Βελτιστοποίηση Μορφής και Τοπολογίας με τη Μέθοδο των Τεμνόμενων Κυψελών και τη Συνεχή Συζυγή της για Μονο/Διφασικές Τυρβώδεις Ροές, σε Πολυ–επεξεργαστικό Περιβάλλον

Βρυώνης Παναγιώτης–Γιάννης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

Διδακτορική Διατριβή - Εκτενής Περίληψης στην Ελληνική

Αθήνα, 2022

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Βελτιστοποίηση Μορφής και Τοπολογίας με τη Μέθοδο των Τεμνόμενων Κυψελών και τη Συνεχή Συζυγή της για Μονο/Διφασικές Τυρβώδεις Ροές, σε Πολυ–επεξεργαστικό Περιβάλλον

Βρυώνης Παναγιώτης–Γιάννης

Εξεταστική Επιτροπή:

1. Κυριάκος Γιαννάκογλου*(Επιβλέπων),
   Καθηγητής ΕΜΠ, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
2. Κωνσταντίνος Μαθιουδάκης*,
   Καθηγητής ΕΜΠ, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
3. Δημήτριος Μπούρης*,
   Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
4. Σπυρίδων Βουτσινάς,
   Καθηγητής ΕΜΠ, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
5. Ιωάννης Αναγνωστόπουλος,
   Καθηγητής ΕΜΠ, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
6. Κωνσταντίνος Μπελιμπασάκης,
   Καθηγητής ΕΜΠ, Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών
7. Γεώργιος Παπαδάκης,
   Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ, Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών

**Μέλος της Συμβουλευτικής Επιτροπής*

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

2 Η Μέθοδος Τεμνόμενων Κυψελών **3**
2.1 Δημιουργία του Καρτεσιανού Πλέγματος 3
2.2 Δημιουργία Καρτεσιανού Πλέγματος με Τεμνόμενες Κυψέλες 4

3 Εξισώσεις Ροής **7**
3.1 Επίλυση των Εξισώσεων Navier–Stokes για Ασυμπίεστες Μονοφασικές Στρωτές Ροές 7
3.2 Επέκταση της Μεθόδου Τεμνόμενων Κυψελών σε Μονοφασικές Τυρβώδεις Ροές . 8
3.2.1 Τεχνική Συναρτήσεων Τοίχου στη ΜΤΚ 8
3.2.2 Πιστοποίηση σε Επίπεδη Πλάκα 9
3.3 Επέκταση σε Διφασικές Τυρβώδεις Ροές που παρουσιάζουν Σπηλαίωση 11
3.3.1 Μοντελοποίηση Σπηλαίωσης 11
3.3.2 Ενδεικτικό Παράδειγμα Πιστοποίησης 12

4 Διατύπωση του Συζυγούς Προβλήματος **14**
4.1 Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος – Επαύξηση της Αντικειμενικής Συνάρτησης 14
4.2 Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις και Οριακές Συνθήκες 14
4.2.1 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες Τοίχου S_W 15
4.3 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες Εισόδου S_I, Εξόδου S_O και Επ΄άπειρο Όρια S_∞ . . . 15
4.4 Έκφραση των Παραγώγων Ευαισθησίας 16

5 Βελτιστοποίηση Μορφής με τη ΜΤΚ και τη Συνεχή Συζυγή της **17**
5.1 Βελτιστοποίηση Μορφής σε Τυρβώδη, Μονοφασική Ροή εντός Ευθέος Αγωγού . . 17
5.2 Βελτιστοποίηση Μορφής σε Στρωτή, Διφασική Ροή που παρουσιάζει Σπηλαίωση . 19

6 Βελτιστοποίηση Τοπολογίας με τη ΜΤΚ **21**
6.1 Ενδεικτικές Εφαρμογές 22
6.1.1 $2D$ Αγωγός μίας Εισόδου μίας Εξόδου 22
6.1.2 $3D$ Αγωγός Πολλαπλών Εξόδων 23

7 Σύνοψη–Συμπεράσματα **25**

Βιβλιογραφία **26**

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Η διδακτορική διατριβή ασχολείται με την ανάπτυξη ενός ευρείας χρήσης λογισμικού ανάλυσης και σχεδιασμού πρακτικών εφαρμογών Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (ΥΡΔ) που βασίζεται στη Μέθοδο Τεμνόμενων Κυψελών (ΜΤΚ). Η ΜΤΚ είναι μια Μέθοδος Εμβαπτιζόμενων Ορίων (ΜΕΟ), η οποία χρησιμοποιεί προσαρμοσμένα, στο μελετούμενο στερεό σώμα, Καρτεσιανά πλέγματα, για να διακριτοποιήσει το υπολογιστικό χωρίο. Κατά τη διαδικασία της προσαρμογής, εντοπίζονται οι κυψέλες που εμπεριέχουν τμήμα του στερεού σώματος, και αλλάζουν σχήμα αποκόπτωντας οτιδήποτε αντιστοιχεί στο στερεό σώμα, δημιουργώντας έτσι τις τεμνόμενες κυψέλες. Συνεπώς, η επίλυση των εξισώσεων ροής λαμβάνει χώρο σε ένα οριόδετο Καρτεσιανό' πλέγμα, αποτελούμενο από Καρτεσιανές κυψέλες μακριά απο το στερεό σώμα και κυψέλες που έχουν τμηθεί. Το κύριο πλεονέκτημα της ΜΤΚ είναι η δυνατότητα γένεσης πλέγματος ανεξαρτήτως της περιπλοκότητας της μελετούμενης γεωμετρίας. Επιπλέον, λόγω του ότι το τελικό πλέγμα είναι πρακτικά οριόδετο, η ΜΤΚ υπερτερεί των υπολοίπων ΜΕΟ αφού, σε αντίθεση με αυτές, διατηρεί τη συντηρητικότητα των εξισώσεων ροής κατά τη διακριτοποίησή τους. Σημείο αναφοράς αποτελεί το οικείο παράλληλο λογισμικό ΜΤΚ της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β) που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο μιας πρόσφατα ολοκληρωμένης διδακτορικής διατριβής (Samouchos [10]), παρέχοντας δυνατότητες ανάλυσης και σχεδιασμού ασυμπίεστων, στρωτών και μονοφασικών ροών, με τη χρήση της μεθόδου της ψευδοσυμπιεστότητας. Στόχος αυτής της διατριβής είναι η επέκταση του λογισμικού ΜΤΚ για την ανάλυση μονο/διφασικών τυρβωδών ροών, καθώς επίσης και για την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων σχεδιασμού μορφής και τοπολογίας με τη συνεχή συζυγή μέθοδο.

Η επέκταση σε τυρβώδεις ροές πραγματοποιείται μέσω του μοντέλου τύρβης $k-\varepsilon$ των Launder και Spalding [7], το οποίο επιλύεται πεπλεγμένα με τις εξισώσεις μέσης ροής. Η υλοποίηση των συναρτήσεων τοίχου στη ΜΤΚ, για την επιβολή οριακών συνθήκων στα στερεά όρια, παρουσιάζει προκλήσεις λόγω των άτακτων αποστάσεων των βαρύκεντρων των Τεμνόμενων Κυψελών. Η μοντελοποίηση του τυρβώδους οριακού στρώματος με ακρίβεια γίνεται με την εισαγωγή *κεραιών* που εκκινούν από το στερεό όριο και χρησιμοποιούνται για την εφαρμοή του νόμου του τοίχου.

Η ανάλυση διφασικών ροών που παρουσιάζουν φαινόμενα σπηλαίωσης βασίζεται στη θεωρία ομογενούς μείγματος (homogeneous mixture model) και θεωρεί κινηματική και θερμοδυναμική ισορροπία στις διεπιφάνειες των ουσιών που το αποτελούν [8]. Συνεπώς, οι εξισώσεις διατήρησης μάζας και ορμής και το μοντέλο τύρβης δύναται να εκφραστούν ως προς ένα εικονικό ρευστό, του οποίου η πυκνότητα και μοριακή συνεκτικότητα προκύπτει βάσει της τοπικής συγκέντρωσης, μειώνοντας το συνολικό υπολογιστικό κόστος. Η μεταφορά μάζας μεταξύ των φάσεων λόγω σπηλαίωσης μοντελοποιείται με τη χρήση όρων πηγής που αφορούν τις διαδικασίες εξάτμισης και συμπύκνωσης (Kunz cavitation model) [6].

Όσον αφορά την ανάπτυξη εργαλείων βελτιστοποίησης στο πλαίσιο της ΜΤΚ, η διατριβή εστιάζει στη χρήση αιτιοκρατικών μεθόδων και την εφαρμογή τους σε προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής και τοπολογίας. Για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, δηλαδή των παρα-

γώγων της συνάρτησης–στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, γίνεται χρήση της συζυγούς μεθόδου και απαιτεί τη διατύπωση του συζυγούς (δυαδικού) προβλήματος των εξισώσεων που διέπουν διφασικές ροές που παρουσιάζουν φαινόμενα σπήλαιωσης. Με βάση τη *συνεχή* συζυγή μέθοδο [9, 12], επαυξάνεται η συνάρτηση–στόχου με τη συνεχή μορφή των εξισώσεων ροής (ΜΔΕ) και διατυπώνεται το συζυγές πρόβλημα, δηλαδή ένα γραμμικό σύστημα ΜΔΕ και τις συζυγείς οριακές συνθήκες που εξαρτώνται από τις οριακές συνθήκες των εξισώσεων ροής και τη συνάρτηση–στόχου. Η επίλυση του συζυγούς προβλήματος επιτρέπει τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας με κόστος ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού. Ακολούθως, η συζυγής μέθοδος εντάσσεται σε έναν επαναληπτικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης μορφής, που σε συνδυασμό με τη δυνατότητα της ΜΤΚ να φτιάχνει αυτόματα πλέγματα, επιτρέπει μεγάλες μετατοπίσεις στο αρχικό στερεό σώμα και παρακάμπτει την ανάγκη χρήση τεχνικών μετατόπισης του εσωτερικού πλέγματος, το οποίο επιφέρει επιπλέον όφελος στην ακρίβεια υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας. Παράλληλα, γίνεται ανάπτυξη μια μεθόδου βελτιστοποίησης τοπολογίας που βασίζεται στα πλεονεκτήματα της ΜΤΚ και προσφέρει αυξημένη ακρίβεια κοντά στο στερεό σώμα. Στόχος της μεθόδου είναι να προσδιορίσει, με αυστηρά ορισμένα στερεά όρια, το τμήμα του υπολογιστικού χωρίου που πρέπει να στερεοποιηθεί, λαμβάνοντας υπόψη περιορισμούς. Η μέθοδος συγκρίνεται με την κλασική μέθοδο βελτιστοποίησης τοπολογίας που βασίζεται στη τεχνική πορώδους, για να εξαχθούν αποτελέσματα. Για περαιτέρω πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στο αγγλικό (πλήρες) κείμενο.

Η δομή της εκτεταμένης σύνοψης της διατριβής είναι: Στο Κεφάλαιο 2, περιγράφονται τα κύρια στοιχεία της διαδικασίας γένεσης πλέγματος στη μέθοδο ΜΤΚ. Πιο ειδικά, αναφέρεται η δενδρική δομή που δημιουργείται για τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου, οι μηχανισμοί τοπικής πύκνωσης, και η μέθοδος δημιουργίας των Τεμνόμενων Κυψελών. Το Κεφάλαιο 3, αρχικά παρουσιάζει τον τρόπο διακριτοποίησης των εξισώσεων Navier–Stokes που βασίζονται σε μονοφασικές, στρωτές ροές μέσω της μεθόδου ψευδοσυμπιεστότητας. Ακολούθως, παρουσιάζονται οι απαραίτητες τροποποιήσεις για την επέκταση σε διφασικές, τυρβώδεις ροές με φαινόμενα σπηλαίωσης, μαζί με ενδεικτικά αποτελέσματα. Στο Κεφάλαιο 4 παρατίθεται το συζυγές πρόβλημα που προκύπτει από τις εξισώσεις ροής του κεφαλαίου 3. Το Κεφάλαιο 5 παρουσιάζει συνοπτικά αποτελέσματα βελτιστοποίησης μορφής με τη χρήση της ΜΤΚ και της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, ενώ το Κεφάλαιο 6 παρουσιάζει τα κύρια στοιχεία της νέας μεθόδου βελτιστοποίησης τοπολογίας και παραθέτει κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 2: Η Μέθοδος Τεμνόμενων Κυψελών

Η διαδικασία γένεσης πλέγματος με τη ΜΤΚ μπορεί να διαχωριστεί σε 2 κύρια στάδια, τη γένεση ενός Καρτεσιανού πλέγματος και την προσαρμογή του στο μελετούμενο στερεό σώμα με την αποκοπή του στερεού του τμήματος.

2.1 Δημιουργία του Καρτεσιανού Πλέγματος

Δεδομένου ενός $3D$ υπολογιστικού χωρίου με βαρύκεντρο $\boldsymbol{C}_0$ και διαστάσεις $\boldsymbol{d}_0$, και τριγωνικά διακριτοποιημένων στερεών σωμάτων (STL format) που βρίσκονται εντός του υπολογιστικού χωρίου, το πρώτο στάδιο ξεκινά με τη γένεση ενός ομοιόμορφου Καρτεσιανού πλέγματος μέσω μιας αναδρομικής διεργασίας (Σχήμα 2.1). Αρχικά, το υπολογιστικό χωρίο καταλαμβάνεται από μία κυψέλη, τη *ρίζα*, η οποία υπο–διαιρείται ισότροπα μέχρις ότου δημιουργηθούν κυψέλες που δεν ξεπερνούν το προκαθορισμένο, από το χρήστη, ανώτατο όριο όγκου. Ταυτόχρονα, εντοπίζεται το σύνολο των τριγώνων του διακριτοποιημένου στερεού ορίου που εμπεριέχουν οι κυψέλες, χωρίς να γίνεται κάποια τομή. Η συνεχής διαίρεση του όγκου των υπο–κυψελών προκαλεί τη μείωση του αριθμού των εμπεριεχομένων τριγώνων μειώνοντας έτσι τις αναγκαίες συγκρίσεις για τον εντοπισμό τους. Ακολούθως, οι κυψέλες που συνεχίζουν να έχουν τμήμα του στερεού ορίου, δηλαδή μη–μηδενικό σύνολο τριγώνων, υποδιαιρούνται μέχρι να φτάσουν (ή να μην ξεπεράσουν) το προκαθορισμένο κατώτατο όριο όγκου, ενώ οι υπόλοιπες κυψέλες οφείλουν να υποδιαιρεθούν, αν και μόνο αν συνορεύουν με κυψέλη που έχει υποδιαιρεθεί 2 φορές περισσότερες από αυτήν, δημιουργώντας έτσι πύκνωση κοντά στο στερεό όριο (Σχήμα 2.2α′).

Λόγω της αναδρομικής δημιουργίας του Καρτεσιανού πλέγματος, είναι δυνατή η χρήση ενός συστήματος αρίθμησης (i, j, k) (για $3D$) [10] που βασίζεται στον εντοπισμό της κάθε κυψέλης στο δένδρο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των όλων των γεωμετρικών τους στοιχείων. Αρχικά, η ρίζα λαμβάνει την αρίθμηση $(1, 1, 1)$. Κάθε απόγονος λαμβάνει δείκτες που προκύπτουν από την τοπική, σχετική τους θέση (i_l, j_l, k_l) , $i_l, j_l, k_l = 0, 1$, και ακολουθεί τον εξής κανόνα

$$(i_c, j_c, k_c) = (2i_p + i_l, 2j_p + j_l, 2k_p + k_l) \tag{2.1}$$

όπου οι δείκτες c, p, l αντιστοιχούν σε απόγονο, γονέα, και την τοπική αρίθμηση. Εφόσον η αρίθμηση κάθε απογόνου βασίζεται στον πολλαπλασιασμό των δεικτών επί 2, ο γονέας κάθε κυψέλης και το σύνολο των υποδιαιρέσεων που έχουν εφαρμοστεί από τη ρίζα L, μπορούν να υπολογιστούν μέσω των σχέσεων

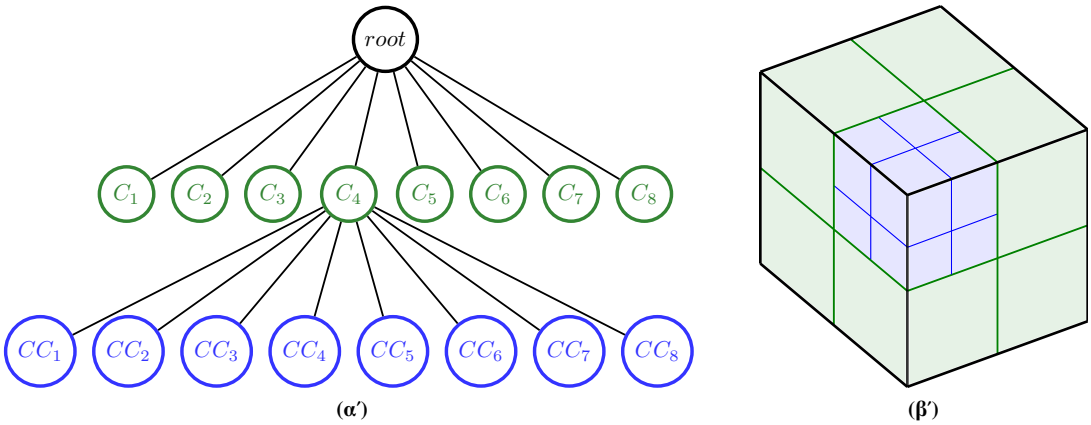
$$(i_p, j_p, k_p) = \left(\left\lfloor \frac{i_c}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{j_c}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k_c}{2} \right\rfloor \right) \tag{2.2}$$

$$L = \lfloor \log_2 (i) \rfloor = \lfloor \log_2 (j) \rfloor = \lfloor \log_2 (k) \rfloor \tag{2.3}$$

με $\lfloor x \rfloor$ να συμβολίζει το μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό μικρότερο ή ίσο του αριθμού x. Με βάση τα παραπάνω, γεωμετρικά στοιχεία, όπως το βαρύκεντρο $\mathbf{x}_c$ και οι διαστάσεις $\Delta\mathbf{x}$, κάθε Καρτεσιανής κυψέλης μπορούν να υπολογιστούν αποθηκεύοντας μόνο τον μοναδικό τους δείκτη, δηλαδή

$$\Delta\mathbf{x} = \frac{1}{2^L}\boldsymbol{d}_0 \qquad \mathbf{x}_c = \boldsymbol{C}_0 - \frac{3}{2}\boldsymbol{d}_0 + \begin{bmatrix} i+\frac{1}{2} \\ j+\frac{1}{2} \\ k+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \circ \Delta\mathbf{x} \tag{2.4}$$

όπου $\boldsymbol{C}_0, \boldsymbol{d}_0$ αναφέρονται στο βαρύκεντρο και τις διαστάσεις της ρίζας και το σύμβολο $\circ$ εννοεί κατά στοιχεία πολλαπλασιασμό (Hadamard product). Στο Σχήμα 2.2α′ παρατηρείται ότι η

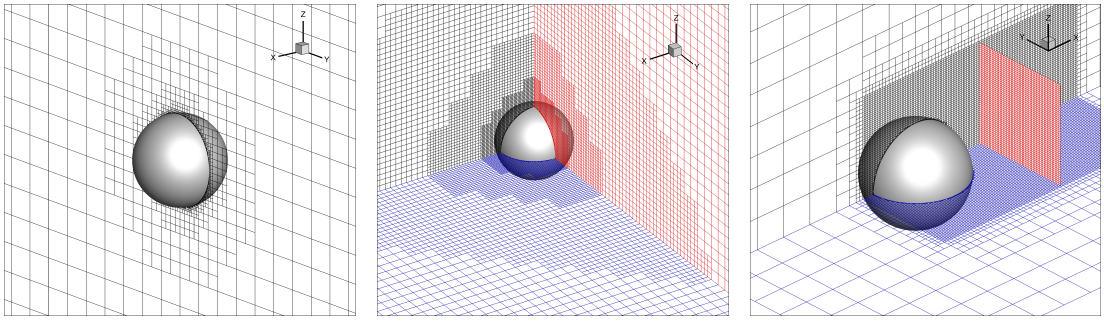


Σχήμα 2.1: Δενδρική δομή *Octree* - (α′) Γραφική και (β′) οπτική αναπαράσταση των αναδρομικών υποδιαιρέσεων. Η αρχική κυψέλη (*ρίζα*, μαύρο), υποδιαιρείται σε 8 υπο–κυψέλες (*απόγονους*, πράσινο) και ένα από αυτά C_4 ξανα–υποδιαιρείται για να δημιουργήσει τους απογόνους του (γαλάζιο).

πύκνωση περιορίζεται σε μία μικρή περιοχή γύρω απο το στερεό σώμα και είναι ανεπαρκής σε περιπτώσεις που εμφανίζονται μεγάλες χωρικές παράγωγοι των ροϊκών μεγεθών. Για τον σκοπό, εφαρμόζονται 2 επιπλέον μηχανισμοί πύκνωσης του πλέγματος. Συγκεκριμένα, ο πρώτος αφορά την εισαγωγή πύκνωσης με βάσης την απόσταση των κυψελών από το στερεό όριο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2β′, ενώ ο δεύτερος αφορά την εφαρμογή πύκνωσης σε προκαθορισμένα τμήματα του υπολογιστικού χωρίου, Σχήμα 2.2γ′.

2.2 Δημιουργία Καρτεσιανού Πλέγματος με Τεμνόμενες Κυψέλες

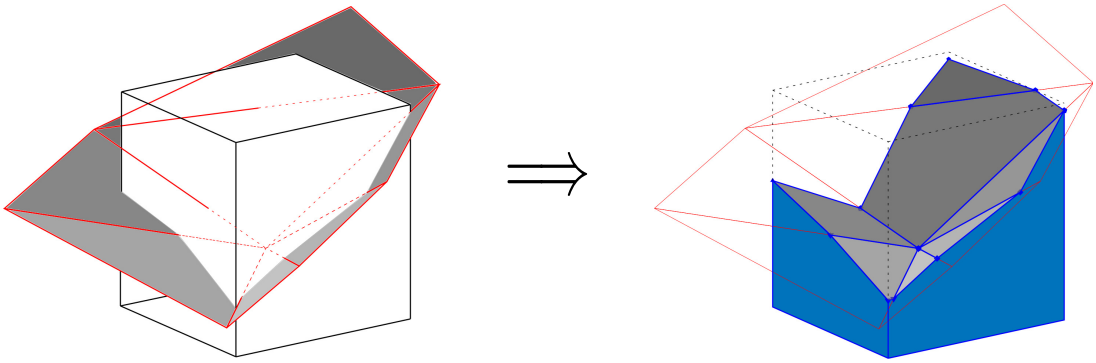
Με τον τερματισμό της προαναφερθείσας διεργασίας παράγεται ένα Καρτεσιανό πλέγμα και εντοπίζονται οι κυψέλες που εμπεριέχουν τμήμα του στερεού σώματος σε μορφή ανεξάρτητων τριγώνων. Η γένεση του Καρτεσιανού πλέγματος με τεμνόμενες κυψέλες απαιτεί τον υπολογισμό των σημείων τομής των Καρτεσιανών κυψελών με τα εμπεριεχόμενα τρίγωνα, τον εντοπισμό του ρευστού τους τμήματος για τη δημιουργία των Τεμνόμενων Κυψελών, τον εντοπισμό των Καρτεσιανών κυψελών που αντιστοιχούν στο ρευστό τμήμα του υπολογιστικού χωρίου, και τον χειρισμό μικρών Τεμνόμενων Κυψελών που συνορεύουν με μεγαλύτερες. Για τον υπολογισμό των τομών των



(α′) (β′) (γ′)

Σχήμα 2.2: Μηχανισμοί εισαγωγής επιπλέον πύκνωσης στη MTK - Καρτεσιανό πλέγμα γύρω από $3D$ σφαίρα (α′) χωρίς την προσθήκη επιπλεόν μηχανισμών πύκνωση, και με τη προσθήκη πύκνωσης (α′) βάση της απόστασης από το στερεό όριο, και (γ′) σε προκαθορισμένο τμήμα του υπολογιστικού χωρίου.

Καρτεσιανών κυψελών με τα εμπεριέχοντα τρίγωνα γίνεται εφαρμογή του αλγόριθμου Sutherland–Hodgman για κάθε τρίγωνο και υπολογίζεται η επιφάνεια του στερεού ορίου που βρίσκεται εντός των κυψελών, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.3. Κατά διαδικασία αυτή, οι ακμές της κυψέλης δρούν ως όρια τομής (*clippers*) και αποκόπτουν το τμήμα του τριγώνου που βρίσκεται εκτός της κυψέλης, περιγράφοντας έτσι τα στερεά όρια της κυψέλης. Αφού εφαρμοστεί σε κάθε τρίγωνο, υπολογίζονται τα μοναδικά σημεία τομής και χωρίζεται η κυψέλη σε ρευστή και στερεά περιοχή. Ακολούθως, συνενώνονται κατάλληλα τα σημεία τομής με τις κορυφές των Καρτεσιανών κυψελών για να παράξουν όγκους ελέγχου με αυθαίρετο αριθμό εδρών, τις τεμνόμενες κυψέλες. Ο



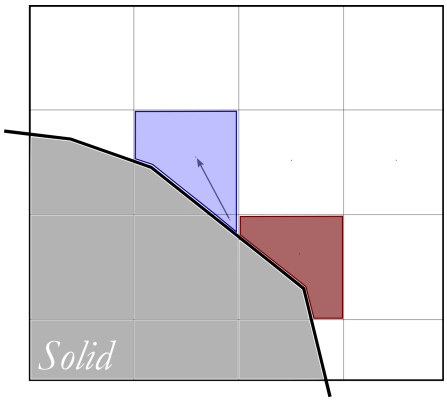
(α′) (β′)

Σχήμα 2.3: Εφαρμογή του αλγόριθμου Sutherland–Hodgman για τη δημιουργία των πολυγώνων στα στερεά όρια - (α′) Η Καρτεσιανή κυψέλη διασταυρώνεται από 7 τρίγωνα, με τις διακεκομένες ακμές να υποδεικνύουν ότι βρίσκονται εντός της κυψέλης. (β′) Με την εφαρμογή του αλγορίθμου για κάθε τρίγωνο, παράγονται 7 συνορεύοντα πολύγωνα που περιορίζονται εντός της Καρτεσιανής κυψέλης. Κάθε πολύγωνο αντιστοιχεί στο τμήμα της επιφάνειας του στερεού ορίου που βρίσκεται εμβαπτισμένο στην κυψέλη.

εντοπισμός του ρευστού μέρους του υπολογιστικού χωρίου γίνεται με τη σταδιακή επίσκεψη όλων

των κυψελών. Αρχικά, όλες οι τεμνόμενες κυψέλες διαμορφώνουν ένα ΄μέτωπο΄ της ρευστής περιοχής. Στη συνέχεια, σημαδεύονται οι γειτονικές Καρτεσιανές κυψέλες που μοιράζονται κοινή ρευστή κορυφή και αποτελούν το ανανεωμένο ΄ρευστό΄ μέτωπο. Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου σημαδευτούν όλες οι κυψέλες ή το ρευστό μέτωπο εξαλειφθεί. Κυψέλες που δεν έχουν σημαδευτεί, θεωρούνται στερεές και απορρίπτονται. Η διαδικασία περιγράφεται πολύ συνοπτικά και ο αναγνώστης παραπέμπεται στο αγγλικό (πλήρες) κείμενο ή στη διατριβή του Samouchos [10].

Ακολούθως, χρησιμοποιείται η τεχνική συνένωσης κυψελών για τον χειρισμό της εμφάνισης μικρών Τεμνόμενων Κυψελών (*small cell problem*). Μια τεμνόμενη κυψέλη θεωρείται μικρή όταν συνορεύει με μια κυψέλη που είναι 20 φορές μεγαλύτερή της κατ΄ όγκο. Έτσι, εντοπίζονται οι μικρές τεμνόμενες κυψέλες και ορίζονται για συνένωση με μια γειτονική. Η επιλογή της κυψέλης που θα λάβει τη μικρή κυψέλη βασίζεται στην αποφυγή δημιουργίας απλωμένων υπερ–κυψελών. Η συνένωση γίνεται με τον συνδυασμό των γεωμετρικών στοιχείων της κάθε κυψέλης, την απόρριψη της εσωτερικής έδρας, και την επαναρίθμηση της υπερ–κυψέλης. Η διαδικασία συνένωσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Διδιάστατη απεικόνιση της τεχνικής συνένωσης κυψελών - Η μικρή κυψέλη συνενώνεται με τη γειτονική της για να δημιουργήσουν μια υπερ–κυψέλη (γαλάζιο), η οποία τις αντικαθιστά. Η υπερ–κυψέλη θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση της ροής ως κλασική τεμνόμενη κυψέλη (καφέ).

Με το πέρας της πιο πάνω διεργασίας, δημιουργείται μια ανανεωμένη δομή δεδομένων, λογικής μη–δομημένων πλεγμάτων (face–based data structure), που αποτελείται αποκλειστικά από τις κυψέλες που βρίσκονται στο τελευταίο στάδιο της δενδρικής δομής, τα *φύλλα*, για την επακόλουθη επίλυση της ροής. Το υπολογιστικό πλέγμα κατακερματίζεται για παράλληλους υπολογισμούς μέσω καμπύλης Hilbert και αποστέλλεται σε επεξεργαστές με τη χρήση του προτύπου MPI.

Κεφάλαιο 3: Εξισώσεις Ροής

Το κεφάλαιο αυτό αφορά την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής που αφορούν μονο/διφασικές, ασυμπίεστες, στρωτές και τυρβώδεις ροές με τη χρήση της μεθόδου της ψευδοσυμπιεστότητας. Αρχικά παρουσιάζονται οι εξισώσεις ροής για στρωτές ροές, μαζί με συνοπτικά χαρακτηριστικά διακριτοποίησης και, ακολούθως, παρατίθενται οι εξισώσεις ροής για τυρβώδεις, διφασικές ροές.

3.1 Επίλυση των Εξισώσεων Navier–Stokes για Ασυμπίεστες Μονοφασικές Στρωτές Ροές

Κατά τη μέθοδο της ψευδοσυμπιεστότητας [4] τροποποιείται η εξίσωση διατήρησης μάζας των εξισώσεων ροής, εισάγοντας έναν ψευδοχρονικό, τεχνητό όρο που συσχετίζει την πυκνότητα με την πίεση του ρευστού, ώστε να μπορεί να επιλυθεί το σύστημα εξισώσεων με τη χρήση τεχνικών χρονοπροσπέλασης. Το τροποποιημένο σύστημα ΜΔΕ που περιγράφει τη διατήρηση μάζας/όγκου και ορμής μπορεί να γραφτεί σε μητρωική μορφή ως

$$\mathscr{R}_i := \Gamma_{in} \frac{\partial U_n}{\partial \tau} + \frac{\partial f_{ij}^I}{\partial x_j} - \frac{\partial f_{ij}^V}{\partial x_j} = 0 \tag{3.1}$$

όπου $\boldsymbol{U} = \left[\breve{p}\ u_1\ u_2\ u_3\right]^T$ είναι το διάνυσμα αγνώστων ροϊκών μεταβλητών και εμπεριέχει τη στατική πίεση διαιρεμένη με την πυκνότητα $\breve{p} = \frac{p}{\varrho}$ και το διάνυσμα της ταχύτητας $\boldsymbol{u}$. $\boldsymbol{\Gamma}$ είναι το μητρώο προσταθεροποίησης και $\boldsymbol{f}^I, \boldsymbol{f}^V$ τα διανύσματα ατριβών και συνεκτικών όρων που παρατίθενται στο πλήρες κείμενο.

Με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων η εξίσωση (3.1) ολοκληρώνεται για κάθε όγκο ελέγχου P και αφού γίνει χρήση του θεωρήματος Gauss απαιτεί τον υπολογισμό των διανυσμάτων ατριβών και συνεκτικών όρων στις έδρες κάθε όγκο ελέγχου, δηλαδή

$$\int_{\Omega}^{P} \Gamma_{in} \frac{\partial U_n}{\partial \tau} d\Omega + \int_{S(\Omega^P)} \left(f_{ij}^I - f_{ij}^V\right) \hat{n}_j dS = 0 \tag{3.2}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{n}}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα.

Οι ατριβείς όροι σε κάθε έδρα f_{ij}^I προσεγγίζονται με ακρίβεια 2ης τάξης με τη χρήση του σχήματος διακριτοποίησης MUSCL και του επιλύτη του Roe. Οι συνεκτικοί όροι f_{ij}^V προσεγγίζονται λαμβάνοντας υπόψη τις χωρικές παραγώγους των ροϊκών μεγεθών στα βαρύκεντρα των συνορευοντων κυψελών, που υπολογίζονται από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (Weighted Least Squares). Το διακριτοποιημένο σύστημα εξισώσεων επιλύεται επαναληπτικά με τη μέθοδο Gauss–Seidel. Για περαιτέρω πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στο αγγλικό κείμενο.

3.2 Επέκταση της Μεθόδου Τεμνόμενων Κυψελών σε Μονοφασικές Τυρβώδεις Ροές

Η επέκταση σε τυρβώδεις ροές γίνεται με την προσθήκη του μοντέλου τύρβης $k-\varepsilon$ και την επίλυση 2 επιπλέον ΜΔΕ που αφορούν τη μεταφορά της τυρβώδους κινητικής ενέργειας k και του ρυθμού καταστροφής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας ε, για τον υπολογισμό της τυρβώδους συνεκτικότητας $\mu_t = C_\mu \varrho \frac{k^2}{\varepsilon}$. Το μοντέλο παρουσιάζεται στη συμπιεστή του μορφή για να διευκολύνει τη διατύπωση σε διφασικές ροές που παρουσιάζουν μη–σταθερή πυκνότητα. Το σύστημα εξισώσεων, που επιλύεται πεπλεγμένα, γράφεται σε μητρωική μορφή ως

$$\mathscr{R}_i := \Gamma_{in}\frac{\partial U_n}{\partial \tau} + \frac{\partial f_{ij}^I}{\partial x_j} - \frac{\partial f_{ij}^V}{\partial x_j} - S_i = 0 \tag{3.3}$$

με

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \left[\boldsymbol{\Gamma}\right]^{NS} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}_j^I = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_j^{I,NS} \\ \varrho k u_j \\ \varrho \varepsilon u_j \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}_j^V = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_j^{V,NS} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \end{bmatrix}, \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathscr{P} - \varrho\varepsilon \\ (C_{1\varepsilon}\mathscr{P} - C_{2\varepsilon}\varrho\varepsilon)\frac{\varepsilon}{k} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

όπου $\boldsymbol{U} = \left[\breve{p}\ u_1\ u_2\ u_3\ \varrho k\ \varrho\varepsilon\right]^T$, $\boldsymbol{\Gamma}^{NS}, \boldsymbol{f}_j^{I,NS}, \boldsymbol{f}_j^{V,NS}$ είναι τα αντίστοιχα μητρώα και διανύσματα που παρατίθενται στην Εξίσωση (3.1), $C_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $C_{2\varepsilon} = 1.92$ και $\mathscr{P} = \mu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_j^i\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Με βάση την υπόθεση Boussineq, ο τανυστής των τάσεων υπολογίζεται ως $\breve{\tau}_{ij} = \frac{\mu+\mu_t}{\varrho}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$.

3.2.1 Τεχνική Συναρτήσεων Τοίχου στη ΜΤΚ

Οι συναρτήσεις τοίχου χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της ταχύτητας τριβής u_τ στο στερεό όριο ώστε να επιβληθούν οριακές συνθήκες για τις τυρβώδεις μεταβλητές και για να υπολογισθεί το διάνυσμα των τάσεων στο στερεό όριο. Η κυριότερη δυσκολία εφαρμογής στη ΜΤΚ είναι οι άτακτες αποστάσεις των βαρύκεντρων των Τεμνόμενων Κυψελών από το στερεό όριο που επιδρούν σημαντικά στην ακρίβεια υπολογισμού της u_τ. Για το λόγο αυτό, ακολουθείται μια τροποποιημένη μέθοδος υλοποίησης που έχει ως στόχο την κανονικοποίηση των αποστάσεων ούτως ώστε να αυξηθεί η ακρίβεια μοντελοποίησης του τυρβώδους οριακού στρώματος. Αυτό γίνεται με την εισαγωγή ισαπεχόντων σημείων (*forcing points*) από το στερεό όριο εντός του χωρίου. Η θέση τους υπολογίζεται ως

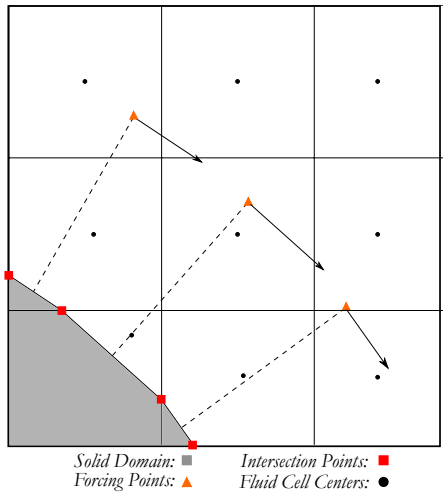
$$\mathbf{x}^F = \mathbf{x}^f - d^F\hat{\mathbf{n}}^f \tag{3.5}$$

όπου $\mathbf{x}^f, \hat{\mathbf{n}}^f$ είναι η θέση του βαρύκεντρου της στερεάς έδρας και το εξερχόμενο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμά της. Η απόσταση $d^F = \sqrt{d} \times \min(\Delta\mathbf{x})$ ορίζεται ανάλογα με τις διαστάσεις της ανάλυσης, ούτως ώστε το σημείο να είναι εκτός της τεμνόμενης κυψέλης, δηλαδή $d = 2$ για $2D$ και $d = 3$ για $3D$. Ακολούθως, υπολογίζεται το διάνυσμα της ταχύτητας στο σημείο με τη χρήση

αναπτύγματος Taylor, και προβάλλεται κατά την εφαπτόμενη, στο στερεό όριο, κατεύθυνση. Το Σχήμα 3.1 παρουσιάζει σχηματικά τη διαδικασία εισαγωγής σημείων. Η εφαπτομενική ταχύτητα u_t χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ταχύτητας τριβής u_τ με την επαναληπτική επίλυση της σχέσης που περιγράφει το νόμο του τοίχου [1]

$$\begin{aligned}\mathrm{u}^+\left(\mathrm{y}^+\right) = B + c_1 \log\left(\left(\mathrm{y}^+ + a_1\right)^2 + b_1^2\right) - c_2 \log\left(\left(\mathrm{y}^+ + a_2\right)^2 + b_2^2\right) \\ - c_3 \arctan\left(\frac{b_1}{\mathrm{y}^+ + a_1}\right) - c_4 \arctan\left(\frac{b_2}{\mathrm{y}^+ + a_2}\right)\end{aligned} \tag{3.6}$$

όπου οι σταθερές $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4$ παρατίθενται στο πλήρες κείμενο. Αφού υπολογιστεί η u_τ, είναι δυνατή η επιβολή οριακών συνθηκών και ο υπολογισμός του διανύσματος των τάσεων στο στερεό όριο.

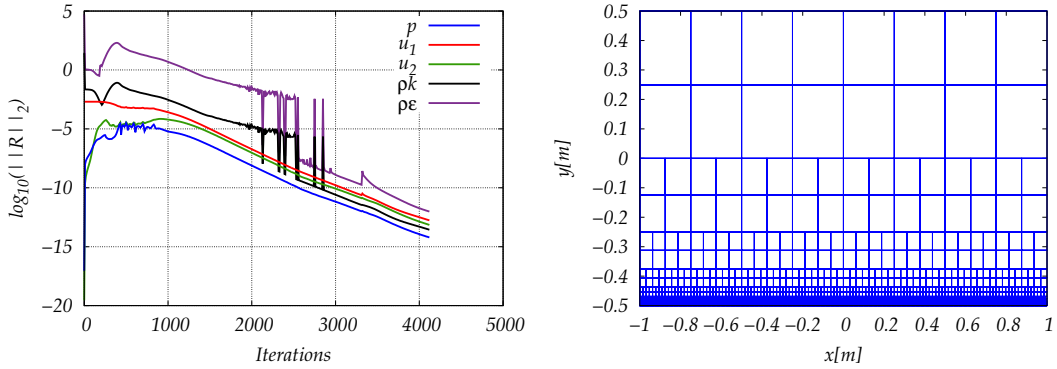


Σχήμα 3.1: Δημιουργία κεραίων για την εφαρμογή συναρτήσεων τοίχου - Σχηματική απεικόνιση των ισαπέχοντων σημείων που εισάγονται σε σταθερές αποστάσεις για την επίλυση του νόμου του τοίχου. Το διάνυσμα της ταχύτητας προεκβάλλεται από τον πλησιέστερο Καρτεσιανή κυψέλη και προβάλλεται στην εφαπτομενική διεύθυνση.

3.2.2 Πιστοποίηση σε Επίπεδη Πλάκα

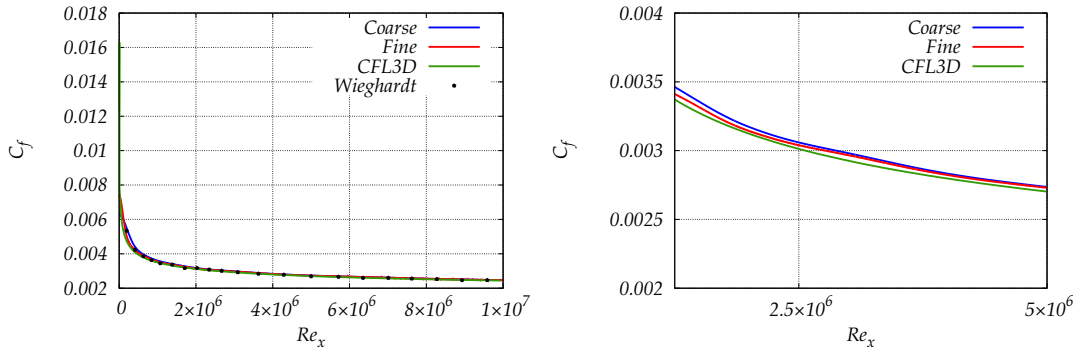
Η επίλυση μέσω της διαδικασίας εισαγωγής κεραιών συγκρίνεται με πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα σε ασυμπίεστη, τυρβώδη ροή επίπεδη πλάκα με αριθμό Reynolds $Re_L = 5 \times 10^6$, για να εξαχθούν αποτελέσματα ως προς την ακρίβεια και τις υπολογιστικές απαιτήσεις. Η ανάλυση έγινε σε ένα αραιό πλέγμα με $25K$ κυψέλες και ένα πυκνότερο με $50K$. Στο Σχήμα 3.2α′ παρουσιάζεται η πορεία σύγκλισης των εξισώσεων ροής, ενώ στο Σχήμα 3.2β′ παρουσιάζεται το πυκνό πλέγμα της ΜΤΚ.

Το Σχήμα 3.3α′ δείχνει τη σύγκριση του συντελεστή τριβής που υπολογίστηκε σε κάθε πλέγμα με τη ΜΤΚ μαζί με τα πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.3β′ παρατηρείται πολύ καλή ταύτιση των αποτελεσμάτων.



(α′) (β′)

Σχήμα 3.2: Τυρβώδης ροή σε επίπεδη πλάκα, $Re_L = 5 \times 10^6$ - (α′) Πορεία σύγκλισης των εξισώσεων ροής και (β′) το πλέγμα των $50K$ κυψελών που χρησιμοποιήθηκε.



(α′) (β′)

Σχήμα 3.3: Τυρβώδης ροή σε επίπεδη πλάκα, $Re_L = 5 \times 10^6$ - (α′) Σύγκριση του συντελεστή τριβής με αριθμητικά και πειραματικά αποτελέσματα. (β′) Λεπτομέρεια του συντελεστή τριβής που δείχνει τις διαφορές μεταξύ της ΜΤΚ και των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

3.3 Επέκταση σε Διφασικές Τυρβώδεις Ροές που παρουσιάζουν Σπηλαίωση

Η επέκταση σε διφασικές ροές γίνεται με το μοντέλο μείγματος (mixture model) κατά το οποίο εισάγεται ένα ομοιογενές μείγμα, με ιδιότητες που προκύπτουν ανάλογα με τη συγκέντρωση των ουσιών που το αποτελούν, δηλαδή

$$\rho_m = a_l \varrho_l + (1 - a_l)\varrho_v \tag{3.7}$$

$$\mu_m = a_l \mu_l + (1 - a_l)\mu_v \tag{3.8}$$

όπου το a αντιστοιχεί στη κατ' όγκο (κ.ό.) περιεκτικότητα και οι δείκτες $m,\ l,\ v$ αναφέρονται στο μείγμα, την υγρή και αέρια (ατμός) φάση .

Οι εξισώσεις διατήρησης όγκου, ορμής και οι εξισώσεις μεταφοράς τυρβωδών μεταβλητών εκφράζονται ως προς το μείγμα και γίνεται η προσθήκη της εξίσωσης μεταφοράς της υγρής φάσης. Επιπλέον, εισάγεται το μοντέλο σπηλαίωσης που περιγράφει τη μεταφορά μάζας μεταξύ της υγρής και αέριας φάσης. Το σύστημα των 7 ΜΔΕ γράφεται ως

$$\mathscr{R}_i := \Gamma_{in}\frac{\partial U_n}{\partial \tau} + \frac{\partial f_{ij}^I}{\partial x_j} - \frac{\partial f_{ij}^V}{\partial x_j} - S_i = 0 \tag{3.9}$$

με

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\varrho_m \beta^2}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_m & 0 & 0 & u_1\Delta\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_m & 0 & u_2\Delta\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_m & u_3\Delta\varrho & 0 & 0 \\ \left(\frac{a_l}{\varrho_m \beta^2}\right) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}_j^I = \begin{bmatrix} u_j \\ \rho_m u_1\, u_j + \delta_j^1\, p \\ \rho_m u_2\, u_j + \delta_j^2\, p \\ \rho_m u_3\, u_j + \delta_j^3\, p \\ a_l u_j \\ \varrho_m k u_j \\ \varrho_m \varepsilon u_j \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}_j^V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \\ 0 \\ \left(\mu_m + \frac{\mu_{m,t}}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j} \\ \left(\mu_m + \frac{\mu_{m,t}}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \end{bmatrix}, \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \dot{m}\left(\frac{1}{\varrho_l} - \frac{1}{\varrho_v}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{m}\frac{1}{\varrho_l} \\ \mathscr{P} - \varrho_m \varepsilon \\ (C_{1\varepsilon}\mathscr{P} - C_{2\varepsilon}\varrho_m \varepsilon)\,\frac{\varepsilon}{k} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

όπου $\boldsymbol{U} = \left[p\ u_1\ u_2\ u_3\ a_l,\ \varrho_m k,\ \varrho_m \varepsilon\right]^T$, $\boldsymbol{S}$ είναι το διάνυσμα όρων πηγής και $\dot{m}$ ο όρος μεταφοράς μάζας του μοντέλου σπηλαίωσης. Ο τανυστής των τάσεων υπολογίζεται ως $\tau_{kj} = (\mu_m + \mu_{m,t})\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell}\right)$, ενώ η τυρβώδης συνεκτικότητα του μοντέλου τύρβης αναφέρεται πλέον στο μείγμα, δηλαδή $\mu_{m,t} = C_\mu \rho_m k \frac{k}{\varepsilon}$.

3.3.1 Μοντελοποίηση Σπηλαίωσης

Το μοντέλο σπηλαίωσης που χρησιμοποιείται προτάθηκε από τους Kunz *et al.* [6] και παρουσιάζει ευρεία χρήση στη βιβλιογραφία. Μοντελοποιεί τις διεργασίες της συμπύκνωσης και εξάτμισης για τη αριθμητική μελέτη φαινομένων σπηλαίωσης και βασίζεται σε εμπειρικές σταθερές που περιγράφουν την χρονική ένταση (αυθορμητισμό) των διεργασιών. Η διαδικασία εξάτμισης εκκινεί όταν η τοπική στατική πίεση μειωθεί πέραν της πίεσης κορεσμού p_v. Αριθμητικά, οι διεργασίες

περιγράφονται από

$$\dot{m} = \underbrace{\frac{C_{dest}\varrho_v}{\frac{1}{2}\varrho_l U_\infty^2 t_\infty}\, a_l\, \min(0, p - p_v)}_{\text{εξάτμιση } (\dot{m}^-)} + \underbrace{\frac{C_{prod}\varrho_v}{t_\infty}\, {a_l}^2\,(1 - a_l)}_{\text{συμπύκνωση } (\dot{m}^+)} \tag{3.11}$$

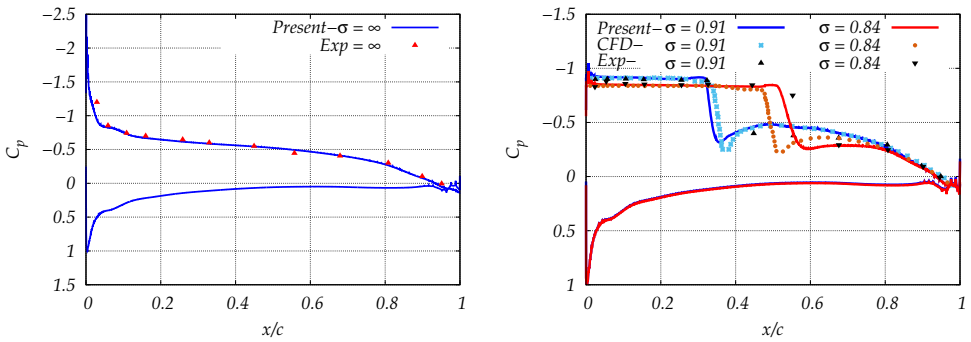
Οι εμπειρικές χρονικές σταθερές C_{dest}, C_{prod} αδιαστατοποιούνται με βάση τη μέση ροή, $t_\infty = \frac{L}{U_\infty}$, L είναι το χαρακτηριστικό μήκος και U_∞ η ταχύτητα αναφοράς.

Στη μελέτη ροών που παρουσιάζουν σπηλαίωση γίνεται χρήση του αδιάστατου αριθμού σπηλαίωσης σ, ο οποίος εκφράζει την τάση του υγρού να προκαλέσει σπηλαίωση. Στα αριθμητικά παραδείγματα, ο αριθμός αυτός είναι προκαθορισμένος και χρησιμοποιείται για να καθορίσει την 'τεχνητή' πίεση κορεσμού του υγρού, σε σχέση με την πίεση αναφοράς p_∞, μέσω της σχέσης

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{1}{2}\varrho_l U_\infty^2} \tag{3.12}$$

3.3.2 Ενδεικτικό Παράδειγμα Πιστοποίησης

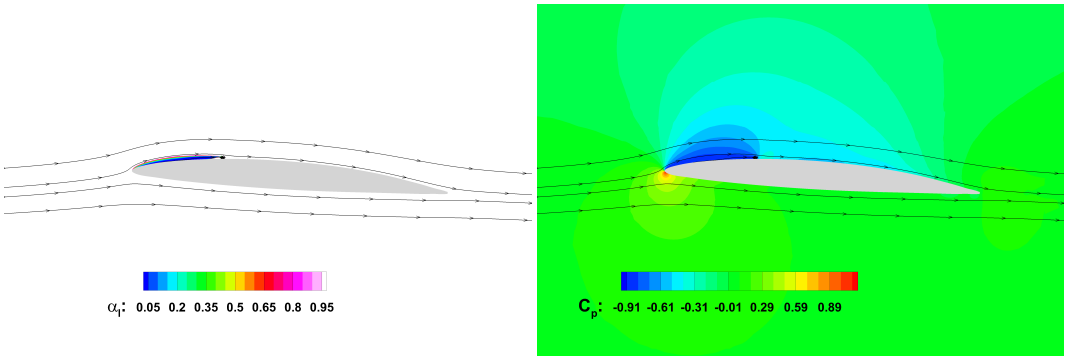
Για την πιστοποιήση του διφασικού επιλύτη MTK που εμπεριέχει και φαινόμενα σπηλαίωσης παρουσιάζεται σύγκριση με πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα σε τυρβώδη ροή γύρω από την υδροτομή NACA 66(MOD) [3] σε αριθμό Reynolds $Re_c = 2 \times 10^6$ για 3 διαφορετικούς αριθμούς σπηλαίωσης. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4β' όπου παρουσιάζονται οι περιπτώσεις εμφάνισης φυσαλίδας σπηλαίωσης, η πίεση σταθεροποιείται και ισούται με την πίεση κορεσμού. Επιπλέον, μειώνοντας τον αριθμό σπηλαίωσης παρατηρείται ότι η φυσαλίδα μεγαλώνει σε μήκος. Τα παραπάνω μπορούν να διαπιστωθούν και από τα Σχήματα 3.5α'-3.6β' όπου παρουσιάζονται



(α') (β')

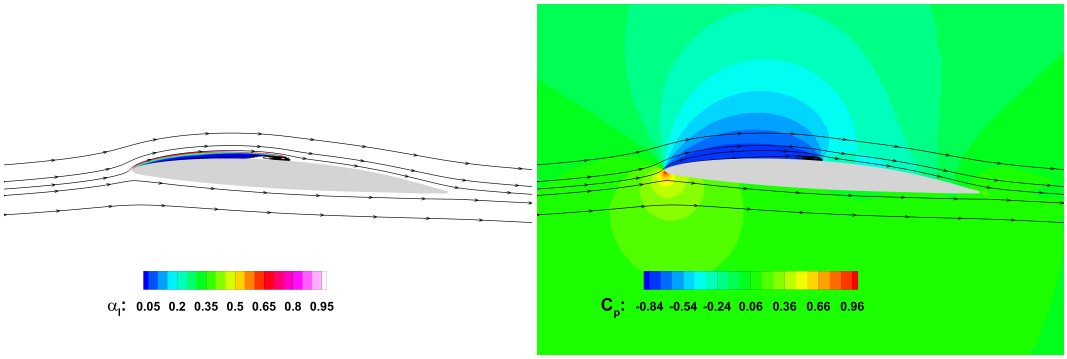
Σχήμα 3.4: Τυρβώδης ροή με σπηλαίωση γύρω από την υδροτομή NACA 66(MOD), $Re_c = 2\times10^6$, $\alpha_\infty = 4°$, $\sigma = 0.91$ - Σύγκριση του συντελεστή πίεσης, που υπολογίστηκε με τη χρήση της MTK, με αριθμητικά και πειραματικά αποτελέσματα για 3 διαφορετικούς αριθμούς σπηλαίωσης. Η παρουσία επίπεδης περιοχής στη πλευρά υποπίεσης της υδροτομής υποδηλώνει την ύπαρξη φυσαλίδας σπηλαίωσης.

τα πεδία τις υγρής φάσης και πίεσης για τους δύο αριθμούς σπηλαίωσης.



(α′) (β′)

Σχήμα 3.5: Τυρβώδης ροή με σπηλαίωση γύρω από την υδροτομή NACA 66(MOD), $Re_c = 2 \times 10^6$, $\alpha_\infty = 4^\circ$, $\sigma = 0.91$ - Πεδίο της (α′) κ.ό. περιεκτικότητας της υγρής φάσης και (β′) της πίεσης.



(α′) (β′)

Σχήμα 3.6: Τυρβώδης ροή με σπηλαίωση γύρω από την υδροτομή NACA 66(MOD), $Re_c = 2 \times 10^6$, $\alpha_\infty = 4^\circ$, $\sigma = 0.84$ - Πεδίο της (α′) κ.ό. περιεκτικότητας της υγρής φάσης και (β′) της πίεσης.

Κεφάλαιο 4: Διατύπωση του Συζυγούς Προβλήματος

Το Κεφάλαιο 4 παρουσιάζει τη μαθηματική διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό των παραγώγων της συνάρτησης–στόχου J ως προς τις N μεταβλητές σχεδιασμού $\boldsymbol{b}$, ή αλλιώς τις παραγώγους ευαισθησίας, με στόχο τη χρήση τους με αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης για το σχεδιασμό αερο/υδροδυναμικών εφαρμογών. Στη γενική περίπτωση η J αποτελείται από επιφανειακά και χωρικά ολοκληρώματα,

$$J = \int_{S^J} j_S dS + \int_{\Omega} j_\Omega d\Omega \tag{4.1}$$

4.1 Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος – Επαύξηση της Αντικειμενικής Συνάρτησης

Στη συνεχή διατύπωση της συζυγούς μεθόδου, η J επαυξάνεται με το χωρικό ολοκλήρωμα των εξισώσεων ροής σε συνεχή γραφή (ΜΔΕ) πολλαπλασιασμένο με τις συζυγείς μεταβλητές $\boldsymbol{\psi}$ για να κατασκευάσουν την επαυξημένη συνάρτηση (Lagrangian)

$$L = J + \int_{\Omega} \psi_n \mathscr{R}_n d\Omega \tag{4.2}$$

Η ικανοποίηση των εξισώσεων ροής προυποθέτει ότι $\boldsymbol{\mathscr{R}} = \mathbf{0}$, και, συνεπώς, $L = J$ ενώ οι παράγωγοι ευαισθησίας μπορούν να υπολογιστούν με βάση τις παραγώγους της L αφού $\frac{\delta L}{\delta b_i} = \frac{\delta J}{\delta b_i}$.

Η ανάπτυξη που ακολουθείται βασίζεται στον μηδενισμό των πολλαπλασιαστών των υπολογιστικά ακριβών ροϊκών παραγώγων ως προς $\boldsymbol{b}$ για την εξαγωγή μιας υπολογιστικά φθηνής έκφρασης παραγώγων ευαισθησίας. Η διαδικασία μηδενισμού παρέχει τις συζυγείς πεδιακές εξισώσεις και οριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιηθούν. Η συζυγής διατύπωση βασίζεται στη λήψη της έκφρασης παραγώγων ευαισθησίας που αποτελείται αποκλειστικά από επιφανειακά ολοκληρώματα (SI approach) [5], ενώ δεν είναι απαραίτητη η χρήση τεχνικών υπολογισμού της επίδρασης μετατόπισης πλέγματος, αφού αυτό τροποποιείται μόνο στις τεμνόμενες κυψέλες.

4.2 Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις και Οριακές Συνθήκες

Οι εξισώσεις ροής που αποτελούν σημείο έναρξης της συζυγούς διατύπωσης, αφορούν διφασικές, τυρβώδεις ροές και εμπεριέχουν το μοντέλο σπηλαίωσης, δηλαδή το σύστημα εξισώσεων (3.9). Με την ανάπτυξη της Εξίσωσης (4.2), η οποία παρατίθεται εκτενείς στο πλήρες κείμενο, λαμβάνεται το γραμμικό σύστημα ΜΔΕ που προκύπτουν από τη διαδικασία μηδενισμού των προαναφερθέντων πολλαπλασιαστών

$$\Gamma^T_{ni} \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_j} A_{nmj} - \frac{\partial h^{\psi}_{nj}}{\partial x_j} - S^{\psi}_n - Z^{\psi}_n + \frac{\partial j_\Omega}{\partial U_n} = 0 \tag{4.3}$$

με

$$\boldsymbol{h}_j^\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1j}^\psi - 2\mu_{m,t}\mathcal{B}_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell}\delta_j^1\right) \\ \tau_{2j}^\psi - 2\mu_{m,t}\mathcal{B}_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_2} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell}\delta_j^2\right) \\ \tau_{3j}^\psi - 2\mu_{m,t}\mathcal{B}_2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_3} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell}\delta_j^3\right) \\ -\frac{\Delta\varrho}{\rho_m}\left(k\tilde{\mu}^{(k)}\frac{\partial\psi_6}{\partial x_j} + \varepsilon\tilde{\mu}^{(\varepsilon)}\frac{\partial\psi_7}{\partial x_j}\right) \\ \frac{\tilde{\mu}^{(k)}}{\varrho_m}\frac{\partial\psi_6}{\partial x_j} \\ \frac{\tilde{\mu}^{(\varepsilon)}}{\varrho_m}\frac{\partial\psi_7}{\partial x_j} \end{bmatrix}, \boldsymbol{S}^\psi = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1\mathcal{H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{B}_1\mathcal{G} \\ \frac{2}{\varrho_m k}\mathscr{P}\psi_6 + \frac{\varrho_m\varepsilon}{(\varrho_m k)^2}\left(C_{1\varepsilon}\mathscr{P} + C_{2\varepsilon}\varrho_m\varepsilon\right)\psi_7 \\ -\frac{1}{\varrho_m\varepsilon}\left(\mathscr{P} + \varrho_m\varepsilon\right)\psi_6 - 2C_{2\varepsilon}\frac{\varrho_m\varepsilon}{\varrho_m k}\psi_7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Z}^\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta\mu\left(\frac{\tau_{kj}}{\mu_m+\mu_{m,t}}\frac{\partial\psi_{k+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial\psi_6}{\partial x_j}\frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{\partial\psi_7}{\partial x_j}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right) \\ 2\frac{\mu_{m,t}}{\varrho_m k}\left(\frac{\tau_{kj}}{\mu_m+\mu_{m,t}}\frac{\partial\psi_{k+1}}{\partial x_j} + \frac{1}{\sigma_k}\frac{\partial\psi_6}{\partial x_j}\frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\psi_7}{\partial x_j}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right) \\ -\frac{\mu_{m,t}}{\varrho_m\varepsilon}\left(\frac{\tau_{kj}}{\mu_m+\mu_{m,t}}\frac{\partial\psi_{k+1}}{\partial x_j} + \frac{1}{\sigma_k}\frac{\partial\psi_6}{\partial x_j}\frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\psi_7}{\partial x_j}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right) \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις εμπεριέχουν ψευδοχρονικούς όρους, όρους μεταφοράς $-\frac{\partial\psi_n}{\partial x_j}A_{nmj}$, όρους διάχυσης $\frac{\partial h_{nj}^\psi}{\partial x_j}$, όρους πηγής που εξαρτώνται από τις συζυγείς μεταβλητές $\boldsymbol{S}^\psi = \boldsymbol{S}^\psi(\boldsymbol{\psi})$ και τις χωρικές τους παραγώγους $\boldsymbol{Z}^\psi = \boldsymbol{Z}^\psi\left(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)$, ενώ επίσης εμφανίζονται και συνεισφορές σε περίπτωση που η συνάρτηση–στόχος εμπεριέχει χωρικά ολοκληρώματα $\frac{\partial j_\Omega}{\partial U_n}$.

Αντίστοιχα, εμφανίζονται επιφανειακά ολοκληρώματα, των οποίων απαιτείται ο μηδενισμός των πολλαπλασιαστών τους, και ορίζουν τις συζυγείς οριακές συνθήκες. Αυτές εξαρτώνται από τις οριακές συνθήκες που επιβάλλονται κατά την επίλυση της ροής, αφού πιθανό να οδηγούν σε ταυτοτικό μηδενισμό ροϊκών παραγώγων ως προς $\boldsymbol{b}$.

4.2.1 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες Τοίχου S_W

Οι συζυγείς οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στα στερεό όρια προκύπτουν ως

$$\psi_{k+1}\hat{n}_k = -\frac{\partial j_S}{\partial p} \tag{4.5}$$

$$\psi_{k+1}\hat{t}_k = \frac{\partial j_S}{\partial\left(\tau_{ij}\hat{n}_i\hat{t}_j\right)} \tag{4.6}$$

$$\psi_{k+1}\hat{z}_k = \frac{\partial j_S}{\partial\left(\tau_{ij}\hat{n}_i\hat{z}_j\right)} \tag{4.7}$$

$$\psi_6 = 0 \tag{4.8}$$

$$\psi_7 = 0 \tag{4.9}$$

4.3 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες Εισόδου S_I, Εξόδου S_O και Επ΄άπειρο Όρια S_∞

Η επιβολή των συζυγών οριακών στα υπόλοιπα όρια γίνεται με την ικανοποίηση του ακόλουθου συστήματος εξισώσεων

$$\psi_i\left(A_{imk}\hat{n}_k Q_{mn}\right) + (1-\kappa)\,h_{nk}^\psi\hat{n}_k + \frac{\partial j_S}{\partial U_n} = 0, \qquad n = 1, ..., 7 \tag{4.10}$$

όπου $\boldsymbol{Q} = \frac{\partial\boldsymbol{U}^{BC}}{\partial\boldsymbol{U}}$ και εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες που επιβάλλονται για την επίλυση των εξισώσεων ροής $\boldsymbol{U}^{BC}$.

Για τα όρια εισόδου S_I, η μορφή του μητρώου $\boldsymbol{Q}$ και η τιμή του κ συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα, ανάλογα με το αν προσδιορίζεται το μέτρο της ταχύτητας S_I^u ή η ολική πιέση $S_I^{P_t}$.

	S_I^u	$S_I^{P_t}$
κ	1	0
$\boldsymbol{Q}$	$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{u_j u_j} \begin{bmatrix} u_j u_j & -u_1^S & -u_2^S & -u_3^S & 0 & -2k^S & -4\varepsilon^S \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T$

Πίνακας 4.1: Συζυγείς οριακές συνθήκες εισόδου για διαφορετικές οριακές συνθήκες εξισώσεων ροής

Επιπλέον, είναι απαραίτητη η επιβολή δύο ακόμη συνθηκών που αφορούν τις συζυγείς τυρβώδεις μεταβλητές, $\psi_6 = 0, \psi_7 = 0$.

Στα όρια εξόδου S_O, η μορφή του μητρώου $\boldsymbol{Q}$ γίνεται $\boldsymbol{Q} = \text{diag}\,(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, ενώ το $\kappa = 0$.

Στα επ΄άπειρο όρια S_∞, επιβάλλονται οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet σε όλες τις μεταβλητές των εξισώσεων ροής με αποτέλεσμα να μην απαιτείται η επιβολή συγκερκιμένων οριακών συνθηκών, αλλά να προκύπτουν από το εσωτερικό του πεδίου.

4.4 Έκφραση των Παραγώγων Ευαισθησίας

Με την ικανοποίηση των συζυγών πεδιακών εξισώσεων είναι δυνατός ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας που εξαρτάται από ροϊκά $\boldsymbol{U}$ και συζυγή $\boldsymbol{\psi}$ μεγέθη, και γεωμετρικές παραγώγους των γεωμετρικών μεγεθών των εδρών που βρίσκονται αποκλειστικά στο στερεό όριο

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta J}{\delta b_i} = & \int_{S_W} \left[\psi_{k+1} p - \psi_n f_{nk}^I + \psi_{j+1}\tau_{jk}\right] \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_i} dS \\
& + \int_{S_W} \left[-\psi_n A_{npj} \hat{n}_j \frac{\partial U_p}{\partial x_l} + \psi_{k+1} \hat{n}_j \frac{\partial \tau_{kj}}{\partial x_l} - \mathcal{T}_j^{\psi SS} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right] \frac{\delta x_l}{\delta b_i} dS \\
& - \int_{S_W} \frac{\mu_m}{\rho_m} \left(\frac{\partial \psi_6}{\partial x_j} \hat{n}_j \frac{\partial \varrho_m k}{\partial x_l} + \frac{\partial \psi_7}{\partial x_j} \hat{n}_j \frac{\partial \varrho_m \varepsilon}{\partial x_l}\right) \frac{\delta x_l}{\delta b_i} dS \\
& + \int_{S_W} \tau_{kj} \hat{n}_j \left(\Psi_n \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_i} + \Psi_t \frac{\delta \hat{t}_k}{\delta b_i} + \Psi_z \frac{\delta \hat{z}_k}{\delta b_i}\right) dS - \int_{S_W} \mathcal{B}_{WF} u_i^F \mathbb{M}_{ij} \mathbb{Q}_{jk} \frac{\delta \hat{n}_k}{\delta b_i} dS \\
& - \int_{S_W} \mathcal{B}_{WF} \left(\hat{t}_k + u_i^F \mathbb{M}_{ij} \mathbb{P}_{jk}\right) \frac{\partial u_k^F}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} dS \\
& - \int_{S_W} \mathrm{u}_\tau \Psi_t \left[\mathrm{u}_\tau \Delta\varrho + 2\mathrm{u}_\tau \frac{\partial \mathrm{u}_\tau}{\partial \nu_m} \left(\Delta\mu - \nu_m \Delta\varrho\right)\right] \frac{\partial a_l^F}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} dS \\
& + \int_{S_W} \left(\psi_n \mathscr{R}_n \hat{n}_k + j_\Omega \hat{n}_k + \frac{\partial j_S}{\partial x_k}\right) \frac{\delta x_k}{\delta b_i} dS + \int_{S_W} \frac{\partial j_S}{\partial \hat{n}_m} \frac{\delta(\hat{n}_m dS)}{\delta b_i}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Τα 2 πρώτα επιφανειακά ολοκληρώματα προκύπτουν από την παραγώγιση των εξισώσεων μέσης ροής, ενώ το επόμενο από το μοντέλο τύρβης. Τα επόμενα 4 αφορούν την παραγώγιση των τροποποιημένων συναρτήσεων τοίχου που εφαρμόζονται στη ΜΤΚ και η ανάπτυξή τους παρουσιάζεται στο πλήρες κείμενο, ενώ τα τελευταία 2 αφορούν όρους που προκύπτουν ανάλογα με τη μελετούμενη συνάρτηση–στόχο.

Κεφάλαιο 5: Βελτιστοποίηση Μορφής με τη ΜΤΚ και τη Συνεχή Συζυγή της

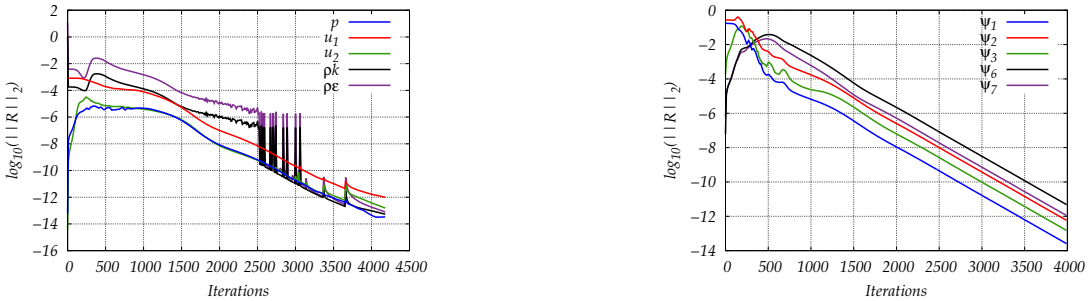
Το κεφάλαιο αυτό επικεντρώνεται σε εφαρμογές της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής μονοφασικών και διφασικών ροών. Προαπαίτηση αυτού είναι η συσχέτιση του πλέγματος της ΜΤΚ με το μελετούμενο στερεό σώμα ώστε να μπορούν να υπολογιστούν οι γεωμετρικές παράγωγοι με ακρίβεια, δηλαδή οι παράγωγοι των γεωμετρικών ποσοτήτων στα στερεά όρια ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, βλ. πλήρες κείμενο. Στις εφαρμογές, τα στερεά σώματα παραμετροποιούνται με καμπύλες Bézier και οι συντεταγμένες μερικών σημείων ελέγχου ορίζουν τις μεταβλητές σχεδιασμού $\boldsymbol{b}$.

5.1 Βελτιστοποίηση Μορφής σε Τυρβώδη, Μονοφασική Ροή εντός Ευθέος Αγωγού

Η πρώτη ενδεικτική εφαρμογή αφορά τη βελτιστοποίηση μορφής ενός αρχικά ευθέος αγωγού σε τυρβώδη, μονοφασική ροή, για την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης $J_{P_t} = -\int_{S_I} p_t u_k \hat{n}_k \, dS - \int_{S_O} p_t u_k \hat{n}_k \, dS$. Η εφαρμογή έχει ως στόχο να πιστοποιήσει την ακρίβεια υπολογισμού των παραγώγων ευασθησίας, την υλοποίηση των συζυγών συναρτήσεων τοίχου, καθώς και να αναδείξει τη δυνατότητα της ΜΤΚ να υλοποιήσει μεγάλες μετατοπίσεις κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης.

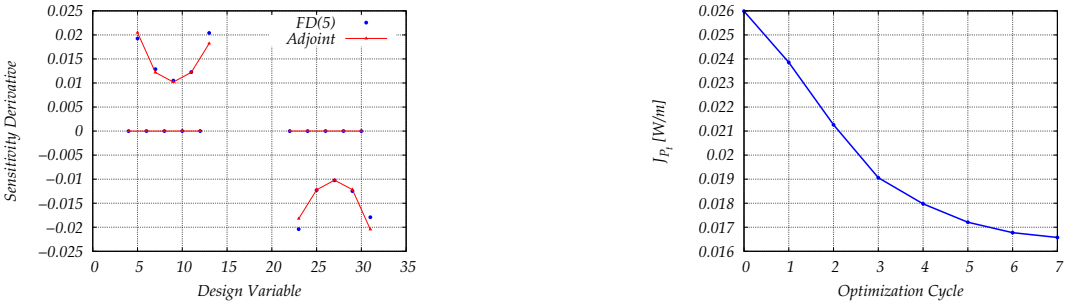
Η τυρβώδης ροή εντός του αγωγού έχει $Re_W = 1 \times 10^5$, και επιβάλλεται το μέτρο $(1\frac{m}{s})$ και η διεύθυνση της ταχύτητας $(\theta_{XY} = 0°)$, η τυρβώδης ένταση (1%) και ο λόγος τυρβώδους συνεκτικότητας $(\frac{\mu_t}{\mu} = 5)$ στην είσοδο. Επιπλέον, επιβάλλεται η στατική πίεση $(0Pa)$ στην έξοδο του αγωγού. Για τη βελτιστοποίηση κατασκευάζεται ένα πλέγμα που αρχικά αποτελείται από περίπου $60K$ κυψέλες και αντιστοιχεί σε μέγιστο $\mathrm{y}^+ \approx 27$, βάσει των καθορισμένων συνθηκών ροής. Ο αγωγός παραμετροποιείται με τη χρήση 2 συμμετρικά τοποθετημένων καμπυλών Bézier. Ο συνολικός αριθμός μεταβλητών σχεδιασμού που επιτρέπεται να μετατοπιστούν είναι 20, ενώ κάποιες άλλες διατηρούνται σταθερές ώστε να μην είναι δυνατή η μεταβολή του πλάτους του αγωγού στην είσοδο και στην έξοδο του αγωγού.

Στα Σχήματα 5.1α′, 5.1β′ παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκλισης των εξισώσεων ροής (αριστερά) και συζυγών εξισώσεων (δεξιά) κατά το πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης όπου παρατηρείται μείωση του υπολοίπου κατά τουλάχιστον 10 τάξεις μεγέθους. Στο Σχήμα 5.2α′ συγκρίνονται οι παράγωγοι ευαισθησίας, που υπολογίστηκαν με τη συζυγή μέθοδο, με αυτές που υπολογίστηκαν με τη χρήση πεπερασμένων διαφορών για το κάτω και πάνω τοίχωμα. Στο Σχήμα 5.2β′, παρατίθεται η πορεία της συνάρτησης J_{P_t} κατά τη βελτιστοποίηση μορφής, όπου παρουσιάζεται μείωση της τάξης του 40% στο βελτιστοποιημένο σχήμα. Τέλος, το Σχήμα 5.3 δείχνει τη σχετική μεταβολή (χωρίς κλίμακα) του πλέγματος Τεμνόμενων Κυψελών που δημιουργήθηκε στο αρχικό και τελικό σώμα. Επιπλέον, φαίνεται ευδιάκριτα η εμφάνιση νέων κυψελών και η προσαρμογή της πύκνωσης λόγω της μετακίνησης του στερεού ορίου.



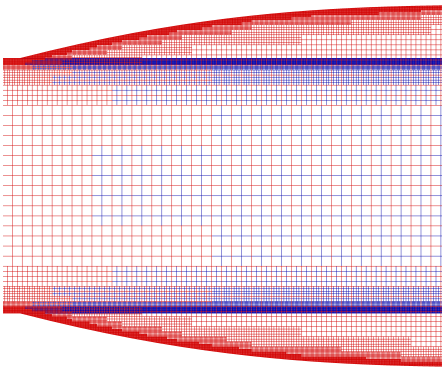
(α′) (β′)

Σχήμα 5.1: Βελτιστοποίηση μορφής αγωγού σε τυρβώδη ροή, $Re_W = 1 \times 10^5$ - Σύγκλιση των (α′) εξισώσεων ροής κκαι (β′) συζυγών εξισώσεων. Η διάρκεια προσομοίωσης διαρκεί περίπου 200 λεπτά σε 24 AMD EPYC 7401 (2.0 Ghz) επεξεργαστές.



(α′) (β′)

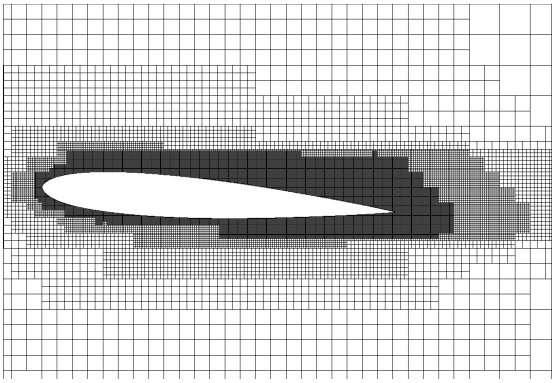
Σχήμα 5.2: Βελτιστοποίηση μορφής αγωγού σε τυρβώδη ροή, $Re_W = 1 \times 10^5$ - (α′) Σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίστηκαν με τη χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου και των πεπερασμένων διαφορών. (β′) Εξέλιξη της συνάρτησης–στόχου J_{P_t} κατά τη βελτιστοποίηση.



Σχήμα 5.3: Βελτιστοποίηση μορφής αγωγού σε τυρβώδη ροή, $Re_W = 1 \times 10^5$ - Λεπτομερής απεικόνιση του τελικού πλέγματος που υπερτίθεται στο αρχικό και δείχνει τη δυνατότητα της ΜΤΚ να προσαρμόζει το πλέγμα στο εκάστοτε στερεό όριο.

5.2 Βελτιστοποίηση Μορφής σε Στρωτή, Διφασική Ροή που παρουσιάζει Σπηλαίωση

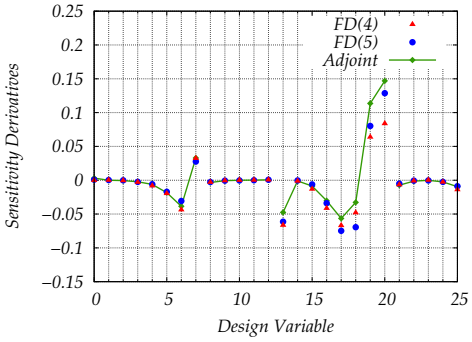
Δεύτερη ενδεικτική εφαρμογή αποτελεί η βελτιστοποίηση μορφής της υδροτομής NACA 0012 σε στρωτή, διφασική ροή που παρουσιάζει σπηλαίωση με στόχο τη μείωση της αέριας φάσης $J_V = \frac{1}{2}\int_\Omega (1-\alpha_l)^2\, d\Omega$, και άρα του φαινομένου της σπηλαίωσης. Η εφαρμογή έχει ως στόχο να αναδείξει τις δυνατότητες της εφαρμογής σε τέτοιου τύπου ροές και, ταυτόχρονα, να εξάγει συμπεράσματα που αφορούν άλλα μεγέθη ενδιαφέροντος. Η ακρίβεια ανάλυσης με τη χρήση της MTK, της διφασικής ροής με Reynolds $Re_c = 500$, επ΄άπειρο γωνίας $\alpha_\infty = 4°$, και αριθμού σπηλαίωσης $\sigma = 0.5$ πιστοποιείται στο πλήρες κείμενο μέσω σύγκρισης με αριθμητικά αποτελέσματα. Στο Σχήμα 5.4 παρουσιάζεται το υπολογιστικό πλέγμα Τεμνόμενων Κυψελών που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση.



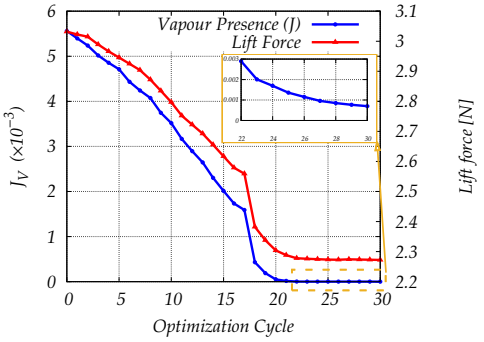
Σχήμα 5.4: Στρωτή, διφασική ροή που παρουσιάζει σπηλαίωση γύρω από την υδροτομή NACA 0012, $Re_c = 500$, $\alpha_\infty = 4°$, $\sigma = 0.5$ - Το υπολογιστικό πλέγμα $\sim 30K$ κυψελών με επιπλέον πύκνωση στο σημείο εμφάνισης της φυσαλίδας σπηλαίωσης.

Η βελτιστοποίηση μορφής γίνεται με την παραμετροποίηση της υδροτομής με καμπύλες Bézier, που καθορίζουν τις συνολικά 25 μεταβλητές σχεδιασμού. Το Σχήμα 5.5α΄ παρουσιάζει τη σύγκριση των παραγώγων ευασθησίας που υπολογίστηκαν με τη συζυγή μέθοδο και αυτές που υπολογίστηκαν με πεπερασμένες διαφορές (για 2 διαφορετικά βήματα). Το Σχήμα 5.5β΄ δείχνει την εξέλιξη της συνάρτησης–στόχου, που ποσοτικοποιεί την παρουσία της αέριας φάσης, ενώ ταυτόχρονα παραθέτει και τη δύναμη άνωσης που παράγει η υδροτομή κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης. Όπως παρατηρείται, η αέρια φάση, και η παρουσία σπηλαίωσης, πρακτικά εξαλείφεται μετά από 30 κύκλους βελτιστοποίησης. Επίσης, φαίνεται ότι, οι αλλαγές στο σχήμα της υδροτομής έχουν παρόμοια επίδραση στην παραγόμενη δύναμη άνωσης.

Το Σχήμα 5.6 παρουσιάζει τα αντίστοιχα πεδία υγρής φάσης και πίεσης κατά τον αρχικό και τελικό κύκλο βελτιστοποίησης. Όπως φαίνεται στα αριστερά σχήματα, η βελτιστοποίηση μορφής καταφέρνει με επιτυχία να εξαλείψει τη φυσαλίδα σπηλαίωσης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, την αύξηση της πίεσης στην πλευρά υποπίεσης της υδροτομής, πέραν της πίεσης κορεσμού, και την εξάλειψη της ζώνης ανακυκλοφορίας.

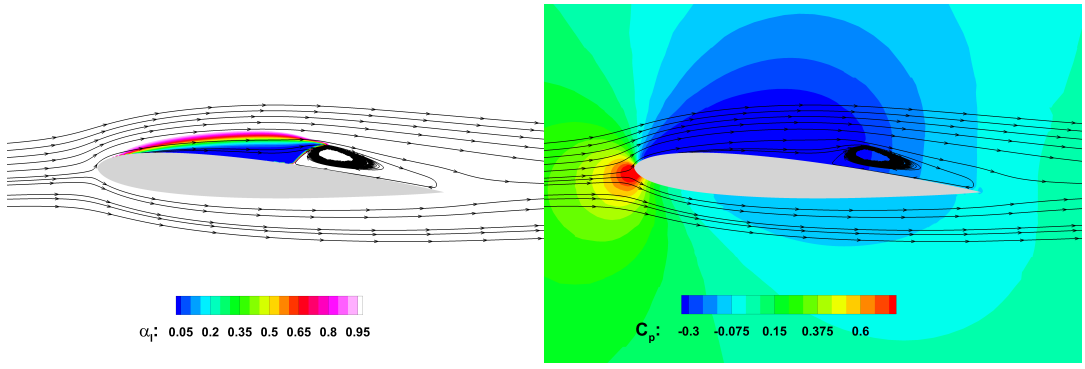


(α′)

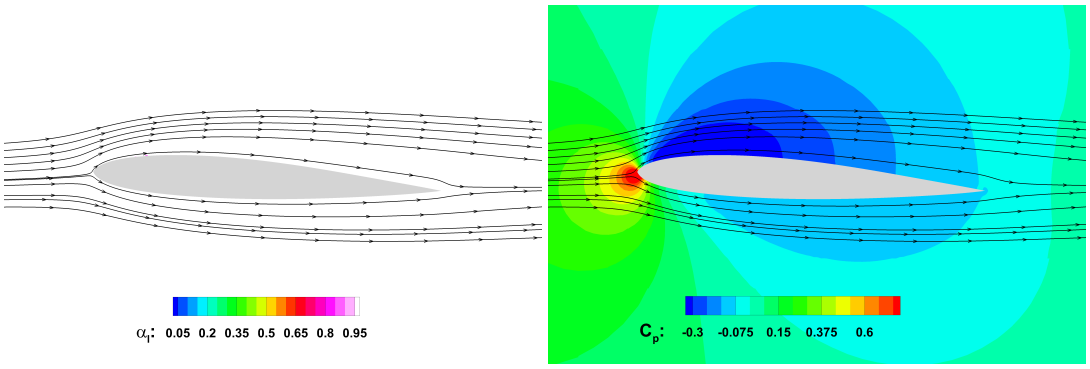


(β′)

Σχήμα 5.5: Στρωτή, διφασική ροή που παρουσιάζει σπηλαίωση γύρω από την υδροτομή NACA 0012, $Re_c = 500$, $\alpha_\infty = 4^\circ$, $\sigma = 0.5$ - (α′) Σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίστηκαν με τη χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου και πεπερασμένων διαφορών. (β′) Εξέλιξη της συνάρτησης J_V και της δύναμης της άνωσης κατά τη βελτιστοποίηση μορφής.



(α′) (β′)



(γ′) (δ′)

Σχήμα 5.6: Στρωτή, διφασική ροή που παρουσιάζει σπηλαίωση γύρω από την υδροτομή NACA 0012, $Re_c = 500$, $\alpha_\infty = 4^\circ$, $\sigma = 0.5$ - Πεδία υγρής φάσης (α′), (γ′) και πίεσης (β′)(δ′), με επιλεγμένες γραμμές ροής, για την αρχική (πάνω) και τελική (κάτω) μορφή της υδροτομής.

Κεφάλαιο 6: Βελτιστοποίηση Τοπολογίας με τη MTK

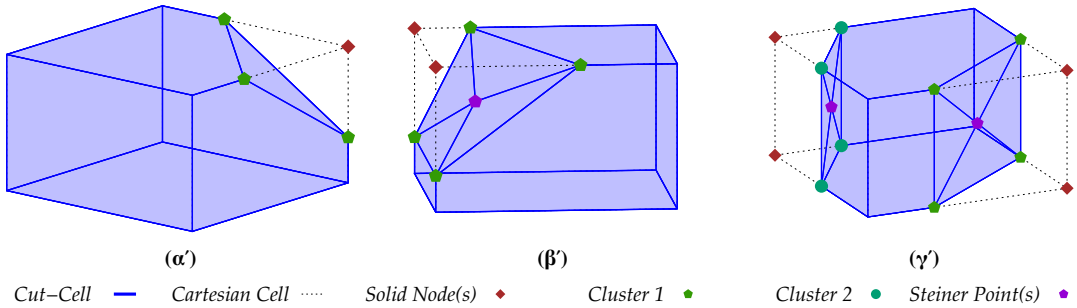
Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει νέα μέθοδο βελτιστοποίησης τοπολογίας που αναπτύσσεται στο πλαίσιο της διατριβής. Βασίζεται στη δυνατότητα της MTK να παράγει πλέγματα σε ραγδαία μεταβαλλόμενα στερεά όρια, χωρίς απαραίτητα να διατηρεί την αρχική σύνδεση των στερεών ορίων, και στην ικανότητά της να επιβάλει οριακές συνθήκες σε αυτά με ακρίβεια. Βασική ιδέα της μεθόδου είναι η μετατροπή των οριοθετημένων μεταβλητών σχεδιασμού $0 \leq \alpha^m \leq 1$, $\forall m = 1, ..., M$, που υφίστανται στους M κόμβους του βοηθητικού (background) πλέγματος Ω, σε μια ενδιάμεση μεταβλητή που περιγράφει την απόστασή τους από το στερεό όριο ϕ^m. Έτσι, είναι δυνατή η δημιουργία ενός οριόδετου πλέγματος στη ρευστή περιοχή Ω_f με τη χρήση της μεθόδου MTK για την επίλυση της ροής. Η διαδικασία μετατροπής γίνεται διβηματικά και περιγράφεται από τις σχέσεις [11]

$$\tilde{\alpha}^m = \frac{\sum\limits_n \alpha^n w^n}{\sum\limits_n w^n}, \qquad w^n = r - \mathrm{d}(n, m) \tag{6.1}$$

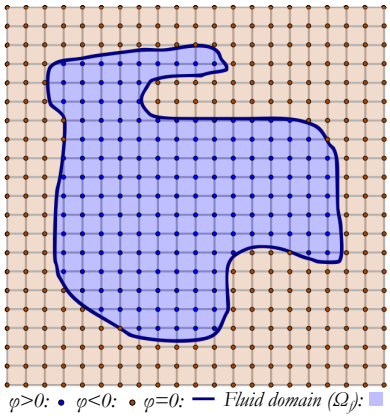
$$\phi^m = \frac{1}{2} - \frac{\tanh(0.5\beta) + \tanh(\beta(\tilde{\alpha}^m - 0.5))}{2\tanh(0.5\beta)} \tag{6.2}$$

Η άθροιση στην πρώτη σχέση αφορά όλους τους γειτονικούς κόμβους που βρίσκονται εντός ακτίνας r και έχει ως στόχο τη δημιουργία εξαρτήσεων μεταξύ των κόμβων για να επιταχύνουν τη διαδικασία βελτιστοποίησης και για την αποφυγή δημιουργίας ανώμαλων στερεών ορίων [13]. Το δεύτερο βήμα χρησιμοποιείται για να ληφθεί μια απότομη μεταβλητή ϕ που χαρακτηρίζει κάθε κόμβο ως ρευστό ή στερεό και παρουσιάζει ενδιάμεσες τιμές μόνο κοντά στη διεπιφάνεια του ρευστού με το στερεό όπου $\phi = 0$. Με βάση αυτές τις τιμές, είναι δυνατή η δημιουργία κυψελών που τέμνονται στο σημείο που καθορίζει η μεταβλητή ϕ και παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.1. Το σύνολο των Τεμνόμενων Κυψελών και των Καρτεσιανών κυψελών που βρίσκονται πλήρως στο ρευστό τμήμα του πλέγματος ορίζουν το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιείται για την επίλυση των εξισώσεων ροής, Σχήμα 6.2.

Τα προβλήματα τοπολογίας που μελετούνται αφορούν στρωτές ροές και έχουν ως συνάρτηση–στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης J_{P_t}, ενώ χρησιμοποιείται και περιορισμός του μέγιστου ποσοστό όγκου V_{tar} που καταλαμβάνει η ρευστή περιοχή $g_V = \frac{\int_{\Omega_f} d\Omega_f}{\int_{\Omega} d\Omega} - V_{tar} \leq 0$. Η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού γίνεται με τη χρήση της μεθόδου GCMMA. Σε αντίθεση με κλασικές μεθόδους τοπολογίας, όπου οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι ανεξάρτητες γεωμετρικών ποσοτήτων του πλέγματος, η μεταβλητή ϕ εισάγει γεωμετρικές εξαρτήσεις στο πρόβλημα βελτιστοποίησης με αποτέλεσμα να είναι απαραίτητος ο υπολογισμός ενός γεωμετρικού χάρτη ευαισθησίας μέσω της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Αυτός τελικά εκφράζεται, με τη χρήση του κανόνα της αλυσίδας, ως προς τις αρχικές μεταβλητές σχεδιασμού α^m, δηλαδή $\frac{\delta J_{P_t}}{\delta \alpha^m} = \sum_l \sum_n \frac{\delta L}{\delta \mathbf{x_s}^n} \frac{\partial \mathbf{x_s}^n}{\partial \phi^l} \frac{\partial \phi^l}{\partial \tilde{\alpha}^l} \frac{\partial \tilde{\alpha}^l}{\partial \alpha^m}$.



Σχήμα 6.1: Δημιουργία Τεμνόμενων Κυψελών με βάση τις κομβικές τιμές ϕ - Η εμφάνιση ρευστών και στερεών κόμβων εντός της Καρτεσιανής κυψέλης οδηγεί στον υπολογισμό τομών στις ακμές τους όπου $\phi = 0$. Ανάλογα με την κατανομή των στερεών τομών, είναι δυνατή η δημιουργία ορίων (α′) μίας έδρας, (β′) τεσσάρων και (γ′) οκτώ εδρών.



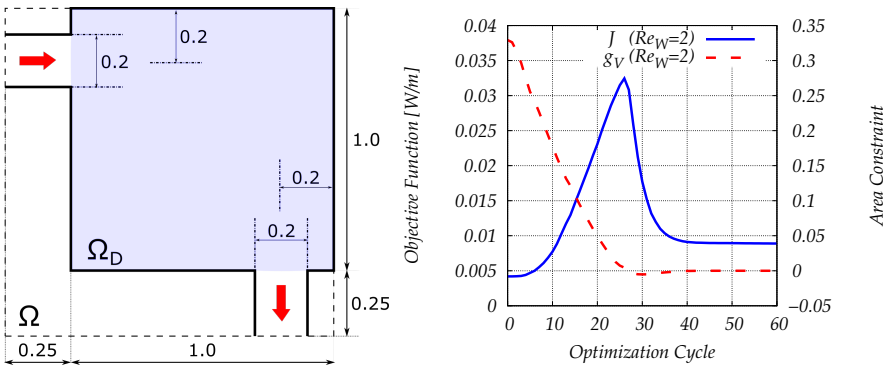
Σχήμα 6.2: Υπολογισμός του ρευστού τμήματος του πλέγματος - Το ρευστό και στερεό τμήμα του πλέγματος διαχωρίζεται από την ισογραμμή $\phi = 0$.

6.1 Ενδεικτικές Εφαρμογές

6.1.1 $2D$ Αγωγός μίας Εισόδου μίας Εξόδου

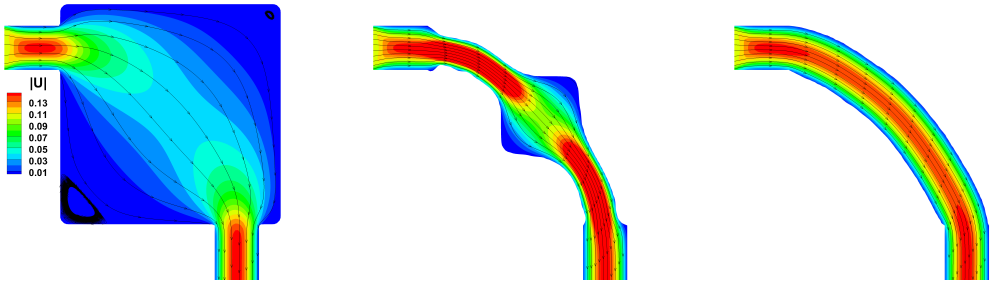
Η πρώτη ενδεικτική εφαρμογή αφορά τη βελτιστοποίηση τοπολογίας ενός αγωγού μιας εισόδου και μιας εξόδου με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης J_{P_t}, ως ένα κλασικό παράδειγμα της βιβλιογραφίας [2], και παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 6.3α′. Απαιτείται η ύπαρξη ρευστής περιοχής που καταλαμβάνει κατά μέγιστο το $1/4$ του όγκου ελέγχου (γαλάζια περιοχή στο Σχήμα 6.3α′). Ο αριθμός Reynolds είναι $Re_W = 2$, με βάση το πλάτος της εισόδου, και οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται αφορούν το μέγεθος της ταχύτητας στην είσοδο και τη στατική πίεση στην εξόδο. Στο Σχήμα 6.3β′ παρουσιάζεται η εξέλιξη της J_{P_t} και της συνάρτησης περιορισμού g_V στο σύνολο των 60 κύκλων βελτιστοποίησης που διήρκησε περίπου 200 λεπτά σε 24 AMD EPYC 7401 (2.0 Ghz) processors.

Όπως παρατηρείται, η συνάρτηση–στόχου είναι αρχικά χαμηλότερη σε τιμή, όμως αναλογεί σε μη–αποδεκτό σχήμα αφού ο περιορισμός δεν ικανοποιείται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στο



(α′) (β′)

Σχήμα 6.3: $2D$ Αγωγός μίας Εισόδου μίας Εξόδου, $Re_W = 2$ - (α′) Σχηματική απεικόνιση του προβλήματος βελτιστοποίησης τοπολογίας. (β′) Εξέλιξη της συνάρτησης–στόχου J_{P_t} και συνάρτησης περιορισμού g_V κατά τη βελτιστοποίηση.



(α′) (β′) (γ′)

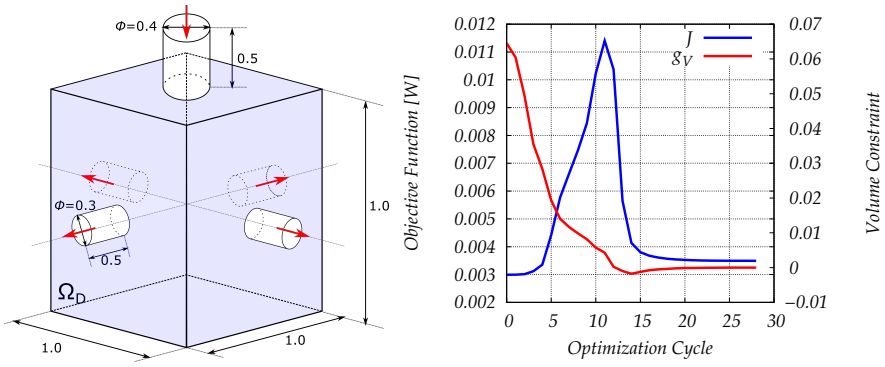
Σχήμα 6.4: $2D$ Αγωγός μίας Εισόδου μίας Εξόδου, $Re_W = 2$ - Πεδία του μέτρου της ταχύτητας σε διαφορετικούς κύκλους βελτιστοποίησης, που αντιστοιχούν στον (α′) αρχικό, (β′) 30-στό κύκλο, και (γ′) τελικό κύκλο βελτιστοποίησης.

αρχικό υπολογιστικό χωρίο Ω_f εμφανίζονται μεγάλες περιοχές ανακυκλοφορίας ρευστού χαμηλής ταχύτητας, με αποτέλεσμα οι απώλειες να είναι μικρότερες. Ο αλγόριθμος αρχικά προσπαθεί να ικανοποιήσει τον περιορισμό, που οδηγεί στην αύξηση της συνάρτησης–στόχου. Ακολούθως, παρατηρείται μια απότομη βελτίωση μέχρι και τον τερματισμό της βελτιστοποίησης. Το Σχήμα 6.4, παρουσιάζει 3 στιγμιότυπα και δείχνει τη δημιουργία και την μεταβολή των στερεών ορίων κατά τη βελτιστοποίηση.

6.1.2 $3D$ Αγωγός Πολλαπλών Εξόδων

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας για τον $3D$ αγωγό πολλαπλών εξόδων παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 6.5α′. Δεδομένης εισόδου ρευστού στη πάνω πλευρά ενός κυβικού χωρίου ελέγχου (γαλάζιο) και 4 συμμετρικά τοποθετημένων εξόδων στο επίπεδο xy, αναζητείται η βέλτιστη διαδρομή του ρευστού που να ελαχιστοποιεί τις απώλειες ολικής πίεσης και να καταλαμβάνει κατά μέγιστο το $1/5$ του όγκου ελέγχου. Ο αριθμός Reynolds είναι $Re_D = 4$, με βάση τη διατομή εισόδου,

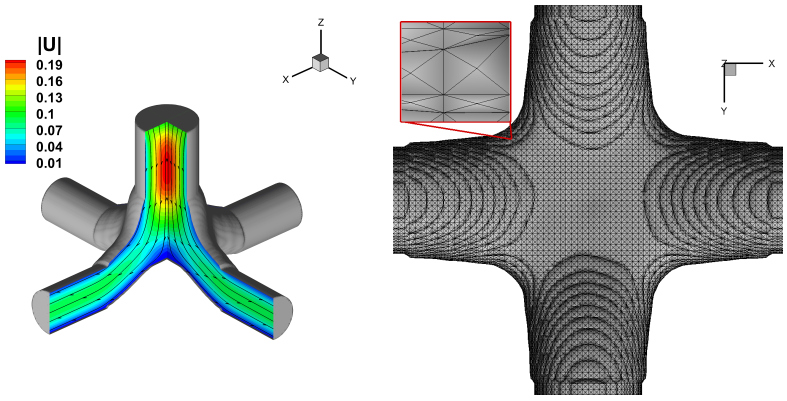
και οι οριακές συνθήκες αφορούν το μέγεθος της ταχύτητας στην είσοδο και την στατική πίεση στις εξόδους. Το βοηθητικό πλέγμα Ω αποτελείται από περίπου $2.2M$ κόμβους, και άρα μεταβλητές σχεδιασμού, ενώ το αρχικό υπολογιστικό πλέγμα έχει περίπου $250K$ κυψέλες. Η διαδικασία βελτιστοποίησης χρησιμοποίησε 24 AMD EPYC 7401 (2.0 Ghz) processors και τερματίστηκε μετά από περίπου 5 ημέρες με την ολοκλήρωση 29 κύκλων βελτιστοποίησης και την ικανοποίηση του περιορισμού όγκου (Σχήμα 6.5β′). Το Σχήμα 6.6α′ δείχνει το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας εντός



(α′) (β′)

Σχήμα 6.5: $3D$ Αγωγός Πολλαπλών Εξόδων, $Re_W = 4$ - (α′) Σχηματική απεικόνιση του προβλήματος βελτιστοποίησης τοπολογίας. (β′) Εξέλιξη της συνάρτησης–στόχου J_{P_t} και συνάρτησης περιορισμού g_V κατά τη βελτιστοποίηση.

των ρευστών διαδρόμων του βελτιστοποιημένου στερεού σώματος που κατασκευάστηκε από τον αλγόριθμο βελτιστοποιήσης. Στο Σχήμα 6.6β′, παρουσιάζεται η κάτω όψη του στερεού σώματος όπου είναι ευδιάκριτη η διακριτοποίηση του στερεού όριο με τη χρήση της MTK.



(α′) (β′)

Σχήμα 6.6: $3D$ Αγωγός Πολλαπλών Εξόδων, $Re_W = 4$ - (α′) Πεδίο του μέτρου της ταχύτητας σε τομές κατά το yz και zx επίπεδο στο βέλτιστοποιημένο σώμα. (β′) Μέρος του στερού ορίου που κατασκευάστηκε από τη MTK για την επίλυση της ροής. Κάθε τριγωνική επιφάνεια αποτελεί μια έδρα του στερεού ορίου.

Κεφάλαιο 7: Σύνοψη–Συμπεράσματα

Στόχος της διατριβής ήταν η ανάπτυξη και ο προγραμματισμός αριθμητικών μεθόδων ανάλυσης και σχεδιασμού αερο/υδροδυναμικών εφαρμογών που βασίζονται στη χρήση της Μεθόδου Τεμνόμενων Κυψελών (ΜΤΚ) και επεκτείνουν οικείο λογισμικό. Η επέκταση αφορούσε τη επέκταση της ΜΤΚ σε τυρβώδεις ροές και πραγματοποιήθηκε με τη χρήση του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$. Όσον αφορά την υλοποίηση των συναρτήσεων τοίχου, ήταν απαραίτητη η τροποποίηση της μεθοδου με την εισαγωγή κεραιών εντός του υπολογιστικού χωρίου για την κανονικοποίηση των αποστάσεων των βαρύκεντρων των τεμνόμενων κυψελών. Η μέθοδος πιστοποιήθηκε σε μονοφασική, τυρβώδη ροή σε επίπεδη πλάκα. Η δεύτερη επέκταση αφορούσε τη δυνατότητα ανάλυσης διφασικών, τυρβωδών ροών που παρουσιάζουν σπηλαίωση. Για τον σκοπό αυτό, αναπτύχθηκε αριθμητική μέθοδος που βασίζεται σε μοντέλο μείγματος, ενώ το φαινόμενο της σπηλαίωσης εισάχθηκε με τη χρήση εξειδικευμένου μοντέλου. Τα παραπάνω εφαρμόστηκαν σε προβλήματα ανάλυσης διφασικών ροών της βιβλιογραφία, που παρουσιάζουν σπηλαίωση, και πιστοποιήθηκαν με πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα. Η σχετική έρευνα ανέδειξε επίσης τη δυνατότητα εφαρμογής της τροποποιημένης τεχνικής συναρτήσεων τοίχου και σε αυτού του τύπου ροές.

Όσον αφορά την ανάπτυξη μεθόδων σχεδιασμού, διατυπώθηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για το μοντέλο ροής που περιγράφει διφασικές, τυρβώδεις ροές που παρουσιάζουν σπηλαίωση. Η μέθοδος εφαρμόστηκε στο πλαίσιο βελτιστοποίησης μορφής σε α) μονοφασικές τυρβώδεις ροές και β) διφασικές ατριβείς και στρωτές ροές που παρουσιάζουν σπηλαίωση. Η πιστοποίηση της ακρίβειας υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας της συζυγούς μεθόδου έγινε μέσω σύγκρισης με πεπερασμένες διαφορές σε προβλήματα εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής (α) και σε προβλήματα εξωτερικής υδροδυναμικής (β). Η βελτιστοποίηση μορφής σε μονοφασικές τυρβώδεις ροές ανάδειξε τη δυνατότητα της ΜΤΚ να επιτρέπει μεγάλες μετατοπίσεις κατά τη βελτιστοποίηση. Η ανάπτυξη αριθμητικής μεθόδου ανάλυσης και σχεδιασμού διφασικών ροών οδήγησε σε συμπεράσματα για τη συσχέτιση του φαινομένου της σπηλαίωσης και της δύναμης άνωσης που δέχεται η υδροτομή. Συγκεκριμένα, στις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν, παρατηρήθηκε διαφορετική συσχέτιση όταν το πρόβλημα βελτιστοποίησης έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση της αέριας φάσης, σε σχέση με όταν τεθεί στόχος η μεγιστοποίηση της δύναμης της άνωσης.

Στο πλαίσιο της διατριβής αναπτύχθηκε επίσης μια μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας που βασίζεται στη ΜΤΚ για να επιβάλει οριακές συνθήκες στα στερεά όρια με ακρίβεια. Με στόχο την αξιολόγηση της μεθόδου, έγινε συγκριτική μελέτη με κλασική μέθοδο βελτιστοποίησης τοπολογίας, που χρησιμοποιεί την τεχνική πορώδους, σε προβλήματα της βιβλιογραφίας. Η νέα μέθοδος παρουσίασε πιο αποδοτικές βέλτιστες λύσεις, κατά 8% στο πρόβλημα μίας εισόδου μίας εξόδου και 2% στο πρόβλημα μίας εισόδου δύο εξόδων, αλλά παρουσίασε μεγαλύτερες υπολογιστικές απαιτήσεις. Η δυνατότητα της μεθόδου να χειρίζεται προβλήματα μεγάλης κλίμακας έγινε σε $3D$ εφαρμογή που αποτελείτο από $2.2M$ μεταβλητές σχεδιασμού.

Βιβλιογραφία

[1] Allmaras, S.R. & Johnson, F.T. (2012). Modifications and clarifications for the implementation of the Spalart–Allmaras turbulence model. In *7th International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7)*, 1–11, Big Island, Hawai, U.S.A.

[2] Borrvall, T. & Petersson, J. (2003). Topology optimization of fluids in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **41**, 77–107.

[3] Brockett, T. & David Taylor Model Basin Hydromechanics Laboratory (1966). Minimum pressure envelopes for modified NACA-66 sections with NACA a = 0.8 camber and buships type I and type II sections. Tech. Rep. AD0629379, Defense Technical Information Center.

[4] Chorin, A.J. (1967). A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, **2**, 12–26.

[5] Kavvadias, I. (2016). *Continuous adjoint methods for steady and unsteady turbulent flows with emphasis on the accuracy of sensitivity derivatives*. Ph.D. Thesis, National Technical University of Athens.

[6] Kunz, R.F., Boger, D.A., Stinebring, D.R., Chyczewski, T.S., Lindau, J.W., Gibeling, H.J., Venkateswaran, S. & Govindan, T. (2000). A preconditioned Navier–Stokes method for two–phase flows with application to cavitation prediction. *Computers & Fluids*, **29**, 849–875.

[7] Launder, B. & Spalding, D. (1974). The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **3**, 269–289.

[8] Manninen, M., Taivassalo, V. & Kallio, S. (1996). On the mixture model for multiphase flow. *VTT PUBLICATIONS 288*.

[9] Papoutsis-Kiachagias, E.M. (2013). *Adjoint methods for turbulent flows, applied to shape or topology optimization and robust design*. Ph.D. Thesis, National Technical University of Athens.

[10] Samouchos, K. (2022). *The cut-cell method for the prediction of 2D/3D flows in complex geometries and the adjoint-based shape optimization*. Ph.D. Thesis, National Technical University of Athens.

[11] Sigmund, O. & Maute, K. (2013). Topology optimization approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **48**, 1031–1055.

[12] Tsiakas, K.T. (2019). *Development of shape parameterization techniques, a flow solver and its adjoint, for optimization on GPUs. Turbomachinery and external aerodynamics applications*. Ph.D. Thesis, National Technical University of Athens.

[13] Villanueva, C.H. & Maute, K. (2017). CutFEM topology optimization of 3D laminar incompressible flow problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **320**, 444–473.