

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΑΚΕΔ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η Φιλοσοφία του Ιμμάνουελ Καντ για τα Μαθηματικά, την Αισθητική και τις Τέχνες

Μπαρδαβίλλιας Χρήστος
(ge14061)

Επιβλέπων :
Βύρων Χ. Καλδής
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΑΚΕΔ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η Φιλοσοφία του Ιμμάνουελ Καντ για τα Μαθηματικά, την Αισθητική και τις Τέχνες

Μπαρδαβίλλιας Χρήστος
(ge14061)

Τριμελής Επιτροπή:
Βύρων Χ. Καλδής
Σπυρίδων Στέλιος
Πέτρος Δαμιανός

Αθήνα 2022

Ευχαριστίες

Με την παρουσίαση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, κλείνει ένα μεγάλο και σπουδαίο κεφάλαιο της ζωής μου, καθώς ολοκληρώνεται ο κύκλος των προπτυχιακών μου σπουδών. Ένα ταξίδι με πολλές όμορφες, αλλά και δύσκολες στιγμές. Πέρα απ' τις γνώσεις που μου προσφέρθηκαν, γνώρισα εξαιρετικούς ανθρώπους και ανέπτυξα δυνατές φιλίες, οι οποίες θα με συντροφεύουν και στα επόμενα βήματα μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Βύρων Καλδή, ο οποίος είναι ένας άνθρωπος που σέβομαι και εκτιμώ, για την πολύτιμη βοήθεια καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής της διπλωματικής εργασίας, παρέχοντας μου τις συμβουλές και την καθοδήγηση του.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου για την κατανόηση και την στήριξη, κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, ιδιαίτερη αναφορά θα ήθελα να κάνω στην μητέρα μου και τον αδερφό μου, οι οποίοι είναι οι πιο σημαντικοί άνθρωποι για μένα, και να τους ευχαριστήσω για την αγάπη, την στήριξη και την υπομονή που μου δείχνουν καθημερινά.

Μπαρδαβίλλιας Χρήστος

Περιεχόμενα

Εισαγωγή – Σύντομη Βιογραφία.....	2
-----------------------------------	---

Κεφάλαιο Πρώτο - “Καντ και Φιλοσοφία των Μαθηματικών”

Κριτική Φιλοσοφία των Μαθηματικών.....	4
1.1 Χώρος, Χρόνος & Γνώση Μαθηματικών.....	5
1.1.1 - Χώρος & Χρόνος.....	5
1.1.2 - Γνώση Μαθηματικών.....	7
1.2 Γεωμετρία.....	9
1.2.1 - Το παράδειγμα του τριγώνου.....	12
1.2.2 - Ο ρόλος του σχήματος.....	13
1.2.3 - Συλλογιστική Γεωμετρίας.....	14
1.3 Άλγεβρα & Αριθμητική.....	16
1.3.1 - Άλγεβρα και η Θεωρία των Αναλογιών.....	17
1.3.2 - Αριθμητική & Αριθμοί.....	18

Κεφάλαιο Δεύτερο – “Αισθητική”

2.1 Γενική Εισαγωγή – Φαντασία, Ομορφιά & Μαθηματικά.....	22
2.1.1 - Φαντασία και Μαθηματικά.....	22
2.1.2 - Η ομορφιά ως Αισθητική κρίση.....	25
2.2 Αισθητικές Κρίσεις, Ωραίο & Υψηλό.....	28
2.2.1 - Η ικανότητα της κρίσης.....	28
2.2.2 - Η κρίση του Ωραίου.....	29
2.2.3 - Το Υψηλό.....	31
2.3 Η σύλληψη της Ομορφιάς στα Μαθηματικά.....	34
2.4 Τέχνη, ιδιοφυΐα & Αισθητικές Ιδέες.....	40
2.4.1 - Τέχνη Εν Γένει & Καλές Τέχνες.....	40
2.4.2 - Ο ρόλος της ιδιοφυΐας & η Καλαισθησία.....	41

Συντομογραφίες
CPR – Critique of Pure Reason
CJ - Critique of the Power of Judgment

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται το έργο του μεγάλου φιλοσόφου Ιμμάνουελ Καντ και τη σπουδαία επιρροή του σε ποικίλους τομείς. Στις παρακάτω σελίδες επιχειρείται η προσέγγιση των βασικών φιλοσοφικών θεωρήσεών του, επικεντρώνοντας τη προσοχή στον τρόπο “κατάκτησης” της γνώσης και την ενασχόληση του με τα Μαθηματικά, την Αισθητική και τέλος, με τις Τέχνες. Στην Εισαγωγή της εργασίας παρουσιάζεται το έργο, η βιογραφία και το βασικό φιλοσοφικό θεώρημα του Καντ, καθώς και ο πυρήνας της σκέψης του. Στο πρώιμο στάδιο αυτής της νεότερης φιλοσοφικής σκέψης, φαίνεται ότι ο Καντ αποδίδει στον Χιουμ την “αφύπνισή” του, παρουσιάζεται συνοπτικά η “σχέση γοητείας” που αναπτύχθηκε μεταξύ τους και οι διαφορές των φιλοσοφικών θέσεων τους.

Στο πρώτο κεφάλαιο, αναφέρεται η γενική φιλοσοφική θέση του Καντ για τα μαθηματικά, ξεκινώντας με την θεωρία του για τις έννοιες του χώρου και του χρόνου, έννοιες οι οποίες μας δίνουν ένα δυνατό “πάτημα” ώστε να ασχοληθούμε βαθύτερα με την ενότητα της Γεωμετρίας και τις αναπαραστάσεις. Στην ενότητα της Γεωμετρίας αναφέρεται ο ρόλος του σχήματος, η συλλογιστική πορεία της Γεωμετρίας, η έκθεση, η κατασκευή και η απόδειξη. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι απόψεις του Καντ για την Άλγεβρα και την Αριθμητική, αναλύονται τα προβλήματα τα οποία αρχικά εμφανίστηκαν, και η λύση που πρότεινε ο Καντ μέσω της *διαίσθησης*.

Το δεύτερο κεφάλαιο αφορά την Αισθητική. Αρχικά, δίνεται μία γενική άποψη σχετικά με τον ρόλο της φαντασίας στον κλάδο των μαθηματικών, καθώς και η σχέση μεταξύ τους. Στη συνέχεια, απαντάμε στο ερώτημα “*Τί εννοούν οι μαθηματικοί όταν χρησιμοποιούν όρους όπως όμορφος ή κομψός;*”, και με ποιό τρόπο έρχεται η αξιολόγηση μιας τέτοιας έκφρασης, δηλαδή πότε εμφανίζεται η ομορφιά στα μαθηματικά. Στην επόμενη ακριβώς ενότητα, δίνεται αναλυτικά η καντιανή προσέγγιση για την Αισθητική, και πιο συγκεκριμένα στεκόμαστε στην ξεχωριστή ανάλυση του ωραίου (και των τεσσάρων στιγμών του), του υψηλού και την ικανότητα της κρίσης.

Έπειτα παρουσιάζεται η άποψη του Καντ για τα συνθετικά μαθηματικά, όπως ο ίδιος αναφέρει. Εστιάζουμε στη προσπάθεια του Καντ να συνδέσει την αισθητική με τα μαθηματικά, και προβάλλουμε τους ισχυρισμούς του σχετικά με την ύπαρξη ομορφιάς στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, αναφερόμαστε στην σκοπιμότητα των μαθηματικών αντικειμένων, στην σχετική τελειότητα και τον θαυμασμό που μπορεί να μας προκληθεί από μία μαθηματική απόδειξη.

Τέλος, ακολουθεί η ενότητα της Τέχνης, στην οποία δίνεται αναλυτικά η προσέγγιση του φιλοσόφου στο συγκεκριμένο ζήτημα, η οποία ξεκινά με τον ορισμό και τον σημαντικό ρόλο της ιδιοφυΐας. Ακολουθεί η διαίρεση των καλών τεχνών με βασικό κριτήριο την έκφραση των αισθητικών ιδεών, επισημαίνεται η έννοια της καλαισθησίας και αποδίδεται στον όρο “τέχνη” μία αξιολογική σημασία.

All our knowledge begins with the senses, proceeds then to the understanding, and ends with reason. There is nothing higher than reason.

-Immanuel Kant-
(1724-1804)



[Figure 1]

Εισαγωγή - Σύντομη Βιογραφία [TP] [RM]

Ο Ιμμάνουελ Καντ είναι ένα κεντρικό πρόσωπο στη σύγχρονη φιλοσοφία. Συνέθεσε τον πρώιμο σύγχρονο *ορθολογισμό* με τον *εμπειρισμό* και έθεσε κάποιους “όρους” στην φιλοσοφία του 19ου και 20ου αιώνα. Επίσης, οι απόψεις του συνέχισαν να έχουν σημαντική επιρροή μέχρι και σήμερα στη μεταφυσική, στην επιστημολογία, στην ηθική, στην αισθητική, στις τέχνες και σε πολλά άλλα πεδία. Είχε αποφασιστική επίδραση στο κίνημα του Ρομαντισμού, στην φιλοσοφία του Γερμανικού Ιδεαλισμού και το έργο του αποτέλεσε σημείο εκκίνησης για πολλούς άλλους σύγχρονους φιλοσόφους. Η θεμελιώδης ιδέα είναι η *αυτονομία* του ανθρώπου, η οποία αποτυπώνεται στις τρεις κριτικές του :

- *Critique of Pure Reason* (1781,1787)
- *Critique of Practical Reason* (1788)
- *Critique of the Power of Judgment* (1790)

Υποστήριξε ότι η ανθρώπινη κατανόηση είναι η πηγή των γενικών νόμων της φύσης που δομούν όλη την εμπειρία και ο ανθρώπινος λόγος δίνει στον εαυτό του τον ηθικό νόμο, ο οποίος είναι η βάση για την πίστη στον Θεό, την ελευθερία και την αθανασία. Επομένως, η επιστημονική γνώση, η ηθική και η θρησκευτική πεποίθηση είναι αμοιβαία συνεπείς γιατί βασίζονται στο ίδιο θεμέλιο της ανθρώπινης αυτονομίας.

Ο Ιμμάνουελ Καντ γεννήθηκε και πέθανε (1724-1804) στην Καίνιξμπεργκ (Königsberg), το οποίο τότε άνηκε στην Γερμανία, και σήμερα, ως Καλίνιγκραντ πλέον, βρίσκεται στην επικράτεια της Ρωσίας, στη Βαλτική. Αν και γεωγραφικά ήταν απομακρυσμένο από την υπόλοιπη Πρωσία και άλλες πόλεις, το Königsberg ήταν τότε ένα σημαντικό εμπορικό σημείο και στρατιωτικό λιμάνι, και μία σπουδαία κοσμοπολίτικη πανεπιστημιακή πόλη. Ο Καντ δεν εγκατέλειψε ποτέ τη γενέτειρα πόλη του και δεν παντρεύτηκε ποτέ. Στη πόλη αυτή μορφώθηκε, εργάστηκε και έζησε μία ζωή αυστηρά προγραμματισμένη.

Αιτία για την αφύπνιση του Καντ και την σταδιακή του αναγνώριση υπήρξε ο Χιουμ, ο οποίος στο πλαίσιο της διδασκαλίας του εμπειρισμού που είχε υιοθετήσει, είχε εισηγηθεί επιπλέον τον σκεπτικισμό. Στη προσπάθεια του ο Καντ να διαβάσει τα επιχειρήματα του Χιουμ, άρχισε να αμφισβητεί την ύπαρξη του εαυτού μας και την ισχύ της αρχής της αιτιότητας πάνω στην οποία στηρίζεται η δυνατότητα της γνώσης. Από τα φοιτητικά του χρόνια ο Καντ είχε μελετήσει και υιοθετήσει τη διδασκαλία του ορθολογισμού. Διαβάζοντας το έργο του Χιουμ, προέκυψαν προβληματισμοί πάνω στην αισιόδοξη άποψη των οπαδών του ορθολογισμού. Θεώρησε χρέος, να απαντήσει στον σκεπτικισμό του Χιουμ επινοώντας όμως, για την θεμελίωση της γνώσης, νέα επιχειρήματα.

Έστρεψε τη προσοχή του, λοιπόν, στην επίτευξη της αντικειμενικότητας της γνώσης των πραγμάτων της εμπειρίας και στην ανάλυση της υποκειμενικότητας, με την έννοια των αναγκαίων και καθολικών (δηλαδή μη εμπειρικών αρχών) που καθιστούν δυνατή την αντικειμενικότητα. Θεωρεί δυνατή και απαραίτητη την σύνθεση εμπειρίας και αισθήσεων ώστε να επέλθει η γνώση των αντικειμένων.

Γενικά, οι καντιανές ιδέες διαμόρφωσαν μια νέα επιχειρηματολογία και μία νέα ανάλυση της μεταγενέστερης φιλοσοφίας. Άνοιξαν μέτωπα διαφωνίας και νέες απόψεις που έθεσαν υπό κριτική αμφισβήτηση θεσμούς και παραδόσεις. Κατά αυτόν, η γνώση έχει περιορισμούς που δεν μπορεί να

ξεπεράσει, ότι η ηθική έχει τις ρίζες της στην ελευθερία του ανθρώπου και στην αυτονομία του Πρακτικού Λόγου, που δεν μπορεί να λαμβάνει κανένα νόμο από οπουδήποτε, όπως από τη θρησκεία για παράδειγμα. Επιπροσθέτως, μερικά χωρία σχετικά με την ιδιοφυία έμελλε να ασκήσουν σημαντική επίδραση στη διαμόρφωση της ρομαντικής αισθητικής. Τέλος, για να οριστικοποιηθεί μία φιλοσοφική θέση περνάει από το στάδιο της αυτο-κριτικής διαδικασίας.

Η σχέση γοητείας - Ιμμάνουελ Καντ & Ντέιβιντ Χιουμ [WEELD]

Η σχέση του Καντ (1724-1804) και του Χιουμ (1717-1776) αποτελεί μία πηγή μακροχρόνιας γοητείας. Ο Καντ αποδίδει στον Χιουμ την αφύπνιση του από τον “δογματικό λήθαργο”. Στα έργα του εστιάζει πολύ στις αντίστοιχες απόψεις του Χιουμ κυρίως στους τομείς της μεταφυσικής και της επιστημολογίας. “Μία διαφωνία μεταξύ γιγάντων” , όπως έχει χαρακτηριστεί (T. Nagel, 2012). Η σύγκριση του Καντ και του Χιουμ παρέχει την ευκαιρία να διευκρινιστούν και να εκτιμηθούν δύο κεντρικά προβλήματα της ηθικής φιλοσοφίας. Αν και υπάρχουν πολλά σημεία στα οποία η ηθική του Καντ έρχεται σε αντίθεση με εκείνη του Χιουμ, υπάρχουν και πολλά κοινά σημεία μεταξύ τους. Η αρχική διαφορά φανερώνεται στις αντιλήψεις της ηθικής φιλοσοφίας. Η πιο σημαντική διαφορά είναι ότι ο Καντ βλέπει¹ τον νόμο, το καθήκον και την υποχρέωση ως την “καρδιά” της ηθικής, μία αντίληψη που αποκαλείται “ηθικό σύστημα” (B. Williams) που καθορίζει την ηθική από μία άνευ όρων αναπόφευκτη μορφή υποχρέωσης (Williams 1985: 193-94). Απαντά σε ερωτήματα τύπου “*ποιά καθήκοντα μας επιβάλλει μία ηθική ανάγκη;*”. Για τον Χιουμ², η ευρύτερη έννοια της “προσωπικής αξίας” βρίσκεται στο επίκεντρο της ηθικής. Οι ηθικές μας ανησυχίες κυριαρχούνται από ερωτήματα “*ποιά κίνητρα είναι ενάρετα;*” και η απάντηση προέρχεται από τις απαντήσεις των συνανθρώπων, οι οποίοι όταν βλέπουν τα πράγματα σωστά εγκρίνουν τα κίνητρα αυτά. Για τον Χιουμ, οι όροι αυτοί χαρακτηρίζουν το καθήκον και την υποχρέωση, όχι το αντίστροφο.

Ο Χιουμ και ο Καντ πιστεύουν³ ότι η φιλοσοφία πρέπει να “σκάψει” κάτω από την επιφάνεια της ηθικής και να παρουσιάσει μία θεωρία για τη θεμελίωση της. Ωστόσο, διαφωνούν μετέπειτα. Η άλλη διαφορά που παρουσιάζεται, είναι ότι ο Χιουμ εντοπίζει το θεμέλιο της ηθικής στην ανθρώπινη φύση, κυρίως στις συναισθηματικές μας αντιδράσεις στην συμπεριφορά των γύρω μας. Ο Καντ με τη σειρά του, εντοπίζει το θεμέλιο της ηθικής στα ορθολογικά γεγονότα της φύσης τα οποία μοιραζόμαστε με όλα τα πεπερασμένα όντα. Το θεμέλιο, λοιπόν, βρίσκεται στην “αυτονομία” της ορθολογικής βούλησης. *Πώς ορίζει, όμως την αυτονομία;* Ορίζει την αυτονομία ως “δέσμευση και υπακοή” στον ηθικό νόμο. Δεν σημαίνει ουδέποτε αυθαιρεσία, η ηθική πράξη αποτελεί αυτοσκοπό και όχι μέσο επίτευξης οποιουδήποτε άλλου σκοπού. Ο άνθρωπος, συνεπώς, ακολουθεί έναν νόμο ο οποίος δεν προέρχεται έξω από αυτόν, αλλά τον θέτει ο ίδιος.

1 WEELD, κεφ.1, παρ.1

2 WEELD, κεφ.1, παρ.1

3 WEELD, κεφ.1, παρ.3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ - “Καντ και Φιλοσοφία των Μαθηματικών”

Κριτική Φιλοσοφία των Μαθηματικών [LS]

Ο Καντ ασχολήθηκε με τα μαθηματικά καθ' όλη τη διάρκεια της καριέρας του και οι σκέψεις του για τον τομέα αυτό, συμπεριλαμβανομένης της μαθηματικής πρακτικής, επηρέασαν σημαντικά τη φιλοσοφική του σκέψη. Ασχολήθηκε και ανέπτυξε φιλοσοφικές απόψεις σχετικά με τη μαθηματική κριτική, τη φύση των μαθηματικών ορισμών, τα αξιώματα και τη σχέση των “καθαρών” μαθηματικών με τον φυσικό κόσμο. Επίσης, με την εισαγωγή των συνθετικών a priori κρίσεων, το οποίο θα αναλύσουμε παρακάτω, κατάφερε να συλλάβει και να διαμορφώσει τα μαθηματικά και να τα ορίσει ως μία πολύ καλά θεμελιωμένη επιστήμη.

Η φιλοσοφία των μαθηματικών που ανέπτυξε ο Καντ ενδιέφερε πολλούς μελετητές. Οι σκέψεις του για τα μαθηματικά είναι κρίσιμο και κεντρικό συστατικό της κριτικής του φιλοσοφικού συστήματος, και επίσης, πολλά ζητήματα του σύγχρονου ενδιαφέροντος προκύπτουν από τις σκέψεις του Καντ σχετικά με κάποιους στοιχειώδεις μαθηματικούς κλάδους. Οι διαφωνίες που έχουν προκύψει σχετικά με τον τρόπο ερμηνείας της φιλοσοφίας των μαθηματικών του Καντ έχουν δημιουργήσει ένα εύφορο περιβάλλον έρευνας και συζήτησης.

Η κριτική φιλοσοφία των μαθηματικών του Καντ βρίσκει τη πλήρη έκφραση της στην ενότητα του Καθαρού Λόγου με τίτλο “Η πειθαρχία του καθαρού λόγου στη δογματική χρήση”. Σε άλλες ενότητες της Κριτικής, ο Καντ είχε υποβάλλει τον καθαρό λόγο με σκοπό “να περιορίσει τη τάση του για επέκταση πέρα από τα στενά όρια της πιθανής εμπειρίας”. Τα μαθηματικά, σε αντίθετη περίπτωση, δεν χρειάζεται να υποβληθούν σε μία τέτοια κριτική, επειδή η χρήση του καθαρού λόγου στα μαθηματικά διατηρείται σε ένα “ορατό” κομμάτι μέσω της *διαίσθησης*. Παρ' όλα αυτά, η πρακτική πειθαρχία των μαθηματικών απαιτεί επεξήγηση, τόσο για να ληφθεί υπόψη η επιτυχία της, όσο και για να επιτρέψει την επίκληση της ως μοντέλο συλλογιστικής. Έτσι, ο Καντ οδηγείται σε ερωτήματα τύπου: “Τί αντιπροσωπεύει τη -χαρούμενη- και καλά θεμελιωμένη μαθηματική μέθοδος;”, καθώς και για το αν η μέθοδος είναι χρήσιμη και αποδίδει και σε άλλους κλάδους εκτός από τον κόσμο των μαθηματικών.

Οι προσπάθειες του Καντ επικεντρώθηκαν στην εξήγηση της μαθηματικής συλλογιστικής. Στη κεντρική θέση του Καντ σχετικά με τη μοναδικότητα της μαθηματικής συλλογιστικής, είναι ο ισχυρισμός του ότι η μαθηματική γνώση προέρχεται από την “κατασκευή εννοιών”. Η κατασκευή μιας έννοιας δηλώνει την a priori διαίσθηση μας γι' αυτή, όπως για παράδειγμα το τρίγωνο. Η θέση του Καντ πρέπει, επομένως, να υπερασπιστεί την κοινή θέση ότι οι καθολικές αλήθειες δεν μπορούν να προέλθουν από τη λογική που εξαρτάται από συγκεκριμένες παραστάσεις. Ισχυρίζεται⁴ λοιπόν, ότι είναι μόνο -η έννοια των μεγεθών (ποσότητες)- μπορεί να κατασκευαστεί με καθαρή διαίσθηση, καθώς σε γενικό πλαίσιο οι ιδιότητες δεν μπορούν να παρουσιαστούν σε τίποτα εκτός από την εμπειρική διαίσθηση. Αυτό οδηγεί σε μία διάκριση μεταξύ της μαθηματικής και φιλοσοφικής γνώσης. Η φιλοσοφική γνώση περιορίζεται στα αποτελέσματα μίας αφηρημένης εννοιολογικής ανάλυσης, ενώ η μαθηματική γνώση είναι το αποτέλεσμα μίας “αλυσίδας συμπερασμάτων που καθοδηγείται πάντα από τη διαίσθηση”. Ο Καντ ισχυρίζεται⁵ παραιτέρω ότι η καθαρή έννοια του μεγέθους είναι κατάλληλη

4 LS, κεφ.2, παρ.3

5 LS, κεφ.2, παρ.4

για κατασκευή, διότι σε σχέση με άλλες καθαρές έννοιες δεν αντιπροσωπεύει μία σύνθεση πιθανών διαισθήσεων, αλλά “περιέχει ήδη μία καθαρή διαίσθηση από μόνη της”. Υποψήφιος καθαρές διαισθήσεις επιπλέον είναι ο χώρος και ο χρόνος, προκύπτει δηλαδή ότι μόνο χωρικά και χρονικά μεγέθη μπορούν να εκτίθονται με καθαρή διαίσθηση.

1.1 - Χώρος, Χρόνος & Γνώση Μαθηματικών [AJ]

1.1.1 – Χώρος & Χρόνος

Ο Καντ εισάγει στη φιλοσοφία του τις απόψεις του για τον χώρο και τον χρόνο. Σκοπός του είναι να διασαφηνήσει τις απόψεις του και να τις τοποθετήσει ιστορικά και φιλοσοφικά μέσα στο περιβάλλον και στις κεντρικές συζητήσεις σχετικά με τον χώρο και τον χρόνο στις αρχές της σύγχρονης περιόδου, ιδιαίτερα μεταξύ της πρώτης έκδοσης του “Principia Mathematica” του Νεύτωνα που δημοσιεύτηκε το 1687, και της δεύτερης έκδοσης της Κριτικής του Καθαρού Λόγου που δημοσιεύτηκε 100 χρόνια αργότερα. Οι κεντρικές απόψεις του Καντ “αντιδρούν” στους προκατόχους του στον τομέα αυτόν, τον Leibniz και τον Νεύτωνα γεννώντας μίας σειρά από φιλοσοφικά ερωτήματα. Ο Καντ γράφει⁶ “Ο χώρος δεν είναι κάτι αντικειμενικό και πραγματικό, ούτε κάποια ουσία, ούτε κάποιο ατύχημα, ούτε μία σχέση, αντιθέτως είναι υποκειμενικός και ιδανικός και προέρχεται από τη φύση του νου σε συμφωνία με ένα σταθερό νόμο, και συντονίζει όλες τις αισθήσεις εξωτερικά”.

Σε αυτή τη δύσκολη πρόταση, μπορούμε να βρούμε μία λίστα από πολλά ερωτήματα σχετικά με τον χρόνο. Είναι ο χρόνος “αληθινός” ή ιδιότητα κάποιας ουσίας; Είναι ουσία από μόνος του ή ιδιότητα κάποιας ουσίας; Είναι εξαρτημένος από κάποια σειρά γεγονότων; Επίσης, προκύπτει το θέμα της οντολογίας του χώρου και του χρόνου. Το έργο του Καντ θα μπορούσε να υποδηλώνει ότι εάν ο χώρος και ο χρόνος υπάρχουν και χαρακτηρίζουν τον κόσμο, θα πρέπει να θεωρούνται ουσίες από μόνες τους ή ιδιότητες ουσιών. Καμία απ’ τις εκδοχές δεν είναι αρκετά ελκυστική διότι ο χώρος και ο χρόνος φαίνονται να διακρίνονται από ουσίες, είναι αιτιακά αδρανείς έννοιες, αιτιολογικά απρόσιτες και οι πτυχές και οι ιδιότητές τους δεν μπορούν να τροποποιηθούν από την αλληλεπίδραση με οποιαδήποτε άλλη ουσία.

Το υπόβαθρο της σκέψης του Καντ

Δεν υπάρχει καμία αμφιβολία ότι οι συζητήσεις των οπαδών του Leibniz και του Νεύτωνα αποτέλεσαν μέρος του υπόβαθρου και της σκέψης του Καντ για τον χώρο και τον χρόνο. Ο Νεύτωνας αρχικά διατύπωσε την αντίληψη του για τον χώρο και τον χρόνο ως απάντηση στις απόψεις του Ντεκάρτ (1644), όμως τελικά ο Νεύτωνας και οι οπαδοί του ενεπλάκησαν σε στενές συζητήσεις με τον Leibniz και τους οπαδούς του. Η διαμάχη αφορούσε κυρίως την προτεραιότητα του λογισμού, και ορισμένες επικρίσεις του δεύτερου αντανακλούσαν στις ήδη διατυπωμένες απόψεις (Principia 1687,1713) του Νεύτωνα για τον χώρο, τον χρόνο και την κίνηση.

Το έργο του Καντ αναφέρει συχνά αυτές τις συζητήσεις, επιχειρεί να εμπλέκει τον “σχετικισμό” του Leibniz και το Νευτώνειο απόλυτο στις αντιλήψεις του χώρου με υπερβατολογικό ιδεαλισμό. Η θέση

6 AJ, κεφ.1, παρ.1

του Νεύτωνα είναι ξεκάθαρη και αποδίδει τον χώρο και τον χρόνο ως πραγματικές οντότητες, ενώ η άποψη του Leibniz είναι ότι “ενυπάρχουν” σε αντικείμενα και στις σχέσεις μεταξύ τους. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Καντ εισάγει⁷ και την *Αισθητική*, δηλαδή ότι ο χώρος και ο χρόνος είναι μορφές της “διαίσθησης” και ότι εξαρτώνται από την υποκειμενικότητα του νου.

Στη Κριτική του Καθαρού Λόγου ο Καντ παρουσιάζει⁸ τη σύγχρονη Φυσική και θέτει ερωτήματα σχετικά με τη προέλευση της γνώσης. Κάνει διάκριση στην εμπειρική γνώση με την *a priori* (εκ των προτέρων). Για τον Καντ ο ανθρώπινος νους είναι εφοδιασμένος με κάποιες γενικές έννοιες τις οποίες δεν απέκτησε με το πέρασμα του χρόνου μέσω της εμπειρίας αλλά προϋπήρχαν, γι' αυτό τις ονομάζει *a priori*. Σύμφωνα με τον Καντ οι προτάσεις χωρίζονται σε *συνθετικές* και *αναλυτικές*.

Αναλυτικές ονομάζονται οι προτάσεις οι οποίες οδηγούν σε συμπέρασμα λόγω της ανάλυσης που γίνεται στις λέξεις που περιέχουν. Είναι αληθείς και δεν αποδίδουν νέα επιπλέον γνώση-πληροφορία. Για παράδειγμα η πρόταση “όλα τα τρίγωνα έχουν 3 γωνίες” είναι αναλυτική γιατί μόνο από τη λέξη “τρίγωνο” ο καθένας καταλαβαίνει την ύπαρξη τριών γωνιών. Όσον αφορά τις συνθετικές, για να εξακριβωθεί εάν είναι αληθείς, πρέπει να εξεταστούν μέσω της εμπειρίας. Οι συνθετικές προτάσεις λοιπόν, όπως μαρτυρά και η ονομασία τους απαιτούν μία σύνθετη διαδικασία προκειμένου να εξακριβωθεί η αλήθεια τους. Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί ότι λόγω αυτής της ιδιαιτερότητας τους να μην οι συνθετικές προτάσεις μπορούν να παρέχουν πληροφορίες και γνώσεις, αλλά αυτές θα πρέπει να ελεγχθεί πρώτα αν ισχύουν και να μην λαμβάνονται ως δεδομένες γιατί μπορεί να μην ισχύουν.

Αμέσως μετά τη παραπάνω διάκριση, στο σημείο αυτό ο Καντ εισάγει τις συνθετικές *a priori* προτάσεις. Για τα μαθηματικά γενικότερα, και πιο ειδικά για τον χώρο και τον χρόνο, κάνει μία απόπειρα να συνδέσει την εμπειρία με τις “εκ των προτέρων έννοιες” του ανθρώπου. Όσο αφορά τον χώρο περιληπτικά παρουσιάζει⁹ τα παρακάτω:

- Ο χώρος δεν είναι εμπειρική έννοια, που συνάγεται από εξωτερικές εμπειρίες
- Ο χώρος είναι μία *a priori* αντίληψη, στην οποία βασίζονται όλες οι εξωτερικές εποπτείες. Δεν μπορεί να φανταστεί κανείς πως δεν υπάρχει χώρος.
- Ο χώρος είναι μία καθαρή εποπτεία, και όχι μία συμπερασματική έννοια σύνδεσης πραγμάτων.
- Ο χώρος νοείται ως άπειρο μέγεθος. Μία έννοια δεν μπορεί να περιέχει άπειρο πλήθος παραστάσεων. Ο χώρος νοείται όμως με αυτόν τον τρόπο, άρα ο χώρος είναι εποπτεία και όχι έννοια τελικά.

Στην περίπτωση του χρόνου:

- Ο χρόνος δεν είναι εμπειρική έννοια. Δεν έχει προκύψει από κάποια αφαιρετική εμπειρική διαδικασία.
- Ο χρόνος είναι μία αναγκαία παράσταση, που υπόκειται ως βάση για όλες τις εποπτείες.
- Ο χρόνος έχει μία διάσταση, δεν υπάρχουν ταυτόχρονα πολλοί χρόνοι αλλά διαδοχικοί.
- Ο χρόνος δεν είναι λογική (ή καθολική έννοια) αλλά καθαρή μορφή της αισθητικής εμπειρίας. Διάφοροι χρόνοι αποτελούν μέρη του χρόνου.

Με την εισαγωγή των παραπάνω και δεδομένου του τρόπου σκέψης και άντλησης γνώσης της θεωρίας

7 AJ, κεφ.2, παρ.2

8 AJ, κεφ.2, παρ.1

9 AJ, κεφ.3.2

του Καντ μπορούμε να συνοψίσουμε: Ο χώρος, δεν εκφράζει καμία ιδιότητα, ούτε σχέσεις αντικειμένων αλλά είναι μορφή όλων των φαινομένων των εξωτερικών αισθήσεων, ο υποκειμενικός όρος της διαίσθησης που καθιστά δυνατή την εξωτερική εποπτεία. Ο χρόνος για τον Καντ είναι μορφή εξωτερικής αίσθησης, είναι ο τρόπος που κατατάσσουμε τα προσωπικά βιώματά μας και ορίζουμε τη σχέση μεταξύ τους. Ορίζει δηλαδή τη “διαδοχή”, είναι όρος a priori.

1.1.2 - Γνώση Μαθηματικών [LS]

Πώς είναι δυνατόν να έχω “καθαρά” Μαθηματικά, σύμφωνα με τον Καντ; Ο Καντ θέτει δύο συναφή ερωτήματα της κριτικής του φιλοσοφίας.

1. Πώς είναι δυνατές είναι συνθετικές a priori κρίσεις;
2. Πώς είναι δυνατή η μεταφυσική ως επιστήμη;

Τα Μαθηματικά παρέχουν μία ειδική οδό για να απαντήσουν σε αυτά τα ερωτήματα, παρέχοντας ένα μοντέλο κωδικοποιημένης επιστημονικής πειθαρχίας, με σαφή όρια. Οι συνθετικές a priori κρίσεις επιβεβαιώνονται σε μαθηματικά πλαίσια, μαζί με την προκύπτουσα εξήγηση για το πως ένα συστηματικό σώμα αποδεδειγμένης γνώσης περιλαμβάνει τέτοιες κρίσεις. Επιτρέπεται λοιπόν, η επίκληση της μαθηματικής αλήθειας ως παράδειγμα για να επιτύχει η μεταφυσική τις καθολικές αλήθειες.

Για τον Καντ όλες οι μαθηματικές κρίσεις, όπως προαναφέραμε, είναι συνθετικές a priori με το σκεπτικό ότι ο ρόλος της εμπειρίας απουσιάζει. Για να εξηγήσει παραιτέρω το παραπάνω αποδίδει ένα παράδειγμα-πρόταση. “ $5+7=12$ ”. Η συγκεκριμένη πρόταση αρχικά φαίνεται σαν αναλυτική πρόταση αφού είναι δεδομένο ότι η συγκεκριμένη πράξη δίνει το συγκεκριμένο αριθμητικό αποτέλεσμα. Αυτό όμως δεν ισχύει απόλυτα στη συγκεκριμένη πρόταση. Οι αναλυτικές προτάσεις όταν μετατραπούν σε αρνητικές εμπεριέχουν την αντίφαση. Για παράδειγμα η πρόταση «όλα τα λευκά λουλούδια είναι λευκά» αν αντιστραφεί σε «όλα τα λευκά λουλούδια δεν είναι λευκά», τότε υπάρχει αντίφαση. Η αρνητική διάσταση της πρότασης αποδίδεται όπως είδαμε μέσα από την αντιστροφή των λέξεων της. Στη πρόταση όμως που χρησιμοποιείται ως παράδειγμα συνθετικής η αντιστροφή των στοιχείων της δεν μας δίνει αρνητικό αποτέλεσμα αφού « $7+5$ » μας κάνει και πάλι 12. Η απαραίτητη αλήθεια της παραπάνω πρότασης δεν μπορεί να αποδειχθεί με οποιαδήποτε μέθοδο λογικής ή εννοιολογικής ανάλυσης, αλλά μπορεί να αποδειχθεί με διαισθητική σύνθεση. Με βάση λοιπόν των παραπάνω, ο ίδιος ο Καντ αναφέρει ότι η πρόταση « $5+7=12$ » δεν είναι αναλυτική γιατί: η έννοια του αθροίσματος των αριθμών 7 και 5 δεν περιέχει τίποτε παραπάνω από την συνένωση των δύο αριθμών σ’ έναν, χωρίς, συγχρόνως, να μας υποδεικνύει και ποιος είναι ο αριθμός αυτός που περιέχει τους δύο άλλους αριθμούς. Η αντίστοιχη πορεία συλλογιστικής και αλήθειας ακολουθείται και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία το οποίο θα αναλυθεί σε επόμενη ενότητα. Σύμφωνα, δηλαδή, με τις αρχές της Γεωμετρίας εκφράζουν συνθετικές σχέσεις μεταξύ εννοιών, κανένα από τα οποία δεν μπορεί να εξαχθεί αναλυτικά. Με άλλα λόγια, οι αρχές της Γεωμετρίας εκφράζουν τις σχέσεις μεταξύ βασικών γεωμετρικών εννοιών στον βαθμό που αυτές μπορούν να “εκτίθενται” στη *διαίσθηση*.

Ο λογαριασμός του Καντ για την συνθετικότητα των θεωρημάτων δεν είναι τόσο διαφανής. Παραδέχεται¹⁰ ότι τα μαθηματικά συμπεράσματα για τη δημιουργία γεωμετρικών θεωρημάτων προχωρούν “σύμφωνα με τον νόμο της αντίφασης” και επίσης ότι μία συνθετική πρόταση μπορεί φυσικά να γίνει κατανοητή σύμφωνα με την αρχή της αντίφασης, αν και μόνο αν, προϋποθέτει μία

10 LS, κεφ.2.2

άλλη συνθετική από την οποία μπορεί να συναχθεί και όχι από μόνη της. Η προσοχή σε αυτό το ερμηνευτικό ζήτημα στη φιλοσοφία των μαθηματικών είναι ζωτικής σημασίας για το φως που ρίχνει στο γενικότερο ερώτημα “Τί καθιστά την συνθετική μία εκ των προτέρων γνώση;”, το οποίο είναι το κεντρικό ερώτημα της Κριτικής του Καθαρού Λόγου. Για την απάντηση του ερωτήματος αυτού είναι πολύ σημαντικό να διαφοροποιηθεί η χρήση των όρων “αναλυτικός” και “συνθετικός” για να σημειωθεί μία λογικο-εννοιολογική διάκριση μεταξύ των τύπων κρίσεων. Ο Καντ για να υπερασπιστεί ότι η μαθηματική γνώση είναι a priori συνθετική, διακρίνει¹¹ επιπλέον δύο μεθόδους, την *αναλυτική* και τη *συνθετική* μέθοδο. Η διάκριση αυτή γίνεται προκειμένου να εντοπίσει δύο ξεχωριστές επιχειρηματολογικές στρατηγικές για την απάντηση ως προς την “δυνατότητα” των καθαρών μαθηματικών.

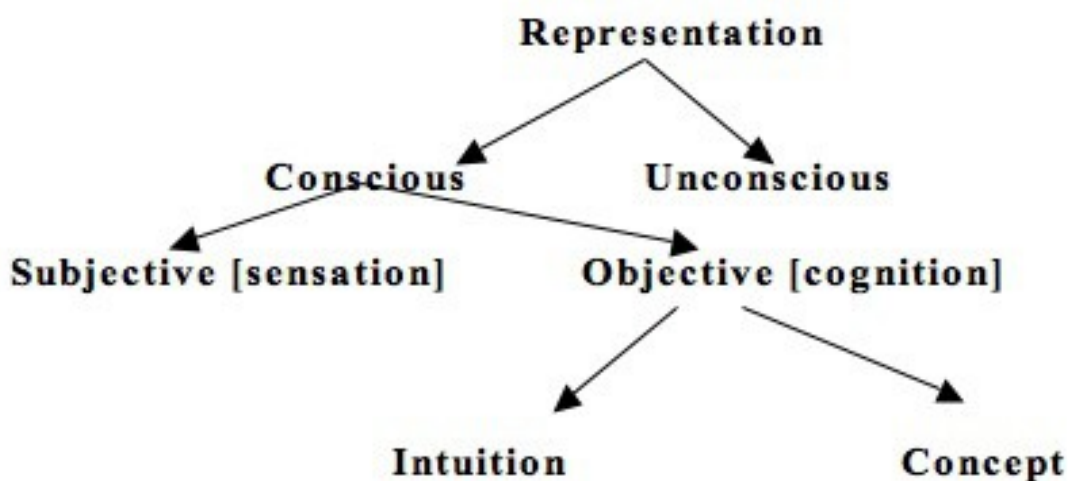
Η *αναλυτική μέθοδος* χαρακτηρίζεται από το σκεπτικό που εντοπίζει ένα δεδομένο σώμα γνώσης, όπως τα μαθηματικά, στη προέλευση ή τις πηγές του στο μυαλό του καθένα. Αντίθετα, η *συνθετική μέθοδος* στοχεύει να αντλήσει πραγματική γνώση απευθείας από οποιοδήποτε σώμα γνώσης. Ο Καντ υιοθετεί την προηγούμενη μέθοδο του, υποστηρίζοντας την συνθετική a priori φύση της μαθηματικής κρίσης με τον ισχυρισμό ότι ο χώρος και ο χρόνος είναι μορφές ανθρώπινης νόησης, μέσω της οποίας παρέχονται οι βάσεις για να αντληθούν συνθετικές a priori κρίσεις.

11 LS, κεφ.2.2, παρ.2

1.2 - Γεωμετρία

[LS2] [MF] [JH] [KP]

Στο κεφάλαιο του Καθαρού Λόγου, “*Transcendental Exposition of the Concept of Space*”, ο Καντ παρουσιάζει επιχειρήματα για να υποστηρίξει¹² τον ισχυρισμό ότι έχουμε μία καθαρή διαίσθηση της έννοιας του χώρου, μέσω της Γεωμετρίας. Το συμπέρασμα που προορίζεται να αποδώσει, ακολουθεί τη δυνατότητα της συνθετικής a priori γνώσης των αρχών της Γεωμετρίας και έτσι προσπαθεί να συνάγει μία θεωρία χώρου ως καθαρή διαίσθηση (pure intuition) από μία υπόθεση ώστε να προέλθει η μαθηματική γνώση. Οι αναπαραστάσεις στον χώρο σύμφωνα με τον Καντ, ακολουθούν το παρακάτω διάγραμμα.



[Figure 2]

Η εργασία “*The Argument of Geometry*” δεν αναλύει τη γεωμετρική γνώση για να αποδείξει την καθαρή διαίσθηση του χώρου. Αντίθετα, αποδεικνύει ότι η ίδια η γεωμετρική γνώση αναπτύσσεται από τη καθαρή διαίσθηση του χώρου. Η διαφορά είναι λεπτή, αλλά σημαντική. Ο χώρος ως καθαρή διαίσθηση προσφέρεται τόσο ως πηγή για τη πραγματική γνώση της Γεωμετρίας, όσο και για “πάτημα” ή μέσο για περαιτέρω γνώση. Γνωρίζουμε, ότι ο στόχος του Καντ (“*Transcendental Aesthetic*”) είναι να παρέχει μία επιστήμη από όλες τις αρχές της “εκ των προτέρων αισθητικότητας / a priori sensibility”. Με τον όρο “a priori sensibility” ο Καντ εννοεί την απομόνωση των ικανοτήτων ή ιδιοτήτων που μας παρέχουν τα χαρακτηριστικά ενός αντικειμένου, αλλά την κατανόηση των χαρακτηριστικών αυτών διαισθητικά, όχι εμπειρικά.

Η εκ των προτέρων διαίσθηση πρέπει σαφώς να διαχωρίζεται από την εμπειρική αίσθηση και να διερευνάται ξεχωριστά.

12 LS2, σελ.195

[Από τη στιγμή που οι αισθήσεις μπορούν να ταξινομηθούν και να τοποθετούν σε μία συγκεκριμένη μορφή κάθε εμφάνιση, δίνεται σε εμάς *a posteriori*, αλλά η μορφή πρέπει να είναι ήδη έτοιμη στο μυαλό μας *a priori*. Συγκεκριμένα, αν δηλαδή χωρίσω από την αναπαράσταση ενός σώματος τις ικανότητες που ανήκουν στην αίσθηση (π.χ. Χρώμα, σκληρότητα κ.τ.λ.), μένει κάτι άλλο σε εμάς. Αυτό που μένει ανήκει στη καθαρή διαίσθηση, η οποία εμφανίζεται *a priori* ως απλή μορφή της “διαίσθησης” του μυαλού.]
(Kant on Geometry & Spatial Intuition)

Η Γεωμετρία είναι η επιστήμη του χώρου, άρα ο ρόλος της καθαρής εποπτείας είναι να παρέχει το αντικείμενο για την επιστήμη αυτή, ως μοντέλο για τις συσχετίσεις. Επίσης, ασχολείται με τα κβάντα (quanta), δηλαδή τα αντικείμενα της εποπτείας ως μεγέθη και έχει αξιώματα. Τα αντικείμενα αυτά τα αντιλαμβανόμαστε ως χωρικά μεγέθη (μήκος, εμβαδό, όγκος) που παρέχονται ανεξάρτητα από τη Γεωμετρία. Οι Ευκλείδειες κατασκευές δεν μπορούν να εγγυηθούν την αντικειμενική πραγματικότητα της Γεωμετρίας και την αντικειμενικότητά της. Η εξασφάλιση της αντικειμενικότητας γίνεται μόνο μέσω της υπερβατολογικής φιλοσοφίας. Η φιλοσοφία της Γεωμετρίας του Καντ μπορεί να γίνει κατανοητή μέσω του υπόβαθρου δύο γενικών χαρακτηριστικών της φιλοσοφικής του θέσης¹³:

1. της θεμελιώδους διχοτομίας του μεταξύ δύο των γνωστικών ικανοτήτων του νου, της αισθητικότητας / *sensibility* και της κατανόησης / *understanding* και
2. τη θεωρία του χώρου ως καθαρή μορφή της διαίσθησης.

Οι ικανότητες της διαίσθησης και της διάνοιας προηγούνται για τον Καντ από όλες τις άλλες, εντοπίζει τη κύρια θέση μιας εκ των προτέρων μαθηματικής γνώσης και πιο συγκεκριμένα, η καθαρή / *pure* μας εξωτερική λογική για την έννοια του χώρου, μας προσδίδει ένα έδαφος για την κατάκτηση της καθαρής γεωμετρικής γνώσης.

Ποιός είναι λοιπόν ο ρόλος του χώρου στον κλάδο της Γεωμετρίας;

Ο χώρος, στον κλάδο αυτόν, μας παρέχει τη δυνατότητα της “κατασκευής σε καθαρή διαίσθηση” / “*construction in pure intuition*”. Συγκεκριμένα, η χωρική διαίσθηση κατά τον Καντ παίζει απαραίτητο ρόλο στην επιστήμη της Γεωμετρίας. Όπως γνωρίζουμε, ο Καντ αποκλίνει από τον παραδοσιακό ορθολογισμό στον εντοπισμό της έδρας της Γεωμετρίας, συνεπώς δίνει¹⁴ κεντρικό ρόλο σε αυτό που αποκαλεί “καθαρή παραγωγική φαντασία / *pure productive imagination*”.

Ίσως, το σημαντικότερο πρόβλημα που αντιμετωπίζει η ερμηνεία της φιλοσοφίας της Γεωμετρίας του Καντ, είναι να εξηγήσει το πώς, σύμφωνα με αυτόν, η διαίσθηση και η φαντασία συνδέονται με την άμεση αντίληψη των λογικών στοιχείων και πώς μπορεί να αποδώσει πραγματικά καθολική και απαραίτητη γνώση. Για παράδειγμα, σε ένα απόσπασμα της Πειθαρχίας του Καθαρού Λόγου (*Discipline of Pure Reason*), έρχεται σε αντίθεση με τον τρόπο που προέρχεται η φιλοσοφική γνώση ως “λογική γνώση από έννοιες” και η μαθηματική γνώση ως “λογική γνώση από τη κατασκευή εννοιών”. Ο Καντ προσθέτει : *Η κατασκευή μίας έννοιας είναι η παρουσίαση της διαίσθησης που αντιστοιχεί σε αυτή την έννοια a priori.*

Καταλήγει στο ότι η φιλοσοφία περιορίζεται απλώς σε καθολικές έννοιες, τα μαθηματικά δεν μπορούν να επηρεάσουν τίποτα από απλές έννοιες, αλλά αυτό που καταφέρνουν είναι να επιταχύνουν αμέσως τη διαίσθηση, η οποία θεωρεί την έννοια -όχι εμπειρικά-, αλλά *a priori*. Αυτό ακριβώς, ωστόσο, είναι μία καθαρή ή μη εμπειρική διαίσθηση που αντιστοιχεί σε μία γενική ιδέα-μία μοναδική παρουσία

13 MF, σελ.232, παρ.1

14 MF, σελ.232, παρ.3

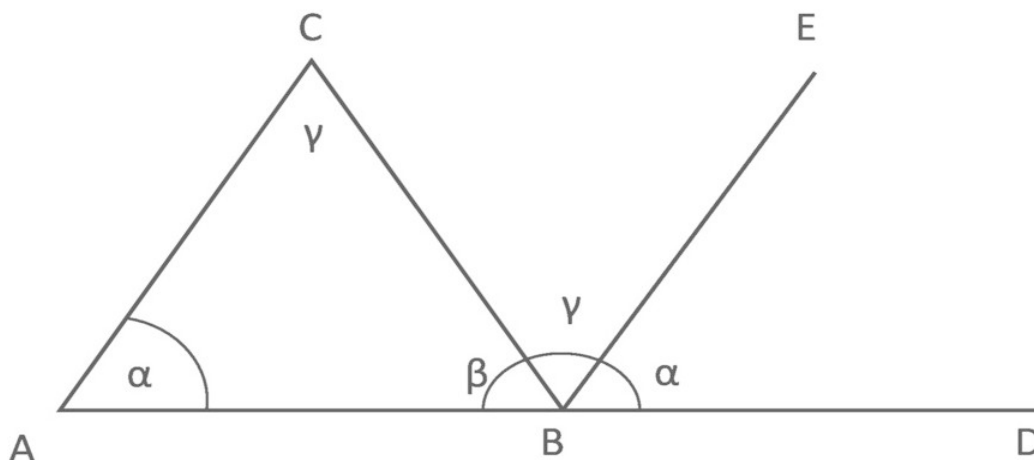
αυτής της έννοιας που παρουσιάζεται a priori; Επιπλέον, πώς μπορεί κάθε μοναδική παρουσία μιας γενικής ιδέας (ανεξαρτήτως πως παράγεται) να είναι πρόσθετη πηγή καθολικής και απαραίτητης γνώσης; Αμέσως μετά της παρουσίασης της πρότασης που ορίζει την κατασκευή μίας έννοιας ως εκ των προτέρων παρουσίαση της αντίστοιχης διαίσθησης, ο Καντ λέει¹⁵:

“Για την κατασκευή μίας έννοιας, απαιτούμε μια μη εμπειρική διαίσθηση, η οποία κατά συνέπεια, είναι ένα μοναδικό αντικείμενο το οποίο όμως πρέπει να εκφράζει καθολική ισχύ στην αναπαράσταση, για όλες τις πιθανές διαισθήσεις που ανήκουν στην έννοια αυτή”. Πώς, όμως, μπορεί η μοναδική αναπαράσταση να εκφράζεται με καθολική ισχύ; Τέτοια προβλήματα αποτελούν αντίθετη πεποίθηση, κοινή σε όλες τις μορφές ορθολογισμού, ότι η μαθηματική γνώση πρέπει να είναι εννοιολογική ή διανοητική σε αντίθεση με το λογικό.

15 MF, σελ.233, παρ.2

1.2.1 - Το παράδειγμα του τριγώνου [JH] [LS2]

Ekthesis



[Figure 3]

Το παράδειγμα του τριγώνου που αναφέρει¹⁶ ο Καντ, που σύμφωνα με τη γνωστή πρόταση του Ευκλείδη το άθροισμα γωνιών τυχαίου τριγώνου ισούται με δύο ορθές, έχει ως αποτέλεσμα να φανεί η αντίθεση των μαθηματικών με τις φιλοσοφικές μεθόδους. Η πρόταση παρουσιάζει ένα τρίγωνο ABC με όλες τις γωνίες οξείες. Προεκτείνουμε την AB έως το συνευθειακό ως προς το A και το B, το D. Επιπλέον, φτιάχνουμε μία παράλληλη στην AC, την BE. Προκύπτει ότι η γωνία CBE είναι ίση με την γωνία γ ως εντός εναλλάξ, όπως επίσης και ότι η EBD είναι ίση με την γωνία α ως εντός εκτός και επί ταυτά. Άρα $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Το τρίγωνο που απεικονίζεται έχει όλες τις γωνίες οξείες, όπως αναφέραμε, αλλά η πρόταση πρέπει να ισχύει για όλα τα τρίγωνα (ορθογώνια, αμβλυγώνια). Η πρόταση του σχήματος, μας δίνει μία μοναδική αναπαράσταση η οποία θα πρέπει να εκφραστεί γενικά και να υπάρξει καθολικότητα. Στο σημείο αυτό παρουσιάζεται πρόβλημα, διότι πώς είναι δυνατό να επέλθει η καθολική ισχύς σε μία τέτοια περίπτωση σύμφωνα με τον Καντ;

Για τον Καντ είναι ζωτικής σημασίας το ζήτημα αυτό. Έστω ότι πιάνουμε το μολύβι και ξεκινάμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο, είτε μέσω απλής φαντασίας είτε μέσω καθαρής διαίσθησης. Γίνεται να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο τρίγωνο χωρίς να ακολουθήσουμε κάποιο μοτίβο (όχι εμπειρικά); Εστιάζει τη προσοχή του στη δράση κατά τη κατασκευή, δηλαδή στην ακολουθία των πράξεων που καταλήγουν στην κατασκευή του σχήματος. Για να υπάρχει καθολικότητα θα πρέπει οι γενικές συνθήκες να είναι ίδιες για όλες τις πιθανές κατασκευές και προφανώς ανεξάρτητες από την υποκειμενικότητα του ατόμου και τις εμπειρίες. Η διαισθητική σύνθεση εμπλέκεται στην επίτευξη του σκοπού, δηλαδή στη κατασκευή ενός τριγώνου χωρίς την “χρήση” εμπειρίας. Το σχήμα του τριγώνου, επομένως, δεν μπορεί να υπάρχει πουθενά παρά στη σκέψη, και αυτό συνεπώς αποτυπώνει έναν κανόνα σύνθεσης. Ο συλλογισμός καθορίζεται από την εμπειρική διαίσθηση, και έτσι το συμπέρασμα σίγουρα δεν μπορεί

¹⁶ JH, σελ.88

να εκφράζει καθολικότητα και απαραίτητες αλήθειες.

1.2.2 - Ο ρόλος του σχήματος / schema

[MF]

Η εμπιστοσύνη του Καντ στον Ευκλείδη είναι πολύ σαφής και , για άλλη μία φορά, είναι φυσικό να στραφούμε σε εργασίες σχετικά με τη συλλογιστική για να αποσαφηνίσουμε την άποψη του Καντ. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να απευθυνθούμε σε αυτό που ονομάστηκε “σχηματικός” χαρακτήρας των διαγραμμάτων της Ευκλείδειας για να προσελκύσει (λογικά) στοιχεία που καταλήγουν σε απαραίτητες και καθολικές έγκυρες γνώσεις. Θα δούμε,ωστόσο,ότι η τεχνική έννοια του τί καλείται σχήμα είναι κεντρικό σημείο στη θεωρία του Καντ για τη γεωμετρική λογική, και επιπλέον, η ιδέα του Καντ για το σχήμα (ή σχηματική αναπαράσταση) είναι διαφορετική από το διάγραμμα (ή διαγραμματική αναπαράσταση) , και το αποτέλεσμα είναι ότι η χωρική αντίληψη υπερβαίνει οτιδήποτε αποδίδεται με διαγραμματική προσεγγιση. Με βάση τη πρόταση σχετικά με το τρίγωνο [Figure 3] που αναφέρθηκε, καθίσταται σαφής ο ρόλος της καθαρής διαίσθησης στη κατασκευή ενός τριγώνου. Γενικά για τον Καντ¹⁷:

“Έχουμε εδώ την απλή λειτουργία της παραγωγικής φαντασίας, που μπορεί να σχεδιάσει τις γραμμές μεγαλύτερες ή μικρότερες και με αυτό το τρόπο επιτρέπεται η συνάντηση τους σε οποιαδήποτε θέση σχηματίζοντας τυχαίες γωνίες.”

Στη πραγματικότητα,τα σχήματα -και όχι οι εικόνες των αντικειμένων- είναι αυτά που βρίσκονται στη βάση των καθαρών λογικών εννοιών. Γενικότερα, καμία εικόνα δεν θα ήταν επαρκής για την έννοια του τριγώνου. Δε θα ήταν, δηλαδή, επιτυχημένη ως προς τη καθολικότητα της έννοιας που την κάνει να ισχύει για όλα τα τρίγωνα. Το σχήμα του τριγώνου δε μπορεί να υπάρχει, παρά στη σκέψη και παρουσιάζει τον κανόνα της σύνθεσης της φαντασίας με τις καθαρές μορφές του χώρου.

[KP]

Το υπερβατολογικό σχήμα είναι ένα προϊόν της παραγωγού φαντασίας η οποία είναι καθαρή σε αντίθεση με την αναπαραγωγό φαντασία που είναι εμπειρική. Ο ρόλος της πρώτης είναι η δημιουργία, ενώ ο ρόλος της δεύτερης είναι να αναπαράγει το ήδη υπάρχον. Η σύνθεση της αντιληπτικής ικανότητας (ή αλλιώς, αν μας επιτρέπεται ο όρος, “αισθητικότητα”) και της διάνοιας γίνεται μέσω της φαντασίας,η οποία αποτελεί την τρίτη πηγή γνώσης. Το προϊόν της παραγωγού φαντασίας, το υπερβατολογικό σχήμα όπως αναφέραμε, πρέπει να είναι ομοειδές με τη κατηγορία και να είναι καθαρό, δηλαδή μη εμπειρικό. Για να λειτουργήσει αυτό και να εκπληρωθούν οι απαιτήσεις, ο Καντ χρησιμοποιεί¹⁸ έναν υπερβατολογικό προσδιορισμό του χρόνου, ως καθαρή εποπτεία, πιο συγκεκριμένα ως μορφή εσωτερικής αίσθησης. Στον χρόνο,ως μορφή εσωτερικής αίσθησης υπάγονται και τα φαινόμενα εξωτερικής αίσθησης.

Συνεπώς, το υπερβατολογικό σχήμα είναι ένας υπερβατολογικός προσδιορισμός του χρόνου. Οι κατηγορίες χωρίς τα αντίστοιχα προς αυτές σχήματα, είναι απλώς λειτουργίες της διάνοιας και δεν αναπαριστούν κανένα αντικείμενο. Μπορούν να αποκτήσουν σημασία μέσω της σχηματοποίησης, μέσω της “αισθητικότητας”, η οποία προσδίδει πραγματικότητα στην διάνοια αλλά συγχρόνως την υποβάλλει σε περιορισμούς.

17 MF, σελ.239

18 KP, σελ.7

1.2.3 - Συλλογιστική Γεωμετρίας [JH]

Ο Καντ χρησιμοποιεί τις λέξεις “διαίσθηση” και “κατασκευή” με μία εντελώς ξένη έννοια και επομένως, πολλοί φιλόσοφοι αρνήθηκαν να αφομοιώσουν τις λέξεις αυτές. Φάνηκε αρχικά παράλογο να εξισώνει την ιδέα για την μαθηματική μέθοδο με ορισμένους τρόπους συλλογισμού με βάση την (τότε) σύγχρονη λογική. Αυτή η αντίρρηση, ωστόσο, είναι μία ψευδαίσθηση διαφορετικής προοπτικής. Στο ένα χέρι, η έννοια της λογικής του Καντ ήταν πολύ στενή, αποτελούμενη ουσιαστικά μόνο από συλλογισμό / reasoning. Από την άλλη, ήταν τέλεια εξοικειωμένος με πληθώρα λογικών συμπερασμάτων πρώτης τάξεως, συμπεριλαμβανομένων πολλών εφαρμογών συλλογιστικής στα μαθηματικά.

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να κάνουμε μία ιστορική αναδρομή και να ριξουμε μια προσεκτική ματιά στον τρόπο με τον οποίο ο Ευκλείδης παρουσίαζε ένα γεωμετρικό θεώρημα. Αρχικά, εισάγει μία γενική πρόταση με την οποία, μέσω της λογικής του Αριστοτέλη, δεν μπορεί να κάνει κάτι παραπάνω. Η ιστορία της φιλοσοφίας των Μαθηματικών χαρακτηρίζεται από ανεπιτυχείς προσπάθειες να μετατρέψει την Ευκλείδεια σε μία συλλογιστική μορφή. Η γεωμετρική συλλογιστική είναι ποσοτική και σχεσιακή με τα αντικείμενα, αλλά για την Αριστοτελική λογική αρκεί μοναδική συλλογιστική πορεία. Ούτε λοιπόν ο Ευκλείδης (ή ο Καντ) διέθεταν άλλη λογική τεχνική για τον τελικό σκοπό. Έπρεπε λοιπόν, με κάποιο τρόπο να μειώσουν την εξαρτώμενη (από ποσοτικούς παράγοντες) συλλογιστική. Ο τρόπος που επιτυγχάνεται αυτό είναι μέσω της *θεσμοθέτησης*.

Ekthesis, Kataskeye & Apodeixis

Η *ekthesis* δεν είναι απλώς ένα παιδαγωγικό τέχνασμα ή μία απεικόνιση. Δεν γίνεται για να δημιουργήσει κάποιο είδος μη λογικής “διαγραμματικής” συλλογιστικής. Αν προσπαθήσουμε να επεξεργαστούμε τη λογική των επιχειρημάτων του Ευκλείδη, θα δούμε ότι το βήμα αυτό ισοδυναμεί με απόδειξη. Για τον λόγο αυτόν (ή σκοπό) ο Ευκλείδης έκανε αναφορές σε γεωμετρικά αντικείμενα, γιατί αλλιώς θα έπρεπε να κάνει χρήση άλλων αντικειμένων τα οποία θα βοηθούσαν για τη διαισθητική κατασκευή και συνεπώς την απόδειξη / λύση.

Η *απόδειξη / apodeixis* περιλαμβάνει λογική και τίποτα παραπάνω. Η ίδια η λέξη χρησιμοποιήθηκε και απ' τον Αριστοτέλη για αποδείξεις σε λογικά πλαίσια. Ενεργοποιείται η σχέση μεταξύ των αντικειμένων. Υπό το πρίσμα αυτής της Ευκλείδειας πρακτικής, η σύνοψη του Καντ, σχετικά με τη μαθηματική μέθοδο, μπορεί να φανεί προφανής και συνεπής. Αυτό δείχνει τη σημασία της παραδοσιακής γεωμετρικής ορολογίας στα γραπτά του Καντ. Επίσης, ο Καντ χρησιμοποιεί τους όρους “μεταφυσική έκθεση” και “υπερβατολογική έκθεση” στα επιχειρήματα των γραπτών του, αφού θεωρεί τον χώρο -όχι σαν έννοια- αλλά σαν μία διαίσθηση, έναν “τόπο” για αναπαράσταση ενός μοναδικού αντικειμένου.

Συνεπώς, στις εκθέσεις του κινείται από το στάδιο να σκεφτεί μία ιδέα, σε αυτό του να εξετάσει αν το συγκεκριμένο αντικείμενο εμπίπτει σε αυτή την ιδέα, όπως δηλαδή ο Ευκλείδης στην *ekthesis* του. Δεδομένου, όπως αναφέρθηκε, ότι η απόδειξη είναι καθαρά λογική κατανοούμε ότι η μαθηματική συλλογιστική πραγματοποιείται μέσω της έκθεσης και της κατασκευής / *kataskeye*. Αυτό που συμβαίνει στα “μαθηματικά” μέρη μίας πρότασης είναι η θεσμοθέτηση και η εισαγωγή αντικειμένων για την παρουσίαση κάποιων γεωμετρικών εννοιών, που μπορεί να μη μοιάζει με τη λογική συλλογιστική.

Συμπεράσματα

Η ιδέα της συνθετικής a priori γνώσης μπορεί να θεωρηθεί ως η απάντηση του Καντ στην αντιμαχία ορθολογισμού και εμπειρισμού. Παρουσιάζεται ως μία ειδική μορφή γνώσης που δεν προέρχεται από την εμπειρία, αλλά είναι προϋπόθεση για κάθε εμπειρία. Η καθαρή εποπτεία ενός τριγώνου, κύκλου ή οποιουδήποτε άλλου χωρικού αντικειμένου είναι δυνατή καθώς αυτά τα αντικείμενα έχουν κατασκευαστεί από τη φαντασία. Δηλαδή, οι a priori κατασκευές της φαντασίας αποτελούν συνθήκες ώστε να εποπτεύουμε χωρικά αντικείμενα. Οι γεωμετρικές έννοιες καθορίζουν το χωρικό περιεχόμενο τους καθώς κατασκευάζουμε εποπτικά ένα τρίγωνο, βρισκόμαστε στη διαδικασία δράσης της παραγωγικής φαντασίας, η οποία σαφώς ορίζει ένα μέρος του χωρικού περιεχομένου. Με τη βοήθεια του σχήματος της εκάστοτε έννοιας, μπορούμε να εξακριβώσουμε τις a priori ιδιότητες των εποπτειών που συγκροτούν τη Γεωμετρία. Ο Καντ θεωρούσε ότι οι έννοιες δεν υπάρχουν ως αφηρημένες οντότητες. Ο νους έχει τη δύναμη να δημιουργήσει έννοιες, αν και στη δημιουργική του αυτή ικανότητα δεν μένει ελεύθερο αλλά υπόκειται σε κάποιους περιορισμούς.

Για τον Καντ¹⁹ η καθαρή διαίσθηση του χώρου, επιτρέπει τη καθαρή διαίσθηση και των γεωμετρικών αντικειμένων. Στο βαθμό που τα χωρικά μεγέθη που περιγράφονται από τη Γεωμετρία αντιπροσωπεύουν χωρικά χαρακτηριστικά τρισδιάστατων αντικειμένων (εξατομικεύοντας αντικείμενα στο χώρο), ακολουθεί μία περαιτέρω διαίσθηση του χώρου που επιτρέπει τη κατανόηση -τουλάχιστον ορισμένων- χαρακτηριστικών των χωρικών αντικειμένων.

Δεν μπορούμε να έχουμε σύνδεση μεταξύ της θεωρίας του χώρου του Καντ ως καθαρή διαίσθηση και της θεωρίας της γεωμετρικής συλλογιστικής. Αυτό γιατί, στις αναγνώσεις μας υποθέτουμε ότι ο Καντ σκόπευε να υπερασπιστεί τη θεωρία του για το χώρο ως προϋπόθεση για να παρέχει την καλύτερη εξήγηση για τις γνώσεις της Γεωμετρίας και για τη κατασκευή γεωμετρικών αντικειμένων ώστε να διερευνηθούν οι ιδιότητες τους. Τέλος, ο Καντ υποστηρίζει²⁰ ότι η γεωμετρική γνώση βασίζεται ουσιαστικά στις αρχές του χώρου ως καθαρή διαίσθηση και η αναγνώριση των αρχών αυτών στηρίζει την πρακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

19 LS2, σελ.214

20 LS2, σελ.215

1.3 - Άλγεβρα & Αριθμητική

[DS]

Οι απόψεις του Καντ για την Άλγεβρα αντικατοπτρίζουν τη στενή σχέση που έχει με την αριθμητική και, επίσης ταυτίζει την άλγεβρα με την γενική αριθμητική. Η ταύτιση αυτή γίνεται γνωστή σε μία επιστολή προς τον Schulz το 1788. Υπάρχει μία ισχυρή σύνδεση αριθμητικής και άλγεβρας στο μυαλό του. Ωστόσο, η άλγεβρα δεν εφαρμόστηκε μόνο στον υπολογισμό αριθμών, αλλά και στη Γεωμετρία. Ο ρόλος της, λοιπόν, επεκτάθηκε και στη πρώιμη σύγχρονη περίοδο ο Viète (1540-1603) εφάρμοσε την άλγεβρα σε γεωμετρικά προβλήματα, όπως έκανε και ο Descartes στην ανάπτυξη της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Η άλγεβρα είχε εμφανιστεί ως μία γενική μέθοδος που εφαρμόζεται στην επίλυση προβλημάτων που αφορούν μεγέθη, αλλά εξελίχθηκε σε μία ακόμα πιο γενική μέθοδο που συμβάλλει στην επίλυση προβλημάτων. Αυτή η γενικότητα οδήγησε σε μία “συμφιλίωση” των Ευκλείδειων και αριθμητικών παραδόσεων και αύξησε τις ελπίδες για καθολικά μαθηματικά. Ο Καντ είχε πίστη στην άλγεβρα ως προς τη καθολικότητα των μαθηματικών. Στην §4 της έρευνας του αναφέρει, ότι το αντικείμενο των μαθηματικών είναι το μέγεθος και ότι η άλγεβρα είναι το γενικό δόγμα του μεγέθους. Συγκεκριμένα, το 1789 σε επιστολή προς τον Carl Rheinhold, ο Καντ αναφέρει²¹ ότι :

- η άλγεβρα αφορά απλά μεγέθη , χωρίς ιδιότητες
- η άλγεβρα επιτρέπει την αναπαράσταση των απλών μεγεθών και των αναλογιών μεταξύ τους.

Παρ' όλα αυτά υπάρχουν και αρκετές περιπτώσεις και απόψεις που έρχονται σε αντίθεση με τον ισχυρισμό ότι τα αντικείμενα της άλγεβρας είναι τα μεγέθη. Οι ισχυρισμοί αυτοί, υποδηλώνουν την άλγεβρα ως χώρο χωρίς αντικείμενα, ή στην καλύτερη περίπτωση έναν χώρο ο οποίος παρέχει την γενική έννοια ενός πράγματος.

Στην Πειθαρχία του Καθαρού Λόγου (Discipline of Pure Reason) ο Καντ γενικά θεωρεί²² ότι η άλγεβρα εξηγεί τη σύσταση ενός αντικειμένου το οποίο θα πρέπει να θεωρηθεί με την έννοια του μεγέθους. Όπως αναφέρει στην επιστολή του προς τον Rheinhold (1789), η άλγεβρα αφορά απλά μεγέθη χωρίς ιδιότητες. Συνεπώς, η άλγεβρα αφαιρεί εξ' ολοκλήρου τη σύσταση του αντικειμένου που θα έπρεπε να θεωρηθεί με την έννοια του μεγέθους. Έτσι λοιπόν, *η άλγεβρα έχει ένα αντικείμενο, το μέγεθος το οποίο είναι το αντικείμενο όλων των μαθηματικών.* Το τελευταίο είναι πολύ σημαντικό διότι η θεωρία του Καντ για τα μεγέθη βασίζεται, τελικά, στην Θεωρία των Αναλογιών, άρα και η κατανόηση της άλγεβρας βασίζεται σε αυτή τη θεωρία.

21 DS, σελ.549

22 DS, σελ.549, παρ.3

1.3.1 - Άλγεβρα και η Θεωρία των Αναλογιών

Θεωρία Αναλογιών του Ευδόξου [GM]

Αρχικά, για να γίνουν κατανοητά τα επόμενα θα κάνουμε μία μικρή αναφορά στην Θεωρία των Αναλογιών του Ευδόξου. Η βασική συνεισφορά του Ευδόξου (408-342 π.Χ.) ήταν η διατύπωση της *Θεωρίας των Αναλογιών*. Στην ουσία η θεωρία αυτή, ήταν η εξέλιξη της ανολοκλήρωτης πυθαγόρειας γεωμετρίας, η οποία δεν περιείχε ασύμμετρες ποσότητες. Ο Ευδόξος παρατήρησε πως σε αρκετές περιπτώσεις, ο λόγος δύο ποσοτήτων δεν ήταν ίσος με κανένα γνωστό κλάσμα. Έγινε λοιπόν, σαφής η ύπαρξη άρρητων αριθμών.

Πιο αναλυτικά, στο βιβλίο V των Στοιχείων του Ευκλείδη, γίνεται εκτενής αναφορά και αναπτύσσεται η θεωρία του Ευδόξου της οποίας ο ορισμός των ίσων λόγων (γνωστός ως 5ος ορισμός), είναι η πηγή για την σύγχρονη θεώρηση των ασύμμετρων μεγεθών. Τα Μαθηματικά μπορούν να θεωρήσουν για πρώτη φορά ασύμμετρα μεγέθη, δηλαδή μεγέθη των οποίων ο λόγος δεν ισούται με το πηλίκο δύο ακέραιων. Απέδειξε ότι οι άρρητοι μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια κατάλληλων προσεγγίσεων από ρητούς.

Εισαγωγή και το υπόβαθρο [DS]

Η σύνδεση μεταξύ της άλγεβρας και την θεωρίας των αναλογιών του Ευδόξου, δεν είναι δύσκολη να επιτευχθεί. Η θεωρία των αναλογιών, που αρχικά παρουσιάζεται στα βιβλία 5&6 του Ευκλείδη, προχωρά χωρίς αναφορά σε αριθμούς και δεν βασίζεται στην χρήση συμβολικής σημειογραφίας για τις αποδείξεις του. Παρ' όλα αυτά, πολύ συχνά στα παραπάνω βιβλία, υπάρχει η χρήση του τίτλου “γεωμετρική άλγεβρα” στις προτάσεις, διότι δημιουργούν σχέσεις μεταξύ μεγεθών που αντιστοιχούν σε “σημεία” της άλγεβρας. Οι Έλληνες μαθηματικοί, λοιπόν, έδωσαν εξ' ολοκλήρου γεωμετρική ερμηνεία σε πολλές περιπτώσεις και η θεωρία των αναλογιών που βρέθηκε στα βιβλία του Ευκλείδη ονομάζεται, όπως προείπαμε, “γεωμετρική άλγεβρα” ιδίως επειδή εφαρμόζεται από ευκλείδιες σε γεωμετρικές σχέσεις και η θεωρία από μόνη της αφορά μεγέθη.

Η συμφιλίωση της αριθμητικής άλγεβρας και την γεωμετρικής άλγεβρας κατέστησε δυνατό να δούμε την άλγεβρα ως μία καθολική μέθοδο που εξέφραζε την ευδοξιακή θεωρία των λόγων. Μερικοί από τους πρώιμους-σύγχρονους μαθηματικούς τόνισαν τη σύνδεση μεταξύ της άλγεβρας των αριθμών του Διόφαντου και της ελληνικής θεωρίας των αναλογιών. Έχουμε σημειώσει ότι η άλγεβρα χρησιμοποιεί εξισώσεις στην ανάλυση των προβλημάτων. Ο Viette συνδέει άμεσα αυτήν την αντίληψη με τη θεωρία του Ευδόξου και δηλώνει ότι :

“αναλογία μπορεί να ονομαστεί η κατασκευή μίας εξίσωσης, και εξίσωση η λύση μίας αναλογίας”. Πιο συγκεκριμένα, έθεσε μία κοινή μέθοδο για τον υπολογισμό των αριθμών και μία ευδοξιακή θεωρία αναλογιών για τα μεγέθη.

Ο Descartes μοιράστηκε παρόμοιες απόψεις και ανέπτυξε την αναλυτική γεωμετρία εφαρμόζοντας την άλγεβρα σε γεωμετρικά προβλήματα. Ταυτόχρονα, σκέφτηκε τις αναλογίες ως “κλειδί” για μία μαθηματική προσέγγιση και κατανόηση του κόσμου. Σκέφτηκε την άλγεβρα ως “mathesis

universalis”, η οποία είναι μία γενική θεωρία αποτελούμενη από αναλογίες και εξισώσεις. Έπειτα, ο Wolff ανέπτυξε και αυτός με τη σειρά του μία σύνδεση της άλγεβρας και της θεωρία των αναλογιών και τόνισε τη σημασία του τελευταίου για τα μαθηματικά. Προσθέτει μία πλήρη ανεξάρτητη ενότητα σχετικά με τις αναλογίες και δηλώνει πως η θεωρία των αναλογιών είναι η ψυχή των μαθηματικών.

Η άποψη του Καντ

Αυτό ακριβώς ήταν το πρώιμο-σύγχρονο υπόβαθρο για τη σκέψη του Καντ και με βάση τα παραπάνω βοηθά στην περαιτέρω εξήγηση. Αυτό, γιατί ο Καντ εξισώνει την άλγεβρα με ένα γενικό δόγμα μεγεθών και ταυτόχρονα ο χρόνος στηρίζει τη θεωρία του για τα μεγέθη στην Θεωρία των Αναλογιών του Ευδόξου. Στην Πειθαρχία του Καθαρού Λόγου, για παράδειγμα, αναφέρει ότι η άλγεβρα:

“ορίζει την γενική έννοια των μεγεθών σύμφωνα με τις διαφορετικές αναλογίες τους.....” (CPR, A717 / B 745). Αργότερα στην Πειθαρχία του Καθαρού Λόγου, δηλώνει ότι η διαδικασία των μαθηματικών που ασχολούνται με την άλγεβρα και τις εξισώσεις είναι αυτό που “αντιπροσωπεύει σημάδια εννοιών, ειδικά αυτά των λόγων των μεγεθών” (CPR, A734 / B745). Στη επιστολή του προς τον Rheinhold, ο Καντ δίνει έμφαση στις αναλογίες και αναφέρει²³:

“Ο μαθηματικός δεν μπορεί να κάνει τον παραμικρό ισχυρισμό για οποιοδήποτε αντικείμενο χωρίς να το εκθέτει στην διαίσθηση”

Συνοψίζοντας, ο Καντ θεωρεί ότι η άλγεβρα, δηλαδή η γενική αριθμητική εκφράζει την θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου. Κατά αυτή την άποψη, η γεωμετρία “υποτάσσεται” στην αριθμητική. Η άλγεβρα θεωρείται η καθολική αριθμητική, και η γεωμετρία εφαρμόζει τους καθολικούς ισχυρισμούς της αριθμητικής στα αντικείμενα της.

1.3.2 - Αριθμητική & Αριθμοί

Με βάση τα παραπάνω λοιπόν, ο Καντ φαίνεται να στηρίζει τη φιλοσοφία του για τα μαθηματικά σε μία θεωρία μεγεθών που αντικατοπτρίζει την ευδοξιακή θεωρία των αναλογιών. Η προσέγγιση αυτή, προτείνει μία “απλή” αναφορά στη αριθμητική, η οποία αφομοιώνει διακριτά μεγέθη στην θεωρία του Καντ για τα συνεχόμενα μεγέθη και ερμηνεύει τους αριθμούς ως μήκη γραμμών. Ωστόσο υπήρξαν τρία προβλήματα με την απόδοση αυτής της προσέγγισης του Καντ²⁴:

- Το πρώτο και βασικό πρόβλημα ήταν ότι ο Καντ δεν εξηγεί την πηγή που μας δίνει τη γνώση των αριθμών που απευθύνονται έπειτα στην γνώση των μηκών. Αντ' αυτού, οι απόψεις του για την αριθμητική γνώση προσεγγίζει περισσότερο τα διακριτά μεγέθη, όπως δάχτυλα, τελείες κ.ά..

*- Η δομή της αριθμητικής βασίζεται στην σύνθεση διακριτών και ασυνεχών μονάδων -
(CPR, B 15, A 164 / B 205, A170–71/B 212, A 240 / B 299; 4:283)*

Ο Καντ επιτρέπει λογικούς αριθμούς οι οποίοι μπορούν να εκφραστούν ως αναλογίες δύο αριθμών που αποτελούνται από μονάδες. Επίσης, υποστηρίζει ότι υπάρχει ένα είδος σύνθεσης μέσω της οποίας μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη σύνθεση διακριτών και αποσυνδεδεμένων ενοτήτων σε συλλογές, και επιπλέον, θεωρεί ότι αυτή η αριθμητική σύνθεση διαφέρει από τη σύνθεση που παράγει την αναπαράσταση ενός συνεχούς μεγέθους στη σχεδίαση μίας γραμμής. Οι κατηγορίες της ποσότητας παρέχουν μία μερεολογική βάση για τα μαθηματικά αφού

23 DS, σελ.551

24 DS, κεφ.5, σελ.552

μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη γνώση των σχέσεων διακριτών και συνεχών μεγεθών. Επομένως, δεν επιχειρεί να αφομοιώσει άμεσα την αριθμητική στην θεωρία των αναλογιών με τη σκέψη των αριθμών ως γραμμές ή μονάδες μέτρησης μήκους. Έτσι, στις διαλέξεις του για τα μαθηματικά, αναφέρει την αριθμητική ως προς τις συλλογές διακριτών μονάδων.

- Το δεύτερο πρόβλημα ήταν η αναφορά του στην *αριθμητική παράδοση*, η οποία ήταν διακριτή από την ευκλείδεια παράδοση. Όπως σημειώθηκε, ο Καντ υποστήριζε την ελληνική αντίληψη του αριθμού ως συλλογή μονάδων. Αυτή την αντίληψη τη μοιράζονται και οι δύο παραδόσεις, αριθμητική και ευκλείδεια. Όμως, οι δύο προσεγγίσεις διέφεραν ως προς τους σκοπούς τους. Τελικά, είδαμε ότι η αριθμητική παράδοση εξελίχθηκε σε *άλγεβρα*, η οποία κατά τη γνώμη του Καντ εξέφραζε τη θεωρία των αναλογιών. Έτσι, ο Καντ υποστηρίζει, παρά την απόκλιση τους, ότι η αριθμητική παράδοση και η ευκλείδεια θεωρία των αναλογιών είναι δύο δρόμοι προς τον ίδιο σκοπό των μαθηματικών, εκφράζουν μία άποψη βασισμένη στην φύση των μεγεθών.
- Το τρίτο πρόβλημα αφορούσε την *ομοιογένεια*. Από μόνες τους οι έννοιες δεν μπορούν να αντιπροσωπεύουν αυστηρή αριθμητική διαφορά, χωρίς ποιοτική διαφορά. Αντιθέτως, η διαίσθηση μπορεί. Η διαίσθηση μπορεί να μας επιτρέψει να αναπαραστήσουμε την αυστηρή ομοιογένεια που απαιτείται για την μαθηματική γνώση. Οι ομοιογενείς μονάδες διαφέρουν μεταξύ τους αριθμητικά, αλλά όχι ποιοτικά. Ο Καντ δεν καθιστά αυστηρά την απαίτηση για ομοιογένεια αλλά το προτείνει²⁵, διότι η αριθμητική διαφορά μεταξύ ποιοτικά πανομοιότυπων αντικειμένων (όπως δύο σταγόνες νερό) στηρίζονται στην αριθμητική διαφορά τους στον χώρο.
 - *Η πολλαπλότητα / multiplicity^{l*} και η αριθμητική διαφορά δίνονται από τον ίδιο χώρο ως συνθήκη των εξωτερικών εμφανίσεων.* -

Για ένα μέρος του χώρου, αν και μπορεί να είναι εντελώς παρόμοιο και ίσο με το άλλο, είναι έξω απ' αυτό και γ' αυτό τον λόγο είναι διαφορετικό μέρος (*CPR, A264 / B320*). Ο Καντ πιστεύει ότι ο ίδιος ο χώρος μας δίνει την πολλαπλότητα και την αριθμητική διαφορά. Η αυστηρή ομοιογένεια του χώρου μας επιτρέπει να διαφοροποιήσουμε αυτά τα διακριτά και αποσυνδεδεμένα ποιοτικά ταυτόσημα αντικείμενα. Επίσης, στο πλαίσιο ότι υπάρχουν αυστηρά ομοιογενή μέρη του χώρου, αυτά μπορούν να συντεθούν ώστε να αποτελέσουν μεγαλύτερους χώρους. Αυτή ακριβώς η σύνθεση βρίσκεται στη βάση της μαθηματικής ομοιογένειας και προϋποθέτει την ευκλείδεια αντίληψη των μεγεθών. Χωρίς αυστηρή ομοιογένεια δεν θα μπορούσαμε να αποκτήσουμε αριθμητικές έννοιες.

Αυτά είναι τα χαρακτηριστικά της φιλοσοφίας του Καντ. Η αντίληψη του αριθμού με βάση μία μονάδα, συνεπάγεται στο ότι δεν μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον αριθμό $2^{1/2}$ ως ολοκληρωμένη έννοια. Επίσης, ο Καντ δεν αφομοιώνει απλώς την αριθμητική στην θεωρία των μεγεθών με τη σκέψη ως ένα είδος μέτρησης. Η θεωρία του Καντ βασίζεται:

- στην ανάπτυξη της αριθμητικής στην *άλγεβρα* και
- στην ερμηνεία της *άλγεβρας* ως έκφραση της ευδοξιακής θεωρίας

Η έφεση του στην θεωρία των αναλογιών του επιτρέπει να αποδώσει έναν ενοποιημένο απολογισμό της γνώσης μας για τα διακριτά και τα συνεχή μεγέθη και την γεωμετρική αριθμητική. Τέλος, φαίνεται η άποψη του Καντ ότι η αριθμητική γνώση απαιτεί την αναπαραστάση ενός αυστηρά ομοιογενούς είδους και τονίζει τον ρόλο της διαίσθησης στην φιλοσοφία της αριθμητικής.

25 DS, κεφ.5, σελ.556

^[*]Πολλαπλότητα στα Μαθηματικά : ορίζεται ως ένας τοπολογικός χώρος που τοπικά μοιάζει με τον Ευκλείδειο χώρο κοντά σε κάθε σημείο. Πιο συγκεκριμένα, κάθε σημείο n -διάστατης πολλαπλότητας έχει μία γειτονιά που είναι ομοιομορφική με ένα ανοιχτό υποσύνολο του n -διάστατου Ευκλείδειου χώρου. Μονοδιάστατες πολλαπλότητες περιλαμβάνουν γραμμές και κύκλους. Οι δισδιάστατες πολλαπλότητες ονομάζονται επίσης και επιφάνειες, όπως το επίπεδο, η σφαίρα και οι τόροι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ- “Αισθητική”

“If mathematics is the study of purely imaginary states of things, poets must be great mathematicians”

-Charles Sanders Peirce-

“I prove a theorem and the house expands: the window jerk free to hover near the ceiling , the ceiling floats away with a sigh”

-Rita Dove-

2.1 - Εισαγωγή Γενική - Φαντασία, Ομορφιά & Μαθηματικά

2.1.1 - Φαντασία και Μαθηματικά [ASHST]

Πριν χρόνια, ο Keith Devlin ανέφερε²⁶ ότι τα μαθηματικά αφορούν την απόδοση του αόρατου ορατού και για την επινόηση συμβολικών κόσμων στους οποίους το μυαλό μπορεί να εισέλθει.

“Υπάρχει σχέση στο να κάνεις μαθηματικά και να διαβάζεις ένα μυθιστόρημα;”, ο Keith Devlin απαντά: “Πολύ πιθανό”. Η απεικόνιση ενός ποιήματος, για παράδειγμα, απαιτεί ένα παρόμοιο είδος νοητικής διαδικασίας σαν να φανταζόμαστε το αποτέλεσμα μίας σύνθετης μαθηματικής παράστασης. Τα μαθηματικά οδηγούν στην απόδραση από την πραγματικότητα. Όχι πως η λογοτεχνία έχει να κάνει κυριολεκτικά με την απόδραση από την πραγματικότητα, αλλά γενικά οι εικαστικές και οι παραστατικές τέχνες, καθώς και ο κλάδος των ανθρωπιστικών επιστημών, μοιράζονται με τα μαθηματικά έναν κοινό στόχο: αυτόν της περιγραφής ή της αντιμετώπισης του “πραγματικά πραγματικού” / really real.

Τα ερωτήματα της *πραγματικότητας*, της *αλήθειας* και της *βεβαιότητας* βρίσκονται στον πυρήνα της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Μας παρέχουν τα μαθηματικά από μόνα τους την είσοδο στην πραγματικότητα, την αλήθεια και την βεβαιότητα; Τα μαθηματικά αφορούν την πραγματικότητα, και πιο συγκεκριμένα πολλές πραγματικότητες. Αφορούν σχετικές αλήθειες και ασάφειες. Στην ουσία το να ασχολείσαι με πραγματικά μαθηματικά, και όχι με απλούς υπολογισμούς (η διαφορά είναι τεράστια), είναι μία άσκηση της *φαντασίας*, και η φαντασία μία άσκηση αφαιρετικής ικανότητας.

Είναι τα μαθηματικά αντικείμενα ή υπερβατολικές οντότητες; Υπάρχουν ήδη, όπως στηρίζουν οι Πλατωνικές ιδέες, και “περιμένουν” να τις ανακαλύψουμε ή είναι ανθρώπινα κατασκευάσματα / εργαλεία; Αυτά τα ερωτήματα εμπνέουν πολλούς τομείς και μας δημιουργούν πληθώρα ερωτήματα σχετικά με την προσέγγιση μας και τη γνώση μας γι' αυτά. Αρκετοί φιλόσοφοι, όπως ο Πλάτωνας και αργότερα ο Καντ, θεωρούν τα καθαρά μαθηματικά ως μέρος των μορφών του κόσμου και είναι προσβάσιμα μέσω της αιτίας. Άλλοι φιλόσοφοι, όπως ο Αριστοτέλης, δεν έβλεπαν τα μαθηματικά ως κάτι ξεχωριστό από τον κόσμο των αισθήσεων, αλλά ως τον τρόπο ή το εργαλείο που εκτελεί τη σκέψη.

Ο Giordano Bruno (1548-1600), πίστευε²⁷ ότι τα μαθηματικά, κυρίως η Γεωμετρία, είναι ο σύνδεσμος ανθρώπινου και ουράνιου κόσμου. Ο Γαλιλαίος και ο Kepler, πρότειναν²⁸ μία θεωρία που υποστηρίζει ότι το σύμπαν *-γράφτηκε στα μαθηματικά-*. Η σταδιακή ενεργοποίηση αυτών των ιδεών, και όχι μόνο αυτών, έφεραν την ανάπτυξη της φιλοσοφίας των μαθηματικών, και πιο συγκεκριμένα τον 19ο και στις αρχές του 20ου αιώνα ανακάλυψαν τη σύνδεση των μαθηματικών και της λογικής (Russel, C.S. Peirce, Carnap). Αργότερα τον 20ο αιώνα, η σύνδεση μαθηματικών και γλώσσας αύξησε τη δραστηριότητα σε τομείς όπως γλωσσολογία, σημειολογία, επιστήμη υπολογιστών και μετέπειτα η “φορμαλιστική” άποψη των μαθηματικών που προέκυψε, έβλεπε τα μαθηματικά ως αξιώματα, σύμβολα και οντότητες

26 ASHST, σελ.1

27 ASHST, σελ.3

28 ASHST, σελ.3, παρ.2

της αριθμητικής Peano και εν τέλει να αποτελούν μία σειρά από κανόνες παιχνιδιού. Αντίθετη με αυτή τη θέση ήταν η *διαισθητική* θέση, η οποία προσπαθεί να καθιερώσει τα μαθηματικά ως ένα σύστημα νοητικών κατασκευών που προκύπτουν απ' όσα μπορεί να συλλάβει και να αποδείξει ένας “πεπερασμένος” άνθρωπος.

Ο ρόλος της φαντασίας

Πολλοί κλασικοί, αλλά και σύγχρονοι φιλόσοφοι ασχολήθηκαν με τον ρόλο της φαντασίας στον τομέα των μαθηματικών. Η φαντασία, κατά πολλούς, ορίζεται ως *η ικανότητα που συνεισφέρει στην παραγωγή εικόνων για πράγματα τα οποία δεν υπάρχουν*. Η “εικονική” ποιότητα φέρνει τη φαντασία κοντά με την ικανότητα της μνήμης, ενώ ταυτόχρονα την διακρίνει από την αντίληψη. Σε όλη τη κλασική και μεσαιωνική αφήγηση η φαντασία εμφανίζεται ως μεσαία ικανότητα μεταξύ της αίσθησης της αντίληψης και της ορθολογικής διάνοιας (rational intellection). Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη η φαντασία “*δεν είναι σκέψη, αλλά απαραίτητη ώστε να πραγματοποιηθεί κάθε είδους σκέψη*”. Ποιά είναι η σχέση της με τα μαθηματικά; Ένα επίμονο μαθηματικό κύμα, μία φιλοσοφική παράδοση συνδέει τα μαθηματικά με τη φαντασία. Στο “*De memoria et reminiscencia*” και αναμνήσεως, ο Αριστοτέλης υποστηρίζει ότι η φαντασία παρέχει τις εικόνες που είναι απαραίτητες για κάθε σκέψη και στη συνέχεια χρησιμοποιεί γεωμετρικά διαγράμματα και αναπαραστάσεις για να γίνουν κατανοητές οι σκέψεις αυτές. “*Χωρίς εικόνες, η σκέψη είναι αδύνατη*”.

Αξιοσημείωτο είναι το σχόλιο του Πρόκλου (412-485), ο οποίος θεωρείται νεοπλατωνικός φιλόσοφος, προς τον Ευκλείδη:

[Η κατανόηση περιέχει ιδέες, τις οποίες δεν μπορείς να δεις όταν αυτές τυλίγονται, όμως τις ξεδιπλώνει και τις εκθέτει η φαντασία.....

Έτσι, η γεωμετρία εμφανίζεται με τη βοήθεια της φαντασίας και κατ' επέκταση οι συνθέσεις και οι διαιρέσεις των μορφών είναι φανταστικές]

Ακόμα και ο Descartes που έτεινε να μειώσει τις γεωμετρικές σχέσεις με τα αλγεβρικά σύμβολα και τις εξισώσεις, υποστήριξε ότι η φαντασία είναι το μέρος όπου οι αισθητηριακές εικόνες μπορούν να συναντήσουν την πνευματική σκέψη και τόσο η αριθμητική, όσο και η γεωμετρία, παρέχει τις κατάλληλες συνθήκες για να συμβεί αυτό. Αν υιοθετήσουμε την άποψη του Rudolf Carnap (1891-1970) τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η φαντασία μας επιτρέπει να περάσουμε από έναν τομέα αφήγησης (φιλοσοφία, ψυχολογία, λογοτεχνία) σε έναν άλλον, όπως τα μαθηματικά. Διευκολύνει λοιπόν, τη μετάβαση σε συστήματα εξήγησης που αρχικά φαίνονται ασυμβίβαστα, και εν τέλει η φαντασία επιτρέπει την εμφάνιση νέων σκέψεων, νέων επιχειρημάτων και νέων εξηγήσεων. Στο σημείο αυτό προκύπτει μία δυσκολία, που αφορά το ερώτημα εάν από μόνη της η φαντασία είναι αρκετή ώστε κατά τη μετάβαση μας από ένα σύστημα γνώσης σε ένα άλλο να κατακτήσουμε τη γνώση; Αρκεί η φαντασία ώστε να κατανοηθεί ένα πολύπλοκο μαθηματικό πρόβλημα στη μετάβαση μας από ένα πολύ πιο απλό λεκτικό πρόβλημα των παιδικών βιβλίων; Είναι φανερό η δυσκολία και γι' αυτό το λόγο μπορούμε να γενικεύσουμε και να περιγράψουμε τη φαντασία ως *την ικανότητα για εφεύρεση νέων προτάσεων για τον κόσμο, αντλώντας πληροφορίες από προτάσεις που ήδη γνωρίζουμε*. Με αυτό τον ορισμό, η φαντασία θα διευκόλυνε ένα είδος συλλογιστικής σκέψης, μεταξύ διάφορων κλάδων, δανειζόμενη στοιχεία από συστήματα εξήγησης με σκοπό τον πειραματισμό και την καλύτερη προσέγγιση του εξεταζόμενου θέματος.

Σχέση μαθηματικών και φαντασίας

Ο ρόλος της φαντασίας είναι καθοριστικός στην κατανόηση και στην κατάκτηση της γνώσης σε πολλούς κλάδους, ωστόσο ο ρόλος της δεν περιορίζεται μόνο εκεί, καθώς συνεισφέρει και στη σύνδεση πολλών τομέων. Θα εξετάσουμε τον ρόλο της φαντασίας στα μαθηματικά πιο αναλυτικά.

Πώς / Τί φαντάζονται οι μαθηματικοί όταν κάνουν μαθηματικά και πώς φαντάζονται τα μαθηματικά από μαθηματικούς και μη; Υπάρχουν αρκετά δοκίμια ανά χρονικές περιόδους που θεωρούν σε μεγάλο βαθμό συνδεδεμένα τα μαθηματικά με τη φαντασία. Ερωτήματα σχετικά με τη φύση των μαθηματικών -είναι εξωτερικά ή εσωτερικά-, συνέχισαν για πολλά χρόνια να απασχολούν τους φιλοσόφους. Η πραγματικότητα των μαθηματικών οντοτήτων και των εννοιών, η αναζήτηση της τοπολογικής θεωρίας και η επίδραση των κοινωνικών σχέσεων, ανέπτυξαν την μαθηματική πρακτική και σκέψη. Μερικά ερωτήματα σχετικά με τη σύνδεση και την αλληλεπίδραση των μαθηματικών και της φαντασίας έχουν βρει προσωρινές απαντήσεις και άλλες ζητούν μελλοντική έρευνα. Επηρέασαν τον τρόπο που βιώνουμε και απεικονίζουμε τον κόσμο οι μαθηματικές γνώσεις, που προέρχονται σε κάποιο βαθμό μέσω της φαντασίας; Υπάρχει κοινή πορεία σκέψης μεταξύ μαθηματικών και καλλιτεχνών, όπως ζωγράφοι, ποιητές, μυθιστοριογράφοι; Όπως φαίνεται, οι γνωστικές λειτουργίες είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλημάτων, τη σύνταξη εξισώσεων και για την αφηρημένη μαθηματική σκέψη.

Προκύπτουν έτσι, σημαντικοί τομείς που η φαντασία (φιλοσοφική, ψυχολογική, λογοτεχνική, αισθητική) καταλαμβάνει θέση μέσω της οποίας κανείς μπορεί να κατανοήσει έννοιες όπως αντικείμενο, μοντέλο, δομή, σχέση, συνάρτηση, παραγωγή, άπειρο, ταυτότητα που εμπλουτίζουν την εμπειρία μας και τη χρήση των παραπάνω εννοιών σε άλλους τομείς. Όλα αυτά προέκυψαν σταδιακά λόγω της “ανησυχίας” και των ερωτημάτων που είχαν τεθεί. Οδηγούμαστε σε μονοπάτια τα οποία δεν είχαμε φανταστεί ακολουθώντας αυτή τη πορεία, και όπως είχε αναφέρει ο μαθηματικός Hermann Weyl (1885-1955):

-Σκέφτομαι το δυνατό-

*(“The Unity of Knowledge,” a lecture given at the bicentennial of
Columbia University in 1954)*

2.1.2 - Η Ομορφιά ως Αισθητική κρίση [ΜΙΑΑ]

Τί εννοούν οι μαθηματικοί όταν χρησιμοποιούν όρους όπως: “βαθύς”, “κομψός” και “όμορφο / ωραίο”;

Εφαρμόζοντας κάποιες εμπειρικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν από κοινωνικούς ψυχολόγους, αποδείχθηκε ότι οι εκτιμήσεις των αποδείξεων των μαθηματικών ποικίλλουν σε τέσσερις διαστάσεις: την αισθητική, την πολυπλοκότητα, την χρησιμότητα και την ακρίβεια. Ιδιαίτερη σημασία δίνεται στην ομορφιά των μαθηματικών, ο όρος αυτός είναι αντίθετος με τη κλασική έννοια. Η ομορφιά και η απλότητα είναι σχεδόν εξ' ολοκλήρου άσχετοι όροι με αυτούς των μαθηματικών.

Οι μαθηματικές συζητήσεις είναι γεμάτες αξιολογικές κρίσεις και οι μαθηματικοί συχνά μιλούν για “όμορφες”, “διορατικές” και “ενδιαφέρουσες” αποδείξεις και απονέμουν ο ένας στον άλλον βραβεία. Η εγκυρότητα, ή η δυνατότητα εφαρμογής, δεν είναι καθοριστικά κριτήρια για την απονομή τέτοιων βραβείων, όπως έχει φανεί. Αντιθέτως, οι αναφορές για τα μαθηματικά βραβεία είναι γεμάτες από αισθητικές κρίσεις. Ο Hermann Weyl ισχυρίστηκε²⁹ μάλιστα ότι δίνει προτεραιότητα στην ομορφιά απ'ότι στην αλήθεια. Πιο συγκεκριμένα:

-Η προσπάθειά μου ήταν να ενώσω το όμορφο με το αληθινό, και όταν έπρεπε να διαλέξω ένα από τα δύο, διάλεγα το όμορφο- (Reid, 1986, p.161)

Ο άτυπος μαθηματικός λόγος υποδηλώνει τη χρήση επιθέτων που εφαρμόζονται με νόημα σε μαθηματικά αντικείμενα. Για παράδειγμα, ο μαθηματικός Ravi Vakil, όταν συζητά για φασματικές ακολουθίες παρατηρεί ότι έχουν τη φήμη ότι είναι δύσκολες και δυσνόητες. Έχει προτείνει λοιπόν, το επίθετο “φασματικός” για να τονίσει το τρομακτικό, το κακό, το επικίνδυνο.

Η Μαθηματική Ομορφιά

Μπορεί να εμφανιστεί η ιδέα ότι τα μαθηματικά επιχειρήματα και οι αποδείξεις χαρακτηρίζονται ως “όμορφα”, το οποίο μπορεί να φανεί περίεργο για τους μη μαθηματικούς, αλλά αυτού του είδους οι χαρακτηρισμοί, και γενικά η γλώσσα, είναι παρούσα σε όλη τη μαθηματική πρακτική. Ο Henri Poincaré (1914) περιέγραψε τη μαθηματική ομορφιά ως ένα “πραγματικό συναίσθημα που αναγνωρίζουν όλοι οι αληθινοί μαθηματικοί”, και πολλοί άλλοι μαθηματικοί, όπως ο Engler (1990), ισχυρίστηκαν ότι η αναζήτηση της ομορφιάς είναι ένα κίνητρο και ο οδηγός των ερευνών τους. Αν και τα μαθηματικά θεωρήματα και οι ορισμοί μερικές φορές αντιλαμβάνονται ως “όμορφα”, φαίνεται ότι τα μαθηματικά αντικείμενα γενικότερα που περιγράφονται με αυτόν τον όρο, είναι οι *αποδείξεις*. Η έννοια των “όμορφων” αποδείξεων εγείρει σοβαρά ερωτήματα:

- Ποιά χαρακτηριστικά πρέπει να έχει μία απόδειξη ώστε να είναι όμορφη;
- Η ομορφιά στα μαθηματικά είναι μία γνήσια αισθητική ιδιότητα, ή απλώς αντιπροσωπεύει κάτι άλλο;
- Η ομορφιά προβάλλεται σε μία απόδειξη προς τον αναγνώστη, ή είναι ιδιότητα της ίδιας της απόδειξης;

Πολλοί συγγραφείς έχουν λάβει κατά καιρούς διαφορετικές θέσεις σχετικά με το τελευταίο ερώτημα. Για παράδειγμα, ο Καντ είδε τη μαθηματική ομορφιά ως εξαιρετικά υποκειμενική, ένα συναίσθημα που βιώνει ένας αναγνώστης όταν μία απόδειξη ταιριάζει στις πνευματικές του ικανότητες και ιδέες. Ο

29 ΜΙΑΑ, σελ.87

Godfrey Harold Hardy (G.H.Hardy, 1940) πίστευε ότι η ομορφιά ήταν αντικειμενική ιδιότητα των μαθηματικών, και είχε παρουσιάσει τον γνωστό ισχυρισμό ότι :

“δεν υπάρχει μόνιμο μέρος στον κόσμο για άσχημα μαθηματικά”

(A Mathematician's Apology, London)

- *“A mathematician, like a painter or poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas.”*
(A Mathematician's Apology, London)
- *“Real mathematics must be justified as art if it can be justified at all.”*
(A Mathematician's Apology, London)

Η ομορφιά και η απλότητα

Μία κλασική άποψη της μαθηματικής ομορφιάς είναι να τη συσχετίσουμε με την απλότητα. Ο James McAllister συνοψίζει³⁰ στο παρακάτω αυτή την άποψη: *-Οι μαθηματικοί συνήθως θεωρούσαν μία απόδειξη όμορφη, εάν συμφωνούσε στα κλασικά ιδανικά της συντομίας και της απλότητας. Ο πιο καθοριστικός παράγοντας για να γίνει αντιληπτή η ομορφιά μίας απόδειξης, είναι ο βαθμός στον οποίο συλλαμβάνεται σε μία πράξη ψυχικής αντίληψης-* (2005)

Η απλότητα έχει συνδεθεί επίσης και με την ομορφιά άλλων πτυχών των μαθηματικών, όχι μόνο με τις αποδείξεις. Ο David Wells (1990) ρώτησε εξήντα οχτώ μαθηματικούς για το ποιο από τα 24 παρουσιασμένα θεωρήματα είναι το πιο όμορφο. Ανακάλυψε, παρ' ότι διερεύνησε τα θεωρήματα χωρίς τις αποδείξεις τους, επηρεάστηκε η απλότητα της απόδειξης λόγω της αντιληπτικής ομορφιάς των θεωρημάτων. Συνεπώς, ο Wells ανακάλυψε ότι θεωρήματα, όπως $e^{ip} = -1$ βαθμολογήθηκαν ως πιο όμορφα απ' ότι μία σύνθετη ταυτότητα, επιβεβαιώνοντας και πάλι την απλότητα των αισθητικών κρίσεων. Εν ολίγοις, για να χαρακτηρίσουν οι μαθηματικοί κάτι ως όμορφο, σημαίνει ότι η αντιληπτική ομορφιά μίας απόδειξης συσχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με την αντιληπτική απλότητά της.

Η ομορφιά και η Επιστήμη

Ορισμένοι έχουν αμφισβητήσει εάν οι αισθητικές κρίσεις στα μαθηματικά, και γενικότερα στην επιστήμη, σχετίζονται με την αισθητική γενικά. Ο Ram Harre, το 1958, υποστήριξε³¹ ότι “δεν έχουμε πλέον δικαίωμα να υποθέσουμε ότι όταν κάποιος αποκαλεί μία απόδειξη “κομψή” την αξιολογεί στο έδαφος της αισθητικής...”. Έτσι λοιπόν, ο Cain Todd συμφωνεί³² και αναπτύσσει το επιχείρημα του Harre, και διακρίνει δύο τύπους αφήγησης στους οποίους η ύπαρξη γνήσιας αισθητικής, τίθεται σε κρίση. Εισάγει συνδυαστικές αναφορές, που υποστηρίζουν ότι η αισθητική και η γνωσιακή / επιστημονική κρίση είναι ανεξάρτητοι λογαριασμοί.

Πολλοί επιστήμονες συμφωνούν με την συνδυαστική άποψη, ότι η αντιληπτή ομορφιά μίας

30 ΜΙΑΑ, κεφ.2.1, σελ.89

31 ΜΙΑΑ, κεφ.2.2, σελ.90

32 ΜΙΑΑ, κεφ.2.2, σελ.90

επιστημονικής θεωρίας είναι κατά κάποιο τρόπο σημάδι της αλήθειας της.(Engler, 1990 / McAllister, 1996/Kivi, 1991). Ο Paul Dirac υποστήριξε³³, για παράδειγμα, ότι αν μία θεωρία είναι πραγματικά όμορφη, τότε αναγκαστικά θα φανεί ως ένα μοντέλο φυσικών φαινομένων. Ο Todd απορρίπτει³⁴ την ιδέα αυτή, διότι είναι δύσκολο να δούμε πως συνδέονται οι αισθητικοί παράγοντες με την επάρκεια μίας θεωρίας. Αν και η αισθητική επαγωγή του McAllister(1996), φαίνεται να παρέχει ένα μηχανισμό για τέτοια σχέση, που ουσιαστικά προτείνει ότι οι εμπειρικά επαρκείς επιστημονικές θεωρίες, έρχονται με τον καιρό να γίνουν αντιληπτές ως όμορφες. Ο Todd πρότεινε, ότι παρά τη χρήση αισθητικών όρων, εάν οι κρίσεις των επιστημόνων είναι στη πραγματικότητα *επαρκείς εμπειρικά*, τότε είναι βαθιά γνωσιολογικές και όχι αισθητικές.

Αντίθετα,θεωρίες αναφέρουν ότι οι αισθητικές κρίσεις είναι ανεξάρτητες απ' τις γνωσιολογικές. Αυτές οι κρίσεις υπονοούν την ύπαρξη ή τη δυνατότητα ύπαρξης επιστημονικών θεωριών ή μαθηματικών αποδείξεων, που είναι αληθινές αλλά όχι όμορφες, και όμορφες αλλά όχι αληθινές. Ενώ η πρώτη είναι εύλογη, ο Todd αμφισβητεί εάν η τελευταία είναι βάσιμη, υποστηρίζοντας ότι “οι θεωρίες δεν μπορεί να είναι όμορφες, αν δεν έχουν ιδιότητες ενδεικτικές για την αλήθεια”. Ενώ αυτό μπορεί να ισχύει γενικά για τις επιστημονικές θεωρίες δεν είναι σαφές ότι θα ισχύει γενικά και για τις μαθηματικές αποδείξεις. Αυτό διότι, μία απόδειξη πρέπει να γίνει αντιληπτή ως “αληθής” / έγκυρη πριν γίνει αποδεκτή ως απόδειξη. Για τις αποδείξεις, η “αλήθεια” είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα: μία μαθηματική απόδειξη δεν μπορεί να είναι όμορφη εάν δεν είναι έγκυρη, όχι γιατί θα συνεπαγόταν σε κάτι “άσχημο”, αλλά γιατί θα ήταν μη απόδειξη.

Σύνοψη

Ο Todd συνοψίζει³⁵ ότι όταν τα μαθηματικά μιλούν για όμορφη απόδειξη ή θεωρίες, στην πραγματικότητα κάνουν γνωσιολογικούς και όχι αισθητικούς ισχυρισμούς. Υπάρχει γενικά συμφωνία ότι η έννοια της μαθηματικής ομορφιάς είναι ευρέως διαδεδομένη στη μαθηματική πρακτική. Σε πρώτη φάση, οι μαθηματικοί χαρακτηρίζουν ο ένας το έργο του άλλου ως όμορφο (ή όχι), και μετέπειτα προσπάθησαν να ασχοληθούν με τις όμορφες αποδείξεις και τον ρόλο των αισθητικών ιδεών. Υπάρχει διαφωνία όμως, για το εάν η ομορφιά βρίσκεται στο μαθηματικό πλαίσιο. Οι μη αναγωγικές αναφορές της ομορφιάς στα μαθηματικά υποθέτουν ότι τα μαθηματικά μιλούν για όμορφες αποδείξεις, και γενικά κάνουν μία αισθητική κρίση. Τέλος, μία κλασική άποψη είναι ότι η απλότητα παίζει κεντρικό ρόλο στις αξιολογήσεις αυτές. Αντίθετα, αναγωγικοί λογαριασμοί, όπως έκανε ο Todd (2008), προτείνουν ότι όταν τα μαθηματικά μιλούν για ομορφιά, χρησιμοποιούν τον όρο ως υποκατάστατο μιας γνωσιολογικής κρίσης.

33 ΜΙΑΑ, κεφ.2.2, σελ.90

34 ΜΙΑΑ, κεφ.2.2, σελ.90

35 ΜΙΑΑ, κεφ.2.4, σελ.92

2.2 - Αισθητικές Κρίσεις, Ωραίο & Υψηλό [GH]

Οι απόψεις του Καντ για την Αισθητική δίνονται στη πληρέστερη παρουσίαση τους στην *Κριτική της Κριτικής Δύναμης* που δημοσιεύτηκε το 1970. Το έργο χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος “*Κριτική της Αισθητικής Κρίσης*”, ο Καντ ασχολείται με την αισθητική εμπειρία και τη κρίση, ιδίως για το όμορφο και το υπέροχο (ή υψηλό), καθώς και τη καλλιτεχνική δημιουργία. Στο δεύτερο μέρος “*Κριτική της Τελεολογικής Κρίσης*”, συζητά το ρόλο της τελεολογίας (τους σκοπούς και στόχους) στη φυσική επιστήμη, και γενικότερα της φύσης. Η αισθητική θεωρία του Καντ ήταν πάντα εξαιρετική επιρροή στην φιλοσοφική αισθητική και τη φιλοσοφία της τέχνης. Οι απόψεις του Καντ για τη φυσική τελεολογία ήταν πολύ παραμελημένες σε σύγκριση με την αισθητική του, άρχισαν όμως να λαμβάνουν περισσότερη προσοχή στις αρχές της δεκαετίας του '90 και υπήρξε έντονο ενδιαφέρον.

2.2.1 - Η ικανότητα της κρίσης / Critique of Judgment

Η κρίση για τον Καντ³⁶ είχε δύο ρόλους/ πτυχές : τον *καθοριστικό* και τον *ανακλαστικό*. Ο καθοριστικός ρόλος υπολογίζει δεδομένες ενότητες που έχουν ήδη δοθεί. Ο ρόλος αυτός αντιστοιχεί στη δραστηριότητα της φαντασίας, στον “*σηματισμό*” των εννοιών της. Η κρίση μέσω του ρόλου αυτού διέπεται από αρχές κατανόησης. Η κρίση στον ανακλαστικό της ρόλο αποδίδεται με διάφορους τρόπους στο σύστημα του Καντ. Αρχικά, αποδίδεται με έναν γνωστικό “*χαρακτήρα*” που σχετίζεται με την εμπειρική επιστημονική έρευνα και ειδικότερα στην ταξινόμηση των φυσικών αντικειμένων και την κατασκευή συστηματικών επεξηγηματικών επιστημονικών θεωριών. Ο Καντ προτείνει, επιπροσθέτως, ότι μπορεί να διαδραματίσει έναν πιο θεμελιώδη ρόλο στην κατάκτηση της γνώσης και στη διαμόρφωση όλων των εμπειρικών εννοιών. Ο ανακλαστικός ρόλος περιγράφεται ως υπεύθυνος για δύο συγκεκριμένα είδη κρίσεων : τις *Αισθητικές Κρίσεις*, όπως είναι οι κρίσεις για το Ωραίο και το Υψηλό, και τις *Τελεολογικές Κρίσεις*. Στο κομμάτι αυτό, θα παρουσιάσουμε τη προσπάθεια του Καντ να συνδέσει την ομορφιά με το βίωμα του υποκειμένου, το οποίο προκαλείται από ορισμένες μορφές τέχνης ή της φύσης, και όχι με τις ιδιότητες που φέρουν αυτές οι μορφές. Το βίωμα συνδέεται άμεσα με τη λειτουργία της φαντασίας, η οποία περιγράφεται ως “*το ελεύθερο παιχνίδι της φαντασίας με τη διάνοια*”. Επομένως, η προσπάθεια αποσκοπεί στην σύνδεση της εμπειρίας του ωραίου με την φαντασία.

Ο Καντ ισχυρίζεται στην Εισαγωγή της CPJ ότι η φύση είναι μία *a priori* αρχή της ανακλαστικής κρίσης και ότι παρουσιάζεται ως “*σκόπιμη για τις γνωστικές μας ικανότητες*” ή “*σκόπιμη για την κρίση*”. Δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η φύση είναι, ως αντικείμενο γενικά, σκόπιμη για τις γνωστικές μας ικανότητες, αλλά αποτελεί προϋπόθεση για την άσκηση της ανακλαστικής κρίσης. Η υπόθεση ότι η φύση είναι σκόπιμη για τις γνωστικές μας ικανότητες δεν είναι μέρος της τελεολογίας, αφού η εν λόγω σκοπιμότητα είναι υποκειμενική και γενικότερα οι τελεολογικές κρίσεις αφορούν μόνο την αντικειμενική σκοπιμότητα. Ωστόσο, είναι σχετικό με τη τελεολογία του Καντ, καθώς το δικαίωμα να αποδίδουμε αντικειμενική σκοπιμότητα στα φυσικά πράγματα, ιδιαίτερα στους οργανισμούς πηγάζει από ένα θεμελιώδες δικαίωμα μας να θεωρούμε την φύση ως (υποκειμενικά) σκόπιμη.

Ο Καντ χαρακτηρίζει³⁷ τη σκοπιμότητα της φύσης με ποικίλους τρόπους, οι οποίοι δεν καταλήγουν στο

36 GH, κεφ.1, The Faculty of Judgment

37 GH, κεφ.3.2, Nature's Purposiveness for Our Cognitive Faculties

ίδιο πράγμα. Η ποικιλία αυτή, φαίνεται να πηγάζει εν μέρει από την ποικιλία των διαφορετικών καθηκόντων που ο ίδιος αποδίδει στην ανάκλαση της ίδιας της κρίσης. Εκτός από την ευθύνη για τις αισθητικές κρίσεις, η ανακλαστική κρίση έχει και τα ακόλουθα γνωστικά χαρακτηριστικά καθήκοντα: *την ταξινόμηση των φυσικών πραγμάτων σε μία ιεραρχία γενών και ειδών, την κατασκευή επεξηγηματικών επιστημονικών θεωριών και την αναπαράσταση της φύσης ως εμπειρικά νόμιμη και ο σχηματισμός των εμπειρικών εννοιών.*

Η αρχή της σκοπιμότητας της φύσης είναι, στην πραγματικότητα, η παραδοχή ότι η φύση επιδέχεται την δραστηριότητα της ίδιας της ανάκλασης της κρίσης, και επίσης φαίνεται να επιτρέπει τη διατύπωση με αντίστοιχους διαφορετικούς τρόπους, ως αρχή συστηματικής ταξινόμησης της φύσης, της επεξηγηματικής συστηματικότητας και της εμπειρικής νομιμότητας. Η συζήτηση του Καντ για την *αρχή της σκοπιμότητας* πιστεύεται ότι θέτει μία σειρά από σοβαρές ερμηνευτικές και φιλοσοφικές δυσκολίες συμπεριλαμβανομένων των εξής:

1. Πώς παρουσιάζονται οι διάφορες διατυπώσεις της αρχής αυτής; Ο Καντ εξαρχής δεσμεύεται στην άποψη, ότι εάν η φύση είναι εμπειρικά εννοιοποιήσιμη, πρέπει να αναγνωρίσουμε τις εμπειρικές κανονικότητες που εκδηλώνονται, τους νόμους και τις αντίστοιχες έννοιες ως συστηματικά ιεραρχημένες. Δεν είναι όμως σαφές το πώς μπορεί να δικαιολογηθεί μία τέτοια άποψη. Φαίνεται αρκετά κατανοητό ότι τα φυσικά πράγματα θα μπορούσαν να είναι εννοιολογήσιμα (όπως ας πούμε απλές έννοιες: δέντρο, σκύλος, χιόνι), χωρίς αυτές οι έννοιες να σχηματίζουν κάποια ιεραρχία. Επίσης, θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τέτοιες έννοιες σε φυσικά πράγματα χωρίς να υπάρχει σύνδεση μεταξύ των αντίστοιχων ιδιοτήτων τους, πόσο μάλλον συνδέσεις που με τη σειρά τους επιτρέπουν να ενσωματωθούν σε ένα γενικό σύστημα εμπειρικών νόμων.
2. Ανεξάρτητα από το πώς κατανοεί κανείς τον ρόλο της ανακλαστικής κρίσης και το περιεχόμενο της αντίστοιχης αρχής, πρέπει να υποθέσουμε ότι η φύση είναι κατάλληλη για ανακλαστικές κρίσεις. Αυτό γιατί δεν μπορούμε να φτάσουμε σε μία συστηματική ιεραρχία φυσικών εννοιών και νόμων, χωρίς να υποθέσουμε ότι η φύση θα ευνοήσει τις προσπάθειές μας.
3. Εάν η αρχή απαιτείται πράγματι, όπως πρότεινε ο Καντ, για την εμπειρική εννοιολόγηση της φύσης και για την αναγνώριση της φύσης ως εμπειρικά νομοτελειακής, τότε φαίνεται να είναι προϋπόθεση η εμπειρία. Πώς μπορούν να συμβιβαστούν οι ρόλοι των καθαρών εννοιών και της κατανόησης (ιδιαίτερα της έννοιας της αιτιότητας) από τη μία πλευρά, με την αρχή της σκοπιμότητας της φύσης για τις γνωστικές μας ικανότητες από την άλλη; Ο Καντ είχε δείξει ήδη στην CPR, ότι η φύση υπόκειται σε αιτιατούς νόμους. Οπότε, ποιά είναι η ανάγκη για μία περαιτέρω αρχή που να εξηγεί την αναγνώριση της φύσης ως εμπειρικά νομοτελειακής;

Αναπτύχθηκαν μεγάλες συζητήσεις σχετικά με αυτό το ερώτημα και άλλων σχετικών, αποτελώντας θέμα έρευνας πολλών φιλοσόφων αργότερα με κύριο μέρος τον ρόλο της αρχής της αιτιότητας και την αρχή της σκοπιμότητας της φύσης.

2.2.2 - Η κρίση του Ωραίου / The Judgment of Beautiful

Η πρώτη ενότητα της “Κριτικής της Αισθητικής Κρίσης”, στοχεύει στην ανάλυση της έννοιας της Κρίσης του Ωραίου, περιγράφοντας τα χαρακτηριστικά που διακρίνουν τις κρίσεις ομορφιάς από τις κρίσεις άλλων ειδών. Το αρχικό ζήτημα είναι το εξής: Τί είδους κρίση έχει ως αποτέλεσμα να πούμε

“αυτό είναι Ωραίο ή Υπέροχο” ; Το ωραίο αποτελεί μία ευρύτερη κατηγορία σε σχέση με την τέχνη , και περιλαμβάνονται όλα τα έξοχα δείγματα ζωγραφικής, γλυπτικής και άλλων καλών τεχνών , όπως και όλα τα όμορφα αντικείμενα της φύσης. Σε μία πρώτη προσέγγιση , μπορούμε να πούμε ότι είναι η ψυχική δραστηριότητα που εκφράζεται συνήθως με την παραπάνω έκφραση καθώς παρουσιάζεται ένα αντικείμενο. Ο Καντ αναλύει³⁸ τις κρίσεις του ωραίου, εξετάζοντάς το σε τέσσερις στιγμές.

1η στιγμή : Οι κρίσεις του ωραίου βασίζονται στο συναίσθημα, ιδίως στα συναισθήματα της ευχαρίστησης και της δυσαρέσκειας. Το γεγονός, ότι οι κρίσεις αυτές βασίζονται στο συναίσθημα και όχι στην “αντικειμενική αίσθηση”, τις διακρίνει απ' τις γνωστικές κρίσεις που βασίζονται στην αντίληψη. Η αισθητική κρίση είναι ελεύθερη και καθαρή και δεν συνδέεται, παρά ελάχιστα με τη λογική κρίση. Η ομορφιά δεν έχει σχέση με την γνώση και τη κατανόηση και είναι υποκειμενική, διότι συνδέεται με την ευχαρίστηση που βιώνει το υποκείμενο. Έτσι ο “αδιάφορος” χαρακτήρας του συναισθήματος τις διακρίνει από άλλες κρίσεις που βασίζονται στο συναίσθημα. Συγκεκριμένα διακρίνονται σε:

1. Κρίσεις που συνδέονται με την εμπειρική απόλαυση (agreeable), δηλώνεται όταν κάτι είναι ευχάριστο (π.χ. Ποτό, φαγητό)
2. Κρίσεις του καλού, συμπεριλαμβανομένων κρίσεων ηθικής.

2η στιγμή : Οι κρίσεις ομορφιάς έχουν υποκειμενική καθολικότητα ή καθολική εγκυρότητα. Κατά τη λήψη μίας κρίσης ομορφιάς, κάποιος θεωρεί ότι όλοι οι υπόλοιποι παρατηρητές πρέπει να κρίνουν ότι κάτι είναι όμορφο. Όμως, η καθολικότητα δεν βασίζεται σε έννοιες. Από αυτό προκύπτει ότι οι κρίσεις αυτές, παρά τη καθολική τους ισχύ, δεν μπορούν να αποδειχθούν. Δεν υπάρχουν κανόνες με τους οποίους κάποιος μπορεί να κρίνει ότι κάτι είναι ωραίο. Οι αισθητικές κρίσεις δεν μπορούν να έχουν το είδος της καθολικότητας που έχουν οι λογικές κρίσεις. Συνεπώς, η αισθητική κρίση βασίζεται στο βίωμα, στην αίσθηση και όχι στη λογική και την εννοιολογική γνώση.

3η στιγμή : Μία αισθητική κρίση εκφράζει σκοπιμότητα ή τελικότητα , χωρίς σκοπό. Αυτός ο αντιφατικός χαρακτηρισμός, σύμφωνα με τον Καντ, αναφέρει ότι το ωραίο δεν εξυπηρετεί κάποιο σκοπό, τέλος ή στόχο. Η αναπαράσταση αυτής της σκοπιμότητας δεν περιλαμβάνει την περιγραφή ενός σκοπού, και έτσι ο Καντ την αποκαλεί ως “απλή τυπική σκοπιμότητα” ή “μορφή σκοπιμότητας”. Ο λόγος που δεν μπορούμε να αποδώσουμε σκοπό στο ωραίο είναι ότι η σύλληψη του σκοπού είναι μέρος της έννοιας που συνδέεται με κάποιο αντικείμενο. Απ' τη στιγμή που η ομορφιά δεν μπορεί να υπαχθεί σε μία έννοια, τότε κανένα ωραίο αντικείμενο δεν μπορεί να συσχετιστεί με κάποιο συγκεκριμένο σκοπό. Η ομορφιά προκαλεί ευχαρίστηση στο υποκείμενο και αυτός είναι ο σκοπός. Δεν είναι όμως σκοπός του αντικειμένου και γι'αυτό δεν υπάρχει όμορφο αντικείμενο χωρίς θεατή.

4η στιγμή : Ο Καντ, τέλος, αποδίδει την έννοια της αναγκαιότητας στην αισθητική κρίση. Αυτή η έννοια περιλαμβάνεται ως εξής: Η ευχαρίστηση βρίσκεται σε μία “αναγκαία” σχέση με το αντικείμενο που τη προκαλεί. Το σκεπτικό της έννοιας αυτής είναι ίδια ακριβώς με την έννοια της καθολικότητας που προαναφέραμε. Το όμορφο είναι αυτό το οποίο, χωρίς καμία έννοια, αναγνωρίζεται ως αντικείμενο αναγκαίας ευχαρίστησης.

38 GH, κεφ.2.1, Aesthetics-What is a Judgment of Beauty?

2.2.3 - Το Υψηλό / The Sublime

Ο Καντ εκθέτει³⁹ ως δεύτερη αισθητική έννοια ή κατηγορία την έννοια του υψηλού. Ήδη σε παλαιότερη ερμηνεία της Κριτικής της Κριτικής Δύναμης (CPJ) έχει αναφέρει ότι αποτελεί ένα από τα εξοχότερα τμήματα του έργου του. Σε αυτό το κομμάτι κινείται σε ένα έδαφος, όχι και τόσο οικείο, με την ιδιάζουσα σύνδεση αισθητικής και ηθικού αισθήματος. Εκδηλώνεται όλο του το πάθος της αισθητικής του προσωπικότητας. Το συναίσθημα αυτό αποτελεί μέσο, ώστε να ανακαλύψουμε μια ανώτερη και εντελώς διαφορετική από τη φύση σκοπιμότητα: την *ελευθερία* και τον *τελικό σκοπό* μας, που μας εισάγουν σ' ένα άλλον κόσμο από εκείνον της φυσικής και κάθε άλλης ανάγκης, δηλαδή στο “ιδιάζον πεδίο του Λόγου, την τάξη των σκοπών”. Το υψηλό, λοιπόν, αποτελεί συγκίνηση ψυχής, ενώ το ωραίο έναν ήρεμο ετασμό.

[IK]Ο Καντ διακρίνει⁴⁰ δύο έννοιες του υψηλού: το *μαθηματικό υψηλό* και το *δυναμικό υψηλό*. Στην περίπτωση και των δύο εννοιών, η εμπειρία του υψηλού συνίσταται από ένα αίσθημα ανωτερότητας από τη δικιά μας δύναμη της λογικής. Στην αισθητική κατανόηση, η φαντασία συναντά μια αναπόφευκτη ένταση μεταξύ της διαδοχικής αναπαραγωγής των επιμέρους μερών ενός μεγέθους και ταυτόχρονης ενοποίησης αυτών των μερών. Στην περίπτωση που η αίσθηση υπερβαίνει το όριο της φαντασίας μας, τότε ερχόμαστε αντιμέτωποι με το μαθηματικό υψηλό. Το αίσθημα αυτό είναι προσωπικό, συνεπώς η κρίση του μαθηματικού υψηλού δεν είναι ούτε καθολική ούτε απαραίτητη. Προκαλεί έμμεση ηδονή μέσω του δέους, ενώ δεν αφορά σε μορφές με σκοπιμότητα. Για το λόγο αυτό δεν αναφέρεται σε εξωτερικά αντικείμενα της φύσης, αλλά σε ιδέες του Λόγου.

Στην περίπτωση του μαθηματικού υψηλού, η αισθητική κατανόηση δεν είναι απλά η συνείδηση απλώς μια μεγαλύτερης ενότητας, αλλά η έννοια του απόλυτου μεγαλείου που δεν περιορίζεται από κανένα όριο, όπως για παράδειγμα η απεραντοσύνη της φύσης. Μια άπειρη ολότητα απέναντι στην οποία η πεπερασμένη ανθρώπινη ύπαρξη αισθάνεται δέος. Σε αυτή τη κατάσταση η φαντασία προσπαθεί να κατανοήσει το αντικείμενο με βάση τη λογική, αλλά δεν το καταφέρνει. Έχουμε, δηλαδή, το συναίσθημα όταν είμαστε αντιμέτωποι με κάτι τόσο μεγάλο που κατακλύζει την ικανότητα της φαντασίας μας.

Στην περίπτωση του δυναμικού υψηλού, υπάρχει αναφορά στην ακαταμάχητη δύναμη της φύσης. Εκφράζει την δύναμη της φύσης χωρίς να ασκεί εξουσία στους ανθρώπους. Όταν δηλαδή δημιουργείται το αίσθημα του φόβου, και συνεπώς της φυσικής μας αδυναμίας. Η ευχαρίστηση και η δυσαρέσκεια είναι τα συναισθήματα τα οποία συνδέονται με το υψηλό. Στην περίπτωση του μαθηματικού υψηλού υπάρχει το συναίσθημα της δυσαρέσκειας όταν συνειδητοποιούμε την αδυναμία της φαντασίας μας για κατανόηση και στην περίπτωση του δυναμικού υψηλού, όταν συνειδητοποιούμε την αδυναμία μας απέναντι στην δύναμη της φύσης.

Ο Καντ επίσης περιγράφει⁴¹ το αίσθημα του υψηλού ως “η ευχαρίστηση που είναι δυνατή από την αρνητική προτίμηση”, δηλαδή της δυσαρέσκειας. Οι κρίσεις του υψηλού είναι σαν τις κρίσεις του όμορφου, δηλαδή βασίζονται στο συναίσθημα και πιο συγκεκριμένα στην ευχαρίστηση ή τη δυσαρέσκεια. Είναι επίσης σαν κρίσεις ομορφιάς που συνδέονται με την καθολική εγκυρότητα της ευχαρίστησης, όπου αυτός ο ισχυρισμός θεωρείται ότι συνεπάγεται την αναγκαιότητα. Δηλαδή, όλοι όσοι έχουν την εμπειρία του αντικειμένου μοιράζονται το ίδιο συναίσθημα. Η απόλαυση όμως

39 GH, κεφ.2.7

40 IK, κεφ.9 - Judgments about the Sublime

41 GH, κεφ.2.7, παρ.4

διαφέρει , καθώς περιλαμβάνει και είναι αρνητικό στοιχείο. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθούν κάποιες βασικές διαφορές:

- Ο Καντ τόνισε ιδιαίτερα ότι κατά την κρίση υψηλού δεν θεωρούμε το αντικείμενο σκόπιμο για τις ικανότητες της φαντασίας και κρίσης. Ενώ οι κρίσεις του υψηλού περιλαμβάνουν την αναπαράσταση της σκοπιμότητας , η σκοπιμότητα διαφέρει από εκείνη που εμπλέκεται στην κρίση ομορφιάς. Το αντικείμενο από μόνο του δεν έχει σκοπό , αλλά η ίδια η αισθητική κρίση παρουσιάζεται ως σκόπιμη.
- Ο ισχυρισμός για την καθολική εγκυρότητα που γίνεται με μία κρίση υψηλού, δεν βασίζεται στην καθολική εγκυρότητα των συνθηκών της γνώσης , αλλά στην καθολική εγκυρότητα των ηθικών συναισθημάτων που δημιουργούνται.
- Το υψηλό δεν περιέχεται στη φύση, αλλά στο μυαλό μας . Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα αντικείμενο όμορφο, αλλά όχι υψηλό.
- Οι κρίσεις του όμορφου περιλαμβάνουν τις ικανότητες της φαντασίας και της κατανόησης , ενώ στην περίπτωση του υψηλού οι ικανότητες που σχετίζονται είναι η φαντασία και η λογική.

Εν τέλει, στην αισθητική θεωρία του Καντ , η έννοια του υψηλού ήταν θέμα διαφωνίας. Στις εισαγωγές της Κριτικής της Κριτικής Δύναμης, δεν αναλύει την έννοια του υψηλού όπως την έννοια του όμορφου. Παρ' όλα αυτά , η όχι και τόσο τελικά επαρκής αναφορά του Καντ για το υψηλό , είχε επιρροή στην λογοτεχνική θεωρία και διαδραμάτισε πολύ σημαντικό ρόλο στην σύνδεση αισθητικής κρίσης και ηθικής.

Κρίση του μεγέθους των φυσικών πραγμάτων, η οποία απαιτείται για την Ιδέα του Υψηλού

Η κρίση του μεγέθους μέσω αριθμητικών εννοιών (ή των σημείων τους στην Άλγεβρα) είναι μαθηματική, ενώ εκείνη στην απλή εποπτεία (δια οφθαλμού) είναι αισθητική. Για την μαθηματική κρίση λοιπόν, δεν μπορούμε να έχουμε ποτέ ένα πρώτο ή βασικό μέτρο, άρα ούτε μια καθορισμένη έννοια ενός δεδομένου μεγέθους. Συνεπώς, η κρίση του μεγέθους του βασικού μέτρου θα πρέπει να συνίσταται μόνο στο ότι μπορούμε να το συλλάβουμε άμεσα σε μία εποπτεία και να το μεταχειριστούμε μέσω της φαντασίας για την παρουσίαση των αριθμητικών εννοιών , δηλαδή όλες οι εκτιμήσεις μεγέθους των αντικειμένων της φύσης είναι τελικώς αισθητικές.

Για την μαθηματική κρίση του μεγέθους δεν υπάρχει μέγιστο όριο (αφού η δύναμη των αριθμών είναι “άπειρη”), ενώ για την αισθητική κρίση υπάρχει ένα “απόλυτο” μέτρο το οποίο συνεπάγεται την Ιδέα του Υψηλού και παράγεται συγκίνηση η οποία δεν μπορεί να παραχθεί μέσω μαθηματικής κρίσης (μέσω αριθμών). Αυτό συμβαίνει διότι το σχετικό μέγεθος παρουσιάζεται μέσω συγκρίσεως με άλλα ομοειδή μεγέθη, ενώ η αισθητική κρίση παρουσιάζει το μέγεθος ως απόλυτο, εφόσον όμως μπορεί να το συλλάβει σε μία εποπτεία.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να εισάγουμε τις δύο πράξεις της φαντασίας οι οποίες απαιτούνται για να συλλάβουμε εποπτικά μία ποσότητα: την *πρόσληψη* και τη *σύλληψη*. Η πρόσληψη δε δημιουργεί κάποιο πρόβλημα γιατί μπορεί να χωρεί επ' άπειρον. Όσο αφορά τη σύλληψη, αυτή γίνεται δυσχερέστερη καθώς προχωρά η πρόσληψη και φτάνει στο μέγιστο όριο της, δηλαδή στο αισθητικώς μέγιστο βασικό μέτρο της κρίσης του μεγέθους. Όταν, λοιπόν, η πρόσληψη προχωράει σε ένα μεγάλο

βαθμό, τότε σβήνονται οι αρχικές επιμέρους παραστάσεις και ενώ η φαντασία προχωρεί στην πρόσληψη περισσότερων παραστάσεων, χάνει στην ουσία από τη μία πλευρά ότι κερδίζει από την άλλη. Έτσι, τελικά, για την σύλληψη υπάρχει ένα όριο το οποίο δεν μπορεί να υπερβεί, ένα όριο “ισορροπίας” πρόσληψης και φαντασίας.

Ποιός είναι ο ρόλος της φαντασίας μας στην αναπαράσταση της έννοιας του μεγέθους;

Η φαντασία από μόνη της προχωράει επ' άπειρον στη σύλληψη που απαιτείται για την αναπαράσταση μεγέθους, χωρίς να το εμποδίζει κάτι, αλλά η διάνοια την καθοδηγεί μέσω των αριθμητικών εννοιών. Κατά την μαθηματική εκτίμηση των μεγεθών, η διάνοια υπηρετείται και ικανοποιείται εξίσου, είτε η φαντασία επιλέγει ως μονάδα μέτρησης ένα μέγεθος που μπορεί να το συλλάβει κανείς με ένα βλέμμα (για παράδειγμα μία ράβδος ή ένα δέντρο), είτε επιλέγει κάτι για το οποίο είναι δυνατή η πρόσληψη, όχι όμως και η σύλληψη σε μία εποπτεία της φαντασίας, όπως για παράδειγμα η διάμετρος της Γης ή ένα γερμανικό μίλι.

Η έννοια του απείρου

Το άπειρο είναι απολύτως, όχι συγκριτικά, μεγάλο. Συγκρινόμενο με αυτό, όλα τα άλλα ομοειδή μεγέθη είναι μικρά. Το σημαντικότερο όμως είναι να μπορεί κανείς να σκεφτεί το άπειρο ως μια ολότητα, το οποίο καταδεικνύει μία ικανότητα του πνεύματος, η οποία υπερβαίνει κάθε μέτρο αισθήσεων. Για τον σκοπό αυτό θα χρειαζόταν μία σύλληψη, η οποία θα συνέδεε το άπειρο με ένα μέτρο ώστε να επέλθει η σύγκριση, πράγμα το οποίο είναι αδύνατο. Για να σκεφτεί κανείς το δεδομένο άπειρο χωρίς αντίφαση, απαιτείται στο ανθρώπινο πνεύμα μία υπεραισθητή ικανότητα. Αυτό, διότι μόνο μέσω της ικανότητας αυτής συλλαμβάνεται πλήρως και υπό μία έννοια το άπειρο του αισθητού κόσμου κατά τη καθαρή νοητική κρίση του μεγέθους. Προφανώς, η έννοια του απείρου δεν μπορεί να νοηθεί πλήρως μέσω των αριθμητικών εννοιών.

Ως προς την μαθηματική κρίση του μεγέθους, η φαντασία είναι κατάλληλη για κάθε αντικείμενο, ώστε να παρέχει ένα επαρκές μέτρο για την εκάστοτε κρίση, αφού οι αριθμητικές έννοιες της διάνοιας μπορούν να καθιστούν κάθε μέγεθος κατάλληλο. Συνεπώς, η αισθητική κρίση θα πρέπει να είναι εκείνη στην οποία γίνεται αισθητή η προσπάθεια για σύλληψη που υπερβαίνει την ικανότητα της φαντασίας να συλλάβει τη προοδευτική πρόσληψη της εποπτείας. Τέλος, παραδείγματα του μαθηματικού υψηλού κατά την απλή εποπτεία μας παρέχουν όλες εκείνες οι περιπτώσεις που δεν μας δίνεται μια τόσο μεγάλη αριθμητική έννοια, αλλά μία μεγάλη μονάδα ως μέτρο για τη φαντασία. Κατά την αισθητική αποτίμηση ενός αμέτρητου συνόλου, το υψηλό δεν βρίσκεται τόσο στο μέγεθος του αριθμού όσο στο γεγονός ότι προχωρώντας καταλήγουμε σε συνεχώς και μεγαλύτερες μονάδες. Σε αυτό οφείλεται η συστηματική διάταξη του σύμπαντος το οποίο μας παρουσιάζει κάθετι μεγάλο στη φύση ως μικρό, εν τέλει. Στη πραγματικότητα μας παρουσιάζει τη φαντασία μας σε όλη την απεραντοσύνη της και μαζί μ' αυτή, τη φύση ως απειροελάχιστη μπροστά στις Ιδέες του Λόγου.

2.3 - Η σύλληψη της Ομορφιάς στα Μαθηματικά

[CW] [AB]

Ερχόμαστε στο σημείο της αμφισβήτησης της ύπαρξης ομορφιάς στα μαθηματικά. Αν κάποιος πει, όπως λέει ο Καντ, ότι τα μαθηματικά δεν μπορούν να είναι όμορφα, τότε πρέπει να τεθεί το ερώτημα: “Τί νομίζετε ότι είναι τα μαθηματικά;”. Όπως είδαμε, η έννοια και η λειτουργία της διαίσθησης είναι πολύ σημαντική και τα μαθηματικά δεν συνίστανται απλώς σε αναλύσεις εννοιών. Τα μαθηματικά για τον Καντ, είναι συνθετικά, και όχι αναλυτικά. *“Μέσα στα μαθηματικά υπάρχει διαίσθηση, και έτσι έχουμε όλα όσα θέλουμε για την αισθητική θεωρία αυτού του ελεύθερου παιχνιδιού, και συνεπώς τα μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν όμορφα μέσω της θεωρίας αυτής”*.

Για να καταλήξουμε στο παραπάνω, ερχόμαστε λοιπόν στο κρίσιμο ερώτημα: Τί είναι τα μαθηματικά; Πώς ο Καντ σκέφτεται⁴² τα μαθηματικά και την αισθητική για να καταλήξει να πει ότι δεν μπορούν να είναι όμορφα;

1. τα μαθηματικά από μόνα τους δεν είναι κάτι παραπάνω από κανόνες, και σύμφωνα με σημειώσεις διαλέξεών του, μπορούν να “συλληφθούν” σύμφωνα με κανόνες.
2. θέματα ιδιοφυΐας δεν μπορούν να αποκτηθούν σύμφωνα με κανόνες. Τα μαθηματικά και η φιλοσοφία δεν είναι θέματα ιδιοφυΐας, τα μαθηματικά μπορούν να μαθευτούν.

Για να κατανοηθούν οι απόψεις του Καντ, θα προσεγγίσουμε τις δύο αυτές προτάσεις πιο προσεκτικά. Αν για τον Καντ τα μαθηματικά είναι “τίποτα άλλο παρά κανόνες”, τότε είναι δύσκολο να θεωρηθούν οι αποδείξεις ή τα μαθηματικά αντικείμενα ελεύθερο στο παιχνίδι φαντασίας και κατανόησης. Η φαντασία είναι η ικανότητα διαίσθησης, της κατανόησης εννοιών και κανόνων, σύμφωνα με τον Καντ. Τώρα, αν τα μαθηματικά είναι πράγματι “τίποτα άλλο παρά κανόνες”, τότε η φαντασία μπορεί να μην έχει ρόλο στο παιχνίδι, δηλαδή να μην έχει πλήρη ελευθερία. Ίσως οι κανόνες να είναι εκείνοι οι οποίοι καθιστούν αδύνατη την ελευθερία. Επίσης, εάν δεν ληφθούν οι κανόνες υπόψη, χάνεται το μαθηματικό αντικείμενο καθ' αυτό. Εκεί έγκειται το κρίσιμο σημείο. Αν η διαίσθηση δεν παίζει καθοριστικό ρόλο στα μαθηματικά, αν μόνο οι κανόνες δηλαδή τα καθορίζουν, τότε η φαντασία μπορεί να μην έχει κανέναν ρόλο στα μαθηματικά. Αυτά τα δεδομένα είχε στο μυαλό του ο Καντ, και πίστευε ότι τα μαθηματικά δεν μπορούν να είναι όμορφα. Από τη μία πλευρά, πίστευε ότι η διαίσθηση είναι απαραίτητη στα μαθηματικά, ότι τα αντικείμενα δίνονται σε πολλαπλότητες χρόνου και χώρου, ότι πάντα εμπλέκονται και ότι δεν είναι όλα ως μία εννοιολογική ανάλυση, ή αλλιώς μία ανάλυση κανόνων. Από την άλλη επιμένει ότι τα μαθηματικά είναι κανόνες.

Έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, ότι τα μαθηματικά μπορούν να εκφράσουν αλήθειες και να επεξηγήσουν φαινόμενα, αλλά πολλοί από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς έχουν αποδώσει κεντρική σημασία στην αισθητική αξία των θεωρημάτων και των θεωριών. Το ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: “Πώς συλλαμβάνουμε την ομορφιά στα μαθηματικά;”. Στην συγκεκριμένη ενότητα θα παρουσιάσουμε τους πόρους που δίνει⁴³ ο Καντ σαν απάντηση σε τέτοιου είδους συναρπαστικά ερωτήματα. Η καντιανή πρόταση που παρουσιάζεται, αναπτύσσει μία εναλλακτική λύση στις πλατωνικές αναφορές, η οποία είναι διαδεδομένη στους μαθηματικούς κλάδους. Ενώ στην πλατωνική αντίληψη, η εμπειρία της μαθηματικής ομορφιάς συνίσταται σε μία διανοητική επίγνωση των θεμελιώδων δομών του σύμπαντος, σύμφωνα με την καντιανή πρόταση η εμπειρία της ομορφιάς βασίζεται στην αισθητή μας επίγνωση και στις διαδικασίες της φαντασίας που οδηγούν τελικά στην

42 CW, κεφ. 2 - Aesthetics

43 AB, κεφ. 1 - Introduction

μαθηματική γνώση. Θα διασαφηνιστεί λοιπόν, η σύνδεση μεταξύ *αισθητικού στοχασμού, δημιουργικής φαντασίας και μαθηματικής γνώσης*.

Έτσι λοιπόν, ο καντιανός απολογισμός που αναπτύσσεται απαντά σε ερωτήματα τύπου: “Πώς, εν ολίγοις, κάνουμε αισθητικές κρίσεις σχετικά με την ομορφιά στα μαθηματικά;”. Η ομορφιά στα μαθηματικά είναι μία μη εννοιολογική απάντηση, την αισθανόμαστε υπό το φως των δικών μας δημιουργικών δραστηριοτήτων. Η αισθητική του Καντ δεν αφήνει περιθώρια ομορφιάς στα μαθηματικά, και αυτό διότι ο Καντ ισχυρίζεται⁴⁴ ότι οι κρίσεις ομορφιάς αφορούν το συναίσθημα παρά την ορθολογική γνώση, ενώ τέτοιου είδους γνώση στην ουσία είναι ο στόχος των μαθηματικών. Πράγματι, ο Καντ εξάγει μερικά εντυπωσιακά αρνητικά συμπεράσματα σχετικά με την πιθανότητα ύπαρξης ομορφιάς στα μαθηματικά, και γενικότερα στις επιστήμες. Όπως έχει συνοψιστεί: *-Ο Καντ σπάει περίφημα την παράδοση και λέει ότι δεν μπορεί να υπάρξει “όμορφη επιστήμη”, ούτε “επιστήμη του ωραίου”, επειδή η απόλαυση είναι χαρακτηριστικό του ελεύθερου παιχνιδιού των ικανοτήτων της ανακλαστικής κρίσης (της ομορφιάς), και όχι της καθοριστικής κρίσης στην επιστήμη-*

Η καντιανή πρόταση που αναπτύσσεται παρέχει μία πολλά υποσχόμενη εναλλακτική λύση έναντι των διαδεδομένων πλατωνικών πεποιθήσεων που συναντάμε σε πολλούς μαθηματικούς. Σύμφωνα με την πλατωνική προσέγγιση, η εμπειρία της μαθηματικής ομορφιάς είναι η διανοητική επίγνωση των θεμελιώδων δομών του σύμπαντος. Η προσέγγιση του Καντ συνίσταται στην άποψη ότι η εμπειρία της ομορφιάς στα μαθηματικά δεν βασίζεται στις ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων, αλλά στην αισθητή μα επίγνωση των διαδικασιών της φαντασίας και τελικά οδηγούν στη μαθηματική γνώση. Στην παρ.62 της *“Critique of Judgment”*, ο Καντ προβάλλει τρεις βασικούς ισχυρισμούς σχετικά με την δυνατότητα ύπαρξης ομορφιάς στα μαθηματικά.

1. Οι ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων, συνήθως, θεωρούνται όμορφες, λόγω της απροσδόκητης σκοπιμότητας τους για την γνώση.
2. Σε αντίθεση με την αντίληψη για την ομορφιά των μαθηματικών ιδιοτήτων, η σκοπιμότητα των μαθηματικών ιδιοτήτων δεν υποδεικνύει ομορφιά αλλά μία μορφή τελειότητας.
3. Ενώ οι ίδιες οι μαθηματικές ιδιότητες δεν είναι όμορφες, η επίδειξη τέτοιων ιδιοτήτων μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο αισθητικής κρίσης.

Στα δύο πρώτα, ο Καντ επιστρέφει στους λόγους που εξηγούνται αναλυτικά στην “Κριτική της Αισθητικής Κρίσης” για τη διαμάχη ενάντια σε μία αντίληψη των μαθηματικών αντικειμένων και των ιδιοτήτων τους ως όμορφα. Στον τρίτο ισχυρισμό, φαίνεται να αποσύρεται από την πλήρη απόρριψη της δυνατότητας αισθητικής εμπειρίας στα μαθηματικά. Η θέση του Καντ, παρουσιάζεται ως κάτι πιο περίπλοκο απ’ ότι θα περίμενε κανείς με μία πρώτη εξέταση. Σύμφωνα με τις απόψεις του, τα μαθηματικά εμφανίζουν σκοπιμότητα στον βαθμό που ευνοούν την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, χωρίς όμως να έχουν σχεδιαστεί για μία τέτοια συγκεκριμένη διαδικασία επίλυσης.

Η τυπική σκοπιμότητα των μαθηματικών αντικειμένων

Όπως υποστηρίζει⁴⁵ ο Καντ, ότι η σκοπιμότητα των μαθηματικών συνίσταται για να ευνοηθεί η επίλυση πλήθους προβλημάτων με τρόπο που να φαίνεται απροσδόκητα απλός. Χαρακτηρίζει τη σκοπιμότητα των μαθηματικών αντικειμένων, ως *“μία αντικειμενική σκοπιμότητα η οποία είναι απλώς τυπική”*. Η σκοπιμότητα είναι αντικειμενική επειδή είναι μία σχέση μεταξύ αντικειμένων (όπως για

44 AB, κεφ. 1, σελ. 2

45 AB, κεφ. 2 - Mathematics and Aesthetics in Kantian Perspectives

παράδειγμα μία σχέση γεωμετρικών αντικειμένων). Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υποκειμενική σκοπιμότητα των αντικειμένων αισθητικής κρίσης, που βρίσκονται σε σκόπιμη σχέση με το υποκείμενο. Όπως εξηγεί ο Καντ στο κεφάλαιο “*Analytic of Aesthetic Judgment*”, τα αντικείμενα της αισθητικής κρίσης είναι υποκειμενικά σκόπιμα στο βαθμό που οι γνωστικές μας ικανότητες “συντονίζονται ακούσια” (CJ V: 190). Επειδή τα μαθηματικά αντικείμενα εμφανίζουν τη μορφή της σκοπιμότητας, ακόμα και εάν δεν έχουν σχεδιαστεί για την υλοποίηση κάποιου συγκεκριμένου σκοπού, όπως υποστηρίζει ο Καντ, η σκοπιμότητα τους “δεν αναμένεται από την απλότητα της κατασκευής τους”. Οι ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων περιγράφονται συνήθως με αισθητικούς όρους:

-Συνηθίζεται να ονομάζουμε τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, όπως και των αριθμών, ως όμορφες, λόγω μιας a priori σκοπιμότητας, η οποία δεν αναμένεται απ' την απλότητα της κατασκευής τους, για κάθε είδους γνωστικής χρήσης-

Ο Καντ αποδίδει ρητά αυτή την άποψη στον Πλάτωνα, αλλά φαίνεται να έχει υπόψη και την αντίληψη, που προτάθηκε απ' τους ορθολογιστές (Wolff, A. G. Baumgarten, G. Friedrich Meier) και πιο πίσω, στον Leibniz που ταυτίζει την ομορφιά με την αντίληψη κάποιας μορφής αντικειμενικής σκοπιμότητας στο αντικείμενο (ή εναλλακτικά στην καλλιτεχνική αναπαράσταση του αντικειμένου). Σύμφωνα με την αντίληψη αυτή, η εμπειρία της ομορφιάς συνίσταται στην αισθητηριακή αναγνώριση ότι το αντιληπτό αντικείμενο, εμφανίζει μία ορισμένη εσωτερική ενότητα και αρμονία και ευνοϊκότητα για σκοπούς. Η ομορφιά βασίζεται εν μέρει, στην εμπειρία μιας ιδιότητας σκοπιμότητας στο ίδιο το αντικείμενο, στο βαθμό που αυτή η σκοπιμότητα είναι γνωστή στο αντικείμενο, και ο Καντ την αποκαλεί “διανοητική” / intellectual σκοπιμότητα, δηλαδή “σκοπιμότητα που γνωρίζεται μέσω της λογικής”.(CJ V: 362). Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να κάνουμε μία αναφορά στον ρόλο και την επιρροή του Alexander Baumgarten, ο οποίος επινόησε τον όρο της Αισθητικής. Στο βιβλίο του, *Στοχασμοί* το 1735, ο Alexander Baumgarten εισάγει τον όρο αυτόν, ο οποίος έχει βάση στο ελληνικό επίθετο “αισθητικός” και αναφέρεται στις αισθήσεις, κυρίως για την ποίηση. Η αισθητική γεννήθηκε σε αντίθεση με την λογική, και ενώ η αισθητική εξετάζει τις αισθήσεις, τα συναισθήματα που γεννούν και την γνώση που προέρχεται απ' αυτά, η λογική εξετάζει τις αφηρημένες ιδέες που απευθύνονται στο νου, χωρίς κάποια αναφορά στις αισθήσεις. Φαίνεται λοιπόν, ότι ο Καντ βρήκε ένα δυνατό “πάτημα” ώστε να στηρίξει τις ιδέες του και να εξελίξει τη θεωρία του.

Σχετική τελειότητα και όχι διανοητική ομορφιά

Στην απόδοση του Καντ⁴⁶, υπάρχει μία σημαντική διαφορά μεταξύ της αντικειμενικής τυπικής σκοπιμότητας που συναντάμε στα μαθηματικά, και της υποκειμενικής (formal) σκοπιμότητας που αποτελεί έδαφος για την εμπειρία του όμορφου.

- Δεν είναι μία αισθητική κρίση (όπως οι ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων) που βρίσκουμε σκόπιμη, όχι μία κρίση χωρίς έννοια, η οποία κάνει αισθητή μία υποκειμενική σκοπιμότητα στο ελεύθερο παιχνίδι των γνωστικών μας ικανοτήτων, αλλά μία διανοητική κρίση σε συμφωνία με έννοιες, η οποία δίνει μία *ευδιάκριτη γνώση μιας αντικειμενικής σκοπιμότητας*. Ίσως κάποιος να έπρεπε να το ονομάσει ως σχετική τελειότητα παρά ως ομορφιά ενός μαθηματικού σχήματος. (CJ V: 366)

Ο Καντ συμφωνεί με τους ορθολογιστές στο κομμάτι, ότι η αντικειμενική σκοπιμότητα των μαθηματικών αντικειμένων μπορεί να ονομαστεί ως μία τελειότητα σε σχέση με την υλοποίηση ενός

46 AB, κεφ. 3 - Relative Perfection rather than Intellectual Beauty

σκοπού. Ωστόσο, διαφωνεί στον περαιτέρω ισχυρισμό ότι μπορεί η αντίληψη αυτή (της σχετικής τελειότητας) να αποτελέσει εμπειρία ομορφιάς. Η εμπειρία της ομορφιάς για τον Καντ, είναι η επίγνωση μιας καθαρά υποκειμενικής σκοπιμότητας που είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε εννοιολογική γνώση του αντικειμένου. Σε αντίθεση με την εμπειρία μας από την αντικειμενική σκοπιμότητα των μαθηματικών αντικειμένων, η εμπειρία της ομορφιάς δεν είναι αναγνωρίσιμη με κάποια εννοιολογική αναπαράσταση της σκοπιμότητας, αλλά γίνεται αντιληπτή μέσω του *συναίσθηματος*.

Για να κατανοήσουμε πλήρως τον ισχυρισμό αυτό, είναι απαραίτητο να εξετάσουμε τη γενική άποψη του Καντ για την *αισθητική απόλαυση*. Όπως εξηγεί στο “*Analytic of Aesthetic Judgment*”, τα αντικείμενα της αισθητικής κρίσης μπορούν να θεωρηθούν υποκειμενικά σκόπιμα, στο βαθμό που οι γνωστικές μας ικανότητες έρχονται σε αρμονία με αυτά. Μία αρμονία που βιώνεται ως κάτι *αισθητικά ευχάριστο*. Τί είναι σημαντικό όμως, γι' αυτή την αρμονική αλληλεπίδραση των ικανοτήτων με τις γενικές συνθήκες των γνωστικών κρίσεων, χωρίς να οδηγεί στη γνώση; Επιτυχείς γνωστικές κρίσεις επιτυγχάνονται με την “δουλειά” της φαντασίας, την ικανότητα συνδυασμού των διαφορετικών αισθητών καταστάσεων, την κατανόηση και την εννοιολογική ικανότητα, ώστε να δοθεί νόημα στο συγκεκριμένο είδος. (CPR: A78 / B103)

Η γνώση είναι δυνατή, σύμφωνα με τον Καντ⁴⁷, ως μία ευφάνταστη σύνθεση της αισθητηριακής πολλαπλότητας, η οποία υπάγεται από έννοιες κατανόησης. Οι αισθητικές κρίσεις διαφέρουν από τέτοιες γνωστικές κρίσεις, αφού δεν οδηγούν σε εννοιολογική υπαγωγή της σύνθεσης που επιφέρει η φαντασία. Ενώ η φαντασία ενοποιεί την αισθητηριακή πολλαπλότητα με τρόπο που θα μπορούσε να θέσει έννοιες υπό την κατανόηση, καμία έννοια στην πραγματικότητα δεν είναι εφαρμοσμένη. Ο Καντ περιγράφει την αλληλεπίδραση της φαντασίας και της κατανόησης σε κρίσεις οι οποίες είναι αρμονικές, σύμφωνα με τις συνθήκες της γνώσης σε γενικότερο πλαίσιο. Μπορεί ωστόσο, να θεωρηθεί ως ελεύθερη και αυθόρμητη καθώς η δημιουργική δραστηριότητα της φαντασίας, που “συγκεντρώνει” και “ενώνει” στοιχεία του αισθητηριακού δεδομένου, δεν περιορίζεται από κάποια εννοιολογική καθοδήγηση. *Η προκύπτουσα κρίση λοιπόν, παραμένει καθαρά ανακλαστική, δηλαδή συνίσταται στην ελεύθερη και μη εννοιολογική εξέταση του αντικειμένου, χωρίς να οδηγεί σε κάποια καθορισμένη εννοιολογική αξίωση για το αντικείμενο.* Ο συντονισμός των γνωστικών μας ικανοτήτων μπροστά σε ένα όμορφο αντικείμενο, είναι ανεξάρτητος από οποιαδήποτε άλλη κρίση για το αντικείμενο αυτό, το οποίο βιώνουμε ως αισθητικά ευχάριστο. Έχουμε “συνείδηση” της αρμονίας των διανοητικών ικανοτήτων με την “αίσθηση ικανοποίησης”. Τότε, όπως ισχυρίζεται ο Καντ, έχουμε κάτι όμορφο.

Ο θαυμασμός προς τις μαθηματικές αποδείξεις

Με την απόρριψη της ορθολογικής ή “εθιμικής” άποψης που αποδίδει αισθητικές ιδιότητες σε μαθηματικά αντικείμενα, ο Καντ προβάλλει⁴⁸ τον τρίτο ισχυρισμό του, στον οποίο φαίνεται να υποχωρεί από την απόλυτη απόρριψη του ως προς την ύπαρξη αισθητικών σκέψεων στα μαθηματικά. Θα μπορούσε κανείς, μάλλον, να αποκαλέσει μία απόδειξη των ιδιοτήτων ως όμορφη, αφού μέσω αυτού, η *κατανόηση*, ως ικανότητα των εννοιών, και η *φαντασία*, ως η ικανότητα να εκθέτει a priori, ενισχύονται σε συνδυασμό με την ακρίβεια που εισάγει η λογική. Στη περίπτωση αυτή, η ικανοποίηση, αν και η βάση της βρίσκεται σε έννοιες, είναι υποκειμενική, ενώ η τελειότητα συνοδεύεται με μία αντικειμενική ικανοποίηση (CJ V: 366).

47 AB, κεφ.3 - Relative Perfection rather than Intellectual Beauty, σελ. 6-7

48 AB, κεφ.4 - Admiration for Mathematical Demonstrations

Ο παραπάνω ισχυρισμός του Καντ, εγείρει μία σειρά ερωτημάτων. Αρχικά, γιατί οι μαθηματικές αποδείξεις, αλλά όχι οι μαθηματικές ιδιότητες να ονομάζονται όμορφες; Ποιά είναι η διαφορά των μαθηματικών ιδιοτήτων και των αποδείξεων τους που κάνει το δεύτερο, αλλά όχι το πρώτο, κατάλληλο για αισθητική εξέταση; Και πιο συγκεκριμένα, γιατί οι αποδείξεις μαθηματικών ιδιοτήτων προκαλούν μία υποκειμενική, και όχι αντικειμενική ικανοποίηση, όπως θα έπρεπε εάν η επίμαχη ικανοποίηση είναι γνήσια αισθητική;

Με την αρχική εξέταση, θα μπορούσε κανείς να μπει στον πειρασμό να ερμηνεύσει τον υπαινιγμό του Καντ, ότι μόνο οι μαθηματικές αποδείξεις μπορούν να χαρακτηριστούν ως όμορφες, δηλαδή όταν ο Καντ μιλάει για μία “απόδειξη μαθηματικών ιδιοτήτων”, θα μπορούσε κανείς να καταλάβει ότι αναφέρεται σε κάποιο είδος αναπαράστασης των μαθηματικών αντικειμένων και των ποιότητων τους. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, η απεικόνιση κύκλων και τριγώνων σε πίνακες ζωγραφικής θα μπορούσε να κριθεί αισθητικά. Έτσι, ίσως μπορεί να υπάρξει αντανάκλαση της εξωτερικής μορφής, ή του σχήματος τέτοιων αντικειμένων αισθητικά, κατά την αφαίρεση από οποιαδήποτε εννοιολογική αναπαράσταση, όπως για παράδειγμα την καταλληλότητα τους στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Αναπαραστάσεις γεωμετρικών σχημάτων, όπως για παράδειγμα κύκλοι και τρίγωνα, θεωρούνται ως αντικείμενα μη εννοιολογικών προβλημάτων, που θεμελιώνουν την αισθητική απόλαυση.

Η παραπάνω άποψη φαίνεται άκρως δελεαστική, διότι ο Καντ προτείνει⁴⁹ ότι μία καθαρή κρίση είναι δυνατή ακόμα και στη περίπτωση ενός αντικειμένου για το οποίο έχουμε προσδιορισμένη έννοια (determinate concept), δηλαδή, “*αν το άτομο που κάνει μία κρίση...έχει αφαιρέσει την έννοια από την τελική του κρίση*”. Έτσι, ο Καντ αφήνει τη δυνατότητα για μία μη εννοιολογική αισθητική κρίση, με αφαίρεση των εννοιών που μπορούν διαφορετικά να αποτελούν τη βάση καθοριστικών κρίσεων για το αντικείμενο. Ως ανάγνωση του παραπάνω αποσπάσματος, ωστόσο, η αρχική πρόταση δεν είναι πειστική. Ο Καντ δεν χρησιμοποιεί τον όρο “demonstration” με την χαλαρή ή μη τεχνική έννοια ως αναφορά σε αναπαράσταση κάποιας μορφής. Πιθανό να χρησιμοποιεί τον όρο για να υποδηλώσει “μία απόδειξη που αποτελεί τη βάση της μαθηματικής βεβαιότητας”. Η τρίτη δήλωση του Καντ, δεν αφορά αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων, όπως γεωμετρικά σχήματα, αλλά μαθηματικές αποδείξεις. Έτσι φαίνεται να ενδιαφέρεται για αποδείξεις που έχουν σαν ως βάση τη μαθηματική γνωστική λειτουργία. Γιατί όμως, να επιτρέπει την αισθητική κρίση των μαθηματικών αποδείξεων, εάν απορρίπτει τόσο κατηγορηματικά τις κρίσεις ομορφιάς για τα μαθηματικά και των ιδιοτήτων τους;

Για να απαντηθεί το ερώτημα αυτό, πρέπει να δοθεί μεγαλύτερη προσοχή στον χαρακτήρα των μαθηματικών για τον Καντ. Δεδομένου ότι η μαθηματική βεβαιότητα, για τον Καντ, είναι διαισθητική βεβαιότητα, χαρακτηρίζει μία απόδειξη στο βιβλίο CPR, ως “μία αποδεικτική απόδειξη, στον βαθμό που είναι διαισθητική” (CPR: A734 / B762). Αν ληφθεί η διασθητική φύση των μαθηματικών αποδείξεων, μπορούμε να εξηγήσουμε την αντίληψη του Καντ για την ομορφιά στα μαθηματικά. Όσο αφορά τον θαυμασμό που μπορούμε να βιώσουμε για τον μαθηματικό συλλογισμό, φαίνεται πως στη σύνδεση μεταξύ διαισθητικού χαρακτήρα των μαθηματικών αποδείξεων και της αισθητικής κρίσης των μαθηματικών. Η σκοπιμότητα μπορεί να μας προκαλέσει αίσθηση θαυμασμού, και αυτό “*διότι στην αναγκαιότητα αυτού που είναι σκόπιμο, και έτσι συγκροτείται σαν να κανονίστηκε σκόπιμα για τη χρήση που το θέλουμε, αλλά αρχικά φαίνεται να αφορά την ουσία των πραγμάτων, χωρίς να έχει σχέση με τη δική μας χρήση, και τελικά αποτελεί έδαφος για μεγάλο θαυμασμό*” (CJ V : 363).

49 AB, κεφ.4 - Admiration for Mathematical Demonstrations, σελ. 8

Ο Καντ προτείνει⁵⁰, ότι βιώνουμε μία αίσθηση θαυμασμού όταν μας φαίνονται τα αντικείμενα σαν να δημιουργήθηκαν για τη πραγματοποίηση των σκοπών μας, το οποίο στην πραγματικότητα δεν ισχύει. Η γενική άποψη περί θαυμασμού εγείρει ερωτήματα σχετικά με τον θαυμασμό στα μαθηματικά αντικείμενα. Στην περίπτωση των φυσικών αντικειμένων, των οποίων η προέλευση είναι ανεξάρτητη από τους σκοπούς μας, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι μπορούμε να αισθανθούμε θαυμασμό, αν τα αντικείμενα αποδειχθούν ευνοϊκά για τους σκοπούς μας. Κι όμως, στην περίπτωση των μαθηματικών, τα αντικείμενα είναι διαφορετικά απ' την παραπάνω περίπτωση, και όπως υποστηρίζει ο Καντ είναι προϊόντα του ανθρώπινου νου. Δεν είναι πράγματα των οποίων ο χαρακτήρας ανακαλύφθηκε από εμάς μόνο εμπειρικά, αλλά αντικείμενα των οποίων η φύση τους καθορίζεται από έννοιες *a priori*. Αυτός είναι ο λόγος που τα αντικείμενα των μαθηματικών μπορούν να είναι κατασκευασμένα, δηλαδή να εκτίθενται, σε *a priori* διαίσθηση. Με άλλα λόγια, μπορούν να παράγουν λογικές αναπαραστάσεις, χωρίς καμία προσφυγή σε οποιαδήποτε εμπειρία. Εφόσον, είναι προϊόντα της δικής μας πνευματικής δραστηριότητας, φαίνεται πιθανότατα ότι εμείς οι ίδιοι “εισάγουμε την σκοπιμότητα στη φιγούρα που (εμείς) σχεδιάζουμε και συμφωνεί με μία έννοια” (CJ V: 365).

Ο Καντ ισχυρίζεται⁵¹ ότι παρ' όλα αυτά, τα μαθηματικά αντικείμενα προκαλούν μία “δικαιωμένη” αίσθηση θαυμασμού. Είναι φανερό ότι για να κατανοήσουμε μία εμπειρία θαυμασμού, δεν πρέπει να μπερδέψουμε τους *a priori* κανόνες κατασκευής με τους εμπειρικούς. Το σημαντικό, σύμφωνα με τον Καντ, είναι ότι η μαθηματική κατασκευή, και μάλιστα οι αποδείξεις βασίζονται σε μία κατασκευή, η οποία εξαρτάται από την διαίσθηση. Για να καταλάβουμε τον λόγο που βιώνουμε το αίσθημα θαυμασμού στα μαθηματικά, πρέπει να θυμηθούμε τον χαρακτηρισμό της μαθηματικής γνώσης ως συνθετική *a priori*, όπως έχει οριστεί από τον Καντ. Αν και η έννοια του κύκλου για παράδειγμα, είναι μία έννοια *a priori*, ο Καντ υποστηρίζει ότι δε μπορούμε να γνωρίζουμε τις ιδιαίτερες ιδιότητες του κύκλου και την ευνοϊκότητα για την επίλυση δύσκολων μαθηματικών προβλημάτων, χωρίς να τη κατασκευάσουμε με *a priori* διαίσθηση. “Οι πολλοί κανόνες, η ενότητα των οποίων προκαλεί τον θαυμασμό, δεν απορρέουν από μία έννοια του αντικειμένου, αλλά χρειάζεται το αντικείμενο να δοθεί στη διαίσθηση” (CJ V: 364).

50 AB, κεφ.4 - Admiration for Mathematical Demonstrations, σελ. 9

51 AB, κεφ.4 - Admiration for Mathematical Demonstrations, σελ. 10

2.4 - Τέχνη, Ιδιοφυΐα & Αισθητικές Ιδέες

Η δράση του Καντ επηρέασε σε μεγάλο βαθμό και τον τομέα των τεχνών. Εκτός από τις κρίσεις που προαναφέρθηκαν, ο Καντ διευκρίνησε ότι όπως μπορούν να γίνουν κρίσεις για το όμορφο, επιπλέον μπορούν να γίνουν κρίσεις για την “ωραία τέχνη”. Κάνει αρκετές αναφορές / παρατηρήσεις που συνδέει την ομορφιά της τέχνης με αυτή της φύσης, υποστηρίζοντας ότι η τέχνη πρέπει “να μοιάζει με τη φύση” και ότι πρέπει να είναι *ελεύθερη και ασταθής*. Πολύ ενδιαφέρον, επίσης, έχει η αναζήτηση του και η άποψη του σχετικά με το πώς μπορούν να παραχθούν όμορφα έργα τέχνης. Όμως, έχει αναφερθεί ότι δεν μπορούν να υπάρξουν κανόνες που θα καθορίσουν πότε κάτι είναι όμορφο και γι'αυτό το λόγο ο καλλιτέχνης δεν μπορεί να παράγει κάτι όμορφο εφαρμόζοντας μία σειρά κανόνων. Στο σημείο αυτό παρουσιάζεται ένα παράδοξο. Ο Καντ ισχυρίζεται⁵² ότι η δραστηριότητα του καλλιτέχνη πρέπει να διέπεται από κανόνες διότι “κάθε τέχνη προϋποθέτει κανόνες”. Στο παράδοξο αυτό, ο Καντ φαίνεται να έχει λύση. Η λύση που προτείνει είναι η υπόθεση μίας ικανότητας, την οποία αποκαλεί “*ιδιοφυΐα / genius*”. Με την ικανότητα αυτή η φύση δίνει τον κανόνα στη τέχνη.

Τι σημαίνει αυτό λοιπόν;

Η μεγαλοφυΐα που έχει ένας καλλιτέχνης, τον βοηθά να παράγει αντικείμενα που κρίνονται ως όμορφα χωρίς να ακολουθεί συνειδητά κανόνες. Ο καλλιτέχνης δεν ξέρει και δεν μπορεί να εξηγήσει την πορεία που ακολούθησε για τη δημιουργία όμορφων αντικειμένων. Η έννοια “genius” σημαίνει κάτι διαφορετικό απ' την λαμπρότητα της διάνοιας. Με πιο απλά λόγια ορίζει την ιδιοφυΐα ως εξής : “ιδιοφυΐα” είναι το ταλέντο (φυσικό προνόμιο) που δίνει τον κανόνα στη τέχνη. Δεδομένου ότι το ταλέντο είναι μία έμφυτη παραγωγική ικανότητα που ανήκει στη φύση, θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι “ιδιοφυΐα” είναι μία έμφυτη διανοητική προδιάθεση μέσω της οποίας η φύση δίνει τον κανόνα στη τέχνη.

Ένα άλλο σημείο που έχει αρκετό ενδιαφέρον, είναι η άποψη του Καντ ότι η ομορφιά είναι “έκθεση” ή “έκφραση” αισθητικών ιδεών . Ο Καντ περιγράφει μία αισθητική ιδέα ως “αναπαράσταση της φαντασίας” που δημιουργεί πολλές σκέψεις και προσπαθεί να τις αντιπαραβάλει με τις λογικές ιδέες. Βλέπει όμως, ότι ο ρόλος των αισθητικών ιδεών λειτουργεί ως διαμεσολαβητής μεταξύ λογικών ιδεών και της φαντασίας. Η έκφραση είναι σημαντική γι' αυτόν διότι είναι μία αισθητική διαδικασία, και όχι μία διαδικασία κατανόησης. Η εμπνευσμένη τέχνη είναι “όμορφη”, αλλά επιπλέον είναι και η έκφραση μίας κατάστασης του νου που δημιουργείται από αισθητικές ιδέες. Έτσι λοιπόν, η αισθητική ιδέα δεν είναι μία παρουσίαση, αλλά μία ιδέα που θα θέσει την *φαντασία* και την *κατανόηση* σε αρμονία δημιουργώντας ένα αυτόνομο αίσθημα ευχαρίστησης. Αποτέλεσμα της παραπάνω διαδικασίας είναι το έργο τέχνης , το οποίο εκθέτει μία αισθητική ιδέα που καταφέρνει να της δώσει λογική μορφή. Έτσι οι αισθητικές ιδέες επιδιώκουν να προσεγγίσουν μία έκθεση ορθολογικών ιδεών.

2.4.1 - Τέχνη Εν Γένει & Καλές Τέχνες

[IK]

Στο έργο του *Κριτική της Κριτικής Δύναμης* (CPI), ο Καντ ασχολείται⁵³ με βασικά ζητήματα των αισθητικών κρίσεων και μετέπειτα των τεχνών, καθώς τονίζει τον σημαντικό ρόλο της ιδιοφυΐας. Ασχολείται επίσης, με τις καλές τέχνες και με τον παράγοντα της καλαισθησίας. Σε αυτή την ενότητα θα δούμε τις απόψεις του Καντ πάνω σε αυτά τα ενδιαφέροντα ζητήματα.

52 GH, κεφ.2.6 – Art, Genius and Aesthetic Ideas

53 IK, κεφ.43

Σε γενικό πλαίσιο περί τέχνης, αρχικά, φαίνεται η διάκριση της από τη φύση, όπως το ποιείν από το πράττειν. Το προϊόν της τέχνης είναι το έργο, και το προϊόν της φύσης είναι το αποτέλεσμα. Τέχνη θα έπρεπε, κανονικά, να θεωρείται η δημιουργία μέσω της *απόλυτης ελευθερίας*, δηλαδή μέσω μίας θελήσεως που θέτει τον Λόγο ως αρχή των πράξεών της. Βέβαια, μπορούμε να δούμε την τέχνη σε ό,τι είναι φτιαγμένο, πρέπει όμως να προηγηθεί μία παράσταση στην αιτία τους, πριν την πραγματοποίησή τους, ένα αποτέλεσμα. Ένα έργο τέχνης διακρίνεται από ένα φυσικό αποτέλεσμα, και με αυτό εννοούμε ένα έργο ανθρώπων. Επίσης, η τέχνη, ως δεξιότητα του ανθρώπου, διακρίνεται από την επιστήμη ως πρακτική από τη θεωρητική ικανότητα, και ως η τεχνική από τη θεωρία.

Συνεπώς, δεν υπάρχει επιστήμη του ωραίου, αλλά μόνο κριτική, ούτε όμορφη επιστήμη παρά μόνο *καλές τέχνες*. Διότι στην πρώτη περίπτωση, θα έπρεπε να αποδεικνύονται επιστημονικά, μέσω αποδεικτικών λόγων και να κρίνεται με αυτόν τον τρόπο εάν κάτι είναι ωραίο είτε όχι, οπότε δεν θα ήταν σίγουρα καλαισθητική κρίση. Εάν η τέχνη, σύμφωνα με την γνώση ενός ενδεχόμενου αντικειμένου εκτελεί απλώς τις απαιτούμενες πράξεις για να το πραγματοποιήσει, είναι *μηχανική*, ενώ εάν συνδέεται άμεσα με το συναίσθημα της ηδονής τότε λέγεται *αισθητική τέχνη*. Η τελευταία είτε είναι ευχάριστη είτε ανήκει στις καλές τέχνες. *Ευχάριστες τέχνες* είναι εκείνες που αποσκοπούν απλώς στην απόλαυση, τέτοια είναι όλα τα θέλγητρα που μπορούν να ψυχαγωγήσουν, για παράδειγμα, στο τραπέζι μία συντροφιά. Οι *καλές τέχνες* είναι ένας σκόπιμος τρόπος παραστάσεων ο οποίος παράγει την καλλιέργεια των πνευματικών δυνάμεων. Η καθολική μεταδοσιμότητα μίας ηδονής συνεπάγεται στο ότι δε πρέπει να είναι μία ηδονή της απόλαυσης με βάση την απλή αίσθηση, αλλά του αναστοχασμού και άρα η αισθητική τέχνη, η οποία ανήκει στις καλές τέχνες, είναι μία τέχνη με αναστοχαστική κριτική δύναμη. Συνολικά, ως ουσιώδη γνωρίσματα των καλών τεχνών, ο Καντ θεωρεί⁵⁴ την αυτοτέλεια, την αυτονομία και την αναλογία τους με τη φύση. Δηλαδή, η τέχνη είναι ωραία όταν είναι σαν τη φύση και επομένως, για να δημιουργηθεί ένα άξιο έργο τέχνης, οφείλει να είναι ακριβές ως προς τη τήρηση οικείων κανόνων της τέχνης, δηλαδή να είναι *lege artis*. Η καντιανή θεώρηση συγκεκριμένα, εστιάζει στην καθαρή και αμερόληπτη κρίση των τυπικών χαρακτηριστικών ενός καλλιτεχνικού δημιουργήματος, χωρίς κάποια σκοπιμότητα. Στο έργο του δεν επικεντρώνεται στην ενασχόληση με τη τέχνη αλλά με τις καλαισθητικές κρίσεις, μέσω των οποίων το ωραίο και η τέχνη εκπορεύονται. Υποστηρίζει ότι η τέχνη είναι ένα *a priori* σύνθετο θέμα το οποίο σχετίζεται με την υποκειμενική κρίση.

2.4.2 - Ο ρόλος της ιδιοφυΐας & η Καλαισθησία

⁵⁵Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η ιδιοφυΐα είναι το φυσικό προνόμιο ή ταλέντο, το οποίο δίνει τον κανόνα στην τέχνη. Όποια αξία και εάν έχει ο ορισμός της ιδιοφυΐας, είτε είναι αυθαίρετος είτε είναι σύμφωνος με την έννοια την οποία έχουμε συνηθίσει να συνδέουμε με τη λέξη ιδιοφυΐα, είτε όχι, θα μπορούμε ήδη εκ των προτέρων να αποδείξουμε ότι σύμφωνα με τη σημασία της λέξης που έχουμε εδώ, *οι καλές τέχνες πρέπει να θεωρούνται κατά αναγκαίο τρόπο ως τέχνες της ιδιοφυΐας*. Πράγματι, φαίνεται πως κάθε τέχνη προϋποθέτει κανόνες, μέσω της θεμελίωσης των οποίων παριστάνεται ως δυνατό το προϊόν της, το οποίο πρόκειται να ονομάζεται *καλλιτεχνικό*.

Οι ίδιες οι καλές τέχνες δεν μπορούν να επινοήσουν τους κανόνες μέσω των οποίων δημιουργούνται τα προϊόντα τους. Παρ' όλα αυτά, ένα προϊόν δεν μπορεί να ονομαστεί ως αποτέλεσμα της τέχνης χωρίς

54 IK, κεφ.44

55 IK, κεφ.46

προηγούμενο κανόνα, γι' αυτό πρέπει να παρέχετε ο κανόνας στην τέχνη ή στη φύση μέσα στο υποκείμενο, με τον σωστό συντονισμό των ικανοτήτων του, και τελικώς οι καλές τέχνες να είναι δυνατές μόνο ως προϊόντα της ιδιοφυΐας. Συνεπώς :

- Η ιδιοφυΐα είναι το ταλέντο που δίνει τον κανόνα στη τέχνη, με βασικό χαρακτηριστικό την πρωτοτυπία.
- Η ιδιοφυΐα δεν μπορεί να καταδείξει επιστημονικώς από μόνη της πως δημιουργείται το προϊόν της, αλλά παρέχει τον κανόνα ως φύση, δηλαδή ο δημιουργός των ιδεών αυτών δεν γνωρίζει ούτε ο ίδιος από που προέρχονται για τον σκοπό αυτό, οπότε δεν έχει την ευχέρεια να μιμηθεί κάτι ή να επινοήσει παρόμοιες ιδέες ικανές να δημιουργήσουν ισοδύναμα προϊόντα. Γι' αυτό άλλωστε, η λέξη ιδιοφυΐα (Genie) παράγεται από το ιδιάζον πνεύμα που έχει δοθεί από άνθρωπο σε άνθρωπο κατά τη γέννηση του, για να τον καθοδηγεί και από την έμπνευση του να παράγονται πρωτότυπες ιδέες.
- Και τέλος, η φύση επιτάσσει τους κανόνες μέσω της ιδιοφυΐας, όχι στην επιστήμη αλλά στην τέχνη.

⁵⁶Είναι φανερό πλέον, ότι για να κριθούν τα αντικείμενα ως ωραία, απαιτείται η καλαισθησία αλλά για τις ίδιες τις καλές τέχνες, απαιτείται η ιδιοφυΐα. Η φυσική ομορφιά έχει μία σημαντική διαφορά με την ομορφιά της τέχνης. Για να κριθεί μία φυσική ομορφιά ως τέτοια, δεν απαιτείται να γνωρίζει κάποιος σκοπιμότητα (τον τελικό σκοπό), παρά να αναγνωρίζει την απλή μορφή χωρίς τη γνώση του σκοπού. Όσο αφορά το προϊόν της τέχνης, πρόκειται να κριθεί ως ωραίο, αφού πρώτα πρέπει να αποδεχθούμε ως θεμέλιο μία έννοια που ορίζει τί οφείλει το αντικείμενο να είναι, αφού εξ' ορισμού η τέχνη προϋποθέτει πάντα έναν σκοπό στην αιτία της.

-Η εναρμόνιση του πολλαπλού σε ένα πράγμα, με τον εσωτερικό προορισμό του, ως σκοπό, είναι η τελειότητα του πράγματος, γι' αυτό θα πρέπει κατά την αποτίμηση της ομορφιάς της τέχνης να λαμβάνεται συγχρόνως υπόψιν η τελειότητα του πράγματος, για το οποίο όμως τίθεται ζήτημα στην περίπτωση της φυσικής ομορφιάς-

Επιπλέον, οι καλές τέχνες δείχνουν την υπεροχή τους περιγράφοντας με ωραίο τρόπο πράγματα, τα οποία στη φύση θα ήταν άσχημα ή δυσάρεστα. Για να γίνει κατανοητό αυτό, οι ασθένειες ή οι επιπτώσεις του πολέμου και άλλα δεινά, μπορούν να απεικονιστούν σε πίνακες και να φανερωθεί άμεσα το καλλιτεχνικό έργο και η ομορφιά της τέχνης. Για να δοθεί η τελική μορφή στο προϊόν μίας καλής τέχνης, απαιτείται απλώς η καλαισθησία, με την οποία ο καλλιτέχνης αφού διορθώσει με διάφορα παραδείγματα της τέχνης ή της φύσης, ρυθμίζει το έργο του και βρίσκει τελικά την μορφή που τον ικανοποιεί. Για το συγκεκριμένο, η μορφή δεν είναι θέμα έμπνευσης ή ελεύθερης έξαρσης πνευματικών δυνάμεων, αλλά μία αργή και επίπονη διαδικασία αυτοβελτίωσης, ώστε η μορφή να γίνει σύμφωνη με τη σκέψη. Η καλαισθησία λοιπόν, είναι μία ικανότητα κρίσης και όχι μία δημιουργική ικανότητα και ο,τιδήποτε είναι σύμφωνο με αυτή δεν είναι και απαραίτητα έργο καλών τεχνών, αλλά μπορεί να είναι προϊόν που ανήκει, υπό κανόνες, στις μηχανικές τέχνες. Αποτελέσματα καλών τεχνών όπως ένα ποίημα, μία μουσική, μία έκθεση εικόνων, μπορούν να παρουσιάζουν ιδιοφυΐα χωρίς καλαισθησία, και άλλες φορές καλαισθησία χωρίς ιδιοφυΐα.

Βιβλιογραφία

- TP: Pelegkrinis Theodosios
RM: Rohlf Michael , (2020)
WEELD: Wilson, Eric Entrican and Lara Denis , (2008)
LS: Shabel Lisa , (2013)
AJ: Janiak Andrew, (2009)
LS2: Shabel Lisa, (2004)
MF: Friedman Michael , (2012)
JH: Hintikka Jaakko , (2020)
KP: Παγωνδιώτης Κώστας, (2017)
DS: Sutherland Daniel, (2006)
GM: Mpantes George
ASHST: Saiber Arielle and Turner Henry S. , (2009)
MIAA: Inglis Matthew and Aberdein Andrew, Beauty Is Not Simplicity: An Analysis of Mathematicians' Proof Appraisals, (2015)
GH: Ginsborg Hannah , (2005)
IK: Kant Immanuel, (1790)
AB: Breitenbath Angela (2013)
CW: Wenzel Christian Helmut (2016)

Πλήρης Βιβλιογραφία

Breitenbath Angela , “Beauty in Proofs : Kant on Aesthetics in Maths” (2013)

Friedman Michael, “Kant on Geometry and Spatial Intuition” (2012)

Ginsborg Hannah, “Kant’s Aesthetics and Teleology”, publ.2005 & 2013, [Stanford Encyclopedia of Philosophy](#)

Hintikka Jaakko, “Kant’s Theory of Mathematics”(2020)

Inglis Maththew and Aberdein Andrew, “Beauty Is Not Simplicity: An Analysis of Mathematicians’ Proof Appraisals”(2015)

Janiak Andrew, “Kant’s Views on Space and Time”, publ.2009 & 2016, [Stanford Encyclopedia of Philosophy](#)

Kant Immanuel, “Critique of Judgment”,(1790), ch.Beauty and Fine Art & Judgments about Sublime

Mpantes George, “Η θεωρία της αναλογίας του Ευδόξου”/
https://www.academia.edu/9751822/the_theory_of_proportion_of_Eudoxus -
<https://feltor.wordpress.com/2011/01/20/465-2/>

Παγωνδιώτης Κώστας , “Η Καντιανή Θεώρηση”(2017)

Pelegrinis Theodosios , “Ιμάνουελ Καντ” <http://www.pelegrinis.gr/%CE%B9%CE%BC%CE%AC%CE%BD%CE%BF%CF%85%CE%B5%CE%BB-%CE%BA%CE%B1%CE%BD%CF%84/>

Rohlf Michael, “Immanuel Kant” , [Stanford Encyclopedia of Philosophy](#) , First published Thu May 20, 2010; substantive revision Tue Jul 28, 2020

Saiber Arielle and Turner Henry, “Mathematics and the Imagination A Brief Introduction”(2009), Rutgers University

Shabel Lisa, “Kant’s Philosophy of Mathematics”, First published Fri Jul 19, 2013; substantive revision Wed Aug 11, 2021

Shabel Lisa, “Kant’s “Argument from Geometry”(2004)

Sutherland Daniel, “Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportions”(2006)

Wenzel Christian Helmut , “Mathematics and Aesthetics in Kantian Perspectives” (2016)

Wilson Eric and Denis Lara , “Kant and Hume on Morality”,[Stanford Encyclopedia of Philosophy](#), First published Wed Mar 26, 2008; substantive revision Thu Mar 29, 2018

Εικόνες

[Figure 1] https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%99%CE%BC%CE%BC%CE%AC%CE%BD%CE%BF%CF%85%CE%B5%CE%BB_%CE%9A%CE%B1%CE%BD%CF%84

[Figure 2] Janiak Andrew, “Kant’s Views on Space and Time”, publ.2009 & 2016, [Stanford Encyclopedia of Philosophy](#)

[Figure 3] Shabel Lisa, “Kant’s “Argument from Geometry”(2004) ,ch.3 . EUCLID ’S GEOMETRY A S A N A PRIORI SCIENCE O F SPACE