



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο (ΕΜΠ)  
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών  
Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών

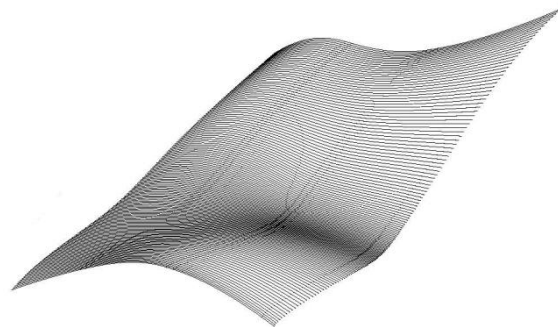
---

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΟΡΕΩΝ  
ΜΕ ΤΗΝ ΙΣΟΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟ**

---

Διπλωματική Εργασία

Παύλου Τσιρίγια



Επιβλέπων:

Μανόλης Παπαδρακάκης, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Νοέμβριος 2011



## Περίληψη

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια εμβάθυνσης στις αρχές μιας νέας μεθόδου υπολογιστικής ανάλυσης φορέων, της Ισογεωμετρικής Μεθόδου. Η νέα μέθοδος προτάθηκε πριν από λίγα χρόνια και ενώ μοιράζεται ίδιες βασικές αρχές με την πλήρων εδραιωμένη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, διαφέρει ωστόσο σε κάποια βασικά της χαρακτηριστικά με αυτή. Αυτό έχει ως συνέπεια να παρουσιάζουν οι δυο μέθοδοι διαφορές σε είδη αναλύσεων, διαφορές που, σύμφωνα με τους ερευνητές που προτείνουν την Ισογεωμετρική Μέθοδο, καταδεικνύουν κάποια πλεονεκτήματα αυτής έναντι της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Η Ισογεωμετρική Μέθοδος στηρίζεται σε δυο πυλώνες ως προς τον πυρήνα της θεωρίας της. Από τη μία χρησιμοποιεί τις ίδιες αρχές και τα ίδια βήματα με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων σε ότι αφορά την παρεμβολή του πεδίου των ζητούμενων μεγεθών ενός προβλήματος με μια βάση συναρτήσεων, εν συνεχεία την αριθμητική επίλυση του διακριτοποιημένου προβλήματος και, τέλος, την εξαγωγή των ζητούμενων μεγεθών. Βασικό στοιχείο αυτού του τμήματος είναι η αρχή της Ισοπαραμετρικότητας που χαρακτηρίζει και τις δυο μεθόδους (άλλωστε το πρώτο συνθετικό Ισο- του ονόματος της νέας μεθόδου, δόθηκε για αυτόν ακριβώς το λόγο).

Το δεύτερο σκέλος της Ισογεωμετρικής Μεθόδου αφορά τη φύση των συναρτήσεων σχήματος που χρησιμοποιεί για τη σύνθεση της βάσης παρεμβολής του προβλήματος. Η μέθοδος εδώ χρησιμοποιεί τις αρχές του τομέα Υπολογιστικής Γεωμετρικής Σχεδίασης (Computer Aided Geometric Design CAGD) (για αυτό το λόγο και το δεύτερο συνθετικό του ονόματός της είναι –γεωμετρική). Ειδικότερα, βασική μορφή συναρτήσεων βάσης που χρησιμοποιείται στο CAGD είναι αυτή των συναρτήσεων NURBS (Non Uniform Rational B-Splines ελληνιστή Μη Ομοιόμορφες Ρητές Συναρτήσεις Παρεμβολής). Αυτή είναι η μορφή συναρτήσεων παρεμβολής που χρησιμοποιείται και στην Ισογεωμετρική Μέθοδο. Οι συναρτήσεις αυτές, αν και μοιράζονται θεμελιώδη χαρακτηριστικά με τις συναρτήσεις σχήματος των Πεπερασμένων Στοιχείων (από το γεγονός ότι πρόκειται επίσης για συναρτήσεις βάσης), ωστόσο έχουν και

πολλές διαφορές, λόγω των οποίων προκύπτουν διαφορετικά αποτελέσματα, για τις δυο μεθόδους, σε κάποια είδη αναλύσεων.

Προσπάθεια καταβλήθηκε στη διασαφήνιση των ορισμών που διέπουν την Ισογεωμετρική Μέθοδο, όσον αφορά το δεύτερο σκέλος και ειδικότερα τη θεωρία των συναρτήσεων NURBS. Καθώς, όμως, οι συναρτήσεις αυτές προκύπτουν ως απόρροια απλούστερων γεωμετρικών αρχών και απλούστερων γεωμετρικών οντοτήτων, προσπάθεια καταβλήθηκε η περιγραφή του δεύτερου σκέλους να είναι όσο το δυνατόν πιο πλήρης, ξεκινώντας από τις πιο απλές αυτές αρχές και καταλήγοντας στις συναρτήσεις NURBS. Για αυτό και στο τμήμα αυτό αφιερώνονται τα πρώτα οκτώ κεφάλαια της εργασίας.

Το επόμενο κεφάλαιο αφορά τη διαδικασία προγραμματισμού της Ισογεωμετρικής Μεθόδου. Συνοπτικά περιγράφονται τα βασικά βήματα που ακολουθήθηκαν τονίζοντας και τις βασικές διαφορές που παρουσιάζονται εδώ σε σχέση με τον προγραμματισμό της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων.

Τέλος παρουσιάζονται αποτελέσματα από τις αναλύσεις με τον κώδικα που αναπτύχθηκε. Με τη βοήθεια αυτών των αναλύσεων κατέστη δυνατός ο έλεγχος της Ισογεωμετρικής Μεθόδου μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων της με αυτά που προκύπτουν από ευρέως χρησιμοποιούμενο λογισμικό Πεπερασμένων Στοιχείων. Επίσης, οι αναλύσεις αυτές βοήθησαν στην πλήρη αποσαφήνιση σκοτεινών σημείων της νέας Μεθόδου και στην αποκάλυψη των μεγάλων δυνατοτήτων που προκύπτουν από την υιοθέτησή της.

Η συγκεντρωτική παράθεση μερικών από τα παραπάνω συμπεράσματα καθώς και προτάσεων για μελλοντική έρευνα ολοκληρώνουν την εργασία.





## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή κ. Μανόλη Παπαδρακάκη, επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας, για την εμπιστοσύνη που μου έχει δείξει όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου. Ο κύριος Παπαδρακάκης αποτελεί λαμπρό παράδειγμα γνώστη του πεδίου της Υπολογιστικής Ανάλυσης, πάνω στο οποίο κάνει πρωτοποριακή έρευνα. Αποτελεί για μένα παράδειγμα προς μίμηση, του ανθρώπου εκείνου που αγαπάει τόσο πολύ αυτό που κάνει – και δεν μιλάω αποκλειστικά για τον ακαδημαϊκό χώρο αλλά οπουδήποτε ο καθείς ‘ετάχθει’- που αφοσιώνεται πραγματικά σε αυτό. Όλα αυτά τα χρόνια δεν έχω παρατηρήσει ούτε μια στιγμή να λείπει από τον κύριο καθηγητή ο ενθουσιασμός για νέες προκλήσεις πάνω στην έρευνα και γενικά στη δημιουργία. Του είμαι ευγνώμων για την καθοδήγησή του και τον ευχαριστώ επίσης για την ομαλή ολοκλήρωση των σπουδών μου.

Σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου στη σχολή είχα δίπλα μου τον επίσης συμφοιτητή – πτυχιούχο πλέον- Ζάχο Χαβδούλα, κουμπάρο μου μα πάνω απ’ όλα φίλο. Χωρίς τον Ζάχο το εγχείρημα των σπουδών, θα ήταν για μένα δύο φορές δυσκολότερο. Επίσης, ανέλπιστα βρήκα έναν άνθρωπο για να μιλάμε για τις ανησυχίες μας πάνω στα τεχνικά θέματα που απασχολούν τον νέο Μηχανικό, κάτι που το θεωρώ εξαιρετικά σημαντικό, για αυτό και τον ευχαριστώ.

Είμαι ευγνώμων στον φίλο Τάσο Γκιζέρη για την βοήθειά του την περίοδο της τελευταίας μου εξεταστικής μαθημάτων στη σχολή, ένα μήνα πριν την ολοκλήρωση της εργασίας. Γενικότερα και πέραν αυτού του μήνα, ο Τάσος όπως και πολλοί φίλοι παρείχαν στήριξη τόσο υλική όσο και ‘ανύψωσης ηθικού’, τους ευχαριστώ λοιπόν όλους.

Κλείνω με την οικογένειά μου, τους κοντινούς μου ανθρώπους, που επιτέλους θα με δουν λίγο περισσότερο από ότι τον τελευταίο καιρό. Τους ευχαριστώ για την υπομονή τους και το κουράγιο που μου δίνουν.

Αθήνα, Νοέμβριος 2011

Παύλος Τσιρίγκας





## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περιεχόμενα .....	vii
Παράθεση σχημάτων εγγράφου .....	xi

### ΠΡΩΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΈΝΝΟΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1.1. Σημεία και διανύσματα .....	1
1.2. Ευθείες και επίπεδα.....	4

### ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

## ΚΥΒΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΒÉΖΙΕΡ

2.1 Συναρτήσεις και Παραμετρικές καμπύλες.....	7
2.2 Κυβικές Καμπύλες Bézier.....	8
2.3 Παράγωγοι .....	10
2.4 Ο αλγόριθμος de Casteljaou.....	11

### ΤΡΙΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

## ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΒÉΖΙΕΡ: ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

3.1 Καμπύλες Bézier.....	15
3.2 Παράγωγος καμπύλης Bézier .....	16
3.3 Ο αλγόριθμος de Casteljaou.....	18
3.4 Αύξηση βαθμού Bézier καμπύλης (degree elevation) .....	20
3.5 Συναρτήσεις Bézier.....	21
3.6 Περισσότερα περί των πολωνύμων Bernstein .....	22

**ΤΕΤΑΡΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ**  
**ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΒÉZIER (BÉZIER PATCHES)**

4.1	Παραμετρικές επιφάνειες.....	25
4.2	Διγραμμικά patches.....	26
4.3	Bézier patches .....	28
4.4	Ιδιότητες των Bézier patches .....	30
4.5	Παραγωγή.....	31
4.6	Παράγωγοι υψηλότερης τάξης.....	32
4.7	Ο αλγόριθμος de Casteljau.....	33
4.8	Αύξηση βαθμού ενός Bézier patch (degree elevation) .....	34

**ΠΕΜΠΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ**  
**ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ**

5.1	Τμηματικές καμπύλες Bézier.....	35
5.2	$C^1$ και $G^1$ συνέχεια (continuity).....	37
5.3	$C^2$ και $G^2$ συνέχεια (continuity).....	38
5.4	Παράδειγμα σύνθετης κυβικής καμπύλης .....	40

**ΈΚΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ**  
**ΚΑΜΠΥΛΕΣ B-SPLINE**

6.1	Βασικοί ορισμοί.....	43
6.2	Παράδειγμα κυβικής καμπύλης B-spline.....	47
6.3	Ο αλγόριθμος de Boor .....	48
6.4	Ιδιότητες των καμπυλών B-spline .....	55
6.5	B-splines: Οι συναρτήσεις βάσης .....	57

6.6	Εισαγωγή knot στο knot sequence (knot insertion) .....	60
6.7	Παράγωγοι .....	62

**ΈΒΔΟΜΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ**  
**ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ**

7.1	Σύνθετες επιφάνειες Bézier.....	65
7.2	Σύνθετες επιφάνειες B-spline .....	67

**ΌΓΔΩΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ**  
**NURBS**

8.1	Κωνικές τομές.....	71
8.2	Επαναπαραμετροποίηση και ταξινόμηση .....	73
8.3	Παράγωγοι .....	74
8.4	Ο κύκλος .....	75
8.5	Ρητές καμπύλες Bézier.....	77
8.6	Ρητές καμπύλες B-spline .....	78
8.7	Ρητές επιφάνειες Bézier και ρητές επιφάνειες B-spline (επιφάνειες NURBS) .....	79

**ΈΝΑΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ**  
**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΙΣΟΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ**

9.1	Διακριτοποίηση με ισογεωμετρικά πεπερασμένα στοιχεία .....	81
9.2	Περιγραφή του κώδικα Ισογεωμετρικής Ανάλυσης .....	84
9.2.1.	<i>Έναρξη του κώδικα.....</i>	84
9.2.2	<i>Υπολογισμός συναρτήσεων B-splines και παραγώγων τους.....</i>	85
9.2.3	<i>Εισαγωγή γεωμετρικών στοιχείων του φορέα – σχηματισμός control points και κόμβων</i>	88
9.2.4	<i>Επιβολή των boundary constraints .....</i>	93
9.2.5	<i>Σχηματισμός μητρώων του φορέα – επιβολή συνοριακών συνθηκών – επίλυση.....</i>	96
9.2.6	<i>Υπολογισμός εντατικών μεγεθών .....</i>	99

**ΔΕΚΑΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ**  
**ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ**

10.1	Γενικά περί των αναλύσεων.....	101
10.2	Διδιάστατες αναλύσεις (2D) .....	103
10.2.1	<i>Τετραγωνική πλάκα υπό συγκεντρωμένο φορτίο (γραμμικές συναρτήσεις NURBS).....</i>	<i>103</i>
10.2.2	<i>Τετραγωνική πλάκα με συγκεντρωμένο φορτίο (ανώτερου βαθμού NURBS).....</i>	<i>107</i>
10.2.3	<i>Πρόβολος υπό κατανεμημένο φορτίο (κάμψη) .....</i>	<i>113</i>
10.2.4	<i>Πλάκα φέρουσα οπή.....</i>	<i>115</i>
10.3	Τριαδιάστατες αναλύσεις (3D) .....	121
10.3.1	<i>Κύβος υπό συγκεντρωμένο φορτίο.....</i>	<i>121</i>
10.3.2	<i>Πρόβολος υπό κατανεμημένο φορτίο (κάμψη) .....</i>	<i>123</i>
10.3.3	<i>Πλάκα φέρουσα οπή (3D).....</i>	<i>125</i>

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΈΡΕΥΝΑ**

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

## ΠΑΡΑΘΕΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1	Affine και γραμμικοί χώροι παρουσιάζονται εδώ ξεχωριστά και μαζί.....	2
Σχήμα 1.2	Το σημείο $x$ είναι ο λόγος $b:a$ ως προς το $p$ και το $q$ αντίστοιχα.....	3
Σχήμα 1.3	Οι affine μετασχηματισμοί διατηρούν τους λόγους σταθερούς.....	3
Σχήμα 2.1	Το γράφημα μιας συνάρτησης.....	8
Σχήμα 2.2	Μια κυβική καμπύλη Bézier.....	9
Σχήμα 2.3	Διάφορες κυβικές καμπύλες Bézier. Στο πρώτο σχήμα φαίνεται ότι η καμπύλη μένει ανεπηρέαστη από στροφές.....	10
Σχήμα 2.4	Ιδιότητα convex hull.....	10
Σχήμα 2.5	Ο αλγόριθμος de Casteljau.....	12
Σχήμα 2.7	Ο αλγόριθμος de Casteljau προσδιορισμού μιας $n=3$ καμπύλης Bézier.....	14
Σχήμα 3.1	Τα πολυώνυμα Bernstein βαθμού 4 σχεδιασμένα στο διάστημα $[0,1]$ .....	16
Σχήμα 3.2	Μια αλληλουχία καμπυλών Bézier.....	16
Σχήμα 3.3	Η δεύτερη παράγωγος (διάνυσμα) στην ‘αρχή’ της κυβικής καμπύλης Bézier του σχ. 2.2.....	17
Σχήμα 3.4	Η διαδικασία του αλγορίθμου de Casteljau καθώς και η πρώτη παράγωγος στο $t=0.5$ .....	18
Σχήμα 3.5	Ο αλγόριθμος de Casteljau προσδιορισμού μιας $n=4$ καμπύλης Bézier.....	19
Σχήμα 3.6	Αύξηση βαθμού καμπύλης Bézier από τετραγωνική σε κυβική.....	20
Σχήμα 3.7	Ένα κυβικό πολυώνυμο με τη μορφή μιας κυβικής παραμετρικής καμπύλης Bézier.....	22
Σχήμα 3.8	Τετραγωνικά πολυώνυμα Bernstein.....	22
Σχήμα 4.1	Ένα διγραμμικό patch.....	26
Σχήμα 4.2	Ένα διγραμμικό patch.....	27
Σχήμα 4.3	Η διαγώνιος ενός διγραμμικού patch.....	28
Σχήμα 4.4	Ένα $3 \times 4$ control net που παρουσιάζει διγραμμική ακρίβεια.....	31
Σχήμα 4.5	Ένα Bézier patch ως γεωμετρικός τόπος σημείων που ‘ακολουθεί’ την κίνηση και την παραμόρφωση του control net.....	31
Σχήμα 4.6	Μια μερική παράγωγος.....	32
Σχήμα 4.7	Ο αλγόριθμος de Casteljau στην περίπτωση του Bézier patch.....	33
Σχήμα 5.1	Τρεις κυβικές καμπύλες Bézier που συνδέονται και δημιουργούν μια κυβική spline.....	36
Σχήμα 5.2	Δυο $C^1$ κυβικές καμπύλες Bézier και τα domains τους.....	37

Σχήμα 5.3	Η συνθήκη $C^2$ .....	38
Σχήμα 5.4	Μια spline που είναι $C^2$ .....	39
Σχήμα 5.5	Η συνθήκη $G^2$ .....	39
Σχήμα 5.6	Σύνθετη καμπύλη spline κυβικού βαθμού. ....	40
Σχήμα 5.7	Η συνθήκη $C^1$ .....	40
Σχήμα 5.8	Η συνθήκη $C^2$ .....	41
Σχήμα 5.9	Επίδραση μετακίνησης ενός knot στο knot sequence. ....	41
Σχήμα 6.1	Τρεις κυβικές καμπύλες B-spline.....	44
Σχήμα 6.2	Αναπαράσταση κυβικών καμπυλών B-spline με τμηματικά Bézier πολυώνυμα. ...	47
Σχήμα 6.3	Αναπαράσταση κυβικών καμπυλών B-spline με τμηματικά Bézier πολυώνυμα. ...	47
Σχήμα 6.4	Ο αλγόριθμος de Boor (πάνω στο de Boor polygon).....	50
Σχήμα 6.5	Ο αλγόριθμος de Boor (πάνω στο knot sequence). ....	50
Σχήμα 6.6	Μια κυβική καμπύλη B-spline με δυο πολυωνυμικά τμήματα. ....	52
Σχήμα 6.7	Ο αλγόριθμος de Boor για το παράδειγμα που εξετάζεται. ....	52
Σχήμα 6.8	Τοπικός έλεγχος (local control) μιας κυβικής καμπύλης B-spline.....	56
Σχήμα 6.9	Παράγωγοι στα άκρα μιας κυβικής καμπύλης B-spline. ....	56
Σχήμα 6.10	Μια τμηματικά γραμμική και μια τμηματικά τετραγωνική συνάρτηση B-spline....	57
Σχήμα 6.11	Οι κυβικές B-splines $N_0^3, N_1^3$ και $N_2^3$ για το συγκεκριμένο knot sequence.....	59
Σχήμα 6.12	Όλες οι κυβικές B-splines για τα τρία knot sequences. Αλλαγή προκύπτει λόγω της διαφορετικής πολλαπλότητας. ....	60
Σχήμα 6.13	Εισαγωγή knot σε μια συναρτησιακή καμπύλη B-spline (μια φορά). ....	61
Σχήμα 7.1	Δυο συνορεύοντα $C^0$ δικυβικά patches. ....	66
Σχήμα 7.2	Μια σύνθετη λεία επιφάνεια. ....	67
Σχήμα 7.3	Μια δικυβική επιφάνεια B-spline. Στην κορυφή η επιφάνεια. Στο μέσον το B-spline control polygon που την περιγράφει. Κάτω το τμηματικό Bézier control net. Τα knot sequences είναι ομοιόμορφα ως προς τις διαστάσεις $u$ και $v$ .....	69
Σχήμα 7.4	Μια δικυβική επιφάνεια B-spline. Στην κορυφή η επιφάνεια. Κάτω το τμηματικό Bézier control net. Knot sequences: $u_i: 0, 1, 3, 4$ και $v_j: 0, 1, 2, 3$ . ....	69
Σχήμα 8.1	Ομογενής μορφή (ή ομογενείς συντεταγμένες) .....	72
Σχήμα 8.2	Ένα σημείο πάνω σε μια κωνική τομή.....	73
Σχήμα 8.3	Καθώς το weight μεταβάλλεται από 0.1 σε 10, δημιουργούνται και οι τρεις κωνικές τομές.....	73
Σχήμα 8.4	Ένα τμήμα μιας κωνικής τομής με γκρί, και το συμπληρωματικό του με μαύρο....	74
Σχήμα 8.5	Κύκλος: Γεωμετρία του control polygon. ....	75
Σχήμα 8.6	Πλήρης κύκλος: Μπορεί να παρασταθεί από τέσσερις ρητές τετραγωνικές καμπύλες. ....	75

Σχήμα 8.7	Weights: Καθώς το weight του Bézier point $b_2$ μεταβάλλεται, η καμπύλη μεταβάλλεται επίσης. ....	78
Σχήμα 8.8	Μια επιφάνεια NURBS.....	79
Σχήμα 9.1	Τα πεπερασμένα στοιχεία (elements) ως knot spans. ....	83
Σχήμα 9.2	Οι σταθερές καθώς και οι γραμμικές B-splines σε knot vector με πέντε knot spans... ..	87
Σχήμα 9.3	Οι τετραγωνικές και οι κυβικές B-splines σε knot vector με δέκα knot spans. ....	88
Σχήμα 9.4	Οι τετάρτου και πέμπτου βαθμού B-splines σε knot vector με δέκα knot spans. ....	88
Σχήμα 9.5	Οι τετάρτου και πέμπτου βαθμού B-splines σε knot vector με δέκα knot spans. ....	89
Σχήμα 9.6	Απεικόνιση του φορέα – control points, elements και κόμβοι.....	90
Σχήμα 9.7	Απεικόνιση του φορέα – control points, elements και κόμβοι.....	91
Σχήμα 9.8	Απεικόνιση του φορέα: $\frac{1}{4}$ πλάκας φέρουσας σπή.....	92
Σχήμα 9.9	Απεικόνιση του φορέα – control points, elements και κόμβοι.....	92
Σχήμα 9.10	Απεικόνιση τάσης $\sigma_{xx}$ πάνω στον παραμορφωμένο φορέα. Παρουσιάζεται επίσης ο απαραμόρφωτος φορέας.....	93
Σχήμα 9.11	Οι τετάρτου και πέμπτου βαθμού B-splines σε knot vector με δέκα knot spans. ....	94
Σχήμα 9.12	Οι τετάρτου και πέμπτου βαθμού B-splines σε knot vector με δέκα knot spans. ....	95
Σχήμα 9.13	Παγίωση μιας ολόκληρης παραμετρικής διάστασης ενός patch.....	95
Σχήμα 9.14	Συμβολισμός κατανεμημένης φόρτισης σε element, στο 2D και στο 3D πρόβλημα... ..	96





# 1

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΈΝΝΟΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

---

Στο πρώτο αυτό κεφάλαιο καλύπτουμε ορισμένες βασικές γεωμετρικές έννοιες. Επίσης παρουσιάζουμε και τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια.

### 1.1. Σημεία και διανύσματα

Η βασικότερη γεωμετρική ποσότητα είναι το *σημείο*, το οποίο απλά παριστά μια θέση στον διδιάστατο ή τριδιάστατο γεωμετρικό χώρο.

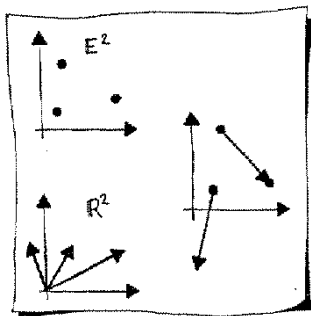
Η αναπαράσταση ενός σημείου θα γίνεται με πεζούς bold, italic λατινικούς χαρακτήρες, ενώ οι συντεταγμένες του σαν στήλες, για παράδειγμα

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ όπου } p_x=1, p_y=2, p_z=4.$$

Η διαφορά δυο διδιάστατων ή τριδιάστατων σημείων ονομάζεται *διάνυσμα* στον διδιάστατο ή τριδιάστατο χώρο, αντίστοιχα. Ένα διάνυσμα θα συμβολίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως το σημείο και, συνήθως, δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, για παράδειγμα

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{p} - \mathbf{q}.$$

Τα σημεία είναι στοιχεία του affine ή Ευκλείδειου χώρου που συμβολίζεται ως  $\mathbb{E}^2$  ή  $\mathbb{E}^3$ , ενώ τα διανύσματα είναι στοιχεία του γραμμικού ή πραγματικού χώρου που συμβολίζεται ως  $\mathbb{R}^2$  ή  $\mathbb{R}^3$ .



**Σχήμα 1.1** Affine και γραμμικοί χώροι παρουσιάζονται εδώ ξεχωριστά και μαζί.

Μπορούμε να συνδυάσουμε διανύσματα δημιουργώντας *γραμμικούς συνδυασμούς*, για παράδειγμα

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

Γενικότερα ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων γράφεται ως

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \tag{Εξ 1.1}$$

όπου  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  πραγματικοί αριθμοί και  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  διανύσματα.

Ενώ τα διανύσματα μπορούν να συνδυαστούν χρησιμοποιώντας οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς σαν συντελεστές, δεν ισχύει το ίδιο για τα σημεία. Αν συνδυάσουμε δυο σημεία  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$  για να προκύψει ένα τρίτο σημείο  $\mathbf{x}$  θέτοντας

$$\mathbf{x} = a\mathbf{p} + b\mathbf{q} \tag{Εξ 1.2}$$

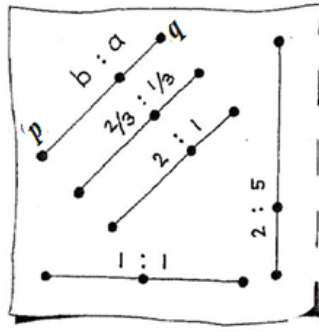
τότε είναι υποχρεωτικό να ισχύει  $a + b = 1$ . Αυτοί οι ειδικοί γραμμικοί συνδυασμοί ονομάζονται *βαρυκεντρικοί συνδυασμοί*. Η γενική μορφή ενός βαρυκεντρικού συνδυασμού γράφεται

$$\mathbf{p} = \alpha_1 \mathbf{p}_1 + \alpha_2 \mathbf{p}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{p}_n$$

όπου  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$  (διαμέριση της μονάδας, partition of unity).

Ένας ακόμα ορισμός: Όταν σχηματίζουμε έναν βαρυκεντρικό συνδυασμό  $\mathbf{x} = a\mathbf{p} + b\mathbf{q}$ , τότε λέμε ότι ο *λόγος (ratio)* των τριών σημείων δίνεται από (σχήμα 1.2)

$$\text{ratio}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{q}) = \beta : \alpha = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{Εξ 1.3}$$



**Σχήμα 1.2** Το σημείο  $x$  είναι ο λόγος  $b:a$  ως προς το  $p$  και το  $q$  αντίστοιχα.

Σε αυτό το σχήμα, ο λόγος  $\frac{b}{a}$  γράφεται με το  $b$  πάνω από το τμήμα  $\overline{px}$  και το  $a$  είναι πάνω από το τμήμα  $\overline{xq}$ . Αυτός ο συμβολισμός είναι χρήσιμος για να θυμόμαστε τη σειρά των συμβόλων στην αλγεβρική σχέση  $x = ap + bq$ .

Από το σχήμα 1.2 επίσης συνάγεται ότι

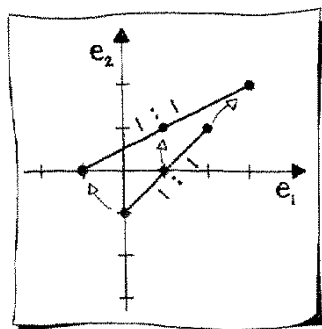
$$\text{ratio}(p,x,q) = \frac{\|x-p\|}{\|q-x\|} \quad \text{Εξ 1.4}$$

όπου  $\|x-p\|$  παριστά το (προσημασμένο) μήκος ενός διανύσματος.

Μπορούμε να μετατοπίσουμε γεωμετρικές οντότητες, να τις στρέψουμε γύρω από ένα σημείο ή έναν άξονα ή να τις μεγεθύνουμε ή σμικρύνουμε. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις εφαρμόζουμε *affine μετασχηματισμούς*. Οι *affine* μετασχηματισμοί μετασχηματίζουν σημεία από σημεία, γραμμές από γραμμές και επίπεδα από επίπεδα. Θεωρώντας ως  $p$  ένα σημείο, τότε ο *affine* μετασχηματισμός δημιουργεί ένα σημείο  $\hat{p}$  ως εξής

$$\hat{p} = Ap + v. \quad \text{Εξ 1.5}$$

Εδώ  $A$  είναι ένα μητρώο,  $2 \times 2$  για τον διδιάστατο χώρο και  $3 \times 3$  για τον τριδιάστατο. Μια σημαντική ιδιότητα των *affine* μετασχηματισμών είναι ότι διατηρούν το λόγο μεταξύ τριών συνευθειακών σημείων αμετάβλητο (σχ. 1.3).



**Σχήμα 1.3** Οι *affine* μετασχηματισμοί διατηρούν τους λόγους σταθερούς.

## 1.2. Ευθείες και επίπεδα

Θέλοντας κάποιος να ασχοληθεί με τις οντότητες των ευθειών γραμμών και επιπέδων, θα πρέπει να αναφερθεί στην γραμμική παρεμβολή (*linear interpolation*), μια από τις πιο βασικές διαδικασίες τόσο γεωμετρικά όσο και υπολογιστικά.

Δυο σημεία  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$  ορίζουν μια ευθεία γραμμή. Πως μπορούν να περιγραφούν όλα τα σημεία της ευθείας; Ένας τρόπος είναι να φανταστούμε ένα σωματίδιο, που το αναπαριστούμε με το σημείο  $\mathbf{x}$ , το οποίο διανύει την ευθεία, ξεκινώντας από το σημείο  $\mathbf{p}$  την χρονική στιγμή  $t=0$ , περνάει από το σημείο  $\mathbf{q}$  την χρονική στιγμή  $t=1$ , και συνεχίζει. Επίσης θεωρούμε ότι η ταχύτητα του σωματιδίου είναι σταθερή. Καθώς η θέση του  $\mathbf{x}$  εξαρτάται από το χρόνο  $t$  θα γράφουμε  $\mathbf{x}(t)$  αντί για  $\mathbf{x}$ .

Που βρίσκεται το  $\mathbf{x}(t)$  σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ ; Καθώς γνωρίζουμε ότι  $\mathbf{x}(0)=\mathbf{p}$  και  $\mathbf{x}(1)=\mathbf{q}$ , φαίνεται λογικό να αναμένουμε ότι

$$\mathbf{x}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

Οι παραπάνω τρεις περιπτώσεις ακολουθούν τη γενική μορφή της γραμμικής παρεμβολής

$$\mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}, \quad \text{Εξ 1.6}$$

η οποία αποτελεί την παραμετρική μορφή μιας ευθείας. Έτσι για κάθε πραγματικό  $t$  μπορούμε να υπολογίσουμε το σημείο  $\mathbf{x}(t)$ . Ο συμβολισμός με το χρόνο  $t$  είναι αρκετά βοηθητικός αλλά όχι απαραίτητος. Παρακάτω θα γίνεται αναφορά στο  $t$  με τον όρο παράμετρος  $t$ . Το πεδίο ορισμού του  $t$  είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, και η εξ. 1.6 αποτελεί την απεικόνιση της γραμμής των πραγματικών αριθμών στη γραμμή που ορίζεται από τα σημεία  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$ . Το σύνολο λοιπόν των πραγματικών αριθμών αποτελεί τον παραμετρικό χώρο της ευθείας. Ένα πιο περιορισμένο διάστημα (domain), αποτελεί το παραμετρικό διάστημα τμήματος της ευθείας, για παράδειγμα παραπάνω είδαμε ότι το παραμετρικό διάστημα του ευθυγράμμου τμήματος  $\overline{pq}$  είναι το διάστημα  $[0,1]$ .

Η γραμμική παρεμβολή αποτελεί στην ουσία ένα affine μετασχηματισμό. Όντως αρχικά θεωρούμε τον λόγο των σημείων  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{x}(t)$  και  $\mathbf{q}$

$$\text{ratio}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{q}) = \frac{t}{1-t}. \quad \text{Εξ 1.7}$$

Θεωρώντας τώρα τον παραμετρικό χώρο του ευθύγραμμου τμήματος, και καθώς ισχύει ότι  $t=(1-t)\cdot 0+t\cdot 1$ , προκύπτει ότι

$$\text{ratio}(0, t, 1) = \frac{t}{1-t}. \quad \text{Εξ 1.8}$$

Οι δύο λόγοι είναι ίσοι μεταξύ τους άρα πρόκειται για affine μετασχηματισμό.

Το παραμετρικό διάστημα (domain) ενός ευθυγράμμου τμήματος μπορεί να είναι διαφορετικό από το  $[0,1]$ , για παράδειγμα το τυχαίο  $[a,b]$ , δηλαδή θέλουμε να αντιστοιχήσουμε το ευθύγραμμο

τμήμα να αντιστοιχεί στο διάστημα  $[a, b]$  του παραμετρικού χώρου. Ας συμβολίσουμε με  $u$  την παραμετρική τιμή που συσχετίζεται με το  $[a, b]$ . Για να εισάγουμε το  $u$  στην εξ. 1.6 θα πρέπει να δημιουργήσουμε τον affine μετασχηματισμό που 'παίρνει' το  $u$  από το  $[a, b]$  και το 'πάει' στο  $[0, 1]$ . Δηλαδή  $t = \frac{u-a}{b-a}$  οπότε και  $1-t = \frac{b-u}{b-a}$  και η γραμμική παρεμβολή μετασχηματίζεται σε

$$\mathbf{x}(u) = \frac{b-u}{b-a} \mathbf{p} + \frac{u-a}{b-a} \mathbf{q}, \quad \text{Εξ 1.9}$$

με παραμετρικό διάστημα το  $[a, b]$ .

Πιο πάνω συναντήσαμε την παραμετρική μορφή μιας ευθείας γραμμής

$$\mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}, \quad \text{Εξ 1.10}$$

ωστόσο η πιο συνήθης μορφή μιας ευθείας είναι η εξίσωσή της (συναρτησιακή)

$$y = ax + b. \quad \text{Εξ 1.11}$$

Η παραμετρική μορφή είναι πολύ πιο γενική. Για παράδειγμα ενώ η ευθεία γραμμή που διέρχεται

από τα σημεία  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  μπορεί εύκολα να παρασταθεί σε παραμετρική μορφή, δεν μπορεί ωστόσο

να παρασταθεί σε μορφή  $y = ax + b$ . Επίσης η παραμετρική μορφή έχει μια εύκολη επέκταση στον τριδιάστατο χώρο ενώ η συναρτησιακή μορφή όχι.

Εάν μια ευθεία δοθεί σε συναρτησιακή μορφή, πως μπορεί να μετατραπεί σε παραμετρική μορφή; Από την στιγμή που θα βρεθούν δυο οποιαδήποτε σημεία της ευθείας, μπορεί έπειτα να γραφεί η παραμετρική μορφή της ευθείας. Τα προφανή υποψήφια σημεία είναι αυτά που αντιστοιχούν στα  $x=0$  και  $x=1$ . Έτσι έχουμε

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (1-t) \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ a+b \end{bmatrix}, \quad \text{Εξ 1.12}$$

όπου τα σημεία της ευθείας είναι τα  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ a+b \end{bmatrix}$  και  $\mathbf{x}(t)$ .

Η συγκεκριμένη μορφή θα μας φανεί πολύ χρήσιμη στα παρακάτω καθώς δίνει, στη γενική περίπτωση μιας γενικής καμπύλης γραμμής, τη δυνατότητα να χειριστούμε την καμπύλη με δύο εξισώσεις, κάθε μια από τις οποίες ασχολείται ξεχωριστά με τις συντεταγμένες  $x(t)$  και  $y(t)$  των σημείων της καμπύλης.

Η αντίστοιχη οντότητα της ευθείας στον τριδιάστατο χώρο είναι το *επίπεδο*. Ένα επίπεδο ορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ . Κάθε σημείο  $\mathbf{x}$  της μορφής

$$\mathbf{x} = u\mathbf{p} + v\mathbf{q} + w\mathbf{r} \quad \text{όπου } u + v + w = 1 \quad \text{Εξ 1.13}$$

είναι επί αυτού του επιπέδου. Αυτό προκύπτει από τη σχέση που δίνει τον όγκο ενός τετράεδρου

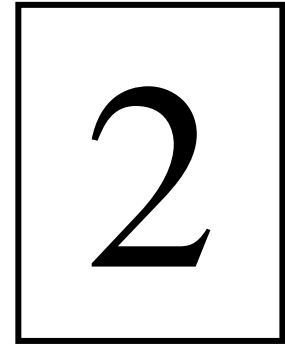
$$\text{vol}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 \end{vmatrix} \quad \text{Εξ 1.14}$$

όπου στην περίπτωση των τεσσάρων σημείων που έχουμε είναι

$$\text{vol}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{p} & \mathbf{q} & \mathbf{r} & \mathbf{x} \end{vmatrix} = 0$$

**Εξ 1.15**

καθώς η τελευταία στήλη είναι γραμμικός συνδυασμός των τριών πρώτων. Ένα τετράεδρο με μηδενικό όγκο αποτελεί ένα επίπεδο, οπότε το σημείο  $\mathbf{x}$  είναι επί του επιπέδου που έχουμε θεωρήσει.



# ΚΥΒΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ BEZIER

---

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τις βασικές αρχές γύρω από τις κυβικές καμπύλες Bézier. Αν και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με καμπύλες Bézier ανώτερου βαθμού από τις κυβικές, ωστόσο μοιράζονται τις ίδιες ιδιότητες, οι οποίες είναι πολύ πιο εύκολο να εξεταστούν μέσω των κυβικών καμπυλών Bézier. Οι καμπύλες αυτές αποτέλεσαν και συνεχίζουν να αποτελούν το βασικό δομικό στοιχείο όλων των εμπορικών προγραμμάτων που σχετίζονται με πεδία όπως το CAGD/CAM (Computer Aided Geometric Design / Computer Aided Manufacturing) και το Graphic Design.

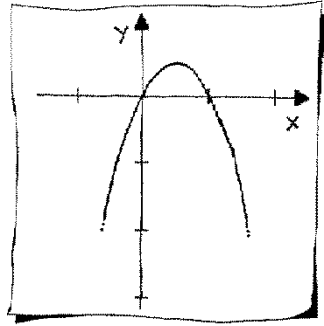
## 2.1 Συναρτήσεις και Παραμετρικές καμπύλες

Η πιο γνωστή μορφή μιας καμπύλης προέρχεται από τον λογισμό μεταβλητών. Εκεί μια καμπύλη είναι μια συνάρτηση όπως η  $y=2x-2x^2$ , η οποία έχει σχεδιαστεί στο σχ. 2.1.

Το σχήμα δεν παριστά την συνάρτηση αλλά το γράφημά της. Ένα γράφημα είναι ένα σύνολο από

σημεία  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x-2x^2 \end{bmatrix}$ . Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια οριζόντια εφαπτομένη εκεί όπου  $\frac{dy}{dx} = 0$  εν

προκειμένου στο  $x=1/2$ .



**Σχήμα 2.1** Το γράφημα μιας συνάρτησης.

Μια παραμετρική καμπύλη είναι πιο πολύπλοκη έννοια και όλες οι αρχές από τον λογισμό των μεταβλητών δεν προεκτείνονται εκεί με προφανή τρόπο.

Ήδη εξετάστηκε μια παραμετρική καμπύλη στην περίπτωση της ευθείας γραμμής με τη μορφή

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-t)a_x + tb_x \\ (1-t)a_y + tb_y \end{bmatrix} \text{ που αποτελεί την ευθεία γραμμή που ορίζεται από τα σημεία } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}.$$

Γενικά μια παραμετρική καμπύλη είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}. \quad \text{Εξ 2.1}$$

Στην περίπτωση της ευθείας γραμμής, και η  $f$  και η  $g$  είναι γραμμικές συναρτήσεις της παραμέτρου  $t$ . Για μια γενική παραμετρική καμπύλη μπορούν να είναι οποιοδήποτε βαθμού συναρτήσεις. Στον τριδιάστατο χώρο υπάρχει άλλη μια συνιστώσα για την καμπύλη η  $z=h(t)$ , έτσι οι συνιστώσες της είναι τρεις όσες και οι διαστάσεις του πραγματικού χώρου.

## 2.2 Κυβικές Καμπύλες Bézier

Οι παραμετρικές καμπύλες με τις οποίες θα ασχοληθούμε είναι αυτές όπου οι συνιστώσες τους  $f$ ,  $g$  και  $h$  αποτελούν πολυωνμικές συναρτήσεις. Οι καμπύλες αυτές αποτελούν τις πολυωνμικές και τμηματικά πολυωνμικές καμπύλες (polynomial / piecewise polynomial curves). Η πιο σημαντική περίπτωση πολυνομιακής καμπύλης είναι η Bézier καμπύλη, που πήρε το όνομά της από τον Pierre Bézier. Προς το παρόν θα εξετάσουμε τις τρίτου βαθμού Bézier καμπύλες. Για παράδειγμα ορίζουμε μια τέτοια καμπύλη θέτοντας

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-t)^3 + t^3 \\ 3(1-t)^2t - 3(1-t)t^2 \end{bmatrix}. \quad \text{Εξ 2.2}$$

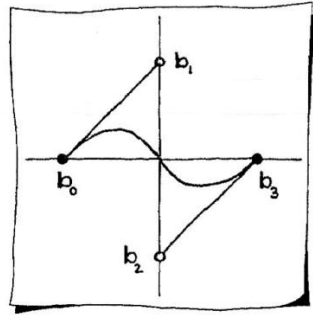
Από αυτόν τον ορισμό δεν είναι εύκολο να καταλάβει κανείς την μορφή της καμπύλης. Την γράφουμε στην παρακάτω μορφή



$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-t)^3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Εξ 2.3}$$

Αυτός ο τρόπος γραφής εμφανίζει την καμπύλη σαν έναν συνδυασμό σημείων. Τα τέσσερα σημεία σχηματίζουν ένα πολύγωνο που προσεγγίζει την καμπύλη (σχ. 2.2). Εάν θελήσουμε να υπολογίσουμε το σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στην παράμετρο  $t=0.5$  βρίσκουμε

$$\mathbf{x}(0.5) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 2.2 Μια κυβική καμπύλη Bézier.

Στην γενική περίπτωση, ορίζουμε μια καμπύλη Bézier τρίτου βαθμού ως εξής

$$\mathbf{x}(t) = (1-t)^3 \mathbf{b}_0 + 3(1-t)^2 t \mathbf{b}_1 + 3(1-t)t^2 \mathbf{b}_2 + t^3 \mathbf{b}_3, \quad \text{Εξ 2.4}$$

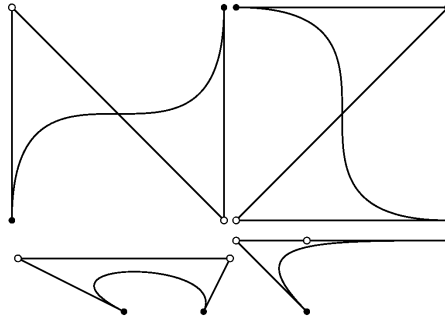
όπου τα 2D ή 3D σημεία  $\mathbf{b}_i$ , ονομάζονται *Bézier control points* και δημιουργούν το *Bézier polygon* της καμπύλης. Συνήθως η παραπάνω μορφή γράφεται ως εξής

$$\mathbf{x}(t) = B_0^3 \mathbf{b}_0 + B_1^3 \mathbf{b}_1 + B_2^3 \mathbf{b}_2 + B_3^3 \mathbf{b}_3, \quad \text{Εξ 2.5}$$

όπου τα  $B_i^3$  αποτελούν τα πολυώνυμα της σχέσης και είναι γνωστά με την ονομασία (κυβικά) *πολυώνυμα Bernstein*.

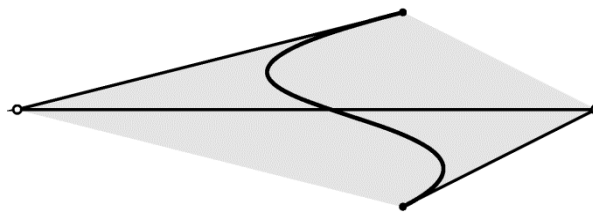
Οι κυβικές καμπύλες Bézier έχουν ορισμένες πολύ σημαντικές ιδιότητες.

- Παρεμβολή στα άκρα τους: η καμπύλη διέρχεται από τα ακραία σημεία του πολυγώνου δηλαδή  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$  και  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_3$ .
- Η καμπύλη μένει ανεπηρέαστη από στροφές: αν στρέψουμε το control polygon, τότε η καμπύλη στρέφεται με τον ίδιο τρόπο.
- Η καμπύλη μένει ανεπηρέαστη από affine μετασχηματισμούς: Αν ένας affine μετασχηματισμός εφαρμοστεί στο control polygon, τότε η καμπύλη μετασχηματίζεται με τον ίδιο μετασχηματισμό.



**Σχήμα 2.3** Διάφορες κυβικές καμπύλες Βέζιερ. Στο πρώτο σχήμα φαίνεται ότι η καμπύλη μένει ανεπηρέαστη από στροφές.

- Συμμετρία: Τα δυο πολύγωνα  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  και  $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0$  περιγράφουν την ίδια καμπύλη. Το μόνο που αλλάζει είναι η φορά με την οποία διατρέχει το παραμετρικό διάστημα η παράμετρος  $t$ .
- Γραμμική ακρίβεια (linear precision): Αν τα control points  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  είναι διατεταγμένα σε ίση απόσταση μεταξύ τους, πάνω στην ευθεία που συνδέει τα  $\mathbf{b}_0$  και  $\mathbf{b}_3$  τότε η κυβική καμπύλη Βέζιερ αποτελεί (ή ταυτίζεται) με την γραμμική παρεμβολή στα σημεία  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_3$  δηλαδή με την ευθεία που τα συνδέει.
- Ιδιότητα convex hull: Για  $t \in [0, 1]$ , το σημείο  $\mathbf{x}(t)$  της καμπύλης βρίσκεται μέσα στο χώρο που 'οριοθετείται' από το control polygon ο οποίος ονομάζεται convex hull του control polygon και φαίνεται στο σχήμα.



**Σχήμα 2.4** Ιδιότητα convex hull.

## 2.3 Παράγωγοι

Η παραγωγή μιας παραμετρικής καμπύλης δεν κρύβει κάτι ιδιαίτερο. Απλώς παραγωγίζουμε κάθε συνιστώσα της. Το αποτέλεσμα της παραγωγίσης είναι διάνυσμα, και αποτελεί το εφαπτομενικό διάνυσμα στην καμπύλη, στο σημείο της όπου γίνεται η παραγωγή. Αν πάρουμε μια Βέζιερ καμπύλη της μορφής της εξ. 2.4 και την παραγωγίσουμε ως προς  $t$ , λαμβάνουμε

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = -3(1-t)^2\mathbf{b}_0 + [3(1-t)^2 - 6(1-t)t]\mathbf{b}_1 + [6(1-t)t - 3t^2]\mathbf{b}_2 + 3t^2\mathbf{b}_3, \quad \text{Εξ 2.6}$$

και μετά την ομαδοποίηση έχουμε

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = 3[\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0](1-t)^2 + 6[\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1](1-t)t + 3[\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2]t^2. \quad \text{Εξ 2.7}$$

Αυτό συχνά γράφεται ως

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=3\Delta\mathbf{b}_0(1-t)^2+6\Delta\mathbf{b}_1(1-t)t+3\Delta\mathbf{b}_2t^2, \quad \text{Εξ 2.8}$$

όπου το  $\Delta\mathbf{b}_i$  ονομάζεται *εμπρός διαφορά* (*forward difference*).

Μια άλλη γραφή της πρώτης παραγώγου είναι

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=3(\Delta\mathbf{b}_0B_0^2+\Delta\mathbf{b}_1B_1^2+\Delta\mathbf{b}_2B_2^2), \quad \text{Εξ 2.9}$$

όπου  $B_i^2$  είναι τα τετραγωνικά (βαθμού  $n=2$ ) πολυώνυμα Bernstein. Ενώ στον λογισμό των μεταβλητών η παραγωγή μιας καμπύλης τρίτου βαθμού δίνει μια καμπύλη δευτέρου βαθμού, στις παραμετρικές καμπύλες, η ‘παράγωγος καμπύλη’ έχει ως αποτέλεσμα διανύσματα αντί για σημεία.

Βλέπουμε συνεπώς ότι η παράγωγος της κυβικής καμπύλης έχει πολύ απλή μορφή. Οι συντελεστές είναι τα διανύσματα μεταξύ των σημείων του πολυγώνου της καμπύλης, πολλαπλασιασμένα επί 3. Αυτά τα διανύσματα πολλαπλασιάζονται με τα τετραγωνικά πολυώνυμα Bernstein, δηλαδή ένα βαθμό μικρότερα από τις συναρτήσεις βάσης της αρχικής καμπύλης.

Για κάθε Bézier καμπύλη, τα πιο σημαντικά εφαπτομενικά διανύσματα είναι στην αρχή και το πέρας της καμπύλης

$$\dot{\mathbf{x}}(0)=3\Delta\mathbf{b}_0 \quad \text{Εξ 2.10}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(1)=3\Delta\mathbf{b}_2. \quad \text{Εξ 2.11}$$

Συνεπώς προκύπτει ότι το control polygon είναι εφαπτομενικό στην καμπύλη στα άκρα της –από τα οποία και διέρχεται. Αυτό βολεύει ιδιαίτερα κατά τη σύνδεση διαφορετικών τμηματικών καμπυλών Bézier.

## 2.4 Ο αλγόριθμος de Casteljau

Ο αλγόριθμος de Casteljau είναι ίσως ο πιο σημαντικός αλγόριθμος που εμφανίζεται στην τεχνολογία *CAGD* (*Computer Aided Geometric Design*). Ο Paul de Faget de Casteljau τον ανακάλυψε στα 1959.

Πρόκειται περί ενός αναδρομικού αλγορίθμου ο οποίος ‘κατασκευάζει’ ένα σημείο  $\mathbf{x}(t)$  μιας Bézier καμπύλης. Περιλαμβάνει την εξής διαδικασία:

Δεδομένα:

$\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  και μια παράμετρος  $t$ .

Ζητούμενο:

το σημείο  $\mathbf{x}(t)$ .

Αρχικά υπολόγισε:

$$\mathbf{b}_0^1=(1-t)\mathbf{b}_0+t\mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{b}_1^1=(1-t)\mathbf{b}_1+t\mathbf{b}_2,$$

$$\mathbf{b}_2^1=(1-t)\mathbf{b}_2+t\mathbf{b}_3.$$

Έπειτα:

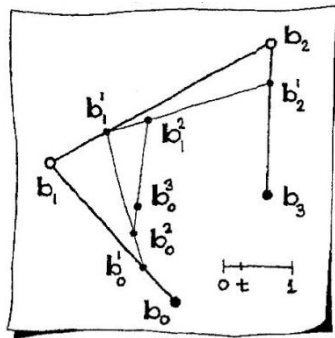
$$b_0^2 = (1-t)b_0^1 + tb_1^1,$$

$$b_1^2 = (1-t)b_1^1 + tb_2^1.$$

Και τελικά:

$$b_0^3 = (1-t)b_0^2 + tb_1^2.$$

Το σημείο  $b_0^3$  είναι το ζητούμενο σημείο  $x(t)$  της καμπύλης. Η διαδικασία του αλγορίθμου φαίνεται στο σχ. 2.5. Παρατηρούμε ότι αυτός ο αλγόριθμος συνίσταται από επαναλαμβανόμενες διαδικασίες γραμμικής παρεμβολής.



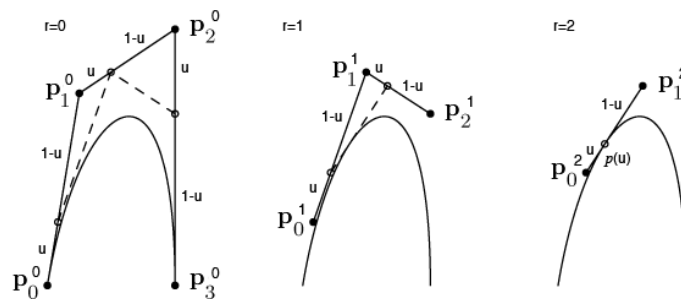
Σχήμα 2.5 Ο αλγόριθμος de Casteljau.

Σχηματικά είναι βολικό να θυμάται κανείς τη διαδικασία του αλγορίθμου μέσω της παρακάτω τριγωνικής διάταξης των σημείων που υπεισέρχονται σε αυτόν

$$\begin{array}{cccc}
 b_0 & & & \\
 b_1 & b_0^1 & & \\
 b_2 & b_1^1 & b_0^2 & \\
 b_3 & b_2^1 & b_1^2 & b_0^3.
 \end{array}$$

Μια θεώρηση που κάνουμε και μας βοηθάει να θυμόμαστε το πως μπαίνουν οι πιο πάνω δείκτες στα σημεία είναι η εξής:

Αρχικά έχουμε τα σημεία  $p_0, p_1, p_2, p_3$  (1<sup>η</sup> στήλη) (σχ. 2.6). Βλέπουμε ότι το πλήθος των σημείων είναι κατά ένα περισσότερο από το βαθμό της καμπύλης (που εδώ είναι ίσος με 3).



Σχήμα 2.6 Σχηματική απεικόνιση των βημάτων του αλγορίθμου de Casteljau.

Έπειτα έχουμε και τα υπόλοιπα σημεία στις επόμενες στήλες  $p_i^r$  όπου  $r \leq 3$  και  $0 \leq i \leq 2$ .

Ο πάνω δείκτης  $r$  είναι ο δείκτης της ‘διαμέρισης’. Όταν έχω τα τέσσερα αρχικά σημεία είμαι στη μηδενική διαμέριση –δεν έχει γίνει ακόμα κάποια διαμέριση των διαστημάτων μεταξύ των σημείων (για αυτό γράφουμε  $\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p}_1^0$ ).

Συνεχίζουμε στην επόμενη στήλη και έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε το σημείο της καμπύλης  $\mathbf{x}(1/3)$ , δηλαδή διαμέριση των διαστημάτων στο ένα τρίτο (σχ. 2.6).

1<sup>η</sup> διαμέριση: Άρα ο πάνω δείκτης γίνεται 1 ( $r=1$ ).

Ο κάτω δείκτης δείχνει για ποιο σημείο της διαμέρισης γίνεται αναφορά –ξεκινώντας να μετράει από το 0.

Για παράδειγμα το σημείο  $\mathbf{p}_1^1$  είναι το 3<sup>ο</sup> σημείο της πρώτης διαμέρισης. Στην περίπτωση που εξετάζουμε με τα τέσσερα αρχικά σημεία, η 1<sup>η</sup> διαμέριση έχει τρία σημεία, άρα το  $i$  παίρνει τιμές από 0 έως 2 και τα τρία σημεία είναι αυτά της δεύτερης στήλης του τριγωνικού διαγράμματος.

2<sup>η</sup> διαμέριση: Άρα ο πάνω δείκτης γίνεται 2 ( $r=2$ ), ενώ το  $i$  παίρνει τιμές από 0 έως 1 (δύο σημεία έχει η 2<sup>η</sup> διαμέριση). Τα δυο σημεία είναι αυτά της τρίτης στήλης του τριγωνικού διαγράμματος.

3<sup>η</sup> διαμέριση (και τελευταία αφού η καμπύλη είναι τρίτου βαθμού): Άρα ο πάνω δείκτης γίνεται 3 ( $r=3$ ), ενώ το  $i$  παίρνει την τιμή 0 (ένα σημείο έχει η τρίτη και τελευταία διαμέριση). Πρόκειται για την τέταρτη στήλη του τριγωνικού διαγράμματος.

Παρατηρήσεις:

! Οι διαμερίσεις είναι όσες και ο βαθμός  $n$  της καμπύλης –ή αλλιώς όσα τα Bézier control points μείον ένα.

!! Σε κάθε διαμέριση το πλήθος των σημείων είναι ίσο με  $n-r+1$ , δηλαδή για ένα ορισμένο  $r$  (πάνω δείκτης) το  $i$  (κάτω δείκτης) παίρνει τιμές  $0 \div (n-r)$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε το τριγωνικό διάγραμμα για τον υπολογισμό του σημείου  $\mathbf{x}(0.5)$  στην Bézier καμπύλη του σχ. 2.2. Το τριγωνικό σχήμα γίνεται

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0.0 \\ -1.0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \end{array}$$

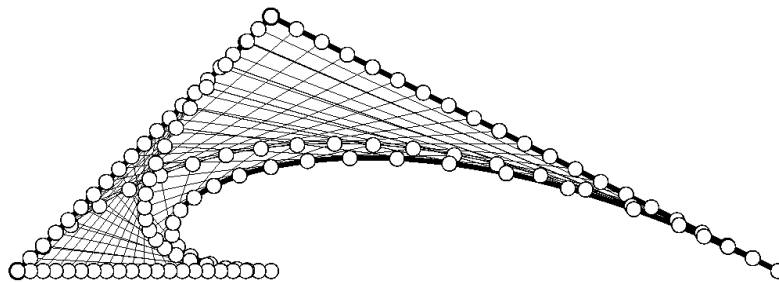
οπότε προκύπτει ότι  $\mathbf{x}(0.5) = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$ .

Κατά την προσομοίωση του αλγορίθμου de Casteljau, δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί ένας διδιάστατος πίνακας για την προσομοίωση του ανωτέρω τριγωνικού διαγράμματος. Είναι αρκετός ένας μονοδιάστατος πίνακας. Για παράδειγμα το  $b_0^1$  υπολογίζεται και παίρνει τη θέση του  $b_0$ . Παρατηρούμε ότι το σημείο  $b_0$  δεν ξαναχρησιμοποιείται στα επόμενα βήματα του αλγορίθμου, οπότε το κομμάτι της μνήμης αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το  $b_0^1$ . Φυσικά το αρχικό control

polygon πρέπει να κρατηθεί στη μνήμη για τον υπολογισμό κάποιου άλλου σημείου της καμπύλης, δηλαδή που αντιστοιχεί σε κάποια άλλη τιμή της παραμέτρου  $t$ .

Ο αλγόριθμος de Casteljau μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό πολλών σημείων (για διάφορες παραμετρικές τιμές  $t$ ) σε μια Βέζιερ καμπύλη. Όλες αυτές οι διαδικασίες όταν σκιαγραφηθούν γραφικά φαίνονται στο παρακάτω σχ. 2.7.

Επίσης το σχ. 2.7 δείχνει ότι από τέσσερα σημεία (π.χ.  $b_0, b_1, b_2, b_3$ ) εκτός από την καμπύλη Βέζιερ τρίτου βαθμού, προκύπτουν επίσης και οι καμπύλες Βέζιερ βαθμού  $n=2$  (δυο τέτοιες καμπύλες: η πρώτη είναι η  $b_0^2$  με control polygons  $b_0, b_1, b_2$  και η δεύτερη είναι η  $b_1^2$  με control polygon  $b_1, b_2, b_3$ , αντίστοιχα) και οι καμπύλες Βέζιερ βαθμού  $n=1$  –ευθείες– (τρεις τέτοιες καμπύλες: η πρώτη είναι η  $b_0^1$  με control polygon  $b_0, b_1$ , η δεύτερη είναι η  $b_1^1$  με control polygon  $b_1, b_2$ , και η τρίτη είναι η  $b_2^1$  με control polygon  $b_2, b_3$  (στην ουσία είναι οι ευθείες που ενώνουν τα ζεύγη των σημείων)). Συνεπώς από το απλό τριγωνικό διάγραμμα που παρουσιάστηκε για τον αλγόριθμο, προκύπτουν και όλες οι υποδεέστερου βαθμού καμπύλες Βέζιερ. Είναι εμφανές πόσο βοηθητικό είναι το τριγωνικό διάγραμμα, ως προς τον συμβολισμό του αλγορίθμου de Casteljau.



**Σχήμα 2.7** Ο αλγόριθμος de Casteljau προσδιορισμού μιας  $n=3$  καμπύλης Βέζιερ.

Μέσω του αλγορίθμου de Casteljau είναι δυνατός ο υπολογισμός των παραγώγων της καμπύλης. Από το σχ. 2.6 παρατηρούμε ότι η ευθεία γραμμή  $\overline{p_0^2 p_1^2}$  είναι εφαπτομενική στην καμπύλη στο σημείο  $p_0^3$ . Και όντως όπως προκύπτει (χωρίς απόδειξη εδώ) ισχύει

$$\dot{x}(t) = 3[p_1^2 - p_0^2]. \quad \text{Εξ 2.12}$$

Δηλαδή εκτός από το ζητούμενο σημείο στην παράμετρο  $t$ , μπορεί να υπολογιστεί και η παράγωγος της καμπύλης εκεί –και αυτή υπολογίζεται από την προτελευταία στήλη του τριγωνικού διαγράμματος που περιγράφει τον αλγόριθμο.

## ΚΑΜΠΥΛΕΣ BEZIER: ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

---

Οι καμπύλες Bézier δεν περιορίζονται στις τρίτου βαθμού που εξετάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τις γενικότερου βαθμού καμπύλες Bézier.

### 3.1 Καμπύλες Bézier

Μια Bézier καμπύλη βαθμού  $n$  ορίζεται ως εξής:

$$x(t) = \mathbf{b}_0^n(t) = \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + \mathbf{b}_1 B_1^n(t) + \dots + \mathbf{b}_n B_n^n(t), \quad \text{Εξ 3.1}$$

όπου τα  $B_i^n(t)$  είναι τα Bernstein πολυώνυμα με

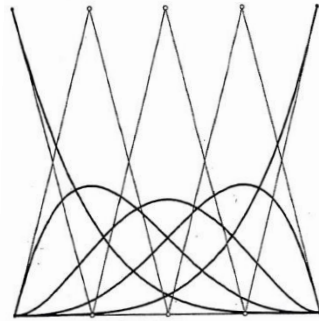
$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i. \quad \text{Εξ 3.2}$$

Οι διωνυμικοί συντελεστές είναι

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{αν } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

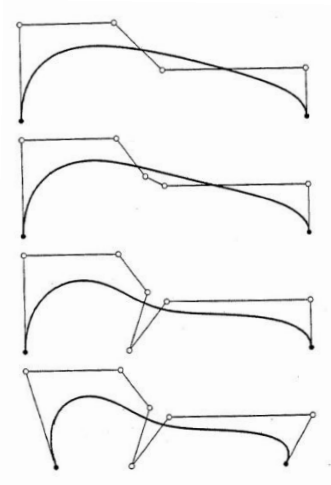
Στην περίπτωση της καμπύλης 3<sup>ov</sup> βαθμού η εξ. 3.1 είναι πανομοιότυπη με την εξ. 2.4. Τα πολυώνυμα Bernstein βαθμού 4 παρουσιάζονται στο σχ. 3.1. Τα control polygons που φαίνονται στο ίδιο σχήμα αναλύονται στην ενότητα 3.6 που αφορά τα πολυώνυμα Bernstein.

Ορισμένα παραδείγματα καμπυλών Bézier υψηλότερου βαθμού από τις κυβικές, παρουσιάζονται στο σχ. 3.2. Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν το πώς επηρεάζεται το σχήμα μιας καμπύλης, από την εισαγωγή περισσότερων control points ή από την μετακίνησή τους.



**Σχήμα 3.1** Τα πολυώνυμα Bernstein βαθμού 4 σχεδιασμένα στο διάστημα  $[0,1]$ .

Για την γενική περίπτωση καμπύλης Bézier βαθμού  $n$ , στην κυριολεξία δεν υπάρχουν κάποιες άλλες ιδιότητες που μπορούν να αναφερθούν και που δεν αναφέρθηκαν στην περίπτωση των κυβικών καμπυλών. Ωστόσο τα βασικά χαρακτηριστικά των καμπυλών θα ξαναπαρουσιαστούν για την γενική περίπτωση βαθμού  $n$ .



**Σχήμα 3.2** Μια αλληλουχία καμπυλών Bézier.

### 3.2 Παράγωγος καμπύλης Bézier

Για την παράγωγο μιας καμπύλης Bézier βαθμού  $n$  έχουμε

$$\dot{x}(t) = n[\Delta \mathbf{b}_0 B_0^{n-1}(t) + \dots + \Delta \mathbf{b}_{n-1} B_{n-1}^{n-1}(t)], \quad \text{Εξ 3.3}$$

ή εφαρμόζοντας τη σύμβαση *Einstein*

$$\dot{x}(t) = n[\Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(t)], \quad \text{για } i=0 \div (n-1) \quad \text{Εξ 3.4}$$

όπου  $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$ .



Η παραγωγή μιας Bézier καμπύλης μπορεί να γίνει παραπάνω από μια φορά. Η  $k^{\text{στή}}$  παράγωγος στην παράμετρο  $t$  δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d^k \mathbf{x}(t)}{dt^k} = \frac{n!}{(n-k)!} [\Delta^k \mathbf{b}_0 B_0^{n-k}(t) + \dots + \Delta^k \mathbf{b}_{n-k} B_{n-k}^{n-k}(t)], \quad \text{Εξ 3.5}$$

όπου  $\Delta^k$  είναι η εμπρός διαφορά (*forward difference*) η οποία υπολογίζεται μέσω του αναδρομικού τύπου

$$\Delta^k \mathbf{b}_i = \Delta^{k-1} \mathbf{b}_{i+1} - \Delta^{k-1} \mathbf{b}_i \quad \text{Εξ 3.6}$$

$$\text{όπου} \quad \Delta^0 \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i. \quad \text{Εξ 3.7}$$

Τα πρώτα τρία παραδείγματα είναι

$$k=1: \quad \Delta^1 \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$$

$$k=2: \quad \Delta^2 \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+2} - 2\mathbf{b}_{i+1} + \mathbf{b}_i$$

$$k=3: \quad \Delta^3 \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+3} - 3\mathbf{b}_{i+2} + 3\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i.$$

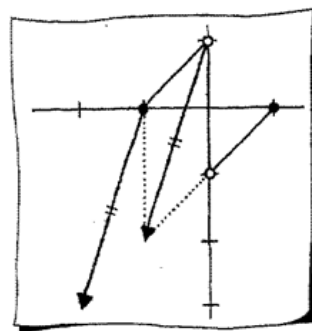
Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές των σημείων εναλλάσσονται ως προς το πρόσημό τους και λαμβάνουν τιμή από το τρίγωνο του Pascal.

Στα άκρα της καμπύλης ο υπολογισμός της παραγώγου απλοποιείται. Με ελαφρώς τροποποιημένο συμβολισμό έχουμε για την  $k^{\text{στή}}$  παράγωγο του  $\mathbf{x}(0)$  και του  $\mathbf{x}(1)$

$$\mathbf{x}^k(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{b}_0 \quad \text{Εξ 3.8}$$

$$\mathbf{x}^k(1) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{b}_{n-k}. \quad \text{Εξ 3.9}$$

Ένα ωραίο χαρακτηριστικό της καμπύλης Bézier είναι η γεωμετρική απόδοση της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου στα δύο άκρα της. Η πρώτη παράγωγος έχει την διεύθυνση του σκέλους του control polygon, του πρώτου ή του τελευταίου, αντίστοιχα. Η δεύτερη παράγωγος έχει την διεύθυνση της διαγωνίου του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα τρία control points στο άκρο.



**Σχήμα 3.3** Η δεύτερη παράγωγος (διάνυσμα) στην ‘αρχή’ της κυβικής καμπύλης Bézier του σχ. 2.2.

### 3.3 Ο αλγόριθμος de Casteljau

Ο προσδιορισμός μιας καμπύλης Bézier γίνεται μέσω του αλγόριθμου de Casteljau. Μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός ψευδοκώδικα

For  $r=1, \dots, n$   
 for  $i=0, \dots, n-r$

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1} + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t). \quad \text{Εξ 3.10}$$

Το σημείο της καμπύλης δίνεται ως  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0^n(t)$ , το οποίο είναι το τελευταίο σημείο που υπολογίζεται από το διπλό *for loop*, όταν  $r=n$  και  $i=0$ .

Το τριγωνικό διάγραμμα για την καμπύλη Bézier βαθμού  $n$  γίνεται

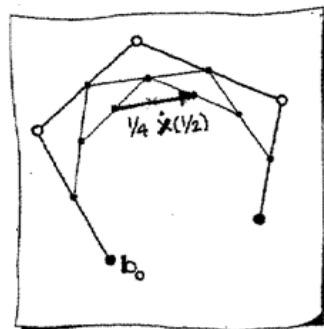
$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{b}_0 & & & & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ \mathbf{b}_{n-1} & \mathbf{b}_{n-2}^1 & \vdots & \mathbf{b}_0^{n-1} & & & \\ \mathbf{b}_n & \mathbf{b}_{n-1}^1 & \vdots & \mathbf{b}_1^{n-1} & \mathbf{b}_0^n & & \end{array} \quad \text{Εξ 3.11}$$

Βλέπουμε από τον ψευδοκώδικα ότι η θεώρηση που κάναμε για τους δείκτες στην ενότητα 2.4 είναι απόλυτα συμβατή με τη θεώρηση των δεικτών εδώ.

Ο αλγόριθμος de Casteljau δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού της πρώτης παραγώγου

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = n[\mathbf{b}_1^{n-1} - \mathbf{b}_0^{n-1}]. \quad \text{Εξ 3.12}$$

Ανεξάρτητα από τον βαθμό της καμπύλης, το διάνυσμα που αποτελεί την πρώτη παράγωγο μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της διαφοράς των σημείων (δηλαδή ένα διάνυσμα) στην προτελευταία στήλη του σχηματικού τριγωνικού διαγράμματος που παριστά τον αλγόριθμο de Casteljau. Το σχήμα δείχνει το διάνυσμα - διαφορά των σημείων του προτελευταίου βήματος του αλγορίθμου για την καμπύλη βαθμού  $n=4$  (πέντε τα αρχικά control polygons). Άρα η παράγωγος είναι το τετραπλάσιο αυτού του διανύσματος.



**Σχήμα 3.4** Η διαδικασία του αλγορίθμου de Casteljau καθώς και η πρώτη παράγωγος στο  $t=0.5$ .

Και η δεύτερη παράγωγος μπορεί να προκύψει από τον αλγόριθμο de Casteljau

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = n(n-1)[\mathbf{b}_2^{n-2} - 2\mathbf{b}_1^{n-2} + \mathbf{b}_0^{n-2}], \quad \text{Εξ 3.13}$$

που αποτελεί απλά πολλαπλάσιο της δεύτερης forward difference της  $(n-2)^{στης}$  στήλης (δηλαδή της δεύτερης από το τέλος στήλης) του τριγωνικού διαγράμματος του αλγορίθμου.

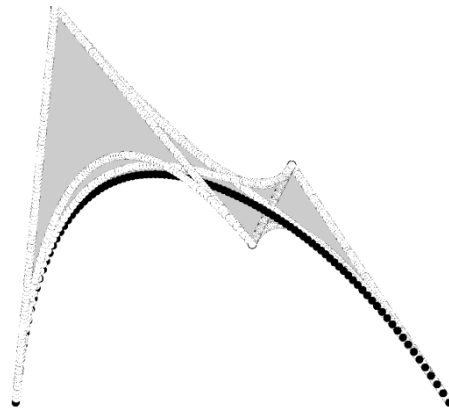
Συνεπώς βλέπουμε ότι υπάρχουν δυο τρόποι για τον υπολογισμό της παραγώγου  $k^{στης}$  τάξης σε ένα σημείο της Bézier καμπύλης.

- Είτε από τα αρχικά Bézier control points και την εξ. 3.5.
- Είτε απ' την  $k^{στη}$  στήλη από το τέλος, στο τρίγωνο του de Casteljau και σύμφωνα με την εξίσωση

$$\frac{d^k \mathbf{x}(t)}{dt^k} = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{b}_0^{n-k}, \quad \text{Εξ 3.14}$$

όπου  $\Delta^k \mathbf{b}_0^{n-k}$  η  $k^{στη}$  forward difference της εν λόγω στήλης.

Το σχ. 3.5 παρουσιάζει τη διαδικασία του αλγορίθμου de Casteljau για την κατασκευή της  $n=4$  καμπύλης Bézier. Στο ίδιο σχήμα έχουν σχεδιαστεί και οι βαθμού  $n=1 \div 3$  καμπύλες Bézier, που επίσης προκύπτουν από την κατασκευή της  $n=4$  καμπύλης Bézier με τον τρόπο που φαίνεται από το αντίστοιχο τριγωνικό διάγραμμα (δες και σχ. 2.7).



**Σχήμα 3.5** Ο αλγόριθμος de Casteljau προσδιορισμού μιας  $n=4$  καμπύλης Bézier.

Λίγο πιο αναλυτικά και για την γενική περίπτωση βαθμού  $n$  καμπύλης Bézier έχουμε:

Η κάθε διαμέριση στον αλγόριθμο de Casteljau παρέχει (με την παράμετρο  $t$  να διατρέχει όλο το διάστημα  $[0,1]$ ) τις αντίστοιχου βαθμού Bézier καμπύλες, οι οποίες είναι τόσες όσα τα σημεία της διαμέρισης. Δηλαδή στην  $r$  διαμέριση προκύπτουν οι Bézier καμπύλες βαθμού  $r$ , που είναι  $n-r+1$  το πλήθος. Υποθέτουμε ότι το πολύγωνο αφορά Bézier καμπύλη  $n^{στού}$  βαθμού (έχει  $n+1$  control points), συνεπώς η τελευταία καμπύλη που θα προκύψει από τον αλγόριθμο είναι  $n^{στού}$  βαθμού.

$1^η$  διαμέριση: Παρέχει τις  $1^{ου}$  βαθμού Bézier καμπύλες, δηλαδή τις ευθείες γραμμές, οι οποίες είναι  $n$  το πλήθος.

$2^η$  διαμέριση: Παρέχει τις  $2^{ου}$  βαθμού Bézier καμπύλες, δηλαδή τις παραβολές, οι οποίες είναι  $n-1$  το πλήθος.

$3^η$  διαμέριση: Παρέχει τις  $3^{ου}$  βαθμού Bézier καμπύλες, οι οποίες είναι  $n-2$  το πλήθος.

....

$n^η$  διαμέριση: Παρέχει την τελική και ζητούμενη Bézier καμπύλη βαθμού  $n$ .

! Συνεπώς ο αλγόριθμος de Casteljau παρέχει όλες τις Bézier καμπύλες έως και βαθμού  $n$ .

!! Το γεγονός αυτό δίνει μια ακόμα έκφραση για τον προσδιορισμό ενός σημείου μιας Bézier καμπύλης

$$\mathbf{b}_i^r(t) = \sum_{j=0}^r \mathbf{b}_{i+j} B_j^r(t) \quad (\text{explicit form}). \quad \text{Εξ 3.15}$$

### 3.4 Αύξηση βαθμού Bézier καμπύλης (degree elevation)

Ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$  αποτελεί επίσης πολυώνυμο βαθμού  $n+1$ , με τον όρο τάξεως  $n+1$  να έχει μηδενικό συντελεστή όταν η καμπύλη βρίσκεται σε μορφή μονωνόμου.

Παρομοίως μια καμπύλη Bézier βαθμού  $n$  μπορεί να γραφεί σαν μια καμπύλη Bézier βαθμού  $n+1$ .

Για την επίδειξη θα γίνει χρήση της Bézier καμπύλης 2<sup>ου</sup> βαθμού

$$\mathbf{x}(t) = (1-t)^2 \mathbf{b}_0 + 2(1-t)t \mathbf{b}_1 + t^2 \mathbf{b}_2.$$

Πολλαπλασιάζουμε την τετραγωνική σχέση με τον όρο  $[t+(1-t)]$ . Παρατηρούμε ότι  $[t+(1-t)]=1$ .

Το αποτέλεσμα αυτού του πολλαπλασιασμού είναι

$$\mathbf{x}(t) = [t(1-t)^2 + (1-t)^3] \mathbf{b}_0 + 2[t^2(1-t) + (1-t)^2 t] \mathbf{b}_1 + [t^3 + t^2(1-t)] \mathbf{b}_2.$$

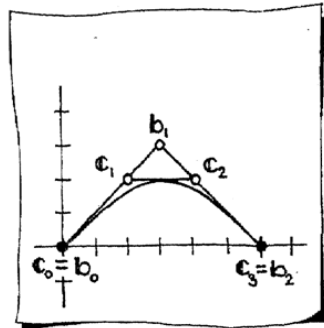
Μετατρέπουμε την παραπάνω μορφή σε βαρυκεντρική μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (1-t)^3 \mathbf{b}_0 \\ &+ 3(1-t)^2 t \left[ \frac{1}{3} \mathbf{b}_0 + \frac{2}{3} \mathbf{b}_1 \right] \\ &+ 3(1-t)t^2 \left[ \frac{2}{3} \mathbf{b}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{b}_2 \right] \\ &+ t^3 \mathbf{b}_2. \end{aligned}$$

Έτσι η αρχική τετραγωνική Bézier καμπύλη μπορεί επίσης να γραφεί ως τρίτου βαθμού με control points

$$\mathbf{x}(t) = B_0^3 \mathbf{b}_0 + B_1^3 \left[ \frac{1}{3} \mathbf{b}_0 + \frac{2}{3} \mathbf{b}_1 \right] + B_2^3 \left[ \frac{2}{3} \mathbf{b}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{b}_2 \right] + B_3^3 \mathbf{b}_2. \quad \text{Εξ 3.16}$$

Αυτή είναι η διαδικασία του *degree elevation*. Η καμπύλη τρίτου βαθμού είναι ακριβώς πανομοιότυπη με της αρχικής καμπύλης.



Σχήμα 3.6 Αύξηση βαθμού καμπύλης Bézier από τετραγωνική σε κυβική.

Η παραπάνω διαδικασία γραφής μιας τετραγωνικής Bézier καμπύλης σαν μια τρίτου βαθμού μπορεί να γενικευτεί και για μεγαλύτερου βαθμού καμπύλες. Έτσι έχουμε ότι μια βαθμού  $n$

καμπύλη Bézier με control polygon  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ , είναι πανομοιότυπη με μια βαθμού  $n+1$  με control polygon  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n+1}$  όπου

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= \mathbf{b}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{c}_i &= \frac{i}{n+1} \mathbf{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{b}_i, \\ &\vdots \\ \mathbf{c}_{n+1} &= \mathbf{b}_n. \end{aligned} \tag{Εξ 3.17}$$

### 3.5 Συναρτήσεις Bézier

Ανακαλούμε εδώ τη συζήτηση που είχε γίνει στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου σχετικά με τις έννοιες γράφημα μιας συνάρτησης και παραμετρική καμπύλη. Το γράφημα μιας συνάρτησης (ή *συναρτησιακής καμπύλης*) μπορεί να θεωρηθεί ως παραμετρική καμπύλη της μορφής

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ g(t) \end{bmatrix}. \text{ Η μια διάσταση περιορίζεται στο να είναι γραμμικό πολυώνυμο. Μια άλλη}$$

ονομασία για τη συναρτησιακή καμπύλη είναι *μη παραμετρική καμπύλη*.

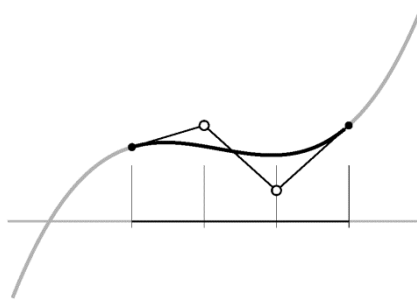
Ας προσπαθήσουμε τώρα να γράψουμε μια (πολυωνυμική) συναρτησιακή καμπύλη σε μορφή Bézier. Προς το παρόν θα θεωρήσουμε ότι το  $t$  περιορίζεται να κινείται στο  $[0, 1]$ . Πρώτα πρώτα η πολυωνυμική συνάρτηση  $g(t)$  παίρνει τη μορφή

$$g(t) = b_0 B_0^n + \dots + b_n B_n^n,$$

όπου τα  $b_i$  είναι βαθμωτά μεγέθη και ονομάζονται *τεταγμένες Bézier (Bézier ordinates)*. Απομένει να γραφεί και το γραμμικό πολυώνυμο  $t$  με τη μορφή ενός πολυωνύμου βαθμού  $n$  έτσι ώστε να έχει τον ίδιο βαθμό με το  $g(t)$ . Είδαμε ότι οι καμπύλες Bézier παρουσιάζουν γραμμική ακρίβεια (linear precision) οπότε (αν αντιστραφεί η ιδιότητα αυτή) μια ευθεία μπορεί να γραφεί ως πολυώνυμο βαθμού  $n$  αν τα  $n+1$  control points είναι συνευθειακά και ισαπέχουν. Συνεπώς εδώ το διάστημα  $[0, 1]$  διαιρείται σε  $n$  ίσα διαστήματα, και τα  $n+1$  ισαπέχοντα σημεία ονομάζονται *τετμημένες Bézier (Bézier abscissae)*. Έτσι η συναρτησιακή καμπύλη Bézier παίρνει την παραμετρική μορφή

$$\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} t \\ g(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} B_0^n + \dots + \begin{bmatrix} j/n \\ b_j \end{bmatrix} B_j^n + \dots + \begin{bmatrix} 1 \\ b_n \end{bmatrix} B_n^n.$$

Μια συναρτησιακή καμπύλη Bézier φαίνεται στο σχ. 3.7

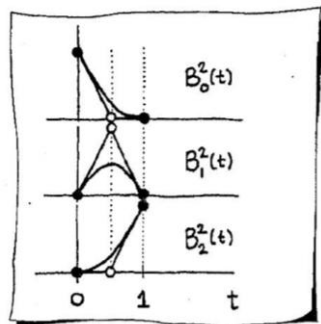


**Σχήμα 3.7** Ένα κυβικό πολυώνυμο με τη μορφή μιας κυβικής παραμετρικής καμπύλης Bézier.

### 3.6 Περισσότερα περί των πολυωνύμων Bernstein

Η εξ. 3.2 εισήγαγε τη γενική μορφή των πολυωνύμων Bernstein. Με την προσεχτική θεώρηση των πολυωνύμων αυτών, μπορεί κανείς να κατανοήσει καλύτερα την συμπεριφορά των καμπυλών Bézier.

Ο αλγόριθμος de Casteljau είναι εν γένει προτιμητέος για την κατασκευή των καμπυλών Bézier, από τον απευθείας υπολογισμό των Bernstein πολυωνύμων. Έτσι, για το σχεδιασμό των Bernstein πολυωνύμων, λαμβάνοντας και υπόψη ότι είναι συναρτήσεις του  $t$ , είναι εύκολο να τα δημιουργήσει κανείς με την ίδια διαδικασία δημιουργίας των καμπυλών Bézier. Το σχ. 3.8 παρουσιάζει τα βαθμού  $n=2$  πολυώνυμα Bernstein. Το πολυώνυμο  $B_i^2$  προκύπτει από ισαπέχουσες Bézier abscissa στο  $[0,1]$  (είναι τρεις δηλαδή 0, 0.5 και 1), και το  $i^{\text{στό}}$  control point έχει τιμή μονάδα ενώ όλα τα υπόλοιπα έχουν τιμή μηδέν. Τα control points για τα βαθμού  $n=4$  πολυώνυμα Bernstein παρουσιάστηκαν στο σχ. 3.1.



**Σχήμα 3.8** Τετραγωνικά πολυώνυμα Bernstein.

Οι διωνυμικοί συντελεστές (εξ. 3.2) μοιάζουν σύνθετοι, ωστόσο προκύπτουν πολύ εύκολα από το τρίγωνο του Pascal. Για βαθμό  $n$ , οι διωνυμικοί συντελεστές προκύπτουν από την  $(n+1)^{ση}$  γραμμή του τριγώνου Pascal:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

Κάθε στοιχείο μιας γραμμής προκύπτει ως άθροισμα των δυο στοιχείων που βρίσκονται από πάνω του, στην προηγούμενη γραμμή.

Τα Bernstein πολυώνυμα ονομάζονται επίσης Bernstein συναρτήσεις βάσης. Κάθε πολυώνυμο βαθμού ίσου ή μικρότερου από  $n$  μπορεί να γραφεί ως μοναδικός συνδυασμός των πολυωνύμων βαθμού  $n$  που αποτελούν τη βάση. Ισχύει ότι για κάθε ορισμένη τιμή  $t$  το άθροισμα των πολυωνύμων Bernstein είναι ίσο με τη μονάδα

$$B_0^n(t) + B_1^n(t) + \dots + B_n^n(t) = 1. \quad \text{Εξ 3.18}$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή με την ονομασία διαμέριση της μονάδας (partition of unity).

Επίσης τα πολυώνυμα Bernstein έχουν την ιδιότητα ότι είναι μη αρνητικά μέσα στο διάστημα  $[0, 1]$ .

Για τα πολυώνυμα Bernstein ισχύει η εξής ιδιότητα συμμετρίας

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t).$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από την εξ. 3.2, και σε αυτό οφείλεται το γεγονός της συμμετρίας των καμπυλών Bézier, με την έννοια ότι δεν παίζει ρόλο αν αριθμήσουμε τα Bézier control points από τα 'αριστερά προς τα δεξιά' ή ανάποδα. Σε κάθε περίπτωση η καμπύλη που θα σχηματιστεί θα είναι ίδια.

Τέλος, οι Bernstein συναρτήσεις βάσης έχουν την ιδιότητα ότι για ορισμένο βαθμό  $n$  ισχύει  $B_0^n(0) = 1$  και όλα τα υπόλοιπα πολυώνυμα  $B_i^n(0) = 0$ . Το ίδιο ισχύει και για το άκρο  $t = 1$  του παραμετρικού διαστήματος μόνο που εκεί  $B_n^n(1) = 1$  και τα υπόλοιπα μηδενικά. Αυτό το είδαμε λίγο πιο πάνω κατά την κατασκευή των πολυωνύμων Bernstein βαθμού  $n = 2$ .





# 4

## ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ BEZIER (BEZIER PATCHES)

---

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με επιφάνειες για πρώτη φορά. Θα καλύψουμε τους βασικούς ορισμούς και θα επεκτείνουμε την θεώρηση των καμπυλών Bézier και στις επιφάνειες με την εισαγωγή της έννοιας των Bézier επιφανειών.

### 4.1 Παραμετρικές επιφάνειες

Είδαμε ότι μια παραμετρική καμπύλη είναι το αποτέλεσμα της απεικόνισης (mapping) του παραμετρικού μονοδιάστατου διαστήματος, στον διδιάστατο ή τριδιάστατο χώρο. Μια παραμετρική επιφάνεια ορίζεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο. Είναι το αποτέλεσμα της απεικόνισης του παραμετρικού διδιάστατου επιπέδου στον τριδιάστατο χώρο. Ένα τμήμα (domain) του διδιάστατου παραμετρικού επιπέδου απεικονίζεται σε ένα τμήμα της παραμετρικής επιφάνειας. Το παραμετρικό διδιάστατο επίπεδο είναι απλά ένα σύστημα συντεταγμένων όπου το κάθε σημείο έχει συντεταγμένες  $(u, v)$ . Το αντίστοιχο σημείο της παραμετρικής επιφάνειας είναι

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \\ h(u, v) \end{bmatrix}. \quad \text{Εξ 4.1}$$

Όπως ακριβώς οι παραμετρικές καμπύλες, έτσι και οι παραμετρικές επιφάνειες μπορούν να μετατοπιστούν ή να υποβληθούν σε στροφή –είναι πολύ πιο γενικές ως προς τις ιδιότητές τους από τις συναρτήσεις δυο μεταβλητών της μορφής  $z=f(x, y)$ .

## 4.2 Διγραμμικά patches

Θα ασχοληθούμε με μια πεπερασμένη παραμετρική επιφάνεια. Είναι η απεικόνιση ενός τετραγώνου στον παραμετρικό χώρο. Την πεπερασμένη παραμετρική επιφάνεια την ονομάζουμε *patch* (μπάλωμα).

Ξεκινώντας θα επιλέξουμε το μοναδιαίο τετράγωνο που ορίζεται ως

$$\{(u,v): 0 \leq u,v \leq 1\}.$$

Το απεικονίζουμε σε ένα επιφανειακό patch το οποίο ορίζεται από τέσσερα σημεία  $\mathbf{b}_{0,0}$ ,  $\mathbf{b}_{0,1}$ ,  $\mathbf{b}_{1,0}$ ,  $\mathbf{b}_{1,1}$ , με πολύ απλό τρόπο. Απλά θέτοντας

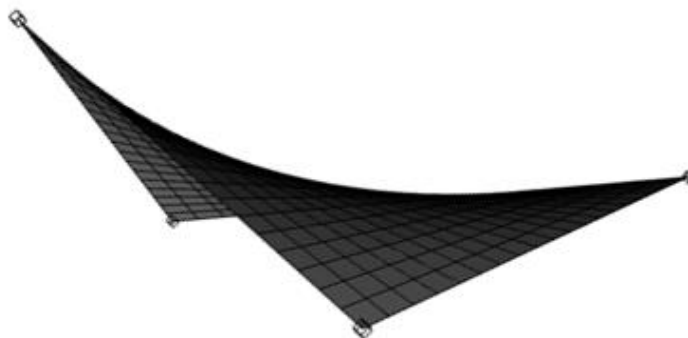
$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{0,1} \\ \mathbf{b}_{1,0} & \mathbf{b}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}. \quad \text{Εξ 4.2}$$

Αυτό το patch είναι γραμμικό και ως προς τις δυο παραμέτρους  $u$  και  $v$ , για αυτό και ονομάζεται διγραμμικό patch. Γράφοντας το patch με διαφορετικό τρόπο είναι πολύ πιο εύκολο να κατανοήσουμε το γεωμετρικό του σχήμα. Έτσι έχουμε

$$\mathbf{x}(u,v) = (1-v)\mathbf{p}'' + v\mathbf{q}'', \quad \text{Εξ 4.3}$$

όπου

$$\mathbf{p}'' = (1-u)\mathbf{b}_{0,0} + u\mathbf{b}_{1,0} \quad \text{και} \quad \mathbf{q}'' = (1-u)\mathbf{b}_{0,1} + u\mathbf{b}_{1,1}.$$



Σχήμα 4.1 Ένα διγραμμικό patch

Κάθε μια από τις παραπάνω δυο εξισώσεις αποτελεί μια ευθεία (οι ευθείες αυτές είναι σχεδιασμένες στο σχ. 4.1).

Τα παραπάνω μπορούν να φανούν καλύτερα μέσω ενός παραδείγματος. Ας υποθέσουμε τέσσερα σημεία  $\mathbf{b}_{i,j}$

$$\mathbf{b}_{0,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

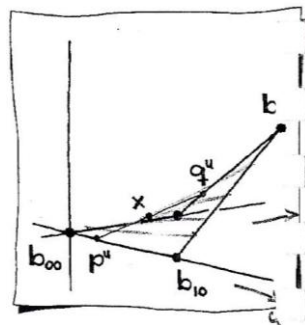
Πρώτα υπολογίζουμε

$$\mathbf{p}'' = 0.75 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}'' = 0.75 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

όπως παρουσιάζεται και στο σχ. 4.2. Έπειτα το σημείο επί του patch είναι το

$$\mathbf{x}(0.25, 0.5) = 0.5\mathbf{p}'' + 0.5\mathbf{q}'' = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.125 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 4.2 Ένα διγραμμικό patch.

Παρατηρούμε ότι το διγραμμικό patch, με τη μορφή που γράφηκε στην εξ. 4.3, μπορεί επίσης να γραφεί με τη μορφή

$$\mathbf{x}(u, v) = (1-u)\mathbf{p}'' + u\mathbf{q}'', \quad \text{Εξ 4.4}$$

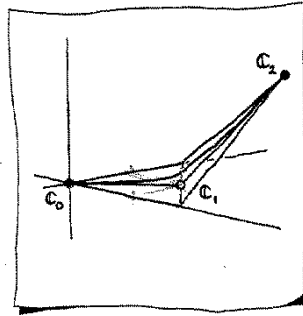
όπου

$$\mathbf{p}'' = (1-v)\mathbf{b}_{0,0} + v\mathbf{b}_{1,0} \quad \text{και} \quad \mathbf{q}'' = (1-v)\mathbf{b}_{0,1} + v\mathbf{b}_{1,1}.$$

Ένα διγραμμικό patch, που επίσης ονομάζεται *υπερβολικό παραβολοειδές (hyperbolic paraboloid)* καλύπτεται από δυο οικογένειες ευθειών γραμμών. Αυτό δεν είναι εύκολο να φανεί από την εξ. 4.2 αλλά φαίνεται εύκολα από τις εξ. 4.3 και 4.4. Αν θεωρήσουμε ευθείες γραμμές παράλληλες στις πλευρές του μοναδιαίου τετραγώνου που αποτελεί το domain, τότε μια γραμμή σταθερή κατά το  $u$  που διατρέχει το  $v$  θα έχει τη μορφή  $(\bar{u}, v)$ . Μια ευθεία σταθερή στο  $v$  που διατρέχει το  $u$  θα έχει τη μορφή  $(u, \bar{v})$ . Αυτές οι δυο οικογένειες ευθειών απεικονίζονται στο patch και προκύπτουν από τις δυο εξισώσεις εξ. 4.3 και 4.4. Ονομάζονται *ισοπαραμετρικές καμπύλες (isoparametric curves)* στο patch μιας και μόνο μια παράμετρος επιτρέπεται να μεταβάλλεται. Τέσσερις χαρακτηριστικές ισοπαραμετρικές καμπύλες (ευθείες) είναι οι πλευρές του που αντιστοιχούν στις ευθείες του domain  $(u, 0)$ ,  $(u, 1)$ ,  $(0, v)$ ,  $(1, v)$ .

Ωστόσο το υπερβολικό παραβολοειδές συνίσταται επίσης και από καμπύλες εκτός από ευθείες. Ας θεωρήσουμε την ευθεία του domain  $u=v$  δηλαδή τη διαγώνιο του μοναδιαίου τετραγώνου (σχ. 4.3). Αυτή γράφεται παραμετρικά ως  $u(t)=t$ ,  $v(t)=t$ . Αυτή η διαγώνιος του domain απεικονίζεται

στο patch ως μια τριδιάστατη καμπύλη –και όχι ευθεία γραμμή– της μορφής  $d(t)=x(t,t)$ . Πιο αναλυτικά είναι



**Σχήμα 4.3** Η διαγώνιος ενός διγραμμικού patch.

$$d(t) = [1-t \quad t] \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}.$$

Ομαδοποιώντας τους όρους είναι

$$d(t) = (1-t)^2 b_{0,0} + 2(1-t)t \left[ \frac{1}{2} b_{0,1} + \frac{1}{2} b_{1,0} \right] + t^2 b_{1,1}. \quad \text{Εξ 4.5}$$

Αυτή αποτελεί μια τετραγωνική καμπύλη Bézier.

### 4.3 Bézier patches

Γράφοντας με ελαφρώς διαφορετική μορφή το διγραμμικό patch από την εξ. 4.2 χρησιμοποιώντας γραμμικά πολώνυμα Bernstein έχουμε

$$x(u,v) = \begin{bmatrix} B_0^1(u) & B_1^1(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^1(v) \\ B_1^1(v) \end{bmatrix}. \quad \text{Εξ 4.6}$$

Αυτή είναι η μορφή και στη γενική περίπτωση για βαθμό μεγαλύτερο του τετραγωνικού

$$x(u,v) = \begin{bmatrix} B_0^m(u) & \dots & B_m^m(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & \dots & b_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,0} & \dots & b_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^n(v) \\ \vdots \\ B_n^n(v) \end{bmatrix}. \quad \text{Εξ 4.7}$$

Για  $m=n=1$  λαμβάνουμε τη διγραμμική περίπτωση. Για την ειδική περίπτωση όπου  $m=n=3$  λαμβάνουμε δικυβικό Bézier patch. Αναπτύσσοντας την εξ. 4.7 έχουμε

$$x(u,v) = b_{0,0} B_0^m(u) B_0^n(v) + \dots + b_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) + \dots + b_{m,n} B_m^m(u) B_n^n(v),$$

ή κάνοντας χρήση της σύμβασης Einstein είναι πιο κομψά

$$x(u,v) = b_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) \quad \text{για } i=0 \div m \text{ και } j=0 \div n.$$

Επίσης μια συμπαγής γραφή της παραπάνω σχέσης είναι

$$x(u,v) = M^T B N. \quad \text{Εξ 4.8}$$

Κατά τον προσδιορισμό ενός σημείου του patch σε ένα παραμετρικό σημείο  $(u, v)$  (ή παραμετρικό ζεύγος), είναι φυσικό πρώτα να πολλαπλασιάσουμε τους δυο πρώτους όρους και έπειτα αυτό που θα προκύψει με τον τρίτο. Από το πρώτο γινόμενο

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^T \mathbf{B} = [c_0, \dots, c_n] \quad \text{Εξ 4.9}$$

προκύπτουν τα σημεία  $c_i$ , και από αυτά μέσω πολλαπλασιασμού προκύπτει το τελικό σημείο

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{C} \mathbf{N}. \quad \text{Εξ 4.10}$$

Η διαδικασία αυτή αποτελείται από δυο βήματα και είναι διαδικασία άμεσου υπολογισμού (2-stage explicit evaluation method).

Τα σημεία  $\mathbf{C}$  που υπολογίζονται στο πρώτο βήμα δεν εξαρτώνται από την παράμετρο  $v$ . Έτσι μετά τον υπολογισμό του  $\mathbf{C}$  μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό διάφορων σημείων  $\mathbf{x}(u, v_1)$ ,  $\mathbf{x}(u, v_2)$ ,  $\mathbf{x}(u, v_3), \dots$ . Έτσι το  $\mathbf{C}$  περικλείει τα Bézier control points της καμπύλης  $\mathbf{C} \mathbf{N}$  με σταθερό  $u$  και μεταβλητό  $v$ . Μια τέτοια καμπύλη αποτελεί ισοπαραμετρική καμπύλη (isoparametric curve) όπως αυτή αναλύθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Αλλά, αντίθετα με την περίπτωση του διγραμμικού patch, στη γενική περίπτωση οι ισοπαραμετρικές καμπύλες δεν είναι ευθείες γραμμές.

Θέλοντας να δούμε τα παραπάνω με ένα παράδειγμα επιλέγουμε  $m=2$ ,  $n=3$  και το Bézier patch να έχει ως control net το

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Επιλέγεται να υπολογιστεί το σημείο στο  $(u, v) = (0.5, 0.5)$ . Πρώτα υπολογίζονται τα τετραγωνικά πολυώνυμα Bernstein (συναρτήσεις βάσης) στο  $u=0.5$ . Προκύπτει

$$\mathbf{M}^T = [0.25 \quad 0.5 \quad 0.25].$$

Έτσι λαμβάνονται τα ενδιάμεσα control points

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^T \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4.5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Όπως παρατηρούμε τα σημεία του πολυγώνου  $\mathbf{C}$  είναι τα control points μιας καμπύλης που περιέχει το σημείο  $\mathbf{x}(0.5, 0.5)$ , η οποία και είναι η ισοπαραμετρική καμπύλη.

Έπειτα υπολογίζονται οι κυβικές συναρτήσεις βάσης Bernstein ως προς  $v=0.5$ :

$$N = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.375 \\ 0.375 \\ 0.125 \end{bmatrix} \text{ οπότε το ζητούμενο σημείο του patch είναι το } \mathbf{x}(0.5, 0.5) = \mathbf{CN} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 3 \\ 0.9375 \end{bmatrix}.$$

Κατά τον υπολογισμό του σημείου  $\mathbf{x}(u, v)$  ισχύει η συμμετρία της διαδικασίας, δηλαδή είναι το ίδιο αν πρώτα υπολογίσουμε τα σημεία  $\mathbf{D} = \mathbf{BN}$  και έπειτα τα  $\mathbf{x} = \mathbf{M}^T \mathbf{D}$ . Το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο, απλά με αυτή τη σειρά υπολογισμού είναι δυνατός ο προσδιορισμός των  $v$ -ισοπαραμετρικών καμπυλών.

#### 4.4 Ιδιότητες των Bézier patches

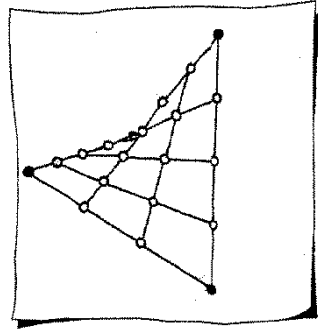
Μερικές από τις ιδιότητες των Bézier patches αναφέρονται εδώ

- Παρεμβολή στα άκρα τους: ακριβώς ανάλογα με τις καμπύλες, το patch διέρχεται από τα τέσσερα γωνιακά control points που το ορίζουν, δηλαδή

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0, 0) &= \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{x}(1, 0) &= \mathbf{b}_{m,0} \\ \mathbf{x}(0, 1) &= \mathbf{b}_{0,n} & \mathbf{x}(1, 1) &= \mathbf{b}_{m,n}. \end{aligned}$$

Ωστόσο αυτή η ιδιότητα είναι πολύ πιο σημαντική για την περίπτωση της επιφάνειας από αυτή της καμπύλης. Ισχύει επίσης ότι τα σημεία στις πλευρές του control polygon είναι τα control points των πλευρών του patch (καμπύλες Bézier). Για παράδειγμα η καμπύλη  $\mathbf{x}(u, 1)$  έχει control polygon  $\mathbf{b}_{0,n}, \dots, \mathbf{b}_{m,n}$ .

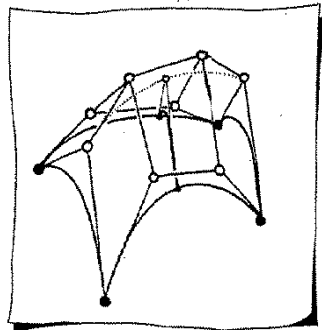
- Συμμετρία: μπορούμε να αλλάξουμε τους δείκτες των control points έτσι ώστε οποιοδήποτε από αυτά να αντιστοιχεί στο  $\mathbf{b}_{0,0}$  χωρίς να αλλάζει η επιφάνεια που υπολογίζεται.
- Η επιφάνεια μένει ανεπηρέαστη από affine μετασχηματισμούς: Με γενικά λόγια, αν ένας affine μετασχηματισμός εφαρμοστεί στο control polygon, τότε η καμπύλη μετασχηματίζεται (στρέφεται ή μετατοπίζεται) με τον ίδιο μετασχηματισμό, χωρίς να αλλάζει σε τίποτα η μορφή της.
- Διγραμμική ακρίβεια: Το σχ. 4.5 παρουσιάζει ένα  $m \times n$  patch με τα control points των πλευρών του να είναι σε ίσες αποστάσεις και επί των ευθειών που συνδέουν τα γωνιακά control points. Αυτό το patch είναι όμοιο με το διγραμμικό που παρεμβάλλει τα τέσσερα γωνιακά control points.



**Σχήμα 4.4** Ένα  $3 \times 4$  control net που παρουσιάζει διγραμμική ακρίβεια.

- Ιδιότητα convex hull: ισχύει ακριβώς και για την διδιάστατη περίπτωση (επιφάνειες) ότι και για την μονοδιάστατη (καμπύλες).
- Γινόμενο τανυστών: τα Bézier patches ανήκουν στην κλάση των επιφανειών που προκύπτουν ως γινόμενο τανυστών. Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει την ανάλυσή τους μέσω των ισοπαραμετρικών καμπυλών, κάτι που σημαίνει απλοποίηση στην κατασκευή τους και τον χειρισμό τους. Η ιδιότητα αυτή είναι εμφανής στην διάσπαση της εξ. 4.8 στις εξ. 4.9 και 4.10.

Η ιδιότητα του γινομένου τανυστών είναι αυτή που απλοποιεί κατά πολύ την κατανόηση των Bézier patches. Το σχ. 4.6 παρουσιάζει το πώς η μορφή ενός Bézier patch ακολουθεί τις μεταβολές ενός ‘δικτύου’ από γραμμές και στήλες από Bézier control points.



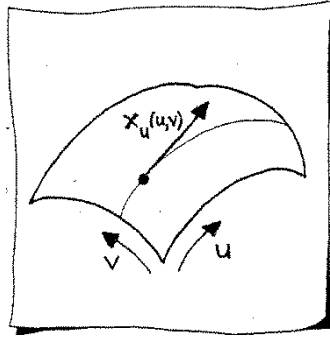
**Σχήμα 4.5** Ένα Bézier patch ως γεωμετρικός τόπος σημείων που ‘ακολουθεί’ την κίνηση και την παραμόρφωση του control net.

## 4.5 Παραγωγή

Οι παράγωγοι για παραμετρικές καμπύλες είναι εφαπτομενικά διανύσματα. Το ίδιο ισχύει και για επιφάνειες: η παράγωγος είναι ένα διάνυσμα εφαπτομενικό σε μια καμπύλη επί της επιφάνειας.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι ας θεωρήσουμε ένα σημείο  $x(u,v)$  της παραμετρικής καμπύλης (για λόγους απλότητας ένα Bézier patch). Από αυτό το σημείο διέρχονται δυο ισοπαραμετρικές καμπύλες, μια για κάθε μια από τις δυο παραμέτρους  $u$  και  $v$ . Ας επικεντρωθούμε στην ισοπαραμετρική καμπύλη  $v = \text{σταθερό}$  (σχ. 4.7). Αυτή αποτελεί μια παραμετρική καμπύλη, με

παράμετρο  $u$ , η οποία είναι καμπύλη της παραμετρικής επιφάνειας. Καθώς έχει ως παράμετρο το  $u$ , άρα μπορούμε να την παραγωγίσουμε ως προς  $u$ . Το προκύπτον εφαπτομενικό διάνυσμα  $\mathbf{x}_u$  αποτελεί την μερική παράγωγο ως προς  $u$  στο σημείο  $\mathbf{x}(u,v)$  και συμβολίζεται με  $\mathbf{x}_u(u,v) = \frac{\partial \mathbf{x}(u,v)}{\partial u}$ .



Σχήμα 4.6 Μια μερική παράγωγος.

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η μερική παράγωγος ως προς  $v$ . Απλώς παραγωγίζουμε την ισοπαραμετρική καμπύλη με control points  $\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{N}$ .

Εκτός από την παραπάνω διαδικασία, ένας άλλος τρόπος για τον υπολογισμό παραγώγων είναι να βρεθεί ένας κλειστός τύπος. Προς αυτή την κατεύθυνση παραγωγίζουμε την εξ. 4.7 ως προς  $u$

$$\mathbf{x}_u(u,v) = m \begin{bmatrix} B_0^{m-1}(u) & \dots & B_{m-1}^{m-1}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{0,0} & \dots & \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{m-1,0} & \dots & \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{m-1,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^n(v) \\ \vdots \\ B_n^n(v) \end{bmatrix}. \quad \text{Εξ 4.11}$$

Ο όρος  $\Delta^{1,0} \mathbf{b}_{i,j}$  παριστάνει εμπρός διαφορά (forward difference)

$$\Delta^{1,0} \mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}.$$

Οι δείκτες του συμβόλου  $\Delta$  αφορούν ξεχωριστά την κάθε παράμετρο  $u, v$ . Δηλαδή το  $\Delta^{1,0}$  σημαίνει μια εμπρός διαφορά για την παράμετρο  $u$  και καμία για την παράμετρο  $v$ .

## 4.6 Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Ένα Bézier patch μπορεί να υποστεί παραγωγή περισσότερες από μια φορές. Οι προκύπτουσες παράγωγοι  $k^{\text{στης}}$  τάξης για το  $v$  είναι

$$\mathbf{x}_v^{(k)}(u,v) = \frac{n!}{(n-k)!} \begin{bmatrix} B_0^m(u) & \dots & B_m^m(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^{0,k} \mathbf{b}_{0,0} & \dots & \Delta^{0,k} \mathbf{b}_{0,n-k} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^{0,k} \mathbf{b}_{m,0} & \dots & \Delta^{0,k} \mathbf{b}_{m,n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^{n-k}(v) \\ \vdots \\ B_{n-k}^{n-k}(v) \end{bmatrix}. \quad \text{Εξ 4.12}$$

Ο όρος  $\Delta^{0,k} \mathbf{b}_{i,j}$  είναι η  $k^{\text{στη}}$  εμπρός διαφορά (forward difference) στην  $v$ -διεύθυνση, που ασκείται μόνο στην παράμετρο  $v$ . Υπενθυμίζεται ο ορισμός

$$\Delta^k \mathbf{b}_i = \Delta^{k-1} \mathbf{b}_{i+1} - \Delta^{k-1} \mathbf{b}_i$$

όπου  $\Delta^0 \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i$ .



Παρόμοια μορφή έχει και η  $k^{\text{στή}}$  μερική παράγωγος ως προς  $u$ .

Μια άλλη χρησιμοποιούμενη παράγωγος είναι η μικτή, που ονομάζεται αλλιώς *διάνυσμα συστροφής* (*twist vector*). Συμβολίζεται ως  $\mathbf{x}_{u,v}(u,v)$  και είναι ίση με  $\mathbf{x}_{u,v}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{x}_u(u,v)}{\partial v}$  ή

$$\mathbf{x}_{u,v}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{x}_v(u,v)}{\partial u}.$$

#### 4.7 Ο αλγόριθμος de Casteljau

Κατά την κατασκευή ενός Bézier patch στην ενότητα 4.3 πρώτα προσδιορίσαμε ένα ενδιάμεσο σύνολο σημείων το οποίο προκύπτει ως  $\mathbf{C} = \mathbf{M}^T \mathbf{B}$ . Γράφοντας τον υπολογισμό για κάθε ένα  $\mathbf{c}_i$  από τα σημεία του  $\mathbf{C}$  έχουμε

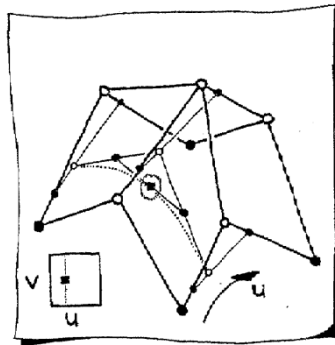
$$\mathbf{c}_0 = B_0^m(u) \mathbf{b}_{0,0} + \dots + B_m^m(u) \mathbf{b}_{m,0},$$

$$\mathbf{c}_1 = B_0^m(u) \mathbf{b}_{0,1} + \dots + B_m^m(u) \mathbf{b}_{m,1},$$

...

$$\mathbf{c}_n = B_0^m(u) \mathbf{b}_{0,n} + \dots + B_m^m(u) \mathbf{b}_{m,n}.$$

Κάθε ένας από τους παραπάνω υπολογισμούς αποτελεί τον υπολογισμό μιας καμπύλης Bézier βαθμού  $m$ . Αντί για την χρησιμοποίηση της απευθείας μεθόδου με τα πολώνυμα Bernstein, μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος de Casteljau για τον υπολογισμό του κάθε  $\mathbf{c}_i$ .



**Σχήμα 4.7** Ο αλγόριθμος de Casteljau στην περίπτωση του Bézier patch.

Το δεύτερο βήμα του υπολογισμού,  $\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{C}\mathbf{N}$ , είναι επίσης μια διαδικασία κατασκευής μιας καμπύλης Bézier. Αυτή τη φορά αυτή η καμπύλη είναι βαθμού  $n$ . Επίσης μπορεί να γίνει χρήση του αλγορίθμου de Casteljau. Έτσι, ο αλγόριθμος de Casteljau για την κατασκευή Bézier patches, αν τον ονομάσουμε αλγόριθμο de Casteljau δυο βημάτων, είναι η απλή κλήση του αλγορίθμου de Casteljau που είδαμε στις καμπύλες Bézier.

Το πλεονέκτημα αυτής της γεωμετρικής προσέγγισης έγκειται στο ότι επιτρέπει εκτός από τον υπολογισμό ενός σημείου της επιφάνειας, και τον υπολογισμό της παραγώγου της επιφάνειας στο σημείο αυτό. Μόλις προσδιοριστεί το control polygon  $\mathbf{C}$ , έπειτα ο υπολογισμός του σημείου και της παραγώγου δεν έχει καμία διαφορά από την περίπτωση της καμπύλης που είδαμε στο

κεφάλαιο 3. Αυτή η εφαπτομένη, βάσει των παραπάνω σχέσεων θα αντιστοιχεί στο  $x_v$  και αφορά την ισοπαραμετρική καμπύλη  $u=\text{σταθερό}$ .

Η σειρά των δυο βημάτων στον αλγόριθμο μπορεί να είναι διαφορετική, ανάλογα αν θέλουμε τον υπολογισμό του  $x_u$  αντί για το  $x_v$ .

#### **4.8 Αύξηση βαθμού ενός Bézier patch (*degree elevation*)**

Ένα Bézier patch έχει δυο βαθμούς:  $m$  κατά την  $u$ -διεύθυνση και  $n$  κατά την  $v$ -διεύθυνση. Κάθε ένας από τους βαθμούς αυτούς μπορεί να αυξηθεί μέσω μιας απλής διαδικασίας. Για παράδειγμα θα γίνει αύξηση του βαθμού  $m$  σε  $m+1$ . Το προκύπτον control net –το οποίο συνεχίζει να περιγράφει την ίδια ακριβώς επιφάνεια- θα έχει πλέον  $n+1$  στήλες από control points, κάθε μια από τις οποίες θα περιέχει  $m+2$  control points. Αυτές οι στήλες προσδιορίζονται από τις αρχικές μέσω της διαδικασίας αύξησης βαθμού που παρουσιάστηκε στις καμπύλες Bézier

# 5

## ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

---

Ενώ οι Bézier καμπύλες είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο, δεν είναι πολύ βολικές όταν το ζητούμενο είναι η σχεδίαση σύνθετων καμπυλών. Σε αυτή την περίπτωση επιλέγεται η χρήση *σύνθετων καμπυλών*, ευρέως γνωστών ως *splines*. Μια σύνθετη καμπύλη συντίθεται από απλούστερα τμήματα καμπυλών, για αυτό το λόγο γίνεται συχνά χρήση και του όρου *τμηματική καμπύλη*.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξεταστούν καμπύλες Bézier, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους, και θα αναλυθούν οι συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για διάφορα είδη σύνδεσής τους, ως προς την συνέχεια και παραγωγισιμότητα στο σημείο σύνδεσης.

### 5.1 Τμηματικές καμπύλες Bézier

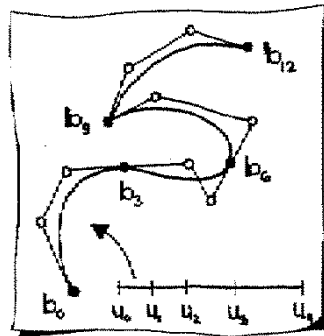
Οι τοπικές και καθολικές παράμετροι (local and global parameters) αναλύονται στην ενότητα 1.2. Στις σύνθετες καμπύλες Bézier γίνεται εφαρμογή των αρχών αυτών. Όπως φαίνεται στο σχ. 5.1, κάθε ξεχωριστό τμήμα της σύνθετης καμπύλης Bézier, αποτελεί μια ξεχωριστή καμπύλη Bézier που ορίζεται σε ένα παραμετρικό διάστημα *κόμβων* (*knots*)  $[u_i, u_{i+1}]$  το οποίο ονομάζεται *knot span* (δηλαδή η παράμετρος  $t$  της καμπύλης κινείται σε αυτό το domain). Το σύνολο των knots αναφέρεται ως *knot vector* ή *knot sequence*. Στα παρακάτω θα γίνει χρήση του συμβολισμού  $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$  για το εύρος του knot span καθώς επίσης θα αναφερόμαστε στις σύνθετες καμπύλες ως *spline καμπύλες*.

Έστω η συνολική spline, με ονομασία  $s$ . Κατά την εξέταση μιας ιδιότητάς της, θα χρησιμοποιείται η καθολική παράμετρο  $u$  που κινείται μέσα στο knot vector. Όταν πρόκειται για μια ιδιότητα του  $i^{\text{στού}}$  τμήματος, το οποίο είναι καμπύλη Βέζιερ έστω με ονομασία  $s_i$ , που ορίζεται στο  $[u_i, u_{i+1}]$ , θα χρησιμοποιείται η τοπική παράμετρος  $t \in [0, 1]$ . Από την ενότητα 1.2 ανακαλούμε ότι

$$t = \frac{u - u_i}{\Delta_i}.$$

Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο *σημείο σύνδεσης* (*junction point*). Αυτά είναι τα άκρα των τμημάτων που συνδέονται μεταξύ τους (και είναι οι απεικονίσεις των άκρων των knot spans), δηλαδή ισχύει

$$s(u_i) = s_i(0) = s_{i-1}(1).$$



**Σχήμα 5.1** Τρεις κυβικές καμπύλες Βέζιερ που συνδέονται και δημιουργούν μια κυβική spline.

Τώρα ας εξετάσουμε την συσχέτιση μεταξύ των τοπικών και καθολικών παραμέτρων στον παραμετρικό χώρο, κατά την ανάλυση των παραγώγων μιας καμπύλης Βέζιερ. Η παράγωγος μιας spline καμπύλης στο  $u$ , πρέπει να τηρεί δυο αρχές: πρώτον είναι η παράγωγος της  $i^{\text{στης}}$  Βέζιερ καμπύλης  $s_i(t)$  όταν το  $u \in [u_i, u_{i+1}]$  και δεύτερον πρέπει να περικλείει και το μήκος του παραμετρικού διαστήματος  $\Delta_i$  έτσι ώστε να αποτελεί παράγωγο κατά την έννοια της συνολικής καμπύλης. Με πιο απλά λόγια, θα πρέπει να ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας όπου

$$\begin{aligned} \frac{ds(u)}{du} &= \frac{s_i(t)}{dt} \frac{dt}{du} \\ &= \frac{1}{\Delta_i} \frac{s_i(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Το σημείο ενδιαφέροντος είναι τα junction points. Για να εξετάσουμε την *λειότητα* των δυο τμημάτων στο junction point τους, χρειαζόμαστε τις παραγώγους των δυο καμπυλών Βέζιερ στα άκρα τους, όπου συνενώνονται. Για το junction point  $u_1$  μεταξύ των πρώτων δυο κυβικών καμπυλών Βέζιερ του σχ. 5.1 η διαδικασία αυτή είναι

$$\dot{s}_0(1) = \frac{3}{\Delta_0} \Delta \mathbf{b}_2 \quad \text{και} \quad \dot{s}_1(0) = \frac{3}{\Delta_1} \Delta \mathbf{b}_3.$$

Οι δεύτερες παράγωγοι είναι

$$\ddot{s}_0(1) = \frac{6}{\Delta_0^2} \Delta^2 \mathbf{b}_1 \text{ και } \ddot{s}_1(0) = \frac{6}{\Delta_1^2} \Delta^2 \mathbf{b}_3.$$

## 5.2 $C^1$ και $G^1$ συνέχεια (continuity)

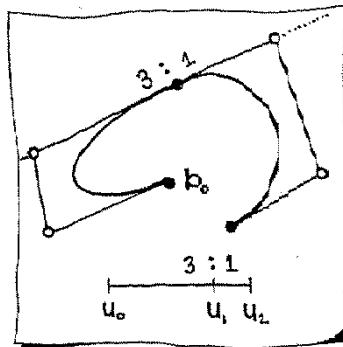
Ας θεωρήσουμε δυο κυβικές καμπύλες Bézier, η πρώτη ορισμένη στο domain  $[u_0, u_1]$ , και η δεύτερη στο domain  $[u_1, u_2]$  (σχ. 5.2). Τα Bézier control points της ‘αριστερά’ καμπύλης είναι τα  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  και της ‘δεξιά’ είναι τα  $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6$ . Αυτές οι δύο καμπύλες σχηματίζουν μια συνολική καμπύλη, η οποία είναι συνεχής (spline καμπύλη).

Ποιες είναι οι συνθήκες που πρέπει να ισχύουν έτσι ώστε η συνολική καμπύλη να είναι παραγωγίσιμη ή  $C^1$  συνεχής στο διάστημα  $[u_0, u_2]$ ; Παραγωγίζοντας το κάθε ένα από τα δυο τμήματα στο σημείο  $u_1$  και εξισώνοντας τις δυο παραγώγους έχουμε την συνθήκη

$$\mathbf{b}_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \mathbf{b}_2 + \frac{\Delta_0}{\Delta} \mathbf{b}_4 \quad \text{Εξ 5.1}$$

όπου  $\Delta = u_2 - u_0$ .

Αυτή η συνθήκη έχει γεωμετρική ερμηνεία: Τα τρία σημεία  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  πρέπει να είναι συνευθειακά και επίσης πρέπει να είναι η affine απεικόνιση των παραμετρικών τιμών  $u_0, u_1, u_2$  (σχ. 5.2).



Σχήμα 5.2 Δυο  $C^1$  κυβικές καμπύλες Bézier και τα domains τους.

Αυτό όπως έχουμε δει σημαίνει ότι

$$\text{ratio}(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}.$$

Για την ειδική περίπτωση όπου  $u_0, u_1, u_2 = 0, 1, 2$  ισχύει

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{b}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{b}_4.$$

Τα παραπάνω αναδεικνύουν ένα πολύ σημαντικό σημείο: Δύο κυβικές καμπύλες με  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  συνευθειακά, μπορεί να είναι  $C^1$  στο junction point τους για μια επιλογή παραμετρικών διαστημάτων, αλλά να μην ισχύει το ίδιο για κάποια άλλη επιλογή. Συνεπώς η συνθήκη των συνευθειακών σημείων είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή για την κυβική spline.

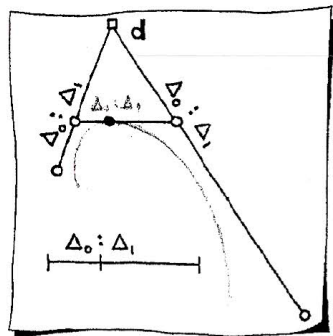
Η έννοια της  $C^1$  συνέχειας περιλαμβάνει την ταχύτητα διάνυσης της καμπύλης, όχι απλά την γεωμετρία της καμπύλης. Αυτή η ταχύτητα ελέγχεται από την απόσταση των παραμετρικών τιμών, δηλαδή το μήκος των παραμετρικών διαστημάτων. Αν απλά ενδιαφερόμαστε για το γεωμετρικό σχήμα της καμπύλης, δεν χρειάζεται καθόλου να μας απασχολήσει το τι ισχύει για τις παραμέτρους και τα παραμετρικά διαστήματα.

Έτσι, κατά την απλή γεωμετρική θεώρηση, μια καμπύλη είναι λεία ή  $G^1$  συνεχής (από το *Geometrically continuous*) αν η εφαπτομένης εκατέρωθεν του junction point συμπίπτουν μεταξύ τους. Για δυο κυβικές καμπύλες Βέζιερ αυτό σημαίνει ότι τα  $b_2, b_3, b_4$  πρέπει απλά να είναι συνευθειακά.

### 5.3 $C^2$ και $G^2$ συνέχεια (continuity)

Συνεχίζουμε να εξετάζουμε δυο κυβικές καμπύλες Βέζιερ με τους ίδιους συμβολισμούς της προηγούμενης παραγράφου. Θεωρώντας ότι οι δυο καμπύλες σχηματίζουν μια συνολική η οποία είναι  $C^1$  συνεχής στο junction point, τότε συγκρίνοντας τις δεύτερες παραγώγους εκεί λαμβάνουμε τη σχέση

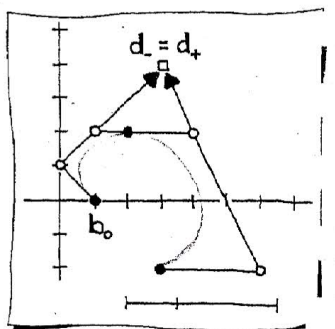
$$-\frac{\Delta_1}{\Delta_0} \mathbf{b}_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \mathbf{b}_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_1} \mathbf{b}_4 - \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \mathbf{b}_5. \quad \text{Εξ 5.2}$$



Σχήμα 5.3 Η συνθήκη  $C^2$ .

Αυτή η σχέση έχει μια απλή γεωμετρική ερμηνεία (σχ. 5.3). Κάθε μέλος της εξ. 5.2 ορίζει ένα σημείο (βλέπουμε ότι αποτελεί βαρυκεντρικό συνδυασμό σημείων). Το αριστερό μέλος, και κάνοντας χρήση της ‘αριστερά’ καμπύλης Βέζιερ, κατασκευάζει το σημείο  $d_-$  ενώ το δεξιό μέλος, μέσω της ‘δεξιά’ καμπύλης Βέζιερ, κατασκευάζει το σημείο  $d_+$ :

$$\mathbf{d}_- = -\frac{\Delta_1}{\Delta_0} \mathbf{b}_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \mathbf{b}_2 \quad \text{και} \quad \mathbf{d}_+ = \frac{\Delta_1}{\Delta_1} \mathbf{b}_4 - \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \mathbf{b}_5. \quad \text{Εξ 5.3}$$



Σχήμα 5.4 Μια spline που είναι  $C^2$ .

Η συνθήκη  $C^2$  απαιτεί τα δυο σημεία  $d_1, d_+$  να ταυτίζονται. Το σημείο αυτό το ονομάζουμε  $d$ . Έστω ότι ισχύει αυτή η συνθήκη και η καμπύλη είναι  $C^2$  συνεχής, τότε αναδιατάσσοντας την εξ. 5.3 έχουμε

$$b_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} b_1 + \frac{\Delta_0}{\Delta} d \quad \text{και} \quad b_4 = \frac{\Delta_1}{\Delta} d + \frac{\Delta_0}{\Delta} b_5,$$

δηλαδή

$$ratio(b_1, b_2, d) = ratio(d, b_4, b_5) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}.$$

Η έννοια της  $C^2$  συνέχειας περικλείει το παραμετρικό domain της καμπύλης, ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που αυτό περιγράφηκε για την  $C^1$  συνέχεια. Αν το ενδιαφέρον μας έγκειται απλά στην γεωμετρία της καμπύλης, τότε πρέπει να ισχύει απλά η συνέχεια της καμπυλότητας στο junction point, οπότε και η καμπύλη είναι  $G^1$  συνεχής εκεί. Απλά αναφέρουμε εδώ την συνθήκη της  $G^1$  συνέχειας (σχ. 5.5) που προκύπτει για τους λόγους

$$\rho_0 = ratio(b_1, b_2, c),$$

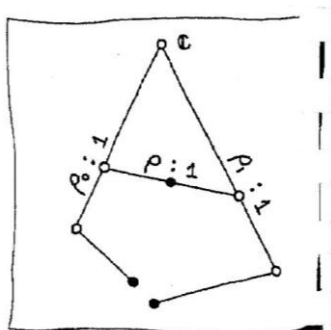
$$\rho_1 = ratio(c, b_4, b_5),$$

$$\rho = ratio(b_2, b_3, b_4),$$

και η  $G^2$  συνθήκη είναι

$$\rho^2 = \rho_0 \rho_1.$$

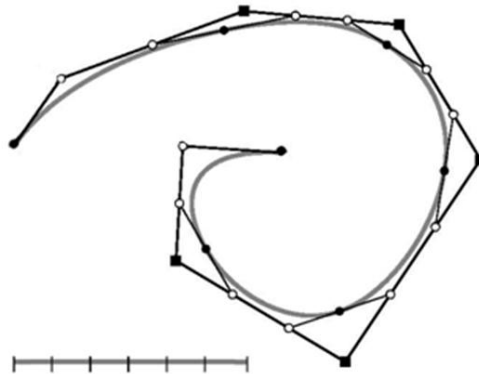
Εξ 5.4



Σχήμα 5.5 Η συνθήκη  $G^2$ .

## 5.4 Παράδειγμα σύνθετης κυβικής καμπύλης

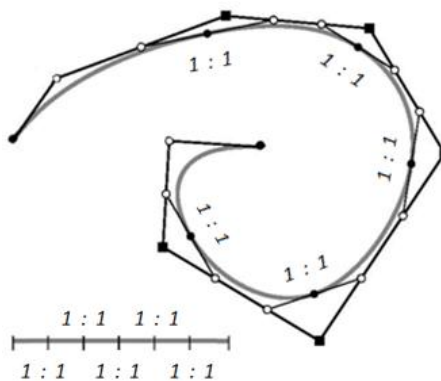
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια σύνθετη καμπύλη spline κυβικού βαθμού. Η σύνθετη καμπύλη είναι κυβικού βαθμού καθώς συντίθεται από κυβικές καμπύλες Bézier. Βλέπουμε ότι το control polygon της κάθε καμπύλης Bézier έχει τέσσερα control points, από τα οποία τα ακραία είναι μαύρες κουκίδες ενώ τα εσωτερικά είναι λευκές. Σχεδιάζονται έτσι, για να είναι εμφανή τα junction points. Επίσης με μαύρα τετραγωνάκια σχεδιάζονται τα σημεία  $d$  που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα.



Σχήμα 5.6 Σύνθετη καμπύλη spline κυβικού βαθμού.

Παρατηρούμε ότι τα παραμετρικά τμήματα είναι έξι, όπως και οι καμπύλες Bézier που συνδέονται μεταξύ τους. Κάθε παραμετρικό τμήμα απεικονίζεται στην αντίστοιχη καμπύλη Bézier. Η εξέταση της λειότητας της σύνθετης καμπύλης γίνεται στα junction points (οι Bézier καμπύλες είναι στο εσωτερικό τους  $C^\infty$ ).

Η καμπύλη είναι  $C^1$  στα junction points καθώς τηρείται η συνθήκη που είδαμε στα προηγούμενα.

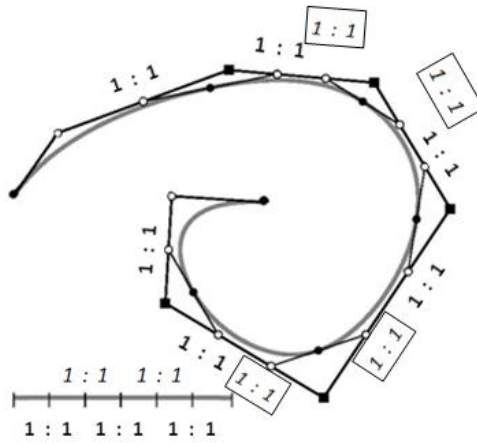


Σχήμα 5.7 Η συνθήκη  $C^1$ .

Όντως, και στις πέντε αλληλουχίες κουκίδων *λευκή-μαύρη-λευκή* τα ευθύγραμμα τμήματα που τις ενώνουν είναι ίσα μεταξύ τους (δηλαδή έχουν λόγο 1:1), όπως συμβαίνει και με τα πέντε ζεύγη των παραμετρικών τμημάτων (σχ. 5.7).

Επίσης η καμπύλη είναι  $C^2$  στα junction points καθώς τηρείται η συνθήκη που είδαμε στα προηγούμενα.

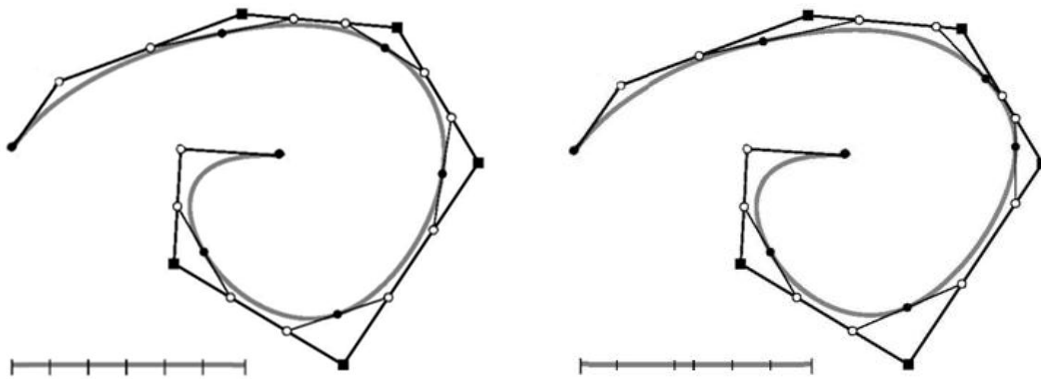




Σχήμα 5.8 Η συνθήκη  $C^2$ .

Τώρα οι αλληλουχίες που κοιτάμε είναι γύρω από τα πέντε τετραγώνια (σημεία  $d$ ) όπου πλέον οι αλληλουχίες περιλαμβάνουν μόνο λευκές κουκίδες και είναι *λευκή-λευκή-τετραγώνια* και *τετραγώνια-λευκή-λευκή*. Ο λόγος 1:1 που εμφανίζεται στα παραμετρικά ζεύγη, πρέπει να εμφανίζεται στις αλληλουχίες αυτές όπως και συμβαίνει (σχ. 5.8).

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο τα σημεία που συμβολίζονται με τετραγώνια (σημεία  $d$ ) είναι πολύ σημαντικά και θα βοηθήσουν να απλοποιηθεί κατά πολύ η περιγραφή των σύνθετων καμπυλών *splines* οποιουδήποτε βαθμού  $n$ . Στο σχ. 5.9 φαίνεται το πώς τροποποιείται η σύνθετη καμπύλη όταν μετακινηθεί ένας κνोट του παραμετρικού διαστήματος ενώ κρατούνται σταθερά τα σημεία  $d$ . Με τη μετακίνηση αυτή, αλλάζει ο λόγος μεταξύ τριών από τα πέντε παραμετρικά ζεύγη διαστημάτων, άρα επηρεάζονται τα τρία από τα πέντε junction points έτσι ώστε και η νέα καμπύλη να παραμείνει  $C^2$  συνεχής. Οι δύο 'τελευταίες' από τις έξι Bézier καμπύλες μένουν ανεπηρέαστες.



Σχήμα 5.9 Επίδραση μετακίνησης ενός knot στο knot sequence.



# 6

## ΚΑΜΠΥΛΕΣ B-SPLINE

---

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε τις σύνθετες καμπύλες Bézier, ενώ σε αυτό θα περάσουμε στις καμπύλες B-spline. Οι καμπύλες B-spline δεν είναι κάτι διαφορετικό από τις σύνθετες καμπύλες Bézier, στην πραγματικότητα είναι ακριβώς το ίδιο. Είναι οι σύνθετες (ή τμηματικές) καμπύλες που αποτελούνται από καμπύλες Bézier, απλά έχουν άλλη ονομασία. Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για να είναι οι σύνθετες καμπύλες  $C^1$  και  $C^2$  λείες στα σημεία σύνδεσης (junction points) των καμπυλών Bézier. Κάτι ανάλογο μπορεί να γίνει και για συνθήκες  $C^3$  λειότητας για σύνθετες καμπύλες τετάρτου βαθμού κ.ο.κ. Για υψηλότερης τάξης καμπύλες όμως, η θεώρηση του προηγούμενου κεφαλαίου (μέσω των Bézier τμημάτων που τις αποτελούν) γίνεται αρκετά δύσχρηστη και μια πιο κομψή μέθοδος αναζητήθηκε. Αυτή η απαίτηση οδήγησε στη θεωρία των B-splines που αναλύεται στο κεφάλαιο αυτό.

Στα παρακάτω παύει να γίνεται χρήση των όρων και της ονοματολογίας που χρησιμοποιήθηκε μέχρι τώρα για τις καμπύλες Bézier και πλέον εισάγονται όροι για τις σύνθετες καμπύλες που περιγράφονται πλέον στο δικό τους πλαίσιο ως καμπύλες B-splines και όχι μέσω των καμπυλών Bézier όπως έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

### 6.1 Βασικοί ορισμοί

Κατ' αρχήν θα παραμείνουμε λίγο ακόμα στις καμπύλες Bézier και θα αναφέρουμε εδώ τον ορισμό τους

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0^n(t) = \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + \mathbf{b}_1 B_1^n(t) + \dots + \mathbf{b}_n B_n^n(t).$$

Οι ιδιότητες μιας καμπύλης Bézier καθορίζονται από τις συναρτήσεις βάσης της, που είναι τα πολυώνυμα Bernstein  $B_i^n(t)$ . Κάθε συνάρτηση βάσης Bernstein αποτελεί μια πολυωνυμική συνάρτηση. Οι καμπύλες B-spline τώρα, χρησιμοποιούν ως συναρτήσεις βάσης κάποιες πιο ‘ευέλικτες’, τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις, τις συναρτήσεις B-splines  $N_i^n(u)$ . Τμηματικά πολυωνυμικές σημαίνει ότι συντίθενται από κομμάτια απλών πολυωνυμικών συναρτήσεων (όπως είπαμε αυτές οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συναρτήσεις Bézier που είδαμε στην ενότητα 3.5).

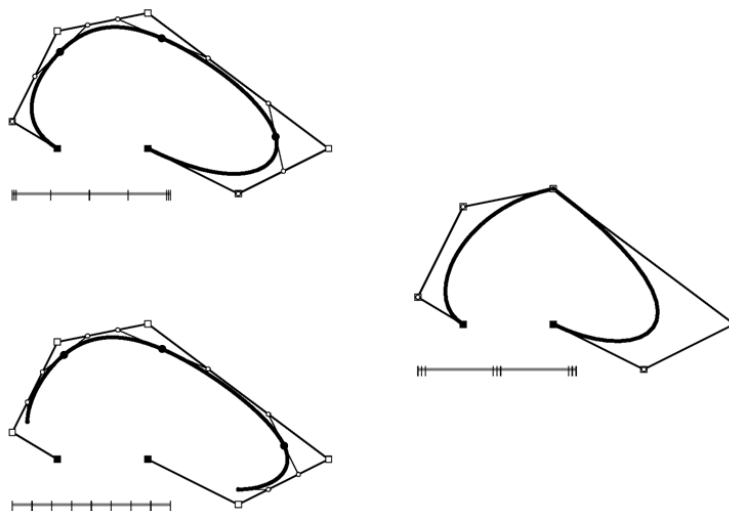
Μια καμπύλη B-spline ορίζεται ως

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{d}_0 N_0^n(u) + \mathbf{d}_1 N_1^n(u) + \dots + \mathbf{d}_{D-1} N_{D-1}^n(u). \quad \text{Εξ 6.1}$$

Τα  $N_i^n$  είναι οι βαθμού  $n$  B-splines. Ο ακριβής ορισμός αυτών των τμηματικά πολυωνυμικών συναρτήσεων δίδεται παρακάτω στην ενότητα 6.5. Τα  $\mathbf{d}_i$  ονομάζονται *σημεία de Boor* ή απλά – όπως και στις καμπύλες Bézier- *control points*.

Ας ξεκινήσουμε με μια πρακτική εισαγωγή. Το σχ. 6.1 παρουσιάζει διάφορες κυβικές καμπύλες B-spline. Τα μικρά τετραγώνια παριστάνουν τα σημεία de Boor και συνδεδεμένα δημιουργούν τα control polygon legs, ενώ τα άκρα κάθε καμπύλου τμήματος (curve segment) που συνθέτει την συνολική τμηματική πολυωνυμική καμπύλη σημειώνονται με μαύρες κουκίδες.

Τα curve segments όπως έχουμε πει είναι καμπύλες Bézier. Παρατηρούμε ότι η πρώτη καμπύλη μοιάζει πολύ με την καμπύλη του σχ. 5.6. Στην ουσία διαφέρουν μόνο ως προς τα ακραία polygon legs. Θα επανέλθουμε σε αυτό το ζήτημα παρακάτω.



**Σχήμα 6.1** Τρεις κυβικές καμπύλες B-spline

Όπως φαίνεται, το B-spline polygon, δηλαδή το control polygon της καμπύλης B-spline, είναι κοινό για πολλές περιπτώσεις πολυωνυμικών τμημάτων που συνθέτουν διαφορετικές συνολικές καμπύλες B-spline. Η συνέχεια (continuity) μεταξύ των τμημάτων μπορεί να ποικίλει. Ωστόσο τα B-spline polygons είναι πανομοιότυπα. Η ανάλυση παρακάτω θα ξεκαθαρίσει το πως προκύπτουν διαφορετικές καμπύλες για το ίδιο control polygon.

Μια καμπύλη B-spline βαθμού  $n$  ορίζεται από ένα control polygon

$$d_0, d_1, \dots, d_{D-1},$$

παρόμοιου με μιας καμπύλης Bézier. Καθότι όμως η καμπύλη B-spline είναι μια τμηματικά πολυωνυμική καμπύλη, χρειάζεται για την περιγραφή της περισσότερα του ενός παραμετρικά διαστήματα (domains). Χρειάζεται δηλαδή ένα knot sequence

$$u_0, u_1, \dots, u_{K-1},$$

το οποίο αποτελεί μια αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Για βαθμό καμπύλης  $n$ , μπορεί να συμβαίνει ταύτιση έως  $n$  συνεχόμενων κόμβων (knots) και ποτέ παραπάνω.

Ταύτιση μεταξύ δυο συνεχόμενων knots σημαίνει απλά ότι το παραμετρικό διάστημα μεταξύ τους έχει μηδενικό μήκος.

Το πλήθος  $D$  των control points σχετίζεται με το πλήθος  $K$  των knots και τον βαθμό της καμπύλης  $n$ , σύμφωνα με

$$D=K-n+1.$$

Μια άλλη ερμηνεία του πλήθους  $D$  των control points είναι (για βαθμό καμπύλης  $n$ ) ότι το  $D$  είναι ίσο με της  $n$ -άδες των knots που υπάρχουν στο knot sequence.

Στο παραπάνω σχ. 6.1 για παράδειγμα το πλήθος των knots είναι  $K=9$  (knot sequence  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$ ) και η καμπύλη είναι κυβική ( $n=3$ ). Άρα υπάρχουν 7 τριάδες knots στο knot sequence. Άρα  $D=7 (=9-3+1=K-n+1)$ . Όντως το πλήθος των control points είναι 7 και στις τρεις καμπύλες του σχήματος.

Κατά την κατασκευή μιας καμπύλης B-spline, μόνο οι παραμετρικές τιμές μέσα στο διάστημα των knots

$$u_{n-1}, \dots, u_{K-n}$$

χρησιμοποιούνται για την απεικόνιση –αυτές οι παραμετρικές τιμές θεωρούνται ‘έγκυρες’. Οι τιμές αυτές ονομάζονται *domain knots*. Παρατηρούμε ότι η τιμή  $u_{n-1}$  είναι ο τελευταίος knot της πρώτης  $n$ -άδας ενώ η τιμή  $u_{K-n}$  είναι ο πρώτος knot της τελευταίας  $n$ -άδας στο knot sequence.

Για παράδειγμα στο knot sequence του σχήματος οι domain knots είναι οι  $u_2 \div u_6$  (καθώς η καμπύλη είναι κυβική  $n=3$ ).

Όπως τονίστηκε πιο πάνω, έως  $n$  knots μπορούν να συμπίπτουν. Το πλήθος των knots που συμπίπτουν αποτελεί την πολλαπλότητα του knot (knot multiplicity). Όλοι οι ταυτιζόμενοι knots μοιράζονται αυτή την τιμή πολλαπλότητας. Αν ένας knot έχει πολλαπλότητα ένα τότε ονομάζεται απλός (simple knot).

Είναι κοινή πρακτική να θέτουμε τον αρχικό και τον τελικό knot ενός knot sequence, με πολλαπλότητα  $n$  (δηλαδή ίση με τον βαθμό της καμπύλης). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η καμπύλη να διέρχεται από το πρώτο ( $d_0$ ) και το τελευταίο ( $d_{D-1}$ ) de Boor point, όπως η πρώτη καμπύλη στο πιο πάνω σχήμα.

Αυτό ισχύει για τις δυο πρώτες από τις τρεις καμπύλες οι οποίες και διέρχονται από τα ακραία control points. Δεν ισχύει όμως για την τρίτη καμπύλη.

Όπως είπαμε εάν  $u_i = u_{i+1}$  (δηλαδή η πολλαπλότητα τους είναι μεγαλύτερη του ένα), τότε το knot span  $[u_i, u_{i+1}]$  έχει μηδενικό μήκος. Το πλήθος  $L$  των πολυωνυμικών τμημάτων μιας καμπύλης B-spline είναι ίσο με το πλήθος των μη μηδενικών knot spans μέσα στο domain knot sequence  $[u_{n-1}, \dots, u_{K-n}]$ . Εάν όλοι οι εσωτερικοί domain knots  $u_n, \dots, u_{K-n-1}$  είναι απλοί, δηλαδή έχουν πολλαπλότητα 1, τότε  $L = K - 2n + 1$ . Καθώς το  $D$  εξαρτάται από το  $K$  μπορούμε επίσης πιο απλά να έχουμε ότι  $L = D - n$  (σχ. 6.1). Στην περίπτωση που έχουμε πολλαπλότητες  $r_i$  για διάφορους knots  $u_i$  τότε ισχύει  $L = D - n - \sum (r_i - 1)$ .

Τα παραπάνω είναι πιο εμφανή στην πρώτη καμπύλη του σχ. 6.1 αλλά ισχύουν και για τα υπόλοιπα. Κοιτάζουμε στο domain knot sequence να δούμε πόσα μη μηδενικά intervals υπάρχουν. Τόσα είναι και τα πολυωνυμικά τμήματα της καμπύλης που συνδέονται μεταξύ τους (curve segments). Τα curve segments οριοθετούνται από τις μαύρες κουκίδες στο σχήμα.

Έτσι στην πρώτη έχουμε 4 μη μηδενικά knots spans στο domain knot sequence, στη δεύτερη 2 και στην τρίτη επίσης 4. Τόσα παρατηρούμε ότι είναι και τα συνδεόμενα τμήματα, που σε κάθε μια περίπτωση, συνθέτουν την συνολική καμπύλη.

Ένα interval  $[u_i, u_{i+m}]$  με  $m > 0$  ονομάζεται knot span μήκους  $m$ . Υπάρχουν τόσα spans με μήκος  $n$  (όσο ο βαθμός της καμπύλης) όσα είναι και τα legs του control polygon.

Το  $i^{\text{στό}}$  span ξεκινάει από το  $u_{i-1}$ . Για παράδειγμα το 1<sup>ο</sup> span ξεκινάει από το  $u_0$ . Όμοια το  $i^{\text{στό}}$  leg ξεκινάει από το  $d_{i-1}$ . Δηλαδή το πρώτο leg ξεκινάει από το  $d_0$ . Όταν λέμε πιο πάνω ότι τα spans είναι ίσα με τα legs του control polygon, εννοούμε ότι το  $i^{\text{στό}}$  span απεικονίζεται στο  $i^{\text{στό}}$  leg. Μια σύντομη απόδειξη της ισότητας spans και legs δίνεται εδώ:

- Σε  $D$  το πλήθος control points έχουμε  $D - 1$  legs. Από τα παραπάνω ισχύει ότι  $D - 1 = K - n$ .
- Από την άλλη σε  $K$  knots έχουμε  $K - n$  spans μήκους  $n$ .

Συνεπώς όσο το πλήθος των spans τόσο και το πλήθος των legs.

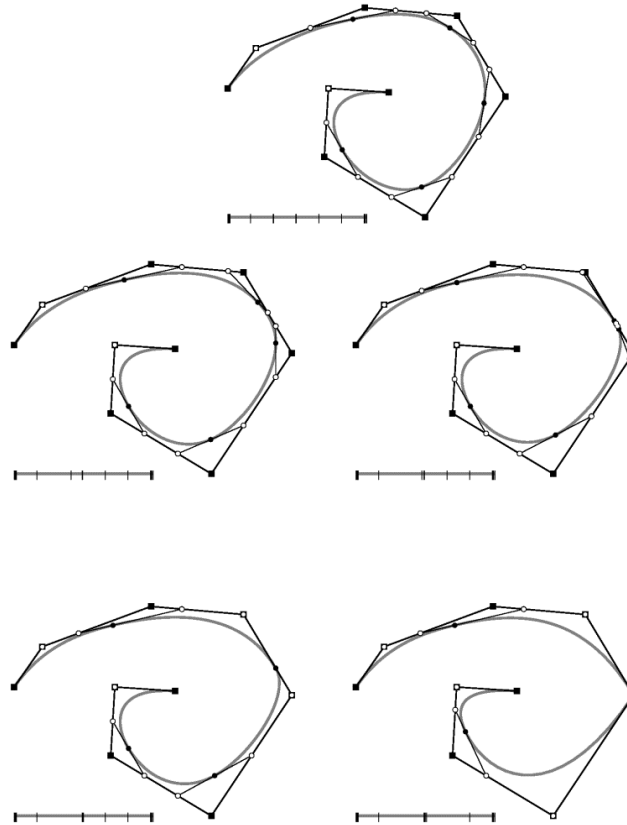
Σε κάποια βιβλία που ασχολούνται με τη θεωρία του CAGD συνηθίζεται να προστίθεται ένας ακόμα knot τόσο στην αρχή όσο και στο τέλος του domain knot sequence για την ίδιου βαθμού καμπύλη B-spline, κάτι που προέκυψε από ένα σφάλμα στο πρότυπο ανταλλαγής δεδομένων IGES.

Θεωρούμε και θα δείξουμε παρακάτω ότι η διαφορά αυτή κρύβει ένα πιο ουσιαστικό νόημα. Για αυτό και υιοθετήθηκε και στον προγραμματισμό της μεθόδου που κάναμε. Δηλαδή, κατά τον προγραμματισμό μιας B-spline βαθμού  $n$ , θα θεωρούμε ότι το knot vector της θα έχει πολλαπλότητα στον αρχικό και τον τελικό knot ίση με  $n + 1$ . Ως προς τους υπόλοιπους knots δεν υπάρχει κάποια αλλαγή, δηλαδή το domain knot sequence παραμένει όπως το έχουμε περιγράψει παραπάνω. Η διαφορά συνεπώς είναι ότι προστέθηκαν δυο ακόμα knots, ένας στην αρχή και ένας στο τέλος του knot vector.

Τη διαφορά αυτή θα την υιοθετήσουμε κατά τον προγραμματισμό της μεθόδου, αλλά στα αμέσως επόμενα θα συνεχίσουμε με την θεώρηση του knot vector με την οποία και ξεκινήσαμε την περιγραφή των καμπυλών B-splines έτσι ώστε να είμαστε συνεπείς με τα όσα έχουμε πει ως τώρα.

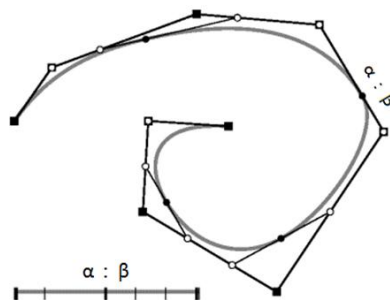
## 6.2 Παράδειγμα κυβικής καμπύλης B-spline

Στο παρακάτω σχ. 6.2 παρουσιάζεται μια κυβική καμπύλη B-spline. Παρατηρούμε ότι αυτή η καμπύλη είναι ακριβώς όμοια με την καμπύλη του σχ. 5.6, εκτός από το αρχικό και το τελικό της polygon leg, όπου τώρα συνδέονται δυο τετραγωνάκια αντί για δυο κουκίδες.



**Σχήμα 6.2** Αναπαράσταση κυβικών καμπυλών B-spline με τμηματικά Bézier πολυώνυμα.

Αυτή τη διαφορά θα τη σχολιάσουμε, αφού πρώτα δούμε πως αλλάζει η καμπύλη B-spline όταν μετακινείται ένας κνोट, έως του σημείου όπου θα ταυτιστεί με τον διπλανό του (καμπύλες ένα έως τέσσερα του σχήματος). Τότε δύο junction points ταυτίζονται (τρίτη και τέταρτη καμπύλη) και ένα curve segment (μια καμπύλη Bézier δηλαδή) εκφυλίζεται σε σημείο (τέταρτη καμπύλη στο σχ. 6.2 ή μόνη της στο σχ. 6.3).



**Σχήμα 6.3** Αναπαράσταση κυβικών καμπυλών B-spline με τμηματικά Bézier πολυώνυμα.

Στο σημείο αυτό η λειότητα της καμπύλης από  $C^2$  γίνεται  $C^1$  (δες και ενότητα 5.2) Όταν εξετάζεται η λειότητα σε αυτή την περίπτωση όπου ένας κόμβος έχει πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1, τότε τον θεωρούμε σαν έναν knot. Βάσει αυτού καθώς και των συνθηκών που είδαμε στην ενότητα 5.2, το σχ. 6.3 δείχνει γιατί η καμπύλη είναι  $C^1$  ενώ δεν είναι  $C^2$ .

Στην πέμπτη καμπύλη του σχ. 6.2 έχει μετακινηθεί και ο έτερος knot (από τους εκατέρωθεν) και 'πέφτει' στους άλλους δυο, οπότε 'χάνεται' άλλη μια καμπύλη Bézier. Πλέον στο σημείο αυτό η λειότητα της καμπύλης γίνεται  $C^0$ .

Σαν παρατηρήσεις από τα παραπάνω προκύπτουν:

- όταν μια καμπύλη B-spline είναι  $C^1$  συνεχής, τότε το junction point βρίσκεται πάνω σε ένα polygon leg το οποίο και είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη (καμπύλη 4 στο σχ. 6.2).
- όταν μια καμπύλη B-spline είναι  $C^0$  συνεχής, τότε το junction point βρίσκεται πάνω σε ένα control point. Η καμπύλη κάνει σπάσιμο εκεί και το de Boor control point είναι το ίδιο με ένα Bézier point (καμπύλη 5 στο σχ. 6.2).
- η πολλαπλότητα ενός knot δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από τον βαθμό  $n$  της B-spline.

Όσον αφορά τα άκρα της καμπύλης B-spline όπου η πολλαπλότητα των knots είναι ίση με  $n$  (πολλαπλότητα τρία στο πιο πάνω σχήμα) και η καμπύλη διέρχεται από τα ακραία de Boor points, μπορούμε να κάνουμε την ίδια θεώρηση που κάναμε παραπάνω δηλαδή ότι πρόκειται για εκφυλισμένα παραμετρικά διαστήματα, που έγιναν μηδενικά μετά από μετακίνηση των knots έως ότου ταυτιστούν. Δηλαδή είναι σαν να έχουμε την σύνθετη καμπύλη του σχ. 5.6 του προηγούμενου κεφαλαίου, στην οποία εκφυλίζονται σε σημεία τα δυο πρώτα και τα δυο τελευταία Bézier τμήματα, και απομένει μια B-spline με δυο πολυωνμικά τμήματα (Bézier τμήματα και αυτά). Ωστόσο σε αυτά δεν κάνουμε ιδιαίτερη αναφορά, δηλαδή στην θεωρία των B-splines, για την πρώτη καμπύλη του σχ. 6.2 λέμε ότι είναι μια καμπύλη B-spline με έξι πολυωνμικά τμήματα.

Ωστόσο επειδή πρόκειται για τα αρχικά Bézier τμήματα της B-spline, δεν είναι απαγορευτικό στα άκρα η πολλαπλότητα των ακραίων knots να είναι μεγαλύτερη από  $n$ . Δηλαδή θα μπορούσαμε να προσθέσουμε στην καμπύλη διάφορα Bézier τμήματα και να τα εκφυλίζουμε σε σημεία χωρίς πρόβλημα.

Η θεώρηση που κάνουμε ως τώρα είναι ότι η πολλαπλότητα στα άκρα είναι ίση με  $n$ , ωστόσο θα δούμε ότι έχει βάση πολλαπλότητα εκεί ίση με  $n+1$ , κάτι που ακολουθείται ευρέως στη βιβλιογραφία και το οποίο υιοθετούμε και εμείς στον προγραμματισμό της μεθόδου.

### 6.3 Ο αλγόριθμος de Boor

Είδαμε πως οι καμπύλες Bézier κατασκευάζονται με χρήση του αλγορίθμου de Casteljau. Στην περίπτωση των καμπυλών B-spline γίνεται χρήση του αλγορίθμου de Boor, από το όνομα του Carl de Boor, ο οποίος έκανε πρωτοποριακή εργασία πάνω στις B-splines. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια διαδικασία από επαναλαμβανόμενες γραμμικές παρεμβολές για τον υπολογισμό του σημείου  $x(u)$  επί της καμπύλης B-spline και περιγράφεται στη συνέχεια.

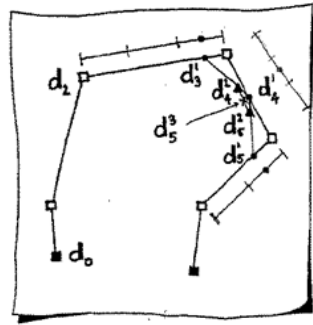




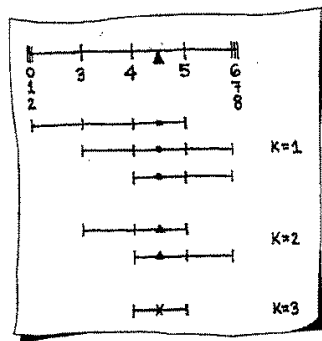
Ξέροντας όμως τα σημεία της πρώτης στήλης η τοποθέτηση των δεικτών στα επόμενα σημεία του τριγωνικού διαγράμματος είναι απλούστατη. Σε κάθε στήλη αυξάνεται ο άνω δείκτης κατά +1 σε σχέση με της προηγούμενης και είναι ίδιος για όλα τα σημεία της στήλης αυτής. Όσον αφορά τον κάτω δείκτη αυτός σε κάθε γραμμή αυξάνεται κατά +1 σε σχέση με της προηγούμενης και είναι ίδιος για όλα τα σημεία της γραμμής αυτής.

Μια γεωμετρική ερμηνεία του αλγορίθμου de Boor είναι η εξής: Η εξ. 6.2 αποτελεί μια απλή γραμμική παρεμβολή μεταξύ των σημείων  $d_{i-1}^{k-1}, d_i^{k-1}$  και είναι η affine απεικόνιση του span  $[u_{i-1}, u_{i+n-k}]$  στο ευθύγραμμο τμήμα ή leg μεταξύ των σημείων  $d_{i-1}^{k-1}, d_i^{k-1}$ . Συνεπώς το σημείο  $d_i^k$  μπορεί να ειπωθεί ως η απεικόνιση του  $u$  μέσω αυτού του affine μετασχηματισμού.

Θέλοντας να δούμε με περισσότερη λεπτομέρεια τον αλγόριθμο de Boor, θα εξετάσουμε ένα παράδειγμα που φαίνεται στα παρακάτω σχ. 6.4 και 6.5. Πρόκειται για μια κυβική B-spline, της οποίας το knot vector έχει τέσσερα knot spans (δηλαδή το domain sequence  $u_2 \div u_6$  έχει τέσσερα μη μηδενικά διαστήματα). Συνεπώς το knot vector έχει 9 knots (σχ. 6.5) (θεώρηση όπου στα άκρα του knot vector η multiplicity είναι  $n$ ).



Σχήμα 6.4 Ο αλγόριθμος de Boor (πάνω στο de Boor polygon).



Σχήμα 6.5 Ο αλγόριθμος de Boor (πάνω στο knot sequence).

Θα εκτελέσουμε τον αλγόριθμο de Boor για παράμετρο  $u$  στο μέσον του τρίτου knot span (σημειώνεται με ένα βελάκι) δηλαδή  $I=4$ .

Καθώς  $n=3$ , το πρώτο βήμα ( $k=1$ ) του αλγορίθμου θα απεικονίσει στο polygon παραμετρικά διαστήματα που αποτελούνται από τρία knot spans. Στο σχήμα όλα τα spans εύρους τρία τα οποία έχουν επικάλυψη με το  $(u_4, u_5)$  έχουν σχεδιαστεί κάτω από το knot sequence. Αυτά είναι τρία και

σε κάθε ένα έχει σχεδιαστεί ένα κυκλάκι που δείχνει τη θέση της παραμέτρου  $u$ . Το πρώτο βήμα του αλγορίθμου λοιπόν, έγκειται στην εύρεση των τριών σημείων  $d_i^1$  στα οποία απεικονίζεται το  $u$  για κάθε ένα από τα τρία spans. Κάθε span απεικονίζεται σε ένα polygon leg.

Εξετάζοντας το πρώτο span το οποίο είναι το  $(u_2, u_3, u_4, u_5)$  έχουμε: από την εξ. 6.2 βλέπουμε ότι αυτό πρέπει να απεικονιστεί στο  $3^o$  leg  $\overline{d_2 d_3}$ . Εδώ θυμόμαστε την παρατήρηση που είδαμε παραπάνω ότι το  $i^{στο}$  span του knot sequence (το οποίο ξεκινάει από το  $u_{i-1}$ ) απεικονίζεται στο  $i^{στο}$  polygon leg (το οποίο ξεκινάει από το  $d_{i-1}$ ). Από την απεικόνιση αυτή του πρώτου span προκύπτει το  $d_3^1$ .

Η ίδια αυτή διαδικασία συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο:

1. αναγνωρίζουμε τα spans στο knot sequence
2. σημειώνουμε τη σχετική θέση του  $u$ , και
3. απεικονίζουμε το span στο polygon

και ολοκληρώνεται όταν το τελευταίο span περικλείει ένα μόνο knot span, το  $(u_i, u_{i+1})$ . Ο αλγόριθμος έχει σχεδιαστεί μέχρι τέλους στο σχ. 6.4 και έχει προσδιοριστεί το σημείο  $x(u)=d_3^3$ .

Όπως στον αλγόριθμο de Casteljau, έτσι και στον αλγόριθμο de Boor κάνουμε μια θεώρηση που μας βοηθάει να θυμόμαστε το πως μπαίνουν οι πιο πάνω δείκτες στα σημεία  $d$ :

Αρχικά έχουμε τα  $n+1$  σημεία  $d_i$ .

Έπειτα έχουμε και τα υπόλοιπα σημεία  $d_i^k$  όπου  $k \leq n$  και  $I-n+k+1 \leq i \leq I+1$ .

Ο πάνω δείκτης  $k$  είναι ο δείκτης της ‘διαμέρισης’ ακριβώς όπως και στον αλγόριθμο de Casteljau.

Για παράδειγμα όταν έχω τα  $n+1$  αρχικά σημεία είμαι στη μηδενική διαμέριση –δεν έχει γίνει ακόμα κάποια διαμέριση των διαστημάτων μεταξύ των σημείων (για αυτό γράφουμε  $d_i \equiv d_i^0$ ).

Ο κάτω δείκτης  $i$  είναι διαφορετικός από ότι στον αλγόριθμο de Casteljau. Εδώ δείχνει το σε ποιο leg του control polygon βρίσκεται η διαδικασία.

Για παράδειγμα

1<sup>η</sup> διαμέριση: Άρα ο πάνω δείκτης γίνεται 1 ( $k=1$ ). Η 1<sup>η</sup> διαμέριση ξεκινάει από το  $I-n+2$  leg και αφορά τόσα legs όσο είναι το  $n$ . Άρα το  $i$  ξεκινάει από την τιμή  $I-n+2$  και φτάνει ως την τιμή  $I+1$ . (Τονίζεται ότι το  $I-n+2$  leg είναι αυτό που συνδέει τα σημεία  $d_{I-n+1}$  και  $d_{I-n+2}$  δηλαδή το  $\overline{d_{I-n+1} d_{I-n+2}}$ .

Στο πιο πάνω παράδειγμα είναι  $I=4, n=3$  άρα η 1<sup>η</sup> διαμέριση ξεκινά από το  $I-n+2=3^o$  leg και αφορά 3 legs.

2<sup>η</sup> διαμέριση: Άρα ο πάνω δείκτης γίνεται 2 ( $k=2$ ). Η 2<sup>η</sup> διαμέριση ξεκινάει από το επόμενο leg δηλαδή το  $I-n+3$  και αφορά κατά ένα λιγότερα legs δηλαδή  $n-1$ . Άρα το  $i$  ξεκινάει από την τιμή  $I-n+3$  και φτάνει ως την τιμή  $I+1$ .

Στο πιο πάνω παράδειγμα συνεπώς η 2<sup>η</sup> διαμέριση ξεκινά από το  $I-n+3=4^o$  leg και αφορά 2 legs. Προσοχή αυτά είναι τα legs του νεοσχηματιζόμενου control polygon π.χ. το 4<sup>ο</sup> leg είναι το  $\overline{d_3^1 d_4^1}$ .

...

$n^{\text{η}}$  διαμέριση (και τελευταία αφού η καμπύλη είναι  $n^{\text{ο}}$  βαθμού): Άρα ο πάνω δείκτης γίνεται  $n$  ( $k=n$ ), ενώ το  $i$  παίρνει την τιμή  $I+1$  (το τελευταίο leg στο οποίο γίνεται διαμέριση, που στο παράδειγμα που είδαμε είναι το 5<sup>ο</sup> leg  $d_4^2 d_5^2$ ).

! Οι διαμερίσεις είναι όσες και ο βαθμός  $n$  της καμπύλης –ή αλλιώς όσα τα de Boor control points μείον ένα.

!! Σε κάθε διαμέριση  $k$  το πλήθος των legs είναι ίσο με  $n-k+1$ , δηλαδή για ένα ορισμένο  $k$  το  $i$  παίρνει τιμές  $(I-n+k+1) \div (I+1)$ .

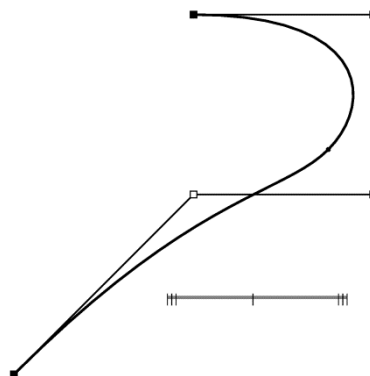
Θα δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα έτσι ώστε να ξεκαθαριστεί απολύτως η διαδικασία καθώς επίσης και να προτείνουμε και έναν τρόπο χειρισμού τέτοιου είδους προβλημάτων.

Έστω μια κυβική καμπύλη B-spline που δίνεται από το control polygon

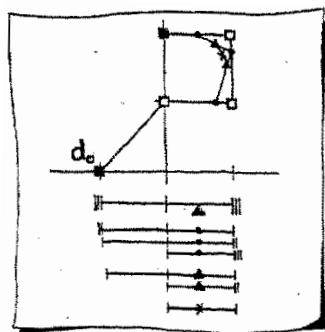
$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

και από το knot sequence  $0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2$   
 $u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6$ .

Το knot sequence έχει δυο μη μηδενικά knot spans άρα  $L=2$  (το πλήθος των πολυωνυμικών τμημάτων της καμπύλης –το junction point φαίνεται με μαύρη κουκίδα). Η καμπύλη φαίνεται στο σχ. 6.6.



Σχήμα 6.6 Μια κυβική καμπύλη B-spline με δυο πολυωνυμικά τμήματα.



Σχήμα 6.7 Ο αλγόριθμος de Boor για το παράδειγμα που εξετάζεται.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το σημείο της καμπύλης στο σημείο  $u=1.5$ . Ο αλγόριθμος de Boor φαίνεται στο σχ. 6.7. Παρουσιάζει την κάθε μεμονωμένη affine απεικόνιση που υπεισέρχεται στον προσδιορισμό του σημείου.

Τώρα για την αριθμητική λύση έχουμε:

Η παραμετρική τιμή ανήκει στο knot span  $(u_3, u_4)$  άρα  $I=3$ . Από το πρώτο βήμα ( $k=1$ ) έχουμε:

1<sup>η</sup> διαμέριση:

$$d_2^1(u) = \frac{u_4 - u}{u_4 - u_1} d_1^0 + \frac{u - u_1}{u_4 - u_1} d_2^0,$$

$$d_3^1(u) = \frac{u_5 - u}{u_5 - u_2} d_2^0 + \frac{u - u_2}{u_5 - u_2} d_3^0,$$

$$d_4^1(u) = \frac{u_6 - u}{u_6 - u_3} d_3^0 + \frac{u - u_3}{u_6 - u_3} d_4^0,$$

ή

$$d_2^1(1.5) = 0.25 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.75 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$d_3^1(1.5) = 0.25 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.75 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.75 \end{bmatrix},$$

$$d_4^1(1.5) = 0.5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2<sup>η</sup> διαμέριση:

$$d_3^2(u) = \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} d_2^1(u) + \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} d_3^1(u),$$

$$d_4^2(u) = \frac{u_5 - u}{u_5 - u_3} d_3^1(u) + \frac{u - u_3}{u_5 - u_3} d_4^1(u),$$

ή

$$d_3^2(1.5) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.75 \begin{bmatrix} 1 \\ 1.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9375 \\ 1.5625 \end{bmatrix},$$

$$d_4^2(1.5) = 0.5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1.75 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1.875 \end{bmatrix}.$$

Το σημείο επί της καμπύλης B-spline προκύπτει από την

3<sup>η</sup> διαμέριση:

$$d_4^3(u) = \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} d_3^2(u) + \frac{u - u_3}{u_4 - u_3} d_4^2(u),$$

ή

$$x(1.5) = d_4^3(1.5) = 0.5 \begin{bmatrix} 0.9375 \\ 1.5625 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1.875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.84375 \\ 1.71875 \end{bmatrix}.$$

Στο σημείο αυτό προτείνουμε μια μέθοδο βημάτων για την αντιμετώπιση του παραπάνω παραδείγματος καθώς και κάθε τέτοιου είδους προβλήματος. Έχουμε ότι  $u=1.5$ .

1. Αρχικά βλέπουμε ότι  $I=3$ . Υπολογίζουμε την ποσότητα  $(I+1) \cdot n$  που εδώ προκύπτει ίση με  $I$ . Ο αριθμός αυτός μπαίνει ως δείκτης στο  $d$  και στο  $u$ . Αυτό σημαίνει ότι η πρώτη στήλη του τριγωνικού διαγράμματος ξεκινάει από το σημείο  $d_I$  και το πρώτο span ξεκινάει από το  $u_I$  (ακόμα δεν ξέρουμε το εύρος του).
2. Ξέρουμε ότι ο βαθμός της καμπύλης B-spline είναι  $n=3$ . Άρα το εύρος του span είναι τρία (όσο ο βαθμός) και το span είναι το  $(u_1, u_4) = (0, 2)$ .
3. Τα αρχικά de Boor points (δηλαδή της πρώτης στήλης του τριγωνικού διαγράμματος) είναι  $n+1$ , άρα είναι τα  $d_1, d_2, d_3, d_4$ , δηλαδή τα  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ .
4. Επιλύουμε τον αλγόριθμο με τη βοήθεια του τριγωνικού διαγράμματος.

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{(u_1, u_4)} \\
 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{(u_2, u_5)} \xrightarrow{1.5/2} \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1 \end{bmatrix}_{(u_2, u_4)} \\
 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{(u_3, u_6)} \xrightarrow{1.5/2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.75 \end{bmatrix}_{(u_3, u_5)} \xrightarrow{1.5/2} \begin{bmatrix} 0.9375 \\ 1.5625 \end{bmatrix}_{(u_3, u_4)} \\
 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{0.5} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{0.5} \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1.875 \end{bmatrix} \xrightarrow{0.5} \begin{bmatrix} 0.84375 \\ 1.71875 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

5. Το τριγωνικό διάγραμμα επιλύεται πολύ εύκολα κάνοντας (αυτοματοποιημένη διαδικασία) τα εξής:  
Την αρχική στήλη με τα  $n+1$  σημεία είδαμε στο βήμα 1 πως την βρίσκουμε.

Έχουμε ανοικτό μπροστά μας και συμβουλευόμαστε το knot sequence 
$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
 u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6
 \end{array}$$

Το κάθε βέλος στο τριγωνικό διάγραμμα ξεκινάει ανάμεσα από δυο σημεία και καταλήγει σε ένα τρίτο. Στο πάνω μέρος του έχει ένα span και στο κάτω μέρος του έναν αριθμό. Το span είναι αυτό στο οποίο 'εισάγουμε' το  $u=1.5$  και ο αριθμός δείχνει ποιος είναι ο ratio στον οποίο χωρίζεται το span από το  $u=1.5$ .

Πάντα το span του πάνω πάνω βέλους της πρώτης στήλης είναι αυτό που βρήκαμε στο βήμα 2 δηλαδή εδώ το  $(u_1, u_4)$ .

Για τα επόμενα span της ίδιας στήλης απλά προσθέτω +1 στους δείκτες που έχει το αμέσως προηγούμενο span. Δηλαδή στην πρώτη στήλη μετά το  $(u_1, u_4)$ , το αμέσως χαμηλότερο είναι το  $(u_2, u_5)$  και τελευταίο το  $(u_3, u_6)$ .

Όσον αφορά ένα span στην επόμενη στήλη προκύπτει από αυτό της προηγούμενης στήλης στην ίδια γραμμή, όπου κρατάμε το πρώτο  $u$  με τον ίδιο δείκτη και αφαιρούμε -1 από το δείκτη του δεύτερου  $u$ . Έτσι από το  $(u_2, u_5)$  πάμε στο  $(u_2, u_4)$  ενώ από το  $(u_3, u_6)$  πάμε στο  $(u_3, u_5)$  και τέλος στο  $(u_3, u_4)$ .

Αυτά όσον αφορά το πάνω μέρος των βελών και τα span. Αφού έχουμε βρει αυτά, μπορούμε να βρούμε και τα ratios στο κάτω μέρος των βελών. Για παράδειγμα αν εισαγάγουμε το  $u=1.5$  στο  $(u_1, u_4) = (0, 2)$  τότε ο ratio που προκύπτει (συμβουλευόμαστε το knot sequence πιο πάνω) είναι  $1.5/2$ . Αν το  $u=1.5$

εισαχθεί στο  $(u_3, u_5)=(1,2)$  τότε ο ratio που προκύπτει είναι  $0.5$ . Έτσι συμπληρώνουμε και το κάτω μέρος σε κάθε βέλος.

Αφού έχουμε βρει όλα τα ratios, έπειτα κάνουμε γραμμική παρεμβολή στις συντεταγμένες των δυο σημείων από τα οποία ξεκινάει το βέλος, με το δικό του ratio, για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο καταλήγει. Για παράδειγμα το πρώτο σημείο της τρίτης στήλης προκύπτει με ratio  $1.5/2$ . Άρα έχει τετημημένη  $0.75+1.5/2 \cdot (1-0.75)=0.9375$  και τεταγμένη  $1+1.5/2 \cdot (1.75-1)=1.5625$ . Ένα άλλο παράδειγμα είναι το τελευταίο σημείο του αλγορίθμου που προκύπτει με ratio  $0.5$ . Άρα έχει τετημημένη  $0.9375+0.5 \cdot (0.75-0.9375)=0.84375$  και τεταγμένη  $1.5625+0.5 \cdot (1.875-1.5625)=1.71875$ .

Με τα βήματα που περιγράφηκαν καταφέρνουμε σχετικά εύκολα και τυποποιημένα να λύνουμε τον αλγόριθμο de Boor.

Βρίσκοντας από το τρίτο βήμα τα στοιχεία της πρώτης στήλης του τριγωνικού διαγράμματος, και ανατρέχοντας σε προηγούμενη παρατήρηση μπορούμε πολύ εύκολα να προσδιορίσουμε και τους δείκτες (άνω και κάτω) των σημείων που προκύπτουν με την παραπάνω διαδικασία.

Σαν παρατήρηση αναφέρεται ότι στο πιο πάνω παράδειγμα ο υπολογισμός του σημείου της καμπύλης B-spline για  $u=1$  δίνει το σημείο που παριστάνεται με μαύρη κουκίδα στην καμπύλη του σχ. 6.6. Και αυτό είναι λογικό καθώς ένας knot του domain knot sequence απεικονίζεται σε ένα junction point.

## 6.4 Ιδιότητες των καμπυλών B-spline

Παραθέτουμε ορισμένες πολύ σημαντικές ιδιότητες των καμπυλών B-spline:

- Παρεμβολή στα άκρα τους: Εάν  $u_0=\dots=u_{n-1}$  τότε  $x(u_{n-1})=d_0$  και αν  $u_{K-n}=\dots=u_{K-1}$  τότε  $x(u_{K-n})=d_{D-1}$ . Εάν οι ακραίοι knots δεν έχουν πολλαπλότητα  $n$  τότε η καμπύλη δεν διέρχεται των ακραίων control points.

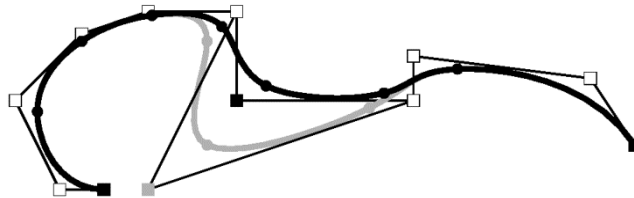
Είδαμε σε προηγούμενη παρατήρηση ότι συνηθίζεται ευρέως στην βιβλιογραφία να προστίθεται ένας ακόμα knot τόσο στην αρχή όσο και στο τέλος του knot vector. Αυτή είναι μια διαφορά που κρύβει κατά τη γνώμη μας ουσιαστικούς λόγους υιοθέτησής της, θα τους εξηγήσουμε παρακάτω, και για αυτό σύμφωνα με αυτήν την θεώρηση θα προγραμματίσουμε τις συναρτήσεις B-splines.

- Η καμπύλη μένει ανεπηρέαστη από affine μετασχηματισμούς: Ισχύουν όσα έχουμε πει και για τις καμπύλες Bézier.
- Παραγωγισιμότητα: Σε έναν domain knot  $u_i$ , η καμπύλη είναι  $n-1$  φορές παραγωγίσιμη, με την προϋπόθεση ότι ο knot είναι απλός, δηλαδή έχει πολλαπλότητα  $1$ . Στην περίπτωση που η πολλαπλότητα είναι  $r>1$  τότε η καμπύλη είναι τουλάχιστον  $n-r$  φορές παραγωγίσιμη, με άλλα λόγια η καμπύλη εκεί είναι  $C^{n-r}$ .

Αυτά ισχύουν στο σημείο στο οποίο απεικονίζεται ο knot, που όπως έχουμε πει είναι ένα junction point, δηλαδή ένα σημείο σύνδεσης δυο τμηματικών καμπυλών (συμβολίζεται με μαύρη κουκίδα στα σχήματα). Φυσικά οι τμηματικές καμπύλες είναι  $C^\infty$  σε κάθε άλλο τους σημείο.

Για παράδειγμα η μεσαία καμπύλη από τις τρεις κυβικές καμπύλες του σχ. 6.1 έχει έναν εσωτερικό κνот με πολλαπλότητα τρία, και η καμπύλη είναι  $C^0$  σε αυτόν τον κнот.

- Τοπικός έλεγχος (local control): αν μεταβάλλουμε ένα control point  $d_i$ , μόνο τα πιο κοντινά  $n+1$  πολυωνυμικά τμήματα της καμπύλης (curve segments) θα μεταβληθούν. Η καμπύλη μένει ανεπηρέαστη οπουδήποτε αλλού. Αυτό γίνεται εμφανές στο σχ. 6.8 όπου μεταβάλλοντας ένα control point μιας κυβικής καμπύλης B-spline, βλέπουμε ότι επηρεάζονται μόνο τα  $4(=n+1)$  κοντινά curve segments σε αυτό το control point.



**Σχήμα 6.8** Τοπικός έλεγχος (local control) μιας κυβικής καμπύλης B-spline.

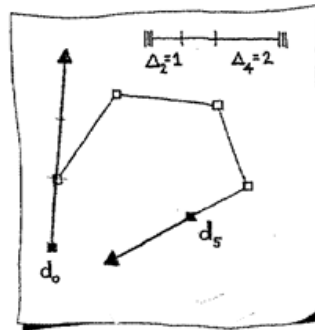
Ο τοπικός έλεγχος είναι το χαρακτηριστικό που κάνει τις καμπύλες B-spline πιο ευέλικτες και πιο εύχρηστες από τις καμπύλες Bézier. Εάν ένας σχεδιαστής είναι ικανοποιημένος με κάποιο τμήμα της καμπύλης, τότε οι επόμενες αλλαγές κάπου αλλού δεν θα το επηρεάσουν καθόλου.

- Παράγωγοι στα άκρα της καμπύλης: Εάν οι ακραίοι κнотs έχουν πολλαπλότητα  $n$  τότε οι παράγωγοι στα δυο άκρα της καμπύλης παίρνουν μια πολύ απλή μορφή. Στην αρχή της καμπύλης έχουμε

$$\dot{x}(u_{n-1}) = \frac{n}{u_n - u_{n-1}} [d_1 - d_0]. \quad \text{Εξ 6.4}$$

Στο πέρας της καμπύλης έχουμε

$$\dot{x}(u_{K-n}) = \frac{n}{u_{K-n} - u_{K-n-1}} [d_{D-1} - d_{D-2}]. \quad \text{Εξ 6.5}$$



**Σχήμα 6.9** Παράγωγοι στα άκρα μιας κυβικής καμπύλης B-spline.

Το παραπάνω δεν αλλάζει αν η πολλαπλότητα των ακραίων κнотs είναι μεγαλύτερη από  $n$ .

- Καμπύλες Bézier: Για κάποιο ειδικό knot sequence, μια καμπύλη B-spline είναι στην ουσία καμπύλη Bézier. Αυτή η διάταξη των knots έχει  $K=2n-1$  και  $u_0 = \dots = u_{n-1}$  και  $u_n = \dots = u_{2n-1}$ . Για

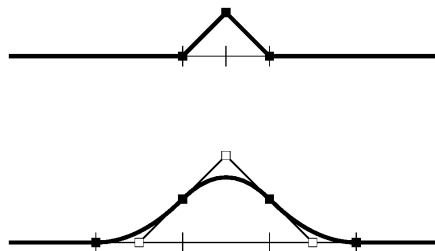


την κυβική περίπτωση, ένα τέτοιο knot sequence είναι το  $0, 0, 0, 1, 1, 1$ . Για τα ειδικά αυτά knot sequences ο αλγόριθμος de Boor εκφυλίζεται στον αλγόριθμο de Casteljau. Συνεπώς, οι καμπύλες Bézier είναι ένα υποσύνολο των καμπυλών B-spline.

- Περιορισμένη έκταση (Ιδιότητα convex hull): Κάθε σημείο της καμπύλης βρίσκεται μέσα στο περίγραμμα του control polygon. Ακόμα πιο αυστηρή είναι η συνθήκη στην προκειμένη περίπτωση των B-spline, καθότι κάθε σημείο της καμπύλης βρίσκεται μέσα στο περίγραμμα των  $n+1$  πιο κοντινών του control points.

## 6.5 B-splines: Οι συναρτήσεις βάσης

Οι B-splines, οι συναρτήσεις βάσης των καμπυλών B-spline, είναι μια γενίκευση των πολυωνύμων Bernstein. Συντίθενται από διάφορα πολυωνυμικά μέρη, αντί να είναι ένα μόνο πολυώνυμο. Αυτά τα μέρη συντίθενται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η συνάρτηση B-spline να είναι μιας ορισμένης λειότητας (smoothness) στο junction point. Το σχ. 6.10 δείχνει δυο τμηματικά πολυώνυμα (piecewise polynomials): το πάνω είναι τμηματικά γραμμικό και  $C^0$  στα junction points ενώ το κάτω είναι τμηματικά τετραγωνικό και  $C^1$  στα junction points. Ισχύουν αυτά που είδαμε στην ενότητα 6.2 περί της κλάσης συνέχειας σε ένα junction point. Φυσικά τα πολυώνυμα είναι απείρως παραγωγίσιμα ( $C^\infty$ ).



**Σχήμα 6.10** Μια τμηματικά γραμμική και μια τμηματικά τετραγωνική συνάρτηση B-spline.

Το σχήμα δείχνει τα Bézier control points (τετραγωνάκια) του κάθε πολυωνυμικού τμήματος. Τα άκρα του κάθε πολυωνυμικού τμήματος σημειώνονται ως μαύρες κουκίδες. Μια συνάρτηση B-spline είναι μηδενική σχεδόν παντού. Παίρνει μη μηδενικές τιμές μόνο σε ένα πεπερασμένο διάστημα. Είναι εμφανές ότι κάθε συνάρτηση μηδενίζεται έξω από αυτό το μικρό διάστημα, το οποίο ονομάζεται *έρος της συνάρτησης* (function's support).

Είδαμε στην ενότητα 3.5 πως προσδιορίζεται μια συναρτησιακή καμπύλη Bézier (functional Bézier curve) δηλαδή μια καμπύλη της μορφής  $y=f(t)$ . Οι βαθμού  $n$  συναρτήσεις B-spline προσδιορίζονται με έναν παρόμοιο τρόπο. Τα control polygon τους δίδονται από

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} \xi_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad \text{όπου}$$

$$\xi_i = \frac{1}{n} (u_i + \dots + u_{i+n-1}).$$

Αυτές οι τετμημένες ονομάζονται *τετμημένες Greville (Greville abscissae)* και είναι οι ‘κινούμενοι μέσοι όροι’ των knots -είναι τόσες τετμημένες όσες και οι  $n$ -άδες των knots- συνεπώς είναι τόσες οι Greville abscissae όσα είναι και τα control points. Τα  $d_i$  ονομάζονται οι *control τεταγμένες (control ordinates)* της συνάρτησης.

Οι συναρτήσεις B-spline δεν χρησιμοποιούνται πολύ συχνά με μια εξαίρεση: ας υποθέσουμε ότι για κάποιο  $k$ , είναι  $d_k=1$  και  $d_i=0$  για οποιαδήποτε άλλη control ordinate. Η συνάρτηση B-spline που αντιστοιχεί σε αυτή τη συνθήκη συμβολίζεται  $N_k^n(u)$ . Οποιαδήποτε πολυωνυμική συνάρτηση  $f(u)$  μπορεί να γραφεί σαν συνδυασμός αυτών των B-splines (δηλαδή αποτελούν βάση)

$$f(u)=d_0N_0^n(u)+\dots+d_{D-1}N_{D-1}^n(u).$$

Όμοια, οποιαδήποτε παραμετρική καμπύλη B-spline μπορεί να γραφεί ως

$$x(u)=d_0N_0^n(u)+\dots+d_{D-1}N_{D-1}^n(u).$$

Τα  $N_i^n(u)$  ονομάζονται B-splines (από το Basis splines) και ικανοποιούν την παρακάτω αναδρομική σχέση

$$N_i^n(u)=\frac{u-u_{i-1}}{u_{i+n-1}-u_{i-1}}N_i^{n-1}(u)+\frac{u_{i+n}-u}{u_{i+n}-u_i}N_{i+1}^{n-1}(u). \quad \text{Εξ 6.6}$$

όπου δεχόμαστε εξ’ ορισμού ότι ισχύει για τις μηδενικού βαθμού ( $n=0$ )

$$N_i^0(u)=\begin{cases} 1 & \text{if } u_{i-1} \leq u < u_i, \\ 0 & \text{παντού αλλού} \end{cases}. \quad \text{Εξ 6.7}$$

Κατά τον προγραμματισμό αυτής της σχέσης, θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην διαφοροποίηση των συμβόλων  $\leq$  και  $<$  στην εξ. 6.7.

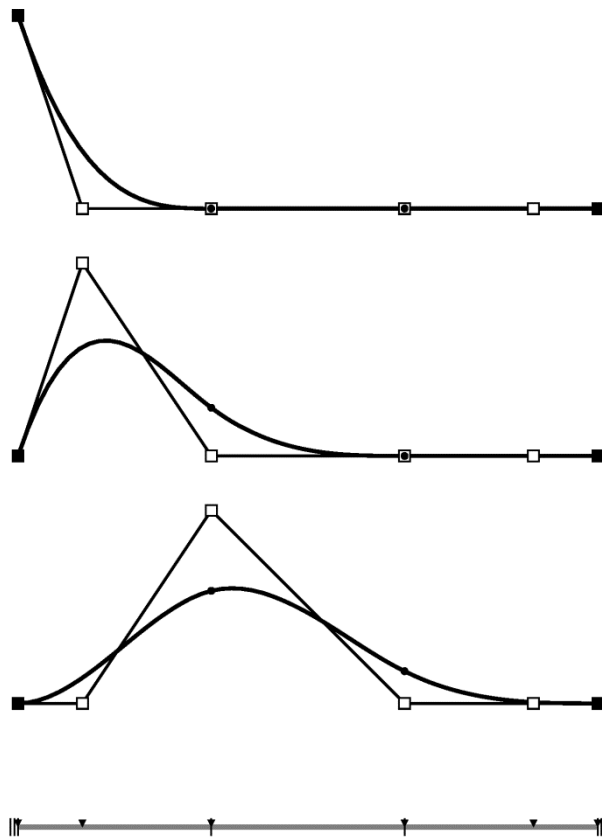
Ο αναδρομικός τύπος περιγράφει κάθε συνάρτηση βάσης B-spline βαθμού  $n$  σαν μια ‘γραμμική μίξη’ δυο  $n-1$  συναρτήσεων βάσης. Η εκκίνηση γίνεται με τις τμηματικά σταθερές συναρτήσεις βάσης (piecewise constant basis functions). Οι γραμμικές συναρτήσεις βάσης συντίθενται από τις σταθερές, οι τετραγωνικές από τις γραμμικές κ.ο.κ..

Παραθέτουμε διάφορες ιδιότητες των συναρτήσεων B-splines:

- Άθροισμα ίσο με ένα (διαμέριση της μονάδας, partition of unity): Από τον ορισμό των B-splines, συνάγεται ότι το συνολικό τους άθροισμα είναι ίσο με τη μονάδα:

$$N_0^n(u)+\dots+N_{D-1}^n(u)\equiv 1.$$

- Γραμμική ακρίβεια: Εάν τα  $d_i$  προκύπτουν από τα  $\zeta_i$  μέσω κάποιας γραμμικής συνάρτησης  $y=au+b$ , δηλαδή ισχύει  $d_i=a\zeta_i+b$ , τότε οι αντίστοιχη συνάρτηση B-spline είναι η ίδια αυτή γραμμική συνάρτηση.
- Τοπικό εύρος (local support) και θετικές τιμές: Κάθε συνάρτηση B-spline είναι μη μηδενική και παίρνει πάντα θετικές τιμές μόνο σε  $n+1$  διαστήματα:  $N_i^n(u)>0$  μόνο για  $u \in [u_{i-1}, u_{i+n})$ .

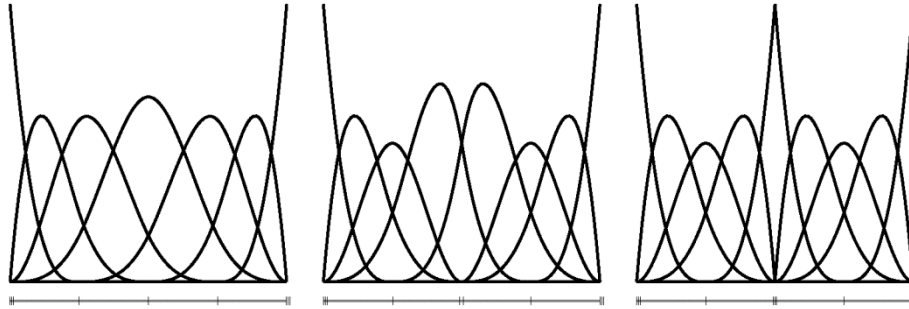


**Σχήμα 6.11** Οι κυβικές B-splines  $N_0^3$ ,  $N_1^3$  και  $N_2^3$  για το συγκεκριμένο knot sequence.

Παρατηρούμε τις εξ. 6.6 και 6.7 καθώς και το σχ. 6.11. Βλέπουμε έτσι για παράδειγμα ότι η ‘πρώτη’ κυβική B-spline είναι η  $N_0^3$ , δηλαδή το  $i$  ξεκινάει να μετράει από το 0. Ωστόσο αυτό είναι προβληματικό διότι τότε θα πρέπει το  $u_{i-1}=u_{-1}$  που δεν έχει οριστεί (το knot vector ξεκινάει από το  $u_0$ ).

Από την άλλη μεριά, η τελευταία B-spline είναι η  $N_{K-n}^n$ , που σύμφωνα με την τελευταία ιδιότητα έχει support το διάστημα  $[u_{K-n-1}, u_K]$ . Συνεπώς υπάρχει και εδώ ζήτημα, καθώς το knot vector τελειώνει με το  $u_{K-1}$ . Συνεπώς υπάρχει ουσιαστικός λόγος να τοποθετηθούν στα άκρα του knot vector δυο knots, από ένας εκατέρωθεν οι οποίοι και μπορούν να συμβολιστούν ως  $u_{-1}$  και  $u_K$ , αντίστοιχα.

Για αυτό το λόγο νομίζουμε ότι είναι σωστότερο να προγραμματιστούν οι B-splines με την παραπάνω θεώρηση όπου η multiplicity στα άκρα του knot vector είναι  $n+1$ .



**Σχήμα 6.12** Όλες οι κυβικές B-splines για τα τρία knot sequences. Αλλαγή προκύπτει λόγω της διαφορετικής πολλαπλότητας.

Εξετάζοντας την τελευταία ιδιότητα των B-splines (αυτή του local support) έχουμε να κάνουμε την εξής παρατήρηση: η ιδιότητα αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι η B-spline  $N_i^n(u)$  εξαρτάται από το συγκεκριμένο  $d_i$ . Το local support που τη χαρακτηρίζει, προκύπτει από τον αλγόριθμο de Boor και το γεγονός ότι το insertion κάποιου  $u$  στο domain, επηρεάζει μόνο κάποια  $d$  στη γειτονιά του (άρα επηρεάζει μόνο κάποια  $N_i^n(u)$  στη γειτονιά του).

Πώς όμως προκύπτει ότι η γειτονιά του  $d_i$  είναι το  $[u_{i-1}, u_{i+n})$  δηλαδή  $n+1$  intervals;

Από το τριγωνικό διάγραμμα του αλγορίθμου de Boor βλέπουμε ότι η πρώτη στήλη αποτελείται από τα  $n+1$  σημεία  $d_{I-n+1}$  έως  $d_{I+1}$  ενώ η δεύτερη στήλη αποτελείται από τα  $n$  σημεία  $d_{I-n+2}^I$  έως  $d_{I+1}^I$ .

Συνεπώς τα  $n$  σημεία της δεύτερης στήλης έχουν πάρει τη θέση των  $n$  σημείων της πρώτης μετά το πέρας του πρώτου βήματος του αλγορίθμου. Ή με άλλα λόγια τα  $n$  σημεία της πρώτης στήλης μεταβλήθηκαν στα σημεία της δεύτερης στήλης (αυτό φαίνεται παραστατικά στο σχ. 6.4)

Το πρώτο σημείο της πρώτης στήλης  $d_{I-n+1}$ , είναι αυτό που οριακά δεν μεταβάλλεται δηλαδή  $i=I-n+1 \rightarrow I+1=i+n$ .

Επίσης τελευταίο μεταβάλλεται το τελευταίο σημείο της πρώτης στήλης  $d_{I+1}$  δηλαδή  $i=I+1 \rightarrow I=i-1$ .

Άρα το διάστημα που εισαγάγαμε το  $u$  είναι  $[u_i, u_{i+1}) = [u_{i-1}, u_{i+n})$  ήτοι το local support της B-spline ( $n+1$  διαστήματα).

Από αυτή την θεώρηση αποδεικνύεται επίσης ότι σε ένα διάστημα  $[u_i, u_{i+1})$  υπάρχουν  $n+1$  μη μηδενικές B-splines. Και αυτό γιατί με την εισαγωγή του  $u$  σε αυτό το διάστημα μεταβάλλονται  $n+1$  control points, δηλαδή  $n+1$  B-splines έχουν κάποιο τμήμα του  $[u_i, u_{i+1})$  μέσα στο support τους. Ακόμα πιο πέρα, βλέπουμε ότι ενώ για το knot span  $[u_i, u_{i+1})$  οι  $n+1$  μη μηδενικές B-splines έχουν control points τα  $d_{I-n+1}$  έως  $d_{I+1}$ , στο επόμενο knot span  $[u_{i+1}, u_{i+2})$  οι 'δικές του' μη μηδενικές B-splines έχουν control points τα  $d_{I-n+2}$  έως  $d_{I+2}$ , δηλαδή τα δυο συνορεύονται knot spans έχουν  $n$  κοινά control points.

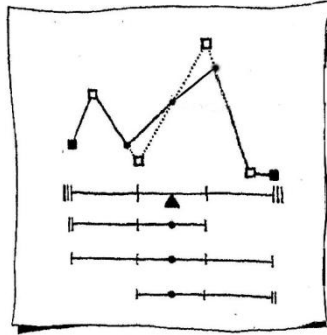
## 6.6 Εισαγωγή knot στο knot sequence (*knot insertion*)

Το knot insertion είναι ένα εργαλείο για την εισαγωγή ενός knot σε ένα knot sequence, και με τον τρόπο αυτό το 'ραφινάρισμα' του control polygon χωρίς ωστόσο η καμπύλη να μεταβληθεί.

Για παράδειγμα, και σύμφωνα με το σχ. 6.13, ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση που ορίζεται στο

knot sequence  $0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3$ , έχει Greville abscissae  $0 \ \frac{1}{3} \ 1 \ 2 \ 2\frac{2}{3} \ 3$  και  
 $u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7$   $\xi_0 \ \xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ \xi_4 \ \xi_5$  και

control ordinates  $d_0, \dots, d_5$ . Τα control points  $d_i = \begin{bmatrix} \xi_i \\ d_i \end{bmatrix}$  συμβολίζονται με λευκά ή μαύρα τετραγωνάκια στο σχήμα.



**Σχήμα 6.13** Εισαγωγή knot σε μια συναρτησιακή καμπύλη B-spline (μια φορά).

Αν εισαχθεί το  $u=1.5$  στο knot sequence τότε θα προκύψει το νέο knot sequence και οι νέες

Greville abscissae  $0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1.5 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3$ . Το 'ραφιναρτισμένο' control polygon για αυτό  
 $u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8$

το νέο knot sequence είναι το  $d_0, d_1, d_2', d_3', d_4', d_4, d_5$ , και φαίνεται με τη συνεχή γραμμή στο σχήμα. Τα τρία νέα σημεία φαίνονται με κουκίδες στο σχήμα.

Ο αλγόριθμος de Boor είναι ένα παράδειγμα επαναλαμβανόμενου knot insertion. Ας θεωρήσουμε το πρώτο βήμα του αλγορίθμου. Μια παράμετρος  $u$  εισάγεται στο πολύγωνο, με αποτέλεσμα ένα πιο 'ραφιναρτισμένο' πολύγωνο. Όταν ο knot εισαχθεί  $n$  φορές τότε λαμβάνουμε ένα σημείο επί της καμπύλης. Ωστόσο, ο αλγόριθμος de Boor δεν μεταβάλλει το knot sequence, αφήνοντάς το στην αρχική του μορφή για το επόμενο βήμα. Αυτός είναι και ο λόγος που το εύρος των spans μειώνεται σε κάθε βήμα.

Μια ειδική εφαρμογή του knot insertion είναι στη μετατροπή μιας καμπύλης B-spline σε τμηματικές καμπύλες Bézier. Καθώς οι καμπύλες B-spline είναι τμηματικά πολυωνυμικές, θα πρέπει να υπάρχει ένα πολύγωνο Bézier για κάθε τέτοιο πολυωνυμικό τμήμα. Όπως έχουμε δει το B-spline polygon είναι στην πραγματικότητα ένα Bézier polygon εάν οι knots έχουν πολλαπλότητα  $n$ . Έτσι, μέσω της εισαγωγής κάθε knot στο knot sequence έως ότου έχει πολλαπλότητα  $n$  μπορούμε να μετατρέψουμε την καμπύλη B-spline σε καμπύλη Bézier. Η σειρά με την οποία εισάγονται οι knots δεν έχει σημασία. Το σχ. 6.1 παρουσιάζει διάφορες καμπύλες B-spline, μαζί με τα de Boor polygons αλλά και με τα Bézier polygons που αφορούν την κάθε μια από τις τμηματικές καμπύλες (καμπύλες Bézier).

## 6.7 Παράγωγοι

Παραγωγίζοντας την  $N_i^n$  στην εξ. 6.1 έχουμε για την πρώτη παράγωγο μιας καμπύλης B-spline

$$\dot{x}(u) = n \left[ f_0 N_1^{n-1}(u) + f_1 N_2^{n-1}(u) + \dots + f_{i-1} N_i^{n-1}(u) + \dots + f_{D-2} N_{D-1}^{n-1}(u) \right] \quad \text{Εξ 6.8}$$

όπου

$$f_{i-1} = \frac{\Delta d_{i-1}}{u_{n+i-1} - u_{i-1}}.$$

Ο αλγόριθμος de Boor δίνει έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού αυτής της ποσότητας. Τα δυο σημεία  $d_I^{n-1}(u)$  και  $d_{I+1}^{n-1}(u)$  ορίζουν την εφαπτομένη της καμπύλης:

$$\dot{x}(u) = \frac{n}{u_{I+1} - u_I} \left[ d_{I+1}^{n-1}(u) - d_I^{n-1}(u) \right]. \quad \text{Εξ 6.9}$$

Η διαφορά μες στην αγκύλη είναι η εμπρός διαφορά (forward difference)  $\Delta^1 d_{(I+1)-1}^{n-1}(u) \equiv \Delta^1 d_I^{n-1}(u)$ .

Η πιο πάνω έκφραση είναι παρόμοια με την πρώτη παράγωγο της καμπύλης Bézier μέσω του αλγορίθμου de Casteljau. Παρατηρούμε ότι τα διαφορικά διανύσματα θα πρέπει να πολλαπλασιάζονται με το μήκος του παραμετρικού διαστήματος. Αυτό είδαμε ότι ισχύει και στην ανάλυση των γενικών τμηματικά σύνθετων καμπυλών στο προηγούμενο κεφάλαιο. Εάν η καμπύλη B-spline έχει πολλαπλότητα  $n$  στα άκρα της τότε η παράγωγος εκεί παίρνει τις απλές τιμές που είδαμε στην ενότητα 5.1.

Η δεύτερη παράγωγος είναι

$$\ddot{x}(u) = n(n-1) \left[ s_1 N_2^{n-2}(u) + s_2 N_3^{n-2}(u) + \dots + s_{i-1} N_i^{n-2}(u) + \dots + s_{D-2} N_{D-1}^{n-2}(u) \right] \quad \text{Εξ 6.10}$$

όπου

$$s_{i-1} = \frac{\Delta^2 f_{i-1}}{u_{n+i-2} - u_{i-1}}.$$

Ενώ η σχέση της πρώτης παραγώγου περιέχει παραμετρικά διαστήματα εύρους  $n$ , η δεύτερη παράγωγος περιέχει παραμετρικά διαστήματα εύρους  $n-1$ .

Η δεύτερη παράγωγος μπορεί επίσης να υπολογιστεί μέσω του αλγορίθμου de Boor. Απλά υπολογίζονται τα ενδιάμεσα de Boor points έως τα  $d_i^{n-2}$  με την διαδικασία του αλγορίθμου, και τα τελευταία δυο βήματα του αλγορίθμου τροποποιούνται ως εξής:

$$d_i^k(u) = \frac{-k}{u_{i+n-k} - u_{i-1}} d_{i-1}^{k-1}(u) + \frac{k}{u_{i+n-k} - u_{i-1}} d_i^{k-1}(u) \quad \text{Εξ 6.11}$$

όπου  $k = n-1, n$  και

$$i = I-n+k+1, \dots, I+1.$$

Τότε η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$\ddot{x}(u) = d_{I+1}^n(u). \quad \text{Εξ 6.12}$$

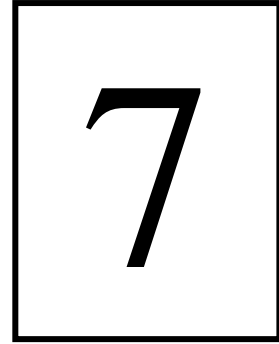
Η σχέση που φαίνεται να ισχύει για την γενική περίπτωση της  $r^{\text{στής}}$  παραγώγου είναι:

$$x^{(r)}(u) = \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{(u_{i+1} - u_{(l-r)+1}) \cdots (u_{i+1} - u_l)} \Delta^r d_{(l+1),r}^{n-r}(u).$$

σχέση που προκύπτει με την ίδια λογική με την αντίστοιχη του αλγορίθμου de Casteljau για τις καμπύλες Bézier.







## ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

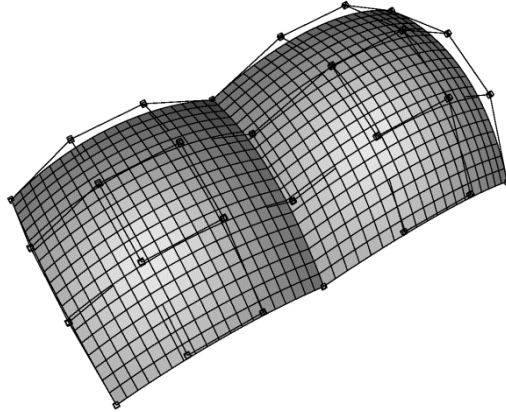
---

Σε αυτό το κεφάλαιο καλύπτουμε τις επιφάνειες που συντίθενται από περισσότερα του ενός patches. Ένα Bézier patch σπάνια μπορεί να μοντελοποιηθεί από μόνο του ένα αληθινό επιφανειακό τμήμα. Συνήθως, περισσότερα του ενός patches θα συνενωθούν, είτε στη μορφή μιας σύνθετης επιφάνειας Bézier είτε μιας σύνθετης επιφάνειας B-spline.

### 7.1 Σύνθετες επιφάνειες Bézier

Στο κεφάλαιο 5 είδαμε πως κατασκευάζονται σύνθετες καμπύλες οι οποίες συντίθενται από απλούστερες, για παράδειγμα από κυβικές καμπύλες Bézier. Η ίδια αντιμετώπιση ακολουθείται και στην περίπτωση των σύνθετων επιφανειών. Γνωρίζοντας κανείς τις αρχές σύνθεσης διαφόρων Bézier patches για τη δημιουργία μιας λείας σύνθετης επιφάνειας, μπορεί να κατασκευάσει επιφάνειες αρκετά υψηλής συνθετότητας.

Θεωρούμε το  $\mathbf{b}_{i,j}$ :  $0 \leq i, j \leq 3$  δικυβικό Bézier patch το οποίο θα ονομάζουμε το ‘αριστερό’ patch. Επίσης έστω  $\mathbf{b}_{i,j}$ :  $3 \leq i \leq 6$ ,  $0 \leq j \leq 3$  ένα δεύτερο δικυβικό Bézier patch που θα το ονομάζουμε το ‘δεξιό’ patch, έτσι ώστε τα δυο patches να μοιράζονται ένα κοινό σύνορο. Όπως είναι σύνηθες για τμηματικά αντικείμενα, υπεισέρχονται κάποιες υποθέσεις για τα parametric domains των δυο patches. Θεωρούμε ότι το αριστερό έχει ως domain το τετράγωνο  $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$  ενώ το δεξιό έχει το τετράγωνο  $[u_1, u_2] \times [v_0, v_1]$ . Έτσι, τα δυο domains ικανοποιούν την ίδια συνοριακή πληροφορία η οποία ισχύει για τα patches, δηλαδή ότι μοιράζονται το ίδιο  $u=1$  όριο (σχ. 7.1).



**Σχήμα 7.1** Δυο συνορεύοντα  $C^0$  δικυβικά patches.

Ενδιαφερόμαστε τώρα για τις συνθήκες σχετικά με την λειότητα της σύνθετης επιφάνειας. Αυτές οι συνθήκες είναι απροσδόκητα απλές. Παρατηρούμε ότι το σύνθετο control net αποτελείται από τέσσερις σειρές από control points

$$\mathbf{b}_{0,0}, \dots, \mathbf{b}_{6,0}$$

$$\mathbf{b}_{0,1}, \dots, \mathbf{b}_{6,1}$$

$$\mathbf{b}_{0,2}, \dots, \mathbf{b}_{6,2}$$

$$\mathbf{b}_{0,3}, \dots, \mathbf{b}_{6,3}.$$

Κάθε μια από αυτές τις σειρές μπορεί να ειδοθεί ως το τμηματικό πολύγωνο Bézier μιας σύνθετης κυβικής καμπύλης για το παραμετρικό knot sequence  $u_0, u_1, u_2$ . Η σύνθετη επιφάνεια είναι  $C^1$  εάν όλες αυτές οι γραμμές ικανοποιούν τις  $C^1$  συνθήκες για τις αντίστοιχες καμπύλες που είδαμε στην ενότητα 5.2. Αυτό είναι πολύ εύκολο να το ελέγξουμε.

Για τις δικυβικές επιφάνειες αυτές οι συνθήκες είναι

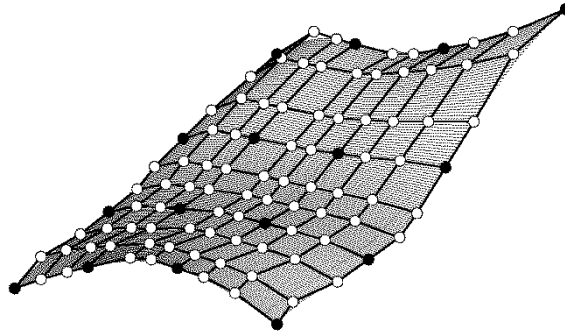
$$\mathbf{b}_{3,j} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \mathbf{b}_{2,j} + \frac{\Delta_0}{\Delta} \mathbf{b}_{4,j}; \quad j=0, 1, 2, 3, \quad \text{Εξ 7.1}$$

όπου  $\Delta_0 = u_1 - u_0$ ,  $\Delta_1 = u_2 - u_1$  και  $\Delta = u_2 - u_0$ .

Με λόγια: οποιαδήποτε τρία σημεία  $\mathbf{b}_{2,j}$ ,  $\mathbf{b}_{3,j}$ ,  $\mathbf{b}_{4,j}$  πρέπει να είναι συνευθειακά και πρέπει ο λόγος μεταξύ τους να είναι

$$\text{ratio}(\mathbf{b}_{2,j}, \mathbf{b}_{3,j}, \mathbf{b}_{4,j}) = \frac{\Delta_0}{\Delta}.$$

Ένα παράδειγμα μιας σύνθετης δικυβικής  $C^1$  επιφάνειας φαίνεται στο σχ. 7.2. Τα knot sequences είναι  $u_i: 0, 1, 3, 4$  και  $v_j: 0, 1, 2, 3$  (η  $u$  παράμετρος απεικονίζεται στην οριζόντια διεύθυνση).



**Σχήμα 7.2** Μια σύνθετη λεία επιφάνεια.

Αν οι βαθμοί των patches είναι μεγαλύτεροι από κυβικοί, προκύπτουν ακριβώς ανάλογες συνθήκες για τη λειότητα. Βλέπουμε συνεπώς ότι οι  $C^1$  συνθήκες για τις σύνθετες επιφάνειες είναι σχετικά απλές ως προς τον χειρισμό τους. Ωστόσο, όταν έχουμε ένα δίκτυο από patches, υπάρχει ένα μειονέκτημα της παραπάνω διαδικασίας. Καθώς υπάρχουν μόνο δυο knot sequences –ένα για την κατεύθυνση  $u$  και ένα για την κατεύθυνση  $v$ -, παρουσιάζονται ζητήματα έλλειψης ευελιξίας. Στην περίπτωση όπου δεν έχουν όλες οι  $u$ -ισοπαραμετρικές καμπύλες παρόμοιο σχήμα, τότε ένα κοινό knot sequence για όλες δεν μπορεί να δώσει ικανοποιητική περιγραφή. Το ίδιο ισχύει και για την άλλη κατεύθυνση.

## 7.2 Σύνθετες επιφάνειες B-spline

Ανακαλούμε ότι κατά τη γενίκευση των καμπυλών Bézier σε Bézier patches προέκυψε η σχέση

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} B_0^m(u) & \dots & B_m^m(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \dots & \mathbf{b}_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{b}_{m,0} & \dots & \mathbf{b}_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^n(v) \\ \vdots \\ B_n^n(v) \end{bmatrix}. \quad \text{Εξ 7.2}$$

Η παραπάνω σχέση προέκυψε από την πινακοποιημένη μορφή μιας καμπύλης Bézier

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{N}^T \mathbf{B}. \quad \text{Εξ 7.3}$$

Επίσης ανακαλούμε τον ορισμό της καμπύλης B-spline

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{d}_0 N_0^n(u) + \mathbf{d}_1 N_1^n(u) + \dots + \mathbf{d}_{D-1} N_{D-1}^n(u). \quad \text{Εξ 7.4}$$

Σε πινακοποιημένη μορφή αυτός γράφεται

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{N}^T \mathbf{D}. \quad \text{Εξ 7.5}$$

Πλέον είναι εμφανές το πώς θα έχει ο ορισμός της επιφάνειας B-spline

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} N_0^m(u) & \dots & N_{D-1}^m(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{0,0} & \dots & \mathbf{d}_{0,E-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{d}_{D-1,0} & \dots & \mathbf{d}_{D-1,E-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0^n(v) \\ \vdots \\ N_{E-1}^n(v) \end{bmatrix}, \quad \text{Εξ 7.6}$$

το οποίο μπορούμε συνοπτικά να γράψουμε

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{M}^T \mathbf{D} \mathbf{N}.$$

Εξ 7.7

Ο ορισμός αυτός απαιτεί ένα knot sequence για κάθε μια από τις διευθύνσεις  $u$  και  $v$ . Αυτά τα knot sequences είναι ως εξής

$$u_0, u_1, \dots, u_{R-1},$$

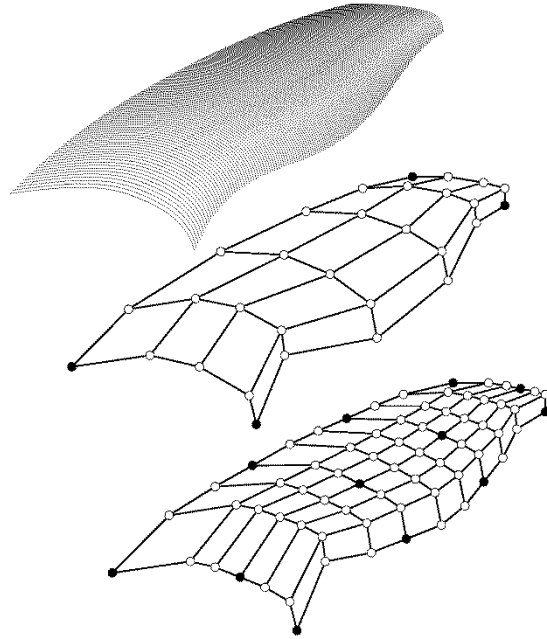
$$v_0, v_1, \dots, v_{S-1}.$$

Οι επιφάνειες B-spline διαθέτουν όλα τα πλεονεκτήματα των Bézier patches, όπως η συμμετρία, το ότι μένουν ανεπηρέαστες από affine μετασχηματισμούς, καθώς και η ιδιότητα convex hull.

Υπάρχουν δυο μεγάλες διαφορές ωστόσο. Τα οριακά πολύγωνα του control mesh, πρόκειται να είναι control polygons των οριακών καμπυλών μόνο εάν οι ακραίοι knots έχουν πλήρη πολλαπλότητα  $m$  και  $n$  ( $m+1$  και  $n+1$  σύμφωνα με αυτά που έχουμε πει στο προηγούμενο κεφάλαιο). Αυτό είναι ανάλογο με την ιδιότητα των καμπυλών B-spline να παρουσιάζουν παρεμβολή στα άκρα τους.

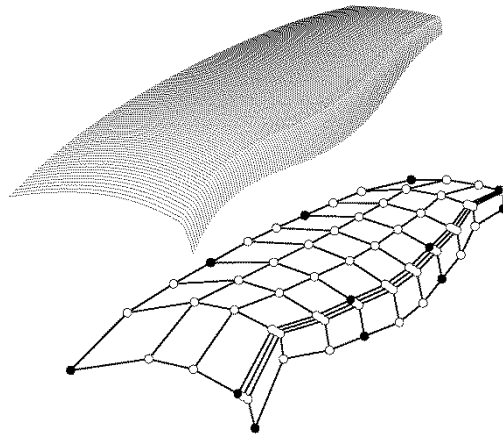
Δεύτερον, οι επιφάνειες B-spline έχουν την ιδιότητα του *τοπικού ελέγχου* (*local control property*). Εάν ένα control point μετατοπιστεί τότε μόνο έως  $(m+1) \times (n+1)$  patches στη γειτονιά του πρόκειται να επηρεαστούν.

Μια επιφάνεια B-spline αποτελείται από ένα σύνολο ανεξάρτητων πολυωνυμικών patches, ειδικότερα  $(D-m) \times (E-n)$  αν όλοι οι knots των domain knot sequences είναι απλοί. Κάθε ένα από αυτά τα patches μπορεί να γραφεί σε Bézier μορφή, δηλαδή σαν patches βαθμού  $m$  στην  $u$  διεύθυνση και  $n$  στην  $v$ . Πως βρίσκει κανείς τα control nets του καθενός από τα ξεχωριστά αυτά patches; Πρώτα μετατρέπουμε την κάθε γραμμή control points σε τμηματική μορφή Bézier. Έπειτα μετατρέπουμε κάθε στήλη του αποτελέσματος σε τμηματική μορφή Bézier πάλι. Αυτά τα βήματα περιγράφονται στην ενότητα 6.6. Το σχ. 7.4 δείχνει μια δικυβική επιφάνεια B-spline μαζί με τα τμηματικά δικυβικά Bézier control nets.



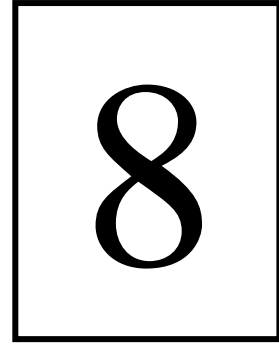
**Σχήμα 7.3** Μια δικυβική επιφάνεια B-spline. Στην κορυφή η επιφάνεια. Στο μέσον το B-spline control polygon που την περιγράφει. Κάτω το τμηματικό Bézier control net. Τα knot sequences είναι ομοιόμορφα ως προς τις διαστάσεις  $u$  και  $v$ .

Το σχ. 7.5 δείχνει μια διαφορετική επιφάνεια, η οποία παράχθηκε από το ίδιο B-spline control net αλλά με διαφορετικό knot sequence κατά τη διεύθυνση  $u$ .



**Σχήμα 7.4** Μια δικυβική επιφάνεια B-spline. Στην κορυφή η επιφάνεια. Κάτω το τμηματικό Bézier control net. Knot sequences:  $u_i: 0, 1, 3, 4$  και  $v_j: 0, 1, 2, 3$ .





# NURBS

---

Θα παρουσιαστούν τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά αυτού του είδους απεικόνισης καμπυλών και επιφανειών. Πολλά από τα χαρακτηριστικά που είδαμε στις καμπύλες και επιφάνειες B-spline έχουν εφαρμογή στις NURBS. Το κεφάλαιο αυτό επικεντρώνεται στα ειδικά χαρακτηριστικά των NURBS. Πολλά από αυτά τα χαρακτηριστικά τα συναντά κανείς στην μελέτη των κωνικών τομών, οι οποίες είναι μια ειδική κατηγορία των NURBS.

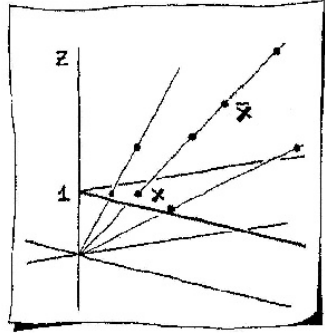
Αναφέρουμε εδώ ότι η ονομασία NURBS αποτελεί ακρωνύμιο του *Non Uniform Rational B-splineS* που στα ελληνικά μεταφράζεται ως Μη Ομοιόμορφες Ρητές Συναρτήσεις Παρεμβολής. Χαρακτηρίζονται ως ρητές καθότι έχουν τη μορφή πηλίκου.

## 8.1 Κωνικές τομές

Πολλοί ισοδύναμοι τρόποι υπάρχουν για τον ορισμό μιας κωνικής τομής. Εδώ θα χρησιμοποιηθεί ο εξής: μια κωνική τομή στον  $\mathbb{E}^2$  είναι η προοπτική προβολή μιας παραβολής στον  $\mathbb{E}^3$ .

Η ‘γραφή’ μιας κωνικής τομής σε ρητή μορφή προϋποθέτει την επιλογή ως κέντρου της προβολής το κέντρο  $\theta$  του 3D καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Το επίπεδο προβολής επιλέγεται να είναι το επίπεδο  $z=1$ . Η προβολή χαρακτηρίζεται από

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x/z \\ y/z \end{bmatrix} = \mathbf{x}.$$



**Σχήμα 8.1** Ομογενής μορφή (ή ομογενείς συντεταγμένες)

Παρατηρούμε (σχ. 8.1) ότι ένα σημείο  $x$  είναι η προβολή μιας ολόκληρης οικογένειας σημείων: κάθε σημείο της μορφής  $f \underline{x}$  προβάλλεται πάνω στο ίδιο  $2D$  σημείο  $x$ . Το  $3D$  σημείο  $\underline{x}$  ονομάζεται *ομογενής μορφή (homogeneous form)* του  $x$ .

Μια κωνική τομή  $c(t)$  δίδεται από *βάρη (weights)*  $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$  και control points  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{E}^2$

έτσι ώστε

$$\mathbf{c}(t) = \frac{z_0 \mathbf{b}_0 B_0^2(t) + z_1 \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + z_2 \mathbf{b}_2 B_2^2(t)}{z_0 B_0^2(t) + z_1 B_1^2(t) + z_2 B_2^2(t)}, \quad \text{Εξ 8.1}$$

και με λόγια: η κωνική τομή  $c$  εκφράζεται ως *παραμετρική ρητή τετραγωνική καμπύλη (parametric rational quadratic curve)*.

Έτσι το control polygon της κωνικής τομής είναι η προβολή του control polygon με ομογενείς συντεταγμένες

$$z_0 \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ 1 \end{bmatrix}, z_1 \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, z_2 \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

οι οποίες αποτελούν το control polygon της  $3D$  παραβολής (ή τετραγωνικής καμπύλης) που προβλήθηκε πάνω στην κωνική τομή  $c$ . Η μορφή της εξ. 8.1 ονομάζεται *ρητή τετραγωνική μορφή (rational quadratic form)* της κωνικής τομής.

Σαν παράδειγμα, θεωρούμε τα ομογενή control points (σχ. 8.2)

$$\underline{\mathbf{b}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{\mathbf{b}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \underline{\mathbf{b}}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

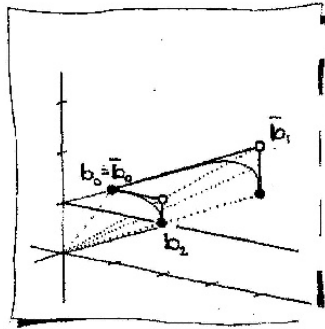
Αυτά προβάλλονται πάνω στα  $2D$  σημεία

$$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

για τα οποία καταγράφονται weights  $z_0, z_1, z_2 = 1, 2, 2$ . Στο  $t=0.5$  είναι (εφαρμόζοντας αλγόριθμο de Casteljau σε κάθε μια από τις τρεις συνιστώσες των  $3D$  ομογενών σημείων)



$$\underline{x}(0.5) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/4 \\ 7/4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8/7 \\ 5/7 \end{bmatrix} = \underline{x}(0.5). \quad (\text{Διαιρέσαμε με την τρίτη συνιστώσα}).$$



Σχήμα 8.2 Ένα σημείο πάνω σε μια κωνική τομή.

## 8.2 Επαναπαραμετροποίηση και ταξινόμηση

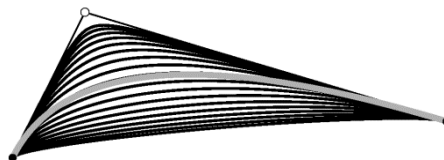
Υπάρχει η δυνατότητα αλλαγής των weights μιας κωνικής τομής χωρίς να υπάρχει αλλαγή στο σχήμα της. Αν τα αρχικά weights είναι  $z_0, z_1, z_2$  τότε το σύνολο των weights  $z_0, cz_1, c^2z_2$  δίνει την ίδια κωνική τομή για  $c \neq 0$ . Αυτό χρησιμοποιείται για να πάρει η κωνική τομή την *πρότυπη μορφή* της (*standard form*): Υποθέτοντας –χωρίς απώλεια της γενικότητας– ότι  $z_0 = 1$  θέτουμε  $c = \frac{1}{\sqrt{z_2}}$ .

Πλέον τα νέα weights είναι  $1, cz_1, 1$ .

Μεταβάλλοντας τα weights με αυτόν τον τρόπο δεν τροποποιεί σε τίποτα την γεωμετρία της καμπύλης, αλλά επιφέρει αλλαγή στον τρόπο που διατρέχεται η καμπύλη από την παράμετρο. Έτσι, ο όρος επαναπαραμετροποίηση (reparametrization) χρησιμοποιείται για να περιγράψει αυτή τη διαδικασία.

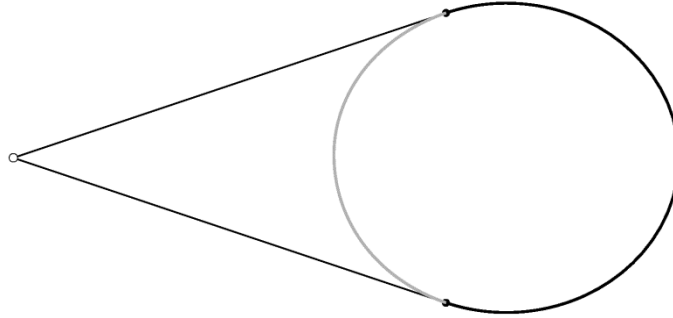
Όταν μια κωνική τομή λάβει την *standard form*, είναι εύκολα κανείς να αποφανθεί ποιος είναι ο τύπος της

- Μια υπερβολή αν  $z_1 > 1$ .
- Μια παραβολή αν  $z_1 = 1$ .
- Μια έλλειψη αν  $z_1 < 1$ .



Σχήμα 8.3 Καθώς το weight μεταβάλλεται από 0.1 σε 10, δημιουργούνται και οι τρεις κωνικές τομές. Τα ‘επίπεδα’ τμήματα (σχ. 8.3) είναι ελλείψεις ενώ τα ‘καμπύλα’ είναι υπερβολές. Η ενδιάμεση περίπτωση (καμπύλη με πιο ανοιχτό χρώμα) αποτελεί μια παραβολή.

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση ανακύπτει εάν τεθεί  $c=-1$ . Τότε τα weights  $z_0, z_1, z_2$  μεταβάλλονται στα  $z_0, -z_1, z_2$ . Ενώ με το πρώτο σύνολο των weights (υποθέτοντας ότι  $z_i > 0$ ) προκύπτει μια καμπύλη μέσα στο control polygon, με το δεύτερο σύνολο προκύπτει το ‘υπόλοιπο’ της καμπύλης, το οποίο ονομάζεται *συμπληρωματικό τμήμα*. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να σχεδιαστεί εξ’ ολοκλήρου μια κωνική τομή (σχ. 8.4).



**Σχήμα 8.4** Ένα τμήμα μιας κωνικής τομής με γκρί, και το συμπληρωματικό του με μαύρο

### 8.3 Παράγωγοι

Η κωνική τομή γράφεται όπως είδαμε ως  $c(t) = \frac{p(t)}{z(t)}$ , όπου  $p(t)$  πολυωνμικός όρος. Άρα

$$p(t) = z(t)c(t). \quad \Gamma$$

Το πολυώνυμο αυτό παραγωγίζεται εύκολα

$$\dot{p}(t) = \dot{z}(t)c(t) + z(t)\dot{c}(t),$$

όπου η τελεία σημαίνει παραγωγή ως προς την παράμετρο  $t$ . Η έκφραση  $\dot{c}(t)$  είναι ζητούμενη παράγωγος. Συνεπώς έχουμε

$$\dot{c}(t) = \frac{1}{z(t)} [\dot{p}(t) - \dot{z}(t)c(t)]. \quad \text{Εξ 8.2}$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί για τον υπολογισμό υψηλότερης τάξης παραγώγων.

Ας θεωρήσουμε τώρα δυο κωνικές τομές, μια ορισμένη στο παραμετρικό διάστημα  $[u_0, u_1]$  με control polygon  $b_0, b_1, b_2$  και weights  $w_0, w_1, w_2$  και η άλλη στο διάστημα  $[u_1, u_2]$  με control polygon  $b_2, b_3, b_4$  και weights  $w_2, w_3, w_4$ . Τα δυο τμήματα συνθέτουν μια  $C^1$  καμπύλη αν

$$\frac{w_1}{u_1 - u_0} \Delta b_1 = \frac{w_3}{u_2 - u_1} \Delta b_2. \quad \text{Εξ 8.3}$$

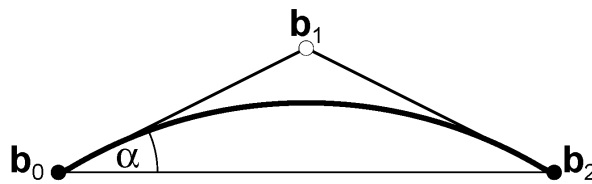
Παρατηρεί κανείς την απουσία του weight  $w_2$  στην  $C^1$  συνθήκη.

## 8.4 Ο κύκλος

Από όλες τις κωνικές τομές, το κυκλικό τόξο είναι το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο. Εδώ θα παρουσιαστεί με τη μορφή μιας ρητής τετραγωνικής καμπύλης Bézier (*rational quadratic Bézier curve*). Το control polygon του πρέπει να πληροί μια ειδική συνθήκη: πρέπει να σχηματίζει ένα ισοσκελές τρίγωνο, λόγω των συνθηκών συμμετρίας του κύκλου. Συμβουλευόμενοι το σχ. 8.5 και υποθέτοντας τυπική μορφή (standard form) θέτουμε

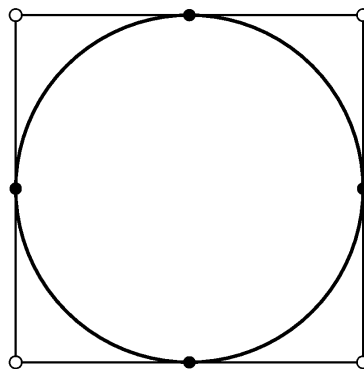
$$z_1 = \cos \alpha, \quad \text{Εξ 8.4}$$

όπου  $\alpha = \angle(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1)$ .



Σχήμα 8.5 Κύκλος: Γεωμετρία του control polygon.

Ένας ολόκληρος κύκλος μπορεί να παρασταθεί με πολλούς τρόπους μέσω τμηματικών ρητών τετραγωνικών συναρτήσεων (piecewise rational quadratics). Ένα παράδειγμα είναι να παραστήσει κανείς ένα τεταρτημόριο μέσω του control polygon, και έπειτα μέσω του συμπληρωματικού τμήματος –που είδαμε παραπάνω– για να σχηματιστεί και το υπόλοιπο τμήμα. Είναι πιθανώς πιο βολικό να χωρίσει κανείς τον κύκλο σε τέσσερα τμήματα όπως στο σχ. 8.6.



Σχήμα 8.6 Πλήρης κύκλος: Μπορεί να παρασταθεί από τέσσερις ρητές τετραγωνικές καμπύλες.

Είναι χρήσιμο να ξαναδούμε κάτι ανάλογο με το παράδειγμα της ενότητας 8.1 αλλά αυτή τη φορά για τον κύκλο. Θεωρούμε το ένα τεταρτημόριο του κύκλου. Σύμφωνα με αυτά που είδαμε εδώ, θεωρώντας τα 2D σημεία

$$\mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

αυτά σχηματίζουν το άνω αριστερά τεταρτημόριο του κύκλου του σχ. 8.6, όταν τα βάρη τους είναι

$$z_0, z_1, z_2 = 1, \cos(45^\circ), 1 \rightarrow z_0, z_1, z_2 = 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1. \quad (\text{το } z_1 \text{ προκύπτει σύμφωνα με το σχ. 8.5).}$$

Συνεπώς τα 3D points που προβάλλονται στα παραπάνω σημεία είναι (πολλαπλασιάζουμε με τα  $z_i$  και το  $z_i$  αποτελεί την τρίτη τετμημένη):

$$\bar{d}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{d}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \bar{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έστω τώρα ότι θέλουμε το ίδιο τμήμα του κύκλου να προκύπτει με 4 σημεία και όχι με τρία. Δεν έχουμε παρά να εκτελέσουμε ένα knot insertion στην καμπύλη, όπως το είδαμε στην ενότητα 6.6.

Το αρχικό knot sequence είναι ( $2^{0\text{th}}$  βαθμού η καμπύλη)  $\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix}$  και θα εισαγάγουμε έναν

knot στη θέση  $u=0.5$ . Πλέον εκτελούμε τον αλγόριθμο de Boor (ενότητα 6.3) και έχουμε

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & & \\ & \xrightarrow[\frac{1}{2}]{(u_0, u_2)} & \\ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{2} \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\frac{1}{2}]{(u_1, u_3)} & \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{2} \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

Αυτά είναι τα δυο de Boor points που αντικαθιστούν το  $\bar{d}_1$ . Άρα τα αντίστοιχα 2D points θα είναι

(διαιρούμε με τα weights που είναι κοινά για τα δυο σημεία  $z_i = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$ )

$$d'_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2}-1 \end{bmatrix}, d'_2 = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## 8.5 Ρητές καμπύλες Bézier

Μέχρι στιγμής σχηματίσαμε μια κωνική τιμή σαν προβολή μιας παραβολής (δηλαδή τετραγωνικής καμπύλης). Οι κωνικές τομές μπορούν να παρασταθούν ως ρητές τετραγωνικές καμπύλες Bézier, και οι γενίκευση αυτής της διαδικασίας για μεγαλύτερης τάξης ρητές καμπύλες είναι σχετικά απλή: μια ρητή καμπύλη Bézier βαθμού  $n$  στον  $\mathbb{E}^3$  αποτελεί την προβολή μιας  $n^{\text{στής}}$  καμπύλης Bézier στον  $\mathbb{E}^4$  πάνω στο *υπερεπιπέδο* (hyperplane)  $w=1$ . Εδώ, συμβολίζουμε  $4D$  points μέσω τεσσάρων συντεταγμένων και  $3D$  projections μέσω τριών συντεταγμένων. Έτσι είναι

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \end{bmatrix} = \mathbf{x}.$$

Μπορούμε να φανταστούμε αυτό το  $4D$  hyperplane ως ένα αντίγραφο του  $\mathbb{E}^3$ . Υποθέτουμε ότι το σημείο  $\underline{\mathbf{x}}$  στον  $\mathbb{E}^4$  δίνεται από τέσσερις συντεταγμένες. Μέσω της ίδιας διαδικασίας όπως για τις κωνικές τομές, μπορεί ναδειχθεί ότι η  $n^{\text{στός}}$  βαθμού ρητή καμπύλη Bézier δίδεται από

$$\mathbf{x}(t) = \frac{w_0 \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + \dots + w_n \mathbf{b}_n B_n^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + \dots + w_n B_n^n(t)}; \quad \mathbf{x}(t), \mathbf{b}_i \in \mathbb{E}^3. \quad \text{Εξ 8.5}$$

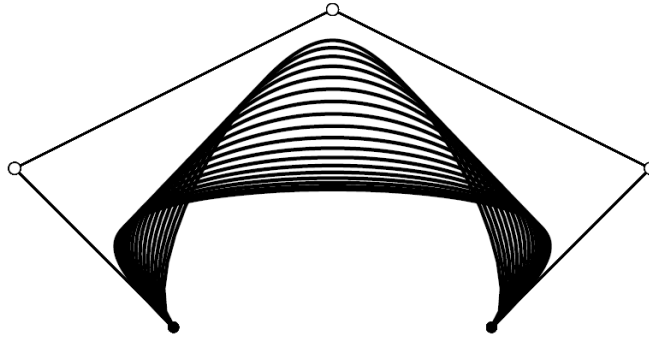
Τα  $w_i$  εξακολουθούν να λέγονται weights. Τα  $\mathbf{b}_i$  σχηματίζουν το control polygon. Είναι η προβολή του  $4D$  control polygon  $\underline{\mathbf{b}}_0, \dots, \underline{\mathbf{b}}_n$ . Αυτό το  $4D$  control polygon ορίζει μια  $4D$  πολυωνυμική καμπύλη –την ομογενή μορφή της καμπύλης. Δίδεται από

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{b}}_0 B_0^n(t) + \dots + \underline{\mathbf{b}}_n B_n^n(t).$$

Για την κατασκευή μιας ρητής καμπύλης Bézier, εφαρμόζεται ο αλγόριθμος de Casteljau σε αυτή την ομογενή μορφή και το σημείο που προκύπτει προβάλλεται στο  $3D$ .

Εάν όλα τα weights είναι ίσα με τη μονάδα, τότε πρόκειται για την τυπική μη ρητή καμπύλη Bézier που έχουμε δει στα προηγούμενα κεφάλαια, καθώς σε αυτή την περίπτωση ο παρονομαστής εκφυλίζεται στη μονάδα. Εάν κάποιο από τα weights είναι αρνητικός αριθμός, μπορεί να παρουσιαστούν ιδιομορφίες. Για αυτό το λόγο θα ασχοληθούμε μόνο με θετικά weights. Οι ρητές καμπύλες Bézier έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τις μη ρητές. Για παράδειγμα μένουν ανεπηρέαστες από affine μετασχηματισμούς. Επίσης εάν όλα τα  $w_i$  είναι θετικά, τότε ισχύει η ιδιότητα convex hull.

Η επίδραση των weights παρουσιάζεται στο σχ. 8.7. Η ‘πάνω’ καμπύλη έχει  $w_2=10$  ενώ η ‘κάτω’ έχει  $w_2=0.1$ .



**Σχήμα 8.7** Weights: Καθώς το weight του Bézier point  $b_2$  μεταβάλλεται, η καμπύλη μεταβάλλεται επίσης.

Οι ρητές καμπύλες Bézier χαρακτηρίζονται από μια ιδιότητα που δεν ισχύει για τις μη ρητές. Μένουν ανεπηρέαστες σε *προβολικούς μετασχηματισμούς* (*projective invariance*). Μια προβολική απεικόνιση απεικονίζει ομογενείς συντεταγμένες  $\underline{x}$  σε νέες ομογενείς συντεταγμένες  $\bar{\underline{x}}$ . Παίρνει τη μορφή μιας γραμμικής απεικόνισης

$$\bar{\underline{x}} = A\underline{x}$$

με  $A$   $4 \times 4$  μητρώο. Μια τέτοια απεικόνιση μεταβάλλει τα weights μιας καμπύλης. Για την απλή περίπτωση των ρητών τετραγωνικών κωνικών καμπυλών, η προβολική απεικόνιση είναι ικανή να απεικονίσει μια έλλειψη σε μια υπερβολή.

## 8.6 Ρητές καμπύλες B-spline

Οι ρητές καμπύλες B-spline, γνωστές ως *NURBS*, που είναι ακρωνύμιο του *Non Uniform Rational B-splineS* έχουν γίνει πρότυπο στη βιομηχανία *CAD/CAM*. Η μορφή τους είναι

$$\mathbf{x}(u) = \frac{w_0 \mathbf{d}_0 N_0^n(u) + \dots + w_{D-1} \mathbf{d}_{D-1} N_{D-1}^n(u)}{w_0 N_0^n(u) + \dots + w_{D-1} N_{D-1}^n(u)}. \quad \text{Εξ 8.6}$$

Όλες οι ιδιότητες των ρητών καμπυλών Bézier συναντώνται και εδώ όπως η ιδιότητα *convex hull* (για θετικά weights) ή ο μη επηρεασμός από *affine* και *projective* απεικονίσεις.

Οι παράγωγοι μπορούν να υπολογιστούν εύκολα κάνοντας χρήση των εξισώσεων που είδαμε στην 6.7.

Η σχεδίαση με χρήση κυβικών *NURBS* δεν είναι πολύ διαφορετική από τη σχεδίαση με μη ρητές καμπύλες B-spline. Ωστόσο τώρα υπάρχει η πρόσθετη δυνατότητα μεταβολής των weights των *control points*. Τονίζεται ότι η αλλαγή ενός weight επηρεάζει την καμπύλη *μονάχα* τοπικά.

Αναφέρουμε εδώ τον αλγόριθμο de Boor για την εύρεση μιας ρητής καμπύλης B-spline.

Έστω η παραμετρική τιμή  $u$ , για την οποία θέλουμε ο υπολογισμός του σημείου να λάβει χώρα, και έστω ότι το  $u$  βρίσκεται μέσα στο *domain knot sequence*.

Βρες:

τον δείκτη  $I$  έτσι ώστε να ισχύει  $u_I \leq u \leq u_{I+1}$ .

με άλλα λόγια θεώρησε  $u \in [u_I, u_{I+1}] \subset [u_{n-I}, u_{K-n}]$ .

Μια εξαίρεση γίνεται στην περίπτωση όπου  $u=u_{K-n}$ : σε αυτή την περίπτωση θέτουμε  $I=K-n-1$ , το τελευταίο domain interval.

Η εξαίρεση είναι ότι σε αυτή την περίπτωση πρέπει να ληφθεί κλειστό το διάστημα δηλαδή  $u \in [u_{K-n-1}, u_{K-n}]$ .

Έπειτα υπολόγισε:

$$\mathbf{d}_i^k(u) = \frac{(1-a_i^k)w_{i-1}^{k-1}\mathbf{d}_{i-1}^{k-1}(u) + a_i^k w_i^{k-1}\mathbf{d}_i^{k-1}(u)}{w_i^k} \quad \text{Εξ 8.7}$$

όπου  $k=1, \dots, n$  και

$$i = I-n+k+1, \dots, I+1$$

και όπου  $w_i^k = (1-a_i^k)w_{i-1}^{k-1} + a_i^k w_i^{k-1}$

$$\text{και } a_i^k = \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-k} - u_{i-1}}.$$

Τότε το ζητούμενο σημείο επί της καμπύλης NURBS είναι:

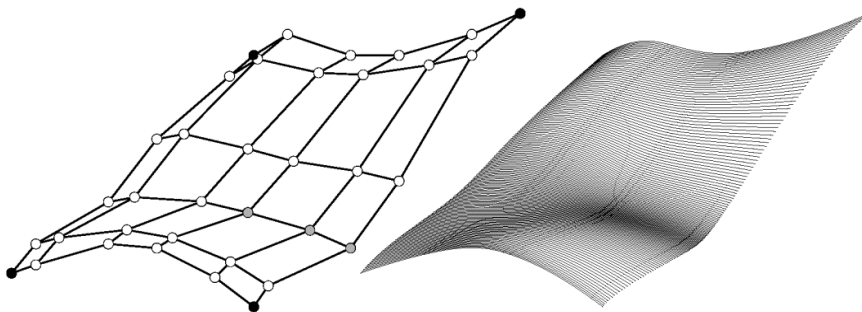
$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{d}_{I+1}^n(u). \quad \text{Εξ 8.8}$$

## 8.7 Ρητές επιφάνειες Bézier και ρητές επιφάνειες B-spline (επιφάνειες NURBS)

Μπορεί να γίνει γενίκευση των καμπυλών Bézier και B-spline από τις μη ρητές μορφές που έχουμε δει έως τώρα, στις ρητές τους, με περίπου όμοια διαδικασία με αυτή που ακολουθήθηκε για τις καμπύλες. Με άλλα λόγια, ορίζουμε τη ρητή επιφάνεια Bézier ή B-spline ως την προβολή ενός 4D γινόμενο τανυστών επιφάνειας Bézier ή B-spline (4D tensor product surface), αντίστοιχα. Έτσι, το ρητό Bézier patch παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{x}(u,v) = \frac{\mathbf{M}^T \mathbf{B}_w \mathbf{N}}{\mathbf{M}^T \mathbf{W} \mathbf{N}}. \quad \text{Εξ 8.9}$$

Ο συμβολισμός είναι αυτός της εξ. 4.8 απλά τώρα το μητρώο  $\mathbf{B}_w$  έχει στοιχεία  $w_{ij} \mathbf{b}_{ij}$  και το μητρώο  $\mathbf{W}$  έχει στοιχεία  $w_{ij}$ . Αυτά τα στοιχεία  $w_{ij}$  ονομάζονται επίσης weights και επηρεάζουν το σχήμα της επιφάνειας με τον ίδιο τρόπο που αυτό γίνεται στις καμπύλες.



Σχήμα 8.8 Μια επιφάνεια NURBS.

Μια ρητή επιφάνεια B-spline (επιφάνεια NURBS) γράφεται παρόμοια

$$s(u,v) = \frac{M^T \mathbf{D}_w N}{M^T W N},$$

**Εξ 8.10**

όπου τα μητρώα  $M$  και  $N$  περιλαμβάνουν τις συναρτήσεις βάσης (B-splines basis functions) στις διευθύνσεις  $u$  και  $v$  (σχ. 8.8).



# 9

## ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΙΣΟΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

---

Η σύνδεση των αρχών που είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, και αφορούν το κομμάτι της Υπολογιστικής Σχεδίασης (CAGD: Computer Aided Geometric Design) με τις αρχές της Υπολογιστικής Μηχανικής (CAE: Computer Aided Engineering) επιτυγχάνεται μέσω της Ισογεωμετρικής Ανάλυσης.

Η Ισογεωμετρική Ανάλυση έχει προταθεί εδώ και λίγα χρόνια και φαίνεται να παρουσιάζει κάποια πλεονεκτήματα στην ανάλυση, σε σχέση με την κλασική Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, τα οποία βασίζονται στην πιστή αναπαράσταση της γεωμετρίας του φορέα στην περίπτωση της. Παρακάτω θα παρουσιαστούν τα βήματα για τον προγραμματισμό της μεθόδου.

### 9.1 Διακριτοποίηση με ισογεωμετρικά πεπερασμένα στοιχεία

Η διαφορά της Ισογεωμετρικής Θεωρίας από την κλασική Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων έγκειται στο ότι χρησιμοποιεί διαφορετικές συναρτήσεις βάσης για την ανάλυση. Αυτές είναι οι συναρτήσεις NURBS που είδαμε στο κεφάλαιο 8. Μετά από αυτή την αλλαγή, οι διαφορές που παρουσιάζουν οι δυο μέθοδοι έρχονται σαν επακόλουθο και όχι εγγενώς. Δηλαδή δεν υφίσταται κάποια άλλη αλλαγή στη διαδικασία της Ισογεωμετρικής Μεθόδου, η οποία έπειτα ακολουθεί τα βήματα της κλασικής FEM. Αποτελεί συνεπώς και η Ισογεωμετρική Μέθοδος μια μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων.

Στην FEM υπάρχει η έννοια του καννάβου (ή διακριτοποίησης) και η έννοια του πεπερασμένου στοιχείου (element). Ένα στοιχείο έχει δυο αναπαραστάσεις, μια στον *παραμετρικό χώρο* (*natural*

*space* ή *parent domain*) και μια στον φυσικό (*physical*). Τα elements ορίζονται από τους κόμβους τους (*nodes*) και οι βαθμοί ελευθερίας τους είναι οι τιμές που λαμβάνουν οι συναρτήσεις σχήματος στους κόμβους. Οι συναρτήσεις σχήματος στην FEM είναι παρεμβολικές στους nodes και εν γένει έχουν τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές.

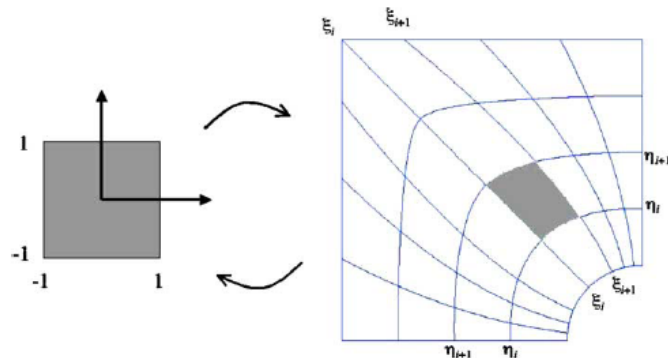
Από την άλλη, στο CAGD, οι συναρτήσεις σχήματος NURBS, όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, συνήθως δεν είναι παρεμβολικές. Υπάρχουν δυο έννοιες καννάβου (ή διακριτοποίησης), το *control mesh* και το *physical mesh*. Το control mesh ή control net σχηματίζεται από τα control points. Όπως έχουμε δει το control net μιας επιφάνειας NURBS, μπορεί να ειδωθεί σαν ένας κάνναβος από bilinear quadrilaterals (σχ. 8.8), ενώ ακριβώς όμοια το control net ενός όγκου NURBS μπορεί να ειδωθεί σαν ένας κάνναβος από trilinear hexaedra. Έχουμε δει, επίσης, ότι το control net δεν ταυτίζεται με την γεωμετρία, δηλαδή με τον φορέα στον physical space, αλλά μπορεί να ειδωθεί ως ένα είδος ‘σκαλωσιάς’ γύρω από αυτόν. Στην περίπτωση της Ισογεωμετρικής Μεθόδου οι βαθμοί ελευθερίας εντοπίζονται στα control points οπότε τα control points λαμβάνουν τη θέση των nodes στη νέα θεωρία.

Είδαμε στο κεφάλαιο 5 των σύνθετων καμπυλών, τις συνθήκες που καθορίζουν τη λειότητα σε μια τμηματική καμπύλη (που συντίθεται δηλαδή από διάφορες Bézier καμπύλες) και που πρέπει να ισχύουν στα σημεία σύνδεσης (junction points). Επίσης είδαμε (σχ. 6.1) του πως μια B-spline αποτελείται από Bézier καμπύλες που συνδέονται στα junction points, οι οποίες και ονομάζονται curve segments. Οι συνθήκες λειότητας λοιπόν λαμβάνουν χώρα σε αυτά τα σημεία, ενώ φυσικά τα curve segments είναι  $C^\infty$  οπουδήποτε αλλού. Εξηγήθηκε ότι το πλήθος αυτών των curve segments ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών knot spans (εφόσον όλοι οι knots του knot domain είναι απλής πολλαπλότητας). Δηλαδή ένα μη κενό knot span απεικονίζεται σε ένα curve segment στον physical space. Φυσικά τα ίδια χαρακτηριστικά μοιράζονται και NURBS καθώς πρόκειται για ηλίκο συναρτήσεων B-splines.

Τα παραπάνω μπορούν να δώσουν κάποιες κατευθύνσεις για την Ισογεωμετρική Θεώρηση υπό το πρίσμα των αρχών της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Έτσι, ανακαλούμε ότι στην FEM θεωρούμε ως πεπερασμένο στοιχείο, το τμήμα εκείνο του physical space, όπου στα όρια του γίνεται η εξέταση των συνθηκών λειότητας (π.χ. σύμμορφα ή όχι elements). Συνεπώς βλέπουμε ότι η αντιστοίχιση του element στην FEM μπορεί να γίνει με μια ανάλογη μορφή της Ισογεωμετρικής Μεθόδου, που αποτελεί το curve segment (λόγω απλότητας μιλάμε με όρους 1D) στον physical space ή το αντίστοιχο knot span, στον παραμετρικό χώρο. Συνεπώς το knot span θα αποτελεί για την Ισογεωμετρική Μέθοδο ότι το element για την FEM, για αυτό θα αναφερόμαστε σε αυτό ως element.

Η επιλογή του knot span σαν τυπικό element της μεθόδου, είναι ιδανική και για λόγους αριθμητικής ολοκλήρωσης των πινάκων που δημιουργούνται από τις συναρτήσεις NURBS και είναι της ίδιας λογικής με τους πίνακες της FEM. Ειδικότερα, η ίδια λογική της ισοπαραμετρικότητας που επικρατεί στην FEM, ακολουθείται και στην Ισογεωμετρική Μέθοδο

(από εκεί προέρχεται και το πρώτο συνθετικό Ισο-). Συνεπώς δημιουργούνται τα ίδια μητρώα και σε αυτήν τη μέθοδο που αποτελούνται από γινόμενα των συναρτήσεων NURBS και των παραγώγων τους κλπ. Η ολοκλήρωση αυτών των μητρώων γίνεται αριθμητικά όπως ακριβώς στην



**Σχήμα 9.1** Τα πεπερασμένα στοιχεία (elements) ως knot spans.

FEM. Οπότε η επιλογή του knot span ως τυπικού διαστήματος αριθμητικής ολοκλήρωσης, όμοιου για όλα τα elements είναι ιδανική. Στην διδιάστατη περίπτωση το knot span είναι το γινόμενο  $[u_i, u_j] \times [v_m, v_n]$  (σχ. 9.1) ενώ στην τριδιάστατη περίπτωση υπάρχει ένας ακόμα όρος στο γινόμενο που αφορά την τρίτη διάσταση.

Κάποια άλλα στοιχεία που είδαμε στη θεωρία του CAGD και θα μας βοηθήσουν να αντιστοιχίσουμε τις αρχές της FEM στην περίπτωση της Ισογεωμετρικής Μεθόδου αναφέρονται εδώ. Όπως είδαμε στην ενότητα 6.5 το εύρος (ή support) μιας B-spline βαθμού  $n$  (άρα και μιας NURBS βαθμού  $n$ ), η οποία συμβολίζεται με  $N_i^n(u) > 0$  είναι τα  $n+1$  παραμετρικά διαστήματα  $u \in [u_{i-1}, u_{i+n}]$ . Έχοντας αυτό ως δεδομένο συμπεραίνουμε το ποιες συναρτήσεις σχήματος NURBS ‘επηρεάζονται’ μεταξύ τους, δηλαδή για ποιες το support της μιας ‘εισέρχεται’ στο support της άλλης, και συνεπώς το πώς συντίθεται το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας ενός φορέα, δηλαδή το ποια στοιχεία του  $K_{ij}$  είναι μηδενικά και ποια όχι.

Επίσης στην ίδια ενότητα 6.5, είδαμε ότι ένα knot span, δηλαδή ένα element, έχει (ή αποτελείται) από  $n+1$  control points (σε κάθε διάσταση του control net) και επίσης ότι δυο γειτονικά elements μοιράζονται  $n$  control points. Αυτή είναι μια μεγάλη διαφορά που παρουσιάζει η Ισογεωμετρική Μέθοδος με τα control points, σε σχέση με την FEM και τα nodes.

Προσθέτουμε εδώ, ότι στην Ισογεωμετρική Μέθοδο υπάρχει ένας ακόμα όρος ως προς την διακριτοποίηση, αυτός του patch. Το patch δεν είναι τίποτα καινούργιο, αλλά απλά μια NURBS καμπύλη, επιφάνεια ή όγκος. Στο patch απεικονίζεται ένα κλειστό παραμετρικό διάστημα (ή κλειστό γινόμενο διαστημάτων) από τον παραμετρικό χώρο στον φυσικό. Έχουμε δει αναλυτικά στο κεφάλαιο 6 ότι ως κλειστό παραμετρικό διάστημα εννοούμε αυτό που αποτελείται από ένα ή (συνήθως) περισσότερα knot spans, και που στα άκρα του έχει πολλαπλότητα  $n+1$ . Συνεπώς το patch αποτελείται από elements και μπορούμε να το φανταστούμε σαν έναν υποφορέα για την περίπτωση της Ισογεωμετρικής Μεθόδου (μόνο που εδώ οι συνθήκες σύνδεσης των patches

μεταξύ τους είναι απλούστατες όπως έχουμε δει στην ενότητα 7.2). Οι περισσότεροι φορείς που χρησιμοποιούνται σε ακαδημαϊκά προβλήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν με ένα μόνο patch.

## 9.2 Περιγραφή του κώδικα Ισογεωμετρικής Ανάλυσης

Ο κώδικας που προγραμματίστηκε αφορά την ανάλυση τόσο επιφανειακών όσο και τριδιάστατων φορέων σε προβλήματα γραμμικής ελαστικότητας. Τα παρακάτω αφορούν τον κώδικα της διδιάστατης ανάλυσης για λόγους απλότητας, ενώ η επέκταση στις τρεις διαστάσεις δεν έχει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία. Η θεώρηση που χαρακτηρίζει τον κώδικα είναι ότι κάθε παραμετρική διάσταση  $u$  και  $v$ , εξετάζεται ξεχωριστά, ακολουθώντας την αρχή της ισοπαραμετρικότητας που χαρακτηρίζει την Ισογεωμετρική Μέθοδο. Έτσι για κάθε διάσταση επιλέγονται οι διαμερίσεις της διακριτοποίησης ήτοι το πλήθος των knot spans, επιλέγεται ο βαθμός των συναρτήσεων βάσης, και υπολογίζονται οι συναρτήσεις βάσης NURBS. Οι μονοδιάστατοι αυτοί υπολογισμοί συνδυάζονται δίνοντας διδιάστατα αποτελέσματα.

### 9.2.1. Έναρξη του κώδικα

Όπως είπαμε εργαζόμαστε ξεχωριστά για κάθε μια από τις παραμετρικές διαστάσεις (δυο παραμετρικές διαστάσεις  $u$  και  $v$ ).

Σε κάθε μια παραμετρική διάσταση λαμβάνουμε ως τυπικό παραμετρικό διάστημα, το οποίο και θα χωριστεί σε knot spans, το  $[-1, +1]$ . Επιλέγουμε όλοι οι εσωτερικοί knots να έχουν πολλαπλότητα  $1$ , ενώ οι δυο ακραίοι να έχουν πολλαπλότητα όση το order  $K$  ( $K=n+1$ ) των B-splines (ή επίσης NURBS) (δηλαδή όσο ο βαθμός των συναρτήσεων σχήματος συν  $1$ ). Έτσι, συνδυάζοντας τα knot vector των δυο παραμετρικών διαστάσεων μοντελοποιούμε τον συνολικό φορέα με ένα patch ('κλειστή' παραμετρική επιφάνεια).

Επιλέγουμε τον βαθμό των B-splines (που είναι ο βαθμός των συναρτήσεων σχήματος NURBS), και το πλήθος των διαμερίσεων (knot spans) δηλαδή το πλήθος των elements, για κάθε παραμετρική διάσταση. Προκύπτει έτσι για κάθε μια διάσταση τόσο το knot vector, όσο και το πλήθος των control points δηλαδή το πλήθος των συναρτήσεων σχήματος.

Αναφέραμε στο κεφάλαιο 6 τους λόγους για τους οποίους θεωρούμε βάσιμη τη θεώρηση του knot vector με πολλαπλότητα των ακραίων του knots ίση με  $n+1$  (έτσι ώστε να είναι αυτό 'κλειστό').

Τη θεώρηση αυτή ακολουθήσαμε και εδώ. Άρα το knot vector, που όπως αρχικά θεωρήσαμε στο κεφάλαιο 6 ήταν το  $u_0, u_1, \dots, u_{K-1}$ , ή αλλιώς  $u_0, u_1, \dots, u_{D+n-2}$  ( $D$  το πλήθος των control points, δηλαδή των συναρτήσεων σχήματος) και που στα άκρα του είχε πολλαπλότητα  $n$ , πλέον γίνεται  $u_0, u_1, \dots, u_{D+n}$  με πολλαπλότητα άκρων  $n+1$  (δηλαδή δυο περισσότεροι knots). Επίσης για προγραμματιστικούς λόγους θεωρούμε ότι ο δείκτης μέτρησης των knots ξεκινάει από το  $1$  και όχι από το  $0$ . Άρα τελικά το knot vector γίνεται  $u_1, u_2, \dots, u_{D+n+1}$ .

Μετά τον υπολογισμό του knot vector επιλέγουμε το πλήθος των Gauss Points (δηλαδή την τάξη αριθμητικής ολοκλήρωσης) που θα χρησιμοποιηθεί, και βρίσκουμε το διάνυσμα των τετμημένων των G.P. και των βαρών τους στο διάστημα  $[-1, +1]$ . Αυτό γίνεται ξεχωριστά σε κάθε παραμετρική διάσταση, δηλαδή η τάξη της αριθμητικής ολοκλήρωσης μπορεί να είναι διαφορετική σε κάθε διάσταση του παραμετρικού χώρου. Έπειτα κάνουμε μια απλή γραμμική απεικόνιση του διαστήματος  $[-1, +1]$  σε κάθε ένα από τα knot spans για να βρούμε τις αντίστοιχες τετμημένες και βάρη των G.P. σε κάθε element, στην αντίστοιχη παραμετρική διάσταση. Αυτό (αν θεωρήσουμε το τυχαίο knot span  $[a, b]$ ) γίνεται μέσω της αλλαγής μεταβλητών

$$x = \frac{(b-a)t + a + b}{2}, \quad dx = \frac{b-a}{2} dt$$

και έτσι η αριθμητική ολοκλήρωση στο διάστημα  $[a, b]$  γίνεται

$$I[a, b] = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f(x(t)) dt$$

$$I[x_1, x_2, \dots, x_N] = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N w_{N,i} f(x_i) \quad \text{όπου } x_i = \frac{(b-a)t_i + a + b}{2}.$$

Τα παραπάνω γίνονται μέσω ενός απλού loop για όλα τα knot spans οπότε σχηματίζονται τα διανύσματα για όλο το knot sequence, με τις τετμημένες των G.P. και των συντελεστών τους  $\frac{b-a}{2}$

### 9.2.2 Υπολογισμός συναρτήσεων B-splines και παραγώγων τους

Η επόμενη είναι η υπορουτίνα όπου υπολογίζονται οι τιμές των B-splines στο knot vector που έχουμε βρει, θέτοντας ως είσοδο κάποιο διάνυσμα παραμετρικών 'τετμημένων' του knot vector, στις οποίες θέλουμε να υπολογιστούν οι B-splines. Από τις B-splines αυτές θα σχηματιστούν οι NURBS.

Την υπορουτίνα σύνθεσης των B-splines την καλούμε τρεις φορές. Μια με είσοδο διάνυσμα σημείων που προκύπτουν για 100 διαμερίσεις του knot vector και χρησιμοποιείται απλά για το πλοτάρισμα των B-splines (μπορούν να γίνουν περισσότερες από 100 διαμερίσεις για καλύτερο πλοτάρισμα). Έπειτα την καλούμε με είσοδο το διάνυσμα των Gauss Points και έχουμε σαν αποτέλεσμα τις τιμές των συναρτήσεων B-splines στα Gauss Points που είναι αυτές που θα χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση (αριθμητική ολοκλήρωση). Και τέλος την καλούμε ακόμα μια φορά με διάνυσμα εισόδου τα knots του knot vector δηλαδή τα όρια των knot spans, οπότε βρίσκουμε τις τιμές των B-splines στα άκρα (ή όρια) των elements. Οι τιμές αυτές θα χρησιμοποιηθούν κατά τη σχεδίαση του φορέα στον physical space, όπου θέλουμε τα όρια των elements.

Στην υπορουτίνα χρησιμοποιούνται οι εξ. 6.6 και 6.7 οι οποίες όπως έχουμε δει είναι αναδρομικές.

Έτσι για τις σταθερές B-splines είναι:

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_{i-1} \leq u < u_i, \\ 0 & \text{παντού αλλού} \end{cases}$$

ενώ για βαθμό  $n=1,2,3,\dots$ :

$$N_i^n(u) = \frac{u-u_{i-1}}{u_{i+n-1}-u_{i-1}} N_i^{n-1}(u) + \frac{u_{i+n}-u}{u_{i+n}-u_i} N_{i+1}^{n-1}(u).$$

Δηλαδή φτάνουμε στον υπολογισμό των B-splines βαθμού  $n$ , ξεκινώντας από τον υπολογισμό των B-splines μηδενικού βαθμού.

Καθώς περιγράψαμε όμως, για προγραμματιστικούς λόγους, ο δείκτης  $i$  αντί να ξεκινάει να μετράει από το 0 ως το  $D-1$ , ξεκινάει να μετράει από το 1 ως το  $D$  ( $D$  το πλήθος των control points, δηλαδή το πλήθος των συναρτήσεων σχήματος). Επίσης για προγραμματιστικούς λόγους, όσον αφορά τον άνω δείκτη, δεν κάνουμε χρήση του βαθμού της συνάρτησης (που μετράει από 0 έως  $n$ ), αλλά του  $k(=n+1)$  που ονομάζεται και τάξη (order) της συνάρτησης και μετράει από 1 έως  $n+1$ . Έτσι οι παραπάνω σχέσεις τροποποιούνται ελαφρώς και γίνονται:

Για τις σταθερές B-splines (order  $k=1$ ):

$$N_i^1(u) = \begin{cases} 1 & \text{αν } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 1 & \text{αν } i=D \text{ και } u=u_{D+1} \\ 0 & \text{παντού αλλού} \end{cases}$$

ενώ για order  $k=2,3,4,\dots,n+1(=K)$ :

$$N_i^k(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i} N_i^{k-1}(u) + \frac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(u).$$

Επειδή οι παρονομαστές στην παραπάνω σχέση μπορεί να είναι μηδενικοί, υιοθετείται η σύμβαση ότι  $0/0=0$ . Με άλλα λόγια  $0 \times (\cdot) = 0$  ακόμα και αν το  $(\cdot)$  δεν ορίζεται. Όταν το  $i=N$  ο δεύτερος όρος παραλείπεται.

Η υπορουτίνα αποθηκεύει τις τιμές των B-splines βαθμού  $n$  αλλά και των προηγούμενων βαθμών, δηλαδή σχηματίζεται ένα υπερμητρώο (3D μητρώο) όπου η τρίτη του διάσταση 'μετράει' για την τάξη  $k$  της B-spline (από 1 έως  $n+1$ ).

Τα σχ. 9.2 έως 9.4 παρουσιάζουν τις B-splines που προκύπτουν για επιλογή διάφορων βαθμών. Κατ' αρχάς βλέπουμε ότι οι γραμμικές B-splines είναι ίδιες με τις γραμμικές συναρτήσεις της FEM. Ακόμα περισσότερο, από την θεωρητική ερμηνεία του weight ενός control points, που δόθηκε στην ενότητα 8.1, και αφορά τις NURBS, βλέπουμε ότι η αλλαγή ενός weight δεν παίζει κανέναν ρόλο όταν οι καμπύλη που προβάλλεται είναι ευθεία γραμμή. Άρα η γραμμική B-spline ταυτίζεται με τη γραμμική NURBS. Συνεπώς, όσον αφορά τις γραμμικές συναρτήσεις σχήματος, συνάγουμε το συμπέρασμα ότι η Ισογεωμετρική Μέθοδος και η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων ταυτίζονται απολύτως.

Προχωρώντας όμως σε μεγαλύτερου βαθμού B-splines, βλέπουμε ότι αυτές διαφέρουν ως προς τη μορφή τους από τις ανωτέρου βαθμού συναρτήσεις σχήματος που χρησιμοποιεί η FEM (π.χ.

πολυώνυμα Lagrange). Βλέπουμε για παράδειγμα ότι οι B-splines (και οι NURBS ως άθροισμα αυτών) είναι πάντοτε θετικές. Αξίζει να αναφέρουμε εδώ την ιδιότητα του convex hull που είχαμε δει στην ενότητα 6.4. Αυτή η ιδιότητα σημαίνει για τις NURBS ότι αυτές δεν ταλαντώνονται με αυξανόμενο εύρος αυξανόμενου του βαθμού τους, κάτι που ισχύει για τα πολυώνυμα Lagrange. Αυτή είναι μια πολύ σημαντική διαφορά της Ισογεωμετρικής Μεθόδου από την FEM που της προσδίδει σημαντικά πλεονεκτήματα.

Στη συνέχεια και στην ίδια λογική, η επόμενη υπορουτίνα είναι η DerBsplines η οποία υπολογίζει τις τιμές των πρώτων παραγώγων των συναρτήσεων B-splines στα σημεία που περικλύονται στο διάστημα εισόδου.

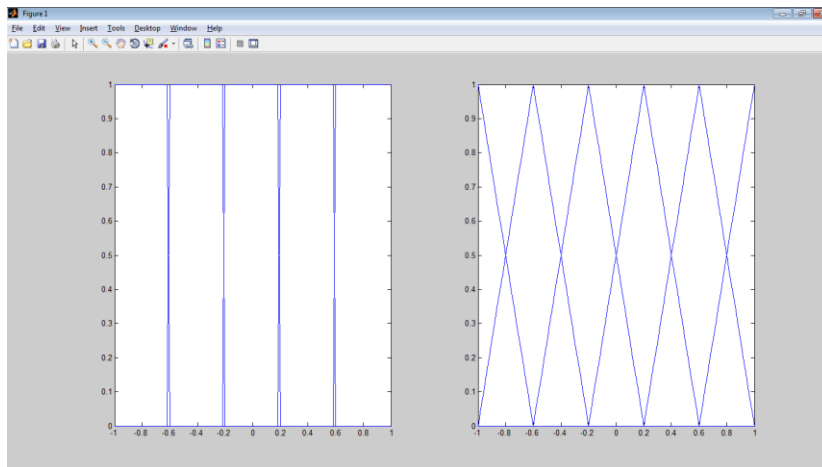
Στην υπορουτίνα χρησιμοποιείται η παρακάτω σχέση (με την χρήση πάλι του order  $k=n+1$ ):

Η πρώτη παράγωγος για order συνάρτησης ίσο με  $k=2,3,\dots,n+1$ :

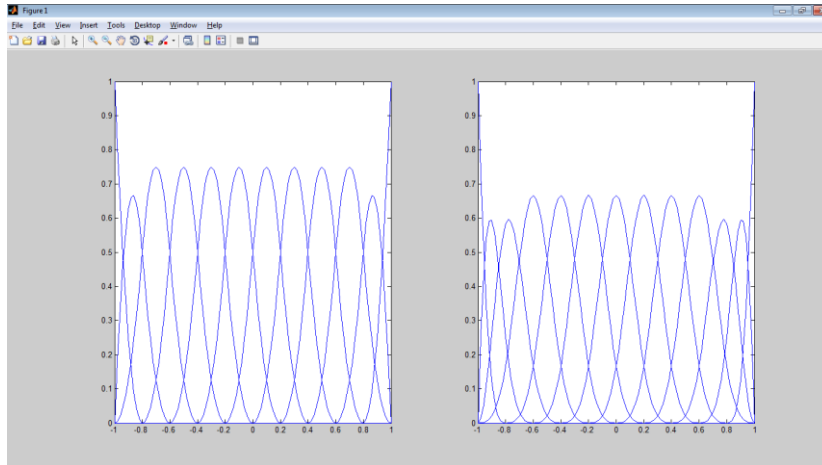
$$N'_{i,k}(u) = \frac{k-1}{u_{i+k-1}-u_i} N_i^{k-1}(u) - \frac{k-1}{u_{i+k}-u_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(u).$$

Αυτή η υπορουτίνα υπολογίζει τις παραγώγους μόνο των B-splines βαθμού  $n$  και όχι των προηγούμενων βαθμών, δηλαδή έχει ως έξοδο ένα 2D μητρώο και όχι ένα υπερμητρώο.

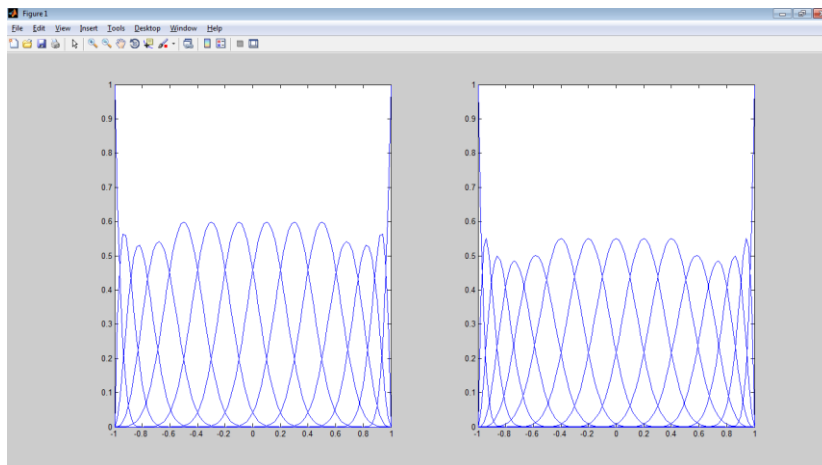
Την DerBsplines την καλούμε μια μόνο φορά, με είσοδο το διάστημα των Gauss Points, για να υπολογιστούν οι τιμές των παραγώγων των B-splines στα Gauss Points οι οποίες και θα χρησιμοποιηθούν στην αριθμητική ολοκλήρωση.



**Σχήμα 9.2** Οι σταθερές καθώς και οι γραμμικές B-splines σε knot vector με πέντε knot spans.



**Σχήμα 9.3** Οι τετραγωνικές και οι κυβικές B-splines σε knot vector με δέκα knot spans.



**Σχήμα 9.4** Οι τετάρτου και πέμπτου βαθμού B-splines σε knot vector με δέκα knot spans.

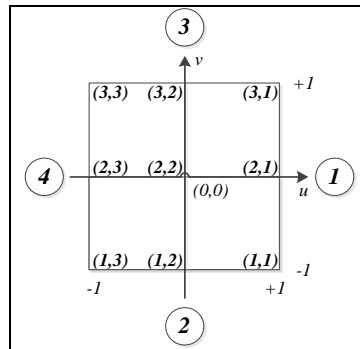
Έτσι ολοκληρώνεται το κομμάτι του κώδικα που ασχολείται με τον παραμετρικό χώρο και με τον υπολογισμό των συναρτήσεων B-splines και των παραγώγων τους.

### 9.2.3 Εισαγωγή γεωμετρικών στοιχείων του φορέα – σχηματισμός control points και κόμβων

Το επόμενο τμήμα του κώδικα έχει να κάνει με την περιγραφή του φορέα. Η γεωμετρία του φορέα περιγράφεται από τη θέση των control points και από τα weights που αυτά έχουν. Έτσι σε αυτό το τμήμα του κώδικα εισάγονται οι συντεταγμένες των control points και τα weights τους, όπως ακριβώς θα εισαγάγαμε τους κόμβους σε έναν κώδικα στη FEM. Ακόμα σχηματίζονται ανάλογα μητρώα όπως το μητρώο συνδεσιμότητας της FEM και τελικά καταλήγουμε να έχουμε μητρώο όπου για κάθε element ξέρουμε τα control points του, με τη σωστή σειρά αρίθμησής τους. Στο σχ. 9.5 φαίνεται το τυπικό ισογεωμετρικό element, όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε  $3 \times 3$



control points. Επίσης στο σχήμα φαίνεται η σειρά αρίθμησης των control points καθώς και των πλευρών του στοιχείου.



**Σχήμα 9.5** Οι τετάρτου και πέμπτου βαθμού B-splines σε knot vector με δέκα knot spans.

Θεωρούμε δηλαδή ότι η αρίθμηση των control points ξεκινάει από το control point  $(u=+1, v=-1)$ , έπειτα διατρέχουμε την παραμετρική διάσταση  $u=+1$  κ.ο.κ. Όσον αφορά τις πλευρές, θεωρούμε ως πλευρά 1 την ‘Ανατολική’ του element, ως 2 τη ‘Νότια’, ως 3 τη ‘Βόρεια’ και ως 4 τη ‘Δυτική’. Η αρίθμηση αυτή, είναι κάπως περίεργη, καθώς το φυσιολογικό θα ήταν να ξεκινούσε από το σημείο  $(-1, -1)$ , ωστόσο δεν έχει κάποια επίδραση στα αποτελέσματα, υιοθετήθηκε δε κατά την πρώτη απόπειρα προγραμματισμού της μεθόδου και έκτοτε δεν άλλαξε.

Στη συνέχεια, τα όρια των knot spans από την κάθε παραμετρική διάσταση, τα απεικονίζουμε στον physical space και έτσι βρίσκουμε τις τετμημένες και τεταγμένες των κόμβων του φορέα, δηλαδή των ορίων των elements στον physical space. Αυτό γίνεται με τη χρησιμοποίηση των τιμών των Bsplines στα όρια των knot spans και την εξ. 8.10 της επιφανειακής NURBS

$$s(u, v) = \frac{M^T D_w N}{M^T W N}$$

Σε πιο απλή μορφή ο τύπος γράφεται

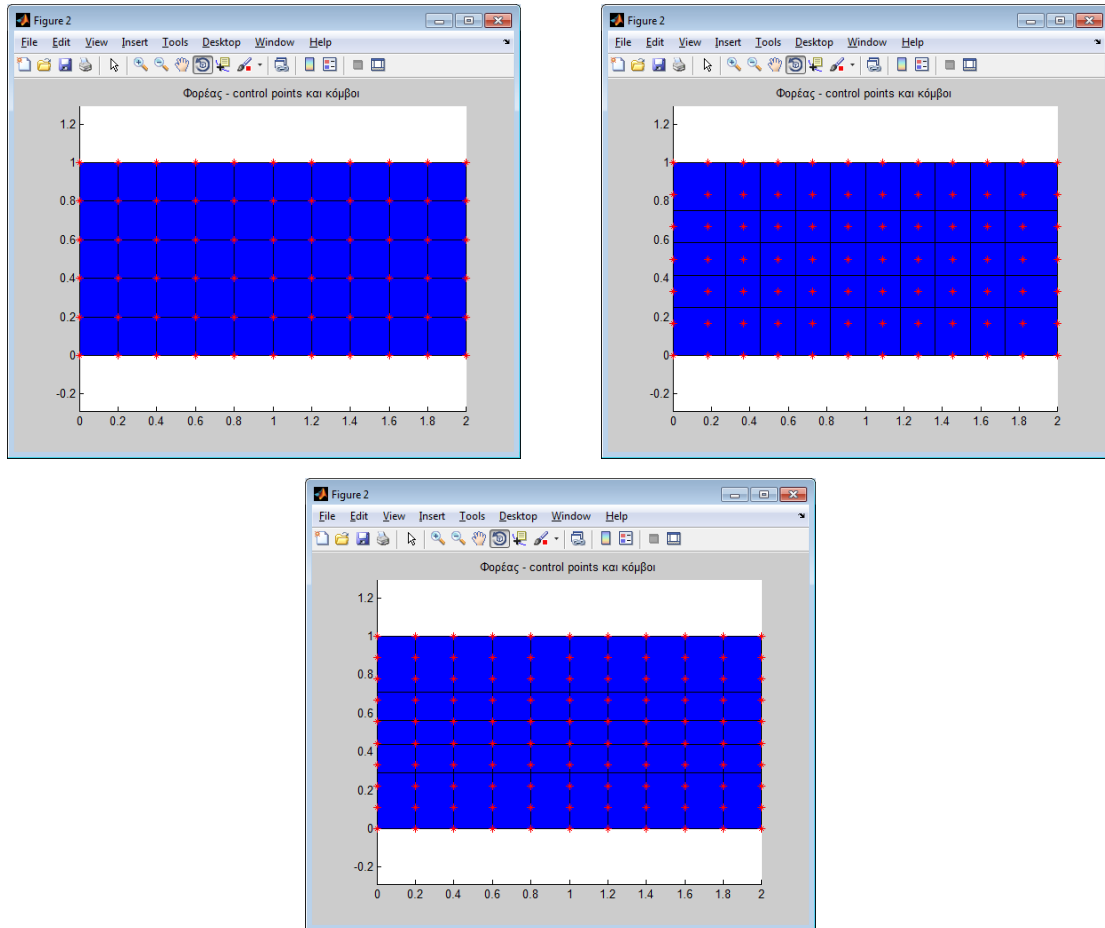
$$s(u, v) = \begin{bmatrix} s_x(u, v) \\ s_y(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum \sum N_i(u) w_{ij} M_j(v)}{\sum \sum N_i(u) w_{ij} M_j(v)} \cdot d_{ij_x} \\ \frac{\sum \sum N_i(u) w_{ij} M_j(v)}{\sum \sum N_i(u) w_{ij} M_j(v)} \cdot d_{ij_y} \end{bmatrix},$$

όπου το σημείο της επιφάνειας NURBS γράφεται με τη μορφή της τετμημένης του  $s_x$  και της τεταγμένης του  $s_y$ . Ως  $d_{ij}$  συμβολίζεται το τυχαίο control point με  $d_{ij_x}, d_{ij_y}$  τις συντεταγμένες του,

ενώ  $A(u, v) = \frac{N_i(u) w_{ij} M_j(v)}{\sum \sum N_i(u) w_{ij} M_j(v)}$  είναι οι επιφανειακές NURBS συναρτήσεις σχήματος στο

παραμετρικό σημείο  $(u, v)$ , το οποίο και απεικονίζεται στον φορέα πάνω στο σημείο  $s$ .  $N_i(u), M_j(v)$  είναι οι B-splines στις διευθύνσεις  $u$  και  $v$ , ενώ  $w_{ij}$  είναι το weight του control point. Όπως είδαμε οι τιμές αυτές των B-splines υπολογίζονται με την τρίτη κλήση της υπορουτίνας υπολογισμού τους, για τους knots (όρια των knot spans, δηλαδή όρια των elements).

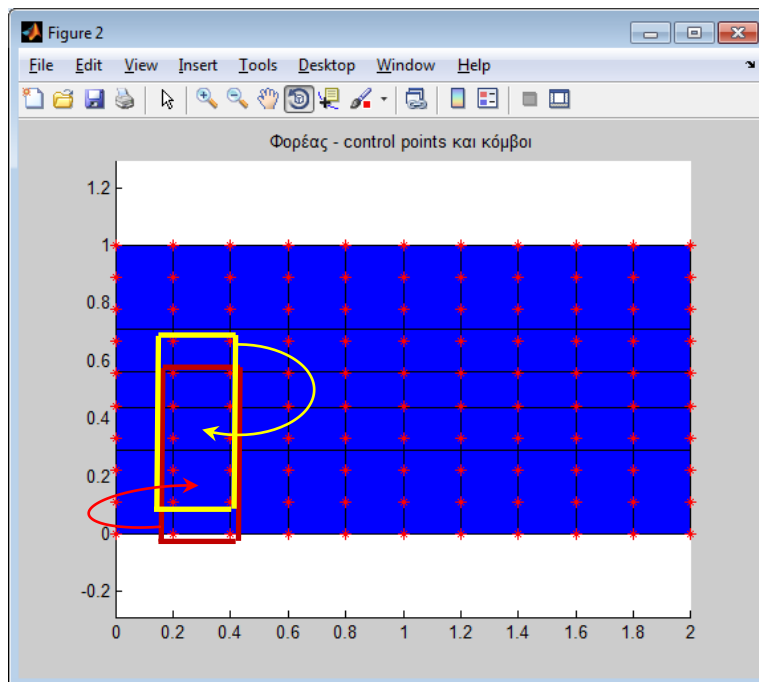
Στο σχ. 9.6 παραθέτουμε για την περίπτωση μιας πλάκας μήκους 2 και πλάτους 1 τη θέση που προκύπτει για τα control points του φορέα (κόκκινα σημεία) αλλά και για τους κόμβους του φορέα (και τα elements που σχηματίζονται από αυτούς), για μια ορισμένη κοινή διακριτοποίηση του φορέα και για συναρτήσεις σχήματος NURBS διαφόρων βαθμών. Η διακριτοποίηση που επιλέγουμε είναι 10 διαμερίσεις κατά το μήκος και 5 διαμερίσεις κατά το πλάτος, δηλαδή 50 elements.



**Σχήμα 9.6** Απεικόνιση του φορέα – control points, elements και κόμβοι.

Η πρώτη είναι η γραμμική περίπτωση, δηλαδή η NURBS συντίθεται από γραμμικές B-splines τόσο για την οριζόντια όσο και για την κατακόρυφη διεύθυνση. Τα control points ταυτίζονται με τους κόμβους. Στη δεύτερη περίπτωση (άνω δεξιά) επιλέγουμε δευτέρου βαθμού B-splines και ως προς τις δυο διευθύνσεις. Τα control points παύουν να ταυτίζονται με τους κόμβους, και αυξάνονται σε σχέση με αυτούς. Επίσης παρατηρούμε ότι τα elements δεν έχουν πλέον τις ίδιες διαστάσεις μεταξύ τους, δηλαδή αλλαγή της θέσης και του πλήθους των control points επιφέρει αλλαγή στη θέση των κόμβων, δηλαδή στη διακριτοποίηση. Στην περίπτωση (κάτω) επιλέγουμε συναρτήσεις B-splines γραμμικές κατά την οριζόντιο και πέμπτου βαθμού κατά την κατακόρυφο. Οι 'στήλες' των control points βρίσκονται πάνω στις στήλες των κόμβων, ωστόσο σε κάθε στήλη έχω 6 κόμβους (5 διαμερίσεις) αλλά 10 control points.

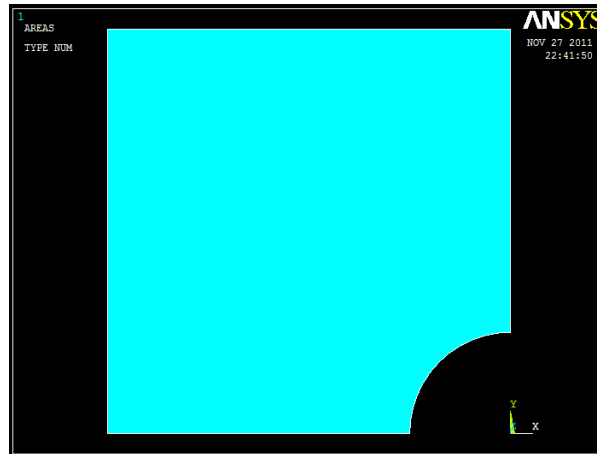
Ανακαλούμε από την ενότητα 9.1 ότι το κάθε element έχει  $n+1$  control points σε κάθε παραμετρική διεύθυνση, όπου  $n$  ο βαθμός της B-spline στην διεύθυνση αυτή. Στο σχ. 9.7 έχουμε συνδέσει με διαφορετικού χρώματος γραμμή τα control points που αποτελούν κάθε ένα element, για δυο από τα πέντε που αποτελούν μια από τις 10 στήλες διακριτοποίησης του φορέα. Το κάθε element αποτελείται από δυο control points στην οριζόντιο και από έξι στην κατακόρυφο. Επίσης δυο γειτονικά elements κατά την οριζόντιο μοιράζονται ένα control point, ενώ δυο γειτονικά κατά την κατακόρυφο μοιράζονται πέντε control points. Αυτά απεικονίζονται από το control space στο physical space στα elements τα οριζόμενα από τους κόμβους. Βλέπουμε ότι το κίτρινο element, ενώ έχει την ίδια διάσταση με το κόκκινο κατά την οριζόντιο, είναι πολύ μικρότερο κατά το πλάτος του.



**Σχήμα 9.7** Απεικόνιση του φορέα – control points, elements και κόμβοι.

Με τον παραπάνω τρόπο μπορούμε να απεικονίσουμε οποιοδήποτε σημείο του παραμετρικού χώρου στον physical space, όπως για παράδειγμα τα Gauss Points, των οποίων τις B-splines έχουμε βρει με την δεύτερη κλήση της υπορουτίνας Bsplines.

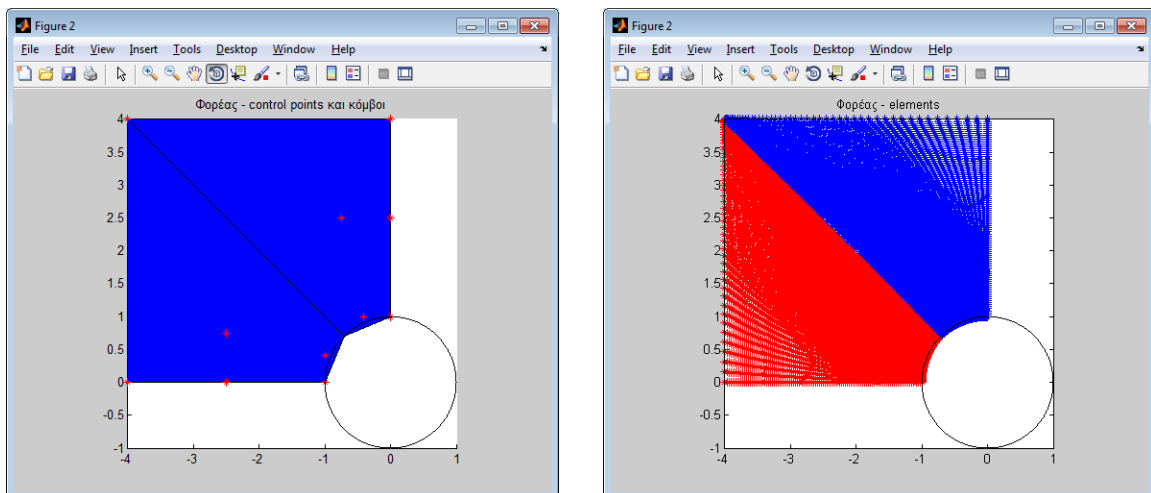
Στην περίπτωση της πλάκας, όπου τα control points είναι διατεταγμένα στην ίδια ευθεία, η NURBS καμπύλη που τα συνδέει είναι ευθεία. Για αυτό δεν έχει και έννοια, ακόμα και για B-splines μεγαλύτερου βαθμού, το weight του control point. Στην περίπτωση καμπύλου συνόρου του φορέα, θα πρέπει να διαταχθούν τα control points με ορισμένο τρόπο, όχι σε ευθεία γραμμή, και να καθοριστεί και το weight τους. Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζουμε εδώ, την περίπτωση του  $\frac{1}{4}$  μιας τετραγωνικής πλάκας που φέρει οπή (σχ. 9.8, η εικόνα είναι από το Ansys).



**Σχήμα 9.8** Απεικόνιση του φορέα: ¼ πλάκας φέρουσας οπή.

Το καμπύλο σύνορο που χρειάζεται να προσομοιώσουμε με μια καμπύλη NURBS είναι το τεταρτοκύκλιο της οπής. Αυτό μπορεί να γίνει –όπως είδαμε στην ενότητα 8.4- με μια NURBS δευτέρου βαθμού και τρία control points. Ωστόσο, με τρία control points δεν μπορεί να διακριτοποιηθεί το απέναντι σύνορο της πλάκας, αυτό με τη γωνία (το σύνορο αυτό, όπως και το τεταρτοκύκλιο αφορούν την ίδια παραμετρική διάσταση έστω  $v$ , ενώ τα άλλα δυο σύνορα αφορούν την παραμετρική διάσταση  $u$ ). Για αυτή την περίπτωση χρειάζονται τέσσερα control points με τα δυο ‘ενδιάμεσα’ να ταυτίζονται για να σχηματιστεί η γωνία –η NURBS καμπύλη θα διέρχεται από αυτά τα δυο και επίσης θα σχηματίζονται και δυο ευθείες αντί για καμπύλες τετραγωνικού βαθμού. Τα τέσσερα control points για την προσομοίωση του τεταρτοκυκλίου προκύπτουν με τη διαδικασία του knot insertion και έχουν υπολογιστεί στην ενότητα 8.4.

Επιλέγεται και για την άλλη παραμετρική διάσταση η χρήση τετραγωνικών B-splines. Έτσι στο παρακάτω σχ. 9.9 φαίνεται η θέση των control points του φορέα, καθώς και η απεικόνιση των elements και των κόμβων στον physical space. Στο σημείο (-4,4) βρίσκονται δυο control points που όπως είπαμε ταυτίζονται.

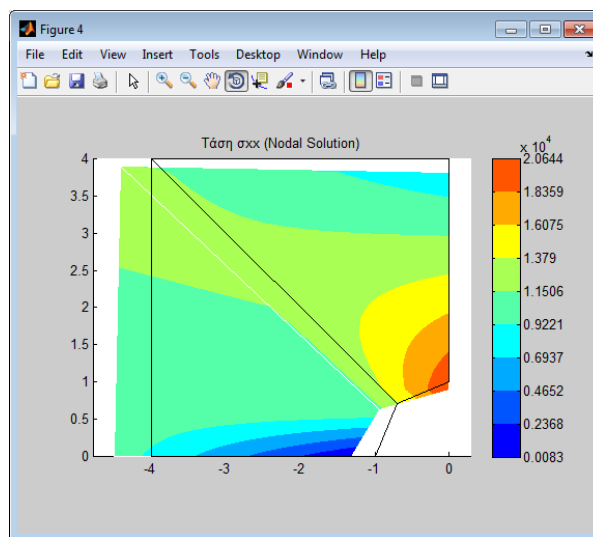


**Σχήμα 9.9** Απεικόνιση του φορέα – control points, elements και κόμβοι.

Χρησιμοποιούμε δυο τρόπους απεικόνισης παρότι πρόκειται για το ίδιο πράγμα. Απλά στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιείται ο τρόπος απεικόνισης που χρησιμοποιεί το Matlab για επιφάνειες με γνωστές τις κορυφές τους. Χρησιμοποιώντας την εντολή patch του Matlab μπορούμε να συνδέσουμε ένα πλήθος κορυφών με επιφάνειες. Ως είσοδο η εντολή λαμβάνει ένα μητρώο συνδεσιμότητας κόμβων, συνδέοντάς τους με ευθύγραμμα τμήματα. Έτσι παρουσιάζονται τα δυο elements του φορέα, με το μειονέκτημα ότι το τεταρτοκύκλιο παρουσιάζεται με δυο ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ των τριών κόμβων. Για αυτό το λόγο παραθέτουμε και τον κύκλο για να καταδείξουμε ότι ο ενδιάμεσος κόμβος βρίσκεται πάνω στο τεταρτοκύκλιο, δηλαδή πάνω στον φορέα.

Για να αρθεί κάθε αμφιβολία για την προσομοίωση, παραθέτουμε τα elements του φορέα, όπως αυτά κατασκευάζονται με τη διαδικασία κατασκευής μιας NURBS επιφάνειας. Εκεί είναι εμφανές ότι το σύνορο είναι όντως τεταρτοκύκλιο.

Την εντολή patch θα τη χρησιμοποιήσουμε ευρέως για το πλοτάρισμα των αποτελεσμάτων από τις αναλύσεις γιατί έχει ένα πλεονέκτημα. Σε κάθε κορυφή των πολυγώνων, μπορεί να λάβει μια ορισμένη τιμή ενός εξεταζόμενου μεγέθους, και να παρεμβάλει μια χρωματική κλίμακα στις τιμές αυτές δημιουργώντας χρωματικές απεικονίσεις του πεδίου του μεγέθους πάνω στον φορέα. Έτσι καταφέρνουμε να απεικονίσουμε το τασικό πεδίο πάνω στον φορέα όπως για παράδειγμα στο σχ. 9.10 για την πλάκα φέρουσα οπή, υπό καθαρό εφελκυσμό κατά τον άξονα x.



**Σχήμα 9.10** Απεικόνιση τάσης  $\sigma_{xx}$  πάνω στον παραμορφωμένο φορέα. Παρουσιάζεται επίσης ο απαραμόρφωτος φορέας.

#### 9.2.4 Επιβολή των boundary constraints

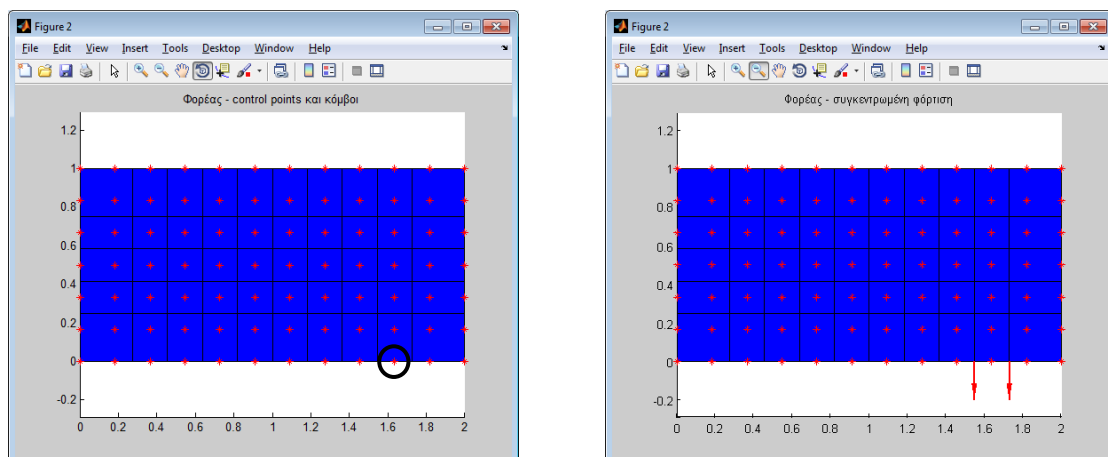
Εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση της FEM, μόνο που εδώ ασχολούμαστε με τα control points του φορέα και όχι με τους κόμβους του. Τα control points είναι αυτά στα οποία θα

υπολογιστούν οι μετατοπίσεις, άρα είναι και αυτά στα οποία θα εφαρμοστούν οι συνθήκες στήριξης ή φόρτισης.

Το πρόσημο του εκάστοτε φορτίου –είτε συγκεντρωμένου, είτε κατανεμημένου- λαμβάνεται με βάση τους καθολικούς άξονες του προβλήματος. Δεν γίνεται κάποια θεώρηση για το πρόσημο ανάλογα με το αν έχω θλίψη ή εφελκυσμό.

Για τα συγκεντρωμένα φορτία εισάγεται ένα διάνυσμα FEX, με μέγεθος όσο το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του φορέα (δηλαδή  $2 \cdot \text{πλήθος των control points}$ ). Ωστόσο φυσική σημασία έχει η φόρτιση μόνο των β.ε. που ανήκουν σε γωνιακά control points του φορέα, δηλαδή στα άκρα του patch (οι υπόλοιποι β.ε. θα πρέπει να έχουν μηδενικά συγκεντρωμένα φορτία). Και αυτό γιατί, όπως έχουμε πει, τα control points δεν έχουν την ίδια έννοια με τους κόμβους όπως τους ξέρουμε από τη FEM, και έτσι δεν βρίσκονται πάνω στο φορέα, για να μπορεί να φορτιστεί αυτός με ένα συγκεντρωμένο φορτίο. Μόνο τα ακραία control points του patch, βρίσκονται επί του φορέα, λόγω παρεμβολής εκεί, και άρα έχει φυσικό νόημα να φέρουν συγκεντρωμένο φορτίο. Στην περίπτωση που θέλουμε να επιβάλλουμε συγκεντρωμένο φορτίο σε κάποιο σημείο του φορέα, θα πρέπει να χωρίσουμε σε εκείνο το σημείο σε δυο patches, έτσι ώστε το control point εκεί να βρίσκεται πάνω στο φορέα.

Ένας ακόμα λόγος που στο σημείο του physical space όπου θέλουμε συγκεντρωμένο φορτίο πρέπει να υπάρχει όριο ενός patch, είναι το ότι μόνο έτσι ξέρουμε ότι το σημείο αυτό θα ταυτίζεται με ένα control point. Αντίστροφα, βάζοντας συγκεντρωμένο φορτίο σε ένα control point υπάρχει η περίπτωση να εμφανιστεί φορτίο σε δυο σημεία του φορέα (δηλαδή κόμβους του φορέα). Για παράδειγμα στον φορέα του σχ. 9.11 φορτίζουμε ένα μόνο control point (αυτό που είναι κυκλωμένο) με συγκεντρωμένο φορτίο κατά Y ίσο με 2000. Αυτό έχει σαν συνέπεια να εμφανιστεί συγκεντρωμένη δύναμη σε δυο κόμβους του φορέα. Μάλιστα η συγκεντρωμένη αυτή δύναμη σε κάθε κόμβο είναι ίση με 500.



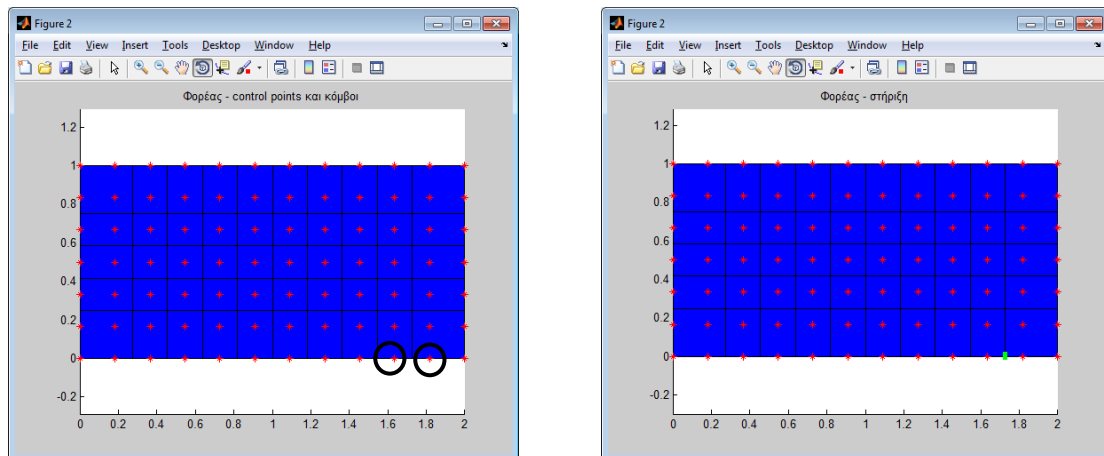
**Σχήμα 9.11** Οι τετάρτου και πέμπτου βαθμού B-splines σε knot vector με δέκα knot spans.

Αν από την άλλη φορτίσουμε με την ίδια δύναμη 2000 το control point που βρίσκεται αμέσως δεξιότερα του κυκλωμένου, εμφανίζεται δύναμη μόνο στον έναν κόμβο, τον δεξιό, που πάλι είναι

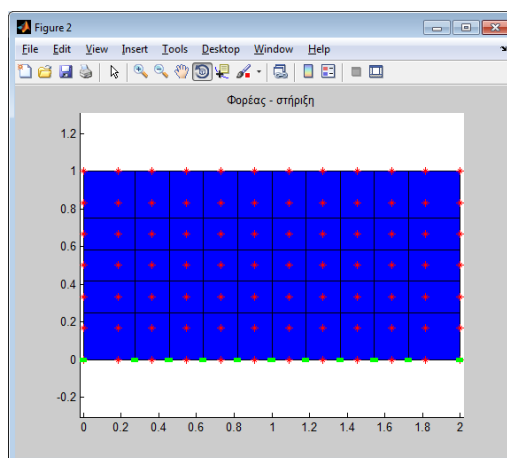
ίση με 500. Βλέπουμε λοιπόν ότι φορτίζοντας ένα control point δεν είμαστε σίγουροι για την επίδραση που αυτό θα έχει στον φορέα. Συνεπώς πρέπει να χωρίζουμε σε patches στα σημεία συγκεντρωμένης φόρτισης.

Κάτι ανάλογο ισχύει και για τις συνθήκες στήριξης. Το διάνυσμα των constraints αφορά τα control points, όπως ακριβώς το διάνυσμα των συγκεντρωμένων δυνάμεων, και έχει για κάθε βαθμό ελευθερίας τιμές 0 και 1. Για τους ίδιους λόγους με παραπάνω, η επιβολή στήριξης σε control point ενέχει αμφιβολίες για το τι είδους στήριξη θα επιβληθεί στον φορέα. Απόλυτα σίγουρη είναι η επιβολή στήριξης στα άκρα ενός patch συνεπώς για κάθε μεμονωμένη στήριξη του φορέα, θα πρέπει το σημείο εκεί να διακριτοποιείται ως άκρο patch.

Ωστόσο, στην πολύ συνηθισμένη περίπτωση όπου έχουμε στήριξη μιας ολόκληρης πλευράς ενός διδιάστατου, ή μιας ολόκληρης έδρας ενός τριδιάστατου φορέα, ο οποίος διακριτοποιείται ως ένα patch, οπότε η στήριξη αφορά μια ολόκληρη παραμετρική διάσταση, τότε δεν υπάρχει κάποιο σκοτεινό σημείο, καθώς η στήριξη επιβάλλεται σε όλους τους κόμβους πάνω σε αυτή την πλευρά.



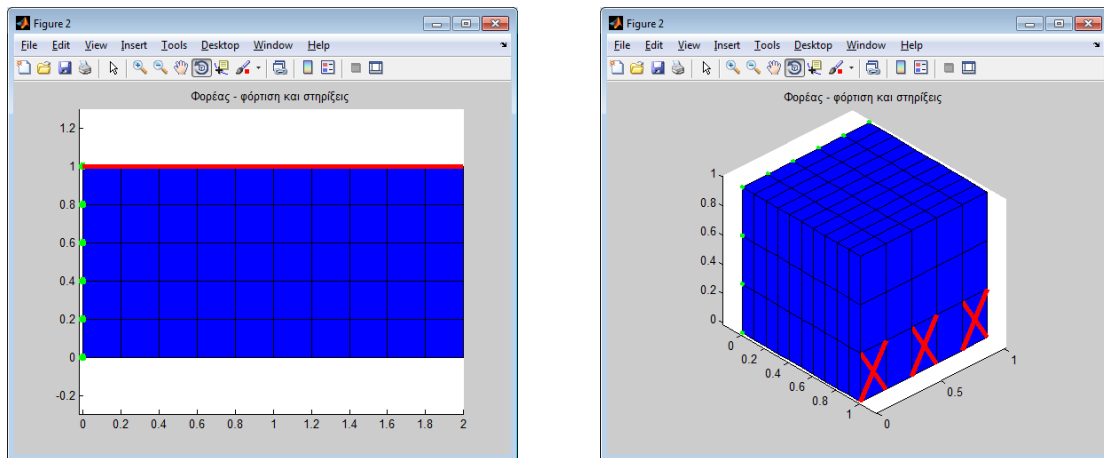
**Σχήμα 9.12** Οι τετάρτου και πέμπτου βαθμού B-splines σε knot vector με δέκα knot spans.



**Σχήμα 9.13** Παγίωση μιας ολόκληρης παραμετρικής διάστασης ενός patch.

Στο σχ. 9.12, οποιοδήποτε control point, από τα δυο κυκλωμένα, και αν παγιώσουμε κατά π.χ. Υ, κανένα constraint δεν επιβάλλεται. Αν παγιώσουμε και τα δυο, τότε επιβάλλεται constraint στον κόμβο όπως φαίνεται στο σχήμα (αυτός είναι ο συμβολισμός για το constraint, που θα υιοθετήσουμε και στα παρακάτω, εδώ κατά την κατακόρυφη διεύθυνση). Αν ωστόσο στο ίδιο πρόβλημα, παγιώσουμε όλα τα control points της κάτω πλευράς της πλάκας π.χ. κατά Χ, τότε θα παγιωθούν ασφαλώς όλοι οι κόμβοι αυτής της πλευράς, και επίσης όχι κάποιος άλλος πέραν αυτών.

Όσον αφορά την κατανεμημένη φόρτιση, αυτή τη χειριζόμαστε όπως ακριβώς και στη FEM. Κατανεμημένο φορτίο ορίζεται πάνω στην πλευρά ενός element. Αυτή αναλύεται στα ισοδύναμα συγκεντρωμένα φορτία στα control points που αποτελούν την πλευρά του συγκεντρωμένου element, με τις ίδιες ακριβώς αρχές όπως γίνεται στη FEM. Ο κώδικας είναι έτσι δομημένος που ένα element μπορεί σε μια μόνο πλευρά του να δέχεται κατανεμημένο φορτίο, ενώ τηρούμε την αρίθμηση των πλευρών όπως την περιγράψαμε πιο πάνω.



**Σχήμα 9.14** Συμβολισμός κατανεμημένης φόρτισης σε element, στο 2D και στο 3D πρόβλημα.

Στο σχ. 9.14 φαίνεται ο συμβολισμός της κατανεμημένης φόρτισης σε 2D και 3D φορέα.

### 9.2.5 Σχηματισμός μητρώων του φορέα – επιβολή συνοριακών συνθηκών – επίλυση

Μόλις ολοκληρωθούν τα παραπάνω είμαστε έτοιμοι να περάσουμε στη διαδικασία σχηματισμού των μητρώων του φορέα. Η διαδικασία είναι ακριβώς ίδια με αυτή της FEM, τα μητρώα είναι τα ίδια, δηλαδή το μητρώο δυσκαμψίας  $K$  και το μητρώο φόρτισης  $F$ . Το μόνο που αλλάζει είναι ότι στη θέση των κόμβων χρησιμοποιούνται τα control points, ενώ υπεισέρχονται οι διαφορές για τα elements που είδαμε στην αρχή του κεφαλαίου.

Για τον υπολογισμό των μητρώων θα χρησιμοποιηθεί η διαδικασία της αριθμητικής ολοκλήρωσης που εφαρμόζεται και στην FEM. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιηθούν οι τιμές των συναρτήσεων σχήματος NURBS, δηλαδή οι τιμές των Bsplines, στα Gauss Points, που έχουν υπολογιστεί μέσω της υπορουτίνας Bsplines. Επίσης στα μητρώα υπεισέρχονται και οι παράγωγοι των συναρτήσεων



σχήματος, άρα θα χρησιμοποιηθούν και οι τιμές των παραγώγων των Bsplines στα Gauss Points, που υπολογίζονται μέσω της υπορουτίνας DerBsplines.

Η διαδικασία συνίσταται από τρία loops, το πρώτο (εξωτερικό loop) ‘μετράει’ στα elements του φορέα, το αμέσως πιο εσωτερικό ‘μετράει’ στα Gauss Points του κάθε element και το πιο εσωτερικό ‘μετράει’ στα control points του κάθε element, δηλαδή στις τιμές των συναρτήσεων σχήματος του κάθε element, στο συγκεκριμένο Gauss Point όπου βρισκόμαστε από το 2<sup>ο</sup> loop. Φυσικά το κάθε loop από τα παραπάνω, συνίσταται από δυο loop, το κάθε ένα από τα οποία αφορά την κάθε παραμετρική διάσταση  $u$  και  $v$ .

Οι παράγωγοι μιας συνάρτησης σχήματος NURBS  $A(u,v)$  σε κάθε παραμετρική διάσταση δίδονται από τη σχέση

$$\frac{\partial A(u,v)}{\partial u} = w_{ij} M_j(v) \left[ \frac{\frac{\partial N_i(u)}{\partial u} \sum \sum N_i(u) w_{ij} M_j(v) - N_i(u) \sum \sum \frac{\partial N_i(u)}{\partial u} w_{ij} M_j(v)}{\left( \sum \sum N_i(u) w_{ij} M_j(v) \right)^2} \right]$$

$$\frac{\partial A(u,v)}{\partial v} = w_{ij} N_i(u) \left[ \frac{\frac{\partial M_j(v)}{\partial v} \sum \sum N_i(u) w_{ij} M_j(v) - N_j(v) \sum \sum N_i(u) w_{ij} \frac{\partial M_j(v)}{\partial v}}{\left( \sum \sum N_i(u) w_{ij} M_j(v) \right)^2} \right].$$

Στη διαδικασία υπολογισμού του μητρώου δυσκαμψίας του κάθε στοιχείου θα πρέπει να υπολογιστούν οι παράγωγοι αυτές στα G.P. του στοιχείου. Συνεπώς για κάθε ένα G.P. θα πρέπει να υπολογιστούν εκτός των δικών του Bsplines και DerBsplines, οι αντίστοιχες τιμές και για τα υπόλοιπα G.P. αφού όπως βλέπουμε στους όρους υπεισέρχονται αθροίσματα σε όλους τους όρους. Όπως βλέπουμε αυτά είναι τριών ειδών αθροίσματα, τα εξής:

$$\sum \sum N_i(u) w_{ij} M_j(v) \text{ το οποίο υπεισέρχεται είτε και στην πρώτη δύναμη και εις το τετράγωνο,}$$

$$\sum \sum \frac{\partial N_i(u)}{\partial u} w_{ij} M_j(v), \text{ και}$$

$$\sum \sum N_i(u) w_{ij} \frac{\partial M_j(v)}{\partial v}.$$

Για το λόγο αυτό, υπολογίζεται το μητρώο Ginomeno, στο σημείο αυτό του κώδικα, που περιέχει τους πιο πάνω όρους.

Μόλις υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων σχήματος ως προς  $u$  και  $v$ , ακολουθείται η ίδια διαδικασία με της FEM, που περικλείει τον υπολογισμό του Ιακωβιανού μητρώου, και εν συνεχεία του μητρώου  $\mathbf{B}$  των παραμορφώσεων. Υπολογίζονται έτσι τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου  $\mathbf{k}^e$  μέσω της σχέσης άθροισης των τιμών στα Gauss Points

$$\mathbf{k}^e = \sum_{int=1}^{NN1 \cdot NN2} \mathbf{B}^T(u_{int}, v_{int}) \cdot \mathbf{D}^e \cdot \mathbf{B}(u_{int}, v_{int}) \cdot \mathbf{J}(u_{int}, v_{int}) \cdot W_{int} t^e$$

όπου  $\mathbf{B}$  το μητρώο παραμορφώσεων στα G.P.,  $\mathbf{D}^e$  το ελαστικό μητρώο του element,  $t^e$  το πάχος του,  $J$  το ιακωβιανό μητρώο και  $\mathbf{W}$  τα βάρη των G.P. Το πιο πάνω άθροισμα είναι διπλό, δηλαδή πάνω σε κάθε μια από τις παραμετρικές διάστασεις με  $u_{int}$  και  $v_{int}$  τις τετμημένες των G.P. σε κάθε παραμετρική διάσταση.

Παράλληλα με τον σχηματισμό του μητρώου  $\mathbf{k}^e$  του στοιχείου, και μέσα στο ίδιο loop των συναρτήσεων σχήματος (των control points), μπορεί να υπολογιστεί και το τοπικό διάνυσμα των ισοδύναμων δράσεων  $\mathbf{f}^e$  εφόσον το στοιχείο δέχεται σε κάποια του πλευρά, κατανεμημένη φόρτιση. Και εδώ υπεισέρχονται οι συναρτήσεις σχήματος NURBS και οι παράγωγοί τους, μόνο που μας ενδιαφέρουν μόνον τα control points που βρίσκονται πάνω στην φορτιζόμενη πλευρά. Οι καταχωρήσεις στο διάνυσμα φόρτισης προκύπτουν από μια διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης, μόνο που τώρα πρόκειται για επικαμπύλια ολοκληρώματα παρά επιφανειακά όπως ήταν στο  $\mathbf{k}^e$ . Θα πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι μόνο μια πλευρά του τετραπλευρικού στοιχείου μπορεί να φορτίζεται με κατανεμημένο φορτίο, το οποίο μπορεί να είναι πλάγιο (δηλαδή κατανεμημένο φορτίο και κατά  $x$  και κατά  $y$ ). Επίσης η θεώρηση που κάνουμε για τις πλευρές του στοιχείου φαίνεται στο σχ. 9.5.

Ο υπολογισμός των ισοδύναμων δράσεων από ένα κατανεμημένο φορτίο πάνω σε μια πλευρά, προκύπτει από τη σχέση

$$\mathbf{f}^e = \int_{S_e} [\mathbf{A}^s]^T \{ \mathbf{f}^s \} dS_e$$

όπου  $\mathbf{A}^s$  οι τιμές των συναρτήσεων σχήματος NURBS πάνω στην πλευρά και  $\{ \mathbf{f}^s \}$  το διάνυσμα της φόρτισης πάνω στην πλευρά. Καθότι επί μιας πλευράς κινούμαστε μόνο σε μια διάσταση του παραμετρικού χώρου, άρα οι συναρτήσεις σχήματος NURBS είναι οι γραμμικές

$$A^s(u,v) = A^s(u) = \frac{N_i(u)w_{ij}}{\sum N_i(u)w_{ij}}$$

όπου  $N_i$  οι συναρτήσεις B-splines των control points της φορτιζόμενης πλευράς.

Χρειάζεται η παραγωγή και εδώ, των συναρτήσεων σχήματος για τον υπολογισμό του  $\det(\mathbf{J})$  για να εκτελέσουμε την αριθμητική ολοκλήρωση, συνεπώς χρειάζεται ο υπολογισμός τόσο των πιο πάνω συναρτήσεων σχήματος όσο και των παραγώγων τους. Ισχύει ότι

$$\frac{\partial A^s(u)}{\partial u} = \frac{\frac{\partial N_i(u)}{\partial u} w_{ij} (\sum N_i(u)w_{ij}) - N_i(u)w_{ij} \left( \sum \frac{\partial N_i(u)}{\partial u} w_{ij} \right)}{(\sum N_i(u)w_{ij})^2}$$

ψενώ είναι  $dl = \det(\mathbf{J}^s) d\xi$  όπου

$$\det(\mathbf{J}^s) = \left[ \left( \frac{\partial x^s}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y^s}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ακολουθεί η συνάθροιση στο καθολικό μητρώο δυσκαμψίας και το καθολικό διάνυσμα φόρτισης, η επιβολή των constraints (διαγραφή γραμμών-στηλών) και η επίλυση.

Έχουμε ήδη διευκρινίσει, ότι η επίλυση υπολογίζει τις μετατοπίσεις UX και UY στα control points του φορέα. Με τα βήματα που περιγράφηκαν στα προηγούμενα μπορούμε να υπολογίσουμε τις μετατοπίσεις στους κόμβους του φορέα και να σχεδιάσουμε τον παραμορφωμένο φορέα (σχ. 9.10).

### 9.2.6 Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

Τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται στα Gauss Points του στοιχείου, με την ίδια ακριβώς διαδικασία όπως γίνεται και στην FEM. Έτσι μέσω της σχέσης  $\sigma^e = \mathbf{EB}^e \mathbf{U}^e$  υπολογίζονται οι τάσεις στα G.P. του element (μητρώο *tasi*) ενώ μέσω της σχέσης  $\mathbf{R}^e = \int_{S^e} [\mathbf{B}^e]^T \sigma^e dS^e$  υπολογίζονται οι ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις του element (διάνυσμα *FFe*).

Ακολουθεί ο υπολογισμός των τάσεων στους κόμβους του κάθε element, από αυτές στα G.P. του. Χρησιμοποιούμε ένα μητρώο AA και μέσω αυτού κάνουμε γραμμικό extrapolation από τα G.P. στους τέσσερεις κόμβους. Για το μητρώο AA χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις σχήματος του τετρακομβικού ισοπαραμετρικού στοιχείου (γραμμικού) και λαμβάνονται οι τάσεις από τα τέσσερα 'γωνιακά' G.P. δηλαδή αυτά που είναι τα πιο κοντινά στους κόμβους.

Οι τάσεις που υπολογίζονται κατ' αυτόν τον τρόπο δεν λαμβάνουν κοινές τιμές στους κοινούς κόμβους των γειτονικών elements (στη FEM ονομάζεται element solution).

Για τον υπολογισμό του εξομαλυμένου τασικού πεδίου χρειάζεται να κάνουμε μια διαδικασία averaging των εντατικών μεγεθών των elements, στους κοινούς τους κόμβους. Αυτή γίνεται με την απλή διαδικασία του μέσου όρου των εντατικών μεγεθών εκεί, αφού πρώτα προσδιοριστεί ποιοι κόμβοι είναι κοινοί και σε ποια elements ανήκει ο καθένας.

Κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε για όλο τον φορέα εξομαλυμένο πεδίο εντατικών μεγεθών (στη FEM ονομάζεται nodal solution).



# 10

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ

---

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τις αναλύσεις που διενεργήθηκαν με τον κώδικα. Μέσω των αναλύσεων κατέστη δυνατή η αποσαφήνιση των διαφόρων εννοιών της Ισογεωμετρικής Μεθόδου.

### 10.1 Γενικά περί των αναλύσεων

Αναλύθηκαν διάφορες περιπτώσεις φορέων, είτε διδιάστατων είτε τριδιάστατων, στο προγραμματιστικό περιβάλλον **Matlab® R2010b**, και έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων με το ευρέως χρησιμοποιούμενο εμπορικό πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων **ANSYS® Release 13.0**. Επιλέχθηκε κοινό υλικό για τις αναλύσεις με μέτρο ελαστικότητας  $E=10^5$  και λόγο Poisson  $\nu=0.3$ . Στις διδιάστατες περιπτώσεις ακολουθήθηκε η θεώρηση του plane stress with thickness, οπότε εισάγεται σαν σταθερά το πάχος του φορέα ενώ τα κατανεμημένα φορτία εισάγονται σε μονάδες τάσης.

Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιούνται γραμμικές συναρτήσεις NURBS (αποτελούνται δηλαδή από γραμμικές B-splines σε κάθε μια από τις παραμετρικές διαστάσεις του προβλήματος), τα αποτελέσματα πρέπει να ταυτίζονται με αυτά του ANSYS για γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία. Αυτό όντως ισχύει στη διδιάστατη περίπτωση όπου τα αποτελέσματα των αναλύσεων είναι

πανομοιότυπα μεταξύ τους. Στην περίπτωση της τριδιάστατης ανάλυσης αυτό δεν ισχύει και ίσως οφείλεται σε κάποια παρατυπία κατά τον προγραμματισμό της Ισογεωμετρικής Μεθόδου στις τρεις διαστάσεις. Δεν είχαμε χρόνο να διερευνήσουμε περισσότερο το πρόβλημα και να βρούμε ποιο μπορεί να είναι το λάθος στον προγραμματισμό, ωστόσο θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα όπως προκύπτουν από τον κώδικα που αναπτύχθηκε.

Για τετραγωνικού βαθμού NURBS, έχουμε τη δυνατότητα να συγκρίνουμε με τα ανώτερου βαθμού πεπερασμένα στοιχεία του ANSYS. Είναι αναμενόμενο ότι θα υπάρχει διαφορά στις αναλύσεις, και αυτό που αναζητείται είναι η σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Οι διαφορές οφείλονται αφενός στους λόγους που έχουμε ήδη παραθέσει στα προηγούμενα (οι τετραγωνικές NURBS δεν είναι ίδιες με τις συναρτήσεις που χρησιμοποιούν τα τετραγωνικά πεπερασμένα στοιχεία, τα control points δεν ταυτίζονται με τους κόμβους, το πλήθος τους δεν είναι ίδιο κλπ) και αφετέρου στο γεγονός ότι το ανώτερο στοιχείο του Ansys δεν είναι εννεακομβικό αλλά οκτακομβικό (serendipity element) σε αντίθεση με το ισογεωμετρικό τετραγωνικό element που αποτελείται από  $3 \times 3 = 9$  control points.

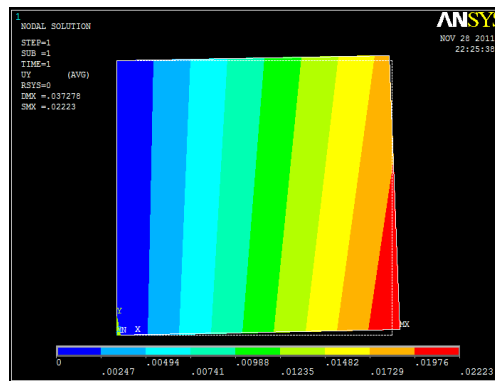
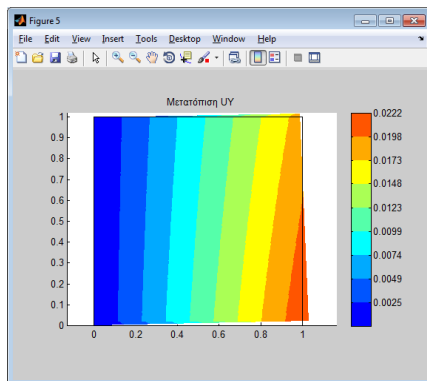
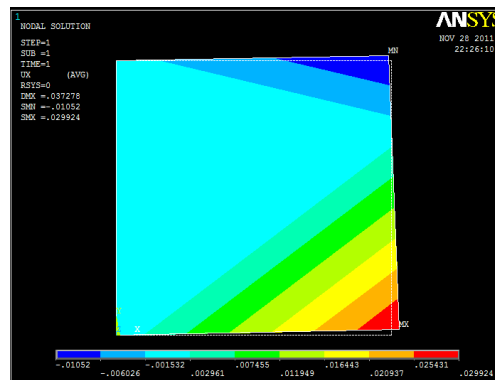
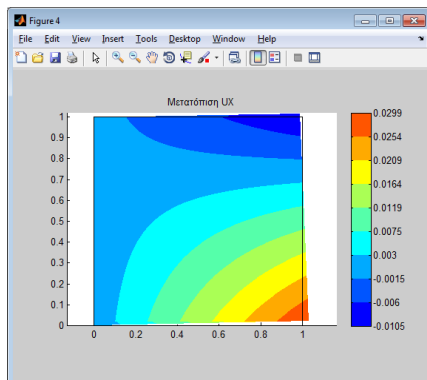
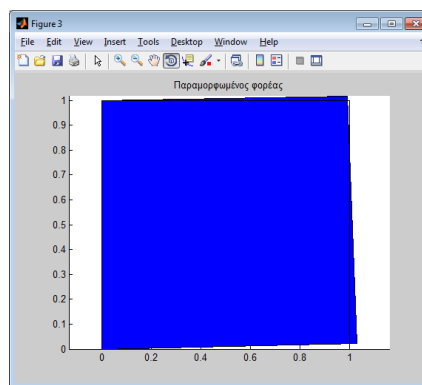
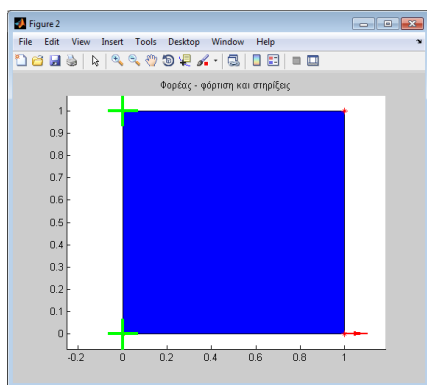
Στις αναλύσεις επιλέχθηκε η ίδια διακριτοποίηση του φορέα για τις δυο μεθόδους, δηλαδή ίδιος αριθμός elements. Έτσι οπτικά φαίνεται ίδια η διακριτοποίηση του φορέα στις δυο μεθόδους.

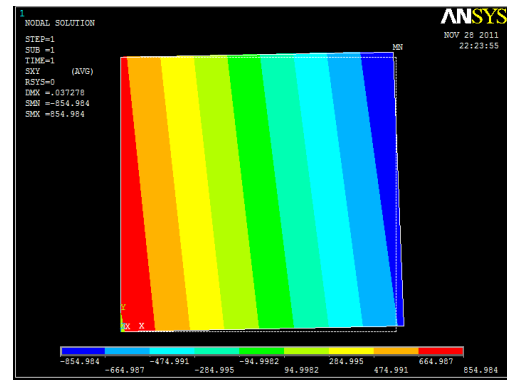
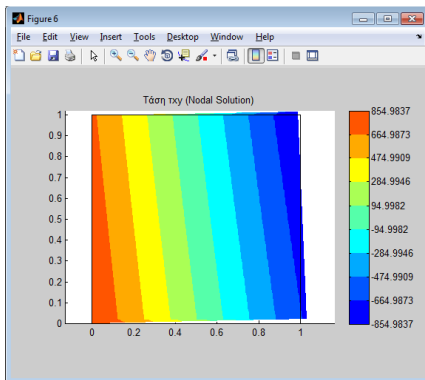
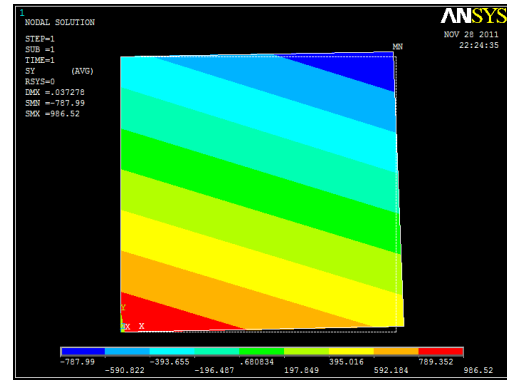
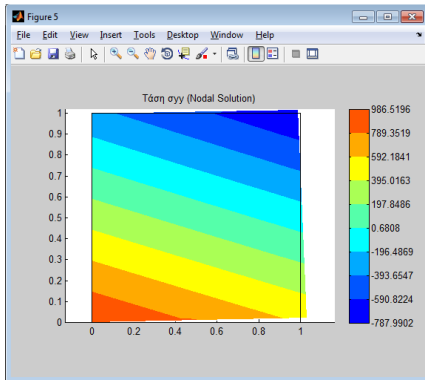
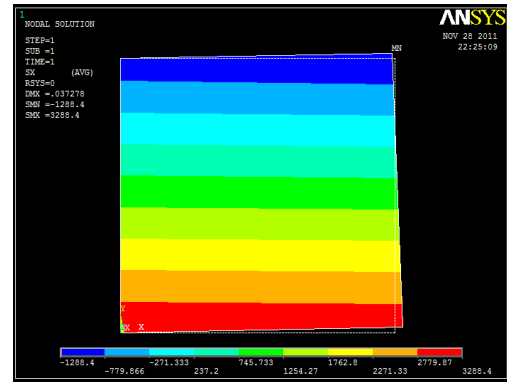
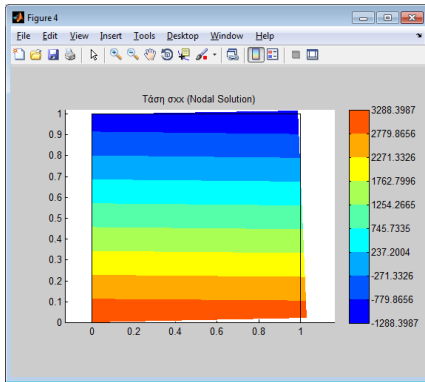
## 10.2 Διδιάστατες αναλύσεις (2D)

### 10.2.1 Τετραγωνική πλάκα υπό συγκεντρωμένο φορτίο (γραμμικές συναρτήσεις NURBS)

Αρχικά μοντελοποιείται ο φορέας με ένα ισογεωμετρικό στοιχείο. Παρακάτω παρουσιάζεται η γεωμετρία του φορέα, μαζί με τη διακριτοποίηση (control points, κόμβοι και elements) και τις συνοριακές συνθήκες. Ο φορέας είναι πακτωμένος ενώ το φορτίο ισούται με 1000. Το υλικό έχει  $E=10^5$  και λόγο Poisson  $\nu=0.3$  (όπως έχουμε πει αυτό θα είναι το υλικό για όλες τις αναλύσεις) ενώ το πάχος εισάγεται ως σταθερά (Plane Stress with thickness) και είναι ίσο με 1.

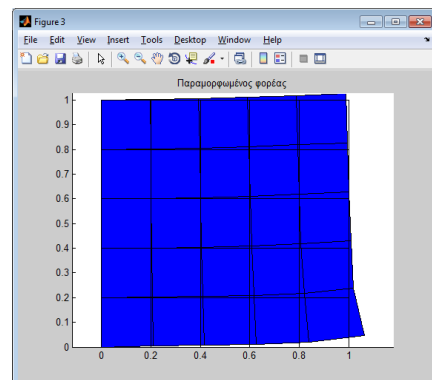
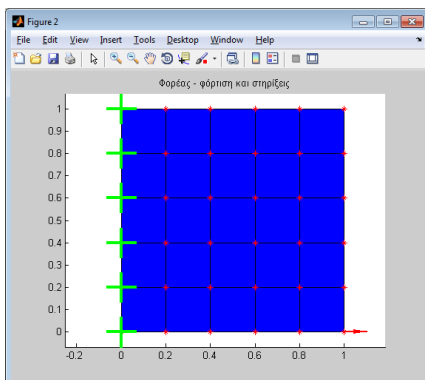
Ακολουθούν οι contours για τις μετατοπίσεις και για τις τάσεις τόσο από τον κώδικα όσο και από το ANSYS.





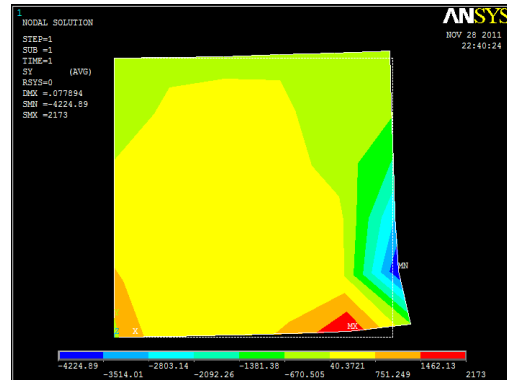
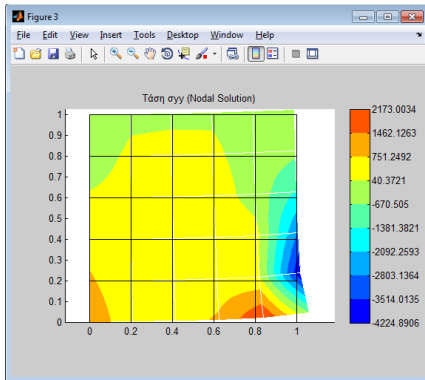
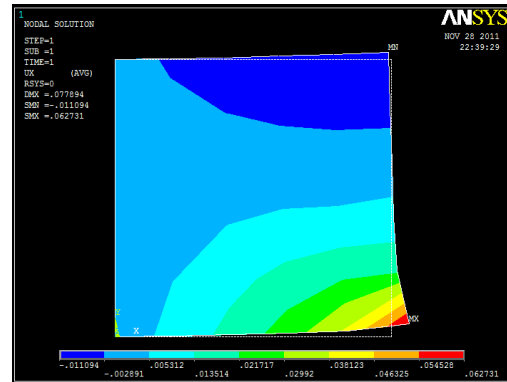
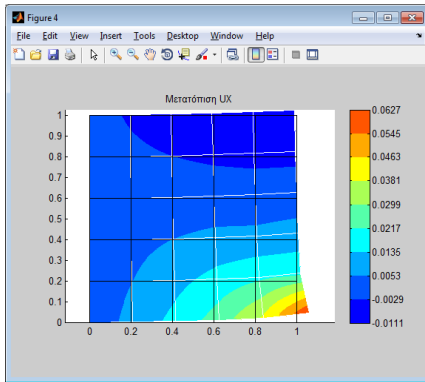
Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι πανομοιότυπα και από τις δυο μεθόδους.

Αν πυκνώσουμε την διακριτοποίηση έχουμε την παρακάτω περίπτωση:



και τα αποτελέσματα είναι επίσης πανομοιότυπα, πχ για την  $u_x$  και την  $\sigma_y$ :



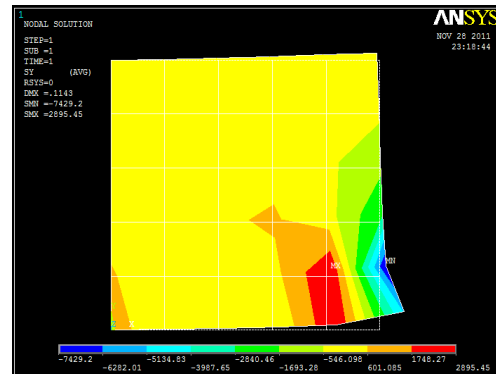
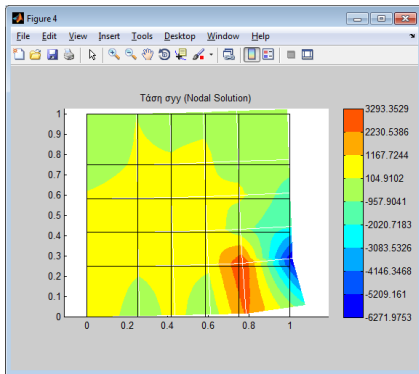


Η ομοιότητα των αποτελεσμάτων στη γραμμική περίπτωση δείχνει ότι ο τρόπος κωδικοποίησης της μεθόδου στη διδιάστατη περίπτωση μάλλον έχει γίνει σωστά.

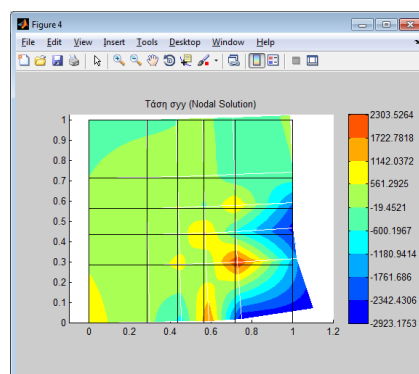
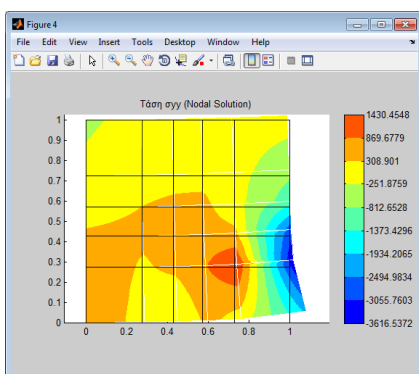
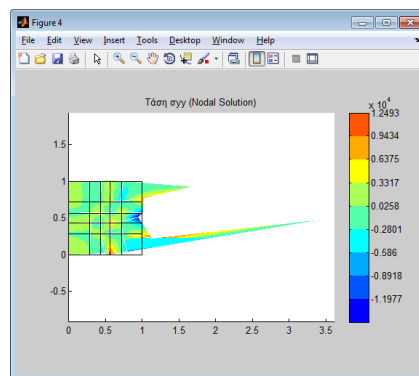
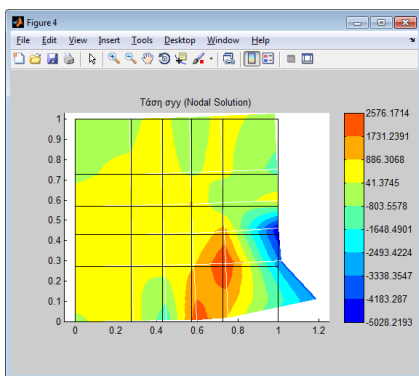


## 10.2.2 Τετραγωνική πλάκα με συγκεντρωμένο φορτίο (ανώτερου βαθμού NURBS)

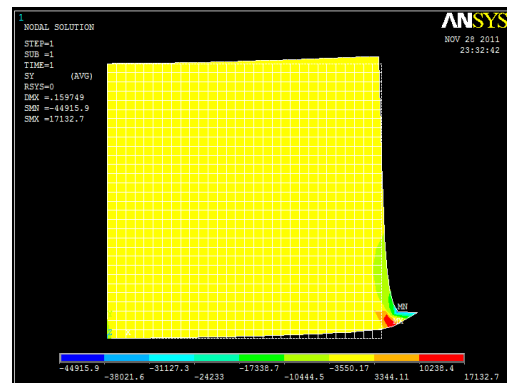
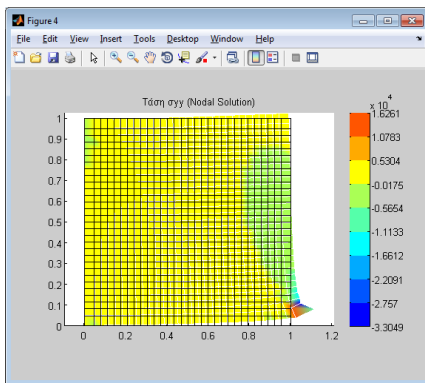
Για τον ίδιο φορέα χρησιμοποιούμε τετραγωνικές NURBS. Στο ANSYS το αντίστοιχο στοιχείο είναι οκτακομβικό (serendipity). Για την τάση  $\sigma_y$  λοιπόν που είδαμε πιο πάνω έχουμε (διακριτοποίηση 5x5):



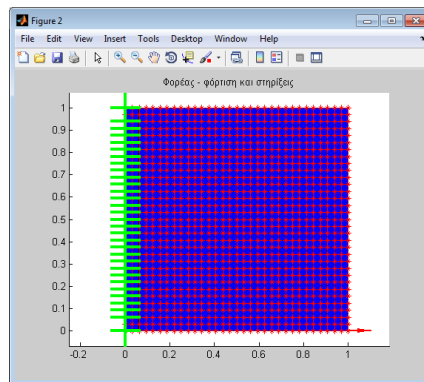
Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα διαφέρουν μεταξύ τους, ωστόσο είναι κοντά. Πιστεύουμε ότι πολύ σημαντικό ρόλο παίζει το ότι για ανώτερου βαθμού NURBS δεν έγινε εφικτό να είναι κανονικοποιημένος ο κάρναβος (με κατάλληλη επιλογή της θέσης των control points), οπότε η τάση που παρουσιάζεται εδώ δεν είναι στο ίδιο σημείο με την τάση που παρουσιάζεται στο μοντέλο του Ansys. Αυτό γίνεται ακόμα πιο εμφανές σε ακόμα μεγαλύτερου βαθμού NURBS π.χ. παρακάτω για τρίτου και τετάρτου βαθμού (στην πάνω γραμμή για τάξη αριθμητικής ολοκλήρωσης 2 και στην κάτω για 3). Παρατηρούμε ότι για τάξη ολοκλήρωσης 2 η περίπτωση τετάρτου βαθμού αποκλίνει:



Με πύκνωση της διακριτοποίησης μειώνονται οι διαστάσεις των elements οπότε οι λύσεις πλησιάζουν μεταξύ τους πχ για 30x30 τετραγωνικά elements οι δυο αναλύσεις δίνουν:



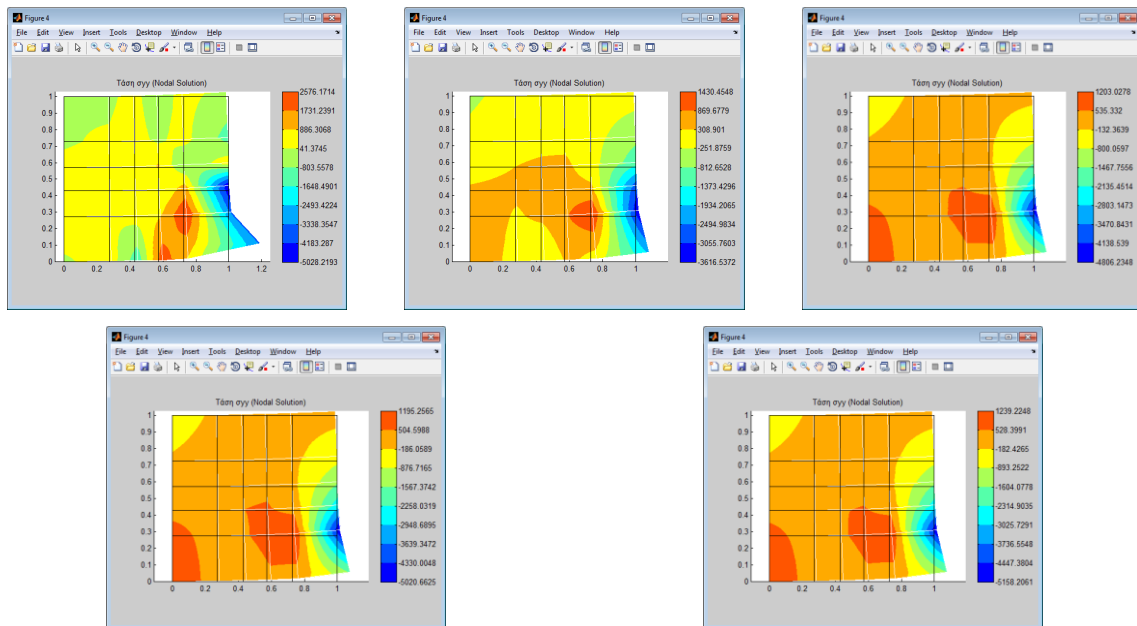
που είναι κοντά αν αναλογιστούμε ότι το ακραίο element στην ισογεωμετρική μέθοδο είναι σχεδόν διπλάσιο από τα ενδιάμεσα (φαίνεται από τις στηρίξεις στο παρακάτω σχήμα στην περίπτωση του κανάβου 30x30).



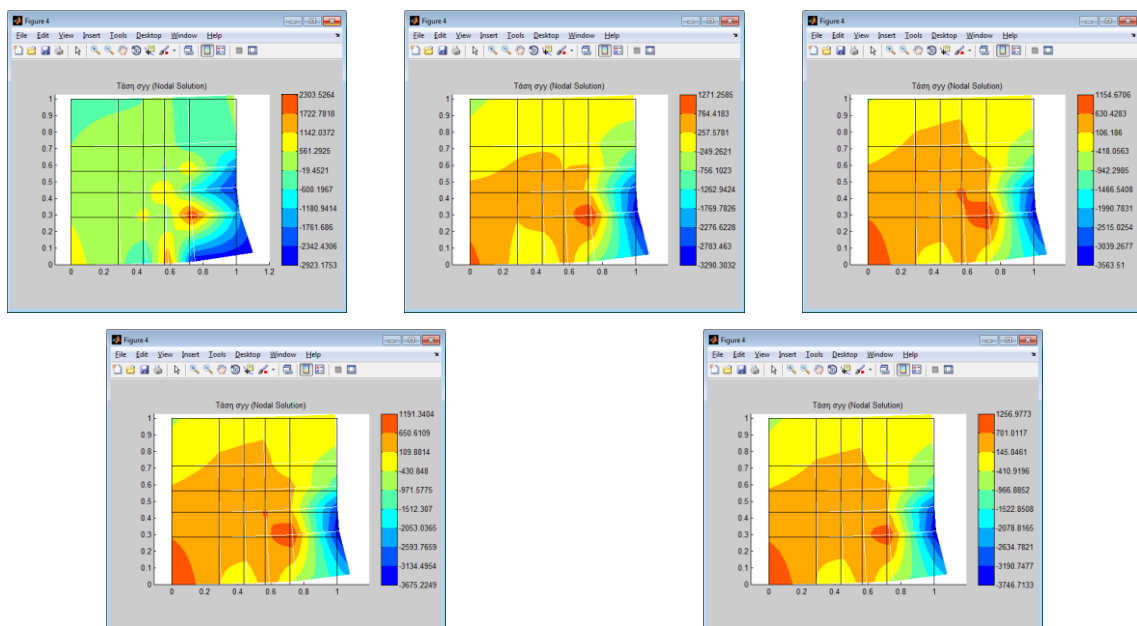
Από αυτό το πρόβλημα ανακύπτει το ζήτημα της μεθόδου με το οποίο δεν προλάβαμε να ασχοληθούμε, του τρόπου επιλογής δηλαδή της θέσης των control points έτσι ώστε να προκύπτει κανονικοποιημένη διάταξη των κόμβων και των elements.

Παρακάτω παραθέτουμε χωρίς να έχουμε κάποια εξήγηση, την πορεία της  $\sigma_x$  καθώς αυξάνεται η τάξη αριθμητικής ολοκλήρωσης του προβλήματος. Στην πρώτη περίπτωση παραθέτουμε την περίπτωση των κυβικών NURBS και τάξη ολοκλήρωσης από 2 έως 6, ενώ η δεύτερη είναι η περίπτωση των τετάρτου βαθμού NURBS και τάξη ολοκλήρωσης από 3 έως 7.

Βλέπουμε ότι και για τις δυο περιπτώσεις επέρχεται σύγκλιση των αποτελεσμάτων για τάξη 4, αλλά η σύγκλιση δεν είναι στις ίδιες τιμές για τις δυο περιπτώσεις.



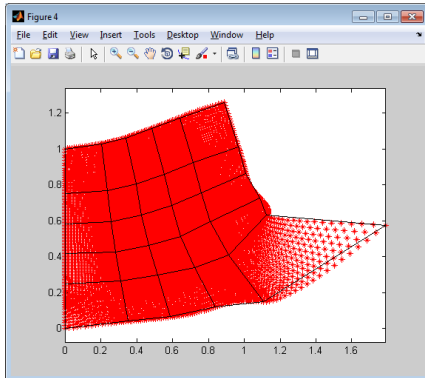
Κυβική περίπτωση



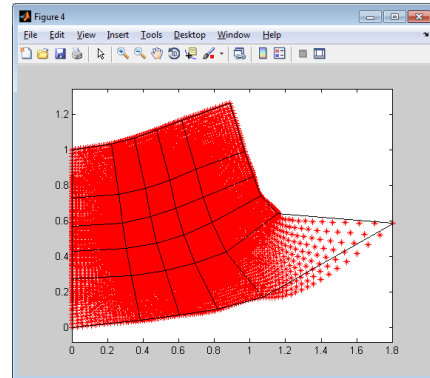
Περίπτωση 4<sup>ου</sup> βαθμού

Κάτι ακόμα που ίσως αξίζει να δούμε, είναι την ακριβή παραμόρφωση του φορέα. Έχουμε πει πως με την εντολή `patch` του Matlab για την αναπαράσταση του φορέα και των εντατικών μεγεθών, έχουμε σύνδεση των κόμβων των elements με ευθύγραμμα τμήματα. Ωστόσο μπορούμε να σχεδιάσουμε τον παραμορφωμένο φορέα με τη διαδικασία παραγωγής NURBS επιφανειών γνωρίζοντας τις μετατοπισμένες θέσεις των control points. Παρακάτω παρουσιάζουμε την περίπτωση διακριτοποίησης 5x5 (αραιής διακριτοποίησης για να είναι εμφανής η διαφορά της προσέγγισης της γεωμετρίας μέσω του `patch` και της πραγματικής γεωμετρίας του φορέα) και για

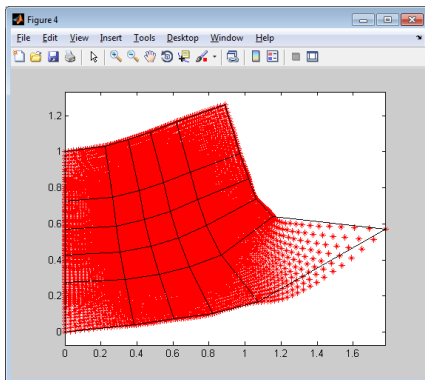
φορτίο ίσο με 10000 αντί για 1000, για μεγαλύτερη παραμόρφωση και άρα πιο εμφανή αποτελέσματα. Για βαθμό NURBS 3 και άνω, δεν αρκεί τάξη αριθμητικής ολοκλήρωσης 2, για αυτό αναφέρουμε και την τάξη ολοκλήρωσης που χρησιμοποιήθηκε.



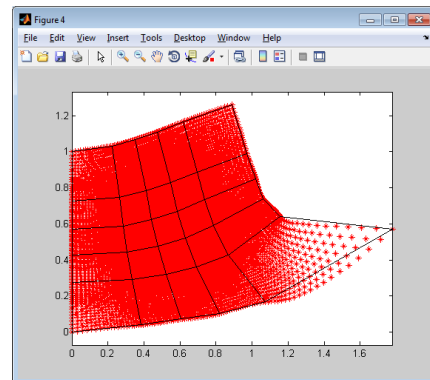
Βαθμ. NURBS: 2 και τάξη ολοκλ.: 2



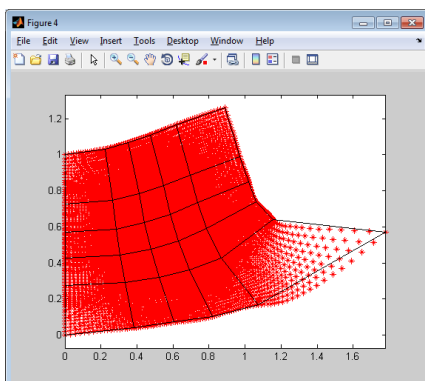
Βαθμ. NURBS: 3 και τάξη ολοκλ.: 3



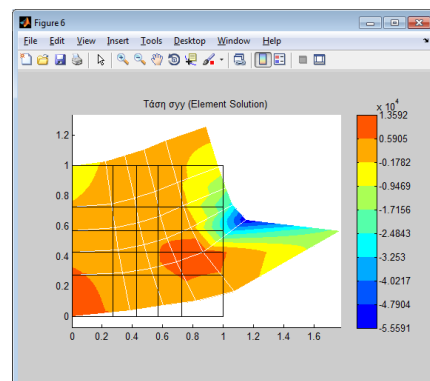
Βαθμ. NURBS: 3 και τάξη ολοκλ.: 6



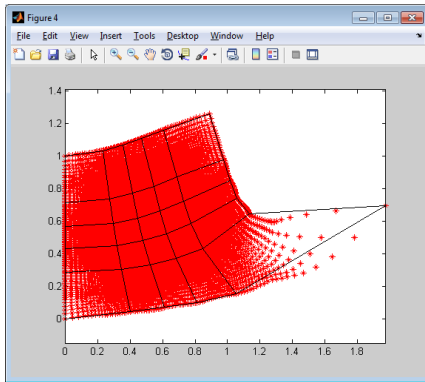
Βαθμ. NURBS: 3 και τάξη ολοκλ.: 15



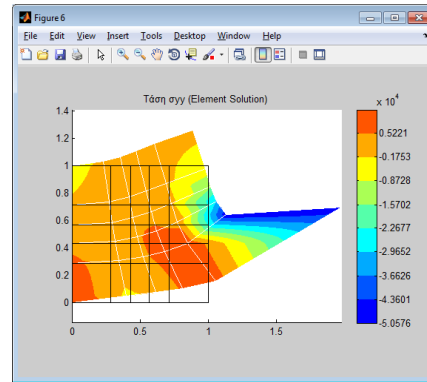
Βαθμ. NURBS: 3 και τάξη ολοκλ.: 20



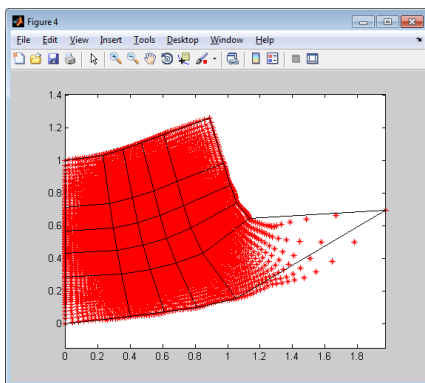
Βαθμ. NURBS: 3 και τάξη ολοκλ.: 20



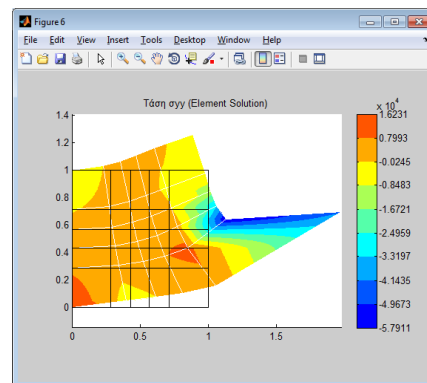
Βαθμ. NURBS: 8 και τάξη ολοκλ.: 8



Βαθμ. NURBS: 8 και τάξη ολοκλ.: 8



Βαθμ. NURBS: 8 και τάξη ολοκλ.: 20



Βαθμ. NURBS: 8 και τάξη ολοκλ.: 20

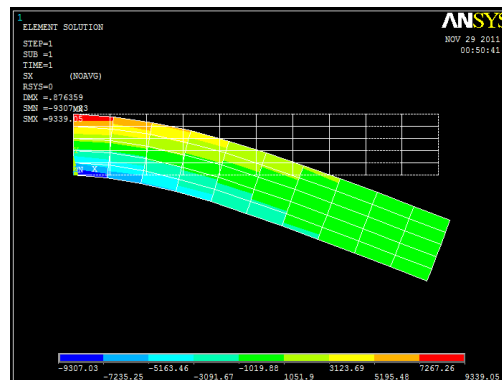
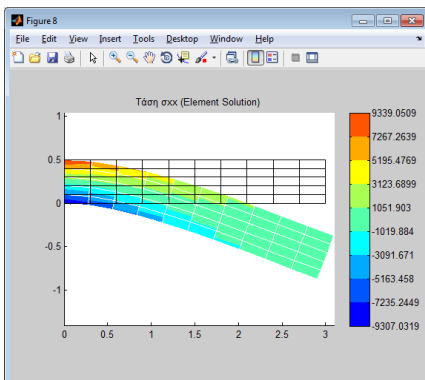
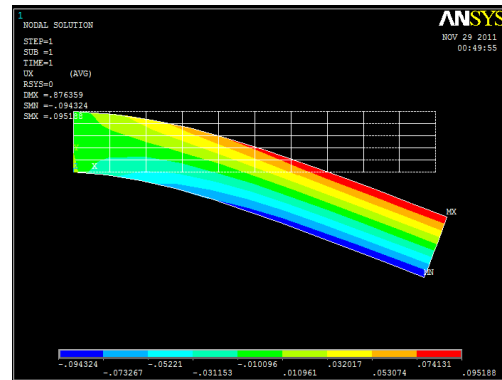
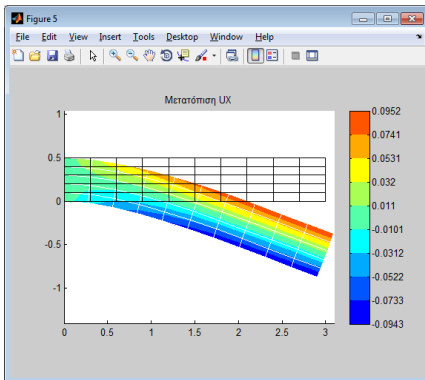
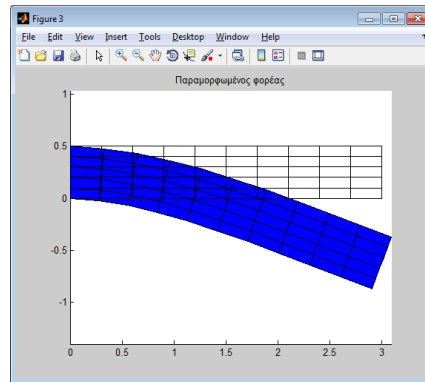
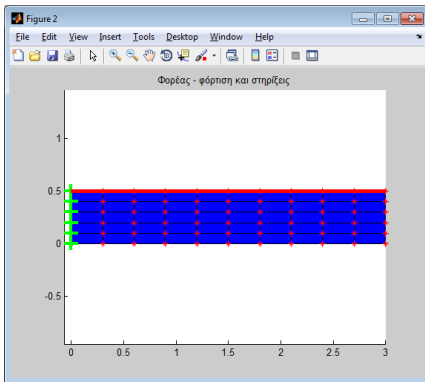
Αν μπορούμε να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι: η ανομοιομορφία στην παραμορφωμένη γεωμετρία που παρατηρείται μεταξύ των δυο ακραίων και πιο έντονα καμπτόμενων στοιχείων, ‘αφομοιώνεται’ στον φορέα αυξανόμενου είτε του βαθμού είτε της τάξης ολοκλήρωσης. Έτσι ομαλοποιούνται και τα αποτελέσματα και συγκλίνουν στην ίδια τιμή. Επίσης παρατηρούμε την ιδιότητα του convex hull, που είδαμε στη θεωρία των B-splines, ότι δηλαδή αυξανόμενου του βαθμού δεν βλέπουμε ταλαντώσεις των συναρτήσεων –όπως συμβαίνει στα πολώνυμα Lagrange- αλλά αυτές ακολουθούν ομοιόμορφη πορεία. Στις τάξεις που παρουσιάζονται και αφορούν το element solution, φαίνεται ότι έχει επέλθει ‘ισορροπία’ στα αποτελέσματα μεταξύ των γειτονικών elements, αν και η διακριτοποίηση είναι πολύ αραιή. Τέλος είναι εμφανές αυτό που έχουμε ήδη αναφέρει, ότι τα σημεία δεν κατανομούνται ομοιόμορφα, άρα και τα elements δεν κατανομούνται ομοιόμορφα, δηλαδή αν και χωρίσαμε τον παραμετρικό χώρο σε 100 ίσα διαστήματα, αυτά δεν αποτυπώνονται σε ομοιόμορφες θέσεις στον physical space του φορέα.





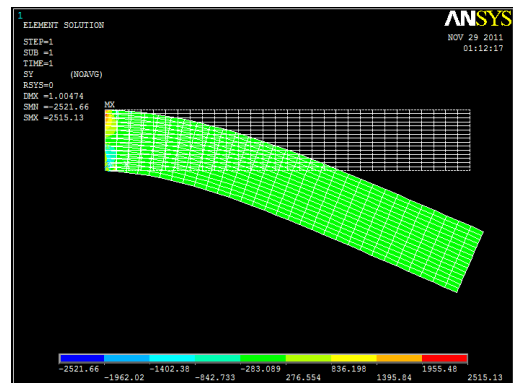
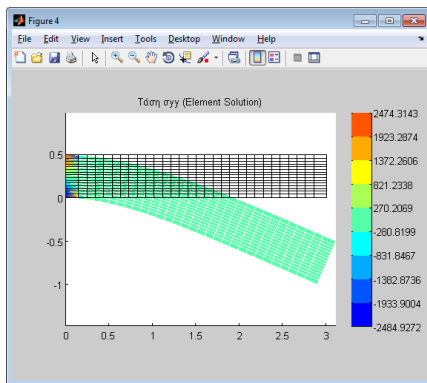
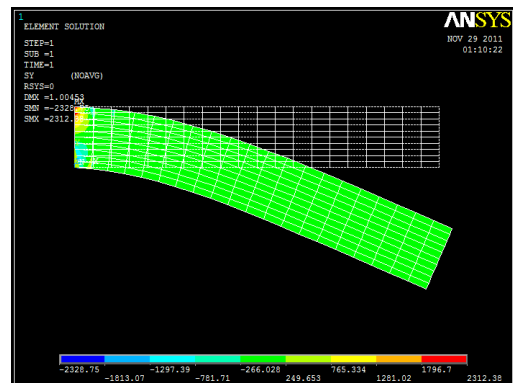
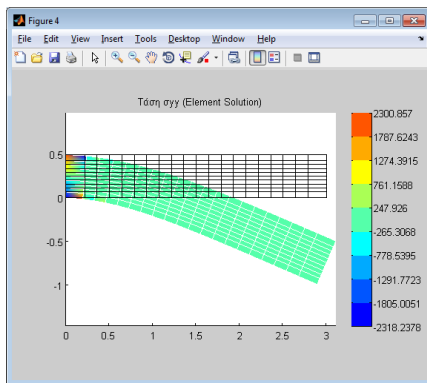
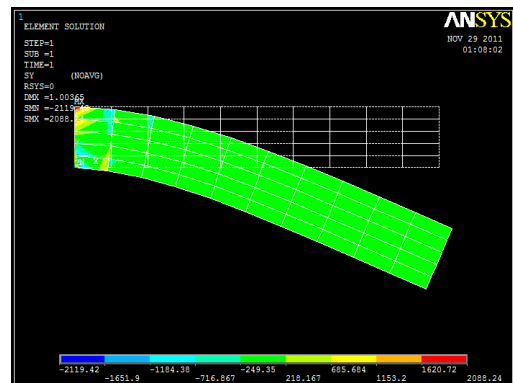
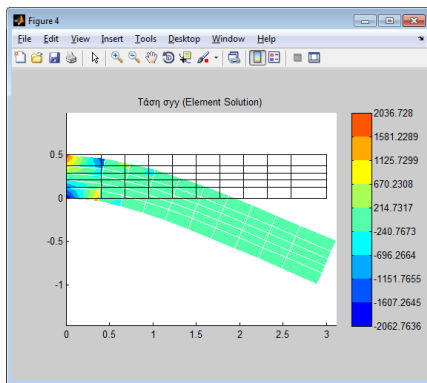
### 10.2.3 Πρόβολος υπό καταναμημένο φορτίο (κάμψη)

Το καταναμημένο φορτίο ισούται με 100. Το υλικό έχει  $E=10^5$  και λόγο Poisson  $\nu=0.3$  ενώ το πάχος είναι ίσο με 1. Για τη γραμμική περίπτωση σταχυολογούμε κάποια αποτελέσματα για να δείξουμε ότι οι δύο μέθοδοι ταυτίζονται (εδώ δείχνουμε την element solution για την τάση  $\sigma_x$ ).

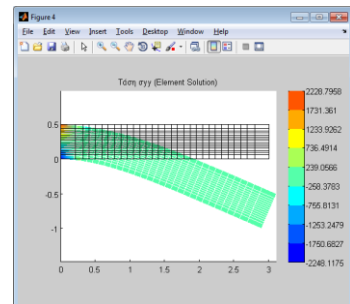
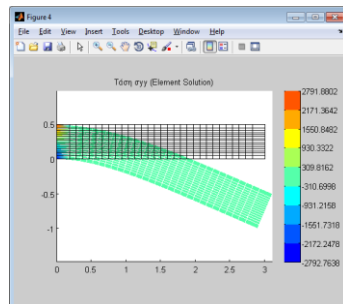
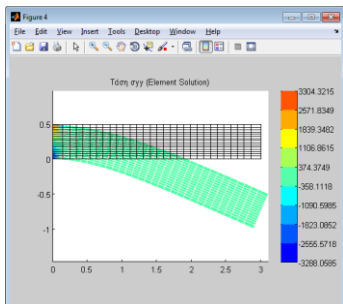


Ακολουθεί η περίπτωση προσομοίωσης με τετραγωνικές NURBS και η σύγκριση με το οκτακομβικό στοιχείο του Ansys. Τα αποτελέσματα θεωρείται ότι είναι κοντά μεταξύ τους. Καθώς επιλέγουμε να δείξουμε την element solution, βλέπουμε σε αυτή την περίπτωση ότι το εντατικό πεδίο που σχηματίζεται 'δείχνει' την ανάγκη ή όχι περαιτέρω πύκνωσης της διακριτοποίησης. Έτσι στην πρώτη περίπτωση υπάρχουν ασυνέχειες μεταξύ των elements οπότε πρέπει να πάμε σε πιο πυκνή διακριτοποίηση.

Και σε αυτό το πρόβλημα φαίνεται η ανομοιομορφία στον κάρναβο που επιτυγχάνεται, η οποία μειώνεται με την πύκνωση της διακριτοποίησης.



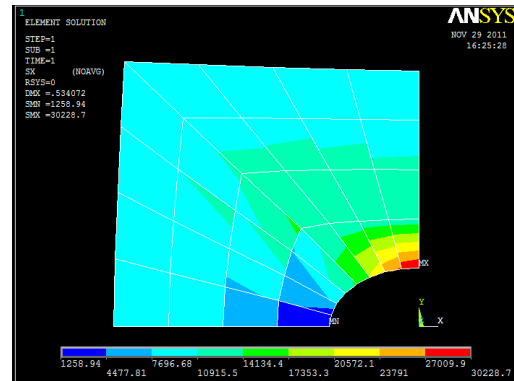
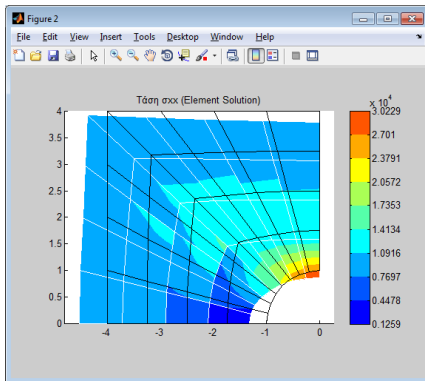
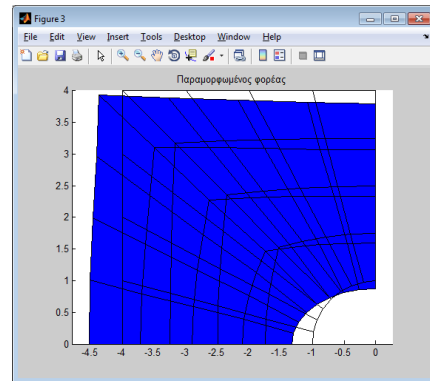
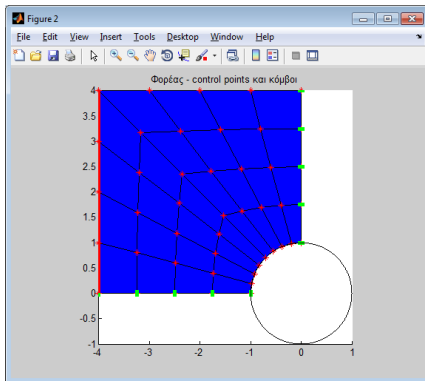
Στα τρία σχήματα παρακάτω παραθέτουμε την επίλυση για NURBS 2<sup>ου</sup>, 3<sup>ου</sup> και 4<sup>ου</sup> βαθμού αντίστοιχα, με τάξη αριθμητικής ολοκλήρωσης ίση με 4.



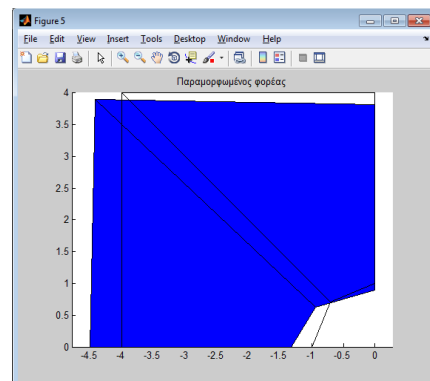
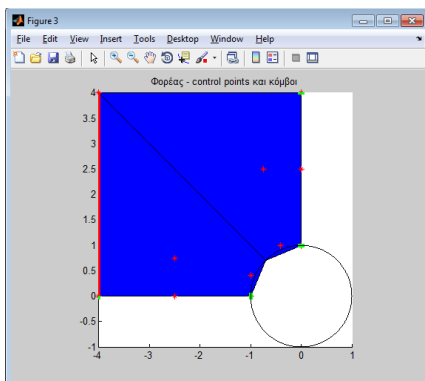
Μεγαλύτερο ακραίο element παρατηρείται στην περίπτωση 4<sup>ου</sup> βαθμού, η οποία θα έπρεπε να παρουσιάζει μεγαλύτερη ακρίβεια έναντι των άλλων αλλά 'χάνει' αυτό το προνόμιο λόγω αυτού του γεγονότος.

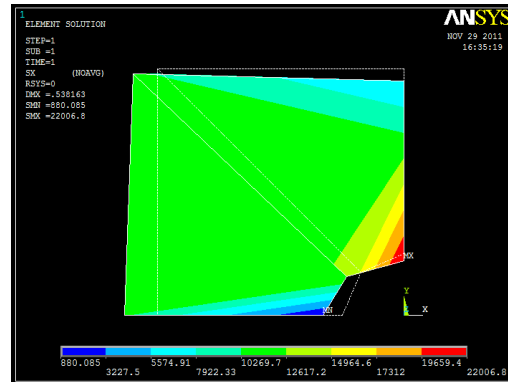
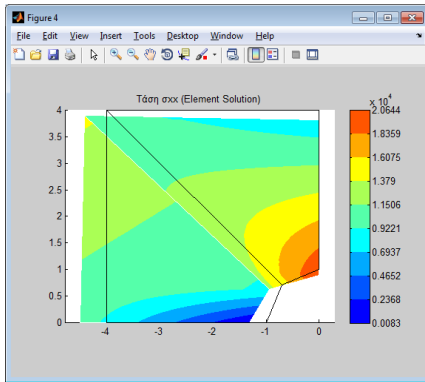
## 10.2.4 Πλάκα φέρουσα οπή

Το εφελκυστικό καταναμεμένο φορτίο ισούται με 10000. Το υλικό έχει  $E=10^5$  και λόγο Poisson  $\nu=0.3$  ενώ το πάχος είναι ίσο με 1. Δείχνουμε στην πρώτη γραμμή τη γραμμική περίπτωση και μετά την τετραγωνική. Μόνο τετραγωνικές NURBS αναλύθηκαν, καθότι για αυτήν την περίπτωση είδαμε –θεωρητικά (ενότητα 8.4)- τη θέση των control points για τον σχηματισμού του κύκλου. Υπενθυμίζουμε ότι αναζητούμε τιμή της  $\sigma_x$  στη ‘γωνία’ της οπής ίση με 30000, η οποία αποτελεί τη θεωρητική λύση (τριπλασιασμός της εφελκυστικής τάσης).

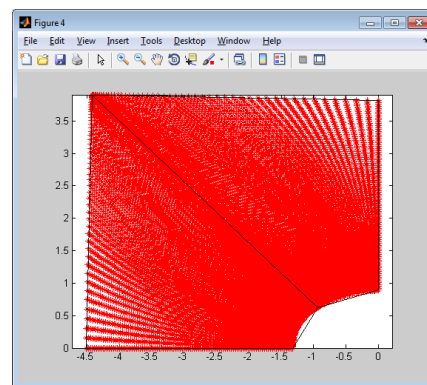
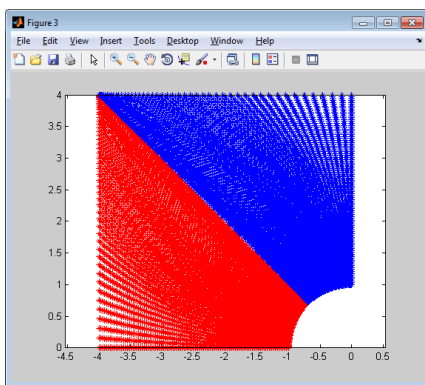


Ακολουθεί η ανάλυση με τις τετραγωνικές NURBS και η σύγκριση με το οκτακομβικό στοιχείο του ANSYS. Αρχικά διακρίτοποιούμε με δυο elements (για την διάταξη των control points έγινε λόγος στην ενότητα 9.2.3).

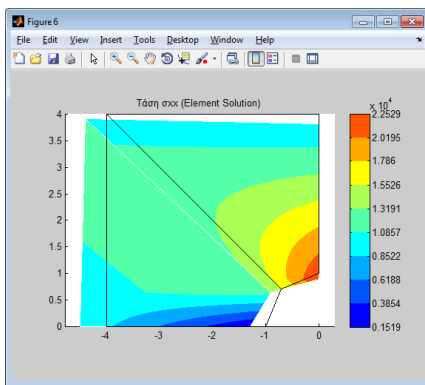




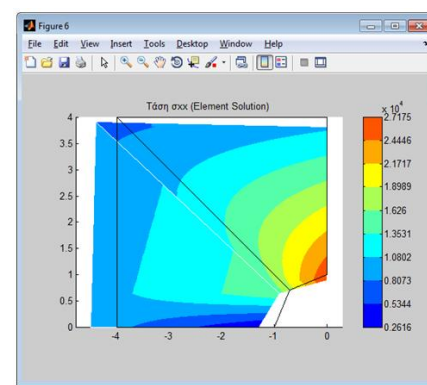
Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους. Παρακάτω παρουσιάζουμε την πραγματική γεωμετρία των elements προ και μετά την φόρτιση. Βλέπουμε ότι η προσομοίωση της γεωμετρίας είναι απόλυτα ακριβής, κάτι που δεν είναι κατορθωτό στην περίπτωση της FEM.



Στη συνέχεια παρουσιάζουμε για την περίπτωση των 2 elements την πορεία της  $\sigma_x$  αυξανόμενης της τάξης αριθμητικής ολοκλήρωσης.



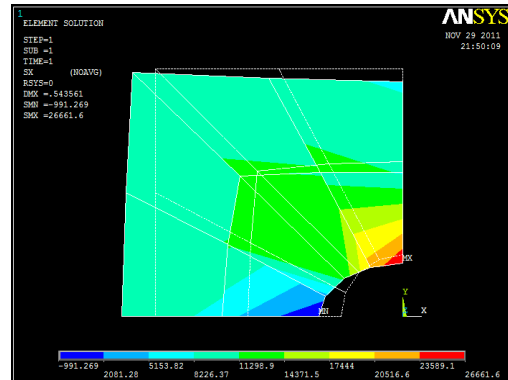
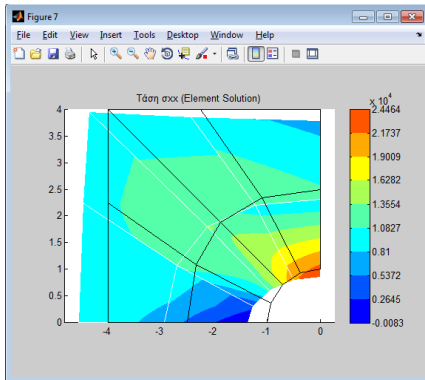
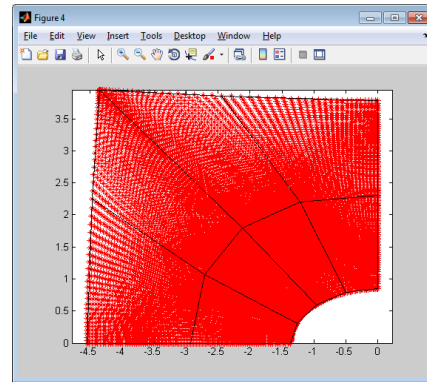
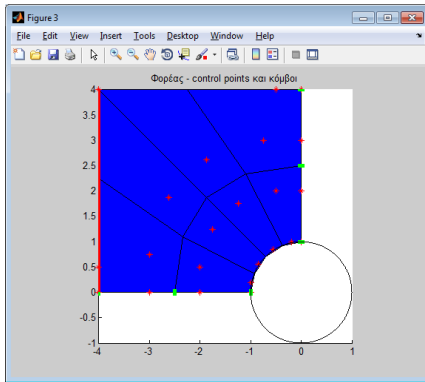
Τάξη αριθμητικής ολοκλ.: 3



Τάξη αριθμητικής ολοκλ.: 20

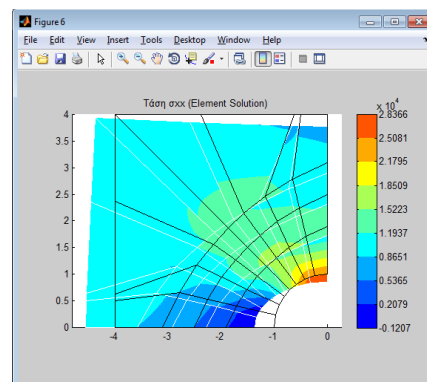
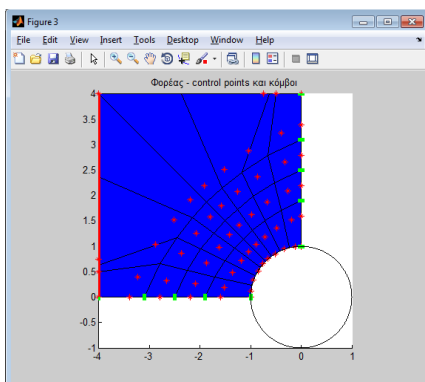
Ακολουθεί η ανάλυση με πυκνότερη διακριτοποίηση. Η νέα θέση των control points προκύπτει πάλι με τη διαδικασία knot insertion (π.χ. για τον κύκλο από διαμέριση 2 σε διαμέριση 4 πρέπει να κάνουμε διπλό knot insertion -με την εισαγωγή knots, σχηματίζονται περισσότερα knot spans, άρα περισσότερα elements). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, δεν ισχύει ότι ομοιόμορφη διαμέριση του knot vector θα επιφέρει και ομοιόμορφη διαμέριση στον physical space.

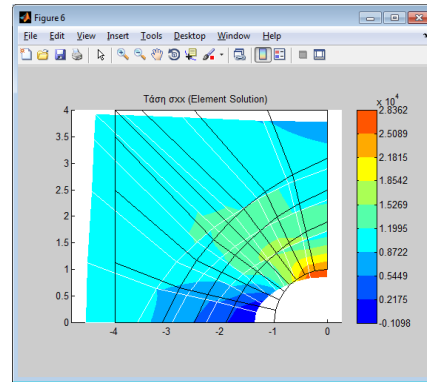
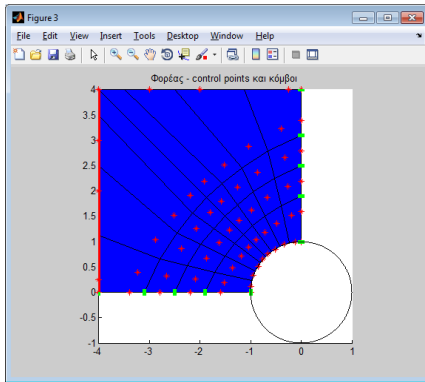
Παρακάτω παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για διακριτοποίηση 4x2.



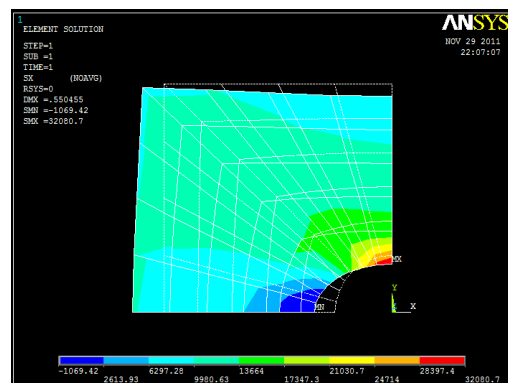
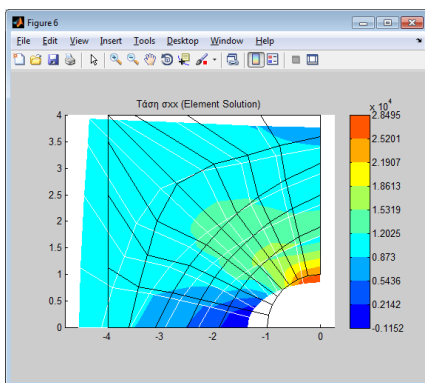
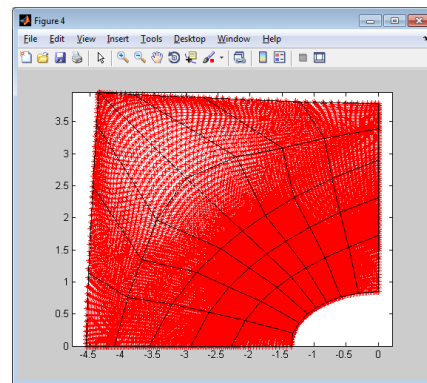
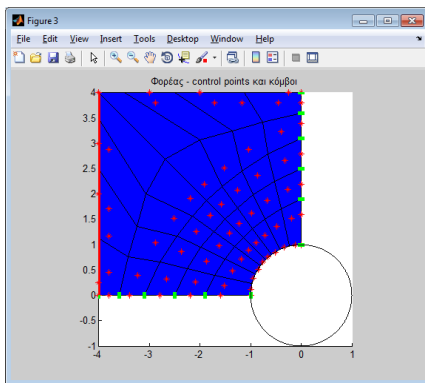
Τα αποτελέσματα μοιάζουν οπτικά, διαφέρουν ωστόσο ως προς τις τιμές  $-\eta$  FEM πλησιάζει περισσότερο στην τριπλάσια τιμή. Ωστόσο αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι με την ανάλυση των NURBS, μετατοπίσεις υπολογίζονται σε  $6 \times 4$  control points (όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα), ενώ στην FEM για διακριτοποίηση  $4 \times 2$  με τετραγωνικά οι κόμβοι είναι  $9 \times 5$  (λαμβάνουμε και τους ενδιάμεσους κόμβους). Απλά στο στοιχείο λείπουν οι εσωτερικοί κόμβοι (οκτακομβικό στοιχείο) αλλά και πάλι έχει περισσότερες θέσεις υπολογισμού.

Συνεχίζουμε για πιο πυκνή διακριτοποίηση  $8 \times 4$  στοιχεία. Η αρχική διάταξη των control points δεν έδωσε 'όμορφα' elements οπότε χρειάστηκε να κάνουμε δοκιμές για να προκύψουν πιο αποδεκτά elements. Η αρχική και η τελική προσπάθεια φαίνονται παρακάτω, με τα αποτελέσματα που προκύπτουν για κάθε μια:

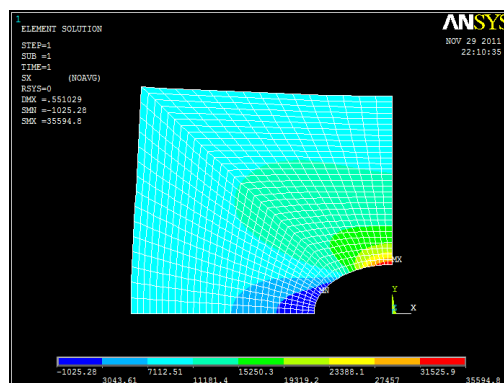


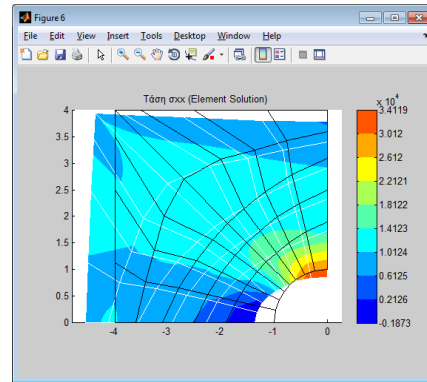
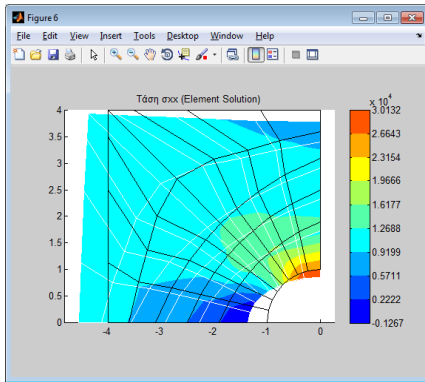


Τελικά εισάγαμε έναν ακόμα κνोट στη μια παραμετρική διάσταση από τις δυο, για να προκύψει έτσι διακριτοποίηση 8×5 elements. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

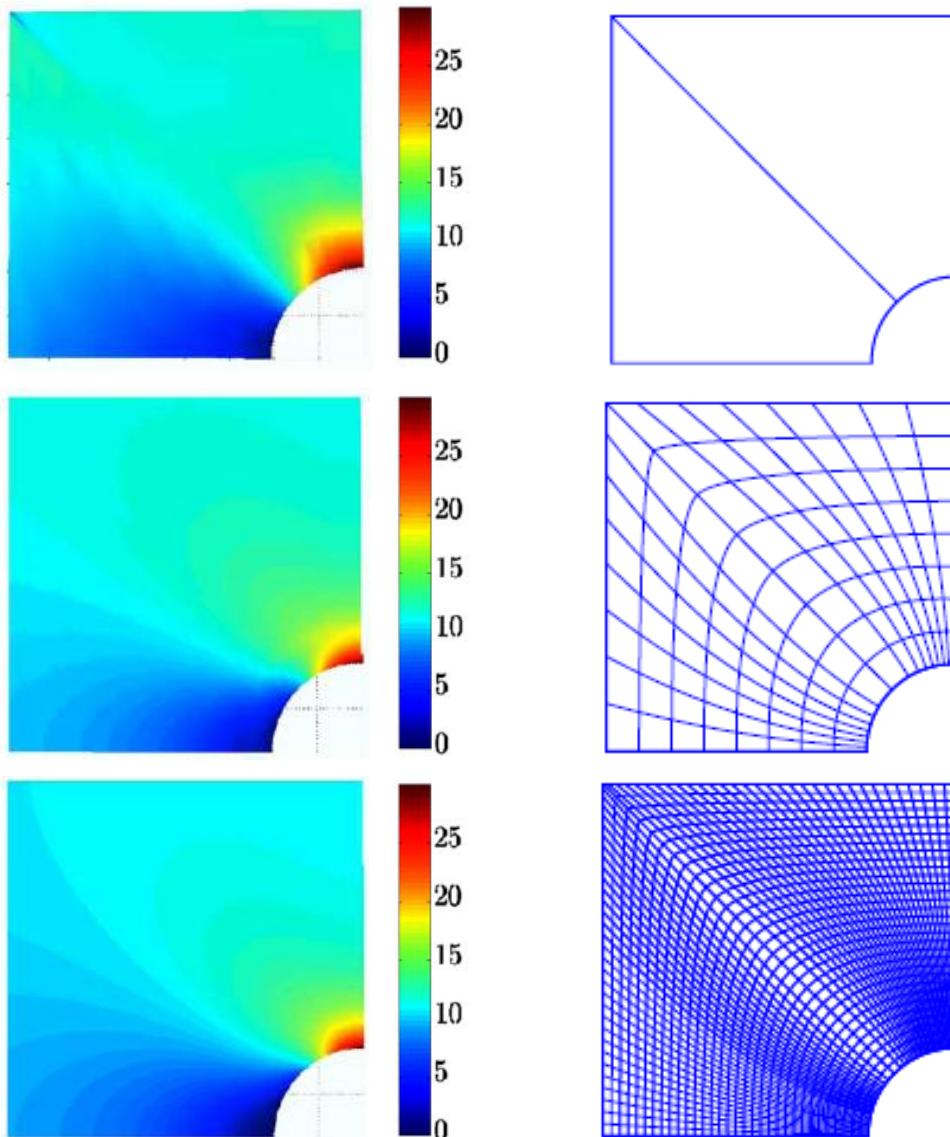


Παρατηρούμε ότι το μοντέλο των NURBS δεν φτάνει την τιμή 30000 ενώ της FEM το ξεπερνάει. Παραθέτουμε στο σημείο αυτό το αποτέλεσμα του ANSYS για διακριτοποίηση 30×30 αλλά και





τα αποτελέσματα της διακριτοποίησης  $8 \times 5$  για τάξη αριθμητικής ολοκλήρωσης 3 και 20. Τέλος παρακάτω είναι τα αποτελέσματα των εμπνευστών της μεθόδου [5] στο ίδιο πρόβλημα, με τετραγωνικές NURBS (παραθέτουμε και τους αντίστοιχους καννάβους των Ισογεωμετρικών elements με τα οποία προέκυψαν αυτά). Παρατηρούμε ότι ακόμα και για πολύ πυκνό κάνναβο δεν



ξεπερνιέται η τιμή 30 (η τιμή του κατανεμημένου φορτίου είναι 10).



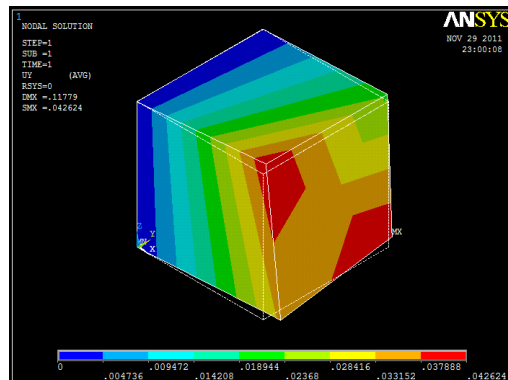
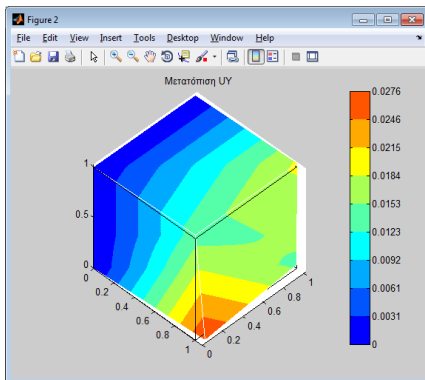
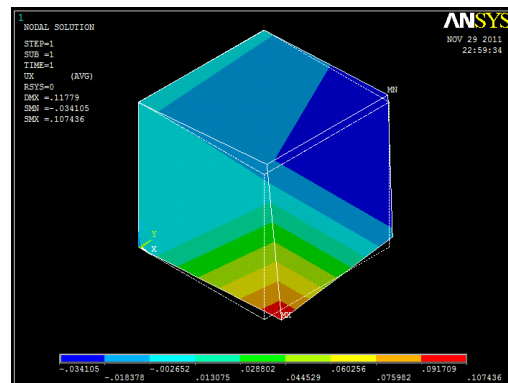
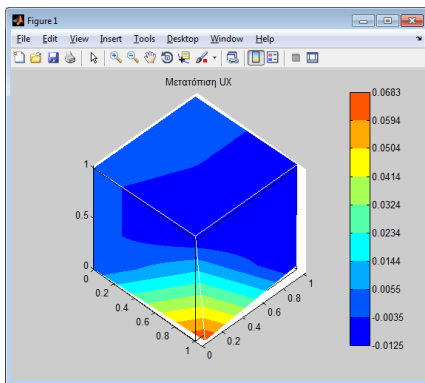
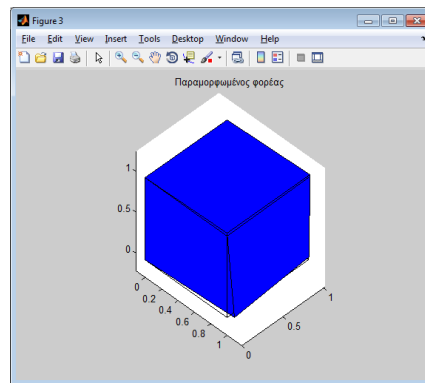
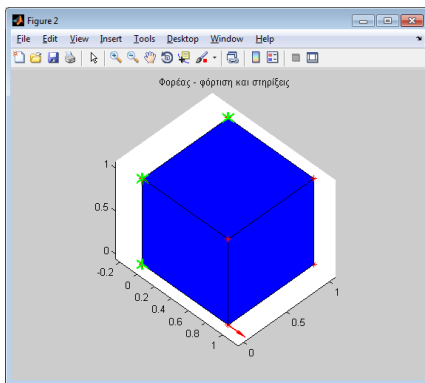


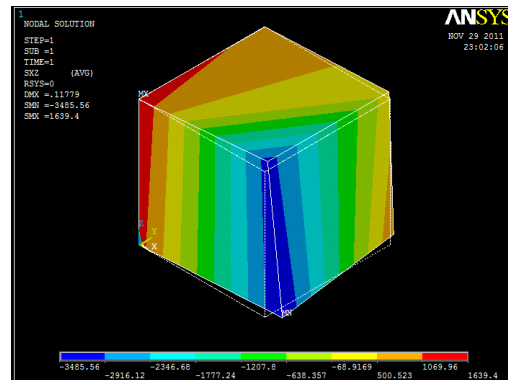
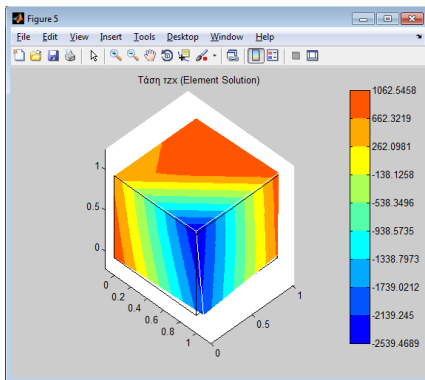
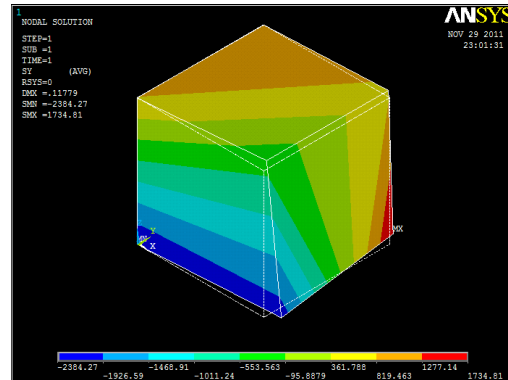
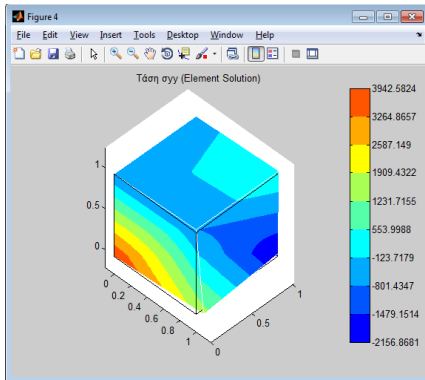
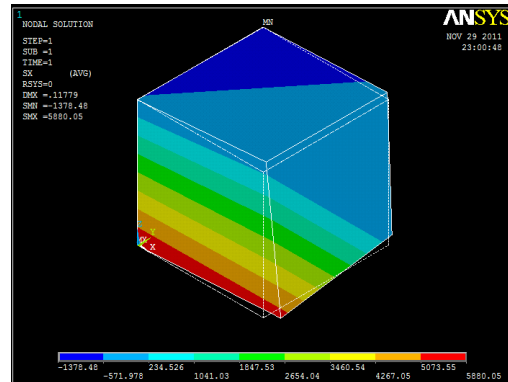
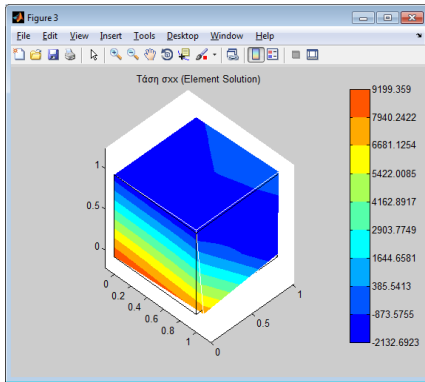
## 10.3 Τριαδιάστατες αναλύσεις (3D)

### 10.3.1 Κύβος υπό συγκεντρωμένο φορτίο

Αρχικά μοντελοποιείται ο φορέας με ένα ισογεωμετρικό στοιχείο. Ο κύβος έχει ακμή 1 για να μπορεί να συγκριθεί με την περίπτωση της ενότητας 10.2.1 (όλα τα στοιχεία είναι όμοια με αυτή την περίπτωση π.χ. φορτίο 1000 και εδώ). Αρχικά παρουσιάζονται οι γραμμικές αναλύσεις.

Οι τιμές διαφέρουν στα διάφορα μεγέθη. Εντύπωση ακόμα αφήνει το γεγονός ότι σε κάποια μεγέθη (όχι σε όλα) υπάρχουν και ποιοτικές διαφορές στα διαγράμματα που προκύπτουν. Είναι πολύ πιθανό να έχει γίνει κάποιο λάθος στον προγραμματισμό της μεθόδου για τις τρεις διαστάσεις από μέρος μας, καθώς λόγω περιορισμένου χρόνου δεν καταφέρουμε να ελέγξουμε διεξοδικά τον κώδικα.





Παρουσιάζουμε εδώ το ίδιο πρόβλημα τρεγμένο με ένα άλλο δημοφιλές πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων, το NX NASTRAN, και παραθέτουμε τις μετατοπίσεις για τον φορτιζόμενο κόμβο καθώς και τα διαγράμματα των  $\sigma_y$  και  $\sigma_z$ .

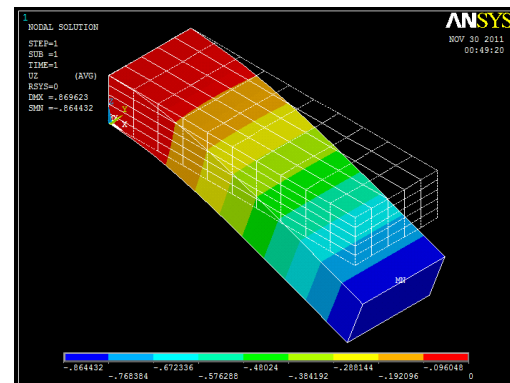
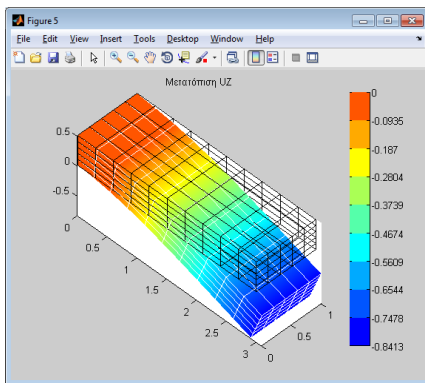
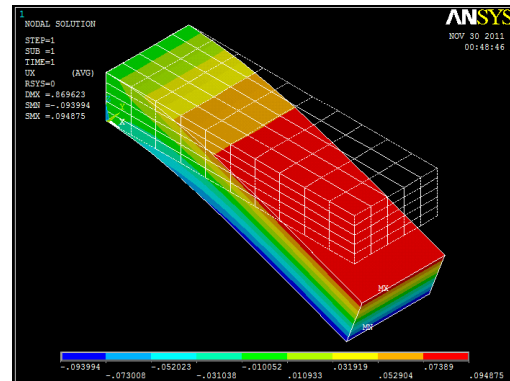
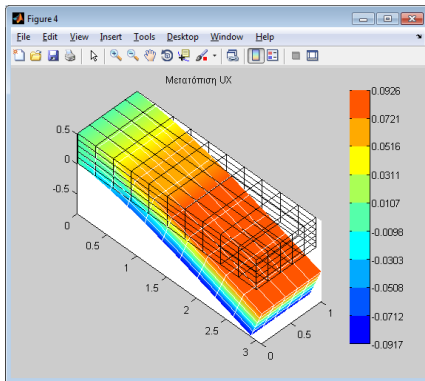
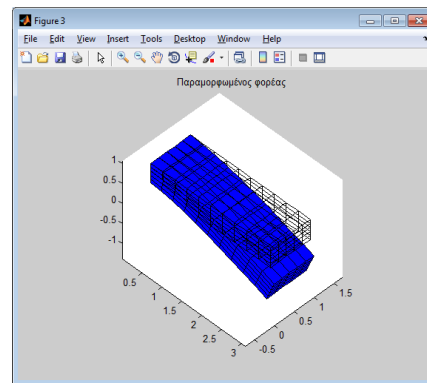
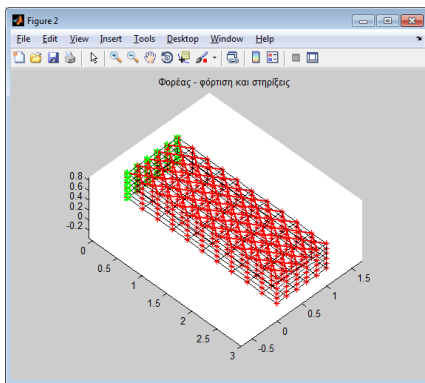
$u_x$	$u_y$	$u_z$
0.0975	0.0416	0.0416

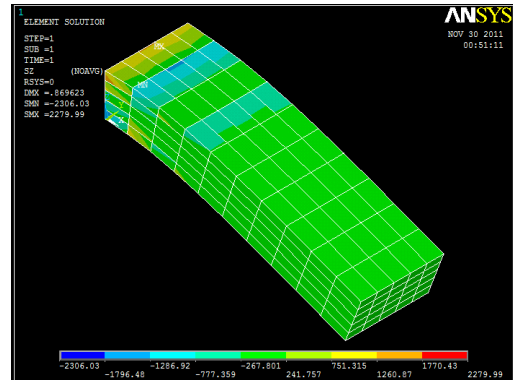
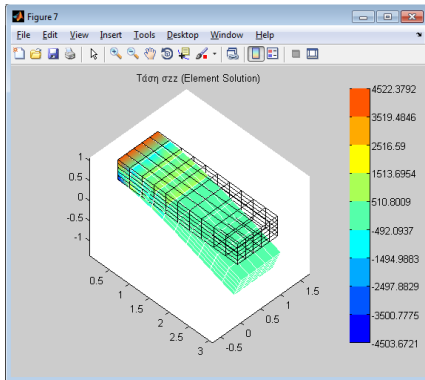
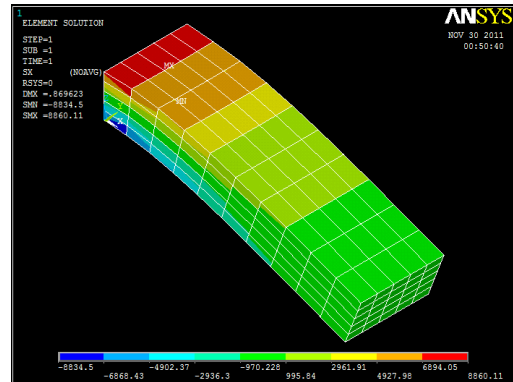
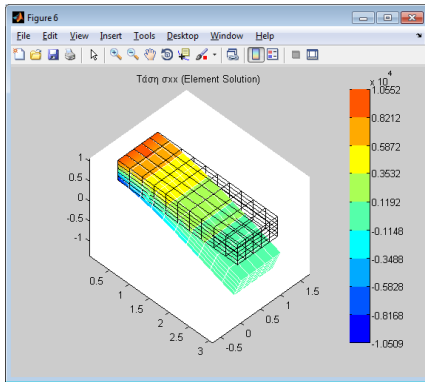
Η μετατόπιση κατά x στο NASTRAN βρίσκεται κοντά με του ANSYS, αλλά οι μετατοπίσεις κατά y και z όχι και τόσο. Ίσως δεν είναι και τόσο εφικτό αυτό που αναμέναμε, δηλαδή η ταύτιση των τιμών από τον κώδικα με τις τιμές του ANSYS, όπως συνέβαινε για τα γραμμικά στοιχεία στις 2 διαστάσεις, ωστόσο οι τιμές που προκύπτουν είναι όντως αρκετά μακριά, κάτι που σημαίνει ότι μάλλον υπάρχει λάθος στον κώδικα. Ωστόσο θα παρουσιάσουμε παρακάτω δυο ακόμα περιπτώσεις τριδιάστατης ανάλυσης.

### 10.3.2 Πρόβολος υπό καταναμημένο φορτίο (κάμψη)

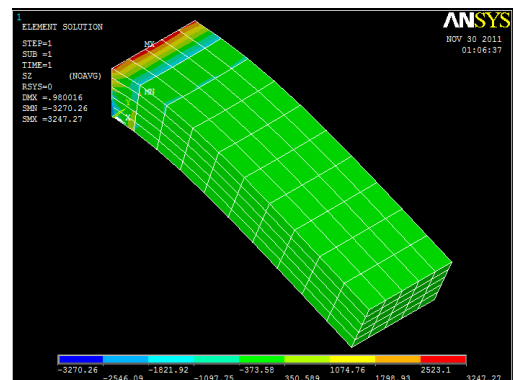
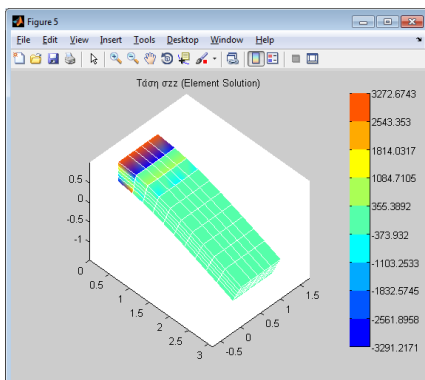
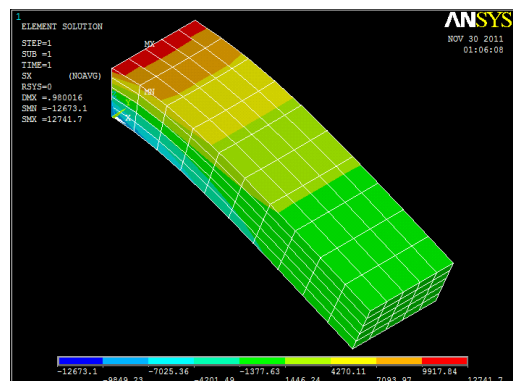
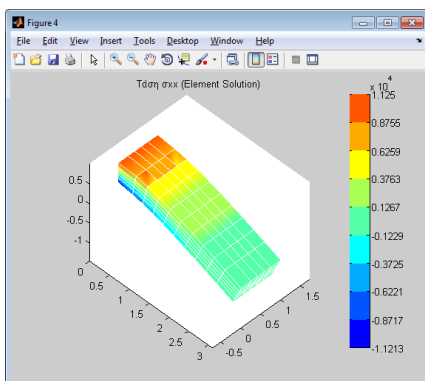
Αρχικά μοντελοποιείται ο φορέας με ένα γραμμικά στοιχεία. Κρατάμε τα ίδια δεδομένα με την ενότητα 10.2.3. Στο σχήμα με τις φορτίσεις δεν χρωματίζουμε τα patches έτσι ώστε να φαίνονται όλα τα δεδομένα. Το πάχος όπως φαίνεται είναι ίσο με 1. Οι άξονες φαίνονται στην εικόνα του ANSYS.

Παρατηρούμε ότι οι μετατοπίσεις είναι κοντά στα δυο μοντέλα, ενώ οι τάσεις διαφέρουν. Ωστόσο χρωματικά, δηλαδή ποιοτικά, τα διαγράμματα μοιάζουν πάρα πολύ μεταξύ τους.





Για το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποιούμε τετραγωνικές NURBS ενώ με το ANSYS προσομοιώνουμε με τα 20κομβικά brick elements που διαθέτει. Παρουσιάζουμε εδώ τις τάσεις  $\sigma_{xx}$  και  $\sigma_{zz}$ .

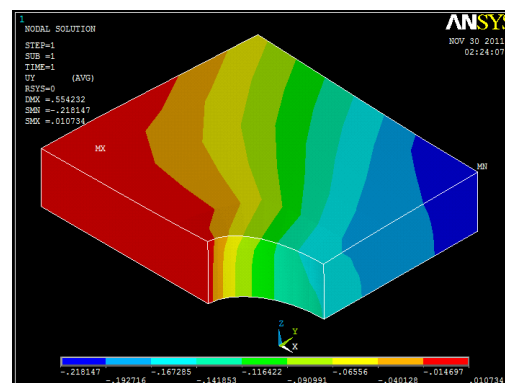
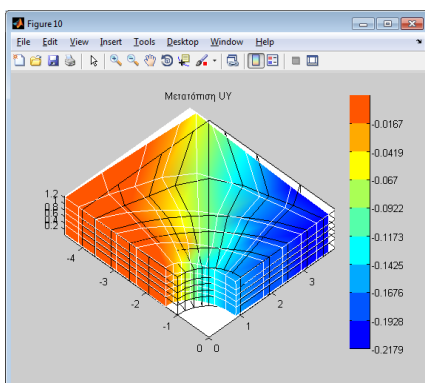
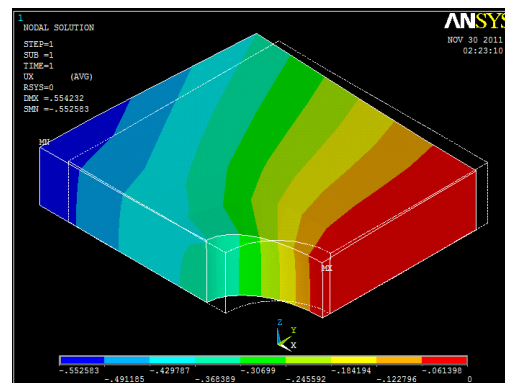
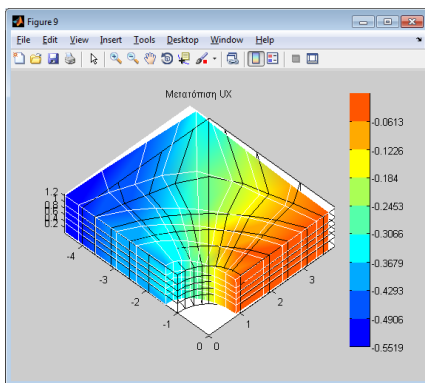
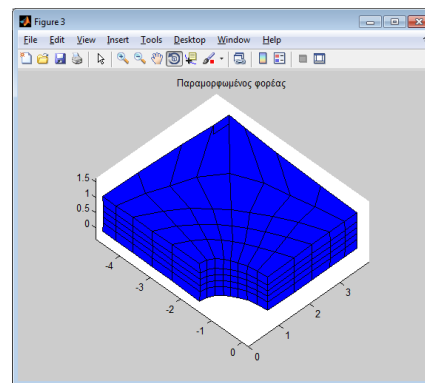
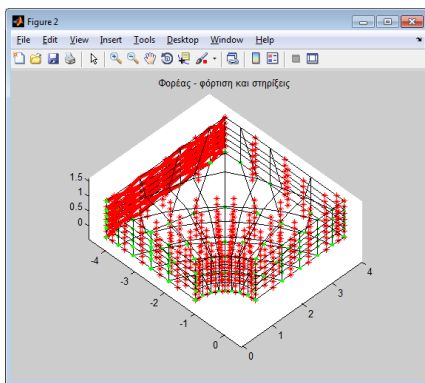


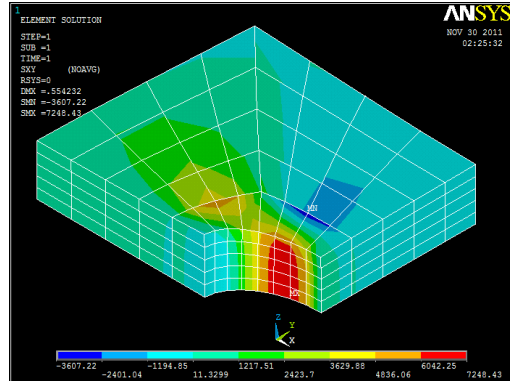
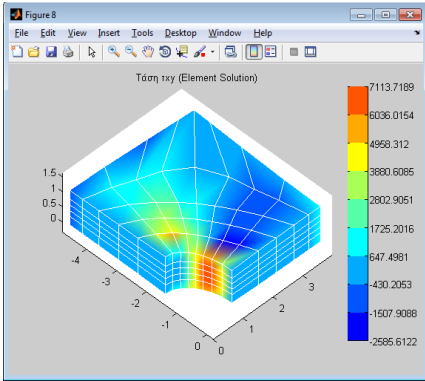
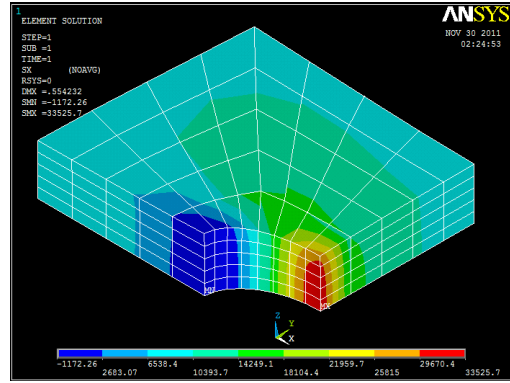
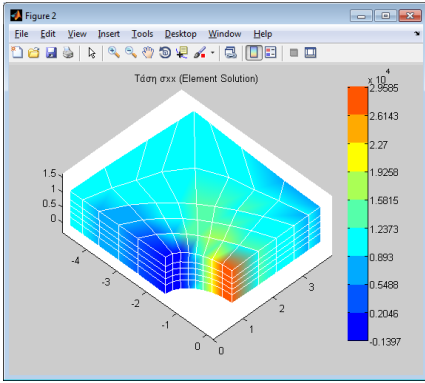
Βλέπουμε ότι και οι τάσεις σε αυτή την περίπτωση είναι πολύ κοντά μεταξύ τους.

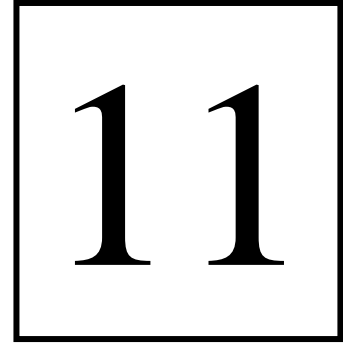
### 10.3.3 Πλάκα φέρουσα οπή (3D)

Παραθέτουμε εδώ τη διακριτοποίηση με  $8 \times 5 \times 5$  τετραγωνικά 3D ισογεωμετρικά στοιχεία, σε σύγκριση με το 20 κομβικό στοιχείο του ANSYS. Στην πρώτη εικόνα, τα control points δεν είναι τόσο εμφανή, αλλά όσα είπαμε στη διδιάστατη ανάλυση επεκτείνονται χωρίς κάτι το ιδιαίτερο και στις τρεις διαστάσεις. Δεν παραθέσαμε μαζί με τον παραμορφωμένο φορέα τον απαραμόρφωτο επειδή το σχεδιαστικό περιβάλλον του Matlab μπέρδευε αρκετά τις γραμμές.

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα της ανάλυσης με την Ισογεωμετρική Μέθοδο και αυτά από τη FEM είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, τόσο για τις μετατοπίσεις όσο και για τις τάσεις.







## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΈΡΕΥΝΑ

---

Στην παρούσα εργασία κατέστη εφικτή η πλήρης αποσαφήνιση των αρχών και εννοιών της Ισογεωμετρικής Μεθόδου, μιας μεθόδου ανάλυσης που προτάθηκε πολύ πρόσφατα στη διεθνή βιβλιογραφία. Η μέθοδος μοιράζεται πολλά χαρακτηριστικά με την Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων, έχει όμως και βασικές διαφορές που τις δίνουν πλεονεκτήματα. Το κυριότερο αυτών είναι η πιστή αναπαράσταση της γεωμετρίας του φορέα και η αποκόμιση ακριβέστερων αποτελεσμάτων στις αναλύσεις, ειδικότερα σε περιπτώσεις φορέων όπου η αναπαράσταση της γεωμετρίας κατέχει σημαντικό ρόλο.

Πέρα από την θεωρητική ενασχόληση με την Ισογεωμετρική Μέθοδο, έγινε προσπάθεια κωδικοποίησής της και ανάλυσης διαφόρων φορέων. Έτσι κατέστη δυνατό να φανεί στην πράξη ότι η συγκεκριμένη θεωρία δεν κρύβει δύσκολα σημεία ως προς την λειτουργία της, ενώ από την άλλη, οι δυνατότητες ανάλυσης που παρέχει δεν υπολείπονται σε κάτι έναντι της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων.

Θεωρούμε συνεπώς ότι η λειτουργία της Ισογεωμετρικής Μεθόδου θα πρέπει να είναι πλήρως ξεκάθαρη στον ερευνητή που αποφασίζει να την χρησιμοποιήσει. Ωστόσο, σκόπιμο είναι να

διερευνηθούν ακόμα κάποια ζητήματα που αφορούν κάποιες πτυχές της Ισογεωμετρικής Μεθόδου και που από ότι φάνηκε από τις αναλύσεις κατέχουν σημαντικό ρόλο στη λειτουργία της.

Βασικό ζήτημα το οποίο θα πρέπει να διερευνηθεί, είναι ο ευχερής και αποδοτικός τρόπος επιλογής των απαιτούμενων control points, για τη δημιουργία της γεωμετρίας του φορέα. Παρότι νομίζουμε ότι το συγκεκριμένο ζήτημα πιθανόν να μην κρύβει πολλά σκοτεινά σημεία, λόγω του ότι αποτελεί βασικό ζήτημα στα συστήματα CAGD, ωστόσο δεν είχαμε το χρόνο να το διερευνήσουμε στην εργασία μας, οπότε χρειάζεται να γίνει κάποια δουλειά πάνω στον τομέα αυτό.

Επίσης, ένα ακόμα ζητούμενο της Ισογεωμετρικής Μεθόδου, με το οποίο δεν καταφέραμε να ασχοληθούμε, είναι η προσομοίωση μιας γεωμετρίας με παραπάνω του ενός patch. Στην παρούσα εργασία ασχοληθήκαμε με φορείς που προσομοιώθηκαν με ένα μόνο patch. Ωστόσο, πιο σύνθετες γεωμετρίες, χρειάζονται για την πιστή απόδοσή τους περισσότερα του ενός patches. Επίσης είδαμε ότι χρειάζονται περισσότερα patches και στην περίπτωση επιβολής μεμονωμένων συνοριακών συνθηκών όπως στηρίξεων ή συγκεντρωμένων δυνάμεων. Δεν θεωρούμε ότι το συγκεκριμένο ζήτημα κρύβει κάποια μεγάλη δυσκολία, από την άλλη όμως, η επίλυσή του κρύβει πολύ μεγάλες δυνατότητες για τη μέθοδο, καθώς με απλό και εγγενή τρόπο μπορεί να εκμεταλλευτεί τα πλεονεκτήματα του 'σπάσιμου' της γεωμετρίας ενός φορέα σε απλούστερα τμήματα, διαδικασία που στη FEM γίνεται με αρκετά σύνθετο τρόπο μέσω των υποφορέων.

Τα παραπάνω καθώς και πολλά άλλα θέματα που είναι σίγουρο ότι θα ανακύψουν από μια ερευνητική ενασχόληση, καθιστούν την Ισογεωμετρική Μέθοδο ένα πολύ ενδιαφέρον αντικείμενο έρευνας και εφαρμογών.



# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

---

- [1] **Hughes, T.J.R.**, “The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis”, *Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.*, (1987)
- [2] **Παπαδρακάκης, Μ.**, “Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων”, Αθήνα, (1996)
- [3] **Farin, G.** και **Hansford, D.**, “The Essentials of CAGD”, *A K Peters Ltd*, (2000)
- [4] **Farin, G.**, “Curves and Surfaces – A Practical Guide”, *Morgan Kaufmann Publishers, An Imprint of Academic Press*, (2002)
- [5] **Cotrell, J. A., Hughes, T.J.R., Bazilevs, Y.**, “Isogeometric Analysis – Toward Integration of CAD and FEA”, *Wiley, A John Wiley and Sons, Ltd, Publication*, (2009)
- [6] **Hughes, T.J.R., Cotrell, J. A., Bazilevs, Y.**, “Isogeometric Analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement”, *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg*, **194** (2005) 4135-4195
- [7] **Τσαμασφύρος, Γ.Ι.** και **Θεοτόκογλου, Ε.Ε.**, “Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων”, Αθήνα, (1994)
- [8] **Μαρκολέφας, Ι. Στ.**, “Συνοπτικές Σημειώσεις Θεωρίας Πεπερασμένων Στοιχείων για το Πρόβλημα της Επίπεδης Ελαστικότητας”, Αθήνα, (2004)
- [9] **Fisher, J.L.**, “An analysis of the Finite Element Method Using B-spline Basis Functions”, University of Texas at Austin, (2006)
- [10] **Barber, J.R.**, “Elasticity”, *Kluwer Academic Publishers, USA* (2004)
- [11] **Yang, W. Y., Cao, W., Chung, T.-S., Morris, J.**, “Applied Numerical Methods using Matlab<sup>®</sup>”, *Wiley, A John Wiley and Sons, Ltd, Publication*, (2005)
- [12] **Matlab R2010b**, Reference manual
- [13] **ANSYS Release 13.0**, Reference manual