Δυϊκότητα του Stone

Παύλος Σιόντορος

5 Δεκεμβρίου 2011

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η παρουσίαση του θεωρήματος αναπαράστασης του Stone καθώς και μερικά βασικά θεωρήματα που εξετάζουν την δυϊκότητα μεταξύ αλγεβρών Boole και συμπαγών ολικά μη συνεκτικών χώρων. Πραγματευόμαστε δύο χώρους: Την συμπαγοποίηση Stone-Cech ενός χώρου και τον χώρο Stone μιας άλγεβρας Boole. Βασικά εργαλεία στην δουλειά μας αποτελούν η τοπολογική εκδοχή των υπερφίλτρων, τα ζ-υπερφίλτρα σε ένα χώρο, ή η αλγεβρική εκδοχή των υπερφίλτρων σε μια άλγεβρα Boole.
Στο πρώτο κεφάλαιο παραθέτουμε βασικές τοπολογικές έννοιες και θεωρήματα από την γενική τοπολογία. Αποτελούν βασικές γνώσεις για την κατανόηση του κυρίως θέματος της εργασίας. Στα υπόλοιπα κεφάλαια την ιδιότητα T_1 την θεωρούμε δεδομένη και με την έννοια χώρος εννοούμε έναν Hausdorff τελείως κανονικό τοπολογικό χώρο. Στεκόμαστε στις ιδιότητες των υπερφίλτρων σε ένα σύνολο X, που είναι βασικό εργαλείο της εργασίας. Καθώς και λίγο στην συνεκτικότητα ενός τοπολογικού χώρου. Αργότερα θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια των ολικά μη συνεκτικών χώρων που είναι εκείνοι οι χώροι που για κάθε $x \in X$ το μεγαλύτερο συνεκτικό υποσύνολο του X που περιέχει το x είναι το $\{x\}$ και των 0-διάστατων χώρων, που είναι οι χώροι που έχουν ως βάση την οικογένεια των ανοιχτών-κλειστών συνόλων.
Στο δεύτερο κεφάλαιο υπάρχουν ο ορισμός και οι βασικές ιδιότητες μιας άλγεβρας Boole. Καθώς και ότι το πεδίο συνόλων των ανοιχτών-κλειστών συνόλων είναι μια άλγεβρα Boole με τις κατάλληλες μετατροπές πράξεων. Ορίζουμε την έννοια του ομομορφισμού μεταξύ αλγεβρών Boole καθώς και τις έννοιες των φίλτρων και υπερφίλτρων σε μια άλγεβρα Boole. Τέλος παρουσιάζουμε ένα θεώρημα ισομορφισμού πεπερασμένων αλγεβρών Boole και μια συνολοθεωρητική εκδοχή του θεωρήματος αναπαράστασης του Stone μεταξύ μιας άλγεβρας Boole $\mathcal{B}$ και ενός πεδίου συνόλων F.
Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάμε την συμπαγοποίηση Stone-Cech. Συμπαγοποίηση ονομάζουμε ένα Hausdorff τοπολογικό χώρο στον οποίο απεικονίζεται ομοιομορφικά ως πυκνό υποσύνολο ο X. Από τα διάφορα είδη συμπαγοποιήσεων που υπάρχουν η Stone-Cech είναι η μεγαλύτερη συμπαγοποίηση. Εμείς κατασκευάζουμε τον χώρο βX της συμπαγοποίησης Stone-Cech ενός χώρου με δύο ισοδύναμους τρόπους. Χαρακτηρίζεται μοναδικά από την ιδιότητα κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to K$ από τον X σε ένα συμπαγή χώρο K να επεκτείνεται (βλέποντας τον X εμφυτευμένο μέσα στον βX) σε μια συνεχή $\tilde{f} : \beta X \to K$. Για κάθε άλλη συμπαγοποίηση Y του X υπάρχει

$$\begin{tikzcd}
\beta X \arrow[dr, "\tilde{f} : \beta X \to K"] & \\
X \arrow[u, "e"] \arrow[r, "f"'] & K
\end{tikzcd}$$

ομοιομορφισμός $k : \beta X \to Y$ με $k(x) = x$ για κάθε $x \in X$.
Η πρώτη κατασκευή του χώρου γίνεται κατά κάποιον τρόπο εξωτερικά· παίρνοντας για κάθε συνεχή και φραγμένη πραγματική συνάρτηση την κλειστότητα της εικόνας του X και φτιάχνοντας το καρτεσιανό γινόμενο αυτών. Αποδεικνύεται εύκολα ότι αυτός ο χώρος είναι συμπαγοποίηση και μάλιστα με την χαρακτηριστική αυτή ιδιότητα. Η δεύτερη κατασκευή γίνεται χρησιμοποιώντας υπερφίλτρα. Αρχικά παρουσιάζουμε την Stone-Cech συμπαγοποίηση των φυσικών αριθμών και επεκτείνουμε κατά μία έννοια την κατασκευή αυτή σε κάθε τοπολογικό χώρο. Πλέον όμως χρησιμοποιώντας όχι τα υπερφίλτρα σε ένα σύνολο X αλλά τα ζ-υπερφίλτρα, δηλαδή τα υπερφίλτρα στην οικογένεια $\mathcal{Z}(X)$, των συνόλων που είναι αντίστροφη εικόνα μέσω συνεχής πραγματικής συνάρτησης του 0. Αποδεικνύουμε αντίστοιχα ότι και αυτή είναι η συμπαγοποίηση Stone-Cech.
Στο τέταρτο κεφάλαιο ολοκληρώνουμε τον βασικό σκοπό της εργασίας μας, περιγράφοντας την δυϊκότητα μεταξύ αλγεβρών Boole και συμπαγών ολικά μη συνεκτικών χώρων. Βασικό εργαλείο για την κατασκευή της δυϊκότητας είναι και πάλι τα υπερφίλτρα, αυτή τη φορά πάνω σε μια άλγεβρα Boole $\mathcal{B}$.
Κατασκευάζουμε μια τοπολογία στον χώρο $S(\mathcal{B})$ των υπερφίλτρων της $\mathcal{B}$ με την οποία ο $S(\mathcal{B})$ γίνεται συμπαγής ολικά μη συνεκτικός χώρος και έχει βάση από ανοιχτά-κλειστά.
Στη συνέχεια αντί μιας άλγεβρας Boole χρησιμοποιούμε το πεδίο των ανοιχτών-κλειστών συνόλων $\mathcal{B}(X)$ ενός ολικά μη συνεκτικά χώρου X με την ίδια τοπολογία. Για κάθε $x \in X$ παίρνουμε το τετριμμένο υπερφίλτρο $h(x)$ πάνω στην $\mathcal{B}(X)$ του x. Η h είναι συνεχής, το $h[X]$ είναι πυκνό στον χώρο των υπερφίλτρων $S(\mathcal{B}(X))$ και αν X είναι 0-διάστατος τότε ο $S(\mathcal{B}(X))$ γίνεται συμπαγοποίηση του $h[X]$, ισοδύναμη με την Stone-Cech.
Χρησιμοποιώντας την χαρακτηριστική ιδιότητα της συμπαγοποίησης Stone-Cech παίρνουμε την συνεχή επέκταση της h στον βX $\bar{h} : \beta X \to S(\mathcal{B}(X))$. Έχουμε ότι αν X είναι 0-διάστατος τότε ο βX είναι ομοιομορφικός επί του $S(\mathcal{B}(X))$, αν επιπλέον X συμπαγής είναι ομοιομορφικός επί του $S(\mathcal{B}(X))$.
Μέχρι τώρα δείξαμε ότι μπορούμε να αναγνωρίζουμε μια άλγεβρα Boole $\mathcal{B}$ με το πεδίο συνόλων, των ανοικτών-κλειστών υποσυνόλων του χώρου των υπερφίλτρων στη $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}(S(\mathcal{B}))$ και έναν συμπαγή ολικά μη συνεκτικό χώρο με τον χώρο, των υπερφίλτρων πάνω στην άλγεβρα Boole των ανοιχτών κλειστών του X, $S(\mathcal{B}(X))$. Στην επόμενη παράγραφο δείχνουμε ότι μπορούμε να επεκτείνουμε αλγεβρικούς ομομορφισμούς και συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ δύο αλγεβρών Boole $\mathcal{B}, \mathcal{U}$ και συμπαγών ολικά μη συνεκτικά χώρων X, Y αντίστοιχα σε ομομορφισμούς και συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ των $\mathcal{B}(S(\mathcal{B}))$, $\mathcal{B}(S(\mathcal{U}))$ και των $S(\mathcal{B}(X))$, $S(\mathcal{B}(Y))$ αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 2

Τοπολογικές Έννοιες

2.1 Τοπολογικοί χώροι

Ορισμός 2.1. *Ως τοπολογία σε ένα σύνολο X είναι μία συλλογή $\mathcal{T}$ από υποσύνολα του X τα οποία έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες :*

(i) Το $\emptyset$ και ο X ανήκουν στην $\mathcal{T}$.

(ii) Αν I αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $G_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$ τότε και $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathcal{T}$.

(ii) Αν $n \in \mathbb{N}$ και $G_1, G_2, ..., G_n \in \mathcal{T}$ τότε και $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$.

Ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ ονομάζεται *τοπολογικός χώρος.*

Ορισμός 2.2. *Έστω τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$. Θα λέμε ότι ένα υποσύνολο U του X είναι ανοιχτό σύνολο του X αν $U \in \mathcal{T}$.*

Παράδειγμα 2.1. *Έστω σύνολο X.*

1. *Η οικογένεια που αποτελείται $\emptyset$ και τον X αποτελεί την τετριμμένη τοπολογία.*

2. *Η οικογένεια που αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του X αποτελεί την διακριτή τοπολογία.*

Αυτές είναι κάποιες βασικές τοπολογίες .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΓενικά είναι αρκετά δύσκολο να αντιλαμβανόμαστε πάντα πλήρως την τοπολογία ενός χώρου αφού δεν μπορούμε να γνωρίζουμε όλα τα ανοιχτά του. Όμως σε κάποιες περιπτώσεις αυτό είναι δυνατόν να γίνει αν έχουμε μία μικρότερη οικογένεια υποσυνόλων του X η οποία θα παράγει όλα τα ανοιχτά της τοπολογίας για τον X. Βάσει αυτού έχουμε τα παρακάτω.

2.2 Βάση τοπολογίας

Ορισμός 2.3. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Μία υποοικογένεια $\mathscr{B}$ της $\mathcal{T}$ είναι βάση για την τοπολογία του X, αν κάθε στοιχείο της $\mathcal{T}$ γράφεται σαν ένωση στοιχείων της $\mathscr{B}$ δηλαδή, αν $U \in \mathcal{T}$, υπάρχει οικογένεια $\{B_i\}_{i\in I}$, τέτοια ώστε $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Τα στοιχεία της βάσης $\mathscr{B}$ λέγονται βασικά στοιχεία.*

Πρόταση 2.1. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}$. Η $\mathscr{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του $\mathcal{T}$, αν και μόνο αν για κάθε $U \in \mathcal{T}$ και για κάθε $x \in U$, υπάρχει $B \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq U$.*

Απόδειξη. (⇒)Έστω $\mathscr{B}$ βάση για την $\mathcal{T}, U \in \mathcal{T}$ και $x \in U$. Επειδή $\mathscr{B}$ βάση για την $\mathcal{T}$ έπεται από τον ορισμό 1.3.1 ότι υπάρχει οικογένεια $\{B_i\}_{i\in I}$, τέτοια ώστε $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Συνεπώς θα υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $x \in B_{i_0} \subseteq U$.
(⇐)Έστω $U \in \mathcal{T}$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει οικογένεια $\{B_i\}_{i\in I}$, τέτοια ώστε $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Πράγματι, αφού $U \in \mathcal{T}$ τότε για κάθε $x \in U$ υπάρχει $B_x \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x \subseteq U$. Άρα $U = \bigcup_{x\in U} B_x$ και συνεπώς $\mathscr{B}$ βάση για την $\mathcal{T}$. □

Λήμμα 2.1. *Έστω σύνολο X και $\mathscr{B}$ μία βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X. Τότε η $\mathcal{T}$ είναι η οικογένεια όλων των ενώσεων των στοιχείων της $\mathscr{B}$ δηλαδή,*

$$\mathcal{T} = \{\textstyle\bigcup_{i\in I} B_i : I \text{ σύνολο}, B_i \in \mathscr{B}, \forall i \in I\}.$$

Απόδειξη. Προφανώς όλα τα στοιχεία της $\mathscr{B}$ ανήκουν στην τοπολογία $\mathcal{T}$. Επειδή $\mathcal{T}$ τοπολογία έπεται ότι οποιαδήποτε αυθαίρετη ένωση των στοιχείων της $\mathscr{B}$ θα ανήκει στην $\mathcal{T}$. Αντίστροφα, αν $U \in \mathcal{T}$ τότε για κάθε $x \in U$, υπάρχει $B_x \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $x \in U$ και $B_x \subseteq U$. Συνεπώς $U = \bigcup_{x\in U} B_x$ δηλαδή οποιοδήποτε στοιχείο της τοπολογίας γράφεται ως ένωση στοιχείων της βάσης. □

Θεώρημα 2.1. *Έστω σύνολο X και $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Η $\mathscr{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία $\mathcal{T}$ του X αν και μόνο αν, έχει τις παρακάτω ιδιότητες*
(1) $X = \cup\{B : B \in \mathscr{B}\}$.
(2) Αν $x \in B_1 \cap B_2$ όπου $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, τότε υπάρχει $B_3 \in \mathscr{B}$ που περιέχει το x τέτοιο ώστε $B_3 \subseteq B_1 \bigcap B_2$.

Απόδειξη. ¨⇒¨ Έστω $\mathscr{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία $\mathcal{T}$ του X, τότε
(1) αφού X∈ $\mathcal{T}$ έπεται από τον ορισμό 1.3.1 ότι υπάρχει οικογένεια $\{B_i\}_{i\in I}$, τέτοια ώστε $X = \bigcup_{i\in I} B_i$. Όμως

$$X = \textstyle\bigcup_{i\in I} B_i \subseteq \{B : B \in \mathscr{B}\}$$

Επίσης, επειδή $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T}$ έχουμε ότι

$$\{B : B \in \mathscr{B}\} \in \mathcal{T}.$$

Συνεπώς $X = \cup\{B : B \in \mathscr{B}\}$.
(2) Έστω $x \in B_1 \cap B_2$ όπου $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$. Τότε από πρόταση έπεται ότι $B, B^{'}$ τέτοια ώστε $x \in B \subseteq B_1$ και $x \in B^{'} \subseteq B_2$ αντίστοιχα. Συνεπώς $x \in B \cap B^{'} \subseteq B_1 \cap B_2$ όπου το $B \cap B^{'} \in \mathcal{T}$ τον ορισμό της τοπολογίας. Από πρόταση έπεται ότι υπάρχει $B^{''} \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B^{''} \subseteq B \cap B^{'} \subseteq B_1 \cap B_2$. Αν $B \cap B^{'} = \emptyset$ το συμπέρασμα έπεται κατευθείαν.
¨⇐¨Από το λήμμα έπεται ότι $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i\in I} B_i : I$ σύνολο,$B_i \in \mathscr{B}, \forall i \in I\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι όταν η $\mathscr{B}$ έχει τις ιδιότητες (1), (2) η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία για τον X. Οπότε τότε και η $\mathscr{B}$ θα είναι μία βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$.
Ο $X \in \mathcal{T}$ διότι ο X μπορεί να γραφεί ως $X = \bigcup_{B_i\in\mathscr{B}} B_i$.
Αν $I = \emptyset$ τότε το $\emptyset \in \mathcal{T}$.
(Η $\mathcal{T}$ κλειστή στις αυθαίρετες ενώσεις)Έστω I αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $U_i \in \mathcal{T}$, για κάθε $i \in I$ τότε $\bigcup_{j\in J} U_j = \bigcup_{j\in J}(\bigcup_{i\in I_j} B_i) = \bigcup_{i\in I} B_i$ όπου $I = \bigcup_{j\in J} I_j$. Επομένως $\bigcup_{j\in J} U_i \in \mathcal{T}$.
(Η $\mathcal{T}$ κλειστή στις πεπερασμένες τομές)Θα το δείξουμε με επαγωγή. Για $n = 2$: Έστω $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ τότε, $U_1 = \bigcup_{i\in I} B_i$ και $U_2 = \bigcup_{j\in J} B_j$, όπου $B_i, B_j \in \mathscr{B}$ για κάθε $i, j \in I, J$ αντίστοιχα, τότε

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 &= (\textstyle\bigcup_{i\in I} B_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j) \\ &= \textstyle\bigcup_{(i,j)\in I\times J}(B_i \cap B_j) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (2) της υπόθεσης έχουμε ότι για κάθε $x \in B_i \cap B_j$ θα υπάρχει $B_x \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x \subseteq B_i \cap B_j$. Συνεπώς $B_i \cap B_j = \bigcup_{x \in B_i \bigcap B_j} B_x$ δηλαδή,
$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(\bigcup_{x\in B_i \bigcap B_j} B_x) = \bigcup_{x\in U_1\cap U_2} B_x$. Άρα $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$
Δεχόμαστε για $n-1$ ότι $\bigcap_{i=1}^{n-1} U_i \in \mathcal{T}$, θα δείξουμε για n ότι $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$. Πράγματι $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = (\bigcap_{i=1}^{n-1} U_i) \bigcap U_n$ και από επαγωγική υπόθεση για $n = 2$ έπεται το συμπέρασμα. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣτο σημείο αυτό τίθεται το εξής ερώτημα: Έστω σύνολο X και μία οικογένεια $\mathscr{F}$ υποσυνόλων του X. Υπάρχει μία μοναδική τοπολογία του X, που να είναι η μικρότερη τοπολογία του X και να περιέχει την $\mathscr{F}$;

Ορισμός 2.4. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{T}$ μία τοπολογία του X και $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Θα λέμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι η παραγόμενη τοπολογία από την $\mathscr{F}$ και θα συμβολίζουμε $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathscr{F})$ αν*
(i)$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$
(ii)Για κάθε τοπολογία $\mathcal{T}'$ του X με $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}'$, ισχύει $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι στον παραπάνω ορισμό η παραγόμενη τοπολογία $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ είναι μοναδική διότι αν υπήρχε μία δεύτερη τοπολογία $\mathcal{T}'$ παραγόμενη από την $\mathcal{F}$ εξ' ορισμού έπεται ότι $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ αλλά ταυτόχρονα $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Συνεπώς $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Η παρακάτω πρόταση δίνει τον εξωτερικό ορισμό της παραγόμενης τοπολογίας καθώς αποδεικνύει και την ύπαρξη της.

Πρόταση 2.2. *Έστω X σύνολο, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ και θεωρούμε την οικογένεια*

$$\mathcal{T} = \bigcap\{\mathcal{C} : \mathcal{C} \text{ τοπολογία του } X \text{ με } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}\}.$$

Η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπολογία του X που περιέχει την $\mathcal{F}$ δηλαδή $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι αυτή η οικογένεια $\mathcal{T} = \bigcap\{\mathcal{C} : \mathcal{C}$ τοπολογία του X με $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}\}$ αποτελεί τοπολογία για τον X.
Αφού κάθε $\mathcal{C}$ είναι τοπολογία για τον X τέτοια ώστε $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ έπεται ότι $\emptyset \in \mathcal{C}, \forall \mathcal{C}$ συνεπώς $\emptyset \in \cap\mathcal{C}$. Όμοια και X$\in \cap\mathcal{C}$.
Έστω I αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $G_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$ τότε $G_i \in \mathcal{C}, \forall\mathcal{C}$ και $\forall i \in I$. Επειδή $\mathcal{C}$ τοπολογία έπεται ότι $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathcal{C}, \forall\mathcal{C}$ δηλαδή, $\bigcup_{i\in I} G_i \in \cap\mathcal{C}$, ισοδύναμα $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathcal{T}$.
Έστω $G_1, G_2, ..., G_n \in \mathcal{T}$ τότε $G_1, G_2, ..., G_n \in \mathcal{C}, \forall\mathcal{C}$. Επειδή $\mathcal{C}$ τοπολογία έπεται ότι $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{C}, \forall\mathcal{C}$ δηλαδή, $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \cap\mathcal{C}$, ισοδύναμα $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$. Άρα $\mathcal{T}$ τοπολογία.
Η $\mathcal{T}$ είναι καλώς ορισμένη διότι $\mathcal{P}(X) \in \{\mathcal{C} : \mathcal{C}$ τοπολογία του X με $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}\}$ και συνεπώς $\mathcal{T} \neq \emptyset$.
Η $\mathcal{T}$ εξ' ορισμού περιέχει τη $\mathcal{F}$. Τέλος η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την $\mathcal{F}$ διότι αν $\mathcal{T}'$ τοπολογία του X τέτοια ώστε $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}'$ τότε η $\mathcal{T}' \in \{\mathcal{C} : \mathcal{C}$ τοπολογία του X με $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}\}$ και συνεπώς $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. □

Πρόταση 2.3. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ορίζουμε*

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \{\bigcap_{i=1}^{n} F_i : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, (F)_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{F}\} \bigcup \{X\}$$

Η $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ είναι βάση για την $\mathcal{T}(\mathcal{F})$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ ικανοποιεί τις ιδιότητες του θεωρήματος 1.3.4. Παρατηρούμε ότι ο $X \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$, οπότε $X \subseteq \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}$ και κατά συνέπεια $X = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}$.
Έστω τώρα $x \in B_1 \bigcap B_2$ όπου $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$. Επειδή εξ' ορισμού η $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές έπεται ότι $B_1 \bigcap B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ και προφανώς ισχύει $B_3 = B_1 \bigcap B_2 \subseteq B_1 \bigcap B_2$.
Συνεπώς μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι η $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ είναι βάση για κάποια τοπολογία $\mathcal{T}$. Μένει να δείξουμε ότι $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$. Πράγματι, □

Λήμμα 2.2. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Υποθέτουμε ότι $\mathfrak{C}$ είναι μία οικογένεια από ανοιχτά σύνολα του X τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοιχτό σύνολο U του X, υπάρχει ένα στοιχείο C του $\mathfrak{C}$ τέτοιο ώστε $x \in C \subseteq U$. Τότε $\mathfrak{C}$ είναι βάση για την τοπολογία του X.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι $\mathfrak{C}$ είναι βάση για τον X αρκεί να ικανοποιούνται οι δύο ιδιότητες του ορισμού 1.3.1. Για την
(1) Έστω $x \in X$, επειδή X ανοιχτό σύνολο από υπόθεση έπεται ότι θα υπάρχει $C \in \mathfrak{C}$ τέτοιο ώστε $x \in C \subseteq X$.
(2) Έστω $x \in C_1 \bigcap C_2$ όπου $C_1, C_2 \in \mathfrak{C}$. Επειδή C_1, C_2 είναι ανοιχτά έπεται ότι και η τομή τους είναι ανοιχτό και περιέχει το x. Από υπόθεση έπεται ότι υπάρχει ένα στοιχείο C_3 του $\mathfrak{C}$ τέτοιο ώστε $x \in C_3 \subseteq C_1 \bigcap C_2$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Πρέπει να επισημάνουμε ότι στην περίπτωση της παραγόμενης τοπολογίας από τη βάση ξεκινάμε από μία οικογένεια συνόλων με συγκεκριμένες ιδιότητες (ορισμού 1.3.1). Στην περίπτωση που ξεκινήσουμε από μία τυχαία οικογένεια συνόλων και θεωρήσουμε μία νέα οικογένεια που περιλαμβάνει τα στοιχεία της προηγούμενης, όλες τις πεπερασμένες τομές και τις αυθαίρετες ενώσεις των στοιχείων της αυτό είναι τοπολογία; Η ερώτηση αυτή οδήγησε στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.5. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Η $\mathcal{F}$ καλείται υποβάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$ αν $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$. Τα στοιχεία της υποβάσης $\mathcal{F}$ λέγονται υποβασικά υποσύνολα του τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$.*
Η παραγόμενη τοπολογία από την υποβάση $\mathcal{F}$ είναι η οικογένεια $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ που αποτελείται από τα $\emptyset$, X, όλες τις πεπερασμένες τομές των στοιχείων της $\mathcal{F}$ και όλες τις αυθαίρετες ενώσεις αυτών των πεπερασμένων τομών.

2.3 Σχετική τοπολογία

Ορισμός 2.6. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq X$. Η οικογένεια*

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \bigcap U : U \in \mathcal{T}\}$$

είναι τοπολογία στον Y και λέγεται σχετική τοπολογία. Με την τοπολογία αυτή, ο Y καλείται υπόχωρος του X.

Στο σημείο αυτό μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{T}_Y$ είναι τοπολογία. Πράγματι,

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \text{ και } Y = Y \cap X.$$
$$(U_1 \cap Y) \cap \ldots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap \ldots \cap U_n) \cap Y \text{ και αντίστοιχα}$$
$$\bigcup_{j \in J} U_j \cap Y = (\bigcup_{j \in J} U_j) \cap Y$$

Λήμμα 2.3. *Εάν $\mathscr{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του X, τότε η οικογένεια*

$$\mathscr{B}_Y = \{B \bigcap Y : B \in \mathcal{T}\}$$

είναι βάση για την σχετική τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω $y \in Y$ και $U^{'}$ ανοιχτό στον Y. Από το τελευταίο έπεται ότι υπάρχει U ανοιχτό στον X τέτοιο ώστε $U^{'} = Y \bigcap U$. Από το λήμμα έπεται ότι υπάρχει $B \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $y \in B \subseteq U$. Τότε $y \in B \bigcap Y \subseteq U \bigcap Y$, ισοδύναμα $y \in B \bigcap Y \subseteq U^{'}$. Από το λήμμα έπεται το συμπέρασμα. □

Λήμμα 2.4. *Έστω Y υπόχωρος X. Αν U ανοιχτό στον Y και Y ανοιχτό στον X, τότε U ανοιχτό στον X.*

Απόδειξη. Αφού U ανοιχτό στον Y, υπάρχει V ανοιχτό στον X τέτοιο ώστε $U = Y \bigcap V$. Άρα U ανοιχτό στον X ως τομή ανοιχτών στον X. □

Ορισμός 2.7. *Έστω τοπολογικός χώρος X και $A \subseteq X$. Το A θα λέγεται κλειστό αν $X \setminus A$ ειναι ανοιχτό στον X.*

Θεώρημα 2.2. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Τότε ισχύουν τα επόμενα:*

(i) Το $\emptyset$ και ο X είναι κλειστά.

(ii) Η αυθαίρετη τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό

(iii) Η πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό.

Απόδειξη. (i) Από τον ορισμό της τοπολογίας το $\emptyset$ και ο X είναι ανοιχτά. Συνεπώς το $X \setminus \emptyset$ =X είναι κλειστό. Όμοια και το $X \setminus Q = \emptyset$ είναι κλειστό.

(ii) Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών συνόλων ,όπου I αυθαίρετο σύνολο δεικτών. Αρκεί να δείξουμε ότι το $X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i$. Από τους κανόνες $DeMorgan$ έπεται ότι $X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (X \setminus A_i)$ το οποίο είναι ανοιχτό ως αυθαίρετη ένωση ανοιχτών (ορισμός τοπολογίας).

(iii) Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ κλειστά σύνολα. Από τους κανόνες $DeMorgan$ ισχύει ότι $X\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n}(X \setminus A_i)$ το οποίο είναι ανοιχτό από τον ορισμό της τοπολογίας.

□

Θεώρημα 2.3. *Έστω Y υπόχωρος του X. Τότε ένα σύνολο A είναι κλειστό στον Y αν και μόνο αν γράφεται σαν τομή ενός κλειστού συνόλου στον X με τον Y.*

Απόδειξη. ¨$\Rightarrow$¨ Έστω A κλειστό στον Y. Τότε το $Y \setminus A$ θα είναι ανοιχτό στον Y, δηλαδή θα υπάρχει U ανοιχτό στον X τέτοιο ώστε $Y \setminus A = U \bigcap Y$, ισοδύναμα $A = (X \setminus U) \bigcap Y$ όπου $X \setminus U$ ανοιχτό στον X.
¨$\Leftarrow$¨ Έστω ότι $A = U \bigcap Y$ όπου U κλειστό στον X. Τότε το $X \setminus U$ είναι ανοιχτό στον X και $(X \setminus U) \bigcap Y = Y \setminus A$ δηλαδή το $Y \setminus A$ είναι ανοιχτό στον Y οπότε A κλειστό στον Y. □

Θεώρημα 2.4. *Έστω Y υπόχωρος του X. Αν A κλειστό στον Y και Y κλειστό στον X, τότε A κλειστό στον X.*

Απόδειξη. Αφού A κλειστό στον Y, υπάρχει F κλειστό στον X τέτοιο ώστε $A = Y \bigcap F$. Άρα A κλειστό στον X ως τομή κλειστών στον X. □

2.4 Βασικές έννοιες

Ορισμός 2.8. *Έστω $A \subseteq X$. Ένα σημείο $x \in X$ θα λέγεται οριακό σημείο του A αν κάθε ανοιχτό υποσύνολο του X που περιέχει το x τέμνει το A σε τουλάχιστον ένα σημείο.*
Το σύνολο $\overline{A} = \{x \in X$: για κάθε U ανοιχτό $x \in U$ και $U \cap A \neq \emptyset\}$ καλείται κλειστότητα του A και περιλαμβάνει όλα τα οριακά σημεία του X.

Πρόταση 2.4. *(i) $A \subseteq \overline{A}$ για κάθε σύνολο A.*

(ii) A είναι κλειστό εάν και μόνο εάν $A = \overline{A}$

Πρόταση 2.5. *Το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο σύνολο που περιέχει το A και ο εξωτερικός ορισμός του είναι*

$$\overline{A} = \bigcap\{F : F \text{ κλειστό και } A \subseteq F\}.$$

Επίσης,

(i) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(ii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ δηλαδή, $\overline{A}$ είναι κλειστό.

(iii) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

(iv) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Ορισμός 2.9. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subset X$ και $x \in X$. Το x είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν κάθε ανοικτό σύνολο, που περιέχει το x, περιέχει τουλάχιστον άλλο ένα στοιχείο του A διαφορετικό του x. Δηλαδή, αν για κάθε $G \in \mathcal{T}$ με $x \in G$ έχουμε ότι $G \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.*

Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A συμβολίζεται με A' και λέγεται παράγωγο σύνολο του A.
Γενικά δεν ισχύει $A \subset A'$. Κάθε σημείο του A που δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A είναι μεμονωμένο. Τότε υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο G του X ώστε $G \cap A = \{x\}$.

Ορισμός 2.10. *Έστω $A \subseteq X$. Το εσωτερικό του A είναι το μεγαλύτερο σύνολο που περιέχεται στο A και θα το συμβολίζουμε $Int(A)$ ή A° δηλαδή,*

$$Int(A) = \bigcup \{U : U \text{ ανοιχτό και } U \subseteq A\}.$$

Πρόταση 2.6. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $A^\circ \subset A$ *για κάθε* $A \subset X$,

(ii) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ *για κάθε* $A \subset X$,

(iii) *αν* $A \subset B$ *τότε* $A^\circ \subset B^\circ$,

(iv) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ *για κάθε* $A, B \subset X$,

(v) *το* $A \subset X$ *είναι ανοιχτό σύνολο αν και μόνο αν* $A = A^\circ$.

Ορισμός 2.11. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Το A είναι G_δ-σύνολο (ή απλώς G_δ) αν είναι ίσο με την τομή μιας ακολουθίας ανοικτών συνόλων(δηλαδή αν $A = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$, όπου το G_n είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε $n = 1, 2, \ldots$).*
Το A είναι F_σ-σύνολο (ή απλώς F_σ) αν είναι ίσο με την ένωση μιας ακολουθίας κλειστών συνόλων (δηλαδή αν $A = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, όπου το F_n είναι κλειστό υποσύνολο του X για κάθε $n = 1, 2, \ldots$).

Ορισμός 2.12. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Θα λέμε περιοχή του $x \in X$ κάθε σύνολο που το εσωτερικό του περιέχει το x. Αν U είναι περιοχή του x θα γράφουμε $U \in \mathcal{N}_x$. Το $\mathcal{N}_x$ ονομάζεται σύστημα περιοχών του x.*

Ορισμός 2.13. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Μια υποοικογένεια $\mathcal{B}_x$ του συστήματος περιοχών $\mathcal{N}_x$ του x είναι μια βάση περιοχών του x, αν για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$ ώστε $B \subset U$.*

Θεώρημα 2.5. *Έστω X ένα σύνολο και για κάθε $x \in X$ μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{B}_x$ υποσυνόλων του X με τις ιδιότητες:*

(i) *Αν* $B \in \mathcal{B}_x$, *τότε* $x \in B$.

(ii) *Αν* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ *τότε υπάρχει* $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(iii) *Αν* $B \in \mathcal{B}_x$, *τότε υπάρχει* $G \subset X$, *ώστε* $x \in G \subset B$ *και για κάθε* $y \in G$ *υπάρχει* $B_y \in \mathcal{B}_y$ *ώστε* $B_y \subset G$.
Θέτουμε

$$\mathcal{T} = \{G \subset X : \text{για κάθε } x \in G \text{ υπάρχει } B \in \mathcal{B}_x \text{ ώστε } B \subset G\} \cup \{\emptyset\}$$

Τότε:

1. *Η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία του X, και*

2. *για κάθε $x \in X$ η οικογένεια $\mathcal{B}_x$ είναι μια βάση περιοχών του x ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$.*

Απόδειξη. 1. Προφανώς $\emptyset \in \mathcal{T}$. Για κάθε $x \in X$ η οικογένεια $\mathcal{B}_x$ είναι μη κενή, άρα για κάθε $x \in X$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$ ώστε $B \subset X$. Επομένως $X \in \mathcal{T}$.
Έστω $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$. Για κάθε $x \in G_1 \cap G_2$, έχουμε ότι $x \in G_1$ και $x \in G_2$, άρα υπάρχουν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ ώστε $B_1 \subset G_1$ και $B_2 \subset G_2$. Από την ιδιότητα (ii) της $\mathcal{B}_x$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$ ώστε $B \subset G_1 \cap G_2$. Επομένως, $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$.
Έστω $G_i \in \mathcal{T}$ για κάθε $i \in I$. Για κάθε $x \in \cup_{i \in I} G_i$ υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in G_{i_0}$. Αφού $G_{i_0} \in \mathcal{T}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$ ώστε $B \subset G_{i_0} \subset \cup_{i \in I} G_i$. Επομένως για κάθε $x \in \cup_{i \in I} G_i$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$ ώστε $B \subset \cup_{i \in I} G_i$. Άρα $\cup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$.
Άρα η $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία του X

2. Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ για κάθε $x \in X$. Έστω $x \in X$ και $B \in \mathcal{B}_x$. Από την ιδιότητα(iii) της $\mathcal{B}_x$, υπάρχει $G \subset X$ ώστε $x \in G \subset B$ και $G \in \mathcal{T}$. Επομένως, $G \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ και αφού $G \subset B$ έχουμε ότι $B \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$. Άρα $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.
Έστω $x \in X$ και $U \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$. Τότε $x \in int_{\mathcal{T}} U = U^{\circ}$ και αφού $U^{\circ} \in \mathcal{T}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$ ώστε $B \subset U^{\circ} \subset U$.
Επομένως για κάθε $x \in X$ η οικογένεια $\mathcal{B}_x$ είναι μια βάση περιοχών του x.

□

2.5 Φίλτρα

Οι ιδιότητες των προτάσεων που ικανοποιεί το σύστημα περιοχών και μια βάση περιοχών ενός σημείου σε ένα τοπολογικό χώρο αντίστοιχα αποτελούν χρήσιμες συνολοθεωριτικές έννοιες που απομονώνουμε και ορίζουμε παρακάτω.
Επίσης θα μας χρειαστούν για να μελετήσουμε το επόμενο παράδειγμα.

Ορισμός 2.14. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του X είναι ένα φίλτρο στο X όταν:*

$$\begin{gathered} \text{Αν } A \in \mathcal{F}, \text{ τότε } A \neq \emptyset \\ \text{αν } A, B \in \mathcal{F}, \text{ τότε } A \cap B \in \mathcal{F}, \text{ και} \\ \text{αν } A \in \mathcal{F} \text{ και } A \subset B \subset X, \text{ τότε } B \in \mathcal{F}. \end{gathered}$$

Ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X είναι ένα υπερφίλτρο στο X να δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα φίλτρο στο X, δηλαδή, αν $\mathcal{G}$ είναι φίλτρο στο X και $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ τότε $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.
Τα υπερφίλτρα συμβολίζουμε με p, q, r.

Ορισμός 2.15. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο.*

(i) Μια οικογένεια $\mathscr{B}$ υποσυνόλων του X έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής αν για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και κάθε $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{B}$ ισχύει ότι $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$.

(ii) Μια οικογένεια $\mathscr{B}$ υποσυνόλων του X είναι βάση φίλτρου αν:

$$\begin{gathered} A \neq \emptyset \text{ για κάθε } A \in \mathscr{B}, \text{ και} \\ \text{αν } A_1, A_2 \in \mathscr{B} \text{ τότε υπάρχει } A_3 \in \mathscr{B} \text{ ώστε } A_3 \subset A_1 \cap A_2. \end{gathered}$$

Είναι σαφές ότι μια βάση φίλτρου έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Αντίστροφα αν η $\mathscr{B}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και θέσουμε

$$\mathcal{C} = \{A_1 \cap \ldots \cap A_n \text{ με } n \in \mathbb{N} \text{ και } A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{B}\},$$

τότε είναι άμεσο να επαληθεύσουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι βάση φίλτρου.
Τέλος αν η $\mathscr{B}$ είναι βάση φίλτρου και θέσουμε

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : \text{υπάρχει } B \in \mathscr{B}, \text{ ώστε } B \subset A\},$$

τότε είναι άμεσο να επαληθεύσουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο. Το φίλτρο παράγεται από την βάση φίλτρου $\mathscr{B}$.

Πρόταση 2.7. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο, p ένα υπερφίλτρο στο X και $A \subset X$ ώστε $A \notin p$. Τότε υπάρχει $B \in p$ ώστε $A \cap B = \emptyset$.*

Απόδειξη. Αν $A \cap B \neq \emptyset$ για κάθε $B \in p$ τότε η οικογένεια $\mathscr{B} = \{A \cap B : B \in p\} \cup p$ είναι μια βάση φίλτρου κα άρα περιέχεται σε κάποιο φίλτρο $\mathcal{F}$. Αφού $p \subset \mathcal{F}$, έπεται ότι $p = \mathcal{F}$, άτοπο αφού $A \notin p$. □

Πρόταση 2.8. *Έστω X ένα μη κενό συνολο και $\mathcal{B}$ μια οικογένεια με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Τότε υπάρχει ένα υπερφίλτρο p στο X με $\mathcal{B} \subset p$.*

Απόδειξη. Έστω $C = \{F : F$ φίλτρο και $\mathcal{B} \subset F\}$. Το σύνολο C είναι μη κενό και μερικά διατεταγμένο με την σχέση του περιέχεσθαι. Αν $(F_i)_{i \in I}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του C, τότε $\cup_{i \in I} F_i \in C$. (Αν $A, B \in \cup_{i \in I} F_i$, τότε υπάρχουν $i, j \in I$ ώστε $A \in F_i, B \in F_j$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $F_i \subset F_j$, άρα $A \cap B \in F_j \subset \cup_{i \in I} F_i$). Από λήμμα του Zorn υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο $p \in C$. Το p είναι υπερφίλτρο στο X που περιέχει την οικογένεια $\mathcal{B}$. □

Πρόταση 2.9. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και p ένα υπερφίλτρο στο X.*

(i) Αν $A, B \subset X$ με $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B \in p$, τότε $A \in p$ ή $B \in p$.

(ii) Αν $A \subset X$, τότε $A \in p$ ή $X \setminus A \in p$.

Απόδειξη. (i) Αν $A, B \notin p$, τότε από προηγούμενη πρόταση υπάρχουν $C, D \in p$ ώστε $A \cap C = B \cap D = \emptyset$. Άρα $C \cap D \in p$ και $(A \cup B) \cap (C \cup D) = \emptyset$, άτοπο.

(ii) Άμεσο από το (i)

□

Ορισμός 2.16. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Ένα υπερφίλτρο p στο X είναι τετριμμένο αν υπάρχει $x \in X$ ώστε $p = \{A \subset X : x \in A\}$.*
Είναι άμεσο ότι η οικογένεια $\{A \subset X : x \in A\}$ είναι υπερφίλτρο στο X.

Πρόταση 2.10. *Έστω X άπειρο σύνολο.*

(i) Υπάρχει ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο X.

(ii) Κάθε στοιχείο ενός μη τετριμμένου υπερφίλτρου στο X είναι άπειρο.

Απόδειξη. (i) Η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{X \setminus F : F \subset X \text{ πεπερασμένο }\}$$

είναι μια βάση φίλτρου, αφού $\emptyset \notin \mathcal{B}$ και $(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) \in \mathcal{B}$, για $F_1, F_2 \subset X$ πεπερασμένα. Από προηγούμενη πρόταση υπάρχει ένα υπερφίλτρο p στο X με $\mathcal{B} \subset p$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in X$, το σύνολο $X \setminus \{x\}$ ανήκει στη $\mathcal{B}$ και άρα στο p. Επομένως, το p είναι μη τετριμμένο υπερφίλτρο.

(ii) Άμεσο από προηγούμενη πρόταση.

□

2.6 Συνεχείς απεικονίσεις

Ορισμός 2.17. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ και $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι, μια συνάρτηση $f : X \to Y$, και $x_0 \in X$. Η f θα λέγεται συνεχής στο x_0, αν για κάθε περιοχή V του $f(x_0)$ υπάρχει περιοχή U του x_0 ώστε $f(U) \subset V$.*
Η f είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in X$.

Θεώρημα 2.6. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία απεικόνιση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) f είναι συνεχής.

(ii) Η αντίστροφη εικόνα κάθε κλειστού συνόλου στον Y είναι κλειστό στον X.

(iii) Η αντίστροφη εικόνα κάθε στοιχείου της βάσης ή υποβάσης στον Y είναι ανοιχτό στον X.

(iv) Η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοιχτού συνόλου στον Y είναι ανοιχτό στον X.

(v) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, για κάθε $A \subseteq X$.

(vi) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$, για κάθε $B \subseteq Y$.

Απόδειξη. (i)⇒(v) Έστω $y \in f(\overline{A})$ δηλαδή, υπάρχει $x \in \overline{A}$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Έστω επίσης $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$. Από υπόθεση θα υπάρχει $U' \in \mathcal{N}_x$ στον X τέτοια ώστε $f(U) \subseteq V$ και επειδή $x \in \overline{A}$ έπεται ότι $U' \cap A \neq \emptyset \Rightarrow f(U' \cap A) \neq \emptyset \Rightarrow f(U') \cap f(A) \neq \emptyset$ οπότε $V \cap f(A) \neq \emptyset$. Άρα $y \in \overline{f(A)}$.
(v)⇒(vi) Αν θέσουμε όπου $A = f^{-1}(B)$ έπεται το συμπέρασμα.
(vi)⇒(ii) Από υπόθεση έχουμε ότι $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$. Αν B κλειστό στον Y τότε, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$ και πάντα ισχύει $f^{-1}(B) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$. Συνεπώς $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$, δηλαδή $f^{-1}(B)$ κλειστό στον X.
(ii)⇒(iv) Έστω U ανοιχτό στον Y $\Rightarrow Y \setminus U$ είναι κλειστό στον Y. Από υπόθεση $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ είναι κλειστό στον $X \Rightarrow f^{-1}(U)$ ανοιχτό στον X. Άρα f είναι συνεχής.
(iv)⇒(ii) Έστω F κλειστό στον $Y \Rightarrow Y \setminus F$ είναι ανοιχτό στον $Y \overset{f \, συνεχής}{\Longleftrightarrow} f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ ανοιχτό και άρα $f^{-1}(F)$ κλειστό.
(iv)⇒(i) Έστω $x \in X$ και $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ στον Y. Επειδή f είναι συνεχής έπεται ότι $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό στον X δηλαδή υπάρχει βασικό ανοιχτό U τέτοιο ώστε $U \in \mathcal{N}_x$ και $U \subseteq f^{-1}(V)$ ισοδύναμα, $f(U) \subseteq V \cap f(X) \subseteq V$.
(iv)⇔(iii) Έστω $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ υποβάση τουY τότε, επειδή f είναι συνεχής το $f^{-1}(U_\alpha)$ είναι ανοιχτό $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. Αντίστροφα, έστω U ανοιχτό στον Y τότε,

$$\begin{aligned} U = \bigcup\{\textstyle\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} : \{\alpha_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{A}\} \Rightarrow f^{-1}(U) &= f^{-1}(\textstyle\bigcup\{\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} : \{\alpha_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{A}\}) \\ &= \textstyle\bigcup f^{-1}(\{\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} : \{\alpha_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{A}\} \\ &= \textstyle\bigcup(\bigcap_{i=1}^n \{f^{-1}(U_{\alpha_i}) : \{\alpha_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

το οποίο είναι ανοιχτό ως αυθαίρετη ένωση πεπερασμένων ανοιχτών. □

Πρόταση 2.11. *(i) (Σύνθεση) Αν $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ συνεχείς συναρτήσεις, τότε $g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής.*

(ii) (Περιορισμός πεδίου ορισμού) Αν $f : X \to Y$ και $A \subseteq X$ με την σχετική τοπολογία του A, τότε $f|A : A \to Y$ είναι επίσης συνεχής.

(iii) (Περιορισμός πεδίου τιμών) Αν $f : X \to Y$ και $f(X) \subseteq X$ με την σχετική τοπολογία του $f(X)$, τότε $f : X \to f(X)$ είναι επίσης συνεχής.

Απόδειξη. (i) Έστω $V \in \mathcal{T}_Z$, τότε $(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$. Το $g^{-1}(V) \in \mathcal{T}_Y$ λόγω συνέχειας της g και το $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_X$ λόγω συνέχειας της f. Άρα $(g \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$, συνεπώς $g \circ f$ συνεχής.

(ii) Έστω $f|A : A \to Y$ και $V \in \mathcal{T}_Y$, τότε το $f|A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap Y$ το οποίο είναι ανοιχτό στην σχετική τοπολογία του A ως τομή του ανοιχτού $f^{-1}(V)$ στον X από συνέχεια τη f και του Y.

(iii) Έστω $f : X \to f(X)$και $V \subseteq f(X)$ ανοιχτό στο $f(X)$. Από αυτό έπεται ότι υπάρχει U ανοιχτό στον Y τέτοιο ώστε $V = U \cap f(X)$. Οπότε $f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap f(X)) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U)$.

□

Ορισμός 2.18. *Μία απεικόνιση $f : X \to Y$ θα λέγεται ανοιχτή (κλειστή), αν για κάθε ανοιχτό(κλειστό) σύνολο A του X, το $f(A)$ είναι ανοιχτό(κλειστό) στον Y.*

Ορισμός 2.19. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμός αν είναι 1-1,επί, συνεχής και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής. Αν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $f : X \to Y$ τότε οι χώροι X,Y λέγονται ομοιομορφικοί και αυτό συμβολίζεται με $X \sim Y$*

Πρόταση 2.12. *Έστω X,Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια 1-1 και επί συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η f είναι ομοιομορφισμός.

(ii) Η f είναι συνεχής και ανοιχτή.

(iii) Η f είναι συνεχής και κλειστή.

(iv) Για κάθε $A \subset X$ ισχύει $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

Απόδειξη. Προφανής. □

2.7 Τοπολογία γινόμενο

Ορισμός 2.20. *Έστω $\{X_i\}_{i \in I}$ μία μη κενή οικογένεια συνόλων. Ως καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i \in I} X_i$ ορίζουμε το σύνολο*

$$\prod_{i \in I} X_i = \{x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : x(i) \in X_i, \forall i \in I\}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣύμφωνα με το αξίωμα της επιλογής, αν $\{X_i\}_{i \in I}$ είναι μία μη κενή οικογένεια μη κενών υποσυνόλων, δηλαδή $I \neq \emptyset$ και $X_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in I$, τότε $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. Αυτό μας δίνει το δικαίωμα να υποθέτουμε ότι πάντα μπορεί να υπάρχει μία τέτοια οικογένεια.

Θεώρημα 2.7. *Έστω $\{X_i\}_{i \in I}$ μία μη κενή οικογένεια συνόλων, $J \subseteq I$ και ορίζουμε $P : \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in J} X_i$ με $P(x) = x|_J$. Τότε P είναι επί.*

Απόδειξη. Έστω $f \in \prod_{i \in J} X_i$. Αρκεί να βρούμε ένα $x \in \prod_{i \in I} X_i$ τέτοιο ώστε $P(x) = f$. Από το αξίωμα της επιλογής υπάρχει μία συνάρτηση επιλογής $\overline{x} : I \setminus J \to \bigcup_{i \in I \setminus J} X_i$. Τότε η απεικόνιση $x : I \to \bigcup_{i \in I \setminus J} X_i$ με $x|_J = f, x|_{I \setminus J} = \overline{x}$ είναι ένα στοιχείο της μορφής

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ και } P(x) = x|_J = f.$$

□

Ορισμός 2.21. *Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μία μη κενή οικογένεια συνόλων. Για κάθε $i \in I$, η απεικόνιση $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ με $\pi_i(x) = x_i$ καλείται i-προβολή του $\prod_{i\in I} X_i$.*

Πρόταση 2.13. *Έστω $\{X_i\}_{i\in I}, \{A_i\}_{i\in I}$ οικογένειες συνόλων, με $A_i \subseteq X_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε ισχύουν τα επόμενα:*

(i) $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} X_i$

(ii) $\prod_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(A_i)$.

Απόδειξη. (i) Έστω $x \in \prod_{i\in I} A_i$. Από τον ορισμό 1.8.1 έπεται ότι $x = (x_i)_{i\in I}$ με $x_i \in A_i$ για κάθε $i \in I$, οπότε και $x_i \in X_i$ για κάθε $i \in I$, δηλαδή $x \in \prod_{i\in I} X_i$.

(ii)
$$\begin{aligned} x \in \prod_{i\in I} A_i &\Leftrightarrow x = (x_i)_{i\in I} \text{ με } x_i \in A_i \text{ για κάθε } i \in I \\ &\Leftrightarrow x = (x_i)_{i\in I} \text{ με } \pi_i^{-1}(x) \in A_i \text{ για κάθε } i \in I \\ &\Leftrightarrow x = (x_i)_{i\in I} \text{ με } x \in \pi_i^{-1}(A_i) \text{ για κάθε } i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(A_i). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.14. *Έστω $\{A_i\}_{i\in I}, \{B_i\}_{i\in I}$ οικογένειες συνόλων. Τότε ισχύουν τα επόμενα:*

(i) $(\prod_{i\in I} A_i) \cap (\prod_{i\in I} B_i) = \prod_{i\in I}(A_i \cap B_i)$,

(ii) $(\prod_{i\in I} A_i) \cup (\prod_{i\in I} B_i) \subseteq \prod_{i\in I}(A_i \cup B_i)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη δεν εμφανίζει καμία ιδιαίτερη δυσκολία. □

Πρόταση 2.15. *Έστω $\{X_i\}_{i\in I}, \{A_i\}_{i\in I}$ οικογένειες συνόλων, με $A_i \subseteq X_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε, για κάθε $i \in I$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $(\pi_i^{-1}(A_i))^c = \pi_i^{-1}(A_i^c)$,

(ii) $(\prod_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}(A_i^c)$.

Απόδειξη. (i)
$$\begin{aligned} x \in (\pi_i^{-1}(A_i))^c &\Leftrightarrow x \notin \pi_i^{-1}(A_i) \\ &\Leftrightarrow \pi_i(x) \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \pi_i(x) \in (A_i)^c \\ &\Leftrightarrow x \in \pi_i^{-1}(A_i^c) \end{aligned}$$

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i) και προηγούμενη πρόταση έπεται το συμπέρασμα.

□

Ορισμός 2.22. *Έστω $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων. Εφοδιάζουμε το $\prod_{i\in I} X_i$ με την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}$ η οποία ορίζεται ως η τοπολογία με βάση την οικογένεια*

$$\mathfrak{B} = \{\textstyle\prod_{i\in I} U_i : U_i \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I \text{ και } \{i \in I : U_i \neq X_i\} \text{ πεπερασμένο}\}.$$

Ο τοπολογικός χώρος $(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T})$ καλείται χώρος γινόμενο.

Πρόταση 2.16. *Έστω $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων. Η οικογένεια*

$$\mathcal{F} = \{\pi_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \in \mathcal{T}_i\}$$

είναι υποβάση για την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}$ του $\prod_{i\in I} X_i$, δηλαδή $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$. Πιο συγκεκριμένα, η βάση

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \{\textstyle\bigcap_{i\in F} C_i : C_i \in \mathcal{F} \text{ και } F \text{ πεπερασμένο, μη κενό υποσύνολο του } I\}$$

της $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ ταυτίζεται με τη βάση

$$\mathfrak{B} = \{\prod_{i\in I} U_i : U_i \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I \text{ και } \{i \in I : U_i \neq X_i\} \text{ πεπερασμένο}\}.$$

της τοπολογίας γινόμενο $\mathcal{T}$.

Απόδειξη. Έστω $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{F})$, τότε το $B = \bigcap_{i\in F} C_i$, όπου $C_i = \pi_i^{-1}(U_i)$ για κάθε $i \in F$, $U_i \in \mathcal{T}_i$ και F πεπερασμένο, μη κενό υποσύνολο του I. Θέτοντας $U_i = X_i$ για κάθε $i \in I \setminus F$ έπεται ότι το σύνολο $\{i \in I : U_i \neq X_i\}$ θα είναι πεπεραμένο αφού F πεπερασμένο. Συνεπώς για κάθε $i \in F$ τέτοιο ώστε $U_i = X_i$, θα ισχύει $\prod_{i\in I} X_i = \pi_i^{-1}(U_i)$ από πρόταση. Επιπλέον, $\prod_{i\in I} X_i = \pi_i^{-1}(U_i)$ για κάθε $i \in I \setminus F$. Συνεπώς,

$$B = \bigcap_{i\in F} \pi_i^{-1}(U_i) = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(U_i) = \prod_{i\in I} U_i.$$

Άρα $B \in \mathfrak{B}$.
Έστω $B \in \mathfrak{B}$. Τότε το B θα γράφεται ως $B = \prod_{i\in I} U_i$, όπου $U_i \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$ και $\{i \in I : U_i \neq X_i\}$ πεπερασμένο. Οπότε,

$$B = \prod_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(U_i) = \bigcap_{i\in F} \pi_i^{-1}(U_i).$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι

$$\bigcap_{i\in I\setminus F} \pi_i^{-1}(U_i) = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(X_i) = \prod_{i\in I} X_i$$

Άρα $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{F})$. Συνεπώς οι δύο βάσεις ταυτίζονται. □

Πρόταση 2.17. *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ μία μη κενή οικογένεια συνόλων. Τότε η $i-$προβολή $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ είναι συνεχής, ανοιχτή και επί για κάθε $i \in I$.*

Απόδειξη. Η $i-$προβολή π_i είναι επί αφού από το θεώρημα αν το $J = X_i$ έπεται το συμπέρασμα. Για να δείξουμε ότι η π_i είναι συνεχής, αρκεί για κάθε ανοιχτό U στο X_i, το $\pi_i^{-1}(U)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} X_i$. Πράγματι, από πρόταση το συμπέρασμα είναι άμεσο.
Θα δείξουμε ότι η π_i είναι ανοιχτή απεικόνιση. Έστω $i_0 \in I$ και ένα βασικό ανοιχτό B στον $\prod_{i\in I} X_i$ τότε σύμφωνα με πρόταση θα έχει τη μορφή $B = \bigcap_{i\in\mathcal{F}} \pi_i^{-1}(U_i)$, όπου $\mathcal{F}$ πεπερασμένο και $U_i \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$. Συνεπώς,

$$\pi_{i_0}(\bigcap_{i\in\mathcal{F}} \pi_i^{-1}(U_i)) = \begin{cases} U_{i_0} & \text{,αν } i_0 \in \mathcal{F} \\ X_{i_0} & \text{,αν } i_0 \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι και στους δύο κλάδους το $\pi_{i_0}(\bigcap_{i\in\mathcal{F}} \pi_i^{-1}(U_i))$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X_{i_0}. □

Πρόταση 2.18. *Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μία μη κενή οικογένεια τοπολογικών χώρων και $\{A_i\}_{i\in I}$ μία μη κενή οικογένεια συνόλων, με $A_i \subseteq X_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε,*

$$\prod_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{(\prod_{i\in I} A_i)}$$

Απόδειξη. Έστω $x = (x_i)_{i\in I} \in \overline{(\prod_{i\in I} A_i)}$. Θεωρούμε ένα V_{i_0} ανοιχτό υποσύνολο του X_{i_0} με $x_{i_0} \in V_{i_0}$. Θέτουμε

$$U = \pi_{i_0}^{-1}(V_{i_0}) = (\prod_{i\notin i_0} X_i) \times V_{i_0}.$$

Τότε το V είναι ανοιχτό και $x \in V$. Έχοντας λοιπόν μια ανοιχτή περιοχή του x έπεται ότι

$$U \cap (\prod_{i\in I} A_i) \neq \emptyset \Leftrightarrow [(\prod_{i\notin i_0} X_i) \times V_{i_0}] \cap (\prod_{i\in I} A_i) \neq \emptyset$$
$$\Leftrightarrow [(\prod_{i\notin i_0} (X_i \cap A_i)] \times (V_{i_0} \cap A_{i_0}) \neq \emptyset$$

Από αυτό έπεται ότι $V_{i_0} \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, ισοδύναμα $x_{i_0} \in A_{i_0}$ για κάθε $i_0 \in I$. Επομένως, $x \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.
Άρα δείξαμε ότι $\overline{(\prod_{i\in I} A_i)} \subseteq \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.
Έστω τώρα $x \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$ και $U \in \mathcal{N}_x$ στον $\prod_{i\in I} X_i$. Από αυτό έπεται ότι θα υπάρχει B βασικό ανοιχτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} X_i$ τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq U$. Από πρόταση, το B θα έχει τη μορφή

$$B = (\textstyle\prod_{i\in \mathcal{F}} U_i) \times (\prod_{i\in I\setminus\mathcal{F}} X_i)$$

όπου U_i ανοιχτό υποσύνολο του X_i για κάθε $i \in \mathcal{F}$ και $\mathcal{F} \subseteq I$ πεπερασμένο. Συνεπώς αν $x_i \in U_i$ τότε $U_i \cap A_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in \mathcal{F}$. Οπότε

$$B \cap \textstyle\prod_{i\in I} A_i = [\prod_{i\in\mathcal{F}}(U_i \cap A_i)] \times \prod_{i\in I\setminus\mathcal{F}} A_i$$

Από αυτό προκύπτει ότι $U \cap \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Συνεπώς $x \in \overline{(\prod_{i\in I} A_i)}$ και άρα $\prod_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{(\prod_{i\in I} A_i)}$.

□

Θεώρημα 2.8. *Έστω $\{f_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια απεικονίσεων τέτοια ώστε $f_i : X_i \to Y_i$ για κάθε $i \in I$. Ορίζουμε $\prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$ με $(\prod_{i\in I} f_i)(\{x_i\}_{i\in I}) = \{f_i(x_i)\}_{i\in I}$. Τότε,*

(i) Εάν f_i συνεχής για κάθε $i \in I$, τότε $\prod_{i\in I} f_i$ συνεχής.

(ii) Εάν f_i ανοιχτή απεικόνιση και όλες αλλά το πολύ πεπερασμένα πολλές είναι επί, τότε $\prod_{i\in I} f_i$ είναι επίσης ανοιχτή απεικόνιση.

Απόδειξη. (i) Έστω $\pi_i^{-1}(U_i)$ ένα υποβασικό ανοιχτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} Y_i$, τότε θα ισχύει $(\prod_{i\in I} f_i)^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = \pi_i^{-1}(f_i^{-1}(U_i))$, το οποίο είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} X_i$ αφού f_i είναι συνεχής.

(ii) Έστω B ένα βασικό ανοιχτό του $\prod_{i\in I} X_i$. Τότε το B θα έχει τη μορφή $B = \bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}(U_i)$. Συνεπώς,

$$\textstyle\prod_{i\in I} f_i(\bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}(U_i)) = f_1(U_1) \times ... \times f_n(U_n) \times \prod\{f_\beta(X_\beta) : \beta \neq 1, ...n\}$$

Από υπόθεση επειδή όλες αλλά το πολύ πεπερασμένα πολλές f_β είναι επί, έπεται ότι για όλες αλλά το πολύ πεπερασμένα πολλές $f_\beta(X_\beta) = Y_\beta$. Αυτές που απομένουν είναι ανοιχτά σύνολα. Συνέπως,

$$\textstyle\prod_{i\in I} f_i(\bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}(U_i)) = f_1(U_1) \times ... \times f_n(U_n) \times \prod_{j=1}^m f_{\beta_j}(X_{\beta_j}) \times \prod\{Y_\beta : \beta \neq 1, ...n, \beta_{j_1}, ..\beta_{j_m}\}$$

το οποίο είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} Y_i$.

□

2.8 Διαχωριστικά Αξιώματα

Ορισμός 2.23. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι T_1 αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει ανοικτό υποσύνολο G του X, ώστε $x \in G$ και $y \notin G$.*

Πρόταση 2.19. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι T_1

(ii) Το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό στο X για κάθε $x \in X$.

(iii) Για κάθε $x \in X$ και $\mathcal{B}_x$ βάση περιοχών του x ισχύει $\cap\mathcal{B}_x = \{x\}$.

Απόδειξη.

(i)⇒(ii) Έστω $x \in X$. Από την υπόθεση έπεται άμεσα ότι το σύνολο $X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό, άρα το $\{x\}$ κλειστό στο X

(ii)⇒(iii) Έστω $x \in X$ και $\mathcal{B}_x$ μια βάση περιοχών του x. Τότε $\{x\} \subset \cap\mathcal{B}_x$. Αν $y \in X$, $y \neq x$, τότε το $X \setminus \{y\}$ είναι ανοιχτό και $x \in X \setminus \{y\}$, άρα υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$, ώστε $y \notin B$. Το συμπέρασμα έπεται άμεσα.

(iii)⇒(i) Έστω $x, y \in X$, $x \neq y$. Από υπόθεση υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$, ώστε $y \notin B$. Τότε το σύνολο $G = intB$ είναι ανοικτό, περιέχει το x και δεν περιέχει το y.

□

Ορισμός 2.24. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι Hausdorff (ή χώρος T_2) αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε $x \in G_1,\ y \in G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Είναι σαφές ότι κάθε χώρος T_2 είναι T_1 (το αντίστροφο δεν ισχύει).

Πρόταση 2.20. *Έστω X τοπολιγικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι χώρος Hausdorff

(ii) Για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει περιοχή U του x, ώστε $y \notin \overline{U}$.

(iii) $\cap\{\overline{U} : U \in \mathcal{N}_x\} = \{x\}$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη.

(i)⇒(ii) Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$.

(ii)⇒(iii) Αφού ο X είναι χώρος Hausdorff, υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε $x \in G_1$, $y \in G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Θέτουμε $U = G_1$. Το U είναι περιοχή του x. Επειδή $G_1 \subset X \setminus G_2$ και το $X \setminus G_2$ είναι κλειστό σύνολο, ισχύει $\overline{G_1} \subset X \setminus G_2$, άρα $y \notin \overline{U}$.

(iii)⇒(i) Έστω $x \in X$. Από το (ii), για κάθε $y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει περιοχή U του x, ώστε $y \notin \overline{U}$. Άρα $\cap\{\overline{U} : U \in \mathcal{N}_x\} = \{x\}$.

□

Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Από το (iii) έχουμε ότι $y \notin \cap\{\overline{U} : U \in \mathcal{N}_x\}$. Άρα υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x$, ώστε $y \notin \overline{U}$. Θέτουμε $G_1 = U^\circ$ και $G_2 = X \setminus \overline{U}$. Τα G_1, G_2 είναι ανοικτά υποσύνολα του X,$x \in G_1$, $y \in G_2$ και $G_1 \cap G_2 = U^\circ \cap (X \setminus \overline{U}) = \emptyset$.
Επομένως ο X είναι χώρος Hausdorff.

Ορισμός 2.25. *Ένας τοπολογικός χώρος είναι κανονικός (ή χώρος T_3) αν για κάθε κλειστό υποσύνολο F του X και για κάθε $x \in X$ ώστε $x \notin F$, υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε $x \in G_1$, $F \subset G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Πόρισμα 2.1. *Κάθε τοπολογικός χώρος T_1 και T_3 είναι Hausdorff.*

Ορισμός 2.26. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι φυσιολογικός (ή χώρος T_4) αν για κάθε F_1, F_2 κλειστά υποσύνολα του X, ώστε $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Πρόταση 2.21. *Κάθε τοπολογικός χώρος T_1 και T_4 είναι T_3.*

Απόδειξη. Έστω F ένα κλειστό σύνολο ενός χώρου X που είναι T_1 και T_4 και έστω $x \in X$ ώστε $x \notin F$. Αφού ο X είναι T_1, το $\{x\}$ είναι κλειστό και αφού ο X είναι T_4, υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε $\{x\} \subset G_1$, $F \subset G_2$ και $G_1, G_2 = \emptyset$. Άρα ο X είναι T_3. □

Πρόταση 2.22. *Έστω X ένας T_1 τοπολογικός χώρος.*

(i) X είναι κανονικός αν και μόνο αν για $x \in X$ και U περιοχή του x, υπάρχει περιοχή V του x τέτοια ώστε $\overline{V} \subset U$.

(ii) X είναι φυσιολογικός αν και μόνο αν για ένα κλειστό σύνολο A και ένα ανοικτό U που περιέχουν το A, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο V που περιέχει το A τέτοιο ώστε $\overline{V} \subset U$.

Απόδειξη. (i) Έστω X κανονικός, $x \in X$ και U περιοχή του x. Θέτουμε $B = X \setminus U^\circ$, τότε B είναι κλειστό σύνολο. Από υπόθεση, υπάρχει ξένα ανοικτά σύνολα V και W που περιέχουν το x και το B αντίστοιχα. Αφού $V \subset X \setminus W \subset X \setminus B$ και $X \setminus W$ κλειστό έχουμε $\overline{V} \subset X \setminus W$, άρα το σύνολο $\overline{V}$ είναι ξένο με το B. Επομένως, $\overline{V} \subset U$, όπως θέλαμε.
Αντίστροφα, έστω $x \in X$ και κλειστό σύνολο B με $x \notin B$. Θέτουμε $U = X \setminus B$. Από υπόθεση υπάρχει μια περιοχή V του x τέτοια ώστε $\overline{V} \subset U$. Τα ανοιχτά σύνολα V° και $X \setminus \overline{V}$ είναι ξένα ανοικτά σύνολα που περιέχουν το x και το B αντίστοιχα. Άρα ο X είναι κανονικός.

(ii) Όμοια με το προηγούμενο μόνο που αντί για το σημείο x έχουμε το σύνολο A.

□

Θεώρημα 2.9. *Έστω X φυσιολογικός χώρος, A, B κλειστά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X. Τότε υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση*

$$f : X \to [0, 1]$$

με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in B$.

Η συνάρτηση f στο προηγούμενο θεώρημα ικανοποιεί την σχέση $A \subset f^{-1}\{0\}$. Για να υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση f με $A = f^{-1}(\{0\})$ απαιτούνται ισχυρότερες υποθέσεις.

Πόρισμα 2.2. *Έστω X φυσιολογικός χώρος και A υποσύνολο του X. Τότε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ με $A = f^{-1}(\{0\})$ αν και μόνο αν το A είναι κλειστό, G_δ-υποσύνολο του X.*

Ορισμός 2.27. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι τελείως κανονικός (ή $T_{3\frac{1}{2}}$) χώρος αν για κάθε $x \in X$ και F κλειστό υποσύνολο του X με $x \notin F$ υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in F$.*

Είναι άμεσο ότι κάθε τελείως κανονικός χώρος είναι κανονικός (αφού για κάθε $x \in X$ και F κλειστό υποσύνολο του X με $x \notin F$ υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in F$, τότε $x \in f^{-1}((-\infty, 1/2))$ και $F \subset f^{-1}((1/2, +\infty))$ και τα ανοιχτά σύνολα $f^{-1}((-\infty, 1/2)), f^{-1}((1/2, +\infty))$ είναι ξένα).
Είναι επίσης άμεσο ότι αν ο X είναι τελείως κανονικός και ο Y είναι ομοιομορφικός προς τον X τότε ο Y είναι τελείως κανονικός.

Πρόταση 2.23. *Κάθε T_1 φυσιολογικός χώρος είναι τελείως κανονικός.*

Απόδειξη. Έστω X T_1 φυσιολογικός χώρος, $x \in X$ και F ένα κλειστό υποσύνολο του X με $x \notin F$. Το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό, αφού X είναι T_1, και άρα για τα ξένα κλειστά υποσύνολα $\{x\}, F$ του φυσιολογικού χώρου X από θεώρημα υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in F$. Άρα ο X είναι τελείως κανονικός. □

Πρόταση 2.24. *Κάθε υπόχωρος ενός τελείως κανονικού χώρου είναι τελείως κανονικός.*

Απόδειξη. Έστω X τελείως κανονικός χώρος και $A \subset X$. Αν $x \in A$ και F ένα κλειστό υποσύνολο του A με $x \notin F$, τότε υπάρχει H κλειστό υποσύνολο του X με $F = A \cap H$. Αφού ο X είναι τελείως κανονικός, υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in H$. Τότε ο περιορισμός $f|A$ της f στο A είναι συνεχής στο A, $(f|A)(x) = 0$ και $(f|A)(y) = 1$ για κάθε $y \in F$. Άρα ο A είναι τελείως κανονικός. □

Θεώρημα 2.10. *Αν ο X είναι φυσιολογικός χώρος, ο F κλειστός υπόχωρος του X και $f : F \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με $g|F = f$.*

2.9 Συνεκτικότητα

Ορισμός 2.28. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Ο X θα λέγεται συνεκτικός αν δεν υπάρχουν μη κενά U, V ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στον X τέτοια ώστε $X = U \cup V$.*

Πρόταση 2.25. *Έστω ένας τοπολογικός χώρος X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Ο X είναι συνεκτικός χώρος.

(ii) Τα μόνο υποσύνολα του X που είναι συγχρόνως ανοιχτά και κλειστά στον X είναι το $\emptyset$ και X.

(iii) Δεν υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση $f : X \to \{0,1\}$ (όπου το $\{0,1\}$ έχει την διακριτή τοπολογία).

Απόδειξη.

(i)⇒(ii) Έστω X συνεκτικός και A μη κενό, ανοιχτό και κλειστό γνήσιο υποσύνολο του X, τότε το $X \setminus A$ είναι ανοιχτό και $X = (X \setminus A) \cup A$. Άτοπο, αφού X συνεκτικός χώρος.

(ii)⇒(iii) Αν υπάρχει $f : X \to \{0,1\}$ συνεχής και επί συνάρτηση, τότε το σύνολο $A = f^{-1}(\{0\})$ είναι ανοικτό και κλειστό συγχρόνως (αφού η f είναι συνεχής) και $A \neq \emptyset$, $A \neq X$ (αφού η f είναι επί), άτοπο από υπόθεση.

(iii)⇒(i) Αν ο χώρος X δεν είναι συνεκτικός υπάρχουν A, B μη κενά, ανοικτά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X, ώστε $X = A \cup B$. Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση f του A (δηλαδή $f : X \to \{0,1\}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in A$, και $f(x) = 0$ αν $x \in B$) είναι συνεχής και επί, άτοπο από το (iii).

□

Λήμμα 2.5. *Έστω X τοπολογικός χώρος και μη κενά U, V ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στον X τέτοια ώστε $X = U \cup V$. Αν U συνεκτικό υποσύνολο του X, τότε ο Y θα περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο U ή V.*

Απόδειξη. Έστω Y συνεκτικός και μη κενά U, V ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στον X τέτοια ώστε $X = U \cup V$, τότε τα $U \cap Y$ και $V \cap Y$ είναι ανοιχτά στον Y, ξένα μεταξύ τους και $Y = (U \cap Y) \cup V \cap Y)$. Αν $U \cap Y$ και $V \cap Y$ ήταν μη κενά, τότε ο Y δεν θα ήταν συνεκτικός, άτοπο. Άρα ένα από τα δύο είναι κένο, έστω το $V \cap Y$, δηλαδή $V = \emptyset$ και $Y = U \cap Y \subseteq U$. □

Θεώρημα 2.11. *Έστω $\{A_i\}_{i \in I}$ οικογένεια συνεκτικών συνόλων με $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, τότε η $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\bigcup_{i \in I} A_i$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν μη κενά U, V ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στον X τέτοια ώστε $\bigcup_{i \in I} A_i = U \cup V$. Αφού $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in \bigcap_{i \in I} A_i$ και $x_0 \in U \cup V$. Έστω $x_0 \in U$. Επειδή A_i είναι συνεκτικό, $\forall i \in I$ από λήμμα έχουμε ότι θα περιέχεται ολοκληρωτικά στο U ή V. Όμως λόγω του ότι $x_0 \in U$ έπεται ότι $A_i \subseteq U, \forall i \in I$, ισοδύναμα $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq U$. Άτοπο. □

Θεώρημα 2.12. *Το καρτεσιανό γινόμενο συνεκτικών χώρων είναι συνεκτικός χώρος.*

Θεώρημα 2.13. *Η εκόνα ενός συνεκτικού συνόλου μέσω συνεχής απεικόνισης είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση και X συνεκτικός χώρος. Θα δείξουμε ότι $f(X)$ είναι συνεκτικό. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$g : X \to f(X).$$

Η g είναι συνεχής και επί και έστω ότι $f(X)$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν μη κενά U, V ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στον X τέτοια ώστε $f(X) = U \cup V$, ισοδύναμα $X = g^{-1}(U) \cup g^{-1}(V)$, όπου $g^{-1}(U), g^{-1}(V)$ είναι ανοιχτά λόγω συνέχειας της g. Άτοπο διότι τότε X θα ήταν συνεκτικός. □

Ορισμός 2.29. *Έστω τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο A του X είναι μια συνεκτική συνιστώσα του X αν*

(i) το A είναι μη κενό συνεκτικό σύνολο και

(ii) αν $A \subset B \subset X$ και B συνεκτικό, τότε $A = B$.
Δηλαδή μια συνεκτική συνιστώσα του X είναι ένα μεγιστικό συνεκτικό υποσύνολο του X.

Πρόταση 2.26. *Έστω X τοπολογικός χώρος.*

(i) Κάθε συνεκτική συνιστώσα του X είναι μη κενό υποσύνολο του

(ii) Αν A, B είναι συνεκτικές συνιστώσες του X και $A \neq B$ τότε $A \cap B = \emptyset$.

(iii) Για κάθε $x \in X$, υπάρχει μια (μοναδική από (ii» συνεκτική συνιστώσα A του X, ώστε $x \in A$.
(Το A λέγεται συνεκτική συνιστώσα του x στο X και συμβολίζεται με $C(x)$).

Απόδειξη. (i) Έστω A μια συνεκτική συνιστώσα του X. Από πρόταση το $\overline{A}$ είναι συνεκτικό. Αφού το A είναι μεγιστικό συνεκτικό σύνολο, έπεται ότι $A = \overline{A}$, δηλαδή το A είναι κλειστό στο X.

(ii) Έστω A, B συνεκτικές συνιστώσες του X και $A \neq B$. Τότε $A \setminus B \neq \emptyset$ ή $B \setminus A \neq \emptyset$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $A \setminus B \neq \emptyset$ και έστω $a \in A \setminus B$. Αν υποθέσουμε ότι $A \cap B \neq \emptyset$, τότε από πρόταση, τό $A \cup B$ είναι συνεκτικό. Αλλά, τότε $B \subsetneqq A \cup B$, εφ' όσον $a \in A \cup B$, $a \notin B$. Άτοπο, από την μεγιστικότητα του B. Άρα $A \cap B = \emptyset$.

(iii) Έστω $x \in X$. Θέτουμε

$$C(x) = \cup\{A : A \subset X,\, A \text{ συνεκτικό},\, x \in A\}$$

Τότε $C(x) \neq \emptyset$, εφ' όσον το $\{x\}$ είναι συνεκτικό, και το $C(x)$ είναι συνεκτικό σύνολο, από πρόταση. Από τον ορισμό του, το $C(x)$ είναι μια συνεκτική συνιστώσα του X, είναι δηλαδή μεγιστικό συνεκτικό υποσύνολο του X.

□

Έστω X τοπολογικός χώρος. Η οικογένεια όλων των συνεκτικών συνιστωσών του X είναι μια διαμέριση του X, από την προηγούμενη πρόταση και εφ' όσον $X = \cup_{x \in X} C(x)$.
Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στον $X, x \sim y$, αν υπάρχει C συνεκτικό υποσύνολο του X τέτοιο ώστε $x, y \in C$. Η οικογένεια των κλάσεων ισοδυναμίας ταυτίζεται με την οικογένεια των συνεκτικών συνιστωσών του X.

Παράδειγμα 2.2.

1. *Αν ο X είναι συνεκτικός, τότε η μοναδική συνεκτική συνιστώσα του X είναι ο X.*

2. *Έστω $X = \prod_{i \in I} X_I$, $\emptyset \neq A \subset X$. Τότε το A είναι συνεκτική συνιστώσα του X αν και μόνο αν υπάρχουν συνεκτικές συνιστώσες A_i στο X_i για $i \in I$, ώστε $A = \prod_{i \in I} A_i$.*
Πράγματι, έστω A μια συνεκτική συνιστώσα του X. Από πρόταση το $\pi_i(A) = A_i$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X_i για $i \in I$. Άρα το $\prod_{i \in I} A_I$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\prod_{i \in I} X_i$, από πρόταση. Αφού $A \subset \prod_{i \in I} A_i$ και το A είναι συνεκτική συνιστώσα του X, έπεται ότι $A = \prod_{i \in I} A_i$. Τα σύνολα A_i είναι συνεκτικές συνιστώσες του X_i για $i \in I$. (Πράγματι, έστω B_i η συνεκτική συνιστώσα του X_i με $A_i \subset B_i \subset X_i$ για $i \in I$. Τότε το $\prod_{i \in I} B_i$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X και βέβαια $A \subset \prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} B_i$. Από μεγιστικότητα του A έχουμε ότι $A_i = B_i$ για κάθε $i \in I$).
Αντίστροφα, αν $A = \prod_{i \in I} A_i \subset X$ και το A_i είναι συνεκτική συνιστώσα του X_i για $i \in I$, τότε το A είναι συνεκτική συνιστώσα του X. Πράγματι, αν B είναι μια συνεκτική συνιστώσα του X με $A \subset B$, τότε από προηγούμενη πρόταση, $B = \prod_{i \in I} B_i$, όπου το B_i είναι συνεκτική συνιστώσα του X_i για $i \in I$. Αφού $A_i \subset B_i$ και τα A_i, B_i είναι συνεκτικές συνιστώσες του X_i, έπεται ότι $A_i = B_i$ για $i \in I$, άρα $A = B$.

Ορισμός 2.30. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι ολικά μη συνεκτικός αν κάθε συνεκτική συνιστώσα του X είναι μονοσύνολο.*
Δηλαδή, αν $C(x) = \{x\}$ για κάθε $x \in X$.

Παράδειγμα 2.3.

1. *Κάθε διακριτός τοπολογικός χώρος είναι ολικά μη συνεκτικός*

2. *Το σύνολο Cantor με την συνηθισμένη τοπολογία είναι ολικά μη συνεκτικός χώρος.*
Πράγματι, υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in \Delta$ ώστε $y \in C(x)$ και $y \neq x$. Υπάρχει $n \in \mathbb{R}$, ώστε $\frac{1}{3^n} < |x - y|$. Από τον ορισμό του συνόλου Cantor έχουμε ότι $\Delta = \cap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ και ότι το σύνολο Δ_n δεν περιέχει διαστήματα μήκους μεγαλύτερου του $\frac{1}{3^n}$. Επομένως υπάρχει $0 \leq z \leq 1$ ώστε $x < z < y$ και $z \notin \Delta$.
Θέτουμε $A = [0, z) \cap C(x)$ και $B = (z, 1] \cap C(x)$.Τα A,B είναι ανοιχτά στο $C(x)$, μη κενά και η ένωση τους ισούται με $C(x)$. Άτοπο, εφ' όσον το $C(x)$ είναι συνεκτικό. Άρα $C(x) = \{x\}$ για κάθε $x \in \Delta$.

3. *Τα σύνολα των ρητών $\mathbb{Q}$ και των αρρήτων $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με την συνηθισμένη τοπολογία είναι ολικά μη συνεκτικοί χώροι.*
Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{Q}$. Τότε η συνεκτική συνιστώσα $C(x)$ στο $\mathbb{Q}$ ισούται με $\{x\}$, διότι αν $y \in C(x)$ και $y \neq x$ τα σύνολα $A = (-\infty, z) \cap C(x)$ και $B = (z, +\infty) \cap C(x)$ για $y < z < x$ και $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι ανοιχτά στο $C(x)$, μη κενά και η ένωση τους ισούται με $C(x)$. Άτοπο από την συνεκτικότητα του $C(x)$.

Ορισμός 2.31. *Ένας τοπολογικός χώρος X ειναι 0-διάστατος αν είναι T_1 και υπάρχει μια βάση για την τοπολογία του X που αποτελείται από ανοιχτά και κλειστά συγχρόνως σύνολα.*

Ορισμός 2.32. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι άκρως μη συνεκτικός αν είναι Hausdorff και η κλειστότητα κάθε ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο.*

Πρόταση 2.27. *Κάθε άκρως μη συνεκτικός, T_3 χώρος είναι 0-διάστατος.*

Απόδειξη. Έστω X άκρως μη συνεκτικός, T_3 χώρος. Η οικογένεια $\mathcal{B} = \{\hat{G} : G \subset X \text{ ανοιχτό }\}$ αποτελείται από ανοιχτά και κλειστά συγχρόνως σύνολα, αφού X άκρως μη συνεκτικός. Άρα η $\mathscr{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του X, αφού ο X είναι T_3. Άρα ο X είναι 0-διάστατος. □

2.10 Συμπαγείς χώροι

Ορισμός 2.33. *Έστω τοπολογικός χώρος X και μία οικογένεια $\mathfrak{Q}$ υποσυνόλων του X. Η $\mathfrak{Q}$ θα λέγεται κάλυψη του X, εάν η ένωση των στοιχείων της $\mathfrak{Q}$ ισούται με τον X. Αυτή θα λέγεται ανοιχτή κάλυψη του X, αν τα στοιχεία της $\mathfrak{Q}$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του X.*

Ορισμός 2.34. *Ένας τοπολογικός χώρος X θα λέγεται συμπαγής αν κάθε ανοιχτή κάλυψη $\mathfrak{Q}$ του X περιέχει μία πεπερασμένη υποκάλυψη του X.*

Λήμμα 2.6. *Έστω τοπολογικός χώρος X και Y ένας υποχωρός του. Τότε ο Y είναι συμπαγής εάν και μόνο εάν κάθε κάλυψη του Y από ανοιχτά του X περιέχει μία πεπερασμένη υποκάλυψη του Y.*

Απόδειξη. Έστω Y είναι συμπαγής και $\mathfrak{Q} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ μία κάλυψη του Y από ανοιχτά του X. Τότε η οικογένεια

$$\{A_\alpha \cap Y : \alpha \in J\}$$

είναι μία ανοιχτή κάλυψη του Y από ανοιχτά του Y. Επειδή ο Y είναι συμπαγής έπεται ότι υπάρχουν $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ τέτοια ώστε η

$$\{A_{\alpha_1} \cap Y, A_{\alpha_2} \cap Y, ..., A_{\alpha_n} \cap Y\}$$

να είναι μία πεπερασμένη υποκάλυψη του Y. Τότε η $\{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, ..., A_{\alpha_n}\}$ είναι μία υποοικογένεια της $\mathfrak{Q}$ που καλύπτει τον Y.
Αντιστρόφως, έστω $\mathfrak{Q}' = \{A'_\alpha\}_{\alpha \in J}$ μία κάλυψη του Y από ανοιχτά του Y, τότε για κάθε $\alpha \in J$ επιλέγουμε ένα A_α ανοιχτό στον X τέτοιο ώστε

$$A'_\alpha = A_\alpha \cap Y.$$

Η οικογένεια $\mathfrak{Q} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ είναι μία κάλυψη του Y από ανοιχτά υποσύνολα του X. Από υπόθεση έπεται ότι υπάρχει μία πεπερασμένη υποκάλυψη του Y, $\{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, ..., A_{\alpha_n}\}$. Τότε η $\{A'_{\alpha_1}, A'_{\alpha_2}, ..., A'_{\alpha_n}\}$ είναι μία πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathfrak{Q}'$ που καλύπτει τον Y. Συνεπώς ο Y είναι συμπαγής. □

Θεώρημα 2.14. *Κάθε κλειστό υποσύνολο συμπαγούς χώρου είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω συμπαγής τοπολογικός χώρος X και Y ένας κλειστός υποχωρός του. Θεωρούμε μία ανοιχτή κάλυψη $\mathfrak{Q}$ του Y από ανοιχτά υποσύνολα του X. Τότε η οικογένεια $\mathfrak{B} = \mathfrak{Q} \cup \{X \setminus Y\}$ είναι επίσης μία ανοιχτή κάλυψη του X. Επειδή X συμπαγής, θα υπάρχει μία πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathfrak{B}$ που θα καλύπτει τον X. Η υποοικογένεια αυτή προφανώς θα περιέχει το $X \setminus Y$ αφού αποτελεί πεπερασμένη κάλυψη του X. Η πεπερασμένη αυτή υποοικογένεια χωρίς το $X \setminus Y$ αποτελεί μία πεπερασμένη υποκάλυψη του Y. Συνεπώς ο Y είναι συμπαγής. □

Πρόταση 2.28. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(i) *Ο X είναι συμπαγής.*

(ii) *Για κάθε οικογένεια $\{F_i : i \in I\}$ από κλειστά υποσύνολα του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\cap\{F_i : i \in I\} \neq \emptyset$.*

Απόδειξη.

(i)⇒(ii) Έστω $\{F_i : i \in I\}$ οικογένεια από κλειστά υποσύνολα του X με $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} \neq \emptyset$ για κάθε $i_1, \ldots, i_k \in I,\ k = 1, 2, \ldots$.
Αν υποθέσουμε ότι $\cap\{F_i : i \in I\} = \emptyset$ τότε $\cup\{X \setminus F_i : i \in I\} = X$. Συνεπώς η οικογένεια $\{X \setminus F_i : i \in I\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X και εφ' όσον ο X είναι συμπαγής υπάρχουν $i_1, \ldots, i)k \in I$ με $X = (X \setminus F_{i_1}) \cup \ldots \cup (X \setminus F_{i_k})$. Αλλά τότε $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} = \emptyset$, άτοπο.

(ii)⇒(i) Έστω $\{U_i : i \in I\}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του X. Αν υποθέσουμε ότι για κάθε $i_1, \ldots, i_k \in I$ ισχύει $X \neq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}$ τότε η οικογένεια $\{X \setminus U_i : i \in I\}$ που αποτελείται από κλειστά σύνολα έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, και άρα, από υπόθεση, πρέπει $\cap\{X \setminus U_i : i \in I\} \neq \emptyset$. Αλλά τότε $\cup\{U_i : i \in I\} \neq X$, άτοπο.

□

Πρόταση 2.29. *Έστω X τοπολογικός χώρος Hausdorff. Τότε*

(i) αν $F_1, F_2, \ldots, F_k$ είναι συμπαγή υποσύνολα του X τότε το σύνολο $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ είναι συμπαγές,

(ii) αν F, H είναι ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X τότε υπάρχουν U, V ανοικτά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X με $F \subset U$ και $H \subset V$, και

(iii) αν ο X είναι κανονικός χώρος και F είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X τότε για κάθε U ανοικτό σύνολο, με $F \subset U$, υπάρχει V ανοικτό ώστε $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Απόδειξη. (i) Αν $\{U_i : i \in I\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του $F_1 \cup \ldots \cup F_k$ τότε $F_n \subset \cup\{U_i : i \in I\}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots, k$ και αφού F_n είναι συμπαγές έπεται άμεσα το συμπέρασμα.

(ii) Έστω $x \in F$. Τότε για κάθε $y \in H$, αφού ο X είναι Hausdorff υπάρχουν U_y, V_y ανοικτά σύνολα με $x \in U_y, y \in V_y$ και $U_y \cap V_y = \emptyset$. Η οικογένεια $\{V_y : y \in H\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς H και άρα υπάρχουν $y_1, \ldots, y_k \in H$ ώστε $H \subset V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_k}$. Θέτουμε $A_x = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_k}$ και $B_x = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_k}$. Τα A_x, B_x είναι ανοικτά υποσύνολα του X με $x \in A_x$, $H \subset B_x$ και $A_x \cap B_x = \emptyset$.
Αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία για κάθε $x \in F$ τότε η οικογένεια $\{A_x : x \in F\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς F, και άρα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in F$ ώστε $F \subset A_{x_1} \cup \ldots \cup A_{x_m}$.
Θέτουμε $U = A_{x_1} \cup \ldots \cup A_{x_m}$ και $V = B_{x_1} \cap \ldots \cap B_{x_m}$ και έχουμε το συμπέρασμα.

(iii) Για κάθε $x \in F$ έπεται ότι $x \in U$ και άρα, από την κανονικότητα του X, υπάρχει ανοικτό σύνολο U_x με $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset U$.
Η οικογένεια $\{U_x : x \in F\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του F και άρα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in F$ ώστε $F \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}$.
Θέτουμε $V = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}$. Τότε $F \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k} \subset \overline{U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}} = \overline{U_{x_1}} \cup \ldots \cup \overline{U_{x_k}} \subset U$, και άρα $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

□

Πόρισμα 2.3. *Κάθε συμπαγής χώρος Hausdorff X είναι φυσιολογικός.*

Απόδειξη. Αν F, H είναι κλειστά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X τότε έπεται ότι τα F, H είναι συμπαγή και τώρα το συμπέρασμα έπεται από την προηγούμενη πρόταση. □

Θεώρημα 2.15. *Κάθε συμπαγές υποσύνολο χώρου Hausdorff είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Έστω X Hausdorff και Y συμπαγές υποσύνολο του. Θα δείξουμε ότι $X \setminus Y$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.
Έστω $x_0 \in X \setminus Y$, τότε επειδή X Hausdorff έπεται ότι για κάθε $y \in Y$ υπάρχουν $U_y \in \mathcal{N}_{x_0}, V_y \in \mathcal{N}_y$ τέτοιες ώστε $U_y \cap V_y = \emptyset$. Τότε η οικογένεια $\{V_y : y \in Y\}$ είναι μία κάλυψη του Y από ανοιχτά του X. Επειδή Y συμπαγής έπεται ότι υπάρχουν $y_1, y_2, ..., y_n$ τέτοια ώστε $V_{y_1}, ..., V_{y_n}$ να είναι μία πεπερασμένη υποκάλυψη του Y. Για το ανοιχτό σύνολο $V = V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$ ισχύει $Y \subseteq V$ και είναι ξένο προφανώς από το σύνολο $U = U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n}$.
Αν $z \in V$ τότε $z \in V_{y_{i_0}}$ για κάποιο $i_0 \in \{1, ..., n\}$ και $z \notin U_{y_{i_0}}$ και κατά συνέπεια $z \notin U$. Συνεπώς U είναι μία περιοχή του x_0 ξένη από τον Y. Άρα $X \setminus Y$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X. □

Θεώρημα 2.16. *Η εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου κάτω από μία συνεχή απεικόνιση είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \to Y$ μία συνεχής απεικόνιση και X συμπαγής. Έστω επίσης $\mathfrak{Q}$ μία κάλυψη του συνόλου $f(X)$ από ανοιχτά του Y. Η οικογένεια

$$\{ f^{-1}(A) : A \in \mathfrak{Q}\}$$

είναι μία ανοιχτή κάλυψη του X λόγω συνέχειας της f. Επειδή X συμπαγής έπεται ότι

$$f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), ..., f^{-1}(A_n)$$

είναι μία πεπερασμένη υποκάλυψη του X. Από αυτό έπεται ότι $A_1, ..., A_n$ κάλυψη του $f(X)$. □

Θεώρημα 2.17. *Έστω $f : X \to Y$ μία 1-1 και επί συνάρτηση. Εάν X είναι συμπαγής και ο Y Hausdorff, τότε η f είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής, ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι αν $F \subseteq X$ κλειστό τότε $f(A) \subseteq Y$ είναι επίσης κλειστό. Πράγματι, έστω F κλειστό υποσύνολο του X τότε F συμπαγές από το θεώρημα. Το $f(A)$ είναι επίσης συμπαγές από το θεώρημα και ως υποσύνολο του Y που είναι Hausdorff από θεώρημα είναι κλειστο. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής. □

Πρόταση 2.30. *Έστω $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση, X συμπαγής και Y Hausdorff τότε, f κλειστή απεικόνιση.*

Κεφάλαιο 3

Αλγεβρικές Έννοιες

3.1 Άλγεβρα Boole

Ορισμός 3.1. *Μια άλγεβρα του Boole $\mathcal{A}$ καλείται ένα μη κενό σύνολο A με τρεις πράξεις '$\vee$', '$\wedge$' και '$'$' και δυο διακεκριμένα στοιχεία 0 και 1, τέτοια ώστε για κάθε $a, b, c \in A$, να ισχύουν τα ακόλουθα (αξιώματα μιας άλγεβρας Boole):*

$$
\begin{array}{lcc}
(1) & a \vee b = b \vee a & a \wedge b = b \wedge a \\
(2) & a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c & a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \\
(3) & a \wedge (b \vee c) = a \wedge b \vee a \wedge c & a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
(4) & a \vee 0 = a & a \wedge 1 = a \\
(5) & a \vee a' = 1 & a \wedge a' = 0
\end{array}
$$

Οι πράξεις '$\vee$' και '$\wedge$' ονομάζονται άθροισμα Boole και γινόμενο Boole αντίστοιχα και η '$'$' συμπλήρωμα Boole. Τα στοιχεία 0 και 1 καλούνται μηδέν και μονάδα αντίστοιχα.

Ορισμός 3.2. *Μια οικογένεια F υποσυνόλων ενός χώρου X , καλείται πεδίο συνόλων, αν για την F ισχύουν:*

(i) $X \in F$ *και* $\emptyset \in F$

(ii) Αν $x \in F$ *και* $y \in F$ *τότε* $x \cap y \in F$ *και* $x \cup y \in F$

(ii) Αν $x \in F$ *τότε* $X \setminus x \in F$

Κάθε πεδίο F , υποσυνόλων του X, είναι μια άλγεβρα Boole αν ορίσουμε

$$A \vee B = A \cup B, A \wedge B = A \cap B,\ A' = X \setminus A, 0 = \emptyset, \text{ και } 1 = X.$$

Παραδείγματα:

1. Το πεδίο $P(X)$, για κάθε $X \neq \emptyset$. Καλείται συχνά η άλγεβρα του δυναμοσυνόλου του X.

2. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Η οικογένεια $\mathcal{B}\ (X)$ που περιέχει όλα τα ανοιχτά-κλειστά υποσύνολα του X.

Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Boole και a,b,$c \in \mathcal{A}$. Θα αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τα αξιώματα του ορισμού κάποιες απλές προτάσεις.

$$a \vee a = a \text{ και } a \wedge a = a \tag{3.1}$$

Πράγματι, έχουμε $a = a \vee 0 = a \vee [a \wedge a'] = (a \vee a) \wedge (a \vee a') = (a \vee a) \wedge 1 = a \vee a$
Ομοίως, $a = a \wedge 1 = a \wedge (a \vee a') = a \wedge a \vee a \wedge a' = a \wedge a \vee 0 = a \wedge a$

$$a \vee 1 = 1 \text{ και } a \wedge 0 = 0 \tag{3.2}$$

Έχουμε $a \vee 1 = a \vee (a \vee a') = (a \vee a) \vee a' = a \vee a' = 1$ και ομοίως, $a \wedge 0 = a \wedge (a \wedge a') = (a \wedge a) \wedge a' = a \wedge a' = 0$

$$a \vee b = b \equiv a \wedge b = a \tag{3.3}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη ισότητα με a έχουμε

$$a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a \wedge a \vee a \wedge b = a \vee a \wedge b = a(1 \vee b) = a \wedge 1 = a$$

Ανάλογα, προσθέτοντας b στην δεύτερη ισότητα έχουμε

$$a \vee b = a \wedge b \vee b = b(a \vee 1) = b \wedge 1 = b$$

Κάθε πεδίο συνόλων είναι μερικά διατεταγμένο με την σχέση $\subset$, η οποία μπορεί να χαρακτηρισθεί από τις ισοδυναμίες

$$A \subset B \equiv A \cap B = B \equiv A \cup B = A$$

Όμως η σχέση (2.3) είναι το αντίστοιχο των αλγεβρών Boole της δεύτερης ισοδυναμίας. Οπότε, εισάγουμε στην άλγεβρα $\mathcal{A}$ την σχέση $\leq$ με
$a \leq b \equiv a \vee b = b$ (ισοδύναμα, $a \wedge b = a$)

$$\text{Η σχέση } \leq \text{ διατάσσει μερικώς το } \mathcal{A} \tag{3.4}$$

Πράγματι έχουμε $a \leq a$, αφού $a \vee a = a$. Αν $a \leq b$ και $b \leq a$ δηλαδή αν $a \vee b = b$ και $b \vee a = b$, τότε προφανώς $a = b$. Αν $a \leq b$ και $b \leq c$ δηλαδή $a \vee b = b$ και $b \vee c = c$ τότε $a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$ δηλαδή $a \leq c$.

$$\text{Αν } a \leq b \text{ τότε για κάθε } x \text{ στο } \mathcal{A} \text{ έχουμε } a \vee x \leq b \vee x \text{ και } a \wedge x \leq b \wedge x \tag{3.5}$$

Έχουμε

$$(a \vee x) \vee (b \vee x) = (a \vee b) \vee (x \vee x) = b \vee x$$

και

$$(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = (a \wedge b) \wedge (x \wedge x) = a \wedge x$$

$$0 \leq a \leq 1, \text{ δηλαδή } 0 \text{ είναι το μικρότερο και } 1 \text{ το μεγαλύτερο στοιχείο.} \tag{3.6}$$

Επειδή $0 \vee a = a$ και $a \vee 1 = 1$

$$a \vee b = \sup\{a, b\} \text{ και } a \wedge b = \inf\{a, b\} \tag{3.7}$$

Έχουμε $a, b \leq a \vee b$, αφού

$$a \vee (a \vee b) = a \vee b \text{ και } b \vee (a \vee b) = a \vee b$$

Αν x είναι άνω φράγμα του $\{a, b\}$ δηλαδή $a, b \leq x$, τότε

$$(a \vee b) \vee x = a \vee (b \vee x) = a \vee x = x$$

και άρα $a \vee b \leq x$. Οπότε δείξαμε ότι $a \vee b = \sup\{a, b\}$.
Το δεύτερο ομοίως.

$$\text{Αν } a \vee x = 1 \text{ και } a \wedge x = 0 \text{ τότε } x = a' \tag{3.8}$$

Έχουμε

$$a' \vee x = (a' \vee x) \wedge (a \vee x) = a' \wedge a \vee x \wedge a \vee x \wedge a' \vee x \wedge x =$$
$$= x \wedge a \vee x \wedge a' \vee x = x \wedge (a \vee a') \vee x = x \wedge 1 \vee x = x$$

και άρα $a' \leq x$. Αντιστρόφως

$$x \wedge a' = x \wedge a' \vee 0 = x \wedge a' \vee x \wedge a = x \wedge (a' \vee a) = x \wedge 1 = x$$

άρα $x \leq a'$ και συμπερασματικά $x = a'$

$$(a')' = a \tag{3.9}$$

Αυτό προκύπτει αμέσως απ' την (2.8)

$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \text{ και } (a \wedge b)' = a' \vee b' \tag{3.10}$$

Εφαρμόζουμε την (2.8) για $x = a' \wedge b'$ αντικαθιστώντας το a απ' το $a \vee b$

$$1' = 0 \text{ και } 0' = 1 \tag{3.11}$$

$$a \leq b \equiv b' \leq a' \tag{3.12}$$

Από $a \leq b$ χρησιμοποιώντας την (2.10) έχουμε

$$b' \wedge a' = (a \vee b)' = b'$$

δηλαδή $b' \leq a'$. Όμοια αν $b' \leq a'$, τότε

$$a \wedge b = (a' \vee b')' = (a')' = a$$

δηλαδή $a \leq b$

$$x \leq a \equiv xa' = 0 \tag{3.13}$$

(xa' σημαίνει $x \wedge a'$). Από το $x \leq a$ πολλαπλασιάζοντας με a' έχουμε $xa' \leq 0$. Προσθέτοντας a στο $xa' = 0$ έχουμε

$$a = x \wedge a' \vee a = (x \vee a) \wedge (a' \vee a) = x \vee a$$

δηλαδή $x \leq a$

$$\text{Αν } 0 < a < 1 \text{ τότε } 0 < a' < 1 \tag{3.14}$$

Επειδή αν $a' = 1$ τότε $a = 0$ και όμοια αν $a' = 0$ τότε $a = 1$
Όλες οι παραπάνω ιδιότητες θα χρησιμοποιούνται παρακάτω χωρίς ιδιαίτερη αναφορά.

Ορισμός 3.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Boole και B μη κενό υποσύνολο της. Το B καλείται υποάλγεβρα Boole της $\mathcal{A}$ αν ισχύουν*

(i) $\forall x, y \in B$ *έχουμε* $x \vee y \in B$ *και* $x \wedge y \in B$

(ii) $\forall x \in B$ *έχουμε* $x' \in B$

Κάθε υποάλγεβρα μιας άλγεβρας Boole περιέχει τα στοιχεία $0, 1$ της άλγεβρας Boole, γιατί αν B υποάλγεβρα της $\mathcal{A}$ τότε υπάρχει $x \in B$. Τότε $x' \in B$, άρα $x \vee x' \in B$ και $x \wedge x' \in B$. Άρα $1 \in B$ και $0 \in B$
Είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε μη κενό υποσύνολο B της άλγεβρας Boole $P(X), X \neq \emptyset$, με τις ιδιότητες
(1)$\forall x, y \in B$ έχουμε $x \cap y \in B$ και $x \cup y \in B$
(2)$\forall x \in B$ το $A \setminus \{x\} \in B$,
είναι υποάλγεβρα της $P(X)$. Έτσι το σύνολο $\mathcal{B}(A)$ των συνόλων ενός τοπολογικού χώρου A, που είναι συγχρόνως ανοιχτά και κλειστά, είναι υποάλγεβρα της άλγεβρας Boole $P(X)$. Σε κάθε άλγεβρα Boole $\mathcal{A}$, για κάθε πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $a_1, \ldots, a_n$, έχουμε

$$a_1 \vee \ldots \vee a_n = \sup\{a_1, \ldots, a_n\} \text{ και}$$
$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_n = \inf\{a_1, \ldots, a_n\}$$

Μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ καλείται πλήρης, αν κάθε (άπειρο) υποσύνολο S έχει το $supremum$ $\sup S$ και το $infimum$ $\inf S$. Προφανώς αρκεί να εξακριβώσουμε την ύπαρξη του $\sup S$ μόνο αφού $\inf S = sup\{x : x \leq S\}$. Αν αυτό ισχύει για κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του S, τότε λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-πλήρης.
Κάθε άλγεβρα του συναμοσυνόλου $P(X)$ είναι πλήρης και προφανώς $\sup S = \bigcup S$ (ομοίως $\inf S = \bigcap S$).

3.2 Άτομα

Ορισμός 3.4. *Ένα μη μηδενικό στοιχείο $a > 0$ μιας άλγεβρας $\mathcal{A}$ λέγεται άτομο, αν το 0 είναι το μοναδικό στοιχείο μικρότερο του a δηλαδή αν ισχύει ότι*

$$\forall x[x \leq a \rightarrow x = 0 \text{ ή } x = a]$$

Για παράδειγμα στην άλγεβρα του δυναμοσυνόλου $P(X)$ όλα τα άτομα συμπίπτουν με τα μονοσύνολα $a = \{x\}$, για $x \in X$. Προκύπτει, επίσης, ότι για δυο διακεκριμένα άτομα x και y μιας άλγεβρας Boole $\mathcal{A}$, ισχύει $x \wedge y = 0$: Γιατί ισχύει $x \wedge y \leq x$, άρα προκύπτει ότι $x \wedge y = 0$ ή $x \wedge y = x$. Αν όμως $x \wedge y = x$, τότε $x \leq y$, άρα $x = 0$ ή $x = y$. Αυτό είναι άτοπο, επομένως μένει να ισχύει $x \wedge y = 0$.

Πρόταση 3.1. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Boole και x άτομό της. Τότε*

(i) Για κάθε μη κενό, πεπερασμένο υποσύνολο B του $\mathcal{A}$, ισχύει

$$x \leq \sup B \Rightarrow \exists y \in B \text{ ώστε } x \leq y$$

(ii) Για κάθε $y \in A$, ισχύει

$$x \leq y \text{ ή } x \leq y'$$

Απόδειξη. (i) Έστω ότι $\forall y \in B$ $x \nleq y$. Τότε $\forall y \in B$ έχω $x \wedge y \neq x$. Αφού όμως για όλα τα $y \in B$ ισχύει $x \wedge y \leq x$, προκύπτει ότι

$$\forall y \in B \text{ ισχύει } x \wedge y = 0$$

Από ιδιότητες της άλγεβρας Boole, αν $B = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, έχουμε ότι

$$x \wedge \sup B = x \wedge (x_0 \vee \ldots \vee x_n) = (x \wedge x_0) \vee \ldots \vee (x \wedge x_n) = 0.$$

Δεν ισχύει επομένως ότι $x \leq \sup B$.

(ii) Ισχύει $x \leq 1$, άρα ισχύει $x \leq y \vee y'$. Από το (i) προκύπτει ότι $x \leq y$ ή $x \leq y'$.

□

Πρόταση 3.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Boole. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) a είναι άτομο

(ii) $\forall x[a \leq x \wedge a \wedge x = 0]$

Απόδειξη. Έχουμε $a \wedge x \leq a$ και άρα, αν a είναι άτομο, τότε $a \wedge x = 0$ ή $a \wedge x = a$, δηλαδή $a \leq x$. Αντίστροφα αν το a ικανοποιεί το (ii) και $x \leq a$, τότε ή $x = a$ ή $a \wedge x = 0$. Αν $a \wedge x = 0$ έχουμε $x = 0$, αφού $a \wedge x = x$. □

Ορισμός 3.5. *Λέμε ότι ένα σύνολο D είναι πυκνό στο $\mathcal{A}$, αν D αποτελείται από μη μηδενικά στοιχεία του $\mathcal{A}$ και για κάθε $a > 0$ υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $d \leq a$.*

Στην περίπτωση που $A= P(X)$ το σύνολο όλων των ατόμων είναι πυκνό στο A.

Ορισμός 3.6. *Μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ καλείται ατομική αν $\forall x \in A \setminus \{0\}$ υπάρχει y άτομο με $y \leq x$*

Είναι προφανές ότι όλα τα $P(X)$, για $X \neq \emptyset$, είναι ατομικές άλγεβρες Boole. Επίσης όλες οι πεπερασμένες άλγεβρες Boole είναι ατομικές, γιατί για κάθε $x \neq 0$, το πεπερασμένο σύνολο $\{y \in A \setminus \{0\} : y \leq x\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

3.3 Η άλγεβρα των κανονικά-ανοιχτών συνόλων

Ορισμός 3.7. *Έστω X (αυθαίρετος) τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $U \subset X$ καλείται κανονικό ανοιχτό, αν $U = int[\overline{U}]$.*

Παράδειγμα 3.1. *Έστω $A \subset X$, το σύνολο $U = int[\overline{A}]$ είναι κανονικό ανοιχτό. Πράγματι, U είναι ανοιχτό, άρα $U = int[U] \subset int[\overline{U}]$ και αφού, $U = int[\overline{A}] \subset \overline{A}$, έχουμε*

$$int[\overline{U}] \subset int[A] = int[\overline{A}] = U$$

και άρα $U = int[\overline{U}]$.

Ας σημειώσουμε ότι

$$W \cap int[\overline{V}] \subset int[\overline{W \cap V}] \text{ για ανοιχτά } W, V \subset X.$$

Πράγματι έχουμε

$$W \cap int[\overline{V}] = int[W] \cap int[\overline{V}] = int[W \cap \overline{V}] \subset int[\overline{W \cap V}],$$

αφού $W \cap \overline{V} \subset \overline{W \cap V}$.

Πρόταση 3.3. *Για ανοιχτά σύνολα U, V ισχύει το ακόλουθο*

$$int[\overline{U \cap V}] = int[\overline{U}] \cap int[\overline{V}],$$

αφού

$$int[\overline{U \cap V}] \subset int[\overline{U} \cap \overline{V}] = int[\overline{U}] \cap int[\overline{V}]$$

και από το προηγούμενο έχουμε

$$int[\overline{U}] \cap int[\overline{V}] \subset int[\overline{int[\overline{U}] \cap V}] \subset int[\overline{int[\overline{U \cap V}]}] = int[\overline{U \cap V}]$$

επειδή ξέρουμε ήδη ότι το σύνολο $int[\overline{U \cap V}]$ είναι κανονικό ανοιχτό.

Στο σύνολο των $P(X)$ των κανονικά ανοιχτών συνόλων ορίζουμε τις πράξεις Boole ως ακολούθως

$$U \vee V = int[\overline{U \cup V}], \quad U \wedge V = U \cap V, \quad U' = int[X \setminus U]$$

και υποθέτουμε $0 = \emptyset$, $1 = X$.
Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η τομή $U \cap V$ κανονικά-ανοιχτών είναι κανονικό-ανοιχτό και άρα, οι ορισμοί είναι καλά ορισμένοι. Πρέπει να ελέγξουμε ότι τα αξιώματα Boole ικανοποιούνται.
Η αντιμεταθετικότητα είναι προφανής:

$$\begin{aligned}
U \vee V &= int[\overline{U \cup V}] = int[\overline{V \vee U}] = V \vee U \\
U \wedge V &= U \wedge V = V \wedge U = V \wedge U
\end{aligned}$$

Η προσεταιριστικότητα:

$$\begin{aligned}
(U \vee V) \vee W &= int[\overline{int[\overline{U \cup V}] \cup W}] \subset int[\overline{U} \cup \overline{V} \cup \overline{W}] = \\
&= int[\overline{U \cup V \cup W}] = int[\overline{int[\overline{U}] \cup int[\overline{V}] \cup W}] \subset \\
&\subset int[\overline{int[\overline{U} \cup \overline{V}] \cup W}] = (U \vee V) \vee W
\end{aligned}$$

και άρα, $(U \vee V) \vee W = int[\overline{U \cup V \cup W}]$ και παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα για $U \vee (V \vee W)$.
Επιμεριστικότητα αποδεικνύεται εύκολα

$$\begin{aligned}
U \wedge (V \vee W) &= U \cap int[\overline{U \cup W}] = int[\overline{U}] \cap int[\overline{V \cup W}] = \\
&= int[\overline{U \cup V \cup W}] = int[\overline{int[\overline{U}] \cup int[\overline{V}] \cup W}] \subset \\
&\subset int[\overline{int[\overline{U} \cup \overline{V}] \cup W}] = (U \vee V) \vee W
\end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε

$$U \vee (V \wedge W) = int[\overline{(U \cup V) \cap (U \cup W)}] = \quad = int[\overline{U \cup V}] \cap int[\overline{U \cup W}] = (U \vee V) \wedge (U \vee W)$$

Επιπλέον έχουμε $U \vee 0 = int[\overline{U \cup \emptyset}] = U$ και $U \wedge 1 = U \cap X = U$.
Τελικά,

$$\begin{aligned}
U \vee U' &= int[\overline{U \cup int(X \setminus U)}] = int[\overline{U \cup (X \setminus \overline{U})}] = \\
&= int[\overline{U} \cup \overline{X \setminus \overline{U}}] = int[X] = X = 1
\end{aligned}$$

και

$$U \wedge U' = U \cap int(X \setminus U) = \emptyset = 0$$

Άρα $P(X)$ είναι μια άλγεβρα Boole. Η διάταξη Boole στον $P(X)$ είναι του περιέχεσθαι αφού $U \wedge V = U \cap V$.

Πρόταση 3.4. *Η $P(X)$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Για κάθε $S \subset \mathcal{R}(X)$ θέτουμε $V = int[\overline{\cup S}]$. Τότε $V \in \mathcal{R}(X)$ και $V = \sup S$. Πράγματι, αν $U \in S$, τότε $U \subset \bigcup S$ και άρα $U = int\overline{U} \subset int[\overline{\cup S}] = V$, δηλαδή $U \leq V$. Αν $W \geq S$(δηλαδή $W \geq U$, για κάθε $U \in S$), τότε $\bigcup S \subset W$ και άρα

$$V = int[\overline{\bigcup S}] \subset int[\overline{W}] = W$$

Άρα $V \leq W$, που αποδεικνύει ότι $V = \sup S$. □

Λήμμα 3.1. *Έστω $\mathcal{B}$ πλήρης άλγεβρα, και R οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{B}$.*

(i) $(\sup R)' = \inf R'$ *και* $(\inf R)' = \sup R'$

(ii) $a \vee \sup R = \sup(a \vee R)$ *και* $a \wedge \inf R = \inf(a \wedge R)$

Απόδειξη.

(i) Αφού $\sup R \geq R$, έχουμε $(\sup R)' \leq R'$.
Αν $x \leq R'$, τότε $x' \geq R$ και άρα $x' \geq \sup R$, δηλαδή $x \leq (\sup R)'$, που αποδεικνύει το πρώτο.
Το δεύτερο ομοίως.
Αφού $\inf R \leq R$, έχουμε $(\inf R)' \geq R'$. Αν $x \geq R'$, τότε $x' \leq R$ και άρα $x' \leq \inf R$, δηλαδή $x \geq (\inf R)'$.

(ii) Έχουμε $a \vee \sup R \geq a \vee R$ και αν $x \geq a \vee R$, τότε $x \geq a$ και $x \geq R$ και άρα $x \geq a$ και $x \geq \sup R$, που μας δίνει ότι $x \geq a \vee \sup R$.
Το δεύτερο αποδεικνύεται ομοίως. Έχουμε $a \wedge \inf R \leq a \wedge R$ και αν $x \leq a \wedge R$, τότε $x \leq a$ και $x \leq R$ και άρα $x \leq a$ και $x \leq \inf R$, που μας δίνει ότι $x \leq a \wedge \inf R$.

□

Το *supremum*, $\sup R$, συχνά συμβολίζεται με $\bigvee R$ (επειδή $\sup\{a_1, \ldots, a_n\} = a_1 \vee \ldots \vee a_n = \bigvee a_i$) και ομοίως, το $\inf R$ με $\bigwedge R$.

Λήμμα 3.2. $a \wedge (\bigvee R) \geq R = \bigvee(a \wedge R)$ *και* $a \vee (\bigwedge R) = \bigwedge(a \vee R)$.

Απόδειξη. Πράγματι, $\bigvee R \geq R$, πολλαπλασιάζοντας με a, έχουμε $a \wedge (\bigvee R) \geq a \wedge R$. Υποθέτουμε ότι $x \geq a \wedge R$. Άρα $x' \geq a' \vee R'$ και πολλαπλασιάζοντας με a, έχουμε $a \wedge x' \leq (a \wedge a') \vee (a \wedge R') = a \wedge R' \leq R'$. Άρα $a \wedge x' \leq \bigwedge R' = (\bigvee R)'$. Παίρνοντας συμπληρώματα και πολλαπλασιάζοντας με a έχουμε $x \geq a \wedge \bigvee R$. Το δεύτερο αποδεικνύεται όμοια. □

Όπως γίνεται εύκολα φανερό από τις αποδείξεις οι παραπάνω προτάσεις ισχύουν ακόμα σε μια μη-πλήρη άλγεβρα $\mathcal{B}$ για όλες εκείνες τις οικογένειες $\mathcal{R}$, για τις οποίες $\sup R$ και $\inf R$ ανήκουν στην $\mathcal{B}$.

3.4 Ομομορφισμοί, Φίλτρα και Ιδεώδη

Ορισμός 3.8. *Έστω $f : A \to B$ μια συνάρτηση απ' την άλγεβρα $\mathcal{A}$ στην άλγεβρα $\mathcal{B}$. Λέμε ότι η f είναι ομομορφισμός (απ' το $\mathcal{A}$ στο $\mathcal{B}$) αν $f(0_A) = 0_B, f(1_A) = 1_B$ και*

$$f(a \vee_A b) = f(a) \vee_B f(b),$$
$$f(a \wedge_A b) = f(a) \wedge_B f(b),$$
$$f('^A a) = '^B f(a)$$

για κάθε $a, b \in A$

Αν $f : A \to B$ είναι ομομορφισμός, τότε η εικόνα $f[A]$, της άλγεβρας $\mathcal{A}$, είναι μια υποάλγεβρα της $\mathcal{B}$.
Ένας 1-1 ομομορφισμός καλείται εμφύτευση και μια επί εμφύτευση ισομορφισμός.

Παράδειγμα 3.2. *Έστω X,Y σύνολα ίδιας πληθικότητας. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $h : X \to Y$ 1-1 και επί του Y. Αν ορίσουμε $f(a) = h[a]$, για $a \subseteq X$, τότε η συνάρτηση $f : P(X) \to P(Y)$ είναι ένας ισομορφισμός από την άλγεβρα του δυναμοσυνόλου $P(X)$ επί της $P(Y)$.*
Ας υποθέσουμε τώρα ότι $cardX \geq cardY$. Τότε, υπάρχει μια επί συνάρτηση $h : X \to Y$. Αν ορίσουμε $f(a) = h^{-1}[a]$ για $a \subseteq Y$, τότε η f είναι μια εμφύτευση της άλγεβρας $P(Y)$ στην $P(X)$.
Τέλος, αν υποθέσουμε ότι $Y \subseteq X, Y \neq \emptyset$. Αν ορίσουμε $f(a) = a \cap Y$, για $a \subseteq X$, τότε f είναι ένας ομομορφισμός της $P(X)$ επί της $P(Y)$.

Παράδειγμα 3.3. *Το τελευταίο παράδειγμα μπορεί να γενικευτεί. Αν $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα Boole και e ένα στοιχείο της $\mathcal{A}$ με $0 < e \leq 1$. Ορίζουμε μια νέα άλγεβρα $A|e$ έτσι ώστε $A|e = \{a \in A : 0 \leq a \leq 1\}$, το μηδέν είναι ίδιο με το μηδέν στην $\mathcal{A}$ και η μονάδα είναι το e. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός είναι όπως στην $\mathcal{A}$ και $'^{A|e}a = e \wedge a'$. Προφανώς $A|e$ άλγεβρα Boole. Αν $e = 1$, τότε η $A|e$ συμπίπτει με την $\mathcal{A}$. Αν ορίσουμε $f(a) = a \wedge e$, για $a \wedge A$, τότε f είναι ομομορφισμός της $\mathcal{A}$ επί της $A|e$.*

Πρόταση 3.5. $a \triangle b = 0 \equiv a = b$

Απόδειξη. Αν $a \triangle b = 0$ τότε $a \wedge b' = 0$ και $b \wedge a' = 0$, δηλαδή $a \leq b$ και $b \leq a$. □

Πρόταση 3.6. *Έστω $f : A \to B$ ομομορφισμός για τον οποίο*

$$f^{-1}(0) = \{x : f(x) = 0\} = \{0\}$$

(δηλαδή $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$), τότε η f είναι εμφύτευση.

Απόδειξη. Αν $f(a) = f(b)$ τότε $(f(a) \wedge (f(b))') \vee (f(a) \vee f(b)) = 0 \Rightarrow f(a) \triangle f(b) = 0$ και $f(a \wedge b') \vee f(b \wedge a') = 0 \Rightarrow f((a \wedge b') \vee (a \vee b)) = 0 \Rightarrow f(a \triangle b) = 0$. Από υπόθεση έχω ότι $a \triangle b = 0$ και άρα $a = b$, που αποδεικνύει ότι f είναι 1-1. □

Πρόταση 3.7. *Έστω $f : A \to B$ ομομορφισμός, τότε η f διατηρεί την διάταξη,δηλαδή*

αν $a \leq b$ στο $\mathcal{A}$, τότε $f(a) \vee f(b) = f(b)$ στο $\mathcal{B}$.

Απόδειξη. Αν $a \leq b$ τότε $a \vee b = b$ και άρα $f(a) \vee f(b) = f(b)$, δηλαδή $f(a) \leq f(b)$. □

Αν η $f : A \to B$ είναι εμφύτευση τότε έχουμε την ισοδυναμία

$$a \leq b \equiv f(a) \leq f(b)$$

(αφού η f^{-1} είναι επίσης ομομορφισμός : $f[A] \to A$).

Ορισμός 3.9. *Φίλτρο μιας άλγεβρας Boole $\mathcal{A}$ καλείται κάθε μη κενό υποσύνολο F της $\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε*

(i) Αν $x, y \in F$ τότε $x \wedge y \in F$

(ii) Αν $x \in F$ και $t \geq x$ τότε $t \in F$

Για παράδειγμα το σύνολο $\bigtriangledown(f) = \{x : f(x) = 1\}$ είναι ένα φίλτρο στην $\mathcal{A}$. Απ' την άλλη το σύνολο $\triangle(f) = \{x : f(x) = 0\}$ έχει τις ιδιότητες: $\triangle(f) < 1, \triangle(f)$ είναι κλειστό στα αθροίσματα και αν $a \in \triangle(f)$, τότε $b \in \triangle(f), \forall b \leq a$. Ένα τέτοιο σύνολο καλείται ιδεώδες.
Έπεται άμεσα από τους νόμους του De Morgan, ότι αν J είναι ένα ιδεώδες, τότε $J' = \{a' : a \in J\}$) είναι ένα φίλτρο και αντίστροφα, αν F είναι ένα φίλτρο, τότε F' είναι ένα ιδεώδες. Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού ότι κάθε άλγεβρα Boole είναι φίλτρο του εαυτού της. Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Boole, κάθε φίλτρο, διάφορο της ίδιας της άλγεβρας Boole, καλείται γνήσιο. Επίσης το 1_A βρίσκεται σε κάθε φίλτρο της $\mathcal{A}$ και το 0_A δεν βρίσκεται σε κανένα γνήσιο φίλτρο της. Τέλος κάθε φίλτρο της $\mathcal{A}$ είναι υποάλγεβρα της.

Πρόταση 3.8. *Η τομή κάθε μη κενού συνόλου φίλτρων μιας άλγεβρας Boole είναι φίλτρο της.*

Ορισμός 3.10. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Boole και F μη κενό υποσύνολο της. Ονομάζουμε φίλτρο παραγόμενο από το F την τομή του συνόλου των φίλτρων του $\mathcal{A}$ που περιέχουν το F. Το συμβολίζουμε με $[F)$.*

Ορισμός 3.11. *Κύριο φίλτρο ονομάζουμε ένα φίλτρο που παράγεται από ένα μονοσύνολο.*

Για κάθε μη κενό υποσύνολο F του $\mathcal{A}$, το σύνολο $\{\gamma$ φίλτρο του $A : F \subset \gamma\}$ είναι μη κενό, γιατί περιέχει το ίδιο το $\mathcal{A}$. Άρα η τομή του είναι φίλτρο και το φίλτρο

$$[F) = \cap\{\gamma \text{ φίλτρο του } A : F \subset \gamma\}$$

είναι καλά ορισμένο.
Προκύπτει ότι το $[F)$ είναι το μικρότερο στοιχείο του συνόλου των φίλτρων του $\mathcal{A}$ που περιέχουν το F και ότι, αν το F είναι φίλτρο, τότε ισχύει $[F) = F$.

Πρόταση 3.9. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Boole και F μη κενό υποσύνολο του.*
Ισχύει

$$[F) = \{t \in A : \exists n \in \mathbb{N},\ \exists x_0 \dots x_n \in F \text{ ώστε } t \geq x_0 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n\}$$

Απόδειξη. Έστω $\gamma = \{t \in A : \exists n \in \mathbb{N} \exists x_0 \dots \exists x_n \in F$ ώστε $t \geq x_0 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n\}$. Το γ είναι φίλτρο που περιέχει το F, γιατί: Αν $t_1 \in \gamma$ και $t_2 \in \gamma$, τότε υπάρχουν x_i και y_j στο B, ώστε $t_1 \geq x_0 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ και $t_2 \geq y_0 \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_n$. Επομένως $t_1 \wedge t_2 \geq x_0 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge y_0 \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_m$ και προκύπτει ότι $t_1 \wedge t_2 \in \gamma$. Αν $t \in \gamma$ και $t' \geq t$, τότε υπάρχουν $x_i \in F$ ώστε $t \geq x_0 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n$, άρα $t' \geq x_0 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ και προκύπτει ότι $t' \in \gamma$. Άρα το γ είναι φίλτρο και, προφανώς, $F \subset \gamma$. Άρα ισχύει $[F) \subset \gamma$.
Ισχύει επίσης $\gamma \subset [F)$, γιατί αν $t \in \gamma$, τότε $t \geq x_0 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n$, για κάποια $x_i \in F$. Αφού το $[F)$ είναι φίλτρο, το $x_0 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ είναι στοιχείο του $[F)$, άρα και το t είναι στοιχείο του F.
Αποδείξαμε επομένως ότι $[F) = \gamma$. □

Από την προηγούμενη πρόταση, προκύπτει αμέσως ότι ισχύουν

$$\begin{aligned} [\{x\}) &= \{t \in A : t \geq x\} \\ [x_0, \dots, x_n) &= \{t \in A : t \geq x_0 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n\} \\ [F \cup \{x\}) &= \{t \in A : \exists y \in F \text{ ώστε } t \geq y \wedge x\}, \text{ για κάθε φίλτρο } F \text{ του } \mathcal{A} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Όπως είδαμε και νωρίτερα η έννοια του ιδεώδους είναι δυϊκή προς την έννοια του φίλτρου μιας άλγεβρας Boole. Έτσι για τα ιδεώδη ισχύουν ανάλογες προτάσεις με αυτές που ισχύουν για τα φίλτρα.

Ορισμός 3.12. *Ιδεώδες μιας άλγεβρας $\mathcal{A}$ καλείται κάθε μη κενό υποσύνολο F του $\mathcal{A}$, τέτοιο ώστε*

(i) $\forall x, y \in F$ *ισχύει* $x \vee y \in F$

(ii) $\forall x \in F\ \forall t \leq x$ *ισχύει* $t \in F$

Κάθε άλγεβρα Boole είναι ιδεώδες του εαυτού της. Κάθε ιδεώδες μιας άλγεβρας Boole είναι υποάλγεβρα της. Τέλος η τομή κάθε συνόλου ιδεωδών είναι ιδεώδες.

Ορισμός 3.13. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Boole και F μη κενό υποσύνολο της. Ονομάζουμε ιδεώδες παραγόμενο από το F την τομή του συνόλου των ιδεωδών του $\mathcal{A}$ που περιέχουν το F. Το συμβολίζουμε με $(F]$. Κύριο ιδεώδες ονομάζουμε ένα ιδεώδες που παράγεται από ένα μονοσύνολο.*

Πρόταση 3.10. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Boole και B μη κενό υποσύνολο του.*
Ισχύει

$$(F] = \{t \in A : \exists n \in \mathbb{N}\ \exists x_0 \in F \dots \exists x_n \in F \text{ ώστε } t \leq x_0 \vee x_1 \vee \dots \vee x_n\}$$

3.5 Υπερφίλτρα

Ορισμός 3.14. *Το γνήσιο φίλτρο β μιας άλγεβρας Boole $\mathcal{A}$ καλείται υπερφίλτρο αν δεν υπάρχει γνήσιο φίλτρο που είναι γνήσιο υπερσύνολο του.*

Το βασικό αποτέλεσμα που αφορά τα υπερφίλτρα είναι το ακόλουθο θεώρημα, που έχουμε αποδείξει στην περίπτωση που έχουμε υπερφίλτρα σε ένα μη κενό σύνολο X. Εδώ το παραθέτουμε έχοντας υπόψιν μας ότι θα το χρειαστούμε πάνω σε άλγεβρες Boole. Η απόδειξη είναι όμοια.

Ορισμός 3.15. *Έστω $\mathcal{B}$ άλγεβρα Boole και $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. $\mathcal{F}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής αν*

$$\bigwedge_{k\leq n} b_k \neq 0 \text{ για } n \in \mathbb{N},\ b_k \in \mathcal{F} \text{ για } k \leq n.$$

Πρόταση 3.11. *Έστω $\mathcal{B}$ άλγεβρα Boole και $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. Αν $\mathcal{F}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής τότε υπάρχει ένα υπερφίλτρο p της $\mathcal{B}$ έτσι ώστε $\mathcal{F} \subset p$.*

Απόδειξη. Έστω

$$\mathscr{B} = \{F_1 \wedge \ldots \wedge F_n : \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}\}$$

Τότε $\emptyset \notin \mathscr{B}$, αν $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ τότε $B_1 = \bigwedge_{k=1}^{n} F_{i_k}$ και $B_2 = \bigwedge_{l=1}^{m} F_{i_l}$. Επομένως $B_1 \wedge B_2 = (\bigwedge_{k=1}^{n} F_{i_k}) \wedge (\bigwedge_{l=1}^{m} F_{i_l}) \in \mathscr{B}$.
Άρα $\mathscr{B}$ είναι βάση φίλτρου.
Άρα αν θέσουμε

$$C = \{A \in \mathcal{B} : \text{υπάρχει } B \in \mathscr{B}, \text{ ώστε } B \leq A\}$$

τότε C είναι φίλτρο. Πράγματι

1. $\emptyset \notin C$

2. αν $A_1, A_2 \in C$, τότε υπάρχουν $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ ώστε $B_1 \leq A_1$ και $B_2 \leq A_2$. Επομένως $B_1 \wedge B_2 \leq A_1 \wedge A_2$ και άρα $A_1 \wedge A_2 \in C$.

3. αν $A \in C$ και $A_1 \leq A_2 \in \mathcal{B}$ τότε υπάρχει $\mathscr{B} \ni B_1 \leq A_1 \leq A_2$ άρα $A_2 \in C$.

Τέλος αν $\mathcal{C} = \{C : C \text{ φίλτρο και } \mathscr{B} \subset C\}$. Τότε $\mathcal{C}$ είναι μη κενό και μερικά διατεταγμένο με την σχέση του περιέχεσθαι. Αν $(C_i)_{i\in I}$ ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathcal{C}$ τότε $\bigcup_{i\in I} C_i \in \mathcal{C}$.
Πράγματι $\emptyset \notin \bigcup_{i\in I} C_i$. Αν $A_1, A_2 \in \bigcup_{i\in I} C_i$ τότε υπάρχουν $i_1, i_2 \in I$ ώστε $A_1 \in C_{i_1}$ και $A_2 \in C_{i_2}$. Μπορώ να υποθέσω ότι $C_{i_1} \subset C_{i_2}$ τότε $A_1, A_2 \in C_{i_2}$ άρα $A_1 \wedge A_2 \in C_{i_2} \subset \bigcup_{i\in I} C_i$. Αν $A_1 \in \bigcup_{i\in I} C_i$ και $A_1 \subset A_2 \in \mathcal{B}$ τότε υπάρχει $i_1 \in I$ ώστε $A_1 \in C_{i_1}$ άρα $A_2 \in C_{i_1}$ και $A_2 \in \bigcup_{i\in I} C_i$. Προφανώς $\bigcup_{i\in I} C_i$ άνω φράγμα της $(C_i)_{i\in I}$. Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του λήμματος του Zorn άρα υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο $p \in \mathcal{C}$. Το p είναι υπερφίλτρο στην $\mathcal{B}$ που περιέχει την $\mathcal{F}$. □

Ειδικότερα κάθε γνήσιο φίλτρο της $\mathcal{B}$ περιέχεται σε ένα υπερφίλτρο.

Πρόταση 3.12. *Κάθε γνήσιο φίλτρο μιας άλγεβρας Boole περιέχεται σε κάποιο υπερφίλτρο της.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Boole και β ένα γνήσιο φίλτρο της. Θεωρούμε το μη κενό σύνολο

$$I_\beta = \{\gamma \text{ γνήσιο φίλτρο του } \mathcal{A}\text{: } \beta \subset \gamma\}$$

και έστω ένα μη κενό υποσύνολο C του I_β που είναι ολικά διατεταγμένο με την σχέση $\subsetneq$.Το $\cup C$ είναι φίλτρο του $\mathcal{A}$, γνήσιο γιατί $0 \notin \cup C$, και περιέχει το β. Άρα $\cup C \in I_\beta$ και το $\cup C$ είναι άνω φράγμα του C. Από Λήμμα του Zorn προκύπτει ότι το I_β έχει μεγιστικό στοιχείο. Κάθε τέτοιο είναι υπερφίλτρο του $\mathcal{A}$ που περιέχει το β. □

Πόρισμα 3.1. *Κάθε άλγεβρα Boole έχει κάποιο υπερφίλτρο*

Πρόταση 3.13. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Boole και β φίλτρο της. Το β είναι υπερφίλτρο ανν για κάθε $x \in A$ ισχύει ένα από τα $x \in \beta$ ή $x' \in \beta$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το β είναι υπερφίλτρο. Αν $x \notin \beta$, τότε ισχύει $[\beta \cup \{x\}) = A$, άρα $x' \in [\beta \cup \{x\})$. Επομένως από τις σχέσεις (2.15) προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in \beta$, ώστε $x' \geq x_0 \wedge x$. Ισχύει επίσης $x' \geq x_0 \vee x'$, άρα προκύπτει ότι $x' \geq (x_0 \wedge x) \vee (x_0 \wedge x') = x_0 \wedge (x \vee x') = x_0 \wedge 1 = x_0$ άρα $x' \in \beta$. Δείξαμε ότι, για κάθε $x \in A$, ισχύει $x \in \beta$ ή $x' \in \beta$. Δεν μπορεί να ισχύουν συγχρόνως για κάποιο $x \in A$, γιατί τότε $0 = x \wedge x' \in \beta$, που είναι άτοπο.
Έστω ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει ακριβώς ένα από τα $x \in \beta$ ή $x' \in \beta$. Τότε το β είναι γνήσιο, γιατί $0 \notin \beta$. Επίσης, αν για κάποιο φίλτρο γ ισχύει $\beta \subsetneq \gamma$, υπάρχει $x_0 \in \gamma \setminus \beta$. Αφού $x_0 \notin \beta$, προκύπτει $x_0' \in \beta$, και $x_0' \in \gamma$. Άρα $0 \in \gamma$ και ισχύει $\gamma = A$. Άρα το β είναι μέγιστο. □

Ορισμός 3.16. *Το γνήσιο ιδεώδες β μιας άλγεβρας Boole $\mathcal{A}$ καλείται μέγιστο ιδεώδες αν δεν υπάρχει γνήσιο ιδεώδες που είναι γνήσιο υπερσύνολο του.*

Πρόταση 3.14. *Κάθε γνήσιο ιδεώδες μιας άλγεβρας Boole περιέχεται σε κάποιο μέγιστο ιδεώδες της.*

Πόρισμα 3.2. *Κάθε άλγεβρα Boole έχει κάποιο μέγιστο ιδεώδες*

Πρόταση 3.15. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Boole και β ιδεώδες της. Το β είναι μέγιστο ιδεώδες ανν για κάθε $x \in A$ ισχύει ένα από τα $x \in F$ ή $x' \in F$.*

3.6 Αναπαράσταση Αλγεβρών Boole

Λήμμα 3.3. *Αν η $\mathcal{B}$ είναι μια άλγεβρα Boole, τότε*

$$\forall x, y \in \mathcal{B} \text{ έχουμε } x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y' = 0$$

Απόδειξη. Αν $x \leq y$, τότε $x \wedge y' \leq y \wedge y' = 0$, άρα $x \wedge y' = 0$. Αντίστροφα, αν $x \wedge y' = 0$ τότε $(x \wedge y) \vee (x \wedge y') = x \wedge (y \vee y') = x \wedge 1 = x$, άρα $x \leq y$. □

Θεώρημα 3.1. *Έστω $\mathcal{B}$ πεπερασμένη άλγεβρα Boole και K το σύνολο των ατόμων της. Ισχύει $\mathcal{B} \cong P(K)$.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathcal{B}$ συμβολίζουμε

$$K_x = \{y \in K : y \leq x\}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\forall x \in \mathcal{B}, f(x) = K_x \in P(K)$$

και αποδεικνύουμε ότι η f είναι ισομορφισμός του $\mathcal{B}$ επί του $P(K)$. Έστω ότι $x_1 \neq x_2$. Τότε $x_1 \nleq x_2$ ή $x_2 \nleq x_1$.
Αν $x_1 \nleq x_2$, από λήμμα προκύπτει ότι $x_1 \wedge x_2' \neq 0$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι πεπερασμένη, είναι ατομική, άρα υπάρχει $y \in K_{x_1 \wedge x_2'}$. Αν ίσχυε $y \in K_{x_2}$, τότε επειδή $y \leq x_1 \wedge x_2' \Rightarrow y \leq x_2'$ θα προέκυπτε το άτοπο $y \leq x_2 \wedge x_2' = 0$. Επομένως $y \notin K_{x_2}$ και $K_{x_1} \neq K_{x_2}$.
Όμοια προκύπτει ότι, αν $x_2 \nleq x_1$, τότε $K_{x_1} \neq K_{x_2}$.
Επομένως δείξαμε ότι $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Άρα η f είναι αμφιμονοσήμαντη.
Έστω $U \in P(K)$. Αν $U = \emptyset$, τότε $K_0 = U$. Αν $U \neq \emptyset$, τότε υπάρχει το $\sup U$. Δείχνουμε ότι ισχύει $K_{\sup U} = U$:

Αν $y \in U$ τότε $y \leq \sup U \Rightarrow y \in K_{\sup U} \Rightarrow U \subset K_{\sup U}$.
Αντίστροφα, αν $x \in K_{\sup U}$, τότε για το άτομο x έχουμε $x \leq \sup U$. Από πρόταση προκύπτει ότι $\exists y \in U$ ώστε $x = y$. Άρα $x \in U$ και $K_{\sup U} \subset U$.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\forall U \in P(K)$ υπάρχει $x \in K$ ώστε $f(x) = U$. Άρα η f είναι επί.
Έχουμε δείξει ότι $\forall x_1, x_2 \in K$ ισχύει $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \subset f(x_2)$. Άρα $\mathcal{B} \cong P(K)$ □

Θεώρημα 3.2. *Για κάθε άλγεβρα Boole $\mathcal{B}$ υπάρχει πεδίο συνόλων F, τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$\mathcal{B} \cong F$$

Απόδειξη. Ας συμβολίσουμε με S το σύνολο των υπερφίλτρων της $\mathcal{B}$. Για κάθε $x \in \mathcal{B}$, ας συμβολίσουμε με S_x το σύνολο των υπερφίλτρων της $\mathcal{B}$ που περιέχουν το x. Ας θέσουμε, δηλαδή,

$$S_x = \{p \in S : x \in p\}.$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ισχύουν:

1. $S_0 = \{p \in S\} = \emptyset$, $S_1 = S$

2. $S_x \cup S_y = S_{x \vee y}$
   Πράγματι, αν $p \in S_x \cup S_y \Rightarrow p \in S_x$ ή $p \in S_y \Rightarrow x \in p$ ή $y \in p$. Όμως $x \vee y \geq x$ και $x \vee y \geq y \Rightarrow x \vee y \in p \Rightarrow p \in S_{x \vee y}$.
   Αντίστροφα, αν $p \in S_{x \vee y} \Rightarrow x \vee y \in p$. Αν $x \notin p$ και $y \notin p$ τότε

   $$x' \in p \text{ και } y' \in p \Rightarrow x' \wedge y' \in p \Rightarrow (x \vee y)' \in p$$

   αδύνατο.
   Άρα $x \in p$ ή $y \in p$ δηλαδή $p \in S_x \cup S_y$.

3. $S_x \cap S_y = S_{x \wedge y}$
   Πράγματι, αν $p \in S_x \cap S_y \Rightarrow x \in p$ και $y \in p \Rightarrow x \wedge y \in p \Rightarrow p \in S_{x \wedge y}$.
   Αντίστροφα, αν $p \in S_{x \wedge y} \Rightarrow x \in p$ και $y \in p \Rightarrow p\S_x \cap S_y$.

4. $S \setminus S_x = S \setminus \{p \in S : x \in p\} = \{p \in S : x \notin p\} = \{p \in S : x' \in p\} = S_{x'}$

Από αυτά προκύπτει ότι το υποσύνολο του $P(S)$

$$F = \{S_x : x \in \mathcal{B}\}$$

είναι πεδίο συνόλων. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{B} \cong F$:
Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\forall x \in \mathcal{B}, \psi(x) = S_x \in F$$

Αν $x = 0$, τότε $\psi(x) = \emptyset$. Αν $x \neq 0$, το φίλτρο $[\{x\})$ είναι γνήσιο. Σύμφωνα λοιπόν με πρόταση, υπάρχει υπερφίλτρο β της $\mathcal{B}$ που περιέχει το $[\{x\})$. Αφού $x \in \beta$, έχουμε $\beta \in S_x$. Επομένως

$$\forall x \neq 0 \ \psi(x) \neq \emptyset$$

Δείχνουμε ότι για κάθε x,y ισχύει $x \leq y \Leftrightarrow \psi(x) \subseteq \psi(y)$: Αν $x \leq y$, τότε $\beta \in S_x \Rightarrow x \in \beta \Rightarrow y \in \beta \Rightarrow \beta \in S_y$. Άρα $\psi(x) \subset \psi(y)$.
Αντίστροφα, έστω ότι $x \nleq y$. Τότε από λήμμα προκύπτει ότι $x \wedge y' \neq 0$, άρα ότι $\psi(x \wedge y') \neq \emptyset$. Άρα υπάρχει υπερφίλτρο β, τέτοιο ώστε $x \wedge y' \in \beta$. Αφού $x \in \beta$, προκύπτει ότι $\beta \in S_x$. Αφού $y' \in \beta$, προκύπτει ότι $y \notin \beta$ και ότι $\beta \notin S_y$. Άρα $\psi(y) \subset \psi(x)$.
Δείχνουμε ότι η ψ είναι αμφιμονοσήμαντη: Αν $x \neq y$, τότε $x \leq y$ ή $x \nleq y$. Έχουμε δείξει ότι στην πρώτη περίπτωση ισχύει $\psi(x) \subseteq \psi(y)$ και στην δεύτερη ισχύει $\psi(y) \supseteq \psi(x)$. Άρα ότι πάντα ισχύει $\psi(x) \neq \psi(y)$.
Επειδή, λόγω κατασκευής, η ψ είναι επί του F , προκύπτει τελικά ότι η ψ είναι ισομορφισμός της $\mathcal{B}$ επί του F. □

Κεφάλαιο 4

Συμπαγοποίηση Stone-Cech

4.1 Εξωτερική Προσέγγιση

Ορισμός 4.1. *Έστω X, Y_i τοπολογικοί χώροι και $f_i : X \to Y_i$ συναρτήσεις για $i \in I$*

(i) Η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία του X αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$, με $x_1 \neq x_2$, υπάρχει $i_0 \in I$ με $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$.

(ii) Η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία και κλειστά υποσύνολα του X αν για κάθε $x \in X$ και F κλειστό υποσύνολο του X με $x \notin F$, υπάρχει $i_0 \in I$ με $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(F)}$.

(ii) Η συνάρτηση $e : X \to \prod_{i\in I} Y_i$, με $e(x) = (f_i(x))_{i\in I}$, είναι η συνάρτηση εκτίμησης (ως προς την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$).

Αν ο χώρος X είναι T_1 και η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X, τότε η $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει και τα σημεία του X.

Θεώρημα 4.1. *Έστω X, Y_i τοπολογικοί χώροι και $f_i : X \to Y_i$ συνάρτηση για $i \in I$. Τότε*

(i) αν η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία του X, τότε η συνάρτηση εκτίμησης e είναι 1-1

(ii) αν η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X, τότε η συνάρτηση εκτίμησης e είναι ανοικτή απεικόνιση από τον X στον $e(X)$.

(iii) αν η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, τότε η συνάρτηση εκτίμησης e είναι συνεχής, και

(iv) αν η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, διαχωρίζει τα σημεία του X και διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X τότε η συνάρτηση εκτίμησης e είναι ένας ομοιομορφισμός του X και του $e(X)$.

Απόδειξη. (i) Έστω $x_1 \neq x_2$. Εφ' όσον η $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία του X, υπάρχει $i_0 \in I$ με $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$. Άρα $e(x_1) = (f_i(x_1))_{i\in I} \neq (f_i(x_1))_{i\in I} = e(x_2)$, και άρα η e είναι 1-1

(ii) Έστω U ανοικτό υποσύνολο του X και $x \in U$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει V ανοικτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} Y_i$ ώστε $e(x) \in V \cap e(X) \subset e(U)$. Από την υπόθεση για το σημείο $x \in X$ και το κλειστό σύνολο $X \setminus U$, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $f_{i_0}(x) \notin \overline{(f_{i_0}(X \setminus U))}$. Θέτουμε $V = \pi_{i_0}^{-1}(Y_{i_0} \setminus \overline{(f_{i_0}(X \setminus U))})$, όπου $\pi_{i_0} : \prod_{i\in I} Y_i \to Y_{i_0}$ η συνήθης προβολή. Τότε το V είναι ανοικτό στο $\prod_{i\in I} Y_i$ και $V \cap e(X) \subset e(U)$. Πράγματι, αν $y \in V \cap e(X)$, τότε υπάρχει $z \in X$ ώστε $y = e(z) = (f_i(z))_{i\in I}$ και, αφού $y \in V$, έπεται ότι $\pi_{i_0}(y) = f_{i_0}(z) \notin \overline{(f_{i_0}(X \setminus U))}$, και άρα $z \notin X \setminus U$, δηλαδή $z \in U$ και $e(z) \in e(U)$

(iii) Είναι άμεσο από προηγούμενη πρόταση

(iv) Έπεται από τα (i),(ii),(iii)

$\square$

Θεώρημα 4.2. *Έστω $\{X_i : i \in I\}$ μια οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων. Ο χώρος γινόμενο $X = \prod_{i \in I} X_i$, με την καρτεσιανή τοπολογία είναι συμπαγής.*

Πρόταση 4.1. *Έστω X χώρος Hausorff. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) X είναι συμπαγής

(ii) X είναι ομοιομορφικός με ένα κλειστό υπόχωρο του $[0,1]^I$ με την καρτεσιανή τοπολογία, για κάποιο σύνολο I

Ορισμός 4.2. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Ένας τοπολογικός χώρος Y είναι συμπαγοποίηση του X αν*

(i) Y είναι συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος.

(ii) υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $h : X \to Y$, και

(ii) $h(X)$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y.

Συνήθως ταυτίζουμε το X με το $h(X)$ και τον θεωρούμε υπόχωρο του Y.
Είναι άμεσο ότι αν ο X είναι συμπαγής χώρος Hausdorff κάθε συμπαγοποίηση του X είναι ομοιομορφικός χώρος με τον X.
Αφού κάθε υπόχωρος ενός συμπαγούς χώρου Hausdorff είναι τελείως κανονικός έπεται ότι προϋπόθεση για την ύπαρξη συμπαγοποίησης για ένα χώρο X, είναι ο X να είναι τελείως κανονικός. Από θεώρημα έπεται ότι για κάθε τελείως κανονικό και Hausdorff τοπολογικό χώρο X, η συνάρτηση εκτίμησης ως προς την οικογένεια των συνεχών και φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων, $e : X \to \prod_{f \in C^*(X)} \overline{f(X)} = Y$ με $e(x) = (f(x))_{f \in C^*(X)}$, είναι ομοιομορφισμός, και άρα, από το θεώρημα προκύπτει ότι ο χώρος $cl_Y(e(X))$ με την σχετική τοπολογία είναι μια συμπαγοποίηση του X.

Ορισμός 4.3. *Έστω X ένας τελείως κανονικός τοπολογικός Hausdorff χώρος. Η συμπαγοποίηση Stone-Cech του X είναι ο χώρος $\beta X = cl_Y(e(X))$, όπου $e : X \to \prod_{f \in C^*(X)} \overline{f(X)} = Y$ είναι η συνάρτηση εκτίμησης $e(x) = (f(x))_{f \in C^*(X)}$.*

Η συμπαγοποίηση Stone-Cech χαρακτηρίζεται μοναδικά με την ιδιότητα κάθε συνεχής συνάρτηση από τον X σε ένα συμπαγή χώρο K να επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση από τον βX στον K.

$$\begin{tikzcd}
\beta X \arrow[dr, "\tilde{f} : \beta X \to K"] & \\
X \arrow[u, "e"] \arrow[r, "f"'] & K
\end{tikzcd}$$

Πρόταση 4.2. *Έστω X ένας τελείως κανονικός Hausdorff τοπολογικός χώρος και βX η συμπαγοποίηση Stone-Cech του X. Τότε κάθε συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο X επεκτείνεται, κατά μοναδικό τρόπο, σε μια συνεχή συνάρτηση στο βX.*

Απόδειξη. Έστω e η συνάρτηση εκτίμησης ως προς την οικογένεια $C^*(X)$, δηλαδή $e : X \to \prod_{f \in C^*(X)} \overline{f(X)} = Y$. Με $\pi_f : Y \to f(X)$ συμβολίζουμε την προβολή κατά την f συντεταγμένη, για $f \in C^*(X)$. Τότε η συνάρτηση $\pi_f|_{\beta X}$ είναι συνεχής και $\pi_f(e(x)) = f(x)$ για $x \in X$, δηλαδή επεκτείνει συνεχώς την f στο βX. □

Πρόταση 4.3. *Έστω X ένας τελείως κανονικός χώρος Hausdorff, Y μια συμπαγοποίηση του X, με την ιδιότητα κάθε συνεχής και φραγμένη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε μια συνεχή συνάρτηση $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}$, και K ένας συμπαγής χώρος Hausdorff. Τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $g : X \to K$ επεκτείνεται, κατά μοναδικό τρόπο, σε μια συνεχή συνάρτηση $\tilde{g} : Y \to K$.*

Απόδειξη. Έστω $g : X \to K$ συνεχής συνάρτηση. Εφ' όσον ο K είναι συμπαγής χώρος Hausdorff, από πρόταση, έπεται ότι μπορούμε να υποθέσουμε $K \subset [-1,1]^I$ για κάποιο σύνολο I. Για κάθε $i \in I$ η συνάρτηση $\pi_i \circ g : X \to [-1,1]$ είναι συνεχής και φραγμένη, και άρα, από την υπόθεση για την συμπαγοποίηση Y, υπάρχει $\tilde{g}_i : Y \to [-1,1]$ συνεχής επέκταση της $\pi_i \circ g$. Η συνάρτηση $\tilde{g} : Y \to K \subset [-1,1]^I$, με $\tilde{g} = (\tilde{g}_i)_{i \in I}$, είναι μια συνεχής επέκταση της g. Η μοναδικότητα προκύπτει απ' το γεγονός ότι ο X είναι πυκνός στην συμπαγοποίηση του Y. □

Πρόταση 4.4. *(μοναδικότητας της συμπαγοποίησης Stone-Cech). Έστω X ένας τελείως κανονικός χώρος Hausdorff, βX η συμπαγοποίηση Stone-Cech του X και Y μια συμπαγοποίηση του X με την ιδιότητα: κάθε συνεχής και φραγμένη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ επεκτείνεται συνεχώς σε μια συνεχή συνάρτηση $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}$. Τότε οι συμπαγοποιήσεις βX και Y του X είναι ισοδύναμες (με την έννοια ότι υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $\phi : \beta X \to Y$, ώστε $\phi|X$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση του X).*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $X \subset \beta X$ και $X \subset Y$, και έστω $\tau : X \to Y$ η συνάρτηση $\tau(x) = x$ για $x \in X$. Από προτάσεις υπάρχει συνεχής επέκταση $\phi : \beta X \to Y$ της τ. Έστω $\sigma : X \to \beta X$ η συνάρτηση $\sigma(x) = x$ για $x \in X$. Από πρόταση υπάρχει συνεχής επέκταση $\psi : Y \to \beta X$ της σ. Είναι σαφές ότι $(\psi \circ \phi)(x) = x$ για $x \in X$, και άρα $\psi \circ \phi = id_{\beta X}$, απ' όπου έπεται ότι η ϕ είναι 1-1. Επίσης, επειδή $(\phi \circ \psi)(x) = x$ για $x \in X$, έχουμε ότι $\phi \circ \psi = id_Y$, αο' όπου έπεται ότι η ϕ είναι επί. Συνεπώς η $\phi : \beta X \to Y$ είναι 1-1, επί και συνεχής συνάρτηση, και άρα είναι ομοιομορφισμός. Επί πλέον είναι σαφές ότι $\phi(x) = x$ για $x \in X$. Άρα οι συμπαγοποιήσεις βX και Y του X είναι ισοδύναμες. □

Παράδειγμα 4.1. *(συμπαγοποιήσεις του ανοικτού διαστήματος $(0,1)$).*

1. *Έστω $S^1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ η μοναδιαία περιφέρεια του 2-διάστατου Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^2$ και $h : (0,1) \to S^1$, με $h(t) = (cos2\pi t, sin2\pi t)$. Είναι εύκολο ν' αποδειχθεί ότι η h είναι ομοιομορφισμός, και το $h((0,1))$ πυκνό υποσύνολο του S^1. Άρα εφ' όσον το S^1 είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, το S^1 είναι μία συμπαγοποίηση του $(0,1)$, η οποία, είναι απλό ν' αποδειχθεί, είναι ισοδύναμη με την συμπαγοποίηση ενός σημείου του $(0,1)$. Τέλος η συμπαγοποίηση S^1 του $(0,1)$ δεν είναι ισοδύναμη με την συμπαγοποίηση Stone-τλἔξη του $(0,1)$, εφ' όσον η συνάρτηση $f \circ h^{-1} : h(0,1) \to \mathbb{R}$, όπου $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = sin\frac{1}{t}$, δεν επεκτείνεται συνεχώς στο S^1.*

2. *Το κλειστό διάστημα $[0,1]$ είναι, προφανώς, μια συμπαγοποίηση του $(0,1)$, όχι ισοδύναμη με την Stone-Cech συμπαγοποίηση $\beta((0,1))$, επειδή κάθε συνεχής και φραγμένη συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ δεν επεκτείνεται πάντοτε συνεχώς στο $[0,1]$.*

3. *Η συνάρτηση $h : (0,1) \to [-1,1] \times [-1,1]$, με $h(t) = (t, sin\frac{1}{t})$, είναι ομοιομορφισμός, και άρα ο χώρος $\overline{(h(0,1))}$ είναι μια συμπαγοποίηση του $(0,1)$. Και αυτή η συμπαγοποίηση δεν είναι ισοδύναμη με την Stone-Cech συμπαγοποίηση $\beta((0,1))$, επειδή η συνάρτηση $g \circ h^{-1} : h(0,1) \to \mathbb{R}$, όπου $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $g(t) = sin\frac{1}{t-1}$, δεν επεκτείνεται συνεχώς στο $\overline{h((0,1))}$.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Έστω X τελείως κανονικός και Hausdorff τοπολογικός χώρος και F ένα ανοιχτό-κλειστό υποσύνολο του X. Τότε το $cl_{\beta X}F$ είναι ανοιχτό-κλειστό υποσύνολο του βX.
Πράγματι έστω η συνάρτηση $\phi : X \to \{0,1\}$, με $\phi(x) = 0$ αν $x \in F$ και $\phi(x) = 1$ αν $x \notin F$. Επειδή F ανοιχτό-κλειστό υποσύνολο του X η ϕ είναι συνεχής, και άρα υπάρχει συνεχής επέκταση της ϕ, απ' όπου προκύπτει το συμπέρασμα.

4.2 Το παράδειγμα του $\mathbb{N}$

Έστω p ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών και

$$W = \mathbb{N} \cup \{p\}$$

Θέτουμε

$$\mathcal{B}_n = \{\{n\}\} \text{ για } n \in \mathbb{N} \text{ και}$$
$$\mathcal{B}_p = \{A \cup \{p\} : A \in p\}$$

Οι οικογένειες $\mathcal{B}_n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι βάσεις περιοχών, αφού ικανοποιούν τις ιδιότητες του αντίστοιχου θεωρήματος. Επίσης για την οικογένεια $\mathcal{B}_p$ έχουμε, αν $A_1, A_2 \in p$ τότε αφού p φίλτρο $A_1 \cap A_2 \in p$ και αν $A \cup \{p\} \in \mathcal{B}_p$, τότε θέτουμε $G = A \cup \{p\}$. Τότε $p \in G$ και για κάθε $y \in G$ υπάρχει $B_y \in \mathcal{B}_y$ ώστε $B_y \subset G$. Άρα είναι μια βάση περιοχών.
Από θεώρημα υπάρχει μια τοπολογία $\mathcal{T}$ του W η οποία για κάθε $x \in W$ έχει την οικογένεια $\mathcal{B}_x$ μια βάση περιοχών του x.
Παρατηρούμε ότι κάθε σημείο $n \in \mathbb{N}$ είναι μεμονωμένο στο W ενώ το p είναι σημείο συσσώρευσης του W. Επίσης το $\mathbb{N}$ είναι πυκνό υποσύνολο του W.
Έστω Ω το σύνολο των υπερφίλτρων στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Θέτουμε $S = \{V_A : A \subset \mathbb{N}\}$, όπου $V_A = \{p \in H : A \in p\}$ για κάθε $A \subset \mathbb{N}$, και $\mathcal{T}$ την τοπολογία που έχει ως υποβάση το S.

Θεώρημα 4.3. *Έστω $(\Omega, \mathcal{T})$ ο χώρος των υπερφίλτρων στο $\mathbb{N}$.*

(i) Το S είναι βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$.

(ii) Ο χώρος $(\Omega, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής χώρος Hausdorff.

(iii) ο χώρος των υπερφίλτρων στο $\mathbb{N}$ είναι μια συμπαγοποίηση των φυσικών αριθμών με την διακριτή τοπολογία, ισοδύναμη με την συμπαγοποίηση Stone-Cech $\beta(\mathbb{N})$.

Απόδειξη. (i) Έστω $A, B \subset \mathbb{N}$ και $p \in V_{A\cap B}$. Έχουμε $A \cap B \in p$, και επειδή $A \cap B \subset A$ και $A \cap B \subset B$ και p υπερφίλτρο έχουμε $A, B \in p$ και $p \in V_A$ και $p \in V_B$. Άρα $V_{A\cap B} \subset V_A \cap V_B$. Επίσης αν $p \in V_A \cap V_B$ έχουμε $A \in p$ και $B \in p$, άρα $A \cap B \in p$ δηλαδή $p \in V_{A\cap B}$.
Άρα το σύνολο S είναι και βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$.

(ii) Πρώτα θα δείξουμε ότι είναι Hausdorff. Έστω $p, q \in H$ με $p \neq q$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι υπάρχει $A \subset \mathbb{N}$, ώστε $A \in p$ και $A \notin q$. Τότε $\mathbb{N} \setminus A \in q$ και έχουμε $V_A \cap V_{\mathbb{N}\setminus A} = \emptyset$, $p \in V_A$ και $q \in V_{\mathbb{N}\setminus A}$.
Στη συνέχεια θ' αποδείξουμε ότι ο $(\Omega, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής. Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι κάθε βασικό ανοικτό κάλυμμα του Ω έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει βασικό ανοικτό κάλυμμα $\{V_{A_i} : i \in I\}$ του Ω το οποίο δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Τότε η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων $\{H \setminus V_{A_i}\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και, επειδή $\Omega \setminus V_{A_i} = V_{\mathbb{N}\setminus A_i}$, η οικογένεια $\{\mathbb{N} \setminus A_i : i \in I\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Συνεπώς υπάρχει υπερφίλτρο p στο $\mathbb{N}$, ώστε $\mathbb{N} \setminus A_i \in p$ για κάθε $i \in I$, και άρα $p \in \cap_{i\in I} V_{\mathbb{N}\setminus A_i}$, απ' όπου έπεται $p \notin \cup_{i\in I} V_{A_i}$, άτοπο.

(iii) Θέτουμε $\phi : \mathbb{N} \to H$ με $\phi(n) = \{A \subset \mathbb{N} : n \in A\}$. Είναι απλό να δείξουμε ότι η συνάρτηση ϕ είναι ομοιομορφισμός. Επίσης το $\phi(\mathbb{N})$ είναι πυκνό υποσύνολο του Ω αφού για κάθε $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ ισχύει $V_A \cap \phi(\mathbb{N}) \neq \emptyset$. Συνεπώς ο χώρος Ω είναι μια του $\mathbb{N}$.
Θα δείξουμε ότι είναι ισοδύναμη με την συμπαγοποίηση Stone-Cech $\beta(\mathbb{N})$.
Πράγματι, έστω μία (συνεχής και) φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Για κάθε $p \in H \setminus \mathbb{N}$ ο χώρος $\mathbb{N} \cup \{p\}$ με την σχετική τοπολογία, είναι ο χώρος του προηγούμενου παραδείγματος και άρα υπάρχει συνεχής επέκταση της f στο σύνολο $\mathbb{N} \cup \{p\}$. Έτσι ορίζεται μία επέκταση της f, η $\tilde{f} : H \to \mathbb{R}$, η οποία, είναι συνεχής. Συνεπώς οι συμπαγοποιήσεις Ω και $\beta(\mathbb{N})$ του $\mathbb{N}$ είναι ισοδύναμες.

□

4.3 Zero-sets και ζ-υπερφίλτρα

Ορισμός 4.4. *Έστω X χώρος και A,B υποσύνολα του X. A,B είναι πλήρως διαχωρισμένα (στον X) αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$A \subset f^{-1}(a) \text{ και } B \subset f^{-1}(b) \text{ για κάποια } a \neq b \in f[X].$$

Η συνάρτηση f λέγεται ότι διαχωρίζει τα A και B. Προφανώς, αν η f διαχωρίζει τα A και B τότε προσθέτοντας (ή πολλαπλασιάζοντας) έναν κατάλληλο πραγματικό αριθμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f|A = 0$ και $f|B = 1$. Επιπλέον μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη, ή πιο ειδικά $0 \leq f \leq 1$ (αντικαθιστώντας την f με $\min\{\max\{f, 0\}, 1\}$)

Ορισμός 4.5. *Ένα μηδενοσύνολο του X είναι ένα σύνολο ίσο με $f^{-1}(\{0\})$ για κάποια $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχή. Η οικογένεια όλων των μηδενοσυνόλων συμβολίζεται $\mathcal{Z}(X)$*

Λήμμα 4.1. *Ένα μηδενοσύνολο του X είναι G_δ-σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής, θέτουμε

$$G_n = \{x \in X : |f(x)| < 1/n\} \text{ για } 1 \leq n \in \mathbb{N}$$

Τότε G_n είναι ανοιχτό στον X για $1 \leq n \in \mathbb{N}$, και $f^{-1}(\{0\}) = \cap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. □

Θεώρημα 4.4. *Η οικογένεια $\mathcal{Z}(X)$ των μηδενοσυνόλων περιέχει την οικογένεια $\mathcal{B}(X)$ των ανοιχτών-κλειστών συνόλων και είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις και αριθμήσιμες τομές. Αν X είναι τελείως κανονικός τοπολογικός χώρος, τότε τα συμπληρώματα των μηδενοσυνόλων είναι μία βάση.*

Απόδειξη. Η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_A ενός ανοιχτού-κλειστού συνόλου A είναι συνεχής.
Άρα $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{Z}(X)$
Αν $A = g^{-1}(\{0\})$ και $B = f^{-1}(\{0\})$ για g, f συνεχείς τότε $g \cdot f$ συνεχής και $A \cup B = (g \cdot f)^{-1}(\{0\})$.
Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $A_n = f_n^{-1}(\{0\})$ και $0 \leq f_n(x) \leq 1/2^n$ για $n \in \mathbb{N}$ και $x \in X$, και θέτουμε $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Τότε $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = f^{-1}(\{0\})$.
Πράγματι, αν $x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ τότε $x \in A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,άρα $f_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x) = 0$.
Αντίστροφα αν $x \in f^{-1}(\{0\}) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = 0$. Όμως $0 \leq f_n(x) \leq 1/2^n$, άρα $0 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/2^n$, επομένως $f_n(x) = 0,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in f_n^{-1}(\{0\}) = A_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Άρα $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = f^{-1}(\{0\})$.
Τέλος αν X είναι τελείως κανονικός τοπολογικός χώρος και V ανοιχτό υποσύνολο του X και $F = X \setminus V$ τότε για κάθε $x \in V$ υπάρχει μία $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f|F = 0$ και $f(x) = 1$, δηλαδή $F \subset f^{-1}(\{0\})$ και $x \notin f^{-1}(\{0\})$.
Έπεται ότι

$$F = \bigcap\{A \in \mathcal{Z}(X) : F \subset A\}$$

δηλαδή $X \setminus U = \bigcup\{X \setminus A : A \in \mathcal{Z}(X) : A \subset U\}$ που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ας παρατηρήσουμε ότι συνεχείς αντίστροφες εικόνες αρχικών και τελικών διαστημάτων των πραγματικών

$$f^{-1}[(-\infty, a]] \text{ και } f^{-1}([b, +\infty)] \text{ για } a, b \in \mathbb{R},$$

είναι πάντα μηδενοσύνολα, αφού προφανώς

$$f(x) \leq a \equiv \max\{f(x) - a, 0\} = 0$$
$$f(x) \geq b \equiv \min\{f(x) - b, 0\} = 0$$

Άρα από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι συνεχείς αντίστροφες εικόνες κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ονομάζονται και λειτουργικά κλειστά σύνολα) συμπίπτουν με τα μηδενοσύνολα επομένως οι συνεχείς αντίστροφες εικόνες από ανοιχτά σύνολα είναι ακριβώς τα συμπληρώματα των μηδενοσυνόλων.

Λήμμα 4.2. *Α A, B υποσύνολα ενός χώρου X τότε τα A, B διαχωρίζονται πλήρως στον X αν και μόνο αν A, B περιέχονται σε ξένα μηδενοσύνολα*

Απόδειξη. Αν $f : X \to [0, 1]$ συνεχής τέτοια ώστε $f(p) = 0$ για $p \in A$ και $f(p) = 1$ για $p \in B$, τότε $f^{-1}(\{0\})$ και $f^{-1}(\{1\})$ είναι ξένα μηδενοσύνολα που περιέχουν τα A και B αντίστοιχα.
Αντίστροφα αν $f^{-1}(\{0\})$ και $g^{-1}(\{0\})$ είναι ξένα σύνολα που περιέχουν τα A και B αντίστοιχα με $f, g : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς, τότε η συνεχής συνάρτηση $h : X \to \mathbb{R}$ με $h(p) = f(p)^2/(f(p)^2 + g(p)^2)$ είναι καλά ορισμένη αφού A και B ξένα, με $h(p) = 0$ για $p \in A$ και $h(p) = 1$ για $p \in B$, άρα διαχωρίζει τα A και B. □

Ορισμός 4.6. *Ένα γνήσιο ζ-φίλτρο $F \neq \mathcal{Z}(X)$ σε ένα χώρο X είναι μια μη κενή οικογένεια μη κενών μηδενοσυνόλων του X τέτοια ώστε*

(i) Αν $A, B \in F$ τότε $A \cap B \in F$

(ii) Αν $A \in F, A \subset B$, και $B \in \mathcal{Z}(X)$, τότε $B \in F$

Ένα ζ-υπερφίλτρο στον X είναι ένα ζ-φίλτρο στον X που δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα άλλα ζ-φίλτρο του X.
Μια απλή εφαρμογή του λήμματος του Zorn μας δίνει το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.5. *Έστω ένας χώρος X και $F \subset \mathcal{Z}(X)$. Αν F έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής τότε υπάρχει ένα ζ-υπερφίλτρο p στον X τέτοιο ώστε $F \subset p$.*

Απόδειξη. Έστω

$$\mathscr{B} = \{F_1 \cap \ldots \cap F_n : \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}\}$$

Τότε $\emptyset \notin \mathscr{B}$, αν $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ τότε $B_1 = \bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k}$ και $B_2 = \bigcap_{l=1}^{m} F_{i_l}$. Επομένως $B_1 \cap B_2 = (\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k}) \cap (\bigcap_{l=1}^{m} F_{i_l}) \in \mathscr{B}$.
Άρα $\mathscr{B}$ είναι βάση φίλτρου.
Άρα αν θέσουμε

$$C = \{A \in \mathcal{Z}(X) : \text{υπάρχει } B \in \mathscr{B}, \text{ ώστε } B \subset A\}$$

τότε C είναι φίλτρο. Πράγματι

1. $\emptyset \notin C$

2. αν $A_1, A_2 \in C$, τότε υπάρχουν $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ ώστε $B_1 \subset A_1$ και $B_2 \subset A_2$. Επομένως $B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2$ και άρα $A_1 \cap A_2 \in C$.

3. αν $A \in C$ και $A_1 \subset A_2 \in \mathcal{Z}(X)$ τότε υπάρχει $\mathscr{B} \ni B_1 \subset A_1 \subset A_2$ άρα $A_2 \in C$.

Τέλος αν $\mathcal{P} = \{P : P$ φίλτρο και $C \subset P\}$. Τότε $\mathcal{P}$ είναι μη κενό και μερικά διατεταγμένο με την σχέση του περιέχεσθαι. Αν $(P_i)_{i\in I}$ ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathcal{P}$ τότε $\bigcup_{i\in I} P_i \in \mathcal{P}$. Πράγματι $\emptyset \notin \bigcup_{i\in I} P_i$. Αν $A_1, A_2 \in \bigcup_{i\in I} P_i$ τότε υπάρχουν $i_1, i_2 \in I$ ώστε $A_1 \in P_{i_1}$ και $A_2 \in P_{i_2}$. Μπορώ να υποθέσω ότι $P_{i_1} \subset P_{i_2}$ τότε $A_1, A_2 \in P_{i_2}$ άρα $A_1 \cap A_2 \in P_{i_2} \subset \bigcup_{i\in I} P_i$. Αν $A_1 \in \bigcup_{i\in I} P_i$ και $A_1 \subset A_2 \in \mathcal{Z}(X)$ τότε υπάρχει $i_1 \in I$ ώστε $A_1 \in P_{i_1}$ άρα $A_2 \in P_{i_1}$ και $A_2 \in \bigcup_{i\in I} P_i$. Προφανώς $\bigcup_{i\in I} P_i$ άνω φράγμα της $(P_i)_{i\in I}$. Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του λήμματος του Zorn άρα υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο $p \in \mathcal{P}$. Το p είναι υπερφίλτρο στην $\mathcal{Z}(X)$ που περιέχει την $\mathcal{F}$. □

Μια συνέπεια είναι ότι κάθε ζ-φίλτρο στον X περιέχεται σε ένα ζ-υπερφίλτρο.

Λήμμα 4.3. *Έστω p και q ζ-υπερφίλτρα σε ένα χώρο X.*

(i) Αν $B \in \mathcal{Z}(X)$ και $A \cap B \neq \emptyset$ για $A \in p$ τότε $B \in p$

(ii) Αν $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ και $A \cup B \in p$ τότε $A \in p$ ή $B \in p$

(iii) Αν $p \neq q$ τότε υπάρχουν $A \in p$ και $B \in q$ τέτοια ώστε $A \cap B = \emptyset$

Απόδειξη. (i) Η οικογένεια $F = \{A \cap B \in \mathcal{Z}(X) : A \in p\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, άρα από την προηγούμενη πρόταση ένα ζ-υπερφίλτρο r στον X τέτοιο ώστε $F \subset r$. Είναι καθαρό ότι $B(= X \cap B) \in F \Rightarrow B \in r$ και αν $A \in p$ έχουμε $A \cap B \in F \Rightarrow A \cap B \in r$ και επειδή $A \supset A \cap B$, $A \in r$, επομένως $p \subset r$. Άρα τελικά $p = r$ και $B \in p$.

(ii) Έστω $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ και υποθέτουμε ότι $A \notin p$, $B \notin p$. Από το (i) υπάρχουν $C, D \in p$ ώστε $A \cap C = B \cap D = \emptyset$. Άρα $(A \cup B) \cap (C \cap D) = \emptyset$, και άρα $A \cup B \notin p$.

(iii) Είναι φανερό ότι υπάρχει $B \in q$ ώστε $B \notin p$. Από (i) υπάρχει $A \in p$ τέτοιο ώστε $A \cap B = \emptyset$. □

Ένα ζ-υπερφίλτρο σε ένα χώρο X είναι στοιχείο του $P(P(X))$ και άρα η κλάση όλων των ζ-υπερφίλτρων στον X είναι ένα σύνολο πληθικότητας το πολύ $2^{2^{|X|}}$.

4.4 Εσωτερική Προσέγγιση

Ορισμός 4.7. *Η συμπαγοποίηση κατά Stone-Cech βX ενός χώρου X είναι το σύνολο όλων των ζ-υπερφίλτρων του X με την τοπολογία που ορίζεται από την υποβάση*

$$\mathscr{B} = \{\{p \in \beta X : A \notin p\} : A \in \mathcal{Z}(X)\}$$

Σημειώνουμε ότι αν $x \in X$ η οικογένεια $\{A \in \mathcal{Z}(X) : x \in A\}$ είναι ένα ζ-φίλτρο του X. Πράγματι,

1. $\emptyset \notin \{A \in \mathcal{Z}(X) : x \in A\}$,
2. αν $C, D \in \{A \in \mathcal{Z}(X) : x \in A\}$ τότε $x \in C \cap D$ και $C \cap D \in \mathcal{Z}(X)$ από λήμμα, άρα $C \cap D \in \{A \in \mathcal{Z}(X) : x \in A\}$.
3. Τέλος αν $C \in \{A \in \mathcal{Z}(X) : x \in A\}$ και $C \subset D$, $D \in \mathcal{Z}(X)$ τότε $x \in D$ και βέβαια $D \in \{A \in \mathcal{Z}(X) : x \in A\}$.

Πιο συγκεκριμένα αυτή η οικογένεια είναι ένα ζ-υπερφίλτρο, γιατί αν $B \in \mathcal{Z}(X)$ και $x \in X \setminus B$ τότε (αφού ο X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$) υπάρχει $A \in \mathcal{Z}(X)$ τέτοιο ώστε $x \in A$ και $A \cap B = \emptyset$.
Επομένως η συνάρτηση e που ορίζεται στον X με

$$e(x) = \{A \in \mathcal{Z}(X) : x \in A\}$$

είναι μια 1-1 συνάρτηση από τον X στον βX. Αυτή καλείται κανονική εμφύτευση του X στον βX.

Λήμμα 4.4. *Έστω X χώρος. Τότε*

(i) $\mathscr{B}$ *είναι μια βάση του* βX

(ii) βX *είναι συμπαγής χώρος*

(iii) $e[X \setminus A] = e[X] \cap \{p \in \beta X : A \notin p\}$ *για* $A \in \mathcal{Z}(X)$

(iv) e *είναι μια τοπολογική εμφύτευση του* X *στον* βX

(v) $cl_{\beta X} e[A] = \{p \in \beta X : A \in p\}$ *για* $A \in \mathcal{Z}(X)$

(vi) $e[X]$ *είναι πυκνό στον* βX

(vii) $p = \{A \in \mathcal{Z}(X) : p \in cl_{\beta X} e[A]\}$ *για* $p \in \beta X$

(vii) $cl_{\beta X} e[A] \cap cl_{\beta X} e[B] = cl_{\beta X} e[A \cap B]$ *για* $A, B \in \mathcal{Z}(X)$

Απόδειξη. (i) Έστω $A_0, A_1 \in \mathcal{Z}(X)$ και θέτουμε

$$B_i = \{p \in \beta X : A_i \notin p\} \text{ για } i < 2$$

Για $p \in \beta X$ έχουμε

$$A_0 \cup A_1 \notin p \text{ αν και μόνο αν } A_0 \notin p \text{ και } A_1 \notin p$$

από το προηγούμενο λήμμα, και άρα

$$B_0 \cap B_1 = \{p \in \beta X : A_0 \cup A_1 \notin p\} \in \mathfrak{B}$$

(ii) Πρώτα αποδεικνύουμε ότι ο βX ικανοποιεί την Hausdorff διαχωριστική ιδιότητα. Αν $p, q \in \beta X$ και $p \neq q$ τότε από λήμμα υπάρχουν $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ τέτοια ώστε $A \in p$, $B \in q$ και $A \cap B = \emptyset$. Αφού ξένα μηδενοσύνολα του X διαχωρίζονται πλήρως, υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για $x \in A$ και $f(x) = 1$ για $x \in B$. Θέτουμε $C = f^{-1}([0, 1/4))$, $D = f^{-1}((3/4, 1])$ και $E = f^{-1}([0, 1/4])$, $F = f^{-1}([3/4, 1])$ τότε C, D είναι συμπληρώματα μηδενοσυνόλων και E, F μηδενοσύνολα του X τέτοια ώστε

$$A \subset C \subset E,\ B \subset D \subset F \text{ και } E \cap F = \emptyset$$

Τότε $\{t \in \beta X : X \setminus C \notin t\}$ και $\{t \in \beta X : X \setminus D \notin t\}$ είναι γειτονιές του p και q αντίστοιχα και

$$\begin{aligned}&\{t \in \beta X : X \setminus C \notin t\} \cap \{t \in \beta X : X \setminus D \notin t\}\\ &\subset \{t \in \beta X : E \in t\} \cap \{t \in \beta X : F \in t\} = \emptyset\end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι ο βX είναι συμπαγής είναι αρκετό, σύμφωνα με το (i), να δείξουμε ότι αν $\{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{Z}(X)$ και

$$\{\{p \in \beta X : A_i \in p\} : i \in I\}$$

έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής τότε

$$\bigcap_{i\in I}\{p \in \beta X : A_i \in p\} \neq \emptyset$$

Έχουμε για $i = 1, \dots, n$ με $n \in \mathbb{N}$, $\cap_{i=1}^{n}\{p \in \beta X : A_i \in p\} \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $p \in \cap_{i=1}^{n}\{p \in \beta X : A_i \in p\}$ οπότε $A_i \in p$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ επομένως $\cap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$ η οικογένεια $\{A_i : i \in I\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.
Υπάρχει, από θεώρημα, $q \in \beta X$ τέτοιο ώστε $\{A_i : i \in I\} \subset q$ και έχουμε

$$q \in \bigcap_{A\in q}\{p \in \beta X : A \in p\} \subset \bigcap_{i\in I}\{p \in \beta X : A_i \in p\}$$

(iii) Είναι φανερό από τον ορισμό της e.
Πράγματι έστω $p \in e[X \setminus A]$ δηλαδή για $x \in X \setminus A$ έχουμε $p = \{B \in \mathcal{Z}(X) : x \in B\}$. Τότε $p \in e[X]$ και επειδή $A \notin p$, αφού βX $T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικός χώρος και p σημείο και $\{q \in \beta X : A \notin p\}$ κλειστό του βX. Άρα $e[X \setminus A] \subset e[X] \cap \{p \in \beta X : A \notin p\}$.
Για τον αντίστροφο εγκλεισμό έστω $p \in e[X] \cap \{p \in \beta X : A \notin p\}$. Τότε για $x \in X$ έχουμε $p = \{B \in \mathcal{Z}(X) : x \in B\}$ Αν $x \in A$ τότε $A \in p$ αδύνατο άρα $x \in X \setminus A$ και $p \in e[X \setminus A]$.

(iv) Έστω $x_1 \neq x_2 \in X$, αφού X χώρος υπάρχει συνεχής $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x_1) = 0 \text{ και } f(x_2) = 1, \text{ αφού } \{x_2\} \text{ κλειστό.}$$

Επομένως υπάρχει $A \in \mathcal{Z}(X)$ ώστε $x_1 \in A$ και $x_2 \notin A$ άρα $e(x_1) \neq e(x_2)$ και e είναι 1-1.
Τώρα από (iii) έχουμε $X \setminus A = e^{-1}(\{p \in \beta X : A \notin p\})$ για $A \in \mathcal{Z}(X)$. Άρα η e απεικονίζει μια βάση του X επί μιας βάσης του $e[X]$. Οπότε e τοπολογική εμφύτευση.

(v) Έστω $A \in \mathcal{Z}(X)$. Τότε $\{p \in \beta X : A \in p\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του βX και $e[A] = \{\{B \in \mathcal{Z}(X) : x \in B\} : x \in A\} \subset \{p \in \beta X : A \in p\}$ έτσι ώστε

$$cl_{\beta X} e[A] \subset \{p \in \beta X : A \in p\}$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό έστω $p \in \beta X$ με $A \in p$ και υποθέτουμε ότι $p \notin cl_{\beta X} e[A] \Rightarrow p \in \beta X \setminus cl_{\beta X} e[A]$. Τότε από (i) υπάρχει $B \in \mathcal{Z}(X)$ ώστε $B \notin p$ (δηλαδή $p \in \{t \in \beta X : B \notin t\}$) και

$$e[A] \cap \{t \in \beta X : B \notin t\} = \emptyset$$

Τότε $e[A] \subset e[X] \cap \{t \in \beta X : B \in t\} = e[B]$ από (iii), και έχουμε $A \subset B$ και άρα ότι $B \in p$.

(vi) Από (v) έχουμε

$$cl_{\beta X} e[X] = \{p \in \beta X : X \in p\} = \beta X$$

(vii) Είναι ισοδύναμο με το (v)

(vii) Ακολουθεί από το (v).

□

Μέσω της κανονικής εμφύτευσης $e : X \to \beta X$, συνήθως (για άνεση) αναγνωρίζουμε τον X με τον υπόχωρο $e[X]$ του βX. Επομένως ένα στοιχείο $p \in X$ το αναγνωρίζουμε με ένα ζ-υπερφίλτρο $\{A \in \mathcal{Z}(X) : p \in A\}$.

Λήμμα 4.5. *Έστω X ένα πυκνό υποσύνολο του Y και f μια συνεχή συνάρτηση απ' τον X σε ένα συμπαγή χώρο K.*

(i) Αν για $p \in Y$ υπάρχει μια συνεχή συνάρτηση $f_p X \cup \{p\} \to K$ τέτοια ώστε $f \subset f_p$, τότε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $g : Y \to K$ τέτοια ώστε $f \subset g$

(ii) Αν $p \in Y$ και δεν υπάρχει συνεχής $g : X \cup \{p\} \to K$ ώστε $f \subset g$, τότε υπάρχουν $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ τέτοια ώστε

$$A \cap B = \emptyset \text{ και } p \in cl_Y f^{-1}(A) \cap cl_Y f^{-1}(B).$$

Απόδειξη. (i) Θέτουμε $g = \bigcup\{f_p : p \in Y\}$. Για να επιβεβαιώσουμε την συνέχεια της g στο $p \in Y$ έστω V και W γειτονιές του $g(p)$ τέτοιες ώστε $clW \subset V$, και έστω U μια γειτονιά του p στο Y τέτοια ώστε $f(q) \in W$ για $q \in U \cap X$. Αν $q \in U$ τότε $q \in cl_Y(U \cap X)$ και άρα

$$g(q) = f_q(q) \in cl f_q[U \cap X] = cl f[U \cap X] \subset clW \subset V.$$

(ii) Η οικογένεια

$$F = \{cl_K f[U \cap X] : U \text{ γειτονιά του } p \text{ στον } U\}$$

είναι μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του K με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής (αφού X πυκνό στον Y) άρα $\bigcap F \neq \emptyset$. Αν $|\bigcap F| = 1$, έστω $\bigcap F = \{s\}$, τότε η συνάρτηση $f \cup \{\langle p, s\rangle\}$ είναι συνεχή επέκταση της f. Άρα υπάρχουν $s, t \in \bigcap F$ με $s \neq t$, και είναι εύκολο να δούμε ότι $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ με $s \in A$ και $t \in B$ και $A \cap B = \emptyset$, τότε

$$p \in cl_Y f^{-1}(A) \cap cl_Y f^{-1}(B).$$

□

Θεώρημα 4.5. *Έστω X ένα πυκνό υποσύνολο ενός συμπαγούς χώρου Y. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Για κάθε $f : X \to K$ με f συνεχή και K συμπαγές υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $g : Y \to K$ ώστε $f \subset g$.

(ii) Αν $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη τότε υπάρχει $g : Y \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη $f \subset g$

(iii) Αν $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ και $A \cap B = \emptyset$ τότε $cl_Y A \cap cl_Y B = \emptyset$.

(iv) Αν $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ τότε $cl_Y A \cap cl_Y B = cl_Y(A \cap B)$.

(v) Η οικογένεια $\{A \in \mathcal{Z}(X) : p \in cl_Y A\}$ είναι ένα ζ-φίλτρο στον X για $p \in Y$.
Επιπλέον ο βX ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, και για κάθε χώρο Y που τις ικανοποιεί υπάρχει ένας (μοναδικός) ομοιομορφισμός h απ' τον βX στον Y ώστε $h(p) = p$ για $p \in X$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Είναι προφανές

(ii)⇒(iii) Έστω $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ και $A \cap B = \emptyset$. Σημειώσαμε νωρίτερα ότι υπάρχει συνεχής $f : X \to [0, 1]$ τέτοια ώστε $A \subset f^{-1}(0)$ και $B \subset f^{-1}(1)$. Από υπόθεση υπάρχει συνεχής $g : Y \to [0, 1]$ τέτοια ώστε $f \subset g$. Τότε $g(p) = 0$ για $p \in cl_Y A$ και $g(p) = 1$ για $p \in cl_Y B$ και άρα έχω το ζητούμενο.

(iii)⇒(iv) Είναι φανερό ότι $cl_Y(A\cap B)\subset cl_Y A\cap cl_Y B$. Αν $p\in Y$ και $p\notin cl_Y(A\cap B)$ τότε υπάρχει $f:Y\to\mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(p)=0$ και $f(q)=1$ για $q\in(A\cap B)$. Θέτουμε $C=\{q\in Y: f(q)\leq 1/2\}$. Τότε το C είναι μια ανοιχτή περιοχή του p στον Y και $A\cap B\cap C=\emptyset$. Αφού $A\cap C\in\mathcal{Z}(X)$ και $B\cap C\in\mathcal{Z}(X)$ έχουμε

$$cl_Y(A\cap C)\cap cl_Y(B\cap C)=\emptyset$$

από υπόθεση και άρα $p\notin cl_Y A\cap cl_Y B$.

(iv)⇒(v) Θέτουμε $\tilde{p}=\{A\in\mathcal{Z}(X): p\in cl_Y A\}$ για $p\in Y$. Είναι φανερό ότι $\tilde{p}\neq\emptyset$ και $\emptyset\notin\tilde{p}$, και ότι αν $A,B\in\mathcal{Z}(X)$ με $A\in\tilde{p}$ και $A\subset B$, τότε $B\in\tilde{p}$. Από το **(iv)** έχουμε ότι η τομή δυο στοιχείων του $\tilde{p}$ είναι στοιχείο του $\tilde{p}$. Άρα $\tilde{p}$ είναι ένα ζ-φίλτρο του X.

(v)⇒(i) Αν δεν ισχύει το **(i)** τότε από λήμμα υπάρχει συμπαγής χώρος K,$p\in Y$, και μια συνεχής συνάρτηση $f:X\to K$ τέτοια ώστε η f να μην περιέχεται σε μια συνεχή συνάρτηση απ' τον $f:X\cup\{p\}$ στον K. Τότε από λήμμα πάλι υπάρχουν $C,D\in\mathcal{Z}(K)$ τέτοια ώστε $C\cap D=\emptyset$ και $p\in cl_Y f^{-1}(C)\cap cl_Y f^{-1}(D)$. Αφού

$$f^{-1}(C),f^{-1}(D)\in\mathcal{Z}(X)\text{ και }f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)=\emptyset,$$

η οικογένεια $\{A\in\mathcal{Z}(X): p\in cl_{\beta X}A\}=p$ δεν είναι ζ-φίλτρο του X.
Σύμφωνα με λήμμα, βX είναι συμπαγής χώρος που περιέχει τον X ως πυκνό υποσύνολο, επιπλέον για $p\in\beta X$ έχουμε

$$\{A\in\mathcal{Z}(X): p\in cl_{\beta X}A\}=p$$

άρα βX ικανοποιεί την συνθήκη **(v)**(άρα τα στοιχεία του βX είναι ζ-υπερφίλτρα του X) και άρα όλες οι συνθήκες του θεωρήματος.
Υποθέτουμε τώρα ότι ο Y είναι ένας συμπαγής χώρος που περιέχει ως πυκνό τον X και ικανοποεί τις συνθήκες του θεωρήματος. Έχουμε από **(i)** ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $h:\beta X\to Y$ τέτοια ώστε $h(p)=p$ για $p\in X$ και υπάρχει μια συνεχής $k:Y\to\beta X$ τέτοια ώστε $k(p)=p$ για $p\in X$. Τότε $k\circ h(p)=p$ για $p\in X$,και αφού $k\circ h$ είναι συνεχής στον βX και X είναι πυκνός στον βX έχουμε $k\circ h(p)=p$ για $p\in\beta X$. Άρα h ομοιομορφισμός του βX επί του Y.

□

Κεφάλαιο 5

Δυϊκότητα Stone

5.1 Θεώρημα Αναπαράστασης του Stone

Έστω $\mathcal{B}$ μια άλγεβρα Boole, συμβολίζουμε με $S(\mathcal{B})$ το σύνολο όλων των υπερφίλτρων της $\mathcal{B}$. Είναι προφανές ότι $|S(\mathcal{B})| \leq 2^{|\mathcal{B}|}$. Είδαμε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου την συνολοθεωρητική έκδοση του θεωρήματος του Stone.
Έστω $\mathcal{B}$ μια άλγεβρα Boole, συμβολίζουμε $\psi_{\mathcal{B}}$, ή απλά ψ, την συνάρτηση απ' την $\mathcal{B}$ στο $P(S(\mathcal{B}))$ με $\psi(a) = \{p \in S(\mathcal{B}) : a \in p\}$. Θυμίζουμε ότι ισχύουν

1. $\psi(0) = \emptyset$, $\psi(1) = S(\mathcal{B})$
2. $\psi(x) \cup \psi(y) = \psi(x \vee y)$
3. $\psi(x) \cap \psi(y) = \psi(x \wedge y)$
4. $S(\mathcal{B}) \setminus \psi(x) = \psi(x')$

Ονομάζουμε τοπολογία Stone την τοπολογία που παράγεται απ' την υποβάση $\psi[\mathcal{B}]$. Το σύνολο $S(\mathcal{B})$ με την τοπολογία Stone καλείται χώρος Stone της (άλγεβρας Boole) $\mathcal{B}$. Συμβολίζουμε αυτόν τον χώρο με $S(\mathcal{B})$.
Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε την έννοια χώρος και θα εννοούμε έναν T_2 και $T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικό χώρο.

Ορισμός 5.1. *Έστω X ένας χώρος. Ο X είναι ολικά μη συνεκτικός αν για $p, q \in X$ και $p \neq q$ υπάρχει ένα ανοιχτό (και συγχρόνως) κλειστό υποσύνολο του X που περιέχει το p αλλά όχι το q.*

Θεώρημα 5.1. *Έστω $\mathcal{B}$ μια άλγεβρα Boole*

(i) *$\psi[\mathcal{B}]$ είναι μια βάση για τον $S(\mathcal{B})$*

(ii) *$\psi[\mathcal{B}] \subset \mathcal{B}(S(\mathcal{B}))$*

(iii) *$S(\mathcal{B})$ είναι ένας συμπαγής, ολικά μη συνεκτικός χώρος*

(iv) *ψ είναι ένας ισομορφισμός της $\mathcal{B}$ επί του $\mathcal{B}(S(\mathcal{B}))$*

Απόδειξη.

(i) Έχουμε $\psi[1] = \{p \in S(\mathcal{B}) : 1 \in p\} = S(\mathcal{B})$, και

$$\psi(a) \cap \psi(b) = \psi(a \wedge b)$$

για κάθε $a, b \in \mathcal{B}$ απ' την προηγούμενη πρόταση. Άρα $\psi[\mathcal{B}]$ βάση του $S(\mathcal{B})$.

(ii) Εξ ορισμού της τοπολογίας του Stone, αν $a \in \mathcal{B}$ $\psi(a) \in \psi[\mathcal{B}]$ άρα $\psi[a]$ είναι ανοιχτό. Όμως από ιδιότητες της ψ έχω ότι

$$S(\mathcal{B}) \setminus \psi(a) = \psi(a') \in S(\mathcal{B}), \text{ άρα } \psi(a) \text{ κλειστό}$$

, έτσι $\psi[\mathcal{B}] \subset \mathcal{B}(S(\mathcal{B}))$.

(iii) Αν $p, q \in S(\mathcal{B})$ και $p \neq q$ τότε, (επειδή $p \subset q$ ή $q \subset p$ είναι αδύνατο αφού p, q υπερφίλτρα), υπάρχει $a \in p$ ώστε $a \notin q$. Από το (ii) έχω ότι $\psi(a)$ είναι ένα ανοιχτό-κλειστό υποσύνολο του $S(\mathcal{B})$ περιέχει το p και όχι το q. Άρα ο $S(\mathcal{B})$ ικανοποιεί την ιδιότητα Hausdorff.
Έστω $A \subset \mathcal{B}$ και $\{\psi(a) : a \in A\}$ είναι κάλυμμα του $S(\mathcal{B})$ χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\cup_{i=1}^n \psi(a_i) \neq S(\mathcal{B}) \Rightarrow S(\mathcal{B}) \setminus \cup_{i=1}^n \psi(a_i) \neq \emptyset \\
&\Rightarrow \cap_{i=1}^n (S(\mathcal{B}) \setminus \psi(a_i)) \neq \emptyset \Rightarrow \cap_{i=1}^n \psi(a_i') \neq \emptyset \\
&\Rightarrow \psi(\bigwedge_{i=1}^n (a_i')) \neq \emptyset \Rightarrow \{p \in S(\mathcal{B}) : \bigwedge_{i=1}^n (a_i') \in p\} \neq \emptyset \\
&\Rightarrow \bigwedge_{i=1}^n (a_i') \neq 0.
\end{aligned}$$

Άρα η οικογένεια

$$\mathcal{F} = \{a' : a \in A\}$$

έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, και άρα υπάρχει $p \in S(\mathcal{B})$ τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \subset p$. Αφού $\{\psi(a) : a \in A\}$ είναι κάλυμμα του $S(\mathcal{B})$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $p \in \psi(a)$, δηλαδή, $a \in p$. Επομένως

$$0 = a \wedge a' \in p$$

αδύνατο. Άρα ο $S(\mathcal{B})$ συμπαγής.
Άρα ο $S(\mathcal{B})$ είναι συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος, άρα και τελείως κανονικός τοπολογικός χώρος. Επομένως τελικά είναι συμπαγής ολικά μη συνεκτικός χώρος.

(iv) Από το (ii) και την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η ψ είναι μια εμφύτευση της $\mathcal{B}$ στον $S(\mathcal{B})$. Εξακριβώνουμε ότι $\psi[\mathcal{B}] = \mathcal{B}(S(\mathcal{B}))$. Αν $A \in \mathcal{B}(S(\mathcal{B}))$ τότε απ' το (i) υπάρχει $\{a_i : i \in I\} \subset \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $A = \bigcup\{\psi(a_i) : i \in I\}$. Το A είναι (κλειστό υποσύνολο συμπαγούς) άρα συμπαγές, άρα υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_k \in I$ για $k \leq n$ ώστε

$$A = \psi(a_0) \cup \ldots \cup \psi(a_n) = \psi(a_0 \vee \ldots \vee a_n) \in \psi[\mathcal{B}].$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Αν X ολικά μη συνεκτικός χώρος και $p \in X$ τότε

$$\{a \in \mathcal{B}(X) : p \in a\} \in S(\mathcal{B}(X)).$$

Πράγματι, έστω $F = \{a \in \mathcal{B}(X) : p \in a\}$. Τότε

1. Προφανώς $\emptyset \notin F$,

2. αν $x, y \in F$ τότε $p \in x, p \in y$ άρα $p \in x \cap y$ οπότε $x \cap y \in F$ και

3. τέλος αν $x \in F$ και $x \subset y, y \in \mathcal{B}(X)$ τότε $p \in x \subset y$ άρα $p \in y$ άρα $y \in F$. Δείξαμε ότι η οικογένεια F είναι φίλτρο.

Έστω $a \in \mathcal{B}(X)$ τότε $p \in a$ ή $p \in X \setminus a$ οπότε $a \in F$ ή $X \setminus a \in F$ άρα το F είναι υπερφίλτρο. Είναι ακριβώς τα τετριμμένα υπερφίλτρα (που είχαμε ορίσει σε ένα μη κενό σύνολο X) της $\mathcal{B}(X)$.
Ορίζουμε την συνάρτηση h που για κάθε $x \in \mathcal{B}(X)$ μας δίνει το τετριμμένο υπερφίλτρο του.

$$h : X \to S(\mathcal{B}(X))$$

με $h(p) = \{a \in \mathcal{B}(X) : p \in a\}$.

Πρόταση 5.1. *Έστω X ένας ολικά μη συνεκτικός χώρος και θέτουμε $\psi = \psi_{\mathcal{B}(X)}$. Τότε*

(i) $h[X] \cap \psi(A) = h[A]$ *για* $A \in \mathcal{B}(X)$

(ii) h *είναι μια συνεχής συνάρτηση*

(iii) $\overline{h[A]} = cl_{S(\mathcal{B}(X))}h[A] = \psi(A)$ *για* $A \in \mathcal{B}(X)$

(iv) $h[X]$ *είναι πυκνό στο* $S(\mathcal{B}(X))$

(v) $p = \{A \in \mathcal{B}(X) : p \in cl_{S(\mathcal{B}(X))}h[A]\}$ *για* $p \in S(\mathcal{B}(X))$

(vi) $cl_{S(\mathcal{B}(X))}h[A] \cap cl_{S(\mathcal{B}(X))}h[B] = cl_{S(\mathcal{B}(X))}h[A \cap B]$ *για* $A, B \in \mathcal{B}(X)$ *και*

(vii) *αν* $\mathcal{B}(X)$ *είναι βάση για τον* X *τότε* h *είναι μια τοπολογική εμφύτευση.*

Απόδειξη.

(i) Η οικογένεια $h[X] = \{h(x) : x \in X\} = \{\{a \in \mathcal{B}(X) : x \in a\} : x \in X\}$ είναι τα τετριμμένα υπερφίλτρα για κάθε $x \in X$. Η τομή του πρώτου μέλους συλλέγει τα τετριμμένα υπερφίλτρα του $\psi(A)$, δηλ τα τετριμμένα υπερφίλτρα για κάθε $x \in A$ άρα το $h[A]$.
Πράγματι, έστω $S \in \mathcal{B}(X)$ αν $p \in h[X] \cap \psi(A)$ τότε $A \in p$ και $p = \{V \in \mathcal{B}(X) : x \in V\}$ για κάποιο $x \in X$. Αν $x \in X \setminus A$ τότε $X \setminus A \in p$, αδύνατο, αφού $A \in p$. Άρα $x \in A$, επομένως $p \in h[A]$.
Αντίστροφα αν $p \in h[A]$, προφανώς, $p \in h[A]$ και $p = \{V \in \mathcal{B}(X) : x \in V\}$, $x \in A$. Άρα $A \in p \Rightarrow p \in \psi(A)$.

(ii) Η οικογένεια $\{h[X] \cap \psi(A) : A \in \mathcal{B}(X)\}$ είναι μια βάση για τον $h[X]$ με την σχετική τοπολογία από τον $S(\mathcal{B}(X))$. Από (i) και λόγω του ότι η h είναι 1-1 (αφού αν $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$, επειδή X ολικά μη συνεκτικός χώρος, υπάρχει $a \in \mathcal{B}(X)$ με $x_1 \in a$ και $x_2 \notin a$ άρα $h(x_1) \neq h(x_2)$) έχουμε

$$h^{-1}(h[X] \cap \psi(A)) = A$$

για $A \in \mathcal{B}(X)$.

(iii) Για $A \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε $\psi(A) \in \mathcal{B}(S(\mathcal{B}(X)))$ από το προηγούμενο θεώρημα, και από (i) $cl_{S(\mathcal{B}(X))}h[A] \subset \psi(A)$, αφού $\psi(A)$ κλειστό. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό έστω

$$p \in S(\mathcal{B}(X)) \setminus cl_{S(\mathcal{B}(X))}h[A].$$

Αφού $\psi[\mathcal{B}(X)]$ βάση για τον $S(\mathcal{B}(X))$ υπάρχει $C \in \mathcal{B}(X)$ τέτοιο ώστε $p \in \psi(C) \subset S(\mathcal{B}(X)) \setminus cl_{S(\mathcal{B}(X))}h[A]$. Θέτουμε $B = \mathcal{B}(X) \setminus C$ και έχουμε $h[A] \subset \overline{h[A]} \subset S(\mathcal{B}(X)) \setminus \psi(C) = \psi(\mathcal{B}(X) \setminus C) = \psi(B)$ και $p \notin \psi(B)$. Έχουμε $h[A] \subset h(X) \cap \psi(B) = h[B]$ από (i), έτσι επειδή h είναι 1-1 έχουμε $A \subset B$ και άρα $\psi(A) \subset \psi(B)$. Επομένως $p \notin \psi(A)$. Άρα $\psi(A) \subset cl_{S(\mathcal{B}(X))}h[A]$ και επομένως έχουμε το ζητούμενο.

(iv) Από το (iii) έχουμε

$$cl_{S(\mathcal{B}(X))}h[X] \overset{(iii)}{=} \psi(X) = S(\mathcal{B}(X)).$$

(v) Είναι ισοδύναμο με το (iii). Έστω $p \in S(\mathcal{B}(X))$, υπάρχει $A \in \mathcal{B}(X) : p \in \psi(A) = cl_{S(\mathcal{B}(X))}h[A]$ και αν $A \in \mathcal{B}(X)$ τότε $p \in \psi(A)$ ή $p \in S(\mathcal{B}(X)) \setminus \psi(A)$ άρα υπερφίλτρο άρα ισχύει η ισότητα.

(vi) Έπεται απ' το (iii)

(vii) Το $\{\psi(A) \cap h[X] : A \in \mathcal{B}(X)\}$ είναι βάση για το $h[X]$ και η h είναι μια 1-1 συνάρτηση, άρα από (i) έχουμε το αποτέλεσμα.

□

Θυμίζουμε ότι ένα μηδενοσύνολο ενός χώρου X είναι ίσο με $f^{-1}(\{0\})$ για κάποια $f \in C(X)$. Η οικογένεια όλων των μηδενοσυνόλων του X συμβολίζεται $\mathcal{Z}(X)$.

Ορισμός 5.2. *Ένα στοιχείο ενός χώρου X είναι P_α-σημείο του X αν κάθε τομή, μικρότερων από το α σε πλήθος, περιοχών του p είναι μια περιοχή του p. Ένας χώρος είναι P_α-χώρος αν κάθε στοιχείο του X είναι P_α-σημείο.*

Θυμίζουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5.3. *Ένας χώρος X είναι 0-διάστατος αν $\mathcal{B}(X)$ είναι μια βάση του X*

και ορίζουμε τον ισχυρά 0-διάστατο χώρο.

Ορισμός 5.4. *Ένας χώρος X καλείται ισχυρά 0-διάστατος αν για $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ με $A \cap B = \emptyset$ υπάρχει $C \in \mathcal{B}(X)$ τέτοιο ώστε $A \subset C$ και $B \cap C = \emptyset$.*

Ορισμός 5.5. *Αν $f : X \to K$ είναι συνεχής και K είναι συμπαγής τότε η μοναδική συνεχής συνάρτηση $\bar{f} : \beta X \to K$ τέτοια ώστε $f \subset \bar{f}$ καλείται η επέκταση Stone της f. Συστηματικά θα χρησιμοποιούμε την γραμμή πάνω από μια συνεχή συνάρτηση σε ένα συμπαγή χώρο για να συμβολίσουμε την επέκταση Stone.*

Λήμμα 5.1. *Έστω X ολικά μη συνεκτικός χώρος και $\bar{h} : \beta X \to S(\mathcal{B}(X))$ η επέκταση Stone της (συνεχούς) h.*
Τότε

(i) $\bar{h}(p) = p \cap \mathcal{B}(X)$ για $p \in \beta X$

(ii) Αν X ισχυρά 0-διάστατος τότε $\bar{h}$ ομοιομορφισμός του βX επί του $S(\mathcal{B}(X))$

(iii) Αν X είναι P_{ω^+}-χώρος (ειδικότερα αν είναι διακριτός) τότε $\beta X = S(\mathcal{B}(X))$ και $\bar{h}$ η ταυτοτική συνάρτηση στον βX

Απόδειξη. (i) Είναι φανερό ότι αν $p \in \beta X$ τότε $p \cap \mathcal{B}(X) \in S(\mathcal{B}(X))$. Επιπλέον αν $A \in p \cap \mathcal{B}(X)$ τότε $p \in cl_{\beta X}A$ και από συνέχεια του $\bar{h}$ έχουμε

$$\bar{h}(p) \in cl_{S(\mathcal{B}(X))}\bar{h}[A] = cl_{S(\mathcal{B}(X))}h[A] = \psi(A)$$

από λήμμα, άρα $A \in \bar{h}(p)$. Επομένως $p \cap \mathcal{B}(X) \subset \bar{h}$, και αφού $p \cap \mathcal{B}(X)$ είναι ένα υπερφίλτρο στον $\mathcal{B}(X)$ έχουμε ότι $p \cap \mathcal{B}(X) = \bar{h}$

(ii) Αφού βX συμπαγής έχουμε $\bar{h}[\beta X] = S(\mathcal{B}(X))$ από λήμμα και είναι αρκετό να δείξουμε ότι η $\bar{h}$ είναι 1-1. Αν $p, q \in \beta X$ και $p \neq q$ τότε από λήμμα υπάρχουν $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ τέτοια ώστε $A \in p$, $B \in q$ και $A \cap B = \emptyset$. Αφού X είναι ισχυρά 0-διάστατος υπάρχουν $C, D \in \mathcal{B}(X)$ τέτοια ώστε $A \subset C$, $B \subset D$ και $C \cap D = \emptyset$, και από (i) έχουμε $\bar{h}(p) \neq \bar{h}(q)$.

(iii) Έχουμε από λήμμα ότι αν X είναι P_{ω^+}-χώρος τότε τα στοιχεία του $\mathcal{Z}(X)$ είναι ανοιχτά-κλειστά. Επομένως X είναι ισχυρά 0-διάστατος και $\mathcal{B}(X) = \mathcal{Z}(X)$, και από (i) έχουμε

$$p = p \cap \mathcal{B}(X) = \bar{h}$$

για $p \in \beta X$.

□

Λήμμα 5.2. *Αν X είναι ένας συμπαγής χώρος τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) X είναι ισχυρά 0-διάστατος

(ii) X είναι 0-διάστατος

(iii) X είναι ολικά μη συνεκτικός

Απόδειξη.

(i)⇒(ii) Προφανές

(ii)⇒(iii) Προφανές

(iii)⇒(i) Έστω $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ με $A \cap B = \emptyset$. Από υπόθεση υπάρχει $A_{p,q} \in \mathcal{B}(X)$ τέτοιο ώστε $p \in A_{p,q}$ και $q \notin A_{p,q}$ για $p \in A, q \in B$. Η οικογένεια $\{A_{p,q} : p \in A\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου A, και άρα υπάρχουν $n(q) \in \mathbb{N}$ και $p_0, \ldots, p_{n(q)} \in A$ τέτοια ώστε

$$A \subset A_{p_0,q} \cup \ldots \cup A_{p_{n(q)},q} \text{ για } q \in B.$$

Θέτουμε $B_q = X \setminus (A_{p_0,q} \cup \ldots \cup A_{p_{n(q)},q})$, έτσι $q \in B_q \in \mathcal{B}(X)$ για $q \in B$. Η οικογένεια $\{B_q : q \in B\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου B, και άρα υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $q_0, \ldots, q_n \in B$ τέτοια ώστε

$$B \subset B_{q_0} \cup \ldots \cup B_{q_n}$$

Θέτουμε $C = B_{q_0} \cup \ldots \cup B_{q_n}$. Τότε $C \in \mathcal{B}(X), B \subset C$ και $A \cap C = \emptyset$.

□

Προφανώς, για ομοιομορφικούς χώρους X και Y, τα $\mathcal{B}(X)$ και $\mathcal{B}(Y)$ είναι ισομορφικά. Αντίστροφα θα δείξουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 5.3. *Αν, για συμπαγείς 0-διάστατους χώρους X και Y, οι $\mathcal{B}(X)$ και $\mathcal{B}(Y)$ είναι ισομορφικοί, τότε οι X και Y είναι ομοιομορφικοί.*

Απόδειξη. Έστω $f : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ ένας ισομορφισμός. Κάθε σημείο x του X καθορίζει ένα υπερφίλτρο

$$h(x) = \{a \in \mathcal{B}(X) : x \in a\}$$

των ανοιχτών-κλειστών γειτονιών και αντίστροφα, για κάθε υπερφίλτρο $F \subset \mathcal{B}(X)$ έχουμε ότι: αν $x \in \bigcap F$ τότε $F \subset h(x)$ και άρα $F = h(x)$. Έστω $g : X \to Y$ ορισμένη από την σχέση

$$f[h(x)] = h(g(x)) \text{ για } x \in X$$

το οποίο είναι καλά ορισμένο, επειδή η εικόνα $f[h(x)]$ ενός υπερφίλτρου είναι υπερφίλτρο. Αν $x \neq y$ τότε υπάρχουν ξένες ανοιχτές-κλειστές γειτονιές U,V του x και y αντίστοιχα. Επομένως $f[h(x)] \neq f[h(y)]$ και άρα $\bigcap h(g(x)) \neq \bigcap h(g(y))$. Αν y είναι ένα τυχαίο σημείο του Y τότε $f(x) = y$, όπου $\{x\} = \bigcap f^{-1}[h(y)]$. Επομένως η g είναι 1-1.
Τέλος, έστω $V \in \mathcal{B}(Y)$ και $U = f^{-1}(V)$. Τότε έχουμε

$$\begin{array}{rrr} x \in g^{-1}[V] \equiv & g(x) \in V \equiv & V \in h(g(x)) \equiv \\ V \in f[h(x)] \equiv & U \in h(x) \equiv & x \in U \end{array}$$

που δείχνει ότι η g είναι συνεχής και άρα ομοιομορφισμός, αφού ο X είναι συμπαγής. □

Από το παραπάνω λήμμα έχουμε αμέσως την απαιτούμενη μοναδικότητα, επομένως ο χώρος Stone $X = S[\mathcal{B}]$ μιας άλγεβρας Boole $\mathcal{B}$ ορίζεται μοναδικά.
Όμοια αποδεικνύουμε και το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.2. *Αν X συμπαγής, ολικά μη συνεκτικός χώρος τότε h ομοιομορφισμός απ' το X επί του $S(\mathcal{B}(X))$*

Απόδειξη. Έχουμε δείξει ότι η h είναι τοπολογική εμφύτευση.
Θέλουμε να δείξουμε ότι $h[X] = S(\mathcal{B}(X))$.
Έστω $p \in S(\mathcal{B}(X))$ και $p = \{A_i \in \mathcal{B}(X) : i \in I\}$. Το p έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και άρα, επειδή X συμπαγής, έχουμε $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.
Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \bigcap_{i\in I} A_i$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε, αφού X ολικά μη συνεκτικός χώρος, υπάρχει $A \in \mathcal{B}(X)$ ώστε $x_1 \in A$ και $x_2 \notin A$.
Προφανώς $A \notin p$, αφού $x_2 \notin A$. Η οικογένεια $\mathcal{F} = p \cup \{A\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, (αφού $x_1 \in \cap_{i=1}^{n}\{F_i \in \mathcal{F}\}$), άρα επεκτείνεται σε ένα υπερφίλτρο έστω r. Προφανώς $p \subset r$ άρα $p = r$, αδύνατο αφού $A \notin p$. Άρα δεν υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ με $x_1, x_2 \in \bigcap p$.
Επιπλέον αν υπάρχει $A \in \mathcal{B}(X)$ με $x_1 \in A$ και $A \notin p$ τότε, αφού $A \in h(x_1)$, $p \subset h(x_1)$, άρα $p = h(x_1)$.
Άρα η h επί του $S(\mathcal{B}(X))$. □

Πρόταση 5.2. *Έστω X ένας χώρος. Τότε ο X είναι ισχυρά 0-διάστατος αν και μόνο αν βX είναι ισχυρά 0-διάστατος.*

Απόδειξη. Αν X είναι ισχυρά 0-διάστατος και $A, B \in \mathcal{Z}(\beta X)$ και $A \cap B = \emptyset$ τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \beta X \to [0, 1]$ τέτοια ώστε $f(p) = 0$ για $p \in A$ και $f(p) = 1$ για $p \in B$. Θέτουμε

$$E = \{p \in X : f(p) \leq 1/3\} \text{ και } F = \{p \in X : f(p) \geq 2/3\}$$

Αφού $E, F \in \mathcal{Z}(X)$ και $E \cap F = \emptyset$ υπάρχει $C \in \mathcal{B}(X)$ τέτοιο ώστε $E \subset C$ και $F \cap C = \emptyset$. Είναι φανερό ότι $cl_{\beta X}C \in \mathcal{B}(\beta X)$ και ότι $A \subset cl_{\beta X}C$ και $B \cap cl_{\beta X}C = \emptyset$.
(Εναλλακτικά έχουμε ότι βX είναι ομοιομορφικός του $S(\mathcal{B}(X))$ από λήμμα, έτσι ο βX είναι ισχυρά 0-διάστατος από θεώρημα και λήμμα)
Τώρα έστω βX ισχυρά 0-διάστατος και $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ και $A, B = \emptyset$. Τότε $cl_{\beta X}A \cap cl_{\beta X}B = \emptyset$ από λήμμα και από λήμμα του Urysohn υπάρχουν $C, D \in \beta X$ τέτοια ώστε $cl_{\beta X}A \subset C, cl_{\beta X}B \subset D$

και $C \cap D = \emptyset$. Αφού βX είναι ισχυρά 0-διάστατος υπάρχει $E \in \beta X$ ώστε $C \subset E$ και $D \cap E = \emptyset$. Τότε $E \cap X \in \mathcal{B}(X)$, $A \subset E \cap X$ και $B \cap (E \cap X) = \emptyset$. $\square$

Θεώρημα 5.3. *Έστω X πυκνό υποσύνολο του συμπαγούς ολικά μη συνεκτικού χώρου Y. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) Για κάθε $f : X \to K$ με f συνεχής και K συμπαγές και ολικά μη συνεκτικό υπάρχει μια συνεχή συνάρτηση $g : Y \to K$ τέτοια ώστε $f \subset g$.

(ii) Για κάθε συνεχή $f : X \to \{0,1\}$ υπάρχει συνεχής $g : Y \to \{0,1\}$ ώστε $f \subset g$.

(iii) Αν $A, B \in \mathcal{B}(X)$ και $A \cap B = \emptyset$, τότε $cl_Y A \cap cl_Y B = \emptyset$.

(iv) Αν $A, B \in \mathcal{B}(X)$ τότε $cl_Y A \cap cl_Y B = cl_Y(A \cap B)$.

(v) Η οικογένεια $\{A \in \mathcal{B}(X) : p \in cl_Y A\}$ είναι γνήσιο φίλτρο του $\mathcal{B}(X)$ για $p \in Y$.
Επιπλέον ο χώρος $S(\mathcal{B}(X))$ ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες και για κάθε Y που επίσης τις ικανοποιεί υπάρχει ένας (μοναδικός) ομοιομορφισμός k απ' το $S(\mathcal{B}(X))$ στο Y τέτοιος ώστε $k(p) = p$ για $p \in X$.

Απόδειξη.

(i)⇒(ii) Προφανές

(ii)⇒(iii) Έστω $A, B \in \mathcal{B}(X)$ και $A \cap B = \emptyset$. Έστω $f : X \to \{0,1\}$ με $f(p) = 0$ αν $p \in A$ και $f(p) = 1$ αν $p \in X \setminus A$. Από (ii) υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : Y \to \{0,1\}$ τέτοια ώστε $f \subset g$, προφανώς $g(p) = 0$ για $p \in cl_Y A$ και $g(p) = 1$ για $p \in cl_Y B$

(iii)⇒(iv) Είναι φανερό ότι $cl_Y A \cap cl_Y B \subset cl_Y(A \cap B)$. Αν $p \in Y$ και $p \notin cl_Y(A \cap B)$ τότε $Y \setminus cl_Y(A \cap B)$ ανοιχτό, άρα υπάρχει $C \in \mathcal{B}(Y)$, $C \subset Y \setminus cl_Y(A \cap B)$ τέτοιο ώστε $p \in C$ και $A \cap B \cap C = \emptyset$. Τότε $cl_Y(A \cap C) \cap cl_Y(B \cap C) = \emptyset$ και άρα αν $p \in cl_Y A \cap cl_Y B$ τότε $p \in cl_Y A$ και $p \in cl_Y B$ και αφού $p \in C$ έχουμε $p \in cl_Y(A \cap C)$ και $p \in cl_Y(B \cap C)$ όμως $cl_Y(A \cap C) \cap cl_Y(B \cap C) = \emptyset$ άρα $p \notin cl_Y A \cap cl_Y B$.

(iv)⇒(v) Θέτουμε $\tilde{p} = \{A \in \mathcal{B}(X) : p \in cl_Y A\}$ για $p \in Y$. είναι φανερό ότι $p \neq \emptyset$ και $\emptyset \notin \tilde{p}$, και επίσης ότι αν $A, B \in \mathcal{B}(X)$ με $A \in \tilde{p}$ και $A \subset B$,τότε $B \in \tilde{p}$. Από (iv) έχουμε ότι η τομή δύο στοιχείων του $\tilde{p}$ είναι στοιχείο του $\tilde{p}$. Οπότε $\tilde{p}$ είναι ένα γνήσιο φίλτρο του $\mathcal{B}(X)$.

(v)⇒(i) Αν το (i) δεν ισχύει τότε από το προηγούμενο λήμμα υπάρχουν ένας συμπαγής ολικά μη συνεκτικός χώρος K, $p \in Y$, και μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to K$ έτσι ώστε η f να μην περιέχεται σε καμία συνεχή συνάρτηση ορισμένη στο $X \cup \{p\}$. Τότε από () και () υπάρχουν $C, D \in \mathcal{B}(K)$ τέτοια ώστε $C \cap D = \emptyset$ και $p \in cl_Y f^{-1}(C) \cap cl_Y f^{-1}(D)$. Αφού

$$f^{-1}(C), f^{-1}(D) \in \mathcal{B}(X) \text{ και } f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = \emptyset,$$

η οικογένεια $\{A \in \mathcal{B}(X) : p \in cl_Y A\}$ δεν είναι φίλτρο στον $\mathcal{B}(X)$.
Σύμφωνα με λήμμα ο $S(\mathcal{B}(X))$ είναι ένας συμπαγής ολικά μη συνεκτικός χώρος που περιέχει (την ομοιομορφική εικόνα $h[X]$ του) X ως πυκνό υποσύνολο, επιπλέον για $p \in S(\mathcal{B}(X))$ έχουμε από λήμμα

$$\{A \in \mathcal{B}(X) : p \in cl_{S(\mathcal{B}(X))} h[A]\} = p$$

έτσι ο $S(\mathcal{B}(X))$ ικανοποιεί το (v) (για τον χώρο $h[X]$ παρά για τον X) και άρα όλες τις συνθήκες αυτού του θεωρήματος.
Γράφοντας p αντί $h(p)$ για $p \in X$, ας υποθέσουμε ότι Y είναι ένας συμπαγής ολικά μη συνεκτικός χώρος που περιέχει τον X ως πυκνό υποσύνολο και ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος. Έχουμε από το (i) ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $k : S(\mathcal{B}(X)) \to Y$ τέτοια ώστε $k(p) = p$ για $p \in X$ και υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $g : Y \to S(\mathcal{B}(X))$ τέτοια ώστε $g(p) = p$ για $p \in X$. Τότε $g \circ k(p) = p$ για $p \in X$, και επειδή $g \circ k$ συνεχής στον $S(\mathcal{B}(X))$ και X πυκνό στο $S(\mathcal{B}(X))$ έχουμε ότι $g \circ k(p) = p$ για $p \in S(\mathcal{B}(X))$. Επομένως k είναι ένας ομοιομορφισμός από τον $S(\mathcal{B}(X))$ επί του Y

$\square$

5.2 Ομομορφισμοί και συνεχείς απεικονίσεις

Σε αυτήν την παράγραφο, η δυϊκότητα μεταξύ αλγεβρών Boole και συμπαγών ολικά μη συνεκτικών χώρων επεκτείνεται σε δυϊκότητα μεταξύ ομομορφισμών αλγεβρών Boole και συνεχών απεικονίσεων συμπαγών ολικά μη συνεκτικών χώρων. Μαζί με το θεώρημα του κανονικού ισομορφισμού μιας άλγεβρας Boole με το $B(S(\mathcal{B}))$ και το θεώρημα του κανονικού ομοιομορφισμού ενός συμπαγούς ολικά μη συνεκτικού χώρου X με τον $S(\mathcal{B}(X))$ το παρακάτω θεώρημα που εκφράζει αυτά αποτελούν τον πυρήνα της τοπολογικής δυϊκής θεωρίας του Stone.
Η βασική ιδέα για να δούμε την σχέση μεταξύ ομομορφισμών και συνεχών απεικονίσεων είναι ότι, για κάθε ομομορφισμό $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{B}$ αλγεβρών Boole, η αντίστροφη εικόνα $\phi^{-1}[p]$ ενός υπερφίλτρου p στο $\mathcal{B}$ είναι ένα υπερφίλτρο στο $\mathcal{U}$. Αντίστοιχα για κάθε συνεχή $f : X \to Y$ συμπαγών ολικά μη συνεκτικών χώρων, η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[b]$ ενός ανοιχτού-κλειστού υποσυνόλου b του Y είναι ανοιχτό-κλειστό στον X.

Ορισμός 5.6. *(i) Έστω $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{B}$ ένας ομομορφισμός αλγεβρών Boole. Ορίζουμε την συνάρτηση $S(\phi)$ στον $S(\mathcal{B})$ με*

$$S(\phi)(p) = \{a \in \mathcal{U} : \phi(a) \in p\}$$

(ii) Έστω $f : X \to Y$ μια συνεχής συνάρτηση ανάμεσα σε συμπαγείς ολικά μη συνεκτικούς χώρους. Ορίζουμε την συνάρτηση $\mathcal{B}(f)$ στον $\mathcal{B}(Y)$ με

$$\mathcal{B}(f)(B) = f^{-1}(B)$$

Είναι φανερό ότι

$$S(\phi) : S(\mathcal{B}) \to S(\mathcal{U})$$
$$\mathcal{B}(f) : \mathcal{B}(Y) \to \mathcal{B}(X)$$

Πράγματι, έστω $p \in S(\mathcal{B})$ τότε $0 \notin S(\phi(p))$ αφού $\phi(0) = 0 \notin p$, αν $x, y \in S(\phi(p))$ τότε $\phi(x), \phi(y) \in p \Rightarrow \phi(x \wedge y) \in p \Rightarrow x \wedge y \in S(\phi(p))$, αν $x \in S(\phi(p))$ και $y \geq x$ τότε $\phi(y) \geq \phi(x) \Rightarrow \phi(y) \in p \Rightarrow y \in S(\phi(p))$ και τέλος αν $x \in S(\mathcal{U})$ τότε $\phi(x) \in \mathcal{B}$ άρα $\phi(x)$ ή $(\phi(x))' \in p$, οπότε x ή $x' \in S(\phi(p))$. Άρα $S(\phi(p)) \in S(\mathcal{U})$.Το δεύτερο είναι προφανές. Στο επόμενο θεώρημα χρησιμοποιούμε τα παραπάνω όπως επίσης τις h και ψ αντίστοιχα για τον ομοιομορφισμό και τον ισομορφισμό αλγεβρών Boole

$$h : X \to S(\mathcal{B}(X)) \text{ και } \psi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}(S(\mathcal{B}))$$

Θεώρημα 5.4. *Έστω $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{B}$ ένας ομομορφισμός αλγεβρών Boole και $f : X \to Y$ μια συνεχής συνάρτηση μεταξύ συμπαγών ολικά μη συνεκτικών χώρων. Τότε*

(i) $S(\phi)$ είναι συνεχής

(ii) *Αν ϕ είναι μια εμφύτευση, τότε $S(\phi)$ είναι επί συνάρτηση, αν η ϕ είναι επί, τότε η $S(\phi)$ είναι 1-1 και αν $\mathcal{U} = \mathcal{B}$ και ϕ η ταυτοτική, τότε $S(\phi)$ είναι η ταυτοτική.*

(iii) *$\mathcal{B}(f)$ είναι ομομορφισμός μεταξύ αλγεβρών Boole*

(iv) *Αν η f είναι 1-1, τότε $\mathcal{B}(f)$ είναι επί, αν η f είναι επί, τότε η $\mathcal{B}(f)$ είναι 1-1, και αν $X = Y$ και f είναι η ταυτοτική, τότε $\mathcal{B}(f)$ είναι ταυτοτική.*

(v) *Τα διαγράμματα είναι αντιμεταθετικά.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "\psi"] \\ \mathcal{B}(S(\mathcal{U})) \arrow[r, "\mathcal{B}(S(\phi))"] & \mathcal{B}(S(\mathcal{B})) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ S(\mathcal{B}(X) \arrow[r, "S(\mathcal{B}(f))"] & S(\mathcal{B}(Y)) \end{tikzcd}$$

(vi) *Αν επιπλέον $\chi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ είναι ένας ομομορφισμός και $g : Y \to Z$ μια συνεχής συνάρτηση μεταξύ συμπαγών ολικά μη συνεκτικών χώρων, τότε*

$$S(\chi \circ \phi) = S(\phi) \circ S(\chi) \text{ και } \mathcal{B}(g \circ f) = \mathcal{B}(f) \circ \mathcal{B}(g)$$

Απόδειξη. (i) Για κάθε $a \in \mathcal{U}$ έχουμε

$$\begin{aligned}(S(\phi))^{-1}(\psi(a)) =& \{p \in S(\mathcal{B}) : S(\phi)(p) \in \psi(a)\} = \{p \in S(\mathcal{B}) : a \in S(\phi)(p)\} = \\ & \{p \in S(\mathcal{B}) : \phi(a) \in p\} = \psi(\phi(a)) \in \mathcal{B}(S(\mathcal{B}))\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα ισχύει αφού $\psi[\mathcal{U}]$ είναι μια υποβάση για την τοπολογία του $S(\mathcal{U})$.

(ii) Αν ϕ είναι εμφύτευση και $p \in S(\mathcal{U})$ τότε $\phi[p] = \{\phi(a) : a \in p\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Άρα υπάρχει ένα υπερφίλτρο q στην $\mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $\phi[p] \subset q$ και τότε

$$p = \{a \in \mathcal{U} : \phi(a) \in \phi[p]\} \subset \{a \in \mathcal{U} : \phi(a) \in q\} = S(\phi)(q)$$

Αφού $\{a \in \mathcal{U} : \phi(a) \in q\}$ είναι φίλτρο που περιέχει το p, έχουμε $p = S(\phi)(q)$, και άρα $S(\phi)$ είναι μια επί συνάρτηση.
Αν $p, p' \in S(\mathcal{B})$ και $p \neq p'$ υπάρχει $b \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $b \in p$ και $b' \in p'$. Αν ϕ είναι μια επί συνάρτηση υπάρχει $a \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $\phi(a) = b$, και αφού $a \in S(\phi)(p)$ και $a' \in S(\phi)(p')$ έχουμε $S(\phi)(p) \neq S(\phi)(p')$.
Το τελευταίο ισχύει από τον ορισμό του $S(\phi)$.

(iii) Αυτό εύκολα επαληθεύεται

(iv) Έστω f μια 1-1 συνάρτηση και $A \in \mathcal{B}(X)$. Αφού f είναι ομοιομορφισμός του X επί του $f[X]$ υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο G του Y τέτοιο ώστε $G \cap f[X] = f[A]$. Για $p \in A$ υπάρχει $B_p \in \mathcal{B}(Y)$ τέτοιο ώστε $f(p) \in B_p \subset G$. Η οικογένεια $\{B_p : p \in A\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς $f[A]$ και άρα υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $p_k \in A$ για $k \leq n$ τέτοιο ώστε

$$f[A] = \bigcup_{k \leq n} B_{p_k} \cap f[X]$$

Θέτουμε $B = \bigcup_{k \leq n} B_{p_k}$. Τότε $B \in \mathcal{B}(Y)$ και $f[A] = B \cap f[X]$, άρα

$$\mathcal{B}(f)(B) = f^{-1}(B) = A$$

αφού f είναι 1-1.
Έστω f μια επί συνάρτηση και $B \in \mathcal{B}(Y)$ τέτοια ώστε $\mathcal{B}(f)(B) = f^{-1}(B) = \emptyset$. Αφού f είναι μια επί συνάρτηση έχω ότι $B = \emptyset$, και άρα $\mathcal{B}(f)$ είναι 1-1.
Το τελευταίο ισχύει από τον ορισμό του $\mathcal{B}(f)$.

(v) Όπως στην απόδειξη του (i) έχουμε για $a \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{B}(S(\phi))(\psi(a)) = (S(\phi))^{-1}(\psi(a)) = \psi(\phi(a))$$

και από τον ορισμό της συνάρτησης h έχουμε για $p \in X$

$$\begin{aligned} S(\mathcal{B}(f))(h(p)) &= \{B \in \mathcal{B}(Y) : \mathcal{B}(f)(B) \in h(p)\} \\ &= \{B \in \mathcal{B}(Y) : p \in \mathcal{B}(f)(B)\} \\ &= \{B \in \mathcal{B}(Y) : f(p) \in B\} = h(f(p)) \end{aligned}$$

(vi) Έχουμε

$$\begin{aligned} S(\chi \circ \phi)(p) &= (\chi \circ \phi)^{-1}(p) = \phi^{-1}(\chi^{-1}(p)) \\ &= (S(\phi) \circ S(\chi))(p) \end{aligned}$$

για $p \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$, και

$$\begin{aligned} B(\chi \circ \phi)(C) &= (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \\ &= (\mathcal{B}(f) \circ \mathcal{B}(g))(C) \end{aligned}$$

για $C \in \mathcal{B}(Z)$.
Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Πόρισμα 5.1. *Έστω $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ άλγεβρες Boole. $\mathcal{B}$ είναι (ισομορφική με) μια υποάλγεβρα της $\mathcal{C}$ αν και μόνο αν ο $S(\mathcal{C})$ είναι συνεχής εικόνα του $S(\mathcal{B})$.*

5.3 Δυικές ιδιότητες του $\mathcal{B}$ και $S(\mathcal{B})$

Συγκρίνουμε εδώ κάποιες αλγεβρικές ιδιότητες του μιας άλγεβρας Boole και τοπολογικές του δυϊκού της χώρου.

Παράδειγμα 5.1. *(πεπερασμένες άλγεβρες Boole). Για μια τυχαία άλγεβρα Boole $\mathcal{B}$, οι επόμενες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:*
$\mathcal{B}$ είναι πεπερασμένη,
$S(\mathcal{B})$ είναι πεπερασμένος συμπαγής ολικά μη συνεκτικός χώρος,
$S(\mathcal{B})$ είναι πεπερασμένος διακριτός χώρος,
$\mathcal{B}(S(X)) = P(S(X))$,
η συνάρτηση Stone ψ του $\mathcal{B}$ είναι ένας ισομορφισμός του $\mathcal{B}$ επί του $P(X)$ για κάποιο πεπερασμένο σύνολο X.
Θυμίζουμε το γεγονός ότι οι πεπερασμένες άλγεβρες Boole είναι ισόμορφες με δυναμοσύνολα.

Παράδειγμα 5.2. *Ας υποθέσουμε ότι $p_1, \ldots, p_n$ είναι διαφορετικά υπερφίλτρα μιας άλγεβρας Boole $\mathcal{B}$ και F το φίλτρο $p_1 \cap \ldots \cap p_n$. Τότε αν M είναι ένα τυχαίο υποσύνολο του $\{1, \ldots, n\}$, υπάρχει $a \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $a \in p_i \Leftrightarrow i \in M$. Αυτό αποδεικνύεται θέτοντας $X = \{1, \ldots, n\}$ και θεωρώντας την απεικόνιση*
$f : \mathcal{B} \to P(X)$
με $f(a) = \{i \in X : a \in p_i\}$.
Τότε όμοια με την απόδειξη της συνολοθεωρητικής έκδοσης του θεωρήματος του Stone, f είναι ομομορφισμός και 1-1. Έστω $M \subseteq X$. για i, j διαφορετικά στοιχεία του X, p_i, p_j είναι διαφορετικά υπερφίλτρα της $\mathcal{B}$, και έστω $a_{ij} \in p_i \setminus p_j$. Για $i \in M$, έστω
$a_i = \bigcap\{a_{ij} : j \in X \setminus M\}$
έχω $a_i \in p_i$ αλλά $a_i \notin p_j$ για $j \in X \setminus M$. Τότε
$a = \bigvee\{a_i : i \in M\}$
είναι το ζητούμενο.
για μια τοπολογική απόδειξη αυτού, διαλέγουμε για κάθε $1 \leq i \leq n$ μια ανοιχτή-κλειστή γειτονιά u_i τοψ p_i στο $S(\mathcal{B})$ τέτοια ώστε $u_i \cap \{p_1, \ldots, p_n\} = \{p_i\}$. Αυτό γίνεται επειδή $S(\mathcal{B})$ είναι Hausdorff και 0-διάστατος. Αφού $\mathcal{B}(S(\mathcal{B})) = \psi[\mathcal{B}]$($\psi$ η συνάρτηση Stone), έστω $a \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $\psi(a) = \bigcup_{i \in M} u_i$. Αυτό το στοιχείο είναι το ζητούμενο.

Παράδειγμα 5.3. *(αθροίσματα και γινόμενα διατηρούνται από την ψ). Ο μονομορφισμός Stone ψ, ως συνάρτηση από την $\mathcal{B}$ στο $P(S(\mathcal{B}))$, εν γένει δεν διατηρεί άπειρα αθροίσματα και γινόμενα. Ειδικότερα, αν A είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{B}$, $\bigvee A (= \bigvee^{\mathcal{B}} A)$ υπάρχει και*

$$\psi(\bigvee_{\mathcal{B}} A) = \bigvee_{P(S(\mathcal{B}))} \psi[A] = \bigcup \psi[A]$$

τότε $\bigvee A = \bigvee A'$ για κάποιο πεπερασμένο $A' \subset A$. Το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι ανοιχτό-κλειστό άρα συμπαγές υποσύνολο του $S(\mathcal{B})$ και άρα καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία του $\psi[A]$, έστω

$$\psi(\bigvee A) = \psi(a_1) \cup \ldots \cup \psi(a_n),$$

άρα $\bigvee A = a_1 \vee \ldots \vee a_n$.

Ο χώρος του Stone μιας άλγεβρας Boole $\mathcal{B}$ καθορίζεται από την $\mathcal{B}$, και αντίστροφα η τοπολογική έκδοση του θεωρήματος του Stone μας λέει ότι καθορίζει την $\mathcal{B}$ ισομορφικά. Άρα, κάθε αλγεβρική στις άλγεβρες Boole μπορεί να μεταφραστεί σε τοπολογικό σε ένα χώρο συμπαγή ολικά μη συνεκτικό, και αντίστροφα.

Πρόταση 5.3. *Τα άτομα μιας άλγεβρας Boole $\mathcal{B}$ αντιστοιχούν στα μεμονομένα σημεία του $S(\mathcal{B})$. Άρα η $\mathcal{B}$ δεν έχει άτομα αν και μόνο αν ο $S(\mathcal{B})$ δεν έχει μεμονομένα σημεία και η $\mathcal{B}$ είναι ατομική αν και μόνο αν τα μεμονομένα σημεία του $S(\mathcal{B})$ αποτελούν ένα πυκνό υποσύνολο του $S(\mathcal{B})$.*

Απόδειξη. Μια 1-1 f ανάμεσα στο σύνολο $At(\mathcal{B})$ των ατόμων της $\mathcal{B}$ και του συνόλου Is των μεμονομένων σημείων του $S(\mathcal{B})$ επιτυγχάνεται θέτοντας, για $a \in At(\mathcal{B})$,

$$f(a) = x \text{ αν και μόνο αν } \psi(a) = \{x\}$$

Αυτό ισχύει αφού, πρώτον, $a > 0$ στην $\mathcal{B}$ ανν το ανοιχτό κλειστό υποσύνολο $\psi(a)$ του $S(\mathcal{B})$ είναι μη κενό και, δεύτερον, a είναι άτομο της $\mathcal{B}$ ανν $\psi(a)$ δεν είναι ένωση δυο ξένων μη κενών ανοιχτών-κλειστών υποσυνόλων, δηλαδή ανν $\psi(a)$ είναι ένα μονοσύνολο $\{x\}$, όπου x είναι μεμονομένο. □

Η προηγούμενη πρόταση μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: $\mathcal{B}$ είναι ατομική αν και μόνο αν $S(\mathcal{B})$ είναι μια συμπαγοποίηση ενός διακριτού χώρου.

Παράδειγμα 5.4. *(συμπαγοποίηση ενός σημείου διακριτών χώρων). Για κάθε πληθάριθμο κ, υπάρχει ένας συμπαγής ολικά μη συνεκτικός χώρος X πληθικότητας κ: αν κ είναι πεπερασμένος,τότε ο X είναι ένας διακριτός χώρος με κ σημεία. Διαφορετικά, θέτω $X= S(\mathcal{B})$, όπου $\mathcal{B}$ είναι μια πεπερασμένη-συμπεπερασμένη άλγεβρα σε ένα σύνολο I μεγέθους κ. Τότε ο X έχει πληθικότητα κ αφού $S(\mathcal{B}) = \{p\} \cup \{p_i : i \in I\}$, όπου*

$$p = \{a \in \mathcal{B} : \mathcal{B} \setminus a \text{ πεπερασμένο}\}, p_i = \{a \in \mathcal{B} : i \in a\}$$

Η $\mathcal{B}$ είναι ατομική, τα άτομα είναι τα μονοσύνολα $\{i\}, i \in I$, τα p_i είναι τα μεμονομένα σημεία του $S(\mathcal{B})$, και $S(\mathcal{B})$ είναι η συμπαγοποίηση ενός σημείου του διακριτού υποχώρου $\{p_i : i \in I\}$.

Ορισμός 5.7. *Το βάρος ενός τοπολογικού χώρου X, συμβολίζεται με $w(x)$, είναι ο μικρότερος δυνατός πληθάριθμος για μια βάση του X.*

Πρόταση 5.4. *Για κάθε άπειρη άλγεβρα Boole $\mathcal{B}$, $w(S(\mathcal{B})) = |\mathcal{B}|$. Συγκεκριμένα, $S(\mathcal{B})$ είναι μετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν $\mathcal{B}$ είναι το πολύ αριθμήσιμη.*

Απόδειξη. $\psi[\mathcal{B}]$ είναι μια βάση για τον $S(\mathcal{B})$ και άρα $w(S(\mathcal{B})) \leq |\mathcal{B}|$. Αντίστροφα, έστω C μια βάση του $S(\mathcal{B})$ και θα δείξουμε ότι $|\mathcal{B}| \leq |C|$. $\mathcal{B}$, και το $\mathcal{B}(S(\mathcal{B}))$, είναι άπειρο, άρα έτσι θα' ναι και ο C. Για κάθε $a \in \mathcal{B}$ διαλέγουμε $C_a \subseteq C$ τέτοιο ώστε $\psi(a) = \bigcup C_a$, αφού $\psi(a)$ είναι συμπαγές, μπορούμε να υποθέσουμε ότι C_a είναι πεπερασμένα το πλήθος. Η αντιστοίχιση σε κάθε $a \in \mathcal{B}$ του C_a δίνει μια 1-1 απεικόνιση από την $\mathcal{B}$ στο σύνολο πεπερασμένων υποσυνόλων του C, άρα $|\mathcal{B}| \leq |C|$ αφού C άπειρο.
Για το δεύτερο, εφαρμόζουμε το θεώρημα του Urysohn που αναφέρει ότι ένας Hausdorff συμπαγής τοπολογικός χώρος είναι μετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν έχει μια αριθμήσιμη βάση και έχουμε το αποτέλεσμα. □

Από την παραπάνω πρόταση έχουμε $w(x) \leq |X|$ για κάθε απειροδιάστατο συμπαγή ολικά μη συνεκτικό χώρο X. Για X πεπερασμένο, $w(x) = |X|$ αφού ο X είναι διακριτός. Γενικότερα, είναι γνωστό ότι $w(x) \leq |X|$ για κάθε συμπαγή Hausdorff χώρο.
Τα ιδεώδη μιας άλγεβρας Boole αντιστοιχούν στα ανοιχτά σύνολα του χώρου του Stone:

Πρόταση 5.5. *Οι αντιστοιχίες*

$$I \mapsto o(I) = \bigcup \psi[I] \text{ (το ανοιχτό υποσύνολο του } S(\mathcal{B}) \text{ δυϊκό του } I\text{),}$$
$$u \mapsto i(u) = \{a \in A : \psi(a) \subseteq u\} \text{ (το ιδεώδες της } \mathcal{B} \text{ δυϊκό του } u\text{),}$$

είναι 1-1 και διατηρούν την διάταξη ανάμεσα στα ιδεώδη μιας άλγεβρας Boole $\mathcal{B}$ και των ανοιχτών συνόλων του $S(\mathcal{B})$.

Απόδειξη. Έστω Id να είναι το σύνολο των ιδεωδών της $\mathcal{B}$ και U το σύνολο των ανοιχτών υποσυνόλων του $S(\mathcal{B})$. Προφανώς, οι παραπάνω είναι απεικονίσεις που διατηρούν την διάταξη
$o : Id \to U, \quad i : U \to Id$
θα δείξουμε ότι είναι αντιστροφές η μία της άλλης.
Προφανώς, $o(i(u)) \subseteq u$ για κάθε $u \in U$ και $I \subseteq i(o(I))$ για κάθε $I \in Id$. Αντίστροφα, έστω $x \in u$. Επιλέγω ένα $a \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in \psi(a) \subseteq u$. Τότε $a \in i(u)$ και $x \in o(i(u))$ που δείχνει ότι $u \subseteq o(i(u))$. Για να δείξουμε ότι $i(o(I)) \subseteq I$, έστω $a \in i(o(I))$. Τότε $\psi(a) \subseteq \bigcup \psi[I]$ και έχω από συμπάγεια του $\psi(a)$ ότι $a \leq a_1 \vee \ldots \vee a_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in I$ άρα ισχύει ότι $a \in I$. □

Δεδομένου ότι έχω μια απεικόνιση 1-1 που διατηρεί την διάταξη $I \mapsto I' = \{a' : a \in I\}$ ανάμεσα στα ιδεώδη και τα φίλτρα της $\mathcal{B}$ και μια άλλη απεικόνιση 1-1 που αντιστρέφει την διάταξη $u \mapsto S(\mathcal{B}) \setminus u$ ανάμεσα στα ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα του $S(\mathcal{B})$, υπάρχει μια απεικόνιση 1-1 που αντιστρέφει την διάταξη ανάμεσα στα φίλτρα και τα κλειστά υποσύνολα του $S(\mathcal{B})$. Το κλειστό σύνολο που αντιστοιχεί στο φίλτρο F της $\mathcal{B}$ είναι το $\bigcap \psi[F]$ και το φίλτρο που αντιστοιχεί σε ένα κλειστό υποσύνολο C της $S(\mathcal{B})$ είναι το $\{a \in \mathcal{B} : C \subseteq \psi(a)\}$ Ειδικότερα, ένα υπερφίλτρο p της $\mathcal{B}$ αντιστοιχεί στο κλειστό υποσύνολο $\{p\}$ του $S(\mathcal{B})$.