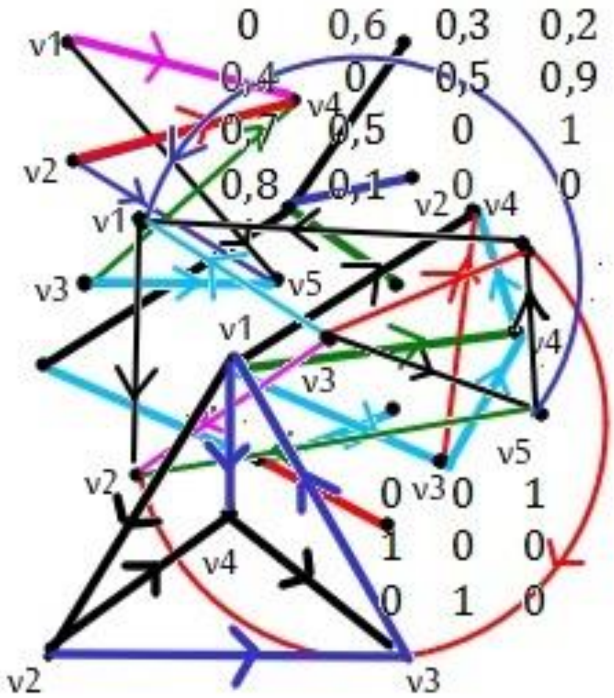
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΠΜΣ <<Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες>>

ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΡΩΤΑΘΛΗΜΑΤΟΣ



Διπλωματική Εργασία του: **Μουτζουρέλλη Ελευθέριου**

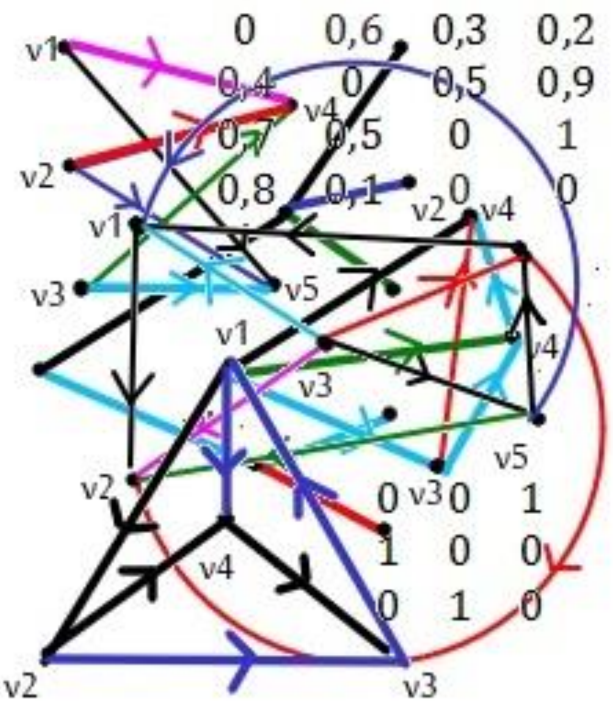
Επιβλέπων καθηγητής: **Ψαρράκος Παναγιώτης**

Αθήνα, 2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΠΜΣ <<Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες>>

ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΡΩΤΑΘΛΗΜΑΤΟΣ



Διπλωματική Εργασία του: **Μουτζουρέλλη Ελευθέριου**

<u>Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή</u>:

1) Κανελλόπουλος Βασίλειος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
2) Στεφανέας Πέτρος, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
3) Ψαρράκος Παναγιώτης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2021

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα προσεγγίσουμε την έννοια των πινάκων πρωταθλήματος και συναφείς μορφές πινάκων. Αφού πρώτα εισάγουμε τον αναγνώστη σε μερικές βασικές έννοιες, και απαραίτητες ιδιότητες των πινάκων επικεντρωνόμαστε στη λειτουργία των πινάκων πρωταθλήματος και στη σπουδαιότητά τους. Έπειτα εξετάζουμε τους πίνακες πρωταθλήματος από τη γραφοθεωρητική οπτική τους, και μελετάμε διάφορες υποκατηγορίες αυτών. Εν συνεχεία αναφερόμαστε στη γενικευμένη κατηγορία των πινάκων πρωταθλήματος. Οι πίνακες αυτοί και τα στοιχεία τους δύνανται να χρησιμοποιηθούν ως εκ των προτέρων μέτρο σύγκρισης ή προτίμησης ή πιθανότητας νίκης όλων των συμμετεχώντων ή παικτών που απαρτίζουν ένα τέτοιο πρωτάθλημα. Σημαντική είναι και η δυνατότητα διαχωρισμού της ενιαίας λίγκας σε επιμέρους πρωταθλήματα. Μελετώνται γεωμετρικές και φασματικές ιδιότητες των γενικευμένων πινάκων πρωταθλήματος και στα πλαίσια των εφαρμογών, διερευνούμε τη σχέση που έχουν αυτοί οι πίνακες με συστήματα που καθορίζουν στοιχηματικές αποδόσεις. Στόχος είναι η εύρεση ενός τρόπου ώστε να μπορούμε άμεσα να συγκρίνουμε τη δυναμική κάθε παίκτη που μετέχει στο πρωτάθλημα και μάλιστα να τους ταξινομήσουμε βάσει δυναμικής. Στο τελευταίο κεφάλαιο εξετάζουμε πίνακες που ενδέχεται να εμπεριέχουν και μιγαδικά στοιχεία, υποσύνολο των οποίων είναι τόσο οι πίνακες πρωταθλήματος, όσο και οι γενικευμένοι πίνακες πρωταθλήματος. Εμβαθύνουμε επίσης και στη μελέτη των διανυσμάτων που αποτελούν τον πυρήνα της τελευταίας κατηγορίας πινάκων.

Abstract

In this diploma thesis, we will try to approximate the utilities of tournament matrices and several other similar matrices categories involving round-robin tournaments. After introducing the reader to some necessary definitions and some basic matrix aspects, we focus on the uses and the meaningfulness of tournament matrices. Furthermore, we examine tournament matrices from a more graph theoretical point of view and study even more some special cases. In the next chapter, we refer to the category of generalized tournament matrices. These matrices and their elements can be seen as a sports competition tournaments, where *n* participants play one against each other in pairs. More precisely, the elements of the generalized tournament matrix give a priori possibility or a relative frequency of the i-player beating the j-player. In addition to all these, geometrical and spectral properties are also included. Additionally, we generate a few strategies of albegraic systems that lead to betting odds. In other words, we try to establish a ranking of the items in the paired comparison based on the data from the generalized tournament matrix. Our target is to be able to create vectors that include the strengths of each player and summarize their ranking to a single vector In the penultimate chapter we refer to hypertournament matrices, an even bigger class of matrices where generalized tournament matrices and tournament matrices are included as a subset. Hypertournament matrices consist of complex numbers and in the last chapter their kernel is thoroughly examined.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασική Θεωρία

1.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Το θεωρήματα και τα πορίσματα που θα μας απασχολήσουν βασίζονται όλα σε πρωταθλήματα παικτών, στα οποία ο κάθε παίκτης αντιμετωπίζει κάθε αντίπαλο σε ένα ακριβώς παιχνίδι (round-robin format). Ως εκ τούτου, αν n είναι το πλήθος των παικτών του πρωταθλήματος αναμενουμε $\forall\ 1 \le i \le n$ ο i-οστός παίκτης να συμμετέχει σε n-1 παιχνίδια και ως εκ τούτου να υπάρξουν $n(n-1)/2$ συνολικά αναμετρήσεις.

Πριν προχωρήσουμε όμως στον ορισμό των πινάκων πρωταθλήματος, πρέπει να γίνουν απαραιτήτως μερικοί ορισμοί. Καταρχάς με C^n, όπου n είναι θετικός ακέραιος αριθμός, ορίζουμε τον χώρο όλων των n-διάστατων διανυσμάτων στήλης $v = [v_1, v_2,..., v_n]^T$ μιγαδικών (εν γένει) αριθμών (δηλαδή $v_i \in C$, $1 \le i \le n$). Γενικεύοντας τον παραπάνω ορισμό, με C^{nxm} συμβολίζουμε τους πίνακες μιγαδικών στοιχείων διάστασης n x m. Συνήθως ένας τέτοιος πίνακας συμβολίζεται με A ή εναλλακτικά $A = [\alpha_{i,j}]$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

και βεβαίως $\alpha_{i,j} \in C$, $\forall\ 1 \le i \le n$ και $1 \le j \le n$. Κατ' αντιστοιχία, ο R^n και ο R^{nxm} ορίζουν διανύσματα πραγματικών αριθμών και πίνακες πραγματικών αριθμών. Όπως θα δούμε και εν συνεχεία οι πίνακες με τους οποίους θα ασχοληθούμε θα αποτελούνται αποκλειστικά από πραγματικούς αριθμούς (συνήθως μη αρνητικούς) και θα είναι τετραγωνικοί, οπότε και θα ισχύει $\alpha_{i,j} \in R$, $\forall\ 1 \le i \le n$ και $1 \le j \le n$ και επομένως $A \in R^{nxn}$.

Για τον προηγούμενο πίνακα A ως **ιδιοτιμή** λ ορίζουμε έναν μιγαδικό αριθμό για τον οποίον η γραμμική εξίσωση $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ έχει μία λύση $\mathbf{x} \in C^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ και η λύση $\mathbf{x} \in C^n$ καλείται **ιδιοδιάνυσμα** του A (σε αντιστοιχία με το λ). Εναλλακτικά, μπορεί να ειπωθεί ότι ένας n x n (μιγαδικός) πίνακας A έχει ακριβώς n, όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_i \in C$, $i = \{1,2,...,n\}$, οι οποίες είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda) = \det(A-\lambda I)$. Επιπλέον, με I_n ή απλούστερα I συμβολίζουμε τον n x n ταυτοτικό πίνακα, ο οποίος έχει μηδενικά όλα τα μη-διαγώνια στοιχεία του και ίσα με τη μονάδα όλα τα διαγώνια, ενώ με J_n ή απλούστερα J συμβολίζουμε τον n x n τετραγωνικό πίνακα, ο οποίος έχει ανεξαιρέτως όλα τα στοιχεία του ίσα με τη μονάδα.

Καθ'όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας λοιπόν εξετάζονται τετραγωνικοί πίνακες πλην ελαχίστων εξαιρέσεων. Επιπρόσθετα, συμβολίζουμε με $\sigma(A)$ το **φάσμα** ενός τετραγωνικού πίνακα $A = [\alpha_{i,j}] \in C^{nxn}$, που είναι το σύνολο όλων των ιδιοτιμών του A, δηλαδή

$$\sigma(A) := \{\lambda \in C : \det(\lambda I_n - A) = 0\}, \tag{1.2}$$

ενώ απαραίτητο κρίνεται να οριστεί και το σύνολο

$$N := \{1,2, . . . ,n\}, \tag{1.3}$$

που χρησιμοποιείται για να ορίσουμε τα αθροίσματα γραμμών ακολούθως. Επιπρόσθετα θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\lfloor$ και $\rfloor$ για να λάβουμε το ακέραιο μέρος μιας αλγεβρικής παράστασης.

Ορισμός 1.1.1. Ορίζουμε το i-οστό **άθροισμα γραμμής** (row sum) ως

$$r_i(A) = \sum_{j\in N\setminus i} |\alpha_{i,j}| \quad (i \in N), \tag{1.4}$$

με τη σύμβαση ότι $r_1(A) := \alpha_{1,1}$ εάν n=1.

Παρατήρηση 1.1.2. Παρότι ο όρος «άθροισμα γραμμής» δεν είναι απόλυτα ακριβής, καθώς εξαιρείται πάντοτε από το εκάστοτε άθροισμα το διαγώνιο στοιχείο της γραμμής, τον χρησιμοποιούμε για λόγους απλότητας διότι σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις πινάκων που θα αντικρίσουμε τα διαγώνια στοιχεία είναι μηδενικά. Ομοίως, η ίδια τακτική θα ακολουθηθεί και με τα «αθροίσματα στηλών» που εισάγονται μετέπειτα.

Απαραίτητος είναι και ο ορισμός της νόρμας διανυσμάτων.

Ορισμός 1.1.3. Μια συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : C^n \to R$ ονομάζεται **νόρμα διανυσμάτων** (vector norm) αν για κάθε x, y ∈ C^n ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

i. $\|x\| \geq 0$ (μη αρνητική).

ii. $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = 0$.

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ για κάθε $\alpha \in C$.

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός 1.1.4. Δίνονται και οι βασικότερες νόρμες για κάθε $\mathbf{x} = [x_1, x_2,\ldots, x_n]^T \in C^n$, οι οποίες είναι οι εξής:

$$l_1(x) := \sum_{j=1}^{n} |x_j| \;,\; |x| = l_2(x) := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \;,\; l_\infty(x) := \max\{ |x_j|, 1 \leq j \leq n\} \text{ και } var(x) = \sum_{i<j} |x_i - x_j| .$$

Ορισμός 1.1.5. Ως **φασματική ακτίνα** (spectral radius) για τυχαίο πίνακα $A \in C^{nxn}$ ορίζουμε το μέγιστο μέτρο ιδιοτιμής. Δηλαδή,

$$\rho(A) = \max\{\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{1.9}$$

Ορισμός 1.1.6. Ένας τετραγωνικός πίνακας A, ονομάζεται **ορθομοναδιαίος**, ή **ορθοκανονικός**, όταν ισχύει μια από τις επόμενες ισοδύναμες συνθήκες:

$$A^*A = I,\; AA^* = I, \tag{1.10}$$

όπου με A^* συμβολίζουμε τον αναστροφοσυζυγή ενός πίνακα.

Ένας ορθομοναδιαίος πίνακας A λέγεται **ορθογώνιος** αν είναι ταυτόχρονα και πραγματικός ($\forall\, \alpha_{ij} \in R$).

Επιπρόσθετα, ένας πίνακας $A = [\alpha_{ij}]$ λέγεται μη αρνητικός και γράφουμε $A \geq 0$ αν $\alpha_{ij} \geq 0$,για κάθε i, j = 1, 2,..., n , ενώ ο A λέγεται θετικός και γράφουμε $A > 0$ αν $\alpha_{ij} > 0$, για κάθε i, j = 1, 2,..., n.

Ορισμός 1.1.7. Ένας μη αρνητικός τετραγωνικός πίνακας M ονομάζεται **πρωτόγονος** εάν για κάποιον θετικό ακέραιο t, ο πίνακας M^t έχει όλα του τα στοιχεία θετικά.

Θεώρημα 1.1.8. (Perron-Frobenius) Αν A είναι ένας πρωτόγονος μη αρνητικός n x n πίνακας, τότε:

(α) Υπάρχει μια πραγματική θετική ιδιοτιμή r του A έτσι ώστε για κάθε άλλη ιδιοτιμή λ του A ισχύει ότι $r > |\lambda|$ και $\rho(A) = r$.
(β) Η ιδιοτιμή r είναι απλή.
(γ) Υπάρχει ένα αριστερό και ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή r και έχουν θετικά στοιχεία.

Η ιδιοτιμή r λέγεται **ιδιοτιμή Perron** του πίνακα A και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λέγονται **ιδιοδιανύσματα Perron**.

Ορισμός 1.1.9. Ένας πίνακας $A = [\alpha_{i,j}] \in C^{nxn}$ ονομάζεται **αυστηρά διαγώνια κυρίαρχος** (strictly diagonally dominant) εάν ισχύει

$$|\alpha_{i,i}| > r_i(A),\ \forall\ i \in N. \tag{1.11}$$

Θεώρημα 1.1.10. Κάθε πίνακας $A = [\alpha_{i,j}] \in C^{nxn}$ ο οποίος είναι αυστηρά διαγώνια κυρίαρχος είναι και αντιστρέψιμος (/ομαλός /μη ιδιάζων).

1.2 Πίνακες Πρωταθλήματος

Σε ένα πρωτάθλημα n παικτών (και όχι ομάδων, καθότι ως ομάδα θα αποκαλούμε ένα σύνολο παικτών) συνολικά διεξάγονται $\binom{n}{2}$ παιχνίδια μεταξύ δύο παικτών και η έκβαση σε κάθε ένα από αυτά είναι η νίκη για τον έναν παίκτη και η ήττα για τον άλλον. Δεν υπάρχει λοιπόν το ενδεχόμενο της ισοπαλίας. Τα αποτελέσματα όλα του εν λόγω τουρνουά/ πρωταθλήματος μπορούν να αναπαριστώνται με την ακόλουθη μορφή πίνακα:

Ορισμός 1.2.1. Ως **πίνακα πρωταθλήματος** A (tournament matrix) ορίζουμε έναν τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα, όπου n είναι το σύνολο των παικτών για τον οποίον ισχύει ότι όλα του τα διαγώνια στοιχεία είναι μηδενικά και $\alpha_{i,j} = 1$ εφόσον ο i παίκτης νικάει τον j παίκτη (το συμβολίζουμε επίσης με $i \to j$), ενώ $\alpha_{i,j} = 0$ εάν ο i παίκτης χάνει απ' τον j παίκτη. Για όλους τους πίνακες πρωταθλήματος ισχύει ότι

$$A + A^T = J - I \tag{1.5}$$

.

Είναι γνωστό ότι το πλήθος των πινάκων πρωταθλήματος που υπάρχουν είναι πεπερασμένο και ισούται με $2^{\binom{n}{2}}$. Ένα εύλογο ερώτημα που τίθεται είναι πόσοι πίνακες εξ αυτών είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι.

Θεώρημα 1.2.2. Ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων πινάκων πρωταθλήματος μεγέθους n είναι $1 + \binom{n}{2}$.

<u>Απόδειξη</u>: Θα χρησιμοποιήσουμε ανάλογους πίνακες με 2 γραμμές και m το πλήθος στήλες για συντομία της απόδειξης. Έστω $\mathcal{M}$ το σύνολο των πινάκων της μορφής $2 \times m$ πινάκων που περιέχουν μόνο μηδενικά και μονάδες και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι η μονάδα. Οποιοσδήποτε πίνακας από αυτό το σύνολο 2^m πινάκων μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$M = \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & 1-\alpha_2 & \dots & 1-\alpha_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Θα δείξουμε εν συνεχεία ότι το μέγιστο πλήθος γραμμικών ανεξάρτητων πινάκων που ανήκουν στο $\mathcal{M}$ είναι m + 1. Έστω M_0 ο πίνακας του συνόλου $\mathcal{M}$ για τον οποίον ισχύει ότι $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Έπειτα θέτουμε τους πίνακες M_i , πίνακες του συνόλου $\mathcal{M}$ για τους οποίους ισχύει ότι $\alpha_j = 0$, αν $j = i$, και μηδέν ειδάλλως. Αυτοί οι m+1 ορισμένοι πίνακες είναι σαφώς γραμμικώς ανεξάρτητοι. Αρκεί για την ολοκλήρωση της απόδειξης να δειξουμε ότι είναι ικανοί να παράγουν και τον αντίστοιχο χώρο που ορίζεται απ' το σύνολο πινάκων $\mathcal{M}$. Πρέπει επομένως κάθε πίνακας $M \in \mathcal{M}$ να μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός των προαναφερθέντων πινάκων, δηλαδή να ισχύει

$$\sum_{i=0}^{m} x_i M_i = \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & 1-\alpha_2 & \dots & 1-\alpha_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \end{pmatrix} = M. \tag{1.7}$$

Μία τέτοια απλή λύση $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ που ισχύει $\forall\, M \in \mathcal{M}$ είναι η ακόλουθη:

$$x_0 = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m)$$

$$x_1 = \alpha_1,$$

$$\vdots$$

$$x_m = \alpha_m.$$

Η αποδεικτική διαδικασία είναι πανομοιότυπη και για την περίπτωση όπου $m = n(n-1)/2$. ■

Ορισμός 1.2.3. Έστω ο $n \times n$ πίνακας A. Κάθε $r \times r$, $r \leq n$, υποπίνακας του A, καλείται **ελάσσων υποπίνακας** του A. Ένας ελάσσων υποπίνακας του A προκύπτει από τον πίνακα A, αν αφαιρέσουμε τις $(n-r)$ γραμμές και τις <u>αντίστοιχες</u> $(n-r)$ στήλες του, καλείται **κύριος ελάσσων υποπίνακας**. Από τον πίνακα A, λοιπόν, είναι δυνατόν να προκύψουν $\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$ διαφορετικοί κύριοι ελάσσονες υποπίνακες.

Η τάξη κάθε πίνακα πρωταθλήματος είναι τουλάχιστον n-1 και μάλιστα για αρκετά μεγάλες τιμές του n προκύπτει ότι σχεδόν όλοι οι πίνακες πρωταθλήματος μεγέθους n είναι αντιστρέψιμοι. Επιπρόσθετα, δοθέντος ενός οσοδήποτε μικρού $\epsilon > 0$, ισχύει ότι το ποσοστό επί της μονάδος των πινάκων πρωταθλήματος μεγέθους n που έχουν πρόσημο ορίζουσας ίσο με $(-1)^{n-1}$ ισούται τουλάχιστον με $½ - \epsilon$.

Κεφάλαιο 2

Γράφοι Πρωταθλημάτων

2.1 Υποβιβασιμότητα Πινάκων

Απαραίτητο εργαλείο που θα αναμένεται να χρησιμοποιήσουμε ουκ ολίγες φορές στα προσεχώς είναι ο πίνακας μετάθεσης $P \in \mathbb{R}^{nxn}$. Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **πίνακας μετάθεσης** αν έχει ακριβώς ένα στοιχείο σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη ίσο με τη μονάδα και όλα τα υπόλοιπα ίσα με το μηδέν. Για παράδειγμα ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι ένας 3 x 3 πίνακας μετάθεσης. Προφανώς ένας πίνακας μετάθεσης προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα αντίστοιχου μεγέθους, με μεταθέσεις γραμμών ή στηλών.

Ορισμός 2.1.1. Ένας πίνακας $A \in C^{nxn}$, $n \geq 2$ ονομάζεται **υποβιβάσιμος** αν υπάρχει πίνακας μετάθεσης $P \in \mathbb{R}^{nxn}$ και ένας θετικός ακέραιος $1 \leq r \leq n$, τέτοιοι έτσι ώστε να ισχύει

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Στον προηγούμενο παρατηρούμε την εμφάνιση ενός μηδενικού πίνακα $0 \in \mathbb{R}^{(n-r)xr}$ και δύο τετραγωνικών πινάκων, του $A_{1,1} \in C^{rxr}$ και $A_{2,2} \in C^{(n-r)x(n-r)}$. Ο πίνακας $A_{1,2}$ βεβαίως $\in C^{rx(n-r)}$. Εάν δεν υπάρχει τέτοια μετάθεση, δηλαδή δεν υπάρχει μεταθετικός πίνακας $P \in \mathbb{R}^{nxn}$ τέτοιος ώστε να ισχύει η σχέση (2.1), τότε ο A είναι <u>μη υποβιβάσιμος</u>. Εάν $A \in C^{1x1}$ τότε είναι υποβιβάσιμος μόνο αν $\alpha_{1,1} = 0$ και μη υποβιβάσιμος αν το $\alpha_{i,i}$ παίρνει οποιαδήποτε άλλη (μη μηδενική) τιμή.

Παρατήρηση 2.1.2. Σημειώνουμε ότι οι πίνακες $A_{1,1}$, $A_{1,2}$ και $A_{2,2}$ δεν είναι απαραίτητο να έχουν όλα τα στοιχεία τους μη μηδενικά. Παρατηρούμε ότι αν ο A είναι υποβιβάσιμος τότε πρέπει να έχει τουλάχιστον n-1 μηδενικά στοιχεία. Είναι επίσης προφανές ότι όταν ένας πίνακας είναι υποβιβάσιμος τότε και ο ανάστροφός του θα είναι υποβιβάσιμος.

Είναι θεμιτό να διερευνήσουμε περαιτέρω τον τύπο (2.1) που μας δίνει έναν υποβιβάσιμο πίνακα. Ως εκ τούτου, αν συνεχίσουμε να εφαρμόζουμε αναδρομικά τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω, στους πίνακες $A_{1,1}$ και $A_{2,2}$ πλέον, αλλά και στους «απογόνους» τους αργότερα, τότε τελικώς θα αποκομίσουμε έναν πίνακα μετάθεσης $P \in \mathbb{R}^{nxn}$ και έναν θετικό ακέραιο $1 \leq m \leq n$, έτσι ώστε να ισχύει

$$PAP^T = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \cdots & R_{1,m} \\ 0 & R_{2,2} & \cdots & R_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{m,m} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Ο παραπάνω πίνακας ονομάζεται κανονική μορφή Frobenius, όπου κάθε πίνακας $R_{j,j}$, $1 \leq j \leq m$ είναι είτε

$$\begin{cases} \text{i) ένας } p_j x\, p_j \text{ τετραγωνικός μη υποβιβάσιμος πίνακας με } p_j \geq 2\,, \\ \text{ii) ένας } 1\ x\ 1 \text{ πίνακας με } R_{j,j} = \left[\alpha_{\kappa,\kappa}\right] \text{ για κάποιο } \kappa \in N\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Αυτό σημαίνει πως στη μορφή αυτή έχουμε εν γένει m το πλήθος επιμέρους μη υποβιβάσιμους υποπίνακες πάνω στη διαγώνιο του PAP^T, ενώ κάποιοι εξ αυτών ενδέχεται να είναι πίνακες-στοιχεία, στοιχεία μάλιστα που εντοπίζονται και στη διαγώνιο του αρχικού πίνακα Α. Μάλιστα για αρχικούς πίνακες που είναι πίνακες πρωταθλήματος ισχύει ότι όλοι οι υποπίνακες στη σχέσης (2.2) που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο θα αποτελούνται αποκλειστικά από μονάδες και ως εκ τούτου μπορούν να αγνοηθούν και να αντικατασταθούν από άσσους. Επιπλέον, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα πρωταθλήματος Α θα είναι γινόμενο των χαρακτηριστικών πολυωνύμων των επιμέρους πινάκων A_i. Ως εκ τούτου η μελέτη των φασματικών ιδιοτήτων πινάκων πρωταθλήματος περιορίζεται στους μη υποβιβάσιμους πίνακες όπως θα δούμε αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Παρατήρηση 2.1.3. Η κανονική μορφή Frobenius δεν είναι απαραίτητα μοναδική για τον εκάστοτε πίνακα Α. Είναι όμως μοναδική ως προς έναν συγκεκριμένο πίνακα μετάθεσης P και βεβαίως για οποιονδήποτε P είναι δεδομένο ότι ο κάθε $R_{j,j}$, $1 \leq j \leq m$ δεν μπορεί να υποβιβαστεί περαιτέρω.

Παρατηρούμε από τη μορφή της δομής του πίνακα στη σχέση (2.1) ότι για $n \geq 2$ τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα Α δεν επηρεάζουν την ενδεχόμενη υποβιβασιμότητα του. Επιπλέον, για $n \geq 2$ αν προβούμε σε αντικατάσταση ενός αυθαίρετου μη μηδενικού μη διαγώνιου στοιχείου του πίνακα $A = [\alpha_{i,j}] \in C^{nxn}$ με κάποιον άλλο τυχαίο μιγαδικό αριθμό πλην του μηδενός, τότε πάλι δεν αλλοιώνεται η ιδιότητα της υποβιβασιμότητας του πίνακα. Οι τελευταίες παρατηρήσεις ενισχύουν την αρχική εικασία ότι η υποβιβασιμότητα, ή μη, ενός πίνακα, μπορεί να μελετηθεί και υπό το γραφοθεωρητικό πρίσμα.

Παρατήρηση 2.1.4. Τετραγωνικοί πίνακες πρωταθλήματος μεγέθους n, οι οποίοι είναι μη αντιστρέψιμοι και συνάμα μη υποβιβάσιμοι υπάρχουν αυστηρά για $n > 5$. Επομένως για $1 < n < 6$ ισχύει ότι κάθε μη υποβιβάσιμος πίνακας πρωταθλήματος είναι και αντιστρέψιμος. Μάλιστα για τους πίνακες με $n = 5$ θα ισχύει ότι η ορίζουσά τους είναι θετική.

Υπάρχει αλγόριθμος κατασκευής όλων των μη υποβιβάσιμων και συνάμα μη αντιστρέψιμων n x n πινάκων, οι οποίοι δοθέντος του n (και για n πάντα ≥ 6) είναι $2^{\binom{n-4}{2}-1}$.

Έστω λοιπόν ο πίνακας M, όπου $M = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$, με $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και S έναν τυχαίο (n-3) x (n-3) πίνακα, στον οποίον όμως $s_{12} = s_{23} = \ldots = s_{n-4,n-3} = s_{n-3,1} = 1$.

Επιπλέον η i-οστή γραμμή του πίνακα R οφείλει να είναι η [0,0,0], είτε η [1,0,0], ανάλογα αν $s_{i1} = 0$ ή 1 αντιστοίχως. Επιπλέον $Q = J_{3,n-3} - R^T$. Ο πίνακας $J_{m,n}$ είναι ένας m x n πίνακας με όλα του τα στοιχεία ίσα με μονάδα.

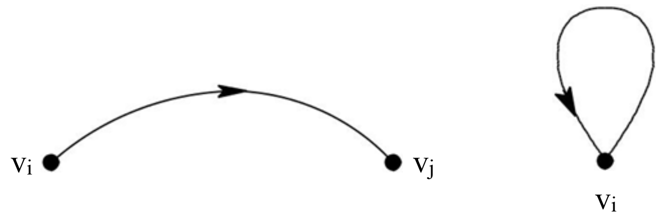
Τότε προκύπτει $M\,[1,1,1,-1,\,0^T_{n-4}] = 0$, επομένως ο πίνακας M θα είναι μη αντιστρέψιμος.

Ορισμός 2.1.5. Δοθέντος ενός κατευθυνόμενου γραφήματος ενός πρωταθλήματος M, ως <u>αριθμό αντιστρέψιμων ακμών</u> $i_r(M)$ ορίζουμε το ελάχιστο πλήθος των ακμών του γραφήματος που πρέπει να αντιστραφούν ούτως ώστε να μετασχηματιστεί ο πίνακας πρωταθλήματος σε υποβιβάσιμο πίνακα.

Ο Steve Kirkland απέδειξε πως ισχύει η ανισότητα $i_r(M) \le \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν οι νίκες κάθε παίκτη είναι οι ίδιες ακριβώς (αν το πλήθος των παικτών είναι περιττός αριθμός), ή το πληθος των νικών των μισών παικτών είναι n/2 και των άλλων μισών ισούται με $(n-1)/2$.

2.2 Γράφοι Πινάκων

Δοθέντος ενός πίνακα $A = [\alpha_{i,j}] \in C^{nxn}$ θεωρούμε κάποια σημεία (κόμβους) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, όλα διαφορετικά μεταξύ τους, τα οποία και ονομάζουμε **κορυφές**. Για κάθε μη μηδενικό στοιχείο $\alpha_{i,j}$ συνδέουμε την κορυφή v_i με την κορυφή v_j μέσω μίας **κατευθυνόμενης ακμής** $\overrightarrow{v_i v_j}$, η οποία θα εκκινεί από τον αρχικό κόμβο v_i και θα τερματίζει v_j όπως φαίνεται και στο Γράφημα 2.1. Να επισημανθεί ότι εάν υπάρχει κάποιο διαγώνιο στοιχείο $\alpha_{i,i} \neq 0$, τότε σχηματίζεται ένας βρόχος στην i-οστή κορυφή όπως φαίνεται στη δεξιά ακμή του Γραφήματος 2.1.



Γράφημα 2.1: Παράδειγμα κατευθυνόμενης ακμής (αριστερά) και βρόχου (δεξιά).

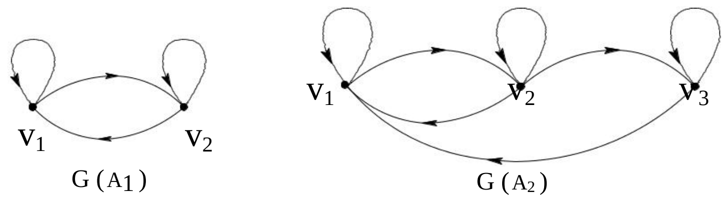
Ορισμός 2.2.1. Το σύνολο όλων των κατευθυνόμενων ακμών ενός πίνακα Α ορίζει το **κατευθυνόμενο γράφημα** G(A). Από εδώ και στο εξής κάθε κατευθυνόμενος γράφος στον οποίον θα αναφερόμαστε δεν θα περιέχει βρόχους, είτε πολλαπλές ακμές μεταξύ συγκεκριμένου ζεύγους κορυφών.

Ορίζουμε ωσαύτως και το **κατευθυνόμενο μονοπάτι**, το οποίο αποτελείται από συνεχόμενες κατευθυνόμενες ακμές $\overrightarrow{v_{l_0} v_{l_1}}$, $\overrightarrow{v_{l_1} v_{l_2}}$, . . . , $\overrightarrow{v_{l_{r-1}} v_{l_r}}$, ανήκει στο G(A) καθώς αποτελεί κομμάτι του, και συνδέει την αρχική κορυφή (εδώ v_{l_0}) με την τελική (εδώ v_{l_r}).

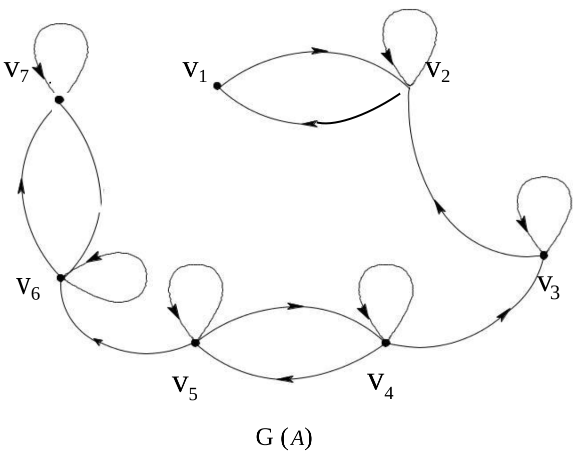
Παρατήρηση 2.2.2. Να επισημανθεί ότι αν υπάρχει το κατευθυνόμενο μονοπάτι από την κορυφή v_{l_0} στην κορυφή v_{l_r} , δε συμβαίνει ταυτοχρόνως και το αντίστροφο. Δεν υπάρχει απαραίτητα δηλαδή το μονοπάτι από την κορυφή v_{l_r} στην κορυφή v_{l_0} .Στην πρώτη πάντως περίπτωση, η ύπαρξη του κατευθυνόμενου μονοπατιού συνεπάγεται ότι $\prod_{\kappa=0}^{r-1} \alpha_{l_\kappa, l_{\kappa+1}} \neq 0$.

Ορισμός 2.2.3. Ο κατευθυνόμενος γράφος G(A) ενός πίνακα $A = [\alpha_{i,j}] \in C^{nxn}$ είναι **ισχυρά συνεκτικός** εάν για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v, υπάρχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από την κορυφή u στην κορυφή v καθώς και ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από την κορυφή v στην κορυφή u.

<u>Παράδειγμα</u>: Ως παραδείγματα, θεωρώντας τους πίνακες $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ και λαμβάνουμε τα κατευθυνόμενα γραφήματα (αυτά που παρουσιάζονται στο Γράφημα 2.2 και Γράφημα 2.3). Παρατηρούμε ότι το $G(A_1)$ όπως και το $G(A_2)$ είναι ισχυρά συνεκτικά γραφήματα, ενώ το ακριβώς επόμενο γράφημα, το G(A), είναι προφανώς μη συνεκτικό γράφημα καθώς αποτελείται από τέσσερις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες. Αυτές είναι οι $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_6, v_7\}$. Δεν υπάρχει δηλαδή κάποιο κατευθυνόμενο μονοπάτι από την v_2 στην v_3, από την v_3 στην v_5 κ.ο.κ.



Γράφημα 2.2: Κατευθυνόμενα γραφήματα $G(A_1)$ και $G(A_2)$ (ισχυρά συνεκτικά) για τους πίνακες A_1 και A_2 αντίστοιχα.



Γράφημα 2.3: Κατευθυνόμενο γράφημα G(A) (μη ισχυρά συνεκτικό).

Εύκολα παρατηρούμε ότι αν για κάποιον $A = [\alpha_{i,j}] \in C^{nxn}$ το κατευθυνόμενο γράφημά του είναι **ισχυρά συνεκτικό**, τότε εξαιρουμένων των διαγώνιων στοιχείων, σε όλες τις γραμμές του πίνακα υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο μη μηδενικό. Το ίδιο συμβαίνει βέβαια και με τα μη διαγώνια στοιχεία κάθε στήλης. Επίσης, όταν το G(A) είναι ισχυρά συνεκτικό, τότε το κατευθυνόμενο γράφημα $G(PAP^T)$ είναι επίσης ισχυρά συνεκτικό για οποιονδήποτε n x n πίνακα μετάθεσης P, καθώς το μόνο που αλλάζει είναι η αρίθμηση των κορυφών του αρχικού γράφου.

Παρατήρηση 2.2.4. Αν θεωρήσουμε ότι ο παραπάνω δοθέν πίνακας είναι συνάμα και πίνακας πρωταθλήματος, τότε σε αυτό το πρωτάθλημα δεν υπάρχει παίκτης που να νικάει όλους τους αντιπάλους του, ούτε και παίκτες που να χάνει από όλους τους υπόλοιπους παίκτες. Επομένως στο αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφο, θα υπάρχουν ακμές που τόσο θα εισέρχονται, όσο και θα εξέρχονται από κάθε παίκτη. Επομένως θα έχουμε εναν ισχυρά συνεκτικό γράφο, η σπουδαιότητα του οποίου θα αναλυθεί στην επόμενη παράγραφο. Επίσης οι γράφοι πρωταθλήματος προκύπτουν επί της ουσίας κατευθύνοντας τις ακμές ενός πλήρους γράφου K_n.

Ακολουθεί το θεώρημα το οποίο εδραιώνει τη θεωρία γραφημάτων ως αναπόσπαστο κομμάτι της μελέτης των (μη) υποβιβάσιμων πινάκων.

Θεώρημα 2.2.5. Κάθε $A = [\alpha_{i,j}] \in C^{nxn}$ πίνακας είναι <u>μη υποβιβάσιμος</u> αν και μόνο αν το κατευθυνόμενο γράφημα G(A) που επάγεται από τον πίνακα είναι ισχυρά συνεκτικό.

<u>Απόδειξη</u>: Θα κατασκευάσουμε την απόδειξη εν μέρει επαγωγικά, δείχνοντας ότι ένας πίνακας A είναι υποβιβάσιμος αν και μόνο αν το κατευθυνόμενο γράφημα του <u>δεν</u> είναι ισχυρά συνεκτικό (οπότε αυτομάτως θα προκύψει και το αντίστροφο συμπέρασμα που είναι το ζητούμενο) και ξεκινώντας για n=2 (καθώς για n=1 γνωρίζουμε ότι η υποβιβασιμότητα έγκειται στο αν το μοναδικό στοιχείο εν προκειμένη περιπτώσει είναι μηδέν ή όχι).

- Για n=2 λοιπόν, ένα μη ισχυρά συνεκτικό (κατευθυνόμενο) γράφημα προκύπτει όταν οι δύο κορυφές του δεν συνδέονται αμοιβαία, το οποίο «μεταφράζεται» στον πίνακα Α πως είτε η τιμή του $\alpha_{1,2}$ ή αυτή του $\alpha_{2,1}$ θα είναι μηδενική. Ως εκ τούτου θα προκύπτει ένας πίνακας με μία από τις δύο ακόλουθες μορφές: $\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ ή $\begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$ (η περίπτωση που δεν υπάρχει ούτε η ακμή $\overrightarrow{v_1 v_2}$, ούτε η $\overrightarrow{v_2 v_1}$, είναι η περίπτωση ενός μη συνεκτικού γραφήματος και μπορεί να υπαχθεί σε οποιαδήποτε από τις δύο μορφές).

  Και οι δύο πάντως πίνακες είναι εξ ορισμού υποβιβάσιμοι (ο δεύτερος έπειτα από μία πολύ απλή μετάθεση γραμμών και στηλών). Γενικά θα μελετάται προς συντόμευση της απόδειξης μόνο η πρώτη περίπτωση όπου ο μηδενικός υποπίνακας (διάνυσμα ενίοτε) θα εντοπίζεται στο κάτω αριστερό τμήμα του πίνακα (είναι εξάλλου ευνόητο ότι όλοι οι πίνακες που ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία μπορούν με μια απλή αναστροφή – αντιστροφή της φοράς των κατευθυνόμενων ακμών όσον αφορά το γράφο – να αναχθούν σε πίνακες της πρώτης κατηγορίας) και γενικά οι περιπτώσεις όπου εμφανίζεται μη ισχυρά συνεκτικό γράφημα, καθώς η περίπτωση του μη συνεκτικού γραφήματος καλύπτεται αυτομάτως. Τέλος, να επισημάνουμε ότι αν το μηδενικό στον πίνακα μας εξαφανιστεί, τότε το γράφημα γίνεται ισχυρά συνεκτικό (για n=2 γίνεται και πλήρες μάλιστα) και βεβαίως ο πίνακας γίνεται πλέον μη υποβιβάσιμος.

- Για n=3 ένα μη ισχυρά συνεκτικό γράφημα προκύπτει όταν σε μία κορυφή δεν υπάρχουν είτε εισερχόμενες, είτε εξερχόμενες κατευθυνόμενες ακμές. Πιο παραστατικά, μετά από κατάλληλη ονομασία των κορυφών, ο πίνακας που θα προκύψει θα έχει μία από τις επόμενες μορφές:

$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \rightarrow$ το κατευθυνόμενο γράφημά του παρουσιάζει κορυφή που δεν έχει καμία εισερχόμενη ακμή.

$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \rightarrow$ το κατευθυνόμενο γράφημά του παρουσιάζει κορυφή που δεν έχει καμία εξερχόμενη ακμή.

  Προκύπτει πάλι ότι αν μετατραπεί κάποιο από τα μηδενικά σε κάποιο μιγαδικό εν γένει αριθμό διάφορο του μηδενός, τότε το γράφημα αποκτάει ισχυρή συνεκτικότητα και επιπλέον ο πίνακας γίνεται μη υποβιβάσιμος.

- Για n=4 ένα μη ισχυρά συνεκτικό γράφημα προκύπτει είτε όταν σε μία κορυφή δεν υπάρχουν εισερχόμενες ή εξερχόμενες κατευθυνόμενες ακμές, είτε όταν υπάρχει ένα σετ κορυφών (δυάδα κορυφών εδώ και $n \operatorname{div} 2$ γενικά) από το οποίο ή να μην εξέρχονται ή να μην εισέρχονται ακμές. Μετά από την κατάλληλη αρίθμηση των κορυφών, εφόσον το κατευθυνόμενο γράφημα είναι μη ισχυρά συνεκτικό, θα λάβουμε έναν από τους εξής πίνακες:

$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow$ το κατευθυνόμενο γράφημά του παρουσιάζει κορυφή που δεν έχει καμία εισερχόμενη ακμή.

$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \rightarrow$ το γράφημά του παρουσιάζει σετ κορυφών που δεν έχει καμία εισερχόμενη/εξερχόμενη ακμή.

$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \rightarrow$ το κατευθυνόμενο γράφημά του παρουσιάζει κορυφή που δεν έχει καμία εξερχόμενη ακμή.

Πάλι προκύπτει ότι αν κάποιο μηδενικό εξαλειφθεί από τον πίνακα τότε το γράφημα αποκτάει ισχυρή συνεκτικότητα και επιπλέον ο πίνακας γίνεται μη υποβιβάσιμος.

- Γενικά ισχύει ότι για οποιονδήποτε πίνακα διάστασης $n \geq 5$ ένα μη ισχυρά συνεκτικό γράφημα προκύπτει είτε όταν μία κορυφή δεν έχει καμία εισερχόμενη ή εξερχόμενη κατευθυνόμενη ακμή, είτε όταν υπάρχει ένα σετ κορυφών <u>με πληθικότητα $2, 3, ..., n\,\mathrm{div}\,2$</u> από το οποίο ή να μην εξέρχονται ακμές ή να μην εισέρχονται. Ισχύει βέβαια ότι αν κάποιο μηδενικό εξαλειφθεί από τον πίνακα τότε το γράφημα αποκτάει ισχυρή συνεκτικότητα και επιπλέον ο πίνακας γίνεται μη υποβιβάσιμος, το οποίο το δείξαμε συνολικά για πίνακες οποιουδήποτε μεγέθους n που ήταν και το ζητούμενο.

→ Όσον αφορά το έτερο σκέλος της ισοδυναμίας, ισχύει ότι όποιο και να είναι το μέγεθος του $A_{1,1}$ τετραγωνικού πίνακα της σχέσης (2.1), θα σχηματίζεται εξ ορισμού ο μηδενικός πίνακας του ενδεικτικού πίνακα A που ακολουθεί, και έτσι σε κάθε περίπτωση, από τα προηγούμενα βήματα της απόδειξης γνωρίζουμε ότι προκύπτει ένα κατευθυνόμενο γράφημα που δεν είναι ισχυρά συνεκτικό.

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix} \qquad \blacksquare \ (2.4).$$

Παρατήρηση 2.2.6. Ο λόγος που επιλέγεται η τιμή $n\,\mathrm{div}\,2$ για τον εκάστοτε πίνακα μεγέθους n για να χαρακτηρίσει το μέγιστο σύνολο κορυφών που καθιστά τον κατευθυνόμενό του γράφο μη συνεκτικό, οφείλεται στο τρόπο που θα εκλάβουμε τις ακμές στο σύνολο αυτό. Για παράδειγμα, αν $n=5$, προκύπτει $5\,\mathrm{div}\,2 = 2$. Εκ πρώτης ανάγνωσης να φαίνεται λανθασμένος αυτός ο περιορισμός διότι μπορεί βεβαίως να υπάρξει σύνολο τριών κορυφών χωρίς καμία εξερχόμενη ακμή προς τις υπόλοιπες κορυφές του γράφου. Η κατάσταση αυτή όμως μπορεί εναλλακτικά να περιγραφεί και ως η ύπαρξη ενός συνόλου δύο (n-2 εν γένει) κορυφών που δεν έχουν καμία εισερχόμενη ακμή. Ο συλλογισμός αυτός ισχύει και τούμπαλιν. Επομένως καλύπτεται από την προηγούμενη απόδειξη κάθε περίπτωση που μπορεί να μας οδηγήσει σε υποβιβάσιμο πίνακα.

Πόρισμα 2.2.7. Από την προηγούμενη αποδεικτική διαδικασία προκύπτει και μια πολύ ενδιαφέρουσα μέθοδος εύρεσης μη υποβιβάσιμων πινάκων, άμεση και αποτελεσματική. Αρκεί μόνο να υπάρχει κάποιο $i \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε η i-οστή γραμμή και η i-οστή στήλη του πίνακα να μην περιέχουν κανένα μηδενικό στοιχείο, πλην ίσως του i-οστού διαγωνίου. Τότε στο αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφημα γνωρίζουμε ότι θα υπάρχει μία κορυφή η οποία θα έχει εισερχόμενες και εξερχόμενες ακμές, από και προς αντίστοιχα <u>όλες</u> τις άλλες κορυφές. Επομένως ακόμα και αν όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα είναι μηδενικά, ναι μεν οι υπόλοιπες n-1 το πλήθος κορυφές δε θα συνδέονται μεταξύ τους, αλλά θα υπάρχει η κορυφή v_i ως συνδετικός κρίκος, ούτως ώστε από οποιαδήποτε κορυφή και αν ξεκινήσουμε να μπορούμε να μεταβούμε σε όλες τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος και να επιστρέψουμε τελικά στην αρχική. Να τονιστεί ότι στον κύκλο αυτόν θα διέλθουμε n-1 φορές από την κορυφή v_i, αλλά αυτό δεν αντικρούεται με τον ορισμό του ισχυρά συνεκτικού κατευθυνόμενου γραφήματος. Τουναντίον μάλιστα, αυτή η διαδικασία μπορεί κάλλιστα να χαρακτηριστεί και ως ένας εναλλακτικός ορισμός του κατευθυνόμενου γραφήματος. Ο πίνακας που περιγράφηκε προηγουμένως έχει την κάτωθι μορφή:

$$\begin{pmatrix} & & * & & \\ 0 & & \vdots & & 0 \\ & & * & & \\ * & \cdots\ * & \alpha_{ii} & *\ \cdots & * \\ & & * & & \\ 0 & & \vdots & & 0 \\ & & * & & \end{pmatrix}$$

Επισημαίνουμε ότι το διαγώνιο στοιχείο $\alpha_{i,i}$ στο κέντρο του «σταυρού» μπορεί να είναι και αυτό μηδενικό, χωρίς όμως να επηρεάζεται η καθολική ισχύς της μεθόδου. Διαγώνια προς όλες τις κατευθύνσεις από το κέντρο του σταυρού βρίσκονται μηδενικοί υποπίνακες οποιωνδήποτε εν γένει διαστάσεων. Ενδέχεται βέβαια να ισχύει είτε $i=1$, είτε $i=n$. Στις περιπτώσεις αυτές σχηματίζεται ένας μηδενικός υποπίνακας, τετραγωνικός, μεγέθους $n-1$.

→ Να σημειωθεί ότι το αντίστροφο του πορίσματος και του Θεωρήματος 2.2.5. δεν ισχύουν.

Συχνά βέβαια συντάντώνται και πίνακες με προκύπτον κατευθυνόμενο γράφημα που δεν είναι ισχυρά συνεκτικό. Αυτοί οι πίνακες εντούτοις μπορούν να αναλυθούν σε επιμέρους συνεκτικές συνιστώσες. Μπορεί να ειπωθεί επομένως ότι το γράφημα δύναται να διαμεριστεί κατάλληλα σε ξένα μεταξύ τους απλά μονοπάτια (απλά διότι κανένα μονοπάτι δεν διέρχεται δεύτερη φορα΄από την ίδια κορυφή, με μοναδική εξαίρεση την περίπτωση που αυτή η κορυφή είναι η πρώτη και η τελευταία – περίπτωση κύκλου), όπου κάθε ακμή θα ανήκει σε ένα ακριβώς απλό μονοπάτι. Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται **διαμέριση γράφου σε απλά μονοπάτια**.

Ορισμός 2.2.8. Ο ελάχιστος αριθμός απλών μονοπατιών που χρειάζεται για να διαμερίσει ένα γράφημα G ονομάζεται **πλήθος (ελαχίστων) μονοπατιών** και συμβολίζεται με pn(G), ενώ το σύνολο όλων των ακμών του θα συμβολίζεται με A(G) και το σύνολο όλων των κορυφών με V(G).

Ορισμός 2.2.9. Για κάθε κορυφή v του γραφήματος G, συμβολίζοντας με od(v) τον αριθμό των εξερχόμενων κορυφών από την κορυφή v και με id(v) το πλήθος των εισερχόμενων κατευθυνόμενων ακμών από την ίδια πάντα κορυφή v, ορίζουμε τα ακόλουθα:

- Ως $x(v) = \max\{0, od(v) - id(v)\}$, ορίζουμε το **πλεόνασμα** μιας κορυφής.
- Ως $d(v) = |od(v) - id(v)|$, ορίζουμε τον **απόλυτο βαθμό** μιας κορυφής.
- Ως $\mu(v) = \max\{od(v),\ id(v)\}$, ορίζουμε το **μέγιστο βαθμό** μιας κορυφής.

Το γράφημα που προκύπτει από το αρχικό γράφημα G διαγράφοντας την κορυφή v και όλες τις ακμές που ξεκινούν ή καταλήγουν στην ακμή αυτή, θα συμβολίζεται με G/v. Εάν μια κορυφή ενός μονοπατιού δεν είναι ούτε η αρχική, ούτε η τελική, θα ονομάζεται ενδιάμεση. Επιπρόσθετα όλα τα μονοπάτια στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν σε αυτήν και την επόμενη ενότητα θα είναι απλά.

Θεώρημα 2.2.10. Σε κάθε κατευθυνόμενο γράφο G ανεξαρτήτως αν ανήκει σε πίνακα πρωταθλήματος ισχύει

$$pn(G) \geq \sum_{v \in V(G)} x(v) . \tag{2.5}$$

Απόδειξη: Έστω P τυχαία διαμέριση του γράφου G σε (απλά) μονοπάτια και P(v) το σύνολο των μονοπατιών που ανήκουν στο P και ξεκινούν από την κορυφή v. Έστω $x(v) > 0$. Η κορυφή v είναι ενδιάμεση για το πολύ id(v) μονοπάτια του P, επομένως τουλάχιστον $od(v) - id(v)$ μονοπάτια ξεκινούν από την κορυφή v. Επομένως $|P(v)| \geq x(v)$. Ισχύει βέβαια συνάμα ότι $|P| = \sum_{v \in V(G)} |P(v)|$ και ως εκ τούτου η διαμέριση σε ελάχιστα μονοπάτια θα αποτελείται τουλάχιστον από $\sum_{v \in V(G)} x(v)$ ξεχωριστά μονοπάτια. ■

Παράδειγμα: Το ακόλουθο δίγωνο είναι ένας πλήρης γράφος των κορυφών v_1 και v_2 και ταυτόχρονα αποτελεί μια περίπτωση γράφου όπου ισχύει η ισχυρή ανισότητα της σχέσης (2.5).

Γράφημα 2.4: Κατευθυνόμενο γράφημα (δίγωνο) το οποίο αποτελείται από ένα μονοπάτι, ενώ το άθροισμα των πλεονασμάτων των δύο κορυφών του είναι μηδενικό.

Θεώρημα 2.2.11. Εάν v είναι μια κορυφή ενός τυχαίου κατευθυνόμενου γράφου G, τότε θα ισχύει ότι

$$pn(G) \leq pn(G/v) + \mu(v). \tag{2.6}$$

<u>Απόδειξη</u>: Υποθέτουμε ότι υπάρχουν έστω t το πλήθος γειτονικά δίγωνα στην κορυφή v, υπογράφοι δηλαδή του G όπως αυτός του Γραφήματος 2.4, όπου δύο κορυφές συνδέονται και με δύο ακμές αντίθετης κατεύθυνσης. Εάν $t \neq 1$, τότε οι ακμές των διγώνων μπορούν να διαμεριστούν σε t μονοπάτια μήκους 2. Οι υπολειπόμενες γειτονικές ακμές της κορυφής v, εφόσον υπάρχουν, μπορούν να διαμεριστούν σε $\max\{od(v)-t,\ id(v)-t\}$ μονοπάτια, επομένως θα ισχύει

$$pn(G) \leq pn(G/v) + t + \max\{od(v)\text{-}t,\ id(v)\text{-}t\}. \tag{2.7}$$

Ο αριθμός t μπορεί να εισέλθει στο μέγιστο της σχέσης (2.7) και ως τούτου από τον Ορισμό 2.2.9. περί μέγιστου βαθμού καταλήγουμε ότι $pn(G) \leq pn(G/v) + \mu(v)$.

Εάν $t=1$, και ισχύει ότι $od(v) \neq 1$ ή $id(v) \neq 1$, προκύπτει εύκολα ότι αρκούν μ(v) το πλήθος μονοπάτια για να σχηματιστεί μια διαμέριση των γειτονικών ακμών της κορυφής v. Εάν ισχύει $t = od(v) = id(v) = 1$, έστω ότι η κορυφή που συνδέεται με την v και ανήκει στο γράφημα G/v είναι η w. Έστω επίσης ότι P είναι η διαμέριση σε ελάχιστα μονοπάτια του γραφήματος G/v. Εάν η κορυφή w είναι αρχική ή τελική ενός εκ των μονοπατιών του P, τότε μπορούμε να προσαυξήσουμε αυτό το μονοπάτι με την ακμή vw ή wv αντιστοίχως. Κατ' αυτόν τον τρόπο θα προκύψει νέα διαμέριση του γράφου G με πληθικότητα μονοπατιών ίση με $pn(G/v) + 1$. Σε περίπτωση που η κορυφή w είναι ενδιάμεση, έστω του μονοπατιού p της διαμέρισης P, τότε μπορούμε να μεγαλώσουμε το μονοπάτι p, το οποίο θα ξεκινάει από την ίδια πάλι κορυφή, θα καταλήγει στην κορυφή w και έπειτα θα διέρχεται από την κορυφή v όπου και θα τερματίζει, σχηματίζοντας ένα νέο μονοπάτι, έστω r. Με παρόμοιο τρόπο προσθέτουμε την κορυφή v στην αρχή του υπολειπόμενου μονοπατιού p, και προκύπτει ένα δεύτερο νέο μονοπάτι, ας το ονομάσουμε s. Τότε η $\{P\sim\{p\}\} \cup \{r, s\}$ είναι μια διαμέριση που εμπεριέχει ακριβώς $pn(G/v) + 1$ μονοπάτια και περικλείει βεβαίως και την κορυφή v. ■

Πρόταση 2.2.12. Έστω πίνακας $A = [\alpha_{i,j}] \in C^{nxn}$ με $n \geq 2$. Θεωρούμε επίσης σύνολο $N := \{1,2, . . . ,n\}$. Ισχύει τότε ότι ο A είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν <u>για κάθε</u> δύο μη κενά, ξένα και συμπληρωματικά ως προς το N υποσύνολα του N, έστω S και T, ισχύει ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $\alpha_{i,j} \neq 0$, με $i \in S$ και $j \in T$.

<u>Απόδειξη</u>: Καταρχάς εφόσον $S \cup T = N$, κατανοούμε ότι στο κατευθυνόμενο γράφημα του εξεταζόμενου πίνακα έχουμε δύο ξένα σύνολα κορυφών των οποίων η ένωση απαρτίζει όλες τις κορυφές του γράφου. Από τη στιγμή που υπάρχει κάποιο στοιχείο $\alpha_{i,j} \neq 0$, με $i \in S$ και $j \in T$ (και αντιστρόφως θέτοντας το $S \leftarrow T$ και ως T το προηγούμενο S), προκύπτει ότι τα οποιαδήποτε συμπληρωματικά σύνολα S και T <u>συνδέονται με κατευθυνόμενες ακμές αμοιβαία</u> και ως εκ τούτου το εκάστοτε γράφημα είναι πάντοτε ισχυρά συνεκτικό και συνεπώς από Θεώρημα 2.2.5 ο πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος.

Αν τώρα αντιστρόφως δεν υπήρχε μια τέτοια ακμή , τότε τα σύνολα S και T δεν θα ήταν ισχυρά συνδεδεμένα (οποιαδήποτε και αν ήταν τα σετ κορυφών S και T, φαίνεται ο λόγος άλλωστε και από την αναλυτική απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.5), το οποίο συνεπάγεται ότι ο πίνακας θα ήταν υποβιβάσιμος. Συμπερασματικά λοιπόν ισχύει ότι ο A είναι μη υποβιβάσιμος <u>αν και μόνο αν</u> υπάρχει κάποιο στοιχείο $\alpha_{i,j} \neq 0$ για τα εν λόγω σύνολα κορυφών S και T της πρότασης. ■

2.3 Γράφοι Πινάκων Πρωταθλήματος

Ορισμός 2.3.1. Ένας κατευθυνόμενος γράφος G ονομάζεται **ασύμμετρος** αν και μόνο αν η ακμή vw μεταξύ των κορυφών v και w δεν υπάρχει εφόσον υφίσταται η ακμή wv στο ίδιο γράφημα. Εναλλακτικά, ένας γράφος G θα είναι ασύμμετρος αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας πρωταθλήματος T και ο G είναι γράφος ενός υποπίνακα του εν λόγω πίνακα πρωταθλήματος. Είναι εμφανές ότι κάθε ασύμμετρος γράφος δεν μπορεί να περιέχει δίγωνα.

Θεώρημα 2.3.2. Εάν G είναι ένας ασύμμετρος κατευθυνόμενος γράφος με n το πλήθος κορυφές, τότε

$$pn(G) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor. \tag{2.7}$$

<u>Απόδειξη</u>: Για $2 \leq n \leq 3$ εύκολα μπορεί να δειχθεί το ζητούμενο. Η υπόλοιπη απόδειξη του θεωρήματος χτίζεται επαγωγικά. Έστω ότι n = 2m. Εάν ο απόλυτος βαθμός μια κορυφής είναι $d(v) \leq 1$, τότε για αυτή την κορυφή $v \in V(G)$ θα ισχύει αναγκαστικά ότι $\mu(v) \leq m$, επειδή ο γράφος είναι ασύμμετρος. Επαγωγικά λοιπόν και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.6) του Θεωρήματος 2.2.11 καταλήγουμε ότι

$$pn(G/v) \leq \lfloor (n\text{-}1)^2/4 \rfloor \quad \Rightarrow \quad (2.6)$$

$$pn(G) \leq \lfloor (n\text{-}1)^2/4 \rfloor + \mu(v) \quad \Rightarrow \quad (n = 2m)$$

$$pn(G) \leq \lfloor (4m^2 + 1 - 4m)/4 \rfloor + \mu(v) \quad \Rightarrow (\mu(v) \leq m)$$

$$pn(G) \leq \lfloor m^2 - m + 1/4 \rfloor + m \quad \Rightarrow$$

$$pn(G) \leq m^2 - m + m + \lfloor 1/4 \rfloor \Rightarrow$$

$$pn(G) \leq m^2.$$

Η παραπάνω διαδικασία ισχύει και συνεχίζεται επαγωγικά καθόσον συνεχίζει να υπάρχει κάποια κορυφή με απόλυτο βαθμό έως 1. Εάν πάψει να ισχύει η παραπάνω συνθήκη, δηλαδή $d(w) \geq 2\ \forall\ w \in V(G)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πλεόνασμα $x(w) > 0$ είναι θετικό για τουλάχιστον m κορυφές, τουλάχιστον τις μισές δηλαδή. Έστω πάλι v μία εξ αυτών των κορυφών. Εάν ο γράφος είναι σχετικά αραιός και $od(v) \leq m$, τότε $\mu(v) \leq m$ και εξακολουθεί βεβαίως να ισχύει ότι $pn(G) \leq m^2$ με τον τρόπο που προηγήθηκε.

Έστω λοιπόν ότι $od(v) > m$. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι οι κορυφές του γράφου G, με εξαίρεση την κορυφή v, που είχαν θετικό πλεόνασμα,συνεχίζουν να έχουν θετικό πλεόνασμα και για τον γράφο G/v, καθότι είχε υποτεθεί ότι αρχικά ότι $d(w) \geq 2$ για κάθε μία εξ αυτών. Εάν P είναι μια διαμέριση ελαχίστων μονοπατιών του γράφου G/v, τότε αυτές οι κορυφές που εξακολουθούν να έχουν θετικό πλεόνασμα οφείλουν να είναι και αρχικές κορυφές για κάποια μονοπάτια της διαμέρισης P.

Θέτουμε ως k τη διαφορα $k = od(v) - m$ και ορίζουμε το σύνολο W ως το σύνολο των κορυφών που έχουν θετικό πλεόνασμα και έχουν εισερχόμενη ακμή από την κορυφή v, δηλαδή $W = \{ w \in V(G): vw \in A(G)$ και $x(w) > 0\}$. Το σύνολο W απαριθμεί απαριθμεί τουλάχιστον k μέλη.

Έστω p_w ένα μονοπάτι που ξεκινάει από την κορυφή w και p^*_w το προηγούμενο μονοπάτι προσαυξημένο κατά την ακμή vw. Τότε οι ακμές του γράφου G που είναι γειτονικές στην κορυφή v, αλλά δεν τερματίζουν σε κορυφή του συνόλου W, μπορούν να διαμεριστούν σε id(v) το πλήθος μονοπάτια μήκους 2 και το πολύ σε $m - id(v)$ μονοπάτια μήκους 1. Αν ονομάσουμε την τελευταία διαμέριση P*, τότε έχουμε ότι $(P \sim \{p_w: w \in W\}) \cup \{ p^*_w: w \in W \} \cup P^*$ αποτελεί μια διαμέριση του γράφου με πληθικότητα μονοπατιών που δεν ξεπερνάει τον αριθμό $(pn(G/v) - |W|) + |W| + m$.

Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι $pn(G) \leq pn(G/v) + m \rightarrow pn(G) \leq m^2$ από την επαγωγική υπόθεση. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $pn(G) \leq m^2 + m$ σε περίπτωση που $n = 2m + 1 > 1$, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $pn(G) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$ για κάθε μέγεθος n του δοθέντος υποπίνακα πρωταθλήματος και του αντίστοιχου ασύμμετρου γράφου. ■

Πόρισμα 2.3.3. Εάν A είναι ένας πίνακας πρωταθλήματος και T είναι ο προκύπτων ασύμμετρος κατευθυνόμενος γράφος με n το πλήθος κορυφές, τότε

$$pn(T) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor. \tag{2.8}$$

Λήμμα 2.3.4. Εάν P είναι μια διαμέριση ενός κατευθυνόμενου γράφου G <u>δίχως κύκλους</u> και υπάρχουν ξένα μεταξύ τους μονοπάτια p και r της διαμέρισης P, ούτως ώστε το μονοπάτι r να ξεκινάει ακριβώς από την κορυφή στην οποία τερματίζει το μονοπάτι p, τότε η διαμέριση P δεν είναι η ελάχιστη, δηλαδή δεν διαμερίζει σε ελάχιστα (το πλήθος) μονοπάτια το γράφημα. Όντως, είναι εμφανές ότι αν ενώσουμε τα μονοπάτια p και r προκύπτει μια νέα διαμέριση, έστω P′, που συμπεριλαμβάνει λιγότερα μονοπάτια από την διαμέριση P.

Θεώρημα 2.3.5. Εάν G είναι ένας ακυκλικός κατευθυνόμενος γράφος με n το πλήθος κορυφές, τότε ισχύει ότι το ελάχιστο πλήθος των μονοπατιών που δομούν το γράφημα ισούται με το άθροισμα των πλεονασμάτων, δηλαδή

$$pn(G) = \sum_{v \in V(G)} x(v). \tag{2.9}$$

<u>Απόδειξη</u>: Το θεώρημα αυτό έρχεται να εξετάσει την ισχύ του Θεωρήματος 2.2.10 στην περίπτωση που έχουμε κατευθυνόμενο γράφο που είναι επιπρόσθετα ακυκλικός. Έστω P μια διαμέριση ελάχιστων μονοπατιών του γραφήματος G. Εάν ισχύει $x(v) = 0$, τότε εξ ορισμού θα έχουμε $id(v) \geq od(v)$ και επομένως αν κάποιο μονοπάτι της διαμέρισης P ξεκινάει στην κορυφή v, τότε σίγουρα κάποιο άλλο καταλήγει στην κορυφή αυτή. Αυτό λοιπόν βάσει του Λήμματος 2.3.4 συνεπάγεται ότι το P δεν είναι διαμέριση ελαχίστων μονοπατιών. Συνεπώς για το πλήθος των μονοπατιών που ξεκινούν από την κορυφή v θα ισχύει $P(v) = \emptyset$, όποτε συναντάμαι κορυφή v με $x(v) = 0$. Συμπερασματικά, προκύπτει

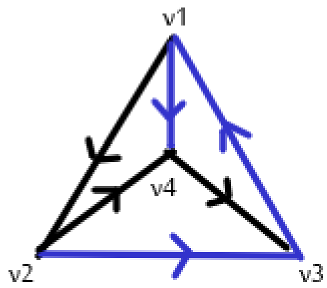
$$pn(G) = \sum_{v \in V(G)} |P(v)|. \tag{2.10}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $x(v) > 0$. Κανένα μονοπάτι της διαμέρισης P που διέρχεται από την κορυφή v δεν μπορεί να τερματίζει στην κορυφή v, ειδάλλως από τη στιγμή που ισχύει $id(v) > od(v)$, αυτό θα σήμαινε αυτομάτως ότι κάποιο μονοπάτι ξεκινάει και από την κορυφή v, ενδεχόμενο που μας αποκλείει το Λήμμα 2.3.4. Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι η κορυφή v είναι ενδιάμεση σε $id(v)$ το πλήθος μονοπάτια και ως εκ τούτου $id(v) - od(v)$ ($= x(v)$) μονοπάτια ξεκινούν από την κορυφή v. Επομένως ισχύει $|P(v)| = x(v) \; \forall \; v \in V(G)$ και $pn(G) = \sum_{v \in V(G)} x(v)$.

■

Το αντίστροφο εντούτοις του Θεωρήματος 2.3.5 δεν ισχύει και φαίνεται ξεκάθαρα στο ακόλουθο παράδειγμα.

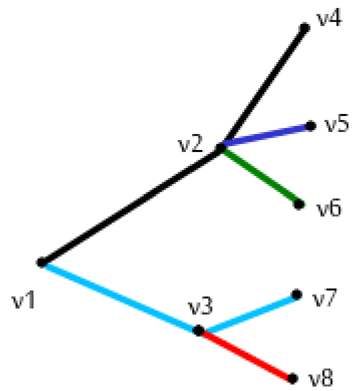
Παράδειγμα: Ο κατευθυνόμενος γράφος του παραδείγματος είναι μία κλίκα, είναι δηλαδή ένας πλήρης γράφος τεσσάρων κορυφών. Παρατηρούμε ότι $x(v_1) = x(v_2) = 1$, ενώ $x(v_3) = x(v_4) = 0$, επομένως προκύπτει $pn(G) = \sum_{v \in V(G)} x(v) = 2$. Όσα και τα μονοπάτια που ορίζει η ελάχιστη διαμέριση. Εντούτοις είναι εμφανές ότι δεν πρόκειται για ακυκλικό γράφο. Οι ακμες $\overrightarrow{v_1v_2}$, $\overrightarrow{v_2v_3}$ και η ακμή $\overrightarrow{v_2v_3}$ ορίζουν έναν από τους κύκλους που μπορούν να παρατηρηθούν και στο κάτωθι γράφημα.



Γράφημα 2.5: Κατευθυνόμενο γράφημα (κλίκα τεσσάρων κορυφών) το οποίο αποτελείται από δύο μονοπάτια (μαύρο – μπλε), ισχύει η σχέση (2.9), αλλά δεν είναι ακυκλικό.

Παράδειγμα 2: Μία κατηγορία γράφων στους οποίους εύκολα αντιλαμβανόμαστε την ακυκλικότητα είναι τα δέντρα. Στο δέντρο αυτού του παραδείγματος εφόσον θεωρήσουμε ότι σε κάθε ακμή η φορά κατευθύνεται από την κορυφή με τον μικρότερο αύξοντα αριθμό προς την κορυφή με τον μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό (άρα οι ακμές έχουν όλες κατεύθυνση προς τα δεξιά), τότε είναι εύκολο να δούμε ότι σχηματίζονται πέντε μονοπάτια διαφορετικού χρώματος που σχηματίζουν μια ελάχιστη διαμέριση (θα μπορούσε να έχει απεικονιστεί και κάποια άλλη ελάχιστη διαμέριση με διαφορετικούς κατάλληλους χρωματισμούς, αλλά όλες έχουν πληθικότητα πέντε).

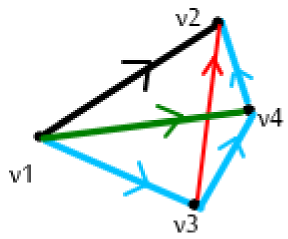
Παρατηρούμε επίσης ότι $x(v_1) = x(v_2) = 2$, $x(v_3) = 1$, ενώ $x(v_4) = x(v_5) = x(v_6) = x(v_7) = x(v_8) = 0$, επομένως προκύπτει $pn(G) = \sum_{v \in V(G)} x(v) = 5$, όσα για τα χρωματισμένα μονοπάτια του ακυκλικού γράφου προς επιβεβαίωση του Θεωρήματος 2.3.5.



Γράφημα 2.6: Κατευθυνόμενο γράφημα με μορφή δέντρου το οποίο είναι ακυκλικό και συνεπώς ισχύει ότι το άθροισμα των πλεονασμάτων των κορυφών του ισούται με το πλήθος των μονοπατιών της ελάχιστης διαμέρισης.

Παράδειγμα 3: Ας εξετάσουμε ξανά το Θεώρημα 2.3.5. σε περιπτώσεις γραφημάτων που είναι ακυκλικά και συνάμα πλήρη. Ένα τέτοιο γράφημα είναι και το ακόλουθο, το οποίο μπορεί να προκύψει και από το Γράφημα 2.5 τροποποιώντας κατάλληλα τις φορές κάποιων ακμών. Στο συγκεκριμένο γράφο παρατηρούμε ότι $x(v_1) = 3$, $x(v_3) = 1$, ενώ $x(v_2) = x(v_4) = 0$, επομένως προκύπτει $pn(G) = \sum_{v \in V(G)} x(v) = 4$.

Συνεπώς ακόμη και για πλήρεις γράφους με την προϋπόθεση ότι δεν σχηματίζεται κάποιος κύκλος εξακολουθεί να ισχύει η σχέση (2.9).



Γράφημα 2.7: Πλήρες κατευθυνόμενο και ακυκλικό γράφημα στο οποίο το άθροισμα των πλεονασμάτων των κορυφών του ισούται με το πλήθος των μονοπατιών της ελάχιστης διαμέρισης.

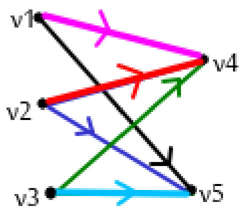
Πρόταση 2.3.6. Εάν G είναι ένας ακυκλικός κατευθυνόμενος γράφος με n κορυφές, εκ των οποίων k ακριβώς έχουν πλεονασματικό βαθμό, τότε ισχύει $pn(G) \leq k(n-k)$.

Απόδειξη: Έστω X το σύνολο των κορυφών του γραφήματος G που είναι πλεονασματικές (έχουν θετικό πλεόνασμα). Εάν στο γράφημα G υφίσταται ακμή που να ενώνει δύο κορυφές του X, τότε αυτή μπορεί να αφαιρεθεί από τον γράφο δίχως να αλλάζει το άθροισμα που μας δίνει το πλήθος των ελαχίστων μονοπατιών σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.5. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε δίχως βλάβη της γενικότητας ότι κάθε ακμή του γράφου G που ξεκινάει από κορυφή που ανήκει στο X οφείλει να καταλήγει σε κορυφή που δεν ανήκει στο σύνολο X. Συνεπώς θα ισχύει $x(v) \leq n-k \ \forall \ v \in X$ και συνεπάγεται ότι $pn(G) \leq k(n-k)$.

Πόρισμα 2.3.7. Εάν G είναι ένας ακυκλικός κατευθυνόμενος γράφος με n το πλήθος κορυφές, τότε θα ισχύει κατ' επέκταση του Θεωρήματος 2.3.2. ότι $pn(G) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

Πόρισμα 2.3.8. Εάν G είναι ένας ακυκλικός κατευθυνόμενος γράφος με n το πλήθος κορυφές και ισχύει ότι $pn(G) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$, τότε ο γράφος ικανοποιεί τη μεταβατική ιδιότητα μεταξύ των ακμών και είναι γράφος ενός μεταβατικού πίνακα.

Παράδειγμα 4: Ας ορίσουμε ένα κατευθυνόμενο διμερή γράφο B_k n συνολικά κορυφών στον οποίον θα ισχύει $V(B_k) = \{1, 2, \ldots, n\}$ και θα υφίσταται ακμή $vw \in A(B_k)$ αν και μόνο αν $1 \leq v \leq k$, ενώ $k \leq w \leq n$. Συνεπάγεται ότι το πλεόνασμα των πρώτων k κορυφών θα είναι ίσο με $x(v) = n - k$, ενώ οι υπόλοιπες κορυφές θα έχουν πλεόνασμα μηδενικό. Ως εκ τούτου με μια απλή εφαρμογή του Θεωρήματος 2.3.5 κατανοούμε ότι το σύνολο των ελαχίστων μονοπατιών στο γράφημα B_k θα ισούται με $pn(G) = k(n - k)$. Στο Γράφημα 2.8 έχει δημιουργηθεί ένας τέτοιος γράφος και είναι εμφανές ότι το pn(G) είναι ίσο με 6, όσες είναι δηλαδή και οι ακμές του γράφου συνολικά, καθότι σε διμερείς κατευθυνόμενους γράφους που έχουν μια συγκεκριμένη κατεύθυνση στις ακμές (εδώ ενώνουν κορυφές από το αριστερό τμήμα του γράφου με κορυφές από το δεξιό τμήμα του) δεν είναι εφικτό να σχηματιστεί μονοπάτι που να αποτελείται από δύο ή περισσότερες ακμές.

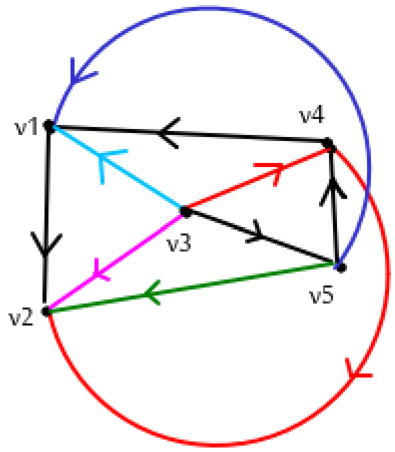


Γράφημα 2.8: Κατευθυνόμενος διμερής γράφος στον οποίο το άθροισμα των πλεονασμάτων των κορυφών του ισούται με το πλήθος των μονοπατιών της ελάχιστης διαμέρισης και το πλήθος των ακμών.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ότι $x(v_1) = x(v_2) = x(v_3) = 2$, ενώ $x(v_5) = x(v_4) = 0$. Επομένως ισχύει εν προκειμένη περιπτώσει ότι $pn(B_k) = \sum_{v \in V(B_k)} x(v) = |A(B_k)|$.

Παρατήρηση 2.3.9. Εάν λάβουμε διμερές ακυκλικό γράφημα B_q με $q = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ παρατηρούμε ότι έχει πλήθος ελαχίστων μονοπατιών ίσο με $\lfloor n^2/4 \rfloor$. Αυτό σημαίνει ότι οι ανισότητες στο Πόρισμα 2.3.7. και στο Θεώρημα 2.3.2. είναι οι βέλτιστες δυνατές. Προφανώς κανένας γράφος δεν μπορεί να έχει ακμές λιγότερες από pn(G). Επομένως τα διμερή γραφήματα με $pn(G) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ αυτής της μορφής έχουν τις ελάχιστες δυνατές ακμές.

Παράδειγμα 5: Ας κατασκευάσουμε έναν κατευθυνόμενο και ακυκλικό ταυτόχρονα πλήρη γράφο πέντε συνολικά κορυφών. Ο συγκεκριμένος γράφος καθότι πλήρης, μπορεί να είναι ο προκύπτων γράφος ενός πίνακα πρωταθλήματος. Παρατηρούμε ότι όντως κάθε κορυφή (παίκτης) έχει άθροισμα εισερχόμενων και εξερχόμενων ακμών ίσο με πέντε. Επιπρόσθετα ισχύει $x(v_3) = 4$, $x(v_5) = 2$, ενώ $x(v_1) = x(v_2) = x(v_4) = 0$. Για ακόμη μία φορά μπορούμε να επαληθεύσουμε τη σχέση (2.9), καθώς $pn(G) = \sum_{v \in V(G)} x(v) = 6$.



Γράφημα 2.9: Πλήρης κατευθυνόμενος ακυκλικός γράφος ο οποίος διαμερίζεται στα χρωματισμένα ελάχιστα μονοπάτια των οποίων το πλήθος ισούται με το άθροισμα των πλεονασμάτων των κορυφών.

Κεφάλαιο 3

Γενικευμένοι Πίνακες Πρωταθλημάτων

3.1 Εισαγωγή

Εισάγουμε πλέον μια νέα κατηγορία πινάκων που έχει ως στόχο να συγκεντρώσει εκ των προτέρων τις πιθανότητες νίκης κάθε παίκτη στη μεταξύ τους αναμέτρηση.

Ορισμός 3.1.1. Ως **γενικευμένο πίνακα πρωταθλήματος** P ορίζουμε έναν τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα (όπου n είναι το σύνολο των παικτών), για τον οποίον ισχύει ότι όλα του τα διαγώνια στοιχεία είναι μηδενικά, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μη μηδενικά και ισχύει $0 \leq p_{i,j} \leq 1 \ \forall \ i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Συνάμα, για όλους τους γενικευμένους πίνακες πρωταθλήματος ισχύει ότι

$$P + P^T = J - I. \tag{3.1}$$

Ας δούμε τώρα τι μπορεί να συμβολίζει κάθε στοιχείο $p_{i,j}$ του παραπάνω πρωταθλήματος. Το εκάστοτε στοιχείο μπορεί να ισούται με τη σχετική συχνότητα νίκης της i ομάδος έναντι της j κάνοντας χρήση αποτελεσμάτων παρελθοντικών αναμετρήσεων εφόσον υπάρχουν με την ισοπαλία να μην είναι δυνατό αποτέλεσμα. Μπορεί επιπρόσθετα να αποτελεί και ένα μέτρο προτίμησης της i επιλογής σε σχέση με τη j, σε μία σύγκριση όλων των δυνατών επιλογών ανά δύο. Ένα εύλογο πρόβλημα που προκύπτει είναι να μπορέσουμε να ταξινομήσουμε σε φθίνουσα – συνήθως – σειρά τη δυναμική των παραπάνω επιλογών/ παικτών του πρωταθλήματος και επιπρόσθετα να ποσοτικοποιήσουμε τις αποστάσεις τους στην κατάταξη αυτή.

Υπάρχουν εν γένει πολλές μέθοδοι ταξινόμησης. Μια απλή, αλλά συνάμα άμεση μέθοδος, είναι να ταξινομήσουμε τους n παίκτες βάσει του πλήθους των νικών που έχουν επιτύχει. Εναλλακτικά υπάρχουν και άλλες μέθοδοι που εισάγουν ως παράμετρο συστήματα που περιέχουν ποσά στοιχήματος και κερδών.

Ας υποθέσουμε ότι η διοργανώτρια αρχή του πρωταθλήματος/ η <<λίγκα>> επιθυμεί να διεξαχθεί ένα <<δίκαιο>> πρωτάθλημα, ένα ευθέως ανταγωνιστικό πρωτάθλημα, το οποίο θα επιτευχθεί με την ύπαρξη τεχνητών εμποδίων που θα αφαιρούν την πλεονάζουσα δυναμική που έχουν οι δυνατότεροι παίκτες εν συγκρίσει με τους πιο αδύναμους. Δύο είναι οι επικρατέστερες μέθοδοι στις οποίες και θα επικεντρωθούμε.

Σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο κάθε παίκτης ποντάρει ένα συγκεκριμένο ποσό απ' τα δικά του χρήματα σε κάθε παιχνίδι στο οποίο ο ίδιος αγωνίζεται, ενώ κατά τη δεύτερο μέθοδο απόσβεσης των πλεονεκτημάτων των δυνατών παικτών η ίδια η διοργανώτρια αρχή είναι υπεύθυνη για το ύψος των στοιχημάτων και των κερδών, τα οποία καθορίζονται ξεχωριστά για κάθε ζεύγος παικτών. Και τα δύο αυτά ποσά προκαθορίζονται ουτως ώστε κάθε παίκτης να έχει ακριβώς το ίδιο αναμενόμενο κέρδος. Τέτοιου είδους δίκαια συστήματα υπάρχουν πολλά, το καθένα εκ των οποίων δύναται να ικανοποιεί ένα πλήθος συγκεκριμένων συνθηκών.

Οι γενικευμένοι πίνακες πρωταθλήματος μπορούν να γραφούν και ως $M + M^T + I = jj^T$, όπου j είναι το διάνυσμα με άσσους. Επομένως είναι εμφανές ότι η τάξη του πίνακα $M + M^T + I$ είναι 1.

3.2 Ιδιότητες Γενικευμένων Πινάκων Πρωταθλήματος

3.2.1 Γεωμετρικές Ιδιότητες

Το σύνολο των $n \times n$ γενικευμένων πινάκων πρωταθλήματος αποτελεί κυρτό υποσύνολο του N^2. Ισχύει μάλιστα το ακόλουθο θεώρημα το οποίο χαρακτηρίζει τα συνοριακά σημεία αυτού του συνόλου:

Θεώρημα 3.2.1.1. Ένας $n \times n$ πίνακας A είναι συνοριακό σημείο του συνόλου των $n \times n$ γενικευμένων πινάκων πρωταθλήματος αν και μόνο αν ο A είναι πίνακας πρωταθλήματος.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{P}$ και $\mathcal{A}$ τα σύνολα των γενικευμένων πινάκων πρωταθλήματος και των πινάκων πρωταθλήματος αντίστοιχα. Θα δείξουμε αρχικά ότι η κυρτή κλειστότητα $\mathcal{A}$ είναι το $\mathcal{P}$.

Αν $P \in \mathcal{P}$ και $A \in \mathcal{A}$, θέτουμε το σύνολο $\omega(A) := \{(i,j)\colon A_{ij} = 1\}$ και $\alpha(A) = \prod A_{ij}$, όπου το τελευταίο γινόμενο υπολογίζεται για όλα τα ζεύγη $(i \rightarrow j)$, δηλαδή για τα ζεύγη $(i,j) \in \omega(A)$. Τότε το $\sum_A \alpha(A) = \prod_{i\neq j} (P_{ij} + P_{ji}) = 1$ και $P = \sum_A \alpha(A)A$, οπότε $P \in C(\mathcal{A})$. Είναι προφανές ότι $C(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{P}$, συνεπώς $C(\mathcal{A}) = \mathcal{P}$. Συνεπώς τα συνοριακά σημεία του $\mathcal{P}$ πρέπει να ανηκουν στο $\mathcal{A}$, επομένως μένει να δείξουμε ότι κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι ένα συνοριακό σημείο.

Υποθέτουμε ότι για κάποιον πίνακα πρωταθλήματος A υπάρχουν πίνακες πρωταθλήματος A_i και θετικές σταθερές c_i έτσι ώστε να ισχύουν $\sum_{i=1}^{j} c_i = 1$ και ο πίνακας A να μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων πινάκων, δηλαδή $A = \sum_{i=1}^{j} c_i A_i$, με τα σύνολα ω(A) και $\omega(A_\iota)$ να έχουν ίδιο πλήθος στοιχείων. Εφόσον έχουμε ότι $\omega(A) = \bigcup_{i=1}^{j} \omega(A_i)$, αυτό συνεπάγεται ότι $\omega(A) = \omega(A_\iota)$. Επομένως $A = A_i$ για κάθε i και το θεώρημα έχει αποδειχθεί. ■

Παρατήρηση 3.2.1.2. Η ποσότητα α(A) ισοδυναμεί με την πιθανότητα ένα τυχαίο πρωτάθλημα με πιθανότητες νίκης σε κάθε δυνατή αναμέτρηση να δίνονται εκ των προτέρων από δεδομένο πίνακα P, να μπορεί να εκφραστεί ως ο πίνακας πρωταθλήματος A. Επομένως κάθε γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος P μπορεί να εκφραστεί ως ένα μέτρο πιθανότητας πάνω στο σύνολο $\mathcal{A}$.

Κάθε γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος P με ρητές τιμές μπορεί να θεωρηθεί ως ένας αριθμητικός μέσος μιας πεπερασμένης ακολουθίας πινάκων πρωταθλήματος. Επομένως η τιμή P_{ij} μπορεί κάλλιστα να ερμηνευθεί και ως η σχετική συχνότητα με την οποία ο i παίκτης νικάει τον j σε μια πεπερασμένη ακολουθία πρωταθλημάτων. Ένας τυχαίος γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει την οριακή σχετική συχνότητα νικών μιας ατέρμονης ακολουθίας πρωταθλημάτων.

Παρότι κάθε γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός πινάκων πρωταθλήματος, οι εφικτοί συνδυασμοί είναι πιθανόν να είναι παραπάνω του ενός. Ένα απλό παράδειγμα αποτελεί ο <<πίνακας βαρύκεντρο>> (J – I)/2 του συνόλου $\mathcal{P}$ που έχει προφανώς όλα τα στοιχεία του ίσα με ½ εξαιρουμένων των μηδενικών διαγώνιων στοιχείων και είναι ακριβώς το μέσο της ευθείας που ενώνει τους πίνακες P και P^T στον χώρο $\mathcal{P}$, για κάθε $P \in \mathcal{P}$.

Παράδειγμα: Ας δούμε και στην πράξη πως ένας δοθέν γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός μιας ολόκληρης κλάσης γενικευμένων πινάκων πρωταθλήματος. Έστω λοιπόν ότι έχουμε τον πίνακα P, ο οποίος είναι ίσος με

$$P = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & a & \multicolumn{2}{c}{1} \\ 1-a & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{} & 0 & b \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 1-b & 0 \end{array}\right], \tag{3.2}$$

όπου $0 < \alpha \leq b \leq ½$, με πρόθεση το άθροισμα των συντελεστών α και b να μην ξεπερνάει τη μονάδα. Ως εκ τούτου μπορεί ο πίνακας P να εκφραστεί με τη βοήθεια ακόμη ενός συντελεστή, του t, με $0 < t < \alpha$ ως εξής:

$$P = t\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{1} \\ 0 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right] + (b - t)\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{1} \\ 1 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(3.3)

$$(\alpha - t)\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{1} \\ 0 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right] + (1 + t - \alpha - b)\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{1} \\ 1 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right],$$

όπου όλοι οι πίνακες είναι γενικευμένοι πίνακες πρωταθλήματος καθότι ικανοποιούν την συνθήκη (3.1) και οι συντελεστές τους βρίσκονται μεταξύ του μηδέν και της μονάδος.

Θεώρημα 3.2.1.3. Ένας γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος έχει μοναδική αναπαράσταση ως κυρτός συνδυασμός πινάκων πρωταθλήματος αν και μόνο αν υπάρχει το πολύ ένα ζεύγος τιμών P_{ij} και P_{ji} τέτοιων ώστε $P_{ij}P_{ji} \neq 0$, δηλαδή να υπάρχει στο πρωτάθλημα αυτό το πολύ ένα μη βέβαιο παιχνίδι ως προς την έκβασή του.

Απόδειξη: Εάν ο πίνακας P έχει δύο τέτοια ζευγάρια με γινόμενο επιμέρους στοιχείων $\neq 0$, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν κατάλληλα α και b, όπου $0 < \alpha \leq b \leq ½$, τέτοια ώστε ο πίνακας P να μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός πολλών διαφορετικών πινάκων πρωταθλήματος όπως είδαμε και στο Παράδειγμα 3.2.1.3. Για ένα δεδομένο ζεύγος στοιχείων με $P_{ij}P_{ji} \neq 0$, ισχύει ότι $P = P_{ij}L + P_{ji}R$, όπου ο L διαφέρει απ' τον P στα στοιχεία P_{ij} και P_{ji} όπου πλέον έχουμε τιμές ίσες με 1 και 0 αντίστοιχα, ενώ ο R διαφέρει απ' τον P πάλι μόνο στα ίδια στοιχεία όπου πλέον έχουν τοποθετηθεί οι τιμές 0 και αντίστοιχα. Παρατηρούμε πως αν οι πίνακες L και R δεν έχουν μοναδική αναπαράσταση ως κυρτοί συνδυασμοί πινάκων πρωταθλήματος, τότε ούτε ο γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος P έχει μοναδική αναπαράσταση. Ως εκ τούτου και παρατηρούμε με επαγωγή πως αν ο πίνακας P έχει n το πλήθος τέτοια ζευγάρια, τότε οι πίνακες L και R έχουν n-1 το πλήθος τέτοια ζεύγη. Και καθώς είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα πως με δύο τέτοια ζεύγη ο πίνακας P δεν έχει μοναδική αναπαράσταση, καταλήγουμε επαγωγικά ότι ο πίνακας P οφείλει να έχει μόλις ένα τέτοιο ζεύγος και ως εκ τούτου οι πίνακες L και R να είναι πίνακες πρωταθλήματος. ■

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε ένα πρωτάθλημα 3 παικτών με γενικευμένο πίνακα πρωταθλήματος τον ακόλουθο: $M = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}3 & 1 \\ 0{,}7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Τότε ο πίνακας M μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός δύο πινάκων πρωταθλήματος καθότι υπάρχει μόνο ένα ζευγάρι τιμών (το M_{ij} και M_{ji} για το οποίο ισχύει $M_{ij}M_{ji} \neq 0$) που να δίνει μη μηδενικό γινόμενο και γράφεται ως εξής:

$$M = 0{,}3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0{,}7 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

3.2.2 Φασματικές Ιδιότητες

Ορισμός 3.2.2.1. Υπενθυμίζουμε ότι ένας μη αρνητικός τετραγωνικός πίνακας M ονομάζεται **πρωτόγονος** (primitive) εάν για κάποιο θετικό ακέραιο t, ο πίνακας M^t έχει όλα του τα στοιχεία θετικά. Γενικά λέμε ότι ο i παίκτης είναι συγκρίσιμος με τον j παίκτη αν στο στοιχείο $M_{ij}^t > 0$ για κάποιο ακέραιο t.

Πόρισμα 3.2.2.2. Ένας γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος P είναι συνάμα πρωτόγονος αν και μόνο αν είναι μη υποβιβάσιμος και $P \neq [0]$, A, B ή B^2, όπου $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1-\alpha & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Θεώρημα 3.2.2.3. Για ένα μη τετριμμένο μη υποβιβάσιμο γενικευμένο πίνακα πρωταθλήματος P ισχύει

(α) ότι υπάρχει θετικό διάνυσμα x σε μορφή στήλης και θετικός αριθμός λ, τέτοια ώστε $Px = \lambda x$,

(β) και εάν $Py = \mu y$, για κάποιο θετικό διάνυσμα y σε μορφή στήλης και θετικό αριθμό μ, τότε ισχύει ότι $\mu = \lambda$ και επιπλέον το διάνυσμα y είναι πολλαπλάσιο του διανύσματος x.

Απόδειξη: Εάν ο πίνακας P είναι πρωτόγονος, τότε από Θεώρημα 1.1.8. των Perron – Frobenius ισχύει το ζητούμενο. Σε περίπτωση που ο πίνακας δεν είναι πρωτόγονος τότε οφείλει να έχει τη μορφή ενός εκ των πινάκων που αναγράφονται στο Πόρισμα 3.2.2.2. Είναι εμφανές ότι για τους δεδομένους πίνακες ισχύουν τα (α) και (β). Ισχύουν μάλιστα και για οποιονδήποτε πίνακα Q που παράγεται από τον P απλά πολλαπλασιάζοντας κάθε γραμμή με κάποιον θετικό αριθμό. ■

Θεώρημα 3.2.2.4. Για έναν τετραγωνικό n x n πίνακα M για τον οποίον ισχύει η συνθήκη $M + M^* = J - I$, και επιπλέον x είναι ιδιοδιάνυσμα του με αντίστοιχη ιδιοτιμή το λ, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $\dfrac{2\mathrm{Re}(\lambda)}{n-1} + \dfrac{\mathrm{var}(x)}{(n-1)\,|x|^2} = 1$

(β) $\mathrm{Re}(\lambda) \leq (n-1)/2$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\mathrm{var}(x) = 0$,

(γ) $\mathrm{Re}(\lambda) \geq -\tfrac{1}{2}$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι $Mx = \lambda x$. Συνεπάγεται τότε ότι $x^*\lambda x = x^*Mx$, επομένως $\lambda|x|^2 = x^*(J - I - M^*)x = |\sum x_i|^2 - |x|^2 - \lambda|x|^2$, το οποίο σημαίνει ότι

$$(1+2\mathrm{Re}(\lambda))\,|x|^2 = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|^2 . \tag{3.5}$$

Η σχέση του (α) σκέλους προκύπτει συνδυάζοντας το γεγονός ότι $\mathrm{var}(x) = n|x|^2 - \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|^2$ με τη σχέση (3.5). Τέλος οι ανισότητες (β) και (γ) προκύπτουν αυτομάτως από τη σχέση (3.5) και τη συνθήκη (α). ■

Είναι εμφανές ότι $-1/2 \leq \mathrm{Re}(\lambda) \leq (n-1)/2$, ενώ αποδεικνύεται επίσης ότι $|\mathrm{Im}(\lambda)| \leq \sqrt{n\,(n-1)/6}$. Ο γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος $(J - I) / 2$ μπορεί να έχει ιδιοτιμές $-1/2$ και $(n-1) / 2$, οπότε στην περίπτωση αυτή οι ανισότητες (β) και (γ) αποκτούν τη μέγιστη και την ελάχιστη δυνατή τιμή τους αντίστοιχα. Ο παραπάνω πίνακας ονομάζεται <u>ισορροπημένος πίνακας πρωταθληματος</u>, και ισχύει ότι $\mathrm{Re}(\lambda) = (n-1)/2$ αν και μόνο αν κάθε γραμμή του πίνακα πρέπει να περιέχει άθροισμα $(n-1)/2$ μονάδων. Δεδομένου ότι $\mathrm{var}(x) = 0$ αυτό είναι εφικτό μόνο αν το n είναι περιττός φυσικός αριθμός.

Το παραπάνω συμπέρασμα απορρέει από το θεώρημα Perron – Frobenius για κάθε μη υποβιβάσιμο πίνακα, το οποίο και μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας αλγεβρικά απλής θετικής ιδιοτιμής r η οποία είναι ίση με τη μέγιστη τιμή του φάσματος του δοθέντος πίνακα. Αντιλαμβανόμαστε επίσης αν θέσουμε με $s = M\mathit{1} = (s_1, \ldots, s_n)^T$, όπου *1* εδώ είναι το διάνυσμα που περιέχει τη μονάδα σε κάθε στοιχείο, τότε κάθε s_i συμπίπτει με το άθροισμα στοιχείων της i-γραμμής και υποδηλώνει το πλήθος των νικών του i παίκτη, όπως και το πλήθος των εξερχόμενων ακμών από την i κορυφή στον αντίστοιχο γράφο σε περίπτωση πίνακα πρωταθλήματος. Πλέον το διάνυσμα s θα το αποκαλούμε <u>διάνυσμα δυναμικής</u>.

Παρατήρηση 3.2.2.5. Ας συμβολίσουμε με π_n την ελάχιστη ιδιοτιμή Perron στο σύνολο όλων των μη υποβιβάσιμων πινάκων πρωταθλήματος μεγέθους n. Αποδεικνύεται ότι για $n \geq 4$ ισχύει $\sqrt{2} < \pi_n$, ενώ για για $n \geq 8$ ισχύει $2 < \pi_n < 2{,}5$. Η εικασία Brualdi – Li μάλιστα επισημαίνει ότι οι πίνακες που ελαχιστοποιούν την Perron ιδιοτιμή είναι άνω τριγωνικοί και έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση 3.2.2.6. Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας πρωταθλήματος έχει άρτιο μέγεθος, τότε η μεγαλύτερη τιμή Perron προκύπτει από πίνακες που έχουν την μορφή $T = \left(\begin{array}{c|c} B & B^T \\ \hline B^T + I & B \end{array}\right)$ όπου ο B είναι πίνακας μεγέθους $n/2$ και περιέχει μηδενικά στη διαγώνιο και κάτω από αυτή, ενώ πάνω από τη διαγώνιο περιέχει άσσους.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω ότι ο πίνακας B έχει διαστάσεις 2 x 2 και είναι ίσος με $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Τότε ο προκύπτων πίνακας T είναι όντως ένας πίνακας πρωταθλήματος και ισούται με $T = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας T έχει το ίδιο πλήθος από άνω διαγώνιους που αποτελούνται απο μονάδες και από κάτω διαγώνιους που αποτελούνται από μηδενικά (μία και μία στο παράδειγμά μας).

Προκύπτει από το Θεώρημα 3.2.2.4 ότι για μια ιδιοτιμή λ ενός πίνακα πρωταθλήματος μεγέθους n θα ισχύει ότι $-1/2 \leq \mathrm{Re}(\lambda) \leq (n-1)/2$.

Πόρισμα 3.2.2.7. Έστω M ένας πίνακας πρωταθλήματος n παικτών. Εάν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα, τότε η γεωμετρική πολυπλοκότητα της ισούται με 1 όποτε $\mathrm{Re}(\lambda) \neq -1/2$. Εάν $\mathrm{Re}(\lambda) = -1/2$, τότε η γεωμετρική και η αλγεβρική πολυπλοκότητα της ιδιοτιμής ισούνται.

Εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο πίνακας M είναι ισορροπημένος αν και μόνο αν είναι ταυτόχρονα και κανονικός. Δηλαδή αν ισχύει ότι $AA^* = A^*A$ ή διαφορετικά αν ισχύει ότι υφίσταται ορθογώνιος πίνακας U και διαγώνιος πίνακας Λ ούτως ώστε ο πίνακας M να μπορεί να γραφεί ως $M = U\Lambda U^*$. Συνεπώς, υπάρχει μια βάση με n το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του M και αυτό συνεπάγεται ότι ο πίνακας M είναι διαγωνοποιήσιμος.

Έστω λοιπόν οι ιδιοτιμές του πίνακα M ότι είναι οι $r = (n-1)/2, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Τότε το ίχνος του πίνακα θα ισούται με $\mathrm{tr}M = r + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ και επειδή από το γ σκέλος του Θεωρήματος 3.2.2.4 προκύπτει για κάθε $1 \leq i \leq n-1$ ότι $\mathrm{Re}(\lambda_i) \geq -½$, θα ισχύει εν τέλει ότι $\mathrm{Re}(\lambda_i) = -1/2$ για κάθε $1 \leq i \leq n-1$. Συγκεκριμένα η τάξη κάθε κανονικού πίνακα M είναι ίση με n (ενώ εν γένει η τάξη ενός πίνακα πρωταθλήματος είναι τουλάχιστον n-1). Κάθε μη υποβιβάσιμος πίνακας M που αποτελείται από 3 ή περισσότερους παίκτες ικανοποιεί επίσης την συνθήκη $\mathrm{tr}^2 M = 0$, επομένως αυτός ο πίνακας επιβάλλεται να έχει 3 τουλάχιστον διακεκριμένες ιδιοτιμές, συμπεριλαμβανομένης της Perron ιδιοτιμής r.

Πόρισμα 3.2.2.8. Έστω ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας πρωταθλήματος H μεγέθους $n \geq 3$. O πίνακας αυτός έχει ακριβώς 3 ιδιοτιμές αν και μόνο αν είναι ένας Hadamard πίνακας πρωταθλήματος, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση $HH^T = \frac{n+1}{4}I + \frac{n-3}{4}J$, με $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$.

Ένας Hadamard πίνακας πρωταθλήματος έχει ιδιοτιμές τη $(n-1)/2$ (μία φορά) και τις $-1/2 \pm \sqrt{n}/2$ ($(n-1)/2$ φορές την καθεμία). Επομένως θα ισχύει ότι η μέγιστη γεωμετρική πολυπλοκότητα μιας ιδιοτιμής με πραγματικό μέρος ίσο με - ½ είναι ίση με $(n-1)/2$. Κάθε πίνακας που επιτυγχάνει αυτό το όριο πρέπει να είναι ισορροπημένος.

3.3 Κανονική Μορφή Γενικευμένων Πινάκων Πρωταθλήματος

Είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο τι εστί η <u>υποβιβασιμότητα</u> ενός πίνακα. Δοθέντος ενός τετραγωνικού πίνακα M και ενός πίνακα μετάθεσης Q, μπορούμε να διατυπώσουμε εναλλακτικά τον Ορισμό 2.1.1. ως εξής:

$$QMQ^{T} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

όπου A και B είναι τετραγωνικοί μη μηδενικοί πίνακες μικρότερου μεγέθους από n. Στην περίπτωση πλέον όπου M είναι ένας γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος, μπορούμε να πούμε ότι το γινόμενο πινάκων QMQ^{T} είναι μια απλή αναδιάταξη στη σειρά των παικτών των πρωταθλήματος, με τον τρόπο που ορίζει ο πίνακας μετάθεσης Q.

Θεώρημα 3.3.1. Εάν P είναι ένας γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος, τότε υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης Q τέτοιος ώστε να ισχύει

$$QPQ^{T} = \begin{bmatrix} P_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & P_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & P_l \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

όπου οι πίνακες P_1, P_2, P_3, είναι μη υποβιβάσιμοι γενικευμένοι πίνακες πρωταθλήματος.

<u>Απόδειξη</u>: Η απόδειξη προκύπτει συνδυάζοντας τον ορισμό της υποβιβασιμότητας με τον γεγονός ότι οι κύριοι ελάσσονες πίνακες που σχηματίζονται, όπως και ο ίδιος ο πίνακας QPQ^{T} δεν μπορούν παρά να είναι και αυτοί γενικευμένοι πίνακες πρωταθλήματος. ■

Το δεξιό μέλος της σχέσης (3.7) ονομάζεται <u>κανονική μορφή</u> γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος.

Παρατήρηση 3.3.2. Γενικά η διαδικασία ανεύρεσης και επαλήθευσης της κανονικής μορφής ενός γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος είναι απλή και βασίζεται στη λογική ότι τα αθροίσματα γραμμών του πίνακα P του διαγώνιου κύριου ελάσσονα υποπίνακα P_j, είναι μεγαλύτερα των αθροισμάτων γραμμών κάθε πίνακα P_k, με $k > j$.

Πόρισμα 3.3.3. Ο γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος P είναι βρίσκεται σε κανονική μορφή αν $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n$ είναι, όπου r_i είναι το άθροισμα των στοιχείων της i-οστής γραμμής.

Η παραπάνω μορφή είναι μια αναλυτικότερη εκδοχή του διαμοιρασμού του πρωταθλήματος σε δύο επιμέρους λίγκες. Σύμφωνα με αυτό το φορμάτ, η διοργανώτρια αρχή δίνει v_j πόντους σε κάθε t_i παίκτη που νικάει τον t_j αντίπαλο παίκτη. Επομένως οι συνολικά v_i πόντοι κάθε t_i παίκτη δίνονται από τον τύπο $v_i = \sum_j m_{ij} v_j$. Εφόσον υπάρχουν δύο λίγκες, έστω η αριστερή L και η δεξιά R, τότε οι πόντοι που θα έχει κατακτήσει κάθε ομάδα από την αριστερή λίγκα θα είναι $l_i = \sum_{j \in L} m_{ij} v_j$ και $r_i = \sum_{j \in R} m_{ij} v_j$ οι αντίστοιχοι πόντοι που θα κερδηθούν από ομάδες της δεξιάς λίγκας. Η λίγκα θα λέγαμε ότι είναι δίκαιη αν $l_i = r_i$. Γενικά στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του $\sum_{i \geq 1} | l_i - r_i |$. Για να ισχύει $l_i = r_i$, επιδιώκουμε επί της ουσίας να ισχύει $Mv = 0$, για διάνυσμα πόντων $v \neq 0$. Έπειτα θα τοποθετούσαμε τον παίκτη t_i στην αριστερή λίγκα αν $v_i > 0$ και αντίστοιχα θα τοποθετούσαμε τον παίκτη t_i στη δεξιά λίγκα αν $v_i < 0$.

Μάλιστα να τονιστεί ότι για δοθέν M υπάρχει ένας το πολύ τρόπος να επιλεγεί το διάνυσμα v και να μοιραστούν σε αυτές τις δύο λίγκες κατάλληλα οι ομάδες.

Παράδειγμα: Γενικά την οπτικοποίηση της σχέσης των αθροισμάτων γραμμών και την καλύτερη κατανόηση του πορίσματος λαμβάνουμε ως παράδειγμα τον κάτωθι πίνακα P.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}8 \\ 1 & 0 & 1 & 0{,}9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

με τα αθροίσματα γραμμών να είναι $r_1 = 1{,}8$ $r_2 = 3{,}9$ $r_3 = 0{,}6$ $r_4 = 3{,}1$ και $r_5 = 0{,}6$.

Εάν οι γραμμές και οι στήλες του πίνακα αναδιαταχθούν κατάλληλα ούτως ώστε τα αθροίσματα γραμμών να βρίσκονται σε μη αύξουσα σειρά, τότε μπορεί να προκύψει ο πίνακας

$$QPQ^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}9 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Η παραπάνω κανονική μορφή είναι μοναδική για τον δοθέντα μεταθετικό πίνακα Q και γενικά ισχύει ότι για κάθε γενικευμένο πίνακα πρωταθλήματος οι διαγώνιοι μη υποβιβάσιμοι κύριοι ελάσσονες υποπίνακες που σχηματίζονται στην κανονική μορφή του είναι μοναδικοί ως προς τα στοιχεία που περιέχουν.

Έστω ότι το σκορ ενός παίκτη είναι το πλήθος των αντίπαλων παικτών που νικάει. Τότε το r_i εκφράζει αυτομάτως το αναμενόμενο σκορ κάθε παίκτη. Υποθέτουμε λοιπόν ότι οι παίκτες του πρωταθλήματος ταξινομούνται με τέτοιον τρόπο έτσι ώστε να αναμενόμενα σκορ τους να βρίσκονται σε μη αύξουσα σειρά. Κάθε μάλιστα διαγώνια κύριος ελάσσων πίνακα αποτελεί μια κατηγορία (/λίγκα) παικτών, καθότι είναι εμφανές ότι ηττάται από κάθε παίκτη προγενέστερου κύριου ελάσσονα πίνακα, ενώ επιτυγχάνει κερδοφόρο αποτέλεσμα έναντι κάθε αντιπάλου απο μεταγενέστερο κύριο ελάσσονα πίνακα. Από εδώ και εξής οι πρώτοι πίνακες θα είναι εφάμιλλοι με κάποια ανώτερη κατηγορία, ενώ οι δεύτεροι θα σημαίνουν την ύπαρξη κάποιας κατώτερης κατηγορίας. Επιπρόσθετα οι παίκτες του κύριου ελάσσονα υποπίνακα P_κ της κανονικής μορφής QPQ^{T} του πίνακα P ορίζουν την k-οστή κατηγορία ($k = 1,2,3,\ldots,l$). Εξ ορισμού γνωρίζουμε ότι μπορεί να υπάρξει μόνο ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα μεταξύ παικτών από δύο διαφορετικές κατηγορίες (νίκη με τιμή 1/ ήττα με τιμή 0), οπότε η προσοχή μας στρέφεται στα παιχνίδια αντιπάλων που ανήκουν στην ίδια ακριβώς κατηγορία και στις κατηγορίες που αποτελούνται από έναν παίκτη και είναι μια ιδιάζουσα κατηγορία.

Πόρισμα 3.3.4. Προϋπόθεση να έχουμε μία κατηγορία που να αποτελείται αποκλειστικά και μόνο από έναν παίκτη είναι σε αυτήν την κατηγορία να αντιστοιχίζεται ο αύξων αριθμός k, τέτοιος ώστε

$$\sum_{j=1}^{k} r_j = \binom{k}{2} + (k(n-k)) = \binom{n}{2} - \binom{n-k}{2}. \tag{3.10}$$

Παράδειγμα: Γενικά την οπτικοποίηση της σχέσης των αθροισμάτων γραμμών και την καλύτερη κατανόηση του προηγούμενου πορίσματος λαμβάνουμε ως παράδειγμα τον κάτωθι πίνακα QPQ^T της σχέσης (3.9). Ο πίνακας αυτός βρίσκεται σε κανονική μορφή και μπορεί να διαχωριστεί σε 3 κύριους ελάσσονες υποπίνακες P_1, P_2, P_3 ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} \left\| \begin{matrix} 0 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0 \end{matrix} \right\| \to P1 & & \\ & P2 \leftarrow \quad 0 & \\ & & P3 \leftarrow \left| \begin{matrix} 0 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0 \end{matrix} \right| \end{bmatrix}$$

. Εφαρμόζοντας τη σχέση (3.10) για k=2 (και n=5) προκύπτει:

$$\sum_{j=1}^{2} r_j = \binom{2}{2} + (2(5-2)) = \binom{5}{2} - \binom{5-2}{2} = 7. \tag{3.11}$$

Έστω $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, θετικοί ακέραιοι. Ένας πίνακας που μπορεί να προκύψει από έναν ν-μερή & πλήρη σε κάθε επιμέρους κατηγορία γράφο, μπορεί να χαρακτηριστεί πίνακας πρωταθλήματος με την σύμβαση ότι για κάθε παιχνίδι παικτών από δύο διαφορετικές και συγκεκριμένες κατηγορίες το αποτέλεσμα είναι πάντα το ίδιο, δηλαδή επικρατούν πάντοτε παίκτες μιας εκ των δύο κατηγοριών. Εν προκειμένη περιπτώσει ν είναι το πλήθος των κατηγοριών. Αν μάλιστα κάθε κατηγορία αποτελείται ακριβώς από το ίδιο πλήθος παικτών έστω π, τότε μπορεί να προκύψει ο κατευθυνόμενος γράφος $K_{\pi,\pi,\ldots,\pi}$ και αντίστοιχα ένας πίνακας πρωταθλήματος κανονικής μορφής στον οποίο κάθε κατηγορία θα έχει ακριβώς π το πλήθος παίκτες.

Μπορούμε να υποθέσουμε επομένως ότι η κ-οστή ομάδα θα αποτελείται από τους παίκτες του συνόλου $\{(\kappa-1)\pi + 1, \ldots, \kappa\pi\}$, όπου $1 \le \kappa \le \nu$. Τότε μάλιστα για τον πίνακα πρωταθλήματος θα ισχύει $(J_\nu - I_\nu) \otimes J_\pi = J_n - (I_\nu \otimes J_\pi)$, όπου n είναι το σύνολο όλων των παικτών και με $\otimes$ συμβολίζουμε το γινόμενο Kroenecker πινάκων. Τέλος θα συμβολίσουμε με $T_{\nu,\pi}$ το σύνολο όλων των προκυπτόντων πινάκων των ν-μερών γράφων που έχουν σε κάθε κλίκα τους πληθικότητα π.

Θεώρημα 3.3.5. Για έναν τετραγωνικό n x n πίνακα $M \in T_{\nu,\pi}$ όπου λ είναι μια ιδιοτιμή του και x είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, κατ' αντιστοιχία των γενικευμένων πινάκων πρωταθλήματος θα ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $-\pi/2 \le \mathrm{Re}(\lambda) \le (n-\pi)/2$,

(β) $\mathrm{Re}(\lambda) = (n-\pi)/2$, αν και μόνο αν ο πίνακας είναι ισορροπημένος ($M\mathbf{1} = ((n-\nu)/2)\mathbf{1}$).

(γ) $\mathrm{Re}(\lambda) = -\pi/2$, αν και μόνο αν ισχύει ότι $x^*J_nx = 0$ και $\forall\ 1 \le i \le \nu$, οι τιμές του διανύσματος $x^{(i)} = (x_{(i-1)\pi+1}, \ldots, x_{i\pi})$ θα είναι όλες ίσες και πολλαπλάσιες της μονάδος.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι ανάλογη του Θεωρήματος 3.2.2.4. ■

Πόρισμα 3.3.6. Για έναν μη υποβιβάσιμο πίνακα $M \in T_{\nu,\pi}$ όπου $\pi \geq 2$, ισχύει ότι έχει τουλάχιστον τέσσερις διακεκριμένες ιδιοτιμές. Συνεπώς η αλγεβρική πολυπλοκότητα μιας τέτοιας μη αρνητικής ιδιοτιμής λ είναι το μέγιστο ίση με $(n-2)/2$.

Πόρισμα 3.3.7. Έστω πίνακας $M \in T_{\nu,\pi}$ όπου λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα με $Re(\lambda) = -\pi/2$. Τότε η γεωμετρική και η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι ίσες.

Έστω ένας $M \in T_{\nu,\pi}$ ισορροπημένος πίνακας με k το πλήθος φανταστικές ιδιοτιμές. Από το Θεώρημα 3.3.5β θα έχει ο πίνακας την $(n-\pi)/2$ ως ιδιοτιμή, όπως και τις $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1-k}$. Επειδή το ίχνος του πίνακα πρέπει να ισούται με μηδέν, θα έχουμε ότι $Tr(M) = (n-\pi)/2 + \sum_{i=1}^{n-1-k} Re(\lambda_i) = 0$, ενώ από Θεώρημα 3.3.5γ γνωρίζουμε ότι $Re(\lambda_i) \geq -\pi/2$ για κάθε i, με $k \leq n - \nu$. Επομένως η τάξη κάθε πίνακα $M \in T_{\nu,\pi}$ είναι τουλάχιστον ίση με ν.

Παρατήρηση 3.3.8. Έστω πίνακας $M \in T_{\nu,\pi}$ ο οποίος είναι και ισορροπημένος. Αν ο πίνακας έχει τάξη ίση με ν, τότε ο ν είναι περιττός αριθμός. Ειδάλλως, αν ο ν είναι άρτιος, τότε ο πίνακας M έχει τάξη τουλάχιστον ν + 1.

Παρατήρηση 3.3.9. Παρατηρούμε στον 3 x 3 κάτω δεξιά κύριο ελάσσονα υποπίνακα της σχέσης (3.9) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix}$, ότι έχουμε έναν μη υποβιβάσιμο πίνακα που αποτελεί πίνακα μιας πιθανής κατηγοριοποίησης. Ως εκ τούτου ο 3ος και ο 4ος παίκτης ανήκουν στην ίδια κατηγορία. Ο 4ος παίκτης δεν έχει καμία πιθανότητα να νικήσει τον 3ο. Παρόλα αυτά είναι πιθανόν να νικήσει τον 5ο και αυτός με τη σειρά του να νικήσει τον 3ο. Μάλιστα ο 3ος παίκτης είναι πιθανόν να νικήσει τον 5ο,οπότε εν προκειμένη περιπτώσει σχηματίζεται ένας κύκλος πιθανών επιτυχών αποτελεσμάτων. Ο παραπάνω συσχετισμός δεν είναι αποτέλεσμα τυχαίων συγκρίσεων και παρόμοια αλυσίδα αμφίρροπων παιχνιδιών μπορεί να παρατηρηθεί σε κάθε κύριο ελάσσονα υποπίνακα.

Πόρισμα 3.3.10. Εάν δύο παίκτες, έστω i και j ανήκουν στην ίδια κατηγορία, τότε υπάρχουν οι παίκτες της ίδιας κατηγορίας a, b, … h, τέτοιοι ώστε $P_{ia}P_{ab}\ldots P_{hj} > 0$. Το πόρισμα αυτό είναι φυσικό επακόλουθο της παρατήρησης ότι οι παίκτες i και j ανήκουν στην ίδια κατηγορία που αντιστοιχεί σε μη υποβιβάσιμο κύριο ελάσσονα πίνακα και από Θεώρημα 2.2.5 προκύπτει ισχυρά συνεκτικός γράφος μεταξύ των παικτών που αποτελούν αυτήν την κατηγορία, οπότε θα υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι για κάθε ζεύγος παικτών, άρα υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι απ' τον i παίκτη προς τον j παίκτη.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας (αντίστοιχα ισχυρές συνεκτικές συνιστώσες στη γραφοθεωρητική ορολογία) των αμοιβαία συγκρίσιμων παικτών αντιστοιχούν στους μη υποβιβάσιμους ελάσσονες κύριους πίνακες της κανονικής μορφής ενός γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος.

Παρατηρούμε ότι κρατώντας τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα πάντα ίσα με μηδέν, προσθέτοντας μία ποσότητα ε σε ένα μη διαγώνιο στοιχείο του πίνακα και αφαιρώντας την ίδια ποσότητα από κάποιο άλλο στοιχείο της ίδιας γραμμής, τότε το άθροισμα γραμμής της γραμμής αυτής παραμένει και αυτό σταθερό. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί για οποιοδήποτε ζεύγος στοιχείων οποιασδήποτε γραμμής για οποιαδήποτε ποσότητα ε. Συνεπώς, μεταβάλλοντας με συνεχή τρόπο κάποιο ε κάθε φορά που εφαρμόζουμε τη διαδικασία αυτή προκύπτει ένα «συνεχές δείγμα» πινάκων, οι οποίοι έχουν όλοι ανεξαιρέτως δύο κοινά χαρακτηριστικά. Τα ίσα διαγώνια στοιχεία τους $\alpha_{i,i}(A)$ $\forall$ $i \in N$ και τα ίσα αθροίσματα γραμμών $r_i(A)$ $\forall$ $i \in N$. Οδηγούμαστε επομένως στον επόμενο ορισμό:

Ορισμός 3.3.11. Για κάθε πίνακα $A \in C^{nxn}$ ορίζουμε την **κλάση πινάκων** (equiradial set) του A ως το σύνολο όλων των πινάκων που ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$\omega(A) \coloneqq \{B = [\beta_{i,j}] \in C^{nxn} : \beta_{i,i} = \alpha_{i,i} \text{ και } r_i(B) = r_i(A) \ \forall \ i \in N\}, \tag{3.12}$$

ενώ έπεται και ο συμπληρωματικός ορισμός της **διευρυμένης κλάσης πινάκων** (extended equiradial set) του A, η οποία είναι μία κλάση που περιλαμβάνει όλους τους πίνακες που ικανοποιούν τη σχέση

$$\hat{\omega}(A) \coloneqq \{B = [\beta_{i,j}] \in C^{nxn} : \beta_{i,i} = \alpha_{i,i} \text{ και } r_i(B) \leq r_i(A) \ \forall \ i \in N\}. \tag{3.13}$$

Παρατήρηση 3.3.12. Είναι προφανές είναι η διευρυμένη κλάση πινάκων $\hat{\omega}(A)$ λόγω της ανισότητας των αθροισμάτων γραμμών στη σχέση (3.9) θα είναι μεγαλύτερη από την αρχική κλάση $\omega(A)$, δηλαδή $\omega(A) \subseteq \hat{\omega}(A)$. Επίσης, η κλάση πινάκων $\omega(A)$ συναντάται στη βιβλιογραφία και ως ισακτινικό σύνολο του A και η κλάση $\hat{\omega}(A)$ συναντάται αντίστοιχα ως διευρυμένο ισακτινικό σύνολο του A.

Όπως έχουμε ορίσει το φάσμα ενός πίνακα $A \in C^{nxn}$ έτσι μπορούμε να ορίσουμε και το φάσμα της κλάσης του πίνακα A. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$\sigma(\omega(A)) \coloneqq \bigcup_{B \in \omega(A)} \sigma(B) \quad \text{και} \quad \sigma(\hat{\omega}(A)) \coloneqq \bigcup_{B \in \hat{\omega}(A)} \sigma(B). \tag{3.14}$$

Από τους προηγούμενους ορισμούς, την ανισότητα στη σχέση (3.5) και τη σχέση (3.6) προκύπτει ότι

$$\sigma(\omega(A)) \subseteq \sigma(\hat{\omega}(A)). \tag{3.15}$$

Παρατήρηση 3.3.13. Ένας πίνακας πρωταθλήματος T είναι <u>μεταβατικός</u> αν η σχέση → που συνδέεται με τον πίνακα T είναι και αυτή μεταβατική. Συνεπάγεται ότι ο T είναι μεταβατικός αν και μόνο αν η κανονική του μορφή έχει μονάδες παντού πάνω από την διαγώνιο και μηδενικά παντού αλλού.

Θεώρημα 3.3.14. Ένας πίνακας πρωταθλήματος T είναι μεταβατικός αν και μόνο αν η μοναδική του ιδιοτιμή είναι το μηδέν.

<u>Απόδειξη</u>: Εάν ο πίνακας είναι μεταβατικός τότε σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.3.12. έχει μηδενικά και στην κύρια διαγώνιο, επομένως δεν μπορεί να έχει άλλη ιδιοτιμή πέρα από το μηδέν. Εάν δεν είναι μεταβατικός, τότε κάποιος κύριος ελάσσων πίνακας P_k της κανονικής του μορφής δεν είναι μηδενικός (και επίσης δεν είναι και υποβιβάσιμος). Επομένως βάσει του Θεωρήματος 3.2.2.3 αυτό σημαίνει ότι θα έχει κάποια θετική ιδιοτιμή. ■

3.4 Εφαρμογές Γενικευμένων Πινάκων Πρωταθλήματος

3.4.1 Μέθοδος Στοιχηματισμού Παικτών

Ορισμός 3.4.1.1. Έστω Β ένας τετραγωνικός n x n πίνακας. Λέμε ότι ο πίνακας Β είναι ένας **πίνακας πληρωμών** σε περίπτωση που το B_{ij} εκφράζει το ποσό που πληρώνει ο i παίκτης στο j παίκτη όταν χάνει από αυτόν, δηλαδή j → i, ενώ ακριβώς αντιστρόφως το B_{ji} εκφράζει το ποσό που πληρώνει ο j παίκτης στον i παίκτη όταν χάνει από αυτόν, δηλαδή i → j. Επίσης ορίζουμε και τα προσδοκώμενα κέρδη ή απώλειες κάθε παίκτη, το λεγόμενο **ισοζύγιο**, όπου P είναι ένας γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος, ως $E(g_i) = \sum_j (P_{ij}B_{ji} - P_{ji}B_{ij})$.

Ορισμός 3.4.1.2. Έστω Β ένας τετραγωνικός n x n μη αρνητικός πίνακας, με τα διαγώνια στοιχεία όλα ίσα με μηδέν. Τότε αυτός ο πίνακας είναι **δίκαιος πίνακας πληρωμών**, εάν $E(g_i) = 0$, ∀ i ∈ N, οπότε και θα ισχύει ότι ο Β είναι δίκαιος πίνακας πληρωμών αν και μόνο αν diag(PB – BP) = 0.

Παρατήρηση 3.4.1.3. Υπάρχουν πολλοί δίκαιοι πίνακες πληρωμών, όπως για παράδειγμα ο ίδιος ο γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος P που μελετάται κάθε φορά, αλλά και κάθε πολυώνυμο αυτού του πίνακα P με θετικούς συντελεστές. Το ζητούμενο είναι συνήθως να επιλέγεται ο καταλληλότερος δίκαιος πίνακας για την εκάστοτε περίσταση.

Ορισμός 3.4.1.4. Συμβολίζουμε με S το **άθροισμα των διασπορών των ισοζυγίων** των i παικτών. Δηλαδή

$$S=\sum_i \sigma^2(g_i)=\sum_i\sum_j\{(P_{ij}B_{ji}^2+P_{ji}B_{ij}^2) - (P_{ij}B_{ji}-P_{ji}B_{ij})^2\}= \sum_{ij} P_{ij}P_{ji}(B_{ij}+B_{ji})^2 \quad . \tag{3.16}$$

Θέτοντας $\beta = \sum_{ij} B_{ij} > 0$ με την προϋπόθεση $P_{ij} > 0$, ∀ ζεύγος διαφορετικών i και j, ψάχνουμε για τον πίνακα πληρωμών που ελαχιστοποιεί το S.

Πρόταση 3.4.1.5. Εάν $B_{ij}=\frac{\beta}{\nu}\frac{1}{P_{ji}}$, για i ≠ j, όπου $\nu = \sum_{i<j}\frac{1}{P_{ij}P_{ji}}$, με το ν να μειώνεται όσο ανταγωνιστικότερο γίνεται το πρωτάθλημα, τότε ο πίνακας $B = \left[B_{ij}\right]$, είναι δίκαιος και ελαχιστοποιεί το S. Επιπλέον το άθροισμα $B + B^T$ είναι μοναδικό και $S(B) = 2\beta^2 / \nu$.

Τουναντίον, αν θελήσουμε να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα διασπορών των ισοζυγίων S οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $S \le 2\beta^2 P_{uv}P_{vu}$, όπου $P_{uv}P_{vu}$ = max $P_{ij}P_{ji}$ ∀ i ≠ j και υποδηλώνει το γινόμενο πιθανοτήτων στο πιο οριακό/ αμφίρροπο παιχνίδι του πρωταθλήματος. Ο πίνακας πληρωμών Β που κατορθώνει να μεγιστοποιήσει το S επί της ουσίας είναι αυτός με πονταρίσματα μόνο μεταξύ αυτών των δύο παικτών u και v.

Εάν υπάρχουν θετικά διανύσματα $w = (w_1, . . ., w_n)$ και $s = (s_1, . . ., s_n)$ τέτοια ώστε $B_{ij} = w_j s_i$, ∀ i ≠ j τότε ο πίνακας $B = \left[B_{ij}\right]$, $B = w^T s$, λέμε ότι ορίζει ένα διπαραμετρικό σύστημα πονταρισμάτων. Τα διανύσματα w και s μπορούν να ερμηνευθούν ως διανύσματα αδυναμιών και δυνατών στοιχείων για τις αντίστοιχες ομάδες ∀ i ∈ N.

Θεώρημα 3.4.1.6. Εάν οι n παίκτες ($n > 1$) ενός γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος ανήκουν στην ίδια κατηγορία, τότε υπάρχει ένα δίκαιο διπαραμετρικό σύστημα πονταρισμάτων.

Απόδειξη: Καταρχάς θέτουμε ως λ τη μοναδική θετική ιδιοτιμή (χαρακτηριστική τιμή) του γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος, έστω P, όπως υποδηλώνει και το Θεώρημα 3.2.2.3. Μετέπειτα, θέτουμε ως w^T και s το αριστερό και δεξιό χαρακτηριστικό διάνυσμα (ιδιοδιάνυσμα από εδώ και στο εξής) αντιστοίχως. Εάν $B_{ij} = w_j s_i$, όταν $i \neq j$, τότε έχουμε ότι

$$E(g_i) = \sum_j (P_{ij}B_{ji} - P_{ji}B_{ij}) = w_i \sum_j P_{ij}s_j - s_i \sum_j w_j P_{ji} = w_i \lambda s_i - s_i \lambda w_i = 0\,, \qquad (3.17)$$

για όλα τα $i \in N$. Επομένως έχουμε διπαραμετρικό δίκαιο σύστημα. Να σημειωθεί επίσης ότι αν κανονικοποιήσουμε τα ιδιοδιανύσματα s και w, δηλαδή έχουμε $\sum_i s_i = \sum_i w_i = 1$, τότε προκύπτει από Θεώρημα 3.2.2.4 ότι $s^T s = w^T w = 1/(1+2\lambda)$. ■

Παρατήρηση 3.4.1.7. Εάν κάθε παίκτης πληρώνει κάποιο σταθερό ποσό, ανεξαρτήτως αντιπάλου, έστω $s_i = B_{ij}$, $\forall\, i \neq j$, τότε θα έχουμε ένα θετικό διάνυσμα $s = (s_1, \ldots, s_n)$ και θα ισχύει ότι ο πίνακας $B = [B_{ij}]$ ορίζει ένα μονοπαραμετρικό σύστημα πονταρισμάτων, που είναι ειδική περίπτωση των διπαραμετρικών συστημάτων πονταρισμάτων. Εφόσον το ποσό που πληρώνει πλέον ο εκάστοτε i παίκτης είναι ανεξάρτητο από τον παίκτη j όταν $j \rightarrow i$, το διάνυσμα s μπορεί να ερμηνευθεί και ως ένα μέτρο δυναμικής των παικτών, ιδίως στην περίπτωση που το διάνυσμα s είναι κανονικοποιημένο.

Θεώρημα 3.4.1.8. Εάν οι n παίκτες ($n > 1$) ενός γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος ανήκουν στην ίδια κατηγορία, τότε υπάρχει ένα μοναδικό δίκαιο μονοπαραμετρικό σύστημα πονταρισμάτων.

Απόδειξη: Καταρχάς σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2.3. για οποιονδήποτε πίνακα Q που παράγεται από τον P απλά πολλαπλασιάζοντας κάθε γραμμή με κάποιον θετικό αριθμό εξακολουθεί να ισχύει ότι υπάρχει μοναδική θετική ιδιοτιμή. Ας τοποθετήσουμε λοιπόν τους παραπάνω αριθμούς σε ένα διάνυσμα, έστω το διάνυσμα c με $\sum_t P_{ti} = c_i$. Θέτουμε τον πίνακα $Q = [Q_{ij}]$. Εδώ να τονίσουμε ότι ισχύει $\forall\, i \in N$ ότι τα c_i είναι θετικοί αριθμοί, ειδάλλως ο πίνακας θα ήταν υποβιβάσιμος και οι παίκτες θα ανήκαν σε διαφορετικές κατηγορίες. Υπάρχει θετικό διάνυσμα με μορφή στήλης $s = (s_1, \ldots, s_n)^T$ και θετικός αριθμός λ, τέτοια ώστε $Qs = \lambda s$. Για το προηγούμενο διάνυσμα που ορίσαμε, το $c = (c_1, \ldots, c_n)$, ισχύει τόσο από τον ορισμό του, όσο και από τον ορισμό του πίνακα Q ότι $cQ = c$. Επομένως προκύπτει ότι η τιμή 1 είναι ιδιοτιμή του πίνακα και εφόσον ο πίνακας Q μπορεί να έχει μοναδική θετική ιδιοτιμή, πρέπει συνάμα να ισχύει ότι $Qs = s$ εφόσον $\lambda=1$.Το μονοπαραμετρικό σύστημα πονταρισμάτων $B = [B_{ij}]$ είναι δίκαιο, καθώς για $i \neq j$ έχουμε ότι $B_{ij} = s_i$ και επιπρόσθετα για τα ισοζύγια των παικτών ισχύει

$$E(g_i) = \sum_j (P_{ij}B_{ji} - P_{ji}B_{ij}) = \sum_j P_{ij}s_j - s_i \sum_j P_{ji} = c_i(\sum_j Q_{ij}s_j - s_i) = c_i(s_i - s_i) = 0\,, \qquad (3.18)$$

$\forall\, i \in N$. Το ότι η δίκαιη κανονικοποιημένη λύση s είναι μοναδική είναι άμεσο συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.2.2.3 καθώς δείξαμε ότι $E(g_i) = 0$ για κάθε i. ■

Παρατήρηση 3.4.1.9. Ένα θετικό διάνυσμα $v = (v_1, \ldots, v_n)$ σε συνδυασμό με έναν τετραγωνικό πίνακα $B = [B_{ij}]$, όπου ισχύει $B_{ij} = v_i/(v_i+v_j)$ ορίζει ένα εναλλακτικό μονοπαραμετρικό σύστημα πονταρισμάτων, όπου ο πίνακας πληρωμών B έχει μετατραπεί σε γενικευμένο πίνακα πρωταθλήματος. Το διάνυσμα v λοιπόν μπορεί να ερμηνευθεί και ως μέτρο δυναμικής των παικτών.

Θεώρημα 3.4.1.10. Εάν οι n παίκτες ($n > 1$) ενός γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος ανήκουν στην ίδια κατηγορία, τότε υπάρχει ένα μοναδικό δίκαιο (και ταυτόχρονα κανονικοποιημένο) <u>εναλλακτικό μονοπαραμετρικό σύστημα πονταρισμάτων</u>..

<u>Απόδειξη</u>: Εν προκειμένη περιπτώσει, η απαιτούμενη συνθήκη $E(g_i) = 0$ ισοδυναμεί με με τη συνθήκη $\sum_{j \neq i} P_{ij}(B_{ji} + B_{ij}) = \sum_{j \neq i} B_{ij}$. Επομένως ένα δίκαιο εναλλακτικό μονοπαραμετρικό σύστημα πονταρισμάτων $B_{ij} = v_i / (v_i + v_j)$ υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το θετικό διάνυσμα $v = (v_1, \ldots, v_n)$, το οποίο με τη σειρά του ικανοποιεί για $\forall\ i \in N$ τις κάτωθι εξισώσεις με το εκάστοτε άθροισμα γραμμής r_i,

$$r_i = \sum_{j \neq i} \frac{v_i}{v_i + v_j}. \qquad (3.19)\blacksquare$$

Εάν τα στοιχεία ενός γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος έχουν συγκεκριμένη μορφή, τότε το ακόλουθο πόρισμα παρέχει μια πολύ μεγάλη οικογένεια δίκαιων συστημάτων πονταρισμάτων.

Πόρισμα 3.4.1.11. Αποδεικνύεται άμεσα ότι αν υποθέσουμε πως υπάρχουν θετικοί αριθμοί $t_1, \ldots, t_n$ ώστε να ισχύει ότι $P_{ij} = t_i / (t_i + t_j)$ για $\forall\ i \in N$, και αν $C = [C_{ij}]$, συμμετρικός μη αρνητικός πίνακας με μηδενικά διαγώνια στοιχεία, τότε ο $B = [B_{ij}]$ ορίζει ένα δίκαιο σύστημα πονταρισμάτων αν $B_{ij} = C_{ij}t_i$.

3.4.2 Μέθοδος Αμοιβών Διοργανώτριας Αρχής

Στην τρέχουσα παράγραφο θα ασχοληθούμε με περιπτώσεις πρωταθλημάτων όπου η ίδια η διοργανώτρια αρχή του πρωταθλήματος αποφασίζει εκ των προτέρων ποιές πρόκειται να είναι οι αμοιβές των παικτών σε περίπτωση νίκης τους. Πιο συγκεκριμένα, αμείβει τον παίκτη i με το ποσό A_{ji} στην περίπτωση που ο ο i παίκτης νικάει τον j παίκτη, δηλαδή $i \rightarrow j$ (στην αντίστροφη περίπτωση πληρώνει το ποσό A_{ij} στον j παίκτη). Γενικά κατά τη μέθοδο αυτή μπορούμε να πούμε ότι δεν τιμωρείται απευθείας ο παίκτης που ηττάται, καθότι έχει προπληρώσει τη συμμετοχή του στο πρωτάθλημα και υπεύθυνη για τις αμοιβές είναι μόνο η διοργανώτρια αρχή.

Εάν συμβολίσουμε με $E(w_i)$ τη μέση τιμή των κερδών του i παίκτη και με $\sigma^2(w_i)$ τη διασπορά των κερδών, με τα δύο αυτά μεγέθη να ορίζονται $\forall\ i \in N$, τότε θα ισχύει

$$E(w_i) = \sum_j (P_{ij} A_{ji}) \quad \text{και} \quad \sigma^2(w_i) = \sum_j (P_{ij} P_{ji} A_{ij}^2). \tag{3.20}$$

Έστω $w = \sum w_i$ το συνολικό ποσό αμοιβών (που δίνεται από την διοργανώτρια αρχή μετά το πέρας του πρωταθλήματος). Τότε θα ισχύει για την μέση τιμή των αμοιβών και την αντίστοιχη διασπορά

$$E(w) = \sum_{i,j} (P_{ij} A_{ji}) \quad \text{και} \quad \sigma^2(w) = \sum_{i<j} P_{ij} P_{ji} (A_{ij} - A_{ij})^2. \tag{3.21}$$

Ορισμός 3.4.2.1. Ένας n x n μη αρνητικός πίνακας $A = [A_{ij}]$, με μηδενικά όλα τα διαγώνια στοιχεία, λέμε ότι ορίζει ένα δίκαιο σύστημα αμοιβών (ή απλούστερα λέμε ότι ο A είναι δίκαιος), αν όλοι οι παίκτες που μετέχουν στο πρωτάθλημα έχουν τα ίδια αναμενόμενα κέρδη. Υπάρχει δηλαδή μια σταθερά λ για την οποία να ισχύει $E(w_i) = \sum_j (P_{ij} A_{ji}) = \lambda$.

Παρατήρηση 3.4.2.2. Στην περίπτωση ενός συμμετρικού γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος P και ενός συμμετρικού δίκαιου πίνακα A προκύπτει εξ ορισμού ότι θα έχουμε μηδενική διασπορά κερδών. Μπορεί παρόλα αυτά να ισχύει $\sigma^2(w) = 0$ για δίκαιους πίνακες A που αντιστοιχούν σε μη συμμετρικούς γενικευμένους πίνακες πρωταθλήματος P.

<u>Παράδειγμα</u>: Δίνεται ο γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος P και ο αντίστοιχος δίκαιος πίνακας A,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 3/4 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 5/6 & 2/3 \\ 5/6 & 0 & 3/2 \\ 2/3 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

όπου προκύπτει εύκολα ότι $E(w_i) = 1$ για $i = 1,2,3$, άρα συνεπάγεται ότι ο πίνακας A είναι όντως δίκαιος.

Το ακόλουθο πόρισμα μας παρέχει μια πάρα πολύ μεγάλη οικογένεια δίκαιων συστημάτων αμοιβών και για τη μέθοδο των αμοιβών από τη διοργανώτρια αρχή. Γίνεται πλέον αντιληπτό ότι και σε αυτή τη μέθοδο όταν $n > 1$, πρέπει να επιλέγουμε ποιον δίκαιο πίνακα να χρησιμοποιούμε.

Πόρισμα 3.4.2.3. Έστω $c_j = \sum_k D_{kj}$ όπου $D = [D_{ij}]$ είναι ένας τετραγωνικός n x n πίνακας με μηδενικά στη διαγώνιο και θετικές τιμές οπουδήποτε αλλού. Εάν $P_{ij} > 0$ ∀ i και j, με $i \neq j$, τότε ο πίνακας $A = [A_{ij}]$, όπου $A_{ij} = \lambda\, D_{ij} \;/\; P_{ji}\, c_j$ για $i \neq j$, που όλα του τα διαγώνια στοιχεία είναι εξ ορισμού μηδενικά, είναι δίκαιος για κάθε θετική σταθερά λ.

Να επισημανθεί ότι το διάνυσμα c και πιο συγκεκριμένα η εκάστοτε συνιστώσα του c_j δύναται να απεικονίσει το σύνολο των εισπράξεων του αντίστοιχου παίκτη στην περίπτωση νίκης με κάθε αντίπαλο στο εν λόγω πρωτάθλημα.

Από την πλευρά της διοργανώτριας αρχής είναι επιθυμητό να χρησιμοποιηθεί ένας τέτοιος δίκαιος πίνακας A ώστε να ελαχιστοποιούνται οι διασπορές $\sigma^2(w_i)$, με δεδομένο ότι $E(w_i) = \lambda$. Θα θεωρήσουμε σε όλη τη διάρκεια της τρέχουσας παραγράφου ότι κάθε παίκτης έχει έστω και μια μικρή πιθανότητα να νικήσει οποιονδήποτε αντίπαλο του, δηλαδή ότι $P_{ij} > 0$ ∀ i και j, με $i \neq j$.

Πρόταση 3.4.2.4. Εάν $A_{ij} = \lambda / P_{ji}\, \mu_j$ για $i \neq j$, όπου $\mu_j = \sum_{k \neq j} P_{jk}/P_{kj}$ για $i \neq j$, τότε ο πίνακας $A = [A_{ij}]$ ελαχιστοποιεί τις διασπορές $\sigma^2(w_i)$, με δεδομένο ότι $E(w_i) = \lambda$ ∀ $i \in N$. Επιπρόσθετα ο πίνακας A είναι μοναδικός και ισχύει $\sigma^2(w_i) = \lambda^2 / \mu_i$. Η μέγιστη διασπορά αντιθέτως για κάποιον παίκτη i συναντάται όταν $A_{ij} = \lambda / P_{ij}$ εφόσον το πηλίκο P_{ji} / P_{ji} γίνεται το μέγιστο δυνατό για κάποιο j, με μηδενικά στις θέσεις όλων των υπόλοιπων στοιχείων του.

Παρατήρηση 3.4.2.5. Η μεγιστοποίηση του μ_j συνάδει με το γεγονός ότι μία κυρτή συνάρτηση που ορίζεται σε ένα συμπαγές κυρτό σύνολο λαμβάνει τη μέγιστη τιμή σε κάποιο συνοριακό σημείο. Το μ_j μπορεί κάλλιστα να χαρακτηριστεί και ως ένα άθροισμα δυναμικής, καθώς ο k-οστός όρος του γίνεται ολοένα και μεγαλύτερος όσο αυξάνονται οι πιθανότητες νίκης επί του αντίστοιχου αντιπάλου k. Επομένως το διάνυσμα μ που περιέχει όλα τα μ_j μπορεί να χαρακτηριστεί και ως ένα διάνυσμα δυναμικής των παικτών του πρωταθλήματος. Όπως φαίνεται και από την Πρόταση 3.4.2.4 οι τιμές του δίκαιου πίνακα αμοιβών A είναι αντιστρόφως ανάλογες από τις συνιστώσες του διανύσματος μ. Κάτι απόλυτα ορθό και λογικό, καθότι η μεγάλη δυναμική μιας ομάδας αναμένεται να επιφέρει και μικρές αμοιβές ή εναλλακτικά μικρές αποδόσεις στη στοιχηματική ορολογία.

Πόρισμα 3.4.2.6. Έστω ένα θετικό διάνυσμα $s = (s_1, \ldots, s_n)$ και ένας τετραγωνικός πίνακα $A = [A_{ij}]$, τέτοιος ώστε να ισχύει $A_{ij} = s_i$, ∀ $i \neq j$. Ο πίνακας αυτός ορίζει ένα <u>μονοπαραμετρικό σύστημα αμοιβών</u>. Ο πίνακας αποκαλείται <u>σχεδόν δίκαιος</u> μιας που τα αναμενόμενα κέρδη κάθε παίκτη είναι ανάλογα με την αμοιβή που δίνεται στους υπόλοιπους παίκτες σε περίπτωση που τον νικήσουν. Με άλλα λόγια αναζητούμε μία σταθερά λ ώστε για τα αναμενόμενα κέρδη κάθε παίκτη εν τέλει να ισχύει

$$E(w_i) = \sum_j P_{ij} A_{ji}\, \lambda = \sum_j P_{ij}\; s_j = \lambda s_i,\ \forall\, i \in N. \tag{3.23}$$

Παρατήρηση 3.4.2.7. Παρατηρούμε πως αν στο πρωτάθλημα του Πορίσματος 3.4.2.6. κάθε παίκτης πληρώνει ως ποσό συμμετοχής / εγγραφής στο πρωτάθλημα ακριβώς λs_i, τότε όπως φαίνεται και από τη σχέση (3.23) το αναμενόμενο ισοζύγιο κάθε παίκτη θα ήταν μηδενικό.

Θεώρημα 3.4.2.8. Εάν n παίκτες (n > 1) ενός γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος ανήκουν στην ίδια κατηγορία, τότε υπάρχει ένα μοναδικό κανονικοποιημένο δίκαιο μονοπαραμετρικό σύστημα αμοιβών.

Απόδειξη: Υπάρχει ένα θετικό διάνυσμα $s = (s_1, \ldots, s_n)$ και μία θετική σταθερά λ τέτοια ώστε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2.3 να ισχύει $Ps = \lambda s$. Αν $A_{ij} = s_i,\ \forall\ i \neq j$, τότε ισχύει η σχέση (3.23), οπότε και ο πίνακας $A = \left[A_{ij}\right]$ είναι δίκαιος. Η μοναδικότητα του κανονικοποιημένου διανύσματος s απορρέει και αυτή από το Θεώρημα 3.2.2.3.
Έστω ότι τροποποιούμε το προηγούμενο σύστημα αμοιβών, θέτοντας $A_{ji} = s_j / s_i$, όπου s είναι το προαναφερθέν διάνυσμα. Αυτό λοιπόν το σύστημα αμοιβών είναι σχεδόν δίκαιο, καθότι $\forall\ i \in N$,

$$E(w_i) = \sum_j P_{ij} A_{ji}\, \lambda = (1/s_i) \sum_j P_{ij} s_j = \lambda s_i / s_i = \lambda . \qquad (3.24) \blacksquare$$

Παρατήρηση 3.4.2.9. Έπειτα από μελέτες, έχει αποδειχθεί ότι διπαραμετρικό σύστημα αμοιβών με δίκαιο πίνακα A, ανάλογο του Θεωρήματος 3.4.1.6 δεν μπορεί να υπάρξει, ακόμη και αν όλοι οι παίκτες ανήκουν στην ίδια κατηγορία.

3.5 Κατάταξη Γενικευμένων Πινάκων Πρωταθλήματος

Είδαμε σε προηγούμενες ενότητες ότι αν δύο παίκτες ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες τότε είναι προφανές ποιος εκ των δύο είναι δυνατότερος. Δεν μπορούμε εντούτοις να γνωρίζουμε πόσο δυνατότερος είναι. Ως εκ τούτου θα στρέψουμε αποκλειστικά το ενδιαφέρον μας στην τρέχουσα ενότητα στην σύγκριση παικτών ίδιας κατηγορίας. Τα περισσότερα εκ των αποτελεσμάτων που παρατίθενται μπορούν να εφαρμοστούν και σε προβλήματα κατάταξης ζευγαριών, καθότι να υπενθυμίσουμε ότι και ο ίδιος ο γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος P, στην ij-στή τιμή του υποδηλώνει με μία σχετική συχνότητα πόσο προτιμάται ο i παίκτης (ως πιθανός νικητής) εν συγκρίσει με τον j παίκτη.

Όπως είδαμε και νωρίτερα στη σχέση (3.23) που επαληθεύει το βασικό Θεώρημα 3.2.2.3, υπάρχει μοναδικό (και συνάμα κανονικοποιημένο) διάνυσμα s και μοναδική θετική σταθερά λ, τέτοια ώστε να ισχύει

$$\sum_j P_{ij} s_j = \lambda s_i, \forall\, i \in N. \tag{3.25}$$

Στο Πόρισμα 3.4.2.6 υποδηλώνεται ένας συσχετισμός της δυναμικής του i-οστού παίκτη με ένα άθροισμα γινομένων που συμπεριλαμβάνουν τις δυναμικές των υπολοίπων παικτών. Η δυναμική λοιπόν κάθε παίκτη είναι ανάλογη του προαναφερθέντος αθροίσματος.

Παρατήρηση 3.5.1. Στο προηγούμενο άθροισμα, αυτό της σχέσης (3.25) είναι εμφανές ότι η δυναμική του εκάστοτε παίκτη αυξάνεται περισσότερο όταν έχει καλύτερα αποτελέσματα έναντι δυνατών παικτών, παρά όταν βελτιώνει τα αποτελέσματά του έναντι αδύναμων παικτών.

Η σταθερά αναλογίας λ είναι ένα μέτρο που βοηθάει να κατανοήσουμε πόσο ισορροπημένος είναι ο δοθέν γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος, ή εναλλακτικά, μας βοηθάει να αντιληφθούμε πόσο ανταγωνιστικό είναι το εν λόγω πρωτάθλημα. Από το Θεώρημα 3.2.2.4 φαίνεται μάλιστα ότι αν θέσουμε τον <u>συντελεστή ανταγωνιστικότητας</u> $\mu = 2\lambda / (n-1)$, τότε θα ισχύει $0 \leq \mu \leq 1$ για κάθε γενικευμένο πίνακα πρωταθλήματος. Οι μικρές τιμές του μ θα υποδηλώνουν τότε ότι ο πίνακας είναι σχεδόν μεταβατικός, ενώ οι μεγάλες τιμές του μ θα καταδεικνύουν ανταγωνιστικά πρωταθλήματα.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Δίνεται ο ακόλουθος γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος K που είναι σχεδόν υποβιβάσιμος, εντούτοις η τιμή K_{61} αποτρέπει την υποβιβασιμότητά του.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0{,}999 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

όπου προκύπτει ότι $\mu = 0{,}16$. Η πολύ μικρή τιμή του μ δείχνει ότι το πρωτάθλημα δεν είναι ανταγωνιστικό.

Παράδειγμα 2: Δίνεται ο κάτωθι πίνακας πρωταθλήματος T στον οποίο έχουν ήδη ταξινομηθεί οι παίκτες σε φθίνουσα σειρά πλήθους νικών.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

όπου προκύπτει ότι το διάνυσμα ταξινόμησης των παικτών είναι το (1, 2,5 , 2,5 , 4,5 , 4,5 , 6). Οι μισές θέσεις προκύπτουν λόγω ισάριθμων νικών και ισοβαθμιών στις νίκες. Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος, όπως κα ο τρίτος παίκτης έχουν από τρεις νίκες, ενώ οι επόμενοι δύο παίκτες έχουν από δύο νίκες. Εντούτοις παρατηρούμε ότι ο πέμπτος παίκτης έχει νικήσει τους δύο πρώτους, υποχρεώνοντας μάλιστα τον πρώτο παίκτη του πρωταθλήματος στη μοναδική του ήττα, ενώ ο τέταρτος παίκτης έχει επιτύχει νίκες μόνο με τους παίκτες που βρίσκονται στις τελευταίες θέσεις της σχετικής κατάταξης. Το επίτευγμα λοιπόν του πέμπτου παίκτη φαντάζει αισθητά δυσκολότερο σε σχέση με τις νίκες του τέταρτου παίκτη. Αυτό μπορεί καταφανέστατα να φανεί και στο κανονικοποιημένο θετικό διάνυσμα (δυναμικής) των παικτών, το οποίο είναι s = (0,251 , 0,173, 0,178, 0,123, 0,190, 0,085). Επομένως αν οι παίκτες ταξινομηθούν βάσει αυτού του διανύσματος, τότε η σειρά τους θα έπρεπε να είναι (1,4,3,5,2,6). Συνεπώς με αυτήν τη μέθοδο ο πέμπτος κατά σειρά μέθοδος ταξινομείται ως δεύτερος. Η τιμή μ μάλιστα σε αυτό το πρωτάθλημα όπου ο προτελευταίος παίκτης της κατάταξης βάσει νικών κερδίζει τον πρώτο είναι αισθητά υψηλότερη από την αντίστοιχη του προηγούμενου παραδείγματος, προσεγγίζει τη μονάδα και είναι ίση με 0,893.

Παρατήρηση 3.5.2. Στην κλάση των πινάκων πρωταθλήματος μεταξύ έξι παικτών υπάρχουν 2^{15} διαφορετικοί 6 x 6 πίνακες. Το 77% αυτών έχει συντελεστή ανταγωνιστικότητας κάτω από το μ του Παραδείγματος 2 αυτής της ενότητας, δηλαδή κάτω από 0,893.

Αν υποθέσουμε σε έναν γενικευμένο πίνακα πρωταθλήματος ότι οι πιθανότητες νίκης κάθε παίκτη για κάθε επικείμενο παιχνίδι είναι ακριβώς 50%, τότε τα ενδεχόμενα νίκης ή ήττας για οποιονδήποτε παίκτη του πρωταθλήματος σε οποιοδήποτε παιχνίδι συμμετάσχει είναι αυτομάτως ισοπίθανα. Αυτός ο πίνακας μπορεί να χαρακτηριστεί ως τελείως ισορροπημένος και το πρωτάθλημα ως τελείως ανταγωνιστικό.

Παρατήρηση 3.5.3. Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα τελείως ανταγωνιστικό πρωτάθλημα, τότε καθώς το πλήθος των αγώνων αυξάνεται η πιθανότητα ο συντελεστής ανταγωνιστικότητας μ να υπερβαίνει το $1 - \epsilon$, για οσοδήποτε μικρό θετικό ϵ, τείνει στη μονάδα.

Μία εναλλακτική μέθοδος (που απορρέει από το θεώρημα των Wei και Kendall) όσον αφορά την κατάταξη των ομάδων στους γενικευμένους πίνακες προκύπτει λαμβάνοντας υπόψιν τα ιδιοδιανύσματα s και w, όπως αυτά ορίζονται στο Θεώρημα 3.4.1.6. και ταξινομώντας τους παίκτες σε φθίνουσα σειρά βάσει του πηλίκου s_i / w_i.

Εναλλακτικά, το Perron ιδιοδιάνυσμα w από μόνο του είναι ένα μέτρο σύγκρισης της δυναμικής των n παικτών του πρωταθλήματος, καθώς ο i-οστός παίκτης κατατάσσεται βάσει αυτής της μεθόδου ψηλότερα από τον j-οστό παίκτη αν απλά $w_i > w_j$.

Παρατήρηση 3.5.4. Από Θεώρημα 3.2.2.4 και το α σκέλος του προκύπτει ότι η ποσότητα var(w) / $|w^2|$ ή ακόμα και η Perron ρίζα r είναι ενδεικτικά της ανταγωνιστικότητας του πρωταθλήματος, δηλαδή του πόσο κοντινές είναι οι δυναμικές των παικτών που το απαρτίζουν. Μάλιστα σε ένα ισορροπημένο πρωτάθλημα θα ισχύει ότι r = (n-1) / 2 και όλοι οι παίκτες θα είναι εξ ορισμού ισοδύναμοι.

Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι τόσο η κατάταξη με το διάνυσμα αθροισμάτων γραμμής/ νικών, όσο και η κατάταξη που προκύπτει με την παραπάνω μέθοδο των Wei και Kendall είναι η ίδια τόσο για ισορροπημένους πίνακες, όσο και για σχεδόν ισορροπημένους πίνακες όπως απέδειξε ο Kirkland.

Τέλος μια ακόμη μέθοδος προκύπτει ως απόρροια του Θεωρήματος του Zermelo και του Θεωρήματος Μέγιστης Πιθανοφάνειας. Ως εκ τούτου χρησιμοποιώντας το διάνυσμα v με τον τρόπο που ορίζεται στο Θεώρημα 3.4.1.10 για τον πίνακα της σχέσης (3.27) καταλήγουμε διάνυσμα ταξινόμησης v = (0,430 , 0,182, 0,182, 0,85, 0,85, 0,036).

Παρατήρηση 3.5.5. Είναι εύλογο ότι μεταξύ των δύο αυτών μεθόδων υπάρχουν επουσιώδεις διαφορές και ενδέχεται να προκύψει διαφορετική ταξινόμηση. Επί της ουσίας στη δεύτερη μέθοδο η ταξινόμηση των παικτών είναι ίδια με την κατάταξη τους. Επομένως αρκεί να καταταγούν βάσει του αθροίσματος νικών ή προσδοκώμενων νικών σε περίπτωση γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος. Η πρώτη μέθοδος παρόλα αυτά δεν λαμβάνει υπόψιν μόνο το πλήθος των νικών, αλλά και τη σπουδαιότητα των αντιπάλων που θα νικήσει ο κάθε παίκτης, δηλαδή προσμετράται και η δυσκολία των αγώνων.

Ας υποθέσουμε ότι η διοργανώτρια αρχή υιοθετεί ένα μονοπαραμετρικό σύστημα αμοιβών, με θετικό διάνυσμα $s = (s_1, \ldots, s_n)$ συναρτήσει ενός γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος P. Εάν το διάνυσμα $e = (e_1, \ldots, e_n)$ υποδηλώνει τα αναμενόμενα κέρδη κάθε παίκτη i ($i \in N$), τότε το διάνυσμα e θα είναι ίσο με το γινόμενο Ps. Αν επιπρόσθετα ο δοθέν πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος και μη ιδιάζων, τότε αν το e βρίσκεται χωρικά στο R^n σε μια περιοχή δίκαιων διανυσμάτων, τότε είναι εφικτό να βρεθεί θετικό διάνυσμα s ούτως ώστε να ισχύει e = Ps και παράλληλα οι αμοιβές να είναι προσαρμοσμένες για να μπορούν να ωφελήσουν τυχαία υποσύνολα παικτών. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4.1.8. εφόσον το e ανήκει σε μια γειτονιά δίκαιων διανυσμάτων, προκύπτει ότι όλα τα στοιχεία του $s = P^{-1}e$ είναι θετικά. Το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 3.4.1.8 καθορίζει και πότε υπάρχει πίνακας P, τέτοιος ώστε Ps = e, με τα διανύσματα s και e προκαθορισμένα.

Πόρισμα 3.5.6. Εάν $s = (s_1, \ldots, s_n)$ και $e = (e_1, \ldots, e_n)$ είναι θετικά δοθέντα διανύσματα, τότε υπάρχει γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος $P = [P_{ij}]$ ώστε $e_i = \sum_j P_{ij} s_j \ \forall i \in N$, αν και μόνο αν ισχύει για τα υποσύνολα $I \subseteq N$ η ακόλουθη ανισότητα, με την ισότητα να ισχύει για I = N.

$$\sum_{i \in I} s_i e_i \geq \sum_{\substack{i,j \in I \\ i<j}} s_i s_j. \tag{3.28}$$

<u>Απόδειξη</u>: Ας υποθέσουμε ότι ισχύει $e_i = \sum_j P_{ij} s_j$ για κάποιον γενικευμένο πίνακα πρωταθλήματος P. Αν $I \subseteq N$, τότε $\sum_{i \in I} s_i e_i = \sum_{i \in I} s_i \sum_{j=1}^{n} P_{ij} s_j \geq \sum_{i,j \in I} P_{ij} s_i s_j = \sum_{\substack{i,j \in I \\ i<j}} s_i s_j$, με την ισότητα να ισχύει για I = N. ∎

Παρατήρηση 3.5.7. Εάν ισχύει $s_i = 1\ \forall\ i \in N$ και ταυτόχρονα έχουμε ότι $e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq e_n$, τότε η σχέση (3.28) μπορεί να αντικατασταθεί με τη συνθήκη $\sum_{i=1}^{k} e_i \geq \binom{k}{2}$ η οποία υποδηλώνει ότι αν κάθε παιχνίδι δίνει ακριβώς την ίδια αμοιβή, ανεξαρτήτως των παικτών που μετέχουν, τότε το άθροισμα των κερδών ενός ομίλου παικτών πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των παιχνιδιών που δίνουν μεταξύ τους. Αυτή η παρατήρηση ισχύει για οποιονδήποτε όμιλο παικτών στον οποίον ανήκουν οι παίκτες από τον πρώτο μέχρι τον k-οστό, $\forall\ k \in N$. Η ισότητα της σχέσης θα ισχύει για $k = n$.

Μπορούμε να ορίσουμε παράλληλα με το διάνυσμα αναμενόμενων κερδών και το διάνυσμα αναμενόμενων εξόδων κάθε παίκτη i, $\forall\ i \in N$, ως $l_i = \sum_j P_{ji} s_j$. Τότε θα ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} e_i s_i = \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} l_i s_i. \tag{3.29}$$

Επομένως θα ισχύει επιπρόσθετα $\sum_{i=1}^{n}(e_i^2 - l_i^2)s_i = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)\sum_{i=1}^{n}(e_i s_i - l_i s_i) = 0.$ (3.30)

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 s_i = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 s_i$. Μάλιστα στην ιδιαίτερη περίπτωση ενός ισορροπημένου πίνακα πρωταθλήματος T, με $s_i = 1\ \ \forall\ \ i \in N$, οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να εκφυλιστούν στις γνώριμες εξισώσεις που διέπουν πίνακες πρωταθλήματος και χαρακτηρίζονται μόνο από το πλήθος των νικών και των ηττών του κάθε παίκτη.

Στο υπόλοιπο μέρος αυτή της παραγράφου θα εξετάσουμε πίνακες πρωταθλήματος

3.6 Συσχέτιση Γενικευμένων Πινάκων Πρωταθλήματος με τα Επαγόμενα Γραφήματα

Όπως εξετάστηκε και αναλύθηκε στο τρέχον κεφάλαιο, είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε αν σε έναν πίνακα πρωταθλήματος εντοπίζεται κάποια αλυσίδα νικηφόρων αποτελεσμάτων που συμπεριλαμβάνει όλους τους παίκτες του πρωταθλήματος ώστε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων την ύπαρξη μιας ενιαίας κατηγορίας στην οποία θα εντάσσονται όλοι οι παίκτες καθότι δεν μπορούμε να κάνουμε την εικασία ότι έχουν διαφορετική δυναμική. Επομένως, δοθέντος ενός πίνακα πρωταθλήματος A και του κατευθυνόμενου γραφήματος G(A), όπως αυτό ορίστηκε στην §2.2 (Ορισμός 2.2.1), είναι χρήσιμο να ορίσουμε τους ισχυρούς και ασθενείς κύκλους.

Ορισμός 3.6.1. Ένας **απλός ή ισχυρός κύκλος** (strong cycle) του κατευθυνόμενου γραφήματος G(A) είναι ένας κύκλος ο οποίος διέρχεται από κάθε κορυφή του ακριβώς μία φορά. Υπάρχει δηλαδή σύνολο ακεραίων $\{l_i\}_{i=1}^{r+1}$ που ανήκουν στο σύνολο N, με $r \geq 2$, έτσι ώστε οι ακέραιοι $\{l_i\}_{i=1}^{r}$ να είναι όλοι διακεκριμένοι και να ισχύει $l_{r+1} = l_1$. Επιπλέον οι ακμές $\overrightarrow{v_{l_0} v_{l_1}}$, $\overrightarrow{v_{l_1} v_{l_2}}$, $\overrightarrow{v_{l_{r-1}} v_{l_r}}$ πρέπει να ανήκουν στο G(A), όπου $\{v_i\}_{i=1}^{r}$ είναι κορυφές του G(A).

Ο παραπάνω ορισμός συνεπάγεται ότι αν υπάρχει ένας τέτοιος κύκλος, τότε $\prod_{\kappa=0}^{r-1} \alpha_{l_\kappa, l_{\kappa+1}} \neq 0$, καθώς καμία ακμή που ανήκει σε έναν ισχυρό κύκλο δε μπορεί να φέρει τιμή μηδενική. Επίσης, από τη στιγμή που δεν μας ενδιαφέρει ποια κορυφή αποτελεί την πρώτη του κύκλου, γράφουμε τον ισχυρό κύκλο ως μία ακολουθία ακεραίων που μπορεί να μετατεθεί κυκλικά και συμβολίζεται ως εξής:

$$\gamma := (l_1, l_2, \ldots, l_r) \text{ με } r \geq 2. \tag{3.31}$$

Στον παραπάνω ορισμό θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και το γ ως συνάρτηση του επόμενου, γράφοντας $\gamma(l_1) := l_2$, $\gamma(l_2) := l_3, \ldots, \gamma(l_r) := l_1$. Ισχύει πάντως ότι ο ισχυρός κύκλος γ περνάει από τις κορυφές $\{v_{l_i}\}_{i=1}^{r+1}$ και έχει μήκος r, όπου $r \geq 2$.

Ορισμός 3.6.2. Αν υπάρχει κάποια κορυφή v_i του κατευθυνόμενου γραφήματος G(A) από την οποία να μη διέρχεται <u>κανένας ισχυρός κύκλος</u>, τότε ορίζουμε τον κύκλο $\gamma = (i)$, παρότι γνωρίζουμε ότι στην κορυφή v_i δεν δύναται να σχηματιστεί κάποιος βρόχος (καθώς θα ισχύει $\alpha_{i,i} = 0$), και τον ονομάζουμε **ασθενή κύκλο** (weak cycle).

Παρατήρηση 3.6.3. Αν εμφανίζεται κάποιο μηδενικό άθροισμα γραμμής (ή στήλης) στον πίνακα πρωταθλήματος A, έστω στην i-οστή του γραμμή (ή στήλη), τότε ο i-οστός παίκτης νικάει ή ηττάται από όλους τους αντιπάλους στο πρωτάθλημα και ως εκ τούτου θεωρούμε και στις δύο περιπτώσεις ότι ο κύκλος $\gamma = (i)$ είναι ασθενής. <u>Το αντίστροφο δεν ισχύει</u>.

Ορισμός 3.6.4. Μπορούμε πλέον να ορίσουμε και το **σύνολο κύκλων C(A)** (cycle set) ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G(A) ως το σύνολο όλων των ισχυρών (απλών) και ασθενών κύκλων.

Είναι εμφανές ότι από κάθε κορυφή v_i του γραφήματος που επάγεται από έναν πίνακα πρωταθλήματος διέρχεται είτε (τουλάχιστον) ένας ισχυρός κύκλος, είτε ένας ασθενής κύκλος.

Έστω ότι μελετάμε κάποιον υποβιβάσιμο γενικευμένο πίνακα πρωταθλήματος A, με $n \geq 2$. Γνωρίζουμε τότε από την **§**2.1 ότι υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης $P \in \mathbb{R}^{n x n}$ και ένας θετικός ακέραιος $1 \leq m \leq n$, έτσι ώστε να σχηματίζεται ο PAP^T ο οποίος βρίσκεται σε κανονική μορφή Frobenius, ικανοποιεί τη σχέση (2.3) και μπορεί να γραφεί όπως ακριβώς ορίζεται στη σχέση (2.2).

Ισχύει βεβαίως ότι αν ο γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος A, με $n \geq 2$ είναι μη υποβιβάσιμος, τότε προκύπτει $m=1$ στη σχέση (2.3). Έπειτα από τους ορισμούς που προηγήθηκαν στην προηγούμενη σελίδα, μπορούμε πλέον να κάνουμε μερικές εύστοχες παρατηρήσεις:

- Η ύπαρξη ενός 1x1 πίνακα $R_{j,j} = [\alpha_{\kappa,\kappa}]$ συνεπάγεται από τη (2.3ii) ότι από την κορυφή v_κ του G(A) διέρχεται μόνο ένας κύκλος του C(A) και μάλιστα ασθενής.

- Παρομοίως, αν η ύπαρξη του $R_{j,j}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (2.3i), τότε για τις κορυφές του G(A) αυτού του υποπίνακα, υπάρχει τουλάχιστον ένας ισχυρός κύκλος που να διέρχεται από καθεμία εξ αυτών. Αυτό μπορεί να δειχθεί εύκολα, καθώς αν από κάποια κορυφή δεν περνούσε κάποιος ισχυρός κύκλος, τότε αυτό θα σήμαινε αυτομάτως ότι στο γράφημα G(A) η κορυφή αυτή δε θα έχει είτε καμία εισερχόμενη κορυφή, είτε καμία εξερχόμενη. Κάτι τέτοιο θα μεταφερόταν στο πίνακα ως μία μηδενική (πλην του διαγωνίου στοιχείου) στήλη ή γραμμή αντίστοιχα. Θα είχαμε τότε συνεπώς έναν υποβιβάσιμο πίνακα που αντικρούεται από το γεγονός ότι ο $R_{j,j}$ είναι μη υποβιβάσιμος.

- Επειδή όλοι οι υποπίνακες της σχέσης (2.3) που βρίσκονται εξ ολοκλήρου κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικοί, αν δοκιμάζαμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές με τον κλασικό τύπο της ορίζουσας θα παρατηρούσαμε ότι όλα τα στοιχεία των πινάκων $R_{j,\kappa}$ (με $j \neq \kappa$), και συνεπώς οι ίδιοι οι πίνακες, δεν επηρεάζουν τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Ισχύει δηλαδή
$$\sigma(A) = \bigcup_{\kappa=1}^{m} \sigma(R_{\kappa,\kappa}) . \tag{3.32}$$

- Λόγω της προηγούμενης παρατήρησης, μπορούμε να καθορίσουμε νέα (παραλλαγμένα) αθροίσματα γραμμών, τα
$$\tilde{r}_i(A) := r_j(R_{\kappa,\kappa}), \tag{3.33}$$
αν το i-οστό άθροισμα γραμμής αντιστοιχεί στην j-οστή γραμμή του πίνακα $R_{\kappa,\kappa}$ της σχέσης (2.3). Αν βέβαια ο πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος τα νέα αυτά αθροίσματα γραμμών είναι ακριβώς ίδια με τα αρχικά.

- Προκύπτει άμεσα, από την τελευταία παρατήρηση, ότι αν $\tilde{r}_i(A) = 0$, τότε από την κορυφή v_i διέρχεται μόνο ένας ασθενής κύκλος.

- Αντίστοιχα, αν $\tilde{r}_i(A) > 0$, με το νέο άθροισμα γραμμής να αντιστοιχεί σε κάποιον μη υποβιβάσιμο υποπίνακα $R_{\kappa,\kappa}$, τότε από τη v_i κορυφή διέρχεται τουλάχιστον ένας ισχυρός κύκλος.

Ορισμός 3.6.5. Έστω ένας γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος A, n ≥ 2. Ο πίνακας ονομάζεται **ασθενώς μη υποβιβάσιμος** (weakly irreducible), αν από κάθε κορυφή v_i του κατευθυνόμενου γραφήματος G(A) διέρχεται κάποιος ισχυρός κύκλος.

Πρόταση 3.6.6. Οι έννοιες της ασθενούς μη υποβιβασιμότητας και μη υποβιβασιμότητας είναι ισοδύναμες για όλους τους πίνακες που ανήκουν στο $R^{n\mathrm{x}n}$, με $n=2$ ή $n=3$. Για $n \geq 4$ ισχύει ότι κάθε μη υποβιβάσιμος πίνακας είναι και ασθενώς μη υποβιβάσιμος, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο.

Απόδειξη: Καταρχάς γνωρίζουμε ότι αν ο πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος, τότε δεν έχει καμία γραμμή (ή στήλη) - εξαιρουμένου του διαγωνίου στοιχείου - με μηδενικά στοιχεία. Ως εκ τούτου δεν παράγεται κανένας ασθενής κύκλος, καθώς σε αντίθετη περίπτωση είτε δε θα είχαμε καμία εισερχόμενη ακμή προς την μελετηθείσα – έστω v – κορυφή, που παραπέμπει σε ένα μηδενικό άθροισμα στήλης, είτε δε θα είχαμε καμία εξερχόμενη ακμή από την κορυφή v, που παραπέμπει σε μηδενικό άθροισμα γραμμής.

→ Ας εξετάσουμε τώρα τις περιπτώσεις που ο πίνακας είναι ασθενώς μη υποβιβάσιμος, για $n=2$, $n=3$ και τέλος για $n \geq 4$. Αν $n=2$ και ο πίνακας είναι ασθενώς μη υποβιβάσιμος, τότε τα στοιχεία $\alpha_{1,2}$ και $\alpha_{2,1}$ δεν μπορούν να είναι μηδενικά, καθώς τότε θα προέκυπτε ασθενής κύκλος. Επομένως ακόμα και αν επιχειρήσουμε μετάθεση γραμμών και στηλών ο πίνακας που προκύπτει (ο ανάστροφος ουσιαστικά) δεν μπορεί να έχει μηδενικό παρά μόνο τα διαγώνια στοιχεία. Μπορούμε εν ολίγοις με βεβαιότητα ότι ο πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος.

→ Αν τώρα ο πίνακας έχει μέγεθος $n=3$ και είναι παράλληλα και ασθενώς μη υποβιβάσιμος, τότε είτε θα υπάρχει ο ισχυρός κύκλος γ = (1 2 3), είτε θα υπάρχει ο ισχυρός κύκλος γ = (1 3 2), είτε θα υπάρχουν δύο εκ τριών ακόλουθων ισχυρών κύκλων: γ_1 = (1 2), γ_2 = (1 3) και γ_3 = (2 3). Στην τελευταία περίπτωση είναι προφανές ότι από τα 6 μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα, τα 4 πρέπει να είναι οπωσδήποτε μη μηδενικά. Και συν τοις άλλοις, αν τα 2 εναπομείναντα στοιχεία είναι μηδενικά δεν θα ανήκουν στην ίδια γραμμή, επομένως ο πίνακας θα είναι και μη υποβιβάσιμος.

Όσον αφορά τις πρώτες δύο περιπτώσεις, είναι προφανές ότι τα 3 εν δυνάμει μηδενικά στοιχεία που μπορούν να εμφανιστούν στον πίνακα μας, ανήκουν όλα σε διαφορετικές γραμμές και στήλες, οπότε και στη χείριστη των περιπτώσεων θα έχουμε σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη ακριβώς ένα μηδενικό στοιχείο. Άρα πάλι προκύπτει μη υποβιβάσιμος πίνακας. Υπενθυμίζουμε ότι τα διαγώνια στοιχεία παρότι είναι μηδενικά δεν επηρεάζουν την υποβιβασιμότητα ή μη του γενικευμένου γραμμικού πίνακα, εξού και ο ειδικός συμβολισμός για τις δύο πρώτες περιπτώσεις:

$$1^{\eta} \text{ περίπτωση: } \begin{bmatrix} x & * & 0 \\ 0 & x & * \\ * & 0 & x \end{bmatrix}, \quad 2^{\eta} \text{ περίπτωση: } \begin{bmatrix} x & 0 & * \\ * & x & 0 \\ 0 & * & x \end{bmatrix}.$$

→ Απομένει η περίπτωση όπου $n \geq 4$. Για να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει πάντοτε η ισοδυναμία, αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα. Το πιο χαρακτηριστικό είναι αυτό της ύπαρξης δύο ισχυρών κύκλων, οι οποίοι τείνουν να ισομοιράσουν τις κορυφές, ενώ παράλληλα όλα τα μη εμπλεκόμενα στους ισχυρούς κύκλους στοιχεία του πίνακα είναι μηδενικά. Θα πάρουμε την απλούστερη περίπτωση όπου n = 4, με το παράδειγμα να γενικεύεται και για μεγαλύτερα μεγέθη πινάκων.

Έστω λοιπόν ότι υπάρχουν οι ισχυροί δίσκοι γ_1 = (1 2) και γ_2 = (3 4). Τότε ο πίνακας μπορεί να πάρει κάλλιστα τη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} x & * & 1 & 1 \\ * & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & * \\ 0 & 0 & * & x \end{bmatrix},$$

όπου είναι προφανές ότι πρόκειται για έναν υποβιβάσιμο πίνακα με τον τετραγωνικό υποπίνακα $B_{1,1}$ να έχει μέγεθος $2\,\mathrm{x}\,2$. ∎

Παράδειγμα: Δίνεται ο πίνακας $B(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon & 0 & 0 \\ 1-\epsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\epsilon \\ 0 & 0 & \epsilon & 1 \end{bmatrix}$, όπου $\epsilon > 0$.

Ο πίνακας ανήκει προφανώς στην τελευταία κατηγορία πινάκων της προηγούμενης πρότασης, οπότε ξέρουμε εκ των προτέρων προτέρων ότι είναι υποβιβάσιμος.

Είναι εμφανές ότι οι γράφοι πρωταθλημάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν όταν έχουμε πίνακες πρωταθλήματος, αλλά αδυνατούν να έχουν την ίδια χρηστικότητα στην περίπτωση των γενικευμένων πινάκων πρωταθλήματος. Γι'αυτό και κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο είναι θεμιτό να γίνει μια σύντομη αναφορά στους προσημασμένους πίνακες πρωταθλήματος.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας M, μεγέθους n, έχει ως γραφική απεικόνιση τον κατευθυνόμενο γράφο $G(M) = (V,E)$, όπου $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι το σύνολο των κορυφών και $(i,j) \in E$ αν και μόνο αν $m_{ij} \neq 0$. Όταν μάλιστα ο M είναι πραγματικός πίνακας και δύναται να αποτελείται και από αρνητικα στοιχεία, όπως στην περίπτωση των πινάκων που θα μελετηθούν στο επόμενο κεφάλαιο, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον προσημασμένο κατευθυνόμενο γράφο $S(M) = (V,E,\sigma)$, όπου $\sigma(i,j) = +$ αν $\alpha_{ij} > 0$ και $\sigma(i,j) = -$ αν $\alpha_{ij} < 0$. Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε πως ο γράφος G(M) είναι αναπόσπαστο κομμάτι του S(M) γράφου.

Ο προσημασμένος γράφος πρωταθλήματος $S = (V,E,\sigma)$ είναι επί της ουσίας ένας κατευθυνόμενος γράφος $G = (V,E)$, μαζί με μία απεικόνιση $\sigma: E \rightarrow \{+,-\}$. Ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης είναι ένας n x n πίνακας εάν $|V| = n$ με στοιχεία που ανήκουν αποκλειστικά στο σύνολο {-1, 0, 1}. Το πρόσημο κάθε υποσυνόλου E_o του συνόλου E όλων των ακμών σε έναν προσημασμένο γράφο πρωταθλήματος είναι το γινόμενο των προσήμων όλων των στοιχείων του E_o. Αν το E_o είναι κενό, ορίζουμε το + ως το πρόσημό του.

Παράδειγμα: Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε προσημασμένους πίνακες πρωταθλήματος που να μην είναι πίνακες πρωταθλήματος. Παράδειγμα είναι ο ακόλουθος πίνακας T.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{επομένως} \quad T + T^T + I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας T έχει εμφανώς τάξη 3. Αν απλά αλλάξουμε τα πρόσημα των μονάδων, προκύπτει ο ελαφρά διαφοροποιημένος πίνακας K, για τον οποίον θα ισχύει

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{επομένως} \quad K + K^T + I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = hh^T, \text{ όπου } h^T = [1, -1, -1].$$

Η αντικατάσταση του διανύσματος j από ένα μη μηδενικό πραγματικό διάνυσμα h συγκεντρώνει μεγάλο ενδιαφέρον και ως εκ τούτου μελετάται διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 4

Πίνακες Υπερπρωταθλήματο;

4.1 Ορισμός Πινάκων Υπερπρωταθλήματος και Επεκτάσεων

Ορισμός 4.1.1. Ως **πίνακα υπερπρωταθλήματος** ορίζουμε πραγματικούς τετραγωνικούς πίνακες, οι οποίοι έχουν μηδενικά διαγώνια στοιχεία και για τους οποίους ισχύει $A + A^T = hh^T - I$, όπου το h είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα πραγματικών αριθμών. Μάλιστα έχουν την ιδιαιτερότητα ότι οι πίνακες $A + A^T + I$ έχουν τάξη 1.

Παρατηρούμε ότι οι γενικευμένοι πίνακες πρωταθλήματος είναι μια υποκατηγορία των πινάκων υπερπρωταθλήματος, καθότι μπορούμε να τους αντιμετωπίσουμε και ως τέτοιους με τη σύμβαση ότι h = 1 (το διάνυσμα h θα ισούται με το μοναδιαίο διάνυσμα) και ότι τα στοιχεία τους ανήκουν στο διάστημα [0,1], ενώ οι πίνακες πρωταθλήματος αποτελούν με τη σειρά τους υποκατηγορία των γενικευμένων πινάκων πρωταθλήματος. Από εδώ και στο εξής ορίζουμε τους <u>μοναδιαίους πίνακες υπερπρωταθλήματος</u> ως επέκταση των γενικευμένων πινάκων πρωταθλήματος A για τους οποίους παύει να ισχύει απαραίτητα ότι τα στοιχεία τους όλα είναι μη αρνητικά και ανήκουν στο διάστημα [0,1], αλλά να εξακολουθεί να ισχύει η συνθήκη $A + A^T = J - I$.

Όσον αφορά τις ιδιοτιμές των πινάκων υπερπρωταθλήματος εξακολουθεί να ισχύει ότι $-1/2 \leq Re(\lambda) \leq (n-1)/2$, ενώ οι πίνακες υπερπρωταθλήματος έχουν επίσης την ιδιότητα να είναι διαγώνια όμοιοι με κάποιον γενικευμένο πίνακα πρωταθλήματος.

Ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο το διάνυσμα δυναμικής s ενός γενικευμένου πίνακα πρωταθλήματος. Καθότι οι συνολικές αναμετρήσεις ενός πρωταθλήματος είναι $n(n-1)/2$ στο πλήθος προκύπτει ότι το εσωτερικό γινόμενο s^Ts δεν μπορεί να έχει τιμή $s^Ts > n(n-1)^2/2$, με την ισότητα μάλιστα να επιτυγχάνεται μόνο στην περίπτωση όπου ο πίνακας είναι ισορροπημένος (επομένως και το πλήθος των παικτών περιττός αριθμός).

Εάν μάλιστα ισχύει η συνθήκη $s^Ts < n^2(n-1)/4$, τότε κάθε γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος που πληροί αυτή την υπόθεση για το διάνυσμα δυναμικής του είναι αντιστρέψιμος και ως εκ τούτου το 0 δεν ανήκει στο φάσμα των ιδιοτιμών του.

Το ακόλουθο θεώρημα είναι αποτέλεσμα μελέτης των μαθηματικών Ostrowski, Schneider και D. De Caen.

Θεώρημα 4.1.2. Έστω A ένας μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος μεγέθους n με διάνυσμα δυναμικής s. Εάν ισχύει $s^Ts < (n^3 + 4n(n-1)^2)/16$, τότε ο A έχει μια πραγματική θετική ιδιοτιμή ρ τέτοια ώστε

$$\rho \geq \left(\frac{n-2+\sqrt{n^2+4(n-1)^2-16s^Ts/n}}{4} \right), \tag{4.1}$$

ενώ για τις n-1 το πλήθος ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, ισχύει ότι

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq \left(\frac{n-2-\sqrt{n^2+4(n-1)^2-16s^Ts/n}}{4} \right). \tag{4.2}$$

Πόρισμα 4.1.3. Έστω A ένας μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος μεγέθους n με διάνυσμα δυναμικής s. Εάν ισχύει $s^Ts < n^2(n-1)/4$, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

<u>Απόδειξη</u>: Καταρχάς εφόσον ισχύει ότι $s^Ts < n^2(n-1)/4$, συνεπάγεται ότι $\sqrt{n^2+4(n-1)^2-16s^Ts/n} > \sqrt{n^2+4(n-1)^2-4n(n-1)} = \sqrt{n^2+4n^2+4-8n-4n^2+4n} = \sqrt{n^2-4n+4} = \sqrt{(n-2)^2}$ και επειδή $n \geq 2$, θα ισχύει ότι $\sqrt{n^2+4(n-1)^2-16s^Ts/n} > n-2$. Συνεπώς, προκύπτει από το Θεώρημα 4.1.2 ότι $\rho > 0$ και ότι $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ $\forall$ i = 1, 2, …, n-1. Επομένως είναι εμφανές ότι το 0 δεν είναι κάποια εκ των ιδιοτιμών και ως εκ τούτου ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. ■

Πόρισμα 4.1.4. Έστω A ένας μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος μεγέθους n με διάνυσμα δυναμικής s. Εάν $s^Ts < n^2(n-1)/4$, τότε θα ισχύει για το πρόσημο της ορίζουσας $\mathrm{sgn}(\det(A)) = (-1)^{n-1}$.

<u>Απόδειξη</u>: Επειδή $s^Ts < n^2(n-1)/4$ προκύπτει από το Θεώρημα 4.1.2 ότι ο πίνακας A έχει ακριβώς μια θετική ιδιοτιμή, τη ρ, καθώς από το Πόρισμα 4.1.3 παρατηρούμε ότι τα πραγματικά μέρη όλων των υπολοίπων ιδιοτιμών, εφόσον $\sqrt{n^2+4(n-1)^2-16s^Ts/n} > n-2$, θα είναι αρνητικά. Καθότι οι μιγαδικές ρίζες είναι συζυγείς και ως εκ τούτου το πλήθος τους είναι άρτιο, είναι πλέον ορατό το ότι θα έχουμε άρτιο πλήθος αρνητικών πραγματικών ριζών αν το n είναι περιττός αριθμός και περιττό πλήθος αρνητικών πραγματικών ριζών αν το n είναι άρτιος αριθμός. ■

Πόρισμα 4.1.5. Έστω A ένας μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος μεγέθους n με διάνυσμα δυναμικής s. Εάν $s^Ts < n^2(n-1)/4$, τότε η ρίζα Perron του πίνακα είναι μεγαλύτερη από $(n-2)/2$.

<u>Απόδειξη</u>: Επειδή με την ισχύουσα συνθήκη $s^Ts < n^2(n-1)/4$ προκύπτει όπως διαπιστώσαμε νωρίτερα ότι $\sqrt{n^2+4(n-1)^2-16s^Ts/n} > n-2$, τότε θα ισχύει όπως είδαμε στο Θεώρημα 4.1.2 ότι $\rho > (n-2+n-2)/4$ $\rightarrow$ $\rho > 2(n-2)/4 \rightarrow \rho > (n-2)/2$. ■

Πόρισμα 4.1.6. Έστω A ένας σχεδόν ισορροπημένος μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος μεγέθους n. Τότε ο A έχει μια πραγματική θετική ιδιοτιμή ρ και n-1 το πλήθος ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, για τις οποίες θα ισχύει ότι

$$\rho \geq \left(\frac{n - 2 + \sqrt{n^2 - 4}}{4} \right) = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 4}} \quad \text{και} \tag{4.3}$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq \left(\frac{n - 2 + \sqrt{n^2 - 4}}{4} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 4}} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.4}$$

<u>Απόδειξη</u>: Επειδή ο πίνακας A είναι σχεδόν ισορροπημένος, αυτό συνεπάγεται ότι το διάνυσμα δυναμικής θα έχει n/2 το πλήθος τιμές ίσες με n/2 και άλλες n/2 το πλήθος τιμές ίσες με (n-2)/2. Συνεπώς στο εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων δυναμικής s^Ts προκύπτει n/2 φορές ο όρος $(n-2)^2/4$ και άλλες n/2 φορές ο όρος $n^2/4$.

Έχουμε επομένως $s^Ts = \frac{n}{2}\left(\frac{n^2}{2}\right) + \frac{n}{2}\left(\frac{(n-2)^2}{2}\right) = \frac{n}{8}(n^2 + n^2 - 4n + 4) = \frac{n}{4}(n^2 - 2n + 2)$. Επομένως ισχύει

$\sqrt{n^2 + 4(n-1)^2 - 16s^Ts / n} =$

$\sqrt{n^2 + 4(n-1)^2 - 16n\,(n^2 - 2n + 2) / 4n} =$

$\sqrt{n^2 + 4n^2 + 4 - 8n - 4n^2 + 8n - 8} = \sqrt{n^2 - 4}$

Συνεπώς, κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 4.1.2 καταλήγουμε στις ζητούμενες σχέσεις (4.3) και (4.4).■

Θεώρημα 4.1.7. Έστω A ένας μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος μεγέθους n με διάνυσμα δυναμικής s. Εάν ισχύει $s^Ts < (n^3 + 4n(n-1)^2)/16$, τότε ο πίνακας A είναι έχει ιδιοτιμές ρ και λ, με

$$\rho = \left(\frac{n - 2 + \sqrt{n^2 + 4(n-1)^2 - 16s^Ts / n}}{4} \right), \tag{4.5}$$

$$\text{και}\ \ \mathrm{Re}(\lambda) = \left(\frac{n - 2 - \sqrt{n^2 + 4(n-1)^2 - 16s^Ts / n}}{4} \right). \tag{4.6}$$

αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει τουλάχιστον n-2 το πλήθος ιδιοτιμές με πραγματικό μέρος ίσο με -1/2.

<u>Απόδειξη</u>: Εάν ένας μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος έχει ιδιοτιμές ρ και λ όπως αυτές ορίζονται στις σχέσεις (4.5) και (4.6), τότε οι υπόλοιπες ιδιοτιμές είναι συνολικά n-2 και ας τις ορίσουμε ως $\lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$. Για το ίχνος του A θα ισχύει ότι $tr(A) = 0 = \rho + \mathrm{Re}(\lambda) + \sum_{i=3}^{n}\mathrm{Re}(\lambda_i)$. Καθώς $\mathrm{Re}(\lambda_i) \geq -1/2\ \forall\, i = 3, 4 \ldots, n-1, n$, πρέπει να ισχύει υποχρεωτικά $\mathrm{Re}(\lambda_i) = -1/2\ \forall\, i = 3, 4 \ldots, n-1, n$, ώστε να ισχύει η συνθήκη περί μηδενικού ίχνους.

Πάμε τώρα να εξετάσουμε την ισχύ του αντιστρόφου. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο πίνακας A έχει τουλάχιστον n-2 ιδιοτιμές με πραγματικό μέρος το -1/2. Εάν μάλιστα έχει n-1 τέτοιες ιδιοτιμές τότε η ιδιοτιμή Perron ρ θα πρέπει να ισούται με (n-1)/2, καθώς θα εξακολουθεί να ισχύει tr(A) = 0. Επομένως προκύπτει στην περίπτωση αυτή ότι έχουμε έναν ισορροπημένο πίνακα με διάνυσμα δυναμικής $s = [(n-1)/2]\mathit{1}$, και ως εκ τούτου θα ισχύει $s^Ts = n(n-1)^2/4$ και θα ικανοποιείται η συνθήκη $s^Ts < (n^3 + 4n(n-1)^2)/16$ του θεωρήματος. ■

Παράδειγμα: Έστω γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος M (δηλαδή μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος με στοιχεία που ανήκουν όλα στο διάστημα [0,1]) με άρτιο μέγεθος n, οπου n = 2k.

$$\text{Θέτουμε } M = \left(\begin{array}{c|c} 1/2\,(J-I) & 0 \\ \hline J & 1/2\,(J-I) \end{array}\right),$$

όπου κάθε ένας από τους τέσσερις υποπίνακες είναι τετραγωνικός και έχει μέγεθος k. Συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας έχει n-2 το πλήθος ιδιοτιμές με πραγματικά μέρη ίσα με -1/2. Θέτοντας το διάνυσμα δυναμικής ίσο με $s = M\mathit{1}$, προκύπτει ότι θα έχει k το πλήθος τιμές ίσες με $(k-1)/2$ και άλλες k το πλήθος τιμές ίσες με $k + (k-1)/2$. Εναλλακτικά θα έχει n/2 το πλήθος τιμές ίσες με $(n-2)/4$ και άλλες $n/2$ το πλήθος τιμές ίσες με $(3n-2)/4$.

Συνεπώς στο εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων δυναμικής s^Ts προκύπτει $n/2$ φορές ο όρος $(n-2)^2/4$ και άλλες $n/2$ φορές ο όρος $(3n-2)^2/4$.

$$\text{Έχουμε επομένως } s^Ts = \frac{n}{2}\left(\frac{n^2}{4}\right)+\frac{n}{2}\left(\frac{(3n-2)^2}{4}\right) = \frac{n}{32}(n^2+9n^2-12n+4) = \frac{n}{32}(10n^2-16n+8).$$

Πολλαπλασιάζοντας αρχικά με το n, χωρίζοντας ένα n^3 από τα υπόλοιπα και διαιρώντας με το 2 καταλήγουμε ότι $s^Ts = (n^3+4n^3-8n^2+4n)/16 = [n^3+4n(n^2-2n+1)]/16 = [n^3+4n(n-1)^2]/16$.

Για κάθε συντελεστή a μεταξύ 0 και 1, έστω ο πίνακας $L_a = (1-a)M + (a/2)(J-I)$. Κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς, καταλήγουμε στο ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα του πίνακα M που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή με πραγματικό μέρος -1/2 είναι ταυτόχρονα και ιδιοδιάνυσμα του πίνακα L_a και αντιστοιχεί πάλι σε ιδιοτιμή με πραγματικό μέρος -1/2. Επομένως και για τον πίνακα L_a θα εξακολουθεί να ισχύει ότι έχει n-2 το πλήθος ιδιοτιμές με πραγματικά μέρη ίσα με -1/2. Θέτοντας τώρα το διάνυσμα δυναμικής του ως $s_a = L_a\,\mathit{1}$, προκύπτει ότι το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο βρίσκεται μεταξύ των τιμών $(n^3+4n(n-1)^2)/16$ και $n^2(n-1)/4$. Την πρώτη τιμή τη λαμβάνει προφανώς για a = 0, ενώ τη δεύτερη για a = 1.

Επομένως παρατηρούμε ότι για $(n^3+4n(n-1)^2)/16 \le x \le n^2(n-1)/4$, υπάρχει μια τιμή για το a μεταξύ 0 και 1 έτσι ώστε να ισχύει $s_a^Ts_a = x$ και επιπλέον για τον πίνακα L_a (με διάνυσμα δυναμικής s_a) να ισχύει η ισότητα στις σχέσεις (4.1) και (4.2).

Παράδειγμα 2: Έστω γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος N (συνεπώς ανήκει και στους μοναδιαίους πίνακες υπερπρωταθλήματος και έχει στοιχεία που ανήκουν όλα στο διάστημα [0,1]) με περιττό μέγεθος n, οπότε πλέον ο άνω αριστερά πίνακας είναι τετραγωνικός μεγέθους (n-1)/2, ενώ ο κάτω δεξιά τετραγωνικός μεγέθους (n+1)/2, με τους υπολειπόμενους δύο πίνακες να είναι αναγκαστικά ορθογώνιοι.

$$\text{Θέτουμε λοιπόν } N = \left(\begin{array}{c|c} 1/2\,(J-I) & 0 \\ \hline J & 1/2\,(J-I) \end{array}\right).$$

Θέτοντας τώρα πίνακα $Q_a = (1-a)N + (a/2)(J-I)$, με παρόμοια διαδικασία όπως πριν προκύπτει ότι για $(n^3+4n(n-1)^2)/16 \le x \le n^2(n-1)/4$, υπάρχει μια τιμή για το a μεταξύ 0 και 1 έτσι ώστε να ισχύει $\sigma_a^T\sigma_a = x$ και επιπλέον για τον πίνακα Q_a (με διάνυσμα δυναμικής σ_a) να ισχύει πάλι η ισότητα στις σχέσεις (4.1) και (4.2).

Παράδειγμα 3: Έστω πίνακας πρωταθλήματος T (όχι γενικευμένος), με μέγεθος n, όπου n είναι ένας άρτιος αριθμός. Ορίζουμε τον πίνακα T ως εξής:

$$T = \left(\begin{array}{c|c} R_1 & 0 \\ \hline J & R_2 \end{array}\right), \tag{4.7}$$

όπου ο R_1 είναι ένας ισορροπημένος πίνακας άρτιου μεγέθους k, ενώ ο R_2 είναι ένας ισορροπημένος πίνακας άρτιου μεγέθους $n-k$. Επειδή ο πίνακας R_1 έχει $k-1$ το πλήθος ιδιοτιμές με πραγματικό μέρος -1/2, ενώ ο πίνακας R_2 έχει $n-k-1$ το πλήθος ιδιοτιμές με πραγματικό μέρος -1/2, από το Θεώρημα 4.1.7 προκύπτει ότι θα ισχύουν οι σχέσεις (4.5) και (4.6).

Παράδειγμα 4: Παρατηρούμε στο προηγούμενο παράδειγμα και από τη σχέση (4.7) ότι ο πίνακας T είναι εμφανώς υποβιβάσιμος. Αν εξετάσουμε και έναν μη υποβιβάσιμο πίνακα πρωταθλήματος, παρατηρούμε κάτι ανάλογο όπως υποδηλώνει και το Πόρισμα 3.2.2.8.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν την ιδιοτιμή $(1/2)(-1+i\sqrt{n})$, η αποία αντιστοιχεί σε $(n-1)/2$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του Hadamard πίνακα H του προαναφερθέντος πορίσματος. Εφόσον το πραγματικό μέρος της ιδιοτιμής είναι -1/2, η γεωμετρική πολλαπλότητά της θα είναι ίση με την αλγεβρική της πολλαπλότητα. Αν εξαιρέσουμε ένα από τα $(n-1)/2$ ιδιοδιανύσματα της, τότε δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα υπόλοιπα $(n-3)/2$ ιδιοδιανύσματα έχουν το 0 ως πρώτο στοιχείο τους. Έστω λοιπόν τώρα πίνακας T που αποτελείται από τις $(n-1)$ τελευταίες σειρές και στήλες του αρχικού Hadamard πίνακα H.

Προκύπτει εύκολα ότι και ο T θα είναι πίνακας πρωταθλήματος. Εφόσον υπάρχουν $(n-3)/2$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του H που όλα αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $(1/2)(-1+i\sqrt{n})$, καθένα εκ των οποίων έχει το 0 ως πρώτο στοιχείο, συνεπάγεται ότι η τιμή $(1/2)(-1+i\sqrt{n})$ θα είναι ιδιοτιμή και του πίνακα T με πολλαπλότητα τουλάχιστον $(n-3)/2$, οπότε και ο T θα έχει τουλάχιστον $(n-3)$ ιδιοτιμές με πραγματικό μέρος -1/2. Μάλιστα εφόσον ισχύει ότι το n λόγω του πίνακα Hadamard H είναι περιττός, το n-1 κατά συνέπεια θα είναι άρτιος και ως εκ τούτου ο T θα έχει ακριβώς $(n-3)$ ιδιοτιμές με πραγματικό μέρος -1/2. Επομένως από το Θεώρημα 4.1.7 προκύπτει ότι ο πίνακας T θα έχει ιδιοτιμές ρ και λ που προσδιορίζονται από τις σχέσεις (4.5) και (4.6).

Καθόσον ο πίνακας T αποτελεί κύριο ελάσσωνα υποπίνακα του εξ ορισμού ισορροπημένου πίνακα H, προκύπτει εύκολα ότι ο ίδιος είναι σχεδόν ισορροπημένος. Επομένως για το δικό του διάνυσμα δυναμικής s, ισχύει $s = T\,\mathit{1}$, και προκύπτει διάνυσμα δυναμικής $s^T s = (n-1)(n^2-4n+5)/4$. Οπότε θα έχουμε εν κατακλείδι τις ιδιοτιμές του T να είναι η $(1/2)(-1\pm i\sqrt{n})$ από $(n-3)/2$ φορές η κάθε μία, την ιδιοτιμή $\rho = \left(\dfrac{n-3+\sqrt{n^2-2n-3}}{4}\right)$ και την ιδιοτιμή $\lambda = \left(\dfrac{n-3-\sqrt{n^2-2n-3}}{4}\right)$.

Θεώρημα 4.1.8. Έστω A ένας μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος μεγέθους n με διάνυσμα δυναμικής s και εσωτερικό γινόμενο $s^T s < n^2(n-1)/4$. Έστω επίσης η φασματική ακτίνα του πίνακα A ότι είναι η ρ (πραγματική και θετική όπως προκύπτει από Θεώρημα 4.1.2), ενώ οι υπόλοιπες ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, για τις οποίες θα ισχύει ότι είναι ταξινομημένες σε φθίνουσα σειρά όσον αφορά το φανταστικό τους μέρος. Δηλαδή $|\mathrm{Im}(\lambda_1)| \geq |\mathrm{Im}(\lambda_2)| \geq \ldots \geq |\mathrm{Im}(\lambda_{n-1})|$. Τότε, θέτοντας

$$\gamma = \left(\frac{n - \sqrt{n^2 + 4(n-1)^2 - 16 s^T s / n}}{4} \right), \tag{4.8}$$

για τις άρτιες λ_i ρίζες θα ισχύει

$$\mathrm{Im}(\lambda_k)^2 \leq \frac{n(n-1)/4 + 2(n-1)\gamma - n\gamma^2 - \mathrm{tr}(A^2)}{k}, \tag{4.9}$$

για τις περιττές λ_i ρίζες θα ισχύει

$$\mathrm{Im}(\lambda_k)^2 \leq \frac{n(n-1)/4 + 2(n-1)\gamma - n\gamma^2 - \mathrm{tr}(A^2)}{k+1}. \tag{4.10}$$

<u>Απόδειξη</u>: Σύμφωνα με την ανισότητα του Schur, ισχύει ότι $\mathrm{tr}(AA^T) \geq \rho^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Im}(\lambda_i)^2$ για το ίχνος ενός πίνακα. Επειδή εξ ορισμού έχουμε ότι $A + A^T = J - I$, συνεπάγεται ότι $A = J - I - A^T$ και προκύπτει ότι $AA^T = AJ - A - A^2 = s I^T A - A^2$. Επομένως $\mathrm{tr}(AA^T) = n(n-1)/2 - \mathrm{tr}(A^2)$.

Από Θεώρημα 4.1.2 γνωρίζουμε ότι $\rho \geq \left(\frac{n - 2 + \sqrt{n^2 + 4(n-1)^2 - 16 s^T s / n}}{4} \right)$ ενώ για τις υπόλοιπες ιδιοτιμές

$$-1/2 \leq \mathrm{Re}(\lambda_i) \leq \left(\frac{n - 2 - \sqrt{n^2 + 4(n-1)^2 - 16 s^T s / n}}{4} \right) \leq 0, \ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.11}$$

Το ότι όλες αυτές οι ιδιοτιμές αναμένεται να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος προκύπτει από την εικασία ότι $s^T s < n^2(n-1)/4$. Επομένως, συνοψίζοντας προκύπτει:

$$n(n-1)/2 - \mathrm{tr}(A^2) \geq \rho^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Im}(\lambda_i)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Re}(\lambda_i)^2$$

$$n(n-1)/2 - \mathrm{tr}(A^2) \geq \left(\frac{n - 2 + \sqrt{n^2 + 4(n-1)^2 - 16 s^T s / n}}{4} \right)^2 + (n-1)\left(\frac{n - 2 - \sqrt{n^2 + 4(n-1)^2 - 16 s^T s / n}}{4} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Im}(\lambda_i)^2$$

Θέτοντας λοιπόν, $\gamma = \left(\frac{n - \sqrt{n^2 + 4(n-1)^2 - 16 s^T s / n}}{4} \right)$, η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί και ως

$$n(n-1)/4 + 2(n-1)\gamma - n\gamma^2 - \mathrm{tr}(A^2) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Im}(\lambda_i)^2. \tag{4.12}$$

Επειδή μάλιστα οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ είναι ταξινομημένες σε φθίνουσα σειρά όσον αφορά το φανταστικό τους μέρος θα ισχύει $\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Im}(\lambda_i)^2 \geq k\ \mathrm{Im}(\lambda_k)^2$. Επομένως αντικαθιστώντας στην (4.12) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι αν k είναι περιττός θα ισχύει $|\mathrm{Im}(\lambda_k)| = |\mathrm{Im}(\lambda_{k+1})|$ προκύπτει το ζητούμενο. ■

Πόρισμα 4.1.9. Έστω A ένας μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος μεγέθους n με διάνυσμα δυναμικής s και εσωτερικό γινόμενο $s^Ts < n^2(n-1)/4$. Τότε για κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα A θα ισχύει

$$\mathrm{Im}(\lambda)^2 \leq (n^2 + 2n - 4)/8 - \mathrm{tr}(A^2)/2. \tag{4.13}$$

<u>Απόδειξη</u>: Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.8 ισχύει ότι $|\mathrm{Im}(\lambda)| \leq |\mathrm{Im}(\lambda_1)|$ για κάθε ιδιοτιμή λ. Επομένως $\mathrm{Im}(\lambda)^2 \leq [\, n(n-1)/4 + 2(n-1)\gamma - n\gamma^2 - \mathrm{tr}(A^2)\,] / 2$. Επειδή όμως ισχύει συνάμα ότι $s^Ts < n^2(n-1)/4$, από τη σχέση (4.8) θα έχουμε ότι

$$\gamma \leq \left(n - \sqrt{n^2 + 4(n-1)^2 - 4n(n-1)}\right)/4 \Leftrightarrow$$
$$\gamma \leq \left(n - \sqrt{n^2 + 4n^2 + 4 - 8n - 4n^2 + 4n}\right)/4 \Leftrightarrow$$
$$\gamma \leq \left(n - \sqrt{n^2 - 4n + 4}\right)/4 \Leftrightarrow$$
$$\gamma \leq \left(n - \sqrt{(n-2)^2}\right)/4 \Leftrightarrow \text{(επειδή n θετικός ακέραιος} \geq 2)$$
$$\gamma \leq (n - n + 2)/4 \Leftrightarrow$$
$$\gamma \leq 1/2.$$

Επομένως εφόσον ισχύει $\mathrm{Im}(\lambda)^2 \leq [\, n(n-1)/4 + 2(n-1)\gamma - n\gamma^2 - \mathrm{tr}(A^2)\,] / 2$, για $\gamma = 1/2$, μεγιστοποιούμε το όριο και καταλήγουμε ότι $\mathrm{Im}(\lambda)^2 \leq (n^2 + 2n - 4)/8 - \mathrm{tr}(A^2)/2$. ■

Πόρισμα 4.1.10. Έστω A ένας μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος μεγέθους n με διάνυσμα δυναμικής s, εσωτερικό γινόμενο $s^Ts < n^2(n-1)/4$. Τότε για κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα A θα ισχύει

$$\mathrm{Im}(\lambda)^2 \leq (n^2 + 2n - 4)/8. \tag{4.14}$$

<u>Απόδειξη</u>: Επειδή ισχύει ότι $\mathrm{tr}(A^2) \geq 0$, προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα 4.1.9 η σχέση (4.14). ■

Έχοντας μελετήσει τα άνω όρια των ιδιοτιμών τόσο όσων αφορά τα πραγματικά τους μέρη, όσο και για τα φανταστικά μέρη με συγκεκριμένες συνθήκες για το διάνυσμα δυναμικής τους, οφείλουμε να εξετάσουμε και το αντίστοιχο του Perron – Frobenius θεωρήματος, του Θεωρήματος 1.1.8, για τους μοναδιαίους πίνακες υπερπρωταθλήματος.

Θεώρημα 4.1.11. Έστω A ένας μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος μεγέθους n με διάνυσμα δυναμικής s και εσωτερικό γινόμενο $s^Ts < n^2(n-1)/4$. Εάν ισχύει για το ίχνος $\mathrm{tr}(A^2) \geq -(n^2 - 10n - 4)/8$, τότε,

(α) Υπάρχει μια πραγματική θετική ιδιοτιμή ρ του A

(β) Ισχύει $\rho > |\lambda|$, για κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα A διαφορετική από την ρ.

(γ) Υπάρχει ένα αριστερό και ένα δεξί ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή ρ και αποτελούνται εξ ολοκλήρου από θετικά στοιχεία.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 4.1.2 και τη σχέση (4.1) παρατηρούμε ότι η ιδιοτιμή ρ έχει πολλαπλότητα 1 και είναι πάντοτε θετική, επομένως ισχύει το (α).

Επειδή $s^T s < n^2(n-1)/4$, για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \neq \rho$ ισχύει από το Θεώρημα 4.1.2 ότι $-1/2 \leq \mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$, ενώ από το Πόρισμα 4.1.9 προκύπτει ότι $\mathrm{Im}(\lambda)^2 \leq (n^2 + 2n - 4)/8 - \mathrm{tr}(A^2)/2$. Επιπρόσθετα, γνωρίζουμε για το ίχνος του A^2 ότι $\mathrm{tr}(A^2) \geq -(n^2 - 10n - 4)/8$, οπότε συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες ανισότητες θα ισχύει $|\lambda|^2 \leq ¼ + (n^2 + 2n - 4)/8 + (n^2 - 10n - 4)/8$. Εντούτοις, από το Πόρισμα 4.1.5 έχουμε ότι $\rho > (n-2)/2$ και ως εκ τούτου προκύπτει το (β) σκέλος του Θεωρήματος 4.1.10.

Για το (γ) σκέλος, έστω ν ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή ρ, για την οποία γνωρίζουμε ότι $\rho > (n-2)/2$. Σύμφωνα μάλιστα με τους μαθηματικούς Maybee και Pullman ισχύει $2\rho\|\nu\|^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}(v_i - v_j)^2 = (n-1)\|\nu\|^2$ και επειδή $\rho > (n-2)/2$ για την προηγούμενη σχέση ισχύει ότι

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(v_i - v_j)^2 < \sum_{1\leq i\leq n} v_i^2. \tag{4.15}$$

Θα δείξουμε επαγωνικά για το μέγεθος n, ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα που επαληθεύει την ανισότητα (4.15) μπορεί να θεωρηθεί πως έχει όλα τα v_i στοιχεία του θετικά. Η εικασία αυτή είναι προφανής για n = 2. Εάν ισχύει η εικασία μας για n-1, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ιδιοδιάνυσμα ν είναι ένα πραγματικό μη μηδενικό διάνυσμα μεγέθους n που ικανοποιεί τη σχέση (4.15). Επειδή $v_1 \neq 0$, μπορούμε δίχως βλάβη της γενικότητας ότι $v_1 > 0$.

Έστω ότι $\sum_{1\leq i\leq n-1} v_i^2 \leq \sum_{1\leq i<j\leq n-1}(v_i - v_j)^2$. Τότε πρέπει να ισχύει αναγκαστικά $v_n^2 > \sum_{1\leq i\leq n-1}(v_i - v_n)^2$, έτσι ώστε με την προσθήκη του τελευταίου στοιχείου v_1 του διανύσματος n να ικανοποιείται εν τέλει η σχέση (4.15). Επομένως όλα τα $v_1, \ldots, v_{n-1}$ θα έχουν ίδιο πρόσημο με το v_n, οπότε $v_i > 0$, $\forall$ i = 1,2, …,n.

Ειδάλλως, αν ισχύει $\sum_{1\leq i\leq n-1} v_i^2 > \sum_{1\leq i<j\leq n-1}(v_i - v_j)^2$, τότε $v_i > 0$, $\forall$ i = 1, 2, …, n-1 από επαγωγική υπόθεση. Εάν $v_n \leq 0$, τότε $\sum_{1\leq i<j\leq n}(v_i - v_j)^2 \geq \sum_{1\leq i<j\leq n-1}(v_i - v_n)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n-1}(v_i + |v_n|)^2 \geq \sum_{1\leq i\leq n} v_i^2$, όπου η ισότητα στα δύο ενδιάμεσα αθροίσματα προκύπτει από την εικασία ότι $v_n \leq 0$. Επειδή όμως καταλήξαμε σε άτοπο, πρέπει να ισχύει $v_n > 0$, που ολοκληρώνει και την επαγωγή μας. Επομένως, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή ρ μπορούν να επιλεγούν να είναι τέτοια ώστε να έχουν θετικά και μόνο στοιχεία. ■

Πόρισμα 4.1.12. Έστω Α ένας γενικευμένος πίνακας μεγέθους n, με $n \geq 9$ με διάνυσμα δυναμικής s και εσωτερικό γινόμενο $s^T s < n^2(n-1)/4$. Τότε ο πίνακας Α ειναι μη υποβιβάσιμος και πρωτόγονος.

Απόδειξη: Είδαμε νωρίτερα, στον Ορισμό 3.2.2.1 τι εστί πρωτόγονος πίνακας. Επειδή $n \geq 9$, αποδεικνύεται ότι $n^2 - 10n + 10 > 0$. Ο πίνακας Α μάλιστα είναι μη αρνητικός, οπότε το ίχνος $\mathrm{tr}(A^2) \geq 0 > -(n^2 - 10n + 10)/4$. Από το Θεώρημα 4.1.11 και εφαρμόζοντας την κανονική μορφή Jordan στον πίνακα Α παρατηρούμε πως όταν το $k \to \infty$, ο $(1/\rho)^k A^k$ τείνει σε έναν τάξης 1 πίνακα με αυστηρά θετικά στοιχεία. Επομένως υπάρχει κάποια δύναμη του Α έτσι ώστε ο πίνακας να αποτελείται απο θετικά στοιχεία και ως εκ τούτου ο Α είναι πρωτόγονος και μη υποβιβάσιμος.

Παράδειγμα: Αν στο προηγούμενο πόρισμα η συνθήκη του εσωτερικού γινομένου παραβιάζεται, τότε το Θεώρημα 4.1.11 παύει να ισχύει. Παράδειγμα αποτελεί ο γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος M μεγέθους n που ακολουθεί.

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\ .\ .\ .\ 0 \\ \hline 1 & \\ 1 & 1/2(J - I) \\ \vdots & \\ 1 & \end{array}\right).$$

Ο πίνακας M έχει, με εξαίρεση την πρώτη γραμμή, σε κάθε γραμμή (n-2) φορές το στοιχείο ½, ενώ συναντάμε και έναν άσσο. Επομένως για το s^Ts ισχύει ότι ισούται με

$$s^Ts = \left(\left(\frac{1}{2}\right)(n-2)+1\right)^2 (n-1) = \left(\left(\frac{1}{4}\right)(n-2)^2 + 1 + (n-2)\right)(n-1) = (n-1)\left(\frac{n^2}{4} - n + 1 + n - 1\right).$$

Επομένως προκύπτει ότι $s^Ts = n^2(n-1)/4$, παραβιάζεται η συνθήκη του εσωτερικού γινομένου του Πορίσματος 4.1.12 και όντως ο πίνακας M δεν είναι ούτε μη υποβιβάσιμος (έχει μια ολόκληρη μηδενική γραμμή), ούτε πρωτόγονος (η πρώτη μηδενική γραμμή διατηρείται σε οποιαδήποτε δύναμη του M).

Παράδειγμα 2: Ας εξετάσουμε μια οικογένεια πινάκων που είναι μεν μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος μεγέθους n, αλλά έχουν εντούτοις κάποια αρνητικά στοιχεία μεγάλης απόλυτης τιμής. Εντούτοις, θα ικανοποιείται το Θεώρημα 4.1.11. Έστω α μεταξύ των τιμών 0 και $(-1+\sqrt{n-11/2})/2$. Ας λάβουμε τώρα τον μεταθετικό πίνακα C_a του οποίου οι γραμμές παράγονται με κυκλική μετάθεση του διανύσματος [0, 1+α,, ½, ½, . . ., ½, -α].

Είναι εμφανές ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία του θα είναι μηδενικά και ότι είναι ένας μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος. Για το διάνυσμα δυναμικής του s_a θα ισχύει με ανάλογες πράξεις του προηγούμενου παραδείγματος $s_a^Ts_a = n(n-1)^2/4$. Με υπολογισμούς προκύπτει ότι $tr(C_a^{\,2}) = n((n-3)/4 - 2α - 2α^2)$, οπότε η συνθήκη $tr(A^2) \geq -(n^2 - 10n - 4)/8$ θα είναι ισοδύναμη με $α^2 + α - (2n-13)/8 \leq 0$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο πίνακας C_a ικανοποιεί την υπόθεση του Θεωρήματος 4.1.11 παρότι έχει αρνητικά στοιχεία και μάλιστα μεγάλα κατ' απόλυτη τιμή, και συνεπώς η γενίκευση του Θεωρήματος Perron – Frobenius ισχύει για όλους τους μοναδιαίους πίνακες υπερπρωταθλήματος.

Πόρισμα 4.1.13. Η οικογένεια των μεταθετικών πινάκων, στους οποίους ανήκει και ο πίνακας C_a του τελευταίου παραδείγματος, δείχνει ότι πρέπει να ισχύουν και κάποιοι επιπρόσθετοι περιορισμοί για να ισχύει το Θεώρημα 4.1.11. Για οποιαδήποτε τιμή του α, ισχύει ότι $C_aJ = JC_a = ((n-1)/2)J$, οπότε ισχύει η ζητούμενη σχέση $C_a + C_a^T = J - I$. Κάθε C_a λοιπόν είναι ένας κανονικός μοναδιαίος πίνακας υπερπρωταθλήματος με ιδιοτιμές το $(n-1)/2$ και τις $λ_i^{(a)}$ $\forall$ i = 1,2, …,n-1. Ισχύει όπως είδαμε και νωρίτερα στην τρέχουσα παράγραφο ότι $Re(λ_i^{(a)}) = -1/2$, $\forall$ i = 1,2, …,n-1. Επειδή ο C_a είναι κανονικός, ισχύει η ισότητα στην ανισότητα του Schur. Συνεπώς, $n(n-1)^2/4 - tr(C_a^{\,2}) = (n-1)^2/4 + \sum_{1\leq i\leq n-1}|λ_i^a|^2$. Όσο $α \to \infty$, έχουμε ότι $tr(C_a^{\,2}) \to \infty$ και για ικανοποιητικά μεγάλες τιμές του α ισχύει $|λ_i^a| > (n-1)/2$, το οποίο παραβιάζει το (β) σκέλος του Θεωρήματος 4.1.11.

Πρόταση 4.1.14. Εάν $m \geq 3$ και C είναι ένας $m \times m$ ιδιάζων πίνακας υπερπρωταθλήματος δίχως κάποια μηδενική στήλη, τότε ο C είναι παράλληλα και υποπίνακας ενός μη υποβιβάσιμου, αντιστρέψιμου $n \times n$ πίνακα υπερπρωταθλήματος M για κάθε $n \geq m + 2$. Εάν ο C είναι ένας πίνακας πρωταθλήματος ή ένας γενικευμένος πίνακας πρωταθλήματος, τότε ο M μπορεί να επιλεγεί να είναι πίνακας της ίδιας κλάσης.

Ας δούμε τώρα συνολικά και συνοπτικά όλες τις κλάσεις/ κατηγορίες πινάκων που περιβάλλουν τους πίνακες υπερπρωταθλήματος.

- **Πίνακες ψευδοπρωταθλήματος** ονομάζονται οι $n \times n$ μιγαδικοί πίνακες M για τους οποίους ισχύει η σχέση $M + M^* + I = \pm hh^*$, όπου M^* είναι ο αναστροφοσυζυγής του πίνακα M και h^* το αναστροφοσυζυγές διάνυσμα του μη μηδενικού μιγαδικού διανύσματος h. Ισχύει όπως είδαμε και στο δεύτερο κεφάλαιο ότι οι τάξη του πίνακα $M + M^* + I$ θα είναι 1.

- Σε περίπτωση που επαληθεύεται η σχέση $M + M^* + I = hh^*$, πάντα για $h \neq 0$, έχουμε συγκεκριμένα ένα <u>θετικό πίνακα ψευδοπρωταθλήματος</u>. Αυτή η υποκατηγορία πινάκων, όπως γενικά και η ευρύτερη κατηγορία των πινάκων ψευδοπρωταθλήματος δεν έχουν τα διαγώνια στοιχεία τους απαραιτήτως ίσα με μηδέν.

- Επομένως από την τελευταία επισήμανση, προκύπτει αυτομάτως η κατηγορία των **πινάκων υπερπρωταθλήματος** για τους οποίους ισχύει εκ νέου $A + A^* + I = hh^*$, αλλά έχουν μηδενικά διαγώνια στοιχεία και επιπλέον είναι αποκλειστικά πραγματικοί πίνακες (το ίδιο και τα διανύσματα h).

- Υποκατηγορία των πινάκων υπερπρωταθλήματος είναι οι <u>μοναδιαίοι πίνακες υπερπρωταθήματος</u> που εξετάστηκαν ενδελεχώς στο κεφάλαιο αυτό, αλλά και οι <u>πίνακες Morishima</u> οι οποίοι αποτελούνται αποκλειστικά από τις τιμές {0, 1, -1}.

- Υποκατηγορία των μοναδιαίων πινάκων υπερπρωταθλήματος είναι οι **γενικευμένοι πίνακες πρωταθλήματος**. Στην περίπτωσή τους ισχύει ότι $h = j$, και επιπλέον αποτελούνται από στοιχεία που ανήκουν στο διάστημα [0, 1].

- Τέλος έχουμε φυσικά του **πίνακες πρωταθλήματος** για τους οποίους ισχύει ότι και για τους γενικευμένους πίνακες πρωταθλήματος με την επιπλέον συνθήκη ότι τα στοιχεία τους όλα αποτελούνται από τις τιμές 0 και 1.

Οι πίνακες Morishima είναι μια ειδική κατηγορία πινάκων και μάλιστα ισχύει ότι ένας πραγματικός πίνακας M είναι πίνακας Morishima αν και μόνο αν υπάρχει προσημασμένος πίνακας D τέτοιος ώστε $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \pm 1 \ \forall \ i \in N$, έτσι ώστε ο πίνακας DMD να είναι μη αρνητικός.

Θεώρημα 4.1.15. Έστω M ένας προσημασμένος πίνακας πρωταθλήματος μεγέθους n. Τότε ο πίνακας M είναι ένας πίνακας υπερπρωταθλήματος αν και μόνο αν είναι πίνακας Morishima.

<u>Απόδειξη</u>: Εάν ο M είναι ένας ταυτόχρονα προσημασμένος πίνακας πρωταθλήματος και πίνακας Morishima τότε θα ικανοποιείται η εξίσωση $M + M^T + I = hh^T$, όπου $h_k = \pm 1 \ \forall \ k \in N$. Από το Λήμμα 4.2.1 προκύπτει ότι ο A=DMD είναι ένας πίνακας j-υπερπρωταθλήματος, όμοιος με τον M. Επομένως ο A είναι μη αρνητικός πίνακας και επειδή ο D απλά μεταθέτει τα πρόσημα, ο M πρέπει να είναι πίνακας Morishima. Για την αντίστροφη πορεία τώρα, για προσημασμένο πίνακα Morishima M, ο DMD είναι

πίνακας πρωταθλήματος ως θετικός πίνακας j-υπερπρωταθλήματος. Επομένως ο M θα είναι ένας πίνακας h-υπερπρωταθλήματος, όπου $h = Dj$.

Συμπερασματικά, ο M και ο $A=DMD$ έχουν το ίδιο ακριβώς φάσμα και επίσης ένα διάνυσμα v είναι ιδιοδιάνυσμα του M και αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αν και μόνο αν το Dv είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ίδια ακριβώς ιδιοτιμή λ.

4.2 Πυρήνας Πινάκων Υπερπρωταθλήματος

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πραγματικός πίνακας M είναι πίνακας υπερπρωταθλήματος αν όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι μηδενικά για κάποιο πραγματικό διάνυσμα $h \neq 0$ (εξού και ο συμβολισμός πίνακας h-υπερπρωταθλήματος). Προκύπτει μάλιστα ότι για να είναι μηδενικά όλα τα διαγώνια στοιχεία του M πρέπει να ισχύει $h_i^2 = 1 \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$.

Λήμμα 4.2.1. Έστω M ένας πίνακας h-υπερπρωταθλήματος και D ένας διαγώνιος πίνακας με $d_{ii} = h_i, \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$ και επιπλέον $A = DMD$ (να σημειωθεί ότι $D = D^T$). Ορίζουμε πίνακα A να είναι πίνακας j-υπερπρωταθλήματος, όμοιος με τον M. Τότε v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του M που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αν και μόνο αν Dv είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A της ίδιας ιδιοτιμής λ.

Ας επικεντρωθούμε τώρα να δούμε ποιές είναι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ ώστε να ομογενοποιεί έναν οποιονδήποτε πίνακα h-υπερπρωταθλήματος. Μετέπειτα θα βρούμε και συγκεκριμένα ποιοί πίνακες h-υπερπρωταθλήματος μηδενίζονται για δεδομένο διάνυσμα v. Αποδεικνύεται ότι ένα τέτοιο διάνυσμα v βρίσκεται στον πυρήνα ενός πίνακα h-υπερπρωταθλήματος αν και μόνο αν

$$|h^T v| = \|v\|. \tag{4.16}$$

Η σχέση (4.16) αποτελεί μια αναγκαία συνθήκη για να ανήκει το διάνυσμα v στον πυρήνα του πίνακα h-υπερπρωταθλήματος, αν παράλληλα $v \neq 0$ για κάποιο h με $h_i^2 = 1 \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$. Έως ότου αποδειχθεί αυτή η συνθήκη λέμε ότι το διάνυσμα v είναι <u>h-αποδεκτό</u>.

Ορισμός 4.2.2. Θέτουμε με r(v) το πλήθος των δεικτών i για τους οποίους ισχύει ότι $v_i \neq 0$.

Λήμμα 4.2.3. Αν $r(v) = 2$, τότε το διάνυσμα v δεν μπορεί να ομογενοποιήσει κανέναν πίνακα h-υπερπρωταθλήματος, για οποιοδήποτε διάνυσμα h.

Θεώρημα 4.2.4. Έστω $n \geq 3$ και $v \in \mathbb{R}^n$. Τότε το διάνυσμα v είναι h-αποδεκτό αν και μόνο αν ανήκει στον πυρήνα του πίνακα h-υπερπρωταθλήματος, δηλαδή αν ομογενοποιεί τις εξισώσεις που προκύπτουν όταν πολλαπλασιαστεί με τον πίνακα αυτόν.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω D ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου το ii-οστό του στοιχείο είναι ίσο με $h_i, \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$ και $w = Dv$. Τότε το διάνυσμα v είναι h-αποδεκτό αν και μόνο αν το διάνυσμα w είναι j-αποδεκτό. Αντιστοίχως, από το Λήμμα 4.2.1 μάλιστα προκύπτει ότι το διάνυσμα v ανήκει στον πυρήνα του πίνακα h-υπερπρωταθλήματος, αν και μόνο αν το διάνυσμα w ανήκει στον πυρήνα του πίνακα j-υπερπρωταθλήματος. Ως εκ τούτου και προς διευκόλυνσή μας, θα θεωρούμε ότι $h = j$.

Δοθέντος ενός μη μηδενικού διανύσματος $v \in \mathbb{R}^n$, λαμβάνουμε υπόψιν την εξίσωση (σύστημα εξισώσεων) $Mv = 0$, για έναν άγνωστο πίνακα j-υπερπρωταθλήματος M. Πρόκειται για ένα σύστημα n το πλήθος γραμμικών εξισώσεων με $\binom{n}{2}$ αγνώστους, τους m_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, καθώς $m_{ji} = 1 - m_{ij}$ για $i < j$.

Συγκεκριμένα, θα ισχύουν οι εξισώσεις

$$\sum_{j=1}^{i-1} v_j m_{ji} - \sum_{j=i+1}^{n} v_j m_{ij} = \sum_{j=1}^{i-1} v_j \text{ , για } 1 \leq i \leq n. \tag{4.17}$$

Δίχως βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_1 \neq 0$. Επί παραδείγματει, για $n = 4$, και θέτοντας $\sigma_\iota = \sum_{j=1}^{i} v_j$ η σχέση (4.17) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή επαυξημένου πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 & -v_3 & -v_4 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & v_1 & 0 & v_2 & 0 & -v_4 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & v_1 & 0 & v_2 & v_3 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Η τάξη του πίνακα A είναι τουλάχιστον n-1, καθότι $v_1 \neq 0$. Έπειτα από τις κατάλληλες γραμμοπράξεις ο πίνακας A μπορεί να μετατραπεί σε έναν πίνακα B με πρώτη σειρά την $[\ 0^T_{n(n-1)/2},\ - \sum_{i=1}^{n-1} v_{i+1}\sigma_i\ ]$.

Προκύπτει μάλιστα ότι η j-οστή στήλη του B είναι ίδια με τη j-οστή στήλη του A για $1 \leq j \leq n$. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι η τάξη του A είναι ίση με n-1 αν και μόνο αν το διάνυσμα v είναι j-αποδεκτό, καθώς

$$\sum_{i=1}^{n-1} v_{i+1}\sigma_i = \sum_{1 \leq i < j \leq n} v_i v_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} v_i^2\right). \tag{4.19}$$

Συνεπώς, η εξίσωση $Mv = 0$ έχει λύση που ικανοποιεί τη σχέση $M + M^T + I = J$, αν και μόνο αν το διάνυσμα v είναι j-αποδεκτό. ■

Μπορούμε συνεπώς πλέον να αναγνωρίσουμε όλους τους ιδιάζοντες πίνακες. Ισχύει επομένως πως όταν εμφανίζεται διάνυσμα v j-αποδεκτό, παράλληλα με πρώτο στοιχείο $v_1 \neq 0$, τότε η εύρεση του πίνακα M για το ομογενές σύστημα $Mv = 0$ προκύπτει από τις τελευταίες n-1 γραμμές του επαυξημένου πίνακα A που είδαμε νωρίτερα. Λαμβάνουμε λοιπόν ότι

$$v_1 m_{1i} = \sigma_{i-1} + \sum_{j=i+1}^{n} t_{ij} v_j - \sum_{j=2}^{i-1} t_{ji} v_j, \text{ εάν } 2 \leq i \leq n, \tag{4.20}$$

και επιπλέον $m_{ij} = t_{ij}$ αν $1 < i < j \leq n$, όπου t_{ij} είναι $\binom{n-1}{2}$ αυθαίρετες παράμετροι. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι όλοι οι j-αποδεκτοί πίνακες για διάνυσμα v, με $v_1 \neq 0$ ομογενοποιούν το σύστημα $Mv = 0$ αν και μόνο αν για κάποιον αυθαίρετο πίνακα j-υπερπρωταθλήματος T ισχύει ότι

$$M = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & & & \\ m_{31} & & T & \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & & & \end{bmatrix} \text{ και } m_{i1} = \left(\frac{1}{v_1}\right)\sum_{j=1}^{n} t_{ij} v_j \text{ για } 2 \leq i \leq n. \tag{4.21}$$

Θεώρημα 4.2.5. Έστω $n \geq 3$ και $v \in \mathbb{R}^n$ ($v \neq 0$). Τότε για κάθε διάνυσμα h υπάρχει ένας $n \times n$ μη υποβιβάσιμος πίνακας h-υπερπρωταθλήματος που ομογενοποιείται από το διάνυσμα v (δηλαδή $Mv = 0$), αν και μόνο αν $r(v) > 3$ και επιπρόσθετα το διάνυσμα v είναι h-αποδεκτό.

Απόδειξη: Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $h = j$, όπως είδαμε και στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.4, οπότε το διάνυσμα v που εξετάζουμε θα είναι και j-αποδεκτό. Ας εξετάσουμε πρώτα την αναγκαιότητα της συνθήκης να ισχύει $r(v) > 3$. Αν έχουμε $r(v) = 1$, τότε κάθε πίνακας που έχει στον πυρήνα του το διάνυσμα v έχει μια μηδενική στήλη και αυτομάτως αυτό συνεπάγεται ότι είναι υποβιβάσιμος. Σε συνδυασμό με το Λήμμα 4.2.3 προκύπτει ότι $r(v) > 2$.

Ας υποθέσουμε αντιστρόφως ότι $r(v) \geq 3$ και το διάνυσμα v είναι j-αποδεκτό. Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $v_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. Έστω M ένας τυχαίος πίνακας j-υπερπρωταθλήματος για τον οποίον ισχύει $Mv = 0$.

Τότε θα ισχύει $m_{12} = 1 + \sum_{j=3}^{n} t_{2j} v_j$ και $m_{1n} = (\sigma_{n-1} / v_1) - \sum_{j=2}^{n} t_{jn} v_j / v_1$, όπου t_{ij} είναι τυχαίες παράμετροι σύμφωνα και με την εξίσωση (4.20). Εάν $n = 3$, τότε $m_{12} = 1 + t_{23}\, v_3 / v_1$ και $m_{n1} = t_{23}\,(v_2 / v_1) - (v_2 / v_1)$. Μπορούμε να επιλέξουμε $t_{23} \neq 0$ έτσι ώστε $m_{12} \neq 0$ και $m_{31} \neq 0$ επειδή $v_2 \neq 0$.

Εάν $n > 3$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε μη μηδενικές παραμέτρους $t_{23}, \ldots, t_{2n}$ κατάλληλες ώστε $m_{12} \neq 0$ και έπειτα να επιλεγούν $t_{3n}, t_{4n}, \ldots, t_{n-1n}$ τέτοια ώστε $m_{n1} \neq 0$. Από το Θεώρημα 4.2.4 προκύπτει επίσης ότι $m_{ii+1} = t_{ii+1}$ για $1 < i \leq n-1$. Μπορούμε να επιλέξουμε $t_{ii+1} \neq 0$ για $2 < i \leq n-1$ ώστε να προκύπτει $m_{12}\, m_{23}\, m_{34} \ldots m_{n-1n}\, m_{n1} \neq 0$. Συνεπώς ο πίνακας M ο οποίος επιλέχθηκε κατ' αυτόν τον τρόπο είναι μη υποβιβάσιμος. ■

Η παραπάνω απόδειξη είναι επί της ουσίας ένας κατασκευαστικός αλγόριθμος όλων των μη υποβιβάσιμων πινάκων h-υπερπρωταθλήματος που ομογενοποιούνται από ένα h-αποδεκτό διάνυσμα v εφόσον $r(v) > 3$.

Λήμμα 4.2.6. Έστω $n > 2$, $v \in \mathbb{R}^n$ και $r(v) > 1$. Θέτουμε λοιπόν $z_i = \{\sum v_k v_j : 1 \leq k < j \leq n, k \neq i, j \neq i\}$ και $y_i = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right) - v_i$ $\forall$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε το διάνυσμα v θα είναι j-αποδεκτό αν και μόνο αν $v_i = -z_i / y_i$, όπου βεβαίως $y_i \neq 0$ $\forall$ i.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το προηγούμενο Λήμμα και χρησιμοποιώντας όσα έχουμε θέσει θα ισχύει

$$(j^T v)^2 - \|v\|^2 = 2(z_i + y_i v_i)\,. \tag{4.22}$$

Εάν $y_i \neq 0$ και $v_i = -z_i / y_i$ για κάποιο i, τότε από τη σχέση (4.22) και το Λήμμα 4.2.1 και τη σχέση (4.16) φαίνεται ότι το διάνυσμα είναι h-αποδεκτό. Αντιστρόφως, εάν το διάνυσμα v είναι h-αποδεκτό, τότε από την εξίσωση (4.22) θα ισχύει ότι $v_i = -z_i / y_i$ για όλα τα i. Εάν $y_i = 0$ για κάποιο i, τότε $v_i^2 = \sum_{j=1}^{n} v_j^2$ και επειδή $v_j = 0$ για κάθε $j \neq i$, θα έχουμε ότι $r(v) = 1$ που είναι άτοπο. ■

Παράδειγμα: Έστω διάνυσμα $h^T = [\,1, -1, 1, 1]$. Έστω $v_1 = 3$, $v_2 = 5$. Έστω επίσης $v_3 = -6$ (αποκλείεται μονάχα η περίπτωση $v_3 = -8$, διότι θα έδινε μηδενικό μερικό άθροισμα στοιχείων του διανύσματος v). Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.2.6 προκύπτει το αντίστοιχο j-αποδεκτό διάνυσμα $v^T = [\,3, 5, -6, 33/2]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.4 το διάνυσμα v που ομογενοποιεί την κλάση πινάκων j-υπερπρωταθλημάτων θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & -2 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & \frac{11}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ -\frac{11}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{2} & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

με τους συντελεστές s, t και u των πινάκων να είναι πραγματικοί αριθμοί, $(s, t, u) \in \mathbb{R}^3$. Συνάμα προκύπτει ότι η κλάση των πινάκων που θα ομογενοποιεί το διάνυσμα w θα είναι της μορφής:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{3} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 2 & -\frac{5}{3} & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & -\frac{11}{2} & 0 & -\frac{5}{3} \\ \frac{11}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{2} & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα 4.2.7. Για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$ με $h_i^2 = 1 \ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$, υπάρχει ένας $n \times n$ μη υποβιβάσιμος πίνακας h-υπερπρωταθλήματος αν και μόνο αν $n \neq 2$. Το διάνυσμα μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε όλα τα στοιχεία του να είναι ακέραιοι αριθμοί.

Απόδειξη: Για την απόδειξη γίνεται παραπομπή στο paper των J. S. Maybee and N. J. Pullman, On generalized tournament matrices [27]. ■

4.3 Πίνακες Ψευδοπρωταθλήματος

Ορισμός 4.3.1. Πίνακες ψευδοπρωταθλήματος ονομάζονται οι $n \times n$ μιγαδικοί πίνακες M για τους οποίους ισχύει η σχέση $M + M^* + I = \pm hh^*$, όπου το διάνυσμα h ενδέχεται επίσης να είναι και μιγαδικό.

Λήμμα 4.3.2. Εάν M είναι ένας πίνακας ψευδοπρωταθλήματος, τότε τα πραγματικά μέρη των διαγωνίων στοιχείων του είναι όλα μηδενικά αν και μόνο αν $|h_i| = 1 \ \forall \ i$.

Θεώρημα 4.3.3. Εάν λ είναι μια ιδιοτιμή του $n \times n$ πίνακα ψευδοπρωταθλήματος M, τότε είτε ισχύει ότι η τάξη του $M – \lambda I$ είναι ίση με n-1, είτε $Re(\lambda) = -1/2$.

<u>Απόδειξη</u>: ‘Εστω πίνακας $H = M + M^* + I$. Τότε $H = \pm hh^*$ για κάποιο $h \neq 0$ εξ ορισμού. Για κάθε $v \in C^n$ ορίζουμε $s(v) = h^*v$. Εάν υποθέσουμε ότι x είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε πολλαπλασιάζοντας εκ δεξιών τη σχέση που ορίζει τον πίνακα H με το ιδιοδιάνυσμα x προκύπτει ότι

$$\lambda x + M^*x + x = \pm hs(v). \tag{4.23}$$

Πολλαπλασιάζοντας εν συνεχεία τη σχέση (4.16) με το διάνυσμα x* προκύπτει η τελική σχέση

$$(2Re(\lambda) + 1) \ \|x\|^2 = \pm|s(x)|^2 \ . \tag{4.24}$$

Εάν ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής λ έχει διάσταση μεγαλύτερη από μονάδα, τότε υπάρχει διάνυσμα y που ανήκει στον ίδιο χώρο και είναι κάθετο στο διάνυσμα x. Από την εξίσωση (4.23) προκύπτει ότι $s(x)s(y)=0$, ενώ από την εξίσωση (4.24) προκύπτει ότι $2Re(\lambda) + 1 = 0$. ■

Πόρισμα 4.3.4. Η τάξη ενός πίνακα ψευδοπρωταθλήματος είναι τουλάχιστον n – 1.

Μπορούμε πλέον να γενικεύσουμε το Θεώρημα 3.2.2.4 για πίνακες ψευδοπρωταθλήματος.

Πρόταση 4.3.5. Έστω ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας M για τον οποίον ισχύει η συνθήκη $M + M^* = hh^* – I$, όπου τα πραγματικά μέρη όλων των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα M είναι μηδενικά. Επιπρόσθετα έστω x ένα ιδιοδιάνυσμα του με αντίστοιχη ιδιοτιμή το λ και επιπλέον ορίζουμε διάνυσμα $w = [\,\bar{h}_1 x_1,\ \bar{h}_2 x_2, \dots,\ \bar{h}_n x_n]^T$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $\dfrac{2Re(\lambda)}{n-1} + \dfrac{var(w)}{(n-1)\ \|x\|^2} = 1,$

(β) $Re(\lambda) \leq (n-1)/2$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $var(w)=0$.

<u>Απόδειξη</u>: Η απόδειξη είναι όμοια της αντίστοιχης του Θεωρήματος 3.2.2.4 και χρησιμοποιεί την σχέση

$$var(x) = n\|x\|^2 - \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|^2 . \qquad ■(4.25)$$

Πρόταση 4.3.6. Τα πραγματικά μέρη κάθε ιδιοτιμής ενός θετικού πίνακα ψευδοπρωταθλήματος είναι τουλάχιστον ίσα με -1/2. Η τιμή -1/2 είναι το πραγματικό μέρος μιας ιδιοτιμής με ιδιοδιάνυσμα x αν και μόνο αν ισχύει $h^T x = 0$, δηλαδή παρουσιάζεται καθετότητα μεταξύ των διανυσμάτων h και x.

Πρόταση 4.3.7. Έστω θετικός πίνακας ψευδοπρωταθλήματος με $M + M^* + I = hh^*$, και $h = j$. Αν επιπλέον ο πίνακας M είναι ισορροπημένος, τότε ο M είναι και αντιστρέψιμος.

Απόδειξη: Λόγω του ότι ο πίνακας έχει διάνυσμα δυναμικής που όλα τα στοιχεία του είναι ίσα, έστω k, μπορούμε να πούμε ότι $Mj = kj$. Επομένως θα ισχύει ότι $j^T M^* = k^* j^T$ και ως εκ τούτου η σχέση $Mj + M^*j + j = jj^Tj$ συνεπάγεται ότι $kj + M^*j + j = nj$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με j^T προκύπτει ότι $nk + nk^* + n = n^2 \rightarrow 2\mathrm{Re}(k) = n-1$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $Mx = 0$, έτσι ώστε η σχέση (4.16) να γίνει $M^*x + x = js(x)$. Πολλαπλασιάζοντας με το j^T και αυτή τη σχέση προκύπτει

$$j^T M^* j + j^T x = j^T js(x) \;\rightarrow\; k^* j^T x + j^T x = nj^T x \;\rightarrow\; (k^* + 1 - n)(j^T x) = 0.$$

Βέβαια από τον ορισμό του πίνακα ως ισορροπημένου για το k θα ισχύει $n = 2k + 1 \rightarrow 2k = n - 1$. Συνεπώς $k^* + 1 - n = k^* - (k + k^*) = k \neq 0$. Οπότε θα έχουμε αναγκαστικά ότι $j^T x = 0$. Άρα αν λάβουμε τη σχέση (4.18) θα προκύψει εν τέλει ότι $n\|x\|^2 = \left|j^T x\right| = 0$, οπότε υποχρεωτικά το διάνυσμα $x = 0$. Επομένως ο πίνακας M δεν έχει κάποια μηδενική ιδιοτιμή και είναι αντιστρέψιμος. ■

Παράδειγμα: Θα εξετάσουμε πίνακα πρωταθλήματος που αποτελείται από υποπίνακες κυρίας διαγωνίου της μορφής ενός επιμέρους πρωταθλήματος/ κατηγορίας 3 ομάδων. Οι υποπίνακες A_i θα είναι όλοι ίσοι με τον πίνακα B, όπου έχουμε πίνακα πρωταθλήματος

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & A_m \end{bmatrix} \text{ με } A_i = B \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Είναι εφικτό μια ιδιοτιμή λ να έχει γεωμετρική πολυπλοκότητα μεγαλύτερη της μονάδος (τέτοιες ιδιοτιμές έχουν πραγματικό μέρος ίσο με -1/2 όπως προκύπτει από το Θεώρημα 4.3.3). Παρατηρούμε ότι ο A είναι τετραγωνικός πίνακας μεγέθους 3m. Τότε οι ιδιοτιμές του θα είναι οι κυβικές ρίζες της μονάδος, το 1, το i και το – i, η κάθε μια με αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με m.

Έστω v ένα ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχίζεται στην ιδιοτιμή i. Οι στήλες του $J_m \otimes v$ είναι ένα σύνολο m γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A. Εύκολα αυτό μπορεί να επαληθευτεί μέσω της σχέσης (4.24), οπότε προκύπτει ότι [1, 1, 1] v = 0,δηλαδή ότι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} v = 0.$$

Επομένως, η γεωμετρική πολυπλοκότητα της ιδιοτιμής i είναι m.

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια της τρέχουσας ενότητας τα διανύσματα που αποτελούν τον πυρήνες πινάκων ψευδοπρωταθλήματος. Επειδή η συγκεκριμένη κατηγορία πινάκων όμως δεν έχει μεγάλο εύρος εφαρμογών θα στραφούμε συγκεκριμένα στους πίνακες πρωταθλήματος και θα εξετάσουμε τη μορφή των διανυσμάτων που τους ομογενοποιούν, με τα περισσότερα πορίσματα που θα προκύψουν σαφώς να ισχύουν και για τη γενικότερη κατηγορία των πινάκων ψευδοπρωταθλήματος.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα και στην σχέση (4.16) όπου τα εκάστοτε διανύσματα v όφειλαν να είναι h-αποδεκτά, πλέον καθότι δεν έχουμε πίνακα H, αλλά J, οφείλουν να είναι j-αποδεκτά. Επιπρόσθετα, το διάνυσμα v αποτελείται από ρητούς αριθμούς, αλλά δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το v είναι ένα ακέραιο διάνυσμα, εκ των οποίων οι μη μηδενικές τιμές του έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη (ΜΚΔ) τη μονάδα. Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ότι στοιχεία του διανύσματος v είναι μη μηδενικά σύμφωνα με το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.3.8. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in \mathbb{Z}^n$ το οποίο ομογενοποιεί κάποιον πίνακα πρωταθλήματος αν και μόνο αν κάθε υποδιάνυσμα των μη μηδενικών στοιχείων του κάνει το ίδιο.

Απόδειξη: Έστω $r = r(v)$ ο αριθμός των δεικτών i για τους οποίους ισχύει $v_i \neq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε δίχως βλάβη της γενικότητας ότι $v = \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix}$, όπου για το διάνυσμα w ισχύει $w_i \neq 0 \ \forall$ i. Εάν $Mv = 0$, έστω A υποπίνακας του M που αποτελείται από τις r πρώτες γραμμές και στήλες. Τότε θα ισχύει $Aw = 0$ και ως εκ τούτου $\begin{bmatrix} A & J \\ 0 & B \end{bmatrix} w = 0$, με την προϋπόθεση ο B να είναι ένας πίνακας πρωταθλήματος. ■

Θεώρημα 4.3.9. Εάν $n > 1$ και $v \in \mathbb{Z}^n$ είναι ένα διάνυσμα το οποίο μπορεί να ομογενοποιήσει κάποιον πίνακα πρωταθλήματος A, δεν έχει κανένα μηδενικό στοιχείο και επιπλέον ισχύει ότι ΜΚΔ$\{v_i : 1 \leq i \leq n\} = 1$, τότε το v ανήκει στον πυρήνα του πίνακα A αν και μόνο αν ΜΚΔ$\{v_i : i \neq j\} = 1, \forall j \neq i$.

Απόδειξη: Ας θέσουμε ως $d_j =$ ΜΚΔ$\{v_i : i \neq j\} = 1, \ \forall$ j. Έστω $Av = 0$ για κάποιον πίνακα πρωταθλήματος A. Τότε θα ισχύει

$$\alpha_{ij} v_j = -\sum_{k \neq j} \alpha_{ik} v_k \text{ . } \forall \text{ i και ζεύγος } \{j, i\} \text{ με } j \neq i. \tag{4.26}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $d_j \neq 1$ για κάποιο j. Εάν για κάποιο i, $\alpha_{ij} = 1$, τότε από τη σχέση (4.26) το στοιχείο v_j δύναται να αναγραφεί ως ακέραιος συνδυασμός των υπολοίπων v_k παρά το γεγονός ότι ΜΚΔ$\{v_i : 1 \leq i \leq n\} = 1$. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι κάποια $\alpha_{ik} \neq 0$, καθώς $v_j \neq 0$. Συνεπώς, θα ισχύει ότι $\alpha_{ij} = 0$ για όλα τα i. Τότε προκύπτει $Ae_j = 0$, όπου e_j είναι η j-οστή στήλη του μοναδιαίου πίνακα μεγέθους n. Από το Πόρισμα 4.3.4 προκύπτει ότι $v = e_j$, εντούτοις από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα v δεν έχει κανένα μηδενικό στοιχείο, οπότε θα έπρεπε να ισχύει αυστηρά $n = 1$, κάτι που βάσει της υπόθεσης μας οδηγεί σε άτοπο. ■

Παράδειγμα: Το Θεώρημα 4.3.9 δείχνει πως το διάνυσμα $[-3, -3, 3, 6, 6, 1]^T$ δεν ομογενοποιεί κάποιον πίνακα πρωταθλήματος παρότι είναι j-αποδεκτό (το άθροισμα των στοιχείων του ισούται με το μέτρο του, =10 εν προκειμένη περιπτώσει).

Παράδειγμα 2: Έστω διάνυσμα v = [-2, -2, 1, 3, 3, 3 $]^T$. Τότε το v είναι j-αποδεκτό (ή απλά αποδεκτό) και δεν έχει μηδενικά στοιχεία, ενώ ΜΚΔ$\{v_i : 1 \leq i \leq n\} = 1$. Εντούτοις, δεν ομογενοποιεί κανέναν πίνακα πρωταθλήματος. Ας διερευνήσουμε το λόγο, λαμβάνοντας υπόψη έναν πίνακα πρωταθλήματος μεγέθους 6. Τότε θα ισχύει είτε $\alpha_{12} = 1$, είτε $\alpha_{21} = 1$. Αν ισχύει το πρώτο ενδεχόμενο, τότε $(Av)_1 = -2 + \alpha_{13} + \sum_{4\leq j\leq 6} \alpha_{1j}$.Υπάρχουν $2^4 = 16$ πιθανές επιλογές για την τετράδα στοιχείων $[\alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}]$. Σε καμία εξ αυτών όμως δεν προκύπτει $(Av)_1 = 0$. Αν αρχικώς ισχύει $\alpha_{21} = 1$, τότε με παρόμοιο τρόπο προκύπτει εκ νέου $(Av)_1 \neq 0$. Συνεπώς παρατηρούμε ότι μπορούμε να αποκλείσουμε το διάνυσμα v ως πιθανό ομογενοποιητή κάποιου τετραγωνικού πίνακα κατάλληλου μεγέθους, διότι δεν πληροί την ισοδυναμία του Θεωρήματος 4.3.9.

Θεώρημα 4.3.10. Εάν n > 1 και $v \in Z^n$ είναι ένα διάνυσμα δίχως κάποιο μηδενικό στοιχείο για το οποίο ισχύει ότι Mv = 0 για κάποιον πίνακα πρωταθλήματος M, τότε

(α) $n \neq 2, 3$ ή 5,
(β) n = 4, μόνο αν $v^T = c[1,-1,-1,-1]P$, για κάποιον ακέραιο c και κάποιον πίνακα μετάθεσης P,
(γ) n = 6, μόνο αν $v = cPw$, για κάποιον πίνακα μετάθεσης P, ακέραιο αριθμό c και w^T να ισούται είτε με [-2, 1, 1, 1, 1, 1], είτε με [3, 3, 2, 1, 1, 1], είτε με [-1, -1, 2, 1, 1, 1].

Επίσης κάθε ένα από τα διανύσματα v που ορίζονται στα (β) και (γ) ομογενοποιούν πίνακες πρωταθλήματος που έχουν μια μηδενική γραμμή.

Απόδειξη: Εξ ορισμού έχουμε ότι r(v) = n. Τότε από το Λήμμα 4.2.6 θα ισχύει n > 2. Επίσης από το Πόρισμα 4.3.4 ο πίνακας M δεν δύναται να έχει κάποια μηδενική στήλη όταν r(v) > 1. Επίσης γνωρίζουμε ότι κάθε στοιχείο του v δεν ισούται με το άθροισμα όλων των υπολοίπων, δηλαδή

$$\sum_{1\leq i\leq n} v_i \neq v_j \,\forall\, j, \tag{4.27}$$

διότι το διάνυσμα v είναι αποδεκτό και r(v) > 1. Εάν n = 3, τότε ο πίνακας M είναι υποβιβάσιμος, καθώς έχουμε ξαναδιατυπώσει ότι ιδιάζων και μη υποβιβάσιμος πίνακας πρωταθλήματος μπορεί να υπάρξει μόνο για n > 5. Τότε όμως ο πίνακας M οφείλει να έχει μια μηδενική στήλη, το οποίο όμως είναι αδύνατον.

Έστω ότι n = 5. Ας θέσουμε ως m_i το άθροισμα στοιχείων της i-στής γραμμής του πίνακα M. Κανένα m_i δεν μπορεί να ισούται με 4, καθότι είπαμε πως δεν υφίσταται καμία μηδενική γραμμή. Επίσης κανένα m_i δεν ισούται με 1 διότι αυτό αυτομάτως θα σήμαινε ότι $v_i = 0$. Επίσης το m_i θα ισούται με μηδέν το πολύ για μία τιμή του i, καθώς το M είναι πίνακας πρωταθλήματος και δεν μπορούν στο ίδιο πρωτάθλημα να υπάρχουν δύο παίκτες που να χάνουν από όλους τους αντιπάλους τους (θα υπάρχει νικηφόρο αποτέλεσμα υπέρ του ενός ή του άλλου στο μεταξύ τους παιχνίδι). Συνεπάγεται ότι $m_i = 2$ για τουλάχιστον μία τιμή του i.

Μεταθέτοντας τις γραμμές και τις στήλες του πίνακα M εφόσον χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το διάνυσμα [0, 1, 1, 0, 0, 0] είναι η πρώτη σειρά του πίνακα M και αν κάποια $m_i = 0$, τότε i = 5. Εάν $m_{23} = 0$, τότε $m_{24} = m_{25} = 1$ διότι $m_2 = 2$ ή 3. Αν αντιθέτως $m_{23} = 1$, τότε $m_{32} = 0$, επομένως $m_{34} = m_{35} = 1$ με παρόμοιο τρόπο. Οπότε προκύπτει ότι το διάνυσμα [0, 0, 0, 1, 1] είναι μία από τις γραμμές του M. Συνεπάγεται ότι $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ = [0, 1, 1, 1, 1]v = [0, 1, 1, 0, 0]v + [0, 0, 0, 1, 1]v = 0, καθότι [0, 1, 1, 0, 0] και [0, 0, 0, 1, 1] είναι γραμμές του πίνακα M. Αυτό το πόρισμα όμως αντιτίθεται στην εξίσωση (4.27), επομένως $n \neq 5$. Εάν n = 4, τότε υπολογίζοντας τα πιθανά αθροίσματα γραμμών, καταλήγουμε ότι υπάρχει μεταθετικός πίνακας P για τον οποίον να ισχύει το (β) σκέλος και είναι κατάλληλος ώστε να ισχύει το κάτωθι:

$$PMP^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι n = 6. Εάν κάποια γραμμή του πίνακα M είναι μηδενική τότε τα υπόλοιπα πιθανά αθροίσματα γραμμών του M θα είναι 2, 3 ή 4. Συνεπάγεται ότι τα αθροίσματα γραμμών του πίνακα M με χρήση μεταθέσεων ώστε να παρουσιάζονται σε αύξουσα σειρά θα είναι τα [0, 3, 3, 3, 3, 3], το [0, 2, 3, 3, 3, 4] ή το [0, 2, 2, 3, 4, 4].

Προκύπτει από τον J. W. Moon και την έρευνα του στο Topics on Tournaments [23] ότι τα διανύσματα που ομογενοποιούν πίνακες M της παραπάνω μορφής θα είναι μεταθέσεις των διανυσμάτων $[-2, 1, 1, 1, 1, 1]^T$, $[1, -1, -1, -1, 0, 0]^T$ ή $[-1, -1, 2, 1, 1, 1]^T$. Αν ο M δεν έχει κάποια μηδενική σειρά, πάλι με χρήση μεταθέσεων προκύπτουν αθροίσματα γραμμών που θα είναι είτε [2, 2, 2, 2, 3, 4], είτε [2, 2, 2, 3, 3, 3].

Σύμφωνα με τη μελέτη του J. W. Moon κανένας από τους κανένας από τους προκύπτοντες πίνακες δεν είναι ιδιάζων, ενώ όλοι τους είναι μη υποβιβάσιμοι. ■

Το παραπάνω θεώρημα επικεντρώνεται σε διανύσματα που δεν περιέχουν κανένα μηδενικό στοιχείο. Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει είναι αν για ακέραια διανύσματα μεγέθους n > 6 όπου ισχύει ότι τα στοιχεία τους είναι όλα κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερα της μονάδας με μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα, υπάρχει αντίστοιχος τετραγωνικός πίνακας πρωταθλήματος που να ομογενοποιείται από αυτά.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $k \geq 5$ κάποιος άρτιος ακέραιος, $n = k^2 + 1$ και $m = n/2$. Έστω A, B, C, D τετραγωνικοί πίνακες μεγέθους m που αποτελούνται αποκλειστικά από άσσους και μηδενικά. Πιο συγκεκριμένα, οι πίνακες A και C επιζητούμε να είναι ισορροπημένοι πίνακες πρωταθλήματος, ενώ για τον B θα ισχύει ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του θα είναι $(k-1)^2 / 4$, με $D = J – B^T$. Αν θέσουμε $T = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$ και $v = [-(((k-1) / 2)\, j_m, ((k+1) / 2)\, j_m]^T$, τότε $Tv = 0$, $|v_i| > 1$ και ΜΚΔ$(v_i) = 1$.

Βιβλιογραφία

1. Π. Ι. Ψαρράκος, Θέματα Ανάλυσης Πινάκων, Σημειώσεις μαθήματος, 2016.
2. B. R. Alspach and N. J. Pullman, Path decomposition of digraphs, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 10, pp 421-427, 1974.
3. A. Brauer and I. C. Gentry, On the characteristic roots of tournament matrices, Bull. Amer. Math.Soc., 74, pp.1133-1135, 1968.
4. A. Brauer and I. C. Gentry, Some remarks on tournament matrices, Linear Algebra and Appl. 5, pp 311-318, 1972.
5. R. A. Brualdi and Q. Li, Research Problem 31, Discrete Math. 43, pp 329-330, 1983.
6. D. de Caen, The rank of tournament matrices over arbitrary fields, Amer. Math. Mon., 1990.
7. D. de Caen, D. A. Gregory, S. J. Kirkland, J. S. Maybe and N. J. Pullman, Algebraic multiplicity of the eigenvalues of a tournament matrix, Linear Algebra and Appl. 169, pp 179-193, 1992. .
8. P. Erdos, Some unsolved problems in graph theory and combinatorial analysis, Proc. Conf. Math. Institute, pp 97-109, 1969
9. L. R. Ford, JR., Solution of a ranking problem from binary comparisons, Bull. Amer. Math. Monthly, 64, pp. 28-33, 1957.
10. F. Harary and A. J. Schwenk, Evolution of a path number of a graph: covering and packing in graphs, II, Academic Press, pp. 39-45, 1972.
11. R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
12. G.S. Katzenberger and B.L. Shader, Singular tournament matrices, Congress Numerantium 72, pp. 71-80, 1990.
13. M. G. Kendall, Further contributions to the theory of paired comparisons, Biometrics, II, pp. 43-62, 1955
14. S. J. Kirkland, Hypertournament matrices, score vectors and eigenvalues, Linear and Multilinear Algebra 30, pp. 261-274, 1991.
15. S. J. Kirkland, Spectral radii of tournament matrices whose graphs are related by arc reversal, Linear Algebra and Appl. 217, pp. 179-202, 1995.
16. S. J. Kirkland, On the minimum Perron value for an irreducible tournament matrix, Linear Algebra and Appl. 244, pp. 277-304, 1996.
17. S. J. Kirkland, Perron vector bounds for a tournament matrix with applications to a conjecture of Brualdi and Li, Linear Algebra and Appl. 262, pp. 209-227, 1997.
18. S. J. Kirkland and B. L. Shader, On multipartite tournament matrices with constant team size, Linear Algebra and Appl. 35, pp. 49-63, 1993.
19. S. J. Kirkland and B. L. Shader, Tournament matrices with extremal spectral properties, Linear Algebra and Appl. 196, pp. 1-17, 1994.
20. H. G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies, III: The condition for a score structure. Bull. Math. Biophys., 15, pp. 143-148, 1953.
21. L. Lovasz, On covering of graphs, Proc. Colloq., pp. 231-236, 1966.
22. J. S. Maybee and N. J. Pullman, Tournament matrices and their generalizations I, Linear and Multilinera Algebra 28, pp. 57-70, 1990.
23. J. W. Moon, Topics on Tournaments, Holt, Rinehart and Winston, 1968.
24. J. W. Moon, An extension of Landau's theorem on tournaments, Pacific J. Math., 13, pp. 1343-1345, 1963.
25. J. W. Moon and N. J. Pullman, On the powers of tournament matrices, J. Comb. Theor., 3, pp. 1-9, 1967.
26. J. W. Moon and N. J. Pullman, Tournaments and handicaps, Proc. IFIP Congress 68, North-Holland, Amsterdam, pp. 219-223, 1968.
27. J. W. Moon and N. J. Pullman, On generalized tournament matrices, SIAM Review 12, pp. 384-399,

1970.
28. A.Ostrowski and H. Schneider, Some theorems on the inertia of general matrices, Journal of Mathematical Analysis and Applications 2, pp. 72-84, 1962.
29. J.L.Poet and B.L. Shader, Short score certificates for upset tournaments, The Electronic Journal of Combinatorics 5, R24, 1998.
30. S. Ree and Y. Koh, A survey on tournament matrices (from the combinatorial matrix theoretic viewpoint), Trends in Mathematics, Information Center for Mathematical Sciences, Vol.1, Num. 1, pp. 31-36, 1998 .
31. B. L.Shader, On tournament matrices, Linear Algebra and Appl. 162-164, pp. 335-368, 1992.
32. J. Schmid, A remark on characteristic polynomials, American Mathematical Monthly 77, pp. 998-999, 1970.
33. R. G. Stanton, L. O. James and D. D. Cowan, Some results on path numbers, Louisiana State University, pp.112-135, 1970.
34. T. H. Wei, The algebraic foundations of ranking theory, Doctoral thesis, Cambridge University, Cambridge, 1952.
35. E. Zermelo, Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximal problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Z., 29, pp. 436-460, 1929.