



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Κατανεμημένος έλεγχος μη γραμμικών  
πρακτόρων για προβλήματα συμφωνίας

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

**ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ Κ. ΓΚΕΣΟΥΛΗ**

Διπλωματούχου Ηλεκτρολόγου Μηχανικού &  
Μηχανικού Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Η διδακτορική διατριβή υλοποιείται με υποτροφία του ΙΚΥ η οποία συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου ερευνητικού δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας – 2ος Κύκλος» (ΜΙΣ–5000432), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ).

Αθήνα, Ιούνιος 2022





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

## Κατανεμημένος έλεγχος μη γραμμικών πρακτόρων για προβλήματα συμφωνίας

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

**ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ Κ. ΓΚΕΣΟΥΛΗ**

Διπλωματούχου Ηλεκτρολόγου Μηχανικού &  
Μηχανικού Υπολογιστών Ε.Μ.Π. (2017)

**Συμβουλευτική Επιτροπή:** Νικόλαος Μαράτος  
Γιάσων Καραφύλλης  
Κωνσταντίνος Τζαφέστας

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 28<sup>η</sup> Ιουνίου 2022.

...  
Ι. Καραφύλλης  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

...  
Κ. Τζαφέστας  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

...  
Α. Αλεξανδρίδης  
Καθηγητής Παν. Πατρών

...  
Ι. Τσινιάς  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

...  
Π. Μαραγκός  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

...  
Χ. Μπεχλιούλης  
Αν. Καθηγητής Παν. Πατρών

...  
Ι. Μπούταλης  
Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Αθήνα, Ιούνιος 2022

...

**ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Κ. ΓΚΕΣΟΥΛΗΣ**

Υπ. Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

© 2022 - All rights reserved

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Κατανεμημένος έλεγχος πολυπρακτορικών συστημάτων.....	1
1.1.1	Γράφοι επικοινωνίας.....	2
1.1.2	Το πρόβλημα της συμφωνίας.....	3
1.1.2.1	Διμερής συμφωνία.....	3
1.1.2.2	Χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία.....	4
1.1.2.3	Μη γραμμικά συστήματα.....	4
1.1.2.4	Κατανεμημένη βελτιστοποίηση βασισμένη στην συμφωνία.....	5
1.1.2.5	Κατανεμημένος έλεγχος διάταξης για σμήνη μη επανδρωμένων ιπτάμενων οχημάτων.....	6
1.2	Πρωτότυπα στοιχεία και συνεισφορά της παρούσας εργασίας.....	7
1.2.1	Συνεισφορά Κεφαλαίου 3.....	7
1.2.2	Συνεισφορά Κεφαλαίου 4.....	8
1.2.3	Συνεισφορά Κεφαλαίου 5.....	9
1.2.4	Συνεισφορά Κεφαλαίου 6.....	11
1.2.5	Δημοσιεύσεις.....	11
1.3	Οργάνωση του τόμου.....	12
<b>2</b>	<b>Θεωρητικό Υπόβαθρο</b>	<b>13</b>
2.1	Θεωρία γράφων.....	13
2.1.1	Κατευθυνόμενοι και μη κατευθυνόμενοι γράφοι.....	13
2.1.2	Προσημασμένοι γράφοι.....	15
2.1.3	Κατευθυνόμενοι γράφοι με αρχηγό.....	17
2.2	Θεωρία συστημάτων.....	18
2.2.1	Διαφορικές εξισώσεις.....	18
2.2.2	Συναρτησιακές διαφορικές εξισώσεις με χρονική υστέρηση.....	18
2.2.3	Συστήματα σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης.....	19
2.2.4	Συστήματα σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις.....	20
2.3	Ένα χρήσιμο Λήμμα.....	22
<b>3</b>	<b>Διμερής συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση</b>	<b>23</b>
3.1	Ορισμός του προβλήματος.....	23
3.2	Μετασχηματισμός PI για διμερή συμφωνία.....	24
3.3	Εφαρμογή σε άγνωστους πράκτορες καθαρής ανατροφοδότησης.....	27
3.3.1	Δυναμικές των πρακτόρων.....	27
3.3.2	Ρύθμιση των μεταβλητών PI.....	27

3.4	Προσομοιώσεις .....	33
3.5	Συμπεράσματα .....	35
<b>4</b>	<b>Συμφωνία με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία</b>	<b>43</b>
4.1	Ορισμός του προβλήματος .....	43
4.2	Μετασχηματισμός PdI για συμφωνία με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία .....	44
4.3	Εφαρμογή σε άγνωστους πράκτορες καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις .....	48
4.3.1	Δυναμικές των πρακτόρων .....	48
4.3.2	Ρύθμιση των μεταβλητών PdI .....	49
4.4	Προσομοιώσεις .....	55
4.5	Συμπεράσματα .....	57
<b>5</b>	<b>Βέλτιστη συμφωνία για πράκτορες με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις</b>	<b>59</b>
5.1	Ορισμός του προβλήματος .....	59
5.2	Ο μετασχηματισμός OCPI για βέλτιστη συμφωνία .....	60
5.3	Εφαρμογή σε άγνωστους πράκτορες καθαρής ανατροφοδότησης .....	65
5.3.1	Δυναμικές των πρακτόρων .....	65
5.3.2	Ρύθμιση των μεταβλητών OCPI .....	66
5.4	Προσομοιώσεις .....	71
5.5	Συμπεράσματα .....	73
<b>6</b>	<b>Διάταξη για σμήνος UAVs με προκαθορισμένη επίδοση</b>	<b>75</b>
6.1	Διατύπωση του προβλήματος .....	75
6.1.1	Κινηματικές και δυναμικές εξισώσεις των UAVs .....	75
6.2	Σχεδίαση νόμου ελέγχου για την διάταξη των UAVs .....	77
6.3	Προσομοιώσεις .....	82
6.4	Συμπεράσματα .....	83
<b>7</b>	<b>Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντικές επεκτάσεις</b>	<b>87</b>
7.1	Συμπεράσματα .....	87
7.2	Επεκτάσεις .....	87
	<b>A' Παράρτημα</b>	<b>89</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>93</b>

# Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Παράδειγμα κατευθυνόμενου γράφου .....	14
2.2	Παράδειγμα κατευθυνόμενου γράφου με δέντρο που τον εκτείνει (γραμμή με παύλα-τελεία) .....	14
2.3	Παράδειγμα κατευθυνόμενου γράφου με βάρη .....	14
2.4	Παράδειγμα μη κατευθυνόμενου συνεκτικού γράφου .....	14
2.5	Παράδειγμα δομικά ισορροπημένου γράφου .....	16
3.1	Η τοπολογία του δικτύου επικοινωνίας .....	34
3.2	Οι μεταβλητές PI για $\beta = 3.3$ για μεταβλητό κέρδος $k$ .....	36
3.3	Οι εισοδοί των πρακτόρων $\beta = 3.3$ για μεταβλητό κέρδος $k$ .....	37
3.4	Οι έξοδοι των πρακτόρων για $\beta = 3.3$ για μεταβλητό κέρδος $k$ .....	38
3.5	Οι μεταβλητές PI για κέρδος $k = 15$ και μεταβλητή παράμετρο $\beta$ .....	39
3.6	Οι εισοδοί των πρακτόρων για κέρδος $k = 15$ και μεταβλητή παράμετρο $\beta$	40
3.7	Οι έξοδοι των πρακτόρων για κέρδος $k = 15$ και μεταβλητή παράμετρο $\beta$	41
4.1	Ο γράφος επικοινωνίας των UAVs .....	56
4.2	Οι εισοδοί και οι θέσεις των UAVs για $\rho_\infty = 0.001$ .....	56
5.1	Οι συναρτήσεις κόστους $f_i(y)$ και το συνολικό κόστος $\sum_{i=1}^5 f_i(y)$ .....	72
5.2	Οι έξοδοι και οι εισοδοί των CSTRs .....	72
6.1	Οι παράμετροι κάθε UAV .....	76
6.2	Τα σφάλματα μεταξύ των ταχυτήτων και των εικονικών ελέγχων για κάθε UAV .....	83
6.3	Τα σφάλματα διάταξης για κάθε UAV .....	84
6.4	Οι εισοδοί ελέγχου για κάθε UAV .....	84
6.5	Οι θέσεις των UAVs .....	85
A'1	Το διάγραμμα Nyquist για την $D_0(s)$ .....	91





# Κατάλογος Πινάκων



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο εργαστήριο Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου, του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κατά το διάστημα 2017–2022 υπό την επίβλεψη του Λέκτορα κ. Χαράλαμπου Ψυλλάκη.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Χ. Ψυλλάκη για τις ατελείωτες ώρες που αφιέρωσε, την ουσιαστική καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές και την αμέριστη συνεργασία που είχαμε σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διδακτορικής μου έρευνας.

Ευχαριστώ επίσης τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής Ομ. Καθηγητή κ. Νικόλαο Μαράτο, Αν. Καθηγητή κ. Ιάσωνα Καραφύλλη και Αν. Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Τζαφέστα για τις χρήσιμες συμβουλές τους και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους. Επιπλέον, ευχαριστώ τον φίλο και συνεργάτη Θάνο Λαγό, που είναι επίσης μέλος του εργαστηρίου στο οποίο εκπονήθηκε η παρούσα διατριβή.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την ανεκτίμητη συμπαράστασή τους όλα αυτά τα χρόνια, η οποία υπήρξε καθοριστική για την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και τις φίλες μου, που οι μεταξύ μας σχέσεις ήταν καταλυτικές για την συναισθηματική μου ευημερία κατά την περίοδο εκπόνησης της διατριβής.

*Αθανάσιος Γκεσούλης  
Αθήνα, Μάρτιος 2022*



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διατριβή ασχολείται με την σχεδίαση κατανεμημένων νόμων ελέγχου για πολυπρακτορικά συστήματα. Κύριος άξονας της διατριβής είναι η σχεδίαση κατάλληλων μετασχηματισμών, μέσω των οποίων τα διάφορα προβλήματα της συμφωνίας σε πολυπρακτορικά συστήματα μπορούν να αναχθούν σε προβλήματα ρύθμισης των νέων μεταβλητών, επιτρέποντας έτσι την επίλυση προβλημάτων συμφωνίας για πράκτορες με άγνωστες ή/και μη γραμμικές δυναμικές και αβεβαιότητες με την χρήση κλασικών μεθοδολογιών ελέγχου.

Η διατριβή περιλαμβάνει σχεδίαση των μεθοδολογιών ελέγχου για διάφορα προβλήματα με κοινό θέμα την συμφωνία πολυπρακτορικών δικτύων, όπως η διμερής συμφωνία, η βέλτιστη συμφωνία και η συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση, καθώς και θεωρητική ανάλυση των αποτελεσμάτων. Επιπλέον, παρουσιάζονται προσομοιώσεις σε προγραμματιστικό περιβάλλον για την ανάδειξη των θεωρητικών αποτελεσμάτων, βασισμένες σε μοντέλα συστημάτων που χρησιμοποιούνται σε βιομηχανικές και άλλες πρακτικές εφαρμογές, όπως συστήματα ομάδων χημικών αντιδραστήρων, ρομποτικών βραχιόνων και σμήνη μη επανδρωμένων ιπτάμενων οχημάτων.

Στο αρχικό μέρος του τόμου, γίνεται εκτενής ανασκόπηση της τρέχουσας βιβλιογραφίας στο ερευνητικό πεδίο της διατριβής. Ακολούθως, παρουσιάζονται οι κύριες συνεισφορές της διατριβής στο πεδίο ενδιαφέροντος. Ακόμα, δίνεται το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο, απαραίτητο για την κατανόηση των αποτελεσμάτων που ακολουθούν.

Στο επόμενο μέρος της, η διατριβή ασχολείται με το πρόβλημα της διμερούς συμφωνίας χωρίς αρχηγό με προκαθορισμένη επίδοση για μη γραμμικούς πράκτορες. Στα πλαίσια της μελέτης αυτής, προτείνεται μια νέα μεθοδολογία για την επίλυση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται ένας νέος αναλογικός και ολοκληρωτικός μετασχηματισμός (PI), ο οποίος επιτρέπει την επίλυση του προαναφερθέντος προβλήματος ανάγοντάς το σε ένα πρόβλημα ρύθμισης με προκαθορισμένη επίδοση. Για την επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων θεωρούνται δίκτυα επικοινωνίας που περιγράφονται από προσημασμένους γράφους που περιέχουν δέντρο που τους εκτείνει. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό επιλύεται το αντίστοιχο πρόβλημα της συμφωνίας των εξόδων με προκαθορισμένη επίδοση για μη γραμμικούς πράκτορες σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης με άγνωστες δυναμικές. Αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος διασφαλίζει πως όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα και παράλληλα εγγυάται την προκαθορισμένη επίδοση για το σφάλμα διμερούς συμφωνίας. Τέλος, παρουσιάζονται προσομοιώσεις σε ομάδα ρομποτικών χειριστών μονού συνδέσμου που επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα της θεωρητικής ανάλυσης.

Στο επόμενο κεφάλαιο η διατριβή μελετά το πρόβλημα της συμφωνίας πολυπρακτορικών συστημάτων με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού προτείνεται ένας αναλογικός και χρονικά υστερημένα ολοκληρωτικός μετασχηματισμός (PdI), που ανάγει το πρόβλημα του συνεργα-

τικού ελέγχου με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία σε ένα απλούστερο πρόβλημα ρύθμισης. Ο μετασχηματισμός PdI επιτρέπει την χρήση τεχνικών κλασικού ελέγχου για την επίλυση προβλημάτων συμφωνίας χωρίς αρχηγό. Ακολουθώντας αυτήν την προσέγγιση, μελετάται και επιλύεται για πρώτη φορά το πρόβλημα της συμφωνίας χωρίς αρχηγό για πολυπρακτορικά συστήματα σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης με άγνωστες μη γραμμικότητες, διαταραχές και χρονικές υστερήσεις τόσο στην επικοινωνία, όσο και στις καταστάσεις. Υποθέτουμε μια γενική μορφή στις χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις που περιλαμβάνει χρονικά μεταβαλλόμενες και κατανεμημένες υστερήσεις. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος εγγυάται ότι όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα και ότι το πολυπρακτορικό σύστημα επιτυγχάνει συμφωνία με προκαθορισμένο σφάλμα τελικής κατάστασης. Παρατίθενται αποτελέσματα προσομοιώσεων σε ένα σμήνος μη επανδρωμένων ιπτάμενων οχημάτων (UAVs) που επικυρώνουν την θεωρητική ανάλυση.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια νέα μεθοδολογία για το πρόβλημα της βέλτιστης συμφωνίας των εξόδων πολυπρακτορικών συστημάτων. Προτείνεται ένας κατανεμημένος αναλογικός και ολοκληρωτικός μετασχηματισμός βέλτιστης συμφωνίας (OCPI) που ανάγει το πρόβλημα αυτό σε ένα απλούστερο πρόβλημα ρύθμισης των νέων μεταβλητών. Ο μετασχηματισμός απαιτεί μόνο μετρήσεις των σχετικών αποστάσεων των εξόδων με τους γείτονες και είναι ανεξάρτητος από την υποκείμενη δυναμική των πρακτόρων, επομένως είναι εφαρμόσιμος σε μια ευρεία κλάση συστημάτων. Κλασικές τεχνικές ελέγχου, που λαμβάνουν υπόψιν την δυναμική των πρακτόρων μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετά τον μετασχηματισμό για την ρύθμιση των νέων μεταβλητών. Στη συνέχεια, η μεθοδολογία αυτή χρησιμοποιείται για την επίλυση για πρώτη φορά του προβλήματος της συμφωνίας για πράκτορες σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης με άγνωστες μη γραμμικότητες, διαταραχές και χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις. Ακόμα, παρουσιάζονται προσομοιώσεις σε μια ομάδα από συνεχώς αναδεδυόμενους αντιδραστήρες (CSTRs) οι οποίες επιβεβαιώνουν την θεωρητική ανάλυση.

Τέλος, προτείνεται ένα νέο κατανεμημένο σχήμα ελέγχου για την διάταξη με προκαθορισμένη επίδοση μη επανδρωμένων ιπτάμενων οχημάτων (UAVs) με τρεις βαθμούς ελευθερίας. Η ροή πληροφορίας μεταξύ των UAVs περιγράφεται από έναν κατευθυνόμενο γράφο που περιέχει δέντρο που τον εκτείνει με το UAV αρχηγό ως ρίζα. Μόνο οι σχετικές αποστάσεις μεταξύ των UAVs χρειάζεται να είναι διαθέσιμες όπως ορίζει ο γράφος επικοινωνίας. Οι δυναμικές των UAVs προκύπτουν από τις κινηματικές εξισώσεις και οι συντελεστές της αντίστασης του αέρα των οχημάτων και οι μάζες θεωρούνται άγνωστες στους ελεγκτές. Για την σχεδίαση των ελεγκτών, προτείνεται μια προσέγγιση backstepping χαμηλής πολυπλοκότητας. Χρησιμοποιείται ανάλυση τύπου Lyapunov για την απόδειξη της αποτελεσματικότητας της προτεινόμενης μεθόδου. Παρουσιάζονται προσομοιώσεις οι οποίες επιβεβαιώνουν την θεωρητική ανάλυση.

# ABSTRACT

The present thesis addresses the design problem of distributed control laws for nonlinear multi-agent systems. The main idea of this work is the design of suitable transformations, that reformulate various multi-agent consensus problems into regulation problems of the new variables. This enables the use of classical control methodologies to solve the aforementioned consensus problems.

The thesis considers the control design for various multi-agent network problems, such as bipartite consensus, optimal consensus and consensus with prescribed performance, as well as the theoretical analysis of the results. Moreover, simulations that illustrate the validity of the theoretical results are presented, based on realistic systems models used in industrial and other practical applications, such as systems of groups of chemical reactors, robotic manipulators and unmanned aerial vehicles.

Initially, the current literature in the related research field is thoroughly reviewed. Then, the main contributions of the thesis to the field are presented. Furthermore, the basic theoretical background, necessary for understanding the results that follow, is reviewed.

The next part of the thesis addresses the problem of leaderless bipartite consensus with prescribed performance for nonlinear agents. A new methodology is proposed that includes a new Proportional and Integral (PI) transformation, which enables the solution of the aforementioned problem by recasting it into a problem of regulating the new variables with prescribed performance. The communication between the agents is described by signed graphs that have a spanning tree. Using the proposed transformation, the related problem of output consensus with prescribed performance is solved for nonlinear agents in unknown pure-feedback form. The algorithm ensures that all closed-loop signals remain uniformly bounded and guarantees prescribed performance for the bipartite consensus error. Finally, simulations on a group of single-link robotic manipulators are presented, that illustrate the validity of our theoretical results.

The thesis then considers the consensus problem of multi-agent systems with communication time-delays. To solve this problem, a Proportional and delayed Integral (PdI) transformation is proposed, that reformulates the cooperative control with communication time-delays into a simpler regulation problem. Following this approach, the problem of leaderless consensus for multi-agent systems with unknown pure-feedback dynamics, communication time-delays and unknown disturbances is then solved for the first time. It is noted that a large class of time-delays is considered, which includes time-varying and distributed delays among others. The proposed algorithm guarantees that all closed-loop signals remain uniformly bounded and that the multi-agent system achieves output consensus with predefined steady-state error. Simulation results on a swarm of unmanned aerial vehicles illustrate the validity

of the theoretical analysis.

Subsequently, a new methodology that addresses the problem of output optimal consensus for multi-agent systems is presented. A distributed variable transformation (OCPI) is proposed, that recasts the aforementioned problem into a simpler problem of regulating the new variables. The transformation requires only relative output measurements and is independent of the explicit underlying agent dynamics, and therefore is applicable to a large class of system dynamics. Classical control techniques that take into account the underlying agent dynamics can then be employed to regulate the new variables and solve the optimal consensus problem. The methodology is then employed to solve for the first time the problem of output optimal consensus for multi-agent systems with unknown pure-feedback agents subject to unknown disturbances and state time-delays. Moreover, simulations on a group of Continuous Stirred-Tank Reactors (CSTRs) are presented, that validate the theoretical results.

Finally, a new distributed control scheme for the formation control with prescribed performance of unmanned aerial vehicles (UAVs) having three degrees of freedom is presented. The information flow between the UAVs is described by a directed graph that includes a spanning tree that has the leader UAV as the root. Only the relative distance information between the UAVs is required to be available to each UAV as indicated by the communication graph. The UAV dynamics are derived from the kinematic equations and the drag coefficients as well as the masses of the UAVs are considered to be unknown. The controllers are designed following a low-complexity backstepping approach. A Lyapunov-type analysis is presented to prove the efficiency of the proposed methodology. Simulation results are presented that validate the theoretical analysis.



# Αντιστοιχία τεχνικών όρων

Συστήματα Καθαρής Ανατροφοδότησης	:	Pure-feedback Systems
Αισθητήρας Μέτρησης Σχετικής Απόστασης	:	Proximity Sensor
Αμείωτος Πίνακας	:	Irreducible matrix
Αναλογικός και Ολοκληρωτικός	:	Proportional and Integral (PI)
Αναλογικός και χρονικά υστερημένα Ολοκληρωτικός	:	Proportional and delayed Integral (PdI)
Αναλογικός και Ολοκληρωτικός Μετασχηματισμός Βέλτιστης Συμφωνίας	:	Optimal Consensus Proportional and Integral (OCPI) Transformation
Δέντρο που Εκτείνει τον Γράφο	:	Graph Spanning Tree
Έλεγχος Δυναμικής Επιφάνειας	:	Dynamic Surface Control
Εξ' Ολοκλήρου Συνεχής Συνάρτηση	:	Completely Continuous Function
Ευστάθεια Εισόδου Κατάστασης	:	Input to State Stability (ISS)
Λαπλασιανή Μήτρα	:	Laplacian matrix
Μέθοδος Εσωτερικής Λειτουργίας	:	Internal Mode (IM) Method
Μη Επανδρωμένα Ιπτάμενα Οχήματα	:	Unmanned Aerial Vehicles (UAVs)
Παρακολούθηση Περιορισμού	:	Containment Tracking
Πίνακας Προσήμου	:	Signature Matrix
Πρόβλημα Ελέγχου Περιορισμού	:	Containment Control Problem
Σμήνος	:	Swarm
Συνεχώς Αναδευόμενος Αντιδραστήρας	:	Continuous Stirred-Tank Reactor (CSTR)
Χειριστής Μονού Συνδέσμου	:	Single-link Manipulator



# Σημειογραφία

Έστω  $N$  διανύσματα  $x_i := [x_{i1} \dots x_{im}]^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Ορίζουμε για κάθε  $j \in \{1, \dots, m\}$  το διάνυσμα  $\underline{x}_j \in \mathbb{R}^N$  ως  $\underline{x}_j := [x_{1j} \ x_{2j} \ \dots \ x_{Nj}]^T$ . Για κάθε  $i \in \{1, \dots, N\}$  και  $j \in \{1, \dots, m\}$  ορίζουμε το διάνυσμα  $\bar{x}_{ij} \in \mathbb{R}^j$  ως  $\bar{x}_{ij} := [x_{i1} \ \dots \ x_{ij}]^T$  και το διάνυσμα  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{Nm}$  ως  $\bar{x} := [\bar{x}_1^T \ \dots \ \bar{x}_N^T]^T$ . Το σύνολο  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$  συμβολίζει το σύνολο των συνεχών απεικονίσεων από το διάστημα  $[a, b]$  στο  $\mathbb{R}^n$ . Το σύνολο των συνεχών απεικονίσεων από το  $[-d, 0]$  ( $d > 0$ ) στο  $\mathbb{R}^j$  συμβολίζεται ως  $\mathcal{C}_j := \mathcal{C}([-d, 0], \mathbb{R}^j)$ . Για  $A > 0$  και κάθε συνεχή συνάρτηση του χρόνου  $x \in \mathcal{C}[t_0 - d, t_0 + A], \mathbb{R}^n$  και  $t_0 \leq t \leq t_0 + A$ , το  $x_t \in \mathcal{C}_n$  είναι ένα τμήμα της συνάρτησης  $x$ , που ορίζεται από την  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-d, 0]$ . Ο  $\mathbb{I}_N$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας τάξης  $N$  και  $\mathbf{1}_N = [1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^N$ . Για έναν μιγαδικό αριθμό  $c \in \mathbb{C}$ , τα  $\Re(c)$ ,  $\Im(c)$  είναι το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος, αντίστοιχα.



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Κατανεμημένος έλεγχος πολυπρακτορικών συστημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα προβλήματα κατανεμημένου ελέγχου που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα διατριβή, καθώς και κάνουμε μια ανασκόπηση της σχετικής τρέχουσας βιβλιογραφίας. Κάποια από τα εισαγωγικά στοιχεία που παρουσιάζονται μπορούν να αναζητηθούν στα [1], [2], [3], [4], [5].

Τις τελευταίες δεκαετίες η προσοχή της έρευνας στον τομέα του ελέγχου στρέφεται όλο και περισσότερο στον έλεγχο πολλών διασυνδεδεμένων συστημάτων, λόγω των πλεονεκτημάτων που προκύπτουν από την αντικατάσταση ενός μεμονωμένου πολύπλοκου συστήματος από πολλά απλούστερα επιμέρους. Οι δύο κύριες προσεγγίσεις για τον έλεγχο πολλών διασυνδεδεμένων συστημάτων, τα αποκαλούμενα και πολυπρακτορικά συστήματα όπου το κάθε σύστημα ονομάζεται πράκτορας, είναι ο κεντρικός ή συγκεντρωτικός έλεγχος και ο αποκεντρωμένος ή κατανεμημένος έλεγχος των συστημάτων αυτών. Ο κεντρικός έλεγχος βασίζεται στην ύπαρξη ενός ισχυρού κεντρικού συστήματος-σταθμού το οποίο είναι διαθέσιμο για τον έλεγχο ή και την επίβλεψη μιας ομάδας συστημάτων. Ένα κεντρικό σχήμα βασίζεται στην ικανότητα κάθε μέλους της ομάδας να επικοινωνεί απευθείας με τον κεντρικό σταθμό ή μέσω μιας αλυσίδας από ενδιάμεσους πράκτορες. Σε ένα τέτοιο σχήμα, η αύξηση του αριθμού των επιμέρους συστημάτων αυξάνει πολλαπλασιαστικά τις ανάγκες για επεξεργαστική ισχύ και συνδεσιμότητα του κεντρικού σταθμού. Επιπλέον, ένα τέτοιο σύστημα είναι πιο ευάλωτο σε βλάβες ή καταστροφές που μπορεί να γίνουν στον κεντρικό σταθμό, οι οποίες οδηγούν στην παύση της λειτουργίας του συνολικού συστήματος. Σε αντίθεση με τον κεντρικό έλεγχο, ο κατανεμημένος έλεγχος δεν απαιτεί την ύπαρξη κεντρικού σταθμού, με το μειονέκτημα της μεγαλύτερης πολυπλοκότητας στην σχεδίαση και την ανάλυση του ελέγχου των επιμέρους συστημάτων. Ο κατανεμημένος έλεγχος μπορεί να αντιμετωπίσει προβλήματα όπως το περιορισμένο εύρος ζώνης του δικτύου επικοινωνίας και η περιορισμένη εμβέλεια των αισθητήρων. Επιπροσθέτως, εξασφαλίζει την εύρυθμη λειτουργία του συνολικού συστήματος ακόμη και για μεγάλο πλήθος επιμέρους συστημάτων. Σε κάθε περίπτωση, η ύπαρξη ενός δυναμικά μεταβαλλόμενου δικτύου επικοινωνίας και η μη στατική φύση των πληροφοριών που διαμοιράζονται τα επιμέρους συστήματα μεταξύ τους, κάνουν πιο απαιτητική την σχεδίαση ελεγκτών διασυνδεδεμένων συστημάτων, τόσο κεντρικών όσο και αποκεντροποιημένων.

Οι πρώτες ιδέες για την προσέγγιση του κατανεμημένου ελέγχου των πολυπρακτορικών συστημάτων προήλθαν από την ανάλυση της κίνησης ομάδων ζώων στην

φύση. Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε αρχικά από την σκοπιά της επιστήμης των υπολογιστών και τα κινούμενα σχέδια σε υπολογιστή [6]. Η κεντρική ιδέα είναι ότι σε μεγάλες κοινωνικές ομάδες, κάθε μέλος έχει διαθέσιμη μόνο την πληροφορία σχετικά με τους κοντινότερους του γείτονες. Η ελάχιστη αυτή πληροφορία οδηγεί την ομάδα σε περίπλοκες κινήσεις χρησιμοποιώντας απλούς κανόνες που παρόλα αυτά κάνουν την κίνηση τους αποτελεσματική, με γρήγορη απόκριση σε αλλαγές. Για παράδειγμα, σε ένα σμήνος πουλιών, κάθε μεμονωμένο πουλί έχει αίσθηση μόνο για το τι κάνουν ελάχιστοι γείτονες μπροστά και γύρω του και αυτό οδηγεί στις κομψές και περίτεχνες κινήσεις που παρατηρούμε σε σμήνη πουλιών που αποδημούν. Στα κοπάδια ψαριών, ο διαμοιρασμός της πληροφορίας γίνεται μέσω κραδασμών που μεταδίδονται μέσω του νερού και επιτρέπουν στα ψάρια να αναγνωρίζουν τις κινήσεις των γειτόνων τους που μπορεί να μην βλέπουν, κάνοντάς τα να αντιδρούν γρήγορα όταν χρειαστεί. Μπορούμε εύκολα λοιπόν να συμπεράνουμε ότι η επικοινωνία είναι απαραίτητη για την συνεργασία σε ένα πολυπρακτορικό σύστημα. Πέρα από τα φυσικά παραδείγματα, ο έλεγχος πολυπρακτορικών συστημάτων έχει αναδειχτεί σαν λύση σε πολλές πρακτικές εφαρμογές. Χρησιμοποιείται σε συνεργατικές εργασίες σε σμήνη μη επανδρωμένων αυτόνομων οχημάτων, όπως η παρακολούθηση, η αναγνώριση, η εξερεύνηση, η διάσωση και οι ατμοσφαιρικές μελέτες. Ακόμη, έχει εφαρμογές στη ρομποτική, τα δίκτυα αισθητήρων και, γενικότερα, σε δικτυωμένα συστήματα [7], [8].

### 1.1.1 Γράφοι επικοινωνίας

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τις αλληλεπιδράσεις δυναμικών συστημάτων τα οποία ανταλλάζουν πληροφορίες μέσα από ένα δίκτυο επικοινωνίας. Ένα δίκτυο επικοινωνίας μπορεί να περιγραφεί από έναν γράφο με κατευθυνόμενες ή μη κατευθυνόμενες ακμές, οι οποίες αντιστοιχούν σε κατευθυνόμενη ή μη κατευθυνόμενη ροή πληροφορίας μεταξύ των συστημάτων. Τα συστήματα, αποκαλούμενα και πράκτορες, μοντελοποιούνται ως κόμβοι του γράφου. Διακρίνουμε τρεις κατηγορίες γράφων που θα είναι χρήσιμες στο κείμενο, τους κατευθυνόμενους, τους μη κατευθυνόμενους και τους προσημασμένους γράφους.

Ένας κατευθυνόμενος γράφος  $\mathcal{G}$  είναι μια τριάδα  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ . Το  $\mathcal{V} := \{1, \dots, N\}$  είναι το σύνολο των κόμβων του γράφου. Το  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  είναι το σύνολο των ακμών του. Αν  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , τότε υπάρχει ακμή από τον κόμβο  $i$  προς τον κόμβο  $j$ . Αυτό σημαίνει πως ο κόμβος  $j$  δέχεται πληροφορία από τον κόμβο  $i$ . Σε κάθε ακμή  $(j, i) \in \mathcal{E}$  αντιστοιχίζουμε ένα βάρος  $a_{ij} > 0$ . Το βάρος αυτό μοντελοποιεί την ισχύ της αλληλεπίδρασης μεταξύ του πράκτορα  $j$  και  $i$ . Ο πίνακας  $\mathcal{A} := [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  είναι ο πίνακας γειτνίασης του  $\mathcal{G}$ , με  $a_{ij} > 0 \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E}$  και  $a_{ij} = 0$ , διαφορετικά. Το σύνολο των γειτόνων του κόμβου  $i$  στον γράφο περιλαμβάνει τους κόμβους που στέλνουν πληροφορίες στον  $i$  και ορίζεται ως  $N_i := \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}\}$ . Σε όλη την εργασία θεωρούμε ότι  $a_{ii} = 0$  για κάθε  $i \in \mathcal{V}$ . Ο βαθμός του κόμβου  $i$  ορίζεται ως  $d_i := \sum_{j=1}^N a_{ij}$  και ο πίνακας βαθμού ως  $\mathcal{D} := \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ . Ο πίνακας  $L := \mathcal{D} - \mathcal{A}$  ονομάζεται Λαπλασιανή μήτρα του γράφου  $\mathcal{G}$ . Ένα μονοπάτι στον γράφο  $\mathcal{G}$  είναι μία σειρά διαδοχικών του ακμών, δηλαδή  $((i, k), (k, s), \dots, (w, j))$ , όπου  $(i, k), (k, s), \dots, (w, j) \in \mathcal{E}$ . Λέμε ότι ο γράφος  $\mathcal{G}$  έχει δέντρο που τον εκτείνει (spanning tree) αν υπάρχει κόμβος, που ονομάζεται ρίζα, από τον οποίο υπάρχει μονοπάτι προς όλους τους άλλους κόμβους στον γράφο.

Ένας γράφος λέγεται μη κατευθυνόμενος όταν ο γράφος γειτνίασής του είναι συμμετρικός, δηλαδή όταν  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $\forall i, j \in \mathcal{V}$ . Σε αυτή την περίπτωση, όταν ο

κόμβος  $j$  στέλνει πληροφορία στον κόμβο  $i$ , τότε ισχύει και το αντίστροφο και το βάρος της επιρροής είναι το ίδιο.

Ένας γράφος  $\mathcal{G}$  λέγεται προσημασμένος όταν επιτρέπει και αρνητικά βάρη στον γράφο γειτνίασης, δηλαδή έχει πίνακα γειτνίασης τον  $\mathcal{A} := [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , με  $a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow (i, j) \in \mathcal{E}$ .

### 1.1.2 Το πρόβλημα της συμφωνίας

Ένα από τα κύρια προβλήματα στον καταναμημένο έλεγχο πολυπρακτορικών συστημάτων είναι το πρόβλημα της συμφωνίας. Σε αυτό το πρόβλημα ο σκοπός είναι να σχεδιαστεί κατάλληλος νόμος ελέγχου για το κάθε επιμέρους σύστημα, χρησιμοποιώντας τις τοπικές πληροφορίες που αφορούν τους κοντινότερους του γείτονες, ώστε το συνολικό πολυπρακτορικό σύστημα να φτάσει σε συμφωνία σε κάποιες μεταβλητές ενδιαφέροντος [9], [10], [11], [12], [13]. Συνήθως αυτό σημαίνει να φτάσουν κάποιες καταστάσεις ή οι έξοδοι των συστημάτων σε κοινές τιμές και να παραμείνουν εκεί. Πολλά σημαντικά αποτελέσματα έχουν εξαχθεί για συνεργατικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των πρακτόρων για την επίτευξη συμφωνίας και λεπτομερείς ανασκοπήσεις της βιβλιογραφίας μπορούν να αναζητηθούν στις εργασίες [1], [2], [3], [4], [14].

#### 1.1.2.1 Διμερής συμφωνία

Σε πολλές εν δυνάμει εφαρμογές, όπως τα κοινωνικά δίκτυα [5], οικονομικά συστήματα [15] και συστήματα πολλαπλών ρομπότ [16], απαιτούνται όχι μόνο συνεργατικές, αλλά και ανταγωνιστικές σχέσεις μεταξύ των πρακτόρων. Ένα αναδυόμενο θέμα στον έλεγχο πολυπρακτορικών συστημάτων με ανταγωνιστικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των πρακτόρων είναι η διμερής συμφωνία. Ο στόχος των πρακτόρων στην διμερή συμφωνία, αντί να συγκλίνουν σε μια κοινή τιμή, είναι να συγκλίνουν κατά απόλυτη τιμή, αλλά όχι απαραίτητα με το ίδιο πρόσημο. Για την μοντελοποίηση των προαναφερθέντων συστημάτων και την ανάλυση της συμπεριφοράς τους σχετικά με την διμερή συμφωνία, χρησιμοποιούνται αποτελέσματα από την θεωρία προσημασμένων γράφων [5], [15], [17], [18], [19], [20].

Προβλήματα διμερούς συμφωνίας σε προσημασμένους γράφους θεωρήθηκαν πρώτα στο [19] για πολυπρακτορικά συστήματα που αποτελούνται από απλούς ολοκληρωτές. Η έννοια της δομικής ισορροπίας των γράφων προτάθηκε στο [19] για προβλήματα διμερούς συμφωνίας. Ένας προσημασμένος γράφος  $\mathcal{G}$  είναι δομικά ισορροπημένος όταν επιδέχεται διαμέριση σε δύο μη κενά σύνολα κόμβων  $\mathcal{V}_p$  και  $\mathcal{V}_q$ , με την ιδιότητα ότι  $\mathcal{V}_p \cup \mathcal{V}_q = \mathcal{V}$  και  $\mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q = \emptyset$ , έτσι ώστε  $a_{ij} \geq 0$  όταν οι  $i$  και  $j$  είναι στο ίδιο σύνολο, και  $a_{ij} \leq 0$  διαφορετικά. Έτσι, στην περίπτωση ενός δομικά ισορροπημένου γράφου, υπάρχουν δύο ανταγωνιζόμενες ομάδες κόμβων ( $a_{ij} \leq 0$  αν  $i \in \mathcal{V}_p$  και  $j \in \mathcal{V}_q$ ), ενώ όλοι οι κόμβοι που είναι σε κοινή ομάδα συνεργάζονται ( $a_{ij} \geq 0$  αν  $i, j \in \mathcal{V}_p$  ή  $i, j \in \mathcal{V}_q$ ).

Η διμερής συμφωνία επίσης μελετήθηκε για πρώτης και δεύτερης τάξης ολοκληρωτές στις εργασίες [21], [22], [23], [24], για γραμμικά πολυπρακτορικά συστήματα στις [25], [26], και για μη γραμμικά πολυπρακτορικά συστήματα στις [27], [28]. Το πρόβλημα διμερούς παρακολούθησης για κατευθυνόμενους προσημασμένους γράφους επιλύεται στις [29], [30], [31], [32], [33], όπου χρησιμοποιούνται σχήματα με αρχηγό.

### 1.1.2.2 Χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία

Σε πρακτικές εφαρμογές στον πραγματικό κόσμο, κατά την διάρκεια αλληλεπιδράσεων μεταξύ των πρακτόρων, μπορεί να προκληθούν χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία λόγω τεχνολογικών και φυσικών περιορισμών. Αυτή η επίδραση έχει μελετηθεί από αρκετούς ερευνητές [12], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41], [42], [43]. Αρχικά, το πρόβλημα της συμφωνίας για απλούς ολοκληρωτές εξετάστηκε με κοινή σταθερή χρονική υστέρηση στην επικοινωνία στο [12] και με πολλαπλές χρονικά μεταβαλλόμενες χρονικές υστερήσεις στα [34] και [35]. Για δεύτερης τάξης συστήματα, μη ομοιόμορφες χρονικά μεταβαλλόμενες χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία έχουν μελετηθεί στο [36]. Μη κανονικές χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία έχουν θεωρηθεί στο [37] για το πρόβλημα της συμφωνίας σε Λανγκρανζιανά συστήματα, και για τον συγχρονισμό μη γραμμικών πρακτόρων με μεταβαλλόμενες συζευγμένες χρονικές υστερήσεις στο [38]. Ένα πρωτόκολλο για την συμφωνία πρακτόρων τύπου Brunovsky αναπτύχθηκε στο [39], θεωρώντας φραγμένη και σταθερή χρονική υστέρηση στην επικοινωνία. Πιο πρόσφατα, το πρόβλημα της προσεγγιστικής συμφωνίας για μη γραμμικούς πράκτορες, με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία και άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου, επιλύθηκε στην εργασία [40]. Μη γραμμικά πολυπρακτορικά συστήματα με χρονικά μεταβαλλόμενη, φραγμένη και χρονικά υστερημένη ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των πρακτόρων έχουν εξεταστεί στα [41], [42], ενώ χρονικές υστερήσεις μόνο στις καταστάσεις έχουν μελετηθεί στο [43] για συμφωνία με ανατροφοδότηση εξόδου.

### 1.1.2.3 Μη γραμμικά συστήματα

Ένα ακόμα πρόβλημα στην περιοχή έρευνας του κατανεμημένου ελέγχου είναι ο έλεγχος πρακτόρων με μη γραμμικότητες. Πρόκειται για σημαντικό ζήτημα αφού τα περισσότερα συστήματα στις εφαρμογές του κατανεμημένου ελέγχου είναι μη γραμμικά (μη επανδρωμένα ιπτάμενα οχήματα, κινούμενα ρομπότ). Για την αντιμετώπιση της περίπτωσης των άγνωστων μη γραμμικοτήτων, τεχνικές προσέγγισης που περιλαμβάνουν νευρωνικά δίκτυα ή ασαφή συστήματα έχουν χρησιμοποιηθεί στις εργασίες [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50]. Προσαρμοστικοί κατανεμημένοι αλγόριθμοι συμφωνίας έχουν προταθεί στο [51] για μη γραμμικούς πράκτορες σε κανονική μορφή και στο [52] για Λανγκρανζιανούς πράκτορες. Στο [53] αναπτύσσεται μια τεχνική παρατηρητή με την μέθοδο του ελέγχου δυναμικής επιφάνειας. Για πράκτορες καθαρής ανατροφοδότησης, μια μεθοδολογία βασισμένη σε φίλτρα [54] και ένα προσαρμοστικό ασαφές σχήμα [55] προτάθηκαν για το πρόβλημα ελέγχου περιορισμού.

Σε πρακτικές εφαρμογές, ένας σημαντικός στόχος του ελέγχου πολυπρακτορικών συστημάτων είναι να διασφαλίζεται επιθυμητή επίδοση στην μεταβατική κατάσταση. Στις εργασίες [56], [57] αναπτύχθηκε μια μέθοδος που λέγεται έλεγχος προκαθορισμένης επίδοσης, η οποία εγγυάται την προκαθορισμένη επίδοση στην μεταβατική και τελική απόκριση του συστήματος για άγνωστα μη γραμμικά συστήματα καθαρής ανατροφοδότησης. Από τότε έχει εφαρμοστεί σε πολυπρακτορικά συστήματα είτε ως αυτούσια τεχνική, ή μαζί με προσαρμοστικά σχήματα [58], [59], [60], [61]. Πιο συγκεκριμένα, μέθοδοι προκαθορισμένης συμφωνίας έχουν έκτοτε εφαρμοστεί σε διάφορα πολυπρακτορικά συστήματα σε σχήματα με αρχηγό και μη αρνητικούς γράφους [62], [58], [61], [63], [64], [59]. Στην εργασία [62] ένα σχήμα επικοινωνίας με αρχηγό χρησιμοποιήθηκε για να επιτευχθεί προκαθορισμένο φράγμα στο σφάλμα για μη γραμμικά πολυπρακτορικά συστήματα σε μορφή αυστηρής ανατροφοδότησης, χρησιμοποιώντας τεχνικές ελέγχου ασαφούς προσέγγισης και δυναμικής επιφάνειας. Ένας εύρωστος



νόμος ελέγχου προτάθηκε στο [58] ο οποίος επιτυγχάνει συνεργατικό συγχρονισμό με προκαθορισμένη επίδοση για μία κλάση μη γραμμικών πολυπρακτορικών συστημάτων. Πολυπρακτορικά συστήματα μορφής αυστηρής ανάδρασης θεωρήθηκαν επίσης στην εργασία [61] όπου επιθυμητή μεταβατική και τελική απόκριση επιτυγχάνονται με άγνωστες εισόδους νεκρής ζώνης. Στις εργασίες [63] και [64] προσαρμοστικά και νευρο-προσαρμοστικά σχήματα χρησιμοποιήθηκαν για να προσεγγίσουν τις αβεβαιότητες και να επιτύχουν την προκαθορισμένη επίδοση. Ένας προσαρμοστικός παρατηρητής αναπτύχθηκε στο [59], ο οποίος επιτυγχάνει συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση για πολυπρακτορικά συστήματα σε εναλλασσόμενα δίκτυα με άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου χρησιμοποιώντας συναρτήσεις Nussbaum.

Πιο πρόσφατα η μεθοδολογία προκαθορισμένης επίδοσης αναπτύχθηκε για το πρόβλημα διμερούς συμφωνίας σε προσημασμένους γράφους [65], [66], [67]. Στο [65], το πρόβλημα διμερούς συμφωνίας με προκαθορισμένη επίδοση για υψηλότερης τάξης μη γραμμικά πολυπρακτορικά συστήματα σε μη ισορροπημένους γράφους επιλύθηκε χρησιμοποιώντας νευρωνικά δίκτυα RBF και ένα μηχανισμό που διασφαλίζει ότι κάθε κόμβος-παιδί θα παρακολουθεί τον αρχηγό-πατέρα του. Τέλος, στα [66] και [67] διμερής παρακολούθηση περιορισμού και παρακολούθηση του κόμβου αρχηγού, αντίστοιχα, επιτυγχάνεται με υστέρηση στην είσοδο για μη γραμμικά πολυπρακτορικά συστήματα σε μορφή αυστηρής ανατροφοδότησης.

### 1.1.2.4 Κατανεμημένη βελτιστοποίηση βασισμένη στην συμφωνία

Τα τελευταία χρόνια, έχουν αναπτυχθεί συνεργατικές τεχνικές ελέγχου οι οποίες επιλύουν το καθιερωμένο πρόβλημα της συμφωνίας, ενώ ταυτόχρονα επιλύουν και ένα πρόβλημα κατανεμημένης βελτιστοποίησης. Αυτό είναι το λεγόμενο πρόβλημα της βέλτιστης συμφωνίας, όπου κάθε πράκτορας είναι εφοδιασμένος με μια τοπική συνάρτηση κόστους και η ομάδα έχει ως σκοπό να συγκλίνει προς το σημείο που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των επιμέρους τοπικών συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας περιορισμένες, τοπικές πληροφορίες. Διάφορες τεχνικές διακριτού και συνεχούς χρόνου έχουν αναπτυχθεί για το πρόβλημα της κατανεμημένης βελτιστοποίησης στα [68], [69], [70], [71], χωρίς όμως να λαμβάνονται υπόψη οι δυναμικές των πρακτόρων.

Σε πρακτικές εφαρμογές, η σχεδίαση νόμων ελέγχου που επιλύουν το πρόβλημα της κατανεμημένης βελτιστοποίησης εξαρτάται από την συμπεριφορά των πρακτόρων η οποία περιλαμβάνει υψηλής τάξης ή/και μη γραμμικές δυναμικές και αβεβαιότητες, όπως άγνωστες διαταραχές ή/και μη μοντελοποιημένες δυναμικές. Τα παραδείγματα κυμαίνονται από αναζήτηση πηγής μέχρι έλεγχο προσανατολισμού άκαμπτων σωμάτων και κατανεμημένη παραγωγή ισχύος σε δίκτυα ισχύος με ελάχιστο κόστος [72]. Πρόσφατες εργασίες έχουν διερευνήσει το πρόβλημα της βέλτιστης συμφωνίας για πράκτορες σε μορφή ολοκληρωτή [73], [74] καθώς και για γραμμικούς πράκτορες [75], [76], [77].

Συγκεκριμένες περιπτώσεις μη γραμμικών πρακτόρων έχουν μελετηθεί στις εργασίες [72], [78], [79], [80], [81], [82]. Στην [78] έχει μελετηθεί η βέλτιστη συμφωνία για μια κλάση μη γραμμικών πρακτόρων με διαταραχές βασισμένη στην μέθοδο εσωτερικής λειτουργίας (IM). Μια ενσωματωμένη τεχνική σχεδίασης αναπτύχθηκε αρχικά στο [75] και χρησιμοποιήθηκε μετέπειτα στα [72] και [81] για υψηλής τάξης μη γραμμικούς πράκτορες. Μια προσέγγιση μικρού κέρδους έχει μελετηθεί στο [79] χρησιμοποιώντας τεχνικές ευστάθειας εισόδου κατάστασης (ISS). Το πρόβλημα της βέλτιστης συμφωνίας για αβέβαια μη γραμμικά συστήματα ελάχιστης φάσης με διαταραχές αντιμετωπίζεται στο [80], όπου αναπτύσσεται μια προσαρμοστική τεχνική βασισμένη στην IM. Μία κλάση αβέβαιων μη γραμμικών συστημάτων πολλών εισόδων πολλών εξόδων

διερευνάται στο [82] όπου χρησιμοποιείται η μεθοδολογία IM και τεχνικές προσαρμοστικού ελέγχου και παρατηρητών υψηλού κέρδους. Οι εργασίες αυτές αναδεικνύουν τις δυσκολίες της σχεδίασης νόμων ελέγχου για την βέλτιστη συμφωνία όταν είναι παρούσες μη γραμμικότητες και αβεβαιότητες. Παρόλα αυτά, υπάρχουν ακόμα πιο γενικές κλάσεις μη γραμμικών πρακτόρων για τις οποίες μεθοδολογία ελέγχου βέλτιστης συμφωνίας μένει να αναπτυχθεί.

#### 1.1.2.5 Κατανεμημένος έλεγχος διάταξης για σμήνη μη επανδρωμένων ιπτάμενων οχημάτων

Ο συνεργατικός έλεγχος πολλών μη επανδρωμένων εναέριων οχημάτων (UAVs) έχει προσελκύσει αυξανόμενη ερευνητική προσοχή τις τελευταίες δύο δεκαετίες [83]. Αυτό είναι το αποτέλεσμα των προβλημάτων που εμφανίζονται από διάφορες πρακτικές εφαρμογές που κυμαίνονται από αποστολές παρακολούθησης και αναγνώρισης ως ατμοσφαιρικές μελέτες και αποστολές διάσωσης [84].

Η κύρια προσέγγιση που συνήθως υιοθετείται στον έλεγχο των μη επανδρωμένων οχημάτων είναι ο έλεγχος διάταξης με αρχηγό. Στην προσέγγιση με αρχηγό, ένα UAV αρχηγός ακολουθεί μια τροχιά αναφοράς και τα υπόλοιπα UAVs πρέπει να τον ακολουθήσουν ενώ διατηρούν μια προκαθορισμένη διάταξη.

Μελετώντας το πρόβλημα του ελέγχου διάταξης UAV, εμφανίζονται θέματα που αφορούν τους πόρους επικοινωνίας που είναι απαραίτητοι για την επίτευξη του στόχου της διάταξης. Για παράδειγμα, στο [84] κάθε UAV δέχεται πληροφορία από έναν εικονικό αρχηγό UAV και ελέγχει την απόστασή του από αυτόν ώστε να διασφαλίσει την τρισδιάστατη διάταξη για UAVs με τρεις βαθμούς ελευθερίας. Επίσης, στο [85], όλα τα UAVs δέχονται πληροφορία από έναν εικονικό αρχηγό για να επιτύχουν διάταξη σε πεπερασμένο χρόνο, χρησιμοποιώντας μια τεχνική κατανεμημένου ελέγχου ενεργοποίησης συμβάντος (event-triggered). Πληροφορία σχετικά με την θέση του αρχηγού διαμοιράζεται σε όλους τους ακόλουθους και στο [86] όπου χρησιμοποιείται επίσης ένα σχήμα ενεργοποίησης συμβάντος, στο [87] όπου υποθέτουν επίσης σφάλματα στους ενεργοποιητές και στο [88] όπου χρησιμοποιείται backstepping με φίλτρο εντολών χωρίς διαμοιρασμό πληροφορίας μεταξύ των υπόλοιπων UAVs. Δομές επικοινωνίας που παρέχουν πληροφορίες σε όλα τα UAVs ταυτόχρονα όπως, Παγκόσμιο Σύστημα Στιγματοθέτησης (GPS), με μεγάλο κόστος επικοινωνίας, χρησιμοποιούνται για να μεταδώσουν την τροχιά αναφοράς [89],[90]. Ένας τρόπος για να μειωθούν οι επικοινωνιακές απαιτήσεις, είναι να θεωρήσουμε μόνο τοπικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των UAVs και έναν περιορισμένο αριθμό UAVs που επικοινωνεί με τον αρχηγό UAV. Μεθοδολογίες σχετικά με την χρήση τοπικών αλληλεπιδράσεων για την επίτευξη στόχων της ομάδας μπορούν να βρεθούν στα [7],[8], [11], [12], [91], [92] και στις αναφορές τους.

Υποθέτοντας μη κατευθυνόμενο και συνεκτικό γράφο ανταλλαγής πληροφορίας, μια μέθοδος δυναμικού πεδίου χρησιμοποιείται στο [93] για έλεγχο διάταξης σε πεπερασμένο χρόνο για UAVs διπλούς ολοκληρωτές με αποφυγή συγκρούσεων. Διάταξη για UAVs τριών βαθμών ελευθερίας και μη κατευθυνόμενη συνεκτική τοπολογία επικοινωνίας επιτυγχάνεται στο [94] χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση με ανατροφοδότηση. Ένα μοντέλο έξι βαθμών ελευθερίας για τα UAVs χρησιμοποιείται στο [95] όπου πληροφορίες για την θέση και την ταχύτητα διαμοιράζονται μεταξύ των UAVs για να πετύχουν έλεγχο διάταξης.

Ένα ακόμα βασικό στοιχείο σε πρακτικές εφαρμογές των αλγορίθμων ελέγχου διάταξης UAVs είναι να διασφαλίσουν προκαθορισμένη επίδοση στην μεταβατική α-

πόκριση και στην τελική κατάσταση. Σε ρεαλιστικά σενάρια είναι επιθυμητό να προκαθορίσουμε την ταχύτητα σύγκλισης προς την διάταξη και την μέγιστη απόσταση των θέσεων των UAVs από την ομάδα. Στο [96] προτείνεται ένας καταναμημένος έλεγχος διάταξης προκαθορισμένης επίδοσης με νευρωνικά δίκτυα και παρατηρητή λειτουργίας ολίσθησης της κατάστασης του αρχηγού. Επιπλέον, στο [97] αναπτύσσεται ένας αλγόριθμος προκαθορισμένης επίδοσης για τον συγχρονισμό στάσης σε ελικόπτερα τριών βαθμών ελευθερίας με σφάλματα στους ενεργοποιητές.

## 1.2 Πρωτότυπα στοιχεία και συνεισφορά της παρούσας εργασίας

Η κεντρική ιδέα και η βασική πρωτοτυπία της παρούσας διατριβής είναι ο σχεδιασμός κατάλληλων μετασχηματισμών (μεταβλητών) οι οποίοι μετατρέπουν το πρόβλημα της συμφωνίας για μη γραμμικά πολυπρακτορικά συστήματα σε πρόβλημα ρύθμισης των νέων μεταβλητών. Με την χρήση των μετασχηματισμών γίνεται δυνατή η χρήση τεχνικών κλασικού ελέγχου για την ρύθμιση των νέων μεταβλητών και την επίτευξη συμφωνίας. Οι μετασχηματισμοί που παρουσιάζουμε έχουν μεγάλη εφαρμοσιμότητα καθώς επιτρέπουν την επίλυση προβλημάτων όπως η διμερής συμφωνία και η καταναμημένη βελτιστοποίηση βασισμένη στη συμφωνία, για διάφορες κλάσεις γραμμικών και μη γραμμικών πολυπρακτορικών συστημάτων. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε πιο συγκεκριμένα την συνεισφορά του κάθε κεφαλαίου καθώς και συγκρίσεις με σχετικές εργασίες.

### 1.2.1 Συνεισφορά Κεφαλαίου 3

Παρότι οι εργασίες [65], [66], [67] λύνουν το πρόβλημα της διμερούς συμφωνίας με αρχηγό, διασφαλίζοντας επιθυμητές επιδόσεις, δεν μελετούν και είναι δύσκολο να επεκταθούν στην αντίστοιχη περίπτωση χωρίς αρχηγό. Οι αρχιτεκτονικές με αρχηγό επιβάλλουν πιο αυστηρές απαιτήσεις στις τοπολογίες του δικτύου επικοινωνίας από αυτές χωρίς αρχηγό, καθώς απαιτούν ροή πληροφορίας από τον αρχηγό σε όλους τους άλλους πράκτορες, δηλαδή ο αρχηγός είναι η ρίζα σε κάποιο δέντρο που εκτείνει τον γράφο. Αυτός ο περιορισμός δεν υφίσταται σε αλγόριθμους συμφωνίας χωρίς αρχηγό, καθιστώντας τους εφαρμόσιμους σε μεγαλύτερη κλάση δικτύων επικοινωνίας. Επιπλέον, η εξάρτηση των αλγορίθμων με αρχηγό από ένα μέλος της ομάδας τους κάνει λιγότερο εύρωστους από τους αντίστοιχους χωρίς αρχηγό σε εφαρμογές όπως ο έλεγχος διάταξης πολυπρακτορικών συστημάτων [91] και αποστολές παρακολούθησης ή αναζήτησης χρησιμοποιώντας μη επανδρωμένα σμήνη [98] σε δυσμενή περιβάλλοντα. Επιπρόσθετα, υπάρχουν συγκεκριμένες εφαρμογές όπως η ένωση πληροφοριών σε δίκτυα αισθητήρων [7], για τα οποία το σημείο της συμφωνίας ή η τροχιά μπορεί να μην είναι γνωστά από πριν και επομένως η συμφωνία χωρίς αρχηγό είναι η μόνη επιλογή.

Τέλος, από μαθηματική σκοπιά, η διμερής συμφωνία χωρίς αρχηγό με προκαθορισμένη επίδοση για μη γραμμικούς πράκτορες είναι πιο απαιτητική στην απόδειξη της από την αντίστοιχη με αρχηγό. Αυτός είναι και ο βασικός λόγος για την απουσία τέτοιων εργασιών στην βιβλιογραφία. Στην περίπτωση χωρίς αρχηγό, η επαυξημένη Λαπλασιανή μήτρα του γράφου δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, αλλά κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει μόνο την κανονική Λαπλασιανή μήτρα. Είναι ένα καλά γνωστό αποτέλεσμα (βλέπε Πρόταση 1 και Παρατήρηση 1 στο [99]) ότι μια εξίσωση τύπου

Lyapunov ισχύει για τη συμφωνία χωρίς αρχηγό, αν ο γράφος έχει έναν αμείωτο πίνακα γειτνίασης. Αυτό ισχύει αν ο γράφος είναι ισχυρά συνεκτικός, αλλά δεν ισχύει στην γενική περίπτωση που εξετάζουμε σε αυτή την εργασία, δηλαδή της ύπαρξη δέντρου που εκτείνει τον γράφο.

Με κίνητρο την παραπάνω συζήτηση, στο Κεφάλαιο 3 αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της διμερούς συμφωνίας χωρίς αρχηγό με προκαθορισμένη επίδοση. Θεωρούμε υψηλής τάξης μη γραμμικούς πράκτορες με άγνωστες δυναμικές που διαμοιράζονται τις εξόδους τους μέσω ενός δικτύου επικοινωνίας που περιγράφεται από έναν κατευθυνόμενο προσημασμένο γράφο. Ένας νέος μετασχηματισμός μεταβλητών παρουσιάζεται μέσω του οποίου ξεπερνιέται το πρόβλημα της διμερούς συμφωνίας χωρίς αρχηγό με προκαθορισμένη επίδοση, μέσω την αναγωγής του σε ένα απλούστερο πρόβλημα ρύθμισης των νέων μεταβλητών με προκαθορισμένη επίδοση. Για τον σκοπό αυτό, αποδεικνύουμε το Θεώρημα 3.1. Το πρόβλημα της διμερούς συμφωνίας χωρίς αρχηγό με προκαθορισμένη επίδοση επιλύεται στην συνέχεια χρησιμοποιώντας ένα σχήμα ελέγχου χαμηλής πολυπλοκότητας που εξασφαλίζει προκαθορισμένη επίδοση μεταβατικής και τελικής κατάστασης για το σφάλμα διμερούς συμφωνίας. Το προτεινόμενο σχήμα αποφεύγει το πρόβλημα της ‘έκρηξης της πολυπλοκότητας’, αφού δεν χρειάζεται να συμπεριλάβει τις παραγώγους των προηγούμενων εικονικών νόμων ελέγχου ή τις μερικές παραγώγους των προηγούμενων εικονικών νόμων ελέγχου ως προς τις μεταβλητές κατάστασης στον υπολογισμό των επόμενων εικονικών νόμων ελέγχου. Με αυτόν τον τρόπο μια απλή σχεδίαση είναι εφικτή ακόμα και για υψηλής τάξης συστήματα.

Οι συνεισφορές του Κεφαλαίου 3 είναι οι ακόλουθες:

- Προτείνουμε έναν νέο μετασχηματισμό μεταβλητών, που ονομάζεται μετασχηματισμός PI του σφάλματος διμερούς συμφωνίας, ο οποίος καταφέρνει να ξεπεράσει τις τεχνικές δυσκολίες της περίπτωσης συμφωνίας χωρίς αρχηγό. Ο μετασχηματισμός επιτρέπει την χρήση τεχνικών κλασικού ελέγχου για συστήματα καθαρής ανατροφοδότησης [56] για την επίτευξη διμερούς συμφωνίας με προκαθορισμένη επίδοση.
- Σε αντίθεση με τις εργασίες [63], [64], [65] δεν χρειάζονται κλασικά ή προσεγγιστικά προσαρμοστικά σχήματα με νευρωνικά δίκτυα ή ασαφή συστήματα. Επίσης, ο προτεινόμενος καταναμημένος αλγόριθμος διμερούς συμφωνίας αποφεύγει το πρόβλημα της ‘έκρηξης της πολυπλοκότητας’ [56] και είναι λιγότερο σύνθετος σε σχέση με τυπικές τεχνικές backstepping.
- Η παρούσα εργασία είναι η πρώτη που επιλύει το πρόβλημα της διμερούς συμφωνίας χωρίς αρχηγό με προκαθορισμένη επίδοση. Οι προσεγγίσεις με αρχηγό [65], [66], [67] δεν μπορούν να εφαρμοστούν κατευθείαν στην περίπτωση χωρίς αρχηγό λόγω σοβαρών τεχνικών δυσκολιών.

### 1.2.2 Συνεισφορά Κεφαλαίου 4

Στο Κεφάλαιο 4 αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της συμφωνίας χωρίς αρχηγό για πράκτορες με άγνωστες δυναμικές, οι οποίοι διαμοιράζονται τις εξόδους τους σε ένα δίκτυο με χρονικές υστερήσεις, και η τοπολογία του δικτύου περιγράφεται από γράφο με δέντρο που τον εκτείνει. Μελετώνται γενικού τύπου χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις που περιλαμβάνουν χρονικά μεταβαλλόμενες και καταναμημένες χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις, μεταξύ άλλων. Για την επίλυση του προβλήματος ορίζουμε έναν

νέο μετασχηματισμό μεταβλητών με τα σήματα εξόδων των πρακτόρων, που ονομάζουμε μετασχηματισμό PdI του σφάλματος συμφωνίας ο οποίος χρησιμοποιεί τις χρονικά υστερημένες εξόδους των γειτόνων του πράκτορα. Αποδεικνύουμε ότι αν όλες οι μεταβλητές PdI ρυθμιστούν σε μια περιοχή του μηδενός, τότε επιτυγχάνεται προσεγγιστική συμφωνία των εξόδων παρά τις χρονικές υστερήσεις. Αυτό είναι ένα γενικό αποτέλεσμα το οποίο δεν λαμβάνει υπόψιν τις δυναμικές των πρακτόρων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διάφορες κλάσεις συστημάτων. Αφού χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό PdI, οποιαδήποτε τεχνική κλασικού ελέγχου για συστήματα καθαρής ανατροφοδότησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ρύθμιση των νέων μεταβλητών και να οδηγήσει το πολυπρακτορικό σύστημα σε συμφωνία. Αναδεικνύουμε αυτό το γεγονός ολοκληρώνοντας τη σχεδίαση μας με ένα κλασικό σχήμα ελέγχου χαμηλής πολυπλοκότητας [56], κατάλληλα τροποποιημένο για να συμπεριλάβει και τις χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις και την επικοινωνία. Με αυτόν τον τρόπο, ο αλγόριθμος κατανεμημένης συμφωνίας που προτείνουμε σε αυτό το κεφάλαιο αποφεύγει το πρόβλημα της ‘έκρηξης της πολυπλοκότητας’ και είναι ευκολότερος στην υλοποίηση σε σχέση με κλασικές τεχνικές backstepping.

Διαφορετικά από τις υπάρχουσες σχετικές εργασίες [12], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41], [42], όπου υποθέτουν μόνο χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία, στην παρούσα μελέτη συμπεριλαμβάνονται χρονικές υστερήσεις και στην επικοινωνία και στις καταστάσεις για υψηλής τάξης δυναμικές. Επιπλέον, σε σύγκριση με την εργασία [40] η οποία υποθέτει μη κατευθυνόμενους γράφους, σε αυτήν την εργασία οι θεωρούμενοι γράφοι επικοινωνίας είναι κατευθυνόμενοι με δέντρο που τους εκτείνει. Ακόμα, οι θεωρούμενες χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία σε αυτή τη μελέτη είναι πιο γενικές από αυτές που θεωρούνται στα [43], [44], [47], [49]. Συστήματα με τέτοιες χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις έχουν δυναμική που μπορεί να περιγράφεται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, διαφορο-διαφορικές εξισώσεις ή ακόμα και ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις. Τελευταίο και μη εξαιρετικό, δεν χρειάζονται προσεγγιστικά προσαρμοστικά σχήματα όπως στα [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55].

Οι κύριες συνεισφορές του Κεφαλαίου 4 δίνονται ως εξής:

- Το πρόβλημα της συμφωνίας χωρίς αρχηγό για πράκτορες σε μορφή άγνωστης καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις και στην επικοινωνία επιλύεται για πρώτη φορά.
- Ο μετασχηματισμός μεταβλητών PdI παρουσιάζεται, οποίος αναπλάθει το πρόβλημα της κατανεμημένης συμφωνίας χωρίς αρχηγό με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία σε ένα πρόβλημα ρύθμισης των μεταβλητών PdI. Ο μετασχηματισμός PdI επιτρέπει την χρήση τεχνικών κλασικού ελέγχου για την επίλυση του προβλήματος της συμφωνίας. Το Θεώρημα 4.1 αναδεικνύει την χρησιμότητα του μετασχηματισμού σε εφαρμογές συμφωνίας.
- Η τεχνική ελέγχου προκαθορισμένης επίδοσης [56] τροποποιείται για την συμφωνία χωρίς αρχηγό και επεκτείνεται για να συμπεριλάβει τα πολυπρακτορικά συστήματα καθαρής ανατροφοδότησης με χρονική υστέρηση.

### 1.2.3 Συνεισφορά Κεφαλαίου 5

Στις προαναφερθείσες εργασίες για μη γραμμικά πολυπρακτορικά συστήματα, είναι εμφανές ότι η σχεδίαση ενός ελέγχου για βέλτιστη συμφωνία που ταυτόχρονα έχει το

ελάχιστο δυνατό φόρτο επικοινωνίας αποτελεί πρόκληση. Συγκεκριμένα, στο [79] δημιουργούνται βοηθητικά σήματα από τους ονομαζόμενους 'βέλτιστους συντονιστές' και διαμοιράζονται στο δίκτυο. Στις εργασίες [80] και [82] απαιτείται ο διαμοιρασμός των σχετικών καταστάσεων και κάποιων βοηθητικών μεταβλητών για την σύγκλιση στο σημείο βέλτιστης συμφωνίας. Στα [72] και [81], όπου χρησιμοποιείται η ενσωματωμένη τεχνική, κάθε πράκτορας υλοποιεί μια γεννήτρια βέλτιστου σήματος, η οποία διαμοιράζεται την έξοδό της με τους γείτονες του, επιπρόσθετα με την σχετική κατάσταση. Ο διαμοιρασμός περισσότερης πληροφορίας από την σχετική τιμή των εξόδων ή της κατάστασης δεν είναι πραγματοποιήσιμος ή έχει μεγάλο κόστος σε πολλές εφαρμογές όπου μπορεί να απαιτείται ελάχιστη επικοινωνιακή προσπάθεια. Ως παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε μια εφαρμογή με μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα όπου έχουμε διαθέσιμους μόνο αισθητήρες μέτρησης σχετικής απόστασης.

Παρακινούμενοι από τα παραπάνω, στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε μια καινούρια μεθοδολογία για την επίτευξη βέλτιστης συμφωνίας για μία κλάση μη γραμμικών δυναμικών των πρακτόρων με αβεβαιότητες και ελάχιστο διαμοιρασμό πληροφορίας. Αυτό επιτυγχάνεται εισάγοντας έναν μετασχηματισμό ο οποίος μετατρέπει το πρόβλημα της κατανεμημένης βέλτιστης συμφωνίας στο πρόβλημα της ρύθμισης των νέων μεταβλητών στον μηδέν. Οι νέες μεταβλητές, που ονομάζονται αναλογικές και ολοκληρωτικές μεταβλητές της βέλτιστης συμφωνίας (OCPI), απαιτούν μόνο τις σχετικές αποστάσεις των εξόδων των συστημάτων να είναι διαθέσιμες. Αυτή η μεθοδολογία επιτρέπει την χρήση τεχνικών κλασικού μη γραμμικού ελέγχου για την επίλυση του προβλήματος της βέλτιστης συμφωνίας. Για να αναδείξουμε την εφαρμοσιμότητα της μεθοδολογίας, θεωρούμε πράκτορες σε μορφή άγνωστης καθαρής ανατροφοδότησης οι οποίοι υπόκεινται σε μια γενική κλάση χρονικών υστερήσεων στις καταστάσεις και σε διαταραχές, παρακινούμενοι από πραγματικές εφαρμογές μη γραμμικών συστημάτων με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις οι οποίες περιλαμβάνουν κινητούς χειριστές, ανεστραμμένα εκκρεμή και χημικούς αντιδραστήρες [47], [49], [43], [100]. Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές OCPI και μια τεχνική κλασικού ελέγχου [56], σχεδιάζουμε έναν κατανεμημένο νόμο ελέγχου που διασφαλίζει την σύγκλιση στην τιμή βέλτιστης συμφωνίας με προκαθορισμένη ακρίβεια, ενώ όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα.

Οι συνεισφορές του Κεφαλαίου 5 είναι οι εξής:

- Εισάγονται οι μεταβλητές OCPI, οι οποίες επιτρέπουν την αναδιατύπωση του προβλήματος της βέλτιστης συμφωνίας σε πρόβλημα ρύθμισης. Οι μεταβλητές καθιστούν ικανή την χρήση τεχνικών κλασικού ελέγχου για την επίλυση του προβλήματος της βέλτιστης συμφωνίας για συγκεκριμένες κλάσεις πρακτόρων.
- Κάθε πράκτορας χρειάζεται τη γνώση μόνο των σχετικών αποστάσεων μεταξύ της εξόδου του και των εξόδων των γειτόνων του για την υλοποίηση του ελεγκτή του. Το γεγονός αυτό είναι πολύ σημαντικό σε συγκεκριμένες εφαρμογές (π.χ. σμήνη κινούμενων ρομπότ) στις οποίες οι σχετικές αποστάσεις μπορούν να μετρηθούν με την χρήση αισθητήρων.
- Το πρόβλημα της προσεγγιστικής συμφωνίας για πράκτορες σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης με γενικής μορφής χρονικές υστερήσεις στην δυναμική και άγνωστες μη γραμμικότητες και διαταραχές επιλύεται για πρώτη φορά.

Σε αντίθεση με άλλες εργασίες που επίσης θεωρούν μη γραμμικούς πράκτορες [72], [78], [79], [80], [81], [82], η προσέγγιση που παρουσιάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο μπορεί

να εφαρμοστεί σε διαφορετική κλάση δυναμικών όπως παρουσιάζουμε στο Κεφάλαιο 5.3 για την περίπτωση των πρακτόρων άγνωστης καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις και άγνωστες διαταραχές. Επιπλέον, οι επικοινωνιακές απαιτήσεις είναι ελάχιστες. Χρειάζεται δηλαδή να είναι διαθέσιμες μόνο οι σχετικές αποστάσεις των εξόδων, ενώ στα [79], [80], [81], [82] απαιτείται επιπρόσθετο επικοινωνιακό φορτίο.

### 1.2.4 Συνεισφορά Κεφαλαίου 6

Παρακινούμενοι από την συζήτηση της Παραγράφου 1.1.2.5, στο Κεφάλαιο 6 προτείνουμε έναν κατανεμημένο έλεγχο διάταξης προκαθορισμένης επίδοσης για μια ομάδα UAVs. Θεωρούμε μοντέλα UAVs τριών βαθμών ελευθερίας με άγνωστους συντελεστές αντίστασης και μάζες. Η ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των UAVs περιγράφεται από κατευθυνόμενο γράφο που περιέχει δέντρο που τον εκτείνει με τον αρχηγό ως ρίζα. Ένας έλεγχος χαμηλής πολυπλοκότητας τύπου backstepping σχεδιάζεται στο πνεύμα του [56].

Οι βασικές συνεισφορές του Κεφαλαίου 6 σε σχέση με την υπάρχουσα βιβλιογραφία είναι οι ακόλουθες:

- Σε αντίθεση με τα [85], [87], [88], [93], [94], υποθέτουμε ότι οι συντελεστές αντίστασης και οι μάζες είναι άγνωστες. Αυτό δυσκολεύει σημαντικά το πρόβλημα καθώς δεν υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε γραμμικά ή γραμμικοποιησιμα μέσω ανατροφοδότησης μοντέλα UAVs όπως συμβαίνει στα [85], [87], [88], [93], [94].
- Δεν χρειάζονται προσαρμοστικά προσεγγιστικά σχήματα με ασαφή συστήματα ή νευρωνικά δίκτυα όπως αυτά που χρησιμοποιούνται στα [101], [96]. Επίσης, ο προτεινόμενος κατανεμημένος αλγόριθμος αποφεύγει το πρόβλημα της ‘έκρηξης της πολυπλοκότητας’ και είναι λιγότερο πολύπλοκος σε σχέση με τυπικές τεχνικές backstepping.
- Σε αντίθεση με τα [84], [85], [86], [87], [88] όπου η πληροφορία του αρχηγού διαμοιράζεται σε όλα τα UAVs, στην παρούσα εργασία η πληροφορία του αρχηγού χρειάζεται να διαμοιραστεί μόνο σε ένα υποσύνολο των υπόλοιπων UAVs.
- Στις υπάρχουσες κατανεμημένες προσεγγίσεις, ο γράφος επικοινωνίας είναι είτε μη κατευθυνόμενος [93], [94], [97], [102] ή κατευθυνόμενος όπου απαιτείται διαμοίραση πληροφορίας και για την ταχύτητα και την θέση των γειτόνων [95], [58]. Στην παρούσα εργασία, θεωρούμε κατευθυνόμενο γράφο επικοινωνίας και μόνο η σχετική θέση μεταξύ των γειτόνων χρειάζεται να είναι διαθέσιμη στο κάθε UAV.

### 1.2.5 Δημοσιεύσεις

Τα αποτελέσματα των Κεφαλαίων 3-5 του παρόντος τόμου έχουν δημοσιευτεί σε έγκριτα επιστημονικά περιοδικά με κριτές και τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 6 έχουν παρουσιαστεί σε διεθνές συνέδριο. Συγκεκριμένα:

- Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 είναι δημοσιευμένα στο άρθρο [103].
- Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 4 είναι δημοσιευμένα στο άρθρο [104].

- Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5 έχουν γίνει αποδεκτά για δημοσίευση (early access) στο περιοδικό IEEE Transactions on Automatic Control [105].
- Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 6 είναι δημοσιευμένα στο [106].

### 1.3 Οργάνωση του τόμου

Ο τόμος δομείται ως εξής. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται βασικά θεωρητικά αποτελέσματα από την θεωρία γράφων, ανάλυση πινάκων και θεωρία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων τα οποία χρησιμοποιούνται στο υπόλοιπο κείμενο. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε μια νέα μεθοδολογία για την επίλυση του προβλήματος της διμερούς συμφωνίας με προκαθορισμένη επίδοση. Αφού ορίσουμε το πρόβλημα, προχωράμε στην εισαγωγή των νέων μεταβλητών που μετατρέπουν το πρόβλημα της διμερούς συμφωνίας σε πρόβλημα ρύθμισης. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε καταναμημένο νόμο ελέγχου για την επίτευξη της ρύθμισης των νέων μεταβλητών για πράκτορες σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης και παρουσιάζουμε προσομοιώσεις σε πολυπρακτορικά συστήματα ρομποτικών χειριστών που επιβεβαιώνουν την θεωρητική ανάλυση. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε μια νέα μεθοδολογία για την επίλυση του προβλήματος της συμφωνίας με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία. Αφού ορίσουμε το πρόβλημα, προχωράμε στην εισαγωγή των νέων μεταβλητών που μετατρέπουν το πρόβλημα της συμφωνίας με χρονικές υστερήσεις σε πρόβλημα ρύθμισης. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε καταναμημένο νόμο ελέγχου για την επίτευξη της ρύθμισης των νέων μεταβλητών για πράκτορες οι οποίοι είναι συστήματα καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις και παρουσιάζουμε προσομοιώσεις σε σμήνος UAVs που επιβεβαιώνουν την θεωρητική ανάλυση. Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε μια νέα μεθοδολογία για την επίλυση του προβλήματος της βέλτιστης συμφωνίας. Αφού ορίσουμε το πρόβλημα, προχωράμε στην εισαγωγή των νέων μεταβλητών που μετατρέπουν το πρόβλημα της βέλτιστης συμφωνίας σε πρόβλημα ρύθμισης. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε καταναμημένο νόμο ελέγχου για την επίτευξη της ρύθμισης των νέων μεταβλητών για πράκτορες συστήματα καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις. Παρατίθενται προσομοιώσεις σε συστήματα χημικών αντιδραστών που επιβεβαιώνουν την θεωρητική ανάλυση. Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε μια νέα μεθοδολογία για την επίλυση του προβλήματος της διάταξης σε σμήνος UAVs. Αφού ορίσουμε το πρόβλημα, προχωράμε στον σχεδιασμό καταναμημένου νόμου ελέγχου για την επίτευξη της διάταξης των UAVs. Παρουσιάζουμε προσομοιώσεις που επιβεβαιώνουν την θεωρητική ανάλυση.

□



# Κεφάλαιο 2

## Θεωρητικό Υπόβαθρο

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρατεθούν αποτελέσματα της θεωρίας γράφων και των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων τα οποία θα φανούν χρήσιμα για την κατανόηση και την ανάλυση των επόμενων κεφαλαίων.

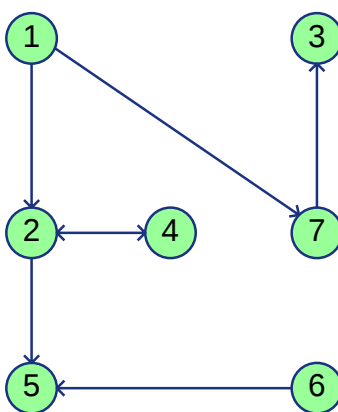
### 2.1 Θεωρία γράφων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε βασικές έννοιες και λήμματα από την θεωρία γράφων τα οποία θα φανούν χρήσιμα στο υπόλοιπο κείμενο. Τα περισσότερα μπορούν να βρεθούν στα [3, 1, 2, 5, 15, 17, 19, 107]. Για λόγους συνοχής θα αναφέρουμε και κάποια στοιχεία που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 1.

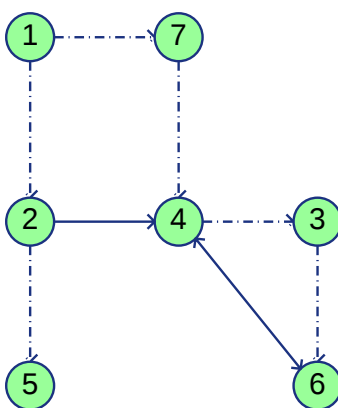
#### 2.1.1 Κατευθυνόμενοι και μη κατευθυνόμενοι γράφοι

Ένας γράφος  $\mathcal{G}$  είναι μια τριάδα  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ . Το  $\mathcal{V} := \{1, \dots, N\}$  είναι το σύνολο των κόμβων. Το  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  είναι το σύνολο των ακμών. Αν  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , τότε υπάρχει ακμή από τον κόμβο  $i$  προς τον κόμβο  $j$ . Αυτό σημαίνει πως ο κόμβος  $j$  δέχεται πληροφορία από τον κόμβο  $i$ . Ο πίνακας  $\mathcal{A} := [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  είναι ο πίνακας γειτνίασης του  $\mathcal{G}$ , με  $a_{ij} > 0 \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E}$  και  $a_{ij} = 0$ , διαφορετικά. Το σύνολο των γειτόνων του κόμβου  $i$  στον γράφο περιλαμβάνει τους κόμβους που στέλνουν πληροφορίες στον  $i$  και ορίζεται ως  $N_i := \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}\}$ . Σε όλο τον τόμο θεωρούμε ότι  $a_{ii} = 0$  για κάθε  $i \in \mathcal{V}$ . Ο βαθμός του κόμβου  $i$  ορίζεται ως  $d_i := \sum_{j=1}^N a_{ij}$  και ο πίνακας βαθμού ως  $\mathcal{D} := \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ . Ο πίνακας  $\mathcal{L} := \mathcal{D} - \mathcal{A}$  ονομάζεται Λαπλασιανή μήτρα του γράφου  $\mathcal{G}$ . Ένα μονοπάτι στον γράφο  $\mathcal{G}$  είναι μία σειρά διαδοχικών του ακμών, δηλαδή  $((i, k), (k, s), \dots, (w, j))$ , όπου  $(i, k), (k, s), \dots, (w, j) \in \mathcal{E}$ . Λέμε ότι ο γράφος  $\mathcal{G}$  έχει δέντρο που τον εκτείνει αν υπάρχει κόμβος, που ονομάζεται ρίζα, από τον οποίο υπάρχει μονοπάτι προς όλους τους άλλους κόμβους στον γράφο. Παραδείγματα κατευθυνόμενων γράφων παρουσιάζονται στα Σχήματα 2.1, 2.2, 2.3.

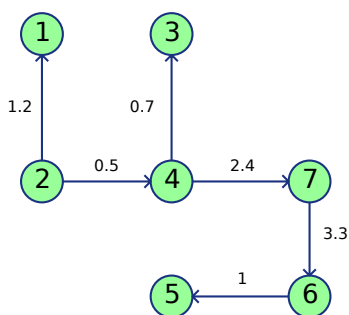
Ένας γράφος λέγεται μη κατευθυνόμενος όταν ο γράφος γειτνιάσής του είναι συμμετρικός, δηλαδή όταν  $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \mathcal{V}$ . Σε αυτή την περίπτωση, όταν ο κόμβος  $j$  στέλνει πληροφορία στον κόμβο  $i$ , τότε ισχύει και το αντίστροφο και το βάρος της επιρροής είναι το ίδιο. Λέμε ότι ο ένας μη κατευθυνόμενος γράφος είναι συνεκτικός όταν υπάρχει μονοπάτι από κάθε κόμβο προς κάθε άλλο κόμβο. Για έναν μη κατευθυνόμενο γράφο, το να έχει δέντρο που τον εκτείνει είναι ισοδύναμο με το να είναι συνεκτικός. Ένα παράδειγμα μη κατευθυνόμενου συνεκτικού γράφου παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.4.



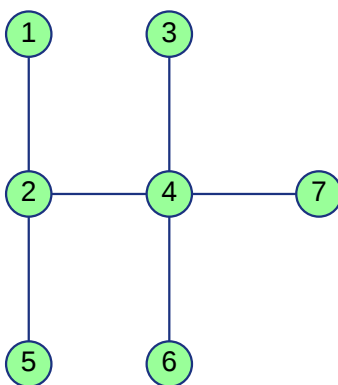
Σχήμα 2.1: Παράδειγμα κατευθυνόμενου γράφου



Σχήμα 2.2: Παράδειγμα κατευθυνόμενου γράφου με δέντρο που τον εκτείνει (γραμμή με παύλα-τελεία)



Σχήμα 2.3: Παράδειγμα κατευθυνόμενου γράφου με βάρη



Σχήμα 2.4: Παράδειγμα μη κατευθυνόμενου συνεκτικού γράφου

Και στην περίπτωση κατευθυνόμενου, αλλά και στην περίπτωση μη κατευθυνόμενου γράφου, επειδή η Λαπλασιανή μήτρα  $\mathcal{L}$  έχει ανθροίσματα γραμμών μηδέν, το 0 είναι ιδιοτιμή της  $\mathcal{L}$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{1}_n = [1 \cdots 1]^T \in \mathbb{R}^N$ .

**Λήμμα 2.1.** [4] Έστω  $\mathcal{L}$  η μη συμμετρική Λαπλασιανή μήτρα (αντίστοιχα, συμμετρική Λαπλασιανή μήτρα) που σχετίζεται με τον κατευθυνόμενο γράφο  $\mathcal{G}$  (αντίστοιχα, τον μη κατευθυνόμενο γράφο  $\mathcal{G}$ ) τάξης  $N$ . Τότε για τον κατευθυνόμενο γράφο  $\mathcal{G}$  (αντίστοιχα, τον μη κατευθυνόμενο γράφο  $\mathcal{G}$ ), η  $\mathcal{L}$  έχει τουλάχιστον μία μηδενική ιδιοτιμή και όλες οι μη μηδενικές της ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος (αντίστοιχα, είναι θετικές) αν και μόνο αν ο  $\mathcal{G}$  έχει κατευθυνόμενο δέντρο που τον εκτείνει (αντίστοιχα, είναι συνεκτικός). Επιπλέον,  $\mathcal{L}\mathbf{1}_N = 0$  και υπάρχει μη αρνητικό διάνυσμα  $p \in \mathbb{R}^N$  το οποίο ικανοποιεί την  $p^T \mathcal{L} = 0$  και  $p^T \mathbf{1}_N = 1$ . (Αν ο  $\mathcal{G}$  έχει δέντρο που τον εκτείνει το  $p$  είναι το μοναδικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μηδενική ιδιοτιμή.)

Στην περίπτωση που ο  $\mathcal{G}$  έχει δέντρο που τον εκτείνει, μπορούμε να κατατάξουμε τις ιδιοτιμές σε φθίνουσα σειρά ως προς το πραγματικό τους μέρος,  $\Re(\lambda_1(\mathcal{L})) \geq \Re(\lambda_2(\mathcal{L})) \geq \dots \geq \Re(\lambda_{N-1}(\mathcal{L})) > \Re(\lambda_N(\mathcal{L})) = 0$ , τότε η Λαπλασιανή μήτρα επιδέχεται την ακόλουθη διάσπαση Jordan:

$$\mathcal{L} = [U \ \mathbf{1}_N] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T \\ \phi^T \end{bmatrix} = U\Sigma V^T, \quad (2.1)$$

όπου  $U \in \mathbb{C}^{N \times (N-1)}$ , ο  $\Sigma \in \mathbb{C}^{(N-1) \times (N-1)}$  είναι μπλοκ διαγώνιος πίνακας και τα  $\mathbf{1}, \phi$  είναι τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην απλή μηδενική ιδιοτιμή, αντίστοιχα. Ο πίνακας  $V$  και το διάνυσμα  $\phi$  είναι τέτοια ώστε το  $[V \ \phi]^T$  να είναι ο αντίστροφος πίνακας του  $[U \ \mathbf{1}_N]$ , δηλαδή  $\begin{bmatrix} V^T \\ \phi^T \end{bmatrix} [U \ \mathbf{1}_N] = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{N-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , από την οποία προκύπτει ότι  $\phi^T U = 0$ . Επίσης, για τον εκθετικό πίνακα  $e^{\mathcal{L}t}$ , έχουμε ότι:

$$e^{\mathcal{L}t} = [U \ \mathbf{1}_N] \begin{bmatrix} e^{\Sigma t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T \\ \phi^T \end{bmatrix} = Ue^{\Sigma t}V^T + \mathbf{1}_N\phi^T. \quad (2.2)$$

Το επόμενο αποτέλεσμα θα φανεί χρήσιμο στο κείμενο.

**Λήμμα 2.2.** [2] Η Λαπλασιανή μήτρα ενός συνεκτικού γράφου επιδέχεται την ακόλουθη φασματική διάσπαση

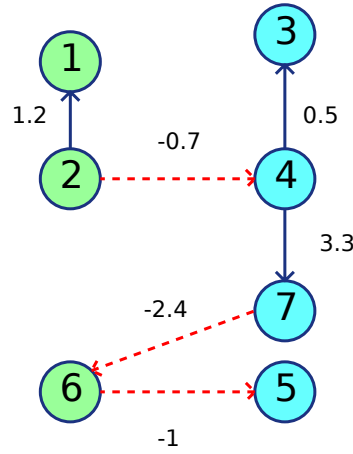
$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{1}_N}{\sqrt{N}} & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{N-1}^T \\ \mathbf{0}_{N-1} & \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{1}_N^T}{\sqrt{N}} \\ U^T \end{bmatrix} = U\Sigma U^T \quad (2.3)$$

όπου ο  $U \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$  είναι ο πίνακας όλων των δεξιών ιδιοδιανυσμάτων της  $\mathcal{L}$  εκτός του  $\mathbf{1}_N$  και ο  $\Sigma \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας που περιέχει όλες τις θετικές ιδιοτιμές της Λαπλασιανής μήτρας.

### 2.1.2 Προσημασμένοι γράφοι

Ένας γράφος  $\mathcal{G}$  λέγεται προσημασμένος όταν επιτρέπει και αρνητικά βάρη στον γράφο γειτνίασης, δηλαδή έχει πίνακα γειτνίασης τον  $\mathcal{A} := [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , με  $a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow (i, j) \in \mathcal{E}$ . Για προσημασμένους γράφους, η προσημασμένη Λαπλασιανή μήτρα ορίζεται ως

$$\mathcal{L} := \text{diag} \left( \sum_{j=1}^N |a_{1j}|, \dots, \sum_{j=1}^N |a_{Nj}| \right) - \mathcal{A}. \quad (2.4)$$



Σχήμα 2.5: Παράδειγμα δομικά ισορροπημένου γράφου

Μία σημαντική ιδιότητα που χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει έναν προσημασμένο γράφο είναι η δομική ισορροπία. Ένας προσημασμένος γράφος  $\mathcal{G}$  είναι δομικά ισορροπημένος όταν επιδέχεται διαμέριση σε δύο μη κενά σύνολα κόμβων  $\mathcal{V}_p$  και  $\mathcal{V}_q$ , με την ιδιότητα ότι  $\mathcal{V}_p \cup \mathcal{V}_q = \mathcal{V}$  και  $\mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q = \emptyset$ , έτσι ώστε  $a_{ij} \geq 0$  όταν οι  $i$  και  $j$  είναι στο ίδιο σύνολο, και  $a_{ij} \leq 0$  διαφορετικά. Έτσι, στην περίπτωση ενός δομικά ισορροπημένου γράφου, υπάρχουν δύο ανταγωνιζόμενες ομάδες κόμβων ( $a_{ij} \leq 0$  αν  $i \in \mathcal{V}_p$  και  $j \in \mathcal{V}_q$ ), ενώ όλοι οι κόμβοι που είναι σε κοινή ομάδα συνεργάζονται ( $a_{ij} \geq 0$  αν  $i, j \in \mathcal{V}_p$  ή  $i, j \in \mathcal{V}_q$ ). Ένα παράδειγμα δομικά ισορροπημένου γράφου παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.5. Παρατηρούμε ότι ο συγκεκριμένος γράφος έχει δέντρο που τον εκτείνει με ρίζα τον κόμβο 2.

Εδώ θα αναφέρουμε κάποια χρήσιμα αποτελέσματα από τα [22], [25] και [26].

**Λήμμα 2.3.** [26] Ας συμβολίσουμε το σύνολο των πινάκων προσήμου ως

$$\mathcal{D} := \{diag(\sigma_1, \dots, \sigma_N) | \sigma_i \in \{1, -1\}\}.$$

Ένας προσημασμένος γράφος  $\mathcal{G}$  είναι δομικά ισορροπημένος αν και μόνο αν υπάρχει  $D \in \mathcal{D}$ , τέτοιος ώστε ο  $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}] = DAD$  να είναι μη αρνητικός πίνακας (όλα τα στοιχεία του είναι μη αρνητικά).

**Λήμμα 2.4.** [22, 25] Αν ένας προσημασμένος γράφος  $\mathcal{G}$  έχει δέντρο που τον εκτείνει και είναι δομικά ισορροπημένος, τότε το μηδέν είναι απλή ιδιοτιμή της προσημασμένης Λαπλασιανής του μήτρας  $\mathcal{L}$  και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του έχουν θετικά πραγματικά μέρη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Ένα άμεσο αποτέλεσμα των παραπάνω δύο Λημμάτων είναι το ακόλουθο.

**Πόρισμα 2.1.** Αν ένας προσημασμένος γράφος  $\mathcal{G}$  έχει δέντρο που τον εκτείνει και είναι δομικά ισορροπημένος, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην απλή μηδενική ιδιοτιμή είναι της μορφής  $\sigma := [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_N]^T$ , όπου  $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ .
2. Η προσημασμένη Λαπλασιανή του μήτρα επιδέχεται την ακόλουθη πραγματική διάσπαση Jordan:

$$\mathcal{L} = [U \ \sigma] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T \\ \phi^T \end{bmatrix} = U\Sigma V^T, \quad (2.5)$$

όπου  $U \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$ , ο  $\Sigma \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$  είναι ένας πραγματικός μπλοκ διαγώνιος πίνακας και τα  $\sigma, \phi$  είναι το δεξί και αριστερό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχούν στην απλή μηδενική ιδιοτιμή, αντίστοιχα. Ο πίνακας  $V$  και το διάνυσμα  $\phi$  είναι τέτοια, ώστε ο  $[V \ \phi]^T$  να είναι ο αντίστροφος πίνακας του  $[U \ \sigma]$ .

*Απόδειξη.* Επικαλούμενοι τον ορισμό της προσημασμένης Λαπλασιανής μήτρας 2.4 και το Λήμμα 2.3, υπάρχει ένας πίνακας προσήμου  $D$  τέτοιος, ώστε

$$\begin{aligned} D\mathcal{L}D &= D \operatorname{diag} \left( \sum_{j=1}^N |a_{1j}|, \dots, \sum_{j=1}^N |a_{Nj}| \right) D - DAD \\ &= \operatorname{diag} \left( \sum_{j=1}^N |a_{1j}|, \dots, \sum_{j=1}^N |a_{Nj}| \right) - DAD, \end{aligned} \quad (2.6)$$

όπου ο  $DAD$  είναι μη αρνητικός πίνακας. Είναι προφανές ότι το  $\mathbf{1} := [1 \dots 1]^T \in \mathbb{R}^N$  είναι το ιδιοδιάνυσμα του  $D\mathcal{L}D$  που αντιστοιχεί στην μηδενική ιδιοτιμή, δηλαδή  $D\mathcal{L}D\mathbf{1} = 0$ . Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη από αριστερά με  $D$ , που είναι ο αντίστροφος πίνακας του εαυτού του, παίρνουμε  $\mathcal{L}D\mathbf{1} = 0$ , και σαν αποτέλεσμα καταλήγουμε ότι  $\sigma = D\mathbf{1} = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_N]^T$ , όπου το  $\sigma_i \in \{-1, 1\}$  είναι το ιδιοδιάνυσμα του  $\mathcal{L}$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0. Από το Λήμμα 2.4, η ιδιοτιμή είναι απλή, άρα το ιδιοδιάνυσμα είναι μοναδικό ως προς τον πολλαπλασιασμό με σταθερά. Το δεύτερο μέρος προκύπτει από την διάσπαση της προσημασμένης Λαπλασιανής μήτρας  $\mathcal{L}$  στην πραγματική μορφή Jordan (Θεώρημα 3.4.1.5 στο [108]).  $\square$

Μια άμεση συνέπεια του δεύτερου μέρους του Πορίσματος 2.1 είναι η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\begin{bmatrix} V^T \\ \phi^T \end{bmatrix} [U \ \sigma] = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{N-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

από την οποία προκύπτει  $\phi^T U = 0$ . Επίσης, για τον εκθετικό πίνακα  $e^{\mathcal{L}t}$  έχουμε:

$$e^{\mathcal{L}t} = [U \ \sigma] \begin{bmatrix} e^{\Sigma t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T \\ \phi^T \end{bmatrix} = U e^{\Sigma t} V^T + \sigma \phi^T. \quad (2.7)$$

### 2.1.3 Κατευθυνόμενοι γράφοι με αρχηγό

Ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένας κόμβος-αρχηγός  $\mathcal{L}$ , ο οποίος στέλνει πληροφορία σε ένα υποσύνολο των υπόλοιπων κόμβων χωρίς να λαμβάνει πληροφορία ο ίδιος. Επίσης, ας ορίσουμε ως  $b_i$  το βάρος της ακμής από τον αρχηγό προς τον κόμβο-ακόλουθο  $i$ . Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τον πίνακα  $B = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  και τον επαυξημένο γράφο  $\bar{\mathcal{G}}$  με σύνολο κόμβων  $\bar{\mathcal{V}} = \{L, 1, \dots, N\}$  και ακμών  $\bar{\mathcal{E}} \subseteq \bar{\mathcal{V}} \times \bar{\mathcal{V}}$ .

Το επόμενο Λήμμα θα είναι χρήσιμο στο κείμενο.

**Λήμμα 2.5.** Έστω ένας επαυξημένος γράφος  $\bar{\mathcal{G}}$  που έχει δέντρο που τον εκτείνει με ρίζα τον αρχηγό  $L$ . Τότε η επαυξημένη Λαπλασιανή μήτρα  $\mathcal{L} + B$  είναι αντιστρέψιμη και υπάρχει διαγώνιος και θετικά ορισμένος πίνακας  $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$  και θετική σταθερά  $\delta$  τέτοια, ώστε  $P(\mathcal{L} + B) + (\mathcal{L} + B)^T P \succeq \delta P$ .

*Απόδειξη.* Το γεγονός ότι ο πίνακας  $\mathcal{L} + B$  είναι αντιστρέψιμος και υπάρχει διαγώνιος και θετικά ορισμένος πίνακας  $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$  τέτοιος ώστε ο  $P(\mathcal{L} + B) + (\mathcal{L} + B)^T P = Q$  να είναι θετικά ορισμένος, αποδεικνύεται στο [109]. Αφού ο  $Q$  είναι θετικά ορισμένος

και ο  $P$  είναι διαγώνιος και θετικά ορισμένος, για κάθε  $\delta$  τέτοιο, ώστε  $0 < \delta \leq \lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)$  ισχύει ότι ο πίνακας  $Q - \delta P$  είναι θετικά ημιορισμένος. Άρα

$$P(\mathcal{L} + B) + (\mathcal{L} + B)^T P = Q \succeq \delta P \succ 0$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του Λήμματος.  $\square$

## 2.2 Θεωρία συστημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο παραθέτουμε πολύ βασικά στοιχεία της θεωρίας δυναμικών συστημάτων καθώς και παρουσιάζουμε τα συστήματα καθαρής ανατροφοδότησης που θα μας απασχολήσουν στο κύριο μέρος της εργασίας.

### 2.2.1 Διαφορικές εξισώσεις

Παραθέτουμε βασικά αποτελέσματα από το [110] για τις λύσεις διαφορικών εξισώσεων. Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.8)$$

Ως λύση του (2.8) σε ένα διάστημα  $[t_0, t_1]$ , εννοούμε μια συνεχή συνάρτηση  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  τέτοια ώστε να ορίζεται η παράγωγος ως προς τον χρόνο  $\dot{x}$  και να ικανοποιεί την  $\dot{x} = f(t, x(t))$  για κάθε  $t \in [t_0, t_1]$  σχεδόν παντού. Για την ύπαρξη, την μοναδικότητα και την επέκταση των λύσεων διαφορικών εξισώσεων είναι χρήσιμα τα εξής θεωρήματα.

**Θεώρημα 2.1.** (Θεώρημα 3.1 [110]) Έστω  $f(t, x)$  μια συνάρτηση κατά τμήματα συνεχής ως προς το  $t$  και τοπικά Lipschitz ως προς το  $x$ . Τότε, υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε η εξίσωση κατάστασης  $\dot{x} = f(t, x)$  με  $x(t_0) = x_0$  έχει μοναδική λύση στο  $[t_0, t_0 + \delta]$ .

**Λήμμα 2.6.** (Άσκηση 3.26 [110]) Έστω  $f(t, x)$  μια συνάρτηση κατά τμήματα συνεχής ως προς το  $t$  και τοπικά Lipschitz ως προς το  $x$  στο  $[t_0, t_1] \times D$ , για  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Έστω  $y(t)$  μια λύση της  $\dot{x} = f(t, x)$  με  $x(t_0) = x_0$  σε μέγιστο ανοιχτό διάστημα  $[t_0, T) \subset [t_0, t_1]$  με  $T < \infty$ . Έστω  $W$  ένα οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο του  $D$ . Τότε, υπάρχει κάποια χρονική στιγμή  $t \in [t_0, T)$  τέτοια ώστε  $y(t) \notin W$ .

### 2.2.2 Συναρτησιακές διαφορικές εξισώσεις με χρονική υστέρηση

Αντίστοιχα είναι τα αποτελέσματα για συστήματα που περιγράφονται από συναρτησιακές διαφορικές εξισώσεις με χρονική υστέρηση. Παραθέτουμε αποτελέσματα από το [111], τα οποία θα φανούν χρήσιμα στην ανάλυση των επόμενων κεφαλαίων. Έστω  $r \geq 0$  ένας πραγματικός αριθμός,  $\mathbb{R}^n$  ένας  $n$ -διάστατος γραμμικός διανυσματικός χώρος στους πραγματικούς αριθμούς με την νόρμα  $|\cdot|$  και  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$  ο χώρος Banach των συνεχών συναρτήσεων που απεικονίζουν το  $[a, b]$  στο  $\mathbb{R}^n$ . Για  $[a, b] = [-r, 0]$  θεωρούμε το  $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  και ορίζουμε την νόρμα ενός στοιχείου  $\phi$  στον  $\mathcal{C}$  ως  $|\phi| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$ . Αν  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $A \geq 0$  και  $x \in \mathcal{C}([-\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$ , τότε για

κάθε  $t \in [\sigma, \sigma + A]$ , έστω το  $x_t \in \mathbb{C}$  που ορίζεται ως  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $-r \leq \theta \leq 0$ . Έστω η συναρτησιακή διαφορική εξίσωση με χρονική υστέρηση

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (2.9)$$

όπου  $x \in D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ . Μια συνάρτηση  $x$  ονομάζεται λύση της εξίσωσης (2.9) στο  $[\sigma - r, \sigma + A]$  αν υπάρχει  $\sigma \in \mathbb{R}$  και  $A > 0$  τέτοια ώστε  $x \in \mathcal{C}([-\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$ ,  $(t, x_t) \in D$  και το  $x(t)$  να ικανοποιεί την (2.9) για  $t \in [\sigma, \sigma + A]$  σχεδόν παντού. Για δεδομένο  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \in \mathcal{C}$ , λέμε ότι η  $x(\sigma, \phi, f)$  είναι μια λύση της (2.9) με αρχική τιμή  $\phi$  στο  $\sigma$  ή απλά μια λύση που διέρχεται από το  $(\sigma, \phi)$  αν υπάρχει  $A > 0$  τέτοιο ώστε η  $x(\sigma, \phi, f)$  να είναι λύση της (2.9) στο  $[\sigma - r, \sigma + A]$  και  $x_\sigma(\sigma, \phi, f) = \phi$ .

**Παρατήρηση 2.1.** Το μοντέλο (2.12) επιτρέπει πολύ γενικές μορφές χρονικά υστερημένων καταστάσεων στις δυναμικές των συστημάτων. Συστήματα με τέτοιες δυναμικές περιλαμβάνουν δυναμικές που περιγράφονται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, διαφορικές εξισώσεις διαφορών της μορφής

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_p(t))),$$

με  $0 \leq \tau_j(t) \leq r$ ,  $j = 1, \dots, p$ , ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις

$$\dot{x} = \int_{-r}^0 g(t, \theta, x(t + \theta)) d\theta$$

ή και ακόμα πιο γενικές εξισώσεις (βλ. σελ. 39 στο [111]).

**Θεώρημα 2.2.** (Θεώρημα 2.3 σελ. 44 [111]) Έστω ότι το  $\Omega$  είναι ένα ανοιχτό σύνολο στο  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ , η  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι μια συνεχής συνάρτηση και η  $f(t, \phi)$  είναι Lipschitz ως προς το  $\phi$  σε κάθε συμπαγές σύνολο στο  $\Omega$ . Αν  $(\sigma, \phi) \in \Omega$ , τότε υπάρχει μοναδική λύση της (2.9) που περνάει από το  $(\sigma, \phi)$ .

**Θεώρημα 2.3.** (Θεώρημα 3.2 σελ. 46 [111]) Έστω ότι το  $\Omega$  είναι ένα ανοιχτό σύνολο στο  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$  η,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι μια εξ' ολοκλήρου συνεχής συνάρτηση, δηλαδή η  $f$  είναι συνεχής και απεικονίζει κλειστά και φραγμένα σύνολα του  $\Omega$  σε φραγμένα σύνολα στον  $\mathbb{R}^n$ , και το  $x$  είναι μια μη επεκτάσιμη λύση της (2.9) στο  $[\sigma - r, b)$ . Τότε, για κάθε κλειστό και φραγμένο σύνολο  $U$  στο  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ ,  $U$  ανήκει στο  $\Omega$ , υπάρχει  $t_U$  τέτοιο ώστε  $(t, x_t) \notin U$  για  $t_U \leq t \leq b$ .

### 2.2.3 Συστήματα σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης

Ένας πράκτορας  $i$ ,  $i \in \mathcal{V}$ , λέμε ότι είναι ένα  $m$  τάξης σύστημα καθαρής ανατροφοδότησης όταν έχει δυναμική που περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij} &= f_{ij}(\bar{x}_{ij}, x_{i,j+1}), \quad j \in \{1, \dots, m-1\} \\ \dot{x}_{im} &= f_{im}(\bar{x}_{im}, u_i), \\ y_i &= x_{i1}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

όπου τα  $x_{ij} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  είναι οι καταστάσεις του πράκτορα με αρχικές συνθήκες  $x_{ij}(0)$ ,  $\bar{x}_{ij} := [x_{i1}, \dots, x_{ij}]^T \in \mathbb{R}^j$ , το  $u_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η είσοδος ελέγχου, το  $y_i$  είναι η έξοδος και οι  $f_{ij} : \mathbb{R}^{j+1} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι άγνωστες μη γραμμικές συναρτήσεις, για κάθε  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

**Παρατήρηση 2.2.** Η κατηγορία συστημάτων που περιγράφει η (2.10) περιλαμβάνει πολλά πρακτικά συστήματα όπως χειριστές μονού συνδέσμου, με ή χωρίς την δυναμική του κινητήρα, και υπερηχητικά ιπτάμενα οχήματα [112].

Για τον έλεγχο συστημάτων της μορφής (2.10) είναι απαραίτητη η επόμενη υπόθεση που αφορά την ελεγχσιμότητα των συστημάτων.

**Υπόθεση 2.1.** Οι συναρτήσεις  $f_{ij} : \mathbb{R}^{j+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  είναι συνεχώς διαφορίσιμες και υπάρχουν άγνωστες θετικές σταθερές  $b_{ij}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  τέτοιες, ώστε

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_{ij}(\bar{x}_{ij}, x_{i,j+1})}{\partial x_{i,j+1}} \right| &\geq b_{ij} > 0, \quad j \in \{1, \dots, m-1\} \\ \left| \frac{\partial f_{im}(\bar{x}_{im}, u_i)}{\partial u_i} \right| &\geq b_{im} > 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

για κάθε  $(\bar{x}_{im}, u_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$  και για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ .

Η δεύτερη υπόθεση αφορά την γνώση των κατευθύνσεων ελέγχου και θα την χρησιμοποιήσουμε στην σχεδίαση του ελεγκτή στο Κεφάλαιο 3.

**Υπόθεση 2.2.** Τα πρόσημα των  $\frac{\partial f_{ij}(\bar{x}_{ij}, x_{i,j+1})}{\partial x_{i,j+1}}$ ,  $j \in \{1, \dots, m-1\}$  και  $\frac{\partial f_{im}(\bar{x}_{im}, u_i)}{\partial u_i}$  θεωρούνται γνωστά για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι όλα τα πρόσημα είναι θετικά.

## 2.2.4 Συστήματα σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις

Ένας πράκτορας  $i$ ,  $i \in \mathcal{V}$ , λέμε ότι είναι ένα  $m$  τάξης σύστημα καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις όταν έχει δυναμική που περιγράφεται από ένα σύνολο συναρτησιακών διαφορικών εξισώσεων με χρονική υστέρηση

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij} &= f_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1}(t)), \quad j \in \{1, \dots, m-1\} \\ \dot{x}_{im} &= f_{im}(t, \bar{x}_t^{im}, u_i(t)), \\ y_i &= x_{i1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Τα  $\bar{x}_t^{ij}(\theta) = \bar{x}_{ij}(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-d, 0]$ ,  $d \in \mathbb{R}$  είναι οι γενικευμένες χρονικά υστερημένες καταστάσεις, τα  $x_{ij} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  είναι οι καταστάσεις, που έχουν αρχικές συνθήκες  $x_0^{ij}$ ,  $\theta \in [-d, 0]$ , το  $u_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η είσοδος ελέγχου, το  $y_i$  είναι η έξοδος και οι  $f_{ij} : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_j \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι άγνωστες μη γραμμικές συναρτήσεις για κάθε  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

**Παρατήρηση 2.3.** Το μοντέλο (2.12) επιτρέπει πολύ γενικές μορφές χρονικά υστερημένων καταστάσεων στις δυναμικές των συστημάτων. Συστήματα με τέτοιες δυναμικές περιλαμβάνουν δυναμικές που περιγράφονται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, διαφορικές εξισώσεις διαφορών της μορφής

$$\dot{x}_{ij} = f_{ij}(t, \bar{x}_{ij}(t), \bar{x}_{ij}(t - \tau_{ij}(t)), x_{i,j+1}(t)),$$

ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις

$$\dot{x}_{ij} = f_{ij}\left(t, \bar{x}_{ij}(t), \int_{t-\tau_{i1}(t)}^t x_{i1}(s)ds, \dots, \int_{t-\tau_{ij}(t)}^t x_{ij}(s)ds, x_{i,j+1}(t)\right)$$

ή και ακόμα πιο γενικές εξισώσεις (βλ. σελ. 39 στο [111]).



Για την ελεγχσιμότητα των παραπάνω συστημάτων είναι απαραίτητη η ακόλουθη υπόθεση.

**Υπόθεση 2.3.** Οι συναρτήσεις  $f_{ij} : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_j \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  είναι συνεχώς διαφορίσιμες ως προς το  $x_{i,j+1}$  ( $u_i$  για την  $f_{im}$ ) και υπάρχουν άγνωστες θετικές σταθερές  $b_{ij}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  τέτοιες, ώστε

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1})}{\partial x_{i,j+1}} \right| &\geq b_{ij} > 0, \quad j \in \{1, \dots, m-1\} \\ \left| \frac{\partial f_{im}(t, \bar{x}_t^{im}, u_i)}{\partial u_i} \right| &\geq b_{im} > 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

για κάθε  $(t, \bar{x}_t^{im}, u_i) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}_m \times \mathbb{R}$  και για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ .

Η γνώση των κατευθύνσεων ελέγχου διασφαλίζεται από την παρακάτω υπόθεση.

**Υπόθεση 2.4.** Τα πρόσημα των  $\frac{\partial f_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1})}{\partial x_{i,j+1}}$ ,  $j \in \{1, \dots, m-1\}$  και των  $\frac{\partial f_{im}(t, \bar{x}_t^{im}, u_i)}{\partial u_i}$  θεωρούνται γνωστά για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι όλα τα πρόσημα είναι θετικά.

Ακόμα, θα χρειαστούμε και μια υπόθεση για το ότι οι χρονικά εξαρτώμενες διαταραχές θα είναι ομοιόμορφα φραγμένες.

**Υπόθεση 2.5.** Οι συναρτήσεις  $f_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1})$ ,  $j \in \{1, \dots, m-1\}$ ,  $f_{im}(t, \bar{x}_t^{im}, u_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  είναι ομοιόμορφα φραγμένες ως προς το  $t$ .

**Παρατήρηση 2.4.** Η ρητή εξάρτηση των  $f_{ij}$  στην (2.12) από τον χρόνο  $t$  και η Υπόθεση 2.5 επιτρέπουν να συμπεριληφθούν άγνωστες, χρονικά μεταβαλλόμενες και ομοιόμορφα φραγμένες διαταραχές στον μοντέλο των πρακτόρων (2.12). Για παράδειγμα, προσθετικές διαταραχές  $d_{ij}(t)$  μπορούν να θεωρηθούν στο μοντέλο καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij} &= \tilde{f}_{ij}(\bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1}(t)), \quad j \in \{1, \dots, m-1\} \\ \dot{x}_{im} &= \tilde{f}_{im}(\bar{x}_t^{im}, u_i(t)) \end{aligned}$$

και σαν αποτέλεσμα στην (2.12) με

$$f_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1}) = d_{ij}(t) + \tilde{f}_{ij}(\bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1}).$$

**Παρατήρηση 2.5.** Πολλά πρακτικά συστήματα περιγράφονται από το μη γραμμικό μοντέλο (5.42). Παραδείγματα περιλαμβάνουν ρομποτικούς χειριστές μονού άξονα με ή χωρίς την δυναμική του κινητήρα, υπερηχητικά ιπτάμενα οχήματα [112], ανεστραμμένα εκκρεμή, κινητούς χειριστές και χημικούς αντιδραστήρες [43].

**Παρατήρηση 2.6.** Σε αντίθεση με αποτελέσματα σχετικά με τη συμφωνία πρακτόρων που περιλαμβάνουν χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις τους [47], [47], [49], [43], [100], το μοντέλο των πρακτόρων (5.42) διερευνά πιο γενικές χρονικές υστερήσεις. Τέτοιες χρονικές υστερήσεις οδηγούν σε συστήματα με δυναμικές που μπορεί να περιγράφονται από διαφορο-διαφορικές εξισώσεις, ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις ή ακόμα και πιο γενικές εξισώσεις [111].

## 2.3 Ένα χρήσιμο Λήμμα

Το παρακάτω λήμμα θα φανεί χρήσιμο στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.

**Λήμμα 2.7.** Θεωρούμε την συνάρτηση  $Q(s) = s + ce^{-\tau s}$  όπου  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{C}$  με  $\tau > 0$ ,  $\Re(c) > 0$ . Αν ισχύει ότι  $\tau < \Re(c)/|c|^2$  τότε όλα τα μηδενικά της  $Q(s)$  βρίσκονται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο. Επιπλέον, αν ισχύει ότι  $c \in \mathbb{R}$  όπου  $c > 0$ , τότε όλα τα μηδενικά της  $Q(s)$  βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο αν και μόνο αν  $\tau < \pi/(2c)$ .

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο Α' Παράρτημα πρώτο. □

□

## Κεφάλαιο 3

# Διμερής συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια νέα μεθοδολογία για την επίλυση του προβλήματος της συμφωνίας με προκαθορισμένη επίδοση χωρίς αρχηγό για ομάδες πρακτόρων με ανταγωνιστικές αλληλεπιδράσεις. Προτείνουμε έναν νέο αναλογικό και ολοκληρωτικό (PI) μετασχηματισμό ο οποίος επιτρέπει την επίλυση του προαναφερθέντος προβλήματος ανάγοντάς το σε ένα πρόβλημα ρύθμισης με προκαθορισμένη επίδοση. Θεωρούμε δίκτυα επικοινωνίας που περιγράφονται από προσημασμένους γράφους που περιέχουν δέντρο που τους εκτείνει. Στη συνέχεια, αναδεικνύουμε την εφαρμοσιμότητα του μετασχηματισμού επιλύοντας το αντίστοιχο πρόβλημα της συμφωνίας των εξόδων με προκαθορισμένη επίδοση για μη γραμμικούς πράκτορες σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης με άγνωστες δυναμικές. Ο αλγόριθμος διασφαλίζει ότι όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα και εγγυάται την προκαθορισμένη επίδοση για το σφάλμα διμερούς συμφωνίας. Παρουσιάζουμε προσομοιώσεις σε ομάδα ρομποτικών χειριστών μονού συνδέσμου που επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα της θεωρητικής ανάλυσης. Τα αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου είναι δημοσιευμένα στο άρθρο [103].

### 3.1 Ορισμός του προβλήματος

Θεωρούμε ένα πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από  $N$  πράκτορες με εξόδους  $y_i \in \mathbb{R}$ . Το πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι ο σχεδιασμός ενός συνεχούς, κατανεμημένου νόμου ελέγχου για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$  που να διασφαλίζει ότι οι έξοδοι των πρακτόρων πετυχαίνουν διμερή συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση. Με τον όρο διμερής συμφωνία, εννοούμε ότι οι έξοδοι των πρακτόρων συγκλίνουν σε συμφωνία κατά απόλυτη τιμή, αλλά όχι απαραίτητα με το ίδιο πρόσημο. Συγκεκριμένα, οι έξοδοι των πρακτόρων που βρίσκονται στην ίδια διαμέριση του γράφου, δηλαδή συνεργάζονται, συγκλίνουν στην ίδια τιμή και οι έξοδοι των πρακτόρων που βρίσκονται σε διαφορετικές διαμερίσεις, και άρα ανταγωνίζονται, συγκλίνουν σε αντίθετες ως προς το πρόσημο τιμές.

Σε αντιστοιχία με το [56], όταν λέμε διμερής συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση, εννοούμε ότι η απόλυτη τιμή του σφάλματος διμερούς συμφωνίας περικλείεται από μια περιβάλλουσα συνάρτηση με επιθυμητές ιδιότητες. Δηλαδή, το σφάλμα διμερούς

συμφωνίας  $e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  είναι φραγμένο ως εξής

$$-\rho(t) < e(t) < \rho(t), \quad \forall t \geq 0,$$

όπου  $\rho(t) > 0$  είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη, φραγμένη και φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου, που αποκαλείται συνάρτηση επίδοσης, και ικανοποιεί  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_\infty > 0$ . Ένα παράδειγμα συνάρτησης που ικανοποιεί τις συνθήκες αυτές είναι μια εκθετική συνάρτηση επίδοσης της μορφής [56]  $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-lt} + \rho_\infty$ ,  $\forall t \geq 0$ , όπου  $\rho_0, \rho_\infty, l$  είναι κατάλληλα επιλεγμένες θετικές σταθερές. Η σταθερά  $\rho_\infty$  ορίζει το μέγιστο επιτρεπτό μέγεθος του σφάλματος προκαθορισμένης επίδοσης  $e$  στην τελική κατάσταση, ενώ η επιλογή της σταθεράς  $l$  μας επιτρέπει επηρεάσουμε την ταχύτητα της σύγκλισης στη μόνιμη κατάσταση.

## 3.2 Μετασχηματισμός PI για διμερή συμφωνία

Η βασική ιδέα αυτού του κεφαλαίου είναι να εισάγουμε νέες μεταβλητές που να ανάγουν το πρόβλημα της διμερούς συμφωνίας σε ένα πρόβλημα ρύθμισης των νέων μεταβλητών. Γενικεύουμε έτσι για προσημασμένους γράφους τις μεταβλητές PI, που προτάθηκαν στο [113]. Για αυτόν το σκοπό ορίζουμε τις μεταβλητές

$$z_i := g_{z_i}(y_i, w_i) = y_i(t) - y_i(0) + \beta w_i, \quad (3.1)$$

όπου

$$w_i := g_{w_i}(t) = \int_0^t \sum_{k \in N_i} (|a_{ik}|y_i(s) - a_{ik}y_k(s)) ds, \quad (3.2)$$

το  $y_i$  είναι η έξοδος του  $i$ -οστού πράκτορα και το  $\beta > 0$  είναι παράμετρος της σχεδίασης, για κάθε  $i \in \mathcal{V}$ . Οι νέες μεταβλητές που ορίζονται στις (3.1), (3.2) ονομάζονται αναλογικές και ολοκληρωτικές μεταβλητές του σφάλματος διμερούς συμφωνίας, αφού κάθε  $z_i$  περιλαμβάνει τον αναλογικό όρο  $y_i(t) - y_i(0)$  και το ολοκλήρωμα της σταθμισμένης συνολικής διαφωνίας του πράκτορα  $i$  με τους γείτονές του,  $w_i$ .

Για πληρότητα αναφέρουμε ότι καταναμημένοι ελεγχτές PID και PI έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί στα [114], [115] από διαφορετική σκοπιά για την επίτευξη συμφωνίας σε πρώτης τάξης γραμμικά πολυπρακτορικά συστήματα, και για γραμμικά πολυπρακτορικά συστήματα με αρχηγό, αντίστοιχα.

Ως προς την τοπολογία του γράφου μετάδοσης πληροφορίας κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση.

**Υπόθεση 3.1.** Η τοπολογία της επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων  $i \in \mathcal{V}$  περιγράφεται από έναν προσημασμένο κατευθυνόμενο γράφο  $\mathcal{G}$ , ο οποίος είναι δομικά ισορροπημένος και έχει δέντρο που τον εκτείνει. Μόνο οι σχετικές αποστάσεις των εξόδων των πρακτόρων μοιράζονται μέσω του δικτύου επικοινωνίας και δεν χρειάζεται η διαμοίραση περαιτέρω πληροφορίας (όπως π.χ. οι εσωτερικές καταστάσεις των πρακτόρων).

Το επόμενο θεώρημα δικαιολογεί την χρήση των νέων μεταβλητών  $z_i$  στον σχεδιασμό ελεγκτών για το πρόβλημα διμερούς συμφωνίας με προκαθορισμένη επίδοση.

**Θεώρημα 3.1.** Θεωρούμε τις  $N$  συνεχείς συναρτήσεις  $z_1, \dots, z_N$  και  $y_1, \dots, y_N$ , οι οποίες ορίζονται από τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (3.1) και (3.2). Αν

i) ισχύει η Υπόθεση 3.1,

ii) κάθε  $z_i$  είναι φραγμένη από μια συνεχώς διαφορίσιμη, φραγμένη, θετική και φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου  $\rho_{i1}$ , τέτοια ώστε  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{i1}(t) = \rho_{i1\infty} > 0$  και  $|\dot{\rho}_{i1}(t)| \leq \nu |\rho_{i1}(t)|$  για κάθε  $t \geq 0$  και  $i \in \mathcal{V}$ , όπου  $\nu > 0$  είναι παράμετρος της σχεδίασης,

iii) η παράμετρος σχεδίασης  $\beta$  έχει επιλεχθεί έτσι ώστε να ισχύει  $\beta > \nu \max\{1/\lambda_b, 4\lambda_{\max}(P)\}$ , όπου το  $\lambda_b > 0$  είναι μια σταθερά και ο  $P = P^T \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$  είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας τα οποία εξαρτώνται από την τοπολογία του δικτύου και θα οριστούν στην απόδειξη του θεωρήματος,

τότε οι συναρτήσεις  $y_i$ ,  $i \in \mathcal{V}$ , επιτυγχάνουν διμερή συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση, δηλαδή

$$\|y(t) - \sigma\phi^T y(0)\|_2 \leq c_1 \|\underline{\rho}_1(t)\|_2, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

και

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \sigma\phi^T y(0)\|_2 \leq c_0 \|\underline{\rho}_{1\infty}\|_2,$$

όπου τα  $\sigma, \phi$  ορίζονται στο Πρόρισμα 2.1 και τα  $c_0, c_1$  είναι θετικές σταθερές που εξαρτώνται από την τοπολογία του δικτύου και θα οριστούν στην απόδειξη του θεωρήματος.

Απόδειξη. Οι δυναμικές των  $w_i$ , που ορίζονται από την (3.2), είναι

$$\dot{w}_i = h_{w_i}(y_i, y_k; k \in N_i) = \sum_{k \in N_i} (|a_{ik}|y_i - a_{ik}y_k) \quad (3.3)$$

για κάθε  $i \in \mathcal{V}$  και η δυναμική του  $w := [w_1, \dots, w_N]^T$  δίνεται από την

$$\dot{w} = \mathcal{L}y(t) = \mathcal{L}(y(0) - \beta w + z(t)), \quad (3.4)$$

όπου  $z := [z_1, \dots, z_N]^T$ ,  $y = [y_1, \dots, y_N]^T$  και  $w(0) = 0$ . Από την Υπόθεση 3.1, το Πρόρισμα 2.1 ισχύει. Χρησιμοποιώντας τις (2.5), (2.7) και την ιδιότητα  $\phi^T U = 0$ , η λύση της (3.4) παίρνει την μορφή

$$w(t) = U \int_0^t e^{-\beta\Sigma(t-s)} \Sigma V^T [y(0) + z(s)] ds. \quad (3.5)$$

Για τον πρώτο όρο στο δεξί μέρος της (3.5) έχουμε

$$U \int_0^t e^{-\beta\Sigma(t-s)} \Sigma V^T y(0) ds = \frac{1}{\beta} UV^T y(0) - \frac{1}{\beta} U e^{-\beta\Sigma t} V^T y(0), \quad (3.6)$$

για κάθε  $t \in [0, \infty)$ . Από την (3.1) και το γεγονός ότι  $UV^T + \sigma\phi^T = \mathbb{I}_N$  παίρνουμε

$$y(t) - \sigma\phi^T y(0) = z(t) + UV^T y(0) - \beta w(t) \quad (3.7)$$

για κάθε  $t \in [0, \infty)$ . Χρησιμοποιώντας την (3.5) και την (3.6) στην (3.7) έχουμε

$$y(t) - \sigma\phi^T y(0) = U e^{-\beta\Sigma t} V^T y(0) + z(t) - \beta U \int_0^t e^{-\beta\Sigma(t-s)} \Sigma V^T z(s) ds \quad (3.8)$$

για κάθε  $t \in [0, \infty)$ . Από την (3.8) έχουμε ότι (οι λεπτομέρειες της απόδειξης δίνονται στο Α΄ Παράρτημα πρώτο)

$$\|y(t) - \sigma\phi^T y(0)\|_2 \leq \rho_b e^{-\beta\lambda_b t} \|U\|_2 \|V^T\|_2 \|y(0)\|_2 + c_0 \|\underline{\rho}_1(t)\|_2, \forall t \in [0, \infty) \quad (3.9)$$

όπου τα  $\rho_b$ ,  $\lambda_b$  είναι θετικές σταθερές που εξαρτώνται από την τοπολογία του δικτύου και το  $c_0$  είναι μια θετική σταθερά που επίσης εξαρτάται από την τοπολογία του δικτύου και τις παραμέτρους της σχεδίασης  $\beta, \nu$ . Από τις υποθέσεις ii), iii) του Θεωρήματος 3.1 μπορούμε να αποδείξουμε ότι  $\rho_{i1}(t) \geq \rho_{i1}(0)e^{-\nu t} \geq \rho_{i1}(0)e^{-\beta\lambda_b t}$ , για κάθε  $t \in [0, \infty)$ . Από το γεγονός αυτό και την (3.9) έχουμε ότι

$$\|y(t) - \sigma\phi^T y(0)\|_2 \leq c_1 \|\underline{\rho}_1(t)\|_2, \quad (3.10)$$

για κάθε  $t \in [0, \infty)$ , όπου

$$c_1 := 1 + \frac{\rho_b}{\|\underline{\rho}_1(0)\|_\infty} \|U\|_2 \|V^T\|_2 \|y(0)\|_2 + \beta \|U\|_2 \sqrt{\frac{2\|V\Sigma^T P^2 \Sigma V^T\|_2}{\lambda_{\min}(P)\beta \left(\frac{\beta}{2\lambda_{\max}(P)} - 2\nu\right)}}. \quad (3.11)$$

Σαν αποτέλεσμα, αν σχεδιάσουμε κατάλληλα τις συναρτήσεις επίδοσης και την παράμετρο  $\beta$ , έτσι ώστε να ισχύει η υπόθεση iii) του Θεωρήματος 3.1, οι έξοδοι των πρακτόρων ακολουθούν την προκαθορισμένη επίδοση για το σφάλμα διμερούς συμφωνίας  $\|y(t) - \sigma\phi^T y(0)\|_2$ . Για να εξετάσουμε την συμπεριφορά του πολυπρακτορικού συστήματος όταν ο χρόνος προσεγγίζει το άπειρο, παίρνουμε το όριο της (3.9) στο άπειρο και έτσι έχουμε

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \sigma\phi^T y(0)\|_2 \leq c_0 \|\underline{\rho}_{1\infty}\|_2. \quad (3.12)$$

Αφού από το Πρόγραμμα 2.1 προκύπτει ότι  $\sigma = [\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N]^T$  με  $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ , καταλήγουμε ότι, σχεδιάζοντας τις συναρτήσεις επίδοσης κατάλληλα, οι έξοδοι όλων των πρακτόρων συγκλίνουν σε μια αυθαίρετως μικρή γειτονιά είτε του  $\phi^T y(0)$  ή του  $-\phi^T y(0)$ . Επομένως και το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση έχει προκαθορισμένη επίδοση.  $\square$

**Παρατήρηση 3.1.** Το Θεώρημα 3.1 επιτρέπει την επίλυση του προβλήματος διμερούς συμφωνίας χωρίς αρχηγό με προκαθορισμένη επίδοση, ανάγοντάς το σε πρόβλημα ρύθμισης με προκαθορισμένη επίδοση κάθε νέας μεταβλητής  $z_i$ .

**Παρατήρηση 3.2.** Κάθε πράκτορας  $i$  μπορεί να αλλάξει τον όρο  $y_i(0)$  που χρησιμοποιείται στον μετασχηματισμό PI με οποιονδήποτε άλλο σταθερό όρο και έτσι να οδηγήσει το πολυπρακτορικό σύστημα σε σύγκλιση σε διαφορετικές τιμές. Επιλέγουμε τον συγκεκριμένο όρο (αρχική τιμή της εξόδου) ώστε να οδηγήσουμε το σύστημα σε μια γειτονιά κάποιας σταθμισμένης μέσης τιμής των αρχικών συνθηκών.

**Παρατήρηση 3.3.** Επισημαίνουμε ότι για την επίτευξη διμερούς συμφωνίας το μόνο προαπαιτούμενο είναι ότι  $\beta > 0$ . Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η (3.9) ισχύει για κάθε  $\beta > 0$  και σαν αποτέλεσμα η (3.12) ισχύει επίσης για κάθε  $\beta > 0$ . Η πιο περιοριστική υπόθεση iii) του Θεωρήματος 3.1 που αφορά το  $\beta$  είναι μια ικανή συνθήκη που εγγυάται την προκαθορισμένη επίδοση για το διάνυσμα σφάλματος  $y(t) - \sigma\phi^T y(0)$ . Αν η iii) ισχύει, τότε ο πρώτος όρος στο δεξί μέρος της (3.9) φθίνει γρηγορότερα από τον όρο  $c_3 \|\underline{\rho}_1(t)\|_2$ , όπου  $c_3 := (\rho_b / \|\underline{\rho}_1(0)\|_\infty) \|U\|_2 \|V^T\|_2 \|y(0)\|_2$ , από το οποίο προκύπτει η (3.10).

**Παρατήρηση 3.4.** Η απαίτηση  $|\dot{\rho}_{i1}(t)| \leq \nu|\rho_{i1}(t)|$  για κάθε  $t \geq 0$  και  $i \in \mathcal{V}$ , για τις συναρτήσεις επίδοσης, ικανοποιείται από μια συνήθη εκθετική εξίσωση επίδοσης [56] της μορφής  $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\nu t} + \rho_\infty$ ,  $\forall t \geq 0$ , όπου τα  $\rho_0, \rho_\infty$  είναι κατάλληλα επιλεγμένες θετικές σταθερές.

### 3.3 Εφαρμογή σε άγνωστους πράκτορες καθαρής ανατροφοδότησης

Για την ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας των μεταβλητών PI θα τις χρησιμοποιήσουμε για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της διμερούς συμφωνίας με προκαθορισμένη επίδοση για μη γραμμικούς πράκτορες σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης με άγνωστες δυναμικές. Χρησιμοποιούμε τις μεταβλητές PI σε μια σχεδίαση backstepping χαμηλής πολυπλοκότητας.

#### 3.3.1 Δυναμικές των πρακτόρων

Θεωρούμε ένα πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από  $N$  πράκτορες, όπου κάθε πράκτορας  $i \in \mathcal{V}$  είναι ένα σύστημα καθαρής ανατροφοδότησης  $m$  τάξης με δυναμική που δίνεται από την

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij} &= f_{ij}(\bar{x}_{ij}, x_{i,j+1}), \quad j \in \{1, \dots, m-1\} \\ \dot{x}_{im} &= f_{im}(\bar{x}_{im}, u_i), \\ y_i &= x_{i1}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

όπου τα  $x_{ij} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  είναι οι καταστάσεις του πράκτορα με αρχικές συνθήκες  $x_{ij}(0)$ ,  $\bar{x}_{ij} := [x_{i1}, \dots, x_{ij}]^T \in \mathbb{R}^j$ , το  $u_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η είσοδος ελέγχου, το  $y_i$  είναι η έξοδος και οι  $f_{ij} : \mathbb{R}^{j+1} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι άγνωστες μη γραμμικές συναρτήσεις, για κάθε  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Το πρόβλημα που θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο αυτό είναι ο σχεδιασμός ενός συνεχούς, κατανεμημένου νόμου ελέγχου  $u_i(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ , τέτοιου ώστε για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες  $x_{ij}(0)$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  και κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ , όλα τα σήματα κλειστού βρόχου να παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα και να διασφαλίζεται ότι οι έξοδοι των πρακτόρων να πετυχαίνουν διμερή συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση.

#### 3.3.2 Ρύθμιση των μεταβλητών PI

Σε αυτό το σημείο θα προχωρήσουμε στην σχεδίαση ενός κατανεμημένου νόμου ελέγχου για την ρύθμιση των νέων μεταβλητών στο μηδέν με προκαθορισμένη επίδοση στο πνεύμα του [56] και την επίτευξη διμερούς συμφωνίας με προκαθορισμένη επίδοση. Για την ελεγκσιμότητα των συστημάτων της μορφής (3.13) είναι απαραίτητη η επόμενη υπόθεση.

**Υπόθεση 3.2.** Οι συναρτήσεις  $f_{ij} : \mathbb{R}^{j+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  είναι συνεχώς διαφορίσιμες και υπάρχουν άγνωστες θετικές σταθερές  $b_{ij}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  τέτοιες,

ώστε

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_{ij}(\bar{x}_{ij}, x_{i,j+1})}{\partial x_{i,j+1}} \right| &\geq b_{ij} > 0, \quad j \in \{1, \dots, m-1\} \\ \left| \frac{\partial f_{im}(\bar{x}_{im}, u_i)}{\partial u_i} \right| &\geq b_{im} > 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

για κάθε  $(\bar{x}_{im}, u_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$  και για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ .

Η δεύτερη υπόθεση αφορά την γνώση των κατευθύνσεων ελέγχου και θα την χρησιμοποιήσουμε στην σχεδίαση του ελεγκτή.

**Υπόθεση 3.3.** Τα πρόσημα των  $\frac{\partial f_{ij}(\bar{x}_{ij}, x_{i,j+1})}{\partial x_{i,j+1}}$ ,  $j \in \{1, \dots, m-1\}$  και  $\frac{\partial f_{im}(\bar{x}_{im}, u_i)}{\partial u_i}$  θεωρούνται γνωστά για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι όλα τα πρόσημα είναι θετικά.

Τέλος κάνουμε της εξής υπόθεση.

**Υπόθεση 3.4.** Κάθε πράκτορας  $i \in \mathcal{V}$ , έχει τις εσωτερικές του καταστάσεις  $x_{ij}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  διαθέσιμες προς μέτρηση.

Το προτεινόμενο σχήμα ελέγχου για κάθε πράκτορα  $i$  υλοποιείται στα ακόλουθα βήματα:

1. Σχεδιάζουμε μια συνάρτηση επίδοσης διμερούς συμφωνίας  $\rho_{i1}$  η οποία ενσωματώνει τις επιθυμητές προδιαγραφές για το σφάλμα της συμφωνίας στην μόνιμη κατάσταση και την επίδοση του σφάλματος συμφωνίας στην μεταβατική κατάσταση για τον πράκτορα  $i$  και επιπλέον ικανοποιεί την ανισότητα  $\rho_{i1}(0) > |z_i(0)|$  και την συνθήκη *ii*) του Θεωρήματος 3.1. Στη συνέχεια επιλέγουμε τον πρώτο εικονικό νόμο ελέγχου ως

$$\hat{\alpha}_{i1}(t, x_{i1}, w_i) = -k_{i1}T \left( \frac{z_i}{\rho_{i1}(t)} \right), \quad (3.15)$$

όπου το  $k_{i1}$  είναι ένα θετικό κέρδος ελέγχου.

2. Σχεδιάζουμε μια δεύτερη συνάρτηση επίδοσης  $\rho_{i2}$  η οποία χρειάζεται να ικανοποιεί μόνο την ανισότητα  $\rho_{i2}(0) > |x_{i2}(0) - \hat{\alpha}_{i1}(0, x_{i1}(0), w_i(0))|$  και επιλέγουμε τον δεύτερο εικονικό νόμο ελέγχου ως

$$\hat{\alpha}_{i2}(t, \bar{x}_{i2}, w_i) = -k_{i2}T \left( \frac{x_{i2} - \hat{\alpha}_{i1}(t, x_{i1}, w_i)}{\rho_{i2}(t)} \right), \quad (3.16)$$

όπου το  $k_{i2}$  είναι ένα θετικό κέρδος ελέγχου.

3. Επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο βήμα για όλους τους υπόλοιπους εικονικούς νόμους ελέγχου

$$\hat{\alpha}_{ij}(t, \bar{x}_{ij}, w_i) = -k_{ij}T \left( \frac{x_{ij} - \hat{\alpha}_{i,j-1}(t, \bar{x}_{1,j-1}, w_i)}{\rho_{ij}(t)} \right), \quad (3.17)$$

όπου τα  $k_{ij}$  είναι θετικά κέρδη ελέγχου και οι συναρτήσεις επίδοσης  $\rho_{ij}$  ικανοποιούν τις ανισότητες  $\rho_{ij}(0) > |x_{ij}(0) - \hat{\alpha}_{i,j-1}(0, \bar{x}_{1,j-1}(0), w_i(0))|$  για όλα τα  $j \in \{3, \dots, m-1\}$ .



4. Τέλος, επιλέγουμε τον νόμο ελέγχου για τον πράκτορα  $i$  ως

$$\hat{u}_i(t, \bar{x}_{im}, w_i) = -k_{im}T \left( \frac{x_{im} - \hat{\alpha}_{i,m-1}(t, \bar{x}_{im}, w_i)}{\rho_{im}(t)} \right), \quad (3.18)$$

όπου το  $k_{im}$  είναι ένα θετικό κέρδος ελέγχου και η συνάρτηση επίδοσης  $\rho_{im}$  ικανοποιεί την ανισότητα  $\rho_{im}(0) > |x_{im}(0) - \hat{\alpha}_{i,m-1}(0, \bar{x}_{1,m-1}(0), w_i(0))|$ .

**Παρατήρηση 3.5.** Όπως αναφέραμε στην Παράγραφο 3.1, όλες οι συναρτήσεις επίδοσης επιλέγονται έτσι ώστε να είναι συνεχώς διαφορίσιμες, φραγμένες, αυστηρά θετικές και φθίνουσες συναρτήσεις του χρόνου με θετικό όριο όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Μόνο οι συναρτήσεις επίδοσης στο πρώτο βήμα της σχεδίασης  $\rho_{i1}$ , για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ , χρειάζεται να ικανοποιούν την  $|\dot{\rho}_{i1}(t)| \leq \nu |\rho_{i1}(t)|$  για κάθε  $t \geq 0$ .

Αν εφαρμόσουμε τον προαναφερθέντα καταναμημένο νόμο ελέγχου στους πράκτορες με δυναμική (3.13), τότε ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 3.2.** Έστω ένα πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από  $N$  πράκτορες, όπου κάθε πράκτορας  $i$  είναι ένα σύστημα καθαρής ανατροφοδότησης  $m$  τάξης με δυναμική που δίνεται από την (3.13). Αν:

1. ισχύουν οι Υποθέσεις 3.1, 3.2, 3.3, και 3.4,
2. εφαρμοστεί το καταναμημένο σχήμα ελέγχου που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3.3.2,
3. η παράμετρος σχεδίασης  $\beta$  επιλεγχθεί σύμφωνα με την συνθήκη iii) του Θεωρήματος 3.1,

τότε όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα και οι έξοδοι των πρακτόρων  $y_i = x_{i1}, \forall i \in \mathcal{V}$  επιτυγχάνουν διμερή συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση, δηλαδή

$$\|y(t) - \sigma \phi^T y(0)\|_2 \leq c_1 \|\underline{\rho}_1(t)\|_2, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

και

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \sigma \phi^T y(0)\|_2 \leq c_0 \|\underline{\rho}_{1\infty}\|_2,$$

όπου τα  $\sigma, \phi$  δίνονται στο Πρόρισμα 2.1 και τα  $c_0, c_1$  είναι θετικές σταθερές που εξαρτώνται από την τοπολογία του δικτύου επικοινωνίας και ορίζονται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.

*Απόδειξη.* Ορίζουμε τις κανονικοποιημένες μεταβλητές σφάλματος ως

$$\xi_{i1} := \frac{z_i}{\rho_{i1}(t)} \quad (3.19)$$

και

$$\xi_{ij} := \frac{x_{ij} - \hat{\alpha}_{i,j-1}(t, \bar{x}_{ij}, w_i)}{\rho_{ij}(t)}, \quad (3.20)$$

για κάθε  $j \in \{2, \dots, m\}$  και κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ . Σαν αποτέλεσμα μπορούμε να εκφράσουμε τους εικονικούς νόμους ελέγχου (3.15)-(3.17) ως

$$\hat{\alpha}_{ij}(t, \bar{x}_{ij}, w_i) = \alpha_{ij}(\xi_{ij}) = -k_{i1}T(\xi_{ij}), \quad (3.21)$$

για κάθε  $j \in \{1, \dots, m-1\}$ , και τον νόμο ελέγχου (3.18) ως

$$\widehat{u}_i(t, \bar{x}_{im}, w_i) = u_i(\xi_{im}) = -k_{im}T(\xi_{im}), \quad (3.22)$$

για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ . Χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.19), (3.20) οι μεταβλητές κατάστασης μπορούν να γραφτούν ως

$$\begin{aligned} x_{i1} &= \xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t) \\ x_{ij} &= \xi_{ij}\rho_{ij}(t) + \alpha_{i,j-1}(\xi_{i,j-1}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

για κάθε  $j \in \{2, \dots, m\}$  και κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ . Παραγωγίζοντας τις (3.19), (3.20) ως προς τον χρόνο και χρησιμοποιώντας τις (3.13), (3.23) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{i1} = h_{i1}(t, \xi_{i1}, \xi_{i2}, w_i, \xi_{k1}; k \in N_i) &= \frac{1}{\rho_{i1}(t)} \left[ f_{i1}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \right. \\ &\quad \left. \xi_{i2}\rho_{i2}(t) + \alpha_{i1}(\xi_{i1})) + \beta \dot{w}_i - \xi_{i1}\dot{\rho}_{i1}(t) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{ij} &= h_{ij}(t, \bar{\xi}_{i,j+1}, w_i, \xi_{k1}; k \in N_i) \\ &= \frac{1}{\rho_{ij}(t)} \left[ f_{ij}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \dots, \xi_{i,j+1}\rho_{i,j+1}(t) + \alpha_{ij}(\xi_{ij})) \right. \\ &\quad \left. - \frac{d\alpha_{i,j-1}}{d\xi_{i,j-1}} h_{i,j-1}(t, \bar{\xi}_{ij}, w_i, \xi_{k1}; k \in N_i) - \xi_{ij}\dot{\rho}_{ij}(t) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

για όλα τα  $j \in \{1, \dots, m-1\}$  και

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{im} &= h_{im}(t, \bar{\xi}_{im}, w_i, \xi_{k1}; k \in N_i) = \frac{1}{\rho_{im}(t)} \left[ f_{im}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \dots, \right. \\ &\quad \left. u_i(\xi_{im})) - \frac{d\alpha_{i,m-1}}{d\xi_{i,m-1}} h_{i,m-1}(t, \bar{\xi}_{im}, w_i, \xi_{k1}; k \in N_i) - \xi_{im}\dot{\rho}_{im}(t) \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ . Από την (3.4) και την (3.19) μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$$\dot{w} = h_w(t, w, \underline{\xi}_1) = \mathcal{L}(\underline{x}_1(0) - \beta w + R(t)\underline{\xi}_1) \quad (3.27)$$

όπου  $\mathcal{L}$  είναι η Λαπλασιανή μήτρα του γράφου και  $R = \text{diag}\{\rho_{i1}\}$ ,  $i \in \mathcal{V}$ . Τότε, για κάθε πράκτορα  $i$  η δυναμική του συνολικού κανονικοποιημένου διανύσματος σφάλματος  $\bar{\xi}_i := [\xi_{i1} \ \xi_{i2} \ \dots \ \xi_{im}]^T$  έχει την μορφή

$$\dot{\bar{\xi}}_i = h_i(t, w_i, \bar{\xi}_i, \xi_{k1}; k \in N_i) \quad (3.28)$$

και η δυναμική του συνολικού κανονικοποιημένου σφάλματος των πρακτόρων  $\bar{\xi} := [\bar{\xi}_1^T, \dots, \bar{\xi}_N^T]^T$  δίνεται από την

$$\dot{\bar{\xi}} = h_\xi(t, w, \bar{\xi}). \quad (3.29)$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε το επαυξημένο διάνυσμα

$$\xi_{aug} := [w^T \ \bar{\xi}^T]^T \quad (3.30)$$

για το οποίο έχουμε

$$\dot{\xi}_{aug} = \begin{bmatrix} h_w(t, w, \underline{\xi}_1) \\ h_\xi(t, w, \bar{\xi}) \end{bmatrix} = h(t, \xi_{aug}). \quad (3.31)$$

### Κεφάλαιο 3. Διμερής συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση

Έστω το σύνολο  $\Omega_{\xi_{aug}} := \underbrace{(-k, k) \times \dots \times (-k, k)}_{N \text{ times}} \times \underbrace{(-1, 1) \times \dots \times (-1, 1)}_{m \times N \text{ times}}$ , όπου

$k := (\rho_b / \beta \lambda_b) \|U\|_2 \|V^T\|_2 \left[ \|\underline{x}_1(0)\|_2 + \|\underline{\rho}_1(0)\|_2 \right] + 1$ . Θα αποδείξουμε ότι όλες οι λύσεις που εκκινούν στο  $\Omega_{\xi_{aug}}$  θα παραμείνουν εκεί για πάντα. Από το Θεώρημα 2.1 υπάρχει μοναδική μέγιστη λύση  $\xi_{aug} : [0, \tau_{\max}) \rightarrow \Omega_{\xi_{aug}}$  της (3.31), τέτοια ώστε  $\xi_{aug}(t) \in \Omega_{\xi_{aug}}, \forall t \in [0, \tau_{\max})$ . Γνωρίζουμε ότι

$$-1 \leq \xi_{ij} \leq 1, \quad (3.32)$$

για όλα τα  $i \in \mathcal{V}, j \in \{1, \dots, m\}$  και  $t \in [0, \tau_{\max})$ , επομένως η

$$\epsilon_{ij}(t) := \ln \left( \frac{1 + \xi_{ij}(t)}{1 - \xi_{ij}(t)} \right) \quad (3.33)$$

είναι καλά ορισμένη για κάθε  $i \in \mathcal{V}, j \in \{1, \dots, m\}$  και  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Για  $j = 1$  και τον πράκτορα  $i$  ορίζουμε την θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη συνάρτηση

$$V_{i1} := \frac{1}{2} \epsilon_{i1}^2. \quad (3.34)$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο και χρησιμοποιώντας την (3.24) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i1} = \frac{2\epsilon_{i1}}{(1 - \xi_{i1}^2(t)) \rho_{i1}(t)} & \left[ f_{i1}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \right. \\ & \left. \xi_{i2}\rho_{i2}(t) + \alpha_{i1}(\xi_{i1})) + \beta \dot{w}_i - \xi_{i1} \dot{\rho}_{i1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Λόγω της Υπόθεσης 3.2 και του Θεωρήματος Μέσης Τιμής μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} & f_{i1}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \xi_{i2}\rho_{i2}(t) + \alpha_{i1}(\xi_{i1})) = \\ & f_{i1}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \xi_{i2}\rho_{i2}(t)) \\ & + \alpha_{i1}(\xi_{i1}) \frac{\partial f_{i1}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi^*} \end{aligned} \quad (3.36)$$

όπου  $\phi^* = \lambda(\xi_{i2}\rho_{i2}(t) + \alpha_{i1}(\xi_{i1})) + (1 - \lambda)\xi_{i2}\rho_{i2}(t)$  για κάποιο  $\lambda \in (0, 1)$ . Χρησιμοποιώντας αυτό και την (3.21) στην (3.35) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i1} = \frac{2\epsilon_{i1}}{(1 - \xi_{i1}^2(t)) \rho_{i1}(t)} & \left[ f_{i1}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \xi_{i2}\rho_{i2}(t)) \right. \\ & \left. + \beta \dot{w}_i - \xi_{i1} \dot{\rho}_{i1}(t) - k_{i1} \epsilon_{i1} \frac{\partial f_{i1}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi^*} \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Τώρα θα μελετήσουμε την συνάρτηση

$$\begin{aligned} \Lambda(t, \xi_{i1}, \xi_{i2}, w_i, \xi_{k1}; k \in N_i) := & f_{i1}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \xi_{i2}\rho_{i2}(t)) \\ & + \beta \dot{w}_i - \xi_{i1} \dot{\rho}_{i1}(t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Οι συναρτήσεις  $f_{i1}$  και  $\dot{w}_i$  είναι συνεχείς και έχουν ορίσματα που παίρνουν τιμές σε συμπαγή σύνολα, καθώς για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ , τα  $\xi_{i1}, \xi_{i2}, w_i$  και  $\xi_{k1}, \forall k \in N_i$  είναι φραγμένα από το θεώρημα ύπαρξης και δεν έχουν ρητή εξάρτηση από τον χρόνο, εκτός από τις  $\rho_{i1}, \rho_{i2}, \dot{\rho}_{i1}$ , οι οποίες είναι φραγμένες εκ κατασκευής. Επομένως από το

Θεώρημα Αχραίων Τιμών για την  $\Lambda(t, \xi_{i1}, \xi_{i2}, w_i, \xi_{k1}; k \in N_i)$ , υπάρχει μια σταθερά  $F_{i1} > 0$ , τέτοια ώστε

$$|f_{i1}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \xi_{i2}\rho_{i2}(t)) + \beta \dot{w}_i - \xi_{i1}\dot{\rho}_{i1}(t)| \leq F_{i1} \quad (3.39)$$

για κάθε  $t$  στο  $[0, \tau_{\max})$ . Εφαρμόζοντας στην (3.37), την εξίσωση (3.39), την Υπόθεση 3.2, την (3.32) και το γεγονός ότι  $\rho_{i1}(t) > \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{i1}(t) > 0$  για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ , εκ κατασκευής, έχουμε ότι

$$\dot{V}_{i1} \leq \frac{2}{(1 - \xi_{i1}^2(t)) \rho_{i1}(t)} (F_{i1} |\epsilon_{i1}| - k_{i1} b_{i1} \epsilon_{i1}^2) \quad (3.40)$$

για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Επομένως η  $\dot{V}_{i1}$  είναι αρνητικά ορισμένη όταν  $|\epsilon_{i1}(t)| > \frac{F_{i1}}{k_{i1} b_{i1}}$  και σαν αποτέλεσμα

$$|\epsilon_{i1}(t)| \leq E_{i1} := \max \left\{ |\epsilon_{i1}(0)|, \frac{F_{i1}}{k_{i1} b_{i1}} \right\}, \quad \forall t \in [0, \tau_{\max}). \quad (3.41)$$

Κατά συνέπεια, από την (3.21) ο εικονικός έλεγχος  $\alpha_{i1}$  παραμένει φραγμένος για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Από αυτό και την (3.23) καταλήγουμε ότι το  $x_{i2}$  επίσης παραμένει φραγμένο για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Επιπλέον, από τον ορισμό του  $\epsilon_{ij}$  στην (3.33), χρησιμοποιώντας την αντίστροφη λογαριθμική συνάρτηση για  $t \in [0, \tau_{\max})$ , παίρνουμε

$$-1 < \frac{e^{-E_{i1}} - 1}{e^{-E_{i1}} + 1} =: \xi_{i1}^{\min} \leq \xi_{i1}(t) \leq \xi_{i1}^{\max} := \frac{e^{E_{i1}} - 1}{e^{E_{i1}} + 1} < 1. \quad (3.42)$$

Παραγωγίζοντας την  $\alpha_{i1}$  και κάνοντας χρήση της (3.24), υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{i1} &= \frac{d\alpha_{i1}}{d\xi_{i1}} h_{i1}(t, \xi_{i1}, \xi_{i2}, w_i, \xi_{k1}; k \in N_i) \\ &= -\frac{2k_{i1}}{(1 - \xi_{i1}^2(t)) \rho_{i1}(t)} \left[ f_{i1}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \xi_{i2}\rho_{i2}(t) + \alpha_{i1}(\xi_{i1})) \right. \\ &\quad \left. + \beta \dot{w}_i - \xi_{i1}\dot{\rho}_{i1}(t) \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

και με τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε για να δείξουμε ότι η (3.35) και η (3.42) παραμένουν φραγμένες, καταλήγουμε ότι η  $\dot{\alpha}_{i1}$  παραμένει φραγμένη για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Για  $2 \leq j \leq m$ , χρησιμοποιούμε τις  $V_{ij} := \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^2$  και αντίστοιχα επιχειρήματα, για να πάρουμε:

$$|\epsilon_{ij}(t)| \leq E_{ij} := \max \left\{ |\epsilon_{ij}(0)|, \frac{F_{ij}}{k_{ij} b_{ij}} \right\}, \quad \forall t \in [0, \tau_{\max}) \quad (3.44)$$

για κάποια σταθερά  $F_{ij} > 0$ , όπου

$$\begin{aligned} &\left| f_{ij}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \dots, \xi_{i,j+1}\rho_{i,j+1}(t)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{d\alpha_{i,j-1}}{d\xi_{i,j-1}} h_{i,j-1}(t, \bar{\xi}_{ij}, w_i, \xi_{k1}; k \in N_i) - \xi_{ij}\dot{\rho}_{ij}(t) \right| \leq F_{ij} \end{aligned} \quad (3.45)$$

για όλα τα  $j \in \{2, \dots, m-1\}$ , και

$$\begin{aligned} &\left| f_{im}(\xi_{i1}\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t), \dots, \xi_{im}\rho_{im}(t) + \alpha_{i,m-1}(\xi_{i,m-1}), 0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{d\alpha_{i,m-1}}{d\xi_{i,m-1}} h_{i,m-1}(t, \bar{\xi}_{im}, w_i, \xi_{k1}; k \in N_i) - \xi_{im}\dot{\rho}_{im}(t) \right| \leq F_{im}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

### Κεφάλαιο 3. Διμερής συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση

για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Σε αντιστοιχία με την (3.42) έχουμε επίσης ότι

$$-1 < \frac{e^{-E_{ij}} - 1}{e^{-E_{ij}} + 1} =: \xi_{ij}^{\min} \leq \xi_{ij}(t) \leq \xi_{ij}^{\max} := \frac{e^{E_{ij}} - 1}{e^{E_{ij}} + 1} < 1, \quad (3.47)$$

για όλα τα  $j \in \{2, \dots, m\}$  και κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Σαν αποτέλεσμα, όλοι οι εικονικοί νόμοι ελέγχου  $\alpha_{ij}(t)$ , οι καταστάσεις  $x_{i,j+1}(t)$ ,  $j \in \{2, \dots, m\}$  και ο νόμος ελέγχου  $u_i(t)$  παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Επειδή η παραπάνω ανάλυση ισχύει για κάθε πράκτορα  $i$ , τα αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν για κάθε  $i \in \mathcal{V}$ . Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (3.19) στην (3.5) μπορούμε να γράψουμε το συνολικό διάνυσμα  $w(t)$  στη μορφή

$$w(t) = U \int_0^t e^{-\beta \Sigma(t-s)} \Sigma V^T (\underline{x}_1(0) + R(s) \underline{\xi}_1(s)) ds \quad (3.48)$$

και από το γεγονός ότι κάθε  $\rho_{ij}$  είναι φραγμένη από τα πάνω από την αρχική της συνθήκη και χρησιμοποιώντας την (3.42), έχουμε ότι

$$\|w(t)\|_2 \leq \|U\|_2 \|\Sigma\|_2 \|V^T\|_2 (\|\underline{x}_1(0)\|_2 + \|\underline{\rho}_1(0)\|_2) \int_0^t \|e^{-\beta \Sigma(t-s)}\|_2 ds. \quad (3.49)$$

Αφού υπάρχουν θετικές σταθερές  $\rho_b$  και  $\lambda_b$  τέτοιες ώστε  $\|e^{-\Sigma t}\|_2 \leq \rho_b e^{-\lambda_b t}$ , η (3.49) δίνει

$$\|w(t)\|_2 \leq \rho_b \|U\|_2 \|\Sigma\|_2 \|V^T\|_2 (\|\underline{x}_1(0)\|_2 + \|\underline{\rho}_1(0)\|_2) \int_0^t e^{-\beta \lambda_b(t-s)} ds \quad (3.50)$$

και επομένως

$$-(k-1)(1 - e^{-\beta \lambda_b t}) \leq w_i(t) \leq (k-1)(1 - e^{-\beta \lambda_b t}) \quad (3.51)$$

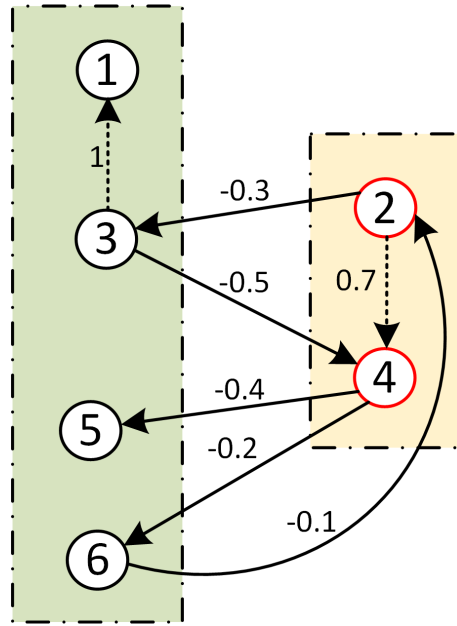
για κάθε  $i \in \mathcal{V}$ ,  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Οι ανισότητες (3.42), (3.47) για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$  και η (3.51) δίνουν ότι  $\xi_{aug}(t) \in \Omega_{\xi_{aug}^t}$  για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ , όπου το

$$\Omega_{\xi_{aug}^t} := \underbrace{[-k+1, k-1] \times \dots \times [-k+1, k-1]}_{N \text{ times}} \times \underbrace{[\xi_{11}^{\min}, \xi_{11}^{\max}] \times [\xi_{12}^{\min}, \xi_{12}^{\max}] \times \dots \times [\xi_{mN}^{\min}, \xi_{mN}^{\max}]}_{m \times N \text{ times}} \quad (3.52)$$

είναι ένα μη κενό και συμπαγές σύνολο. Υποθέτοντας ότι  $\tau_{\max} < \infty$  και αφού  $\Omega_{\xi_{aug}^t} \subset \Omega_{\xi_{aug}}$ , από το Θεώρημα 2.6, προκύπτει ότι υπάρχει χρονική στιγμή  $t' \in [0, \tau_{\max})$  τέτοια ώστε  $\xi_{aug}(t') \notin \Omega_{\xi_{aug}}$ , το οποίο είναι άτοπο. Επομένως  $\tau_{\max} = \infty$ . Σαν αποτέλεσμα η (3.42) ισχύει για κάθε  $t \in [0, \infty)$ , το οποίο σημαίνει ότι  $|z_i(t)| < \rho_{i1}(t)$ , για κάθε  $t \in [0, \infty)$  και όλους τους πράκτορες  $i \in \mathcal{V}$ . Επικαλούμενοι το Θεώρημα 3.1, οι έξοδοι των πρακτόρων επιτυγχάνουν διμερή συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση.  $\square$

## 3.4 Προσομοιώσεις

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα προσομοίωσης για τη διμερή συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση σε χειριστές μονής σύνδεσης. Θεωρούμε  $N = 6$



Σχήμα 3.1: Η τοπολογία του δικτύου επικοινωνίας

χειριστές μονής σύνδεσης με δυναμική

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= x_{i2} \\ \dot{x}_{i2} &= -\frac{M_i g l_i}{J_i} \sin(x_{i1}) - \frac{D_i}{J_i} x_{i2} + u_i \\ y_i &= x_{i1}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

για κάθε  $i \in \mathcal{V}$ , όπου  $x_{i1}$  είναι η θέση γωνίας,  $x_{i2}$  η γωνιακή ταχύτητα,  $J_i$  είναι η συνολική αδράνεια περιστροφής,  $D_i$  είναι ο συνολικός συντελεστής απόσβεσης,  $M_i$  η συνολική μάζα κάθε σύνδεσης,  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και  $l_i$  είναι η απόσταση από τον άξονα άρθρωσης ως το κέντρο μάζας της σύνδεσης. Η τοπολογία του δικτύου επικοινωνίας απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1 και περιγράφεται από την Λαπλασιανή μήτρα του γράφου

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7 & 0.5 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Για την συγκεκριμένη τοπολογία δικτύου, οι παράμετροι  $\lambda_b, \lambda_{\max}(P)$  παίρνουν τις τιμές  $\lambda_b = 0.3$  και  $\lambda_{\max}(P) = 1.64$ . Επιλέγουμε δύο διαφορετικές συναρτήσεις επίδοσης για όλους τους πράκτορες όπως φαίνονται στα Σχήματα 3.2, 3.5 με παράμετρο  $\nu = 0.5$  και  $\rho_{i1\infty} = 0.01$ . Για αυτήν την επιλογή του  $\nu$  και την συγκεκριμένη τοπολογία δικτύου, η συνθήκη iii) του Θεωρήματος 3.1 ισχύει αν  $\beta > 3.28$ . Παρουσιάζουμε διάφορες περιπτώσεις προσομοίωσης ώστε να αναδείξουμε την επιρροή της παραμέτρου σχεδίασης  $\beta$  και των κερδών ελέγχου  $k_{ij}$  στο σφάλμα διμερούς συμφωνίας.

Αρχικά, επιλέγουμε  $\beta = 3.3$  και διαφορετικές τιμές για τα κέρδη του εικονικών και πραγματικών νόμων ελέγχου  $k_{ij} = k$  για όλα τα  $i, j$  με  $k \in \{3, 7, 15, 30\}$ . Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.2-3.4. Για μεγαλύτερες

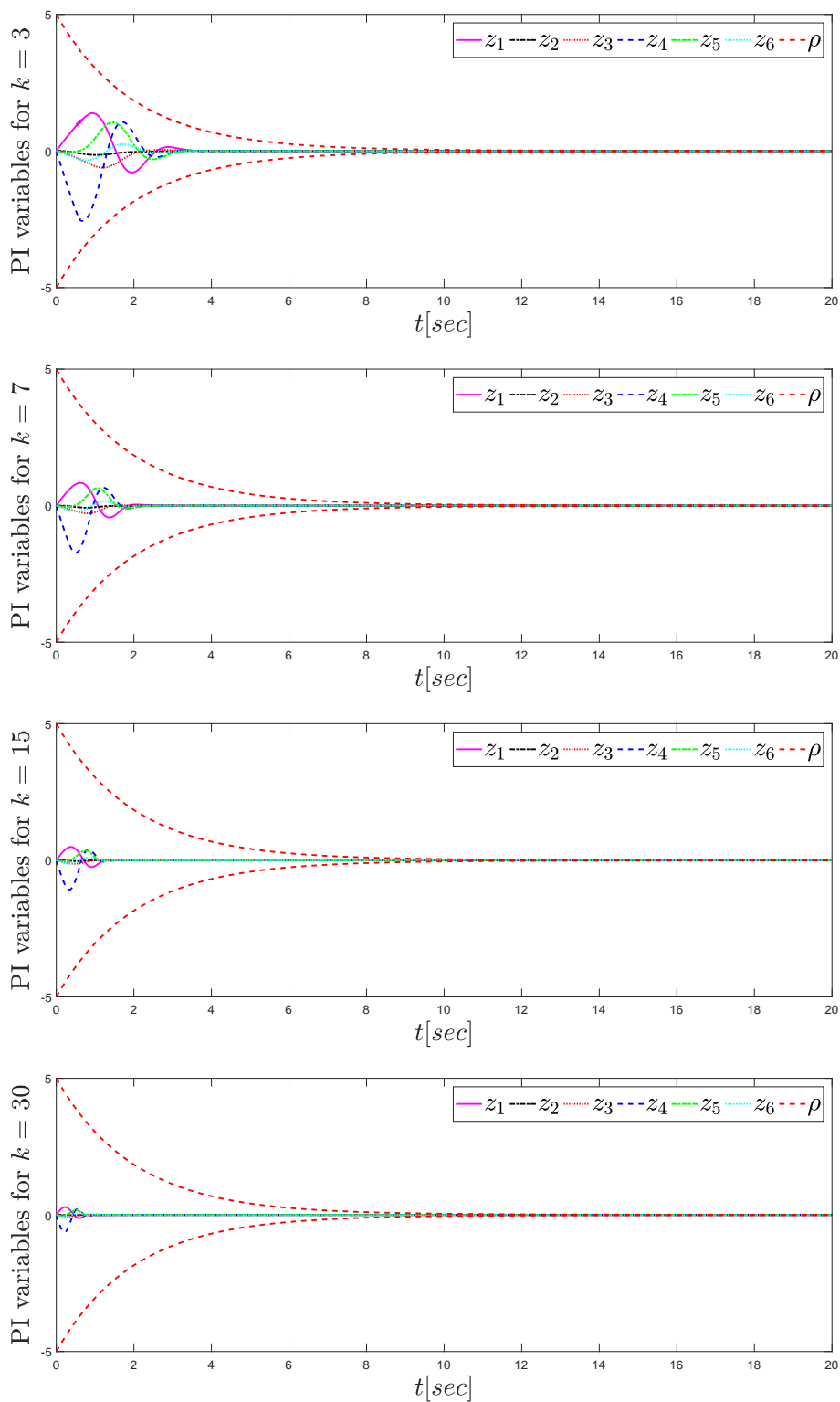
τιμές του  $k$ , παρατηρούμε μειωμένες μεταβατικές τιμές για τα  $z_i$  οι οποίες έχουν σαν αποτέλεσμα πιο ομαλή σύγκλιση προς την τιμή της διμερούς συμφωνίας με το κόστος αυξημένης προσπάθειας ελέγχου  $u_i$ .

Για το επόμενο σενάριο, διατηρούμε σταθερά  $k_{ij} = k = 15$  για όλα τα  $i, j$  και δοκιμάζουμε διαφορετικές τιμές για το  $\beta \in \{1, 3.3, 10, 16\}$ . Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.5-3.7. Συμπεριλάβαμε την περίπτωση  $\beta = 1$  για να δείξουμε ότι διμερής συμφωνία επιτυγχάνεται ακόμα και αν η συνθήκη iii) του Θεωρήματος 3.1 δεν ισχύει, όπως εξηγούμε στην Παρατήρηση 3.3. Από τα Σχήματα 3.5-3.7 παρατηρούμε ότι μεγαλύτερες τιμές του  $\beta$  έχουν σαν αποτέλεσμα πιο γρήγορο ρυθμό σύγκλισης και βελτιωμένη επίδοση στη μεταβατική κατάσταση με το κόστος αυξημένης προσπάθειας ελέγχου  $u_i$ .

## 3.5 Συμπεράσματα

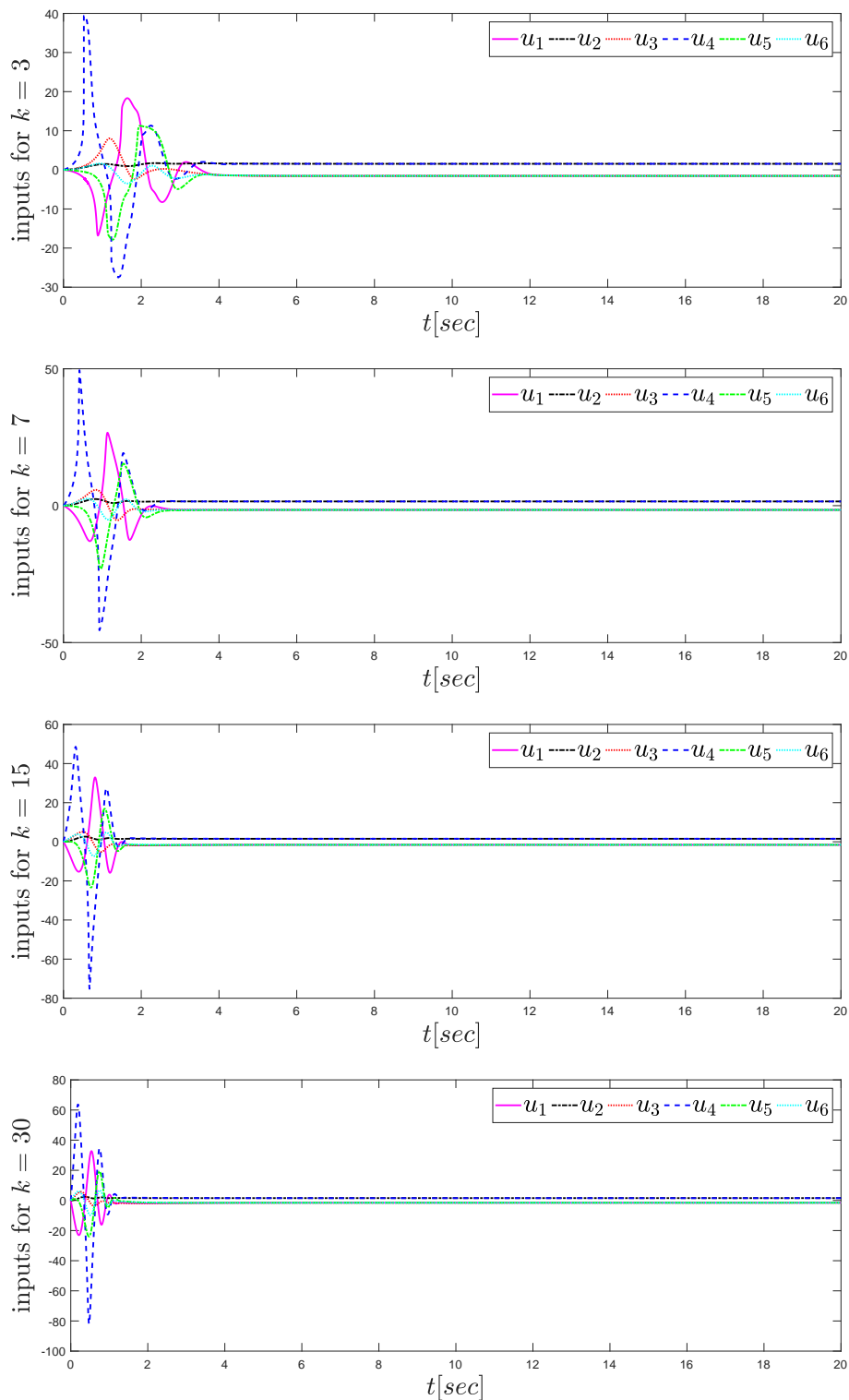
Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε μια νέα προσέγγιση για την επίλυση του προβλήματος της διμερούς συμφωνίας με προκαθορισμένη επίδοση για μη γραμμικούς πράκτορες με δίκτυο επικοινωνίας που περιγράφεται από προσημασμένο κατευθυνόμενο γράφο. Η προσέγγιση αυτή βασίστηκε στην εισαγωγή ενός αναλογικού και ολοκληρωτικού (PI) μετασχηματισμού για που χρησιμοποιεί τις εξόδους των πρακτόρων και ανάγει το πρόβλημα της διμερούς συμφωνίας χωρίς αρχηγό με προκαθορισμένη επίδοση σε ένα απλούστερο πρόβλημα ρύθμισης με προκαθορισμένη επίδοση. Ένας αλγόριθμος μικρής πολυπλοκότητας στο πνεύμα των [56], [57] παρέχεται για την επίλυση του προαναφερθέντος προβλήματος ρύθμισης. Η προτεινόμενη μεθοδολογία εγγυάται ότι όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα και την προκαθορισμένη επίδοση μεταβατικής και τελικής κατάστασης για το σφάλμα διμερούς συμφωνίας.

□

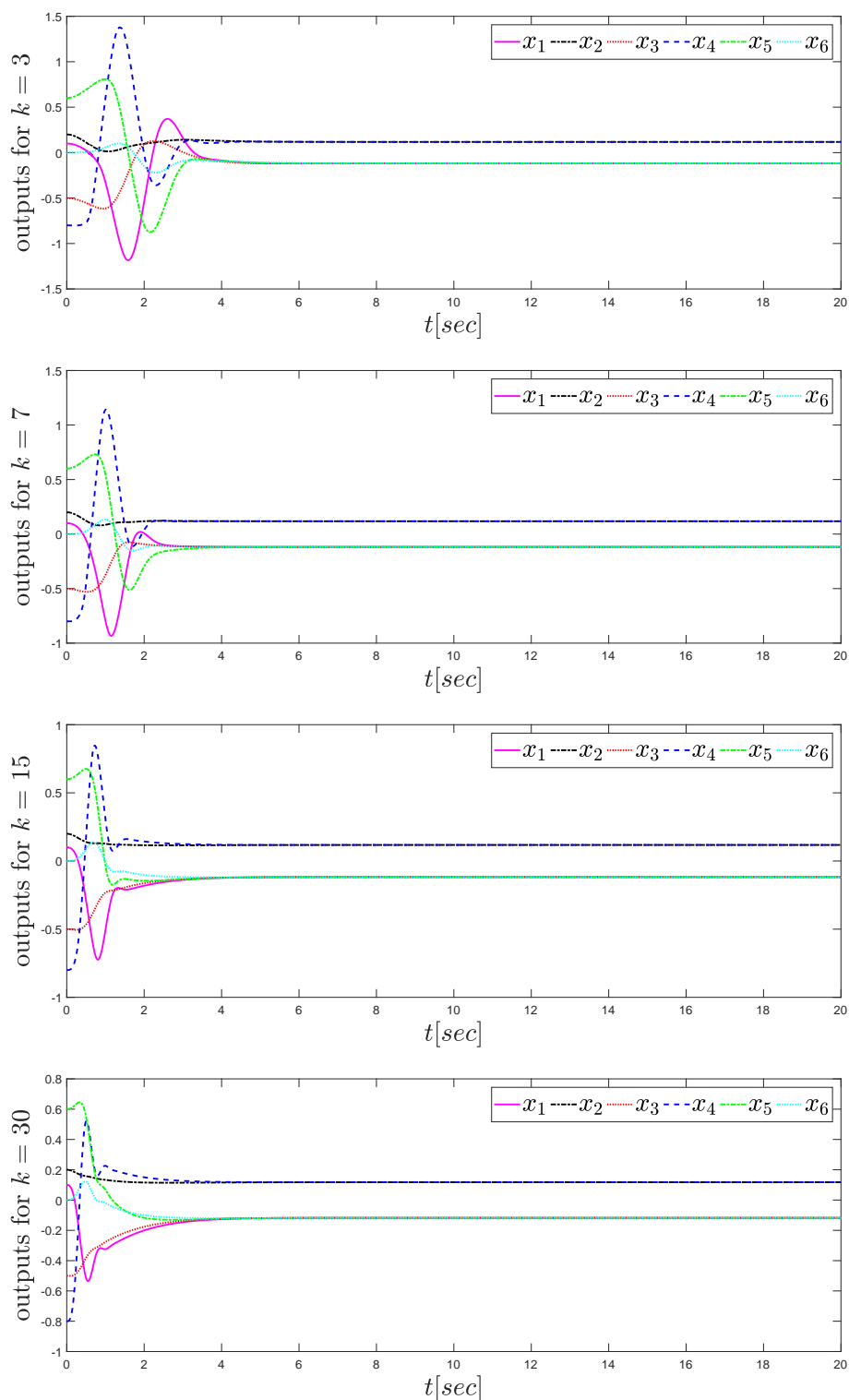


Σχήμα 3.2: Οι μεταβλητές PI για  $\beta = 3.3$  για μεταβλητό κέρδος  $k$

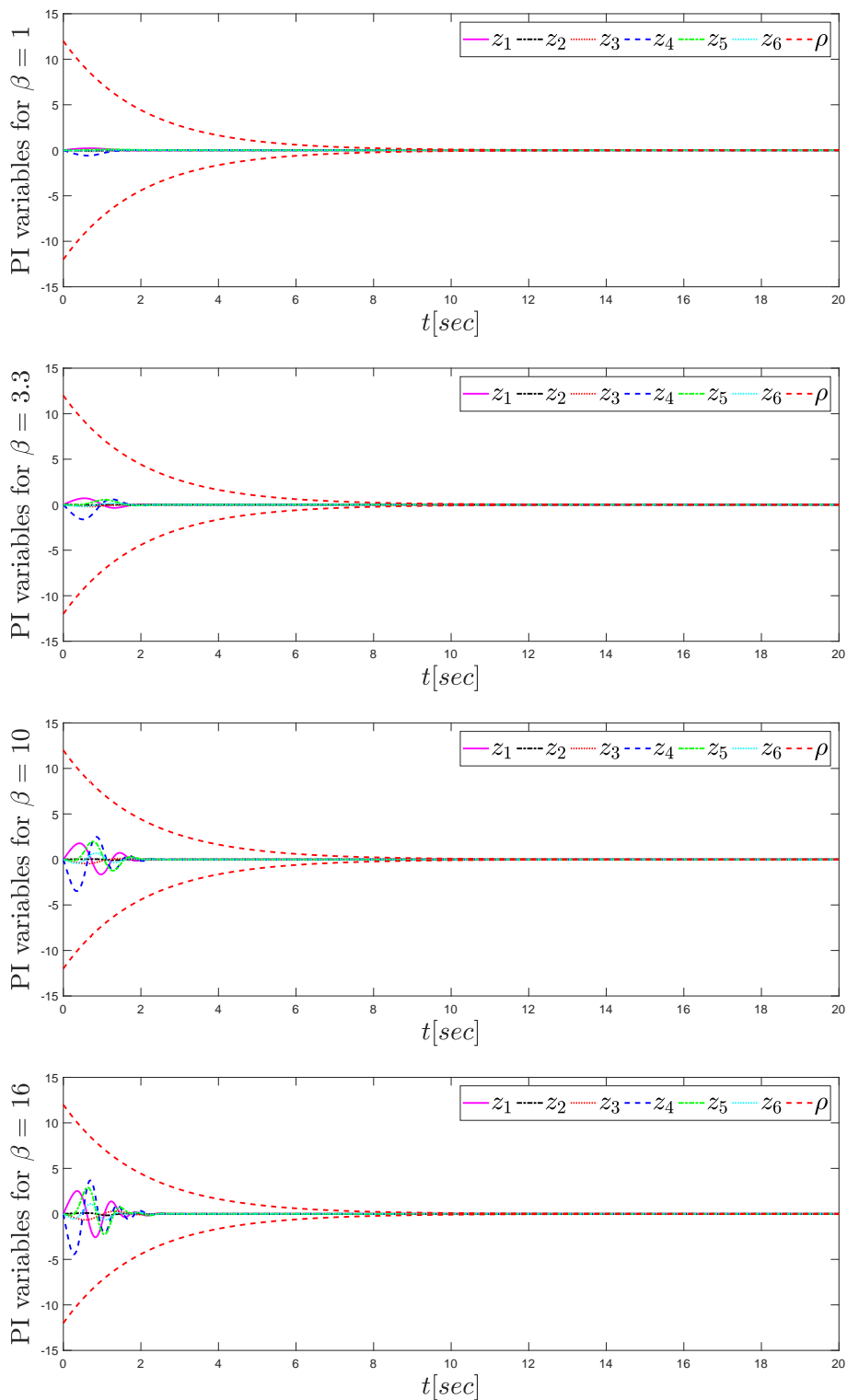




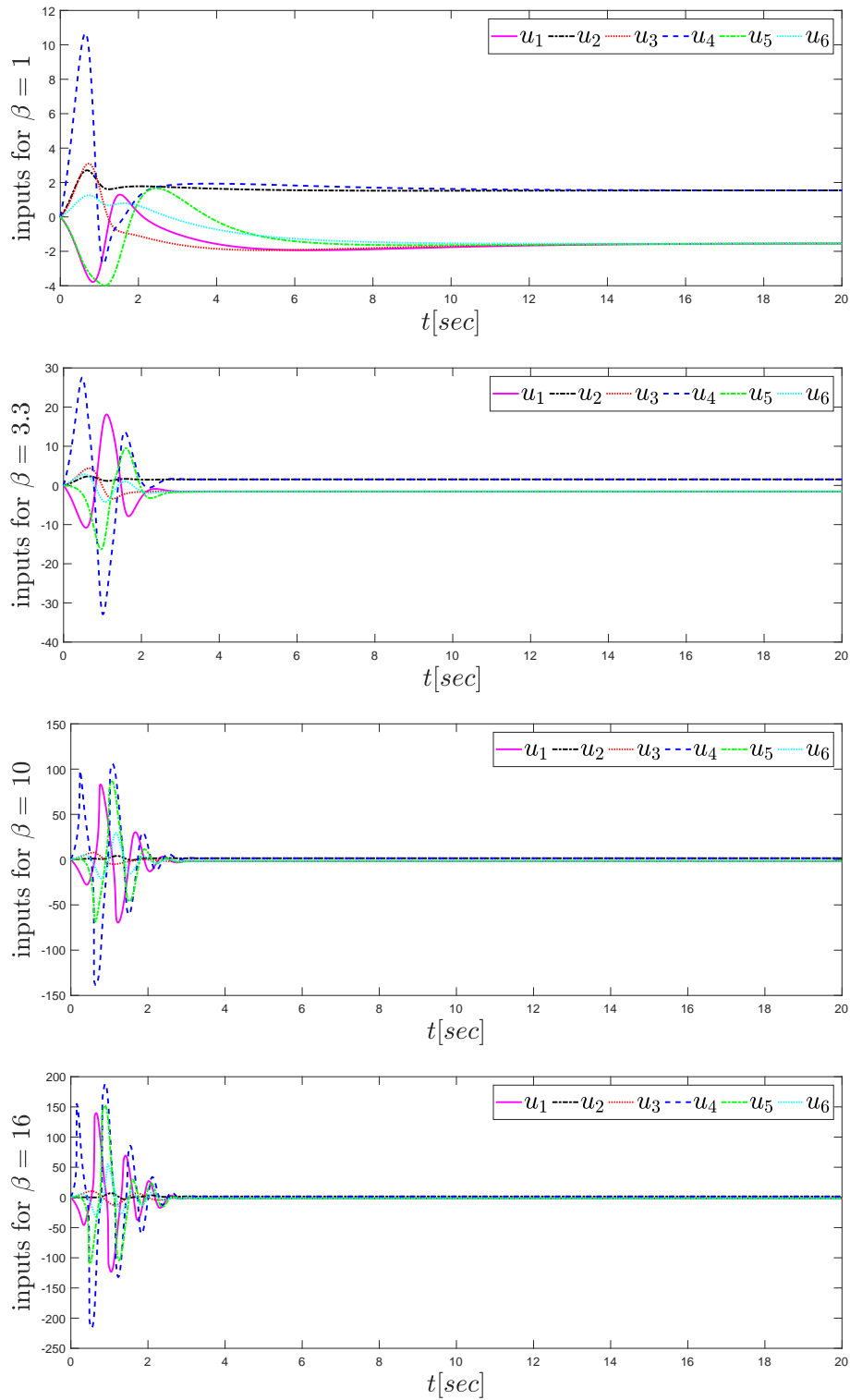
Σχήμα 3.3: Οι είσοδοι των πρακτόρων  $\beta = 3.3$  για μεταβλητό κέρδος  $k$



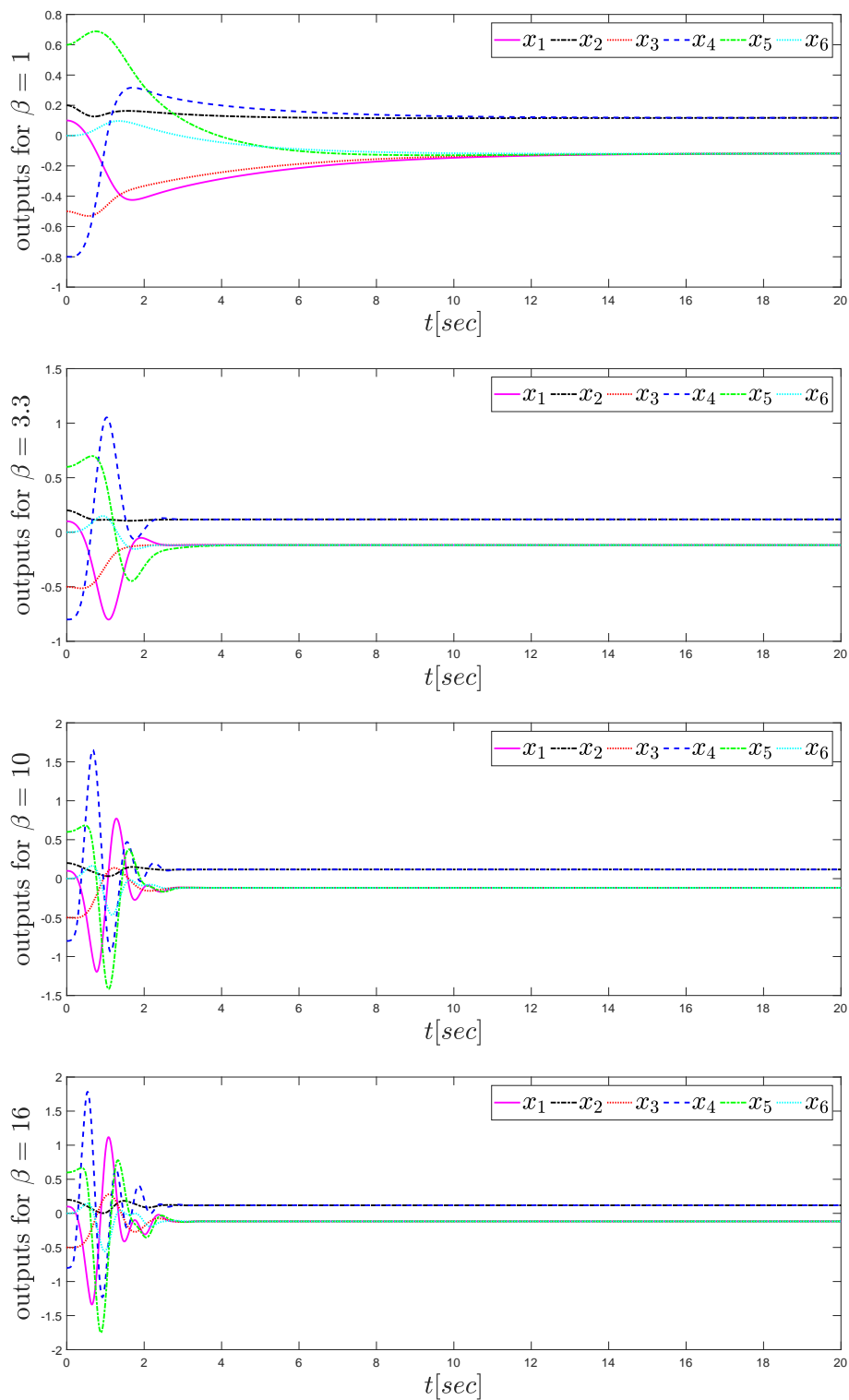
Σχήμα 3.4: Οι έξοδοι των πρακτόρων για  $\beta = 3.3$  για μεταβλητό κέρδος  $k$



Σχήμα 3.5: Οι μεταβλητές PI για κέρδος  $k = 15$  και μεταβλητή παράμετρο  $\beta$



Σχήμα 3.6: Οι εισοδοι των πρακτόρων για κέρδος  $k = 15$  και μεταβλητή παράμετρο  $\beta$



Σχήμα 3.7: Οι έξοδοι των πρακτόρων για κέρδος  $k = 15$  και μεταβλητή παράμετρο  $\beta$



## Κεφάλαιο 4

# Συμφωνία με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία

Σε αυτό το κεφάλαιο προτείνουμε έναν αναλογικό και χρονικά υστερημένα ολοκληρωτικό (PdI) μετασχηματισμό που ανάγει το πρόβλημα του συνεργατικού ελέγχου με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία σε ένα απλούστερο πρόβλημα ρύθμισης. Ο μετασχηματισμός PdI επιτρέπει την χρήση τεχνικών κλασικού ελέγχου για την επίλυση προβλημάτων συμφωνίας χωρίς αρχηγό. Ακολουθώντας αυτήν την προσέγγιση, μελετάμε για πρώτη φορά το πρόβλημα της συμφωνίας χωρίς αρχηγό για πολυπρακτορικά συστήματα με άγνωστες δυναμικές σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία και τις καταστάσεις και άγνωστες διαταραχές. Θεωρούμε μια γενική μορφή στις χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις που περιλαμβάνει χρονικά μεταβαλλόμενες και κατανομημένες υστερήσεις. Για την ανάλυση συστημάτων με τέτοιου είδους χρονικές υστερήσεις είναι αναγκαία η χρήση του φορμαλισμού των συναρτησιακών διαφορικών εξισώσεων με χρονική υστέρηση. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος εγγυάται ότι όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα και ότι το πολυπρακτορικό σύστημα επιτυγχάνει συμφωνία με προκαθορισμένο σφάλμα τελικής κατάστασης. Παρέχονται προσομοιώσεις σε ένα σμήνος μη επανδρωμένων ιπτάμενων οχημάτων (UAVs) που επικυρώνουν την θεωρητική ανάλυση. Τα αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου είναι δημοσιευμένα στο άρθρο [104].

### 4.1 Ορισμός του προβλήματος

Θα μελετήσουμε ένα πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από  $N$  πράκτορες με εξόδους  $y_i \in \mathbb{R}$ . Το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι ο σχεδιασμός ενός συνεχούς, κατανομημένου ελεγκτή για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ , τέτοιου ώστε οι εξόδοι των πρακτόρων να επιτυγχάνουν προσεγγιστική συμφωνία, δηλαδή  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - y_j(t)| \leq \epsilon$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$  όπου το  $\epsilon$  είναι μια παράμετρος που μπορούμε να κάνουμε αυθαίρετα μικρή μέσω της κατάλληλης επιλογής παραμέτρων της σχεδίασης.

Θα λάβουμε επίσης υπόψιν χρονικές υστερήσεις στο δίκτυο επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων και για αυτό κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση.

**Υπόθεση 4.1.** Υπάρχει κάποια χρονική υστέρηση  $\tau > 0$  τέτοια ώστε την χρονική στιγμή  $t$  οι χρονικά υστερημένες αποστάσεις των εξόδων  $y_i(t-\tau) - y_k(t-\tau)$  να γίνονται διαθέσιμες στον πράκτορα  $i \forall k \in N_i$ ,  $i \in \mathcal{V}$ , δηλαδή ο πράκτορας  $i$  πληροφορείται για

την απόσταση του από τον  $k$ -οστό του γείτονα,  $y_i - y_k$ , με μια χρονική υστέρηση  $\tau$ .

## 4.2 Μετασχηματισμός PdI για συμφωνία με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε νέες μεταβλητές που ανάγουν το πρόβλημα της συμφωνίας με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία σε πρόβλημα ρύθμισης των νέων μεταβλητών. Για τον λόγο αυτό εισάγουμε για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$  τις νέες μεταβλητές

$$z_i := \begin{cases} 0, & t \in [-d, 0) \\ y_i(t) - y_i(0) + \beta w_i(t - \tau), & t \in [0, \infty), \end{cases} \quad (4.1)$$

όπου  $z_i := g_{z_i}(y_i, w_i(t - \tau))$ ,

$$w_i(t) := \begin{cases} 0, & t \in [-d, 0) \\ \int_0^t \sum_{k \in N_i} a_{ik} (y_i(s) - y_k(s)) ds, & t \in [0, \infty), \end{cases} \quad (4.2)$$

το  $y_i$  είναι η έξοδος του  $i$ -οστού πράκτορα, το  $\beta > 0$  είναι παράμετρος της σχεδίασης, το  $\tau \geq 0$  είναι μία κοινή χρονική υστέρηση στην επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων και το  $d$  είναι μια θετική σταθερά τέτοια ώστε  $d \geq 2\tau$ . Οι νέες μεταβλητές που ορίζονται από την (4.1) ονομάζονται αναλογικές και χρονικά υστερημένα ολοκληρωτικές (PdI) μεταβλητές του σφάλματος συμφωνίας καθώς κάθε  $z_i$  περιλαμβάνει τον αναλογικό όρο  $y_i(t) - y_i(0)$  και το χρονικά υστερημένο ολοκλήρωμα της σταθμισμένης συνολικής διαφωνίας του πράκτορα με τους γείτονές του  $w_i(t - \tau)$ .

**Παρατήρηση 4.1.** Από την Υπόθεση 4.1 η μεταβλητή  $w_i(t - \tau)$  είναι γνωστή στον πράκτορα  $i$  την χρονική στιγμή  $t$  και μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατάλληλα στον ορισμό της μεταβλητής PdI  $z_i$ . Αυτό προκύπτει επειδή τα  $w_i(t - \tau)$  μπορούμε να τα δούμε ως εξόδους ενός ολοκληρωτή με είσοδο  $\sum_{k \in N_i} a_{ik} (y_i(t - \tau) - y_k(t - \tau)) u_s(s - \tau)$ , δηλαδή

$$w_i(t - \tau) = \int_0^t \sum_{k \in N_i} a_{ik} (y_i(s - \tau) - y_k(s - \tau)) u_s(s - \tau) ds$$

όπου το  $u_s(t)$  είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

Για την επικοινωνία των πρακτόρων κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση.

**Υπόθεση 4.2.** Το δίκτυο επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων  $i \in \mathcal{V}$  περιγράφεται από ένα κατευθυνόμενο γράφο  $\mathcal{G}$  ο οποίος περιέχει κατευθυνόμενο δέντρο που τον εκτείνει. Μόνο οι σχετικές αποστάσεις των εξόδων των πρακτόρων διαμοιράζονται στο δίκτυο επικοινωνίας και δεν χρειάζεται η διαμοίραση περαιτέρω πληροφορίας (εσωτερικές καταστάσεις των πρακτόρων).

Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε ικανές συνθήκες για την ισοδυναμία του προβλήματος της συμφωνίας όπως ορίστηκε στην Παράγραφο 4.1 και την ρύθμιση των νέων μεταβλητών  $z_i$ . Το θεώρημα αυτό γενικεύει το Λήμμα 2 του [40] για κατευθυνόμενους γράφους που περιέχουν δέντρο που τους εκτείνει. Το αποτέλεσμα είναι αρκετά γενικό καθώς δεν υποθέτει συγκεκριμένες δυναμικές για τους πράκτορες όπως αυτές που ορίστηκαν στην (4.24).



**Θεώρημα 4.1.** Έστω ένα σύνολο που αποτελείται από  $N$  πράκτορες με εξόδους  $y_i : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathcal{V}$ . Αν ισχύουν τα εξής:

- i) ισχύει η υπόθεση 4.2,
- ii) οι  $y_i(t)$  είναι συνεχείς για όλα τα  $i \in \mathcal{V}$ .
- iii) οι νέες  $PdI$  μεταβλητές  $z_i$ , που ορίζονται από τις (4.1),(4.2), είναι φραγμένες, με  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |z_i(t)| \leq \rho_\infty$  για όλα τα  $i \in \mathcal{V}$ , όπου το  $\rho_\infty$  είναι μια θετική σταθερά,
- iv) η παράμετρος σχεδίασης  $PdI$   $\beta$  επιλεγθεί έτσι ώστε  $\beta\tau < \min_{2 \leq i \leq N} \frac{\Re(\lambda_i(\mathcal{L}))}{|\lambda_i(\mathcal{L})|^2}$ , όπου το  $\tau$  είναι η χρονική υστέρηση στην επικοινωνία και η  $\mathcal{L}$  είναι η Λαπλασιανή μήτρα του υποκείμενου γράφου,

τότε ισχύει ότι

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - y_k(t)| \leq \sqrt{2}c\rho_\infty \quad (4.3)$$

για όλα τα  $i, k \in \mathcal{V}$  και

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \mathbf{1}\phi^T y(0)\|_2 \leq c\rho_\infty \quad (4.4)$$

όπου η σταθερά  $c > 0$  ορίζεται στην απόδειξη.

*Απόδειξη.* Αν ορίσουμε το διάνυσμα  $w(t) := [w_1(t), \dots, w_N(t)]^T$  τότε μπορούμε να γράψουμε

$$w(t) := \begin{cases} \int_0^t \mathcal{L}y(\sigma)d\sigma, & t \geq 0 \\ 0, & t \in [-d, 0) \end{cases} \quad (4.5)$$

όπου  $y := [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ . Τότε, ισχύει ότι

$$\dot{w}(t) = \mathcal{L}y(t) = -\beta\mathcal{L}w(t - \tau) + \mathcal{L}(z(t) + \underline{x}_1(0)) \quad (4.6)$$

για όλα τα  $t \geq 0$ . Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στη (4.6) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $w(0) = 0$  παίρνουμε ότι

$$W(s) = (s\mathbb{I}_N + \beta\mathcal{L}e^{-\tau s})^{-1} \mathcal{L} \left( Z(s) + \frac{\underline{x}_1(0)}{s} \right) \quad (4.7)$$

όπου  $W(s)$  και  $Z(s)$  είναι ο μετασχηματισμός Laplace του  $w(t)$  και  $z(t)$ , αντίστοιχα. Από την (2.1) είναι εύκολο να δειχθεί ότι

$$(s\mathbb{I}_N + \beta\mathcal{L}e^{-\tau s})^{-1} = [U \quad \mathbf{1}] \begin{bmatrix} (s\mathbb{I}_{N-1} + \beta\Sigma e^{-s\tau})^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T \\ \phi^T \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.1), (4.8) και τις ιδιότητες  $\phi^T U = 0$ ,  $V^T U = \mathbb{I}_{N-1}$  καταλήγουμε στην

$$(s\mathbb{I}_N + \beta\mathcal{L}e^{-\tau s})^{-1} \mathcal{L} = U (s\mathbb{I}_{N-1} + \beta\Sigma e^{-s\tau})^{-1} \Sigma V^T. \quad (4.9)$$

Ορίζουμε τώρα τον πίνακα συνάρτηση μεταφοράς  $G(s) := U (s\mathbb{I}_{N-1} + \beta\Sigma e^{-s\tau})^{-1} \Sigma V^T$  και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του,  $g(t)$ . Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο

μετασχηματισμό Laplace στην (4.7) και χρησιμοποιώντας την (4.9) η διανυσματική συνάρτηση  $w(t)$  παίρνει την μορφή

$$w(t) = w_a(t) + w_b(t) \quad (4.10)$$

όπου

$$w_a(t) := \int_0^t g(t-s)z(s)ds \quad (4.11)$$

$$w_b(t) := \int_0^t g(s)ds \underline{x}_1(0). \quad (4.12)$$

Από τον ορισμό του  $G(s)$ , οι πόλοι του  $G(s)$  είναι οι ρίζες του  $\det[s\mathbb{I}_{N-1} + \beta\Sigma e^{-\tau s}] = 0$ . Αφού

$$\det(s\mathbb{I}_{N-1} + \beta\Sigma e^{-\tau s}) = \prod_{i=1}^{N-1} \lambda_i(s\mathbb{I}_{N-1} + \beta\Sigma e^{-\tau s}) = \prod_{i=1}^{N-1} (s + \beta\lambda_i(\mathcal{L})e^{-\tau s})$$

οι πόλοι του  $G(s)$  είναι οι ρίζες των εξισώσεων  $P(s) := s + \beta\lambda_i(\mathcal{L})e^{-\tau s}$  ( $2 \leq i \leq N$ ). Αφού ισχύει η συνθήκη iv), τότε με βάση το Λήμμα 2.7 όλοι οι πόλοι του  $G(s)$  βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αν όλα τα (άπειρα) μηδενικά της  $s + \beta\lambda_i e^{-s\tau}$  βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο τότε από το Θεώρημα 5.2 στην σελίδα 20 του [111] ισχύει ότι

$$|g(t)| \leq \gamma_1 e^{-\gamma_2 t} \quad (4.13)$$

για κάποια  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ . Επιπλέον, ο μετασχηματισμός Laplace του  $w_b(t)$  έχει την μορφή  $W_b(s) = G(s)\underline{x}_1(0)/s$ . Αφού ο  $G(s)$  είναι ευσταθής, το Θεώρημα Τελικής Τιμής δίνει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_b(t) = \int_0^\infty g(s)ds \underline{x}_1(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sW_b(s) = (1/\beta)UV^T \underline{x}_1(0). \quad (4.14)$$

Άρα από τις (4.12)-(4.14) έχουμε ότι

$$\left\| w_b(t) - \frac{1}{\beta}UV^T \underline{x}_1(0) \right\|_2 = \left\| \int_t^\infty g(s)ds \underline{x}_1(0) \right\|_2 \leq (\gamma_1/\gamma_2)\|\underline{x}_1(0)\|_2 e^{-\gamma_2 t}. \quad (4.15)$$

Από την (4.10) καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} \|w(t) - (1/\beta)UV^T \underline{x}_1(0)\|_2 &\leq \|w_b(t) - (1/\beta)UV^T \underline{x}_1(0)\|_2 + \|w_a(t)\|_2 \\ &\leq \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\|\underline{x}_1(0)\|_2 e^{-\gamma_2 t} + \int_0^t \gamma_1 e^{-\gamma_2(t-s)}\|z(s)\|_2 ds. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Έστω τώρα η συνάρτηση

$$h(t) := \int_0^t \gamma_1 e^{-\gamma_2(t-s)}\|z(s)\|_2 ds. \quad (4.17)$$

Αφού  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\|_2 \leq \sqrt{N}\rho_\infty$ , για κάθε  $\delta > 0$  υπάρχει χρονική στιγμή  $T(\delta) > 0$  τέτοια ώστε  $\|z(t)\|_2 \leq (1 + \delta)\sqrt{N}\rho_\infty$  για κάθε  $t \geq T(\delta)$ . Επιπλέον, το γεγονός ότι

το  $z$  είναι φραγμένο σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο  $c' > 0$  τέτοιο ώστε  $\|z(t)\|_2 \leq c'$  για κάθε  $t \geq 0$ . Επομένως, για  $t \geq 2T(\delta)$  ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|h(t)\|_2 &\leq \int_0^{t/2} \gamma_1 e^{-\gamma_2(t-s)} \|z(s)\|_2 ds + \int_{t/2}^t \gamma_1 e^{-\gamma_2(t-s)} \|z(s)\|_2 ds \\ &\leq c' \int_0^{t/2} \gamma_1 e^{-\gamma_2(t-s)} ds + (1 + \delta) \sqrt{N} \rho_\infty \int_{t/2}^t \gamma_1 e^{-\gamma_2(t-s)} ds \\ &\leq \frac{c' \gamma_1}{\gamma_2} e^{-\gamma_2 t/2} + \frac{(1 + \delta) \sqrt{N} \gamma_1 \rho_\infty}{\gamma_2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Παίρνοντας το όριο για  $t \rightarrow \infty$  στην (4.18) παίρνουμε ότι  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|h(t)\|_2 \leq (1 + \delta) \sqrt{N} \gamma_1 \rho_\infty / \gamma_2$ . Αφού το  $\delta$  μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μικρό, μπορούμε να πάρουμε  $\delta \rightarrow 0$ , από το οποίο προκύπτει ότι  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|h(t)\|_2 \leq \sqrt{N} \gamma_1 \rho_\infty / \gamma_2$ . Από την παραπάνω ανάλυση και την (4.16) παίρνουμε ότι

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|w(t) - (1/\beta) UV^T \underline{x}_1(0)\|_2 \leq \vartheta_1 \rho_\infty \quad (4.19)$$

όπου  $\vartheta_1 := \sqrt{N} \gamma_1 / \gamma_2$ . Από την (4.1) για  $t \in [0, \infty)$  έχουμε ότι

$$z(t) = y(t) - y(0) + \beta w(t - \tau), \quad (4.20)$$

όπου  $z(t) = [z_1(t), \dots, z_N(t)]^T$  και  $y(t) = [y_1(t), \dots, y_N(t)]^T$ . Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός και την (2.1) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \|y(t) - \mathbf{1} \phi^T y(0)\|_2 &= \|z(t) + (UV^T + \mathbf{1} \phi^T) y(0) - \beta w(t - \tau) - \mathbf{1} \phi^T y(0)\|_2 \\ &\leq \|z(t)\|_2 + \beta \left\| w(t - \tau) - \frac{1}{\beta} UV^T y(0) \right\|_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

και αν πάρουμε το όριο και των δύο μερών της (4.21) όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο έχουμε ότι

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \mathbf{1} \phi^T y(0)\|_2 \leq \left( 1 + \frac{\beta \sqrt{N} \gamma_1}{\gamma_2} \right) \rho_\infty. \quad (4.22)$$

Άρα χρησιμοποιώντας την (4.22) και το γεγονός ότι

$$y_i(t) - y_k(t) = (e_i - e_k)^T (y(t) - \mathbf{1} \phi^T y(0))$$

όπου το  $e_i$  είναι η  $i$ -οστή στήλη του μοναδιαίου πίνακα, προκύπτει ότι

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - y_k(t)| \leq \left( 1 + \frac{\beta \sqrt{N} \gamma_1}{\gamma_2} \right) \rho_\infty. \quad (4.23)$$

Σαν αποτέλεσμα το θεώρημα ισχύει για  $c := 1 + \frac{\beta \sqrt{N} \gamma_1}{\gamma_2}$ .  $\square$

**Παρατήρηση 4.2.** Η παράμετρος  $\beta$  ρυθμίζει την επιρροή της πληροφορίας των γειτόνων στις μεταβλητές  $PdI$ . Η συνθήκη  $iv)$  του Θεωρήματος 4.1 δείχνει ότι υπάρχει μια αντιστρόφως ανάλογη σχέση μεταξύ του μεγέθους της χρονικής υστέρησης στην επικοινωνία και της επιλογής της σχεδιαστικής παραμέτρου  $PdI$   $\beta$ . Επομένως, το  $\beta$  πρέπει να επιλεγεί αρκετά μικρό, δοθείσας μια εκτίμησης για το άνω φράγμα των χρονικών υστερήσεων στην επικοινωνία.

### 4.3 Εφαρμογή σε άγνωστους πράκτορες καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις

Για να αναδείξουμε την εφαρμοσιμότητα των μεταβλητών PdI, στον συνεργατικό έλεγχο πολυπρακτορικών συστημάτων με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία, θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της συμφωνίας για μη γραμμικούς πράκτορες σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης με άγνωστες δυναμικές, που περιλαμβάνουν χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις. Θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές PdI σε μια σχεδίαση backstepping.

#### 4.3.1 Δυναμικές των πρακτόρων

Θεωρούμε ότι κάθε πράκτορας  $i \in \mathcal{V}$  είναι ένα σύστημα καθαρής ανατροφοδότησης  $m$  τάξης με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις και έχει δυναμική που περιγράφεται από ένα σύνολο συναρτησιακών διαφορικών εξισώσεων με χρονική υστέρηση

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij} &= f_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1}(t)), \quad j \in \{1, \dots, m-1\} \\ \dot{x}_{im} &= f_{im}(t, \bar{x}_t^{im}, u_i(t)), \\ y_i &= x_{i1}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

όπου τα  $\bar{x}_t^{ij}(\theta) = \bar{x}_{ij}(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-d, 0]$ ,  $d \in \mathbb{R}$ , είναι οι γενικευμένες χρονικά υστερημένες καταστάσεις, τα  $x_{ij} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  είναι οι καταστάσεις, που έχουν αρχικές συνθήκες  $x_0^{ij}$ ,  $\theta \in [-d, 0]$ , το  $u_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η είσοδος ελέγχου, το  $y_i$  είναι η έξοδος και οι  $f_{ij} : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_j \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι άγνωστες μη γραμμικές συναρτήσεις για κάθε  $j \in \{1, \dots, m\}$  οι οποίες υποθέτουμε ότι είναι συνεχείς ως προς το  $t$  και τοπικά Lipschitz ως προς τα υπόλοιπα ορίσματά τους. Για την ελεγκσιμότητα των παραπάνω συστημάτων είναι απαραίτητη η ακόλουθη υπόθεση.

**Υπόθεση 4.3.** Οι συναρτήσεις  $f_{ij} : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_j \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  είναι συνεχώς διαφορίσιμες ως προς το  $x_{i,j+1}$  ( $u_i$  για την  $f_{im}$ ) και υπάρχουν άγνωστες θετικές σταθερές  $b_{ij}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  τέτοιες, ώστε

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1})}{\partial x_{i,j+1}} \right| &\geq b_{ij} > 0, \quad j \in \{1, \dots, m-1\} \\ \left| \frac{\partial f_{im}(t, \bar{x}_t^{im}, u_i)}{\partial u_i} \right| &\geq b_{im} > 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

για κάθε  $(t, \bar{x}_t^{im}, u_i) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}_m \times \mathbb{R}$  και για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ .

Η γνώση των κατευθύνσεων ελέγχου διασφαλίζεται από την παρακάτω υπόθεση.

**Υπόθεση 4.4.** Τα πρόσημα των  $\frac{\partial f_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1})}{\partial x_{i,j+1}}$ ,  $j \in \{1, \dots, m-1\}$  και των  $\frac{\partial f_{im}(t, \bar{x}_t^{im}, u_i)}{\partial u_i}$  θεωρούνται γνωστά για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι όλα τα πρόσημα είναι θετικά.

Ακόμα, θα χρειαστούμε και μια υπόθεση για το ότι οι χρονικά εξαρτώμενες διαταραχές θα είναι ομοιόμορφα φραγμένες.

**Υπόθεση 4.5.** Οι συναρτήσεις  $f_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1})$ ,  $j \in \{1, \dots, m-1\}$ ,  $f_{im}(t, \bar{x}_t^{im}, u_i)$ ,  $i \in \mathcal{V}$  είναι ομοιόμορφα φραγμένες ως προς το  $t$ .

### 4.3.2 Ρύθμιση των μεταβλητών PdI

Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε μια κατάλληλη τεχνική κλασικού ελέγχου για να ρυθμίσουμε τις μεταβλητές PdI σε μια γειτονιά του μηδενός ώστε να ικανοποιήσουμε την συνθήκη iii) του Θεωρήματος 4.1 και να πετύχουμε προσεγγιστική συμφωνία. Επειδή δεν υπάρχουν αποτελέσματα στην τρέχουσα βιβλιογραφία για συστήματα καθαρής ανατροφοδότησης με γενικές χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία της μορφής (4.24), θα σχεδιάσουμε ένα νέο σχήμα ελέγχου στο πνεύμα του κλασικού ελέγχου προκαθορισμένης επίδοσης [56]. Επεκτείνουμε τα αποτελέσματα σε συστήματα που έχουν δυναμικές με γενικές χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις και περιλαμβάνουμε τις χρονικά υστερημένες ολοκληρωτικές μεταβλητές. Αρχικά κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση.

**Υπόθεση 4.6.** Την χρονική στιγμή  $t$ , κάθε πράκτορας  $i \in \mathcal{V}$ , έχει τις εσωτερικές του καταστάσεις  $x_{ij}(t)$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  διαθέσιμες προς μέτρηση.

Αρχικά ορίζουμε την συνάρτηση  $T : (-1, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty)$  ως  $T(x) := \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ . Το προτεινόμενο σχήμα ελέγχου για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$  υλοποιείται στα ακόλουθα βήματα:

1. Σχεδιάζουμε μια συνάρτηση επίδοσης  $\rho_{i1}(t)$ ,  $t \in [-d, \infty)$  για την μεταβλητή PdI  $z_i$  που ενσωματώνει τις προδιαγραφές σχετικά με την ταχύτητα σύγκλισης σε συμφωνία, το σφάλμα συμφωνίας τελικής κατάστασης και ικανοποιεί ότι  $\rho_0^{i1} > |z_0^i|$ . Στη συνέχεια, επιλέγουμε τον πρώτο εικονικό νόμο ελέγχου ως

$$\hat{\alpha}_{i1}(t, x_{i1}(t), w_i(t - \tau)) = -k_{i1}T\left(\frac{z_i}{\rho_{i1}(t)}\right), \quad (4.26)$$

όπου το  $k_{i1}$  είναι ένα θετικό κέρδος ελέγχου.

2. Σχεδιάζουμε μια δεύτερη συνάρτηση επίδοσης  $\rho_{i2}(t)$ ,  $t \in [-d, \infty)$  η οποία ικανοποιεί  $\rho_0^{i2} > |x_0^{i2} - \hat{\alpha}^{i1}|$  και επιλέγουμε τον δεύτερο εικονικό νόμο ελέγχου ως

$$\hat{\alpha}_{i2}(t, \bar{x}_{i2}(t), w_i(t - \tau)) = -k_{i2}T\left(\frac{x_{i2}(t) - \hat{\alpha}_{i1}(t, x_{i1}(t), w_i(t - \tau))}{\rho_{i2}(t)}\right), \quad (4.27)$$

όπου το  $k_{i2}$  είναι ένα θετικό κέρδος ελέγχου.

3. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 2 για όλους τους υπόλοιπους εικονικούς νόμους ελέγχου

$$\hat{\alpha}_{ij}(t, \bar{x}_{ij}(t), w_i(t - \tau)) = -k_{ij}T\left(\frac{x_{ij}(t) - \hat{\alpha}_{i,j-1}(t, \bar{x}_{i,j-1}(t), w_i(t - \tau))}{\rho_{ij}(t)}\right), \quad (4.28)$$

όπου τα  $k_{ij}$  είναι θετικά κέρδη ελέγχου και οι συναρτήσεις επίδοσης  $\rho_{ij}(t)$  ικανοποιούν τις  $\rho_0^{ij} > |x_0^{ij} - \hat{\alpha}_0^{i,j-1}|$  για όλα τα  $j \in \{3, \dots, m-1\}$ .

4. Τέλος, επιλέγουμε τον νόμο ελέγχου για τον πράκτορα  $i$  ως

$$\hat{u}_i(t, \bar{x}_{im}(t), w_i(t - \tau)) = -k_{im}T\left(\frac{x_{im}(t) - \hat{\alpha}_{i,m-1}(t, \bar{x}_{i,m-1}(t), w_i(t - \tau))}{\rho_{im}(t)}\right), \quad (4.29)$$

όπου το  $k_{im}$  είναι ένα θετικό κέρδος ελέγχου και η συνάρτηση επίδοσης  $\rho_{im}$  ικανοποιεί ότι  $\rho_0^{im} > |x_0^{im} - \hat{\alpha}_0^{i,m-1}|$ .

**Παρατήρηση 4.3.** Στο πνεύμα του κλασικού ελέγχου προκαθορισμένης επίδοσης [56], θεωρούμε ότι όλες οι συναρτήσεις επίδοσης είναι συνεχώς διαφορίσιμες, φραγμένες, θετικές και φθίνουσες χρονικές συναρτήσεις με  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{ij}(t) = \rho_{ij\infty}$ ,  $\forall i \in \mathcal{V}$  και  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Αυτές οι ιδιότητες ικανοποιούνται από μια συνήθη εκθετική συνάρτηση επίδοσης [56]  $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\delta t} + \rho_\infty$ ,  $\forall t \geq -d$ , όπου τα  $\delta, \rho_0, \rho_\infty$  είναι θετικές σταθερές που πρέπει να σχεδιαστούν κατάλληλα.

Θεωρήματα για την ύπαρξη, την μοναδικότητα και την επέκταση των λύσεων από την θεωρία των συναρτησιακών διαφορικών εξισώσεων με χρονική υστέρηση χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν λόγω της ύπαρξης των χρονικών υστερήσεων. Το Θεώρημα 4.2 διατυπώνει το αποτέλεσμα που αφορά το πρόβλημα της συμφωνίας όπως διατυπώθηκε στην Παράγραφο 4.1.

**Θεώρημα 4.2.** Έστω ένα πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από  $N$  πράκτορες, όπου κάθε πράκτορας  $i$  είναι ένα σύστημα καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις που δίνεται από την (4.24). Έστω ότι ισχύουν οι Υποθέσεις 4.3-4.6. Αν εφαρμοστεί το καταναμημένο σχήμα ελέγχου (4.26)-(4.29) με τις μεταβλητές PdI  $z_i(t)$  όπως ορίζονται από τις (4.1), (4.2), τότε οι έξοδοι  $y_i(t)$  των πρακτόρων επιτυγχάνουν προσεγγιστική συμφωνία, δηλαδή

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - y_k(t)| \leq \sqrt{2}c\rho_\infty \quad (4.30)$$

για όλα τα  $i, k \in \mathcal{V}$  και

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \mathbf{1}\phi^T y(0)\|_2 \leq c\rho_\infty, \quad (4.31)$$

όπου η σταθερά  $c > 0$  ορίζεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 και το  $\rho_\infty$  είναι παράμετρος της σχεδίασης που μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μικρή.

*Απόδειξη.* Αρχικά, ορίζουμε τις μεταβλητές κανονικοποιημένου σφάλματος κατάστασης ως

$$\xi_{i1}(t) := \frac{z_i(t)}{\rho_{i1}(t)} = \frac{y_i(t) - y_i(0) + \beta w_i(t - \tau)}{\rho_{i1}(t)}, \quad (4.32)$$

$$\xi_{ij}(t) := \frac{x_{ij}(t) - \hat{\alpha}_{i,j-1}(t, \bar{x}_{i,j-1}(t), w_i(t - \tau))}{\rho_{ij}(t)}, \quad (4.33)$$

για όλα τα  $j \in \{2, \dots, m\}$  και κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ . Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ορισμό μπορούμε να εκφράσουμε τους εικονικούς νόμους ελέγχου (4.26)-(4.28) ως συναρτήσεις των μεταβλητών κανονικοποιημένου σφάλματος κατάστασης ως εξής

$$\hat{\alpha}_{ij}(t, \bar{x}_{ij}(t), w_i(t - \tau)) = \alpha_{ij}(\xi_{ij}(t)) = -k_{ij}T(\xi_{ij}(t)), \quad (4.34)$$

για κάθε  $j \in \{1, \dots, m - 1\}$ , και τον νόμο ελέγχου (4.29) ως

$$\hat{u}_i(t, \bar{x}_{im}(t), w_i(t - \tau)) = u_i(\xi_{im}(t)) = -k_{im}T(\xi_{im}(t)), \quad (4.35)$$

για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ . Αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό PdI (4.1) και τις μεταβλητές κανονικοποιημένου σφάλματος κατάστασης (4.32), (4.33) μπορούμε να εκφράσουμε τις μεταβλητές κατάστασης ως

$$\begin{aligned} x_{i1}(t) &= \xi_{i1}(t)\rho_{i1}(t) + x_{i1}(0) - \beta w_i(t - \tau) \\ x_{ij}(t) &= \xi_{ij}(t)\rho_{ij}(t) + \alpha_{i,j-1}(\xi_{i,j-1}(t)), \end{aligned} \quad (4.36)$$

για κάθε  $j \in \{2, \dots, m\}$  και  $i \in \mathcal{V}$ . Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο τις (4.32), (4.33) και χρησιμοποιώντας τις (4.24), (4.36) προκύπτουν οι εξής δυναμικές για τις κανονικοποιημένες μεταβλητές σφάλματος κατάστασης

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{i1} &= h_{i1}(t, \bar{\xi}_t^{i2}, w_t^i, \xi_{k1}(t - \tau), w_k(t - 2\tau); k \in N_i) \\ &= \frac{1}{\rho_{i1}(t)} \left[ f_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \xi_{i2}(t) \rho_{i2}(t) + \alpha_{i1}(\xi_{i1}(t))) \right. \\ &\quad \left. + \beta \dot{w}_i(t - \tau) - \xi_{i1}(t) \dot{\rho}_{i1}(t) \right],\end{aligned}\quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{ij} &= h_{ij}(t, \bar{\xi}_t^{i,j+1}, w_t^i, \xi_{k1}(t - \tau), w_k(t - 2\tau); k \in N_i) \\ &= \frac{1}{\rho_{ij}(t)} \left[ f_{ij}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \dots, \xi_t^{ij} \rho_t^{ij} + \alpha_{i,j-1}(\xi_t^{i,j-1}), \right. \\ &\quad \left. \xi_{i,j+1}(t) \rho_{i,j+1}(t) + \alpha_{ij}(\xi_{ij}(t))) \right. \\ &\quad \left. - \frac{d\alpha_{i,j-1}(t)}{d\xi_{i,j-1}(t)} h_{i,j-1}(t, \bar{\xi}_t^{ij}, w_t^i, \xi_{k1}(t - \tau), w_k(t - 2\tau); k \in N_i) - \xi_{ij}(t) \dot{\rho}_{ij}(t) \right]\end{aligned}\quad (4.38)$$

για κάθε  $j \in \{1, \dots, m-1\}$  και

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{im} &= h_{im}(t, \bar{\xi}_t^{im}, w_t^i, \xi_{k1}(t - \tau), w_k(t - 2\tau); k \in N_i) \\ &= \frac{1}{\rho_{im}(t)} \left[ f_{im}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \dots, \xi_t^{im} \rho_t^{im} + \alpha_{i,m-1}(\xi_t^{i,m-1}), u_i(\xi_{im}(t))) \right. \\ &\quad \left. - \frac{d\alpha_{i,m-1}(t)}{d\xi_{i,m-1}(t)} h_{i,m-1}(t, \bar{\xi}_t^{ij}, w_t^i, \xi_{k1}(t - \tau), w_k(t - 2\tau); k \in N_i) - \xi_{im} \dot{\rho}_{im}(t) \right],\end{aligned}\quad (4.39)$$

για όλους τους πράκτορες  $i \in \mathcal{V}$ . Από την (4.2), την (4.6) και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (4.32), (4.33) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= h_w(t, w(t - \tau), \underline{\xi}_1(t)) \\ &= \begin{cases} 0, & t \in [-l, 0) \\ \mathcal{L}(\underline{x}_1(0) - \beta w(t - \tau) + R(t) \underline{\xi}_1(t)), & t \in [0, \infty) \end{cases}\end{aligned}\quad (4.40)$$

όπου  $\mathcal{L}$  είναι η Λαπλασιανή μήτρα του γράφου και  $R(t) = \text{diag}\{\rho_{i1}(t)\}$ ,  $i \in \mathcal{V}$ . Τότε, για κάθε πράκτορα  $i$  η δυναμική του συνολικού κανονικοποιημένου διάνυσματος σφάλματος κατάστασης  $\bar{\xi}_i := [\xi_{i1} \ \xi_{i2} \ \dots \ \xi_{im}]^T$  έχει την μορφή

$$\dot{\bar{\xi}}_i(t) = h_i(t, \bar{\xi}_t^i, w_t^i, \xi_{k1}(t - \tau), w_k(t - 2\tau); k \in N_i) \quad (4.41)$$

και η δυναμική του συνολικού σφάλματος για όλους τους πράκτορες  $\bar{\xi} := [\bar{\xi}_1^T, \dots, \bar{\xi}_N^T]^T$  δίνεται από την

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = h_\xi(t, \bar{\xi}_t, w_t). \quad (4.42)$$

Ορίζουμε το επαυξημένο διάνυσμα

$$\xi_{ag} := [w \ \bar{\xi}]^T \quad (4.43)$$

και παίρνουμε ότι

$$\dot{\xi}_{ag}(t) = \begin{bmatrix} h_w(t, w(t - \tau), \underline{\xi}_1(t)) \\ h_\xi(t, \bar{\xi}_t, w_t) \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Επομένως η δυναμική του επαυξημένου διανύσματος  $\xi_{ag}$  έχει την μορφή

$$\dot{\xi}_{ag}(t) = h(t, \xi_t^{ag}), \quad (4.45)$$

με  $\xi_t^{ag}(\theta) := \xi_{ag}(t+\theta)$ ,  $\theta \in [-d, 0]$  και κάποια συνάρτηση αρχικών συνθηκών  $\phi(s)$ ,  $s \in [-d, 0]$  που ορίζεται από τις αρχικές συνθήκες κάθε ορίσματος. Έστω το σύνολο

$$\Omega_{\xi_{ag}} := \mathcal{C}([-d, 0], (-k, k)^N) \times \mathcal{C}([-d, 0], (-1, 1)^{mN}),$$

όπου  $k = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (\|\underline{\rho}_1(0)\|_2 + \|\underline{x}_1(0)\|_2) + 1$  και τα  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  είναι σταθερές που ορίζονται στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1. Ορίζουμε επίσης το σύνολο  $\Omega := \mathbb{R}_+ \times \Omega_{\xi_{ag}}$ . Προφανώς  $(0, \phi) \in \Omega$ . Η απεικόνιση  $h$  είναι συνεχής και τοπικά Lipschitz ως προς το δεύτερό της όρισμα στο σύνολο  $\Omega$ , και επομένως από το Θεώρημα 2.2 υπάρχει μοναδική λύση της (4.45) με αρχικές συνθήκες  $(0, \phi)$ . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει  $\tau_{\max} > 0$  τέτοιο ώστε το  $\xi_{ag}(t)$  να είναι συνεχές στο  $[-d, \tau_{\max})$ , με αρχική συνθήκη  $\xi_0^{ag}(\theta) = \phi(\theta)$ ,  $\theta \in [-d, 0]$  και ικανοποιεί την (4.45) για όλα τα  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Επομένως, υπάρχει μια θετική σταθερά  $a < \tau_{\max}$  τέτοια ώστε  $\xi_t^{ag} \in \Omega_{\xi_{ag}}$  για κάθε  $t \in [0, a)$ . Από το γεγονός ότι

$$-1 \leq \xi_{ij}(t) \leq 1, \quad (4.46)$$

για κάθε  $i \in \mathcal{V}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  και  $t \in [0, a)$  η παράσταση

$$\epsilon_{ij} := \ln \left( \frac{1 + \xi_{ij}(t)}{1 - \xi_{ij}(t)} \right) \quad (4.47)$$

είναι καλώς ορισμένη για κάθε  $i \in \mathcal{V}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  και  $t \in [0, a)$ . Για τον πράκτορα  $i$  και για  $j = 1$  ορίζουμε την θετικά ορισμένη, ακτινικά μη φραγμένη συνάρτηση

$$V_{i1}(t) := \frac{1}{2} \epsilon_{i1}^2(t), \quad t \in [0, a). \quad (4.48)$$

Παραγωγίζοντάς την ως προς τον χρόνο και χρησιμοποιώντας την (4.37) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i1} = & \frac{2\epsilon_{i1}}{(1 - (\xi_{i1}(t))^2)^2} \rho_{i1}(t) \left[ f_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \right. \\ & \left. \xi_{i2}(t) \rho_{i2}(t) + \alpha_{i1}(\xi_{i1}(t))) + \beta \dot{w}_i(t - \tau) - \xi_{i1}(t) \dot{\rho}_{i1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Επικαλούμενοι το Θεώρημα Μέσης Τιμής και την Υπόθεση 4.3 παίρνουμε

$$\begin{aligned} f_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \xi_{i2}(t) \rho_{i2}(t) + \alpha_{i1}(\xi_{i1}(t))) = \\ f_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \xi_{i2}(t) \rho_{i2}(t)) \\ + \alpha_{i1}(\xi_{i1}(t)) \frac{\partial f_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega^*} \end{aligned} \quad (4.50)$$

όπου  $\omega^* = \lambda(\xi_{i2}(t) \rho_{i2}(t) + \alpha_{i1}(\xi_{i1}(t))) + (1 - \lambda)\xi_{i2}(t) \rho_{i2}(t)$  για κάποιο  $\lambda \in (0, 1)$ . Επομένως χρησιμοποιώντας την (4.50) στην (4.49) έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i1} = & \frac{2\epsilon_{i1}}{(1 - (\xi_{i1}(t))^2)^2} \rho_{i1}(t) \left[ f_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \xi_{i2}(t) \rho_{i2}(t)) + \beta \dot{w}_i(t - \tau) \right. \\ & \left. - \xi_{i1}(t) \dot{\rho}_{i1}(t) - k_{i1} \epsilon_{i1} \frac{\partial f_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega^*} \right]. \end{aligned} \quad (4.51)$$



Ας εξετάσουμε τώρα την συνάρτηση

$$\Lambda(t, \bar{\xi}_t^{i2}, w_t^i, \xi_{k1}(t - \tau), w_k(t - 2\tau); k \in N_i) := f_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \xi_{i2}(t) \rho_{i2}(t)) + \beta \dot{w}_i(t - \tau) - \xi_{i1}(t) \dot{\rho}_{i1}(t). \quad (4.52)$$

Η συνάρτηση  $f_{i1} - \xi_{i1} \dot{\rho}_{i1}$  είναι συνεχής και φραγμένη, καθώς για κάθε  $t \in [0, a)$ , οι μεταβλητές  $\xi_t^{i1}, \xi_{i2}(t), w_t^i$  είναι φραγμένες από το θεώρημα ύπαρξης, τα  $\rho_{i1}(t), \rho_{i2}(t), \dot{\rho}_{i1}(t)$  και το  $\rho_t^{i1}$  είναι φραγμένα εκ κατασκευής και η  $f_{i1}(t, \cdot, \cdot)$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη ως προς το  $t$  από την Υπόθεση 4.5. Ο όρος  $\dot{w}_i(t - \tau)$  έχει ένα μοναδικό σημείο ασυνέχειας όταν  $t = \tau$  και είναι κατά τα άλλα συνεχής και ορίζεται από την

$$\begin{aligned} \dot{w}_i(t - \tau) &= \sum_{k \in N_i} a_{ik} [x_{i1}(t - \tau) - x_{k1}(t - \tau)] \\ &= \sum_{k \in N_i} a_{ik} \left[ \xi_{i1}(t - \tau) \rho_{i1}(t - \tau) - \xi_{k1}(t - \tau) \rho_{k1}(t - \tau) \right. \\ &\quad \left. + x_{i1}(0) - x_{k1}(0) - \beta w_i(t - 2\tau) + \beta w_k(t - 2\tau) \right] \end{aligned}$$

δηλαδή είναι συνάρτηση των  $w_i(t - 2\tau), w_k(t - 2\tau)$  και των  $\xi_{i1}(t - \tau), \xi_{k1}(t - \tau)$  για κάθε  $k \in N_i$ , τα οποία είναι φραγμένα από το θεώρημα ύπαρξης ( $\xi_t^{ag} \in \Omega_a^{\xi_{ag}}$ ) για όλα τα  $t \in [0, a)$ . Σαν αποτέλεσμα μπορούμε να επικαλεστούμε το Θεώρημα Αχραίων Τιμών για την  $\Lambda$ , το οποίο διασφαλίζει την ύπαρξη θετικής σταθεράς  $F_{i1}$ , τέτοιας ώστε

$$|\Lambda(t, \bar{\xi}_t^{i2}, w_t^i, \xi_{k1}(t - \tau), w_k(t - 2\tau); k \in N_i)| \leq F_{i1} \quad (4.53)$$

για κάθε  $t \in [0, a)$ . Χρησιμοποιώντας την (4.53), την Υπόθεση 4.3 και την (4.46) στην (4.51), και επειδή εκ κατασκευής  $\rho_{i1}(t) > 0$  για κάθε  $t \in [0, a)$  παίρνουμε ότι

$$\dot{V}_{i1} \leq \frac{2}{(1 - (\xi_{i1}(t))^2) \rho_{i1}(t)} (F_{i1} |\epsilon_{i1}| - k_{i1} b_{i1} (\epsilon_{i1})^2) \quad (4.54)$$

για κάθε  $t \in [0, a)$ . Σαν αποτέλεσμα η  $\dot{V}_{i1}$  είναι αρνητικά ορισμένη όταν  $|\epsilon_{i1}(t)| > \frac{F_{i1}}{k_{i1} b_{i1}}$  και σαν αποτέλεσμα

$$|\epsilon_{i1}(t)| \leq E_{i1} := \max \left\{ |\epsilon_{i1}(0)|, \frac{F_{i1}}{k_{i1} b_{i1}} \right\}, \quad \forall t \in [0, a). \quad (4.55)$$

Επικαλούμενοι την (4.34) παίρνουμε ότι ο εικονικός έλεγχος  $\alpha_{i1}(t)$  παραμένει ομοιόμορφα φραγμένος για κάθε  $t \in [0, a)$ . Αυτό και η (4.36) δίνουν ότι το  $x_{i2}(t)$  επίσης παραμένει ομοιόμορφα φραγμένο για κάθε  $t \in [0, a)$ . Επιπλέον, από τον ορισμό του  $\epsilon_{ij}$  στην (4.47), χρησιμοποιώντας την αντίστροφη λογαριθμική συνάρτηση για  $t \in [0, a)$ , παίρνουμε

$$-1 < \frac{e^{-E_{i1}} - 1}{e^{-E_{i1}} + 1} =: \xi_{i1}^{\min} \leq \xi_{i1}(t) \leq \xi_{i1}^{\max} := \frac{e^{E_{i1}} - 1}{e^{E_{i1}} + 1} < 1. \quad (4.56)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.37) στην παράγωγο του  $\alpha_{i1}$  έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{i1} &= \frac{d\alpha_{i1}}{d\xi_{i1}} h_{i1}(t, \bar{\xi}_t^{i2}, w_t^i, \xi_{k1}(t - \tau), w_k(t - 2\tau); k \in N_i) \\ &= -\frac{2k_{i1}}{(1 - (\xi_{i1}(t))^2) \rho_{i1}(t)} \left[ f_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \right. \\ &\quad \left. \xi_{i2}(t) \rho_{i2}(t) + \alpha_{i1}(\xi_{i1}(t))) + \beta \dot{w}_i(t - \tau) - \xi_{i1}(t) \dot{\rho}_{i1}(t) \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

και με τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε για να δείξουμε ότι τα (4.55) και (4.56) παραμένουν φραγμένα καταλήγουμε ότι η  $\dot{\alpha}_{i1}(t)$  παραμένει ομοιόμορφα φραγμένη για κάθε  $t \in [0, a)$ . Για  $2 \leq j \leq m$ , χρησιμοποιούμε την  $V_{ij} := \frac{1}{2}\epsilon_{ij}^2$  και αντίστοιχα επιχειρήματα, για να πάρουμε:

$$|\epsilon_{ij}(t)| \leq E_{ij} := \max \left\{ |\epsilon_{ij}(0)|, \frac{F_{ij}}{k_{ij}b_{ij}} \right\}, \quad \forall t \in [0, a) \quad (4.58)$$

για κάποια σταθερά  $F_{ij} >$ , όπου

$$\left| f_{ij}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \dots, \xi_t^{ij} \rho_t^{ij} + \alpha_{i,j-1}(\xi_t^{i,j-1}), \xi_{i,j+1}(t) \rho_{i,j+1}(t)) - \frac{d\alpha_{i,j-1}(t)}{d\xi_{i,j-1}(t)} h_{i,j-1}(t, \bar{\xi}_t^{ij}, w_t^i, \xi_{k1}(t-\tau), w_k(t-2\tau); k \in N_i) - \xi_{ij}(t) \dot{\rho}_{ij}(t) \right| \leq F_{ij} \quad (4.59)$$

για όλα τα  $j \in \{2, \dots, m-1\}$ , και

$$\left| f_{im}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + x_{i1}(0) - \beta w_t^i, \dots, \xi_t^{im} \rho_t^{im} + \alpha_{i,m-1}(\xi_t^{i,m-1}), 0) - \frac{d\alpha_{i,m-1}(t)}{d\xi_{i,m-1}(t)} h_{i,m-1}(t, \bar{\xi}_t^{ij}, w_t^i, \xi_{k1}(t-\tau), w_k(t-2\tau); k \in N_i) - \xi_{im} \dot{\rho}_{im}(t) \right| \leq F_{im}, \quad (4.60)$$

για κάθε  $t \in [0, a)$ . Σε αντιστοιχία με την (4.56) έχουμε επίσης ότι

$$-1 < \frac{e^{-E_{ij}} - 1}{e^{-E_{ij}} + 1} =: \xi_{ij}^{\min} \leq \xi_{ij}(t) \leq \xi_{ij}^{\max} := \frac{e^{E_{ij}} - 1}{e^{E_{ij}} + 1} < 1, \quad (4.61)$$

για όλα τα  $j \in \{2, \dots, m\}$  και κάθε  $t \in [0, a)$ . Όλοι οι εικονικοί νόμοι ελέγχου  $\alpha_{ij}(t)$ , οι καταστάσεις  $x_{i,j+1}(t)$ ,  $j \in \{2, \dots, m\}$  και ο νόμος ελέγχου  $u_i(t)$  παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένοι για κάθε  $t \in [0, a)$ . Καθώς η παραπάνω ανάλυση ισχύει για κάθε πράκτορα  $i$ , έχουμε ότι τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν για όλους τους πράκτορες  $i \in \mathcal{V}$ . Ακολουθώντας τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε για να βγάλουμε την (4.10), για  $t \geq 0$ , παίρνουμε ότι

$$w(t) = \int_0^t g(t-s) (z(s) + \underline{x}_1(0)) ds \quad (4.62)$$

και χρησιμοποιώντας τις (4.32), (4.13) και την (4.56) και το γεγονός ότι οι συναρτήσεις επίδοσης έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε  $\rho_{i1}(t) \leq \rho_{i1}(0), \forall t \geq 0$  έχουμε ότι

$$\|w(t)\|_2 \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left( \|\rho_1(0)\|_2 + \|\underline{x}_1(0)\|_2 \right) (1 - e^{-\gamma_2 t}) \quad (4.63)$$

και επομένως παίρνουμε για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$  και  $t \in [0, a)$  ότι

$$-(k-1)(1 - e^{-\gamma_2 t}) \leq w_i(t) \leq (k-1)(1 - e^{-\gamma_2 t}). \quad (4.64)$$

Οι ανισότητες (4.56), (4.61) και (4.64) για κάθε πράκτορα  $i$  συνεπάγονται ότι  $\xi_t^{ag} \in \Omega_{\xi_t^{ag}}$  για κάθε  $t \in [0, a)$ , όπου το

$$\Omega_{\xi_t^{ag}} := \mathcal{C}([-d, 0], [-k+1, k-1]^N) \times \underbrace{\mathcal{C}([-d, 0], [\xi_{11}^{\min}, \xi_{11}^{\max}]) \times \dots \times \mathcal{C}([-d, 0], [\xi_{mN}^{\min}, \xi_{mN}^{\max}])}_{m \times N \text{ times}}$$

είναι ένα μη κενό, κλειστό και φραγμένο σύνολο. Αν υποθέσουμε ότι  $a < \infty$ , από το γεγονός ότι  $\Omega_{\xi_{ag}} \subset \Omega_{\xi_{ag}}$  και επειδή η  $h$  είναι εξ' ολοκλήρου συνεχής στο  $\Omega$ , από το Θεώρημα 2.3, υπάρχει χρονική στιγμή  $t_U \in [0, a)$  τέτοια ώστε  $\xi_t^{ag} \notin \Omega_{\xi_{ag}}$  για  $t_U \leq t < a$ , το οποίο είναι άτοπο. Επομένως  $a = \tau_{\max} = \infty$ . Σαν αποτέλεσμα η εξίσωση (4.56) ισχύει για κάθε  $t \in [0, \infty)$ , το οποίο συνεπάγεται ότι  $|z_i(t)| < \rho_{i1}(t)$ , για κάθε  $t \in [0, \infty)$  και όλους τους πράκτορες  $i \in \mathcal{V}$ . Τέλος, επικαλούμενοι το Θεώρημα 4.1 για  $\rho_\infty = \max_{i \in \mathcal{V}} \{\rho_{i1\infty}\}$ , οι έξοδοι των πρακτόρων επιτυγχάνουν προσεγγιστική συμφωνία.  $\square$

## 4.4 Προσομοιώσεις

Έστω ένα πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από  $N = 6$  μη επανδρωμένα ιπτάμενα οχήματα (UAVs) σταθερού πτερυγίου στον τρισδιάστατο χώρο, με δυναμικές [106]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_i &= \mathbf{v}_i \\ m_i \dot{\mathbf{v}}_i &= \boldsymbol{\eta}_i + m_i \boldsymbol{\epsilon}_i + \mathbf{G}_i \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{y}_i = \mathbf{p}_i \end{aligned}$$

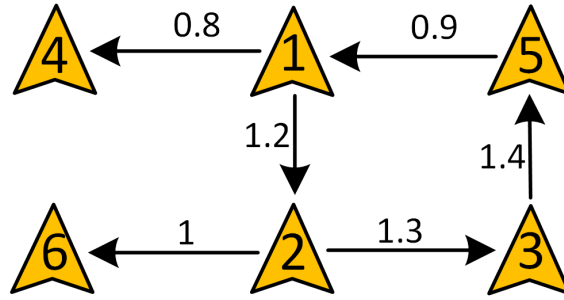
όπου,

$$\boldsymbol{\eta}_i = \begin{bmatrix} -D_i \cos \chi_i \cos \gamma_i \\ -D_i \sin \chi_i \cos \gamma_i \\ -D_i \sin \gamma_i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

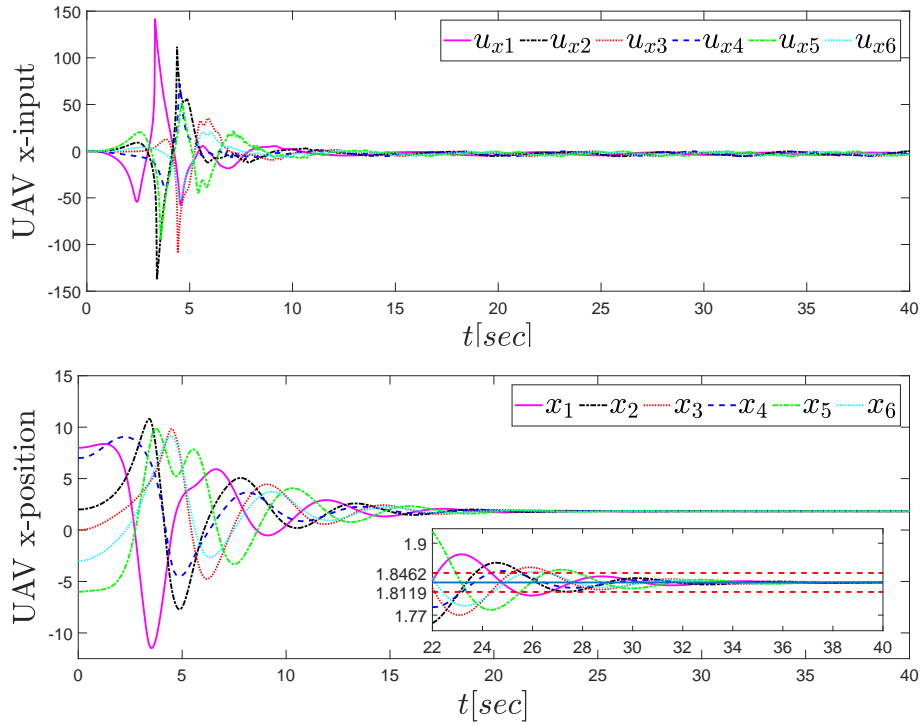
και

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \cos \chi_i \cos \gamma_i & -\sin \chi_i & -\sin \gamma_i \cos \chi_i \\ \sin \chi_i \cos \gamma_i & \cos \chi_i & -\sin \chi_i \sin \gamma_i \\ \sin \gamma_i & 0 & \cos \gamma_i \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Τα διανύσματα  $\mathbf{p}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$  και  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{p}}_i = [\dot{x}_i \ \dot{y}_i \ \dot{z}_i]^T$  περιγράφουν την θέση και την ταχύτητα του  $i$ -οστού UAV ως προς το αδρανειακό πλαίσιο, αντίστοιχα. Το διάνυσμα  $\mathbf{F}_i = [T_i \ L_i \sin \phi_i \ L_i \cos \phi_i]^T$  είναι η είσοδος ελέγχου, όπου το  $T_i$  συμβολίζει την ώθηση του κινητήρα, το  $L_i$  την ανύψωση του οχήματος και το  $\phi_i$  την γωνία περιστροφής από τον κάθετο άξονα. Οι παράμετροι του κάθε UAV απεικονίζονται στο σχήμα 6.1. Το  $m_i$  συμβολίζει την μάζα του  $i$ -οστού UAV, το  $D_i$  είναι ο συντελεστής για την αντίσταση του αέρα του οχήματος, το  $g$  την επιτάχυνση της βαρύτητας, το  $\chi_i$  συμβολίζει την γωνία κατεύθυνσης και το  $\gamma_i$  την γωνία διαδρομής πτήσης. Στην παρούσα προσομοίωση η μάζα του  $i$ -οστού UAV,  $m_i$ , η αντίσταση αέρα του οχήματος  $D_i$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$  θεωρούνται άγνωστα στον ελεγκτή του. Για να υλοποιήσουμε τον ελεγκτή που σχεδιάσαμε στην Παράγραφο 4.3.2 επισημαίνουμε ότι ο  $\mathbf{G}_i$  είναι αντιστρέψιμος με  $\mathbf{G}_i^{-1} = \mathbf{G}_i^T$  και θέτουμε  $\mathbf{F}_i = \mathbf{G}_i^{-1} [u_{xi} \ u_{yi} \ u_{zi}]^T$ . Ο γράφος που περιγράφει το δίκτυο επικοινωνίας μεταξύ των UAV απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει μία σταθερή χρονική υστέρηση  $\tau = 0.5$  sec μεταξύ των UAVs. Στην συνέχεια σχεδιάζουμε τις εισόδους  $u_{xi}$ ,  $u_{yi}$ ,  $u_{zi}$  όπως ορίζουν οι (4.26)-(4.29). Η σχεδιαστική παράμετρος του μετασχηματισμού PdI επιλέχθηκε ως  $\beta = 0.6$  έτσι ώστε  $\beta\tau = 0.3 \leq 0.4$  σε συμφωνία με την απαίτηση iv) του Θεωρήματος 4.1. Χάρην απλότητας τα κέρδη ελέγχου επιλέχθηκαν ως  $k_{ij} = 18$  για όλους τους πράκτορες  $i = 1, 2, \dots, 6$ ,  $j = 1, 2$  και τις διαστάσεις  $x, y, z$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα μόνο στην διάσταση  $x$  [106]. Άγνωστες διαταραχές και χρονικά μεταβαλλόμενες χρονικές υστερήσεις έχουν επίσης περιληφθεί



Σχήμα 4.1: Ο γράφος επικοινωνίας των UAVs



Σχήμα 4.2: Οι είσοδοι και οι θέσεις των UAVs για  $\rho_\infty = 0.001$

που έχουν σαν αποτέλεσμα το μοντέλο να πάρει την μορφή

$$\begin{aligned} \dot{p}_{xi} &= v_{xi} \\ m_i \dot{v}_{xi} &= \eta_{xi} + m_i \epsilon_{xi} + \zeta_t^{xi} + d_{xi}(t) + u_{xi}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

όπου ο δείκτης ή εκθέτης  $x$  δηλώνει την διάσταση  $x$  του αντίστοιχου διανύσματος. Για την προσομοίωσή μας επιλέγουμε  $\zeta_t^{xi} := \sin(x_i(t - \tau_{xi1}(t))) + \int_{t-\tau_{xi2}}^t x_i(s) \cos(x_i(s)) ds$ . Οι χρονικές υστερήσεις επιλέγονται ως  $\tau_{xi1}(t) = 1.6 + \sin(it)$  και  $\tau_{xi2} = 0.4$  για κάθε πράκτορα  $i = 1, \dots, 6$ . Άγνωστες διαταραχές της μορφής  $d_{xi}(t) = 2 + 0.7 \sin(it)$  έχουν θεωρηθεί για κάθε πράκτορα  $i = 1, \dots, 6$ . Από το Σχήμα 4.2 παρατηρούμε ότι επιτυγχάνεται προσεγγιστική συμφωνία και οι είσοδοι ελέγχου παραμένουν φραγμένες για την επιλογή των ορίων των συναρτήσεων επίδοσης ως  $\rho_\infty = 0.001$ . Με την μπλε ευθεία γραμμή απεικονίζεται το τελικό σημείο συμφωνίας  $\phi^T y(0) = 1.829$ .

## 4.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε μια νέα προσέγγιση για τον συνεργατικό έλεγχο άγνωστων μη γραμμικών συστημάτων με χρονικές υστερήσεις και στις καταστάσεις και στην επικοινωνία. Εισάγαμε έναν νέο μετασχηματισμό PdI που επιτρέπει την χρήση καλά εδραιωμένων τεχνικών κλασικού ελέγχου για να οδηγήσουμε το πολυπρακτορικό σύστημα σε συμφωνία με καταναμημένο τρόπο. Αυτό το αναδείξαμε επεκτείνοντας τα αποτελέσματα ενός σχήματος ελέγχου χαμηλής πολυπλοκότητας και χρησιμοποιώντας το για να ρυθμίσουμε τις μεταβλητές PdI.

□



## Κεφάλαιο 5

# Βέλτιστη συμφωνία για πράκτορες με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια νέα μεθοδολογία για το πρόβλημα της βέλτιστης συμφωνίας των εξόδων πολυπρακτορικών συστημάτων. Προτείνουμε έναν κατανεμημένο μετασχηματισμό μεταβλητών που ανάγει το πρόβλημα αυτό σε ένα απλούστερο πρόβλημα ρύθμισης των νέων μεταβλητών. Ο μετασχηματισμός απαιτεί μόνο μετρήσεις των σχετικών αποστάσεων των εξόδων και είναι ανεξάρτητος από τις υποκείμενες δυναμικές των πρακτόρων, επομένως είναι εφαρμόσιμος σε μια ευρεία κλάση συστημάτων. Κλασικές τεχνικές ελέγχου, που λαμβάνουν υπόψιν τις δυναμικές των πρακτόρων μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετά τον μετασχηματισμό για την ρύθμιση των νέων μεταβλητών. Χρησιμοποιούμε την μεθοδολογία για την επίλυση για πρώτη φορά του προβλήματος της συμφωνίας για πράκτορες με άγνωστες δυναμικές σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης με διαταραχές και χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις. Τέλος, παρέχουμε προσομοιώσεις σε μια ομάδα από συνεχώς αναδευόμενους αντιδραστήρες οι οποίες επιβεβαιώνουν την θεωρητική ανάλυση. Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5 έχουν γίνει αποδεκτά (early access) για δημοσίευση στο περιοδικό IEEE Transactions on Automatic Control [105].

### 5.1 Ορισμός του προβλήματος

Θεωρούμε  $N$  πράκτορες με εξόδους  $y_i \in \mathbb{R}^n$  οι οποίοι είναι εφοδιασμένοι με τοπικές συναρτήσεις κόστους  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathcal{V}$ . Το πρόβλημα της προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας των εξόδων είναι να σχεδιαστεί για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$  ένας κατανεμημένος νόμος ελέγχου ο οποίος να διασφαλίζει ότι  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - y^*\| \leq c\epsilon$ ,  $\forall i \in \mathcal{V}$ , όπου το  $y^* \in \mathbb{R}^n$  είναι η βέλτιστη λύση της  $\min_{s \in \mathbb{R}^n} f(s) = \sum_{i=1}^N f_i(s)$ . Η σταθερά  $\epsilon > 0$  είναι μια παράμετρος της σχεδίασης που μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μικρή και το  $c > 0$  είναι μία σταθερά που δεν εξαρτάται από το  $\epsilon$ .

## 5.2 Ο μετασχηματισμός OCPI για βέλτιστη συμφωνία

Η βασική ιδέα του παρόντος κεφαλαίου είναι να αναδιαμορφώσουμε το πρόβλημα της προσεγγιστικής συμφωνίας των εξόδων σε ένα πρόβλημα προσεγγιστικής ρύθμισης. Για τον σκοπό αυτό, εισάγουμε νέες καταναμημένες μεταβλητές για την βέλτιστη συμφωνία. Για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ , ορίζουμε τα  $z_i(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  ως

$$z_i(t) := y_i(t) + \beta \int_0^t \sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_i(s) - y_j(s))ds + \alpha \int_0^t \nabla f_i(y_i(s))ds + \alpha\beta \int_0^t \int_0^s \sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_i(\sigma) - y_j(\sigma))d\sigma ds, \quad (5.1)$$

όπου  $\alpha, \beta > 0$  και την μεταβλητή OCPI  $q_i(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  ως

$$q_i(t) := z_i(t) + \alpha \int_0^t z_i(\tau)d\tau. \quad (5.2)$$

Για να διασφαλίσουμε ότι υπάρχει βέλτιστη λύση στο πρόβλημά μας, κάνουμε την επόμενη υπόθεση.

**Υπόθεση 5.1.** Κάθε συνάρτηση  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathcal{V}$ , είναι ισχυρά κυρτή, δηλαδή υπάρχει  $\mu_i > 0$  τέτοιο ώστε  $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$

$$(s_1 - s_2)^T [\nabla f_i(s_1) - \nabla f_i(s_2)] \geq \mu_i \|s_1 - s_2\|^2. \quad (5.3)$$

Επιπλέον κάθε συνάρτηση  $f_i$  έχει παράγωγο η οποία είναι *Lipschitz*.

Για την επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση.

**Υπόθεση 5.2.** Το δίκτυο επικοινωνίας είναι συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο και, για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ , μόνο οι σχετικές αποστάσεις των εξόδων  $y_i - y_j$ ,  $j \in N_i$ , είναι διαθέσιμες.

Το πρώτο κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου είναι το εξής.

**Θεώρημα 5.1.** Θεωρούμε ένα πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από  $N$  πράκτορες, με εξόδους  $y_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \mathcal{V}$ . Αν

1. ισχύουν οι Υποθέσεις 5.1 και 5.2,
2. το διάνυσμα μεταβλητών OCPI  $q(t) := [q_1^T \cdots q_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ , όπου το  $q_i$  ορίζεται στην (5.2), είναι ομοιόμορφα φραγμένο και υπάρχει χρονική στιγμή  $T_q > 0$  τέτοια ώστε  $\|q(t)\| \leq \epsilon$  για κάθε  $t \geq T_q$ , για κάποιο  $\epsilon > 0$ ,

τότε υπάρχει χρονική στιγμή  $T_y > 0$  τέτοια ώστε  $\|y(t) - (\mathbf{1}_N \otimes y^*)\| \leq c\epsilon$  για κάθε  $t \geq T_y$ , όπου  $y := [y_1^T \cdots y_N^T]^T$ , το  $y^* \in \mathbb{R}^n$  είναι το σημείο βέλτιστης συμφωνίας που ικανοποιεί την  $\sum_{i=1}^N \nabla f_i(y^*) = 0$  και το  $c > 0$  είναι μια σταθερά που δεν εξαρτάται από το  $\epsilon$ .



Απόδειξη. Για το συνολικό διάνυσμα  $z(t) := [z_1^T \cdots z_N^T]^T$  από την (5.1) παίρνουμε ότι

$$z(t) = y(t) + \beta \int_0^t (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) y(s) ds + \alpha \int_0^t \nabla F(y(s)) ds + \alpha \beta \int_0^t \int_0^s (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) y(\tau) d\tau ds, \quad (5.4)$$

όπου  $\nabla F(y(s)) := [\nabla f_1(y_1)^T \cdots \nabla f_N(y_N)^T]^T$ . Από την (5.2) έχουμε επίσης ότι

$$q(t) = z(t) + \alpha \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (5.5)$$

Ορίζουμε τώρα τις βοηθητικές μεταβλητές

$$w_1(t) := -\beta \int_0^t (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) y(\tau) d\tau - \alpha \int_0^t \nabla F(y(\tau)) d\tau - \alpha \beta \int_0^t \int_0^\tau (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) y(s) ds d\tau, \quad (5.6)$$

$$w_2(t) := \int_0^t (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) w_1(\tau) d\tau \quad (5.7)$$

με δυναμικές που δίνονται από την

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) \left( y + \alpha \int_0^t y(\tau) d\tau \right) - \alpha \nabla F(y) \\ (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) w_1 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Από την (5.8), αφού  $w_2(0) = 0$  και  $\frac{d}{dt}(w_2^T(t)(\mathbf{1}_N \otimes \mathbb{I}_n)) = 0$ , ισχύει ότι

$$w_2^T(t)(\mathbf{1}_N \otimes \mathbb{I}_n) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.9)$$

Από την (5.4) και την (5.6) έχουμε ότι

$$z = y - w_1. \quad (5.10)$$

Αν ορίσουμε τώρα την  $w_3(t) := \int_0^t z(\tau) d\tau$  και χρησιμοποιήσουμε την (5.5), παίρνουμε

$$\dot{w}_3 = z = -\alpha w_3 + q. \quad (5.11)$$

Έστω η  $w_1^e := \mathbf{1}_N \otimes y^*$  και η  $w_2^e := -(1/\beta)\nabla F(w_1^e)$ . Υπενθυμίζουμε ότι  $(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n)w_1^e = (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n)(\mathbf{1}_N \otimes y^*) = 0$ . Επίσης, ισχύει η  $(w_2^e)^T(\mathbf{1}_N \otimes \mathbb{I}_n) = -(1/\beta) \sum_{i=1}^N \nabla f_i(y^*)^T = 0$  και χρησιμοποιώντας την (5.9) καταλήγουμε στην

$$\tilde{w}_2^T(t)(\mathbf{1}_N \otimes \mathbb{I}_n) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.12)$$

Από την (5.8), την (5.10) και την (5.11) τα σφάλματα  $\tilde{w}_1 := w_1 - w_1^e$ ,  $\tilde{w}_2 := w_2 - w_2^e$  έχουν την ακόλουθη δυναμική

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{w}}_1 \\ \dot{\tilde{w}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n)\tilde{w}_1 - \alpha(\nabla F(w_1) - \nabla F(w_1^e)) - \alpha\beta\tilde{w}_2 \\ (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n)\tilde{w}_1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \nabla F(q - \alpha w_3 + \tilde{w}_1 + w_1^e) - \nabla F(\tilde{w}_1 + w_1^e) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) \\ 0 \end{bmatrix} q. \quad (5.13)$$

Έστω τώρα η συνάρτηση

$$V(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) := \begin{bmatrix} \tilde{w}_1^T & \tilde{w}_2^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

όπου ο πίνακας

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{I}_{nN} & \frac{\gamma}{2}\mathbb{I}_{nN} \\ \frac{\gamma}{2}\mathbb{I}_{nN} & \frac{\beta}{2}(\alpha U\Sigma^{-1}U^T + \gamma\mathbb{I}_N) \otimes \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

είναι θετικά ορισμένος για αρκετά μικρό  $\gamma > 0$ , και συγκεκριμένα για  $\gamma \in (0, \beta)$ . Αυτό προκύπτει άμεσα αν θεωρήσουμε την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή  $v^T P v$  όπου  $v = [v_1^T \ v_2^T]^T \in \mathbb{R}^{2nN}$  και  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{nN}$ . Τότε, αν υποθέσουμε ότι  $\gamma \in (0, \beta)$ , ισχύει ότι

$$\begin{aligned} v^T P v &= \frac{1}{2}v_1^T v_1 + \gamma v_1^T v_2 + \frac{\beta}{2}v_2^T [(\alpha U\Sigma^{-1}U^T + \gamma\mathbb{I}_N) \otimes \mathbb{I}_n] v_2 \\ &= \frac{1}{2}\|v_1 + \gamma v_2\|^2 + \frac{\gamma}{2}(\beta - \gamma)\|v_2\|^2 + \frac{\alpha\beta}{2}v_2^T (U\Sigma^{-1}U^T \otimes \mathbb{I}_n) v_2 > 0 \end{aligned}$$

για κάθε  $v \neq 0$  και επομένως για  $\gamma \in (0, \beta)$  ο πίνακας  $P$  είναι θετικά ορισμένος. Η σταθερά  $\gamma$  δεν είναι παράμετρος της σχεδίασης και εισήχθη μόνο χάριν της θεωρητικής ανάλυσης. Από τις ιδιότητες της Λαπλασιανής μήτρας και την (5.12), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2^T ((U\Sigma^{-1}U^T) \otimes \mathbb{I}_n) (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) \tilde{w}_1 &= \tilde{w}_2^T ((UU^T) \otimes \mathbb{I}_n) \tilde{w}_1 \\ &= \tilde{w}_2^T \left( \left( UU^T + \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{N} \right) \otimes \mathbb{I}_n \right) \tilde{w}_1 = \tilde{w}_2^T \tilde{w}_1. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Παραγωγίζοντας την  $V$  ως προς τον χρόνο και χρησιμοποιώντας την (5.16), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\beta \tilde{w}_1^T (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) \tilde{w}_1 - \alpha \tilde{w}_1^T [\nabla F(w_1) - \nabla F(w_1^e)] \\ &\quad - \alpha \tilde{w}_1^T [\nabla F(q - \alpha w_3 + w_1) - \nabla F(w_1)] \\ &\quad - \beta \tilde{w}_1^T (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) q + \gamma \tilde{w}_1^T (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) \tilde{w}_1 - \alpha\beta\gamma \|\tilde{w}_2\|^2 \\ &\quad - \alpha\gamma \tilde{w}_2^T [\nabla F(w_1) - \nabla F(w_1^e)] - \beta\gamma \tilde{w}_2^T (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) q \\ &\quad - \alpha\gamma \tilde{w}_2^T [\nabla F(q - \alpha w_3 + w_1) - \nabla F(w_1)]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Από την ιδιότητα της ισχυρής κυρτότητας (5.3) όλων των συναρτήσεων  $f_i$ ,  $i \in \mathcal{V}$ , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} -\alpha \tilde{w}_1^T [\nabla F(w_1) - \nabla F(w_1^e)] &= -\alpha \sum_{i=1}^N (w_{1i} - y^*)^T [\nabla f_i(w_{1i}) - \nabla f_i(y^*)] \\ &\leq -\alpha \sum_{i=1}^N \mu_i \|w_{1i} - y^*\|^2 \leq -\alpha\mu \|\tilde{w}_1\|^2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

όπου  $\mu := \min\{\mu_1, \dots, \mu_N\} > 0$ . Η ιδιότητα Lipschitz της κλίσης και η τριγωνική ανισότητα μας δίνουν ότι

$$\|\nabla F(q - \alpha w_3 + w_1) - \nabla F(w_1)\| \leq L\|q\| + \alpha L\|w_3\| \quad (5.19)$$

$$\|\nabla F(w_1) - \nabla F(w_1^e)\| \leq L\|\tilde{w}_1\| \quad (5.20)$$

για κάποια σταθερά Lipschitz  $L > 0$ . Χρησιμοποιώντας τις (5.18), (5.19) και (5.20) στην (5.17) καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\alpha\mu\|\tilde{w}_1\|^2 - (\beta - \gamma)\tilde{w}_1^T(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n)\tilde{w}_1 - \alpha\beta\gamma\|\tilde{w}_2\|^2 \\ & + \alpha L\|\tilde{w}_1\|(\|q\| + \alpha\|w_3\|) - \beta\tilde{w}_1^T(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n)q - \beta\gamma\tilde{w}_2^T(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n)q \\ & + \alpha\gamma L\|\tilde{w}_2\|\|\tilde{w}_1\| + \alpha\gamma L\|\tilde{w}_2\|(\|q\| + \alpha\|w_3\|). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Επικαλούμενοι την ανισότητα του Young, ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες

$$\alpha\gamma L\|\tilde{w}_2\|\|\tilde{w}_1\| \leq \frac{\alpha\mu}{2}\|\tilde{w}_1\|^2 + \frac{\alpha\gamma^2 L^2}{2\mu}\|\tilde{w}_2\|^2 \quad (5.22)$$

$$\alpha^2 L\|\tilde{w}_1\|\|w_3\| \leq \bar{\epsilon}\|\tilde{w}_1\|^2 + \frac{\alpha^4 L^2}{4\bar{\epsilon}}\|w_3\|^2 \quad (5.23)$$

$$\alpha^2 \gamma L\|\tilde{w}_2\|\|w_3\| \leq \bar{\epsilon}\gamma\|\tilde{w}_2\|^2 + \frac{\alpha^4 \gamma L^2}{4\bar{\epsilon}}\|w_3\|^2 \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \alpha L\|\tilde{w}_1\|\|q\| - \beta\tilde{w}_1^T(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n)q & \leq \bar{\epsilon}\alpha\|\tilde{w}_1\|^2 \\ & + \bar{\epsilon}\beta\tilde{w}_1^T(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n)\tilde{w}_1 + \frac{1}{4\bar{\epsilon}}(\alpha L^2 + \beta\|\mathcal{L}\|)\|q\|^2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \alpha\gamma L\|\tilde{w}_2\|\|q\| - \beta\gamma\tilde{w}_2^T(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n)q & \leq \bar{\epsilon}\alpha\gamma\|\tilde{w}_2\|^2 \\ & + \bar{\epsilon}\beta\gamma\tilde{w}_2^T(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n)\tilde{w}_2 + \frac{\gamma}{4\bar{\epsilon}}(\alpha L^2 + \beta\|\mathcal{L}\|)\|q\|^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

για κάποιο  $\bar{\epsilon} > 0$ . Συνδυάζοντας όλες τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι

$$\dot{V} \leq -[\tilde{w}_1^T \tilde{w}_2^T] P' \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{bmatrix} + K_1\|w_3\|^2 + K_2\|q\|^2 \quad (5.27)$$

όπου  $P' := P'_1 - \bar{\epsilon}P'_2$  με

$$\begin{aligned} P'_1 & := \text{diag}\left\{(\beta - \gamma)(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) + \frac{\alpha\mu}{2}\mathbb{I}_{nN}, \alpha\gamma(\beta - \gamma L^2/(2\mu))\mathbb{I}_{nN}\right\}, \\ P'_2 & := \text{diag}\left\{\beta(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n) + (\alpha + 1)\mathbb{I}_{nN}, \gamma(1 + \alpha)\mathbb{I}_{nN} + \beta\gamma(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I}_n)\right\} \end{aligned}$$

και  $K_1 = \frac{\alpha^4 L^2}{4\bar{\epsilon}}(\gamma + 1)$ ,  $K_2 = \frac{1}{4\bar{\epsilon}}(\alpha L^2 + \beta\|\mathcal{L}\|)(\gamma + 1)$ . Επιλέγοντας  $\gamma < \min\{\beta, 2\mu\beta/L^2\}$  διασφαλίζεται ότι ο πίνακας  $P'_1$  είναι θετικά ορισμένος για όλα τα  $\alpha, \beta > 0$ . Επίσης, για  $\bar{\epsilon} < \lambda_{\min}(P'_1)/\lambda_{\max}(P'_2)$  ο πίνακας  $P'$  είναι θετικά ορισμένος. Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες του πηλίκου Rayleigh, η (5.27) δίνει

$$\dot{V} \leq -rV + K_1\|w_3\|^2 + K_2\|q\|^2, \quad (5.28)$$

όπου  $r := \lambda_{\min}(P')/\lambda_{\max}(P)$ . Αν θέσουμε  $V_{w_3} = (1/2)w_3^T w_3$ , παίρνουμε από την (5.11) και την ανισότητα του Young ότι

$$\dot{V}_{w_3} = -\alpha w_3^T w_3 + w_3^T q \leq -\alpha V_{w_3} + \|q\|^2/(2\alpha). \quad (5.29)$$

Από τη συνθήκη 2 του Θεωρήματος, υπάρχει  $q_{\max} > 0$  τέτοιο ώστε  $\|q(t)\| \leq q_{\max}$  για κάθε  $t \geq 0$ . Χρησιμοποιώντας αυτό στην (5.29) παίρνουμε ότι

$$\dot{V}_{w_3} \leq -\alpha V_{w_3} + \frac{1}{2\alpha}q_{\max}^2. \quad (5.30)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της (5.30) με  $e^{\alpha t}$  και ολοκληρώνοντας από το 0 ως το  $t$ , και λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $V_{w_3}(0) = 0$ , προκύπτει η

$$V_{w_3}(t) \leq \frac{e^{-\alpha t}}{2\alpha} \int_0^t e^{\alpha s} q_{\max}^2 ds \leq \frac{1}{2\alpha^2} q_{\max}^2, \quad (5.31)$$

και επομένως

$$\|w_3(t)\| \leq (1/\alpha)q_{\max}, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.32)$$

Σαν αποτέλεσμα, η (5.28) δίνει

$$\dot{V} \leq -rV + K_3 q_{\max}^2, \quad (5.33)$$

όπου  $K_3 = K_1/\alpha + K_2$ . Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της (5.33) με  $e^{rt}$  και ολοκληρώνοντας από το 0 ως το  $t$  καταλήγουμε στην

$$V(t) \leq e^{-rt}V(0) + e^{-rt} \int_0^t e^{rs} K_3 q_{\max}^2 ds \leq V(0) + (K_3/r)q_{\max}^2, \quad (5.34)$$

και επομένως η  $V(t)$  παραμένει φραγμένη για κάθε  $t \geq 0$ . Από τη συνθήκη 2 του Θεωρήματος 5.1, υπάρχει  $T_q > 0$  τέτοιο ώστε  $\|q(t)\| < \epsilon$ , για κάθε  $t \geq T_q$ . Επιπλέον, χρησιμοποιώντας παρόμοια ανάλυση με την απόδειξη της (5.32), αποδεικνύεται ευθέως ότι, από την (5.11), για αρκετά μικρό  $\delta > 0$  υπάρχει χρονική στιγμή  $T_{w_3}(\delta) \geq T_q$  τέτοια ώστε  $\|w_3(t)\| \leq (1 + \delta)\epsilon/\alpha$  για κάθε  $t \geq T_{w_3}(\delta)$ . Σαν αποτέλεσμα, για  $t \geq T_{w_3}$  η εξίσωση (5.28) δίνει ότι

$$\dot{V}(t) \leq -rV(t) + [(K_1/\alpha^2)(1 + \delta)^2 + K_2] \epsilon^2. \quad (5.35)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με  $e^{rt}$  και ολοκληρώνοντας από το  $T_{w_3}$  ως το  $t$  παίρνουμε

$$V(t) \leq (V(T_{w_3}) - K_4 \epsilon^2) e^{-r(t-T_{w_3})} + K_4 \epsilon^2, \quad (5.36)$$

όπου  $K_4 := (1/r)[(K_1/\alpha^2)(1 + \delta)^2 + K_2]$  και η  $V(T_{w_3})$  είναι φραγμένη διότι η  $V$  είναι φραγμένη. Από την (5.14) και την ανισότητα από το πηλίκο Rayleigh παίρνουμε ότι

$$\|\tilde{w}_1(t)\|^2 + \|\tilde{w}_2(t)\|^2 \leq V(t)/\lambda_{\min}(P). \quad (5.37)$$

Συνδυάζοντας τις (5.36) και (5.37) έχουμε για  $t \geq T_{w_3}$  ότι

$$\|\tilde{w}_1(t)\| \leq \frac{1}{\lambda_{\min}^{1/2}(P)} (V(T_{w_3}) - K_4 \epsilon^2)^{1/2} e^{-\frac{r}{2}(t-T_{w_3})} + (K_4/\lambda_{\min}(P))^{1/2} \epsilon. \quad (5.38)$$

Άρα, υπάρχει  $T_y \geq T_{w_3}(\delta)$  τέτοιο ώστε για  $t \geq T_y$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}^{1/2}(P)} (V(T_{w_3}) - K_4 \epsilon^2)^{1/2} e^{-\frac{r}{2}(t-T_{w_3})} \leq \delta \epsilon. \quad (5.39)$$

Αν ορίσουμε  $K_5 := (K_4/\lambda_{\min}(P))^{1/2} + \delta$ , έχουμε

$$\|\tilde{w}_1(t)\| \leq K_5 \epsilon, \quad \forall t \geq T_y. \quad (5.40)$$

Επιπλέον, για  $t \geq T_y \geq T_{w_3}(\delta)$ , ισχύει από την (5.11) ότι

$$\|z(t)\| \leq \alpha \|w_3(t)\| + \|q(t)\| \leq (2 + \delta)\epsilon. \quad (5.41)$$

Τέλος, η (5.10) δίνει  $z = y - w_1 = y - (\mathbf{1}_N \otimes y^*) - \tilde{w}_1$  και χρησιμοποιώντας την (5.41) παίρνουμε την

$$\|y - (\mathbf{1}_N \otimes y^*)\| \leq \|z\| + \|\tilde{w}_1\| \leq (2 + \delta + K_5)\epsilon,$$

η οποία ολοκληρώνει την απόδειξη για  $c := 2 + \delta + K_5$ .  $\square$

**Παρατήρηση 5.1.** Στις εργασίες [72], [75], [81] όπου χρησιμοποιείται η ‘ενσωματωμένη’ τεχνική, απαιτείται η μετάδοση ενός βέλτιστου σήματος επιπρόσθετα στην σχετική απόσταση των εξόδων. Επίσης, στις εργασίες [79], [80], [82] διαμοιράζονται και όροι διόρθωσης μαζί με τις σχετικές αποστάσεις των εξόδων. Από την άλλη, η τεχνική των μεταβλητών OCPI απαιτεί την γνώση μόνο των σχετικών αποστάσεων των εξόδων. Αυτό οδηγεί σε σχεδίαση νόμων ελέγχου η οποία χρειάζεται μόνο τις σχετικές αποστάσεις μεταξύ των γειτόνων (βλ. Παράγραφο 5.3.2).

## 5.3 Εφαρμογή σε άγνωστους πράκτορες καθαρής ανατροφοδότησης

Για να αναδείξουμε την εφαρμοσιμότητα των μεταβλητών OCPI θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της βέλτιστης συμφωνίας για πολυπρακτορικά συστήματα. Συγκεκριμένα για μη γραμμικούς πράκτορες με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις σε άγνωστη μορφή καθαρής ανατροφοδότησης. Θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές OCPI σε μια σχεδίαση backstepping.

### 5.3.1 Δυναμικές των πρακτόρων

Θεωρούμε ένα πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από  $N$  ετερογενείς μη γραμμικούς πράκτορες με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις σε άγνωστη μορφή καθαρής ανατροφοδότησης. Συγκεκριμένα, η δυναμική του  $i$ -οστού πράκτορα,  $i \in \mathcal{V}$ , δίνεται από την

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij} &= h_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1}), \quad j = 1, \dots, m-1 \\ \dot{x}_{im} &= h_{im}(t, \bar{x}_t^{im}, u_i), \quad y_i = x_{i1}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

όπου τα  $x_{ij} \in \mathbb{R}$  είναι οι καταστάσεις του πράκτορα  $i$ ,  $\bar{x}_{ij} = [x_{i1} \cdots x_{ij}]^T$ ,  $\bar{x}_t^{ij} = \bar{x}_{ij}(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-d, 0]$ ,  $d \in \mathbb{R}$ ,  $d > 0$  και τα  $y_i \in \mathbb{R}$  και  $u_i \in \mathbb{R}$  είναι η έξοδος και είσοδος του πράκτορα  $i$ , αντίστοιχα. Το πρώτο όρισμα της  $h_{ij}$  ενσωματώνει άγνωστες διαταραχές. Υποθέτουμε ότι όλες οι καταστάσεις έχουν συναρτήσεις αρχικών καταστάσεων  $x_0^{ij}$  οι οποίες είναι συνεχείς σε όλο το  $[-d, 0]$ . Υποθέτουμε επίσης ότι κάθε πράκτορας  $i \in \mathcal{V}$  είναι εφοδιασμένος με μία τοπική συνάρτηση κόστους  $f_i(y_i) \in \mathbb{R}$ . Ακόμα, υποθέτουμε ότι όλες οι συναρτήσεις  $h_{ij}$  είναι συνεχείς ως προς το πρώτο τους όρισμα και τοπικά Lipschitz ως προς τα υπόλοιπα.

Το πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι η σχεδίαση ενός κατανεμημένου ελέγχου για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ , που χρησιμοποιεί την δική του κατάσταση  $\bar{x}_{im}$ , την κλίση της τοπικής συνάρτησης κόστους  $\nabla f_i(y_i)$ , και τις σχετικές

αποστάσεις των εξόδων από τους γείτονές του  $y_i - y_j, j \in N_i$ , και οδηγεί το πολυπρακτορικό σύστημα σε προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία των εξόδων, όπως ορίσαμε στην Παράγραφο 5.1.

### 5.3.2 Ρύθμιση των μεταβλητών OCPI

Για την σχεδίαση ενός καταναμημένου ελεγκτή ο οποίος να ρυθμίζει τις μεταβλητές OCPI για πράκτορες με δυναμική (5.42) κάνουμε τις εξής καθιερωμένες υποθέσεις για την ελεγκσιμότητα και την γνώση των κατευθύνσεων ελέγχου σε συστήματα καθαρής ανατροφοδότησης.

**Υπόθεση 5.3.** Κάθε συνάρτηση  $h_{ij} : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}([-d, 0], \mathbb{R}^j) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη ως προς το τελευταίο της όρισμα  $x_{i,j+1}$  ( $u_i$  για την  $h_{im}$ ) για κάθε  $j = 1, \dots, m$  και όλους τους πράκτορες  $i \in \mathcal{V}$ .

**Υπόθεση 5.4.** Οι μερικές παράγωγοι  $h_{ij} : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}([-d, 0], \mathbb{R}^j) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ως προς το τελευταίο όρισμα  $x_{i,j+1}$  ( $u_i$  για την  $h_{im}$ ) ικανοποιούν τις  $\left| \frac{\partial h_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1})}{\partial x_{i,j+1}} \right| \geq b_{ij} > 0$  για όλα τα  $j = 1, \dots, m-1$  και την  $\left| \frac{\partial h_{im}(t, \bar{x}_t^{ij}, u_i)}{\partial u_i} \right| \geq b_{im} > 0$  για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ .

**Υπόθεση 5.5.** Τα πρόσημα των  $\frac{\partial h_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1})}{\partial x_{i,j+1}}, j = 1, \dots, m-1$  και της  $\frac{\partial h_{im}(t, \bar{x}_t^{ij}, u_i)}{\partial u_i}$  είναι γνωστά για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι όλα θετικά.

Η επόμενη υπόθεση αφορά το φράξιμο των αβεβαιοτήτων που εξαρτώνται από τον χρόνο, για το μοντέλο των πρακτόρων (5.42).

**Υπόθεση 5.6.** Οι συναρτήσεις  $h_{ij}(t, \bar{x}_t^{ij}, x_{i,j+1}), j = 1, \dots, m-1$  και η  $h_{im}(t, \bar{x}_t^{im}, u_i)$  είναι ομοιόμορφα φραγμένες ως προς το πρώτο τους όρισμα  $t, \forall i \in \mathcal{V}$ .

### Σχήμα Ελέγχου

Για την καταναμημένη ρύθμιση των μεταβλητών  $q_i$ , που ορίζονται από την (5.2), σε μια γειτονιά του μηδενός προτείνουμε μια προσέγγιση backstepping στο πνεύμα του [56]. Αρχικά, ορίζουμε την συνάρτηση  $P : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  ως  $P(x) := \ln((1-x)/(1+x))$ . Για να είναι καλώς ορισμένη η σχεδίαση του νόμου ελέγχου, επιβάλλουμε ότι οι ολοκληρωτικοί όροι των μεταβλητών OCPI δεν είναι σε λειτουργία για κάθε  $t \in [-d, 0]$ , δηλαδή  $q_0^i = y_0^i$ , για όλα τα  $i \in \mathcal{V}$ . Επίσης υποθέτουμε ότι κάθε πράκτορας γνωρίζει τις καταστάσεις του.

**Υπόθεση 5.7.** Κάθε πράκτορας  $i \in \mathcal{V}$  έχει τις εσωτερικές τους καταστάσεις,  $x_{ij}, j = 1, \dots, m$  διαθέσιμες προς μέτρηση.

Για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ , σχεδιάζουμε τους εικονικούς νόμους ελέγχου ως

$$v_{ij}(\xi_{ij}) = -k_{ij}P(\xi_{ij}), \quad j = 1, \dots, m-1 \quad (5.43)$$

και τον νόμο ελέγχου ως

$$u_i(\xi_{im}) = -k_{im}P(\xi_{im}), \quad (5.44)$$

όπου τα  $k_{ij}$  είναι θετικά κέρδη ελέγχου, και τα  $\xi_{ij}$  είναι οι κανονικοποιημένες μεταβλητές σφάλματος που ορίζονται στη συνέχεια. Η πρώτη κανονικοποιημένη μεταβλητή σφάλματος  $\xi_{i1}$  για τον πράκτορα  $i$  ορίζεται ως

$$\xi_{i1} := \frac{q_i(t)}{\rho_{i1}(t)}, \quad (5.45)$$

όπου το  $q_i$  ορίζεται στην (5.2). Για  $j = 2, \dots, m-1$ , οι μεταβλητές  $\xi_{ij}$  δίνονται από την

$$\xi_{ij} := \frac{x_{ij}(t) - v_{i,j-1}(\xi_{i,j-1})}{\rho_{ij}(t)}, \quad (5.46)$$

και η  $\xi_{im}$  ορίζεται ως

$$\xi_{im} := \frac{x_{im}(t) - v_{i,m-1}(\xi_{i,m-1})}{\rho_{im}(t)}. \quad (5.47)$$

Οι θετικές συναρτήσεις  $\rho_{ij} : [-d, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $j = 1, \dots, m$  σχεδιάζονται να είναι συνεχώς διαφορίσιμες, με φραγμένες παραγώγους και φθίνουσες, με  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{ij}(t) = \epsilon_{ij} > 0$ . Οι αρχικές τους συνθήκες επιλέγονται έτσι ώστε να είναι συνεχείς στο  $[-d, 0]$  και οι εξισώσεις (5.43), (5.44) να είναι καλώς ορισμένες, δηλαδή  $\|\xi_0^{ij}\|_C < 1$ , για όλα τα  $j = 1, \dots, m$ . Μια τυπική επιλογή είναι μια φθίνουσα εκθετική συνάρτηση με κατάλληλες αρχικές συνθήκες.

Το αποτέλεσμα που αφορά τη βέλτιστη συμφωνία για άγνωστους πράκτορες σε μορφή καθαρής ανατροφοδότησης είναι το παρακάτω.

**Θεώρημα 5.2.** Θεωρούμε ένα πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από  $N$  πράκτορες που έχουν δυναμικές που δίνονται από την (5.42) και είναι εφοδιασμένοι με τοπικές συναρτήσεις κόστους  $f_i(y_i)$ ,  $i \in \mathcal{V}$ . Αν

1. ισχύουν οι Υποθέσεις 5.1-5.7,
2. εφαρμόσει το σχήμα ελέγχου (5.43), (5.44) για κάθε  $i \in \mathcal{V}$ ,

τότε υπάρχει  $T_y > 0$  τέτοια ώστε  $\|y - \mathbf{1}y^*\| \leq c\epsilon_\infty$  για κάθε  $t \geq T_y$ , όπου το  $y^*$  είναι το σημείο βέλτιστης συμφωνίας που ικανοποιεί  $\sum_{i=1}^N \partial f_i(y^*) / \partial y_i = 0$ , το  $\epsilon_\infty = \|\epsilon_{11} \ \dots \ \epsilon_{N1}\|$  είναι μια παράμετρος ελέγχου που μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μικρή, και το  $c > 0$  είναι μια θετική σταθερά. Επιπλέον, όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα για κάθε  $t \in [0, \infty)$ .

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό των κανονικοποιημένων μεταβλητών σφάλματος (5.45), (5.46), (5.47) και τις (5.2), (5.10), (5.11), προκύπτει ότι

$$x_{i1}(t) = \xi_{i1}\rho_{i1}(t) + w_{1i} - \alpha w_{3i} \quad (5.48)$$

$$x_{ij}(t) = \xi_{ij}\rho_{ij}(t) + v_{i,j-1}(\xi_{i,j-1}), \quad j = 2, \dots, m \quad (5.49)$$

όπου τα  $w_{1i}, w_{3i}$  είναι τα  $i$ -οστά στοιχεία των  $w_1$  και  $w_3$ , αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τις (5.42), (5.45), (5.48), (5.49) παίρνουμε την δυναμική της πρώτης κανονικοποιημένης μεταβλητής σφάλματος ως εξής

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{i1}(t) &= \phi_{i1}(t, \xi_{i2}, \xi_t^{i1}, w_t^{1i}, w_{2i}, w_t^{3i}, \xi_{k1}, w_{1k}, w_{3k}; k \in N_i) \\ &= \frac{1}{\rho_{i1}(t)} \left[ h_{i1} \left( t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + w_t^{1i} - \alpha w_t^{3i}, \xi_{i2}\rho_{i2}(t) + v_{i1}(\xi_{i1}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \dot{w}_{1i} + \alpha \dot{w}_{3i} - \xi_{i1} \dot{\rho}_{i1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Στην (5.50) υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με τις (5.11), (5.45) το  $\dot{w}_{3i}$  είναι συνάρτηση των  $\xi_{i1}$  και  $w_{3i}$ , και από τις (5.11), (5.13), (5.45), (5.48) το  $\dot{w}_{1i}$  είναι συνάρτηση των  $w_{1i}, w_{2i}, w_{3i}$  και των  $w_{1k}, w_{3k}, \xi_{k1}$  όπου  $k \in N_i$ . Όμοια, από τις (5.42), (5.46), (5.47), (5.48), (5.49) παίρνουμε τις δυναμικές για τις υπόλοιπες κανονικοποιημένες μεταβλητές σφάλματος ως εξής

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{ij}(t) &= \phi_{ij}(t, \xi_{i,j+1}, \bar{\xi}_t^{ij}, w_t^{1i}, w_{2i}, w_t^{3i}, \xi_{k1}, w_{1k}, w_{3k}; k \in N_i) \\ &= \frac{1}{\rho_{ij}(t)} \left[ h_{ij} \left( t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + w_t^{1i} - \alpha w_t^{3i}, \dots, \xi_t^{ij} \rho_t^{ij} + v_{i,j-1}(\xi_t^{i,j-1}), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \xi_{i,j+1} \rho_{i,j+1}(t) + v_{ij}(\xi_{ij}) \right) - \frac{dv_{i,j-1}(\xi_{i,j-1})}{d\xi_{i,j-1}} \phi_{i,j-1} \left( t, \xi_{ij}, \bar{\xi}_t^{i,j-1}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. w_t^{1i}, w_{2i}, w_t^{3i}, \xi_{k1}, w_{1k}, w_{3k}; k \in N_i \right) - \xi_{ij} \dot{\rho}_{ij}(t) \right], \end{aligned} \quad (5.51)$$

για  $j = 2, \dots, m-1$  και

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{im}(t) &= \phi_{im}(t, \bar{\xi}_t^{im}, w_t^{1i}, w_{2i}, w_t^{3i}, \xi_{k1}, w_{1k}, w_{3k}; k \in N_i) \\ &= \frac{1}{\rho_{im}(t)} \left[ h_{im} \left( t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + w_t^{1i} - \alpha w_t^{3i}, \dots, \xi_t^{im} \rho_t^{im} + v_{i,m-1}(\xi_t^{i,m-1}), u_i(\xi_{im}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{dv_{i,m-1}(\xi_{i,m-1})}{d\xi_{i,m-1}} \phi_{i,m-1} \left( t, \xi_{im}, \bar{\xi}_t^{i,m-1}, w_t^{1i}, w_{2i}, w_t^{3i}, \xi_{k1}, w_{1k}, w_{3k}; k \in N_i \right) \right. \\ &\quad \left. - \xi_{im} \dot{\rho}_{im}(t) \right]. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Θεωρούμε το  $w := [w_1^T \ w_2^T \ w_3^T]^T$ . Χρησιμοποιώντας τις (5.11), (5.13) και την (5.45), παίρνουμε ότι  $\dot{w}(t) = \phi_w(t, w, \xi_{i1})$ . Ορίζουμε επίσης το διάνυσμα  $\bar{\xi}_i := [\xi_{i1} \cdots \xi_{im}]^T$ , για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$ , και το συνολικό διάνυσμα  $\xi_{ij}$  για όλους τους πράκτορες και όλα τα  $j = 1, \dots, m$  ως  $\xi := [\bar{\xi}_1^T \cdots \bar{\xi}_N^T]^T$ . Από τις (5.50), (5.51), (5.52) έχουμε ότι  $\dot{\xi} = \phi(t, \xi, w_1^1, w_2, w_3^3)$ .

Προχωράμε τώρα στην διερεύνηση της ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων για το σύστημα που περιγράφεται από το επαυξημένο διάνυσμα κατάστασης  $\xi_{ag} := [\xi^T \ w^T]^T$  με δυναμική

$$\dot{\xi}_{ag} = \phi_{ag}(t, \xi_t^{ag}) = \begin{bmatrix} \phi(t, \xi_t, w_t^1, w_2, w_t^3) \\ \phi_w(t, w, \xi_{i1}) \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

όπου  $\xi_t^{ag} = \xi_{ag}(t+\theta)$ ,  $\theta \in [-d, 0]$ . Η συνάρτηση αρχικής συνθήκης  $\phi_0^{ag}$  της (5.53) είναι συνεχής καθώς από τον ορισμό των κανονικοποιημένων μεταβλητών σφάλματος (5.45), (5.46), (5.47) και του  $q_i$  στην (5.2), το διάνυσμα  $\xi$  έχει συνεχείς αρχικές συνθήκες και υποθέτουμε ότι το  $w$  έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες, δηλαδή  $w(\theta) = 0$ , για όλα τα  $\theta \in [-d, 0]$ . Υπενθυμίζουμε επίσης ότι, εξ ορισμού,  $\xi_0^{ij} \in \mathcal{C}([-d, 0], (-1, 1))$ . Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο  $\Omega$  που ορίζεται ως εξής

$$\Omega = \mathcal{C}([-d, 0], (-1, 1)^{mN}) \times \mathcal{C}([-d, 0], (-k, k)^{3N}) \quad (5.54)$$

όπου το  $k$  θα οριστεί αργότερα στην απόδειξη. Έχουμε ότι  $(0, \phi_0^{ag}) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ . Αφού η απεικόνιση  $\phi_{ag}$  είναι συνεχής και τοπικά Lipschitz ως προς το δεύτερο της όρισμα στο σύνολο  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ , από το Θεώρημα 2.2, υπάρχει μοναδική λύση της (5.53) με αρχικές συνθήκες  $(0, \phi_0^{ag})$ . Επομένως υπάρχει μέγιστος χρόνος  $\tau_{\max} > 0$  τέτοιος ώστε η λύση  $\xi_{ag}(t)$  να ικανοποιεί την (5.53) για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ , να είναι συνεχής στο  $[-d, \tau_{\max})$



και να αρχικοποιείται από την  $\xi_0^{ag} = \phi_0^{ag}$ . Σαν αποτέλεσμα, υπάρχει θετική χρονική σταθερά  $\tau_0 < \tau_{\max}$  τέτοια ώστε η λύση της (5.53) να παραμένει στο σύνολο  $\Omega$ , δηλαδή  $\xi_t^{ag} \in \Omega$  για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$ .

**Περιορισμός της  $\xi_t$ :** Έστω η συνάρτηση  $p_{ij} = P(\xi_{ij})$  η οποία είναι καλώς ορισμένη για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$ , και όλα τα  $i \in \mathcal{V}$  και  $j = 1, \dots, m$ . Προχωράμε στον ορισμό μια μη αρνητικής, ακτινικά μη φραγμένης συνάρτησης  $V_{i1}(t) := (1/2)p_{i1}^2(t)$ ,  $t \in [0, \tau_0)$ . Παραγωγίζοντας την  $V_{i1}$  ως προς τον χρόνο, έχουμε από την (5.50) ότι

$$\dot{V}_{i1} = \frac{2p_{i1}}{(1 - \xi_{i1}^2) \rho_{i1}(t)} \left[ h_{i1} \left( t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + w_t^{1i} - \alpha w_t^{3i}, \xi_{i2} \rho_{i2}(t) + v_{i1}(\xi_{i1}) \right) - \dot{w}_{1i} + \alpha \dot{w}_{3i} - \xi_{i1} \dot{\rho}_{i1}(t) \right]. \quad (5.55)$$

Από την Υπόθεση 5.3, η συνάρτηση  $h_{i1}$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη ως προς το τελευταίο της όρισμα και επομένως, επικαλούμενοι το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένα σημείο  $c^* = \lambda(\xi_{i2} \rho_{i2}(t) + v_{i1}(\xi_{i1})) + (1 - \lambda)\xi_{i2} \rho_{i2}(t)$ , για κάποιο  $\lambda \in (0, 1)$ , τέτοιο ώστε

$$h_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + w_t^{1i} - \alpha w_t^{3i}, \xi_{i2} \rho_{i2}(t) + v_{i1}(\xi_{i1})) = h_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + w_t^{1i} - \alpha w_t^{3i}, c) \Big|_{c=c^*}. \quad (5.56)$$

Αντικαθιστώντας την (5.56) στην (5.55) και ανακαλώντας την (5.43) προκύπτει ότι

$$\dot{V}_{i1} = \frac{2p_{i1}}{(1 - \xi_{i1}^2) \rho_{i1}(t)} \left[ h_{i1} \left( t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + w_t^{1i} - \alpha w_t^{3i}, \xi_{i2} \rho_{i2}(t) \right) - \dot{w}_{1i} + \alpha \dot{w}_{3i} - \xi_{i1} \dot{\rho}_{i1}(t) - k_{i1} p_{i1} \frac{\partial h_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + w_t^{1i} - \alpha w_t^{3i}, c)}{\partial c} \Big|_{c=c^*} \right]. \quad (5.57)$$

Προχωράμε τώρα να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$H_{i1}(t) := h_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + w_t^{1i} - \alpha w_t^{3i}, \xi_{i2} \rho_{i2}(t)) - \dot{w}_{1i} + \alpha \dot{w}_{3i} - \xi_{i1} \dot{\rho}_{i1}(t), \quad (5.58)$$

παραμένει φραγμένη για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$ . Ο πρώτος όρος,  $h_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + w_t^{1i} - \alpha w_t^{3i}, \xi_{i2} \rho_{i2}(t))$ , είναι συνεχής και το δεύτερο και τρίτο όρισμά του παίρνουν τιμές σε ένα συμπαγές σύνολο για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$ , αφού τα  $\xi_t^{i1}, w_t^{1i}, w_t^{3i}$  είναι φραγμένα από το θεώρημα ύπαρξης για το  $\xi_{ag}$ , οι συναρτήσεις  $\rho_t^{i1}, \rho_{i2}(t)$  είναι φραγμένες εκ κατασκευής και η  $h_{i1}$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη ως προς το πρώτο της όρισμα από την Υπόθεση 5.6. Επομένως με βάση το Θεώρημα Ακραίων Τιμών ο όρος  $h_{i1}(t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + w_t^{1i} - \alpha w_t^{3i}, \xi_{i2} \rho_{i2}(t))$  είναι φραγμένος για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$ . Για τον δεύτερο όρο,  $\dot{w}_{1i}$  έχουμε από τις (5.5), (5.10), (5.13), (5.45) ότι είναι συνεχής συνάρτηση των  $w_1, w_2, w_3, \xi_{i1}$ , τα οποία είναι φραγμένα για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$  από το θεώρημα ύπαρξης για το  $\xi_{ag}$ . Σαν αποτέλεσμα ο όρος  $\dot{w}_{1i}$  είναι φραγμένος για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$  από το Θεώρημα Ακραίων Τιμών. Ο τρίτος όρος  $\alpha \dot{w}_{3i}$  μπορεί να δειχθεί φραγμένος ακολουθώντας παρόμοια επιχειρήματα, και ο τελευταίος όρος  $\xi_{i1} \dot{\rho}_{i1}(t)$  είναι φραγμένος για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$ , διότι το  $\xi_{i1}$  είναι φραγμένο από το θεώρημα ύπαρξης και το  $\rho_{i1}$  εκ κατασκευής. Επομένως καταλήγουμε ότι υπάρχει θετική σταθερά  $\bar{H}_{i1}$ , τέτοια ώστε  $|H_{i1}(t)| \leq \bar{H}_{i1}$  για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$ .

Χρησιμοποιώντας το γεγονός αυτό και την Υπόθεση 5.4, η (5.57) δίνει ότι

$$\dot{V}_{i1}(t) \leq \frac{2}{(1 - \xi_{i1}^2) \rho_{i1}(t)} (\bar{H}_{i1} |p_{i1}| - k_{i1} b_{i1} p_{i1}^2), \quad \forall t \in [0, \tau_0). \quad (5.59)$$

Επομένως, ισχύει ότι  $\dot{V}_{i1} < 0$ , όταν  $|p_{i1}| > \bar{H}_{i1}/(k_{i1}b_{i1})$ , και σαν αποτέλεσμα το  $p_{i1}$  φράσσεται από μία σταθερά  $P_{i1} > 0$  ως εξής

$$|p_{i1}(t)| \leq P_{i1} := \max \{ |p_{i1}(0)|, \bar{H}_{i1}/(k_{i1}b_{i1}) \}, \quad \forall t \in [0, \tau_0). \quad (5.60)$$

Από την (5.43) έχουμε ότι το  $v_{i1}(t)$  είναι επίσης φραγμένο για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$ . Χρησιμοποιώντας το γεγονός αυτό και την (5.49) συμπεραίνουμε ότι το  $x_{i2}(t)$  είναι επίσης φραγμένο για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$ . Επιπλέον, από το γεγονός ότι  $p_{ij} = P(\xi_{ij})$  μπορούμε να εφαρμόσουμε την αντίστροφη λογαριθμική συνάρτηση στην (5.60) για  $t \in [0, \tau_0)$  και έτσι να πάρουμε

$$-1 < \frac{e^{-P_{i1}} - 1}{e^{-P_{i1}} + 1} =: \xi_{i1}^{\min} \leq \xi_{i1}(t) \leq \xi_{i1}^{\max} := \frac{e^{P_{i1}} - 1}{e^{P_{i1}} + 1} < 1. \quad (5.61)$$

Από την (5.50) η παράγωγος του εικονικού νόμου ελέγχου  $v_{i1}$  δίνεται από την

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i1} &= \frac{dv_{i1}}{d\xi_{i1}} \phi_{i1}(t, \xi_{i2}, \xi_t^{i1}, w_t^{1i}, w_{2i}, w_t^{3i}, \xi_{k1}, w_{1k}, w_{3k}; k \in N_i) \\ &= -\frac{2k_{i1}}{(1 - \xi_{i1}^2)\rho_{i1}(t)} \left[ h_{i1} \left( t, \xi_t^{i1} \rho_t^{i1} + w_t^{1i} - \alpha w_t^{3i}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \xi_{i2} \rho_{i2}(t) + v_{i1}(\xi_{i1}) \right) - \dot{w}_{1i} + \alpha \dot{w}_{3i} - \xi_{i1} \dot{\rho}_{i1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Από την (5.62) μπορούμε να πάρουμε ότι η  $\dot{v}_{i1}(t)$  παραμένει ομοιόμορφα φραγμένη για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$ , ακολουθώντας τα ίδια επιχειρήματα όπως για το φράξιμο των (5.60) και (5.61). Για  $j = 2, \dots, m$ , θεωρούμε τις  $V_{ij} := \frac{1}{2}P_{ij}^2$  και ακολουθώντας όμοιο συλλογισμό, παίρνουμε ότι  $|p_{ij}(t)| \leq P_{ij}, \forall t \in [0, \tau_0)$  για κάποιο  $P_{ij} > 0$ . Αντίστοιχα με την (5.61) έχουμε ότι

$$-1 < \frac{e^{-P_{ij}} - 1}{e^{-P_{ij}} + 1} =: \xi_{ij}^{\min} \leq \xi_{ij}(t) \leq \xi_{ij}^{\max} := \frac{e^{P_{ij}} - 1}{e^{P_{ij}} + 1} < 1, \quad (5.63)$$

για όλα τα  $j = 2, \dots, m$  και κάθε  $t \in [0, \tau_0)$ . Καταλήγουμε ότι για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$  και  $j = 2, \dots, m$  όλοι οι εικονικοί νόμοι ελέγχου  $v_{ij}(t)$ , οι καταστάσεις  $x_{i,j+1}(t)$ , και ο νόμος ελέγχου  $u_i(t)$  παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένοι. Επειδή η παραπάνω ανάλυση είναι ανεξάρτητη του πράκτορα  $i$ , τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν για κάθε  $i \in \mathcal{V}$ .

*Περιορισμός του  $w_t$ :* Για  $t \in [0, \tau_0)$  η (5.61) δίνει  $|q_i(t)| < \rho_{i1}(t) \leq \rho_{i1}(0)$ , και σαν αποτέλεσμα  $\|q(t)\| \leq q_{\max} = \|\bar{\rho}_1(0)\|$ , όπου  $\bar{\rho}_1(0) = [\rho_{11}(0) \cdots \rho_{N1}(0)]^T$ . Από την (5.34) και την (5.37) στην ανάλυση ευστάθειας του Θεωρήματος 5.1 έχουμε ότι

$$\|w_\ell\| \leq \|w_\ell^e\| + \sqrt{V_M/\lambda_{\min}(P)} := w_{\ell M}, \quad \ell = 1, 2, \quad (5.64)$$

όπου  $V_M := V(0) + (K_3/r)q_{\max}^2$ . Ορίζουμε τώρα το  $k := 1 + \max_{\ell=1,2} \{q_{\max}/\alpha, w_{\ell M}\}$ . Οι ανισότητες (5.61), (5.63), (5.32) και (5.64) για κάθε πράκτορα  $i \in \mathcal{V}$  συνεπάγονται ότι  $\xi_t^{ag} \in \Omega'$  για κάθε  $t \in [0, \tau_0)$ , όπου το

$$\begin{aligned} \Omega' &:= \underbrace{\mathcal{C}([-d, 0], [\xi_{11}^{\min}, \xi_{11}^{\max}]) \times \cdots \times \mathcal{C}([-d, 0], [\xi_{mN}^{\min}, \xi_{mN}^{\max}])}_{m \times N \text{ times}} \\ &\quad \times \mathcal{C}([-d, 0], [-k + 1, k - 1]^{3N}) \end{aligned} \quad (5.65)$$

είναι ένα μη κενό, κλειστό και φραγμένο σύνολο. Υποθέτοντας ότι  $\tau_0 < \infty$ , από το γεγονός ότι  $\Omega' \subset \Omega$  και επειδή η  $\phi_{ag}$  είναι εξ' ολοκλήρου συνεχής στο  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ ,

παίρνουμε ότι, από το Θεώρημα 2.3, υπάρχει χρονική στιγμή  $t_U \in [0, \tau_0)$  τέτοια ώστε  $\xi_t^{ag} \notin \Omega'$  για  $t_U \leq t < \tau_0$ , το οποίο είναι άτοπο. Επομένως  $\tau_0 = \tau_{\max} = \infty$ . Σαν αποτέλεσμα όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα για κάθε  $t \in [0, \infty)$  και όλους τους πράκτορες  $i \in \mathcal{V}$ . Επιπλέον, από την (5.61) έχουμε ότι  $|q_i(t)| < \rho_{i1}(t)$ , για κάθε  $t \in [0, \infty)$  και όλα  $i \in \mathcal{V}$ . Εκ κατασκευής έχουμε ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{i1}(t) = \epsilon_{i1}$ . Επομένως  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|q(t)\| < \epsilon_\infty$ . Τέλος, επικαλούμενοι το Θεώρημα 5.1, για  $n = 1$ , η απόδειξη ολοκληρώνεται.  $\square$

## 5.4 Προσομοιώσεις

Για την προσομοίωσή μας, θεωρούμε ένα πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από  $N = 5$  CSTRs. Με βάση την εργασία [116], η αντίδραση του  $i$ -οστού CSTR,  $i \in \mathcal{V}$ , μπορεί να περιγραφεί από τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις

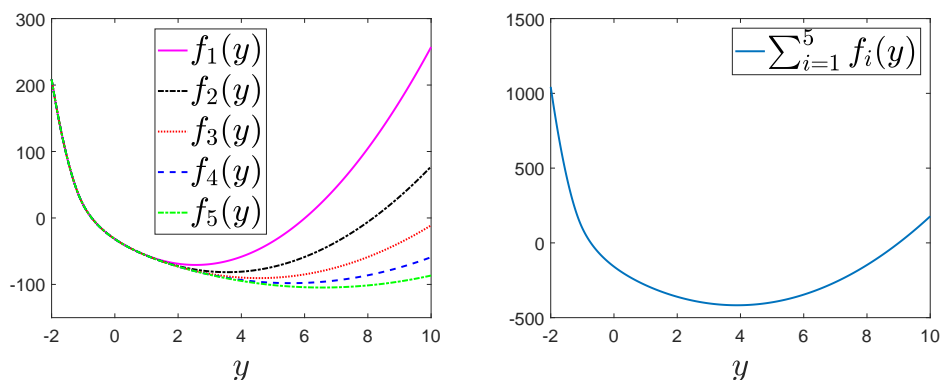
$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= -x_{i1} - 0.5x_{i1}(t - d_{Ai}) + x_{i2} + \delta_{Ai}(t, x_{i1}(t - d_{Ai})) \\ \dot{x}_{i2} &= -0.5x_{i2} - 0.5x_{i2}^2 - x_{i1}(t - d_{Ai}) - \frac{7}{3}x_{i2} \\ &\quad + x_{i2}(t - d_{Bi}) + u_i + \delta_{Bi}(t, x_{i2}(t - d_{Ai})), \end{aligned}$$

όπου τα  $x_{i1}$  και  $x_{i2}$  είναι οι αποστάσεις των συνθέσεων  $C_{Ai}$  και  $C_{Bi}$  από τα σημεία ισορροπίας τους, δηλαδή  $x_{i1} = C_{Ai}(t) - C_{Ai}^*$  και  $x_{i2} = C_{Bi}(t) - C_{Bi}^*$ . Οι συναρτήσεις  $\delta_{Ai}, \delta_{Bi}$  περιγράφουν τις μη γραμμικότητες, αβεβαιότητες και τις χρονικά εξαρτώμενες διαταραχές. Όμοια με το [116], θεωρούμε  $\delta_{Ai}(t, x_{i1}(t - d_{Ai})) = 0.2x_{i1}(t - d_{Ai})$  και  $\delta_{Bi}(t, x_{i2}(t - d_{Bi})) = 0.2x_{i2}^2(t - d_{Bi})e^{0.01x_{i2}(t-0.5)}$ . Επιλέγουμε  $d_{Ai} = 1.1 + 0.2(i - 1)$  και  $d_{Bi} = 1 + 0.2(i - 1)$ .

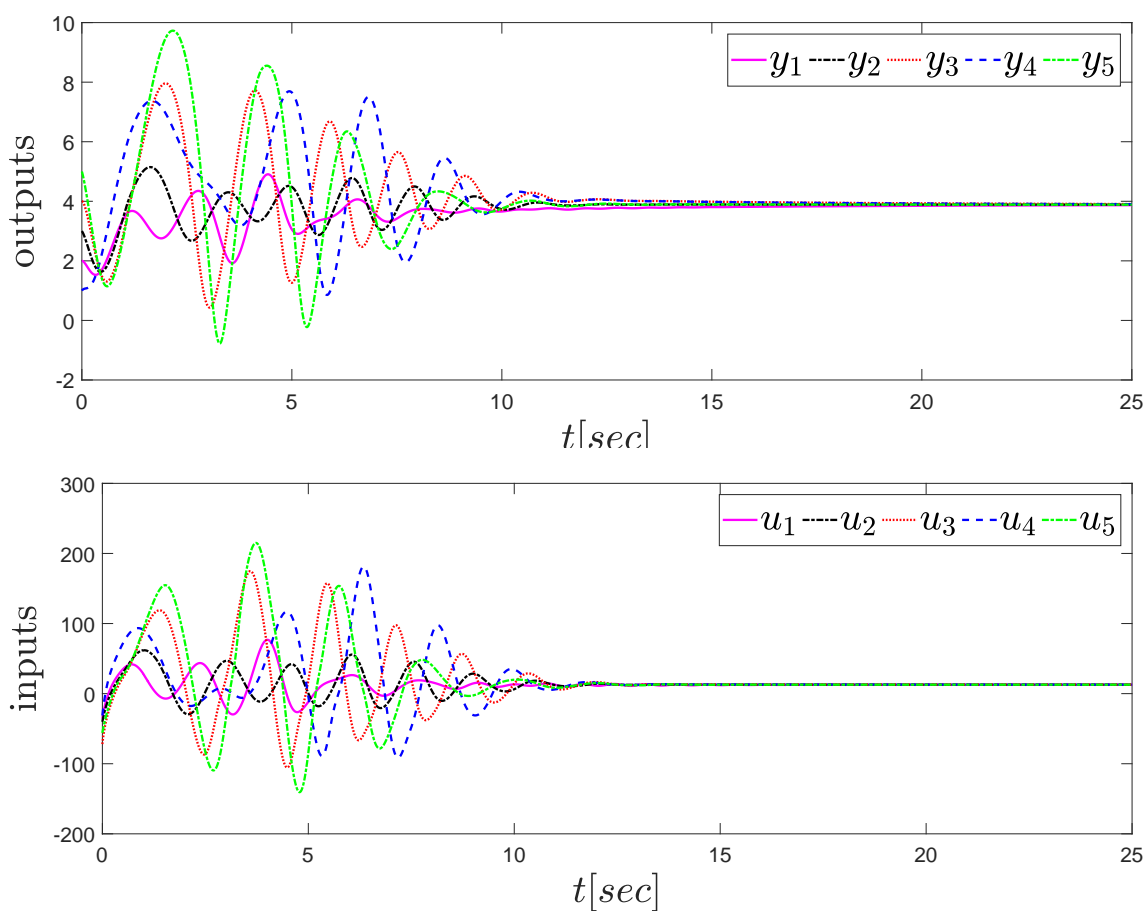
Θεωρούμε ότι έχουμε μετρήσεις της πλήρους κατάστασης για κάθε αντιδραστήρα και ότι η έξοδος του  $i$ -οστού αντιδραστήρα είναι  $y_i = x_{i1}$ . Επίσης, ότι οι σχετικές αποστάσεις μεταξύ των εξόδων των γειτονικών αντιδραστήρων είναι διαθέσιμες σε κάθε αντιδραστήρα. Η τοπολογία του γράφου επικοινωνίας είναι ένα δαχτυλίδι. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι κάθε αντιδραστήρας  $i \in \mathcal{V}$ , είναι εφοδιασμένος με μία τοπική συνάρτηση κόστους  $f_i(y_i)$ , η οποία έχει μεγάλη τιμή κοντά στην ελάχιστη αποδεκτή τιμή  $-C_{Ai}^*$  και ελάχιστο στην  $2E_i + C_{Ai}^*$ , όπου το  $E_i$  είναι σχεδιαστική σταθερά. Συγκεκριμένα

$$f_i(y_i) := \begin{cases} \gamma_{i1} (y_i + C_{Ai}^* - \delta_i)^2, & x \in (-\infty, -C_{Ai}^* + \frac{\delta_i}{2}] \\ \gamma_{i2} - \gamma_{i1} \frac{\delta_i^2}{2} \ln(y_i + C_{Ai}^*), & x \in (-C_{Ai}^* + \frac{\delta_i}{2}, E_i] \\ \gamma_{i3} y_i^2 + \gamma_{i4} y_i + \gamma_{i5}, & x \in (E_i, \infty) \end{cases}$$

όπου  $\delta_i, \gamma_{i1}, \gamma_{i3} > 0$  για κάθε  $i \in \mathcal{V}$ . Οι σταθερές  $\gamma_{ij}$ ,  $j = 2, \dots, 5$  επιλέγονται ώστε να διασφαλίζουν ότι οι  $f_i$  είναι συνεχείς με συνεχείς πρώτες και δεύτερες παραγώγους. Αν επιλέξουμε αρκετά μεγάλο  $\gamma_{i1}$  διασφαλίζουμε ότι οι έξοδοι παραμένουν μακριά από το  $-C_{Ai}^* = -14/9$ . Επομένως, για την παρούσα προσομοίωση επιλέγουμε  $\gamma_{i1} = 100$ ,  $\delta_i = 1$  και θέτουμε την παράμετρο  $E_i$  να παίρνει τις τιμές  $E_i = 0.5 + 0.5(i - 1)$ ,  $i \in \mathcal{V}$ . Για αυτή την συγκεκριμένη επιλογή των παραμέτρων έχουμε  $\gamma_{i2} = 25 - 50 \ln 2$ ,  $\gamma_{i3} = 25/(E_i + C_{Ai}^*)^2$ ,  $\gamma_{i4} = -50(2E_i + C_{Ai}^*)/(E_i + C_{Ai}^*)^2$  και  $\gamma_{i5} = \gamma_{i2} - 50 \ln(E_i + C_{Ai}^*) - \gamma_{i3}E_i^2 - \gamma_{i4}E_i$ ,  $i \in \mathcal{V}$ . Οι συναρτήσεις κόστους απεικονίζονται στο Σχήμα 5.1 και η τιμή βέλτιστης συμφωνίας είναι  $y^* = 3.9$ . Υλοποιούμε το σχήμα ελέγχου (5.43), (5.44) με  $\alpha = \beta = 1$ ,  $k_{i1} = 50$ ,  $k_{i2} = 200$  και  $\rho_{i1}(t) = 59.95e^{-0.1t} + 0.05$ ,  $\rho_{i2}(t) = 59.98e^{-0.1t} + 0.02 \forall i \in \mathcal{V}$ . Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης που φαίνονται στο Σχήμα 5.2 επικυρώνουν την επίτευξη βέλτιστης συμφωνίας.



Σχήμα 5.1: Οι συναρτήσεις κόστους  $f_i(y)$  και το συνολικό κόστος  $\sum_{i=1}^5 f_i(y)$



Σχήμα 5.2: Οι έξοδοι και οι είσοδοι των CSTRs

## 5.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε μια νέα προσέγγιση για την βέλτιστη συμφωνία. Η προτεινόμενη μεθοδολογία βασίζεται στις μεταβλητές OCPI οι οποίες αναδιαμορφώνουν το πρόβλημα της βέλτιστης συμφωνίας σε πρόβλημα ρύθμισης των μεταβλητών OCPI στο μηδέν. Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές OCPI προχωρήσαμε στην επίλυση για πρώτη φορά του προβλήματος βέλτιστης συμφωνίας εξόδων για άγνωστα συστήματα καθαρής ανατροφοδότησης με χρονικές υστερήσεις στις καταστάσεις και άγνωστες διαταραχές.

□



## Κεφάλαιο 6

# Διάταξη για σμήνος UAVs με προκαθορισμένη επίδοση

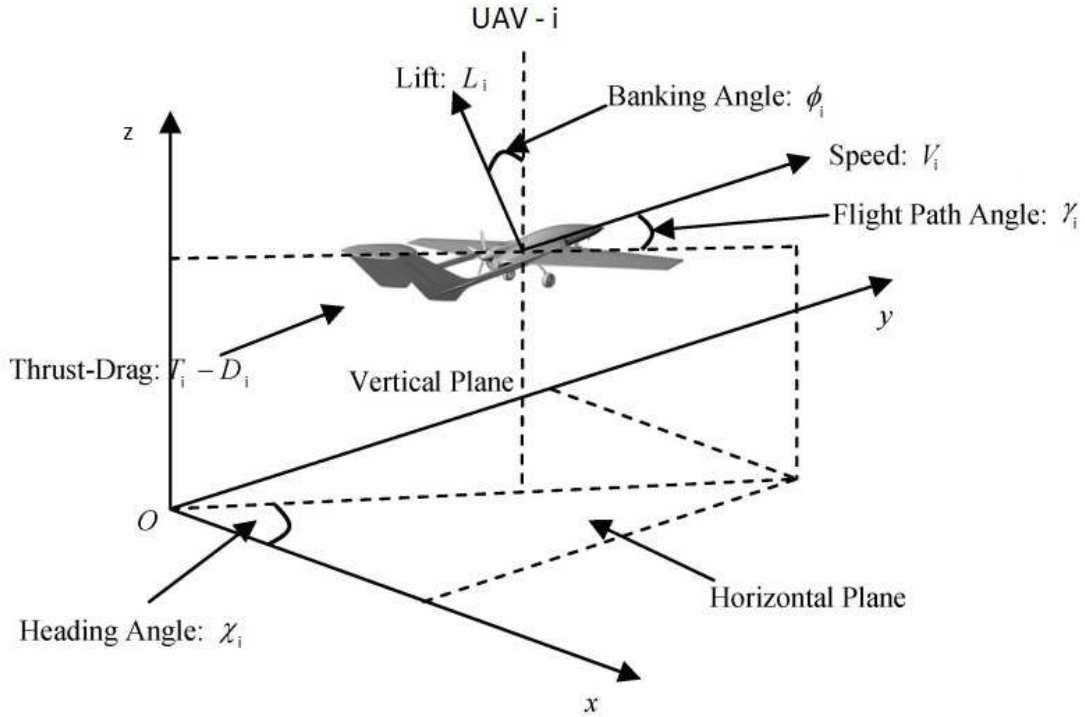
Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε έναν καταναμημένο έλεγχο για την διάταξη με προκαθορισμένη επίδοση μη επανδρωμένων ιπτάμενων οχημάτων (UAVs) με τρεις βαθμούς ελευθερίας. Η ροή πληροφορίας μεταξύ των UAV περιγράφεται από έναν κατευθυνόμενο γράφο που περιέχει δέντρο που τον εκτείνει με το UAV αρχηγό ως ρίζα. Μόνο οι σχετικές αποστάσεις μεταξύ των UAV χρειάζεται να είναι διαθέσιμες όπως ορίζει ο γράφος επικοινωνίας. Οι δυναμικές των UAVs προκύπτουν από τις κινηματικές εξισώσεις και οι συντελεστές της αντίστασης του αέρα των οχημάτων και οι μάζες θεωρούνται άγνωστες στους ελεγκτές. Για την σχεδίαση των ελεγκτών, υιοθετούμε μια προσέγγιση backstepping χαμηλής πολυπλοκότητας. Μια ανάλυση τύπου Lyapunov αποδεικνύει την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου. Τέλος, παρέχονται αποτελέσματα προσομοιώσεων που επικυρώνουν την θεωρητική μας ανάλυση. Τα αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου είναι δημοσιευμένα στο [106].

### 6.1 Διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε ένα σμήνος από μη επανδρωμένα ιπτάμενα οχήματα σταθερού πτερυγίου. Κάθε UAV έχει ως στόχο να συγκλίνει σε μια προκαθορισμένη διάταξη γύρω από το UAV, ενώ το συνολικό σφάλμα διάταξης κάθε UAV στην μεταβατική και στην τελική κατάσταση παραμένει φραγμένο από μια προκαθορισμένη περιβάλλουσα συνάρτηση. Για να ορίσουμε την διάταξη, χρησιμοποιούμε τα βοηθητικά διανύσματα θέσης  $\bar{\mathbf{p}}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{c}_i$ , όπου το  $\mathbf{c}_i = [c_{ix} \ c_{iy} \ c_{iz}]^T$ , για κάθε UAV  $i \in \mathcal{V}$  είναι ένα διάνυσμα που ορίζει την επιθυμητή θέση γύρω από τον αρχηγό, δηλαδή το  $i$ -οστό UAV έχει σκοπό να πάει σε μια γειτονιά του  $\mathbf{p}_L(t) + \mathbf{c}_i$ . Λέμε ότι η διάταξη με προκαθορισμένη επίδοση έχει επιτευχθεί αν το  $\|\bar{\mathbf{p}}_i\|_2$  είναι φραγμένο από μια περιβάλλουσα συνάρτηση που ενσωματώνει τα επιθυμητά χαρακτηριστικά για την επίδοση στην μεταβατική και τελική κατάσταση.

#### 6.1.1 Κινηματικές και δυναμικές εξισώσεις των UAVs

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε το κινηματικό και δυναμικό μοντέλο για τα UAVs [85], [94]. Για ένα πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από  $N$  UAVs στον τρισ-



Σχήμα 6.1: Οι παράμετροι κάθε UAV

διάστατο χώρο, οι κινηματικές εξισώσεις του UAV  $i \in \mathcal{V}$  περιγράφονται από την

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= V_i \cos \chi_i \cos \gamma_i \\ \dot{y}_i &= V_i \sin \chi_i \cos \gamma_i \\ \dot{z}_i &= V_i \sin \gamma_i.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Τα  $(x_i, y_i, z_i)$  συμβολίζουν την θέση στο αδρανειακό πλαίσιο, το  $V_i$  την ταχύτητα, το  $\chi_i$  την γωνία κατεύθυνσης και το  $\gamma_i$  την γωνία διαδρομής πτήσης. Η δυναμική του UAV  $i$  περιγράφονται από την

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &= (T_i - D_i) / m_i - g \sin \gamma_i \\ \dot{\chi}_i &= L_i \sin \phi_i / (m_i V_i \cos \gamma_i) \\ \dot{\gamma}_i &= (L_i \cos \phi_i - m_i g \cos \gamma_i) / (m_i V_i),\end{aligned}\quad (6.2)$$

όπου το  $T_i$  συμβολίζει την ώθηση του κινητήρα, το  $L_i$  την ανύψωση του οχήματος, το  $D_i$  τον συντελεστή αντίστασης από τον αέρα του οχήματος, το  $m_i$  είναι η μάζα, το  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας και το  $\phi_i$  η γωνία περιστροφής από τον κάθετο άξονα, όπως απεικονίζονται στο σχήμα 6.1. Το  $\mathbf{F}_i = [T_i \quad L_i \sin \phi_i \quad L_i \cos \phi_i]^T$  είναι η είσοδος ελέγχου, το  $\mathbf{p}_i = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T$  είναι το διάνυσμα θέσης και το  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{p}}_i = [\dot{x}_i \quad \dot{y}_i \quad \dot{z}_i]^T$  το διάνυσμα της ταχύτητας. Τότε από τις (6.1), (6.2) μπορούμε να καταλήξουμε ότι

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \mathbf{v}_i \\ m_i \dot{\mathbf{v}}_i &= \boldsymbol{\eta}_i + m_i \boldsymbol{\epsilon}_i + \mathbf{G}_i \mathbf{F}_i,\end{aligned}\quad (6.3)$$

όπου,

$$\boldsymbol{\eta}_i = \begin{bmatrix} -D_i \cos \chi_i \cos \gamma_i \\ -D_i \sin \chi_i \cos \gamma_i \\ -D_i \sin \gamma_i \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$



$$\epsilon_i = [0 \quad 0 \quad g]^T \quad (6.5)$$

και

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \cos \chi_i \cos \gamma_i & -\sin \chi_i & -\sin \gamma_i \cos \chi_i \\ \sin \chi_i \cos \gamma_i & \cos \chi_i & -\sin \chi_i \sin \gamma_i \\ \sin \gamma_i & 0 & \cos \gamma_i \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Είναι εύκολο ναδειχθεί ότι ο  $\mathbf{G}$  είναι αντιστρέψιμος με  $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^T$ . Επίσης υποθέτουμε ότι κάθε UAV μπορεί να επικοινωνήσει την θέση του, δηλαδή η έξοδος του είναι

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{p}_i. \quad (6.7)$$

Έστω ένα σύνολο που αποτελείται από  $N$  UAVs με δυναμικές και εξόδους που δίνονται από τις (6.3), (6.7). Έστω επίσης ότι υπάρχει ένα UAV αρχηγός το οποίο λειτουργεί ως ένα εξωσύστημα που δημιουργεί μια επιθυμητή τροχιά εντολής  $\mathbf{p}_L = [x_L \quad y_L \quad z_L]^T$ , η οποία είναι φραγμένη και συνεχώς διαφορίσιμη. Κάνουμε ακόμα την επόμενη υπόθεση.

**Υπόθεση 6.1.** Το δίκτυο επικοινωνίας μεταξύ των UAVs  $i \in \mathcal{V}$  περιγράφεται από έναν κατευθυνόμενο γράφο  $\mathcal{G}$  που περιέχει δέντρο που τον εκτείνει με τον αρχηγό να είναι η ρίζα. Μόνο οι σχετικές μετατοπίσεις μεταξύ των UAVs χρειάζεται να είναι διαθέσιμες στον γράφο και καμία περαιτέρω πληροφορία. Δεν είναι απαραίτητο ο αρχηγός να μοιράζεται πληροφορία με πάνω από ένα UAV του συνόλου.

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η ανάπτυξη ενός συνεχούς, κατανεμημένου νόμου ελέγχου  $\mathbf{F}_i$  για κάθε UAV  $i \in \mathcal{V}$ , τέτοιου ώστε για όλες τις αρχικές θέσεις και ταχύτητες  $\mathbf{p}_i(0)$ ,  $\mathbf{v}_i(0)$  κάθε UAV  $i \in \mathcal{V}$ , όλα τα σήματα κλειστού βρόχου να παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα και οι πράκτορες να επιτυγχάνουν διάταξη με προκαθορισμένη επίδοση.

## 6.2 Σχεδίαση νόμου ελέγχου για την διάταξη των UAVs

Χάριν απλότητας της παρουσίασης, θα θεωρήσουμε μόνο την μία διάσταση στην δυναμική του κάθε UAV (6.3), (6.7) ενώ σχεδιάζουμε και αναλύουμε τον ελεγκτή. Για τις άλλες δύο διαστάσεις μπορούν να ακολουθηθούν ακριβώς τα ίδια βήματα. Η δυναμική του UAV  $i$  (6.3),(6.7) για την πρώτη διάσταση, έχει την μορφή

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_{ix} \\ m_i \dot{v}_{ix} &= \eta_{ix} + m_i \epsilon_{ix} + (\mathbf{G}_i \mathbf{F}_i)_x \\ y_{ix} &= x_i \end{aligned} \quad (6.8)$$

όπου ο δείκτης  $x$  χρησιμοποιείται για να συμβολίζει ότι θεωρούμε μόνο την διάσταση  $x$  στο διάνυσμα.

Στο πρώτο βήμα της σχεδίασης του ελεγκτή χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο  $\mathbf{G}_i$  είναι γνωστός και αντιστρέψιμος και θέτουμε

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{G}_i^{-1} [u_{ix} \quad u_{iy} \quad u_{iz}]^T \quad (6.9)$$

ώστε να πάρουμε

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_{ix} \\ m_i \dot{v}_{ix} &= \eta_{ix} + m_i \epsilon_{ix} + u_{ix} \\ y_{ix} &= x_i \end{aligned} \quad (6.10)$$

Στη συνέχεια προχωράμε στο να σχεδιάσουμε έναν συνεχή καταναμημένο ελεγκτή στο πνεύμα του κλασικού ελέγχου προκαθορισμένης επίδοσης [56]. Το σχήμα ελέγχου για κάθε UAV  $i$  στην διάσταση  $x$  υλοποιείται στα ακόλουθα βήματα:

- Ορίζουμε το σφάλμα διάταξης για το UAV  $i$  ως

$$e_{ixf} := \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\bar{y}_{ix} - \bar{y}_{jx}) + b_i (\bar{y}_{ix} - x_L) \quad (6.11)$$

όπου  $\bar{y}_{ix} := x_i - c_{ix}$ . Σχεδιάζουμε μια συνάρτηση επίδοσης διάταξης  $\rho_{ix1}$  που ενσωματώνει τις επιθυμητές προδιαγραφές που αφορούν την μεταβατική επίδοση και την τελική κατάσταση για το σφάλμα διάταξης του UAV  $i$  και επίσης ικανοποιεί την  $\rho_{ix1}(0) > |e_{ixf}(0)|$ . Τότε, επιλέγουμε τον εικονικό νόμο ελέγχου ως

$$\hat{\alpha}_{ix}(x_i, x_j; j \in N_i, t) = -\frac{k\rho_{ix1}(t)}{\rho_{ix1}^2(t) - e_{ixf}^2} T\left(\frac{e_{ixf}}{\rho_{ix1}(t)}\right), \quad (6.12)$$

όπου το  $k$  είναι ένα θετικό κέρδος ελέγχου και το  $T(\cdot)$  είναι μια συνάρτηση  $T: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται ως  $T(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ .

- Ορίζουμε τον εικονικό νόμο ελέγχου ως  $e_{ix2} := v_{ix} - \hat{\alpha}_{ix}(x_i, x_j; j \in N_i, t)$ . Επιλέγουμε τον νόμο ελέγχου για το UAV  $i$  ως

$$\hat{u}_{ix}(x_i, x_j; j \in N_i, v_{ix}, t) = -kT\left(\frac{e_{ix2}}{\rho_{ix2}}\right), \quad (6.13)$$

όπου οι συνάρτηση επίδοσης  $\rho_{ix2}(t)$  ικανοποιεί την  $\rho_{ix2}(0) > |e_{ix2}(0)|$ .

**Παρατήρηση 6.1.** Στο πνεύμα του κλασικού ελέγχου προκαθορισμένης επίδοσης [56], όλες οι συναρτήσεις επίδοσης είναι συνεχώς διαφορίσιμες, φραγμένες, θετικές και φθίνουσες με θετικό όριο όταν ο χρόνος προσεγγίζει το άπειρο. Αυτές οι απαιτήσεις ικανοποιούνται από μια συνήθη εκθετική συνάρτηση επίδοσης [56]  $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty$ , όπου τα  $\lambda, \rho_0, \rho_\infty$  είναι θετικές σταθερές που πρέπει να σχεδιαστούν κατάλληλα.

Το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου είναι το εξής.

**Θεώρημα 6.1.** Έστω ένα πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από  $N$  UAVs με δυναμική που περιγράφεται από την (6.8) και ένα UAV αρχηγό. Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 6.1. Αν ο ελεγκτής σχεδιαστεί όπως ορίζουν οι (6.9), (6.12), (6.13), τότε όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα και τα UAVs επιτυγχάνουν διάταξη με προκαθορισμένη επίδοση.

*Απόδειξη.* Αρκεί να αποδείξουμε τα αποτελέσματα για την διάσταση  $x$  κάθε UAV  $i \in \mathcal{V}$ , δηλαδή την δυναμική που περιγράφεται από την (6.8).

Θεωρούμε τις κανονικοποιημένες μεταβλητές σφάλματος

$$\xi_{ix1} = \frac{e_{ixf}}{\rho_{ix1}(t)} \quad (6.14)$$

και

$$\xi_{ix2} = \frac{e_{ix2}}{\rho_{ix2}(t)}. \quad (6.15)$$

Χρησιμοποιώντας τις κανονικοποιημένες μεταβλητές σφάλματος, μπορούμε να ξαναγράψουμε τον εικονικό νόμο ελέγχου (6.12) ως

$$\hat{\alpha}_{ix}(x_i, x_j; j \in N_i, t) = \alpha_{ix}(\xi_{ix1}, t) := -\frac{k}{(1 - \xi_{ix1}^2) \rho_{ix1}(t)} \ln \left( \frac{1 + \xi_{ix1}}{1 - \xi_{ix1}} \right), \quad (6.16)$$

και τον κανονικό νόμο ελέγχου ως

$$\hat{u}_{ix}(x_i, x_j; j \in N_i, v_{ix}, t) = u_{ix}(\xi_{ix2}) := -k \ln \left( \frac{1 + \xi_{ix2}}{1 - \xi_{ix2}} \right). \quad (6.17)$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο την (6.14), (6.15) και χρησιμοποιώντας την (6.10) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{ix1} &= h_{i1}(\xi_{ix1}, \xi_{ix2}, \xi_{jx1}, \xi_{jx2}; j \in N_i, t) \\ &= \frac{1}{\rho_{ix1}(t)} \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left( \rho_{ix2}(t) \xi_{ix2} + \alpha_{ix}(\xi_{ix1}, t) - \rho_{jx2}(t) \xi_{jx2} - \alpha_{jx}(\xi_{jx1}, t) \right) \right. \\ &\quad \left. + b_i \left( \rho_{ix2}(t) \xi_{ix2} + \alpha_{ix}(\xi_{ix1}, t) - \dot{x}_L \right) - \dot{\rho}_{ix1}(t) \xi_{ix1} \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

και

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{ix2} &= h_{i2}(\xi_{ix1}, \xi_{ix2}, \xi_{jx1}, \xi_{jx2}; j \in N_i, t) \\ &= \frac{1}{\rho_{ix2}(t)} \left[ \frac{\eta_{ix}}{m_i} + \epsilon_{ix} + \frac{u_{ix}(\xi_{ix2})}{m_i} - \frac{\partial \alpha_{ix}}{\partial \xi_{ix1}} h_{i1}(\xi_{ix1}, \xi_{ix2}, \xi_{jx1}, \xi_{jx2}; j \in N_i, t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \alpha_{ix}}{\partial \rho_{ix1}(t)} \dot{\rho}_{ix1}(t) - \dot{\rho}_{ix2}(t) \xi_{ix2} \right]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Για όλα τα UAVs  $i \in \mathcal{V}$ , η δυναμική του συνολικού διανύσματος κανονικοποιημένου σφάλματος  $\xi := [\xi_{1x1} \ \dots \ \xi_{Nx1} \ \xi_{1x2} \ \dots \ \xi_{Nx2}]^T$  δίνεται από την

$$\dot{\xi} = \mathbf{h}(t, \xi), \quad (6.20)$$

όπου  $\mathbf{h}(t, \xi) := [h_{1x1} \ \dots \ h_{Nx1} \ h_{1x2} \ \dots \ h_{Nx2}]^T$ .

Ορίζουμε τώρα το μη κενό ανοιχτό σύνολο  $\Omega_\xi = \underbrace{(-1, 1) \times \dots \times (-1, 1)}_{2 \times N \text{-times}}$ . Επειδή

οι συναρτήσεις επίδοσης ικανοποιούν ότι  $\rho_{ix1}(0) > |e_{ixf}(0)|$  και  $\rho_{ix2}(0) > |e_{ix2}(0)|$  για κάθε UAV  $i \in \mathcal{V}$ , συμπεραίνουμε ότι  $\xi(0) \in \Omega_\xi$ . Επιπλέον, η συνάρτηση  $\mathbf{h}$  είναι φραγμένη και συνεχώς διαφορίσιμη ως προς  $t$  καθώς και τοπικά Lipschitz ως προς  $\xi$  στο  $\Omega_\xi$ . Επομένως, από το Θεώρημα 1 στο [56], υπάρχει μοναδική μέγιστη λύση  $\xi : [0, \tau_{\max}) \rightarrow \Omega_\xi$  της (6.20) ον  $[0, \tau_{\max})$ , τέτοια ώστε  $\xi(t) \in \Omega_\xi, \forall t \in [0, \tau_{\max})$ .

Έστω, για  $t \in [0, \tau_{\max})$ , η μη αρνητική συνάρτηση

$$V_{ix1} = \frac{1}{2} \phi_1^T P \phi_1, \quad (6.21)$$

όπου  $\phi_1 = [\phi_{1x1} \ \dots \ \phi_{Nx1}]^T$ , με  $\phi_{ix1} = \ln((1 + \xi_{ix1})/(1 - \xi_{ix1}))$ , και ο  $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_N)$  όπως περιγράφεται στο Λήμμα 2.5. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο την  $V_{ix1}$  καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ix1} = \sum_{i=1}^N \frac{2\phi_{ix1}p_i}{(1 - \xi_{ix1}^2)\rho_{ix1}(t)} & \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left( \rho_{ix2}(t)\xi_{ix2} + \alpha_{ix}(\xi_{ix1}, t) - \rho_{jx2}(t)\xi_{jx2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha_{jx}(\xi_{jx1}, t) \right) + b_i \left( \rho_{ix2}(t)\xi_{ix2} + \alpha_{ix}(\xi_{ix1}, t) - \dot{x}_L \right) - \dot{\rho}_{ix1}(t)\xi_{ix1} \right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Σε διανυσματική μορφή η (6.22) μπορεί να γραφτεί ως

$$\dot{V}_{ix1} = 2\phi_1^T \Xi^{-1} P [(L + B)\omega_1 - k(L + B)\Xi^{-1}\phi_1 - \omega_2], \quad (6.23)$$

όπου

$$\begin{aligned} \Xi &= \text{diag} \left( (1 - \xi_{1x1}^2)\rho_{1x1}(t) \ \dots \ (1 - \xi_{Nx1}^2)\rho_{Nx1}(t) \right), \\ \omega_1 &= [\rho_{1x2}(t)\xi_{1x2} - \dot{x}_L \ \dots \ \rho_{Nx2}(t)\xi_{Nx2} - \dot{x}_L]^T \end{aligned}$$

και

$$\omega_2 = [\dot{\rho}_{1x1}(t)\xi_{1x1} \ \dots \ \dot{\rho}_{Nx1}(t)\xi_{Nx1}]^T.$$

Επειδή οι  $\rho_{ix1}$ ,  $\rho_{ix2}$ ,  $\dot{\rho}_{ix1}$ ,  $\dot{x}_L$  είναι φραγμένες για κάθε UAV  $i \in \mathcal{V}$ , υπάρχει θετική σταθερά  $w_{ix1}$  για κάθε UAV  $i \in \mathcal{V}$ , τέτοιο ώστε

$$\left| \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\rho_{ix2}(t)\xi_{ix2} - \rho_{jx2}(t)\xi_{jx2}) + b_i (\rho_{ix2}(t)\xi_{ix2} - \dot{x}_L) - \dot{\rho}_{ix1}(t)\xi_{ix1} \right| \leq w_{ix1}, \quad (6.24)$$

για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max}]$ . Αφού για  $t \in [0, \tau_{\max}]$  ισχύει ότι  $(1 - \xi_{ix1}^2) \leq 1$  για όλα τα UAV  $i \in \mathcal{V}$  και εκ κατασκευής  $\rho_{ix1}(t) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{ix1}(t) > 0$ ,  $\forall t > 0$ , αν χρησιμοποιήσουμε την (6.24), μπορούμε να γράψουμε από την (6.23) ότι

$$\dot{V}_{ix1} \leq -k\phi_1^T \Xi^{-1} [P(L + B) + (L + B)^T P] \Xi^{-1} \phi_1 + 2|\phi_1^T \Xi^{-1} P \mathbf{w}_{x1}|, \quad (6.25)$$

όπου  $\mathbf{w}_{x1} = [w_{1x1} \ \dots \ w_{Nx1}]^T$ . Επομένως, συμπληρώνοντας τα τετράγωνα για τον όρο  $2|\phi_1^T \Xi^{-1} P \mathbf{w}_{x1}|$ , έχουμε ότι

$$\dot{V}_{ix1} \leq \frac{k\delta}{2} \phi_1^T \Xi^{-1} P \Xi^{-1} \phi_1 + \frac{2}{k\delta} \mathbf{w}_{x1}^T P \mathbf{w}_{x1} - k\phi_1^T \Xi^{-1} [P(L + B) + (L + B)^T P] \Xi^{-1} \phi_1, \quad (6.26)$$

όπου επιλέγουμε το  $\delta$  όπως στο Λήμμα 2.5. Χρησιμοποιώντας το προαναφερθέν Λήμμα, καταλήγουμε στην

$$\dot{V}_{ix1} \leq -\frac{k\delta}{2} \phi_1^T \Xi^{-1} P \Xi^{-1} \phi_1 + \frac{2}{k\delta} \mathbf{w}_{x1}^T P \mathbf{w}_{x1}. \quad (6.27)$$

Επειδή μπορούμε να γράψουμε  $P = \sqrt{P}\sqrt{P}$  όπου  $\sqrt{P} = \text{diag}(\sqrt{p_1} \ \dots \ \sqrt{p_N})$ , και οι πίνακες  $\Xi, \sqrt{P}$  είναι διαγώνιοι και επομένως αντιμετατίθενται, έχουμε ότι

$$\phi_1^T P \phi_1 = \phi_1^T \Xi^{-1} \sqrt{P} \Xi^2 \sqrt{P} \Xi^{-1} \phi_1 \lambda_{\min}(\Xi^2) \phi_1^T \Xi^{-1} P \Xi^{-1} \phi_1. \quad (6.28)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την (6.28) στην (6.27) παίρνουμε ότι

$$\dot{V}_{ix1} \leq -\frac{k\delta}{2\lambda_{\min}(\Xi^2)}V_{ix1} + \frac{2}{k\delta}\mathbf{w}_{x1}^T P\mathbf{w}_{x1}, \quad (6.29)$$

από την οποία έχουμε ότι  $\dot{V}_{ix1} \leq 0$  όταν

$$V_{ix1} \geq \frac{4\max_{i \in \mathcal{V}} \rho_{ix1}^2(0)}{k^2\delta^2}\mathbf{w}_{x1}^T P\mathbf{w}_{x1} \geq \frac{4\lambda_{\min}(\Xi^2)}{k^2\delta^2}\mathbf{w}_{x1}^T P\mathbf{w}_{x1}. \quad (6.30)$$

Επομένως υπάρχει θετική σταθερά  $\bar{\phi}_{ix1}$ , τέτοια ώστε  $|\phi_{ix1}| \leq \bar{\phi}_{ix1}$  για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$  και όλα τα UAVs  $i \in \mathcal{V}$ . Από τον ορισμό του  $\phi_{ix1}$ , χρησιμοποιώντας την αντίστροφη λογαριθμική συνάρτηση, παίρνουμε

$$-1 < \frac{e^{-\bar{\phi}_{ix1}} - 1}{e^{-\bar{\phi}_{ix1}} + 1} = \underline{\xi}_{ix1} \leq \xi_{ix1} \leq \bar{\xi}_{ix1} = \frac{e^{\bar{\phi}_{ix1}} - 1}{e^{\bar{\phi}_{ix1}} + 1} < 1 \quad (6.31)$$

για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$  και όλα τα UAVs  $i \in \mathcal{V}$ . Σαν αποτέλεσμα, οι εικονικοί έλεγχοι παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένοι για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$  και όλα τα UAVs  $i \in \mathcal{V}$ . Με βάση την (6.15) συμπεραίνουμε ότι και ο  $v_{ix}$  παραμένει ομοιόμορφα φραγμένος για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$  και όλα τα UAVs  $i \in \mathcal{V}$ . Παραγωγίζοντας τον εικονικό νόμο ελέγχου  $\alpha_{ix}$  ως προς τον χρόνο και χρησιμοποιώντας την (6.18) έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{ix} = & \frac{2k \left( \xi_{ix1} \ln \left( \frac{1+\xi_{ix1}}{1-\xi_{ix1}} \right) - 1 \right)}{\left( (1-\xi_{ix1}^2)^2 \rho_{ix1}(t) \right)} \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left( \rho_{ix2}(t) \xi_{ix2} + \alpha_{ix}(\xi_{ix1}) - \rho_{jx2}(t) \xi_{jx2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha_{jx}(\xi_{jx1}) \right) + b_i \left( \rho_{ix2}(t) \xi_{ix2} + \alpha_{ix}(\xi_{ix1}) - \dot{x}_L \right) - \dot{\rho}_{ix1}(t) \xi_{ix1} \right] \\ & + \left[ \frac{k}{\left( (1-\xi_{ix1}^2)^2 \rho_{ix1}^2(t) \right)} \ln \left( \frac{1+\xi_{ix1}}{1-\xi_{ix1}} \right) \right] \dot{\rho}_{ix1}(t), \end{aligned} \quad (6.32)$$

από την οποία, με βάση την (6.31), συμπεραίνουμε ότι η  $\dot{\alpha}_{ix}$  παραμένει ομοιόμορφα φραγμένη, για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$  και όλα τα UAVs  $i \in \mathcal{V}$ .

Έστω τώρα για κάθε UAV  $i \in \mathcal{V}$  και  $t \in [0, \tau_{\max})$ , η μη αρνητική συνάρτηση

$$V_{ix2} = \frac{1}{2}\phi_{ix2}^2, \quad (6.33)$$

όπου  $\phi_{ix2} = \ln \left( \frac{1+\xi_{ix2}}{1-\xi_{ix2}} \right)$ . Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο την (6.33) παίρνουμε

$$\dot{V}_{ix2} = \frac{2\phi_{ix2}}{(1-\xi_{ix2}^2)\rho_{ix2}(t)} \left[ \frac{\eta_{ix}}{m_i} + \epsilon_{ix} + \frac{u_{ix}(\xi_{ix2})}{m_i} - \dot{\alpha}_{ix}(\xi_{ix1}, t) - \dot{\rho}_{ix2}(t)\xi_{ix2} \right]. \quad (6.34)$$

Οι συναρτήσεις  $\rho_{ix2}, \dot{\rho}_{ix2}$  είναι φραγμένες εκ κατασκευής, η  $\dot{\alpha}_{ix}$  αποδεικνύεται φραγμένη παραπάνω και έτσι μπορούμε να επικαλεστούμε το Θεώρημα Ακραίων Τιμών για την  $\eta_{ix}, \epsilon_{ix}$  επειδή είναι συνεχής. Επομένως, υπάρχει κάποια θετική σταθερά  $w_{ix2}$ , τέτοια ώστε

$$\left| \frac{\eta_{ix}}{m_i} + \epsilon_{ix} - \dot{\alpha}_{ix} - \dot{\rho}_{ix2}(t)\xi_{ix2} \right| \leq w_{ix2}, \quad (6.35)$$

για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$\dot{V}_{ix2} \leq \frac{2}{(1-\xi_{ix2}^2)\rho_{ix2}(t)} \left( |\phi_{ix2}|w_{ix2} - k\phi_{ix2}^2 \right) \quad (6.36)$$

και επομένως η  $\dot{V}_{ix2}$  είναι αρνητική όταν  $|\phi_{ix2}| > w_{ix2}/k$ , επομένως συμπεραίνουμε ότι

$$|\phi_{ix2}| \leq \bar{\phi}_{ix2} = \max \left\{ |\phi_{ix2}(0)|, \frac{w_{ix2}}{k} \right\}, \quad (6.37)$$

για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Σαν αποτέλεσμα, οι νόμοι ελέγχου  $u_{xi}$  και οι ταχύτητες  $v_{xi}$  παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένοι για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ . Επίσης, σε αντιστοιχία με την (6.31) έχουμε ότι

$$-1 < \frac{e^{-\bar{\phi}_{ix2}} - 1}{e^{-\bar{\phi}_{ix2}} + 1} = \underline{\xi}_{ix2} \leq \xi_{ix2} \leq \bar{\xi}_{ix2} = \frac{e^{\bar{\phi}_{ix2}} - 1}{e^{\bar{\phi}_{ix2}} + 1} < 1, \quad (6.38)$$

για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ .

Απομένει να δείξουμε ότι  $\tau_{\max} = \infty$ . Από τις ανισότητες (6.31),(6.38) έχουμε ότι  $\xi(t) \in \Omega_{\xi'}$  για κάθε  $t \in [0, \tau_{\max})$ , όπου

$$\Omega_{\xi'} = \underbrace{[-\underline{\xi}_{1x1}, \bar{\xi}_{1x1}] \times \cdots \times [-\underline{\xi}_{Nx1}, \bar{\xi}_{Nx1}]}_{N\text{-times}} \times \underbrace{[-\underline{\xi}_{1x2}, \bar{\xi}_{1x2}] \times \cdots \times [-\underline{\xi}_{Nx2}, \bar{\xi}_{Nx2}]}_{N\text{-times}}. \quad (6.39)$$

Επειδή  $\Omega_{\xi'} \subset \Omega_{\xi}$ , από την Πρόταση 1 [56] συμπεραίνουμε ότι  $\tau_{\max} = \infty$ . Επομένως, όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα και  $\xi(t) \in \Omega_{\xi'}$  για κάθε  $t \in [0, \infty)$ . Από τις (6.11), (6.14), προκύπτει ότι

$$-\rho_{ix1}(t) < \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\bar{y}_{ix} - \bar{y}_{jx}) + b_i (\bar{y}_{ix} - x_L) < \rho_{ix1}(t), \quad (6.40)$$

για όλα τα UAV  $i \in \mathcal{V}$  και κάθε  $t \in [0, \infty)$ . Σαν αποτέλεσμα, μπορούμε να γράψουμε σε διανυσματική μορφή ότι

$$-R_x(t) < (L + B)(\bar{\mathbf{y}}_x - x_L \mathbf{1}) < R_x(t) \quad (6.41)$$

όπου  $\bar{\mathbf{y}}_x := [\bar{y}_{1x}, \dots, \bar{y}_{Nx}]^T$  και  $R_x(t) = \text{diag} \{ \rho_{1x1}(t) \ \dots \ \rho_{Nx1}(t) \}$ . Αυτό σημαίνει ότι

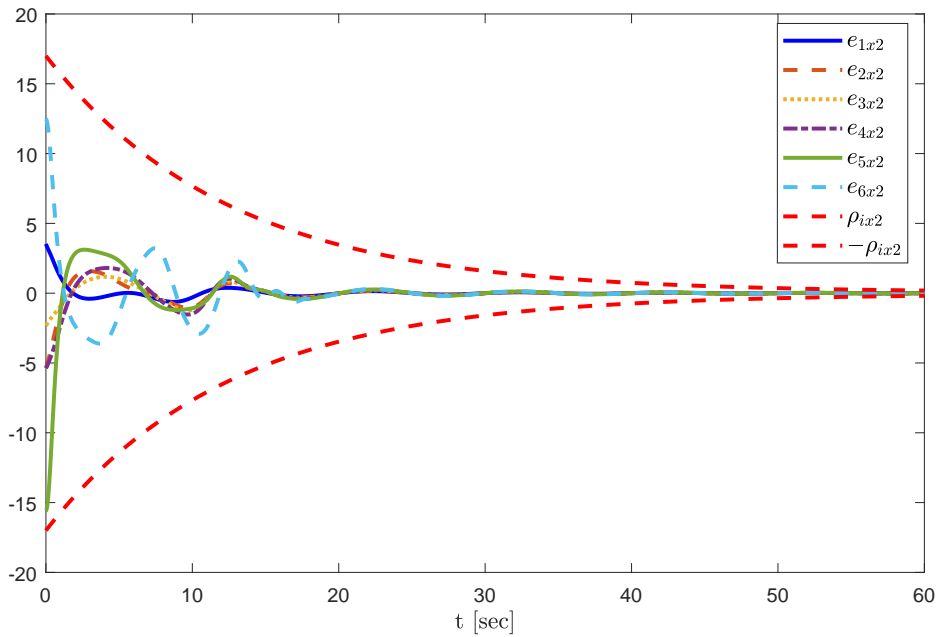
$$\|\bar{\mathbf{y}}_x - x_L \mathbf{1}\|_2 \leq \|(L + B)^{-1}\|_2 \|R_x(t)\|_2 \quad (6.42)$$

και σαν αποτέλεσμα επιτυγχάνεται διάταξη με προκαθορισμένη επίδοση.  $\square$

### 6.3 Προσομοιώσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια προσομοίωση που επικυρώνει την προηγούμενη ανάλυση. Θεωρούμε ένα σμήνος που αποτελείται από  $N = 6$  πράκτορες και έναν αρχηγό. Χωρίς βλάβη της γενικότητας παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για μία διάσταση. Επιλέγουμε τις συναρτήσεις επίδοσης ως  $\rho_{ix1} = (27 - 0.01)e^{-0.1t} + 0.01$  και  $\rho_{ix2} = (17 - 0.05)e^{-0.08t} + 0.05$  για όλα τα UAVs  $i = 1, \dots, 6$ . Τα κέρδη ελέγχου επιλέγονται ως  $k = 80$ . Η τοπολογία του δικτύου επικοινωνίας περιγράφεται από την Λαπλασιανή μήτρα

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



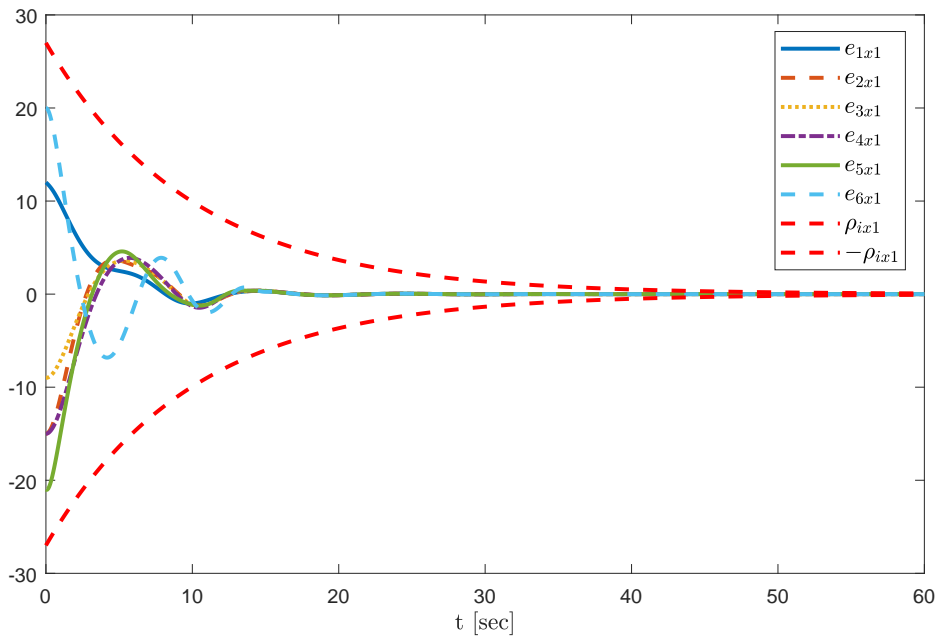
**Σχήμα 6.2:** Τα σφάλματα μεταξύ των ταχυτήτων και των εικονικών ελέγχων για κάθε UAV

και θεωρούμε ότι μόνο δύο UAVs λαμβάνουν πληροφορία από τον αρχηγό, το οποίο περιγράφεται από τον πίνακα  $B = \text{diag}\{1, 0, 0, 0, 1, 0\}$ . Το διάνυσμα  $C = [c_{1x} \ c_{2x} \ c_{3x} \ c_{4x} \ c_{5x} \ c_{6x}]^T$  ορίζει την απόσταση από του κάθε UAV από τον αρχηγό και επομένως η διάταξη είναι  $C = [2 \ -2 \ -4 \ 4 \ -8 \ 8]^T$ . Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης φαίνονται στα Σχήματα 6.2-6.5. Παρατηρούμε ότι επιτυγχάνεται διάταξη με προκαθορισμένη επίδοση και ότι οι απαιτήσεις για τα σφάλματα ικανοποιούνται.

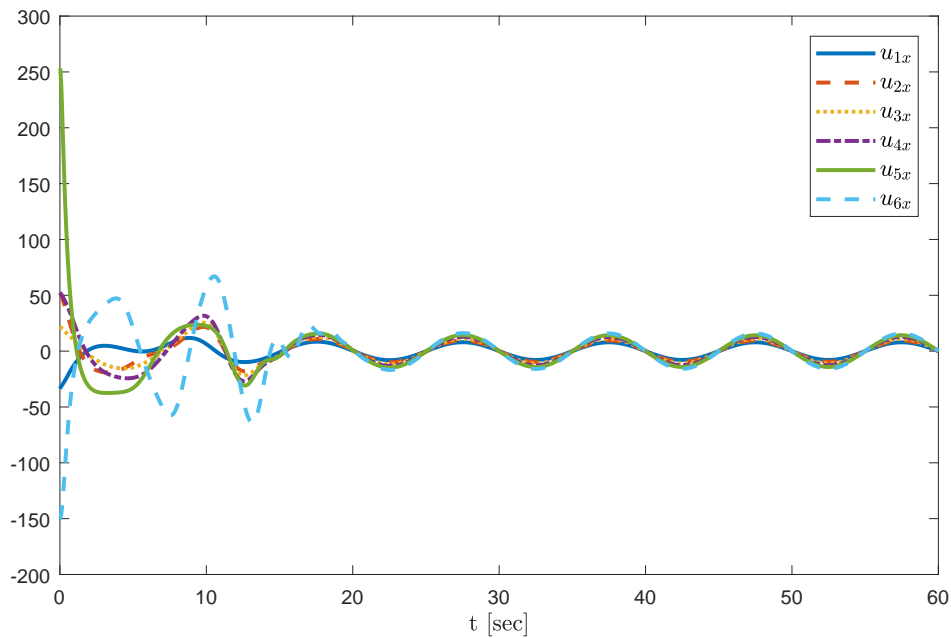
## 6.4 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε έναν καταναμημένο έλεγχο για την διάταξη με προκαθορισμένη επίδοση σε σμήνη μη επανδρωμένων ιπτάμενων οχημάτων με τρεις βαθμούς ελευθερίας και άγνωστους συντελεστές αντίστασης από τον αέρα και μάζες. Τα UAVs χρειάζονται ελάχιστη πληροφορία από τους γείτονές τους η οποία περιλαμβάνει μόνο την μεταξύ τους απόσταση σε τοπολογία γράφου δικτύου που περιγράφεται από κατευθυνόμενο γράφο που περιέχει δέντρο που τον εκτείνει και έχει ως ρίζα τον αρχηγό.

□

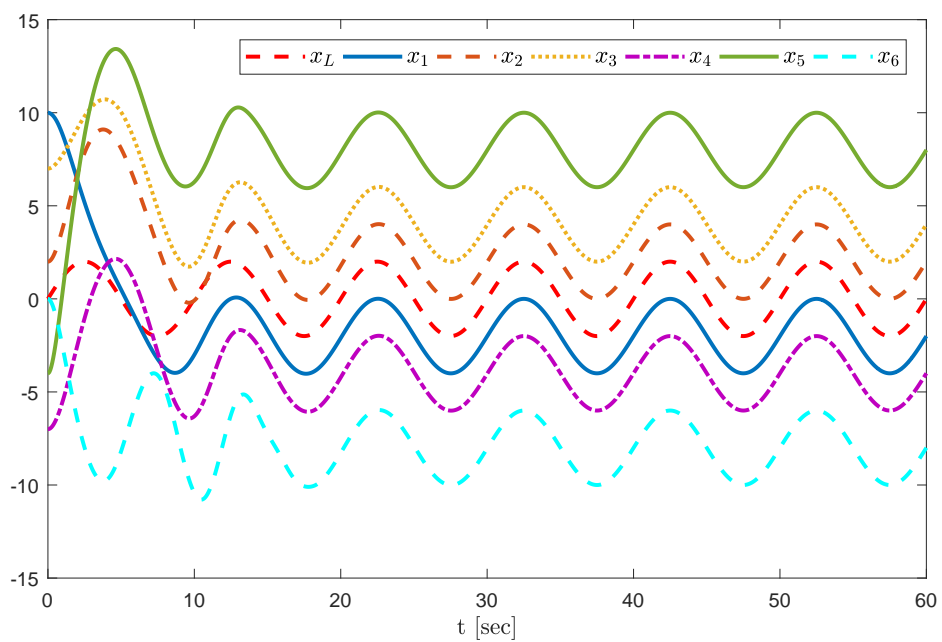


Σχήμα 6.3: Τα σφάλματα διάταξης για κάθε UAV



Σχήμα 6.4: Οι είσοδοι ελέγχου για κάθε UAV





Σχήμα 6.5: Οι θέσεις των UAVs



# Κεφάλαιο 7

## Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντικές επεκτάσεις

### 7.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διατριβή παρουσιάσαμε τέσσερις μεθοδολογίες. Η πρώτη αφορούσε την διμερή συμφωνία με προκαθορισμένη επίδοση. Η δεύτερη την συμφωνία με χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία. Η τρίτη ήταν σχετική με κατανεμημένη βελτιστοποίηση και η τέταρτη με την διάταξη σε σμήνος μη επανδρωμένων εναέριων οχημάτων. Ο κοινός παράγοντας των μεθοδολογιών αυτών είναι η σχεδίαση κατάλληλων μετασχηματισμών/μεταβλητών που μετατρέπουν το αντίστοιχο πρόβλημα κάθε κεφαλαίου από πρόβλημα συμφωνίας σε πρόβλημα ρύθμισης. Στη συνέχεια προτάθηκαν σχήματα ελέγχου που, με την χρήση του εκάστοτε μετασχηματισμού, ρυθμίζουν τις νέες μεταβλητές με κατανεμημένο τρόπο ώστε το κάθε μη γραμμικό πολυπρακτορικό σύστημα να επιτύχει τους στόχους του. Αναδείχτηκε ο ρόλος των μετασχηματισμών στην επίτευξη διαφόρων μορφών συμφωνίας για μη γραμμικά πολυπρακτορικά συστήματα καθώς επιτρέπουν την χρήση κλασικών τεχνικών ελέγχου για την επίλυση προβλημάτων συμφωνίας και την ενσωμάτωση περιορισμών όπως οι χρονικές υστερήσεις.

### 7.2 Επεκτάσεις

Μελλοντικές επεκτάσεις των εργασιών που παρουσιάσαμε μπορούν να γίνουν προς διάφορες κατευθύνσεις. Αρχικά, όσον αφορά τα δίκτυα επικοινωνίας, μπορούν να ληφθούν υπόψιν πιο γενικά μοντέλα, με χρονικά μεταβαλλόμενα βάρη στην επικοινωνία, πιο γενικές χρονικές υστερήσεις, καθώς και εναλλαγές στην τοπολογία επικοινωνίας. Τα μοντέλα των πρακτόρων μπορούν επίσης να γενικευτούν για να συμπεριλάβουν χρονικές υστερήσεις στις εισόδους, υστέρηση, και λάθη των ενεργοποιητών. Όσον αφορά την βέλτιστη συμφωνία, η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί για να συμπεριλάβει πιο γενικές συναρτήσεις κόστους. Για την εργασία με τα μη επανδρωμένα οχήματα, μπορούν να περιληφθούν και διαταραχές ή χρονικές υστερήσεις στην επικοινωνία, καθώς και γενικεύσεις της μεθόδου για την επίτευξη αποφυγής συγκρούσεων. Τέλος, η βασικότερη επέκταση που προτείνουμε, είναι η σχεδίαση μετασχηματισμών μεταβλητών στο πνεύμα αυτών που παρουσιάζονται στην εργασία για την επίλυση διαφορετικών προβλημάτων συμφωνίας για μη γραμμικούς πράκτορες.

□



# Παράρτημα Α'

**Απόδειξη της (3.9).**

*Απόδειξη.* Καθότι όλες οι ιδιοτιμές του  $\Sigma$  έχουν θετικό πραγματικό μέρος, υπάρχουν θετικές σταθερές  $\rho_b$  και  $\lambda_b$  τέτοιες ώστε  $\|e^{-\Sigma t}\|_2 \leq \rho_b e^{-\lambda_b t}$ . Επομένως για τον πρώτο όρο στο δεξί μέρος της (3.8) ισχύει ότι

$$\|Ue^{-\beta\Sigma t}V^T y(0)\|_2 \leq \rho_b e^{-\beta\lambda_b t} \|U\|_2 \|V^T\|_2 \|y(0)\|_2. \quad (\text{A'.1})$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την διανυσματική συνάρτηση

$$v(t) := \int_0^t e^{-\beta\Sigma(t-s)} \Sigma V^T z(s) ds. \quad (\text{A'.2})$$

Η αντίστοιχη δυναμική της δίνεται από την

$$\dot{v}(t) = -\beta\Sigma v(t) + \Sigma V^T z(t). \quad (\text{A'.3})$$

Αφού ο  $\Sigma$  είναι πραγματικός πίνακας που έχει μόνο ιδιοτιμές με θετικά πραγματικά μέρη, υπάρχει συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας  $P = P^T \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$  τέτοιος ώστε  $P\Sigma + \Sigma^T P = \mathbb{I}_{(N-1)}$ . Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το γεγονός και την (A'.3) για να πάρουμε

$$\frac{d}{dt}(v^T(t)Pv(t)) = -\beta\|v(t)\|_2^2 + 2v^T(t)P\Sigma V^T z(t). \quad (\text{A'.4})$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$2v^T(t)P\Sigma V^T z(t) \leq \frac{\beta}{2}\|v(t)\|_2^2 + \frac{2}{\beta}z^T(t)V\Sigma^T P^2\Sigma V^T z(t) \quad (\text{A'.5})$$

στην (A'.4) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v^T(t)Pv(t)) &\leq -\frac{\beta}{2}\|v(t)\|_2^2 + \frac{2}{\beta}z^T(t)V\Sigma^T P^2\Sigma V^T z(t) \\ &\leq -\frac{\beta}{2}\|v(t)\|_2^2 + \frac{2}{\beta}\|V\Sigma^T P^2\Sigma V^T\|_2 \|z(t)\|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{A'.6})$$

Από το γεγονός ότι

$$\lambda_{\min}(P)\|v(t)\|_2^2 \leq v(t)^T P v(t) \leq \lambda_{\max}(P)\|v(t)\|_2^2 \quad (\text{A'.7})$$

η (Α'.6) δίνει

$$\frac{d}{dt}(v^T(t)Pv(t)) \leq -\frac{\beta}{2\lambda_{\max}(P)}v^T(t)Pv(t) + \frac{2}{\beta}\|V\Sigma^T P^2\Sigma V^T\|_2\|z(t)\|_2^2. \quad (\text{Α'.8})$$

Ονομάζουμε τώρα το  $\alpha_1 := \frac{\beta}{2\lambda_{\max}(P)}$ ,  $\alpha_2 := (2/\beta)\|V\Sigma^T P^2\Sigma V^T\|_2$  και ορίζουμε την βοηθητική συνάρτηση  $g(t) := v^T(t)Pv(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - 2\nu}\|\underline{\rho}_1(t)\|_2^2$ , η οποία εισάγει την σχεδιαστική απαίτηση  $\alpha_1 > 2\nu$ . Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $|z_i(t)| \leq \rho_{i1}(t)$  για κάθε  $t \geq 0$  και όλους τους πράκτορες  $i$ , παίρνουμε από την (Α'.8) ότι

$$\frac{d}{dt}g(t) \leq -\alpha_1 g(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{Α'.9})$$

Αν ορίσουμε μια δεύτερη βοηθητική συνάρτηση  $f(t) := g(t)e^{\alpha_1 t}$ , η εξίσωση (Α'.9) συνεπάγεται ότι  $\frac{d}{dt}f(t) \leq 0$  και κατά συνέπεια  $f(t) \leq f(0) = g(0) < 0$  για κάθε  $t \geq 0$ . Έτσι, καταλήγουμε ότι  $g(t) \leq 0$  για κάθε  $t \geq 0$ , το οποίο σημαίνει ότι

$$v^T(t)Pv(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - 2\nu}\|\underline{\rho}_1(t)\|_2^2 \quad (\text{Α'.10})$$

που με την σειρά του συνεπάγεται από την (Α'.7) ότι

$$\|v(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\lambda_{\min}(P)(\alpha_1 - 2\nu)}}\|\underline{\rho}_1(t)\|_2, \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{Α'.11})$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα στο (3.8) καταλήγουμε πως

$$\|y(t) - \sigma\phi^T y(0)\|_2 \leq \rho_b e^{-\beta\lambda_b t}\|U\|_2\|V^T\|_2\|y(0)\|_2 + c_0\|\underline{\rho}_1(t)\|_2, \quad (\text{Α'.12})$$

όπου  $c_0 := 1 + \beta\|U\|_2\sqrt{\frac{2\|V\Sigma^T P^2\Sigma V^T\|_2}{\lambda_{\min}(P)\beta(\frac{\beta}{2\lambda_{\max}(P)} - 2\nu)}}$ . □

### Απόδειξη του Λήμματος 2.7

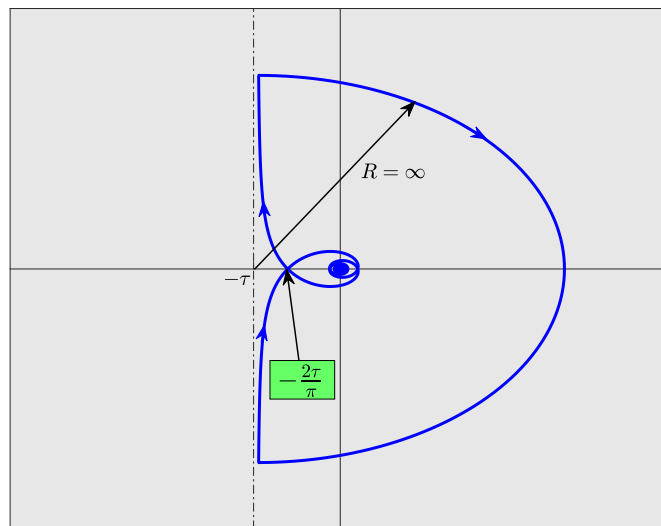
Απόδειξη. Τα μηδενικά της  $Q(s)$  είναι επίσης μηδενικά της  $D(s) := (1/c) + e^{-\tau s}/s$ . Για την συνάρτηση  $D_0(s) := e^{-\tau s}/s$ , το διάγραμμα Nyquist φαίνεται στο Σχήμα Α'.1. Ισχύει ότι

$$D_0(j\omega) = -\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} - j\frac{\cos(\omega\tau)}{\omega}. \quad (\text{Α'.13})$$

Το διάγραμμα τέμνει τον πραγματικό άξονα για τις συχνότητες  $\omega_k = (k\pi + \pi/2)/\tau$  στα σημεία  $A_k := ((-1)^{k+1}2\tau/((2k+1)\pi), 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Για  $\omega \rightarrow 0$  έχουμε ότι  $\Re(D_0(j\omega)) \rightarrow -\tau$ . Όλα τα μηδενικά της  $D(s)$  βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο αν και μόνο αν το διάγραμμα Nyquist της  $D_0(s)$  δεν περικυκλώνει το σημείο  $-1/c = (-\Re(c)/|c|^2, \Im(c)/|c|^2)$ . Αυτό διασφαλίζεται αν το σημείο  $-1/c$  βρίσκεται στα αριστερά της ευθείας που περνάει από το  $(-\tau, 0)$  και είναι παράλληλη στον φανταστικό άξονα. Αυτό ισοδυναμεί με το  $\tau < \Re(c)/|c|^2$ .

Για  $c \in \mathbb{R}$  το διάγραμμα Nyquist της  $D_0(s)$  δεν έχει περιελίξεις γύρω από το σημείο  $-1/c$  αν και μόνο αν το  $-1/c$  είναι μικρότερο του  $\min_{k \in \mathbb{Z}}\{(-1)^{k+1}2\tau/((2k+1)\pi)\} = -2\tau/\pi$ . □

□



Σχήμα Α'.1: Το διάγραμμα Nyquist για την  $D_0(s)$





# Βιβλιογραφία

- [1] W. Ren and Y. Cao, *Distributed coordination of multi-agent networks: emergent problems, models, and issues*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [2] F. L. Lewis, H. Zhang, K. Hengster-Movric, and A. Das, *Cooperative control of multi-agent systems: optimal and adaptive design approaches*. London, U.K.: Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] M. Mesbahi and M. Egerstedt, *Graph theoretic methods in multiagent networks*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2010.
- [4] W. Ren and R. W. Beard, *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control: theory and applications*. Springer, 2008.
- [5] S. Wasserman, K. Faust *et al.*, *Social network analysis: Methods and applications*. Cambridge university press, 1994, vol. 8.
- [6] C. W. Reynolds, “Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model,” in *Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, 1987, pp. 25–34.
- [7] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems,” *Proc. IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, 2007.
- [8] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins, “Information consensus in multivehicle cooperative control,” *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 27, no. 2, pp. 71–82, 2007.
- [9] J. N. Tsitsiklis, “Problems in decentralized decision making and computation,” Ph.D. dissertation, Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, M.A., 1984.
- [10] J. N. Tsitsiklis, D. P. Bertsekas, and M. Athans, “Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 31, no. 9, pp. 803–812, 1986.
- [11] A. Jadbabaie, Jie Lin, and A. S. Morse, “Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 48, no. 6, pp. 988–1001, 2003.
- [12] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.

- [13] A. Olshevsky and J. N. Tsitsiklis, “Convergence speed in distributed consensus and averaging,” *SIAM J. on Control and Optimization*, vol. 48, no. 1, pp. 33–55, 2009.
- [14] J. Shamma, *Cooperative control of distributed multi-agent systems*. John Wiley & Sons, 2008.
- [15] D. Easley and J. Kleinberg, *Networks, crowds, and markets*. Cambridge university press, 2010.
- [16] E. Uchibe and M. Asada, “Incremental coevolution with competitive and cooperative tasks in a multirobot environment,” *Proc. IEEE*, vol. 94, no. 7, pp. 1412–1424, 2006.
- [17] F. Harary, “On the notion of balance of a signed graph.” *Mich. Math. J.*, vol. 2, no. 2, pp. 143–146, 1953.
- [18] Y. Hou, J. Li, and Y. Pan, “On the laplacian eigenvalues of signed graphs,” *Linear Multilinear Algebra*, vol. 51, no. 1, pp. 21–30, 2003.
- [19] C. Altafini, “Consensus problems on networks with antagonistic interactions,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 58, no. 4, pp. 935–946, 2013.
- [20] C. Altafini and G. Lini, “Predictable dynamics of opinion forming for networks with antagonistic interactions,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 60, no. 2, pp. 342–357, 2015.
- [21] J. Hu and W. X. Zheng, “Bipartite consensus for multi-agent systems on directed signed networks,” in *52nd Proc. IEEE Conf. Decis. Control*, 2013, pp. 3451–3456.
- [22] J. Hu and W. X. Zheng, “Emergent collective behaviors on cooperation networks,” *Phys. Lett. A*, vol. 378, no. 26, pp. 1787 – 1796, 2014.
- [23] F. Yu, L. Ji, and S. Yang, “Group consensus for a class of heterogeneous multi-agent networks in the competition systems,” *Neurocomputing*, vol. 416, pp. 165 – 171, 2020.
- [24] X. Zhang, K. Liu, and Z. Ji, “Bipartite consensus for multi-agent systems with time-varying delays based on method of delay partitioning,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 29 285–29 294, 2019.
- [25] H. Zhang and J. Chen, “Bipartite consensus of general linear multi-agent systems,” in *2014 American Control Conference*, 2014, pp. 808–812.
- [26] H. Zhang and J. Chen, “Bipartite consensus of multi-agent systems over signed graphs: State feedback and output feedback control approaches,” *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 27, no. 1, pp. 3–14, 2017.
- [27] D. Wang, H. Ma, and D. Liu, “Distributed control algorithm for bipartite consensus of the nonlinear time-delayed multi-agent systems with neural networks,” *Neurocomputing*, vol. 174, pp. 928 – 936, 2016.

- [28] J. Hu and Y. Wu, “Interventional bipartite consensus on cooperation networks with unknown dynamics,” *J. Franklin Inst.*, vol. 354, no. 11, pp. 4438 – 4456, 2017.
- [29] J. Hu and H. Zhu, “Adaptive bipartite consensus on cooperation networks,” *Physica D*, vol. 307, pp. 14 – 21, 2015.
- [30] M. Shahvali, M.-B. Naghibi-Sistani, and J. Askari, “Adaptive output-feedback bipartite consensus for nonstrict-feedback nonlinear multi-agent systems: A finite-time approach,” *Neurocomputing*, vol. 318, pp. 7 – 17, 2018.
- [31] J. Duan, H. Zhang, Y. Liang, and Y. Cai, “Bipartite finite-time output consensus of heterogeneous multi-agent systems by finite-time event-triggered observer,” *Neurocomputing*, vol. 365, pp. 86 – 93, 2019.
- [32] S. Bhowmick and S. Panja, “Leader-follower bipartite consensus of uncertain linear multiagent systems with external bounded disturbances over signed directed graph,” *IEEE Control Syst. Lett.*, vol. 3, no. 3, pp. 595–600, 2019.
- [33] E. Li, Q. Ma, and G. Zhou, “Bipartite output consensus for heterogeneous linear multi-agent systems with fully distributed protocol,” *J. Franklin Inst.*, vol. 356, no. 5, pp. 2870 – 2884, 2019.
- [34] P.-A. Bliman and G. Ferrari-Trecate, “Average consensus problems in networks of agents with delayed communications,” *Automatica*, vol. 44, no. 8, pp. 1985 – 1995, 2008.
- [35] Y. G. Sun, L. Wang, and G. Xie, “Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays,” *Syst. Control Lett.*, vol. 57, no. 2, pp. 175 – 183, 2008.
- [36] J. Wang, J. Qiao, G. Wen, Z. Duan, and T. Huang, “Rendezvous of heterogeneous multiagent systems with nonuniform time-varying information delays: An adaptive approach,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, pp. 1–10, 2019.
- [37] A. Abdessameud, I. G. Polushin, and A. Tayebi, “Synchronization of lagrangian systems with irregular communication delays,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 59, no. 1, pp. 187–193, 2014.
- [38] W. Qian, L. Wang, and M. Z. Q. Chen, “Local consensus of nonlinear multi-agent systems with varying delay coupling,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 48, no. 12, pp. 2462–2469, 2018.
- [39] H. Rezaee and F. Abdollahi, “Stationary consensus control of a class of high-order uncertain nonlinear agents with communication delays,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 49, no. 6, pp. 1285–1290, 2019.
- [40] H. E. Psillakis, “Adaptive nn cooperative control of unknown nonlinear multiagent systems with communication delays,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, pp. 1–11, 2019.

- [41] W. Qian, Y. Gao, L. Wang, and S. Fei, “Consensus of multiagent systems with nonlinear dynamics and time-varying communication delays,” *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 29, no. 6, pp. 1926–1940, 2019.
- [42] E. Nuño, “Consensus of euler-lagrange systems using only position measurements,” *IEEE Trans. Control. Netw. Syst.*, vol. 5, no. 1, pp. 489–498, 2018.
- [43] K. Li, C.-C. Hua, X. You, and X.-P. Guan, “Output feedback-based consensus control for nonlinear time delay multiagent systems,” *Automatica*, vol. 111, p. 108669, 2020.
- [44] C. L. P. Chen, G. Wen, Y. Liu, and F. Wang, “Adaptive consensus control for a class of nonlinear multiagent time-delay systems using neural networks,” *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, vol. 25, no. 6, pp. 1217–1226, 2014.
- [45] C. L. P. Chen, C. Ren, and T. Du, “Fuzzy observed-based adaptive consensus tracking control for second-order multiagent systems with heterogeneous nonlinear dynamics,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 24, no. 4, pp. 906–915, 2016.
- [46] Q. Shen, P. Shi, and Y. Shi, “Distributed adaptive fuzzy control for nonlinear multiagent systems via sliding mode observers,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 46, no. 12, pp. 3086–3097, 2016.
- [47] G. Wen, C. L. P. Chen, Y. Liu, and Z. Liu, “Neural network-based adaptive leader-following consensus control for a class of nonlinear multiagent state-delay systems,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 47, no. 8, pp. 2151–2160, 2017.
- [48] Y. Li, G. Yang, and S. Tong, “Fuzzy adaptive distributed event-triggered consensus control of uncertain nonlinear multiagent systems,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 49, no. 9, pp. 1777–1786, 2019.
- [49] K. Chen, J. Wang, Y. Zhang, and Z. Liu, “Leader-following consensus for a class of nonlinear strick-feedback multiagent systems with state time-delays,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 50, no. 7, pp. 2351–2361, 2020.
- [50] Y. Shang, B. Chen, and C. Lin, “Consensus tracking control for distributed nonlinear multiagent systems via adaptive neural backstepping approach,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 50, no. 7, pp. 2436–2444, 2020.
- [51] Q. Wang, H. E. Psillakis, and C. Sun, “Adaptive cooperative control with guaranteed convergence in time-varying networks of nonlinear dynamical systems,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 50, no. 12, pp. 5035–5046, 2020.
- [52] J. Mei, “Distributed consensus for multiple lagrangian systems with parametric uncertainties and external disturbances under directed graphs,” *IEEE Trans. Control. Netw. Syst.*, vol. 7, no. 2, pp. 648–659, 2020.
- [53] J. Mao, H. R. Karimi, and Z. Xiang, “Observer-based adaptive consensus for a class of nonlinear multiagent systems,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 49, no. 9, pp. 1893–1900, 2019.

- [54] Y. H. Choi and S. J. Yoo, “Distributed containment control of mimo pure-feedback multiagent systems using filter-driven-approximation approach,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, pp. 1–13, 2019.
- [55] F. Zhang and Y. Chen, “Fuzzy adaptive containment control for nonlinear non-affine pure-feedback multiagent systems,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 29, no. 10, pp. 2878–2889, 2021.
- [56] C. P. Bechlioulis and G. A. Rovithakis, “A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems,” *Automatica*, vol. 50, no. 4, pp. 1217–1226, 2014.
- [57] —, “Robust adaptive control of feedback linearizable mimo nonlinear systems with prescribed performance,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 53, no. 9, pp. 2090–2099, 2008.
- [58] —, “Decentralized robust synchronization of unknown high order nonlinear multi-agent systems with prescribed transient and steady state performance,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 62, no. 1, pp. 123–134, 2017.
- [59] Y. Liu and G. Yang, “Prescribed performance-based consensus of nonlinear multiagent systems with unknown control directions and switching networks,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 50, no. 2, pp. 609–616, 2020.
- [60] F. Chen and D. V. Dimarogonas, “Leader-follower formation control with prescribed performance guarantees,” *IEEE Trans. Control. Netw. Syst.*, pp. 1–1, 2020.
- [61] G. Wang, C. Wang, and L. Li, “Fully distributed low-complexity control for nonlinear strict-feedback multiagent systems with unknown dead-zone inputs,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 50, no. 2, pp. 421–431, 2020.
- [62] W. Wang, D. Wang, Z. Peng, and T. Li, “Prescribed performance consensus of uncertain nonlinear strict-feedback systems with unknown control directions,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 46, no. 9, pp. 1279–1286, 2016.
- [63] H. A. Hashim, S. El-Ferik, and F. L. Lewis, “Adaptive synchronisation of unknown nonlinear networked systems with prescribed performance,” *Int. J. of Syst. Sci.*, vol. 48, no. 4, pp. 885–898, 2017.
- [64] S. El-Ferik, H. A. Hashim, and F. L. Lewis, “Neuro-adaptive distributed control with prescribed performance for the synchronization of unknown nonlinear networked systems,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 48, no. 12, pp. 2135–2144, 2018.
- [65] H. Yang and D. Ye, “Adaptive fixed-time bipartite tracking consensus control for unknown nonlinear multi-agent systems: An information classification mechanism,” *Inf. Sci.*, vol. 459, pp. 238 – 254, 2018.
- [66] T. Yu and L. Ma, “Bipartite containment tracking with prescribed performance of nonlinear multi-agent systems with hysteresis inputs,” in *2018 IEEE 8th Annual International Conference on CYBER Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER)*, 2018, pp. 1112–1117.

- [67] T. Yu, L. Ma, and H. Zhang, “Prescribed performance for bipartite tracking control of nonlinear multiagent systems with hysteresis input uncertainties,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 49, no. 4, pp. 1327–1338, 2019.
- [68] Y. Lou, G. Shi, K. H. Johansson, and Y. Hong, “Approximate projected consensus for convex intersection computation: Convergence analysis and critical error angle,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 59, no. 7, pp. 1722–1736, July 2014.
- [69] A. Nedic and A. Ozdaglar, “Distributed subgradient methods for multi-agent optimization,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 54, no. 1, pp. 48–61, Jan. 2009.
- [70] B. Gharesifard and J. Cortés, “Distributed continuous-time convex optimization on weight-balanced digraphs,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 59, no. 3, pp. 781–786, March 2014.
- [71] S. S. Kia, J. Cortés, and S. Martínez, “Distributed convex optimization via continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication,” *Automatica*, vol. 55, pp. 254–264, May 2015.
- [72] Y. Tang, “Distributed optimization for a class of high-order nonlinear multiagent systems with unknown dynamics,” *Int. J. Robust Nonlin. Control*, vol. 28, no. 17, pp. 5545–5556, Sept. 2018.
- [73] X. Wang, S. Li, and G. Wang, “Distributed optimization for disturbed second-order multiagent systems based on active antidisturbance control,” *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, vol. 31, no. 6, pp. 2104–2117, June 2020.
- [74] X. Wang, G. Wang, and S. Li, “Distributed finite-time optimization for integrator chain multi-agent systems with disturbances,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 65, no. 12, pp. 5296–5311, Dec. 2020.
- [75] Y. Tang, Z. Deng, and Y. Hong, “Optimal output consensus of high-order multiagent systems with embedded technique,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 49, no. 5, pp. 1768–1779, May 2019.
- [76] J. Zhang, L. Liu, and H. Ji, “Exponential convergence of distributed optimal coordination for linear multi-agent systems over general digraphs,” in *2020 39th Chinese Control Conf. (CCC)*. IEEE, 2020, pp. 5047–5051.
- [77] Z. Zhong, Y. Zhao, C. Xian, and W. Zhang, “Finite-time distributed optimal tracking for multiple heterogeneous linear systems,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 68, no. 4, pp. 1258–1262, 2021.
- [78] X. Wang, Y. Hong, and H. Ji, “Distributed optimization for a class of nonlinear multiagent systems with disturbance rejection,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 46, no. 7, pp. 1655–1666, July 2016.
- [79] T. Liu, Z. Qin, Y. Hong, and Z.-P. Jiang, “Distributed optimization of nonlinear multi-agent systems: A small-gain approach,” in *2019 IEEE 58th Conf. Decis. Control (CDC)*. IEEE, 2019, pp. 5252–5257.

- [80] D. Wang, Z. Wang, and C. Wen, “Distributed optimal consensus control for a class of uncertain nonlinear multiagent networks with disturbance rejection using adaptive technique,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 51, no. 7, pp. 4389–4399, 2021.
- [81] Y. Tang and X. Wang, “Optimal output consensus for nonlinear multi-agent systems with both static and dynamic uncertainties,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 66, no. 4, pp. 1733–1740, 2021.
- [82] R. Li and G.-H. Yang, “Distributed optimization for a class of uncertain mimo nonlinear multi-agent systems with arbitrary relative degree,” *Inf. Sci.*, vol. 506, pp. 58–77, Jan. 2020.
- [83] Y. Zhang and H. Mehrjerdi, “A survey on multiple unmanned vehicles formation control and coordination: Normal and fault situations,” in *2013 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2013, pp. 1087–1096.
- [84] H. Rezaee and F. Abdollahi, “A synchronization strategy for three dimensional decentralized formation control of unmanned aircrafts,” in *IECON 2011 - 37th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2011, pp. 462–467.
- [85] W. Zhao, R. Li, and H. Zhang, “Finite-time distributed formation tracking control of multi-uavs with a time-varying reference trajectory,” *IMA J. Math. Control. Inf.*, vol. 35, no. 4, pp. 1297–1318, 2018.
- [86] L. Sun, B. Hu, and S. Zhao, “An event-triggering-based approach for three-dimensional local-level frame formation control of leader-follower uavs,” in *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2017, pp. 472–479.
- [87] X. Yu, Z. Liu, and Y. Zhang, “Fault-tolerant formation control of multiple uavs in the presence of actuator faults,” *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 26, no. 12, pp. 2668–2685, 2016.
- [88] Z. Zheng and H. Yi, “Backstepping control design for uav formation with input saturation constraint and model uncertainty,” in *2017 36th Chinese Control Conference (CCC)*, 2017, pp. 6056–6060.
- [89] B. D. Anderson, B. Fidan, C. Yu, and D. Walle, “Uav formation control: Theory and application,” in *Recent advances in learning and control*. Springer, 2008, pp. 15–33.
- [90] Seungkeun Kim and Youdan Kim, “Three dimensional optimum controller for multiple uav formation flight using behavior-based decentralized approach,” in *2007 International Conference on Control, Automation and Systems*, 2007, pp. 1387–1392.
- [91] J. A. Fax and R. M. Murray, “Information flow and cooperative control of vehicle formations,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465–1476, 2004.

- [92] W. Ren, “Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations,” *IET Control Theory A.*, vol. 1, no. 2, pp. 505–512, 2007.
- [93] J. Hu, S. Li, C. Zhao, Q. Pan, B. Fan, Z. Zhang, and H. Li, “Finite-time consensus for multi uav system with collision avoidance,” in *2017 IEEE International Conference on Unmanned Systems (ICUS)*, 2017, pp. 517–522.
- [94] J. Wang and M. Xin, “Integrated optimal formation control of multiple unmanned aerial vehicles,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 21, no. 5, pp. 1731–1744, 2013.
- [95] X. Zhu, X.-x. Zhang, Y.-h. Qu *et al.*, “Consensus-based three-dimensional multi-uav formation control strategy with high precision,” *Front. Inform. Tech. El.*, vol. 18, no. 7, pp. 968–977, 2017.
- [96] Z. Yu, Y. Zhang, and Y. Qu, “Prescribed performance-based distributed fault-tolerant cooperative control for multi-uavs,” *Trans. Inst. Meas. Control*, vol. 41, no. 4, pp. 975–989, 2019.
- [97] H. Yang, B. Jiang, H. Yang, and H. H. Liu, “Synchronization of multiple 3-dof helicopters under actuator faults and saturations with prescribed performance,” *ISA Trans.*, vol. 75, pp. 118 – 126, 2018.
- [98] S. Rao and D. Ghose, “Sliding mode control-based autopilots for leaderless consensus of unmanned aerial vehicles,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 22, no. 5, pp. 1964–1972, 2014.
- [99] H. Zhang, Z. Li, Z. Qu, and F. L. Lewis, “On constructing lyapunov functions for multi-agent systems,” *Automatica*, vol. 58, pp. 39 – 42, 2015.
- [100] C.-C. Hua, K. Li, and X.-P. Guan, “Semi-global/global output consensus for nonlinear multiagent systems with time delays,” *Automatica*, vol. 103, pp. 480–489, May 2019.
- [101] G. Cui, S. Xu, Q. Ma, Y. Li, and Z. Zhang, “Prescribed performance distributed consensus control for nonlinear multi-agent systems with unknown dead-zone input,” *Int. J. Control*, vol. 91, no. 5, pp. 1053–1065, 2018.
- [102] R. Dutta, L. Sun, M. Kothari, R. Sharma, and D. Pack, “A cooperative formation control strategy maintaining connectivity of a multi-agent system,” in *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2014, pp. 1189–1194.
- [103] A. K. Gkesoulis and H. E. Psillakis, “Prescribed performance bipartite consensus for nonlinear agents with antagonistic interactions: A pi transformation approach,” *J. Franklin Inst.*, vol. 358, no. 4, pp. 2382–2404, 2021.
- [104] A. K. Gkesoulis, H. E. Psillakis, and Q. Wang, “Pdi regulation for consensus: Application to unknown pure-feedback agents with state and communication delays,” *IEEE Trans. Control. Netw. Syst.*, 2021.



- [105] A. K. Gkesoulis, H. E. Psillakis, and A.-R. Lagos, “Optimal consensus via opci regulation for unknown pure-feedback agents with disturbances and state-delays,” *IEEE Trans. Autom. Control*, 2022, (early access), doi: 10.1109/TAC.2022.3179218.
- [106] A. K. Gkesoulis and H. E. Psillakis, “Distributed uav formation control with prescribed performance,” in *2020 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2020, pp. 439–445.
- [107] Z. Li and Y. Jia, “Algebraic criteria for consensus problems of continuous-time networked systems,” *Int. J. Control*, vol. 82, no. 4, pp. 643–658, 2009.
- [108] R. Horn and C. Johnson, “Matrix analysis, 2nd edn cambridge,” *UK: Cambridge University Press*, 2013.
- [109] H. Zhang and F. L. Lewis, “Adaptive cooperative tracking control of higher-order nonlinear systems with unknown dynamics,” *Automatica*, vol. 48, no. 7, pp. 1432 – 1439, 2012.
- [110] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, 2002, vol. 3.
- [111] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*. Springer Science & Business Media, 1993, vol. 99.
- [112] B. Xu, C. Yang, and Y. Pan, “Global neural dynamic surface tracking control of strict-feedback systems with application to hypersonic flight vehicle,” *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, vol. 26, no. 10, pp. 2563–2575, 2015.
- [113] H. E. Psillakis, “Pi consensus error transformation for adaptive cooperative control of nonlinear multi-agent systems,” *J. Franklin Inst.*, vol. 356, no. 18, pp. 11 581 – 11 604, 2019.
- [114] D. A. Burbano Lombana and M. di Bernardo, “Distributed pid control for consensus of homogeneous and heterogeneous networks,” *IEEE Trans. Control. Netw. Syst.*, vol. 2, no. 2, pp. 154–163, 2015.
- [115] Y. Lv, Z. Li, and Z. Duan, “Distributed pi control for consensus of heterogeneous multiagent systems over directed graphs,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 50, no. 4, pp. 1602–1609, 2020.
- [116] C. Hua, P. X. Liu, and X. Guan, “Backstepping control for nonlinear systems with time delays and applications to chemical reactor systems,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, no. 9, pp. 3723–3732, Sept. 2009.