

Θεωρητική και Φαινομενολογική Μελέτη της
Ενεργού Διατομής Παραγωγής Ζεύγους $t\bar{t}$ Μεγάλης
Εγκάρσιας Ορμής σε Συγκρούσεις Πρωτονίων



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Φυσικής

Διπλωματική Εργασία

Συγγραφέας: Γιάννης Πολυχρονάκος Μαγκαφάς
Επιβλέπων: Καθηγητής Κωνσταντίνος Κουσουρής

Αθήνα, Φεβρουάριος 2022

Περιεχόμενα

Abstract	3
Περίληψη	4
Ευχαριστίες	5
1 Εισαγωγή	6
1.1 Τα Βασικά της Παρατήρησης	6
1.2 Κινηματική Ανιχνευτών	7
1.2.1 Ειδική Σχετικότητα	7
1.2.2 Συστήματα αναφοράς	9
1.3 Σχετικιστική Κβαντομηχανική	9
1.3.1 Εξίσωση Klein-Gordon	10
1.3.2 Εξίσωση Dirac	10
1.3.3 Η ανάγκη για διαφορετικό Φορμαλισμό	11
1.4 Λαγκρανζιανός Φορμαλισμός	11
2 Κβαντικές Θεωρίες Πεδίου	13
2.1 Δεύτερη Κβάντωση	13
2.1.1 Κανονική Κβάντωση σε Ελεύθερα Πεδία	14
2.1.2 Κβάντωση του Πεδίου Dirac	15
2.2 Κβαντική Ηλεκτροδυναμική	16
2.2.1 Λαγκρανζιανή της ΚΗΔ	16
2.2.2 Κανόνες Feynman	18
2.3 Κβαντική Χρωμοδυναμική	19
2.3.1 Η Λαγκρανζιανή της ΚΧΔ	19
2.3.2 Κανόνες Feynman για την ΚΧΔ	22
2.4 Επανακανονικοποίηση	23
2.4.1 Ασυμπτωτική Ελευθερία	23
3 Δομή του Πρωτονίου	27
3.1 Ελαστική Σκέδαση Ηλεκτρονίου Πρωτονίου	27
3.2 Βαθιά Ανελαστική Σκέδαση Ηλεκτρονίου Πρωτονίου	33
3.3 Συναρτήσεις κατανομής παρτονίων	34
3.3.1 Θάλασσα των κουάρκ	35
4 Τοπ κουάρκ: Το πιο βαρύ στοιχειώδες σωματίδιο	38
4.1 Παραγωγή του τοπ κουάρκ	38
4.2 Τοπ κουάρκ στο Καθιερωμένο Πρότυπο	40
4.3 Τοπ κουάρκ Πέρα του Καθιερωμένου Προτύπου	42
5 Παραγωγή Γεγονότων	43
5.1 Τυχαιότητα ως Υπολογιστικό Εργαλείο	44
5.1.1 Μέθοδος Monte Carlo	44

5.1.2	Μαρκοβιανές Αλυσίδες	46
5.2	Κύρια αλληλεπίδραση	46
5.2.1	Υπολογισμός σε Πρώτη Τάξη	47
5.2.2	Κβαντικές Διορθώσεις και η Επόμενη Τάξη	48
5.3	Παρτονικός Καταιγισμός	50
5.3.1	Συναρτήσεις Διαχωρισμού	51
5.3.2	Συντελεστής Μορφής Sudakov	52
5.3.3	Συμβολή Χρώματος	53
5.3.4	Συνδυασμός NLO και Παρτονικού Καταιγισμού	53
5.4	Συναρτήσεις Κατανομής Παρτονίων	53
5.5	Δευτερογενείς Αλληλεπιδράσεις	55
5.5.1	Πολλαπλές Παρτονικές Αλληλεπιδράσεις	55
5.5.2	Το βάντρο των πιδάκων	55
5.6	Αδρονιοποίηση	56
5.6.1	Μοντέλο Συμπλόκων	56
5.7	Ο Ρόλος των Προσομοιώσεων Monte Carlo	56
5.7.1	Θεωρητικές Αβεβαιότητες	57
5.7.2	Εκτύλιξη	57
6	Ενεργές Διαφορικές Διατομές ζεύγους τοπ κουάρκ με το Herwig 7.2	59
6.1	Ζεύγη τοπ στην προωθημένη περιοχή	59
6.1.1	Ανακατασκευή Γεγονότων	59
6.1.2	Προσομοίωση Γεγονότων	60
6.2	Παραγωγός Γεγονότων Herwig 7.2	63
6.3	Οι ρυθμίσεις της προσομοίωσης	63
6.3.1	Επιλογή στοιχείων μήτρας	64
6.3.2	Παρτονικός Καταιγισμός	66
6.4	Αποτελέσματα Προσομοίωσης	68
6.4.1	Μεταβολές Κλίμακας	68
6.4.2	Εξάρτηση από τη σταθερά ισχυρής αλληλεπίδρασης	77
6.4.3	Σύγκριση των Αποτελεσμάτων	80
7	Σύνοψη	81
A	Βασικά Θεωρίας Ομάδων	82
A.1	Ομάδα SU(N)	82
A.2	Πίνακες Gell-Mann	82

Abstract

Monte Carlo simulations are increasingly used in the modern LHC era with a parallel increase in the demands for theoretical accuracy. The simulation of an event is a complicated multi part process that involves many theoretical assumptions such as choice of scales, PDFs etc. The primary purpose of this thesis is to quantify some of the theoretical uncertainties in kinematic observables of the top pair, in the highly boosted regime, from simulations of high transverse momentum top anti-top pair production in proton collisions at 13 TeV using the general purpose Monte Carlo event generator Herwig 7.2. Particularly we compare uncertainties in various scales of the event at Leading Order and Next to Leading Order accuracy and also compare different PDFs, looking at the uncertainties bands from the variation in the strong coupling constant. In addition, using a custom rivet analysis the simulation results will be checked against experimental data from CMS for the LO and NLO calculations. Finally, this thesis will contain an introduction to perturbative QCD and a brief overview of the basic algorithms that are used in the MC generator aiming to be not only useful statistical analysis but also a comprehensive introduction in the field.

Περίληψη

Η θεωρητική ακρίβεια στις προσομοιώσεις Monte Carlo επιζητείται όλο και περισσότερο στη σύγχρονη εποχή του LHC όπου πιθανές νέες ανακαλύψεις κρύβονται βαθιά στο υπόβαθρο της χβαντικής χρωμοδυναμικής. Ο σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η παραγωγή θεωρητικών προβλέψεων για διαφορικές ενεργές δι-ατομές παραγωγής ζεύγους τοπ αντιτόπ κουάρκ με μεγάλη εγκάρσια ορμή ($p_T > 400 \text{ GeV}$) χρησιμοποιώντας την Γεννήτρια Γεγονότων Herwig 7.2.2. Πιο συγκεκριμένα, υπολογισμοί σε πρώτη (LO) και σε δεύτερη τάξη (NLO) στο στοιχείο μήτρας θα συγκριθούν μεταξύ τους, με πειραματικά δεδομένα και με προηγούμενες προσομοιώσεις. Επιπλέον θα εκτιμηθούν κάποιες από τις αβεβαιότητες που οφείλονται σε αυθαίρετες επιλογές παραμέτρων στη γεννήτρια γεγονότων. Αρχικά, θα υπολογιστεί η αβεβαιότητα οφειλόμενη στις κλίμακες επανακανονικοποίησης και παραγοντοποίησης οι οποίες ποσοτικοποιούν της συνεισφορές διορθώσεων μεγαλύτερης τάξης. Επιπλέον θα υπολογιστεί η αβεβαιότητα στην ισχυρή σταθερά αλληλεπίδρασης a_s και θα δοκιμαστούν διαφορετικές συναρτήσεις κατανομής παρτονίων οι οποίες αποτελούν και αυτές ελεύθερη παράμετρο. Τέλος, θα γίνει μία εισαγωγή στην χβαντική θεωρία πεδίου και συγκεκριμένα την χβαντική χρωμοδυναμική και τη δομή του πρωτονίου καθώς και των βασικών εργαλείων που χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση ενός γεγονότος στο LHC.

Ευχαριστίες

Πρωτίστως, η εργασία αυτή δεν θα ήταν εφικτή χωρίς την καθοδήγηση του κύριου Κ. Κουσουρή καθηγητή στο ΕΜΠ και επιβλέποντα της διπλωματικής. Ευχαριστώ επίσης θερμά τους καθηγητές Κ. Αναγνωστόπουλο και Ν. Μαυρόματο για την προσφορά τους ως μέλη της εξεταστικής επιτροπής και για τα θετικά τους σχόλια. Κοιτώντας πίσω, θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε αυτούς τους σπουδαίους καθηγητές και δασκάλους που ανά τα χρόνια με ενέπνευσαν να κυνηγήσω τα όνειρα μου. Σε τεχνικό επίπεδο, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Ιωάννη Παπακριβόπουλο για τον κώδικα που προσέφερε καθώς και τους Andy Buckley και Christian Gutschow για την τεχνική υποστήριξη σχετικά με το Rivet. Επίσης ευχαριστώ την Βασιλική Στεργίου, έναν σημαντικό άνθρωπο για μένα, για τα σχόλια και τις παρατηρήσεις της. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που με αυτοθυσία παρείχε πάντα ότι χρειαζόμουν.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η αναζήτηση για τους θεμελιώδεις δομικούς λίθους της φύσης έχει επιφέρει σημαντικές εξελίξεις στη θεωρητική φυσική και τα μαθηματικά, με την ανάπτυξη μεγάλων ιδεών όπως οι Θεωρίες Βαθμίδας, οι Κβαντικές Θεωρίες Πεδίου κ.α. Παράλληλα έχει σπρώξει την τεχνολογία στα άκρα, με τη δημιουργία των μεγαλύτερων μικροσκοπίων του κόσμου, σωματιδιακούς επιταχυντές όπως τον Μεγάλο Επιταχυντή Αδρονίων (LHC). Η πρόοδος αυτή έχει δημιουργήσει ένα χάσμα μεταξύ θεωρίας και πειράματος το οποίο οφείλεται κυρίως σε τρεις λόγους. Πρώτον η εξαγωγή παρατηρήσιμων μεγεθών από την Λαγκρανζιανή του Καθιερωμένου Προτύπου (ΚΠ) είναι μία μη τετριμμένη διαδικασία η οποία απαιτεί σημαντική υπολογιστική ισχύ για την επίτευξη οποιασδήποτε ποσοτικής πρόβλεψης. Δεύτερον, η πειραματική διαδικασία περιλαμβάνει εξαιρετικά πολύπλοκες διατάξεις και σημαντική ανάλυση δεδομένων που χρειάζονται αρκετή εξειδίκευση για να λειτουργήσουν. Τρίτον, ακόμα και όταν διεισδύουμε βαθιά στις υποατομικές κλίμακες, δεν παρατηρούμε τι συμβαίνει εκείνη την στιγμή, αλλά πολλές τάξεις μεγέθους "αργότερα" όταν τα σωματίδια αλληλεπιδράσουν με τον ανιχνευτή. Ο τομέας που γεφυρώνει το χάσμα αυτό είναι η φαινομενολογία η οποία ασχολείται με την παραγωγή προβλέψεων από την θεωρία και τον έλεγχο τους ενάντια στα πειραματικά δεδομένα.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η προσομοίωση διαφορικών ενεργών διατομών για την παραγωγή ζευγούς τοπ αντιτόπ κουάρκ μεγάλης εγκάρσιας ορμής χρησιμοποιώντας τη Γεννήτρια Γεγονότων (Event Generator) Herwig 7.2.2 χτίζοντας στη μελέτη του CMS [1] η οποία παρατήρησε αποκλίσεις μεταξύ θεωρίας και πειράματος. Παράλληλα, θα γίνει μία μη αυστηρή αλλά εκτενής ανασκόπηση των βασικών θεωρητικών εργαλείων που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση με έμφαση στην Κβαντική Χρωμοδυναμική (ΚΧΔ).

1.1 Τα Βασικά της Παρατήρησης

Ας ξεκινήσουμε σχιαγραφώντας τα βασικά χαρακτηριστικά της πειραματικής διαδικασίας. Το LHC είναι ένα μεγάλο πείραμα σκέδασης πρωτονίων. Όσο μεγαλύτερη η ενέργεια κέντρου μάζας, τόσο μικρότερη η κλίμακα της αλληλεπίδρασης. Τα πρωτόνια είναι σύνθετα σωματίδια τα οποία αποτελούνται από παρτόνια (γκλουόνια και κουάρκ). Κατά τη σύγκρουση κάποια από τα παρτόνια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και παράγουν άλλα σωματίδια μέσω της σχέσης $E = mc^2$. Τα σωματίδια αυτά πετούν σε όλες τις κατευθύνσεις μέχρι να αλληλεπιδράσουν με τον ανιχνευτή. Τα γεγονότα (οι σχεδιάσεις) που μας ενδιαφέρουν είναι αυτά που περιέχουν "σκληρές" αλληλεπιδράσεις, δηλαδή μεγάλη μεταφορά ενέργειας μεταξύ των παρτονίων και μπορούν να διαλύσουν τα πρωτόνια παράγοντας διαφορετικά σωματίδια. Σε τέτοια γεγονότα το πλήθος των εξερχόμενων σωματιδίων είναι της τάξης των εκατοντάδων με χιλιάδων.

Οι σχεδιάσεις των στοιχειωδών σωματιδίων περιγράφονται ως έναν βαθμό από την κβαντομηχανική. Για μία διαδικασία σκέδασης $pp \rightarrow k_1 k_2 \dots k_n$ το πλάτος θα είναι

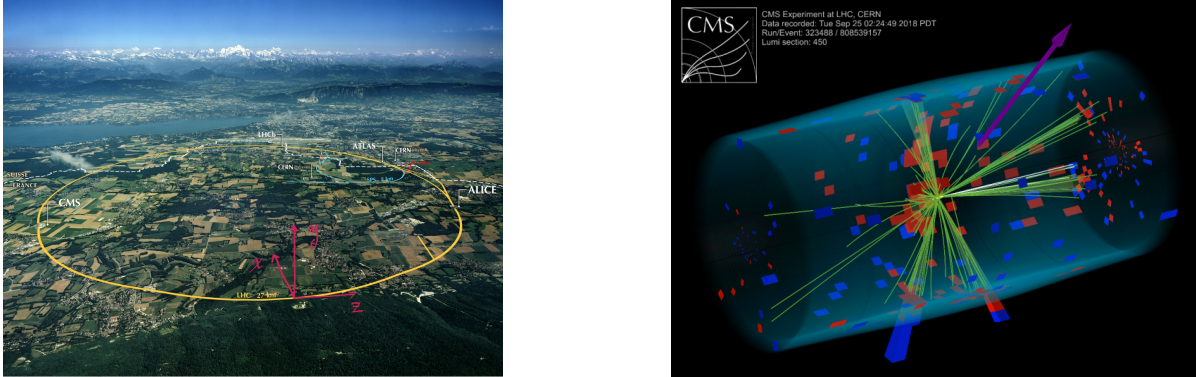
$$\langle pp | k_1 k_2 \dots k_n \rangle = \langle in | \hat{S} | out \rangle$$

όπου $|in\rangle = |pp\rangle_{t=-\infty}$ τα αρχικά πρωτόνια πολύ πριν αλληλεπιδράσουν και $|out\rangle = |k_1 k_2 \dots k_n\rangle_{t=\infty}$ τα τελικά σωματίδια πολύ μετά την αλληλεπίδραση. Ο τελεστής \hat{S} περιγράφει την πολύπλοκη αλληλεπίδραση και δεν είναι

γνωστός. Ο πίνακας S είναι ένας πίνακας με στοιχεία $\langle in | \hat{S} | out \rangle$ και δίνει τα πλάτη της κάθε αλληλεπίδρασης. Αυτό θα λέγεται στο εξής το στοιχείο μήτρας M (matrix element) και είναι ίσως το πιο βασικό κομμάτι του υπολογισμού. Αν έχουμε το στοιχείο πίνακα για μία διαδικασία, η ενεργή διατομή για αυτήν την διαδικασία είναι

$$\sigma = \int M^2 d\Phi \quad (1.1.1)$$

όπου η ολοκλήρωση είναι πάνω στον φασικό χώρο Φ , τον χώρο όλων των πιθανών καταστάσεων της τελικής κατάστασης. Οι ενεργές διατομές κατανέμονται σε μία κλίμακα περιεκτικότητας (inclusivity) η οποία αντιστοιχεί



Σχήμα 1.1: Δεξιά μία πανοραμική εικόνα του LHC και το σύνηθες σύστημα αναφοράς. Αριστερά μία ανακατασκευή γεγονόςτος του CMS, ο περιβάλλον κύλινδρος αναπαριστά τον ανιχνευτή.

περίπου στο πόσο συγκεκριμένη είναι η πληροφορία που θέλουμε να υπολογίσουμε/μετρήσουμε για τη διαδικασία. Γενικά όσο πιο αποκλειστική (exclusive) είναι η ενεργός διατομή τόσο πιο δύσκολο να μετρηθεί. Για παράδειγμα συνολική ενεργός διατομή της σκέδασης πρωτονίου-πρωτονίου είναι εύκολη να μετρηθεί και χρειάζεται μόνο ένα σήμα. Η μέτρηση της ενεργούς διατομής διπλού πίδακα είναι πιο δύσκολη καθώς χρειάζεται κάποια χωρική ανάλυση ώστε να ξεχωρίσει τους δύο πίδακες. Επειδή το πείραμα έχει περιορισμένη ανάλυση δεν γίνεται να μετρηθούν αυθαίρετα αποκλειστικά μεγέθη, όπως για παράδειγμα πόσα κουάρκ έχει η τελική κατάσταση. Οι παρατηρήσεις αυτές είναι εν μέρη προφανής αλλά χρειάζονται για την παραγωγή θεωρητικών προβλέψεων. Πιο συγκεκριμένα, θα δούμε παρακάτω πως οι περιορισμοί στην ανάλυση του πειράματός μας "προστατεύουν" από απειρίες που εμφανίζονται σε διάφορα όρια του φασικού χώρου τα οποία είναι αδύνατον να μετρηθούν πειραματικά.

1.2 Κινηματική Ανιχνευτών

Τα σωματίδια στους επιταχυντές βρίσκονται στη σχετικιστική περιοχή ενεργειών και για την περιγραφή τους χρησιμοποιούνται διάφορα συστήματα συντεταγμένων και διάφορες προσεγγίσεις με σκοπό την απλοποίηση των υπολογισμών. Σε αυτές τις αναλύσεις χρησιμοποιείται πλήρως ο σχετικιστικός φορμαλισμός: τετρανύσματα, χώρος Minkowski, άθροιση δεικτών.

1.2.1 Ειδική Σχετικότητα

Στην Ειδική Σχετικότητα οι βασικές παραδοχές είναι πως οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι για κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς και η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια για όλους τους παρατηρητές. Δεδομένου ότι ο αναγνώστης είναι ήδη εξοικειωμένος με την σύμβαση άθροισης δεικτών και τα τετρανύσματα, οι παραπάνω παραδοχές κωδικοποιούνται στον φορμαλισμό ως,

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu$$

όπου $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ η μετρική Minkowski και τα x^μ και x'^μ δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Αυτό σημαίνει πως το στοιχειώδες μήκος ds^2 είναι το ίδιο και στα δύο συστήματα. Οι μετασχηματισμοί $x^\mu \rightarrow x'^\mu$

έχουν την ιδιότητα να διατηρούν την ταχύτητα του φωτός σταθερή καθώς για $c = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = 1$,

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - d\vec{x}^2 = 0$$

και άρα $g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = 0 \Rightarrow \left| \frac{dx'}{dt'} \right| = 1$. Ακολουθώντας τις συνθήκες συμβάσεις θα συμβολίζουμε με ελληνικούς χαρακτήρες τους δείκτες τετρανυσμάτων και με λατινικούς τους δείκτες διανυσμάτων.

Μετασχηματισμοί Lorentz και η ομάδα Poincare

Ο χώρος Minkowski αποτελείται από τετρανύσματα της μορφής $x^\mu = (t, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ με εσωτερικό γινόμενο $x^\mu x_\mu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. Η μετάβαση από ένα σύστημα αναφοράς x^μ σε ένα x'^μ γίνεται με τους μετασχηματισμούς Lorentz, πίνακες 4x4 που δρουν στα τετρανύσματα ως $x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$. Βαθμωτά μεγέθη, δηλαδή μεγέθη χωρίς ελεύθερους δείκτες θέλουμε να είναι αναλλοίωτα στους μετασχηματισμούς Lorentz καθώς δεν είναι τετρανύσματα. Αυτό συνεπάγεται πως $x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x'^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} L^\mu_\alpha L^\nu_\beta x^\alpha x^\beta$ και άρα

$$g_{\mu\nu} L^\mu_\alpha L^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$$

που είναι η κύρια συνθήκη περιορισμού των μετασχηματισμών. Μία ακόμη λογική συνθήκη είναι πως οι μετασχηματισμοί είναι γραμμικοί

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

όπου a^μ ένα τετρανύσμα ενώ ο Λ^μ_ν ένας 4x4 πίνακας που αναπαριστά στροφές. Συνεπώς οι μετασχηματισμοί Lorentz μπλέκουν την χρονική με τις χωρικές διαστάσεις δημιουργώντας φαινόμενα όπως συστολή του μήκους και διαστολή του χρόνου μεταξύ κινούμενων παρατηρητών.

Έστω δύο συστήματα αναφοράς S και S' με σχετική ταχύτητα $\beta = v/c$ στην κατεύθυνση x^1 . Ένα γεγονός, που στο S είναι x^μ και στο S' είναι x'^μ , συνδέεται μέσω του μετασχηματισμού Lorentz

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x'^0 = \gamma x^0 - \beta\gamma x^1 \\ x'^1 = \gamma x^1 - \beta\gamma x^0 \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{matrix}$$

όπου $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$. Αυτό είναι το πιο απλό παράδειγμα μετασχηματισμού Lorentz και είναι βασικό καθώς επιτρέπει την αλλαγή μεταξύ συντεταγμένων στον άξονα συμμετρίας του ανιχνευτή.

Το σύνολο των μετασχηματισμών Lorentz L^μ_ν καθιστούν μία ομάδα υπό την πράξη της διαδοχικής εφαρμογής δύο μετασχηματισμών $(L \odot L')x^\nu = L^\mu_\alpha L'^\alpha_\nu x^\nu$ με τα στοιχεία της ομάδας να γράφονται ως (Λ, α) . Οι συνθήκες ώστε το σύνολο αυτό να είναι ομάδα είναι

$$\begin{aligned} (\Lambda, \alpha) \odot (\Lambda', \alpha') &= (\Lambda\Lambda', \Lambda'\alpha + \alpha') \\ (1, 0) \odot (\Lambda, \alpha) &= (\Lambda, \alpha) \\ (\Lambda^{-1}, \alpha^{-1}) \odot (\Lambda, \alpha) &= (1, 0) \\ ((\Lambda, \alpha) \odot (\Lambda', \alpha')) \odot (\Lambda'', \alpha'') &= (\Lambda, \alpha) \odot ((\Lambda', \alpha') \odot (\Lambda'', \alpha'')). \end{aligned}$$

Rapidity

Η δομή της γενικής σχετικότητας έχει μία εγγενώς καμπύλη γεωμετρία που προέρχεται από την ομάδα Lorentz. Είναι συχνά εύχρηστο οι μετασχηματισμοί Lorentz να εκφράζονται ως στροφές. Παρατηρώντας ότι για τα γ και β ισχύει η ταυτότητα $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ η οποία είναι πανομοιότυπη με την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cosh^2(\varphi) - \sinh^2(\varphi) = 1$, ο μετασχηματισμός γράφεται

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & -\sinh(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x'^0 = \cosh(\varphi)x^0 - \sinh(\varphi)x^1 \\ x'^1 = \cosh(\varphi)x^1 - \sinh(\varphi)x^0 \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{matrix}$$

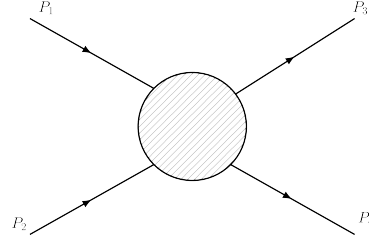
όπου ο πίνακας του μετασχηματισμού αντιστοιχεί σε μία υπερβολική στροφή κατά μία γωνία που σχετίζεται με την ταχύτητα μέσω της σχέσης $\beta = \tanh(\varphi)$.

Μία χρήσιμη ποσότητα στην ειδική σχετικότητα είναι η rapidity η οποία ορίζεται ως η υπερβολική γωνία στροφής από την σχέση $\varphi = \operatorname{arctanh}(\beta)$. Η rapidity μπορεί να εκφραστεί με λογάριθμο μέσω της ταυτότητας $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ως

$$y = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{E + |\vec{p}|}{E - |\vec{p}|} \right).$$

1.2.2 Συστήματα αναφοράς

Συνήθως οι ενεργές διατομές ορίζονται έτσι ώστε να είναι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς Lorentz (τουλάχιστον στον άξονα z). Συνεπώς ανάλογα τα χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης διαφορετικά συστήματα αναφοράς είναι πιο βολικά για τον υπολογισμό των ενεργών διατομών. Είναι επίσης χρήσιμο να χρησιμοποιούνται μεταβλητές οι οποίες είναι εξ αρχής αναλλοίωτες στους μετασχηματισμούς Lorentz. Ίσως οι πιο χρήσιμες αναλλοίωτες μεταβλητές είναι οι μεταβλητές Mandelstam



$$\begin{aligned} s &= (P_1 + P_2)^2 = (P_3 + P_4)^2 \\ t &= (P_1 - P_3)^2 = (P_2 - P_4)^2 \\ u &= (P_1 - P_4)^2 = (P_2 - P_3)^2 \end{aligned}$$

οι οποίες χρησιμοποιούνται για σχεδιάσεις $2 \rightarrow 2$ και περιέχουν τη διατήρηση ορμής μειώνοντας τις μεταβλητές από τέσσερις σε τρεις. Η έκφραση ενεργών διατομών συναρτήσεως των σταθερών Mandelstam καθιστά εύκολο τον υπολογισμό τους σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων και ορίζει το κανάλι της αντίδρασης (s-channel, t-channel, u-channel) ανάλογα με ποια από αυτές αντιστοιχεί το μέτρο της ορμής του διαδότη. Επιπλέον η ενέργεια κέντρου μάζας στους επιταχυντές συμβολίζεται ως \sqrt{s} . Έχοντας μία έκφραση μεταξύ των s, u, t η εναλλαγή συστημάτων αναφοράς είναι εύκολη. Η μέτρηση γίνεται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου όπου οι τετραορμές είναι

$$\begin{aligned} P_1^\mu &= (E_1, \vec{P}_1), & P_3^\mu &= (E_3, \vec{P}_3) \\ P_2^\mu &= (E_2, \vec{P}_2), & P_4^\mu &= (E_4, \vec{P}_4) \end{aligned}$$

με την διατήρηση της τετραορμής να μειώνει τις ελεύθερες παραμέτρους. Στο σύστημα κέντρου μάζας $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0}$, συνεπώς

$$\begin{aligned} P_1^\mu &= (E_1, \vec{P}), & P_3^\mu &= (E_3, \vec{P}') \\ P_2^\mu &= (E_2, -\vec{P}), & P_4^\mu &= (E_4, -\vec{P}'). \end{aligned}$$

Πολλές φορές είναι βολικό να δουλέψουμε στο σύστημα αναφοράς κάποιου από τα σωματίδια. Για παράδειγμα στο σύστημα αναφοράς του P_2 έχουμε

$$\begin{aligned} P_1^\mu &= (E_1, \vec{P}_1), & P_3^\mu &= (E_3, \vec{P}_3) \\ P_2^\mu &= (M_2, \vec{0}), & P_4^\mu &= (E_4, \vec{P}_4). \end{aligned}$$

1.3 Σχετικιστική Κβαντομηχανική

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε πολύ συνοπτικά να κάνουμε μια πρώτη σύνδεση της Κβαντομηχανικής με την Ειδική Σχετικότητα αναδεικνύοντας τα προβλήματα που προκύπτουν και γιατί χρειάζεται ένας διαφορετικός φορμαλισμός.

Στην Κβαντομηχανική η συνήθης διαδικασία είναι πως ξεκινώντας από τη σχέση $E = \frac{p^2}{2m}$ και υποθέτοντας ότι η λύση της εξίσωσης είναι κυματική $\psi(x, t) = e^{i(px-Et)/\hbar}$, αναβαθμίζουμε τις ποσότητες σε τελεστές (βάζουμε καπελάκια),

$$p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar\nabla, \quad E \rightarrow \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

και καταλήγουμε στην εξίσωση Schrodinger

$$\hat{E}\psi = \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi \Rightarrow i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$$

Στην Ειδική Σχετικότητα η ενέργεια δεν συνδέεται με την ορμή όπως στην κλασική μηχανική αλλά με τη σχέση,

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

Χρησιμοποιώντας σύστημα φυσικών μονάδων για ευκολία, δηλαδή $c = 1$ και $\hbar = 1$ έχουμε,

$$\hat{E}\psi = (\sqrt{\hat{p}^2 + m^2})\psi \Rightarrow i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\sqrt{-\nabla^2 + m^2})\psi$$

Η εξίσωση αυτή όμως δεν είναι καθόλου ικανοποιητική καθώς δεν μπορεί να γραφτεί σε μορφή τετρανουσμάτων (η χρονική και η χωρική παράγωγος έχουν διαφορετική τάξη) και ζητά την τετραγωνική ρίζα μιας διαφορικής εξίσωσης η οποία δεν είναι καλά ορισμένη.

1.3.1 Εξίσωση Klein-Gordon

Μία πρώτη λύση αυτών των προβλημάτων έρχεται ξεκινώντας από την τετραγωνική μορφή της σχέσης ενέργειας-ορμής,

$$\hat{E}^2 = \hat{p}^2 + m^2 \Rightarrow -\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\nabla^2\psi + m^2\psi.$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφτεί σε συναλλοίωτη μορφή ορίζοντας την παράγωγο $\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}) = (\partial_t, \partial_x)$,

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\psi = 0. \quad (1.3.1)$$

Καταλήγουμε έτσι στην γνωστή εξίσωση Klein-Gordon η οποία είναι Lorentz αναλλοίωτη.

Δυστυχώς η εξίσωση αυτή δεν έρχεται χωρίς τα προβλήματα της. Αρχικά το γεγονός πως χρησιμοποιεί δεύτερη παράγωγο ως προς τον χρόνο επιβάλλει την ανάγκη μια επιπλέον συνοριακής συνθήκης για την $\partial_t\psi|_{t=0}$ η οποία παραβιάζει το αξίωμα της Κβαντομηχανικής πως η κυματοσυνάρτηση ψ περιέχει όλη την πληροφορία για να περιγραφεί το φυσικό σύστημα. Επιπλέον οι ιδιοτιμές της ενέργειας για λύσεις $\psi(x, t) = e^{i(px-Et)}$ είναι θετικές αλλά και αρνητικές $E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$. Τέλος η εξίσωση αυτή δίνει αρνητικές πυκνότητες πιθανότητας και λύσεις της μορφής $\psi(x)\sin(Et)$ που σημαίνει περιοδικές εμφανίσεις και εξαφανίσεις σωματιδίων. Το αποτέλεσμα είναι αρκετά αποθαρρυντικό για τα πρώτα βήματα της Σχετικιστικής Κβαντομηχανικής.

1.3.2 Εξίσωση Dirac

Ο Dirac προσπάθησε να λύσει τα παραπάνω προβλήματα ψάχνοντας για μια εξίσωση η οποία θα είναι γραμμική στον χρόνο. Θεώρησε λοιπόν πως ο τελεστής ενέργειας μπορεί να γραφτεί ως,

$$\hat{H} = \alpha p + \beta m$$

και απαίτησε πως το τετράγωνο του πρέπει να δίνει τη μορφή της Klein-Gordon.

$$\hat{H}^2 = (\alpha p + \beta m)^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow (\alpha p)^2 + (\beta m)^2 + (\alpha\beta + \beta\alpha)pm = p^2 + m^2.$$

Φαίνεται πως τα α, β δεν μπορεί να είναι αριθμοί. Η επόμενη επιλογή μας είναι πίνακες με τις ιδιότητες,

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \mathbb{1} \\ \beta^2 &= \mathbb{1} \\ \{\alpha, \beta\} &= (\alpha\beta + \beta\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Οι ιδιότητες αυτές ορίζουν μια κλάση πινάκων η οποία όμως δεν έχει μοναδική αναπαράσταση. Σημαντική παρατήρηση είναι πως οι πίνακες Pauli υπακούουν τις ίδιες ιδιότητες γεγονός που προϋποθέτει τη σύνδεση των πινάκων αυτών με το σπιν. Από εδώ και πέρα θα λέμε τους πίνακες αυτούς, πίνακες γ όπως συνηθίζεται. Η τελική εξίσωση Dirac είναι

$$(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m)\psi = 0 \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (1.3.2)$$

όπου $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ είναι ένα τετράνυσμα πινάκων με τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= 1 \\ (\gamma^i)^2 &= -1 \quad \text{με } i = 1, 2, 3 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 0 \quad \text{με } \nu \neq \mu. \end{aligned}$$

Οι ιδιότητες αυτές συνοψίζονται με τον αντιμεταθέτη και τη μετρική $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad \text{με } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Είναι προφανές πως δεν υπάρχει μοναδική τετράδα πινάκων γ παρά μόνον αναπαραστάσεις. Η πιο απλή αναπαράσταση είναι η αναπαράσταση Dirac κατά την οποία,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

με σ^i τους γνωστούς πίνακες Pauli. Η εξίσωση Dirac στην συγκεκριμένη αναπαράσταση γράφεται ως το πεπλεγμένο σύστημα διαφορικών εξισώσεων,

$$\begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial t} - m & 0 & i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & i\frac{\partial}{\partial t} & i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} & -i\frac{\partial}{\partial z} \\ -i\frac{\partial}{\partial z} & -i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} & -i\frac{\partial}{\partial t} - m & 0 \\ -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -i\frac{\partial}{\partial t} - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το καταπληκτικό με την παραπάνω εξίσωση είναι πως από την ένωση της εξίσωσης Schrodinger και της Ειδικής Σχετικότητας προκύπτουν αβίαστα οι σπίνορες. Όπως φαίνεται λοιπόν η λύση της εξίσωσης Dirac είναι μια κυματοσυνάρτηση με 4 συνιστώσες.

1.3.3 Η ανάγκη για διαφορετικό Φορμαλισμό

Παρόλο το εντυπωσιακό αποτέλεσμα του Dirac τα προβλήματα με την αρνητική πιθανότητα και τις αρνητικές ενέργειες παραμένουν. Μολονότι αυτές οι παρατηρήσεις οδήγησαν στην πρόβλεψη των αντισωματιδίων μια φοβερή επιτυχία για την θεωρητική φυσική, καταδείκνυαν επίσης την αδυναμία του φορμαλισμού της Κβαντομηχανικής να διαχειριστεί τις επιπτώσεις της Ειδικής Σχετικότητας. Συγκεκριμένα η εμφάνιση και η εξαφάνιση σωματιδίων φαίνεται πως είναι χαρακτηριστικό και των δύο εξισώσεων που όμως δεν μπορεί να χειριστεί η απλή Κβαντομηχανική. Είναι κατά κάποιον τρόπο λογικό πως συνδυάζοντας την απροσδιοριστία του Heisenberg με την ισοδυναμία ενέργειας μάζας και τον κώνο φωτός κανείς καταλήγει σε κβαντικές διακυμάνσεις που δημιουργούν και καταστρέφουν σωματίδια [2].

1.4 Λαγκρανζιανός Φορμαλισμός

Η έννοια του ενός σωματιδίου στη σχετικιστική κβαντομηχανική έχει εμφανίσει πολλά προβλήματα η λύση των οποίων έρχεται μέσω των πεδίων $\varphi(\vec{x}, t)$. Το πεδίο είναι μία ποσότητα η οποία ορίζεται σε κάθε σημείο του χώρου. Στην κλασική μηχανική πεδία συναντάμε στον ηλεκτρομαγνητισμό (\vec{E}, \vec{B}), στη ρευστομηχανική (π.χ ταχύτητα του ρευστού) κ.α. Ένα πολύ εύρηστο εργαλείο για την περιγραφή της δυναμικής των πεδίων χρήσιμων στη φυσική είναι η Αρχή της Ελάχιστης Δράσης.

Η αρχή της ελάχιστης δράσης ορίζεται βάση μίας Λαγκρανζιανής συνάρτησης η οποία δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων. Στην κλασική μηχανική είναι συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων του συστήματος $L = L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))$ και ορίζεται ως η διαφορά της κινητικής T με τη δυναμική V ενέργεια

$$L = T - V$$

Η δράση ορίζεται ως

$$S = \int_{t_{min}}^{t_{max}} dt L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))$$

και η αρχή της ελάχιστης δράσης

$$\delta S = \delta \int_{t_{min}}^{t_{max}} dt L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)) = 0.$$

Στην κλασική θεωρία πεδίου, οι συντεταγμένες $q_\alpha(t)$ αντικαθιστώνται από πεδία $\varphi_\alpha(\vec{x}, t)$ όπου ποια η θέση δεν είναι δυναμική μεταβλητή αλλά είναι απλά μία ταμπέλα για τη θέση την οποία το πεδίο έχει τιμή $\varphi_\alpha(\vec{x}, t)$. Συνεπώς το πεδίο έχει άπειρους βαθμούς ελευθερίας, τουλάχιστον έναν για κάθε σημείο του χώρου. Στην μετατροπή αυτή η "σωματιδιακή" Λαγκρανζιανή γίνεται Λαγκρανζιανή πυκνότητα $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_\alpha, \partial_\mu \varphi_\alpha)$ και η δράση

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\varphi_\alpha, \partial_\mu \varphi_\alpha).$$

Η απειροστή μεταβολή της δράσης είναι

$$\begin{aligned} \delta S(\Omega) &= \int_{\Omega} d^4x \delta \mathcal{L}(\varphi_\alpha, \partial_\mu \varphi_\alpha) = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} \delta \varphi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \delta (\partial_\mu \varphi_\alpha) \right\} \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \right) \delta \varphi_\alpha - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \delta \varphi_\alpha \right) \right\} \end{aligned}$$

όπου έχει γίνει η προσέγγιση πως $\partial_\mu(\delta \varphi_\alpha) = \delta(\partial_\mu \varphi_\alpha)$. Η αρχή της ελάχιστης δράσης επιβάλλει

$$\delta S(\Omega) = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} d^4x \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \right) \delta \varphi_\alpha + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \delta \varphi_\alpha \right) \right\} = 0.$$

Ο δεύτερος όρος μηδενίζεται εκ κατασκευής καθώς η μεταβολή $\delta \varphi_\alpha$ γίνεται μέσα στο χωρίο Ω και όχι στο σύνορο του. Ο πρώτος όρος πρέπει να μηδενίζεται για κάθε μεταβολή και συνεπώς

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \right) = 0$$

η γνωστή εξίσωση Euler-Lagrange. Η εξίσωση αυτή δίνει την δυναμική του συστήματος από την Λαγκρανζιανή. Για παράδειγμα η Λαγκρανζιανή της εξίσωσης Klein-Gordon είναι

$$\mathcal{L}_{KL} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Υπολογίζοντας τους όρους $\frac{\partial \mathcal{L}_{KL}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi$ και $\frac{\partial \mathcal{L}_{KL}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu g^{\mu\nu} \varphi) \right) = \partial^\mu \varphi$ η εξίσωση Euler-Lagrange δίνει

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) = 0$$

την εξίσωση Klein-Gordon.

Κεφάλαιο 2

Κβαντικές Θεωρίες Πεδίου

Η κβάντωση μίας κλασσικής θεωρίας πεδίου είναι φαινομενικά μία αυτοματοποιημένη διαδικασία και έτσι θα παρουσιαστεί σε αυτό το κεφάλαιο. Είναι σημαντικό όμως να αναφερθεί πως η προσέγγιση αυτή δεν περιέχει καμία αυστηρότητα και η θεμελίωση των αρχών της ΚΘΠ είναι ακόμα ένας τομέας έρευνας. Στο παρόν κεφάλαιο θα δειχθεί η κβάντωση των πεδίων στον κανονικό φορμαλισμό, θα συζητηθεί η αναλλοιώτητα στους μετασχηματισμούς βαθμίδας και θα παρατεθούν οι κανόνες Feynman για την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (ΚΗΔ) και την Κβαντική Χρωμοδυναμική (ΚΧΔ).

2.1 Δεύτερη Κβάντωση

Στην παράγραφο (1.3.3) είδαμε πως η στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης από την κβαντομηχανική δεν επαρκεί για να δικαιολογήσει τα αποτελέσματα των εξισώσεων της σχετικιστικής κβαντομηχανικής. Το χαρακτηριστικό της δημιουργίας και της καταστροφής σωματιδίων θυμίζει την κβάντωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Η Χαμιλτονιανή του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega q^2$$

όπου η κανονική κβάντωση επιβάλλει τη σχέση απροσδιοριστίας του Heisenberg $[p, q] = i$. Τώρα έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε τους γνωστούς τελεστές καταστροφής και δημιουργίας

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{x} + \frac{i}{\omega}\hat{p}\right)$$
$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{x} - \frac{i}{\omega}\hat{p}\right)$$

όπου αντιστρέφοντας τον ορισμό πολύ εύκολα προκύπτει ότι

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$
$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

και έτσι η Χαμιλτονιανή μπορεί να γραφτεί ως συνδυασμός των τελεστών,

$$\hat{H} = \omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}).$$

2.1.1 Κανονική Κβάντωση σε Ελεύθερα Πεδία

Εμπνευσμένοι από τον αρμονικό ταλαντωτή θα ψάξουμε τελεστές δημιουργίας και καταστροφής για σωματίδια. Η διαδικασία ονομάζεται δεύτερη ή κανονική κβάντωση και ξεκινάει όχι από την κυματοσυνάρτηση αλλά από κλασσικά πεδία όπως στην ενότητα (1.4). Η πρώτη κβάντωση ήταν όταν προάγαμε τις μεταβλητές x και p σε τελεστές \hat{x} και \hat{p} . Τώρα θα προάγουμε τα πεδία $\psi_\alpha(x)$ σε τελεστές.

Κβάντωση Βαθμωτού Πεδίου

Ξεκινάμε από τη Λαγκρανζιανή Klein-Gordon με μία επιπλέον σταθεράς Ω η οποία δεν κάνει διαφορά στις εξισώσεις κίνησης.

$$\mathcal{L}_{KL} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\partial_\mu\varphi^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \Omega. \quad (2.1.1)$$

Η κβάντωση γίνεται ορίζοντας την πεδιακή ορμή και χρησιμοποιώντας τη Χαμιλτονιανή

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi} \\ \mathcal{H} &= \Pi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \Omega. \end{aligned}$$

Τώρα ακολουθώντας την τυπική διαδικασία της κανονικής κβάντωσης εφαρμόζουμε τις μεταθετικές σχέσεις

$$\begin{aligned} [\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t')] &= [\Pi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t')] = 0 \\ [\varphi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t')] &= i\delta(t-t')\delta(\vec{x}-\vec{x}'). \end{aligned}$$

Μπορούμε να δούμε τι σημαίνει αυτό αν αναπτύξουμε τις λύσεις της εξίσωσης Klein-Gordon. Μία λύση είναι τα επίπεδα κύματα $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}\pm i\omega t}$, όπου

$$\omega = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

με \vec{k} το σύννηθες κυματόνισμα. Έτσι, γράφουμε τα πεδία ως

$$\hat{\varphi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{f(\vec{k})} [\hat{a}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t} + \hat{b}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+i\omega t}] \quad (2.1.2)$$

όπου $f(x)$ είναι μια τετριμμένη συνάρτηση που έχουμε συμπεριλάβει για μετέπειτα ευκολία. Για την ώρα $\hat{a}(\vec{k})$ και $\hat{b}(\vec{k})$ είναι αυθαίρετοι συντελεστές (σταθερές ολοκλήρωσης) που χρησιμοποιήθηκαν για να αναπτύξουν το $\varphi(\vec{x}, t)$ στις λύσεις του.

Απαιτούμε από τα πεδία να είναι ερμιτιανά,

$$\varphi^\dagger = \varphi \Rightarrow \varphi^* = \varphi \Rightarrow b^*(\vec{k}) = a(-\vec{k}).$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε συμβολισμό τετρανυσμάτων

$$\hat{\varphi}(x^\mu) = \int \frac{d^3\vec{k}}{f(\vec{k})} [\hat{a}(\vec{k})e^{ik^\mu x_\mu} + \hat{a}^*(\vec{k})e^{-ik^\mu x_\mu}].$$

Πρέπει να προσέξουμε ότι το μέτρο ολοκλήρωσης $d^3\vec{k}$ δεν είναι Lorentz αναλλοίωτο καθώς ολοκληρώνει στον χώρο αλλά όχι στον χρόνο. Θα διαλέξουμε λοιπόν τη κατάλληλη μορφή για το $f(\vec{k})$ ώστε να επανακτήσουμε την αναλλοιωτότητα Lorentz.

Θα γράψουμε το διαφορικό ολοκλήρωσης συναρτήσει της διαφορικής τετραορμής, συναρτήσεων δ και συναρτήσεων Θ .

$$d^4k\delta(k^2 + m^2)\Theta(k^0).$$

Αυτή η σχέση περιέχει την τετραορμή και επιβάλλει θετική ενέργεια ($\Theta(k^0)$) και διατήρηση τετραορμής ($\delta(k^2 + m^2)$). Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} \right|}$$

όπου $g(x_i) = 0$. Μπορούμε να ολοκληρώσουμε το διαφορικό μόνο σε k^0 και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $k^0 k_0 - \vec{k}^2 + m^2 = 0 \Rightarrow k^0 k_0 = \vec{k}^2 + m^2 = \omega^2$ καταλήγουμε στη σχέση,

$$\int d^3 \vec{k} k^0 \delta(k^2 + m^2) \Theta(k^0) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega}.$$

Διαιρώντας με έναν παράγοντα $(2\pi)^3$ που θα βοηθήσει μετέπειτα στην κανονικοποίηση καταλήγουμε πως

$$\hat{\varphi}(x) = \int \tilde{d}\vec{k} [\hat{a}(\vec{k}) e^{ik^\mu x_\mu} + \hat{a}^*(\vec{k}) e^{-ik^\mu x_\mu}]$$

όπου $\tilde{d}\vec{k} = \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega}$. Οι θεμελιώδεις μεταθετικές σχέσεις των πεδίων ισχύουν αν απαιτήσουμε

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] &= [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = 0 \\ [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] &= (2\pi)^3 2\omega \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned}$$

Επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε την Χαμιλτονιανή συναρτήσει των νέων τελεστών δημιουργίας και καταστροφής όμοια με τον ταλαντωτή. Αντικαθιστώντας τα πεδία στην Χαμιλτονιανή και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int d^3 x e^{ixy} = (2\pi)^3 \delta^3(y)$ προκύπτει η μορφή

$$H = \frac{1}{2} \int \tilde{d}\vec{k} \omega (\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \hat{a}(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{k})) - V\Omega.$$

Τώρα χρησιμοποιώντας τη μεταθετική σχέση των τελεστών δημιουργίας/καταστροφής έχουμε

$$H = \int \tilde{d}\vec{k} \omega \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \frac{1}{2} \delta^3(0) \int d^3 \vec{k} - V\Omega.$$

Στην παραπάνω σχέση ο δεύτερος όρος απειρίζεται δεδομένου ότι χώρος V είναι άπειρος. Όμως το Ω είναι μια αυθαίρετη σταθερά οπότε ορίζοντας την κατάλληλα $\Omega = \frac{1}{2V} \delta^3(0) \int d^3 \vec{k}$ καταλήγουμε ότι

$$H = \int \tilde{d}\vec{k} \omega \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}). \quad (2.1.3)$$

Η μέτρηση ανιχνεύει μόνο αλλαγές στην ενέργεια και όχι την ενέργεια αυτήν κάθε αυτήν γεγονός που μας επιτρέπει να αφαιρέσουμε τον απειρισμό χωρίς να επηρεάσουμε τα πειραματικά αποτελέσματα. Αυτή η διαδικασία είναι μια πρωτόγονη μορφή Επανακανονικοποίησης.

2.1.2 Κβάντωση του Πεδίου Dirac

Η Λαγκρανζιανή της εξίσωσης Dirac είναι,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x)$$

εισάγοντας τον συμβολισμό $\gamma^\mu p_\mu = \not{p}$ καθώς και τον συζυγή σπινόρα $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Αυτό δείχνεται εύκολα χρησιμοποιώντας την εξίσωση Euler-Lagrange,

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i\not{\partial}\psi - m\psi$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = 0$.

Άρα,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \Rightarrow \boxed{(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0}.$$

Με αυτή τη Λαγκρανζιανή κβαντώνουμε το πεδίο Dirac βρίσκοντας αρχικά την κανονική ορμή $\pi_\psi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu$ και εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Legendre,

$$\mathcal{H} = \pi_\psi^0 \partial_0 \psi - \mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^0 \partial_0 \psi - \bar{\psi}(i\gamma^0 \partial_0 + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m)\psi = -\bar{\psi}(i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m)\psi \xrightarrow{\text{Dirac Eq.}} \boxed{\mathcal{H} = \psi^\dagger i\partial_0 \psi}.$$

Έπειτα ακολουθώντας την τυπική διαδικασία αναβαθμίζουμε τα πεδία ψ και ψ^\dagger σε τελεστές και απαιτούμε τις αντιμεταθετικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_a(t, x), \hat{\psi}_b^\dagger(t, y)\} &= \delta^{(3)}(x - y)\delta_{ab} \\ \{\hat{\psi}_a(t, x), \hat{\psi}_b(t, y)\} &= \{\hat{\psi}_a^\dagger(t, x), \hat{\psi}_b^\dagger(t, y)\} = 0 \end{aligned}$$

Οι αντιμεταθετικές σχέσεις είναι χαρακτηριστικό των φερμιονίων. Αν θέλαμε να κβαντώσουμε μια μποζονική εξίσωση (π.χ την Klein-Gordon) θα χρησιμοποιούσαμε μεταθέτες. Η ανάλυση των τελεστών σε επίπεδα κύματα μέσω αναπτύγματος Fourier είναι

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2E_p)^{\frac{1}{2}}} \sum_{s=1}^2 (u^s(p)\hat{a}_{sp}e^{-ip \cdot x} + v^s(p)\hat{b}_{sp}^\dagger e^{ip \cdot x}) \\ \hat{\psi}^\dagger(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2E_p)^{\frac{1}{2}}} \sum_{s=1}^2 (\bar{u}^s(p)\hat{a}_{sp}^\dagger e^{ip \cdot x} + \bar{v}^s(p)\hat{b}_{sp}e^{-ip \cdot x}) \end{aligned}$$

όπου στον συμβολισμό δεύτερης κβάντωσης ο τελεστής \hat{a}_{sp}^\dagger δημιουργεί ένα σωματίδιο με ορμή p και σπιν s ενώ αντίστοιχα ο τελεστής \hat{b}_{sp}^\dagger δημιουργεί ένα αντισωματίδιο. Φυσικά όπως και οι πεδιακοί τελεστές, οι τελεστές δημιουργίας/καταστροφής υπακούν στις αντιμεταθετικές σχέσεις

$$\{\hat{a}_{sp}, \hat{a}_{r q}^\dagger\} = \{\hat{b}_{sp}, \hat{b}_{r q}^\dagger\} = \delta^{(3)}(p - q)\delta_{sr}.$$

Εισάγοντας τώρα τα παραπάνω αναπτύγματα στην Χαμιλτονιανή Dirac και κανονικοποιώντας, καταλήγουμε στην κβαντισμένη θεωρία μας με

$$\hat{H} = \int d^3p \sum_{s=1}^2 E_p (\hat{a}_{sp}^\dagger \hat{a}_{sp} + \hat{b}_{sp}^\dagger \hat{b}_{sp})$$

η οποία μας δίνει την συνολική ενέργεια αθροίζοντας την ενέργεια των σωματιδίων και αντισωματιδίων για κάθε κατάσταση με ορμή p . Αποτέλεσμα που είναι λογικό. Στη συνέχεια κανείς μπορεί να υπολογίσει την διαδότη και να εξάγει τους κανόνες διαγραμμάτων Feynmann.

2.2 Κβαντική Ηλεκτροδυναμική

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στη διαταρακτική Κβαντική Χρωμοδυναμική, συνεπώς θα γίνει μόνο μία απλή συνοπτική αναφορά στην ΚΗΔ. Η ΚΗΔ είναι η πρώτη κβαντική θεωρία πεδίου που αναπτύχθηκε στον τομέα της φυσικής υψηλών ενεργειών και σε αυτήν χτίστηκαν τα εργαλεία και οι μεθοδολογίες που έπειτα γενικεύτηκαν και αλλού. Η ΚΗΔ θεωρείται η πιο ακριβής θεωρία που έχει φτιάξει ο άνθρωπος.

2.2.1 Λαγκρανζιανή της ΚΗΔ

Οι εξισώσεις Maxwell μπορούν να γραφτούν με σχετικιστικό φορμαλισμό χρησιμοποιώντας το διανυσματικό πεδίο $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ και το τετρα-ρεύμα $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ ως

$$\partial^2 A^\mu = J^\mu.$$

Για την επίτευξη αυτού του αποτελέσματος έχει χρησιμοποιηθεί το γεγονός ότι οι εξισώσεις Maxwell είναι αναλλοίωτες στους μετασχηματισμούς βαθμίδας

$$\vec{A} \rightarrow A^\mu + \vec{\nabla}\psi, \quad \varphi \rightarrow \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Από αυτήν την κλασσική αρχή μπορούμε να θεωρήσουμε το A^μ ως την κυματοσυνάρτηση των φωτονίων και να την προσθέσουμε στην εξίσωση Dirac απορροφώντας τον δείκτη μ με πίνακες γ ώστε να διατηρηθεί η αναλλοιότητα στους μετασχηματισμούς Lorentz. Η εξίσωση Dirac των ηλεκτρονίων και της αλληλεπίδρασης τους με φωτόνια θα είναι

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma_\mu A^\mu - m)\psi = 0. \quad (2.2.1)$$

Θεωρία Βαθμίδας

Υπάρχει ένας κομψότερος τρόπος να αποκτηθεί το παραπάνω αποτέλεσμα ο οποίος μπορεί να γενικευτεί και για την εύρεση διαφορετικών αλληλεπιδράσεων. Ο τρόπος είναι να απαιτήσουμε την αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής σε έναν τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας, δηλαδή έναν μετασχηματισμό των πεδίων σε κάθε σημείο του χώρου, υπό κάποια συνεχή ομάδα συμμετρίας. Στην περίπτωση της ΚΗΔ η ομάδα συμμετρίας είναι η $U(1)$ και απαιτούμε την Λαγκρανζιανή Dirac να είναι αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x)e^{-i\theta(x)}$$

δηλαδή σε μία τοπική στροφή κατά γωνία $\theta(x)$. Η Λαγκρανζιανή Dirac γίνεται

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu \theta(x))\psi = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}. \quad (2.2.2)$$

Μπορούμε τώρα να μηδενίσουμε το $\delta\mathcal{L}$ ορίζοντας την συναλλοίωτη παράγωγο

$$D^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu(x)$$

με το διανυσματικό πεδίο $A^\mu(x)$ να μετασχηματίζεται ως

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \frac{1}{e}\partial^\mu\theta(x).$$

Με την συναλλοίωτη παράγωγο η Λαγκρανζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma_\mu A^\mu - m)\psi$$

που συμβαδίζει με το αποτέλεσμα (2.2.1).

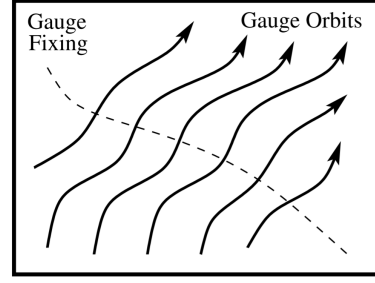
Το πεδίο A^μ είναι το φωτόνιο το οποίο για να είναι φυσικό σωματίδιο πρέπει να προστεθεί στην Λαγκρανζιανή ένας κινητικός όρος ($\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^2$) που θα αντιστοιχεί στα ελεύθερα φωτόνια. Η κινητικός όρος πρέπει να είναι αναλλοίωτος στους μετασχηματισμούς βαθμίδας και η μόνη επιλογή είναι ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Τελικά η Λαγκρανζιανή της ΚΗΔ είναι

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma_\mu A^\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (2.2.3)$$

Στη Λαγκρανζιανή αυτή ένας όρος $m^2 A^\mu A_\mu$ θα παραβίαζε την αναλλοιότητα βαθμίδας και συνεπώς το φωτόνιο δεν μπορεί να έχει μάζα.

2.2.2 Κανόνες Feynman

Τα δομικά υλικά του πίνακα S είναι τα διαγράμματα Feynman, εικονικές αναπαραστάσεις σχεδιάσεων που περιέχουν την πληροφορία της διαταρακτικής σειράς. Τα διαγράμματα αυτά σχεδιάζονται σύμφωνα με τους κανόνες Feynman οι οποίοι μπορεί να οριστούν στον κανονικό φορμαλισμό μέσω συναρτήσεων Green και στον φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομής (Path Integrals) μέσω συναρτήσεων συσχετισμού (correlation functions). Είναι επίσης συχνό κανείς να ξεκινάει από τους κανόνες Feynman καθώς περιέχουν την πληροφορία της θεωρίας [7], χωρίς να τους αποδείξει αυστηρά, όπως θα κάναμε και σε αυτή την εργασία.



Σχήμα 2.1

Πολύ συνοπτικά η Λαγκρανζιανή της θεωρίας, στην περίπτωση της ΚΗΔ χωρίζεται σε ένα ελεύθερο μέρος που περιέχει όρους με μόνο ένα πεδίο και σε ένα μέρος αλληλεπίδρασης με όρους που μπλέκουν τα πεδία. Για την ΚΗΔ

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{Free} + \mathcal{L}_{Int} = (\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + (-\bar{\psi}(e\gamma_\mu A^\mu)\psi)$$

με τους διαδότες να προκύπτουν από το ελεύθερο μέρος της Λαγκρανζιανής και οι κόμβοι από το μέρος της αλληλεπίδρασης. Ο διαδότης του ηλεκτρονίου δίνεται από τον αντίστροφο του τελεστή της ελεύθερης Λαγκρανζιανής. Στον χώρο των ορμών

$$(i\gamma^\mu q_\mu - m) \rightarrow \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}.$$

Ο διαδότης του φωτονίου χρειάζεται μία πιο λεπτή φροντίδα. Εκφράζοντας το Λαγκρανζιανό κομμάτι του ελεύθερου φωτονίου ως

$$\mathcal{L}_{Photon} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}A^\mu(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu$$

γίνεται φανερό πως η ελευθερία που προσφέρει η αναλλοιώτητα βαθμίδας δημιουργεί πρόβλημα καθώς $(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)\partial^\mu\theta(x) = 0$ για κάθε $\theta(x)$. Συνεπώς το πεδίο $A^\mu(x)$ δεν μπορεί να οριστεί μοναδικά καθώς σε κάθε σημείο του χώρου υπάρχουν άπειρες ισοδύναμες τιμές $A^\mu(x) + \partial^\mu\theta(x)$. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού αρκεί να επιλέξουμε για κάθε σημείο του χώρου μία τιμή του $A^\mu(x)$ παραβιάζοντας έτσι την αναλλοιώτητα βαθμίδας (2.1). Φυσικά το τελικό αποτέλεσμα πρέπει να μην εξαρτάται από αυτήν την επιλογή.

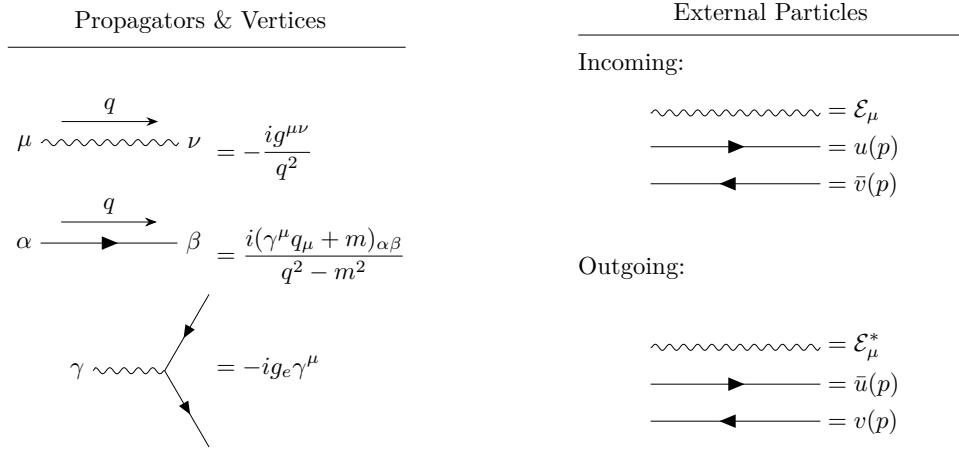
Η πιο κλασική τεχνική της επιλογής βαθμίδας είναι η μέθοδος Faddeev-Popov που χρησιμοποιεί τον φορμαλισμό ολοκληρωμάτων διαδρομής. Μετά από μη τετριμμένους υπολογισμούς προστίθεται στην Λαγκρανζιανή του φωτονίου ένας όρος που συγκεκριμενοποιεί την βαθμίδα με μία παράμετρο ξ

$$\mathcal{L}_{Photon} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 = \frac{1}{2}A^\mu(g_{\mu\nu}\partial^2 + (\frac{1}{\xi} - 1)\partial_\mu\partial_\nu)A^\nu.$$

Στον χώρο των ορμών ο τελεστής αυτός μπορεί να αντιστραφεί δίνοντας τον διαδότη του φωτονίου

$$(-q^2 g_{\mu\nu} + (\frac{1}{\xi} - 1)q_\mu q_\nu) \rightarrow \frac{-i}{q^2} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right).$$

Η επιλογή της παραμέτρου βαθμίδας ξ δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα αλλά επηρεάζει τους ενδιάμεσους υπολογισμούς. Για $\xi = 1$ έχουμε την βαθμίδα Feynman. Στο σχήμα (2.2) παραθέτουμε τους κανόνες Feynman για την ΚΗΔ σε αυτήν την βαθμίδα.



Σχήμα 2.2: Οι κανόνες Feynman για την ΚΗΔ στην βαθμίδα Feynman.

2.3 Κβαντική Χρωμοδυναμική

Το πρόβλημα των ισχυρών αλληλεπιδρώντων σωματιδίων θεωρείται εξαιρετικά δύσκολο καθώς δεν μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία διαταραχών. Ακόμα και σήμερα τομείς όπως η πυρηνική φυσική συναντούν σοβαρά εμπόδια στις θεωρητικές προβλέψεις και βασίζονται επί το πλείστον σε καθαρά φαινομενολογικά μοντέλα. Συνεπώς την δεκαετία του 50 και 60 όπου αναπτύχθηκε η Κβαντική Ηλεκτροδυναμική η επιστημονική κοινότητα είχε λιγοστές ελπίδες για την εφαρμογή κάποιας κβαντικής θεωρίας πεδίου στη ισχυρή αλληλεπίδραση.

Δύο πειραματικά αποτελέσματα έδειξαν τον δρόμο προς την ένωση της ισχυρής αλληλεπίδρασης και της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Αρχικά ο μεγάλος αριθμός μεσονίων και βαρυονίων στους επιταχυντές σωματιδίων οδήγησαν τον Gell-Mann να φτιάξει μια κατηγοριοποίηση βασισμένη στην συμμετρία ομάδας SU(3) γνωστή και ως Eightfold Way. Έπειτα στα πειράματα βαθμιάς σκέδασης η δομή του πρωτονίου που αναδύθηκε αποτελούταν από οιονεί ελεύθερα σημειακά σωματίδια (παρτόνια). Η υπόθεση πως τα παρτόνια ταυτίζονται με τη συμμετρία SU(3) και μαζί με την τοπική συμμετρία βαθμίδας οδηγούν στην κβαντική χρωμοδυναμική. Αυτό θα αναλύσουμε και παρακάτω.

2.3.1 Η Λαγκρανζιανή της ΚΧΔ

Για να περιγραφεί μια αλληλεπίδραση είναι προφανές ότι πρέπει τα σωματίδια/κυματοσυναρτήσεις/πεδία να συνδέονται ώστε το ένα να μπορεί να επηρεάσει τη δυναμική του άλλου. Ένας τρόπος να επιτευχθεί αυτό είναι η εισαγωγή ενός δυναμικού στην εξίσωση κίνησης όπως συμβαίνει στην απλή κβαντομηχανική. Με τη σωστή μορφή το δυναμικό αυτό μπορεί να περιγράψει ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα όπως γίνεται στην επίλυση ατομικών τροχίων. Στη πραγματικότητα όμως η μέθοδος αυτή έχει μια αίσθηση αυθαιρεσίας καθώς υπάρχουν άπειρες μορφές δυναμικών και ενώ μετριοούνται πειραματικά ως έναν βαθμό είναι αδύνατον να μετρηθούν σε απείρως κοντινές αποστάσεις. Σε κάποιες περιπτώσεις μάλιστα, όπως στην περίπτωση της ισχυρής αλληλεπίδρασης είναι εξαιρετικά δύσκολο να μετρηθούν γενικά. Συνεπώς προτιμάται ένας διαφορετικός τρόπος προσέγγισης ο οποίος εκμεταλλεύομενος εσωτερικές συμμετρίες δημιουργεί συνδέσεις μεταξύ των πεδίων οι οποίες είναι εκπληκτικά πετυχημένες στο να αναπαράγουν την φυσική πραγματικότητα. Ο τρόπος αυτός φέρει το όνομα Θεωρία Βαθμίδας (Gauge Theory) και εφαρμόστηκε αρχικά με επιτυχία στη δημιουργία της ΚΗΔ. Οι Θεωρίες Βαθμίδας αποτελούν μια βασική αρχή των θεωριών κβαντικού πεδίου και αγγίζουν τα μαθηματικά τους θεμέλια. Θα

προσπαθήσουμε παρακάτω να εμβυθύνουμε μια σταγόνα παραπάνω από τις συνήθεις εισαγωγές στο αντικείμενο.

Αλγεβρική Προσέγγιση στην Θεωρία Βαθμίδας

Ξεκινάμε με την εξής ελεύθερη εξίσωση Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{q}_c (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q_c$$

όπου $c = \{\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B}\}$ συμβολίζει τα τρία "χρώματα" των πεδίων που θα ονομάζουμε κουαρκ. Ο σπινόρας $q_c = q \otimes C$ αποτελείται από το σπινοριακό κομμάτι (4 συνιστώσες) και την κυματοσυνάρτηση στον χώρο του χρώματος (διάνυσμα). Αυτή τη στιγμή το χρώμα δεν προσφέρει καμία επιπλέον δομή στα πεδία και η παραπάνω Λαγκρανζιανή αντιστοιχεί σε τρία ελεύθερα μη αλληλεπιδρώντα σπινοριακά πεδία, ένα κόκκινο, ένα μπλε και ένα πράσινο. Αυτό αλλάζει αν απαιτήσουμε πως το χρώμα παραμένει αναλλοίωτο σε τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας $SU(3)$. Θεωρούμε δηλαδή μια εσωτερική συμμετρία των πεδίων στις τοπικές στροφές στον χώρο του χρώματος. Φορμαλιστικά, θέλουμε

$$q_c \rightarrow q'_c = U q_c = e^{i\alpha_a(x)T_a} q_c, \quad a = \{1, \dots, 8\}.$$

Για δεδομένο χρώμα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{q}' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q' = e^{-i\alpha_a(x)T_a} \bar{q} i\gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\alpha_a(x)T_a} q) - m e^{-i\alpha_a(x)T_a} \bar{q} e^{i\alpha_a(x)T_a} q = \\ &= \bar{q} i\gamma^\mu \partial_\mu q - \bar{q} \gamma^\mu (\partial_\mu \alpha_a T_a) q - m \bar{q} q = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} \end{aligned}$$

Η Λαγκρανζιανή δεν παραμένει αναλλοίωτη κατά τον μετασχηματισμό καθώς υπάρχει ένας επιπλέον όρος $\delta\mathcal{L}$. Είναι φανερό πως ο όρος αυτός οφείλεται στην δράση της παραγώγου πάνω στον μετασχηματισμό. Για να μηδενιστεί λοιπόν θα χρειαστεί να αναθεωρήσουμε την παράγωγο χρησιμοποιώντας το ansatz

$$D_\mu = \partial_\mu - igT_a G_\mu^a$$

όπου G_μ^a 8 βαθμωτά πεδία τα οποία τα ονομάζουμε γκλουόνια. Τα νέα αυτά πεδία απορροφούν κατά κάποιον τρόπο τους βαθμούς ελευθερίας που εισήγαγε η συμμετρία βαθμίδας. Είναι προφανές πως για να ικανοποιηθεί η συνθήκη συμμετρίας πρέπει $(D_\mu q)' = U D_\mu q$. Έτσι βρίσκουμε πως μετασχηματίζονται τα νέα πεδία.

$$\begin{aligned} (D_\mu q)' &= U D_\mu q \Rightarrow (\partial_\mu - igT_a G_\mu^a) q' = U (\partial_\mu - igT_a G_\mu^a) q \Rightarrow \\ &(\partial_\mu U) q + U (\partial_\mu q) - igT_a G_\mu^a U q = U (\partial_\mu q) - U igT_a G_\mu^a q \Rightarrow \\ &T_a G_\mu^a = U (T_a G_\mu^a) U^\dagger + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger \end{aligned}$$

Αρκεί τώρα να υπολογίσουμε τον απειροστό μετασχηματισμό ($\alpha_a \ll 1$): $U = e^{i\alpha_a T_a} \approx \mathbb{1} + i\alpha_a T_a$ καθώς κάθε μετασχηματισμός μπορεί να εκφραστεί ως πολλοί διαδοχικοί μικροί μετασχηματισμοί. Ο μετασχηματισμός των γκλουονίων $G_\mu^a \rightarrow G_\mu^{\prime a} = G_\mu^a + \delta G_\mu^a$ είναι

$$\begin{aligned} T_a G_\mu^{\prime a} &= U (T_a G_\mu^a) U^\dagger + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger = (\mathbb{1} + i\alpha_b T_b) (T_a G_\mu^a) (\mathbb{1} - i\alpha_b^* T_b^\dagger) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_b T_b = \\ &= T_a G_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_b T_b + i\alpha_b T_b T_a G_\mu^a - T_a G_\mu^a i\alpha_b^* T_b^\dagger + \frac{i\alpha_b T_b T_a G_\mu^a i\alpha_b^* T_b^\dagger}{g} = T_a G_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a T_a + i\alpha_a G_\mu^a (T_b T_a - T_a T_b) = \\ &= T_a G_\mu^a \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a T_a - i\alpha_a G_\mu^a f_{abc} T_c = T_a G_\mu^a \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a T_a - i\alpha_b G_\mu^c f_{abc} T_a \Rightarrow \boxed{G_\mu^{\prime a} = G_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a - i\alpha_a f_{abc} G_\mu^c} \end{aligned}$$

Η Λαγκρανζιανή με τα νέα πεδία είναι τελικά αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς βαθμίδας $SU(3)$. Η ελευθερία που προσθέσαμε στην θεωρία, η ελευθερία στροφών σε κάθε σημείο του χώρου του χρώματος, μεταφράστηκε ως κάποια νέα πεδία με συγκεκριμένους κανόνες μετασχηματισμών. Μένει τώρα να δώσουμε μια ανεξάρτητη υπόσταση των πεδίων από τα κουαρκ προσθέτοντας έναν κινητικό όρο ο οποίος θα είναι και αυτός αναλλοίωτος

στην βαθμίδα. Ξεκινώντας από τον μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων δημιουργούμε τον ταυστή τάσης των γκλουονίων

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= (\partial_\mu + igT_a G_\mu^a)(\partial_\nu + igT_b G_\nu^b) - (\partial_\nu + igT_b G_\nu^b)(\partial_\mu + igT_a G_\mu^a) \\
&= \partial_\mu \partial_\nu + igT_b(\partial_\mu G_\nu^b) + igT_a G_\mu^a \partial_\nu - g^2 T_a G_\mu^a T_b G_\nu^b - \partial_\nu \partial_\mu - igT_a \partial_\nu G_\mu^a - igT_b G_\nu^b \partial_\mu + g^2 T_b G_\nu^b T_a G_\mu^a \\
&= igT_a(\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) - g^2 G_\mu^a G_\nu^b (T_a T_b - T_b T_a) \\
&= igT_a(\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) - g^2 G_\mu^a G_\nu^b if_{abc} T_c = igT_a(\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - gf_{abc} G_\mu^b G_\nu^c) \\
&\Rightarrow \boxed{E_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - gf_{abc} G_\mu^b G_\nu^c}.
\end{aligned}$$

Επειδή $[D_\mu, D_\nu] = igT_a E_{\mu\nu}^a$ εύκολα φαίνεται ότι το $E_{\mu\nu}^a$ μετασχηματίζεται:

$$igT_a E_{\mu\nu}^a = ([D_\mu, D_\nu])' = UD_\mu U^{-1} UD_\nu U^{-1} - UD_\nu U^{-1} UD_\mu U^{-1} = U[D_\mu, D_\nu]U^{-1} \Rightarrow \boxed{E_{\mu\nu}^a = UE_{\mu\nu}^a U^{-1}}$$

Έτσι ο κινητικός όρος $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}E_{\mu\nu}^a E_a^{\mu\nu}$ είναι το ίχνος του ταυστή τάσης των γκλουονικών πεδίων και είναι αναλλοίωτη καθώς:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}E_{\mu\nu}^a E_a^{\mu\nu} = Tr\{E'_{\mu\nu} E'^{\mu\nu}\} = -\frac{1}{4}Tr\{UE_{\mu\nu}U^{-1}UE^{\mu\nu}U^{-1}\} = -\frac{1}{4}Tr\{UE_{\mu\nu}E^{\mu\nu}U^{-1}\} \\
&= Tr\{UU^{-1}E_{\mu\nu}E^{\mu\nu}\} = -\frac{1}{4}Tr\{E_{\mu\nu}E^{\mu\nu}\} = -\frac{1}{4}E_{\mu\nu}^a E_a^{\mu\nu} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}' = \mathcal{L}}
\end{aligned}$$

Η επιλογή του μεταθέτη $[D_\mu, D_\nu]$ για τον κινητικό όρο φαίνεται κάπως αυθαίρετη και μπορεί να δικαιολογηθεί επιφανειακά με την κατασκευή του ταυστή τάσης των φωτονίων στην ΚΗΔ. Ο λόγος όμως για τον οποίο αυτός είναι ο σωστός κινητικός όρος είναι πολύ πιο βαθύς και σχετίζεται με την γεωμετρία της θεωρίας βαθμίδας.

Εν κατακλείδι, η Λαγκραντζιανή Dirac που είναι αναλλοίωτη σε τοπικούς SU(3) μετασχηματισμούς βαθμίδας, γνωστή και ως Λαγκραντζιανή Yang-Mills είναι

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q - \frac{1}{4}E_{\mu\nu}^a E_a^{\mu\nu} \quad (2.3.1)$$

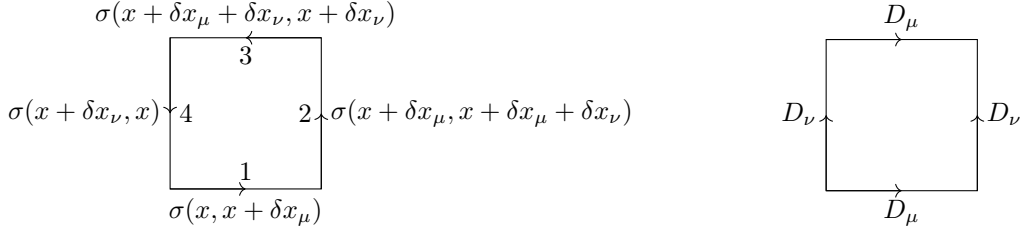
Γεωμετρία του Χρώματος

Ας δοκιμάσουμε τώρα να εμβαθύνουμε στις παραπάνω έννοιες. Ουσιαστικά οι βαθμοί ελευθερίας του χρώματος προστέθηκαν αντιστοιχώντας σε κάθε σημείο του χώρου τρεις βαθμούς ελευθερίας (R,G,B). Σχεφτείτε λοιπόν πως σε κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί ένα τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων. Η απαίτηση της αναλλοιότητας στους μετασχηματισμούς βαθμίδας αναλογεί στην αναλλοιότητα της φυσικής σε αυθαίρετες στροφές του συστήματος αυτού, διαφορετικές σε κάθε σημείο του χωροχρόνου. Με αυτήν την εικόνα γίνεται εμφανής η ανάγκη επαναπροσδιορισμού της παραγώγου,

$$n^\mu \partial_\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\epsilon} (q_c(x + n\epsilon) - q_c(x)) \right]$$

η οποία δεν έχει καλά ορισμένο μετασχηματισμό καθώς τα πεδία $q_c(x + n\epsilon)$ και $q_c(x)$ μετασχηματίζονται διαφορετικά. Για να συγκρίνουμε τα πεδία θα πρέπει να έχουμε έναν κανόνα "παράλληλης μεταφοράς" (parallel transport) στον χώρο του χρώματος. Ορίζουμε λοιπόν τον "συγκριτή" (comparator) $\sigma(y, x)$, έναν πίνακα 3x3 (ώστε να δρα στη βάση του χρώματος) ο οποίος εξαρτάται από δύο σημεία και μετασχηματίζεται ως $\sigma(y, x)' \rightarrow U(y)\sigma(y, x)U^\dagger(x)$. Ο συγκριτής εξαφανίζει την σχετική στροφή χρώματος των πεδίων σε δύο γειτονικά σημεία.

$$(\psi(y) - \sigma(y, x)\psi(x))' = U(y)\psi(y) - U(y)\sigma(y, x)U^\dagger(x)U(x)\psi(x) = U(y)(\psi(y) - \sigma(y, x)\psi(x)).$$



Σχήμα 2.3: Δύο επιλογές υπολογισμού της κλειστής διαφορικής διαδρομής.

Προφανώς πρέπει να ισχύει $\sigma(x, x) = 1$. Μπορούμε τώρα, να αναπτύξουμε γύρω από τη μονάδα τη μορφή του συγκριτή για δύο σημεία απείρως κοντά μεταξύ τους,

$$\sigma(x + \epsilon n, x) = 1 + igT_a G_\mu^a(x) \epsilon n^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.3.2)$$

Τα διανυσματικά πεδία $G_\mu^a(x)$ που εμφανίζονται ως το απειροστό όριο του συγκριτή ενός τοπικού μετασχηματισμού συμμετρίας ονομάζονται connections. Ουσιαστικά το πεδίο των γκλουονίων συνδέει τα γειτονικά συστήματα αναφοράς του χρώματος. Η συναλλοίωτη παράγωγος ορίζεται,

$$\begin{aligned} n^\mu D_\mu q_c(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\epsilon} (q_c(x + n\epsilon) - \sigma(x + \epsilon n, x) q_c(x)) \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\epsilon} (q_c(x + n\epsilon) - (1 + igT_a G_\mu^a(x) \epsilon n^\mu) q_c(x)) \right] \\ &= n^\mu (\partial_\mu - igT_a G_\mu^a(x)) q_c(x) \Rightarrow \boxed{D_\mu = \partial_\mu - igT_a G_\mu^a(x)} \end{aligned}$$

που είναι η μορφή που καταλήξαμε και στην προηγούμενη ενότητα. Ίσως το βήμα (2.3.2) φαίνεται αυθαίρετο, αλλά στη πραγματικότητα είναι πολύ λογικό. Για κάθε ελεύθερη παράμετρο του γενικού πίνακα της $SU(3)$ αντιστοιχούμε ένα τετράνυσμα για κάθε σημείο στον χωροχρόνο. Η σταθερά g έχει εξαχθεί για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας ενώ το ϵ είναι ένας αρκετά μικρός αριθμός ώστε ο μετασχηματισμός να είναι απειροστός. Μπορούμε έπειτα να βρούμε τον μετασχηματισμό των νέων πεδίων όπως στην προηγούμενη ενότητα.

Τα πεδία $G_\mu^a(x)$ εκφράζουν το πόσο άλλαξε το πεδίο q_c κατά την παράλληλη μεταφορά του από ένα σημείο στο άλλο. Το συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο (connection) υπάρχει και στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΣ) και είναι γνωστό ως σύμβολα Christoffel. Στην ΓΣ κανείς μπορεί να δει την καμπυλότητα του χωροχρόνου υπολογίζοντας την αλλαγή ενός διανύσματος κατά μια κλειστή διαδρομή. Αντίστοιχα και εδώ, ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η αλλαγή του πεδίου $q_c(x)$ κατά την παράλληλη μεταφορά του σε μια κλειστή διαδρομή όπως στην εικόνα (2.3). Το νέο πεδίο θα είναι,

$$q'_c(x) = \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 q_c(x) = \sigma_{tot} q_x(x).$$

Ο υπολογισμός αυτός είναι αρκετά επίπονος αν αντικατασταθεί ο κάθε συγκριτής από την αναλυτική του έκφραση (2.3.2). Ευτυχώς όμως μπορούμε απλά να υπολογίσουμε τον μεταθέτη της συναλλοίωτης παραγώγου $[D_\mu, D_\nu]$ ο οποίος εκφράζει γεωμετρικά την ίδια μεταβολή. Έτσι δικαιολογείτε η επιλογή που έγινε στην αλγεβρική απόδειξη και επιπλέον είναι ο ίδιος τρόπος που μπορεί κανείς να υπολογίσει τον ταυυστή Riemann στην ΓΣ. Συνεπώς ο ταυυστής των γκλουονίων $E_{\mu\nu}^a$ εκφράζει κατά μία έννοια την καμπυλότητα του χώρου του χρώματος.

2.3.2 Κανόνες Feynman για την ΚΧΔ

Η διαδικασία εξαγωγής των κανόνων Feynman είναι αντίστοιχη με της ΚΗΔ αλλά παράλληλα πιο περίπλοκη. Λόγω της αυτοσύζευξης των γκλουονίων η διαδικασία επιλογής βαθμίδας προσθέτει επιπλέον πεδία (ghosts) τα οποία ακυρώνουν αφύσικες καταστάσεις στον διαδότη του γκλουονίου. Ο επιπλέον όρος (Faddeev-Popov) είναι

$$\mathcal{L}_{FP} = \mathcal{L}_{Gauge-Fixing} + \mathcal{L}_{Ghosts} = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu G_\mu^a)^2 + \partial_\mu \eta^{a\dagger} (D_{ab}^\mu \eta^b)$$

όπου τα πεδία η^a είναι 8 βαθμωτά πεδία υπακούν στατιστική Fermi-Dirac.

Η Λαγκρανζιανή της ΚΧΔ είναι πολύ πλουσιότερη σε δομή από της ΚΗΔ. Ας τη δούμε καλύτερα ξεκαθαρίζοντας τους πολλούς δείκτες που περιέχονται σε αυτήν. Για γεύσεις $f = u, d, s, c, b, t$, χρώματα των κουάρκ $i = r, g, b$ (θεμελιώδης αναπαράσταση), δείκτες της συζυγούς αναπαράστασης $a, b = 1, 2, \dots, 8$ και δείκτες $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ για τα τετρανύσματα, έχουμε

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}^q + \mathcal{L}^g + \mathcal{L}^{qg} + \mathcal{L}^{ggg} + \mathcal{L}^{gggg} + \mathcal{L}^{FP}$$

με

- $\mathcal{L}^q = i\bar{q}_f^i(\gamma^\mu \partial_\mu - m)q^i \rightarrow$ διαδότης των κουάρκ.
- $\mathcal{L}^g = -\frac{1}{4}(\partial_\mu G_{a\nu} - \partial_\nu G_{a\mu})(\partial^\mu G_a^\mu - \partial^\nu G_a^\nu) \rightarrow$ διαδότης γκλουονίων.
- $\mathcal{L}^{qg} = gq_f^i \gamma^\mu T_a^{ij} G_\mu^a q_f^j \rightarrow$ κόμβος κουάρκ γκλουονίων.
- $\mathcal{L}^{ggg} = -\frac{g}{2}f_{abc}(\partial_\mu G_{a\nu} - \partial_\nu G_{a\mu})G_b^\mu G_c^\nu \rightarrow$ Κόμβος τριών γκλουονίων.
- $\mathcal{L}^{gggg} = -\frac{g^2}{4}f_{abc}f_{ab'c'}G_{b\mu}G_{c\nu}G_{b'}^\mu G_{c'}^\nu \rightarrow$ Κόμβος τεσσάρων γκλουονίων.

Οι ξεχωριστές ιδιότητες της ΚΧΔ από την ΚΗΔ φαίνονται πρακτικά από τους επιπλέον όρους αλληλεπίδρασης των γκλουονίων που κάνουν την θεωρία μη γραμμική οδηγώντας στο φαινόμενο του εγκλωβισμού. Οι κανόνες Feynman για την ΚΧΔ δίνονται στο σχήμα (2.4) έχοντας παραλείψει τους όρους αλληλεπίδρασης από το κομμάτι \mathcal{L}^{FP} καθώς δεν θα χρειαστούν.

2.4 Επανακανονικοποίηση

2.4.1 Ασυμπτωτική Ελευθερία

Σε πρώτη προσέγγιση η ΚΧΔ είναι ανεξάρτητη κλίμακας. Οι σταθερές m και g στην Λαγκρανζιανή (2.3.1) είναι η φερμιονική μάζα και η σταθερά σύζευξης της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Μάλιστα για πολύ μεγάλες ενέργειες όπου η μάζες των κουάρκ μπορούν να παραληφθούν η ΚΧΔ περιέχει μόνο μία αδιάστατη σταθερά g . Στην περιοχή αυτή η ΚΧΔ είναι μία σύμμορφη θεωρία ή αναλλοίωτη κλίμακας που σημαίνει ότι παρουσιάζει μορφοκλασματική δομή, δηλαδή προκύπτουν τα ίδια μοτίβα ανεξαρτήτως της μεγέθυνσης που βλέπουμε. Παρότι όμως "όμορφη" αυτή η θεωρία είναι εμφανώς λανθασμένη καθώς δεν βλέπουμε ΚΧΔ γύρω μας. Πέρα από αυτό, τα κουάρκ στις υψηλές ενέργειες συμπεριφέρονται σαν ελεύθερα σωματίδια (επόμενο κεφάλαιο) ενώ σε χαμηλότερες βρίσκονται εγκλωβισμένα σε σύνθετα σωματίδια.

Επανακανονικοποίηση της ΚΧΔ

Παρόλο που η πρώτη διαταρακτική τάξη της ΚΧΔ φωτίζει πολλές ιδιότητες της θεωρίας και περιγράφει ποιοτικά τουλάχιστον την φαινομενολογία των επιταχυντών, το πραγματικό ενδιαφέρον έρχεται από τις μεγαλύτερες τάξεις. Στον υπολογισμό μεγαλύτερων τάξεων είναι γνωστό ότι εμφανίζονται απειρίες οι οποίες σε κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις, όταν η θεωρία είναι επανακανονικοποιήσιμη, μπορούν να αφαιρεθούν με την διαδικασία της επανακανονικοποίησης δημιουργώντας ένα πεπερασμένο αποτέλεσμα. Υπάρχουν πολλών ειδών απειρίες με πολλές από αυτές να αλληλοακυρώνονται μέσω θεωρημάτων και ταυτοτήτων (θεώρημα KLN, ταυτότητες Ward). Στην συγκεκριμένη ενότητα ενδιαφερόμαστε σε υπεριώδεις (UV) απειρίες.

Οι UV απειρίες προκύπτουν από εσωτερικούς διαδότες με μη φραγμένες ορμές. Οι διαδότες αυτοί δίνουν ολοκληρώματα της μορφής

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{M(l)}{N(l)}$$

όπου τα $M(l), N(l)$ είναι πολυώνυμα της αυθαίρετης ορμής l . Αν η πολυωνυμική τάξη του παρονομαστή είναι μικρότερη από την πολυωνυμική τάξη του αριθμητή μείον τέσσερα (λόγω της τετραπλής ολοκλήρωσης) το ολοκλήρωμα αυτό αποκλίνει. Για παράδειγμα, το διάγραμμα αλληλεπίδρασης ενός κουάρκ ορμής p με τον εαυτό του περιέχει ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\Sigma(p) = iC_F \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2(p+l)^2}$$

Propagators & Vertices

$$\begin{aligned}
 a\mu \text{-----} b\nu &= \delta^{ab} \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} & \text{-----} & \text{-----} & & = g_s f^{abc} [g^{\mu\nu} (p-q)^\rho + perm.] \\
 & & & & & \\
 g \text{-----} &= \frac{-ig_s}{2} \lambda^a \gamma^\mu & \text{-----} & \text{-----} & & = -ig_s^2 [f^{xac} f^{xbd} (g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\rho\nu}) + perm.] \\
 & & & & &
 \end{aligned}$$

External Particles

Incoming:

$$\begin{aligned}
 \text{-----} &= \mathcal{E}_\mu \cdot a^a \\
 \text{-----} \blacktriangleright &= u(p) \cdot c \\
 \blacktriangleleft \text{-----} &= \bar{v}(p) \cdot c^\dagger
 \end{aligned}$$

Outgoing:

$$\begin{aligned}
 \text{-----} &= \mathcal{E}_\mu^* \cdot a^{a*} \\
 \blacktriangleright \text{-----} &= \bar{u}(p) \cdot c^\dagger \\
 \text{-----} \blacktriangleleft &= v(p) \cdot c
 \end{aligned}$$

Σχήμα 2.4: Κανόνες Feynman για την ΚΧΔ στην βαθμίδα Feynman.

το οποίο είναι λογαριθμικά αποκλίνον. Το πρόβλημα βρίσκεται στο ότι θεωρούμε ότι η θεωρία μας ισχύει για οσοδήποτε μικρές κλίμακες. Εδώ έρχεται η ιδέα της ενεργής θεωρίας πεδίου (effective field theory) η οποία λέει πως εφόσον δεν υπάρχει γνώση για το τι συμβαίνει στις απείρως μικρές κλίμακες, δεν πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν.

Ο πιο απλός τρόπος για να επιβληθεί αυτό είναι η επιλογή ενός άνω φράγματος πολύ μεγαλύτερο από την κλίμακα του πειράματος. Η πιο κομψή και δόκιμη τεχνική είναι η διαστατική ομαλοποίηση κατά την οποία το

ολοκλήρωμα γενικεύεται στις D διαστάσεις

$$I_D(p) \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{l^2(p+l)^2}$$

και υπολογίζεται στις $D = 4 - 2\epsilon$ καθώς για $D < 4$ είναι πεπερασμένο. Από αυτό οι πόλοι αφαιρούνται σε μία κλίμακα μ^2 και το αποτέλεσμα είναι πεπερασμένο για $\epsilon \rightarrow 0$. Το κόστος είναι πως η κλίμακα αυτή εισέρχεται στο αποτέλεσμα μέσω λογαρίθμου

$$I(p^2) = I(\mu^2) + (4\pi)^2 \log\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)$$

όπου η κλίμακα μ^2 συνήθως ονομάζεται κλίμακα επανακανονικοποίησης.

Το επόμενο πρόβλημα που προκύπτει είναι η εξάρτηση του τελικού αποτελέσματος από την αυθαίρετη κλίμακα. Το τελικό αποτέλεσμα δεν θα πρέπει να αλλάζει αν η κλίμακα επιλεγεί 10^{35} ή 10^{53} . Το τελευταίο βήμα του συλλογισμού είναι να αφαιρεθεί το φυσικό νόημα των σταθερών g, m της Λαγκρανζιανής (2.3.1). Οι σταθερές αυτές δεν μπορούν να μετρηθούν ποτέ πειραματικά και δεν αντιστοιχούν στην μάζα και στην ισχύ της αλληλεπίδρασης μετά την επανακανονικοποίηση. Η εξάρτηση της κλίμακας υπεισέρχεται στις σταθερές αυτές και το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο αν ανθροιστεί ολόκληρη η διαταρακτική σειρά. Παρακάτω θα ασχοληθούμε με την εξάρτηση της ισχυρής σταθεράς από την κλίμακα.

Εξέλιξη της σταθεράς α_s

Η εξάρτηση της a_s από την ενέργεια κυβερνάται από την συνάρτηση β

$$Q^2 \frac{\partial a_s}{\partial Q^2} = \frac{\partial a_s}{\partial \ln Q^2} = \beta(a_s) \quad (2.4.1)$$

με την συνάρτηση β να εκφράζεται ως διαταρακτική σειρά στην a_s

$$\beta(a_s) = -a_s^2(\beta_0 + \beta_1 a_s + \beta_2 a_s^2 + \dots). \quad (2.4.2)$$

Οι πρώτοι δύο όροι (για $m_q \rightarrow 0$) είναι ανεξάρτητοι του τρόπου με τον οποίον θα γίνει η επανακανονικοποίηση και προέρχονται από τα διαγράμματα με έναν και με δύο βρόγχους αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 11 - \frac{2}{3}n_f \\ \beta_1 &= 102 - \frac{38}{3}n_f \end{aligned}$$

με τους καθαρούς αριθμούς να προέρχονται από τη συνεισφορά βρόχων γκλουονίων (μονού και διπλού αντίστοιχα), ενώ αυτοί που εξαρτώνται από τον αριθμό των γέυσεων n_f προέρχονται από βρόχο κουάρκ και από μίξη βρόχων κουάρκ και γκλουονίων. Λόγω της επανακανονικοποιησιμότητας της ΚΧΔ μόνο τα διαγράμματα με 1 και 2 βρόχους κυριαρχούνται από μικρές κλίμακες και αποκλίνουν. Οι μεγαλύτεροι όροι της συνάρτησης β εξαρτώνται από το σχήμα επανακανονικοποίησης και περιέχουν μη διαταρακτικές συνεισφορές οδηγώντας σε αβεβαιότητες.

Η σταθερά a_s ορίζεται αρχικά για μία κλίμακα μ^2 και έπειτα η εξάρτηση της ενέργειας, για πρώτη τάξη στη β , δίνεται από την σχέση

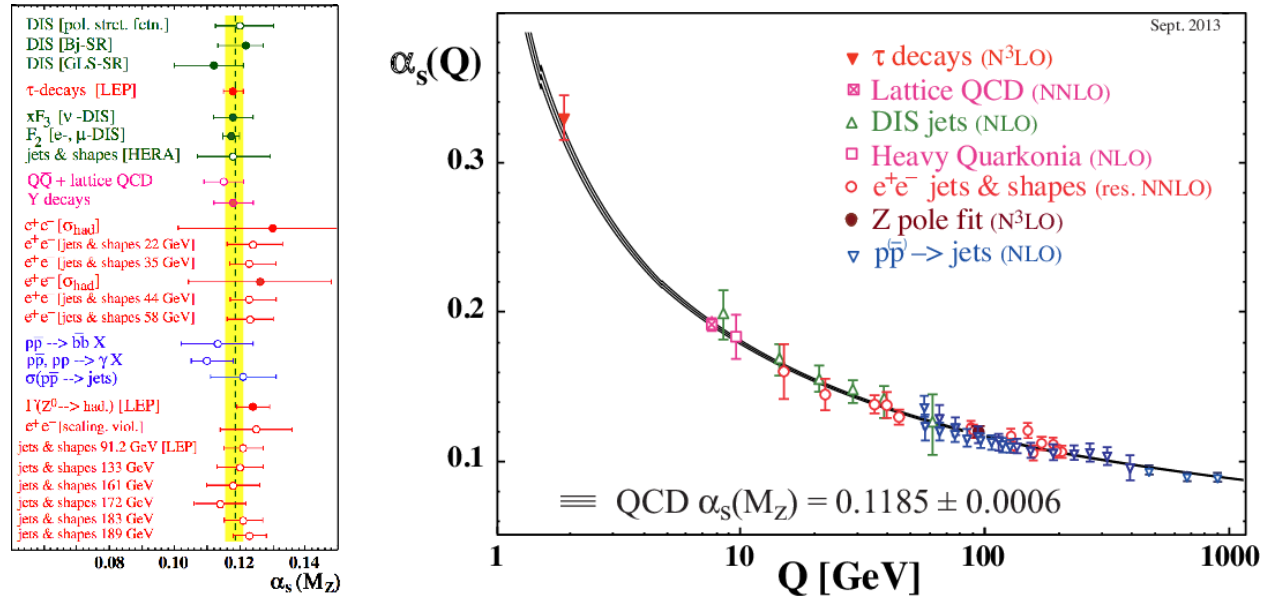
$$a_s(Q^2) = \frac{a_s(\mu^2)}{1 + \beta_0 a_s(\mu^2) \ln(Q^2/\mu^2)}. \quad (2.4.3)$$

Εξαιτίας της θετικότητας του β_0 η σταθερά πηγαίνει στο μηδέν καθώς η ενέργεια πηγαίνει στο άπειρο και αυξάνεται καθώς η ενέργεια μικραίνει.

Η εξίσωση (2.4.1) απλοποιείται ορίζοντας την παράμετρο κλίμακας $\Lambda \approx 300 \text{ MeV}$ στην οποία η θεωρία παρουσιάζει πόλο Landau και η σταθερά α_s απειρίζεται. Έτσι

$$a_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}. \quad (2.4.4)$$

Η εξίσωση αυτή περιέχει την ιδιαιτερότητα της ΚΧΔ οι οποίες φαίνονται καλύτερα στο σχήμα (2.5). Η μη αβελιανή φύση της ΚΧΔ δίνει θετική σταθερά β_0 λόγω της συνεισφοράς από τον βρόχο του γκλουονίου. Αυτό συνεπάγεται ότι η σταθερά a_s , δηλαδή η δύναμη της αλληλεπίδρασης μικραίνει με την ενέργεια οδηγώντας σε ελεύθερα παρτόνια για $Q^2 \rightarrow 0$ φαινόμενο γνωστό ως ασυμπτωτική ελευθερία (Nobel Prize 2004). Για μικρές ενέργειες η a_s αυξάνεται και σε ενέργειες μερικών GeV δεν είναι πλέον εφικτό η εφαρμογή θεωρίας διαταραχών. Ακολουθώντας αυτή την λογική κανείς μπορεί να υποθέσει το φαινόμενο του εγκλωβισμού (confinement), ότι δηλαδή από κάποια χαμηλή ενέργεια και κάτω τα παρτόνια αλληλεπιδρούν τόσο ισχυρά που δεν μπορούν να διαχωριστούν μεταξύ τους. Η υπόθεση αυτή συμβαδίζει απολύτως με τα πειραματικά δεδομένα αλλά δεν έχει αποδειχθεί από πρώτες αρχές.



Σχήμα 2.5: Θεωρητική πρόβλεψη και μετρήσεις της σταθεράς ισχυρής αλληλεπίδρασης για διάφορες ενέργειες. Πηγή: arXiv:1506.05407v1

Σχετική Βιβλιογραφία: [8], [9],[7], [10] [11], [12], [13], [14], [15]

Κεφάλαιο 3

Δομή του Πρωτονίου

Η μη Αβελιανή δομή της ΚΧΔ παρουσιάζει ιδιαίτερο φυσικό ενδιαφέρον καθώς οδηγεί στα φαινόμενα της ασυμπτωτικής ελευθερίας και του εγκλωβισμού. Κατά την ασυμπτωτική ελευθερία η ισχύς της ισχυρής αλληλεπίδρασης μειώνεται όσο αυξάνεται η ενέργεια των σωματιδίων (αντίθετα με τον ηλεκτρομαγνητισμό) εμφανίζοντας ουσιαστικά αντίθετη προάσπιση. Επιπλέον σωματίδια με φορτίο χρώματος (κουάρκς και γκλουόνια) δεν μπορούν να απομονωθούν για ενέργειες μικρότερες από περίπου 150 MeV και συνεπώς δεν μπορούν να παρατηρηθούν ελεύθερα στη φύση. Το φαινόμενο αυτό λέγεται εγκλωβισμός χρώματος και η μαθηματική του απόδειξη από πρώτες αρχές της ΚΧΔ επιβραβεύεται με ένα εκατομμύριο δολάρια (Millenium Problems).

Λόγω των παραπάνω η δομή των ανδρονίων είναι μια λεπτή ισορροπία μεταξύ ασθενώς αλληλεπιδρώντων στοιχειωδών σωματιδίων (παρτονίων) και την παραγωγή μίας θάλασσας παρτονίων που οφείλεται στη μη Αβελιανή δομή της ΚΧΔ.

3.1 Ελαστική Σκέδαση Ηλεκτρονίου Πρωτονίου

Ξεκινάμε με πρότυπο την σκέδαση ηλεκτρονίου μιονίου καθώς είναι μια σκέδαση δύο διαφορετικών σωματιδίων με μοναδιαίο φορτίο και 1/2 σπιν. Τα ρεύματα είναι,

$$j^\mu = -e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)e^{i(k'-k)\cdot x}$$
$$J^\mu = -e\bar{u}(p')[...]u(p)e^{i(p'-p)\cdot x}$$

όπου αντί για γ^μ στο ρεύμα του πρωτονίου θα μπει η πιο γενική μορφή πίνακα φτιαγμένο από p, p', q και πίνακες γ ώστε το J^μ να είναι τελικά τετράνυσμα Lorentz. Η πιο γενική μορφή του πίνακα είναι,

$$[...] = F_1\gamma^\mu + F_2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_3i\sigma^{\mu\nu}(p' + p)_\nu + F_4q^\mu + F_5(p + p')^\mu \quad (3.1.1)$$

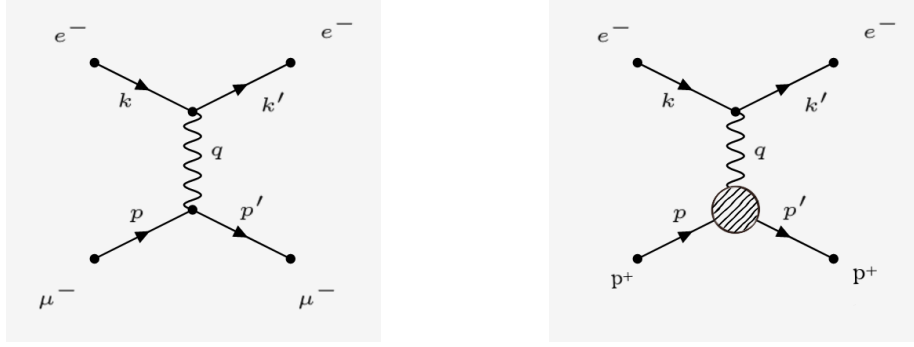
Ας προσπαθήσουμε τώρα να απλοποιήσουμε την έκφραση αυτή. Αρχικά παρατηρούμε ότι οι όροι που περιλαμβάνουν το $(p + p')$ μπορούν να εκφραστούν σε όρους με $q = (p' - p)$ και πίνακες γ μέσω της ανάπτυξης Gordon. Έχει νόημα να αποδείξουμε την ανάπτυξη Gordon προτού προχωρήσουμε καθώς θα χρειαστεί να την μεταβάλλουμε για τον υπολογισμό του όρου F_3 .

Η εξίσωση Dirac και η συζυγής της μορφή είναι:

$$(\gamma \cdot p - m)u(p) = 0$$
$$\bar{u}(p')(\gamma \cdot p' - m) = 0$$

Ισχύουν επίσης τα παρακάτω.

$$\begin{cases} \sigma^{\mu\nu} & = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} & = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i\sigma^{\mu\nu} & = g^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu & (a) \\ i\sigma^{\mu\nu} & = \gamma^\nu\gamma^\mu - g^{\mu\nu} & (b) \end{cases}$$



Σχήμα 3.1: Διαγράμματα Feynman για την σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου (αριστερά) και για την σκέδαση ηλεκτρονίου-πρωτονίου (δεξιά). Η κουκίδα στον κόμβο του μιονίου γίνεται κύκλος στον κόμβο του πρωτονίου υποδηλώνοντας ότι έχει δομή.

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας την ανάπτυξη Gordon,

$$\begin{aligned}\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu u(p) &= \bar{u}(p')[i\sigma^{\mu\nu}p'_\nu - i\sigma^{\mu\nu}p_\nu]u(p) = \bar{u}(p')[(\gamma^\nu\gamma^\mu - \eta^{\mu\nu})p'_\nu - (\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu)p_\nu]u(p) = \\ &= \bar{u}(p')[\gamma^\nu\gamma^\mu p'_\nu - \eta^{\mu\nu}p'_\nu - \eta^{\mu\nu}p_\nu + \gamma^\mu\gamma^\nu p_\nu]u(p) = \bar{u}(p')[\gamma \cdot p' \gamma^\mu - (p'^\mu + p^\mu) + \gamma^\mu \gamma \cdot p]u(p) = \\ &= \bar{u}(p')[m\gamma^\mu - (p'^\mu + p^\mu) + \gamma^\mu m]u(p) = \bar{u}(p')[2m\gamma^\mu - (p'^\mu + p^\mu)]u(p) \\ &\Rightarrow \bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu u(p) = \bar{u}(p')[2m\gamma^\mu - (p'^\mu + p^\mu)]u(p)\end{aligned}$$

Η γνωστή ανάπτυξη Gordon (Gordon decomposition):

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu]u(p)$$

Έχουμε λοιπόν,

$$F_5\bar{u}(p')(p + p')^\mu u(p) = F_5\bar{u}(p')(2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu)u(p)$$

Με αντίστοιχα βήματα θα εκφράσουμε τον όρο με το F_3 . Λογαριάζουμε,

$$\begin{aligned}\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}(p' + p)_\nu u(p) &= \bar{u}(p')[(\gamma^\nu\gamma^\mu - \eta^{\mu\nu})p'_\nu + (\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu)p_\nu]u(p) = \bar{u}(p')[\gamma \cdot p' \gamma_\mu - p'^\mu + p^\mu - \gamma^\mu \gamma \cdot p]u(p) \\ &= \bar{u}(p')[m\gamma_\mu - p'^\mu + p^\mu - \gamma^\mu m]u(p) \Rightarrow \boxed{\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}(p' + p)_\nu u(p) = -\bar{u}(p')(p'^\mu - p^\mu)u(p)}\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\bar{u}(p')[F_3i\sigma^{\mu\nu}(p' + p)_\nu]u(p) = -F_3\bar{u}(p')(p'^\mu - p^\mu)u(p)$$

Μπορούμε λοιπόν με ασφάλεια να συμπτύξουμε την μορφή του πίνακα [...] σε

$$[...]^\mu = (F_1 + 2mF_5)\gamma^\mu + (F_2 - F_5)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_3q^\mu = K_1\gamma^\mu + K_2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + K_3q^\mu$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την εξίσωση συνέχειας $\partial_\mu J^\mu = 0$,

$$q_\mu J^\mu = \bar{u}(p')(K_1\gamma^\mu q_\mu + K_2iq_\mu\sigma^{\mu\nu}q_\nu + K_3q^2)u(p) = 0$$

Ο όρος $\bar{u}(p')(K_1\gamma^\mu q_\mu)u(p)$ μηδενίζεται λόγω της εξίσωσης Dirac και του ότι $p' \neq p$. Ο ταυιστής $\sigma^{\mu\nu}$ είναι αντισυμμετρικός οπότε,

$$\begin{cases} q_\mu J^\mu = \bar{u}(p')(K_2iq_\mu\sigma^{\mu\nu}q_\nu + K_3q^2)u(p) = 0 \\ q_\nu J^\nu = \bar{u}(p')(K_2iq_\nu\sigma^{\nu\mu}q_\mu + K_3q^2)u(p) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_\mu J^\mu = \bar{u}(p')(K_2iq_\mu\sigma^{\mu\nu}q_\nu + K_3q^2)u(p) = 0 \\ q_\mu J^\mu = \bar{u}(p')(-K_2iq_\mu\sigma^{\mu\nu}q_\nu + K_3q^2)u(p) = 0 \end{cases}$$

$$\bar{u}(p')(2K_3q^2)u(p) = 0 \Rightarrow \boxed{K_3 = 0}$$

Η πιο γενική μορφή του πίνακα [...] μπορεί να γραφτεί λοιπόν,

$$[...] = K_1 \gamma^\mu + K_2 i \sigma^{\mu\nu} q_\nu$$

Τώρα γνωρίζοντας ότι οι συναρτήσεις K_1 και K_2 είναι βαθμωτές και εφόσον προκύπτουν από την κορυφή του πρωτονίου θα εξαρτώνται από εσωτερικά γινόμενα κινηματικών μεταβλητών που αφορούν το πρωτόνιο, δηλαδή p^2 , p'^2 , q^2 και $p \cdot q$. Όμως ως γνωστόν τα $p^2 = p'^2 = M^2$ είναι αναλλοίωτες ποσότητες και επίσης $(p+q)^2 = p'^2 \rightarrow M^2 + 2p \cdot q = M^2 \rightarrow 2p \cdot q = -q^2$ η ποσότητα $p \cdot q$ δεν είναι ανεξάρτητη. Τελικά γράφουμε,

$$[...] = F_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{i\kappa}{2M} F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu$$

όπου κ η ανώμαλη μαγνητική ροπή του πρωτονίου.

Πάμε να υπολογίσουμε τώρα το στοιχείο πίνακα για αυτή τη διαδικασία σε πρώτη τάξη.

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} &= (ie\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie\bar{u}(p') [F_1 \gamma^\nu + \frac{i\kappa}{2M} F_2 \sigma^{\nu\rho} q_\rho] u(p)) \\ &= \frac{ie^2}{q^2} F_1(q^2) (\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)) (\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)) - \frac{e^2 \kappa}{q^2 2M} F_2 (\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)) (\bar{u}(p')\sigma_{\mu\rho} q^\rho u(p)) \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε την ενεργό διατομή χρειάζομαστε το μη πολωμένο τετράγωνο του στοιχείου πίνακα $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \langle (-i\mathcal{M})(-i\mathcal{M})^* \rangle = \langle \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^* \rangle + \langle \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_2^* \rangle + \langle \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* \rangle + \langle \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^* \rangle \Rightarrow$

- $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^* = \frac{e^4}{q^4} F_1^2 (\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)) (\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)) (\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k))^* (\bar{u}(p')\gamma_\nu u(p))^* \Rightarrow$
 $\langle |\mathcal{M}_{11}|^2 \rangle = \frac{1}{(2S_e+1)(2S_p+1)} \sum_{S_e, S_p} (\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^*) \Rightarrow \langle |\mathcal{M}_{11}|^2 \rangle = \frac{e^4}{q^4} F_1^2 L_e^{\mu\nu} L_p^{\rho\sigma}$
- $\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_2^* = \frac{e^4 \kappa^2}{q^4 4M^2} F_2^2 (\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)) (\bar{u}(p')\sigma_{\mu\rho} q^\rho u(p)) (\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k))^* (\bar{u}(p')\sigma_{\nu\sigma} q^\sigma u(p))^* \Rightarrow$
 $\langle |\mathcal{M}_{22}|^2 \rangle = \frac{1}{(2S_e+1)(2S_p+1)} \sum_{S_e, S_p} (\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_2^*) \Rightarrow \langle |\mathcal{M}_{22}|^2 \rangle = \frac{e^4 \kappa^2}{q^4 4M^2} F_2^2 L_e^{\mu\nu} A_p^{\rho\sigma}$
- $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = -\frac{ie^4 \kappa}{q^4 2M} F_1 F_2 (\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)) (\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)) (\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k))^* (\bar{u}(p')\sigma_{\nu\rho} q^\rho u(p))^* \Rightarrow$
 $\langle |\mathcal{M}_{12}|^2 \rangle = \frac{1}{(2S_e+1)(2S_p+1)} \sum_{S_e, S_p} (\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*) \Rightarrow \langle |\mathcal{M}_{12}|^2 \rangle = -\frac{ie^4 \kappa}{q^4 2M} F_1 F_2 L_e^{\mu\nu} L A_p^{\rho\sigma}$
- $\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^* = \frac{ie^4 \kappa}{q^4 2M} F_2 F_1 (\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)) (\bar{u}(p')\sigma_{\mu\rho} q^\rho u(p)) (\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k))^* (\bar{u}(p')\gamma_\nu u(p))^* \Rightarrow$
 $\langle |\mathcal{M}_{21}|^2 \rangle = \frac{1}{(2S_e+1)(2S_p+1)} \sum_{S_e, S_p} (\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^*) \Rightarrow \langle |\mathcal{M}_{21}|^2 \rangle = \frac{ie^4 \kappa}{q^4 2M} F_2 F_1 L_e^{\mu\nu} A L_p^{\rho\sigma}$

Παρατηρούμε ότι το πλάτος πιθανότητας $\langle |\mathcal{M}_{11}|^2 \rangle$ είναι σχεδόν ίδιο με το πλάτος πιθανότητας στη σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου αντικαθιστώντας απλά τη μάζα του πρωτονίου και πολλαπλασιάζοντας με F_1^2 . Ο τανυστής του ηλεκτρονίου είναι,

$$\begin{aligned} 2L_e^{\mu\nu} &= \frac{2}{2S_e+1} \sum_{S_e} (u(k')\gamma^\mu u(k)) (u(k')\gamma^\nu u(k))^* = Tr(\gamma^\mu (\not{k} + m) \cdot \gamma^\nu (\not{k}' + m)) \\ &= Tr(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k}') + m Tr(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu) + m Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \not{k}') + m^2 Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα θεωρήματα για τα ίχνη, ίχνη με περιττό αριθμό γ πινάκων μηδενίζονται. Για το πρώτο ίχνο έχουμε,

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k}') &= (k)_\rho (k')_\sigma Tr(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma) = (k)_\rho (k')_\sigma 4(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}) \\ &\Rightarrow Tr(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k}') = 4(k^\mu k'^\nu - g^{\mu\nu} k_\mu k'^\mu + k'^\mu k^\nu) \end{aligned}$$

Για το τέταρτο ίχνος,

$$m^2 Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4m^2 g^{\mu\nu}$$

Άρα τελικά ο τανυστής του ηλεκτρονίου ισούται με,

$$L_e^{\mu\nu} = 2[k^\mu k'^\nu + k'^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 - k_\mu k'^\mu)]$$

Ομοίως υπολογίζεται ο τανυστής του σημειακού πρωτονίου. Αντικαθιστώντας τις ορμές και τη μάζα του ηλεκτρονίου με τις αντίστοιχες του πρωτονίου έχουμε,

$$L_{\mu\nu}^p = 2[p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu + g_{\mu\nu}(M^2 - p^\mu p'_\mu)]$$

Άρα λοιπόν,

$$\begin{aligned} L_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^p &= 4[k^\mu k'^\nu + k'^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 - k_\mu k'^\mu)] \times [p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu + g_{\mu\nu}(M^2 - p^\mu p'_\mu)] \\ &= 4[(k^\mu p_\mu)(k'^\nu p'_\nu) + (k'^\mu p'_\mu)(k^\nu p_\nu) + (k^\mu k'_\mu)(M^2 - p^\mu p'_\mu)] \\ &\quad + 4[(k'^\mu p_\mu)(k^\nu p'_\nu) + (k'^\mu p'_\mu)(k^\nu p_\nu) + (k'^\mu k_\mu)(M^2 - p^\mu p'_\mu)] \\ &\quad + 4[(p_\mu p'^\mu)(m^2 - k_\mu k'^\mu) + p'_\mu p^\mu(m^2 - k_\mu k'^\mu) + 4(m^2 - k_\mu k'^\mu)(M^2 - p^\mu p'_\mu)] \\ &\Rightarrow \boxed{L_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^p = 8[(k^\mu p_\mu)(k'^\nu p'_\nu) + (k'^\mu p'_\mu)(k^\nu p_\nu) - M^2 k_\mu k'^\mu - m^2 p^\mu p'_\mu + 2m^2 M^2]} \end{aligned}$$

Τώρα θα εκφράσουμε το αποτέλεσμα σύμφωνα με τη κινηματική στο σύστημα του εργαστηρίου όπου $p_\mu = (M, \vec{0})$ καθώς επίσης θεωρώντας $m \approx 0$ και άρα $q^2 \approx -k'k$.

$$\begin{aligned} L_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^p &= 8[(kp)(k'p') + (kp')(k'p) - M^2(kk')] = 8[(kp)(k'k - k'k' + k'p) + (kk - kk' + kp)(k'p) - M^2(kk')] \\ &= 8[ME(ME' - \frac{1}{2}q^2) + (\frac{1}{2}q^2 + ME)(ME') + M^2 \frac{1}{2}q^2] = 8[2M^2 EE' - \frac{1}{2}q^2 M(E - E') + M^2 \frac{1}{2}q^2] \end{aligned}$$

Άρα το πλάτος πιθανότητας για το σημειακό κομμάτι της αλληλεπίδρασης είναι,

$$\langle |\mathcal{M}_{11}|^2 \rangle = 8 \frac{e^4}{q^4} F_1^2 [2M^2 EE' - \frac{1}{2}q^2 M(E - E') + M^2 \frac{1}{2}q^2] \quad (3.1.2)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τις κινηματικές σχέσεις $q^2 = 2M(E' - E) = -2EE'(1 - \cos\theta) = -4EE' \sin^2(\theta/2)$,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{11}|^2 \rangle &= 8 \frac{e^4}{q^4} F_1^2 2M^2 EE' [1 - \frac{q^2}{2M^2} \frac{M(E - E')}{2EE'} + \frac{q^2}{4EE'}] = 8 \frac{e^4}{q^4} F_1^2 2M^2 EE' [1 - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)] \\ &\Rightarrow \boxed{\langle |\mathcal{M}_{11}|^2 \rangle = 8 \frac{e^4}{q^4} F_1^2 2M^2 EE' [\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2)]} \end{aligned}$$

Ας δούμε τώρα τον τανυστή $A_{\mu\nu}^p$,

$$A_{\mu\nu}^p = \frac{1}{2} \sum_{S_p} (\bar{u}(p') \sigma_{\mu\kappa} q^\kappa u(p)) (\bar{u}(p') \sigma_{\nu\lambda} q^\lambda u(p))^* = \frac{1}{2} Tr\{\sigma_{\mu\kappa} q^\kappa (\not{p}' + M) \overline{\sigma_{\nu\lambda} q^\lambda} (\not{p}' + M)\}$$

Υπολογίζουμε αρχικά τον πίνακα $\overline{\sigma_{\nu\lambda} q^\lambda}$,

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{\nu\lambda} q^\lambda} &= \gamma_0 (\sigma_{\nu\lambda} q^\lambda)^\dagger \gamma_0 = -\frac{i}{2} \gamma_0 (\gamma_\nu \gamma_\lambda q^\lambda - \gamma_\lambda \gamma_\nu q^\lambda)^\dagger \gamma_0 = -\frac{i}{2} \gamma_0 [(\gamma_\nu \not{q})^\dagger - (\not{q} \gamma_\nu)^\dagger] \gamma_0 = \frac{i}{2} \gamma_0 [(\not{q})^\dagger (\gamma_\nu)^\dagger - (\gamma_\nu)^\dagger (\not{q})^\dagger] \gamma_0 \\ &= -\frac{i}{2} \gamma_0 [q^\lambda (\gamma_\lambda)^\dagger (\gamma_\nu)^\dagger - (\gamma_\nu)^\dagger (\gamma_\lambda)^\dagger q^\lambda] \gamma_0 = -\frac{i}{2} [q^\lambda \gamma_\lambda \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\lambda q^\lambda] \Rightarrow \boxed{\overline{\sigma_{\nu\lambda} q^\lambda} = \sigma_{\nu\lambda} q^\lambda} \end{aligned}$$

Άρα έχουμε,

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu}^p &= \frac{1}{2}Tr\{\sigma_{\mu\kappa}q^\kappa(\not{p} + M)\sigma_{\nu\lambda}q^\lambda(\not{p}' + M)\} = -\frac{1}{4}q^\kappa q^\lambda Tr\{(\gamma_\mu\gamma_\kappa - \gamma_\kappa\gamma_\mu)(\not{p} + M)(\gamma_\nu\gamma_\lambda - \gamma_\lambda\gamma_\nu)(\not{p}' + M)\} \\
&= -\frac{1}{8}q^\kappa q^\lambda Tr\{(\gamma_\mu\gamma_\kappa\not{p} + \gamma_\mu\gamma_\kappa M - \gamma_\kappa\gamma_\mu\not{p} - \gamma_\kappa\gamma_\mu M)(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}' + \gamma_\nu\gamma_\lambda M - \gamma_\lambda\gamma_\nu\not{p}' - \gamma_\lambda\gamma_\nu M)\} \\
&= -\frac{1}{4}q^\kappa q^\lambda (Tr\{\gamma_\mu\gamma_\kappa\not{p}\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}'\} - Tr\{\gamma_\mu\gamma_\kappa\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\nu\not{p}'\} + M^2Tr\{\gamma_\mu\gamma_\kappa\gamma_\nu\gamma_\lambda\} - M^2Tr\{\gamma_\mu\gamma_\kappa\gamma_\lambda\gamma_\nu\} \\
&\quad - Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}'\} + Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\mu\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\nu\not{p}'\}) - M^2Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\} + M^2Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu\} \\
&= \frac{1}{2}q^\kappa q^\lambda (Tr\{\gamma_\mu\gamma_\kappa\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\nu\not{p}'\} + M^2Tr\{\gamma_\mu\gamma_\kappa\gamma_\lambda\gamma_\nu\}) = \frac{1}{2}q^\kappa q^\lambda (p^\rho p'^\sigma Tr\{\gamma_\mu\gamma_\kappa\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\sigma\} + M^2Tr\{\gamma_\mu\gamma_\kappa\gamma_\lambda\gamma_\nu\})
\end{aligned}$$

Λογαριάζουμε τώρα το ίχνος με τους 6 πίνακες γ ,

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma_\mu\gamma_\kappa\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\sigma\} &= 2g_{\mu\kappa}Tr\{\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\sigma\} - Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\sigma\} = 2g_{\mu\kappa}Tr\{\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\sigma\} \\
-2g_{\mu\rho}Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\sigma\} &+ 2g_{\mu\lambda}Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\sigma\} - 2g_{\mu\nu}Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\sigma\} + 2g_{\mu\sigma}Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\nu\} - Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu\} \\
&\Rightarrow Tr\{\gamma_\mu\gamma_\kappa\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\sigma\} = g_{\mu\kappa}Tr\{\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\sigma\} \\
&\quad - g_{\mu\rho}Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\sigma\} + g_{\mu\lambda}Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\sigma\} - g_{\mu\nu}Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\sigma\} + g_{\mu\sigma}Tr\{\gamma_\kappa\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\nu\}
\end{aligned}$$

Όπως έχουμε χρησιμοποιήσει και παραπάνω $Tr(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\rho\nu})$ που συνεπάγεται ότι,

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu}^p &= 2q^\kappa q^\lambda (p^\rho p'^\sigma \{g_{\mu\kappa}\{g_{\rho\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu}g_{\lambda\sigma} + g_{\rho\sigma}g_{\lambda\nu}\} - g_{\mu\rho}\{g_{\kappa\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\sigma} + g_{\kappa\sigma}g_{\lambda\nu}\} \\
&\quad + g_{\mu\lambda}\{g_{\kappa\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\kappa\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\kappa\sigma}g_{\rho\nu}\} - g_{\mu\nu}\{g_{\kappa\rho}g_{\lambda\sigma} - g_{\kappa\lambda}g_{\rho\sigma} + g_{\kappa\sigma}g_{\rho\lambda}\} + g_{\mu\sigma}\{g_{\kappa\rho}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\lambda}g_{\rho\nu} + g_{\kappa\nu}g_{\rho\lambda}\}) \\
&\quad + M^2\{g_{\mu\kappa}g_{\lambda\nu} - g_{\mu\nu}g_{\kappa\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\kappa\nu}\}) = 2[2(qp)(q_\mu p'_\nu - (qp')g_{\mu\nu}) - q^2(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu - (pp')g_{\mu\nu} - M^2g_{\mu\nu})]
\end{aligned}$$

Οπότε έχουμε,

$$\begin{aligned}
L_e^{\mu\nu} A_{\mu\nu}^p &= 2[k^\mu k'^\nu + k'^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}(k_\mu k'^\mu)] \times [4(qp)(q_\mu p'_\nu - (qp')g_{\mu\nu}) - 2q^2(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu - (pp')g_{\mu\nu} - M^2g_{\mu\nu})] \\
&= 4[2(qp)((qk)(k'p') - (qp')(kk')) - q^2((pk)(k'p') + (kp')(kp) - (pp')(kk') - M^2(kk')) \\
&\quad + 2(qp)((k'q)(kp') - (qp')(kk')) - q^2((k'p)(kp') + (k'p')(kp) - (pp')(kk') - M^2(kk')) \\
&\quad - 2(qp)(kk')((qp') - 4(qp')) + q^2(kk')((pp') + (p'p) - 4(pp') - 4M^2)] \\
&= 8[(qp)((qk)(k'p') + (k'q)(kp') + (kk')(qp')) - q^2((k'p)(kp') + (k'p')(kp) - (kk')M^2)]
\end{aligned}$$

Ας διώξουμε τώρα τα $q = k - k'$ και $p' = k - k' + p$,

- $(qp)((qk)(k'p') + (k'q)(kp') + (kk')(qp')) = (kp - k'p)((kk - kk')(k'k - k'k' + k'p) + (k'k - k'k')(kk - k'k + kp) + (kk')(k - k')(k - k' + p)) = (kp - k'p)((-kk')(k'k + k'p) + (k'k)(-k'k + kp) + (kk')(-2kk' + kp - k'p)) = (kp - k'p)(-2(kk')(k'p) + 2(k'k)(kp) - 4(kk')(kk')) = -4(kk')(k'p)(kp) + 2(k'k)(kp)(kp) - 4(kk')(kk')(kp) + 2(kk')(k'p)(k'p) + 4(kk')(k'k')(k'p) = 2q^2 M^2 EE' - q^2 M^2 E^2 - q^4 ME - q^2 M^2 E'^2 + q^4 ME' = q^4 M(E' - E) - q^2 M^2 (E' - E)^2 = q^2 M^2 (E' - E)^2$
- $q^2((k'p)(kp') + (k'p')(kp) + (kk')M^2) = q^2((k'p)(-kk' + kp) + (k'k + k'p)(kp) - (kk')M^2) = q^2(-(k'p)(kk') + 2(k'p)(kp) + (k'k)(kp) + (kk')M^2) = \frac{1}{2}q^4 ME' - 2q^2 M^2 EE' - \frac{1}{2}q^4 ME - \frac{1}{2}q^4 M^2$

Άρα,

$$\begin{aligned}
L_e^{\mu\nu} A_{\mu\nu}^p &= 8[q^2 M^2 (E' - E)^2 - \frac{1}{2}q^4 ME' - 2q^2 M^2 EE' + \frac{1}{2}q^4 ME + \frac{1}{2}q^4 M^2] \\
&= 8[2q^2 M^2 EE' - \frac{1}{2}q^4 M^2] = 16q^2 M^2 EE' [-1 + \frac{q^2}{4EE'}] = -16q^2 M^2 EE' [1 + \frac{q^2}{4EE'} - \frac{q^2}{2EE'}] \\
&= -16q^2 M^2 EE' (\cos(\theta/2) + 2\sin^2(\theta/2))
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\langle |\mathcal{M}_{22}|^2 \rangle = -8 \frac{e^4}{q^4} 2M^2 EE' \frac{q^2 \kappa^2}{4M^2} F_2^2 (\cos(\theta/2) + 2\sin^2(\theta/2)) \quad (3.1.3)$$

Ο επόμενος τανυστής είναι ο $LA_{\mu\nu}^p$

$$\begin{aligned} LA_{\mu\nu}^p &= \frac{1}{2} \sum_{S_p} (\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)) (\bar{u}(p') \sigma_{\nu\rho} q^\rho u(p))^* = \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma_\mu (\not{p} + M) \sigma_{\nu\rho} q^\rho (\not{p}' + M)) \\ &= \frac{i}{4} \text{Tr}(\gamma_\mu (\not{p} + M) (\gamma_\nu \not{q} - \not{q} \gamma_\nu) (\not{p}' + M)) = \frac{i}{4} \text{Tr}((\gamma_\mu \not{p} + \gamma_\mu M) (\gamma_\nu \not{q}' + \gamma_\nu M - \not{q}' \gamma_\nu - \not{q}' M)) \\ &= \frac{i}{2} M (\text{Tr}(\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{q}) + \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \not{q} \not{p}')) = 2iM [q_\nu (p_\mu + p'_\mu) + q_\mu (p_\nu - p'_\nu) - g_{\mu\nu} q^2] \end{aligned}$$

οπότε,

$$\begin{aligned} L_e^{\mu\nu} LA_{\mu\nu}^p &= 4iM [k^\mu k'^\nu + k'^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} (k_\mu k'^\mu)] [q_\nu (p_\mu + p'_\mu) + q_\mu (p_\nu - p'_\nu) - g_{\mu\nu} q^2] \\ &= 4iM [(k'q)((kp) + (kp')) + (kq)((k'p) - (k'p')) - (kk')q^2 \\ &\quad + (kq)((k'p) + (k'p')) + (k'q)((kp) - (kp')) - (kk')q^2 \\ &\quad - (kk')(qp) - (kk')(qp') - (kk')(qp) + (kk')(qp') + (kk')4q^2] \\ &= 8iM [(k'q)(kp) + (kq)(k'p) + (kk')q^2 - (kk')(qp)] = -4iM q^4 \end{aligned}$$

Ο τανυστής $AL_{\mu\nu}^p$

$$\begin{aligned} AL_{\mu\nu}^p &= \frac{1}{2} \sum_{S_p} (\bar{u}(p') \sigma_{\mu\rho} q^\rho u(p)) (\bar{u}(p') \gamma_\nu u(p))^* = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_{\mu\rho} q^\rho (\not{p} + M) \gamma_\nu (\not{p}' + M)) \\ &= \frac{i}{4} \text{Tr}((\gamma_\mu \not{q} + \gamma_\mu M - \not{q} \gamma_\mu - \not{q} M) (\gamma_\nu \not{p}' + M \gamma_\nu)) = \frac{i}{2} [\text{Tr}(\gamma_\mu \not{q} \gamma_\nu) + \text{Tr}(\gamma_\mu \not{q} \gamma_\nu \not{p}')] = -LA_{\mu\nu}^p \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$L_e^{\mu\nu} AL_{\mu\nu}^p = 4iM q^4$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{12}|^2 \rangle + \langle |\mathcal{M}_{21}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{q^4} \frac{\kappa}{2M} F_1 F_2 (8M q^4) = 8 \frac{e^4}{q^4} \frac{q^2}{2M^2} 2M^2 EE' \kappa F_1 F_2 \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{EE'} \right) \\ &\Rightarrow \langle |\mathcal{M}_{12}|^2 \rangle + \langle |\mathcal{M}_{21}|^2 \rangle = -16 \frac{e^4}{q^4} \frac{q^2}{2M^2} 2M^2 EE' \kappa F_1 F_2 \sin^2(\theta/2) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τα πλάτη πιθανότητας,

$$\begin{aligned} &\langle |\mathcal{M}_{11}|^2 \rangle + \langle |\mathcal{M}_{22}|^2 \rangle + \langle |\mathcal{M}_{12}|^2 \rangle + \langle |\mathcal{M}_{21}|^2 \rangle \\ &= 8 \frac{e^4}{q^4} 2M^2 EE' (F_1^2 (\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2)) - 2 \frac{kq^2}{2M^2} F_1 F_2 \sin^2(\theta/2) - \frac{q^2 \kappa^2}{4M^2} |F_2|^2 (\cos(\theta/2) + 2\sin^2(\theta/2))) \\ &\Rightarrow \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 8 \frac{e^4}{q^4} 2M^2 EE' [(F_1^2 - \frac{q^2 \kappa^2}{4M^2} F_2^2) \cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2(\theta/2)] \end{aligned}$$

Τελικά και κατά απόλυτη αναλογία με την σκέδαση ηλεκτρονίου μιονίου η διαφορική ενεργός διατομή της ελαστικής σκέδασης ηλεκτρονίου πρωτονίου δίνεται από την παρακάτω σχέση (σχέση Rosenbluth),

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Lab} = \frac{a^2}{2E^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E'}{E} [(F_1^2 - \frac{q^2 \kappa^2}{4M^2} F_2^2) \cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2(\theta/2)]$$

Οι παράγοντες δομής F_1 και F_2 συνδέονται με τις κατανομές ηλεκτρικής G_E και μαγνητικής G_M ροπής με τις σχέσεις

$$G_E = F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2, \quad G_M = F_1 + \kappa F_2$$

3.2 Βαθειά Ανελαστική Σκέδαση Ηλεκτρονίου Πρωτονίου

Στις χαμηλές ενέργειες κυριαρχούν οι ελαστικές σκεδάσεις ηλεκτρονίου πρωτονίου καθώς το ηλεκτρόνιο δεν έχει αρκετή ενέργεια ώστε να αποσπάσει κάποιο παρτόνιο από το πρωτόνιο. Καθώς όμως η ενέργεια του ηλεκτρονίου αυξάνεται η σκέδαση γίνεται ανελαστική και όλο και περισσότερα σωματίδια εξέρχονται από την κορυφή του πρωτονίου. Καθώς η κορυφή του ηλεκτρονίου παραμένει ίδια μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το πλάτος πιθανότητας και η ενεργός διαφορική διατομή θα γραφτεί

$$d\sigma = L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu}$$

με τον ανδρονικό τελεστή $W_{\mu\nu}$ να παραμετροποιεί την συνολική μας άγνοια στην δομή του πρωτονίου. Αντίστοιχα με τον πίνακα (3.1.1) γράφουμε τον ταυυστή στην πιο γενική μορφή εκφρασμένο στις ποσότητες της συγκεκριμένης κορυφής p^μ , q^μ και $g^{\mu\nu}$

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_3}{M^2} (p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu) + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) \quad (3.2.1)$$

όπου δεν υπάρχει η ορμή $p' = p + q$ και εφόσον δουλεύουμε στο επίπεδο του ανδρονικού ταυυστή έχουμε αθροίσει στα σπιν απαλείφοντας τους πίνακες γ . Η συντελεστές W_i θα εξαρτώνται τώρα από δύο βαθμωτά μεγέθη της κορυφής του πρωτονίου καθώς $p^2 \neq p'^2$. Μια επιλογή είναι τα

$$q^2 \quad \text{και} \quad \nu = \frac{p \cdot q}{M}$$

Μπορούμε εν συνεχεία ομοίως με την προηγούμενη υποερότητα να περιορίσουμε τον ανδρονικό ταυυστή. Αρχικά, παρατηρούμε πως ο ταυυστής του ηλεκτρονίου είναι συμμετρικός οπότε

$$L_{\mu\nu}^e (p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu) = L_{\mu\nu}^e p^\mu q^\nu - L_{\mu\nu}^e p^\nu q^\mu = L_{\mu\nu}^e p^\mu q^\nu - L_{\nu\mu}^e p^\nu q^\mu = 0$$

Έπειτα αξιοποιούμε την διατήρηση ρεύματος,

$$\begin{aligned} q_\nu W^{\mu\nu} &= -W_1 q^\mu + \frac{W_2}{M^2} (qp) p^\mu + \frac{W_4}{M^2} q^2 q^\mu + \frac{W_5}{M^2} (q^2 p^\mu + (qp) q^\mu) = 0 \\ \Rightarrow q^\mu (-W_1 + \frac{W_4}{M^2} q^2 + \frac{W_5}{M^2} (qp)) + p^\mu (\frac{W_2}{M^2} (qp) + \frac{W_5}{M^2} q^2) &= 0 \\ \Rightarrow W_5 &= -\frac{W_2}{q^2} (qp) \\ W_4 &= \frac{W_1}{q^2} M^2 - \frac{W_1}{q^2} (qp) \end{aligned}$$

Τελικά παραμένουν λοιπόν δύο συντελεστές,

$$W^{\mu\nu} = W_1 (-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}) + W_2 \frac{1}{M^2} (p^\mu - \frac{pq}{q^2} q^\mu) (p^\nu - \frac{pq}{q^2} q^\nu)$$

Υπολογίζουμε λοιπόν όπως και πριν το γινόμενο των ταυστών

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu} &= 2[k^\mu k'^\nu + k'^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}(kk')] \times [W_1(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}) + \frac{W_2}{M^2}(p^\mu - \frac{pq}{q^2}q^\mu)(p^\nu - \frac{pq}{q^2}q^\nu)] \\
&= 2[W_1(-(kk') + \frac{(qk)(qk')}{q^2}) + \frac{W_2}{M^2}(pk - \frac{pq}{q^2}qk)(pk' - \frac{pq}{q^2}qk') \\
&\quad + W_1(-(kk') + \frac{(qk')(qk)}{q^2}) + \frac{W_2}{M^2}(pk' - \frac{pq}{q^2}qk')(pk - \frac{pq}{q^2}qk) \\
&\quad - W_1(kk')(-4 + 1) - \frac{W_2}{M^2}(kk')(p - \frac{pq}{q^2}q)(p - \frac{pq}{q^2}q)] \\
&= 2[W_1(kk' + 2\frac{(qk')(qk)}{q^2}) + \frac{W_2}{M^2}(2(pk - \frac{pq}{q^2}qk)(pk' - \frac{pq}{q^2}qk') - (kk')(p - \frac{pq}{q^2}q)^2)] \\
&= 2[W_1(kk' + 2\frac{(kk')(-kk')}{q^2}) + \frac{W_2}{M^2}(2(pk - \frac{pk - pk'}{q^2}(-kk'))(pk' - \frac{pk - pk'}{q^2}(kk')) - (kk')(p - \frac{pk - pk'}{q^2}q)^2)] \\
&= 2[-W_1q^2 + \frac{W_2}{M^2}(2(pk - \frac{pk - pk'}{2})(pk' + \frac{pk - pk'}{2}) + \frac{q^2}{2}(p^2 - \frac{(pk - pk')^2}{q^2}))] \\
&= [-W_1q^2 + \frac{W_2}{M^2}(2((pk)(pk') + pk\frac{pk - pk'}{2} - pk'\frac{pk - pk'}{2} - \frac{(pk - pk')^2}{4})) + \frac{q^2}{2}p^2 - \frac{(pk - pk')^2}{2}] \\
&= 2(W_2\frac{q^2}{2} + 2W_2EE' - W_1q^2) = 4EE'(W_2\frac{q^2}{4EE'} + W_2 - W_1\frac{q^2}{2EE'}) = 4EE'(-W_2\sin^2(\theta/2) + W_2 + 2W_1\sin^2(\theta)/2)
\end{aligned}$$

Άρα το γινόμενο των ταυστών είναι

$$|L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu}|_{lab} = 4EE'(W_2\cos^2(\theta/2) + 2W_1\sin^2(\theta/2))$$

Οπότε η ενεργός διατομή γράφεται

$$\left| \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \right| = \frac{a^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)} (W_2(\nu, q^2)\cos^2(\theta/2) + 2\nu W_1(\nu, q^2)\sin^2(\theta/2)) \quad (3.2.2)$$

3.3 Συναρτήσεις κατανομής παρτονίων

Μία πολύ σημαντική πειραματική παρατήρηση είναι η γνωστή κλιμάκωση Bjorken (Bjorken scaling) σύμφωνα με την οποία οι συντελεστές δομής του πρωτονίου $F_i(x, Q^2) \rightarrow F_i(x)$ καθώς $Q^2 \rightarrow \infty$. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει πως για μεγάλες ενέργειες το ηλεκτρόνιο αλληλεπιδρά με κάποιο παρτόνιο του πρωτονίου σαν να ήταν ελεύθερο. Το ηλεκτρόνιο κινείται τόσο γρήγορα προς το πρωτόνιο όπου η συστολή του μήκους κάνει το πρωτόνιο επίπεδο και το ηλεκτρόνιο περνά από μέσα του πολύ πιο γρήγορα από όσο κάνουν τα παρτόνια να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους.

Ας θεωρήσουμε τώρα την σκέδαση ηλεκτρονίου με ένα ελεύθερο κουάρκ. Η αντίδραση αυτή θα είναι ίδια με του μιονίου, με διαφορά απλά στην μάζα και το φορτίου του ηλεκτρονίου. Σε μεταβλητές Mandelstam η διαφορική ενεργός διατομή είναι,

$$\frac{d\hat{\sigma}_i}{d\hat{t}} = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} e_i^2 \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right) \quad (3.3.1)$$

όπου e_i είναι το κλασματικό φορτίο του κουάρκ και τα καπελάκια συμβολίζουν παρτονικές ποσότητες. Θεωρώντας το κουάρκ συγγραμμικό με το πρωτόνιο η ορμή του μπορεί να γραφτεί ως $p = \xi\hat{p}$ με $\xi \in [0, 1]$. Σε αυτή την προσέγγιση η ενεργός διατομή της ep σκέδασης θα γραφτεί ως το άθροισμα των ενεργών διατομών σκέδασης ηλεκτρονίου με κουάρκ λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις πιθανές γεύσεις που περιέχονται στο πρωτόνιο. Καθώς δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων πόση από την συνολική ορμή του πρωτονίου κουβαλάει το αλληλεπιδρών κουάρκ ορίζουμε την πυκνότητα πιθανότητας $f_i(\xi)$ η οποία εκφράζει την πιθανότητα κουάρκ γεύσης i να έχει λόγο ορμής ξ . Επομένως γράφουμε,

$$\sigma(e(k)p(p) \rightarrow e(k') + X) = \int_0^1 d\xi \sum_i f_i(\xi) (\hat{\sigma}_i(e(k)q_i(\xi p) \rightarrow e(k')q_i(p'))). \quad (3.3.2)$$

Η σύγκριση μεταξύ της σχέσης (3.2.2) και των ενεργών διατομών των αλληλεπιδράσεων με τα σημειακά παρτόνια θα διαφωτίσει την δομή του πρωτονίου.

Για την ευκολότερη ανάλυση του προβλήματος θα περάσουμε σε ένα σύστημα αναφοράς το οποίο είναι γνωστό ως Breit ή άπειρης ορμής. Στο σύστημα αυτό το πρωτόνιο κινείται με μεγάλη ταχύτητα (σχεδόν την ταχύτητα του φωτός) προς το ηλεκτρόνιο και η μάζα του μπορεί να αγνοηθεί ενώ το χωροειδές εικονικό φωτόνιο έχει όλες τις συνιστώσες της τετραορμής του μηδέν εκτός της q^3 . Σε αυτό το σύστημα αναφοράς δηλαδή

$$\hat{p} = (E, 0, 0, \xi p_z)$$

$$q = (0, 0, 0, -Q)$$

και

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}^2 = (\hat{p} + q)^2 &\Rightarrow Q^2 = 2\hat{p} \cdot q \\ \hat{p} \cdot q = \xi p \cdot q &= \xi p_z Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow \xi = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = x$$

ο λόγος ορμής του παρτονίου ταυτίζεται με την μεταβλητή x . Τώρα εκφράζοντας την (3.3.1) συναρτήσει των μεταβλητών της ΒΑΣ καταλήγουμε στην σχέση

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \sum_i \frac{2\pi\alpha^2 e_i^2}{Q^4} [1 + (1-y)^2] f_i(x) dx \Rightarrow \frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} [1 + (1-y)^2] \sum_i e_i^2 f_i(x) \quad (3.3.3)$$

Συγκρίνοντας τώρα την αυτή την ενεργό διατομή με την ενεργό διατομή της ΒΑΣ και λαμβάνοντας υπόψιν την βάρθρωση Bjorken και την σύνδεση των δύο συντελεστών δομής μέσω της σχέσης Gallan-Gross $F_2 = 2xF_1$ η τελική σχέση μπορεί να γραφτεί συναρτήσει της F_2 η οποία αναγνωρίζεται ως $F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x)$, δηλαδή

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \frac{[1 + (1-y)^2]}{2x} F_2(x) \quad (3.3.4)$$

Η σειρά των λογικών προσεγγίσεων και των φυσικών επιχειρημάτων κατάφεραν να απλουστεύσουν την δομή του πρωτονίου από τις αρχικές γενικές μορφές (3.1.1) και (3.2.1) σε έναν συντελεστή δομής που εξαρτάται μόνο από την μεταβλητή x και από τις συναρτήσεις $f_i(x)$ οι οποίες λέγονται Συναρτήσεις Κατανομής Παρτονίων (Parton Distribution Functions). Είναι σημαντικό όμως να υπενθυμίσουμε πως το αποτέλεσμα αυτό επαρκές μόνο στην πρώτη τάξη υπολογισμών και δεν περιέχει χβαντικές διορθώσεις. Σε επόμενες τάξεις παραβιάζεται η κλιμάκωση Bjorken και δεν ισχύει η σχέση Gallan-Gross. Οι χβαντικές διορθώσεις εντάσσονται στις συναρτήσεις κατανομής παρτονίων με το τίμημα να χαθεί η πιθανολογική τους ερμηνεία.

3.3.1 Θάλασσα των κουάρκ

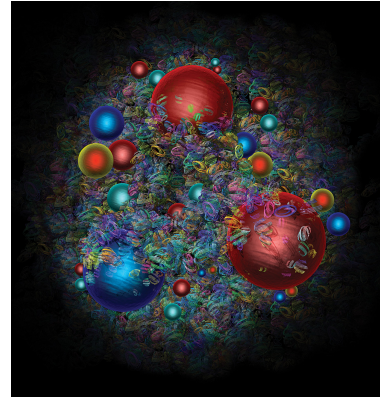
Η πειραματικά ενημερωμένη εικόνα της δομής του πρωτονίου δεν αποτελείται από τρία κουάρκ (uud) αλλά από μία θάλασσα κουάρκ και αντικουάρκ ζευγαριών και γκλουονίων με τρία επιπλέον κουάρκ που μεταφέρουν τους χβαντικούς αριθμούς του.

Δεδομένης αυτής της εικόνας ο συντελεστής δομής που προκύπτει από την ηλεκτρομαγνητική ΒΑΣ είναι

$$\frac{1}{x} F_2(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^p(x) + \bar{u}^p(x)]$$

$$+ \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^p(x) + \bar{s}^p(x)]$$

όπου ο δείκτης p υποδηλώνει πως αναφερόμαστε σε πρωτόνιο και οι συνεισφορές βαρύτερων κουάρκ από το s παραλείπονται λόγω φαινομένων κατωφλίου. Ο



Σχήμα 3.2: Καλλιτεχνική αναπαράσταση της δομής του πρωτονίου. Μία κοχλάζουσα θάλασσα κουάρκ και γκλουονίων. Credit: D. Dominguez/CERN.

συντελεστής δομής εξαρτάται από 6 συναρτήσεις με την κάθε μία να είναι μια συνάρτηση κατανομής πιθανότητας. Για την μείωση αυθαίρετων συναρτήσεων εκμεταλλευόμαστε την συμμετρία του ισотоπικού σπιν μεταξύ του πρωτονίου και του νετρονίου. Πιο συγκεκριμένα, ο συντελεστής μορφής για την σκέδαση ηλεκτρονίου νετρονίου είναι

$$\frac{1}{x} F_2^{en}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^n(x) + \bar{d}^n(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^n(x) + \bar{s}^n(x)].$$

Υποθέτοντας ότι το πρωτόνιο γίνεται νετρόνιο αν γίνει εναλλαγή των u και d κουάρκ, ορίζονται τρεις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} u^p(x) &= u^n(x) = u(x) \\ d^p(x) &= d^n(x) = d(x) \\ s^p(x) &= s^n(x) = s(x) \end{aligned}$$

Τα αδρόνια περιέχουν δύο ειδών κουάρκ, τα κουάρκ τα οποία τους δίνουν τους χβαντικούς αριθμούς και τα λέμε κουάρκ στοιβάδας (valance quarks), για παράδειγμα το πρωτόνιο έχει uud , και τα κουάρκ τα οποία απαρτίζουν την θάλασσα (sea quarks). Διαχωρίζοντας τα δύο για κάθε γεύση έχουμε τα παρακάτω,

$$\begin{aligned} u_v(x) &= u(x) - \bar{u}(x) \\ d_v(x) &= d(x) - \bar{d}(x) \\ s_v(x) &= s(x) - \bar{s}(x) = 0 \end{aligned}$$

Αθροίζοντας τώρα όλα τα πιθανά παρτόνια πρέπει να ανακύπτουν οι χβαντικοί αριθμοί των αδρονίων. Για την περιγραφή του πρωτονίου και του νετρονίου επιβάλλονται οι παρακάτω περιορισμοί

$$\int_0^1 dx [u(x) - \bar{u}(x)] = 2, \quad \int_0^1 dx [d(x) - \bar{d}(x)] = 1, \quad \int_0^1 dx [s(x) - \bar{s}(x)] = 0.$$

Τέλος ορίζοντας μία συνάρτηση για όλα τα κουάρκ της θάλασσας,

$$S(x) = u_s(x) = \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) = s_s(x) = \bar{s}_s(x)$$

οι συντελεστές δομής γράφονται

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} F_2^{ep}(x) &= \frac{1}{9} [4u_v(x) + d_v(x)] + \frac{4}{3} S(x) \\ \frac{1}{x} F_2^{en}(x) &= \frac{1}{9} [u_v(x) + 4d_v(x)] + \frac{4}{3} S(x). \end{aligned}$$

Η γενική συμπεριφορά των συντελεστών δομής είναι πως για σκεδάσεις με μεταφορά ορμής x η θάλασσα υπερισχύει των στοιβάδων

$$\frac{F_2^{ep}(x)}{F_2^{en}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

ενώ για μεγάλα x κυριαρχούν τα κουάρκ των στοιβάδων αφήνοντας μικρό ποσοστό της ορμής για την θάλασσα

$$\frac{F_2^{ep}(x)}{F_2^{en}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{4u_v(x) + d_v(x)}{u_v(x) + 4d_v(x)}.$$

Μέχρι στιγμής η συζήτηση έχει περιοριστεί στα φορτισμένα παρτόνια του πρωτονίου καθώς η σκέδαση του ηλεκτρονίου είναι ηλεκτρομαγνητικής φύσης. Είναι όμως λογικό πως ένα μέρος της ορμής του πρωτονίου

εναποτίθεται στα γκλουόνια τα οποία το συγκρατούν. Πειραματικά η ορμή μοιράζεται μισή μισή μεταξύ των κουάρκ και των γκλουονίων,

$$\sum_i \int_0^1 x f_i(x) dx \approx 0.5$$

με αποτέλεσμα η συνολική ορμή του πρωτονίου να περιγράφεται από το άθροισμα

$$\sum_i \int_0^1 x f_i(x) dx + \int_0^1 x g_i(x) dx \approx 1 \quad (3.3.5)$$

Η δομή του πρωτονίου καθορίζεται μέσω των συναρτήσεων f_i και g_i οι οποίες μπορούν έπειτα να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό άλλων σχεδιάσεων όπως στην σύγκρουση δύο πρωτονίων στο LHC. Οι ΣΚΠ είναι βασικό αντικείμενο μελέτης καθώς δεν μπορούν να υπολογιστούν από πρώτες αρχές και συστήνουν σημαντικές απροσδιοριστίες στις θεωρητικές προβλέψεις.

Σχετική Βιβλιογραφία: [16], [12], [13], [17]

Κεφάλαιο 4

Τοπ κουάρκ: Το πιο βαρύ στοιχειώδες σωματίδιο

Το τοπ κουάρκ είναι το τελευταίο και βαρύτερο φερμιόνιο το οποίο ανακαλύφθηκε το 1995 στο Tevatron έναν επιταχυντή πρωτονίων αντιπρωτονίων, ενώ η πρώτη έμμεση πρόβλεψη έγινε το 1973 από τους Kobayashi και Maskawa. Στο LHC η παραγωγή τοπ κουάρκ είναι πολύ σημαντική για την μελέτη του μποζονίου Higgs, την δοκιμή της ακρίβειας της ΚΧΔ και την βαθμονόμηση των ανιχνευτών καθώς και την αναζήτηση φυσικής πέρα από το καθιερωμένο πρότυπο.

4.1 Παραγωγή του τοπ κουάρκ

Η παραγωγή τοπ κουάρκ μέχρι στιγμής είναι εφικτή μόνο σε επιταχυντές αδρονίων λόγω της υψηλής ενέργειας που απαιτείται και περιγράφεται από την διαταρακτική ΚΧΔ. Η συχνότερη εμφάνιση του τοπ είναι ως ζεύγος $t\bar{t}$ με περίπου διπλάσια πιθανότητα από την παραγωγή μονού τοπ. Το κανάλι του ζεύγους είναι επίσης αρκετά πιο ευδιάκριτο λόγω των δύο πιδάκων με b κουάρκ στον ανιχνευτή και είναι αυτό που αφορά την εργασία. Η ενεργός διατομή στο LHC είναι αρκετά μεγάλη και αυξάνεται με την αύξηση της ενέργειας κέντρου μάζας καθιστώντας τον επιταχυντή αυτό εργοστάσιο παραγωγής τοπ.

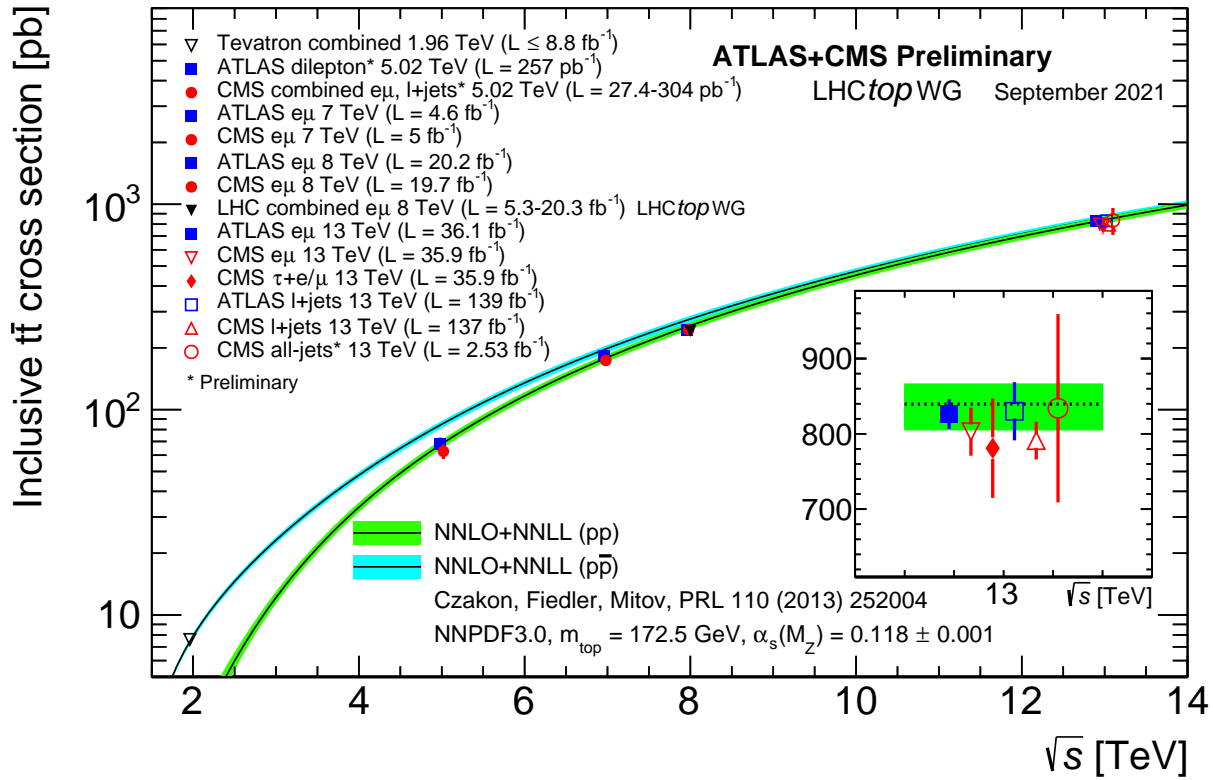
Το φορτίο του τοπ είναι $Q_t = 2/3$ και έχει μετρηθεί από την ισχύ της σύζευξης του με το φωτόνιο και από το φορτίο των προϊόντων διάσπασης του. Η φαινομενολογία του τοπ βασίζεται κυρίως στην εξαιρετικά μεγάλη του μάζα $m_t = 173.3 \text{ GeV}$ περίπου 200 φορές μεγαλύτερη από του πρωτονίου. Το εύρος (width) του τοπ αγνοώντας όρους της τάξης m_b^2/m_t^2 , a_s^2 και $(a_s/\pi)M_W^2/m_t^2$ είναι σύμφωνα με το Καθιερωμένο Πρότυπο σε NLO

$$\Gamma_t = \frac{G_F m_t^3}{8\pi\sqrt{2}} \left(1 - \frac{M_W^2}{m_t^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{M_W^2}{m_t^2}\right) \left[1 - \frac{2a_s}{3\pi} \left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{5}{2}\right)\right] \approx 1.3 \text{ GeV} \quad (4.1.1)$$

όπου m_t είναι η μάζα στον πόλο του τοπ κουάρκ. Ο σύντομος χρόνος ζωής του $\tau = 5 \times 10^{-25} \text{ s}$ είναι μικρότερος από τον χρόνο αδρονιοποίησης $1/\Lambda_{QCD} \approx 3 \times 10^{-24} \text{ s}$, συνεπώς δεν υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις με τοπ. Το τοπ κουάρκ διασπάται σχεδόν αποκλειστικά σε μποζόνιο W και σε b κουάρκ. Μάλιστα λόγω της μεγάλης του μάζας είναι το μόνο κουάρκ που μπορεί να παράξει πραγματικό μποζόνιο W. Τα κανάλια διάσπασης του ζεύγους $t\bar{t}$ είναι:

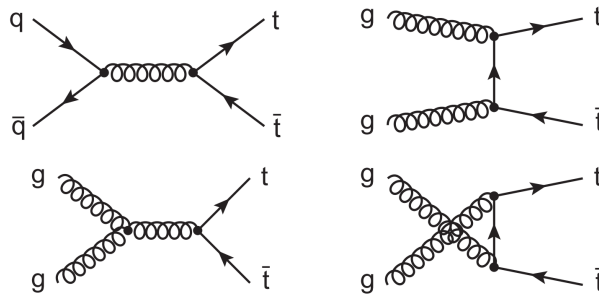
1. $t\bar{t} \rightarrow W^+ b W^- \bar{b} \rightarrow q\bar{q}' b q'' \bar{q}''' \bar{b}$
2. $t\bar{t} \rightarrow W^+ b W^- \bar{b} \rightarrow q\bar{q}' b l^- \bar{\nu}_l \bar{b} + l^+ \nu_l b q'' \bar{q}''' \bar{b}$
3. $t\bar{t} \rightarrow W^+ b W^- \bar{b} \rightarrow l^+ \nu_l b l'^- \bar{\nu}_l \bar{b}$

όπου το κανάλι 1 ονομάζεται all-jets (45.7%), το κανάλι 2 leptons+jets (43.8%) και το κανάλι 3 dilepton (10.5%). Επιπλέον πίδακες μπορεί να παραχθούν από την ακτινοβόληση γκουονίων από το τοπ κουάρκ ή τα προϊόντα διάσπασης του.



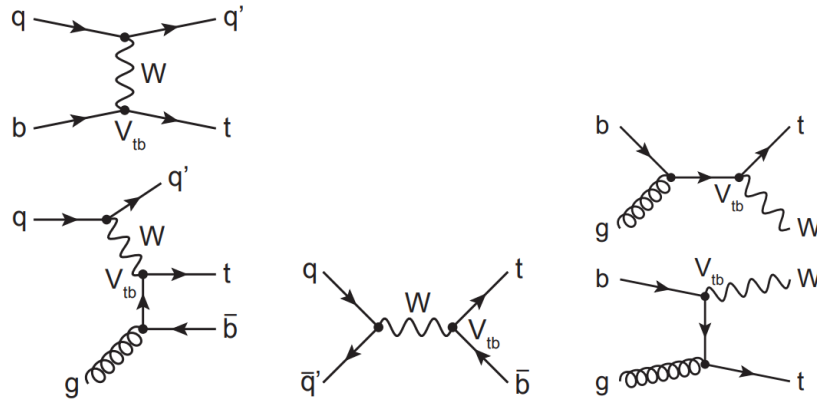
Σχήμα 4.1: Μέτρηση και πρόβλεψη για την ενεργό διατομή παραγωγής ζεύγους τοπ αντιτόπ κουάρκ για το Tevatron και το LHC.

Οι διαδικασίες παραγωγής ζεύγους τοπ είναι η εξαύλωση κουάρκ αντικουάρκ και η σύντηξη γκλουονίων και οι δύο διαδικασίες που περιγράφονται καθαρά από την ΚΧΔ. Στο LHC η σύντηξη γκλουονίου ευθύνεται για περίπου το 90% της παράγωγης καθιστώντας αυτό το κανάλι ένα καλό εργαλείο για τον περιορισμό της ΣΚΠ των γκλουονίων στο πρωτόνιο. Η παραγωγή ενός τοπ είναι ηλεκτρασθενής διαδικασία με μεσολαβητή



Σχήμα 4.2: Διαγράμματα Feynman για την παραγωγή ζεύγους $t\bar{t}$ σε πρώτη τάξη (LO).

εικονικό μποζόνιο W αλλά η πιθανότητα της είναι αρκετά μικρότερη από την παραγωγή ζεύγους. Η μεγαλύτερη συνεισφορά στην συνολική ενεργό διατομή της μόνης παραγωγής έρχεται από το κανάλι t (70%). Η δεύτερη μεγαλύτερη είναι η παραγωγή πραγματικού W (25%) και το κανάλι s (5%).



Σχήμα 4.3: Διαγράμματα Feynman για την ηλεκτρασθενή παραγωγή τοπ κουάρκ σε πρώτη τάξη (LO): κανάλι t στα αριστερά, κανάλι s στο κέντρο και παραγωγή Wt στα δεξιά.

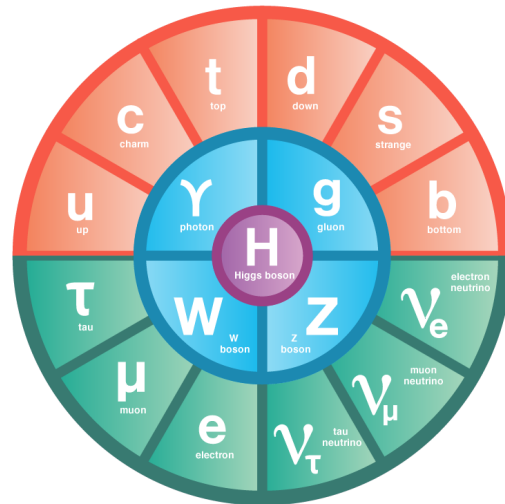
4.2 Τοπ κουάρκ στο Καθιερωμένο Πρότυπο

Το τοπ κουάρκ έχει μία ξεχωριστή θέση στο Καθιερωμένο Πρότυπο και σχετίζεται με την ασθενή αλληλεπίδραση και την παραβίαση της CP συμμετρίας. Το τοπ συνεισφέρει ως χβαντική διόρθωση μέσω βρόχων σε πολλές διαδικασίες και λόγω της μεγάλης του μάζας οι συνεισφορές είναι συχνά σημαντικές. Συγκεκριμένα οι συνεισφορές του τοπ εμφανίζονται στην παραγωγή του μποζονίου Higgs.

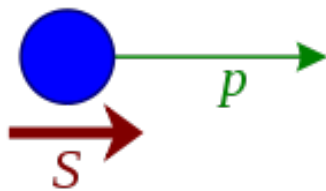
Μέχρι στιγμής έχουμε αναφερθεί στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική και την Κβαντική Χρωμοδυναμική οι οποίες είναι 2 από τις 3.5 δυνάμεις που περιγράφει το Καθιερωμένο Πρότυπο (ΚΠ), την ασθενή αλληλεπίδραση και το μποζόνιο Higgs. Η συνολική συμμετρία του ΚΠ είναι η

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

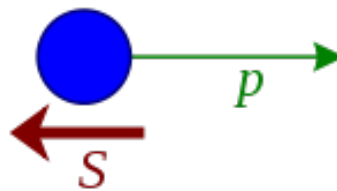
όπου η $SU(3)_C$ είναι η γνώριμη συμμετρία χρώματος της QCD και η $SU(2)_L \times U(1)_Y$ είναι η συμμετρία της ηλεκτρασθενής δύναμης η οποία σπάει αυθόρμητα μέσω του μηχανισμού Higgs. Ένα συνταρακτικό πειραματικό γεγονός είναι η παραβίαση της ισοτιμίας (parity) η οποία περιγράφεται στο ΚΠ μέσω της χειραλικότητας (chirality) η οποία χωρίζει το σπινοριακό πεδίο ψ σε ένα δεξιόστροφο και ένα αριστερόστροφο πεδίο $\psi_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5\psi)$. Η χειραλικότητα ορίζεται για άμαζα σωματίδια και είναι η προβολή του σπιν στην κατεύθυνση κίνησης του σωματιδίου. Οι δύο χειραλικότητες ανήκουν σε



Right-handed:



Left-handed:



διαφορετική αναπαράσταση της ομάδας $SU(2) \times U(1)$ και έχουν διαφορετικούς χβαντικούς αριθμούς οδηγώντας

σε παραβιάσεις της ομοτιμίας από την ασθενή αλληλεπίδραση.

				$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	T	T_3	Q
$Q_L^i =$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	3	2	1/6	1/2	+1/2 -1/2	+2/3 -1/3
$u_R^i =$	u_R	c_R	t_R	3	1	2/3	0	0	+2/3
$d_R^i =$	d_R	s_R	b_R	3	1	-1/3	0	0	-1/3
$L_L^i =$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	1	2	-1/2	1/2	+1/2 -1/2	0 -1
$e_R^i =$	e_R	μ_R	τ_R	1	1	-1	0	0	-1
$\nu_R^i =$	ν_R^e	ν_R^μ	ν_R^τ	0	0	0	0	0	0
$\phi =$	$\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$			1	2	1/2	1/2	+1/2 -1/2	+1 0

Η Λαγκρανζιανή του ΚΠ χωρίζεται σε πολλά μέρη,

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{Gauge} + \mathcal{L}_{Matter} + \mathcal{L}_{Yukawa} + \mathcal{L}_{Higgs}. \quad (4.2.1)$$

Το κομμάτι \mathcal{L}_{Gauge} περιέχει την κινητική ενέργεια και την αυτό-αλληλεπίδραση των πεδίων βαθμίδας. Το κομμάτι \mathcal{L}_{Matter} περιέχει την κινητική ενέργεια των φερμιονίων και την αλληλεπίδραση τους με το πεδία βαθμίδας μέσω της συναλλοιώτης παραγωγού. Στο κομμάτι αυτό ένας όρος που θα έδινε μάζα στο u κουάρκ

$$\mathcal{L} = -m\bar{u}_L u_R + h.c.$$

απαγορεύεται καθώς το u_L είναι μέρος της διπλέτας Q_L της $SU(2)$ και συνεπώς παραβιάζει την αναλλοιωτήτητα βαθμίδας στην ομάδα $SU(2)$. Το πρόβλημα της μάζας των φερμιονίων λύνεται με το αυθόρμητο σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας μέσω του πεδίου Higgs. Το πεδίο Higgs, ένα βαθμωτό πεδίο που μετασχηματίζεται ως διπλέτα υπό την $SU(2)_L$, εμφανίζεται στην Λαγκρανζιανή του ΚΠ ως

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D^\mu \varphi)^\dagger D_\mu \varphi + \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 \quad (4.2.2)$$

όπου περιέχει δύο νέες παραμέτρους μ^2 και λ με την μ^2 να είναι η μόνη διαστατική παράμετρος του ΚΠ. Οι όροι με τις παραμέτρους είναι το (μείον) δυναμικό του πεδίου και είναι φτιαγμένο ώστε το ελάχιστο του να μην είναι το μηδέν αλλά ένας κύκλος ελαχίστου

$$\langle \varphi^0 \rangle = \mu / \sqrt{2\lambda} \equiv v / \sqrt{2}$$

Η ελάχιστη κατάσταση του πεδίου Higgs λοιπόν δεν είναι το μηδέν αλλά είναι

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

το οποίο αντικαθιστώντας το στην Λαγκρανζιανή (4.2.2) προκύπτουν οι μάζες των μποζονίων W και Z

$$M_W = \frac{1}{2} g v, \quad M_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v.$$

όπου οι σταθερές $g \approx 2/3$ και $g' \approx 2\sqrt{3}/9$ είναι οι σταθερές βαθμίδας των $SU(2)_L$ και $U(1)_Y$.

Οι μάζες των φερμιονίων προέρχονται από την Λαγκρανζιανή Yukawa που περιέχει την αλληλεπίδραση των φερμιονίων με το πεδίο Higgs με όρους της μορφής

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\Gamma_u^{ij} \bar{Q}_L^i \epsilon \varphi^* u_R^j + \dots$$

Αντίστοιχα αντικαθιστώντας το πεδίο Higgs εδώ μπλέκονται με επιτυχία τα αριστερόστροφα και δεξιόστροφα πεδία

$$\mathcal{L}_{Yukawa,t} = -\Gamma_t \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{t}_L t_R + \bar{t}_R t_L) = -m_t \bar{t} t$$

όπου η αντικατάσταση του u με το t κουάρκ είναι τετριμμένη. Μία ιδιαιτερότητα του τοπ κουάρκ στο ΚΠ είναι πως η είναι το μόνο φερμιόνιο με σταθερά σύζευξης Yukawa $\Gamma_t \approx 1$ το οποίο θέτει ερωτήματα για την φυσικότητα των υπολοίπων ελαφρών φερμιονίων.

Η διάσπαση του τοπ κουάρκ περιγράφεται από την Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}_{Wtb} = \frac{g}{\sqrt{2}} V_{tb} \bar{q} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) t W_\mu^- + h.c$$

με το V_{tb} να είναι στοιχείο του πίνακα CKM όπου ευθύνεται για τις μεταβάσεις $q \rightarrow q'$ μέσω της ασθενούς αλληλεπίδρασης και προέρχεται από τους πίνακες Γ^{ij} στην Λαγκρανζιανή Yukawa. Λόγω του πειραματικού γεγονότος ότι $|V_{tb}|^2 \gg |V_{ts}|^2 > |V_{td}|^2$ το τοπ διασπάται σχεδόν αποκλειστικά σε Wb . Λόγω του τελεστή προβολής $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ το μποζόνιο W συζευγνύεται μόνο με αριστερόστροφα κουάρκ και δεξιόστροφα αντικουάρκ. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό ότι το τοπ κουάρκ διασπάται σε πραγματικό μποζόνιο W καθιστά το τοπ κουάρκ την μόνη πηγή πολωμένων μποζονίων W στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Σε πρώτη τάξη οι λόγοι για αριστερόστροφη (F_L), δεξιόστροφη (F_R) και διαμήκη (F_0) πόλωση είναι

$$F_L = \frac{2m_W^2}{m_t^2 + 2m_W^2} \approx 0.3, \quad F_0 = \frac{m_t^2}{m_t^2 + 2m_W^2} \approx 0.7,$$

$$F_R = \frac{m_b^2}{m_t^2} \frac{2m_W^2}{(1 - m_t^2/m_W^2)^2 (m_t^2 + 2m_W^2)} \approx 0$$

όπου $F_L + F_R + F_0 = 1$.

Το τοπ κουάρκ έχει σημαντικό ρόλο ως εικονικό σωματίδιο στους ηλεκτρασθενείς υπολογισμούς. Η μεγάλη μάζα του τοπ επιφέρει διορθώσεις ανώτερης τάξης στους διαδότες W και Z μέσω διαγραμμάτων βρόχου οι οποίες είναι ανάλογες του m_t^2 . Οι ευαισθησία στη μάζα του τοπ, καθιστά απαραίτητη την ακριβή της μέτρηση.

4.3 Τοπ κουάρκ Πέρα του Καθιερωμένου Προτύπου

Η σταθερά σύζευξης Yukawa του τοπ κουάρκ είναι μία πιθανή ένδειξη φυσικής Πέρα από το Καθιερωμένο Πρότυπο (ΠΚΠ) και πολλά μοντέλα όπως Υπερσυμμετρία και μοντέλα με επιπλέον σωματίδια Higgs (Little Higgs) προβλέπουν ταίρια του τοπ, βαθμωτά ή διανυσματικά με διαφορετικές μάζες και διαφορετικές σταθερές σύζευξης Yukawa. Επιπλέον σε πολλά τοπ κουάρκ παίζει ρόλο στην δυναμική του αυθόρμητου σπασίματος της ηλεκτρασθενής συμμετρίας.

Πολλά από ΠΚΠ σωματίδια έχουν κανάλια διάσπασης σε τοπ κουάρκ, που σημαίνει πως μπορεί να κρύβονται μέσα στο υπόβαθρο των τοπ διασπάσεων. Επιπλέον το τοπ εμπλέκεται σε έρευνες για διαδικασίες Αλλαγής Γεύσης μέσω Ουδέτερων Ρευμάτων (Flavor Changing Neutral Currents) μέσω μποζονίου Z , Higgs, φωτονίων ή γκλουονίων.

Σχετική Βιβλιογραφία: [18], [19], [20], [21]

Κεφάλαιο 5

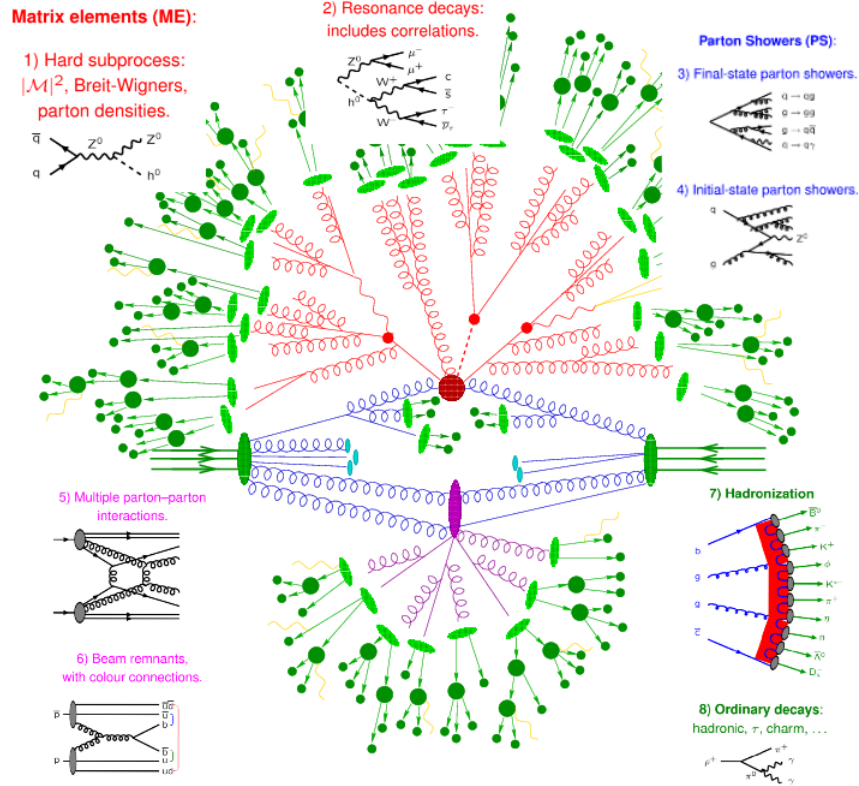
Παραγωγή Γεγονότων

Στην σύγχρονη εποχή της φυσικής υψηλών ενεργειών η φοβερή ακρίβεια των πειραματικών μετρήσεων τοποθετεί μία μεγάλη πίεση στην θεωρητική φυσική ζητώντας συνεχώς καλύτερες προβλέψεις. Ταυτόχρονα και στα δύο μέτωπα, πειράματος και θεωρίας, η τεχνογνωσία που απαιτείται για την παραγωγή αποτελεσμάτων συνεχώς αυξάνεται καθώς τα πειράματα γίνονται πιο περίπλοκα και οι θεωρητικές προβλέψεις απαιτούν καλύτερη ακρίβεια. Το γεγονός αυτό μεν δείχνει την πρόοδο στο πεδίο και την επιτυχία του Καθιερωμένου Προτύπου αφετέρου όμως περιπλέκει τις επιστημονικές διαδικασίες δημιουργώντας διάφορες πηγές αβεβαιότητας οι οποίες πρέπει να παρακολουθούνται στενά για την διασφάλιση της ορθότητας των αποτελεσμάτων.

Ο απίστευτος όγκος πληροφορίας που εξέρχεται από τον Μεγάλο Επιταχυντή Ανδρονίων (LHC) δημιουργεί μία μοναδική πρόκληση για την αποθήκευση, την επεξεργασία και την ερμηνεία δεδομένων. Η σημερινή φωτεινότητα στον LHC αντιστοιχεί στην σύγκρουση δισεκατομμυρίων πρωτονίων το δευτερόλεπτο μέσα από τις οποίες ελπίζουμε πως θα φανεί κάποια μικρή ανωμαλία η οποία θα μας δείξει το δρόμο προς νέα φυσική. Η παραγωγή πειραματικών αποτελεσμάτων είναι μία λεπτή διαδικασία η οποία εξαρτάται από αναρίθμητα κυκλώματα και υποσυστήματα του ανιχνευτή και του επιταχυντή καθώς και από τις τεχνικές επεξεργασίας των πρωταρχικών σημάτων. Οι τεχνικές επεξεργασίας των δεδομένων παίζουν καθοριστικό ρόλο καθώς είναι αναγκαίες για την αφαίρεση του τεράστιου υποβάθρου που περιβάλλει το κάθε γεγονός (event). Μέρος της ανάλυσης αυτής είναι και η σύγκριση με προσομοιώσεις Monte Carlo οι οποίες πρέπει να έχουν την βέλτιστη δυνατή ακρίβεια ώστε να μην μολύνουν την πειραματική μέτρηση.

Οι προσομοιώσεις Monte Carlo είναι το κύριο εργαλείο θεωρητικών υπολογισμών για τις διαταρακτικές θεωρίες πεδίου καθώς μπορούν να συμπεριλάβουν τις πολλές διαφορετικές λεπτομέρειες και προσεγγίσεις της κάθε θεωρίας με σχετικά αυτοματοποιημένο τρόπο αξιοποιώντας την δύναμη των μοντέρνων επεξεργαστών ώστε να υπολογίζουν πολύπλοκες διαδικασίες σε δεύτερη και τρίτη τάξη στην διαταρακτική σειρά. Συνήθως οι προσομοιώσεις αυτές γίνονται από Γεννήτριες Γεγονότων (Event Generators), προγράμματα τα οποία για μία δοσμένη αρχική και τελική κατάσταση μπορούν να παράξουν (ψεύδο)τυχαία γεγονότα παρόμοια με το πείραμα δημιουργώντας έτσι μία ρεαλιστική στατιστική η οποία μπορεί να συγκριθεί άμεσα με το πείραμα. Η διαδικασία της παραγωγής γεγονότων όμως είναι εξαιρετικά περίπλοκη, ιδιαίτερα σε ανδρονικούς επιταχυντές όπου οι ισχυρή αλληλεπίδραση παίζει τον κύριο ρόλο. Ένα γεγονός εκτείνεται σε κλίμακες που έχουν τάξεις μεγέθους διαφοράς από την σκληρή κλίμακα της κύριας αλληλεπίδρασης (TeV) μέχρι τη μη διαταρακτική κλίμακα του εγκλωβισμού (GeV-MeV).

Σε αυτή την ενότητα θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε την παραγωγή γεγονότων στα συστατικά της για την περίπτωση των ανδρονικών συγκρούσεων οι οποίες είναι και οι πιο περίπλοκες. Η εικόνα (5.1) είναι μία αναπαράσταση προσομοίωσης ενός γεγονότος η οποία αποτελείται από τον υπολογισμό του στοιχείου πίνακα, τον παρτονικό καταιονισμό, το γεγονός υποβάθρου και την ανδρονιοποίηση.



Σχήμα 5.1: Σχηματική αναπαράσταση προσομοίωσης ενός γεγονότος μαζί με τα βασικά της μέρη ονομαστικά.

5.1 Τυχειότητα ως Υπολογιστικό Εργαλείο

Το μεγαλύτερο μέρος των υπολογιστικών διεργασιών σε έναν παραγωγό γεγονότων βασίζεται σε (ψεύδο)τυχαίους αριθμούς είτε είναι για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων μέσω μεθόδων Monte Carlo ή για την εξέλιξη των παρτονίων στις ενεργειακές κλίμακες με Μαρκοβιανές Αλυσίδες.

Οι μέθοδοι που βασίζονται σε τυχαίους αριθμούς πέρα από την ταχύτητα σύγκλισης και την ευελιξία που παρέχουν, επιτρέπουν την παραγωγή τυχαίων γεγονότων τα οποία μπορούν να συγκριθούν άμεσα με το πείραμα καθώς ακολουθούν εγγενώς την ίδια στατιστική. Είναι επόμενο ότι η εκ φύσεως τυχειότητα της κβαντομηχανικής θα προσομοιάζεται καλύτερα από μεθόδους με τυχαίους αριθμούς.

Σημαντικό είναι να σημειωθεί ότι πρακτικά οι μέθοδοι αυτοί δεν χρησιμοποιούν πραγματικά τυχαίους αριθμούς καθώς η παραγωγή τους είναι εξαιρετικά χρονοβόρα. Αντί αυτού γίνεται χρήση ψεύδο-τυχαίων αριθμών οι οποίοι παράγονται από ντετερμινιστικούς αλγόριθμους μέσω κάποιου αριθμού "φύτρας" (seed number). Οι αλγόριθμοι πρέπει να πληρούν κάποιες προϋποθέσεις όπως οι αριθμοί που παράγουν να είναι ασυσχέτιστοι μεταξύ τους, να έχουν μεγάλη περίοδο επανάληψης, ο ίδιος αριθμός φύτρα να δίνει κάθε φορά την ίδια ακολουθία αριθμών, οι στατιστικές ιδιότητες και η περίοδος της ακολουθίας να μην εξαρτάται από την φύτρα, και να είναι γρήγορος. Στην συνέχεια θα αναφερόμαστε στους ψευδοτυχαίους αριθμούς ως απλώς τυχαίους.

5.1.1 Μέθοδος Monte Carlo

Η μέθοδος Monte Carlo αντιμετωπίζει το ολοκλήρωμα ως μέσο όρο. Είναι μία διαδικασία δειγματοληψίας όπου αιροίζοντας αμερόληπτα τυχαία σημεία της συνάρτησης μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της. Έστω λοιπόν συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και το ολοκλήρωμα της $I = \int_V f(\vec{x}) d^n x$ σε ένα πεπερασμένο χωρίο V . Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής

$$\langle f \rangle = \frac{I}{V}$$

δηλαδή η μέση τιμή της συνάρτησης στο χωρίο V ισούται με το ολοκλήρωμα της στο χωρίο V διαιρεμένο με τον όγκο του χωρίου. Έστω τώρα μία τυχαία ακολουθία στον n -διάστατο χώρο ομοιόμορφης κατανομής $a_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ με $a_i \in V$. Τότε η μέση τιμή της συνάρτησης προσεγγίζεται άμεσα (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)

$$\langle f \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(a_i)$$

Ο υπολογισμός των τυχαίων σημείων της συνάρτησης είναι κάτι σαν πείραμα στο οποίο βρίσκουμε την μέση τιμή της συνάρτησης παίρνοντας τυχαία δείγματα αυτής. Το ολοκλήρωμα λοιπόν προσεγγίζεται ως

$$I \approx \frac{V}{N} \sum_{i=1}^N f_i \pm \sigma_N$$

όπου σ_N είναι η διασπορά

$$\sigma_N = V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}}$$

Η δύναμη της μεθόδου φαίνεται από την παραπάνω σχέση. Ενώ έχουμε δουλέψει για γενική διάσταση n το σφάλμα της μεθόδου δεν εξαρτάται από αυτήν αλλά μειώνεται ως $1/\sqrt{N}$. Για παράδειγμα ο κανόνας του τραπεζοειδούς συγκλίνει με ταχύτητα $1/N^{\frac{2}{3}}$ ενώ ο κανόνας του Simpson με ταχύτητα $1/N^{\frac{4}{3}}$. Για διαστάσεις μεγαλύτερες του 8 η μέθοδος Monte Carlo συγκλίνει γρηγορότερα και από τις δύο.

Πρακτικά το πρόβλημα που προσπαθεί να λύσει η γεννήτρια γεγονότων απαιτεί την ολοκλήρωση κάποιου πλάτους πιθανότητας στον φασικό χώρο της τελικής κατάστασης. Δεδομένου ότι ο φασικός χώρος έχει 3 διαστάσεις για κάθε σωματίδιο την τελικής κατάστασης μείον 4 συνολικά από την διατήρηση της τετραομής και τα σωματίδια της τελικής κατάστασης είναι πολλές δεκάδες με εκατοντάδες η μόνη μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι η μέθοδος Monte Carlo.

Οι αδυναμίες της μεθόδου Monte Carlo

Προβλήματα μπορεί να προκύψουν όταν υπάρχουν ολοκληρώσιμοι απειρισμοί της συνάρτησης στο χωρίο ολοκλήρωσης, για παράδειγμα

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = 0$$

Επίσης σε περιπτώσεις όπου η διασπορά είναι άπειρη όπως για παράδειγμα για το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Τέτοια προβλήματα συναντούνται συνεχώς στην παραγωγή γεγονότων όπου τα στοιχεία πίνακα μπορεί να εμφανίζουν απειρισμούς ή αιχμηρές κορυφές λόγω βραχύβιων συντονισμών. Σε τέτοιες περιπτώσεις η δειγματοληψία στον χώρο πρέπει να γίνεται με πρόθεση.

Δειγματοληψία Σπουδαιότητας

Για την καλύτερη σύγκλιση της μεθόδου είναι θεμιτό να μειώσουμε την διασπορά της ολοκληρωτέας συνάρτησης μειώνοντας έτσι το σφάλμα. Η διασπορά μπορεί να μειωθεί με μία αλλαγή μεταβλητής η οποία "ισοπεδώνει" το ολοκλήρωμα. Θεωρείστε την απεικόνιση $\vec{x} \rightarrow \vec{y}(x)$ με την Τζακομπιανή

$$\left| \frac{\partial(\vec{y})}{\partial(\vec{x})} \right| = g(\vec{x})$$

Τότε

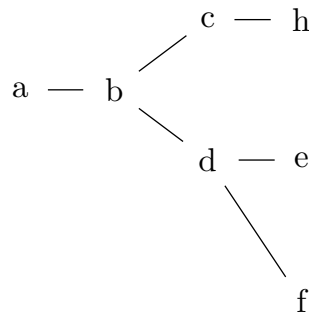
$$I = \int_{V'} d^n y \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}$$

όπου V' είναι η περιοχή στον χώρο των \vec{y} που αντιστοιχεί σε όγκο V στον χώρο των \vec{x} . Αν η $h = f/g$ είναι συνάρτηση με μικρότερη διασπορά από την f τότε το σφάλμα θα μειωθεί κατανέμοντας τα σημεία ομοιόμορφα στον χώρο των \vec{y} . Αυτή η τεχνική είναι γνωστή ως **δειγματοληψία σπουδαιότητας** (importance sampling). Για να αποκτηθούν τώρα σημεία κατανεμημένα σύμφωνα με την $f(\vec{x})$ όπως είναι επιθυμητό για μία γεννήτρια γεγονότων, εφαρμόζεται μια μέθοδος hit-or-miss η οποία θα αποδέχεται σημεία με πιθανότητα h/h_{lim} με h_{lim} το άνω όριο της τιμής της h στο χωρίο V' .

Σε κάποιες εφαρμογές, για παράδειγμα σε ενεργές διατομές σε NLO το ολοκλήρωμα $f(\vec{x})$ μπορεί να περιέχει ολοκληρώσιμους απειρισμούς. Παρότι αυτοί οι απειρισμοί δίνουν πεπερασμένο αποτέλεσμα αν υπολογιστούν αναλυτικά, η διασπορά τους είναι αποκλίνουσα και ο αλγόριθμος hit-or-miss του Monte Carlo θα αποτύχει να συγκλίνει. Η μείωση της διασποράς γίνεται απαραίτητη σε τέτοιες περιπτώσεις.

5.1.2 Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Οι τυχαίοι αριθμοί δεν χρησιμοποιούνται μόνο για την ολοκλήρωση συναρτήσεων αλλά είναι και βασικό κομμάτι του αλγορίθμου των παρτονικών καταιονισμών. Ο αλγόριθμος καταϊγισμού εξελίσσει την τελική κατάσταση από

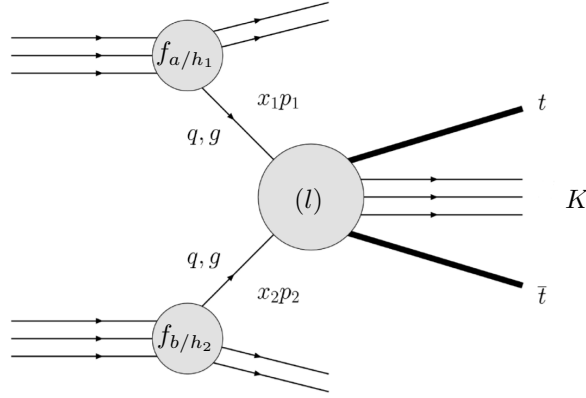


την κλίμακα της σκέδασης t_{in} μέχρι την κλίμακα της αδρονιοποίησης t_{fin} . Η κλίμακα είναι συνήθως ενέργεια αλλά θα μπορούσε να είναι εξίσου και χρόνος. Έστω ένα παρτόνιο στην στο οποίο εφαρμόζεται ο αλγόριθμος καταϊγισμού. Σε κάθε διαφορική "στιγμή" dt το παρτόνιο έχει μια πιθανότητα $dP = A(t)dt$ να χωριστεί σε δύο παρτόνια χαμηλότερης ενέργειας και μία πιθανότητα να παραμείνει όπως έχει $\Delta(t, t + dt) = e^{-A(t)dt}$. Μετά από την διάσπαση η πυκνότητα πιθανότητας $A(t)$ μπορεί να αλλάξει. Για να είναι έχει ο αλγόριθμος μαρκοβιανές ιδιότητες αρκεί η πυκνότητα πιθανότητας $A(t)$ να εξαρτάται από την τωρινή κατάσταση του παρτονίου και όχι από το παρελθόν. Τελείως σχηματικά και χωρίς να έχουμε εισάγει επισήμως την έννοια του παρτονικού καταϊγισμού μπορούμε να φανταστούμε τον αλγόριθμο σαν έναν τυχαίο περίπατο. Το παρτόνιο στην κατάσταση a έχει μία πιθανότητα να διασπαστεί. Παράγοντας έναν τυχαίο αριθμό μπορούμε να προσομοιάσουμε αυτή την στατιστική. Αν ο αριθμός είναι μεγαλύτερος από την πιθανότητα να διασπαστεί τότε το παρτόνιο πηγαίνει στην θέση b άθικτο. Εκεί παράγεται ακόμη έναν τυχαίο αριθμό ο οποίος τώρα είναι μέσα στην πιθανότητα διάσπασης οπότε το παρτόνιο χωρίζεται και ούτω κάθε εξής.

5.2 Κύρια αλληλεπίδραση

Στην καρδιά της προσομοίωσης βρίσκεται ο υπολογισμός της σκληρότερης κλίμακας η οποία ευθύνεται για τις ενδιαφέρουσες διαδικασίες όπως η μεγάλη μεταφορά ορμής και η παραγωγή βαρέων σωματιδίων. Λόγω της ασυμπτωτικής ελευθερίας η διαδικασία αυτή υπολογίζεται στα πλαίσια της διαταραχτικής ΚΧΔ που σημαίνει υπολογισμός του στοιχείου μήτρας για την υπό έρευνα διαδικασία μέχρι κάποια τάξη στην σταθερά σύζευξης α_s μέσω της άθροισης διαγραμμάτων Feynman και την ολοκλήρωση στον φασικό χώρο.

Στις γεννήτριες γεγονότων συνήθως μελετάται μία συγκεκριμένη υποδιαδικασία, στην δική μας περίπτωση $pp \rightarrow t\bar{t}$ και συνεπώς μόνο αυτή λαμβάνεται υπόψιν στην προσομοίωση πράγμα που γλιτώνει αρκετό χρόνο.



Σχήμα 5.2: Σχηματική αναπαράσταση της παραγοντοποίησης για την παραγωγή ζεύγους $t\bar{t}$.

Η γενική μορφή μίας διαφορικής ενεργούς διατομής για ένα παρατηρήσιμο μέγεθος \mathcal{O} για μία τελική κατάσταση F η οποία προκύπτει από την σύγκρουση δύο αδρονίων h_1 και h_2 μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια του θεωρήματος της συγγραμμικής παραγοντοποίησης (Collinear Factorization)

$$\frac{d\sigma_F}{d\mathcal{O}} = \sum_{a,b} \left\{ \int_0^1 dx_a dx_b \sum_{k=0}^{\infty} \int d\Phi_{F+K} f_{a/h_1} f_{b/h_2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} M_{F+K}^{(l)} \right|^2 \delta(\mathcal{O} - \mathcal{O}(\Phi_{F+K})) \right\} \quad (5.2.1)$$

Η παραγοντοποίηση είναι βασική τεχνική για τους υπολογισμούς στην διατακτική ΚΧΔ καθώς χωρίζει τις μεγάλες από τις μικρές κλίμακες, επιτρέποντας τον διαχωρισμό της ενεργούς διατομής σε διαταρακτικά και μη διαταρακτικά μέρη τα οποία μπορούν να υπολογιστούν με διαφορετικά εργαλεία. Η παραπάνω σχέση περιέχει τα εξής:

- $f_{a/h_i} = f_{a/h_i}(x_a, \mu_F)$ είναι η Συνάρτηση Κατανομής Παρτονίων (Parton Distribution Function) η οποία περιγράφει την δομή του πρωτονίου και εκφράζει κατά προσέγγιση την πιθανότητα το παρτόνιο a του αδρονίου i να έχει x_a . Εξαρτάται από την μεταβλητή Bjorken x και την κλίμακα παραγοντοποίησης μ_F η οποία παραβιάζει την κλιμάκωση Bjorken.
- $M_{F+K}^{(l)} = M_{F+K}^{(l)}(\Phi_{K^F}; \mu_F, \mu_R)$ είναι το στοιχείο μήτρας για την τελική κατάσταση F με επιπλέον K ακμές (πόδια) και l βρόχους το οποίο εξαρτάται από τον φασικό χώρο και την κλίμακα της επανακανονικοποίησης μ_R και της παραγοντοποίησης μ_F .
- $d\Phi_{F+K} = \prod_{i=1}^{F+K} \frac{d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - \sum_{j=1}^{K+F} p_j)$ είναι το διαφορικό του φασικού χώρου.
- $\delta(\mathcal{O} - \mathcal{O}(\Phi_{F+K}))$ είναι μία συνάρτηση δ η οποία προβάλλει το υπερεπίπεδο του παρατηρήσιμου μεγέθους \mathcal{O} που μας ενδιαφέρει από τον φασικό χώρο. Χωρίς αυτήν θα υπολογίζαμε απλά την συνολική ενεργό διατομή.

Αυτή η σχέση ισχύει για όλες τις τάξεις στην θεωρία διαταραχών, περιέχει όμως κάποιες αυθαίρετες επιλογές όπως την επιλογή των ΣΚΠ και των αφύσικων κλιμάκων μ_F και μ_R οι οποίες δεν προκύπτουν από πρώτες αρχές. Στην συγκεκριμένη ενότητα θα ασχοληθούμε κυρίως με το στοιχείο μήτρας.

5.2.1 Υπολογισμός σε Πρώτη Τάξη

Οι πιο εύκολοι υπολογισμοί αναλλοίωτων πλατών είναι στο επίπεδο Born (Born Level) και αντιστοιχούν κατά κάποιον τρόπο σε κλασική σκέδαση. Δύο σωματίδια σε μία αρχική κατάσταση σχεδιάζονται (ανταλλάσσουν ορμή) και πηγαίνουν σε μία τελική κατάσταση δύο σωματιδίων όχι απαραίτητα ίδιας φύσεως. Οι υπολογισμοί αυτοί λέγονται υπολογισμοί σε πρώτη τάξη (Leading Order) και θα ονομάζονται LO από εδώ και πέρα.

Στην γενική εξίσωση (5.2.1) οι LO υπολογισμοί αντιστοιχούν σε $l = K = 0$. Για παράδειγμα ας κοιτάξουμε την παραγωγή ζεύγους $t\bar{t}$ από την εξάλωση ενός d κουάρκ με ένα αντικουάρκ \bar{d} εστιάζοντας στον κεντρικό

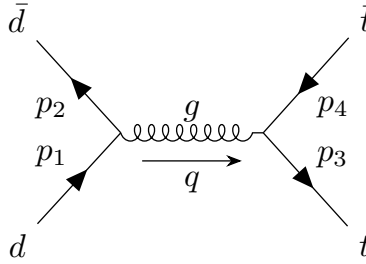
δίσκο της εικόνας (5.2). Για $l, K = 0$ έχουμε το διάγραμμα (5.3) όπου σύμφωνα με τους κανόνες Feynman έχει στοιχείο μήτρας

$$-i\mathcal{M} = [\bar{u}_3(p_3)c_3^\dagger \left(\frac{-ig_s}{2}\lambda^a\gamma^\mu\right)v_4(p_4)c_4] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{ab}}{q^2}\right) [u_1(p_1)c_1 \left(\frac{-ig_s}{2}\lambda^b\gamma^\nu\right)\bar{v}_2(p_2)c_2^\dagger]$$

όπου κάθε κουάρκ φέρνει έναν Dirac σπίνορα μαζί με ένα διάνυσμα χρώματος, οι κόκκινες παρενθέσεις προέρχονται από τους κόμβους και η μπλε παρενθεση είναι η συμβολή του διαδότη του γκλουονίου. Το στοιχείο μήτρας μπορεί να χωριστεί σε ένα σπινοριακό μέρος και έναν παράγοντα χρώματος.

$$-i\mathcal{M} = \left(\frac{g_s^2}{4q^4}\right) [\bar{u}_3(p_3)\gamma^\mu v_4(p_4)u_1(p_1)\gamma_\mu \bar{v}_2(p_2)] (c_3^\dagger \lambda^a c_4 c_1 \lambda^a c_2^\dagger) \quad (5.2.2)$$

Τα λ^a είναι οι γεννήτορες της ομάδας SU(3) στην θεμελιώδη αναπαράσταση $a = 1, 2, \dots, 8$ και τα c είναι διανύσματα του τρισδιάστατου χώρου του χρώματος. Εξ ορισμού $g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s}$ οπότε το στοιχείο μήτρας είναι ανάλογο της πρώτης δύναμης της ισχυρής σταθεράς σύζευξης α_s . Πρέπει να επισημανθεί πως τα πλάτη αυτά



Σχήμα 5.3: Διάγραμμα Feynman παραγωγής ζεύγους $t\bar{t}$ από την εξαύλωση ζεύγους $d\bar{d}$

εμπίπτουν σε μία πιο ευρεία κατηγορία γνωστή ως πλάτη στο επίπεδο δέντρου (tree level) που συμπεριλαμβάνουν και μεγαλύτερα K . Παραδείγματος χάριν στο διάγραμμα (5.3) θα μπορούσε το ένα τοπ κουάρκ να ακτινοβολήσει ένα γκλουόνιο. Σε αυτή την περίπτωση θα υπήρχαν 3 παρτόνια στην τελική κατάσταση και αναλόγως με την κινηματική του γκλουονίου θα είχαμε ένα γεγονός τριών πινάκων. Αυτός ο υπολογισμός όμως θα δούμε παρακάτω πως δεν είναι καλά ορισμένος για όλο τον φασικό χώρο και εμφανίζει Υπέρυθρες απειρίες (Infrared Divergences) όταν το γκλουόνιο είναι ή συγγραμμικό με ένα από τα δύο τοπ κουάρκ ή με μικρή ορμή (soft).

5.2.2 Κβαντικές Διορθώσεις και η Επόμενη Τάξη

Για να βελτιωθεί η ακρίβεια του υπολογισμού πρέπει να συμπεριληφθούν περισσότερα πιθανά διαγράμματα Feynman, δηλαδή μεγαλύτερες δυνάμεις της α_s . Για την παρακάτω συζήτηση θα επικεντρωθούμε στην τελική κατάσταση του διαγράμματος (5.3) αναγνωρίζοντας ότι καθώς και η αρχική κατάσταση περιλαμβάνει κουάρκ θα ισχύουν αντίστοιχες κβαντικές διορθώσεις.

Η πρώτη περίπτωση που θα λάβουμε υπόψιν είναι η πιθανότητα μίας πραγματικής εκπομπής (Real Emission) ενός γκλουονίου από κάποιο από τα τοπ της τελικής κατάστασης. Η εκπομπή αυτής της ακτινοβολίας είναι ανάλογη με την ακτινοβολία φωτονίου από ένα ηλεκτρόνιο. Τα αποτελέσματα όμως είναι πολύ πιο δραματικά στην περίπτωση του γκλουονίου καθώς αν έχει αρκετή εγκάρσια ορμή μπορεί να αλλάξει την τοπολογία του γεγονότος δημιουργώντας έναν επιπλέον πίδακα. Το πλάτος πιθανότητας για την εκπομπή ενός γκλουονίου προκύπτει από τα διαγράμματα (5.4) και εμφανίζει ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό της ΚΧΔ. Πιο συγκεκριμένα τα διαγράμματα αυτά περιέχουν έναν εσωτερικό διαδότη κουάρκ ο οποίος σύμφωνα με τους κανόνες

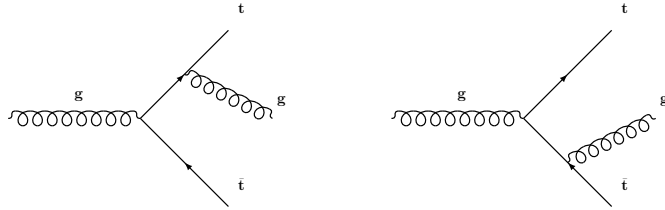
Feynman είναι,

$$\frac{i(\gamma_\mu k^\mu + m)}{k^2 - m^2} \quad (5.2.3)$$

ο οποίος παρουσιάζει απειρία μάζας (mass singularity). Με απλή κινηματική ανάλυση, ορίζοντας ως θ_{qg} την γωνία μεταξύ του εκπεμπόμενου κουρκ και του εκπεμπόμενου γκλουονίου, ο παρονομαστής του διαδότη γράφεται

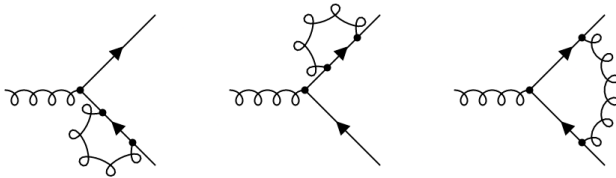
$$\frac{1}{(P_q + P_g)^2 - m^2} = \left(\frac{1}{2E_q E_g}\right) \left(\frac{1}{1 - \beta \cos\theta_{qg}}\right), \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{m^2}{E_q^2}} \quad (5.2.4)$$

Πλέον οι περιοχές απειρισμού είναι όταν το γκλουόνιο γίνεται μαλακό $E_g \rightarrow 0$ ή όταν γίνεται συγγραμμικό με το κουάρκ $\theta_{qg} \rightarrow 0$ (για $m_q \rightarrow 0$). Αυτές οι απειρίες ονομάζονται υπέρυθρες και αντιστοιχούν στις φυσικές καταστάσεις όπου δεν υπάρχει τρόπος να ξεχωρίσουμε πειραματικά αν έχει εκπεμφθεί στην πραγματικότητα γκλουόνιο ή όχι.



Σχήμα 5.4: Διάγραμμα δημιουργίας $t\bar{t}$ από γκλουόνια συνοδευόμενη από πραγματική ακτινοβολία.

Το επόμενο είδος διαγραμμάτων που μπορούν να συμπεριληφθούν είναι οι χβαντικές ή εικονικές διορθώσεις (virtual corrections) οι οποίες φαίνονται στην εικόνα (5.5) και σε καταστάσεις όπου κάποιο από τα εξερχόμενα κουάρκ εκπέμπει ακτινοβολία η οποία απορροφάται από τα κουάρκ πριν φτάσει στον ανιχνευτή. Τα διαγράμματα αυτά παρουσιάζουν ακριβώς τις ίδιες υπέρυθρες απειρίες. Εδώ έρχεται το μαγικό θεώρημα Kinoshita-Lee-Nauenberg (KLN) σύμφωνα με το οποίο παρατηρήσιμα μεγέθη τα οποία είναι "υπέρυθρα ασφαλή" (IR safe) - δηλαδή δεν εξαρτώνται από τον αριθμό των γκλουονίων της τελικής κατάστασης - οι υπέρυθρες απειρίες των πραγματικών με των χβαντικών διορθώσεων αλληλοαναιρούνται σε κάθε τάξη δίνοντας ένα πεπερασμένο αποτέλεσμα. Τέλος μένει ακόμη ένα διάγραμμα το οποίο πρέπει να ληφθεί υπόψιν για ολοκληρωθεί ο υπολο-

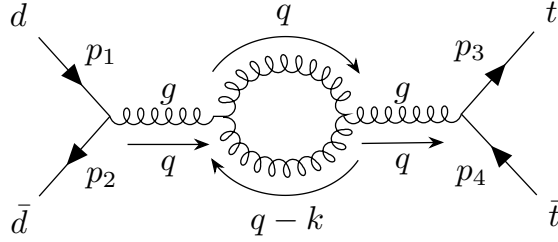


Σχήμα 5.5: Διαγράμματα στα οποία τα κουάρκ ακτινοβολούν γκλουόνιο το οποίο απορροφάται από αυτά πριν την μέτρηση.

γισμός σε NLO και αυτό είναι το διάγραμμα με έναν βρόχο στον διαδότη του γκλουονίου του διαγράμματος Born. Το στοιχείο μήτρας αυτού του διαγράμματος παρουσιάζει υπεριώδη απειρία (UV divergence) λόγω της μη φραγμένης ορμής k . Η απειρίες τέτοιου είδους διαχειρίζονται με την επανακανονικοποίηση και συνήθως με διαστατική ομαλοποίηση (dimensional regularization).

Αφήνοντας τώρα το ειδικό παράδειγμα, η γενική μορφή της διαφορικής ενεργό διατομής για n σωματίδια τελικής κατάστασης γράφεται

$$d\sigma_{NLO} = d\Phi_n[\mathcal{B}(\Phi_n) + a_s \mathcal{V}(\Phi_n)] + d\Phi_{n+1} a_s \mathcal{R}(\Phi_{n+1})$$



Σχήμα 5.6: Διάγραμμα με βρόχο στο διαδότη του γκλουονίου.

όπου \mathcal{B} είναι το πλάτος της σκέδασης Born, \mathcal{V} είναι οι εικονικές διορθώσεις και \mathcal{R} οι πραγματικές. Μία μικρή επιπλοκή είναι πως οι πραγματικές διορθώσεις βρίσκονται σε διαφορετικής διάστασης φασικό χώρο. Η λύση του προβλήματος έρχεται χοντρικά σε δύο κατηγορίες: μέθοδοι τεμαχισμού του φασικού χώρου (phase space slicing) και υπέρυθη αφαίρεση (infrared subtraction). Στους υπολογισμούς NLO χρησιμοποιείται η δεύτερη μέθοδος η οποία βασίζεται στο ότι οι "απαλές" και οι συγγραμμικές απειρίες των πραγματικών εκπομπών παρουσιάζουν μία καθολική δομή και μπορούν να παραγοντοποιηθούν σε διαγράμματα επιπέδου Born και κατάλληλων πυρήνων διαχωρισμού \mathcal{S} καθιστώντας τον όρο $[\mathcal{R} - \mathcal{B} \otimes \mathcal{S}]$ πεπερασμένο κατά την ολοκλήρωση στον φασικό χώρο Φ_{n+1} σε τέσσερις χωροχρονικές διαστάσεις. Οι όρος $\mathcal{B} \otimes \mathcal{S}$ όπου αφαιρέθηκε, επαναπροστίθεται και συνδυάζεται με το τις εικονικές διορθώσεις. Οι ολοκλήρωση αυτή γίνεται στις D διαστάσεις ώστε το τελικό αποτέλεσμα να είναι διάστασης 4-D. Η ενεργός διατομή σε NLO είναι

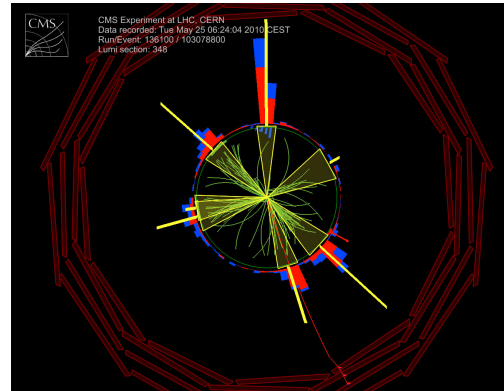
$$\sigma_{NLO} = \int_n d\tilde{\Phi}_n^{(4)} \mathcal{B} + a_s \int_{n+1} \tilde{\Phi}_{n+1}^{(4)} [\mathcal{R} - \mathcal{B} \otimes \mathcal{S}] + a_s \int_n \tilde{\Phi}_n^{(D)} [\mathcal{V} + \mathcal{B} \otimes \int_1 d\Phi_1^{(D)} \mathcal{S}] \quad (5.2.5)$$

Με απλά λόγια αφαιρούμε τις υπέρυθρες απειρίες από το πλάτος των πραγματικών εκπομπών το οποίο ολοκληρώνεται στον φασικό χώρο των $n+1$ σωματιδίων και τις προσθέτουμε στις εικονικές διορθώσεις όπου ολοκληρώνονται σε φασικό χώρο n σωματιδίων και μπορούν να ακυρωθούν σύμφωνα με το θεώρημα KLN.

5.3 Παρτονικός Καταιγισμός

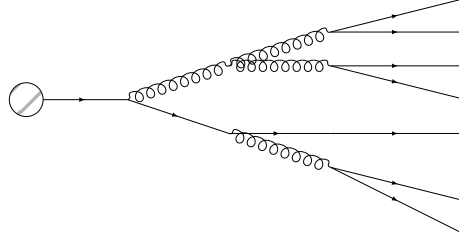
Οι παραπάνω υπολογισμοί μπορούν να περιγράψουν περιεκτικά (inclusive) μεγέθη όπως η συνολική ενεργός διατομή για μία υποδιαδικασία σε κάποια τάξη, απέχουν όμως πολύ από την περιγραφή ενός γεγονότος όπως φαίνεται στους ανιχνευτές του LHC (5.7) όπου η τελική κατάσταση αποτελείται από εκατοντάδες σωματίδια. Όπως έχουμε δει για έναν πλήρη υπολογισμό n επιπλέον σωματιδίων τελικής κατάστασης χρειάζεται η συνεισφορά διαγραμμάτων Feynman μέχρι n πραγματικές εκπομπές. Μαζί με τις κβαντικές διορθώσεις που χρειάζονται για την διαχείριση των υπέρυθρων απειριών οι συνολικοί υπολογισμοί γίνονται αδύνατοι για πολύ μικρά n .

Κατά κάποιον τρόπο όμως οι υπέρυθρες απειρίες είναι αυτές που θα μας δώσουν την λύση. Αρχικά το ότι το στοιχείο μήτρας απειρίζεται για συγγραμμικά



Σχήμα 5.7: Εικόνα από γεγονός στο LHC όπως έχει καταγραφεί από τον ανιχνευτή CMS.

ή/και χαμηλής ενέργειας παρτόνια σημαίνει πως η πιθανότητα τους είναι μεγάλη (soft and collinear enhancements). Συνεπώς η προσέγγιση αυτών των περιοχών θα καλύψει δυνητικά τις πιο "πιθανές" εκπομπές. Μάλιστα λόγω της καθολικής δομής τους μπορούν, όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο (5.2.2), να παραγοντοποιηθούν μέσω κάποιων συναρτήσεων διαχωρισμού \mathcal{S} .



Σχήμα 5.8: Διάγραμμα ενός τυπικού παρτονικού καταιγισμού.

Ο αλγόριθμος του παρτονικού καταιγισμού εξελίσσει την τελική κατάσταση από μία κλίμακα $\mu_F \approx Q^2$, την κλίμακα της παραγοντοποίησης η οποία τυπικά επιλέγεται κοντά στην σκληρή κλίμακα, μέχρι την κλίμακα κατάρρευσης της διαταρακτικής θεωρίας περίπου στο 1 GeV. Σε κάθε βήμα ο αλγόριθμος επιλέγει αν το παρτόνιο θα χωριστεί σε δύο άλλα παρτόνια σύμφωνα με μία πιθανότητα η οποία εξαρτάται από την ορμή του και την κλίμακα. Σε κάθε διάσπαση οι ορμές των παρτονίων αλλάζουν (σύμφωνα με την διατήρηση της ορμής φυσικά) και η κλίμακα μειώνεται. Ο αλγόριθμος επίσης σέβεται την μοναδιακότητα (unitarity) που σημαίνει πως σε κάθε βήμα το παρτόνιο μπορεί να χωριστεί ή να μη χωριστεί. Εφόσον σε κάθε βήμα του αλγορίθμου η πιθανότητα διαχωρισμού εξαρτάται μόνο από την τωρινή κατάσταση του παρτονίου η διαδικασία είναι μία μαρκοβιανή αλυσίδα.

5.3.1 Συναρτήσεις Διαχωρισμού

Ανατρέχοντας στα διαγράμματα (5.4) η διαφορική ενεργός διατομή μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$\frac{d\sigma_{q\bar{q}g}}{d(\cos\theta)dz} \approx \sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{a_s}{2\pi \sin^2\theta} \frac{1+(1-z)^2}{z} \quad (5.3.1)$$

όπου θ η γωνία μεταξύ του κουάρκ και του γκλουονίου και z ο ενεργειακός λόγος του γκλουονίου. Η εξίσωση περιέχει τις συγγραμμικές απειρίες ($\theta \rightarrow 0, \pi$) και τις απειρίες χαμηλής ενέργειας ($z \rightarrow 0$) και προέρχεται από την άθροιση και των δύο διαγραμμάτων. Είναι πολύ απλό να δούμε τον διαχωρισμό της συγγραμμικής απειρίας

$$\frac{2}{\sin^2\theta} = \frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta} \approx \frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1-\cos\theta}$$

με $\bar{\theta}$ η γωνία μεταξύ του αντι-κουάρκ και του γκλουονίου. Η "απαλή" απειρία προέρχεται από την συμβολή των δύο διαγραμμάτων και πιο συγκεκριμένα όταν και οι δύο διαδότες απειρίζονται ταυτόχρονα. Συνεπώς η εξίσωση (5.3.1) μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως άθροισμα των δύο πιθανών εκπομπών

$$d\sigma_{q\bar{q}g} \approx \sigma_{q\bar{q}} \sum_{partons} C_F \frac{a_s}{2\pi} \frac{d\theta^2}{\theta^2} dz \frac{1+(1-z)^2}{z} \quad (5.3.2)$$

στην περιοχή μικρών γωνιών θ η οποία ευθύνεται για την συγγραμμική απόκλιση. Παρότι προφανές, είναι σημαντικό πως το αποτέλεσμα είναι αναλλοίωτο σε αλλαγή μεταβλητής ανάλογη με του θ^2 . Η επιλογή αυτή μας δίνει την δυνατότητα να επιλέξουμε την μεταβλητή εξέλιξης (evolution variable) $\rho \propto \theta^2$ για παράδειγμα την ορμή του διαδότη $q^2 = z(1-z)\theta^2 E^2$ ή την εγκάρσια ορμή του γκλουονίου $k_T^2 = z^2(1-z)^2\theta^2 E^2$ για τα οποία ισχύει

$$\frac{d\theta^2}{\theta^2} = \frac{dq^2}{q^2} = \frac{dk_T^2}{k_T^2}$$

Οι επιλογές αυτές είναι ισάξιες στο συγγραμμικό όριο αλλά παρουσιάζουν διαφορές μακριά από αυτό και επηρεάζουν την υποδομή των πιδάκων.

Η εξίσωση (5.3.1) μπορεί να γενικευτεί για οποιοδήποτε υποδιαδικασία η οποία περιέχει τον διαχωρισμό παρτονίων

$$d\sigma = d\sigma_0 \sum_{partons,i} \frac{a_s}{2\pi} \frac{d\theta^2}{\theta^2} dz P_{ij}(z, \varphi) d\varphi \quad (5.3.3)$$

όπου οι συναρτήσεις P_{ij} είναι γνωστές ως συναρτήσεις διαχωρισμού Altarelli-Parisi (Altarelli-Parisi splitting functions) και εξαρτώνται από την γεύση του i του παρτονίου και μέσω της αζιμουθιακής γωνίας φ από το σπιν. Παίρνοντας τον μέσο όρο στα σπιν των σωματιδίων οι συναρτήσεις γράφονται:

$$\begin{aligned} P_{q \rightarrow qg}(z) &= C_F \frac{1+z^2}{1-z}, & P_{q \rightarrow gq}(z) &= C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}, \\ P_{g \rightarrow gg} &= C_A \frac{z^4+1+(1-z)^4}{z(1-z)}, & P_{g \rightarrow q\bar{q}} &= T_R(z^2+(1-z)^2) \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Αυτά είναι τα βασικά συστατικά για την κατασκευή ενός επαναληπτικού αλγοριθμού που θα σπάει παρτόνια παράγοντας έτσι ένα πλήρες αποκλειστικό (exclusive) γεγονός. Πρέπει όμως πρώτα να βρούμε έναν τρόπο να διαχειριστούμε τις συγγραμμικές και απαλές απειρίες που εμφανίζονται και σε αυτές τις συναρτήσεις. Η λύση βρίσκεται στο ότι αυτές οι απειρίες προέρχονται από καταστάσεις οι οποίες δεν κάνουν πραγματική διαφορά στην τελική κατάσταση. Συνεπώς το αποτέλεσμα γίνεται πεπερασμένο με την επιλογή κάποιου κριτηρίου ανάλυσης δηλαδή τον ορισμό κάποιου κάτω φράγματος της μεταβλητής εξέλιξης, για παράδειγμα μία ελάχιστη γωνία θ_{min} ή κάποια ελάχιστη σχετική εγκάρσια ορμή για τα δύο παρτόνια Q_0 η οποία επιλύει και τις συγγραμμικές και τις απαλές απειρίες ταυτόχρονα. Η πιθανότητα λοιπόν για μία διακλάδωση παρτονίου i σε παρτόνια jk μεταξύ q^2 και $q^2 + dq^2$ μπορεί να γραφτεί ως

$$d\mathcal{P} = \frac{a_s}{2\pi} \frac{dq^2}{q^2} \int_{z_{min}}^{z_{max}} dz P_{i \rightarrow jk}(z) \quad (5.3.5)$$

με τα όρια του z να εξαρτώνται από την επιλογή της συνθήκης για την ανάλυση των παρτονίων.

5.3.2 Συντελεστής Μορφής Sudakov

Η διατήρηση της πιθανότητας μας επιτρέπει να ορίσουμε μία πολύ χρήσιμη ποσότητα για την εξέλιξη του παρτονικού καταγισμού γνωστή ως συντελεστής μορφής Sudakov (Sudakov Form Factor) η οποία έχει να κάνει με την πιθανότητα να μην γίνει καμία διακλάδωση των παρτονίων η οποία είναι προφανώς

$$\mathcal{P}_{no-em} = 1 - \mathcal{P}_{em} \quad (\text{Unitarity}) \quad (5.3.6)$$

Έστω τώρα πως γνωρίζουμε την πιθανότητα να μην γίνει διακλάδωση για κάποιο διάστημα της μεταβλητής εξέλιξης $\rho_{min} < \rho < \rho_{max}$. Η πιθανότητα αυτή μπορεί να χωριστεί στο γινόμενο δύο πιθανοτήτων εισάγοντας μια ενδιάμεση κλίμακα ρ_1

$$\mathcal{P}_{no-em}(\rho_{max} > \rho > \rho_{min}) = \mathcal{P}_{no-em}(\rho_{max} > \rho > \rho_1) \mathcal{P}_{no-em}(\rho_1 > \rho > \rho_{min})$$

Μπορούμε τώρα να σπάσουμε το διάστημα σε αυθαίρετα μικρά χωρία και χρησιμοποιώντας την (5.3.6) έχουμε πως

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{no-em}(\rho_{max} > \rho > \rho_{min}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n-1}^{i=0} \mathcal{P}_{no-em}(\rho_i > \rho > \rho_{i+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n-1}^{i=0} (1 - \mathcal{P}_{em}(\rho_i > \rho > \rho_{i+1})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\sum_{n-1}^{i=0} \mathcal{P}_{em}(\rho_i > \rho > \rho_{i+1})} = e^{-\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} d\mathcal{P}_{em}(\rho)} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τώρα από την πιθανότητα εκπομπής από την εξίσωση (5.3.5) καταλήγουμε στον συντελεστή μορφής Sudakov ο οποίος ισούται με την πιθανότητα να μην γίνει διακλάδωση στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$

$$\Delta(\rho_1, \rho_2) = e^{-\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} \frac{a_s}{2\pi} \int_{z_{min}}^{z_{max}} dz P_{i \rightarrow jk}(z)} \quad (5.3.7)$$

Ο συντελεστής Sudakov είναι ουσιαστικά μία άθροιση όλων των εικονικών διορθώσεων σε κάθε τάξη. Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να εφαρμοστούν με ευκολία σε έναν αλγόριθμο Monte Carlo παρτονικού καταϊγισμού κατά τον οποίον επαναληπτικά μπορεί να παράγεται ένας τυχαίος αριθμός r στο διάστημα $[0,1]$ και η εξίσωση $\Delta(Q^2, q^2) = r$ να ορίζει μοναδικά ένα q^2 . Αν το q^2 είναι μικρότερο από το κάτω φράγμα Q_0^2 τότε δεν παράγεται καμία περαιτέρω διακλάδωση και η διαδικασία τερματίζει. Αν όμως είναι μεγαλύτερο τότε έχουμε διακλάδωση με τιμή του z επιλεγμένη σύμφωνα με τις συναρτήσεις διαχωρισμού $P_{i \rightarrow jk}(z)$.

5.3.3 Συμβολή Χρώματος

Ένα ακόμα σημαντικό φαινόμενο που πρέπει να προσομοιώνει ο αλγόριθμος του παρτονικού καταϊγισμού είναι το φαινόμενο της συμβολής χρώματος (color coherence) κατά το οποίο παρατηρείται πως τα απαλά γκλουόνια τα οποία εκπέμπονται με μεγάλη γωνία δεν μπορούν να ξεχωρίσουν τα συγγραμμικά παρτόνια του παρτονικού καταϊγισμού αλλά βλέπουν το συνολικό τους χρώμα. Αυτό συμβαίνει διότι οι απαλές απειρίες ενώ έχουν και αυτές καθολική δομή όπως με τις συγγραμμικές παραγοντοποιούνται στο πλάτος αντί για την ενεργό διατομή. Αυτό σημαίνει πως ανθροίζοντας τα διάφορα διαγράμματα Feynman υπάρχει καταστρεπτική συμβολή στο εσωτερικό του παρτονικού καταϊγισμού οδηγώντας στην εικόνα της εκπομπής γκλουονίων από τον παρτονικό καταϊγισμό ως σύνολο και όχι από ξεχωριστά παρτόνια.

Ο τρόπος με τον οποίο το φαινόμενο αυτό εντοχίζεται μέσα στον αλγόριθμο είναι η επιλογή της γωνίας θ ως μεταβλητή εξέλιξης του αλγορίθμου. Αυτό σημαίνει ότι δεν παράγονται απαραίτητα τα πιο σκληρά παρτόνια πρώτα αλλά αυτά με την μεγαλύτερη γωνία οδηγώντας σε μία εικόνα κώνου που είναι και αυτό που παρατηρείται πειραματικά. Ο αλγόριθμος αυτός ονομάζεται καταϊγισμός με γωνιακή ιεραρχία (Angular Ordered Shower) και είναι ο αλγόριθμος ο οποίος ξεκίνησε το HERWIG.

5.3.4 Συνδυασμός NLO και Παρτονικού Καταϊγισμού

Οι παρτονικοί καταϊγισμοί περιγράφουν την συγγραμμική και απαλή περιοχή της ακτινοβολίας οπότε υστερούν εκ κατασκευής στην περιγραφή σκληρών και μεγάλη γωνία εκπομπών. Αντίθετα οι υπολογισμοί συγκεκριμένης τάξης περιγράφουν εξαιρετικά τις σκληρές και με μεγάλη γωνία εκπομπές αλλά υστερούν στην συγγραμμική και απαλή περιοχή λόγω της εμφάνισης μεγάλων λογαρίθμων. Παράλληλα είναι αδύνατον να παραχθούν πολλαπλότητες αρκετά μεγάλες ώστε να εφαρμοστούν μοντέλα αδρονιοποίησης. Είναι λοιπόν εξαιρετικά θεμιτό η ένωση αυτών των δύο προσεγγίσεων και μάλιστα με την μεγαλύτερη δυνατή τάξη στοιχείου μήτρας. Οι τεχνικές αυτές αποτελούν έντονο πεδίο έρευνας και έχουν αναπτυχθεί τεχνικές για αντιστοιχία (matching) αλλά και συγχώνευση (merging) παρτονικών καταϊγισμών με υπολογισμούς μέχρι και NLO.

Το πάντρεμα των δύο δεν είναι καθόλου τετριμμένο καθώς πρώτον, ο υπολογισμός με το στοιχείο μήτρας είναι περιεκτικός (inclusive) υπολογισμός, δηλαδή δίνει την πιθανότητα να παραχθούν μέχρι και n πίδακες ενώ ο παρτονικός καταϊγισμός είναι αποκλειστικός (exclusive) δηλαδή δίνει n παρτόνια και δεύτερον πρέπει να αποφευχθεί η διπλομέτρηση περιοχών του φασιικού χώρου.

5.4 Συναρτήσεις Κατανομής Παρτονίων

Στις αδρονικές συγκρούσεις όπως στο LHC βασικό συστατικό για τον υπολογισμό ενεργών διατομών είναι οι ΣΚΠ οι οποίες παρέχουν πληροφορίες για την δομή των συγκρούμενων σωματιδίων. Οι συναρτήσεις αυτές περιέχουν μη διαταρακτική φυσική προερχόμενη από την ανδρονική κλίμακα η οποία δεν μπορεί να υπολογιστεί από πρώτες αρχές. Το σημαντικό χαρακτηριστικό τους είναι πως είναι καθολικές, δηλαδή δεν εξαρτώνται από την υποδιαδικασία που υπολογίζεται και έτσι δεδομένα από πολλά πειράματα μπορούν να συμβάλουν για τον προσδιορισμό της κατανομής των παρτονίων. Ο διαχωρισμός των ΣΚΠ από το στοιχείο πίνακα είναι εφικτός εξαιτίας του θεωρήματος της παραγοντοποίησης.

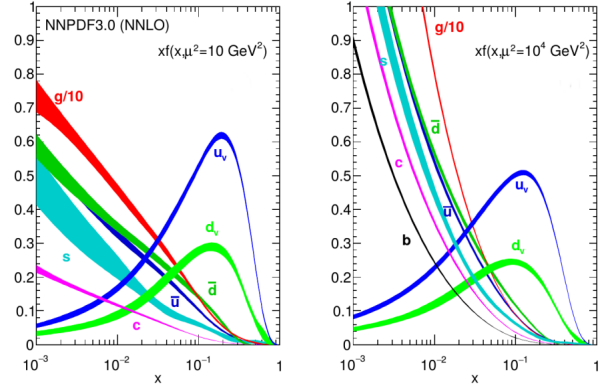
Οι συναρτήσεις $f_i(x, \mu_F^2)$ εκφράζουν προσεγγιστικά την πιθανότητα παρτόνιο i να έχει λόγο ορμής x στην κλίμακα μ_F^2 . Στην ενότητα (3.3.1) είδαμε πως σε πρώτη τάξη οι ΣΚΠ δεν εξαρτώνται από την κλίμακα. Η προσέγγιση αυτή παραβιάζεται από λογαριθμικές διορθώσεις παρόμοιες με αυτές των απαλών και συγγραμμικών παρτονίων που έχουμε δει παραπάνω. Μάλιστα η εξίσωση εξέλιξης των ΣΚΠ υπαγορεύεται από την εξίσωση

DGLAP

$$\frac{\partial}{\partial \ln \mu^2} f_i(x, \mu^2) = \sum_j^{n_f} \frac{dz}{z} P_{ji}(z, a_s(\mu^2)) f_j\left(\frac{x}{z}, \mu^2\right) \quad (5.4.1)$$

όπου τα P_{ji} είναι συναρτήσεις διαχωρισμού. Η μεθοδολογία εκτίμησης των ΣΚΠ είναι η αρχικοποίηση τους σε μία αρχική κλίμακα μ_0^2 επιλέγοντας σχήμα παραγοντοποίησης (συνήθως \overline{MS}), διαταρακτική τάξη και κάποιες ελεύθερες παραμέτρους. Έπειτα η αρχικοποιημένες ΣΚΠ εξελίσσονται μέσω των εξισώσεων DGLAP στις κλίμακες των δεδομένων και γίνεται εύρεση των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων. Υπάρχουν πολλές πηγές πειραματικών δεδομένων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παραμετροποίηση των ΣΚΠ με τα πιο συνηθισμένα να είναι δεδομένα από ΒΑΣ, Drell-Yang και παραγωγή πιδάκων.

Οι πολλές ελευθερίες στην διαχείριση των ΣΚΠ έχουν δώσει γόνιμο έδαφος στην έρευνα από πολλές ερευνητικές ομάδες η κάθε μία με διαφορετικές ΣΚΠ όπως NNPDF, CTEQ, MMHT, HERA και άλλες. Οι διαφορές τους βρίσκονται στην αρχική παραμετροποίηση, τα πειραματικά δεδομένα τα οποία συμπεριλαμβάνουν, τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η προσαρμογή κ.α. Δεν υπάρχει κάποια γενική καλύτερη επιλογή για την εφαρμογή τους στην παραγωγή γεγονότων. Στο σχήμα (5.9) φαίνονται οι ΣΚΠ προερχόμενες από το NNPDF3.0 σε τρίτη τάξη (NNLO) για δύο κλίμακες με 4 τάξεις μεγέθους διαφορά. Προσέξτε ότι οι γενικές συμπεριφορές που αναφέρθηκαν στην ενότητα (3.3.1) ισχύουν, δηλαδή για μικρά x υπερισχύει η θάλασσα των κουάρκ και για μεγάλα x τα κουάρκ της στοιβάδας. Φαίνεται επίσης πως όσο αυξάνεται η κλίμακα η θάλασσα γίνεται σημαντικότερη για μικρά x και εμφανίζονται και βαρύτερα κουάρκ όπως το b .



Σχήμα 5.9: Διάγραμμα των $xf_i(x, Q^2)$ συναρτήσεων του λόγου ορμής x για δύο πολύ διαφορετικές κλίμακες.

5.5 Δευτερογενείς Αλληλεπιδράσεις

Μέχρι στιγμής έχει αναφερθεί μόνο η πιο σκληρή αλληλεπίδραση σε ένα γεγονός που είναι και αυτή με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Δεν πρέπει να ξεχνάμε όμως πως τα αδρόνια είναι σύμπλεγμα παρτονίων και συνεπώς υπάρχει πιθανότητα περισσότερων από μία αλληλεπιδράσεις να συμβούν στην ίδια σύγκρουση. Αυτά τα γεγονότα μοντελοποιούνται στους παραγωγούς γεγονότων μέσω μοντέλων πολλαπλών παρτονικών αλληλεπιδράσεων (Multiple Parton Interactions) και είναι σημαντικά διότι αλλάζουν την τοπολογία του χρώματος του γεγονότος και οδηγούν σε μεγαλύτερες πολλαπλότητες.

5.5.1 Πολλαπλές Παρτονικές Αλληλεπιδράσεις

Οι δευτερογενείς σχεδιάσεις σπανίως θα επηρεάσουν τον αριθμό παραγόμενων πιδάκων καθώς δεν έχουν την κατάλληλη σκληρότητα. Για χαμηλές εγκάρσιες ορμές p_{\perp} ο διαδότης του καναλιού t προσεγγίζει τον φλοιό μάζας

$$d\sigma_{2 \rightarrow 2} \propto \frac{dt}{t^2} = \frac{dp_{\perp}^2}{p_{\perp}^4}$$

Στις ενέργειες του LHC η ενεργός διατομή σκέδασης παρτονίου-παρτονίου γίνεται μεγαλύτερη από την σκέδαση δύο πρωτονίων που σημαίνει ότι για κάθε σύγκρουση πρωτονίων αντιστοιχούν περισσότερες από μία αλληλεπιδράσεις. Αυτό είναι λογικό σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση κατά την οποία θα περιμέναμε απαλές σχεδιάσεις να έχουν πολύ μεγάλη πιθανότητα να συμβούν. Θεωρώντας τις δευτερογενείς αλληλεπιδράσεις ανεξάρτητες μεταξύ τους (προσέγγιση Eikonal) ακολουθούν απλά μία κατανομή Poisson με μέση τιμή

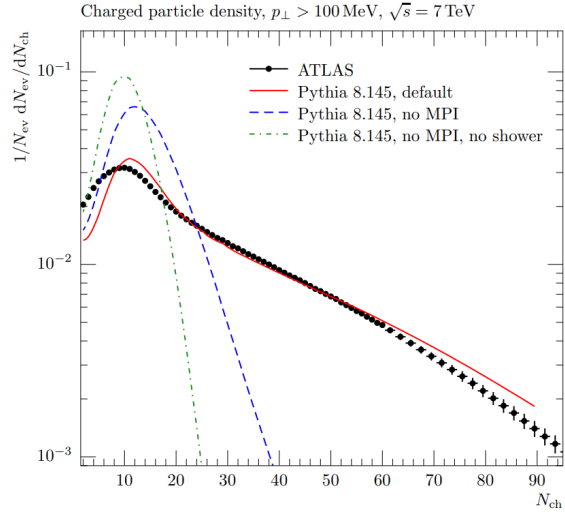
$$\langle n \rangle(p_{\perp min}) = \frac{\sigma_{2 \rightarrow 2}(p_{\perp min})}{\sigma_{tot}}$$

Η ποσότητα αυτή έχει υπέρυθη απειρία η οποία όμως μπορεί να αφαιρεθεί με δύο φυσικές παραδοχές. Πρώτον, το άθροισμα των λόγων ορμής των παρτονίων x_i δεν μπορεί να υπερβαίνει την συνολική ορμή των αδρονίων. Δεύτερον, τα παρτόνια με χαμηλής ενέργειας δεν μπορούν να ξεχωρίσουν άλλα παρτόνια ως ξεχωριστά σωματίδια, αντίστοιχα με το φαινόμενο της συμβολής χρώματος (5.3.3), και έτσι βλέπουν έναν μέσο όρο χρώματος γεγονός το οποίο εξομαλύνει τις αλληλεπιδράσεις βάζοντας ένα κάτω φράγμα για την ορμή των απαλών παρτονίων η οποία εμπειρικά μεγαλύτερη από την Λ_{QCD} .

Επιπλέον, στην παραγωγή γεγονότος οι δευτερογενείς αλληλεπιδράσεις συνοδεύονται από τον δικό τους παρτονικό καταγισμό ο οποίος χρειάζεται για να αυξηθεί επαρκώς η πολλαπλότητα της τελικής κατάστασης.

5.5.2 Το βάθρο των πιδάκων

Ένα ακόμα φαινόμενο που πρέπει να συμπεριληφθεί στον παραγωγό γεγονότων είναι το λεγόμενο βάθρο των πιδάκων (jet pedestal) στο οποίο παρατηρείται πως οι σκληροί πίδακες στέκονται πάνω σε ένα "βάθρο" από δευτερογενή δραστηριότητα η οποία φαίνεται πως είναι ομοιόμορφα κατανομημένη. Μάλιστα αυτή η επιπλέον ακτινοβολία αυξάνεται όταν υπάρχουν σκληροί πίδακες στο γεγονός. Το φαινόμενο αυτό σχετίζεται με την εκκεντρότητα της σκέδασης. Επειδή οι σκληρές αλληλεπιδράσεις συμβαίνουν στο στην περιοχή τα δύο αδρόνια



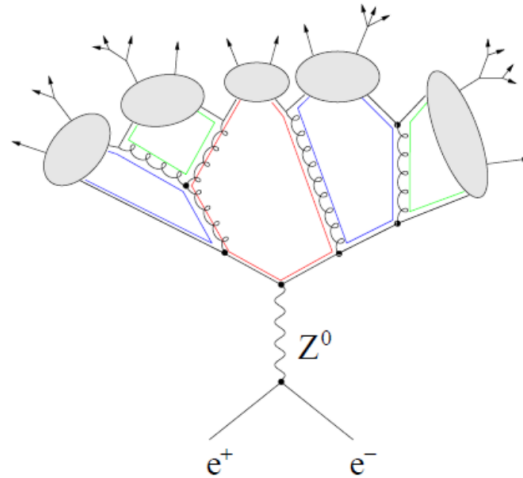
Σχήμα 5.10: Μοντελοποίηση με και χωρίς MPI και παρτονικούς καταγισμούς για την πολλαπλότητα φορτισμένων σωματιδίων όπως μετρήθηκε στο πείραμα ATLAS. Χωρίς την μοντελοποίηση των πολλαπλών αλληλεπιδράσεων η πολλαπλότητα της τελικής κατάστασης είναι πολύ στενότερη.

αλληλοκαλύπτονται, η επιλογή σκληρών πιδάκων μεροληπτεί σε γεγονότα με μικρή εκκεντρότητα προσφέροντας έτσι και πιο πρόσφορο έδαφος για πολλαπλές αλληλεπιδράσεις.

Οι παραγωγοί γεγονότων μοντελοποιούν ρητά την εκκεντρότητα της σύγκρουσης για έναν γεγονός θεωρώντας τα αδρόνια σφαιρικά και ορίζοντας μία πυκνότητα παρτονίων στο εσωτερικό τους (διαφορετική από την ΣΚΠ) η οποία περιγράφει την κατανομή των παρτονίων σε αυτά.

5.6 Αδρονιοποίηση

Εξαιτίας του φαινομένου του εγκλωβισμού τα παρτονία δεν παρατηρούνται ποτέ απευθείας παρά μόνον έμμεσα μέσω αδρονίων. Συνεπώς το τελευταίο βήμα του παραγωγού δεδομένων είναι να μοντελοποιήσει την διαδικασία της αδρονιοποίησης η οποία προσφέρει και αυτή κάποιες διορθώσεις στα παρατηρήσιμα μεγέθη. Η δυσκολία είναι πως το πρόβλημα της αδρονιοποίησης είναι καθαρά μη διαταρακτικό και συνεπώς δεν υπάρχει ακριβής περιγραφή αλλά μόνο μοντέλα εμπνευσμένα από την ΚΧΔ. Έχουν αναπτυχθεί διάφορα μοντέλα όπως το μοντέλο των χορδών (String Model), χρήση συναρτήσεων θρυμματισμού (fragmentation functions) που είναι ανάλογα των ΣΚΠ αλλά για την τελική κατάσταση και το μοντέλο των συμπλόκων (Cluster Model) στο οποίο και θα εστιάσουμε.



[Webber, Marchesini]

5.6.1 Μοντέλο Συμπλόκων

Το μοντέλο συμπλόκων βασίζεται στον προ-εγκλωβισμό (preconfinement), την παρατήρηση ότι η δομή του διαταρακτικού καταγισμού στην ΚΧΔ είναι τέτοια ώστε σε κάθε κλίμακα Q_0 δημιουργούνται υποσύνολα με παρτόνια στην μονή κατάσταση χρώματος με καθολική αναλλοίωτη κατανομή μάζας η οποία εξαρτάται στις κλίμακες Q_0 και Λ_{QCD} αλλά όχι στην αρχική κλίμακα Q .

Σχήμα 5.11: Σχηματική αναπαράσταση της αδρονιοποίησης στο μοντέλο των συμπλεγμάτων.

Στο τέλος του καταγισμού επιβάλλεται η διακλάδωση των γκλουονίων σε ζεύγη κουάρκ αντικουάρκ με την καταστολή των βαρέων γεύσεων λόγω της χαμηλής ενεργειακής κλίμακας. Ο αλγόριθμος αναθέτει γεύση και ορμή στα παραγόμενα κουάρκ και έπειτα δημιουργούνται συσσωματώματα από ζεύγη κουάρκ αντικουάρκ. Αν η αναλλοίωτη μάζα τους είναι μεγαλύτερη από κάποιο ελάχιστο φράγμα (τυπικά 3-4 GeV) υποχρεούνται να σπάσουν σε μικρότερα. Τα σύμπλοκα με μικρή αναλλοίωτη μάζα διασπώνται απευθείας σε αδρόνια με τα γειτονικά σύμπλοκα να απορροφούν την επιπλέον ορμή. Τέλος τα εναπομείναντα σύμπλοκα ερμηνεύονται σαν ένα λείο φάσμα διεγερμένων μεσονικών καταστάσεων και το καθένα από αυτά διασπάται ισοτροπικά σε ζεύγη αδρονίων με σχετικές πιθανότητες ανάλογες με τον διαθέσιμο φασικό χώρο των πιθανών ζευγών που επιτρέπονται λαμβάνοντας υπόψιν την εσωτερική δομή γεύσης των συμπλόκων.

5.7 Ο Ρόλος των Προσομοιώσεων Monte Carlo

Ο ρόλος του Monte Carlo στην φυσική στοιχειωδών σωματιδίων είναι διττός. Πρώτον, όπως είδαμε παραπάνω, είναι ο κύριος τρόπος παραγωγής θεωρητικών προβλέψεων υψηλής ακρίβειας για σχεδιάσεις στο LHC. Στην περίπτωση αυτήν, λαμβάνοντας υπόψιν τις θεωρητικές αβεβαιότητες του μοντέλου (5.7.1), γίνεται έλεγχος συμφωνίας με τα πειραματικά δεδομένα που αποσκοπεί στην εύρεση πιθανών αποκλίσεων. Η διαδικασία δεν είναι απλή καθώς οι γεννήτριες γεγονότων περιέχουν πολλές "ελεύθερες" παραμέτρους οι οποίες πρέπει να

βελτιστοποιηθούν (tuned). Υπάρχει ο κίνδυνος πως η διαδικασία της βελτιστοποίησης παραμέτρων σύμφωνα με πειραματικά δεδομένα θα καταλήξει ως προσαρμογή της προσομοίωσης στο πείραμα και όχι ως πρόβλεψη. Συνεπώς η βέλτιστη επιλογή των παραμέτρων γίνεται για κάποια παρατηρήσιμα μεγέθη και ο έλεγχος γίνεται για ένα μεγαλύτερο σύνολο (global) ώστε να αποδειχθεί η προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου. Δεύτερον, οι προσομοιώσεις Monte Carlo χρησιμοποιούνται στην πειραματική διαδικασία για την αφαίρεση της επιρροής του ανιχνευτή στη μέτρηση (unfolding) και για την παρέκταση και διόρθωση του φασικού χώρου. Αυτές οι τεχνικές χρησιμοποιούνται για την αύξηση της στατιστικής των δεδομένων λόγω μικρής αποδοτικότητας του ανιχνευτή. Γενικά οι διορθώσεις και οι προεκτάσεις του φασικού χώρου με θεωρητικές μεθόδους πρέπει να κρατείται στο ελάχιστο καθώς αυξάνει τις αβεβαιότητες και καθιστά τα δεδομένα εξαρτημένα από το θεωρητικό πλαίσιο. Αντίθετα, οι διορθώσεις των επιπτώσεων του ανιχνευτή είναι απαραίτητες για την σύγκριση μεταξύ μετρήσεων διαφορετικών διατάξεων.

5.7.1 Θεωρητικές Αβεβαιότητες

Η θεωρητική αβεβαιότητα των υπολογισμών Monte Carlo είναι ύψιστης σημασίας λόγω της αύξησης της πειραματικής ακρίβειας και της χρήσης τους στην ανάλυση δεδομένων. Οι πηγές αβεβαιότητας είναι πολλές. Μία πηγή είναι η στατιστική σύγκλιση του υπολογισμού η οποία όμως μπορεί να αποφευχθεί με αρκετούς υπολογιστικούς πόρους. Μία ακόμη είναι οι παράμετροι της προσομοίωσης και η πεπερασμένη πειραματική ακρίβεια που έχουμε για αυτές (σταθερά ισχυρής αλληλεπίδρασης a_s , ΣΚΠ, μάζες κ.α). Επιπλέον πηγή είναι η πεπερασμένη τάξη στην διαταραχτική σειρά, είτε σε LO/NLO ή σε LL/NLL. Τέλος έχουμε τις αλγοριθμικές, όπως την εξάρτηση του υπολογισμού από την επιλογή παρτονικού αλγορίθμου ή την μέθοδο αντιστοίχισης και τις φαινομενολογικές πηγές δηλαδή την εξάρτηση από τις παραμέτρους των μη διαταραχτικών μοντέλων όπως η αδρονιοποίηση και το γεγονός υποβάθρου.

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τις διαταραχτικές πηγές οι οποίες ελέγχονται μέσω μεταβολής στις κλίμακες επανακανονικοποίησης και παραγοντοποίησης και σε κάποιες παραμετρικές, στην σταθερά σύζευξης a_s και στην επίπτωση διαφορετικών ΣΚΠ στην πρόβλεψη.

5.7.2 Εκτύλιξη

Η εκτύλιξη (unfolding) είναι ο τρόπος με τον οποίον η επίδραση του ανιχνευτή αφαιρείται από τα δεδομένα δίνοντας τις "αληθινές" τιμές των μετρήσιμων μεγεθών. Η εκτύλιξη επιτρέπει την εύκολη σύγκριση μεταξύ πειραματικών κατανομών από διαφορετικούς ανιχνευτές ή από προσομοιώσεις Monte Carlo.

Το γενικό πρόβλημα δίνεται από την ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου τύπου

$$o(y) = \int_{\Omega} K(y, x)t(x)dx$$

όπου από την μέτρηση $o(y)$ και τον πυρήνα $K(y, x)$ κανείς ψάχνει την συνάρτηση $t(x)$. Στην περίπτωση ιστογραμμάτων η εξίσωση απλοποιείται στη μορφή

$$A\vec{t} + \vec{b} = \vec{o} \Rightarrow \vec{t} = A^{-1}(\vec{o} - \vec{b})$$

όπου το διάνυσμα μέτρησης \vec{o} (bin $i = o_i$) ισούται με το διάνυσμα της "αληθινής" κατανομής \vec{t} (bin $j = t_j$) επί τον πίνακα απόκρισης (response matrix) του ανιχνευτή A_{ij} συν ένα διάνυσμα υποβάθρου \vec{b} . Ο πίνακας απόκρισης υπολογίζεται με τον συνδυασμό δύο προσομοιώσεων Monte Carlo, την προσομοίωση του ανιχνευτή και την προσομοίωση παραγωγής γεγονότων. Η παραγωγή γεγονότων δίνει ένα ιστογράμμα με N_j^{gen} σε κάθε θέση j . Υπερθέτοντας αυτήν την κατανομή με την προσομοίωση του ανιχνευτή τον αριθμό $N_{ij}^{det \wedge gen}$ που είναι το πλήθος των γεγονότων που παρήχθησαν στη θέση j του "αληθινού" ιστογράμματος και ανιχνεύτηκαν στη θέση i του ανιχνευτή. Τα στοιχεία του πίνακα απόκρισης είναι

$$A_{ij} \frac{N_{ij}^{det \wedge gen}}{N_j^{gen}}.$$

Η δυσκολία στην εκτύλιξη βρίσκεται στο γεγονός ότι ο πίνακας A μπορεί να έχει "κακή" συμπεριφορά ή ακόμα

να έχει μηδενική ορίζουσα συνεπώς να μην αντιστρέφεται. Αυτό είναι λογικό καθώς το πρόβλημα του να πάμε από μικρότερη ανάλυση σε μεγαλύτερη δεν είναι καλά ορισμένο. Η συνήθης προσέγγιση είναι να αποφεύγεται ο πίνακας A να είναι τετραγωνικός και επιλέγεται $i > j$.

Σχετική Βιβλιογραφία: [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30]

Κεφάλαιο 6

Ενεργές Διαφορικές Διατομές Ζεύγους τοπ κουάρκ με το Herwig 7.2

Στο τελευταίο κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα προσομοιώσεων Monte Carlo της γεννήτριας γεγονότων Herwig 7.2.2 στην παραγωγή ζεύγους τοπ άντιτοπ κουάρκ μεγάλης εγκάρσιας ορμής από συγκρούσεις πρωτονίων με ενέργεια κέντρου μάζας 13 TeV. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης συγκρίνονται με δεδομένα του 2016 από το πείραμα CMS [1] και με παλαιότερες προσομοιώσεις. Παρακάτω θα παρουσιαστούν, πέρα από τα αποτελέσματα, η βασική φυσική που εμπεριέχεται στα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για την προσομοίωση.

6.1 Ζεύγη τοπ στην προωθημένη περιοχή

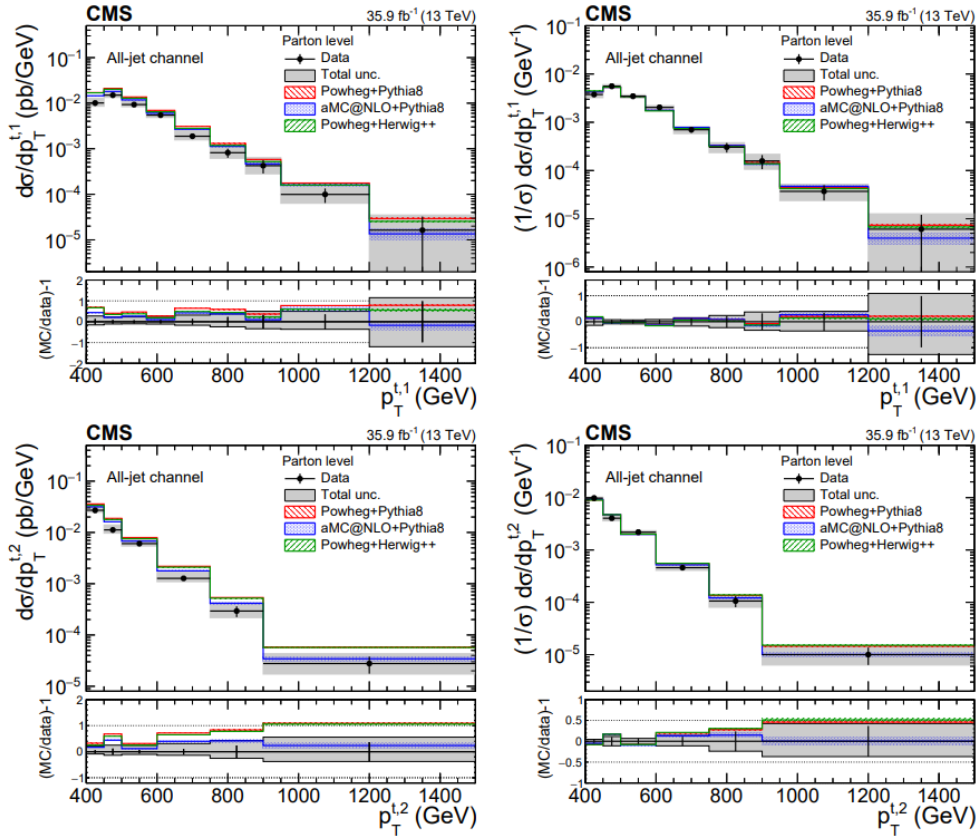
Οι προσομοιώσεις της παρούσας εργασίας βασίζονται στην έκθεση της ομάδας του CMS στην οποία μετρήθηκαν διαφορικές ενεργές διατομές στην παραγωγή ζεύγους $t\bar{t}$ με μεγάλη εγκάρσια ορμή. Πιο συγκεκριμένα, η παραγωγή του ζεύγους έγινε σε ενέργεια κέντρου μάζας $\sqrt{s} = 13$ TeV με συνολική φωτεινότητα στα 35.9 fb^{-1} για τα κανάλια στα οποία τουλάχιστον ένα τοπ διασπάται σε μποζόνιο W και b κουάρκ και έπειτα σε τρία κουάρκ $q\bar{q}'b$ και έχει ελάχιστη εγκάρσια ορμή τα 400 GeV. Λόγω της μεγάλης προώθησης (Lorentz Boost) τα τοπ δεν μπορούν να ανακατασκευαστούν ατομικά αλλά τα προϊόντα τους μετρώνται ως πίδακες μεγάλης ακτίνας (large-radius (R) jets). Η περιοχή αυτή έχει εμφανίσει ενδιαφέρουσες διαφορές πειράματος και θεωρίας.

Οι διαφορικές ενεργές διατομές εξάγονται συναρτήσει των κινηματικών μεταβλητών των τοπ και του συστήματός τους και παρουσιάζονται στο παρτονικό και στο σωματιδιακό επίπεδο σε σύγκριση με προσομοιώσεις Monte Carlo για τα κανάλια όπου και τα δύο W διασπώνται σε κουάρκ (all-jet) και το κανάλι στο οποίο υπάρχει μία λεπτονική διάσπαση ενός W (leptons+Jets). Παρακάτω θα αναφερθούν συνοπτικά μόνο τα αποτελέσματα αναφορικά με το all-jet κανάλι στο επίπεδο παρτονίων καθώς σε αυτό εμπίπτει η ανάλυση αυτής της εργασίας.

6.1.1 Ανακατασκευή Γεγονότων

Η ανακατασκευή των γεγονότων γίνεται με την τεχνική της ροής-σωματιδίου (particle-flow) η οποία αναγνωρίζει κάθε σωματίδιο σε ένα γεγονός με τον βέλτιστο συνδυασμό πληροφοριών από όλα τα υποσυστήματα του ανιχνευτή. Οι πίδακες ομαδοποιούνται σύμφωνα με τον υπέρυθρο και συγγραμμικά ασφαλή αλγόριθμο anti k_T σε μικρούς $R = 0.4$ και μεγάλους $R = 0.8$ πίδακες. Επίσης γίνεται αφαίρεση της απαλής και ευρυγώνιας ακτινοβολίας από τους πίδακες μεγάλου R για την αύξηση της ακρίβειας της μάζας με τον αλγόριθμο "soft drop" (SD).

Στο all-jet κανάλι, απαιτείται από το γεγονός να περιέχει 2 μεγάλου R πίδακες με εγκάρσια ορμή $p_T > 400 \text{ GeV}$, ταχύτητα $|\eta| < 2.4$ και αναλλοίωτη μάζα ζεύγους $m_{t\bar{t}} > 800 \text{ GeV}$. Το κύριο υπόβαθρο για αυτή τη διαδικασία είναι η παραγωγή πολλαπλών πιδάκων (multijet production) γνωστό και ως υπόβαθρο KXΔ. Για τη διάκριση των πιδάκων σύμφωνα με την προέλευση τους χρησιμοποιούνται μεταβλητές της υποδομής



Σχήμα 6.1: Ενεργές διαφορικές διατομές συναρτήσει της εγκάρσιας ορμής του πρώτου και του δεύτερου τοπ.

(substructure) των πίδακων που είναι ευαίσθητες στο αν ο πίδακας έχει προέλθει από ένα παρτόνιο (background) ή από τρία κουάρκ ($t\bar{t}$ decay). Η επιλογή μεταξύ σήματος και υποβάθρου γίνεται με χρήση νευρωνικού δικτύου.

Τα δεδομένα εκτυλίσσονται στο επίπεδο των παρτονίων, δηλαδή αφαιρείται η επίδραση του ανιχνευτή (πεπερασμένη ανάλυση) καθώς και η αδρονιοποίηση. Οι ενεργές διαφορικές διατομές μετά την εκτύλιξη υπολογίζονται ως

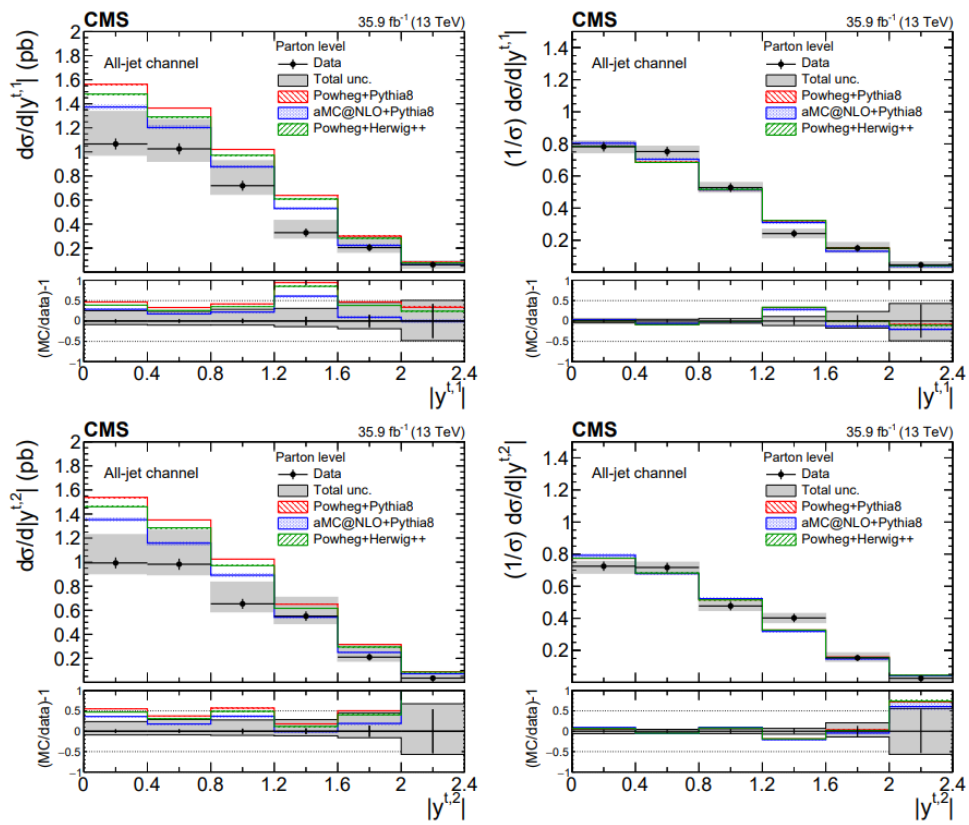
$$\frac{d\sigma_i^{unf}}{dx} = \frac{1}{L\Delta x_i} \frac{1}{f_{2,i}} \sum_j \left(R_{ij}^{-1} f_{1,j} S_j \right)$$

με L την συνολική φωτεινότητα και Δx_i το πλάτος της θέσης (bin) i στο ιστογράμμα της παρατηρήσιμης ποσότητας x . Ο πίνακας R_{ij} είναι ο πίνακας απόκρισης και S_j είναι το σήμα για την θέση j του ιστογράμματος. Οι συντελεστές f_1 και f_2 είναι η αποδοχή (acceptance) και η αποδοτικότητα (efficiency) του ανιχνευτή.

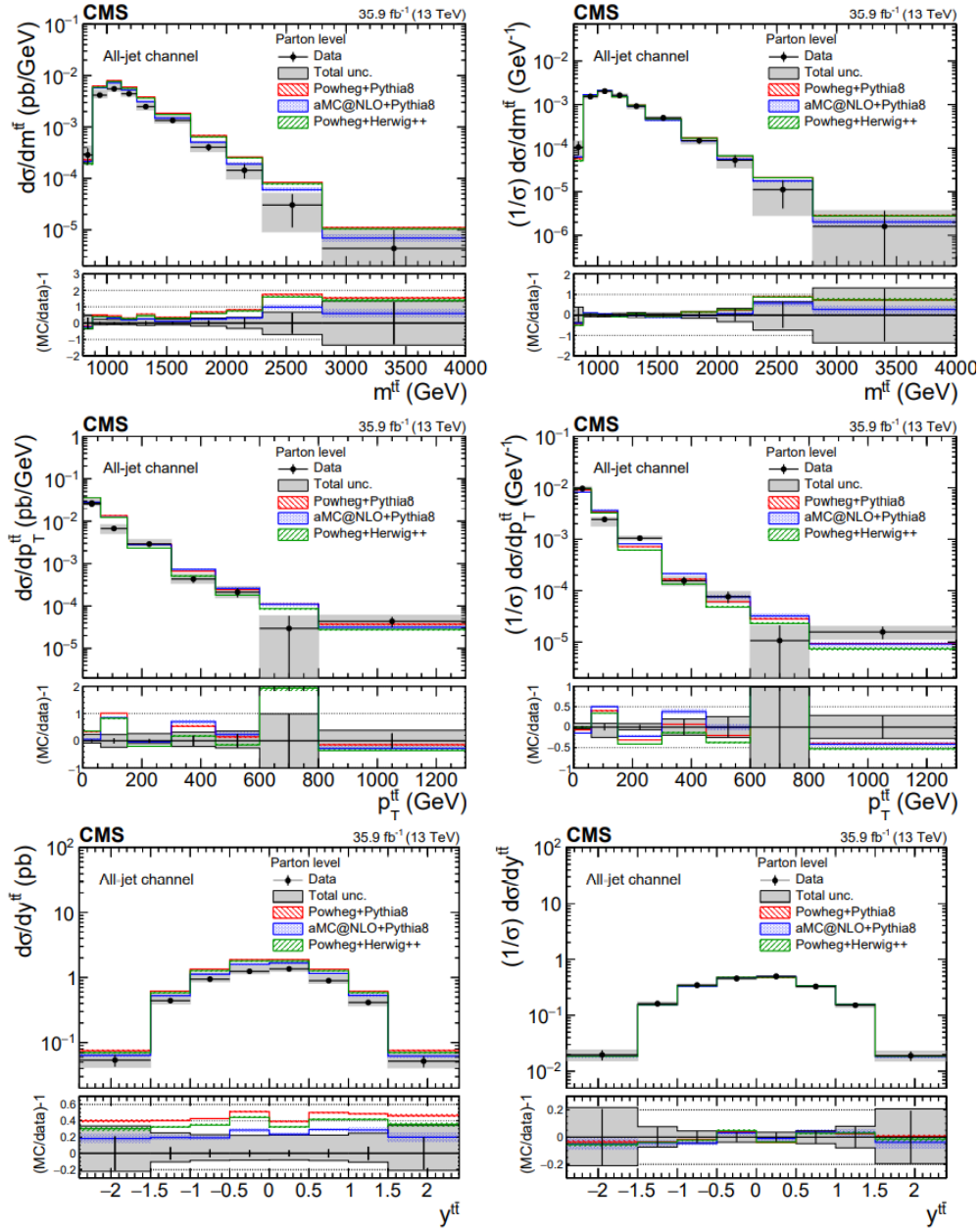
Οι πειραματικές απροσδιοριστίες είναι μεγαλύτερες του 10% με κύριες πηγές την ταυτοποίηση των b κουάρκ μέσα στους πίδακες και ενεργειακή κλίμακα του ανακατασκευασμένου πίδακα μεγάλου R . Οι θεωρητικές απροσδιοριστίες προέρχονται από την διαδικασία της εκτύλιξης και από την προσομοίωση γεγονότων.

6.1.2 Προσομοίωση Γεγονότων

Η προσομοίωση των γεγονότων γίνεται σε τάξη NLO με χρήση του Powheg θεωρώντας μάζα τοπ $m_t = 172.5 \text{ GeV}$. Η ΣΚΠ που χρησιμοποιείται είναι το NNPDF3.0 και για τον παρτονικό καταγισμό, την αδρονιοποίηση και το γεγονός υποβάθρου χρησιμοποιούνται τα προγράμματα Pythia και Herwig++. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων συγκρίνονται με τα δεδομένα του πειράματος στα ιστογράμματα (6.1,6.2,6.3). Παρατηρείται, από τους συγγραφείς, πως οι προσομοιώσεις του Powheg είναι 56% υψηλότερες σε σχέση με τα δεδομένα, το οποίο συμφωνεί και με την βιβλιογραφία. Σχετικά με τις κανονικοποιημένες διαφορικές ενεργές



Σχήμα 6.2: Ενεργές διαφορικές διατομές συναρτήσει της ταχύτητας του πρώτου και του δεύτερου τοπ.



Σχήμα 6.3: Ενεργές διαφορικές διατομές συναρτήσει κινηματικών μεταβλητών του ζεύγους $t\bar{t}$

διατομές η θεωρία με το πείραμα συμβαδίζουν ικανοποιητικά. Οι μεγαλύτερες αναντιστοιχίες παρατηρούνται στην αναλλοίωτη μάζα του ζεύγους m_{tt} και στη δεύτερη υψηλότερη ορμή των τοπ p_{T2} οι οποίες χρειάζονται περαιτέρω μελέτη.

6.2 Παραγωγός Γεγονότων Herwig 7.2

Το λογισμικό Herwig είναι ένας παραγωγός γεγονότων ευρείας χρήσης με δυνατότητα αυτοματοποιημένης προσομοίωσης γεγονότων σε πρώτη (LO) και δεύτερη (NLO) τάξη με αντιστοιχία σε παρτονικό καταγισμό για οποιαδήποτε διαδικασία του Καθιερωμένου Προτύπου. Βασικό χαρακτηριστικό του Herwig είναι η επικοινωνία με εξωτερικές βιβλιοθήκες για στοιχεία μητρών, συναρτήσεις κατανομών παρτονίων και για ανάλυση δεδομένων. Η προσομοίωση ενός γεγονότος χωρίζεται στα εξής έξι βήματα:

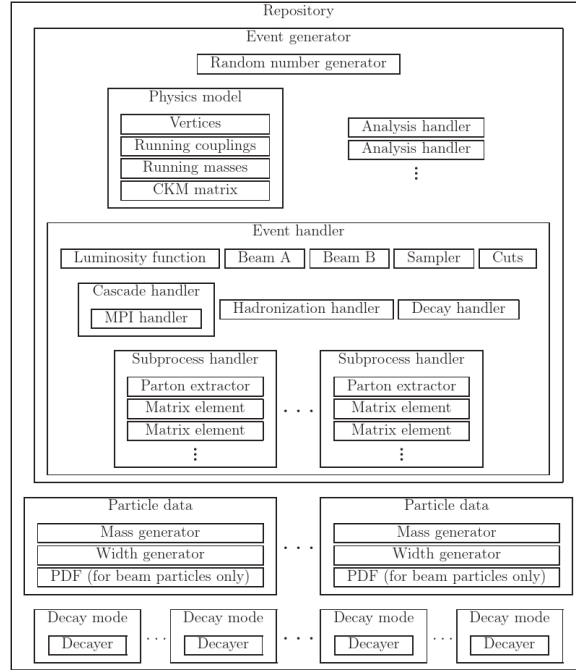
1. *Στοιχειώδης σκληρή διαδικασία*: Αποτελεί την αλληλεπίδραση των στοιχειωδών σωματιδίων κατά την σύγκρουση. Αυτά μπορεί να είναι λεπτόνια ή παρτόνια από αδρονικές συγκρούσεις. Αυτός είναι ο πυρήνας της προσομοίωσης και μπορεί να υπολογιστεί σε ακρίβεια πρώτης ή δεύτερης τάξης στην a_s .
2. *Παρτονικοί καταγισμοί αρχικής και τελικής κατάστασης*: Τα έγχρωμα σωματίδια του γεγονότος εξελίσσονται διαταρακτικά από την σκληρή κλίμακα της κύριας αλληλεπίδρασης μέχρι κάποιο υπέρυθρο φράγμα. Αυτό συμβαίνει και για τα σωματίδια της τελικής κατάστασης αλλά και στα σωματίδια της αρχικής, στην περίπτωση που υπάρχουν, ώστε να προσομοιωθεί η ακτινοβολία αρχικής και τελικής κατάστασης. Υπάρχουν δύο εφαρμογές παρτονικού καταγισμού, ο καταγισμός γωνιακής ιεραρχίας (angular ordered shower) και ο καταγισμός δίπολου (dipole shower).
3. *Διάσπαση βαρέων σωματιδίων*: Εξαιρετικά βαρέα θεμελιώδη σωματίδια όπως το τοπ κουάρκ και το μποζόνιο Higgs διασπώνται σε χρόνους βραχύτερους ή αντίστοιχους αυτών της εξέλιξης του παρτονικού καταγισμού. Τα αντικείμενα αυτά αντιμετωπίζονται ως μέρος του παρτονικού καταγισμού.
4. *Πολλαπλές σκεδάσεις*: Σε υψηλές ενέργειες γίνεται σημαντική η πιθανότητα πολλαπλών σκεδάσεων μεταξύ των παρτονίων. Το φαινόμενο αυτό καθιστά τη κύρια συνιστώσα των γεγονότων υποβάθρου. Αυτές οι σκεδάσεις λαμβάνουν χώρα στην διαταρακτική κλίμακα και δίνουν επιπλέον παρτονικούς καταγισμούς.
5. *Αδρονιοποίηση*: Αφού η εξέλιξη του παρτονικού καταγισμού φτάσει στο τέλος το Herwig 7.2 χρησιμοποιεί ένα μοντέλο συμπλόκων (Cluster Hadronization).
6. *Διάσπαση αδρονίων*: Οι διασπάσεις αδρονίων προσομοιώνονται χρησιμοποιώντας περιγραφή στοιχείου μήτρας των κατανομών των προϊόντων διάσπασης και περιλαμβάνουν σωστή διαχείριση των συσχετισμών λόγω σπιν.

Ο κώδικας του Herwig 7.2 είναι γραμμένος σε C++ και βασίζεται στο ThePEG - the Toolkit for High Energy Physics Event Generation, ένα πλαίσιο για την υλοποίηση γεννητριών γεγονότων Monte Carlo. Τα δομικά στοιχεία της προσομοίωσης που δεν περιέχουν φυσική παρέχονται ως αντικείμενα της C++ από το ThePEG ενώ τα φυσικά μοντέλα υλοποιούνται ως κλάσεις. Αυτή η δομή επιτρέπει πολλά μοντέλα να συνυπάρχουν στο ίδιο πλαίσιο κάνοντας την προσομοίωση εξαιρετικά ευέλικτη. Το πρόγραμμα υλοποιείται ως ένα εικονικό σύστημα αρχείων το οποίο περιέχει όλα τα μέρη και τις φυσικές παραμέτρους της προσομοίωσης. Μέσω γενικών εντολών ο χρήστης μπορεί να ανοίξει και να κλείσει μέρη της προσομοίωσης, να αλλάξει τις φυσικές παραμέτρους κ.λ.π.

Βασικό χαρακτηριστικό όλων των μοντέρνων γεννητριών γεγονότων είναι η επικοινωνία τους με εξωτερικές βιβλιοθήκες. Με το Herwig 7.2 κανείς έχει πρόσβαση σε βιβλιοθήκες υπολογισμού και παροχής πλατών και το δομοστοιχείο (module) Matchbox για τον παρτονικό καταγισμό. Επίσης η χρήση διαφορετικών ΣΚΠ είναι πολύ εύκολη μέσω του LHAPDF καθώς και η ανάλυση των δεδομένων είναι εύκολη καθώς υπάρχει υποστήριξη για Rivet και HepMC.

6.3 Οι ρυθμίσεις της προσομοίωσης

Στην ενότητα αυτή θα παρατεθεί η διαδικασία του χτισίματος της προσομοίωσης με το Herwig 7.2 γνωρίζοντας από την ενότητα (6.1) τις προδιαγραφές του γεγονότος. Παραδείγματος χάριν, για να τεθεί η ενέργεια κέντρου μάζας στα 13 TeV γράφουμε την παρακάτω εντολή.



Σχήμα 6.4: Σχηματική αναπαράσταση της δομής του αποθετηρίου του Herwig.

```
cd /Herwig/EventHandlers
set EventHandler:LuminosityFunction:Energy 13000*GeV
```

Η εντολή `cd` εισέρχεται στο εικονικό αρχείο στην τοποθεσία `/Herwig/EventHandlers` και αλλάζει το γνώρισμα `LuminosityFunction` της κλάσης `EventHandler`. Λόγω της πολυπλοκότητας της προσομοίωσης είναι απαραίτητη η ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού χρόνου. Ευτυχώς, είναι εύκολο να μειώσουμε τον φασικό χώρο χρησιμοποιώντας φραγμούς (cuts), όπου στην προκειμένη περίπτωση επιλέγονται λίγο χαλαρότεροι από τους φραγμούς της ανάλυσης, δηλαδή εγκάρσια ορμή $p_T > 350 \text{ GeV}$, ταχύτητα $|\eta| < 3.0$ και αναλλοίωτη μάζα ζεύγους $m_{t\bar{t}} > 700 \text{ GeV}$. Οι επιλογές αυτές αυξάνουν κατά πολύ την ταχύτητα σύγκλισης καθώς ο περιορισμένος φασικός χώρος της προωθημένης περιοχής αποτελεί περίπου το 1% του συνολικού. Επιπλέον η ταχύτητα διπλασιάζεται κλείνοντας όλα τα κανάλια διάσπασης εκτός του all-jet.

Όσον αφορά τις κλίμακες του γεγονότος, επιλέγονται ως ίσες μεταξύ τους και ίσες με την αναλλοίωτη μάζα του ζεύγους

$$\mu_R^2 = \mu_F^2 = (p_t + p_{\bar{t}})^2.$$

Για την επιλογή ΣΚΠ χρησιμοποιείται η βιβλιοθήκη LHAPDF 6.3 αλλά και το ενσωματωμένο στο Herwig CT14.

6.3.1 Επιλογή στοιχείων μήτρας

Το πρωταρχικό στάδιο της προσομοίωσης είναι ο υπολογισμός των αναλλοίωτων πλατών σχέδασης, δηλαδή ο υπολογισμός των διαγραμμάτων Feynman και η ολοκλήρωσή τους στον φασικό χώρο των σωματιδίων. Αυτό επιτυγχάνεται σε πρώτη τάξη (LO) και δεύτερη τάξη (NLO) διαταρακτικής ακρίβειας μέσω εγγενών κομματιών κώδικα του Herwig ή για τις περισσότερες διαδικασίες εξωτερικών βιβλιοθηκών. Οι NLO υπολογισμοί για την υπό έρευνα αλληλεπίδραση γίνεται μέσω των MadGraph5 και OpenLoops.

MadGraph5

Το ανοικτό λογισμικό MadGraph5 αποτελεί ένα αυτοματοποιημένο εργαλείο υπολογισμού και σχεδιασμού διαγραμμάτων Feynman για διαδικασίες που ανήκουν στο Καθιερωμένο Πρότυπο και πέρα από αυτό. Αναβαθμισ-

μένο πια από FORTRAN 77 σε Python έχει την δυνατότητα προσομοίωσης κάθε επανακανονικοποίησης ή effective θεωρίας η οποία βασίζεται σε Λαγκρανζιανή με NLO ακρίβεια.

Στην προκειμένη περίπτωση χρησιμοποιείται μόνο για την παραγωγή των διαγραμμάτων σε πρώτη τάξη (tree level) ενώ για τον υπολογισμό διαγραμμάτων με βρόχους (loops) χρησιμοποιείται το OpenLoops που θα δούμε στη συνέχεια. Πολύ συνοπτικά, ο τρόπος παραγωγής διαγραμμάτων του MadGraph5 δημιουργεί υπο-διαγράμματα από διαγράμματα ενώνοντας πόδια (legs) με αναδρομικό τρόπο. Χωρίζοντας τα σωματίδια με μία ετικέτα from_group ανάλογα με το να έχουν προκύψει από ένωση σωματιδίων στο προηγούμενο βήμα (True) ή αν απλά έχουν αντιγραφεί (False) αποφεύγει την "διπλομέτρηση" διαγραμμάτων. Πιο συγκεκριμένα:

1. Δεδομένου του μοντέλου, παράγονται δύο λεξικά (dictionaries). Το πρώτο (Vertices) περιέχει πληροφορίες για τις κορυφές αντιστοιχώντας όλους τους επιτρεπτούς συνδυασμούς n σωματιδίων σε αλληλεπιδράσεις n σημείων. Το δεύτερο λεξικό αντιστοιχεί $n-1$ σωματίδια σε όλους τους συνδυασμούς σωματιδίων τελικής κατάστασης για κάθε αλληλεπίδραση n σημείων.
2. Για όλα τα εισερχόμενα σωματίδια ο αλγόριθμος αλλάζει την κατάσταση particle/anti particle θεωρώντας έτσι όλα τα σωματίδια εξερχόμενα. Για όλα τα εξερχόμενα σωματίδια η ετικέτα from_group = True.
3. Αν στο λεξικό Vertices υπάρχει καταχωρημένος ο συνδυασμός όλων των εξερχόμενων σωματιδίων δημιουργείται ο συνδυασμός [(1,2,3,4,...)] υπό τη προϋπόθεση ότι τουλάχιστον δύο από αυτά έχουν from_group = True.
4. Δημιουργούνται όλες οι επιτρεπτές ομαδοποιήσεις με τουλάχιστον ένα from_group = True παρόν στο λεξικό Currents.
5. Για τα νέα σωματίδια που προκύπτουν από συνδυασμούς η ετικέτα τίθεται from_group = True ενώ για αυτά που παραμένουν ίδια from_group = False. Ο αλγόριθμος επιστρέφει στο βήμα 3 με τα νέα σωματίδια ως αρχικά.
6. Ο αλγόριθμος σταματά όταν παραμείνουν το πολύ δύο εξερχόμενα σωματίδια.

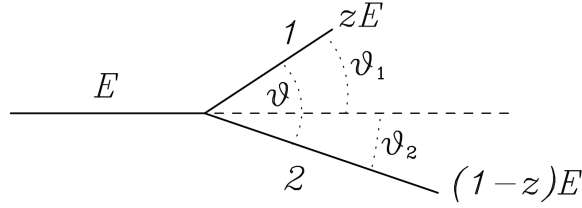
Ο αριθμητικός υπολογισμός των στοιχείων πίνακα που παράγονται από τον παραπάνω αλγόριθμο επιτυγχάνεται μέσω πλατών ελικρότητας και στην διαδικασία λαμβάνονται υπόψιν τα ταυτόσημα υπο-διαγράμματα που προκύπτουν ελαχιστοποιώντας τον υπολογιστικό χρόνο.

Το τελευταίο χαρακτηριστικό που επιβάλλεται να αναφερθεί είναι ο υπολογισμός πλατών σκέδασης σωματιδίων που κουβαλούν χρώμα καθώς εμπίπτει και παραγωγή ζεύγους top κουάρκ. Μαθηματικά αντικείμενα της $SU(3)_C$ όπως πίνακες Gell-Mann και συντελεστές δομής καθώς και η άλγεβρα τους αποτυπώνεται στο πρόγραμμα συμβολικά δίνοντας τη δυνατότητα χρήσης διαφορετικών βάσεων ανάλογα με την περίπτωση. Ο προεπιλεγμένος αλγόριθμος αναλύει τον παράγοντα χρώματος κάθε διαγράμματος σε μία ορθογωνική βάση η οποία κατασκευάζεται ταυτόχρονα. Έτσι το συνολικό πλάτος οργανώνεται αυτόματα σε αναλλοίωτα στη βαθμίδα υποπλάτη $M = \sum_i C_i A_i$ (color-ordered amplitudes).

OpenLoops

Το OpenLoops είναι μία βιβλιοθήκη με πλάτη από διαγράμματα βρόχων η οποία αξιοποιεί παρόμοιο αλγόριθμο με του MadGraph και μοντέρνες τεχνικές υπολογισμού πλατών για την παραγωγή εικονικών διορθώσεων σε NLO. Οι κλασικές μέθοδοι υπολογισμού βρόχων αποτελούν μεγάλη υπολογιστική πρόκληση καθώς εμφανίζουν μεγάλες αριθμητικές αστάθειες και τεράστιες αλγεβρικές εκφράσεις ακόμα και για μικρές πολλαπλότητες (π.χ $2 \rightarrow 4$) και απαιτούν μεγάλη επεξεργαστική ισχύ και ανθρώπινη επέμβαση.

Η επιτυχία του συγκεκριμένου αλγορίθμου βασίζεται στο ότι τα αναλλοίωτα βαθμίδας πλάτη πολλών γκλουονίων μπορούν να υπολογιστούν με τον συνδυασμό της αναγωγής τανυστικών ολοκληρωμάτων (tensor integral reduction) και της αναγωγής OPP (OPP reduction) κατά την οποία οι γενική δομή των διαγραμμάτων βρόχων μπορούν να εκφραστούν ως άθροισμα διαγραμμάτων δέντρων. Ο αλγόριθμος αθροίζει τους συντελεστές χρώματος και ανακυκλώνει τα υπό-διαγράμματα με βέλτιστο τρόπο όπως και το MadGraph πετυχαίνοντας μέγιστη ταχύτητα υπολογισμού.



Σχήμα 6.5: Κινηματικές μεταβλητές μίας διακλάδωσης. [31]

6.3.2 Παρτονικός Καταιγισμός

Χαρακτηριστικό του Herwig είναι η σωστή προσομοίωση της συμβολής χρώματος απαλών γκλουονίων με τη χρήση καταίγισμου με γωνιακή ιεραρχία (angular ordered shower). Παρότι το Herwig προσφέρει πλέον και καταίγισμο διπόλου (dipole shower) η παρούσα προσομοίωση χρησιμοποιεί το πρώτο.

Καταιγισμός με ιεραρχία γωνίας

Μία απλουστευμένη μορφή μίας διακλάδωσης φαίνεται στην εικόνα (6.5) όπου το αρχικό παρτόνιο ενέργειας E χωρίζεται σε δύο παρτόνια με ενέργειες zE και $(1-z)E$. Στο όριο των μικρών γωνιών

$$p_T = \theta_1 zE = \theta_2 (1-z)E, \quad \theta = \frac{\theta_1}{1-z} = \frac{\theta_2}{z} \quad (6.3.1)$$

Ορίζοντας την μεταβλητή εξέλιξης $t = E^2 \theta^2$

$$p_T = \sqrt{t} z (1-z) \quad (6.3.2)$$

Η πιθανότητα για μία διακλάδωση σαν την παραπάνω να συμβεί είναι

$$dP = \frac{\alpha_s(p_T)}{2\pi} P_{i \rightarrow jk}(z) \frac{dt}{t} dz \quad (6.3.3)$$

όπου $P_{i \rightarrow jk}(z)$ οι συναρτήσεις διαχωρισμού Altarelli-Parisi. Η μεταβλητή z περιορίζεται από το κάτω φράγμα $t > t_0$ κάτω από το οποίο δεν μπορεί να υπάρξει διακλάδωση. Σε αυτή την περιγραφή η γωνιακή ιεραρχία σημαίνει πως η γωνία της επόμενης διακλάδωσης θα πρέπει να είναι μικρότερη της θ με αυτό να επαναλαμβάνεται για κάθε διακλάδωση, δηλαδή για n διακλάδώσεις $\theta > \theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_n$. Αυτό περιορίζει την ακτινοβολία σε έναν κώνο που είναι και αυτό που παρατηρείται πειραματικά.

Ο πραγματικός φορμαλισμός του παρτονικού καταίγισμου είναι αισθητά περιπλοκότερος με τα χαρακτηριστικά ότι είναι συναλλοίωτος, δηλαδή αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς Lorentz στον άξονα του πίδακα και περιέχει τη μάζα των παρτονίων στις συναρτήσεις διαχωρισμού για την καλύτερη περιγραφή του φαινομένου του "νεκρού κώνου" (dead cone effect). Η αρχή του καταίγισμου είναι κάθε "πόδι" του διαγράμματος Feynman της σκληρής αλληλεπίδρασης το οποίο ταυτίζεται με έγχρωμο παρτόνιο. Αυτό ονομάζεται πρόγονος (progenitor) και σύμφωνα με αυτό θα οριστεί η βάση στην οποία θα αναλυθεί ολόκληρος ο καταίγισμος γνωστή ως βάση Sudakov. Η ορμή q_i ενός σωματιδίου του καταίγισμου είναι

$$q_i = a_i p + \beta_i n + q_{Ti} \quad (6.3.4)$$

όπου p είναι η ορμή του προγόνου, n είναι ένα φωτεινές διάνυσμα το οποίο επιλέγεται έτσι ώστε να είναι σχεδόν αντιγραμμικό με το p . Το q_{Ti} είναι συνιστώσα κάθετη στα δύο άλλα διανύσματα βάσης. Τα διανύσματα βάσης ακολουθούν τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} q_{Ti} \cdot p &= 0, & p^2 &= m^2, & q_{Ti}^2 &= -\mathbf{q}_{Ti}^2 \\ q_{Ti} \cdot n &= 0, & n^2 &= 0, & n \cdot p &> m^2 \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

με \mathbf{q}_{Ti} η χωρική συνιστώσα του q_{Ti} στο σύστημα αναφοράς όπου παράγεται ο καταγισμός ($\mathbf{q}_{Ti}^2 > 0$). Με τους παραπάνω ορισμούς, υπολογίζοντας το q_i^2 βρίσκουμε τη μορφή του β_i

$$\beta_i = \frac{q_i^2 - \alpha_i^2 m^2 - q_{Ti}^2}{2\alpha_i n \cdot n}. \quad (6.3.6)$$

Ο αλγόριθμος του καταγισμού δεν παράγει τις παραμέτρους της βάσης Sudakov απευθείας αλλά 3 μεταβλητές καταγισμού. Η πρώτη είναι ο λόγος ορμής του κώνου φωτός z (light-cone momentum) όπου δεδομένης της διακλάδωσης $\tilde{i}j \rightarrow i + j$ το z ορίζεται ως

$$z = \frac{a_i}{a_{\tilde{i}j}} = \frac{n \cdot q_i}{n \cdot q_{\tilde{i}j}} \quad (6.3.7)$$

Η επόμενη μεταβλητή είναι η αξιμουθιακή γωνία φ της εγκάρσιας ορμής p_T κάθε διακλάδωσης σχετικά με την ορμή του προγόνου p η οποία ορίζεται ως

$$p_T = q_{Ti} - z q_{T\tilde{i}j}. \quad (6.3.8)$$

Η τελευταία και πιο σημαντική είναι η μεταβλητή εξέλιξης η οποία είναι αυτή που θα ιεραρχηθεί και θα παράξει αντίστοιχα αποτελέσματα με το αρχικό απλό παράδειγμα. Αντί για την γωνία, η μεταβλητή εξέλιξης είναι

$$\tilde{q}^2 = \frac{2q_i \cdot q_j + m_i^2 + m_j^2 - m_{\tilde{i}j}^2}{z(1-z)}. \quad (6.3.9)$$

Η μεταβλητή αυτή σχετίζεται με τις γωνίες μέσω της σχέσης

$$\tilde{q}^2 = \frac{2E_{\tilde{i}j}^2 (1 - \cos\theta_{ij})(1 - \cos\theta_{\tilde{i}j})^2}{(1 + \cos\theta_i)(1 + \cos\theta_j)} \quad (6.3.10)$$

όπου θ_i και θ_j είναι οι γωνίες μεταξύ των θυγατρικών σωματιδίων i, j και του προγόνου, $\theta_{\tilde{i}j}$ η γωνία μεταξύ του μητρικού σωματιδίου και του προγόνου και θ_{ij} είναι η γωνία μεταξύ των δύο θυγατρικών σωματιδίων. Παρότι ο ορισμός είναι αρκετά πιο περίπλοκος από τον ορισμό του t στο προηγούμενο παράδειγμα, για μικρές γωνίες η σχέση (6.3.10) μπορεί να γραφτεί προσεγγιστικά ως $\tilde{q} = E_{\tilde{i}j} \theta_{ij} (1 - \mathcal{O}(\theta_x^2))$. Σε κάθε διακλάδωση με θυγατρικά παρτόνια i, j και λόγο ορμής z και $(1-z)$ αντιστοιχούν δύο μεταβλητές εξέλιξης, $z\tilde{q} \approx E_i \theta_{ij}$ και $(1-z)\tilde{q} \approx E_j \theta_{ij}$ αντίστοιχα, ορίζοντας με αυτόν τον τρόπο μέγιστη γωνία κάθε επόμενης διακλάδωσης σε θ_{ij} . Η επανάληψη αυτής της διαδικασίας για πολλές διακλαδώσεις υλοποιεί την γωνιακή ιεραρχία.

Όταν η εξέλιξη του παρτονικού καταγισμού τελειώσει, δηλαδή η μεταβλητή εξέλιξης φτάσει ένα κατώτατο όριο, τα παρτόνια που αντιστοιχούν σε εξωτερικά σωματίδια και όχι διαδότες θεωρούνται ως πραγματικά σωματίδια και ξεκινάει ο υπολογισμός των συνιστωσών τους στη βάση Sudakov. Αυτό επιτυγχάνεται με ευκολία, υπολογίζοντας πρώτα τα α από τον ορισμό του z , την διατήρηση ορμής $a_{ij} = a_i + a_j$ και με $\alpha = 1$ για τους προγόνους. Αντίστοιχα τα q_T και τα β υπολογίζονται χρησιμοποιώντας διατήρηση ορμής και την συνθήκη φλοιού για των εξωτερικών σωματιδίων.

Η δυναμική του παρτονικού καταγισμού εξαρτάται από την πιθανότητα διακλάδωσης

$$d\mathcal{P}_{\tilde{i}j \rightarrow ij} = \frac{a_s}{2\pi} \frac{d\tilde{q}^2}{\tilde{q}^2} dz P_{\tilde{i}j \rightarrow ij}(z, \tilde{q}) \quad (6.3.11)$$

και την πιθανότητα να μη γίνει διακλάδωση από μία κλίμακα \tilde{q}_h μέχρι \tilde{q} , τους συντελεστές μορφής Sudakov

$$\Delta_{\tilde{i}j \rightarrow ij}(\tilde{q}_h, \tilde{q}) = \exp\left\{ - \int_{\tilde{q}}^{\tilde{q}_h} \frac{d\tilde{q}'^2}{\tilde{q}'^2} \int dz \frac{a_s(z, \tilde{q}')}{2\pi} P_{\tilde{i}j \rightarrow ij}(z, \tilde{q}') \Theta(\mathbf{p}_T^2 > 0) \right\} \quad (6.3.12)$$

όπου η συνάρτηση Θ περιορίζει τον φασικό χώρο σε πραγματικές εγκάρσιες ορμές. Η μόνη διαφορά με τις γενικές αναφορές των παραπάνω ενοτήτων είναι ότι οι συναρτήσεις διαχωρισμού περιέχουν μέσα και την μάζα των σωματιδίων.

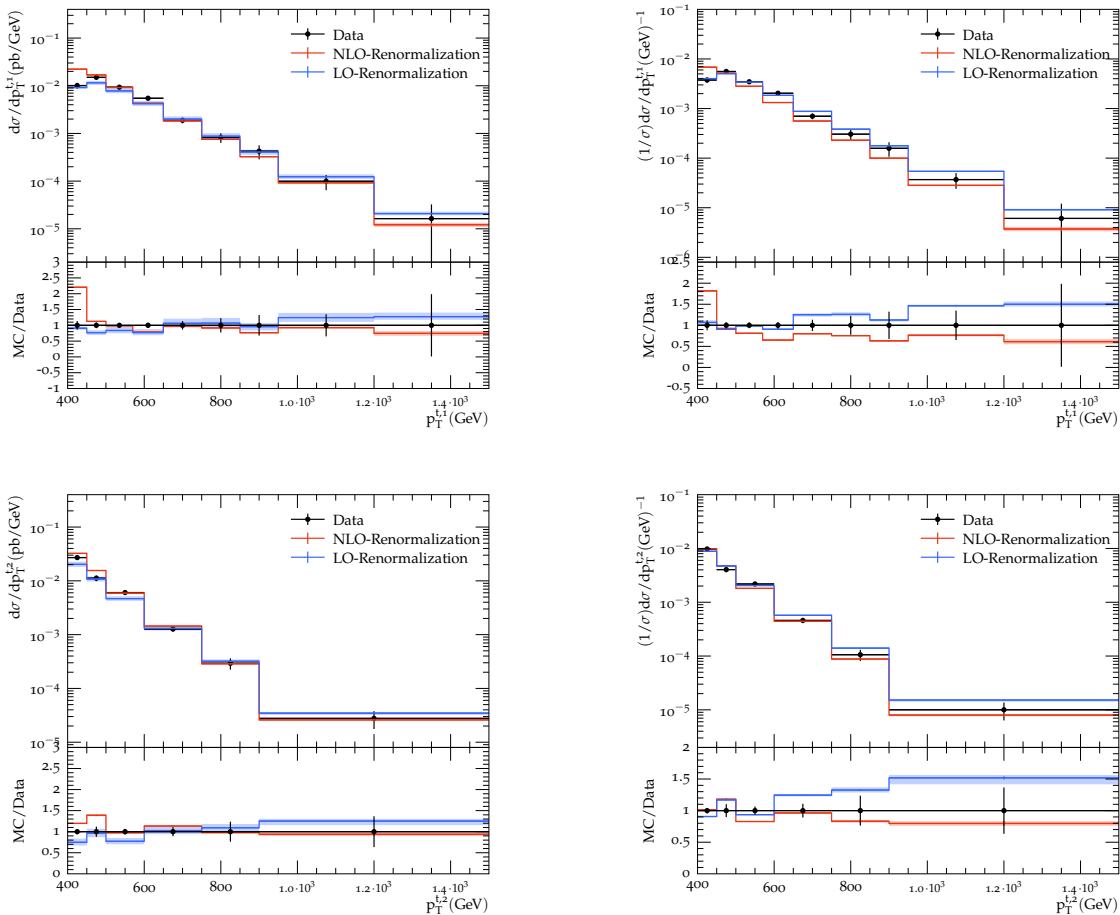
6.4 Αποτελέσματα Προσομοίωσης

Η προσομοίωση υλοποιούνται με τις παραπάνω ρυθμίσεις για μεταβολές στις κλίμακες μ_R και μ_F καθώς και για διαφορετικές ΣΚΠ με μεταβολές στην σταθερά ισχυρής αλληλεπίδρασης α_s . Γίνεται σύγκριση για στοιχεία μήτρας υπολογισμένα σε πρώτη τάξη αντιστοιχισμένα σε παρτονικό καταγισμό (θα αναφέρεται ως LO) με στοιχεία μήτρας υπολογισμένα σε δεύτερη τάξη αντιστοιχισμένα σε παρτονικό καταγισμό (NLO).

6.4.1 Μεταβολές Κλίμακας

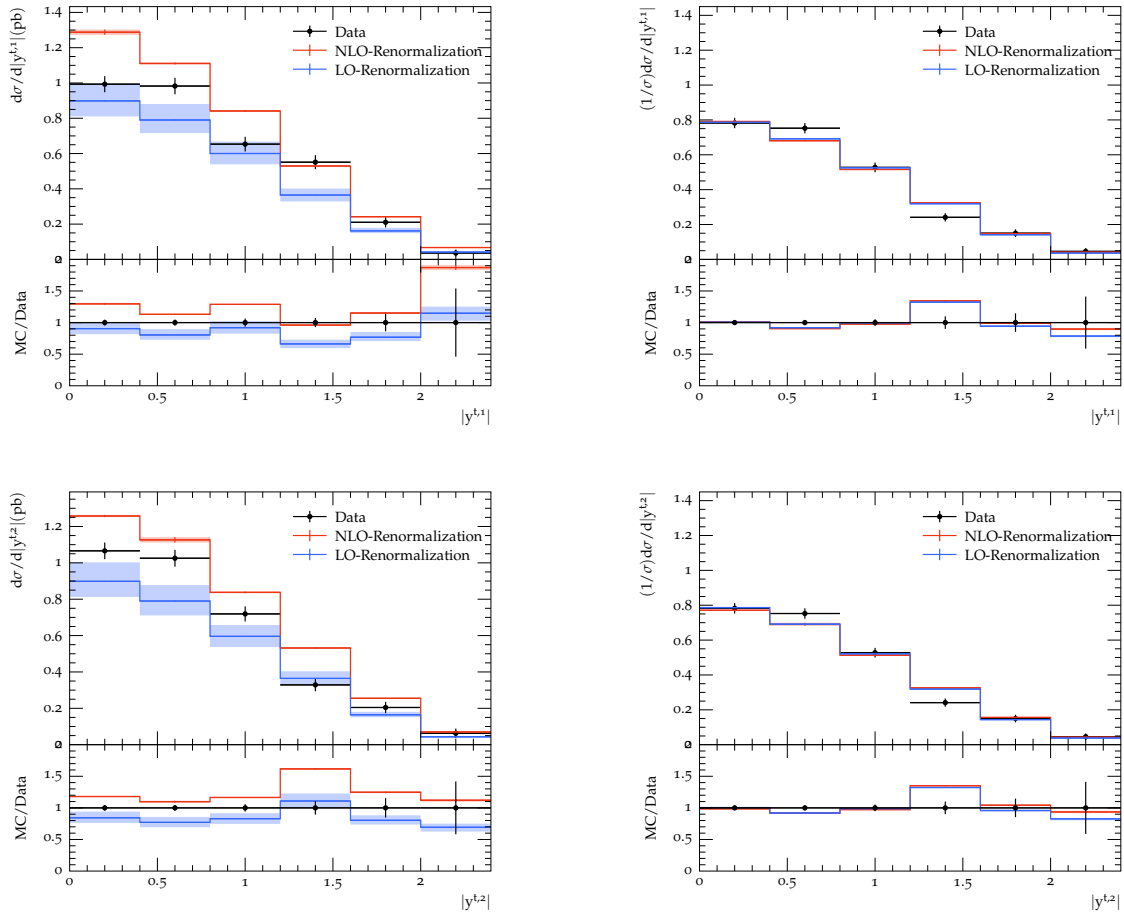
Κλίμακα Επανακανονικοποίησης

Οι αβεβαιότητα που προκύπτει από τη διακύμανση της κλίμακας επανακανονικοποίησης μ_R δίνει ένα μέτρο για τις συνεισφορές όρων μεγαλύτερης τάξης στην α_s . Οι φυσικές ποσότητες δεν εξαρτώνται από την κλίμακα επανακανονικοποίησης η οποία εισέρχεται λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας των διαταρακτικών υπολογισμών. Συνεπώς η εξάρτηση από την κλίμακα θα πρέπει να μειώνεται όσο αυξάνεται η τάξη του υπολογισμού. Παρακάτω γίνεται σύγκριση της αβεβαιότητας λόγω επανακανονικοποίησης μεταξύ ακρίβειας LO και NLO.



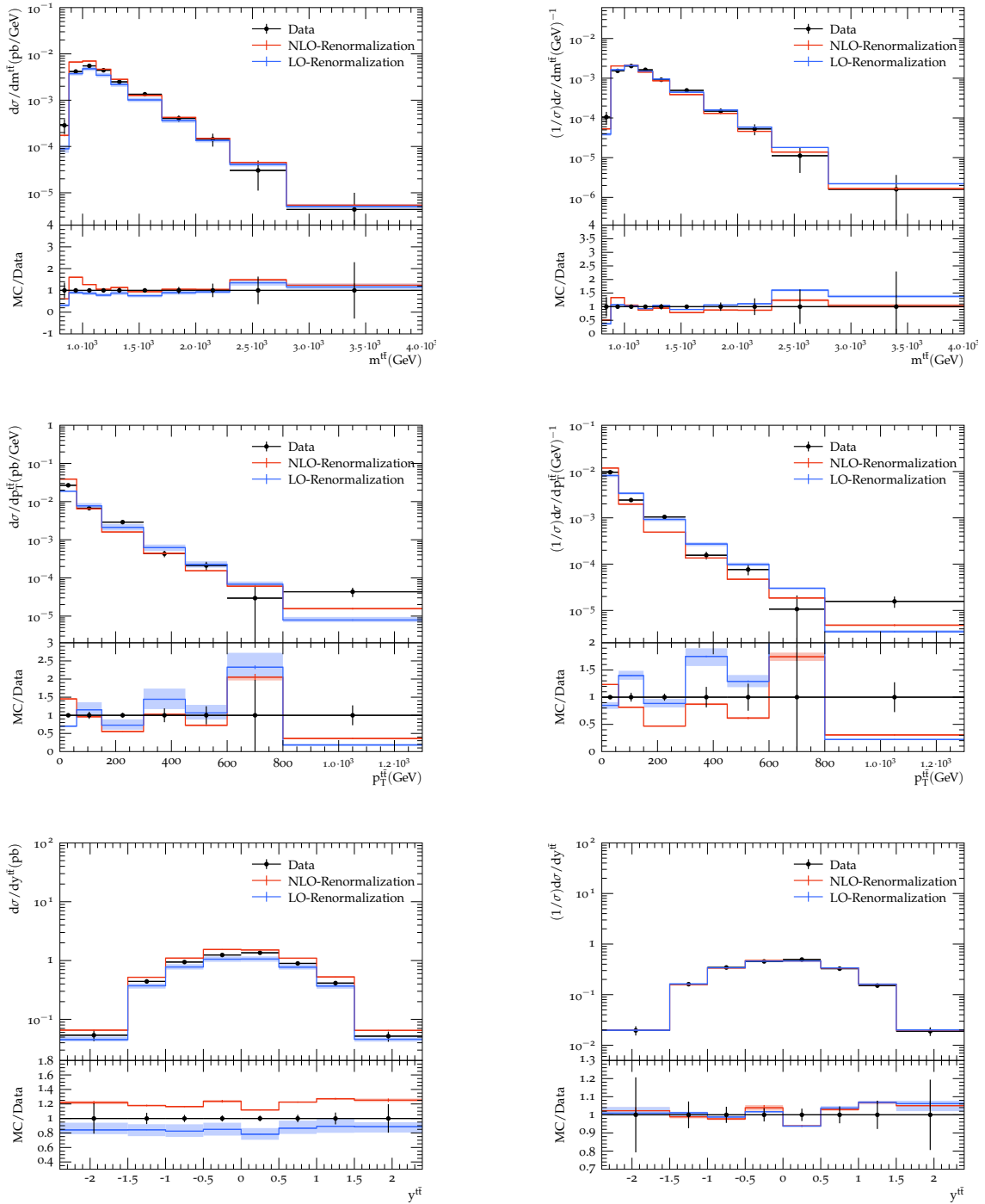
Σχήμα 6.6: Οι ενεργές διαφορικές διατομές των τοπ κουάρκ συναρτήσει της εγκάρσιας ορμής. Οι γραμμές (πάνω, κάτω) αντιστοιχούν στην ορμή του τοπ με τη μεγαλύτερη ορμή και με την δεύτερη μεγαλύτερη ορμή. Οι στήλες (αριστερά, δεξιά) αντιστοιχούν στην απόλυτη και στην κανονικοποιημένη ενεργό διατομή.

Οι εγκάρσιες ορμές του πρώτου και του δεύτερου τοπ κουάρκ (Σχήμα 6.6) επιβεβαιώνουν το γεγονός πως η απροσδιοριστία λόγω της κλίμακας επανακανονικοποίησης είναι μειωμένη για τους NLO υπολογισμούς. Οι ταχύτητες των τοπ (Σχήμα 6.7) αναδεικνύουν τη διαφορά ακόμα καλύτερα με την πρώτη τάξη να έχει εμφανώς μεγαλύτερη απροσδιοριστία από τη δεύτερη. Οι κανονικοποιημένες ενεργές διατομές περιμένουμε να είναι



Σχήμα 6.7: Οι ενεργές διαφορικές διατομές των τοπ κουάρκ συναρτήσεως της ταχύτητας. Οι γραμμές (πάνω, κάτω) αντιστοιχούν στην ταχύτητα του τοπ με τη μεγαλύτερη και με την δεύτερη μεγαλύτερη ταχύτητα αντίστοιχα. Οι στήλες (αριστερά, δεξιά) αντιστοιχούν στην απόλυτη και στην κανονικοποιημένη ενεργό διατομή.

λιγότερο ευαίσθητες στις μεταβολές της κλίμακας καθώς είναι πιο ποιοτικά μεγέθη. Αυτό επιβεβαιώνεται για τις ταχύτητες. Οι κανονικοποιημένες ορμές των εγκάρσιων ορμών παρουσιάζουν ευαισθησία στην κλίμακα γεγονός που υποδεικνύει πως οι χβαντικές διορθώσεις επηρεάζουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της κατανομής της. Οι ενεργές διατομές για τα μεγέθη του ζεύγους (Σχήμα 6.8) ακολουθούν το ίδιο μοτίβο. Η αναλλοίωτη μάζα και η ταχύτητα του ζεύγους παρουσιάζουν μικρή ευαισθησία στις μεταβολές της κλίμακας της επανακανονικοποίησης. Η εγκάρσια ορμή του ζεύγους είναι το μέγεθος που εμφανίζει την μεγαλύτερη ευαισθησία ποσοτικά και ποιοτικά.

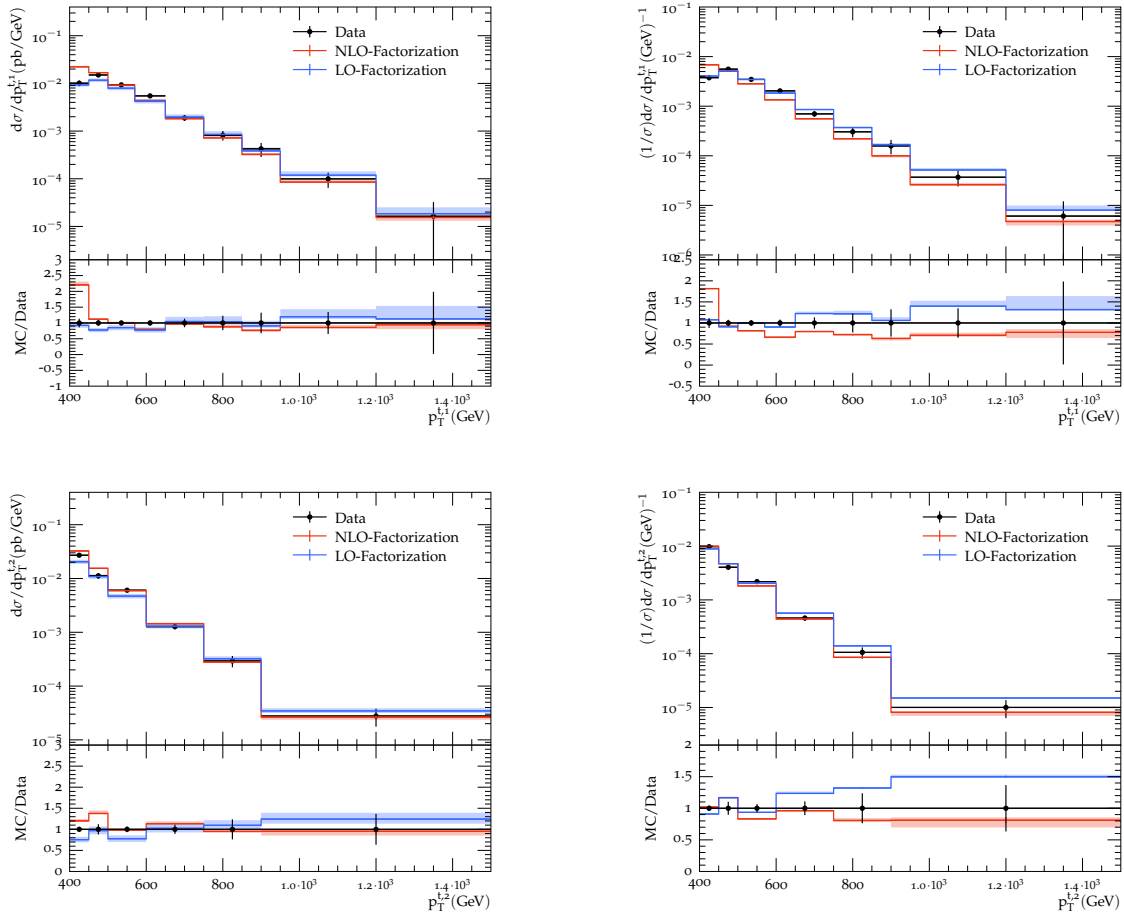


Σχήμα 6.8: Οι ενεργές διαφορικές διατομές για το ζεύγος $t\bar{t}$. Η γραμμές (1,2,3) αντιστοιχούν στην αναλλοίωτη μάζα, την εγκάρσια ορμή και την ταχύτητα του ζεύγους. Οι στήλες (αριστερά, δεξιά) αντιστοιχούν στην απόλυτη και στην κανονικοποιημένη ενεργό διατομή.

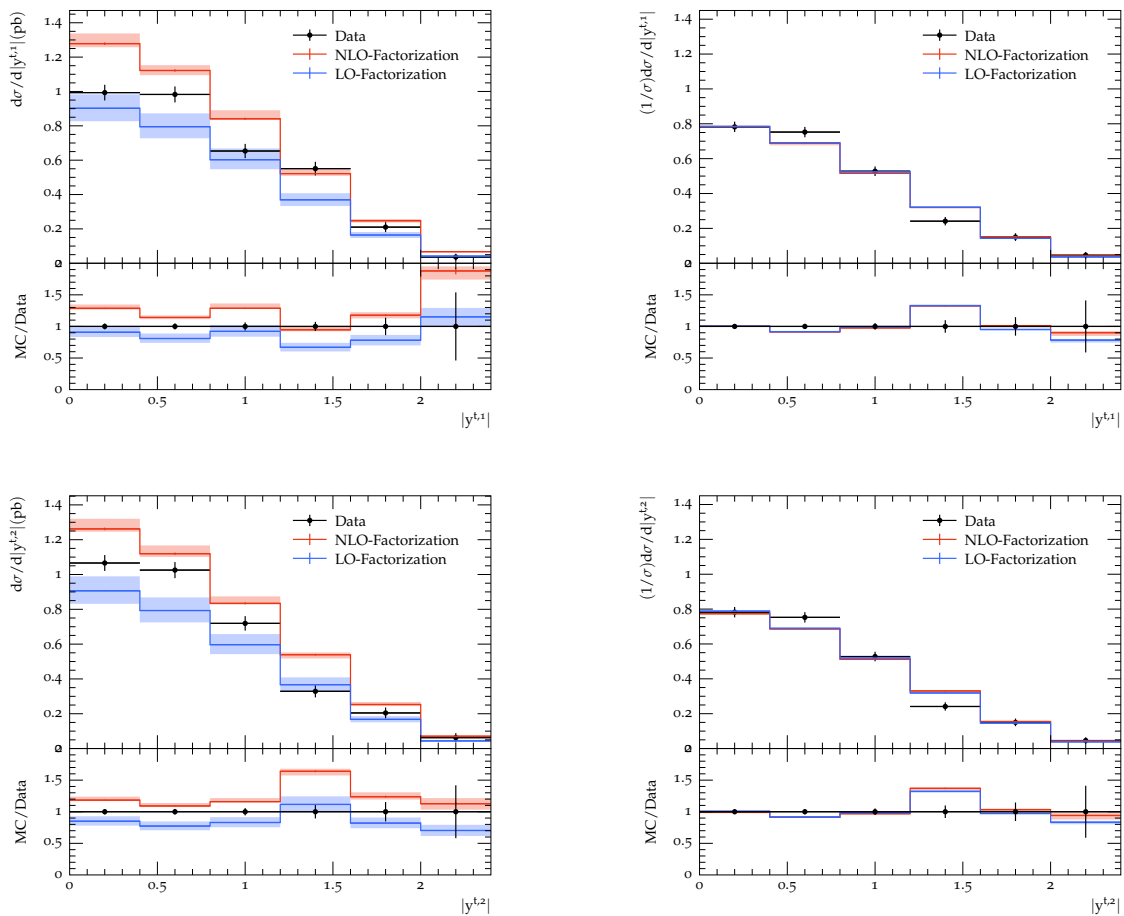
Κλίμακα Παραγοντοποίησης

Οι αβεβαιότητα λόγω μεταβολής στην κλίμακας παραγοντοποίησης μ_F δίνει ένα μέτρο για τις συνεισφορές των διπλών λογαρίθμων που προκύπτουν από τις συγγραμμικές απειρίες. Οι φυσικές ποσότητες δεν εξαρτώνται από την κλίμακα της παραγοντοποίησης η οποία εισέρχεται λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας των διαταρακτικών υπολογισμών (Leading Log, Next to Leading Log κ.ο.κ). Στην προκειμένη περίπτωση η σύγκριση μεταξύ των τάξεων δεν αναμένεται να παρουσιάσει μεγάλες διαφορές καθώς ο αλγόριθμος δεν πηγαίνει σε ακρίβεια επόμενου λογαρίθμου. Παρόλα αυτά η αντιστοίχιση του στοιχείου μήτρας με τον παρτονικό καταγισμό είναι διαφορετική γεγονός που μπορεί να επιφέρει κάποιο μικρό αποτέλεσμα. Επιπλέον σημαντική διαφορά είναι και χρήση διαφορετικής ακρίβειας ΣΚΠ που εξαρτώνται και από την κλίμακα παραγοντοποίησης.

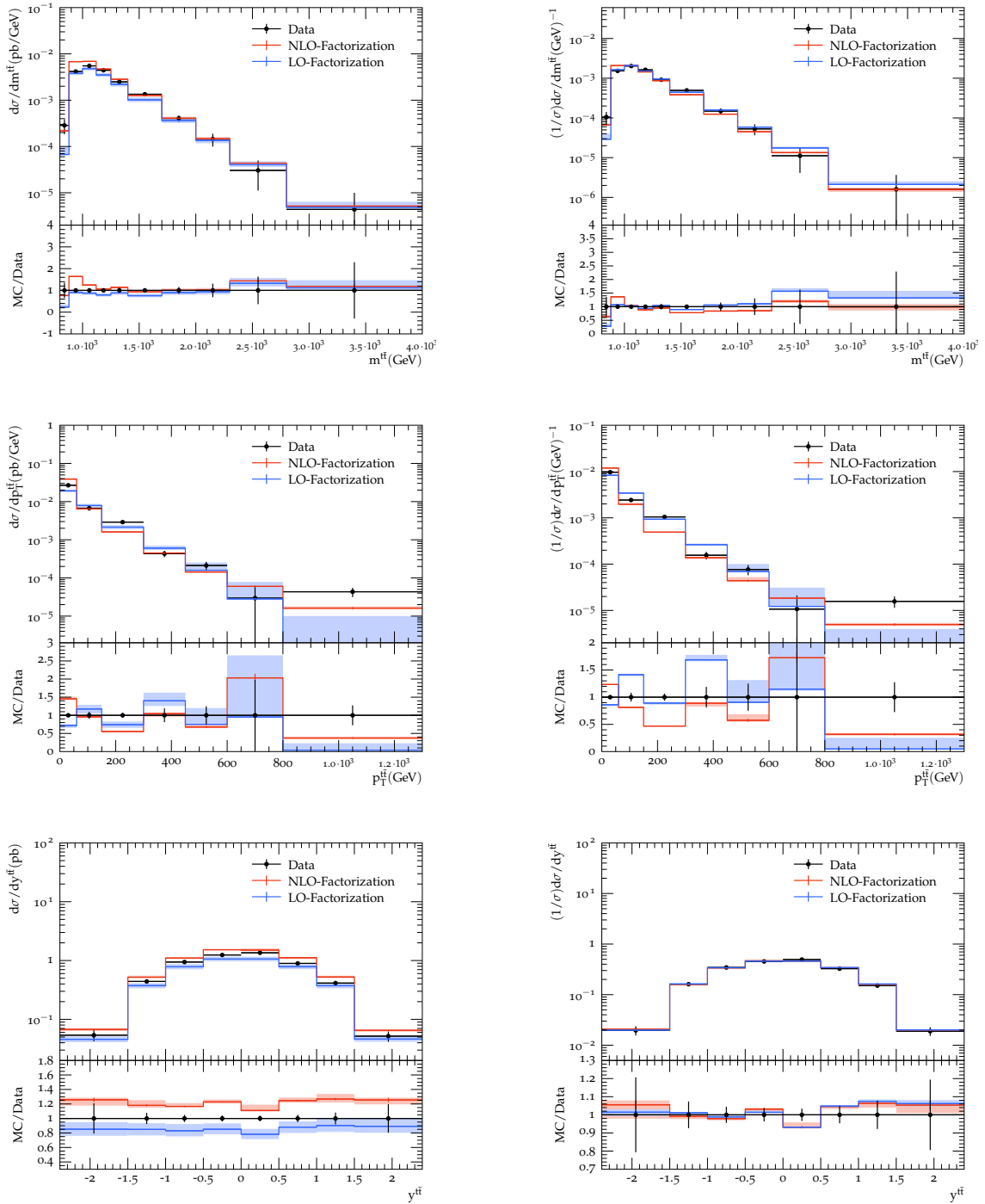
Οι εγχάρσιες ορμές (6.9) των τοπ παρουσιάζουν γενικά μεγαλύτερη ευαισθησία σε πρώτη παρά σε δεύτερη τάξη. Συγκριτικά με την κλίμακα επανακανονικοποίησης οι διακυμάνσεις επηρεάζουν περισσότερο την κανονικοποιημένη ενεργό διατομή της ορμής και μάλιστα για το δεύτερο τοπ η ζώνη αβεβαιότητας είναι μεγαλύτερη για NLO. Την ίδια τάση ακολουθούν και οι ταχύτητες (6.10) με μικρότερη όμως ευαισθησία στις επανακανονικοποιημένες ενεργές διατομές. Η μεγαλύτερη διακύμανση εμφανίζεται στα μεγέθη του ζεύγους (6.11) όπου όλες οι ενεργές διατομές επανακανονικοποιημένες και μη παρουσιάζουν διακυμάνσεις, με μακράν τις μεγαλύτερες στην εγχάρσια ορμή του ζεύγους για LO.



Σχήμα 6.9: Οι ενεργές διαφορικές διατομές των τοπ κουάρκ συναρτήσει της εγχάρσιας ορμής. Οι γραμμές (πάνω, κάτω) αντιστοιχούν στην ορμή του τοπ με τη μεγαλύτερη ορμή και με την δεύτερη μεγαλύτερη ορμή. Οι στήλες (αριστερά, δεξιά) αντιστοιχούν στην απόλυτη και στην κανονικοποιημένη ενεργό διατομή.



Σχήμα 6.10: Οι ενεργές διαφορικές διατομές των τοπ κουάρκ συναρτήσει της ταχύτητας. Οι γραμμές (πάνω, κάτω) αντιστοιχούν στην ταχύτητα του τοπ με τη μεγαλύτερη και με την δεύτερη μεγαλύτερη ταχύτητα αντίστοιχα. Οι στήλες (αριστερά, δεξιά) αντιστοιχούν στην απόλυτη και στην κανονικοποιημένη ενεργό διατομή.



Σχήμα 6.11: Οι ενεργές διαφορικές διατομές για το ζεύγος $t\bar{t}$. Η γραμμές (1,2,3) αντιστοιχούν στην αναλλοίωτη μάζα, την εγκάρσια ορμή και την ταχύτητα του ζεύγους. Οι στήλες (αριστερά, δεξιά) αντιστοιχούν στην απόλυτη και στην κανονικοποιημένη ενεργό διατομή.

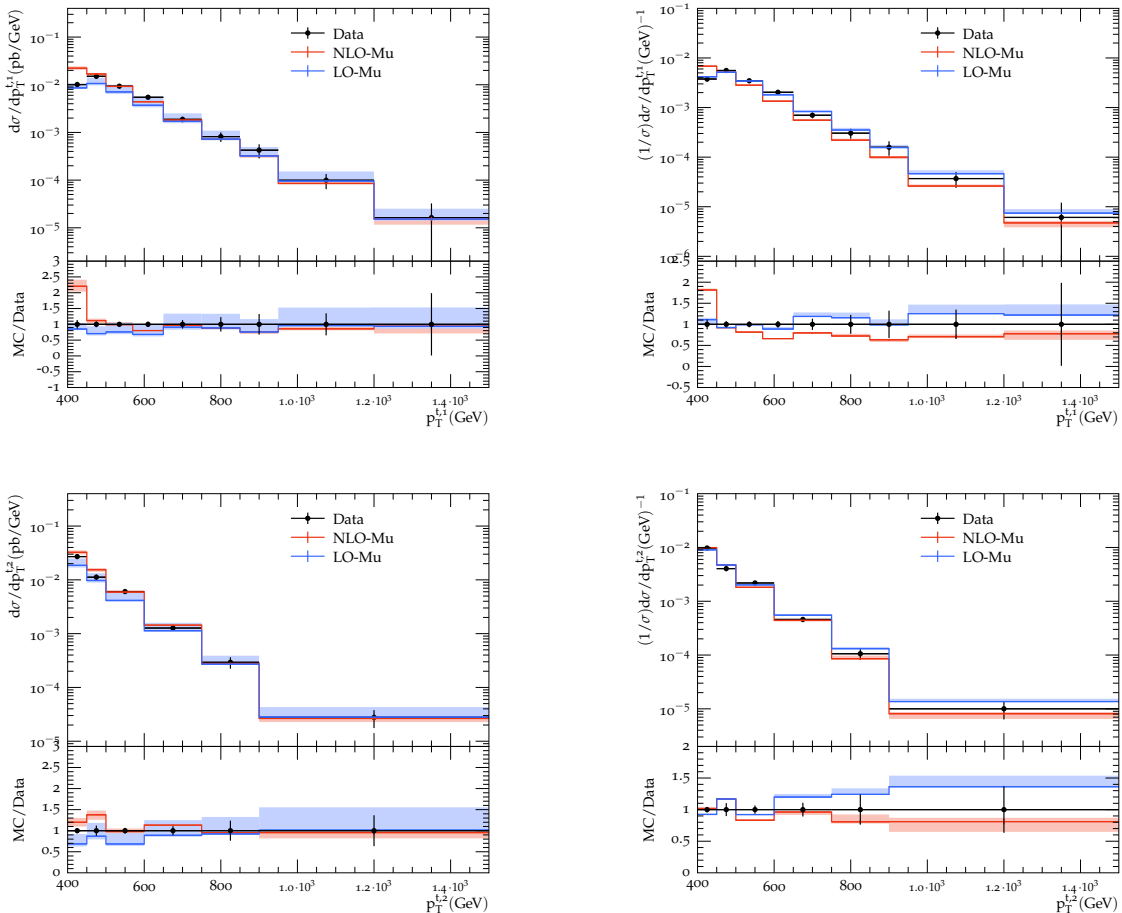
Ολική αβεβαιότητα

Για την εύρεση της συνολικής αβεβαιότητας προερχόμενη από διορθώσεις μεγαλύτερης τάξης και στο στοιχείο μήτρας και στον παρτονικό καταϊγισμό οι διακυμάνσεις των κλιμάκων μ_R, μ_F πρέπει να γίνουν αρμονικά. Ο έλεγχος αυτός θα μας δείξει αν η ακρίβεια του υπολογισμού έχει βελτιωθεί από NLO σε LO και αν το επιπλέον κόστος του NLO αξίζει.

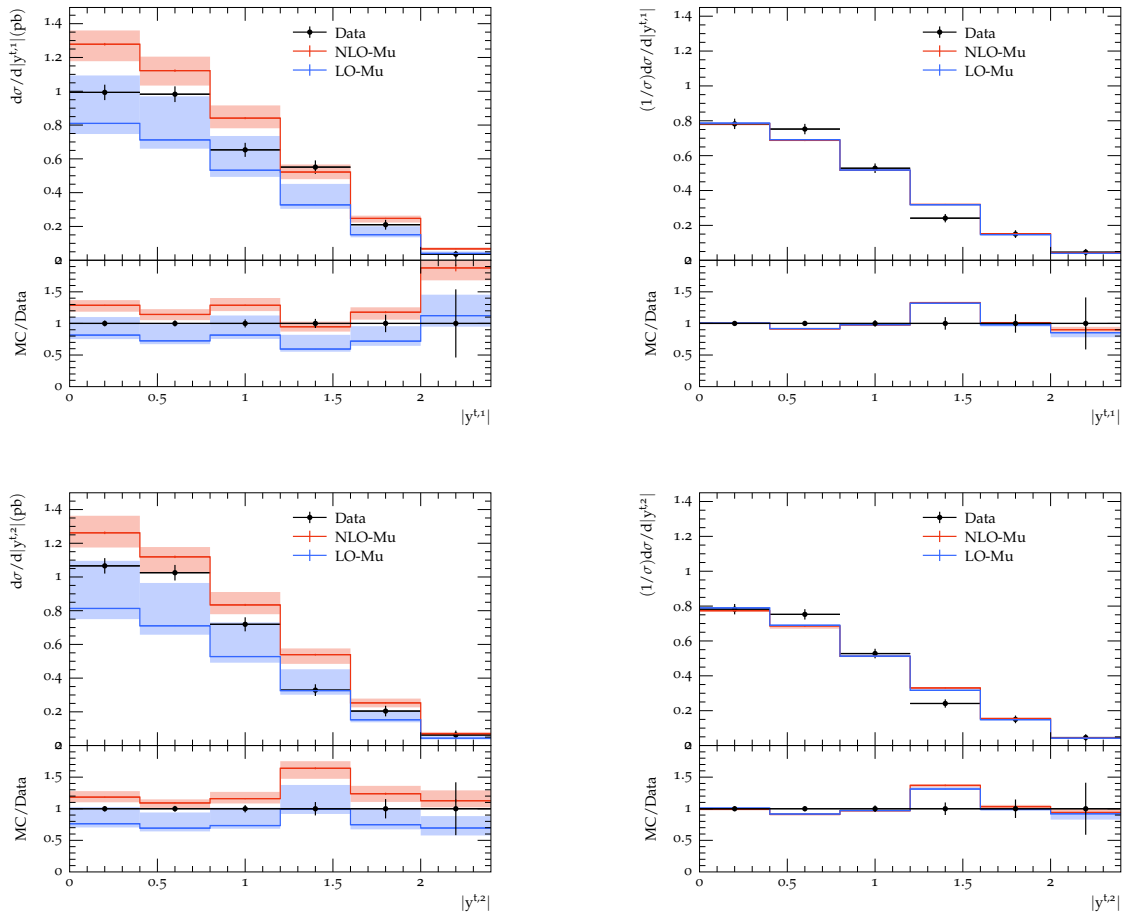
Οι εγκάρσιες ορμές του πρώτου και του δεύτερου τοπ (6.12) παρουσιάζουν γενικά αισθητά μεγαλύτερες ζώνες αβεβαιότητας για τον υπολογισμό σε LO όπως αναμενόταν. Οι μόνες εξαιρέσεις είναι η κανονικοποιημένη εγκάρσια ορμή του δεύτερου τοπ η οποία έχει κληρονομήσει την αβεβαιότητα από την κλίμακα παραγοντοποίησης και η αρχή της ενεργούς διατομής (400 - 450 GeV) για το πρώτο τοπ η οποία δεν περιγράφεται σωστά από την προσομοίωση του NLO.

Οι ταχύτητες των τοπ (6.13) έχουν την αναμενόμενη συμπεριφορά με την ζώνη αβεβαιότητας του NLO να είναι αισθηρά μικρότερη από την ζώνη του LO.

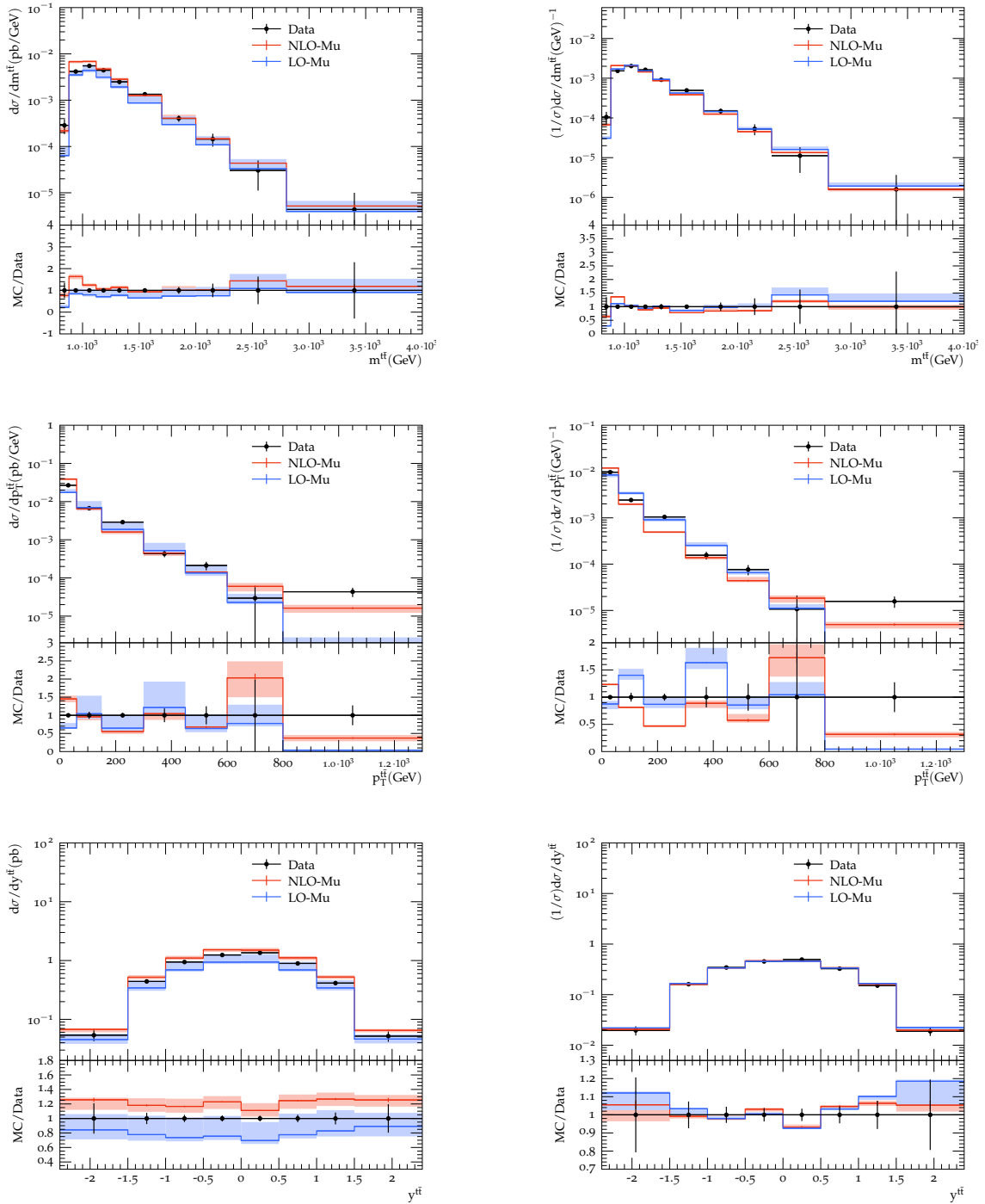
Οι ενεργές διαφορικές διατομές του ζεύγους (6.14) παρουσιάζουν και αυτές σωστή συμπεριφορά με τη μόνη εξαίρεση την ορμή του ζεύγους στα 600 - 800 GeV όπου η ζώνη του NLO είναι σημαντικά μεγαλύτερη από του LO



Σχήμα 6.12: Οι ενεργές διαφορικές διατομές των τοπ κουάρκ συναρτήσει της εγκάρσιας ορμής. Οι γραμμές (πάνω, κάτω) αντιστοιχούν στην ορμή του τοπ με τη μεγαλύτερη ορμή και με την δεύτερη μεγαλύτερη ορμή. Οι στήλες (αριστερά, δεξιά) αντιστοιχούν στην απόλυτη και στην κανονικοποιημένη ενεργό διατομή.



Σχήμα 6.13: Οι ενεργές διαφορικές διατομές των τοπ κουάρκ συναρτήσει της ταχύτητας. Οι γραμμές (πάνω, κάτω) αντιστοιχούν στην ταχύτητα του τοπ με τη μεγαλύτερη και με την δεύτερη μεγαλύτερη ταχύτητα αντίστοιχα. Οι στήλες (αριστερά, δεξιά) αντιστοιχούν στην απόλυτη και στην κανονικοποιημένη ενεργό διατομή.

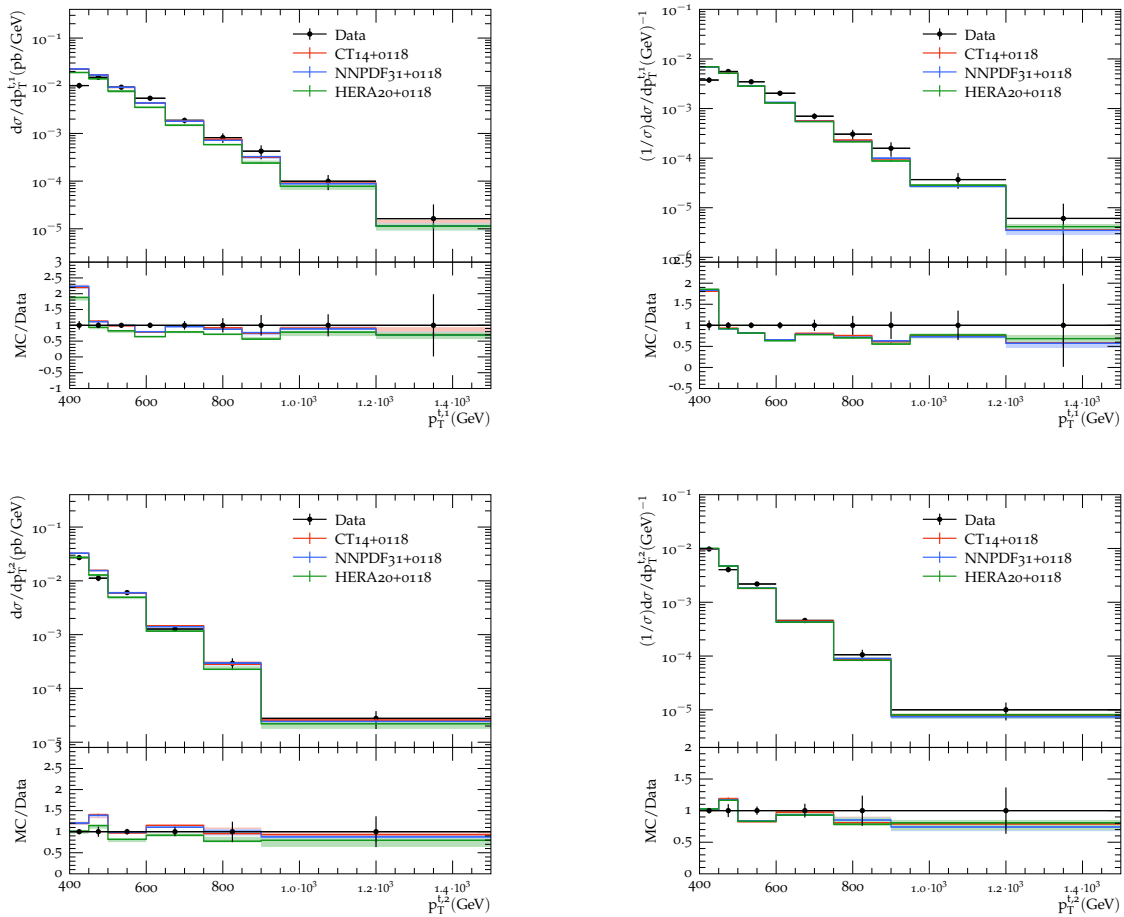


Σχήμα 6.14: Οι ενεργές διαφορικές διατομές για το ζεύγος $t\bar{t}$. Η γραμμές (1,2,3) αντιστοιχούν στην αναλλοίωτη μάζα, την εγκάρσια ορμή και την ταχύτητα του ζεύγους. Οι στήλες (αριστερά, δεξιά) αντιστοιχούν στην απόλυτη και στην κανονικοποιημένη ενεργό διατομή.

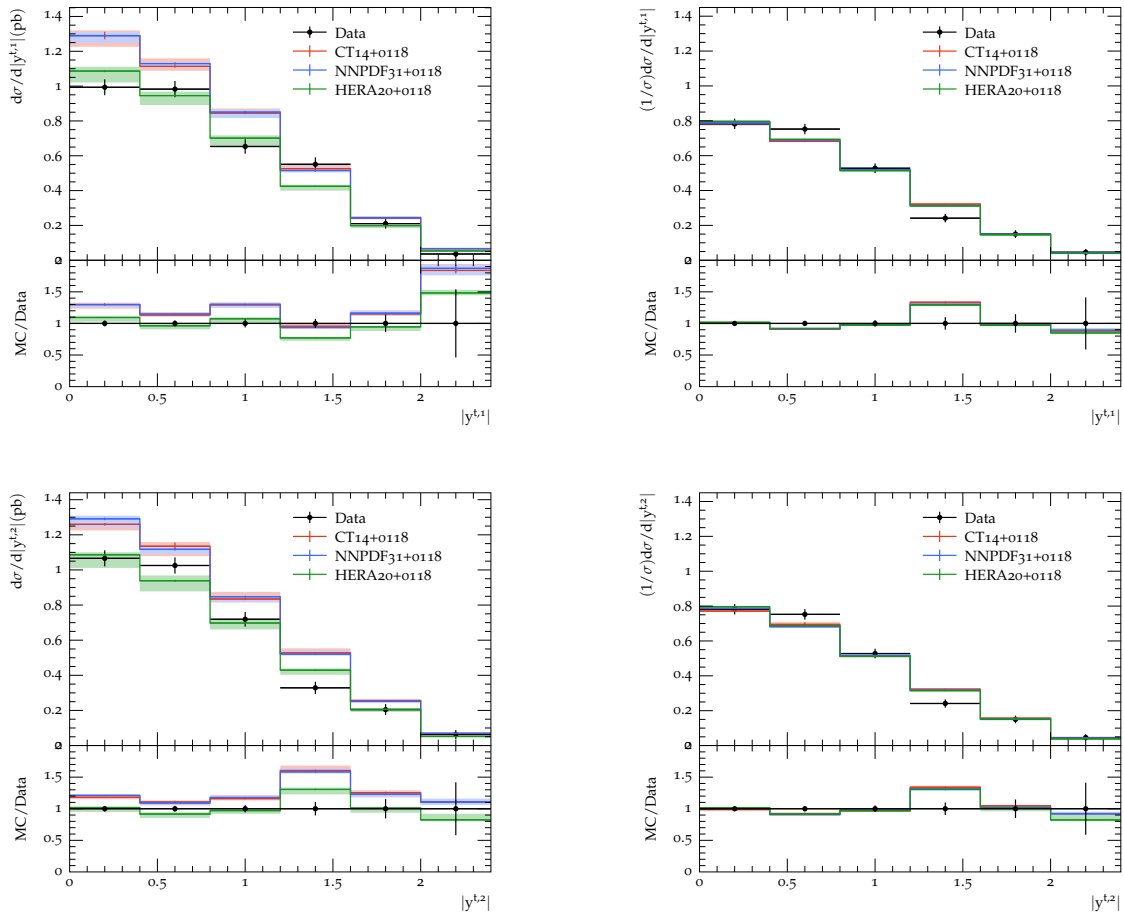
6.4.2 Εξάρτηση από τη σταθερά ισχυρής αλληλεπίδρασης

Η τελευταία αναζήτηση είναι αυτή της εξάρτησης των διαφορικών ενεργών διατομών από την ισχυρή σταθερά αλληλεπίδρασης a_s και την επίδραση διαφορετικών ΣΚΠ σε αυτήν. Οι ΣΚΠ είναι συσχετισμένες με την a_s και συνεπώς για να γίνει σωστή εκτίμηση της αβεβαιότητας τους πρέπει οι μεταβολές να συνοδεύονται με τις ΣΚΠ υπολογισμένες στην σωστή a_s . Για την παραγωγή των διαγραμμάτων (6.15, 6.16, 6.17) χρησιμοποιείται εύρος $a_s = 0.0118 \pm 0.0002$ και τρία διαφορετικά σετ ΣΚΠ, το σετ CT14 το οποίο προτείνεται για την γεννήτρια Herwig, το σετ NNPDF3.1 το οποίο χρησιμοποιεί νευρωνικά δίκτυα για την εύρεση των ΣΚΠ και το HERA2.0.

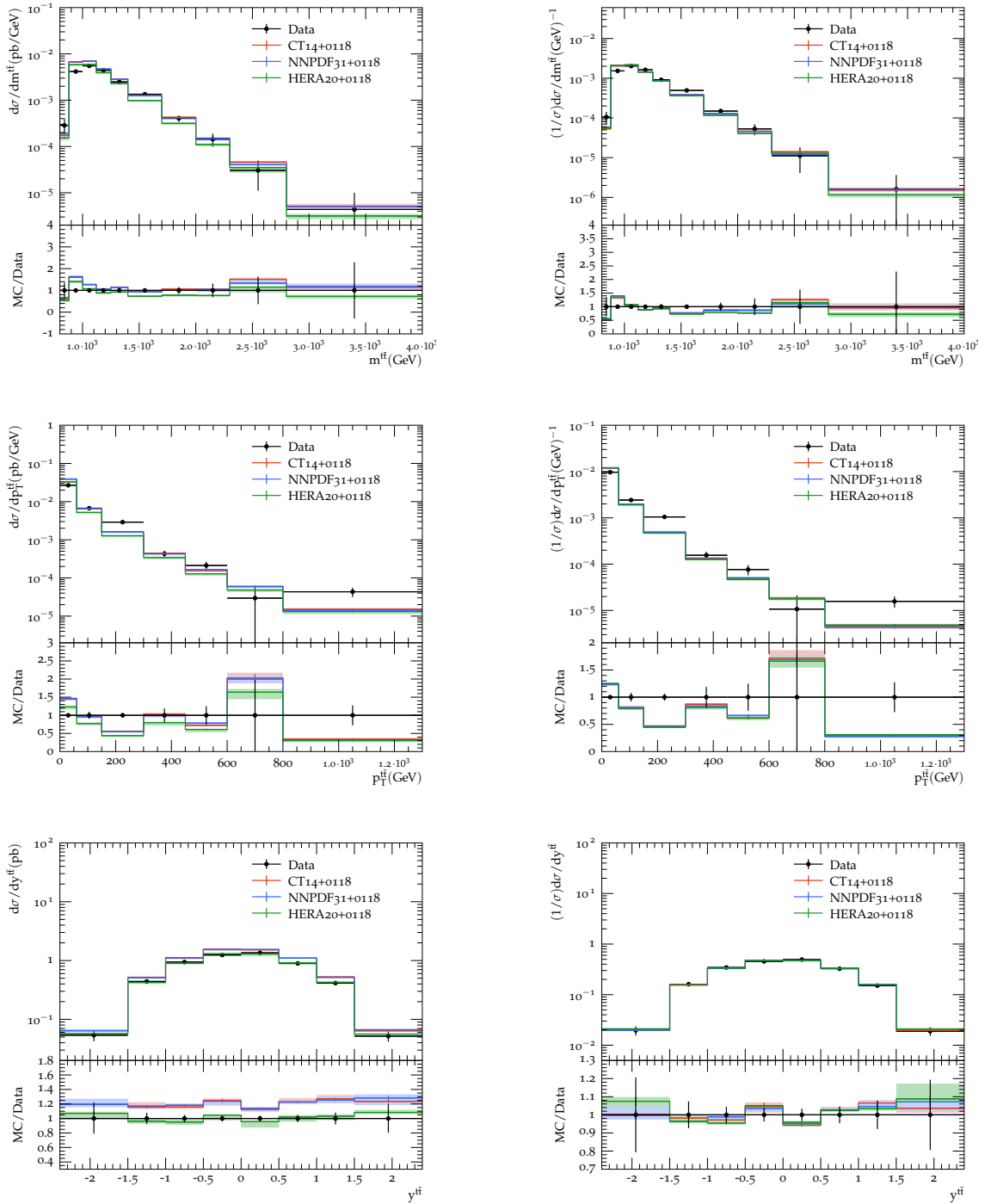
Οι βασικές παρατηρήσεις είναι δύο. Πρώτον, η αβεβαιότητα λόγω της a_s είναι μικρή σχετικά με αυτή των κλιμάκων αλλά όχι αμελητέα ειδικά για τις ταχύτητες των τοπ οι οποίες είναι και οι πιο ευαίσθητες. Δεύτερον, τα τρία σετ βρίσκονται σύμφωνα για όλα τα παρατηρήσιμα μεγέθη εκτός της ταχύτητας όπου το HERA απέχει σημαντικά. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι το HERA έχει καλύτερη συνολική συμφωνία με τα δεδομένα παρότι δεν είναι το προτεινόμενο. Περαιτέρω μελέτη των συνολικών αβεβαιοτήτων που προέρχονται από τις ΣΚΠ χρειάζεται για να βγει κάποιο τελικό συμπέρασμα.



Σχήμα 6.15: Οι ενεργές διαφορικές διατομές των τοπ κουάρκ συναρτήσει της εγκάρσιας ορμής. Οι γραμμές (πάνω, κάτω) αντιστοιχούν στην ορμή του τοπ με τη μεγαλύτερη ορμή και με την δεύτερη μεγαλύτερη ορμή. Οι στήλες (αριστερά, δεξιά) αντιστοιχούν στην απόλυτη και στην κανονικοποιημένη ενεργό διατομή.



Σχήμα 6.16: Οι ενεργές διαφορικές διατομές των τοπ κουάρκ συναρτήσεως της ταχύτητας. Οι γραμμές (πάνω, κάτω) αντιστοιχούν στην ταχύτητα του τοπ με τη μεγαλύτερη και με την δεύτερη μεγαλύτερη ταχύτητα αντίστοιχα. Οι στήλες (αριστερά, δεξιά) αντιστοιχούν στην απόλυτη και στην κανονικοποιημένη ενεργό διατομή.



Σχήμα 6.17: Οι ενεργές διαφορικές διατομές για το ζεύγος $t\bar{t}$. Η γραμμές (1,2,3) αντιστοιχούν στην αναλλοίωτη μάζα, την εγκάρσια ορμή και την ταχύτητα του ζεύγους. Οι στήλες (αριστερά, δεξιά) αντιστοιχούν στην απόλυτη και στην κανονικοποιημένη ενεργό διατομή.

6.4.3 Σύγκριση των Αποτελεσμάτων

Είναι σημαντικό να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης στην προτεινόμενη κλίμακα και σταθερά ισχυρής σύζευξης. Αρχικά ο NLO υπολογισμός βρίσκεται σε καλύτερη συμφωνία με το πείραμα από τον LO με μικρές εξαιρέσεις. Οι δύο υπολογισμοί είναι επίσης σε καλύτερη συμφωνία με το πείραμα από όλες τις προσομοιώσεις της ανάλυσης [1] εκτός από την διαφορική ενεργό διατομή της ορμής του ζεύγους.

Όσον αφορά την εγκάρσια ορμή των τοπ ο NLO υπολογισμός δεν επιβεβαιώνει την ανάλυση του CMS καθώς οι ενεργές διατομές στην ισχυρά προωθημένη περιοχή συμπίπτουν με το πείραμα ενώ οι κανονικοποιημένες ενεργές διατομές είναι μικρότερες αντί για μεγαλύτερες.

Η ταχύτητα των τοπ είναι μεγαλύτερη για τον NLO υπολογισμό όπως και στην βιβλιογραφία, με μικρότερη όμως απόκλιση από το πείραμα.

Ο υπολογισμός της αναλλοίωτης μάζας του ζεύγους δεν εμφανίζει αποκλίσεις από το πείραμα. Η ταχύτητα του ζεύγους συμβαδίζει επίσης ικανοποιητικά και δεν υπάρχουν αντιφάσεις με την ανάλυση του CMS. Η ορμή του ζεύγους παρουσιάζει σημαντικές αποκλίσεις. Λόγω των μεγάλων αβεβαιοτήτων είναι δύσκολο να αποφανθούμε αν η απόκλιση αυτή υποδεικνύει κάποια πραγματική διαφορά με την θεωρία.

Όσον αφορά τις αβεβαιότητες, φαίνεται πως το NLO στοιχείο πίνακα επαρκεί και δεν υπάρχουν σημαντικές συνεισφορές μεγαλύτερης τάξης στον υπολογισμό. Οι μεγαλύτερες αβεβαιότητες έρχονται από την παρτονικό καταίγισμο και τις ΣΚΠ. Στην περίπτωση του παρτονικού καταίγισμού οι λογαριθμικές συνεισφορές μεγαλύτερης τάξης επηρεάζουν πέρα από τον ρυθμό και το σχήμα των διαφορικών ενεργών διατομών. Συνεπώς η δημιουργία και η ενσωμάτωση παρτονικών καταίγισμών με ακρίβεια NLL θα μείωνε σημαντικά τις αβεβαιότητες. Στο κομμάτι των ΣΚΠ θα ήταν ενδιαφέρουσα η έρευνα του γιατί το HERA20 έχει καλύτερη συμφωνία με το πείραμα από το CT14 για το οποίο η γεννήτρια Herwig έχει βελτιστοποιηθεί.

Σχετική Βιβλιογραφία: [1], [32], [33], [34], [35], [36], [31], [37]

Κεφάλαιο 7

Σύνοψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία ασχοληθήκαμε με τις προσομοιώσεις του ζεύγους $t\bar{t}$ στην προωθημένη περιοχή ($p_T > 400 \text{ GeV}$) από τις οποίες εκτιμήσαμε θεωρητικές απροσδιοριστίες και συγκρίναμε με πειραματικά δεδομένα και προηγούμενες προσομοιώσεις [1]. Χρησιμοποιώντας την γεννήτρια Herwig 7.2.2 έγιναν υπολογισμοί με LO και NLO στοιχείο μήτρας αντιστοιχισμένοι με παρτονικό καταίγισμο με ιεραρχία γωνίας (angular ordered). Οι προσομοιώσεις είχαν γενικά καλύτερη σύγκλιση με αυτή της μελέτης του CMS και δεν επιβεβαίωσαν την "σκληρή" συμπεριφορά του Monte Carlo στις μεγάλες ενέργειες η οποία είχε αναφερθεί.

Στο θέμα των απροσδιοριστιών, δείξαμε ξεκάθαρα πως οι NLO υπολογισμοί είναι σημαντικά λιγότερο ευαίσθητοι στις διακυμάνσεις των αφύσικων κλιμάκων της θεωρίας από τους LO και ότι η κύρια συνεισφορά έρχεται από την ακρίβεια του παρτονικού καταίγισμου. Επιπροσθέτως, εκτιμήθηκε η συνεισφορά της αβεβαιότητας στην ισχυρή σταθερά σύζευξης a_s για διαφορετικές NLO συναρτήσεις κατανομής παρτονίων. Παρότι οι διαφορές στην απροσδιοριστία δεν ήταν σημαντικές παρατηρήσαμε ότι το HERA20 είχε καλύτερη σύγκλιση με το πείραμα γεγονός που χρειάζεται περαιτέρω έρευνα καθώς η γεννήτρια Herwig 7.2 έχει βελτιστοποιηθεί για το CT14.

Τέλος, πέρα από το ερευνητικό κομμάτι της εργασίας, υφάναμε ένα θεωρητικό νήμα γύρω από την θεωρία πίσω από τη λειτουργία τέτοιων προσομοιώσεων. Ξεκινώντας από τα πολύ βασικά της σχετικιστικής χβαντομηχανικής και της θεωρίας πεδίου, έγινε μία συνοπτική εισαγωγή την θεωρία βαθμίδας και την μεταβολή της σταθεράς αλληλεπίδρασης για την χβαντική χρωμοδυναμική. Επιπλέον μελετήσαμε την δομή του πρωτονίου μέσα από τη σκέδαση ηλεκτρονίου πρωτονίου με εξαιρετικά αναλυτικό τρόπο.

Παράρτημα Α

Βασικά Θεωρίας Ομάδων

A.1 Ομάδα SU(N)

Η ομάδα SU(N) είναι μια ομάδα Lie που απαρτίζεται από τους μοναδιαίους πίνακες με ορίζουσα 1. Στη φυσική κύριο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι μετασχηματισμοί οι οποίοι συνδέονται άρρηκτα με τις συμμετρίες.

Ένας μοναδιαίος μετασχηματισμός μπορεί να γραφτεί στην εκθετική μορφή $U = e^{iH} = e^{i\alpha_a T_a}$ με $\alpha_a \in \mathbb{C}$ και με T_a πίνακες γνωστοί ως γεννήτορες. Γνωρίζοντας πως $\det(U) = 1$

$$\frac{d(\det U)}{d\alpha} = \text{Tr}\{adj(U)\frac{dU}{d\alpha}\} \Rightarrow \text{Tr}\{det(U)U^{-1}\frac{dU}{d\alpha}\} = \text{Tr}\{det(U)U^{-1}i\alpha_a T_a e^{i\alpha_a T_a}\} \Rightarrow$$
$$\text{Tr}\{U^{-1}i\alpha_a T_a U\} = \text{Tr}\{i\alpha_a T_a\} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Tr}\{T_a\} = 0}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση Jacobi $\frac{d(\det U)}{d\alpha} = \text{Tr}\{adj(U)\frac{dU}{d\alpha}\}$ και η ταυτότητα $adj(U) = det(U)U^{-1} = U^{-1}$.

Για $\alpha \ll 1$ έχουμε έναν απειροστό μετασχηματισμό $U = \mathbb{1} + i\alpha_a T_a$ κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξης. Εφόσον $U^\dagger U = \mathbb{1}$:

$$U^\dagger U = (\mathbb{1} - i\alpha_a^* T_a^\dagger)(\mathbb{1} + i\alpha_a T_a) = \mathbb{1} - i\alpha_a^* T_a^\dagger + i\alpha_a T_a + \alpha_a^* T_a^\dagger \alpha_a T_a \Rightarrow \mathbb{1} = \mathbb{1} - i\alpha_a^* T_a^\dagger + i\alpha_a T_a \Rightarrow \boxed{\alpha_a T_a = \alpha_a^* T_a^\dagger}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως ο πίνακας H είναι ερμιτιανός πίνακας με μηδενικό ίχνος. Παρατηρούμε επίσης πως οι δύο παραπάνω ιδιότητες μειώνουν τις ελεύθερες παραμέτρους του γενικού μιγαδικού πίνακα από $2N^2$ σε $N^2 - 1$ καθώς η ερμιτιανότητα τους μειώνει στη μέση (ισχύει $a_{ij} + ib_{ij} = a_{ji} - ib_{ji}$) και η συνθήκη για το ίχνος μειώνει περαιτέρω κατά μία παράμετρο.

A.2 Πίνακες Gell-Mann

Κατά αναλογία με τη βάση στους διανυσματικούς χώρους, στις ομάδες υπάρχουν στοιχεία της ομάδας τα οποία ονομάζονται γεννήτορες τα οποία αρκούν για να παράξουν ολόκληρη την ομάδα. Οι γεννήτορες T_j ακολουθούν την άλγεβρα $[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$, όπου f_{abc} ονομάζονται σταθερές δομής. Εξ ορισμού είναι φανερό πως οι σταθερές είναι αντισυμμετρικές στην εναλλαγή δεικτών $f_{abc} = -f_{bac}$. Σε οποιαδήποτε θεμελιώδη αναπαράσταση της ομάδας SU(N) η άλγεβρα των γεννητόρων ακολουθεί τη σχέση $\text{Tr}\{T_a T_b\} = C\delta_{ab}$ (όμοια με σχέση ορθογωνιότητας στις διανυσματικές βάσεις). Συνεπώς,

$$f_{abc} = \frac{1}{iC}\text{Tr}\{[T_a, T_b]T_c\}$$

δηλαδή οι συντελεστές δομής είναι αντισυμμετρική στις περιττές αντιμεταθέσεις δεικτών.

Ας εξειδικεύσουμε τώρα για $N=3$ όπου έχουμε και την ομάδα $SU(3)$ που μας ενδιαφέρει. Η γενική μορφή του πίνακα H είναι:

$$H = \begin{pmatrix} a & c + id & e + if \\ c - id & b & g + ih \\ e - if & g - ih & -a - b \end{pmatrix}$$

όπου οι παράμετροι του πίνακα είναι 8 πραγματικές μεταβλητές και άρα είναι προφανές πως κάθε τέτοιος πίνακας μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός 8 πινάκων.

$$H = c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \dots + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 \alpha_i T_i$$

Για να εμφανιστούν οι γνωστοί πίνακες Gell-Mann εφαρμόζουμε το παρακάτω αλγεβρικό κόλπο

$$\begin{aligned} T_3 &\rightarrow T'_3 = T_3 - T_8 \\ T_8 &\rightarrow T'_8 = T_3 + T_8 \end{aligned}$$

και κανονικοποιούμε $Tr\{T_a T_b\} = \frac{1}{2} \delta_{ab}$. Έτσι καταλήγουμε στους γεννήτορες της $SU(3)$ στην θεμελιώδη αναπαράσταση.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

όπου τώρα $T_a = \frac{1}{2} \lambda_a$. Οι συντελεστές δομής μπορούν να υπολογιστούν απευθείας από τις αντιμεταθετικές σχέσεις και είναι:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1 \\ f_{147} &= f_{165} = f_{246} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2} \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

- [1] Measurement of differential $t\bar{t}$ production cross sections using top quarks at large transverse momenta in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV. *Phys. Rev. D*, 103:052008, Mar 2021.
- [2] Frank Wilczek. Nobel lecture: Asymptotic freedom: From paradox to paradigm. *Rev. Mod. Phys.*, 77:857–870, Sep 2005.
- [3] Tobias Osborne. Notes on Relativistic Quantum Field Theory. <https://github.com/avstjohn/qft/blob/master/QFT.pdf>, 2021.
- [4] David Tong. Quantum Field Theory. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/qft.pdf>, 2006-2007.
- [5] Tom Lancaster and Stephen J Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, Oxford, 2014.
- [6] Στέφανος Α. Τραχανάς. *Σχετικιστική Κβαντομηχανική; Β' Εκδ.* Π.Ε.Κ, 2016.
- [7] Gerard 't Hooft and M. J. G. Veltman. DIAGRAMMAR. *NATO Sci. Ser. B*, 4:177–322, 1974.
- [8] M. Robinson, K. Bland, G. Cleaver, and J. Dittmann. A simple introduction to particle physics, 2008.
- [9] Aude Gehrmann-De Ridder Matthias R. Gaberdiel. Quantum field theory ii.
- [10] Richard P. Feynman and James M. Cline. Feynman lectures on the strong interactions, 2020.
- [11] Δ.Σπύρος. Εισαγωγή στην επανακανονικοποίηση της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής και χρωμοδυναμικής.
- [12] Panos Christakoglou. Lectures on quantum chromodynamics, 2015.
- [13] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [14] Alexandre Deur, Stanley J. Brodsky, and Guy F. de Téramond. The qcd running coupling. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 90:1–74, Sep 2016.
- [15] Michelangelo L. Mangano. Introduction to QCD. In *1998 European School of High-Energy Physics*, pages 53–97, 1998.
- [16] F. Halzen and Alan D. Martin. *QUARKS AND LEPTONS: AN INTRODUCTORY COURSE IN MODERN PARTICLE PHYSICS*. 1984.
- [17] R. K. Ellis, W. J. Stirling, and B. R. Webber. *Deep inelastic scattering*, page 86–156. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology. Cambridge University Press, 1996.
- [18] P.A. Zyla et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020.
- [19] Ulrich Husemann. Top-quark physics: Status and prospects. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 95:48–97, Jul 2017.
- [20] Scott Willenbrock. The Standard model and the top quark. *NATO Sci. Ser. II*, 123:1–41, 2003.
- [21] Arnulf Quadt. Top quark physics at hadron colliders. *Eur. Phys. J. C*, 48:835–1000, 2006.

- [22] Anosh Joseph. Markov chain monte carlo methods in quantum field theories. *SpringerBriefs in Physics*, 2020.
- [23] J M Campbell, J W Huston, and W J Stirling. Hard interactions of quarks and gluons: a primer for lhc physics. *Reports on Progress in Physics*, 70(1):89–193, Dec 2006.
- [24] P. Skands. Introduction to qcd. *Searching for New Physics at Small and Large Scales*, Sep 2013.
- [25] Andy Buckley, Jonathan Butterworth, Stefan Gieseke, David Grellscheid, Stefan Höche, Hendrik Hoeth, Frank Krauss, Leif Lönnblad, Emily Nurse, Peter Richardson, Steffen Schumann, Michael H. Seymour, Torbjörn Sjöstrand, Peter Skands, and Bryan Webber. General-purpose event generators for lhc physics. *Physics Reports*, 504(5):145–233, Jul 2011.
- [26] John Campbell, Joey Huston, and Frank Krauss. *The Black Book of Quantum Chromodynamics: A Primer for the LHC Era*. Oxford University Press, 12 2017.
- [27] R. K. Ellis, W. J. Stirling, and B. R. Webber. *Parton branching and jet simulation*, page 157–192. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology. Cambridge University Press, 1996.
- [28] Johannes Bellm, Graeme Nail, Simon Plätzer, Peter Schichtel, and Andrzej Siódmok. Parton-shower uncertainties with herwig 7: benchmarks at leading order. *The European Physical Journal C*, 76(12), Dec 2016.
- [29] Stefan Schmitt. Data unfolding methods in high energy physics. *EPJ Web of Conferences*, 137:11008, 2017.
- [30] Volker Blobel. Unfolding Methods in Particle Physics. pages 240–251. 12 p, Jan 2011.
- [31] Paolo Nason. A new method for combining nlo qcd with shower monte carlo algorithms. *Journal of High Energy Physics*, 2004(11):040–040, Nov 2004.
- [32] Manuel Bähr, Stefan Gieseke, Martyn A. Gigg, David Grellscheid, Keith Hamilton, Oluseyi Latunde-Dada, Simon Plätzer, Peter Richardson, Michael H. Seymour, Alexander Sherstnev, and Bryan R. Webber. Herwig++ physics and manual. *The European Physical Journal C*, 58(4):639–707, Nov 2008.
- [33] Johannes Bellm, Stefan Gieseke, David Grellscheid, Simon Plätzer, Michael Rauch, Christian Reuschle, Peter Richardson, Peter Schichtel, Michael H. Seymour, Andrzej Siódmok, Alexandra Wilcock, Nadine Fischer, Marco A. Harrendorf, Graeme Nail, Andreas Papaefstathiou, and Daniel Rauch. Herwig 7.0/herwig++ 3.0 release note. *The European Physical Journal C*, 76(4), Apr 2016.
- [34] Johannes Bellm, Gavin Bewick, Silvia Ferrario Ravasio, Stefan Gieseke, David Grellscheid, Patrick Kirchgaesser, Frashër Loshaj, Mohammad R. Masouminia, Graeme Nail, Andreas Papaefstathiou, Simon Plätzer, Radek Podskubka, Michael Rauch, Christian Reuschle, Peter Richardson, Peter Schichtel, Michael H. Seymour, Andrzej Siódmok, and Stephen Webster. Herwig 7.2 release note. *The European Physical Journal C*, 80(5), May 2020.
- [35] Johan Alwall, Michel Herquet, Fabio Maltoni, Olivier Mattelaer, and Tim Stelzer. Madgraph 5: going beyond. *Journal of High Energy Physics*, 2011(6), Jun 2011.
- [36] F. Cascioli, P. Maierhöfer, and S. Pozzorini. Scattering amplitudes with open loops. *Physical Review Letters*, 108(11), Mar 2012.
- [37] Kyle Cormier, Simon Plätzer, Christian Reuschle, Peter Richardson, and Stephen Webster. Parton showers and matching uncertainties in top quark pair production with herwig 7. *The European Physical Journal C*, 79(11), Nov 2019.