μετά μείωση του βέλους κάμψης συγκριτικά με περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%. Ακόμα, παρατηρούμε την διαφορά της μεθόδου για μικρά λ καθώς μειώνετε για λ μικρότερο του 3 σε αντίθεση με την Θεωρία της Ελαστικότητας.



Εικόνα 3.5.4
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ
για $F=4$ kN, $L=100$ mm, $t=20$ mm, $b=30$ mm

3.5.5 Σύγκριση ορθής τάσης σ_x κατά το πάχος της δοκού

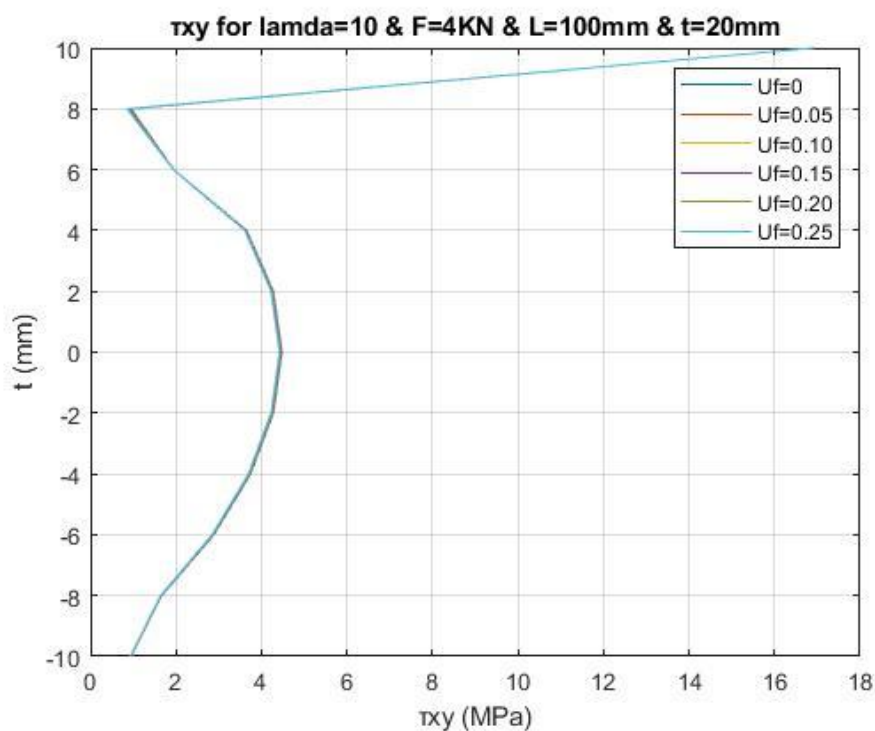
Στο επόμενο διάγραμμα απεικονίζονται οι ορθές τάσεις σ_x στο σημείο B (Εικόνα 2.3.1) κατά το πάχος της δοκού. Έχουμε επιλέξει συντελεστή φόρτισης $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ξανά ότι η μεταβολή της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος δεν επηρεάζει τις ορθές τάσεις σ_x . Επίσης, παρατηρούμε αλλοίωση των αποτελεσμάτων από τα μισά του πάχους της δοκού και πάνω, η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων στην περιοχή κοντά στο σημείο άσκησης του φορτίου τα αποτελέσματα αλλοιώνονται.



Εικόνα 3.5.5
Μεταβολή των ορθών τάσεων σ_x κατά το πάχος της δοκού
για $\lambda=10$, $F=4$ kN, $L=100$ mm, $t=20$ mm, $b=30$ mm

3.5.6 Σύγκριση διατμητικής τάσης τ_{xy} κατά το πάχος της δοκού

Στο επόμενο διάγραμμα απεικονίζονται οι διατμητικές τάσεις τ_{xy} στο σημείο B (Εικόνα 2.3.1) κατά το πάχος της δοκού. Έχουμε επιλέξει συντελεστή φόρτισης $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ξανά ότι η μεταβολή της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος δεν επηρεάζει τις διατμητικές τάσεις τ_{xy} . Επίσης, φαίνεται η παραβολική τους μορφή εκτός από το πάνω σημείο της δοκού όπου έχουμε αλλοίωση των αποτελεσμάτων λόγω του ότι με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων στην περιοχή κοντά στο σημείο άσκησης του φορτίου τα αποτελέσματα αλλοιώνονται.

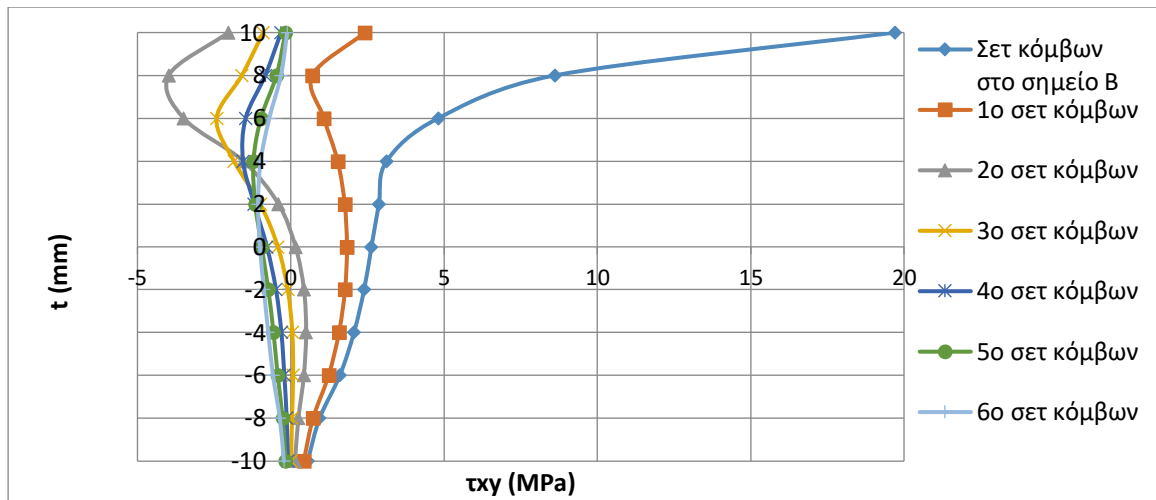


Εικόνα 3.5.6
Μεταβολή των διατμητικών τάσεων τ_{xy} κατά το πάχος της δοκού
για $\lambda=10$, $F=4$ kN, $L=100$ mm, $t=20$ mm, $b=30$ mm

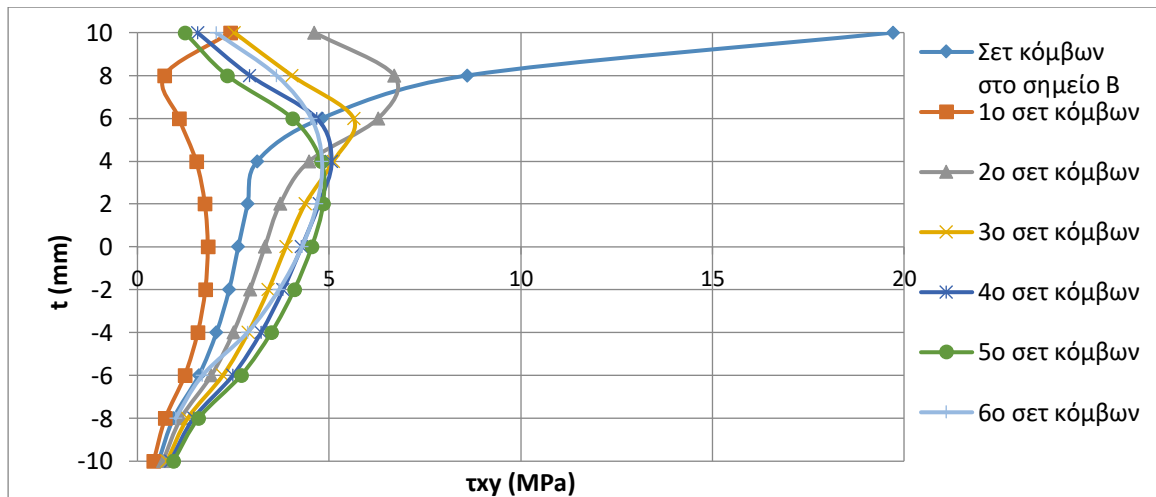
3.5.7 Σύγκριση της κατανομής των διατμητικών τάσεων τ_{xy} κατά το πάχος της δοκού δεξιά και αριστερά από το σημείο B

Σε αυτό το υποκεφάλαιο γίνεται σύγκριση της κατανομής των διατμητικών τάσεων τ_{xy} κατά το πάχος της δοκού σε θέσεις αριστερά και δεξιά από το σημείο B (Εικόνα 2.3.1), δηλαδή το σημείο άσκησης του φορτίου P. Η σύγκριση πραγματοποιείται μόνο για τις διατμητικές τάσεις τ_{xy} καθώς όπως γνωρίζουμε παραμένουν σταθερές κατά μήκος της δοκού σε αντίθεση με τις ορθές τάσεις σ_x . Η χρησιμότητα αυτής της σύγκρισης έγκειται στην παρατήρηση της επιρροής του ασκούμενου φορτίου στην κατανομή των τάσεων κατά το πάχος της δοκού.

Παρατηρούμε ότι όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο άσκησης του φορτίου, δηλαδή όσο μειώνεται η επιρροή του, οι τιμές συγκλίνουν και συνεπώς τα αποτελέσματα έχουν μεγαλύτερη αξιοπιστία. Επίσης, παρατηρούμε ότι δεξιά από το σημείο B οι τιμές συγκλίνουν πιο κοντά στο ασκούμενο φορτίο απ' ό,τι αριστερά. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι πιθανώς λόγω των αναμενόμενων και από την θεωρία αρκετά μεγαλύτερων τιμών των διατμητικών τάσεων δεξιά απ' ό,τι αριστερά του σημείου B.



Διάγραμμα 3.5.1
Μεταβολή της κατανομής των διατμητικών τάσεων τ_{xy}
κατά το πάχος της δοκού αριστερά από το σημείο B
για $\lambda=6$, $F=2kN$, $L=100mm$, $t=20mm$, $b=30mm$



Διάγραμμα 3.5.2
Μεταβολή της κατανομής των διατμητικών τάσεων τ_{xy}
κατά το πάχος της δοκού δεξιά από το σημείο B
για $\lambda=6$, $F=2kN$, $L=100mm$, $t=20mm$, $b=30mm$

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

4.1 Γενικά

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την επίλυση της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων με τις δύο μεθόδους, της Θεωρίας Ελαστικότητας και των Πεπερασμένων Στοιχείων. Η σύγκριση αφορά κυρίως το βέλος κάμψης και πως μεταβάλλεται όταν υπάρχει μεταβολή άλλων παραμέτρων, όπως το μήκος του δοκιμίου, το πάχος του δοκιμίου, ο συντελεστής φόρτισης λ , το ασκούμενο φορτίο και η περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος. Επίσης, παρατηρούμε ότι ο συντελεστής φόρτισης λ έχει μεγάλη επιρροή στα αποτελέσματα καθώς καθορίζει το σημείο άσκησης των φορτίων και την αναλογία τους.

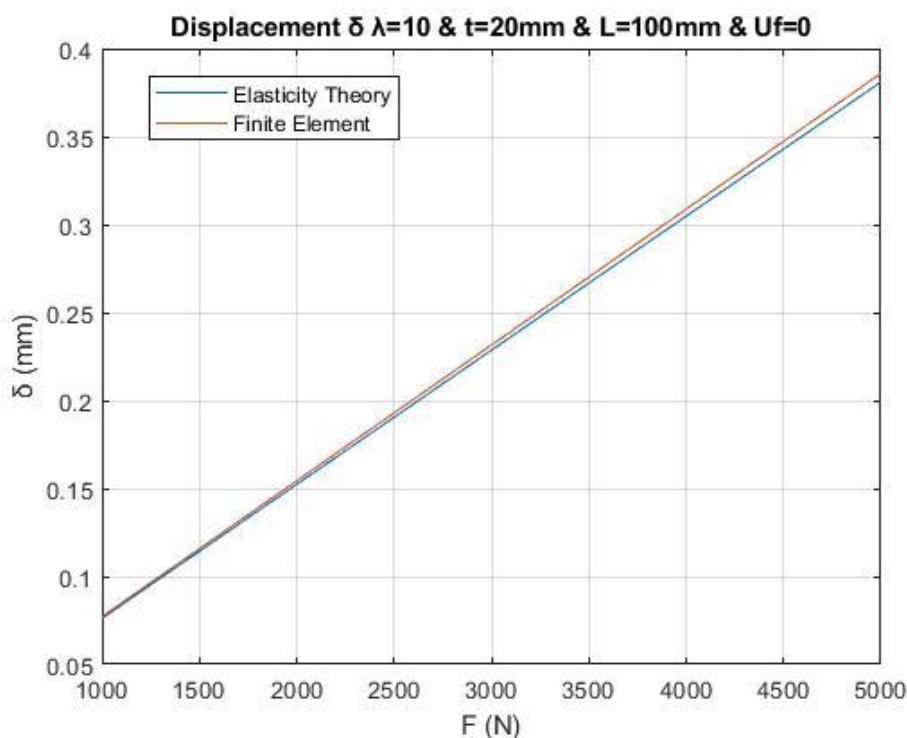
Στην συνέχεια πραγματοποιείται σύγκριση των βελών κάμψης, των ορθών τάσεων σ_x και των διατμητικών τάσεων τ_{xy} μεταξύ της κάμψη τριών σημείων και της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων.

4.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ των μεθόδων Θεωρίας Ελαστικότητας και Πεπερασμένων Στοιχείων για 4-Σημείων

Σε αυτό το υποκεφάλαιο πραγματοποιείται σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την επίλυση της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων με τις δύο μεθόδους, της Θεωρίας Ελαστικότητας και των Πεπερασμένων Στοιχείων. Η σύγκριση περιλαμβάνει κυρίως το βέλος κάμψης στο σημείο B (Εικόνα 2.3.1) και πως μεταβάλλεται από την μεταβολή άλλων παραμέτρων, όπως το μήκος του δοκιμίου, το πάχος του δοκιμίου, ο συντελεστής φόρτισης λ και το ασκούμενο φορτίο. Η ανάλυση της σύγκρισης παρουσιάζεται για κάθε περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος ξεχωριστά.

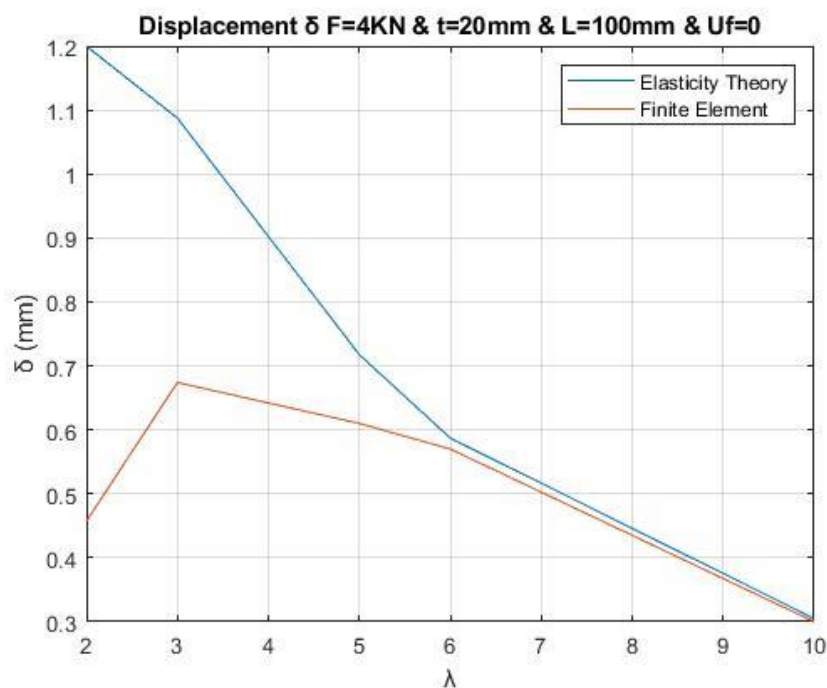
4.2.1 Σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 0%

Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Επιλέχθηκε μεγάλος συντελεστής φόρτισης όπου η Θεωρία Ελαστικότητας έχει μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς επηρεάζει λιγότερο η άρθρωση. Παρατηρούμε στο διάγραμμα ότι όσο πιο μικρές τιμές έχει το ασκούμενο φορτίο τόσο πιο πολύ συγκλίνουν οι τιμές των δύο μεθόδων. Επίσης, η αύξηση του ασκούμενου φορτίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης.



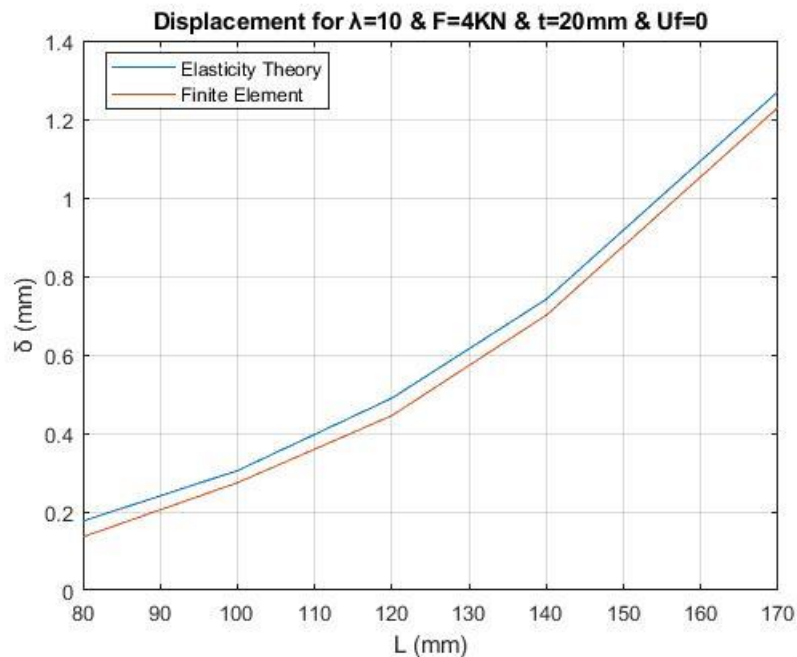
Διάγραμμα 4.2.1:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου
για $\lambda=10$, $t=20$ mm, $L=100$ mm, $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές η Θεωρία Ελαστικότητας έχει μεγάλη απόκλιση, η οποία οφείλεται στην άρθρωση στο αριστερό άκρο το δοκιμίου. Με την αύξηση του συντελεστή φόρτισης λ η ακρίβεια του βέλους κάμψης βελτιώνεται συνεχώς, ώσπου φτάνουμε στην τιμή $\lambda=6$, όπου πλέον η Θεωρία Ελαστικότητας είναι αξιόπιστη.



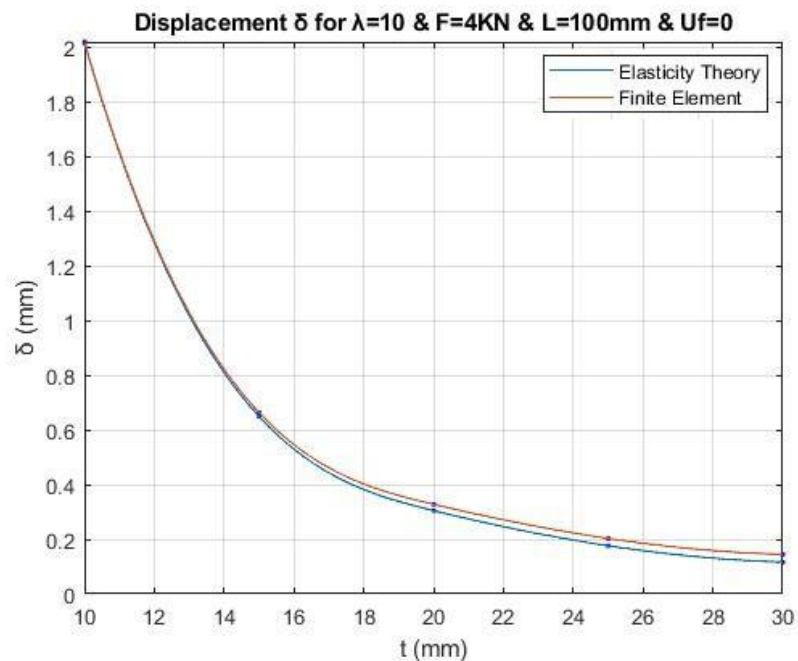
Διάγραμμα 4.2.2:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ
για $F=4$ kN, $L=100$ mm, $t=20$ mm, $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4\text{ kN}$, πάχος δοκιμίου $t=20\text{ mm}$ και πλάτος δοκιμίου $b=30\text{ mm}$. Παρατηρούμε μία μικρή σταθερή απόκλιση μεταξύ των δύο μεθόδων, η οποία θα περιμέναμε να εξαλείφεται με την αύξηση του μήκους δοκιμίου. Επίσης, η αύξηση του μήκους του δοκιμίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης.



Διάγραμμα 4.2.3:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4\text{kN}$, $t=20\text{mm}$, $b=30\text{mm}$

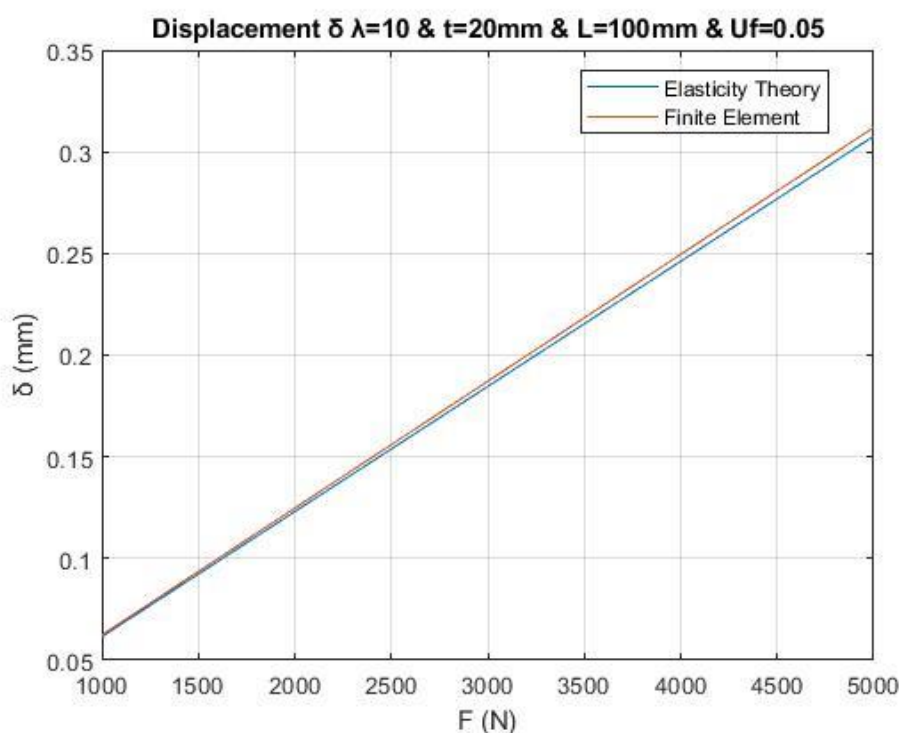
Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος του δοκιμίου $L=100$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του πάχους του δοκιμίου οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν ενώ η αύξηση του πάχους οδηγεί σε αυξανόμενη απόκλιση των δύο μεθόδων. Επίσης, η αύξηση του πάχους του δοκιμίου οδηγεί σε μείωση του βέλους κάμψης.



Διάγραμμα 4.2.4:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4$ kN, $L=100$ mm, $b=30$ mm

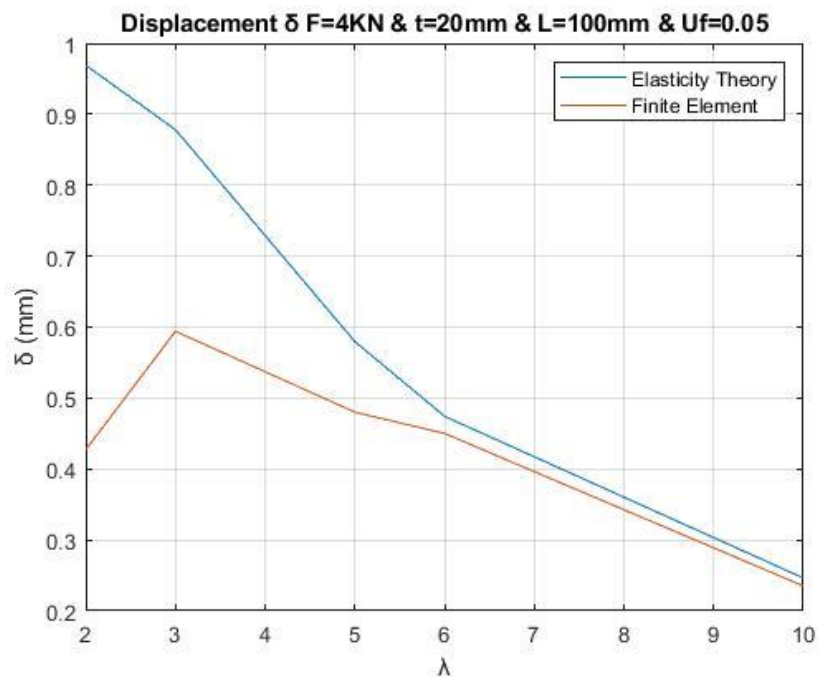
4.2.2 Σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 5%

Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Επιλέχθηκε μεγάλος συντελεστής φόρτισης όπου η Θεωρία Ελαστικότητας έχει μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς επηρεάζει λιγότερο η άρθρωση. Παρατηρούμε στο διάγραμμα ότι όσο πιο μικρές τιμές έχει το ασκούμενο φορτίο τόσο πιο πολύ συγκλίνουν οι τιμές των δύο μεθόδων. Επίσης, η αύξηση του ασκούμενου φορτίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης. Ακόμα, παρατηρούμαι ότι έχουμε παρόμοια σύγκλιση με την περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 0%.



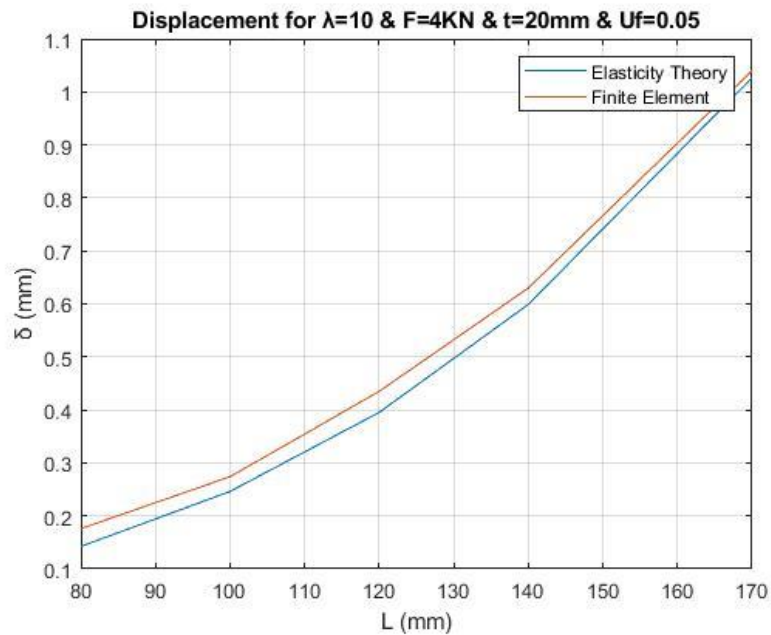
Διάγραμμα 4.2.5:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου
για $\lambda=10$, $t=20$ mm, $L=100$ mm, $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές η Θεωρία Ελαστικότητας έχει μεγάλη απόκλιση, η οποία οφείλεται στην άρθρωση στο αριστερό άκρο το δοκιμίου. Με την αύξηση του συντελεστή φόρτισης λ η ακρίβεια του βέλους κάμψης βελτιώνεται συνεχώς, ώσπου φτάνουμε στην τιμή $\lambda=6$, όπου πλέον η Θεωρία Ελαστικότητας είναι αξιόπιστη.



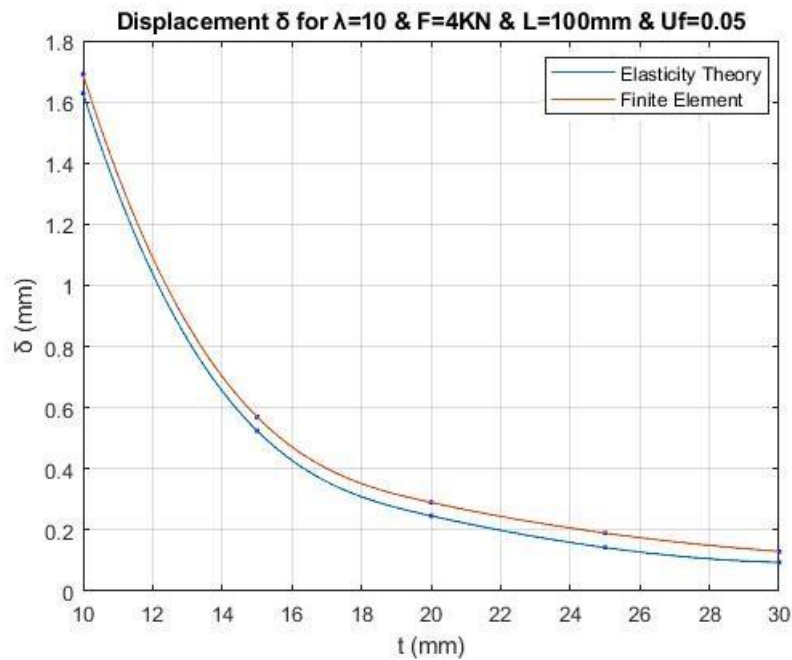
Διάγραμμα 4.2.6:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ
για $F=4$ kN, $L=100$ mm, $t=20$ mm, $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε μία φθίνουσα απόκλιση μεταξύ των δύο μεθόδων όσο αυξάνεται το μήκος του δοκιμίου. Επίσης, η αύξηση του μήκους του δοκιμίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης.



Διάγραμμα 4.2.7:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4$ kN, $t=20$ mm, $b=30$ mm

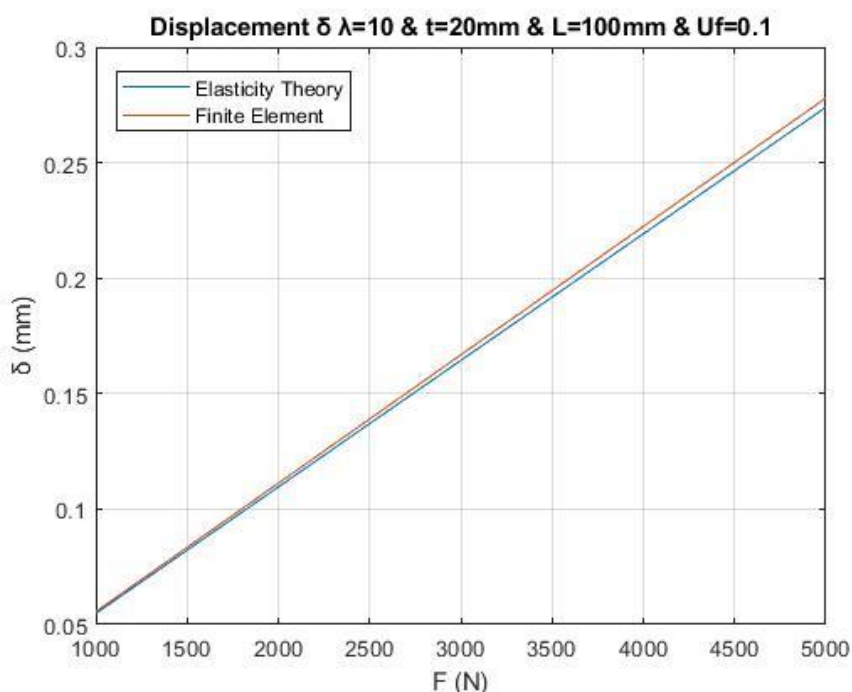
Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος του δοκιμίου $L=100$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του πάχους του δοκιμίου οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν ενώ η αύξηση του πάχους οδηγεί σε αυξανόμενη απόκλιση των δύο μεθόδων. Επίσης, η αύξηση του πάχους του δοκιμίου οδηγεί σε μείωση του βέλους κάμψης.



Διάγραμμα 4.2.8:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4\text{kN}$, $L=100\text{mm}$, $b=30\text{mm}$

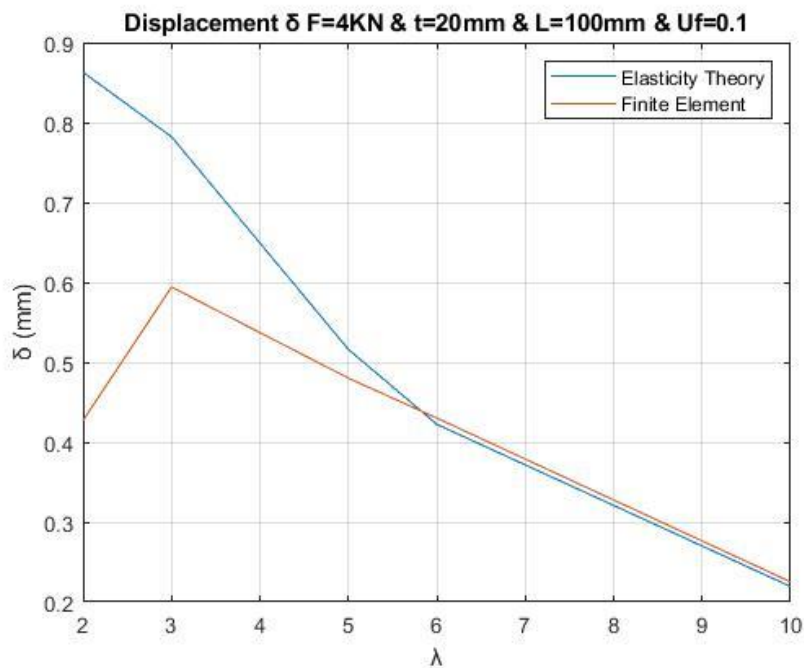
4.2.3 Σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 10%

Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Επιλέχθηκε μεγάλος συντελεστής φόρτισης όπου η Θεωρία Ελαστικότητας έχει μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς επηρεάζει λιγότερο η άρθρωση. Παρατηρούμε στο διάγραμμα ότι όσο πιο μικρές τιμές έχει το ασκούμενο φορτίο τόσο πιο πολύ συγκλίνουν οι τιμές των δύο μεθόδων. Επίσης, η αύξηση του ασκούμενου φορτίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης.



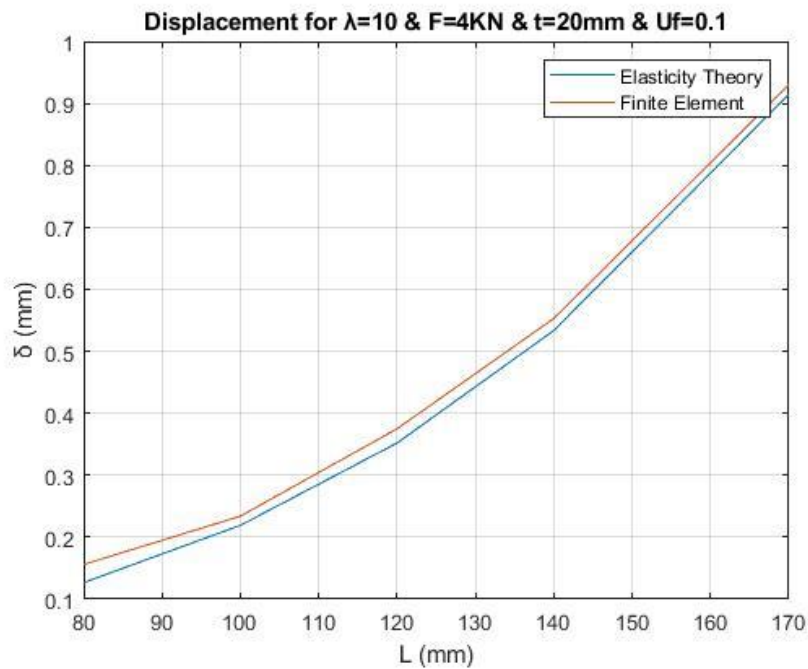
Διάγραμμα 4.2.9:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου
για $\lambda=10$, $t=20$ mm, $L=100$ mm, $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές η Θεωρία Ελαστικότητας έχει μεγάλη απόκλιση, η οποία οφείλεται στην άρθρωση στο αριστερό άκρο το δοκιμίου. Με την αύξηση του συντελεστή φόρτισης λ η ακρίβεια του βέλους κάμψης βελτιώνεται συνεχώς, ώσπου φτάνουμε στην τιμή $\lambda=5$, όπου πλέον η Θεωρία Ελαστικότητας είναι αξιόπιστη.



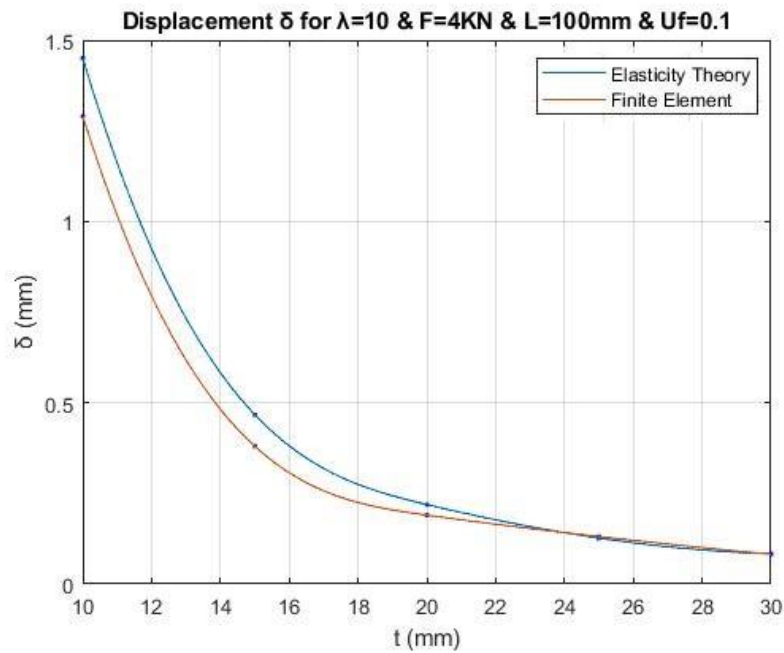
Διάγραμμα 4.2.10:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ
για $F=4$ kN, $L=100$ mm, $t=20$ mm, $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4\text{ kN}$, πάχος δοκιμίου $t=20\text{ mm}$ και πλάτος δοκιμίου $b=30\text{ mm}$. Παρατηρούμε μία σταθερή απόκλιση μεταξύ των δύο μεθόδων, ενώ θα περιμέναμε η αύξηση του μήκους του δοκιμίου να οδηγεί σε σύγκλιση. Επίσης, η αύξηση του μήκους του δοκιμίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης.



Διάγραμμα 4.2.11:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4\text{kN}$, $t=20\text{mm}$, $b=30\text{mm}$

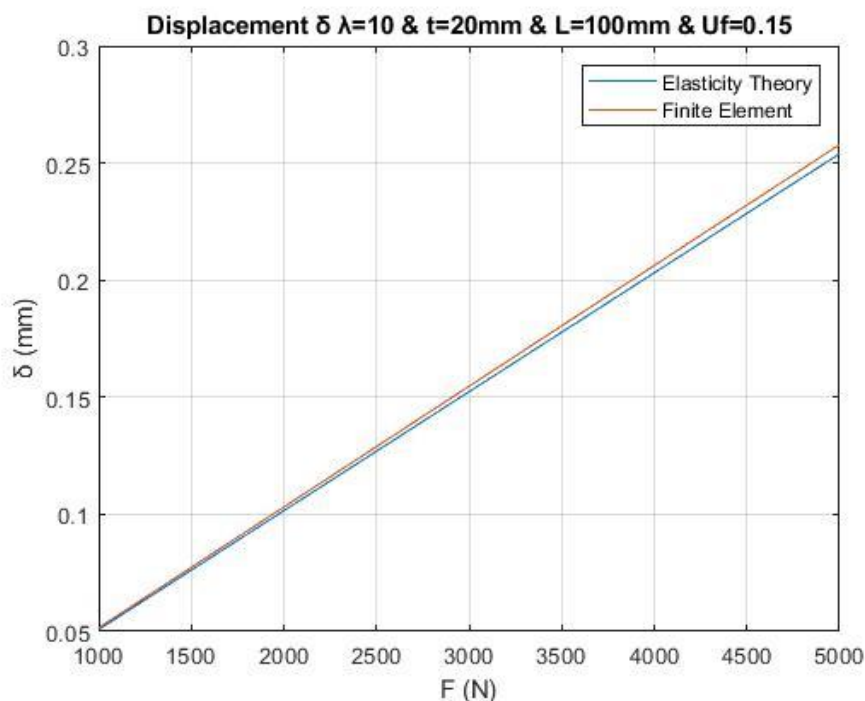
Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος του δοκιμίου $L=100$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του πάχους του δοκιμίου οι δύο μέθοδοι έχουν μεγάλη απόκλιση ενώ η αύξηση του πάχους οδηγεί σε σύγκλιση των δύο μεθόδων. Επίσης, η αύξηση του πάχους του δοκιμίου οδηγεί σε μείωση του βέλους κάμψης.



Διάγραμμα 4.2.12:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4$ kN, $L=100$ mm, $b=30$ mm

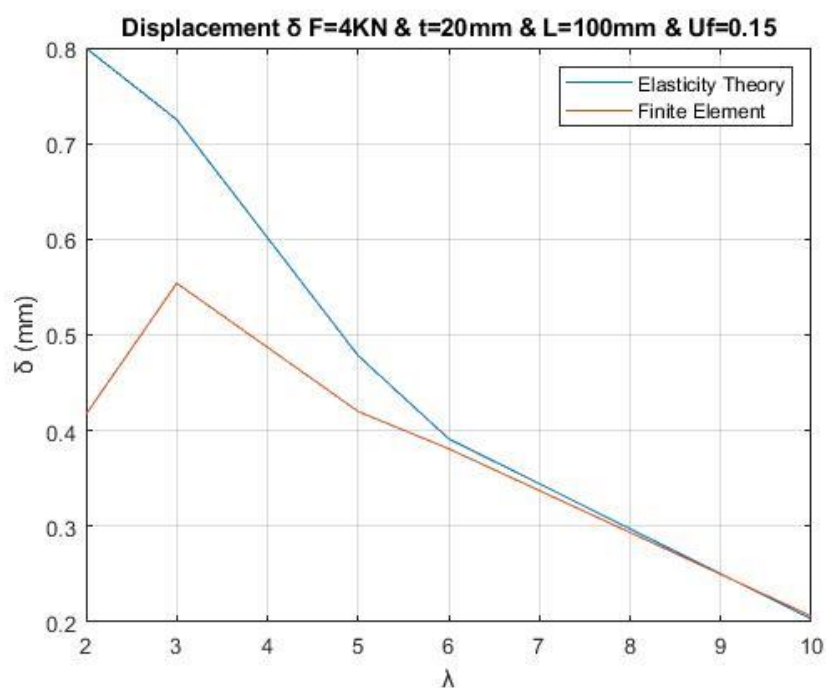
4.2.4 Σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 15%

Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Επιλέχθηκε μεγάλος συντελεστής φόρτισης όπου η Θεωρία Ελαστικότητας έχει μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς επηρεάζει λιγότερο η άρθρωση. Παρατηρούμε στο διάγραμμα ότι όσο πιο μικρές τιμές έχει το ασκούμενο φορτίο τόσο πιο πολύ συγκλίνουν οι τιμές των δύο μεθόδων. Επίσης, η αύξηση του ασκούμενου φορτίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης.



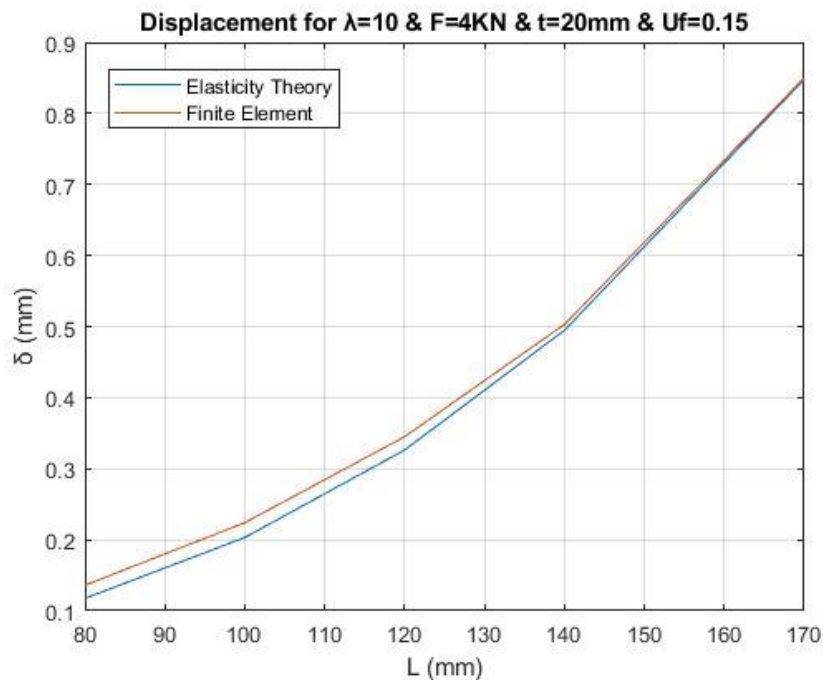
Διάγραμμα 4.2.13:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου
για $\lambda=10$, $t=20$ mm, $L=100$ mm, $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές η Θεωρία Ελαστικότητας έχει μεγάλη απόκλιση, η οποία οφείλεται στην άρθρωση στο αριστερό άκρο το δοκιμίου. Με την αύξηση του συντελεστή φόρτισης λ η ακρίβεια του βέλους κάμψης βελτιώνεται συνεχώς, ώσπου φτάνουμε στην τιμή $\lambda=6$, όπου πλέον η Θεωρία Ελαστικότητας είναι αξιόπιστη.



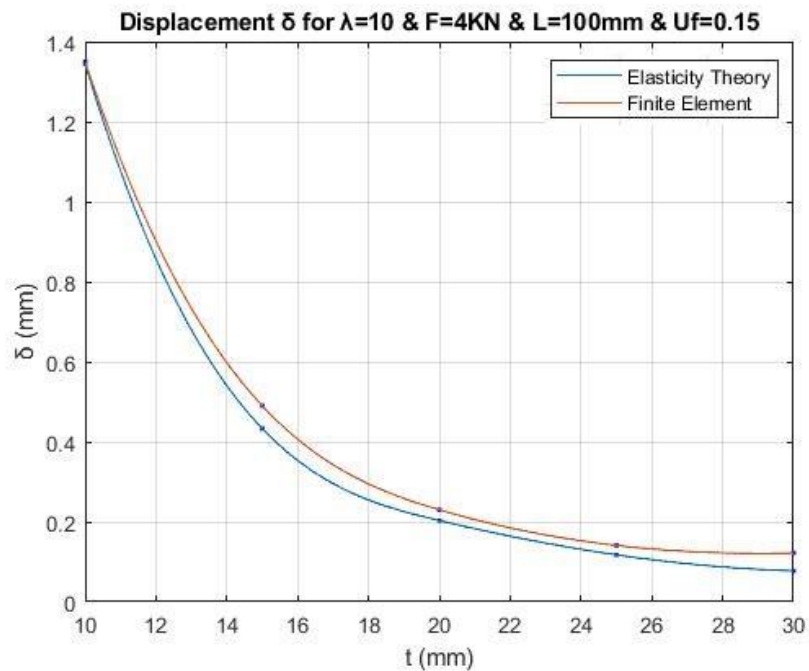
Διάγραμμα 4.2.14:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ
για $F=4$ kN, $L=100$ mm, $t=20$ mm, $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4\text{ kN}$, πάχος δοκιμίου $t=20\text{ mm}$ και πλάτος δοκιμίου $b=30\text{ mm}$. Παρατηρούμε ότι η αύξηση του μήκους του δοκιμίου οδηγεί σε σύγκλιση των τιμών των δύο μεθόδων, το οποίο και ήταν αναμενόμενο. Επίσης, η αύξηση του μήκους του δοκιμίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης.



Διάγραμμα 4.2.15:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4\text{kN}$, $t=20\text{mm}$, $b=30\text{mm}$

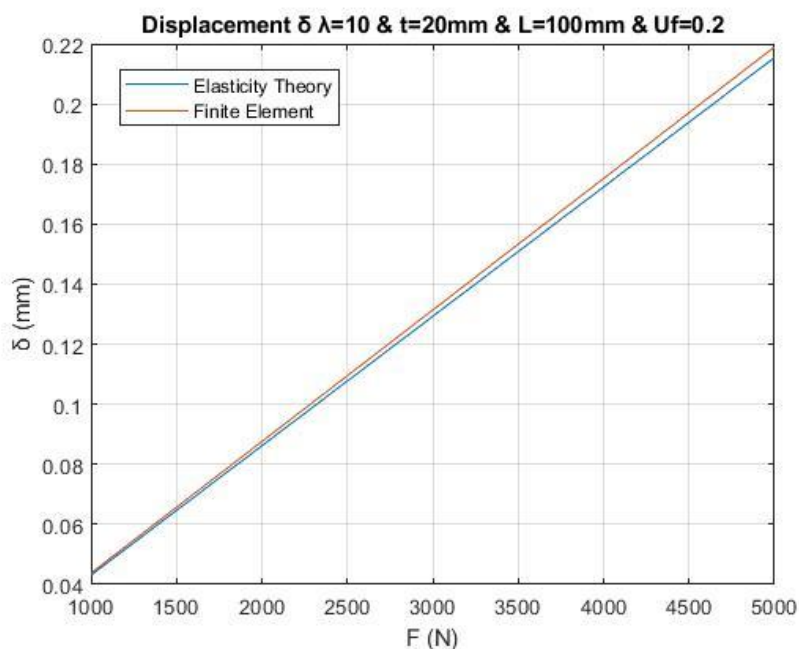
Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος του δοκιμίου $L=100$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του πάχους του δοκιμίου οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν ενώ η αύξηση του πάχους οδηγεί σε αυξανόμενη απόκλιση των δύο μεθόδων. Επίσης, η αύξηση του πάχους του δοκιμίου οδηγεί σε μείωση του βέλους κάμψης.



Διάγραμμα 4.2.16:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4$ kN, $L=100$ mm, $b=30$ mm

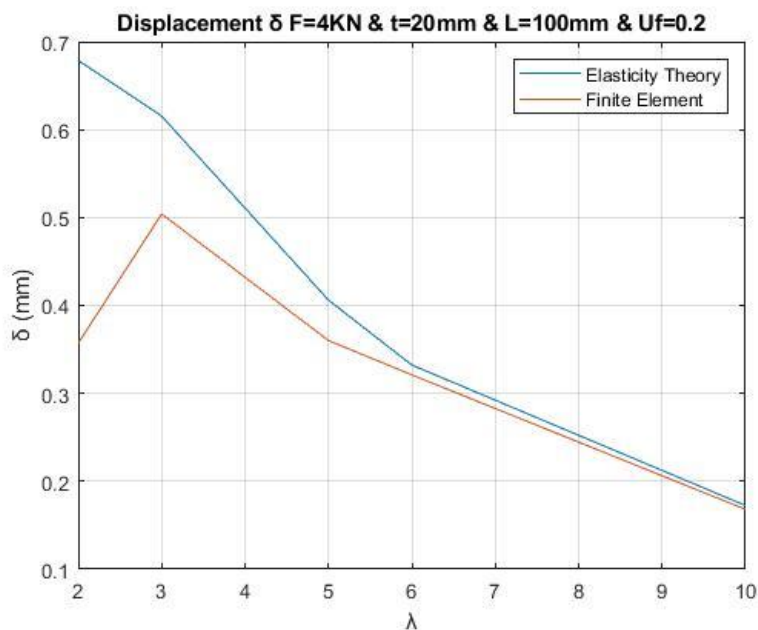
4.2.5 Σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 20%

Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Επιλέχθηκε μεγάλος συντελεστής φόρτισης όπου η Θεωρία Ελαστικότητας έχει μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς επηρεάζει λιγότερο η άρθρωση. Παρατηρούμε στο διάγραμμα ότι όσο πιο μικρές τιμές έχει το ασκούμενο φορτίο τόσο πιο πολύ συγκλίνουν οι τιμές των δύο μεθόδων. Επίσης, η αύξηση του ασκούμενου φορτίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης.



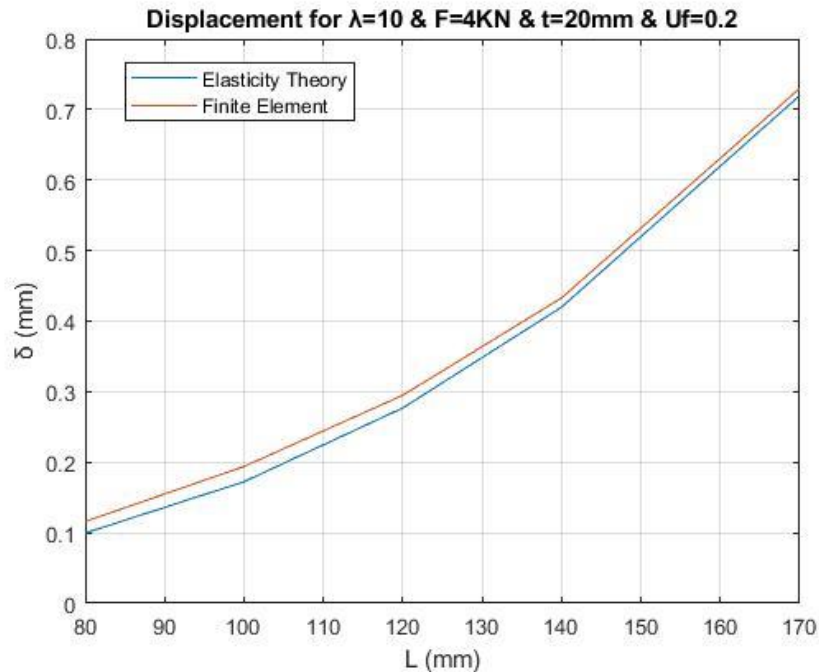
Διάγραμμα 4.2.17:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου
για $\lambda=10$, $t=20$ mm, $L=100$ mm, $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές η Θεωρία Ελαστικότητας έχει μεγάλη απόκλιση, η οποία οφείλεται στην άρθρωση στο αριστερό άκρο το δοκιμίου. Με την αύξηση του συντελεστή φόρτισης λ η ακρίβεια του βέλους κάμψης βελτιώνεται συνεχώς, ώσπου φτάνουμε στην τιμή $\lambda=6$, όπου πλέον η Θεωρία Ελαστικότητας είναι αξιόπιστη.



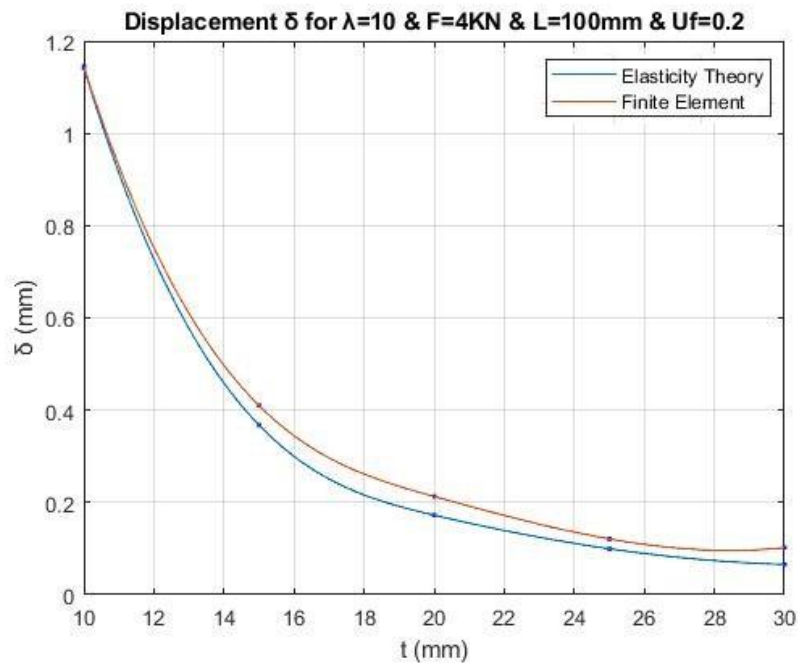
Διάγραμμα 4.2.18:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ
για $F=4$ kN, $L=100$ mm, $t=20$ mm, $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4\text{ kN}$, πάχος δοκιμίου $t=20\text{ mm}$ και πλάτος δοκιμίου $b=30\text{ mm}$. Παρατηρούμε ότι η αύξηση του μήκους του δοκιμίου οδηγεί σε σύγκλιση των τιμών των δύο μεθόδων, το οποίο και ήταν αναμενόμενο. Επίσης, η αύξηση του μήκους του δοκιμίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης.



Διάγραμμα 4.2.19:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4\text{kN}$, $t=20\text{mm}$, $b=30\text{mm}$

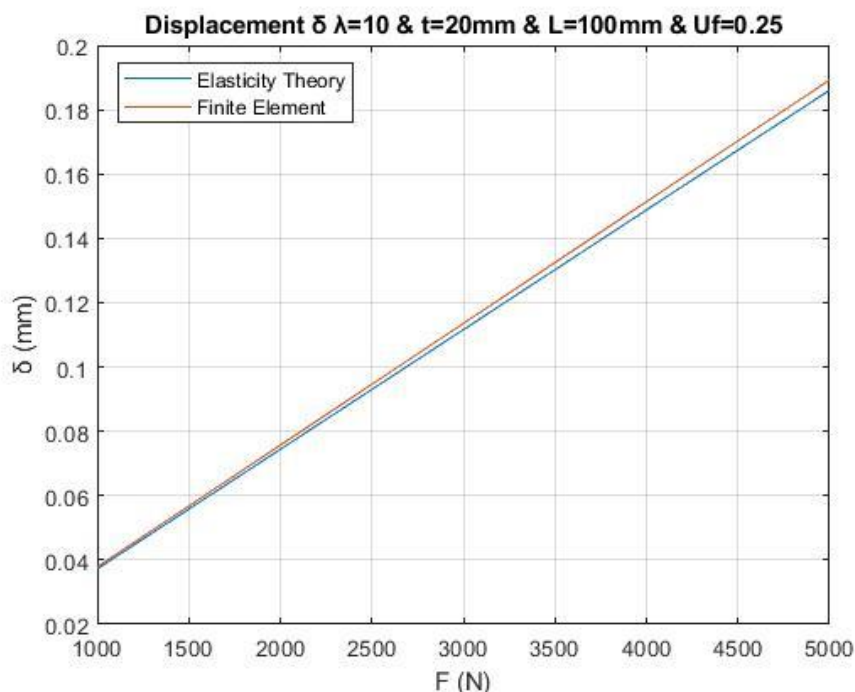
Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος του δοκιμίου $L=100$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του πάχους του δοκιμίου οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν ενώ η αύξηση του πάχους οδηγεί σε αυξανόμενη απόκλιση των δύο μεθόδων. Επίσης, η αύξηση του πάχους του δοκιμίου οδηγεί σε μείωση του βέλους κάμψης.



Διάγραμμα 4.2.20:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4$ kN, $L=100$ mm, $b=30$ mm

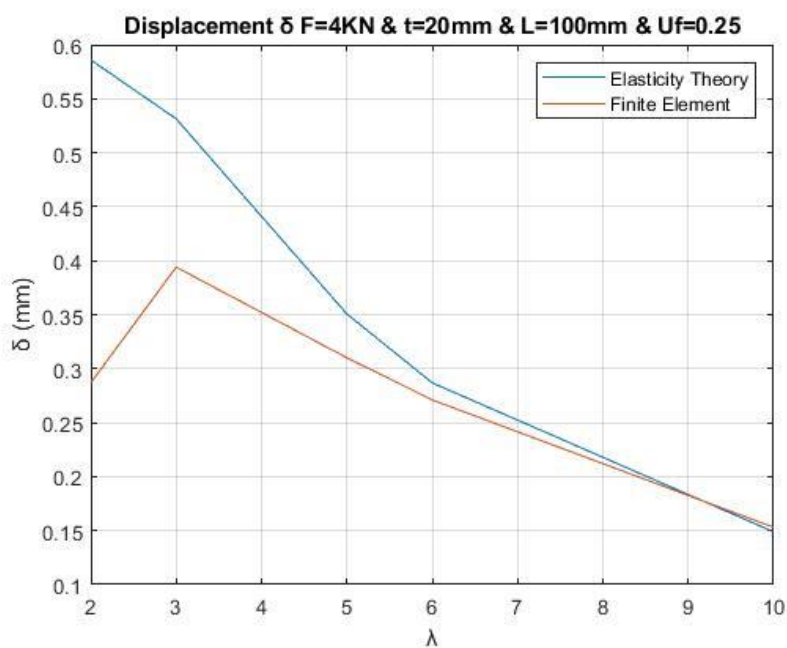
4.2.6 Σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 25%

Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Επιλέχθηκε μεγάλος συντελεστής φόρτισης όπου η Θεωρία Ελαστικότητας έχει μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς επηρεάζει λιγότερο η άρθρωση. Παρατηρούμε στο διάγραμμα ότι όσο πιο μικρές τιμές έχει το ασκούμενο φορτίο τόσο πιο πολύ συγκλίνουν οι τιμές των δύο μεθόδων. Επίσης, η αύξηση του ασκούμενου φορτίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης.



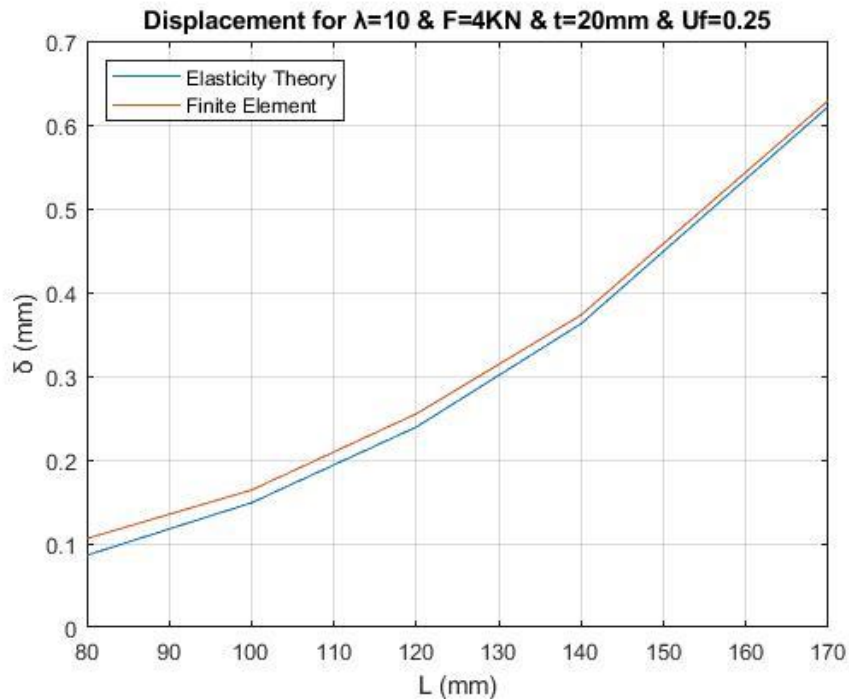
Διάγραμμα 4.2.21:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του ασκούμενου φορτίου
για $\lambda=10$, $t=20$ mm, $L=100$ mm, $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές η Θεωρία Ελαστικότητας έχει μεγάλη απόκλιση, η οποία οφείλεται στην άρθρωση στο αριστερό άκρο το δοκιμίου. Με την αύξηση του συντελεστή φόρτισης λ η ακρίβεια του βέλους κάμψης βελτιώνεται συνεχώς, ώσπου φτάνουμε στην τιμή $\lambda=6$, όπου πλέον η Θεωρία Ελαστικότητας είναι αξιόπιστη.



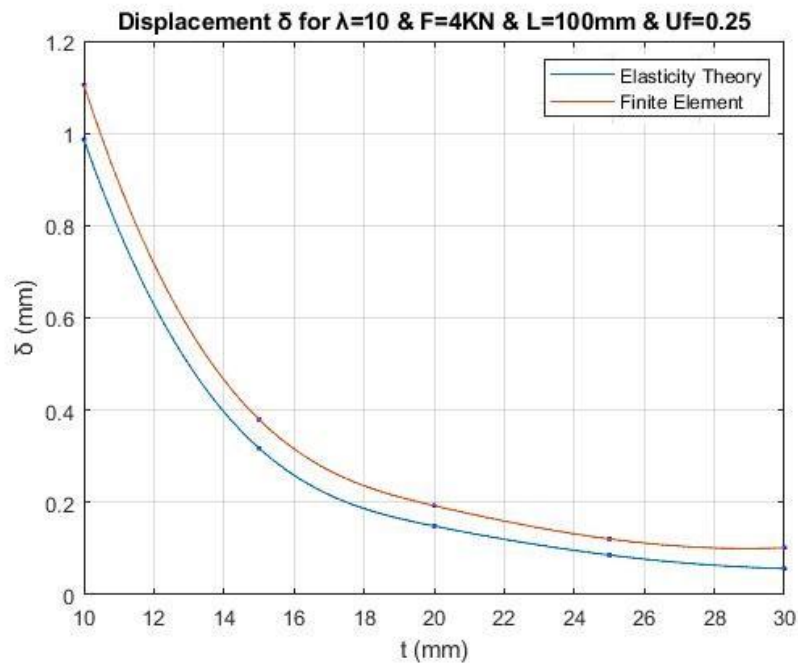
Διάγραμμα 4.2.22:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του συντελεστή φόρτισης λ
για $F=4$ kN, $L=100$ mm, $t=20$ mm, $b=30$ mm

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4\text{ kN}$, πάχος δοκιμίου $t=20\text{ mm}$ και πλάτος δοκιμίου $b=30\text{ mm}$. Παρατηρούμε ότι η αύξηση του μήκους του δοκιμίου οδηγεί σε σύγκλιση των τιμών των δύο μεθόδων, το οποίο και ήταν αναμενόμενο. Επίσης, η αύξηση του μήκους του δοκιμίου οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης.



Διάγραμμα 4.2.23:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του μήκους του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4\text{kN}$, $t=20\text{mm}$, $b=30\text{mm}$

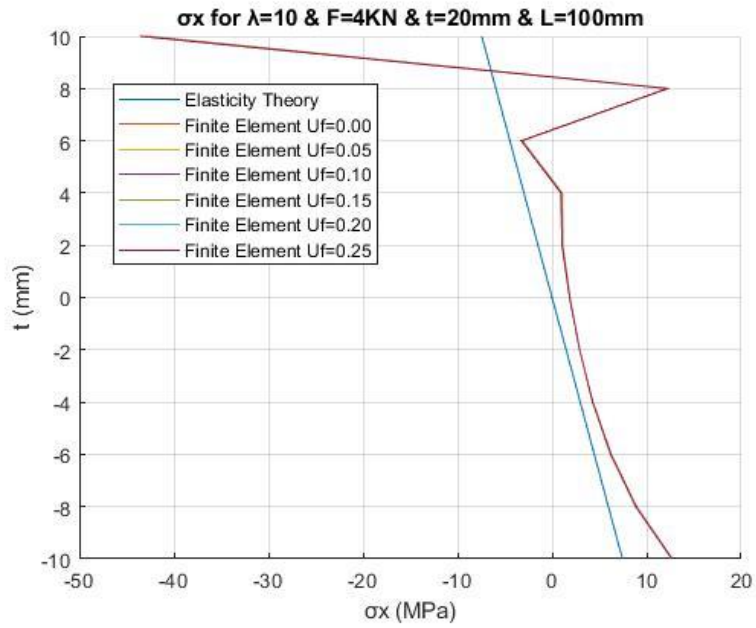
Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το βέλος κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου και με τις δύο μεθόδους. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος του δοκιμίου $L=100$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Παρατηρούμε μία σταθερή απόκλιση μεταξύ των δύο μεθόδων, ενώ περιμέναμε ότι η μείωση του πάχους να οδηγεί σε σύγκλιση. Επίσης, η αύξηση του πάχους του δοκιμίου οδηγεί σε μείωση του βέλους κάμψης.



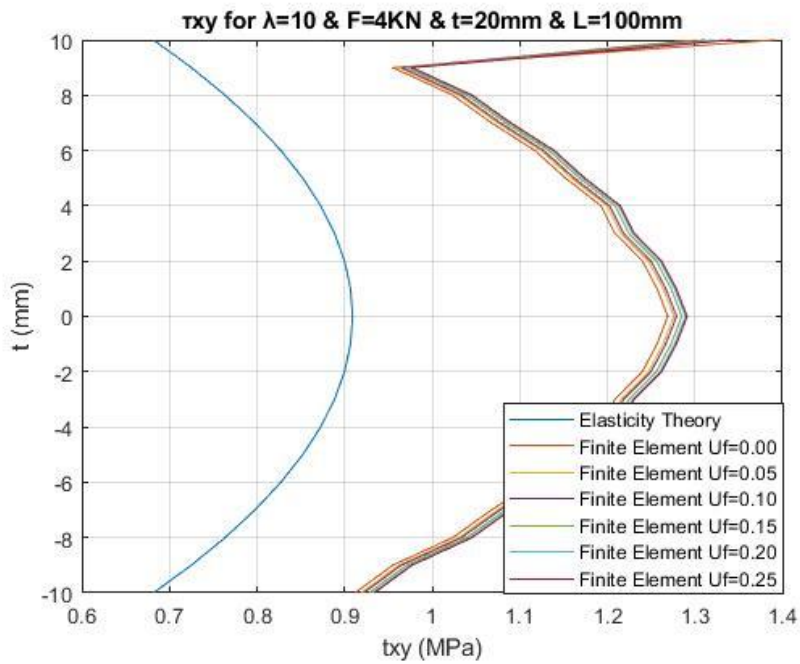
Διάγραμμα 4.2.24:
Μεταβολή βέλους κάμψης συναρτήσει του πάχους του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4$ kN, $L=100$ mm, $b=30$ mm

4.2.7 Συγκεντρωτική σύγκριση της κατανομής των τάσεων κατά το πάχος της δοκού

Τα επόμενα δύο διαγράμματα περιλαμβάνουν την σύγκριση των ορθών τάσεων σ_x και των διατμητικών τάσεων τ_{xy} στο σημείο B (Εικόνα 2.3.1) μεταξύ των δύο μεθόδων για όλες τις περιεκτικότητες κατ' όγκο του εγκλείσματος. Αρκούν από ένα διάγραμμα καθώς από την Θεωρία Ελαστικότητας οι τιμές των τάσεων δεν μεταβάλλονται από την μεταβολή της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN, μήκος του δοκιμίου $L=100$ mm, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Και στα δύο διαγράμματα παρατηρούμε ότι και στην μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων η περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος έχει μηδαμινή επίδραση στις τάσεις. Όσο αφορά τις ορθές τάσεις σ_x παρατηρούμε μικρή απόκλιση μεταξύ των δύο μεθόδων από τα μισά του πάχους της δοκού και κάτω, σε αντίθεση με πάνω που έχουμε μεγάλη απόκλιση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων στην περιοχή κοντά στο σημείο άσκησης του φορτίου τα αποτελέσματα αλλοιώνονται. Όσο αφορά τις διατμητικές τάσεις παρατηρούμε μικρή απόκλιση μεταξύ των δύο μεθόδων εκτός από το πάνω τμήμα της δοκού, όπου παρατηρούμε μεγάλη αλλοίωση των αποτελεσμάτων για τον ίδιο λόγο.



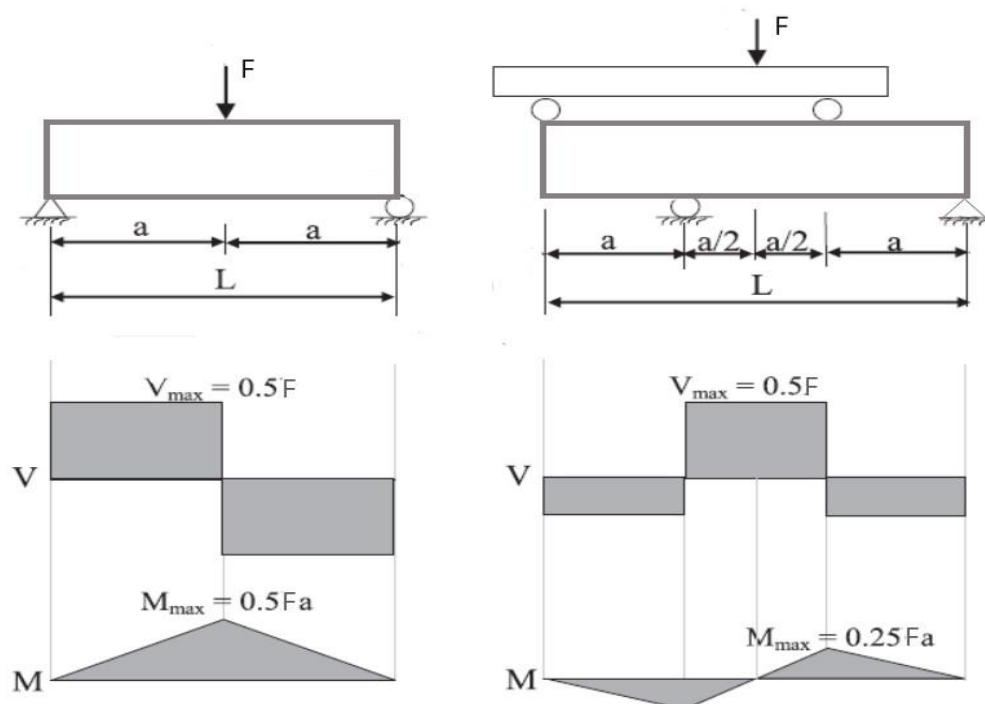
Διάγραμμα 4.2.25:
Συγκεντρωτική κατανομή των ορθών τάσεων σ_x κατά το πάχος του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4\text{kN}$, $L=100\text{mm}$, $b=30\text{mm}$



Διάγραμμα 4.2.26:
Συγκεντρωτική κατανομή των διατμητικών τάσεων τ_{xy} κατά το πάχος του δοκιμίου
για $\lambda=10$, $F=4\text{kN}$, $L=100\text{mm}$, $b=30\text{mm}$

4.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ 3-Σημείων και 4-Σημείων

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα πραγματοποιηθεί σύγκριση του βέλους κάμψης της κάμψης τριών σημείων και της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Η διαδικασία της σύγκρισης περιγράφεται στην δημοσίευση του A.C. Manallo [18], όπου γίνεται σύγκριση της αντοχής και του βέλους κάμψης ως την αστοχία του υλικού των δύο διαμορφώσεων για σύνθετο τύπου sandwich. Όμως, η παρούσα διπλωματική καλύπτει την ελαστική περιοχή και συνεπώς δεν θα συνεχίσουμε μέχρι την αστοχία. Σύμφωνα λοιπόν με τον A.C. Manallo στην κάμψη τριών σημείων το ασκούμενο φορτίο θα ασκείται στο σημείο $x=a$. Όσο αφορά την ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων ο συντελεστής φόρτισης θα είναι τρία ($\lambda=3$) με αποτέλεσμα το ασκούμενο φορτίο Q να ασκείται και αυτό στο σημείο $x=a$. Από το γεγονός ότι ο συντελεστής φόρτισης θα είναι τρία επιλέχθηκε να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων μόνο από την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων καθώς όπως αποδείχθηκε προηγουμένως η Θεωρία Ελαστικότητας δεν είναι ακριβής για μικρά λ .

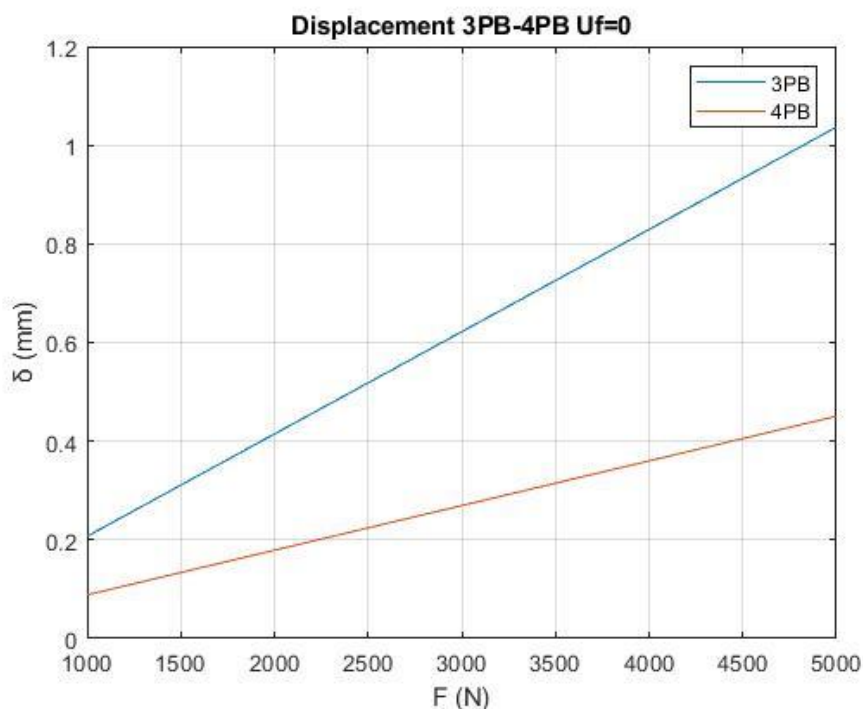


Εικόνα 4.3.1

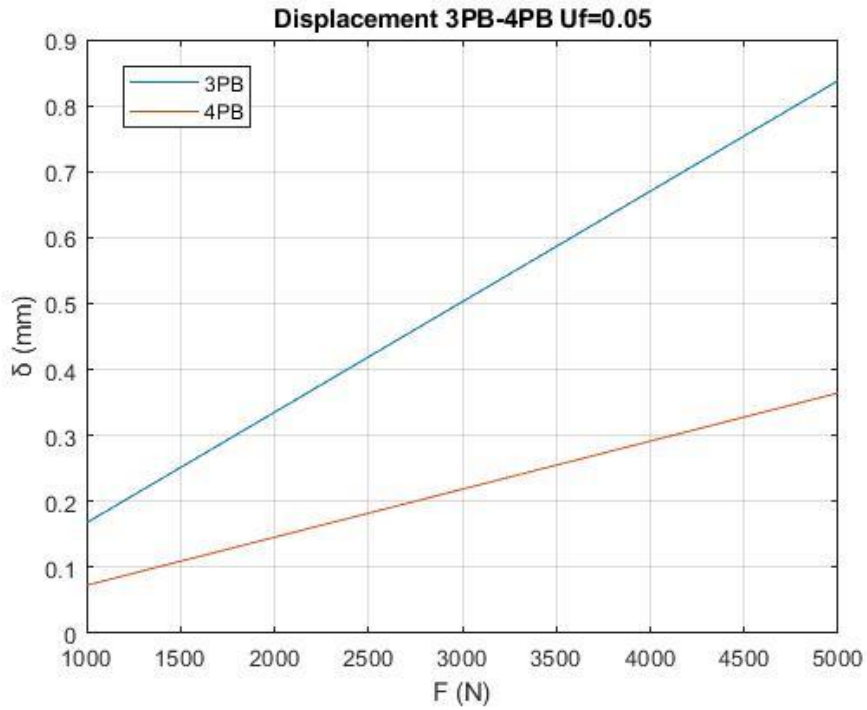
**Απεικόνιση της σύγκρισης 3PB-4PB και των αντίστοιχων διαγραμμάτων
τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψεως**

4.3.1 Σύγκριση βέλους κάμψης

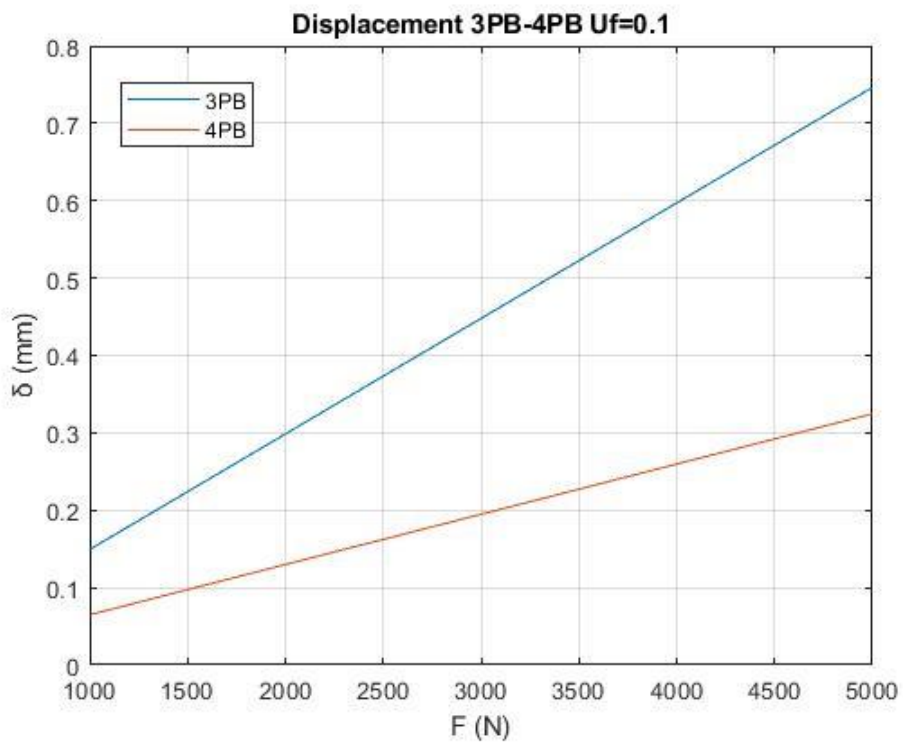
Ακολουθεί η σύγκριση των βελών κάμψεως στο σημείο $x=a$ των δύο κατασκευών για κάθε περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος. Παρουσιάζονται μόνο τα διαγράμματα των βελών κάμψεως συναρτήσει της ασκούμενης δύναμης καθώς και από τα άλλα προκύπτουν τα ίδια συμπεράσματα. Από τα διαγράμματα παρατηρούμε ότι για όλες τις περιεκτικότητες κατ' όγκο του εγκλείσματος το βέλος κάμψης της κάμψης τριών σημείων για δεδομένο ασκούμενο φορτίο είναι μεγαλύτερο συγκριτικά με την ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων. Αυτή η διαφορά μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι το ασκούμενο φορτίο στην ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων διαιρείται σε δύο φορτία που ασκείται το κάθε ένα σε διαφορετική θέση.



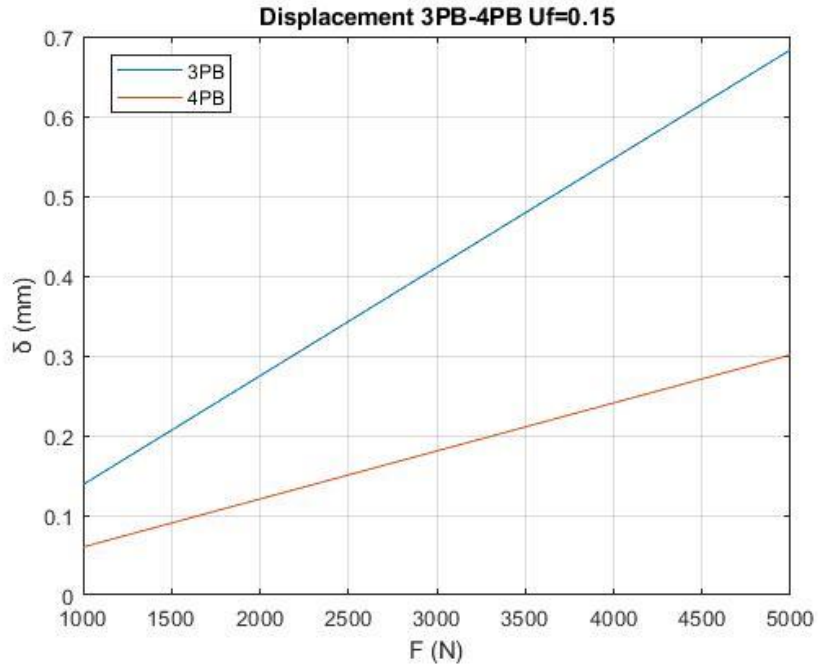
Διάγραμμα 4.3.1
Σύγκριση βέλους κάμψης μεταξύ 3PB-4PB για σύνθετο υλικό
με περιεκτικότητα κατ' όγκο εγκλείσματος 0%



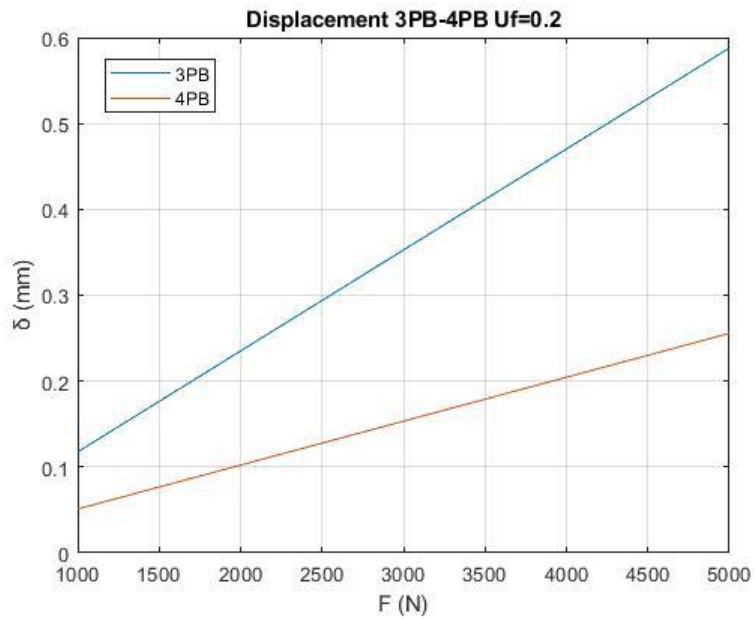
Διάγραμμα 4.3.2
Σύγκριση βέλους κάμψης μεταξύ 3PB-4PB για σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο εγκλείσματος 5%



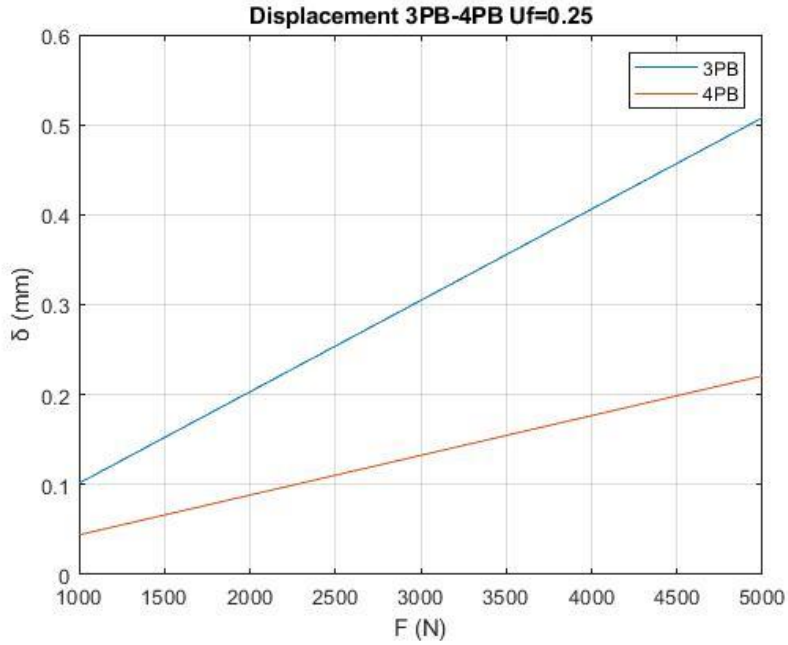
Διάγραμμα 4.3.3
Σύγκριση βέλους κάμψης μεταξύ 3PB-4PB για σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα κατ' όγκο εγκλείσματος 10%



Διάγραμμα 4.3.4
Σύγκριση βέλους κάμψης μεταξύ 3PB-4PB για σύνθετο υλικό
με περιεκτικότητα κατ' όγκο εγκλείσματος 15%

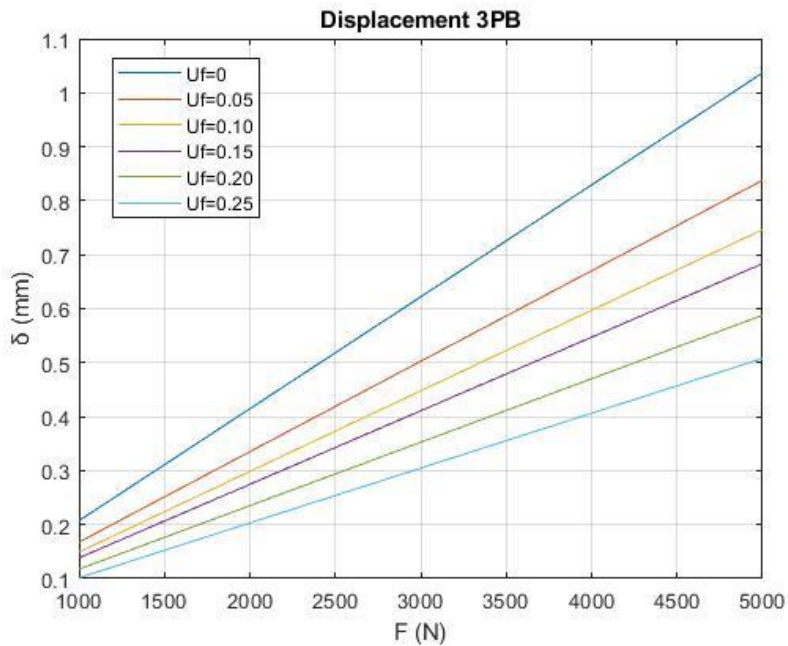


Διάγραμμα 4.3.5
Σύγκριση βέλους κάμψης μεταξύ 3PB-4PB για σύνθετο υλικό
με περιεκτικότητα κατ' όγκο εγκλείσματος 20%

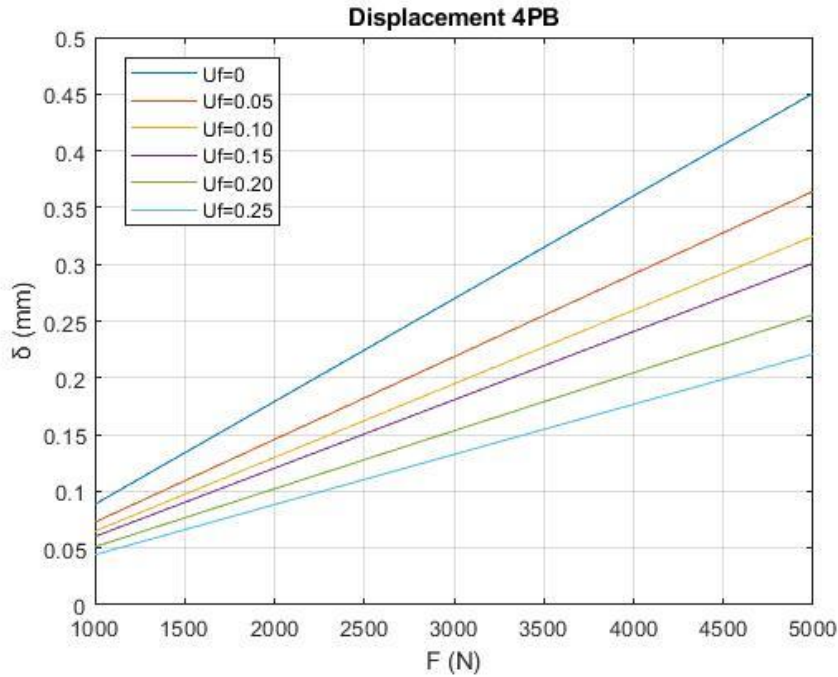


Διάγραμμα 4.3.6
Σύγκριση βέλους κάμψης μεταξύ 3PB-4PB για σύνθετο υλικό
με περιεκτικότητα κατ' όγκο εγκλείσματος 25%

Ακόμα, παρατηρούμε όπως και ήταν αναμενόμενο ότι και στις δύο κατασκευές η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης.



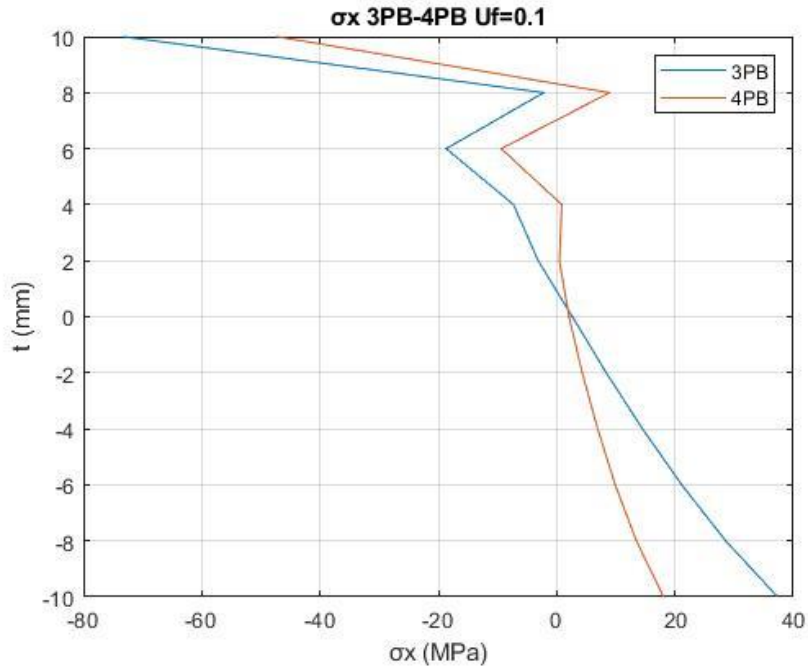
Διάγραμμα 4.3.7
Σύγκριση των βελών κάμψης για όλες τις περιεκτικότητες κατ' όγκο του εγκλείσματος
για την κάμψη τριών σημείων



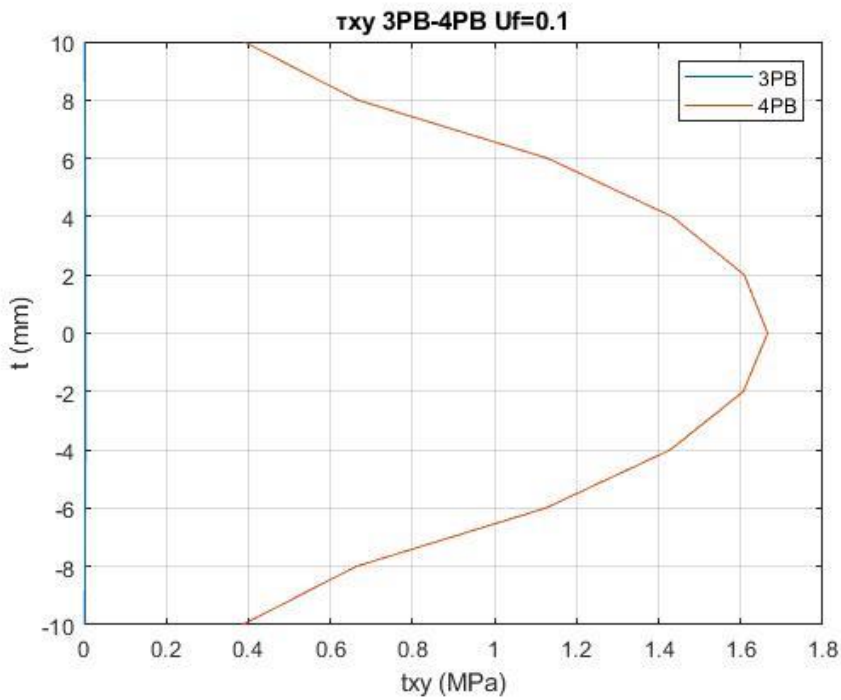
Διάγραμμα 4.3.8
Σύγκριση των βελών κάμψης για όλες τις περιεκτικότητες κατ' όγκο του εγκλείσματος
για την ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων

4.3.2 Σύγκριση των τάσεων

Ακολουθεί η σύγκριση των τάσεων των δύο κατασκευών στο σημείο $x=a$ για κάθε περιεκτικότητα του εγκλείσματος. Από το τρίτο κεφάλαιο συμπεράναμε ότι και με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων η περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος επηρέασε μηδαμινά τόσο τις ορθές τάσεις όσο και τις διατμητικές τάσεις. Συνεπώς αρκεί να συγκρίνουμε για μία περιεκτικότητα. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=3$, πάχος δοκιμίου $t=20$ mm, μήκος δοκιμίου $L=80$ mm, ασκούμενο φορτίο $F=3$ kN, πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm και περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 10%. Από το διάγραμμα των ορθών τάσεων παρατηρούμε ότι έχουμε μεγαλύτερες ορθές τάσεις στην κάμψη τριών σημείων από ότι στην ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων. Από το διάγραμμα των διατμητικών τάσεων παρατηρούμε ότι έχουμε πολύ μεγαλύτερες στην ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων από ότι στην κάμψη τριών σημείων.



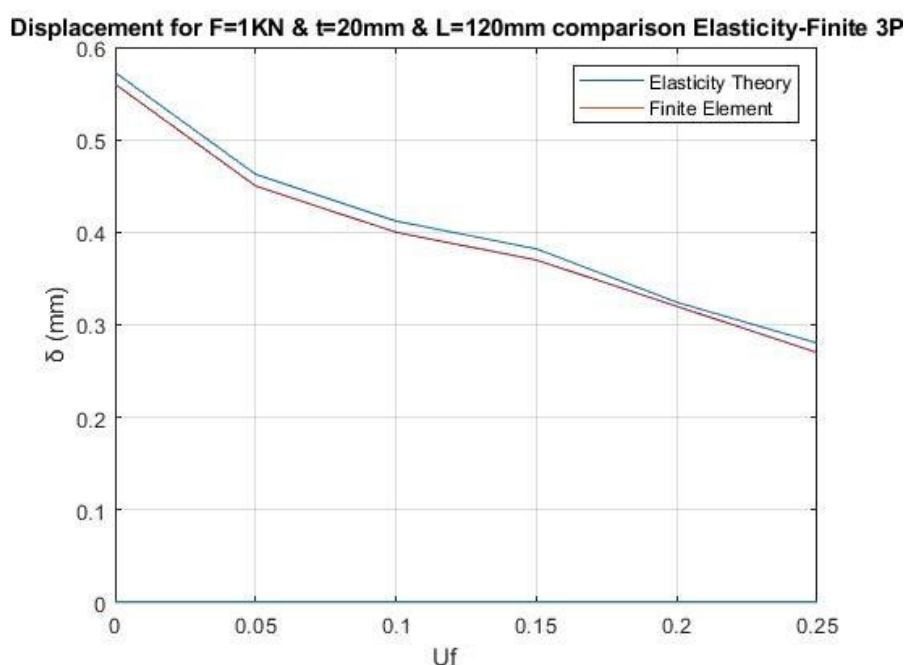
Διάγραμμα 4.3.9
Σύγκριση των ορθών τάσεων μεταξύ 3PB και 4PB
για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 10%



Διάγραμμα 4.3.10
Σύγκριση των διατμητικών τάσεων μεταξύ 3PB και 4PB
για περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος 10%

4.3.3 Σύγκριση βέλους κάμψης με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος για 3-Σημείων

Στο διάγραμμα που ακολουθεί πραγματοποιείται συνολική σύγκριση όλων των περιεκτικοτήτων κατ' όγκο του εγκλείσματος σε σχέση με το βέλος κάμψης στο σημείο $x=a$ και για τις δύο μεθόδους επίλυσης. Έχουμε επιλέξει πάχος δοκιμίου $t=20$ mm, μήκος δοκιμίου $L=120$ mm, ασκούμενο φορτίο $F=1$ kN και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Για άλλη μία φορά παρατηρούμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος οδηγεί σε μείωση του βέλους κάμψης. Επίσης, αυξάνοντας την περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος παρατηρούμε μία μικρή σύγκλιση των τιμών δύο μεθόδων.

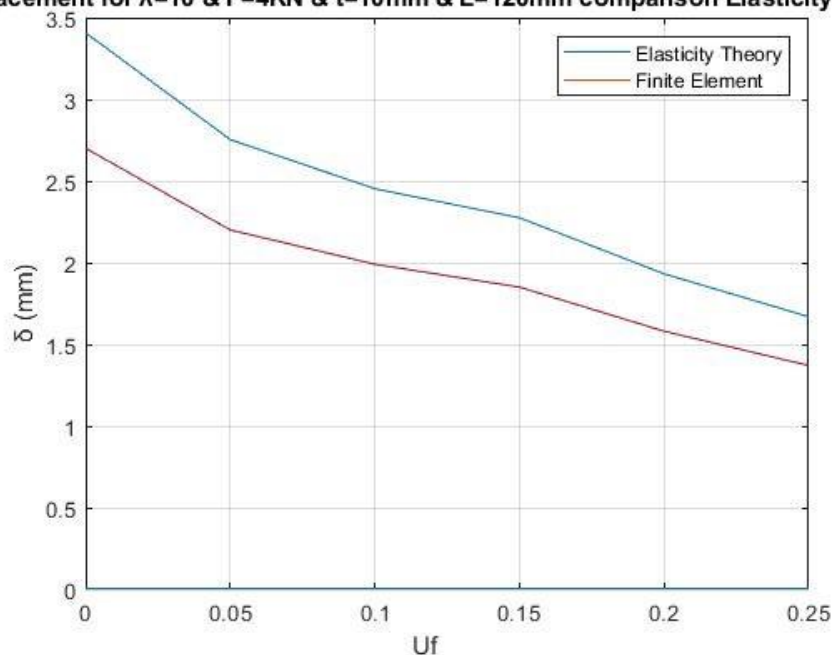


Διάγραμμα 4.3.11
Σύγκριση βέλους κάμψης για δεδομένες συνθήκες
για διάφορες περιεκτικότητες κατ' όγκο του εγκλείσματος σε 3-Σημείων

4.3.4 Σύγκριση βέλους κάμψης με περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος για 4-Σημείων

Στο διάγραμμα που ακολουθεί πραγματοποιείται συνολική σύγκριση όλων των περιεκτικότητων κατ' όγκο του εγκλείσματος σε σχέση με το βέλος κάμψης στο σημείο $x=a$ και για τις δύο μεθόδους επίλυσης. Έχουμε επιλέξει συντελεστή $\lambda=10$, πάχος δοκιμίου $t=10$ mm, μήκος δοκιμίου $L=120$ mm, ασκούμενο φορτίο $F=4$ kN και πλάτος δοκιμίου $b=30$ mm. Για άλλη μία φορά παρατηρούμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος οδηγεί σε μείωση του βέλους κάμψης. Επίσης, αυξάνοντας την περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος παρατηρούμε μία μικρή σύγκλιση των τιμών των δύο μεθόδων.

δplacement for $\lambda=10$ & $F=4$ KN & $t=10$ mm & $L=120$ mm comparison Elasticity-Finiti



Διάγραμμα 4.3.12
Σύγκριση βέλους κάμψης για δεδομένες συνθήκες
για διάφορες περιεκτικότητες κατ' όγκο του εγκλείσματος σε 4-Σημείων

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο συγκεντρώθηκαν τα συμπεράσματα που απορρέουν από την μελέτη της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων για κοκκώδες σύνθετο υλικό. Πιο συγκεκριμένα τα συμπεράσματα προήλθαν από την επίλυση της ανωτέρω διαμόρφωσης με την μέθοδο της Θεωρίας Ελαστικότητας και την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Επίσης, στα συμπεράσματα συμπεριλαμβάνονται και αυτά που προκύπτουν από την σύγκριση των δύο μεθόδων. Τα προαναφερθέντα συμπεράσματα είναι:

1. Η περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος επηρεάζει σημαντικά το βέλος κάμψης. Όπως ήταν αναμενόμενο, αυξάνοντας την περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος παρατηρούμε μία σταδιακή μείωση του βέλους κάμψης.
2. Το ασκούμενο φορτίο επηρεάζει και αυτό σημαντικά το βέλος κάμψης. Παρατηρήσαμε ότι το βέλος κάμψης αυξάνεται αναλογικά με την αύξηση του ασκούμενου φορτίου, το οποίο και περιμέναμε καθώς δεν συμπεριλάβαμε μη γραμμικότητες στην μελέτη. Επίσης, από τα διαγράμματα του ασκούμενου φορτίου συναρτήσει του βέλους κάμψης συμπεράναμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος οδηγεί σε μείωση της κλίσης της καμπύλης, δηλαδή σε μείωση του ρυθμού αύξησης του βέλους κάμψης.
3. Το μήκος του συνθέτου και πιο συγκεκριμένα το μήκος μεταξύ των στηρίξεων έχει επίσης σημαντική επίδραση στο βέλος κάμψης. Παρατηρήσαμε ότι το βέλος κάμψης αυξάνεται εκθετικά με την αύξηση του μήκους του συνθέτου. Επίσης, συμπεράναμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος οδηγεί σε μείωση του ρυθμού αύξησης του βέλους κάμψης.
4. Το πάχος του συνθέτου επηρεάζει και αυτό σημαντικά το βέλος κάμψης. Παρατηρήσαμε ότι το βέλος κάμψης μειώνεται με την αύξηση του πάχους του συνθέτου, το οποίο και ήταν απόλυτα λογικό. Επίσης, συμπεράναμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος εκτός από μείωση της

τιμής του βέλους κάμψης οδηγεί και σε μείωση της κλίσης της καμπύλης, δηλαδή σε μείωση του ρυθμού μείωσης του βέλους κάμψης. Ακόμα, παρατηρήθηκε ότι για παχιές διατομές τα βέλη κάμψης συγκλίνουν, δηλαδή για παχιές διατομές το βέλος κάμψης δεν επηρεάζεται από την περιεκτικότητα του εγκλείσματος. Από την άλλη, για λεπτές διατομές παρατηρήθηκε ότι η περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος έχει σημαντική επιρροή στο βέλος κάμψης.

5. Η σημαντικότερη παράμετρος της μελέτης της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων είναι ο συντελεστής φόρτισης λ . Ο συντελεστής φόρτισης λ επηρεάζει την αναλογία των ασκούμενων φορτίων, το σημείο εφαρμογής τους καθώς και το μήκος του συνθέτου μετά την κύλιση. Παρατηρήσαμε ότι το βέλος κάμψης γίνεται μέγιστο για $\lambda=3$, ενώ για τιμές μικρότερες και μεγαλύτερες το βέλος κάμψης μειώνεται. Επίσης, συμπεράναμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας κατ' όγκο του εγκλείσματος εκτός από μείωση της τιμής του βέλους κάμψης οδηγεί και σε μείωση της κλίσης της καμπύλης, δηλαδή σε μείωση του ρυθμού αύξησης και μείωσης του βέλους κάμψης.
6. Οι ορθές τάσεις ως προς τον άξονα x παρατηρούμε ότι είναι ανεξάρτητες από την περιεκτικότητα κατ' όγκο του εγκλείσματος. Επίσης, στο άνω άκρο του πάχους του συνθέτου υπάρχει αλλοίωση των αποτελεσμάτων, η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι πλησιάζουμε το σημείο άσκησης του φορτίου.
7. Οι διατμητικές τάσεις παρατηρούμε είναι και αυτές ανεξάρτητες από την περιεκτικότητα του εγκλείσματος. Επίσης, στο άνω άκρο του πάχους του συνθέτου υπάρχει αλλοίωση των αποτελεσμάτων, η οποία οφείλεται στον ίδιο λόγο.
8. Αναφορικά με την σύγκριση των δύο μεθόδων παρατηρείται μεγάλη απόκλιση των τιμών του βέλους κάμψης όταν ο συντελεστής φόρτισης λ είναι μικρότερος του 6. Συνεπώς, η Θεωρία Ελαστικότητας για μικρές τιμές του συντελεστή φόρτισης λ έχει πολύ μεγάλο σφάλμα, ενώ για μεγάλες έχει πολύ καλή ακρίβεια. Αυτό συμβαίνει καθώς για μικρές τιμές του συντελεστή φόρτισης λ , το σημείο εφαρμογής του ασκούμενου φορτίου είναι πιο κοντά στην άρθρωση, η οποία και αλλοιώνει τα αποτελέσματα σύμφωνα με την αρχή του Saint-Venant. Αντίθετα, όσο μεγαλώνει ο συντελεστής φόρτισης λ , δηλαδή όσο απομακρυνόμαστε από την άρθρωση η ακρίβεια των αποτελεσμάτων θα βελτιώνεται. Όσο αφορά την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

παρατηρούμε ότι για όλες τις τιμές του συντελεστή φόρτισης λ έχει καλή ακρίβεια.

9. Επιπρόσθετα παρατηρούμε μεγαλύτερη σύγκλιση μεταξύ των δύο μεθόδων όταν αυξάνουμε το μήκος της δοκού, όπως επίσης και όταν μειώνουμε το πάχος της. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι στα δισδιάστατα προβλήματα η Θεωρία της Ελαστικότητας έχει καλύτερα αποτελέσματα όταν ο λόγος μήκος προς το πάχος είναι μεγάλος. Συνεπώς, όταν μεγαλώνει αυτός ο λόγος αυξάνεται και η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.
10. Επιπλέον παρατηρούμε ότι για όλες τις περιεκτικότητες κατ' όγκο του εγκλείσματος οι λύσεις συγκλίνουν σε πολύ μεγάλο βαθμό.
11. Τέλος, πραγματοποιήθηκε σύγκριση του βέλους κάμψης μεταξύ της κάμψης τριών σημείων και της ασύμμετρης κάμψης τεσσάρων σημείων. Για τις ανάγκες της σύγκρισης απαιτήθηκε η επιλογή τις τιμής του συντελεστή φόρτισης $\lambda=3$. Η σύγκριση έγινε μόνο με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, επειδή όπως προαναφέρθηκε για μικρές τιμές του συντελεστή φόρτισης λ η Θεωρία Ελαστικότητας δεν έχει ακρίβεια στα αποτελέσματα. Τα συμπεράσματα της σύγκρισης είναι ότι για δεδομένο ασκούμενο φορτίο το βέλος κάμψης για την κάμψη τριών σημείων είναι αρκετά μεγαλύτερο από ότι για την ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων.

5.2 Δυνατότητες Περαιτέρω Μελέτης

Παρόλο που τα αποτελέσματα της αναλυτικής μεθόδου της Θεωρίας Ελαστικότητας και της υπολογιστικής μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων για την ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων στοιχείων σε ισότροπο κοκκώδες σύνθετο υλικό συγκλίνουν σε ικανοποιητικό βαθμό είναι απαραίτητη η σύγκρισή τους και με πειραματικά αποτελέσματα.

Επιπρόσθετα, θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστεί η επιρροή των κατασκευαστικών ατελειών, όπως για παράδειγμα η ύπαρξη ρωγμών, παγιδευμένος αέρας ή νερό στο εσωτερικό.

Τέλος, έχοντας στην διάθεσή μας μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύ θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί ανάλυση με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων με πολύ πυκνό κάνναβο μειώνοντας το σφάλμα των αποτελεσμάτων στο ελάχιστο δυνατό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. S. W. Tsai, Composite Design, 4th ed., Think Composites, Dayton, 1988
2. Γ. Τσαμασφύρος & Γ. Καντεράκης, Ειδικά Κεφάλαια Σύνθετων Υλικών, Ε.Μ.Π., 2004
3. Robert Matthews, Composite Materials Analysis, 2001
4. Α. Σιδερίδης, Επίδρασις της ενδιάμεσου φάσεως στις θερμοδυναμικές ιδιότητες των κοκκωδών και ινωδών υλικών, Διδακτορική διατριβή, Αθήνα, 1998
5. E. Sideridis, An Interlaminar Shear Strength for Fibre Reinforced Plastics, MSc Thesis, University of Manchester, 1986
6. Αθ. Μπέη-Κορωναίου, Προσδιορισμός των ελαστικών σταθερών και συντελεστή θερμικής διαστολής κοκκωδών συνθέτων υλικών δια της θεωρίας της ενδιάμεσου φάσεως, Διπλωματική Εργασία, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2013
7. Ι. Βαρδουλάκης, Τεχνική Μηχανική ΙΙ, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1998
8. D. F. Sims and H. E. Wilson, Distribution of shearing stresses in a composite beam under transverse loading, Composites, July, 1978, pp. 185-191
9. E. Sideridis, J. N. Ashton and R. Kitching, Measurement of the interlaminar shear strength of glass-reinforced plastics of different construction using the off-axis four-point bending test, Composite Structures 18, 1991, pp. 139–161
10. E. Sideridis, J. N. Ashton and R. Kitching, The off-axis four-point bending method for the estimation of the interlaminar shear strength of fibre-reinforced composites, Phase Interaction in Composite Materials, Omega Scientific, Oxon, 1992, pp. 551-565
11. Martin H. Sadd, Elasticity Theory, Applications, and Numerics, Second Edition 2009, Elsevier
12. Onur Sayman and Umran Esendemir, An Elastic-Plastic Stress Analysis on a Thermoplastic Composite Beam of Arbitrary Orientation Supported from Two Ends Acted upon with a Force at the Midpoint, Department of Mechanical Engineering, Süleyman Demirel University, Isparta, Turkey
13. Umran Esendemir, Derivation of Equations for Flexure and Shear Deflections of Simply Supported Beams, Isparta 06-02-2009, pp. 187-193

14. Κων/νος Ηλ. Τσούτσουρας, Υπολογιστική και Αναλυτική Μελέτη Δοκού από Σύνθετα Υλικά σε Ασύμμετρη Κάμψη, Διπλωματική Εργασία, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2021
15. Γ. Τσαμασφύρος, Ε. Ε. Θεοτόκογλου, Μέθοδος Των Πεπερασμένων Στοιχείων, I-II, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1994
16. Ν. Βιλλιώτης, Μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς δοκών από σύνθετο υλικό με ίνες μίας και δύο διευθύνσεων σε ασύμμετρη κάμψη τεσσάρων σημείων με αναλυτικές μεθόδους και την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, Μεταπτυχιακή Εργασία, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2020
17. Σπυρ. Καλογεράς, Μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς βραχείας δοκού συνθέτου υλικού σε κάμψη με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, Μεταπτυχιακή Εργασία, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2006
18. A.C. Manalo, Behaviour of fibre composite sandwich structures under short and asymmetrical beam shear tests, Elsevier, 2012, pp 339-349.
19. Swanson JA. ANSYS – Engineering Analysis Systems User’s Manual, Vols. I-IV, Swanson Analysis Systems, Inc., 2007.