

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

## Ανάλυση Ευαισθησίας Χαρακτηριστικών Υστεριτικής

## Συμπεριφοράς Νανοσύνθετου Υλικού



Διπλωματική Εργασία

Φιλιππίδης Φίλιππος

Επιβλέπων Καθηγητής: Παπαδόπουλος Βησσαρίων

Αθήνα, Μάρτιος 2022

# Ανάλυση Ευαισθησίας Χαρακτηριστικών Υστεριτικής Συμπεριφοράς Νανοσύνθετου Υλικού

Διπλωματική Εργασία

Φιλιππίδης Φίλιππος

Επιβλέπων Καθηγητής: Παπαδόπουλος Βησσαρίων

Αθήνα, Μάρτιος 2022

#### Copyright © Φίλιππος Φιλιππίδης, 2022 Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση σε αρχείο πληροφοριών, διανομή, αναπαραγωγή, μετάφραση ή μετάδοση της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό, υπό οποιαδήποτε μορφή και με οποιοδήποτε μέσο επικοινωνίας, ηλεκτρονικό ή μηχανικό, χωρίς την προηγούμενη έγγραφη άδεια του συγγραφέα. Επιτρέπεται η αναπαραγωγή, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από τη Σχολή Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202).

#### Copyright © Filippos Filippidis,2022 All Rights Reserved

Neither the whole nor any part of this diploma thesis may be copied, stored in a retrieval system, distributed, reproduced, translated, or transmitted for commercial purposes, in any form or by any means now or hereafter known, electronic or mechanical, without the written permission from the author. Reproducing, storing and distributing this thesis for non-profitable, educational or research purposes is allowed, without prejudice to reference to its source and to inclusion of the present text. Any queries in relation to the use of the present thesis for commercial purposes must be addressed to its author.

Approval of this diploma thesis by the School of Civil Engineering of the National Technical University of Athens (NTUA) does not constitute in any way an acceptance of the views of the author contained herein by the said academic organization (L. 5343/1932, art. 202).

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου κ. Βησσαρίωνα Παπαδόπουλο. Τόσο για την κατανόηση και τη διευκόλυνση στις όποιες δυσκολίες παρουσιάστηκαν κατά την ενασχόλησή μου με την εργασία, όσο και για το ενδιαφέρον που μου μετέδωσε για τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και τις εφαρμογές της μέσα από το σχετικό μάθημα του προγράμματος σπουδών. Ευχαριστώ επίσης για τη βοήθεια του τον υποψήφιο διδάκτορα Γιάννη Καλογερή. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα Στέφανο Πυριαλάκο για την πολύτιμη βοήθεια του σε πολλά στάδια της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, τους γονείς μου Μαρία και Σπύρο, και τον αδερφό μου Αχιλλέα για την έμπρακτη υποστήριξη τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.



#### ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

#### ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

#### ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΥΣΤΕΡΙΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΝΑΝΟΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

#### ΦΙΛΙΠΠΙΔΗΣ ΦΙΛΙΠΠΟΣ ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΒΗΣΣΑΡΙΩΝ

### ΠΕΡΙΛΙΨΗ

Τα τελευταία χρόνια η χρήση νανοσύνθετων υλικών κερδίζει όλο και περισσότερο έδαφος σε κατασκευές του αντικειμένου του πολιτικού μηχανικού και όχι μόνο. Η αιτία βρίσκεται στις ιδιαίτερα επιθυμητές ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν, όπως το χαμηλό βάρος η εξαιρετική ανθεκτικότητα και η υψηλή αντοχή. Ένα από τα πλέον ερευνητικώς ενδιαφέροντα υλικά για την ενίσχυση των νανοσύνθετων είναι οι νανοσωλήνες άνθρακα, λόγω των εξαιρετικών μηχανικών τους ιδιοτήτων. Εκτός όμως από τα πολλά πλεονεκτήματα, τα νανοσύνθετα υλικά χαρακτηρίζονται και από πληθώρα αβεβαιοτήτων άμεσα συνυφασμένων με την ανομοιογενή φύση τους. Η προσομοίωση των διακριτών φάσεων του υλικού, λαμβάνοντας υπόψη και τη μεταξύ τους αλληλεπίδραση είναι άμεσο ζητούμενο για τη μελέτη της συμπεριφοράς τους. Παράλληλα λοιπόν με την αύξηση της δημοφιλίας των νανοσύνθετων υλικών παρουσιάστηκε η ανάγκη για την ανάπτυξη των μαθηματικών μοντέλων που θα μπορούσαν να τα περιγράψουν, με παραδοχές που θα έδιναν λύση στα προβλήματα που συνεπάγονται οι ανομοιογένειές τους. Μια απάντηση σε αυτό το πρόβλημα ήρθε να δώσει η θεώρηση του αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου (representative volume element - RVE), μιας βασικής μονάδας όγκου στην οποία τάσεις και παραμορφώσεις μπορούν να θεωρηθούν σταθερές και η μεταξύ τους σχέση να περιγραφεί από έναν ομογενοποιημένο νόμο υλικού. Για να επιτευχθεί αυτό αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι ομογενοποίησης, όπου το υλικό αναλύεται σε επίπεδο μικροδομής με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Πεπερασμένα στοιχεία όμως χρησιμοποιήθηκαν τόσο για την προσομοίωση των διακριτών φάσεων του υλικού, όσο και για τη συμπεριφορά της μεταξύ τους διεπιφάνειας.

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή τέτοιας ανάλυσης παρουσιάζεται στην παρούσα διπλωματική εργασία, για τη μελέτη σε δυο διαστάσεις πολυμερούς ενισχυμένου με νανοσωλήνες άνθρακα. Για τη διεπιφάνεια μεταξύ των δύο φάσεων του υλικού χρησιμοποιήθηκε ένας διγραμμικός νόμος περιγραφής της σχετικής ολίσθησης. Αυτή η μη γραμμικότητα οδήγησε στην ανάγκη εφαρμογής μη γραμμικής ανάλυσης η οποία έγινε με χρήση της μεθόδου Newton-Raphson. Με τα παραπάνω εργαλεία και την επιβολή, μέσω παραμορφώσεων, φόρτισης εναλλασσόμενου προσήμου υπολογίστηκαν χαρακτηριστικά της υστεριτικής συμπεριφοράς του νανοσύνθετου υλικού σε επίπεδο αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου. Όμως τα χαρακτηριστικά αυτά εξαρτώνται άμεσα από δεδομένα του προσομοιώματος των οποίων η τιμές παρουσιάζουν αβεβαιότητες. Τέτοια δεδομένα τα στοιχεία του νόμου υλικού της διεπιφάνειας. Η διασπορά των χαρακτηριστικών υστεριτικής

συμπεριφοράς ως αποτέλεσμα της διασποράς των παραπάνω παραγόντων μελετήθηκε με εφαρμογή ανάλυσης ευαισθησίας. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία με στόχο τη συμβολή στη δημιουργία υποβάθρου για περαιτέρω μελέτη και συζήτηση, που ιδανικά στο μέλλον θα μπορούσαν να οδηγήσουν στην παραγωγή νανοσύνθετων υλικών βέλτιστης υστεριτικής συμπεριφοράς.



#### NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING INSTITUTE OF STRUCTURAL ANALYSIS AND ANTISEISMIC RESEARCH

#### DIPLOMA THESIS

#### SENSITIVITY ANALYSIS OF DAMPING BEHAVIOR CHARACTERISTICS OF NANOCOMPOSITE MATERIAL

#### ΦΙΛΙΠΠΙΔΗΣ ΦΙΛΙΠΠΟΣ ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΒΗΣΣΑΡΙΩΝ

## ABSTRACT

In recent years the use of nanocomposite materials is becoming more and more popular in constructions related to civil engineering as well as other engineering fields. Their light weight, excellent durability and high strength constitute some of the advantageous properties to be accounted for the increase in their usage. In research studies, one of the most interesting materials for reinforcing nanocomposites are the carbon nanotubes (CNTs), due to their excellent mechanical properties. However, despite the many advantages, nanocomposite materials are known for several uncertainties as a result of their heterogenous nature. The modelling of the material's discrete phases, considering their interaction is needed for examining their behaviour. Therefore, while nanocomposite materials' popularity is rising, the need for developing mathematical models that could describe them, with assumptions that would work around the challenges occurring from their heterogeneity, emerged. A solution to this problem was given through the hypothesis of a representative volume element (RVE), a basic volume unit in which stresses and strains could be considered as uniformly distributed and their relation could be described by a homogenized constitutive law. For this to be achieved, homogenization algorithms were developed, where the material is analysed in the level of its microstructure using the finite element method. Finite elements were used for modelling the material's discrete phases, as well as the behaviour of their interface.

An interesting application of such an analysis is introduced in the present work, for the twodimensional study of CNT-reinforced polymer. A bilinear bond-slip law was used for the interface between the material's phases. This nonlinearity resulted in the necessity of applying a nonlinear analysis method, such as the Newton-Raphson algorithm. With the above theoretical tools and the imposition, through strains, of a load of alternating direction, characteristics of the nanocomposite's hysteretic behaviour were calculated. However, those characteristics are directly dependent on parameters of the model, the values of which are linked with a number of uncertainties. Such parameters are the number of CNTs in the RVE, their orientation and the data of the constitutive law of the interface. The variance of the hysteretic behaviour characteristics as a result of the variance of the above parameters was investigated with sensitivity analysis. The results of this exploration are presented, aiming to contribute to the background knowledge for further study and discussion, that could ideally lead to the production of optimal hysteretic behaviour nanocomposite materials in the future.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1º: Πεπερασμένα στοιχεία	1
1.1 Γενικά για τα πεπερασμένα στοιχεία	1
1.2 Ορθογωνικά στοιχεία επίπεδης έντασης	3
1.3 Στοιχεία δοκού επίπεδου πλαισίου	5
1.4 Ισοπαραμετρικά στοιχεία δικτυώματος	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°: Σύνθετα και νανοσύνθετα υλικά	9
2.1 Γενικά για τα σύνθετα υλικά	9
2.2 Πολυμερή	9
2.3 Νανοσωλήνες άνθρακα	10
2.3.1 Γενικά για τους νανοσωλήνες άνθρακα	10
2.3.2 Δομή νανοσωλήνων άνθρακα	10
2.3.3 Μοντελοποίηση των νανοσωλήνων	11
2.4 Διεπιφάνεια πολυμερικής μήτρας – νανοσωλήνων άνθρακα	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°: Επίλυση εξισώσεων ισορροπίας στη μικροδομή του υλικού	17
3.1 Αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου	17
3.2 Συνοριακές συνθήκες στον αντιπροσωπευτικό όγκο	18
3.3 Ισορροπία στη μικροδομή εντός του αντιπροσωπευτικού όγκου	19
3.3.1 Μόρφωση του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας	19
3.3.2 Υπολογισμός των εσωτερικών δυνάμεων	20
3.3.3 Επίλυση του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων	21
3.3.4 Υπολογισμός των μακροσκοπικών τάσεων και νόμου υλικού στον αντιπροσα όγκο	<b>πευτικό</b> 25
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4°: Υστεριτική συμπεριφορά του αντιπροσωπευτικού όγκου	26
4.1 Φόρτιση εναλλασσόμενου προσήμου	26
4.2 Υπολογισμός χαρακτηριστικών υστεριτικής συμπεριφοράς	26
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5°: Ανάλυση ευαισθησίας	28
5.1 Μαθηματική διατύπωση της ανάλυσης ευαισθησίας	28
5.2 Εφαρμογή ανάλυσης ευαισθησίας για τα χαρακτηριστικά υστεριτικής συμπεριφα νανοσύνθετου υλικού	<b>οράς του</b> 30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6°: Αποτελέσματα και συζήτηση	32
6.1 Αποτελέσματα και συμπεράσματα	32
6.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	41
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	43
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Ανάπτυξη κώδικα σε Matlab	45

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°: Πεπερασμένα στοιχεία

## 1.1 Γενικά για τα πεπερασμένα στοιχεία

Η ανάλυση των φορέων με χρήση της στατικής δημιουργεί στο μηχανικό δυο προκλήσεις: τη μαθηματική προσομοίωση του φορέα και την ανάλυση του μαθηματικού προσομοιώματος. Η μαθηματική προσομοίωση ειδικά όταν αφορά τη μελέτη σύνθετων ή υποκείμενων σε αβεβαιότητες συστημάτων είναι αναγκαίο να βασιστεί σε ορισμένες παραδοχές, η ακρίβεια των οποίων επηρεάζει άμεσα την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της ανάλυσης. Σε αντιδιαστολή λοιπόν με την ακριβή μαθηματική περιγραφή φυσικών φαινομένων η οποία είναι εφικτή μόνο σε απλές περιπτώσεις, οι προσεγγιστικές μέθοδοι με τις παραδοχές τους έρχονται να δώσουν λύση σε σύνθετα προβλήματα όπως αυτά της σύγχρονης μηχανικής. Μια από τις πλέον διαδεδομένες και αποτελεσματικές προσεγγιστικές μεθόδους για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.

Πρόκειται για μια αριθμητική μέθοδο η οποία εφαρμόζεται με χρήση Η/Υ και πρωτοεμφανίζεται στις αρχικές της διατυπώσεις στις αρχές της δεκαετίας του 1940 σε εργασίες των Hrenikoff και Courant. Διατυπώνεται σαφώς πρώτη φορά το 1944 από τον John Argyris. Έκτοτε η ιστορία της ανάπτυξης της μεθόδου είναι στενά συνδεδεμένη με την ανάπτυξη του Η/Υ.

Η μέθοδος είναι μεν προσεγγιστική, αλλά μπορεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα και έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλά προβλήματα. Το μειονέκτημά της είναι οι αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, ιδίως όταν εφαρμόζεται σε σύνθετα μοντέλα. Αυτό το μειονέκτημα ξεπεράστηκε σε μεγάλο βαθμό τα τελευταία χρόνια χάρη στη ραγδαία ανάπτυξη των δυνατοτήτων του Η/Υ.

Η θεμελιώδης αρχή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων βασίζεται στην αντικατάσταση του γεωμετρικά σύνθετου πεδίου ενός προβλήματος με ένα σύνολο απλών υποπεδίων, τα πεπερασμένα στοιχεία. Το σύνολο των στοιχείων ονομάζεται δίκτυο ή πλέγμα και η προσομοίωση του φορέα με το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων ονομάζεται διακριτοποίηση του φορέα. Κάθε στοιχείο έχει έναν αριθμό κόμβων οι οποίοι καθορίζουν τους βαθμούς ελευθερίας κίνησης του στοιχείων. Ο συνολικοί βαθμοί ελευθερίας του φορέα είναι το σύνολο των βαθμών ελευθερίας των στοιχείων που τον απαρτίζουν. Βασικός στόχος της μεθόδου είναι η έκφραση του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας του φορέα, δηλαδή η μόρφωση του μητρώου στιβαρότητάς του, και η επίλυση του. Η μέθοδος προσφέρεται για την ανάλυση φορέων τόσο στο επίπεδο όσο και στο χώρο.

Στη συνέχεια αναπτύσσεται η διαδικασία που ακολουθείται για τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας στοιχείων που χρησιμοποιούνται για διδιάστατη ανάλυση, όπως αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για αυτή την εργασία.

Στο σχήμα 1.1 φαίνεται η απαραμόρφωτη και η παραμορφωμένη κατάσταση ενός στοιχειώδους ορθογωνίου επίπεδου σώματος, καθώς και οι μετατοπίσεις U(X, Y) και V(X, Y) συναρτήσει των συντεταγμένων.



Σχήμα 1.1 Παραμόρφωση στοιχειώδους ορθογωνίου dX-dY

Με την παραδοχή των μικρών παραμορφώσεων, η σχέση που συνδέει τις ανηγμένες παραμορφώσεις με τις επικόμβιες μετατοπίσεις γράφεται υπό μητρωική μορφη

$$\begin{cases} \varepsilon_{\rm X} \\ \varepsilon_{\rm Y} \\ \gamma_{\rm XY} \end{cases} = \begin{bmatrix} \partial/\partial {\rm X} & 0 \\ 0 & \partial/\partial {\rm Y} \\ \partial/\partial {\rm Y} & \partial/\partial {\rm X} \end{bmatrix} \begin{cases} {\rm U} \\ {\rm V} \end{cases} \Leftrightarrow \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \partial_{\varepsilon} \end{bmatrix} \{{\rm U}\} \quad (1.1)$$

όπου το διάνυσμα {U}={U V}<sup>™</sup> συμβολίζει το πεδίο των μετατοπίσεων σε κάποιο σημείο του φορέα. Στη συνέχεια μπορεί να γραφεί η σχέση ανάμεσα σε τάσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις, που για γραμμικώς ελαστικά υλικά δίνεται από το νόμο του Hooke.

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} E \end{bmatrix} \{\varepsilon\}$$
 (1.2)

Για την περίπτωση των ισότροπων υλικών το μητρώο [Ε] υπολογίζεται από το μέτρο ελαστικότητας Ε και το συντελεστή Poisson ν του υλικού

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$
(1.3)

Το μητρώο στιβαρότητας ενός στοιχείου μπορεί να διατυπωθεί μέσω της αρχής δυνατών έργων.

Βασική παραδοχή στην οποία στηρίζεται η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων και η οποία επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την αξιοπιστία της, είναι ο ορισμός ενός προσεγγιστικού πεδίου μετατοπίσεων στο εσωτερικό κάθε στοιχείου. Οι συνιστώσες του διανύσματος της μετατόπισης U, V στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων σε κάθε σημείο του στοιχείου με συντεταγμένες X, Y συνθέτουν το πεδίο των μετατοπίσεων το οποίο εκφράζεται συναρτήσει του διανύσματος επικόμβιων μετατοπίσεων {d} του στοιχείου.

$$\{U(X,Y)\} = \lfloor N(X,Y) \rfloor \{d\} \quad (1.4)$$

όπου [N] είναι το [2x2n] (n είναι ο αριθμός των κόμβων του στοιχείου) μητρώο συναρτήσεων σχήματος που εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται το πεδίο των μετατοπίσεων συναρτήσει των επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου. Το μητρώο [N] εξαρτάται από τον τύπο του στοιχείου και καθορίζει την ακρίβεια με την οποία υπολογίζεται το μητρώο στιβαρότητάς του. Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται το μητρώο [N] για τους τύπους των στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν.

Για ένα στοιχείο m, συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.1) και (1.4),το διάνυσμα ανηγμένων παραμορφώσεων συνδέεται με εκείνο των επικόμβιων μετατοπίσεων του φορέα μέσω της σχέσης:

$$\{\epsilon^{(m)}\} = \left[\partial_{\epsilon}\right] \left[N^{(m)}(X, Y)\right] \{d^{(m)}\} = \left[B^{(m)}(X, Y)\right] \left[t^{(m)}\right] \{D\}$$
(1.5)

όπου {D} το διάνυσμα των επικόμβιων μετατοπίσεων του φορέα και [t<sup>(m)</sup>] είναι ένα μητρώο που συνδέει τους τοπικούς με τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας των κόμβων του στοιχείου. Το μητρώο [B(m)(X, Y)] είναι το μητρώο παραμόρφωσης του στοιχείου και συνδέει το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων με εκείνο των επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου.

Εφαρμόζοντας την αρχή των δυνατών έργων για την περίπτωση επικόμβιας φόρτισης του φορέα, προκύπτει η γενική έκφραση του μητρώου στιβαρότητας οποιουδήποτε πεπερασμένου στοιχείου m από το ολοκλήρωμα στον όγκο του στοιχείου:

$$[k^{(m)}] = \int_{V_{e}} [B^{(m)}]^{T} [E] [B^{(m)}] dV_{e}$$
 (1.6)

Στις ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζονται οι δύο βασικοί τύποι στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν στο προσομοίωμα, τα ορθογωνικά στοιχεία επίπεδης έντασης και τα στοιχεία δοκού επίπεδου πλαισίου, καθώς και τα μητρώα στιβαρότητάς τους.

Η ανάγκη προσομοίωσης φορέων περίπλοκης γεωμετρίας με στοιχεία μη ορθογωνικά και των οποίων τα σύνορα δεν είναι απαραιτήτως ευθύγραμμα οδήγησε στην επινόηση των ισοπαραμετρικών στοιχείων από τους Taig και Irons. Βασική αρχή της ισοπαραμετρικής θεώρησης είναι η απεικόνιση των στοιχείων από το καρτεσιανό σύστημα σε ένα νέο που ονομάζεται φυσικό. Ο όρος ισοπαραμετρικός οφείλεται στο γεγονός ότι οι συνιστώσες της μετατόπισης και οι καρτεσιανές συντεταγμένες εκφράζονται ως προς τις αντίστοιχες επικόμβιες ποσότητες με τις ίδιες συναρτήσεις σχήματος. Ο υπολογισμός του μητρώου στιβαρότητας γίνεται με αριθμητικό υπολογισμό με χρήση και το μητρώου που εκφράζει την ιακωβιανή της απεικόνισης, [J]. Για το προσομοίωμα χρησιμοποιήθηκαν τα ισοπαραμετρικά στιοχεία δικτυώματος τα οποία και αναλύονται σε επόμενη ενότητα.

### 1.2 Ορθογωνικά στοιχεία επίπεδης έντασης

Ο πρώτος από τους δύο βασικούς τύπους πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα ορθογωνικά στοιχεία επίπεδης έντασης τεσσάρων κόμβων. Ορίζεται τοπικό σύστημα συντεταγμένων χγ με άξονες παράλληλους στις πλευρές του στοιχείου και αρχή αυτών το σημείο τομής των διχοτόμων του ορθογωνίου. Σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν δύο μεταφορικοί βαθμοί ελευθερίας, υ κατά x και υ κατά y. Στο σχήμα 1.2 φαίνεται ένα ορθογωνικό στοιχείο επίπεδης έντασης με την αρίθμηση των κόμβων και των βαθμών ελευθερίας του.



Σχήμα 1.2 Ορθογωνικό στοιχείο επίπεδης έντασης

Εφόσον σε κάθε πλευρά υπάρχουν δύο βαθμοί ελευθερίας ανά διεύθυνση το πεδίο των μετατοπίσεων εκφράζεται από πολυώνυμα πρώτου βαθμού. Για τυχόν σημείο του στοιχείου με συντεταγμένες (x,y) οι μετατοπίσεις του στους δύο άξονες ορίζονται από τις σχέσεις:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x y$$
  

$$v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 x y \qquad (1.7)$$

Για τον υπολογισμό των γενικευμένων συντεταγμένων εφαρμόζονται οι σχέσεις (1.7) διαδοχικά για καθέναν από τους κόμβους και με αντικατάσταση των αποτελεσμάτων προκύπτουν οι τέσσερις συναρτήσεις σχήματος

$$N_{1} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \left( 1 - \frac{y}{b} \right)$$

$$N_{2} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{x}{a} \right) \left( 1 - \frac{y}{b} \right)$$

$$N_{3} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{x}{a} \right) \left( 1 + \frac{y}{b} \right)$$

$$N_{4} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \left( 1 + \frac{y}{b} \right)$$
(1.8)

Οι ανηγμένες του ορθογωνικού στοιχείου παραμορφώσεις είναι {ε} =  $\begin{bmatrix} ε_x ε_y γ_{xy} \end{bmatrix}^T$  όπου:

$$\varepsilon_{x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \varepsilon_{y} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
 (1.9)

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.8) και (1.9) προκύπτουν οι σχέσεις (1.10) οι οποίες εκφρασμένες σε μητρωική μορφή δίνουν το μητρώο [B] με το οποίο μπορεί να υπολογιστεί το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου από τη σχέση της μορφής (1.6).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = N_{1,x}u_1 + N_{2,x}u_2 + N_{3,x}u_3 + N_{4,x}u_4$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = N_{1,y}v_1 + N_{2,y}v_2 + N_{3,y}v_3 + N_{4,y}v_4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = N_{1,y}u_1 + N_{1,x}v_1 + N_{2,y}u_2 + N_{2,x}v_2 + N_{3,y}u_3 + N_{3,x}v_3 + N_{4,y}u_4 + N_{4,x}v_4$$
(1.10)

Εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά μήκος των δύο κάθετων πλευρών του ορθογωνίου και θεωρώντας το πάχος t του στοιχείου σταθερό προκύπτει το μητρώο στιβαρότητας ορθογωνικού στοιχείου επίπεδης έντασης τεσσάρων κόμβων.

$$[k] = \frac{Et}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 4r^{-1}+4\rho r & & & \\ \mu & 4r+4\rho r^{-1} & & \\ -4r^{-1}+2\rho r & \lambda & 4r^{-1}+4\rho r & & \\ -\lambda & 2r-4\rho r^{-1} & -\mu & 4r+4\rho r^{-1} \\ -2r^{-1}-2\rho r & -\mu & 2r^{-1}-4\rho r & \lambda & \\ -\mu & -2r-2\rho r^{-1} & -\lambda & -4r+2\rho r^{-1} \\ 2r^{-1}-4\rho r & -\lambda & -2r^{-1}-2\rho r & \mu \\ \lambda & -4r+2\rho r^{-1} & \mu & -2r-2\rho r^{-1} \end{bmatrix} \cdots$$

$$\cdots \begin{bmatrix} 4r^{-1}+4\rho r & & \\ \mu & 4r+4\rho r^{-1} & \\ -4r^{-1}+2\rho r & \lambda & 4r^{-1}+4\rho r \\ -\lambda & 4r+4\rho r^{-1} & -\mu & 4r+4\rho r^{-1} \end{bmatrix}$$
(1.11)
$$r = \frac{a}{b}, \ \rho = \frac{(1-\nu)}{2}, \ \mu = \frac{3(1+\nu)}{2}, \ \kappa \alpha t \ \lambda = \frac{3(1-3\nu)}{2}$$

## 1.3 Στοιχεία δοκού επίπεδου πλαισίου

όπου

Ο δεύτερος βασικός τύπος στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα στοιχεία δοκού επίπεδου πλαισίου. Όπως και τα ορθογωνικά στοιχεία επίπεδης έντασης, τα στοιχεία δοκού επίπεδου πλαισίου αναλαμβάνουν φορτίσεις και παραμορφώνονται σε δύο διαστάσεις. Ορίζεται το τοπικό σύστημα συντεταγμένων xy με τον άξονα x να ταυτίζεται με τον άξονα της δοκού, τον άξονα y κάθετο σε αυτόν και αρχή τον κόμβο αρχής του στοιχείου. Χρησιμοποιήθηκαν δύο κόμβοι ανά στοιχείο και σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν τρεις βαθμοί ελευθερίας, ο μεταφορικός u κατά τη διεύθυνση x, ο μεταφορικός υ κατά τη διεύθυνση y, και ο στροφικός θ για στροφή εντός του επιπέδου που ορίζεται από το σύστημα συντεταγμένων xy. Στο σχήμα 1.3 φαίνεται ένα στοιχείο δοκού με τους βαθμούς ελευθερίας του στην απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη κατάσταση.



Σχήμα 1.3 Απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη κατάσταση στοιχείου δοκού επίπεδου πλαισίου

Για τον ορισμό του πεδίου των μετατοπίσεων υ,υ χρησιμοποιείται πολυώνυμο πρώτου βαθμού για τις αξονικές μετακινήσεις και τρίτου βαθμού για τις εγκάρσιες.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

$$v = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3$$
(1.12)

Με αντικατάσταση των συντεταγμένων των κόμβων στις σχέσεις (1.12) προκύπτουν οι γενικευμένες συντεταγμένες α<sub>i</sub> και τελικά οι συναρτήσεις σχήματος

$$N_{1} = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_{2} = \frac{x}{L}$$

$$N_{3} = 1 - \frac{3x^{2}}{L^{2}} + \frac{2x^{3}}{L^{3}}$$

$$N_{4} = x - \frac{2x^{2}}{L} + \frac{2x^{3}}{L^{2}}$$

$$N_{5} = \frac{3x^{2}}{L^{2}} - \frac{2x^{3}}{L^{3}}$$

$$N_{4} = \frac{x^{2}}{L} + \frac{x^{3}}{L^{2}}$$
(1.13)

Όπου N<sub>1</sub> και N<sub>2</sub> είναι οι συναρτήσεις σχήματος της αξονικής παραμόρφωσης και N<sub>3</sub>, N<sub>4</sub>, N<sub>5</sub> και N<sub>6</sub> της καμπτικής παραμόρφωσης. Δηλαδή:

$$u = N_{1}u_{1} + N_{2}u_{2}$$

$$v = N_{3}v_{1} + N_{4}\theta_{1} + N_{5}v_{2} + N_{6}\theta_{2}$$
(1.14)

Κάνοντας χρήση της παραδοχής Bernoulli και άρα θεωρώντας μηδενισμό των διατμητικών παραμορφώσεων η ανηγμένη παραμόρφωση της δοκού δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{x} = \frac{du}{dx} - y \frac{d^{2}v}{dx^{2}}$$
 (1.15)

Το απαραίτητο για τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας μητρώο παραμορφώσεως [B] είναι η έκφραση σε μητρωική μορφή των σχέσεων που συνδέουν την ανηγμένη παραμόρφωση με τις επικόμβιες μετατοπίσεις του στοιχείου. Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν με συνδυασμό των σχέσεων (1.14) και (1.15).

$$\frac{du}{dx} = N_{1,x}u_1 + N_{2,x}u_2$$
(1.16)  

$$\frac{d^2v}{dx^2} = N_{3,xx}v_1 + N_{4,xx}\theta_1 + N_{5,xx}v_2 + N_{6,xx}\theta_2$$

Έτσι προκύπτει το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου δοκού επίπεδου πλαισίου από τη σχέση της μορφής (1.6). Με παραδοχή πρισματικής και ομογενούς ράβδου η ολοκλήρωση δίνει:

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & & & \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \sigma \nu \mu \mu \epsilon \tau \rho \kappa \delta \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & & \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$
(1.17)

## 1.4 Ισοπαραμετρικά στοιχεία δικτυώματος

Η ισοπαραμετρική θεώρηση θα χρησιμοποιηθεί για την αξονική παραμόρφωση στοιχείου δοκού, η οποία μπορεί να μελετηθεί θεωρώντας ένα στοιχείο δικτυώματος επιπέδου πλαισίου δύο κόμβων με ίδιο μήκος και προσανατολισμό. Το στοιχείο αυτό έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, την αξονική μετατόπιση κάθε κόμβου. Στο σχήμα 1.3 φαίνεται ένα τέτοιο στοιχείο στο καρτεσιανό και στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων.



Σχήμα 1.4 Ισοπαραμετρικό στοιχείο δικτυώματος δύο κόμβων στα δύο συστήματα συντεταγμένων

Η απεικόνιση με όρια -1  $\leq$  ξ  $\leq$  1 για το φυσικό σύστημα συντεταγμένων και x<sub>1</sub>  $\leq$  x  $\leq$  x<sub>2</sub> ορίζεται από μια γραμμική σχέση της μορφής:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 \xi$$
 (1.18)

Ακολουθώντας τη διαδικασία που εφαρμόστηκε στην προηγούμενη ενότητα για τον υπολογισμό των συναρτήσεων σχήματος προκύπτουν:

$$N_{1} = \frac{1}{2}(1-\xi)$$
(1.19)
$$N_{2} = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

Στην περίπτωση όπου για τον υπολογισμό κάποιου μητρώου στιβαρότητας χρειαστεί να γίνει ολοκλήρωση κατά μήκος ενός τέτοιου στοιχείου, αυτή δε θα γίνει αναλυτικά, αλλά με αριθμητικές μεθόδους. Έτσι, αγνοώντας το μητρώο σφάλματος, ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης παίρνει τη μορφή:

$$\int F[\xi] d\xi \approx \sum_{i} \alpha_{i} [F(\xi_{i})]$$
 (1.20)

Ιδιαίτερα δημοφιλής αριθμητική μέθοδος ολοκλήρωσης σε αυτές τις περιπτώσεις είναι η ολοκλήρωση Gauss. Η μέθοδος βασίζεται στη βελτιστοποίηση της θέσης των σημείων ξ<sub>i</sub> με σκοπό τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια με την οποία υπολογίζεται το ολοκλήρωμα για συγκεκριμένο αριθμό σημείων. Για την περίπτωση αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss σε δύο σημεία στο διάστημα (-1, 1), η οποία και θα εφαρμοστεί, οι συντεταγμένες των σημείων είναι ξ<sub>i</sub>=±0.57735 και οι συντελεστές βάρους α<sub>i</sub> τίθενται ίσοι με τη μονάδα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°: Σύνθετα και νανοσύνθετα υλικά

## 2.1 Γενικά για τα σύνθετα υλικά

Ως σύνθετα ορίζονται τα υλικά που προκύπτουν από το συνδυασμό δύο ή περισσότερων υλικών υπό διακριτή μορφή και με σκοπό την επίτευξη βελτιωμένων ιδιοτήτων στο νέο υλικό. Τα βασικά υλικά που συνεργάζονται για τη δημιουργία ενός σύνθετου υλικού διακρίνονται σε ισχυρά (οπλισμός ή ενίσχυση – reinforcement) και τα ασθενή (μητρώο ή μήτρα – matrix). Ο οπλισμός χρησιμοποιείται προκειμένου να προσδώσει στο νέο υλικό τις επιθυμητές βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες, ενώ το μήτρα ως συνδετικό υλικό παίζει το ρόλο της προστασίας, συνέχειας και σύνδεσης του οπλισμού.



Σχήμα 2.1 Συστατικά μέρη σύνθετου υλικού

Ένας βασικός διαχωρισμός των σύνθετων υλικών μπορεί να γίνει με βάση τη μορφή του οπλισμού ο οποίος συνήθως αποτελείται είτε από ίνες (ινοπλισμένα σύνθετα υλικά) είτε από σωματίδια ή κοντές ίνες. Στα οπλισμένα με ίνες υλικά αυτές μπορούν να διατάσσονται τόσο με τυχαίο όσο και με ενιαίο προσανατολισμό. Ένας δεύτερος τρόπος διαχωρισμού είναι με βάση το υλικό της μήτρας. Έτσι διακρίνονται τα σύνθετα υλικά μεταλλικής, κεραμικής και πολυμερικής μήτρας.

Ειδικότερη υποκατηγορία των σύνθετων υλικών πολυμερικής μήτρας είναι τα νανοσύνθετα πολυμερή. Χαρακτηριστικό των υλικών αυτών είναι ότι τουλάχιστον μια από τις διαστάσεις των σωματιδίων που ενισχύουν την πολυμερική μήτρα ανήκει στη νανοσκοπική κλίμακα.

## 2.2 Πολυμερή

Το χαμηλό βάρος, η εξαιρετική ανθεκτικότητα σε χημικές ουσίες και διάβρωση, η μικρή θερμική αγωγιμότητα και υδαταπορροφητικότητα και η ευκολία στην απόδοση οποιουδήποτε σχήματος είναι μερικά από τα χαρακτηριστικά χάρη στα οποία τα πολυμερή βρίσκουν σημαντικές εφαρμογές στις σύγχρονες κατασκευές.

Τα τεχνητά πολυμερή παρασκευάζονται με βάση το πετρέλαιο συνδυάζοντας ένα μεγάλο αριθμό μικρών μοριακών μονάδων, τα μονομερή, μέσω χημικής διαδικασίας η οποία μπορεί να είναι πολυμερισμός, πολυσυμπύκνωση ή πολυπροσθήκη, σχηματίζοντας μακριές αλυσίδες, τα μακρομόρια.

Βάσει της μηχανικής και θερμικής τους συμπεριφοράς τα πολυμερή κατατάσσονται σε τρείς βασικούς τύπους: τα θερμοπλαστικά, τα θερμοσκληρυνόμενα και τα ελαστομερή.

Τα θερμοπλαστικά από πολυμερισμένες αλυσίδες μακρομορίων οι οποίες είναι χαλαρά συνδεδεμένες μεταξύ τους με ασθενείς δεσμούς van der Waals, με αποτέλεσμα η μεταξύ τους ολίσθηση να γίνεται εύκολα. Όταν το υλικό θερμαίνεται, οι ενδομοριακές δυνάμεις εξασθενούν και το πολυμερές μαλακώνει, ενώ σε υψηλές θερμοκρασίες τήκεται και συμπεριφέρεται ως ιξώδες ρευστό. Με επαναφορά της θερμοκρασίας σε χαμηλά επίπεδα το υλικό επανασκληρύνεται. Η δομή των θερμοπλαστικών μπορεί να είναι άμορφη ή ημικρυσταλλική.

Τα θερμοσκληρυνόμενα πολυμερή, όπως είναι οι εποξειδικές, οι πολυεστερικές και οι φαινολικές ρητίνες, σχηματίζονται σε δύο βήματα. Αρχικά παράγεται μια ουσία, η ρητίνη, αποτελούμενη από αλυσίδες μακρομορίων, παρόμοια με τα θερμοπλαστικά, και στη συνέχεια οι αλυσίδες αυτές συνδέονται διασταυρούμενες μεταξύ τους. Η σύνδεση γίνεται με τη βοήθεια καταλύτη, σε θερμοκρασία δωματίου ή υψηλότερη, και σε κάποιες περιπτώσεις με εφαρμογή πίεσης. Αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί ρήξη των δεσμών των αλυσίδων με αποτέλεσμα το υλικό να μαλακώνει, αλλά οι δεσμοί στις διακλαδώσεις των αλυσίδων παρεμποδίζουν την τήξη ή την ιξώδη ροή. Ακόμα μεγαλύτερη θέρμανση οδηγεί σε αποσύνθεση.

Τέλος, τα ελαστομερή αποτελούνται από πολυμερισμένες μακρομοριακές αλυσίδες που μοιάζουν κάπως διπλωμένες σαν ελατήρια με αποτέλεσμα αυτά τα υλικά να διακρίνονται για την ικανότητά τους να αναπτύσσουν μεγάλες παραμορφώσεις. Η μεταξύ των αλυσίδων σύνδεση γίνεται σποραδικά σε λιγοστά σημεία διασταύρωσης, τα οποία και εξασφαλίζουν την ανάκτηση του αρχικού σχήματος των ελαστομερών όταν παρέλθει η αιτία της παραμόρφωσης.

Οι φυσικές και οι μηχανικές ιδιότητες των πολυμερών ποικίλουν σημαντικά ανάλογα μ ετον τύπο τους. Στα κοινά φυσικά τους χαρακτηριστικά περιλαμβάνεται το πρακτικά μηδενικό πορώδες, η σημαντική συστολή κατά τη σκλήρυνση στη φάση κατασκευής τους και η μεγάλη ικανότητα ηλεκτρικής μόνωσης.

Για το προς ανάλυση μοντέλο θεωρήθηκε ως μητρικό υλικό του σύνθετου θερμοσκληρυνόμενο πολυμερές που θα μπορούσε να είναι εποξειδική ρητίνη ή πολυεστέρας. Μια καλή χαρακτηριστική τιμή μέτρου ελαστικότητας τέτοιων υλικών είναι E=4 Gpa, η οποία και χρησιμοποιήθηκε. Ο συντελεστής Poisson τέθηκε ν=0.4. Το υλικό αυτό της πολυμερικής μήτρας προσομοιώθηκε με πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης για τη διδιάστατη ανάλυση που έγινε.

## 2.3 Νανοσωλήνες άνθρακα

#### 2.3.1 Γενικά για τους νανοσωλήνες άνθρακα

Ιδιαίτερα δημοφιλές υλικό οπλισμού νανοσύνθετων πολυμερών είναι οι νανοσωλήνες άνθρακα. Ο λόγος είναι οι εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες που παρουσιάζουν σε ό,τι αφορά τη στιβαρότητα και την αντοχή τους σε εφελκυσμό. Συγκεκριμένα έχει υπολογιστεί από πειραματικές μετρήσεις μέτρο ελαστικότητάς τους της τάξης του 1 ΤΡa, ενώ η εφελκυστική τους αντοχή περί τα 150 GPa.

Οι νανοσωλήνες άνθρακα (carbon nanotubes – CNTs) είναι ομόκεντροι κύλινδροι γραφενίου, κλειστοί σε κάθε άκρο με πενταμελείς δακτυλίους και ανακαλυφθήκαν το 1991 από τον Sumio lijima. Οι νανοσωλήνες μπορεί να είναι πολυτοιχωματικοί με ένα κεντρικό σωλήνα να περιβάλλεται από ένα ή περισσότερα στρώματα γραφενίου ή μονοτοιχωματικοί όπου υπάρχει μόνο ένας σωλήνας και καθόλου επιπλέον στρώματα γραφενίου. Όταν νανοσωλήνες ομαδοποιούνται δημιουργούν συστοιχίες νανοσωλήνων.

#### 2.3.2 Δομή νανοσωλήνων άνθρακα

Ένας ιδανικός (απείρου μήκους) μονοτοιχωματικός νανοσωλήνας άνθρακα έχει τη δομή ενός πλέγματος από κανονικά εξάγωνα που εμφανίζονται σε μια άπειρη κυλινδρική επιφάνεια και οι κορυφές τους είναι οι θέσεις των ατόμων του άνθρακα. Επειδή το μήκος των δεσμών C-C είναι κατά

κύριο λόγο σταθερό, υπάρχουν περιορισμοί στη διάμετρο του κυλίνδρου και την διάταξη των ατόμων σε αυτόν.

Στη μελέτη των νανοσωλήνων διακρίνονται δύο χαρακτηριστικές διατάξεις με τις οποίες μπορεί να εμφανίζονται τα άτομα του άνθρακα. Η διάταξη zigzag προκύπτει από μια διαδρομή του πλέγματος γραφίτη με διαδοχικές στροφές γωνίας 60 μοιρών με εναλλασσόμενη διεύθυνση μετά από κάθε άτομο. Η διάταξη armchair προκύπτει αντίστοιχα από μια διαδρομή που ανά τέσσερα βήματα αποτελείται από δύο διαδοχικές αριστερές στροφές ακολουθούμενες από δυο δεξιές στροφές 60 μοιρών. Όταν γύρω από ένα νανοσωλήνα υπάρχει μια κλειστή διαδρομή zigzag, αυτός χαρακτηρίζεται ως νανοσωλήνας τύπου zigzag. Αντίστοιχα αν γύρω από τον νανοσωλήνα υπάρχει μια κλειστή διαδρομή armchair, αυτός χαρακτηρίζεται ως τύπου armchair. Η zigzag και η armchair δεν είναι οι μοναδικές δομές που μπορεί να έχει ένας μονοτοιχωματικός νανοσωλήνας. Στη γενική περίπτωση ένας νανοσωλήνας σχηματίζεται "τυλίγοντας" ένα υποθετικό φύλλο γραφενίου ώστε να συμπέσουν τα άτομα του άνθρακα που βρίσκονται στα άκρα ενός χαρακτηριστικού διανύσματος **C**<sub>h</sub>. Το διάνυσμα **C**<sub>h</sub> είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων **α**<sub>1</sub> και **α**<sub>2</sub> τα οποία είναι τα μοναδιαία διανύσματα του γραφίτη (**C**<sub>h</sub> = n**a**<sub>1</sub> + m**a**<sub>2</sub>). Ο νανοσωλήνας είναι τύπου chiral όταν n ≠ m ≠ 0. Διαφορετικά είναι τύπου zigzag όταν m = 0 και τύπου armchair όταν n = m.



Σχήμα 2.1: Διάταξη των ατόμων νανοσωλήνα άνθρακα

#### 2.3.3 Μοντελοποίηση των νανοσωλήνων

Ο νανοσωλήνας περιγράφηκε παραπάνω σε ατομικό επίπεδο ως ένα χωροδικτύωμα αποτελούμενο από τα άτομα άνθρακα και τους μεταξύ τους ομοιπολικούς δεσμούς. Για την απλοποίηση και μείωση του υπολογιστικού κόστους το μοντέλο του χωροδικτυώματος αντικαθίσταται για τη διδιάστατη ανάλυση από ένα ισοδύναμο ως προς τις μηχανικές ιδιότητες στοιχείο δοκού (Equivalent Beam Element – EBE) επιπέδου πλαισίου. Ο υπολογισμός των μηχανικών ιδιοτήτων του στοιχείου δοκού στις δύο διαστάσεις γίνεται με τη θεώρηση ενός προβόλου μήκους  $L_0$  και την υποβολή του σε αξονική ( $F_x$ ) και διατμητική ( $F_y$ ) φόρτιση όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Φορτίσεις του μοντέλου του CNT για των υπολογισμό των μηχανικών του ιδιοτήτων

Αφού μετρηθεί η οριζόντια και η κατακόρυφη μετατόπιση (u<sub>x</sub>, u<sub>y</sub>) καθώς και η γωνία στροφής (φ) που αντιστοιχούν στη παραπάνω φορτίσεις υπολογίζονται η δυστένεια και η δυσκαμψία (EA<sub>eq</sub>, El<sub>eq</sub>) του ισοδύναμου στοιχείου δοκού από τις σχέσεις:

(EA) 
$$_{cq} = \frac{F_{x}L_{0}}{u_{x}}$$
, (EI)  $_{cq} = \frac{F_{y}L_{0}^{3}}{3u_{x}}$  (2.1)

Μετά τον υπολογισμό των παραπάνω δεικτών στιβαρότητας μπορεί να μορφωθεί το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου δοκού επιπέδου πλαισίου στο τοπικό του σύστημα συντεταγμένων από τη σχέση (1.17). Για την παρούσα προσομοίωση χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία δοκού επίπεδου πλαισίου μήκους L=80 nm. Οι τιμές των δεικτών της σχέσης (2.1) τέθηκαν (EA)<sub>eq</sub>=694.77 GPanm<sup>2</sup> και (EI)<sub>eq</sub>=100.18 GPanm<sup>4</sup> και το πάχος του νανοσωλήνα t<sub>CNT</sub>=0.34 nm. Με βάση αυτές τις τιμές υπολογίζεται η μέση διάμετρος (από μέσο σε μέσο του πάχους του νανοσωλήνα) d<sub>eq</sub>=1.0188 nm από τη σχέση:

$$d_{cq} = \sqrt{8 \frac{(EI)_{cq}}{(EA)_{cq}} - t^2}$$
 (2.2)

### 2.4 Διεπιφάνεια πολυμερικής μήτρας – νανοσωλήνων άνθρακα

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε ότι αφορά τις μηχανικές της ιδιότητες παρουσιάζει η διεπιφάνεια μεταξύ πολυμερικής μήτρας και νανοσωλήνων άνθρακα.

Στην περίπτωση της διδιάστατης ανάλυσης οι τάσεις και οι παραμορφώσεις της συνεκτικής ζώνης μεταξύ των δύο υλικών εκφράζονται με τα διανύσματα:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{\text{slip}} \ \sigma_{\text{normal}}\}^{\text{T}}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{\text{slip}} \ \varepsilon_{\text{normal}}\}^{\text{T}}$$
(2.3)

όπου σ<sub>slip</sub> και ε<sub>slip</sub> η τάση και η παραμόρφωση στη διεύθυνση της ολίσθησης του νανοσωλήνα άνθρακα εντός της μήτρας πολυμερούς (παράλληλη με την αξονική διεύθυνση του νανοσωλήνα) και σ<sub>normal</sub> και ε<sub>normal</sub> οι αντίστοιχες στην κάθετη σε αυτή διεύθυνση. Σημειώνεται ότι ως παραμορφώσεις αναφέρονται οι σχετικές μετατοπίσεις του νανοσωλήνα ως προς το πολυμερές που τον περιβάλλει εκφρασμένες σε μονάδες μήκους και όχι οι αδιάστατες ανηγμένες παραμορφώσεις. Ο νόμος του υλικού για τη σύνδεση των παραπάνω τάσεων και παραμορφώσεων γράφεται:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} D_{tan} \end{bmatrix} \{\varepsilon\} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{slip} \\ \sigma_{normal} \end{cases} = \begin{bmatrix} D_{slip} & 0 \\ 0 & D_{normal} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{slip} \\ \varepsilon_{normal} \end{cases}$$
(2.4)  
$$\dot{o}\pi o \upsilon \qquad \begin{bmatrix} D_{tan} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{slip} & 0 \\ 0 & D_{normal} \end{bmatrix}$$
(2.5)

Επομένως ο νόμος υλικού της διεπιφάνειας εκφράζεται μέσω του μητρώου [D<sub>tan</sub>] της σχέσης (2.5). Ο δείκτης D<sub>normal</sub> εκφράζει την αντίσταση της συνεκτικής ζώνης στη διεύθυνση κάθετα στον άξονα του νανοσωλήνα. Η αντίσταση αυτή θεωρείται γραμμική και με τιμή αρκετά μεγαλύτερη της D<sub>slip</sub>. Για την παρούσα προσομοίωση τέθηκε D<sub>normal</sub>=150 GPa/nm. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τη συμπεριφορά της διεπιφάνειας και κατ' επέκταση του σύνθετου υλικού παρουσιάζει ο δείκτης D<sub>slip</sub>. Για αυτόν θεωρήθηκε διγραμμικός νόμος με αλλαγή της τιμής του D<sub>slip</sub> όταν συντελείται η ολίσθηση του νανοσωλήνα εντός του μητρικού υλικού. Τόσο για την αρχική όσο και για την κατόπιν ολίσθησης τιμή του D<sub>slip</sub> χρησιμοποιήθηκαν πολλές διαφορετικές τιμές στην ανάλυση που γίνεται στη συνέχεια. Ενδεικτικά οι μέσες τιμές που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

$$D_{slip} = \begin{cases} 10 \text{ GPa/nm} & \gamma \iota \alpha & \varepsilon_{slip} \leq \varepsilon_{y} \\ 0.5 \text{ GPa/nm} & \gamma \iota \alpha & \varepsilon_{slip} > \varepsilon_{y} \end{cases}$$

Η τάση για την οποία ξεκινά η ολίσθηση του νανοσωλήνα εντός της πολυμερικής μήτρας θα αναφέρεται ως διαφασική οριακή διατμιτική τάση ολίσθησης (Interfacial shear stress – ISS).



Για την μοντελοποίηση αυτής της συμπεριφοράς χρησιμοποιήθηκε για κάθε νανοσωλήνα ένα επιπλέον στοιχείο δοκού επίπεδου πλαισίου δύο κόμβων. Πρόκειται για στοιχεία με πλασματικούς βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι δεν συμμετέχουν ως ξεχωριστές γραμμές και στήλες στο συνολικό μητρώο στιβαρότητας του συστήματος. Επηρεάζουν παρ' όλα αυτά τους δείκτες στιβαρότητας στις θέσεις που αφορούν: (α) τους βαθμούς ελευθερίας των στοιχείων δοκού που προσομοιώνουν τους νανοσωλήνες, (β) τους βαθμούς ελευθερίας που περικλείουν τους κόμβους των στοιχείων των νανοσωλήνων και (γ) την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο παραπάνω βαθμών ελευθερίας.

Για παράδειγμα στην περίπτωση του του απλούστερου συστήματος που αποτελείται από ένα στοιχείο επίπεδης έντασης (μηδενική διακριτοποίηση της πολυμερικής μήτρας) και ένα στοιχείο δοκού (οπλισμός με ένα νανοσωλήνα άνθρακα), θεωρείται ένα επιπλέον στοιχείο δοκού με τους κόμβους του να ταυτίζονται με αυτούς του ήδη υπάρχοντος προκειμένου να προσημειωθεί η συνεκτική ζώνη στη διεπιφάνεια των δύο υλικών, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4 Στοιχείο επίπεδης έντασης, στοιχείο δοκού και στοιχείο δοκού με πλασματικούς βαθμούς ελευθερίας

Οι μετατοπίσεις γράφονται σε διανυσματική μορφή, για την πολυμερική μήτρα:

$$\{\mathbf{u}\} = \left\{\mathbf{u}_1 \,\mathbf{u}_2 \,\mathbf{u}_3 \,\mathbf{u}_4 \,\mathbf{u}_5 \,\mathbf{u}_6 \,\mathbf{u}_7 \,\mathbf{u}_8\right\}^{\mathrm{T}} \quad (2.6)$$

για το νανοσωλήνα άνθρακα:

$$\{v\} = \{v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6\}^T$$
 (2.7)

και συνολικά για τους δεκατέσσερις βαθμούς ελευθερίας του συστήματος:

$$\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{u} \ \mathbf{v}\}^{\mathrm{T}}$$
  
=  $\{\mathbf{U}_{1} \ \mathbf{U}_{2} \ \mathbf{U}_{3} \ \mathbf{U}_{4} \ \mathbf{U}_{5} \ \mathbf{U}_{6} \ \mathbf{U}_{7} \ \mathbf{U}_{8} \ \mathbf{U}_{9} \ \mathbf{U}_{10} \ \mathbf{U}_{11} \ \mathbf{U}_{12} \ \mathbf{U}_{13} \ \mathbf{U}_{14}\}^{\mathrm{T}}$   
=  $\{\mathbf{u}_{1} \ \mathbf{u}_{2} \ \mathbf{u}_{3} \ \mathbf{u}_{4} \ \mathbf{u}_{5} \ \mathbf{u}_{6} \ \mathbf{u}_{7} \ \mathbf{u}_{8} \ \mathbf{v}_{1} \ \mathbf{v}_{2} \ \mathbf{v}_{3} \ \mathbf{v}_{4} \ \mathbf{v}_{5} \ \mathbf{v}_{6}\}^{\mathrm{T}}$  (2.8)

Επίσης γράφεται το διάνυσμα μετατοπίσεων της συνεκτικής ζώνης:

$$\{\mathbf{v}'\} = \left\{ \mathbf{v}'_{1} \mathbf{v}'_{2} \mathbf{v}'_{3} \mathbf{v}'_{4} \mathbf{v}'_{5} \mathbf{v}'_{6} \right\}^{\mathrm{T}}$$
(2.9)

Για τη σύνδεση των μετατοπίσεων της μήτρας και της συνεκτικής ζώνης μορφώνεται το [6x8] μητρώο της σχέσης (2.10) κάνοντας χρήση των συναρτήσεων σχήματος τετραπλευρικού στοιχείου καθώς και των παραγώγων τους στις θέσεις των κόμβων του στοιχείου δοκού.

$$T_{constr} = \begin{bmatrix} N_{1}(x_{i}) & 0 & N_{2}(x_{i}) & 0 & N_{3}(x_{i}) & 0 & N_{4}(x_{i}) & 0 \\ 0 & N_{1}(x_{i}) & 0 & N_{2}(x_{i}) & 0 & N_{3}(x_{i}) & 0 & N_{4}(x_{i}) \\ -N_{1,y}(x_{i})/2 & N_{1,x}(x_{i})/2 & -N_{2,y}(x_{i})/2 & N_{2,x}(x_{i})/2 & N_{3,x}(x_{i})/2 & -N_{4,y}(x_{i})/2 & N_{4,x}(x_{i})/2 \\ N_{1}(x_{j}) & 0 & N_{2}(x_{j}) & 0 & N_{3}(x_{j}) & 0 & N_{4}(x_{j}) & 0 \\ 0 & N_{1}(x_{j}) & 0 & N_{2}(x_{j}) & 0 & N_{3}(x_{j}) & 0 & N_{4}(x_{j}) \\ -N_{1,y}(x_{j})/2 & N_{1,x}(x_{j})/2 & -N_{2,y}(x_{j})/2 & N_{2,x}(x_{j})/2 & -N_{3,y}(x_{j})/2 & N_{3,x}(x_{j})/2 & -N_{4,y}(x_{j})/2 & N_{4,x}(x_{j})/2 \end{bmatrix}$$
(2.10)

Ανάλυση Ευαισθησίας Χαρακτηριστικών Υστεριτικής Συμπεριφοράς Νανοσύνθετου Υλικού

Έτσι τόσο οι μεταφορικοί όσο και οι στροφικοί βαθμοί ελευθερίας των κόμβων του στοιχείου συνεκτικής δοκού συνδέονται με τους μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας του τετραπλευρικού στοιχείου που τους περικλείει μέσω της σχέσης:

$$\{\mathbf{v}'\} = \left[\mathbf{T}_{constr}\right] \{\mathbf{u}\}$$
 (2.11)

Έτσι η στιβαρότητα ανάμεσα στους βαθμούς ελευθερίας του νανοσωλήνα και εκείνους της διεπιφάνειας μπορεί να υπολογιστεί ως το [12x12] μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου δοκού της συνεκτικής ζώνης.

$$\begin{bmatrix} K_{coh} \end{bmatrix} = P \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} M & -M \\ -M & M \end{bmatrix} d\xi \approx P \sum_{i=1}^{n} w_{i} \begin{bmatrix} M(\xi_{i}) & -M(\xi_{i}) \\ -M(\xi_{i}) & M(\xi_{i}) \end{bmatrix} det(J)$$
(2.12)

Όπου Ρ είναι η περίμετρος της διεπιφάνειας (ίση με την εξωτερική περίμετρο του νανοσωλήνα άνθρακα) και

$$[M] = [N_{beam}]^{T} [R_{m}] [D_{tan}] [R_{m}]^{T} [N_{beam}]$$
(2.13)

όπου το [D<sub>tan</sub>] το καταστατικό μητρώο της σχέσης (2.5) και [R<sub>m</sub>] είναι το [2x2] μητρώο περιστροφής των μεταφορικών βαθμών ελευθερίας του στοιχείου δοκού. Το [2x6] μητρώο [N<sub>beam</sub>] προκύπτει με χρήση των συναρτήσεων σχήματος στοιχείου δοκού στα σημεία ολοκλήρωσης Gauss.

$$\begin{bmatrix} N_{\text{beam}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{b} \begin{pmatrix} \xi_i \end{pmatrix} & 0 & 0 & N_2^{b} \begin{pmatrix} \xi_i \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{b} \begin{pmatrix} \xi_i \end{pmatrix} & 0 & 0 & N_2^{b} \begin{pmatrix} \xi_i \end{pmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$
(2.14)

Επιμερίζοντας το μητρώο σε τέσσερα υπομητρώα διαστάσεων [6x6] προκύπτει

$$\begin{bmatrix} K_{coh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{coh}^{11} & K_{coh}^{12} \\ K_{coh}^{21} & K_{coh}^{22} \end{bmatrix}$$
(2.15)

και τελικά οι δείκτες που θα προσθέσουν τη συμβολή της στιβαρότητας της διεπιφάνειας στο συνολικό μητρώο στιβαρότητας δίνονται από το μητρώο:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{coh}^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{constr}^{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{coh}^{11} & \mathbf{K}_{coh}^{12} \\ \mathbf{K}_{coh}^{21} & \mathbf{K}_{coh}^{22} \\ \mathbf{K}_{coh}^{21} & \mathbf{K}_{coh}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{constr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{coh}^{* \ 11} & \mathbf{K}_{coh}^{* \ 12} \\ \mathbf{K}_{coh}^{* \ 21} & \mathbf{K}_{coh}^{* \ 22} \\ \mathbf{K}_{coh}^{* \ 21} & \mathbf{K}_{coh}^{* \ 22} \end{bmatrix}$$
(2.17)

Το συνολικό μητρώο στιβαρότητας του συστήματος λαμβάνοντας υπόψη και τη συμβολή της διεπιφάνειας πολυμερικής μήτρας – νανοσωλήνα άνθρακα είναι:

$$\begin{bmatrix} K_{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{quad} + K_{coh}^{*11} & K_{coh}^{*12} \\ K_{coh}^{*21} & K_{beam} + K_{coh}^{*22} \end{bmatrix}$$
(2.18)

Ξεφεύγοντας από το απλουστευτικό μοντέλο του ενός στοιχείου δοκού εμφολευμένου σε ένα στοιχείο επίπεδης έντασης, η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί για την περίπτωση ενός χωρίου διακριτοποιημένου σε μεγαλύτερο αριθμό τετραπλευρικών στοιχείων που περιλαμβάνει και περισσότερα στοιχεία δοκού. Στην περίπτωση αυτή τα τροποποιημένα μητρώα στιβαρότητας κάθε στοιχείου (επίπεδης έντασης ή δοκού) επιμερίζονται και προστίθενται στους δείκτες του συνολικού μητρώου στιβαρότητας που αφορούν τους βαθμούς ελευθερίας στους οποίους συμβάλλουν.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°: Επίλυση εξισώσεων ισορροπίας στη μικροδομή του υλικού

## 3.1 Αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου

Στη μελέτη ετερογενών υλικών όπως είναι τα σύνθετα υλικά μια θεμελιώδης παραδοχή που χρησιμοποιείται είναι αυτή του αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου (representative volume element – RVE). Το αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου είναι σύμφωνα με τον ορισμό των Drugan και Willis: "το μικρότερο στοιχείο όγκου του σύνθετου υλικού για το οποίο η συνήθης σταθερή μακροσκοπική καταστατική προσομοίωση είναι ένα επαρκώς ακριβές μοντέλο για να προσομοιώσει τη μέση καταστατική απόκριση".



Σχήμα 3.1 Παραδοχή αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου

Επομένως ένας τέτοιος αντιπροσωπευτικός όγκος  $\mathscr{V}$  χαρακτηρίζεται από ένα μακροσκοπικό διάνυσμα τάσεων  $\{\overline{\sigma}\}$  και ένα μακροσκοπικό νόμο υλικού  $\left[\overline{\mathbb{C}}\right]$  που συνδέει το μακροσκοπικό διάνυσμα τάσεων με εκείνο των μακροσκοπικών ανηγμένων παραμορφώσεων.

$$\{\bar{\sigma}\} = \left[\overline{\mathbb{C}}\right]\{\bar{\varepsilon}\}$$
 (3.1)

Για την ανάλυση και την επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας στη μικροδομή που περικλείεται εντός αντιπροσωπευτικού όγκου είναι σκόπιμο να γίνει ο διαχωρισμός των μεγεθών (μετακινήσεις και δυνάμεις) που αφορούν το σύνορο  $\partial \mathcal{V}$  του όγκου και το εσωτερικό ( $\mathcal{V}$ - $\partial \mathcal{V}$ ) αυτού. Οι πρώτες θα σημειώνονται με τον δείκτη b και οι δεύτερες με τον δείκτη α.

Στο σχήμα 3.2 φαίνεται η μικροδομή του αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου που μελετήθηκε. Διακρίνεται η μήτρα πολυμερούς διαστάσεων 200x200 nm και η διακριτοποίηση της σε κάνναβο 10x10 αποτελούμενο από τετραγωνικά στοιχεία επίπεδης έντασης πλευράς 20 nm και πάχους 4 nm. Φαίνονται επίσης τα στοιχεία δοκού επίπεδου πλαισίου μήκους 80 nm τα οποία προσομοιώνουν τους νανοσωλήνες άνθρακα σε τυχαίες διευθύνσεις.



Σχήμα 3.2 Αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου πολυμερούς ενισχυμένου με νανοσωλήνες άνθρακα

## 3.2 Συνοριακές συνθήκες στον αντιπροσωπευτικό όγκο

Οι συνοριακές συνθήκες στο όριο  $\partial \mathscr{V}$  του αντιπροσωπευτικού όγκου συνδέονται με τα μακροσκοπικά μεγέθη (παραμορφώσεις ή τάσεις) αυτού. Συνεπώς είναι δυνατό οι συνοριακές αυτές συνθήκες να εισάγονται στον όγκο μέσω του [3x1] διανύσματος των μακροσκοπικών παραμορφώσεων { $\bar{e}$ }.

Για την παρούσα προσομοίωση ο τύπος των συνοριακών συνθηκών που χρησιμοποιήθηκε είναι οι γραμμικές μετακινήσεις στο σύνορο  $\partial \mathscr{V}$  του αντιπροσωπευτικού όγκου. Έτσι θεωρώντας ότι υπάρχουν Μ κόμβοι στο  $\partial \mathscr{V}$  και γράφοντας για κάθε κόμβο q από αυτούς το διάνυσμα των μετατοπίσεων του {u<sub>q</sub>} συνδέεται γραμμικά με το διάνυσμα { $\bar{e}$ }. Γράφοντας:

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \{\bar{\varepsilon}_{11} \ \bar{\varepsilon}_{22} \ 2\bar{\varepsilon}_{12}\}^{\mathrm{T}}$$

$$\{\mathbf{u}_{q}\} = \{\mathbf{u}_{1} \ \mathbf{u}_{2}\}_{q}^{\mathrm{T}}$$
(3.2)

οι μετακινήσεις του συνοριακού κόμβου συνδέονται γραμμικά με τις μακροσκοπικές παραμορφώσεις του όγκου μέσω του μητρώου  $[\mathbb{D}]_a$ .

$$[\mathbb{D}]_{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2x_{q} & 0 \\ 0 & 2y_{q} \\ y_{q} & x_{q} \end{bmatrix}$$
(3.3)

και συγκεντρώνοντας τα αντίστοιχα μητρώα όλων των συνοριακών κόμβων σε ένα διαστάσεων [3x2M]

$$[\mathbb{D}] = [\mathbb{D}_1 \quad \mathbb{D}_2 \quad \dots \quad \mathbb{D}_M] \quad (3.4)$$

προκύπτει τελικά η γραμμική σχέση ανάμεσα στις συνοριακές μετατοπίσεις και τις μακροσκοπικές παραμορφώσεις του αντιπροσωπευτικού όγκου.

$$\{u\}_{b} - [\mathbb{D}]^{T}\{\overline{\varepsilon}\} = 0$$
 (3.5)

Η παραπάνω σχέση είναι ο τρόπος μετάβασης από τη μακροκλίμακα στη μικροκλίμακα όπου θα γίνει η θεώρηση και η επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας. Ο υπολογισμός του διανύσματος μετακινήσεων στους συνοριακούς βαθμούς ελευθερίας γίνεται στην επόμενη ενότητα.

## 3.3 Ισορροπία στη μικροδομή εντός του αντιπροσωπευτικού όγκου

Αφού γίνει η μετάβαση από τη μακροσκοπική στη μικροσκοπική κλίμακα ζητούμενο είναι η μόρφωση του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας στη μικροκλίμακα και η επίλυση αυτών. Οι εξισώσεις αυτές θα είναι η (3.5) σε συνδυασμό με τις εξισώσεις μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων. Η ιδιαιτερότητα που πρέπει να αντιμετωπιστεί όμως σε αυτή την προσομοίωση σε σχέση με την περίπτωση της κλασικής στατικής προκύπτει από όσα περιγράφηκαν στην ενότητα 2.4 σχετικά με το νόμο υλικού που χρησιμοποιείται για τη διεπιφάνεια πολυμερικής μήτρας-νανοσωλήνα άνθρακα. Συγκεκριμένα ο διγραμμικός νόμος υλικού για την διεπιφάνεια οδηγεί σε μια γενικευμένη μη γραμμικότητα υλικού σε επίπεδο αντιπροσωπευτικού όγκου αφού σε αυτόν εμφανίζεται πλήθος νανοσωλήνων. Έτσι οι αλλαγές κλίσης για το σύνθετο υλικό θα μπορούσαν να είναι όσοι και οι νανοσωλήνες, ανάλογα και με το μέγεθος της φόρτισης και τη θέση/προσανατολισμό των γραμμικής ανάλυσης όπως αυτή που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

#### 3.3.1 Μόρφωση του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας

Ακολουθώντας τη λογική διαχωρισμού των μετακινήσεων και των δυνάμεων ανάμεσα σε εκείνες που αφορούν το εσωτερικό και το σύνορο του κόμβου όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.1, χρησιμοποιούνται το μητρώα προβολής  $\mathbb{P}_{\alpha}$  και  $\mathbb{P}_{b}$ . Αν Ν είναι ο συνολικός αριθμός των κόμβων του στον αντιπροσωπευτικό όγκο  $\mathscr{V}$  συμπεριλαμβανομένων τόσο των τετραπλευρικών στοιχείων όσο και των στοιχείων δοκού και M ο αριθμός των κόμβων στο όριο  $\partial \mathscr{V}$  προκύπτουν οι διαστάσεις των μητρώων προβολής: (α) για το  $\mathbb{P}_{\alpha}$ , [3N<sub>beam</sub>+2(N<sub>quad</sub>-M), 3N<sub>beam</sub>+2(N<sub>quad</sub>)] και (β) για το  $\mathbb{P}_{b}$ , [2M,3N<sub>beam</sub>+2(N<sub>quad</sub>)], όπου N<sub>quad</sub> το σύνολο των κόμβων στοιχείων επίπεδης έντασης και N<sub>beam</sub> το σύνολο των κόμβων στοιχείων δοκού. Επομένως ο επιμερισμός μετατοπίσεων και δυνάμεων γράφεται:

$$\{\mathbf{U}\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_{\alpha} \\ \mathbf{u}_{b} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{P}_{\alpha}\mathbf{u} \\ \mathbb{P}_{b}\mathbf{u} \end{array} \right\}, \quad \{\mathbf{f}\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_{\alpha} \\ \mathbf{f}_{b} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{P}_{\alpha}\mathbf{f} \\ \mathbb{P}_{b}\mathbf{f} \end{array} \right\}$$
(3.6)

Επίσης το συνολικό μητρώο στιβαρότητας του συστήματος όπως υπολογίστηκε στην ενότητα 2.4 επιμερίζεται στα αντίστοιχα υπομητρώα.

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha b} \\ \mathbf{K}_{b\alpha} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{a} \mathbf{K} \mathbb{P}_{\alpha}^{T} & \mathbb{P}_{a} \mathbf{K} \mathbb{P}_{b}^{T} \\ \mathbb{P}_{b} \mathbf{K} \mathbb{P}_{\alpha}^{T} & \mathbb{P}_{b} \mathbf{K} \mathbb{P}_{b}^{T} \end{bmatrix}$$
(3.7)

Όπως ήδη αναφέρθηκε συνδυάζοντας την εξίσωση (3.5) με τις εξισώσεις μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων τόσο για τους εσωτερικούς όσο και για τους συνοριακούς βαθμούς ελευθερίας, προκύπτει το σύστημα εξισώσεων ισορροπίας εντός της μικροδομής του  $\mathscr{V}$ :

$$\begin{cases} f_{\alpha} \\ = 0 \\ \{f_{b} \\ - \{\delta\} = 0 \\ \{u_{b} \\ - [\mathbb{D}]^{T} \{\overline{\varepsilon}\} = 0 \end{cases}$$
(3.8)

όπου {δ} είναι το διάνυσμα των εξωτερικώς επιβαλλόμενων δυνάμεων στους κόμβους του  $\partial \mathscr{V}$  που προκύπτουν λόγω των επιβαλλόμενων παραμορφώσεων.

Το παραπάνω είναι ένα μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων που όπως αναφέρθηκε δεν μπορεί να επιλυθεί απευθείας. Επίσης είναι άγνωστος ο τρόπος υπολογισμού των εσωτερικών δυνάμεων του συστήματος

#### 3.3.2 Υπολογισμός των εσωτερικών δυνάμεων

Το συνολικό διάνυσμα των μετακινήσεων {U} μπορεί να επιμεριστεί, αυτή τη φορά όχι σε εσωτερικούς-συνοριακούς βαθμούς ελευθερίας, αλλά σε βαθμούς ελευθερίας που αφορούν τα τετραπλευρικά {u} στοιχεία και σε εκείνους που αφορούν τα στοιχεία δοκού {v}. Αυτές είναι και οι διαστάσεις των αντίστοιχων διανυσμάτων εσωτερικών δυνάμεων {f<sub>quad</sub>} και {f<sub>beam</sub>}, τα οποία υπολογίζονται για κάθε στοιχείο με χρήση του αντίστοιχου μητρώου στιβαρότητας.

$${f_{quad}} = [K_{quad}] {u}$$

$${f_{beam}} = [K_{beam}] {v}$$
(3.9)

όπου αν n ο αριθμός των νανοσωλήνων άνθρακα εντός του αντιπροσωπευτικού όγκου και k ο αριθμός των κόμβων στοιχείου επίπεδης έντασης, οι διαστάσεις των επιμέρους διανυσμάτων θα είναι 2k για το {u} και 6n για το {v}. Έτσι αφού υπολογιστούν οι εσωτερικές δυνάμεις για κάθε στοιχειο προστίθενται στους δείκτες του συνολικού διανύσματος εσωτερικών δυνάμεων {F} στις θέσεις που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του.

Έκτος από την πολυμερική μήτρα και τους νανοσωλήνες άνθρακα, στο διάνυσμα εσωτερικών δυνάμεων συμβάλλει και η μεταξύ αυτών συνεκτική ζώνη. Οι δυνάμεις της σχέσης (3.9) προσαυξάνονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\{f_{I}\} = \{f_{solid}\} + [T_{constr}]^{T}\{f'_{int}\}$$

$$\{f_{II}\} = \{f_{beam}\} + \{f''_{int}\}$$

$$(3.10)$$

όπου  ${f'_{int}}$  και  ${f''_{int}}$  υπολογίζονται με ολοκλήρωση σημεία Gauss του στοιχείου δοκού.

$$\left\{f'_{int}\right\} = P \int_{-1}^{1} \left[N_{beam}(\xi)\right]^{T} \left[R_{m}\right] \sigma d\xi \approx P \sum_{i=1}^{n} w_{i} \left[N_{beam}(\xi_{i})\right]^{T} \left[R_{m}\right] \sigma(\xi) \det(J)$$
(3.11)  
$$\left\{f''_{int}\right\} = -P \int_{-1}^{1} \left[N_{beam}(\xi)\right]^{T} \left[R_{m}\right] \sigma d\xi \approx -P \sum_{i=1}^{n} w_{i} \left[N_{beam}(\xi_{i})\right]^{T} \left[R_{m}\right] \sigma(\xi) \det(J)$$
(3.12)

Για τον υπολογισμό των τάσεων στις δύο παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιείται ο διγραμμικός νόμος υλικού της διεπιφάνειας όπως περιγράφηκε στην ενότητα 2.4 και επομένως απαιτείται ο

υπολογισμός των σχετικών μετακινήσεων {ε}. Γνωρίζοντας εντός ποιου τετραπλευρικού στοιχείου βρίσκεται κάθε κόμβος στοιχείου δοκού υπολογίζονται οι μετακινήσεις {v'} στους εικονικούς βαθμούς ελευθερίας των συνεκτικών ζωνών με χρήση της σχέσης (2.11). Εξετάζοντας το i στοιχείο δοκού οι σχετικές μετακινήσεις οι του νανοσωλήνα και της περιβάλλουσας αυτόν συνεκτικής ζώνης στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων για κάθε σημείο ολοκλήρωσης Gauss είναι:

$$\left\{ \varepsilon_{\text{global},i}(\xi) \right\} = \left[ N_{\text{beam},i}(\xi) \right]^{T} \left\{ v_{i}^{'} - v_{i} \right\} \quad (3.13)$$

όπου όπως και στην ενότητα το διάνυσμα {ε} δεν αναφέρεται σε ανηγμένες παραμορφώσεις αλλά σε σχετικές μετακινήσεις σε μονάδες μήκους και το  $\left[N_{\text{beam, i}}(\xi)\right]$  δίνεται από τη σχέση (2.14). Η αντίστοιχες παραμορφώσεις στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του στοιχείου δοκού είναι:

$$\left\{\varepsilon_{i}(\xi)\right\} = \left[R_{m}\right]^{T} \left\{\varepsilon_{global,i}(\xi)\right\} = \left\{\varepsilon_{i,slip}(\xi) \quad \varepsilon_{i,normal}(\xi)\right\}^{T} \quad (3.14)$$

όπου ε<sub>i,slip</sub> η σχετική μετακίνηση μεταξύ νανοσωλήνα άνθρακα και πολυμερικής μήτρας στην αξονική διεύθυνση του νανοσωλήνα ε<sub>i,normal</sub> η αντίστοιχή μετακίνηση στην κάθετη σε αυτή διεύθυνση. Έτσι από τις σχέσεις (3.10), (3.11) και (3.12) υπολογίζονται τα διανύσματα εσωτερικών δυνάμεων {f<sub>i</sub>} και {f<sub>il</sub>} με τη συνεισφορά της συνεκτικής ζώνης στις εσωτερικές δυνάμεις για κάθε στοιχείο, τετραπλευρικό ή δοκού. Τα στοιχεία αυτών των διανυσμάτων προστίθενται στις θέσεις του συνολικού διανύσματος εσωτερικών δυνάμεων {F} που αφορούν τους βαθμούς ελευθερίας τους.

$$\{F\} = \left\{ f_{I} \quad f_{II} \right\}^{T} \qquad (3.15)$$

#### 3.3.3 Επίλυση του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων

Το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας (3.8) ως μη γραμμικό δεν μπορεί να επιλυθεί απευθείας. Η επίλυση του γίνεται με χρήση της μη γραμμικής μεθόδου Newton-Raphson. Πρόκειται για μια αριθμητική μέθοδο με την επιλύεται μια μη γραμμική εξίσωση f(x). Η μέθοδος είναι επαναληπτική και ξεκινάει με μια δοκιμαστική εκτίμηση, για παράδειγμα ότι το  $x_{i-1}$  επαληθεύει την εξίσωση, δηλαδή  $f(x_{i-1})=0$ . Επειδή το  $x_{i-1}$  επελέγη αυθαίρετα, το πιθανότερο είναι ότι ή υπόθεση επαλήθευσης της εξίσωσης δεν ισχύει και άρα δεν αποτελεί ρίζα της εξίσωσης. Η ρίζα εντοπίζεται χρησιμοποιώντας την εφαπτομένη στο  $x_{i-1}$  η οποία έχει κλίση f'( $x_{i-1}$ ). Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο  $x_{i-1}$  είναι:

$$f(x) - f(x_{i-1}) = f'(x_{i-1})(x - x_{i-1})$$
 (3.16)

Μια δεύτερη εκτίμηση γίνεται στο x<sub>i</sub> και δίνεται από τη σχέση (3.16) αν τεθεί f(x)=0 και x=x<sub>i</sub>:

$$x_{i} = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$
 (3.17)

Αν ισχύει f(x<sub>i</sub>)≈ 0 με ικανοποιητική ακρίβεια, τότε η ρίζα εντοπίστηκε. Αν όχι η μέθοδος συνεχίζει με μια νέα δοκιμή, θέτοντας στην εξίσωση (3.17) x<sub>i-1</sub>=x<sub>i</sub> και x<sub>i</sub>=x<sub>i+1</sub> προκειμένου να εκτιμηθεί η νέα δοκιμαστική ρίζα x<sub>i+1</sub>.

Μεταφέροντας την παραπάνω λογική από την περίπτωση μη γραμμικής εξίσωσης σε αυτή του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων προκύπτει η αλγοριθμική διατύπωση επίλυσης του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας όπως περιγράφεται στη συνέχεια. Σημειώνεται ότι η επίλυση δεν μπορεί να γίνει εφαρμόζοντας απευθείας το συνολικό διάνυσμα των μακροσκοπικών παραμορφώσεων ως φόρτιση γι' αυτό και επιμερίζεται σε increments μεγέθους  $\{\Delta \overline{e}\}$ . Έτσι, για κάθε βήμα i (increment) της επαναληπτικής μεθόδου:

- i. Προσαυξάνεται το διάνυσμα των μακροσκοπικών ανηγμένων παραμορφώσεων κατά το τυπικό βήμα:  $\{\bar{e}_i\} = \{\bar{e}_{i-1}\} + \{\Delta \bar{e}\}$
- Υπολογίζεται η προσαύξηση των μετακινήσεων στους βαθμούς ελευθερίας των συνοριακών κόμβων:

$$\left\{\Delta u_{b}\right\} = [\mathbb{D}]^{T} \{\Delta \bar{\varepsilon}\}$$
 (3.18)

iii. Υπολογίζεται η προσαύξηση των μετακινήσεων στους βαθμούς ελευθερίας των εσωτερικών κόμβων:

$$\left\{\Delta u_{\alpha}\right\} = -\left[K_{\alpha\alpha}\right]^{-1}\left[K_{\alpha b}\right]\left\{\Delta u_{b}\right\} \quad (3.19)$$

iv. Γίνεται μια πρώτη προσέγγιση του συνολικού διανύσματος μετακινήσεων:

$$\begin{cases} u_{\alpha}^{i} \\ = \left\{ u_{\alpha}^{i-1} \right\} + \left\{ \Delta u_{\alpha}^{i} \\ \right\} \\ \left\{ u_{b}^{i} \right\} = \left\{ u_{b}^{i-1} \right\} + \left\{ \Delta u_{b}^{i} \right\} \end{cases} \begin{cases} u^{i} \\ = \left\{ u_{\alpha}^{i} & u_{b}^{i} \right\}^{T} \end{cases}$$
(3.20)

- ν. Υπολογίζονται οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος όπως περιγράφηκε στην ενότητα 3.3.2.
- νί. Γίνεται ο έλεγχος σύγκλισης της μεθόδου με κριτήριο οι δυνάμεις των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας να προσεγγίζουν το μηδέν:  $\|f_{\alpha}\| < 10^{-3}$
- νii. Αν ικανοποιείται ο έλεγχος σύγκλισης η επανάληψη τερματίζεται και ξεκινάει η επόμενη με την εκ νέου αύξηση των μακροσκοπικών παραμορφώσεων.

Για το λόγο αυτό υπάρχει μια δεύτερη επαναληπτική διαδικασία εμφωλευμένη στην πρώτη, όπου για κάθε επανάληψη j (iteration):

- i. Επανυπολογίζεται με τη διαδικασία της ενότητας 2.4 το τέμνον μητρώο στιβαρότητας  $\begin{bmatrix} K_T \end{bmatrix}$ με την αλλαγή του καταστατικού μητρώου  $\begin{bmatrix} D_{tan} \end{bmatrix}$ όπου απαιτείται σύμφωνα με τα παραπάνω.
- ii. Ενημερώνεται το διάνυσμα των μετακινήσεων των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας:

$$\left\{u_{\alpha}^{j}\right\} = \left\{u_{\alpha}^{j-1}\right\} - \left[K_{\alpha\alpha}\right]^{-1} \left\{f_{\alpha}^{j-1}\right\} \quad (3.21)$$

Σημειώνεται ότι στο διάνυσμα {f<sub>α</sub>} προηγείται η "πληροφορία" της ολίσθησης κατά ένα βήμα σε σχέση με το μητρώο στιβαρότητας [K<sub>αα</sub>] καθώς ο έλεγχος ολίσθησης γίνεται μετά τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας αλλά πριν την ολοκλήρωση των τάσεων για τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων.

iii. Επανυπολογίζεται το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων με τη διαδικασία της ενότητας 3.3.2.

iv. Γίνεται εκ νέου ο έλεγχος σύγκλισης της μεθόδου:  $\|f_{\alpha}\| < 10^{-3}$ 

Όταν τελικά υπάρξει η σύγκλιση, σημαίνει ότι η προσαύξηση των μετακινήσεων έχει υπολογιστεί με το σωστό τέμνον μητρώο στιβαρότητας.

Στο σχήμα 3.2 φαίνεται το διάγραμμα ροής για της μεθόδου.

Ανάλυση Ευαισθησίας Χαρακτηριστικών Υστεριτικής Συμπεριφοράς Νανοσύνθετου Υλικού



Σχήμα 3.2 Διάγραμμα ροής μεθόδου Newton-Raphson

#### 3.3.4 Υπολογισμός των μακροσκοπικών τάσεων και νόμου υλικού στον αντιπροσωπευτικό όγκο

Με γνωστό το τέμνον μητρώο στιβαρότητας κατά την προσαύξηση για κάθε βήμα της επαναληπτικής μεθόδου των μακροσκοπικών παραμορφώσεων κατά  $\{\Delta \overline{e}\}$ , υπολογίζεται η αντίστοιχη προσαύξηση των επικόμβιων  $\{\Delta \delta\}$  δυνάμεων στους βαθμούς ελευθερίας του  $\partial \mathcal{V}$  από τη σχέση:

$$\{\Delta\delta\} = \left[\widetilde{\mathbf{K}}_{bb}\right] \left[\mathbb{D}\right]^{\mathrm{T}} \{\Delta\widetilde{\varepsilon}\} \quad (3.22)$$

όπου το τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας των συνοριακών βαθμών ελευθερίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{K}}_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{b\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha b} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Και τελικά υπολογίζεται η προσαύξηση του μακροσκοπικού διανύσματος των τάσεων:

$$\{\Delta \overline{\sigma}\} = \frac{1}{V} [\mathbb{D}] \{\Delta \delta\}$$
 (3.24)

όπου V το μέτρου του όγκου του  $\mathscr{V}$ . Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει και ο ομογενοποιημένος νόμος υλικού.

$$\left[\overline{\mathbb{C}}\right] = \frac{1}{V} \left[\mathbb{D}\right] \left[\widetilde{\mathrm{K}}_{bb}\right] \left[\mathbb{D}\right]^{\mathrm{T}} \quad (3.25)$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4°: Υστεριτική συμπεριφορά του αντιπροσωπευτικού όγκου

## 4.1 Φόρτιση εναλλασσόμενου προσήμου

Για τον υπολογισμό χαρακτηριστικών του αντιπροσωπευτικού όγκου που αφορούν την υστεριτική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού, επιβλήθηκε σε αυτόν φόρτιση εναλλασσόμενου προσήμου. Για το λόγο αυτό και δεδομένου ότι η φόρτιση εισάγεται στο σύστημα μέσω των συνοριακών συνθηκών που εκφράζονται από το διάνυσμα μακροσκοπικών παραμορφώσεων, στον  $\mathscr{V}$  επιβλήθηκαν μακροσκοπικές παραμορφώσεις που ακολούθησαν τη διαδρομή:

$$\{0\} \rightarrow \{\bar{\varepsilon}\} \rightarrow \{-\bar{\varepsilon}\} \rightarrow \{0\}$$
 (4.1)

Για την εφαρμογή της μεθόδου Newton-Raphson το πρώτο και το τρίτο στάδιο της παραπάνω διαδρομής χωρίζονται σε δέκα τυπικά βήματα  $\{\Delta \varepsilon\} = \{\varepsilon\}/10$ , ενώ το δεύτερο στάδιο σε είκοσι τυπικά βήματα  $\{\Delta \varepsilon\} = \{\varepsilon\}/20$ .

Για τις συνολικές μακροσκοπικές παραμορφώσεις τέθηκε η τιμή  $\{\bar{e}\} = \{\bar{e}_{11} \ \bar{e}_{22} \ 2\bar{e}_{12}\} = \{0.060 \ -0.024 \ 0\}$ ώστε να προσομοιωθεί μια δοκιμή τύπου εφελκυσμού χωρίς πλευρική παραμόρφωση.

## 4.2Υπολογισμός χαρακτηριστικών υστεριτικής συμπεριφοράς

Βάζοντας τα αποτελέσματα των μακροσκοπικών ομογενοποιημένων τάσεων σε ένα διάγραμμα μαζι με τις μακροσκοπικές ανηγμένες παραμορφώσεις και συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας το πρώτο στοιχείο από τα δυο παραπάνω διανύσματα προκύπτει ο βρόχος υστέρησης του αντιπροσωπευτικού όγκου για τον επιβαλλόμενο σε αυτόν κύκλο φόρτισης. Ένας τέτοιος κύκλος φόρτισης φαίνεται στο σχήμα 4.1.


Η ενέργεια που καταναλώνεται από το σύστημα για έναν κύκλο φόρτισης εκφράζεται από το εμβαδόν Α του βρόχου υστέρησης. Το εμβαδόν αυτό μπορεί να υπολογιστεί με αριθμητικές μεθόδους ολοκλήρωσης όπως ο κανόνας του τραπεζίου. Η σταθερά απόσβεσης ξ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\xi = \frac{A}{2\pi\bar{\sigma}_{\max}\bar{\varepsilon}_{\max}} \quad (4.2)$$

όπου  $\bar{\sigma}_{\max}$  και  $\bar{\varepsilon}_{\max}$  η μέγιστη τιμή των μακροσκοπικών  $\bar{\sigma}_{11}$  και  $\bar{\varepsilon}_{11}$  αντίστοιχα.

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5°: Ανάλυση ευαισθησίας

#### 5.1 Μαθηματική διατύπωση της ανάλυσης ευαισθησίας

Έστω ένα μοντέλο της μορφής  $Y = f(X_1, X_2, ...X_k)$ , όπου  $X_1, X_2, ...X_k$  είναι οι προς ανάλυση παράγοντες του μοντέλου και είναι τυχαίες μεταβλητές γνωστής κατανομής. Για k παράγοντες θεωρώντας ένα μέγεθος δείγματος N, δηλαδή N υλοποιήσεις του Y, το σύνολο των παραγόντων που θα χρησιμοποιηθούν ως δεδομένα μπορούν να γραφούν με τη μορφή ενός πίνακα X διαστάσεων [Nxk]. Με X-i συμβολίζεται ο [Nx(k-1)] πίνακας που έχει για όλες τις υλοποιήσεις όλους τους παράγοντες εκτός από τον i. Ένας βαθμός επιρροής πρώτης τάξης του παράγοντα X<sub>i</sub> εκφρασμένος σε μορφή διασποράς μπορεί να γραφτεί:  $V_{X_i} (E_{X_{-i}} (Y|X_i))$ . Η εκτιμήτρια μέσα στην παρένθεση σημαίνει ότι η τιμή του Y λαμβάνεται από όλες τις δυνατές τιμές του X-i κρατώντας σταθερό τον παράγοντα X<sub>i</sub>. Η διασπορά έξω από την παρένθεση λαμβάνεται για όλες τις πιθανές τιμές του X<sub>i</sub>. Το σχετικό μέτρο της ευαισθησίας είναι συντελεστής ευαισθησίας πρώτης τάξης και γράφεται:

$$S_{i} = \frac{V_{X_{i}} \left( E_{X_{\sim i}} \left( Y | X_{i} \right) \right)}{V(Y)} \quad (5.1)$$

Ένα άλλο μέτρο βασισμένο στη διασπορά είναι ο συνολικός δείκτης επιρροής:

$$S_{Ti} = \frac{E_{X_{\sim i}} \left( V_{X_{i}} \left( Y|X_{\sim i} \right) \right)}{V(Y)} = 1 - \frac{V_{X_{\sim i}} \left( E_{X_{i}} \left( Y|X_{\sim i} \right) \right)}{V(Y)}$$
(5.2)

Ο δείκτης S<sub>Ti</sub> μετράει τη συνολική επιρροή, δηλαδή την πρώτης αλλά και μεγαλύτερής τάξης επιρροή μέσω των αλληλεπιδράσεων του παράγοντα X<sub>i</sub>. Αυτό συμβαίνει καθώς κατ' αναλογία με τα προηγούμενα, η διασπορά  $V_{X_{\sim i}} \left( E_{X_i} (Y|X_{\sim i}) \right)$  είναι η επιρροή πρώτης τάξης του X<sub>i</sub> και άρα αφαιρώντας την από την αδέσμευτη διασπορά V(Y) προκύπτει η συνεισφορά όλων των όρων της διασποράς που περιέχουν τον παράγοντα X<sub>i</sub>.

Αν η  $Y = f(X_1, X_2, ..., X_k)$ είναι διπλά ολοκληρώσιμη στον υπερκύβο k διαστάσεων  $\Omega = (X|0 \le x_i \le 1; i = 1, ..., k)$ , και οι παράγοντές της ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο διάστημα [0,1], μπορεί να αναλυθεί σε όρους:

$$f = f_0 + \sum_i f_i + \sum_i \sum_{j>i} f_{ij} + \dots + f_{12\dots k}$$
 (5.3)

όπου  $f_i = f_i(X_i)$ ,  $f_{ij} = f_{ij}(X_i, X_j)$  και ούτω καθεξής για συνολικά 2<sup>k</sup> όρους συμπεριλαμβανομένου του  $f_0$ . Κάθε όρος είναι διπλά ολοκληρώσιμος στον Ω. Ισχύει:

$$f_{0} = E(Y)$$

$$f_{i} = E_{X_{\sim i}}(Y|X_{i}) - E(Y)$$

$$f_{ij} = E_{X_{\sim ij}}(Y|X_{i}, X_{j}) - f_{i} - f_{j} - E(Y)$$
(5.4)

και αντίστοιχα για τους όρους μεγαλύτερης τάξης. Ακολούθως προκύπτουν οι δεσμευμένες διασπορές:

$$V_{i} = V(f_{i}(X_{i})) = V_{X_{i}}(E_{X_{i}}(Y|X_{i}))$$

$$V_{ij} = V(f_{ij}(X_{i}, X_{j}))$$

$$= V_{X_{i}X_{j}}(E_{X_{i}}(Y|X_{i}, X_{j})) - V_{X_{i}}(E_{X_{i}}(Y|X_{i})) - V_{X_{j}}(E_{X_{i}}(Y|X_{j}))$$
(5.5)

και αντίστοιχα για όρους μεγαλύτερης τάξης. Όλοι οι όροι της διασποράς συνδέονται με τη σχέση:

$$V(Y) = \sum_{i} V_{i} + \sum_{i} \sum_{j>i} V_{ij} + \dots + V_{12\dots k}$$
 (5.6)

και διαιρώντας με V(Y):

$$\sum_{i} S_{i} + \sum_{i} \sum_{j>i} S_{ij} + \ldots + S_{12\ldots k} = 1 \quad (5.7)$$

Οι εκφράσεις για τους όρους δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης στις σχέσεις (5.6) και (5.7) ισχύουν όταν οι παράγοντες είναι ανεξάρτητοι, κάτι που ισχύει για την παρούσα προσομοίωση.

Οι δείκτες S<sub>i</sub>, S<sub>Ti</sub> μπορούν να ερμηνευτούν και ως αναμενόμενες μειώσεις της διασποράς, αφού: (α)  $V_{X_i} \left( E_{X_{\sim i}} (Y|X_i) \right)$  είναι η αναμενόμενη μείωση της διασποράς V(Y) αν κρατηθεί σταθερός ο παράγοντας X<sub>i</sub> και (β)  $E_{X_{\sim i}} \left( V_{X_i} (Y|X_{\sim i}) \right)$  είναι η αναμενόμενη διασπορά που θα απέμενε από την V(Y) αν ήταν σταθεροί όλοι οι παράγοντες εκτός του X<sub>i</sub>.

Οι δείκτες S<sub>i</sub> και S<sub>Ti</sub> μπορούν να εκτιμηθούν πραγματοποιώντας ένα σύνολο N προσομοιώσεων της  $Y = f(X_1, X_2, ..., X_k)$ . Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται δύο ανεξάρτητοι δειγματικοί πίνακες A και B με στοιχεία της γενικής μορφής α<sub>ji</sub> και b<sub>ji</sub>. Ο δείκτης j παίρνει τιμές από 1 έως k (αριθμός των παραγόντων), ενώ ο δείκτης j παίρνει τιμές από 1 έως N (αριθμός προσομοιώσεων). Για κάθε παράμετρο i ο πίνακας  $A_B^{(i)}$  προκύπτει αν στον A αντικατασταθεί η i-στή στήλη από την αντίστοιχη του πίνακα B.

• 
$$\Gamma \iota \alpha \text{ to } \mathbf{S}_{i}: V_{X_{i}}\left(\mathbf{E}_{X_{i}}\left(\mathbf{Y}|X_{i}\right)\right) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}f(\mathbf{B})_{j}\left(f\left(\mathbf{A}_{B}^{(i)}\right)_{j} - f(\mathbf{A})_{j}\right)$$
 (5.8)

• 
$$\Gamma_{\text{I}\alpha \text{ to } S_{\text{T}i}}: E_{X_{\sim i}} \left( V_{X_{i}} \left( Y | X_{\sim i} \right) \right) = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N} \left( f(\mathbf{A})_{j} - f(\mathbf{A}_{\text{B}}^{(i)})_{j} \right)^{2}$$
 (5.9)

Οι οιονεί τυχαίες ακολουθίες (quasi-random sequences) είναι σχεδιασμένες ώστε να δημιουργούν δείγματα των παραγόντων  $X_1, X_2, \ldots X_k$  όσο το δυνατόν πιο ομοιόμορφα κατανεμημένα στον Ω. Σε αντίθεση με τους τυχαίους αριθμούς, τα διαδοχικά σημεία των οιονεί τυχαίων ακολουθιών λαμβάνουν υπόψη τη θέση των προηγουμένων δειγματικών σημείων και καλύπτουν τα μεταξύ τους κενά. Για την παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν οιωνεί τυχαίες ακολουθίες Sobol. Οι ακολουθίες Sobol υπερτερούν των ακατέργαστων ακολουθιών Monte Carlo στην εκτίμηση πολυδιάστατων ολοκληρωμάτων. Στον πίνακα 5.1 φαίνονται τα πρώτα οχτώ σημεία μίας οιονεί τυχαίας ακολουθίας Sobol δέκα διαστάσεων.

0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.2500	0.7500	0.2500	0.7500	0.2500	0.7500	0.2500	0.7500	0.7500	0.2500
0.7500	0.2500	0.7500	0.2500	0.7500	0.2500	0.7500	0.2500	0.2500	0.7500
0.1250	0.6250	0.8750	0.8750	0.6250	0.1250	0.3750	0.3750	0.8750	0.6250
0.6250	0.1250	0.3750	0.3750	0.1250	0.6250	0.8750	0.8750	0.3750	0.1250
0.3750	0.3750	0.6250	0.1250	0.8750	0.8750	0.1250	0.6250	0.1250	0.8750
0.8750	0.8750	0.1250	0.6250	0.3750	0.3750	0.6250	0.1250	0.6250	0.3750
0.0625	0.9375	0.6875	0.3125	0.1875	0.0625	0.4375	0.5625	0.8125	0.6875

Πίνακας 5.1 Οιονεί τυχαία ακολουθία Sobol δέκα διαστάσεων

Οι πίνακες  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  διαστάσεων [Nxk] θεωρούνται ως το αριστερό και δεξί μισό αντίστοιχα του πίνακα που προκύπτει από μια οιονεί τυχαία ακολουθία 2k διαστάσεων και N προσομοιώσεων.

# 5.2 Εφαρμογή ανάλυσης ευαισθησίας για τα χαρακτηριστικά υστεριτικής συμπεριφοράς του νανοσύνθετου υλικού

Τα παραπάνω μαθηματικά εργαλεία χρησιμοποιήθηκαν στην περίπτωση του νανοσύνθετου υλικού που μελετάται. Μελετήθηκε η ευαισθησία χαρακτηριστικών του υλικού σε ορισμένες παραμέτρους του μοντέλου που αναλύθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια. Τα υπό μελέτη χαρακτηριστικά του υλικού ήταν:

- α) η μέγιστη τιμή του πρώτου στοιχείου του διανύσματος ομογενοποιημένων τάσεων σ<sub>max</sub>
- β) το εμβαδόν του βρόχου υστέρησης Α
- γ) η σταθερά απόσβεσης ξ

Σε ότι αφορά τις παραμέτρους των οποίων οι δείκτες ευαισθησίας υπολογίστηκαν, εξετάστηκαν δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση εξετάστηκε ένας αντιπροσωπευτικός όγκος στον οποίο οι νανοσωλήνες άνθρακα έχουν τυχαίο προσανατολισμό όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1 (α). Οι υπό ανάλυση παράμετροι ήταν:

- α) Ο λόγος του όγκου του συνόλου των νανοσωλήνων προς το συνολικό όγκο του αντιπροσωπευτικού στοιχείου (volume fraction), V<sub>f</sub>
- β) Η διαφασική οριακή διατμητική τάση ολίσθησης, ISS
- γ) Η αρχική κλίση του νόμου υλικού στη διεύθυνση ολίσθησης της διεπιφάνειας (σχήμα 2.3), D<sub>slip</sub>
- δ) Η παραπάνω κλίση μετά την ολίσθηση, D<sub>slip</sub>'

Στη δεύτερη περίπτωση οι νανοσωλήνες άνθρακα διατάχθηκαν με ενιαίο προσανατολισμό όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1 (β). Οι υπό ανάλυση παράμετροι ήταν αυτές του προηγούμενου μοντέλου και επιπλέον η γωνία που σχηματίζει ο άξονας των νανοσωλήνων με την οριζόντια διεύθυνση, orientation.



Σχήμα 5.1 Αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκο με (α) τυχαίο και (β) ενιαίο προσανατολισμό νανοσωλήνων

Για τις τιμές που παίρνει κάθε παράμετρος θεωρήθηκε μια κατανομή ώστε να χρησιμοποιηθούν οι τιμές των πινάκων **A** και **B** με την ακολουθία Sobol ως τα ποσοστιαία σημεία από τα οποία προκύπτουν οι τιμές των παραμέτρων για κάθε προσομοίωση. Κριτήριο για την επιλογή των παραμέτρων αποτέλεσε η σχετικά ομαλή διασπορά γύρω από τη μέση τιμή. Έτσι χρησιμοποιήθηκε η κανονική κατανομή για παραμέτρους που μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές (ή που βάση της μέσης τιμής και της διασποράς τους δεν υπήρχε κίνδυνος να πάρουν αρνητικές τιμές) και η κατανομή Weibull για όσες παίρνουν μόνο θετικές τιμές. Για το πρώτο μοντέλο τέθηκαν:

- i.  $V_f \rightarrow W(0.06, 3)$  [%]
- ii. ISS  $\rightarrow$  N(100, 30) [MPa]
- iii.  $D_{slip} \rightarrow W(10, 3)$  [GPa/nm]
- iv.  $D_{slip}' \rightarrow W(0.5, 3)$  [GPa/nm]

ενώ για το δεύτερο τέθηκαν οι ίδιες κατανομές και επιπλέον:

v. orientation  $\rightarrow$  N(0, 25) [degrees]

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι ο οπλισμός με νανοσωλήνες άνθρακα γίνεται κατά μέσο όρο με έναν όγκο ίσο με το 6% του συνολικού όγκου του νανοσύνθετου υλικού. Επίσης, για το δεύτερο μοντέλο, η κατά μέσο όρο απόκλιση της διεύθυνσης του άξονα των νανοσωλήνων από την οριζόντια διεύθυνση είναι μηδενική.

Έτσι για με βάση όσα αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα είναι δυνατός ο υπολογισμός των δεικτών ευαισθησίας S<sub>i</sub> και S<sub>Ti</sub> για κάθε παράμετρο. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να γίνουν N προσομοιώσεις, παίρνοντας ως δεδομένα τις τιμές που προκύπτουν από τον πίνακα **A**, άλλες N προσομοιώσεις για τιμές δεδομένων από τον πίνακα **B** και άλλες N προσομοιώσεις για κάθε μία από τις k προς ανάλυση παραμέτρους με τις τιμές από τον πίνακα **A** για όλες τις παραμέτρους εκτός από αυτήν που διερευνάται κάθε φορά, η τιμή της οποίας θα προκύπτει από τον πίνακα **B**. Συνολικά δηλαδή θα πρέπει να γίνουν 6N προσομοιώσεις για το πρώτο μοντέλο και 7N για το δεύτερο. Ο αριθμός N των προσομοιώσεων είναι κομβικής σημασίας για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της ανάλυσης ευαισθησίας. Για N=10<sup>5</sup> τα αποτελέσματα θεωρούνται απολύτως ικανοποιητικά και δε χρειάζονται περισσότερες προσομοιώσεις. Παρ' όλα αυτά λόγω του αυξημένου υπολογιστικού κόστους και της σχετικώς ικανοποιητικής προσέγγισης των τιμών των δεικτών ευαισθησίας τέθηκε N=10<sup>4</sup>. Έγιναν δηλαδή 6x10<sup>4</sup> προσομοιώσεις για το πρώτο μοντέλο και 7x10<sup>4</sup> για το δεύτερο.

Για κάθε προσομοίωση αντλήθηκαν ως αποτελέσματα η μέγιστη ομογενοποιημένη τάση στη διεύθυνση της επιβαλλόμενης μακροσκοπικής παραμόρφωσης (σ<sub>max</sub>), το εμβαδόν του βρόχου υστέρησης μετά από τη φόρτιση εναλλασσόμενου προσήμου (Α) και η σταθερά απόσβεσης (ξ). Με αυτούς τους τρείς [10<sup>4</sup>x6] (ή [10<sup>4</sup>x7]) πίνακες αποτελεσμάτων και με χρήση των σχέσεων (5.1), (5.2), (5.8) και (5.9) υπολογίστηκαν οι δείκτες επιρροής S<sub>i</sub> και συνολικής επιρροής S<sub>Ti</sub> για κάθε μία από τις παραμέτρους.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6°: Αποτελέσματα και συζήτηση

## 6.1 Αποτελέσματα και συμπεράσματα

Εξετάζοντας αρχικά την περίπτωση τυχαίου προσανατολισμού των νανοσωλήνων άνθρακα εντός της πολυμερικής μήτρας, τα αποτελέσματα για τους δείκτες της ανάλυσης ευαισθησίας δίνονται στους παρακάτω πίνακες και γραφήματα.

	σn	nax	l l	4	ξ		
	Si	Sti	Si	Sti	Si	Sti	
Vf	0.93108	0.95975	0.40701	0.48622	0.08814	0.12292	
ISS	0.01475	0.01511	0.05258	0.06106	0.06252	0.07792	
Dslip	0.00009	0.00022	0.01065	0.01116	0.01246	0.01180	
Dslip <sup>1</sup>	0.02492	0.06907	0.45978	0.57196	0.80578	0.87222	



Γράφημα 6.1 Δείκτες ευαισθησίας της μέγιστης τάσης στους τέσσερις παράγοντες



Γράφημα 6.2 Δείκτες ευαισθησίας του εμβαδού βρόχου υστέρησης στους τέσσερις παράγοντες



Γράφημα 6.3 Δείκτες ευαισθησίας της σταθεράς απόσβεσης στους τέσσερις παράγοντες

Από τα αποτελέσματα μπορεί να παρατηρηθεί η πολύ μεγάλη επιρροή που έχει η διασπορά της τιμής της παραμέτρου του volume fraction στη διασπορά της μέγιστης τάσης. Πρακτικά είναι η παράμετρος που μέσω της διασποράς της ελέγχει τη διασπορά της μέγιστης τάσης. Παρατηρείται επίσης η πολύ μικρή συμμετοχή αυτού του παράγοντα με όρους συνδιασποράς με τους υπόλοιπους στη διασπορά της τάσης, αφού ο δείκτης  $S_{Ti}$  είναι ελάχιστα μεγαλύτερος από τον  $S_i$ . Η τελευταία αυτή παρατήρηση ισχύει και για τον παράγοντα ISS που ούτως ή άλλως η συμμετοχή του στη διασπορά της μέγιστης τάσης είναι μηδαμινή. Δεν ισχύει το ίδιο όμως για τους παράγοντες  $D_{slip}$  και  $D_{slip}$  αφού μπορεί η επιρροή τους ακόμα και με την αλληλεπίδραση με τους άλλους παράγοντες να είναι μικρή είναι όμως υπερδιπλάσια της αντίστοιχης χωρίς αλληλεπίδραση. Αυτό είναι λογικό αφού για να μεταφραστεί μια αλλαγή στις τάσεις που αναπτύσσονται στις συνεκτικές ζώνες (λόγω αλλαγής σε κάποια από τις κλίσεις του νόμου υλικού της) σε αλλαγή στις ομογενοποιημένες τάσεις απαιτείται μεγάλος αριθμός νανοσωλήνων και επομένως είναι κρίσιμη η αλληλεπίδραση με τον στη διαστορα για V<sub>f</sub>.

Από τα αποτελέσματα για το εμβαδόν του βρόχου υστέρησης φαίνεται ότι στη διασπορά των τιμών του συνεισφέρουν σχεδόν αποκλειστικά και σχεδόν εξίσου οι παράμετροι V<sub>f</sub> και D<sub>slip</sub>'. Αποτέλεσμα αναμενόμενο αφού η το εμβαδόν του βρόχου εκφράζει την απορρόφηση ενέργειας από το σύστημα για έναν κύκλο φόρτισης. Η ενέργεια όμως απορροφάται κατά την ολίσθηση μεταξύ των δύο φάσεων του σύνθετου υλικού επομένως διαφοροποιείται ανάλογα με τη διαφοροποίηση του αριθμού των νανοσωλήνων και του νόμου υλικού της διεπιφάνειας μετά την ολίσθηση. Ένα στοιχείο που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι οι δείκτες του παράγοντα ISS. Η παράμετρος φαίνεται να συνεισφέρει σε ένα μικρό βαθμό στη διασπορά του εμβαδού αλλά σίγουρα όχι όσο θα αναμένονταν δεδομένου ότι θεωρητικά αποτελεί το κριτήριο για τη μετάβαση στο δεύτερο κλάδο του νόμου υλικού. Η παρατήρηση αυτή δίνει ένα πρώτο στοιχείο για κάτι που θα παρατηρηθεί πιο έντονα στα αποτελέσματα του δεύτερου μοντέλου και εν πολλοίς θα καταρρίψει την παραπάνω θεώρηση. Φαίνεται επίσης μια λίγο μεγαλύτερη συμμετοχή των όρων της διασποράς μεγαλύτερης τάξης, κυρίως των δύο κυρίαρχων παραμέτρων, γεγονός που οφείλεται στη λογική μεταξύ τους αλληλεπίδραση.

Στα αποτελέσματα της σταθεράς απόσβεσης φαίνεται να ενισχύεται ακόμη περισσότερο ο ρόλος της διασποράς του παράγοντα D<sub>slip</sub>'. Αξιοσημείωτο ότι ο παράγοντας δε συνεισφέρει σε καμία περίπτωση στη διασπορά του ξ όσο συνεισέφερε σε εκείνες της σ<sub>max</sub> και του Α. Αυτό οφείλεται στον τύπο με τον οποίο υπολογίζεται η σταθερά ξ (σχέση (4.2), όπου το εμβαδόν του βρόχου εμφανίζεται στον αριθμητή και η μέγιστη τάση στον παρονομαστή με αποτέλεσμα μια μερική "αλληλοαναίρεση" της επιρροής της διασποράς του συγκεκριμένου παράγοντα.

	σn	าลx	ŀ	4	ξ		
	Si	Sti	Si	Sti	Si	Sti	
Vf	0.58957	0.64781	0.16751	0.26058	0.01606	0.04506	
orientation	0.31871	0.38362	0.37343	0.49068	0.32944	0.41044	
ISS	0.00562	0.04947	0.03106	0.10296	0.03178	0.08627	
Dslip	0.01471	0.03833	0.01512	0.06197	0.00976	0.04073	
Dslip'	0.02927	0.07090	0.28568	0.39540	0.53131	0.61582	

Στη συνέχεια παρατίθενται ο πίνακας και τα γραφήματα με τα αποτελέσματα για την περίπτωση του ενιαίου προσανατολισμού των νανοσωλήνων άνθρακα.



Γράφημα 6.4 Δείκτες ευαισθησίας της μέγιστης τάσης στους πέντε παράγοντες



Γράφημα 6.5 Δείκτες ευαισθησίας του εμβαδού βρόχου υστέρησης στους πέντε παράγοντες



Γράφημα 6.6 Δείκτες ευαισθησίας της σταθεράς απόσβεσης στους πέντε παράγοντες

Ήδη από τα αποτελέσματα της διασποράς μέγιστης τάσης φαίνεται η μεγάλη συμμετοχή του όρου διασποράς του προσανατολισμού των νανοσωλήνων. Μεγαλύτερη όπως και στην περίπτωση του τυχαίου προσανατολισμού είναι η συμβολή του παράγοντα V<sub>f</sub>. Σε σχέση με το προηγούμενο μοντέλο παρατηρείται μια σχετική αύξηση της διαφοράς των δεικτών S<sub>Ti</sub> από τους αντίστοιχους σε αυτούς S<sub>i</sub> κυρίως σε ότι αφορά των παράγοντα ISS. Αρχίζει επομένως να διαφαίνεται μια αλληλεπίδραση του παράγοντα του προσανατολισμού με τους υπόλοιπους μεγαλύτερη από τις αλληλεπιδράσεις που υπήρχαν στο πρώτο μοντέλο.

Παρόμοια η εικόνα και στα αποτελέσματα για το εμβαδόν του βρόχου υστέρησης. Η σχέση ανάμεσα στη σπουδαιότητα της συμβολής κάθε παράγοντα στη διασπορά διατηρείται αλλά

προστίθεται και ο παράγοντας του προσανατολισμού που είναι αυτός με τη μεγαλύτερη συμβολή. Πλέον δηλαδή η βασικοί παράγοντες που διαμορφώνουν τη διασπορά του εμβαδού είναι ο V<sub>f</sub> o orientation και ο  $D_{slip}$ . Δεδομένης και της μεγαλύτερης συμβολής του παράγοντα ISS με όρους διασποράς ανώτερης τάξης παρά με τη διασπορά πρώτης τάξης πως ο καθοριστικός παράγοντας για την ολίσθηση δεν είναι τόσο ο ISS (τουλάχιστον όχι γι' αυτό το επιβαλλόμενο διάνυσμα ομογενοποιημένων παραμορφώσεων) όσο ο προσανατολισμός των νανοσωλήνων.

Η παραπάνω διαπίστωση μπορεί να επιβεβαιωθεί και από το σχήμα 6.1 όπου εμφανίζονται τα διαγράμματα μακροσκοπικών τάσεων-παραμορφώσεων του αντιπροσωπευτικού όγκου για δύο διαφορετικά σετ δεδομένων. Στο πρώτο σετ δεδομένων έχει τεθεί οριζόντιος προσανατολισμός των νανοσωλήνων (παράλληλα με τη διεύθυνση της επιβαλλόμενης παραμόρφωσης). Ο παράγοντας ISS έχει τεθεί ίσος με το 0.95 ποσοστιαίο σημείο της κατανομής του. Αντιθέτως στο δεύτερο σετ δεδομένων ο προσανατολισμός των νανοσωλήνων είναι κατακόρυφος (κάθετα στη διεύθυνση της επιβαλλόμενης φόρτισης) και ο παράγοντας ISS ίσος με το 0.05 ποσοστιαίο σημείο της κατανομής του. Όλες οι τιμές των υπολοίπων παραμέτρων τέθηκαν ίσες με τις μέσες τιμές των κατανομών τους τόσο για το πρώτο όσο και για το δεύτερο σετ δεδομένων. Φαίνεται ότι για το δεύτερο σετ δεδομένων σε αντίθεση με το πρώτο δε δημιουργείται βρόχος υστέρησης άρα δεν ολισθαίνουν οι νανοσωλήνες στην πολυμερική μήτρα. Επομένως παρά τη δραστική μείωση της ISS σε σχέση με την πρώτη προσομοίωση η μεγάλη απόκλιση του προσανατολισμού των νανοσωλήνων από τη διεύθυνση παραμόρφωσης του αντιπροσωπευτικού όγκου οδηγεί σε πολύ λιγότερες (πρακτικά μηδενικές) ολισθήσεις. Επιβεβαιώνεται έτσι η διαφαινόμενος πολύ μεγαλύτερος ρόλος του προσανατολισμού από την ISS ως κριτήριο ολίσθησης και επομένως ενεργοποίησης της παραμέτρου Dsip' με τη μεγάλη συμβολή στη διασπορά των αποτελεσμάτων των εμβαδών του βρόχου.

Αντίστοιχα συμπεράσματα μπορούν να αντληθούν και από τα αποτελέσματα για τη σταθερά απόσβεσης. Βασικές διαφοροποιήσεις από το πρώτο μοντέλο είναι και πάλι η μεγάλη συμβολή του παράγοντα του προσανατολισμού στη διασπορά, καθώς και η αύξηση της συμβολής των όρων διασποράς μεγαλύτερης τάξης. Ομοίως όπως και στο προηγούμενο μοντέλο η συμβολή του παράγοντα V<sub>f</sub> μειώνεται σημαντικά σε σχέση με τα αποτελέσματα της μέγιστης τάσης και του εμβαδού βρόχου.



Σχήμα 6.1 Καμπύλες ομογενοποιημένων τάσεων-παραμορφώσεων για διαφορετικά δεδομένα

Στη συνέχεια παρουσιάζονται γραφήματα διασποράς προκειμένου να διαπιστωθεί πώς κατανέμονται τα αποτελέσματα για σ<sub>max</sub>, Α και ξ συναρτήσει των τιμών που παίρνουν οι πέντε παράμετροι από τους πίνακες **Α** και **Β**. Από τα γραφήματα αυτά αναμένεται να φανεί μια πιο συγκεκριμένη τάση στη συσχέτιση κάθε παράγοντα με τα αποτελέσματα για τα οποία η ανάλυση ευαισθησίας έδειξε ότι υπάρχει έντονη επιρροή. Αντιθέτως όπου η παραπάνω ανάλυση έδειξε μικρή επιρροή αναμένεται τα αποτελέσματα να επηρεάζονται περισσότερο από τις τιμές των υπολοίπων παραγόντων και άρα να είναι διάσπαρτα με πιο τυχαίο τρόπο.



Γραφήματα 6.7 Γράφημα διασποράς (α) της μέγιστης τάσης (β) του εμβαδού βρόχου και (γ) της σταθεράς απόσβεσης συναρτήσει του volume fraction

Από τα γραφήματα που αφορούν τον παράγοντα V<sub>f</sub> φαίνεται η αύξηση τόσο του εμβαδού του βρόχου όσο και ακόμη πιο ξεκάθαρα της μέγιστης τάσης, με την αύξηση του ποσοστού του όγκου του υλικού που καταλαμβάνεται από νανοσωλήνες. Αντίθετα για τη σταθερά απόσβεσης δεν παρατηρείται κάποια τόσο συγκεκριμένη συνάρτηση των αποτελεσμάτων με τον παράγοντα, όπως άλλωστε αναμενόταν από τη μικρή επιρροή που έδειξε η ανάλυση ευαισθησίας.



Γραφήματα 6.8 Γράφημα διασποράς (α) της μέγιστης τάσης (β) του εμβαδού βρόχου και (γ) της σταθεράς απόσβεσης συναρτήσει του προσανατολισμού των νανοσωλήνων

Τα γραφήματα του προσανατολισμού αφ' ενός δείχνουν πώς όσο λιγότερο αποκλίνει η διεύθυνση των αξόνων των νανοσωλήνων από τη διεύθυνση της παραμόρφωσης τόσο μεγαλύτερες τιμές προκύπτουν για όλα τα εξεταζόμενα χαρακτηριστικά του υλικού. Αφ' ετέρου η ξεκάθαρη αυτή τάση των αποτελεσμάτων επιβεβαιώνει την ανάλυση ευαισθησίας σε ότι αφορά την έντονη επιρροή του συγκεκριμένου παράγοντα σε αυτά.



Γραφήματα 6.9 Γράφημα διασποράς (α) της μέγιστης τάσης (β) του εμβαδού βρόχου και (γ) της σταθεράς απόσβεσης συναρτήσει της ISS



Γραφήματα 6.10 Γράφημα διασποράς (α) της μέγιστης τάσης (β) του εμβαδού βρόχου και (γ) της σταθεράς απόσβεσης συναρτήσει του D<sub>slip</sub>

Ο τρόπος με τον οποίο είναι διάσπαρτες οι τιμές των σmax, Α και ξ για τις διάφορες τιμές της οριακής διατμητικής τάσης που μπορεί εμφανιστεί ανάμεσα στη διεπιφάνεια των δύο φάσεων του υλικού χωρίς να υπάρξει ολίσθηση, ISS, ο οποίος δεν ακολουθεί συγκεκριμένη τάση, φανερώνει όπως και τα αποτελέσματα της ανάλυσης ευαισθησίας τη μικρή επιρροή αυτού του παράγοντα. Το ίδιο και σε ακόμη μεγαλύτερο βαθμό ισχύει και για τα γραφήματα 6.10 που αφορούν την αρχική κλίση του νόμου υλικού της διεπιφάνειας, D<sub>slip</sub>.



Γραφήματα 6.11 Γράφημα διασποράς (α) της μέγιστης τάσης (β) του εμβαδού βρόχου και (γ) της σταθεράς απόσβεσης συναρτήσει του D<sub>slip</sub>'

Από τα γραφήματα διασποράς της κλίσης του νόμου υλικού μετά την ολίσθηση, D<sub>slip</sub>' φαίνεται η μικρή επιρροή του παράγοντα στα αποτελέσματα της μέγιστης τάσης. Από τα αποτελέσματα του εμβαδού βρόχου και σταθεράς απόσβεσης επιβεβαιώνεται η μεγάλη επιρροή του παράγοντα σε αυτά τα μεγέθη όπως προέκυψε από την ανάλυση ευαισθησίας. Οι τιμές των μεγεθών αυτών τείνουν να μειώνονται όσο αυξάνεται η τιμή του D<sub>slip</sub>' και μάλιστα, ειδικά η σταθερά απόσβεσης, μειώνεται με έντονα εκθετικό τρόπο. Αιτία της αντίστροφης αυτής αναλογίας είναι ότι όσο μικρότερη είναι η κλίση D<sub>slip</sub>' τόσο μεγαλύτερη θα είναι η σχετική ολίσθηση μεταξύ των δύο φάσεων του υλικού καθώς και η συνακόλουθη απορρόφηση ενέργειας.

Ενδιαφέρον έχουν και τα γραφήματα που δείχνουν την εξέλιξη των δεικτών ευαισθησίας, τόσο των πρώτης τάξης όσο και των συνολικών, συναρτήσει του αριθμού των προσομοιώσεων. Τέτοια γραφήματα είναι το 6.12 και το 6.13 για τους δείκτες που αφορούν τη σταθερά απόσβεσης ξ, στην περίπτωση του ενιαίου προσανατολισμού των νανοσωλήνων άνθρακα.



Γράφημα 6.12 Εξέλιξη των δεικτών ευαισθησίας πρώτης τάξης της σταθεράς απόσβεσης στις πέντε παραμέτρους συναρτήσει του αριθμού προσομοιώσεων



Γράφημα 6.13 Εξέλιξη των συνολικών δεικτών ευαισθησίας της σταθεράς απόσβεσης στις πέντε παραμέτρους συναρτήσει του αριθμού προσομοιώσεων

Παρατηρείται ότι οι 10.000 επαναλήψεις αποτελούν ικανό αριθμό για τη σύγκλιση των δεικτών ευαισθησίας με ικανοποιητική ακρίβεια στις τελικές τους τιμές. Ειδικά για τους συνολικούς δείκτες ευαισθησίας φαίνεται ότι ακόμη και με 6.000 προσομοιώσεις τα αποτελέσματα θα ήταν αρκετά ακριβή.

### 6.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Έχοντας ολοκληρώσει την ανάλυση ευαισθησίας και έχοντας αντλήσει από αυτή ενδιαφέρουσες και χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τους παράγοντες που επηρεάζουν τη διασπορά των χαρακτηριστικών υστεριτικής συμπεριφοράς του νανοσύνθετου υλικού που μελετήθηκε, ανοίγεται ο δρόμος για προτάσεις με σκοπό την περαιτέρω εμβάθυνση και έρευνα στο θέμα.

Μια πρώτη σκέψη θα ήταν η επέκταση του αλγορίθμου που χρησιμοποιήθηκε, ώστε να δίνει απάντηση στα ίδια ερωτήματα στην περίπτωση της τριδιάστατης ανάλυσης. Βέβαια σε αυτή την

περίπτωση δεν πρέπει να αγνοηθεί το μεγάλο υπολογιστικό κόστος που θα προκύψει λόγω της μεγάλης αύξησης των βαθμών ελευθερίας και επακολούθως των εξισώσεων ισορροπίας του συστήματος. Άλλωστε, λόγω του μεγάλου αριθμού προσομοιώσεων που απαιτεί η ανάλυση ευαισθησίας το πρόγραμμα είναι ήδη υπολογιστικά "βαρύ". Επειδή λοιπόν αυξάνοντας το χρόνο υπολογισμού για κάθε προσομοίωση ο συνολικός χρόνος θα αυξηθεί εκθετικά, η χρήση του surrogate modelling (αντικατάσταση υπολογιστικά επίπονων προσομοιωτών με αντιπροσωπευτικά μαθηματικά μοντέλα μικρού υπολογιστικού κόστους) αποτελεί μονόδρομο.

Η βασικότερη ίσως πρόταση είναι η εισαγωγή του εργαλείου της ταυτόχρονης ανάλυσης σε πολλαπλές κλίμακες στο μοντέλο. Αυτό μπορεί να γίνει θεωρώντας ένα απλό στατικό σύστημα (πρόβολος, αμφιέρειστη δοκός) αποτελούμενο από το υλικό που εξετάστηκε, στο οποίο εφαρμόζεται μια φόρτιση. Το σύστημα λόγω του υλικού θα είναι μη γραμμικό και θα πρέπει να επιλυθεί με αντίστοιχες μεθόδους. Ο φορέας μπορεί να προσομοιωθεί με πεπερασμένα στοιχεία στη μακροσκοπική κλίμακα. Η επίλυση του συστήματος θα δώσει τις μακροσκοπικές παραμορφώσεις στα σημεία ολοκλήρωσης Gauss και αυτές θα παίξουν το ρόλο της φόρτισης των αντιπροσωπευτικών στοιχείων όγκου. Από το σημείο αυτό ξεκινάει η ανάλυση στη μικροσκοπική κλίμακα όπως έγινε στην παρούσα εργασία και ολοκληρώνεται με τον υπολογισμό ομογενοποιημένων τάσεων και νόμου υλικού σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης Gauss. Και πάλι στη μακροσκοπική κλίμακα, με ολοκλήρωση αυτών των τάσεων προκύπτουν οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο σύγκλισης της μη γραμμικής μεθόδου.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Andrea Saltelli, Paola Annoni, Francesca Campolongo, Marco Ratto, Stefano Tarantola: 'Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index', Joint Research Centre of the European Commission, Institute for the Protection and Security of the Citizen, Ispra, Italy 2009
- [2] C.Miehe, A.Koch: 'Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains', Archive of Applied Mechanics 72 (2002) 300-317, Springer-Verlag, 2002
- [3] George Soimiris: 'Multiscale analysis of nano-composites using surrogate models', PhD thesis, National Technical University of Athens, Athens 2020
- [4] I.M. Sobol: 'Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates', Institute for Mathematical Modelling of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia 2001
- [5] Michalis Fragiadakis: 'Nonlinear Analysis of Frame Structures under Seismic Loading', Lecture Notes, National Technical University of Athens, Athens 2020
- [6] Vissarion Papadopoulos, Maria Tavlaki: 'The Impact of interfacial properties on the macroscopic performance of carbon nanotubes. A FE<sup>2</sup>-based multiscale study', National Technical University of Athens, 2015
- [7] Αθανάσιος Χ. Τριανταφύλλου: 'Δομικά Υλικά', 10<sup>η</sup> Έκδοση, Πάτρα 2013
- [8] Βασίλης Μελισσιανός, Δημήτρης Βαμβάτσικος: 'Σύνθετα Υλικά, Διάλεξη 1-Εισαγωγή', Σημειώσεις Διάλεξης, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνίο, Αθήνα 2021
- [9] Γκουβιέρου Ναταλία: 'Παρασκευή και χαρακτηρισμός νανοσύνθετων πολυπροπυλενίου / τροποποιημένων νανοσωλήνων άνθρακα', Μεταπτυχιακή Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2012
- [10]Ιωάννης Γ. Ραυτογιάννης: 'Σύνθετα Υλικά, Τόμος Ι', Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2013
- [11]Μ.Παπαδρακάκης: Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων', Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2001

#### ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Ανάπτυξη κώδικα σε Matlab

Σκοπός αυτού του παραρτήματος είναι η παρουσίαση του κώδικα που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας για την υλοποίηση τις διερεύνησης που έχει περιγραφεί σε όλες τις παραπάνω ενότητες. Παρουσιάζεται το μοντέλο με τον ενιαίο προσανατολισμό των νανοσωλήνων άνθρακα.

Παρατίθεται αρχικά το κεντρικό τμήμα του προγράμματος από το οποίο καλούνται οι υπόλοιπες συναρτήσεις. Στις σειρές 4 έως 7 δημιουργούνται οι πίνακες **A** και **B** όπως περιγράφονται στην ενότητα 5.1. Στις σειρές 9 έως 22 υπολογίζονται οι πίνακες με τα μεγέθη για τα οποία γίνεται η ανάλυση ευαισθησίας (σ<sub>max</sub>, A και ξ) με τη βοήθεια της συνάρτησης CalculateDampingRatio. Τα δεδομένα για τους υπολογισμούς αντλούνται από τους πίνακες **A**, **B** και **A**<sub>b</sub><sup>(i)</sup> (για 1≤ i ≤k). Με δεδομένους αυτούς τους πίνακες στις σειρές 24 έως 34 υπολογίζονται οι δείκτες ευαισθησίας όπως περιγράφεται στην ενότητα (5.2).

```
clearvars;
1
2
   close all;
3
4 p = sobolset(2*k,'Skip',1);
5
   P = net(p,N);
6 A = P(:, 1:k);
7 B = P(:, k+1:end);
8
9 KSI = zeros(N, 2+k);
10 Area = zeros(N, 2+k);
11 maxS = zeros(N, 2+k);
12 for j = 1:N
      [KSI(j, 1), Area(j, 1), maxS(j, 1)] = CalculateDampingRatio(A(j, :));
13
14
      [KSI(j, 2), Area(j, 2), maxS(j, 2)] = CalculateDampingRatio(B(j, :));
15 end
16 for i = 1:k
17
      Abi = A;
18
      Abi(:, i) = B(:, i);
19
      for j = 1:N
20
        [KSI(j, 2+i), Area(j, 2+i), maxS(j, 2+i)] = CalculateDampingRatio(Abi(j, :));
21
      end
22 end
23
24 SiMaxS = zeros(k, 1); StiMaxS = zeros(k, 1);
25 SiArea = zeros(k, 1); StiArea = zeros(k, 1);
26 SiKSI = zeros(k, 1); StiKSI = zeros(k, 1);
27 for i = 1:k
28
      SiMaxS(i) = (sum((maxS(:, 2).*(maxS(:, 2+i)-maxS(:, 1))))/N)/var(maxS, 0, [1 2]);
29
      StiMaxS(i) = (sum((maxS(:, 1)-maxS(:, 2+i)).^2)/(2*N))/var(maxS, 0, [1 2]);
30
      SiArea(i) = (sum((Area(:, 2).*(Area(:, 2+i)-Area(:, 1))))/N)/var(Area, 0, [1 2]);
31
      StiArea(i) = (sum((Area(:, 1)-Area(:, 2+i)).^2)/(2*N))/var(Area, 0, [1 2]);
32
      SiKSI(i) = (sum((KSI(:, 2).*(KSI(:, 2+i)-KSI(:, 1))))/N)/var(KSI, 0, [1 2]);
```

33 StiKSI(i) = (sum((KSI(:, 1)-KSI(:, 2+i)).^2)/(2\*N))/var(KSI, 0, [1 2]);

34 End

\*

Η συνάρτηση CalculateDampingRatio καλείται Nxk φορές. Κάθε φορά αντιστοιχεί σε μια προσομοίωση με δεδομένα που αντιστοιχούν σε μια σειρά από ενός εκ των πινάκων **A**, **B** ή  $A_b^{(i)}$ . Αρχικά, στις σειρές 3 έως 8 τα δεδομένα αυτά που αντιστοιχούν σε πιθανότητες μετατρέπονται στα αντίστοιχα ποσοστιαία σημεία των κατανομών των παραμέτρων τους. Στη σειρά 10, οι παράμετροι της ανάλυσης χρησιμοποιούνται ως δεδομένα στην κλίση της συνάρτησης PrepareInputs η οποία επιστρέφει τη δομή δεδομένων "model" και το διάνυσμα των μακροσκοπικών παραμορφώσεων. Στη σειρά 12 υπολογίζονται η μέγιστη τάση, σ<sub>max</sub> και το εμβαδόν βρόχου υστέρησης, Α με τη βοήθεια της συνάρτησης Homogenization. Στη σειρά 13 υπολογίζεται η σταθερά απόσβεσης, ξ από τη σχέση (4.2).

```
1 function [ksi, A, maxS] = CalculateDampingRatio(ParameterProbabilities)
```

```
2
```

```
3 Parameters = zeros(5, 1);
```

4 Parameters(1) = wblinv(ParameterProbabilities(1), 0.06, 3); % Vf

```
5 Parameters(2) = norminv(ParameterProbabilities(2), 0, 25); % orientation
```

6 Parameters(3) = norminv(ParameterProbabilities(3), 100, 30); %ISS

```
7 Parameters(4) = wblinv(ParameterProbabilities(4), 10, 3); %ke
```

```
8 Parameters(5) = wblinv(ParameterProbabilities(5), 0.5, 3); %kt
```

```
9
10 [model, e] = PrepareInputs(Parameters);
```

```
10 [model, e] = PrepareInputs(Parameters);
11
```

```
12 [s, C, A, maxE, maxS] = Homogenization(model, e);
```

```
13 ksi = A/(2*pi()*maxS*maxE);
```

14 15 End

\_\_\_\_\_

Στη συνάρτηση PrepareInputs δίνονται και υπολογίζονται δεδομένα του μοντέλου όπως η γεωμετρία και τα χαρακτηριστικά υλικού των τετραπλευρικών στοιχείων πολυμερούς (σειρές 6-17), των στοιχείων δοκού για τους νανοσωλήνες άνθρακα (σειρές 21-29) και για τη διεπιφάνεια (σειρές 31-34) των δύο φάσεων. Ορισμένα από αυτά τα στοιχεία είναι οι παράμετροι της ανάλυσης ευαισθησίας που δίνονται ως δεδομένα της συνάρτησης στην κλίση της. Στις σειρές 36-47 καλούνται οι συναρτήσεις που δημιουργούν τα στοιχεία (επίπεδης έντασης ή δοκού) του μοντέλου και τους κόμβους τους. Στη σειρά 49 δίνεται το διάνυσμα των μακροσκοπικών παραμορφώσεων του αντιπροσωπευτικού όγκου.

Ουσιαστικά, στόχος της δομής δεδομένων model, είναι η τακτοποίηση όλων των δεδομένων του μοντέλου σε πίνακες και διανύσματα από τα οποία θα μπορούν να ανακτηθούν όταν χρειαστεί στην εκτέλεση του προγράμματος.

1. function [model, e] = PrepareInputs(Parameters)

2.

3. W = 200;

```
4. H = 200;
```

5.

6. Ws = 20;

7. Hs = 20;

```
numEIX = round(W/Ws);
numElY = round(H/Hs);
10. numEl = numElX*numElY;
11. Ws = W/numElX;
12. Hs = H/numEIY;
13. numNodX = numElX+1;
14. numNodY = numElY+1;
15. thicknessQ = min(Ws,Hs)/5;
16. EmodQ = 4;
17. vpoissonQ = 0.4;
18.
19. V = W*H*thicknessQ;
20.
21. L=80;
22. theta = Parameters(2);
23. thicknessCNT=0.34;
24. EAeq=694.77;
25. Eleq=100.18;
26. deq=sqrt(8*Eleq/EAeq-thicknessCNT^2);
27. Vcnt = L*pi()*deq*thicknessCNT;
28. Vf = Parameters(1);
29. numCNTs = round(Vf*V/Vcnt);
30.
31. Dslip1 = Parameters(4);
32. Dslip2 = Parameters(5);
33. Dnormal = 150;
34. ISS = Parameters(3)/1000; %GPa
35.
36. model.nodes.quad = MakeQuadNodes(numNodX, numNodY, Ws, Hs);
37. model.elements.guad = MakeQuadElements(numEl, numElX, numElY, numNodX, Ws, Hs,
   thicknessQ, EmodQ, vpoissonQ);
38. quadElements = model.elements.quad.size;
39. quadID = model.elements.quad.ID;
40. guadConn = model.elements.guad.connectivity;
41.
42. model.nodes.beam = MakeBeamNodes(numCNTs, theta, L, W, H, model.nodes.quad,
   quadID, quadConn);
43. hostElement = model.nodes.beam.hostElement;
44. model.elements.beam = MakeBeamElements(numCNTs, L, theta, thicknessCNT, EAeq, Eleq,
   deq, quadElements, hostElement);
45. beamElements = model.elements.beam.size;
46.
47. model.elements.cohesiveZone = MakeCohesiveZoneElements(Dslip1, Dslip2, Dnormal, ISS,
   quadElements, beamElements);
48.
49. e = [0.06; -0.024; 0];
50.
51. End
```

Η συνάρτηση MakeQuadNodes δημιουργεί τους κόμβους των τετραπλευρικών στοιχείων. Με δεδομένα τους αριθμούς των κόμβων στις δύο διευθύνσεις και τις αντίστοιχες διαστάσεις των τετραπλευρικών στοιχείων δημιουργεί ένα διάνυσμα με τους αύξοντες αριθμούς των κόμβων, δύο διανύσματα με τις συντεταγμένες τους κατά x και y στο καθολικό σύστημα, καθώς και ένα στοιχείο με τον αριθμό του συνόλου των κόμβων.

```
1. function guadNodes = MakeQuadNodes(numNodX, numNodY, Ws, Hs)
  2.
  totNodes = numNodX*numNodY;
  4.
  quadNodes.ID = zeros(totNodes, 1);
  guadNodes.xCoordinate = zeros(totNodes, 1);
  quadNodes.yCoordinate = zeros(totNodes, 1);
  8.
  9. inode = 0;
  10. for inodeY = 1:numNodY
      for inodeX = 1:numNodX
  11.
  12.
        inode = inode+1;
  13.
        quadNodes.ID(inode, 1) = inode;
  14.
        quadNodes.xCoordinate(inode, 1) = (inodeX-1)*Ws;
  15.
        quadNodes.yCoordinate(inode, 1) = (inodeY-1)*Hs;
  16.
      end
  17. End
  18.
  19. quadNodes.size = inode;
  20.
  21. End
_____
```

Η συνάρτηση MakeQuadElements δημιουργεί τα στοιχεία επίπεδης έντασης για τη μοντελοποίηση της πολυμερικής μήτρας. Δημιουργούνται διανύσματα για το ύψος, το πλάτος, το πάχος, το μέτρο ελαστικότητας και το συντελεστή Poisson κάθε στοιχείου. Δημιουργείται επίσης ένας πίνακας συνδεσιμότητας με τέσσερις στήλες. Η πρώτη στήλη περιέχει τον αύξοντα αριθμό του κάτω αριστερά κόμβου του στοιχείου, η δεύτερη του κάτω δεξιά, η τρίτη του πάνω δεξιά και η τέταρτη του πάνω αριστερά.

- 1. function quadElements = MakeQuadElements(numEl, numElX, numElY, numNodX, Ws, Hs, thicknessQ, EmodQ, vpoissonQ)
- 2.
- 3. iEl = 0;
- 4. for iElY = 1:numElY
- 5. for iEIX = 1:numEIX
- 6. iEl = iEl+1;
- quadElements.connectivity(iEl, 1) = (iElX-1)+1+(iElY-1)\*numNodX;
- 8. quadElements.connectivity(iEl, 2) = (iElX-1)+2+(iElY-1)\*numNodX;
- 9. quadElements.connectivity(iEl, 3) = (iElX-1)+numNodX+2+(iElY-1)\*numNodX;
- 10. quadElements.connectivity(iEl, 4) = (iElX-1)+numNodX+1+(iElY-1)\*numNodX;
- 11. quadElements.ID(iEl, 1) = iEl;
- 12. quadElements.geometry.width(iEl, 1) = Ws;
- 13. quadElements.geometry.height(iEl, 1) = Hs;

14. quadElements.geometry.thickness(iEl, 1) = thicknessQ;
15. quadElements.material.youngsModulus(iEl, 1) = EmodQ;
16. quadElements.material.poissonsRatio(iEl, 1) = vpoissonQ;
17. end
18. end
19. quadElements.size = iEl;
20.
21. End

Κατ' αντιστοιχία με την MakeQuadNodes, η συνάρτηση MakeBeamNodes φτιάχνει τους κόμβους των στοιχείων δοκού. Η συντεταγμένες κάθε κόμβου τίθενται κατόπιν μιας επαναληπτικής διαδικασίας που εξασφαλίζει ότι θα μπορεί να υπάρξει και δεύτερος κόμβος σε απόσταση L (μήκος νανοσωλήνα) υπό γωνία θ (σχετική παράμετρος της ανάλυσης ευαισθησίας) εντός του αντιπροσωπευτικού όγκου. Δημιουργείται επίσης ένα διάνυσμα το οποίο κρατάει για κάθε κόμβο στοιχείου δοκού τον αύξοντα αριθμό του στοιχείου επίπεδης έντασης που το φιλοξενεί.

- function beamNodes = MakeBeamNodes(numCNTs, theta, L, W, H, quadNodes, quadID, quadConn)
- 2.
- 3. quadNodesNum = quadNodes.size;
- quadNodeX = quadNodes.xCoordinate;
- 5. quadNodeY = quadNodes.yCoordinate;
- 6. quadNodeID = quadNodes.ID;
- 7. totNodes = 2\*numCNTs;
- 8.
- 9. beamNodes.ID = zeros(totNodes, 1);
- 10. beamNodes.xCoordinate = zeros(totNodes, 1);
- 11. beamNodes.yCoordinate = zeros(totNodes, 1);
- 12. beamNodes.hostElement = zeros(totNodes, 1);
- 13.
- 14. inode = 0;
- 15. for ibeam = 1:numCNTs
- 16. % 1st Node of a CNT
- 17. inode = inode+1;
- 18. beamNodes.ID(inode, 1) = quadNodesNum+inode;
- 19. wrongPosition = 1;
- 20. while wrongPosition == 1
- 21. wrongPosition = 0;
- 22. beamNodes.xCoordinate(inode, 1) = rand\*W;
- 23. beamNodes.yCoordinate(inode, 1) = rand\*H;
- 24. randIndex = rand();
- 25. if randIndex > 0.5
- 26. secondNode = 2;
- 27. else
- 28. secondNode = 1;
- 29. end
- 30. if secondNode == 2
- 31. beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1) = beamNodes.xCoordinate(inode,

```
1)+L*cosd(theta);
```

- 32. beamNodes.yCoordinate(inode+1, 1) = beamNodes.yCoordinate(inode, 1)+L\*sind(theta);
- 33. if beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1) > W || beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1) <
   0 ||...</pre>
- 34. beamNodes.yCoordinate(inode+1, 1) > H || beamNodes.yCoordinate(inode+1, 1) <
  0</pre>
- 35. beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1) = beamNodes.xCoordinate(inode, 1)-L\*cosd(theta);
- 36. beamNodes.yCoordinate(inode+1, 1) = beamNodes.yCoordinate(inode, 1)-L\*sind(theta);
- 37. [beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1), beamNodes.xCoordinate(inode, 1)] =
   deal(beamNodes.xCoordinate(inode, 1), beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1));

- 40. beamNodes.yCoordinate(inode, 1) > H || beamNodes.yCoordinate(inode, 1) < 0</li>
  41. wrongPosition=1;
- 42. end
- 43. end
- 43. else
- 45. beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1) = beamNodes.xCoordinate(inode, 1)-L\*cosd(theta);
- 46. beamNodes.yCoordinate(inode+1, 1) = beamNodes.yCoordinate(inode, 1)-L\*sind(theta);
- 47. if beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1) > W || beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1) <
   0 ||...</pre>
- 48. beamNodes.yCoordinate(inode+1, 1) > H || beamNodes.yCoordinate(inode+1, 1) <
  0</pre>
- 49. beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1) = beamNodes.xCoordinate(inode, 1)+L\*cosd(theta);
- 50. beamNodes.yCoordinate(inode+1, 1) = beamNodes.yCoordinate(inode, 1)+L\*sind(theta);
- 51. if beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1) > W || beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1) < 0 ||...
- 52. beamNodes.yCoordinate(inode+1, 1) > H || beamNodes.yCoordinate(inode+1, 1) < 0
- 53. wrongPosition=1;
- 54. end
- 55. else
- 56. [beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1), beamNodes.xCoordinate(inode, 1)] = deal(beamNodes.xCoordinate(inode, 1), beamNodes.xCoordinate(inode+1, 1));
- 57. [beamNodes.yCoordinate(inode+1, 1), beamNodes.yCoordinate(inode, 1)] = deal(beamNodes.yCoordinate(inode, 1), beamNodes.yCoordinate(inode+1, 1));
- 58. end
- 59. end
- 60. end
- 61.
- 62. NodesDistance = zeros(quadNodesNum, 1);
- 63. for iQuadNode =1:quadNodesNum

- 64. NodesDistance(iQuadNode) = sqrt((beamNodes.xCoordinate(inode, 1)quadNodeX(iQuadNode))^2 + (beamNodes.yCoordinate(inode, 1)quadNodeY(iQuadNode))^2);
- 65. end
- 66.
- 67. NearestQuadNode = find(NodesDistance==min(NodesDistance), 1);
- 68. nqnID = quadNodeID(NearestQuadNode);
- 69.
- 70. if beamNodes.xCoordinate(inode) < quadNodeX(NearestQuadNode) && beamNodes.yCoordinate(inode) < quadNodeY(NearestQuadNode)
- 71. beamNodes.hostElement(inode, 1) = quadID(quadConn(:, 3)==nqnID);
- 72. elseif beamNodes.xCoordinate(inode) < quadNodeX(NearestQuadNode) && beamNodes.yCoordinate(inode) > quadNodeY(NearestQuadNode)
- 73. beamNodes.hostElement(inode, 1) = quadID(quadConn(:, 2)==nqnID);
- 74. elseif beamNodes.xCoordinate(inode) > quadNodeX(NearestQuadNode) && beamNodes.yCoordinate(inode) > quadNodeY(NearestQuadNode)
- 75. beamNodes.hostElement(inode, 1) = quadID(quadConn(:, 1)==nqnID);
- 76. elseif beamNodes.xCoordinate(inode) > quadNodeX(NearestQuadNode) && beamNodes.yCoordinate(inode) < quadNodeY(NearestQuadNode)
- 77. beamNodes.hostElement(inode, 1) = quadID(quadConn(:, 4)==nqnID);
- 78. end
- 79.
- 80. % 2nd Node of the CNT
- 81. inode = inode+1;
- 82. beamNodes.ID(inode, 1) = quadNodesNum+inode;
- 83. NodesDistance = zeros(quadNodesNum, 1);
- 84. for iQuadNode =1:quadNodesNum
- 85. NodesDistance(iQuadNode) = sqrt((beamNodes.xCoordinate(inode, 1)quadNodeX(iQuadNode))^2 + (beamNodes.yCoordinate(inode, 1)quadNodeY(iQuadNode))^2);
- 86. end
- 87.
- 88. NearestQuadNode = find(NodesDistance==min(NodesDistance), 1);
- 89. nqnID = quadNodeID(NearestQuadNode);
- 90. if beamNodes.xCoordinate(inode) < quadNodeX(NearestQuadNode) && beamNodes.yCoordinate(inode) < quadNodeY(NearestQuadNode)
- 91. beamNodes.hostElement(inode, 1) = quadID(quadConn(:, 3)==nqnID);
- 92. elseif beamNodes.xCoordinate(inode) < quadNodeX(NearestQuadNode) && beamNodes.yCoordinate(inode) > quadNodeY(NearestQuadNode)
- 93. beamNodes.hostElement(inode, 1) = quadID(quadConn(:, 2)==nqnID);
- 94. elseif beamNodes.xCoordinate(inode) > quadNodeX(NearestQuadNode) && beamNodes.yCoordinate(inode) > quadNodeY(NearestQuadNode)
- 95. beamNodes.hostElement(inode, 1) = quadID(quadConn(:, 1)==nqnID);
- 96. elseif beamNodes.xCoordinate(inode) > quadNodeX(NearestQuadNode) && beamNodes.yCoordinate(inode) < quadNodeY(NearestQuadNode)
- 97. beamNodes.hostElement(inode, 1) = quadID(quadConn(:, 4)==nqnID);
- 98. end
- 99. end
- 100.
- 101. beamNodes.size = inode;
- 102.

103. end

Η συνάρτηση MakeBeamElements δημιουργεί τα στοιχεία δοκού για την προσωμοίωση των νανοσωλήνων άνθρακα. Δημιουργούνται διανύσματα για το μήκος, τον προσανατολισμό, την εξωτερική διάμετρο και τους όρους δυστένειας και δυσκαμψίας (ενότητα 2.3.3) του κάθε στοιχείου. Ο πίνακας συνδεσιμότητας σε αυτή την περίπτωση έχει δυο στήλες. Στην πρώτη βρίσκεται ο αύξων αριθμός του στοιχείου επίπεδης έντασης που φιλοξενεί τον κόμβο αρχής του στοιχείου και στη δεύτερη εκείνος του στοιχείου που φιλοξενεί τον κόμβο τέλους.

- function beamElements = MakeBeamElements(numCNTs, L, theta, thicknessCNT, EAeq, Eleq, deq, quadElements, hostElement)
- 2.
- 3. beamElements.size = numCNTs;
- 4. beamElements.ID = zeros(numCNTs, 1);
- 5. beamElements.geometry.length = L\*ones(numCNTs, 1);
- 6. beamElements.geometry.orientation = theta\*ones(numCNTs, 1);
- 7. beamElements.geometry.diameter = (deq+thicknessCNT)\*ones(numCNTs, 1);
- 8. beamElements.material.axialResistance = EAeq\*ones(numCNTs, 1);
- 9. beamElements.material.bendingResistance = Eleq\*ones(numCNTs, 1);
- 10. beamElements.connectivity = zeros(numCNTs, 2);
- 11.
- beamElements.connectivity(:, 1) = hostElement(1:2:2\*numCNTs);
- 13. beamElements.connectivity(:, 2) = hostElement(2:2:2\*numCNTs);
- 14. for iEl = 1:numCNTs
- 15. beamElements.ID(iEl, 1) = quadElements+iEl;
- 16. end
- 17.
- 18. end

\*\*\*\*\*

\_\_\_\_\_

Τελειώνοντας με τη δομή δεδομένων model, η συνάρτηση MakeCohesiveZoneElemenets δημιουργεί τα πλασματικά στοιχεία δοκού της συνεκτικής ζώνης του κάθε νανοσωλήνα. Δημιουργούνται διανύσματα για τα στοιχεία του νόμου υλικού αυτής (αρχική και τελική αντίσταση σε ολίσθηση, αντίσταση κάθετα στη διεύθυνση της ολίσθησης, οριακή τάση ολίσθησης) όπως περιγράφονται στην ενότητα 2.4.

- function cohesiveZoneElements = MakeCohesiveZoneElements(Dslip1, Dslip2, Dnormal, ISS, quadElements, beamElements)
- 2.
- 3. cohesiveZoneElements.ID = zeros(beamElements, 1);
- 4. cohesiveZoneElements.material.tangentModuli = zeros(beamElements, 2);
- 5. cohesiveZoneElements.material.InterfacialShearStress = zeros(beamElements, 1);
- 6. cohesiveZoneElements.material.slipCheck = zeros(beamElements, 1);
- 7.
- 8. for iEl = 1:beamElements
- 9. cohesiveZoneElements.ID(iEl) = quadElements+iEl;
- 10. cohesiveZoneElements.material.tangentModuli(iEl, 1) = Dslip1;
- 11. cohesiveZoneElements.material.tangentModuli(iEl, 2) = Dslip2;

- 12. cohesiveZoneElements.material.tangentModuli(iEl, 3) = Dnormal;
- 13. cohesiveZoneElements.material.InterfacialShearStress(iEl) = ISS;
- 14. end
- 15.
- 16. end

# 

Η συνάρτηση Homogenization υπολογίζει τις ομογενοποιημένες τάσεις και τον ομογενοποιημένο νόμο υλικού του αντιπροσωπευτικού όγκου. Επιστρέφει επίσης στη συνάρτηση CalculateDampingRatio τη μέγιστη τάση και τη μέγιστη παραμόρφωση στη διεύθυνση της τελευταίας. Στις σειρές 9 έως 13 υπολογίζεται το αρχικό τέμνων μητρώο στιβαρότητας του συστήματος με τη βοήθεια της συνάρτησης GenerateTotalStiffnessMatrix, και επιμερίζεται όπως στην ενότητα 3.3.1. Στις σειρές 25 έως 80 εφαρμόζεται η προσαυξητική διαδικασία της μεθόδου Newton-Raphson όπως περιγράφηκε στην ενότητα 3.3.3. Η φάση της φόρτισης καθορίζεται μεσω του δείκτη loadingPhase, ο οποίος παίρνει τις τιμές: 1 για την αρχική παραμόρφωση μέχρι  $\{\bar{e}\}$ , 2 στη συνέχεια για την παραμόρφωση μέχρι στην συνάρτησης μακροσκοπικών παραμορφώσεων σε μηδενικό.

Στις σειρές 52-56 υπολογίζονται τα διανύσματα των μετακινήσεων (εσωτερικών, συνοριακών και συνολικών κόμβων) σύμφωνα με την ενότητα 3.3.3. Οι εσωτερικές δυνάμεις υπολογίζονται με τη βοήθεια της συνάρτησης GetInternalForces στη σειρά 57 και στις 58 και 59 επιμερίζονται σε εσωτερικές και συνοριακές. Η GetInternalForces επιστρέφει και το διάνυσμα slipCheck το οποίο δείχνει ποιοι νανοσωλήνες έχουν ολισθήσει εντός της πολυμερικής μήτρας το διάνυσμα αποτελείται από δείκτες που παίρνουν την τιμή 0 για μη ολίσθηση και 1 για ολίσθηση του στοιχείου δοκού της αντίστοιχης θέσης. Αρχικά το διάνυσμα αυτό είναι μηδενικό. Επίσης επανέρχεται στο μηδενικό διάνυσμα όταν αλλάζει η φάση της φόρτισης. Στη σειρά 60 γίνεται έλεγχος σύγκλισης της μεθόδου Newton-Raphson και αν αυτή δεν έχει επέλθει, στις σειρές 61 έως 70 επαναλαμβάνονται οι παραπάνω υπολογισμοί.

Στις σειρές 72-76 υπολογίζονται οι ομογενοποιημένες τάσεις και ο ομογενοποιημένος νόμος υλικού (ενότητα 3.1). Στις σειρές 82 και 83 υπολογίζονται η σ<sub>max</sub> και το εμβαδόν του βρόχου, Α με χρήση του κανόνα του τραπεζίου.

1 function [s, C, A, maxE, maxS] = Homogenization(model, eMacro)

2

3 V = CalculateVolume(model.elements.quad.geometry, model.elements.quad.size);

4

```
[defe houndNedes houndDefs intDefs] - CotDeff(este
```

- 5 [dofs, boundNodes, boundDofs, intDofs] = GetDofVectors(model.nodes);
- 6 D = CalculateDifferentialOperator(model.nodes.quad, boundNodes);

```
7 slipCheck = model.elements.cohesiveZone.material.slipCheck;
```

- 8
- 9 K = GenerateTotalStiffnessMatrix(model, slipCheck);
- 10 Kaa = K(intDofs, intDofs);
- 11 Kab = K(intDofs, boundDofs);
- 12 Kba = K(boundDofs, intDofs);
- 13 Kbb = K(boundDofs, boundDofs);

```
14
```

15 Ua = zeros(length(intDofs), 1);

```
16 Ub = zeros(length(boundDofs), 1);
```

```
17
```

```
18 e =zeros(3, 1);
```

```
19 s = zeros(3, 1);
```

```
20 tol = 0.001;
21 tots = zeros(41, 1);
22 tote = zeros(41, 1);
23 esU = zeros(length(model.elements.beam.ID), 2, 2);
24
25 for iStep = 1:40
     if iStep < 11
26
27
        loadingPhase = 1;
28
        de = eMacro/10;
29
      elseif iStep < 31
30
        if iStep == 11
31
          slipCheck = model.elements.cohesiveZone.material.slipCheck;
32
          K = GenerateTotalStiffnessMatrix(model, slipCheck);
33
          Kaa = K(intDofs, intDofs);
34
          Kab = K(intDofs, boundDofs);
35
          Kba = K(boundDofs, intDofs);
          Kbb = K(boundDofs, boundDofs);
36
37
        end
38
        loadingPhase = 2;
39
        de = -eMacro/10;
40
      else
41
        if iStep == 31
42
          slipCheck = model.elements.cohesiveZone.material.slipCheck;
43
          K = GenerateTotalStiffnessMatrix(model, slipCheck);
44
          Kaa = K(intDofs, intDofs);
45
          Kab = K(intDofs, boundDofs);
          Kba = K(boundDofs, intDofs);
46
47
          Kbb = K(boundDofs, boundDofs);
48
        end
49
        loadingPhase = 3;
50
        de = eMacro/10;
51
      end
      dUb = D'*de;
52
53
      dUa = - Kaa\ Kab* dUb;
54
      Ua = Ua+dUa;
      Ub = Ub+dUb;
55
56
      U = [Ua; Ub];
      [F, slipCheck, esU] = GetInternalForces(iStep, loadingPhase, U, model, boundDofs, intDofs,
57
   slipCheck, esU);
58
      Fa = F(intDofs);
59
      Fb = F(boundDofs);
60
      while norm(Fa) > tol
        K = GenerateTotalStiffnessMatrix(model, slipCheck);
61
62
        Kaa = K(intDofs, intDofs);
        Kab = K(intDofs, boundDofs);
63
        Kba = K(boundDofs, intDofs);
64
65
        Kbb = K(boundDofs, boundDofs);
66
        Ua = Ua - Kaa \setminus Fa;
        U = [Ua; Ub];
67
        [F, slipCheck, esU] = GetInternalForces(iStep, loadingPhase, U, model, boundDofs,
68
```

```
intDofs, slipCheck, esU);
```

```
69
         Fa = F(intDofs);
  70
         Fb = F(boundDofs);
  71
       end
  72
       Kbb_cond = Kbb- Kba/ Kaa* Kab;
  73
       dR = Kbb cond*D'*de;
  74
       ds = (1/V)*D*dR;
  75
       s = s + ds;
  76
       C = (1/V)*D*Kbb \text{ cond}*D';
  77
       e = e + de;
  78
       tots(iStep+1) = s(1);
  79
       tote(iStep+1) = e(1);
  80 end
  81
  82 A = trapz(tote, tots);
  83 maxS = max(tots);
  84
  85 end
```

Η συνάρτηση GenerateTotalStiffnessMatrix δημιουργεί το συνολικό μητρώο στιβαρότητας του αντιπροσωπευτικού όγκο. Στις σειρές 9-21 υπολογίζεται για κάθε στοιχείο επίπεδης έντασης το μητρώο στιβαρότητάς του με τη βοήθεια της συνάρτησης GenerateQuadElementStiffnessMatrix και τα στοιχεία του προστίθενται στους βαθμούς ελευθερίας του συνολικού μητρώου στους οποίους συμβάλλουν. Το ίδιο γίνεται για τα στοιχεία δοκού των νανοσωλήνων στις σειρές 24-30 με τη βοήθεια της συνάρτησης GenerateBeamElementStiffnessMatrix. Στις σειρές 32-73 υπολογίζεται για κάθε συνεκτική ζώνη η συνεισφορά της στους βαθμούς ελευθερίας του στοιχείου δοκού του νανοσωλήνα και σε εκείνους των τετραπλευρικών στοιχείων που φιλοξενούν τους κόμβους αρχής και τέλους του, σύμφωνα με τη διαδικασία της ενότητας 2.4. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται η συνάρτηση GenerateCohesiveElementStiffnessMatrix.

1 function K = GenerateTotalStiffnessMatrix(model, slipCheck)

2

- 3 QuadElements = model.elements.quad.size;
- 4 QuadNodes = model.nodes.quad.size;
- 5 BeamElements = model.elements.beam.size;
- 6 7
  - K = zeros(2\*model.nodes.quad.size+3\*model.nodes.beam.size);
- 8
- 9 for iquad = 1:QuadElements
- 10 ElementNodes = model.elements.quad.connectivity(iquad,:);
- 11 t = model.elements.quad.geometry.thickness(iquad);
- 12 youngsModulus = model.elements.quad.material.youngsModulus(iquad);
- 13 poissonsRatio = model.elements.quad.material.poissonsRatio(iquad);
- 14 width = model.elements.quad.geometry.width(iquad);
- 15 height = model.elements.quad.geometry.height(iquad);
- 16 Ksolid = GenerateQuadElementStiffnessMatrix(width, height, t, youngsModulus, poissonsRatio);
- 17 QuadDofs = zeros(8, 1);
- 18 QuadDofs(1:2:8) = 2\*(ElementNodes-1)+1;
- 19 QuadDofs(2:2:8) = 2\*(ElementNodes-1)+2;

- 20 K(QuadDofs, QuadDofs) = K(QuadDofs, QuadDofs)+Ksolid;
- 21 End
- 22
- 23 for ibeam = 1:BeamElements
- 24 L = model.elements.beam.geometry.length(ibeam);
- 25 axialResistance = model.elements.beam.material.axialResistance(ibeam);
- 26 bendingResistance = model.elements.beam.material.bendingResistance(ibeam);
- 27 Kbeam = GenerateBeamElementStiffnessMatrix(L, axialResistance, bendingResistance);
- 28 BeamDofs = [2\*QuadNodes+ibeam\*6-5, 2\*QuadNodes+ibeam\*6-4, 2\*QuadNodes+ibeam\*6-3,...
- 29 2\*QuadNodes+ibeam\*6-2, 2\*QuadNodes+ibeam\*6-1, 2\*QuadNodes+ibeam\*6]';
- 30 K(BeamDofs, BeamDofs) = Kbeam;
- 31
- 32 theta = model.elements.beam.geometry.orientation(ibeam);
- 33 D = model.elements.beam.geometry.diameter(ibeam);
- 34 D11 = model.elements.cohesiveZone.material.tangentModuli(ibeam, 1);
- 35 Dslip2 = model.elements.cohesiveZone.material.tangentModuli(ibeam, 2);
- 36 D22 = model.elements.cohesiveZone.material.tangentModuli(ibeam, 3);
- 37 Dtan = [D11, 0; 0, D22];
- 38 slCh = slipCheck(ibeam);
- 39 Kcoh = GenerateCohesiveElementStiffnessMatrix(L, theta, D, Dtan, Dslip2, slCh);
- 40 Tconstr = GenerateConstranintsTransformationMatrix(model, ibeam);
- 41 Kcoh\_mod = [Tconstr', zeros(16, 6); zeros(6), eye(6)']\*Kcoh\*[Tconstr, zeros(6); zeros(6, 16), eye(6)];
- 42 Kcoh\_mod11 = Kcoh\_mod(1:8, 1:8);
- 43 Kcoh\_mod12 = Kcoh\_mod(1:8, 9:16);
- 44 Kcoh\_mod13 = Kcoh\_mod(1:8, 17:22);
- 45 Kcoh\_mod21 = Kcoh\_mod(9:16, 1:8);
- 46 Kcoh\_mod22 = Kcoh\_mod(9:16, 9:16);
- 47 Kcoh\_mod23 = Kcoh\_mod(9:16, 17:22);
- 48 Kcoh\_mod31 = Kcoh\_mod(17:22, 1:8);
- 49 Kcoh mod32 = Kcoh mod(17:22, 9:16);
- 50 Kcoh\_mod33 = Kcoh\_mod(17:22, 17:22);
- 51 hostElement1 = model.nodes.beam.hostElement(2\*ibeam-1);
- 52 ihostElement1 = find(model.elements.quad.ID == hostElement1);
- 53 ElementNodes1 = model.elements.quad.connectivity(ihostElement1,:);
- 54 QuadDofs1 = zeros(8, 1);
- 55 QuadDofs1(1:2:8) = 2\*(ElementNodes1-1)+1;
- 56 QuadDofs1(2:2:8) = 2\*(ElementNodes1-1)+2;
- 57 K(QuadDofs1, QuadDofs1) = K(QuadDofs1, QuadDofs1)+Kcoh\_mod11;
- 58 hostElement2 = model.nodes.beam.hostElement(2\*ibeam);
- 59 ihostElement2 = find(model.elements.quad.ID == hostElement2);
- 60 ElementNodes2 = model.elements.quad.connectivity(ihostElement2,:);
- 61 QuadDofs2 = zeros(8, 1);
- 62 QuadDofs2(1:2:8) = 2\*(ElementNodes2-1)+1;
- 63 QuadDofs2(2:2:8) = 2\*(ElementNodes2-1)+2;
- 64 K(QuadDofs2, QuadDofs2) = K(QuadDofs2, QuadDofs2)+Kcoh\_mod22;
- 65 K(QuadDofs1, QuadDofs2) = K(QuadDofs1, QuadDofs2)+Kcoh\_mod12;
- 66 K(QuadDofs2, QuadDofs1) = K(QuadDofs2, QuadDofs1)+Kcoh\_mod21;
- 67 BeamDofs = [2\*QuadNodes+ibeam\*6-5, 2\*QuadNodes+ibeam\*6-4, 2\*QuadNodes+ibeam\*6-3,...

68 2\*QuadNodes+ibeam\*6-2, 2\*QuadNodes+ibeam\*6-1, 2\*QuadNodes+ibeam\*6]'; K(BeamDofs, BeamDofs) = K(BeamDofs, BeamDofs)+Kcoh\_mod33; 69 K(QuadDofs1, BeamDofs) = K(QuadDofs1, BeamDofs)+Kcoh mod13; 70 K(QuadDofs2, BeamDofs) = K(QuadDofs2, BeamDofs)+Kcoh mod23; 71 K(BeamDofs, QuadDofs1) = K(BeamDofs, QuadDofs1)+Kcoh mod31; 72 73 K(BeamDofs, QuadDofs2) = K(BeamDofs, QuadDofs2)+Kcoh mod32; 74 end 75 76 End 

Η συνάρτηση GenerateQuadElementStiffnessMatrix υπολογίζει το μητρώο στιβαρότητας στοιχείου επίπεδης έντασης όπως αυτό δίνεται στη σχέση (1.11).

1. function Ksolid = GenerateQuadElementStiffnessMatrix(w, h, t, E, v) 2. 3. a=w/2; 4. b=h/2; 5. r=a/b; 6. ro=(1-v)/2; 7. mi=3\*(1+v)/2; 8. lamda=3\*(1-3\*v)/2; 9. 10. Ksolid=... 11. [0 0 0 0 0 0 0; 0 12. mi 0 0 0 0 0 0 0; 13. -4/r+2\*ro\*r lamda 0 0 0 0 0 0; 14. -lamda 2\*r-4\*ro/r -mi 0 0 0 0 0; 15. -2/r-2\*ro\*r -mi 2/r-4\*ro\*r lamda 0 0 0 0; 16. -mi -2\*r-2\*ro/r -lamda -4\*r+2\*ro/r 0 0; mi 0 -4/r+2\*ro\*r 17. 2/r-4\*ro\*r -lamda -2/r-2\*ro\*r mi lamda 0 0; 18. lamda -4\*r+2\*ro/r -2\*r-2\*ro/r -lamda 2\*r-4\*ro/r -mi 0]; mi 19. 20. Ksolid=Ksolid+Ksolid'; 21. diagonal(1:2:8)=4/r+4\*ro\*r; 22. diagonal(2:2:8)=4\*r+4\*ro/r; 23. Ksolid=Ksolid+diag(diagonal); 24. Ksolid=Ksolid.\*(E\*t/12/(1-v^2)); 25. 26. end

\_\_\_\_\_

Η συνάρτηση GenerateBeamElementStiffnessMatrix υπολογίζει το μητρώο στιβαρότητας στοιχείου δοκού όπως αυτό δίνεται στη σχέση (1.17).

1. function Kbeam=GenerateBeamElementStiffnessMatrix(L, axialResistance, bendingResistance)

2.

3. EA=axialResistance;

```
4. El=bendingResistance;
  5.
  6. Kbeam=...
  7. [EA/L
           0
                      -EA/L
                             0
                                  0;
                 0
          12*EI/L^3 6*EI/L^2 0
                              -12*EI/L^3 6*EI/L^2;
  8. 0
  9.
     0
          0
               4*EI/L
                     0
                          -6*EI/L^2 2*EI/L;
  10. 0
          0
                0
                     EA/L
                           0
                                0;
  11. 0
                          12*EI/L^3 -6*EI/L^2;
          0
                0
                     0
  12. 0
          0
                0
                     0
                               4*EI/L ];
                          0
  13.
  14. Kbeam=Kbeam+Kbeam'-diag(diag(Kbeam));
  15.
  16. end
```

Η συνάρτηση GenerateCohesiveElementStiffnessMatrix υπολογίζει το μητρώο στιβαρότητας συνεκτικής ζώνης της σχέσης (2.12) με τη διαδικασία που περιγράφεται στην ενότητα 2.4.

```
function Kcoh = GenerateCohesiveElementStiffnessMatrix(L, theta, D, Dtan, Dslip2, slipCheck)
  1
  2
  3 P = pi()*D;
  4 if slipCheck == 1
  5
       Dtan(1,1) = Dslip2;
  6 end
  7
     Kcoh=zeros(12,12);
  8 nGP = 2;
  9
     [gaussWeights,gaussLocations] = GaussPoints(nGP);
  10 ksiGP = gaussLocations;
  11 wi = gaussWeights;
  12 Rm = [ cosd(theta), sind(theta);
  13
        -sind(theta), cosd(theta)];
  14 J = L/2;
  15 Nbeam = zeros(2,6);
  16
  17 for iGP = 1:nGP
  18
       Nbeam(1,1) = (1-ksiGP(iGP))/2;
       Nbeam(2,2) = (1-ksiGP(iGP))/2;
  19
  20
       Nbeam(1,4) = (1+ksiGP(iGP))/2;
  21
       Nbeam(2,5) = (1+ksiGP(iGP))/2;
  22
       M = Nbeam'*Rm*Dtan*Rm'*Nbeam;
  23
       Kcoh = Kcoh+P*wi(iGP)*[M, -M; -M, M]*det(J);
  24 end
  25
  26 End
```

Η συνάρτηση GetInternalForces υπολογίζει το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων. Στις σειρές 15-23 υπολογίζονται οι εσωτερικές δυνάμεις των βαθμών ελευθερίας των στοιχείων επίπεδης έντασης μέσω της συνάρτησης CalculateSolidElementInternalForces. Το ίδιο γίνεται στις σειρές 2637 μέσω της CalculateBeamElementInternalForces. Στις σειρές 39-61 υπολογίζεται η συμβολή κάθε συνεκτικής ζώνης στις εσωτερικές δυνάμεις των βαθμών ελευθερίας του στοιχείου δοκού του νανοσωλήνα και σε εκείνων των τετραπλευρικών στοιχείων που φιλοξενούν τους κόμβους αρχής και τέλους του, σύμφωνα με τη διαδικασία της ενότητας 3.3.2.

1 function [F, slipCheck, esU] = GetInternalForces(iStep, loadingPhase, U, model, boundDofs, intDofs, slipCheck, esU)

```
2
3
  Ua = U(1:length(intDofs));
   Ub = U(length(intDofs)+1:end);
4
5
   U = zeros(length(U), 1);
   U(intDofs) = Ua;
6
7
   U(boundDofs) = Ub;
8
9
   F = zeros(length(U), 1);
10
11 QuadElements = model.elements.guad.size;
12 QuadNodes = model.nodes.quad.size;
13 BeamElements = model.elements.beam.size;
14
15 for iquad = 1:QuadElements
     ElementNodes = model.elements.quad.connectivity(iquad,:);
16
17
     QuadDofs = zeros(8, 1);
     QuadDofs(1:2:8) = 2*(ElementNodes-1)+1;
18
19
     QuadDofs(2:2:8) = 2*(ElementNodes-1)+2;
20
     u = U(QuadDofs);
21
     fsolid = CalculateSolidElementInternalForces(model.elements.quad, iquad, u);
22
     F(QuadDofs) = F(QuadDofs)+fsolid;
23 end
24
25 for ibeam = 1:BeamElements
     L = model.elements.beam.geometry.length(ibeam);
26
27
     theta = model.elements.beam.geometry.orientation(ibeam);
28
     D = model.elements.beam.geometry.diameter(ibeam);
29
     axialResistance = model.elements.beam.material.axialResistance(ibeam);
30
     bendingResistance = model.elements.beam.material.bendingResistance(ibeam);
31
     Dtan = model.elements.cohesiveZone.material.tangentModuli(ibeam, :);
     ISS = model.elements.cohesiveZone.material.InterfacialShearStress(ibeam);
32
33
     BeamDofs
                      =
                               [2*QuadNodes+ibeam*6-5,
                                                                 2*QuadNodes+ibeam*6-4,
   2*QuadNodes+ibeam*6-3,...
            2*QuadNodes+ibeam*6-2, 2*QuadNodes+ibeam*6-1, 2*QuadNodes+ibeam*6]';
34
35
     v = U(BeamDofs);
     fbeam = CalculateBeamElementInternalForces(L, axialResistance, bendingResistance, v);
36
37
     F(BeamDofs) = F(BeamDofs)+fbeam;
38
39
     Tconstr = GenerateConstranintsTransformationMatrix(model, ibeam);
40
     T1 = Tconstr(1:3, 1:8);
41
     T2 = Tconstr(4:6, 9:16);
     hostElement1 = model.nodes.beam.hostElement(2*ibeam-1);
42
43
     ihostElement1 = find(model.elements.quad.ID == hostElement1);
44
     ElementNodes1 = model.elements.guad.connectivity(ihostElement1,:);
```

```
45 QuadDofs1 = zeros(8, 1);
```

- 46 QuadDofs1(1:2:8) = 2\*(ElementNodes1-1)+1;
- 47 QuadDofs1(2:2:8) = 2\*(ElementNodes1-1)+2;
- 48 hostElement2 = model.nodes.beam.hostElement(2\*ibeam);
- 49 ihostElement2 = find(model.elements.quad.ID == hostElement2);
- 50 ElementNodes2 = model.elements.quad.connectivity(ihostElement2,:);
- 51 QuadDofs2 = zeros(8, 1);
- 52 QuadDofs2(1:2:8) = 2\*(ElementNodes2-1)+1;
- 53 QuadDofs2(2:2:8) = 2\*(ElementNodes2-1)+2;
- 54 u1 = U(QuadDofs1);
- 55 u2 = U(QuadDofs2);
- 56 vCoh = [T1\*u1; T2\*u2];

```
57 [f1int, f2int, slipCheck(ibeam), esU] = CalculateCohesiveZoneInternalForces(iStep, loadingPhase, ibeam, L, theta, D, Dtan, v, vCoh, ISS, esU);
```

- 58 % Contribution of the Cohesive Zone Internal Forces on Solid and Beam Elements' Dofs
- 59 F(QuadDofs1) = F(QuadDofs1)+T1'\*f1int(1:3);
- 60 F(QuadDofs2) = F(QuadDofs2)+T2'\*f1int(4:6);
- 61 F(BeamDofs) = F(BeamDofs)+f2int;
- 62 end
- 63
- 64 End

#### \*\*\*\*\*

\_\_\_\_\_

Η συνάρτηση CalculateSolidElementInternalForces υπολογίζει τις εσωτερικές δυνάμεις στοιχείου επίπεδης έντασης με πολλαπλασιασμό του μητρώου στιβαρότητάς του με τις μετακινήσεις του.

- 1. function fsolid = CalculateSolidElementInternalForces(quad, iquad, u)
- 2.
- 3. t = quad.geometry.thickness(iquad);
- 4. youngsModulus = quad.material.youngsModulus(iquad);
- 5. poissonsRatio = quad.material.poissonsRatio(iquad);
- width = quad.geometry.width(iquad);
- height = quad.geometry.height(iquad);
- 8.
- 9. Ksolid = GenerateQuadElementStiffnessMatrix(width, height, t, youngsModulus, poissonsRatio);
- 10.

```
11. fsolid = Ksolid*u;
```

- 12.
- 13. end

```
*****
```

Η συνάρτηση CalculateBeamElementInternalForces υπολογίζει τις εσωτερικές δυνάμεις στοιχείου δοκού με πολλαπλασιασμό του μητρώου στιβαρότητάς του με τις μετακινήσεις του.

- 1. function fbeam = CalculateBeamElementInternalForces(L, axialResistance, bendingResistance, v)
- 2.
- 3. Kbeam = GenerateBeamElementStiffnessMatrix(L, axialResistance, bendingResistance);

Η συνάρτηση CalculateCohesiveZoneInternalForces υπολογίζει τις εσωτερικές δυνάμεις των σχέσεων (3.10) για κάθε στοιχείο πλασματικής δοκού που προσομοιώνει συνεκτική ζώνη. Στη συνάρτηση αυτή γίνεται και ο έλεγχος ολίσθησης του νανοσωλήνα στην πολυμερική μήτρα και εφόσον αυτή έχει συντελεστεί, ο αντίστοιχος δείκτης του διανύσματος slipCheck παίρνει την τιμή 1.

\_\_\_\_\_

```
1 function [f1int, f2int, slipCheck, esU] = CalculateCohesiveZoneInternalForces(iStep,
   loadingPhase, ibeam, L, theta, D, Dtan, v, vCoh, ISS, esU)
2
3
   f1int = zeros(6, 1);
4
  f2int = zeros(6, 1);
5
   P = pi()*D;
6 nGP = 2;
7
   [wi, ksiGP] = GaussPoints(2);
   Dslip1 = Dtan(1, 1);
8
9 Dslip2 = Dtan(1, 2);
10 Dnormal = Dtan(1, 3);
11 Dtan = [Dslip1, 0; 0, Dnormal];
12 Rm = [ cosd(theta), sind(theta);
13
       -sind(theta), cosd(theta)];
14 J = L/2;
15
16 if loadingPhase == 1
17
      epsilonY1 = ISS/Dslip1;
      Nbeam = zeros(2, 6);
18
     for iGP = 1:nGP
19
        Nbeam(1,1)=(1-ksiGP(iGP))/2;
20
21
        Nbeam(2,2)=(1-ksiGP(iGP))/2;
22
        Nbeam(1,4) = (1+ksiGP(iGP))/2;
23
        Nbeam(2,5) = (1+ksiGP(iGP))/2;
24
        deltaGlobal = Nbeam*(vCoh-v);
25
        delta = Rm'*deltaGlobal;
26
        epsilonSlip = delta(1);
27
        epsilonNormal = delta(2);
28
        epsilon=[epsilonSlip; epsilonNormal];
29
        if iGP == 2
30
          if epsilonSlip > epsilonY1
            sigmaSlip = Dslip1*epsilonY1+Dslip2*(epsilonSlip-epsilonY1);
31
32
            sigmaNormal = Dnormal*epsilonNormal;
33
            sigma = [sigmaSlip, sigmaNormal]';
34
            slipCheck = 1;
35
          else
            sigma = Dtan*epsilon;
36
37
            slipCheck = 0;
38
          end
```

```
39
        else
40
          if epsilonSlip < -epsilonY1
41
            sigmaSlip = -Dslip1*epsilonY1+Dslip2*(epsilonSlip+epsilonY1);
42
            sigmaNormal = Dnormal*epsilonNormal;
43
            sigma = [sigmaSlip, sigmaNormal]';
44
            slipCheck = 1;
45
          else
46
            sigma = Dtan*epsilon;
47
            slipCheck = 0;
48
          end
49
        end
50
          f1int = f1int+P*wi(iGP)*Nbeam'*Rm*sigma*det(J);
51
          f2int = f2int-P*wi(iGP)*Nbeam'*Rm*sigma*det(J);
52
      end
53
      if iStep == 10
54
        esU(ibeam, 1, 1) = abs(epsilonSlip);
55
        esU(ibeam, 1, 2) = abs(sigma(1));
56
      end
57 elseif loadingPhase == 2
58
      epsilonU1 = esU(ibeam, 1, 1);
59
      sigmaU1 = esU(ibeam, 1, 2);
      epsilonY2 = epsilonU1-2*ISS/Dslip1;
60
61
      Nbeam = zeros(2, 6);
62
     for iGP = 1:nGP
63
        Nbeam(1,1)=(1-ksiGP(iGP))/2;
64
        Nbeam(2,2)=(1-ksiGP(iGP))/2;
65
        Nbeam(1,4)=(1+ksiGP(iGP))/2;
66
        Nbeam(2,5)=(1+ksiGP(iGP))/2;
67
        deltaGlobal=Nbeam*(vCoh-v);
68
        delta=Rm'*deltaGlobal;
69
        deltaSlip=delta(1);
70
        deltaNormal=delta(2);
71
        epsilonSlip=deltaSlip;
72
        epsilonNormal=deltaNormal;
73
        epsilon=[epsilonSlip, epsilonNormal]';
74
        if iGP == 2
75
          if epsilonSlip < epsilonY2
76
            sigmaSlip = sigmaU1-Dslip1*(epsilonU1-epsilonY2)-Dslip2*(epsilonY2-epsilonSlip);
77
            sigmaNormal = Dnormal*epsilonNormal;
78
            sigma=[sigmaSlip, sigmaNormal]';
79
            slipCheck = 1;
80
          else
81
            sigmaSlip = sigmaU1-Dslip1*(epsilonU1-epsilonSlip);
82
            sigmaNormal = Dnormal*epsilonNormal;
83
            sigma=[sigmaSlip, sigmaNormal]';
84
            slipCheck = 0;
85
          end
86
        else
87
          if epsilonSlip > -epsilonY2
88
            sigmaSlip = -sigmaU1+Dslip1*(epsilonU1-epsilonY2)+Dslip2*(epsilonSlip+epsilonY2);
89
            sigmaNormal = Dnormal*epsilonNormal;
```
```
90
            sigma=[sigmaSlip, sigmaNormal]';
91
            slipCheck = 1;
92
          else
93
            sigmaSlip = -sigmaU1+Dslip1*(epsilonU1+epsilonSlip);
94
            sigmaNormal = Dnormal*epsilonNormal;
95
            sigma=[sigmaSlip, sigmaNormal]';
96
            slipCheck = 0;
97
          end
        end
98
99
        f1int=f1int+P*wi(iGP)*Nbeam'*Rm*sigma*det(J);
100
        f2int=f2int-P*wi(iGP)*Nbeam'*Rm*sigma*det(J);
101 end
102
     if iStep == 30
103
        esU(ibeam, 2, 1) = abs(epsilonSlip);
104
        esU(ibeam, 2, 2) = abs(sigma(1));
105
     end
106 else
107
     epsilonU2 = esU(ibeam, 2, 1);
108
     sigmaU2 = esU(ibeam, 2, 2);
109 epsilonY3 = epsilonU2-2*ISS/Dslip1;
110
     Nbeam = zeros(2, 6);
111 for iGP = 1:nGP
112
        Nbeam(1,1)=(1-ksiGP(iGP))/2;
113
        Nbeam(2,2)=(1-ksiGP(iGP))/2;
114
        Nbeam(1,4)=(1+ksiGP(iGP))/2;
115
        Nbeam(2,5)=(1+ksiGP(iGP))/2;
116
        deltaGlobal=Nbeam*(vCoh-v);
117
        delta=Rm'*deltaGlobal;
118
        deltaSlip=delta(1);
119
        deltaNormal=delta(2);
120
        epsilonSlip=deltaSlip;
121
        epsilonNormal=deltaNormal;
122
        epsilon=[epsilonSlip, epsilonNormal]';
123
        if iGP == 2
124
          if epsilonSlip > -epsilonY3
125
            sigmaSlip = -sigmaU2+Dslip1*(epsilonU2-epsilonY3)+Dslip2*(epsilonSlip+epsilonY3);
126
            sigmaNormal = Dnormal*epsilonNormal;
127
            sigma=[sigmaSlip, sigmaNormal]';
128
            slipCheck = 1;
129
          else
130
            sigmaSlip = -sigmaU2+Dslip1*(epsilonU2+epsilonSlip);
131
            sigmaNormal = Dnormal*epsilonNormal;
132
            sigma=[sigmaSlip, sigmaNormal]';
133
            slipCheck = 0;
134
          end
135
        else
136
          if epsilonSlip < epsilonY3
137
            sigmaSlip = sigmaU2-Dslip1*(epsilonU2-epsilonY3)-Dslip2*(epsilonY3-epsilonSlip);
138
            sigmaNormal = Dnormal*epsilonNormal;
139
            sigma=[sigmaSlip, sigmaNormal]';
140
            slipCheck = 1;
```

141	else
142	sigmaSlip = sigmaU2-Dslip1*(epsilonU2-epsilonSlip);
143	sigmaNormal = Dnormal*epsilonNormal;
144	sigma=[sigmaSlip, sigmaNormal]';
145	slipCheck = 0;
146	end
147	end
148	f1int=f1int+P*wi(iGP)*Nbeam'*Rm*sigma*det(J);
149	f2int=f2int-P*wi(iGP)*Nbeam'*Rm*sigma*det(J);
150	end
151	
152 End	
***************************************	

Ανάλυση Ευαισθησίας Χαρακτηριστικών Υστεριτικής Συμπεριφοράς Νανοσύνθετου Υλικού