



Διπλωματική Εργασία

Δεξιόστροφα νετρίνα και Λεπτογένεση :
Συμβατικοί και μη Συμβατικοί τρόποι

Φοίβη Ρουσοχατζάκη

Επιβλέπων καθηγητής:

Νικόλαος Μαυρόματος, (Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ)

Τριμελής επιτροπή:

Χριστόφορος Κούβαρης (Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ)

Νικόλαος Μαυρόματος (Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ)

Κωνσταντίνος Φαράκος (Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ)

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2022

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	5
1.1	Ασυμμετρία Υλης-Αντιύλης	5
1.1.1	Big Bang Πυρηγοσύνθεση (BBN)	6
1.2	Sakharov και το Καθιερωμένο Πρότυπο	7
1.3	Βαρυογένεση μέσω Λεπτογένεσης	8
2	Δεξιόστροφα Νετρίνα	9
2.1	Όρος μάζας Dirac	9
2.2	Όρος μάζας Majorana	11
2.3	Όρος μάζας Dirac και Majorana	15
2.4	Εφαρμογή: Τα πεδία γεύσεων στην περίπτωση συνδυασμένων όρων μάζας Dirac και Majorana	16
2.4.1	Παράδειγμα μιας γενιάς	16
2.4.2	Εφαρμογή/Παράδειγμα δυο γενιών	20
2.5	Μηχανισμός τραμπάλας	21
2.5.1	Θεώρηση μιας γενιάς	21
2.5.2	Θεώρηση τριών γενεών	22
3	Λεπτογένεση στο συμβατικό πρότυπο	24
3.1	Επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου	24
4	Λεπτογένεση σε μη συμβατικό πρότυπο	26
4.1	Υπολογισμός πλάτους διάσπασης(χωρίς υπόβαθρο)	26
4.1.1	Κανόνας Κορυφής	26
4.1.2	Πλάτος Διάσπασης	26
4.1.3	Ρυθμός διάσπασης	27
4.2	Υπολογισμός πλάτους διάσπασης(με υπόβαθρο)	29
4.2.1	Διάσπαση RHN σε επίπεδο δέντρου με την παρουσία axial background	32
4.2.2	Πλάτος Διάσπασης	34
4.2.3	Υπολογισμός Ρυθμού Διάσπασης Γ	37
5	Επίλογος	41
	Παράρτημα A: Decay Rate	42
	Παράρτημα B: Αναλυτικός υπολογισμός πλατών	46

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Μαυρόματο, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε εξ' αρχής, αναθέτοντάς μου το συγκεκριμένο θέμα, την επιστημονική του καθοδήγηση, τις υποδείξεις του, την επιμονή του, τη συμπαράστασή του, τη συνεχή του υποστήριξη και το αμείωτο ενδιαφέρον που έδειξε από την αρχή μέχρι το τέλος.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κυρίους κ.Φαράκο, κ. Κούβαρη για τη σύσταση της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής μου.

Τέλος, θα ήθελα εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου και τους φίλους μου για όλη τη στήριξη, τη συμπαράσταση και την κατανόησή τους, καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση του μηχανισμού της λεπτογένεσης ως ικανής θεωρίας για την ασυμμετρία ύλης-αντιύλης στο σύμπαν. Στο κύριο μέρος αυτής της εργασίας θεωρούμε ένα φαινομενολογικό μοντέλο για τη λεπτογένεση στο πλαίσιο της επέκτασης του Καθιερωμένου Προτύπου με τη φερμιονική σύζευξη ενός αξονικού υποβάθρου που παραβιάζει τόσο τη συμμετρία Lorentz όσο και την CPT. Δείχνουμε ότι η λεπτογένεση μπορεί να προκύψει και σε επίπεδο δέντρου με μία μόνο γενιά δεξιόστροφων βαριών νετρίνων Majorana, λόγω της παραβίασης των συμμετριών CP, CPT, που υπεισέρχεται λόγω της γεωμετρίας του προστιθέμενου υποβάθρου (με την οποία δεν θα ασχοληθούμε). Για τον λόγο αυτό στο 1ο κεφάλαιο συζητάμε συνοπτικά την ασυμμετρία ύλης-αντιύλης. Στο δεύτερο κεφάλαιο θίγουμε τον απαραίτητο φορμαλισμό των δεξιόστροφων βαριών νετρίνων. Στα κεφάλαια 3,4 συζητάμε τις συνθήκες της λεπτογένεσης σε συμβατικά και μη συμβατικά μοντέλα. Στο 4ο κεφάλαιο υπολογίζουμε αναλυτικά τους άνισους ρυθμούς διάσπασης που οδηγούν σε λεπτονική ασυμμετρία. Οι αναλυτικοί υπολογισμοί δίνονται στο παράρτημα. Στο τελευταίο κεφάλαιο δίνουμε τον επίλογο με τα συμπεράσματα.

Abstract

The purpose of this dissertation is to present the mechanism of leptogenesis as a competent theory for matter-antimatter asymmetry in the observable universe. In the main part of this thesis we consider a phenomenological model for leptogenesis in the context of a Standard Model extension with an axial-like background coupling to fermions that violates both Lorentz and CPT symmetries. We show that leptogenesis can occur even at tree level diagrams with only one generation of right-handed heavy Majorana neutrinos, due to the violation of the symmetries CP, CPT, which enters due to the geometry of the added background (we will not examine how). For this reason in the 1st chapter we briefly discuss the matter-antimatter asymmetry. In the second chapter we touch on the necessary formalism of right-handed heavy neutrinos. In chapters 3,4 we discuss under what conditions leptogenesis can occur in conventional and non-conventional models. In chapter 4 we calculate the different decay rates that lead to the leptonic asymmetry. Detailed calculations are given in the annex. The last chapter consists of the epilogue with the conclusions.

1 Εισαγωγή

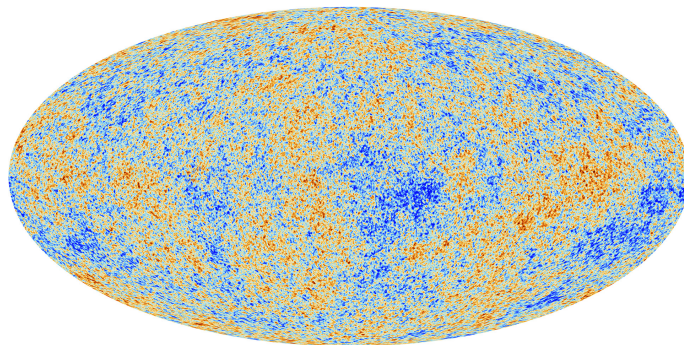
Η ανάγκη ενός μηχανισμού που μπορεί να παράγει τη βαρυονική ασυμμετρία του σύμπαντος μετά την πρώιμη φάση της κοσμολογικής διαστολής είναι μια από τις κύριες ενδείξεις για φυσική πέρα από το καθιερωμένο πρότυπο. Μια ακόμα ισχυρότερη ένδειξη για φυσική πέρα από το καθιερωμένο πρότυπο παρέχεται από τις ανωμαλίες στη φυσική των νετρίνων, οι οποίες ερμηνεύονται με όρους ταλαντώσεων νετρίνων. Χρησιμοποιώντας μια απλουστευμένη φόρμουλα του μηχανισμού της τραμπάλας [2.5], $m_\nu = (200\text{GeV})^2/M$, τη μάζα ενός νετρίνου μεταξύ των 0.03 eV και μερικών eVs, όπως φαινομενικά υπονοείται από μια συνεκτική ερμηνεία των διαφόρων αποτελεσμάτων νετρίνων, προτείνεται μια κλίμακα μάζας για νέα φυσική μεταξύ των 10^{15} και 10^{13} GeV. Με τη σειρά της, αυτή η κλίμακα (τάξη μεγέθους) μάζας θα μπορούσε να σχετίζεται με την παραβίαση του λεπτονικού αριθμού κατά την ανταλλαγή βαρέων δεξιόστροφων νετρίνων Majorana N , όπως θα δούμε στη συνέχεια. Τα παραπάνω ευρήματα στη φυσική των νετρίνων προτείνουν την επανεξέταση της πιθανότητας η βαρυονική ασυμμετρία να προκύπτει από μια λεπτονική ασυμμετρία, που προκύπτει από την διάσπαση του βαριού N εκτός ισορροπίας.

1.1 Ασυμμετρία Ύλης-Αντιύλης

Η Βαρυογένεση εκτός από ενεργό ερευνητικό κλάδο στη μοντέρνα κοσμολογία αποτελεί ένα μακρόχρονο πρόβλημα. Μια λύση στη βαρυογένεση θα εξηγούσε γιατί το πρώιμο σύμπαν κυριαρχούμενο από ακτινοβολία, εξελίχθηκε στο παρόν -κυριαρχούμενο από ύλη- σύμπαν. Η περίσσεια (πληθώρα, αφθονία) βαρυονίων (έναντι των αντιβαρυονίων) προσδιορίζεται από τον λόγο:

$$Y_{\Delta B} = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} = (6.1 \pm 0.3) \cdot 10^{-10} \quad (1.1)$$

όπου n_B είναι η (αριθμητική) πυκνότητα πλήθους βαρυονίων, $n_{\bar{B}}$ η πυκνότητα πλήθους αντιβαρυονίων και n_γ η πυκνότητα φωτονίων (ανάλογη της πυκνότητας εντροπίας s). Το παραπάνω μέτρο προσδιορίστηκε με ακριβείς μετρήσεις ακτινοβολίας CMB στα πειράματα WMAP και Planck.

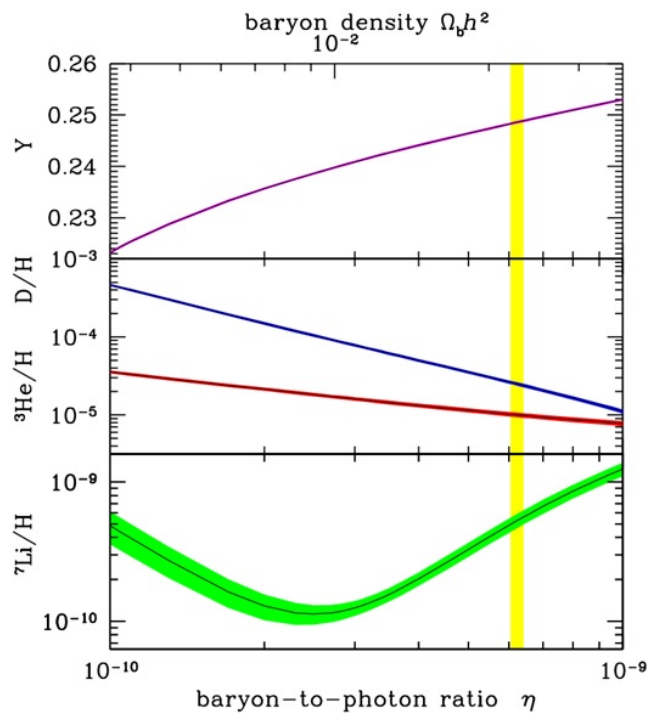


Σχήμα 1: Το CMB από το WMAP, τα χρώματα υποδηλώνουν την θερμοκρασία,[16]

Δεν υπάρχουν πειραματικές ενδείξεις για πρώιμη αντιύλη στο παρατηρήσιμο σύμπαν. Κατ' αντιστοιχία, η γέννηση ασυμμετρίας μεταξύ λεπτονίων και αντιλεπτονίων είναι γνωστή ως λεπτογένεση. Η τελευταία, αναμένεται να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την $Y_{\Delta B}$ (1.1). Εάν το B -ο καθαρός βαρυονικός αριθμός-διατηρείται στη φύση, η ασυμμετρία ύλης μπορεί να προκύψει μόνο από μια μη συμμετρική αρχική συνθήκη $B \neq 0$. Ωστόσο, μια τέτοια ασυμμετρία θα μειωνόταν ραγδαία κατά τη διάρκεια της διαστολής, και η λεπτή ρύθμιση (fine tuning) της αρχικής συνθήκης θα ήταν απαραίτητη. Από θεωρητικής πλευράς αυτό δεν είναι ικανοποιητικό. Συνεπώς, απαιτείται ένας μηχανισμός για τη δυναμική δημιουργία βαρυονικής ασυμμετρίας. [9]

1.1.1 Big Bang Πυρηνοσύνθεση (BBN)

Όσο το σύμπαν ήταν πολύ πιο ζεστό και πυκνότερο όταν η θερμοκρασία ήταν της τάξης MeV/k_B δεν υπήρχαν ουδέτερα άτομα ή δεσμευμένοι πυρήνες. Οι τεράστιες ποσότητες ακτινοβολίας σε ένα τόσο ζεστό περιβάλλον εξασφάλισαν ότι οποιοδήποτε παραγόμενο άτομο ή παραγόμενος πυρήνας θα καταστρεφόταν αμέσως από κάποιο φωτόνιο υψηλής ενέργειας. Ωστόσο, κατά τη διαρκή μείωση της θερμοκρασίας του σύμπαντος σε θερμοκρασίες πολύ χαμηλότερες των ενεργειών σύνδεσης των τυπικών πυρήνων, άρχισαν να σχηματίζονται ελαφρά στοιχεία. Γνωρίζοντας τις συνθήκες του πρώιμου σύμπαντος και τις σχετικές ενεργές διατομές μπορούμε να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες αφθονίες όλων των στοιχείων.



Σχήμα 2: Οι αφθονίες ελαφρών στοιχείων του $D, {}^3\text{He}, {}^7\text{Li}$, [15]

Καθώς η θερμοκρασία πέφτει στο 1 MeV το κοσμικό πλάσμα αποτελείται από:

- **Σχετικιστικά σωματίδια που βρίσκονται σε ισορροπία: φωτόνια, ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια.** Αυτά συγκρατούνται σε ισορροπία από ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις $e^+e^- \leftrightarrow \gamma\gamma$. Εκτός από μια μικρή απόκλιση λόγω της στατιστικής φερμιονίων/μποζονίων, έχουν όλα την ίδια αφθονία.
- **Ασύζευκτα (decoupled) σχετικιστικά σωματίδια: νετρίνα.** Σε θερμοκρασία λίγο υψηλότερη του 1 MeV ο ρυθμός της αλληλεπίδρασης των νετρίνων για παράδειγμα με τα ηλεκτρόνια: $\nu e \leftrightarrow \nu e$ -που συγκρατούν τα νετρίνα συζευγμένα στο υπόλοιπο πλάσμα- πέφτει κάτω από τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος, επομένως τα νετρίνα αποχωρούν από το πλάσμα κι έχουν την ίδια θερμοκρασία με τα άλλα σχετικιστικά σωματίδια.
- **Μη-σχετικιστικά σωματίδια: Βαρυόνια.** Εάν δεν υπήρχε ασυμμετρία στο αρχικό πλήθος βαρυονίων-αντιβαρυονίων, τότε και τα 2 είδη θα είχαν εξαντληθεί. Ωστόσο η συμμετρία υπήρχε αρχικά:

$$(n_b - n_{\bar{b}})/s \sim 10^{-10} \quad (1.2)$$

κι αυτή η αναλογία διατηρήθηκε καθ'όλη τη διαστολή. Από τη στιγμή που φτάνουμε το 1 MeV όλα τα αντιβαρυόνια εξαϊλώνονται οπότε η αναλογία βαρυονίων και ακτινοβολίας σε αυτή την θερμοκρασία είναι περίπου:

$$\eta_b \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} = 5.5 \times 10^{-10} \frac{\Omega_b h^2}{0.020} \quad (1.3)$$

Υπάρχουν πολύ λιγότερα βαρυόνια από σχετικιστικά σωματίδια όταν $T \sim MeV$. [4]

1.2 Sakharov και το Καθιερωμένο Πρότυπο

Ο Sakharov [1] προσδιόρισε 3 ικανές (αναγκαίες) συνθήκες (που πρέπει να ικανοποιούνται) ώστε να παράγεται καθαρός βαρυονικός αριθμός (net baryon number):

1. Η θεωρία πρέπει να επιτρέπει αλληλεπιδράσεις που παραβιάζουν την διατήρηση του βαρυονικού αριθμού B. Οι εν λόγω αλληλεπιδράσεις πρέπει να είναι ενεργές σε κλίμακα υψηλών ενεργειών ώστε να ικανοποιείται η σταθερότητα του πρωτονίου.
2. Οι διακριτές συμμετρίες C, (συζυγία φορτίου), CP παραβιάζονται. Μάλιστα, η παραβίαση της συζυγίας φορτίου δεν είναι αρκετή, καθώς οι συσχετισμοί των spins των σωματιδίων και των αντισωματιδίων οδηγούν σε πανομοιότυπες ενεργές διατομές για συζευγμένες διαδικασίες, όπου η θεωρία είναι συμμετρική κατά CP.
3. Απαιτείται μια απόκλιση από τη θερμική ισορροπία: μια θεωρία αναλλοίωτη κατά CPT (όπου T η αντιστροφή του χρόνου).

Η 3η συνθήκη του Sakharov επιβάλλει ότι η εν λόγω θεωρία είναι αναλλοίωτη κάτω από τον διακριτό τελεστή συμμετρίας CPT. Ο ισχυρισμός είναι συνήθως έγκυρος λόγω του θεωρήματος CPT. Ωστόσο, σε μοντέλα αυθόρμητης βαρυογένεσης και αλληλεπιδράσεων με εξωτερικά πεδία όπου η ασυμμετρία ύλης προκύπτει σε ισορροπία δεν ικανοποιείται η αναλλοιότητα.

- Σε κλασικό επίπεδο, η Λαγκρανζιανή του Καθιερωμένου Προτύπου (SM) ικανοποιεί καθολικές U(1) chiral συμμετρίες, που οδηγούν τόσο στη διατήρηση του B όσο και στη διατήρηση του L για μεμονωμένες γενιές. Ωστόσο, σε κβαντομηχανικό επίπεδο, τα ρεύματα αυτών των καθολικών συμμετριών δεν διατηρούνται: το άθροισμα B+L δεν διατηρείται αλλά η διαφορά B-L είναι συμμετρία της κβαντικής θεωρίας.

- Διαστολή του σύμπαντος, εκτός ισορροπίας:

Ανφορικά στην 3η συνθήκη του Sakharov: προκειμένου να παραχθεί πλεόνασμα βαρυονίων (έναντι αντιβαρυονίων) ή μια ανισορροπία λεπτονίων-αντιλεπτονίων από μια κατάσταση με ίσα πλήθη σωματιδίων και αντισωματιδίων, το σύμπαν πρέπει σε κάποια χρονική στιγμή να σταματήσει να είναι σε κατάσταση θερμικής (και χημικής) ισορροπίας. Αυτή η συνθήκη είναι απαραίτητη καθώς σε μια κατάσταση θερμικής ισορροπίας, εάν δεν τηρείται η διατήρηση βαρυονίων ή/και λεπτονίων -και όλες οι διατηρούμενες ποσότητες όπως το ηλεκτρικό φορτίο απαλείφονται-, επειδή τα χημικά δυναμικά πρέπει να διατηρούνται σε όλες τις αλληλεπιδράσεις (αντιδράσεις) τότε όλα τα χημικά δυναμικά πρέπει να απλοποιούνται[2]. Η αναγκαία συνθήκη να βρισκόμαστε εκτός ισορροπίας παρέχεται από τη διαστολή του σύμπαντος. Εάν ο ρυθμός διαστολής είναι μεγαλύτερος από τους ρυθμούς διάσπασης των σωματιδίων, προκύπτει κατάσταση εκτός ισορροπίας. Δηλαδή, τη στιγμή που ο ρυθμός διάσπασης γίνεται μη σχετικιστικός είναι πολύ μικρότερος από τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος. Τότε τα σωματίδια δεν μπορούν να διασπαστούν στη χρονική κλίμακα της διαστολής κι έτσι παραμένει η αφθονία τους. Συνεπώς:

$$\Gamma < H \tag{1.4}$$

1.3 Βαρυογένεση μέσω Λεπτογένεσης

- Στο καθιερωμένο πρότυπο ο βαρυονικός αριθμός παραβιάζεται με μη τετριμμένο τρόπο: εξαιτίας κβαντικών ανωμαλιών συνδυασμένων με εκτεταμένα SU(2)_L configurations πεδίων: οι ανώμαλες συμμετρίες B και L παραβιάζονται ενώ η B-L είναι μια διατηρήσιμη -χωρίς ανωμαλίες- συμμετρία.
- Η βαρυογένεση δεν είναι εφικτή στο πλαίσιο του καθιερωμένου προτύπου λόγω της έλλειψης συνθηκών εκτός ισορροπίας.

- Σε κάθε περίπτωση, η παραβίαση της CP από τον CKM είναι πολύ μικρή για να παράξει την παρατηρούμενη βαρυονική ασυμμετρία.

Η ύπαρξη διαδικασιών sphalerons (μη τετριμμένων τοπολογικά τομέων του Higgs) υποδεικνύει βαρυογένεση μέσω λεπτογένεσης: ο λεπτονικός αριθμός μπορεί να παραβιάζεται από φυσική πέρα του Καθιερωμένου Προτύπου, οδηγώντας σε λεπτονική ασυμμετρία που μπορεί να μετατραπεί στην παρατηρούμενη βαρυονική ασυμμετρία μέσω των sphalerons.[13]

2 Δεξιόστροφα Νετρίνα

Η ιδέα του νετρίνου εισάχθηκε το 1930 από τον W. Pauli. Πειραματικά, η ενέργεια των παραγόμενων από β -διάσπαση ηλεκτρονίων είναι σημαντικά μικρότερη από την συνολική ενέργεια. Μόνο η ύπαρξη ενός νετρίνου, ενός ουδέτερου σωματιδίου με μικρή μάζα και μεγάλη διεισδυτικότητα (μεγαλύτερη του φωτονίου) θα μπορούσε να διασφαλίσει την διατήρηση της ενέργειας. Η ελικότητα των νετρίνων καθιερώθηκε το 1958 από τους Goldhaber, Grodzins, Sunyar. Το νετρίνο είναι αριστερόστροφο σωματίδιο. Στο καθιερωμένο πρότυπο, οι μαζες των νετρίνων είναι πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερες από τις μάζες των λεπτονίων και των κουαρκς. Η μέτρηση των μικρών μαζών των νετρίνων είναι ένα δύσκολο κι απαιτητικό πρόβλημα που δεν έχει λυθεί. Για τον λόγο αυτό στο Κ.Π. θεωρούμε τα αριστερόστροφα νετρίνα της διπλέτας SU(2) άμαζα. Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας θεωρούμε μοντέλα που περιλαμβάνουν δεξιόστροφα νετρίνα, τα οποία δίνουν μάζα και στα αριστερόστροφα νετρίνα. Στις επόμενες ενότητες περιγράφουμε τους δυνατούς όρους μάζας καθώς και τον μηχανισμό της τραμπάλας: τον πιο δημοφιλή μηχανισμό που εξηγεί τις πολύ μικρές μάζες των νετρίνων του Καθιερωμένου Προτύπου θεωρώντας ότι ο λεπτονικός αριθμός παραβιάζεται σε υψηλές κλίμακες $10^{15} - 10^{16}$ GeV.

2.1 Όρος μάζας Dirac

Θεωρούμε την SU(2)xU(1) αναλλοίωτη Langrangian της σύζευξης Yukawa των πεδίων των λεπτονίων και Higgs:

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{2}}{\nu} \sum_{\nu l} \bar{\psi}'_{lL} M'_{\nu l} \nu'_{lR} \tilde{\phi} + h.c. \quad (2.1)$$

με ν'_{lR} SU2 singlets : $\nu_{lR} = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\nu_l$, $\tilde{\phi} = \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και $\tilde{\phi} = i\tau_2\phi^*$. Μετά το αυθόρμητο

σπάσιμο της συμμετρίας από την \mathcal{L} και $\tilde{\phi}$ λαμβάνουμε:

$$\mathcal{L} = - \sum_{l'l} \bar{\nu}'_{l'L} M'_{l'l} \nu'_{l'R} \left(1 + \frac{H}{v}\right) + h.c. = - \bar{\nu}'_l M' V'_{R'} \left(1 + \frac{H}{v}\right) + h.c. \quad \mu\epsilon \quad \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ \nu'_{\mu L} \\ \nu'_{\tau L} \end{pmatrix} \text{ και } \nu'_R = \begin{pmatrix} \nu'_{eR} \\ \nu'_{\mu R} \\ \nu'_{\tau R} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Αφού η διπλέτα $\tilde{\phi} = \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)$ είναι κατακόρυφη και η $\bar{\psi}'_{l'L} = (\nu'_{l'L} l'_L)$ οριζόντια, το γινόμενο τους θα μηδενίσει τον όρο l'_L , δηλαδή το e, μ, τ οπότε θα έχουμε μόνο τα νετρίνα:

$$\mathcal{L} = - \bar{\nu}'_L M' \nu'_R \left(1 + \frac{H}{v}\right) + h.c. \quad (2.3)$$

Από την $\nu'^f_L = U_L^\dagger \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}$ γράφουμε

$$\mathcal{L} = - \bar{\nu}'^f_L M \nu'_R \left(1 + \frac{H}{v}\right) + h.c. \quad \mu\epsilon \quad M = U_L^\dagger M' \quad (2.4)$$

Ο πρώτος όρος της τελευταίας σχέσης είναι ο όρος μάζας νετρίνων:

$$\mathcal{L}^m = - \bar{\nu}'^f_L M \nu'_R + h.c. = - \sum_{l,l'} \bar{\nu}'_{l'L} M_{l'l} \nu'_{l'R} + h.c. \quad (2.5)$$

Διαγωνοποιώντας τον πίνακα M προκύπτει η $M = U m V^\dagger$, όπου οι πίνακες U, V είναι μοναδιαίοι και $m_{ik} = m_i \delta_{ik}, m_i > 0$. Συνδυάζοντας τις τελευταίες προκύπτει $\mathcal{L}^m(x) = - \bar{\nu}(x) m \nu(x)$ δηλαδή

$$\mathcal{L}^m(x) = - \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i(x) \nu_i(x) \quad (2.6)$$

όπου $U^\dagger \nu'^f_L = \nu_L, \nu^\dagger \nu'_R = \nu_R, \nu = \nu_L + \nu_R$ και $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$

Για τα αριστερόστροφα, η σχέση μίξης $\nu_{lL}(x) = \sum_{i=1}^3 U_{li} \nu_{iL}(x)$ $l = e, \mu, \tau$, με U_{li} να είναι ο πίνακας μίξης Pontecorvo Maki Nakagawa Sakata.

Όμοια για τα δεξιόστροφα νετρίνα, η αντίστοιχη σχέση μίξης δίνεται από την: $\nu'_{lR}(x) = \sum_{i=1}^3 V_{li} \nu_{iR}(x)$ $l = e, \mu, \tau$. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, η \mathcal{L} είναι αναλλοίωτη κάτω από ολικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$\nu'_{lL}(x) \rightarrow e^{i\Lambda} \nu_{lL}(x) \quad \nu'_{lR}(x) \rightarrow e^{i\Lambda} \nu_{lR}(x), \quad l'(x) \rightarrow e^{i\Lambda} l(x) \quad l = e, \mu, \tau$$

οπότε διατηρείται ο λεπτονικός αριθμός $L = L_e + L_\mu + L_\tau$, $\sum_i L^i = \text{constant}$. Δηλαδή τα νετρίνα και τα αντινετρίνα ενώ έχουν ίσες μάζες, διαφέρουν από τη διατήρηση του λεπτονικού αριθμού : $L(\nu_i) = 1, L(\bar{\nu}_i) = -1$, οπότε νετρίνο \neq αντινετρίνο.

2.2 Όρος μάζας Majorana

Θεωρούμε τους σπίνορες:

$$(\nu_{lL})^c = C \bar{\nu}_{lL}^T \quad \text{και} \quad (\nu_{lR})^c = C \bar{\nu}_{lR}^T$$

με C=Charge conjugation matrix: πίνακας συζυγίας φορτίου $C^\dagger = C^{-1}$ μοναδιακός με $C \gamma_\alpha^T C^{-1} = \gamma_\alpha$.

Επιπλέον ισχύουν $C^T = -C$ και $C \gamma_5^T C^{-1} = \gamma_5$.

Θα δείξουμε ότι οι σπίνορες που ορίσαμε ανωτέρω είναι αριστερόστροφος και δεξιόστροφος αντίστοιχα.

Θα δείξουμε πώς ορίζονται οι συζυγείς των σπινόρων που δώσαμε στην αρχή της ενότητας: $\overline{(\nu_{lL})^c}, \overline{(\nu_{lR})^c}$.

Χρησιμοποιούμε για τον σκοπό αυτό, μια σημαντική ιδιότητα του πίνακα συζυγίας φορτίου C:

$$C \gamma_0^T C^{-1} = -\gamma_0 \rightarrow C \gamma_0^T = -\gamma_0 C$$

Εφαρμόζουμε τη συζυγία (bar) στη σχέση του ορισμού :

$$\overline{(\nu_{lL})^c} = \nu_{lL}^T \bar{C} = \nu_{lL}^T \gamma_0 C^\dagger \gamma_0$$

ισχύει όμως επιπλέον και ότι $C^\dagger = -C$ οπότε:

$$\overline{(\nu_{lL})^c} = -\nu_{lL}^T \gamma_0 C \gamma_0 = \nu_{lL}^\dagger C \gamma_0^\dagger \gamma_0 = \nu_{lL}^T C = -\nu_{lL}^T C^{-1}$$

(επειδή $C^{-1} = -C$). Γράφουμε την έκφραση της Λαγκρανζιανής με τους νέους σπίνορες για να εξάγουμε τον πιο γενικό όρο μάζας:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{l', l=e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{l'L} M_{l'l}^M (\nu_{lL})^c + h.c. = -\frac{1}{2} \sum_{l', l=e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{l'L} M_{l'l}^M C \nu_{lL}^T + h.c. \quad (2.7)$$

Διαφορετικά, μπορούμε να γράψουμε την έκφραση σε matrix (και όχι index) form. Απαλείφουμε το άθροισμα με τους δείκτες και η έκφραση που προκύπτει είναι η:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^c + h.c. \quad (2.8)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο πίνακας M^M είναι συμμετρικός. Θεωρούμε τη Lorentz βαθμωτή ποσότητα $\bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^c$ και την εξισώνουμε με τη σχέση που προκύπτει εφαρμόζοντας αναστροφή:

$$\bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^c = \bar{\nu}_L M^M C \bar{\nu}_L^T = -\bar{\nu}_L (M^M)^T C^T \bar{\nu}_L^T = \bar{\nu}_L (M^M)^T C \bar{\nu}_L^T$$

άρα $\bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^c = \bar{\nu}_L (M^M)^T C \bar{\nu}_L^T = \bar{\nu}_L (M^M)^T (\nu_L)^c$. Συνεπώς $(M^M)^T = M^M$ οπότε ο M^M είναι συμμετρικός πίνακας.

Επιπλέον, θα διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα M^M . Τον γράφουμε σε μορφή $M^M = U m U^T$ όπου U μοναδιακός πίνακας και $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$, $m_i > 0$. Αντικαθιστούμε στην (2.8):

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L U m U^\dagger V \bar{\nu}_L^T + h.c. = -\frac{1}{2} \overline{U^\dagger \nu_L} m (U^\dagger \nu_L)^c - \frac{1}{2} \overline{(U^\dagger \nu_L)^c} m U^\dagger \nu_L$$

Θέλοντας να υιοθετήσουμε μια πιο συμπυκνωμένη μορφή χρησιμοποιούμε την έκφραση

$$\nu^M = U^\dagger \nu_L + (U^\dagger \nu_L)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, η έκφραση:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\nu}^M m \nu^M \quad (2.9)$$

είναι ισοδύναμη με την προηγούμενη. Επαληθεύουμε τον παραπάνω ισχυρισμό αναπτύσσοντας την (2.9):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} [\overline{U^\dagger \nu_L} + \overline{(U^\dagger \nu_L)^c}] m [U^\dagger \nu_L + (U^\dagger \nu_L)^c] = \\ &= -\frac{1}{2} \overline{U^\dagger \nu_L} m (U^\dagger \nu_L)^c - \frac{1}{2} \overline{(U^\dagger \nu_L)^c} m U^\dagger \nu_L - \frac{1}{2} \overline{U^\dagger \nu_L} m U^\dagger \nu_L - \frac{1}{2} \overline{(U^\dagger \nu_L)^c} m U^\dagger \nu_L \end{aligned}$$

Εξ' ορισμού οι γνωστές ποσότητες δίνονται από τις:

$$\overline{U^\dagger \nu_L} = \bar{\nu}_L \bar{U}^\dagger = \bar{\nu}_L U \gamma_0$$

$$\overline{(U^\dagger \nu_L)^c} = -(U^\dagger \nu_L)^T C^{-1} = -\nu_L^T U^* C^{-1}$$

$$U^\dagger \nu_L^c = C \overline{(U^\dagger \nu_L)^T} = C (\bar{\nu}_L \bar{U}^\dagger)^T = C U \gamma_0 \bar{\nu}^T$$

Δηλαδή οι 2 όροι που περισσεύουν είναι:

$$-\frac{1}{2} m \bar{\nu}_L U \gamma_0 U^\dagger \nu_L + \frac{1}{2} m \nu_L^T U^* C^{-1} C U \gamma_0 \bar{\nu}^T =$$

$$-\frac{1}{2}m\bar{\nu}_L U \gamma_0 U^\dagger \nu_L + \frac{1}{2}m(\bar{\nu}_L U \gamma_0 U^\dagger \nu_L)^T = 0$$

Η ποσότητα μηδενίζεται καθώς ο δεύτερος όρος είναι ο ανάστροφος του πρώτου όρου.

Έπειτα γράφουμε την έκφραση της \mathcal{L} με ιδιοκαταστάσεις μάζας Majorana:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=3}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i \quad (2.10)$$

με $\nu_i(x)$ να είναι το πεδίο νετρίνου μάζας m_i . Από τη σχέση $\nu^M = U^\dagger \nu_L + (U^\dagger \nu_L)^c$ προφανώς εξάγουμε $(\nu^M(x))^c = (U^\dagger \nu_L)^c + [(U^\dagger \nu_L)^c]^c + U^\dagger \nu_L = \nu^M(x)$. Δηλαδή, τα πεδία των νετρίνων με καθορισμένη μάζα $\nu_i(x)$ ικανοποιούν τη συνθήκη Majorana:

$$\nu_i^c(x) = \nu_i(x) \quad (2.11)$$

Στη γενική περίπτωση το πεδίο $\nu_i(x)$ νετρίνου μάζας m_i αναπτύσσεται ως:

$$\nu(x) = \int N_p (C_r(p) u^r(p) e^{-ipx} + d_r^\dagger(p) u^r(-p) e^{ipx}) d^3p \quad (2.12)$$

όπου $N_p = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2p^0}}$, με $\sqrt{2p^0}$ ενέργεια, ο συνήθης παράγοντας κανονικοποίησης, ο σπινόρας $u^r(p)$ περιγράφει την κατάσταση ορμής p κι ελικότητας r σύμφωνα με τους ορισμούς που δώσαμε στην αρχή της υποενότητας: $u^r(-p) = C(\bar{u}^r(p))^T$. Επιπλέον, $C_r(p)$ ($d_r^\dagger(p)$) είναι τελεστής καταστροφής νετρίνου (δημιουργίας αντινετρίνου) με ορμή p κι ελικότητα r . Όμως είπαμε ότι το πεδίο $\nu(x)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Majorana, συνεπώς $C_r(p) = d_r(p)$.

Τελικά, εάν το πεδίο του νετρίνου ικανοποιεί τη συνθήκη Majorana νετρίνο \equiv αντινετρίνο.

Το πεδίο $\nu^M(x)$ γράφεται ως άθροισμα της αριστερόστροφης και της δεξιόστροφης συνιστώσας ως:

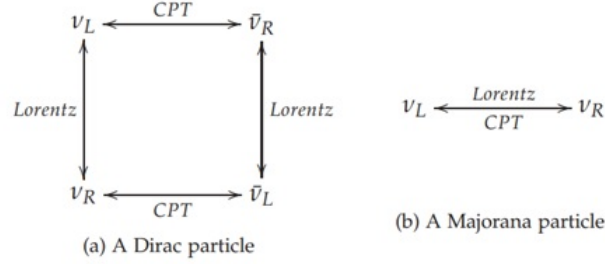
$\nu^M(x) = \nu_L^M(x) + \nu_R^M(x)$. Όμως, εξ'ορισμού $\nu^M = U^\dagger \nu_L + (U^\dagger \nu_L)^c$ οπότε συγκρίνοντας με την $\nu^M(x) = \nu_L^M(x) + \nu_R^M(x)$ εξάγουμε τις ισότητες:

$$\nu_L^M(x) = U^\dagger \nu_L \quad \text{και} \quad \nu_R^M(x) = (U^\dagger \nu_L)^c \quad \nu_R^M(x) = (\nu_L^M(x))^c$$

Γενικά ισχύει ότι $\nu_{iR}(x) = (\nu_{iL}(x))^c$ που είναι άμεση συνέπεια της συνθήκης Majorana. Για την ακρίβεια, αντικαθιστώντας τον ορισμό των αριστερόστροφων/δεξιόστροφων σπινόρων, και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $(\nu_{iL})^c = C\bar{\nu}_{iL}^T$ και $(\nu_{iR})^c = C\bar{\nu}_{iR}^T$ επαληθεύουμε ότι:

$$(\nu_{iL})^c = \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \nu_i\right)^c = C \frac{1 + \gamma_5^T}{2} \bar{\nu}_i^T = \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu_i^c = \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu_i = \nu_{iR}$$

Η συνθήκη ισχύει και αντίστροφα: εάν η αριστερόστροφη (δεξιόστροφη) συνιστώσα ικανοποιεί τη σχέση τότε το πεδίο ν_i ικανοποιεί τη συνθήκη Majorana. Αξίζει να επισημάνουμε ότι η τελευταία σχέση αντικατοπτρίζει τη διαφορά των πεδίων Dirac, Majorana: στην περίπτωση πεδίου Dirac, η αριστερόστροφη και η δεξιόστροφη συνιστώσα είναι ανεξάρτητες ενώ στην περίπτωση πεδίου Majorana συνδέονται μέσω της τελευταίας σχέσης.



Σχήμα 3: σωματίδια Dirac, Majorana[11]

Θεωρούμε τον καθολικό μετασχηματισμό βαθμίδας $\nu'_L(x) = e^{i\Lambda}\nu_L(x)$ με Λ αυθαίρετη σταθερά. Για το συζυγές πεδίο $(\nu'_L)^c(x) = e^{-i\Lambda}(\nu_L)^c(x)$. Επιπλέον, $\bar{\nu}'_L = \bar{\nu}_L e^{-i\Lambda}$. Θα εξετάσουμε εάν η Lagrangian παραμένει αναλλοίωτη κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό:

$$\mathcal{L}'^M = -\frac{1}{2}\bar{\nu}_L e^{-i\Lambda} M^M e^{-i\Lambda} (\nu_L)^c \neq -\frac{1}{2}\bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^c = \mathcal{L}^M$$

Είναι προφανές ότι ο όρος μάζας Majorana ΔEN είναι αναλλοίωτος κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Συνεπώς, ο λεπτονικός αριθμός ΔEN διατηρείται οπότε είναι αδύνατον να διακρίνουμε

$$\text{τα νετρίνα από τα αντινετρίνα. Από την } \nu^M = U^\dagger \nu_L + (U^\dagger \nu_L)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

γράφουμε $\nu_L(x) = U\nu_L^M(x)$ αφού $\nu^M(x) = \nu_L^M(x) + \nu_R^M(x)$. Συνεπώς $\nu_{iL}(x) = \sum_{i=1}^3 U_{li}\nu_{iL}(x)$ με U 3×3 μοναδιακό πίνακα μίξης.

Έπειτα, γράφουμε τους Lorentz αναλλοίωτους κινητικούς όρους της Λαγκρανζιανής

$$\mathcal{L}_o = \sum_l \bar{\nu}_{lL} i\gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_{lL} = \bar{\nu}_L i\gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_L$$

Όπως προείπαμε, $U^\dagger = U^{-1}$, $\nu_L^M(x) = U^\dagger \nu_L(x)$, και $\nu_R^M(x) = (U^\dagger \nu_L(x))^c$ οπότε

$$\mathcal{L}_o = \bar{\nu}^M i\gamma_\alpha \partial^\alpha \nu_L^M = \sum_i \bar{\nu}_{iL} i\gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_{iL}$$

όμως ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_{iL} i\gamma_\alpha \partial^\alpha \nu_{iL} &= -\partial^\alpha \nu_{iL}^T \gamma_\alpha^T \bar{\nu}_{iL}^T \stackrel{def}{=} -\partial^\alpha \bar{\nu}_{iL}^c i\gamma_\alpha (\nu_{iL})^c \\ -\partial^\alpha \bar{\nu}_{iL}^c i\gamma_\alpha (\nu_{iL})^c &= -\partial^\alpha [\bar{\nu}_{iL}^c i\gamma_\alpha (\nu_{iL})^c] + \bar{\nu}_{iL}^c i\gamma_\alpha \partial^\alpha (\nu_{iL})^c\end{aligned}$$

Προκειμένου να συνεχίσουμε, παραλείπουμε τον πρώτο όρο της τελευταίας σχέσης επειδή η Λαγκρανζιανή ορίζεται μέχρι ολικές παραγώγους (a Lagrangian is determined up to a divergence of a vector) οπότε:

$$\mathcal{L}_o = \frac{1}{2} \sum_i \bar{\nu}_{iL} i\gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_{iL} + \frac{1}{2} \sum_i \overline{(\nu_{iL})^c} i\gamma_\alpha \partial^\alpha (\nu_{iL})^c = \frac{1}{2} \sum_i \bar{\nu}_i \gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_i$$

με $\nu_i = \nu_{iL} + (\nu_{iL})^c$ το πεδίο Majorana. Τελικά, η συνολική Lagrangian Majorana γράφεται:

$$\boxed{\mathcal{L}_o = \frac{1}{2} \sum_{i=3}^3 \bar{\nu}_i (i\gamma^\alpha \partial_\alpha - m_i) \nu_i} \quad (2.13)$$

2.3 Όρος μάζας Dirac και Majorana

Ο πιο γενικός όρος μάζας με αριστερόστροφα (active flavor) και δεξιόστροφα (sterile) πεδία γράφεται:

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M_L^M (\nu_L)^c - \bar{\nu}_L M^D \nu_R - \frac{1}{2} \overline{(\nu_R)^c} M_R^M \nu_R + h.c. \quad (2.14)$$

όπου M_L^M, M_R^M συμμετρικοί 3×3 πίνακες, δηλαδή $M^T = M$ και ο M^D μη διαγώνιος 3×3 πίνακας με μιγαδικά στοιχεία. Ως γνωστόν $\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}$ και $\nu_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix}$.

Θεωρούμε έπειτα τον 6×6 συμμετρικό πίνακα $M^{D+M} = \begin{pmatrix} M_L^M & M^D \\ (M^D)^T & M_R^M \end{pmatrix}$ και το διάνυσμα στήλη με 6 συνιστώσες $n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix}$. Η τελευταία έκφραση της \mathcal{L} είναι ισοδύναμη με την πιο συμπυκνωμένη:

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{n}_L M^{D+M} (n_L)^c + h.c. \quad (2.15)$$

καθώς εάν αντικαταστήσουμε λαμβάνουμε:

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{n}_L M^{D+M} (n_L)^c + h.c. = -\frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \overline{(\nu_R)^c}) \begin{pmatrix} M_L^M & M^D \\ (M^D)^T & M_R^M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c.$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \left(\bar{\nu}_L M_L^M + \overline{(\nu_R)^c} (M^D)^T \quad \bar{\nu}_L M^D + (\bar{\nu}_R)^c M_R^M \right) \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c. \\
&= \frac{1}{2} \left(\bar{\nu}_L M_L^M \nu_L^c + \overline{(\nu_R)^c} (M^D)^T \nu_L^c + \bar{\nu}_L M^D \nu_R + (\bar{\nu}_R)^c M_R^M \nu_R \right) + h.c.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ισοδύναμη σχέση που προκύπτει εφαρμόζοντας αναστροφή (T):

$$\bar{\nu}_L M^D \nu_R = -(\nu_R)^T (M^D)^T (\bar{\nu}_L)^T = (\bar{\nu}_L)^T (M^D)^T (\nu_L)^c$$

λαμβάνουμε την (2.14). Θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με πριν : διαγωνοποιούμε τον πίνακα $M^{D+M} = U m U^T$ με $m_{ij} = m_i \delta_{ij}$. Ωστόσο, οι U, U^\dagger είναι μοναδιαίοι οπότε αντικαθιστώντας στην παραπάνω έκφραση της Λαγκρανζιανής, η έκφραση που προκύπτει είναι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{D+M} &= -\frac{1}{2} \overline{U^\dagger n_L} m (U^\dagger n_L)^c + h.c. = -\frac{1}{2} \bar{\nu}^M m \nu^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 m_i \bar{\nu}_i \nu_i \\
\mu \epsilon \nu^M &= \nu_L^M + (\nu_L^M)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu_6 \end{pmatrix} \text{ και } \nu_L^M = U^\dagger n_L
\end{aligned}$$

2.4 Εφαρμογή: Τα πεδία γεύσεων στην περίπτωση συνδυασμένων όρων μάζας Dirac και Majorana

Όπως είδαμε προηγουμένως $n_L = U \nu_L^M$ με $n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix}$ και $\nu^M = \nu_L^M + (\nu_L^M)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu_6 \end{pmatrix}$ οπότε

$\nu_{iL}(x) = \sum_{i=1}^6 \nu_i \nu_{iL}$ και $(\nu_{iR})^c = \sum_{i=1}^6 U_{\bar{i}i} \nu_i L(x)$, με $U = 6 \times 6$ πίνακας. Συνεπώς τα πεδία των γεύσεων στην περίπτωση του συνδυασμένου όρου μάζας Majorana και Dirac (M+D) είναι μίξη 6 πεδίων Majorana μάζας m_i .

2.4.1 Παράδειγμα μιας γενιάς

Παρακάτω θα θεωρούμε τον όρο μάζας νετρίνων στην απλούστερη περίπτωση 2 πεδίων (νετρίνων). Θεωρούμε τον (συνδυασμένο) όρο μάζας Dirac και Majorana στην περίπτωση μιας γενιάς.

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} m_L \bar{\nu}_L (\nu_L)^c - m_D \bar{\nu}_L \nu_R - \frac{1}{2} m_R \overline{(\nu_R)^c} + h.c.$$

που γράφεται

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{n}_L M^{D+M} (n_L)^c + h.c. \quad \mu\epsilon \quad n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix}$$

$$\kappa_{\alpha\beta} M^{D+M} = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}$$

Εισάγουμε στη συνέχεια τον πίνακα $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(m_R - m_L) & m_D \\ m_D & -\frac{1}{2}(m_R - m_L) \end{pmatrix}$ ώστε να γράψουμε τον πίνακα M^{D+M} σε εναλλακτική μορφή. Επειδή $Tr M = 0$ εξάγουμε ότι:

$$M^{D+M} = \frac{1}{2}Tr M^{D+M} + M \rightarrow \frac{1}{2}Tr M^{D+M} = M^{D+M} - M$$

$$\frac{1}{2}Tr M^{D+M} = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(m_R - m_L) & m_D \\ m_D & \frac{1}{2}(m_R - m_L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m_L + \frac{1}{2}m_R & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m_L + \frac{1}{2}m_R \end{pmatrix}$$

$$Tr M^{D+M} = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Έπειτα, διαγωνοποιούμε τον M ορθογώνιου μετασχηματισμού χρησιμοποιώντας έναν 2×2 ορθογώνιο πίνακα (στροφής) :

$$M = O\bar{m}O^T \quad (2.16)$$

όπου $\bar{m}_{ij} = \bar{m}_i \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$ και $O = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Υπολογίζουμε στη συνέχεια τις ιδιοτιμές

του M . Τον διαγωνοποιούμε με χρήση χαρακτηριστικού πολυωνύμου:

$$Mx = \lambda x \rightarrow (M - \lambda I)x = \Phi_{2 \times 2}$$

$$|M - \lambda I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(m_R - m_L) - \lambda & m_D \\ m_D & \frac{1}{2}(m_R - m_L) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left[-\frac{m_R - m_L}{2} - \lambda \right] \left[\frac{m_R - m_L}{2} - \lambda \right] - m_D^2 = 0$$

$$-\frac{(m_R - m_L)^2}{4} + \lambda \frac{m_R - m_L}{2} - \lambda \frac{m_R - m_L}{2} + \lambda^2 - m_D^2 = 0$$

Λύνουμε στη συνέχεια ως προς λ .

$$\lambda^2 = \frac{(m_R - m_L)^2}{4} + m_D^2 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του M είναι:

$$\bar{m}_{1,2} = \mp \frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} \quad (2.17)$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι πίνακες O, O^T δίνονται από τις:

$$O = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad O^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστούμε στην (2.16). Υπολογίζουμε το δεξιό μέλος ώστε να το εξισώσουμε με τον πίνακα M :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(-\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}) & \sin\theta(-\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}) \\ -\sin\theta(-\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}) & \cos\theta(\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) & 2\cos\theta\sin\theta\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} \\ 2\cos\theta\sin\theta\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} & \frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες $\cos 2\theta = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)$, $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}\cos 2\theta & \sin 2\theta\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} \\ \sin 2\theta\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} & \frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Δηλαδή,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}\cos 2\theta & \sin 2\theta\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} \\ \sin 2\theta\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} & \frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(m_R - m_L) & m_D \\ m_D & -\frac{1}{2}(m_R - m_L) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Από ισότητα πινάκων ο λόγος των στοιχείων (1,2)/ (2,2) λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\frac{\sin 2\theta\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}}{\cos 2\theta\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}} = \frac{m_D}{\frac{1}{2}(m_R - m_L)}$$

Όμοια, από την ισότητα των στοιχείων (2,2) ισχύει:

$$\cos 2\theta \frac{1}{2} \sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} = \frac{1}{2}(m_R - m_L)$$

Τελικά, εξάγουμε τις παρακάτω σχέσεις που θα μας φανούν πολύ χρήσιμες στη συνέχεια:

$$\tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \quad \cos 2\theta = \frac{m_R - m_L}{\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}} \quad (2.19)$$

Θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία ώστε να διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα M^{D+M} και να βρούμε τις ιδιοτιμές του:

$$M^{D+M}x = \lambda x \rightarrow (M^{D+M} - \lambda I)x = \emptyset \rightarrow |M^{D+M} - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} m_L - \lambda & m_D \\ m_D & m_R - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (m_L - \lambda)(m_R - \lambda) - m_D^2 = 0 \rightarrow m_L m_R - \lambda m_L - \lambda m_R + \lambda^2 - m_D^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(m_L + m_R) + m_L m_R - m_D^2 = 0$$

Ως γνωστόν,

$$\begin{aligned} \Delta &= (m_L + m_R)^2 - 4(m_L m_R - m_D^2) \\ &= m_L^2 + 2m_L m_R + m_R^2 - 4m_L m_R + 4m_D^2 \\ &= (m_L - m_R)^2 + 4m_D^2 \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του M^{D+M} δίνονται από την έκφραση:

$$m'_{1,2} = \frac{1}{2}(m_R + m_L) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} \quad (2.20)$$

Το πρόσημο των ιδιοτιμών (μαζών) μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Θα το απορροφήσουμε στις ιδιοτιμές του πίνακα συμβολίζοντάς το ως εξής:

$$m'_i = m_i \eta_i \quad \mu\epsilon \quad m_i = |m'_i| \quad \text{και} \quad \eta_i = \pm 1$$

Συνεπώς,

$$M^{D+M} = O m \eta O^T = U m U^T \quad (2.21)$$

καθώς θεωρούμε $U = O\eta^{\frac{1}{2}}$ μοναδιακό πίνακα. Τελικά, μπορούμε να γράψουμε την

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{n}_L M^{D+M} (n_L)^c + h.c. \quad (2.22)$$

υιοθετώντας πάλι την έκφραση $\nu^M = U^\dagger n_L + (U^\dagger n_L)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ ως

$$\mathcal{L}^{D+M} = \frac{1}{2}\bar{\nu}^M m \nu^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} m_i \bar{\nu}_i \nu_i \quad (2.23)$$

Είναι προφανές ότι τα ν^M ικανοποιούν την συνθήκη Majorana, δηλαδή $(\nu_i)^c = \nu_i$.

Παραπάνω θεωρήσαμε ν_1, ν_2 τα πεδία νετρίνων Majorana με μάζες m, m_2 αντίστοιχα. Από τις σχέσεις:

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \nu^M = U^\dagger n_L + (U^\dagger n_L)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

εξάγουμε τις σχέσεις μίξης στην περίπτωση του συνδυασμένου όρου μάζας Dirac, Majorana για 1 οικογένεια νετρίνων:

$$\nu_L = \cos\theta\sqrt{\eta_1}\nu_{1L} + \sin\theta\sqrt{\eta_2}\nu_{2L} \quad (\nu_R)^c = -\sin\theta\sqrt{\eta_1}\nu_{1L} + \cos\theta\sqrt{\eta_2}\nu_{2L} \quad (2.24)$$

Οι μάζες των νετρίνων m και m_2 και η γωνία μίξης θ προσδιορίζονται από 3 πραγματικές παραμέτρους m_L, m_R, m_D όπως δείξαμε σε προηγούμενες σχέσεις. Η παράμετρος η_i $i = 1, 2$ (το πρόσημο) καθορίζει την CP parity του νετρίνου Majorana.

2.4.2 Εφαρμογή/Παράδειγμα δυο γενιών

Θα θεωρήσουμε τώρα 2 πεδία, με διαφορετική γεύση, έστω μ, τ . Γράφουμε τον όρο μάζας Majorana

$$\mathcal{L}^M = \frac{1}{2}\bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^c + h.c. \quad (2.25)$$

με τη διαφορά ότι εδώ

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad M^M = \begin{pmatrix} m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{\mu\tau} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

όπου $m_{\mu\mu}, m_{\mu\tau}, m_{\tau\tau}$ είναι πραγματικές παράμετροι (έχουμε υποθέσει CP αναλλοιωτότητα). Είναι προφανές ότι εάν αντικαταστήσουμε $m_{\mu\mu} \rightarrow m_L, m_{\tau\tau} \rightarrow m_R, m_{\mu\tau} \rightarrow m_D$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αντίστοιχες σχέσεις που θίξαμε ανωτέρω για τον όρο μάζας Dirac, Majorana. Για τις μάζες των νετρίνων

Majorana ν_1, ν_2 έχουμε:

$$m_{1,2} = \left| \frac{1}{2}(m_{\tau\tau} + m_{\mu\mu}) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(m_{\tau\tau} - m_{\mu\mu})^2 + 4m_{\mu\tau}^2} \right| \quad (2.27)$$

όπου τα πεδία με γεύσεις μ, τ δίνονται από τις (2.24)

$$\nu_{\mu L} = \cos\theta\sqrt{\eta_1}\nu_{1L} + \sin\theta\sqrt{\eta_2}\nu_{2L} \quad \nu_{\tau L} = -\sin\theta\sqrt{\eta_1}\nu_{1L} + \cos\theta\sqrt{\eta_2}\nu_{2L} \quad (2.28)$$

Φυσικά για τη γωνία μίξης θ , από την (2.19):

$$\tan 2\theta = \frac{2m_{\mu\tau}}{m_{\tau\tau} - m_{\mu\mu}} \quad \cos 2\theta = \frac{m_{\tau\tau} - m_{\mu\mu}}{\sqrt{(m_{\tau\tau} - m_{\mu\mu})^2 + 4m_{\mu\tau}^2}} \quad (2.29)$$

2.5 Μηχανισμός τραμπάλας

Ο μηχανισμός της τραμπάλας που προτάθηκε στο τέλος της δεκαετίας του 80, βασίζεται στον όρο μάζας Dirac, Majorana. Πρόκειται για τον πιο φυσικό κι εφικτό μηχανισμό παραγωγής μάζας νετρίνων. Πρόκειται για ένα μοντέλο που παράγει ένα ελαφρύ νεutrino για κάθε μια από τις 3 γνωστές γεύσεις νετρίνων, κι ένα πολύ βαρύ νεutrino (επίσης για κάθε γενιά), που δεν έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά. Στην μία πλευρά της τραμπάλας, τα ελαφριά αριστερόστροφα νετρίνα, ενώ στην άλλη τα βαριά νετρίνα που πρέπει να είναι δεξιόστροφα. Επιπλέον, η χρήση του όρου τραμπάλα είναι ενδεικτική της αλληλοεξάρτησης των μαζών: όσο πιο βαριά είναι τα δεξιόστροφα νετρίνα, τόσο πιο ελαφριά είναι τα αριστερόστροφα.

2.5.1 Θεώρηση μιας γενιάς

Οι κύριες προϋποθέσεις του μηχανισμού της τραμπάλας είναι:

1. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει αριστερόστροφος όρος μάζας Majorana:

$$m_L = 0 \quad (2.30)$$

2. Υποθέτουμε ότι ο όρος μάζας Dirac παράγεται/προκύπτει από τον (συνήθη) μηχανισμό Higgs, ώστε το m_D να είναι της τάξης της μάζας ενός κουαρκ ή ενός λεπτονίου.

3. Ο δεξιόστροφος όρος μάζας Majorana σπάει τη διατήρηση του λεπτονικού αριθμού. Υποθέτουμε ότι ο λεπτονικός αριθμός παραβιάζεται σε κλίμακα πολύ μεγαλύτερη της ηλεκτρασθενούς ώστε

$$m_R \equiv M_R \gg m_D \quad (2.31)$$

Ο όρος μάζας Majorana επιτρέπεται μόνο για ηλεκτρικά ουδέτερα σωματίδια (όπως τα νετρίνα). Για φορτισμένα σωματίδια (κουαρκ, ή λεπτόνια), η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου απαγορεύει την ύπαρξη όρων μάζας Majorana. Παρατηρούμε επίσης ότι επειδή ο ν_R singlet έχει μηδενικό υπερφορτίο δεν υπάρχει περιορισμός στο m_R : μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλο. Από τις ιδιοτιμές του M^{D+M} όπως είδαμε στην (2.20) και την (2.31), προκύπτουν οι μάζες των σωματιδίων Majorana:

$$m \simeq \frac{m_D^2}{M_R} \ll m_D \quad m_2 \simeq M_R \gg m_D \quad (2.32)$$

κατ'αντιστοιχία, για την γωνία μίξης θα ισχύει:

$$\theta \simeq \frac{m_D}{M_R} \ll 1 \quad (2.33)$$

Επιπλέον, $\eta_1 = -1$ $\eta_2 = 1$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω, οι νέες σχέσεις μίξης που προκύπτουν είναι:

$$\nu_L = i\nu_{1L} + \frac{m_D}{M_R}\nu_{2L} \quad (\nu_R)^c = -i\frac{m_D}{M_R}\nu_{1L} + \nu_{2L} \quad (2.34)$$

Στο πλαίσιο του μηχανισμού της τραμπάλας, το πόσο μικρές είναι οι μάζες των νετρίνων (σε σύγκριση με αυτές των κουαρκς και των λεπτονίων) συνδέεται με την παραβίαση του συνολικού λεπτονικού αριθμού σε (μεγάλη) κλίμακα που καθορίζεται από την M_R . Ο κατασταλτικός παράγοντας $\frac{m_D}{M_R}$ χαρακτηρίζεται από τον λόγο της ηλεκτρασθενούς κλίμακας προς την κλίμακα παραβίασης του λεπτονικού αριθμού. Ενδεικτικά, εάν θεωρήσουμε $m_D \simeq m_t \simeq 170\text{GeV}$ και $m \simeq 5 \cdot 10^{-2}$ (μάζα του βαρύτερου), βρίσκουμε:

$$M_R \simeq \frac{m_D^2}{m} \simeq 10^{15}\text{GeV} \quad (2.35)$$

2.5.2 Θεώρηση τριών γενεών

Στη φαινομενολογικά ρεαλιστική περίπτωση τριών γενιών νετρίνων, ο πίνακας μάζας (του μηχανισμού της τραμπάλας) έχει τη μορφή:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M_R \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

όπου m_D και M_R 3x3 πίνακες με $M_R \gg m_D$. Εισάγουμε τον πίνακα m μέσω της $U^T M U = m$, διαγωνοποιώντας τον U (ο U είναι μοναδιακός πίνακας). Σε αναλογία με την περίπτωση που είχαμε μόνο

μία γενιά, επιλέγουμε τον πίνακα U στη μορφή:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & (m_D^T)^\dagger (M_R^{-1})^\dagger \\ (M_R^{-1})^\dagger (m_D^T) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι στη γραμμική προσέγγιση για το $\frac{m_D}{M_R}$, $U^\dagger U = 1$. Από τη σχέση διαγωνοποίησης και τον ορισμό του U , συνεπάγεται ότι σε γραμμική προσέγγιση του $\frac{m_D}{M_R}$, ο πίνακας m γράφεται στην block-διαγώνια μορφή:

$$m \simeq \begin{pmatrix} -m_D M^{-1} m_D^T & 0 \\ 0 & m_R \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Ο πίνακας μάζας νετρίνων Majorana δίνεται από την:

$$\boxed{m_\nu = -m_D M_R^{-1} m_D^T} \quad (2.39)$$

με τον πίνακα μάζας των βαρέων σωματιδίων Majorana να είναι M_R . Δηλαδή, εφόσον ο μηχανισμός της τραμπάλας πραγματοποιείται στη φύση τα παρακάτω πρέπει να ικανοποιούνται: τα νετρίνα είναι ΟΠΩΣ-ΔΗΠΟΤΕ σωματίδια Majorana, οι μάζες των νετρίνων είναι πολύ μικρότερες από αυτές των λεπτονίων και των κουαρκς, πρέπει να υπάρχουν ΒΑΡΙΑ ΔΕΞΙΟΣΤΡΟΦΑ νετρίνα (από την άλλη πλευρά της τραμπάλας). Οι διασπάσεις των τελευταίων στο πρώιμο σύμπαν είναι ευρέως γνωστή πιθανή θεωρία για την εξήγηση της βαρυονικής ασυμμετρίας στο σύμπαν.

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρήσαμε όλους τους δυνατούς όρους μάζας νετρίνων. Νετρίνα με πεπερασμένη μάζα μπορεί να είναι σωματίδια Majorana ή Dirac. Τα νετρίνα είναι σωματίδια Majorana εφόσον ο όρος μάζας δεν είναι αναλλοίωτος κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, οπότε ο λεπτονικός αριθμός δεν διατηρείται. Εφόσον θεωρήσουμε τα νετρίνα ως σωματίδια Majorana, τότε είναι τα ατισωματίδια του εαυτού του. Αντίστοιχα, τα νετρίνα είναι σωματίδια Dirac εφόσον ο συνολικός λεπτονικός αριθμός διατηρείται. Τελικά, εάν ο πίνακας μάζας είναι μη διαγώνιος, τα πεδία των γεύσεων των νετρίνων ν_{iL} είναι μίξεις των αριστερόστροφων συνιστωσών των πεδίων των νετρίνων με πεπερασμένες μάζες [6].

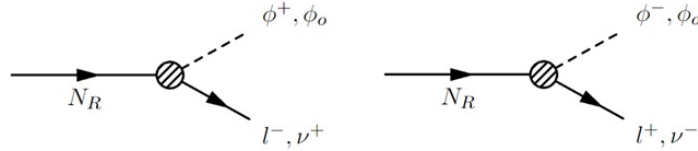
3 Λεπτογένεση στο συμβατικό πρότυπο

3.1 Επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου

Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με έναν μηχανισμό που τελικά οδηγεί σε λεπτονική ασυμμετρία. Αρχικά, επεκτείνουμε το καθιερωμένο πρότυπο θεωρώντας την ύπαρξη δεξιόστροφων νετρίνων N_1, N_2 όπως προέκυψαν από τον μηχανισμό της τραμπάλας. Θεωρούμε ένα απλουστευμένο μοντέλο με μία διπλέτα λεπτονίων L και 2 δεξιόστροφα νετρίνα που συμβολίζουμε με N_1, N_2 αντίστοιχα (όπου το N_1 είναι πιο ελαφρύ από το N_2). Τότε, η Λαγκρανζιανή που προκύπτει από τις συμμετρίες του SM ($SU(2)_L \times U(1)_Y$):

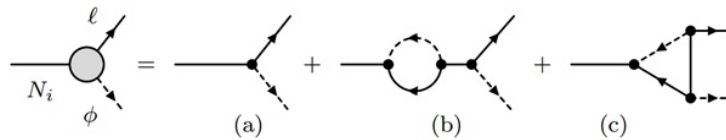
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + N_1 i \not{\partial} N_1 + Y \bar{L} H N_1 + \frac{m}{2} N_1^2 + N_2 i \not{\partial} N_2 + \lambda_2 \bar{L} H N_2 + \frac{M_2}{2} N_2^2 + h.c. \quad (3.1)$$

Στο συμβατικό μοντέλο, η CPT διατηρείται. Ωστόσο όπως είδαμε στην εισαγωγή, η 2η συνθήκη του Sakharov απαιτεί να παραβιάζεται η CP. Συνεπώς τα διαγράμματα:



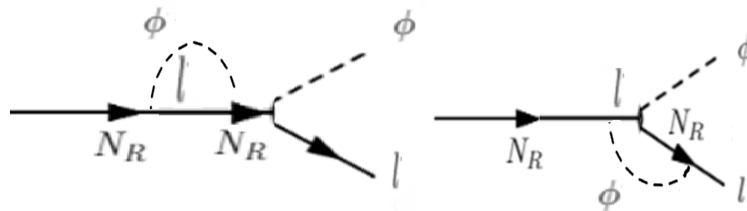
Σχήμα 4: Λεπτογένεση, Παραβίαση CP, Διατήρηση CPT Συμμετρίας

Όπου το N_R δηλώνει το δεξιόστροφο νετρίνο με μάζα, l^{\pm} είναι λεπτόνια (δηλ. e^-, μ^-, τ^-), και ϕ^{\pm}, ϕ^0 , τα σωματίδια Higgs. Επειδή η λεπτογένεση συμβαίνει συνήθως σε θερμοκρασίες υψηλότερες από την αυθόρμητη θραύση της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης στο σύμπαν, όλες οι συνιστώσες του Higgs, ϕ^+, ϕ^-, ϕ^0 συνεισφέρουν. Το κυκλικό σύμβολο δηλώνει διορθώσεις βρόχου, οι οποίες είναι απαραίτητες για λεπτογένεση σε θεωρίες που παραβιάζουν τη συμμετρία CP (C = συζυγία φορτίου, P = ισοτιμία).



Σχήμα 5: Tree-level, one-loop self-energy and one-loop vertex contributions to the decay of the heavy Majorana neutrino[18]

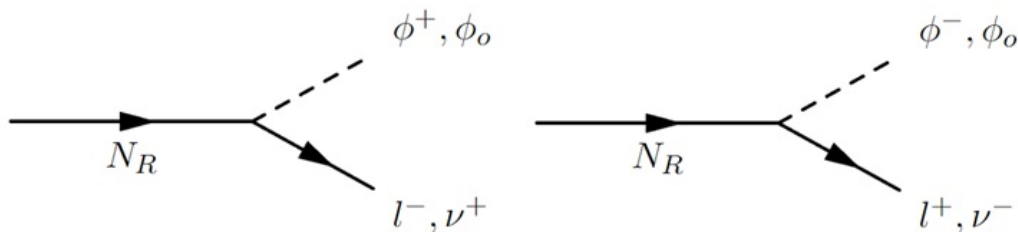
Συγκεκριμένα, η λεπτογένεση συμβαίνει επειδή ο ρυθμός διάσπασης που αντιστοιχεί στο αριστερό διάγραμμα του (4) είναι διαφορετικός από τον ρυθμό διάσπασης του δεξιού διαγράμματος. Τα δεξιόστροφα νετρίνα υποθέτουμε ότι είναι Majorana, δηλαδή ταυτίζονται με τα αντισωματίδιά τους (οι κυματοσυναρτήσεις τους στην λεγόμενη αναπαράσταση Majorana είναι πραγματικές, σε αντίθεση με την περίπτωση Dirac). Αλλά αν υπάρχει CP ασυμμετρία, οι σχετικοί ρυθμοί διάσπασης (που υπολογίζονται με την εφαρμογή των σχετικών κανόνων Feynman), είναι διαφορετικοί (προϋποτιθέμενου ότι κανείς θεωρεί τα διαγράμματα τάξης 1-βρόχου και παραπάνω). Σε επίπεδο δέντρου, ΔΕΝ υπάρχει διαφορά μεταξύ των ρυθμών διάσπασης των 2 διαγραμμάτων, όπως μπορεί να δείχθει αναλυτικά. Τα διαγράμματα ενός βρόχου τα οποία οδηγούν σε λεπτονική ασυμμετρία δίνονται κατωτέρω. Η πιο παχιά γραμμή από αριστερά που



Σχήμα 6: Παραβίαση CP, Διατήρηση CPT Συμμετρίας

προκύπτει από τους όρους Yukawa της θεωρίας της λεπτογένεσης. Στο συμβατικό μοντέλο εκτός από διορθώσεις βρόχων στα εν λόγω διαγράμματα διάσπασης νετρίνων με μάζα χρειαζόμαστε τουλάχιστον 2 γεύσεις νετρίνων.

Τελικά, αναφέρουμε ότι σε θεωρίες που παραβιάζεται η συμμετρία CPT, (T=αντιστροφή του χρόνου) π.χ. λόγω κατάλληλων υποβάθρων του χωρόχρονου στο πρώιμο σύμπαν, τότε τα διαγράμματα σε επίπεδο δέντρου δίνουν λεπτονική ασυμμετρία, όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο:

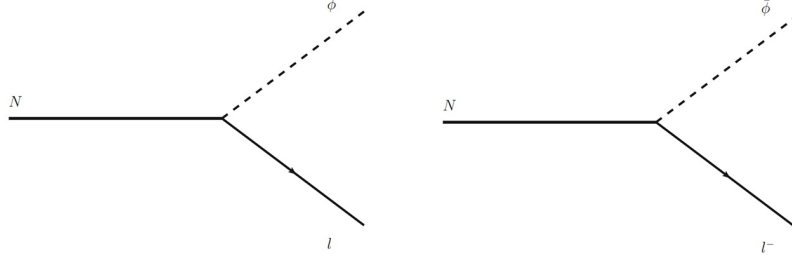


Σχήμα 7: Παραβίαση CP και CPT

4 Λεπτογένεση σε μη συμβατικό πρότυπο

4.1 Υπολογισμός πλάτους διάσπασης(χωρίς υπόβαθρο)

4.1.1 Κανόνας Κορυφής



Σχήμα 8: Διάσπαση δεξιόστροφου νετρίνου σε l^\mp, h^\pm σε επίπεδο δέντρου(tree level),[8]

Στο εξής το διασπώμενο νεutrino θα συμβολίζεται ως N_1, N_R ή N . Αρχικά ασχολούμαστε με τον όρο αλληλεπίδρασης του δεξιόστροφου νετρίνου με το πεδίο Higgs και τη διπλέτα λεπτονίων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε αρχικά την κορυφή σε e^\mp, ϕ^\pm . Αργότερα θα συμπεριλάβουμε στον υπολογισμό μας και τη συνεισφορά της αντίστοιχης κορυφής σε ν_e, ϕ

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \ni Y \bar{L} H N_1 + h.c. &= Y e_L^- \bar{H}^+ N_R + h.c. & (4.1) \\
 &= Y e^- \frac{1 - \gamma^5}{2} H^+ N_1 \frac{1 + \gamma^5}{2} H^+ N_1 \frac{1 + \gamma^5}{2} + h.c. = Y e^- H^+ N_1 \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right)^2 + h.c. \\
 &= Y e^- H^+ N_1 \frac{1 + \gamma^5}{2} + Y^* \bar{N}_1 \frac{1 - \gamma^5}{2} (H^+)^+ e^- \\
 &= Y e^- H^+ N_1 \frac{1 + \gamma^5}{2} + Y^* e^+ H^- N_1 \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad \bar{N}_1 = N_1
 \end{aligned}$$

Συνεπώς για την κορυφή l-H- N_R ο κανόνας του Feynman: $\propto -iY \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$. Ο όρος Yukawa coupling απαιτείται να είναι μιγαδικός (να έχει φάση) στα συμβατικά πρότυπα, όπου επιβαλλέται παραβίαση της CP. Παρ'όλο που στο συγκεκριμένο μοντέλο αρκεί να το θεωρήσουμε πραγματικό, δίνεται η πιο γενική περίπτωση για μιγαδικό όρο.

4.1.2 Πλάτος Διάσπασης

$$\boxed{N_1 \rightarrow l^- h^+}$$

Συμβολίζουμε την ορμή του νετρίνου με p , του Higgs με k και του λεπτονίου με q . Αντικαθιστούμε τους σπίνορες πόλωσης σύμφωνα με τους κανόνες του Feynman:

$$-i\mathcal{M}_1 = \bar{u}^s(q)(-i)Y \frac{1 + \gamma^5}{2} u^r(p) \quad (4.2)$$

Φυσικά οι σπίνορες πόλωσης αντιστοιχούν στα N_1, L αφού το Higgs είναι βαθμωτό πεδίο, επομένως έχει συντελεστή πόλωσης = 1.

$$|\overline{\mathcal{M}}_1|^2 = \frac{1}{2s+1} \sum_s \sum_r (-i\mathcal{M}_1)^\dagger (i\mathcal{M}_1) = \frac{1}{2} \sum_s \sum_r \left[\overline{u}^{(s)}(q) (-i) Y \frac{1+\gamma^5}{2} u^{(r)}(p) \right]^\dagger \left[\overline{u}^{(s)}(q) (-i) Y \frac{1+\gamma^5}{2} u^{(r)}(p) \right] \quad (4.3)$$

Τελικά, το πλάτος διάσπασης που αντιστοιχεί στην διάσπαση $N_1 \rightarrow l^- h^+$ δίνεται από την (B.2):

$$\boxed{|\mathcal{M}_1|^2 = Y^2(p \cdot q)} \quad (4.4)$$

4.1.3 Ρυθμός διάσπασης

Συνεχίζουμε, με τον υπολογισμό του decay width σε φυσικές μονάδες. Ως γνωστόν, το Γ δίνεται από την [19]:

$$\Gamma = \frac{S}{2E} \left[\int \prod_{i=1}^m \frac{d^3 p'_i}{2E'_i (2\pi)^3} \right] |\overline{\mathcal{M}}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - \sum_{i=1}^m p'_i) \quad (4.5)$$

όπου E αντιστοιχεί στην ενέργεια και p στην τετραορμή του διασπώμενου σωματιδίου και $p'_i(E'_i)$, $i = 1, \dots, m$, αντιστοιχούν στις τετραορμές (ενέργειες) των προϊόντων της διάσπασης, με την σύμβαση ότι τετραορμές που κατευθύνονται προς το κέντρο της αντίστοιχης κορυφής (vertex) φέρουν θετικό πρόσημο, ενώ τετραορμές που εξέρχονται της κορυφής φέρουν αρνητικό πρόσημο. Η ποσότητα S είναι ένας στατιστικός παράγοντας, ο οποίος δίνεται από :

$$S = \frac{1}{n!}$$

για κάθε ομάδα n ταυτοτικά όμοιων σωματιδίων στα προϊόντα διάσπασης και $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ συμβολίζει το τετράγωνο του χβαντικού πλάτους μετάβασης από την αρχική στην τελική κατάσταση, στο οποίο έχουμε θεωρήσει τον μέσο όρο των αρχικών καταστάσεων του spin του διασπώμενου σωματιδίου και έχουμε αθροίσει πάνω στις τελικές καταστάσεις του spin των προϊόντων διάσπασης.

Αρχικά λαμβάνουμε υπόψιν την κινηματική της διάσπασης (αρχή διατήρησης ενέργειας-ορμής)

$$p^\mu = k^\mu + q^\mu \Rightarrow (p - q)^2 = k^2 \quad (4.6)$$

$$p^2 - 2pq + q^2 = k^2 \xrightarrow{p^2=m^2} \boxed{m^2 + m_e^2 - m_H^2 = 2p \cdot q} \quad (4.7)$$

Φυσικά $m \gg m_e, m_H$ οπότε από την (4.8) $2p \cdot q \simeq m^2$. Αντικαθιστούμε στην (4.5):

$$\Gamma = \frac{S}{2E_{N_1}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_q} |\overline{\mathcal{M}}_1|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k - q) \quad (4.8)$$

Ωστόσο, όπως δείξαμε στην (B.4):

$$|\overline{\mathcal{M}}_1|^2 = Y^2(p \cdot q)^2 \frac{m^2}{2} \quad (4.9)$$

Επειδή έχουμε 0 το πλήθος ομοειδή σωματίδια στην τελική κατάσταση, ο στατιστικός παράγοντας

$$S = \frac{1}{n!}$$

ισούται με 1 αφού $0! = 1$.

$$\Gamma = \frac{1}{2E_{N_1}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \left(\frac{1}{2} Y^2 m^2 \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k - q) \quad (4.10)$$

Όμως, πρόκειται για διάσπαση επόμενως $E_{N_1} = m$. Επιπλέον,

$$\delta^{(4)}(p - k - q) = \delta(m - E_k - E_q) \delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{q})$$

Επειδή είμαστε στο CM του συστήματος $|\vec{k}| = |\vec{q}|$ και $E_k = E_q$, δηλαδή $\delta^{(4)}(p - k - q) = \delta(m - 2E_q) \delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{q})$:

$$\Gamma = \frac{1}{8m^2 (2\pi)^2} \frac{Y^2 m^2}{2} \int \frac{d^3k d^3q}{E_q^2} \delta(m - 2E_q) \delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{q}) \quad (4.11)$$

Ήσυχάζουμε την μια ολοκλήρωση με τον όρο $\delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{q})$

$$\Gamma = \frac{Y^2}{16(2\pi)^2} \int \frac{d^3q}{E_q^2} \delta(m - 2E_q) \quad (4.12)$$

Θα θεωρήσουμε τα H,e άμαζα, οπότε από τη σχέση διασποράς $E_q^2 = q^2$ αφού $E_q = |\vec{q}|$. Τελικά, $d^3q = d|q||q|^2 d\Omega = d|q||q|^2 \sin\theta d\phi d\theta$. Ωστόσο, από το ολοκλήρωμα αυτό (μιας και δεν έχει γωνιακή εξάρτηση) θα προκύψει ένας όρος 4π , οπότε:

$$\Gamma = \frac{Y^2 m}{16\pi} \int \delta(m - 2|q|) d|q| \quad (4.13)$$

Έπειτα, για να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνάρτησης δ, επιδιώκουμε να τα φέρουμε σε μορφή $\int \delta(m - x)$ οπότε πραγματοποιούμε αλλαγή μεταβλητής $2|q| = w$, $dw = \frac{dq}{2}$. Συνεπώς:

$$\Gamma = \frac{Y^2 m}{32\pi} \quad (4.14)$$

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι από την διάσπαση θα μπορούσε να προκύψει ν_e, ϕ^0 , όπως προκύπτει από την κορυφή:

$$\mathcal{L} \ni Y \bar{\nu}_e L H^0 N_{1R} \quad (4.15)$$

Είναι εύκολο να δειχθεί (ακολουθώντας την ίδια διαδικασία) ότι οι 2 διαδικασίες πραγματοποιούνται με τον ίδιο λόγο. Άρα,

$$\Gamma_{1(N_1 \rightarrow l^- h^+)} = \frac{Y^2 m}{16\pi} \quad (4.16)$$

Θα ακολουθήσουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία και για το άλλο διάγραμμα:

$$\boxed{N_1 \rightarrow \bar{l} \bar{h}}$$

Επειδή η διάσπαση γίνεται σε αντιφερμιόνιο και \bar{h} θα χρησιμοποιήσουμε αντισπίνωρες πόλωσης αυτή τη φορά (όπως υποδεικνύεται από τους κανόνες του Feynman). Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε και \bar{N}_1 όμως επειδή είναι Majorana οπότε $\bar{N}_1 = N_1$. Σε κάθε περίπτωση οφείλουμε να χρησιμοποιήσουμε αντισπίνωρα πόλωσης:

$$-i\mathcal{M}_2 = \bar{v}^s(p)(-i)Y^* \frac{1-\gamma^5}{2} v^r(p) \quad (4.17)$$

$$|\overline{\mathcal{M}_2}|^2 = \frac{1}{2} \sum_s \sum_r \left(\bar{v}^s(p)(-i)Y \frac{1-\gamma^5}{2} v(q)^\dagger \right) \left(\bar{v}^s(p)(-i)Y \frac{1-\gamma^5}{2} v(q) \right) \quad (4.18)$$

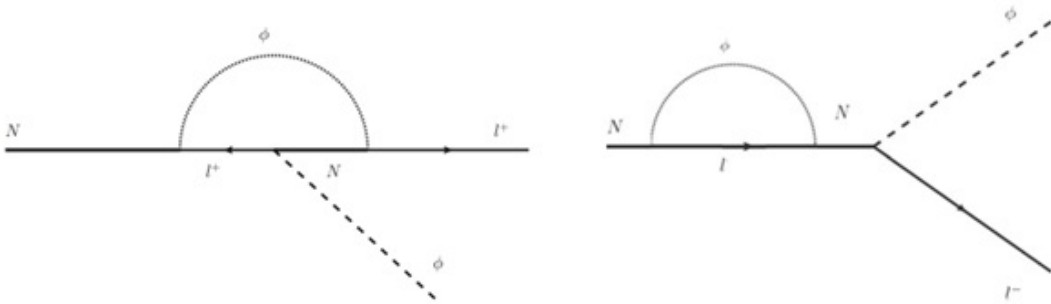
Έπειτα από πράξεις (B.11):

$$\boxed{|\overline{\mathcal{M}_2}|^2 = \frac{Y^2}{4} p_\mu q_\nu A \eta^{\mu\nu} = Y^2 \cdot p \cdot q} \quad (4.19)$$

Καθ'όμοιο τρόπο εκτέλουμε τις πράξεις για τον υπολογισμό του Γ και καταλήγουμε στην:

$$\boxed{\Gamma_{N_1 \rightarrow l^- h^+} = \Gamma_{N_1 \rightarrow l^+ h^-} = \frac{Y^2 m}{16\pi}} \quad (4.20)$$

4.2 Υπολογισμός πλάτους διάσπασης(με υπόβαθρο)



Σχήμα 9: Διαγράμματα ενός βρόχου για τη διάσπαση του νετρίνου (συμβατικό πρότυπο),[8]

Προκειμένου να έχουμε CP-violating διάσπαση βαριών νετρίνων πρέπει κανείς να θεωρήσει τουλάχιστον 2 γεύσεις δεξιόστροφων νετρίνων και να χρησιμοποιήσει διαγράμματα με loops όπως προείπαμε. Ωστόσο, μπορούμε να παραμείνουμε σε επίπεδο δέντρου θεωρώντας μια μόνο γεύση εάν προσθέσουμε

ένα υπόβαθρο (background) που αλληλεπιδρά με τα φερμιόνια (the interaction of the axial background field with fermions) [20]. Από την προσθήκη (background) προκύπτει ένας επιπλέον όρος στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα: πρέπει να επαναπροσδιορίσουμε τους σπίνορες Dirac. Έπειτα, θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία: θα υπολογίσουμε το πλάτος διάσπασης σε επίπεδο δέντρου. Η Lagrangian που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

$$\mathcal{L} = i\bar{N}\not{\partial}N - \frac{m}{2}(\bar{N}^c N + \bar{N}N^c) - \bar{N}\not{B}\gamma^5 N - Y_k \bar{L}_k \bar{\phi} N + h.c. \quad (4.21)$$

όπου N είναι το πεδίο Majorana, RHN και L_k πεδίο λεπτονίων, όπου k υποδεικνύει την γενιά. Το συζυγές (adjoint) πεδίο Higgs ορίζεται από την: $\tilde{\phi}_i = \epsilon_{ij}\phi_j$.

Θα θεωρήσουμε την απλούστερη δυνατή φαινομενολογική επέκταση του καθιερωμένου προτύπου, με ένα πεδίο βαριού (heavy) δεξιόστροφου νετρίνου (μάζας M) με την παρουσία αξονικά σταθερού υποβάθρου B_μ . Γράφουμε την Λαγκρανζιανή (4.22) για τους σπίνορες Dirac με αξονικό υπόβαθρο B_μ που θεωρούμε να έχει εξάρτηση **μόνο** από τον χρόνο ($B_\mu \rightarrow B_0$) με B_0 μια μικρή θετική (από σύμβαση) μη μηδενική σταθερά, $0 < B_0 \ll 1$. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας δεν θα εξετάσουμε την μικροσκοπική του αρχή (απαιτήσεις από κοσμολογία) [9][10][22]. Απλά αναφέρουμε ότι τετοια υπόβαθρα χαρακτηρίζουν, π.χ., βαρυτικές/κοσμολογικές θεωρίες που προέρχονται από την θεωρία χορδών και περιλαμβάνουν βαρυτικές ανωμαλίες και στρέψη (torsion) στον χωρόχρονο, και στις οποίες το υπόβαθρο B_0 μπορεί να γεννηθεί από κατάλληλα συμπυκνώματα βαρυτικής προέλευσης (δηλ. βαρυτονίων) της στρέψης, δηλαδή μπορεί να έχει γεωμετρική προέλευση. Ο λόγος που χρησιμοποιούμε την προσθήκη του πεδίου του υποβάθρου στο πλαίσιο της φαινομενολογικής μας συζήτησης είναι να πάμε πέρα από τα συμβατικά πρότυπα λεπτογένεσης, στα οποία ο μόνος τρόπος να προκύψει λεπτογένεση μέσω του μηχανισμού που συζητάμε είναι θεωρώντας διαγράμματα βρόχων (loops).

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι το υπόβαθρο παραβιάζει τη συμμετρία CPT καθώς έχει μόνο χρονική εξάρτηση. Συνεπώς αν δράσουμε τις διακριτές συμμετρίες C, P, T θα δούμε ότι η CPT παραβιάζεται:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{I})\psi - \bar{\psi}B_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (4.22)$$

Αρκεί να δράσουμε τις εν λόγω συμμετρίες στον τελευταίο όρο της (4.22). Θα δούμε ότι μετασχηματίζεται σύμφωνα με την 4η γραμμή του παρακάτω πίνακα (προσθέτοντας τον όρο του υποβάθρου που δεν αλλάζει καθώς έχουμε υποθέσει ότι είναι χρονικά σταθερός):

	Bilinear	P	C	T	CP	CPT
scalar	$\bar{\psi}_1\psi_2$	$\bar{\psi}_1\psi_2$	$\bar{\psi}_2\psi_1$	$\bar{\psi}_1\psi_2$	$\bar{\psi}_2\psi_1$	$\bar{\psi}_2\psi_1$
pseudo scalar	$\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2$	$-\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2$	$\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_1$	$-\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2$	$-\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_1$	$\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_1$
vector	$\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2$	$\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2$	$-\bar{\psi}_2\gamma_\mu\psi_1$	$\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2$	$-\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1$	$-\bar{\psi}_2\gamma_\mu\psi_1$
axial vector	$\bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2$	$-\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma_5\psi_2$	$\bar{\psi}_2\gamma_\mu\gamma_5\psi_1$	$\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma_5\psi_2$	$-\bar{\psi}_2\gamma^\mu\gamma_5\psi_1$	$-\bar{\psi}_2\gamma_\mu\gamma_5\psi_1$
tensor	$\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2$	$\bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2$	$-\bar{\psi}_2\sigma_{\mu\nu}\psi_1$	$-\bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2$	$-\bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1$	$\bar{\psi}_2\sigma_{\mu\nu}\psi_1$

Σχήμα 10: Μετασχηματισμοί διγραμμικών φερμιονικών μορφών κάτω από τη δράση διακριτών συμμετριών),[19]

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση Euler-Lagrange για να εξαγάγουμε την εξίσωση κίνησης:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m\mathbb{I})\psi - B_\mu\gamma^\mu\gamma^5\psi \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = 0 \quad (4.25)$$

Άρα, η εξίσωση κίνησης:

$$\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\mathbb{I} - B_0\gamma^0\gamma^5)\psi(x) = 0} \quad (4.26)$$

Γράφουμε τις λύσεις της εξίσωσης κίνησης στη μορφή επίπεδων κυμάτων:

$$\psi(x) = u(p)e^{-ipx} \quad \text{για θετικές συχνότητες} \quad (4.27)$$

$$\psi(x) = v(p)e^{+ipx} \quad \text{για αρνητικές συχνότητες} \quad (4.28)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε Weyl (chiral) basis για τους πίνακες γ (chiral representation)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{2x2} \\ \mathbb{I}_{2x2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_{2x2} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{2x2} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

ή πιο συμπυκνωμένα:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^\mu \text{ οι πίνακες του Pauli} \quad (4.30)$$

$$\gamma^\mu\partial_\mu = \gamma^0\partial_0 - \gamma^i\partial_i = \begin{pmatrix} 0 & \partial_\mu\sigma^\mu \\ \partial_\mu\bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Επιπλέον,

$$\partial_\mu e^{-ipx} = -ip_\mu e^{-ipx} \quad \partial_0 e^{-ipx} = -iE e^{-ipx} \quad (4.32)$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν στην (4.26) θεωρώντας τον σπίνορα $u_r = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} -m\mathbb{I} & E - p_i\sigma^i - B_0\mathbb{I}_{2x2} \\ E + p_i\sigma^i - B_0\mathbb{I}_{2x2} & -m\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.33)$$

$$\begin{cases} -m\xi_1 + (E - \bar{p}\bar{\sigma} - B_0)\xi_2 = 0 \\ (E + \bar{p}\bar{\sigma} - B_0)\xi_1 - m\xi_2 = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

Συνεπώς,

$$\boxed{\xi_2 = \frac{m}{E - \bar{p}\bar{\sigma} - B_0} \xi_1} \quad (4.35)$$

Επειδή προσθέσαμε το υπόβαθρο στην Λαγκρανζιανή, η σχετικιστική σχέση διασποράς μετατρέπεται σε:

$$E_{p,r}^2 = m_r^2 + (B_0 + \lambda_r|\bar{p}|)^2 \quad \text{όπου } \lambda_r \simeq (-1)^{r-1} \quad (4.36)$$

και

$$\frac{\bar{p}\bar{\sigma}}{|\bar{p}|}\xi^r = \lambda_r\xi^r, \quad r = 1, 2 \quad \text{με } \xi^r(\bar{p}) \text{ να είναι οι συνήθεις ιδιοσπίνορες ελικότητας} \quad (4.37)$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας έναν όρο κανονικοποίησης $N^\pm = \sqrt{E_r(|\bar{p}|) \mp (B_0 + \lambda_r|\bar{p}|)}$ με - για τον σπίνορα u και + για τον σπίνορα v οι καινούριοι σπίνορες γράφονται ως [19]:

$$u_r(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_r - B_0 - \lambda_r|\bar{p}}\xi^r \\ \sqrt{E_r + B_0 + \lambda_r|\bar{p}}\xi^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_r - B_0 - \bar{p}\bar{\sigma}}\xi^r \\ \sqrt{E_r + B_0 + \bar{p}\bar{\sigma}}\xi^r \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

$$v_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s + B_0 - \lambda_s|\bar{p}}\xi^s \\ -\sqrt{E_s + B_0 + \lambda_s|\bar{p}}\xi^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s + B_0 - \bar{p}\bar{\sigma}}\xi^s \\ -\sqrt{E_s - B_0 + \bar{p}\bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

4.2.1 Διάσπαση RHN σε επίπεδο δέντρου με την παρουσία axial background

Όπως και προηγουμένως, θα υπολογίσουμε πρώτα το πλάτος διάσπασης (decay amplitude) κι έπειτα τον ρυθμό διάσπασης (decay width). Ο όρος της \mathcal{L} με τον οποίο θα ασχοληθούμε, όπως και πριν (4.1):

$$\mathcal{L} \ni Y\bar{L}HN_1 + h.c. = Y\bar{e}_L^-H^+N_R + h.c. \quad (4.40)$$

Κινηματική

Αρχικά θα ασχοληθούμε με την κινηματική της διάσπασης. Από διατήρηση ορμής, ενέργειας παίρνουμε τις παρακάτω:

$$\bar{p} = \bar{q} + \bar{k} \quad (4.41)$$

$$E_{N,r} = E_{l\mp,s} + E_{\phi\pm} \quad (4.42)$$

Η παραβίαση Lorentz που επιβάλλουμε μέσω του εξωτερικού πεδίου του υποβάθρου B_0 εισάγει διόρθωση στην 2η σχέση που προκύπτει από την εξάρτηση του διασπώμενου νετρίνου και του παραγόμενου λεπτονίου με την ελικότητα και το ίδιο το πεδίο (του υποβάθρου):

$$E_{N,r} = E_{p,r} = \sqrt{m^2 + (p + \lambda_r B_0)^2} \quad E_k = |\bar{k}| \quad E_{q,s} = |B_0 + \lambda_s |\bar{q}|| \quad (4.43)$$

Εάν θεωρήσουμε ότι το νεutrino βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία :

$$E_{N,r} = E_{p=0,r} = \sqrt{m^2 + \lambda_r^2 B_0}$$

Επιπλέον, η αρχή διατήρησης της ορμής απλοποιείται στην:

$$|\bar{k}| = |\bar{q}|$$

Διακρίνουμε έπειτα περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο του $E_{q,s}$:

$$(\alpha) \boxed{B_0 + \lambda_s |\bar{q}| > 0}$$

Το s ως δείκτης spin λαμβάνει τιμές 1,2.Επιπλέον, $\lambda_s = (-1)^{s-1}$. Δηλαδή για $s = 1$, το $\lambda_1 = 1$ και για $s = 2$, το $\lambda_2 = -1$. Συνεπώς:

$$\boxed{s = 2} \quad \sqrt{B_0 + m^2} = B_0 - |\bar{q}| + |\bar{k}| \rightarrow B_0^2 + m^2 = B_0^2 \rightarrow m^2 = 0 \quad (4.44)$$

$$\boxed{s = 1} \quad \sqrt{B_0 + m^2} = B_0 + |\bar{q}| + |\bar{k}| \rightarrow \sqrt{B_0^2 + m^2} = B_0 + 2|\bar{q}| \Rightarrow |\bar{q}| = \frac{\Omega - B_0}{2}, \quad \mu\epsilon \quad \boxed{\Omega = \sqrt{B_0^2 + m^2}} \quad (4.45)$$

$$(\beta) \boxed{B_0 + \lambda_s |\bar{q}| < 0}$$

Καθ'όμοιο τρόπο για $s = 1$, $\lambda_1 = 1$ και για $s = 2$, $\lambda_2 = -1$. Συνεπώς:

$$\boxed{s = 1} \quad \sqrt{B_0 + m^2} = -B_0 - |\bar{q}| + |\bar{k}| \rightarrow B_0^2 + m^2 = B_0^2 \rightarrow m^2 = 0 \quad (4.46)$$

$$\boxed{s = 2} \quad \sqrt{B_0 + m^2} = -B_0 + |\bar{q}| + |\bar{k}| \rightarrow \sqrt{B_0^2 + m^2} = -B_0 + 2|\bar{q}| \Rightarrow \boxed{|\bar{q}| = \frac{\Omega + B_0}{2}}, \quad \mu\epsilon \quad \boxed{\Omega = \sqrt{B_0^2 + m^2}} \quad (4.47)$$

4.2.2 Πλάτος Διάσπασης

$$\boxed{N \rightarrow l^- h^+}$$

Αντικαθιστώντας τους νέους σπίνορες στον τύπο του πλάτους (4.2) προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_1^{rs} &= -iY\bar{u}_s(q) \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) U^r(p) \\ &= -iY\xi^{s\dagger}\xi^r \sqrt{E_{q,s} - B_0 - \lambda_s |\bar{q}_s|} \sqrt{E_{p,r} + B_0 + \lambda_r |\bar{p}|} \end{aligned}$$

Ο συμβολισμός q_s, E_s χρησιμοποιείται για να τονίσει την εξάρτηση από την ελικότητα της τετραορμής του εξερχόμενου λεπτονίου και αναλόγως του εισερχόμενου σωματιδίου. Επιπλέον, οι ιδιοκαταστάσεις ελικότητας που χρησιμοποιήσαμε:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για να δούμε πώς εξαρτάται το πλάτος από το πρόσημο της $E_{q,s}$ όπως προκύπτει από την (4.48):

$$(\alpha) \boxed{B_0 + \lambda_s > 0}$$

$$\mathcal{M}^{rs} = -iY\xi^{s\dagger}\xi^r \sqrt{B_0 + \lambda_s |\bar{q}| - B_0 - \lambda_s |\bar{q}|} \sqrt{E_{p,r} + B_0 + \lambda_r |\bar{p}|} = 0 \quad (4.49)$$

$$(\beta) \boxed{B_0 + \lambda_s < 0}$$

$$\mathcal{M}^{rs} = -iY\xi^{s\dagger}\xi^r \sqrt{-B_0 - \lambda_s |\bar{q}| - B_0 - \lambda_s |\bar{q}|} \sqrt{E_{p,r} + B_0 + \lambda_r |\bar{p}|} \quad (4.50)$$

$$= -iY\xi^{s\dagger}\xi^r \sqrt{-2(B_0 + \lambda_s |\bar{q}_s|)} \sqrt{E_{p,r} + B_0 + \lambda_r |\bar{p}|} \quad (4.51)$$

Όμως, στην περίπτωση που το δεξιόστροφο νεutrino βρίσκεται σε ηρεμία δείξαμε από την κινηματική (4.50) ότι μόνο η περίπτωση $s=2$ επιτρέπεται και $|\bar{q}| = \frac{\Omega+B_0}{2}$:

$$\mathcal{M}^{r2} = -iY\xi_2^\dagger\xi_r\sqrt{-2(B_0 - \frac{\Omega+B_0}{2})}\sqrt{\Omega+B_0} \quad (4.52)$$

$$= -iY\xi_2^\dagger\xi_r\sqrt{(-B_0+\Omega)(\Omega+B_0)} \quad (4.53)$$

$$= -iY\xi_2^\dagger\xi_r(\Omega^2 - B_0^2) \quad (4.54)$$

$$= -iY\xi_2^\dagger\xi_r(B_0^2 + m^2 - B_0^2) = -im^2y\xi_2^\dagger\xi_r \quad (4.55)$$

Είναι σημαντικό να δούμε ότι εφόσον εξαφανίζεται η χωρική (τριορμή) spatial τότε το πλάτος είναι το απλό, χωρίς υπόβαθρο(no background).

$$\boxed{N \rightarrow l^+h^-}$$

Κατ'απόλυτη αναλογία με το προηγούμενο πλάτος:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{rs} &= -iY^*\bar{u}^s(q)\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)U^r(p) \\ &= -iY^*\xi^{s\dagger}\xi^r\sqrt{2(B_0+\lambda_s|\bar{q}_s|)}\sqrt{E_{p,r}-B_0-\lambda_r|\bar{p}|} \end{aligned}$$

Όμως, όπως είδαμε και προηγουμένως από την κινηματική, για $\boxed{B_0+\lambda_s < 0}$, μόνο η τιμή $s=1$ επιτρέπεται, συνεπώς:

$$\mathcal{M}^{r1} = -iY^*\xi^{1\dagger}\xi^r\sqrt{2(B_0+|\bar{q}_s|)}\sqrt{E_{p,0}-B_0} \quad (4.56)$$

$$= -iY^*\xi^{1\dagger}\xi^r\sqrt{2\left(B_0+\frac{\Omega-B_0}{2}\right)}\sqrt{\Omega-B_0} \quad (4.57)$$

$$= -iY^*\xi^{1\dagger}\xi^r\sqrt{(B_0+\Omega)}\sqrt{\Omega-B_0} \quad (4.58)$$

$$= -iY^*\xi^{1\dagger}\xi^r\sqrt{\Omega^2-B_0^2} \quad (4.59)$$

$$= -iY^*\xi^{1\dagger}\xi^r m^2 \quad (4.60)$$

Στη συνέχεια υψώνουμε τα 2 πλάτη στο τετράγωνο, αθροίζοντας στα spins:

$$(\mathcal{M}_1^{rs})^2 = (-iY\xi^{s\dagger}\xi^r\sqrt{E_s-B_0-\lambda_s|\bar{q}_s|}\sqrt{E_r+B_0+\lambda_r|\bar{p}|})^2 \quad (4.61)$$

Όμως, $\lambda_r = \lambda_s = \lambda$ από την διατήρηση της ελικότητας που υπεισέρχεται μέσω του δ_{rs} , οπότε καταργούνται οι δείκτες r,s:

$$\xi^{r\dagger}\xi^s = \delta^{rs} \quad u_r^\dagger u_s = 2E_r\delta_{rs} \quad v_r^\dagger v_s = 2E_r\delta_{rs} \quad (4.62)$$

$$|\overline{\mathcal{M}}_1|^2 = \frac{|Y|^2}{2}(E_q - B_0 - \lambda|\bar{q}|)(E_p + B_0 + \lambda|\bar{p}|) \quad (4.63)$$

Εξετάζουμε τις 2 περιπτώσεις για τις 2 διαφορετικές ελικότητες $\lambda = \pm 1$ και αντικαθιστούμε την έκφραση $E_q = |B_0 + \lambda|\bar{q}|$ αναλόγως του προσήμου του λ :

Για $\lambda = 1$:

$$\frac{|Y|^2}{2}(B_0 + |\bar{q}| - B_0 - |\bar{q}|)(E_p + B_0 + |\bar{p}|) = 0$$

(εφόσον $B_0 > 0$ όπως υποθέσαμε αρχικά). Άρα, το βαρύ νεutrino ελικότητας $\lambda = +1$ ΔΕΝ διασπάται σε λεπτόνια.

Για $\lambda = -1$:

$$\frac{|Y|^2}{2}(|B_0 - |\bar{q}|| - B_0 + |\bar{q}|)(E_p + B_0 + |\bar{p}|) \quad (4.64)$$

Φυσικά, η παραπάνω ΔΕΝ μηδενίζεται ΜΟΝΟ για $B_0 - |\bar{q}| < 0$. Συνολικά:

$N \rightarrow l^- h^+$

$$|\mathcal{M}|^2(N \rightarrow l^- h^+, \lambda = -1, B_0 - |\bar{q}| < 0) = \frac{|Y|^2 m^2}{2} \frac{m^2}{|\bar{p}|} (|\bar{q}| - B_0) \left(1 + \frac{B_0}{|\bar{p}|} - \frac{m^2}{4|\bar{p}|^2}\right) \quad (4.65)$$

Στην παραπάνω αντικαταστήσαμε τη σχετικιστική εξίσωση διασποράς (4.48) για το βαρύ νεutrino για $\lambda = -1$ την οποία αναπτύξαμε κατά Taylor σε όρους μέχρι και 2ης τάξης, αφηρώντας όρους τάξης $\mathcal{O}(B_0^2)$ (θεωρούμε το σχετικιστικό όριο θερμοκρασιών $0 < B_0 \ll m \ll p \sim T$):

$$\text{Taylor για } \sqrt{1+x} \rightarrow E_p = \sqrt{m^2 + (B_0 + \lambda|\bar{p}|)^2} \simeq |\bar{p}| + \frac{m^2}{2|\bar{p}|} - \frac{m^4}{8|\bar{p}|^3} + \lambda \left(1 - \frac{m^2}{2|\bar{p}|^2}\right) B_0 \quad (4.66)$$

Ωστόσο, στην περίπτωση που θεωρούμε ότι το νεutrino είναι αρχικά ακίνητο (δηλαδή $|\bar{p}| = 0$), η σχετικιστική εξίσωση διασποράς μετασχηματίζεται σε:

$$E_p = \sqrt{m^2 + (B_0 + \lambda|\bar{p}|)^2} \rightarrow E_p = \sqrt{m^2 + B_0^2} \quad (4.67)$$

Οπότε, εάν αντικαταστήσουμε στην (4.64) προκύπτει η εξής:

$$|\mathcal{M}|^2(N \rightarrow l^- h^+, \lambda = -1, B_0 - |\bar{q}| < 0, |\bar{p}| = 0) = |Y|^2 (|\bar{q}| - B_0) (\sqrt{m^2 + B_0^2} + B_0) \quad (4.68)$$

Υψώνουμε και το άλλο πλάτος στο τετράγωνο οπότε:

$$(M_2^{rs})^2 = \frac{|Y|^2}{2}(E_q + B_0 + \lambda|\bar{q}|)(E_p - B_0 - \lambda|\bar{p}|) \quad (4.69)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για την ελικότητα: Εξετάζουμε τις 2 περιπτώσεις για τις 2 διαφορετικές ελικότητες $\lambda = \pm 1$ και αντικαθιστούμε την έκφραση $E_q = |B_0 + \lambda|\bar{q}|$ αναλόγως του προσήμου του λ :

Για $\lambda = +1$:

$$\begin{aligned} (M_2^{rs})^2 &= \frac{|Y|^2}{2} (B_0 + |\bar{q}| + B_0 + |\bar{q}|)(E_p + B_0 + |\bar{p}|) = 0 \\ &= |Y|^2 (B_0 + |\bar{q}|)(E_p - B_0 - |\bar{p}|) \end{aligned}$$

Για $\lambda = -1$:

$$\begin{aligned} (M_2^{rs})^2 &= \frac{|Y|^2}{2} (|B_0 - |\bar{q}|| - B_0 + |\bar{q}|)(E_p + B_0 + |\bar{p}|) \\ &= |Y|^2 (|\bar{q} - B_0|)(E_p - B_0 - |\bar{p}|) \end{aligned}$$

Απορρίπτουμε τη συνεισφορά για το πλάτος διάσπασης που αντιστοιχεί σε αρνητική ελικότητα αφού προϋποθέτει $B_0 - |\bar{q}| > 0$ (χι εμείς στην $N \rightarrow l^- h^+$ υποθέσαμε $B_0 - |\bar{q}| < 0$)

$$|\mathcal{M}|^2(N \rightarrow l^+ h^-, \lambda = 1) = \frac{|Y|^2 m^2}{2 |\bar{p}|} (|\bar{q}| + B_0) \left(1 - \frac{B_0}{|\bar{p}|} - \frac{m^2}{4|\bar{p}|^2} \right) \quad (4.70)$$

Καθ'όμοιο τρόπο, στην προσέγγιση όπου $\bar{p} = 0$ και αναπτύσσουμε κατά Taylor:

$$|\mathcal{M}|^2(N \rightarrow l^+ h^-, \lambda = 1, \bar{p} = 0) = |Y|^2 (|\bar{q}| + B_0) (\sqrt{m^2 + B_0^2} - B_0) \quad (4.71)$$

4.2.3 Υπολογισμός Ρυθμού Διάσπασης Γ

Θα προτιμήσουμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα του ρυθμού διάσπασης στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, αφού το σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας θα επέφερε χωρικές συνιστώσες στο B_μ . Επειδή θεωρούμε θερμοκρασίες μικρότερες από τη μάζα του διασπώμενου σωματιδίου, είναι μια καλή προσέγγιση να θεωρήσουμε ότι το εν λόγω σωματίδιο ηρεμεί αρχικά. Χρησιμοποιούμε την (4.5) και αντικαθιστούμε το γνωστά μεγέθη:

$$\Gamma = \frac{S}{2E_{N_1}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_q} |\overline{\mathcal{M}}_1|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k - q) \quad (4.72)$$

Τελικά,

$$\Gamma = \int \frac{d\omega}{16\pi^2} \frac{|\bar{k}|}{\Omega + \lambda B_0} \quad (4.73)$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως (4.22), το $d\omega$ αντιστοιχεί στον παράγοντα στερεάς γωνίας που όταν ολοκληρωθεί θα δώσει έναν όρο 4π. Επιπλέον από την αρχή διατήρησης της (τετρα)ορμής και την κινηματική που εξετάσαμε για την διάσπαση (4.62):

$$|\bar{k}| = |\bar{q}| = \frac{\Omega - \lambda B_0}{2} \quad (4.74)$$

όπου λ είναι η ελικότητα των (αντι)λεπτονίων που παράγονται από τη διάσπαση και $\Omega = \sqrt{B_0^2 + m^2}$ η ενέργεια του αρχικού σωματιδίου. Είναι άξιο να σημειώσουμε ότι μόνο η περίπτωση $|\bar{q}| + \lambda B_0 > 0$ επιτρέπεται για αρχικά ακίνητο σωματίδιο μη μηδενικής μάζας, αφού το ανάποδο σύμβολο στην ανίσωση επιβάλλει $m^2 = 0$. Στην περίπτωσή μας και για τα 2 κανάλια $N \rightarrow l^- h^+$ και $N \rightarrow l^+ h^-$, το πλάτος διάσπασης αθροισμένο στα αρχικά spins, δίνει την τιμή $|Y|^2 \frac{m^2}{2}$, (4.52), (4.56). Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται να οδηγεί στο τετριμμένο συμπέρασμα ότι είναι αδύνατο να παραχθεί λεπτονική ασυμμετρία με τον εν λόγω μηχανισμό όταν η θερμοκρασία πέφτει σε κάποια τιμή συγκρίσιμη με την ενέργεια του διασπόμενου σωματιδίου. Ωστόσο, το παραπάνω πόρισμα είναι λάθος αφού υπάρχει μια μη τετριμμένη εξάρτηση του κινηματικού παράγοντα με το πεδίο του CPTV υποβάθρου. Τελικά, για την

$$\boxed{N \rightarrow l^- h^+}$$

$$\boxed{\Gamma_1 = \frac{|Y|^2 m^2 \Omega + B_0}{32\pi \Omega \Omega - B_0}} \quad (4.75)$$

και για την

$$\boxed{N \rightarrow l^+ h^-}$$

$$\boxed{\Gamma_2 = \frac{|Y|^2 m^2 \Omega - B_0}{32\pi \Omega \Omega + B_0}} \quad (4.76)$$

Έχει ενδιαφέρον να προσέξουμε ότι ο ρυθμός διάσπασης της μιας διαδικασίας προκύπτει από τον ρυθμό διάσπασης της άλλης διαδικασίας αντιστρέφοντας το πρόσημο του B_0 . Ο παράγοντας που πολλαπλασιάζει τον ρυθμό διάσπασης όπως τον υπολογίσαμε στην περίπτωση χωρίς υπόβαθρο (4.33) ερμηνεύεται σαν όρος **ενεργής (effective) μάζας**. Ο συνολικός ρυθμός διάσπασης και των 2 διαδικασιών δίνεται από την:

$$\boxed{\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 = \frac{|Y|^2 \Omega^2 + B_0^2}{16\pi \Omega}} \quad (4.77)$$

Επειδή πρέπει να συμπεριλάβουμε και διαδικασίες που οδηγούν σε ν_e, ϕ^0 (4.23) πολλαπλασιάζουμε με έναν συντελεστή 2, αφού πραγματοποιούνται με τον ίδιο ρυθμό.[8]

Είναι αξιοσημείωτο να παρατηρήσουμε ότι ο παραπάνω μηχανισμός μπορεί να παράξει λεπτονική ασυμμετρία με **μόνο ένα δεξιόστροφο νεutrino**, καθώς στο συμβατικό πρότυπο θα απαιτούνταν τουλάχιστον 2 γενιές. Επιπλέον, η λεπτογένεση προκύπτει ως αποτέλεσμα της διαδικασίας της διάσπασης σε επίπεδο

δέντρου (και όχι βρόχου), αφού η παραβίαση της CP υπεισέρχεται μέσω του πεδίου του υποβάθρου στις εξωτερικές γραμμές των διαγραμμάτων Feynman.

Από τη Λεπτογένεση στη Βαρυογένεση

Η διάσπαση γίνεται εκτός ισορροπίας όταν ο συνολικός ρυθμός διάσπασης είναι μικρότερος/ίσος του ρυθμού διαστολής του σύμπαντος που δίνεται από τη σταθερά του Hubble [3]:

$$\Gamma \simeq H = 1,66T^2 \mathcal{N}^{\frac{1}{2}} m_p^{-1} \quad (4.78)$$

Εδώ, \mathcal{N} είναι το ενεργό πλήθος των βαθμών ελευθερίας όλων των στοιχειωδών σωματιδίων και m_p είναι η μάζα Planck. Από την τελευταία, μπορούμε να υπολογίσουμε την θερμοκρασία αποσύζευξης T_D συναρτήσει των παραμέτρων $\Omega, |Y|, B_0$:

$$T_D \simeq 6.2 \cdot 10^{-2} \frac{|Y|}{\mathcal{N}^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{m_P(\Omega^2 + B_0^2)}{\Omega}} \quad (4.79)$$

Η παραγόμενη πυκνότητα λεπτονικού αριθμού μπορεί να υπολογιστεί. Θεωρούμε ότι όλα τα νετρίνα βρίσκονται σε ηρεμία πριν τη διάσπαση, οπότε για τα 2 κανάλια έχουμε: $r = \frac{\Gamma_1}{\Gamma}$ και $1-r$. Συνεπώς, η διάσπαση ενός νετρίνου παράγει λεπτονικό αριθμό:

$$\Delta L = r - (1 - r) = 2r - 1 = \frac{2\Omega B_0}{\Omega^2 + B_0^2} \quad (4.80)$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτήν την ποσότητα με την αρχική αφθονία των δεξιόστροφων νετρίνων Majorana[9]:

$$n_N = e^{-\beta m} \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(B_0^2), \quad \beta = T^{-1}, \quad (4.81)$$

στην θερμοκρασία T_D λαμβάνουμε μια εκτίμηση της πυκνότητας λεπτονικού αριθμού (δουλεύουμε σε μονάδες όπου η σταθερά του Boltzmann $k_B = 1$). Θεωρούμε ότι η κατανομή του της πυκνότητας δεξιόστροφων νετρίνων ακολουθεί αυστηρά την κατανομή της ισορροπίας για $T \geq T_D$ και πέφτει απότομα στο 0 σε χαμηλότερες θερμοκρασίες $T \leq T_D$. Επιπλέον, πολλαπλασιάζοντας με την πυκνότητα νετρίνων, βλέπουμε ότι η συνολική λεπτονική ασυμμετρία που παράγεται από τη συνολική διάσπαση του πληθυσμού δεξιόστροφων νετρίνων δίνεται από την:

$$\Delta L^{TOT} = (2r - 1)n_N = \frac{2\Omega B_0}{\Omega^2 + B_0^2} n_N \quad (4.82)$$

όπου n_N δίνεται από την (4.81) στην θερμοκρασία T_D . Η λεπτονική ασυμμετρία $\frac{\Delta L^{TOT}}{n_\gamma}$ περιμένουμε να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την βαρυονική ασυμμετρία (1.1), αφού υιοθετήσαμε σενάρια στα οποία η ασυμμετρία λεπτονικού αριθμού μεταφέρεται στον βαρυονικό τομέα μέσω διαδικασιών σφαλερονίων στον τομέα του ΚΠ του μοντέλου, οι οποίες διατηρούν την διαφορά βαρυονικού μείον λεπτονικού (B-L) αριθμού. Μια εκτίμηση της τάξης μεγέθους του λόγου $\frac{B_0}{m}$ προκύπτει θεωρώντας την προσέγγιση $T_D \simeq m$ και κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξης στο $\frac{B_0}{m}$, μιά και υποθέτουμε ασθενή υπόβαθρα. Υπνεθυμίζουμε ότι η πυκνότητα φωτονίων είναι $n_\gamma \simeq 0.24T^3$ και ότι

$$\frac{\Delta L}{n_\gamma} \simeq 10^{-10} . \quad (4.83)$$

Ένας ποσοτικός υπολογισμός του απαιτούμενου μεγέθους του υποβάθρου B_0 απαιτεί γνώση της τιμής της παραμέτρου ζεύξης Yukawa Y και της μάζας του δεξιόστροφου νετρίνου m . Αυτές οι παράμετροι είναι φαινομενολογικές. Χρησιμοποιώντας τις ενδεικτικές τιμές παραμέτρων [9] $Y = 10^{-5}$, και $m \simeq 100$ TeV, και απαιτώντας την τιμή (4.83) για την λεπτονική ασυμμετρία (4.82), μπορούμε να υπολογίσουμε τον λόγο του πεδίου του υποβάθρου προς τη μάζα του δεξιόστροφου νετρίνου:

$$\frac{B_0}{m} \simeq 10^{-8} \quad (4.84)$$

Η μικρή τιμή αυτού του λόγου μας επιτρέπει να δικαιολογήσουμε *a posteriori* την απόρριψη όρων υψηλότερης τάξης του B_0 . Επιβάλλοντας περαιτέρω συνθήκες μπορούμε να προσδιορίσουμε το κατώτατο όριο του πεδίου του υποβάθρου: $B_0 \simeq 1$ MeV. Εάν συνεισέφεραν κι άλλοι μηχανισμοί στη λεπτονική ασυμμετρία στο σύμπαν, ή οι ζεύξεις Yukawa λάμβαναν μικρότερη τιμή, τότε το κατώτατο όριο του B_0 θα ήταν ακόμη μικρότερο. Όπως ήδη αναφέραμε παραπάνω όμως, η βαρυογένεση προκύπτει μέσα από διαδικασίες που διατηρούν τη διαφορά B-L στον τομέα του ΚΠ του μοντέλου.

Κλείνουμε την συζήτησή μας με το να αναφέρουμε ότι η παραπάνω ανάλυση έγινε στο πλαίσιο μηδενικής θερμοκρασίας $T=0$. Η ρεαλιστική αντιμετώπιση, στο πλαίσιο κοσμολογικής αντιμετώπισης του προβλήματος, απαιτεί μελέτη σε πεπερασμένη θερμοκρασία, η οποία έγινε στις εργασίες [8], [22]. Στις αναλύσεις αυτές, ο υπολογισμός της λεπτονικής ασυμμετρίας στην θερμοκρασία ‘παγοποίησης’ (freezeout) $T_D \simeq m$, όπου m η μάζα των δεξιόστροφων νετρίνων, οδηγεί σε συμπεράσματα που είναι ποιοτικά όμοια με τα παραπάνω, και συγκεκριμένα το μέγεθος του απαιτούμενου B_0 είναι το ίδιο με το παραπάνω (4.84).

5 Επίλογος

Προκειμένου να εξηγήσουμε την βαρυονική ασυμμετρία καταφύγαμε σε μια θεωρία που προβλέπει λεπτονική ασυμμετρία. Ωστόσο, η παραβίαση του λεπτονικού αριθμού που χρειαζόμαστε προκύπτει από διασπάσεις νετρίνων με μάζα που παραβιάζουν την CP. Εξετάσαμε τους δυνατούς τρόπους να δώσουμε μάζα στα νετρίνα, και ασχοληθήκαμε με τις διασπάσεις τους. Προκειμένου να αποφύγουμε τις διορθώσεις ανώτερης τάξης -διαγράμματα βρόχου- που προκύπτουν από την παραβίαση της CP -όπως απαιτεί ο Sakharov 1.2- στο συμβατικό μοντέλο θεωρήσαμε ένα μη συμβατικό μοντέλο. Το απλουστευμένο μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε για τη λεπτογένεση περιλαμβάνει ένα -μία γενιά- βαρύ δεξιόστροφο νεutrino Majorana και τη σταθερά σύζευξης Yukawa, Y που το συνδέει με τον τομέα των λεπτονίων του καθιερωμένου προτύπου. Έπειτα, η λεπτονική ασυμμετρία που προκύπτει από τις CPTV διασπάσεις των βαριών νετρίνων (σε λεπτόνια και Higgs), μπορούν να μεταφραστούν στον βαρυονικό τομέα -στην ασυμμετρία ύλης-αντιύλης- μέσω των διαδικασιών sphalerons, τις οποίες δεν αναπτύξαμε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Εισάγοντας το εν λόγω υπόβαθρο -οι λεπτομέρειες του οποίου δεν μας απασχόλησαν καθώς επιτάσσονται από κοσμολογικές απαιτήσεις- έχουμε λεπτονική ασυμμετρία σε επίπεδο δέντρου, χωρίς διορθώσεις υψηλότερης τάξης.

Παράρτημα Α: Decay Rate

Ρυθμός Διάσπασης Γ

Στη μη σχετικιστική κβαντική μηχανική, οι ρυθμοί μετάβασης λαμβάνονται χρησιμοποιώντας τον χρυσό κανόνα του Fermi. Ο χρυσός κανόνας του Fermi για τον ρυθμό μετάβασης Γ από μια αρχική κατάσταση $|i\rangle$ σε μια τελική κατάσταση $|f\rangle$ εκφράζεται συνήθως ως :

$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i), \quad (\text{A.1})$$

που εναλλακτικά, γράφεται :

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E) dn, \quad (\text{A.2})$$

Ο ρυθμός μετάβασης μεταξύ δύο καταστάσεων εξαρτάται από δύο συνιστώσες, (i) το στοιχείο της μήτρας μετάβασης, το οποίο περιέχει τη θεμελιώδη φυσική των σωματιδίων και (ii) την πυκνότητα προσβάσιμων καταστάσεων, η οποία εξαρτάται από την κινηματική της διαδικασίας που εξετάζουμε. Στη σύγχρονη σωματιδιακή φυσική η πιο ολοκληρωμένη θεωρητική προσέγγιση για τέτοιους υπολογισμούς είναι η εφαρμογή της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Ωστόσο, τα ίδια αποτελέσματα μπορούν να ληφθούν χρησιμοποιώντας τη θεωρία των διαταραχών στη σχετικιστική κβαντική μηχανική (RQM). Αυτό απαιτεί μια σχετικιστική διατύπωση του χρυσού κανόνα του Fermi όπου η πυκνότητα καταστάσεων βασίζεται σε σχετικιστικές επεξεργασίες του χώρου φάσης και στην κανονικοποίηση των επίπεδων κυμάτων που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν τα σωματίδια.

Φασικός Χώρος και Κανονικοποίηση Κυματοσυνάρτησης

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία διαταραχών 1ης τάξης λαμβάνουμε το στοιχείο πίνακα:

$$T_{fi} = \langle \psi_1 \psi_2 | \hat{H}' | \psi_\alpha \rangle = \int \psi_1^* \psi_2^* \hat{H}' \psi_\alpha d^3x \quad (\text{A.3})$$

Όπου τα ψ αντιστοιχούν σε εξισώσεις επίπεδων κυμάτων : $\psi(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\mathbf{p}\mathbf{x} - Et)}$. Θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια το A , που καθορίζει την κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης. Θα υποθέσουμε ότι κάθε επίπεδο κύμα (κυματοσυνάρτηση) καταλαμβάνει όγκο στοιχειώδους κύβου του συνολικού κύβου. Αυτός είναι ο τρόπος να περάσουμε από το συνεχές στο διακριτό. Στη συνέχεια επιβάλλοντας περιοδικές συνοριακές συνθήκες λαμβάνουμε το γνωστό κυματόνισμα.

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{\alpha} \int_0^{\alpha} \psi^* \psi dx dy dz = 1$$

Η σταθερά κανονικοποίησης είναι: $A^2 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{V}$.

Οι 'κβαντισμένες' συνιστώσες των ορμών δίνονται από την $(p_x, p_y, p_z) = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{a}$,

Οπότε ο στοιχειώδης κύβος στον χώρο των καταστάσεων/ή χώρο των ορμών αποκτά όγκο:

$$d^3\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^3 = \frac{(2\pi)^3}{V}$$

Χάρην ευκολίας θεωρούμε στοιχειώδη όγκο $V=1$. Συνεπώς ο όγκος που θα καταλαμβάνει μια κατάσταση θα είναι :

$$dn_i = \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3}$$

Για τη διάσπαση ενός σωματιδίου σε μια τελική κατάσταση που αποτελείται από N σωματίδια, υπάρχουν $N - 1$ ανεξάρτητες ορμές στην τελική κατάσταση, αφού η ορμή ενός από τα σωματίδια της τελικής κατάστασης μπορεί πάντα να ληφθεί από τη διατήρηση της ορμής. Έτσι, ο αριθμός ανεξάρτητων καταστάσεων για μια τελική κατάσταση N σωματιδίων είναι:

$$dn = \prod_{i=1}^{N-1} dn_i = \prod_{i=1}^{N-1} \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3}$$

Θέλοντας να συμπεριλάβουμε τη διατήρηση της ορμής στην έκφρασή μας πολλαπλασιάζουμε με 3-διάστατη συνάρτηση Dirac:

$$dn = \prod_{i=1}^{N-1} \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3} \delta^3\left(\mathbf{p}_\alpha - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i\right) d^3\mathbf{p}_N,$$

Η γενική μη σχετιστική έκφραση είναι :

$$dn = (2\pi)^3 \prod_{i=1}^N \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3} \delta^3\left(\mathbf{p}_\alpha - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i\right).$$

Ωστόσο προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω έκφραση στην ολοκληρωτική μορφή του κανόνα του Fermi για να εξάγουμε τον ρυθμό διάσπασης ενός σωματιδίου, χρειάζεται να έχουμε σχετικιστική αναλλοιωτήτα, που θα εξασφαλίσουμε με τον μετασχηματισμό Lorentz. Επιβάλουμε λοιπόν Lorentz αναλλοιώτη κανονικοποίηση στην οποία αντιστοιχίζουμε $2E$ σωματίδια ανά μοναδιαίο όγκο (στο μη σχετικιστικό όριο αντιστοιχίσαμε 1 σωματίδιο ανά μοναδιαίο όγκο).

$$\int_V \psi^* \psi d^3\mathbf{x} = 1.$$

γράφεται $\int_V \psi'^* \psi' d^3 \mathbf{x} = 2E$, με $\psi' = (2E)^{\frac{1}{2}} \psi$.

Ορίζουμε έπειτα το Lorentz αναλλοίωτο στοιχείο πίνακα που σχετίζεται με το στοιχείο πίνακα του χρυσού κανόνα του Fermi που είδαμε προηγουμένως ως εξής:

$$M_{fi} = \langle \psi'_1 \psi'_2 \dots | \hat{H}' | \psi'_a \psi'_b \dots \rangle. \quad (\text{A.4})$$

Είμαστε τώρα σε θέση να υπολογίσουμε τον ρυθμό διάσπασης Γ αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω M, dn . Εξετάζουμε την περίπτωση ενός σωματιδίου που διασπάται σε 2 άλλα $\alpha \rightarrow 1 + 2$, ο κανόνας του Fermi σε αυτή την περίπτωση γράφεται:

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_\alpha - E_1 - E_2) dn,$$

αντικαθιστούμε το dn :

$$\Gamma_{fi} = (2\pi)^4 \int |T_{fi}|^2 \delta(E_\alpha - E_1 - E_2) \delta^3(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}.$$

και τη σχέση ανάμεσα στα 2 στοιχεία πίνακα: $|M_{fi}|^2 = (2E_\alpha 2E_1 2E_2) |T_{fi}|^2$.

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2E_\alpha} \int |T_{fi}|^2 \delta(E_\alpha - E_1 - E_2) \delta^3(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}, \quad (\text{A.5})$$

Οπότε και προκύπτει ένας όρος $2E_\alpha$ στον παρονομαστή. Χρησιμοποιώντας αυτή την κανονικοποίηση που αναφέραμε παραπάνω για να διασφαλίσουμε την σχετικιστική αναλλοιότητα προκύπτουν στον τελικό τύπο όροι:

$$\frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E}$$

Θα δείξουμε επίσης ότι είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό Lorentz στον άξονα z , δηλαδή

$$p'_z = \gamma(p_z - \beta E) \quad E' = \gamma(E - \beta p_z),$$

αφού σύμφωνα με τη σχέση διασποράς του Einstein $E^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2$ όπου ο όρος dp^3 μετασχηματίζεται σε dp'^3 σύμφωνα με την

$$d^3 \mathbf{p}' = dp'_x dp'_y dp'_z = dp_x dp_y \frac{dp'_z}{dp_z} dp_z = \frac{dp'_z}{dp_z} d^3 \mathbf{p} \quad (\text{A.6})$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση που γράψαμε πώς μετασχηματίζεται το dp

$$\frac{dp'_z}{dp_z} = \gamma \left(1 - \beta \frac{\partial E}{\partial p_z} \right) = \gamma \left(1 - \beta \frac{p_z}{E} \right) = \frac{1}{E} \gamma (E - \beta p_z) = \frac{E'}{E},$$

καθώς το η αντικαταστάθηκε στην (A.6) προκύπτει πως:

$$\frac{d^3 \mathbf{p}'}{E'} = \frac{d^3 \mathbf{p}}{E},$$

και δείχνουμε ότι αυτός ο όρος είναι αναλλοίωτος κατά Lorentz.

Δηλαδή η παραπάνω έκφραση είναι συνολικά Lorentz αναλλοίωτη. Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω γράφουμε την έκφραση που δίνει τον ρυθμό διάσπασης στη γενική περίπτωση που ένα σωματίδιο διασπάται σε N . Συνολικά καταλήγουμε στη :

$$\Gamma = \frac{S}{2E} \left[\int \prod_{i=1}^m \frac{d^3 p'_i}{2E'_i (2\pi)^3} \right] |\overline{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - \sum_{i=1}^m p'_i) \quad (\text{A.7})$$

όπου E αντιστοιχεί στην ενέργεια και p στην τετραορμή του διασπόμενου σωματιδίου και $p'_i(E'_i)$, $i = 1, \dots, m$ αντιστοιχούν στις τετραορμές (ενέργειες) των προϊόντων της διάσπασης, με την σύμβαση ότι τετραορμές που κατευθύνονται προς το κέντρο της αντίστοιχης κορυφής (vertex) φέρουν θετικό πρόσημο, ενώ τετραορμές που εξέρχονται της κορυφής φέρουν αρνητικό πρόσημο. Η ποσότητα S είναι ένας στατιστικός παράγοντας, ο οποίος δίνεται από :

$$S = \frac{1}{n!}$$

για κάθε ομάδα n ταυτοτικά όμοιων σωματιδίων στα προϊόντα διάσπασης και $|\overline{M}|^2$ συμβολίζει το τετράγωνο του κβαντικού πλάτους μετάβασης από την αρχική στην τελική κατάσταση, στο οποίο έχουμε θεωρήσει το μέσο όρο των αρχικών καταστάσεων του spin του διασπόμενου σωματιδίου και έχουμε αθροίσει πάνω στις τελικές καταστάσεις του spin των προϊόντων διάσπασης.

Παράρτημα Β: Αναλυτικός υπολογισμός πλατών

(Χωρίς υπόβαθρο, συμβατικό πρότυπο)

Από την (4.2):

$$|\overline{\mathcal{M}}_1|^2 = \frac{1}{2s+1} \sum_s \sum_r (-i\mathcal{M}_1)^\dagger (i\mathcal{M}_1) = \frac{1}{2} \sum_s \sum_r \left[\overline{u}^{(s)}(q)(-i)Y \frac{1+\gamma^5}{2} u^{(r)}(p) \right]^\dagger \left[\overline{u}^{(s)}(q)(-i)Y \frac{1+\gamma^5}{2} u^{(r)}(p) \right] \quad (\text{B.1})$$

Χρησιμοποιούμε τα τεχνάσματα του Casimir:

$$\sum_{i_A, i_B = \uparrow, \downarrow} (\overline{u}^{(i_A)}(p_A) \Gamma_{Iu}^{(i_B)}(p_B))^\dagger (\overline{u}^{(i_A)}(p_A) \Gamma_{IIu}^{(i_B)}(p_B)) = \text{Tr} [\overline{\Gamma}_I (\gamma^\mu p_{A\mu} + m_A \mathbb{I}) \Gamma_{II} (\gamma^\mu p_{B\mu} + m_B \mathbb{I})] \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}_1|^2 &= \frac{Y^\dagger Y}{2} \text{Tr} \left[\frac{1+\gamma^5}{2} (\not{q} + m_e) \frac{1+\gamma^5}{2} (\not{p} + m) \right] = \frac{Y^2}{2} \text{Tr} \left[\frac{1+\bar{\gamma}^5}{2} (\not{q} + m_e) \frac{1+\gamma^5}{2} (\not{p} + m) \right] \\ &= \frac{Y^2}{2} \text{Tr} \left[\frac{1-\gamma^5}{2} \not{q} \frac{1+\gamma^5}{2} \not{p} + \frac{1-\gamma^5}{2} m_e \mathbb{I} \frac{1+\gamma^5}{2} \not{p} + \frac{1-\gamma^5}{2} \not{q} \frac{1+\gamma^5}{2} m \mathbb{I} + \frac{1-\gamma^5}{2} m_e \mathbb{I} \frac{1+\gamma^5}{2} m \right] \end{aligned}$$

Όμως $\text{Tr}[\text{odd number of } \gamma^\mu \text{ matrices}] = 0$. Άρα, ο 2ος και ο 3ος όρος μηδενίζονται. Επιπλέον, $\frac{1-\gamma^5}{2} \frac{1+\gamma^5}{2} = 0$. Συνεπώς και ο τελευταίος όρος μηδενίζεται (μεταθέτουμε απλώς με τις μάζες επί τον μοναδιαίο πίνακα). Οπότε:

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}_1|^2 &= \frac{Y^2}{2} \text{Tr} \left[\frac{1-\gamma^5}{2} \gamma^\mu q \frac{1+\gamma^5}{2} \gamma^\mu p \right] = \frac{Y^2}{2} \text{Tr} \left[\gamma^\mu q \frac{1+\gamma^5}{2} \frac{1+\gamma^5}{2} \gamma^\mu p \right] \\ &= \frac{Y^2}{2} \text{Tr} \left[\gamma^\mu q_\mu \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right)^2 \gamma^\nu p_\nu \right] = \frac{Y^2}{2} (p_\mu q_\nu) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) \gamma^\nu \right] \\ &= (p_\mu q_\nu) \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu] = (p_\mu q_\nu) \frac{Y^2}{4} (\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] + \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu]) \end{aligned}$$

όμως $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}$ και $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu] = 0$. Άρα,

$$|\overline{\mathcal{M}}_1|^2 = \frac{Y^2}{4} p_\mu q_\nu 4\eta^{\mu\nu} \quad (\text{B.3})$$

Τελικά, το πλάτος διάσπασης που αντιστοιχεί στην διάσπαση $\boxed{N_R \rightarrow l^- + h^+}$ δίνεται από την:

$$\boxed{|\overline{\mathcal{M}}_1|^2 = Y^2 (p \cdot q)} \quad (\text{B.4})$$

$$|\overline{\mathcal{M}}_2|^2 = \frac{1}{2} \sum_s \sum_r \left(\overline{v}^s(p)(-i)Y \frac{1-\gamma^5}{2} v(q)^\dagger \right) \left(\overline{v}^s(p)(-i)Y \frac{1-\gamma^5}{2} v(q) \right) \quad (\text{B.5})$$

Όμοια από την (4.17) χρησιμοποιούμε το τέχνασμα του Casimir για να απλουστεύσουμε την παραπάνω έκφραση για το πλάτος (amplitude):

$$\sum_{i_A, i_B = \uparrow, \downarrow} (\bar{v}^{(i_A)}(p_A) \Gamma_{I\nu}^{(i_B)}(p_B))^\dagger (\bar{v}^{(i_A)}(p_A) \Gamma_{II\nu}^{(i_B)}(p_B)) = Tr [\overline{\Gamma_I}(\gamma^\mu p_{A\mu} - m_A \mathbb{I}) \Gamma_{II}(\gamma^\mu p_{B\mu} - m_B \mathbb{I})]$$

Δηλαδή, αντικαθιστώντας στην (B.5) με $\Gamma_I = \frac{1-\gamma^5}{2}$, $\Gamma_{II} = \frac{1+\gamma^5}{2}$:

$$|\overline{\mathcal{M}}_2|^2 = \frac{Y^\dagger Y}{2} Tr \left[\overline{\frac{1-\gamma^5}{2}} (\gamma^\mu p_\mu - m \mathbb{I}) \frac{1-\gamma^5}{2} (\gamma^\nu p_{2\nu} - m_e \mathbb{I}) \right] \quad (B.6)$$

$$= \frac{Y^2}{2} Tr \left[\frac{1+\gamma^5}{2} \not{p} \frac{1-\gamma^5}{2} \not{q} - \frac{1+\gamma^5}{2} m \mathbb{I} \frac{1-\gamma^5}{2} \not{q} - \frac{1-\gamma^5}{2} \not{p} \frac{1-\gamma^5}{2} m_e \mathbb{I} + \frac{1+\gamma^5}{2} m \mathbb{I} \frac{1-\gamma^5}{2} m_e \mathbb{I} \right] \quad (B.7)$$

Όπως προείπαμε όμως, $Tr(a + b + \dots) = Tr(a) + Tr(b) + \dots$, $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}$ και $Tr[\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu] = 0$.

Τελικά, ο μόνος όρος που δεν μηδενίζεται είναι ο πρώτος, οπότε:

$$|\overline{\mathcal{M}}_2|^2 = \frac{Y^2}{2} Tr \left[\frac{1+\gamma^5}{2} \gamma^\mu p_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \gamma^\nu q_\nu \right] \quad \gamma^5, \gamma^\mu = 0 \quad (B.8)$$

$$|\overline{\mathcal{M}}_2|^2 = \frac{Y^2}{2} Tr \left[\gamma^\mu p_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \frac{1-\gamma^5}{2} \gamma^\nu q_\nu \right] \quad \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right)^2 = \frac{1-\gamma^5}{2} \quad (B.9)$$

$$|\overline{\mathcal{M}}_2|^2 = \frac{Y^2 p_\mu q_\nu}{4} Tr[\gamma^\mu (1-\gamma^5) \gamma^\nu] = \frac{Y^2 p_\mu q_\nu}{4} Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu] \quad (B.10)$$

όμως $Tr(\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu) = 0$ και επιπλέον $Tr \gamma^\mu \gamma^\nu = 4\eta^{\mu\nu}$:

$$\boxed{|\overline{\mathcal{M}}_2|^2 = \frac{Y^2}{4} p_\mu q_\nu 4\eta^{\mu\nu} = Y^2 \cdot p \cdot q} \quad (B.11)$$

Με υπόβαθρο, μη συμβατικό πρότυπο

Αντικαθιστώντας τους νέους σπίνορες στον τύπο του πλάτους (4.2) προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\boxed{N \rightarrow l^- h^+}$$

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_1^{rs} &= -iY\bar{u}_s(q) \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) U^r(p) \\
&= -iY[\sqrt{E_{q,s}-B_0-\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}} \sqrt{E_{q,s}+B_0+\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}}] \gamma^0 \frac{1+\gamma^5}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{E_{p,r}-B_0-\bar{p}\bar{\sigma}\xi^r} \\ \sqrt{E_{p,r}+B_0+\bar{p}\bar{\sigma}\xi^r} \end{bmatrix} \\
&= -iY[\sqrt{E_{q,s}-B_0-\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}} \sqrt{E_{q,s}+B_0+\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}}] \begin{pmatrix} \phi & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \phi \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi & \phi \\ \phi & \not{p} \cdot \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{E_{p,r}-B_0-\bar{p}\bar{\sigma}\xi^r} \\ \sqrt{E_{p,r}+B_0+\bar{p}\bar{\sigma}\xi^r} \end{bmatrix} \\
&= -iY[\sqrt{E_{q,s}+B_0+\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}} \sqrt{E_{q,s}-B_0-\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}}] \begin{bmatrix} \phi \\ \sqrt{E_{p,r}+B_0-\bar{p}\bar{\sigma}\xi^r} \end{bmatrix} \\
&= -iY\sqrt{E_{q,s}-B_0-\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}}\sqrt{E_{p,r}+B_0-\bar{p}\bar{\sigma}\xi^r} \\
&= -iY\xi^{s\dagger}\xi^r\sqrt{E_{q,s}-B_0-\lambda_s|\bar{q}_s|}\sqrt{E_{p,r}+B_0+\lambda_r|\bar{p}|}
\end{aligned}$$

$$\boxed{N \rightarrow l^+ h^-}$$

Κατ'απόλυτη αναλογία με το προηγούμενο πλάτος:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{rs} &= -iY^*\bar{u}^s(q) \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) U^r(p) \\
&= -iY^*[\sqrt{E_{q,s}-B_0-\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}} \sqrt{E_{q,s}+B_0+\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}}] \gamma^0 \frac{1-\gamma^5}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{E_{p,r}-B_0-\bar{p}\bar{\sigma}\xi^r} \\ \sqrt{E_{p,r}+B_0-\bar{p}\bar{\sigma}\xi^r} \end{bmatrix} \\
&= -iY^*[\sqrt{E_{q,s}-B_0-\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}} \sqrt{E_{q,s}+B_0+\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}}] \begin{pmatrix} \phi & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \phi \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cdot \mathbb{I} & \phi \\ \phi & \phi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{E_{p,r}-B_0-\bar{p}\bar{\sigma}\xi^r} \\ \sqrt{E_{p,r}+B_0-\bar{p}\bar{\sigma}\xi^r} \end{bmatrix} \\
&= -iY^*[\sqrt{E_{q,s}+B_0+\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}} \sqrt{E_{q,s}-B_0-\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}}] \begin{bmatrix} \sqrt{E_{p,r}-B_0-\bar{p}\bar{\sigma}\xi^r} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= -iY^*\sqrt{E_{q,s}+B_0+\bar{q}_s\bar{\sigma}\xi^{s\dagger}}\sqrt{E_{p,r}-B_0-\bar{p}\bar{\sigma}\xi^r} \\
&= -iY^*\xi^{s\dagger}\xi^r\sqrt{B_0+\lambda_s|\bar{q}_s|+B_0+\lambda_s|\bar{q}_s|}\sqrt{E_{p,r}-B_0-\lambda_r|\bar{p}|} \\
&= -iY^*\xi^{s\dagger}\xi^r\sqrt{2(B_0+\lambda_s|\bar{q}_s|)}\sqrt{E_{p,r}-B_0-\lambda_r|\bar{p}|}
\end{aligned}$$

Αναφορές

- [1] A. D. Sakharov, “Violation of CP Invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe,” *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **5** (1967), 32-35 doi:10.1070/PU1991v034n05ABEH002497
- [2] S. Weinberg, “Cosmology,” Oxford University Press, 2008
- [3] E. W. Kolb and M. S. Turner, “The Early Universe,” *Front. Phys.* **69** (1990), 1-547 doi:10.1201/9780429492860
- [4] S. Dodelson, “Modern Cosmology,” Academic Press, 2003
- [5] J. A. Peacock, “Cosmological physics,” Cambridge University Press, 1999
- [6] S. Bilenky, “Introduction to the physics of massive and mixed neutrinos,” *Lect. Notes Phys.* **817** (2010), 1-255 doi:10.1007/978-3-642-14043-3
- [7] N. E. Mavromatos and S. Sarkar, “Curvature and thermal corrections in tree-level CPT-Violating Leptogenesis,” *Eur. Phys. J. C* **80** (2020) no.6, 558 doi:10.1140/epjc/s10052-020-8109-1 [arXiv:2004.10628 [hep-ph]].
- [8] T. Bossingham, N. E. Mavromatos and S. Sarkar, “Leptogenesis from Heavy Right-Handed Neutrinos in CPT Violating Backgrounds,” *Eur. Phys. J. C* **78** (2018) no.2, 113 doi:10.1140/epjc/s10052-018-5587-5 [arXiv:1712.03312 [hep-ph]].
- [9] M. de Cesare, N. E. Mavromatos and S. Sarkar, “On the possibility of tree-level leptogenesis from Kalb–Ramond torsion background,” *Eur. Phys. J. C* **75** (2015) no.10, 514 doi:10.1140/epjc/s10052-015-3731-z [arXiv:1412.7077 [hep-ph]].
- [10] J. Ellis, N. E. Mavromatos and S. Sarkar, “Environmental CPT Violation in an Expanding Universe in String Theory,” *Phys. Lett. B* **725** (2013), 407-411 doi:10.1016/j.physletb.2013.07.016 [arXiv:1304.5433 [gr-qc]].
- [11] Olli Taanila, Neutrinos and thermal leptogenesis, Master Thesis University of Helsinki
- [12] N. E. Mavromatos, “Violation of CPT Invariance in the Early Universe and Leptogenesis/Baryogenesis,” *J. Phys. Conf. Ser.* **447** (2013), 012016 doi:10.1088/1742-6596/447/1/012016
- [13] A. Strumia, “Baryogenesis via leptogenesis,” [arXiv:hep-ph/0608347 [hep-ph]].
- [14] W. Buchmuller, R. D. Peccei and T. Yanagida, “Leptogenesis as the origin of matter,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **55** (2005), 311-355 doi:10.1146/annurev.nucl.55.090704.151558 [arXiv:hep-ph/0502169 [hep-ph]].

- [15] R. H. Cyburt, B. D. Fields and K. A. Olive, “An Update on the big bang nucleosynthesis prediction for Li-7: The problem worsens,” JCAP **11** (2008), 012 doi:10.1088/1475-7516/2008/11/012 [arXiv:0808.2818 [astro-ph]].
- [16] <https://www.esa.int/ScienceExploration/SpaceScience/Planck/Planckandthecosmicmicrowavebackground>
- [17] R. Barbieri, P. Creminelli, A. Strumia and N. Tetradis, “Baryogenesis through leptogenesis,” Nucl. Phys. B **575** (2000), 61-77 doi:10.1016/S0550-3213(00)00011-0 [arXiv:hep-ph/9911315 [hep-ph]].
- [18] T. Frossard, M. Garny, A. Hohenegger, A. Kartavtsev and D. Mitrouskas, “Systematic approach to thermal leptogenesis,” Phys. Rev. D **87** (2013) no.8, 085009 doi:10.1103/PhysRevD.87.085009 [arXiv:1211.2140 [hep-ph]].
- [19] Νικόλαος Μαυρόματος *Σημειώσεις κβαντικής Θεωρίας Πεδίου II, EMII, 2022*
- [20] Δέσποινα Φαράκου Master Thesis: Running Vacuum in String Inspired Cosmologies and Matter-Antimatter Asymmetry in the Universe, NTUA
- [21] Nick E. Mavromatos, Neutrinos and the Universe, ICRANet, IRAP PhD School, September 10-15 2012
- [22] N. E. Mavromatos, “Geometrical origins of the universe dark sector: string-inspired torsion and anomalies as seeds for inflation and dark matter,” Phil. Trans. A. Math. Phys. Eng. Sci. **380** (2022) no.2222, 20210188 doi:10.1098/rsta.2021.0188 [arXiv:2108.02152 [gr-qc]]
- [23] T. Bossingham, N. E. Mavromatos and S. Sarkar, “The role of temperature dependent string-inspired CPT violating backgrounds in leptogenesis and the chiral magnetic effect,” Eur. Phys. J. C **79** (2019) no.1, 50 doi:10.1140/epjc/s10052-019-6564-3 [arXiv:1810.13384 [hep-ph]].