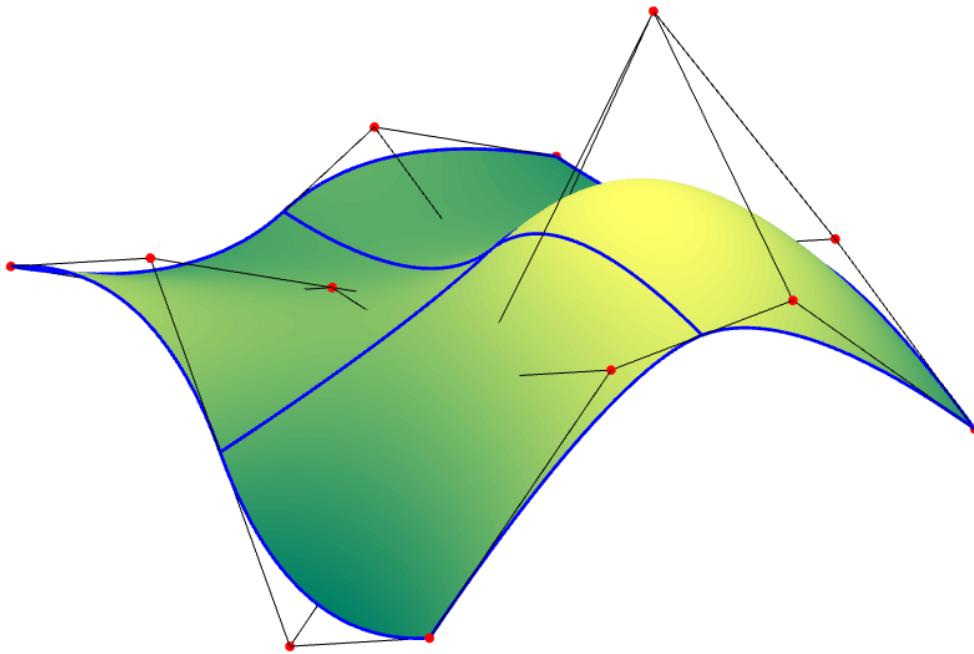




Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών  
Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών

## ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΛΥΦΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΙΣΟΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟ



Διπλωματική Εργασία

Μελέτιου Σύρμου

Επιβλέπων:

Σάββας Τριανταφύλλου, Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Μάρτιος 2022

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b>	<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	<b>1</b>
1.1	ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ .....	1
1.2	ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ .....	4
1.3	ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ .....	5
1.4	ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ .....	5
1.5	ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ .....	6
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b>	<b>ΘΕΩΡΙΕΣ ΚΕΛΥΦΩΝ</b> .....	<b>9</b>
2.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	9
2.2	ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΟΥΣ KIRCHHOFF-LOVE .....	9
2.2.1	<i>Παραδοχές Kirchhoff-Love</i> .....	9
2.2.2	<i>Κινηματικές συνθήκες</i> .....	10
2.2.3	<i>Συνθήκες ισορροπίας</i> .....	14
2.3	ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΟΥΣ REISSNER-MINDLIN .....	16
2.3.1	<i>Παραδοχές Reissner-Mindlin</i> .....	16
2.3.2	<i>Κινηματικές συνθήκες</i> .....	16
2.3.3	<i>Συνθήκες ισορροπίας</i> .....	18
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</b>	<b>ΙΣΟΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ</b> .....	<b>21</b>
3.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	21
3.2	ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΙΣΟΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ .....	24
3.2.1	<i>Διανύσματα κόμβων</i> .....	25
3.2.2	<i>Σημεία ελέγχου</i> .....	26
3.2.3	<i>Χώροι σχετιζόμενοι με την ισογεωμετρική ανάλυση</i> .....	26
3.3	B-SPLINES.....	30
3.3.1	<i>Βασικές συναρτήσεις B-SPLines</i> .....	30
3.3.2	<i>Ιδιότητες βασικών συναρτήσεων B-SPLines</i> .....	31
3.3.3	<i>Ορισμός και ιδιότητες καμπυλών B-SPLines</i> .....	32
3.3.4	<i>Παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων B-SPLines</i> .....	35
3.4	NURBS.....	35
3.4.1	<i>Γεωμετρικός ορισμός καμπύλων NURBS</i> .....	35
3.4.2	<i>Αλγεβρικός ορισμός και ιδιότητες καμπύλων NURBS</i> .....	37
3.4.3	<i>Παράγωγοι των συναρτήσεων NURBS</i> .....	39
3.5	ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ .....	39
3.5.1	<i>Προσθήκη κόμβων</i> .....	40
3.5.2	<i>Αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού</i> .....	42
3.5.3	<i>Αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού και προσθήκη κόμβων</i> .....	43

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</b>	<b>ΣΤΟΙΧΕΙΟ IGA KIRCHHOFF-LOVE.....</b>	<b>45</b>
4.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	45
4.2	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ.....	46
4.3	ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ.....	49
4.4	ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ.....	50
4.5	ΜΕΤΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	53
4.5.1	<i>Υπολογισμός μετατοπίσεων στην επιφάνεια της πραγματικής γεωμετρίας.....</i>	<i>53</i>
4.5.2	<i>Υπολογισμός παραμορφώσεων και τάσεων.....</i>	<i>53</i>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5</b>	<b>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....</b>	<b>55</b>
5.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	55
5.2	ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΕΔΡΑΖΟΜΕΝΗ ΣΤΙΣ 4 ΠΑΡΕΙΕΣ ΤΗΣ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΗ ΣΕ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΦΟΡΤΙΣΗ.....	58
5.3	ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΜΕ ΑΚΑΜΠΤΑ ΔΙΑΦΡΑΓΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΑΚΡΕΣ ΤΟΥ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟΣ ΣΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΠΙΕΣΗ.....	62
5.4	Η ΣΤΕΓΗ ΤΩΝ SCORDELIS-LO.....	69
5.5	ΗΜΙΣΦΑΙΡΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΣΗΜΕΙΑΚΑ ΦΟΡΤΙΑ.....	74
5.6	ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΜΕ ΔΙΑΦΡΑΓΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΑΚΡΕΣ ΤΟΥ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΑΚΑ ΦΟΡΤΙΑ.....	79
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6</b>	<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>83</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....</b>	<b>.....</b>	<b>87</b>
	ΣΥΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΚΑΙ ΑΝΤΑΛΛΟΙΩΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.....	87
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7</b>	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....</b>	<b>90</b>

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο στόχος της παρούσας διπλωματικής είναι η ανάπτυξη μιας υπολογιστικής πλατφόρμας για την ανάλυση λεπτών καμπύλων φορέων με την μέθοδο της ισογεωμετρικής ανάλυσης. Η ισογεωμετρική ανάλυση αποτελεί μία καινοτόμα μέθοδο που ενώνει τις τεχνολογίες CAD – CAE, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιείται το ίδιο προσομοίωμα τόσο στη σχεδίαση όσο και στην υπολογιστική ανάλυση. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, η ανάλυση πραγματοποιείται με στοιχεία που βασίζονται στην θεωρία κελυφών Kirchhoff-Love και χρησιμοποιεί συναρτήσεις NURBS ως συναρτήσεις σχήματος. Οι συναρτήσεις NURBS προσφέρουν ακριβή γεωμετρική αναπαράσταση πολύπλοκων γεωμετριών και παρέχουν την απαιτούμενη συνέχεια που χρειάζονται τα στοιχεία κελύφους Kirchhoff-Love. Η συμπεριφορά του φορέα περιγράφεται μόνο από μετακινησιακούς βαθμούς ελευθερίας. Για την ανάλυση γίνονται οι παραδοχές γραμμικής ελαστικότητας και μικρών μετακινήσεων. Ο σχεδιασμός γίνεται στο περιβάλλον οπτικού προγραμματισμού “Dynamo” και ο κώδικας για την ανάλυση αναπτύχθηκε στην υψηλού επιπέδου γλώσσα προγραμματισμού και το διαδραστικό περιβάλλον “Matlab”. Τέλος, επιλύονται αριθμητικά παραδείγματα ούτως ώστε να αξιολογηθεί η ακρίβεια του υπολογιστικού κώδικα.

## **ABSTRACT**

The aim of this thesis is the development of a computational platform for the analysis of thin curved structures using the method of isogeometric analysis. Isogeometric analysis is an innovative method that integrates CAD – CAE, resulting in the same model being used in both design and analysis. In this project, analysis is carried out using Kirchhoff-Love shell elements employing NURBS as shape functions. NURBS provide an exact geometric representation of complex geometries hence resulting in smooth geometries, consistent with the requirements of the Kirchhoff-Love shell theory. The behavior of the structure is described using only displacement degrees of freedom. The method employed assumes linear elasticity and small strain kinematics. Design is performed at the visual programming environment “Dynamo” and the code used for the analysis was developed in the high-level language and interactive environment “Matlab”. Finally, the accuracy of the developed numerical framework is examined through a set of illustrative benchmarks.

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Ολοκληρώνοντας την διπλωματική μου εργασία επιθυμώ να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Σάββα Τριανταφύλλου, Επίκουρο Καθηγητή της σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον αντικείμενο, αυτό της Ισογεωμετρικής Ανάλυσης, καθώς και για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησής της. Η συστηματική του καθοδήγηση σε όλα τα στάδια της Διπλωματικής και η διάθεση για συζήτηση οποιασδήποτε απορίας και προβληματισμού συνέβαλαν ουσιαστικά στην ολοκλήρωσή της.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για όλα όσα μου έχει προσφέρει αυτά τα χρόνια, την κατανόηση και την συνεχή στήριξή τους, καθώς και τους φίλους μου για την συμπαράσταση και όλο το κουράγιο που μου έδιναν.



# Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

## 1.1 Γενική Περιοχή

Τα κελύφη είναι καμπύλοι επιφανειακοί φορείς, λεπτοί στην διεύθυνση του πάχους και με μεγάλο μήκος (συγκριτικά με το πάχος) στις άλλες δύο διευθύνσεις (Chapelle and Bathe, 2010). Παρά το γεγονός ότι είναι λεπτά και ελαφριά εκτείνονται σε σχετικά μεγάλες περιοχές και μπορούν να αντέξουν εξωτερικά φορτία με πολύ αποδοτικό τρόπο. Παραδείγματα τέτοιων φορέων μπορούν να βρεθούν με αφθονία στην φύση, όπως το τσόφλι του αυγού, το καβούκι της χελώνας και τα κοχύλια.

Στις εφαρμογές των μηχανικών, τα κελύφη, και κυρίως τα λεπτά κελύφη, έχουν δει χρήση σε ένα ευρύ φάσμα πεδίων. Αυτό οφείλεται στο ότι, συχνά, ο στόχος του σχεδιασμού μιας κατασκευής είναι να έχει όσο το δυνατόν μικρότερο πάχος, έτσι ώστε να είναι ελαφριά και να χρησιμοποιεί την ελάχιστη ποσότητα υλικού, ενώ βέβαια να διατηρείται ασφαλή στην χρήση, λειτουργική και, όποτε αυτό χρειάζεται, να προσφέρει ένα όμορφο αισθητικά αποτέλεσμα. Παρακάτω αναφέρονται κάποιες από τις εφαρμογές που έχουν δει τα κελύφη σε διάφορους κλάδους της μηχανικής, ανά τα χρόνια, για να γίνει αντιληπτή η σημαντική συνεισφορά (Calladine, 1989):

*Αρχιτεκτονική:* Η ανάπτυξη θόλων από τοιχοποιία τον Μεσαίωνα έκανε δυνατή την κατασκευή πιο ευρύχωρων κτιρίων. Σήμερα, χρησιμοποιούνται συχνά ως κομψές στέγες, για την κάλυψη μεγάλων χώρων (Σχ. 1.1).



**Σχ. 1.1: Χρήση κελυφών ως στέγες. Απεικονίζεται η όπερα του Σύδνεϋ (αριστερά) και το ενυδρείο της Βαλένθιας (δεξιά)**

*Ενέργεια και χημική βιομηχανία:* Οι ατμομηχανές που αναπτύχθηκαν κατά την Βιομηχανική Επανάσταση εξαρτιόντουσαν, σε κάποιον βαθμό, από την κατασκευή κατάλληλων λεβητών. Τα λεπτά αυτά κελύφη φτιάχνονταν από πλάκες που διαμορφώνονταν κατάλληλα και βιδώνονταν μεταξύ τους. Στις μέρες μας, η



δυνατότητα της συγκόλλησης έχει προσφέρει την δυνατότητα για πολύ πιο αποδοτικά σχέδια για δοχεία πίεσης (Σχ. 1.2). Αυτά, σε συνδυασμό με τις σωληνώσεις που χρησιμοποιούνται αποτελούν βασικό συστατικό για την σωστή λειτουργία των θερμοηλεκτρικών σταθμών, καθώς και των πυρηνικών εργοστασίων.



**Σχ. 1.2: Δοχεία πίεσης**

*Κατασκευαστική βιομηχανία:* Ένα σημαντικό πρόβλημα που αντιμετώπιζαν οι μηχανικοί όταν άρχισαν να χρησιμοποιούν τον χάλυβα σαν δομικό υλικό είναι ο σχεδιασμός μελών με καλή συμπεριφορά απέναντι στο φαινόμενο του λυγισμού. Σημαντική πρόοδος ως προς την αντιμετώπιση του φαινομένου αυτού παρουσιάστηκε όταν κατά την κατασκευή της γέφυρας Φορθ (Σχ. 1.3) χρησιμοποιήθηκαν χαλύβδινες πλάκες οι οποίες ήταν βιδωμένες μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να δημιουργήσουν σωληνωτά μέλη. Αυτά είχαν διάμετρο έως και λίγο μεγαλύτερη από 3.5μέτρα και ο λόγος της ακτίνας τους ως προς το πάχος τους ήταν μεταξύ 60 και 180. Σήμερα οι μηχανικοί συνεχίζουν να χρησιμοποιούν φορείς κελύφους, εκτός από την κατασκευή στεγών που ήδη αναφέρθηκε, για πληθώρα άλλων κατασκευών, όπως σιλό αποθήκευσης και δεξαμενές αποθήκευσης νερού (Σχ. 1.4).

*Αυτοκινητοβιομηχανία και αεροδιαστημική:* Η κατασκευή οχημάτων με την σύγχρονη μορφή τους, περιλαμβάνει ένα κέλυφος που περιβάλλει τον σκελετό του αυτοκινήτου και παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην παραλαβή των φορτίων που ενδέχεται να δεχτεί. Η ιδέα λεπτών κελυφών ως εξωτερικό περίβλημα χρησιμοποιείται σε αρκετούς ακόμα τομείς όπως στην *αεροναυπηγική*, την *αεροδιαστημική* και την

ναυπηγική. Σε όλους αυτούς τους τομείς οι μηχανικοί εκμεταλλεύονται στον μέγιστο δυνατό βαθμό τις ιδιότητες των κελυφών για να δημιουργήσουν εξωτερικά περιβλήματα υψηλής αντοχής, τα οποία καλύπτουν μεγάλες επιφάνειες, με την χρήση του ελάχιστου δυνατού υλικού, μειώνοντας έτσι και το ίδιο βάρος της κατασκευής.



**Σχ. 1.3:** Η Γέφυρα Φορθ, που βρίσκεται στον Κόλπο του Φορθ στη Σκωτία και χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά το 1890



**Σχ. 1.4:** Σιλό αποθήκευσης σιτηρών (αριστερά) και δεξαμενή νερού (δεξιά)

Η παραπάνω λίστα αν και καλύπτει ένα μεγάλο μέρος των εφαρμογών που έχουν δει τα κελύφη δεν είναι σε καμία περίπτωση ολοκληρωμένη (Sechler and Fung, 1974).

## 1.2 Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας

Το αντικείμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι ο έλεγχος της συμπεριφοράς λεπτών καμπύλων φορέων. Η ανάλυση των λεπτών κελυφών είναι ένα πρόβλημα που απασχολεί τους μηχανικούς για πολλά χρόνια. Με μία ματιά στην βιβλιογραφία (Ventsel et al., 2002) μπορεί κανείς να διακρίνει ότι ενώ υπάρχουν αναλυτικές λύσεις, αυτές καλύπτουν ένα πολύ μικρό φάσμα περιπτώσεων. Οι περιορισμοί που απαιτούν ως προς την γεωμετρία του φορέα, τις συνοριακές του συνθήκες, καθώς και το είδος των εξωτερικών φορτίων και την θέση που αυτά ασκούνται τις καθιστούν δυσχερείς για πρακτικές εφαρμογές. Η δυσκολία αυτή προκύπτει από τον τρόπο με τον οποίο αντιστέκεται στα φορτία ένας φορέας κελύφους, ο οποίος είναι κυρίως μέσω της καμπυλότητάς του. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι δύο κελύφη με ίδιο πάχος και υλικό κατασκευής, αν έχουν διαφορετικές καμπυλότητες, θα έχουν και εντελώς διαφορετικές ικανότητες παραλαβής φορτίου. Η λύση του προβλήματος της ανάλυσης κελυφών δόθηκε από την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Τα πεπερασμένα στοιχεία σήμερα, έχουν εδραιωθεί ως ένας από τους βασικούς τρόπους ανάλυσης φορέων και χρησιμοποιούνται συνεχώς από τους μηχανικούς και τους επιστήμονες. Αξιοσημείωτο είναι να αναφερθεί ότι αν και χρησιμοποιούνται για την ανάλυση κάθε είδους φορέα, η εφεύρεση της μεθόδου έγινε για να ικανοποιήσει την ανάγκη επίλυσης ενός προβλήματος κελύφους από τον Ιωάννη Αργύρη. Αυτό έγινε το 1944, κατά την διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, όταν καταπιάστηκε με ένα πρόβλημα σχετικό με την κατασκευή των πρώτων αεριοθούμενων μαχητικών αεροσκαφών τα οποία θα κινούνταν με υψηλές ταχύτητες και απαιτούσαν κεκλιμένες προς τα πίσω πτέρυγες. Ένα πρόβλημα για το οποίο δεν μπορούσαν να εφαρμοστούν οι γνωστές μέθοδοι ανάλυσης της εποχής, καθώς αδυνατούσαν να προσομοιώσουν με αξιοπιστία την κεκλιμένη γεωμετρία των πτερυγίων. Ωστόσο, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων στην τυπική της διατύπωση έγινε αρκετά αργότερα (Argyris, 1954, Argyris and Kelsey, 1955).

Από τότε μέχρι σήμερα, η βιβλιογραφία στην επιστημονική περιοχή των πεπερασμένων στοιχείων έχει αυξηθεί με γεωμετρική πρόοδο, με νέες τεχνολογίες να γεννιούνται συνεχώς. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μίας τέτοιας καινοτόμας τεχνολογίας είναι η ισογεωμετρική ανάλυση (Hughes et al., 2005). Η βασική επιδίωξη της μεθόδου αυτής είναι να συνδέσει την κλασική ανάλυση με πεπερασμένα

στοιχεία με το επιστημονικό πεδίο των σχεδιαστικών προγραμμάτων CAD. Αυτό το επιτυγχάνει χρησιμοποιώντας τις ίδιες συναρτήσεις και στο σχεδιασμό και στη ανάλυση καταφέροντας έτσι να αποτυπώσει την ακριβή γεωμετρία του φορέα, καθώς και μεγαλύτερη ακρίβεια και ταχύτερη σύγκλιση. Η λογική της μεθόδου και τα πλεονεκτήματα που προσφέρει ως προς την πιο ευρέως διαδεδομένη ισοπαραμετρική ανάλυση αναλύονται στο Κεφάλαιο 3.

### **1.3 Σκοπός και ερευνητικοί στόχοι**

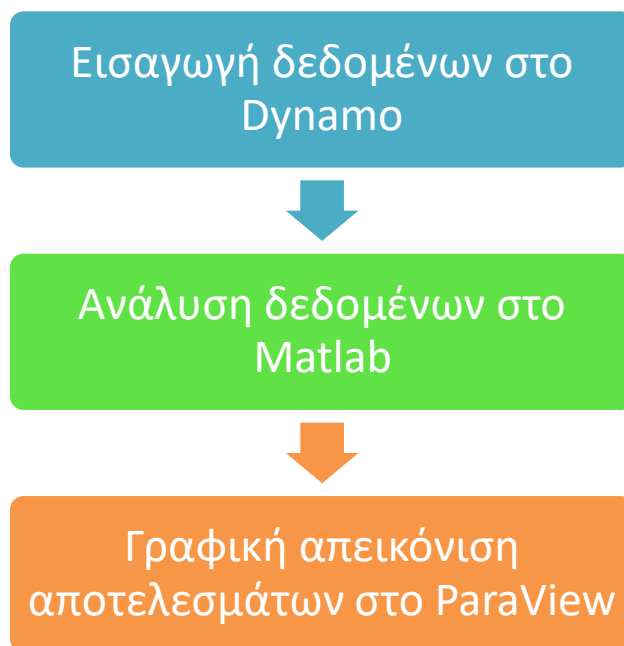
Ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της συμπεριφοράς καμπύλων φορέων με μικρό πάχος με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού καθορίζονται οι παρακάτω ερευνητικοί στόχοι:

1. Βιβλιογραφική διερεύνηση των διαθέσιμων θεωριών κελύφους για την ανάκτηση εμπειρίας σχετικά αυτές καθώς και τις διαφορές που αυτές παρουσιάζουν.
2. Σύνταξη υπολογιστικού κώδικα για την ανάλυση λεπτών κελυφών με την λογική της ισογεωμετρικής ανάλυσης, ο οποίος θα βασίζεται στις παραδοχές της επιλεγείσας θεωρίας κελύφους.
3. Έλεγχος της αξιοπιστίας και της ταχύτητας σύγκλισης του κώδικα για να βρεθεί πόσο αποδοτικός είναι, μέσω της επίλυσης παραδειγμάτων από την βιβλιογραφία για τα οποία υπάρχει ακριβής λύση.
4. Ανάπτυξη μιας αυτοματοποιημένης διαδικασίας για την εισαγωγή δεδομένων, την ανάλυση και τη μετεπεξεργασία των αποτελεσμάτων.

### **1.4 Μεθοδολογία**

Αρχικά καθορίστηκε το αντικείμενο με το οποίο ασχολείται η παρούσα διπλωματική εργασία, καθώς και ο επιδιωκόμενος σκοπός της. Έπειτα έγινε εκτεταμένη βιβλιογραφική έρευνα για την εξοικείωση με την ισογεωμετρική μέθοδο, καθώς και με τις θεωρίες κελύφους. Με την τελευταία στόχος ήταν η επιλογή της κατάλληλης θεωρίας για την ακριβέστερη προσομοίωση της συμπεριφοράς των λεπτών κελυφών. Για την παρούσα διπλωματική εργασία επιλέχθηκε η θεωρία Kirchhoff-Love. Η σχεδίαση του φορέα που θα αναλυθεί γίνεται στην πλατφόρμα οπτικού προγραμματισμού Dynamo του Revit. Μέσα από το Dynamo επιλέγονται και το είδος, η θέση και η τιμή του εξωτερικού φορτίου, οι ιδιότητες του υλικού και οι συνοριακές συνθήκες του φορέα. Όλα τα παραπάνω εξάγονται μέσω ενός Python

script σε ένα INP αρχείο. Επόμενο βήμα ήταν η σύνταξη κώδικα που βασίζεται σε όλα όσα προαναφέρθηκαν με την γλώσσα προγραμματισμού Matlab, ο οποίος θα έχει ως δεδομένα εισόδου τα στοιχεία του αρχείου που προκύπτει από το Dynamo και θα δίνει τις τελικές μετατοπίσεις και τις τάσεις που αναπτύσσονται στον φορέα. Τα αποτελέσματα αυτά εξάγονται σε αρχείο με κατάλληλη μορφή για να διαβάζεται από την εφαρμογή ParaView που χρησιμοποιείται με σκοπό την βέλτιστη απεικόνιση των αποτελεσμάτων. Η διαδικασία που ακολουθείται για την ανάλυση ενός φορέα φαίνεται συνοπτικά στο Σχ. 1.5. Σε αυτό το σημείο γίνεται ανάλυση συγκεκριμένων φορέων για τους οποίους, για δεδομένη φόρτιση και συνοριακές συνθήκες, υπάρχει η ακριβής λύση στην βιβλιογραφία με σκοπό την εύρεση της ακρίβειας σύγκλισης του προγράμματος και της ταχύτητας αυτής. Τέλος αναγράφονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τα αποτελέσματα των αριθμητικών παραδειγμάτων.



**Σχ. 1.5:** Απεικόνιση της ροής που ακολουθεί η ανάλυση ενός φορέα

## 1.5 Διάρθρωση της εργασίας

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η δομή της Διπλωματικής Εργασίας, μέσω της συνοπτικής αναφοράς του περιεχομένου κάθε κεφαλαίου.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται κατηγοριοποίηση των κελυφών ανάλογα με το πάχος τους και την ακτίνα καμπυλότητά τους και παρουσιάζονται οι διάφορες θεωρίες κελύφους. Για την κάθε θεωρία αναφέρεται το είδος του κελύφους που περιγράφει ακριβέστερα, καθώς και όλες οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν την συμπεριφορά του.

Στο Κεφάλαιο 3 αναλύεται η μέθοδος της ισογεωμετρικής ανάλυσης. Συγκεκριμένα περιγράφονται οι καμπύλες NURBS που χρησιμοποιούνται σε αυτήν την διπλωματική, και εξηγούνται οι ιδιότητες τους. Επίσης γίνεται εκτενής αναφορά στις συναρτήσεις B-SPLines και τις ιδιότητές τους, καθώς η κατανόηση αυτών είναι η αρχή για την βαθύτερη κατανόηση των NURBS.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται το ισογεωμετρικό πεπερασμένο στοιχείο Kirchhoff-Love. Εξηγούνται οι λόγοι για τους οποίους επιλέχθηκε για την ανάλυση των φορέων λεπτών κελυφών σε αυτήν την διπλωματική και αναφέρονται οι εξισώσεις οι οποίες διέπουν την συμπεριφορά του. Τέλος γίνεται αναφορά στις τρεις τεχνικές προσαρμογής της ισογεωμετρικής μεθόδου (p-, h-, και k-προσαρμογή).

Στο Κεφάλαιο 5 αναλύονται πέντε αριθμητικά παραδείγματα με τον κώδικα Matlab. Το κάθε ένα αναλύεται για διάφορους πολυωνυμικούς βαθμούς, καθώς και πλήθος σημείων ελέγχου με σκοπό να βγουν συμπεράσματα ως προς την ταχύτητα σύγκλισης. Για το κάθε ένα συγκρίνεται η λύση του κώδικα με την αντίστοιχη της βιβλιογραφίας. Τέλος, απεικονίζονται οι μετατοπίσεις, οι παραμορφώσεις και οι τάσεις μέσω του Paraview για όλον τον φορέα.

Στο Κεφάλαιο 6 εξάγονται κάποια συμπεράσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των αριθμητικών παραδειγμάτων, αλλά και γενικά από την ενασχόληση με το αντικείμενο της ισογεωμετρικής μεθόδου και της ανάλυσης λεπτών κελυφών, και αναγράφονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Στο Παράρτημα εξηγούνται τα συναλλοίωτα και τα ανταλλοίωτα διανύσματα, καθώς και η έννοια των σωματόδετων (convected) συντεταγμένων.

Στο Κεφάλαιο 7 αναφέρεται όλη η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για την υλοποίηση της παρούσας διπλωματικής.



## Κεφάλαιο 2 Θεωρίες κελυφών

### 2.1 Εισαγωγή

Τα κελύφη είναι επιφανειακοί φορείς των οποίων η μέση επιφάνεια είναι καμπύλη και συνήθως το πάχος τους είναι μικρό σε σχέση με το άνοιγμά τους (Παπαδρακάκης, 2001). Αυτό δίνει την δυνατότητα στην γεωμετρία του κελύφους να παρασταθεί από την μέση επιφάνεια και από το πάχος σε κάθε σημείο της μέσης επιφάνειας. Όσον αφορά στην συμπεριφορά τους, συνδυάζουν την καμπτική λειτουργία της πλάκας και την μεμβρανική λειτουργία του δίσκου. Στην κλασική θεωρία κελύφους γίνεται ο διαχωρισμός μεταξύ λεπτών κελυφών με  $R/h \geq 20$  και παχιών κελυφών με  $R/h < 20$ , όπου  $R$  είναι η ακτίνα καμπυλότητας της μέσης επιφάνειας και  $h$  είναι το πάχος του κελύφους. Η κατάλληλη θεωρία για την ανάλυση λεπτών κελυφών είναι η θεωρία Kirchhoff-Love, ενώ για την ανάλυση παχιών η θεωρία Reissner-Mindlin. Οι δύο αυτές θεωρίες αποτελούν γενίκευση στις δύο διαστάσεις των θεωριών δοκού Euler-Bernoulli και Timoshenko αντίστοιχα.

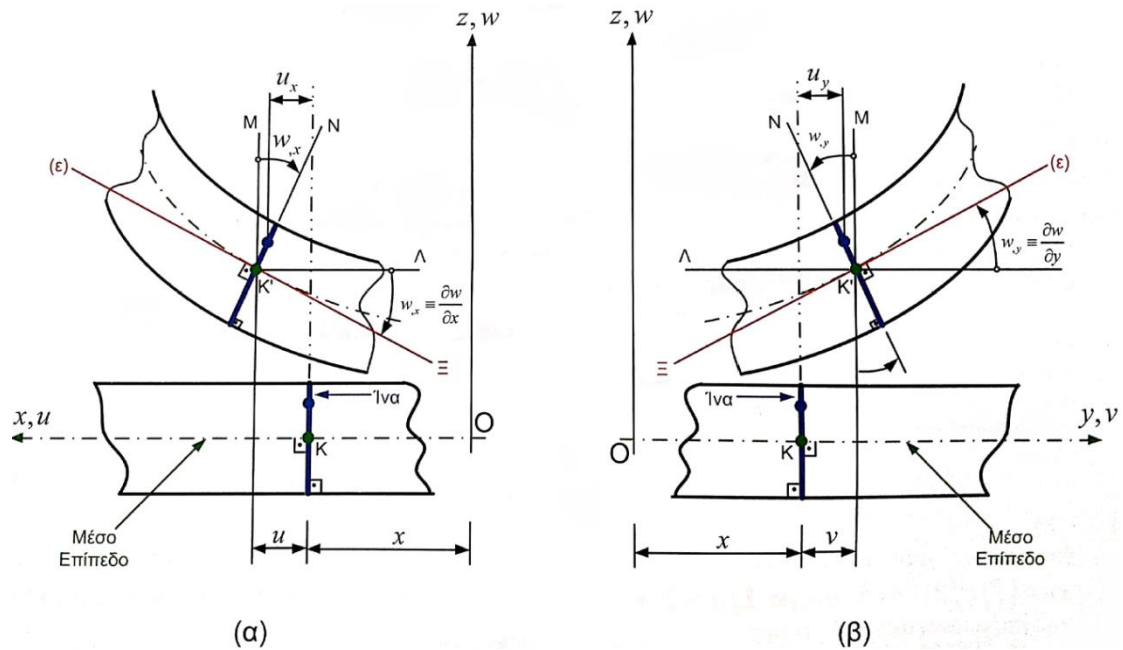
### 2.2 Θεωρία κελύφους Kirchhoff-Love

#### 2.2.1 Παραδοχές Kirchhoff-Love

Η θεωρία Kirchhoff-Love χρησιμοποιείται για την ανάλυση λεπτών πλακών και κελυφών, όπου η συμμετοχή των εκτός του επιπέδου της μέσης επιφάνειας παραμορφώσεων στο συνολικό έργο παραμορφώσεως του κελύφους (ή της πλάκας) είναι αμελητέο (Ventsel et al., 2002, Παπαδρακάκης, 2001). Η θεωρία αυτή βασίζεται στις παραδοχές του Kirchhoff, οι οποίες είναι οι παρακάτω:

1. Επίπεδες επιφάνειες κάθετες στη μέση επιφάνεια πριν την παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες μετά την παραμόρφωση και κάθετες στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.1. Αυτή η παραδοχή οδηγεί στο ότι όλες οι παραμορφώσεις (ορθές και διατμητικές) στην διεύθυνση που είναι κάθετη ως προς την μέση επιφάνεια μηδενίζονται.
2. Η ορθή εγκάρσια τάση ( $\sigma_z$ ) είναι πολύ μικρότερη από τις υπόλοιπες ορθές τάσεις και για αυτό για αυτό μπορεί να μην ληφθεί υπόψιν.





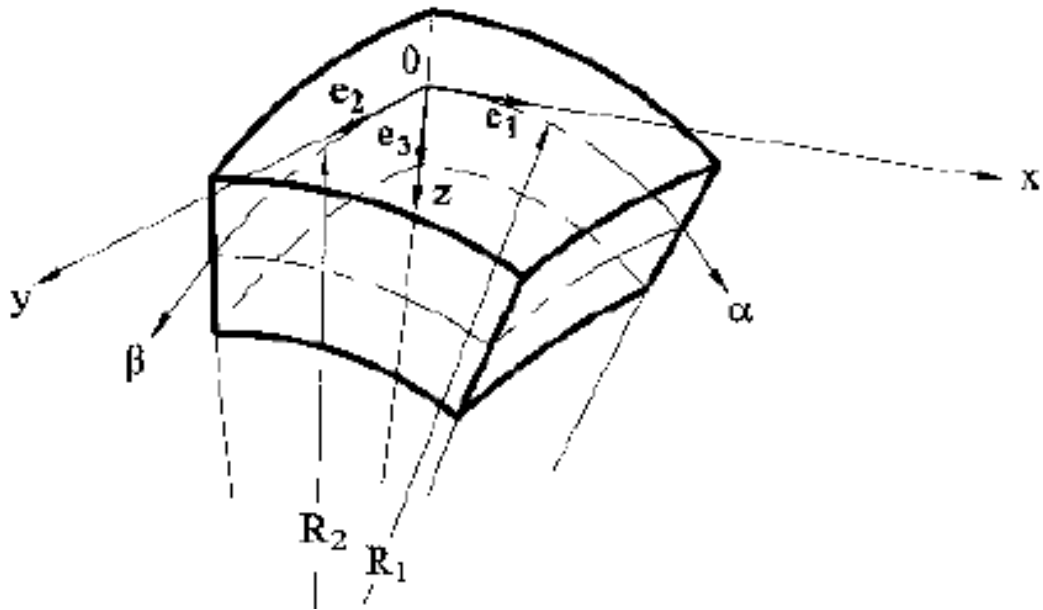
Σχ. 2.1: Κάμψη πλάκας κατά την κλασική θεωρία Kirchhoff (Προβατίδης, 2016)

Γίνεται επίσης η παραδοχή ότι οι μετατοπίσεις ενός τυχαίου σημείου του κελύφους είναι μικρές σε σχέση με το πάχος του, ενώ οι στροφές της παραμορφωμένης μέσης επιφάνειας είναι μικρές συγκριτικά με την μονάδα. Η παραδοχή αυτή επιτρέπει να εκφραστούν οι εξισώσεις του κελύφους στην απαραμόρφωτη γεωμετρία και εξασφαλίζει ότι οι διαφορικές εξισώσεις θα είναι γραμμικές.

Οι παραδοχές του Kirchhoff σε συνδυασμό με την παραδοχή ότι το πάχος του κελύφους είναι μικρό σε σύγκριση με τις άλλες διαστάσεις του και την παραδοχή μικρών μετατοπίσεων ονομάζονται παραδοχές Kirchhoff-Love. Σύμφωνα με αυτές, οι παραμορφώσεις σε όλον τον όγκο του κελύφους μπορούν να οριστούν από τις μετατοπίσεις και τις καμπυλότητες της μέσης επιφάνειας.

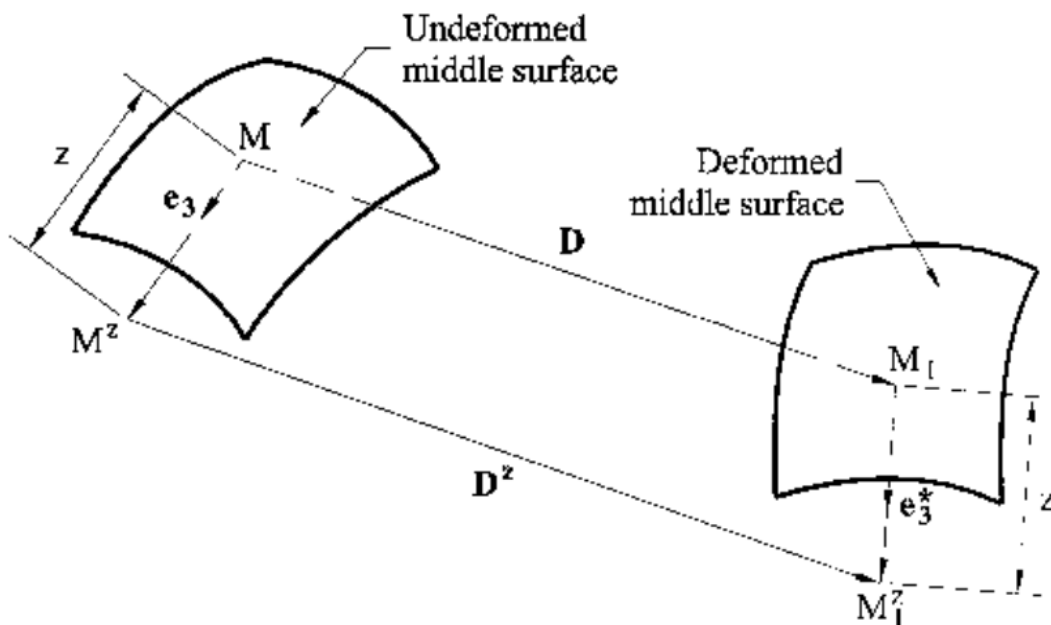
### 2.2.2 Κινηματικές συνθήκες

Αρχικά ορίζονται δύο συστήματα συντεταγμένων. Το πρώτο είναι ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων  $\alpha, \beta$ , στο οποίο οι καμπύλες  $\alpha$  και  $\beta$  ακολουθούν τις γραμμές της καμπυλότητας της μέσης επιφάνειας του κελύφους, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.2. Το δεύτερο είναι ένα τοπικό (κινητό) καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxyz$ . Οι άξονες  $x$  και  $y$  συμπίπτουν με την διεύθυνση των εφαπτόμενων των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων  $\alpha$  και  $\beta$  σε ένα σημείο  $O$  της μέσης επιφάνειας, και ο άξονας  $z$  δείχνει κάθετα της επιφάνειας αυτής στο ίδιο σημείο.



Σχ. 2.2: Καμπυλόγραμμας και καρτεσιανές συντεταγμένες (Ventsel et al., 2002)

Έστω τώρα τυχόν σημείο  $M$ , που ανήκει στην μέση επιφάνεια ενός κελύφους, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.3. Λόγω μίας παραμόρφωσης που δέχεται το κέλυφος, το σημείο  $M$  της απαραμόρφωτης μέσης επιφάνειας μετακινείται στο σημείο  $M_1$  της παραμορφωμένης μέσης επιφάνειας. Η μετατόπιση καθορίζεται από το διάνυσμα  $D$ . Οι προβολές του  $D$  πάνω στις διευθύνσεις των αξόνων  $x$ ,  $y$  και  $z$  του τοπικού συστήματος συντεταγμένων ορίζονται ως  $u$ ,  $v$  και  $w$ . Οι  $u$  και  $v$  είναι εφαπτομενικές μετατοπίσεις, ενώ  $w$  η βύθιση.



Σχ. 2.3: Η μέση επιφάνεια πριν (αριστερά) και μετά (δεξιά) την παραμόρφωση (Ventsel et al., 2002)

Έστω ότι υπάρχει και ένα σημείο  $M^z$  εντός του απαραμόρφωτου κελύφους σε απόσταση  $z$  από το σημείο  $M$ , που μετά την παραμόρφωση μετακινείται στο σημείο  $M_1^z$  του παραμορφωμένου και για την ταυτοποίηση της μετατόπισης αυτής χρησιμοποιείται το διάνυσμα  $D^z$ . Οι προβολές του  $D^z$  στους άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$  είναι οι  $u^z$ ,  $v^z$ ,  $w^z$  και μπορούν να εκφραστούν ως προς τις μετατοπίσεις του σημείου  $M$  ως:

$$u^z = u - z\theta_1 ,$$

$$v^z = v - z\theta_2 ,$$

όπου  $\theta_1$  και  $\theta_2$  είναι οι γωνίες στροφής της κάθετης ως προς την μέση επιφάνεια γύρω από τις εφαπτομένες των  $\alpha$  και  $\beta$ , όπου:

$$\theta_1 = \frac{u}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} ,$$

$$\theta_2 = \frac{v}{R_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} ,$$

με  $R_1$  και  $R_2$  τις ακτίνες καμπυλότητας της μέσης επιφάνειας στις 2 διευθύνσεις και  $A$  και  $B$  οι παράμετροι Lamé'.

Η παραδοχή του ότι το πάχος του κελύφους είναι μικρό συγκριτικά με τις άλλες διαστάσεις του μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι οι κατακόρυφες βυθίσεις των σημείων μιας ευθείας κάθετης στη μέση επιφάνεια είναι ίσες μεταξύ τους:  $w^z = w$ . Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το κέλυφος είναι ασυμπέστο ως προς το πάχος του.

Ορίζω ως  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  τις ορθές παραμορφώσεις ενός σημείου της μέσης επιφάνειας στις διευθύνσεις  $\alpha$  και  $\beta$  αντίστοιχα και  $\gamma_{12}$  την διαμητική παραμόρφωση. Αυτές μπορούν να εκφραστούν ως προς τις μετατοπίσεις  $u$ ,  $v$  και  $w$  ως:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v - \frac{w}{R_1} , \quad (2.1)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u - \frac{w}{R_2} , \quad (2.2)$$

$$\gamma_{12} = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) . \quad (2.3)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι λεπτές πλάκες στις εφαρμογές των μηχανικών έχουν λόγο  $z/R_{\min}$  που δεν ξεπερνά το 1%, οι αντίστοιχες σχέσεις των ανηγμένων παραμορφώσεων – μετατοπίσεων για ένα τυχαίο σημείο του κελύφους (δηλαδή σημείου που απέχει  $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$  από την μέση επιφάνειά του) είναι οι:

$$\varepsilon_1^z = \varepsilon_1 + z\chi_1 \quad , \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_2^z = \varepsilon_2 + z\chi_2 \quad , \quad (2.5)$$

$$\gamma_{12}^z = \gamma_{12} + 2z\chi_{12} \quad , \quad (2.6)$$

όπου  $\chi_1$  και  $\chi_2$  είναι οι καμπυλότητες λόγω κάμψης και  $\chi_{12}$  είναι η συστροφή της μέσης επιφάνειας λόγω της κάμψης του κελύφους. Οι σχέσεις που τις χαρακτηρίζουν είναι οι:

$$\chi_1 = - \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial B} \theta_2 \right) ,$$

$$\chi_2 = - \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial A} \theta_1 \right) ,$$

$$\chi_{12} = - \left[ \frac{1}{AB} \left( - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \frac{1}{R_1} \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{1}{R_2} \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) \right] .$$

Επίσης από την πρώτη παραδοχή Kirchhoff λαμβάνουμε  $\varepsilon_3 = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$ .

Οι εξισώσεις (2.4), (2.5) και (2.6) δείχνουν ότι οι παραμορφώσεις οποιουδήποτε σημείου σε όλο το κέλυφος εξαρτώνται από τις:

- α) εντός επιπέδου παραμορφώσεις της μέσης επιφάνειας ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ ) που εκφράζονται ως προς τις μετατοπίσεις της μέσης επιφάνειας και
- β) τις καμπυλότητες ( $\chi_1, \chi_2$ ) και την συστροφή ( $\chi_{12}$ ) που, όπως φαίνεται παραπάνω, επίσης εκφράζονται ως προς τις μετατοπίσεις της μέσης επιφάνειας.

Έτσι φαίνεται, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, το πώς μπορεί να μειωθεί το πρόβλημα της 3D παραμόρφωσης του κελύφους στο 2D πρόβλημα της παραμόρφωσης της μέσης επιφάνειάς του.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.1), (2.2) και (2.3) με:

$$A = B = 1, R_1 = R_2 = \infty \text{ και } \alpha = x, \beta = y \quad ,$$

λαμβάνουμε τις σχέσεις παραμόρφωσης – μετατόπισης της θεωρίας κάμψης των επίπεδων πλακών:

$$\varepsilon_1 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ,$$

$$\varepsilon_2 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ,$$

$$\gamma_{12} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} .$$

### 2.2.3 Συνθήκες ισορροπίας

Οι καταστατικές εξισώσεις συσχετίζουν την παραμόρφωση με τις τάσεις που αναπτύσσονται στο στοιχείο. Σύμφωνα με τον νόμο του Hooke αυτές είναι οι:

$$\varepsilon_1^z = \frac{1}{E} [\sigma_1^z - \nu(\sigma_2^z + \sigma_3^z)] , \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_2^z = \frac{1}{E} [\sigma_2^z - \nu(\sigma_1^z + \sigma_3^z)] , \quad (2.8)$$

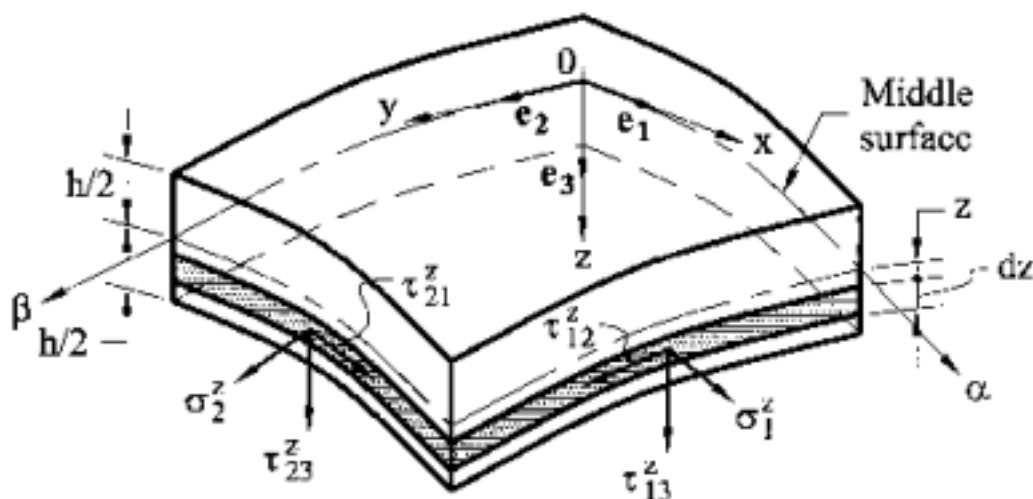
$$\varepsilon_3^z = \frac{1}{E} [\sigma_3^z - \nu(\sigma_2^z + \sigma_1^z)] , \quad (2.9)$$

$$\gamma_{12}^z = \frac{\tau_{12}^z}{G} , \quad (2.10)$$

$$\gamma_{13}^z = \frac{\tau_{13}^z}{G} , \quad (2.11)$$

$$\gamma_{23}^z = \frac{\tau_{23}^z}{G} , \quad (2.12)$$

όπου  $\sigma_1^z, \sigma_2^z, \sigma_3^z$  είναι οι ορθές τάσεις που δρουν στα επίπεδα τα οποία έχουν κάθετα διανύσματα παράλληλα με τις  $\alpha, \beta$  και  $z$  αντίστοιχα και  $\varepsilon_1^z, \varepsilon_2^z, \varepsilon_3^z$  είναι οι ορθές παραμορφώσεις στις ίδιες διευθύνσεις.  $\tau_{12}^z, \tau_{13}^z, \tau_{23}^z$  είναι οι διατμητικές τάσεις και  $\gamma_{12}^z, \gamma_{13}^z, \gamma_{23}^z$  οι διατμητικές παραμορφώσεις. Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχ. 2.4.



Σχ. 2.4: Ορθές και διατμητικές τάσεις στοιχείου κελύφους (Ventsel et al., 2002)

Εξαιτίας της πρώτης παραδοχής Kirchhoff μηδενίζονται οι παραμορφώσεις  $\varepsilon_3^z, \gamma_{13}^z, \gamma_{23}^z$ , όπως έχει ήδη αναφερθεί, και κατά συνέπεια και οι  $\tau_{13}^z, \tau_{23}^z$  και εξαιτίας της δεύτερης μηδενίζεται η  $\sigma_3^z$ .

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω και λύνοντας τις εξισώσεις (2.7), (2.8) και (2.10) ως προς τις τάσεις παίρνουμε τις καταστατικές εξισώσεις των τάσεων ως προς τις παραμορφώσεις:

$$\sigma_1^Z = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1^Z + \nu\varepsilon_2^Z) ,$$

$$\sigma_2^Z = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2^Z + \nu\varepsilon_1^Z) ,$$

$$\tau_{12}^Z = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{12}^Z .$$

Σε μητρική μορφή, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^Z \\ \sigma_2^Z \\ \tau_{12}^Z \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^Z \\ \varepsilon_2^Z \\ \gamma_{12}^Z \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Εάν δεν μηδενιζόταν η  $\varepsilon_3$ , τότε με αντικατάσταση των εξισώσεων (2.7) και (2.8) στην εξίσωση (2.9) και με δεδομένο ότι  $\sigma_3 = 0$ , προκύπτει ότι:

$$\varepsilon_3^Z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_1^Z + \varepsilon_2^Z) .$$

Αυτή η εξίσωση δείχνει ότι ο μηδενισμός της εκτός επιπέδου ορθής τάσης σε συνδυασμό με τον μηδενισμό της ορθής παραμόρφωσης στην ίδια διεύθυνση είναι ασυνεπής. Το σφάλμα που εισάγεται από τις ασυνέπειες της θεωρίας του Kirchhoff είναι της τάξης του  $h/R_i$  σε σύγκριση με την μονάδα, όπου  $h$  είναι το πάχος του κελύφους και  $R$  η ακτίνα καμπυλότητας της μέσης επιφάνειας. Παρόλα αυτά έχει γίνει η παραδοχή ότι το πάχος του κελύφους είναι μικρό συγκριτικά με τις άλλες διαστάσεις του, άρα και το σφάλμα είναι μικρό.

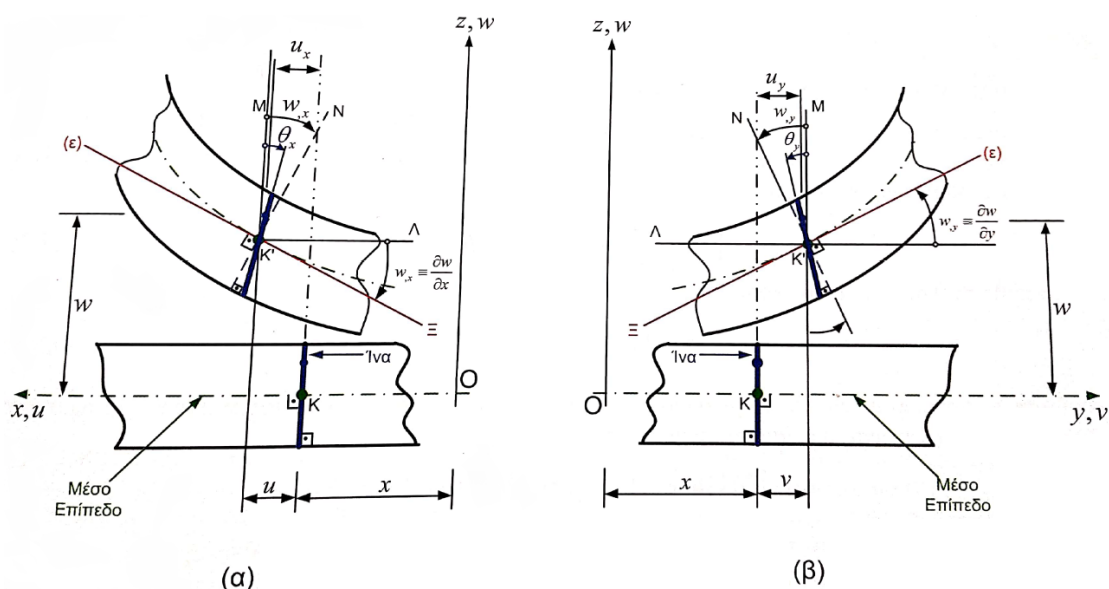
Στην ανάλυση παχιών κελυφών, η θεωρία Kirchhoff-Love εμφανίζει σφάλμα εξαιτίας του ότι αμελεί τη δράση των διατμητικών δυνάμεων που εμφανίζονται κατά την κάμψη (Προβατίδης, 2016). Αφού λοιπόν ολόκληρη η διατμητική ενέργεια αναλαμβάνεται από τις ορθές καμπτικές και τις μεμβρανικές τάσεις, οδηγούμαστε σε εκτίμηση μεγαλύτερης στιβαρότητας από την πραγματική. Το γεγονός αυτό την καθιστά, προφανώς, ακατάλληλη για ανάλυση παχιών κελυφών.

## 2.3 Θεωρία Κελύφους Reissner-Mindlin

### 2.3.1 Παραδοχές Reissner-Mindlin

Στην περίπτωση που το κέλυφος είναι παχύ, τότε η θεωρία Kirchhoff-Love είναι ανακριβής και έτσι αντί να εφαρμοστούν οι παραδοχές του Kirchhoff εφαρμόζονται αυτές του Mindlin (Προβατίδης, 2016, Παπαδρακάκης, 2001).

Η διαφορά των δύο θεωριών είναι ότι εδώ δεν ισχύει η πρώτη παραδοχή του Kirchhoff. Στην θεωρία Reissner-Mindlin η παραδοχή αυτή τροποποιείται ως εξής: Επίπεδες επιφάνειες, κάθετες στην μέση επιφάνεια του κελύφους (ή της πλάκας) πριν την παραμόρφωση, παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση, αλλά όχι αναγκαστικά κάθετες στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια του κελύφους, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.5.



Σχ. 2.5: Κάμψη πλάκας κατά την θεωρία Reissner-Mindlin (Προβατίδης, 2016)

### 2.3.2 Κινηματικές συνθήκες

Στην θεωρία Reissner-Mindlin λαμβάνονται υπόψιν τους και οι εκτός επιπέδου διατμητικές παραμορφώσεις  $\gamma_{23}$  και  $\gamma_{31}$ . Αυτές θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένες κατά την διεύθυνση του πάχους του κελύφους και εκφράζονται με την απόκλιση του παραμορφωμένου κατακόρυφου επιπέδου του κελύφους από το κάθετο επίπεδο της παραμορφωμένης μέσης επιφάνειάς του.

Έστω τυχόν σημείο  $K$ , που ανήκει στην μέση επιφάνεια μίας παχιάς πλάκας, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.5, το οποίο λόγω μίας παραμόρφωσης που δέχεται η πλάκα μετακινείται στο σημείο  $K'$  της παραμορφωμένης μέσης επιφάνειας. Για την πλάκα ισχύουν οι παραδοχές του Mindlin. Ως  $\theta_x$  και  $\theta_y$  συμβολίζονται οι γωνίες στροφής

μιας ευθείας γραμμής που ήταν κάθετη στην μέση επιφάνεια της απαραμόρφωτης πλάκας γύρω από τους άξονες  $x$  και  $y$ . Με  $w_{,x}$  και  $w_{,y}$  συμβολίζονται οι γωνίες στροφής της ίδιας ευθείας γραμμής της απαραμόρφωτης πλάκας με μία ευθεία κάθετη στην μέση επιφάνεια της παραμορφωμένης πλάκας που περνάει και αυτή από το σημείο  $K'$ . Οι διατμητικές παραμορφώσεις της πλάκας είναι ίσες με:

$$\gamma_{yz} = w_{,y} - \theta_y \quad ,$$

$$\gamma_{zx} = w_{,x} - \theta_x \quad .$$

Ο λόγος που οι στροφές  $\theta_x$  και  $\theta_y$  δεν είναι ίδιες με τις  $w_{,x}$  και  $w_{,y}$  είναι ότι εδώ μία επίπεδη επιφάνεια κάθετη στην μέση επιφάνεια της απαραμόρφωτης πλάκας δεν μένει κάθετη σε αυτήν στην παραμορφωμένη πλάκα. Ουσιαστικά στις παχιές πλάκες οι εγκάρσιες διατομές λαμβάνουν μια “πρόσθετη περιστροφή”, δηλαδή μία κάθετη ίνα, κατά την παραμόρφωση της πλάκας στρέφεται λιγότερο από ότι θα στρεφόταν αν ίσχυαν οι παραδοχές του Kirchhoff, γεγονός που συνδέεται με την εμφάνιση των εκτός επιπέδου διατμητικών τάσεων.

Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν οι κινηματικές συνθήκες για τα στοιχεία παχιών κελυφών (Viola and Artioli, 2004). Οι γωνίες  $\theta_x$  και  $\theta_y$  του στοιχείου της πλάκας ορίζονται για το αντίστοιχο στοιχείο κελύφους ως  $\Theta_1$  και  $\Theta_2$  με βασική διαφορά ότι εδώ οι γωνίες δεν είναι γύρω από τους άξονες  $x$  και  $y$  αλλά γύρω από τους καμπυλόγραμμους άξονες  $\alpha$  και  $\beta$  (Σχ. 2.2).

Οι εκτός επιπέδου διατμητικές παραμορφώσεις του κελύφους είναι:

$$\gamma_{23} = \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \Theta_1 + \frac{u}{R_1} \quad ,$$

$$\gamma_{31} = \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \Theta_2 + \frac{v}{R_2} \quad .$$

Έτσι, οι ουσιώδεις βαθμοί ελευθερίας που πρέπει να ταιριάζουν μεταξύ των συνεργαζόμενων στοιχείων είναι οι  $\Theta_1$  και  $\Theta_2$  όπως ορίστηκαν πιο πάνω, και όχι οι  $\frac{\partial w}{\partial \alpha}$  και  $\frac{\partial w}{\partial \beta}$ , που είναι οι αντίστοιχοι των  $\theta_1$  και  $\theta_2$  της θεωρίας Kirchhoff-Love.

Αυτό οδηγεί στο ότι σε αντιδιαστολή με την παραδοχή Kirchhoff, δεν εξαρτώνται οι μετατοπίσεις και οι παραμορφώσεις κάθε σημείου του κελύφους από τις 3 μετατοπίσεις των σημείων της μέσης επιφάνειας. Σε αυτές πρέπει τώρα να προστεθούν και οι στροφές  $\Theta_1$  και  $\Theta_2$ , με αποτέλεσμα συνολικά να υπάρχουν 5 ανεξάρτητοι βαθμοί ελευθερίας. Η χρήση αυτή των 2 επιπλέον στροφικών βαθμών



ελευθερίας οδηγεί στο ότι η θεωρία Reissner-Mindlin απαιτεί  $C^0$  συνέχεια, γεγονός που την κάνει ιδιαίτερα εύχρηστη στην ισοπαραμετρική ανάλυση. Αυτό οφείλεται στο ότι η  $C^0$  συνέχεια εξασφαλίζεται από τα πολώνυμα Lagrange που χρησιμοποιούνται ως συναρτήσεις σχήματος.

### 2.3.3 Συνθήκες ισορροπίας

Το μητρώο ελαστικότητας, που συνδέει το διάνυσμα των τάσεων με το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων, για την περίπτωση της θεωρίας Reissner-Mindlin, είναι ένα μητρώο διαστάσεων (5 x 5) αντί του μητρώου (3 x 3) (2.13) της θεωρίας Kirchhoff. Οι σχέσεις σ-ε της πλάκας Reissner-Mindlin προκύπτουν από τις αντίστοιχες σχέσεις της τρισδιάστατης ελαστικότητας του Hook (2.7)–(2.12) θέτοντας  $\varepsilon_3^z = \sigma_3^z = 0$  και λύνοντας ως προς  $\sigma_1^z, \sigma_2^z, \tau_{12}^z, \tau_{23}^z, \tau_{31}^z$ . Έτσι προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^z \\ \sigma_2^z \\ \sigma_3^z \\ \tau_{12}^z \\ \tau_{23}^z \\ \tau_{31}^z \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^z \\ \varepsilon_2^z \\ \varepsilon_3^z \\ \gamma_{12}^z \\ \gamma_{23}^z \\ \gamma_{31}^z \end{bmatrix}$$

Οι σχέσεις προέκυψαν με την παραδοχή της σταθερής κατανομής των διατμητικών τάσεων κατά μήκος του πάχους της πλάκας. Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η, πραγματική, παραβολική κατανομή των διατμητικών τάσεων οι  $\tau_{23}^z$  και  $\tau_{31}^z$  πολλαπλασιάζονται με έναν διορθωτικό συντελεστή  $c_s$ . Στην παρούσα διπλωματική εργασία ο συντελεστής αυτός είναι  $c_s = 5/6$ .

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι αφού η θεωρία Reissner-Mindlin λαμβάνει υπόψιν της όλες τις παραμορφώσεις, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την ανάλυση λεπτών κελυφών. Ωστόσο, τα αποτελέσματα που δίνει είναι λιγότερο ακριβή από αυτά της θεωρίας Kirchhoff-Love εξαιτίας φαινομένων παρασιτικής διατμητικής στοιβαρότητας που παρατηρούνται (shear locking). Παρόλα αυτά, εξαιτίας της ευκολίας της στην χρήση λόγω της  $C^0$  συνέχειας που απαιτεί (Echter, 2013), έχει γίνει εκτεταμένη έρευνα για την αντιμετώπιση αυτών των φαινομένων και σήμερα παρά το γεγονός ότι τα περισσότερα κελύφη στις εφαρμογές μηχανικών ανήκουν στην κατηγορία των λεπτών ή και πολύ λεπτών ( $1000 < R/h$ ) κελυφών, τα στοιχεία

Reissner-Mindlin είναι πιο ευρέως διαδεδομένα στους κώδικες πεπερασμένων στοιχείων.



## Κεφάλαιο 3    Ισογεωμετρική Ανάλυση

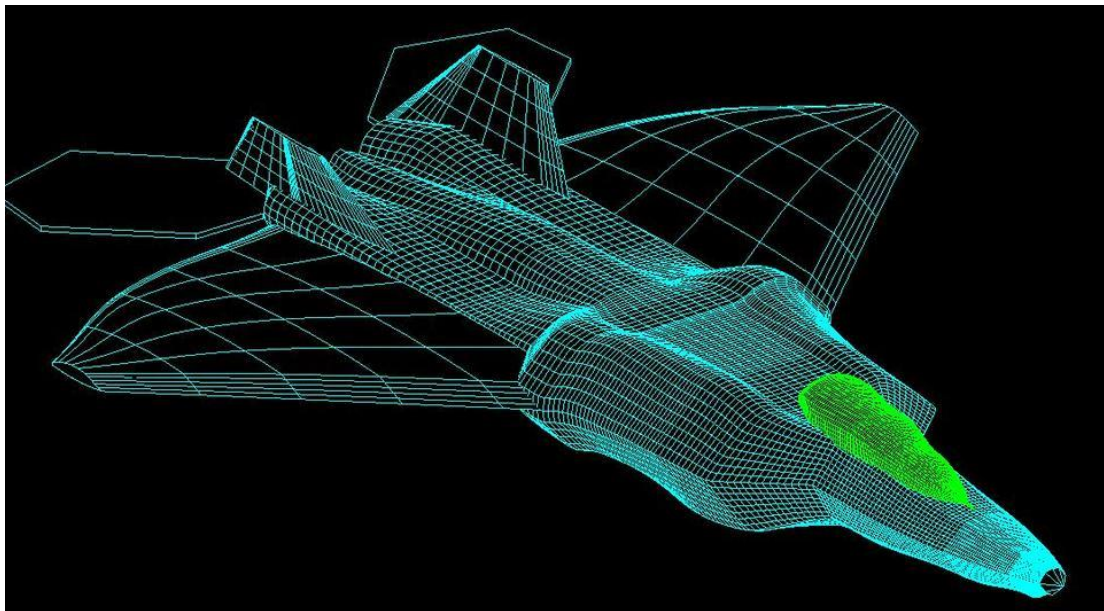
### 3.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, παρά την συνεχή εξέλιξή της, εξακολουθεί να έχει αρκετά μειονεκτήματα τα οποία προκύπτουν από την ίδια την φύση της μεθόδου. Ένα από αυτά είναι ότι η ανάλυση δεν μπορεί να γίνει στη αρχική γεωμετρία της κατασκευής. Έτσι ο μηχανικός καλείται να διακριτοποιήσει το προσομοίωμα που θα αναπτύξει ο σχεδιαστής. Η διαδικασία αυτή, εκτός του ότι τις περισσότερες φορές δεν μπορεί να γίνει με εντελώς αυτόματο τρόπο, είναι και επαναλαμβανόμενη.

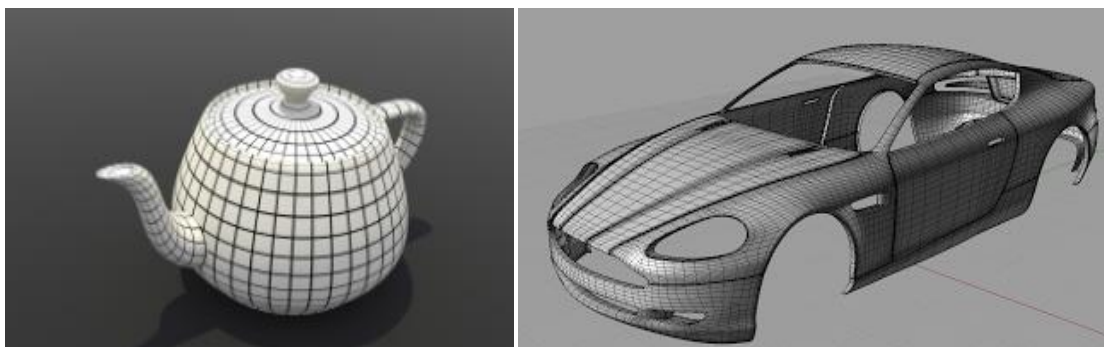
Τούτο συμβαίνει διότι μετά την ανάλυση δίνονται τα αποτελέσματα στον σχεδιαστή για να πραγματοποιήσει τις απαραίτητες αλλαγές στην γεωμετρία και μετά με την σειρά του αυτός δίνει το καινούριο μοντέλο στον μηχανικό για να το διακριτοποιήσει και να το αναλύσει. Η επαναλαμβανόμενη δημιουργία διακριτοποιήσεων αυξάνει την πιθανότητα λάθους από τον μηχανικό, αλλά και καθιστά την διαδικασία της ανάλυσης εξαιρετικά χρονοβόρα. Συγκεκριμένα, εκτιμάται ότι το κομμάτι της διακριτοποίησης της γεωμετρίας αποτελεί το 80% του συνολικού χρόνου που παίρνει η διαδικασία της ανάλυσης στην αυτοκινητοβιομηχανία, την αεροναυπηγική και την βιομηχανία κατασκευής πλοίων. Επιπλέον, το προσομοίωμα που θα δημιουργήσει ο μηχανικός αδυνατεί να αποτυπώσει την ακριβή γεωμετρική αναπαράσταση της κατασκευής και αντί αυτής προσφέρει μία προσεγγιστική. Αυτό ενδέχεται να προκαλέσει προβλήματα ακρίβειας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ανάλυση λεπτών κελυφών, η οποία είναι πολύ ευαίσθητη σε γεωμετρικές ατέλειες, καθώς και η ανάλυση προβλημάτων αλληλεπίδρασης ρευστών-στερεών.

Τέλος, ένα σημαντικό μειονέκτημα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι ότι αφού ολοκληρωθεί η πρώτη διακριτοποίηση του φορέα, η αρχική του γεωμετρία παύει να έχει κάποιον ρόλο στην διαδικασία των επιλύσεων. Αυτό σημαίνει ότι αν απαιτείται πυκνότερη διακριτοποίηση, θα πρέπει ο αλγόριθμος προσαρμογής (refinement) να επιστρέψει στην αρχική γεωμετρία και να δημιουργήσει μία καινούρια διακριτοποίηση. Η διαδικασία αυτή είναι χρονοβόρα και καθιστά αναγκαία, για κάθε επανάληψη προσαρμογής, την επικοινωνία με το πρόγραμμα σχεδίασης βοηθούμενο από υπολογιστή (Computer-Aided Design), που κάποιες φορές είναι αδύνατο.

Τα προβλήματα αυτά προκύπτουν από την αδυναμία της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων να ανταπεξέλθει στις νέες μεθόδους που χρησιμοποιούνται στα προγράμματα CAD. Ο ραγδαία αναπτυσσόμενος τομέας της υπολογιστικής γεωμετρίας στον οποία βασίζονται, αποτελεί πλέον αναπόσπαστο κομμάτι της διαδικασίας σχεδιασμού. Μέσω αυτής είναι πλέον δυνατός ο ακριβής σχεδιασμός προσομοιωμάτων με αρκετά σύνθετη γεωμετρία, όπως αυτοκινήτων και αεροπλάνων (Σχ. 3.2, Σχ. 3.2). Έχουν αναπτυχθεί, ανά τα χρόνια, πολλές υπολογιστικές μέθοδοι και αλγόριθμοι για την καταπολέμηση των παραπάνω φαινομένων, ωστόσο τα πεπερασμένα στοιχεία και ο σχεδιασμός βοηθούμενος από υπολογιστή έχουν από την φύση τους ένα χάσμα, που είναι αδύνατο να εξαφανιστεί. Το πρόβλημα αυτό καλείται να λύσει η ισογεωμετρική ανάλυση.



**Σχ. 3.1: Προσομοίωμα αεροπλάνου σε πρόγραμμα CAD**



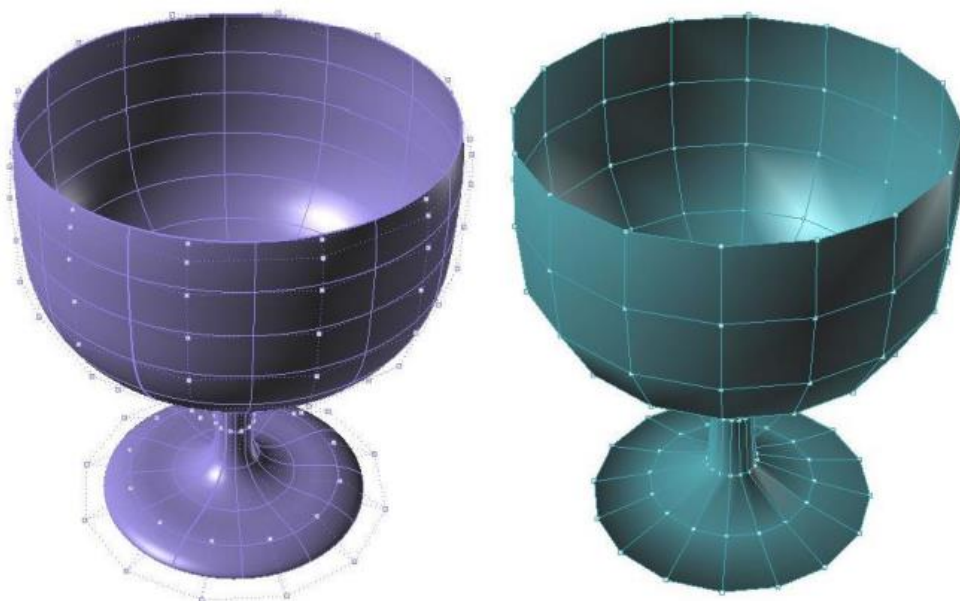
**Σχ. 3.2: Σχεδιασμός σχημάτων σύνθετης γεωμετρίας με χρήση καμπύλων NURBS**

Η ισογεωμετρική ανάλυση είναι μία καινοτόμα μέθοδος που ενώνει τον σχεδιασμό με την ανάλυση. Καίρια συμβολή στην ανάπτυξη της μεθόδου έχει ο Thomas J.R.

Hughes (Hughes et al., 2005), καθηγητής Αεροναυπηγικής και Τεχνικής Μηχανικής στο πανεπιστήμιο του Τέξας, στο Ώστιν. Η λογική της είναι να χρησιμοποιεί την ίδια γεωμετρία καννάβου κατά τον σχεδιασμό και την ανάλυση. Τούτο καθίσταται εφικτό χρησιμοποιώντας στην ανάλυση τις ίδιες συναρτήσεις που περιγράφουν την γεωμετρία στο στάδιο του σχεδιασμού. Έτσι, σε αντιδιαστολή με την κλασσική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, το μοντέλο που χρησιμοποιεί ο μηχανικός στην ανάλυση είναι ακριβώς ίδιο με αυτό που δημιουργεί ο σχεδιαστής (Σχ. 3.3, Σχ. 3.4).



**Σχ. 3.3:** Αρχική γεωμετρία ποτηριού με χρήση καμπυλών NURBS



**Σχ. 3.4:** Προσομοίωμα ποτηριού με πυκνή διακριτοποίηση με την μέθοδο της ισογεωμετρικής ανάλυσης (αριστερά) και με την κλασσική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (δεξιά)

Υπάρχουν πολλές γεωμετρικές μορφές που χρησιμοποιούνται από τα προγράμματα CAD οι οποίες είναι κατάλληλες για ανάλυση, όπως οι NURBS, οι T-SPLines, κ.α. Κάθε μία από αυτές έχει τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκαν αποκλειστικά καμπύλες NURBS, για τις οποίες γίνεται εκτεταμένη αναφορά στο Κεφάλαιο 3.4. Ωστόσο η χρήση καμπύλων NURBS δεν είναι απαραίτητη για ανάλυση με την μέθοδο της ισογεωμετρικής ανάλυσης, και αντί αυτών θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί πληθώρα άλλων συναρτήσεων ως συναρτήσεις σχήματος. Οι καμπύλες NURBS αποτελούν εξέλιξη των καμπύλων B-SPLines και δημιουργήθηκαν για να λύσουν το πρόβλημα των τελευταίων στην απεικόνιση κωνικών τομών. Έτσι για την καλύτερη κατανόηση των NURBS κρίνεται απαραίτητη η αναφορά στις B-SPLines (Κεφάλαιο 3.3).

Η προσαρμογή με αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού ή με προσθήκη κόμβων ήταν πάντα ένα μεγάλο μέρος της υπολογιστικής γεωμετρίας. Οι διαδικασίες αυτές, τις οποίες εκμεταλλεύεται η ισογεωμετρική ανάλυση και αναλύονται στο Κεφάλαιο 3.5, λύνουν πολλά από τα προβλήματα που αντιμετώπιζε η διαδικασία της διακριτοποίησης με την κλασική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Έτσι, μπορούν να γίνουν αλλαγές στην διακριτοποίηση του φορέα με πιο αποδοτικό τρόπο, που οδηγεί στο να γίνεται η διαδικασία πιο γρήγορα, να περιορίζεται η πιθανότητα λάθους από τον μηχανικό, αλλά και να μην χρειάζεται η συνεχής επικοινωνία με το πρόγραμμα CAD. Απαραίτητο κρίνεται να σημειωθεί, άλλη μία φορά, ότι και το αρχικό προσομοίωμα, καθώς και όλα τα επακόλουθα που μπορεί να προκύψουν από την διαδικασία της προσαρμογής είναι γεωμετρικά ακριβή.

Τέλος, αναφέρεται ότι η παρούσα διπλωματική εξετάζει φορείς οι οποίοι μπορούν να περιγραφούν με ένα patch.

### **3.2 Βασικά στοιχεία της ισογεωμετρικής ανάλυσης**

Η μέθοδος της ισογεωμετρικής ανάλυσης βασίζεται στο γεγονός ότι όταν σχεδιάζεται ένα προσομοίωμα σε ένα περιβάλλον CAD, δημιουργείται και η διακριτοποίηση αυτού με πεπερασμένα στοιχεία. Το φαινόμενο αυτό, αν και είναι αδιάφορο για τους σχεδιαστές, είναι μία επαναστατική παρατήρηση για την κοινότητα των μηχανικών. Σήμερα η πληροφορία αυτή μπορεί να φαίνεται προφανής, αλλά πήρε χρόνια έρευνας

μέχρι να μπορέσει να αξιοποιηθεί και να ενώσει τους τομείς της υπολογιστικής γεωμετρίας και της ανάλυσης με χρήση πεπερασμένων στοιχείων.

Βασική λογική της μεθόδου είναι η εξάλειψη των κόμβων που χρησιμοποιούνται στην κλασική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Την θέση τους παίρνουν τα διανύσματα κόμβων (knot vectors) και τα σημεία ελέγχου (control points).

### 3.2.1 Διανύσματα κόμβων

Ένας από τους παράγοντες που επηρεάζουν τον υπολογισμό των βασικών συναρτήσεων και εν συνεχεία θα καθορίσουν το σχήμα της καμπύλης είναι ένα διάνυσμα τιμών που ονομάζεται διάνυσμα κόμβων. Ένα διάνυσμα κόμβων σε μία διάσταση είναι ένα μη φθίνων σύνολο συντεταγμένων  $\xi_i$  στον παραμετρικό χώρο  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ , όπου  $\xi_i \in \mathbb{R}$  είναι ο  $i$ -οστός κόμβος (knot),  $i$  είναι ο δείκτης κόμβου (knot index) με  $i = 1, 2, \dots, n + p + 1$ ,  $p$  είναι ο πολυωνυμικός βαθμός, και  $n$  είναι ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή της καμπύλης (Cottrell et al., 2009). Η τιμή ενός κόμβου μπορεί να επαναλαμβάνεται περισσότερες από μία φορές. Ο αριθμός εμφάνισης του κάθε κόμβου ονομάζεται πολλαπλότητα (multiplicity) και έχει σημαντικές επιπτώσεις στις ιδιότητες της βάσης.

Κάθε φορέας μπορεί να χωριστεί σε κομβοδιαστήματα (knot spans). Οι κόμβοι είναι σημεία για μονοδιάστατες τοπολογίες, γραμμές για δισδιάστατες και επιφάνειες για τρισδιάστατες και αποτελούν τα σύνορα των κομβοδιαστημάτων. Επί της ουσίας, αποτελούν και τα όρια της επιρροής των συναρτήσεων σχήματος του προσομοιώματος και χωρίζουν τον φορέα σε πεπερασμένα στοιχεία.

Το διάνυσμα κόμβων θεωρείται ομοιόμορφο όταν οι κόμβοι είναι ομοιόμορφα μοιρασμένοι στον παραμετρικό χώρο. Σε αντίθετη περίπτωση, ονομάζεται ανομοιόμορφο. Τέλος ένα διάνυσμα κόμβων ονομάζεται ανοιχτό εάν οι τιμές του πρώτου και του τελευταίου κόμβου επαναλαμβάνονται  $p + 1$  φορές. Ονομάζεται ανοιχτό καθώς δημιουργεί μία ανοιχτή καμπύλη που είναι παρεμβalλόμενη στα ακραία σημεία της.

Οι τιμές των κόμβων δεν έχουν σημασία. Σημασία έχει η σχετική απόσταση που έχουν μεταξύ τους. Έτσι το διάνυσμα κόμβων μπορεί να πολλαπλασιαστεί με οποιονδήποτε αριθμό ή και να προστεθεί σε κάθε κόμβο μία συγκεκριμένη τιμή και οι συναρτήσεις βάσης που θα προέκυπταν θα εξακολουθούν να είναι οι ίδιες.



Στην παρούσα διπλωματική εργασία οι τιμές των κόμβων είναι στο διάστημα  $[0,1]$  και έχουν χρησιμοποιηθεί ανοιχτά διανύσματα κόμβων.

### 3.2.2 Σημεία ελέγχου

Ο σχεδιασμός μίας καμπύλης χρειάζεται, εκτός από τους κόμβους, και τις θέσεις των σημείων ελέγχου. Η ύπαρξη των σημείων ελέγχου δίνει την δυνατότητα του τοπικού ελέγχου της καμπύλης, που είναι μία πολύ χρήσιμη ιδιότητα των B-SPLines και των NURBS, καθώς καθιστά εφικτή την αλλαγή ενός μέρους της καμπύλης, ενώ η υπόλοιπη μένει ίδια. Αυτό συμβαίνει καθώς κάθε σημείο της καμπύλης επηρεάζεται από συγκεκριμένο αριθμό σημείων ελέγχου, με αποτέλεσμα η μετακίνηση κάποιων από αυτά να οδηγεί σε αλλαγή του αντίστοιχου τμήματος της καμπύλης, χωρίς όμως να επηρεάζει την υπόλοιπη καμπύλη ή την συνέχεια αυτής. Τμηματική γραμμική παρεμβολή των σημείων ελέγχου δημιουργεί την πολυγωνική γραμμή.

Τα σημεία ελέγχου είναι, σε κάποιον βαθμό, ανάλογα με τους κόμβους των κλασσικών πεπερασμένων στοιχείων. Αυτό συμβαίνει καθώς σε αυτά βρίσκονται οι βαθμοί ελευθερίας της κατασκευής, οι οποίοι αποτελούν τους αγνώστους του συστήματος. Παρόλα αυτά αναφέρεται ότι, σε αντίθεση με τους κόμβους των πεπερασμένων στοιχείων, συχνά βρίσκονται εκτός της γεωμετρίας του φορέα καθώς και ότι είναι δυνατόν, εάν χρησιμοποιούνται αρκετά ομαλές καμπύλες NURBS, η θέση κάποιων σημείων ελέγχου να αλλάξει σε μεγάλο βαθμό, αλλά η γεωμετρία του φορέα να μην επηρεαστεί ιδιαίτερα.

### 3.2.3 Χώροι σχετιζόμενοι με την ισογεωμετρική ανάλυση

Πριν γίνει αναφορά στις βασικές συναρτήσεις B-SPLines και τις ιδιότητες αυτών, είναι απαραίτητο να οριστούν οι διάφοροι χώροι που χρησιμοποιούνται στην ισογεωμετρική ανάλυση. Ήδη από μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι γνωστοί ο Καρτεσιανός χώρος στον οποίο γίνεται η απεικόνιση της πραγματικής κατασκευής, καθώς και ο Φυσικός χώρος που είναι απαραίτητος για την αριθμητική ολοκλήρωση στα σημεία Gauss. Σε αυτούς τους χώρους προσθέτονται δύο ακόμα όταν η ανάλυση γίνεται με την ισογεωμετρική μέθοδο (Nguyen et al., 2015). Ο πρώτος είναι ο Παραμετρικός χώρος, μέσα στον οποίο απεικονίζονται κατασκευές οποιασδήποτε γεωμετρίας ως γραμμές, ορθογώνια και κύβοι ανάλογα με το αν ο φορέας είναι καμπύλη, επιφάνεια ή στερεό. Ο τελευταίος χώρος ονομάζεται Index και είναι σημαντικός σε κάποιου είδους B-SPLines και απαραίτητος για τις NURBS. Οι χώροι αυτοί και οι ιδιότητές τους αναφέρονται εκτενέστερα παρακάτω.

### *Index χώρος*

Ο Index χώρος είναι μία αναπαράσταση του προσομοιώματος ως προς τις τιμές των κόμβων. Εάν το μοντέλο είναι καμπύλη στον Καρτεσιανό χώρο, τότε είναι μία ευθεία γραμμή στον Index που περιέχει τις τιμές του διανύσματος κόμβων με την σειρά σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους (Σχ. 3.7). Αντίστοιχα, αν στον Καρτεσιανό χώρο το μοντέλο είναι μία επιφάνεια ή ένα στερεό, στον Index θα δημιουργηθούν τετράγωνα ή κύβοι. Εξαιτίας των ιδιοτήτων των τανυστών, οτιδήποτε ισχύει για την μονοδιάστατη απεικόνιση ισχύει και για την δισδιάστατη και την τρισδιάστατη.

Η προσφορά του Index χώρου είναι η περιγραφή της συνεισφοράς κάθε κόμβου του διανύσματος κόμβων στην δημιουργία των βασικών συναρτήσεων B-SPLines.

### *Παραμετρικός χώρος*

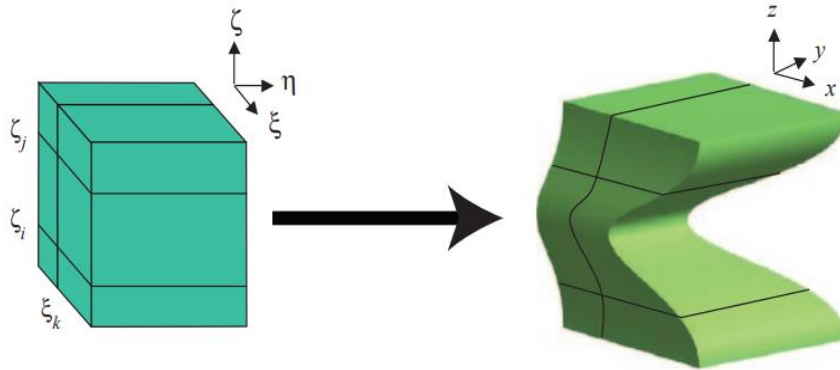
Ο Παραμετρικός χώρος είναι μία αναπαράσταση του μοντέλου ως προς τους ξεχωριστούς κόμβους (Σχ. 3.7). Έτσι σε αντίθεση με τον Index χώρο, εδώ ο κάθε κόμβος που έχει αυξημένη πολλαπλότητα εισάγεται ως ένα μόνο σημείο. Και σε αυτόν τον χώρο ισχύει ότι υπάρχουν μόνο γραμμές, επιφάνειες και κύβοι, οπότε η κάθε γεωμετρία του Καρτεσιανού χώρου θα πρέπει να μετασχηματιστεί κατάλληλα (Σχ. 3.5). Ο μετασχηματισμός αυτός από τον Καρτεσιανό στο Παραμετρικό χώρο και αντίστροφα είναι μία έννοια γνωστή από τα ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία, στα οποία γίνεται ο μετασχηματισμός από τον καρτεσιανό χώρο στον Φυσικό, οπότε η μεθοδολογία θεωρείται γνωστή.

Η απεικόνιση των συναρτήσεων βάσης στον Παραμετρικό χώρο βοηθάει στο να γίνει αντιληπτός ο ρόλος των κόμβων στην δημιουργία των συναρτήσεων βάσης (Σχ. 3.6). Κάθε κόμβος είναι η αρχή μίας συνάρτησης βάσης και το τέλος μίας άλλης. Κάποιες συναρτήσεις είναι μη-μηδενικές σε ίδια διαστήματα και επικαλύπτουν η μία την άλλη. Αυτές ελέγχουν και ένα κοινό μέρος του μοντέλου στον Καρτεσιανό χώρο.

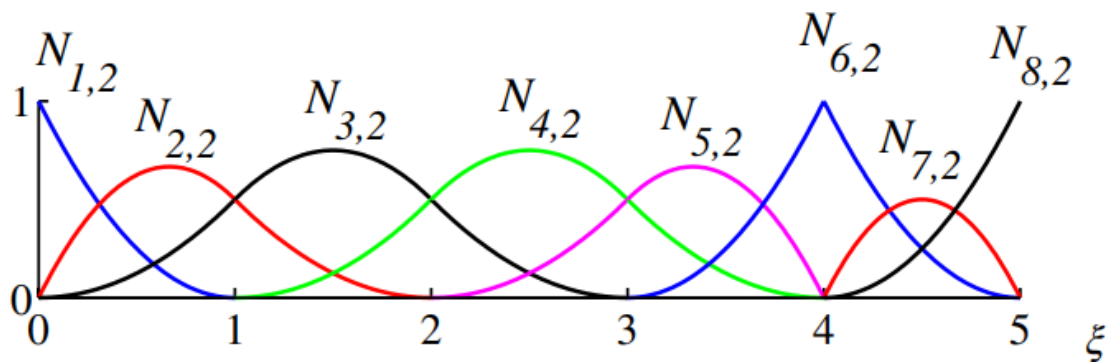
### *Καρτεσιανός χώρος*

Ο Καρτεσιανός χώρος είναι ο χώρος που απεικονίζεται το πραγματικό προσομοίωμα. Εκεί, φαίνονται τα σημεία ελέγχου στις καρτεσιανές τους συντεταγμένες, χωρίς να είναι απαραίτητα σημεία του προσομοιώματος, όπως ήδη αναφέρθηκε. Η απόστασή τους από την γεωμετρία εξαρτάται από την τιμή του βάρους τους, καθώς όσο μικρότερη είναι από την μονάδα, τόσο πιο απομακρυσμένο είναι το σημείο αυτό από την πραγματική γεωμετρία. Αυτός είναι και ο λόγος που οι συναρτήσεις NURBS και

οι SPLines γενικότερα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση τόσο μεγάλου εύρους γεωμετριών. Επίσης, φαίνονται οι κόμβοι οι οποίοι χωρίζουν την πραγματική επιφάνεια σε πεπερασμένα στοιχεία. Στο Σχ. 3.7 φαίνονται οι κόμβοι (με μπλε χρώμα), που είναι γραμμές καθώς το μοντέλο είναι μία επιφάνεια, να χωρίζουν τον φορέα στα επιμέρους στοιχεία.



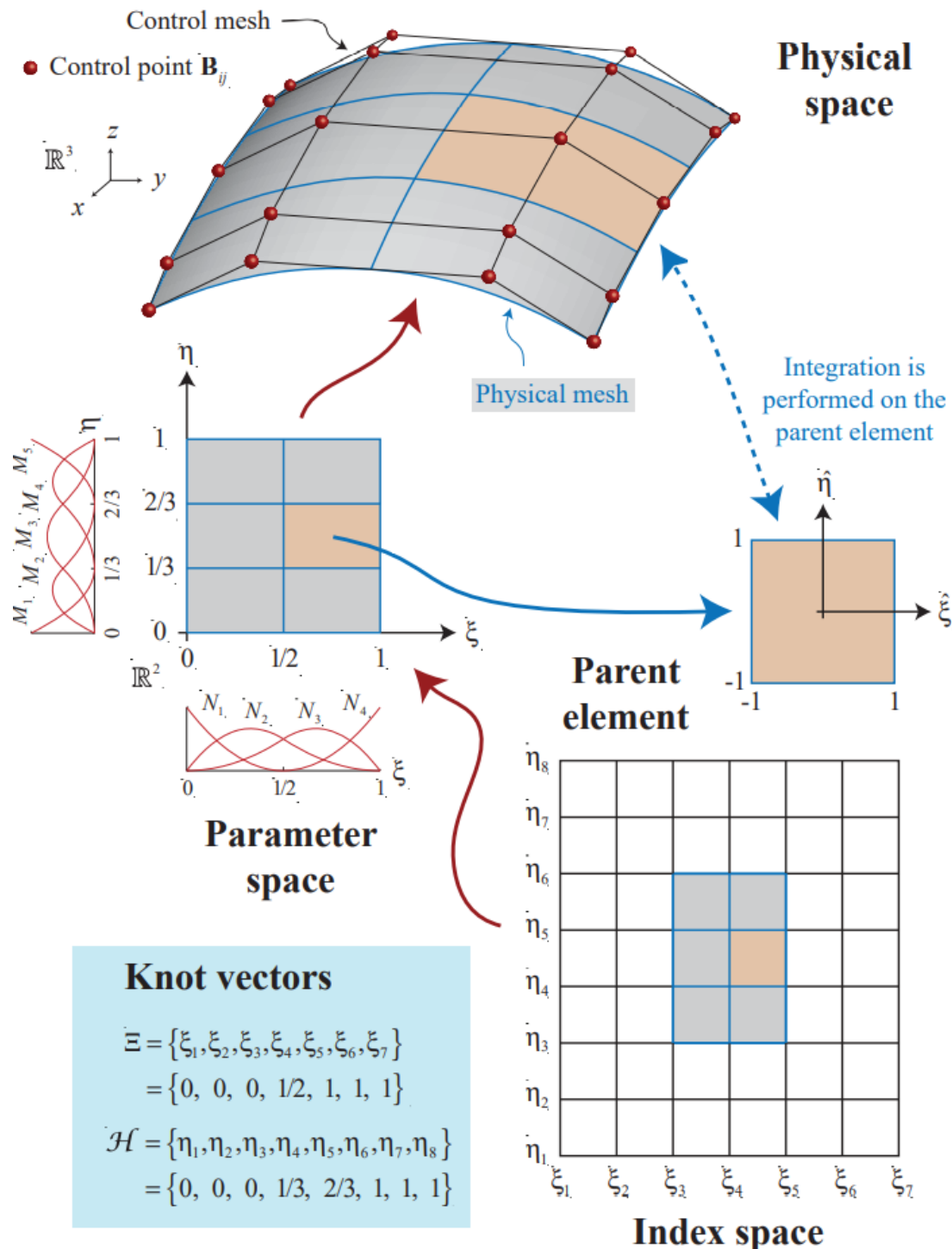
**Σχ. 3.5: Μετασχηματισμός του προσομοιώματος από τον Παραμετρικό χώρο (αριστερά) στον Καρτεσιανό (δεξιά) (Cottrell et al., 2009)**



**Σχ. 3.6: Συναρτήσεις βάσης στον Παραμετρικό χώρο του μη-ομοιόμορφου διανύσματος κόμβων  $\mathcal{E} = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5\}$  (Hughes et al., 2005)**

#### Φυσικός χώρος

Η έννοια του φυσικού χώρου είναι ήδη γνωστή από τα ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία. Ο χώρος αυτός είναι απαραίτητος για τις διαδικασίες αριθμητικής ολοκλήρωσης. Μπορεί και αυτός να έχει είτε μορφή ευθείας, είτε τετραγώνου, είτε κύβου, όπως και ο Παραμετρικός και ο Index χώρος, κάτι που εξαρτάται από την γεωμετρία του μοντέλου στο Καρτεσιανό χώρο. Η ανάλυση απαιτεί τον μετασχηματισμό κάθε στοιχείου από τον Παραμετρικό χώρο στον Φυσικό, ο οποίος σε κάθε του διεύθυνση μπορεί να πάρει τιμές στο διάστημα  $[-1,1]$ , όπως συχνά απαιτούν οι μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης.



Σχ. 3.7: Απεικόνιση όλων των χώρων που χρησιμοποιούνται στην ισογεωμετρική ανάλυση και συγκεκριμένα ο Καρτεσιανός χώρος (πάνω), ο Παραμετρικός χώρος (αριστερά), ο Φυσικός χώρος (δεξιά) και ο Index χώρος (κάτω). Στον Καρτεσιανό χώρο φαίνονται τα σημεία ελέγχου με κόκκινο, η πολυγωνική γραμμή με μαύρο και η επιφάνεια του μοντέλου με μπλε χρώμα. Τέλος φαίνονται τα διανύσματα κόμβων που χρησιμοποιήθηκαν (κάτω αριστερά). (Cottrell et al., 2009)

### 3.3 B-SPLines

#### 3.3.1 Βασικές συναρτήσεις B-SPLines

Οι καμπύλες B-SPLines δημιουργήθηκαν από τον Reisenfeld (1973) ως γενίκευση των καμπυλών Bézier. Έτσι, οι καμπύλες αυτές έχουν όλες τις ιδιότητες των καμπυλών Bézier με τις επιπλέον όμως ιδιότητες του τοπικού ελέγχου της καμπύλης, καθώς και την ανεξαρτησία του αριθμού των σημείων ελέγχου που χρησιμοποιούσαν από τον πολυωνυμικό βαθμό της καμπύλης.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι ορισμού των συναρτήσεων βάσης B-SPLines. Εδώ χρησιμοποιείται η αναδρομική φόρμουλα των de Boor και Cox (1972), καθώς είναι η πλέον εύχρηστη για υπολογιστικές εφαρμογές.

Με δεδομένο ένα διάνυσμα κόμβων  $\Xi$ , οι βασικές συναρτήσεις B-SPLines ορίζονται αναδρομικά ξεκινώντας με την βασική συνάρτηση μηδενικού βαθμού (σταθερά) (Hughes et al., 2005):

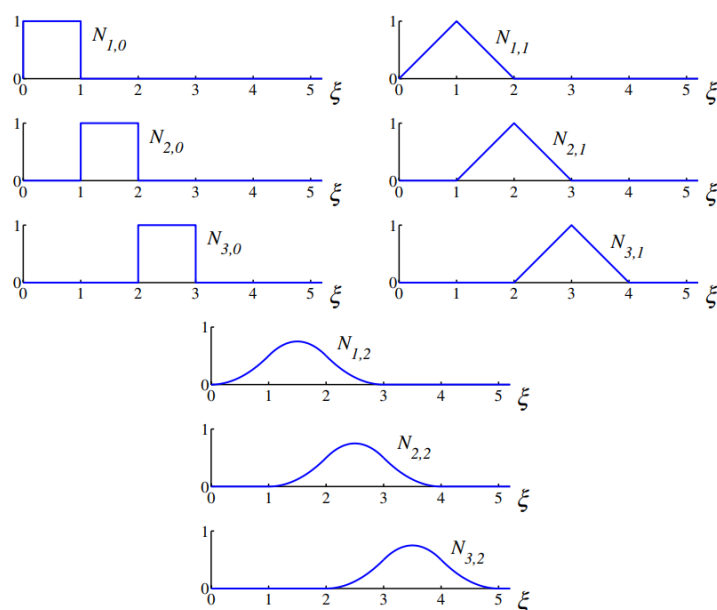
$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{αλλιού} \end{cases} ,$$

και για πολυωνυμικό βαθμό  $p \geq 1$ :

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) ,$$

όπου για κλάσματα με μορφή 0/0, γίνεται η παραδοχή ότι είναι ίσα με 0.

Παραδείγματα βασικών συναρτήσεων φαίνονται στο Σχ. 3.8.

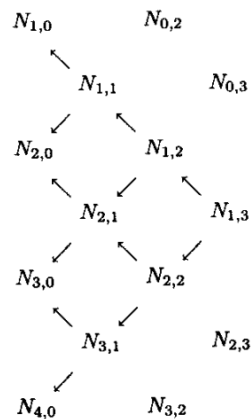


Σχ. 3.8: Βασικές συναρτήσεις με βαθμό 0, 1, 2 (Hughes, 2005)

### 3.3.2 Ιδιότητες βασικών συναρτήσεων B-SPLines

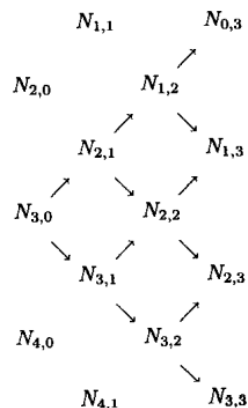
Οι βασικές συναρτήσεις B-SPLines έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες (Piegl and Tiller, 1996):

1. Ισχύει ότι  $N_{i,p}(\xi) = 0$  εάν το  $\xi$  είναι εκτός του διαστήματος  $[\xi_i, \xi_{i+p+1})$  (ιδιότητα τοπικής στήριξης). Η ιδιότητα αυτή προκύπτει από τον αναδρομικό χαρακτήρα των B-SPLines και εμφανίζεται καλύτερα στο Σχ. 3.9. Παρατηρείται ότι το  $N_{1,3}$  είναι συνδυασμός των  $N_{1,0}, N_{2,0}, N_{3,0}$  και  $N_{4,0}$ . Έτσι το  $N_{1,3}$  είναι μη μηδενικό μόνο για  $\xi \in [\xi_1, \xi_5)$ .



**Σχ. 3.9: Απεικόνιση των βασικών συναρτήσεων από τις οποίες προκύπτει η  $N_{1,3}$  (Piegl and Tiller, 1996)**

2. Σε κάθε κομβοδιάστημα,  $[\xi_j, \xi_{j+1})$ , είναι έως και  $p + 1$  από τις  $N_{i,p}$  μη μηδενικές, και συγκεκριμένα οι συναρτήσεις  $N_{j-p,p}, \dots, N_{j,p}$ . Η ιδιότητα αυτή φαίνεται στο Σχ. 3.10. Στο  $[\xi_3, \xi_4)$  η μόνη μη μηδενική συνάρτηση μηδενικού βαθμού είναι η  $N_{3,0}$ . Έτσι, οι μόνες κυβικές συναρτήσεις που είναι μη μηδενικές στο  $[\xi_3, \xi_4)$  είναι οι  $N_{0,3}, \dots, N_{3,3}$ .



**Σχ. 3.10: Απεικόνιση βασικών συναρτήσεων που προκύπτουν από την  $N_{3,0}$  (Piegl and Tiller, 1996)**

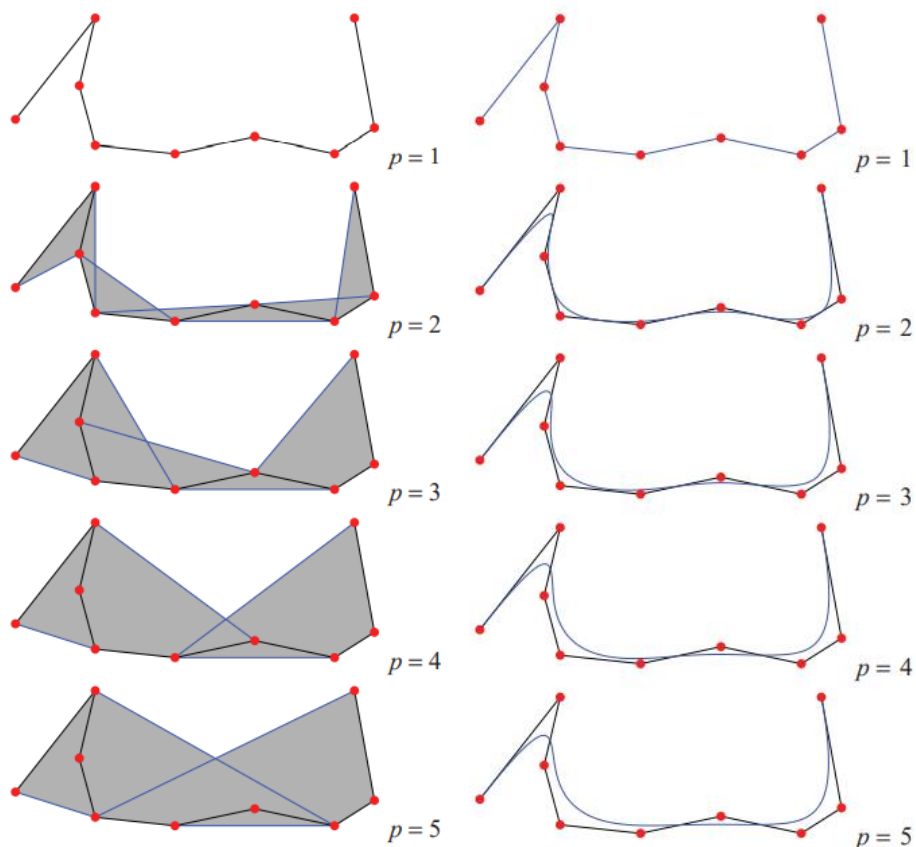
3.  $N_{i,p}(\xi) \geq 0$  για όλα τα  $i, p$ , και  $\xi$  (ιδιότητα μη-αρνητικότητας). Αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή ως προς το  $p$ .
4. Για ένα τυχαίο κομβοδιάστημα,  $[\xi_j, \xi_{j+1})$ ,  $\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(\xi) = 1$  για κάθε  $\xi \in [\xi_j, \xi_{j+1})$  (ιδιότητα αθροίσματος ίσο με την μονάδα).
5. Όλες οι παράγωγοι των  $N_{i,p}(\xi)$  εμφανίζονται στο εσωτερικό ενός κομβοδιαστήματος (στο οποίο είναι πολυώνυμο). Σε έναν κόμβο η  $N_{i,p}(\xi)$  είναι  $p - k$  φορές διαφορίσιμη, όπου  $k$  είναι η πολλαπλότητα του κόμβου. Έτσι, η αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού αυξάνει την συνέχεια, ενώ η αύξηση της πολλαπλότητας την μειώνει. Συνέχεια μικρότερη από την  $C^0$  δεν είναι αποδεκτή για εσωτερικούς κόμβους, που σημαίνει ότι μπορούν να έχουν μέχρι  $p$  πολλαπλότητα. Γενικά, η μείωση της συνέχειας έχει σαν αποτέλεσμα να γίνεται η βασική συνάρτηση πιο απότομη. Οι ακραίοι κόμβοι στα ανοιχτά διανύσματα κόμβων έχουν πάντα συνέχεια  $C^{-1}$ .
6. Εκτός από την περίπτωση του  $p = 0$ , η  $N_{i,p}(\xi)$  λαμβάνει ακριβώς μία μέγιστη τιμή.
7. Ένα ανοιχτό διάνυσμα κόμβων  $\Xi$  στο οποίο οι πρώτοι  $p + 1$  κόμβοι είναι ίσοι με το 0 και οι τελευταίοι  $p + 1$  κόμβοι είναι ίσοι με το 1, δίνει τα πολυώνυμα Bernstein βαθμού  $p$ , που υπεισέρχονται στην καμπύλη Bézier.
8. Έστω ότι  $\Xi$  είναι ένα ανοιχτό διάνυσμα κόμβων, με  $a$  την τιμή των πρώτων  $p + 1$  κόμβων,  $b$  την τιμή των τελευταίων  $p + 1$  κόμβων και  $m + 1$  τον συνολικό αριθμό των κόμβων του. Τότε υπάρχουν  $n + 1$  βασικές εξισώσεις, όπου  $n = m - p - 1$ . Επίσης ισχύει ότι  $N_{0,p}(a) = 1$  και  $N_{n,p}(b) = 1$ .

### 3.3.3 Ορισμός και ιδιότητες καμπυλών B-SPLines

Μία καμπύλη B-SPLine βαθμού  $p$  ορίζεται ως:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad ,$$

όπου  $a \leq \xi < b$ ,  $P_i$  τα σημεία ελέγχου, και  $\{N_{i,p}(\xi)\}$  οι B-SPLine βασικές συναρτήσεις βαθμού  $p$ , που ορίζονται στο ανοιχτό διάστημα  $\Xi$ , με  $m + 1$  κόμβους. Παράδειγμα καμπύλης B-SPLine μαζί με την πολυγωνική γραμμή της και της περιβάλλουσα καμπύλης φαίνονται στο Σχ. 3.11.



**Σχ. 3.11: Καμπύλη B-Spline με  $p=1, 2, 3, 4, 5$  βαθμό και η αντίστοιχες περιβάλλουσες καμπύλης (Cottrell et al., 2009)**

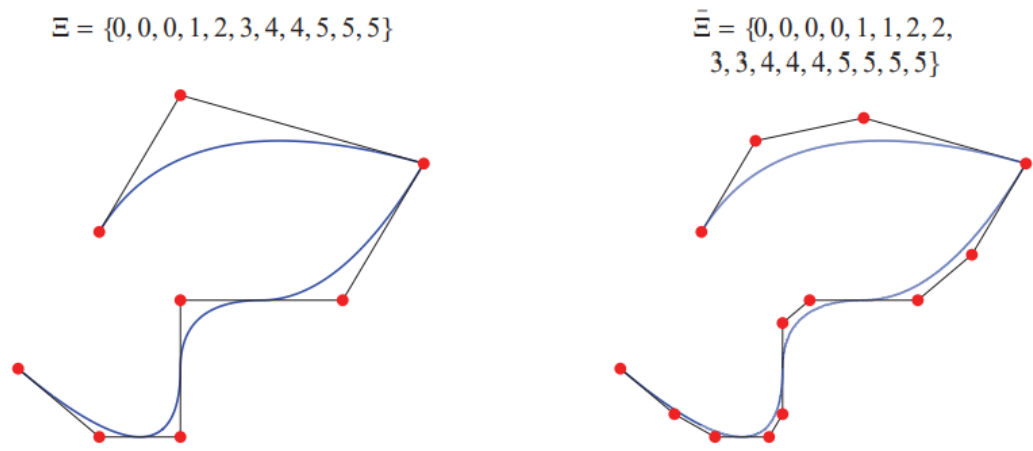
Οι ιδιότητες της ανοιχτής καμπύλης B-Spline είναι (Piegl and Tiller, 1996):

1. Εάν  $n = p$  και  $E = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ , τότε η  $C(\xi)$  είναι μία καμπύλη Βέζιερ.
2.  $C(\xi)$  είναι μία τμηματική πολυωνμική καμπύλη. Ο βαθμός της,  $p$ , συνδέεται με τον αριθμό των σημείων ελέγχου,  $n + 1$  και τον αριθμό των κόμβων,  $m + 1$  ως:  

$$m = n + p + 1 \quad .$$
3. Η καμπύλη περνάει από τα ακριανά σημεία ελέγχου και είναι εφαπτόμενη στην πολυγωνική γραμμή.
4. Κάθε μετασχηματισμός που εφαρμόζεται στην καμπύλη, μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας στα σημεία ελέγχου.
5. Η καμπύλη περιβάλλεται πλήρως στη περιβάλλουσα καμπύλης που δημιουργεί η πολυγωνική γραμμή, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.11.
6. Με την μετακίνηση ενός σημείου ελέγχου  $\mathbf{P}_i$  αλλάζει η καμπύλη μόνο στο εσωτερικό  $[\xi_j, \xi_{j+1})$ .



7. Η πολυγωνική γραμμή αντιπροσωπεύει μία τμηματική γραμμική προσέγγιση της καμπύλης. Η προσέγγιση αυτή βελτιώνεται σημαντικά με την προσθήκη κόμβων ή την αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.12.



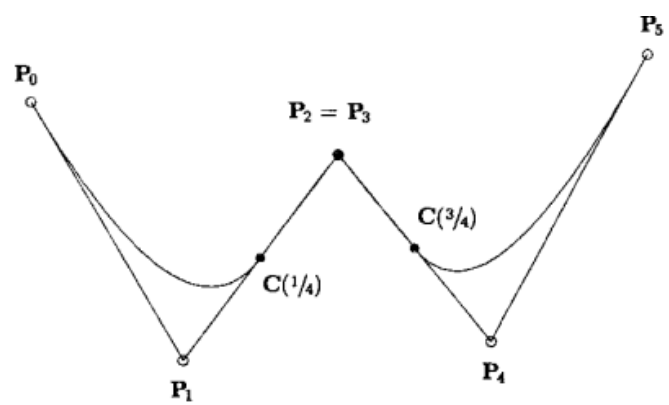
**Σχ. 3.12: Προσαρμογή με αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού (Cottrell et al., 2009)**

8. Πηγαίνοντας από το  $\xi = 0$  στο  $\xi = 1$ , οι  $N_{i,p}(\xi)$  λειτουργούν σαν διακόπτες. Όταν το  $\xi$  περάσει έναν κόμβο, μία  $N_{i,p}(\xi)$  και το αντίστοιχο σημείο ελέγχου σταματούν να ασκεί επιρροή και ο έλεγχος μεταφέρεται στο επόμενο σημείο.

9. Καμία γραμμή δεν έχει περισσότερες τομές με την καμπύλη, από ότι έχει με την πολυγωνική γραμμή.

10. Η συνέχεια και η διαφορισιμότητα της καμπύλης ακολουθεί εκείνη των  $N_{i,p}(\xi)$ . Έτσι είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό των διαστημάτων των κόμβων και τουλάχιστον  $p - k$  φορές συνεχείς και παραγωγίσιμη σε κόμβο με πολλαπλότητα  $k$ .

11. Είναι δυνατόν και πολλές φορές χρήσιμο να χρησιμοποιηθούν πολλαπλά σημεία ελέγχου στην ίδια θέση. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχ. 3.13.



**Σχ. 3.13: Καμπύλη με  $p=2$ ,  $\Xi = \{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\}$  (Piegl and Tiller, 1996)**

Αντίστοιχα, μία επιφάνεια B-SPLine προκύπτει από τον γραμμικό συνδυασμό των κατάλληλων βασικών συναρτήσεων κάθε διάστασης, το πλέγμα που των σημείων ελέγχων και τα δύο διανύσματα κόμβων. Η επιφάνεια B-SPLine ορίζεται ως:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{P}_{i,j} \quad .$$

### 3.3.4 Παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων B-SPLines

Οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων χρησιμοποιούνται συνεχώς στην ισογεωμετρική ανάλυση. Σε αυτές βασίζεται η μόρφωση των μητρώων στιβαρότητας και παραμορφώσεως. Οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων B-SPLines, όπως διαμορφώνονται με την αναδρομική φόρμουλα των de Boor και Cox ως:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad .$$

Επαναλαμβάνοντας τον παραπάνω τύπο  $k$  φορές, προκύπτει ο γενικός τύπος υπολογισμού της  $k$ -ιοστής παραγώγου  $N_{i,p}^{(k)}(\xi)$  μίας συνάρτησης  $N_{i,p}(\xi)$ .

$$N_{i,p}^{(k)} = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k a_{k,j} N_{i+j,p-k} \quad ,$$

με:

$$a_{0,0} = 1 \quad ,$$

$$a_{k,0} = \frac{a_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i} \quad ,$$

$$a_{k,j} = \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad , \quad \mu\epsilon \quad j = 1, \dots, k-1 \quad ,$$

$$\alpha_{k,k} = \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}} \quad ,$$

όπου  $k$  δεν έχει σημασία για τιμές μεγαλύτερες του  $p$ , καθώς οι παράγωγοι θα είναι ίσες με το 0.

## 3.4 NURBS

### 3.4.1 Γεωμετρικός ορισμός καμπύλων NURBS

Μία γενίκευση των B-SPLines που ονομάστηκε NURBS (Non-Uniform Rational B-SPLines) δημιουργήθηκε από τον Versprille το 1975. Αυτό που επιτυγχάνουν είναι

ότι καταφέρνουν να αποδώσουν επακριβώς τις κωνικές τομές και τις λεγόμενες γλυπτές επιφάνειες. Σήμερα οι καμπύλες NURBS είναι οι καμπύλες που χρησιμοποιούνται, κατά κύριο λόγο, για σχήματα ελεύθερης μορφής στα σχεδιαστικά προγράμματα CAD.

Μία οντότητα NURBS στον  $\mathbb{R}^d$  προκύπτει από τον προβολικό μετασχηματισμό μίας οντότητας B-Spline στον  $\mathbb{R}^{d+1}$  (Cottrell et al., 2009). Στο Σχ. 3.14 φαίνεται η διαδικασία αυτή για την δημιουργία ενός κύκλου στον  $\mathbb{R}^2$  από μία τμηματική δευτεροβάθμια B-Spline στον  $\mathbb{R}^3$ . Ο μετασχηματισμός εφαρμόζεται με την προβολή κάθε σημείου της καμπύλης στο  $z = 1$  επίπεδο με μία ακτίνα προς το σημείο αναφοράς. Τα σημεία ελέγχου της NURBS λαμβάνονται εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία στα σημεία ελέγχου της καμπύλης B-Spline. Από εδώ και πέρα, όπου αναγράφεται  $\mathbf{C}^w(\xi)$  είναι η καμπύλη B-Spline που ονομάζεται προβολική καμπύλη και είναι συσχετισμένη με τα προβολικά σημεία ελέγχου  $\mathbf{P}_i^w$ , ενώ οι όροι καμπύλη  $\mathbf{C}(\xi)$  και σημεία ελέγχου  $\mathbf{P}_i$  αναφέρονται στις NURBS.

Με δοσμένη μία προβολική καμπύλη B-Spline και τα προβολικά σημεία ελέγχου της, τα σημεία ελέγχου της καμπύλης NURBS προκύπτουν ως:

$$(\mathbf{P}_i)_j = \frac{(\mathbf{P}_i^w)_j}{w_i}, \quad \text{με } j = 1, \dots, d$$

$$w_i = (\mathbf{P}_i^w)_{d+1} \quad ,$$

όπου  $(\mathbf{P}_i)_j$  είναι το  $j$  στοιχείο του διανύσματος  $\mathbf{P}_i$  και ως  $w_i$  αναφέρεται το  $i$ -οστό βάρος. Τα βάρη επηρεάζουν άμεσα την NURBS γεωμετρία. Όταν παίρνουν τιμές  $> 1$  η καμπύλη πλησιάζει την πολυγωνική γραμμή, ενώ απομακρύνεται για βάρη  $< 1$  Σχ. 3.15. Όταν το βάρος είναι ίσο με 0, το συγκεκριμένο σημείο ελέγχου δεν επηρεάζει την γεωμετρία. Στο Σχ. 3.14, τα βάρη είναι οι  $z$  συντεταγμένες των προβολικών σημείων ελέγχου. Διαιρώντας τις προβολικά σημεία ελέγχου με τα βάρη είναι το αντίστοιχο του προβολικού μετασχηματισμού τους. Για να επιτευχθεί ο μετασχηματισμός αυτός για κάθε σημείο της καμπύλης ορίζεται η συνάρτηση:

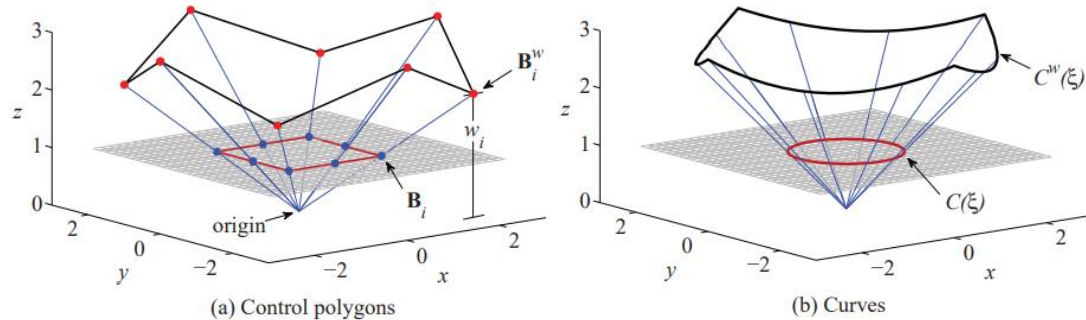
$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i \quad , \quad (3.1)$$

όπου  $N_{i,p}(\xi)$  οι B-Spline βασικές συναρτήσεις βαθμού  $p$ .

Η καμπύλη NURBS ορίζεται ως:

$$(\mathbf{C}(\xi))_j = \frac{(\mathbf{C}^w(\xi))_j}{W(\xi)} , \quad \mu\epsilon j = 1, \dots, d .$$

Αφού και οι  $\mathbf{C}^w(\xi)$  και η  $W(\xi)$  είναι τμηματικές πολυωνυμικές συναρτήσεις, η  $\mathbf{C}(\xi)$  είναι τμηματική ρητή συνάρτηση.



**Σχ. 3.14:** Σχηματισμός κύκλου στον  $\mathbb{R}^2$  με προβολικό μετασχηματισμό μίας τμηματικής δευτεροβάθμιας B-SPLine στον  $\mathbb{R}^3$ . Φαίνεται ο μετασχηματισμός της πολυγωνικής γραμμής (αριστερά) και της καμπύλης B-SPLine (δεξιά) (Cottrell et al., 2009).

### 3.4.2 Αλγεβρικός ορισμός και ιδιότητες καμπύλων NURBS

Μία καμπύλη NURBS βαθμού  $p$  ορίζεται ως:

$$\mathbf{C}(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i'=1}^n N_{i',p}(\xi) w_{i'}} , \quad (3.2)$$

όπου  $a \leq \xi < b$ ,  $\mathbf{P}_i$  τα σημεία ελέγχου,  $w_i$  είναι τα βάρη, και  $N_{i,p}(\xi)$  οι B-SPLine βασικές συναρτήσεις βαθμού  $p$ , που ορίζονται στο ανοιχτό διάστημα  $\Xi$  (Piegl and Tiller, 1996).

Γίνεται η παραδοχή ότι  $a = 0, b = 1$  και  $w_i > 0$  για κάθε  $i$ .

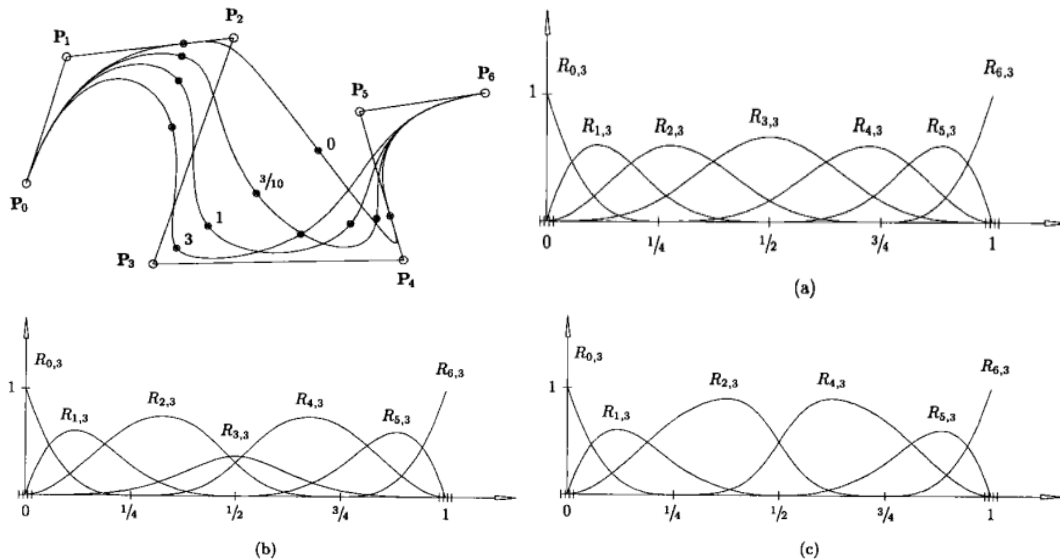
Εισάγοντας την εξίσωση:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i'=1}^n N_{i',p}(\xi) w_{i'}} , \quad (3.3)$$

στην εξίσωση (3.2) προκύπτει ότι:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i ,$$

όπου  $R_{i,p}(\xi)$  είναι οι ρητές βασικές συναρτήσεις. Αυτές είναι τμηματικές ρητές συναρτήσεις στο  $\xi \in [0,1]$ . Οι  $R_{i,p}(\xi)$  έχουν όλες τις ιδιότητες που έχουν οι βασικές συναρτήσεις  $N_{i,p}(\xi)$ . Στο Σχ. 3.15:Σχ. 3.15 φαίνεται η επιρροή των βαρών σε αυτές.



**Σχ. 3.15: Απεικόνιση ρητής κυβικής B-Spline καμπύλης για διάφορες τιμές του  $w_3$ , καθώς και οι κυβικές βασικές συναρτήσεις της καμπύλης. (α)  $w_3 = 1$ , (β)  $w_3 = 3/10$ , (γ)  $w_3 = 0$  (Piegl and Tiller, 1996)**

Για τις  $R_{i,p}(\xi)$  ισχύει, επίσης, ότι για κάθε  $a \neq 0$ , εάν  $w_i = a$  για κάθε  $i$ , τότε οι  $R_{i,p}(\xi) = N_{i,p}(\xi)$  για κάθε  $i$ . Αυτό σημαίνει ότι οι B-SPLines είναι ειδικές περιπτώσεις των NURBS.

Οι ιδιότητες της ανοιχτής καμπύλης NURBS είναι οι ίδιες με αυτές των καμπυλών B-SPLines. (Piegl and Tiller, 1996).

Οι ρητές συναρτήσεις για δύο διευθύνσεις καθορίζονται ως:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{i'=1}^n \sum_{j'=1}^m N_{i',p}(\xi)M_{j',q}(\eta)w_{i',j'}} \quad ,$$

όπου ο παρανομαστής είναι η συνάρτηση βάρους για δύο διευθύνσεις:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i'=1}^n \sum_{j'=1}^m N_{i',p}(\xi)M_{j',q}(\eta)w_{i',j'} \quad .$$

Τέλος, η επιφάνεια NURBS είναι ίση με:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad .$$

### 3.4.3 Παράγωγοι των συναρτήσεων NURBS

Οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων NURBS προκύπτουν από τις βασικές συναρτήσεις B-SPLines και τις παραγώγους αυτών (Cottrell et al., 2009). Η μονοδιάστατη συνάρτηση παραγώγου προκύπτει με παραγωγή της εξίσωσης (3.3) και είναι ίση με:

$$\frac{d}{d\xi} R_{i,p}(\xi) = \frac{\left(\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi)\right) W(\xi) - \left(\frac{d}{d\xi} W(\xi)\right) N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi))^2} ,$$

όπου:

$$\frac{d}{d\xi} W(\xi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi)\right) w_i .$$

Παράγωγοι υψηλότερου βαθμού μπορούν να γραφτούν ως όροι παραγώγων μικρότερου βαθμού ως:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} R_{i,p}(\xi) = \frac{A_i^{(k)}(\xi) - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} W^j(\xi) \frac{d^{(k-j)}}{d\xi^{(k-j)}} R_i^p(\xi)}{W(\xi)} ,$$

όπου:

$$A_i^{(k)}(\xi) = w_i \frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) ,$$

$$W^{(k)}(\xi) = \frac{d^k}{d\xi^k} W(\xi) ,$$

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} .$$

## 3.5 Προσαρμογή

Ο σχεδιαστής ενός προσομοιώματος, συνήθως, χρησιμοποιεί τον μικρότερο δυνατό αριθμό σημείων ελέγχου, καθώς και συναρτήσεις με μικρό πολυωνυμικό βαθμό. Έτσι, καταφέρνει να έχει καλό έλεγχο του σχήματος, ενώ παράλληλα διατηρεί χαμηλά το υπολογιστικό κόστος και ακριβή την αποτύπωση της γεωμετρίας. Ωστόσο, ένα αραιό πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων δεν δίνει ακριβή αποτελέσματα στον τομέα της ανάλυσης. Αυτό οφείλεται στο ότι κάθε σημείο ελέγχου επηρεάζει ένα μεγάλο μέρος του προσομοιώματος, με αποτέλεσμα μικρές αλλαγές στην θέση τους

να αντιστοιχούν σε σημαντικές αλλαγές στην γεωμετρία. Το γεγονός αυτό κάνει την ύπαρξη ενός πυκνότερου πλέγματος σημείων ελέγχου απαραίτητο. Έτσι, μειώνεται το μέρος της γεωμετρίας που επηρεάζεται από κάθε σημείο ελέγχου και αυξάνεται η επικάλυψη μεταξύ των βασικών συναρτήσεων, που οδηγούν σε ένα πιο ακριβές μητρώο στιβαρότητας, ενώ η γεωμετρία παραμένει ίδια.

Στην ισογεωμετρική ανάλυση, η πύκνωση του πλέγματος των σημείων ελέγχου γίνεται με τη διαδικασία της προσαρμογής. Η διαδικασία αυτή, παρουσιάζει σημαντικές ομοιότητες με την αντίστοιχη διαδικασία των πεπερασμένων στοιχείων, αλλά και κάποιες σημαντικές διαφορές. Οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να εμπλουτιστούν οι βασικές συναρτήσεις είναι τρεις και είναι η προσθήκη κόμβων, η αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού και η αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού που ακολουθείται από προσθήκη κόμβων. Παρακάτω αναλύονται οι τρεις αυτές τεχνικές και παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα που προσφέρουν.

### 3.5.1 Προσθήκη κόμβων

Προσθήκη κόμβων ονομάζεται η εισαγωγή ενός ή πολλαπλών κόμβων στο διάνυσμα κόμβων και είναι παρόμοια με την τεχνική της h-προσαρμογής των κλασικών πεπερασμένων στοιχείων όπου υποδιαιρεί ένα στοιχείο σε πολλά μικρότερα. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή είναι πιο ευέλικτη από την h-προσαρμογή, καθώς εδώ δίνεται η δυνατότητα εισαγωγής ενός κόμβου που ήδη υπάρχει αυξάνοντας την πολλαπλότητα του και μειώνοντας την συνέχεια, χωρίς την αλλαγή του πολυωνυμικού βαθμού. Η εισαγωγή κόμβων που ήδη υπάρχουν δεν παράγει καινούρια στοιχεία.

Ο διαχωρισμός του παραμετρικού χώρου, και κατά συνέπεια του φορέα, σε καινούρια στοιχεία με την εισαγωγή κόμβων απαιτεί τον υπολογισμό καινούριων βασικών συναρτήσεων και θέσεων των σημείων ελέγχου, έτσι ώστε να μένει ο φορέας γεωμετρικά και παραμετρικά αναλλοίωτος.

Έστω ένα διάνυσμα κόμβων  $\mathbf{X} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ . Το εκτεταμένο διάνυσμα κόμβων  $\mathbf{X}' = \{\xi'_1 = \xi_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+m+p+1} = \xi_{n+p+1}\}$ , έτσι ώστε  $\mathbf{X} \subset \mathbf{X}'$ . Οι καινούριες συναρτήσεις βάσεις προκύπτουν από το νέο διάνυσμα κόμβων  $\mathbf{X}'$  με την ίδια διαδικασία που έχει δείχτει στο Κεφάλαιο 3.3.1. Τα καινούρια  $n + m$  σημεία ελέγχου  $\mathbf{B}' = \{\mathbf{B}'_1, \mathbf{B}'_2, \dots, \mathbf{B}'_{n+m}\}^T$ , διαμορφώνονται με γραμμικό συνδυασμό των αρχικών σημείων ελέγχου  $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n\}^T$  ως:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T}^p \mathbf{B} \quad ,$$

όπου:

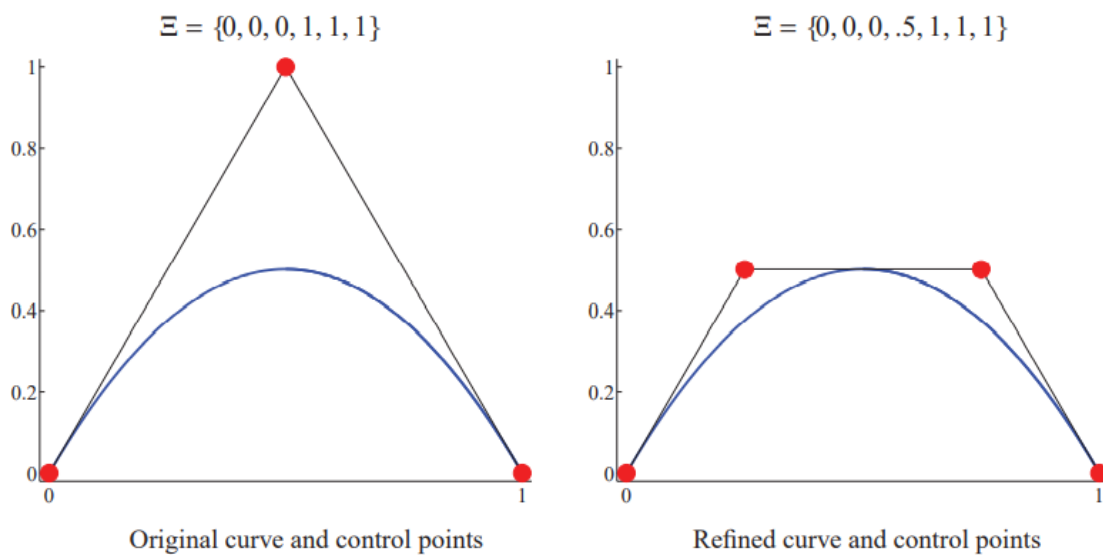
$$T_{ij}^0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } \xi_j \leq \xi'_i < \xi_{j+1} \\ 0 & \text{αλλιού} \end{cases},$$

με:

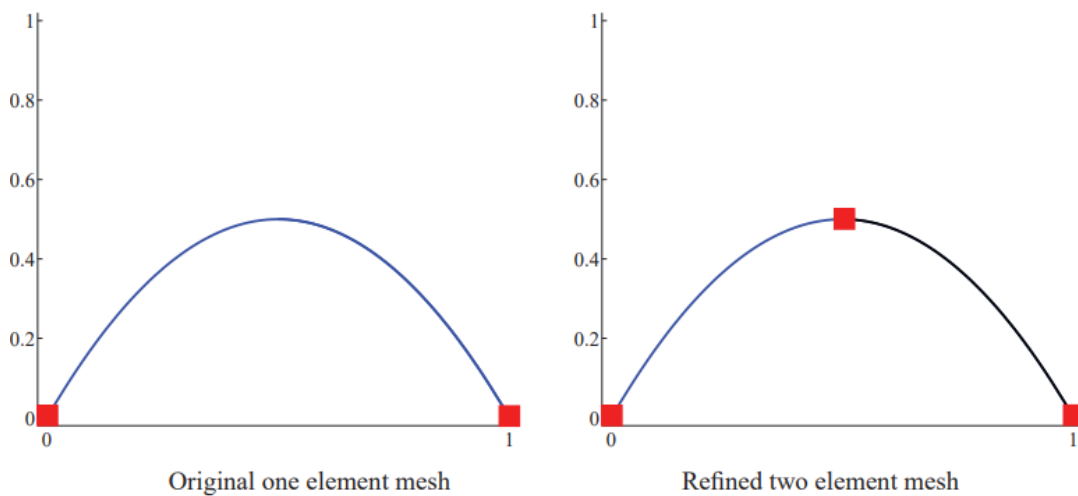
$$T_{ij}^{q+1}(\xi) = \frac{\xi'_{i+q} - \xi_j}{\xi_{j+q} - \xi_j} T_{ij}^q(\xi) + \frac{\xi_{j+q+1} - \xi'_{i+q}}{\xi_{j+q+1} - \xi_{j+1}} T_{ij+1}^q(\xi),$$

για  $q = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ .

Ένα παράδειγμα εισαγωγής κόμβων σε μία απλή, μονοδιάστατη καμπύλη αποτελούμενη αρχικά από ένα στοιχείο φαίνεται στα Σχ. 3.16, Σχ. 3.17 και Σχ. 3.18.

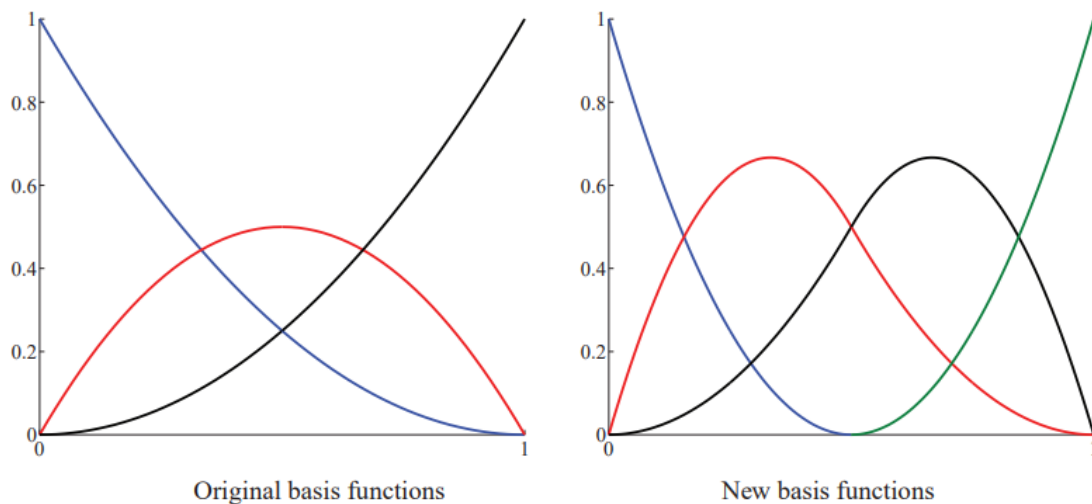


**Σχ. 3.16: Εισαγωγή κόμβων. Με κόκκινο φαίνονται τα σημεία ελέγχου, με μπλε η καμπύλη και με μαύρο η πολυγωνική γραμμή (Cottrell et al., 2009).**



**Σχ. 3.17: Εισαγωγή κόμβων. Με κόκκινο φαίνονται οι κόμβοι και με μπλε η καμπύλη (Cottrell et al., 2009).**





**Σχ. 3.18: Βασικές συναρτήσεις πριν (αριστερά) και μετά (δεξιά) την προσθήκη κόμβου (Cottrell et al., 2009)**

### 3.5.2 Αύξηση του πολωνυμικού βαθμού

Η αύξηση του πολωνυμικού βαθμού οδηγεί στην ενσωμάτωση του φορέα σε έναν διανυσματικό χώρο υψηλότερης διάστασης, χωρίς να αλλάζει η γεωμετρία και η παραμετροποίηση. Η μέθοδος αυτή είναι αντίστοιχη της  $p$ -προσαρμογής των κλασσικών πεπερασμένων στοιχείων και ίδια με αυτή στην περίπτωση που υπάρχει παντού  $C^0$  συνέχεια. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι ότι αρχικά υποδιαιρείται ο παραμετρικός χώρος σε Bézier, που είναι  $C^0$  συνεχή στοιχεία με διαδοχικές εισαγωγές κόμβων που ήδη υπάρχουν. Έτσι, ο αριθμός των στοιχείων δεν μεταβάλλεται. Ακολούθως, γίνεται αύξηση του πολωνυμικού βαθμού σε κάθε κομβοδιάστημα ούτως ώστε να επιτευχθεί ο επιθυμητός. Τέλος, αφαιρούνται οι πλεονάζοντες κόμβοι. Τα παραπάνω έχουν ως αποτέλεσμα την αύξηση του πολωνυμικού βαθμού, με την συνέχεια της βάσης να μένει ίδια.

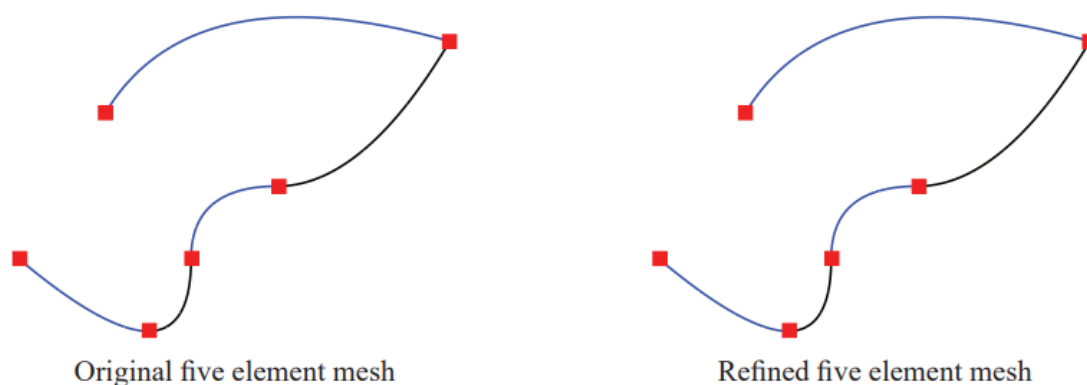
Η αύξηση του πολωνυμικού βαθμού απαιτεί τον επαναυπολογισμό της θέσης των σημείων ελέγχου, έτσι ώστε να διατηρηθεί αναλλοίωτη η γεωμετρία του φορέα. Τα νέα σημεία ελέγχου  $\{P\}$  υπολογίζονται από τα παλιά  $\{P'\}$  μαζί με τους συντελεστές  $\gamma_i$  σε ένα τμήμα Bézier. Η εξίσωση για την εύρεση της νέας θέσης των σημείων ελέγχου για ένα μονοδιάστατο μοντέλο με αύξηση του πολωνυμικού βαθμού κατά έναν βαθμό είναι:

$$P'_i = (1 - \gamma_i)P_i + \gamma_i P_{i-1} \quad ,$$

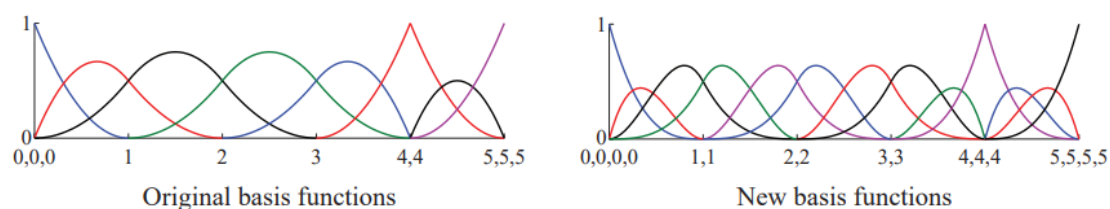
όπου:

$$\gamma_i = \frac{i - 1}{p + 1} \quad , \quad i = 1, \dots, p + 2 \quad .$$

Η παραπάνω διαδικασία απεικονίζεται στα Σχ. 3.12, Σχ. 3.19 και Σχ. 3.20.



**Σχ. 3.19: Αύξηση του πολωνυμικού βαθμού. Η γεωμετρία των καμπυλών, ο αριθμός των στοιχείων και οι τιμές των μοναδιαίων κόμβων μένουν ίδια (Cottrell et al., 2009).**



**Σχ. 3.20: Βασικές συναρτήσεις πριν (αριστερά) και μετά (δεξιά) την αύξηση του πολωνυμικού βαθμού (Cottrell et al., 2009)**

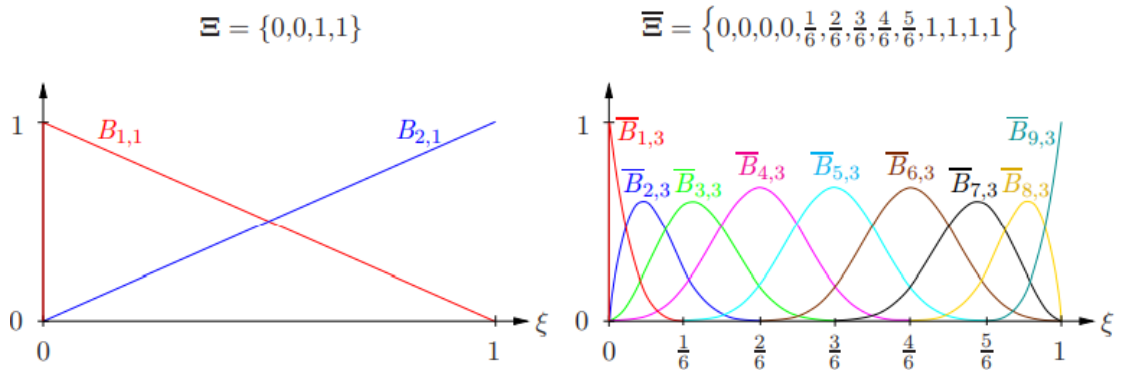
### 3.5.3 Αύξηση του πολωνυμικού βαθμού και προσθήκη κόμβων

Η  $k$ -προσαρμογή (Hughes et al., 2005) είναι μία καινοτόμα στρατηγική προσαρμογής που συνδυάζει τις προαναφερόμενες μεθοδολογίες και δεν υπάρχει κάτι ανάλογο με αυτήν στα κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία. Η διαδικασία που ακολουθείται στην  $k$ -προσαρμογή αποτελείται, ουσιαστικά, από την αύξηση, αρχικά, του πολωνυμικού βαθμού των βασικών συναρτήσεων στον επιθυμητό βαθμό και ύστερα από την εισαγωγή καινούριων κόμβων στο καινούριο διάλυσμα κόμβων.

Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι η μέγιστη δυνατή συνέχεια των βασικών συναρτήσεων NURBS μπορεί να επιτευχθεί μόνο αν η επιφάνεια αντιστοιχεί τοπολογικά σε ένα ορθογώνιο και έτσι μπορεί να προσομοιωθεί με χρήση ενός μόνο στοιχείου. Αυτό σημαίνει ότι περιορισμοί στην συνέχεια μεταξύ στοιχείων στην αρχική γεωμετρία θα μείνουν και μετά την προσαρμογή.

Στο Σχ. 3.21 φαίνεται μία γραμμική ( $p = 1$ ) βασική συνάρτηση B-Spline  $B_1(\xi)$  ενός ανοιχτού διαλύματος  $\Xi$  με ένα μόνο κομβοδιάστημα που ανυψώνεται ο πολωνυμικός βαθμός κατά δύο και ακολούθως γίνεται ομοιόμορφη προσαρμογή με την εισαγωγή πέντε ξεχωριστών κόμβων. Το νέο διάλυμα κόμβων  $\Xi'$  τώρα

υποδιαιρεί τον φορέα σε 6 στοιχεία. Η κυβική βασική συνάρτηση  $B'_3(\xi)$  έχει μέγιστη συνέχεια  $C^{p-1} = C^2$ .



**Σχ. 3.21: Τα διανύσματα κόμβων και οι βασικές συναρτήσεις B-SPLines αρχικά (αριστερά) και μετά από k-προσαρμογή (δεξιά) (Echter, 2013)**

Στην διπλωματική αυτή γίνεται εφαρμόζεται η μεθοδολογία της k-προσαρμογής.

## Κεφάλαιο 4 Στοιχείο IGA Kirchhoff-Love

### 4.1 Εισαγωγή

Πολλές κατασκευές μηχανικού προσομοιώνονται με βέλτιστο τρόπο ως λεπτά κελύφη. Η μέθοδος Kirchhoff-Love η οποία παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 2.2 είναι πρόσφορη για την ανάλυση λεπτών κελυφών καθώς αμελεί τις εκτός επιπέδου διατμητικές παραμορφώσεις.

Παρόλα αυτά, η ανάγκη της για  $C^1$  συνέχεια στο πεδίο των μετατοπίσεων είναι δύσκολο να επιτευχθεί σε γεωμετρίες ελεύθερης μορφής όταν εφαρμόζονται πολυώνυμα Lagrange ως συναρτήσεις βάσης (ισοπαραμετρική ανάλυση) και έχει οδηγήσει σε στοιχεία τύπου Reissner-Mindlin που απαιτούν  $C^0$  συνέχεια να είναι ευρέως διαδεδομένα σε κώδικες πεπερασμένων στοιχείων (Kiendl et al., 2009). Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι και τα στοιχεία αυτά δεν αντιμετωπίζουν δικά τους προβλήματα. Οι επιπλέον στρωφικοί βαθμοί ελευθερίας αυξάνουν το υπολογιστικό κόστος και οδηγούν σε προβλήματα σύγκλισης, ιδιαίτερα σε μεγάλες παραμορφώσεις. Επίσης, συντελούν στην εμφάνιση των φαινομένων της παρασιτικής διατμητικής στιβαρότητας όταν χρησιμοποιούνται για την ανάλυση λεπτών πλακών ή κελυφών.

Τα τελευταία χρόνια το ενδιαφέρον της ερευνητικής κοινότητας για την διατύπωση στοιχείων Kirchhoff-Love έχει αυξηθεί. Σε αυτή την τάση έχει συμβάλλει σημαντικά η ανάπτυξη των εργαλείων της ισογεωμετρικής ανάλυσης (Alaydin et al., 2021). Η αύξηση αυτή της χρήσης των στοιχείων Kirchhoff-Love οφείλεται σε δύο κύριους λόγους.

Πρώτον, πολλά αντικείμενα που αναλύουν οι μηχανικοί μπορούν να κατηγοριοποιηθούν τοπολογικά ως λείες επιφάνειες που μπορούν να αναπαρασταθούν ακριβώς με χρήση των Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS). Οι ίδιες αυτές NURBS συναρτήσεις βάσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην διακριτοποίηση, οδηγώντας την στο να είναι εντελώς γεωμετρικά ακριβής. Η ιδιότητα αυτή έχει καλή επιρροή στην ανάλυση μοντέλων κελύφους, που είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα σε μικρές ατέλειες.

Δεύτερον, η εγγενής τους υψηλή συνέχεια επιτρέπει την άμεση διακριτοποίηση της θεωρίας Kirchhoff-Love χρησιμοποιώντας μόνο τους μετακινησιακούς βαθμούς ελευθερίας της μέσης επιφάνειας. Αυτό επιτρέπει και μία άμεση ενσωμάτωση της

ισογεωμετρικής ανάλυσης σε συστήματα CAD (Computer-aided design), τα οποία συνήθως βασίζονται σε επιφανειακά γεωμετρικά μοντέλα.

## 4.2 Γεωμετρικές και κινηματικές σχέσεις

Η πρώτη παραδοχή του Kirchhoff είναι ότι μία κάθετη διατομή στην μέση επιφάνεια παραμένει κάθετη σε αυτήν και μετά την παραμόρφωση, με αποτέλεσμα ολόκληρο το κέλυφος να μπορεί να οριστεί από την μέση του επιφάνεια και ένα κάθετο σε αυτήν διάνυσμα. Η απεικόνιση της μέσης επιφάνειας παραμετροποιείται από τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες  $\xi^a$ . Οι ελληνικοί δείκτες παίρνουν τις τιμές  $\{1,2\}$ , ενώ οι λατινικοί δείκτες τις τιμές  $\{1,2,3\}$ . Τα διανύσματα και οι πίνακες αναγράφονται με έντονη γραφή για να ξεχωρίζουν από τα στοιχεία που περιέχουν.

Η παραμόρφωση των σημείων της μέσης επιφάνειας ορίζεται ως:

$$\mathbf{u}(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{x}(\xi^1, \xi^2) - \mathbf{X}(\xi^1, \xi^2),$$

όπου  $\mathbf{X}$  είναι το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου της μέσης επιφάνειας του κελύφους στην απαραμόρφωτη γεωμετρία και  $\mathbf{x}$  το διάνυσμα θέσης του ίδιου υλικού σημείου για την παραμορφωμένη (Nguyen-Thanh et al., 2015, Yang et al., 2019).

Από το διάνυσμα θέσης  $\mathbf{X}$  προκύπτουν τα συναλλοίωτα διανύσματα βάσης της μέσης επιφάνειας, τα οποία για την απαραμόρφωτη και την παραμορφωμένη γεωμετρία αντίστοιχα είναι τα  $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{X}_{,a}$  και  $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{x}_{,a}$ . Μια πληρέστερη ανάλυση για τα συναλλοίωτα και τα ανταλλοίωτα διανύσματα παρατίθεται στο Παράρτημα .

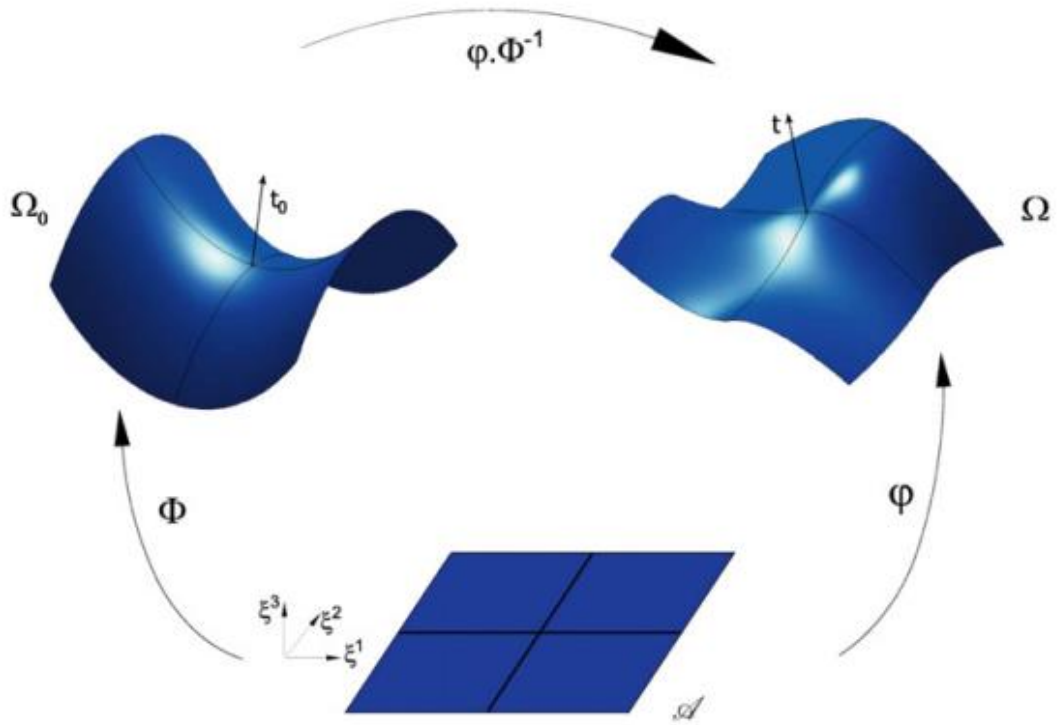
Τα διανύσματα θέσης ενός υλικού σημείου εντός του κελύφους απεικονίζονται στο Σχ. 4.1 και για την απαραμόρφωτη και την παραμορφωμένη γεωμετρία αντίστοιχα, είναι τα:

$$\Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{X}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{A}_3(\xi^1, \xi^2),$$

$$\varphi(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{x}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{a}_3(\xi^1, \xi^2),$$

όπου  $\xi^3$  είναι η συντεταγμένη κατά τη διεύθυνση του πάχους, με  $-\frac{t}{2} \leq \xi^3 \leq \frac{t}{2}$ , με  $t$  το πάχος του κελύφους και  $\mathbf{A}_3$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του σημείου της μέσης επιφάνειας με:

$$\mathbf{A}_3 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} .$$



**Σχ. 4.1:** Γεωμετρία κελύφους. Κάτω φαίνεται ο παραμετρικός χώρος και πάνω η γεωμετρία του κελύφους πριν και μετά την παραμόρφωση (Nguyen-Thanh et al., 2015)

Τα συναλλοίωτα διανύσματα βάσης ενός σημείου εντός του κελύφους ορίζονται ως  $\mathbf{G}_i = \Phi_{,i}$ , και μπορούν να εκφραστούν από τα συναλλοίωτα διανύσματα βάσης της μέσης επιφάνειας  $\mathbf{A}_i$  ως:

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha + \xi^3 \mathbf{A}_{3,\alpha} \quad ,$$

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{A}_3 \quad .$$

Οι συντελεστές του μετρικού τελεστή ενός σημείου του κελύφους είναι:

$$G_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - 2\xi^3 B_{\alpha\beta} + (\xi^3)^2 \mathbf{A}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} \quad , \quad (4.1)$$

$$G_{\alpha 3} = G_{3\alpha} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_3 + \xi^3 \mathbf{A}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 = 0 \quad ,$$

$$G_{33} = A_{33} = 1 \quad ,$$

όπου οι συντελεστές του μετρικού τελεστή της μέσης επιφάνειας  $A_{\alpha\beta}$  και της καμπυλότητας της μέσης επιφάνειας  $B_{\alpha\beta}$  προκύπτουν από τις παρακάτω σχέσεις:

$$A_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta \quad , \quad (4.2)$$

$$B_{\alpha\beta} = -\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} = -\mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{A}_{3,\alpha} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_{\alpha,\beta} \quad . \quad (4.3)$$

Καθώς το κέλυφος είναι λεπτό, ο όρος της εξίσωσης (4.1) που περιέχει το  $(\theta^3)^2$  αμελείται και η εξίσωση γίνεται:

$$G_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - 2\xi^3 B_{\alpha\beta} \quad . \quad (4.4)$$

Για τα ανταλλοίωτα διανύσματα βάσης ισχύει ότι:

$$\mathbf{G}^a = G^{a\beta} \mathbf{G}_\beta \quad ,$$

$$\mathbf{G}^3 = \mathbf{G}_3 \quad .$$

Όλα τα παραπάνω ισχύουν και για την παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα.

Ο παραμορφωσιακός τελεστής Green-Lagrange δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad , \quad (4.5)$$

όπου  $\mathbf{I}$  μοναδιαίος πίνακας και τα  $\mathbf{F}$  και  $\mathbf{F}^T$  είναι ίσα με:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^j \quad ,$$

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_j \quad .$$

Έτσι η εξίσωση (4.5) παίρνει την μορφή:

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad .$$

Τα στοιχεία του παραμορφωσιακού τελεστή Green-Lagrange δίνονται ως:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \quad .$$

Ωστόσο, οι εκτός επιπέδου παραμορφώσεις αγνοούνται με αποτέλεσμα η παραπάνω σχέση να παίρνει την μορφή:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) \quad .$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.4), προκύπτει ότι:

$$E_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \xi^3 \kappa_{\alpha\beta} \quad , \quad (4.6)$$

όπου οι  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  είναι οι μεμβρανικές παραμορφώσεις και δίνονται ως :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\alpha_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}) \quad ,$$

και  $\kappa_{\alpha\beta}$  είναι οι καμπυλότητες και δίνονται ως:

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\beta_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}) \quad .$$

Έτσι, η παραμόρφωση χωρίζεται σε δύο μέρη. Ένα σταθερό που αποδίδεται στην μεμβρανική δράση και ένα γραμμικό που αποδίδεται στην καμπτική.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις εξισώσεις (4.2) και (4.3), και τις αντίστοιχες εξισώσεις του παραμορφωμένου φορέα, οι μεμβρανικές παραμορφώσεις  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  και οι καμπυλότητες  $\kappa_{\alpha\beta}$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,\beta} - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,\beta}) \quad ,$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_{\alpha,\beta} - \alpha_3 \cdot \mathbf{A}_{\alpha,\beta} - \alpha_3 \cdot \mathbf{u}_{,\alpha\beta} \quad .$$

Οι δεύτεροι αυτοί παράγωγοι είναι ο λόγος που απαιτείται  $C^1$  συνέχεια από τις συναρτήσεις σχήματος.

### 4.3 Συνθήκες ισοροπίας

Οι τάσεις χωρίζονται και αυτές σε δύο μέρη και συγκεκριμένα στο διάνυσμα τάσεων  $\mathbf{n}$  και το διάνυσμα  $\mathbf{m}$ . Το πρώτο είναι ανάλογο των μεμβρανικών παραμορφώσεων και το δεύτερο είναι ανάλογο των καμπτικών παραμορφώσεων (καμπυλότητες), αντίστοιχα. Για ένα ισότροπο ελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας  $E$  και λόγο Poisson  $\nu$  ισχύει:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \end{bmatrix} = \frac{Et}{1 - \nu^2} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad (4.7)$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix} = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \quad , \quad (4.8)$$

$$\text{όπου } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} \quad \text{και}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (A^{11})^2 & \nu A^{11} A^{22} + (1 - \nu)(A^{12})^2 & A^{11} A^{12} \\ \vdots & (A^{22})^2 & A^{22} A^{12} \\ \text{symm} & \dots & \frac{1}{2} [(1 - \nu)A^{11} A^{22} - (1 - \nu)(A^{12})^2] \end{bmatrix}$$

$$\text{με } A^{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta \quad .$$



Η διατύπωση των συνθηκών ισορροπίας μεταξύ των εσωτερικών δυνάμεων και των εξωτερικών φορτίων προκύπτει με την χρήση της αρχής των δυνατών έργων, η οποία εκφράζεται ως:

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad , \quad (4.9)$$

όπου  $\delta W_{int}$  είναι η μεταβολή του δυνατού έργου των εσωτερικών δυνάμεων και  $\delta W_{ext}$  είναι η μεταβολή του δυνατού έργου των εξωτερικών φορτίων.

$$\delta W_{int} = \int_A (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{n} + \delta \boldsymbol{\kappa}^T \cdot \mathbf{m}) j d\xi^1 d\xi^2 \quad ,$$

όπου  $j = \|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|$ .

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις καταλήγει κανείς στην εξίσωση:

$$\delta W_{int} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_A \left( t \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{t^3}{12} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} \right) j d\xi^1 d\xi^2 \quad . \quad (4.10)$$

Όσον αφορά την  $\delta W_{ext}$  ισχύει ότι:

$$\delta W_{ext} = \int_{\Omega_0} (\mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{u}) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_t} (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u}) d\Gamma \quad , \quad (4.11)$$

όπου  $\delta \mathbf{u}$  η μεταβολή της μετατόπισης και  $\mathbf{q}$  και  $\mathbf{p}$  οι μαζικές και επιφανειακές δυνάμεις αντίστοιχα.

#### 4.4 Διακριτοποίηση και μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας

Η απεικόνιση της επιφάνειας του κελύφους δημιουργείται με παρεμβολή των σημεία ελέγχου με χρήση των συναρτήσεων NURBS.

$$\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^{Nn} R_i(\xi^1, \xi^2) \mathbf{P}_i \quad , \quad (4.12)$$

όπου  $R$  οι συναρτήσεις NURBS και  $\mathbf{P}$  είναι οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου. Ο αριθμός  $Nn$  ουσιαστικά δηλώνει το πλήθος των σημείων ελέγχου που είναι συσχετισμένα με το συγκεκριμένο στοιχείο και είναι ίσος με  $n \times m$ , με  $n$  και  $m$  το πλήθος των σημείων ελέγχου από την κάθε μεριά. Ο δείκτης  $i$  παίρνει τιμές από 1 έως  $Nn$  και αναλόγως με την τιμή του αναφέρεται στο αντίστοιχο σημείο ελέγχου του στοιχείου.

Το πεδίο των μετατοπίσεων δημιουργείται με την παρεμβολή μόνο των μετατοπίσεων των σημείων ελέγχου, καθώς δεν υπάρχουν στροφικοί βαθμοί ελευθερίας και προκύπτει ως:

$$\mathbf{u}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^{Nn} R_I(\xi^1, \xi^2) \mathbf{u}_I \quad , \quad (4.13)$$

με  $\mathbf{u}_I$  να δηλώνει την μετατόπιση του εκάστοτε σημείου ελέγχου του στοιχείου.

Οι μεμβρανικές παραμορφώσεις προκύπτουν από την μετατόπιση των σημείων ελέγχου και είναι ίσες με:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^{Nn} \mathbf{B}_I^m(\xi^1, \xi^2) \mathbf{u}_I \quad , \quad (4.14)$$

$$\text{με } \mathbf{B}_I^m = \begin{bmatrix} R_{I,1} \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_1 & R_{I,1} \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_2 & R_{I,1} \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_3 \\ R_{I,2} \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_1 & R_{I,2} \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_2 & R_{I,2} \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_3 \\ (R_{I,2} \mathbf{A}_1 + R_{I,1} \mathbf{A}_2) \mathbf{e}_1 & (R_{I,2} \mathbf{A}_1 + R_{I,1} \mathbf{A}_2) \mathbf{e}_2 & (R_{I,2} \mathbf{A}_1 + R_{I,1} \mathbf{A}_2) \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} ,$$

όπου  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  και  $\mathbf{e}_3$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων.

Οι καμπτικές παραμορφώσεις προκύπτουν με αντίστοιχο τρόπο και είναι ίσες με:

$$\boldsymbol{\kappa}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^{Nn} \mathbf{B}_I^b(\xi^1, \xi^2) \mathbf{u}_I \quad , \quad (4.15)$$

$$\text{με } \mathbf{B}_I^b = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1I} \mathbf{e}_1 & \mathbf{B}_{1I} \mathbf{e}_2 & \mathbf{B}_{1I} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{B}_{2I} \mathbf{e}_1 & \mathbf{B}_{2I} \mathbf{e}_2 & \mathbf{B}_{2I} \mathbf{e}_3 \\ 2\mathbf{B}_{3I} \mathbf{e}_1 & 2\mathbf{B}_{3I} \mathbf{e}_2 & 2\mathbf{B}_{3I} \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} ,$$

όπου:

$$\mathbf{B}_{1I} = -R_{I,11} + \frac{1}{j} [R_{I,1} (\mathbf{A}_{1,1} \times \mathbf{A}_2) + R_{I,2} (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_{1,1})] + \frac{\mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_{1,1}}{j} [R_{I,1} (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3) + R_{I,2} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_1)]$$

$$\mathbf{B}_{2I} = -R_{I,22} + \frac{1}{j} [R_{I,1} (\mathbf{A}_{2,2} \times \mathbf{A}_2) + R_{I,2} (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_{2,2})] + \frac{\mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_{2,2}}{j} [R_{I,1} (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3) + R_{I,2} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_1)]$$

$$\mathbf{B}_{3I} = -R_{I,12} + \frac{1}{j} [R_{I,1} (\mathbf{A}_{1,2} \times \mathbf{A}_2) + R_{I,2} (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_{1,2})] + \frac{\mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_{1,2}}{j} [R_{I,1} (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3) + R_{I,2} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_1)]$$

$$\text{με } j = \|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|.$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.7)–(4.15) (Zareh and Qian, 2019) προκύπτει ένα σετ γραμμικών εξισώσεων,  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$  , ώστε να βρεθούν οι άγνωστοι  $\mathbf{u}$ , που όπως έχει

αναφερθεί είναι οι μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου με  $\mathbf{K}$  να είναι το καθολικό μητρώο στιβαρότητας και  $\mathbf{f}$  το διάνυσμα των δυνάμεων. Για την μόρφωση αυτού αρχικά υπολογίζεται το:

$$\mathbf{K}_{IJ} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_A (h(\mathbf{B}_I^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J^m + \frac{t^3}{12} (\mathbf{B}_I^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J^b) j d\xi^1 d\xi^2 \quad , \quad (4.16)$$

για κάθε ζεύγος I,J για κάθε στοιχείο.

Η συνεισφορά ως προς την δύναμη του I σημείου ελέγχου ενός στοιχείου είναι ίση με:

$$\mathbf{f}_I = \int_A \mathbf{q} R_I j d\xi^1 d\xi^2 + \int_{\partial A} \mathbf{p} R_I \|\mathbf{X}_{,t}\| dl_\xi \quad .$$

Το κάθε σημείο ελέγχου εκτός από την τοπική αρίθμηση του εντός κάθε πεπερασμένου στοιχείου που ανήκει, έχει και μία καθολική αρίθμηση. Έστω ότι η αρίθμηση αυτή φαίνεται με τον δείκτη  $I'$ , που παίρνει τιμές από 1 έως  $Nn'$ . Ο αριθμός  $Nn'$  δηλώνει το πλήθος των σημείων ελέγχου του σχήματος και είναι ίσος με  $n' \times m'$ , όπου  $n'$  και  $m'$  το πλήθος των σημείων ελέγχου ανά πλευρά.

Η μόρφωση του καθολικού μητρώου στιβαρότητας προκύπτει από την τοποθέτηση των υπό-μητρώων  $\mathbf{K}_{IJ}$  στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας  $\mathbf{K}$  στην θέση με γραμμή  $I'$  και στήλη  $J'$ . Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι να ολοκληρωθεί για κάθε  $\mathbf{K}_{IJ}$  κάθε πεπερασμένου στοιχείου, με την παρατήρηση ότι σε περίπτωση που στην ίδια θέση καταλήγουν περισσότερα του ενός μητρώα, αυτά αθροίζονται.

Ο άμεσος υπολογισμός του ολοκληρώματος (4.16) δεν είναι εφικτός, οπότε καταφεύγουμε σε αριθμητική ολοκλήρωση, όπου υπολογίζεται το άθροισμα της παραπάνω σχέσης για κάθε σημείο ολοκλήρωσης Gauss πολλαπλασιασμένο με το βάρος του  $w_g$  (Chen et al., 2014). Ο αριθμός των Gauss Points που περιλαμβάνεται σε κάθε στοιχείο είναι  $(p+1)(q+1)$  όπου  $p$  και  $q$  οι πολυωνυμικοί βαθμοί των NURBS στις δύο διευθύνσεις. Έτσι ισχύει:

$$\mathbf{K} = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_1^{N_e} \sum_1^{N_{Gauss}} (h(\mathbf{B}_I^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J^m + \frac{t^3}{12} (\mathbf{B}_I^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J^b) j w_g$$

Οι θέσεις των σημείων ολοκλήρωσης παίρνουν τιμές στο διάστημα  $[-1,1]$ , κάτι που δεν ισχύει για τα διανύσματα κόμβων τα οποία χωρίζουν την επιφάνεια στα

επιμέρους πεπερασμένα στοιχεία. Έτσι πρώτα πρέπει να γίνει ο μετασχηματισμός των σημείων ολοκλήρωσης στις αντίστοιχες επιφανειακές συντεταγμένες του.

## 4.5 Μετεπεξεργασία αποτελεσμάτων

### 4.5.1 Υπολογισμός μετατοπίσεων στην επιφάνεια της πραγματικής γεωμετρίας

Η επίλυση του συνόλου των γραμμικών εξισώσεων  $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$  οδηγεί στον υπολογισμό των αγνώστων μετατοπίσεων  $\mathbf{u}$ . Ωστόσο οι μετατοπίσεις αυτές δεν είναι μετατοπίσεις σημείων του κελύφους μετά την παραμόρφωσή του, αλλά οι μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου. Αυτά βρίσκονται συνήθως εκτός της επιφάνειας του φορέα και οι μετατοπίσεις τους παίζουν έναν βοηθητικό ρόλο, καθώς από αυτές προκύπτουν οι μετατοπίσεις του φορέα στα σημεία ενδιαφέροντος.

Έχοντας γνωστές τις μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου ενός στοιχείου του φορέα μπορούν να υπολογιστούν οι μετατοπίσεις σε οποιοδήποτε σημείο στο εσωτερικό του στοιχείου αυτού μέσω της εξίσωσης (4.13).

Εάν ένα σημείο ελέγχου είναι μέρος της παραμορφωμένης επιφάνειας, τότε προφανώς η μετατόπιση του είναι ίδια με την μετατόπιση της επιφάνειας στο συγκεκριμένο σημείο. Αυτό συμβαίνει όταν γίνεται χρήση ανοιχτών διανυσμάτων κόμβων στα οποία η επιφάνεια περνάει από τα ακραία σημεία ελέγχου.

### 4.5.2 Υπολογισμός παραμορφώσεων και τάσεων

Οι παραμορφώσεις μπορούν να υπολογιστούν για κάθε σημείο του κελύφους εφόσον είναι γνωστές οι μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου του στοιχείου στο οποίο ανήκει το σημείο, καθώς και τα μητρώα μεμβρανικών και καμπτικών παραμορφώσεων.

Έτσι, εισάγοντας τις εξισώσεις (4.14) και (4.15) στην εξίσωση (4.6) προκύπτουν οι παραμορφώσεις για κάθε σημείο του κελύφους, που είναι ίσες με:

$$E_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{Nn} \mathbf{B}_I^m(\xi^1, \xi^2) \mathbf{u}_I + \xi^3 \sum_{i=1}^{Nn} \mathbf{B}_I^b(\xi^1, \xi^2) \mathbf{u}_I \quad ,$$

όπου  $-\frac{t}{2} \leq \xi^3 \leq \frac{t}{2}$ , με  $t$  το πάχος του κελύφους.

Για τον υπολογισμό των τάσεων σε σημείο εντός του κελύφους χρειάζεται, εκτός από τις μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου του αντίστοιχου στοιχείου και τα μητρώα παραμορφώσεως (μεμβρανικό και καμπτικό), και το μητρώο ελαστικότητας.

Έτσι, εισάγοντας τις εξισώσεις (4.14) και (4.15) στις εξισώσεις (4.7) και (4.8) προκύπτουν τα διανύσματα των μεμβρανικών και των καμπτικών τάσεων. Έτσι οι τάσεις που δέχεται ένα σημείο του κελύφους είναι ίσες με:

$$S_{\alpha\beta} = \frac{Et}{1-\nu^2} \mathbf{D} \left( \sum_{i=1}^{Nn} \mathbf{B}_i^m(\xi^1, \xi^2) \mathbf{u}_i + \xi^3 \frac{t^2}{12} \sum_{i=1}^{Nn} \mathbf{B}_i^b(\xi^1, \xi^2) \mathbf{u}_i \right) .$$

## Κεφάλαιο 5 Αριθμητικά Παραδείγματα

### 5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αριθμητικά παραδείγματα που αναλύθηκαν με τον κώδικα του Matlab, καθώς και οι λύσεις τους από την βιβλιογραφία.

Οι συναρτήσεις NURBS που χρησιμοποιούνται ως συναρτήσεις σχήματος για το στοιχείο Kirchhoff-Love με μετακινησιακούς μόνο βαθμούς ελευθερίας πρέπει να είναι τουλάχιστον 2<sup>ου</sup> βαθμού, οπότε αυτός θα είναι και ο μικρότερος πολυωνυμικός βαθμός που θα χρησιμοποιηθεί. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας είτε p- είτε k-προσαρμογή γίνεται ανάλυση για συναρτήσεις NURBS 2<sup>ου</sup>, 3<sup>ου</sup>, 4<sup>ου</sup> και 5<sup>ου</sup> βαθμού. Επίσης, με την χρήση της h- και k-προσαρμογής υποδιαιρείται σε περισσότερα πεπερασμένα στοιχεία η αρχική γεωμετρία του φορέα, η οποία έχει προκύψει με την χρήση των ελάχιστων σημείων ελέγχου και κόμβων. Ο διαχωρισμός αυτός σε περισσότερα στοιχεία προϋποθέτει και την πύκνωση του πλέγματος των σημείων ελέγχου, καθώς και την προσθήκη των αντίστοιχων κόμβων στο αρχικό διάγραμμα κόμβου. Οι παραπάνω διαδικασίες πραγματοποιούνται για να προκύψουν συμπεράσματα ως προς την ακρίβεια του προγράμματος και τον βαθμό της σύγκλισης που πραγματοποιείται για κάθε παράδειγμα, αλλά και ως προς την ταχύτητα σύγκλισης και το πώς επηρεάζεται αυτή από την προσαρμογή.

Η ανάλυση θα γίνει για πέντε φορείς, η λύση των οποίων υπάρχει στη βιβλιογραφία και θα παρουσιαστεί αναλυτικά στα κεφάλαια 5.2 έως 5.6, μαζί με την λύση που προκύπτει από το πρόγραμμα. Συνοπτικά, οι φορείς αυτοί είναι:

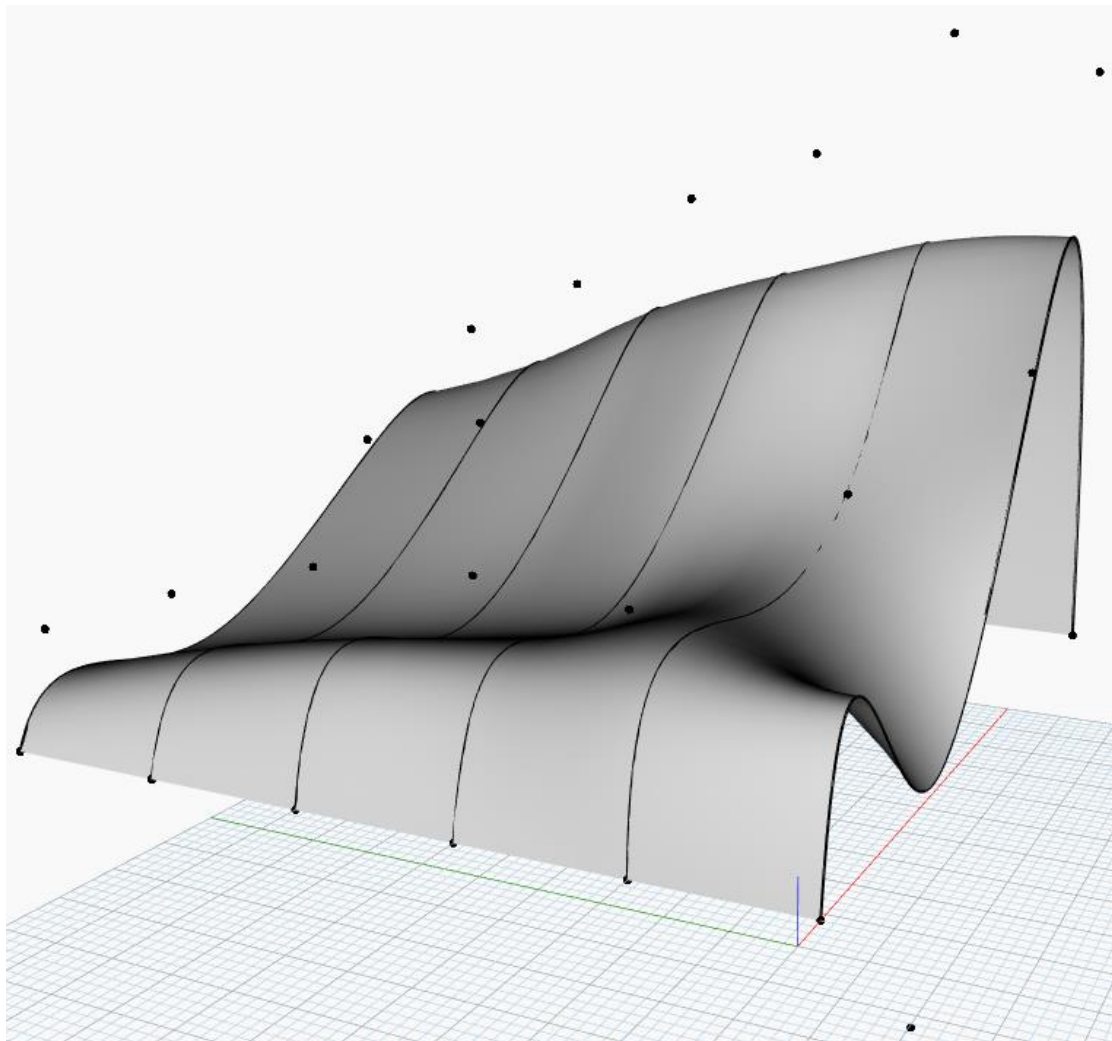
- Ορθογωνική πλάκα απλά εδραζόμενη στις 4 παρειές της, υποκείμενη σε ομοιόμορφα κατανεμημένη κατακόρυφη φόρτιση
- Κύλινδρος με άκαμπτα διαφράγματα στις άκρες του υποβαλλόμενος σε εσωτερική πίεση
- Η στέγη των Scordelis-Lo
- Ημισφαιρικό κέλυφος υποβαλλόμενο σε σημειακά φορτία
- Κύλινδρος με διαφράγματα στις άκρες του υποβαλλόμενος σε σημειακά φορτία

Τα δύο πρώτα προβλήματα έχουν αναλυτική λύση που λήφθηκε από (Σαπουντζάκης, 2005) για την πλάκα και (Ventsel, 2002) για τον κύλινδρο και η λύση των τριών τελευταίων έχει ληφθεί από (Belytschko et al., 1985).

Τα τελευταία τρία προβλήματα αποτελούν ένα σύνολο προβλημάτων το οποίο είναι ειδικά διαμορφωμένο για να εξετάζει την συμπεριφορά των στοιχείων κελύφους ως προς την ευρωστία (robustness), καθώς και την ακρίβεια σε περίπλοκες καταστάσεις παραμόρφωσης.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην διπλωματική αυτή, η διαδικασία της ανάλυσης ξεκινάει με την εισαγωγή των δεδομένων στο Dynamo, την ανάλυση των δεδομένων από το Matlab και την απεικόνιση των αποτελεσμάτων από το Paraview.

Το περιβάλλον οπτικού προγραμματισμού Dynamo αποτελεί μία εξαιρετική επιλογή για την εισαγωγή δεδομένων. Ο σχεδιασμός του φορέα γίνεται με καμπύλες NURBS (Σχ. 5.1) από όπου λαμβάνεται ο πολυωνυμικός βαθμός των εξισώσεων στις δύο διευθύνσεις, η θέση των σημείων ελέγχου, τα βάρη τους και τα διανύσματα κόμβων.

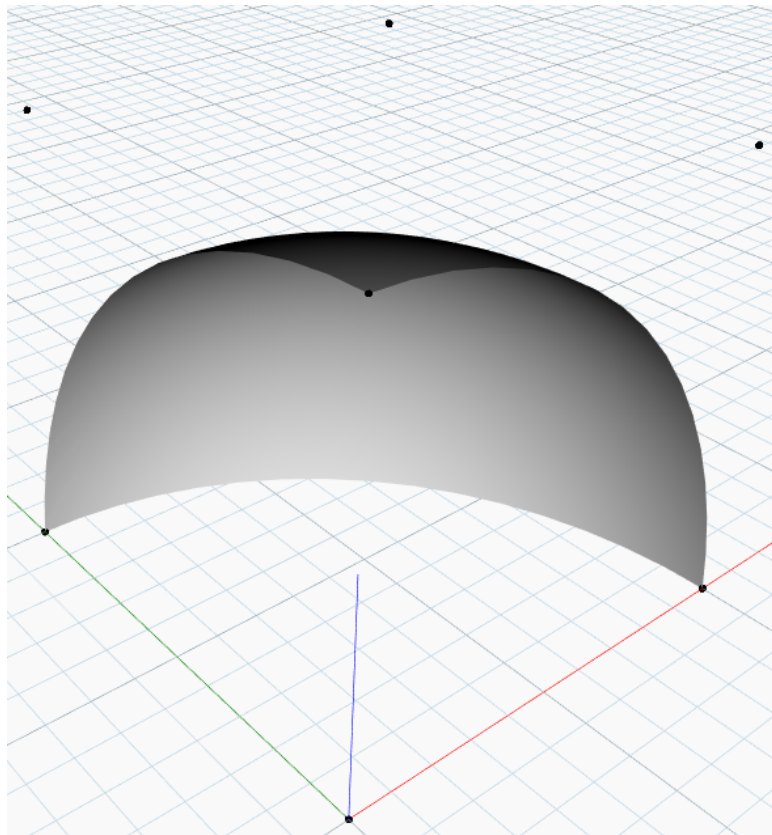


**Σχ. 5.1:** Απεικόνιση μοντέλου σύνθετης γεωμετρίας με καμπύλες NURBS στο Dynamo. Οι μαύρες κουκίδες είναι τα σημεία ελέγχου.

Ακολουθως, δίνονται οι συνοριακές συνθήκες και το είδος του φορτίου, καθώς και η θέση και η τιμή αυτού, αλλά και οι ιδιότητες του υλικού και το πάχος του. Τέλος, όλα τα παραπάνω εξάγονται από το Dynamo σε ένα αρχείο με μορφή .inp γραμμένο με κατάλληλη μορφή για να διαβάζεται από το πρόγραμμα που συντάχθηκε στο Matlab.

Η μοντελοποίηση για τα αριθμητικά παραδείγματα που εξετάζονται δεν γίνεται για ολόκληρο τον φορέα. Χρησιμοποιώντας την συμμετρία των γεωμετριών στα παραδείγματα, προσομοιώνεται μόνο μέρος αυτών έτσι ώστε να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος.

Συνεπώς, για να διατηρηθεί η ακρίβεια του τελικού αποτελέσματος, χρειάζεται να γίνουν επιπλέον δύο διαδικασίες. Αρχικά, πρέπει να δεσμευτούν οι βαθμοί ελευθερίας στα σημεία ελέγχου που “κόβεται” το σχήμα, προς την διεύθυνση του σχήματος. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο Σχ. 5.2 που απεικονίζεται το  $\frac{1}{4}$  ενός ημισφαιρίου. Στα σημεία ελέγχου που το σχήμα “κόβεται” από τον άξονα x (κόκκινη γραμμή) πακτώνονται οι βαθμοί ελευθερίας ως προς y και στα σημεία που “κόβεται” από τον y (πράσινη γραμμή) δεσμεύονται οι βαθμοί ελευθερίας ως προς x.



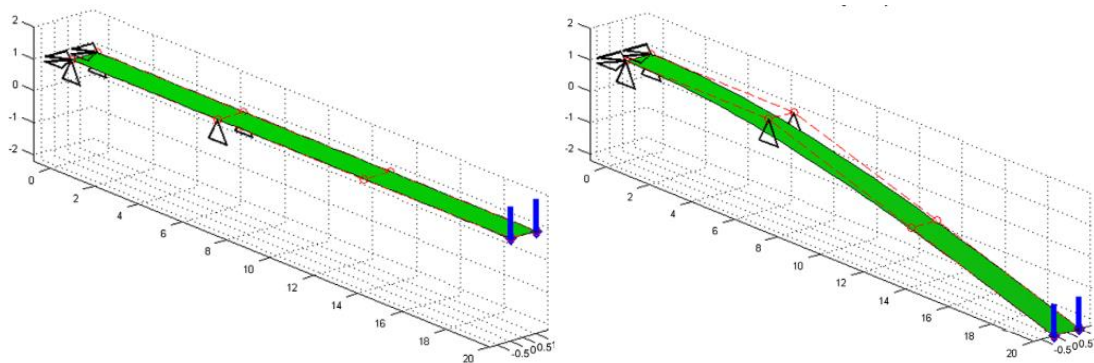
Σχ. 5.2: Απεικόνιση του  $\frac{1}{4}$  ενός ημισφαιρίου με καμπύλες NURBS στο Dynamo



Ύστερα, χρησιμοποιείται η μέθοδος των συντελεστών ποινης για να εφαρμοσθεί και το κομμάτι των στροφικών συνοριακών συνθηκών στα σημεία ελέγχου που “κόβεται” το σχήμα λόγω συμμετρίας (Alaydin et al., 2021). Η μέθοδος επιλέχθηκε για την απλότητα που παρουσιάζει και την αποδοτικότητά της. Ο συντελεστής ποινης που χρησιμοποιείται στην διπλωματική, λήφθηκε από την βιβλιογραφία και είναι ίσος με  $10^{10}$  (Nguyen et al., 2015).

Τα σημεία ελέγχου στα οποία εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες και η μέθοδος των συντελεστών ποινης λόγω συμμετρίας, εισάγονται και αυτά στο Dynamo και μετά εξάγονται στο αρχείο .inp.

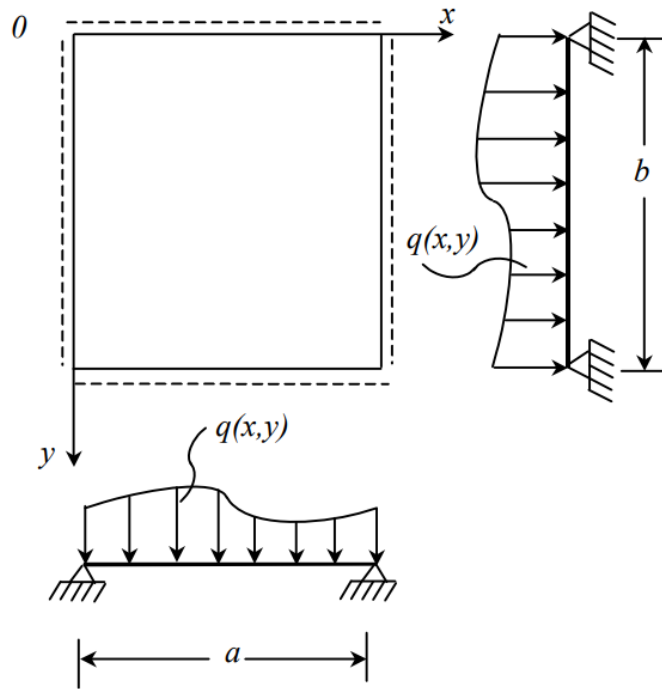
Παρά το γεγονός ότι στα αριθμητικά παραδείγματα που εξετάζονται δεν υπάρχει πουθενά πάκτωση, αξίζει να σημειωθεί ο τρόπος εφαρμογής της. Η διαδικασία που ακολουθείται στα στοιχεία Kirchhoff-Love χωρίς στροφικούς βαθμούς ελευθερίας για την εφαρμογή πάκτωσης εκμεταλλεύεται την ιδιότητα των σχημάτων με ανοιχτά διανύσματα κόμβων να είναι εφαπτόμενα στα άκρα τους στην πολυγωνική γραμμή. Έτσι, για την εφαρμογή της συνθήκης πάκτωσης, ουσιαστικά δεσμεύονται οι μετακινησιακοί βαθμοί ελευθερίας των ακραίων σημείων ελέγχου, καθώς και των αμέσως επόμενων σημείων. Η διαδικασία αυτή φαίνεται καλύτερα στο Σχ. 5.3.



**Σχ. 5.3: Απαρμόρφωτος (αριστερά) και παραμορφωμένος (δεξιά) πακτωμένος πρόβολος (Kiendl et al., 2009)**

## **5.2 Ορθογωνική πλάκα εδραζόμενη στις 4 παρειές της υποκείμενη σε κατακόρυφη φόρτιση**

Το παράδειγμα της πλάκας, η οποία είναι απλά εδραζόμενη στις 4 παρειές της και υπόκειται σε κατακόρυφο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.4, είναι ένα πρόβλημα για το οποίο υπάρχει αναλυτική λύση και μπορεί να βρεθεί με την μέθοδο Navier (Σαπουντζάκης, 2005).



**Σχ. 5.4: Ορθογώνια πλάκα απλά εδραζόμενη στις τέσσερις παρειές, υποκείμενη σε τυχούσα φόρτιση  $q(x,y)$  (Σαπουντζάκης, 2005)**

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, το βέλος της πλάκας υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\pi^4 D \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} ,$$

όπου:

$$D = \frac{E * t^3}{12 * (1 - \nu^2)} ,$$

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 m n} ,$$

$$m, n = 1, 3, 5, \dots .$$

$x$  και  $y$  είναι οι συντεταγμένες του σημείου,  $t$  το πάχος της πλάκας,  $a$  και  $b$  οι διαστάσεις της,  $E$  το μέτρο ελαστικότητας,  $\nu$  ο συντελεστής Poisson και  $q_0$  είναι το φορτίο που ασκείται.

Στο συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα τα παραπάνω θα πάρουν τις τιμές:

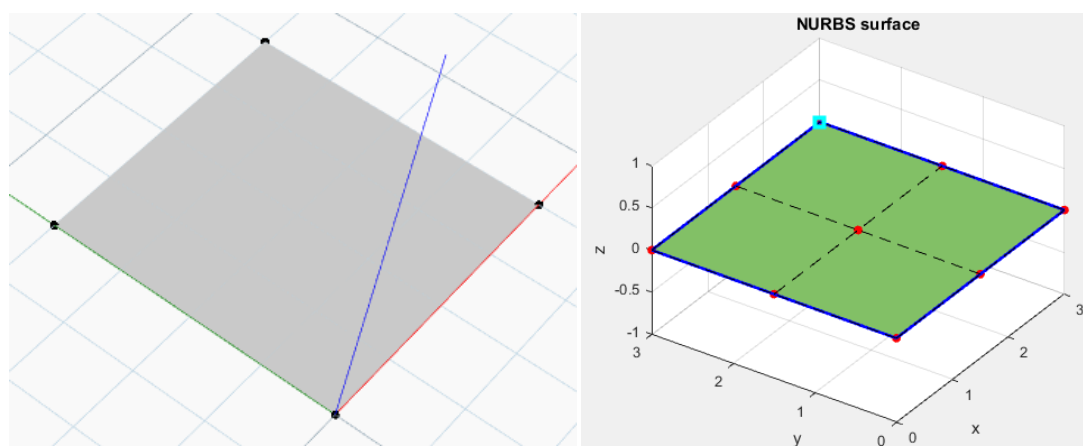
$$q_0 = -1 \frac{kN}{m^2}, E = 3000000 \frac{kN}{m^2}, t = 0,08m, \nu = 0,3, a = 6m, b = 6m .$$

Η βύθιση στο μέσον της πλάκας προκύπτει ίση με 0,0374m.

Λόγω συμμετρίας θα προσομοιωθεί το  $\frac{1}{4}$  της πλάκας (Σχ. 5.5).

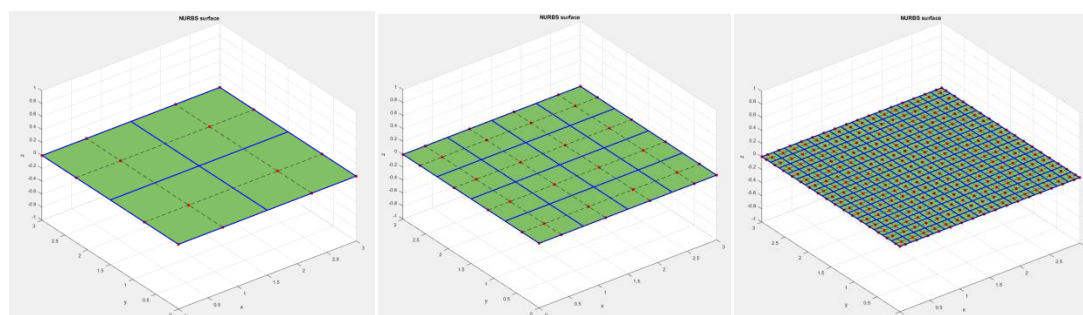
Η σχεδίαση του σχήματος απαιτεί εξισώσεις NURBS 1<sup>ου</sup> βαθμού στις 2 διευθύνσεις, όμως όπως έχει αναφερθεί η ανάλυση απαιτεί εξισώσεις NURBS τουλάχιστον 2<sup>ου</sup> βαθμού, οπότε το λιγότερο διακριτοποιημένο σχήμα, που θα αναλυθεί, θα είναι το Σχ. 5.5, που προκύπτει μετά από p-προσαρμογή.

Στα σχήματα που έχουν σχεδιαστεί με το Matlab συμβολίζονται με κόκκινες κουκίδες τα σημεία ελέγχου, με μπλε γραμμές οι κόμβοι που χωρίζουν τον φορέα σε στοιχεία, με κυανά τετράγωνα τα σημεία ελέγχου για σύγκριση της λύσης με την τιμή της βιβλιογραφίας και με ματζέντα x τα σημεία όπου ασκείται σημειακή δύναμη (αν υπάρχουν).



**Σχ. 5.5:** Προσομοίωση του  $\frac{1}{4}$  της πλάκας με το Dynamo (αριστερά) και με το Matlab (δεξιά)

Στο Σχ. 5.6 φαίνεται ο φορέας μετά από πύκνωση του πλέγματος των σημείων ελέγχου με προσθήκη κόμβων.



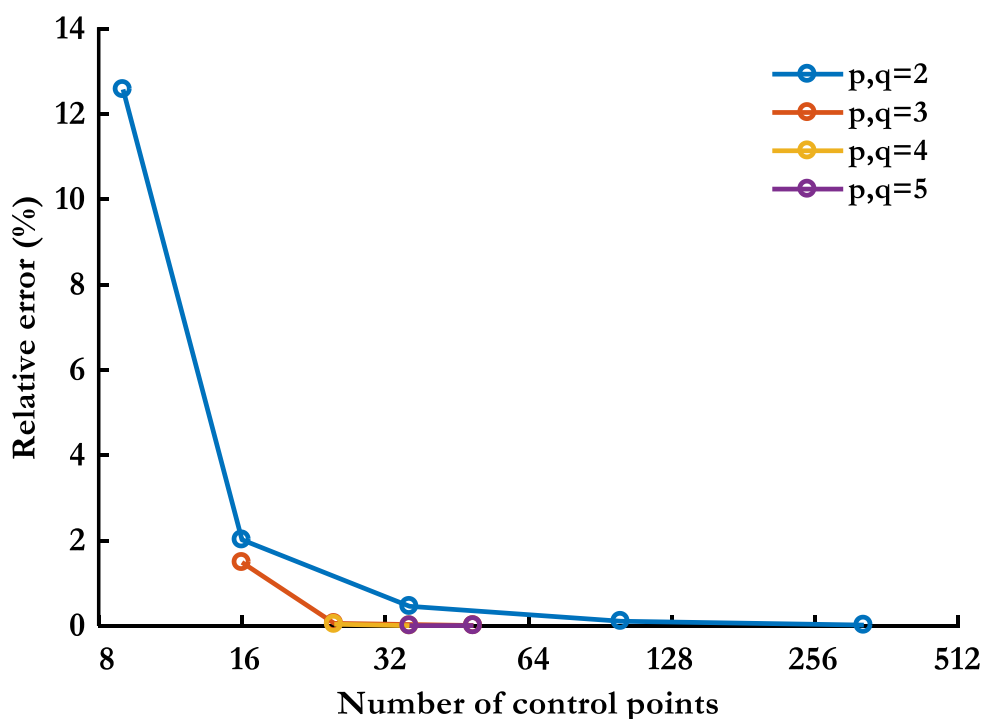
**Σχ. 5.6:** Προσομοίωση του  $\frac{1}{4}$  της πλάκας στο Matlab με 4, 8 και 256 στοιχεία και με πολωνυμικούς βαθμούς των NURBS ως προς τις δύο διευθύνσεις  $p=2, q=2$

Στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων του προγράμματος του Matlab θα συμβολίζονται με  $p$  και  $q$  οι πολυωνυμικοί βαθμοί των συναρτήσεων NURBS που θα χρησιμοποιούνται.

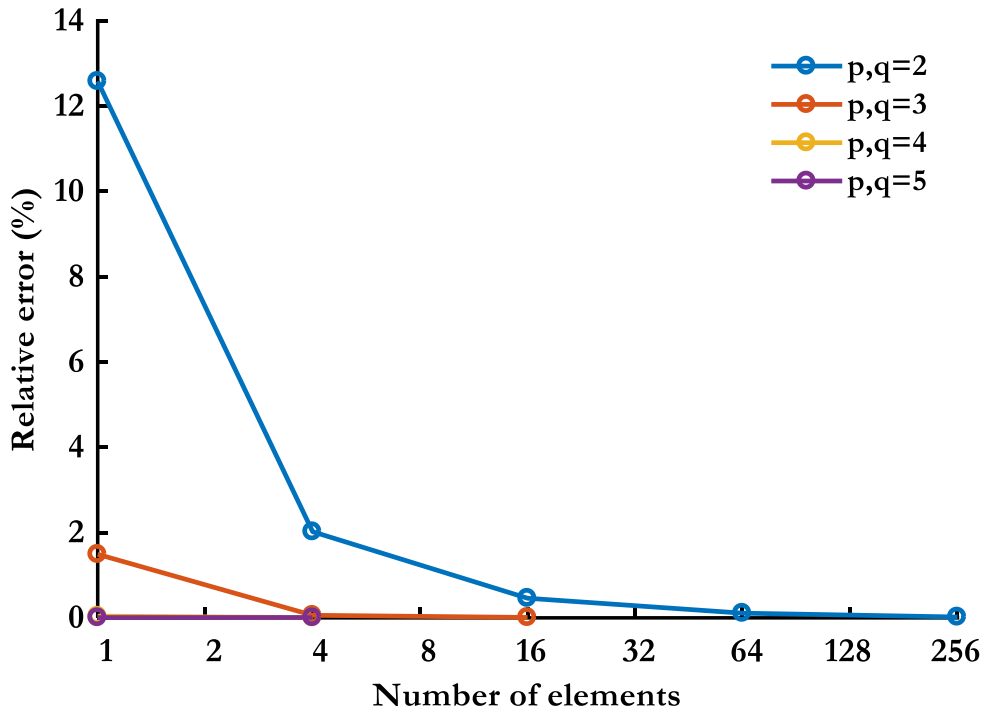
Τα αποτελέσματα του προγράμματος για την βύθιση στο μέσον της πλάκας απεικονίζονται με μορφή διαγράμματος (Σχ. 5.7, Σχ. 5.8).

Στο παράδειγμα της πλάκας, όπως φαίνεται και από τα διαγράμματα, δεν είναι απαραίτητη η χρήση ούτε υψηλού πολυωνυμικού βαθμού για την ανάλυση, ούτε η μεγάλη πύκνωση των σημείων ελέγχου με προσθήκη κόμβων, καθώς και για συναρτήσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού με 16 σημεία ελέγχου υπάρχει σφάλμα μόνο 2%.

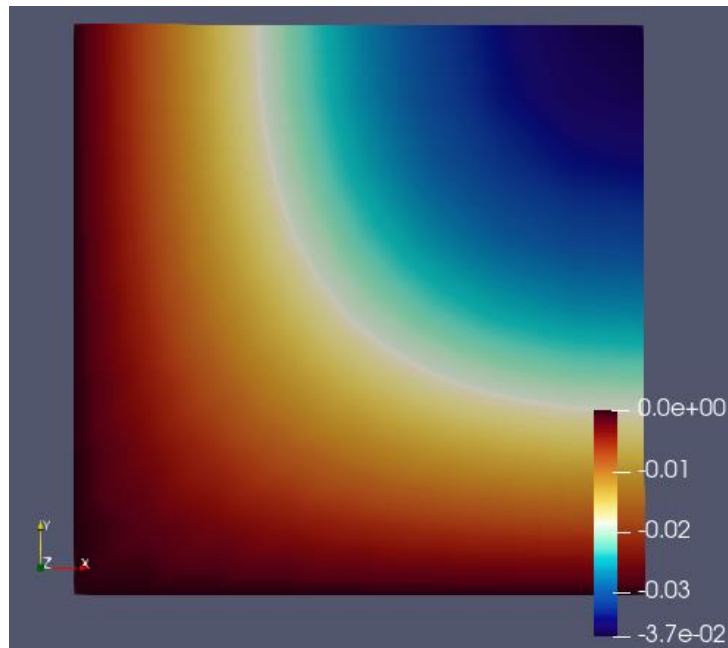
Τα δεδομένα του Matlab εξάγονται στο Paraview, έτσι ώστε να γίνει απεικόνιση των μετατοπίσεων, των παραμορφώσεων και των τάσεων για όλο το μοντέλο. Για το παράδειγμα της πλάκας, οι μετατοπίσεις κατά  $x$  και κατά  $y$ , καθώς και όλες οι παραμορφώσεις και οι τάσεις προκύπτουν ίσες με το 0, οπότε θα φανεί μόνο η βύθιση του φορέα (Σχ. 5.9).



Σχ. 5.7: Διάγραμμα του απόλυτου σχετικού σφάλματος της βύθισης του μέσου της πλάκας προς τον αριθμό σημείων ελέγχου



Σχ. 5.8: Διάγραμμα του απόλυτου σχετικού σφάλματος της βύθισης του μέσου της πλάκας προς τον αριθμό στοιχείων



Σχ. 5.9: Βύθιση του ¼ της πλάκας

### 5.3 Κύλινδρος με άκαμπτα διαφράγματα στις άκρες του υποβαλλόμενος σε εσωτερική πίεση

Το παράδειγμα του κυλίνδρου υποβαλλόμενου σε (συνεχή) εσωτερική (ή εξωτερική) πίεση, ενώ υπάρχουν άκαμπτα διαφράγματα στις άκρες του είναι ένα πρόβλημα για το οποίο υπάρχει αναλυτική λύση (Ventsel, 2002).

Οι μετατοπίσεις του κυλίνδρου δίνονται ως  $u$ ,  $v$ ,  $w$  που είναι οι μετατοπίσεις στην διαμήκη, την εφαπτομενική και την ακτινική διεύθυνση αντίστοιχα.

Οι μετατοπίσεις αυτές είναι ίσες με:

$$u(x) = \frac{1}{Et} \nu \alpha p_0 \left( \frac{L}{2} - x \right) ,$$

$$v(x) = 0 ,$$

$$w(x) = -\frac{1}{Et} \alpha^2 p_0 ,$$

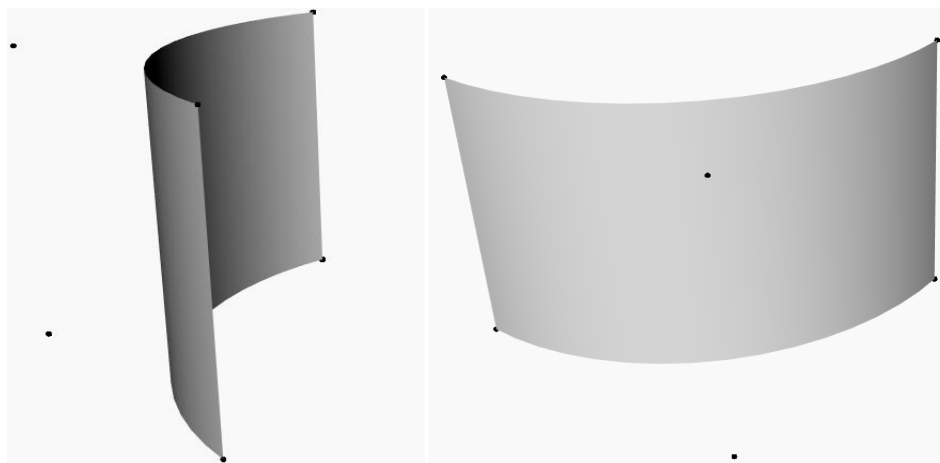
όπου  $x$  είναι η απόσταση από το μέσο του κυλίνδρου στην διαμήκη διεύθυνση,  $\alpha$  είναι η ακτίνα του κυλίνδρου,  $L$  το μήκος του και  $p^0$  είναι η πίεση που ασκείται.

Στο συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα οι μεταβλητές θα πάρουν τιμές:

$$\alpha = 300m, \quad t = 3m, \quad L = 600m, \quad E = \frac{3000000kN}{m^2}, \quad \nu = 0.3, \quad p^0 = \frac{100kN}{m^2}.$$

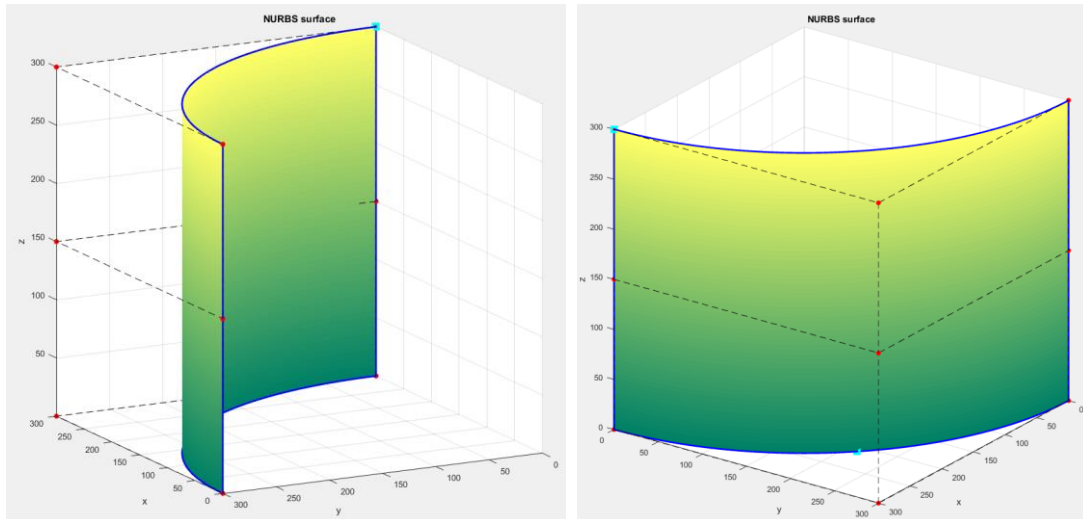
Συνεπώς, οι μετατοπίσεις θα είναι  $w = -1m$  σε όλα τα σημεία και  $u(0) = 0.3m$ .

Λόγω συμμετρίας θα προσομοιωθεί το 1/8 του κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.10.



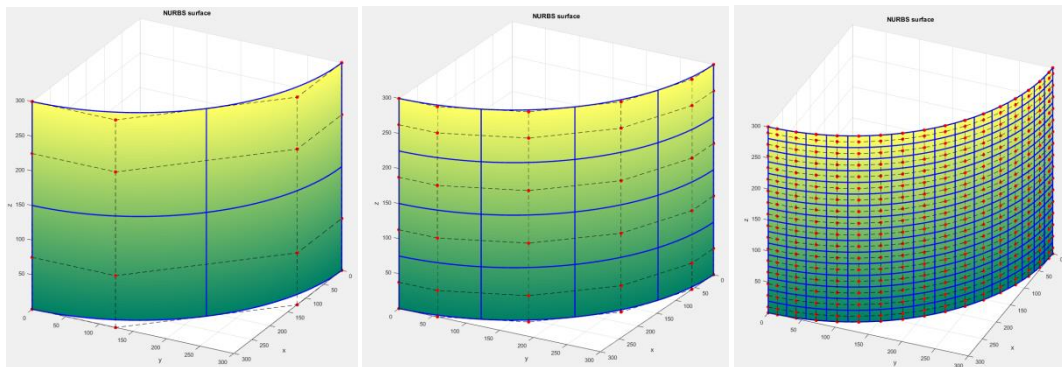
**Σχ. 5.10: Προσομοίωση του 1/8 του κυλίνδρου στο Dynamo. Με μαύρο χρώμα απεικονίζονται τα σημεία ελέγχου.**

Η σχεδίαση του σχήματος απαιτεί εξισώσεις NURBS 2<sup>ου</sup> βαθμού στην μία διεύθυνση και 1<sup>ου</sup> στην άλλη, όμως όπως έχει αναφερθεί η ανάλυση απαιτεί εξισώσεις NURBS τουλάχιστον 2<sup>ου</sup> βαθμού, οπότε το λιγότερο διακριτοποιημένο σχήμα, που θα αναλυθεί, θα είναι το Σχ. 5.11, που προκύπτει μετά από  $p$ -προσαρμογή.



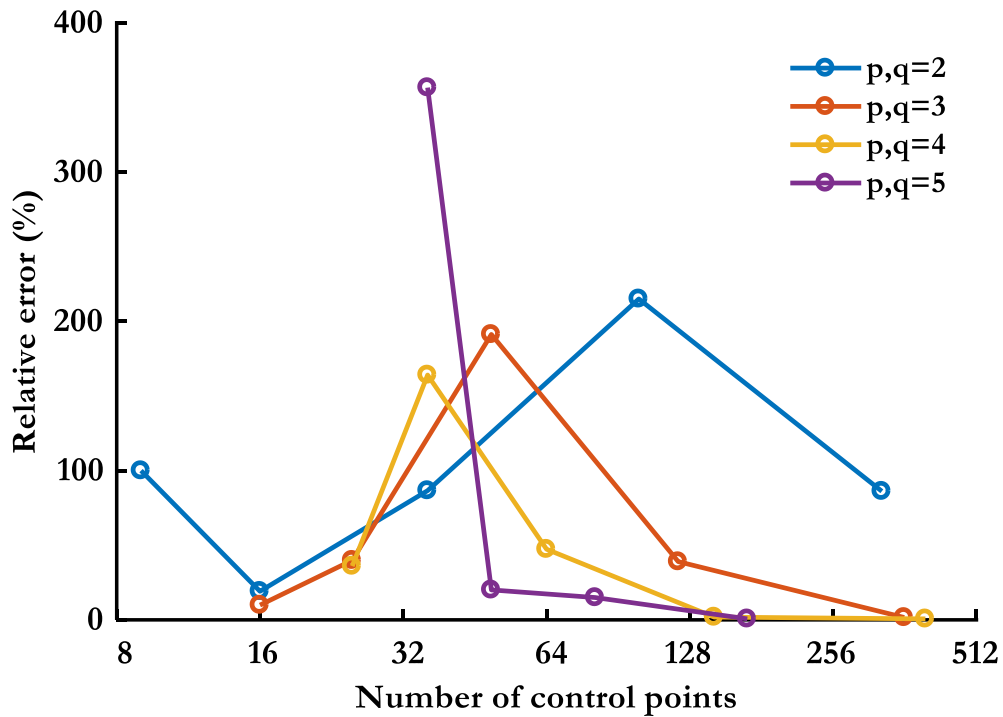
**Σχ. 5.11: Προσομοίωση του 1/8 του κυλίνδρου στο Matlab με 1 στοιχείο και με πολωνομικούς βαθμούς των NURBS ως προς τις δύο διευθύνσεις  $p=2$ ,  $q=2$**

Για το συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα, η διαμήκης μετατόπιση θα ελεγχθεί από το μέσο της κάτω πλευράς του και η ακτινική μετατόπιση από την πάνω άκρη του. Τα σημεία αυτά φαίνονται στο Σχ. 5.11. Στο Σχ. 5.12 φαίνεται ο φορέας μετά από εκλεπτύνσεις.

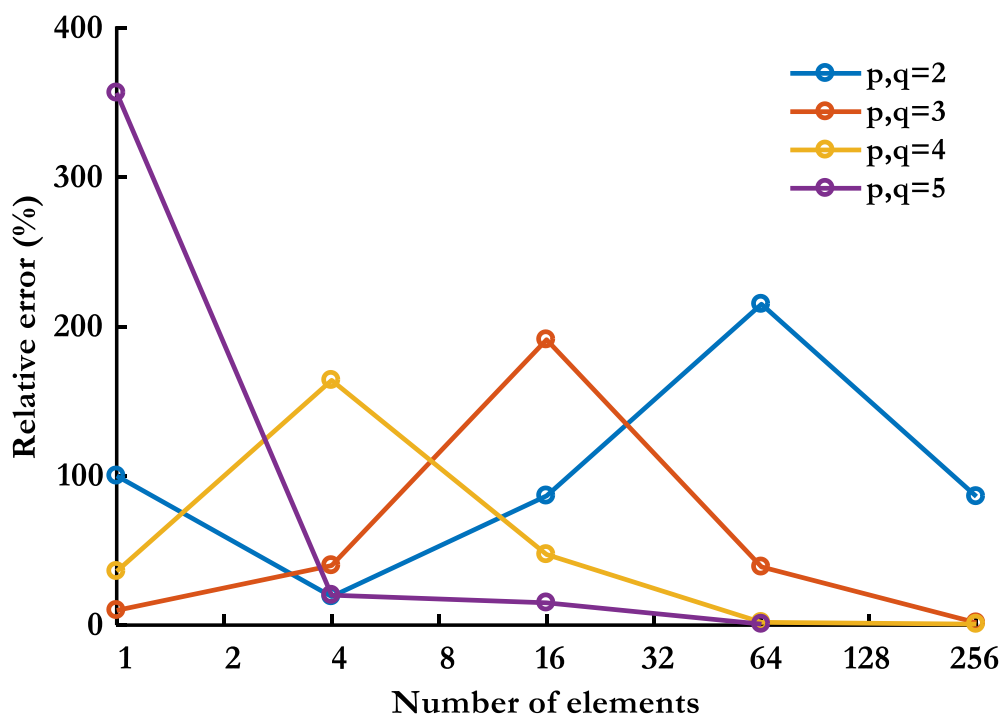


**Σχ. 5.12: Προσομοίωση του 1/8 του κυλίνδρου στο Matlab με 4, 8 και 256 στοιχεία και με πολωνομικούς βαθμούς των NURBS ως προς τις δύο διευθύνσεις  $p=2$ ,  $q=2$**

Τα αποτελέσματα του προγράμματος για την ακτινική μετατόπιση φαίνονται στα Σχ. 5.13 και Σχ. 5.14.



Σχ. 5.13: Διάγραμμα του απόλυτου σχετικού σφάλματος της ακτινικής μετατόπισης προς τον αριθμό σημείων ελέγχου

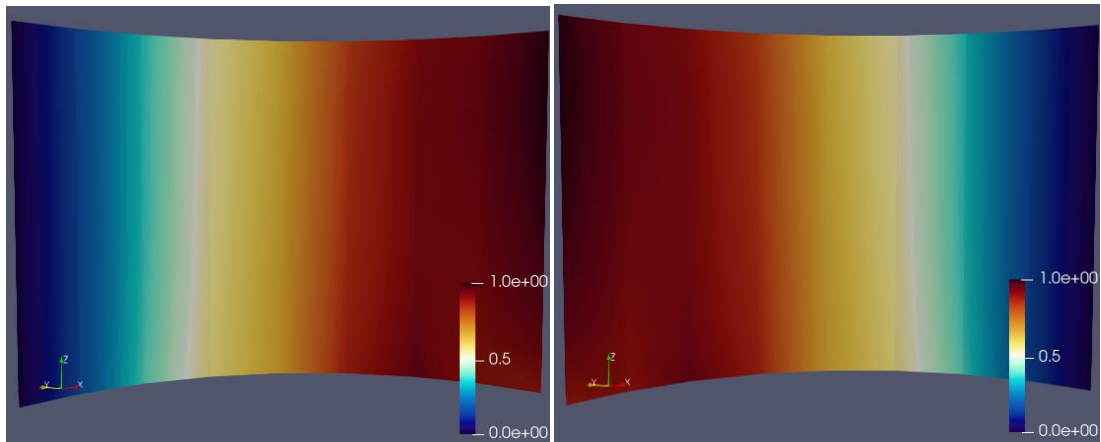


Σχ. 5.14: Διάγραμμα του απόλυτου σχετικού σφάλματος της ακτινικής μετατόπισης προς τον αριθμό στοιχείων

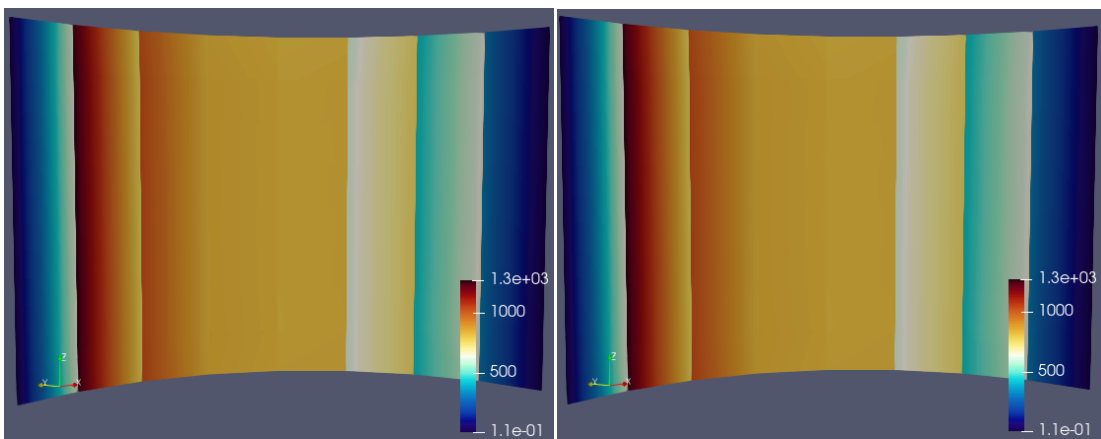
Όπως φαίνεται και στα διαγράμματα, η αύξηση των σημείων ελέγχου, καθώς και η αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού αυξάνουν την ακρίβεια. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις 3<sup>ου</sup>, 4<sup>ου</sup> και 5<sup>ου</sup> βαθμού συγκλίνουν στην σωστή τιμή, ενώ οι



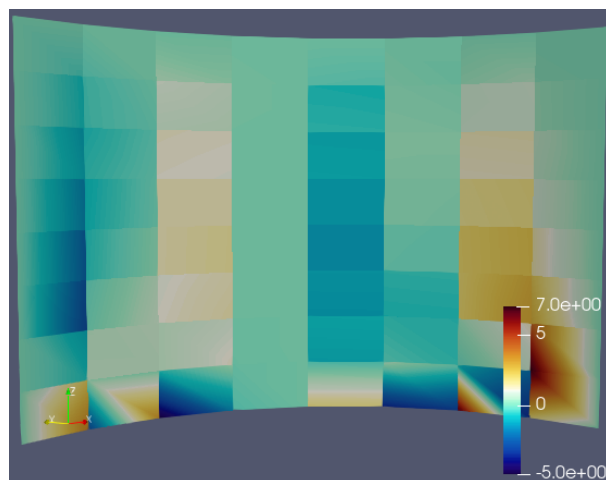
συναρτήσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού όχι. Ωστόσο, αν παρατηρήσει κανείς την μορφή των γραφημάτων, γίνεται προφανές ότι με πύκνωση των σημείων ελέγχου θα συνέκλιναν και αυτές.



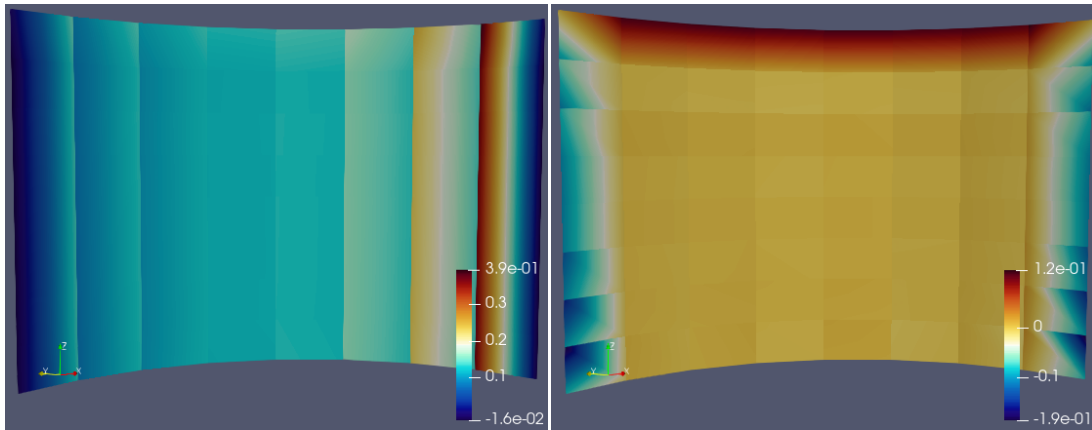
**Σχ. 5.15:** Μετατοπίσεις παραμορφωμένου φορέα κατά x (αριστερό σχήμα) και κατά y (δεξί σχήμα) για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου



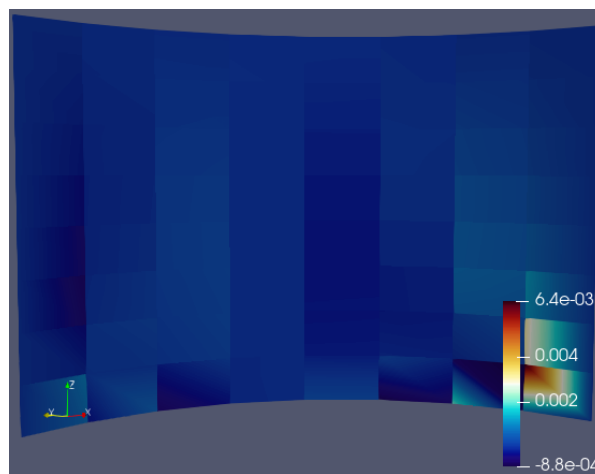
**Σχ. 5.16:** Ορθές παραμορφώσεις παραμορφωμένου φορέα κατά x (αριστερό σχήμα) και κατά y (δεξί σχήμα) για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου



**Σχ. 5.17:** Διατμητικές παραμορφώσεις παραμορφωμένου φορέα κατά xy για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου



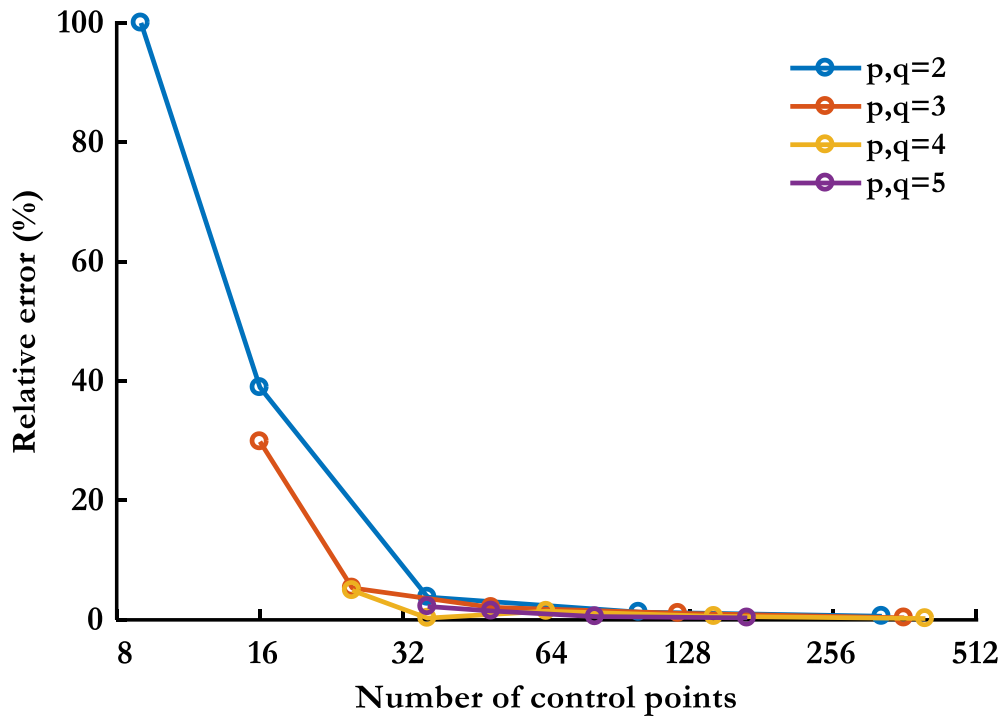
**Σχ. 5.18: Ορθές τάσεις παραμορφωμένου φορέα κατά x (αριστερό σχήμα) και κατά y (δεξί σχήμα) για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**



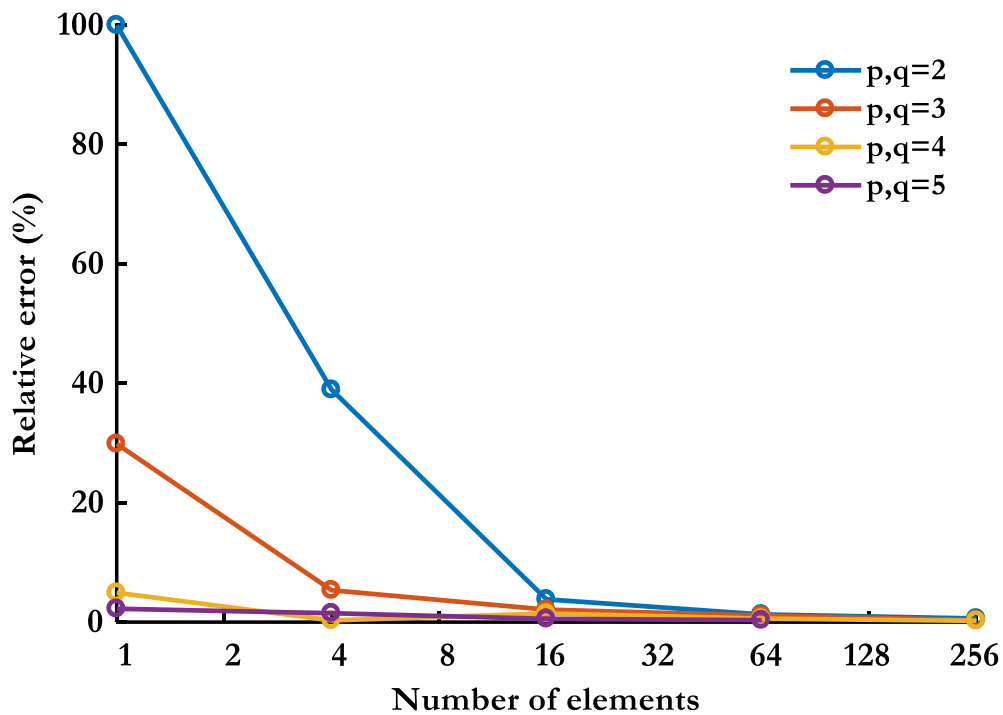
**Σχ. 5.19: Διατμητικές τάσεις παραμορφωμένου φορέα κατά xy για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**

Τα αποτελέσματα του προγράμματος για την διαμήκη μετατόπιση φαίνονται στα Σχ. 5.20 και Σχ. 5.21 και οι παραμορφώσεις προς την z διεύθυνση στο Σχ. 5.22.

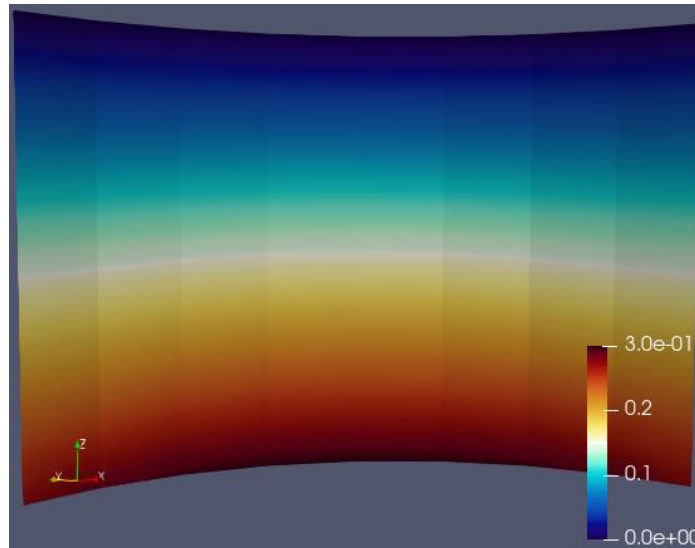
Συγκρίνοντας τα διαγράμματα αυτά με τα αντίστοιχα της ακτινικής μετατόπισης είναι προφανές ότι εδώ η σύγκλιση γίνεται πολύ πιο γρήγορα. Επίσης εδώ υπάρχει σύγκλιση με χρήση πολυωνυμικών συναρτήσεων και 2<sup>ου</sup> και 3<sup>ου</sup> και 4<sup>ου</sup> και 5<sup>ου</sup> βαθμού.



Σχ. 5.20: Διάγραμμα του απόλυτου σχετικού σφάλματος της διαμήκης μετατόπισης προς τον αριθμό σημείων ελέγχου



Σχ. 5.21: Διάγραμμα του απόλυτου σχετικού σφάλματος της διαμήκης μετατόπισης προς τον αριθμό στοιχείων



Σχ. 5.22: Μετατοπίσεις παραμορφωμένου φορέα κατά z για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου

#### 5.4 Η στέγη των Scordelis-Lo

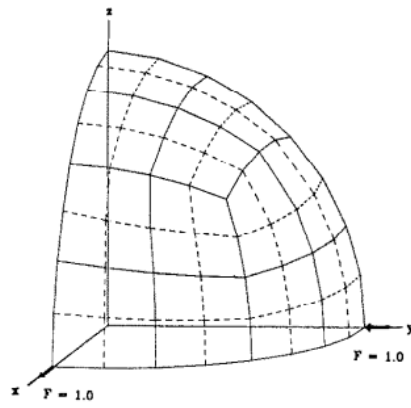
Η στέγη των Scordelis-Lo είναι ένα από τα τρία παραδείγματα του τεστ εμποδίων κελυφών (Belytschko et al., 1985). Η γεωμετρία της στέγης αποτελεί μέρος ενός κυλίνδρου. Υποστηρίζεται από άκαμπτα διαφράγματα στις δύο ακραίες πλευρές της, ενώ οι άλλες δύο είναι ελεύθερες. Υπόκειται σε κατακόρυφο, ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο. Η στέγη φαίνεται στο Σχ. 5.23, μαζί με τα άλλα δύο παραδείγματα του τεστ εμποδίων κελυφών.

Η τιμή που προκύπτει στο μέσον της ακριανής πλευράς της στέγης για:

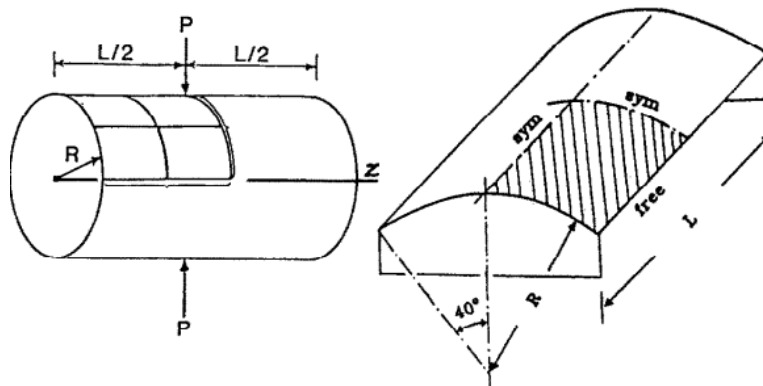
$$L = 50m, R = 25m, t = 0,25m, E = 4,32 * 10^8 \frac{kN}{m^2}, \nu = 0, uz = 90 \frac{kN}{m^2}$$

είναι ίση με -0.3024m.

Λόγω συμμετρίας προσομοιώνεται μόνο το  $\frac{1}{4}$  της στέγης, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.24.



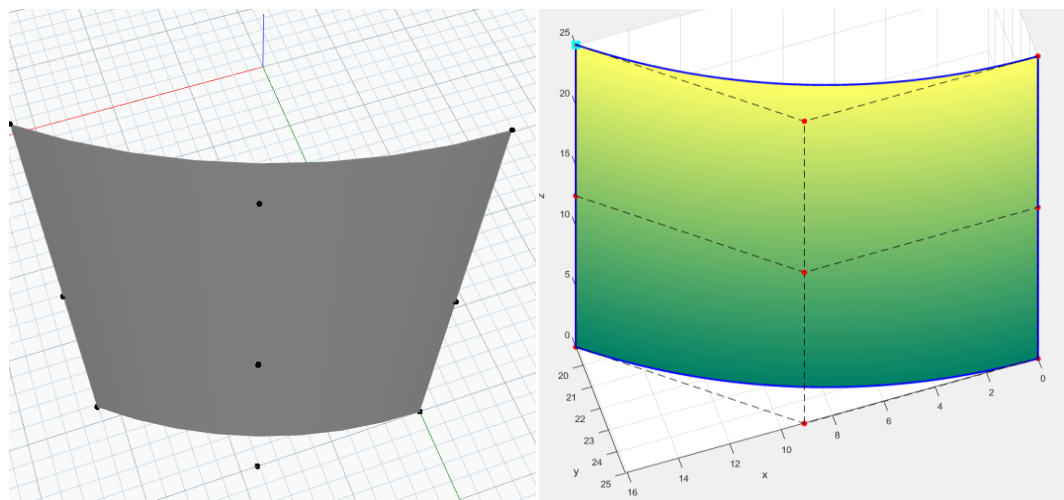
Hemispherical Shell



Pinched Cylinder with Diaphragm

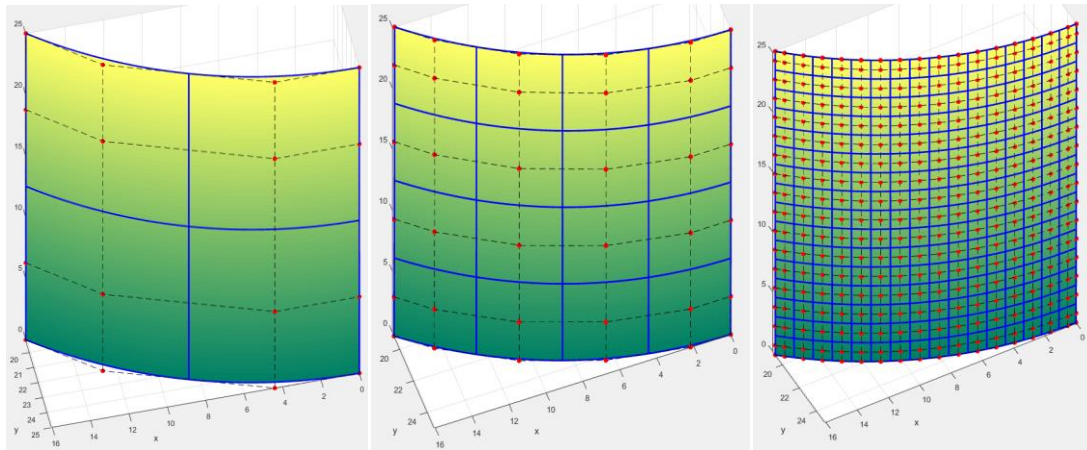
Scordelis-Lo Roof

Σχ. 5.23: Τεστ εμποδίων κελυφών (Belytschko et al., 1985)



Σχ. 5.24: Απεικόνιση της στέγης των Scordelis-Lo με Dynamo (αριστερά) και Matlab (δεξιά)

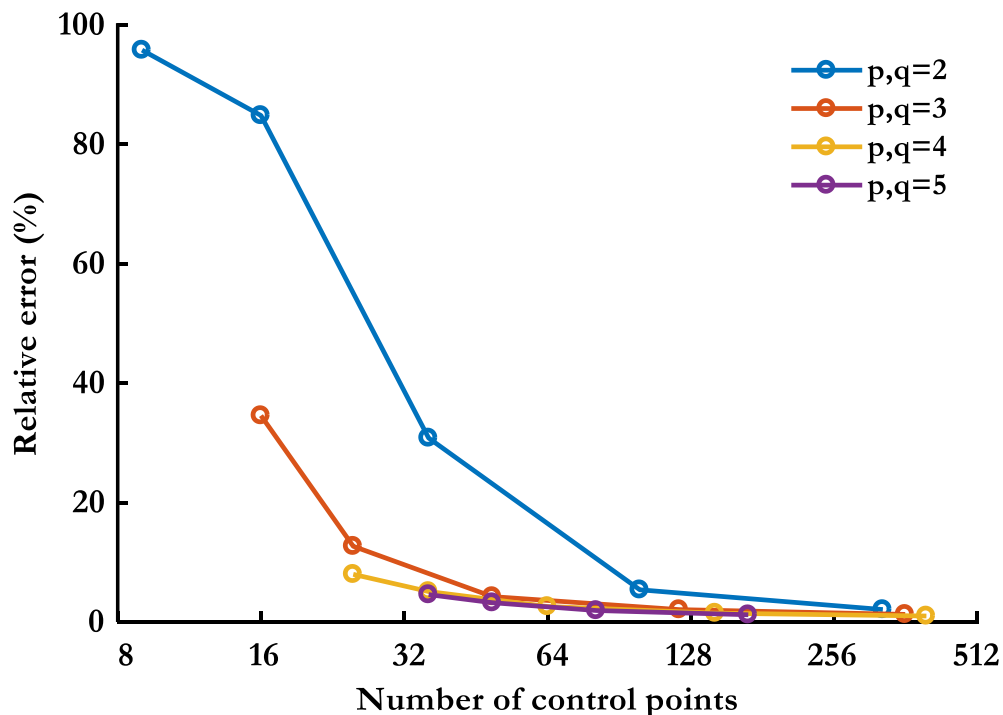
Το ίδιο σχήμα με προσθήκη ξεχωριστών κόμβων και άρα αύξηση των στοιχείων φαίνεται στο Σχ. 5.25.



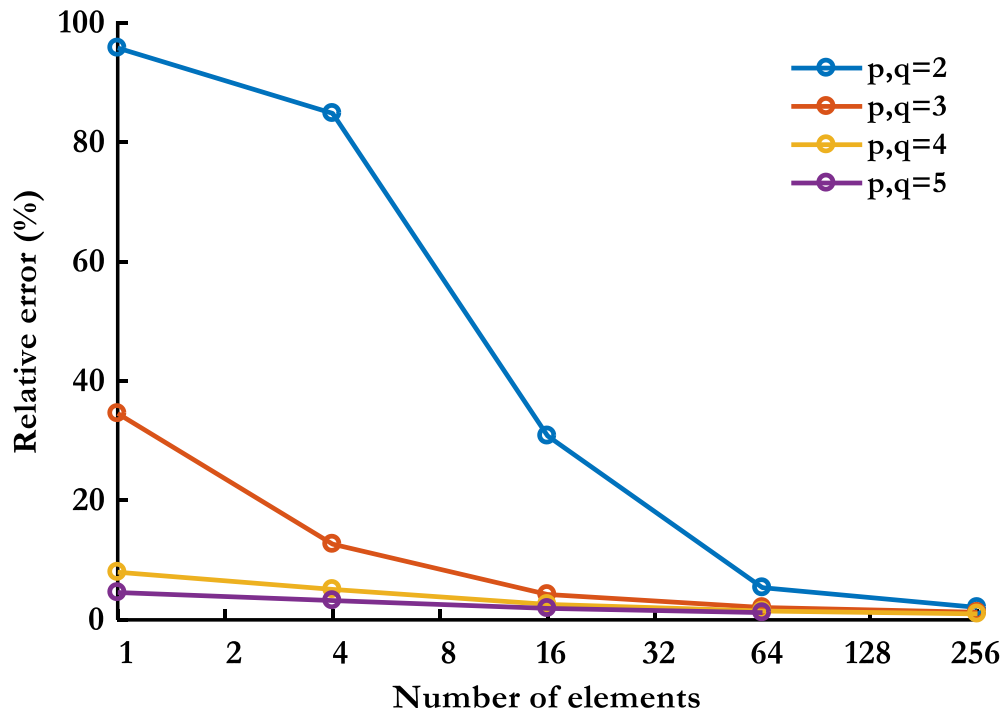
**Σχ. 5.25: Προσομοίωση του ¼ της στέγης στο Matlab με 4, 8 και 256 στοιχεία και με πολωνυμικούς βαθμούς των NURBS ως προς τις δύο διευθύνσεις  $p=2$ ,  $q=2$**

Τα αποτελέσματα του προγράμματος για την βύθιση φαίνονται στα Σχ. 5.26 και Σχ. 5.27.

Από τα διαγράμματα αυτά επιβεβαιώνεται και πάλι ότι χρήση πολωνυμικών συναρτήσεων μεγαλύτερου βαθμού δίνει πιο ακριβή αποτελέσματα για τα ίδια σημεία ελέγχου.



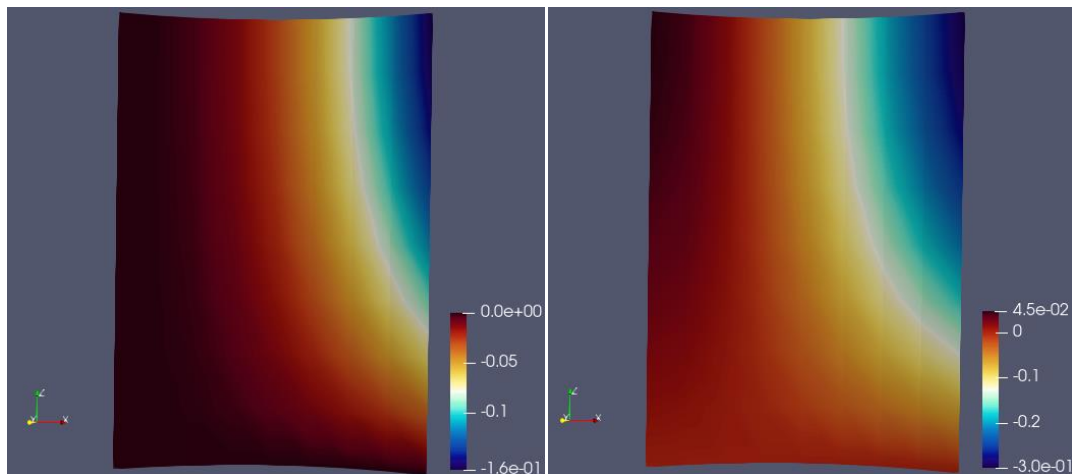
**Σχ. 5.26: Διάγραμμα βύθισης προς τον αριθμό σημείων ελέγχου**



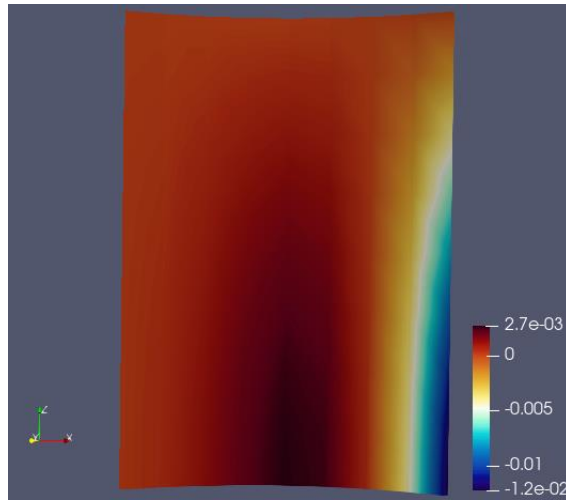
Σχ. 5.27: Διάγραμμα βύθισης προς τον αριθμό στοιχείων

Ωστόσο, αναφέρεται ότι το πρόγραμμα του Matlab φαίνεται να συγκλίνει σε τιμή εγκάρσιας μετατόπισης  $-0,300m$  και όχι  $-0,3024m$ . Παρόλα αυτά, το σφάλμα παραμένει αποδεκτό (1%).

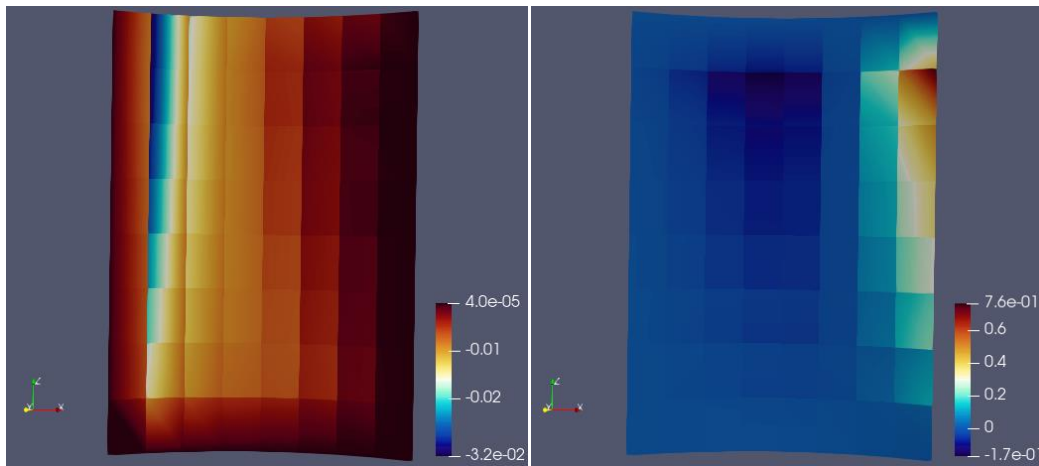
Στα Σχ. 5.28 έως Σχ. 5.33 φαίνονται οι μετατοπίσεις, οι παραμορφώσεις και οι τάσεις του φορέα από το Paraview.



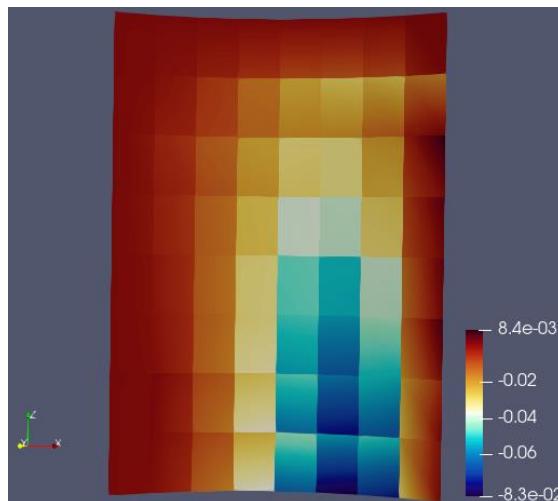
Σχ. 5.28: Μετατοπίσεις παραμορφωμένου φορέα κατά x και y για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου



Σχ. 5.29: Μετατοπίσεις παραμορφωμένου φορέα κατά z για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου

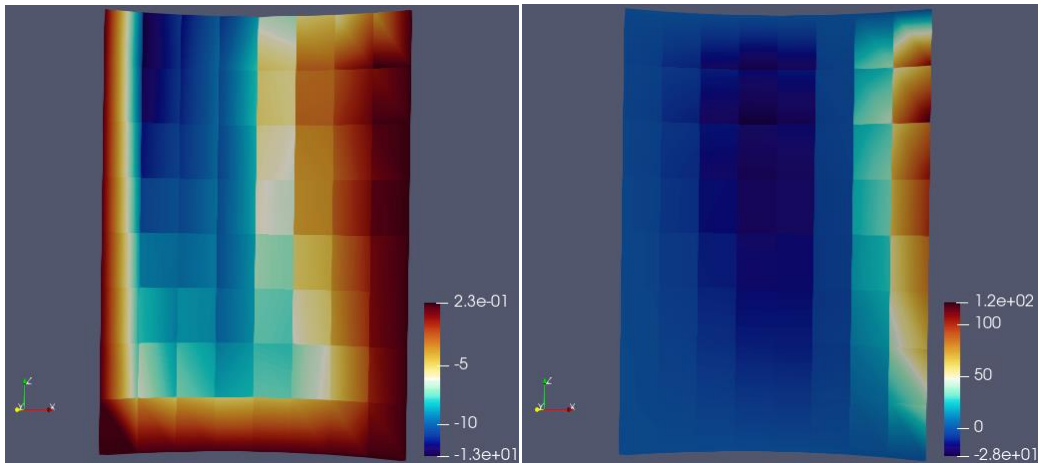


Σχ. 5.30: Ορθές παραμορφώσεις παραμορφωμένου φορέα κατά x και y για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου

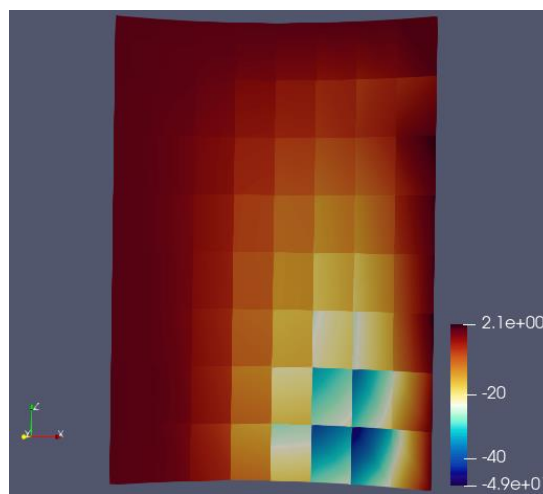


Σχ. 5.31 Διατμητικές παραμορφώσεις παραμορφωμένου φορέα κατά xy για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου





**Σχ. 5.32: Ορθές τάσεις παραμορφωμένου φορέα κατά x και y για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**



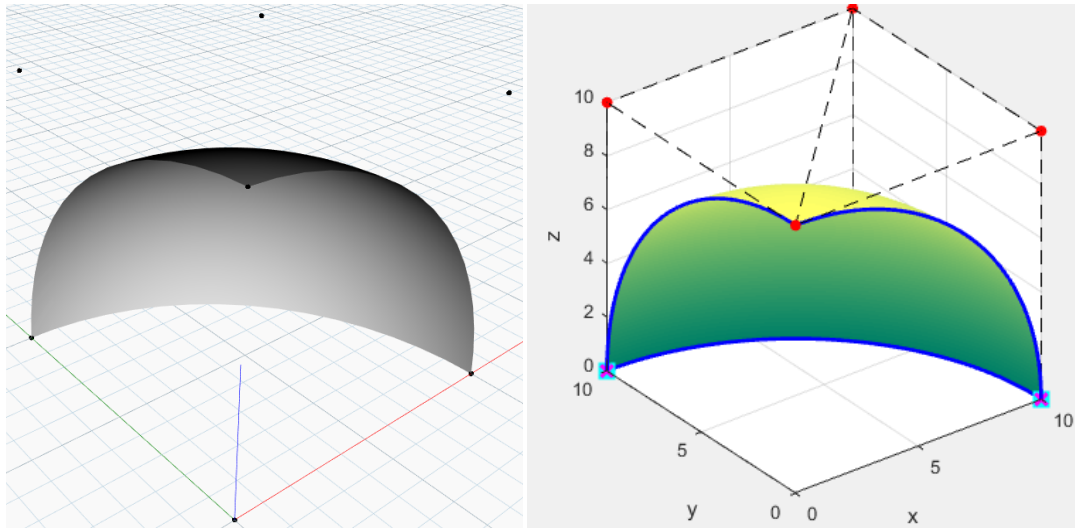
**Σχ. 5.33: Διατμητικές τάσεις παραμορφωμένου φορέα κατά xy για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**

## 5.5 Ημισφαιρικό κέλυφος υποβαλλόμενο σε σημειακά φορτία

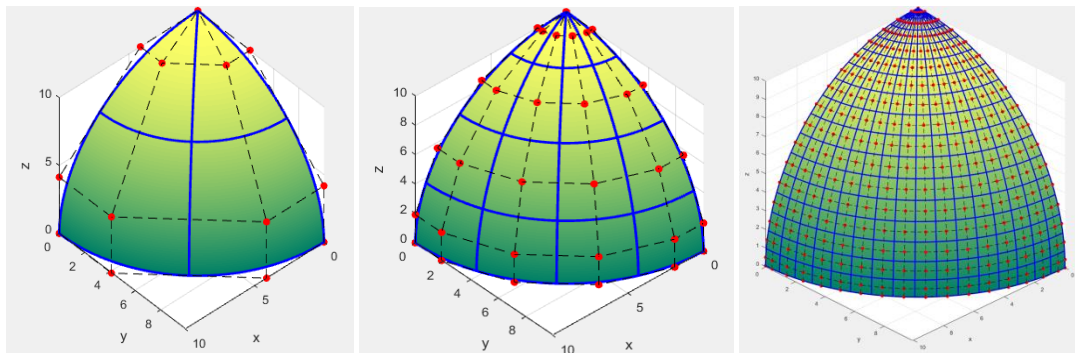
Στο πρόβλημα αυτό ένα κέλυφος μορφής ημισφαιρίου υποβάλλεται σε τέσσερα αντίθετα σημειακά φορτία. Η κάτω πλευρά του κελύφους είναι ελεύθερη, ενώ η κορυφή του είναι αρθρωμένη. Λόγω συμμετρίας θα προσομοιωθεί το  $\frac{1}{4}$  του φορέα (Σχ. 5.23).

Στο Σχ. 5.34 απεικονίζεται η γεωμετρία με το Dynamo και το Matlab, όπου φαίνονται τα σημεία που ασκούνται οι δυνάμεις και τα σημεία στα οποία συγκρίνεται η λύση με αυτήν της βιβλιογραφίας.

Στο Σχ. 5.35 φαίνεται ο φορέας μετά από προσθήκη κόμβων.



**Σχ. 5.34:** Προσομοίωση του ¼ του ημικυκλίου στο Dynamo και το Matlab



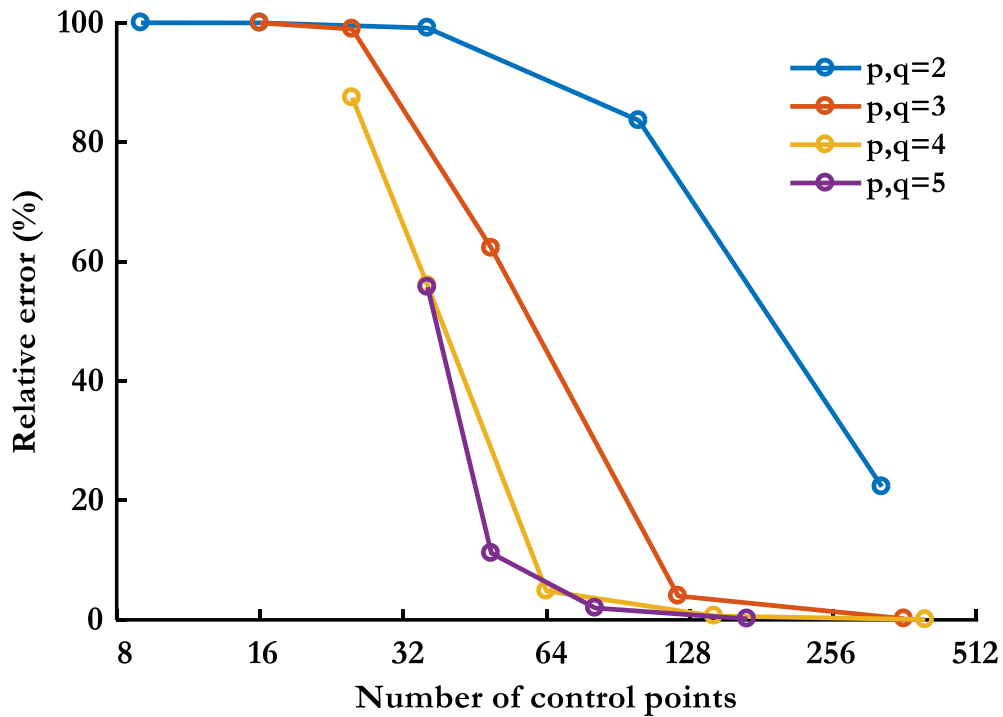
**Σχ. 5.35:** Προσομοίωση του ¼ του ημικυκλίου στο Matlab με 4, 8 και 256 στοιχεία και με πολυωνμικούς βαθμούς των NURBS ως προς τις δύο διευθύνσεις  $p=2$ ,  $q=2$

Οι αντίθετες ακτινικές μετατοπίσεις στα άκρα του φορέα για:

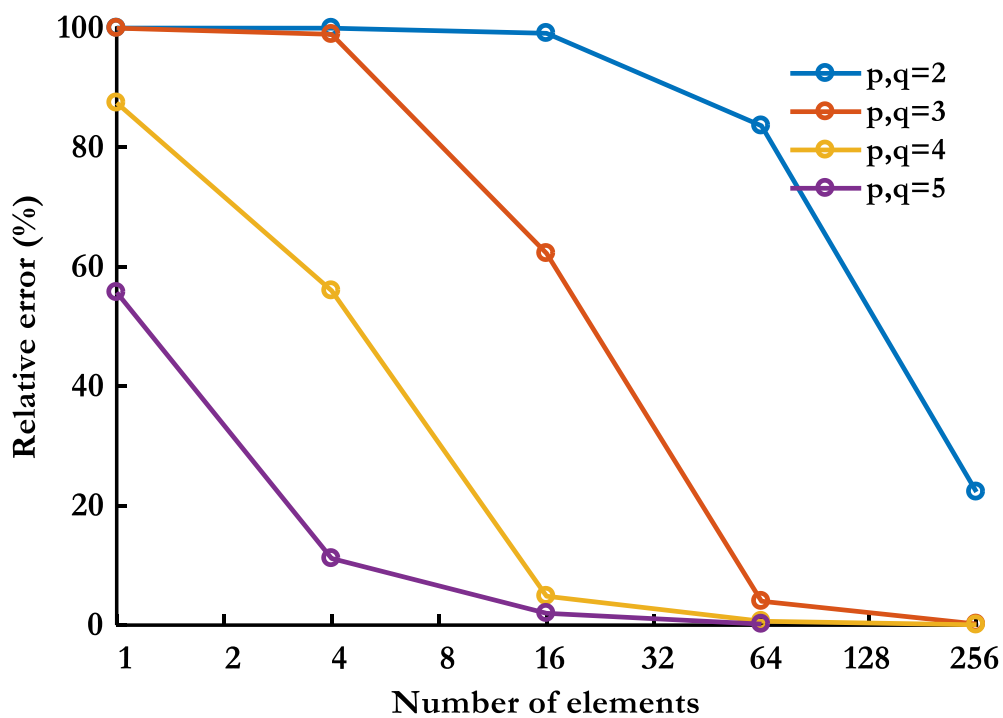
$$R = 10m, t = 0,04m, E = 6,825 * 10^7 \frac{kN}{m^2}, \nu = 0,3 \text{ και } F = \pm 2kN$$

είναι ίσες με 0.0924m (Belytschko et al., 1985).

Οι ακτινικές μετατοπίσεις στα δύο σημεία βγαίνουν πάντα ίδιες. Τα αποτελέσματα του Matlab απεικονίζονται στα Σχ. 5.36 και Σχ. 5.37.



Σχ. 5.36: Διάγραμμα του απόλυτου σχετικού σφάλματος της ακτινικής μετατόπισης προς τον αριθμό σημείων ελέγχου

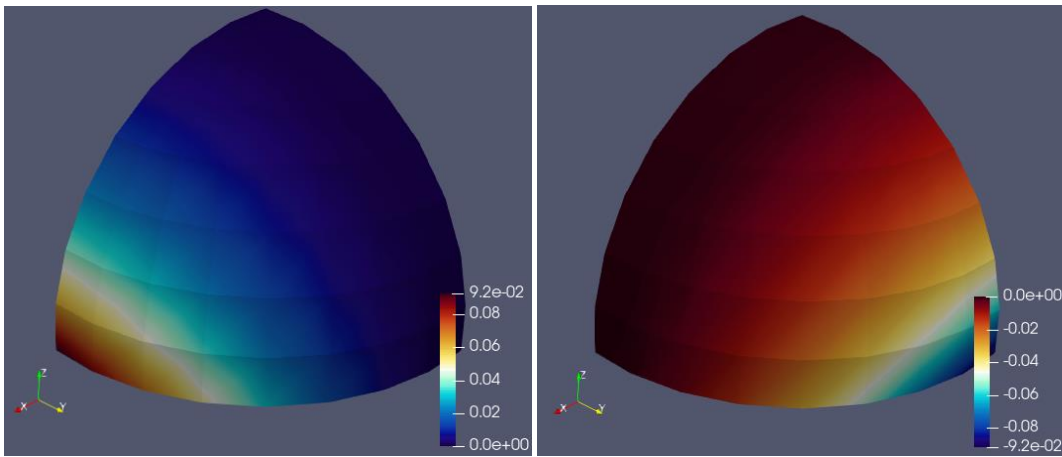


Σχ. 5.37: Διάγραμμα του απόλυτου σχετικού σφάλματος της ακτινικής μετατόπισης προς τον αριθμό στοιχείων

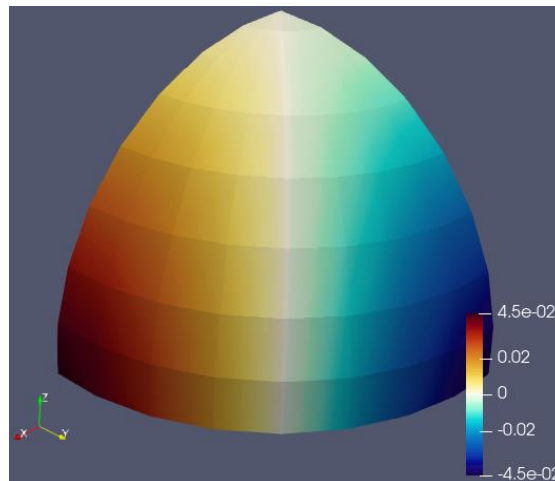
Οι συναρτήσεις 3<sup>ου</sup>, 4<sup>ου</sup>, και 5<sup>ου</sup> βαθμού καταφέρνουν να πλησιάσουν με τεράστια ακρίβεια την λύση της βιβλιογραφίας. Από την μορφή των καμπυλών φαίνεται ότι

γίνεται να βρεθεί η σωστή λύση και με πολυωνυμικές συναρτήσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού, όμως θα χρειαστεί ένας τεράστιος αριθμός στοιχείων και αντίστοιχα σημείων ελέγχου.

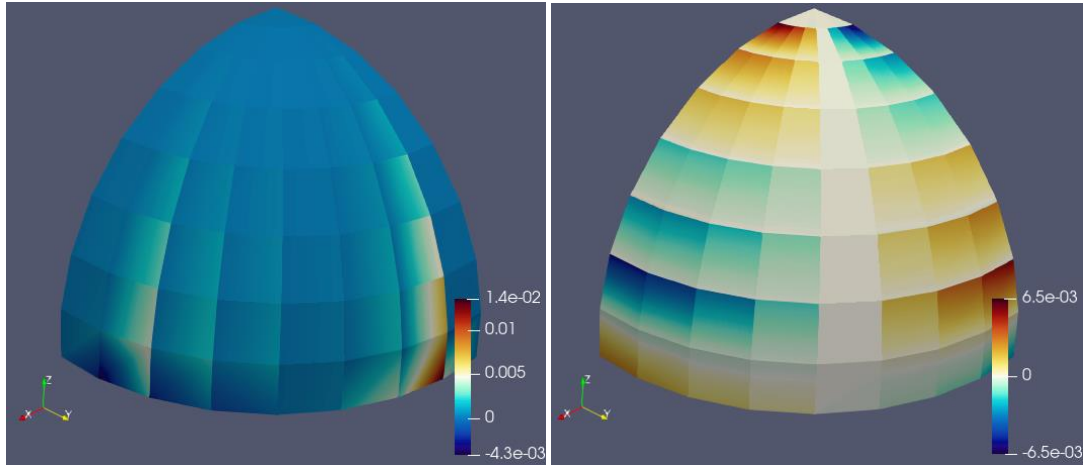
Παρακάτω φαίνονται οι μετατοπίσεις, οι παραμορφώσεις και οι τάσεις του παραμορφωμένου σχήματος (Σχ. 5.38 έως Σχ. 5.43). Σημειώνεται ότι στα Σχ. 5.42 (αριστερά) και Σχ. 5.43 απειρίζονται οι τάσεις στην κορυφή του φορέα. Έτσι για να φαίνονται καλύτερα οι τάσεις στον υπόλοιπο φορέα, τα πάνω στοιχεία έχουν αφαιρεθεί.



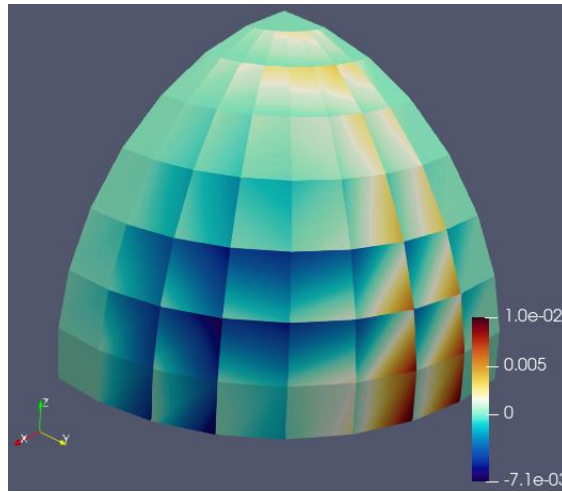
**Σχ. 5.38: Μετατοπίσεις παραμορφωμένου φορέα κατά z για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**



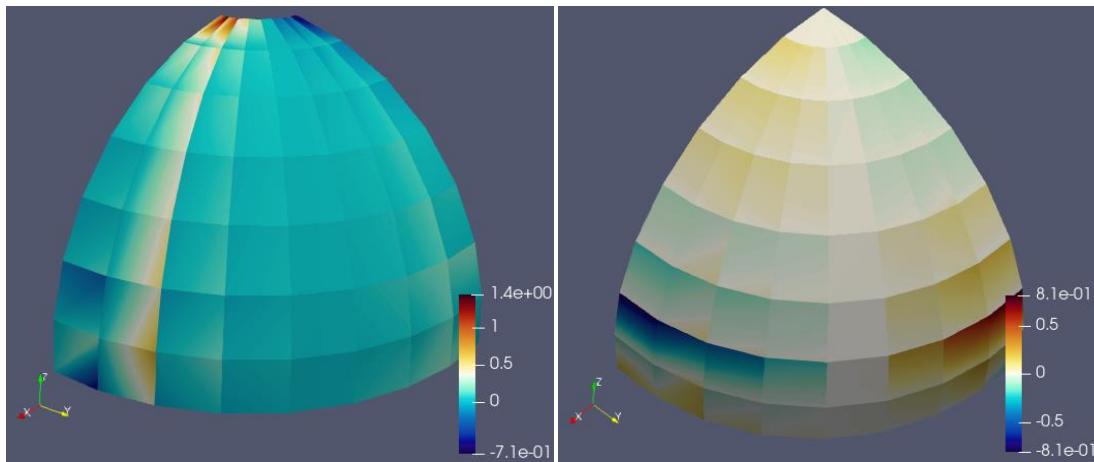
**Σχ. 5.39: Μετατοπίσεις παραμορφωμένου φορέα κατά z για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**



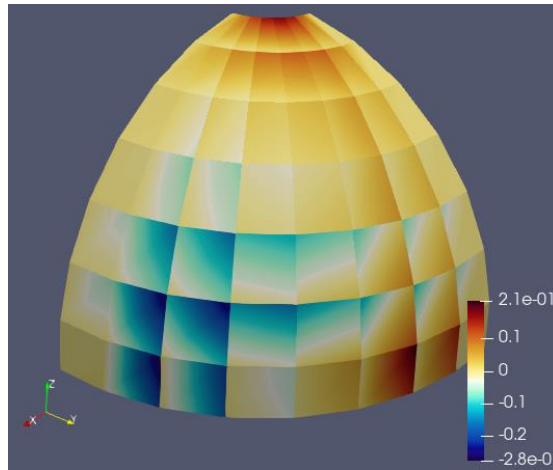
**Σχ. 5.40: Ορθές παραμορφώσεις παραμορφωμένου φορέα κατά x και κατά y για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**



**Σχ. 5.41: Διατμητικές παραμορφώσεις παραμορφωμένου φορέα κατά xy για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**



**Σχ. 5.42: Ορθές τάσεις παραμορφωμένου φορέα κατά x και κατά y για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**

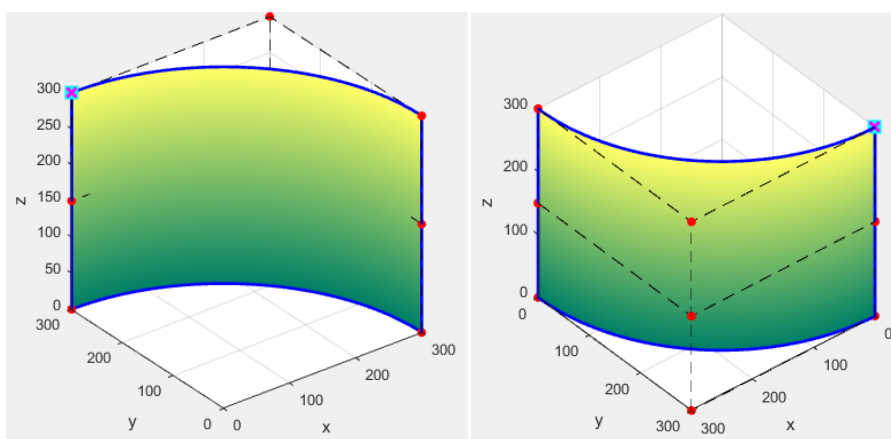


**Σχ. 5.43: Διατμητικές τάσεις παραμορφωμένου φορέα κατά xy για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**

## 5.6 Κύλινδρος με διαφράγματα στις άκρες του υποβαλλόμενος σε σημειακά φορτία

Το πρόβλημα αυτό είναι το τελευταίο από τα προβλήματα του τεστ εμποδίων κελυφών και απεικονίζεται και αυτό στο Σχ. 5.23. Η γεωμετρία του φορέα είναι ίδια με αυτήν του προβλήματος που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 5.2. Η διαφορά είναι ότι εδώ, αντί για ομοιόμορφη πίεση, ασκούνται σημειακά φορτία 1kN με αντίθετη φορά στο μέσον του. Η λύση της βιβλιογραφίας είναι για το σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη και είναι ίση με  $0,18248 * 10^{-4}$ . Το σημείο αυτό φαίνεται καλύτερα στο Σχ. 5.44.

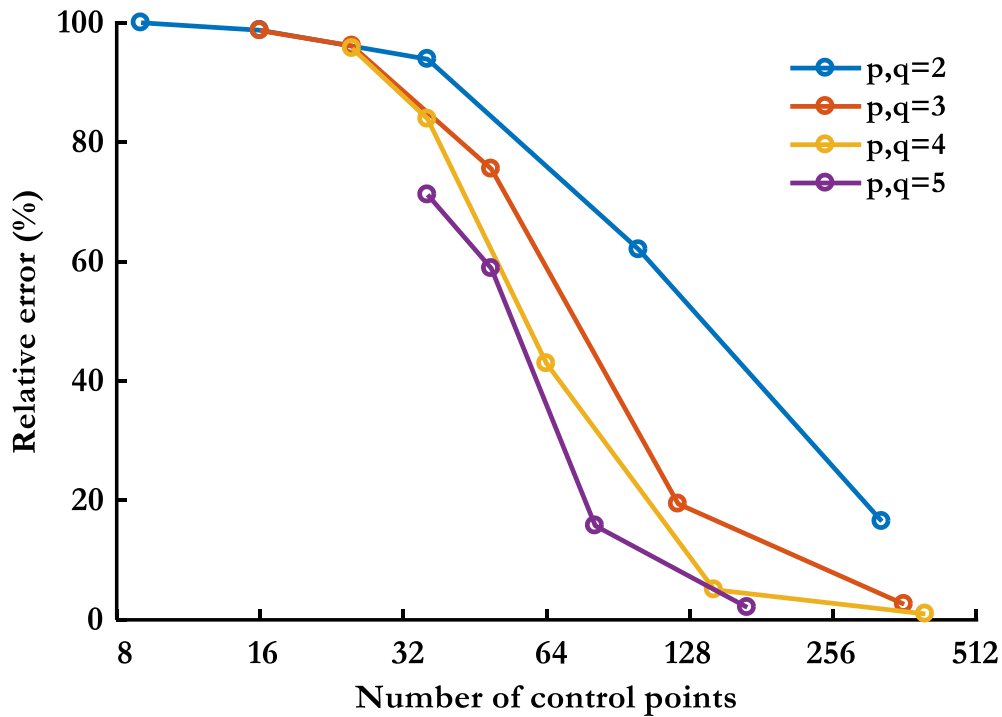
Η συμμετρία του προβλήματος επιτρέπει να προσομοιωθεί το 1/8 αυτού, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.10.



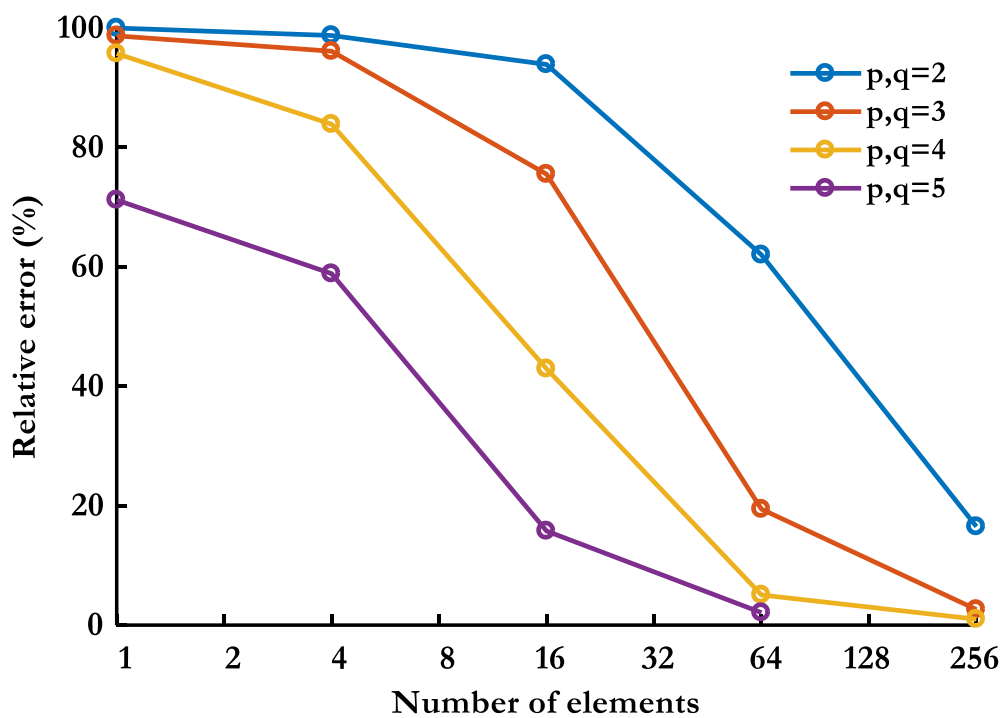
**Σχ. 5.44: Απεικόνιση του 1/8 του κυλίνδρου στο Matlab**

Ο ίδιος φορέας με πιο πυκνό πλέγμα σημείων ελέγχου φαίνεται στο Σχ. 5.12.

Οι ακτινικές μετατοπίσεις που προκύπτουν από το Matlab φαίνονται στα Σχ. 5.45 και Σχ. 5.46



Σχ. 5.45: Διάγραμμα του απόλυτου σχετικού σφάλματος της ακτινικής μετατόπισης προς αριθμό σημείων ελέγχου

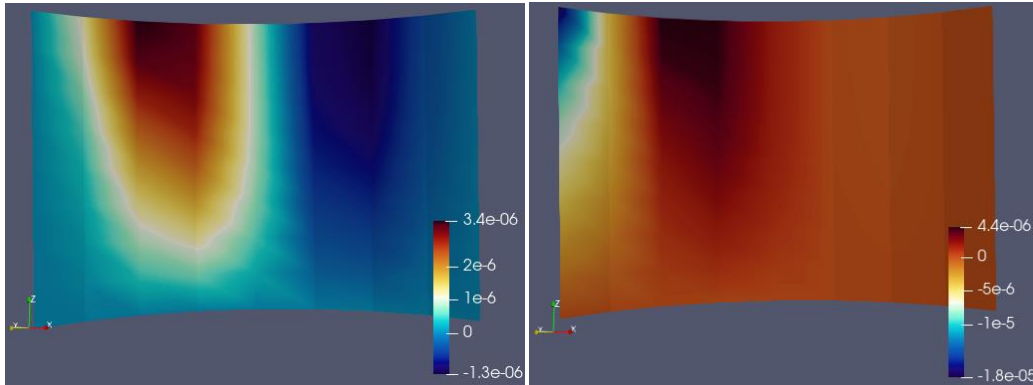


Σχ. 5.46: Διάγραμμα του απόλυτου σχετικού σφάλματος της ακτινικής μετατόπισης προς τον αριθμό στοιχείων

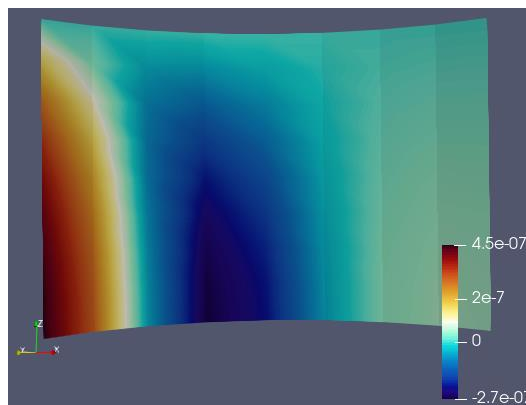
Και σε αυτό το παράδειγμα φαίνεται ότι το πρόγραμμα δεν συγκλίνει στην ακριβή τιμή, και αντί αυτής συγκλίνει στην  $-1.807 * 10^{-5}m$ . Το σφάλμα ωστόσο είναι αποδεκτό ( $< 1\%$ ). Επίσης όπως φαίνεται οι πολωνομικές συναρτήσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού

αδυνατούν να συγκλίνουν ικανοποιητικά, όμως με αύξηση των σημείων ελέγχου πιθανότατα θα πλησίαζαν σε ικανοποιητικό βαθμό την λύση της βιβλιογραφίας.

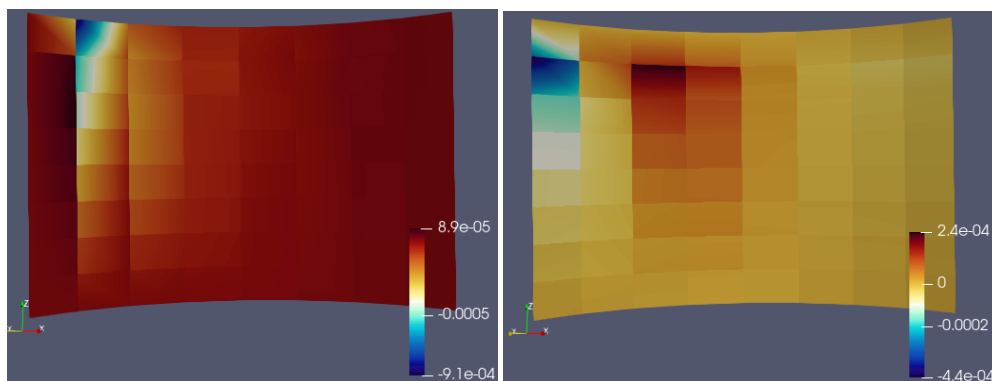
Παρακάτω φαίνονται οι μετατοπίσεις, οι παραμορφώσεις και οι τάσεις για τα σημεία του φορέα από το Paraview (Σχ. 5.47 έως Σχ. 5.52).



**Σχ. 5.47: Μετατοπίσεις παραμορφωμένου φορέα κατά x (αριστερό σχήμα) και κατά y (δεξί σχήμα) για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**

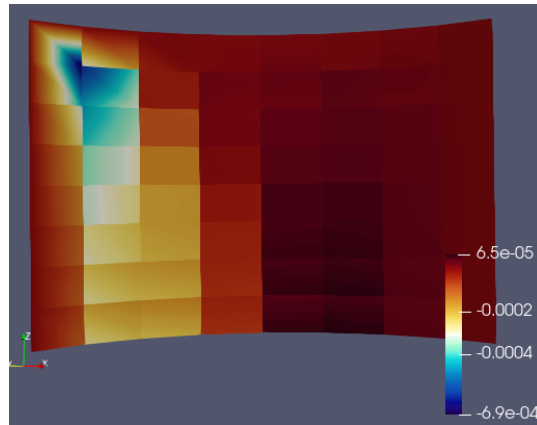


**Σχ. 5.48: Μετατοπίσεις παραμορφωμένου φορέα κατά z για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**

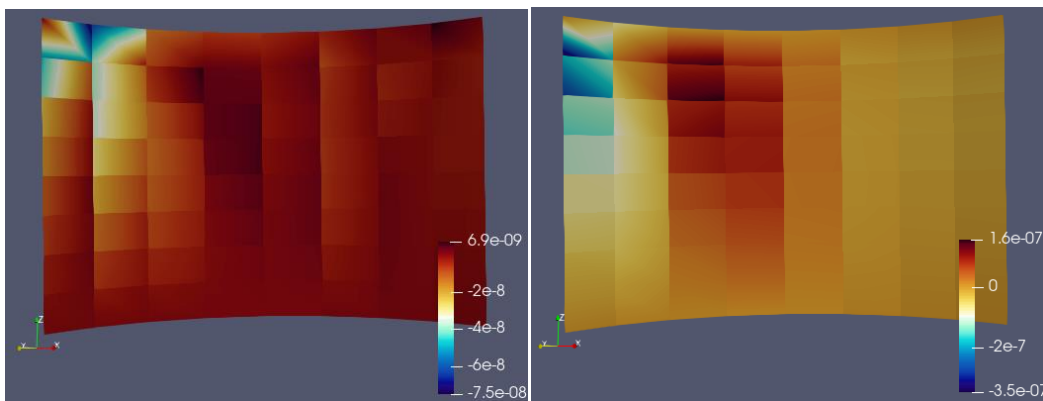


**Σχ. 5.49 Ορθές παραμορφώσεις παραμορφωμένου φορέα κατά x (αριστερό σχήμα) και κατά y (δεξί σχήμα) για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**

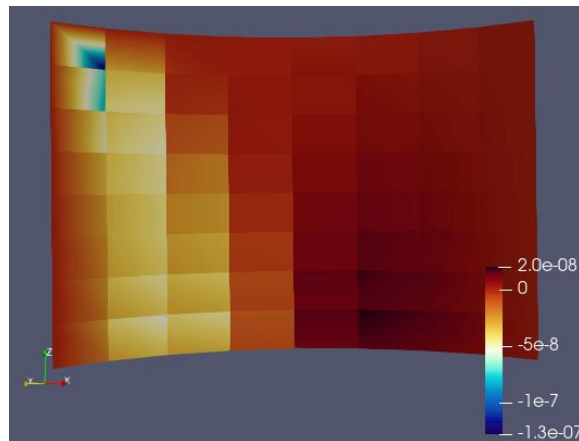




**Σχ. 5.50: Διατμητικές παραμορφώσεις παραμορφωμένου φορέα κατά xy για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**



**Σχ. 5.51: Ορθές τάσεις παραμορφωμένου φορέα κατά x (αριστερό σχήμα) και κατά y (δεξί σχήμα) για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**



**Σχ. 5.52: Διατμητικές τάσεις παραμορφωμένου φορέα κατά xy για  $p=5$ ,  $q=5$  και 169 σημεία ελέγχου**

## Κεφάλαιο 6 Συμπεράσματα

Στόχος της διπλωματικής αυτής ήταν η σύνταξη κώδικα για την ανάλυση λεπτών κελυφών με την ισογεωμετρική μέθοδο. Το στοιχείο, με το οποίο θα γίνεται η ανάλυση, επιλέχθηκε να βασίζεται στην θεωρία Kirchhoff-Love και να χρησιμοποιεί τις καμπύλες NURBS ως συναρτήσεις σχήματος. Οι τελευταίες αποτελούν πολύ καλή επιλογή για την μοντελοποίηση στοιχείων Kirchhoff-Love, καθώς προσφέρουν εύκολα την απαιτούμενη συνέχεια. Τα πλεονεκτήματα που προσφέρουν τα στοιχεία Kirchhoff-Love είναι ότι δεν δημιουργούν προβλήματα παρασιτικής στιβαρότητας, όπως τα πιο ευρέως διαδεδομένα στοιχεία Reissner-Mindlin, αφού δεν λαμβάνουν καθόλου υπόψη τους τις εκτός επιπέδου παραμορφώσεις, αλλά και κρατάνε το υπολογιστικό κόστος χαμηλό, αφού πρώτον μοντελοποιείται μόνο η μέση επιφάνεια και δεύτερον κάθε σημείο ελέγχου έχει μόνο τρεις βαθμούς ελευθερίας. Πτυχές που είναι σχετικές με στρωφικούς βαθμούς ελευθερίας, όπως επιβολή συνοριακών συνθηκών, μπορούν να αντιμετωπιστούν με κατάλληλη χρήση των μετακινησιακών βαθμών.

Τα πλεονεκτήματα που προσφέρει η ισογεωμετρική ανάλυση είναι πολλά με βασικότερο την ακριβή γεωμετρική αναπαράσταση. Έτσι, γεφυρώνεται το χάσμα ανάμεσα στον σχεδιασμό και την ανάλυση, καθώς τώρα δεν χρειάζεται το περιττό και χρονοβόρο βήμα της προσεγγιστικής διακριτοποίησης του προσομοιώματος από τον μηχανικό, αλλά και εξαλείφονται τα σφάλματα εξαιτίας μικρών γεωμετρικών ατελειών. Τέλος, αναφέρεται ότι η αυξημένη συνέχεια που προσφέρει, οδηγεί στο να είναι και οι παραμορφώσεις, αλλά και οι τάσεις, συνεχείς στα σύνορα των στοιχείων.

Η ακριβής γεωμετρική αναπαράσταση από μόνη της, ωστόσο, δεν είναι αρκετή για την σωστή ανάλυση του φορέα. Αυτό συμβαίνει επειδή ο σχεδιασμός γίνεται με την χρήση του ελάχιστου αριθμού σημείων ελέγχου και τον μικρότερο δυνατό πολυωνυμικό βαθμό των βασικών συναρτήσεων, έτσι ώστε να είναι εύκολος ο έλεγχος της γεωμετρίας από τον σχεδιαστή και να κρατιέται χαμηλό το υπολογιστικό κόστος. Έτσι, πολλές φορές κρίνεται απαραίτητη είτε η εισαγωγή κόμβων, είτε η αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού είτε και τα δύο. Τα παραπάνω επιτυγχάνονται με τις  $h$ -,  $p$ - και της καινοτόμας  $k$ - προσαρμογής.

Η σπουδαιότητα των διαδικασιών προσαρμογής γίνεται φανερή μέσα από την επίλυση με τον κώδικα αριθμητικών παραδειγμάτων, η λύση των οποίων υπάρχει

στην βιβλιογραφία. Στα περισσότερα από αυτά, η ανάλυση με την αρχική γεωμετρία δίνει αποτελέσματα που είναι λάθος κατά κάποιες τάξεις μεγέθους. Με χρήση όμως, των διαδικασιών προσαρμογής το σφάλμα αυτό μειώνεται και φτάνει από 1% έως και 0,05% στο παράδειγμα του κελύφους με ημισφαιρική γεωμετρία.

Η ανάλυση των αριθμητικών αυτών παραδειγμάτων βοήθησε στην εξαγωγή κάποιων συμπερασμάτων ως προς τον βαθμό και την ταχύτητα σύγκλισης του προγράμματος για διαφορετικές εκλεπτύνσεις. Το πιο βασικό από αυτά είναι ότι η αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού και η πύκνωση των σημείων ελέγχου, πάντα οδηγούν σε καλύτερη ακρίβεια. Ένα άλλο συμπέρασμα που εξάγεται από την ανάλυση του παραδείγματος της πλάκας, αλλά και την εύρεση της διαμήκης μετατόπισης ενός κυλίνδρου υπό πίεση, είναι ότι σε προβλήματα πιο απλής γεωμετρίας δεν είναι απαραίτητη η αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού, καθώς ακόμα και βασικές συναρτήσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού με μικρή πύκνωση του πλέγματος των σημείων ελέγχου οδηγούν σε πολύ ακριβές αποτέλεσμα.

Τέλος, έγινε αντιληπτό και το αντίθετο φαινόμενο. Προβλήματα που χρησιμοποιούσαν πιο περίπλοκη γεωμετρία, όπως η εύρεση ακτινικών μετατοπίσεων σε σχήματα κυλινδρικής ή σφαιρικής μορφής, απαιτούν αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού των βασικών συναρτήσεων. Αυτό ήταν φανερό, καθώς η ανάλυση που έγινε στα προβλήματα αυτά με πολυωνυμικές συναρτήσεις μικρού βαθμού είτε δεν οδήγησε σε σύγκλιση (κύλινδρος και ημισφαίριο υποβαλλόμενα σε σημειακά φορτία) είτε σε πολύ καθυστερημένη σύγκλιση (στέγη των Scordelis-Lo, όπου στα 36 σημεία ελέγχου οι εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού δίνουν σφάλμα > 30%, ενώ όλες οι άλλες < 10%).

Σε γενική περίπτωση, η χρήση βασικών συναρτήσεων υψηλού βαθμού, ενώ απαιτεί περισσότερα σημεία Gauss, οδηγεί συνήθως σε χαμηλότερο υπολογιστικό κόστος εξαιτίας της μεγάλης ταχύτητας σύγκλισης που παρουσιάζουν, καθώς δεν απαιτούν πολλά σημεία ελέγχου, αν και όπως αναφέρθηκε πιο πριν αυτή δεν είναι πάντα η περίπτωση. Έτσι, η ισορροπία ανάλογα με την περίπτωση μεταξύ αύξησης του πολυωνυμικού βαθμού και πύκνωση των σημείων ελέγχου είναι αυτή που θα οδηγήσει σε μία προσομοίωση που είναι ικανοποιητικά ακριβής και εκτελείται στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.

Εκτός από τις πτυχές της ισογεωμετρικής ανάλυσης που θίχτηκαν σε αυτήν την διπλωματική εργασία, υπάρχουν πολλές ακόμα που θα διεύρυναν το πεδίο εφαρμογής

της μεθόδου και θα αύξαναν την απόδοσή της. Βασικό είναι ότι οι φορείς που μπορούν να αναλυθούν με το πρόγραμμα πρέπει να αποτελούνται από ένα μόνο patch. Στην πραγματικότητα, οι περισσότεροι φορείς και ειδικά οι φορείς λεπτών κελυφών που χαρακτηρίζονται συχνά από περίπλοκη γεωμετρία αποτελούνται από περισσότερα patches. Επίσης, πολύ ουσιαστική κρίνεται η επέκταση του κώδικα ώστε να μπορεί να επιλύει προβλήματα που ο φορέας θα παρουσιάζει ελαστοπλαστική συμπεριφορά, αλλά και φαινόμενα που έχουν σχέση με την θραυστομηχανική και την δημιουργία ρωγμών.



## Παράρτημα

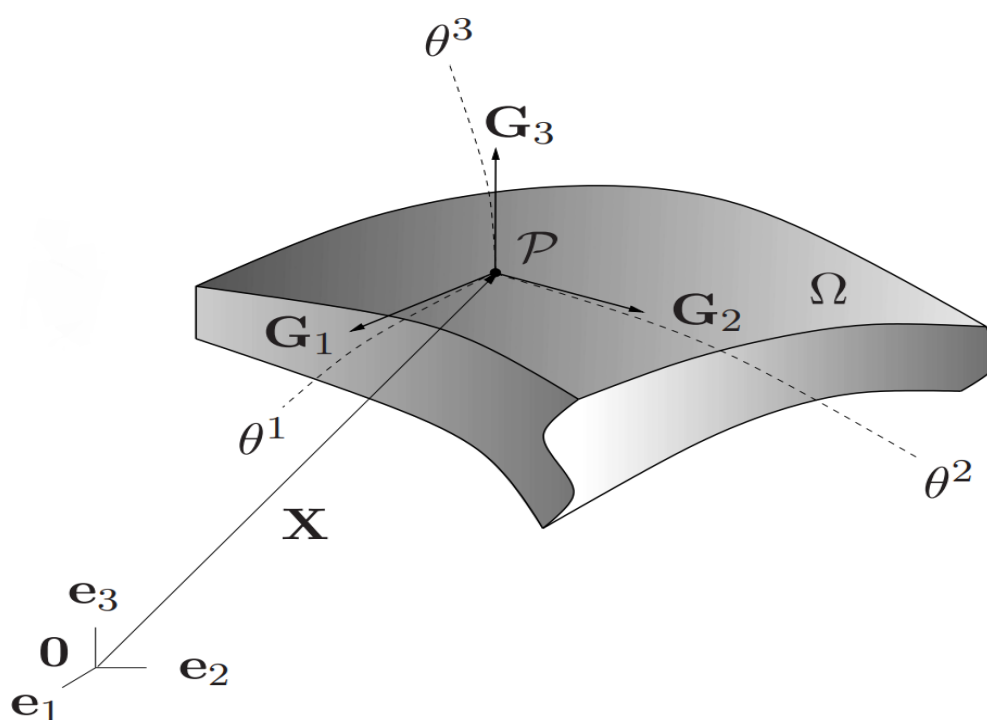
### Συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα διανύσματα

Έστω τυχόν σημείο  $P$ , που ανήκει στην μέση επιφάνεια ενός κελύφους όπως φαίνεται στο Σχ. Π.1. Ο προσανατολισμός του στον τρισδιάστατο χώρο ορίζεται με ένα σταθερό ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Το σημείο αναφοράς του συστήματος είναι το  $\mathbf{0}$  και τα ορθοκανονικά διανύσματα βάσης του,  $\mathbf{e}_i$ , δείχνουν προς την κατεύθυνση των αξόνων του. Έτσι η θέση κάθε χωρικού σημείου  $P$  ως προς το σημείο  $\mathbf{0}$  δίνεται με ένα διάνυσμα  $\mathbf{X}$  ως γραμμικός συνδυασμός των σωματόδετων συντεταγμένων  $X^i$  και των διανυσμάτων βάσης  $\mathbf{e}_i$ :

$$\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i \quad , \quad (\text{Π.1})$$

με  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$  ,  $\|\mathbf{e}_i\| = 1$  ,

όπου σωματόδετο ονομάζεται το σύστημα συντεταγμένων το οποίο είναι προσκολλημένο στα σημεία του φορέα και παραμορφώνεται μαζί με αυτόν. Έτσι κάθε σημείο έχει τις ίδιες συντεταγμένες και στην απαραμόρφωτη και στην παραμορφωμένη μορφή του. Οι δείκτες που χρησιμοποιούνται έχουν ήδη οριστεί στο Κεφάλαιο 4.2.



Σχ. Π.1: Συστήματα συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται για τον προσανατολισμό των σημείων του φορέα (Echter, 2013)

Επιπλέον χρησιμοποιείται ένα καμπυλόγραμμο σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων, έτσι ώστε να περιγραφεί ακριβέστερα η γεωμετρία και οι κινηματικές σχέσεις που διέπουν τον καμπύλο φορέα. Έτσι κάθε σημείο του κελύφους μπορεί να προσδιοριστεί από τις συντεταγμένες  $\theta^i$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{X}$ , που στην εξίσωση (Π.1) περιγραφόταν από τα καρτεσιανά διανύσματα βάσης  $\mathbf{e}_i$ , ορίζεται ως προς τις καμπυλόγραμμες σωματόδετες συντεταγμένες ως:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\theta^i) \quad .$$

Συναλλοίωτο διάνυσμα βάσης  $\mathbf{G}_i$  είναι η μερική παράγωγος του  $\mathbf{X}$  ως προς το  $\theta^i$ , που αναπαριστά την εφαπτόμενη στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες  $\theta^i$  και σε αντιδιαστολή με τις  $\mathbf{e}_i$ , συνήθως δεν είναι ορθοκανονικό (Echter, 2013). Για το  $\mathbf{G}_i$  ισχύει ότι:

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial X^j}{\partial \theta^i} \mathbf{e}_j \quad .$$

Τα αναλλοίωτα διανύσματα βάσης  $\mathbf{G}_i$  ορίζουν ένα εφαπτομενικό διανυσματικό χώρο σε κάθε σημείο P και επιτρέπουν την παραγωγή σημαντικών τοπικών γεωμετρικών ιδιοτήτων.

Το ανταλλοίωτο διάνυσμα βάσης  $\mathbf{G}^i$  είναι ίσο με:

$$\mathbf{G}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial X^j} \mathbf{e}_j \quad .$$

Για τα  $\mathbf{G}_i$  και  $\mathbf{G}^i$  ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j \quad ,$$

όπου το  $\delta_i^j$  είναι το δέλτα του Kronecker και παίρνει τις τιμές:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Με γνωστά τα συναλλοίωτα και τα ανταλλοίωτα διανύσματα βάσης μπορούν να υπολογιστούν τα στοιχεία του μετρικού τανυστή  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^j = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$$

Το σύμβολο  $\otimes$  αναπαριστά το προϊόν τανυστή των αντίστοιχων διανυσμάτων βάσης είτε στην συναλλοίωτη είτε στην ανταλλοίωτη μορφή.

Τα ανταλλοίωτα στοιχεία του μετρικού τελεστή προκύπτουν από την αντιστροφή των  $G_{ij}$ . Αυτά επιτρέπουν τον υπολογισμό των διανυσμάτων βάσης  $\mathbf{G}^i$  σύμφωνα με την σχέση:

$$\mathbf{G}^i = G^{ij} \mathbf{G}_j \quad .$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και για την παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα.



## Κεφάλαιο 7 Βιβλιογραφικές Αναφορές

Παπαδρακάκης, Μ. (2001). Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. *Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα*, 2.

Ventsel, E., Krauthammer, T., & Carrera, E. J. A. M. R. (2002). Thin plates and shells: theory, analysis, and applications. *Appl. Mech. Rev.*, 55(4), B72-B73.

Προβατίδης, Χ. Γ. (2016). πεπερασμένα στοιχεία στην ανάλυση κατασκευών. *Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Θεσσαλονίκη*.

Viola, E., & Artioli, E. (2004). The GDQ method for the harmonic dynamic analysis of rotational shell structural elements. *Structural Engineering and Mechanics*, 17(6), 789-818.

Echter, R. (2013). Isogeometric analysis of shells

Kiendl, J., Bletzinger, K. U., Linhard, J., & Wüchner, R. (2009). Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 198(49-52), 3902-3914.

Yang, H. S., & Dong, C. Y. (2019). Adaptive extended isogeometric analysis based on PHT-splines for thin cracked plates and shells with Kirchhoff–Love theory. *Applied Mathematical Modelling*, 76, 759-799.

Alaydin, M. D., Benson, D. J., & Bazilevs, Y. (2021). An updated Lagrangian framework for Isogeometric Kirchhoff–Love thin-shell analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 384, 113977.

Nguyen-Thanh, N., Valizadeh, N., Nguyen, M. N., Nguyen-Xuan, H., Zhuang, X., Areias, P., ... & Rabczuk, T. (2015). An extended isogeometric thin shell analysis based on Kirchhoff–Love theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 284, 265-291.

Chen, L., Nguyen-Thanh, N., Nguyen-Xuan, H., Rabczuk, T., Bordas, S. P. A., & Limbert, G. (2014). Explicit finite deformation analysis of isogeometric membranes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 277, 104-130.

- Zareh, M., & Qian, X. (2019). Kirchhoff–Love shell formulation based on triangular isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 347, 853-873.
- Chapelle, D., & Bathe, K. J. (2010). *The finite element analysis of shells-fundamentals*. Springer Science & Business Media.
- Calladine, C. R. (1989). *Theory of shell structures*. Cambridge university press.
- Sechler, E. E., & Fung, Y. C. (Eds.). (1974). *Thin-shell Structures; Theory, Experiment and Design*. Prentice-Hall.
- Argyris, J. H. (1954). Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*.
- Argyris, J. H., & Kelsey, S. (1955). Energy theorems and structural analysis. Parts I and II, *Aircraft Engineering*.
- Hughes, T. J., Cottrell, J. A., & Bazilevs, Y. (2005). Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(39-41), 4135-4195.
- Cottrell, J. A., Hughes, T. J., & Bazilevs, Y. (2009). *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons.
- Nguyen, V. P., Anitescu, C., Bordas, S. P., & Rabczuk, T. (2015). Isogeometric analysis: an overview and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*, 117, 89-116.
- Piegl, L., & Tiller, W. (1996). *The NURBS book*. Springer Science & Business Media.
- Σαπουντζάκης, Ε. Ι. (2005). Θεωρία Πλακών. *Εκδόσεις Ε.Μ.Π.*
- Belytschko, T., Stolarski, H., Liu, W. K., Carpenter, N., & Ong, J. S. (1985). Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51(1-3), 221-258.
- Reisenfeld, R. F. (1973). *Applications of B-spline Approximation to Geometric Problems of Computer Aided Design*, Univ. of Utah (Vol. 6). UTEC-CSC-73-126.