

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δειγματοληπτικοί παρατηρητές συστημάτων ελέγχου

Παρασκευάς Κ. Πατσογιάννης

Επιβλέπων καθηγητής:

Ιάσωνας Καραφύλλης

Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2021

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICS AND PHYSICAL SCIENCES



DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Thesis

Sampled-Data Observers of Control Systems

Paraskevas K. Patsogiannis

Supervisor professor:

Iasson Karafyllis

Associate Professor NTUA

Athens, September 2021

Copyright © Πατσογιάννης Παρασκευάς, 2021

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα παρουσιαστεί μια προσέγγιση για την εξαγωγή δειγματοληπτικών παρατηρητών από παρατηρητές συνεχούς χρόνου που παρουσιάζουν εκθετική σύγκλιση στην περίπτωση με απουσία θορύβου, σε σχέση με μια δεδομένη συνάρτηση παρατηρητή Lyapunov και μια ιδιότητα input-to-Output Stability σε σχέση με τον θόρυβο εξόδου. Η συγκεκριμένη προσέγγιση ισχύει για ένα ευρύ φάσμα συστημάτων και αποδίδει δειγματοληπτικούς παρατηρητές που κληρονομούν όλα τα χαρακτηριστικά των υποκείμενων παρατηρητών συνεχούς χρόνου. Το κύριο συστατικό του προτεινόμενου δειγματοληπτικού παρατηρητή είναι ένας καινοτόμος Output predictor που περιλαμβάνει τόσο τους inter-sample predictors όσο και τους προγνωστικούς δείκτες Zero-Order-Hold.

Η διπλωματική εργασία αυτή οργανώνεται ως εξής: Στο κεφάλαιο 1 δίνεται το μαθηματικό υπόβαθρο που θα χρειαστούμε ώστε να αναλύσουμε το θέμα και για να γίνουν κατανοητές βασικές έννοιες του θέματος που θα εισαχθούν αργότερα. Στο κεφάλαιο 2 έχουμε μια εισαγωγή που περιγράφει με περισσότερες λεπτομέρειες το θέμα με το οποίο ασχολείται η παρούσα διπλωματική εργασία, τα προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπίσουν οι μέθοδοι που περιγράφονται καθώς επίσης εισάγει και διάφορες χρήσιμες έννοιες στη θεωρία των συστημάτων ελέγχου που είναι απαραίτητες για την ανάλυση του θέματος. Στο κεφάλαιο 3, περιγράφεται η διαδικασία σχεδιασμού των προτεινόμενων δειγματοληπτικών παρατηρητών. Στο κεφάλαιο 4 περιγράφονται τα κύρια αποτελέσματα της παρούσας εργασίας καθώς και όλες οι τεχνικές αποδείξεις. Μία καλή εφαρμογή είναι αυτή που εξετάζεται στο κεφάλαιο 5, που απεικονίζει την υπεροχή του σχεδιασμού inter-sample predictor έναντι άλλων σχεδίων. Ορισμένες καταληκτικές παρατηρήσεις τερματίζουν την εργασία.

Λέξεις κλειδιά: μη γραμμικοί παρατηρητές, δειγματοληπτικοί παρατηρητές, inter-sample predictor

ABSTRACT

In this thesis statement, we present a new approach for deriving sampled-data observers from continuous-time observers that feature exponential convergence in the noiseless case, with respect to a given Observer Lyapunov Function, and an Input-to-Output Stability property with respect to output measurement noise. The design approach applies to a wide class of systems and yields sampled-data observers that inherit all performance characteristics of the underlying continuous-time observers. The main component of the proposed sampled-data observer is a novel output predictor that encompasses both inter-sample predictors and Zero-Order-Hold predictors.

The paper is organized as follows: Chapter 1 gives the mathematical background that we will need to analyze the topic and to understand basic concepts of the topic that will be introduced later. In Chapter 2 we have an introduction that describes in more detail the subject of this dissertation, the problems to be faced by the methods described as well as introduces various useful concepts in the theory of control systems that are necessary for the analysis of the subject. Chapter 3 describes the design process of the proposed sampled-Data Observers. Chapter 4 describes the main results of this work as well as all the technical evidence. A good application is the one discussed in Chapter 5, which illustrates the superiority of inter-sample predictor design over other designs. Some concluding remarks end the paper.

Keywords: nonlinear observers, sampled- data observers, inter- sample predictor

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κ. Ιάσωνα Καραφύλλη για την ανάθεση της παρούσας διπλωματικής εργασίας καθώς επίσης και για την πολύτιμη καθοδήγηση του αλλά και για την προσφορά του καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Εν συνεχεία, θα ήθελα να εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στην οικογένεια μου, για την υποστήριξη τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, και την αμέριστη συμπαράσταση που μου πρόσφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

<u>Περίληψη</u>	5
<u>Περιεχόμενα</u>	9
<u>Κατάλογος συντομογραφιών</u>	10
<u>Μαθηματική σημειογραφία</u>	11
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Μαθηματικό Υπόβαθρο</u>	12
1.1 Γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα(LTI)	12
1.2 Παρατηρητής για γραμμικά συστήματα(State Observer)	13
1.3 Παρατηρησιμότητα(Observability)	15
1.4 Εκθετική ευστάθεια(Exponential Stability)	16
1.5 Input-to-state stability(ISS)	17
1.6 Τοπικά-Ολικά Lipschitz συναρτήσεις- Lipschitz συνέχεια	18
1.7 Διφορομορφισμοί(Diffeomorphism)	18
1.8 Τετραγωνική συνάρτηση(Quadratic Function).....	19
1.9 Hurwitz matrix	19
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Περιγραφή του προβλήματος</u>	20
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Μέθοδοι Κατασκευής δειγματοληπτικού παρατηρητή</u>	28
3.1 Δειγματοληπτικός παρατηρητής με ZOH	29
3.2 Δειγματοληπτικός παρατηρητής με ZOH και εκθετ.χρονομεταβαλλόμενο κέρδος	29
3.3 Δειγματοληπτικός παρατηρητής με inter-sample predictor	30
3.4 Γενικό πλαίσιο.....	31
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Κύρια αποτελέσματα</u>	32
4.1 Υποθέσεις.....	32
4.2 Διατύπωση των Αποτελεσμάτων	35
4.3 Αποδείξεις βασικών θεωρημάτων.....	37
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Εφαρμογή</u>	44
5.1 Τελικά Συμπεράσματα.....	47
<u>Βιβλιογραφία</u>	49

Κατάλογος συντομογραφιών

IOS	Input-to-Output Stable or Input-to-Output Stability
ZOH	Zero-Order-Hold
OLF	Observer Lyapunov Function
LMI	Linear Matrix Inequalities
ISS	Input-to-State Stability ή Ευστάθεια σχέσεως εισόδου κατάστασης
EXP-ISS	Exponential Input-to-State Stability
FSF	Full State Feedback-κατάσταση ανάδρασης
SIELF	State Independent Error Lyapunov Function
LTI	Linear Time-Invariant system
PDE	Partial Differential Equation
GAS ή 0-GAS	Global Asymptotical Stability
EKF	Extended Kalman Filter

Μαθηματική σημειογραφία

Σε ολόκληρη την εργασία υιοθετούμε τα ακόλουθα ακρωνύμια και συμβολισμούς:

- $\mathcal{R}_+ := [0, \infty)$
- Έστω $S \subseteq \mathcal{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $A \subseteq \mathcal{R}^n$ να είναι ένα σύνολο που ικανοποιεί την σχέση $S \subseteq A \subseteq cl(S)$. Με $C^0(A; \Omega)$ υποδηλώνουμε την τάξη των συνεχών συναρτήσεων στο A , που παίρνουν τιμές στο $\Omega \subseteq \mathcal{R}^m$. Με $C^k(A; \Omega)$ όπου $k \geq 1$ είναι ένας ακέραιος, υποδηλώνουμε την τάξη της συνάρτησης πάνω στον $A \subseteq \mathcal{R}^n$, όπου παίρνει τιμές στο $\Omega \subseteq \mathcal{R}^m$ και έχει συνεχείς παραγώγους τάξης k . Με άλλα λόγια, οι συναρτήσεις τάξης $C^k(A; \Omega)$ είναι συναρτήσεις που έχουν συνεχείς παραγώγους τάξης k στο $S = int(A)$ που μπορούν να είναι συνεχείς σε όλα τα σημεία μέσα στο $\partial S \cap A$. Όταν $\Omega = \mathcal{R}$ τότε γράφουμε $C^0(A)$ ή $C^k(A)$. Για $f \in C^0([0,1])$ η νόρμα supremum είναι ορισμένη για $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq z \leq 1} (|f(z)|) < +\infty$. Για $\Phi \in C^1(\mathcal{R}^n; \mathcal{R}^n)$, $D\Phi(x)$ ορίζει τον ιακωβιανό πίνακα της για $x \in \mathcal{R}^n$.
- Για ένα διάνυσμα $x \in \mathcal{R}^n$ συμβολίζουμε με $|x|$ την συνήθη ευκλείδια νόρμα και με x' τον αντίστροφο του x διανύσματος. Με $|A| := \sup\{|Ax|; x \in \mathcal{R}^n, |x| = 1\}$ ορίζουμε την επαγόμενη νόρμα του πίνακα $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$ και I ορίζει τον ταυτοτικό πίνακα. Με $det A$ ορίζουμε την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$.
- Λέμε ότι μία γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $p: \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$ είναι τάξης K_∞ εάν $p(0) = 0$ και $\lim_{s \rightarrow \infty} p(s) = +\infty$.
- Έστω $D \subseteq \mathcal{R}^l$ ένα μη-κενό σύνολο και $A \subseteq \mathcal{R}_+$ είναι ένα διάστημα. Με $L_{loc}^\infty(A; D)$ ορίζουμε την κλάση όλων των Lebesgue μετρήσιμων και τοπικά φραγμένων απεικονίσεων $d: A \rightarrow D$. Παρατηρούμε ότι με $\sup_{\tau \in A} (|d(\tau)|)$ δεν εννοούμε το essential supremum της απεικόνισης d στο A αλλά το πραγματικό supremum του d στο A .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μαθηματικό Υπόβαθρο

1.1 Γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα(LTI)

Θεωρούμε το χρονικά αναλλοίωτο συνεχές σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Ένα σύστημα λέγεται χρονικά αναλλοίωτο αν και μόνο αν χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στην έξοδο. Με άλλα λόγια, εάν $y(t)$ είναι η έξοδος σε ένα σήμα εισόδου $x(t)$, τότε για είσοδο $x(t - t_0)$ παράγεται η έξοδος $y(t - t_0)$. Δηλαδή, το σήμα εξόδου παραμένει το ίδιο, ανεξάρτητα από το ποια χρονική στιγμή διεγείρουμε την είσοδο. Το μόνο που υφίσταται είναι η αντίστοιχη χρονική μετατόπιση.

Στην ανάλυση συστημάτων, μεταξύ άλλων τομέων μελέτης, ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα (ή "σύστημα LTI") είναι ένα σύστημα που παράγει ένα σήμα εξόδου από οποιοδήποτε σήμα εισόδου που υπόκειται στους περιορισμούς της γραμμικότητας και της χρονικής αναλλοίωτης. Αυτές οι ιδιότητες ισχύουν (ακριβώς ή περίπου) σε πολλά σημαντικά φυσικά συστήματα, στα οποία η απόκριση $y(t)$ του συστήματος σε μια αυθαίρετη είσοδο $x(t)$ μπορεί να βρεθεί απευθείας χρησιμοποιώντας τη συνέλιξη:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

όπου το $h(t)$ ονομάζεται παλμική απόκριση του συστήματος και $*$ αντιπροσωπεύει τη συνέλιξη (να μην συγχέεται με τον πολλαπλασιασμό, όπως χρησιμοποιείται συχνά από το σύμβολο στις γλώσσες του υπολογιστή).

1.2 Παρατηρητής για γραμμικά συστήματα(State Observer)

Στην θεωρία ελέγχου, ένας παρατηρητής είναι ένα γραμμικό σύστημα που παρέχει μία εκτίμηση της εσωτερικής κατάστασης ενός δοσμένου πραγματικού συστήματος, από τις μετρήσεις εισόδου και εξόδου του συστήματος αυτού. Συνήθως εφαρμόζεται μέσω υπολογιστή και παρέχει τη βάση για πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Θεωρούμε όπως και προηγουμένως το χρονικά αναλλοίωτο συνεχές σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

με $x \in \mathcal{R}^n, u \in \mathcal{R}^m, y \in \mathcal{R}^p, A \in \mathcal{R}^{n \times n}, B^{n \times m}, C^{p \times n}$. Ένας προφανής τρόπος για να λάβουμε μια εκτίμηση για την κατάσταση (x) του παραπάνω γραμμικού συστήματος είναι να ξεκινήσουμε με ένα μοντέλο

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t)$$

του συστήματος που αρχικοποιήθηκε σε οποιαδήποτε κατάσταση, στην οποία εφαρμόζονται τα ίδια στοιχεία ελέγχου.

Η ποσότητα $d(t) := Cz(t) - y(t)$ μετρά την απόκλιση μεταξύ της πραγματικής μετρούμενης τιμής και της τιμής εξόδου που θα προέκυπτε αν η εκτίμηση μας z ήταν πράγματι η σωστή κατάσταση.

Για να διατηρήσουμε τα πράγματα απλά, περιορίζουμε την προσοχή στις γραμμικές συναρτήσεις του σφάλματος. Δηλαδή, προτείνουμε έναν εκτιμητή της μορφής

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) + Ld(t),$$

όπου L είναι ένας $p \times n$ πίνακας. Επίσης έχουμε το σφάλμα του παρατηρητή το οποίο ορίζεται ως $e(t) := z(t) - x(t)$. Αμέσως από τις εξισώσεις για το x και το z συμπεραίνουμε ότι η διαφορική εξίσωση $\dot{e}(t) = (A + LC)e(t)$ ισχύει για όλα τα e και ο L επιλέγεται έτσι ώστε $A + LC$ να είναι Hurwitz. (Sontag, 1998 [29])

1.3 Παρατηρησιμότητα(Observability)

Ορισμός 1(E. Sontag[29]): Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

με $x \in \mathcal{R}^n, u \in \mathcal{R}^m, y \in \mathcal{R}^p, A \in \mathcal{R}^{n \times n}, B^{n \times m}, C^{p \times n}$, ονομάζεται παρατηρήσιμο(observable) αν οι τιμές $\{y(t) : t \in [0, t_1]\}$ της εξόδου $y(t)$ σε ένα αυθαίρετο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_1$ προσδιορίζουν κατά μοναδικό τρόπο την αρχική κατάσταση $x(0)$ του συστήματος.

Θεώρημα 1(Αποδεικνύεται στο [29]): Έστω το γραμμικό σύστημα συνεχούς χρόνου:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \text{ με } x \in \mathcal{R}^n, u \in \mathcal{R}^m, y \in \mathcal{R}^p, A \in \mathcal{R}^{n \times n}, B^{n \times m}, C^{p \times n}$$

Το σύστημα αυτό είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν $rank O(A, C) = n$ όπου

$$O(A, C) = \begin{pmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^n \end{pmatrix}$$

ή ισότιμα αν και μόνο αν (A', C') είναι ελέγξιμο.

Απόδειξη

Έστω ότι η είσοδος $u(t) = 0, t \geq 0$. Θεωρώντας τη λύση της $\dot{x}(t)$ από την εξίσωση της εξόδου $y(t)$ έχουμε:

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{At}x(0)$$

Αν οι n στήλες του πίνακα $Ce^{At} \in \mathcal{R}^{p \times n}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε t , τότε ο πίνακας:

$$M(t_1) := \int_0^{t_1} e^{A't} C' Ce^{At} dt$$

είναι ομαλός.

Πολλαπλασιάζοντας την $y(t) = Cx(t) = Ce^{At}x(0)$ επί $e^{A't}C'$ παίρνουμε

$$e^{A't}C'y(t) = e^{A't}C'Ce^{At}x(0)$$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία εξίσωση από $t = 0$ ως $t = t_1$ και έχουμε

$$\int_0^{t_1} e^{A't}C'y(t)dt = \int_0^{t_1} e^{A't}C'Ce^{At}x(0)dt$$

ή

$$\int_0^{t_1} e^{A't}C'y(t)dt = M(t_1)x(0) \Rightarrow$$

$$x(0) = M(t_1)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A't}C'y(t)dt$$

Εφόσον ο $M(t_1)$ είναι ομαλός, ο $M(t_1)^{-1}$ υπάρχει. Επομένως από την τελευταία εξίσωση, η αρχική κατάσταση $x(0)$ μπορεί να προσδιοριστεί.

Αν οι στήλες του Ce^{At} είναι γραμμικά εξαρτημένες, θα έχουμε ότι:

$$\exists x \neq 0: M(t_1)x = 0 \Rightarrow x'M(t_1)x = 0 \Rightarrow x' \int_0^{t_1} e^{A't}C'Ce^{At}xdt = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{t_1} x' e^{A't} C' C e^{At} x dt = 0 &\Rightarrow \int_0^{t_1} (C e^{At} x)' C e^{At} x dt = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^{t_1} \|C e^{At} x\|^2 dt = 0 \Rightarrow C e^{At} x = 0 \end{aligned}$$

επομένως οι στήλες του $C e^{At}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες $\Leftrightarrow \text{rank}_R O = n$.

Επίσης γενικά έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{ik} A^i \right) t^k = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i \Rightarrow \\ C e^{At} &= [\gamma_0(t) I_p \ \gamma_1(t) I_p \ \dots \ \gamma_{n-1}(t) I_p] \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Επίσης, παραγωγίζοντας την αρχική $y(t)$, έχουμε διαδοχικά:

$$\dot{y}(t) = C \dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t)$$

$$\ddot{y}(t) = CA^2 x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t)$$

$$\ddot{\ddot{y}}(t) = CA^3 x(t) + CA^2 Bu(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t)$$

⋮

$$y^{(n-1)}(t) = CA^{n-1} x(t) + CA^{n-2} Bu(t) + \dots + CABu^{(n-3)}(t) + CBu^{(n-2)}(t)$$

ή υπό μορφή πινάκων

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x(t) \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CA^2 B & CAB & CB & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-2} B & CA^{n-3} B & CA^{n-4} B & \dots & CAB & CB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \vdots \\ u^{(n-3)}(t) \\ u^{(n-2)}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Αν $u(0) = 0$, η παραπάνω σχέση για $t = 0$ δίνει την

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{n-2}(0) \\ y^{n-1}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x(0)$$

Για να έχει λύση η παραπάνω με $x(0) \in \mathcal{R}^n$ πρέπει και αρκεί

$$\text{rank}_{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

1.4 Εκθετική ευστάθεια (Exponential Stability)

Στην θεωρία ελέγχου, ένα συνεχές γραμμικό αναλλοίωτο σύστημα (LTI) είναι εκθετικά ευσταθές αν και μόνο αν το σύστημα έχει ιδιοτιμές με αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος.

Η εκθετική σταθερότητα είναι μια μορφή ασυμπτωτικής σταθερότητας. Τα συστήματα που δεν είναι LTI είναι εκθετικά σταθερά εάν η σύγκλιση τους περιορίζεται από εκθετική απόσβεση.

- Εκθετική αύξηση-εκθετική απόσβεση

Μία ποσότητα x εξαρτάται εκθετικά από τον χρόνο t εάν

$$x(t) = \alpha \cdot b^{\frac{t}{\tau}}$$

όπου η σταθερά α είναι η αρχική τιμή του x ,

$$x(0) = \alpha,$$

ενώ η σταθερά b είναι θετικός αυξητικός παράγοντας και τ είναι μία χρονική σταθερά- ο χρόνος που χρειάζεται για το x για να αυξηθεί κατά έναν παράγοντα b :

$$x(t + \tau) = \alpha \cdot b^{\frac{t+\tau}{\tau}} = \alpha \cdot b^{\frac{t}{\tau}} \cdot b^{\frac{\tau}{\tau}} = x(t) \cdot b$$

Εάν $\tau > 0$ και $b > 1$, τότε το x έχει εκθετική αύξηση. Εάν $\tau < 0$ και $b > 1$, ή $\tau > 0$ και $0 < b < 1$, τότε x έχει εκθετική απόσβεση.

1.5 Input-to-state stability (ISS)

Ο όρος Input-to-state stability (ISS) είναι μια έννοια που χρησιμοποιείται ευρέως για τη μελέτη της ευστάθειας των μη γραμμικών συστημάτων ελέγχου με εξωτερικές εισόδους. Σε γενικές γραμμές, ένα σύστημα ελέγχου είναι ISS εάν είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές απουσία εξωτερικών εισόδων και εάν οι τροχιές του οριοθετούνται από μια συνάρτηση του μεγέθους της εισόδου για όλους τους αρκετά μεγάλους χρόνους. Η σημασία του ISS οφείλεται στο γεγονός ότι η ιδέα έχει γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ των μεθόδων εισόδου-εξόδου και κατάστασης-χώρου, που χρησιμοποιούνται ευρέως στην κοινότητα των συστημάτων ελέγχου.

Είναι χρήσιμο να εισάγουμε “συναρτήσεις σύγκρισης” για τον ποσοτικό προσδιορισμό της ευστάθειας. Μια τάξη K_∞ συναρτήσεων είναι μια συνάρτηση $\alpha: \mathcal{R}_{\geq 0} \times \mathcal{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{R}_{\geq 0}$ που είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα, μη φραγμένη και ικανοποιεί $\alpha(0) = 0$ ενώ σημαντικό είναι να ορίσουμε και μια τάξη συναρτήσεων \mathcal{KL} που περιλαμβάνει συναρτήσεις $\beta: \mathcal{R}_{\geq 0} \times \mathcal{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{R}_{\geq 0}$ τέτοιες ώστε $\beta(\cdot, t) \in K_\infty$ για κάθε t και $\beta(r, t)$ μειώνεται στο 0 όταν $t \rightarrow \infty$, για κάθε φixαρισμένο r δηλαδή $\beta(r, \infty) \rightarrow 0$.

Για ένα σύστημα χωρίς εισόδους (u), $\dot{x} = f(x)$, υπάρχει μια πολύ γνωστή ιδέα της ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας (από εδώ και στο εξής GAS ή “0-GAS” όταν αναφερόμαστε στο σύστημα $\dot{x} = f(x, 0)$ που σχετίζεται με ένα δοσμένο σύστημα με εισόδους $\dot{x} = f(x, u)$) λόγω του Lyapunov και συχνά ορίζεται με ε - δ όρους. Αυτός ο ορισμός ισοδυναμεί με την ακόλουθη διατύπωση:

$$\exists \beta \in \mathcal{KL} \text{ τέτοιο ώστε } |x(t, x^0)| \leq \beta(|x^0|, t) \forall x^0, \forall t \geq 0$$

Η ιδέα της input-to-state ευστάθειας (ISS) αρχικά εισήχθη από τον Eduardo Sontag το 1989 (“Smooth stabilization implies coprime factorization”)[30], ο οποίος παρείχε θεωρητικά έννοιες που χρησιμοποιούνταν για να περιγράψουν τα χαρακτηριστικά της ευστάθειας μιας απεικόνισης $(u(\cdot), x(0)) \mapsto x(\cdot)$ που στέλνουν αρχικές καταστάσεις και συναρτήσεις εισόδου σε άλλες καταστάσεις ή πιο γενικά σε εξόδους (outputs). Σημαντικό μεταξύ αυτών των χαρακτηριστικών είναι ότι οι είσοδοι που είναι φραγμένες, επαρκώς μικρές ή συγκλίνουσες, θα πρέπει να οδηγούν σε έξοδο με την αντίστοιχη ιδιότητα. Ο επίσημος ορισμός έχει ως εξής:

Ορισμός 2(E. Sontag[27,28]): Ένα σύστημα λέμε ότι είναι ISS εάν υπάρχει $\beta \in \mathcal{KL}$ και $\gamma \in K_\infty$ τέτοιο ώστε

$$|x(t)| \leq \beta(|x^0|, t) + \gamma(\|u\|_\infty)$$

που ισχύει για όλες τις λύσεις (εννοώντας ότι όλοι οι υπολογισμοί είναι έγκυροι για όλες τις εισόδους $u(\cdot)$, όλες τις αρχικές συνθήκες x^0 , και όλα τα $t \geq 0$).

1.6 Τοπικά-Ολικά Lipschitz συναρτήσεις- Lipschitz συνέγεια

Ορισμός 3: Το διανυσματικό πεδίο $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$ είναι ένα τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο αν για κάθε φραγμένο μη κενό σύνολο $S \subset \mathcal{R}^n$ υπάρχει $L(S) > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η ανισότητα $|f(x) - f(y)| \leq L(S)|x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathcal{R}^n$.

Ορισμός 4: Το διανυσματικό πεδίο $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$ είναι ένα ολικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο αν υπάρχει $L > 0$ τέτοιο ώστε ισχύει η ανισότητα $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathcal{R}^n$.

Πρόταση 1: Έστω $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ συνεχώς παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο. Τότε $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ είναι τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο.

Απόδειξη:

Έστω $S \subset \mathcal{R}^n$ ένα αυθαίρετο φραγμένο σύνολο. Τότε υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε $S \subseteq \bar{N}_R(0) = \{x \in \mathcal{R}^n: |x| \leq R\}$. Για κάθε $x, y \in \bar{N}_R(0)$ ισχύει ότι

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 Df(y + \lambda(x - y))(x - y) d\lambda$$

όπου $Df(x) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ είναι ο ιακωβιανός πίνακας της f στο $x \in \mathcal{R}^n$. Παίρνοντας νόρμες στην τελευταία εξίσωση και χρησιμοποιώντας τη συμβατότητα της νόρμας πίνακα, έχουμε για κάθε $x, y \in \bar{N}_R(0)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \int_0^1 Df(y + \lambda(x - y))(x - y) d\lambda \right| \\ &\leq \int_0^1 |Df(y + \lambda(x - y))(x - y)| d\lambda \\ &\leq \left(\int_0^1 |Df(y + \lambda(x - y))| d\lambda \right) |x - y| \end{aligned}$$

Αφού το $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο, έπεται ότι η απεικόνιση $x \in \mathcal{R}^n \rightarrow |Df(x)| \in \mathcal{R}$ είναι συνεχής. Άρα μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα:

$$L := \max \{|Df(x)|: x \in \bar{N}_R(0)\}$$

Λόγω κυρτότητας του $\bar{N}_R(0)$, έπεται ότι για κάθε $x, y \in \bar{N}_R(0)$ και $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει ότι

$(y + \lambda(x - y)) \in \bar{N}_R(0)$. Συνδυάζοντας τις 2 τελευταίες σχέσεις έχουμε για κάθε $x, y \in \bar{N}_R(0)$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Επειδή $S \subseteq \bar{N}_R(0)$, προφανώς η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $x, y \in S$. ◻

1.7 Διφορομορφισμοί(Diffeomorphism)

Στα μαθηματικά, ένας διφορομορφισμός είναι ένας ισομορφισμός των ομαλών απεικονίσεων. Είναι μια αντιστρέψιμη συνάρτηση που απεικονίζει μια διαφορική τοπολογία σε μια άλλη έτσι ώστε τόσο η συνάρτηση όσο και η αντίστροφή της να είναι ομαλές.

Πιο συγκεκριμένα έστω 2 χώροι M, N και διαφορίσιμη απεικόνιση $f: M \rightarrow N$ καλείται διφορομορφισμός αν είναι 1 προς 1 και η αντίστροφή της $f^{-1}: N \rightarrow M$ είναι επίσης

διαφορίσιμη. Αν αυτές οι συναρτήσεις είναι r φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, η f ονομάζεται C^r – διαφορομορφισμός.

1.8 Τετραγωνική συνάρτηση(Quadratic Function)

Η τετραγωνική συνάρτηση K με n μεταβλητές μπορεί να αναπαρασταθεί με τον εξής τρόπο:

$$K(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^n b_k x_k + c,$$

που τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές $a_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$, είναι διαφορετικός από μηδέν. Υποθέτουμε επίσης ότι $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \dots, n$, που εγγυάται τη μοναδικότητα της παραπάνω αναπαράστασης.

1.9 Πίνακας Hurwitz

Ορισμός 5[29]: Ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται πίνακας Hurwitz αν κάθε ιδιοτιμή του A έχει αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος, δηλαδή, $Re[\lambda_i] < 0$ για κάθε ιδιοτιμή λ_i .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Περιγραφή του προβλήματος

Η ψηφιακή τεχνολογία έχει κερδίσει σήμερα σχεδόν όλους τους τομείς της βιομηχανίας και της κοινωνίας. Αυτό το χαρακτηριστικό έχει επηρεάσει τα συστήματα ελέγχου που έχουν πλέον γίνει υβριδικής φύσης (συνεχή-διακριτά). Συνεπώς, νέα ερευνητικά θέματα κατέστησαν κεντρικά στη θεωρία των συστημάτων ελέγχου. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το θέμα της αντιστάθμισης της χρονικής καθυστέρησης και των επιδράσεων της δειγματοληψίας δεδομένων στον σχεδιασμό του ελεγκτή και του παρατηρητή για τα μη γραμμικά συστήματα συνεχούς χρόνου. Σε αυτή την εργασία, εστιάζουμε στο πρόβλημα του σχεδιασμού δειγματοληπτικών παρατηρητών συστημάτων ελέγχου για μη γραμμικά συστήματα συνεχούς χρόνου. Στην πραγματικότητα, η δειγματοληψία δεδομένων περιλαμβάνει το γεγονός της απώλειας δεδομένων και εισάγει μία χρονο-μεταβαλλόμενη καθυστέρηση. Εάν δεν αντισταθμιστεί ικανοποιητικά, αυτά τα συνδυασμένα αποτελέσματα μπορεί να έχουν ως αποτέλεσμα την απώλεια της παρατηρησιμότητας του συστήματος και την απόκλιση του σφάλματος του παρατηρητή. Έχουν αναπτυχθεί αρκετές προσεγγίσεις για την αντιμετώπιση αυτού του ζητήματος. Μία από αυτές συμπεριλαμβάνει να θεωρήσεις το σχεδιασμό του παρατηρητή να βασίζεται σε μια Euler διακριτή χρονική προσέγγιση του συστήματος συνεχούς χρόνου. Ο παρατηρητής διακριτού χρόνου που προκύπτει με αυτό τον τρόπο παρέχει μόνο εκτιμήσεις κατάστασης στα δείγματα δειγματοληψίας

Οι παρατηρητές που χαρακτηρίζονται από ολική εκθετική ευστάθεια είναι γενικά σχεδιασμένοι απευθείας από το συνεχούς χρόνου σύστημα. Η κυρίαρχη αρχή σχεδιασμού συνίσταται στην εκκίνηση από έναν συνεχούς χρόνου παρατηρητή που χαρακτηρίζεται από ολική εκθετική ευστάθεια, όταν υπάρχουν διαθέσιμες συνεχείς μετρήσεις εξόδου και τροποποίηση του παρατηρητή προκειμένου να ληφθεί υπόψη για δειγματοληψία δεδομένων. Οι ποικίλες τροποποιήσεις που προτείνονται στη βιβλιογραφία συνιστούν αντιστάθμιση για τις ελλείψεις πληροφορίας (μεταξύ δύο διαδοχικών χρόνων δειγματοληψίας) χρησιμοποιώντας εκτιμητές εξόδου και / ή κατάστασης μεταξύ δειγμάτων. Η απλούστερη παραλλαγή αυτής της γενικής αρχής συνίσταται στην απλή χρήση ενός ZOH output predictor δηλαδή χρησιμοποιώντας την πιο πρόσφατη μέτρηση εξόδου μέχρι την απόκτηση μιας νέας μέτρησης. Αυτή η προσέγγιση έχει διερευνηθεί από τους Tobias Raff, Marcus Kogel και Frank Allgower [24] λαμβάνοντας υπόψη μια κατηγορία συστημάτων με έλλειψη γραμμικότητας Lipschitz. Πιο συγκεκριμένα, θεώρησαν ένα μη γραμμικό συνεχούς χρόνου σύστημα Lipschitz της μορφής

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + p(t, u(t)) + G\sigma(Hx(t)) \\ y_k = Cx(t_k) \end{cases} \quad (2.1)$$

με αρχικές συνθήκες $x(t_0) = x_0$, $x \in \mathcal{R}^n$, κατάσταση του συστήματος, $u \in \mathcal{R}^p$, η είσοδος, $y \in \mathcal{R}^q$ η μετρήσιμη έξοδος, που είναι διαθέσιμη σε χρονικές στιγμές που ικανοποιούν :

$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$ με $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = \infty$ και χρονικά διαστήματα $\delta_{k+1} = t_{k+1} - t_k$.

Ακόμα, $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $G \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $H \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $C \in \mathcal{R}^{q \times n}$ είναι σταθεροί πίνακες και $p: \mathcal{R} \times \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^n$ είναι μια τοπική συνάρτηση Lipschitz που εξαρτάται από γνωστά ορίσματα. Τελικώς, υποθέτουμε ότι (A, C) είναι παρατηρήσιμο και ότι $\sigma: \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^m$ είναι μία μη γραμμικότητα Lipschitz με σταθερά Lipschitz $\gamma > 0$, δηλαδή

$$\|\sigma(v) - \sigma(w)\| \leq \gamma \|v - w\| \quad \forall v, w \in \mathcal{R}^m \quad (2.2)$$

Ο προτεινόμενος παρατηρητής για το (2.1) είναι:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + p(t, u(t)) + G\sigma(H\hat{x}(t)) + K(t_k) \quad (2.3)$$

με $\hat{x} \in \mathcal{R}^n$, αρχική συνθήκη $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ και $K(t_k) = L(\hat{y}(t_k) - y(t_k))$ για $t \in [t_k, t_{k+1})$, όπου $y(t_k) = C\hat{x}(t_k)$ είναι η εκτιμώμενη έξοδος και $L \in \mathcal{R}^{n \times q}$ ο πίνακας του παρατηρητή. Παρατηρείστε ότι η δυναμική του παρατηρητή (2.3) είναι υβριδικής φύσης. Ο λόγος είναι ότι η κατάσταση \hat{x} περιγράφεται σε συνεχή-χρόνο ενώ ο όρος $\hat{y}(t_k) - y(t_k)$ αλλάζει μόνο στις χρονικές στιγμές t_k δηλαδή ο όρος αυτός χρησιμοποιείται μέχρι ένας νέος τέτοιος όρος να είναι διαθέσιμος (διακριτά). Για να δείξουμε ότι ο παρατηρητής (2.3) υπολογίζει την κατάσταση του συστήματος (2.1), έχουμε την ευστάθεια της δυναμικής του σφάλματος εκτίμησης ως εξής:

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + Gu(t, e(t)) - K(t_k) \quad (2.4)$$

με $e = x - \hat{x}$ και $u(t, e) = \sigma(Hx) - \sigma(H(x - e))$.

Οι επαρκείς συνθήκες για έναν παρατηρητή τύπου Luenberger να είναι ολικά εκθετικά συγκλίνον έχουν εκφραστεί με τη μορφή ανισοτήτων γραμμικού πίνακα (Linear Matrix Inequalities-LMIs) που αφορούν ιδίως το κέρδος του παρατηρητή και την περίοδο δειγματοληψίας. Για να διευρυνθεί το σύνολο των παραδεκτών περιόδων δειγματοληψίας, προτάθηκε να τροποποιηθεί ο τυπικός ZOH-output-predictor based observer, αφήνοντας το κέρδος του παρατηρητή να είναι εκθετικά αποσβενόμενο μέσα στα διαστήματα δειγματοληψίας και να επαναφέρεται σε χρόνους δειγματοληψίας. Όπως ανέφεραν οι Tarek Ahmed-Ali, Emilia Fridman, Fouad Giri, Laurent Burlion και Francoise Lagarrigue στο επιστημονικό τους άρθρο με τίτλο «Using Exponential time-varying gains for sampled data stabilization and estimation» [1] όπου μελετάται και αναλύεται η εκθετική ευστάθεια 2 κατηγοριών δειγματοληπτικών συστημάτων που αποτελούνται από μη γραμμικές ολικά Lipschitz διαφορικές εξισώσεις και ημί-γραμμικές παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, ένα κοινό χαρακτηριστικό και των δύο αυτών κατηγοριών είναι ότι τα συστήματα που περιλαμβάνουν επιτρέπεται να έχουν χρονομεταβαλλόμενο κέρδος της μορφής $e^{-n(t-t_k)}$ με

$n > 0$ μια παράμετρο που μπορεί να ρυθμιστεί, όπου $t_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ είναι στιγμές δειγματοληψίας. Η χρήση του παραπάνω χρονο-μεταβαλλόμενου κέρδους επιτυγχάνει σημαντική μεγέθυνση του μέγιστου διαστήματος δειγματοληψίας σε σύγκριση με την περίπτωση του σταθερού κέρδους ($n = 0$). Αξίζει να αναφέρουμε ότι και στις 2 κλάσεις συστημάτων, όλες οι συνθήκες ευστάθειας είναι εκφρασμένες σε όρους LMI's. Οι νέες συνθήκες λοιπόν, φαίνεται να είναι χρήσιμες στην κατασκευή δειγματοληπτικών παρατηρητών με εκθετικά αποσβενόμενο κέρδος. Αυτού του είδους το κέρδος μπορεί εκτός από το να οδηγήσει σε σημαντική μεγέθυνση του μέγιστου διαστήματος δειγματοληψίας, να διατηρεί και την ευστάθεια.

Η ιδέα της χρήσης ενός εκθετικά αποσβενήμενου παράγοντα στο κέρδος του παρατηρητή για πρώτη φορά παρουσιάστηκε από τους Filippo Cacace, Alfredo Germani, Costantino Manes στο επιστημονικό τους άρθρο «A chain Observer fon Nonlinear Systems with Multiple-Time-Varying Measurement Delays»[5] όπου διερευνήθηκε το πρόβλημα του σχεδιασμού παρατηρητών για συστήματα με υστέρηση στην έξοδο (που δεν υπόκεινται σε δειγματοληψία εξόδου). Όπως αναφέρουν, όταν η μέγιστη καθυστέρηση είναι επαρκώς μικρή, τότε ένας παρατηρητής απλού βήματος μπορεί να επιτύχει ένα προδιαγεγραμμένο εκθετικά αποσβενήμενο σφάλμα παρατήρησης. Μια αλληλουχία παρατηρητών απαιτείται στην περίπτωση μεγαλύτερων καθυστερήσεων. Εισηγήσαν έναν περισσότερο ελαστικό σχεδιασμό μιας αλληλουχίας παρατηρητών που επιτρέπει μη ομοιόμορφα διαστήματα καθυστέρησης για κάθε παρατηρητή στην αλληλουχία αυτή(αλυσίδα).

Μια λιγότερο απλή προσέγγιση είναι αυτή που συνήθως αναφέρεται ως συνεχής-διακριτή σχεδίαση παρατηρητή, που ξεκίνησε στις αρχές της δεκαετίας του '90 και αναπτύχθηκε ακόμα περισσότερο αργότερα. Αρχικά είχαμε τους Frederic Mazenc και Emilia Fridman με το επιστημονικό τους άρθρο “Predictor-Based Sampled-Data Exponential Stabilization Through Continuous-Discrete Observers”[20], οι οποίοι λύσανε ένα πρόβλημα σταθεροποίησης ανάδρασης εξόδου βάσει παρατηρητή για γραμμικά χρονο-αναλλοίωτα συστήματα με μία αυθαίρετα μεγάλη σταθερή καθυστέρηση, Zero-order-hold είσοδο και διακριτές μετρήσεις. Η προτεινόμενη τεχνική βασίζεται στην εισαγωγή ενός συνεχούς-διακριτού παρατηρητή και στην προσαρμογή της διάσημης προσέγγισης του μοντέλου μείωσης(reduction model approach). Η προσέγγιση του μοντέλου μείωσης (Model order reduction (MOR)) είναι μια τεχνική για τη μείωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας των μαθηματικών μοντέλων σε αριθμητικές προσομοιώσεις. Ως εκ τούτου, σχετίζεται στενά με την έννοια της μεταμόρφωσης με εφαρμογές σε όλους τους τομείς της μαθηματικής μοντελοποίησης. Το μοντέλο μείωσης λαμβάνει υπόψιν τις ασυνεχείς πλευρές του παρατηρητή.

Οι προτεινόμενοι διακριτού-συνεχούς χρόνου παρατηρητές, προέρχονται είτε από τον συνεχούς χρόνου παρατηρητή υψηλού κέρδους είτε από το επεκτεταμένο φίλτρο Kalman(EKF). Οι M.Nadri και H.Hammouri[21] έδωσαν επαρκείς συνθήκες για το χρόνο εισαγωγής και δειγματοληψίας που μας επιτρέπουν να κατασκευάζουμε έναν εκθετικά παρατηρητή για συστήματα γραμμικά ως προς την κατάσταση συνεχούς-διακριτού χρόνου. Η δομή του παρατηρητή που προτείνουν είναι παρόμοια με την δομή των φίλτρων Kalman. Ωστόσο για να πάρουμε το κέρδος του παρατηρητή χρειάζεται να λύσουμε μια γραμμική διαφορική εξίσωση σε συνδυασμό με μια γραμμική αλγεβρική.

Το σύστημα για τα γραμμικά ως προς την κατάσταση συστήματα είναι της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u)x + b(u) \\ y = Cx \end{cases} \quad x \in \mathcal{R}^n, u \in U \subset \mathcal{R}^m, y \in \mathcal{R}^p \quad (2.5)$$

όπου x είναι μία άγνωστη κατάσταση, $u(t)$ είναι μια γνωστή είσοδο, $y(t)$ είναι μια γνωστή έξοδος, A και b είναι συνεχείς σε σχέση με u και C που είναι ένας σταθερός πίνακας. Λέμε ότι η είσοδος u ορίζεται σε ένα διάστημα $[t_0, t_0 + T]$ που κάνει το σύστημα (2.5) παρατηρήσιμο στο $[t_0, t_0 + T]$, ο u είναι universal input στο $[t_0, t_0 + T]$, αν και μόνον αν όλες οι αρχικές καταστάσεις $x_0 \neq \bar{x}_0$ και οι αντίστοιχες έξοδοι $y(x_0, u, t)$ και $y(\bar{x}_0, u, t)$ δεν είναι ταυτοτικά ίσες στο $[t_0, t_0 + T]$.

Ένα συνεχές-διακριτό σύστημα γραμμικό ως προς την κατάσταση, έχει τη μορφή:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u)x + b(u) \\ y(t_k) = Cx(t_k) \end{cases} \quad x \in \mathcal{R}^n, u \in U \subset \mathcal{R}^m, y(t_k) \in \mathcal{R}^p \quad (2.6)$$

όπου $(t_k)_{k \geq 0}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία τέτοια ώστε $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$ και

$$\delta = \sup_{k \geq 0} (t_{k+1} - t_k) < +\infty.$$

Το 2010 οι Madiha Nadri, Hassan Hammouri, Carlos Manuel Astorga[22] μίλησαν για κατασκευή παρατηρητή συνεχούς-διακριτού χρόνου για state affine systems up to output injection.

Φυσικά με τον όρο αυτό εννοούμε συνεχή δυναμικά συστήματα με διακριτού χρόνου μετρήσεις εξόδου. Η παρατηρησιμότητα αυτής της τάξης των συστημάτων εξαρτάται από τις εισόδους του συστήματος και του δειγματοληπτικού χρόνου των εξόδων. Γενικά state affine systems up to output injection είναι της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u, y)x + \varphi(u, y) \\ y(t_k) = Cx(t_k) \end{cases}$$

δηλαδή σε σχέση με την απλή μορφή (state affine systems) εδώ προστίθεται η εξάρτηση από τις εξόδους.

Οι προτεινόμενοι διακριτού-συνεχούς χρόνου παρατηρητές προκύπτουν είτε από τον συνεχούς χρόνου παρατηρητή υψηλού κέρδους ή το επεκτεταμένο φίλτρο Kalman, που είναι μια πολύ διάσημη πρακτική λύση για κατασκευή παρατηρητών. Αν και η σταθερότητα του ήταν πρόβλημα για πολύ καιρό, αποδείχθηκε πριν λίγα χρόνια πως μπορεί να διασφαλιστεί για ανομοιόμορφα παρατηρήσιμα συστήματα σε συνδυασμό με τεχνικές υψηλού κέρδους. Οι Lizeth Torres, Gildas Besancon και Didier Georges[25] πρότειναν μια κατασκευή παρατηρητή για μια τάξη συστημάτων που μπορούν να γραφούν σε τριγωνική μορφή. Αυτή η μορφή είναι αρκετά παρόμοια με την κλασική κανονική που χρησιμοποιείται για υψηλού-κέρδους παρατηρητές, αλλά είναι πιο γενική με την άποψη ότι δεν είναι περιορισμένα σε ομοιόμορφα παρατηρήσιμα συστήματα. Το συμπέρασμα είναι ότι η σύγκλιση χρειάζεται κάποια κατάλληλη διέγερση. Ο προτεινόμενος παρατηρητής τότε συνδυάζει τη δομή του επεκτεταμένου φίλτρου Kalman με υψηλού κέρδους τεχνικές, που επεκτείνεται στη περίπτωση μη ομοιόμορφων παρατηρήσιμων συστημάτων.

Περιλαμβάνουν open-loop continuous-time inter sample state predictors και διακριτού χρόνου διόρθωση ανάδρασης που λειτουργεί σε χρόνους δειγματοληψίας. Η διόρθωση ανάδρασης της τροχιάς κατάστασης εκτελείται προσθέτοντας στην εξίσωση του παρατηρητή, έναν καινοτόμο όρο αναλογικό με το σφάλμα εκτίμησης εξόδου (μεταξύ της εξόδου του συστήματος και της εξόδου του παρατηρητή) που ενισχύεται με το κέρδος του παρατηρητή. Στην περίπτωση του φίλτρου Kalman όπως ο παρατηρητής, το κέρδος ενημερώνεται συνεχώς. Η εκθετική σύγκλιση του σφάλματος εξόδου παρατήρησης καθορίζεται κάτω από ad hoc assumption, ανάλογα με τον υποκείμενο παρατηρητή (συνεχούς χρόνου).

Μια αρκετά διαφορετική προσέγγιση, η οποία ξεκίνησε από τους Ιάσωνα Καραφύλλη και Κώστα Κράβαρη[12] είναι αυτή της κατασκευής ενός δειγματοληπτικού μη γραμμικού

παρατηρητή χρησιμοποιώντας μιας συνεχούς χρόνου κατασκευή με έναν inter-sample output predictor. Ο προτεινόμενος δειγματοληπτικός παρατηρητής είναι ένα υβριδικό σύστημα. Μπορεί να δειχθεί ότι κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις οι ιδιότητες ευρωστίας της συνεχούς χρόνου κατασκευής (robustness property of the continuous-time design) κληρονομούνται από τους δειγματοληπτικούς παρατηρητές, όσο η δειγματοληπτική περίοδος δεν είναι τόσο μεγάλη. Αυτή η προσέγγιση έχει εφαρμογή σε γραμμικά συστήματα και τριγωνικά ολικά Lipschitz συστήματα. Η κατασκευή του υβριδικού παρατηρητή επιτυγχάνεται από μεθοδολογίες κατασκευής συνεχούς-διακριτού παρατηρητή, που λαμβάνει υπόψη τη διακριτού-χρόνου φύση των μετρήσεων.

Θεωρούμε το σύστημα μίας εξόδου:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathcal{R}^n \\ y = h(x), & y \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (2.7)$$

όπου $f \in C^1(\mathcal{R}^n; \mathcal{R}^n)$, $h \in C^2(\mathcal{R}^n; \mathcal{R})$ με $f(0) = 0$, $h(0) = 0$. Για το σύστημα αυτό υποθέτουμε ότι μια συνεχούς χρόνου κατασκευή είναι διαθέσιμη, της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{z} = F(z, y), & z \in \mathcal{R}^k \\ \hat{x} = \Psi(z), & \hat{x} \in \mathcal{R}^n \end{cases} \quad (2.8)$$

όπου $F \in C^1(\mathcal{R}^k \times \mathcal{R}; \mathcal{R}^k)$, $\Psi \in C^1(\mathcal{R}^k; \mathcal{R}^n)$ με $F(0,0) = 0$, $\Psi(0) = 0$ και με την διαισθητική προσδοκία ότι μία κατασκευή συνεχούς-χρόνου μη-γραμμικού παρατηρητή θα εξακολουθούσε να είναι χρήσιμη, παρουσία μέτριου μεγέθους περιόδου δειγματοληψίας όσο ειδική προσοχή δίνεται στο χρονικό διάστημα μεταξύ των μετρήσεων. Αντί να κρατάνε τις πιο πρόσφατες μετρήσεις (Zero-Order-Hold), προτείνουν έναν δειγματοληπτικό παρατηρητή που αποτελείται από συνεχούς χρόνου παρατηρητές, σε συνδυασμό με έναν output predictor για τα χρονικά διαστήματα μεταξύ 2 διαδοχικών μετρήσεων:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(z(t), w(t)), & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \\ \dot{w}(t) = L_f h(\Psi(z(t))), & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \\ w(\tau_{i+1}) = y(\tau_{i+1}), \hat{x} = \Psi(z(t)), & \hat{x} \in \mathcal{R}^n \end{cases} \quad (2.9)$$

όπου $(z(t), w(t)) \in \mathcal{R}^k \times \mathcal{R}$.

Το κύριο αποτέλεσμα είναι ότι οι ιδιότητες του παρατηρητή κάτω από συνεχείς μετρήσεις κληρονομούνται από τον παρατηρητή (2.9) κάτω από αυθαίρετο χρονοδιάγραμμα δειγματοληψίας, όσο η περίοδο δειγματοληψίας δεν είναι τόσο μεγάλη.

Γενικά λοιπόν παρέχει δειγματοληπτικούς παρατηρητές συνεχούς χρόνου τύπου Luenberger, όπου η επίδραση της δειγματοληψίας αντισταθμίζεται με τη χρήση inter-sample output predictors. Σε αυτή την προσέγγιση, ο output predictor είναι το μόνο συστατικό παρατηρητή που επαναρυθμίζεται στους χρόνους δειγματοληψίας και η εξίσωση κατάστασης του παρατηρητή οδηγείται συνεχώς με έναν καινοτόμο όρο αναλογικό προς το (προβλεπόμενο) σφάλμα εκτίμησης. Σε σύγκριση με τους συνεχούς-διακριτού χρόνου παρατηρητές, οι output predictor based observers χαρακτηρίζονται από ολική εκθετική σύγκλιση καθώς και απλότητα υλοποίησης, δεδομένου ότι μόνο μία εξίσωση του παρατηρητή επανενεργοποιείται/επανεκκινεί στους χρόνους δειγματοληψίας (και συγκεκριμένα εκείνη του output predictor) και δεδομένου

ότι επιτρέπονται αβέβαια χρονοδιαγράμματα δειγματοληψίας. Αυτή η προσέγγιση έχει αποδειχθεί ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε διάφορες κατηγορίες συστημάτων, συμπεριλαμβανομένων γραμμικών ανιχνεύσιμων συστημάτων και τριγωνικών ολικά Lipschitz συστημάτων. Τα γραμμικά ανιχνεύσιμα συστήματα είναι της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, x \in \mathcal{R}^n \\ y = C'x, y \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (2.10)$$

Η ανιχνευσιμότητα υποθέτει ότι υπάρχει ένα διάνυσμα $k \in \mathcal{R}^n$ τέτοιο ώστε ο πίνακας

$(A + kC')$ να είναι Hurwitz. Όσο για τα τριγωνικά ολικά Lipschitz συστήματα, θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_i) + x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n), y = x_1 \end{cases} \quad (2.11)$$

όπου $f_i: \mathcal{R}^i \rightarrow \mathcal{R}$ ($i = 1, \dots, n$) με $f_i(0) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) είναι ολικά Lipschitz συνάρτηση δηλαδή \exists σταθερά $L \geq 0$ τέτοια ώστε οι επόμενες ανισότητες να ισχύουν για $i = 1, \dots, n$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^i$, $(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{R}^i$:

$$|f_i(x_1, \dots, x_i) - f_i(z_1, \dots, z_i)| \leq L|x_1 - z_1, \dots, x_i - z_i| \quad (2.12)$$

Όλα τα γραμμικά παρατηρήσιμα συστήματα μπορούν να γράφουν στη μορφή (2.11) δηλαδή

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n), y = x_1$$

με $f_i: \mathcal{R}^i \rightarrow \mathcal{R}$ ($i = 1, \dots, n$) να είναι γραμμικές συναρτήσεις.

Ο σχεδιασμός inter-sample output-predictor based observer έχει αποτελέσει αντικείμενο αρκετών επεκτάσεων [8,14,15,] όπως για sampled-data adaptive observers για μια τάξη γραμμικών ως προς την κατάσταση μη γραμμικών συστημάτων Output-Injection. Μια κυρία δυσκολία με αυτή την τάξη των συστημάτων είναι ότι η εξίσωση κατάστασης περιλαμβάνει έναν εξαρτώμενο από την έξοδο, όρο που εξαρτάται ρητά από άγνωστες παραμέτρους. Καθώς η έξοδος είναι μόνο προσβάσιμη σε μετρήσεις σε χρόνους δειγματοληψίας, ο όρος που εξαρτάται από την έξοδο αποδεικνύεται (σχεδόν πάντα) ότι υπακούει σε μια διπλή αβεβαιότητα, καθιστώντας τους προηγούμενους adaptive observers ακατάλληλους. Είναι επίσημα γνωστό ότι ο adaptive observer είναι εκθετικά συγκλίνουν υπό την προϋπόθεση ότι η περίοδος δειγματοληψίας είναι μικρή και μία συνεχή κατάσταση διέγερσης διατηρείται. Το γεγονός ότι οι τροχιές εκτιμήσεων κατάστασης και παραμέτρων είναι συνεχείς (state and parameter estimate trajectory) είναι άλλο ένα ελκυστικό χαρακτηριστικό του παρατηρητή.

Μια άλλη επέκταση αφορά την σταθεροποίηση μη γραμμικών συστημάτων με καθυστέρηση με χρήση approximate predictors και υψηλού κέρδους παρατηρητές. Όπως αναφέρεται από τους Ιάσωνα Καραφύλλη και Miroslav Krstic[14] το πρόβλημα της σταθεροποίησης συστημάτων με αυθαίρετα μεγάλες καθυστερήσεις (arbitrarily long delays) στην είσοδο και/ή στην έξοδο από την έξοδο ανάδρασης παραμένει ανοιχτό. Η λύση που δίνουν αφορά μη γραμμικά συστήματα με δειγματοληπτικές μετρήσεις και με έλεγχο που εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας zero-order-hold με απαίτηση οι περίοδοι δειγματοληψίας να είναι επαρκώς μικρές, αν όχι απαραίτητα σταθερές.

Η προσέγγιση που κάνουν αφορά μια τάξη ολικά Lipschitz strict-feedback συστημάτων με διαταραχές και χρησιμοποιεί μια κατάλληλα διαδοχική προσέγγιση του predictor map, έναν υψηλού κέρδους δειγματοληπτικό παρατηρητή και μία γραμμική σταθεροποιητική ανάδραση για το σύστημα χωρίς καθυστέρηση. Η προσέγγιση επιτυγχάνει ISS ως προς τις διαταραχές συστήματος και ως προς το σφάλμα μέτρησης, όπως επίσης επιτυγχάνει ολική εκθετική ευστάθεια, απουσία διαταραχών.

Άλλη επέκταση αποτελούν οι δειγματοληπτικοί παρατηρητές για παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις μίας διάστασης με μη τοπικές εξόδους[15]. Η μελετούμενη κλάση των παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων επιτρέπει την παρουσία ολικά Lipschitz μη γραμμικών και όχι τοπικών όρων μερικών διαφορικών εξισώσεων. Παρουσιάστηκαν λοιπόν 2 διαφορετικοί δειγματοληπτικοί παρατηρητές. Ένας με inter-sample predictor για τη μη διαθέσιμη συνεχή μέτρηση του σήματος και έναν χωρίς inter sample predictor. Οι ρητές συνθήκες στην άνω διάμετρο του (αβέβαιου) χρονοδιαγράμματος δειγματοληψίας και για τους 2 σχεδιασμούς προκύπτουν από την εκθετική σύγκλιση του σφάλματος του παρατηρητή στο 0, απουσία της μέτρησης θορύβου και του σφάλματος μοντελοποίησης. Επιπλέον, αδιαμφισβήτητες εκτιμήσεις του ποσοστού σύγκλισης μπορούν να συναχθούν με βάση τη γνώση της ανώτερης διαμέτρου για το χρονοδιάγραμμα δειγματοληψίας. Όταν υπάρχουν θόρυβοι μέτρησης και/ή σφάλματα μοντελοποίησης, οι Input-to-Output (IOS) εκτιμήσεις για το σφάλμα του παρατηρητή διατηρούνται και για τους 2 σχεδιασμούς σε σχέση με το θόρυβο μέτρησης και τα σφάλματα μοντελοποίησης.

Έχει γίνει προσπάθεια να σχεδιαστούν δειγματοληπτικοί παρατηρητές συστημάτων ελέγχου για συστήματα με αβεβαιότητα παραμέτρων όπως αυτά που προαναφέραμε δηλαδή για output-injection μη γραμμικά συστήματα που περιλαμβάνουν στην εξίσωση κατάστασης έναν όρο εξαρτώμενο από την έξοδο που εξαρτάται ρητά από άγνωστες παραμέτρους καθώς και για συστήματα με χρονικές καθυστερήσεις.

Η αρχή για inter-sample output-predictor έχει επίσης αποδειχθεί χρήσιμη στο σχεδιασμό παρατηρητών για παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, όπως προείπαμε, για την κατασκευή δειγματοληπτικών παρατηρητών για μια ευρεία τάξη μονοδιάστατων παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων που επιτρέπουν την παρουσία ολικά Lipschitz μη γραμμικών και μη τοπικών όρους στις μερικές διαφορικές εξισώσεις και έχει επίσης χρησιμοποιηθεί σε σχεδιασμό ανάδρασης εξόδου και πιο συγκεκριμένα στη σταθεροποίηση μη γραμμικών συστημάτων με καθυστέρηση τόσο στην είσοδο όσο και στην έξοδο. Τα συστήματα αυτά σταθεροποιούνται με τη χρήση μόνο ανάδρασης της εξόδου του συστήματος.

Υπό το πρίσμα της παραπάνω ανασκόπησης, φαίνεται ότι το πρόβλημα του σχεδιασμού των δειγματοληπτικών παρατηρητών απευθύνεται κυρίως για δύο συγκεκριμένες κατηγορίες πεπερασμένων διαστάσεων συστημάτων, αναγκαστικά αυστηρής δομής ανάδρασης ή συστήματα γραμμικά ως προς την κατάσταση. Επιπλέον, όλοι οι προτεινόμενοι δειγματοληπτικοί παρατηρητές προέρχονται από προηγουμένως υπάρχοντες εκθετικά-συγκλίνοντες παρατηρητές συνεχούς χρόνου. Οι τελευταίοι γίνονται δεδομένα δειγματοληψίας χρησιμοποιώντας είτε την τεχνική ZOH είτε την τεχνική του inter-sample output-predictor. Στην εργασία αυτή, επανεξετάζουμε το πρόβλημα σχεδιασμού δειγματοληπτικών παρατηρητών με στόχο την επίτευξη μιας γενικότερης προσέγγισης σχεδιασμού που ενοποιεί τις περισσότερες υπάρχουσες μεθόδους σχεδιασμού και σε ορισμένες πτυχές, υπερβαίνει τα

σημερινά αποτελέσματα. Η προσέγγιση που παρουσιάζουμε παρουσιάζει τα ακόλουθα γεγονότα:

- (i) Ισχύει για μια μεγάλη κατηγορία από (τοπικά) Lipschitz μη γραμμικά συστήματα χωρίς αναγκαστικά να υπάρχει αυστηρή δομή ανάδρασης.
- (ii) Περιλαμβάνει μια αρκετά γενική δομή παρατηρητών που αντιπροσωπεύει πολλούς γνωστούς παρατηρητές συνεχούς χρόνου. Απαιτείται μόνο ο υποκείμενος παρατηρητής: (α) να διαθέτει εκθετική σύγκλιση σε σχέση με μια δεδομένη συνάρτηση Lyapunov παρατηρητή [Observer Lyapunov Function (OLF)] στην περίπτωση με απουσία θορύβου και (β) να δημιουργεί ένα σύστημα σφάλματος κατάστασης το οποίο είναι IOS σε σχέση με τον θόρυβο μέτρησης.
- (iii) Εισάγει έναν καινοτόμο προγνωστικό παράγοντα εξόδου που συμπεριλαμβάνει και τα ZOH και τους inter-sample predictors. Ο νέος output predictor αποτελεί το κύριο όργανο του δειγματοληπτικού παρατηρητή και επιτρέπει αβέβαια χρονοδιαγράμματα δειγματοληψίας.
- (iv) Παρέχουμε ρητή προϋπόθεση για τη μέγιστη επιτρεπόμενη περίοδο δειγματοληψίας, έτσι ώστε η ιδιότητα IOS να διατηρείται από τον δειγματοληπτικό παρατηρητή.

Οι λόγοι που καθιστούν απαραίτητο να μελετήσουμε τους δειγματοληπτικούς παρατηρητές που προτείνονται στην συγκεκριμένη εργασία είναι οι εξής:

- i) Για θεωρητικούς λόγους, από τη στιγμή που ο παρατηρητής ενοποιεί πολλούς προτεινόμενους δειγματοληπτικούς παρατηρητές, και
- ii) Για πρακτικούς λόγους, διότι μία κατάλληλη επιλογή του πίνακα $K(z, w, u) \in \mathcal{R}^{p \times p}$ του γενικού δειγματοληπτικού παρατηρητή $\dot{w}(t) = \nabla h(z(t))f(z(t), u(t)) - K(z(t), w(t), u(t))(w(t) - h(z(t)))$ όπως θα δούμε εν συνεχεία, ίσως επιτρέψει μεγαλύτερη δειγματοληπτική περίοδο ή μειωμένη ευαισθησία στο θόρυβο μέτρησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μέθοδοι Κατασκευής δειγματοληπτικού παρατηρητή

Θεωρούμε το πλήρες για θετικούς χρόνους σύστημα της μορφής:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad , \quad x \in \mathcal{R}^n, u \in U \quad (3.1)$$

όπου $x \in \mathcal{R}^n$ είναι η κατάσταση του συστήματος, $u \in U$ είναι μία μετρήσιμη είσοδος,

$U \subseteq \mathcal{R}^m$ είναι ένα μη κενό σύνολο και $f: \mathcal{R}^n \times U \rightarrow \mathcal{R}^n$ είναι μία συνεχής απεικόνιση που ικανοποιεί μία τοπική Lipschitz συνθήκη, για παράδειγμα, για κάθε φραγμένο σύνολο $S \subseteq \mathcal{R}^n \times U$ όπου υπάρχει μια σταθερά $M(S) > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x, u) - f(z, u)| \leq M(S)|x - z|$ για όλα $(x, u) \in S, (z, u) \in S$. Με το πλήρες για θετικούς χρόνους σύστημα, εννοούμε ότι για κάθε $x_0 \in \mathcal{R}^n, u \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+, U)$, η μοναδική λύση $x(t) \in \mathcal{R}^n$ του (3.1) με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$ που αντιστοιχεί στην είσοδο $u \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+, U)$, υπάρχει για όλα τα $t \geq 0$.

Η μετρήσιμη έξοδος του συστήματος (3.1) δίνεται από τις εξισώσεις:

$$y = h(x) + \xi \quad , \quad y \in \mathcal{R}^p, \xi \in \mathcal{R}^p \quad (3.2)$$

όπου $h: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^p$ είναι μία ομαλή απεικόνιση και ξ σφάλμα μέτρησης που καλείται θόρυβος. Υποθέτουμε ότι όταν η έξοδος είναι συνεχώς μετρήσιμη, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν παρατηρητή συνεχούς χρόνου της μορφής

$$\dot{z} = f(z, u) + g(z, y, u) \cdot (y - h(z)), \quad z \in \mathcal{R}^n \quad (3.3)$$

όπου $z \in \mathcal{R}^n$ είναι η εκτίμηση της κατάστασης και $g: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p \times U \rightarrow \mathcal{R}^{n \times p}$ είναι μία συνεχής απεικόνιση που ικανοποιεί μια τοπική Lipschitz συνθήκη, για παράδειγμα, για κάθε φραγμένο σύνολο $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p \times U$ όπου υπάρχει μια σταθερά $M(\mathcal{S}) > 0$ για την οποία $|g(x, y, u) - g(z, w, u)| \leq M(\mathcal{S})(|x - z| + |y - w|)$ για όλα τα $(x, y, u) \in \mathcal{S}, (z, w, u) \in \mathcal{S}$.

Όταν η μέτρηση εξόδου είναι δειγματοποιημένη (διακριτή), για παράδειγμα, όταν οι τιμές της εξόδου είναι διαθέσιμες μόνο σε συγκεκριμένους χρόνους που σχηματίζουν μία αύξουσα ακολουθία $\{t_k \geq 0: k = 0, 1, 2, \dots\}$ με $t_0 = 0, \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$, με

$$y(t_k) = h(x(t_k)) + \xi(t_k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Τότε ο παρατηρητής (3.3) πρέπει να τροποποιηθεί. Θεωρούμε τις επόμενες τρεις τροποποιήσεις οι οποίες είναι :

- Δειγματοληπτικός παρατηρητής με ZOH
- Δειγματοληπτικός παρατηρητής με ZOH και εκθετικά χρονομεταβαλλόμενο κέρδος
- Δειγματοληπτικός παρατηρητής με inter-sample predictor

3.1 Δειγματοληπτικός παρατηρητής με ZOH

Αρχικά έχουμε τους δειγματοληπτικούς παρατηρητές με Zero-order-Hold(ZOH).

Για αυτόν τον δειγματοληπτικό παρατηρητή, αντικαθιστούμε το μη-διαθέσιμο σήμα

$y(t) - h(z(t))$ με την πιο πρόσφατη μετρήσιμη τιμή σήματος, για παράδειγμα, με

$y(t_k) - h(z(t_k))$ για $t \in [t_k, t_{k+1})$. Αντίστοιχα, αντικαθιστούμε το μη διαθέσιμο σήμα $y(t)$ με $y(t_k) - h(z(t_k)) + h(z(t))$ για $t \in [t_k, t_{k+1})$ και η ZOH έκδοση της (3.3) δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t)) + g(z(t), w(t), u(t))(w(t) - h(z(t))) \quad (3.5)$$

$$\dot{w}(t) = \nabla h(z(t))\dot{z}(t), t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

$$w(t_k) = y(t_k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

όπου $w(t) \in \mathcal{R}^p$.

3.2 Δειγματοληπτικός παρατηρητής με ZOH και εκθετικά χρονομεταβαλλόμενο κέρδος

Εκτεταμένη αναφορά στους Παρατηρητές με Zero-order-Hold(ZOH) και εκθετικά χρονομεταβαλλόμενο κέρδος έγινε από τους Tarek Ahmed-Ali, Emilia Fridman, Fouad Giri, Laurent Burlion, Francoise Lamnabhi-Lagarrigue[1] που χρησιμοποίησαν εκθετικά χρονομεταβαλλόμενα κέρδη για δειγματοληπτική ευστάθεια και εκτίμηση. Πιο συγκεκριμένα, παρείχαν αποτελέσματα εκθετικής ευστάθειας για 2 κλάσεις συστημάτων. Η πρώτη ήταν μια οικογένεια συστημάτων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και η δεύτερη αποτελούνταν από ημί-γραμμικές παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Ένα κοινό χαρακτηριστικό και των 2 κλάσεων είναι ότι τα συστήματα που περιλαμβάνουν εμπλέκουν δειγματοληπτικές καταστάσεις και ένα χρονο-μεταβαλλόμενο κέρδος. Δηλαδή περιέχουν έναν όρο της μορφής $e^{-n(t-t_k)}, n > 0$ όπου $t_k (k = 0, 1, \dots)$. Οι παράμετροι $n > 0$ και h (μέγιστο διάστημα δειγματοληψίας) μπορεί να ειπωθεί ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βελτιώσουν τις ιδιότητες σύγκλισης του παρατηρητή. Μέσα από πολλά παραδείγματα έχει βρεθεί ότι η χρήση

του παραπάνω χρονο-μεταβαλλόμενου κέρδους προκαλεί σημαντική μεγέθυνση του h σε σχέση με το $n = 0$.

Η εγκαθίδρυση των αποτελεσμάτων της ευστάθειας αποδεικνύεται να είναι χρήσιμη στον σχεδιασμό εκθετικά συγκλινουσών παρατηρητών βασισμένους σε δειγματοληπτικές μετρήσεις. Η εισαγωγή χρονομεταβαλλόμενου κέρδους, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, αποδείχθηκε ότι είναι ευνοϊκή στην μεγέθυνση των διαστημάτων δειγματοληψίας ενώ διατηρείται η ευστάθεια του συστήματος ακόμα και με την παρουσία καθυστέρησης στις μετρήσεις.

Για αυτόν τον δειγματοληπτικό παρατηρητή, αντικαθιστούμε το μη-διαθέσιμο σήμα

$y(t) - h(z(t))$ με ένα εκθετικά σταθμισμένο σήμα το οποίο βασίζεται στην πιο πρόσφατη μετρήσιμη τιμή του σήματος, για παράδειγμα, με $\exp(-\eta(t - t_k))(y(t_k) - h(z(t_k)))$ για $t \in [t_k, t_{k+1})$, όπου $\eta \geq 0$ είναι μία σταθερά. Αντίστοιχα, αντικαθιστούμε το μη-διαθέσιμο σήμα $y(t)$ με το σήμα $\exp(-\eta(t - t_k))(y(t_k) - h(z(t_k))) + h(z(t))$, για $t \in [t_k, t_{k+1})$ η ΖΟΗ έκδοση της (3.3) με εκθετικά χρονο-μεταβαλλόμενο κέρδος θα δίνεται από τις εξισώσεις (3.5), (3.7) και

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t)) + g(z(t), w(t), u(t))(w(t) - h(z(t))) \quad (3.5)$$

$$w(t_k) = y(t_k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

$$\dot{w}(t) = \nabla h(z(t))\dot{z}(t) - \eta(w(t) - h(z(t))), t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

3.3 Δειγματοληπτικός παρατηρητής με inter-sample predictor

Όσον αφορά παρατηρητές με inter-sample predictor [12], αντί να κρατάμε την πιο πρόσφατη μέτρηση (zero-order hold), προτείνεται ένας δειγματοληπτικός παρατηρητής που αποτελείται από τον παρατηρητή συνεχούς χρόνου, σε συνδυασμό με μια πρόβλεψη εξόδου για το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μετρήσεων. Ο προτεινόμενος δειγματοληπτικός παρατηρητής είναι υβριδικό σύστημα και υπό ορισμένες συνθήκες, οι ιδιότητες ευρωστίας του σχεδιασμού συνεχούς χρόνου κληρονομούνται από το δειγματοληπτικό σχεδιασμό, εφόσον η περίοδος δειγματοληψίας δεν είναι πολύ μεγάλη.

Για αυτον τον δειγματοληπτικό παρατηρητή, το μη διαθέσιμο σήμα $y(t)$ αντικαθίσταται από την προσέγγιση του $w(t)$ που δίνεται από (3.5), (3.7) και έχουμε επιπλέον:

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t)) + g(z(t), w(t), u(t))(w(t) - h(z(t))) \quad (3.5)$$

$$w(t_k) = y(t_k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

$$\dot{w}(t) = \nabla h(z(t))f(z(t), u(t)), t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

3.4 Γενικό πλαίσιο

Είναι ξεκάθαρο ότι όλοι οι δειγματοληπτικοί παρατηρητές που αναφέρονται παραπάνω είναι ειδικές περιπτώσεις δειγματοληπτικών παρατηρητών που δίνονται από τις (3.5), (3.7) και ισχύει

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \nabla h(z(t))f(z(t), u(t)) - K(z(t), w(t), u(t))(w(t) - h(z(t))), \\ t &\in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου $K(z, w, u) \in \mathcal{R}^{p \times p}$ είναι ένας πίνακας με συνεχείς καταχωρήσεις που ικανοποιεί μία τοπική Lipschitz συνθήκη, δηλαδή, για κάθε φραγμένο σύνολο $S \subseteq \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p \times U$ όπου υπάρχει μία σταθερά $M(S) > 0$ τέτοια ώστε $|K(x, y, u) - K(z, w, u)| \leq M(S)(|x - z| + |y - w|)$ αφού $|u - u| = 0$, για όλα τα $(x, y, u) \in S, (z, w, u) \in S$

Πιο συγκεκριμένα, η ZOH έκδοση του (3.3) δίνεται από τις (3.5), (3.7), (3.10) με $K(z, w, u) = -\nabla h(z)g(z, w, u)$, η ZOH έκδοση του (3.3) με εκθετικά χρονο-μεταβαλλόμενο κέρδος δίνεται από τις (3.5), (3.7), (3.10) με $K(z, w, u) = -\nabla h(z)g(z, w, u) + \eta I$ και η δειγματοληπτική έκδοση της (3.3) με inter-sample predictor που δίνεται από (3.5), (3.7), (3.10) με $K(z, w, u) \equiv 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Κύρια αποτελέσματα

Όπως προείπαμε οι λόγοι που καθιστούν απαραίτητο να μελετήσουμε τους δειγματοληπτικούς παρατηρητές που προτείνονται είναι τόσο θεωρητικοί όσο και πρακτικοί.

Για την μελέτη τους θα πρέπει να κάνουμε κάποιες τεχνικές υποθέσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν σε 2 σημαντικά θεωρήματα για τα οποία θα παρέχουμε και τις αποδείξεις τους.

Τα θεωρήματα αυτά θα χρησιμοποιηθούν και στην εφαρμογή όπου θα παρουσιαστούν οι δυνατότητες των νέων δειγματοληπτικών παρατηρητών που περιγράφονται στην παρούσα εργασία.

4.1 Υποθέσεις

Εισάγουμε τις παρακάτω τεχνικές υποθέσεις:

(H) Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $V, W: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}_+, \alpha \in K_\infty$ (δηλαδή $\alpha(0) = 0$ και $\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s) = +\infty$) και σταθερές $\omega > 0, \gamma, L \geq 0, q \in \mathcal{R}$ έτσι ώστε οι παρακάτω ανισώσεις να ισχύουν για όλα τα $z, x \in \mathcal{R}^n, w \in \mathcal{R}^p, u \in U$

$$a(|z - x|) \leq V(z, x) \quad (4.1)$$

$$(w - h(x))' \left(\nabla h(z) f(z, u) - \nabla h(x) f(x, u) - K(z, w, u)(w - h(z)) \right) \leq LV(z, x) + q|w - h(x)|^2 \quad (4.2)$$

έτσι ώστε για κάθε $x_0 \in \mathcal{R}^n, z_0 \in \mathcal{R}^n, u \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; U), w \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; \mathcal{R}^p)$ η μοναδική λύση της (3.1) και της

$$\dot{z} = f(z, u) + g(z, w, u)(w - h(z)) \quad (4.3)$$

με αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0, z(0) = z_0$ που αντιστοιχούν στις εισόδους

$u \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; U), w \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; \mathcal{R}^p)$ που υπάρχουν για όλα τα $t \geq 0$ και ικανοποιεί την εκτίμηση:

$$V(z(t), x(t)) \leq \exp(-\omega t) W(z(0), x(0)) + \gamma \sup_{0 \leq s \leq t} |w(s) - h(x(s))|^2 \exp(-\omega(t-s)) \text{ για όλα τα } t \geq 0 \quad (4.4)$$

Η υπόθεση (H) είναι μια γενικευμένη έκδοση παρόμοιων υποθέσεων που έχουν χρησιμοποιηθεί από τους Ιάσωνα Καραφύλλη και Κώστα Κράβαρη στο επιστημονικό τους

άρθρο με τίτλο “From Continuous-Time Design to sampled-data design of observers”[12]. Εκεί η υπόθεση που εξετάζεται και θεωρείται ως δεδομένη για τη συνέχεια είναι η εξής:

Θεωρούν συνεχούς χρόνου συστήματα με μοναδική έξοδο της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), x \in \mathcal{R}^n \\ y = h(x), y \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (4.5)$$

ότι είναι πλήρη για θετικούς χρόνους.

Έτσι και στη δική μας περίπτωση έχουμε την δική μας υπόθεση που στη διεθνή βιβλιογραφία ονομάζεται ad Hoc Hypothesis.

Παρατηρήστε ότι η εκτίμηση (4.4) ουσιαστικά είναι IOS του συνεχούς παρατηρητή (4.3) σε σχέση με το θόρυβο. Πράγματι, η ποσότητα $w - h(x)$ μπορεί να μεταφραστεί ως θόρυβος από τη στιγμή που έχουμε διαφορά μεταξύ του σήματος w (που τροφοδοτείται στον παρατηρητή (4.3) και την πραγματική τιμή εξόδου $h(x)$). Η συνάρτηση $V(z, x)$ είναι μια γενικευμένη OLF (δες κατάλογο συντομογραφιών) για τον συνεχούς χρόνου παρατηρητή (4.3). Όσον αφορά την έννοια του OLF εισήχθη από τον L. Praly το 2001[23]. Σύμφωνα λοιπόν με τον Laurent Praly μια συνάρτηση V είναι συνάρτηση Observer Lyapunov (OLF) αν είναι C^1 θετικά ορισμένη, ακτινικά μη φραγμένη και ικανοποιεί την σχέση

$$h(x + e) = h(x), e \neq 0 \implies \frac{\partial V}{\partial e}(e)[f(x + e) - f(x)] < 0 \quad \forall x$$

όπου η συνάρτηση V είναι SIELF(δες κατάλογο συντομογραφιών) εάν είναι C^1 , θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη και υπάρχει μία C^1 συνάρτηση F τέτοια ώστε να έχουμε:

$$\frac{dV}{de}(e)|F(x + e, h(x)) - f(x)| < 0 \quad \forall x, \forall e \neq 0$$

Η εκτίμηση (4.4) υποδηλώνει εκθετική σύγκλιση του OLF στην αθόρυβη περίπτωση. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι (4.4) δεν συνεπάγεται εκθετική σύγκλιση του σφάλματος $z - x$ στην ίδια περίπτωση.

Η υπόθεση (H) ισχύει για όλα τα συστήματα που μπορούν να μετατραπούν σε συστήματα με output map, για τα οποία υπάρχει μια τετραγωνική συνάρτηση OLF. Τέτοιου είδους κλάσεις περιλαμβάνουν συστήματα που είναι μετατρέψιμα (όχι απαραίτητα από διαφορομορφισμούς) σε γραμμικά συστήματα ή τριγωνικά ολικά Lipschitz συστήματα όπως διατύπωσαν τον όρο οι Gauthier Jean-Paul και Ivan Kupka το 2001[10]. Περιλαμβάνει επίσης συστήματα με μονοτονικές μη γραμμικότητες για τα οποία ιδιαίτερη αναφορά έχει γίνει από τους Xingzhe Fan και Murat Arcak[7] που μελέτησαν το πρόβλημα του σχεδιασμού παρατηρητών για συστήματα με μονότονες μη-γραμμικότητες. Πιο συγκεκριμένα, ολικά συγκλίνων παρατηρητές σχεδιάζονται για συστήματα με μονότονες μη-γραμμικότητες. Η προσέγγιση είναι να αντιπροσωπεύουμε το σύστημα σφάλματος του παρατηρητή ως τη διασύνδεση ανάδρασης ενός γραμμικού συστήματος (feedback inter connection of a linear system) και μία μη εξαρτώμενη από την κατάσταση πολυμεταβλητή μη γραμμικότητα που μέσω κάποιων περιορισμών τους οποίους δεν αναφέρουμε στην παρούσα εργασία επιτυγχάνεται το σφάλμα παρατήρησης να ικανοποιεί το circle criterion.

Όσον αφορά αυτό το κριτήριο για πολυμεταβλητές μη-γραμμικότητες έχουμε για το σχεδιασμό παρατηρητή:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + G\gamma(Hx) + p(y, u), x \in \mathcal{R}^n, y \in \mathcal{R}^r \\ y = Cx \end{cases}$$

όπου y είναι η μετρήσιμη έξοδο και $u \in \mathcal{R}^m$ είναι η είσοδος και η πολυμεταβλητή μη-γραμμικότητα $\gamma(\cdot): \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^p$ ικανοποιεί την σχέση $\frac{\partial \gamma}{\partial v} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u}\right)' \geq 0 \forall v \in \mathcal{R}^p$.

Με την υπόθεση αυτή, ο παρατηρητής μας έχει τη μορφή:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) + G\gamma(H\hat{x} + K(C\hat{x} - y)) + p(y, u)$$

Σχεδιάζουμε τους πίνακες $K \in \mathcal{R}^{p \times r}$ και $L \in \mathcal{R}^{n \times r}$ για να κάνουμε το σφάλμα παρατηρητή να τείνει στο 0. Από \dot{x} και $\dot{\hat{x}}$, η δυναμική του σφάλματος παρατηρητή $e = x - \hat{x}$ διέπεται από την ισότητα:

$$\dot{e} = (A + LC)e + G(\gamma(v) - \gamma(\omega)) \quad (4.6)$$

όπου $v = Hx$, $\omega = H\hat{x} + K(C\hat{x} - y)$.

Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι υπάρχει μια C^1 απεικόνιση $\Phi: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ με $\det(D\Phi(x)) \neq 0$ για όλα τα $x \in \mathcal{R}^n$ και για τα οποία υπάρχει μία συνάρτηση, $\bar{\alpha} \in K_\infty$ ($\bar{\alpha}(0) = 0$ και $\lim_{s \rightarrow +\infty} \bar{\alpha}(s) = +\infty$) τέτοια ώστε $|\Phi(z) - \Phi(x)| \geq \bar{\alpha}(|z - x|)$ (παρατηρήστε ότι Φ δεν είναι διαφορομορφισμός καθώς δεν υποθέσαμε ότι $\Phi(\mathcal{R}^n) = \mathcal{R}^n$), με πίνακες $A, P \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$, $L \in \mathcal{R}^{n \times p}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$, με τον P να είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, ένα C^0 διανυσματικό πεδίο $\tilde{f}: \Phi(\mathcal{R}^n) \rightarrow \mathcal{R}^n$ και μία σταθερά, $\tilde{\omega} > 0$ τέτοια ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

$$h(x) = C\Phi(x), \text{ για όλα τα } x \in \mathcal{R}^n \quad (4.7)$$

$$D\Phi(x)f(x, u) = A\Phi(x) + Bu + \tilde{f}(\Phi(x)), \text{ για όλα τα } x \in \mathcal{R}^n, u \in U \quad (4.8)$$

$$C\tilde{f}(\Phi(x)) = 0, \text{ για όλα τα } x \in \mathcal{R}^n \quad (4.9)$$

$$e'P(A + LC)e + e'P(\tilde{f}(\xi + e) - \tilde{f}(\xi)) \leq -\tilde{\omega}e'Pe, \text{ για όλα τα } e, \xi \in \mathcal{R}^n \quad (4.10)$$

Σε αυτή την περίπτωση, η υπόθεση (H) ισχύει με $V(z, x) = W(z, x) = (\Phi(z) - \Phi(x))'P(\Phi(z) - \Phi(x))$, ένας αυθαίρετος σταθερός πίνακας $K(z, w, u) \equiv K \in \mathcal{R}^{p \times p}$, $\omega = \frac{\tilde{\omega}}{2}$, $\gamma = \frac{|L'PL|}{\tilde{\omega}^2}$, $q = |(CA - KC)P^{-1}(CA - KC)' - K|$, $L = 1$ και $\alpha(s) := c(\bar{\alpha}(s))^2$ για $s \geq 0$, όπου $c = \min_{|x|=1} (x'Px)$.

4.2 Διατύπωση των Αποτελεσμάτων

Τα πρώτα κύρια αποτελέσματα δίνονται στη συνέχεια:

Θεώρημα 4.1: Θεωρούμε το σύστημα (3.1) υπό την προϋπόθεση να ισχύει η υπόθεση (H). Θεωρούμε το $T > 0$ να είναι μία σταθερά που ικανοποιεί

$$2\gamma L \int_0^T \exp(2qs) ds < 1 \quad (4.11)$$

Τότε για κάθε σταθερά $\sigma \in (0, \omega]$ με $2\gamma L \int_0^T \exp((2qs + \sigma)s) ds < 1$, για κάθε

$x_0 \in \mathcal{R}^n$, $z_0 \in \mathcal{R}^n$, $u \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; U)$, $\xi \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; \mathcal{R}^p)$ και για κάθε άυξουσα ακολουθία $\{t_k \geq 0: k = 0, 1, 2, \dots\}$ με $t_0 = 0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} (t_k) = +\infty$, $\sup\{t_{k+1} - t_k: k = 0, 1, 2, \dots\} \leq T$, η μοναδική λύση $(x(t), z(t), w(t)) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p$ των (3.1), (3.4), (3.5), (3.7), (3.10) που αντιστοιχούν στις εισόδους $u \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; U)$, $\xi \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; \mathcal{R}^p)$ ικανοποιεί την εκτίμηση:

$$V(z(t), x(t)) \leq \Omega W(z(0), x(0)) \exp(-\sigma t) + \tilde{\gamma} \Omega \exp(\max(0, 2qT) \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|^2)), \text{ για όλα τα } t \geq 0 \quad (4.12)$$

όπου $\Omega := \left(\left(1 - 2\tilde{\gamma} L \int_0^T \exp((2q + \sigma)s) ds \right)^{-1} \right)$ με $\tilde{\gamma}$ συντελεστή κέρδους του θορύβου.

Παρατηρήστε ότι η συνέχεια της συνάρτησης

$$j(\sigma) := 2\gamma L \int_0^T \exp((2q + \sigma)s) ds$$

σε συνδυασμό με την (4.11) εγγυάται την ύπαρξη αρκετά μικρών $\sigma \in (0, \omega]$ έτσι ώστε $2\gamma L \int_0^T \exp((2q + \sigma)s) ds < 1$. Η σταθερά $\sigma \in (0, \omega]$ καθορίζει το ρυθμό σύγκλισης του σφάλματος παρατηρητή στο μηδέν όταν ο θόρυβος είναι απών.

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο συντελεστής κέρδους του θορύβου (έστω $\tilde{\gamma}$) στο (4.12) είναι πάντα υψηλότερος από τον συντελεστή κέρδους γ που εμφανίζεται στο (4.4) για τον παρατηρητή συνεχούς χρόνου ($\tilde{\gamma} > \gamma$) δηλαδή: ο δειγματοληπτικός παρατηρητής είναι πάντα πιο ευαίσθητος στον θόρυβο από τον παρατηρητή συνεχούς χρόνου λόγω της περιορισμένης ροής πληροφοριών από το σύστημα στον παρατηρητή.

Όταν η συνάρτηση V που εμπλέκεται στην υπόθεση (H) είναι τετραγωνική συνάρτηση και η απεικόνιση εξόδου h είναι γραμμική (περίπτωση γραμμικών συστημάτων ή ολικά Lipschitz

συστημάτων) τότε είμαστε σε θέση να παρέχουμε πιο σαφή και λιγότερο συντηρητικά αποτελέσματα.

Θεώρημα 4.2: Θεωρούμε το σύστημα (3.1) και υποθέτουμε ότι υπάρχουν πίνακες

$C \in \mathcal{R}^{p \times n}$, $R \in \mathcal{R}^{n \times p}$ με $R \neq 0$, $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ να είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι και σταθερές $\omega, L > 0, q \in \mathcal{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

$$h(x) = Cx, \text{ για όλα τα } x \in \mathcal{R}^n \quad (4.13)$$

$$e'P(f(x+e, u) - f(x, u) - RCe) \leq -\omega e'Pe, x, e \in \mathcal{R}^n, u \in U \quad (4.14)$$

$$|Cf(x+e, u) - Cf(x, u) - qCe|^2 \leq L^2 e'Pe, \text{ για όλα τα } x, e \in \mathcal{R}^n, u \in U \quad (4.15)$$

Αφήνουμε το $T > 0$ να είναι μία σταθερά που ικανοποιεί:

$$T < \frac{1}{q} \ln \left(1 + \frac{\omega q}{L\sqrt{|R'PR|}} \right), \text{ εάν } q > 0 \text{ ή } -\omega^{-1}L\sqrt{|R'PR|} < q < 0 \quad (4.16)$$

$$T < \frac{\omega}{L\sqrt{|R'PR|}}, \text{ εάν } q = 0 \quad (4.17)$$

Τότε υπάρχουν σταθερές $\sigma, \Omega, \gamma > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $x_0 \in \mathcal{R}^n, z_0 \in \mathcal{R}^n$,

$u \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; U)$, $\xi \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; \mathcal{R}^p)$ και για κάθε άξουσα ακολουθία

$\{t_k \geq 0: k = 0, 1, 2, \dots\}$ με $t_0 = 0, \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty, \sup\{t_{k+1} - t_k: k = 0, 1, 2, \dots\} \leq T$, η

μοναδική λύση των (3.1),(3.4),(3.5),(3.7),(3.10) με $K(z, w, u) \equiv -qI, g(z, w, u) \equiv R$, που αντιστοιχούν σε εισόδους $u \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; U)$, $\xi \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; \mathcal{R}^p)$ να ικανοποιούν την εκτίμηση:

$$|z(t) - x(t)| \leq \Omega \exp(-\sigma t) (|z_0 - x_0| + \gamma \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|)) \text{ για όλα τα } t \geq 0 \quad (4.18)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει περιορισμός στις τιμές της διαμέτρου του χρονοδιαγράμματος δειγματοληψίας $T > 0$ όταν $q \leq -\omega^{-1}L\sqrt{|R'PR|}$.

Το **θεώρημα 4.2** παίζει καθοριστικό ρόλο στο σχεδιασμό δειγματοληπτικών παρατηρητών. Πρώτον, παρατηρούμε ότι η ανισότητα (4.15) δείχνει ότι η σταθερά L δεν μπορεί να επιλεγεί ανεξάρτητα από τη σταθερά q .

Επιπλέον, οι ανισότητες (4.16) και (4.17) δείχνουν ότι το μέγεθος της διαμέτρου του χρονοδιαγράμματος δειγματοληψίας εξαρτάται από τις δύο σταθερές L και q . Επομένως, στην πράξη ο ελεγκτής μπορεί να καθορίσει (μέσω (4.15)) πόσο το L εξαρτάται από το q και επιλέγει μια τιμή για το q που επιτρέπει μια μεγάλη διάμετρο του χρονοδιαγράμματος δειγματοληψίας (καθορισμένη από τις ανισότητες (4.16),(4.17)). Αυτή η διαδικασία απεικονίζεται στο επόμενο κεφάλαιο με τη χρήση μίας εφαρμογής, ένα γραμμικό παράδειγμα με μία έξοδο.

4.3 Αποδείξεις βασικών θεωρημάτων

Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε τα θεωρήματα 4.1, 4.2 που είδαμε προηγουμένως. Τα δύο αυτά θεωρήματα θεωρούνται θεμελιώδη για την κατασκευή δειγματοληπτικών παρατηρητών κάτι το οποίο θα φανεί από το πόσο σημαντική είναι η χρήση τους στην εφαρμογή του επόμενου κεφαλαίου, όπου κατασκευάσαμε έναν δειγματοληπτικό παρατηρητή με καλύτερες ιδιότητες σε σχέση με τις περιπτώσεις δειγματοληπτικών παρατηρητών με ZOH ή Inter-sample-predictor.

Απόδειξη θεωρήματος 4.1

Έστω αυθαίρετο $\sigma \in (0, \omega]$ με $2\gamma L \int_0^T \exp((2q + \sigma)s) ds < 1, x_0 \in \mathcal{R}^n, z_0 \in \mathcal{R}^n, u \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; U), \xi \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; \mathcal{R}^p)$ να δίνονται και θεωρούμε αυθαίρετη αύξουσα ακολουθία $\{t_k \geq 0: k = 0, 1, 2, \dots\}$ με $t_0 = 0, \lim_{k \rightarrow +\infty} (t_k) = +\infty, \sup\{t_{k+1} - t_k: k = 0, 1, 2, \dots\} \leq T$ να είναι γνωστά. Θεωρούμε τον αυθαίρετο χρόνο δειγματοληψίας t_k και υποθέτουμε ότι η λύση $(x(t), z(t), w(t)) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p$ των (3.1), (3.4), (3.5), (3.7), (3.10) που αντιστοιχούν στις εισόδους $u \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; U), \xi \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; \mathcal{R}^p)$ που υπάρχουν στο χρονικό διάστημα $[0, t_k]$. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι η λύση $(x(t), z(t), w(t)) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p$ υπάρχει στο $[0, t_{k+1}]$, που υπονοεί ότι η λύση υπάρχει για όλα τα $t \geq 0$.

Παρατηρήστε ότι η συνιστώσα $x(t)$ της λύσης υπάρχει στο $[0, t_{k+1}]$ επειδή το (3.1) είναι πλήρες για θετικούς χρόνους. Επιπροσθέτως, η τυπική θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων εγγυάται ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η λύση των (3.5), (3.10) να υπάρχει στο $[t_k, t_k + \delta)$. Παρατηρήστε επίσης ότι η ανισότητα (4.2) συνεπάγεται την παρακάτω διαφορική ανίσωση για $t \in [t_k, t_k + \delta)$:

$$\left(w(t) - h(x(t)) \right)' \frac{d}{dt} \left(w(t) - h(x(t)) \right) \leq LV(z(t), x(t)) + q |w(t) - h(x(t))|^2 \quad (4.19)$$

Εν συνεχεία θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 1 (Comparison Principle-Αποδύκνείται στο [29]):

Έστω η βαθμωτή διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= f(t, w) \\ w(t_0) &= w_0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

όπου $f(t, w)$ είναι συνεχής με

$$\sup \left\{ \frac{(x - w) (f(t, x) - f(t, w))}{|x - w|^2} : (t, x) \in S, (t, w) \in S, x \neq w \right\} < +\infty$$

για κάθε συμπαγή $S \subset \mathcal{R}_+ \times J$, όπου $J \subseteq \mathcal{R}$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα. Σύμφωνα με το λήμμα 2.12 που παρουσίασαν οι Ιάσωνας Καραφύλλης και Zhong-Ping Jiang [13], έστω $T > t_0$ να

είναι τέτοιο ώστε η μοναδική λύση $w(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (4.20) να υπάρχει και να ικανοποιεί $w(t) \in J$ για όλα τα $t \in [t_0, T)$. Έστω $v: [t_0, T) \rightarrow \mathcal{R}$ είναι μια κάτω ημί-συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη διαφορική ανισότητα:

$$D_+ v(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{v(t+h) - v(t)}{h} \right) \leq f(t, v(t)) \text{ για όλα τα } t \in [t_0, T) \quad (4.21)$$

Επίσης υποθέτουμε ότι

$$v(t_0) \leq w_0 \quad (4.22)$$

$$v(t) \in J \text{ για όλα τα } t \in [t_0, T) \quad (4.23)$$

και ισχύουν τα παρακάτω:

1. Η απεικόνιση $f(t, \cdot)$ είναι αύξουσα στο $J \subseteq \mathcal{R}$ για κάθε σταθερό $t \in [t_0, T)$.
2. Υπάρχει $\varphi \in C^0(\mathcal{R}^+)$ τέτοιο ώστε $f(t, w) \leq \varphi(t)$ για όλα τα $(t, w) \in [t_0, T) \times J$
3. Η συνάρτηση $v: [t_0, T) \rightarrow \mathcal{R}$ είναι συνεχής από τα δεξιά

Τότε $v(t) \leq w(t)$ για όλα τα $t \in [t_0, T)$.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι $v(t) \leq w(t)$ σε κάθε διάστημα $[t_0, t_1] \subset [t_0, T)$. Θεωρώ τη βαθμωτή διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} z &= f(t, z) + \lambda \\ z(t_0) &= w_0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

όπου λ είναι θετική σταθερά.

Ισχυρισμός: Σε κάθε συμπαγή διάστημα $[t_0, t_1] \subset [t_0, T)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $0 < \lambda < \delta$, τότε η (4.22) έχει μοναδική λύση $z(t, \lambda)$ που ορίζεται στο $[t_0, t_1]$ και ικανοποιεί:

$$z(t, \lambda) \in J, |z(t, \lambda) - w(t)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } t \in [t_0, t_1] \quad (4.25)$$

Απόδειξη ισχυρισμού: Από τη στιγμή που $J \subseteq \mathcal{R}$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα και $[t_0, t_1]$ είναι συμπαγές (Κλειστό και φραγμένο), εμείς μπορούμε να βρούμε $p > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in \mathcal{R}$ με $|x - w(t)| \leq p$ για κάποια $t \in [t_0, t_1]$, τότε $x \in J$. Έστω $S := [t_0, t_1] \times [a, b]$, όπου $a := \min_{t \in [t_0, t_1]} w(t) - p$ και $b := \max_{t \in [t_0, t_1]} w(t) + p$ (παρατηρήστε ότι $S \subset [t_0, t_1] \times J$), $L :=$

$$\sup \left\{ \frac{(x-y)(f(t,x) - f(t,y))}{|x-y|^2} : (t,x) \in S, (t,y) \in S, x \neq y \right\} < +\infty. \text{ Επίσης για } \lambda > 0 \text{ ισχύει ότι}$$

$\lambda < \delta := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4}, \frac{p}{2} \right\} \exp \left(-\frac{L+1}{2} (t_1 - t_0) \right)$. Καθαρά, υπάρχει $\tau \in (t_0, t_1]$ τέτοιο ώστε η λύση της (19) να υπάρχει για $t \in [t_0, \tau]$ και ικανοποιεί $(t, z(t, \lambda)) \in S$ για όλα τα $t \in [t_0, \tau]$. Ορίζουμε $v(t) := |z(t, \lambda) - w(t)|^2$. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω παίρνουμε $\dot{v}(t) \leq 2(L+1)v(t) + \lambda^2$ για όλα τα $t \in [t_0, \tau]$, από το οποίο απευθείας συνεπάγεται ότι $|z(t, \lambda) - w(t)| \leq \lambda \exp \left(\frac{L+1}{2} (t_1 - t_0) \right)$ για όλα τα $t \in [t_0, \tau]$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός

ότι $\lambda < \delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{p}{2}\right\} \exp\left(-\frac{L+1}{2}(t_1 - t_0)\right)$ και με επαγωγή σε, μπορούμε να δείξουμε ότι $|z(t, \lambda) - w(t)| \leq \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{p}{2}\right\}$ για όλα τα $t \in [t_0, t_1]$. \square

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα σε συνδυασμό με την (4.19) και το γεγονός ότι ισχύει $w(t_k) - h(x(t_k)) = \xi(t_k)$ (μία συνέπεια των (3.4), (3.7)) παίρνουμε ότι για όλα τα $t \in [t_k, t_k + \delta)$:

$$\begin{aligned} & |w(t) - h(x(t))|^2 \\ & \leq \exp(2q(t - t_k)) |\xi(t_k)|^2 \\ & + 2L \int_{t_k}^t \exp(2q(t - s)) V(z(s), x(s)) ds \quad (4.26) \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός (4.26) συνεπάγεται τον παρακάτω υπολογισμό για όλα τα $t \in [t_k, t_k + \delta)$:

$$\begin{aligned} & |w(t) - h(x(t))|^2 \exp(\sigma t) \\ & \leq \exp(2q(t - t_k)) |\xi(t_k)|^2 \exp(\sigma t) \\ & + 2L \int_{t_k}^t \exp((2q + \sigma)(t - s)) ds \sup_{t_k \leq s \leq t} (V(z(s), x(s)) \exp(\sigma s)) \quad (4.27) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sup\{t_{k+1} - t_k : k = 0, 1, 2, \dots\} \leq T$ σε συνδυασμό με τον υπολογισμό (4.27), παίρνουμε για όλα τα $t \in [t_k, t_k + \delta)$:

$$\begin{aligned} & |w(t) - h(x(t))|^2 \exp(\sigma t) \leq \exp(\max(0, 2qT)) \exp(\sigma t) \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|^2) + \\ & 2L \int_0^T \exp((2q + \sigma)s) ds \sup_{0 \leq s \leq t} (V(z(s), x(s)) \exp(\sigma s)) \quad (4.28) \end{aligned}$$

Από τη στιγμή που ο υπολογισμός (4.28) είναι ανεξάρτητος του ακεραίου k , η (4.28) ισχύει για όλα τα $t \in [0, t_k + \delta)$. Παρατηρήστε το γεγονός ότι $\sigma \in (0, \omega]$ και ο υπολογισμός (4.4) συνεπάγεται τον υπολογισμό:

$$\begin{aligned} & V(z(t), x(t)) \exp(\sigma t) \leq W(z(0), x(0)) + \gamma \sup_{0 \leq s \leq t} (|w(s) - h(x(s))|^2 \exp(\sigma s)) \\ & \text{για όλα τα } t \in [0, t_k + \delta) \quad (4.29) \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα (4.28) και (4.29) παίρνουμε ότι για όλα τα $t \in [0, t_k + \delta)$:

$$V(z(t), x(t)) \exp(\sigma t) \leq W(z(0), x(0)) + \gamma \exp(\max(0, 2qT)) \exp(\sigma t) \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|^2)$$

$$+2\gamma L \int_0^T \exp((2q + \sigma)s) ds \sup_{0 \leq s \leq t} (V(z(s), x(s)) \exp(\sigma s)) \quad (4.30)$$

Από τη στιγμή που $2\gamma L \int_0^T \exp((2q + \sigma)s) ds < 1$, από την (4.30) προκύπτει ότι ο παρακάτω υπολογισμός ισχύει για όλα τα $t \in [0, t_k + \delta)$:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq s \leq t} (V(z(s), x(s)) \exp(\sigma s)) \\ & - 2\gamma L \int_0^T \exp((2q + \sigma)s) ds \sup_{0 \leq s \leq t} (V(z(s), x(s)) \exp(\sigma s)) \\ & \leq W(z(0), x(0)) + \gamma \exp(\max(0, 2qT)) \exp(\sigma t) \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|^2) \\ \Leftrightarrow & \sup_{0 \leq s \leq t} (V(z(s), x(s)) \exp(\sigma s)) (1 - 2\gamma L \int_0^T \exp((2q + \sigma)s) ds) \\ & \leq W(z(0), x(0)) + \gamma \exp(\max(0, 2qT)) \exp(\sigma t) \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|^2) \\ \Leftrightarrow & \sup_{0 \leq s \leq t} (V(z(s), x(s)) \exp(\sigma s)) \leq \left(1 - 2\gamma L \int_0^T \exp((2q + \sigma)s) ds\right)^{-1} W(z(0), x(0)) \\ & + \gamma \left(1 - 2\gamma L \int_0^T \exp((2q + \sigma)s) ds\right)^{-1} \exp(\max(0, 2qT)) \exp(\sigma t) \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|^2) \\ \\ & \Leftrightarrow V(z(t), x(t)) \exp(\sigma t) \leq \Omega W(z(0), x(0)) \\ & + \gamma \Omega \exp(\max(0, 2qT)) \exp(\sigma t) \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|^2) \\ \\ & \Leftrightarrow V(z(t), x(t)) \leq \Omega W(z(0), x(0)) \exp(-\sigma t) \\ & + \gamma \Omega \exp(\max(0, 2qT)) \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|^2) \quad (3.31) \end{aligned}$$

$$\text{με } \Omega = \left(1 - 2\gamma L \int_0^T \exp((2q + \sigma)s) ds\right)^{-1}.$$

Ο υπολογισμός (4.31) και το γεγονός ότι το $x(t)$ είναι φραγμένο στο $[0, t_{k+1}]$, σε συνδυασμό με την (4.1) συνεπάγεται ότι το $z(t)$ είναι φραγμένο στο $[0, t_k + \delta)$. Παρομοίως, συνδυάζοντας τις (4.31) και (4.28), συμπεραίνουμε ότι $w(t)$ είναι φραγμένο στο $[0, t_k + \delta)$. Συνεπώς, η θεωρία συνήθων διαφορικών εξισώσεων επιτρέπει σε εμάς να συμπεράνουμε ότι η λύση των (3.5), (3.10) υπάρχει στο $[t_k, t_{k+1}]$. Αντικαθιστώντας την τιμή του $w(t_{k+1})$ χρησιμοποιώντας (3.4), (3.7), συμπεραίνουμε ότι η λύση $(x(t), z(t), w(t)) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p$ των

(3.1), (3.4), (3.5), (3.7), (3.10) που αντιστοιχεί σε εισόδους $u \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; U)$, $\xi \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; \mathcal{R}^p)$, υπάρχει στο $[0, t_{k+1}]$.

Συμπεραίνουμε ότι η (4.31) ισχύει για όλα τα $t \geq 0$. Συνεπώς, η εκτίμηση (4.12) ισχύει για όλα τα $t \geq 0$. Η απόδειξη είναι ολοκληρωμένη. \square

4.2 Απόδειξη δευτέρου θεωρήματος

Παρατηρήστε ότι οι ανισότητες (4.16), (4.17) εγγυώνται ότι:

$$\frac{L^2 |R'PR|}{\omega^2} \left(\int_0^T \exp(qs) ds \right)^2 < 1 \quad (4.32)$$

Επειδή το (4.32) είναι πλήρες για θετικούς χρόνους και λόγω της συνέχειας της συνάρτησης:

$$j(\sigma) := \frac{L^2 |R'PR|}{\omega(\omega - 2\sigma)} \left(\int_0^T \exp((q + \sigma)s) ds \right)^2$$

στο $\sigma=0$, υπάρχει $\sigma \in (0, \frac{\omega}{2})$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{L^2 |R'PR|}{\omega(\omega - 2\sigma)} \left(\int_0^T \exp((q + \sigma)s) ds \right)^2 < 1 \quad (4.33)$$

Έστω αυθαίρετο $x_0 \in \mathcal{R}^n, z_0 \in \mathcal{R}^n, u \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; U), \xi \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; \mathcal{R}^p)$ και έστω μια αυθαίρετη αύξουσα ακολουθία $\{t_k \geq 0: k = 0, 1, 2, \dots\}$ με $t_0 = 0, \lim_{k \rightarrow +\infty} (t_k) = +\infty, \sup\{t_{k+1} - t_k: k = 0, 1, 2, \dots\} \leq T$.

Θεωρούμε έναν αυθαίρετο χρόνο δειγματοληψίας t_k και υποθέτουμε ότι η λύση $(x(t), z(t), w(t)) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p$ του (3.1), (3.4), (3.5), (3.7), (3.10) με $K(z, w, u) = -qI, g(z, w, u) \equiv R$, που αντιστοιχεί σε εισόδους $u \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; U), \xi \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; \mathcal{R}^p)$ υπάρχει στο $[0, t_k]$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η λύση $(x(t), z(t), w(t)) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^p$ υπάρχει στο $[0, t_{k+1}]$, από το οποίο συνεπάγεται ότι η λύση υπάρχει για όλα τα $t \geq 0$.

Παρατηρήστε η συνιστώσα $x(t)$ της λύσης υπάρχει στο $[0, t_{k+1}]$ επειδή το (3.1) είναι πλήρες για θετικούς χρόνους. Επιπροσθέτως, η θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων εγγυάται ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η λύση των (3.5) και (3.10) να υπάρχει στο $[t_k, t_k + \delta)$. Παρατηρήστε ότι οι εξισώσεις (3.4), (3.7), (3.10), (4.13) και το γεγονός ότι $K(z, w, u) = -qI$, συνεπάγεται την παρακάτω εξίσωση για όλα τα $t \in [t_k, t_k + \delta)$:

$$w(t) - Cx(t) = \exp(q(t - t_k)) \xi(t_k) + \int_{t_k}^t \exp(q(t - s)) C \left(f(z(s), u(s)) - f(x(s), u(s)) + q(x(s) - z(s)) \right) ds \quad (4.34)$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.15) και (4.34), παίρνουμε τον παρακάτω υπολογισμό για όλα τα $t \in [t_k, t_k + \delta)$:

$$|w(t) - Cx(t)| \leq \exp(q(t - t_k)) |\xi(t_k)| + L \int_{t_k}^t \exp(q(t - s)) \sqrt{e'(s)Pe(s)} ds \quad (4.35)$$

όπου $e(t) := z(t) - x(t)$. Ο υπολογισμός (4.35) συνεπάγεται τον παρακάτω υπολογισμό για όλα τα $t \in [t_k, t_k + \delta)$:

$$\begin{aligned} & |w(t) - Cx(t)| \exp(\sigma t) \leq \exp(q(t - t_k)) |\xi(t_k)| \exp(\sigma t) \\ & + L \int_{t_k}^t \exp((q + \sigma)(t - s)) ds \sup_{t_k \leq s \leq t} \left(\sqrt{e'(s)Pe(s)} \exp(\sigma s) \right) \quad (4.36) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sup\{t_{k+1} - t_k : k = 0, 1, 2, \dots\} \leq T$ σε συνδυασμό με τον υπολογισμό (4.27), παίρνουμε για όλα τα $[t_k, t_k + \delta)$:

$$\begin{aligned} & |w(t) - Cx(t)| \exp(\sigma t) \\ & \leq \exp(\max(0, qT)) \sup_{0 \leq s \leq t} |\xi(s)| \exp(\sigma t) \\ & + L \int_0^T \exp((q + \sigma)s) ds \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\sqrt{e'(s)Pe(s)} \exp(\sigma s) \right) \quad (4.37) \end{aligned}$$

Από τη στιγμή που ο υπολογισμός (4.37) είναι ανεξάρτητος του ακεραίου k , ισχύει για όλα τα $t \in [0, t_k + \delta)$.

Προκύπτει από τις (3.1), (3.5), το γεγονός ότι $e(t) := z(t) - x(t)$, $g(z, w, u) \equiv R$ και (4.13), (4.14) ότι η παρακάτω διαφορική εξίσωση ισχύει για $t \in [0, t_k + \delta)$:

$$\frac{d}{dt} (e'(t)Pe(t)) \leq -2\omega e'(t)Pe(t) + 2e'(t)PR(w(t) - Cx(t)) \quad (4.38)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\varepsilon a'Pa + \varepsilon^{-1}b'Pb \geq 2b'Pa$ για όλα τα $\varepsilon > 0, a, b \in \mathcal{R}^n$, παίρνουμε από την (4.38) για $t \in [0, t_k + \delta)$ για παράδειγμα (με $\varepsilon = \omega > 0, a = e(t), b = R(w(t) - Cx(t))$):

$$\frac{d}{dt} (e'(t)Pe(t)) \leq -\omega e'(t)Pe(t) + \omega^{-1}|R'PR||w(t) - Cx(t)|^2 \quad (4.39)$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν το λήμμα 1 σε συνδυασμό με την (4.39), παίρνουμε για όλα τα $t \in [0, t_k + \delta)$:

$$e'(t)Pe(t) \leq \exp(-\omega t) e'(0)Pe(0)$$

$$+\omega^{-1}|R'PR|\int_0^t \exp(-\omega(t-s))|w(s)-h(x(s))|^2 ds \quad (4.40)$$

Ο υπολογισμός (4.40) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\sigma \in (0, \frac{\omega}{2})$ και το γεγονός ότι $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ για όλα τα $a, b \geq 0$, δίνει τον παρακάτω υπολογισμό για όλα τα $t \in [0, t_k + \delta)$:

$$\sqrt{e'(t)Pe(t)}\exp(\sigma t) \leq \sqrt{e'(0)Pe(0)} + \sqrt{\frac{|R'PR|}{\omega(\omega-2\sigma)}} \sup_{0 \leq s \leq t} (|w(s) - h(x(s))| \exp(\sigma s)) \quad (4.41)$$

Συνδυάζοντας τους υπολογισμούς (4.37), (4.41), παίρνουμε ότι για όλα τα $t \in [0, t_k + \delta)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{e'(t)Pe(t)}\exp(\sigma t) &\leq \sqrt{e'(0)Pe(0)} + \exp(\max(0, qT)) \sqrt{\frac{|R'PR|}{\omega(\omega-2\sigma)}} \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|) \exp(\sigma t) \\ &+ L \sqrt{\frac{|R'PR|}{\omega(\omega-2\sigma)}} \left(\int_0^T \exp((q+\sigma)s) ds \sup_{0 \leq s \leq t} \sqrt{e'(s)Pe(s)} \exp(\sigma s) \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.33) σε συνδυασμό με την (4.42), παίρνουμε για όλα τα $t \in [0, t_k + \delta)$:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s \leq t} (\sqrt{e'(s)Pe(s)} \exp(\sigma s)) &\leq \left(1 - L \sqrt{\frac{|R'PR|}{\omega(\omega-2\sigma)}} \int_0^T \exp((q+\sigma)s) ds \right)^{-1} \sqrt{e'(0)Pe(0)} \\ &+ \exp(\max(0, qT) + \sigma t) \left(1 - L \sqrt{\frac{|R'PR|}{\omega(\omega-2\sigma)}} \int_0^T \exp((q+\sigma)s) ds \right)^{-1} \\ &\cdot \sqrt{\frac{|R'PR|}{\omega(\omega-2\sigma)}} \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ο υπολογισμός (4.43) και το γεγονός ότι η $x(t)$ είναι φραγμένη στο $[0, t_{k+1})$, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ είναι θετικά ορισμένος, συνεπάγεται ότι το $z(t)$ είναι φραγμένο στο $[0, t_k + \delta)$. Παρομοίως, συνδυάζοντας (4.37) και (4.43), συμπεραίνουμε ότι $w(t)$ είναι

φραγμένο στο $[0, t_k + \delta)$. Συνεπώς, από τη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων μας επιτρέπεται να συμπεράνουμε ότι η λύση των (3.1), (3.4), (3.5), (3.7), (3.10) με $K(z, w, u) \equiv -qI, g(z, w, u) \equiv R$, που αντιστοιχεί σε εισόδους $u \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; U), \xi \in L_{loc}^\infty(\mathcal{R}_+; \mathcal{R}^p)$, υπάρχει στο $[0, t_{k+1}]$.

Συμπεραίνουμε ότι η (4.43) ισχύει για όλα τα $t \geq 0$. Από τη στιγμή που $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ είναι θετικά ορισμένος, υπάρχει σταθερά $0 < c_1 \leq c_2$ τέτοια ώστε $c_1 |e|^2 \leq e' P e \leq c_2 |e|^2$ για όλα τα $e \in \mathcal{R}^n$. Συνδυάζοντας την προηγούμενη ανισότητα με την (4.43), παίρνουμε τον υπολογισμό (4.18) για κατάλληλες σταθερές $\Omega, \gamma > 0$.

Δηλαδή, $\sup_{0 \leq s \leq t} (\sqrt{e'(s) P e(s)} \exp(\sigma s)) \geq \sqrt{C_2} |e|^2 \exp(\sigma t)$. Οπότε θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} e \cdot \exp(\sigma t) &\leq \left(1 - L \sqrt{\frac{|R' P R|}{\omega(\omega - 2\sigma)}} \int_0^T \exp((q + \sigma)s) ds \right)^{-1} e(0) \\ &+ \exp(\max(0, qT) + \sigma t) \left(1 - L \sqrt{\frac{|R' P R|}{\omega(\omega - 2\sigma)}} \int_0^T \exp((q + \sigma)s) ds \right)^{-1} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{|R' P R|}{\omega(\omega - 2\sigma)}} \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|) \end{aligned}$$

Όμως $e = |z(t) - x(t)|$ επομένως:

$$\begin{aligned} |z(t) - x(t)| &\leq \left(1 - L \sqrt{\frac{|R' P R|}{\omega(\omega - 2\sigma)}} \int_0^T \exp((q + \sigma)s) ds \right)^{-1} |z(0) - x(0)| \exp(-\sigma t) \\ &+ \exp(\max(0, qT)) \left(1 - L \sqrt{\frac{|R' P R|}{\omega(\omega - 2\sigma)}} \int_0^T \exp((q + \sigma)s) ds \right)^{-1} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{|R' P R|}{\omega(\omega - 2\sigma)}} \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|) \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$|z(t) - x(t)| \leq \Omega |z(0) - x(0)| \exp(-\sigma t) + \gamma \sup_{0 \leq s \leq t} (|\xi(s)|)$$

$$\mu\epsilon \Omega = \left(1 - L \sqrt{\frac{|R' P R|}{\omega(\omega - 2\sigma)}} \int_0^T \exp((q + \sigma)s) ds \right)^{-1} \text{ και}$$

$$\gamma = \exp(\max(0, qT)) \left(1 - L \sqrt{\frac{|R' P R|}{\omega(\omega - 2\sigma)}} \int_0^T \exp((q + \sigma)s) ds \right)^{-1} \sqrt{\frac{|R' P R|}{\omega(\omega - 2\sigma)}}$$

Η απόδειξη είναι ολοκληρωμένη. \square

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εφαρμογή

Όπως αναφέρθηκε στο 2^ο Κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, ο προτεινόμενος σχεδιασμός δειγματοληπτικών παρατηρητών μπορεί να επιτρέψει μεγαλύτερες τιμές για την περίοδο δειγματοληψίας όταν ο πίνακας K επιλέγεται με τον κατάλληλο τρόπο. Για να το δούμε αυτό, εξετάζουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{5.1}$$

Αυτό το γραμμικό σύστημα επιλέχθηκε επειδή υπάρχει ένα φυσικό άνω όριο της άνω διαμέτρου του χρονοδιαγράμματος δειγματοληψίας. Πράγματι, το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο για ομοιόμορφα χρονοδιαγράμματα δειγματοληψίας $t_k = k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$ και αυτό σημαίνει ότι για κάθε πιθανό σχεδιασμό δειγματοληπτικού παρατηρητή πρέπει απαραίτητως να έχουμε ότι $\sup\{t_{k+1} - t_k : k = 0, 1, 2, \dots\} < \pi$. Για αυτό το σύστημα όλες οι υποθέσεις του **θεωρήματος 4.2** ισχύουν με:

$$\begin{aligned}C &= [1 \quad 0], \omega = 1 \\ P &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + u \end{bmatrix} \\ L &= \sqrt{2(1 + (1 - q)^2)}\end{aligned}$$

Παρατηρήστε την εξάρτηση του L από το q . Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η εξάρτηση δεν προκαλεί έκπληξη, καθώς εμπλέκονται και οι δύο σταθερές στην (4.15). Για να το ελέγξουμε, σημειώνουμε ότι σε αυτό το παράδειγμα έχουμε:

$$\begin{aligned}& |Cf(x + e, u) - Cf(x, u) - qCe|^2 \\ &= \left| [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_2 + e_2 \\ -x_1 + e_1 + u \end{bmatrix} - [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + u \end{bmatrix} - q[1 \quad 0] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \right|^2 \\ &= |e_2 - qe_1|^2 \\ &= |e_2 - e_1 - (q - 1)e_1|^2 \\ &\leq (|e_2 - e_1| + |q - 1||e_1|)^2 \\ &\leq (1 + \varepsilon)|e_2 - e_1|^2 + (1 + \varepsilon^{-1})|q - 1|^2|e_1|^2 \\ &\leq (|e_2 - e_1|^2 + |e_1|^2) \max\left((1 + \varepsilon), (1 + \varepsilon^{-1})|q - 1|^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2e'Pe \max\left((1+\varepsilon), (1+\varepsilon^{-1})|q-1|^2\right) \\ &= 2\left(1+|q-1|^2\right)e'Pe = L^2e'Pe \end{aligned}$$

Στις παραπάνω ανισότητες, έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι

$$(\alpha + b)^2 \leq (1 + \varepsilon)\alpha^2 + (1 + \varepsilon^{-1})b^2, \text{ για οποιοδήποτε } \alpha, b \in \mathcal{R} \text{ και } \varepsilon > 0, \text{ με}$$

$\varepsilon = |q - 1|^2$ στην περίπτωση που $q \neq 1$. Ελέγχεται εύκολα ότι οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν και στην περίπτωση όπου $q = 1$.

Επομένως, είμαστε σε θέση να επιλέξουμε το $q \in \mathcal{R}$ με τον βέλτιστο τρόπο, ώστε η άνω διάμετρος $T > 0$ του χρονοδιαγράμματος δειγματοληψίας να γίνει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$T_{\max}(q) = \frac{1}{q} \ln \left(1 + \frac{q}{\sqrt{1+(1-q)^2}\sqrt{5}} \right), \text{ αν } q \neq 0 \quad (5.2)$$

$$T_{\max}(0) = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad (5.3)$$

Παρατηρήστε ότι από τη στιγμή που $|R'PR| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{5}{2}$, από το θεώρημα 4.2 ότι η άνω διάμετρος $T > 0$ του χρονοδιαγράμματος δειγματοληψίας πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα $T < T_{\max}(q)$. Η συμπεριφορά της συνάρτησης $T_{\max}(q)$ απεικονίζεται στην εικόνα 1 (παρουσιάζεται στο τέλος της εφαρμογής), όπου βλέπουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ένα global maximum για $q = 0.8$ με $T_{\max}(q) = 0.37589$. Επομένως, όταν $q = 0.8$ ο δειγματοληπτικός παρατηρητής:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = -2z_1(t) + z_2(t) + 2w(t) \\ \dot{z}_2(t) = -2z_1(t) + u(t) + w(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\dot{w}(t) = z_2(t) + q(w(t) - z_1(t)), t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

$$w(t_k) = x_1(t_k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

θα εγγυηθεί την εκθετική σύγκλιση του σφάλματος παρατηρητή $|z(t) - x(t)|$ υπό την προϋπόθεση ότι οι χρόνοι δειγματοληψίας σχηματίζουν μια αύξουσα ακολουθία $\{t_k \geq 0: k = 0, 1, 2, \dots\}$ με $t_0 = 0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} (t_k) = +\infty$, $\sup\{t_{k+1} - t_k: k = 0, 1, 2, \dots\} < 0.37589$.

Για να κατανοήσουμε τη σημασία του πρόσφατα προτεινόμενου δειγματοληπτικού παρατηρητή (5.4), (5.5), (5.6), είναι χρήσιμο να συγκρίνουμε με δύο υπάρχουσες περιπτώσεις στη βιβλιογραφία. Για το σκοπό αυτό, παρατηρήστε πρώτα ότι ο υποκείμενος παρατηρητής συνεχούς χρόνου του δειγματοληπτικού παρατηρητή (5.4) - (5.6) δίνεται από τις :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = -2z_1(t) + z_2(t) + 2x_1(t) \\ \dot{z}_2(t) = -2z_1(t) + u(t) + x_1(t) \end{cases} \quad (5.7)$$

Το κέρδος του (5.7) είναι $R = [2 \quad 1]'$. Για να εκτιμήσουμε τον προτεινόμενο παρατηρητή δεδομένων δειγματοληψίας (5.4) - (5.6), εξετάζουμε τις ακόλουθες δύο εναλλακτικές λύσεις:

a) ZOH έκδοση δειγματοληπτικού παρατηρητή (5.7). Αυτό δίνεται από

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) - 2(z_1(t_k) - x_1(t_k)) \\ \dot{z}_2(t) = -z_1(t) + u(t) - (z_1(t_k) - x_1(t_k)) \end{cases} \quad (5.8)$$

Ελέγχεται εύκολα ότι η (5.8) είναι μια συγκεκριμένη περίπτωση δειγματοληπτικού παρατηρητή (5.4) - (5.6) που αντιστοιχεί σε $q = 2$ αφού τότε

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = z_2(t) + 2(w(t) - z_1(t)), t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2 \\ w(t_k) = x_1(t_k), k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{yields}} \begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) - 2(z_1(t_k) - x_1(t_k)) = \dot{w}(t) \\ w(t_k) = x_1(t_k), k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Τώρα, για $q = 2$, έχουμε $T_{max}(q) = 0.24504$. Σαφώς, ο δειγματοληπτικός παρατηρητής (5.4) - (5.6) με $q = 0.8$ επιτρέπει αύξηση 53,4% της διαμέτρου του χρονοδιαγράμματος δειγματοληψίας, σε σύγκριση με την περίπτωση του $q = 2$ καθώς έχουμε:

$$\frac{T_{max}(0.8) - T_{max}(2)}{T_{max}(2)} \cdot 100\% = 53.4\%$$

b) Inter-sample-predictor έκδοση δειγματοληπτικού παρατηρητή (5.7). Αυτό επιτυγχάνεται απλά αφήνοντας το $q = 0$ στον δειγματοληπτικό παρατηρητή (5.4) - (5.6)

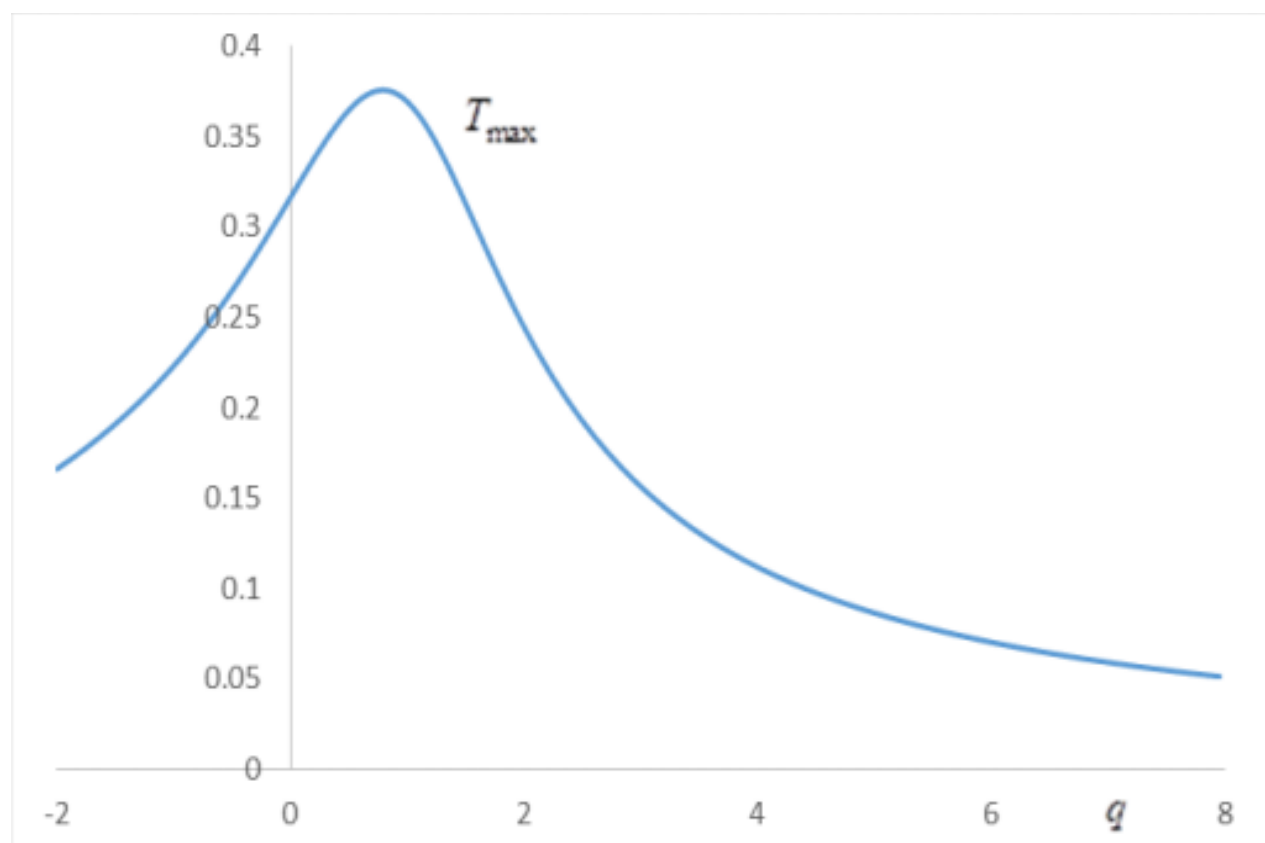
$$\begin{cases} \dot{w}(t) = z_2(t), t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2 \\ w(t_k) = x_1(t_k), k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Τώρα, για $q = 0$ έχουμε ότι $T_{max}(q) = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.31623$. Σαφώς, ο δειγματοληπτικός παρατηρητής (5.4) - (5.6) με $q = 0.8$ επιτρέπει αύξηση 18,8% της διαμέτρου του χρονοδιαγράμματος δειγματοληψίας, σε σύγκριση με την περίπτωση όπου $q = 0$.

$$\frac{T_{max}(0.8) - T_{max}(0)}{T_{max}(0)} \cdot 100\% = 18,8\%$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, για το παραπάνω απλό παράδειγμα, η δομή του δειγματοληπτικού παρατηρητή (5.4) - (5.6) δεν διαφέρει από εκείνη του παρατηρητή με ZOH και του εκθετικά χρονομεταβαλλόμενου κέρδους που αναφέραμε και προηγουμένως. Ωστόσο, εδώ γνωρίζουμε ότι μια εκθετική εκτίμηση σταθερότητας για το σφάλμα παρατηρητή διατηρείται χωρίς να

χρειάζεται να επιλύσει LMIs. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το **Θεώρημα 4.2** έχουμε επιλέξει βέλτιστα τον εκθετικό ρυθμό του κέρδους (δηλαδή, το q) προκειμένου να μεγιστοποιήσουμε την περίοδο δειγματοληψίας (T).



Εικόνα 1: Το γράφημα της συνάρτησης $T_{max}(q)$ που ορίζεται από τις σχέσεις (5.2), (5.3)

5.1 Τελικά Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία παρέχει μια νέα προσέγγιση για την εξαγωγή δειγματοληπτικών παρατηρητών από παρατηρητές συνεχούς χρόνου που χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα IOS σε σχέση με τον θόρυβο εξόδου και την εκθετική σύγκλιση στην περίπτωση με απουσία θορύβου. Η προτεινόμενη προσέγγιση ενοποιεί πολλές υπάρχουσες προσεγγίσεις για το σχεδιασμό δειγματοληπτικών παρατηρητών συστημάτων ελέγχου και εφαρμόζεται σε μια ευρεία κατηγορία συστημάτων. Οι αντίστοιχοι δειγματοληπτικοί παρατηρητές κληρονομούν όλα τα χαρακτηριστικά απόδοσης των υποκείμενων παρατηρητών συνεχούς χρόνου.

Η μελλοντική εργασία πάνω στους συγκεκριμένους δειγματοληπτικούς παρατηρητές μπορεί να επιτρέψει την κατασκευή δειγματοληπτικών παρατηρητών για ακόμη ευρύτερες κατηγορίες μη γραμμικών συστημάτων. Είναι μια θεωρητική πρόκληση να ανακαλυφθεί ένα πλαίσιο το

οποίο να μπορεί να φιλοξενήσει τους δειγματοληπτικούς παρατηρητές που προτείνονται στην παρούσα εργασία, καθώς και παρατηρητές που προέρχονται από σχεδιασμό χρονικής καθυστέρησης στους οποίους ιδιαίτερη αναφορά έχει γίνει από τους Filippo Cacace, Alfredo Germani («Output feedback control of linear systems with input, state and output delays by chains of predictors»)[4], για γραμμικά συστήματα, που αντιμετώπισαν το πρόβλημα της χρονομεταβαλλόμενης καθυστέρησης με μία αλυσίδα από predictors κάτω από την υπόθεση ότι ένας σταθεροποιητικός έλεγχος (stabilization control) υπάρχει για την περίπτωση που δεν έχουμε καθυστέρηση στην είσοδο(u). Αυτή η λύση επεκτάθηκε για την περίπτωση που είχαμε διαθέσιμες μόνο εξόδους(y) με καθυστέρηση. Τόσο οι είσοδοι όσο και οι έξοδοι με χρονική καθυστέρηση μπορούν να έχουν αυθαίρετα όρια. Οι Filippo Cacace, Alfredo Germani έδειξαν ουσιαστικά ότι μπορεί να προκύψει ένας παρατηρητής για ένα σύστημα με καθυστέρηση στην κατάσταση(x) και την έξοδο από έναν παρατηρητή για το ίδιο σύστημα χωρίς καθυστέρηση στην έξοδο.

Για μη-γραμμικά συστήματα με πολλαπλές χρονο-μεταβαλλόμενες καθυστερήσεις, οι Filippo Cacace, Alfredo Germani και Constanzo Mames(“A chain observer for Nonlinear Systems with Multiple Time-Varying Measurement Delays”)[5], παρουσίασαν μια μέθοδο για κατασκευή παρατηρητών με εκθετικά αποσβεννόμενο σφάλμα για μη γραμμικά συστήματα των οποίων οι έξοδοι επηρεάζονται από γνωστές χρονομεταβαλλόμενες καθυστερήσεις. Όταν η καθυστέρηση είναι μικρή, ένας παρατηρητής απλού βήματος είναι επαρκής για να επιτύχει τον στόχο. Δύο ή περισσότεροι υπό-παρατηρητές χρειάζονται όταν έχουμε παρουσία μεγάλων καθυστερήσεων. Ο παρατηρητής χρησιμοποιεί εξαρτημένα απλο καθυστέρηση χρονομεταβαλλόμενα κέρδη για να επιτύχει την επιθυμητό εκθετικά αποσβεννόμενο σφάλμα.

Βιβλιογραφία

- [1] Ahmed-Ali, T., E. Fridman, F. Giri, L. Burlion and F. Lamnabhi-Lagarrigue, “Using Exponential Time-Varying Gains for Sampled-Data Stabilization and Estimation”, *Automatica*, 67, 2016, 244–251.
- [2] Ammeh, L., F. Giri, T. Ahmed-Ali, H. El Fadil, “Sampled-Data Based Observer Design for Nonlinear Systems with Output Distributed Delay”, to appear in *International Journal of Control*, DOI.org/10.1080/00207179.2019.1680871
- [3] Assoudi, A, E. Yaagoubi and H. Hammouri, “Non-linear Observer Based on the Euler Discretization”, *International Journal of Control*, 75, 2002, 784–791.
- [4] Cacace, F. and A. Germani, “Output Feedback Control of Linear Systems with Input, State and Output Delays by Chains of Predictors”, *Automatica*, 85, 2017, 455–461.
- [5] Cacace, F., A. Germani and C. Manes, “A Chain Observer for Nonlinear Systems with Multiple Time-Varying Measurement Delays”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 52, 2014, 1862–1885.
- [6] Deza, F., E. Busvelle, J. P. Gauthier and D. Rakotopara, “High Gain Estimation for Nonlinear Systems”, *Systems & Control Letters*, 18, 1992, 295–299.
- [7] Fan, X. and M. Arcak, “Observer Design for Systems with Multivariable Monotone Nonlinearities”, *Systems & Control Letters*, 50, 2003, 319–330.
- [8] Folin, T., T. Ahmed-Ali, F. Giri, L. Burlion and F. Lamnabhi-Lagarrigue, “Sampled-Data Adaptive Observer For a Class of State-Affine Output-Injection Nonlinear Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61, 2016, 462–467.
- [9] Fridman, E., A. Seuret and J.-P. Richard, “Robust Sampled-Data Stabilization of Linear Systems: An Input Delay Approach”, *Automatica*, 40, 2004, 1441–1446.
- [10] Gauthier, J. P. and I. Kupka, *Deterministic Observation Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2001.
- [11] Kahelras, M., T. Ahmed-Ali, F. Giri and F. Lamnabhi-Lagarrigue, “Sampled-Data ChainObserver Design for a Class of Delayed Nonlinear Systems”, *International Journal of Control*, 91, 2018, 1076–1090.
- [12] Karafyllis, I. and C. Kravaris, “From Continuous-Time Design to Sampled-Data Design of Observers”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54, 2009, 2169–2174.
- [13] Karafyllis, I. and Z.-P. Jiang, *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*, Springer-Verlag, London (Series: Communications and Control Engineering), 2011.
- [14] Karafyllis, I. and M. Krstic, “Stabilization of Nonlinear Delay Systems Using Approximate Predictors and High-Gain Observers”, *Automatica*, 49, 3623–3631, 2013.
- [15] Karafyllis, I., T. Ahmed-Ali and F. Giri, “Sampled-Data Observers for 1-D Parabolic PDEs with Non-Local Outputs”, *Systems & Control Letters*, 133, 2019, 104553.

- [16] Laila, D. S. and A. Astolfi, “Sampled-Data Observer Design for a Class of Nonlinear Systems with Applications”, Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, 2006.
- [17] Li, X., Q. Zhang and H. Su, “An Adaptive Observer for Joint Estimation of States and Parameters in Both State and Output Equations”, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 25, 2011, 765-854.
- [18] Ling, C. and C. Kravaris, “Multi-Rate Sampled-Data Observer Design for Nonlinear Systems with Asynchronous and Delayed Measurements”, Proceedings of the American Control Conference, 2019.
- [19] Ling, C. and C. Kravaris, “Multi-Rate Sampled-Data Observer Design Based on a Continuous-Time Design”, IEEE Transactions on Automatic Control, 64, 2019, 5265-5272.
- [20] Mazenc, F. and E. Fridman, “Predictor-Based Sampled-Data Exponential Stabilization Through Continuous–Discrete Observers”, Automatica, 63, 2016, 74-81. 16
- [21] Nadri, M. and H. Hammouri, “Design of a Continuous-Discrete Observer for State Affine Systems”, Applied Mathematics Letters, 16, 2003, 967–974.
- [22] Nadri, M., H. Hammouri and C. Astorga, “Observer Design for Continuous-Discrete Time State Affine Systems up to Output Injection”, European Journal of Control, 2004, 10, 2004, 252–263.
- [23] Praly, L., “On Observers with State Independent Error Lyapunov Function”, Proceedings of NOLCOS 2001, 1425-1430.
- [24] Raff, T., M. Kögel and F. Allgöwer, “Observer with Sample-and-Hold Updating for Lipschitz Nonlinear Systems with Nonuniformly Sampled Measurements”, Proceedings of the American Control Conference, Seattle, Washington, USA, 2008.
- [25] Torres, L., G. Besançon, and D. Georges, “EKF-Like Observer With Stability for a Class of Nonlinear Systems”, IEEE Transactions on Automatic Control, 57, 2012, 1570-1574.
- [26] Zhang, Q. and G. Besançon, “An Adaptive Observer for Sensor Fault Estimation in a Class of Uniformly Observable Nonlinear Systems”, International Journal of Modelling, Identification and Control, 4, 2008, 37-43.
- [27] Eduardo D. Sontag, Vadim Utkin, Andrei A. Agrachev, A Stephen Morse, Hector J. Sussmann, “Input to State Stability: Basic Concepts and Results”, Nonlinear and Optimal Control Theory, pages 163-220. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [28] Eduardo D. Sontag, “Input-to-State Stability”, Encyclopedia of Systems and Control, pages 1-9. Springer-Verlag, 2020
- [29] Sontag, E.D., Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems, Springer, New York, 1990. Second Edition, 1998
- [30] Eduardo D. Sontag, “Smooth Stabilization Implies Coprime Factorization”, Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, NJ 08903

