



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟ ΝΕΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΩΣ ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΟΟΣΑ:
ΜΙΑ ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΥ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

ΧΡΗΣΤΟΣ Α. ΜΠΟΥΚΟΥΒΑΛΑΣ

A.M.:09113127

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΡΙΖΑΚΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ Ε.ΔΙ.Π.
(ΤΟΜΕΑΣ ΑΚΕΔ)

ΑΘΗΝΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2022

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΡΙΖΑΚΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ

ΕΔΙΠ, ΣΕΜΦΕ

.....

ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΣΟΦΙΑ

Καθηγήτρια ΕΜΠ

.....

ΜΑΝΙΟΥ ΜΑΓΔΑ

ΕΔΙΠ, ΣΕΜΦΕ

.....

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη.....	7
Abstract.....	8
Εισαγωγή.....	9
Κεφάλαιο 1. Η έρευνα PISA.....	10
1.1 Το ιστορικό της έρευνας PISA.....	10
1.2 Ο σκοπός της έρευνας PISA.....	11
1.3 Τα γνωστικά αντικείμενα της έρευνας PISA.....	13
1.4 Κριτική της έρευνας PISA.....	14
Κεφάλαιο 2. Τα Μαθηματικά στην έρευνα PISA.....	18
2.1 Μαθηματικός εγγραμματισμός.....	18
2.2 Μαθηματικοποίηση.....	23
2.3 Μαθηματικές διαδικασίες.....	25
2.4 Μελέτη θεμάτων στα Μαθηματικά.....	26
Κεφάλαιο 3. Οι βασικές ικανότητες για τον πολίτη του 21 ^{ου} αιώνα..	29
3.1 Η έννοια της ικανότητας.....	29
3.2 Οι βασικές ικανότητες για τον πολίτη του 21 ^{ου} αιώνα σύμφωνα με τον ΟΟΣΑ.....	30
Κεφάλαιο 4. Οι επιδόσεις της Ελλάδας στην έρευνα PISA	38
Κεφάλαιο 5. Το νέο Προγράμμάτων Σπουδών των Μαθηματικών του Γυμνασίου.....	46
5.1 Η πλαισίωση του προβλήματος στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών και στην έρευνα PISA.....	46

5.2 Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών του Γυμνασίου ως πλαίσιο για την ανάπτυξη των ικανοτήτων του πολίτη του 21 ^{ου} αιώνα.....	47
Κεφάλαιο 6. Προτάσεις εμπλουτισμού θεματικών ενοτήτων του νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών της Β Γυμνασίου.....	51
6.1 Προτάσεις εμπλουτισμού του νέου Προγράμματος Σπουδών με γενικούς στόχους.....	51
6.2 Σχεδιασμός μάθησης και Διδακτική πλαισίωση για τα επιλεγμένα θεματικά πεδία των Μαθηματικών της Β Γυμνασίου....	52
6.3 Αξιολόγηση - Αυτοαξιολόγηση - Ετεροαξιολόγηση.....	53
6.4 Αναστοχασμός των μαθητών στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής διαδικασίας.....	56
6.5 Αναλυτική απεικόνιση τω επιλεχθέντων θεματικών ενοτήτων του νέου Προγράμματος Σπουδών	56
Κεφάλαιο 7. Συμπεράσματα.....	78
Βιβλιογραφικές Αναφορές.....	80
Κατάλογος Εικόνων/Σχημάτων.....	84
Παράρτημα 1.....	85

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την κυρία Ριζάκη Αικατερίνη, επιβλέπουσα αυτής της εργασίας, για την πολύτιμη στήριξη που μου παρείχε κατά την υλοποίησή της. Η βοήθεια της και οι συμβουλές της με ώθησαν να μελετήσω βαθιά και να διευρύνω τις γνώσεις μου σε παιδαγωγικά και εκπαιδευτικά ζητήματα.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, την κυρία Λαμπροπούλου Σοφία και την κυρία Μανιού Μάγδα που μελέτησαν την εργασία μου.

Τέλος, δεν θα μπορούσα να μην αναφερθώ στην πολύτιμη βοήθεια του κυρίου Στράτζαλου Αθανάσιου (PhD & MEd Mathematics, Educational Worker) ο οποίος με καθοδήγησε σε ζητήματα που αφορούν στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Περίληψη

Κύριο αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η διερεύνηση του νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών ως πλαίσιο ανάπτυξης των βασικών ικανοτήτων του πολίτη του 21^{ου} αιώνα, όπως ορίζονται από τον Οργανισμό Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (ΟΟΣΑ).

Δεδομένου ότι η έρευνα PISA που πραγματοποιείται από τον ΟΟΣΑ αξιολογεί αυτές τις ικανότητες, αρχικά μελετήσαμε το ιστορικό της έρευνας, τον τρόπο με τον οποίο διεξάγεται καθώς και τις επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών στα Μαθηματικά από την έναρξη της έρευνας έως σήμερα. Η Ελλάδα συμμετέχει στην έρευνα PISA ανελλιπώς από το 2000 που ξεκίνησε να πραγματοποιείται. Οι επιδόσεις της χώρας μας στα Μαθηματικά είναι σταθερά χαμηλές και κάτω από το μέσο όρο των χωρών μελών του ΟΟΣΑ.

Μελετώντας το Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών καταγράφουμε ελλείψεις που αφορούν στις δραστηριότητες, σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο αναδεικνύονται οι ικανότητες που ορίζει ο ΟΟΣΑ ως απαραίτητες για τον πολίτη του 21^{ου} αιώνα. Με βάση τις παρατηρήσεις μας, προτείνουμε τον εμπλουτισμό τριών επιλεγμένων θεματικών ενοτήτων του νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου με κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό. Στόχος της πρότασης μας είναι η εμπλοκή των μαθητών σε ανοιχτού τύπου προβλήματα και σε δραστηριότητες καθημερινής ζωής μέσα από τα Μαθηματικά, προκειμένου να αποκτήσουν τις ικανότητες του πολίτη του 21^{ου} αιώνα.

Abstract

The main subject of this dissertation is the investigation of the new Mathematics Curriculum, as a development framework of the basic skills of the 21st century citizen as they are defined from Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD).

As the Program for International Student Assessment (PISA) survey, that is performed by the OECD, evaluates these skills, we first studied the research history, the way it is conducted as well the results of Greek students in Mathematics from the beginning of the survey until today. Greece has been participating in the PISA survey continuously since 2000, when it was started. Our country's results in Mathematics are consistently low and below the average of the other OECD member countries.

As we were studying the Mathematics Curriculum, we found some deficiencies in the way in which the skills that are defined from OECD, are highlighted through the necessary activities that have been made for the citizen of the 21st century. Based on our observations, we propose the enrichment of three selected topics of the new Curriculum of Mathematics for the second grade of junior-high school with some appropriate educational material. The aim of our proposal is to involve students in open problems and daily living activities through Mathematics, in order to acquire the skills of the citizen of 21st century.

Εισαγωγή

Η έρευνα PISA (Program for International Student Assessment) είναι μία Εκπαιδευτική έρευνα που διεξάγεται ανά τριετία (από το 2000 έως σήμερα) και υλοποιείται από διεθνή ερευνητικά ιδρύματα (PISA Consortium) υπό την οργάνωση της Διεύθυνσης Εκπαίδευσης του ΟΟΣΑ (Οργανισμός για την Οικονομική Συνεργασία και Ανάπτυξη) και τη συνεργασία των συμμετεχουσών στην Έρευνα χωρών. Η επιρροή της έρευνας PISA αυξάνεται σταθερά στις χώρες και εκπαιδευτικές πολιτικές των χωρών που συμμετέχουν σε αυτή. Το ζήτημα απασχολεί την εκπαιδευτική κοινότητα, σε παγκόσμιο επίπεδο, ενώ η προσπάθεια των χωρών για τη βελτίωση της κατάταξης στην έρευνα PISA βρίσκεται σε υψηλή προτεραιότητα. Για τις κυβερνήσεις των χωρών που συμμετέχουν στην έρευνα PISA είναι μια έρευνα υψηλής σημασίας, αφού δέχονται κριτική για την κατάσταση του Εκπαιδευτικού Συστήματος, σε περίπτωση που οι μαθητές συγκεντρώσουν χαμηλές βαθμολογίες, και δέχονται τα εύσημα, ή τουλάχιστον επικροτούν την επιτυχία του εκπαιδευτικού συστήματος, στην περίπτωση που τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά. Στην Ελλάδα, κάθε φορά που ανακοινώνονται τα αποτελέσματα της έρευνας PISA, οι χαμηλές επιδόσεις οδηγούν σε έντονη κριτική προς την εκάστοτε Κυβέρνηση, αλλά ακόμα και προς τους εκπαιδευτικούς, σχετικά με τα εκπαιδευτικά αποτελέσματα του Ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος (ΙΕΠ, 2019 α).

Αυτή η εστίαση στα αποτελέσματα της έρευνας PISA, έχει ως αποτέλεσμα τα εθνικά Προγράμματα Σπουδών, οι αξίες και οι προτεραιότητες να παραμερίζονται. Επιπλέον, η επιρροή της έρευνας PISA έχει υψηλή σημασία και για τους εκπαιδευτικούς, αφού η προσπάθεια και το ενδιαφέρον για τη βελτίωση των αποτελεσμάτων της έρευνας έρχεται σε σύγκρουση με την προσπάθεια τους να κάνουν τις επιστήμες προσιτές στους μαθητές, ενδιαφέρουσες και παρακινητικές.

Η παρούσα εργασία εστιάζει στη διαχρονική εξέλιξη των επιδόσεων των Ελλήνων μαθητών στην έρευνα PISA στα Μαθηματικά και στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών, ως πλαίσιο ανάπτυξης των ικανοτήτων του ΟΟΣΑ, οι οποίες αξιολογούνται διαμέσου της έρευνας PISA.

Ο ρόλος των Μαθηματικών, σχεδόν στο σύνολο των τομέων της ζωής μας, αυξήθηκε ραγδαία και θα συνεχίσει να αυξάνεται και στο μέλλον. Όμως,

παρατηρείται ένα χάσμα μεταξύ των Μαθηματικών που διδάσκονται στην τάξη και αυτών που χρειάζονται στην καθημερινή ζωή. Η γεφύρωση αυτού του χάσματος κρίνεται σημαντική.

Μια πειστική απάντηση στο αιώνιο ερώτημα των μαθητών «Γιατί μου χρειάζονται όλα αυτά;» δεν φαίνεται να έχει δοθεί ακόμα. Αντιθέτως, όπως αναφέρει ο Καραγεώργος (2000) τα Μαθηματικά «υπόσχονται» μελλοντικά αγαθά, τα οποία δεν είναι σε θέση να συμβάλλουν στην αφομοίωση των αφηρημένων εννοιών, οι οποίες υπάρχουν στα Μαθηματικά, και αυτό οδηγεί τους μαθητές να μην ενδιαφέρονται ιδιαίτερα για τις μαθηματικές γνώσεις.

Αυτό που έρχεται σε αντίθεση με τους βασικότερους σκοπούς της Μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα, είναι η καλλιέργεια της ικανότητας των μαθητών για σκέψη και πρωτοβουλία, η ανάπτυξη της κρίσης τους και η παρακίνησή τους για εξερεύνηση νέων καταστάσεων (Π.Ι., 2003). Ο σύγχρονος άνθρωπος είναι βέβαιο πως στη ζωή του προκειμένου να ικανοποιήσει τις ανησυχίες του και να λύσει τα προβλήματά του, θα πρέπει να αναζητήσει νέους τρόπους σκέψης και δράσης. Για αυτό το λόγο, ένας από τους βασικότερους σκοπούς της Μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, αφού αυτή η διαδικασία «συμβάλλει στην επίτευξη του στόχου των Μαθηματικών που αναφέρεται στην οργάνωση της σκέψης και της πράξης στη ζωή» (Π.Ι., 2003).

Οι σύγχρονες προσεγγίσεις, στο πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, έχουν υποδείξει την ανάγκη για ένα Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά, το οποίο δεν θα πρέπει να περιορίζεται στην έμφαση στην απλή γνώση και την εφαρμογή εννοιών και διαδικασιών, αλλά να εστιάζει και στη μελέτη των συνδέσεων μεταξύ τους, καθώς και στην ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων, στάσεων και πεποιθήσεων, οι οποίες θα βοηθήσουν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν αποτελεσματικά τα προβλήματα μέσα στα Μαθηματικά και με εργαλείο τα Μαθηματικά (Τζεκάκη, 2010).

Η συγκεκριμένη προσέγγιση αντανακλά την πορεία συγκρότησης της ίδιας της επιστήμης των Μαθηματικών, ως ένα εργαλείο ερμηνείας και κατανόησης του κόσμου που μας περιβάλλει (Noyes, 2010). Πλέον, η Μαθηματική εκπαίδευση στρέφεται από την απλή «μετάδοση» της Μαθηματικής γνώσης στην ουσιαστική

επεξεργασία μαθηματικών σχετικών εννοιών και διαδικασιών, εντός ενός πλαισίου σύμφωνου με τις σύγχρονες απαιτήσεις και γι' αυτό μειώνεται σημαντικά η διδακτέα ύλη που καλούνται να πραγματευθούν οι μαθητές. Αυτή η τάση φαίνεται να δίνει μια λύση στη σχεδόν μόνιμη αγωνία των εκπαιδευτικών να «καλύψουν την ύλη». Η πίεση αυτή, οδηγούσε τους Μαθηματικούς στα σχολεία σε μια «βιαστική» παράθεση μιας στείρας γνώσης μέσω της «μετωπικής» διδασκαλία χωρίς να δίνεται το περιθώριο στους μαθητές να δραστηριοποιηθούν (Οικονόμου, 2010). Για αυτό το λόγο, η οργάνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι ωφέλιμο να γίνει μέσω κατάλληλων και πλούσιων δραστηριοτήτων και προβλημάτων, όχι απλά ως εφαρμογές της ήδη κατακτημένης μαθηματικής γνώσης με στόχο να την εμπεδώσουν, αλλά ως ένα μέσο για την κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης (Κλιάπης & Κασσώτη, 2005).

Κεφάλαιο 1. Η έρευνα PISA

1.1. Το ιστορικό της έρευνας PISA

Ο ΟΟΣΑ, προκειμένου να ανταποκριθεί στην αξίωση των κρατών-μελών του να έχουν σε τακτά χρονικά διαστήματα αξιόπιστα στοιχεία για τις γνώσεις και τις δεξιότητες των μαθητών τους, αλλά και για την αποτελεσματικότητα των εκπαιδευτικών τους συστημάτων, ξεκίνησε τις εργασίες για την έρευνα PISA στα μέσα της δεκαετίας του 1990 (ΚΕΕ). Η επίσημη έναρξη της έρευνας έγινε το 1997. Αν και η πολιτική και η εκπαιδευτική σημασία της έρευνας PISA διαφέρει από τη μια χώρα στην άλλη, τα αποτελέσματα συχνά καθορίζουν τις δημόσιες συζητήσεις για την ποιότητα της εκπαίδευσης. Τα αποτελέσματα της έρευνας PISA δημοσιεύονται ευρέως στα Μέσα Μαζικής Ενημέρωσης (Μ.Μ.Ε.) και χρησιμοποιούνται από πολιτικές και εκπαιδευτικές αρχές. Σε πολλές χώρες, οι εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις ξεκινούν, ή έστω γίνεται μια προσπάθεια να ξεκινήσουν, ως μια άμεση απάντηση-αντίδραση στα αποτελέσματα που έφεραν οι μαθητές της χώρας στην έρευνα.

Με βάση ένα κοινά καθορισμένο και διεθνώς αποδεκτό πλαίσιο εργασίας, η έρευνα PISA συλλέγει πληροφορίες σχετικά με τις επιδόσεις των δεκαπεντάχρονων συμμετεχόντων μαθητών, ενώ παράλληλα ανιχνεύει τις όψεις και τις δυνατότητες της αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών συστημάτων των χωρών που λαμβάνουν μέρος στην αξιολόγηση. Κάθε χώρα που συμμετέχει στην έρευνα, έχει τη δυνατότητα να αντλεί, μέσα από αυτή, χρήσιμα στοιχεία αναφορικά με το εκπαιδευτικό της σύστημα, ενώ παράλληλα *«κατανοεί τα θετικά στοιχεία και τις αδυναμίες του εκπαιδευτικού της σχεδιασμού και ανατροφοδοτείται σχετικά με το βαθμό αποτελεσματικότητας του εκπαιδευτικού της έργου ανακαλύπτοντας ταυτόχρονα τις πρακτικές Εκπαίδευσης και Αγωγής των άλλων συμμετεχουσών χωρών.»* (Ι.Ε.Π., 2015).

Η έρευνα PISA είναι μια εθελοντική αξιολόγηση που έχει σκοπό να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς και τους υπεύθυνους εκπαιδευτικής πολιτικής, σε όλο τον κόσμο, ώστε να κατανοήσουν καλύτερα τις ικανότητες των μαθητών ηλικίας δεκαπέντε ετών αναφορικά με την κριτική σκέψη τους και την εφαρμογή των γνώσεών τους, με δημιουργικό τρόπο, σε νέα περιβάλλοντα (OECD, 2019).

Οι μαθητές αξιολογούνται στην Κατανόηση Κειμένου, στα Μαθηματικά και στις Φυσικές Επιστήμες. Από το 2000, που πραγματοποιήθηκε η πρώτη έρευνα, ως τώρα έχουν διενεργηθεί έρευνες ανά τριετία, με την τελευταία να γίνεται το 2018.

1.2. Ο σκοπός της έρευνας PISA

Σύμφωνα με τον Οργανισμό για την Οικονομική Συνεργασία και Ανάπτυξη (Ο.Ο.Σ.Α), το έργο PISA for Schools (OECD, 2020) συμβάλλει στη βελτίωση των μαθησιακών ευκαιριών και της ευημερίας των μαθητών, ενδυναμώνοντας τους εκπαιδευτικούς και τους υπεύθυνους της εκπαίδευσης, μέσω παγκόσμιων συνδέσεων και διεθνούς συγκριτικής αξιολόγησης βάσει μιας κοινής κλίμακας που παρέχεται από το Πρόγραμμα Διεθνούς Αξιολόγησης Φοιτητών του ΟΟΣΑ (PISA).

Το έργο PISA for Schools (OECD, 2020) έχει δύο βασικούς στόχους:

- να παρέχει την έρευνα PISA (PISA-based Test for Schools) κατόπιν αιτήματος, και
- να παρέχει τις ευκαιρίες για παγκόσμια μάθηση με σκοπό τη βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων.

Σύμφωνα με το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π., 2015), κύριος στόχος της έρευνας PISA είναι *«η αξιολόγηση του εύρους των γνώσεων και των δεξιοτήτων των μαθητών που βρίσκονται στο τέλος της Υποχρεωτικής τους Εκπαίδευσης, βάσει των οποίων διαμορφώνεται, σε σημαντικό βαθμό, η ουσιαστική και ισότιμη συμμετοχή τους στις σύγχρονα δομημένες κοινωνίες»*

Μέχρι το τέλος της δεκαετίας του 1990, οι συγκρίσεις του ΟΟΣΑ, σχετικά με τα αποτελέσματα της εκπαίδευσης, βασίζονταν σε δείκτες, όπως τα χρόνια σχολικής εκπαίδευσης, τα οποία δεν είναι αξιόπιστοι δείκτες για το τι πραγματικά γνωρίζουν και μπορούν να κάνουν οι άνθρωποι. Η έρευνα PISA συνέβαλλε στην αλλαγή αυτών των αποτιμήσεων. Η ιδέα πίσω από την έρευνα PISA βρίσκεται στην άμεση αξιολόγηση των γνώσεων και δεξιοτήτων των μαθητών, μέσω μιας μέτρησης η οποία συμφωνείται διεθνώς. Η σύνδεση αυτής της αξιολόγησης με δεδομένα από μαθητές, δασκάλους, σχολεία και εκπαιδευτικά συστήματα, συντελεί στην κατανόηση των

διαφορών απόδοσης. Στη συνέχεια, η έρευνα PISA αξιοποιεί τη δύναμη της συνεργασίας, δημιουργώντας κοινά σημεία αναφοράς και αξιοποιώντας την πίεση από ομότιμους (OECD, 2019).

Ο στόχος της έρευνας PISA δεν ήταν να δημιουργήσει ένα άλλο επίπεδο λογοδοσίας από πάνω προς τα κάτω, αλλά να βοηθήσει τα σχολεία και τους υπεύθυνους χάραξης πολιτικής να μετατοπίσουν την προσοχή τους προς τους άλλους εκπαιδευτικούς, και τα άλλα σχολεία σε άλλες χώρες. Στην ουσία, η έρευνα PISA αξιολογεί το εύρος των γνώσεων και των δεξιοτήτων των μαθητών, και κάνει αυτές τις πληροφορίες διαθέσιμες στους εκπαιδευτικούς και στους υπεύθυνους χάραξης πολιτικής, ώστε να μπορούν να λάβουν τις κατάλληλες αποφάσεις.

Η αξιολόγηση από την έρευνα PISA παρέχει τρεις βασικούς τύπους αποτελεσμάτων (OECD, 2020):

- Δείκτες που παρέχουν στοιχεία για το βασικό προφίλ των γνώσεων και δεξιοτήτων των μαθητών στους τρεις βασικούς εγγραμματισμούς που αφορούν την Κατανόηση Κειμένου, τα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες (κατανόηση γραπτών κειμένων, μαθηματικός και επιστημονικός γραμματισμός).
- Δείκτες με βάση τα αποτελέσματα που δείχνουν πώς αυτές οι δεξιότητες σχετίζονται με σημαντικούς δημογραφικούς, κοινωνικούς, οικονομικούς και εκπαιδευτικούς δείκτες.
- Δείκτες για τις τάσεις που προκύπτουν από τη συνεχιζόμενη φύση της συλλογής δεδομένων και που δείχνουν αλλαγές στα επίπεδα αποτελεσμάτων στις κατανομές, και στις σχέσεις μεταξύ μαθητών, σχολικού περιβάλλοντος και εκπαιδευτικών αποτελεσμάτων.

Δύο ακόμα αποτελέσματα, που αφορούν στην αξιολόγηση της στάσης των μαθητών στους κύριους τομείς και η ανάπτυξη μιας βάσης γνώσεων για ανάλυση πολιτικής και έρευνας, καλύπτονται επίσης από την έρευνα PISA.

Τα βασικά χαρακτηριστικά της έρευνας PISA είναι τα εξής (OECD, 2020):

- Ο πολιτικός προσανατολισμός του, με μεθόδους σχεδιασμού και αναφοράς που καθορίζονται από την ανάγκη οι κυβερνήσεις να σχεδιάσουν την εκπαιδευτική πολιτική τους.
- Η καινοτόμος ιδέα «γραμματισμού», που αφορά στην ικανότητα των μαθητών να εφαρμόζουν γνώσεις και δεξιότητες σε βασικούς θεματικούς τομείς και να αναλύουν, να αιτιολογούν και να επικοινωνούν αποτελεσματικά, όπως και να διατυπώνουν, να ερμηνεύουν και να επιλύουν προβλήματα σε διάφορες καταστάσεις.
- Η συνάφειά του με τη δια βίου μάθηση, η οποία δεν περιορίζει το PISA στην αξιολόγηση των δεξιοτήτων των μαθητών και των διαθεματικών προγραμμάτων αλλά τους ζητά επίσης να αναφερθούν στα κίνητρά τους να αποκτήσουν γνώση, στις πεποιθήσεις τους για τις μαθησιακές τους στρατηγικές.
- Η κανονικότητά του, η οποία θα επιτρέψει στις χώρες να παρακολουθούν την πρόοδό τους στην επίτευξη βασικών μαθησιακών στόχων.
- Η εντατικοποίησή του στο σύστημα δεικτών εκπαίδευσης του ΟΟΣΑ, οι οποίοι εξετάζουν την ποιότητα των μαθησιακών αποτελεσμάτων και της εκπαιδευτικής πολιτικής, με βάση τα αποτελέσματα, αξιολογώντας και την απόδοση των επενδύσεων στην εκπαίδευση.
- Το εύρος της γεωγραφικής κάλυψης και του συνεργατικού χαρακτήρα, με περισσότερες από 60 χώρες (κάλυψη περίπου τα εννέα δέκατα της παγκόσμιας οικονομίας) οι οποίες έχουν συμμετάσχει μέχρι σήμερα σε αξιολογήσεις της έρευνας PISA, συμπεριλαμβανομένων και των 30 χωρών του ΟΟΣΑ.

1.3. Τα γνωστικά αντικείμενα της έρευνας PISA

Η έρευνα PISA επικεντρώνεται στην αξιολόγηση των επιδόσεων των μαθητών στην Κατανόηση Κειμένου, τα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες, επειδή είναι θεμελιώδη πεδία για τη συνεχιζόμενη εκπαίδευση ενός μαθητή. Στην έρευνα PISA συλλέγονται επίσης πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με τη στάση και τα κίνητρα των μαθητών και αξιολογούνται επισήμως δεξιότητες, όπως η επίλυση προβλημάτων. Διερευνώνται επίσης ευκαιρίες για την αξιολόγηση άλλων σημαντικών δεξιοτήτων

που σχετίζονται, για παράδειγμα, με τη δημιουργική σκέψη. Η έρευνα PISA βασίζεται σε περιεχόμενο που μπορεί να βρεθεί σε Προγράμματα Σπουδών σε όλο τον κόσμο και εξετάζει την ικανότητα των μαθητών να εφαρμόζουν γνώσεις και δεξιότητες και να αναλύουν, να αιτιολογούν και να επικοινωνούν αποτελεσματικά καθώς εξετάζουν, ερμηνεύουν και επιλύουν προβλήματα.

Η έρευνα PISA δεν ορίζει ούτε προωθεί κανένα Πρόγραμμα Σπουδών ούτε περιορίζεται από την ανάγκη εύρεσης κοινών παρονομαστών. Για παράδειγμα, το 2018, ο στόχος της έρευνας PISA ήταν να αξιολογήσει τις γνώσεις και τις δεξιότητες ανάγνωσης που οι ειδικοί στις συμμετέχουσες χώρες και οικονομίες θεωρούν ότι είναι πιο σημαντικές για την πλήρη συμμετοχή των μαθητών σε κοινωνίες που βασίζονται στη γνώση και εξαρτώνται όλο και περισσότερο από τις ψηφιακές τεχνολογίες (OECD, 2018).

Κάθε φορά ένα από τα γνωστικά αντικείμενα είναι το κύριο αντικείμενο της έρευνας του PISA. Έτσι το 2000 κύριο γνωστικό αντικείμενο ήταν η Κατανόηση Κειμένου, το 2003 τα Μαθηματικά, το 2006 οι Φυσικές Επιστήμες κ.ο.κ. Ο σκοπός αυτής της εναλλαγής είναι να παρέχονται στις συμμετέχουσες χώρες εκτιμήσεις σχετικά με τη διαχρονική μεταβολή των αποτελεσμάτων των εκπαιδευτικών συστημάτων τους στο συγκεκριμένο αντικείμενο.

1.4. Κριτική της έρευνας PISA

Οι προθέσεις της έρευνας PISA, και αυτό δεν προκαλεί έκπληξη, σχετίζονται με τους γενικούς στόχους του ΟΟΣΑ και των μελών του και τη δέσμευση για μια ανταγωνιστική παγκόσμια ελεύθερη αγορά και οικονομία. Η έρευνα PISA κατασκευάστηκε και προοριζόταν για τις πιο βιομηχανικές και πλούσιες χώρες του ΟΟΣΑ, αλλά προοδευτικά συμμετέχουν σε αυτό και χώρες με πιο μικρές οικονομίες. Αυτό δηλώνεται ξεκάθαρα και στα κείμενα του ΟΟΣΑ, αφού όταν παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας PISA, η σημασία δηλώνεται με εκφράσεις όπως: «στην έρευνα PISA συμμετέχει το 90% της παγκόσμιας οικονομίας» (OECD, 2013)

Για τους εκπαιδευτικούς, αυτό μπορεί να φαίνεται ένας παράξενος τρόπος μέτρησης των μαθητών, αλλά δείχνει το επίκεντρο του έργου της έρευνας PISA, δηλαδή την οικονομία. Αυτό μπορεί επίσης να εξηγήσει τη σημασία που αποδίδεται στη

κατάταξη μιας χώρας στην έρευνα PISA. Πλέον είναι «κοινή λογική» ότι οι υψηλές βαθμολογίες στη Γλώσσα, τα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες, είναι προγνωστικά για τη μελλοντική οικονομική ανταγωνιστικότητα μιας χώρας, ενώ μια χαμηλή κατάταξη θεωρείται ένας κακός οίονος για το μέλλον μιας χώρας.

Κεφάλαιο 2. Τα Μαθηματικά στην έρευνα PISA

2.1. Μαθηματικός εγγραμματισμός

Είναι αδιαμφισβήτητο ότι στη σημερινή κοινωνία η ικανότητα αντιμετώπισης αριθμών και η ερμηνεία των ποσοτικών πληροφοριών είναι σημαντική ικανότητα. Ταυτόχρονα, ωστόσο, είναι δύσκολο να πούμε ποιες είναι οι διαφορές μεταξύ του αριθμητικού και του μαθηματικού εγγραμματισμού. Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις που ποικίλλουν ανάλογα με την κουλτούρα και το πλαίσιο των ενδιαφερομένων. Ο μαθηματικός εγγραμματισμός μπορεί να θεωρηθεί ως η ικανότητα χρήσης βασικών υπολογιστικών και γεωμετρικών δεξιοτήτων σε καθημερινά πλαίσια, όπως είναι η γνώση και η κατανόηση των θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών ή ως η ικανότητα ανάπτυξης εξελιγμένων μαθηματικών μοντέλων ή ως η ικανότητα κατανόησης και αξιολόγησης της χρήσης των αριθμών και μαθηματικών μοντέλων (Jablonka & Gellert, 2002).

Ο Λεμονίδης (2002) αναφέρει ότι όταν γίνεται αναφορά στη σχολική εκπαίδευση των Μαθηματικών, χρησιμοποιείται μόνο ο όρος «Μαθηματικά» ή ο όρος «Μαθηματικά και μαθητές». Όμως, για το πεδίο των Μαθηματικών για ενήλικες, χρησιμοποιούνται πολλοί όροι, όπως «αριθμητισμός» (“numeracy”), «αριθμητισμός ενηλίκων» (“adult numeracy”), «Μαθηματικά και αριθμητισμός», «Μαθηματικός γραμματισμός» (“mathematical literacy”) και «κριτικός αριθμητισμός» (“critical numeracy”). Ο ίδιος αναφέρει ότι υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση επίσης στη σημασία που αποδίδεται στον όρο «αριθμητισμός», ο οποίος χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στην έκθεση Crowther (Crowther Report, 1959), στον οποίο και αποδίδονταν η εξής σημασία, «η ελάχιστη γνώση από Μαθηματικά και επιστημονικά αντικείμενα, τα οποία διαθέτει κάποιο άτομο με σκοπό να θεωρηθεί μορφωμένο». Πλέον, το να έχει αποκτήσει κάποιο άτομο το επίπεδο του αριθμητισμού, σημαίνει ότι έχει αναπτύξει κάποιες βασικές μαθηματικές ικανότητες, τις οποίες και εφαρμόζει σε διάφορες καταστάσεις της καθημερινής του ζωής (Λεμονίδης, 2002).

Υπάρχουν βεβαίως διαφορετικές θεωρήσεις και οπτικές αναφορικά με τη σημασία που αποδίδεται στον όρο του αριθμητισμού. Αυτές οι διαφορετικές ερμηνείες αντικατοπτρίζουν διαφορετικές λογικές και αξίες, όπως είναι η επιθυμία τυποποίησης και μέτρησης των αποτελεσμάτων της τυπικής εκπαίδευσης μαθηματικών, η διάδοση της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς και η κριτική αντίληψη των πολιτών. Οι Noss, Hoyles & Pozzi (2000) αναφέρονται στην ικανότητα εκτέλεσης βασικών αριθμητικών λειτουργιών και αποκωδικοποίησης πληροφοριών που παρέχονται με τη μορφή γραφικών αναπαραστάσεων. Βλέπουν αυτή τη στενή ερμηνεία βάσει αριθμών και αποκλείουν σημαντικές ιδέες των μαθηματικών, όπως είναι η γεωμετρία και η άλγεβρα, που συνδέονται με τη κουλτούρα της χρησιμότητας.

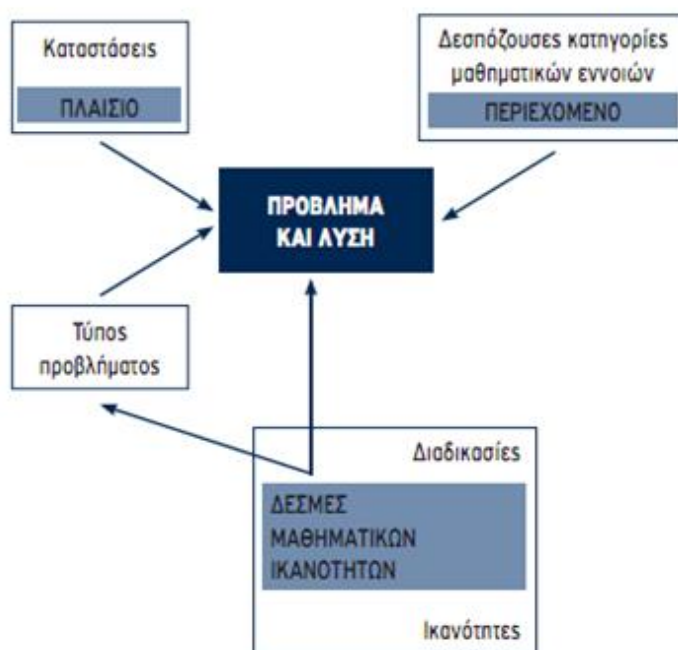
Στο πλαίσιο της έρευνας PISA, και σύμφωνα με όσα αναφέρονται στην ιστοσελίδα του Ι.Ε.Π. *«ο εγγραμματισμός στα Μαθηματικά ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να κατανοεί και να εντάσσει την επιστήμη των Μαθηματικών στην καθημερινότητα, να αναπτύσσει τεκμηριωμένες κρίσεις πάνω σε προβλήματα που τίθενται εμπρός του και να χρησιμοποιεί τη μαθηματική γνώση (και τις δεξιότητες που σχετίζονται με αυτή), για να αντιμετωπίζει με επιτυχία τις ανάγκες της καθημερινής ζωής του ως σκεπτόμενος, δημιουργικός και ενεργός πολίτης».*

Με βάση την παραπάνω προσέγγιση, ο εγγραμματισμός στα Μαθηματικά δεν περιορίζεται στη γνώση -απλώς- μαθηματικών όρων, διαδικασιών και μεθόδων που διδάσκονται στο σχολείο. Βέβαια, όλα αυτά είναι προ-απαιτούμενα, αλλά ο εγγραμματισμός στα Μαθηματικά αναφέρεται κυρίως *«στη δυνατότητα δημιουργικής σύνθεσης και εφαρμογής τους, ούτως ώστε, με αφετηρία την ίδια τη μαθηματική γνώση, να είναι εν συνεχεία κανείς σε θέση να αντιμετωπίζει πρακτικά τα πιθανά καθημερινά προβλήματα που ανακύπτουν».* (ΙΕΠ, 2019 β)

Ο Μαθηματικός εγγραμματισμός για την έρευνα PISA αφορά στις ικανότητες των μαθητών να αναλύουν, να διαμορφώνουν και να αιτιολογούν αποτελεσματικά τις ιδέες τους καθώς και να παρουσιάζουν, διατυπώνουν, λύνουν και ερμηνεύουν προβλήματα μαθηματικών σε διάφορες καταστάσεις. Η αξιολόγηση έγκειται σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου απομακρυσμένα από τα είδη των προβλημάτων που συναντώνται συνήθως στη σχολική τάξη. Πιο συγκεκριμένα, στόχος είναι οι μαθητές να αποκτήσουν τις μαθηματικές ικανότητες που θα τους βοηθήσουν στην αποσαφήνιση και την επίλυση καθημερινών προβλημάτων που

αφορούν προσωπικές, κοινωνικές, επιστημονικές και εκπαιδευτικές καταστάσεις (Jane de Lange, 2006).

Υπό το πρίσμα αυτό, η έννοια του εγγραμματισμού στα Μαθηματικά συντίθεται από τρία συστατικά στοιχεία, τα οποία αναπαρίστανται στο παρακάτω σχήμα:



Σημείωση: Από Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006 (σελ. 79), by OECD, 2006. Paris: OECD.

Σχήμα 2. 1

Τα προβλήματα εντάσσονται σε ένα πλαίσιο στο οποίο περιλαμβάνονται καταστάσεις που αποτελούν μέρος της ζωής των μαθητών, τόσο εντός, όσο και εκτός σχολείου (Αναγνωστοπούλου, Γεωργιάδου, Γιαννικόπουλος, Παπαστράτου & Τσιφλικά, 2012). Συγκεκριμένα, αυτές οι καταστάσεις είναι :

- Προσωπικές. Αυτές οι καταστάσεις συνδέονται άμεσα με τις καθημερινές δραστηριότητες των μαθητών, όπως ο προγραμματισμός ενός ταξιδιού.
- Εκπαιδευτικές ή επαγγελματικές. Οι συγκεκριμένες καταστάσεις έχουν σχέση με τη ζωή των μαθητών στο σχολείο ή αφού αποφοιτήσουν, σε ένα μελλοντικό πλαίσιο εργασίας. Ως παράδειγμα θα μπορούσε να αναφερθεί η κατασκευή μιας περιφράξης για ένα οικόπεδο όταν είναι γνωστό το σχήμα του, όπως και το συρματοπλέγμα που είναι στη διάθεση του, η εύρεση του αριθμού των φιαλών που απαιτούνται για την εμφιάλωση ενός προϊόντος κ.ά.

- Κοινωνικές. Σε αυτές τις καταστάσεις οι μαθητές καλούνται να παρατηρήσουν κάποιες πτυχές του ευρύτερου περιβάλλοντος στο οποίο κινούνται. Τέτοια παραδείγματα είναι η αγορά συναλλάγματος όπου οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν να χειρίζονται σωστά την ισοτιμία δύο διαφορετικών νομισμάτων, ο υπολογισμός του ποσού έκπτωσης για ένα προϊόν κ.ά.
- Επιστημονικές καταστάσεις. Σε αυτές τις καταστάσεις οι μαθητές καλούνται να επεξεργαστούν περισσότερο αφηρημένα μαθηματικά προβλήματα, όπως για παράδειγμα τον υπολογισμό του εμβαδού των μη κυρτών σχημάτων κ.α.

Από την άλλη το μαθηματικό περιεχόμενο προσδιορίζει οτιδήποτε είναι απαραίτητο για τη λύση ενός προβλήματος και καθορίζεται από τέσσερις κύριες κατηγορίες μαθηματικών εννοιών, και συγκεκριμένα:

- Χώρος και Σχήμα,
- Μεταβολή και Σχέσεις,
- Ποσότητα,
- Αβεβαιότητα.

Σε καθεμιά από τις παραπάνω τέσσερις κύριες κατηγορίες μαθηματικών εννοιών αντιστοιχεί και μια σειρά θεμάτων, που βασίζονται στην αντιμετώπιση προβλημάτων με τα οποία οι μαθητές μπορεί να έρθουν αντιμέτωποι στο πλαίσιο των καθημερινών δραστηριοτήτων τους. Η συγκεκριμένη προσέγγιση του μαθηματικού περιεχομένου σημειώνεται ότι είναι σε αρκετά σημεία διαφορετική από αυτή που ακολουθείται κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών στα Ελληνικά σχολεία. Παρόλα αυτά, οι συγκεκριμένες κατηγορίες εννοιών καλύπτουν το σύνολο της ύλης που αναμένεται να έχουν κατανοήσει οι δεκαπεντάχρονοι μαθητές στα Μαθηματικά.

Οι τέσσερις δεσπόζουσες κατηγορίες μαθηματικών εννοιών περιγράφονται αναλυτικότερα παρακάτω (Αναγνωστοπούλου, Γεωργιάδου, Γιαννικόπουλος, Παπαστράτου & Τσιφλικά, 2012).

- «Χώρος και Σχήμα». Στη συγκεκριμένη κατηγορία περιλαμβάνονται έννοιες οι οποίες σχετίζονται με τα γεωμετρικά σχήματα και το χώρο, και

συγκεκριμένα αφορούν στις ακόλουθες πτυχές της μάθησης και της διδασκαλίας των Μαθηματικών: αναγνώριση σχημάτων και μοτίβων, περιγραφή, κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση οπτικών πληροφοριών, κατανόηση μετασχηματισμών στα γεωμετρικά σχήματα, αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών των γεωμετρικών σχημάτων, κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχετικών θέσεων των γεωμετρικών σχημάτων, αναπαραστάσεις στο δισδιάστατο και τρισδιάστατο χώρο και οι μεταξύ τους διασυνδέσεις, πλοήγηση στο χώρο.

- «Μεταβολή και Σχέσεις». Οι έννοιες της συγκεκριμένης κατηγορίας αναφέρονται σε σχέσεις και μεταβολές, οι οποίες μπορούν να εκφραστούν ή να τυποποιηθούν κάνοντας χρήση διαφορετικών τύπων μαθηματικών συναρτήσεων. Οι πτυχές της μάθησης και της διδασκαλίας των Μαθηματικών που συνδέονται με τις συγκεκριμένες έννοιες είναι: αναπαράσταση των μεταβολών σε μαθηματική μορφή, κατανόηση των βασικών τύπων μεταβολής, αναγνώριση διαφορετικών τύπων μεταβολής, αναγνώριση των ιδιοτήτων των διαφορετικών τύπων αναπαραστάσεων (αλγεβρικών, γεωμετρικών, γραφικών παραστάσεων και καταγραφών σε πίνακα) και των μεταξύ τους διασυνδέσεων, διαχείριση των μεταβολών σε προβλήματα της καθημερινής ζωής.
- «Ποσότητα». Στη συγκεκριμένη κατηγορία περιλαμβάνονται έννοιες οι οποίες σχετίζονται με την επεξεργασία και κατανόηση των αριθμών μέσω των διάφορων τρόπων αναπαράστασής τους. Τα πεδία της μάθησης και της διδασκαλίας των Μαθηματικών που βασίζονται στις έννοιες αυτές είναι: αναπαράσταση των αριθμών με διαφορετικούς τρόπους, αντίληψη του απόλυτου και σχετικού μεγέθους των αριθμών, δυνατότητα εκτίμησης του μεγέθους των αριθμών, δυνατότητα ολοκλήρωσης μαθηματικών υπολογισμών, κατανόηση του νοήματος των πράξεων (π.χ. δυνατότητα εκτέλεσης πράξεων που βασίζονται σε συγκρίσεις, λόγους και ποσοστά).
- «Αβεβαιότητα». Η αβεβαιότητα περιλαμβάνει έννοιες που σχετίζονται με δύο θεμελιώδη πεδία της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων. Αυτά είναι τα δεδομένα και τα πειράματα τύχης. Οι έννοιες αυτές σχετίζονται με τις ακόλουθες πτυχές της μάθησης και της διδασκαλίας των Μαθηματικών: παρουσία απόκλισης στα δεδομένα, σχεδιασμός παραγωγής δεδομένων

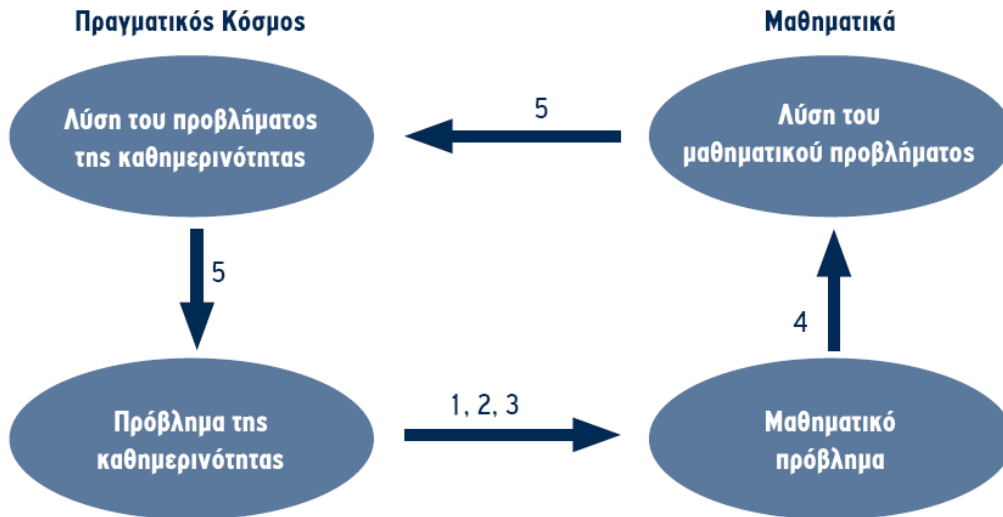
λαμβάνοντας υπόψη την απόκλιση, ποσοτικοποίηση της απόκλισης, ερμηνεία της απόκλισης, παραγωγή δεδομένων, συλλογή και κατάλληλη απεικόνιση των δεδομένων, πιθανότητα εμφάνισης ενός γεγονότος, καταγραφή συμπερασμάτων.

2.2. Μαθηματικοποίηση

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος ακολουθείται μια διαδικασία, η οποία χαρακτηρίζεται ως θεμελιώδης, και στο πλαίσιο του προγράμματος του ΟΟΣΑ αναφέρεται ως «μαθηματικοποίηση» και αποτελείται από πέντε βήματα (Αναγνωστοπούλου, Γεωργιάδου, Γιαννικόπουλος, Παπαστράτου & Τσιφλικά , 2012).

1. Εκκίνηση από ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζει κάποιος σε πραγματικές συνθήκες.
2. Οργάνωση του προβλήματος με βάση συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες και προσδιορισμός της περιοχής των Μαθηματικών που σχετίζεται με το πρόβλημα.
3. Σταδιακή απομάκρυνση από την πραγματική κατάσταση μέσω διεργασιών όπως υποθέσεις, γενικεύσεις και χρήση μαθηματικού συμβολισμού, οι οποίες μετασχηματίζουν το πρόβλημα της καθημερινότητας σε μαθηματικό πρόβλημα.
4. Επίλυση του μαθηματικού προβλήματος
5. Ερμηνεία της λύσης του μαθηματικού προβλήματος με βάση τις πραγματικές συνθήκες.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ο κύκλος της μαθηματικοποίησης καθώς και η τα στάδια μετάβασης από τη μια κατάσταση στην άλλη.



Σχήμα 2.2 Ο κύκλος της μαθηματικοποίησης (Πηγή: Αναγνωστοπούλου κ.ά., 2012)

Τέλος, οι νοητικές διαδικασίες συνδέονται με τις μαθηματικές ικανότητες που έχουν αποκτήσει οι μαθητές και ομαδοποιούνται σε τρεις δέσμες (Αναγνωστοπούλου κ.ά., 2012):

- «Δέσμη αναπαραγωγής» Στη δέσμη αυτή περιλαμβάνεται η αναπαραγωγή γνώσεων μέσα από ζητήματα, σε ορισμένα από τα οποία οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι σε σχολικά διαγωνίσματα. Αντίστοιχες ικανότητες αυτής της δέσμης αφορούν στις γενικές γνώσεις των Μαθηματικών οι οποίες βασίζονται στη διδαχθείσα ύλη, καθώς και στη γνώση των συνηθισμένων τρόπων αναπαράστασης των προβλημάτων, την αναγνώριση ιδιοτήτων και ισοδυναμιών, την εκτέλεση βασικών πράξεων και υπολογισμών, τον χειρισμό τύπων και την εφαρμογή καθιερωμένων αλγορίθμων και τεχνικών.
- «Δέσμη συνδέσεων». Οι ικανότητες συνδέσεων αφορούν στην αντιμετώπιση προβλημάτων τα οποία δεν απαιτούν απλά μια απλή εφαρμογή τύπων και σχετίζονται με σχετικά οικείες για τους μαθητές διαδικασίες, οι οποίες όμως απαιτούν τη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων. Η συγκεκριμένη δέσμη εξετάζει συνήθως ικανότητες οι οποίες συνδέονται με την κατανόηση και την εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών που έχουν διδαχθεί σε πλαίσια που διαφέρουν σημαντικά από όσα διδάχθηκαν στην εισαγωγή τους στο μάθημα, ενώ υπάρχει διαφορά σε σχέση με τα προβλήματα που συναντούν συνήθως. Εξετάζεται η ικανότητα τους να συνδέουν ένα πρόβλημα με τη διδαχθείσα

ύλη, με κυριότερη την ικανότητα τους επεκτείνουν το πεδίο εφαρμογής όσων διδάχθηκαν σε πλαίσια τα οποία τους είναι λιγότερο οικεία.

«Δέσμη αναστοχασμού». Η συγκεκριμένη δέσμη αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να σχεδιάζουν τις στρατηγικές που πρόκειται να ακολουθήσουν και θα εφαρμόσουν για την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων. Εδώ είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις, ενώ δεν αποκλείεται και μια πιο δημιουργική σύνθεση διαφορετικών αναπαραστάσεων. Επιπλέον, εξετάζονται συνήθως θεμελιώδεις μαθηματικές ικανότητες των μαθητών, όπως είναι η αιτιολόγηση του τρόπου σκέψης, η προχωρημένη μαθηματική σκέψη, η αφαιρετική ικανότητα και η ικανότητά τους για γενίκευση, η κατανόηση των περιορισμών που είναι πιθανό να διέπουν κάποιες μαθηματικές έννοιες, η χρήση και ερμηνεία του κατάλληλου μαθηματικού συμβολισμού στο πλαίσιο σύνθετων προβλημάτων και η εφαρμογή γνωστών μοντέλων σε νέα πλαίσια.

2.3. Μαθηματικές διεργασίες

Σύμφωνα με όσα αναφέρονται στην έρευνα PISA, οι ικανότητες που πρέπει να επιστρατεύσουν οι μαθητές, προκειμένου να επιλύσουν τα προβλήματα της έρευνας PISA, περιγράφονται με τον όρο «Μαθηματικές Διεργασίες». Η πρώτη από αυτές τις διεργασίες αφορά *«τη μεταφορά του προβλήματος από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των Μαθηματικών»*. Κατά τη μετάβαση αυτή:

- Προσδιορίζονται οι μαθηματικές έννοιες οι οποίες εμπλέκονται στο πρόβλημα.
- Αναπαρίσταται το πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο, ενώ γίνεται και η διάρθρωσή του με κύριο γνώμονα τις μαθηματικές έννοιες και υποθέσεις.
- Συσχετίζεται η γλώσσα που χρησιμοποιείται στο πρόβλημα με τα μαθηματικά σύμβολα.
- Εντοπίζονται κανονικότητες, σχέσεις και πρότυπα.
- Αναγνωρίζονται, ενδεχομένως πτυχές προβλήματος οι οποίες μπορεί να παραπέμπουν σε άλλα, γνωστά, προβλήματα.
- Γίνεται η «μετάφραση» του προβλήματος στη γλώσσα των Μαθηματικών, όπως για παράδειγμα, η μεταφορά των δεδομένων σε ένα μαθηματικό

μοντέλο. Μετά από αυτό το στάδιο, ακολουθεί το «στάδιο συμπερασμάτων», κατά το οποίο λαμβάνουν χώρα διάφορες διεργασίες, όπως: χρήση διαφόρων τρόπων παρουσίασης του προβλήματος και μετάβαση από τον ένα τρόπο σε άλλον, χρήση συμβόλων, τύπων, όρων και πράξεων, προσαρμογή μαθηματικών μοντέλων, συνδυασμός και ενοποίηση των μοντέλων, επιχειρηματολογία και γενίκευση.

Το τελευταίο στάδιο για την επίλυση του προβλήματος είναι η σκέψη πάνω σε όλη τη διαδικασία της μαθηματικοποίησης και τα αποτελέσματα. Εδώ ο μαθητής θεμελιώνει μαθηματικά την όλη διαδικασία, αναλύει και ερμηνεύει τα αποτελέσματα με κριτική σκέψη. Βεβαίως αυτό γίνεται σε όλα τα στάδια της διαδικασίας, αλλά είναι πολύ σημαντικό να επαναληφθεί και να ολοκληρωθεί στο στάδιο αυτό.

2.4. Μελέτη θεμάτων στα Μαθηματικά

Κάθε φορά ένα από τα γνωστικά αντικείμενα είναι το κύριο αντικείμενο της έρευνας PISA. Τα Μαθηματικά ήταν το κύριο γνωστικό αντικείμενο τα έτη 2003 και 2012. Στο σημείο αυτό θα μελετηθεί ένα δείγμα θεμάτων της έρευνας ως προς το περιεχόμενο, το είδος των ερωτήσεων (ανοιχτού/κλειστού τύπου) και τις διεργασίες.

Για το επιλεγμένο θέμα 1 (Παράρτημα 1, σελ 85), γίνεται αντιληπτό ότι οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν το εμβαδόν τριών σχημάτων που δεν είναι γνωστά. Στη συνέχεια, σε δύο ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, ζητείται από τους μαθητές να περιγράψουν ένα τρόπο για τον υπολογισμό και την περίμετρο των δοθέντων σχημάτων. Είναι εμφανές ότι το πρόβλημα συνδέεται με μια πιο πραγματική κατάσταση, και απέχει από την απλή εφαρμογή ενός τύπου. Οι μαθητές πρέπει να επιχειρηματολογήσουν για τον τρόπο που σκέφτηκαν να κάνουν τους αντίστοιχους υπολογισμούς.

Για το επιλεγμένο θέμα 2 (Παράρτημα 1, σελ 86-87), οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τα περιοδικά φαινόμενα, κάτι για το οποίο γίνεται εκτενής αναφορά στο βιβλίο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου. Στην ουσία οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν το μοτίβο του διαγράμματος σε ένα πρόβλημα καθημερινής ζωής. Και εδώ οι μαθητές πρέπει να ερμηνεύσουν κατάλληλα το αρχικό διάγραμμα, ώστε να είναι σε θέση να απαντήσουν στις τρεις ερωτήσεις που ακολουθούν, ερμηνεύοντας

κατάλληλα τα δεδομένα, αλλά και να κατασκευάσουν ένα ανάλογο διάγραμμα με βάση άλλα δεδομένα.

Για το επιλεγμένο θέμα 3 (Παράρτημα 1, σελ 88), οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν και να ερμηνεύσουν κατάλληλα τα δεδομένα ενός διαγράμματος μέσα από ένα πρόβλημα καθημερινής ζωής που μπορεί να αντιμετωπίσουν και οι ίδιοι στο σχολείο. Ακολουθεί μία ερώτηση ανοιχτού τύπου στην οποία οι μαθητές καλούνται να αναπτύξουν ένα μαθηματικό επιχείρημα που προκύπτει από τα δεδομένα του διαγράμματος.

Για το επιλεγμένο θέμα 4 (Παράρτημα 1, σελ 89), το οποίο έχει ως αντικείμενο τη Στατιστική, οι μαθητές έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους σχετικά με την έννοια του μέσου όρου, αλλά και να παρατηρήσουν τις μεταβολές όταν αλλάζει το μέγεθος του δείγματος. Παρατηρούμε ότι και το συγκεκριμένο θέμα ανήκει στην κατηγορία των προβλημάτων καθημερινής ζωής.

Το επιλεγμένο θέμα 5 (Παράρτημα 1, σελ 90), το οποίο δόθηκε το 2003, αφορά ένα πρόβλημα επαγγελματικών δεξιοτήτων και καθημερινής ζωής, για την επίλυση του οποίου οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν βασικές μαθηματικές πράξεις αφού αντιληφθούν τους περιορισμούς που προκύπτουν από τα δεδομένα και τα ζητούμενα του.

Το επιλεγμένο θέμα 6 (Παράρτημα 1, σελ 91), δόθηκε το 2003 και έχει να κάνει με την ερμηνεία μιας επιστημονικής πρότασης για ένα φυσικό φαινόμενο. Οι μαθητές έπρεπε να είναι σε θέση να χειριστούν σωστά έννοιες όπως η πιθανότητα και ο λόγος δύο αριθμών, ενώ θα πρέπει να αξιολογήσουν κατάλληλα τα αριθμητικά δεδομένα που υπάρχουν όπως και να μην χρησιμοποιήσουν αριθμητικά δεδομένα που δεν είναι απαραίτητα.

Το επιλεγμένο θέμα 7 (Παράρτημα 1, σελ 92), δόθηκε στους μαθητές, το 2000, το 2003 και το 2006 και αφορά στην ερμηνεία ενός διαγράμματος όπως αυτά που παρουσιάζονται συχνά στα Μ.Μ.Ε. και αφορά μια σημαντική δεξιότητα κάθε πολίτη, ώστε να είναι σε θέση να αξιολογήσει την ορθότητα των όσων λέγονται από αυτά. Πρόκειται για μια ανοιχτή ερώτηση στην οποία οι μαθητές καλούνται να αιτιολογήσουν την απάντησή τους ερμηνεύοντας κατάλληλα τα δεδομένα του

διαγράμματος. Μελετώντας τις οδηγίες βαθμολόγησης, βλέπουμε ότι πρόκειται για ανοιχτό πρόβλημα, το οποίο επιδέχεται περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις. Παρουσιάζονται επίσης και οι μη ολοκληρωμένες απαντήσεις.

Κεφάλαιο 3. Οι βασικές ικανότητες για τον πολίτη του 21^{ου} αιώνα

3.1. Η έννοια της ικανότητας

Η ανάπτυξη γνώσεων, δεξιοτήτων και αξιών στους μαθητές αποτελεί βασική διάσταση της εκπαίδευσης με σκοπό την αποτελεσματική ένταξή τους στην κοινωνία και στην αγορά εργασίας. Η «ικανότητα» προσδιορίζεται «ως ένας συνδυασμός γνώσεων, δεξιοτήτων και συμπεριφορών (*attitudes*), που αρμόζουν σε μια συγκεκριμένη κατάσταση και υποστηρίζουν την προσωπική ολοκλήρωση, την κοινωνική ενσωμάτωση και συνοχή, την ιδιότητα του ενεργού πολίτη και την απασχόληση» (European Union, 2019). Η έννοια της ικανότητας συνδέεται άμεσα με τους εκπαιδευτικούς σκοπούς, τη διαδικασία της μάθησης και το περιεχόμενο του Προγράμματος Σπουδών (Πασιάς Γ., Φλουρής Γ., Φωτεινός Δ., 2016).

Ήδη από την εποχή της βιομηχανικής επανάστασης οι γνώσεις και οι ικανότητες των ατόμων αποτέλεσαν αντικείμενα κεντρικής διαμεσολάβησης μεταξύ των πεδίων της κοινωνίας, της οικονομίας και της εκπαίδευσης και συνδέθηκαν με θεωρήσεις για τον καταμερισμό της εργασίας, την κινητική διαφοροποίηση και κινητικότητα, το ανθρώπινο κεφάλαιο, την κοινωνική αναπαραγωγή κ.α. (Πασιάς Γ., Φλουρής Γ., Φωτεινός Δ., 2016).

Το ενδιαφέρον για τις ικανότητες των ατόμων εκδηλώθηκε και στις σύγχρονες κοινωνίες. Από τις αρχές της δεκαετίας του 1990, το Υπουργείο Εργασίας των Ηνωμένων Πολιτειών, συγκρότησε την επιτροπή SCANS (SCANS, 1991) η οποία μελέτησε, για την παγκόσμια αγορά, τις ικανότητες που πρέπει να έχουν οι εργαζόμενοι και δημοσίευσε σχετική έκθεση στην οποία επισημαίνεται ότι οι ικανότητες που απαιτούνται για την εργασία στο πλαίσιο της δια βίου μάθησης είναι (SCANS, 1991):

1. Η ικανότητα διαχείρισης πόρων-πηγών
2. Η ικανότητα διαπροσωπικών δεξιοτήτων
3. Η απόκτηση και αξιοποίηση πληροφοριών
4. Η ικανότητα κατανόησης πολύπλοκων συστημάτων
5. Η ικανότητα διαχείρισης της τεχνολογίας

Αργότερα η Erickson (1995) ορίζει τις επτά εγκάρσιες ικανότητες, οι οποίες πρέπει να αναπτυχθούν από τα Προγράμματα Σπουδών με στόχο οι μαθητές να είναι σε θέση να φέρουν εις πέρας τις διάφορες εργασιακές δεξιότητες και να ανταποκριθούν αποτελεσματικά στις απαιτήσεις της δια βίου μάθησης. Πιο συγκεκριμένα:

1. Η *ικανότητα αυτορυθμιζόμενης μάθησης (self directed learning ability)*.
2. Η *υπεύθυνη πολιτειότητα (responsible citizenship)*.
3. Οι *ανώτερες νοητικές διαδικαστικές δεξιότητες (higher-order process skills)*.
4. Οι *οικουμενικές προοπτικές και γνώσεις (global perspectives and knowledge)*.
5. Η *διαπροσωπική και επικοινωνιακή ικανότητα (interpersonal and communication competence)*.
6. Η *τεχνολογική ικανότητα (technological competence)*.
7. Η *αισθητική ικανότητα (aesthetic competence)*.

Στη συνέχεια η Ευρωπαϊκή Ένωση από το 2000 ξεκίνησε τη δημιουργία του πλαισίου των βασικών ικανοτήτων το οποίο διαμόρφωσε αργότερα, το 2006, με τη σύσταση του που αφορά τις βασικές ικανότητες της δια βίου μάθησης από το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο και το Συμβούλιο της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Συμβούλιο της Ε.Ε., 2006). Έπειτα, η σύσταση του Συμβουλίου για τις βασικές ικανότητες του 2006, αναθεωρήθηκε στο νέο θεματολόγιο δεξιοτήτων για την Ευρώπη, το 2016, με στόχο την ανάπτυξη επικαιροποιημένης αντίληψης των βασικών ικανοτήτων. Με την πρωτοβουλία «Επένδυση στη νεολαία της Ευρώπης», το 2016, η επιτροπή υπογράμμισε περαιτέρω την ανάγκη επένδυσης στην ανάπτυξη των βασικών ικανοτήτων για τη δια βίου μάθηση (Ευρωπαϊκή Επιτροπή, 2016).

Ο ΟΟΣΑ (OECD, 2005), το 2003, δημιούργησε το πρόγραμμα DeSeCo (Defining and Selecting Competences) που αφορά στο πλαίσιο επιλογής ικανοτήτων που αναλύεται παρακάτω.

Στην εποχή μας, η οποία χαρακτηρίζεται ως εποχή της παγκοσμιοποίησης, οδεύουμε σε μια κοινωνία ικανοτήτων και σε ένα εκπαιδευτικό σύστημα «ικανοκεντρικό» (competence-based), δια του οποίου δομούνται τα Προγράμματα Σπουδών (Ball, 2013) και το οποίο βασίζεται σε νέες μορφές και τεχνολογίες αξιολόγησης και επιτελεσματικότητας.

3.2. Οι βασικές ικανότητες για τον πολίτη του 21^{ου} αιώνα σύμφωνα με τον ΟΟΣΑ

Οι βασικές ικανότητες αφορούν τις ικανότητες που πρέπει να αποκτήσει ο πολίτης ώστε να έχει μια επιτυχημένη ζωή σε όλους τους τομείς της, όπως τις ορίζει ο ΟΟΣΑ. Το πλαίσιο των ικανοτήτων βασίστηκε σε διεθνή έρευνα η οποία άρχισε το 1997 και ολοκληρώθηκε το 2003, στο πλαίσιο του προγράμματος DeSeCo (Defining and Selecting Competences) (OECD, 2005), όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως.

Οι σημερινές κοινωνίες θέτουν δύσκολες απαιτήσεις και πολύπλοκα ζητήματα στα μέλη τους. Η παγκοσμιοποίηση, η ραγδαία εξέλιξη της τεχνο-επιστήμης, η ψηφιακή οικονομία, η οικολογική κρίση, οι μεταναστευτικές ροές είναι μερικές από τις σύγχρονες προκλήσεις που καθιστούν τις κοινωνίες όλο και πιο ετερογενείς και απαιτούν από τα άτομα να αναπτύξουν νέες ικανότητες προσαρμογής και επίλυσης των προβλημάτων σε τοπικό, εθνικό αλλά και διεθνές επίπεδο (Πασιάς Γ., Φλουρής Γ., Φωτεινός Δ., 2016). Μια ικανότητα είναι κάτι περισσότερο από γνώσεις και δεξιότητες. Για παράδειγμα, η ικανότητα αποτελεσματικής επικοινωνίας είναι μια ικανότητα που μπορεί να βασιστεί στις γνώσεις ενός ατόμου για τη γλώσσα, τις πρακτικές δεξιότητες πληροφορικής και τη στάση του απέναντι σε αυτούς με τους οποίους επικοινωνεί. Τα άτομα χρειάζονται ένα ευρύ φάσμα ικανοτήτων για να αντιμετωπίσουν τις περίπλοκες προκλήσεις του σημερινού κόσμου. Κάθε βασική ικανότητα θα πρέπει σύμφωνα με τον ΟΟΣΑ (OECD, 2005):

- Να συμβάλλει σε πολύτιμα αποτελέσματα για τις κοινωνίες και τα άτομα.
- Να υποβοηθήσει τα άτομα ώστε να ικανοποιήσουν σημαντικές απαιτήσεις σε μια ευρεία ποικιλία συγκείμενων.
- Να έχει απήχηση όχι μόνο για ειδικευμένους αλλά για όλους τους πολίτες.

Η επιτυχία των μαθητών στην ζωή εξαρτάται από ένα μεγάλο φάσμα ικανοτήτων οι οποίες εντάσσονται σε τρεις βασικές κατηγορίες. Ειδικότερα οι κατηγορίες των βασικών ικανοτήτων, σύμφωνα με τον ΟΟΣΑ είναι:

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ 1: Αλληλεπιδραστική χρήση εργαλείων

Η αλληλεπιδραστική χρήση εργαλείων απαιτεί για τη διαχείριση ενός ζητήματος από τα άτομα να έχουν πολύ περισσότερα από την απλή πρόσβαση στο εργαλείο και τις τεχνικές δεξιότητές που απαιτούνται για να χειριστούν ένα ζήτημα. Η τεχνολογία

αλλάζει συνεχώς και οι άνθρωποι πρέπει να προσαρμόζονται γρήγορα στις νέες καταστάσεις της. Πρέπει επίσης να είναι σε θέση να δημιουργούν και να προσαρμόζονται στις γνώσεις και δεξιότητες που έχουν. Αυτό απαιτεί εξοικείωση με το ίδιο το εργαλείο καθώς και κατανόηση του τρόπου με τον οποίο μπορεί κανείς να αλληλεπιδράσει με τον κόσμο και πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίτευξη ευρύτερων στόχων. Υπό αυτή την έννοια, ένα εργαλείο δεν είναι απλώς ένας παθητικός μεσολαβητής, αλλά ένα όργανο σε έναν ενεργητικό διάλογο μεταξύ του ατόμου και του περιβάλλοντός του.

Ειδικότερα απαιτούνται:

- Η ικανότητα εξοικείωσης των ανθρώπων με την αλληλεπιδραστική χρήση της γλώσσας, συμβόλων και κειμένων. Αυτή η βασική ικανότητα αφορά την αποτελεσματική χρήση των προφορικών και γραπτών γλωσσικών δεξιοτήτων, υπολογιστικών και άλλων μαθηματικών δεξιοτήτων σε πολλαπλές καταστάσεις. Οι εν λόγω ικανότητες συνάδουν και με τις ικανότητες που προτείνει και η Ευρωπαϊκή Επιτροπή και αφορούν στην επικοινωνία στη μητρική γλώσσα, στη γνώση ξένων γλωσσών και στις βασικές γνώσεις των Μαθηματικών (European Union, 2019).
- Η ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης γνώσεων και πληροφοριών. Ο ολοένα και πιο σημαντικός ρόλος των τομέων, υπηρεσιών και πληροφοριών και ο κεντρικός ρόλος της διαχείρισης της γνώσης σε όλες τις σημερινές κοινωνίες καθιστούν απαραίτητο για τους ανθρώπους να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν πληροφορίες και γνώσεις αλληλεπιδραστικά. Αυτή η βασική ικανότητα απαιτεί κριτικό στοχασμό σχετικά με τη φύση της ίδιας της πληροφορίας. Η συγκεκριμένη ικανότητα συνάδει με την εγκάρσια ικανότητα της Erickson (1995), *ικανότητα της αυτορυθμιζόμενης μάθησης (self directed learning ability)*, που αφορά στην κριτική αξιοποίηση των πληροφοριών/γνώσεων, στην αναζήτηση του νοήματος, στη λήψη αποφάσεων κλπ.
- Η ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης της τεχνολογίας. Η τεχνολογική καινοτομία έχει θέσει νέες απαιτήσεις στους ανθρώπους. Ταυτόχρονα, η εξέλιξη της τεχνολογίας προσφέρει σε αυτούς νέες ευκαιρίες να

ανταποκριθούν αποτελεσματικότερα στις απαιτήσεις με νέους και διαφορετικούς τρόπους. Η αλληλεπιδραστική χρήση της τεχνολογίας απαιτεί από τα άτομα να συνειδητοποιήσουν νέους τρόπους να χρησιμοποιήσουν τεχνολογίες στην καθημερινή τους ζωή. Η ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης της τεχνολογίας συνάδει και με την ικανότητα που προτείνει και η Ευρωπαϊκή Ένωση και αφορά στην ψηφιακή ικανότητα (Digital Competence) (European Union, 2019). Σύμφωνα επίσης με την Erickson (1995), η *τεχνολογική ικανότητα* αφορά στη σωστή αξιοποίηση της τεχνολογίας η οποία συμβάλει στην επικοινωνία, στην πολυμεσική προσέγγιση της γνώσης καθώς και στον έλεγχο και τη διαχείριση της μάθησης.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ 2: Αλληλεπίδραση με ετερογενείς ομάδες

Οι ικανότητες αλληλεπίδρασης με ετερογενείς ομάδες επαυξάνουν τη διατήρηση καλών σχέσεων, ενδυναμώνουν την κοινωνική συνοχή, ενεργοποιούν τη συναισθηματική νοημοσύνη και αξιοποιούν το κοινωνικό κεφάλαιο των ατόμων. Επιπλέον στο πλαίσιο της συνεργασίας τα άτομα εμπλέκονται στο να παρουσιάζουν τις ιδέες τους, στο να αφουγκράζονται τους άλλους, να κατανοούν τη δυναμική του διαλόγου, να διαμορφώνουν συμμαχίες, να διαπραγματεύονται ζητήματα, να παίρνουν αποφάσεις λαμβάνοντας υπόψη τους την γνώμη των άλλων κλπ.

Ειδικότερα απαιτούνται:

- Η ικανότητα των ανθρώπων να είναι σε θέση να συναναστρέφονται αποτελεσματικά με άλλους ανθρώπους. Πρέπει να είναι σε θέση να διαχειρίζονται προσωπικές σχέσεις (όπως για παράδειγμα με συνεργάτες, πελάτες κλπ.) οι οποίες συμβάλλουν τόσο στην κοινωνική συνοχή όσο και στην οικονομική επιτυχία. Αυτή η ικανότητα προϋποθέτει ότι τα άτομα είναι σε θέση να σέβονται και να εκτιμούν τις αξίες, τις πεποιθήσεις, τους πολιτισμούς και τις ιστορίες άλλων προκειμένου να δημιουργηθεί ένα περιβάλλον όπου νιώθουν ευπρόσδεκτοι.
- Η ικανότητα συνεργασίας και εργασίας σε ομάδες. Πολλές απαιτήσεις και στόχοι δεν μπορούν να ικανοποιηθούν μόνον από ένα άτομο. Έτσι πρέπει

εκείνοι που μοιράζονται τα ίδια ενδιαφέροντα να ενώσουν τις δυνάμεις τους σε ομάδες όπως ομάδες εργασίας, κινήματα πολιτών, ομάδες διαχείρισης, πολιτικά κόμματα ή συνδικάτα. Η συνεργασία απαιτεί επίσης κάθε άτομο να έχει συγκεκριμένες αρμοδιότητες στις οποίες να ανταπεξέρχεται πλήρως.

- Η ικανότητα διαχείρισης και επίλυσης συγκρούσεων. Η σύγκρουση εμφανίζεται σε όλες τις πτυχές της ζωής μας, στο σπίτι, στο χώρο εργασίας ή στην ευρύτερη κοινότητα και στην κοινωνία. Η σύγκρουση είναι μέρος της κοινωνικής πραγματικότητας και αποτελεί κομμάτι των ανθρώπινων σχέσεων. Προκύπτει όταν δύο ή περισσότερα άτομα ή ομάδες εναντιώνονται μεταξύ τους λόγω διαφορετικών αναγκών, ενδιαφερόντων, στόχων ή αξιών κλπ. Το κλειδί για την προσέγγιση της σύγκρουσης είναι η εξέταση των συμφερόντων και των αναγκών των άλλων και οι λύσεις στις οποίες κερδίζουν και οι δύο πλευρές.

Την αναγκαιότητα για συνεργασία, επικοινωνία κλπ μεταξύ των ατόμων αναγνωρίζει και η Erickson (1995), η οποία από τους πρώτους όρισε στην κατάταξή της τη διαπροσωπική και επικοινωνιακή ικανότητα, η οποία αφορά στην ικανότητα των ατόμων να επικοινωνούν με σαφήνεια και να διατηρούν αρμονικές σχέσεις με τα άλλα άτομα από διαφορετικές κουλτούρες σε ένα πολύπλοκο και αλληλοσυνδεδεμένο κόσμο.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ 3: Αυτόνομη και υπεύθυνη δράση

Το να ενεργεί κάποιος αυτόνομα δεν σημαίνει να λειτουργεί σε κοινωνική απομόνωση. Αντιθέτως, απαιτεί πλήρη συνειδητοποίηση του περιβάλλοντος στο οποίο βρίσκεται, της κοινωνικής δυναμικής και των ρόλων που παίζει ο καθένας. Πρέπει τα άτομα να είναι σε θέση να διαχειρίζονται τη ζωή τους με ουσιαστικό και με υπεύθυνο τρόπο στη διαβίωσή τους και συνθήκες εργασίας. Τα άτομα πρέπει να ενεργούν αυτόνομα προκειμένου να συμμετέχουν αποτελεσματικά στην ανάπτυξη της κοινωνίας και να μπορούν να λειτουργούν στοχευμένα σε διαφορετικούς τομείς της ζωής τους τόσο στον εργασιακό τους χώρο όσο και στην οικογενειακή και στην κοινωνική ζωή τους.

Ειδικότερα απαιτούνται:

- Η ικανότητα των ατόμων να δρουν εντός του ευρύτερου πλαισίου. Αυτή η βασική ικανότητα απαιτεί από τα άτομα να κατανοούν και να λαμβάνουν υπόψη το ευρύτερο πλαίσιο των ενεργειών και αποφάσεων. Δηλαδή, να μπορεί να λάβει υπόψη του το άτομο πως σχετίζονται οι ενέργειές του, για παράδειγμα, με τους κανόνες της κοινωνίας, με τους κοινωνικούς και οικονομικούς θεσμούς και σε ό,τι έχει συμβεί στο παρελθόν. Πρέπει να αναγνωρίζει πώς οι δικές του ενέργειες και αποφάσεις ταιριάζουν σε αυτή την ευρύτερη εικόνα.
- Η ικανότητα να διαμορφώνει και να εκτελεί σχέδια ζωής και προσωπικά έργα. Αυτή η ικανότητα εφαρμόζει την έννοια της διαχείρισης έργου σε άτομα. Απαιτεί τα άτομα να ερμηνεύουν τη ζωή ως μια οργανωμένη αφήγηση και να της δίνουν νόημα και σκοπό σε ένα μεταβαλλόμενο περιβάλλον, όπου η ζωή είναι συχνά κατακερματισμένη. Αυτή η ικανότητα προϋποθέτει έναν προσανατολισμό προς το μέλλον, υποδηλώνοντας ταυτόχρονα αισιοδοξία και δυναμισμό, αλλά και ένα σταθερό εφικτό προσανατολισμό.
- Η ικανότητα υπεράσπισης και διεκδίκησης δικαιωμάτων, συμφερόντων, ορίων και αναγκών. Αυτή η ικανότητα είναι σημαντική για πλαίσια που κυμαίνονται από εξαιρετικά δομημένες νομικές υποθέσεις έως καθημερινές περιπτώσεις διεκδίκησης των δικαιωμάτων και των συμφερόντων των ατόμων. Αν και πολλά τέτοια δικαιώματα και ανάγκες καθορίζονται και προστατεύονται με νόμους ή συμβάσεις, εναπόκειται τελικά στα άτομα να εντοπίσουν και να αξιολογήσουν τα δικά τους δικαιώματα, τις δικές τους ανάγκες και τα δικά τους συμφέροντα και να τα διεκδικούν και να τα υπερασπίζονται λαμβάνοντας όμως υπόψη τα δικαιώματα, τις ανάγκες και τα συμφέροντα των άλλων ατόμων. Από τη μία πλευρά, αυτή η ικανότητα σχετίζεται με δικαιώματα και ανάγκες που προσανατολίζονται στον εαυτό τους και από την άλλη σχετίζεται με τα δικαιώματα και τις ανάγκες του ατόμου ως μέλους της συλλογικότητας (π.χ. ενεργά συμμετοχή σε δημοκρατικούς θεσμούς και σε τοπικές και εθνικές πολιτικές διαδικασίες).

Η παραπάνω ικανότητα συνάδει με την *Ικανότητα διαπροσωπικών, πολιτιστικών και κοινωνικών σχέσεων (Interpersonal, intercultural, socialcompetences)* της

Ευρωπαϊκής Ένωσης (European Union, 2019). Την αναγκαιότητα για υπεύθυνη πολιτειότητα (Responsible Citizenship) ανέδειξε και η Erickson (1995), η οποία αφορά στην ικανότητα που στηρίζει αξίες όπως ο σεβασμός, η αλληλεγγύη, ο αλτρουισμός, η συμβολή στις αρχές της δημοκρατίας, στα ιδεώδη της ισότητας και της ελευθερίας.

Συνοψίζοντας οι άνθρωποι προσδοκούν να διακατέχονται από βασικές ικανότητες που τους επιτρέπουν να προσαρμόζονται σε έναν κόσμο που χαρακτηρίζεται από την αλλαγή, την πολυπλοκότητα και την αλληλεξάρτηση. Αυτές οι ικανότητες είναι απαραίτητες στο σύγχρονο πλαίσιο διαβίωσης των ανθρώπων επειδή:

- Η τεχνολογία αλλάζει γρήγορα και συνεχώς, και η εκμάθηση της δεν απαιτεί μόνο εφάπαξ κυριαρχία των διαδικασιών αλλά και προσαρμοστικότητα στις εκάστοτε αλλαγές της.
- Οι κοινωνίες γίνονται πιο ποικιλόμορφες και κατακερματισμένες, με διαπροσωπικές σχέσεις που απαιτούν επομένως περισσότερη επαφή με εκείνους που είναι διαφορετικοί από τον εαυτό μας.
- Η παγκοσμιοποίηση δημιουργεί νέες μορφές αλληλεξάρτησης και οι ενέργειες υπόκεινται και στις δύο επιρροές (όπως ο οικονομικός ανταγωνισμός) και συνέπειες (όπως η ρύπανση) που εκτείνονται πολύ πέρα από την τοπική ή εθνική κοινότητα ενός ατόμου (OECD, 2005).

Στις περισσότερες χώρες του ΟΟΣΑ, δίνεται αξία στην ευελιξία, την επιχειρηματικότητα και στην προσωπική ευθύνη. Δεν αναμένεται από τους ανθρώπους να είναι απλά προσαρμοστικοί, αλλά και καινοτόμοι, δημιουργικοί, αυτοκατευθυνόμενοι και αυτοπαρακινούμενοι (OECD, 2005). Σύμφωνα με τους μελετητές η αντιμετώπιση των σημερινών προκλήσεων απαιτεί καλύτερη ανάπτυξη των ικανοτήτων των ατόμων να αντιμετωπίζουν πολύπλοκα νοητικά καθήκοντα, που ξεπερνούν πολύ τη βασική αναπαραγωγή της συσσωρευμένης γνώσης (OECD, 2005). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η δήλωση του Andreas Schleicher, Διευθυντή του ΟΟΣΑ, για την εκπαίδευση και τις δεξιότητες του πολίτη του 21^{ου} αιώνα, στην έκθεση στη Σιγκαπούρη (OECD, 2016), ο οποίος ανέφερε ότι:

«Χωρίς τις σωστές δεξιότητες, οι άνθρωποι θα μαραζώνουν στο περιθώριο της κοινωνίας, η τεχνολογική πρόοδος θα επιβραδυνθεί και οι χώρες θα παλεύουν στο πλαίσιο της παγκόσμιας οικονομίας. Οι κυβερνήσεις πρέπει να βελτιώσουν το εκπαιδευτικό τους σύστημα και να συνεργαστούν με τις επιχειρήσεις και τα επαγγελματικά σωματεία (ή συνδικάτα) (unions), για να αναπτύξουν δίκαιες και χωρίς αποκλεισμούς πολιτικές, έτσι ώστε όλοι να μπορούν να συμμετέχουν πλήρως στην κοινωνία».

Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί διεθνείς έρευνες οι οποίες προσδιορίζουν άμεσα το βαθμό στον οποίο τα άτομα έχουν αποκτήσει τις απαραίτητες γνώσεις και ικανότητες του πολίτη του 21^{ου} αιώνα. Ειδικότερα, η έρευνα PISA δίνει τη δυνατότητα της σύγκρισης των αποτελεσμάτων της μάθησης μεταξύ των πολιτισμών (OECD, 2005).

Κεφάλαιο 4. Οι επιδόσεις της Ελλάδας στην έρευνα PISA

Ο βαθμός εγγραμμτισμού των συμμετεχόντων μαθητών στην έρευνα PISA αποτιμάται με βάση τις απαντήσεις τους στα κλιμακούμενης δυσκολίας επίπεδα των γνώσεων και των δεξιοτήτων τους. Οι χώρες κατατάσσονται σε τρεις ομάδες, ανάλογα με τις επιδόσεις των μαθητών τους. Συγκεκριμένα:

- Στην πρώτη ομάδα ανήκουν οι χώρες των οποίων η μέση επίδοση είναι υψηλότερη από τον μέσο όρο των χωρών του ΟΟΣΑ,
- στη δεύτερη ομάδα κατατάσσονται οι χώρες των οποίων η μέση επίδοσή δε διαφέρει σημαντικά από το μέσο όρο των χωρών του ΟΟΣΑ και τέλος,
- στην τρίτη ομάδα κατατάσσονται οι χώρες των οποίων η μέση επίδοσή είναι χαμηλότερη από τον μέσο όρο των χωρών του ΟΟΣΑ.

Ο ΟΟΣΑ έχει ορίσει μια κλίμακα που αποτελείται από έξι επίπεδα μαθηματικού εγγραμμτισμού αριθμημένα από το 1 μέχρι και το 6. Τα επίπεδα προσδιορίζουν αυτά που είναι σε θέση να επιτύχουν στα Μαθηματικά, οι μαθητές που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα (OECD, 2019).

Στην έρευνα PISA, η επιτυχής επίδοση στα ανώτερα επίπεδα του μαθηματικού εγγραμμτισμού, δηλαδή στα **επίπεδα 5 και 6**, συνδέεται με την ικανότητα των μαθητών να απαντήσουν στα δυσκολότερα θέματα των Μαθηματικών. Απαιτείται λοιπόν συνδυασμός διαφόρων στοιχείων μιας ερώτησης, καθώς και να επιδείξουν μια ανώτερη μαθηματική και δημιουργική σκέψη, προκειμένου να είναι σε θέση να ανταποκριθούν με επιτυχία κατά την επίλυση ενός προβλήματος με το οποίο δεν είναι εξοικειωμένοι, αλλά και να επιχειρηματολογήσουν με βάση τις ερμηνείες και τους συλλογισμούς τους. Το βασικό επίπεδο μαθηματικού εγγραμμτισμού στην έρευνα PISA, θεωρείται το επίπεδο 2. Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές αρχίζουν να επιδεικνύουν δεξιότητες, που θα τους επιτρέψουν να χρησιμοποιήσουν ενεργά στη ζωή τους τα Μαθηματικά (OECD, 2019).

Πιο συγκεκριμένα, στο επίπεδο 5 και 6, οι μαθητές συνήθως αναλαμβάνουν έναν δημιουργικό και ενεργό ρόλο προσέγγισης στα μαθηματικά προβλήματα. Ερμηνεύουν και διατυπώνουν προβλήματα σε μαθηματικούς όρους, χειρίζονται πιο περίπλοκες πληροφορίες και διαπραγματεύονται ορισμένα βήματα επεξεργασίας. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο είναι σε θέση να προσδιορίσουν και να εφαρμόσουν τα σχετικά

εργαλεία και γνώσεις (συχνά σε άγνωστο περιβάλλον προβλήματος), χρησιμοποιώντας διορατικότητα για τον εντοπισμό ενός κατάλληλου τρόπου εξεύρεσης λύσης και την προβολή άλλων γνωστικών διαδικασιών υψηλότερης τάξης, όπως είναι η γενίκευση, η συλλογιστική και η επιχειρηματολογία για την εξήγηση και την επικοινωνία των αποτελεσμάτων (OECD, 2019).

Στο επίπεδο 3 και 4, οι μαθητές συνήθως μπορούν να ερμηνεύουν, να συνδέουν και να ενσωματώνουν διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός προβλήματος ή διαφορετικών πληροφοριών. Είναι σε θέση να χρησιμοποιούν και χειρίζονται ένα συγκεκριμένο μοντέλο, το οποίο συχνά περιλαμβάνει άλγεβρα ή άλλες συμβολικές παραστάσεις και είναι σε θέση να επαληθεύσουν ή να ελέγξουν συγκεκριμένες προτάσεις ή μοντέλα. Οι μαθητές συνήθως εργάζονται με συγκεκριμένες στρατηγικές, μοντέλα ή προτάσεις (π.χ., αναγνωρίζοντας και επεκτείνοντας από ένα μοτίβο) και επιλέγουν και εφαρμόζουν σχετικές μαθηματικές γνώσεις για να λύσουν ένα πρόβλημα που μπορεί να περιλαμβάνει μικρό αριθμό βημάτων επεξεργασίας (OECD, 2019).

Στο κάτω άκρο της κλίμακας, στα επίπεδα 1 και 2, οι μαθητές είναι συνήθως σε θέση να ολοκληρώσουν μόνο ένα στάδιο επεξεργασίας που αποτελείται από την αναπαραγωγή βασικών μαθηματικών γεγονότων ή διαδικασιών ή της απλής εφαρμογής υπολογιστικών δεξιοτήτων. Οι μαθητές συνήθως αναγνωρίζουν πληροφορίες από διαγραμματικό ή υλικό κειμένου που είναι γνωστό και απλό και στην οποία παρέχεται ή είναι εμφανής μια μαθηματική διατύπωση. Οποιαδήποτε ερμηνεία ή συλλογισμός συνήθως περιλαμβάνει την αναγνώριση ενός μόνο οικείου στοιχείου ενός προβλήματος. Η λύση απαιτεί εφαρμογή μιας ρουτίνας διαδικασίας σε ένα μόνο στάδιο επεξεργασίας (OECD, 2019).

Το 2000 διεξήχθη η πρώτη έρευνα PISA, η οποία εστίασε στον εγγραμματισμό στην Κατανόηση Κειμένου. Συμμετείχαν συνολικά 43 χώρες, από τις οποίες οι 28 ήταν οι χώρες-μέλη του ΟΟΣΑ: Αυστραλία, Αυστρία, Βέλγιο, Καναδάς, Δημοκρατία της Τσεχίας, Δανία, Φινλανδία, Γαλλία, Γερμανία, Ελλάδα, Ουγγαρία, Ισλανδία, Ιρλανδία, Ιταλία, Ιαπωνία, Κορέα, Λουξεμβούργο, Μεξικό, Ολλανδία, Νέα Ζηλανδία, Νορβηγία, Πολωνία, Πορτογαλία, Ισπανία, Σουηδία, Ελβετία, Ηνωμένο Βασίλειο και Ηνωμένες Πολιτείες. Από την Ελλάδα συμμετείχαν συνολικά 5.425 μαθητές από 175 σχολεία από όλη τη χώρα. Ο φορέας υλοποίησης της έρευνας PISA 2000 στην

Ελλάδα ήταν το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (ΚΕΕ). Στην πρώτη έρευνα PISA, παρατηρήθηκε μεγάλη διακύμανση μεταξύ χωρών στη συνολική απόδοση στα Μαθηματικά και η Ελλάδα ανήκει στις χώρες οι μαθητές των οποίων είχαν άνιση κατανομή στις δεξιότητες μαθηματικού εγγραμματισμού. Η έρευνα PISA PLUS, μια επανάληψη της έρευνας PISA 2000 χρησιμοποιώντας τον ίδιο σχεδιασμό και τα ίδια εργαλεία παρέχοντας το ίδιο σετ δεικτών και συγκρίσιμα αποτελέσματα, ενώ επιπλέον χρησιμοποιούσε ένα νέο χρονοδιάγραμμα για να φιλοξενήσει επιπλέον ενδιαφερόμενες χώρες, εφαρμόστηκε επίσης το 2002 στις ακόλουθες χώρες: Αλβανία, Αργεντινή, Βουλγαρία, Χιλή, Χονγκ Κονγκ-Κίνα, Ινδονησία, Ισραήλ, Λιχτενστάιν, ΠΓΔΜ, Περού, Ρουμανία και Ταϊλάνδη, οι οποίες δεν είναι μέλη του ΟΟΣΑ.

Το 2003 διεξήχθη η δεύτερη έρευνα PISA, η οποία είχε κύριο γνωστικό αντικείμενο τα Μαθηματικά. Συμμετείχαν συνολικά 41 χώρες, από τις οποίες οι 30 ήταν χώρες-μέλη του ΟΟΣΑ, οι 28 που συμμετείχαν το 2000 και επιπλέον η Σλοβακική Δημοκρατία και η Τουρκία. Από την Ελλάδα συμμετείχαν συνολικά 4.620 μαθητές από 171 σχολεία από όλη τη χώρα. Ο φορέας υλοποίησης της έρευνας PISA 2000 στην Ελλάδα ήταν το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (ΚΕΕ). Για τη Ελλάδα ποσοστό άνω του 25% δεν κατάφερε να φτάσει στο Επίπεδο 2 στα Μαθηματικά.

Το 2006 διεξήχθη η τρίτη έρευνα PISA, η οποία εστίασε στις Φυσικές Επιστήμες. Συμμετείχαν συνολικά 57 χώρες, από τις οποίες οι 30 ήταν χώρες-μέλη του ΟΟΣΑ. Επιπλέον, στην έρευνα PISA 2006 διερευνήθηκαν (μέσω ενσωματωμένων ερωτήσεων στα φυλλάδια του γνωστικού διαγωνίσματος) οι στάσεις των μαθητών απέναντι στις Φυσικές Επιστήμες σε συγκεκριμένο περιεχόμενο και πλαίσιο. Από την Ελλάδα συμμετείχαν 189 σχολεία και συνολικά 4.871 μαθητές από όλη τη χώρα. Και πάλι φορέας υλοποίησης της έρευνας PISA 2006 στην Ελλάδα ήταν το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (ΚΕΕ). Οι χώρες οι οποίες είχαν μέση βαθμολογία που δεν παρουσίασε στατιστικά σημαντική διαφορά από την αντίστοιχη της Ελλάδας ήταν η Ιταλία και η Πορτογαλία. Η Ελλάδα ανήκε στις χώρες του ΟΟΣΑ με τουλάχιστον το 25% των μαθητών στα μαθηματικά στο επίπεδο 1 και κάτω από αυτό.

Η τέταρτη έρευνα PISA, με κύριο γνωστικό αντικείμενο τον εγγραμματισμό στην Κατανόηση Κειμένου, διεξήχθη το 2009. Στην έρευνα PISA 2009 συμμετείχαν συνολικά 75 χώρες, από τις οποίες οι 34 χώρες ήταν μέλη του ΟΟΣΑ, αυτές που συμμετείχαν το 2006 και επιπλέον η Χιλή, το Ισραήλ, η Εσθονία και η Ισλανδία. Από

την Ελλάδα συμμετείχαν συνολικά 4.969 μαθητές, από 184 σχολεία της χώρας. Φορέας υλοποίησης και αυτής της έρευνας PISA στην Ελλάδα ήταν το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (ΚΕΕ). Η Ελλάδα κατατάχθηκε, στην τρίτη ομάδα χωρών, δηλαδή σε αυτές με μέση επίδοση χαμηλότερη από τη μέση επίδοση των χωρών του ΟΟΣΑ. Η μέση επίδοση της Ελλάδας δεν παρουσίασε στατιστικά σημαντική διαφορά σε σχέση με αυτές της Ρωσίας και της Κροατίας. Αναφορικά με την Ελλάδα, το ποσοστό των μαθητών με επιδόσεις επιπέδου 5 και 6, είναι χαμηλότερο από το αντίστοιχο ποσοστό των χωρών του ΟΟΣΑ. Συγκεκριμένα, μόλις το 0,8% των μαθητών από την Ελλάδα έφτασε στο επίπεδο 6, με το αντίστοιχο ποσοστό για τις χώρες του ΟΟΣΑ να ήταν 3,1%. Αθροιστικά, το ποσοστό των μαθητών από την Ελλάδα που κατάφερε να επιδείξει υψηλές μαθηματικές ικανότητες, δηλαδή στα επίπεδα 5 και 6, ήταν 5,7%, σημαντικά μικρότερο από το αντίστοιχο ποσοστό για τις χώρες του ΟΟΣΑ (12,7%), αλλά βελτιωμένο σε σχέση με το 2003, οπότε μόλις το 4% των μαθητών στην Ελλάδα είχε επιδόσεις επιπέδου 5 και 6.

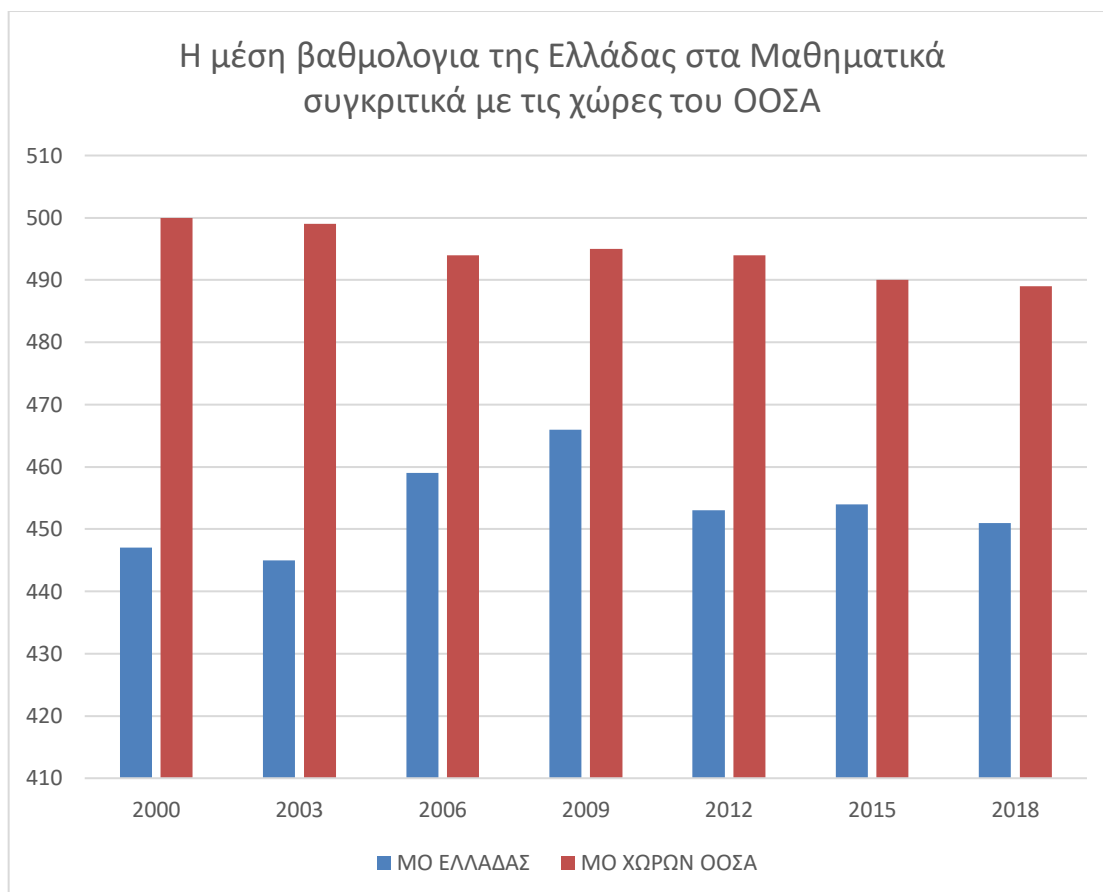
Στην πέμπτη έρευνα PISA, που διεξήχθη το 2012 το κύριο γνωστικό αντικείμενο μελέτης ήταν τα Μαθηματικά. Συμμετείχαν συνολικά 65 χώρες, από τις οποίες οι 34 ήταν χώρες μέλη του ΟΟΣΑ. Αυτές οι χώρες αντιπροσώπευαν εκείνη την περίοδο πάνω από το 80% της παγκόσμιας οικονομίας. Στην έρευνα συμμετείχαν περίπου 510.000 δεκαπεντάχρονοι μαθητές και μαθήτριες, ως αντιπροσωπευτικό δείγμα ενός πληθυσμού περίπου 28 εκατομμυρίων συνομήλικων παιδιών. Από την Ελλάδα συμμετείχαν 192 σχολεία και περίπου 5000 μαθητές. Φορέας υλοποίησης αυτής της έρευνας PISA στην Ελλάδα ήταν, για πρώτη φορά το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ). Η Ελλάδα ανήκε στην ομάδα των χωρών που βελτίωσαν τη βαθμολογία τους στα Μαθηματικά από το 2003.

Στην έκτη έρευνα PISA, το 2015, το κύριο γνωστικό αντικείμενο μελέτης ήταν οι Φυσικές Επιστήμες. Συμμετείχαν συνολικά 72 χώρες, από τις οποίες οι 35 ήταν μέλη του ΟΟΣΑ. Αυτές οι χώρες αντιπροσώπευαν εκείνη την περίοδο πάνω από το 80% της παγκόσμιας οικονομίας. Στην έρευνα πήραν μέρος περίπου 540.000 δεκαπεντάχρονοι μαθητές και μαθήτριες, ως αντιπροσωπευτικό δείγμα ενός πληθυσμού περίπου 29 εκατομμυρίων συνομήλικων παιδιών. Από την Ελλάδα

συμμετείχαν 212 σχολεία δημόσια και ιδιωτικά της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και περίπου 5.500 μαθητές. Φορέας υλοποίησης αυτής της έρευνας PISA στην Ελλάδα ήταν το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ). Η Ελλάδα κατατάχθηκε, στην τρίτη ομάδα χωρών, δηλαδή σε αυτές με μέση επίδοση χαμηλότερη από τη μέση επίδοση των χωρών του ΟΟΣΑ. Το 2015, παρατηρήθηκε ότι χώρες από την Ασία, όπως η Σιγκαπούρη, το Χονγκ Κονγκ (Κίνα), το Μακάο (Κίνα) και η Ταϊβάν (Κίνα), είχαν τις υψηλότερες επιδόσεις στα Μαθηματικά από όλες τις υπόλοιπες συμμετέχουσες χώρες. Ακόμα, στις χώρες του ΟΟΣΑ, κατά μέσο όρο, ένας στους δέκα μαθητές είχε ιδιαίτερα υψηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά, ενώ στη Σιγκαπούρη ισχύει το ίδιο για πάνω από έναν στους τρεις μαθητές (Σοφianoπούλου, Εμβαλωτής, Καρακολίδης & Πίτσια, 2019).

Η έβδομη έρευνα PISA, που διεξήχθη την άνοιξη του 2018, εστίασε στον εγγραμματοισμό στην Κατανόηση Κειμένου και προστέθηκε το νέο πεδίο που είναι «Γνώσεις και Δεξιότητες του Πολίτη του Κόσμου». Στην έρευνα PISA 2018 συμμετείχαν συνολικά 78 χώρες. Στην έρευνα συμμετείχαν περίπου 600.000 δεκαπεντάχρονοι μαθητές και μαθήτριες, ως αντιπροσωπευτικό δείγμα ενός πληθυσμού περίπου 32 εκατομμυρίων συνομήλικων παιδιών. Από την Ελλάδα πήραν μέρος 268 δημόσια και ιδιωτικά Γυμνάσια, Γενικά Λύκεια και Επαγγελματικά Λύκεια με περίπου 7.000 μαθητές. Φορέας υλοποίησης της έρευνας PISA 2018 στην Ελλάδα ήταν το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ).

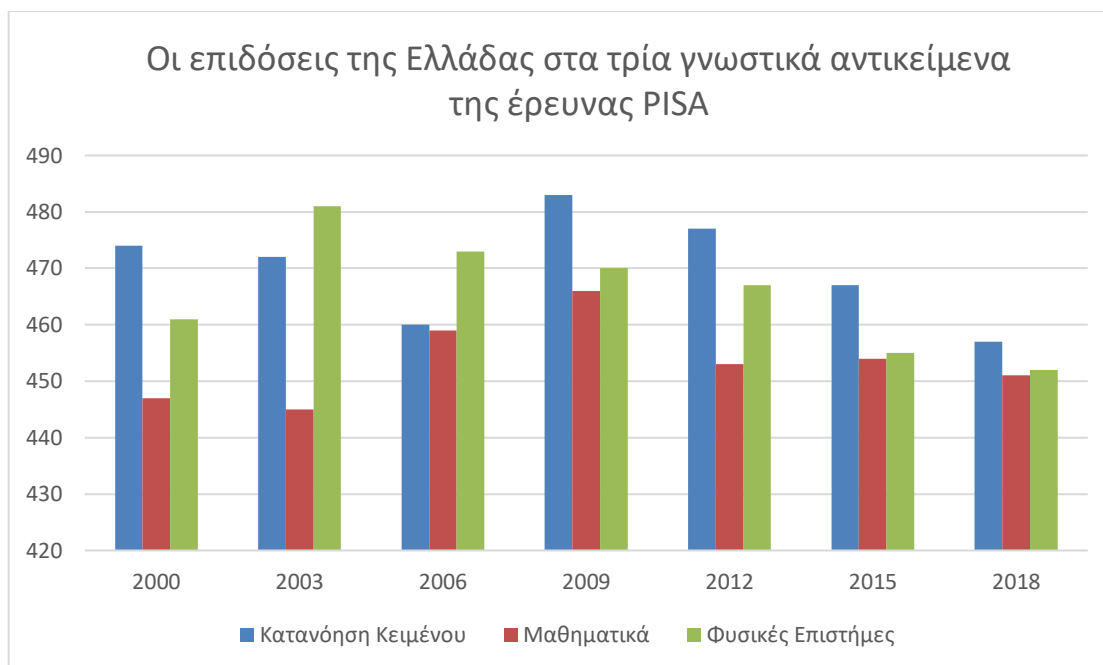
Στη συνέχεια, παρουσιάζονται αναλυτικά οι βαθμολογίες της Ελλάδας στα Μαθηματικά στην έρευνα PISA.



Σχήμα 4.2.1 Η μέση βαθμολογία της Ελλάδας στα Μαθηματικά συγκριτικά με τις χώρες του ΟΟΣΑ.

Στο παραπάνω γράφημα, παρουσιάζεται η μέση βαθμολογία των μαθητών της Ελλάδας στα Μαθηματικά συγκριτικά με το μέσο όρο των χωρών του ΟΟΣΑ. Παρατηρούμε ότι σε όλους τους διαγωνισμούς η επίδοση της Ελλάδας στα Μαθηματικά βρίσκεται κάτω από το μέσο όρο. Η μέγιστη επίδοση της Ελλάδας καταγράφηκε το 2009 και η ελάχιστη το 2003. Παρατηρείτε επίσης μια μικρή πτώση της μέσης επίδοσης των χωρών μελών του ΟΟΣΑ τα τελευταία χρόνια.

Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζονται οι βαθμολογίες της Ελλάδας στην Κατανόηση Κειμένου, στα Μαθηματικά και στις Φυσικές Επιστήμες.



Σχήμα 4.2.2 Οι επιδόσεις της Ελλάδας στα τρία γνωστικά αντικείμενα της Έρευνας PISA

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για την Κατανόηση Κειμένου οι επιδόσεις ακολούθησαν φθίνουσα πορεία από το 2000 μέχρι και το 2006, ενώ το 2009 παρατηρήθηκε μια μεγάλη αύξηση, οπότε και καταγράφηκε η υψηλότερη επίδοση στην ιστορία της έρευνας PISA. Από τότε, η πορεία των επιδόσεων ακολουθεί μια φθίνουσα πορεία. Στα Μαθηματικά παρατηρείται μια μικρή μείωση από το 2000 στο 2003, ακολούθησαν δύο διαδοχικές έρευνες με μεγάλη αύξηση, μέχρι και το 2009, οπότε και καταγράφηκε η μεγαλύτερη επίδοση. Στη συνέχεια ακολούθησε μια μεγάλη μείωση, φτάνοντας το 2012 σε επίπεδα χαμηλότερα του 2006, ενώ στη συνέχεια παρατηρήθηκε μια μικρή αύξηση, το 2015, και μια μείωση το 2018. Τέλος, για τις Φυσικές Επιστήμες, παρατηρείται μια μεγάλη αύξηση το 2003, οπότε και καταγράφηκε η μεγαλύτερη επίδοση, ενώ ακολούθησαν πέντε διαδοχικές έρευνες PISA με μείωση με αποτέλεσμα η επίδοση στις Φυσικές Επιστήμες να ξεπερνά την επίδοση στα Μαθηματικά μόνο κατά μία μονάδα το 2018. Σε όλες τις έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί τα αποτελέσματα στα Μαθηματικά είναι χαμηλότερα σε σύγκριση με τη Κατανόηση Κειμένου και τις Φυσικές Επιστήμες. Η καλύτερη επίδοση καταγράφεται συνήθως στην Κατανόηση Κειμένου με εξαίρεση το 2003 και το 2006 όπου η καλύτερη επίδοση καταγράφεται στις Φυσικές Επιστήμες.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η θέση της Ελλάδας και στα τρία γνωστικά αντικείμενα, σε όλες τις έρευνες PISA που έχουν πραγματοποιηθεί από το 2000 μέχρι και το 2018.

Πίνακας 4.2.3

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΛΛΑΔΑΣ	Κατάταξη στην Κατανόηση Κειμένου	Κατάταξη στα Μαθηματικά	Κατάταξη στις Φυσικές Επιστήμες
2000	23-28η	27-30η	25-29η
2003	27-31η	32-33η	25-31η
2006	34-36η	38-39η	35-38η
2009	22-37η	38-40η	39-41η
2012	24-42η	42-45η	40-43η
2015	31η	32η	32η
2018	42η	45η	45η

Πηγή Δεδομένων: <http://www.iep.edu.gr/pisa>

Κεφάλαιο 5. Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών του Γυμνασίου

5.1. Η πλαισίωση του προβλήματος στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών και στην έρευνα PISA

Μελετώντας τα αποτελέσματα των Ελλήνων μαθητών στην έρευνα PISA στα Μαθηματικά που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο, παρατηρούμε ότι η επίδοση είναι εξαιρετικά χαμηλή και σταθερά κάτω από το μέσο όρο των χωρών μελών του ΟΟΣΑ. Η έρευνα PISA αξιολογεί γνώσεις και ικανότητες που αναπτύχθηκαν κυρίως στους μαθητές του Γυμνασίου, με πλαίσιο Προγράμματος το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών που εκπονήθηκαν το 2002 και εφαρμόζονται εδώ και σχεδόν δύο δεκαετίες. Τα προβλήματα και οι δραστηριότητες των Μαθηματικών στο Πρόγραμμα Σπουδών διακρίνονται από έλλειψη ευελιξίας αφού εστιάζουν σε προκαθορισμένα σημεία της ύλης και η μεθοδολογία είναι συγκεκριμένη. Οι Μαυρογιάννης, Στράτζαλος και Αναστασοπούλου (2019) μεταξύ άλλων αναφέρουν:

« Το πρόβλημα στο Πρόγραμμα Σπουδών εμφανίζεται ως εφαρμογή συγκεκριμένης θεωρίας. Δηλαδή η πλαισίωση του προβλήματος είναι ένα συγκεκριμένο κομμάτι της ύλης. Οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης εκφράζονται πληρέστερα με όρους δραστηριοτήτων, παρά με όρους παρατηρήσιμων συμπεριφορών. »

Αντίθετα, στην έρευνα PISA η πλαισίωση του προβλήματος αποτελεί μια πραγματική κατάσταση και οι συνδέσεις με τη θεωρία δεν είναι τόσο εμφανείς. Η επίλυση «ανοιχτών» προβλημάτων απαιτεί σκέψη και τα προβλήματα αυτά δεν έχουν προφανή λύση. Όπως αναφέρει και ο Φωτεινός (2013), τα Αναλυτικά Προγράμματα στα Μαθηματικά φαίνεται να είναι εμπνευσμένα από την «ακαδημαϊκή θεωρία» καθώς απουσιάζουν από αυτά εκπαιδευτικές δραστηριότητες που συμβάλλουν στην ανακάλυψη των μαθηματικών τρόπων σκέψης.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η πλαισίωση των προβλημάτων που εντοπίζεται στο Πρόγραμμα Σπουδών διαφέρει από εκείνη της έρευνας PISA και αυτός ίσως είναι ένας λόγος που η χώρα μας παρουσιάζει χαμηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά.

5.2. Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών του Γυμνασίου ως πλαίσιο για την ανάπτυξη των ικανοτήτων του πολίτη του 21^{ου} αιώνα

Το Νοέμβριο του 2021 στα πλαίσια της Πράξης «Αναβάθμιση των Προγραμμάτων Σπουδών και Δημιουργία Εκπαιδευτικού Υλικού Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης» δημοσιεύθηκε από το ΙΕΠ το νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Με δεδομένο ότι τα Προγράμματα Σπουδών πρέπει να αλλάζουν και να προσαρμόζονται στις ανάγκες της εκπαιδευτικής διαδικασίας και της κοινωνίας, θεωρούμε αναγκαία την αλλαγή του Προγράμματος Σπουδών, αφού για είκοσι περίπου χρόνια εφαρμόζεται το Διαθεματικό Ενιαίο Πρόγραμμα Σπουδών. Αναγνωρίζοντας τη σημασία για την ανάπτυξη ενός νέου Προγράμματος Σπουδών στα Μαθηματικά προκύπτει το ερώτημα:

«Το Πρόγραμμα Σπουδών αποτελεί ένα ικανοποιητικό πλαίσιο για την ανάπτυξη των ικανοτήτων του πολίτη του 21^{ου} αιώνα;»

Στο σημείο αυτό θα ερευνηθεί το αν και κατά πόσο οι γενικοί σκοποί, τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα και οι δραστηριότητες του νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου ικανοποιούν τις ικανότητες που θεωρεί ο ΟΟΣΑ απαραίτητες για τον ενεργό πολίτη του 21^{ου} αιώνα. Η παρούσα μελέτη αφορά στις τρεις παρακάτω θεματικές ενότητες της Β' Γυμνασίου:

- Εξισώσεις α' βαθμού, Προβλήματα με εξισώσεις α' βαθμού, του θεματικού πεδίου της Άλγεβρας
- Συναρτήσεις, του θεματικού πεδίου της Άλγεβρας
- Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας, Μονάδες μέτρησης επιφανειών, του θεματικού πεδίου της Γεωμετρίας

Σύμφωνα με τη σκοποθεσία του το νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΙΕΠ,2021) φιλοδοξεί να προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία μέσα από τα μαθήματα να:

- *εκτιμούν και να αποδίδουν αξία στα Μαθηματικά μέσα από τη συνειδητοποίηση της φύσης της Μαθηματικής γνώσης και των κρίσιμων/μεγάλων ιδεών της που συνδέουν και ενοποιούν τα επιμέρους πεδία της μαθηματικής επιστήμης με τρόπους που συμβάλλουν σε μια βαθύτερη και πιο ισχυρή κατανόησή της,*

- *αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, όπως ο συλλογισμός, η μοντελοποίηση, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν τη μάθηση των Μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21^{ου} αιώνα,*
- *αξιοποιούν ποικιλία πόρων και εργαλείων, όπως η γλώσσα, τα σύμβολα, τα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία, για να διαχειριστούν κατάλληλα μέσα από προσεγγίσεις διερεύνησης αλλά και μαθητείας, αλλαγές, κρίσεις και προκλήσεις στο ακαδημαϊκό, προσωπικό, επαγγελματικό και κοινωνικό περιβάλλον δράσης τους,*
- *αναγνωρίζουν συνδέσεις μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων πεδίων της ανθρώπινης γνώσης και δράσης και εκτιμούν τα Μαθηματικά ως προσπελάσιμο και ενδιαφέρον πεδίο μελέτης,*
- *χρησιμοποιούν με αυτοπεποίθηση και εμπιστοσύνη τα Μαθηματικά για να κατανοούν με κριτικό τρόπο τον κόσμο γύρω τους. Στην κατεύθυνση αυτή συλλέγουν, αναλύουν, οργανώνουν και αξιολογούν δεδομένα ελέγχοντας τις πηγές προέλευσης τους και υπερασπίζονται τις απόψεις τους. Έτσι, δρουν ως υπεύθυνοι πολίτες στους χώρους δράσης τους, συμβάλλοντας δυναμικά στη δημοκρατική και ισότιμη ανάπτυξη των κοινωνιών σε μικρο- και μακρο- επίπεδο.*
- *κατανοούν και είναι σε θέση να αξιοποιήσουν το μαθηματικό λόγο εντοπίζοντας κρίσιμες μαθηματικές ιδέες, αναλύοντας και ερμηνεύοντας διαφορετικά αναπααραστασιακά συστήματα.*

Στους παραπάνω σκοπούς αναφέρεται ότι, μέσω των μαθηματικών διεργασιών και πρακτικών, υποστηρίζονται σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες του πολίτη του 21^{ου} αιώνα. Πράγματι παρατηρούμε ότι οι παραπάνω σκοποί αναφέρονται στην ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης της γλώσσας, μια ικανότητα που ορίζει και ο ΟΟΣΑ ως απαραίτητη. Επιπλέον αναφέρονται στην ικανότητα αυτόνομης και υπεύθυνης δράσης των ατόμων από τη μοντελοποίηση καταστάσεων της καθημερινής ζωής. Παρατηρούμε όμως, ότι η ικανότητα αλληλεπίδρασης των ατόμων με ετερογενείς ομάδες δεν συμπεριλαμβάνεται στους παραπάνω σκοπούς.

Ερευνώντας τις δραστηριότητες και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα των τριών θεματικών ενοτήτων των Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου, που

αναφέρθηκαν πιο πάνω, παρατηρούμε ότι υπάρχουν ελλείψεις ως προς την αποτύπωση των ικανοτήτων που αναφέρονται στους παραπάνω γενικούς σκοπούς.

Ειδικότερα:

Στη θεματική ενότητα *Αλγεβρικές Σχέσεις/Εξισώσεις* του θεματικού πεδίου της *Άλγεβρας* της Β' Γυμνασίου τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα επικεντρώνονται μόνο στην κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης, την εκμάθηση της διαδικασίας επίλυσης και την επίλυση και κατασκευή γενικών προβλημάτων. Στις δραστηριότητες των εξισώσεων παρατηρούμε «Έργα που αξιοποιούν τη χρήση μοντέλων μπορούν να βοηθήσουν στην κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης καθώς και των αλγεβρικών χειρισμών που απαιτούνται για την επίλυσή της» και «Έργα που απαιτούν την γραφική επίλυση εξισώσεων μπορούν να βοηθήσουν στην κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης» *ΙΕΠ(2021)* Σε αυτές τις δραστηριότητες που προτείνονται δεν αναφέρονται ομαδικές εργασίες με σκοπό την ανάπτυξη της ικανότητας συνεργασίας των μαθητών. Απουσιάζουν, επίσης, τα προβλήματα καθημερινής ζωής, και τα «ανοιχτού τύπου» προβλήματα. Η ικανότητα σύνδεσης των εξισώσεων με προβλήματα καθημερινής ζωής φαίνεται να απουσιάζει και από τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα.

Στη θεματική ενότητα *Συναρτήσεις* της Β' Γυμνασίου τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα εστιάζουν στην κατανόηση των συναρτήσεων (λεκτικά, αριθμητικά και γραφικά) και στην επίλυση προβλημάτων. Ενώ στις ενδεικτικές δραστηριότητες αναφέρεται η «*μετάφραση ρεαλιστικών προβλημάτων σε αλγεβρικές παραστάσεις και συναρτήσεις*» δεν αισθητοποιείται κάτι τέτοιο στα αντίστοιχα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Οι δραστηριότητες που προτείνονται είναι γενικού τύπου, διαθέτουν μια απλή περιγραφή και δεν είναι πολύ εξειδικευμένες. Επιπλέον, τα «ανοιχτού τύπου» προβλήματα απουσιάζουν από τις δραστηριότητες της παρούσας θεματικής ενότητας. Ακόμη, δεν προτείνονται ομαδικές δραστηριότητες για τους μαθητές με σκοπό την ανάπτυξη της ικανότητας ομαδικής συνεργασίας που αποτελεί βασική ικανότητα, σύμφωνα με τον ΟΟΣΑ.

Στη θεματική ενότητα *Εμβαδόν* του θεματικού πεδίου της *Γεωμετρίας* οι ενδεικτικές δραστηριότητες δεν εμπεριέχουν προβλήματα εφαρμογής του εμβαδού σε καθημερινά προβλήματα με πραγματικές σχηματικές αναπαραστάσεις. Οι

δραστηριότητες που προτείνονται εστιάζουν στην «ερμηνεία των τύπων των εμβαδών αξιοποιώντας διαδικασίες κατάλληλης διαμέρισης και σύνθεσης επιφανειών, ή πραγματοποιώντας κατάλληλους μετασχηματισμούς σε απλούστερα σχήματα με διατήρηση του εμβαδού», στην «αξιοποίηση της έννοιας του εμβαδού για την εξήγηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος» και στον «υπολογισμό του εμβαδού απλών καμπυλόγραμμων και μεικτόγραμμων επιφανειών αξιοποιώντας ποικιλία μέσων και εργαλείων» (ΙΕΠ,2021). Με την υλοποίησή τους οι μαθητές θα αποκτήσουν τις βασικές γνώσεις στην συγκεκριμένη θεματική ενότητα αλλά δεν θα είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι για προβλήματα καθημερινής ζωής που αναδεικνύουν τη χρησιμότητα των Μαθηματικών, κάτι που δεν αναφέρεται και στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα των παραπάνω δραστηριοτήτων. Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα επικεντρώνονται στην κατανόηση της έννοιας του Εμβαδού, την εφαρμογή των τύπων για τον υπολογισμό του, την διατήρηση του με κατάλληλες πράξεις κλπ. Δεν προτείνονται ακόμη ομαδικές δραστηριότητες που αναπτύσσουν την ικανότητα συνεργασίας, μια βασική ικανότητα για την επιτυχία των μαθητών σε όλους τους τομείς της ζωής τους σύμφωνα με τον ΟΟΣΑ. Και σε αυτή τη θεματική ενότητα δεν εντοπίζονται στις προτεινόμενες δραστηριότητες «ανοιχτού τύπου» προβλήματα.

Από την παραπάνω μελέτη λοιπόν συμπεραίνουμε ότι και στις τρεις επιλεγθείσες θεματικές ενότητες, οι δραστηριότητες παρουσιάζουν μια γενικευμένη μορφή χωρίς να είναι συγκεκριμένες και δεν υπηρετούν πλήρως τις βασικές ικανότητες του πολίτη του 21^{ου} αιώνα, τις οποίες αναδείξαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Παρά το γεγονός ότι στους γενικούς σκοπούς επισημαίνεται η αναγκαιότητα ανάπτυξης των ικανοτήτων του πολίτη του 21^{ου} αιώνα μέσα από το μάθημα των Μαθηματικών, δεν προτείνονται κατάλληλες και αρκετές δραστηριότητες στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου για τις τρεις θεματικές ενότητες που αναλύσαμε.

Κεφάλαιο 6. Προτάσεις εμπλουτισμού θεματικών ενότητων του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου

Με βάση αυτά που διαπιστώθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο θα δοθούν στο σημείο αυτό προτάσεις εμπλουτισμού του νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα θα δοθούν προτάσεις εμπλουτισμού με γενικούς στόχους, προτάσεις εμπλουτισμού για τη διδακτική πλαισίωση και τον σχεδιασμό μάθησης, προτάσεις εμπλουτισμού για την αξιολόγηση, την αυτοαξιολόγηση και την ετεροαξιολόγηση και τέλος κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό με δραστηριότητες και θα περιέχει εμπλουτισμό των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων. Οι προτάσεις αυτές θα αφορούν τις τρεις επιλεγθείσες θεματικές ενότητες των Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στόχος τους είναι η ανάπτυξη των ικανοτήτων που ορίζει ο ΟΟΣΑ ως απαραίτητες για τον πολίτη του 21^{ου} αιώνα, οι οποίες συμβάλλουν στη δια βίου μάθηση.

6.1. Προτάσεις εμπλουτισμού του νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών με γενικούς στόχους

Προτείνονται γενικοί στόχοι που θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών έτσι ώστε οι μαθητές:

- να αποκτήσουν τον επιστημονικό, τον τεχνολογικό και τον ψηφιακό εγγραμματισμό, καθώς και τον εγγραμματισμό STEM/STEAM.

Με την υλοποίηση των θεμάτων STEM/STEAM αντιλαμβάνονται περισσότερο την χρησιμότητα και την αλληλεξάρτηση των Μαθηματικών με την Επιστήμη, τη Μηχανική, την Τεχνολογία ή και την Τέχνη με σκοπό την ανάπτυξη βασικών ικανοτήτων όπως αλληλεπίδραση, συνεργασία, αυτόνομη δράση κλπ.

- να εμπλακούν σε δραστηριότητες καθημερινής ζωής μέσα από τα Μαθηματικά, κατάλληλα προσαρμοσμένες ανάλογα με τις κλίσεις, τα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες τους.

- να επιλύσουν προβλήματα και να λαμβάνουν αποφάσεις λαμβάνοντας υπόψη ατομικές, κοινωνικές και ηθικές συνέπειες των αποφάσεων τους.

- να αποκτήσουν βίου ικανότητες για να ανταποκριθούν στις ανάγκες του διαρκώς μεταβαλλόμενου εργασιακού τους βίου ως ενεργοί πολίτες του 21^{ου} αιώνα.
- να επιχειρηματολογούν στο πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων.
- να αποκτήσουν την ικανότητα να μαθαίνουν (ικανότητα της εκμάθησης) και να επικαιροποιούν τις ικανότητες που τους προσφέρει το μάθημα των Μαθηματικών καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής τους (δια βίου μάθηση).

6.2. Σχεδιασμός μάθησης και Διδακτική πλαισίωση για τα επιλεγθέντα θεματικά πεδία των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου

Σύμφωνα με όσα αναφέρονται στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών υποστηρίζεται η προσέγγιση στη μάθηση των Μαθηματικών τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο. Με δεδομένη την κρισιμότητα της μαθηματικής γνώσης σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης ζωής το Πρόγραμμα Σπουδών στοχεύει στη δημιουργία περιβαλλόντων μάθησης που δίνουν τη δυνατότητα σύνδεσης μεταξύ της γνώσης του περιεχομένου των Μαθηματικών και της εφαρμογής των εννοιών και των διαδικασιών που το χαρακτηρίζουν. Επιδιώκει να προσφέρει ευκαιρίες για πολλαπλούς τρόπους συμμετοχής στη μαθηματική δραστηριότητα μέσα στη σχολική τάξη αναδεικνύοντας τα Μαθηματικά τα οποία «παραμένουν Μαθηματικά», δηλαδή, πλούσια σε μαθηματικά νοήματα. Επιπρόσθετα αναγνωρίζει ότι οι μαθητές διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τον τρόπο και το ρυθμό που μαθαίνουν, τα ενδιαφέροντά τους, τις προηγούμενες γνώσεις και τις εμπειρίες τους, την κουλτούρα και τη γλώσσα τους. Έτσι υποστηρίζει διδακτικές στρατηγικές συμπερίληψης και διαφοροποίησης. Τέλος ο εκπαιδευτικός καλείται να μην περιορίζει τις επιλογές του σε έργα που εστιάζουν στην εφαρμογή αλγόριθμων και μαθηματικών τύπων, αλλά να επιλέγει έργα που ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα των μαθητών, αντλώντας τα από πραγματικές καταστάσεις καθημερινότητας (ΙΕΠ, 2021).

Στο πλαίσιο εμπλουτισμού του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών προτείνεται η πλήρης ένταξη των «ανοιχτών προβλημάτων», προβλήματα τα οποία επιδέχονται περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις, στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών. Με την ενασχόληση με τέτοιου είδους προβλήματα οι μαθητές διεξάγουν δοκιμές, διατυπώνουν υποθέσεις, φαντάζονται λύσεις, ελέγχουν την

εγκυρότητα των λύσεων που σκέφτηκαν και επιχειρηματολογούν για τις λύσεις που επιλέγουν (Charnay, 1992).

Προκειμένου να επιτευχθεί σύγκλιση της εκπαιδευτικής διαδικασίας με τις ικανότητες που αξιολογούνται από την έρευνα PISA, είναι σημαντικό να αναδειχθεί η ενασχόληση με τα «ανοιχτά» προβλήματα ως βασικό στοιχείο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Για να συμβεί αυτό προτείνεται η ενθάρρυνση των διδασκόντων να εντάξουν τα προβλήματα τόσο στο καθημερινό διδακτικό πρόγραμμα όσο και στις τελικές εξετάσεις, κάτι που θα αναδείξει την αξία τους (Μαυρογιάννης, Στράτζαλος & Αναστασοπούλου, 2019).

Επιπλέον τα προβλήματα STEAM είναι απαραίτητα για την ανάπτυξη βασικών ικανοτήτων των μαθητών και δεν πρέπει να απουσιάζουν από την εκπαιδευτική διαδικασία. Είναι εμφανές ότι η σφαιρική επίλυση ακόμα και σύνθετων επιστημονικών προβλημάτων συνδέοντας τις θεωρητικές και θετικές ερευνητικές περιοχές καταλήγει σε αποτελεσματικότερη και πιο επιτυχή αντιμετώπισή τους, ενώ οι μαθητές που μπορούν να πραγματοποιήσουν αυτού του είδους άλματα χαρακτηρίζονται ως δημιουργικοί (Henriksen, 2014). Πιο συγκεκριμένα, η υλοποίηση STEAM αναγνωρίζει ως κινητήριες δυνάμεις της αλλαγής την Τεχνολογία και την Επιστήμη, οι οποίες εξελίσσονται και αποκτούν μορφή και νόημα μέσω της Μηχανικής και των Τεχνών, με τα Μαθηματικά να είναι ο πυλώνας αυτού του οικοδομήματος (STEAM Education Program Description, 2014).

Επιπλέον, στο πλαίσιο μάθησης των Μαθηματικών, προτείνεται η αξιοποίηση της ομαδοσυνεργατικής προσέγγισης, μέσω ειδικά διαμορφωμένων δραστηριοτήτων, η οποία ενθαρρύνει τη συμμετοχή των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία, μέσα από αυθεντική επικοινωνία, συλλογική σκέψη και δράση. Έτσι, μπορεί να επιτευχθεί η διαμόρφωση των παιδιών σε συγκροτημένους πολίτες με ατομική και κοινωνική ταυτότητα και δημοκρατικές αξίες.

6.3. Αξιολόγηση – Αυτοαξιολόγηση – Ετεροαξιολόγηση

Στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών που δημοσιεύτηκε το Νοέμβριο του 2021 αναφέρεται ότι μια από τις βασικές επιδιώξεις του αποτελεί η αναβάθμιση της διαδικασίας της αξιολόγησης. Η αξιολόγηση διατρέχει όλη τη διδακτική διαδικασία, ελέγχει την πορεία επίτευξης των Προσδοκώμενων Μαθησιακών

Αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) και ανατροφοδοτεί την πορεία μάθησης των μαθητών σε ατομικό αλλά και σε συλλογικό επίπεδο. Δεν πρόκειται για «βαθμολογία», «μέτρηση», «συμπλήρωμα διδασκαλίας» αλλά για μια πολύπλοκη διαδικασία πλήρως ενσωματωμένη στην διδασκαλία, που συνιστά μηχανισμό συνεχούς αποτίμησης και ανατροφοδότησης των δύο κεντρικών όψεων της εκπαιδευτικής πράξης, δηλαδή, της μάθησης και της διδασκαλίας. Με αυτή την έννοια, η πρόταση που υιοθετείται από το ΠΣ είναι η διαμορφωτική προσέγγιση στη διαδικασία της αξιολόγησης και ειδικότερα της «αξιολόγησης για μάθηση» (ΙΕΠ, 2021).

Η σαφής οργάνωση των ΠΜΑ επιτρέπει στον εκπαιδευτικό με την αξιοποίηση διαγνωστικών εργαλείων αξιολόγησης, να καταγράφει και να ενημερώνεται για το βαθμό κατάκτησης της μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές στη διάρκεια του σχολικού έτους, να εντοπίζει τις δυσκολίες και τις ελλείψεις τους και να σχεδιάζει τον τρόπο στήριξης και ανατροφοδότησης τους (ΙΕΠ, 2021).

Η αξιολόγηση του επιπέδου της μάθησης που έχουν πετύχει οι μαθητές πραγματοποιείται τόσο ανεπίσημα (άτυπα) κατά την εξέλιξη του μαθήματος μέσα στη σχολική τάξη όσο και επίσημα (τυπικά τεστ, διαγωνίσματα, έργα, συνθετικές εργασίες). Ο εκπαιδευτικός καλείται να προσαρμόζει την αξιολογική διαδικασία στις «ιδιαιτερότητες» και τις ανάγκες των μαθητών, να διαμορφώνει ανάλογα το πώς και τι προτίθεται να αξιολογήσει και να αξιοποιεί τα κατάλληλα εργαλεία αξιολόγησης (ΙΕΠ, 2021).

Στην παρούσα μελέτη προτείνεται η αξιολόγηση από τον εκπαιδευτικό να είναι συνεχής διαδικασία που του επιτρέπει συχνά τη μέτρηση σημαντικών επιδόσεων που ενδεχομένως να μην ανιχνεύονται σε μια τελική εξέταση, όπως εκτεταμένη ανάθεση έργων, πρακτικές ασκήσεις ή προφορική εξέταση επίδοσης. Στο πλαίσιο εμπλουτισμού των επιλεγμένων θεματικών ενοτήτων προτείνουμε δραστηριότητες και θέματα που μπορούν να αξιοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς για την αξιολόγηση των μαθητών/τριών και αποτελούνται από σύνθετα προβλήματα και δραστηριότητες καθημερινής ζωής με σκοπό την εμπλοκή των μαθητών/τριών για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που πρέπει να προσαρμόζει την διαδικασία της αξιολόγησης στις ανάγκες και τις ιδιαιτερότητες των μαθητών/τριών, να την διαμορφώνει ανάλογα το περιεχόμενο της ύλης και τον τρόπο με τον οποίο διατίθεται να το αξιολογήσει και να χρησιμοποιεί τα κατάλληλα εργαλεία αξιολόγησης. Επιπλέον η αξιολόγηση πρέπει να υλοποιείται με βάση τους σκοπούς, τους στόχους και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα που ορίζει το Πρόγραμμα Σπουδών.

Σύμφωνα με τους Black και Wiliam (1998) η μάθηση βασίζεται σε τρία στοιχεία τα οποία πρέπει να γίνουν σε σημαντικό βαθμό κατανοητά από τον μαθητή:

- Αναγνώριση του επιδιωκόμενου στόχου
- Απόκτηση εικόνας για το που βρίσκεται γνωστικά
- Να γνωρίζει τον τρόπο για να επιτύχει το χάσμα μεταξύ των δύο παραπάνω.

Με την ανάθεση επίλυσης «ανοιχτών προβλημάτων» από τους μαθητές δίνεται η δυνατότητα ουσιαστικής αξιολόγησής τους από τον εκπαιδευτικό. Τόσο από το είδος και την ορθότητα των λύσεων όσο και από την επιχειρηματολογία και τον τρόπο σκέψης των μαθητών κατά την επίλυση των «ανοιχτών» προβλημάτων, ο εκπαιδευτικός μπορεί να διατυπώσει σαφή εικόνα για την επίδοση και τον τρόπο σκέψης κάθε μαθητή (Charnay, 1992).

Πέραν της αξιολόγησης του μαθητή από τον εκπαιδευτικό, ένας εξίσου σημαντικός παράγοντας για την επίτευξη της στοχευμένης μάθησης είναι και η διαδικασία της αυτοαξιολόγησης από τους ίδιους τους μαθητές. Η αυτοαξιολόγηση είναι θεμέλιο για την εκπαιδευτική διαδικασία και ανατροφοδοτεί την πορεία μάθησης των μαθητών σε ατομικό αλλά και συλλογικό επίπεδο. Σύμφωνα με τον Κασσωτάκη (2016), ο εκπαιδευτικός δεν πρέπει να είναι ο μόνος κριτής της επίδοσης των μαθητών/τριών. Η αυτοαξιολόγηση αποτελεί το πιο αποτελεσματικό μέσο αυτογνωσίας και ενίσχυσης των εσωτερικών κινήτρων της μάθησης.

Ως μέσα αυτοαξιολόγησης του μαθητή μπορούν να χρησιμοποιηθούν:

- Ελεύθερα σημειώματα των μαθητών/τριών στα οποία προσμετρούν την προσπάθειά τους, τις δυνατότητές τους, τις αδυναμίες τους, την απόδοσή τους κ.λ.π.

- Συμπλήρωση ερωτηματολογίων αυτοαξιολόγησης.
- Διόρθωση και βαθμολόγηση πρόχειρων διαγωνισμάτων από τους ίδιους τους μαθητές.

Προτείνεται ακόμη και η ετεροαξιολόγηση από τους μαθητές. Η ετεροαξιολόγηση είναι μια διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές/τριες καλούνται να αξιολογήσουν τις επιδόσεις του συμμαθητή τους σε μια εργασία ή ακόμα και σε ένα διαγώνισμα και στη συνέχεια να προτείνουν τρόπους για τη βελτίωσή τους. Ο εκπαιδευόμενος, αξιολογώντας τις εργασίες των συνεκπαιδευομένων του, αναγνωρίζει τα λάθη και τις παραλήψεις και αναστοχάζεται τη δική του μαθησιακή πορεία (Ταρατόρη-Τσαλκατίδου, 2009).

6.4. Αναστοχασμός των μαθητών στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής διαδικασίας

Στο πλαίσιο της ανάπτυξης ικανοτήτων κριτικής σκέψης και δια βίου μάθησης προτείνεται ο αναστοχασμός των μαθητών σε ατομικό ή συλλογικό επίπεδο τόσο σε σχέση με την αρχική τους γνώση και τη νέα γνώση στο πλαίσιο του μαθήματος όσο και σε σχέση με τον τρόπο σκέψης για την επίλυση των προβλημάτων. Η μεταγνωστική αυτή διαδικασία συμβάλλει στη συνειδητοποίηση του τρόπου μάθησης και συνεπώς συμβάλλει στην ανάπτυξη της ικανότητας εκμάθησης, ως αναγκαία και απαραίτητη ικανότητα της δια βίου μάθησης.

6.5. Αναλυτική απεικόνιση των επιλεγθέντων θεματικών ενοτήτων του νέου Προγράμματος Σπουδών

1^η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

- ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: Άλγεβρα
- ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Εξισώσεις $\acute{\alpha}$ βαθμού, Προβλήματα με εξισώσεις
- ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ:

Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα του νέου Προγράμματος Σπουδών που αναφέρονται στην παρούσα θεματική ενότητα (ΙΕΠ, 2021):

Να αναγνωρίζουν τους όρους: εξίσωση πρώτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, πρώτο και δεύτερο μέλος, ισοδύναμες εξισώσεις, άγνωστος, λύση ή ρίζα.

Να αναγνωρίζουν αν ένας αριθμός είναι λύση της εξίσωσης ή/και του αντίστοιχου προβλήματος.

Να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $ax + b = cx + d$ με εφαρμογή των ιδιοτήτων διατήρησης της ισότητας και των πράξεων.

Να αναγνωρίζουν ότι μια εξίσωση μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή καμία λύση.

Να επιλύουν προβλήματα με εξισώσεις της μορφής $ax + b = cx + d$ με άγνωστο και στα δύο μέλη.

Να συνθέτουν προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις της μορφής $ax + b = cx + d$ με άγνωστο και στα δύο μέλη.

Προτείνονται για εμπλουτισμό τα παρακάτω προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

Να επιλύουν προβλήματα καθημερινής ζωής και πραγματικών καταστάσεων με τη χρήση εξισώσεων της μορφής $ax + b = cx + d$ μέσω κατάλληλων μοντέλων και αλγεβρικά μέσω της ισότητας.

Να κατασκευάζουν/συνθέτουν οι ίδιοι σύνθετα προβλήματα καθημερινής ζωής που λύνονται με τη χρήση εξισώσεων της μορφής $ax + b = cx + d$.

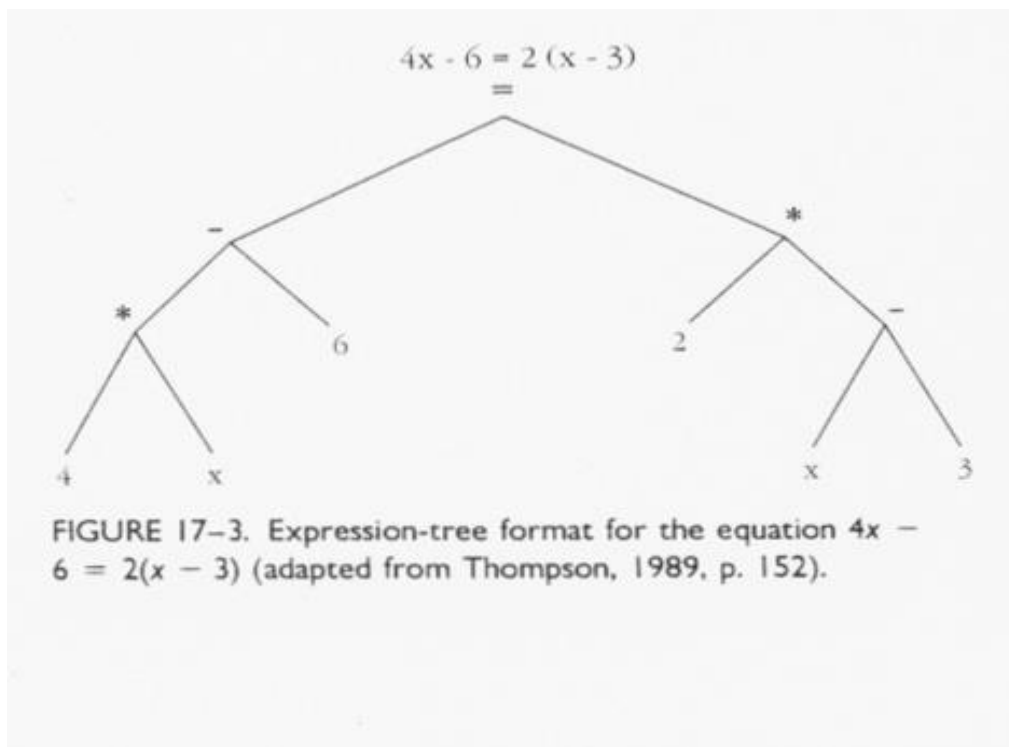
Να επιλύουν «ανοιχτά προβλήματα», που επιδέχονται περισσότερες από μία λύσεις, με τη χρήση εξισώσεων της μορφής $ax + b = cx + d$.

– ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ :

Δραστηριότητα 1^η: Δίνεται σχηματική αναπαράσταση ζυγού σύγκρισης που ισορροπεί και περιέχει κύβους άγνωστης μάζας και βαρίδια στα οποία

αναγράφεται η μάζα τους. Οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν τη μάζα ενός κύβου αφαιρώντας κύβους από τον ζυγό χωρίς να χαθεί η ισορροπία.

Με την παραπάνω δραστηριότητα οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται την έννοια της ισότητας μέσα από μια πραγματική σχηματική αναπαράσταση. Επιπλέον, διερευνούν και διατυπώνουν την έννοια της ισότητας. Προτείνεται η αξιοποίηση εικόνων, διαγραμμάτων και ψηφιακών αναπαραστάσεων από τον εκπαιδευτικό μέσα στην τάξη για την κατανόηση της έννοιας της ισότητας και της εξίσωσης, με σκοπό να καλλιεργηθεί η ικανότητα χρήσης της τεχνολογίας. Ενδεικτικά παρουσιάζεται η παρακάτω σχηματική αναπαράσταση μιας εξίσωσης η οποία (ή παρόμοιες με αυτή) μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τον εκπαιδευτικό για την εξήγηση της έννοιας της ισότητας.



Εικόνα 6.4.: Expression-tree format for the equation $4x-6=2(x-3)$
(Thompson,1989, p.152)

Δραστηριότητα 2^η: Αν γνωρίζετε ότι έχω στο πορτοφόλι μου το ποσό των 50 ευρώ σε χαρτονομίσματα των δέκα και των πέντε ευρώ να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των πέντε και πόσα των δέκα ευρώ μπορεί να έχω.

Η παραπάνω δραστηριότητα αφορά ένα ανοιχτού τύπου πρόβλημα που επιδέχεται περισσότερες από μια λύσεις. Με την εκπλήρωσή του, ο εκπαιδευτικός ωθεί τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν άμεσα τις γνώσεις τους για εντοπίσουν το σύνολο των δυνατών λύσεων. Η παραπάνω δραστηριότητα έχει στόχο να αναπτυχθεί η ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης της γλώσσας, γνώσεων και πληροφοριών.

Δραστηριότητα 3^η: Σε ένα διαγώνισμα με αρνητική βαθμολόγηση ο μαθητής παίρνει 3 βαθμούς για κάθε σωστή απάντηση, χάνει 1 βαθμό για κάθε λάθος και δεν βαθμολογείται για αναπάντητη ερώτηση. Οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το πλήθος των σωστών απαντήσεων με δοσμένη βαθμολογία στο διαγώνισμα.

Με την παραπάνω δραστηριότητα οι μαθητές κατασκευάζουν εξισώσεις της μορφής $a\chi + \beta = \gamma\chi + \delta$ με εφαρμογή των ιδιοτήτων διατήρησης ισότητας και πράξεων και λύνουν ένα σύνθετο πρόβλημα καθημερινής ζωής με την χρήση εξισώσεων. Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να εντοπίσουν και να καταγράψουν τις κρίσιμες πληροφορίες του προβλήματος, αφού αναγνωρίσουν το ζητούμενό του. Στην συνέχεια, οι μαθητές καλούνται να συνδέσουν τα δεδομένα του προβλήματος για να κατασκευάσουν και να λύσουν την εξίσωση που δίνει τη λύση. Η παρούσα δραστηριότητα σκοπεύει να συμβάλει στην ανάπτυξη της ικανότητας χρήσης γνώσεων και πληροφοριών.

Δραστηριότητα 4^η: Σε ένα θέατρο υπάρχουν 150 γονείς και παιδιά. Το εισιτήριο για κάθε παιδί είναι 5 ευρώ και για κάθε ενήλικα 10 ευρώ. Δεδομένου ότι το θέατρο τη συγκεκριμένη μέρα εισέπραξε περισσότερα από 1000 και λιγότερα από 1100 ευρώ, οι μαθητές καλούνται να βρουν πόσοι ενήλικες και πόσα παιδιά μπορεί να ήταν τη συγκεκριμένη μέρα στο θέατρο.

Η παραπάνω δραστηριότητα αποτελεί ένα καθημερινό και ανοιχτού τύπου πρόβλημα που λύνεται με τη χρήση εξίσωσης και έχει σκοπό να συμβάλει στην ανάπτυξη της ικανότητας αλληλεπιδραστικής χρήσης γνώσεων και πληροφοριών. Οι μαθητές καλούνται να κάνουν υποθέσεις για την επίλυσή του και να ερευνήσουν την ορθότητά τους. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να φέρει

ένα τυχαίο παράδειγμα για να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν τον κατάλληλο τρόπο σκέψης στην παρούσα δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 5^η: Οι μαθητές καλούνται να χωριστούν σε ομάδες δύο ατόμων (ανά θρανίο). Έπειτα δέχονται έναν αριθμό που υποδεικνύει τη λύση μιας εξίσωσης και καλούνται σε συνεργασία με το διπλανό τους να κατασκευάσουν μια εξίσωση που έχει λύση τον αριθμό που τους δόθηκε. Στη συνέχεια οι μαθητές ανταλλάζουν τις εξισώσεις που κατασκεύασαν και καθένας λύνει την εξίσωση κάποιας άλλης ομάδας ελέγχοντας αν έχουν την ίδια λύση.

Με την παραπάνω δραστηριότητα οι μαθητές και επιλύουν/κατασκευάζουν πραγματικά προβλήματα με εξισώσεις της μορφής $\alpha\chi + \beta = \gamma\chi + \delta$ με δοσμένη λύση, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της ισότητας και διατήρησης. Ο εκπαιδευτικός οργανώνει συζήτηση μέσα στην τάξη και παρουσίαση της εξίσωσης που έφτιαξε κάθε μαθητής. Οι μαθητές συζητούν μεταξύ τους και καταλήγουν σε συμπεράσματα για τις πράξεις που έκαναν. Αυτή η δραστηριότητα, αποτελεί ένα παράδειγμα ετεροαξιολόγησης. Επιπλέον επιτυγχάνεται το ομαδοσυνεργατικό κλίμα εντός της τάξης με σκοπό να καλλιεργηθεί η ικανότητα συνεργασίας και εργασίας σε ομάδες, καθώς και η ικανότητα αυτόνομης και υπεύθυνης δράσης.

Δραστηριότητα 6^η: Ένα τουριστικό λεωφορείο μπορεί να μεταφέρει μέχρι 45 επιβάτες. Πρέπει να μεταφέρει σε ένα προορισμό 7 διαφορετικές ομάδες τουριστών που αποτελούνται από 15, 21, 25, 30, 18, 8 και 14 άτομα αντίστοιχα. Είναι δυνατόν να μεταφέρει τις παραπάνω ομάδες σε 3 μόνο δρομολόγια χωρίς να χωρίσει καμία ομάδα;

Το παραπάνω αποτελεί ένα ανοιχτού τύπου πρόβλημα και πρόβλημα καθημερινής ζωής, στο οποίο οι μαθητές καλούνται να σκεφτούν άμεσα πιθανές λύσεις και να διαπιστώσουν την ορθότητα τους. Η επίλυση του προβλήματος μπορεί να γίνει με διαχωρισμό σε μικρές ομάδες μαθητών προκειμένου να αναπτυχθεί το ομαδοσυνεργατικό κλίμα με σκοπό να καλλιεργηθεί η ικανότητα συνεργασίας και εργασίας σε ομάδες.

Δραστηριότητα 7^η: Σκεφτείτε και περιγράψτε ένα καθημερινό πρόβλημα που λύνεται με τη χρήση εξίσωσης, χωρισμένοι σε ομάδες δύο ατόμων (ο καθένας

με τον διπλανό του), όπως για παράδειγμα το πλήθος των τετραδίων που μπορούμε να αγοράσουμε έχοντας συγκεκριμένο χρηματικό ποσό και γνωρίζοντας την τιμή του ενός τετραδίου. Στην συνέχεια κατασκευάστε ένα αντίστοιχο πρόβλημα και γράψτε το σε χαρτί. Έπειτα συνεργαστείτε με το διπλανό σας προκειμένου να φτιάξετε την εξίσωση που λύνει το πρόβλημα, να την λύσετε και να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα.

Με την εκπλήρωση της παραπάνω δραστηριότητας, οι μαθητές αναγνωρίζουν και αντιλαμβάνονται την έννοια και τη χρησιμότητα των εξισώσεων, δρουν ομαδοσυνεργατικά εντός της τάξης, με σκοπό να καλλιεργηθεί η ικανότητα συνεργασίας και εργασίας σε ομάδες, και επιλύουν/κατασκευάζουν πραγματικά προβλήματα καθημερινής ζωής με εξισώσεις της μορφής $a\chi + \beta = \gamma\chi + \delta$ με δοσμένη λύση χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες διατήρησης της ισότητας. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να παρουσιάσουν το πρόβλημα που έφτιαξαν και να του αναφέρουν σε ποιες άλλες περιπτώσεις της καθημερινής ζωής μπορούν να συναντήσουν παρόμοια προβλήματα. Η παρούσα δραστηριότητα προσδοκάται να συμβάλλει επίσης και στην ανάπτυξη της ικανότητας αυτόνομης και υπεύθυνης δράσης.

Δραστηριότητα 8^η: Δύο αυτοκίνητα ταξιδεύουν από την ίδια αφετηρία προς τον ίδιο προορισμό ξεκινώντας σε διαφορετικό χρόνο και έχοντας διαφορετική ταχύτητα. Οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν τις ταχύτητες των δύο αυτοκινήτων γνωρίζοντας τη χρονική στιγμή που θα προσπεράσει το ένα το άλλο, την ώρα εκκίνησης καθενός και το ότι η ταχύτητα του πρώτου αυτοκινήτου είναι διπλάσια.

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί και με τη μορφή «ανοιχτού προβλήματος» για περαιτέρω μελέτη. Συγκεκριμένα μπορεί να δοθεί στους μαθητές ένα χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο θα προσπεράσει το ένα αυτοκίνητο το άλλο και να τους ζητηθεί να υπολογίσουν προσεγγιστικά τις ταχύτητες των δύο αυτοκινήτων επιχειρηματολογώντας για την σκέψη τους και τη στρατηγική που ακολούθησαν.

Με την ολοκλήρωση της παραπάνω δραστηριότητας, οι μαθητές καλούνται να λύσουν ένα καθημερινό πρόβλημα με τη χρήση εξίσωσης. Επιπλέον

απαιτείται να χρησιμοποιήσουν και τις γνώσεις τους από τη Φυσική και από το θεματικό πεδίο των Συναρτήσεων. Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να εντοπίσουν τις κρίσιμες πληροφορίες που θα τους οδηγήσουν στη κατασκευή της εξίσωσης και στην εύρεση της λύσης. Στη συνέχεια, μπορεί να ζητήσει να κατασκευάσουν τα αντίστοιχα διαγράμματα των ταχυτήτων με σκοπό την πλήρη κατανόηση του προβλήματος. Η παραπάνω δραστηριότητα σκοπεύει να καλλιεργήσει την ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης γνώσεων και πληροφοριών.

2^η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

– ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ : Γεωμετρία

Με την μελέτη του παραπάνω πεδίου, οι μαθητές αναπτύσσουν την χωρική αντίληψη και αποκτούν την δυνατότητα να ερμηνεύσουν και να παρέμβουν στο φυσικό και δομημένο περιβάλλον. Επιπρόσθετα με τη μελέτη της γεωμετρίας τα άτομα εμπλουτίζουν τον μαθηματικό συλλογισμό τους και αποκτούν δημιουργική σκέψη που τους είναι απαραίτητη σε διάφορους τομείς.

Ως προς το περιεχόμενο της Γεωμετρίας του Γυμνασίου, οι μαθητές κατανοούν την προσέγγιση των χωρικών και γεωμετρικών εννοιών σε χωρικό επίπεδο και προετοιμάζονται για την Αναλυτική Γεωμετρία, η οποία αναπτύσσεται στα μαθήματα θετικού προσανατολισμού στο Λύκειο, με την μελέτη γεωμετρικών μετασχηματισμών μέσω χρήσης πινάκων.

– ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ : Εμβαδόν Επίπεδης Επιφάνειας, Μονάδες Μέτρησης επιφανειών

– ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ :

Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα του νέου Προγράμματος Σπουδών που αναφέρονται στην παρούσα θεματική ενότητα (ΙΕΠ, 2021):

Να μετασχηματίζουν επιφάνειες σε ισοδύναμες με τη διαδικασία διάσπασης και ανασύνθεσης επιφάνειας.

Να επιλέγουν τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης εμβαδού επιφάνειας και να κάνουν τις κατάλληλες μετατροπές από τη μια μονάδα μέτρησης στην άλλη.

Να επικυρώνουν τους τύπους εμβαδού τετραγώνου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης.

Να χρησιμοποιούν τη διάσπαση και ανασύνθεση επιφανειών για τον προσδιορισμό του τύπου του εμβαδού του παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου.

Να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου όταν γνωρίζουν την ακτίνα ή τη διάμετρο του κύκλου.

Να υπολογίζουν τα εμβαδά κυκλικών τομέων ως μέρη του εμβαδού του κυκλικού δίσκου τους.

Να επιλύουν προβλήματα εμβαδού μεικτόγραμμων σχημάτων αξιοποιώντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.

Να αξιοποιούν την έννοια του εμβαδού για την εξήγηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Προτείνονται για εμπλουτισμό τα παρακάτω προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

Να επιλύουν σύνθετα προβλήματα καθημερινής ζωής χρησιμοποιώντας το εμβαδόν, αξιοποιώντας τις μεθόδους και τις στρατηγικές που έχουν μάθει.

Να αναγνωρίζουν τη σύνδεση της έννοιας του εμβαδού με άλλα πεδία ανθρώπινης γνώσης και δράσης όπως για παράδειγμα την υγεία, το περιβάλλον κλπ.

Να επιλύουν «ανοιχτά προβλήματα» χρησιμοποιώντας το εμβαδόν και μαθηματικά επιχειρήματα για τις λύσεις που δίνουν.

Να διερευνούν το εμβαδό με κατάλληλες προϋποθέσεις (για παράδειγμα μεταβάλλοντας τις πλευρές ενός σχήματος ώστε να έχει το ίδιο εμβαδόν με κάποιο άλλο).

– ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ :

Δραστηριότητα 1^η: Δίνεται στους μαθητές το σχήμα ενός πάρκου στο οποίο πρέπει να φυτευτούν δένδρα. Κάθε δένδρο πρέπει να καταλαμβάνει συγκεκριμένη επιφάνεια στο πάρκο. Οι μαθητές/τριες καλούνται να υπολογίσουν τη συνολική επιφάνεια του πάρκου, χωρίζοντας το σε γνωστά σχήματα και να υπολογίσουν τον πλήθος των δένδρων που μπορούν να φυτευτούν (με δοσμένη την επιφάνεια κάθε δένδρου). Στη συνέχεια, υπολογίζουν το κόστος της κατασκευής γνωρίζοντας το κόστος φύτευσης κάθε δένδρου, δεδομένου ότι θα αγοραστούν διάφορα είδη δένδρων με το καθένα να έχει διαφορετική τιμή και το συνολικό κόστος να είναι ορισμένο.

Με την παραπάνω δραστηριότητα, οι μαθητές/τριες καλούνται να διαχωρίσουν σύνθετα σχήματα σε γνωστά, χρησιμοποιώντας διαδικασίες κατάλληλης διαμέρισης με βοηθητικές γραμμές διατηρώντας το εμβαδόν, επιλύουν σύνθετο πρόβλημα καθημερινής ζωής χρησιμοποιώντας το εμβαδόν, αξιοποιώντας τις μεθόδους και τις στρατηγικές που έχουν μάθει, αναγνωρίζουν τη σύνδεση της έννοιας του εμβαδού με άλλα πεδία ανθρώπινης γνώσης και δράσης όπως για παράδειγμα το περιβάλλον με σκοπό να αναπτυχθεί η ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης γνώσεων και πληροφοριών. Ο εκπαιδευτικός, μετά την υλοποίηση της δραστηριότητας, οργανώνει συζήτηση στην τάξη και καλεί τους μαθητές να εξηγήσουν πως σκέφτηκαν για να υπολογίσουν το συνολικό εμβαδόν, το πλήθος των δένδρων που θα αγοραστούν και τον υπολογισμό του συνολικού κόστους ώστε να μην ξεπεράσουν το όριο. Το παραπάνω πρόβλημα προτείνεται ως «ανοιχτό πρόβλημα», πρόσφορο για επεξεργασίες και διαπραγμάτευση.

Δραστηριότητα 2^η: Στην εφαρμογή *Geogebra* να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο, ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ένα παραλληλόγραμμο, ένα τρίγωνο, ένα τραπέζιο και ένα κυκλικό δίσκο και στη συνέχεια να μετρηθεί το εμβαδόν του σε τετραγωνικά εκατοστά και να μετατραπεί σε τετραγωνικά δέκατα, μέτρα και χιλιοστά. Για περαιτέρω διερεύνηση μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνηθεί το εμβαδό των διαφόρων σχημάτων με προϋποθέσεις, όπως για παράδειγμα μεταβάλλοντας τις πλευρές ενός σχήματος ώστε δυο άλλα σχήματα

να έχουν το ίδιο εμβαδό ή μεταβάλλοντας και τις δύο πλευρές ενός ορθογωνίου με διατήρηση του αρχικού εμβαδού.

Με την παραπάνω δραστηριότητα, οι μαθητές διερευνούν το εμβαδό με κατάλληλες προϋποθέσεις, εφαρμόζουν τους δοσμένους τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός σχήματος, επιλέγουν τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης εμβαδού επιφάνειας και κάνουν τις κατάλληλες μετατροπές από τη μια μονάδα στην άλλη. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να συνδυάσει την παραπάνω δραστηριότητα με το θεματικό πεδίο των συναρτήσεων, ζητώντας από τους μαθητές να κατασκευάσουν συνάρτηση που υπολογίζει το τελικό εμβαδό για κάποια μεταβολή που έκαναν. Με την αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων προσδοκείται να αναπτυχθεί η ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης της τεχνολογίας.

Δραστηριότητα 3^η: «Ελαχιστοποίηση του κόστους κατασκευής κήπου με σταθερό εμβαδόν». Οι μαθητές αποφάσισαν να φτιάξουν ένα κήπο με σταθερό εμβαδό ίσο με 3600 τ. εκ. Έχοντας ένα μέσο που κατασκευάζει ορθογώνια παραλληλόγραμμα και υπολογίζει το εμβαδό και την περίμετρό τους καλούνται να υπολογίσουν τις διαστάσεις του κήπου δεδομένου ότι το κόστος είναι ανάλογο της περιμέτρου και πρέπει να είναι το μικρότερο δυνατό (Φωτόδεντρο, 2021) (Παράρτημα 1, σελ 93).

Η παραπάνω δραστηριότητα δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να σχεδιάσουν μόνοι τους ορθογώνια αξιοποιώντας ψηφιακά εργαλεία. Η συγκεκριμένη προσφέρεται, προκειμένου οι μαθητές να εκφράσουν το πλάτος του ορθογωνίου ως προς το μήκος, να μεταβάλλουν τη διαδικασία και να καταλήξουν σε συμπεράσματα, με βάση το εμβαδόν και την περίμετρο, κάνοντας αλλαγές στο πλάτος του ορθογωνίου. Οι προαπαιτούμενες γνώσεις είναι τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά που οι μαθητές έχουν διδαχτεί σε προηγούμενες τάξεις. Με την παρούσα δραστηριότητα προσδοκείται να καλλιεργηθεί η ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης πληροφοριών καθώς και η ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης της τεχνολογίας.

Δραστηριότητα 4^η: Ζητείται από τους μαθητές να περιφράξουν ένα χώρο στην αυλή του σχολείου για να τον μετατρέψουν σε κήπο και να φυτέψουν κάποια

λουλούδια. Θα χρειαστεί να αγοράσουν ένα ειδικό συρματοπλέγμα με γνωστό κόστος ανά μέτρο. Οι μαθητές γνωρίζοντας το εμβαδόν της επιφάνειας που θα περιφραχτεί καλούνται να επιλέξουν όποιο σχήμα θέλουν για τον κήπο δεδομένου ότι το συνολικό κόστος δεν πρέπει να ξεπερνά ένα προκαθορισμένο όριο (δηλαδή η περίμετρος του σχήματος που θα επιλέξουν να είναι τέτοια που το συνολικό κόστος του συρματοπλέγματος δεν θα ξεπερνά το προκαθορισμένο όριο).

Η παραπάνω δραστηριότητα αποτελεί ένα ανοιχτού τύπου πρόβλημα και πρόβλημα καθημερινής ζωής, στο οποίο οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους από το εμβαδόν των επίπεδων σχημάτων. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει το παραπάνω πρόβλημα σε μικρές ομάδες μαθητών προκειμένου να αναπτύξει το ομαδοσυνεργατικό κλίμα και να συμβάλει στην ανάπτυξη της ικανότητας συνεργασίας και εργασίας σε ομάδες. Έπειτα, μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να παρουσιάσουν μέσα στην τάξη τον τρόπο που σκέφτηκαν και τις στρατηγικές που ακολούθησαν για να επιλέξουν το σχήμα του κήπου διατηρώντας τη μικρότερη δυνατή περίμετρο και το ίδιο εμβαδόν.

Δραστηριότητα 5^η: Δίνεται στους μαθητές το σχήμα μιας αυλής που πρόκειται να επενδυθεί με τρίγωνα, τετράγωνα ή ορθογώνια πλακάκια συγκεκριμένων διαστάσεων. Το κόστος κάθε είδους πλακιδίου και το κόστος τοποθέτησης ανά είδος είναι γνωστό. Οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το συνολικό κόστος κατασκευής της αυλής, ανάλογα με το σχήμα των πλακιδίων που επιλέγουν.

Με την συγκεκριμένη εφαρμογή, οι μαθητές επιλύουν ένα σύνθετο και ανοιχτού τύπου πρόβλημα καθημερινής ζωής χρησιμοποιώντας το εμβαδό, αξιοποιώντας τις μεθόδους και τις στρατηγικές που έχουν μάθει, επιλέγουν τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης εμβαδού επιφάνειας, κάνουν τις μετατροπές από τη μια μονάδα μέτρησης στην άλλη και χρησιμοποιούν τους κατάλληλους τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού. Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να παρουσιάσουν τις στρατηγικές που εφάρμοσαν για να καταλήξουν στη λύση του προβλήματος, τι είδους σχήματος πλακίδια επέλεξαν και πως υπολόγισαν το συνολικό κόστος ανάλογα με το είδος των πλακιδίων που επέλεξαν. Η υλοποίηση της παρούσας δραστηριότητας στοχεύει να

καλλιεργήσει την ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης γνώσεων και πληροφοριών.

Δραστηριότητα 6^η: Δίνεται στους μαθητές ο τοπογραφικός χάρτης μιας πόλης τυπωμένος σε χαρτί με αναγραφόμενη κλίμακα. Οι μαθητές με χρήση χάρακα ή/και διαβήτη καλούνται να μετρήσουν κατά προσέγγιση το εμβαδόν μια πόλης σε τετραγωνικά χιλιόμετρα.

Η παραπάνω δραστηριότητα, αποτελεί ένα «ανοιχτού τύπου» και καθημερινής ζωής πρόβλημα με τη χρήση του εμβαδού. Οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν γνωστά σχήματα της επιλογής τους ώστε να περικυκλώσουν την επιφάνεια της οποίας αναζητούν το εμβαδό όσο το δυνατόν καλύτερα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές, μετά το πέρας της δραστηριότητας, να περιγράψουν την στρατηγική που ακολούθησαν για να υπολογίσουν όσο το δυνατόν ακριβέστερα γίνεται το εμβαδό που τους ζητήθηκε. Η παρούσα δραστηριότητα μπορεί να υλοποιηθεί διαμέσου της αξιοποίησης ψηφιακών εργαλείων (όπως για παράδειγμα την εφαρμογή google maps ή με τη χρήση ενός διαδραστικού χάρτη) στο εργαστήριο του σχολείου, με σκοπό να αναπτυχθεί η ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης της τεχνολογίας.

3^η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

- ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ : Άλγεβρα
- ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Συναρτήσεις
- ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ :

Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα του νέου Προγράμματος Σπουδών που αναφέρονται στην παρούσα θεματική ενότητα (ΙΕΠ, 2021):

Να αναγνωρίζουν σε καταστάσεις καθημερινότητας μεγέθη που συμμεταβάλλονται και καθορίζουν το ένα το άλλο.

Να αναγνωρίζουν τις σχέσεις που τα μεγέθη συμμεταβάλλονται ως συναρτήσεις και να τις διακρίνουν από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις.

Να εκφράζουν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γραφικά και συμβολικά (με τύπο).

Να χρησιμοποιούν τις παραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και να μεταβαίνουν από τη μια αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν).

Να εξετάζουν αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

Να υπολογίζουν αλγεβρικά και να εκτιμούν γραφικά τις τιμές μιας εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως.

Να αναγνωρίζουν μέσα σε ποικίλα πλαίσια τη σχέση που συνδέει δυο ανάλογα ποσά ως σχέση αναλογίας.

Να αναπαριστούν τις σχέσεις αναλογίας που εμφανίζονται σε διάφορα πλαίσια ως σχέση της μορφής $y=ax$.

Να σχεδιάζουν την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax$ και να διαπιστώνουν ότι αυτή είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Να ερμηνεύουν τη σταθερά αναλογίας ως μεταβολή του y που αντιστοιχεί σε μοναδιαία μεταβολή του x .

Να συνδέουν τη σταθερά αναλογίας με την εφαπτομένη της γωνίας.

Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax + \beta$ και να εξηγούν τη σημασία των a και β .

Να επιλύουν (γραφικά και αλγεβρικά) προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης $y=ax + \beta$.

Να επιλύουν γραφικά εξισώσεις της μορφής $ax + \beta = \gamma$.

Να διευρύνουν μέσα από προβλήματα τη σχέση που συνδέει δυο αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Να εκφράζουν τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά που ανακύπτουν σε προβλήματα της καθημερινής ζωής στη μορφή $y=a/x$.

Να διευρύνουν αν στη συνάρτηση $y=a/x$, $a \neq 0$ αυξάνεται ή μειώνεται το y όταν αυξάνεται το x για $a < 0$ και $a > 0$.

Να επιλύουν προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών με τη συνάρτηση $y=a/x$.

Προτείνονται για εμπλουτισμό τα παρακάτω προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

Να υπολογίζουν τις αποστάσεις δυο σημείων σε σύστημα αξόνων χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Να επιλύουν προβλήματα καθημερινής ζωής με τη χρήση της συνάρτησης $y=ax$ συνδέοντας τη με τα ανάλογα ποσά.

Να επιλύουν προβλήματα καθημερινής ζωής με τη χρήση της συνάρτησης $y=ax + \beta$.

Να επιλύουν προβλήματα καθημερινής ζωής με τη χρήση της συνάρτησης $y=a/x$ συνδέοντας τη με τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Να επιλύουν «ανοιχτού τύπου» προβλήματα με τη χρήση των παραπάνω συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας μαθηματικά επιχειρήματα για τις λύσεις που δίνουν.

Να αξιοποιούν δεδομένα και πληροφορίες από γραφήματα των συναρτήσεων $y=ax$, $y=ax + \beta$ και $y=a/x$ και γενικότερα γραφικές παραστάσεις για την επίλυση προβλημάτων καθημερινής ζωής.

– ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ :

Δραστηριότητα 1^η: «Γραμμικές συναρτήσεις – Το πρόβλημα με τις πίτσες»

Ζητείται από τους μαθητές αρχικά να συμπληρώσουν τον πίνακα με τις στήλες 'διάμετρος', 'ακτίνα', 'μήκος περιφέρειας', 'εμβαδό', 'τιμή με το μήκος' και 'τιμή με το εμβαδό'. Έπειτα καλούνται να βρουν για ποια μεγέθη πίτσας συμφέρει να πληρώσουν με τη περιφέρεια και για ποια με το εμβαδό. Στη συνέχεια, ζητείται να στείλουν τα δεδομένα των στηλών στο παράθυρο

‘Γράφημα’ και να μελετήσουν τις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν από τα δεδομένα (Φωτόδεντρο, 2021), (Παράρτημα 1, σελ 93).

Η παραπάνω δραστηριότητα, αφορά τη διερεύνηση του πιο οικονομικού μεγέθους μιας πίτσας με τη μορφή ανοιχτού προβλήματος. Οι μαθητές μοντελοποιώντας ένα πραγματικό πρόβλημα, μελετούν την περιφέρεια του κύκλου, το εμβαδόν του και τις γραμμικές συναρτήσεις (Φωτόδεντρο, 2021). Οι προαπαιτούμενες γνώσεις της παραπάνω δραστηριότητας αφορούν το μήκος και το εμβαδό του κύκλου που έχει διδαχθεί σε προηγούμενες θεματικές ενότητες. Με την παραπάνω δραστηριότητα οι μαθητές διερευνούν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αξιοποιώντας ψηφιακά εργαλεία, με στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας χρήσης της τεχνολογίας. Ο εκπαιδευτικός, πριν την υλοποίηση της δραστηριότητας, μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να σκεφτούν και να συζητήσουν τον τρόπο και τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν για την επίλυσή της, κάτι που μπορεί να συμβάλλει και στην ανάπτυξη της ικανότητας αλληλεπιδραστικής χρήσης πληροφοριών και αυτόνομης δράσης.

Δραστηριότητα 2^η: *Δίνονται στους μαθητές οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων της μορφής $y=ax$ και $y=ax+\beta$ σχεδιασμένες στην εφαρμογή Geogebra (στην τάξη με προτζέκτορα ή στην αίθουσα Η/Υ του σχολείου). Στην συνέχεια ζητείται από αυτούς να διερευνήσουν την μεταβολή του y όταν μεταβάλλεται το x . Εξετάζουν επίσης την αλλαγή της κλίσης των ευθειών βάζοντας διάφορες τιμές στην κλίση με σκοπό τη μελέτη της σχετικής θέσης των ευθειών και διατυπώνουν τα συμπεράσματά τους για την διαφορά των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y=ax$ και $y=ax+\beta$.*

Με την εκπλήρωση της παραπάνω δραστηριότητας, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη διαφορά της γραφικής παράστασης της ευθείας $y = ax$ και της $y = ax+\beta$ και εξοικειώνονται με τις γραφικές παραστάσεις. Η κατασκευή γραφικών παραστάσεων με χρήση ψηφιακών μέσων έχει το πλεονέκτημα της αλλαγής των παραμέτρων και της άμεσης παρατήρησης των επιδράσεων που έχουν αυτές οι αλλαγές. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει ως εργασία την κατασκευή γραφικών παραστάσεων στην εφαρμογή Geogebra, δίνοντας συγκεκριμένες παραμέτρους και τιμές σε κάθε μαθητή (ή σε μικρή ομάδα μαθητών). Έπειτα, οι μαθητές παρουσιάζουν τα διαγράμματα τους και

σχολιάζουν τα αποτελέσματα από τις παραμέτρους που άλλαξαν μέσα στην τάξη. Η παραπάνω δραστηριότητα έχει στόχο να συμβάλλει στην ανάπτυξη της ικανότητας συνεργασίας καθώς και της ικανότητας αλληλεπιδραστικής χρήσης της τεχνολογίας.

Δραστηριότητα 3^η: Δίνεται πίνακας με τα ποσά "ταχύτητα αυτοκινήτου" και "απόσταση που διανύει σε συγκεκριμένο χρόνο". Στους μαθητές ζητείται από τις δοσμένες τιμές του πίνακα να διαπιστώσουν ότι τα ποσά είναι ανάλογα, να υπολογίσουν τον συντελεστή αναλογίας και να συμπληρώσουν τις τιμές που λείπουν. Στη συνέχεια, καλούνται να σχεδιάσουν την γραφική παράσταση της συνάρτησης που συνδέει τα ποσά.

Με την παραπάνω δραστηριότητα, οι μαθητές αναγνωρίζουν μέσα σε ποικίλα πλαίσια τη σχέση που συνδέει δυο ανάλογα ποσά ως σχέση αναλογίας, αναπαριστούν τις σχέσεις αναλογίας που εμφανίζονται σε διάφορα πλαίσια ως σχέση της μορφής $y = ax$, σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της $y = ax$ και διαπιστώνουν ότι είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, επιλύουν προβλήματα καθημερινής ζωής με τη χρήση της συνάρτησης $y=ax$ συνδέοντας τη με τα ανάλογα ποσά. Επιπλέον, οι μαθητές κατανοούν την σύνδεση και την συνεισφορά των Μαθηματικών σε άλλες επιστήμες όπως η Φυσική. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να προτείνει επιπλέον ως εργασία οι μαθητές να καταγράψουν τα δεδομένα για ένα ταξίδι που οι ίδιοι έκαναν (Απόσταση, Χρονικό Διάστημα), να υπολογίσουν την μέση ταχύτητα και υποθέτοντας μεγαλύτερο ή μικρότερο χρονικό διάστημα να καταγράψουν σε πίνακα τις τιμές και να κατασκευάσουν την γραφική παράσταση. Έπειτα, οι μαθητές παρουσιάζουν στην τάξη τα αποτελέσματα και ερμηνεύουν τη γραφική παράσταση που σχεδίασαν. Η παρούσα δραστηριότητα σκοπεύει να καλλιεργήσει την ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης γνώσεων και πληροφοριών, καθώς και την ικανότητα αυτόνομης δράσης.

Δραστηριότητα 4^η: Δίνεται στους μαθητές αρχικά η φωτογραφία μιας αληθινής παραβολικής γέφυρας και στη συνέχεια η σχηματική αναπαράσταση της ίδιας γέφυρας σχεδιασμένη σε τετραγωνισμένο χαρτί. Εκείνοι καλούνται αρχικά να αναγνωρίσουν το σχήμα που τους δίνεται και το είδος της συνάρτησης και στη συνέχεια να αναγνωρίσουν τον τύπο της.

Με την παραπάνω δραστηριότητα, οι μαθητές καλούνται να μεταφράσουν μια πραγματική σχηματική αναπαράσταση σε συνάρτηση, με στόχο την κατανόηση της συνάρτησης $y = \alpha/x$. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ρωτήσει τους μαθητές πως μεταβάλλεται η μια τιμή ως προς την άλλη με σκοπό να παρατηρήσουν ότι πρόκειται για αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Έπειτα, μπορεί να ζητήσει την κατασκευή της ίδιας γραφικής παράστασης με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων όπως η εφαρμογή Geogebra, με σκοπό να αναπτυχθεί η ικανότητα χρήσης της τεχνολογίας και η σύνδεση των Μαθηματικών με τα τεχνολογικά μέσα.

Δραστηριότητα 5^η: *Ο καθαρός μισθός του προσωπικού μιας εταιρίας μειώνεται κατά ένα συγκεκριμένο ποσοστό λόγω της αύξησης του φόρου εισοδήματος. Οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν τη σχέση που εκφράζει τον νέο μισθό ως συνάρτηση του παλιού μισθού των εργαζομένων. Στην συνέχεια καλούνται να συμπληρώσουν πίνακα τιμών με τα παραπάνω δεδομένα.*

Με την παραπάνω δραστηριότητα, οι μαθητές κατανοούν την έννοια της συνάρτησης στις διάφορες μορφές της (λεκτικά, γραφικά και αριθμητικά) λύνοντας ένα πρόβλημα καθημερινής ζωής. Ο εκπαιδευτικός μπορεί, επιπλέον, να ζητήσει την κατασκευή της αντίστοιχης γραφικής παράστασης και να δημιουργήσει συζήτηση στην τάξη, για τις διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει, με στόχο την πλήρη κατανόηση του προβλήματος. Η υλοποίηση της συγκεκριμένης δραστηριότητας στοχεύει να αναπτύξει τη ικανότητα χρήσης γνώσεων και πληροφοριών.

Δραστηριότητα 6^η: *Δίνεται στους μαθητές η ψηφιακή αναπαράσταση μιας πόλης με κάποια βασικά σημεία όπως πλατεία, σχολείο, πάρκο, νοσοκομείο κλπ. Αρχικά οι μαθητές μετρούν τετράγωνα για την μετακίνηση από το ένα σημείο στο άλλο. Έπειτα, κατασκευάζουν σύστημα αξόνων ορίζοντας την αρχή τον αξόνων ως ένα σημείο αναφοράς και τοποθετούν κάθε σημείο. Έτσι, εντοπίζουν τις συντεταγμένες κάθε σημείου και μετρούν ζητούμενες αποστάσεις. Δραστηριότητες όπως η προαναφερθείσα μπορούν να εφαρμοστούν και σε εργασίες δύο ή τριών ατόμων εκτός σχολείου, με ζητούμενο να κατασκευάσουν έναν δικό τους χάρτη και να ορίσουν οι ίδιοι σημεία.*

Με την παραπάνω δραστηριότητα, οι μαθητές αναγνωρίζουν τα συστήματα συντεταγμένων που έχουν διδαχθεί από την Α΄ Γυμνασίου. Επιπλέον, μαθαίνουν να συνεργάζονται και να δρουν σε ομάδες, με στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας συνεργασίας, επιλύοντας καθημερινά προβλήματα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει ως εργασία την κατασκευή του χάρτη με τα σημεία που έφτιαξε κάθε μαθητής στην εφαρμογή Geogebra έχοντας ως στόχο την καλλιέργεια της ικανότητας χρήσης της τεχνολογίας αλληλεπιδραστικά.

Δραστηριότητα 7^η: Δίνεται στους μαθητές σχήμα με την κάτοψη ενός σπιτιού που ανακαινίζεται. Ένας τοίχος ενός δωματίου σχήματος ορθογωνίου μπορεί να μετακινηθεί κατά χ εκατοστά και να μεταβληθεί το εμβαδόν του δωματίου, δεδομένου ότι δεν μπορεί να ξεπεράσει ένα ποσοστό της συνολικής επιφάνειας του σπιτιού η οποία είναι γνωστή. Οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν την σχέση που συνδέει το νέο εμβαδόν του δωματίου με την αύξηση χ της πλευράς, να κατασκευάσουν πίνακα τιμών (συμπληρώνοντας δικές τους τιμές) και να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση που έφτιαξαν.

Με την ολοκλήρωση της παραπάνω δραστηριότητας, οι μαθητές επιλύουν ένα ανοιχτού τύπου πρόβλημα καθημερινής ζωής με τη χρήση συνάρτησης και χρησιμοποιούν τις παραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους. Οι προαπαιτούμενες γνώσεις που πρέπει να έχουν είναι αυτές της θεματικής ενότητας του εμβαδού και των εξισώσεων. Ο εκπαιδευτικός μπορεί επιπλέον να θέσει ως εργασία στους μαθητές να κατασκευάσουν στην εφαρμογή Geogebra την κάτοψη του δικού τους δωματίου και να σκεφτούν πώς μπορούν να αυξήσουν το εμβαδόν του σε μια πιθανή ανακαίνιση. Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνει την μέγιστη δυνατή κατανόηση της παραπάνω δραστηριότητας. Η παραπάνω δραστηριότητα σκοπεύει να καλλιεργήσει την ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης γνώσεων και πληροφοριών καθώς και την ικανότητα χρήσης της τεχνολογίας.

Δραστηριότητα 8^η: Δίνεται στους μαθητές ένα διάγραμμα από την Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛΣΤΑΤ, 2021) στο οποίο παρουσιάζονται οι ετήσιες και μηνιαίες τιμές (%) του Δείκτη Τιμών Καταναλωτή (ΔΤΚ) για 4 έτη (Παράρτημα 1, σελ. 94). Ζητείται από τους μαθητές να ερμηνεύσουν τα δεδομένα του

διαγράμματος προκειμένου να απαντήσουν με μαθηματικά επιχειρήματα που προκύπτουν από αυτό, σε ερωτήσεις που μπορεί να θέσει ο εκπαιδευτικός.

Η παραπάνω δραστηριότητα, αποτελεί ένα καθημερινό και ανοιχτού τύπου πρόβλημα. Με την υλοποίησή της οι μαθητές αξιοποιούν δεδομένα και πληροφορίες από διαγράμματα συναρτήσεων επιχειρηματολογώντας για τις απαντήσεις τους. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να αναλύσουν τον τρόπο που συλλέγουν δεδομένα από το συγκεκριμένο διάγραμμα, ανάλογα την ερώτηση που τους τίθεται, προκειμένου να επιτύχει την πλήρη κατανόηση της δραστηριότητας. Η παραπάνω δραστηριότητα έχει ως στόχο να αναπτύξει την ικανότητα αλληλεπιδραστικής χρήσης γνώσεων και πληροφοριών.

Ενδεικτικές Προτάσεις STEM

Θέμα : Κατασκευή φωτοβολταϊκού στέγαστρου στο σχολείο.

Οι μαθητές διερωτώνται: Ποια είναι η κατάλληλη επιφάνεια που πρέπει να έχει ένα στέγαστρο με συλλέκτες ηλιακής ενέργειας στην αυλή του σχολείου για την παραγωγή της μέγιστης δυνατής ηλιακής ενέργειας, ώστε να καλυφθεί ο φωτισμός του σχολείου, με το μικρότερο δυνατό κόστος;

Θέμα : Κατασκευή μιας ράμπας αναπήρων στις σκάλες του προαυλίου του σχολείου.

Οι μαθητές διερωτώνται: Πως θα υπολογίσουμε την κατάλληλη επιφάνεια, την κατάλληλη κλίση και το κατάλληλο εμβαδόν της ράμπας; Ποια είναι τα κατάλληλα υλικά που θα χρησιμοποιηθούν και πως υπολογιστεί το συνολικό κόστος;

Θέμα : Κατασκευή ενός παρτεριού με φυτά στο προαύλιο του σχολείου.

Οι μαθητές διερωτώνται: Πως θα κατασκευάσουμε το παρτέρι; Ποιος θα είναι ο όγκος του χώματος; Πόσα φυτά θα χρειαστούμε και σε τι απόσταση θα τα τοποθετήσουμε; Τι θα χρειαστούμε για το αυτόματο πότισμα και πως θα το θέσουμε σε λειτουργία; Ποιο θα είναι το κόστος κατασκευής και των υλικών;

Η ενασχόληση των μαθητών/τριών με δραστηριότητες STEM/STEAM, όπως οι παραπάνω, σκοπεύει να συμβάλλει στην καλλιέργεια της ικανότητας αλληλεπίδρασης, της ικανότητας συνεργασίας και εργασίας σε ομάδες, καθώς και της ικανότητας αυτόνομης και υπεύθυνης δράσης.

Τα στάδια υλοποίησης του STEM (<https://www.teachengineering.org/>):

– Η διατύπωση ερωτημάτων.

Σε πρώτη φάση, οι μαθητές διατυπώνουν κρίσιμα ερωτήματα σχετικά με το τι θέλουν να δημιουργήσουν προκειμένου να προσεγγίσουν ουσιαστικά τον στόχο τους. Τέτοια ερωτήματα για παράδειγμα είναι: *Ποιο είναι το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε, τι θέλουμε να σχεδιάσουμε και για ποιον, τι θέλουμε να πετύχουμε, ποιες είναι οι καθορισμένες απαιτήσεις και ποιοι οι περιορισμοί στο έργο που καλούμαστε να υλοποιήσουμε;*

– Η διερεύνηση του προβλήματος.

Στη συνέχεια οι μαθητές συζητούν μεταξύ τους, ανάλογα την αρμοδιότητα που έχει τεθεί στον καθένα, προκειμένου να ερευνήσουν τις υφιστάμενες λύσεις που μπορεί είδη να υπάρχουν και για το ποιες τεχνολογίες και ψηφιακά μέσα μπορούν να φανούν χρήσιμα στο πρόβλημά τους.

– Η ανάπτυξη δυνατών λύσεων.

Έπειτα, οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες με στόχο να αναπτύξουν δυνατές λύσεις. Μένοντας συγκεντρωμένοι στο θέμα τους, αναπτύσσουν συζήτηση για λύσεις που μπορεί να υπάρχουν ήδη και για το πως μπορούν να χρησιμοποιήσουν τεχνολογικές λύσεις στο πρόβλημά τους.

– Η επιλογή της καλύτερης λύσης.

Εδώ, οι μαθητές καλούνται να επανεξετάσουν τις ανάγκες του προβλήματος, τους περιορισμούς του και την έρευνα που διενήργησαν στα προηγούμενα στάδια. Επιπλέον, συγκρίνουν τις ορθότερες ιδέες τους και καταλήγουν την επιλογή της καλύτερης λύσης κάνοντας ένα σχέδιο για το πως θα την υλοποιήσουν.

– Δημιουργία ενός μοντέλου.

Στο στάδιο αυτό, οι μαθητές κατασκευάζουν ένα μοντέλο ελέγχοντας αν η σχεδιάσή του πληροί τους αρχικούς στόχους που έθεσαν.

– Ο έλεγχος και η αξιολόγηση του μοντέλου.

Στη φάση αυτή, οι μαθητές ελέγχουν αν το μοντέλο που κατασκεύασαν είναι λειτουργικό και αν παρέχει λύση στο πρόβλημά τους. Ερμηνεύουν τα αποτελέσματα, διατυπώνουν σχόλια ως προς την λειτουργία του μοντέλου και εξετάζουν τι μπορεί να βελτιωθεί.

– Η βελτίωση του σχεδιασμού, με επανάληψη της διαδικασίας σχεδιασμού (εάν απαιτείται)

Οι μαθητές αναπτύσσουν συζήτηση, προκειμένου να σκεφτούν τρόπους βελτίωσης του σχεδιασμού τους. Αναθεωρούν και σχεδιάζουν εκ νέου τη λύση με στόχο την βελτίωση του σχεδιασμού.

Κεφάλαιο 7. Συμπεράσματα

Με βάση τη μελέτη που πραγματοποιήσαμε, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η χώρα μας σημειώνει χαμηλές επιδόσεις στην έρευνα PISA. Η Ελλάδα συμμετέχει στην έρευνα PISA ανελλιπώς από το 2000, με αποτελέσματα μη ικανοποιητικά, δεδομένου ότι σε όλες τις έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί βρίσκεται κάτω από το μέσο όρο των χωρών μελών του ΟΟΣΑ. Παρά το γεγονός ότι τα αποτελέσματα παρουσίασαν σημαντική βελτίωση σταδιακά στις έρευνες του 2006 και του 2009, στις έρευνες που ακολούθησαν η επίδοση της Ελλάδας στα Μαθηματικά παρουσίασε πτώση. Ανάλογα είναι τα αποτελέσματα για την Ελλάδα και στα γνωστικά αντικείμενα της Κατανόησης Κειμένου και των Φυσικών Επιστημών, με την επίδοση της χώρας μας να βρίσκεται σταθερά στην τρίτη ομάδα χωρών, δηλαδή στις χώρες που σημειώνουν μέση επίδοση χαμηλότερη του μέσου όρου των χωρών του ΟΟΣΑ.

Σχετικά με τα αίτια των χαμηλών επιδόσεων της Ελλάδας στα Μαθηματικά και στα άλλα γνωστικά πεδία της έρευνας PISA δεν υπάρχουν συστηματικές ερευνητικές μελέτες. Οι χαμηλές επιδόσεις μπορεί να οφείλονται εκτός των άλλων σε κοινωνικές και οικονομικές ανισότητες, στην έλλειψη εκπαιδευτικού προσωπικού με επικαιροποιημένες επαγγελματικές ικανότητες, σε ελλείψεις υποδομών στα σχολεία και σε πολλούς άλλους παράγοντες. Ένας επίσης σημαντικός παράγοντας για τις χαμηλές επιδόσεις στην έρευνα PISA, είναι το γεγονός ότι οι δραστηριότητες που εμπεριέχονται στα Προγράμματα Σπουδών βρίσκονται σε διαφορετική κατεύθυνση από εκείνες που συναντούν οι μαθητές στην έρευνα PISA, σύμφωνα και με τις δικές μας διαπιστώσεις. Επιπρόσθετα σύμφωνα με τους Μαυρογιάννη, Στράτζαλο και Αναστασοπούλου (2019), οι δραστηριότητες που εμπεριέχονται στα Προγράμματα Σπουδών βασίζονται σε συγκεκριμένα κομμάτια της ύλης και επιλέγονται με συγκεκριμένα κριτήρια που αναφέρονται στους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης. Όπως αναφέρει και ο Φωτεινός (2013), τα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών φαίνεται να είναι εμπνευσμένα από την «ακαδημαϊκή θεωρία» αφού απουσιάζουν από αυτά εκπαιδευτικές δραστηριότητες που μπορούν να συμβάλλουν στην ανάπτυξη μαθηματικών τρόπων σκέψης. Αντίθετα οι δραστηριότητες στην έρευνα PISA επάγονται σε ανοιχτού τύπου προβλήματα και έχουν ως στόχο την εφαρμογή των μαθηματικών πρακτικών στην καθημερινή ζωή. Η πλαισίωση του

προβλήματος αποτελεί μια πραγματική κατάσταση και η σύνδεση του με τη θεωρία δεν είναι προφανής (Μαυρογιάννης, Στράτζαλος, Αναστασοπούλου, 2019).

Με βάση τα παραπάνω και με δεδομένο ότι συμμετέχουμε στην έρευνα PISA, οφείλουμε να ερμηνεύσουμε σωστά τα αποτελέσματα και να προβούμε σε ανάλογες εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις, προκειμένου να έχουμε καλύτερες επιδόσεις. Κύριος στόχος αυτών των μεταρρυθμίσεων θα πρέπει να είναι η ανάπτυξη των ικανοτήτων του πολίτη του 21^{ου} αιώνα και όχι η κατάταξη στην έρευνα PISA.

Στο πλαίσιο της έρευνάς μας για τα νέα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου διαπιστώσαμε ότι απουσιάζουν ορισμένα χαρακτηριστικά που μπορούν να συμβάλλουν στην ανάπτυξη των ικανοτήτων του πολίτη του 21^{ου} αιώνα. Τα χαρακτηριστικά αυτά αφορούν στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα και στις αντίστοιχες δραστηριότητες που προτείνονται.

Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήσαμε σχετικά με τους σκοπούς του νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών ότι γίνεται αναφορά στην ανάπτυξη των ικανοτήτων του πολίτη του 21^{ου} αιώνα. Ωστόσο, από τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα και τις αντίστοιχες δραστηριότητες που προτείνονται δεν φαίνεται να προάγονται ικανοποιητικά αυτές οι ικανότητες. Οι δραστηριότητες παρουσιάζονται με μια γενική μορφή και δεν είναι συγκεκριμένες.

Για το λόγο αυτό, στην προσπάθειά μας να συμβάλλουμε στην ανάπτυξη των ικανοτήτων για τον πολίτη του 21^{ου} αιώνα, προτείνουμε τον εμπλουτισμό του νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών με εκπαιδευτικό υλικό και ειδικότερα προτείνουμε συγκεκριμένες δραστηριότητες. Οι δραστηριότητες αυτές αφορούν στη μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων στα θεματικά πεδία των εξισώσεων, των συναρτήσεων και των εμβαδών επίπεδων σχημάτων. Η μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών καθώς αναδεικνύεται η χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή. Οι μαθητές/τριες με την ενασχόλησή τους με προβλήματα καθημερινής ζωής απομακρύνονται από την απλή εφαρμογή της θεωρίας ή γνωστών μεθοδολογιών και αντιλαμβάνονται ότι τα Μαθηματικά αποτελούν βασικό εργαλείο που θα χρειαστούν σε όλη τους τη ζωή.

Επιπλέον, προτείνουμε την ενασχόληση των μαθητών/τριών με ανοιχτού τύπου προβλήματα τα οποία προορίζονται για την ανάπτυξη αναζήτησης μεθοδολογιών, διεξαγωγή και διαχείριση δοκιμών και υποθέσεων καθώς και για την ανάπτυξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας με σκοπό την εύρεση της κατάλληλης λύσης. Η ενασχόληση με ανοιχτού τύπου προβλήματα, προβλήματα που επιδέχονται περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις, συμβάλει ακόμη και στην αξιολόγηση των μαθητών/τριών από τον εκπαιδευτικό. Ανάλογα τις πιθανές λύσεις, τις στρατηγικές και τα μαθηματικά επιχειρήματα που χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες κατά την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος, ο εκπαιδευτικός διατυπώνει σαφή εικόνα για τον τρόπο σκέψης τους και τις ικανότητές τους.

Ακόμη, στην προσπάθειά μας να συμβάλλουμε στην ανάπτυξη των ικανοτήτων του πολίτη του 21^{ου} αιώνα, προτείνουμε την υλοποίηση των προβλημάτων STEM/STEAM για τους/τις μαθητές/τριες. Οι μαθητές/τριες με την ενασχόλησή τους με προβλήματα STEM/STEAM ο αντιλαμβάνονται περαιτέρω τη χρησιμότητα και την αλληλεξάρτηση των Μαθηματικών με την Επιστήμη, την Τεχνολογία, τη Μηχανική ή και την Τέχνη. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η ανάπτυξη βασικών ικανοτήτων όπως η αλληλεπίδραση, η συνεργασία και η αυτόνομη δράση. Οι μαθητές /τριες κατά την επίλυση σύνθετων προβλημάτων, συνδέοντας τις θεωρητικές και τις θετικές ερευνητικές περιοχές, καταλήγουν σε αποτελεσματικότερη και πιο επιτυχή αντιμετώπισή τους.

Τέλος, στο πλαίσιο της εργασίας μας, προτείνουμε τον εμπλουτισμό του νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών με δραστηριότητες που αφορούν στην αξιοποίηση πραγματικών σχηματικών και γραφικών αναπαραστάσεων. Πιο συγκεκριμένα προτείνουμε δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές/τριες αξιοποιούν δεδομένα από γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και χρησιμοποιούν μαθηματικά επιχειρήματα για τις απαντήσεις τους. Επιπλέον αξιοποιούν ψηφιακά εργαλεία για τον υπολογισμό παραδείγματος χάρη ζητούμενων επιφανειών σε πραγματικά προβλήματα.

Θεωρούμε ότι οι παραπάνω προτάσεις μπορούν να συμβάλλουν θετικά στην εκπαιδευτική διαδικασία και στην ανάπτυξη των ικανοτήτων του πολίτη του 21^{ου} αιώνα. Η ανάπτυξη των ικανοτήτων στον πολίτη του 21^{ου} αιώνα θεωρείται

επιβεβλημένη για την προσωπική και κοινωνική του επάρκεια σε μια μεταβαλλόμενη κοινωνία της γνώσης στην εποχή της παγκοσμιοποίησης.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αναγνωστοπούλου Κ., Γεωργιάδου Α., Γιαννικόπουλος Γ., Παπαστράτου Π. & Τσιφλικά Θ. (2012) *PISA 2009 Πλαίσιο αξιολόγησης και αποτελέσματα. Διεθνές Πρόγραμμα του ΟΟΣΑ για την αξιολόγηση των μαθητών*. Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
- Δουλκερίδου, Π. (2015). *Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και διευθυντών των σχολικών μονάδων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Επισκόπηση του νομοθετικού πλαισίου. Παιδαγωγική επιθεώρηση*. Τόμος 32, τ.59. σς.83-98.Αθήνα: Διάδραση
- Ευρωπαϊκή Επιτροπή. (2016). *Ανακοίνωση της Επιτροπής για ένα θεματολόγιο δεξιοτήτων για την Ευρώπη*. Ανάκτηση 13/2/2022 από: [file:///C:/Users/D067~1/AppData/Local/Temp/COM\(2016\)381_0.pdf](file:///C:/Users/D067~1/AppData/Local/Temp/COM(2016)381_0.pdf)
- ΙΕΠ. (2015). *Διεθνές Πρόγραμμα PISA για την Αξιολόγηση των Μαθητών*. Ανάκτηση 19/1/2022 από: <http://www.iep.edu.gr/el/component/k2/12-pisa>
- ΙΕΠ. (2019 α). *PISA. Διεθνές Πρόγραμμα Αξιολόγησης Μαθητών*. Ανάκτηση 18/1/2022 από: <http://www.iep.edu.gr/pisa/>
- ΙΕΠ. (2019 β). *Εγγραμματισμός στα Μαθηματικά*. Ανάκτηση 10/1/2022 από: <http://www.iep.edu.gr/pisa/index.php/eggrammatismos/eggrammatismos-mathimatika>
- ΙΕΠ. (2021). *Νέα Προγράμματα Σπουδών Μαθηματικών*. Ανάκτηση 13/2/2022 από: <http://iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli>
- Καραγεώργος, Δ. (2000). *Αξιολόγηση Σχολικής Μονάδας. Επιθεώρηση Επιστημονικών και Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 3, 45-56.
- Κασσωτάκης, Μ. (2016). *Από την αξιολόγηση της μάθησης στην αξιολόγηση για τη μάθηση: Η περίπτωση της περιγραφικής αξιολόγησης*. Σεμινάριο προς εκπαιδευτικούς. Κόρινθος.
- Κλιάπης, Π., &Κασσώτη, Ό. (2005). Πειραματική εφαρμογή του νέου σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Στ Δημοτικού: Αλλαγές στις στάσεις και τις συμπεριφορές των μαθητών. Στο Χ. Κυνηγός (Επιμ.), *Πρακτικά του Ιου Πανελληνίου Συνεδρίου ΕνΕΔιΜ: Η Διδακτική των Μαθηματικών ως Πεδίο Έρευνας στην Κοινωνία της Γνώσης* (pp. 148-158). Αθήνα.
- Λεμονίδης, Χ. (2002). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας στα Μαθηματικά για τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Θέματα στην Εκπαίδευση*. Τόμος 3/1, σελ. 5-22.

- Μαυρογιάννης Ν., Στράτζαλος Α., Αναστασοπούλου Ε. (2019). *Ελληνική Μαθηματική Εκπαίδευση και Αξιολόγηση PISA*. Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. Ανάκτηση 14/2/2022 από http://iep.edu.gr/images/IEP/EPISTIMONIKI_YPIRESIA/Epist_Grafeia/Graf_Ereynas_B/PISA/2016_Apologismos_IEP.pdf
- Οικονόμου, Π. (2010). *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.
- Παναγάκος, Ι. (2004). *Η διαθεματική προσέγγιση στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών*. Πρακτικά του 21ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας - Το Αναλυτικό Πρόγραμμα και η Διδακτική Προσέγγιση των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια και την Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (pp. 192-201). Τρίκαλα.
- Πασιάς Γ., Φλουρής Γ., Φωτεινός Δ., (2016). *Παιδαγωγική και Εκπαίδευση*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.
- Σοφianoπούλου, Χ., Εμβαλωτής, Α., Καρακολίδης, Α. & Πίτσια, Β. (2019). *Μια Ανάλυση Των Αποτελεσμάτων Του PISA 2015: Οι επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών και οι παράγοντες που τις επηρεάζουν*. Αθήνα: Διανόησις
- Συμβούλιο της Ε.Ε., (2006). Σύσταση (2006/962/EK) σχετικά με τις βασικές ικανότητες της δια βίου μάθησης. ΕΕ L394/10, Βρυξέλλες, 30.12.2006.
- Ταρατόρη-Τσαλκατίδου Ε., (2009) *Σχολική Αξιολόγηση. Αξιολόγηση της σχολικής μονάδας, του εκπαιδευτικού και της επίδοσης του μαθητή*. Θεσσαλονίκη: Κυριακίδη Αφοί.
- Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.
- Φωτεινός Δ. (2013). *Ιστορία των αναλυτικών προγραμμάτων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης*. Εκδόσεις GUTENBERG
- Φωτόδεντρο, (2021). Ανάκτηση 13/2/2022 από: <http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-9248>
<http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-9536>

• [ΕΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ](#)

- Ball, S. J. (2003). The teacher's soul and the terrors of performativity. *Journal of Educational Policy*, 18 (2), pp. 215-218
- Black, P., & Wiliam D. (1998). Assessment and Classroom Learning. *Assessment in Education*, 7-74. Retrieved 10/2/2022 from <http://dx.doi.org/10.1080/0969595980050102>
- Charnay, R. (1992). Problème ouvert, problème pour chercher. *Grand N*, 51, 77-83.
- Crowther Report (1959). *15 to 18. A report of the Central Advisory Council for Education (England)*. London: Her Majesty's StationeryOffice 1959.
- Erickson, L.H. (1995). *Stirring the head, heart, and soul. Redefining curriculum and instruction*. Thousand Oaks N.J.: Carwin Press
- European Union, (2019). Retrieved 25/1/2022from : <https://op.europa.eu/el/publication-detail/-/publication/297a33c8-a1f3-11e9-9d01-01aa75ed71a1/language-en>
- Henriksen D. (2014). Full STEAM Ahead: *Creativity in Excellent STEM Teaching Practices*, 1 Retrieved 25/1/2022 from <http://doi.org/10.5642/steam.20140102.15>
- Jablonka, E. & Gellert, U. (1996). Commonplaces about mathematics and the need for reflection. In C. Keitel, U. Gellert, E. Jablonka & M. Müller (Eds.), *Mathematics (education) and common sense: The challenge of social change and technological development* (Proceedings of CIEAEM 47, pp. 127–132). Berlin : Free University of Berlin.
- Jan de Lange (2006). *MATHEMATICAL LITERACY FOR LIVING FROM OECD-PISA PERSPECTIVE*. Freudenthal Institute, Utrecht University – the Netherlands 2006.
- Noss, R., Hoyles, C., & Pozzi, S. (2000). Working knowledge: Mathematics in use. In A. Bessot& J. Ridgeway (Eds.), *Education for mathematics in the workplace* (pp. 17-35). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Noyes, A. (2010). Resetting school mathematics. In Pinto, M.M. F., & Kawasaki, T. F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 131-134). Belo Horizonte, Brazil.
- OECD. (2005). *The definition and selection of key competences. Executive Summary* Retrieved 10/2/2022 from <https://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf>

- OECD. (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing. Retrieved 5/22/2022 from <http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>
- OECD. (2016). *Survey of Adult Skills (PIAAC)*. Retrieved 27/1/2022 from <http://www.oecd.org/skills/piaac/>
- OECD. (2019), *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do*, PISA, OECD Publishing, Paris. Retrieved 10/2/2022 from <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>.
- OECD. (2020). PISA for Schools. Retrieved 10/1/2022 from: <https://www.oecd.org/pisa/pisa-for-schools/Brochure-PISA-for-Schools-2020.pdf>
- SCANS. (1991) *What work requires of schools: A SCANS' report of America 2000*. Washington, DC: U.S. Department of Labor, Secretary's Commission on Achieving Necessary Skills.
- STEAM Education Program Description. (2014). STEAM Education Program Description. Retrieved 3/2/2022 from <https://steamedu.com>

Κατάλογος Εικόνων/Σχημάτων/Πινάκων

Σχήμα 2.1.....σελ. 20

Assesing Scientific. Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA
2006 (page 79) by OECD. Paris: OECD

Σχήμα 2.2 *Ο κύκλος της μαθηματικοποίησης (Πηγή: Αναγνωστοπούλου κ.ά.,
2012)*.....σελ 24

Σχήμα 4.2.1 Η μέση βαθμολογία της Ελλάδας στα Μαθηματικά συγκριτικά με τις
χώρες του ΟΟΣΑ.....σελ 43

Σχήμα 4.2.2 Οι επιδόσεις της Ελλάδας και στα τρία γνωστικά αντικείμενασελ 44

Δεδομένα από <http://www.iep.edu.gr/pisa>

Πίνακας 4.2.3.....σελ 45

Δεδομένα από <http://www.iep.edu.gr/pisa>

Εικόνα 6.4.: Expression-tree format for the equation $4x-6=2(x-3)$

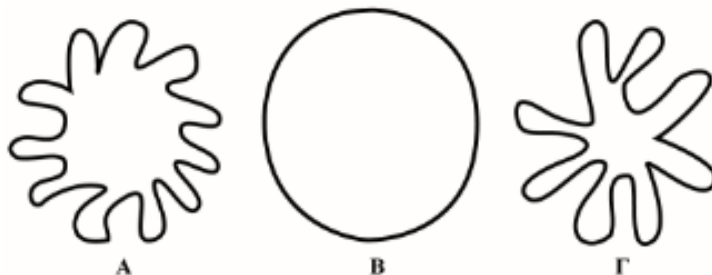
(Thompson,1989, p.152).....σελ 58

Παράρτημα 1

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 1 (Σχήματα)

Ανάκτηση 14/2/2022 από: (<http://www.iep.edu.gr/pisa/index.php/examples/themata-mathimatikon>)

ΣΧΗΜΑΤΑ



Ερώτηση 1

Ποιο από τα παραπάνω σχήματα έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

.....
.....

Ερώτηση 2

Περιγράψτε μια μέθοδο προσδιορισμού του εμβαδού για το σχήμα Γ.

.....
.....

Ερώτηση 3

Περιγράψτε παρακάτω έναν τρόπο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε κατά προσέγγιση την περίμετρο του σχήματος Γ.

.....

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 2 (Φάρος)

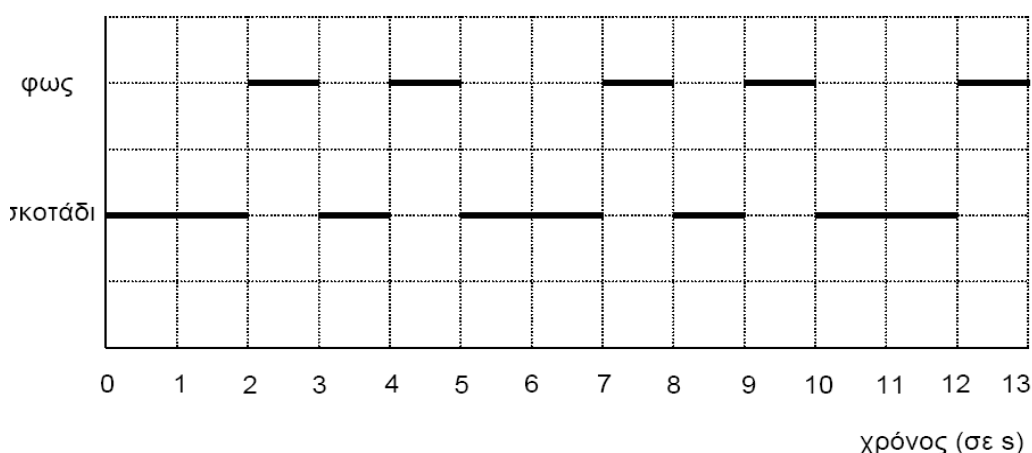
Ανάκτηση 14/2/2022 από: (<http://www.iep.edu.gr/pisa/index.php/examples/themata-mathimatikon>)

ΦΑΡΟΣ

Θέμα που δόθηκε στους μαθητές για το Πρόγραμμα PISA 2003

Οι φάροι είναι πύργοι με ένα φωτεινό σηματοδότη στην κορυφή. Οι φάροι βοηθούν τα πλοία να βρουν το δρόμο τους μέσα στη νύκτα, όταν πλέουν κοντά στις ακτές.

Ο σηματοδότης του φάρου στέλνει φωτεινά σήματα με έναν κανονικό και καθορισμένο τρόπο. Κάθε φάρος έχει το δικό του ρυθμό που αναβοσβήνει.



Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπεις το ρυθμό που αναβοσβήνει ένας συγκεκριμένος φάρος. Το φως ανάβει εναλλάξ ανάμεσα σε σκοτεινές περιόδους.

Αυτός είναι ένας συνηθισμένος τύπος φωτισμού. Ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα ο τύπος φωτισμού επαναλαμβάνεται. Ο χρόνος για έναν πλήρη κύκλο του τύπου φωτισμού, πριν αρχίσει να επαναλαμβάνεται, ονομάζεται *περίοδος*. Αν βρεις την περίοδο ενός τύπου φωτισμού, είναι εύκολο να επεκτείνεις το διάγραμμα για τα επόμενα δευτερόλεπτα ή λεπτά ή ώρες.

Ερώτηση 1: ΦΑΡΟΣ

Ποιο από τα παρακάτω θα μπορούσε να είναι η περίοδος του τύπου φωτισμού αυτού του φάρου;

- A. 2 δευτερόλεπτα.
- B. 3 δευτερόλεπτα
- Γ. 5 δευτερόλεπτα
- Δ. 12 δευτερόλεπτα.

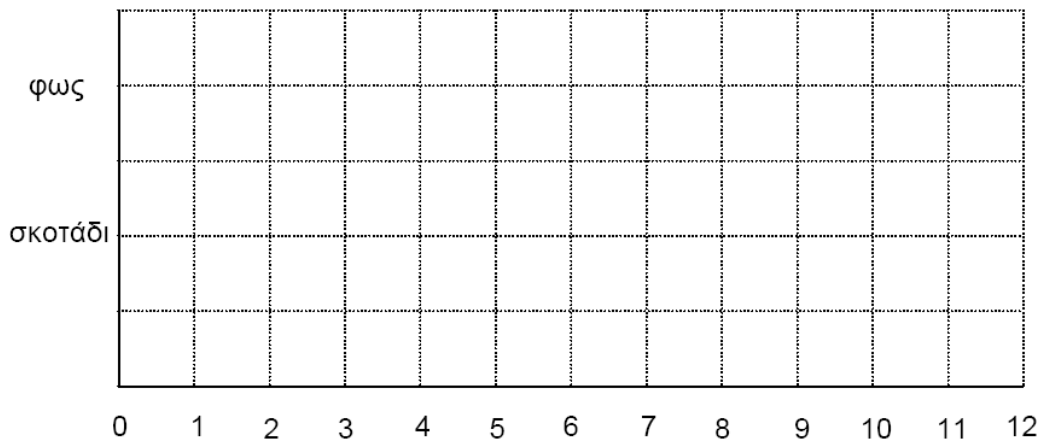
Ερώτηση 2: ΦΑΡΟΣ

Για πόσα δευτερόλεπτα ο φάρος στέλνει φωτεινά σήματα κατά τη διάρκεια ενός λεπτού;

- A 4
- B 12
- Γ 20
- Δ 24

Ερώτηση 3: ΦΑΡΟΣ

Στα παρακάτω τετραγωνάκια να σχεδιάσεις ένα διάγραμμα για τον πιθανό τύπο φωτισμού ενός φάρου που στέλνει φωτεινά σήματα διάρκειας 30 δευτερολέπτων σε κάθε λεπτό. Η περίοδος αυτού του τύπου φωτισμού πρέπει να είναι ίση με 6 δευτερόλεπτα.



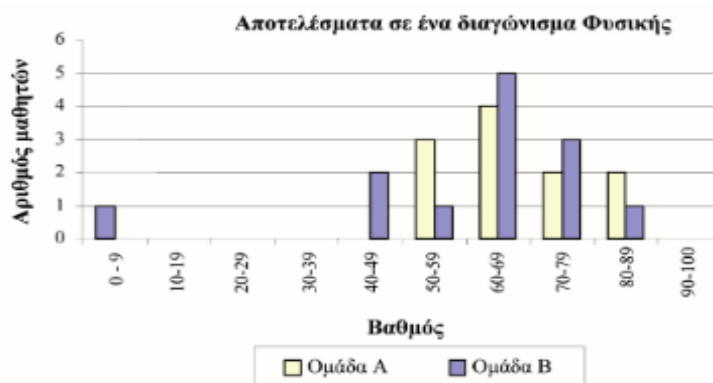
ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 3 (Αποτελέσματα ενός διαγωνίσματος)

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΝΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

Ερώτηση 1

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τα αποτελέσματα ενός διαγωνίσματος στη Φυσική για δύο ομάδες μαθητών, που τις ονομάζουμε «ομάδα Α» και «ομάδα Β».

Ο μέσος βαθμός για την ομάδα Α είναι 62 και για την ομάδα Β είναι 64,5. Οι μαθητές περνούν με επιτυχία το συγκεκριμένο διαγώνισμα, όταν ο βαθμός τους είναι 50 και πάνω.



Παρατηρώντας το διάγραμμα, ο καθηγητής ισχυρίστηκε ότι η ομάδα Β είχε καλύτερη επίδοση στο διαγώνισμα απ' ό,τι η ομάδα Α.

Οι μαθητές της ομάδας Α δεν συμφωνούν με τον καθηγητή τους και προσπαθούν να τον πείσουν ότι η ομάδα Β δεν είχε απαραίτητα καλύτερη επίδοση.

Αντλώντας στοιχεία από το διάγραμμα, να γράψεις ένα μαθηματικό επιχειρήμα, το οποίο θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές της ομάδας Α.

Ανάκτηση 14/2/2022 από: (<http://www.iep.edu.gr/pisa/index.php/examples/themata-mathimatikon>)

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 4 (Ύψος μαθητών)

Ανάκτηση 14/2/2022 από: (<http://www.iep.edu.gr/pisa/index.php/examples/themata-mathimatikon>)

ΥΨΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ

Θέμα που δόθηκε στους μαθητές για το Πρόγραμμα PISA 2003

Ερώτηση 1: ΥΨΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ

Μια μέρα, κατά τη διάρκεια του μαθήματος των Μαθηματικών, υπολογίστηκε το ύψος όλων των μαθητών. Το μέσο ύψος των αγοριών ήταν 160 cm και το μέσο ύψος των κοριτσιών ήταν 150 cm. Η Ελένη ήταν η ψηλότερη - το ύψος της ήταν 180 cm. Ο Κώστας ήταν ο πιο κοντός - το ύψος του ήταν 130 cm.

Δύο παιδιά απουσίαζαν την ημέρα εκείνη από την τάξη και ήρθαν την επομένη. Μετρήθηκε το ύψος τους και υπολογίστηκαν εκ νέου ο μέσοι όροι. Προς έκπληξη όλων, το μέσο ύψος των κοριτσιών και το μέσο ύψος των αγοριών δεν άλλαξαν.

Ποιο από τα παρακάτω συμπεράσματα μπορούμε να εξάγουμε από αυτές τις πληροφορίες;

Να κυκλώσεις το «Ναι» ή το «Όχι» για κάθε συμπέρασμα.

Συμπέρασμα	Μπορούμε να εξάγουμε αυτό το συμπέρασμα;
Και τα δύο παιδιά είναι κορίτσια.	Ναι / Όχι
Το ένα παιδί είναι αγόρι και το άλλο κορίτσι.	Ναι / Όχι
Και τα δύο παιδιά έχουν το ίδιο ύψος.	Ναι / Όχι
Το μέσο ύψος του συνόλου των μαθητών δεν άλλαξε.	Ναι / Όχι
Ο Κώστας παραμένει ο πιο κοντός.	Ναι / Όχι

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 5 (Ράφια βιβλιοθήκης)

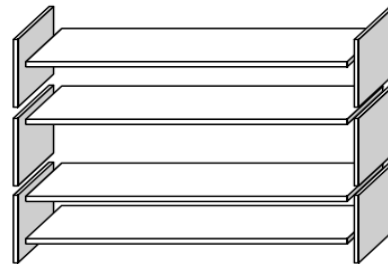
Ανάκτηση 14/2/2022 από: (<http://www.iep.edu.gr/pisa/index.php/examples/themata-mathimatikon>)

ΡΑΦΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ

Ερώτηση 1

Για να κατασκευασθεί μια βιβλιοθήκη με ράφια, ένας μαραγκός χρειάζεται τα παρακάτω υλικά:

- 4 μακριές ξύλινες σανίδες,
- 6 ξύλινες σανίδες μικρού μήκους,
- 12 μικρούς συνδετήρες,
- 2 μεγάλους συνδετήρες και
- 14 βίδες.



Ένας μαραγκός έχει στην αποθήκη του 26 μακριές ξύλινες σανίδες, 33 ξύλινες σανίδες μικρού μήκους, 200 μικρούς συνδετήρες, 20 μεγάλους συνδετήρες και 510 βίδες.

Πόσες βιβλιοθήκες με ράφια μπορεί να κατασκευάσει ο μαραγκός;

Απάντηση:

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 6 (Σεισμός)

Ανάκτηση 14/2/2022 από: (<http://www.iep.edu.gr/pisa/index.php/examples/themata-mathimatikon>)

ΣΕΙΣΜΟΣ

Ερώτηση 1

Προβλήθηκε ένα ντοκιμαντέρ για τους σεισμούς και τη συχνότητά τους. Περιελάμβανε επίσης μια συζήτηση για τον τρόπο πρόβλεψης των σεισμών.

Ένας γεωλόγος δήλωσε : «Στα επόμενα είκοσι χρόνια, η πιθανότητα να γίνει σεισμός στην πόλη Ζεντ είναι δύο προς τρία.»

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις αντιπροσωπεύει καλύτερα την έννοια της *δήλωσης του γεωλόγου;*

- A $\frac{2}{3} \times 20 = 13,3$, άρα μεταξύ του 13ου και του 14ου έτους από σήμερα θα γίνει ένας σεισμός στην πόλη Ζεντ.
- B $\frac{2}{3}$ είναι περισσότερο από $\frac{1}{2}$, άρα μπορείς να είσαι βέβαιος ότι θα γίνει ένας σεισμός στην πόλη Ζεντ κάποια στιγμή, κατά τη διάρκεια των επόμενων 20 ετών.
- Γ Η πιθανότητα να γίνει ένας σεισμός στην πόλη Ζεντ κάποια στιγμή, κατά τη διάρκεια των επόμενων 20 ετών είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να μη γίνει σεισμός.
- Δ Δεν μπορείς να πεις τι θα συμβεί, επειδή κανείς δεν μπορεί να είναι σίγουρος για τη στιγμή που θα συμβεί ένας σεισμός.

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 7 (Ληστείες)

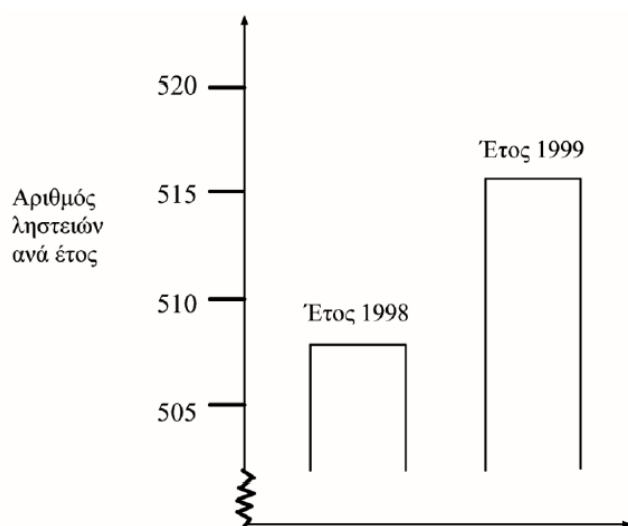
Ανάκτηση 14/2/2022 από: (<http://www.iep.edu.gr/pisa/index.php/examples/themata-mathimatikon>)

ΛΗΣΤΕΙΕΣ

Ερώτηση 1: ΛΗΣΤΕΙΕΣ

Σε ένα τηλεοπτικό κανάλι, ένας δημοσιογράφος σχολίασε την παρακάτω γραφική παράσταση ως εξής:

«Η γραφική παράσταση δείχνει ότι σημειώθηκε τεράστια αύξηση στον αριθμό των ληστειών από το έτος 1998 μέχρι το έτος 1999.»



Νομίζετε ότι ο δημοσιογράφος ερμήνευσε σωστά την παραπάνω γραφική παράσταση; Να γράψετε ένα επιχειρήμα που να τεκμηριώνει την απάντησή σας.

.....

.....

.....

«Ελαχιστοποίηση του κόστους κατασκευής κήπου με σταθερό εμβαδόν»

The screenshot shows a web application interface. At the top, it says "Ελαχιστοποίηση του κόστους κατασκευής κήπου με σταθερό εμβαδόν" and "Φωτόδεντρο Μαθησιακά Αντικείμενα". The main area features a 3D wireframe model of a rectangular prism on a blue background. To the right, there is a code editor with the following text:

```
ΓΙΑ ορθογώνιο :μ :π  
επανάλαβε 2 [μ :μ 90 μ :π  
90]  
τύπωσε 'Εμβαδόν'  
τύπωσε :μ*π  
τύπωσε 'Περίμετρος'  
τύπωσε 2*(μ + :π)  
ΤΕΛΟΣ  
σβγ  
Σχολίασμα 50 70
```

Below the code editor, there are several icons for navigation and interaction, including a magnifying glass, a refresh icon, and a rotation icon.

Φωτόδεντρο (2021). Ανάκτηση 13/2/2022 από:

<http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-9536>

«Γραμμικές Συναρτήσεις - Το πρόβλημα με τις πίτσες»

The screenshot shows a web page titled "ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΤΙΣ ΠΙΤΣΕΣ". It includes a graph of a linear function on a coordinate plane. On the right side, there are several interactive buttons: "ΜΟΙΡΑΖΟΜΑΙ", "ΑΞΙΟΛΟΓΩ", "ΕΠΙΛΕΓΩ", and "ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩ". Below these buttons, there is a section for "ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ" (Keywords) with the following terms: "περιφέρεια", "εμβαδόν", "κύκλου", "γραμμικές συναρτήσεις", and "Function Probe".

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ
Σενάριο για τη διερεύνηση του πιο οικονομικού μεγέθους πίτσας. Με τη βοήθεια των σεναρίων, οι μαθητές μοντελοποιώντας ένα πραγματικό πρόβλημα, μελετούν την περιφέρεια του κύκλου, το εμβαδόν του και τις γραμμικές συναρτήσεις.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ
Προτείνεται να υλοποιηθεί το σενάριο με το λογισμικό Function Probe, ένα πολυ-εποπτικό εργαλείο για την άλγεβρα, την τριγωνμετρία και την ανάλυση, που επιτρέπει τη διερεύνηση των συναρτήσεων και την μαθηματική μοντελοποίηση. Μπορείτε να αναζητήσετε το λογισμικό στη διεύθυνση <http://photodentro.edu.gr/edusoft/>.

Φωτόδεντρο (2021). Ανάκτηση 13/2/2022 από:

<http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-9248>

ΕΛΣΤΑΤ (2021). Ανάκτηση 12/2/2022 από:

https://www.statistics.gr/el/statistics?p_p_id=documents_WAR_publicationsportlet_INSTANCE_qDQ8fBKKo4IN&p_p_lifecycle=2&p_p_state=normal&p_p_mode=view&p_p_cacheability=cacheLevelPage&p_p_col_id=column-2&p_p_col_count=4&p_p_col_pos=1&documents_WAR_publicationsportlet_INSTANCE_qDQ8fBKKo4IN_javax.faces.resource=document&documents_WAR_publicationsportlet_INSTANCE_qDQ8fBKKo4IN_in=downloadResources&documents_WAR_publicationsportlet_INSTANCE_qDQ8fBKKo4IN_documentID=455139&documents_WAR_publicationsportlet_INSTANCE_qDQ8fBKKo4IN_locale=el

Γράφημα 2. Ετήσιες και μηνιαίες μεταβολές (%) ΔΤΚ

