ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΗ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ GÖDEL

ΣΟΥΒΑΤΖΟΓΛΟΥ ΑΝΤΩΝΙΟΣ
ΑΜ 09103011

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΡΒΑΝΙΤΑΚΗΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ

Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty - a beauty cold and austere, like that of sculpture.

Bertrand Russell (1872 - 1970)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσης εργασίας είναι η αναλυτική παρουσίαση των θεωρημάτων μη-πληρότητας που απέδειξε ο Kurt Gödel και κυρίως η παρουσίαση και η αποσαφήνιση μιας μη-αυτοαναφορικής απόδειξης του Α' θεωρήματος μη-πληρότητας την οποία διατύπωσε ο George Boolos το 1989. Η εργασία αυτή καλύπτει ένα κενό στην απόδειξη του Boolos, ορίζοντας ένα μαθηματικό τύπο που ο ίδιος αποφεύγει να ορίσει, αναφέροντας απλά στο παράρτημα της εργασίας ότι είναι εφικτό να οριστεί.

Στα πλαίσια της εργασίας διατυπώνονται ορισμοί όλων των μαθηματικών εννοιών και αποδεικνύονται όλα τα θεωρήματα της μαθηματικής λογικής που είναι απαραίτητα για την εξέταση και κυρίως την κατανόηση των θεωρημάτων μη-πληρότητας. Τα πρώτα κεφάλαια της εργασίας ασχολούνται με έννοιες και θεωρήματα του προτασιακού λογισμού, του πρωτοβάθμιου κατηγορηματικού λογισμού, των πρωτοβάθμιων θεωριών και της θεωρίας αναδρομής. Ακολούθως παρατίθεται η κλασσική απόδειξη των θεωρημάτων μη-πληρότητας, όπως αυτή τροποποιήθηκε από τον Rosser.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η απόδειξη του George Boolos. Πρόκειται για μια εξαιρετικά σύντομη και απλή απόδειξη του Α' θεωρήματος μη-πληρότητας. Αυτό που της προσδίδει, ωστόσο, ιδιαίτερη σημασία είναι το γεγονός ότι –σε αντίθεση με την αυθεντική απόδειξη του Gödel– δεν περιέχει κάποιου είδους αυτοαναφορικό επιχείρημα. Ο Boolos αποδεικνύει μια ισοδύναμη μορφή του θεωρήματος, που υποστηρίζει ότι δεν είναι δυνατόν να ορίσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος να επιστρέφει όλες τις αληθείς προτάσεις της αριθμητικής Peano και καμία ψευδή. Για τις ανάγκες της απόδειξης τυποποιεί το περίφημο παράδοξο του Berry, ορίζοντας ότι ο αλγόριθμος αυτός «ονομάζει» έναν αριθμό όταν ένας συγκεκριμένος τύπος που ικανοποιείται μόνο από τον συγκεκριμένο αριθμό εμφανίζεται στο όρισμα εξόδου του αλγορίθμου.

Ωστόσο, η τυποποίηση είναι ελλιπής, καθώς δεν ορίζει τον τύπο που αναφέρει ότι ένας αριθμός «ονομάζεται» από έναν τύπο με συγκεκριμένο πλήθος χαρακτήρων. Στο παράρτημα της εργασίας του ο Boolos αναφέρει ότι με βάση την αρίθμηση Gödel και τις ιδιότητες των πρώτων αριθμών είναι εφικτός ο ορισμός αυτού του τύπου, αλλά ότι η τυποποίησή του είναι δύσκολη και χρονοβόρα. Στο έκτο κεφάλαιο της παρούσης εργασίας (συγκεκριμένα στις σελίδες 54-56) ορίζεται ο τύπος αυτός και αποδεικνύεται ότι δεν είναι απαραίτητη η χρήση κάποιου αυτοαναφορικού επιχειρήματος στην απόδειξη.

Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται συνοπτικά η επίδραση των θεωρημάτων μη-πληρότητας στα μαθηματικά και στη φιλοσοφία των μαθηματικών, εξετάζοντας τους συσχετισμούς τους με τα φιλοσοφικά ρεύματα της εποχής και την ιστορική πορεία που ακολούθησαν τα μαθηματικά τα επόμενα έτη.

ABSTRACT

Aim of this thesis is an analytic presentation of the incompleteness theorems proved by Kurt Gödel and mainly the presentation and clarification of a non-self-referential proof of the first incompleteness theorem which was formulated by George Boolos in 1989. This thesis also covers a gap in that proof, by defining a formula which Boolos avoids to define, merely mentioning in the appendix of his paper that its definition is feasible.

This thesis provides definitions of every mathematical notion and proofs of every theorem of mathematical logic necessary for the examination and understanding of the incompleteness theorems. The first four chapters of this thesis deal with notions and theorems of propositional logic, first-order predicate logic, first-order theories and recursion theory. The fifth chapter provides the classical proof of the incompleteness theorems, as it was modified by Rosser.

After that I present the proof formulated by George Boolos. It is a remarkably brief and simple proof of the first incompleteness theorem, but what makes it significant is that –in contrast with the original proof– it does not contain any kind of self-referential argument. Boolos proves an equivalent form of the theorem, asserting that it is impossible to define an algorithm which returns every true sentence of Peano arithmetic and no false sentences. He formalizes the famous Berry's paradox, defining that this algorithm "names" a unique number if a specific formula that is satisfied only by this number appears in the algorithm's output.

However, this formalization is not complete, as Boolos does not define the formula which asserts that a number is "named" by a formula containing a given number of characters. In the appendix of his paper, Boolos mentions that based on Gödel's numbering and the properties of natural numbers it is possible to define that formula, but its formalization is hard and time-consuming. In the sixth chapter of this thesis (specifically in pages 54-56) this formula is defined and it is proved that it is not necessary to use any kind of self-referential argument in Boolos' proof.

In the final chapter of this thesis I briefly present the impact of the incompleteness theorems on mathematics and the philosophy of mathematics, examining the correlations with the philosophical theories of that time and the development of mathematics during the following years.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ **1**

2 ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ **3**

- γλώσσες του ΠΛ
- τιμές αλήθειας και εκτιμήσεις
- θεώρημα συμπάγειας του ΠΛ
- αξιώματα του ΠΛ
- ανεξαρτησία των αξιωμάτων του ΠΛ
- θεώρημα ορθότητας του ΠΛ
- θεώρημα πληρότητας του ΠΛ

3 ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΣ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ **17**

- πρωτοβάθμιες γλώσσες
- L-δομές και ερμηνείες
- αξιώματα του ΚΛ
- θεώρημα συμπάγειας του ΚΛ
- θεώρημα ορθότητας του ΚΛ
- θεώρημα πληρότητας του ΚΛ

4 ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ **27**

- πρωτοβάθμιες θεωρίες
- μοντέλα θεωριών
- αλγοριθμικότητα
- αξιωματικά συστήματα

5 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΗ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΡΑ **36**

- αναδρομικότητα
- Α' θεώρημα μη πληρότητας
- Β' θεώρημα μη πληρότητας

6 Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ BOOLOS **48**

7 Ο ΑΝΤΙΚΤΥΠΟΣ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΜΗ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ **54**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ **63**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αντικείμενο της παρούσης εργασίας είναι η μελέτη των θεωρημάτων μη-πληρότητας που διατύπωσε και απέδειξε ο Kurt Gödel το 1930, καθώς και μια σύντομη αναφορά στον αντίκτυπο που είχαν στη μαθηματική πρακτική και τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Τα θεωρήματα αυτά είναι αναμφίβολα από τα πλέον φημισμένα και σημαντικά αποτελέσματα των σύγχρονων μαθηματικών. Η φαινομενική παραδοξολογία που προκύπτει απ' την εξέταση των προτάσεων «υπάρχουν προτάσεις της αριθμητικής που αν και είναι αληθείς δεν είναι δυνατόν να αποδειχθούν» και «αν η αριθμητική είναι συνεπής, τότε δεν είναι δυνατόν να αποδείξει τη συνέπεια της» έχει τραβήξει την προσοχή αρκετών μελετητών και έχει αποτελέσει έναυσμα για αναζητήσεις σχετικά με τη φύση της μαθηματικής αλήθειας και τα όρια της ανθρώπινης σκέψης. Στα πλαίσια της καθαρά μαθηματικής πρακτικής, οι αποδείξεις αποκρυσταλλώνουν την έννοια της αλήθειας, θέτοντας όμως όρια στη μαθηματική δημιουργία. Παράλληλα, ωστόσο, τα εργαλεία τα οποία δημιουργήθηκαν για την ανάγκες της απόδειξης τους, αποδείχθηκαν εξαιρετικά χρήσιμα για τη θεμελίωση και την ανάπτυξη διαφόρων κλάδων των μαθηματικών, όπως της θεωρίας αναδρομής και της επιστήμης υπολογιστών και σε κάποια βαθμό, τουλάχιστον, συνεισέφεραν στη ραγδαία ανάπτυξη που γνώρισαν οι κλάδοι αυτοί τις επόμενες δεκαετίες.

Για λόγους πληρότητας, στα πλαίσια της εργασίας παρουσιάζονται όλες οι έννοιες της μαθηματικής λογικής οι οποίες είναι απαραίτητες για τη διατύπωση και την απόδειξη των θεωρημάτων. Παράλληλα παρουσιάζονται και άλλα θεωρήματα, που αν και δεν είναι απαραίτητα για το σκοπό αυτό, η κατανόησή τους προσφέρει μια πληρέστερη εποπτεία του έργου του Gödel. Ωστόσο, σκοπός της εργασίας δεν είναι μια εξαντλητική εξέταση του πεδίου της μαθηματικής λογικής. Για αυτό το λόγο και ορισμένα εξαιρετικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα, όπως τα θεωρήματα Löwenheim-Skolem, το αποδεικτικό σύστημα Gentzen ή οι εφαρμογές της λογικής στα ηλεκτρικά κυκλώματα και την επιστήμη υπολογιστών απουσιάζουν.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται, συνοπτικά, ο προτασιακός λογισμός και ορίζονται οι έννοιες της αλήθειας και της εκτίμησης στα πλαισιά του, όπως επίσης και το σύστημα αξιωμάτων του. Παράλληλα διατυπώνονται τα θεωρήματα συμπάγειας, ορθότητας και πληρότητας του προτασιακού λογισμού.

Το Κεφάλαιο 3 αφορά τον πρωτοβάθμιο κατηγορηματικό λογισμό και σ' αυτό ορίζονται η έννοια της ερμηνείας, το σύστημα αξιωμάτων του και αποδεικνύονται τα αντίστοιχα θεωρήματα συμπάγειας, ορθότητας και πληρότητας.

Η κατανόηση των εννοιών και των θεωρημάτων αυτών είναι μείζονος σημασίας για να αποκτήσει κανείς εποπτεία του αντικειμένου στο οποίο αναφέρονται τα θεωρήματα μη-πληρότητας του Gödel. Για αυτό το λόγο και η παρουσίαση στα συγκεκριμένα κεφάλαια είναι αρκετά εκτενής και κατά το δυνατόν πλήρης, έτσι ώστε να προσφέρεται μια βαθύτερη κατανόηση των εννοιών της αλήθειας και της αποδειξιμότητας.

Το Κεφάλαιο 4 αναφέρεται στις πρωτοβάθμιες θεωρίες και επεξηγείται η έννοια του μοντέλου μιας θεωρίας. Γίνεται μια εξαιρετικά συνοπτική παρουσίαση της έννοιας της αλγοριθμικότητας, η τυποποίηση της οποίας παίζει κεντρικό ρόλο στην αυθεντική απόδειξη του Gödel. Τέλος, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αξιωματικά συστήματα των δύο πλέον σημαντικών θεωριών, της αριθμητικής Peano, για την οποία ο Gödel αποδεικνύει τα θεωρήματα μη-πληρότητας, και της θεωρίας συνόλων, η οποία είναι σε θέση να περιγράψει το σύνολο των μαθηματικών αντικειμένων και στην οποία επεκτείνεται η μη-πληρότητα της αριθμητικής Peano.

Στο Κεφάλαιο 5 τυποποιείται η έννοια της αλγοριθμικότητας και παρουσιάζονται οι αποδείξεις των θεωρημάτων μη-πληρότητας. Για τις ανάγκες της απόδειξης των θεωρημάτων είναι απαραίτητη η αναφορά στις αναδρομικές συναρτήσεις, τα αναδρομικά και τα περιγράψιμα σύνολα και στα πλαίσια αυτά αποδεικνύονται οι ιδιότητες των αντικειμένων αυτών που χρειάζονται για να είναι πλήρης η απόδειξη των θεωρημάτων μη-πληρότητας. Σε κάθε περίπτωση, ωστόσο, δεν επιχειρείται κάποια παρουσίαση γενικότερων αποτελεσμάτων απ' τη θεωρία αναδρομής. Τα αποτελέσματα τα οποία αναφέρονται είναι, στα πλαίσια της παρούσης εργασίας, μόνο εργαλεία για την απόδειξη των θεωρημάτων μη-πληρότητας.

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζεται μια εναλλακτική απόδειξη του Α' θεωρήματος μη-πληρότητας, η οποία διατυπώθηκε από τον George Boolos το 1989. Η απόδειξη αυτή χαρακτηρίζεται από συντομία και κομψότητα, αλλά αυτό που της προσδίδει πραγματική αξία είναι η πλήρης απουσίας κάποιας αυτοαναφοράς στην αποδεικτική διαδικασία. Στα πλαίσια της απόδειξης αυτής, ωστόσο, ο Boolos αποφεύγει να ορίσει ένα τύπο τον οποίο χρησιμοποιεί, αναφέροντας απλά ότι είναι δυνατόν να τον ορίσουμε. Στη συνέχεια γίνεται μια προσπάθεια να οριστεί ο τύπος αυτός και διερευνείται κατά πόσο είναι δυνατός ο ορισμός του χωρίς τη χρήση αυτοαναφοράς.

Τέλος, το Κεφάλαιο 7 αναφέρεται στις φιλοσοφικές προεκτάσεις των θεωρημάτων μη-πληρότητας και πώς επηρέασε τα κυρίαρχα ρεύματα στη φιλοσοφία των μαθηματικών την εποχή εκείνη. Παράλληλα, σκιαγραφείται ο αντίκτυπος που είχαν στην μαθηματική δημιουργία και ο τρόπος που έμελε να επηρεάσουν τη μαθηματική πρακτική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1 Μια **γλώσσα** $\boldsymbol{L}$ του προτασιακού λογισμού αποτελείται από

(a) τα σύμβολα των ατομικών προτάσεων $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (αριθμήσιμα σε πλήθος)
(b) τα σύμβολα των συνδέσμων $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
(c) τις παρενθέσεις (,)

Οι ατομικές προτάσεις να είναι ακόμη και προτάσεις της φυσικής γλώσσας οι οποίες δεν μπορούν να αναλυθούν σε απλούστερες προτάσεις. Για παράδειγμα, η πρόταση «ο Σωκράτης είναι άνθρωπος και έζησε στην αρχαία Αθήνα» δεν είναι ατομική, καθώς μπορεί να αναλυθεί στις ατομικές προτάσεις «ο Σωκράτης είναι άνθρωπος» και «έζησε στην αρχαία Αθήνα».

Τα σύμβολα των συνδέσμων έχουν την εξής σημασία.

$\wedge$ σύζευξη («και»)
$\vee$ διάζευξη («ή»)
$\neg$ άρνηση («όχι»)
$\rightarrow$ συνεπαγωγή («αν … , τότε»)
$\leftrightarrow$ ισοδυναμία («αν και μόνο αν»)

Τέλος, οι παρενθέσεις χρησιμοποιούνται για να καθοριστεί η σειρά με την οποία γίνονται οι λογικές πράξεις.

Αρκετές φορές οι παρενθέσεις παραλείπονται, με βάση τη σύμβαση ότι το σύμβολο $\neg$ είναι ισχυρότερο από τα $\wedge$ και $\vee$, τα οποία, με τη σειρά τους, είναι ισχυρότερα από τα $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$.

Στην πραγματικότητα, δεν είναι όλα τα σύμβολα των συνδέσμων απαραίτητα. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε μικρότερα σύνολα συνδέσμων, όπως τα σύνολα $\{\neg, \wedge\}$ και $\{\neg, \vee\}$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι υπόλοιποι σύνδεσμοι μπορούν να δημιουργηθούν από τον συνδυασμό των συνδέσμων ενός εκ των δύο συνόλων. Παράλληλα, ο πολωνικός τρόπος γραφής μπορεί να εκφράσει κάθε αλληλουχία συμβόλων του προτασιακού λογισμού χωρίς να κάνει χρήση των παρενθέσεων. Αν και η ιδέα ενός ελάχιστου συνόλου συμβόλων με βάση το οποίο ορίζονται τα αντικείμενα του προτασιακού λογισμού φαντάζει κομψή και γοητευτική, η χρήση μόνο δύο συνδέσμων δυσκολεύει αρκετά τη μαθηματική μελέτη. Για αυτό το λόγο και χρησιμοποιούνται οι ανωτέρω σύνδεσμοι στο σύνολό τους, αν και μόνο δύο εξ αυτών χρήζουν ορισμού, ενώ οι υπόλοιποι αποτελούν τρόπον τινά συντομογραφίες.

Ως **έκφραση** του προτασιακού λογισμού ορίζεται κάθε πεπερασμένη ακολουθία των ανωτέρω συμβόλων. Ως εκ τούτου, το πλήθος των εκφράσεων μιας γλώσσας είναι αριθμήσιμο σε πλήθος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2 Οι **προτάσεις** του προτασιακού λογισμού προκύπτουν από τους εξής κανόνες σχηματισμού. Δεν υπάρχουν άλλες προτάσεις πέρα από αυτές που προκύπτουν από τους κανόνες αυτούς.

(a) τα σύμβολα των ατομικών προτάσεων $p_1, p_2, p_3, \dots$ είναι προτάσεις
(b) αν οι φ και ψ είναι προτάσεις, τότε και οι εκφράσεις $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \to \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ είναι προτάσεις
(c) αν η φ είναι πρόταση, τότε και η έκφραση $\neg\varphi$ είναι πρόταση

Με P συμβολίζεται το σύνολο των προτάσεων της L, ενώ με P_0 το σύνολο των ατομικών προτάσεων της γλώσσας. Είναι εμφανές ότι ο ορισμός στην προτάσεων στην L είναι επαγωγικός και για αυτό το λόγο μπορούμε να φτιάξουμε έναν αλγόριθμο που να καθορίζει αν μια έκφραση είναι πρόταση της L.

Το σύνολο των προτάσεων της L είναι υποσύνολο του συνόλου των εκφράσεών της, επομένως το πλήθος των προτάσεων είναι και αυτό αριθμήσιμο.

Με βάση την αρχή του αποκλεισμού του τρίτου, κάθε πρόταση της L λαμβάνει μια τιμή αλήθειας. Η τιμή αυτή είναι 1 αν η πρόταση είναι αληθής και 0 αν η πρόταση είναι ψευδής. Η εκχώρηση μιας τέτοιας τιμής σε μια πρόταση λέγεται **απονομή αλήθειας**. Η απονομή αλήθειας σε όλες τις προτάσεις της L λέγεται **εκτίμηση**. Για να ορίσουμε μια τέτοια εκτίμηση αρκεί να απονείμουμε αυθαίρετες τιμές αλήθειας σε όλες τις ατομικές προτάσεις της L. Η τιμή αλήθειας μιας σύνθετης πρότασης μπορεί βρεθεί με βάση τους πίνακες αληθείας που καθορίζουν τη δράση των συνδέσμων.

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \to \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\neg\varphi$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	

Με τη χρήση των ανωτέρω αληθοπινάκων είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι ο συνδυασμός των συνδέσμων $\neg$ και $\wedge$ είναι σε θέση να δημιουργήσει κάθε άλλο σύνδεσμο. Κάθε σύνδεσμο τον οποίο έχουμε δημιουργήσει με βάση αυτούς τους δύο στη συνέχεια θα τον χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε τους επόμενους.

Για τη διάζευξη έχουμε $\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$\varphi \vee \psi$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0

Για τη συνεπαγωγή έχουμε $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\neg\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$	$\varphi \to \psi$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1

Τέλος, για την ισοδυναμία έχουμε $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\psi \to \varphi$	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3 Κάθε απεικόνιση $v : P_0 \to \{0,1\}$ λέγεται **εκτίμηση** του P. Η εκτίμηση αυτή επεκτείνεται από το P_0 στο P με τη χρήση των ανωτέρω πινάκων αληθείας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4 Έστω φ μια πρόταση και v μια εκτίμηση του P. Αν $v(\varphi) = 1$, τότε η v **ικανοποιεί** τη φ. Η σχέση αυτή συμβολίζεται ως $v \vDash \varphi$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5 Έστω $\Sigma \subseteq P$. Η v ικανοποιεί το Σ ή είναι **μοντέλο** του Σ, αν $v \vDash \varphi$ για κάθε $\varphi \in \Sigma$. Η σχέση αυτή συμβολίζεται ως $v \vDash \Sigma$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6 Έστω $\Sigma \subseteq P$. Το Σ λέγεται **ικανοποιήσιμο**, αν υπάρχει v τέτοια ώστε $v \vDash \Sigma$.

Υπενθυμίζουμε ότι μια εκτίμηση v αποτελεί μια αυθαίρετη απονομή τιμών αληθείας στις ατομικές προτάσεις της γλώσσας. Για αυτό το λόγο, το αν ένα σύνολο προτάσεων Σ είναι ικανοποιήσιμο ή όχι, καθορίζεται απ' την εκτίμηση αυτή. Ωστόσο υπάρχουν προτάσεις που η τιμή τους είναι ανεξάρτητη από την εκτίμηση που έχουμε ορίσει. Για παράδειγμα, η πρόταση $p_1 \vee \neg p_1$ είναι πάντοτε αληθής, ενώ η πρόταση $p_1 \wedge \neg p_1$ είναι πάντοτε ψευδής. Η τιμή της πρότασης p_1

μπορεί να είναι είτε αληθής είτε ψευδής, ανάλογα με την εκτίμηση που έχουμε ορίσει. Αντίστοιχα οι προτάσεις p_1 και $\neg p_1$ λαμβάνουν πάντα αντίθετες τιμές αλήθειας. Οποιαδήποτε εκτίμηση ικανοποιεί την p_1, δεν ικανοποιεί την $\neg p_1$. Για κάθε ικανοποιήσιμο σύνολο υπάρχει μια εκτίμηση για την οποία αληθεύουν όλες οι προτάσεις που περιέχει. Ουσιαστικά αυτό σημαίνει ότι ένα ικανοποιήσιμο σύνολο δεν περιλαμβάνει προτάσεις που είναι αντιφατικές μεταξύ τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.7 Μια πρόταση φ λέγεται **ταυτολογία** και συμβολίζεται $\vDash \varphi$ αν $v \vDash \varphi$ για κάθε εκτίμηση v. Μια πρόταση λέγεται **αντίφαση** και συμβολίζεται με $\nvDash \varphi$, αν $v \nvDash \varphi$ για κάθε εκτίμηση v.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8 Έστω $\Sigma \subseteq P$ και $\varphi \in P$. Η φ λέγεται **λογικό συμπέρασμα** του Σ αν κάθε μοντέλο του Σ ικανοποιεί τη φ. Η σχέση αυτή συμβολίζεται ως $\Sigma \vDash \varphi$.

Σε γενικές γραμμές, οι ταυτολογίες και οι αντιφάσεις είναι μείζονος σημασίας, καθώς είναι τελείως ανεξάρτητες από την εκτίμηση, την οποία, σε γενικές γραμμές, ορίζουμε αυθαίρετα. Για αυτό το λόγο και απαιτούμε, όπως θα δούμε στη συνέχεια, τα αξιώματα του προτασιακού λογισμού να αποτελούν ταυτολογίες, ώστε οι έννοιες που εκφράζουν να είναι ανεξάρτητες απ' τη δική μας ερμηνεία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.9 Έστω $\Sigma \subseteq P$. Το Σ λέγεται **πεπερασμένα ικανοποιήσιμο** αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο. Το Σ λέγεται **μέγιστο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο** αν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο και κάθε Σ', τέτοιο ώστε $\Sigma \subset \Sigma'$, δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

Ουσιαστικά, ένα μέγιστο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ περιέχει το σύνολο των λογικών συμπερασμάτων του. Με βάση μια δεδομένη εκτίμηση, δεν υπάρχει πρόταση της L που να αληθεύει για την εκτίμηση αυτή και να μην ανήκει στο Σ. Το γεγονός αυτό καθίσταται σαφές από την επόμενη πρόταση, ενώ τα τρία λήμματα που ακολουθούν, εποπτικά, προσφέρουν ένα τρόπο «κατασκευής» μεγίστων ικανοποιήσιμων συνόλων με βάση την αλήθεια των προτάσεων που τα απαρτίζουν.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.10 Ένα πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ είναι μέγιστο αν και μόνο αν για κάθε $\varphi \in P$ ισχύει $\varphi \in \Sigma$ ή $\neg\varphi \in \Sigma$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Rightarrow$ Θα αποδείξουμε την πρόταση με χρήση της εις άτοπο απαγωγής.

Υποθέτουμε ότι το σύνολο Σ είναι μέγιστο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο και ότι υπάρχει $\varphi \in P$ τέτοια ώστε $\varphi \notin \Sigma$ και $\neg\varphi \notin \Sigma$.

Αφού το Σ είναι μέγιστο, τότε το $\Sigma \cup \{\varphi\}$ δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

Επομένως υπάρχει πεπερασμένο σύνολο A, τέτοιο ώστε $A \subseteq \Sigma$, με το $A \cup \{\varphi\}$ να μην είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

Για την εκτίμηση v, που ικανοποιεί το Σ, έχουμε $v \vDash \Sigma \Longrightarrow v \vDash A$. Αφού όμως το $A \cup \{\varphi\}$ δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο, έχουμε $v \nvDash A \cup \{\varphi\}$.

Επομένως $v \nvDash \varphi \Longrightarrow v \vDash \neg\varphi$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $v \vDash A \cup \{\neg\varphi\}$.

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο, κάτι όμως που αντιβαίνει στην αρχική υπόθεση ότι το Σ είναι μέγιστο.

$\Leftarrow$ Θα αποδείξουμε την πρόταση με χρήση της εις άτοπο απαγωγής.

Έχουμε ότι το σύνολο Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο και ότι για κάθε $\varphi \in P$ ισχύει $\varphi \in \Sigma$ ή $\neg\varphi \in \Sigma$. Υποθέτουμε ότι το Σ δεν είναι μέγιστο.

Εφ' όσον το Σ δεν είναι μέγιστο, υπάρχει $\varphi \notin \Sigma$ τέτοιο ώστε το $\Sigma \cup \{\varphi\}$ να είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

Τότε πρέπει $\neg\varphi \notin \Sigma$, διότι αν δεχτούμε ότι $\neg\varphi \in \Sigma$, τότε το πεπερασμένο υποσύνολο $\{\varphi, \neg\varphi\}$ του $\Sigma \cup \{\varphi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Έχουμε αποδείξει ότι $\varphi \notin \Sigma$ και $\neg\varphi \notin \Sigma$, που αντιβαίνει στην αρχική υπόθεση ότι για κάθε $\varphi \in P$, $\varphi \in \Sigma$ ή $\neg\varphi \in \Sigma$

Επομένως το Σ είναι μέγιστο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο. ■

ΛΗΜΜΑ 2.11 Για κάθε μέγιστο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ ισχύουν οι ισοδυναμίες

(a) $\varphi \in \Sigma \Leftrightarrow \neg\varphi \notin \Sigma$
(b) $(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma$ και $\psi \in \Sigma$
(c) $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma$ ή $\psi \in \Sigma$
(d) $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Sigma \Leftrightarrow \varphi \notin \Sigma$ ή $\psi \in \Sigma$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(a)

$\Rightarrow$ Έστω $\varphi \in \Sigma$. Αν θεωρήσουμε ότι $\neg\varphi \in \Sigma$, τότε έχουμε για το μη-ικανοποιήσιμο σύνολο $\{\varphi, \neg\varphi\}$ ότι $\{\varphi, \neg\varphi\} \in \Sigma$. Αυτό είναι άτοπο, καθώς το Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

$\Leftarrow$ Έστω $\neg\varphi \notin \Sigma$. Το Σ είναι μέγιστο, άρα $\varphi \in \Sigma$.

(b)

$\Rightarrow$ Έστω $(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma$. Αν θεωρήσουμε ότι $\neg\varphi \in \Sigma$, τότε έχουμε για το μη-ικανοποιήσιμο σύνολο $\{(\varphi \wedge \psi), \neg\varphi\}$ ότι $\{(\varphi \wedge \psi), \neg\varphi\} \in \Sigma$. Αυτό είναι άτοπο καθώς το Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Επομένως $\neg\varphi \notin \Sigma$ και αφού το Σ είναι μέγιστο, έχουμε ότι $\varphi \in \Sigma$. Αντίστοιχα έχουμε και ότι $\psi \in \Sigma$.

$\Leftarrow$ Έστω $\varphi \in \Sigma$ και $\psi \in \Sigma$. Αν θεωρήσουμε ότι $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma$, τότε έχουμε για το μη-ικανοποιήσιμο σύνολο $\{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi, \psi\}$ ότι $\{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi, \psi\} \in \Sigma$. Αυτό είναι άτοπο καθώς το Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Επομένως $\neg(\varphi \wedge \psi) \notin \Sigma$ και αφού το Σ είναι μέγιστο, ισχύει $(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma$.

(c)

$\Rightarrow$ Έστω $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma$. Αν θεωρήσουμε ότι $\neg\varphi \in \Sigma$ και $\neg\psi \in \Sigma$, τότε έχουμε για το μη-ικανοποιήσιμο σύνολο $\{(\varphi \vee \psi), \neg\varphi, \neg\psi\}$ ότι $\{(\varphi \vee \psi), \neg\varphi, \neg\psi\} \in \Sigma$. Αυτό είναι άτοπο καθώς το Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Επομένως $\neg\varphi \notin \Sigma$ ή $\neg\psi \notin \Sigma$ και αφού το Σ είναι μέγιστο, $\varphi \in \Sigma$ ή $\psi \in \Sigma$.

$\Leftarrow$ Έστω ότι $\varphi \in \Sigma$ ή $\psi \in \Sigma$. Αν θεωρήσουμε ότι $\neg(\varphi \vee \psi) \in \Sigma$, τότε έχουμε ότι $\{\neg(\varphi \vee \psi), \varphi\} \in \Sigma$ ή $\{\neg(\varphi \vee \psi), \psi\} \in \Sigma$. Τα σύνολα αυτά είναι μη-ικανοποιήσιμα, άρα είναι άτοπο ένα εκ των δύο να ανήκει στο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ. Επομένως $\neg(\varphi \vee \psi) \notin \Sigma$ και αφού το Σ είναι μέγιστο, $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma$.

(d)

$\Rightarrow$ Έστω $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Sigma$. Αν θεωρήσουμε ότι $\varphi \in \Sigma$ και $\neg\psi \in \Sigma$, τότε έχουμε για το μη-ικανοποιήσιμο σύνολο $\{(\varphi \rightarrow \psi), \varphi, \neg\psi\}$ ότι $\{(\varphi \rightarrow \psi), \varphi, \neg\psi\} \in \Sigma$. Αυτό είναι άτοπο καθώς το Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Επομένως $\varphi \notin \Sigma$ ή $\neg\psi \notin \Sigma$ και αφού το Σ είναι μέγιστο, $\varphi \notin \Sigma$ ή $\psi \in \Sigma$.

$\Leftarrow$ Έστω ότι $\varphi \notin \Sigma$ ή $\psi \in \Sigma$. Αφού το Σ είναι μέγιστο, έχουμε $\neg\varphi \in \Sigma$ ή $\psi \in \Sigma$. Αν θεωρήσουμε ότι $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \in \Sigma$, τότε έχουμε $\{\neg(\varphi \rightarrow \psi), \neg\varphi\} \in \Sigma$ ή $\{\neg(\varphi \rightarrow \psi), \psi\} \in \Sigma$. Τα σύνολα αυτά είναι μη-ικανοποιήσιμα, άρα είναι άτοπο ένα εκ των δύο να ανήκει στο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ. Επομένως $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \notin \Sigma$ και αφού το Σ είναι μέγιστο, $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Sigma$. ■

ΛΗΜΜΑ LINDENBAUM 2.12 Κάθε πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ μπορεί να επεκταθεί σε ένα μέγιστο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ', με $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών είναι αριθμήσιμο, καθώς αυτές αποτελούν πεπερασμένες ακολουθίες των στοιχείων ενός αριθμήσιμου συνόλου. Έστω λοιπόν μια αρίθμηση $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$

Ορίζουμε επαγωγικά την ακολουθία συνόλων $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots$

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{αν } \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{αν δεν είναι} \end{cases}$$

Με χρήση της αριθμητικής επαγωγής είναι προφανές ότι κάθε Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο $\Sigma' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$. Το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο, καθώς για κάθε υποσύνολό του $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\kappa\}$ υπάρχει κάποιο πεπερασμένο $\Sigma_n \subseteq \Sigma'$ αρκετά μεγάλο ώστε $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\kappa\} \subseteq \Sigma_n$.

Αφού το Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο, τότε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ' είναι ικανοποιήσιμο. Επίσης το Σ' είναι μέγιστο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο, αφού με βάση τον ορισμό του, για κάθε $\varphi \in P$, $\varphi \in \Sigma$ ή $\neg\varphi \in \Sigma$. ■

ΛΗΜΜΑ 2.13 Αν v μια εκτίμηση, τότε το σύνολο $\Sigma_v = \{\varphi : v \vDash \varphi\}$ είναι μέγιστο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο. Αντίστροφα, αν Σ είναι μέγιστο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια εκτίμηση $v(p_i) = 1 \Leftrightarrow p_i \in \Sigma$ με $\Sigma = \Sigma_v$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Rightarrow$ Αν v μια εκτίμηση, τότε το Σ_v είναι ικανοποιήσιμο, άρα και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Επίσης είναι μέγιστο, καθώς αν $\varphi \notin \Sigma_v$, τότε $v \nvDash \varphi$, επομένως $v \vDash \neg\varphi$, άρα $\neg\varphi \in \Sigma$.

⇐ Αν το Σ είναι μέγιστο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο, μπορούμε να ορίσουμε την εκτίμηση $v : P_0 \rightarrow \{0,1\}$ με βάση τη σχέση $v(p_i) = 1 \Leftrightarrow p_i \in \Sigma$. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε, καθώς στις ατομικές προτάσεις, μπορούμε να αποδώσουμε αυθαίρετα τιμές αλήθειας. Για όλες τις ατομικές προτάσεις ισχύει $v \vDash p_i$, λόγω του ορισμού της v. Λόγω του επαγωγικού τρόπου δημιουργίας προτάσεων και των σχέσεων του λήμματος 2.11, για κάθε πρόταση $\varphi \in \Sigma$, ισχύει $v \vDash \varphi$. Άρα $\Sigma = \Sigma_v$. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΜΠΑΓΕΙΑΣ 2.14 Το σύνολο $\Sigma \subseteq P$ είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

⇒ Έστω ότι το Σ είναι ικανοποιήσιμο. Είναι προφανές από τον ορισμό ότι είναι και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

⇐ Έστω ότι το Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Βάσει του λήμματος 2.12, μπορούμε να επεκτείνουμε το Σ σε ένα μέγιστο πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ'. Βάσει του λήμματος 2.13, μπορούμε να ορίσουμε μια εκτίμηση v, τέτοια ώστε $\Sigma' = \{\varphi : v \vDash \varphi\}$. Άρα $v \vDash \Sigma$, δηλαδή το Σ είναι ικανοποιήσιμο. ■

Τα θεωρήματα που έχουμε εξετάσει μέχρι στιγμής αφορούν την ύπαρξη μοντέλων που ικανοποιούν συγκεκριμένα σύνολα προτάσεων. Σε γενικές γραμμές, η έννοια της απόδειξης στον προτασιακό λογισμό είναι τετριμμένη. Μια πρόταση του προτασιακού λογισμού αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος ατομικών προτάσεων. Επομένως, για να ελέγξουμε αν η πρόταση αυτή αποτελεί λογικό συμπέρασμα ενός συνόλου προτάσεων, αρκεί να ελέγξουμε την τιμή αλήθειας της πρότασης για ένα πεπερασμένο πλήθος εκτιμήσεων. Η τιμή αλήθειας των ατομικών προτάσεων που δεν εμφανίζονται στην πρόταση δεν επηρεάζει την αληθοτιμή της. Αν, για παράδειγμα, μια πρόταση μπορεί να αναλυθεί σε 5 ατομικές προτάσεις, τότε αρκεί να ελέγξουμε ποιες από τις 32 διαφορετικές εκτιμήσεις που προκύπτουν αποτελούν μοντέλα του συνόλου και στη συνέχεια αν τα μοντέλα αυτά ικανοποιούν την πρόταση. Ωστόσο, η μαθηματική πρακτική, δεν έγκειται στον έλεγχο της αλήθειας μιας πρότασης με βάση την εκτίμηση της αλήθειας των ατομικών προτάσεων, αλλά στην προσπάθεια απόδειξής της πρότασης. Για να γίνει αυτό είναι αναγκαίο ένα σύνολο αξιωμάτων τα οποία ισχύουν για κάθε δυνατή εκτίμηση, δηλαδή αποτελούν ταυτολογίες. Το καθιερωμένο αξιωματικό σύστημα του προτασιακού λογισμού περιλαμβάνει τρία αξιωματικά σχήματα και έναν κανόνα παραγωγής.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

$(\Pi 1)$ $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

$(\Pi 2)$ $\big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\big)$

$(\Pi 3)$ $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \big((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi\big)$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

$(Modus\ Ponens)$ Από τις φ και $\varphi \rightarrow \psi$ παράγεται η ψ

Τα αξιώματα αυτά φαίνονται αρκετά πολύπλοκα και ακόμη και απολύτως προφανείς προτάσεις είναι σχετικά δύσκολο να αποδειχτούν με τη χρήση τους. Το ζητούμενο, ωστόσο, δεν είναι η ευκολία απόδειξης ορισμένων στοιχειωδών σχέσεων, αλλά η ύπαρξη ενός μικρού, συνεπούς, ανεξάρτητου και πλήρους συνόλου αξιωμάτων. Τα αξιώματα αυτά, αν και δεν περιγράφουν προφανείς αλήθειες, είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι αποτελούν ταυτολογίες και, όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι συνεπή και ανεξάρτητα μεταξύ τους. Επίσης, οποιαδήποτε άλλη ταυτολογία του προτασιακού λογισμού μπορεί να αποδειχθεί με βάση αυτά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η προφανής πρόταση $\varphi \to \varphi$. Η απόδειξη της έχει ως εξής.

- Στο $(\Pi 2)$ θέτουμε $\varphi = \varphi$, $\psi = \varphi \to \varphi$ και $\chi = \varphi$ και έχουμε
  $\Big(\varphi \to \big((\varphi \to \varphi) \to \varphi\big)\Big) \to \Big(\big(\varphi \to (\varphi \to \varphi)\big) \to (\varphi \to \varphi)\Big)$ [1]
- Στο $(\Pi 1)$ θέτουμε $\varphi = \varphi$ και $\psi = \varphi \to \varphi$ και έχουμε
  $\varphi \to \big((\varphi \to \varphi) \to \varphi\big)$ [2]
- Εφαρμόζοντας το (MP) στις σχέσεις [1] και [2] παίρνουμε
  $\big(\varphi \to (\varphi \to \varphi)\big) \to (\varphi \to \varphi)$ [3]
- Στο $(\Pi 1)$ θέτουμε $\varphi = \varphi$ και $\psi = \varphi$ και έχουμε
  $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ [4]
- Εφαρμόζοντας το (MP) στις σχέσεις [3] και [4] παίρνουμε
  $\varphi \to \varphi$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.15 Έστω $\Sigma \subseteq P$ και $\varphi \in P$. **Απόδειξη** της φ από το Σ λέγεται μια πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ τέτοια ώστε $\varphi_n = \varphi$ και κάθε φ_i να είναι

(a) είτε αξίωμα
(b) είτε πρόταση του Σ
(c) είτε να παράγεται από το (MP) από δυο προηγούμενες προτάσεις της ακολουθίας, δηλαδή να υπάρχουν $j, k < i$ τέτοια ώστε $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_i$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.16 Έστω $\Sigma \subseteq P$ και $\varphi \in P$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

(a) Αν $T \subseteq \Sigma$ και $T \vdash \varphi$, τότε $\Sigma \vdash \varphi$.
(b) Αν $\Sigma \vdash \varphi$, τότε υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ τέτοιο ώστε $\Sigma_0 \vdash \varphi$.
(c) Αν $\Sigma \vdash \varphi$ και $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$, τότε $\Sigma \vdash \psi$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(a) Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ η απόδειξη της φ από το T. Αφού κάθε πρόταση που ανήκει στο T ανήκει και στο Σ, έπεται ότι η $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ είναι απόδειξη της φ από το Σ.

(b) Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ η απόδειξη της φ από το Σ. Ορίζουμε $\Sigma_0 = \Sigma \cap \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ και έχουμε ότι η $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ είναι απόδειξη της φ από το Σ_0.

(c) Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ η απόδειξη της φ από το Σ και $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ η απόδειξη της $\varphi \to \psi$ από το Σ. Τότε η $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ είναι η απόδειξη της ψ από το Σ. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.17 Η φ είναι **λογική συνέπεια** του Σ αν υπάρχει μια απόδειξη της φ από το Σ. Η σχέση αυτή συμβολίζεται ως $\Sigma \vdash \varphi$. Αν $\Sigma = \{\psi\}$, τότε έχουμε $\psi \vdash \varphi$. Αν $\Sigma = \emptyset$, τότε η φ αποδεικνύεται μόνο από τα αξιώματα. Στην περίπτωση αυτή η φ είναι **θεώρημα** και συμβολίζεται ως $\vdash \varphi$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ 2.18 Για κάθε $\Sigma \subseteq P$ και $\varphi, \psi \in P$ ισχύει $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Rightarrow$ Έστω $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Τότε η απόδειξη της ψ είναι μια ακολουθία $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ με $\varphi_n \equiv \psi$.

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Για τη φ_1 διακρίνουμε δύο ενδεχόμενα.

(a) Η φ_1 είναι λογικό αξίωμα ή $\varphi_1 \in \Sigma$. Τότε $\Sigma \vdash \varphi_1$. Από το $(\Pi 1)$ έχουμε $\Sigma \vdash \varphi_1 \to (\varphi \to \varphi_1)$. Με εφαρμογή του (MP) έχουμε $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_1$.

(b) Ισχύει $\varphi_1 \equiv \varphi$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$, άρα και πάλι $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_1$.

Έχουμε, λοιπόν αποδείξει ότι ισχύει για $i = 1$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_k$ για $k < i$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τη φ_i.

(a) Το φ_i εμπίπτει σε μία από τις ανωτέρω περιπτώσεις, οπότε και δουλεύουμε όπως πριν.

(b) Θα υπάρχουν $j, m < i$, τέτοια ώστε $\varphi_j = (\varphi_m \to \varphi_i)$.

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_j$ [1] και $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_m$ [2].

Αφού $\varphi_j = (\varphi_m \to \varphi_i)$, η σχέση [1] γίνεται $\Sigma \vdash \varphi \to (\varphi_m \to \varphi_i)$ και από το $(\Pi 2)$ γίνεται $\Sigma \vdash (\varphi \to \varphi_m) \to (\varphi \to \varphi_i)$ [3].

Από τις σχέσεις [1] και [3], με εφαρμογή του (MP), καταλήγουμε ότι $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Επομένως $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

$\Leftarrow$ Έστω $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Αν θεωρήσουμε μια απόδειξη $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ της $\varphi \to \psi$ από το Σ, τότε έχουμε από τον ορισμό της απόδειξης ότι $\varphi_n = \varphi \to \psi$.

Από τις φ_n και φ, με εφαρμογή του (MP), παίρνουμε την ψ.

Άρα έχουμε μια απόδειξη της ψ από το $\Sigma \cup \{\varphi\}$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.19 Ένα σύνολο Σ λέγεται **συνεπές** αν δεν υπάρχει πρόταση φ τέτοια ώστε $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.20 Αν Σ μη-συνεπές, τότε $\Sigma \vdash \psi$ για κάθε $\psi \in P$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$.

Είναι άμεσο ότι ισχύουν οι σχέσεις $\Sigma \vdash \varphi$ [1] και $\Sigma \vdash \neg\varphi$ [2].

Εφαρμόζουμε το θεώρημα παραγωγής και έχουμε διαδοχικά $\varphi \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \vdash \neg\neg\varphi \Rightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \Rightarrow \Sigma \cup \{\varphi, \neg\psi\} \vdash \neg\neg\varphi \Rightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi \to \neg\neg\varphi \Rightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \psi$ και καταλήγουμε στη σχέση $\Sigma \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ [3].
Εφαρμόζοντας το (MP) στις [1] και [3] παίρνουμε τη σχέση $\Sigma \vdash \neg\varphi \to \psi$ [4].
Εφαρμόζοντάς το (MP) στις [2] και [4] έχουμε $\Sigma \vdash \psi$. ■

Παρατηρούμε ότι ένα μη-συνεπές σύνολο προτάσεων είναι σε θέση να αποδείξει κάθε πρόταση της L, ανεξαρτήτως της τιμής αληθείας της. Είναι προφανές ότι ένα σύνολο προτάσεων που αποδεικνύει ψευδείς προτάσεις δεν είναι δυνατόν να αποτελεί αντικείμενο μαθηματικής μελέτης. Για αυτό το λόγο και η συνέπεια ενός συστήματος αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για να έχει νόημα η μαθηματική πρακτική. Το θεώρημα ορθότητας του προτασιακού λογισμού μας διαβεβαιώνει ότι οι προτάσεις που αποδεικνύονται από τα αξιώματα που έχουμε ήδη ορίσει είναι κατ' ανάγκη αληθείς.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΡΘΟΤΗΤΑΣ 2.21 Αν $\Sigma \vdash \varphi$, τότε $\Sigma \vDash \varphi$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\Sigma \vdash \varphi$.
Μπορούμε να θεωρήσουμε μια ακολουθία προτάσεων $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ως απόδειξη της φ από το Σ.
Θα δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $i = 1, \dots, n$ ισχύει $\Sigma \vDash \varphi_i$.
Η φ_1 είτε είναι αξίωμα, είτε ανήκει στο Σ. Και στις δύο περιπτώσεις $\Sigma \vDash \varphi_1$.
Υποθέτουμε ότι $\Sigma \vDash \varphi_k$ για κάθε $k < i$. Αν η φ_i είναι αξίωμα ή πρόταση του Σ, τότε $\Sigma \vDash \varphi_i$.
Σε διαφορετική περίπτωση υπάρχουν $j, m < i$ τέτοια ώστε $\varphi_j \vDash \varphi_m \to \varphi_i$.
Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $\Sigma \vDash \varphi_m$ και $\Sigma \vDash \varphi_m \to \varphi_i$, άρα $\Sigma \vDash \varphi_i$. ■

Το θεώρημα της ορθότητας μας δείχνει ότι κάθε πρόταση που αποδεικνύουμε στα πλαίσια του προτασιακού λογισμού είναι κατ' ανάγκην αληθής. Επίσης μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα αξιώματα του προτασιακού λογισμού είναι συνεπή. Αν δεν ήταν συνεπή, θα υπήρχε πρόταση φ τέτοια ώστε $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Λόγω του θεωρήματος ορθότητας θα έπρεπε $\vDash \varphi \wedge \neg\varphi$, το οποίο αποτελεί αντίφαση.

Τα αξιώματα του προτασιακού λογισμού είναι επίσης **ανεξάρτητα** μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει κάποιο αξίωμα το οποίο να προκύπτει από τα υπόλοιπα. Για να αποδειχθεί αυτό πρέπει να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο στο οποίο να μην αληθεύει ένα αξίωμα, ενώ αληθεύουν όλα τα υπόλοιπα. Στα κλασσικά μοντέλα της λογικής είναι προφανές ότι δε γίνεται να κατασκευάσουμε τέτοιο μοντέλο, καθώς και τα τρία αξιώματα, αποτελούν ταυτολογίες.

Για να δείξουμε ότι ένα αξίωμα είναι ανεξάρτητο από τα άλλα δύο, χρειαζόμαστε «εξωτικά» μοντέλα, κατασκευασμένα ακριβώς για αυτό το σκοπό. Για να δείξουμε, για παράδειγμα, ότι το $(\Pi 1)$ είναι ανεξάρτητο από τα $(\Pi 2)$ και $(\Pi 3)$

ορίζουμε μια τρίτιμη εκτίμηση $v : P_0 \to \{0,1,2\}$, με την προϋπόθεση τα $(\Pi 2)$ και $(\Pi 3)$ να παίρνουν μια σταθερή τιμή, έστω 0. Θεωρούμε ότι τα $(\Pi 2)$ και $(\Pi 3)$, λαμβάνοντας για κάθε απονομή αλήθειας των ατομικών τους προτάσεων την τιμή 0, αποτελούν ταυτολογίες. Επίσης θέλουμε ο (MP) να οδηγεί από ταυτολογίες σε ταυτολογίες και το $(\Pi 1)$ να μην είναι ταυτολογία, δηλαδή για την εκτίμηση αυτή να ισχύει $v(\Pi 1) \not\equiv 0$. Μια τέτοιου είδους εκτίμηση φαίνεται στους παρακάτω πίνακες αληθείας.

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	1
2	0

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	0
0	1	2
0	2	2
1	0	2
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

- Για το (MP)
  Αν $v(\varphi) = 0$ και $v(\varphi \to \psi) = 0$, τότε και $v(\psi) = 0$.
  Επομένως, ισχύει ο (MP).

- Για το $(\Pi 1)$
  Αν $v(\varphi) = 1$ και $v(\psi) = 2$, τότε $v(\psi \to \varphi) = 0$. Επομένως $v\big(\varphi \to (\psi \to \varphi)\big) = 2$. Άρα το $(\Pi 1)$ δεν είναι ταυτολογία, καθώς δεν λαμβάνει υποχρεωτικά την τιμή "0".

- Για το $(\Pi 2)$
  Από τον ανωτέρω αληθοπίνακα φαίνεται ότι $v\big(\varphi \to (\psi \to \chi)\big) = 0$ ή 2.
  Αν είναι 2, τότε $v\Big(\big(\varphi \to (\psi \to \chi)\big) \to \big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)\big)\Big) = 0$.
  Αν είναι 0, πρέπει να εξετάσουμε την τιμή που μπορεί να πάρει η πρόταση $\big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)\big)$.
  Βλέπουμε ότι ισχύει $v\big(\varphi \to (\psi \to \chi)\big) = 0$ στις εξής περιπτώσεις (a) αν $v(\varphi) = 2$ ή (b) αν $v(\varphi) = 0$ και $v(\psi \to \chi) = 0$ ή (c) αν $v(\varphi) = 1$ και $v(\psi \to \chi) = 2$.
  Αν $v(\varphi) = 2$, τότε $v(\varphi \to \psi) = 0$, $v(\varphi \to \chi) = 0$, άρα και $v\Big(\big(\varphi \to (\psi \to \chi)\big) \to \big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)\big)\Big) = 0$.
  Αν $v(\varphi) = 0$ και $v(\psi \to \chi) = 0$, τότε είτε $v(\psi) = 0$ και $v(\chi) = 0$, είτε $v(\psi) = 2$. Αν $v(\varphi) = 0$, $v(\psi) = 0$ και $v(\chi) = 0$, έχουμε $v\Big(\big(\varphi \to (\psi \to \chi)\big) \to \big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)\big)\Big) = 0$. Αν $v(\varphi) = 0$ και $v(\psi) = 2$, τότε $v(\psi \to \chi) = 0$,

$v(\varphi \to \psi) = 2$, επομένως $v(\varphi \to (\varphi \to \psi)) = 0$ και $v((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) = 0$, άρα $v\Big(\big(\varphi \to (\psi \to \chi)\big) \to \big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)\big)\Big) = 0$.

Τέλος αν $v(\varphi) = 1$ και $v(\psi \to \chi) = 2$, βλέπουμε ότι $v(\psi) \neq 2$. Επομένως έχουμε $v(\varphi \to \psi) = 2$, άρα $v((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) = 0$. Καταλήγουμε και πάλι ότι $v\Big(\big(\varphi \to (\psi \to \chi)\big) \to \big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)\big)\Big) = 0$.

Επομένως, για κάθε απονομή αλήθειας στα φ, ψ και χ, το $(\Pi 2)$ παραμένει αληθές, επομένως είναι ταυτολογία.

- Για το $(\Pi 3)$

  Από τον ανωτέρω αληθοπίνακα φαίνεται ότι $v((\neg\varphi \to \neg\psi)) = 0$ ή 2.

  Αν είναι 2, τότε $v\Big((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \big((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi\big)\Big) = 0$.

  Αν είναι 0, δεδομένου ότι τα $\neg\varphi$ και $\neg\psi$, δε γίνεται να πάρουν την τιμή 2, πρέπει $v(\neg\varphi) = 0$ και $v(\neg\psi) = 0$.

  Επομένως $v(\varphi) = 2$ και $v(\psi) = 2$, δηλαδή $v(\neg\varphi \to \psi) = 2$, άρα $v((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi) = 0$.

  Καταλήγουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση, $v\Big((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \big((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi\big)\Big) = 0$.

  Επομένως, για κάθε απονομή αλήθειας στα φ και ψ, το $(\Pi 3)$ παραμένει αληθές, επομένως είναι ταυτολογία.

Με βάση αυτά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\{\Pi 2, \Pi 3\} \nvdash \Pi 1$. Με παρόμοια μοντέλα, μπορούμε να αποδείξουμε την ανεξαρτησία και των υπολοίπων αξιωμάτων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.22 Έστω $\Sigma \subseteq P$ και $\varphi \in P$. Τότε $\Sigma \nvdash \varphi$ αν και μόνο αν το $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ είναι συνεπές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Rightarrow$ Έστω $\Sigma \nvdash \varphi$.

Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο ότι το $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ δεν είναι συνεπές.

Εφ' όσον δεν είναι συνεπές έχει τη δυνατότητα να αποδείξει κάθε πρόταση.

Επομένως $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$.

Σύμφωνα με το θεώρημα παραγωγής, έχουμε $\Sigma \vdash \neg\varphi \to \varphi$.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\neg\varphi \to \varphi \vdash \varphi$. Έχουμε διαδοχικά

- [1] $\neg\varphi \to \varphi$
- [2] $\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$
- [3] $(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \big((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi\big)$ από το αξίωμα $(\Pi 3)$
- [4] $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi$ από (MP) στις [2] και [3]
- [5] $\neg\varphi \to \neg\varphi$
- [6] φ από (MP) στις [4] και [5]

Επομένως $\Sigma \vdash \varphi$, που είναι άτοπο, καθώς αντιτίθεται στην αρχική μας υπόθεση.

Άρα συμπεραίνουμε ότι αν $\Sigma \nvdash \varphi$, τότε το $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ είναι συνεπές.

$\Leftarrow$ Έστω $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ συνεπές.

Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\Sigma \vdash \varphi$.

Τότε έχουμε $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, που δείχνει ότι το σύνολο $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ είναι μη-συνεπές.

Αυτό είναι άτοπο, καθώς αντιτίθεται στην αρχική μας υπόθεση.

Άρα συμπεραίνουμε ότι αν το $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ είναι συνεπές, τότε $\Sigma \nvdash \varphi$ ∎

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.23 Ένα σύνολο προτάσεων $\Sigma \subseteq P$ λέγεται **πλήρες** αν για κάθε $\varphi \in P$, $\Sigma \vdash \varphi$ ή $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

ΛΗΜΜΑ 2.24 Κάθε συνεπές σύνολο προτάσεων, μπορεί να επεκταθεί σε ένα πλήρες συνεπές σύνολο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το σύνολο των προτάσεων μιας γλώσσας είναι αριθμήσιμο. Επομένως μπορούμε να το ορίσουμε ως $P = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$.

Αν Σ ένα συνεπές σύνολο, τότε ορίζουμε επαγωγικά την ακολουθία συνόλων $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots$

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} & \text{αν } \Sigma_n \nvdash \neg\varphi_{n+1} \\ \Sigma_n & \text{αν } \Sigma_n \vdash \neg\varphi_{n+1} \end{cases}$$

Ορίζουμε το σύνολο $\Sigma' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$. Λόγω του θεωρήματος ορθότητας, κάθε ένα από τα σύνολα Σ_n είναι συνεπές, άρα και το Σ' είναι συνεπές, καθώς αν δεν ήταν θα έπρεπε κάποιο από τα Σ_n να περιέχει κάποια αντίφαση.

Τέλος, λόγω του ορισμού του Σ', για κάθε $\varphi \in P$, είτε $\Sigma' \vdash \neg\varphi$ είτε $\Sigma' \nvdash \neg\varphi$. Αν $\Sigma' \nvdash \neg\varphi$, τότε έχουμε ότι $\varphi \in \Sigma'$, άρα $\Sigma' \vdash \varphi$.

Άρα το Σ' είναι πλήρες και συνεπές σύνολο. ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 2.25 Αν $\Sigma \vDash \varphi$, τότε $\Sigma \vdash \varphi$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν το Σ δεν είναι συνεπές, είναι σε θέση να αποδείξει κάθε πρόταση. Επομένως, έχει νόημα να εξετάσουμε την περίπτωση που το Σ είναι συνεπές.

Αρχικά επεκτείνουμε το Σ σε ένα πλήρες και συνεπές σύνολο. Σ'.

Για το σύνολο αυτό, ορίζουμε μια εκτίμηση $v : P_0 \to \{0,1\}$ με βάση τη σχέση $v(p_i) = 1 \Leftrightarrow \Sigma' \vdash p_i$.

Λόγω του επαγωγικού τρόπου δημιουργίας των προτάσεων, η εκτίμηση αυτή ικανοποιεί το Σ', άρα και το Σ.

Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $\Sigma \vDash \varphi$ και $\Sigma \nvdash \varphi$.

Τότε, από την πρόταση 2.22, το $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ θα είναι συνεπές, άρα, με βάση τα προηγούμενα, ικανοποιήσιμο.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει εκτίμηση v τέτοια ώστε $v \vDash \Sigma$ και $v \vDash \neg\varphi$.

Αυτό όμως σημαίνει ότι $\Sigma \nvDash \varphi$, που αντιτίθεται στην αρχική μας υπόθεση.

Επομένως, αν $\Sigma \vDash \varphi$, τότε $\Sigma \vdash \varphi$. ∎

Στη απόδειξη του θεωρήματος επικαλούμαστε την πρόταση 2.22, που για να αποδειχθεί κάνει χρήση των αξιωμάτων ($Π3$) και (MP), και του θεωρήματος παραγωγής, που αποδεικνύεται με χρήση των αξιωμάτων ($Π1$), ($Π2$) και (MP). Ουσιαστικά, λοιπόν, παρατηρούμε ότι τα αξιώματα του προτασιακού λογισμού αρκούν για να αποδειχθεί η πληρότητά του.

Το θεώρημα πληρότητας είναι εξαιρετικά σημαντικό, καθώς συνδέει τις έννοιες της αλήθειας και της αποδειξιμότητας στα πλαίσια μιας γλώσσας του προτασιακού λογισμού. Μας δείχνει ότι κάθε ταυτολογία του προτασιακού λογισμού είναι δυνατόν να αποδειχθεί και μας προσφέρει τη δυνατότητα να δημιουργήσουμε έναν αλγόριθμο, ο οποίος να προσφέρει την απόδειξη μιας τέτοιας πρότασης.

Σε κάθε περίπτωση, ωστόσο, τα αποτελέσματα του προτασιακού λογισμού είναι εξαιρετικά φτωχά. Το συντακτικό της γλώσσας είναι τέτοιο που οι έννοιες της αλήθειας και της αποδειξιμότητας μιας πρότασης καθορίζονται μόνο με βάση την εξωτερική σύνδεση των ατομικών προτάσεων που την απαρτίζουν. Επίσης, οι εκτιμήσεις που μπορούμε να ορίσουμε, έχουν ελάχιστο ενδιαφέρον, εφ' όσον δεν εκφράζουν κάποιου είδους εποπτεία για τα μαθηματικά αντικείμενα. Την ανάγκη αυτή καλύπτουν η πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική, που ορίζει τις προτάσεις με βάση τις σχέσεις μαθηματικών αντικειμένων, και οι πρωτοβάθμιες θεωρίες, που ορίζουν αξιώματα που διέπουν τις σχέσεις αυτές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΣ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1 Μια **πρωτοβάθμια γλώσσα** L του κατηγορηματικού λογισμού περιλαμβάνει

(a) τα λογικά σύμβολα
   i. των συνδέσμων $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
   ii. των ποσοδεικτών $\forall$ και $\exists$
   iii. της ισότητας $\approx$
   iv. των μεταβλητών $x_1, x_2, x_3, \dots$ (αριθμήσιμων σε πλήθος)
   v. των παρενθέσεων (,)

(b) τα μη-λογικά σύμβολα
   i. των σχέσεων P_i, $i \in I$
   ii. των συναρτήσεων f_j, $j \in J$
   iii. των σταθερών c_k, $k \in K$

Τα σύμβολο $\forall$ έχει την έννοια «για κάθε» και το σύμβολο $\exists$ την έννοια «υπάρχει», ενώ τα σύνολα δεικτών I, J, K μπορεί να είναι πεπερασμένα ή άπειρα, ανάλογα με τη γλώσσα που θέλουμε να ορίσουμε.

Τα λογικά σύμβολα είναι κοινά για όλες τις γλώσσες. Επομένως, για να ορίσουμε μονοσήμαντα μια πρωτοβάθμια γλώσσα αρκεί να ορίσουμε το σύνολο των μη-λογικών συμβόλων της. Ως εκ τούτου, μια πρωτοβάθμια γλώσσα έχει τη μορφή $L = \langle (P_i)_{i \in I}\ ;\ (f_j)_{j \in J}\ ;\ (c_k)_{k \in K} \rangle$.

Η γλώσσα της θεωρίας συνόλων είναι η $L = \langle \in \rangle$, με μοναδικό μη-λογικό σύμβολο τη σχέση του «ανήκει» και καθόλου συναρτήσεις και σταθερές.

Η γλώσσα της θεωρίας αριθμών είναι η $L = \langle +, *, s; 0 \rangle$. Τα $+$ και $*$ είναι οι διμελείς συναρτήσεις που ορίζουν την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, το s η μονομελής συνάρτηση που ορίζει τον επόμενο αριθμό και το 0 η μοναδική σταθερά της γλώσσας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2 Οι **όροι** της L ορίζονται επαγωγικά ως εξής

(a) οι μεταβλητές και οι σταθερές της L είναι όροι
(b) αν το f_j είναι n-μελής συνάρτηση και οι $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι όροι, τότε η έκφραση $f_j(t_1, t_2, \dots, t_n)$ είναι επίσης όρος

Το σύνολο των όρων που παράγεται από αυτούς τους δύο κανόνες συμβολίζεται με $T(L)$ και αποτελεί το σύνολο των όρων της L.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3 Οι **τύποι** της L ορίζονται επαγωγικά ως εξής

(a) αν οι t_1, t_2 είναι όροι, τότε η έκφραση $t_1 \approx t_2$ είναι τύπος
(b) αν η P_i είναι n-μελής σχέση και οι $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι όροι, τότε η έκφραση $P_i(t_1, t_2, \dots, t_n)$ είναι τύπος
(c) αν οι φ, ψ είναι τύποι, τότε και οι εκφράσεις $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ είναι τύποι
(d) αν ο φ είναι τύπος για κάθε μεταβλητή x_i, τότε και οι εκφράσεις $(\forall x_i)\varphi$ και $(\exists x_i)\varphi$ είναι τύποι

Το σύνολο των τύπων που παράγεται από τους παραπάνω κανόνες συμβολίζεται με $F(L)$ και είναι το σύνολο των τύπων της L.

Στους τύπους $(\forall x)\varphi$ και $(\exists x)\varphi$ ο τύπος φ λέγεται **εμβέλεια** του ποσοδείκτη. Αν η μεταβλητή x εμφανίζεται σε ένα τύπο ψ, λέγεται **δεσμευμένη** αν η εμφάνισή της έχει τη μορφή $(\forall x)$ ή $(\exists x)$ ή αν βρίσκεται στην εμβέλεια των ποσοδεικτών αυτών. Κάθε άλλη εμφάνιση της μεταβλητής αυτής μέσα στον τύπο λέγεται **ελεύθερη**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4 Ένας τύπος φ λέγεται **πρόταση** αν δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές.

Το σύνολο των προτάσεων της L συμβολίζεται με $S(L)$.

Οι όροι και οι τύποι μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας, ωστόσο, δεν έχουν ιδιαίτερο νόημα αν δεν αντιστοιχηθούν σε συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα. Με βάση ένα σύνολο μαθηματικών αντικειμένων A, μπορούμε να ορίσουμε μια δομή πάνω στη γλώσσα L.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.5 Αν A ένα σύνολο μαθηματικών αντικειμένων και $L = \langle (P_i)_{i\in I}\ ;\ (f_j)_{j\in J}\ ;\ (c_k)_{k\in K} \rangle$ μια πρωτοβάθμια γλώσσα, τότε ως ***L*-δομή** ορίζεται η ακολουθία $\mathfrak{A} = \langle A\ ;\ (P_i{}^{\mathfrak{A}})_{i\in I}\ ;\ (f_j{}^{\mathfrak{A}})_{j\in J}\ ;\ (c_k{}^{\mathfrak{A}})_{k\in K} \rangle$ με

(a) αν P_i σύμβολο n-μελούς σχέσης, τότε $P_i{}^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$
(b) αν f_j σύμβολο n-μελούς συνάρτησης, τότε $f_j{}^{\mathfrak{A}}: A^n \rightarrow A$
(c) αν c_k σύμβολο σταθεράς, τότε $c_k{}^{\mathfrak{A}} \in A$

Για να συμβολίσουμε μια L-δομή που ορίζεται με βάση ένα σύνολο, χρησιμοποιούμε τα αντίστοιχα γράμματα του γοτθικού αλφαβήτου. Για παράδειγμα, αν το σύνολο είναι το A, χρησιμοποιούμε το $\mathfrak{A}$ για να συμβολίσουμε την L-δομή, ενώ αν είναι το B, χρησιμοποιούμε το $\mathfrak{B}$.

Η απεικόνιση των στοιχείων της γλώσσας L στα στοιχεία του $\mathfrak{A}$ λέγεται ερμηνεία της γλώσσας. Για τη γλώσσα της θεωρίας αριθμών $L = \langle +, *, s; 0 \rangle$, η καθιερωμένη ερμηνεία της είναι η δομή $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; +^{\mathbb{N}}, *^{\mathbb{N}}, s^{\mathbb{N}}; 0^{\mathbb{N}} \rangle$.

Με βάση μια συγκεκριμένη L-δομή $\mathfrak{A}$, μπορούμε να ορίσουμε την αλήθεια μιας πρότασης φ. Η αλήθεια μιας πρότασης εξαρτάται πλέον από τις σχέσεις που συνδέουν τα στοιχεία του συνόλου A. Για αυτό το λόγο, ουσιαστικά, μια L-δομή $\mathfrak{A}$ ορίζει μια εκτίμηση για τις προτάσεις της γλώσσας.

Για μια L-δομή $\mathfrak{A}$ και μια πρόταση $\varphi \in S(L)$ ορίζουμε επαγωγικά τη σχέση $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ με βάση τους εξής κανόνες

(a) $\mathfrak{A} \vDash P_i(t_1, \dots, t_n) \;\Leftrightarrow\; < t_1{}^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n{}^{\mathfrak{A}} > \in P_i{}^{\mathfrak{A}}$
(b) $\mathfrak{A} \vDash t_1 \approx t_2 \;\Leftrightarrow\; t_1{}^{\mathfrak{A}} = t_2{}^{\mathfrak{A}}$
(c) $\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A} \nvDash \varphi$
(d) $\mathfrak{A} \vDash \varphi \wedge \psi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A} \vDash \varphi$ και $\mathfrak{A} \vDash \psi$
(e) $\mathfrak{A} \vDash \varphi \vee \psi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A} \vDash \varphi$ ή $\mathfrak{A} \vDash \psi$
(f) $\mathfrak{A} \vDash \varphi \rightarrow \psi \;\Leftrightarrow\; (\mathfrak{A} \vDash \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi)$
(g) $\mathfrak{A} \vDash \varphi \leftrightarrow \psi \;\Leftrightarrow\; (\mathfrak{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi)$
(h) $\mathfrak{A} \vDash (\forall x)\varphi(x) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A} \vDash \varphi(c)$ για κάθε $c \in L$
(i) $\mathfrak{A} \vDash (\exists x)\varphi(x) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A} \vDash \varphi(c)$ για κάποιο $c \in L$

Για τα (h) και (i) η κατεύθυνση $\Leftarrow$ ισχύει μόνο αν η μεταβλητή x δεν έχει ελεύθερη εμφάνιση μέσα στο $\varphi(c)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.6 Έστω $\varphi(x)$ ένας τύπος. Ο τύπος λέγεται **αληθής** στην L-δομή $\mathfrak{A}$ αν $\mathfrak{A} \vDash (\forall x)\ \varphi(x)$ και **ικανοποιήσιμος** στην L-δομή $\mathfrak{A}$ αν $\mathfrak{A} \vDash (\exists x)\ \varphi(x)$.

Για παράδειγμα, στη συνήθη αριθμητική, ο τύπος $x_1 = x_1$ είναι αληθής, καθώς ισχύει για κάθε $x_1 \in \mathbb{N}$. Ο τύπος $x_1 = 0$ είναι ικανοποιήσιμος, καθώς υπάρχει $x_1 \in \mathbb{N}$ για το οποίο να ισχύει. Από αυτούς τους τύπους μπορούμε να ορίσουμε τους τύπους $(\forall x_1)x_1 = x_1$ και $(\exists x_1)x_1 = 0$. Στους τύπους αυτούς δεν υπάρχει ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής, επομένως αποτελούν προτάσεις. Επίσης, είναι προφανές ότι η λογική τιμή των προτάσεων αυτών είναι αληθής.

Αν $\Sigma \subseteq F(L)$, η L-δομή $\mathfrak{A}$ λέγεται **μοντέλο** του Σ, αν $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ για κάθε $\varphi \in \Sigma$. Η σχέση αυτή συμβολίζεται ως $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$.

Αν $\Sigma \subseteq F(L)$ και $\varphi \in F(L)$, θα έχουμε $\Sigma \vDash \varphi$, αν για κάθε L-δομή $\mathfrak{A}$ τέτοια ώστε $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$, ισχύει $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. Ο τύπος φ αποτελεί, στην περίπτωση αυτή, **λογικό συμπέρασμα** του Σ.

Αξίζει να τονιστεί ότι $\Sigma \vDash \varphi$ μόνο στην περίπτωση που η φ είναι αληθής για κάθε μοντέλο του Σ.

Όπως έχουμε δει, η εκτίμηση μιας πρότασης του προτασιακού λογισμού προκύπτει από την εκτίμηση των ατομικών προτάσεων που την απαρτίζουν. Αντιθέτως η ερμηνεία σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα καθορίζεται από την επιλογή του συνόλου A, το οποίο ορίζει την L-δομή $\mathfrak{A}$. Ως εκ τούτου, τα πιθανά μοντέλα μιας πρωτοβάθμιας πρότασης είναι άπειρα και δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ένας αλγόριθμος που να ελέγχει αν μια πρόταση αποτελεί ταυτολογία. Για αυτό το λόγο η έννοια της απόδειξης στον πρωτοβάθμιο κατηγορηματικό λογισμό αποκτά σημαίνοντα ρόλο.

Το αξιωματικό σύστημα στο οποίο βασίζονται οι αποδείξεις αυτές αποτελείται από τα αξιώματα του προτασιακού λογισμού, δύο αξιώματα για τον καθολικό ποσοδείκτη, πέντε αξιώματα για το σύμβολο της ισότητας και έναν ακόμη κανόνα παραγωγής.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

$(\Pi 1)$ $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

$(\Pi 2)$ $\big(\varphi \to (\psi \to \chi)\big) \to \big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)\big)$

$(\Pi 3)$ $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to \big((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi\big)$

$(K1)$ $(\forall x)\varphi(x) \to \varphi(t)$ με t ελεύθερο όρο για τη x στον τύπο φ

$(K2)$ $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$ με x να μην είναι ελεύθερη μεταβλητή του φ

$(I1)$ $x \approx x$

$(I2)$ $x \approx y \to \ y \approx x$

$(I3)$ $x \approx y \wedge y \approx z \to \ x \approx z$

$(I4)$ $x_1 \approx y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \approx y_n \to t(x_1, \ldots, x_n) \approx t(y_1, \ldots, y_n)$ για κάθε $t \in T(L)$

$(I5)$ $x_1 \approx y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \approx y_n \to \big(\varphi(x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(y_1, \ldots, y_n)\big)$ για κάθε $\varphi \in F(L)$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

$(Modus\ Ponens)$ Από τους τύπους φ και $\varphi \to \psi$ παράγεται ο ψ

$(Κανόνας\ Γενίκευσης)$ Από τον τύπο φ παράγεται ο $(\forall x)\varphi$

Τα αξιώματα αυτά αποτελούν και πάλι ταυτολογίες, δηλαδή αληθεύουν για κάθε L-δομή $\mathfrak{A}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.7 Έστω $\Sigma \subseteq F(L)$ και $\varphi \in F(L)$. **Απόδειξη** του φ από το Σ λέγεται μια πεπερασμένη ακολουθία τύπων $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ τέτοια ώστε $\varphi_n = \varphi$ και για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ο φ_i να είναι

(a) είτε αξίωμα
(b) είτε τύπος του Σ
(c) είτε να παράγεται με τον (MP) από δύο προηγούμενους τύπους της ακολουθίας, δηλαδή να υπάρχουν $j, k < i$ τέτοια ώστε $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_i$
(d) είτε να παράγεται με τον $(K\Gamma)$ από ένα προηγούμενο τύπο της ακολουθίας, δηλαδή να υπάρχει $j < i$ τέτοια ώστε $\varphi_i = (\forall x)\varphi_j$, με την προϋπόθεση η μεταβλητή x να μην εμφανίζεται ελεύθερη στο Σ.

Αν ο τύπος φ αποδεικνύεται από το Σ, τότε λέγεται **λογική συνέπεια** του Σ και συμβολίζουμε τη σχέση ως $\Sigma \vdash \varphi$. Αν αποδεικνύεται μόνο από τα αξιώματα, τότε λέγεται **θεώρημα** και συμβολίζουμε τη σχέση ως $\vdash \varphi$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ 3.8 Για κάθε $\Sigma \subseteq F(L)$ και $\varphi, \psi \in F(L)$ ισχύει $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η απόδειξη είναι σχεδόν ταυτόσημη με την απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος του προτασιακού λογισμού. Η μοναδική διαφορά που υπάρχει είναι το ενδεχόμενο η απόδειξη της ψ να προκύπτει από τον $(K\Gamma)$. Για αυτό το λόγο και πρέπει στην κατεύθυνση "$\Rightarrow$" να εξετάσουμε την περίπτωση αυτή. Χάριν ευκολίας στην ανάγνωση, ωστόσο, η απόδειξη παρατίθεται ολοκληρωμένη.

$\Rightarrow$ Έστω $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Τότε η απόδειξη του ψ είναι μια ακολουθία $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, με $\varphi_n \equiv \psi$.

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Για τον φ_1 διακρίνουμε δύο ενδεχόμενα.

(a) Η φ_1 είναι λογικό αξίωμα ή $\varphi_1 \in \Sigma$. Τότε $\Sigma \vdash \varphi_1$. Από το $(\Pi 1)$ έχουμε $\Sigma \vdash \varphi_1 \to (\varphi \to \varphi_1)$. Με εφαρμογή του (MP) έχουμε $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_1$.

(b) Ισχύει $\varphi_1 \equiv \varphi$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$, άρα και πάλι $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_1$.

Έχουμε, λοιπόν αποδείξει ότι ισχύει για $i = 1$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_k$ για $k < i$.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για τον φ_i.

(a) Το φ_i εμπίπτει σε μία από τις ανωτέρω περιπτώσεις, οπότε και δουλεύουμε όπως πριν.

(b) Θα υπάρχουν $j, m < i$, τέτοια ώστε $\varphi_j = (\varphi_m \to \varphi_i)$.

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_j$ [1] και $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_m$ [2].

Αφού $\varphi_j = (\varphi_m \to \varphi_i)$, η σχέση [1] γίνεται $\Sigma \vdash \varphi \to (\varphi_m \to \varphi_i)$ και από το $(\Pi 2)$ γίνεται $\Sigma \vdash (\varphi \to \varphi_m) \to (\varphi \to \varphi_i)$ [3].

Από τις σχέσεις [1] και [3], με εφαρμογή του (MP) καταλήγουμε ότι $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

(c) Ισχύει $\varphi_i = (\forall x)\varphi_j$. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή x δεν είναι ελεύθερη στο $\Sigma \cup \{\varphi\}$.

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_j$ και από τον $(K\Gamma)$ παίρνουμε $\Sigma \vdash (\forall x)\varphi \to \varphi_j$.

Εφ' όσον η x δεν είναι ελεύθερη, από το $(K2)$ παίρνουμε $\Sigma \vdash \varphi \to (\forall x)\varphi_j$, άρα $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi_i$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε ότι $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

$\Leftarrow$ Έστω $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Αν θεωρήσουμε μια απόδειξη $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ της $\varphi \to \psi$ από το Σ, τότε έχουμε από τον ορισμό της απόδειξης ότι $\varphi_n = \varphi \to \psi$.

Από τις φ_n και φ, με εφαρμογή του (MP), παίρνουμε τον ψ.

Άρα έχουμε μια απόδειξη του ψ, από το $\Sigma \cup \{\varphi\}$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.9 Ένα σύνολο $\Sigma \subseteq F(L)$ λέγεται **συνεπές** αν δεν υπάρχει τύπος φ τέτοιος ώστε $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΡΘΟΤΗΤΑΣ 3.10 Για κάθε $\Sigma \subseteq F(L)$ και $\varphi \in F(L)$ ισχύει $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \vDash \varphi$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Και σε αυτή την περίπτωση, η απόδειξη είναι σχεδόν ίδια με την με την απόδειξη του θεωρήματος ορθότητας του προτασιακού λογισμού. Πρέπει να δείξουμε ότι $\Sigma \vDash \varphi_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Η μοναδική διαφορά είναι ότι πρέπει να εξετάσουμε στο επαγωγικό βήμα το ενδεχόμενο να χρησιμοποιείται στην απόδειξη ο κανόνας γενίκευσης.

Έστω $\Sigma \vdash \varphi$.

Μπορούμε να θεωρήσουμε μια ακολουθία προτάσεων $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ως απόδειξη του φ από το Σ.

Ο φ_1 είτε είναι αξίωμα, είτε ανήκει στο Σ. Και στις δύο περιπτώσεις $\Sigma \vDash \varphi_1$.

Υποθέτουμε ότι $\Sigma \vDash \varphi_k$ για κάθε $k < i$. Διακρίνουμε τρία ενδεχόμενα:

(a) Αν ο φ_i είναι αξίωμα ή τύπος του Σ, τότε $\Sigma \vDash \varphi_i$.

(b) Υπάρχουν $j, m < i$ τέτοια ώστε $\varphi_j \vDash \varphi_m \to \varphi_i$.
Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε $\Sigma \vDash \varphi_m$ και $\Sigma \vDash \varphi_m \to \varphi_i$, άρα $\Sigma \vDash \varphi_i$.

(c) Έχουμε $\Sigma \vDash \varphi_j$ και $\varphi_\iota = (\forall x)\varphi_j$. Από τον $(K\Gamma)$ έχουμε $\Sigma \vDash (\forall x)\varphi_j$, άρα $\Sigma \vDash \varphi_i$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν καταλήγουμε ότι $\Sigma \vDash \varphi_i$, επομένως $\Sigma \vDash \varphi$. ■

Όπως και στην περίπτωση του προτασιακού λογισμού, το αποτέλεσμα αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό, διότι μας διαβεβαιώνει ότι οι προτάσεις που αποδεικνύονται στα πλαίσια του κατηγορηματικού λογισμού είναι κατ' ανάγκη αληθείς. Μια άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι ακόμη ότι το σύνολο των αξιωμάτων είναι συνεπές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.11 Έστω L μια γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού. Η L' λέγεται **στοιχειώδης επέκταση** της L, αν δημιουργείται από την προσθήκη μόνο νέων σταθερών στην L.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.12 Έστω $\Sigma \subseteq F(L)$, L' μια στοιχειώδης επέκταση της και $\Sigma' \subseteq F(L')$. Το Σ' λέγεται **περίβλημα** του Σ αν $\Sigma \subseteq \Sigma'$ και για κάθε τύπο της μορφής $(\exists x)\varphi(x)$ της L τέτοιον ώστε $\Sigma \vdash (\exists x)\varphi(x)$ υπάρχει σταθερά $c \in L'$ τέτοια ώστε $\Sigma' \vdash \varphi(c)$.

ΛΗΜΜΑ 3.13 Για κάθε γλώσσα L και για κάθε συνεπές $\Sigma \subseteq F(L)$ υπάρχει μια στοιχειώδης επέκταση L' της L και ένα συνεπές σύνολο $\Sigma' \subseteq F(L')$ τέτοια ώστε το Σ' να είναι περίβλημα του Σ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε πρόταση της L που έχει τη μορφή $(\exists x)\varphi(x)$ και ισχύει $\Sigma \vdash (\exists x)\varphi(x)$ εισάγουμε στην L' μια σταθερά c_i. Οι προτάσεις της L με τη μορφή αυτή είναι αριθμήσιμες, επομένως το σύνολο των σταθερών που θέλουμε να εισάγουμε είναι αριθμήσιμο και έπεται ότι μπορούμε να ορίσουμε την L'.

Είναι προφανές ότι για το σύνολο $\Sigma' = \Sigma \cup \{\varphi(c) : \Sigma \vdash (\exists x)\varphi(x)\}$ ισχύει $\Sigma' \subseteq F(L')$ και ότι είναι περίβλημα του Σ.

Πρέπει ακόμη να αποδείξουμε ότι το Σ' είναι συνεπές. Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο ότι δεν είναι.

Αν το Σ' είναι μη-συνεπές, τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ και πεπερασμένος αριθμός προτάσεων $\varphi_1(c_1), \varphi_2(c_2), \dots, \varphi_n(c_n)$, τέτοια ώστε $\Sigma_0 \cup \{\varphi_1(c_1), \dots, \varphi_n(c_n)\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$.

Αυτό είναι ισοδύναμο με το σύνολο $\Sigma_0 \cup \{(\exists x_1)\varphi_1(x_1), \dots, (\exists x_n)\varphi_n(x_n)\}$ και αφού για κάθε i ισχύει $\Sigma \vdash (\exists x_i)\varphi(x_i)$, έπεται ότι $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$.

Αυτό είναι άτοπο, καθώς το Σ είναι συνεπές. Άρα καταλήγουμε ότι το Σ' είναι συνεπές. ■

ΛΗΜΜΑ 3.14 Έστω $\Sigma \subseteq F(L)$ και Σ συνεπές. Τότε υπάρχει μιας στοιχειώδης επέκταση L^* της L και $\Sigma^* \subseteq F(L^*)$, τέτοια ώστε Σ^* να είναι πλήρες, συνεπές και περίβλημα του εαυτού του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε σύνολο τύπων μπορούμε να κατασκευάσουμε το περίβλημά του. Επίσης από το λήμμα Lindenbaum μπορούμε να επεκτείνουμε ένα συνεπές σύνολο σε ένα πλήρες συνεπές σύνολο.

Με βάση αυτά, κατασκευάζουμε την ακολουθία συνόλων $\Sigma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots$. Το Γ_{n+1} είναι περίβλημα του Σ_n και το Σ_{n+1} είναι πλήρης και συνεπής επέκταση του Γ_{n+1}.

Θεωρούμε ότι $\Sigma_0 = \Sigma$ και θέτουμε $L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ και $\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$.

Το Σ^* είναι συνεπές, επειδή κάθε Σ_n είναι συνεπές.

Επίσης είναι πλήρες, επειδή κάθε Σ_n είναι πλήρες ως προς τη γλώσσα L_n.

Τέλος, είναι περίβλημα του εαυτού του, αφού αν θεωρήσουμε ότι $\Sigma^* \vdash (\exists x)\varphi(x)$, τότε η πρόταση αυτή αποδεικνύεται από πεπερασμένου πλήθους τύπους του Σ^*. Άρα υπάρχει Σ_n, τέτοιο ώστε $\Sigma_n \vdash (\exists x)\varphi(x)$. Αφού το Γ_{n+1} είναι περίβλημα του Σ_n, τότε υπάρχει $c \in L_{n+1}$, τέτοιο ώστε $\Gamma_{n+1} \vdash \varphi(c)$. Επομένως, $\Sigma^* \vdash \varphi(c)$ για κάποιο $c \in L^*$. Άρα το Σ^* είναι περίβλημα του εαυτού του. ■

ΛΗΜΜΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ 3.15 Κάθε συνεπές σύνολο τύπων είναι ικανοποιήσιμο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\Sigma \subseteq F(L)$ ένα συνεπές σύνολο τύπων. Με βάση το λήμμα 3.14, μπορούμε να επεκτείνουμε το Σ σε ένα πλήρες και συνεπές σύνολο $\Sigma^* \subseteq F(L^*)$ τέτοιο ώστε το Σ^* να είναι περίβλημα του εαυτού του.

Για να δείξουμε ότι το Σ^* είναι ικανοποιήσιμο πρέπει να κατασκευάσουμε μια L^*-δομή που να ικανοποιεί το Σ^*.

Έστω λοιπόν $L^* = \langle (P_i)_{i\in I} \,;\, (f_j)_{j\in J} \,;\, (c_k)_{k\in K} \rangle$ και $T(L^*)$ το σύνολο των όρων της γλώσσας. Ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας των όρων της γλώσσας με βάση τη σχέση $t \sim s \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash t \approx s$. Το σύμβολο $[t]$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει την κλάση ισοδυναμίας του όρου t.

Με βάση τις κλάσεις ισοδυναμίας της γλώσσας, ορίζουμε το σύνολο $A = \{[t] : t \in T(L^*)\}$ και την L^*-δομή $\mathfrak{A} = \langle A \,;\, ({P_i}^{\mathfrak{A}})_{i\in I} \,;\, ({f_j}^{\mathfrak{A}})_{j\in J} \,;\, ({c_k}^{\mathfrak{A}})_{k\in K} \rangle$.

Θεωρούμε την ερμηνεία τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής.

- $\langle [t_1], \dots, [t_n] \rangle \in {P_i}^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash P_i(t_1, \dots, t_n)$
- ${f_j}^{\mathfrak{A}}([t_1], \dots, [t_n]) = \big[f_j(t_1, \dots, t_n)\big]$
- ${c_k}^{\mathfrak{A}} = [c_k]$

Με βάση αυτά έχουμε ότι για κάθε όρο t της L^* ισχύει $t^{\mathfrak{A}} = [t]$.

Για να είναι η $\mathfrak{A}$ μοντέλο του Σ^* πρέπει για κάθε ακολουθία σταθερών c και για κάθε τύπο φ να ισχύει $\mathfrak{A} \vDash \varphi(c) \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash \varphi$.

Για να αποδειχθεί αυτό, πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις για τη μορφή που έχει η φ.

(a) $\varphi \equiv (t \approx s)$

Η γενικότερη μορφή είναι $t = f(t_1, \dots, t_n)$ και $s = g(t_1, \dots, t_m)$.

Επομένως, έχουμε $\mathfrak{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \big(f(t_1, \dots, t_n) \approx g(s_1, \dots, s_m)\big)(c) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \Big(f\big(t_1(c), \dots, t_n(c)\big) \approx g\big(s_1(c), \dots, s_m(c)\big)\Big) \Leftrightarrow f^{\mathfrak{A}}\big(t_1(c)^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n(c)^{\mathfrak{A}}\big) = g^{\mathfrak{A}}\big(s_1(c)^{\mathfrak{A}}, \dots, s_m(c)^{\mathfrak{A}}\big) \Leftrightarrow f^{\mathfrak{A}}([t_1], \dots, [t_n]) = g^{\mathfrak{A}}([s_1], \dots, [s_m]) \Leftrightarrow [f(t_1, \dots, t_n)] = [g(s_1, \dots, s_m)] \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash f(t_1, \dots, t_n) \approx g(s_1, \dots, s_m) \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash \varphi$

(b) $\varphi \equiv P(t_1, \dots, t_n)$

Επομένως έχουμε $\mathfrak{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash P(t_1, \dots, t_n)(c) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash P\big(t_1(c), \dots, t_n(c)\big) \Leftrightarrow < t_1(c)^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n(c)^{\mathfrak{A}} > \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \langle [t_1], \dots, [t_n] \rangle \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash P(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash \varphi$

(c) $\varphi \equiv \neg\psi$

Καθώς το Σ^* είναι πλήρες και συνεπές, έχουμε $\mathfrak{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \neg\psi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \nvDash \psi \Leftrightarrow \Sigma^* \nvdash \psi \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash \neg\psi \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash \varphi$

(d) $\varphi \equiv \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$

Έχουμε $\mathfrak{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow \mathfrak{A} \nvDash \varphi_1$ ή $\mathfrak{A} \vDash \varphi_2 \Leftrightarrow \Sigma^* \nvdash \varphi_1$ ή $\Sigma^* \vdash \varphi_2 \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash \varphi$

(e) $\varphi \equiv (\forall x)\psi$

$\Rightarrow$ Έστω $\Sigma^* \nvdash (\forall x)\psi$. Λόγω της πληρότητας του Σ^*, έχουμε ότι $\Sigma^* \vdash \neg\big((\forall x)\psi\big) \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash (\exists x)\neg\psi$.

Αφού το Σ^* είναι περίβλημα του εαυτού του, υπάρχει $c' \in L^*$, τέτοιο ώστε $\Sigma^* \vdash \neg\psi(c')$.

Από τη σχέση αυτή έπεται $\mathfrak{A} \vDash \neg\psi(c')(c) \Rightarrow \mathfrak{A} \nvDash \big((\forall x)\psi\big)(c)$.

Άρα έχουμε $\Sigma^* \nvdash \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \nvDash \varphi$, επομένως $\mathfrak{A} \vDash \varphi \Rightarrow \Sigma^* \vdash \varphi$.

$\Leftarrow$ Αν $\Sigma^* \vdash (\forall x)\psi$, από το αξίωμα $(K1)$ έχουμε ότι $\Sigma^* \vdash \psi(c')$ για κάθε $c' \in L^*$. Επομένως $\mathfrak{A} \vDash \psi(c')(c) \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \big((\forall x)\psi\big)(c)$.

Επομένως, για κάθε φ ισχύει $\mathfrak{A} \vDash \varphi(c) \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash \varphi$. Επομένως, η L^*-δομή $\mathfrak{A}$ ικανοποιεί το Σ^*. Αφού το Σ^* είναι επέκταση του Σ, έπεται ότι η $\mathfrak{A}$ ικανοποιεί το Σ. ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΜΠΑΓΕΙΑΣ 3.16 Έστω $\Sigma \subseteq F(L)$. Αν το Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο, τότε είναι και ικανοποιήσιμο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι το Σ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Αυτό σημαίνει, λόγω του λήμματος 3.15 ότι δεν είναι συνεπές. Επομένως έχουμε ότι $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Επομένως υπάρχει ένα πεπερασμένο $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, τέτοιο ώστε $\Sigma_0 \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Επομένως καταλήγουμε στο άτοπο συμπέρασμα ότι το Σ δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 3.17 Αν $\Sigma \subseteq F(L)$ και $\varphi \in F(L)$, τότε ισχύει $\Sigma \vDash \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Και πάλι εξετάζουμε μόνο την περίπτωση που το Σ είναι συνεπές, καθώς αν δεν είναι συνεπές, είναι σε θέση να αποδείξει κάθε τύπο. Εφ' όσον είναι συνεπές, από το λήμμα 3.15 καταλήγουμε ότι είναι και ικανοποιήσιμο.

Έστω $\Sigma \nvdash \varphi$. Τότε έχουμε ότι το σύνολο $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ είναι συνεπές. Επομένως είναι ικανοποιήσιμο, άρα καταλήγουμε στο άτοπο συμπέρασμα ότι $\Sigma \nvDash \varphi$. ∎

Το θεώρημα πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού είναι και αυτό ένα μείζονος σημασίας αποτέλεσμα. Αυτό που αποδεικνύει είναι ότι κάθε λογικό συμπέρασμα του Σ, δηλαδή μια πρόταση η οποία είναι αληθής για κάθε L-δομή που ικανοποιεί το Σ, μπορεί να αποδειχθεί με βάση τα συντακτικά μέσα της γλώσσας.

Το θεώρημα πληρότητας, επίσης, συνδέει την έννοια της συντακτικής απόδειξης με το σημασιολογικό έλεγχο της αλήθειας μιας πρότασης, όταν αυτός γίνεται σε ένα τυχαίο μοντέλο της θεωρίας. Για παράδειγμα, όταν κατασκευάζουμε ένα τυχαίο τρίγωνο και αποδεικνύουμε ότι το άθροισμα των γωνιών του είναι 180°, δεν κάνουμε μια συντακτική απόδειξη της πρότασης. Αντιθέτως, ελέγχουμε την αλήθεια της σε ένα τυχαίο μοντέλο της ευκλείδειας γεωμετρίας. Δεδομένου ότι το μοντέλο πάνω στο οποίο εργαζόμαστε είναι τυχαίο, η επαλήθευση της αλήθειας της πρότασης ισχύει για κάθε δυνατό μοντέλο των αξιωμάτων. Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε ότι υπάρχει μια τυπική απόδειξη της πρότασης που έχουμε απλά επαληθεύσει.

Η πληρότητα, ωστόσο, αφορά προτάσεις οι οποίες ισχύουν για κάθε δυνατό μοντέλο. Ο τρόπος με τον οποίο «συνδέονται» τα στοιχεία του μοντέλου, δεν εξετάζεται στην προκειμένη περίπτωση. Αυτό γίνεται με τη μελέτη των πρωτοβάθμιων θεωριών και την εισαγωγή των αξιωμάτων τους. Ουσιαστικά, το θεώρημα πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού, υποστηρίζει ότι οι όλες οι ταυτολογίες είναι αποδείξιμες. Δεν υποστηρίζει, όμως ότι κάθε αληθής, για μια συγκεκριμένη L-δομή, πρόταση μπορεί να αποδειχθεί. Αντιθέτως, όπως θα δούμε στη συνέχεια, υπάρχουν προτάσεις οι οποίες δεν είναι δυνατόν να αποδειχθούν. Ο μηχανισμός για να δείξουμε ότι μια συγκεκριμένη πρόταση δεν είναι δυνατόν να αποδειχθεί έγκειται στην κατασκευή δύο μοντέλων, εκ των οποίων στο ένα η πρόταση να είναι αληθής και στο άλλο να είναι ψευδής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1 Μια **πρωτοβάθμια θεωρία T** λέγεται κάθε σύνολο προτάσεων μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας L κλειστό ως προς $\vDash$ και, λόγω πληρότητας, ως προς $\vdash$.

Υπάρχουν δύο τρόποι παραγωγής θεωριών από ένα σύνολο προτάσεων Σ. Ο ένας είναι συντακτικός και ο άλλος σημασιολογικός. Στο συντακτικό τρόπο ορίζουμε ως θεωρία T το σύνολο $Con(\Sigma) = \{\varphi \in S(L) : \Sigma \vdash \varphi\}$, δηλαδή το σύνολο των λογικών συνεπειών του Σ. Στο σημασιολογικό τρόπο, ξεκινώντας από μια L-δομή $\mathfrak{A}$, ορίζουμε ως θεωρία το σύνολο $Th(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(L) : \mathfrak{A} \vDash \varphi\}$, δηλαδή το σύνολο των προτάσεων της L που αληθεύουν για την συγκεκριμένη δομή $\mathfrak{A}$.

Αν θεωρήσουμε μια γλώσσα L, τότε το $S(L)$ είναι και αυτό θεωρία. Μάλιστα είναι η μοναδική μη-συνεπής θεωρία, καθώς οποιαδήποτε άλλη μη-συνεπής θεωρία είναι σε θέση να αποδείξει κάθε πρόταση, οπότε, λόγω κλειστότητας, ταυτίζεται με το $S(L)$.

Μια θεωρία που παράγεται σημασιολογικά από μία δομή είναι πλήρης, αφού για κάθε φ ισχύει $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ ή $\mathfrak{A} \nvDash \varphi$. Παράλληλα, όπως δείχνει η επόμενη πρόταση, κάθε πλήρης θεωρία, είναι θεωρία κάποιας δομής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2 Έστω T μια συνεπής θεωρία. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(a) Η T είναι πλήρης.
(b) Για κάθε ζεύγος μοντέλων $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ της T ισχύει $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$.
(c) Για κάθε μοντέλο $\mathfrak{A}$ της T ισχύει $T = Th(\mathfrak{A})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(a) ⇒ (b) Έστω ότι T πλήρης και $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ δύο μοντέλα της.

Έστω φ μια τυχαία πρόταση της T. Αφού η T είναι πλήρης, θα ισχύει $T \vdash \varphi$ ή $T \vdash \neg\varphi$.

Λόγω του θεωρήματος ορθότητας, στην πρώτη περίπτωση θα ισχύει $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ και $\mathfrak{B} \vDash \varphi$, ενώ στη δεύτερη ισχύει $\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi$ και $\mathfrak{B} \vDash \neg\varphi$.

Επομένως, για κάθε φ ισχύει $\mathfrak{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi$, άρα $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$.

(b) ⇒ (c) Έστω $\mathfrak{A}$ ένα μοντέλο της T. Για να αποδείξουμε ότι $T = Th(\mathfrak{A})$, πρέπει να δείξουμε ότι $T \subseteq Th(\mathfrak{A})$ και ότι $Th(\mathfrak{A}) \subseteq T$.

Από τον ορισμό του μοντέλου έχουμε ότι για κάθε $\varphi \in T$ ισχύει $\mathfrak{A} \vDash \varphi$, δηλαδή $\varphi \in Th(\mathfrak{A})$. Επομένως, καταλήγουμε ότι $T \subseteq Th(\mathfrak{A})$.

Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι δεν ισχύει η σχέση $Th(\mathfrak{A}) \subseteq T$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει φ τέτοια ώστε $\varphi \in Th(\mathfrak{A})$ και $\varphi \notin T$.

Εφ' όσον $\varphi \notin T$, τότε το σύνολο $T \cup \{\neg\varphi\}$ είναι συνεπές. Από το λήμμα ύπαρξης μοντέλου, έπεται ότι το σύνολο αυτό θα έχει ένα μοντέλο, έστω το $\mathfrak{B}$.

Αφού το $\mathfrak{B}$ είναι μοντέλο του $T \cup \{\neg\varphi\}$, έχουμε ότι $\mathfrak{B} \vDash \neg\varphi$, δηλαδή $\neg\varphi \in Th(\mathfrak{B})$

Ωστόσο, αφού το $\mathfrak{B}$, είναι μοντέλο του $T \cup \{\neg\varphi\}$, θα είναι και μοντέλο του T, αφού κάθε πρόταση που περιέχεται στο $T \cup \{\neg\varphi\}$, περιέχεται και στο T και είναι αληθής για το $\mathfrak{B}$.

Αφού $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ μοντέλα του T, έχουμε ότι $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$. Αφού $\neg\varphi \in Th(\mathfrak{B})$, έχουμε ότι $\neg\varphi \in Th(\mathfrak{A}) \Rightarrow \varphi \notin Th(\mathfrak{A})$, το οποίο όμως αντιτίθεται στην επαγωγική μας υπόθεση.

Επομένως αν T συνεπής θεωρία και για κάθε ζεύγος μοντέλων $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ της T ισχύει $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$, τότε για κάθε μοντέλο $\mathfrak{A}$ της T ισχύει $T = Th(\mathfrak{A})$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Για κάθε μοντέλο $\mathfrak{A}$ της T ισχύει $T = Th(\mathfrak{A})$. Επομένως, οι προτάσεις που περιέχει η T είναι αληθείς για κάθε μοντέλο της. Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος πληρότητας και η T θα είναι κλειστή ως προς $\vdash$. ■

Η πρόταση αυτή δείχνει ότι μια συνεπής και πλήρης θεωρία, παραχθείσα με τη συντακτική προσέγγιση, ταυτίζεται με τη θεωρία που παράγεται από κάποιο μοντέλο της θεωρίας. Όλα, δε, τα μοντέλα μιας πλήρους θεωρίας παράγουν ακριβώς την ίδια θεωρία.

Ωστόσο, υπάρχουν θεωρίες που δεν είναι πλήρεις. Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι η θεωρία συνόλων. Αν θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τη θεωρία συνόλων ως το σύνολο των λογικών συνεπειών των αξιωμάτων της θεωρίας και των αξιωμάτων του κατηγορηματικού λογισμού, τότε το σύνολο των προτάσεων που θα λάβουμε είναι μικρότερο από το σύνολο των προτάσεων που αληθεύουν για συγκεκριμένα μοντέλα της θεωρίας. Η υπόθεση του συνεχούς αληθεύει για ορισμένα μοντέλα της θεωρίας, ενώ η άρνησή της για άλλα. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η υπόθεση του συνεχούς υπάρχει στη θεωρία που παράγεται σημασιολογικά από ένα μοντέλο που ικανοποιεί τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων, αλλά δεν υπάρχει στη θεωρία που παράγεται συντακτικά από τα αξιώματα της θεωρίας.

Οι προτάσεις που αποδεικνύονται με βάση τα αξιώματα μιας θεωρίας είναι καθολικές αλήθειες που αληθεύουν σε όλα τα μοντέλα που ικανοποιούν τα αξιώματα της θεωρίας. Αντίστροφα, μια πρόταση που είναι αληθής σε ένα μοντέλο της θεωρίας, αλλά ψευδής σε ένα άλλο, δεν είναι δυνατόν να αποδειχθεί με βάση τα αξιώματα της θεωρίας και η αλήθεια που εκφράζει δεν είναι καθολική. Τέτοιες προτάσεις καλούνται μη-αποκρίσιμες στα πλαίσια της θεωρίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3 Έστω T μια πρωτοβάθμια θεωρία και $\varphi \in S(L)$. Η φ λέγεται **αποκρίσιμη** στην T αν $\varphi \in T$ ή $\neg\varphi \in T$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.4 Η θεωρία T είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε πρόταση της γλώσσας είναι αποκρίσιμη στην T.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Rightarrow$ Αν η T είναι πλήρης, τότε για κάθε $\varphi \in S(L)$ έχουμε $T \vdash \varphi$ ή $T \vdash \neg\varphi$. Λόγω του ορισμού της θεωρίας, έχουμε $\varphi \in T$ ή $\neg\varphi \in T$, άρα η φ είναι αποκρίσιμη στην T.

$\Leftarrow$ Αν η φ είναι αποκρίσιμη στην T, τότε $\varphi \in T$ ή $\neg\varphi \in T$. Λόγω της πρότασης 4.2, ισχύει ότι $\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \varphi$ και $\neg\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \neg\varphi$. Επομένως για κάθε $\varphi \in S(L)$ έχουμε ότι $T \vdash \varphi$ ή $T \vdash \neg\varphi$, άρα η T είναι πλήρης. ■

Ουσιαστικά, το αποτέλεσμα αυτό μας δείχνει ότι στα πλαίσια μιας πλήρους θεωρίας μπορούν να αποδειχθούν όλες οι αληθείς προτάσεις μιας γλώσσας. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, όμως, δεν είναι όλες οι θεωρίες πλήρεις. Υπάρχουν, δε, προτάσεις που αληθεύουν για ορισμένα μοντέλα μιας θεωρίας, αλλά δεν αληθεύουν για άλλα. Η πρόταση αυτή μας δείχνει ότι τα αξιώματα μιας μη-πλήρους θεωρίας, δεν είναι σε θέση να περιορίσουν αρκετά το πλήθος των μοντέλων της θεωρίας, με αποτέλεσμα να υπάρχουν προτάσεις που για διαφορετικά μοντέλα να λαμβάνουν διαφορετικές αληθοτιμές.

Τα αξιώματα μιας θεωρίας, έχουν ως βασικό στόχο να ορίσουν θεμελιώδεις και προφανείς έννοιες, με τρόπο τέτοιο ώστε τα θεωρήματα που αποδεικνύουν να συμφωνούν με τη διαίσθηση και την εποπτεία μας. Τα αξιώματα μιας θεωρίας πρέπει να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή ένα αξίωμα να μην μπορεί να παραχθεί από τα υπόλοιπα αξιώματα. Ουσιαστικά αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι ένα αξίωμα μη-αποκρίσιμο στη θεωρία που παράγεται από τα υπόλοιπα αξιώματα της θεωρίας. Ο έλεγχος για το αν μια πρόταση είναι ή όχι αποκρίσιμη γίνεται όπως αναφέραμε προηγουμένως, με την κατασκευή δύο μοντέλων, στα οποία η τιμή αλήθειας της πρότασης να διαφέρει.

Παράλληλα πρέπει τα αξιώματα μιας θεωρίας να είναι σε θέση να αναγνωρισθούν, δηλαδή να υπάρχει ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος που να απαντά στο ερώτημα αν μια πρόταση $\varphi \in S(L)$ είναι αξίωμα ή όχι. Οι ορισμοί που ακολουθούν είναι απαραίτητοι για το σκοπό αυτό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.5 Ένας αλγόριθμος λέγεται **αποτελεσματικός** αν απαντάει σε πεπερασμένο χρόνο σε ένα ερώτημα της μορφής «ναι-όχι».

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.6 Ένα σύνολο X λέγεται **αλγοριθμικό** αν υπάρχει ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος για το ερώτημα «$x \in X$» ή αντίστοιχα για το ερώτημα «$x \notin X$».

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.7 Ένας αλγόριθμος λέγεται **ημιαποτελεσματικός** αν απαντάει σε πεπερασμένο χρόνο σε ένα ερώτημα της μορφής «ναι-όχι» τουλάχιστον στην περίπτωση που αληθεύει το «ναι».

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.8 Ένα σύνολο X λέγεται **αλγοριθμικά απαριθμήσιμο** αν υπάρχει ένας ημιαποτελεσματικός αλγόριθμος για το ερώτημα «$x \in X$».

Είναι προφανές ότι τα αντικείμενα τα οποία αναζητούν οι αλγόριθμοι οφείλουν να είναι πεπερασμένα. Ένας ρητός αριθμός, για παράδειγμα, αποτελεί πεπερασμένο αντικείμενο, καθώς μπορεί να εκφραστεί ως ένα ζεύγος φυσικών αριθμών. Αντίθετα, ένας πραγματικός αριθμός δεν είναι δυνατόν να αναζητηθεί από έναν τέτοιο αλγόριθμο, καθώς ενδέχεται να περιέχει άπειρο αριθμό δεκαδικών ψηφίων και να είναι αδύνατη η σύγκρισή του με έναν άλλον πραγματικό αριθμό. Σε περίπτωση που οι δυο αριθμοί είναι ίσοι, ο αλγόριθμος καλείται να συγκρίνει ένα άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων και ως εκ τούτου δεν είναι σε θέση να τερματίσει. Επομένως, τα σύνολα στα οποία αναφερόμαστε είναι εξ ορισμού το πολύ αριθμήσιμα, καθώς αν δεν ήταν, θα ήταν αδύνατη η εφαρμογή ενός τέτοιου ελέγχου στα στοιχεία τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.9 Το σύνολο X είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει αλγόριθμος που απαριθμεί τα στοιχεία του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Leftarrow$ Εφ' όσον υπάρχει ένας αλγόριθμος που απαριθμεί τα στοιχεία του X, μπορούμε, μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου να το γράψουμε ως $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Αν θέλουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα $\psi \in X$, αρκεί να σχεδιάσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος θα ελέγχει αν $x_1 = \psi$, στη συνέχεια αν $x_2 = \psi$ και να τερματίζει για όποιο $x_n = \psi$. Αν $\psi \in X$, ο αλγόριθμος αυτός θα εμφανίσει το αποτέλεσμα μετά από κάποιο χρόνο. Αν $\psi \notin X$, αν το X είναι άπειρο θα συνεχίσει να τρέχει επ' άπειρον. Δεδομένου όμως ότι τερματίζει σε περίπτωση που η απάντηση είναι θετική, καταλήγουμε ότι αν υπάρχει ένας αλγόριθμος που απαριθμεί τα στοιχεία του X, τότε το X είναι αλογριθμικά απαριθμήσιμο.

$\Rightarrow$ Το σύνολο X, εφ' όσον είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμο θα είναι το πολύ αριθμήσιμο. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι το X είναι υποσύνολο ενός απαριθμημένου συνόλου $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$. Με βάση τον ημιαποτελεσματικό αλγόριθμο που απαντάει στο ερώτημα «$x \in X$», σχεδιάζουμε έναν αλγόριθμο που απαριθμεί τα στοιχεία του.

- Στην αρχή, ο αλγόριθμος ερευνά για 1 λεπτό αν $y_1 \in X$.
- Αν το βρει, το ονομάζει x_1.
- Αν δε το βρει, ερευνά για 2 λεπτά αν $y_1 \in X$ και για 2 λεπτά αν $y_2 \in X$.
- Όποιο στοιχείο βρει πρώτο το ονομάζει x_2.
- Στη συνέχεια ερευνά για n λεπτά αν $y_i \in X$, για κάθε $i = 1, \dots, n$
- Όποιο στοιχείο βρει, το τοποθετεί στην επόμενη ελεύθερη θέση.

Με αυτόν τον τρόπο ο αλγόριθμος βρίσκει όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο X και τα απαριθμεί με βάση την αρίθμηση του συνόλου Y, χωρίς να υπάρχει το ενδεχόμενο να αφιερώσει άπειρο χρόνο ψάχνοντας κάποιο στοιχείο του Y το οποίο δεν ανήκει στο X και να μην είναι σε θέση να ψάξει για τα υπόλοιπα. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.10 Το σύνολο X είναι αλγοριθμικό αν και μόνο τόσο το X όσο και το συμπλήρωμά του (ως προς κάποιο δοσμένο αλγοριθμικό σύνολο) $\overline{X}$ είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Rightarrow$ Αν το X είναι αλγοριθμικό, τότε υπάρχει ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος που απαντάει στο ερώτημα «$x \in X$». Εφ' όσον ο αλγόριθμος είναι αποτελεσματικός, απαντάει σε πεπερασμένο χρόνο και στο ερώτημα «$x \notin X$», το οποίο είναι ισοδύναμο με το ερώτημα «$x \in \overline{X}$». Επομένως, αν το X είναι αλγοριθμικό, τότε και το $\overline{X}$ είναι αλγοριθμικό, άρα είναι και τα δύο αλγοριθμικά απαριθμήσιμα.

$\Leftarrow$ Τα X και $\overline{X}$ είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμα, άρα υπάρχουν ημιαποτελεσματικοί αλγόριθμοι που απαντάνε στα ερωτήματα «$x \in X$» και «$x \in \overline{X}$», αν η απάντηση είναι θετική. Ωστόσο, το ερώτημα «$x \in \overline{X}$» είναι ισοδύναμο με το ερώτημα «$x \notin X$». Συνδυάζοντας τους δύο αλγορίθμους, μπορούμε να φτιάξουμε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο που να απαντάει στο ερώτημα «$x \in X$», ανεξαρτήτως αν η απάντηση είναι θετική ή αρνητική. Αν βάλουμε τους δυο ημιαποτελεσματικούς αλγορίθμους να τρέχουν παράλληλα για τα σύνολα X και $\overline{X}$, είναι σίγουρο ότι κάποια στιγμή ο ένας απ' τους δύο θα δώσει θετική απάντηση. Αν δώσει απάντηση ο πρώτος, θα έχουμε $x \in X$, ενώ αν δώσει ο δεύτερος θα έχουμε $x \notin X$. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.11 Έστω Σ ένα αλγοριθμικό σύνολο προτάσεων.

(a) Το σύνολο των αποδείξεων που κατασκευάζονται από το Σ είναι αλγοριθμικό.

(b) Το σύνολο $Con(\Sigma)$ των λογικών συνεπειών του Σ είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(a) Δεδομένου ότι το Σ και το σύνολο των αξιωμάτων του κατηγορηματικού λογισμού είναι αλγοριθμικά, υπάρχει ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος που να ελέγχει αν μια πρόταση φ ανήκει σε ένα από τα δύο.

Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο των αποδείξεων που κατασκευάζονται από το Σ είναι αλγοριθμικό αρκεί να κατασκευάσουμε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο που να ελέγχει αν η τυχαία ακολουθία $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ είναι απόδειξη απ' το Σ. Αυτό είναι εφικτό λόγω του επαγωγικού τρόπου του ορισμού της έννοιας της απόδειξης.

- Ο αλγόριθμος ελέγχει αν $\varphi_1 \in \Sigma$ ή αν $\varphi_1 \in K\Lambda$.
- Αν η απάντηση είναι αρνητική, τότε η ακολουθία δεν είναι απόδειξη από το Σ
- Αν η απάντηση είναι θετική, ελέγχει αν $\varphi_2 \in \Sigma$ ή αν $\varphi_2 \in K\Lambda$ ή αν η φ_2 παράγεται από τη φ_1 με τον $(K\Gamma)$.
- Ο αλγόριθμος συνεχίζει με αυτό το σκεπτικό, λαμβάνοντας στα επόμενα βήματα υπ' όψιν και το (MP).

Είναι εμφανές ότι ο αλγόριθμος αυτός είναι αποτελεσματικός, καθώς προσδιορίζει σε πεπερασμένο χρόνο αν μια ακολουθία αποτελεί απόδειξη από το Σ. Άρα το σύνολο των αποδείξεων που κατασκευάζονται από το Σ είναι αλγοριθμικό.

(b) Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο των θεωρημάτων που αποδεικνύονται από το Σ είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμο, αρκεί να βρούμε έναν ημιαποτελεσματικό αλγόριθμο που να απαντάει στο ερώτημα αν η πρόταση φ αποδεικνύεται από το Σ.

Το σύνολο των αποδείξεων του Σ είναι αλγοριθμικό. Επομένως θα είναι και αλγοριθμικά απαριθμήσιμο. Έστω μια $\{p_1, p_2, \ldots\}$ μια αρίθμηση των αποδείξεων του Σ. Ο αλγόριθμος πρέπει να ελέγξει αν η p_1 είναι απόδειξη της φ, αν δεν είναι να ελέγξει αν είναι η p_2 και ούτως καθ' εξής. Αν η φ, αποδεικνύεται από το Σ, ο αλγόριθμος θα τερματίσει.

Επομένως υπάρχει ένας ημιαποτελεσματικός αλγόριθμος που ελέγχει αν μια πρόταση αποδεικνύεται από το Σ, άρα το σύνολο $Con(\Sigma)$ είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμο. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.12 Μια θεωρία T λέγεται **αξιωματικοποιήσιμη** αν υπάρχει αλγοριθμικό σύνολο $\Sigma \subseteq T$ τέτοιο ώστε $T = Con(\Sigma)$. Το Σ λέγεται σύνολο αξιωμάτων της T.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.13 Μια θεωρία T λέγεται **πεπερασμένα αξιωματικοποιήσιμη** αν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\Sigma \subseteq T$ τέτοιο ώστε $T = Con(\Sigma)$. Το Σ λέγεται σύνολο αξιωμάτων της T.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.14 Μια θεωρία είναι αξιωματικοποιήσιμη αν και μόνο αν είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Rightarrow$ Αν η T είναι αξιωματικοποιήσιμη, τότε υπάρχει αλγοριθμικό σύνολο Σ τέτοιο ώστε $T = Con(\Sigma)$. Από την πρόταση 4.11(b) έχουμε ότι το $Con(\Sigma)$ είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμο.

$\Leftarrow$ Αν T είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμη, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε μια αρίθμηση των προτάσεων της $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.

Ορίζουμε το σύνολο $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$ με $\sigma_n = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. Είναι προφανές ότι $\Sigma \subseteq T$.

Επίσης, ισχύει ότι $T = Con(\Sigma)$, καθώς για κάθε $\varphi_n \in T$ έχουμε $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \vdash \varphi_n$.

Για να αποδείξουμε ότι η T είναι αξιωματικοποιήσιμη μένει να δείξουμε ότι το Σ είναι αλγοριθμικό, δηλαδή να βρούμε έναν αλγόριθμο που να απαντάει στο ερώτημα «$\varphi \in \Sigma$».

- Ο αλγόριθμος ελέγχει αν η φ είναι της μορφής $\varphi = \varphi_1 \wedge \psi_1$.
- Αν δεν είναι, επιστρέφει $\varphi \notin \Sigma$.
- Αν είναι, τότε ελέγχει αν η ψ_1 είναι της μορφής $\psi_1 = \varphi_2 \wedge \psi_2$.
- Αν δεν είναι, επιστρέφει $\varphi \notin \Sigma$.
- Αν είναι συνεχίζει αυτή τη διαδικασία μέχρι να αποτύχει ο έλεγχος ή να φτάσει για κάποιο n, να ισχύει $\psi_{n-1} = \varphi_n$. Στην περίπτωση αυτή επιστρέφει $\varphi \in \Sigma$.

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι αποτελεσματικός, καθώς σε πεπερασμένο χρόνο βρίσκει αν $\varphi \in \Sigma$ ή αν $\varphi \notin \Sigma$. Επομένως το Σ είναι αλγοριθμικό σύνολο. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.15 Κάθε αξιωματικοποιήσιμη και πλήρης θεωρία είναι αλγοριθμική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εφ' όσον η T είναι αξιωματικοποιήσιμη, από την πρόταση 4.14 έπεται ότι θα είναι και αλγοριθμικά απαριθμήσιμη. Έστω, λοιπόν, μια απαρίθμηση των προτάσεών της $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$.

Αν η T είναι μη-συνεπής, τότε αποδεικνύει κάθε πρόταση της γλώσσας L, άρα $T = S(L)$. Το $S(L)$ είναι αλγοριθμικό, καθώς για κάθε φ έχουμε $\varphi \in S(L)$.

Αν η T είναι συνεπής, τότε για κάθε πρόταση φ, αφού η T είναι πλήρης, θα ισχύει $\varphi \in T$ ή $\neg\varphi \in T$. Για να ελέγξουμε αν μια τυχαία πρόταση φ ανήκει στην T, αρκεί να σχεδιάσουμε έναν αλγόριθμο που να διατρέχει όλα τα φ_i και να ελέγχει αν $\varphi_i \in T$ ή $\neg\varphi_i \in T$. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος δίνει απάντηση στο ερώτημα «$\varphi \in T$» σε πεπερασμένο χρόνο, άρα καταλήγουμε ότι μια πλήρης και αξιωματικοποιήσιμη θεωρία είναι αλγοριθμική. ■

Στα σύγχρονα μαθηματικά, μια θεωρία καθορίζεται από μια πρωτοβάθμια γλώσσα και τα αξιώματά της θεωρίας. Στις θεωρίες αυτές, τα σύνολα των αξιωμάτων είναι πεπερασμένα και επομένως οι θεωρίες που παράγονται από αυτά είναι πεπερασμένα αξιωματικοποιήσιμες. Από την πρόταση 4.14 έπεται ότι οι θεωρίες αυτές είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμες, δηλαδή οι προτάσεις που περιέχουν είναι δυνατόν να απαριθμηθούν.

Δύο από τις βασικότερες πρωτοβάθμιες θεωρίες είναι η αριθμητική Peano (PA) και η θεωρία συνόλων Zermelo-Frankel (ZFC). Η αριθμητική Peano περιγράφει την κλασσική θεωρία αριθμών και, παρ' ότι είναι μια σχετικά απλή θεωρία, αποδεικνύεται ότι δεν είναι πλήρης, δηλαδή ότι υπάρχουν προτάσεις, που μπορούν να διατυπωθούν στα πλαίσια της γλώσσας, οι οποίες δεν είναι δυνατόν να αποδειχθούν με βάση τα συντακτικά μέσα της θεωρίας. Η θεωρία συνόλων είναι μια αρκετά πιο πλούσια θεωρία, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει όλα τα σύγχρονα μαθηματικά. Αντικείμενα της θεωρίας συνόλων μπορούν να αντιστοιχηθούν σε όλα τα γνωστά μαθηματικά αντικείμενα και για αυτό το λόγο θεωρείται ότι αποτελεί θεμέλιο των μαθηματικών. Ακόμη και αντικείμενα σύνθετα, όπως οι τελεστές, οι συναρτήσεις και οι τοπολογίες, μπορούν να δημιουργηθούν με βάση αυτά τα απλά αξιώματα. Καθώς η ZFC περιλαμβάνει την αριθμητική Peano, η μη-πληρότητα της αριθμητικής Peano χαρακτηρίζει και τη θεωρία συνόλων.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ PEANO

Γλώσσα $L = \langle +, *, s; 0 \rangle$

Αξιώματα

(PA_1) $(\forall x)(s(x) \not\approx 0)$

το μηδέν δεν είναι επόμενος κάποιου αριθμού

(PA_2) $(\forall x)(\forall y)(s(x) \approx s(y) \to x \approx y)$

αν οι επόμενοι δύο αριθμών είναι ίσοι, οι δύο αυτοί αριθμοί είναι ίσοι

(PA_3) $(\forall x)(x + 0 \approx x)$

η πρόσθεση ενός αριθμού με το μηδέν δίνει ως αποτέλεσμα τον ίδιο αριθμό

(PA_4) $(\forall x)(\forall y)\big(x + s(y) \approx s(x + y)\big)$

αναδρομικός ορισμός της πρόσθεσης με βάση τη συνάρτηση του επόμενου αριθμού

(PA_5) $(\forall x)(x \cdot 0 \approx 0)$

ο πολλαπλασιασμός ενός αριθμού με το μηδέν δίνει ως αποτέλεσμα μηδέν

(PA_6) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot s(y) \approx x \cdot y + x)$

αναδρομικός ορισμός του πολλαπλασιασμού με βάση την πρόσθεση και τη συνάρτηση του επόμενου αριθμού

(PA_7) $\Big(\varphi(0) \land (\forall x)\Big(\varphi(x) \to \varphi\big(s(x)\big)\Big)\Big) \to (\forall x)\varphi(x)$

η αρχή της αριθμητικής επαγωγής

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ ZFC

Γλώσσα $L = \langle \in \rangle$

Αξιώματα

(ZFC_1) Αξίωμα της έκτασης

$(\forall x)(\forall y)\big((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x \approx y\big)$

ένα σύνολο χαρακτηρίζεται πλήρως από τα στοιχεία που περιέχει

(ZFC_2) Αξίωμα του κενού συνόλου

$(\exists x)(\forall y)(y \notin x)$

υπάρχει ένα σύνολο το οποίο δεν περιέχει στοιχεία και συμβολίζεται με $\emptyset$

(ZFC_3) Αξίωμα του ζεύγους

$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)\big(w \in z \leftrightarrow (w \approx x \lor w \approx y)\big)$

υπάρχει ένα σύνολο που τα περιέχει ως στοιχεία του τα σύνολα x και y

(ZFC_4) Αξίωμα της ένωσης

$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\big(z \in y \leftrightarrow (\exists w)(z \in w \land w \in x)\big)$

υπάρχει ένα σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία των στοιχείων του x

(ZFC_5) Αξίωμα του δυναμοσυνόλου

$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\big(z \in y \leftrightarrow (\forall w)(w \in z \to w \in x)\big)$

υπάρχει ένα σύνολο που έχει ως στοιχεία του όλα τα υποσύνολα του x

(ZFC_6) Αξίωμα της αντικατάστασης

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\Big(\big(\varphi(x,y) \land \varphi(x,z)\big) \to y \approx z\Big) \to (\forall u)(\exists v)(\forall w)\Big(w \in v \leftrightarrow (\exists t)\big(t \in u \land \varphi(t,w)\big)\Big)$

υπάρχει ένα σύνολο που έχει ως στοιχεία τις εικόνες των στοιχείων του u που ορίζει ο συναρτησιακός τύπος $\varphi(x,y)$

(ZFC_7) Αξίωμα του απείρου

$\big(\exists x)(\emptyset \in x \land (\forall y)(y \in x \to \{y\} \in I)\big)$

υπάρχει ένα σύνολο με άπειρο αριθμό στοιχείων

(ZFC_8) Αξίωμα της θεμελίωσης

$(\forall x)\big(x \not\approx \emptyset \to (\exists y)(y \in x \land y \cap x \approx \emptyset)\big)$

ένα σύνολο δεν μπορεί να περιέχει ως στοιχείο τον εαυτό του

(AC) Αξίωμα της επιλογής

$(\forall z)\Big((\forall x)\big((x \in z \to x \not\approx \emptyset) \land (\forall y)(y \in z \to x \cap y \approx \emptyset \lor x \approx y)\big) \to (\exists u)(\forall x)(\exists v)(x \in z \to u \cap x = \{v\})\Big)$

για κάθε σύνολο z που αποτελείται από μη-κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα, μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε σύνολο που ανήκει στο z

Τα αξιωματικά αυτά σύνολα αποτελούν τρόπον τινά a priori αλήθειες, τις οποίες αποδεχόμαστε για δομήσουμε πάνω σ' αυτές το μαθηματικό οικοδόμημα. Παρατηρούμε ότι η φύση των αξιωμάτων που έχουμε ορίσει είναι τέτοια ώστε να συμφωνούν απόλυτα με τη διαίσθηση και την εποπτεία μας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το αξίωμα της επιλογής, το οποίο είναι ισοδύναμο με το λήμμα του Zorn («αν κάθε αλυσίδα ενός μερικά διατεταγμένου χώρου P έχει άνω φράγμα, τότε ο P έχει μεγιστικό στοιχείο») και με το θεώρημα καλής διάταξης («για κάθε σύνολο μπορούμε να ορίσουμε μια καλή διάταξη»). Θα μπορούσαμε, επομένως, να ορίσουμε ως αξίωμα της ZFC κάποιο από τα δύο. Ωστόσο, και οι δύο προτάσεις είναι αρκετά πολύπλοκες και είναι δύσκολο να τις αποδεχθούμε a priori. Είναι σαφές ότι οι ισχυρισμοί που προβάλλουν χρήζουν απόδειξης. Αντίθετα, το αξίωμα της επιλογής προσφέρει ένα προφανές και αρκετά απλό στη σύλληψή του εργαλείο διαχείρισης του απείρου και για αυτό το λόγο μπορούμε να το θεωρήσουμε αξίωμα.

Για ορισμένα από τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων, όπως για παράδειγμα το αξίωμα του απείρου και το αξίωμα της επιλογής, έχει αποδειχθεί η σχετική τους συνέπεια με τα υπόλοιπα αξιώματα της ZFC. Αυτό σημαίνει ότι αν η θεωρία που παράγεται από τα υπόλοιπα αξιώματα της ZFC είναι μια συνεπής θεωρία, τότε η θεωρία που παράγεται από τα υπόλοιπα αξιώματα της ZFC και την κατάφαση ή την άρνηση αυτών των αξιωμάτων είναι και αυτή συνεπής. Η μελέτη, ωστόσο, ενός αξιωματικού συστήματος το οποίο περιέχει την άρνηση του αξιώματος του απείρου ή του αξιώματος της επιλογής δημιουργεί σημαντικά προβλήματα και περιορίζει κατά πολύ τη μαθηματική δημιουργία. Για παράδειγμα, το αξίωμα της επιλογής είναι ισοδύναμο με το λήμμα του Zorn, το οποίο αποτελεί ένα ισχυρότατο αποδεικτικό εργαλείο της ανάλυσης. Ως εκ τούτου, είναι προφανές ότι η άρνησή του θα περιόριζε κατά πολύ τα όρια της μαθηματικής δημιουργίας.

Η άρνηση ενός αξιώματος θα είχε νόημα μόνο στο βαθμό που κρίναμε ότι ένα αξίωμα αντιτίθεται στην κοινή αντίληψη και την εποπτεία που έχουμε για τα μαθηματικά αντικείμενα. Αρκετοί μαθηματικοί, αρνούμενοι την προφάνεια ορισμένων αξιωμάτων, έχουν δομήσει εναλλακτικές θεωρίες, οι οποίες περιορίζουν αισθητά τα όρια της μαθηματικής πρακτικής, προσφέροντας σε αντάλλαγμα μια θεώρηση που είναι εγγύτερη στα όρια της ανθρώπινης νόησης. Ωστόσο, παρά τις θυσίες σημαντικών αποτελεσμάτων των μαθηματικών, οι θεωρίες αυτές παραμένουν δέσμιες των περιορισμών που επιβάλλουν τα θεωρήματα μη-πληρότητας που θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΗ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ PA

Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της μαθηματικής λογικής είναι χωρίς αμφιβολία τα θεωρήματα μη-πληρότητας της αριθμητικής Peano, που αποδείχθηκαν από τον Kurt Gödel το 1931. Για να αποδείξει το πρώτο θεώρημα, ο Gödel κατασκεύασε με τα συντακτικά μέσα της γλώσσας μια πρόταση η οποία «υποστηρίζει» ότι δεν αποδεικνύεται. Η πρόταση αυτή, αν είναι αληθής, δεν είναι δυνατόν να αποδειχθεί με τα συντακτικά μέσα της γλώσσας. Για το δεύτερο θεώρημα, ο Gödel απέδειξε ότι η πρόταση αυτή είναι ισοδύναμη με τη συνέπεια της PA, δείχνοντας έτσι ότι αν η θεωρία αριθμών είναι συνεπής, δεν είναι δυνατόν να αποδείξει τη συνέπειά της.

Για τις ανάγκες της απόδειξης, είναι απαραίτητη μια τυποποίηση της έννοιας της αλγοριθμικότητας που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1 Έστω $X \subseteq \mathbb{N}$. **Χαρακτηριστική συνάρτηση** του X λέγεται η συνάρτηση $c_X : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ με $c_X(n) = \{^{1\ \alpha\nu\ n \in X}_{0\ \alpha\nu\ n \notin X}$.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση προσδιορίζει πλήρως τα στοιχεία του συνόλου X. Ένας αλγόριθμος ο οποίος υπολογίζει τις τιμές της $c_X(n)$ ουσιαστικά απαντάει στο ερώτημα «$x \in X$».

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.2 Έστω $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ και $h(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ συναρτήσεις n, $n-1$ και $n+1$ μεταβλητών αντίστοιχα. Η f λέγεται **αναδρομική ως προς** g και h αν για κάθε $\langle m, x_2, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{N}$ ισχύουν αντίστοιχα

(a) $f(0, x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n)$

(b) $f(m+1, x_1, x_2, \dots, x_n) = h(m, f(m, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_2, \dots, x_n)$

Ουσιαστικά, αν υπάρχει ένας αλγόριθμος που να υπολογίζει τις τιμές των g και h, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε αλγοριθμικά και τις τιμές της f.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.3 Το σύνολο των **βασικών αναδρομικών συναρτήσεων** ορίζεται από τους παρακάτω κανόνες. Δεν υπάρχουν άλλες βασικές αναδρομικές συναρτήσεις πέρα από αυτές που ορίζονται από τους κανόνες αυτούς.

(a) η συνάρτηση $s(x) = x + 1$ είναι βασική αναδρομική

(b) κάθε σταθερή συνάρτηση είναι βασική αναδρομική

(c) οι συναρτήσεις $p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ είναι βασικές αναδρομικές

(d) αν οι συναρτήσεις $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n), h(x_1, \dots, x_m)$ είναι βασικές αναδρομικές συναρτήσεις, τότε και η $f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1, \dots, g_m)$ είναι βασική αναδρομική

(e) αν οι συναρτήσεις g, h είναι βασικές αναδρομικές συναρτήσεις και η f είναι αναδρομική ως προς g, h, τότε και η f είναι βασική αναδρομική

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.4 Ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{N}^n$ λέγεται **βασικό αναδρομικό** αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση είναι βασική αναδρομική.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.5 Το σύνολο των **αναδρομικών συναρτήσεων** ορίζεται από τους παρακάτω κανόνες. Δεν υπάρχουν άλλες αναδρομικές συναρτήσεις πέρα από αυτές που ορίζονται από τους κανόνες αυτούς.

(a) οι βασικές αναδρομικές συναρτήσεις είναι αναδρομικές
(b) αν οι συναρτήσεις $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n), h(x_1, \dots, x_m)$ είναι αναδρομικές συναρτήσεις, τότε και η $f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1, \dots, g_m)$ είναι αναδρομική
(c) αν οι συναρτήσεις g, h είναι αναδρομικές και η f είναι αναδρομική ως προς g, h, τότε και η f είναι αναδρομική
(d) αν η συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n, y)$ είναι αναδρομική συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $\forall(x_1, \dots, x_n)(\exists y)(c_X(x_1, \dots, x_n, y) = 1)$ και (μy) ο τελεστής του ελάχιστου αριθμού του Kleene, τότε η συνάρτηση $g(x_1, \dots, x_n) = (\mu y)(f(x_1, \dots, x_n, y) = 1)$ είναι αναδρομική

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.6 Ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{N}^n$ λέγεται **αναδρομικό** αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση είναι αναδρομική.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.7 **Μερική συνάρτηση** είναι μια συνάρτηση $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ με $dom(f) \subseteq \mathbb{N}^n$. Η f λέγεται **ολική** αν $dom(f) = \mathbb{N}^n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.8 Το σύνολο των **μερικών βασικών αναδρομικών συναρτήσεων** ορίζεται από τους παρακάτω κανόνες. Δεν υπάρχουν άλλες βασικές αναδρομικές συναρτήσεις πέρα από αυτές που ορίζονται από τους κανόνες αυτούς.

(a) η συνάρτηση $f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in dom(f)$ είναι μερική βασική αναδρομική
(b) η σταθερή συνάρτηση $f(x) = k$ για κάθε $x \in dom(f)$ είναι μερική βασική αναδρομική
(c) η συνάρτηση $p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ με $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in dom(p_i)$ είναι μερική βασική αναδρομική
(d) αν οι συναρτήσεις $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n), h(x_1, \dots, x_m)$ είναι μερικές βασικές αναδρομικές συναρτήσεις, τότε και η $f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1, \dots, g_m)$ είναι μερική βασική αναδρομική
(e) αν οι συναρτήσεις g, h είναι μερικές βασικές αναδρομικές συναρτήσεις και η f είναι αναδρομική ως προς g, h, τότε και η f είναι μερική βασική αναδρομική

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.9 Το σύνολο των **μερικών αναδρομικών συναρτήσεων** ορίζεται από τους παρακάτω κανόνες. Δεν υπάρχουν άλλες αναδρομικές συναρτήσεις πέρα από αυτές που ορίζονται από τους κανόνες αυτούς.

(a) οι μερικές βασικές αναδρομικές συναρτήσεις είναι μερικές αναδρομικές

(b) αν η συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n, y)$ είναι αναδρομική συνάρτηση και (μy) ο τελεστής του ελάχιστου αριθμού του Kleene, τότε η συνάρτηση $g(x_1, \dots, x_n) = (\mu y)(f(x_1, \dots, x_n, y) = 1)$ είναι μερική αναδρομική

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.10 Ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{N}^n$ λέγεται **αναδρομικά απαριθμήσιμο** αν είναι πεδίο τιμών μιας μερικής αναδρομικής συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.11 Ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{N}^n$ είναι αναδρομικό αν και μόνο αν και το X και το $\overline{X}$ είναι αναδρομικά απαριθμήσιμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η αναδρομικότητα αποτελεί μια τυποποίηση της έννοιας της αλγοριθμικότητας, επομένως η απόδειξη της πρότασης ακολουθεί την ίδια συλλογιστική πορεία με την απόδειξη της πρότασης 4.10. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.12 **Προβολή** ενός συνόλου $X \subseteq \mathbb{N}^n$ στην i-οστή συντεταγμένη είναι το σύνολο $p_i(X) = \{x_i : (\exists x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)(\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in X)\}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.13 Ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{N}^n$ είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο αν και μόνο αν είναι προβολή ενός αναδρομικού συνόλου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Rightarrow$ Έστω ότι το X είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο. Τότε έχουμε από τον ορισμό ότι $X = rng(f)$ για κάποια μερική αναδρομική συνάρτηση f. Θέτουμε μια ολική συνάρτηση g τέτοια ώστε $rng(g) = dom(f)$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την ολική συνάρτηση $h = f \circ g$. Η συνάρτηση αυτή είναι αναδρομική και επίσης ισχύει ότι $X = rng(h)$.

Το X είναι πεδίο τιμών της αναδρομικής συνάρτησης h, επομένως ισχύει ότι $y \in X \leftrightarrow (\exists x)(h(x) = y) \leftrightarrow (\exists x)(\langle x, y \rangle \in G_h)$, όπου $G_h = \langle x, h(x) \rangle$ είναι το γράφημα της h.

Αν η h είναι αναδρομική συνάρτηση, τότε το G_h είναι αναδρομικό σύνολο.

Άρα το X είναι προβολή του αναδρομικού συνόλου G_h.

$\Leftarrow$ Έστω ότι το X είναι προβολή ενός αναδρομικού συνόλου R, δηλαδή $x \in X \leftrightarrow (\exists y)(\langle x, y \rangle \in R)$.

Το R είναι αναδρομικό σύνολο, άρα μπορούμε να ορίσουμε έναν αλγόριθμο που να ελέγχει για δοθέν x και $i = 1,2, \dots$ αν $\langle x, i \rangle \in R$.

Με βάση αυτόν τον αλγόριθμο ορίζουμε μια μερική αναδρομική συνάρτηση g. Αν για κάποιο i ισχύει $\langle x, i \rangle \in R$, τότε θέτουμε $g(x) = 1$, ενώ σε διαφορετική περίπτωση θεωρούμε ότι η g δεν ορίζεται στο x.

Έχουμε ότι $X = dom(g)$. Το X είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο αν ισχύει $X = rng(f)$ για κάποια μερική αναδρομική συνάρτηση f. Ουσιαστικά λοιπόν η απόδειξη έγκειται στην κατασκευή μιας μερικής αναδρομικής συνάρτησης που έχει ως πεδίο τιμών το πεδίο ορισμού μιας άλλης μερικής αναδρομικής συνάρτησης.

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό, είναι απαραίτητο να δεχθούμε ότι μια μερική αναδρομική συνάρτηση περιγράφει και περιγράφεται από κάποιον αλγόριθμο ή ισοδύναμα από μια μηχανή Turing που υλοποιεί τον αλγόριθμο. Η τυπική απόδειξη του ισχυρισμού παραλείπεται, αλλά δεδομένου ότι ο τρόπος ορισμού των μερικών αναδρομικών συναρτήσεων είναι επαγωγικός είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι ισχύει αυτή η σχέση, δηλαδή ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος που είναι ισοδύναμος με μια μερική αναδρομική συνάρτηση.

Αν θεωρήσουμε μια μηχανή Turing που παίρνει σαν ορίσματα τιμές από το πεδίο ορισμού της g, μπορούμε να θεωρήσουμε μια άλλη μηχανή Turing η οποία επιστρέφει στοιχεία από το πεδίο ορισμού της g. Για το πρώτο στοιχείο από το πεδίο ορισμού που θα επιστρέψει θέτουμε $f(1) = x_1$, για το δεύτερο $f(2) = x_2$ και ούτως καθ' εξής. Η συνάρτηση f υλοποιείται από μια μηχανή Turing, οπότε είναι μερική αναδρομική και έχει ως σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της g. Επομένως $X = rng(f)$, άρα το X είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.14 Ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{N}^n$ λέγεται **ασθενώς περιγράψιμο** αν υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ τέτοιος ώστε για κάθε $\langle m_1, \dots, m_n \rangle$ να ισχύει $\langle m_1, \dots, m_n \rangle \in X \Leftrightarrow PA \vdash \varphi(m_1, \dots, m_n)$. Το X λέγεται **περιγράψιμο** αν ισχύει ακόμη $\langle m_1, \dots, m_n \rangle \notin X \Leftrightarrow PA \vdash \neg\varphi(m_1, \dots, m_n)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.15 Κάθε αναδρομικό σύνολο είναι περιγράψιμο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ένα αναδρομικό σύνολο X. Η χαρακτηριστική του συνάρτηση θα είναι αναδρομική.

Για να δείξουμε ότι το ένα αναδρομικό σύνολο X είναι περιγράψιμο, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε αναδρομική συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n) = y$ υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ τέτοιος ώστε $f(m_1, \dots, m_n) = m \Leftrightarrow PA \vdash \varphi(m_1, \dots, m_n, m)$.

Θεωρώντας τη συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n)$ χαρακτηριστική συνάρτηση του X, έχουμε ότι $f(m_1, \dots, m_n) = m$ ισοδυναμεί με $\langle m_1, \dots, m_n \rangle \in X$ και ότι $f(m_1, \dots, m_n) \neq m$ ισοδυναμεί με $\langle m_1, \dots, m_n \rangle \notin X$.

Ο Gödel, αρκέστηκε στην απόδειξη της πρότασης να πει ότι εφ' όσον η $f(x_1, \dots, x_n)$ ορίζεται επαγωγικά, τότε σε κάθε βήμα της «δημιουργίας» της, μπορούμε να αντιστοιχήσουμε έναν τύπο φ_i. Είναι προφανές ότι ο τύπος αυτός εκφράζει μια στοιχειώδη αριθμητική σχέση, που το σύνολο που δημιουργεί είναι περιγράψιμο. Για παράδειγμα αν $f(x) = x + 1$, τότε έχουμε $x + 1 = y \Leftrightarrow PA \vdash s^x(0) + s(0) = s^y(0)$. Έτσι, αν ισχύει η σχέση $f(m_1, \dots, m_n) = m$ έχουμε $PA \vdash \varphi(m_1, \dots, m_n, m)$, ενώ αν ισχύει $f(m_1, \dots, m_n) \neq m$ έχουμε $PA \vdash \neg\varphi(m_1, \dots, m_n, m)$. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.16 Κάθε περιγράψιμο σύνολο είναι αναδρομικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω X περιγράψιμο σύνολο και $\varphi(x)$ ο τύπος που το περιγράφει.

Από τον ορισμό θα έχουμε $n \in X \iff PA \vdash \varphi(n)$ και $n \notin X \iff PA \vdash \neg\varphi(n)$.

Το σύνολο των θεωρημάτων της PA είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε μια αναδρομική απαρίθμηση $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ των θεωρημάτων της PA.

Για να αποδείξουμε ότι το X είναι αναδρομικό σύνολο, πρέπει να φτιάξουμε έναν αλγόριθμο που να απαντάει στο ερώτημα «$n \in X$».

Θεωρούμε έναν αλγόριθμο που ελέγχει με τη σειρά τις προτάσεις $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ και τερματίζει για όποιο m ισχύει $\varphi_m = \varphi(n)$ ή $\varphi_m = \neg\varphi(n)$.

Καθώς το X είναι περιγράψιμο, ο αλγόριθμος αυτός θα τερματίσει σε πεπερασμένο χρόνο, άρα είναι αποτελεσματικός.

Άρα, αν το X είναι περιγράψιμο, τότε είναι και αναδρομικό. ∎

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.17 Ένα σύνολο είναι ασθενώς περιγράψιμο αν και μόνο αν είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Rightarrow$ Έστω X ασθενώς περιγράψιμο σύνολο και $\varphi(x)$ ο τύπος που το περιγράφει ασθενώς.

Από τον ορισμό θα έχουμε $n \in X \iff PA \vdash \varphi(n)$

Απαριθμούμε και πάλι τα θεωρήματα της PA και έχουμε $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

Θέτουμε τη συνάρτηση $c(n) = \begin{cases} 1 \text{ αν υπάρχει } i \text{ τέτοιο ώστε } \varphi_i = \varphi(n) \\ \text{δεν ορίζεται για } n \text{ αν δεν υπάρχει τέτοιο } i \end{cases}$.

Η συνάρτηση αυτή είναι μερική αναδρομική, καθώς ενδεχομένως να μην ορίζεται για κάποια n. Το πεδίο ορισμού της είναι όλα τα στοιχεία για τα οποία ισχύει $n \in X$.

Επομένως, το X είναι το πεδίο ορισμού μιας μερικής αναδρομικής συνάρτησης, άρα το X είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο.

$\Leftarrow$ Έστω ότι το X είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένα αναδρομικό σύνολο R τέτοιο ώστε το X να είναι προβολή του R, δηλαδή $n \in X \Leftrightarrow (\exists x)(\langle x, n \rangle \in R)$.

Το R, αφού είναι αναδρομικό, είναι περιγράψιμο και έστω $\varphi(x,y)$ ο τύπος που το περιγράφει, δηλαδή ισχύει $\langle x, y \rangle \in R \iff PA \vdash \varphi(x,y)$.

Τότε, έχουμε $n \in X \Leftrightarrow (\exists x)(\langle x, n \rangle \in R) \Leftrightarrow (\exists x)\big(PA \vdash \varphi(x,n)\big) \Rightarrow PA \vdash (\exists x)\big(\varphi(x,n)\big)$, άρα $n \in X \Rightarrow PA \vdash (\exists x)\big(\varphi(x,n)\big)$.

Επίσης, έχουμε $PA \vdash (\exists x)\big(\varphi(x,n)\big) \Rightarrow (\exists x)(\langle x, y \rangle \in R\,) \Leftrightarrow n \in X$, άρα $PA \vdash (\exists x)\big(\varphi(x,n)\big) \Rightarrow n \in X$.

Επομένως ο τύπος $(\exists x)\big(\varphi(x,n)\big)$ περιγράφει ασθενώς το σύνολο X, άρα το X είναι ασθενώς περιγράψιμο. ∎

Με βάση τους ορισμούς αυτών των εννοιών και τα αποτελέσματα που τις συνδέουν, μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη των θεωρημάτων μη-πληρότητας του Gödel. Το πρώτο βήμα της απόδειξης είναι η ομώνυμη κωδικοποίηση, η οποία αποδίδει ένα μοναδικό φυσικό αριθμό σε κάθε έκφραση της θεωρίας αριθμών.

Ο Gödel χρησιμοποίησε μια αρίθμηση των πρώτων αριθμών, όπου p_n ο n-οστός πρώτος και έπειτα απένειμε ένα μοναδικό φυσικό αριθμό στα σύμβολα της γλώσσας $L = \{+, *, s, 0, =, \neg, \rightarrow, \exists, (\,,)\} \cup \{x_n \in \mathbb{N}\}$

$G(0) = 0$	$G(=) = 4$	$G(() = 8$
$G(+) = 1$	$G(\neg) = 5$	$G()) = 9$
$G(*) = 2$	$G(\rightarrow) = 6$	$G(x_n) = 10 + n$
$G(s) = 3$	$G(\exists) = 7$	

Στη συνέχεια, σε κάθε ακολουθία $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ στοιχείων της γλώσσας L αντιστοίχησε ένα μοναδικό φυσικό αριθμό, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\ulcorner a_1, a_2, \dots, a_n \urcorner = {p_1}^{G(a_1)+1} * {p_2}^{G(a_2)+1} * \dots * {p_n}^{G(a_n)+1}$.

Ο εκθέτης στον οποίο υψώνεται κάθε πρώτος αριθμός δείχνει το σύμβολο της γλώσσας που υπάρχει στην αντίστοιχη θέση της έκφρασης. Με αυτό τον τρόπο, σε κάθε έκφραση της γλώσσας αντιστοιχεί ένας μοναδικός φυσικός αριθμός, ενώ σε ορισμένους αριθμούς μια μοναδική έκφραση.

Για παράδειγμα, στην έκφραση $x_1 = 0$ αντιστοιχεί ο αριθμός $\ulcorner x_1 = 0 \urcorner = {p_1}^{G(x_1)+1} * {p_2}^{G(=)+1} * {p_3}^{G(0)+1} = 2^{11+1} * 3^{4+1} * 5^{0+1} = 2^{12} * 3^5 * 5^1 = 4096 * 243 * 5 = 4.976.640$.

Είναι σαφές, όμως, ότι δεν αντιστοιχεί σε κάθε φυσικό αριθμό και κάποια έκφραση της γλώσσας. Για παράδειγμα στον αριθμό 49 θα έπρεπε να αντιστοιχεί μια έκφραση με κενές τις τρεις πρώτες θέσεις και το σύμβολο " + " στην τέταρτη.

Η πρακτική αξία της ανωτέρω κωδικοποίησης είναι μηδαμινή. Ακόμη και πολύ απλές εκφράσεις κωδικοποιούνται από πολύ μεγάλους αριθμούς και η χρήση της είναι εξαιρετικά δυσχερής. Ωστόσο, η θεωρητική της αξία είναι τεράστια, καθώς προσφέρει μια μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των εκφράσεων της αριθμητικής Peano και των φυσικών αριθμών.

Με βάση την κωδικοποίηση Gödel είναι πλέον προφανές ότι τα σύνολα $Var = \{\ulcorner x_n \urcorner : n \in \mathbb{N}\}$, $Num = \{\ulcorner n \urcorner : n \in \mathbb{N}\}$, $Term = \{\ulcorner t \urcorner : t \in T(L)\}$, $Fml = \{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \in F(L)\}$ και $Sent = \{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \in S(L)\}$ είναι αναδρομικά υποσύνολα του $\mathbb{N}$.

Όλες οι παραπάνω έννοιες ορίζονται επαγωγικά. Επομένως έχουμε έναν αλγόριθμο ελέγχου για το αν μια έκφραση είναι, για παράδειγμα, τύπος ή αν είναι πρόταση. Επίσης, με βάση την κωδικοποίηση Gödel έχουμε έναν αλγόριθμο για μετατρέπουμε μια έκφραση σε αριθμό και αντίστροφα. Επομένως μπορούμε να φτιάξουμε έναν αλγόριθμο που να ελέγχει αν ένας αριθμός αποτελεί κώδικα ενός τύπου ή μιας πρότασης.

Επίσης καθώς το σύνολο των αξιωμάτων της PA και του $K\Lambda$ είναι αλγοριθμικό, έπεται ότι και το σύνολο $Ax = \{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi\ \alpha\xi\acute{\iota}\omega\mu\alpha\ \tau\eta\varsigma\ PA\ \acute{\eta}\ \tau o\upsilon\ K\Lambda\}$ είναι αναδρομικό.

Στη συνέχεια χρειαζόμαστε μια κωδικοποίηση της έννοιας της απόδειξης. Όπως έχουμε δει, μια απόδειξη είναι μια ακολουθία τύπων της μορφής $A = \langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle$. Με βάση αυτά, είναι προφανές ότι η κωδικοποίηση της απόδειξης A, θα είναι $\ulcorner A \urcorner = 2^{\ulcorner \varphi_1 \urcorner + 1} * 3^{\ulcorner \varphi_2 \urcorner + 1} * \ldots * {p_n}^{\ulcorner \varphi_n \urcorner + 1}$.

Ο ορισμός της απόδειξης είναι αλγοριθμικός, επομένως και το σύνολο $Proof = \{< \ulcorner A \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner > : \eta\ A\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \alpha\pi\acute{o}\delta\varepsilon\iota\xi\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varphi\ \sigma\tau\eta\nu\ PA\}$ είναι αναδρομικό.

Το σύνολο των θεωρημάτων της PA $Con(PA) = \{\langle \varphi \rangle : (\exists A)(\langle \ulcorner A \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle \in Proof\}$ είναι προβολή του αναδρομικού συνόλου $Proof$, άρα αναδρομικά απαριθμήσιμο.

Το σύνολο $Proof$ είναι αναδρομικό, άρα και περιγράψιμο και έστω $Pr(x, y)$ τύπος της L που το περιγράφει. Θέτοντας $B(x) = (\exists y) Pr(x, y)$ έχουμε ότι ο τύπος $B(x)$ περιγράφει ασθενώς το $Con(PA)$, δηλαδή για κάθε m ισχύει $m \in Con(PA) \Leftrightarrow PA \vdash B(m)$.

Ο τύπος $B(x)$ κωδικοποιεί την έννοια της αποδειξιμότητας, καθώς σημαίνει «ο τύπος x αποδεικνύεται στην PA».

ΛΗΜΜΑ 5.18 Για κάθε πρόταση φ ισχύει $PA \vdash \varphi \Leftrightarrow PA \vdash B(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$PA \vdash \varphi \Leftrightarrow \ulcorner \varphi \urcorner \in Con(PA) \Leftrightarrow PA \vdash B(\ulcorner \varphi \urcorner)$ ■

ΛΗΜΜΑ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗΣ 5.19 Έστω $\varphi(x)$ ένας τύπος μιας ελεύθερης μεταβλητής. Τότε υπάρχει μια πρόταση ψ τέτοια ώστε $PA \vdash \big(\psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)\big)$. Ειδικότερα για $\varphi(x) = \neg B(x)$ έχουμε $PA \vdash \big(\psi \leftrightarrow \neg B(\ulcorner \psi \urcorner)\big)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ το σύνολο των αριθμών Gödel των τύπων της L με μοναδική ελεύθερη μεταβλητή το x.

Το S είναι αναδρομικό, άρα σε κάποιον τύπο $\varphi(x) \in S$ μπορούμε να αντιστοιχεί ένας αριθμός Gödel $\ulcorner \varphi(x) \urcorner = n$. Τον αριθμό του μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως δείκτη του $\varphi(x)$ και να έχουμε $\varphi_n = \ulcorner \varphi_n \urcorner = n$.

Τότε, το S γράφεται ως $S = \{\varphi_n(x) : n \in S\}$.

Η απεικόνιση $sub : S \to \mathbb{N}$ με $sub(\varphi_n) = \ulcorner \varphi_n(n) \urcorner$ είναι αναδρομική, άρα και περιγράψιμη.

Για κάθε $\varphi(x) \in S$, μπορούμε να θέσουμε $\sigma(x) = \varphi\big(sub(\varphi_x)\big) = \varphi(\ulcorner \varphi_x(x) \urcorner)$.

Ο $\sigma(x)$ είναι τύπος της L με ελεύθερη μεταβλητή το x, άρα $\sigma(x) \in S$.

Αν θέσουμε $m = \ulcorner \sigma(x) \urcorner$, έχουμε $\varphi_m(x) \in S$ και συγκεκριμένα $\varphi_m(x) = \sigma(x)$.

Ο τύπος $\sigma(m)$, είναι τύπος μιας ελεύθερης μεταβλητής. Επομένως, μπορούμε να θέσουμε $x = m$ και να πάρουμε $\sigma(m) = \varphi_m(m) = \psi$, που είναι η ζητούμενη πρόταση.

Επειδή η απεικόνιση sub είναι περιγράψιμη, ισχύει $PA \vdash \big(\psi \leftrightarrow \varphi_m(m) \leftrightarrow \sigma(m) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \varphi_m(m) \urcorner) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)\big)$. ■

Για $\varphi(x) = \neg B(x)$, η πρόταση ψ για την οποία ισχύει η παραπάνω σχέση καλείται **πρόταση Gödel** και ουσιαστικά υποστηρίζει ότι δεν αποδεικνύεται.

Η πρόταση αυτή θυμίζει σε μεγάλο βαθμό το παράδοξο του ψεύτη, την πρόταση δηλαδή «η πρόταση αυτή είναι ψευδής». Η αυτοαναφορά που περιέχει η πρόταση Gödel, σε μεγάλο βαθμό, ξενίζει και δημιουργεί την εντύπωση ότι οδηγεί και αυτή σε παράδοξα. Ωστόσο, το λήμμα διαγωνοποίησης αποδεικνύει ότι μια τέτοιου είδους αυτοαναφορά, ακόμη και αν ξενίζει, είναι θεμιτή, καθώς για κάθε τύπο φ μιας ελεύθερης μεταβλητής φ, υπάρχει ένα **σταθερό σημείο**, δηλαδή ένας τύπος ψ, έτσι ώστε $PA \vdash \varphi(\ulcorner \psi \urcorner) \leftrightarrow \psi$.

Α' ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΗ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 5.20 Αν η PA είναι συνεπής, τότε υπάρχει πρόταση ψ τέτοια ώστε $PA \nvdash \psi$ και $PA \nvdash \neg\psi$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θα αποδείξουμε την πρόταση με εις άτοπο απαγωγή.

Έστω $PA \vdash \psi$. Έχουμε από το λήμμα διαγωνοποίησης ότι $PA \vdash \big(\psi \leftrightarrow \neg B(\ulcorner \psi \urcorner)\big)$, άρα καταλήγουμε ότι $PA \vdash \neg B(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Από το λήμμα 5.18 έχουμε ότι $PA \vdash \psi \Leftrightarrow PA \vdash B(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Καταλήγουμε ότι $PA \vdash B(\ulcorner \psi \urcorner)$ και $PA \vdash \neg B(\ulcorner \psi \urcorner)$, που είναι άτοπο, καθώς έχουμε υποθέσει ότι η PA είναι συνεπής.

Έστω $PA \vdash \neg\psi$. Από το λήμμα διαγωνοποίησης έχουμε ότι $PA \vdash \big(\neg\psi \leftrightarrow \neg\neg B(\ulcorner \psi \urcorner)\big)$, άρα καταλήγουμε ότι $PA \vdash B(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Από το λήμμα 5.18 έχουμε ότι $PA \vdash \neg\psi \Leftrightarrow PA \vdash \neg B(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Και πάλι καταλήγουμε ότι $PA \vdash B(\ulcorner \psi \urcorner)$ και $PA \vdash \neg B(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Άρα, αν η PA είναι συνεπής, τότε υπάρχει πρόταση ψ τέτοια ώστε $PA \nvdash \psi$ και $PA \nvdash \neg\psi$. ■

Η πρόταση Gödel είναι προφανώς αληθής στη συνήθη ερμηνεία της θεωρίας αριθμών, καθώς αυτό το οποίο υποστηρίζει, δηλαδή ότι δεν αποδεικνύεται, αποδεικνύεται ότι ισχύει. Θα μπορούσε να υποστηρίξει κανείς ότι ο ισχυρισμός αυτός είναι μια απόδειξη της πρότασης Gödel. Ωστόσο, ο ισχυρισμός αυτός, παρ' ότι είναι ορθός, δεν αποτελεί απόδειξη με τα συντακτικά μέσα της γλώσσας της θεωρίας αριθμών.

Η πρόταση Gödel δεν είναι αληθής σε όλα τα μοντέλα της αριθμητικής Peano. Λόγω του θεωρήματος πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού, πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα μοντέλο στο οποίο να είναι ψευδής, καθώς αν ήταν αληθής σε κάθε μοντέλο θα ήταν και αποδείξιμη. Η ύπαρξη ενός τέτοιου μοντέλου προφανώς μας ξενίζει. Αν η πρόταση Gödel είναι ψευδής, τότε δεν ισχύει ο ισχυρισμός της, οπότε αποδεικνύεται. Στην περίπτωση αυτή η αριθμητική Peano αποδεικνύει μια ψευδή πρόταση. Από το θεώρημα ορθότητας του προτασιακού λογισμού έχουμε ότι ένα συνεπές σύνολο αξιωμάτων δεν είναι δυνατόν να αποδεικνύει μια ψευδή πρόταση. Επομένως, καταλήγουμε ότι το σύνολο των αξιωμάτων, τουλάχιστον για το συγκεκριμένο μοντέλο, πρέπει να είναι μη-συνεπές.

Οι παραδοχές που έχουν γίνει για την απόδειξη της μη-πληρότητας της PA, είναι εξαιρετικά ασθενείς και αφορούν θεμελιώδη χαρακτηριστικά της θεωρίας αριθμών. Για αυτό το λόγο και η μη-πληρότητα της PA επεκτείνεται σε οποιαδήποτε θεωρία την εμπεριέχει. Αντιθέτως, ασθενέστερες θεωρίες, που δεν περιέχουν την PA, μπορεί να είναι πλήρεις. Για παράδειγμα, η θεωρία πυκνής ολικής διάταξης χωρίς άκρα και η αριθμητική Presburger, που δεν περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό των φυσικών αριθμών, αποδεικνύεται ότι είναι πλήρεις θεωρίες.

Το Α' θεώρημα μη-πληρότητας μας πληροφορεί ουσιαστικά ότι υπάρχουν προτάσεις στην PA οι οποίες, αν και είναι αληθείς, δεν είναι δυνατόν να αποδειχθούν με βάση τα συντακτικά μέσα της γλώσσας της θεωρίας. Είναι σαφές ότι η ιδιότητα αυτή της θεωρίας αριθμών αποτελεί κάποιου είδους ατέλεια. Μια επέκταση του συνόλου των αξιωμάτων δε θα έλυνε το πρόβλημα. Η μοναδική παραδοχή του θεωρήματος που αφορά το σύνολο των αξιωμάτων είναι ότι είναι αλγοριθμικό. Η προσθήκη μερικών ακόμη αξιωμάτων, θα διατηρούσε την αλγοριθμικότητα του συνόλου, οπότε το θεώρημα θα συνέχιζε να είναι έγκυρο. Από την άλλη, η αποδοχή ενός μη-αλγοριθμικού συνόλου, ως συνόλου αξιωμάτων της PA, θα στερούσε πλήρως τη θεμελίωσή της σε ένα ελέγξιμο σύνολο παραδοχών και θα κατέστρεφε την έννοια της απόδειξης.

Παράλληλα, όμως, πέρα από την αξία του θεωρήματος αυτού καθ' εαυτού, εξαιρετικά σημαντική είναι και η αποδεικτική διαδικασία που ακολουθήθηκε. Τα δύο θεωρήματα που ακολουθούν είναι άμεσες εφαρμογές των εργαλείων που αναπτύχθηκαν από τον Gödel για την απόδειξη του Α' θεωρήματος μη-πληρότητας. Το πρώτο θεώρημα αποδίδεται στον Tarski και αναφέρεται στην αδυναμία τυποποίησης της έννοιας της αλήθειας με βάση τα συντακτικά μέσα της PA. Το δεύτερο θεώρημα οφείλεται στον Gödel και αναφέρεται σε προτάσεις που αν και είναι αποδείξιμες στα πλαίσια της PA, το μήκος της απόδειξης είναι τέτοιο που ουσιαστικά είναι αδύνατον να υλοποιηθεί η απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.21 Η έννοια της αλήθειας δεν μπορεί να τυποποιηθεί με τα συντακτικά μέσα της PA.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι το σύνολο $Tr = \{\varphi : PA \vDash \varphi\}$ είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμο. Τότε υπάρχει ένας τύπος $C(x)$ ο οποίος το περιγράφει και έχουμε $m \in Tr \Leftrightarrow PA \vdash C(m)$.

Αν θέσουμε στο λήμμα διαγωνοποίησης $\varphi(x) = \neg C(x)$ έχουμε ότι υπάρχει μια πρόταση ψ, τέτοια ώστε $PA \vdash \left(\psi \leftrightarrow \neg C(\ulcorner \psi \urcorner)\right)$.

Αν ψ αληθής, τότε $\neg C(\ulcorner \psi \urcorner)$ αληθής, επομένως $C(\ulcorner \psi \urcorner)$ ψευδής, άρα ψ ψευδής.

Αν ψ ψευδής, τότε $\neg C(\ulcorner \psi \urcorner)$ ψευδής, επομένως $C(\ulcorner \psi \urcorner)$ αληθής, άρα ψ αληθής.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, οδηγούμαστε σε αντίφαση. Άρα, αν η PA είναι συνεπής, δεν μπορεί να τυποποιήσει την έννοια της αλήθειας. ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.22 Έστω ότι η PA είναι συνεπής. Αν f ολική αναδρομική συνάρτηση, τότε υπάρχει πρόταση ψ η οποία είναι αποδείξιμη από την PA και το μήκος της απόδειξης είναι μεγαλύτερο από $f(\ulcorner \psi \urcorner)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ως μήκος, εν προκειμένω, θεωρούμε τον αριθμό των συμβόλων που υπάρχουν στην απόδειξη της ψ.

Για δεδομένο n, το σύνολο των αποδείξεων με μήκος μικρότερο ή ίσο του $f(n)$ είναι πεπερασμένο, άρα και αναδρομικό. Το σύνολο των προτάσεων που η απόδειξη τους έχει μήκος μικρότερο ή ίσο με $f(n)$ είναι και αυτό αναδρομικό, άρα και περιγράψιμο.

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε τον τύπο $D(n)$ που τυποποιεί την έννοια «ο $D(n)$ δεν αποδεικνύεται από κάποια έκφραση με μήκος μικρότερο ή ίσο από $f(n)$».

Ο τύπος $D(n)$ είναι αληθής για κάθε n. Θα το αποδείξουμε με εις άτοπο επαγωγή.

Έστω ότι υπήρχε n_0 για το οποίο δεν ίσχυε ο ισχυρισμός του $D(n)$. Τότε, για αυτό το n_0, υπάρχει απόδειξη του $D(n_0)$ με μήκος μικρότερο ή ίσο από $f(n_0)$. Από το θεώρημα ορθότητας, ωστόσο, έχουμε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχει απόδειξη κάποιας ψευδούς πρότασης, δεδομένου ότι έχουμε θεωρήσει ότι η PA είναι συνεπής. Επομένως, οδηγούμαστε σε αντίφαση και απορρίπτουμε την περίπτωση να υπάρχει n_0 για το οποίο είναι ψευδής η $D(n_0)$.

Στο λήμμα διαγωνοποίησης μπορούμε να θέσουμε $\varphi(x) = D(x)$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $PA \vdash \left(\psi \leftrightarrow D(\ulcorner \psi \urcorner)\right)$.

Μπορούμε να ελέγξουμε αν υπάρχει απόδειξη της ψ με μήκος μικρότερο ή ίσο από $f(\ulcorner \psi \urcorner)$. Αρκεί να ελέγξουμε όλες τις εκφράσεις της γλώσσας με μήκος μικρότερο ή ίσο από $f(\ulcorner \psi \urcorner)$ και να δούμε αν κάποια από αυτές αποδεικνύει την ψ. Επομένως η πρόταση $D(\ulcorner \psi \urcorner)$ είναι αποκρίσιμη. Επομένως αποδεικνύεται είτε η $D(\ulcorner \psi \urcorner)$, είτε η $\neg D(\ulcorner \psi \urcorner)$

Δεδομένου ότι $D(\ulcorner \psi \urcorner) \leftrightarrow \psi$ και ψ αληθής πρόταση, δεν γίνεται να αποδεικνύεται η πρόταση $\neg D(\ulcorner \psi \urcorner)$, διότι τότε θα αποδεικνυόταν και η ψευδής πρόταση $\neg\psi$.

Επομένως, αποδεικνύεται η $D(\ulcorner \psi \urcorner)$ και συνεπάγεται την απόδειξη της ψ.

Άρα, καταλήγουμε ότι η ψ αποδεικνύεται, αλλά η απόδειξή της έχει μήκος μεγαλύτερο από $f(\ulcorner \psi \urcorner)$. ■

Μια ακόμη άμεση και πολύ σημαντική συνέπεια του Α' θεωρήματος μη-πληρότητας είναι το Β' θεώρημα μη-πληρότητας, το οποίο εξετάζει τη συνέπεια της PA.

Θεωρούμε χ μια αντίφαση της L. Με βάση τον τύπο $B(x)$, ο οποίος τυποποιεί την αποδειξιμότητα μιας πρότασης x στα πλαίσια της PA, ορίζουμε τον τύπο $Cns(PA) = \neg B(\ulcorner \chi \urcorner)$. Ο τύπος αυτός υποστηρίζει ότι, αν χ μια αντίφαση, τότε δεν υπάρχει απόδειξη της αντίφασης αυτής από τα συντακτικά μέσα της θεωρίας. Ουσιαστικά, λοιπόν, ο τύπος $Cns(PA)$ τυποποιεί την έννοια της συνέπειας της PA.

ΛΗΜΜΑ 5.23 Ο τύπος $B(x)$ ικανοποιεί για κάθε φ και σ τις ακόλουθες συνθήκες.

(a) $PA \vdash B(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge B(\ulcorner \varphi \to \sigma \urcorner) \to B(\ulcorner \sigma \urcorner)$

(b) $PA \vdash B(\ulcorner \varphi \urcorner) \to B\big(B(\ulcorner \varphi \urcorner)\big)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(a) Ο τύπος $B(\ulcorner \varphi \urcorner)$ μας δείχνει ότι υπάρχει μια απόδειξη της φ, έστω η A_1.

Ο τύπος $B(\ulcorner \varphi \to \sigma \urcorner)$ δείχνει ότι υπάρχει μια απόδειξη της $\varphi \to \sigma$, έστω η A_2.

Η απόδειξη της σ θα είναι η $\langle A_1, A_2, MP(A_{1,}A_2)\rangle$.

Επομένως, υπάρχει απόδειξη της σ από την PA, άρα από το λήμμα 5.18 έπεται ότι $PA \vdash B(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge B(\ulcorner \varphi \to \sigma \urcorner) \to B(\ulcorner \sigma \urcorner)$

(b) Ο τύπος $B(\ulcorner \varphi \urcorner)$ μας δείχνει ότι υπάρχει μια απόδειξη της ψ, επομένως αποδεικνύει ότι $B(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Επομένως υπάρχει μια απόδειξη της $B(\ulcorner \varphi \urcorner)$ από την PA, άρα από το λήμμα 5.18 έπεται ότι $PA \vdash B(\ulcorner \varphi \urcorner) \to B\big(B(\ulcorner \varphi \urcorner)\big)$. ■

ΛΗΜΜΑ 5.24 Έστω ψ η πρόταση Gödel. Τότε ισχύει $PA \vdash \psi \leftrightarrow Cns(PA)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\to$ Έστω χ μια αντίφαση της T. Από τον κατηγορηματικό λογισμό έχουμε ότι για κάθε πρόταση φ ισχύει $PA \vdash \chi \to \varphi$. Επομένως έχουμε $PA \vdash \chi \to \psi$.

Από το λήμμα 5.18 παίρνουμε $PA \vdash B(\ulcorner \chi \to \psi \urcorner)$.

Από τη σχέση 5.23(a) παίρνουμε $PA \vdash B(\ulcorner \chi \urcorner) \wedge B(\ulcorner \chi \to \psi \urcorner) \to B(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Εφ' όσον, όμως, ισχύει $PA \vdash B(\ulcorner \chi \to \psi \urcorner)$, έχουμε $PA \vdash B(\ulcorner \chi \urcorner) \to B(\ulcorner \psi \urcorner) \Leftrightarrow PA \vdash \neg B(\ulcorner \psi \urcorner) \to \neg B(\ulcorner \chi \urcorner)$.

Καθώς, όμως ισχύει $\psi = \neg B(\ulcorner \psi \urcorner)$ και $\neg B(\ulcorner \chi \urcorner) = Cns(PA)$, έχουμε $PA \vdash \psi \to Cns(PA)$.

$\leftarrow$ Από τη σχέση 5.23(b) έχουμε $PA \vdash B(\ulcorner \psi \urcorner) \to B\big(B(\ulcorner \psi \urcorner)\big)$. [1]

Από το λήμμα διαγωνοποίησης έχουμε $PA \vdash \psi \leftrightarrow \neg B(\ulcorner \psi \urcorner) \Leftrightarrow PA \vdash \neg\psi \leftrightarrow B(\ulcorner \psi \urcorner)$. [2]

Από τη σχέση [2] και το λήμμα 5.18 έχουμε $PA \vdash B(\ulcorner (\neg\psi \leftrightarrow B(\ulcorner \psi \urcorner)) \urcorner)$. [3]

Στο λήμμα 5.23(a) θέτουμε $\varphi = B(\ulcorner \psi \urcorner)$ και $\sigma = \neg\psi$. Έχουμε $PA \vdash B(\ulcorner B(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner) \wedge B(\ulcorner B(\ulcorner \psi \urcorner) \to \neg\psi \urcorner) \to B(\ulcorner \neg\psi \urcorner)$. [4]

Ωστόσο, ισχύει ότι $PA \vdash B(\ulcorner (\neg\psi \leftrightarrow B(\ulcorner \psi \urcorner)) \urcorner) \Rightarrow PA \vdash B(\ulcorner (B(\ulcorner \psi \urcorner) \to \neg\psi) \urcorner)$, άρα η σχέση [4] γίνεται $PA \vdash B(\ulcorner B(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner) \to B(\ulcorner \neg\psi \urcorner)$. [5]

Από τις σχέσεις [1] και [5] καταλήγουμε ότι $PA \vdash B(\ulcorner \psi \urcorner) \to B(B(\ulcorner \psi \urcorner)) \to B(\ulcorner \neg\psi \urcorner) \Rightarrow PA \vdash B(\ulcorner \psi \urcorner) \to B(\ulcorner \neg\psi \urcorner)$. [6]

Στο λήμμα 5.23(a) θέτουμε $\varphi = \neg\psi$ και $\sigma = \psi \to \neg\psi$ έχουμε $PA \vdash B(\ulcorner \neg\psi \urcorner) \wedge B(\ulcorner \neg\psi \to (\psi \to \neg\psi) \urcorner) \to B(\ulcorner \psi \to \neg\psi \urcorner)$. [7]

Από το ($\Pi1$) έχουμε ότι όλες τις προτάσεις φ, ψ ισχύει $\varphi \to (\psi \to \varphi)$. Αν θέσουμε $\varphi = \neg\psi$, τότε $PA \vdash \neg\psi \to (\psi \to \neg\psi)$.

Επομένως, η σχέση [7] γίνεται $PA \vdash B(\ulcorner \neg\psi \urcorner) \to B(\ulcorner \psi \to \neg\psi \urcorner)$. [8]

Από τις σχέσεις [6] και [8] έχουμε $PA \vdash B(\ulcorner \psi \urcorner) \to B(\ulcorner \psi \to \neg\psi \urcorner)$. [9]

Αν θεωρήσουμε χ μια αντίφαση, ισχύει ότι $PA \vdash (\psi \to \neg\psi) \to \chi$. Επομένως, θέτοντας στη σχέση 5.23(a) $\varphi = \psi \to \neg\psi$ και $\sigma = \vdash (\psi \to \neg\psi) \to \chi$, έχουμε $PA \vdash B(\ulcorner \psi \to \neg\psi \urcorner) \to B(\ulcorner \chi \urcorner)$. [10]

Από τις σχέσεις [9] και [10] καταλήγουμε ότι $PA \vdash B(\ulcorner \psi \urcorner) \to B(\ulcorner \psi \to \neg\psi \urcorner) \to B(\ulcorner \chi \urcorner)$, επομένως $PA \vdash B(\ulcorner \psi \urcorner) \to B(\ulcorner \chi \urcorner)$ ή ισοδύναμα $PA \vdash \neg B(\ulcorner \chi \urcorner) \to \neg B(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Δεδομένου ότι $\neg B(\ulcorner \chi \urcorner) = Cns(PA)$ και $\neg B(\ulcorner \psi \urcorner) = \psi$, έχουμε ότι $PA \vdash Cns(PA) \to \psi$.

Άρα καταλήγουμε ότι $PA \vdash \psi \leftrightarrow Cns(PA)$, δηλαδή ότι η πρόταση Gödel είναι ισοδύναμη με την πρόταση που τυποποιεί τη συνέπεια της PA. ∎

Β' ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΗ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 5.25 Αν η PA είναι συνεπής θεωρία, τότε $PA \nvdash Cns(PA)$ και $PA \nvdash \neg Cns(PA)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από το λήμμα 5.24 έχουμε ότι $PA \vdash \psi \leftrightarrow Cns(PA)$.

Αν $PA \vdash Cns(PA)$, τότε $PA \vdash \psi$.

Αν $PA \vdash \neg Cns(T)$, τότε $PA \vdash \neg\psi$.

Από το Α' θεώρημα μη-πληρότητας έχουμε ότι η ψ είναι μη-αποκρίσιμη στην PA.

Άρα και η $Cns(PA)$ είναι μη-αποκρίσιμη στην PA. ∎

Το Β' θεώρημα μη-πληρότητας, τυποποιώντας την έννοια της συνέπειας της PA αποδεικνύει ότι είναι μη-αποκρίσιμη στα πλαίσια της θεωρίας. Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται και σε οποιαδήποτε άλλη θεωρία εμπεριέχει την PA. Ο εμπλουτισμός της θεωρίας με καινούρια αξιώματα δεν είναι σε θέση να επιλύσει το πρόβλημα που ανακύπτει. Η αδυναμία μιας θεωρίας να αποδείξει με τα συντακτικά της μέσα ότι είναι συνεπής αποτελεί ένα εγγενές χαρακτηριστικό της και δεν είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί. Ωστόσο, με πιο ισχυρά εργαλεία, τα οποία ξεφεύγουν από τα συντακτικά μέσα της θεωρίας, είναι δυνατόν να αποδείξουμε ότι η PA είναι συνεπής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ BOOLOS

Όπως έχουμε, ήδη, αναφέρει η αυτοαναφορά που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Α' θεωρήματος μη-πληρότητας, καθώς και η ομοιότητα της πρότασης Gödel με το παράδοξο του ψεύτη, εκ πρώτης όψεως, δημιουργούν, μια «καχυποψία» για την εγκυρότητα του αποτελέσματος. Ο George Boolos, στη δημοσίευσή του “A New Proof of the Gödel Incompleteness Theorem”, διατύπωσε μια απόδειξη του Α' θεωρήματος μη-πληρότητας η οποία δε χρησιμοποιεί αυτοαναφορά. Ο Boolos αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος να επιστρέφει όλες τις αληθείς προτάσεις της PA και καμία ψευδή. Αυτό, όπως φαίνεται από το ακόλουθο λήμμα, είναι ισοδύναμο με τη μη-πληρότητα της PA.

ΛΗΜΜΑ 6.1 Έστω ότι η PA είναι συνεπής. Αν είναι πλήρης, τότε υπάρχει ένας αλγόριθμος που να επιστρέφει όλες τις αληθείς προτάσεις της γλώσσας και καμία ψευδή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Χρησιμοποιώντας την αρίθμηση Gödel, φτιάχνουμε τον εξής αλγόριθμο.

[1] ορίζουμε τον δείκτη i και θέτουμε αρχική τιμή $i = 1$

[2] ελέγχουμε αν η ακολουθία συμβόλων A με $\ulcorner A \urcorner = i$ είναι έγκυρη έκφραση της γλώσσας

[3] αν όχι, θέτουμε $i = i + 1$ και πάμε στο βήμα [2]

[4] αν ναι, ελέγχουμε αν είναι απόδειξη κάποιου τύπου

[5] αν όχι, θέτουμε $i = i + 1$ και πάμε στο βήμα [2]

[6] αν ναι, καταχωρούμε τον τύπο που αποδεικνύει σε μια λίστα, θέτουμε $i = i + 1$ και πάμε στο βήμα [2]

Είναι προφανές ότι ο αλγόριθμος αυτός δεν τερματίζει. Ωστόσο, οι προτάσεις που επιστρέφει είναι προτάσεις που αποδεικνύονται από την PA και αν η PA είναι συνεπής, από το θεώρημα ορθότητας, έπεται ότι είναι αληθείς.

Δεδομένου ότι ο αλγόριθμος δεν τερματίζει, αν A μια τυχαία απόδειξη της PA, είναι βέβαιο ότι κάποια στιγμή θα φτάσει στο i για το οποίο θα ισχύει $\ulcorner A \urcorner = i$.

Έστω φ αληθής τύπος. Τότε, ο τύπος $\neg\varphi$ θα είναι ψευδής. Αφού η PA είναι πλήρης, τότε ισχύει $PA \vdash \varphi$ ή $PA \vdash \neg\varphi$. Από το θεώρημα ορθότητας, έπεται ότι $PA \nvdash \neg\varphi$, καθώς δε γίνεται να αποδείξει ένα ψευδή τύπο. Επομένως, αν η PA είναι πλήρης, αποδεικνύει κάθε αληθή τύπο.

Εφ' όσον για κάθε αληθή τύπο, υπάρχει απόδειξη, ο αλγόριθμος αυτός θα φτάσει κάποια στιγμή στην απόδειξη αυτή και θα καταχωρήσει τον τύπο στη λίστα που δημιουργεί.

Άρα, αν η PA είναι πλήρης, υπάρχει αλγόριθμος που να επιστρέφει όλες τις αληθείς προτάσεις και καμία ψευδή. ■

Μια ενδιαφέρουσα προέκταση, η οποία όμως δεν έχει κάποια χρησιμότητα στην απόδειξη του Boolos, είναι ότι αν η PA είναι πλήρης, τότε η αλήθεια μιας τυχαίας πρότασης, μπορεί να ελεγχθεί με μηχανικά μέσα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2 Έστω ότι η PA είναι συνεπής. Αν είναι πλήρης, τότε υπάρχει αλγόριθμος που να ελέγχει αν μια πρόταση είναι αληθής ή όχι.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την υπόθεση έχουμε ότι η PA είναι πλήρης. Τότε, για κάθε τύπο φ, ισχύει $PA \vdash \varphi$ ή $PA \vdash \neg\varphi$. Χρησιμοποιώντας και πάλι την αρίθμηση Gödel, φτιάχνουμε τον εξής αλγόριθμο.

[1] ορίζουμε τον δείκτη i και θέτουμε αρχική τιμή $i = 1$

[2] ελέγχουμε αν η ακολουθία συμβόλων A με $\ulcorner A \urcorner = i$ είναι απόδειξη του τύπου φ ή του τύπου $\neg\varphi$

[3] αν δεν αποδεικνύει κάποιον απ' τους δύο, θέτουμε $i = i + 1$ και πάμε στο βήμα [1]

[4] αν είναι απόδειξη του φ, επιστρέφει ότι φ αληθής

[5] αν είναι απόδειξη του $\neg\varphi$, τότε ότι $\neg\varphi$ αληθής, επομένως επιστρέφει ότι φ ψευδής

[6] αν όχι, θέτουμε $i = i + 1$ και πάμε στο βήμα [1]

[7] αν ναι, καταχωρούμε τον τύπο που αποδεικνύει σε μια λίστα, θέτουμε $i = i + 1$ και πάμε στο βήμα [1]

Ο αλγόριθμος αυτός ελέγχει διαδοχικά όλες τις αποδείξεις της γλώσσας. Αφού η PA είναι πλήρης, θα αποδεικνύει έναν από τους δύο τύπους, επομένως κάποια στιγμή ο αλγόριθμος θα φτάσει στην απόδειξη αυτή και θα τερματίσει, επιστρέφοντας αν ο τύπος φ είναι αληθής ή όχι.

Άρα, αν η PA είναι πλήρης, τότε υπάρχει αποτελεσματικός αλγόριθμος που να ελέγχει αν μια πρόταση είναι αληθής. ■

Παράλληλα, όμως ισχύει και το αντίστροφο. Μια θεωρία που δεν είναι πλήρης, περιέχει προτάσεις που δεν αποδεικνύονται. Από το θεώρημα πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού, έχουμε ότι μια τέτοια πρόταση είναι αληθής σε κάποια μοντέλα της θεωρίας και ψευδής σε κάποια άλλα. Δεδομένου ότι τα μοντέλα μιας θεωρίας είναι άπειρα, δεν είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε αποτελεσματικό αλγόριθμο που να ελέγχει την αλήθεια μιας πρότασης. Ο έλεγχος αυτός, οποιαδήποτε χρονική στιγμή, θα είναι περιορισμένος σε ένα πεπερασμένο πλήθος μοντέλων της θεωρίας και δεν είναι δυνατόν να τερματίσει σε περίπτωση που η πρόταση είναι μη-αποκρίσιμη.

Από το λήμμα 6.1 καταλήγουμε ότι αν δεν υπάρχει αλγόριθμος που να επιστρέφει όλες τις αληθείς προτάσεις της θεωρίας και καμία ψευδή, τότε η θεωρία δεν είναι πλήρης. Ο Boolos, τυποποιώντας στη γλώσσα της θεωρίας αριθμών το παράδοξο του Berry, απέδειξε ότι δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί τέτοιος αλγόριθμος.

Το παράδοξο του Berry αναφέρεται σε προτάσεις της φυσικής γλώσσας οι οποίες περιγράφουν έναν και μόνο φυσικό αριθμό. Τέτοιου είδους προτάσεις είναι, για παράδειγμα, «ο μικρότερος φυσικός αριθμός που διαιρείται με το 5» και «ο μοναδικός άρτιος πρώτος αριθμός». Η πρόταση που οδηγεί στο παράδοξο είναι «ο μικρότερος φυσικός αριθμός που δεν είναι δυνατόν να περιγραφεί με λιγότερους από 500 χαρακτήρες της γλώσσας». Δεδομένου ότι έχουμε 24 χαρακτήρες στην ελληνική γλώσσα, είναι προφανές ότι το πλήθος των αριθμών που είναι σε θέση να περιγράψουν οι προτάσεις με λιγότερους από 500 χαρακτήρες είναι μικρότερος από ($24^0+24^1+\ldots+24^{499}+24^{500}$). Αφού το πλήθος των αριθμών που περιγράφονται με λιγότερους από 500 χαρακτήρες είναι πεπερασμένο, καταλήγουμε ότι υπάρχουν άπειροι φυσικοί αριθμοί που δεν είναι δυνατόν να περιγραφούν με λιγότερους από 500 χαρακτήρες. Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι το σύνολο αυτό έχει ένα ελάχιστο στοιχείο, καθώς είναι γνήσιο υποσύνολο των φυσικών αριθμών. Ωστόσο, η πρόταση του Berry καταφέρνει να περιγράψει τον αριθμό αυτό χρησιμοποιώντας λιγότερους από 500 χαρακτήρες.

Το παράδοξο αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η φυσική γλώσσα δεν είναι σε θέση να περιγράψει με ακρίβεια μαθηματικά αντικείμενα. Ωστόσο, ο Boolos τυποποιεί το παράδοξο αυτό στη γλώσσα της θεωρίας αριθμών για να αποδείξει το Α’ θεώρημα μη-πληρότητας του Gödel.

Ο Boolos χρησιμοποιεί τα θεωρητικά αποτελέσματα της αρίθμησης Gödel. Για την ακρίβεια, ορίζει 16 σύμβολα για τη γλώσσα. Τα σύμβολα αυτά αριθμούνται ως εξής.

$+$	1	$=$	5	$\rightarrow$	9	(	13
$*$	2	$\neg$	6	$\leftrightarrow$	10	)	14
0	3	$\wedge$	7	$\forall$	11	x	15
s	4	$\vee$	8	$\exists$	12	$'$	16

Η μεταβλητή x_1 εκφράζεται ως η ακολουθία συμβόλων x', ενώ η μεταβλητή x_3 ως x'''. Για λόγους απλότητας, ωστόσο, στην απόδειξη οι μεταβλητές συμβολίζονται με τα γράμματα x, y, z και χρησιμοποιείται η συντομογραφία $[n]$ για να εκφράσει τον αριθμό $\underbrace{s \ldots s}_{n}(0)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3 Δεν υπάρχει αλγόριθμος που να επιστρέφει όλες τις αληθείς προτάσεις της PA και καμία ψευδή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω M ένας τέτοιος αλγόριθμος.

Θεωρούμε ότι ο τύπος $F(x)$ ονομάζει τον αριθμό n, αν η έκφραση $\forall x(F(x) \leftrightarrow x = [n])$ είναι στο όρισμα εξόδου του M. Αν η έκφραση αυτή είναι αληθής, αλλά δεν είναι στα ορίσματα εξόδου του M, τότε ο τύπος $F(x)$ δεν ονομάζει τον αριθμό n.

Είναι προφανές ότι κάθε τέτοιος τύπος ονομάζει έναν και μόνο αριθμό.

Επίσης, κάθε αριθμός μπορεί να ονομάζεται από περισσότερους από έναν τύπους.

Για κάθε φυσικό αριθμό i υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμών εκφράσεων με i χαρακτήρες. Δεδομένου ότι έχουμε ορίσει 16 χαρακτήρες, το πλήθος των εκφράσεων με i χαρακτήρες θα είναι 16^i.

Για κάθε φυσικό αριθμό m, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμών τύπων που ονομάζονται με λιγότερους από m χαρακτήρες. Το πλήθος τύπων αυτών θα είναι μικρότερο από $16^{m-1} + 16^{m-2} + \ldots + 16^1 + 16^0$.

Ως εκ τούτου, μπορούμε να βρούμε τον ελάχιστο αριθμό που δεν ονομάζεται από λιγότερους από m χαρακτήρες.

Ορίζουμε ως $C(x,z)$ τον τύπο που λέει ότι ο x ονομάζεται από έναν τύπο με z χαρακτήρες.

Ορίζουμε ως $B(x,y)$ τον τύπο $\exists z\big(z < y \wedge C(x,z)\big)$. Ο τύπος αυτός λέει ότι ο x ονομάζεται από έναν τύπο με λιγότερους από y χαρακτήρες.

Ορίζουμε ως $A(x,y)$ τον τύπο $\neg B(x,y) \wedge (\forall a)\big(a < x \to B(a,y)\big)$. Ο τύπος αυτός λέει ότι ο x είναι ο μικρότερος αριθμός που δεν ονομάζεται με λιγότερους από y χαρακτήρες.

Έστω k ο αριθμός των χαρακτήρων στην έκφραση $A(x,y)$.

Τέλος, ορίζουμε ως $F(x)$ τον τύπο $\exists y\big(y = [10] * [k] \wedge A(x,y)\big)$.

Ο $F(x)$ λέει ότι ο αριθμός x είναι ο μικρότερος αριθμός που δεν ονομάζεται από λιγότερους από $10 * k$ χαρακτήρες.

Ο τύπος $F(x)$ περιέχει λιγότερους από $10 * k$ χαρακτήρες.

Έχουμε ήδη δείξει ότι για κάθε φυσικό αριθμό m, υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός που δεν ονομάζεται από λιγότερους από m χαρακτήρες.

Έστω ότι για $m = 10 * k$ ο αριθμός αυτός είναι ο n.

Εφ' όσον ο τύπος $F(x)$ έχει λιγότερους από m χαρακτήρες, δεν είναι δυνατόν να ονομάζει τον αριθμό n. Επομένως η έκφραση $\forall x(F(x) \leftrightarrow x = [n])$ δεν ανήκει στα ορίσματα εξόδου του αλγορίθμου M.

Ωστόσο, η πρόταση $\forall x(F(x) \leftrightarrow x = [n])$ είναι αληθής, αφού ο n είναι ο μικρότερος αριθμός που δεν ονομάζεται από λιγότερους από m χαρακτήρες.

Επομένως, υπάρχει μια αληθής πρόταση που δεν είναι στα ορίσματα εξόδου του αλγορίθμου M.

Άρα, δεν υπάρχει αλγόριθμος που να επιστρέφει όλες τις αληθείς προτάσεις της γλώσσας και καμία ψευδή. ■

Το μοναδικό σημείο στην απόδειξη, το οποίο χρήζει περαιτέρω διερεύνησης είναι ο ορισμός του τύπου $C(x,z)$. Ο Boolos αναφέρει στο παράρτημα της εργασίας ότι με βάση την αρίθμηση Gödel και τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών είναι δυνατόν να ορίσουμε αυτόν τον τύπο, χωρίς όμως να το κάνει.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε τον τύπο αυτό. Γενικά, ένας τύπος της PA έχει τη μορφή $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_z$, όπου α_i κάποιο σύμβολο της γλώσσας. Ο τύπος αυτός έχει z το πλήθος σύμβολα. Έστω $y_i = G(\alpha_i)$. Ο αριθμός Gödel του τύπου αυτού θα είναι $p_1{}^{y_1} * \dots * p_z{}^{y_z}$. Με βάση αυτά, ορίζουμε τον εξής αριθμό.

$$p_1{}^{\ulcorner (\urcorner} * p_2{}^{\ulcorner \exists \urcorner} * p_3{}^{\ulcorner y_1 \urcorner} * \dots * p_{z+2}{}^{\ulcorner y_z \urcorner} * p_{z+3}{}^{\ulcorner) \urcorner} * p_{z+4}{}^{\ulcorner (\urcorner} * p_{z+5}{}^{\ulcorner \forall \urcorner} * p_{z+6}{}^{\ulcorner u \urcorner} * p_{z+7}{}^{\ulcorner) \urcorner} * p_{z+8}{}^{\ulcorner (\urcorner} * p_{z+9}{}^{y_1} * \dots * p_{2*z+8}{}^{y_z} * p_{2*z+9}{}^{\ulcorner \leftrightarrow \urcorner} * p_{2*z+10}{}^{\ulcorner u \urcorner} * p_{2*z+11}{}^{\ulcorner = \urcorner} * p_{2*z+12}{}^{\ulcorner x \urcorner} * p_{2*z+13}{}^{\ulcorner) \urcorner}$$

Ο αριθμός αυτός κωδικοποιεί την έκφραση $(\exists y_1 \dots y_z)(\forall u)(\alpha_i \dots \alpha_z \leftrightarrow u = x)$. Ο τύπος $\alpha_i \dots \alpha_z$ είναι ένας τύπος της μορφής $D(u)$ και αποτελείται από z το πλήθος χαρακτήρες. Η έκφραση αυτή που περιγράψαμε υποστηρίζει ότι ο αριθμός x ονομάζεται από έναν τύπο με z χαρακτήρες. Ωστόσο, δεν είναι ο ζητούμενος τύπος $C(x,z)$, καθώς μπορούμε να ορίσουμε τον τύπο αυτό, μόνο για συγκεκριμένο z. Αν θεωρούσαμε ότι ο τύπος αυτός είναι ο $C(x,z)$, θα είχαμε μια προφανή αυτοαναφορά. Ωστόσο, δεν είναι αυτό το μοναδικό πρόβλημα. Η τιμή της μεταβλητής z επηρεάζει τη μορφή του τύπου και επομένως δεν είναι ελεύθερη μεταβλητή. Μπορούμε να ονομάσουμε για δεδομένη τιμή του z τον τύπο αυτό ως $C_z(x)$, αλλά δεν είναι δυνατόν με βάση αυτόν να ορίσουμε τον τύπο $C(x,z)$. Ο μόνος λόγος που παρουσιάζεται η συγκεκριμένη έκφραση είναι για να φανεί ότι υπάρχει το ενδεχόμενο στον ορισμό του τύπου $C(x,z)$ να είναι απαραίτητη η χρήση αυτοαναφοράς.

Στη συνέχεια ορίζουμε τον τύπο $C(x,z)$. Έστω n ο αριθμός Gödel της έκφρασης που αναζητούμε για να ονομάσει τον αριθμό x είναι ο n και έστω ότι p_k ο k-οστός πρώτος αριθμός. Ορίζουμε τον τύπο $Q(n,z)$, οποίος κωδικοποιεί την έκφραση «ο τύπος με αριθμό Gödel n αποτελείται από z χαρακτήρες».

$$Q(n,z) = (\forall k)\big((k \neq 0 \wedge k \leq z) \leftrightarrow (\exists y)(\exists w)(y \geq 1 \wedge y \leq 16 \wedge p_k{}^y * w = n)\big)$$

Έπειτα ορίζουμε την απεικόνιση $G: F(L) \to \mathbb{N}$ που κωδικοποιεί ένα τύπο της γλώσσας με τον αντίστοιχο αριθμό Gödel. Έστω ότι το σύνολο αφίξεων της G' είναι το σύνολο $N \subseteq \mathbb{N}$. Τότε η απεικόνιση $G: F(L) \to N$ είναι «ένα προς ένα» και «επί», επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $G^{-1}: N \to F(L)$.

Στη συνέχεια χρειαζόμαστε ένα τύπο που να ελέγχει αν ο αριθμός n ανήκει στο σύνολο N. Ο τύπος αυτός συμβολίζεται με $R(n)$. Η δημιουργία του τύπου αυτού έγκειται στην ανάλυση του n σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, ο έλεγχος αν αντιστοιχεί σε κάποια έκφραση της PA και, τέλος, αν η έκφραση αυτή αποτελεί τύπο. Είναι προφανές ότι ο ορισμός του τύπου $R(n)$ είναι εφικτός, αλλά η δημιουργία του είναι εξαιρετικά δύσκολη με τα συντακτικά μέσα της PA.

Τέλος ορίζουμε τη συνάρτηση $M(t)\colon \mathbb{N} \to F(L)$ η οποία αριθμεί τα ορίσματα εξόδου του αλγορίθμου M.

Συνοψίζοντας, έχουμε ορίσει τους εξής τύπους…

$R(n)$ «ο αριθμός n αντιστοιχεί σε κάποιον τύπο της γλώσσας»

$Q(n,z)$ «ο τύπος με αριθμό Gödel n αποτελείται από z χαρακτήρες»

$M(t)$ «το t-οστό όρισμα εξόδου του αλγορίθμου M»

$G^{-1}(n)$ «ο τύπος με αριθμό Gödel n»

Με βάση αυτούς τους τύπους ορίζουμε τον τύπο $C(x,z)$

$$C(x,z) = (\exists n)\Big(R(n) \wedge Q(n,z) \wedge (\exists t)\Big(M(t) = (\forall u)\big(G^{-1}(n) \leftrightarrow (u = x)\big)\Big)\Big)$$

Ο τύπος $C(x,z)$ διαβάζεται «υπάρχει αριθμός n τέτοιος ώστε να αντιστοιχεί σε έναν τύπο της γλώσσας ΚΑΙ ο τύπος αυτός να αποτελείται από z το πλήθος χαρακτήρες ΚΑΙ ο τύπος αυτός ονομάζει τον αριθμό x».

Επομένως, ο τύπος $C(x,z)$ αναφέρει ότι «ο x ονομάζεται από έναν τύπο με z με το πλήθος χαρακτήρες».

Εν προκειμένω, έχουμε ορίσει τον τύπο $C(x,z)$ χωρίς να γίνει χρήση κάποιας αυτοαναφοράς. Στην απόδειξη του Gödel, ο αριθμός m ο οποίος αντικαθίσταται στον τύπο $\varphi_m(x)$ είναι ο αριθμός που κωδικοποιεί τον τύπο $\varphi_m(x)$ και καθιστά το επιχείρημα απολύτως αυτοαναφορικό. Αντιθέτως στην απόδειξη του Boolos, ο αριθμός n ο οποίος αντικαθίσταται στον τύπο $F(x)$ είναι ο μοναδικός αριθμός για τον οποίο είναι αληθής ο τύπος. Η μοναδική αμφιβολία που θα μπορούσε να υπάρχει ήταν να είναι αναγκαία κάποια αυτοαναφορά για τον ορισμό του τύπου $C(x,z)$. Όπως δείξαμε, είναι δυνατόν να ορίσουμε τον τύπο $C(x,z)$ χωρίς να καταφύγουμε σε κάποιο αναφορικό επιχείρημα.

Είναι αξιοσημείωτη, επίσης, η συντομία της απόδειξης. Η απόδειξη του Boolos χρησιμοποιεί μόνο τις θεωρητικές δυνατότητες που προσφέρει η αρίθμηση του Gödel για να υποστηρίξει ότι μπορούμε να ορίσουμε τον τύπο $C(x,z)$ και αποδεικνύει με εξαιρετικά συνοπτικό και κατανοητό τρόπο το θεώρημα. Ωστόσο, ο ίδιος αναφέρει ότι η όποια αξία της απόδειξης δεν αφορά τη συντομία της, αλλά έγκειται στο γεγονός ότι απουσιάζει πλήρως η έννοια της αυτοαναφοράς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Ο ΑΝΤΙΚΤΥΠΟΣ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΜΗ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

Τα θεωρήματα μη-πληρότητας ήταν, χωρίς αμφιβολία, δύο από τα σημαντικότερα αποτελέσματα στην ιστορία των μαθηματικών και είχαν τεράστιο αντίκτυπο στην τρέχουσα μαθηματική πρακτική και τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Για να κατανοήσουμε, όμως, πλήρως την επίδραση που άσκησαν, είναι απαραίτητο να αναφερθούμε συνοπτικά στο ιστορικό πλαίσιο που περιέβαλε τη μαθηματική δημιουργία στις αρχές του 20^{ου} αιώνα και στα κυρίαρχα φιλοσοφικά ρεύματα που αναδύθηκαν την εποχή εκείνη.

Τα μαθηματικά των αρχών του 20^{ου} αιώνα χαρακτηρίζονταν από ένα πνεύμα ευφορίας που συνόδευσε την ανάπτυξη της αφελούς συνολοθεωρίας από τον Cantor. O Cantor, παρά τους γενικούς και εξαιρετικά ασαφείς ορισμούς πάνω στους οποίους την είχε στηρίξει, κατάφερε να περιγράψει όλα τα μαθηματικά αντικείμενα, οικοδομώντας παράλληλα μια εξαιρετικά απλή και κομψή θεωρία. Η άμεση απόδειξη σύνθετων μαθηματικών προτάσεων με τα μέσα της θεωρίας, όπως, για παράδειγμα, η απόδειξη του θεωρήματος του Liouville, είχε αυξήσει εξαιρετικά τις προσδοκίες για τα μελλοντικά της αποτελέσματα. Την εποχή εκείνη, διακατείχε τη μαθηματική κοινότητα ένας διάχυτος ενθουσιασμός, καθώς και η ελπίδα ότι όλα τα μαθηματικά μπορούν να τυποποιηθούν πλήρως από την αφελή συνολοθεωρία. Είναι χαρακτηριστικά τα διθυραμβικά σχόλια που απέσπασε ο Cantor στο 1^{ο} Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο στη Ζυρίχη το 1897, καθώς και η φράση του Hilbert, που το 1900 δήλωσε ότι *«κανείς δεν πρόκειται να μας στερήσει τον παράδεισο που δημιούργησε ο Cantor για μας»*.

O Frege, προχώρησε την προσπάθεια θεμελίωσης των μαθηματικών ένα βήμα παραπέρα, εγκαινιάζοντας το κίνημα του Λογικισμού. Στόχος του προγράμματος του Λογικισμού ήταν να οριστούν όλες οι έννοιες των μαθηματικών μέσα από τις έννοιες της λογικής και να παραχθούν όλα τα θεωρήματα με βάση λογικά αξιώματα. Το έργο του Frege «Grundgesetze der Arithmetik» ήταν μια προσπάθεια υλοποίησης του προγράμματος αυτού στο πεδίο της θεωρίας αριθμών και η αναγωγή της συνέπειάς της στη συνέπεια της τυπικής λογικής.

Ωστόσο, μια σειρά παραδόξων που ήρθαν στην επιφάνεια κατέστρεψε το κλίμα ευφορίας που επικρατούσε. Το 1903, λίγο καιρό πριν εκδοθεί ο δεύτερος τόμος του «Grundgesetze der Arithmetik», ο Russell επισήμανε με μια επιστολή του στον Frege ότι, με βάση τα αξιώματα που είχε ορίσει, ήταν εφικτή η δημιουργία ενός συνόλου $X = \{x : x \notin X\}$. Το παράδοξο του Russell, όπως λέγεται, προκύπτει όταν εξετάσουμε αν ισχύει $x \in X$ ή αν $x \notin X$. Αν $x \in X$, τότε με βάση τον ορισμό του X, καταλήγουμε ότι $x \notin X$. Αντίστοιχα, αν θεωρήσουμε ότι $x \notin X$, τότε με βάση τον ορισμό του X, καταλήγουμε ότι $x \in X$. Μετά από την επισήμανση αυτού του παραδόξου, ο Frege αποκαρδιωμένος εγκατέλειψε το πρόγραμμα του Λογικισμού. Χαρακτηριστικό είναι το σχόλιό που συμπεριέλαβε στην έκδοση του δεύτερου τόμου του «Grundgesetze der Arithmetik», όπου αναφέρει ότι *«δεν υπάρχει μεγαλύτερη ατυχία, που μπορεί να συμβεί σε έναν συγγραφέα επιστημονικού συγγράμματος, απ' αυτήν του να δει κάποιο από τα θεμέλια του οικοδομήματος του να τρέμει, μετά το τέλος της οικοδόμησης. Αυτή ήταν η θέση στην οποία περιήλθα μετά από ένα γράμμα του κ. Russell, ακριβώς τη στιγμή που το τύπωμα αυτού του τόμου ήταν κοντά στο τέλος του. Σχετίζεται με το αξίωμα μου (V). Ποτέ δεν έκρυψα από τον εαυτό μου την έλλειψη προφάνειάς του, κάτι που ανήκει στα υπόλοιπα και που πρέπει καθαρά να απαιτείται από κάθε νόμο της λογικής»*.

Δύο άλλα παράδοξα ήρθαν να πλήξουν την αφελή συνολοθεωρία του Cantor. Το πρώτο ήταν το παράδοξο του Burali-Forti, που διατυπώθηκε το 1897. Δεδομένου ενός διατακτικού αριθμού α, μπορούμε να ορίσουμε έναν γνησίως μεγαλύτερο διατακτικό β. Αν θεωρήσουμε ως γ τον διατακτικό που ορίζεται ως η ένωση όλων των διατακτικών, τότε ο γ πρέπει να είναι ο μεγαλύτερος διατακτικός. Αυτό, όμως, αποτελεί παράδοξο, δεδομένου ότι για κάθε διατακτικό μπορούμε να ορίσουμε ένα μεγαλύτερό του. Το δεύτερο ήταν το παράδοξο του Cantor, που επισημάνθηκε το 1899. Για κάθε σύνολο X, ο πληθάριθμος του δυναμοσυνόλου του, $P(X)$, είναι γνησίως μεγαλύτερος του X. Αν ορίσουμε ως A το σύνολο όλων των συνόλων, τότε ο πληθάριθμός του πρέπει να είναι ο μεγαλύτερος πληθάριθμος. Αυτό αποτελεί παράδοξο, καθώς ο πληθάριθμος του $P(A)$ είναι γνησίως μεγαλύτερος του A.

Τα παράδοξα που αναφέρθηκαν είναι γνωστά ως λογικά ή συνολοθεωρητικά παράδοξα και ήταν διατυπωμένα στην τυπική γλώσσα της θεωρίας συνόλων. Παράλληλα, όμως, εκείνη την εποχή διατυπώθηκαν και τα λεγόμενα ερμηνευτικά παράδοξα, τα οποία, αν και αφορούσαν μαθηματικές οντότητες, ήταν διατυπωμένα σε μη-τυπική γλώσσα. Τα παράδοξα αυτά αφορούσαν περιγραφές αριθμών με βάση τα συντακτικά μέσα μιας συνηθισμένης γλώσσας.

Το πρώτο τέτοιο παράδοξο ήταν το παράδοξο του Richard, που διατυπώθηκε το 1905. Σύμφωνα με αυτό, υπάρχουν εκφράσεις της γλώσσας που περιγράφουν κάποιο σύνολο φυσικών αριθμών. Τέτοιες εκφράσεις είναι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις «οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 5» και «οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 3». Δεδομένου ότι το σύνολο των χαρακτήρων στη γλώσσα είναι πεπερασμένο, μπορούμε να ορίσουμε μια αρίθμηση των εκφράσεων αυτών, θεωρώντας ότι προηγούνται οι εκφράσεις με τους λιγότερους χαρακτήρες και για εκφράσεις με τον ίδιο αριθμό χαρακτήρων να χρησιμοποιήσουμε τη λεξικογραφική ταξινόμηση. Με αυτόν τον τρόπο, κάθε έκφραση αντιστοιχείται με έναν μοναδικό φυσικό αριθμό. Σε ορισμένες περιπτώσεις, μάλιστα, ο αριθμός αυτός ανήκει στο σύνολο που περιγράφει η έκφραση. Στην αντίθετη περίπτωση, λέμε ότι ο αριθμός αυτός είναι «αριθμός Richard». Αν, για παράδειγμα, η 12η έκφραση είναι «οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 8», τότε το 12 είναι αριθμός Richard. Αντίστοιχα, αν η 17η έκφραση είναι «οι φυσικοί αριθμοί που είναι πρώτοι και είναι μικρότεροι από 100», τότε το 17 δεν είναι αριθμός Richard. Είναι προφανές ότι η έκφραση «οι φυσικοί αριθμοί που είναι αριθμοί Richard» περιγράφει ένα σύνολο φυσικών αριθμών, οπότε ανήκει στις «έγκυρες» εκφράσεις της γλώσσας. Έστω ότι στην έκφραση αυτή αντιστοιχεί ο αριθμός n. Το παράδοξο προκύπτει όταν εξετάσουμε αν ο n είναι αριθμός Richard ή όχι. Αν είναι, τότε ανήκει στο σύνολο που ορίζει η έκφραση, επομένως καταλήγουμε ότι δεν είναι αριθμός Richard. Αν δεν είναι, τότε δεν ανήκει στο σύνολο που ορίζει η έκφραση, επομένως είναι αριθμός Richard.

Το δεύτερο ερμηνευτικό παράδοξο ήταν το παράδοξο του Berry, που διατυπώθηκε το 1906. Το παράδοξο αυτό αφορά εκφράσεις της γλώσσας που ορίζουν ένα μοναδικό φυσικό αριθμό. Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις «ο φυσικός αριθμός που διαιρείται με το 4 και είναι μικρότερος από 6» και «ο μοναδικός ζυγός πρώτος φυσικός αριθμός». Το παράδοξο, εν προκειμένω, προκύπτει από την εξέταση της έκφρασης «ο μικρότερος φυσικός αριθμός που για να περιγραφεί χρειάζονται περισσότεροι από 500 χαρακτήρες της γλώσσας». Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι η έκφραση αυτή ορίζει ένα αριθμό που ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή. Ωστόσο, καταφέρνει να εκφράσει τον αριθμό αυτό με λιγότερους από 500 χαρακτήρες.

Όλα αυτά τα παράδοξα κατέστησαν σαφές ότι έπρεπε να επαναπροσδιοριστεί το πεδίο εφαρμογής των μαθηματικών και να γίνουν δραστικές περικοπές στην ελευθερία χρήσης διαισθητικών εννοιών. Για την αντιμετώπιση των ερμηνευτικών παραδόξων έγινε δεκτή η θέση ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι δυνατόν να ορίζονται μόνο στα πλαίσια μιας τυπικής γλώσσας. Για τα λογικά παράδοξα, ωστόσο, δεν υπήρξε εξ αρχής μια κοινώς αποδεκτή αντιμετώπιση.

Ο Russell θεώρησε ότι τα παράδοξα οφείλονταν στη χρήση της αυτοαναφοράς και εισηγήθηκε τον εξοστρακισμό της από τη μαθηματική πρακτική. Η θεωρία των τύπων που ανέπτυξε ήταν απαλλαγμένη από την έννοια αυτή. Ωστόσο, το κόστος ήταν εξαιρετικά μεγάλο. Η διαγώνια μέθοδος του Cantor και τα θεωρήματα μη-πληρότητας του Gödel κάνουν χρήση της αυτοαναφοράς για να καταλήξουν σε αποτελέσματα μείζονος σημασίας για τα σύγχρονα μαθηματικά.

Ο Zermelo, απ’ την άλλη, θεώρησε ότι τα λογικά παράδοξα είχαν ως βάση τη γενική αρχή συμπερίληψης, σύμφωνα με την οποία για κάθε ιδιότητα που μπορούμε να διατυπώσουμε στα πλαίσια μιας γλώσσας, μπορούμε να δημιουργήσουμε το σύνολο των στοιχείων που ικανοποιούν την ιδιότητα αυτή. Η αρχή αυτή διατυπώνεται με σαφήνεια στο έργο του Frege και χαρακτηρίζει το οικοδόμημά του. Ο Cantor, αντίστοιχα, ορίζει το σύνολο ως *«οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας»*. Αν και δεν την διατυπώνει με σαφήνεια, ο Cantor επικαλείται ουσιαστικά και αυτός τη γενική αρχή συμπερίληψης.

Για να εξαλειφθούν τα παράδοξα, εγκαταλείφθηκε ο ορισμός του Cantor και υιοθετήθηκε το αξιωματικό σύστημα Zermelo-Fraenkel, το οποίο έθετε σαφείς περιορισμούς στη δημιουργία των συνόλων. Με βάση το σύστημα αυτό, αποδεκτά ήταν μόνο τα σύνολα που μπορούσαν να δημιουργηθούν από τη συνδυαστική χρήση των αξιωμάτων. Αν και κάτι τέτοιο φαινόταν να περιορίζει δραματικά τη μαθηματική πρακτική, η ανάπτυξη που γνώρισε η θεωρία συνόλων τα επόμενα χρόνια υπήρξε θεαματική.

Ταυτόχρονα με την κρίση των θεμελίων των μαθηματικών, αναδύθηκαν και τα τρία φιλοσοφικά ρεύματα που έμελλε να κυριαρχήσουν στη φιλοσοφία των μαθηματικών τον 20ο αιώνα. Ο Λογικισμός, ο Φορμαλισμός και ο Ιντουισιονισμός προσπάθησαν να ορίσουν τα θεμέλια των μαθηματικών και να επαναπροσδιορίσουν το είδος της μαθηματικής δημιουργίας.

Το κίνημα του Λογικισμού, που είχε ξεκινήσει από τον Frege, πρεσβεύει ότι τα μαθηματικά πρέπει να θεμελιωθούν με βάση την τυπική λογική. Συνεχιστές του Frege, υπήρξαν ο Russell και ο Whitehead, που με το έργο τους «Principia Mathematica» όρισαν τη θεωρία των τύπων, μια τυπική θεωρία συνόλων, η οποία ήταν σε θέση να περιγράψει όλα τα κλασσικά μαθηματικά αντικείμενα. Στόχος της προσπάθειάς τους ήταν η αναγωγή της θεωρίας τύπων σε ένα πλήρες και συνεπές λογικό σύστημα χωρίς εξωτερικές αναφορές.

Το κίνημα του Φορμαλισμού, αν και δεν πρόκειται για ένα ενιαίο κίνημα, θα μπορούσαμε να πούμε, σε γενικές γραμμές, ότι αντιμετωπίζει τα μαθηματικά ως ένα σύνολο κανόνων που, αν συνδυαστούν σωστά, παράγουν έγκυρα αποτελέσματα. Η έννοια της αλήθειας και η έννοια της αποδειξιμότητας ταυτίζονται, δεδομένου ότι για τους φορμαλιστές τα μαθηματικά αντικείμενα στερούνται νοήματος και αντιμετωπίζονται απλά ως σύμβολα που συνδέονται μεταξύ τους με συγκεκριμένες σχέσεις. Για τους φορμαλιστές, ουσιαστικά, η απόδειξη μιας πρότασης αποτελεί ένα μηχανιστικό τρόπο ελέγχου της αλήθειας της.

Ο Hilbert, ο οποίος το 1899 είχε δομήσει ένα αξιωματικό σύστημα για τη γεωμετρία που ανήγαγε τη συνέπειά της στη συνέπεια της θεωρίας αριθμών, ήταν ο κυριότερος εκπρόσωπος του Φορμαλισμού. Αν και απέρριπτε την ύπαρξη του απείρου, πρέσβευε ότι η μαθηματική πρακτική οφείλει να συνεχίσει με το συνηθισμένο τρόπο, περικόπτοντας μόνο ό,τι οδηγεί σε παράδοξα ή αντιφάσεις. Η αμφισβήτησή του για τη φύση του απείρου εδραζόταν τόσο στην αμφιβολία του ότι το άπειρο εμφανίζεται στη φύση, όσο και στο γεγονός ότι θεωρούσε ότι είναι μια έννοια που δεν μπορεί να διαχειριστεί η ανθρώπινη νόηση. Ήταν βαθύτατα πεπεισμένος ότι οι πραγματικοί όροι μπορούν να εξαλειφθούν από μία πρόταση. Ο περατοκρατισμός αποτελούσε μία από τις βασικές θέσεις της φιλοσοφίας του. Παράλληλα, πρέσβευε ότι κάθε καλά διατυπωμένο μαθηματικό πρόβλημα έχει λύση. Για αυτούς τους λόγους, βασικός στόχος του προγράμματος του Hilbert ήταν η εύρεση ενός συνεπούς αξιωματικού συστήματος για τα μαθηματικά, το οποίο θα έχει τη δυνατότητα να αποδεικνύει με περατοκρατικό τρόπο κάθε μαθηματική αλήθεια. Το Entscheidungsproblem που εισηγήθηκε το 1928, αφορούσε τη δημιουργία ενός αποτελεσματικού αλγορίθμου που παίρνοντας ως όρισμα μια έκφραση της τυπικής γλώσσας θα αποφαινόταν αν είναι αληθής ή ψευδής.

Τέλος, το κίνημα του Ιντουισιονισμού, που ιδρύθηκε από τον Brouwer, απορρίπτει ένα πολύ μεγάλο κομμάτι των κλασσικών μαθηματικών. Σύμφωνα με τους ιντουισιονιστές, τα μαθηματικά αντικείμενα είναι υποκειμενικές νοητικές κατασκευές που δεν υπάρχουν πέρα από την εποπτεία ή την ενόραση του μαθηματικού. Η ύπαρξη ενός μαθηματικού αντικειμένου είναι συνυφασμένη με την κατασκευή του, η οποία πρέπει να μπορεί να λάβει χώρα με πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Ο Brouwer δεχόταν την έννοια του δυνάμει απείρου και την αρχή της πλήρους επαγωγής ως ενορατικά αποδεκτές διαδικασίες, αλλά απέρριπτε την έννοια του συνεχούς, όπως εκφράζεται στα κλασσικά μαθηματικά. Θεωρούσε ότι η αρχή της καλής διάταξης δεν ισχύει σε υπεραριθμήσιμα σύνολα, καθώς δύο στοιχεία τους δεν είναι συγκρίσιμα, δεδομένου ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε έναν αλγόριθμο που να τα συγκρίνει και να τερματίζει στην περίπτωση που τα στοιχεία αυτά είναι ίσα. Παράλληλα, απέρριπτε την αρχή του αποκλεισμού του τρίτου και κατ' επέκταση την εις άτοπο απαγωγή ως έγκυρη αποδεικτική μέθοδο. Η ιντουισιονιστική λογική που αναπτύχθηκε και τα μαθηματικά τα οποία δημιουργούνται με βάση τις παραδοχές αυτές, όπως για παράδειγμα η αριθμητική Heyting, διαφέρουν σε αρκετά σημεία από την κλασσική μαθηματική πρακτική, περιορίζοντας σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό τα αποτελέσματά της.

Είναι προφανές ότι τα θεωρήματα μη-πληρότητας που απέδειξε ο Gödel επηρέασαν βαθύτατα τα φιλοσοφικά αυτά ρεύματα. Άμεσες συνέπειες των θεωρημάτων ήταν η αποσύνδεση της έννοια της αλήθειας από την έννοια της απόδειξης και η επισήμανση ότι η συνέπεια ενός μαθηματικού συστήματος, αρκετά πλούσιου για να περικλείει ένα σημαντικό κομμάτι της μαθηματικής γνώσης, δεν είναι δυνατόν να αποδειχθεί με τα συντακτικά μέσα του ίδιου του συστήματος.

Το πρόγραμμα του Λογικισμού κατέρρευσε, καθώς ο στόχος του, να αναγάγει τη συνέπεια των μαθηματικών στη συνέπεια της λογικής, αποδείχθηκε ότι είναι ανέφικτος. Παρά τις περιοριστικές παραδοχές που είχαν αποδεχθεί ο Whitehead και ο Russell, κατέστη σαφές ότι ο στόχος τους δεν ήταν δυνατόν να πραγματωθεί.

Αντίστοιχος ήταν και ο αντίκτυπος στο πρόγραμμα του Hilbert. Άμεση συνέπεια των θεωρημάτων μη-πληρότητας είναι ότι όσο πλούσιο και αν είναι το αξιωματικό σύστημα που χρησιμοποιούμε, πάντα θα υπάρχουν μη-αποκρίσιμες προτάσεις. Η βασική θέση του Hilbert, ότι κάθε καλά διατυπωμένο μαθηματικό πρόβλημα έχει λύση, ήταν καταφανώς λανθασμένη. Η προσπάθεια για την εύρεση ενός πλήρους και συνεπούς αξιωματικού συστήματος πάνω στο οποίο να θεμελιωθούν τα μαθηματικά ήταν καταδικασμένη σε αποτυχία. Λίγα χρόνια αργότερα, οι Church και Turing απέδειξαν, το 1936 και το 1937 αντίστοιχα, ότι το Entscheidungsproblem είναι μη-επιλύσιμο. Το όραμα του Hilbert να μετατραπούν τα μαθηματικά σε μια τυπική, μηχανιστική διαδικασία αποδείχθηκε ανεδαφικό. Ωστόσο, παρά την αποτυχία την αποτυχία του προγράμματός του, ο Φορμαλισμός παρέμεινε ένα απ' τα κυρίαρχα ρεύματα στη φιλοσοφία των μαθηματικών του 20ου αιώνα.

Αντιθέτως, το οικοδόμημα του Ιντουισιονισμού δεν επηρεάστηκε άμεσα από τα θεωρήματα. Άλλωστε, για την απόδειξη των θεωρημάτων είναι απαραίτητη η χρήση της εις άτοπο απαγωγής, την οποία οι Ιντουισιονιστές δεν αποδεχόντουσαν ως έγκυρη. Αλλά και η αποδοχή των θεωρημάτων, δεν ήταν σε θέση να επηρεάσει σε μεγάλο βαθμό την ιντουισιονιστική φιλοσοφία. Αν και ο Gödel απέδειξε, το 1933, ότι η συνέπεια της αριθμητικής Heyting είναι ισοδύναμη με τη συνέπεια της αριθμητικής Peano, το αποτέλεσμα αυτό δεν έπληξε κάποια απ' τις βασικές θέσεις του Ιντουισιονισμού. Άλλωστε, πριν ακόμη αποδειχθούν τα θεωρήματα μη-πληρότητας, ο Brower είχε χαρακτηρίσει το πρόγραμμα του Hilbert ανέφικτο, θεωρώντας τη συνέπεια και την πληρότητα έννοιες που δεν είναι δυνατόν να αποδειχθούν με κατασκευαστικό τρόπο.

Παράλληλα, όμως, είναι αξιοσημείωτο ότι και ο ίδιος ο Gödel χαρακτηριζόταν από ένα ζωηρό ενδιαφέρον για τη φιλοσοφία των μαθηματικών και προχώρησε σε μια ανάλυση των φιλοσοφικών συνεπειών των θεωρημάτων. Ο Gödel ασπαζόταν τις ιδέες του μαθηματικού Ρεαλισμού, σύμφωνα με τον οποίο τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν απόλυτη, αντικειμενική και χωροχρονικά ανεξάρτητη ύπαρξη. Ο Gödel χαρακτηριστικά αναφέρει ότι *«οι κλάσεις […] μπορούν […] επίσης να νοηθούν ως πραγματικά αντικείμενα, συγκεκριμένα ως πολλαπλότητες πραγμάτων ή ως δομές που αποτελούνται από μια πολλαπλότητα πραγμάτων […] και που υπάρχουν ανεξάρτητα από τους ορισμούς και τις κατασκευές μας»*. Ο μαθηματικός προσπαθεί με τη σκέψη του να προσεγγίσει τα αντικείμενα αυτά και να ανακαλύψει τις σχέσεις που τα συνδέουν. Ο Gödel πιστεύει σε κάποιου είδους «εποπτεία» που επιτρέπει την προσέγγιση και την κατανόηση των αντικειμένων αυτών, αναφέροντας ότι *«τα αντικείμενα της υπερπεπερασμένης θεωρίας των συνόλων […] ασφαλώς δεν ανήκουν στον φυσικό κόσμο […] Αλλά παρ' όλη την απόστασή τους από την αισθητηριακή εμπειρία, έχουμε ένα είδος αντίληψης των αντικειμένων της θεωρίας συνόλων, όπως δείχνει το γεγονός ότι τα αξιώματα μας επιβάλλονται από μόνα τους ως αληθή. Δεν βλέπω το λόγο γιατί θα έπρεπε να έχουμε λιγότερη εμπιστοσύνη σ' αυτό το είδος αντίληψης -δηλαδή, στη μαθηματική εποπτεία- απ' ό,τι στην αισθητηριακή αντίληψη»*.

Ωστόσο, η αποδοχή των θέσεων του Ρεαλισμού φαίνεται να έρχεται σε ευθεία σύγκρουση με το Α' θεώρημα μη-πληρότητας. Υπάρχουν μη-αποκρίσιμες προτάσεις των μαθηματικών που αναφέρονται στην ύπαρξη συγκεκριμένων μαθηματικών αντικειμένων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η υπόθεση του συνεχούς στη θεωρία συνόλων, η οποία, όπως απέδειξαν ο Gödel και ο Cohen, είναι μη-αποκρίσιμη στα πλαίσια της ZFC. Σε ορισμένα μοντέλα της υπάρχει ένα σύνολο με πληθάριθμο μεγαλύτερο απ' το αριθμήσιμο και μικρότερο απ' το συνεχές, ενώ σε άλλα μοντέλα δεν υπάρχει. Κάτι τέτοιο, προφανώς και δεν είναι σύμφωνο με τις θέσεις του Ρεαλισμού, που υποστηρίζει ότι το σύνολο αυτό είτε υπάρχει, είτε δεν υπάρχει. Ο Gödel υποστηρίζει ότι αναγκαστικά μία από τις δύο θέσεις είναι αληθής, αναφέροντας ότι *«οι έννοιες* *και τα θεωρήματα της θεωρίας των συνόλων περιγράφουν μια πραγματικότητα που είναι καλά προσδιορισμένη, και στην οποία η εικασία του Cantor πρέπει να είναι αληθής ή ψευδής. Επομένως, το ότι είναι αδύνατο να αποφανθούμε γι' αυτήν με βάση τα αξιώματα που χρησιμοποιούμε σήμερα, δεν μπορεί παρά να σημαίνει ότι τα αξιώματα αυτά δεν περιέχουν μια πλήρη περιγραφή αυτής της πραγματικότητας».*

Ουσιαστικά, ο Gödel υποστηρίζει ότι από όλα τα πιθανά μοντέλα μιας θεωρίας, μόνο ένα ανταποκρίνεται στην αντικειμενική πραγματικότητα των μαθηματικών οντοτήτων. Στόχος της μαθηματικής δημιουργίας πρέπει να είναι, με την επιλογή των κατάλληλων αξιωμάτων, να περιορίσει το πλήθος των μοντέλων αυτών και να οδηγηθεί στις μαθηματικές αλήθειες. Πράγματι, το ερευνητικό πρόγραμμα της θεωρίας συνόλων, είναι επικεντρωμένο στην αναζήτηση ισχυρών αξιωμάτων και του ελέγχου των θεωρημάτων που παράγουν. Ωστόσο, η πραγμάτωση αυτού του στόχου είναι στην πραγματικότητα ανέφικτη. Το Α' θεώρημα μη-πληρότητας αποδεικνύει ότι πάντα θα υπάρχουν μη-αποκρίσιμες προτάσεις στα πλαίσια μιας θεωρίας. Αν θεωρήσουμε ως απώτερο σκοπό της μαθηματικής δημιουργίας να περιγράψει με ακρίβεια τον κόσμο των μαθηματικών αντικειμένων, πάντα θα ενυπάρχει στην περιγραφή αυτή το στοιχείο της ατέλειας και το στοιχείο της αβεβαιότητας.

Ο περιορισμός αυτός που θέτει το Α' θεώρημα μη-πληρότητας στα όρια της μαθηματικής δημιουργίας δεν επηρεάζει σε τόσο μεγάλο βαθμό τα κινήματα του Φορμαλισμού και του Ιντουισιονισμού. Δεδομένου ότι δεν αποδίδουν κάποια μεταφυσική ύπαρξη στο σύμπαν των μαθηματικών αντικειμένων, δε χαρακτηρίζονται και απ' την ανάγκη προσδιορισμού του μοναδικού αληθούς μοντέλου. Για τους φορμαλιστές, ειδικότερα, κάθε μοντέλο είναι αποδεκτό, στο βαθμό που ανταποκρίνεται στα δεδομένα της διαίσθησης και της εμπειρίας μας. Είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον ότι ο σημαντικότερος περιορισμός που θέτει το Α' θεώρημα μη-πληρότητας αφορά το φιλοσοφικό ρεύμα που ο ίδιος ο Gödel ασπαζόταν και ότι δημιουργεί φιλοσοφικά προβλήματα που είναι δύσκολο να αντιμετωπιστούν. Χαρακτηριστική είναι η επισήμανση που κάνει ο Cohen, ότι *«η πλατωνική θέση είναι αυτή που οι περισσότεροι μαθηματικοί θα προτιμούσαν να πάρουν. Δεν αναρωτιούνται, παρά μόνο όταν μάθουν για τις δυσκολίες της θεωρίας συνόλων. Αν αυτές οι δυσκολίες τους αναστατώσουν, τότε θα σπεύσουν στο καταφύγιο του φορμαλισμού».*

Είναι ενδιαφέρον, ωστόσο, ότι παρά το γεγονός ότι ο Gödel ασπαζόταν πλήρως τις θέσεις του μαθηματικού ρεαλισμού, όλες οι αποδείξεις των θεωρημάτων του γίνονται με κατασκευαστικές μεθόδους. Είναι χαρακτηριστικό ότι, με εξαίρεση την απόδειξη του λήμματος ύπαρξης μοντέλου στον κατηγορηματικό λογισμό, ο Gödel αποφεύγει να αποδείξει, απλά, την ύπαρξη ενός μαθηματικού αντικειμένου. Αντιθέτως, προβαίνει στην περιγραφή ενός αλγορίθμου που «εγγυάται» την κατασκευή του. Αξιοσημείωτο είναι επίσης το γεγονός ότι μεγάλο μέρος του έργου του Gödel αφορά την ιντουισιονιστική λογική.

Τα θεωρήματα μη-πληρότητας είχαν, όμως, εξαιρετικά σημαντικά αντίκτυπο και στην ανάπτυξη της κλασσικής μαθηματικής πρακτικής. Εν προκειμένω, η απόδειξη των θεωρημάτων ήταν πολύ σημαντικότερη απ' τη διατύπωσή τους. Τα εργαλεία που χρησιμοποίησε ο Gödel για τις αποδείξεις, όπως οι αναδρομικές συναρτήσεις και τα αλγοριθμικά σύνολα, συνέβαλαν τα μέγιστα στη ανάπτυξη συγκεκριμένων μαθηματικών θεωριών. Δεν είναι υπερβολή να πούμε ότι η θεωρία αναδρομής, η θεωρία υπολογισμού και η θεωρία αποδείξεων οφείλουν τη σημερινή μορφή τους στις αποδείξεις των θεωρημάτων μη-πληρότητας.

Παρά, όμως, τη συνεισφορά τους στην ανάπτυξη της μαθηματικής πρακτικής, αρκετός κόσμος θεωρεί ότι τα θεωρήματα μη-πληρότητας εισάγουν ένα στοιχείο ατέλειας στο μαθηματικό οικοδόμημα, δυναμιτίζοντας κάθε προσπάθεια θεμελίωσής του.

Τα θεωρήματα μη-πληρότητας φαίνεται να δημιουργούν ένα κλίμα αμφιβολίας για την εγκυρότητα μιας μαθηματικής αλήθειας, δεδομένου ότι θέτουν υπό αίρεση τη συνέπεια ενός αξιωματικού συστήματος. Ένας τέτοιος ισχυρισμός, ωστόσο, είναι μόνο μερικά αληθής. Τα θεωρήματα δείχνουν ότι η συνέπεια ενός αξιωματικού συστήματος δεν είναι δυνατόν να αποδειχθεί με τα συντακτικά μέσα που παρέχει το ίδιο. Για παράδειγμα, ο Gentzen απέδειξε, το 1936, τη συνέπεια της αριθμητικής Peano, με συντακτικά μέσα, όμως, που δεν μπορούσαν να τυποποιηθούν από την ίδια τη θεωρία. Το ερώτημα που προκύπτει είναι κατά πόσο είμαστε διατεθειμένοι να αποδεχτούμε παραπάνω παραδοχές για να αποδείξουμε τη συνέπεια μιας μαθηματικής θεωρίας. Άλλωστε, μετά από τόσα χρόνια εφαρμογής της μαθηματικής πρακτικής σε διάφορα πεδία, το ενδεχόμενο να ενυπάρχουν αντιφάσεις στην αριθμητική Peano φαντάζει μάλλον απίθανο. Συν τοις άλλοις, μια απόδειξη συνέπειας της θεωρίας με βάση τα συντακτικά της μέσα θα μπορούσε και να οφείλεται, απλά, στο γεγονός ότι στην πραγματικότητα η θεωρία είναι μη-συνεπής. Όσο και αν ακούγεται παράδοξο, μια απόδειξη συνέπειας της αριθμητικής Peano από την ίδια τη θεωρία, θα δημιουργούσε ισχυρές αμφιβολίες για τη συνέπειά της.

Παράλληλα, υπάρχει η εντύπωση ότι τα θεωρήματα μη-πληρότητας περιορίζουν δραματικά τα όρια της μαθηματικής δημιουργίας, αποδεικνύοντας ότι σε κάθε θεωρία υπάρχουν μη-αποκρίσιμες προτάσεις. Κάτι τέτοιο, όμως, αποτελεί μια εγγενή αδυναμία των μαθηματικών, την οποίο απλά καταδεικνύουν τα θεωρήματα μη-πληρότητας. Η επισήμανση αυτής της ιδιότητας αποτελεί ένα τεράστιο βήμα για την κατανόηση της φύσης της μαθηματικής αλήθειας. Άλλωστε, τα θεωρήματα μη-πληρότητας συνεισφέρουν ουσιαστικά στην κατανόηση αρκετών ακόμη εννοιών της λογικής. Οι έννοιες της αλήθειας, της αποδειξιμότητας, της ερμηνείας, του μοντέλου, καθώς και ο τρόπος που συνδέονται οι έννοιες αυτές από το θεώρημα πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού, αποκρυσταλλώνονται όταν εξετάζονται υπό το πρίσμα των θεωρημάτων μη-πληρότητας.

Σίγουρα, όμως, επιβάλλουν κάποιου είδους περιορισμό, καταστρέφοντας το όραμα του Hilbert για έναν αλγόριθμο που θα είναι σε θέση να αποδεικνύει κάθε αληθή πρόταση. Ουσιαστικά, τα θεωρήματα μη-πληρότητας τονίζουν ότι ποτέ δε θα καταφέρουμε να αποκτήσουμε πλήρη εποπτεία της μαθηματικής αλήθειας. Παράλληλα, όμως, διασώζουν την αξία της μαθηματικής δημιουργίας. Ο μαθηματικός καλείται να κρίνει την προφάνεια των καινούριων αξιωμάτων και την εγκυρότητα των μοντέλων με τον ίδιο τρόπο που ένας καλλιτέχνης κρίνει το αισθητικό αποτέλεσμα μιας εικαστικής δημιουργίας, με βάση την κρίση και την εποπτεία του, χωρίς τη βοήθεια μιας αλγοριθμικής διαδικασίας. Η μαθηματική δημιουργία, υπό το πρίσμα των θεωρημάτων μη-πληρότητας, δεν είναι δυνατόν να ιδωθεί ως μια μορφή μηχανιστικής παραγωγής θεωρημάτων, αλλά μόνο ως μια ύψιστη μορφή τέχνης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1 **Boolos, Logic, logic and logic**
Harvard University Press, 1998

2 **Cutland, Computability**
Cambridge University Press, 1980

3 **DeLong, A profile of mathematical logic**
Dover Publications, 1998

4 **Kunen, Set theory**
North Holland – Elsevier, 1980

5 **Odifreddi, Classical recursion theory**
North Holland – Elsevier, 1989

6 **Nagel & Newman, Το θεώρημα του Gödel**
Εκδόσεις Τροχαλία, 1991

7 **Shapiro, Σκέψεις για τα μαθηματικά**
Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2006

8 **Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών**
Εκδόσεις Νεφέλη, 2005

9 **Αναπολιτάνος, Η φύση των μαθηματικών αντικειμένων και το πληροφορικό περιεχόμενο των μαθηματικών αληθειών**
Στιγμές και διάρκειες
Εκδόσεις Νεφέλη, 2009

10 **Βαθειάδου & Rand-Moschovavakis, Τα ενορατικά μαθηματικά και η λογική τους**
Στιγμές και διάρκειες
Εκδόσεις Νεφέλη, 2009

11 **Κολέτσος, Σημειώσεις μαθηματικής λογικής**
http://www.math.ntua.gr/logic/mathlogic/

12 **Μοσχοβάκης, Αναδρομή και υπολογισιμότητα**
http://www.math.ucla.edu/~ynm/books.htm

13 **Μοσχοβάκης, Σημειώσεις στη συνολοθεωρία**
Εκδόσεις Νεφέλη, 1993

14 **Τζουβάρας, Στοιχεία μαθηματικής λογικής**
Εκδόσεις Ζήτη, 1998

15 **Χαρτώνας, Βασική λογική**
Εκδόσεις Ζήτη, 2000