



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

Τομέας Φυσικής

ΔΠΜΣ: Μικροσυστήματα & Νανοδιατάξεις

**Εναγκαλισμένες Καταστάσεις  
Ηλεκτρονιακών Σπιν Εντοπισμένων σε Κβαντικά Σημεία  
για Κβαντικούς Υπολογιστές**

Μεταπτυχιακή Εργασία Ειδίκευσης  
**Καρκατζίνου Αναστασία**

**Επιβλέπων:**

Γεώργιος Βαρελογιάννης

Αν. Καθηγ. ΕΜΠ

**ΑΘΗΝΑ 2011**





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

Τομέας Φυσικής

ΔΠΜΣ: Μικροσυστήματα & Νανοδιατάξεις

**Εναγκαλισμένες Καταστάσεις  
Ηλεκτρονικών Σπιν Εντοπισμένων σε Κβαντικά Σημεία  
για Κβαντικούς Υπολογιστές**

Μεταπτυχιακή Εργασία Ειδίκευσης  
**Καρκατζίνου Αναστασία**

**Επιβλέπων: Γεώργιος Βαρελογιάννης**

**Αν. Καθηγ. Ε.Μ.Π.**

Εγκρίθηκε την 28η Σεπτεμβρίου 2011 από την τριμελή εξεταστική επιτροπή:

Γ. Βαρελογιάννης (Αν. Καθηγ. ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ)

Ε. Λιαροκάπης (Καθηγ. ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ)

Ι. Ράπτης (Καθηγ. ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ)







# **Ευχαριστίες**

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της μεταπτυχιακής εργασίας ειδίκευσής μου, Αν. Καθηγ. Γ. Βαρελογιάννη, ο οποίος μου έδωσε την ευκαιρία να εκπονήσω μια διπλωματική εργασία σε έναν άκρως καινοτόμο τομέα και να διευρύνω το επιστημονικό μου ενδιαφέρον.

Την εκτίμηση και τις ευχαριστίες μου θα ήθελα επίσης να εκφράσω και στον πρόεδρο του διατμηματικού μεταπτυχιακού προγράμματος ειδίκευσης «Μικροσυστήματα & Νανοδιατάξεις» Αν. Καθηγ. Ι. Ράππη, με την υποστήριξή του οποίου μπρόρεσα να ολοκληρώσω τις σπουδές μου στο εν λόγω ΔΠΜΣ. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του ΔΠΜΣ που μου έδωσαν την ευκαιρία σε μια δύσκολη χρονική περίοδο για μένα να διεξάγω μια μεταπτυχιακή εργασία ειδίκευσης. Τις ευχαριστίες μου θα ήθελα να εκφράσω και στον Καθηγ. Δ. Τσουκαλά για την υποστήρηξή του και τις συμβουλές του κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την στήριξή και συμπαράστασή τους.





# Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια έχει παρουσιαστεί ιδιαίτερο επιστημονικό και τεχνολογικό ενδιαφέρον για τα συστήματα κβαντικών σημείων [Bim99]. Τα συστήματα αυτά, λόγω του τριών διαστάσεων κβαντικού περιορισμού, παρέχουν μεγάλες δυνατότητες στην ανάπτυξη κβαντικών υπολογιστών [Nie00, Hir01], κβαντικής κρυπτογραφίας [Mic00, Li03, Bay01], laser χαμηλού ρεύματος κατωφλίου, οπτικών μνημών κι ενισχυτών [Kir94]. Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται, όσον αφορά τις τεχνολογικές εφαρμογές, στην εφαρμογή των κβαντικών σημείων σε διατάξεις κβαντικών υπολογιστών.

Το ερευνητικό ενδιαφέρον των τελευταίων χρόνων έχει αναδείξει τις θεωρητικές δυνατότητες αλλά και την πρόκληση στην πειραματική υλοποίηση των κβαντικών υπολογιστών [Llo93, Ben95, DiV95, Bar96]. Οι συνθήκες για την πραγματοποίηση κβαντικών υπολογιστών είναι πολύ απαιτητικές, αφού απαραίτητη είναι η ακριβής ρύθμιση των χαμιλτονιανών τελεστών στο καλά καθορισμένο κβαντικό σύστημα δυο επιπέδων, καθώς και η υψηλή κβαντική συνέπεια. Έχει επιτευχθεί η εφαρμογή κβαντικών υπολογισμών στο επίπεδο μεμονωμένων πυλών διπλού qubit, σε συστήματα παγίδας ιόντων [Cir95, Mor95, Cir96] και κβαντικών ηλεκτροδυναμικών κοιλοτήτων [Tur95]. Δεν είναι όμως ξεκάθαρο εάν τέτοια φυσικά συστήματα μπορούν πραγματικά να αποδώσουν κβαντικούς υπολογισμούς μεγάλης τάξης. Μια εναλλακτική πρόταση αποτελούν τα συστήματα στερεάς κατάστασης, όπως τα κβαντικά σημεία [Los00]. Τέτοια νανοσυστήματα, λόγω του τρισδιάστατου κβαντικού περιορισμού, παρουσιάζουν σημαντικές ιδιότητες και πλεονεκτήματα στον χειρισμό πχ. του ηλεκτρονιακού σπιν, αποτελώντας έτσι το φυσικό σύστημα δυο επιπέδων του κβαντικού υπολογιστή.

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια θεωρητική προσέγγιση των εναγκαλισμένων καταστάσεων qubit ηλεκτρονιακών σπιν εντοπισμένων σε ημιαγώγιμα κβαντικά σημεία. Οι δομές αυτές μπορούν να αποτελέσουν ένα φυσικό σύστημα δυο επιπέδων που απαιτείται για την πραγματοποίηση ενός κβαντικού υπολογιστή. Ο στόχος της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας ειδίκευσης είναι η παρουσίαση και μελέτη των εναγκαλισμένων καταστάσεων qubit ηλεκτρονιακών σπιν και η εξέλιξη του εναγκαλισμού υπό την επίδραση της αποσυνέπειας.



# ***Abstract***

In the last years, there was considerable interest in quantum dot (QD) structures [Bim99]. This interest is both scientific and technological. The technological interest stems from the potential applications of these nanostructures in quantum computing [Nie00, Hir01], quantum cryptography [Mic00, Li03, Bay01] and in high performance devices such as lasers, wavelength switching devices or optical memories and amplifiers [Kir94]. The emphasis of this work, in regard to device applications, is on quantum dot computers.

The work of the last several years has greatly clarified both the theoretical potential and the experimental challenges of quantum computation [Llo93, Ben95, DiV95, Bar96]. Achieving the conditions for quantum computation is extremely demanding, requiring precision control of Hamiltonian operations on well-defined two-level quantum systems, and a very high degree of quantum coherence. In ion-trap systems [Cir95, Mor95, Cir96], and in cavity quantum electrodynamic experiments [Tur95], quantum computation at the level of an individual two-qubit gate has been demonstrated. However, it is unclear whether such atomic-physics implementations could ever be scaled up to do truly large-scale quantum computation, and some have speculated that solid-state physics, the scientific mainstay of digital computation, would ultimately provide a suitable arena for quantum computation as well [Los08]. The realization of the model that is presented here is very ambitious advance in the study of controlled non-equilibrium spin dynamics in quantum dot nanosystems.

This work emphasizes on a theoretical approach of the entangled states of electron spin qubits in quantum dots. The first two chapters describe the physical system of semiconducting quantum dots and the fundamental principles of quantum computation. In the second part the production of entanglement for electron spins in quantum dots is presented, for the cluster, GHZ and W classes of entanglement. Finally, the decay of entanglement is studied under the influence of decoherence.



# Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	i
Περίληψη.....	iii
Abstract .....	v
Περιεχόμενα.....	vii
<b>1. Εισαγωγή.....</b>	<b>1</b>
<b>2. Συμπαγείς και Χαμηλοδιάστατοι Ημιαγωγοί.....</b>	<b>5</b>
2.1. Εισαγωγικές έννοιες .....	5
2.2. Διαδικασίες Ανάπτυξης και Ιδιότητες Κβαντικών Σημείων.....	7
2.2.1. Αυτο-οργανωμένα Κβαντικά Σημεία.....	8
2.2.2. Ηλεκτροστατικά Κβαντικά Σημεία.....	9
<b>3. Κβαντικοί υπολογιστές .....</b>	<b>13</b>
3.1. Βασικές Έννοιες Κβαντικών Υπολογιστών.....	13
3.2. Κβαντικός Εναγκαλισμός .....	22
3.3. Κβαντική Συνέπεια.....	26
3.4. Προσπάθειες Υλοποίησης Κβαντικών Υπολογιστών.....	32
3.5. Σπιν Ηλεκτρονίων σε Κβαντικά Σημεία.....	35
3.5.1. Qubit Ηλεκτρονιακού Σπιν σε Κβαντικά Σημεία.....	36
<b>4. Εναγκαλισμένες Καταστάσεις Ηλεκτρονιακών Σπιν Εντοπισμένων σε     Κβαντικά Σημεία.....</b>	<b>43</b>
4.1. Εισαγωγή.....	43

4.2. Δημιουργία Εναγκαλισμένων Καταστάσεων N – Qubit .....	45
4.2.1. Καταστάσεις Cluster.....	46
4.2.2. Καταστάσεις Greenberger – Horn – Zeilinger (GHZ).....	49
4.2.3. Καταστάσεις W.....	50
4.3. Πιστότητα.....	52
4.4. Δυνατότητα Πειραματικής Υλοποίησης.....	55
<b>5. Εναγκαλισμένες Καταστάσεις Ηλεκτρονικών Σπιν Εντοπισμένων σε Κβαντικά Σημεία υπό την Επίδραση της Αποσυνέπειας (Decoherence)</b>	57
5.1. Εισαγωγή.....	57
5.2. Δυο Qubit.....	61
5.3. Τρια Qubit.....	63
5.4. Τεσσερα Qubit.....	64
5.5. N Qubit.....	66
<b>6. Συμπεράσματα.....</b>	69
<i>Βιβλιογραφία.....</i>	71
<i>Βιογραφικό Σημείωμα.....</i>	79







# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια ταχύτατη πρόοδος στον τομέα των κβαντικών υπολογιστών [Nie00, Hir01]. Η θεωρία των κβαντικών υπολογιστών βασίζεται στην άμεση εφαρμογή των νόμων της κβαντομηχανικής, η οποία παρέχει μια πλήρη περιγραφή της δομής και των ιδιοτήτων του κόσμου σε μικροσκοπική κλίμακα.

Μέχρι σήμερα όλα τα υπολογιστικά συστήματα είναι κλασικά και χρησιμοποιούν τη δυαδική λογική (binary logic). Υπάρχουν όμως φυσικοί περιορισμοί ως προς την απόδοση που μπορεί να επιτευχθεί, με σημαντικότερο περιορισμό την πεπερασμένη ταχύτητα του φωτός. Σε ένα κλασικό υπολογιστικό σύστημα η ανταλλαγή πληροφοριών πραγματοποιείται με τη μορφή μεταφοράς ενέργειας. Η ταχύτητα της παραπάνω ανταλλαγής είναι (στην καλύτερη περίπτωση) ίση με την ταχύτητα του φωτός. Έτσι για να διανυθεί μια απόσταση 30 εκατοστών, στο κενό, απαιτείται χρόνος ενός (1) νανοδευτερόλεπτου. Στον ίδιο χρόνο η πληροφορία μεταδίδεται 20 εκατοστά σε έναν μεταλλικό αγωγό. Είναι λοιπόν αναπόφευκτο ότι στην προσπάθεια να αυξηθεί η ταχύτητα ενός κλασικού υπολογιστικού συστήματος θα πρέπει να μειωθούν οι αποστάσεις των επιμέρους τμημάτων της διάταξης, φτάνοντας ενδεχομένως σε υποατομικά επίπεδα. Τότε όμως οι καταστάσεις των διατάξεων θα κυβερνώνται από την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg. Επιπλέον η ίδια η τεχνολογία κατασκευής των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων μας επιβάλλει περιορισμούς ως προς το μέγιστο της απόδοσης που μπορεί να επιτευχθεί. Κάθε ολοκληρωμένο κύκλωμα αποβάλλει ενέργεια με τη μορφή θερμότητας, η οποία θα πρέπει να απομακρύνεται από το κύκλωμα. Όμως η ικανότητα μας να απομακρύνουμε την παραπάνω θερμότητα αυξάνεται με μικρότερο ρυθμό σε σχέση με το ρυθμό που αυξάνεται η δημιουργία της, όσο το μέγεθος των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων μειώνεται [Mar04].

Οι κβαντικοί υπολογιστές είναι σήμερα στο στάδιο της εργαστηριακής έρευνας. Μια διαφορετική κατάσταση λαμβάνει χώρα για τους νανοϋπολογιστές που αρχίζουν να εισάγονται

στην παραγωγή. Τα βασικά στοιχεία των νανοϋπολογιστών, δηλαδή ένα νανο-τρανζίστορ επίδρασης πεδίου (NFET) και ένα νανο-ολοκληρωμένο κύκλωμα (nanoiC), φτάνουν σε μέγεθος μικρότερο των 100 nm. Επομένως, εμφανίζονται κβαντικά φαινόμενα στη λειτουργία τους. Σε αντίθεση με τους κβαντικούς υπολογιστές, των οποίων η λειτουργία εκμεταλλεύεται τα κβαντικά αποτελέσματα, τα κβαντικά αποτελέσματα στους νανοϋπολογιστές παίζουν έναν καταστρεπτικό ρόλο και περιορίζουν την υπολογιστική αποδοτικότητά τους. Για παράδειγμα, τα ρεύματα σήραγγας δρουν καταστρεπτικά ως προς τις ιδιότητες μόνωσης των στρωμάτων. Η λειτουργία των νανοϋπολογιστών είναι ακόμα βασισμένη στους νόμους της κλασικής φυσικής. Επίσης σημειώνουμε ότι μερικές πιθανές φυσικές πραγματοποιήσεις κβαντικών υπολογιστών, π.χ. παγίδες ιόντων, κοιλότητες QED και συστήματα NMR, είναι τάξης μεγέθους των cm, το οποίο υποδηλώνει ότι αυτές οι τεχνολογίες δε θα οδηγήσουν απαραίτητως σε μια περαιτέρω σμίκρυνση των διατάξεων. Εντούτοις, αναμένεται ότι οποιαδήποτε τεχνολογία κβαντικού υπολογισμού θα οδηγήσει σε μια *τεράστια αύξηση της υπολογιστικής δύναμης*.

Η ιστορία του κβαντικού υπολογισμού ξεκινά με τα άρθρα του Richard P. Feynman (Βραβείο Nobel Φυσικής, 1965), ο οποίος πρώτος πρότεινε μια άμεση εφαρμογή των νόμων της κβαντομηχανικής σε υπολογιστικούς αλγόριθμους [Fey82, Fey86]. Θεωρούμε ως βάση ότι η λειτουργία των σύγχρονων υπολογιστών κι επίσης των νανοϋπολογιστών μπορεί να περιγραφεί εξ' ολοκλήρου από τους νόμους της κλασικής φυσικής και ειδικότερα από τις εξισώσεις Maxwell, οι οποίες είναι οι θεμελιώδεις εξισώσεις της κλασικής ηλεκτροδυναμικής. Παρά το γεγονός ότι οι σημερινοί υπολογιστές περιέχουν τρανζίστορ, η λειτουργία των οποίων βασίζεται στις ιδιότητες της δομής των ηλεκτρονιακών ζωνών των ημιαγωγών, οι υπολογισμοί στους συμβατικούς υπολογιστές τρέχουν σύμφωνα με τις εξισώσεις της κλασικής φυσικής. Για παράδειγμα, στα συμβατικά τρανζίστορ η λειτουργία ανάγνωσης - γραφής του απλού κλασικού bit απαιτεί μια ροή  $10^6 - 10^9$  ηλεκτρονίων. Για σύγκριση, η λειτουργία ανάγνωσης - γραφής του κβαντικού bit μπορεί να εκτελεσθεί με το απλό ηλεκτρόνιο.

Οι θεμελιώδεις ιδέες του κβαντικού υπολογισμού εισήχθησαν και αναπτύχθηκαν σε διάφορες επιστημονικές δημοσιεύσεις. Ο Deutsch διαμόρφωσε ένα μοντέλο για κβαντικούς υπολογισμούς και μια περιγραφή του γενικού κβαντικού υπολογιστή ως κβαντική μηχανή [Deu85]. Η μεγάλη έκρηξη στο πεδίο των κβαντικών υπολογιστών έλαβε χώρα το 1994, όταν ο Peter Shor δημοσίευσε ένα κβαντικό αλγόριθμο [Sho94], ο οποίος μπορούσε σε πολυωνυμικό χρόνο να λύσει το πρόβλημα της παραγοντοποίησης ενός ακεραίου. Στους κλασικούς υπολογιστές, η πολυπλοκότητα της επίλυσης του προβλήματος της παραγοντοποίησης ενός ακεραίου σε δύο πρώτους αριθμούς αυξάνεται εκθετικά ανάλογα με το πλήθος των ψηφίων. Η παραγοντοποίηση ενός αριθμούς σε δύο πρώτους αριθμούς είναι ιδιαίτερα σημαντική για την κρυπτογραφία και ειδικότερα για τον αλγόριθμο RSA, έναν αλγόριθμο κρυπτογράφησης που χρησιμοποιείται ευρέως.

Μετά τη δημοσίευση του αλγορίθμου του Shor, παρουσιάστηκε και ο αλγόριθμος του Lov Grover [Gro96] για αναζήτηση σε μη δομημένες βάσεις δεδομένων. Αν και η λύση του

Grover δεν πετυχαίνει τα εντυπωσιακά αποτελέσματα που πετυχαίνει ο αλγόριθμος του Shor σε σχέση με τους κλασικούς υπολογιστές, είναι αποδεδειγμένα πιο αποδοτικός από το βέλτιστο αλγόριθμο των κλασικών υπολογιστών για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Οι Woollers και Zurek απέδειξαν το θεώρημα μη-κλωνοποίησης, το οποίο βάζει καθορισμένα όρια στους κβαντικούς υπολογισμούς. Οι Calderbank και Shor διαμόρφωσαν την κβαντική μέθοδο διόρθωσης σφαλμάτων [Cal96]. Η θεωρία του κβαντικού υπολογισμού είναι μια προηγμένη θεωρία, η οποία συνδέει τα στοιχεία της φυσικής, των μαθηματικών, και της πληροφορικής [Bug01].

Η ιδέα λοιπόν της ανάπτυξης και χρήσης υπολογιστικών συστημάτων που θα χρησιμοποιούν φαινόμενα και νόμους της κβαντομηχανικής είναι πλέον ευρέως διαδεδομένη και πλήθος ερευνητικών προσπαθειών στρέφεται προς αυτήν την κατεύθυνση. Τα υπολογιστικά συστήματα που χρησιμοποιούν κβαντικές πύλες έχουν ιδιαίτερες ιδιότητες. Οι κβαντικοί υπολογιστές επιτρέπουν την αποδοτική υλοποίηση και των πιο πολύπλοκων φυσικών συστημάτων. Επιτρέπουν, επίσης, την αποδοτική παραγοντοποίηση μεγάλων ακεραίων, με άμεσες εφαρμογές στην κρυπτογραφία. Ακόμα, οι κβαντικοί υπολογιστές επιταχύνουν σημαντικά τη διαδικασία αναγνώρισης προτύπων σε τυχαία δεδομένα.

Οι κβαντικοί υπολογιστικοί αλγόριθμοι αποτελούνται από ακολουθίες λογικών πράξεων, οι οποίες εκτελούνται σε κβαντικές καταστάσεις και εφαρμόζουν τις κβαντοποιημένες (διακριτές) τιμές βασικών φυσικών ποσοτήτων, όπως της ενέργειας και της γωνιακής ορμής. Η κβαντική πληροφορία καταγράφεται με τη βοήθεια κβαντικών bit (quantum bit), που αποκαλούνται qubit, τα οποία είναι οι κβαντικές καταστάσεις στο διδιάστατο χώρο Hilbert. Η φυσική αντίληψη του qubit μπορεί να γίνει με τη χρήση οποιουδήποτε κβαντικού συστήματος δύο επιπέδων, δηλαδή με δύο διακριτές ιδιοτιμές. Για παράδειγμα, το qubit μπορεί να κατανοηθεί με τις δύο καταστάσεις spin του ηλεκτρονίου ή τις δύο καταστάσεις πόλωσης του φωτονίου. Τα qubit χρησιμεύουν για την αποθήκευση της κβαντικής πληροφορίας και μπορούν να μετασχηματιστούν με τη χρήση κβαντικών λογικών πράξεων. Στη μαθηματική γλώσσα, οι κβαντικές λογικές πράξεις (πύλες) περιγράφονται από τους μοναδιαίους μετασχηματισμούς μεταξύ των κβαντικών καταστάσεων.

Οι πειραματικές μελέτες πραγματοποιούνται παράλληλα με την πρόοδο στη θεωρία του κβαντικού υπολογισμού, προκειμένου να βρεθούν φυσικές αντιλήψεις των qubit και να εκτελεστούν ελεγχόμενοι μετασχηματισμοί σε αυτά. Ερευνώνται διαφορετικά φυσικά συστήματα προκειμένου να αναπτυχθεί η εφικτή κβαντική τεχνολογία υπολογισμού. Έχουν ληφθεί ενδιαφέροντα αποτελέσματα για απλά ιόντα σε παγίδες ιόντων [Cir91], άτομα και φωτόνια σε κοιλότητες κβαντικής ηλεκτροδυναμικής (QED) [Tur95], μοριακά συστήματα σε συσκευές πυρηνικού μαγνητικού συντονισμού (NMR) και ζεύγη Cooper σε ημιαγωγούς [Jon00]. Ιδιαίτερα ελπιδοφόρα είναι η εφαρμογή νανοδομών ημιαγωγών, ιδιαίτερα **κβαντικών σημείων** (Quantum Dots, QDs), ως διατάξεις κβαντικού υπολογισμού. Οι ημιαγωγιμες νανοδιατάξεις έχουν το πλεονέκτημα ότι η τεχνολογία της ανάπτυξης κι επεξεργασίας τους (νανοτεχνολογία) είναι μια

φυσική επέκταση των τεχνολογιών που χρησιμοποιούνται στη σύγχρονη βιομηχανία υπολογιστών κι έτσι μπορούν να ενσωματωθούν εύκολα στο υπάρχον hardware.

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια μιας σύντομης παρουσίασης της υλοποίησης τέτοιων υπολογιστικών συστημάτων με χρήση ημιαγώγιμων κβαντικών σημείων. Αρχικά γίνεται μια εισαγωγή στις βασικές φυσικές αρχές και ιδιότητες των συστημάτων κβαντικών σημείων, ακολουθεί μια παρουσίαση των βασικών αρχών των κβαντικών υπολογιστών, στη συνέχεια περιγράφεται η παραγωγή εναγκαλισμένων καταστάσεων ηλεκτρονιακών σπιν εντοπισμένων σε κβαντικά σημεία και τέλος μελετάται η επίδραση της αποσυνέπειας στην εξέλιξη των εναγκαλισμένων καταστάσεων.

## Κεφάλαιο 2

### Συμπαγείς και Χαμηλοδιάστατοι Ημιαγωγοί

#### 2.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Σε έναν τρισδιάστατο κρύσταλλο η διάδοση των φορέων περιγράφεται από τα κύματα Bloch. Εάν υπάρξει χωρικός περιορισμός κατά μια τουλάχιστον διεύθυνση συγκρίσιμος με το μήκος κύματος de Broglie  $\lambda = h/p = h/(3m^*kT)^{1/2}$ , το ενεργειακό φάσμα των φορέων δίνεται από διακριτές λύσεις της εξίσωσης Schrodinger. Για περιορισμό κατά μια, δυο και τρεις διευθύνσεις έχουν επικρατήσει οι όροι κβαντικά πηγάδια (quantum wells, QW), κβαντικά νήματα (quantum wires, QW) και κβαντικά σημεία (quantum dots, QD) αντίστοιχα. Σε θερμοκρασία δωματίου η θερμική ενέργεια είναι  $E = 3/2 kT = 26 \text{ meV}$  και υποθέτοντας ενεργό μάζα ίση με το 1/10 της μάζας του ελεύθερου ηλεκτρονίου, ένα τυπικό μήκος βρίσκεται στην περιοχή των 10 nm.

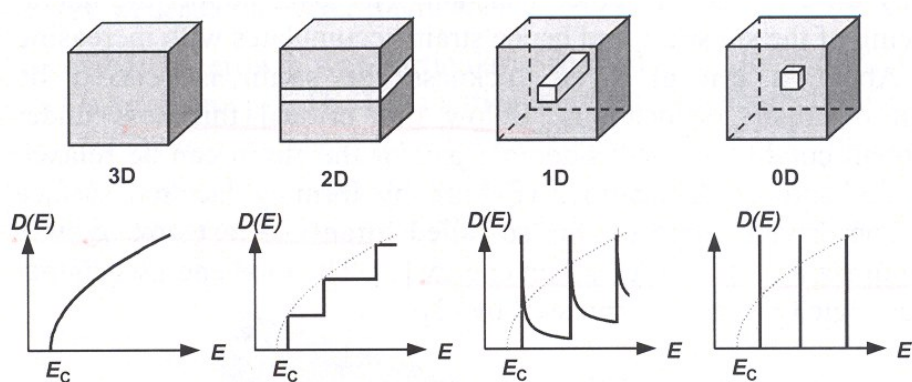
Καθοριστικό ρόλο στις ιδιότητες των ημιαγωγών έχει η πυκνότητα καταστάσεων  $D(E)$ . Ως συνέπεια του χωρικού περιορισμού, η πυκνότητα καταστάσεων μεταβάλεται [Yu01]:

3D, συμπαγής:

$$D(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{8\pi^2 m^*}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \quad (2.1)$$

2D, κβαντικά πηγάδια:

$$D(E) = \frac{1}{\pi L_z} \left( \frac{4\pi^2 m^*}{h^2} \right) \sum_{i=0}^n S(E - E_i) \quad (2.2)$$



**Εικόνα 2.1.** Πυκνότητα καταστάσεων για έναν 3D ημιαγωγό, ένα 2D κβαντικό πηγάδι, ένα 1D κβαντικό νήμα και ένα 0D κβαντικό σημείο.

1D, κβαντικά νήματα:

$$D(E) = \frac{1}{\pi L_y L_z} \left( \frac{4m^*}{h^2} \right)^{1/2} \sum_{i=0}^n (E - E_i)^{-1/2} \quad (2.3)$$

0D, κβαντικά σημεία:

$$D(E) = \frac{1}{\pi L_x L_y L_z} \sum_{i=0}^n \delta(E - E_i) \quad (2.4)$$

- με  $L_x, L_y, L_z$ : μέγεθος της δομής κατά τη x, y, και z διεύθυνση  
 $E_i$ : i-οστή ιδιοενέργεια του φορέα  
 $m^*$ : ενεργή μάζα  
 $S$ : μοναδιαία βηματική συνάρτηση (  $S(x, x < 0) = 0, S(x, x > 0) = 1$  )  
 $\delta$ : συνάρτηση δ  
 $h$ : σταθερά Planck

Πλήρης κβαντικός περιορισμός και στις τρεις διευθύνσεις, έχει ως αποτέλεσμα η πυκνότητα καταστάσεων να έχει τη μορφή συναρτήσεων δ, διευρυμένης σε Λορεντζιανή λόγω πεπερασμένου χρόνου χαλάρωσης (definite relaxation time) [Bor06, Dom07], όπως συμβαίνει στα άτομα. Έτσι στα κβαντικά σημεία οι φορείς καταλαμβάνουν διακριτές ενεργειακές στάθμες [Sti98]. Οι ηλεκτρονικές λοιπόν ιδιότητες των κβαντικών σημείων πλησιάζουν αυτές του ατόμου παρά ενός ημιαγωγού με συνεχή σχέση διασποράς  $E(k)$ . Σε αντίθεση όμως με τα άτομα, οι ενεργειακές στάθμες σε ένα κβαντικό σημείο μπορούν να μεταβληθούν ρυθμίζοντας διάφορες δομικές παραμέτρους. Επιπλέον, λόγω του πλέγματος παρουσιάζουν διαφορετικές διαδικασίες συμμετρίας σε σύγκριση με τα άτομα, που οδηγούν σε διαφορετικούς κανόνες επιλογής.

Τα κβαντικά σημεία χαρακτηρίζονται από τρεις ιδιότητες:

- Διακριτές ενεργειακές στάθμες
- Ενέργεια τοπικού εντοπισμού των φορέων (Localization Energy)
- Κβαντικό περιορισμό της κυματοσυνάρτησης

Οι κυματοσυναρτήσεις ηλεκτρονίου και οπής πλησιάζουν λόγω του κβαντικού περιορισμού του δυναμικού. Το ζεύγος ηλεκτρονίου και οπής σχηματίζει ένα εξιτόνιο, με ενέργεια μικρότερη από την ενέργεια του ελεύθερου ζεύγους ηλεκτρονίου-οπής.

Τέτοιες κβαντικές δομές χαρακτηρίζονται κατάλληλες για τεχνολογικές εφαρμογές όταν:

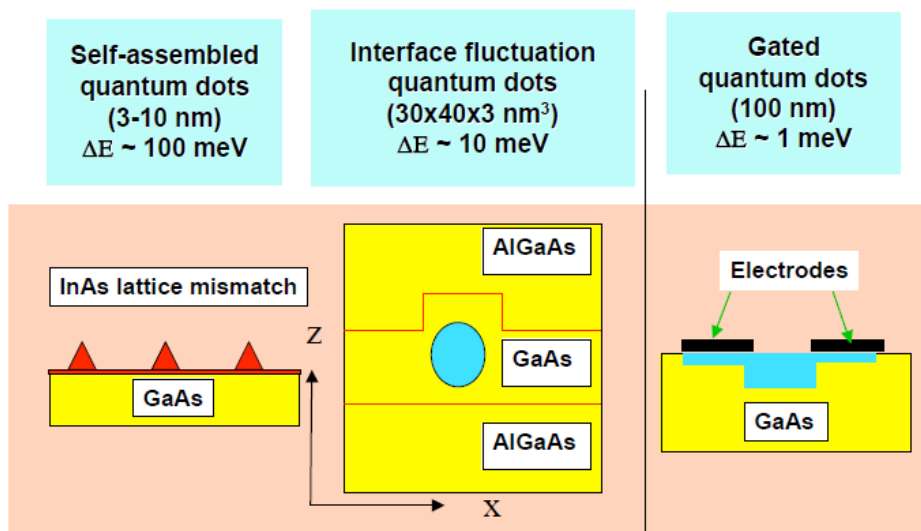
- Η ενέργεια τοπικού εντοπισμού των φορέων είναι μεγάλη σε σύγκριση με τη θερμική ενέργεια :  $E_{loc} \gg kT$ , ώστε οι φορείς να μη διεγείρονται θερμικά και διαφεύγουν από τη δομή με την αύξηση της θερμοκρασίας.
- Παρουσιάζουν μικρές διακυμάνσεις στο μέγεθος και τη σύσταση
- Το υλικό αναπτύσσεται σύμφωνα χωρίς τη δημιουργία ατελειών, όπως π.χ. εξαρμώσεων.

## **2.2. Διαδικασίες Ανάπτυξης και Ιδιότητες Κβαντικών Σημείων**

Ένα ημιαγώγιμο κβαντικό σημείο είναι μια νανοδομή, το μέγεθος της οποίας δεν υπερβαίνει τα 10 nm σε κάθε χωρική κατεύθυνση [Jac98]. Το δυναμικό που δημιουργείται στο εσωτερικό του κβαντικού σημείου περιορίζει χωρικά την κίνηση των φορέων και στις τρεις διαστάσεις. Το τυπικό βάθος του δυναμικού κβαντικού περιορισμού, είναι της τάξης των 0.1 με 1 eV. Λόγω του κβαντικού περιορισμού λαμβάνει χώρα ο διαχωρισμός των ενεργειακών καταστάσεων των ηλεκτρονίων της τάξης των λίγων meV.

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.2., υπάρχουν πολλοί τύποι κβαντικών σημείων: τα αυτο-οργανωμένα κβαντικά σημεία (self-assembled), αυτά που δημιουργούνται λόγω διακύμανσης στη σύσταση της διεπιφάνειας (interface fluctuation) και τα ηλεκτροστατικά (ελεγχόμενης πύλης / gated). Μεταξύ αυτών, οι καλύτεροι υποψήφιοι για την υλοποίηση κβαντικών λογικών πυλών θεωρούνται τα ηλεκτροστατικά κβαντικά σημεία (για qubit ηλεκτρονιακών σπιν) και τα αυτο-οργανωμένα (για qubit εξιτονίων) που έχουν επιδείξει πολύ μικρούς χρόνους αποσυνέπειας.

Στην παρούσα εργασία θα γίνει μια σύνταμη περιγραφή των αυτο-οργανωμένων και των παράλληλα δομημένων (lateral) ηλεκτροστατικών κβαντικών σημείων.



**Εικόνα 2.2.** Είδη κβαντικών σημείων: αυτο-οργανωμένα (self-assembled), διακύμανσης της διεπιφάνειας (interface fluctuation) και ηλεκτροστατικά (gated).

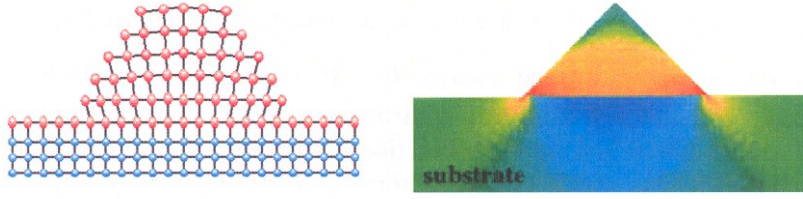
### 2.2.1. Αυτο – οργανωμένα Κβαντικά Σημεία

Κατά τις διαδικασίες ανάπτυξης ετεροδομών με διαφορετικές πλεγματικές σταθερές πάνω σε κάποιο υπόστρωμα, αναγκαίο είναι να λαμβάνονται υπόψη κάποιοι παράγοντες κινητικής και δυναμικής [Sin03]. Οι τάσεις δρουν ανταγωνιστικά ως προς την ενέργεια χημικών δεσμών. Επιπλέον, γεγονότα που λαμβάνουν χώρα στις επιφάνειες της δομής καθώς και η δυνατότητα του συστήματος να προσεγγίζει το χαμηλότερο ενεργειακό επίπεδο παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο.

Υπάρχουν τρεις γνωστοί ρυθμοί επιταξιακής ανάπτυξης ετεροδομών: ο Frank-van der Merwe (1949) [Fra49], ο Volmer-Weber (1926) [Vol26] και ο Stranski-Krastanow (1937) [Str37]. Περιγράφουν στρωματική ανάπτυξη (layer-by-layer growth, FvDM, 2D), ανάπτυξη νησίδων πάνω στο υπόστρωμα (island growth, VW, 3D) και στρωματική ανάπτυξη του υλικού ακολουθούμενη από σχηματισμό νησίδων (SK) αντίστοιχα. Ο ρυθμός ανάπτυξης εξαρτάται από τις ενέργειες της διεπιφάνειας και τη διαφορά στις πλεγματικές σταθερές του προς εναπόθεση υλικού και του υποστρώματος.

Η ανάπτυξη κατά τον ρυθμό SK αφορά σε μέτρια διαφορά πλεγματικών σταθερών. Αρχικά πάνω στη μήτρα αναποτήθεται μία επίστρωση υλικού. Το ενεποτηθέμενο υλικό προσαρμόζεται στο πλέγμα της μήτρας κι έτσι κατά την ανάπτυξη συσσωρεύεται τάση. Κάτω από ένα κρίσιμο πάχος αναπόθεσης, η τάση αυτή εκτονώνεται ελαστικά χωρίς τη δημιουργία εξαρμόσεων αλλά με τον σχηματισμό νησίδων (QDs) κι έτσι ελαχιστοποιείται η ενέργεια παραμόρφωσης (Εικόνα 2.3) [Poh05]. Έτσι δίνεται η δυνατότητα ανάπτυξης συστημάτων 0D (QD) χωρίς τη χρήση λιθογραφίας, εγχάραξης κλπ.





**Εικόνα 2.3.** Ανάπτυξη κβαντικού σημείου σε υπόστρωμα με μικρότερη πλεγματική σταθερά κατά SK. Αριστερά: σχήμα, δεξιά: θεωρητικός υπολογισμός των τάσεων (μπλε: εφελκυστική, κόκκινο: συμπιεστική, πράσινο: ελεύθερο από τάσεις).

Η κινητήρια δύναμη της ανάπτυξης κατά SK είναι η ελαχιστοποίηση της συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης. Το συνολικό κέρδος ενέργειας κατ' όγκο σε ένα μονό κβαντικό σημείο είναι [Wan99]:

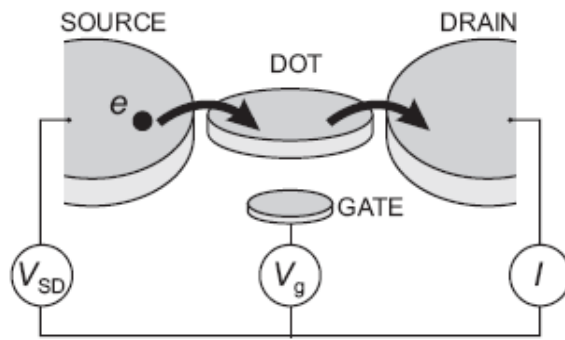
$$\frac{E_{total}}{V} = \varepsilon_{QD}^{elast} - \varepsilon_{layer}^{elast} + \frac{A\gamma_{facet} - L^2\gamma_{layer}(d_0) + (p^{-1} - L^2)[\gamma_{layer}(d) - \gamma_{layer}(d_0)]}{V} \quad (2.5)$$

όπου  $\varepsilon_{QD}^{elast}$  και  $\varepsilon_{layer}^{elast}$  είναι οι πυκνότητες ενέργειας του κβαντικού σημείου και της υπό τάση επίστρωσης. Ο τρίτος όρος περιγράφει τη μεταβολή στην ενέργεια επιφάνειας λόγω σχηματισμού της νησίδας (QD):  $\gamma_{facet}$  είναι η ενέργεια επιφάνειας των εδρών του κβαντικού σημείου,  $A$  η επιφάνειά τους και  $L$  το μήκος της βάσης του κβαντικού σημείου. Ο τέταρτος όρος αντιπροσωπεύει το τμήμα εκείνο της επίστρωσης που μετετρέπεται σε κβαντικό σημείο.  $P$  είναι η επιφανειακή πυκνότητα των κβαντιών σημείων,  $\gamma_{layer}(d_0)$  και  $\gamma_{layer}(d)$  οι ενέργειες σχηματισμού της επίστρωσης ως συνάρτηση του πάχους  $d$ . Το άθροισμα όλων αυτών των συνεισφορών έχει ένα ελάχιστο για κάθε συγκεκριμένο μέγεθος κβαντικού σημείου.

Πρέπει να αναφερθεί ότι οι δομικές ιδιότητες δεν εξαρτώνται μόνο από τη διαφορά των πλεγματικών σταθερών, αλλά και από τα υλικά του συστήματος. Επίσης, η γεωμετρία του κβαντικού σημείου επηρεάζεται από τις παραμέτρους ανάπτυξης και τον προσανατολισμό του υποστρώματος.

## 2.2.2. Ηλεκτροστατικά Κβαντικά Σημεία

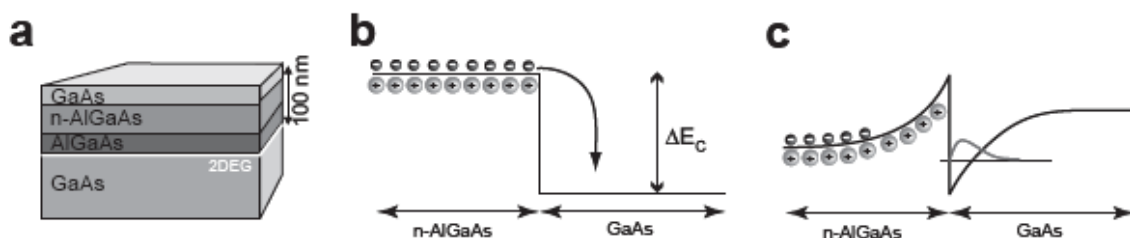
Μια άλλη διάταξη κβαντικών σημείων είναι αυτή της επίπεδης γεωμετρίας (Lateral Quantum Dots) [Bed01, Bed03]. Η βασική ιδέα αυτή της διάταξης είναι ότι το κβαντικό σημείο μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα μικρό κουτί που περιέχει ηλεκτρόνια, το οποίο είναι συνδεδεμένο με μια πηγή κι έναν απαγωγό, μέσω των οποίων μπορεί να υπάρξει ροή ηλεκτρονίων, Εικ. 2.4. Ρυθμίζοντας κατάλληλα το ρεύμα και την τάση στις δυο δεξαμενές (πηγή,



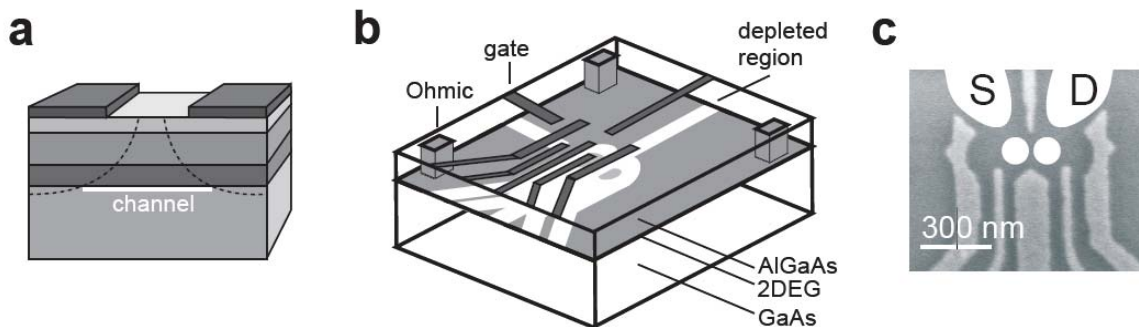
**Εικ. 2.4.** Σχηματική αναπαράσταση ενός QD σε επίπεδη γεωμετρία. Το QD, αναπαριστώμενο από ένα δισκίο, είναι συνδεδεμένο με την πηγή και τον απαγωγό με επαφές σύραγγας, επιτρέποντας το ρεύμα που διαρρέει τη διάταξη,  $I_{\text{DOT}}$ , να μπορεί να μετρηθεί σε σχέση με την τάση πόλωσης  $V_{\text{SD}}$  και την τάση της πηγής  $V_{\text{G}}$ .

απαγωγός), καθίσταται εφικτή η μέτρηση των ηλεκτρονικών ιδιοτήτων του σημείου. Το σημείο είναι επίσης συνδεδεμένο με ένα ή περισσότερα ηλεκτρόδια πηγών, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη ρύθμιση του ηλεκτροστατικού δυναμικού του QD. Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτών των διατάξεων επίπεδης γεωμετρίας είναι ότι όλες οι σχετικές παράμετροι μπορούν να ρυθμιστούν *in situ*, επιτρέποντας έτσι την πραγματοποίηση περαμάτων που καλύπτουν ένα ευρύ μέρος του χώρου των παραμέτρων με ένα μόνο δείγμα.

Για τη δημιουργία τέτοιων συστημάτων είναι αρχικά απαραίτητη η επιταξιακή ανάπτυξη ημιαγωγικών ετεροδομών, όπως φαίνεται στην Εικ.2.5.a για την περίπτωση πχ. της ετεροδομής GaAs/AlGaAs [Wil05, Kor05]. Με την εισαγωγή προσμίξεων (doping), πχ. ατόμων Si στο AlGaAs, δημιουργούνται ελεύθερα ηλεκτρόνια στην τύπου n στρωμάτωση (n-AlGaAs) και στη συνέχεια συσσωρεύονται στη διεπιφάνεια των στρωματώσεων των δυο υλικών (GaAs/AlGaAs), σχηματίζοντας έτσι το 2DEG, Εικ.2.5.b,c. Στην περίπτωση που τα ηλεκτρόνια παραμένουν δεσμευμένα στους δότες τους, η ζώνη αγωγιμότητας είναι επίπεδη με μια ασυνέχεια  $\Delta E_C$  στη διεπιφάνεια (Εικ.2.5.b). Τα ηλεκτρόνια όμως δεν μένουν δεσμευμένα αλλά διαχέονται και προσεγγίζουν την περιοχή του GaAs, του οποίου η ζώνη αγωγιμότητας βρίσκεται ενεργειακά χαμηλότερα, όπου και παγιδεύονται, αφού έχοντας χάσει την ενέργειά τους δεν μπορούν να διασχίσουν το φράγμα που επιβάλλεται από το  $\Delta E_C$ . Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από



**Εικ. 2.5.** Δημιουργία ενός δισδιάστατου αερίου ηλεκτρονίων (2DEG). a) Η ημιαγωγική ετεροδομή περιέχει το 2DEG (λευκό επίπεδο) στη διεπιφάνεια των GaAs/AlGaAs. b, c) Η ζώνη αγωγιμότητας κοντά στη διεπιφάνεια των GaAs/AlGaAs στις περιπτώσεις που b) τα ηλεκτρόνια παραμένουν στους δότες και c) μετά τη δημιουργία του 2DEG.



**Εικ.2.6.** a) Η εφαρμογή μιας αρνητικής διαφοράς δυναμικού στα μεταλλικά ηλεκτρόδια στην επιφάνεια της ετεροδομής, το υποκείμενο 2DEG μπορεί να απαληφθεί τοπικά. Έτσι τα ηλεκτρόνια μπορούν να περιοριστούν σε 1 (channel) ή ακόμη και 0 διαστάσεις (κβαντικά σημεία). b) Σχηματική αναπαράσταση της διάταξης κβαντικών σημείων επίπεδης γεωμετρίας. Αρνητικές τάσεις που εφαρμόζονται στα μεταλλικά ηλεκτρόδια (περιοχές με σκούρο γκρι) οδηγούν στην αφαίρεση περιοχών (λευκές) του 2DEG (ανοιχτό γκρι). Ωμικές επαφές (γκρι στήλες) επιτρέπουν την ηλεκτρική επαφή με τη δεξαμενή του 2DEG. c) Εικόνα SEM μιας διάταξης, όπου διακρίνονται τα ηλεκτρόδια της πύλης (ανοιχτό γκρι) που βρίσκονται στην επιφάνεια της ετεροδομής (σκούρο γκρι). Οι δυο λευκές κυλίδες σηματοδοτούν τα δυο κβαντικά σημεία, τα οποία είναι συνδεδεμένα μέσω επαφών σύραγγας με μια πηγή (S) κι έναν απαγωγό (D).

τους φορτισμένους θετικά πια δότες αντιτίθεται στην περαιτέρω διάχυση των ηλεκτρονίων, τα οποία έτσι συγκεντρώνονται στη διεπιφάνεια των GaAs/AlGaAs δημιουργώντας το 2DEG. Το δυναμικό στο οποίο είναι εγκλωβισμένα τα ηλεκτρόνια είναι τριγωνικό κι επιφέρει τον κβαντικό περιορισμό στην κίνηση των ηλεκτρονίων κατά διεύθυνση κάθετα στη διεπιφάνεια (Εικ.2.5.c). Σε χαμηλές θερμοκρασίες μόνο η πιο χαμηλή κατάσταση του τριγωνικού αυτού πηγαδιού είναι κατειλημμένη κι έτσι τα ηλεκτρόνια μπορεί να θεωρηθεί ότι κινούνται ελεύθερα στο επίπεδο παράλληλα της διεπιφάνειας. Το 2DEG είναι ουσιαστικά μια λεπτή ( $\sim 10$  nm) επιφάνεια ηλεκτρονίων που είναι κβαντικά περιορισμένα κατά μια διάσταση, τη διάσταση ανάπτυξης του υλικού, κι ελεύθερα να κινηθούν στις άλλες δυο διαστάσεις της διεπιφάνειας. Τα ηλεκτρόνια του 2DEG έχουν υψηλή κινητικότητα ( $10^5 - 10^6$  cm<sup>2</sup>/Vs) και σχετικά μικρή πυκνότητα ( $\sim 10^{11}$  cm<sup>-2</sup>). Η χαμηλή ηλεκτρονιακή πυκνότητα οδηγεί σε ένα μικρό μήκος κύματος Fermi ( $\sim 40$  nm) το οποίο επιτρέπει την τοπική 'αφαίρεση' του 2DEG με την εφαρμογή ενός ηλεκτρικού πεδίου.

Για περαιτέρω περιορισμό της κίνησης των ηλεκτρονίων του 2DEG κατασκευάζονται πύλες στην επιφάνεια της ετεροδομής με τεχνικές λιθογραφίας, οι οποίες αφαιρούν τοπικά το υποκείμενο 2DEG, Εικ.2.6.a. Η ηλεκτρική επαφή με το 2DEG γίνεται μέσω ομικών επαφών (γκρι στήλες, Εικ.2.6.b). Η εφαρμογή μιας διαφοράς δυναμικού στα μεταλλικά ηλεκτρόδια των πυλών που βρίσκονται στην επιφάνεια της ετεροδομής δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο. Με κατάλληλη επιλογή της γεωμετρίας των πυλών, το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να περιορίσει χωρικά τα ηλεκτρόνια κατά τη μια (channel) ή ακόμα και τις υπόλοιπες 2 διαστάσεις (0D), δημιουργώντας έτσι μικρές νησίδες, τα κβαντικά σημεία. Για παράδειγμα, η γεωμετρία των πυλών της Εικ.2.6.c επιτρέπει τη δημιουργία ενός διπλού κβαντικού σημείου, όπου το πλήθος

των ηλεκτρονίων σε κάθε κβαντικό σημείο μπορεί να ρυθμιστεί και να φτάσει μέχρι και το ένα μόνο ηλεκτρόνιο, κρίσιμη απαίτηση για την υλοποίηση qubit σπιν ηλεκτρονίου σε αυτή τη διάταξη.

Τελευταία μελετάται εντατικά η δυνατότητα της εφαρμογής των κβαντικών σημείων στον κβαντικό υπολογισμό [Hay03]. Τα *qubits* μπορούν να κατανοηθούν ή ως **καταστάσεις φορτίου** είτε ως **καταστάσεις σπιν** των κβαντικών σημείων. Στην παρούσα εργασία θα μελετηθούν οι εναγκαλισμένες καταστάσεις ηλεκτρονιακού σπιν σε κβαντικά σημεία.

Τα ηλεκτροστατικά κβαντικά σημεία φαίνονται να είναι κατάλληλα για να εκτελέσουν κβαντικούς υπολογισμούς, εφόσον οι ηλεκτρονικές ιδιότητές τους μπορούν να μοντελοποιηθούν από την κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων της νανοδομής και να συντονιστούν με την αλλαγή των εξωτερικών τάσεων που εφαρμόζονται στα ηλεκτρόδια. Αυτό επιτρέπει να επιτευχθούν οι επιδιωκόμενες ιδιότητες των κβαντικών καταστάσεων και να εκτελεσθούν οι ελεγχόμενες λογικές διαδικασίες σε αυτές τις καταστάσεις. Επιπλέον, η σύγχρονη νανοτεχνολογία επεξεργασίας των κβαντικών σημείων αποτελεί μια επέκταση της γνωστής τεχνολογίας ημιαγωγών MOSFET προς μικρότερες διαστάσεις. Επομένως, η εισαγωγή της στην παραγωγή είναι ευκολότερη από εκείνη των άλλων τεχνολογιών κβαντικού υπολογισμού, που βασίζονται στις παγίδες ιόντων και στις κοιλότητες QED, οι οποίες λαμβάνονται μόνο σε προηγμένα εργαστήρια.

# Κεφάλαιο 3

## Κβαντικοί Υπολογιστές

### 3.1 Βασικές Έννοιες Κβαντικών Υπολογιστών

Η βασική μονάδα πληροφορίας σε ένα κλασικό υπολογιστικό σύστημα είναι το bit (binary digit) το οποίο μπορεί να πάρει μόνο τις δυο τιμές 0 και 1, κάθε μία από τις οποίες εμφανίζεται με πιθανότητα 0 ή 1. Στους κβαντικούς υπολογιστές (και στους αντίστοιχους κβαντικούς υπολογισμούς) η βασική μονάδα πληροφορίας είναι το **qubit** (quantum bit). Το qubit είναι ένα κβαντικό σύστημα με δύο βασικές καταστάσεις, τις  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ . Οι καταστάσεις αυτές αντιστοιχούν στις καταστάσεις 0 και 1 του κλασικού bit. Πχ ένα άτομο υδρογόνου στη θεμελιώδη του κατάσταση, όπου το  $|0\rangle$  αντιπροσωπεύεται από την ηλεκτρονιακή κατάσταση με σπιν άνω και το  $|1\rangle$  από την κατάσταση με σπιν κάτω, μπορεί να αποτελέσει ένα qubit. Όμως ακριβώς επειδή το άτομο, και ειδικότερα το ηλεκτρόνιο του, είναι ένα κβαντικό σύστημα, εκτός από τις δυο βασικές καταστάσεις  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ , θα είναι πραγματοποιήσιμη κατάσταση και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους. Το qubit δηλ. μπορεί να βρίσκεται και *ταυτόχρονα* στις δύο αυτές καταστάσεις, σύμφωνα με την αρχή της κβαντικής υπέρθεσης (quantum superposition). Στην ουσία η κβαντική αυτή υπέρθεση καθιστά δυνατή την ικανότητα που έχουν οι κβαντικοί υπολογιστές για **μαζική παραλληλία** στους υπολογισμούς.

Το qubit ορίζεται ως ένα κβαντικό διάνυσμα κατάστασης στο διδιάστατο χώρο Hilbert  $H^2$ . Εάν τα διανύσματα  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  σχηματίζουν την ορθοκανονική πλήρη βάση στον  $H^2$ , τότε το qubit μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση των ιδιοδιανυσμάτων :

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (3.1)$$

όπου τα σύνθετα πλάτη πιθανότητας  $\alpha$  και  $\beta$  ικανοποιούν τη συνθήκη κανονικοποίησης  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Το σύνολο καταστάσεων  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  καλείται υπολογιστική βάση.

Η μεγάλη διαφορά των κλασικών bit και qubit έγκειται στη χωρητικότητα της πληροφορίας. Αντίθετα από το κλασικό bit, που μπορεί να είναι στην κλασική κατάσταση 0 ή 1 με πιθανότητα 0 ή 1, το qubit παίρνει συνεχείς τιμές, οι οποίες καθορίζονται από τα πλάτη  $\alpha$  και  $\beta$ . Η διαφορά αυτή των bit παρουσιάζεται καλύτερα στη λεγόμενη σφαίρα του Bloch (ακτίνας 1), Εικ. 3.1. Το κλασικό bit μπορεί μόνο να πάρει τιμές στους δυο πόλους της σφαίρας 0 και 1, οι οποίες σε έναν κλασικό υπολογιστή μπορεί πχ να αντιστοιχούν στις καταστάσεις 'on' και 'off' του τρανζίστορ του επεξεργαστή. Ένα qubit μπορεί να βρίσκεται στην κατάσταση  $|0\rangle$  με πιθανότητα  $|\alpha|^2$  και στην κατάσταση  $|1\rangle$  με πιθανότητα  $|\beta|^2$ , με συνθήκη κανονικοποίησης την  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Τα πλάτη πιθανότητας  $\alpha$  και  $\beta$  είναι μιγαδικοί αριθμοί με μέτρο  $0 < |\alpha|, |\beta| < 1$ . Όταν  $\alpha, \beta \neq 0$  τότε το κβαντικό μας σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση υπέρθεσης (superposition state) και μπορούμε να γράψουμε:

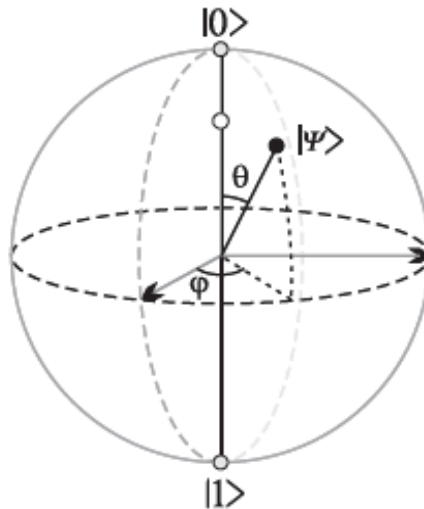
$$|\psi\rangle = \cos\left[\frac{\theta}{2}\right]|0\rangle + e^{i\phi} \sin\left[\frac{\theta}{2}\right]|1\rangle \quad (3.2)$$

η οποία αυτή κατάσταση αντιστοιχεί σε ένα σημείο της σφαίρας Bloch στην Εικ. 3.1. Η γωνία  $\theta$  καθορίζει τις τιμές των πλατών πιθανότητας και γωνία  $\phi$  ονομάζεται γωνία φάσης. Έτσι ενώ για την περιγραφή της κατάστασης ενός κλασικού bit χρειάζεται μόνο μια παράμετρος, η  $\theta$ , για την περιγραφή της κβαντικής κατάστασης υπέρθεσης  $|\psi\rangle$  χρειάζεται και η δεύτερη παράμετρος  $\phi$ .

Ο τελεστής πυκνότητας  $\rho_\psi$  της κατάστασης  $|\psi\rangle$  της σχέσης (3.1) είναι

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

όπου οι βασικές καταστάσεις  $|B^{(j)}\rangle$  της μήτρας είναι οι  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ . Τα διαγώνια στοιχεία της μήτρας πυκνότητας αναπαριστούν την πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα στην αντίστοιχη ιδιοκατάσταση και σχετίζονται με τη γωνία  $\theta$ . Το άθροισμά τους λοιπόν – ίχνος της μήτρας  $\rho$  – θα πρέπει να πληροί τη σχέση  $Tr[\rho] = 1$ . Τα μη διαγώνια στοιχεία εμπεριέχουν την πληροφορία της φάσης και μπορούν να είναι μιγαδικοί αριθμοί, αφού ο τελεστής πυκνότητας είναι ερμιτιανός.



**Εικόνα 3.1.:** Η κατάσταση ενός τυχαίου qubit  $|\psi\rangle$  απεικονιζόμενη σε μια σφαίρα Bloch.  $\theta$  είναι η γωνία με τον άξονα  $z$  και  $\varphi$  η γωνία της προβολής του  $|\psi\rangle$  στο επίπεδο  $xy$  με τον άξονα  $x$ .

Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους  $A$  σε ένα κβαντικό σύστημα που βρίσκεται στην κατάσταση  $|\psi\rangle$  εκφράζεται μέσω της δράσης του αντίστοιχου τελεστή  $A$  πάνω στο διάνυσμα της κβαντικής κατάστασης  $|\psi\rangle$ . Το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι μια από τις ιδιοτιμές του τελεστή  $A$ . Για ένα σύστημα δυο επιπέδων υπάρχουν δυο πιθανά αποτελέσματα, εφόσον ο αντίστοιχος τελεστής είναι δισδιάστατος, που αντιστοιχούν στις δυο ιδιοτιμές που αναπαρίστανται από τους πόλους της σφαίρας Bloch. Η πιθανότητα να λάβουμε αποτέλεσμα  $\lambda$  της κατάστασης  $|\psi\rangle$  δίνεται από την απόλυτη τιμή του τετραγώνου της προβολής του  $|\psi\rangle$  πάνω στο αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $|A_i\rangle$  του τελεστή μέτρησης,  $|\langle A_i|\psi\rangle|^2$ .

Εφόσον το αποτέλεσμα μιας μέτρησης ενός qubit είναι πάντα μια ιδιοτιμή ενός τελεστή, δεν μπορεί να υπάρξει πρόσβαση στην επιπλέον πληροφορία της φάσης  $\varphi$  που βρίσκεται κωδικοποιημένη στην υπέρθεση των ιδιοκαταστάσεων του qubit. Έτσι φαίνεται ότι η χρήση της κβαντομηχανικής δεν φέρει κάποιο πλεονέκτημα έναντι των κλασικών υπολογιστών. Αυτή η διχοτομία μεταξύ της μη παρατηρήσιμης γενικής κατάστασης του qubit και του ακριβούς αποτελέσματος της μέτρησης διαδραματίζει έναν ουσιαστικό ρόλο στους κβαντικούς υπολογισμούς. Για να γίνουν αντιληπτά τα πλεονεκτήματα θα πρέπει να αντιπαρατεθούν οι λειτουργίες που μπορούν να πραγματοποιήσουν κβαντικοί και κλασικοί υπολογιστές ανάλογα με τα αντίστοιχα (qu)bits.

Ένας κβαντικός υπολογισμός είναι μια ακολουθία εφαρμογών κβαντικών πυλών σε κάποιο κβαντικό καταχωρητή. Συνήθως, ένας κβαντικός υπολογισμός τερματίζεται με τη μέτρηση (παρατήρηση) κάποιου από τους κβαντικούς καταχωρητές του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα θα "καταρρεύσει" σε μια από τις βασικές του καταστάσεις [Wolf99].

Οι κβαντικές πύλες δεν είναι πύλες με την κλασική έννοια από την άποψη ότι δεν υπάρχει ροή πληροφορίας μέσα από αυτές. Αποτελούν δράσεις πάνω σε καταχωρητές που έχουν σαν αποτέλεσμα την μεταβολή της κατάστασης των καταχωρητών αυτών. Εκτός από αυτή τη θεμελιώδη διαφορά με τις κλασικές πύλες υπάρχουν και άλλοι περιορισμοί. Για παράδειγμα δεν επιτρέπεται η διακλάδωση (fan out) [Woo82].

Μια λογική πύλη σε έναν κλασσικό υπολογιστή είναι ένα φυσικό σύστημα και δίνεται από έναν πίνακα αλήθειας, καθορίζοντας για κάθε είσοδο (input) μια έξοδο (output): αν η είσοδος δίνεται από 0 ή 1 (για μια πύλη ενός bit), η έξοδος θα είναι μια μίξη αυτών των καταστάσεων με ένα αντίστοιχο στατιστικό βάρος. Υπάρχει μόνο μια μη τετριμμένη πύλη ενός bit, η πύλη NOT η οποία ανταλλάσσει τις καταστάσεις εισόδου  $0 \rightarrow 1$  και  $1 \rightarrow 0$ .

Μια κβαντική πύλη δεν αποτελεί φυσικό σύστημα αλλά είναι ένας κβαντικός ορθομοναδιαίος τελεστής  $U$  που όταν ασκηθεί σε ένα κβαντικό σύστημα (που αποτελείται από qubits και ενδεχομένως από κβαντικούς καταχωρητές) με αρχική κατάσταση  $|\psi_i\rangle$ , τη μετασχηματίζει:

$$|\psi_f\rangle = U |\psi_i\rangle \quad (3.4)$$

Οι κβαντικές πύλες, δηλαδή, είναι τελεστές του χώρου Hilbert και αυτό που κάνουν είναι να περιστρέφουν το διάνυσμα κατάστασης ενός κβαντικού συστήματος μέσα στο χώρο Hilbert. Οι κβαντικοί τελεστές περιγράφονται με τη βοήθεια πινάκων  $nn$ , όπου  $n$  είναι ο αριθμός των εισόδων και των εξόδων του τελεστή. Βασικές προϋποθέσεις για να είναι ένα τελεστής του χώρου Hilbert κβαντική πύλη, είναι να *μη μεταβάλλει το μήκος διανύσματος κατάστασης* και να τηρεί τη *χρονική συμμετρία* των κβαντικών συστημάτων [Ada05]. Ανάλογα με το είδος του qubit στο οποίο λειτουργούν, έχουμε να κάνουμε με πύλες ενός ή δύο qubits. Συνήθως οι τελεστές αναπαρίστανται ως πίνακες, όπου τα ιδιοδιανύσματα  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  αναπαρίστανται από τα διανύσματα βάσης  $[1 \ 0]^T$  και  $[0 \ 1]^T$  αντίστοιχα. Σε αυτήν την αναπαράσταση η κβαντική πύλη αντιστροφής NOT (μία είσοδος-έξοδος) περιγράφεται από τον πίνακα:

$$NOT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Το κβαντικό ανάλογό της είναι η μήτρα  $\sigma_x$  του Pauli, όπως περιγράφεται παρακάτω, και ισοδυναμεί με μια περιστροφή στη σφαίρα Bloch περί τον άξονα  $x$  κατά  $\pi$ . Απεικονίζει την κατάσταση  $|0\rangle$  στην  $|1\rangle$  και την  $|1\rangle$  στη  $|0\rangle$ .

Η κβαντική πύλη αδρανείας (μία είσοδος-έξοδος) περιγράφεται από τον πίνακα:

$$U = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Η κβαντική πύλη Walsh-Hadamard (μία είσοδος-έξοδος) είναι η πιο "διάσημη" από τις κβαντικές πύλες. Δημιουργεί ισοβαρείς επαλληλίες των βασικών καταστάσεων  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ , οι οποίες είναι



αναγκαίες για την αποτελεσματική αξιοποίηση των δυνατοτήτων ενός κβαντικού υπολογιστή. Μετασχηματίζει δηλ. τη βασική κατάσταση  $|0\rangle$  στην  $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$  και την βασική κατάσταση  $|1\rangle$  στην  $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$  και αναπαριστά μια περιστροφή στη σφαίρα Bloch περί τους άξονες  $x$  και  $z$  κατά  $\pi$ .

Περιγράφεται από τον πίνακα:

$$U = H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Η κβαντική πύλη μετατόπισης φάσης (μία είσοδος-έξοδος) αλλάζει τη γωνία φάσης  $\varphi$  ενός qubit αφήνοντας αναλλοίωτη την κατάσταση  $|0\rangle$  και απεικονίζοντας την  $|1\rangle$  στην  $e^{i\theta}|1\rangle$ , μεταβάλλοντας δηλ. τη φάση  $\varphi$  κατά  $\theta$ , και περιγράφεται από τον πίνακα:

$$U = S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Γενικότερα κάθε περιστροφή στη σφαίρα του Bloch κατά γωνία  $\theta$  περί τους άξονες  $x,y,z$  είναι

$$R_{x,y,z}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_{x,y,z}} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}\sigma_{x,y,z} \quad (3.9)$$

όπου  $\sigma_{x,y,z}$  είναι οι μήτρες του Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Προχωρώντας σε πύλες πολλαπλών bit, βλέπουμε ότι οι κλασικές πύλες πολλαπλών bit (multi-bit gates) δέχονται ως είσοδο 2 bit και δίνουν ως έξοδο 1 bit. Ένα τυπικό παράδειγμα μιας τέτοιας πύλης είναι η πύλη NAND, η οποία έχει πίνακα αλήθειας  $(00)\rightarrow 1$ ,  $(10)\rightarrow 1$ ,  $(01)\rightarrow 1$ ,  $(11)\rightarrow 0$ . Η σύνθεση διαδοχικών πυλών NAND μπορεί να καλύψει κάθε άλλη λειτουργία πάνω σε κλασικά bit [She13]. Ο πίνακας όμως της πύλης NAND δεν είναι μοναδιαίος κι έτσι η πύλη αυτή δεν μπορεί να αποτελέσει πύλη για κβαντικούς υπολογιστές. Η πιο σημαντική πύλη πολλών qubit (δύο είσοδοι-έξοδοι) είναι η πύλη CNOT (controlled NOT gate). Το πρώτο qubit είναι το qubit ελέγχου (control qubit) και το δεύτερο είναι το qubit στόχος (target qubit). Η πύλη  $U_{CNOT}$  μετασχηματίζει τη βάση των δύο qubit ως εξής :

$$\begin{aligned} U_{CNOT} |00\rangle &= |00\rangle, & U_{CNOT} |01\rangle &= |01\rangle \\ U_{CNOT} |10\rangle &= |11\rangle, & U_{CNOT} |11\rangle &= |10\rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

το οποίο σημαίνει ότι η πύλη CNOT εφαρμόζει το μετασχηματισμό NOT στο δεύτερο qubit εάν και μόνο εάν το πρώτο qubit είναι στην κατάσταση  $|1\rangle$ . Η αναπαράστασή της με τη μορφή μήτρας είναι:

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Ο πίνακας της πύλης CNOT είναι μοναδιαίος και αντιστρέπτός, σε αντίθεση με τη NAND. Αρκεί ένας μικρός μόνο αριθμός πυλών μονού qubit σε συνδυασμό με μια πύλη CNOT για να υλοποιηθεί μέσω αυτών κάθε δυνατός μοναδιαίος μετασχηματισμός επί του συνόλου των qubit του καταχωρητή, να σχηματιστεί δηλ ένα γενικευμένο σύνολο κβαντικών πυλών από το οποίο μπορεί να προκύψει οποιοδήποτε κβαντικό κύκλωμα (universality theorem) [DiV95, Bar95] !

Μια θεμελιώδης νέα δυνατότητα που παρέχει η πύλη CNOT είναι ο εναγκαλισμός καταστάσεων που ήταν μη εναγκαλισμένες πριν τη δράση της. Ένα απλό παράδειγμα παρέχεται από την αρχικώς μη εναγκαλισμένη κατάσταση

$$|\psi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|1\rangle \quad (3.13)$$

στην οποία το πρώτο qubit είναι στην κατάσταση υπέρθεσης  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  και το δεύτερο στη βασική κατάσταση  $|1\rangle$ . Δρώντας με τη CNOT πάνω στην (3.13) παίρνουμε

$$CNOT|\psi\rangle = \alpha|0\rangle|1\rangle + \beta|1\rangle|0\rangle \quad (3.14)$$

που είναι μια εναγκαλισμένη κατάσταση, αφού δεν μπορεί πλέον να γραφεί ως γινόμενο καταστάσεων δυο qubit αλλά μόνο ως γραμμικός συνδυασμός τέτοιων γινομένων.

Ένα δεύτερο παράδειγμα πύλης που δρα πάνω σε δυο qubit και βρίσκει ευρεία εφαρμογή στις λειτουργίες κβαντικών υπολογιστών είναι η πύλη SWAP, η οποία αντιμεταθέτει τα δυο qubit και αναπαρίσταται από τον πίνακα:

$$SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Η διαφορά κλασικών bit και qubit είναι ακόμα πιο ισχυρή: σύμφωνα με το *θεώρημα της μη κλωνοποίησης* (no cloning theorem), δεν μπορεί να υπάρξει πύλη που να δρα ως κβαντικός αντιγραφέας [Woo82]. Δεν υπάρχει δηλ μια κβαντική πύλη που να εκτελεί εργασία ανάλογη με την αντιγραφή αρχείων σε έναν κλασικό υπολογιστή. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει τελεστής  $U_c$  τέτοιος ώστε

$$U_c |\Phi, \Omega\rangle = |\Phi, \Phi\rangle$$

να εκτυπώνει δηλ. την κατάσταση του qubit ελέγχου  $\Phi$  στο qubit στόχο  $\Omega$ . Εάν αυτό συνέβαινε, τότε η παραπάνω σχέση θα έπρεπε να ισχύει για κάθε κατάσταση και άρα και για την

κατάσταση  $|\Psi\rangle$ ,  $U_c|\Psi, \Omega\rangle = |\Psi, \Psi\rangle$ . Το εσωτερικό γινόμενο των δυανυσμάτων πριν το μετασχηματισμό

$$\langle \Phi, \Omega | U_c^\dagger U_c | \Psi, \Omega \rangle = \langle \Phi, \Omega | \Psi, \Omega \rangle$$

πρέπει να ισούται με το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο μετά το μετασχηματισμό

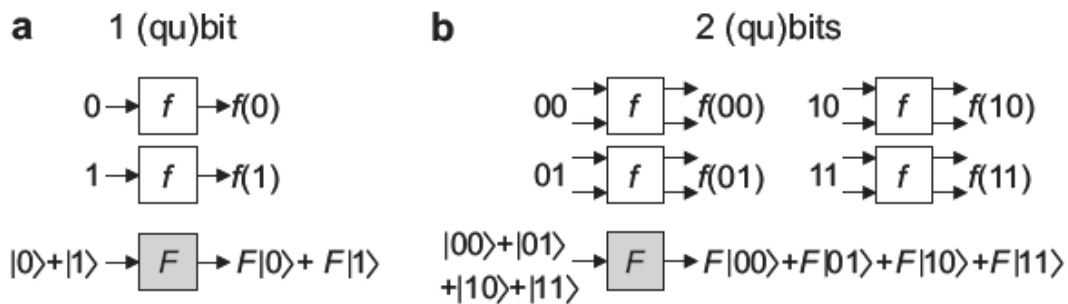
$$\langle \Phi, \Phi | \Psi, \Psi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle^2$$

αφού μοναδιαίοι τελεστές διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο. Έτσι πρέπει  $\langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle^2$ , το οποίο αληθεύει μόνο για  $\langle \Phi | \Psi \rangle = \{0, 1\}$ , δηλ για ορθογώνιες ή παράλληλες καταστάσεις, πράγμα το οποίο πληρούν οι δυο καταστάσεις 0 και 1 των κλασικών bit: το κλασικό bit δηλ είναι μια ειδική περίπτωση του qubit.

Θα πρέπει ωστόσο να διευκρινιστεί ότι το θεώρημα μη αντιγραφής αφορά qubit που βρίσκονται σε κάποια άγνωστη κατάσταση, κι εκεί στηρίζεται η βάση της κβαντικής κρυπτογραφίας. Εάν το qubit βρίσκεται σε μια από τις βασικές καταστάσεις  $|0\rangle$  ή  $|1\rangle$  τότε η αντιγραφή είναι δυνατή.

Η πιο σημαντική ίσως ιδιότητα των κβαντικών υπολογισμών είναι ο **κβαντικός παραλληλισμός**. Σε ένα κλασικό υπολογιστικό σύστημα, ένα bit μπορεί να εμπεριέχει ένα μόνο δυαδικό κομμάτι πληροφορίας. Έτσι ένα καταχωρητής N bit μπορεί να αποθηκεύσει ένα μόνο αριθμό από ένα πλήθος  $2^N$  δυαδικών αριθμών, αποτελούμενων από N ψηφία ο καθένας, σε μια χρονική στιγμή. Αντίθετα η κβαντική κατάσταση υπέρθεσης επιτρέπει την ταυτόχρονη καταχώρηση των καταστάσεων 0 και 1. Ένας κβαντικός καταχωρητής από N qubit δηλ. μπορεί να περιγραφεί ως  $|\psi\rangle = |\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\rangle$  και να αποθηκεύσει  $2^N$  μιγαδικά μέτρα ταυτόχρονα! Για N=500 qubit μπορούν να καταχωρηθούν  $2^{500}$  αριθμοί ταυτόχρονα, αριθμός μεγαλύτερος από τον αριθμό των ατόμων στο σύμπαν! Αυτή είναι μια τεράστια ποσότητα πληροφορίας που είναι αδύνατο να αποθηκευτεί σε ένα κλασικό υπολογιστικό σύστημα. Το γεγονός αυτό δείχνει και την δύναμη των κβαντικών υπολογιστών. Επιπλέον ο κβαντικός παραλληλισμός είναι ένα έμφυτο χαρακτηριστικό του κβαντικού συστήματος κι επομένως δε χρειάζεται ειδική τεχνολογία για την εφαρμογή του.

Μια απλοποιημένη εικόνα της διαφοράς αυτής μεταξύ κλασικών και κβαντικών υπολογιστών παρουσιάζεται στην Εικ. 3.2. Μια διάταξη κλασικού υπολογιστή ενός bit δέχεται μια τιμή για είσοδο, την 0 ή 1, και υπολογίζει την αντίστοιχη τιμή εξόδου, την  $f(0)$  ή  $f(1)$ . Ένας κβαντικός υπολογιστής ενός qubit μπορεί να δεχτεί ως τιμή εισόδου μια υπέρθεση των  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ , και λόγω γραμμικότητας η έξοδος θα είναι μια υπέρθεση των  $F(0)$  και  $F(1)$ . Έτσι, κατά μια έννοια, ο κβαντικός υπολογιστής θα έχει εκτελέσει δυο υπολογισμούς σε ένα βήμα. Η υπεροχή του κβαντικού συστήματος γίνεται ακόμα πιο σημαντική για ένα σύστημα δυο qubit. Η



**Εικ. 3.2.** Η διαφορά μεταξύ κλασικών και κβαντικών υπολογιστών. α) Για να καθορίσει την συνάρτηση  $f$  για τις δυο πιθανές καταστάσεις εισόδου 0 και 1, ο κλασικός υπολογιστής ενός bit πρέπει να αξιολογήσει τη συνάρτηση δυο φορές, μια για κάθε είσοδο. Σε αντίθεση, ένας κβαντικός υπολογιστής ενός qubit μπορεί να δεχτεί την υπέρθεση των  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  ως είσοδο και να καταλήξει στην υπέρθεση των  $F|0\rangle$  και  $F|1\rangle$  ως έξοδο, πραγματοποιώντας τα μισά βήματα από το κλασικό αντίστοιχό του. β) Ομοίως, ένας κβαντικός υπολογιστής δυο qubit χρειάζεται μόνο το  $\frac{1}{4}$  του αριθμού των βημάτων που χρειάζονται κλασικά. Η υπολογιστική ισχύς ενός κβαντικού υπολογιστή αυξάνεται εκθετικά με τον αριθμό των qubit, ενώ για έναν κλασικό υπολογιστή αυξάνεται γραμμικά.

είσοδος μπορεί να είναι μια υπέρθεση τεσσάρων καταστάσεων κι έτσι ο κβαντικός υπολογιστής μπορεί να εκτελέσει τέσσερις υπολογισμούς σε ένα βήμα. Μπορεί να αποδειχτεί ότι η υπολογιστική ισχύς ενός κβαντικού υπολογιστή αυξάνεται εκθετικά με τον αριθμό των qubit, ενώ για έναν κλασικό υπολογιστή η σχέση αυτή είναι γραμμική [Deu85].

Αν σε έναν κβαντικό καταχωρητή από  $N$  qubit, που μπορεί δηλ να αποθηκεύσει  $2^N$  καταστάσεις, προστεθεί ένα ακόμη qubit, τότε ο κβαντικός καταχωρητής μπορεί να αποθηκεύσει τις διπλάσιες καταστάσεις, δηλ  $2^{N+1} = 2 \cdot 2^N$ . Για να συμβαδίζουν λοιπόν οι κβαντικοί υπολογιστές με το «νόμο του Moore» (κάθε 18-24 μήνες διπλασιάζεται η μνήμη και η ισχύς των υπολογιστών) [Moore65] πρέπει απλά να αυξάνουν κατά 1 qubit κάθε 2 χρόνια! [Nie00]

Γίνεται έτσι αντιληπτό ότι τα κλασικά και τα κβαντικά υπολογιστικά συστήματα έχουν εντελώς διαφορετικά χαρακτηριστικά. Τίθεται όμως το ερώτημα εάν είναι δυνατή η εκμετάλλευση των νέων αυτών χαρακτηριστικών των κβαντικών συστημάτων ώστε να επιταχυνθούν οι υπολογισμοί που πραγματοποιεί το σύστημα. Η επιτάχυνση στους υπολογισμούς έχει την έννοια του να λαμβάνει χώρα μικρότερος αριθμός λειτουργιών. Πράγματι υπάρχουν κάποια γνωστά παραδείγματα προβλημάτων όπου η λειτουργία ενός κβαντικού υπολογιστή ξεπερνά κατά πολύ τη λειτουργία ενός κλασικού υπολογιστή. Αυτά τα προβλήματα ανήκουν στην κλάση NP-complete προβλημάτων, δηλ προβλημάτων των οποίων ο χρόνος επίλυσης αυξάνεται υπέρ-πολυωνυμικά καθώς αυξάνεται το μέγεθος του προβλήματος (πχ. εκθετικά όταν ο αριθμός των βημάτων επίλυσης αυξάνεται  $\sim e^N$  με τον αριθμό των ψηφίων  $N$ ). Έτσι τα βήματα για την εύρεση λύσης αυξάνονται τόσο ραγδαία με την αύξηση των παραμέτρων  $N$  του προβλήματος, ώστε το πρόβλημα είναι αδύνατο να λυθεί σε πραγματικό χρόνο. Για κάποια από αυτά τα προβλήματα υπάρχουν κβαντικοί αλγόριθμοι οι οποίοι χρησιμοποιούν

πολύ λιγότερα βήματα επίλυσης, επιταχύνοντας έτσι τους υπολογισμούς σε σύγκριση με τους κλασικούς υπολογιστές.

Το πιο απλό παράδειγμα ενός τέτοιου αλγόριθμου είναι ο αλγόριθμος Deutsch-Jozsa [Deu85, Deu92], ο οποίος χρησιμοποιεί τη φάση του διανύσματος κατάστασης κατά τον υπολογισμό και τη μετατρέπει σε μετρήσιμη έξοδο, δίνοντας έτσι λύση με υπολογιστική εργασία πολύ μικρότερου όγκου. Ο αλγόριθμος αυτός ανήκει σε μια ευρύτερη κατηγορία προβλημάτων που αφορούν το λεγόμενο κβαντικό μετασχηματισμό Fourier [Joz97]. Ο πιο χαρακτηριστικός από αυτούς τους αλγόριθμους είναι ο αλγόριθμος του Shor [Sho94, Sho97], ο οποίος μπορεί να παραγοντοποιήσει ακέραιους  $N$  (δυαδικών) ψηφίων με πολυπλοκότητα τάξης  $O(N^2 \log N \log \log N) \sim O(\log N)^3$ . Ο καλύτερος γνωστός κλασικός αναλυτικός αλγόριθμος είναι αργότερος κατά έναν παράγοντα ανάλογο του  $\sim e^N$ . Αυτό αποτελεί μια πιθανή απειλή για το πιο ευρέως χρησιμοποιημένο σύστημα κρυπτογράφησης, το σύστημα RSA. Σύμφωνα με το σύστημα RSA το γεγονός ότι είναι πολύ πιο εύκολο να πολλαπλασιάσει κανείς δυο αριθμούς από ότι να βρει τους δυο πρώτους παράγοντες του γινομένου τους, χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί ένα σχετικά ασφαλές κλειδί κρυπτογράφησης. Χρησιμοποιώντας όμως τον αλγόριθμο του Shor ο χρόνος που χρειάζεται για να υπολογιστούν οι παράγοντες μειώνεται εκθετικά.

Ένας άλλος διαδεδομένος αλγόριθμος είναι ο αλγόριθμος του Grover [Gro97], ο οποίος μπορεί να εντοπίσει ένα συγκεκριμένο στοιχείο σε ένα χώρο  $N=2^n$  στοιχείων σε χρόνο  $O(\sqrt{N})$ , αντί του χρόνου  $O(N)$  που χρειάζεται ένας κλασικός αλγόριθμος.

Μια άλλη κατηγορία προβλημάτων που μπορούν να αντιμετωπίσουν οι κβαντικοί υπολογιστές, σε αντίθεση με του κλασικούς υπολογιστές, είναι η προσομοίωση κβαντικών συστημάτων [Fey82]. Για το λόγο για τον οποίο οι κλασικοί υπολογιστές δεν μπορούν να προσομοιώσουν αποδοτικά κβαντικούς υπολογιστές, για τον ίδιο λόγο δεν μπορούν να προσομοιώσουν ικανοποιητικά κβαντικά συστήματα: απαιτούνται  $c^N$  κλασικά bit για να περιγραφεί ένα κβαντικό σύστημα που αποτελείται από  $N$  στοιχεία (η σταθερά  $c$  εξαρτάται από τις λεπτομέρειες των στοιχείων του συστήματος), ενώ για ένα κβαντικό υπολογιστή αρκούν  $cN$  qubit. Αν και όμως σε έναν κλασικό σύστημα όλη η 'κρυμμένη' πληροφορία είναι προσβάσιμη κάθε χρονική στιγμή, στις κβαντικές προσομοιώσεις πρέπει να βρεθεί τρόπος να μετρηθεί η πληροφορία στο τέλος του υπολογισμού.

Ένα θεμελιώδες πρόβλημα για την κατασκευή κβαντικών υπολογιστών είναι η ανάγκη για απομόνωση της κβαντικής κατάστασης. Οποιαδήποτε αλληλεπίδραση σωματιδίων με το περιβάλλον διαταράσσει την κβαντική τους κατάσταση και άρει τη συνέπειά της (decoherence) ή μπορεί να τη μετασχηματίσει με τρόπο μη ορθομοναδιαίο. Αυτά τα σφάλματα διαδίδονται, και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα η κατάσταση του υπολογιστή θα αποκλίνει αρκετά από την αναμενόμενη. Θα ήταν έτσι απαγορευμένοι μακροσκελείς υπολογισμοί, καθιστώντας αδύνατο για ένα κβαντικό υπολογιστή να χρησιμοποιήσει την εκθετικά αυξανόμενη ισχύ του για μη τετριμμένες εργασίες. Παρόλα αυτά, έχει αποδειχτεί ότι χρησιμοποιώντας αλγόριθμους

διόρθωσης λαθών μπορεί να εξαλειφθεί το πρόβλημα αυτό σε μεγάλο βαθμό [Sho96, Ste96]. Αυτές οι μέθοδοι είναι αποτελεσματικές μόνο εάν ο ρυθμός σφαλμάτων είναι σχετικά μικρός, αλλιώς οι πράξεις διόρθωσης δημιουργούν περισσότερα σφάλματα από όσα απαλήφουν. Αυτό αποτελεί το λεγόμενο “κατώφλι ακριβείας”, το οποίο εκτιμάται ότι είναι  $\sim 10^{-4}$  [Kit97, Aha99]. Εάν το σφάλμα ανά κβαντική πράξη είναι μικρότερο από αυτό το κατώφλι, τότε κάθε όλα τα σφάλματα μπορούν να διορθωθούν και κάθε αυθαίρετα μακροσκελής υπολογισμός είναι εφικτός.

Σε γενικές γραμμές η κβαντική διόρθωση λαθών μοιάζει με τη κλασική από την άποψη ότι χρησιμοποιούνται πλεονάζοντα bit για την ανίχνευση και διόρθωση λαθών. Βέβαια, η κβαντική διόρθωση λαθών είναι αρκετά πιο πολύπλοκη αφού έχουμε να κάνουμε με κβαντικές καταστάσεις και όχι δυαδικά δεδομένα. Στην περίπτωση των κβαντικών αλγόριθμων διόρθωσης λαθών θα πρέπει να ανακατασκευαστεί η κβαντική κατάσταση λαμβάνοντας υπόψη την αδυναμία αντιγραφής καταστάσεων, κάτι που καθιστά το εγχείρημα πολύ δύσκολο με μια πρώτη ματιά. Αν το εξετάσει κανείς πιο βαθιά θα ανακαλύψει αρκετές ομοιότητες με τα συμβατικά μοντέλα.

Ας υποθέσουμε ότι τα λάθη προέρχονται από την αλληλεπίδραση μέρους του συνόλου των qubit με το περιβάλλον. Τα πιθανά λάθη θεωρούνται ότι μπορεί να είναι γραμμικοί συνδυασμοί καθόλου λαθών (μετασχηματισμός  $I$ ), λάθη αντιστροφής qubit (μετασχηματισμός  $X$ ), λάθη αλλαγής φάσης (μετασχηματισμός  $Z$ ) και ο συνδυασμός των δύο τελευταίων (μετασχηματισμός  $Y$ ). Συνεπώς ένα γενικό σφάλμα ενός qubit αναπαρίσταται σαν ένας μετασχηματισμός  $e_1I + e_2X + e_3Y + e_4Z$ . Έτσι για μια κατάσταση  $|\psi\rangle$  έχουμε:  $|\psi\rangle \Rightarrow (e_1I + e_2X + e_3Y + e_4Z)|\psi\rangle = \sum e_i E_i |\psi\rangle$ . Στη γενική περίπτωση των κβαντικών καταχωρητών τα πιθανά σφάλματα εκφράζονται σαν γραμμικοί συνδυασμοί ορθομοναδιαίων τελεστών σφάλματος  $E_i$ . Τα σφάλματα μπορεί να είναι απλοί συνδυασμοί σφαλμάτων ενός qubit, όπως τανυστικά γινόμενα μετασχηματισμών ενός qubit  $I, X, Y, Z$  ή πιο σύνθετοι μετασχηματισμοί πολλών qubits. Σε κάθε περίπτωση, ένα σφάλμα μπορεί να αναπαρασταθεί σαν  $\sum e_i E_i$ , όπου  $E_i$  είναι τελεστής σφάλματος και  $e_i$  κάποιος συντελεστής.

Αναλυτικά παραδείγματα κβαντικών υπολογισμών παρατίθενται στο βιβλίο των Nielsen & Chuang [Nie00].

## 3.2. Κβαντικός Εναγκαλισμός

Το πιο αξιοσημείωτο ίσως χαρακτηριστικό της κβαντομηχανικής είναι ο εναγκαλισμός (entanglement). Το φαινόμενο του κβαντικού εναγκαλισμού μπορεί να εμφανιστεί σε ένα σύστημα που αποτελείται από περισσότερα από ένα qubit και σύμφωνα με αυτόν οι κβαντικές

καταστάσεις των qubit συνδέονται μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε είναι πλέον αδύνατο να περιγραφεί το ένα qubit χωρίς να λάβουμε υπόψη τα υπόλοιπα εναγκαλισμένα qubit, ανεξάρτητα από την απόσταση που μπορεί να τα χωρίζει.

Ο κβαντικός εναγκαλισμός έχει τις ρίζες του σε ένα άρθρο των Albert Einstein, Boris Podolsky και Nathan Rosen (EPR), που δημοσιεύτηκε το 1935 [Ein35], το διάσημο παράδοξο EPR. Στόχος του άρθρου ήταν να αποδειχθεί ότι η κβαντομηχανική δεν ήταν μια πλήρης φυσική θεωρία, αλλά από την περιγραφή που προσφέρει για τη φύση λείπουν κάποιες παράμετροι που ονομάστηκαν “λανθάνουσες” ή “κρυφές παράμετροι”: ή η κβαντομηχανική δεν είναι πλήρης (υπάρχουν οι κρυφές παράμετροι που βρίσκονται εκτός της κβαντομηχανικής θεωρίας), είτε πρέπει να απορρηφθεί η αρχή της τοπικότητας (locality – μια πράξη μπορεί να έχει επιδράσεις μόνο στο κοντινό περιβάλλον και στα πλαίσια της γενικής σχετικότητας, καμίας δράση δεν μπορεί να μεταφερθεί ταχύτερα από το φως) και της πραγματικότητας (μια μετρούμενη ποσότητα έχει μια συγκεκριμένη τιμή ανεξάρτητα από τη μέτρηση), που μαζί συνιστούν την τοπική πραγματικότητα (local reality).

Στο άρθρο τους επινόησαν ένα θεωρητικό πείραμα κατά το οποίο δυο κβαντικά συστήματα αφού αλληλεπιδράσουν, απομακρύνονται το ένα από το άλλο. Έστω πχ. μια πηγή που εκπέμπει ηλεκτρόνια σε κατάσταση υπέρθεσης, το γνωστό ζεύγος-Bell ή ζεύγος-EPR

$$|\psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (3.16)$$

όπου το  $|0\rangle$  αντιστοιχεί στην κατάσταση με σπιν κάτω και το  $|1\rangle$  στην κατάσταση με σπιν άνω. Έστω ότι η Άλις παίρνει το ένα ηλεκτρόνιο και ο Μπομπ το άλλο και απομακρύνονται μεταξύ τους. Εάν πχ. η Άλις προσπαθήσει να μετρήσει το ηλεκτρόνιό της σε κάποιον άξονα, έστω τον z, και το αποτέλεσμα έστω ότι είναι το  $|0\rangle$ , τότε το ηλεκτρόνιο του Μπομπ κατά τον ίδιο άξονα z θα είναι στην κατάσταση  $|1\rangle$ , αλλά κατά μήκος κάποιου άλλου ορθογώνιου άξονα θα είναι σε μια τυχαία κατάσταση. Φαίνεται ότι το δεύτερο ηλεκτρόνιο ‘γνωρίζει’ σε ποιον άξονα πρέπει να είναι ευθυγραμμισμένο καθώς και σε ποια κατάσταση οφείλει να είναι! Ο εναγκαλισμός δηλ. στον οποία βρίσκονται τα δύο συστήματα ορίζει ότι βρίσκονται συνδεδεμένα μεταξύ τους με έναν άγνωστο, μη κλασικό τρόπο. Σαν αποτέλεσμα, η μέτρηση μιας φυσικής ποσότητας του ενός καθορίζει το αποτέλεσμα της μέτρησης της ίδιας ποσότητας του άλλου. Άρα θα πρέπει να υπάρχουν κάποιες ‘κρυφές παράμετροι’ εκτός της σκοπιάς της κβαντομηχανικής θεωρίας που καθορίζουν πότε και σε ποια κατάσταση βρίσκεται το σύστημα, ή θα πρέπει να καταρριφθεί η τοπική πραγματικότητα. Ο Αϊνστάιν ήταν ένθερμος υποστηρικτής του πρώτου ενδεχόμενου.

Ο εναγκαλισμός δεν προσέκλυσε ιδιαίτερο επιστημονικό ενδιαφέρον στα ακόλουθα χρόνια. Αντιμετωπιζόταν ως ένα περίεργο κβαντικό φαινόμενο που δεν μπορούσε να μελετηθεί πειραματικά και η επιστημονική κοινότητα συγκέντρωσε το ενδιαφέρον της στην επιτυχία της κβαντομηχανικής να περιγράψει μια υπερμεγέθη έκταση επιδράσεων σε πολύ μικρή κλίμακα. Η αλλαγή επήλθε το 1964, όταν ο Bell [Bel64] επιγχείρησε να κατασκευάσει ένα ποσοτικοποιημένο τεστ για την ύπαρξη του εναγκαλισμού, γνωστό ως ανισότητες Bell. Εξήγαγε

ένα σετ ανισοτήτων για συσχετισμένα αποτελέσματα μετρήσεων, οι οποίες έχουν μη συμβατά αποτελέσματα για οποιαδήποτε θεωρία υπακούει στην ύπαρξη κρυφών παραμέτρων και στην τοπική πραγματικότητα. Εφόσον αυτοί οι συσχετισμοί αντιστοιχούν σε παρατηρήσιμα μεγέθη, υπήρχε πια η πρόταση για πειραματικό διαχωρισμό των δυο αυτών περιπτώσεων. Πράγματι υλοποιήθηκαν πειράματα μέτρησης των συσχετισμών της πόλωσης φωτονίων [Asp81, Fre72]] όπου υπερίσχυσε η κβαντομηχανική θεωρία.

Τη δεκαετία του '90 ο εναγκαλισμός άρχισε να ελκύει όλο και περισσότερο το επιστημονικό ενδιαφέρον, την ίδια χρονική περίοδο που στράφηκε το ενδιαφέρον και στους κβαντικούς υπολογιστές. Τότε κατασκευάστηκε και ο μαθηματικός ορισμός που χρησιμοποιείται και σήμερα [Wer89]:

**Ορισμός 1:**  $N$  συστήματα είναι εναγκαλισμένα όταν η συνολική κατάσταση  $\rho$  δεν μπορεί να γραφεί ως συνδυασμός τανυστικών γινομένων των καταστάσεων που την απαρτίζουν:

$$\rho \neq \sum_i p_i \rho_1^i \otimes \dots \otimes \rho_N^i \quad (3.17)$$

όπου  $\rho_n$  είναι μια κατάσταση του  $n$ -οστού qubit.

Στην κλασική μηχανική η συνολική κατάσταση ενός σύνθετου συστήματος είναι το καρτεσιανό γινόμενο των επί μέρους  $N$  υποσυστημάτων. Έτσι η συνολική κατάσταση είναι πάντα το γινόμενο καταστάσεων των  $N$  υποσυστημάτων. Στην κβαντομηχανική όμως, ο σύνθετος χώρος Hilbert  $H$  είναι το τανυστικό γινόμενο των χώρων Hilbert  $H_k$  των  $N$  υποσυστημάτων:  $H = \otimes_{k=1}^N H_k$ . Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, στη σύνθεση μιας κατάστασης  $|\psi\rangle = \sum_j c_j |B^{(j)}\rangle$  μπορούν να συνεισφέρουν πολλές καταστάσεις  $|B^{(j)}\rangle = |B_1^{(j)}\rangle \otimes \dots \otimes |B_N^{(j)}\rangle$  (όπου  $|B_k\rangle$  είναι μια βασική κατάσταση του  $k$ -οστού qubit κι επομένως  $|B^{(j)}\rangle$  είναι μια βασική κατάσταση των  $N$  qubit). Κάθε  $|\psi^{(j)}\rangle$  είναι γινόμενο καταστάσεων, αλλά η συνολική κατάσταση  $|\psi\rangle$  δεν είναι απαραίτητο να αποτελείται από γινόμενο καταστάσεων. Ένα απλό παράδειγμα αποτελεί το ζεύγος-Bell της σχέσης (3.16):

$$|\psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

το οποίο αποτελείται από τη σύνθεση δυο καταστάσεων, των  $|\psi^{(1)}\rangle = |01\rangle$  και  $|\psi^{(2)}\rangle = |10\rangle$  (που παράγονται από γινόμενα των βασικών καταστάσεων  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$ ), με συντελεστές  $\pm 1/\sqrt{2}$ , ενώ η κατάσταση  $|\psi_{-}\rangle$  του ζεύγους δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο των επί



μέρους καταστάσεων που τη συνθέτουν. Γίνεται λοιπόν αντιληπτό πως η κβαντομηχανική προσφέρει έναν πολύ μεγαλύτερο χώρο καταστάσεων από την κλασική μηχανική.

Το ενδιαφέρον από τη σκοπιά της φυσικής αλλά και των (κβαντικών) υπολογιστών για τον εναγκαλισμό είχε ως αποτέλεσμα την έναρξη εντατικοποιημένης έρευνας, η οποία απέδωσε μια σειρά αποτελεσμάτων τις τελευταίες δυο δεκαετίες. Μια ερευνητική κατεύθυνση αποτέλεσε η προσπάθεια να επεκταθεί το παράδοξο EPR και το ζεύγος EPR σε τρία σωματίδια [Gre90]. Ενώ για δυο qubit έπρεπε να μετρηθούν διάφορα συστήματα και οι συσχετισμοί των στατιστικών δεδομένων μπορούσαν να εξηγηθούν μόνο στα πλαίσια της κβαντομηχανικής θεωρίας (χωρίς τη χρήση των κρυφών παραμέτρων), για τρία ή περισσότερα σωματίδια αυτή η αντίφαση μπορεί να εκμαιευτεί από μόνο ένα αντίγραφο του συστήματος. Τα πειράματα και πάλι συμφωνούσαν με τη κβαντομηχανική θεωρία. Η επέκταση στον πολλαπλό εναγκαλισμό (multipartite entanglement) – εναγκαλισμός μεταξύ περισσότερων των δυο κβαντικών συστημάτων – δημιούργησε επιπλέον ερωτήματα: για τρεις καταστάσεις υπάρχουν ήδη δυο διακριτές κλάσεις εναγκαλισμού, όπου η κλάση ορίζεται από την ισοδύναμη σχέση που συνδέει δυο συστήματα και μπορεί να τα μετασχηματίσει από το ένα στο άλλο χρησιμοποιώντας μόνο τοπικές κβαντικές πράξεις και κλασική ‘επικοινωνία’ μεταξύ των υποσυστημάτων. Έτσι δεν αρκεί πια να είναι γνωστό εάν μια κατάσταση είναι εναγκαλισμένη, αλλά ο εναγκαλισμός θα πρέπει να χαρακτηριστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια. Ο αριθμός των κλάσεων αυξάνεται με τον αριθμό των υποσυστημάτων που προστίθενται. Επιπλέον φαίνεται να είναι αρκετά δύσκολο να ποσοτικοποιηθεί ο εναγκαλισμός των καταστάσεων πολλών σωματιδίων: οι καταστάσεις Bell είναι οι πιο εναγκαλισμένες διμερείς καταστάσεις, και ο εναγκαλισμός άλλων διμερών καταστάσεων μπορεί να συσχετιστεί με τον εναγκαλισμό των ζευγών Bell. Για πολυμερή εναγκαλισμό όμως υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις ποσοτικοποίησής του, μέσω των ποσοτικών μέτρων εναγκαλισμού. Επίσης δεν υπάρχει η έννοια του ποια κλάση δίνει τον υψηλότερο εναγκαλισμό [Pie07]. Πειραματικά είναι δύσκολο να αποφανθεί κανείς για το αν κάποια κατάσταση είναι εναγκαλισμένη ή όχι, αφού ο αριθμός των μετρήσεων για μια κατάσταση αυξάνεται εκθετικά με το μέγεθος του συστήματος. Έτσι υπάρχει ακόμα μεγάλος δρόμος έρευνας για την πειραματική παρατήρηση του εναγκαλισμού [Guh09].

Ο εναγκαλισμός είναι ευρέως διαδεδομένος στους κβαντικούς υπολογισμούς. Αν και δεν είναι αποδεδειγμένο ότι χρειάζεται, είναι γενικά αποδεκτό ότι αποτελεί απαραίτητο ‘συστατικό’ των κβαντικών υπολογισμών. Μια πρώτη εφαρμογή του εναγκαλισμού είναι στην κβαντική κρυπτογραφία, όπου συνιστά έναν τρόπο για να διαμοιραστεί ένα ασφαλές κρυπτογραφικό κλειδί (πρωτόκολλο E91) [Eke91]: διανέμοντας τα σωματίδια μερικών ζευγών Bell σε δυο μέρη, πχ. στην Άλις και στον Μπομπ. Και οι δυο μπορούν να εκτελέσουν μετρήσεις στα σωματίδιά τους σε τρεις προσυμφωνημένες βάσεις. Η επικοινωνία μέσω συμβατικού καναλιού τους επιτρέπει να πουν ως προς ποια βάση πραγματοποίησαν τη μέτρηση κι έτσι τα qubit που μετρήθηκαν μπορούν να χωριστούν σε δυο ομάδες: σε αυτά που μετρήθηκαν στην ίδια βάση και σε αυτά που μετρήθηκαν σε διαφορετικές βάσεις. Το επόμενο βήμα η γνωστοποίηση (μέσω του

συμβατικού καναλιού) των αποτελεσμάτων των qubit που μετρήθηκαν σε διαφορετικές βάσεις και από τους δυο καθώς και η εφαρμογή μιας ανισότητας Bell σε αυτά. Το αποτέλεσμα, όπως προβλέπεται από τη κβαντομηχανική, θα αποδεικνύει ότι δεν υπήρξε υποκλοπή από κάποιον που μέτρησε κάποια qubit, γιατί τότε θα καταστρέφονταν οι συσχετισμοί από την προβολή των qubit στην ιδιοκατάσταση της δικής του μέτρησης. Τα qubit που μετρήθηκαν στην ίδια βάση είναι τέλεια συσχετισμένα (συμπληρωματικά) και μπορούν να αποτελέσουν το κρυπτογραφικό κλειδί.

Μια άλλη ιδέα εφαρμογής του εναγκαλισμού είναι η τηλεμεταφορά [Ben93]: ο εναγκαλισμός καθιστά δυνατή τη μεταφορά της κατάστασης ενός qubit σε κάποιο άλλο qubit που πιθανώς να είναι αρκετά απομακρυσμένο, υπό το κόστος του ότι η κατάσταση του αρχικού qubit μετρήθηκε και άρα προβλήθηκε σε μια ιδιοκατάσταση.

Η τεχνική της πυκνής κωδικοποίησης (Dense Coding) χρησιμοποιεί ένα qubit σε συνδυασμό με ένα ζεύγος σε εναγκαλισμό (EPR pair) για να κωδικοποιήσει και να μεταδώσει 2 κλασικά bits. Εφόσον το εναγκαλισμένο ζεύγος, έστω  $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ , μπορεί να διαμοιραστεί εκ των προτέρων, στην ουσία πραγματοποιείται η μετάδοση ενός μόνο qubit για να μεταδοθεί πληροφορία 2 κλασικών bits. Το αποτέλεσμα αυτό είναι θεαματικό αφού όπως έχουμε δει μετά τη μέτρηση ένα qubit περιέχει πληροφορία ενός μόνο bit.

Στην παράγραφο αυτή πραγματοποιήθηκε μια σύντομη σύνοψη του φαινομένου του εναγκαλισμού. Η έρευνα στο αντικείμενο αυτό είναι εξαιρετικά ενεργή και πολύ στενά συνδεδεμένη με τους κβαντικούς υπολογιστές, αφού ο εναγκαλισμός αποτελεί έναν φυσικό πόρο, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτελεστούν κβαντικοί υπολογισμοί και να αναπτυχθούν κβαντικοί αλγόριθμοι. Μια πρόσφατη εκτεταμένη επισκόπηση δίνεται στην αναφορά [Hor09].

### **3.3. Κβαντική Συνέπεια**

Στόχος της φυσικής είναι να προβλέψει ποσοτικοποιημένα τη μελλοντική κατάσταση της 'φύσης'. Καθώς όμως αυτός ο στόχος είναι πολύ πολύπλοκο να μελετηθεί, η συνήθης προσέγγιση ενός φυσικού προβλήματος συνίσταται στη θεώρηση ενός μικρού μονωμένου υποσυστήματος – στην περίπτωσή μας ενός qubit. Αλλά πόσο ακριβής θα μπορούσε να είναι μια τέτοια προσέγγιση; Η αποσυνέπεια (decoherence) είναι ο όρος που περιλαμβάνει όλες τις μη ελεγχόμενες αλληλεπιδράσεις που επηρεάζουν την εξέλιξη του μικρού αυτού υποσυστήματος. Για το μαθηματικό φορμαλισμό αυτής της έκφρασης, θα πρέπει ο συνολικός χώρος Hilbert  $H_U$  του σύμπαντος να διαχωριστεί σε υποχώρους:

$$H_U = H_Q \otimes H_C \otimes H_E \quad (3.18)$$

Οι υποχώροι αφορούν στο qubit Q που θα περιγραφεί, στον έλεγχο C (που μπορούμε να διαχειριστούμε εάν χρειαστεί) και το περιβάλλον E που εμπεριέχει 'οτιδήποτε άλλο'. Αν και το qubit και ο έλεγχος είναι καλά καθορισμένα μέρη, η περιγραφή του περιβάλλοντος ως 'οτιδήποτε άλλο' προδίδει τη δυσκολία στην ποσοτικοποίηση της επίδρασης ενός (πολύ μικρού) άγνωστου συστήματος. Αυτή η ιδέα ενός τέλεια μονωμένου συστήματος μπορεί να επιτευχθεί αρκετά ικανοποιητικά στα πλαίσια της κλασικής φυσικής, όχι όμως της κβαντομηχανικής.

Αρχικά, έστω το υποσύστημα  $H_Q \otimes H_C$ , όπου τώρα το  $H_C$  αντιστοιχεί στη διάταξη της μέτρησης: η μακροσκοπική Χαμιλτονιανή της μέτρησης θα πρέπει να είναι δυο διαστάσεων, αφού ο μηχανισμός μέτρησης έχει δυο ιδιοκαταστάσεις  $|0\rangle_C$  και  $|1\rangle_C$ , και η μέτρηση θα πρέπει να αναπτύξει μια γενική κατάσταση της διάταξης πριν τη μέτρηση σε πλήρη συσχετισμό με την κατάσταση του qubit, δηλ. σε μια από τις δύο καταστάσεις  $|0\rangle_Q \otimes |0\rangle_C$  και  $|1\rangle_Q \otimes |1\rangle_C$  μετά τη μέτρηση (όπου  $|\psi\rangle_Q \in H_Q$  είναι μια κατάσταση του qubit). Έστω τώρα μια γενική αρχική κατάσταση  $|\psi_i\rangle_{Q \otimes C}$  με το qubit σε υπέρθεση,  $|\psi_i\rangle_Q = \alpha|0\rangle_Q + \beta|1\rangle_Q$ , και κάποια τυχαία κατάσταση της διάταξης μέτρησης,  $|\psi_i\rangle_C$ . Μετά τη μέτρηση, η κατάσταση  $|\psi_i\rangle_{Q \otimes C}$  θα πρέπει – σύμφωνα με τις απαιτήσεις μας – να αναπτυχθεί στην:

$$|\psi_f\rangle_{Q \otimes C} = \alpha|0\rangle_Q \otimes |0\rangle_C + \beta|1\rangle_Q \otimes |1\rangle_C \quad (3.19)$$

η οποία είναι μια εναγκαλισμένη κατάσταση! Έτσι διαβάζοντας το αποτέλεσμα της μέτρησης, η κατάσταση προβάλλεται σε μια από τις ιδιοκαταστάσεις της και χάνει τη δυνατή κβαντική συνέπεια (coherence), αφού γίνεται κλασική κατάσταση,  $|0\rangle_Q \otimes |0\rangle_C$  με πιθανότητα  $|\alpha|^2$  και  $|1\rangle_Q \otimes |1\rangle_C$  με πιθανότητα  $|\beta|^2$ . Μπορούμε να δούμε την απώλεια αυτή της φάσης υπολογίζοντας τη φάση του qubit στην κατάσταση  $|\psi_f\rangle_{Q \otimes C}$ , δηλ. υπολογίζοντας την αναμενόμενη τιμή του τελεστή  $\sigma_{x1} = \sigma_x \otimes 1$ . Η φάση αυτής της κατάστασης είναι  $Tr[\rho_{f, Q \otimes C} \sigma_{x1}] = 2 \text{Re}[\alpha^* \beta]$ , όπου  $\rho_{f, Q \otimes C}$  είναι ο τελεστής πυκνότητας της  $|\psi_f\rangle_{Q \otimes C}$ . Μετά την ανάγνωση του αποτελέσματος της μέτρησης, η μήτρα του τελεστή πυκνότητας μετασχηματίζεται σε κλασική κατάσταση μίξης, όπου η αναμενόμενη τιμή του  $\sigma_{x1}$  είναι προφανώς 0.

Εξετάζουμε τώρα με την ίδια λογική το υποσύστημα  $H_Q \otimes H_E$ : την αρχική χρονική στιγμή  $t=0$  το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση  $|\psi_{t=0}\rangle = |\psi_{t=0}\rangle_Q \otimes |\psi_{t=0}\rangle_E$ , η οποία αποτελείται από το qubit σε υπέρθεση  $|\psi_{t=0}\rangle_Q = \alpha|0\rangle_Q + \beta|1\rangle_Q$  και το περιβάλλον σε μια άγνωστη κατάσταση  $|\psi_{t=0}\rangle_E$ . Εάν υπάρξει μια ελάχιστη αλληλεπίδραση του qubit με το περιβάλλον, η κατάσταση του συστήματος θα μεταβληθεί. Έστω ότι η αλληλεπίδραση δε θα επηρεάσει τους συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$ , οι  $\alpha$  και  $\beta$  δηλ. δεν είναι χρονικά εξαρτημένοι, κι επομένως θα μεταβάλει μόνο το περιβάλλον. Η νέα κατάσταση του περιβάλλοντος μετά την επίδραση του qubit που είναι στην κατάσταση  $|0\rangle_Q$  ( $|1\rangle_Q$ ) είναι η  $|"0\rangle_E$  ( $|"1\rangle_E$ ). Οι καταστάσεις  $|"0\rangle_E$  και  $|"1\rangle_E$  δεν είναι απαραίτητα ορθογώνιες, δεν αποτελούν δηλ βασικές καταστάσεις του χώρου Hilbert του περιβάλλοντος. Έτσι σε μια χρονική στιγμή  $t$  η κατάσταση του συστήματος είναι

$$|\psi_t\rangle = |\psi_t\rangle_Q \otimes |\psi_t\rangle_E = \alpha|0\rangle_Q \otimes |"0\rangle_E + \beta|1\rangle_Q \otimes |"1\rangle_E \quad (3.20)$$

και η φάση μπορεί να εκτιμηθεί υπολογίζοντας την αναμενόμενη τιμή του τελεστή  $\sigma_{x1}$

$$\langle \sigma_{x1} \rangle = 2 \operatorname{Re}[\alpha^* \beta] \langle |"0\rangle |"1\rangle \quad (3.21)$$

Εάν οι  $|"0\rangle_E$  και  $|"1\rangle_E$  είναι ορθογώνιες, οι δυο καταστάσεις του qubit είναι διακριτές και η συνέπεια της φάσης χάνεται. Εάν οι δυο αυτές καταστάσεις του περιβάλλοντος ταυτίζονται τότε δεν έχουμε πληροφορία για το qubit και η συνέπεια της φάσης δε μεταβάλλεται. Τέλος εάν υπάρχει μερική αλληλεπικάλυψη των καταστάσεων του περιβάλλοντος, τότε υπάρχει κάποια πληροφορία για το qubit και η συνέπεια της φάσης μειώνεται.

Η παραπάνω λογική μπορεί να εφαρμοστεί και σε μεγαλύτερα του qubit συστήματα. Είναι σχεδόν αδύνατο να απομονωθεί ένα υπό διερεύνηση σύστημα εντελώς από το περιβάλλον του. Για να είναι ένα σύστημα πειραματικά προσεγγίσιμο θα πρέπει να είναι εφικτό να εκτελεστούν τουλάχιστον δυο μετρήσεις και συνήθως και μια αρχικοποίηση. Η πλήρης απομόνωση του συστήματος από κάθε επιρροή είναι πρακτικά αδύνατη. Η μελέτη λοιπόν της αποσυνέπειας έχει συγκεντρώσει το ενδιαφέρον των θεωρητικών μελετών, ώστε να καθοριστούν τα όρια ανάμεσα στον κβαντικό και τον κλασικό κόσμο [Sch05].

Το ενδιαφέρον, παρ' όλα αυτά, σχετίζεται κυρίως με την εξέλιξη της κατάστασης του qubit και την ποσοτικοποίηση της απώλειας πληροφορίας του qubit. Πιο συγκεκριμένα αφορά στο πώς μια συγκεκριμένη κατάσταση στη σφαίρα του Bloch εξελίσσεται με το χρόνο, πώς δηλ. η αζιμουθιακή γωνία  $\theta$  και η πολική γωνία  $\varphi$  επηρεάζονται από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον. Στην περίπτωση του qubit υπάρχει μια κρίσιμη διαφορά ανάμεσα στις μεταβολές των γωνιών  $\theta$  και  $\varphi$  (Εικ. 3.1): μια μεταβολή της γωνίας  $\varphi$  δεν απαιτεί ανταλλαγή ενέργειας, αφού

αφού η σχέση των δυο καταστάσεων  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  δεν αλλάζει. Αντιθέτως, μια μεταβολή της γωνίας  $\theta$  απαιτεί ή απώλεια ενέργειας προς το περιβάλλον (στην περίπτωση που η κατάσταση μεταβεί πιο κοντά στη βασική κατάσταση  $|0\rangle$ ) είτε απορρόφηση ενέργειας από το  $E$ .

Η συνολική χαμιλτονιανή του του χώρου Hilbert  $H_Q \otimes H_E$  είναι

$$H_U = H_Q + H_E + H_{\text{int}} \quad (3.22)$$

όπου η  $H_{\text{int}}$  αντιστοιχεί στην αλληλεπίδραση (διαταραχή) ανάμεσα στο περιβάλλον και το qubit κι έτσι δρα και στα δυο, ενώ η  $H_Q$  ( $H_E$ ) δρα μόνο πάνω στο qubit (περιβάλλον). Η ενεργός χαμιλτονιανή του qubit, η μειωμένη δηλ. χαμιλτονιανή  $H_U$  κατά τον παράγοντα του περιβάλλοντος  $H_E$ , είναι

$$H_Q = Tr_E [H_U] = -\frac{E}{2} \sigma_z + \frac{q(t)}{2} \sigma \quad (3.23)$$

όπου ο πρώτος όρος αφορά στο qubit με ενέργεια διαχωρισμού  $E$ , και ο δεύτερος όρος, ανάλογος του πεδίου  $q(t)$ , στην επίδραση του περιβάλλοντος στο qubit. Μπορούμε να εκφράσουμε τους δυο όρους με τη βοήθεια των διανυσμάτων των μητρών Pauli, αφού αποτελούν μια βάση του  $SU(2)$ , του χώρου του  $H_Q$ . Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην τελευταία παράγραφο, χωρίζουμε την  $q(t) = q_z(t) + q_{\perp}(t)$  σε δύο μέρη: ένα παράλληλο στον άξονα  $z$  του qubit,  $q_z(t)$ , κι ένα κάθετο σε αυτό,  $q_{\perp}(t) = q_x(t) + q_y(t)$ . Τα  $q_z(t)$  και  $q_{\perp}(t)$  είναι τελεστές σύζευξης του qubit με το περιβάλλον. Η αυτοσυσχέτιση του  $q(t)$  για διάφορες χρονικές στιγμές περιγράφεται από τη φασματική συνάρτηση:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(t+\tau) q^*(t) e^{-i\omega t} dt d\tau \quad (3.24)$$

Η κάθετη συνιστώσα συνεισφέρει στην ενεργό χαμιλτονιανή κατά

$$q_{\perp}(t) \cdot \sigma = q_x(t) \cdot \sigma_x + q_y(t) \cdot \sigma_y = \frac{1}{2} [q_+(t) \cdot \sigma_- + q_-(t) \cdot \sigma_+] \quad (3.25)$$

όπου  $\sigma_{\pm} = \sigma_x \pm i\sigma_y$  και  $q_{\pm} = q_x \pm iq_y$ , και περιγράφει μεταβάσεις. Αυτές οι μεταβάσεις μπορούν να περιγραφούν από το χρυσό κανόνα του Fermi [Dir27] μέσω των ρυθμών μετάβασης  $\Gamma_1^{(\pm)}$ , οι οποίοι με τη σειρά τους μπορούν να εκφραστούν μέσω της φασματικής συνάρτησης ως  $\Gamma_1^{(\pm)} = S_{\perp}(\pm E/\hbar)/\hbar^2$ , όπου, λόγω της διατήρησης της ενέργειας, η συχνότητα του θορύβου θα πρέπει να ταιριάζει με τον διαχωρισμό της ενέργειας  $E/\hbar$ . Ένα τρόπος για τη μείωση της επίδρασης του περιβάλλοντος είναι η πραγματοποίηση των πειραματικών διαδικασιών σε χαμηλές θερμοκρασίες, κοντά στο  $T=0$  K, όπου το περιβάλλον μπορεί μόνο να απορροφήσει ενέργεια, κι έτσι οι όροι  $q_+(t)$  και  $\Gamma_1^{(+)}$  μηδενίζονται. Σε αυτήν

την περίπτωση ως **χρόνος χαλάρωσης** (relaxation time) ορίζεται ο  $T_1 \equiv \Gamma_1$ . Ο χρόνος χαλάρωσης για τις καταστάσεις spin μπορεί να είναι πολύ μεγάλος. Μετρήσεις [Han03] στις διαχωρισμένες καταστάσεις spin Zeeman σε κβαντικά σημεία δίνουν ένα κατώτατο όριο  $50 \mu s$  στο χρόνο χαλάρωσης για  $B = 7.5T$ .

Η επίδραση αυτού του χρόνου χαλάρωσης στη μήτρα του τελεστή πυκνότητας  $\rho$  της σχέσης (3.3) μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας εξίσωσης του ρυθμού μεταβολής του  $\rho$ . Ο ρυθμός αυτός μεταβολής του  $\rho$ , με τη βοήθεια του τελεστή Lindblad, γράφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = L_{rel}\rho &= \frac{\Gamma_1}{2} (2\sigma_- \rho \sigma_-^\dagger - \sigma_-^\dagger \sigma_- \rho - \sigma_- \sigma_-^\dagger \rho) = \\ &= \begin{bmatrix} \rho_{22}\Gamma_1 & -\rho_{12}\frac{\Gamma_1}{2} \\ -\rho_{21}\frac{\Gamma_1}{2} & -\rho_{22}\Gamma_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

όπου  $\rho_{ij}$  είναι τα στοιχεία του πίνακα πυκνότητας  $\rho$ . Επιλύοντας αυτήν τη διαφορική εξίσωση προκύπτει ο χρονικά εξαρτώμενος πίνακας πυκνότητας της κατάστασης χαλάρωσης (relaxing state)

$$\rho_{rel}(t) = \begin{bmatrix} \rho_{11} + \rho_{22}(1 - e^{-\Gamma_1 t}) & \rho_{12}e^{-\frac{\Gamma_1}{2}t} \\ \rho_{21}e^{-\frac{\Gamma_1}{2}t} & \rho_{22}e^{-\Gamma_1 t} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

με συνθήκη κανονικοποίησης την  $|\rho_{11}|^2 + |\rho_{22}|^2 = 1$ . Ποιοτικά, η χρονική εξέλιξη που περιγράφεται από αυτή τη μήτρα είναι ότι η πιθανότητα που έχει το σύστημα να βρεθεί στη διεγερμένη κατάσταση  $|1\rangle$  μειώνεται καθώς αυξάνεται η πιθανότητα της βασικής κατάστασης  $|0\rangle$ , συνοδευόμενη από μια μείωση της συνέπειας της φάσης ( $\sim \Gamma_1/2$ ).

Η δεύτερη συνιστώσα  $q_z(t)$  έχει μια πιο πολύπλοκη επίδραση. Εφόσον είναι παράλληλη στον άξονα  $z$ , δεν επηρεάζει τη γωνία  $\theta$  αλλά τη  $\phi$ . Η γωνία μεταβάλλεται κατά  $\phi(0) - \phi(t) = 2/\hbar \int_0^t q_z(t') dt'$ . Εάν υποθέσουμε ότι το μέτρο του  $q_z(t)$  μεταβάλλεται ελάχιστα, τότε η φάση μεταβάλλεται κατά  $2/\hbar q_z(0)$ . Ο χρόνος στον οποίο η φάση διαγράφει μια πλήρη περίοδο –μετατόπιση κατά  $2\pi$ – συνιστά τον καθαρό ρυθμό απώλειας συνάφειας φάσης (pure dephasing rate)  $\Gamma_2 = 2q_z/\hbar$ .

Η εξέλιξη λόγω του  $q_z(t)$  μπορεί να γραφεί ως περιστροφή γύρω από τον άξονα  $z$

$$R_z(\Delta\phi) = \exp[\sigma_z] = \begin{bmatrix} e^{i\Delta\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta\phi/2} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Η μέση τιμή του τελεστή πυκνότητας  $\rho$  για όλες τις μετατοπίσεις  $\Delta\phi$  θα είναι

$$\tilde{\rho} = \int_{-\infty}^{\infty} R_Z(\Delta\phi) \rho R_Z^\dagger(\Delta\phi) p(\Delta\phi) d\Delta\phi \quad (3.29)$$

Για μια Γκαουσιανή κατανομή των μετατοπίσεων, η πυκνότητα πιθανότητας  $p(\Delta\phi)$  είναι

$$p(\Delta\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \exp\left[-\frac{(\Delta\phi)^2}{4\lambda}\right] \quad (3.30)$$

και η μέση τιμή του  $\rho$  γίνεται

$$\tilde{\rho} = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* e^{-\lambda} \\ \alpha^* \beta e^{-\lambda} & |\beta|^2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

με συνθήκη κανονικοποίησης και πάλι την  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Έστω τώρα ένα χρονικό διάστημα αρκετά μεγάλο κατά το οποίο το  $q_Z(t)$  μεταβάλλεται (σταθερά) κι έτσι  $\Delta\phi \propto (2/\hbar)q_Z(0)t$ . Σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα κεντρικού ορίου [Ric95], αφού συνέβησαν αρκετά γεγονότα  $\Delta\phi$  κατά το χρονικό διάστημα  $t$ , κι έτσι η παράμετρος  $\lambda$  παίρνει την τιμή  $\lambda \approx (2/\hbar)q_Z(0)t$  και η χρονική εξέλιξη του πίνακα του τελεστή πυκνότητας  $\rho$  υπό καθαρή απώλεια συνάφειας φάσης (dephasing) γράφεται

$$\rho_{deph}(t) = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* e^{-\frac{\Gamma_2 t}{2}} \\ \alpha^* \beta e^{-\frac{\Gamma_2 t}{2}} & |\beta|^2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Ο τελεστής Lindblad για την απώλεια συνάφειας φάσης είναι

$$\frac{d\rho}{dt} = L_{deh}\rho = \frac{\Gamma_2}{2} (2c_d \rho c_d^\dagger - c_d^\dagger c_d \rho - c_d c_d^\dagger \rho) \quad (3.33)$$

όπου  $c_d = \sigma_+ \sigma_-$ . Η χρονική εξέλιξη της μήτρας του τελεστή πυκνότητας υπό το καθεστώς της χαλάρωσης και της απώλειας συνάφειας φάσης δίνεται από τον συνολικό τελεστή

$$L_{dec} = L_{rel} + L_{deph} \quad (3.34)$$

και η λύση της διαφορικής εξίσωσης  $d\rho/dt = L_{dec}\rho$  καταλήγει στον χρονικά εξαρτώμενο πίνακα πυκνότητας

$$\rho_{dec}(t) = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 (1 - e^{-\Gamma_1 t}) & \alpha\beta^* e^{-\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} t} \\ \alpha^* \beta e^{-\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} t} & |\beta|^2 e^{-\Gamma_1 t} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Η περίπτωση στην οποία  $L_{rel} = 0$  και  $L_{deph} \neq 0$  αποτελεί την απώλεια συνάφειας φάσης (dephasing) και χαρακτηρίζεται από τον ρυθμό  $\Gamma_2$ . Όταν  $L_{rel} \neq 0$  και  $L_{deph} \neq 0$  υπάρχει αποσυνέπεια (decoherence), και σε αυτήν την περίπτωση ο χρόνος απώλειας συνάφειας φάσης ορίζεται ως  $1/T_2 = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2$ .

### 3.4. Προσπάθειες Υλοποίησης Κβαντικών Υπολογιστών

Η ανάπτυξη κβαντικών αλγόριθμων και της κβαντικής διόρθωσης λαθών καθιστά, υπό μια θεωρητική σκοπιά, εφικτή την υλοποίηση κβαντικών υπολογιστών. Η πρόκληση είναι στη δημιουργία ενός πραγματικού κβαντικού υπολογιστή με έναν αρκετά μεγάλο αριθμό qubit. Πιθανώς να είναι απαραίτητα περισσότερα από εκατό qubit προκειμένου να σχηματιστεί ένα αποδοτικό σύστημα, αλλά ένα σύστημα των τριάντα qubit ίσως να μπορεί ήδη να εκτελέσει αξιόλογες προσομοιώσεις κβαντικών συστημάτων.

Κάθε σύστημα δυο επιπέδων θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί ως qubit, αλλά αυτό από μόνο του δεν είναι αρκετό. Για να αξιολογηθεί μια πειραματική προσπάθεια στο πεδίο των κβαντικών υπολογιστών υπάρχουν συγκεκριμένα κριτήρια, τα οποία είναι γνωστά ως κριτήρια **DiVincenzo** [DiV01]. Σύμφωνα με αυτά, ένας κβαντικός υπολογιστής πρέπει να πληροί τα ακόλουθα:

**Καθορισμένα qubit (κλιμάκωση):** το σύστημα θα πρέπει να αποτελείται από δυο καλά καθορισμένες κβαντικές καταστάσεις και να επιτρέπει τη σύζευξη πολλών qubit, αφού δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί κάποιος αξιόλογος αλγόριθμος με μικρό αριθμό qubit.

**Αρχικοποίηση του συστήματος:** να είναι εφικτός ο καλός καθορισμός του qubit σε μια αρχική κατάσταση με μεγάλη πιθανότητα κατάληψης στην αρχή του υπολογισμού.

**Μεγάλος χρόνος άρσης συνέπειας:** να έχει χρόνο αποσυνέπειας πολύ μεγαλύτερο από το χρόνο λειτουργίας.

**Καθολικό σύνολο κβαντικών πυλών:** να υπάρχει ένα σύνολο από πύλες ικανές να καλύψουν οποιοδήποτε υπολογιστικό εγχείρημα.

**Ανάγνωση του αποτελέσματος:** να υπάρχει μια διαδικασία για τη μέτρηση του αποτελέσματος με υψηλή κβαντική απόδοση.



Αυτά είναι τα πέντε ελάχιστα κριτήρια για τους κβαντικούς υπολογισμούς, και υπάρχουν άλλα δυο που αφορούν στη μετάδοση: θα πρέπει να είναι δυνατή η μετάδοση της πληροφορίας από τα qubit που χρησιμοποιούνται για τους υπολογισμούς σε qubit μετάδοσης (“flying qubits”), κι επίσης θα πρέπει τα τελευταία να μπορούν να μεταφερθούν αξιόπιστα σε διάφορες τοποθεσίες.

Οι συνθήκες που αναφέρονται παραπάνω θέτουν κάποιους περιορισμούς στην τεχνολογία κβαντικού υπολογισμού. Κατά τη σχεδίαση του φυσικού μηχανισμού που θα εκτελέσει τους κβαντικούς υπολογισμούς παρουσιάζεται πρόβλημα στη διατήρηση της ελεγχόμενης εξέλιξης του κβαντικού συστήματος μέχρι να ολοκληρωθούν οι υπολογισμοί. Τέτοιος έλεγχος της εξέλιξης είναι πιθανός όταν το κβαντικό σύστημα είναι καλά μονωμένο από το περιβάλλον (ελαχιστοποίηση της αποσυνέπειας). Εντούτοις, η πλήρης μόνωση του συστήματος κβαντικού υπολογισμού καθιστά αδύνατες τις λειτουργίες ανάγνωσης/καταγραφής. Συνεπώς, είναι απαραίτητη μια μικρή αλληλεπίδραση του κβαντικού συστήματος με το περιβάλλον. Από την άλλη πλευρά, αυτή η αλληλεπίδραση οδηγεί σε χαλάρωση και μη συνεκτικές διαδικασίες που μειώνουν την απόδοση του κβαντικού υπολογιστή.

Ο χρόνος αποσυνέπειας  $t_{decoh}$  είναι συνήθως μικρότερος από το χρόνο χαλάρωσης  $T_1$ . Επομένως, η αποσυνέπεια μπορεί να θεωρηθεί ως το πιο επιβλαβές φαινόμενο για τους κβαντικούς υπολογιστές. Ο λόγος του  $t_{decoh}$  προς το χρόνο στοιχειώδους λειτουργίας  $t_{oper}$ , δηλαδή

$$R = \frac{t_{decoh}}{t_{oper}} \quad (3.36)$$

είναι μια προσεγγιστική μέτρηση του αριθμού των υπολογιστικών βημάτων που εκτελούνται προτού η αλληλεπίδραση με το περιβάλλον καταστρέψει το qubit. Για διαφορετικές τεχνολογίες κβαντικού υπολογισμού, αυτός ο λόγος μεταβάλλεται σε ευρεία όρια [Bar96]:  $10^3 \leq R \leq 10^{13}$ . Για παράδειγμα, το  $R = 10^3$  για τις ηλεκτρονικές καταστάσεις στα κβαντικά σημεία,  $R = 10^7$  για τις καταστάσεις περιστροφής πυρήνα και  $R = 10^{13}$  για παγιδευμένα ιόντα.

Στη συνέχεια αναφέρονται συνοπτικά μερικές από τις πειραματικές προσεγγίσεις, έχοντας σαν γνώμονα την εκπλήρωση των κριτηρίων DiVincenzo.

### **Γραμμική Οπτική**

Η πόλωση των φωτονίων αποτελεί ένα σύστημα δυο επιπέδων κι έτσι κι ένα qubit. Μονά φωτόνια μπορούν να παραχθούν και οι πράξεις να πραγματοποιηθούν μέσω διαχωριστών δεσμών, μετατοπιστών φάσεων και μη γραμμικών μέσων Kerr. Οι αλγόριθμοι κωδικοποιούνται σε ένα οπτικό τραπέζι. Με αυτές τις τεχνικές έχει επιτευχθεί η υλοποίηση διάφορων αλγόριθμων και η δημιουργία εναγκαλισμένων καταστάσεων μέχρι δέκα qubit. Είναι το μόνο μέχρι στιγμής σύστημα που καθιστά εφικτή την επικοινωνία σε μεγάλη απόσταση και την τηλεμεταφορά, έχοντας καταγράψει ένα πρόσφατο ρεκόρ των 144 km [Urs07].

### **Παγίδες Ιόντων**

Ηλεκτρικά φορτισμένα ιόντα παγιδεύονται από ένα ηλεκτρικό πεδίο κατάλληλης συχνότητας και ισχύος και ψύχονται στη βασική τους κατάσταση. Το qubit αναπαρίσταται από δυο υπέρλεπτες καταστάσεις των ιόντων: περιστροφή και αλληλεπίδραση επιτυγχάνονται μέσω παλμών laser [Cir95]. Γενικά απαιτείται κενό και πολύ χαμηλές θερμοκρασίες. Η αρχικοποίηση γίνεται μέσω της τεχνικής της οπτικής αντλίας. Ο μέγιστος χρόνος συνέπειας είναι 30 min ενώ ο τυπικός είναι 1 msec λόγω του θορύβου από το μαγνητικό πεδίο. Έχουν υλοποιηθεί διάφοροι κβαντικοί αλγόριθμοι μέχρι σήμερα και κάποιες πειραματικές εργασίες έχουν επιτύχει εναγκαλισμό μέχρι οχτώ qubit. [Haf05,Lei05,]

### **Πυρηνικός Μαγνητικός Συντονισμός (NMR)**

Πρόκειται για μια από τις πιο παλιές και ανεπτυγμένες μεθόδους [Chu98]. Τα qubit κωδικοποιούνται στα σπιν των πυρήνων που συγκροτούν το μόριο. Πολλά μόρια βρίσκονται την ίδια στιγμή σε θερμική ισορροπία, συμπεριφερόμενα σαν ένα συμπαγές σύστημα. Μαγνητικά πεδία πραγματοποιούν τόσο τις δράσεις όσο και τις μετρήσεις. Η μέθοδος αυτή έχει σημαντική δυσκολία στην αρχικοποίηση. Χρησιμοποιώντας τεχνικές NMR έχει υλοποιηθεί ο αλγόριθμος του Shor για τον αριθμό 15 στα εργαστήρια της IBM [Van01]. Σε γενικές γραμμές επιτυγχάνεται πολύ μεγαλύτερος χρόνος συνέπειας σε σχέση με το χρόνο λειτουργίας (1000 sec και 0,01-100 ms αντίστοιχα).

### **Κβαντική Ηλεκτροδυναμική Κοιλοτήτων (Cavity Quantum Electrodynamics)**

Σε αυτήν την προσέγγιση τα qubits αποθηκεύονται σε άτομα υψηλής ενέργειας. Επίσης φωτόνια που βρίσκονται σε μια υπεραγώγιμη κοιλοότητα χρησιμοποιούνται για τον εναγκαλισμό των ατόμων. Μοιάζει γενικά με τις παγίδες ιόντων. Η αρχικοποίηση του συστήματος γίνεται με οπτικό τρόπο, κάτι που κάνει όμως την κλιμάκωση δύσκολη. Οι τυπικοί χρόνοι συνέπειας κι εκτέλεσης υπολογισμών είναι 30 ms και 20μs αντίστοιχα. Έχει κατασκευαστεί πειραματικά μια πύλη αλλαγής φάσης και έχει επιτευχθεί εναγκαλισμός μεταξύ 3 ατόμων [Tur95].

### **Ουδέτερα Άτομα**

Πρόκειται για συστήματα παγιδευμένων, με οπτικές μεθόδους, ουδέτερων ατόμων. Έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι ουδέτερα και έτσι μπορούν να απομονωθούν σχετικά εύκολα από τις αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον, αν και παρουσιάζουν προβλήματα σχετικά με τη διατήρηση της συνέπειας όταν πραγματοποιείται μια λειτουργία. Το πειραματικό αυτό μοντέλο παρέχει καλή κλιμάκωση και εύκολη αρχικοποίηση. Οι δράσεις πραγματοποιούνται με παλμούς ραδιοσυχνότητας, ενώ για δύο qubits με ελεγχόμενες συγκρούσεις μεταξύ ατόμων.

### **Υπεραγώγιμα qubit**

Η τεχνική αυτή βασίζεται στις επαφές Josephson, που πρακτικά είναι διηλεκτρικά φράγματα τοποθετημένα ανάμεσα σε υπεραγώγιμα υλικά [Moo99]. Τα qubits μπορούν να εκφραστούν σαν την κατεύθυνση του ρεύματος στον δακτύλιο. Η αρχικοποίηση γίνεται μέσω της μέτρησης, ενώ οι λειτουργίες ενός qubit γίνονται με μικροκύματα και δύο qubit με σύζευξη μέσω LC κυκλωμάτων.

### **Κβαντικά Σημεία**

Η νανοτεχνολογία προσφέρει ένα νέο πεδίο δυνατοτήτων με εξαιρετικές ιδιότητες. Στα συγκεκριμένα συστήματα η πληροφορία κωδικοποιείται ως το spin ενός ηλεκτρονίου που βρίσκεται σε ένα κβαντικό σημείο [Los98]. Ο χρόνος συνέπειας / υπολογισμού είναι αρκετά μεγάλος (100 μs / 1 ns) και το σύστημα παρουσιάζει αρκετά καλή δυνατότητα κλιμάκωσης.

Η λίστα αυτή δεν έχει εξαντληθεί. Συχνά η λύση στο ένα πρόβλημα του ενός συστήματος γεννά μια νέα δυνατότητα για κάποιο νέο σύστημα ή και για συνδιασμό των υπάρχοντων συστημάτων. Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί το σύστημα του qubit ως σπιν ηλεκτρονίων εντοπισμένων σε κβαντικά σημεία.

## **3.5. Σπιν Ηλεκτρονίων σε Κβαντικά Σημεία**

Οι μαγνητικές καταστάσεις στα στερεά έχουν βρει τα τελευταία χρόνια σημαντικές εφαρμογές στην ηλεκτρονική και κυρίως στις διατάξεις μνήμης. Έχει έτσι δημιουργηθεί ένα νέο σημαντικό επιστημονικό πεδίο, η σπιντρονική. Φαινόμενα όπως η τεράστια μαγνητοαντίσταση βρίσκουν εφαρμογή π.χ. σε μαγνητικές κεφαλές που διαβάζουν τη μαγνητική κατάσταση μιας κυψελίδας μνήμης. Έχουν επίσης κατασκευαστεί λογικές πύλες που βασίζονται στη μαγνητοαντίσταση [Wol01, Zut04]. Πέραν των εφαρμογών, έχουν γίνει σημαντικές επιστημονικές ανακαλύψεις στο πεδίο της σπιντρονικής, όπως μαγνητικοί ημιαγωγοί [Ohn98] και φαινόμενα spin Hall [Sih05]. Θα πρέπει όμως να σημειωθεί ότι όλα αυτά τα φαινόμενα της σπιντρονικής αφορούν σε μακροσκοπικούς αριθμούς σπιν.

Η κβαντική κατάσταση του διανύσματος του σπιν μεταβάλλεται τόσο γρήγορα, ώστε είναι αδύνατο να παρατηρηθούν κβαντικές υπερθέσεις ή εναγκαλισμός. Θα πρέπει να μεταβούμε σε συστήματα με πολύ μικρό αριθμό σπιν ώστε να είναι παρατηρήσιμες κβαντικές επιδράσεις σε συλλογικά φαινόμενα μαγνήτισης [Gun94].

Στα κβαντικά σημεία τα ενεργειακά επίπεδα του ηλεκτρονίου είναι κβαντισμένα, λόγω του κβαντικού περιορισμού, και οι συσχετισμοί είναι διαφορετικοί όπως εισάγονται από την

απογορευτική αρχή του Pauli. Αυτό καθιστά το σπιν του ηλεκτρονίου ως ένα βαθμό ελευθερίας και η προσέγγισή του με έναν ντετερμινιστικό τρόπο θα επέτρεπε την υλοποίηση των συστημάτων κβαντικού λογισμού.

Το σπιν  $\mathbf{S}$  ενός ηλεκτρονίου μπορεί να περιγραφεί ως μια ιδιοστροφορμή, η οποία οδηγεί σε μια μαγνητική ροπή  $\mathbf{m}$  λόγω του ηλεκτρικού φορτίου του ηλεκτρονίου. Οι Stern και Gerlach [Ger22] έδειξαν ότι η προβολή του  $\mathbf{m}$  σε έναν άξονα κβάντωσης (που στο πείραμά τους καθορίζεται από ένα εξωτερικό μαγνητικό εδίο), π.χ. τον  $z$ , είναι ή  $m_z = g \mu_B / 2$  ('σπιν άνω') είτε  $m_z = -g \mu_B / 2$  ('σπιν κάτω'), όπου  $\mu_B = 9.2741 \cdot 10^{-24}$  J/T είναι το μαγνητόνιο του Bohr και  $g$  είναι ο παράγοντας Lande. Ο παράγοντας Lande στα ημιαγωγά υλικά μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές, π.χ. για το ηλεκτρόνιο στο Si  $g = 1.998$ , στο Ge  $g = 1.563$  και στο GaAs  $g = -0.44$ . Για σύγκριση, για το ελεύθερο ηλεκτρόνιο είναι  $g = 2.0$ . Το σπιν του ηλεκτρονίου αποτελεί λοιπόν ένα σύστημα δυο επιπέδων. Λόγω αυτής της ιδιότητας, τα σπιν ηλεκτρονίων που είναι τοπικά εντοπισμένα σε ημιαγωγικά κβαντικά σημεία έχουν προσελκύσει τα τελευταία χρόνια το ενδιαφέρον, όσον αφορά στην υλοποίηση διαδικασιών κβαντικών υπολογιστών.

Σε χαμηλές θερμοκρασίες ο ενεργειακός διαχωρισμός των δυο καταστάσεων μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερος από τη θερμική ενέργεια. Έτσι τα ηλεκτρόνια στα QD είναι καλά μονωμένα από το περιβάλλον και δεν έχουν άλλους ανεπιθύμητους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας [Yin09]. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι χρήσιμα για την αύξηση των χρόνων αποσυνέπειας των καταστάσεων των qubit και δίνουν τη δυνατότητα για ανάπτυξη συστημάτων κβαντικού λογισμού βασισμένων σε κβαντικά σημεία. Το πιο ισχυρό άλλωστε επιχείρημα για τη χρήση σπιν ηλεκτρονίων στο κβαντικό λογισμό, είναι ο μεγάλος χρόνος αποσυνέπειας της τάξης του  $\sim 1 \mu\text{sec}$  που είναι απαραίτητος για την κβαντική διόρθωση λαθών [Kik98, Hui98, Bur99]. Επίσης έχει βρεθεί ότι το σπιν μπορεί να μεταφερθεί σύμφωνα για μήκη  $\sim 100 \mu\text{m}$  στο εσωτερικό ημιαγωγού, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα για χρήση του ηλεκτρονιακού σπιν ως φορέα πληροφορίας. Άλλα πλεονεκτήματα είναι η δυνατότητα εύκολης μεταβολής κι ελέγχου του spin από εξωτερικό μαγνητικό πεδίο και η δυνατότητα κατασκευής μεγάλων ολοκληρωμένων κυκλωμάτων που απαιτούνται για πραγματικές εφαρμογές στους κβαντικούς υπολογιστές [Hui98].

### **3.5.1. Qubit Ηλεκτρονιακού Σπιν σε Κβαντικά Σημεία**

Σε ένα κβαντικό σημείο ένα (ή μερικά) ηλεκτρόνια είναι υπό κβαντικό περιορισμό και στις τρεις χωρικές διευθύνσεις. Το qubit κωδικοποιείται στον άλλο βαθμό ελευθερίας, το σπιν [Los98]. Με την εφαρμογή ενός εξωτερικού στατικού μαγνητικού πεδίου  $B$ , οι δυο καταστάσεις

σπιν-άνω (παράλληλο στο εφαρμοζόμενο πεδίο) και σπιν-κάτω (αντιπαράλληλο) αποκτούν διαφορετική ενέργεια, σχηματίζοντας έτσι το σύστημα δυο επιπέδων που απαιτείται για την υλοποίηση του qubit.

Η αρχική ιδέα της εφαρμογής του ηλεκτρονικού σπιν σε κβαντικούς υπολογιστές ανήκει στους Loss & DiVincenzo [Los98] και στηρίχθηκε στον τρισδιάστατο κβαντικό περιορισμό ηλεκτρονίων ενός δισδιάστατου αέριου ηλεκτρονίων (2DEG), Κεφ.2.2.2. Στην Εικ.3.3. παρουσιάζεται μια σχηματική αναπαράσταση του κβαντικού υπολογιστή στηριγμένου σε κβαντικά σημεία, όπως προτάθηκε από τους Loss & DiVincenzo. Τα συστήματα qubit ηλεκτρονικού σπιν έχουν προσελκύσει το ενδιαφέρον [Elz05] αφού οι αρχικές καταστάσεις μπορούν να είναι καλά καθορισμένες (κλιμάκωση), παρουσιάζουν μεγάλους χρόνους αποσυνέπειας (σε σύγκριση με τα πχ. qubit ηλεκτρονικού φορτίου) κι επιτρέπουν έλεγχο ακόμα και μεμονομένων κβαντικών σημείων ξεχωριστά [Cio00, Elz03].

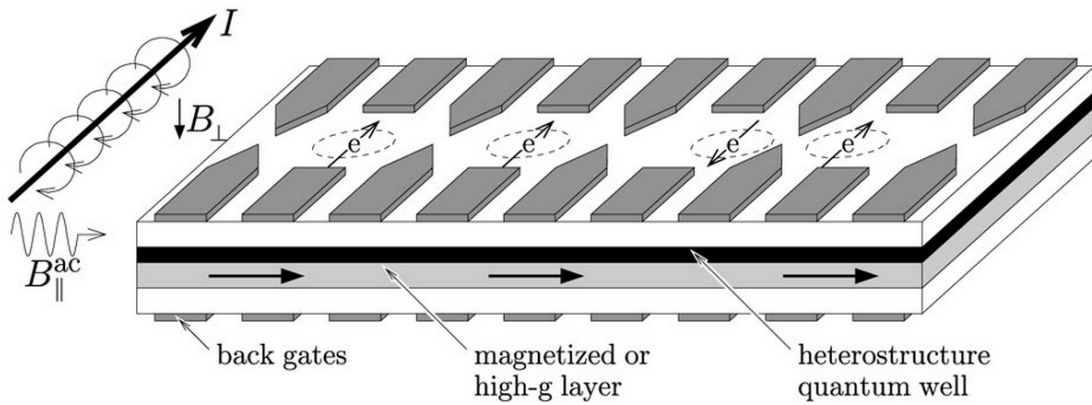
Για την κωδικοποίηση του qubit στο σπιν του ηλεκτρονίου εφαρμόζεται ένα εξωτερικό στατικό μαγνητικό πεδίο  $B$ . Το σύστημα αυτό περιγράφεται από την χαμιλτονιανή Zeeman

$$H_Z = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} g \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (3.37)$$

όπου  $\mu$  είναι η μαγνητική ροπή,  $g$  ο παράγοντας Lande του ηλεκτρονίου,  $\mu_B$  το μαγνητόνιο Bohr και  $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]$  το διάνυσμα των μητρών Pauli που είναι παράλληλο στο σπιν του ηλεκτρονίου. Το μέγεθος  $E_Z = g \mu_B B$  αποτελεί τη διαφορά στην ενέργεια των δυο καταστάσεων και καλείται διαχωρισμός Zeeman (Zeeman splitting), ο οποίος μπορεί να μετρηθεί με φασματοσκοπικές μεθόδους. Για παράδειγμα, για το Si σε  $B = 10T$  η ενέργεια διαχωρισμού spin είναι περίπου 0.6 meV, το οποίο αντιστοιχεί σε ακτινοβολία με μήκος κύματος περίπου 2  $\mu m$ . Για  $B = (0, 0, B)$  η χαμιλτονιανή γίνεται

$$H_Z = \frac{1}{2} g \mu_B B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Ως βάση θεωρούνται οι δυο ιδιοκαταστάσεις σπιν  $|\uparrow\rangle$  και  $|\downarrow\rangle$  που αναπαριστούν τις καταστάσεις με σπιν παράλληλο και αντιπαράλληλο στο μαγνητικό πεδίο, και τις οποίες αντιστοιχίζουμε στις δυο βασικές καταστάσεις  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  του qubit. Αυτός ο χώρος καταστάσεων του ηλεκτρονίου συμπίπτει με τη σφαίρα του Bloch (σχημα 3.1) κι έτσι το qubit είναι καλά καθορισμένο.



**Εικ. 3.3.** Σχηματική αναπαράσταση ενός κβαντικού υπολογιστή βασισμένου σε κβαντικά σημεία επίπεδης γεωμετρίας, όπως προτάθηκε από τους Loss & DiVincenzo [Los98]. Το 2DEG δημιουργείται στη διεπιφάνεια του κβαντικού πηγαδιού (quantum well). Στην επιφάνεια της ετεροδομής εγχαρασσονται πύλες, οι οποίες όταν αποκτήσουν κατάλληλη αρνητική τάση δημιουργούν ένα ηλεκτρικό πεδίο που άρει τοπικά το 2DEG, δημιουργώντας έτσι απαγορευμένες περιοχές για τα ηλεκτρόνια και νησίδες, όπου μονά ηλεκτρόνια μπορεί να εγκλωβιστούν (κβαντικά σημεία). Το σταθερό μαγνητικό πεδίο  $B$  άρει τον εκφυλισμό του σπιν. Το εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο  $B_{AC}$  εφαρμόζεται ώστε να εκτελεστούν οι λειτουργίες του qubit. Οι πύλες της επιφάνειας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ρυθμιστεί κατάλληλα το δυναμικό μεταξύ δυο γειτονικών κβαντικών σημείων, έτσι ώστε να είναι δυνατή κι ελεγχόμενη η λειτουργία qubit δυο κβαντικών σημείων.

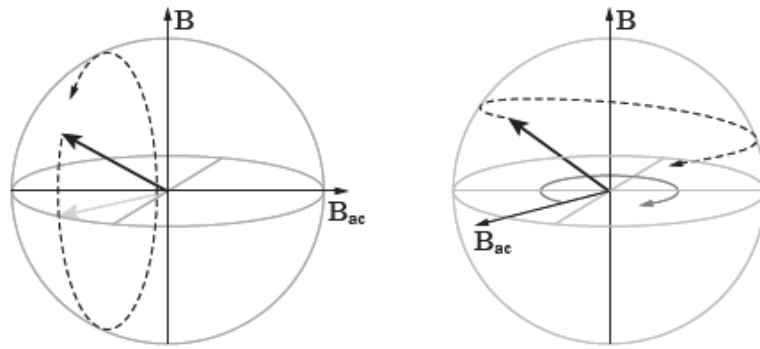
Για το διαχειρισμό των καταστάσεων σπιν μονού qubit είναι απαραίτητες δυο βασικές λειτουργίες (τελεστές). Η πρώτη αφορά στην **περιστροφή του σπιν** γύρω από έναν άξονα στο επίπεδο των  $(x,y)$  με τη χρήση του συντονισμού ηλεκτρονιακού σπιν (electron spin resonance – ESR). Οι λειτουργία αυτή μπορεί να ρυθμιστεί από ένα τοπικό μεταβαλλόμενο και χρονικά εξαρτημένο μαγνητικό πεδίο  $B_{ac}(t)$ , κάθετο στο στατικό πεδίο  $B$ , και περιγράφεται από τη χαμιλτονιανή

$$H_{ESR} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{ac} \sin[\omega_{ac}t + \phi] \quad (3.39)$$

Εάν η συχνότητα του εναλλασσόμενου αυτού πεδίου είναι σε συντονισμό με τον διαχωρισμό Zeeman, δηλ η συχνότητα του πεδίου είναι σε συντονισμό με τη συχνότητα μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων  $|\uparrow\rangle$  και  $|\downarrow\rangle$ ,  $\omega_{ac} = E_Z / \hbar$ , αυτό το πεδίο περιστρέφει το σπιν του ηλεκτρονίου και προκαλεί ταλαντώσεις μεταξύ των δυο καταστάσεων  $|\uparrow\rangle$  και  $|\downarrow\rangle$ . Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται συντονισμός σπιν ηλεκτρονίου (electron spin resonance – ESR) [Poo83]. Όπως φαίνεται στην Εικ. 3.4., λόγω μιας φάσης που εισάγει το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο  $B_{ac}$ , το ηλεκτρονιακό σπιν “αντιλαμβάνεται” ότι περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα. Από τη σκοπιά του παρατηρητή, το πεδίο  $B_{AC}$  περιστρέφεται και το σπιν διαγράφει μια σπειροειδή τροχιά πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας Bloch. Εάν η τιμή  $\phi=0$  αντιπροσωπεύει την περιστροφή κατά μια γωνία  $\theta$  γύρω από τον άξον  $x$ , τότε η τιμή  $\phi=\pi/2$  αντιστοιχεί στην περιστροφή κατά  $\theta$  γύρω από τον άξονα  $y$ . Η περιστροφή του qubit κατά μια γωνία  $\theta$  γύρω από τον άξονα  $x$  ( $y$ ) είναι:

$$R_{x/y}(\mathcal{G}) = \exp \left[ -i \frac{\mathcal{G}}{2} \sigma_{x/y} \right] \quad (3.40)$$

όπου  $\mathcal{G} = -\gamma B_{ac} t$ , παράγοντας που εξαρτάται από το χρόνο κατά τον οποίο εφαρμόζεται το  $B_{ac}$  ( $\gamma = -g\mu_B / \hbar$  είναι ο γυρομαγνητικός λόγος). Έχοντας ως εργαλείο την ανάλυση σε γωνίες Euler, είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί κάθε κάθε περιστροφή στη σφαίρα Bloch μέσω των δυο αυτών αλληλεπιδράσεων. Για παράδειγμα, η πύλη Hadamard της σχέσης (3.7) μπορεί να αναλυθεί ως  $H = R_y(-\pi/2) R_x(\pi) R_y(\pi)$ . Περιστροφές μονού σπιν έχουν πραγματοποιηθεί πειραματικά [Kor06, Now07].



**Εικ. 3.4.** Συντονισμός σπιν ηλεκτρονίου (ESR): υπό την επίδραση ενός εναλλασσόμενου πεδίου  $B_{ac}$  σε συντονισμό με τον διαχωρισμό Zeeman,  $\omega_{ac} = E_Z / \hbar$ , περιστρέφεται το σπιν του ηλεκτρονίου όπως πχ αναπαριστά η διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα (αριστερά). Από την σκοπιά του εργαστηρίου (δεξιά), το πεδίο  $B_{ac}$  περιστρέφεται και το σπιν διαγράφει μια σπειροειδή τροχιά πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας Bloch

Η δεύτερη λειτουργία (τελεστής) αφορά στην **αλληλεπίδραση δυο σπιν**. Η υλοποίηση κβαντικών πυλών δυο qubit απαιτεί την μείωση του φράγματος δυναμικού μεταξύ δυο γειτονικών κβαντικών σημείων. Όταν το φράγμα δυναμικού είναι υψηλό δεν είναι δυνατό να υπάρξει φαινόμενο σήραγγας μεταξύ των ηλεκτρονίων των δυο κβαντικών σημείων. Όταν όμως το φράγμα δυναμικού μεταξύ του  $v$ -οστού και του  $(v+1)$ -οστού κβαντικού σημείου μειώνεται, τότε οι κυματοσυναρτήσεις των ηλεκτρονίων αρχίζουν να αλληλοεπικαλύπτονται. Αυτή η κατάσταση μπορεί να περιγραφεί από το μοντέλο Hubbard [Hub6338], το οποίο περιέχει έναν όρο για το φαινόμενο σήραγγας και προβλέπει ότι τα ηλεκτρόνια αλληλεπιδρούν μέσω μιας σύζευξης του Heisenberg που περιγράφεται από τη χαμιλτονιανή

$$H_H = J \vec{S}_v \cdot \vec{S}_{v+1} \quad (3.41)$$

όπου  $S_v$  και  $S_{v+1}$  είναι οι καταστάσεις σπιν των δυο ηλεκτρονίων και  $J = 4t_0^2 / u$  είναι η σταθερά ανταλλαγής (για κβαντικά σημεία που είναι ασθενώς συζευγμένα). Η σταθερά ανταλλαγής εξαρτάται από την ενέργεια φάρτισης  $u$  (το καθαρά ηλεκτροστατικό μέρος της ενέργειας που

χρειάζεται για να προστεθεί ένα ηλεκτρόνιο) και από το  $t_0$  που αφορά στο φαινόμενο σήραγγας μεταξύ των δυο σημείων, η τιμή του οποίου μπορεί να μεταβληθεί ρυθμίζοντας το ύψος του φράγματος δυναμικού μεταξύ των δυο σημείων. Θέτοντας σε αλληλεπίδραση τα δυο σπιν για καλά καθορισμένο χρόνο (αυξομειώνοντας το φράγμα δυναμικού) τα δυο σπιν μπορούν να αντιμετωπιστούν ή ακόμα και να εναγκαλιστούν. Κατάλληλοι συνδυασμοί περιστοφών μονών σπιν με αλληλεπιδράσεις δυο σπιν μπορούν να αποδώσουν κάθε κβαντική πύλη [Los98].

Ο αντίστοιχος τελεστής χρονικής εξέλιξης είναι  $U_{EX}(t) = \exp[-i/4 J \vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_{n+1} t]$  [Los98], όπου το  $J$  θεωρείται σταθερό στο χρονικό διάστημα  $t$ . Ρυθμίζοντας κατάλληλα το χρονικό διάστημα  $t$ , η πύλη  $(SWAP)^\alpha$  προκύπτει άμεσα ως  $(SWAP)^\alpha \equiv U_{EX}(t) = (U_J)^\alpha$ :

$$(U_J)^\alpha = e^{-\frac{a}{4}i\pi} \begin{bmatrix} e^{i\pi\alpha/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left[\frac{a}{2}\pi\right] & i \sin\left[\frac{a}{2}\pi\right] & 0 \\ 0 & i \sin\left[\frac{a}{2}\pi\right] & \cos\left[\frac{a}{2}\pi\right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\pi\alpha/2} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

όπου  $a = -Jt/\pi$  και η βάση είναι η  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ . Σε αυτήν την αναπαράσταση οι δυο αντιπαράλληλες καταστάσεις σπιν  $|01\rangle$  και  $|10\rangle$  αναμιγνύονται, ενώ οι άλλες δυο καταστάσεις βάσης, οι  $|00\rangle$  και  $|11\rangle$ , αποκτούν μόνο μια γενική φάση. Η επιλογή του  $a$  έγινε λόγω του γεγονότος ότι για  $a=1/2$  η αλληλεπίδραση  $\sqrt{U_J}$  αντιστοιχεί στην πύλη  $\sqrt{SWAP}$  [Los98], η οποία αντιμετωπίζει τα δυο σπιν και προκαλεί το μέγιστο εναγκαλισμό τους. Η  $\sqrt{SWAP}$  έχει υλοποιηθεί πειραματικά [Pet05]. Οι περιστροφές μονού σπιν και η πύλη  $\sqrt{U_J}$  αποτελούν ένα γενικευμένο σύνολο κβαντικών πυλών, στο οποίο μπορεί να αναλυθεί κάθε λειτουργία. Η ακολουθία  $R_y^{(1)}(-\pi/2)R_x^{(1)}(\pi/2)R_x^{(2)}(-\pi/2)\sqrt{U_J}R_x^{(2)}(\pi)\sqrt{U_J}R_y^{(1)}(\pi/2)$  αποτελεί μια πύλη CNOT [Bla08] (ο άνω δείκτης εκφράζει σε ποιο από τα δυο qubit αναφέρεται η περιστροφή). Η  $\sqrt{U_J}$  μετασχηματίζει καθεμιά από τις δυο καταστάσεις  $|01\rangle$  και  $|10\rangle$  σε ένα ζεύγος Bell, γι' αυτό και αποτελεί μια πύλη εναγκαλισμού.

Η αρχικοποίηση του συστήματος πραγματοποιείται αρκετά εύκολα ψύχοντας το σύστημα ενώ παράλληλα εφαρμόζεται το σταθερό μαγνητικό πεδίο  $B$ , καταλήγοντας έτσι στην ευθυγράμμιση όλων των σπιν με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Το τελευταίο σημαντικό βήμα αφορά στην ανάγνωση της τελικής κατάστασης του qubit, δηλ. την μέτρηση της κατεύθυνσης του σπιν του μονού ηλεκτρονίου, ένα εγχείρημα δύσκολο αφού η μαγνητική ροπή του σπιν του ηλεκτρονίου είναι ένα πολύ μικρό μέγεθος. Εναλλακτικά,



για την πραγματοποίηση της ανάγνωσης των αποτελεσμάτων έχει προταθεί η διαδικασία μετατροπής του σπιν σε φορτίο (spin - to - charge conversion) [Los98]. Για να μετρηθεί το σπιν του πχ. κβαντικού σημείου 1, το επίπεδο Fermi  $E_F$  στην πηγή/απαγωγό θα πρέπει να ρυθμιστεί έτσι ώστε να βρίσκεται μεταξύ των δυο ενεργειακών επιπέδων του qubit,  $E_{|0\rangle} < E_F < E_{|1\rangle}$ . Έπειτα ανοίγει η πύλη μεταξύ των δυο κβαντικών σημείων: εάν το ηλεκτρόνιο του κβαντικού σημείου βρίσκεται στη διεγερμένη κατάσταση  $|1\rangle$ , μετά από μικρό χρονικό διάστημα θα μεταβεί μέσω του φαινομένου σήραγγας στο γειτονικό κβαντικό σημείο, το οποίο είναι ενεργειακά πιο ευνοϊκό. Εάν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη βασική του κατάσταση  $|0\rangle$  η παραπάνω μετάβαση είναι απαγορευμένη, αφού απαιτεί απορρόφηση επιπλέον ενέργειας. Η διαφορά στο φορτίο του κβαντικού σημείου, είτε πραγματοποιήθηκε μετάβαση μέσω φαινομένου σήραγγας είτε όχι, μπορεί να ανιχνευθεί μέσω πχ. μιας επαφής κβαντικής ακίδας που θα τοποθετηθεί πλησίον του προς μέτρηση κβαντικού σημείου [Elz04]. Μια παρόμοια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί μετρώντας τη διαφορά στο ρυθμό του χρόνου μετάβασης μέσω φαινομένου σήραγγας (tunneling rate), η οποία εξαρτάται από τη διαφορά των ενεργειών  $E_{|0\rangle}$  και  $E_{|1\rangle}$  [Han05]. Έτσι το πρόβλημα της μέτρησης του προσανατολισμού του σπιν έχει αντικατασταθεί από την πολύ ευκολότερη μέτρηση του φορτίου.

Το θεμελιώδες πλεονέκτημα στην κωδικοποίηση του qubit στο σπιν ηλεκτρονίου βρίσκεται στο γεγονός ότι το σπιν αλληλεπιδρά ασθενώς με το περιβάλλον (decoherence = dephasing + relaxation). Η απώλεια συνάφειας φάσης (η πιο γρήγορα διαδικασία από τις δυο για qubit σπιν ηλεκτρονίων), αφορά στην απώλεια της πληροφορίας της φάσης και κυρίως οφείλεται σε δυο διαδικασίες: στη αλληλεπίδραση σπιν – τροχιάς (spin – orbit interaction, SOI) [Kha01, Gol04, Woo02] και στην υπέρλεπτη υφή (hyperfine interaction) [Kha01, Erl02].

Η αλληλεπίδραση σπιν – τροχιάς προκύπτει για κινούμενα ηλεκτρόνια, τα οποία αισθάνονται ένα τοπικά μεταβλητό ηλεκτρικό δυναμικό ως ένα ενεργό μαγνητικό πεδίο, το οποίο επιδρά στη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου και προκαλεί τη λεγόμενη υφή στο ατομικό φάσμα. Η αλληλεπίδραση σπιν – τροχιάς παρουσιάστηκε από τον Dirac ως μια διόρθωση στη χαμιλτονιανή της εξίσωσης Schrödinger:

$$H_{SO} = \frac{\hbar}{4m_0c^2} (\nabla V) \times \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \quad (3.43)$$

όπου  $m_0$  είναι η μάζα του ελεύθερου ηλεκτρονίου,  $c$  η ταχύτητα του φωτός,  $V$  το δυναμικό,  $p$  η στροφορμή του ηλεκτρονίου και  $\sigma$  οι μήτρες Pauli.

Στα κβαντικά σημεία η αλληλεπίδραση σπιν – τροχιάς οφείλει την παρουσίαση της στο εξωτερικό δυναμικό του κρυσταλλικού πλέγματος που αντιλαμβάνονται τα ηλεκτρόνια (και οι οπές). Η μέση τιμή της στροφορμής ενός ηλεκτρονίου που βρίσκεται σε ένα κβαντικό σημείο είναι μηδέν κι έτσι η αλληλεπίδραση σπιν – τροχιάς δε συζεύγνει τα υποεπίπεδα ενός τροχιακού

$nl$  που έχουν υποστεί διαχωρισμό Zeeman:  $\langle nl \uparrow | H_{SO} | nl \downarrow \rangle = 0$ . Όμως η χαμιλτονιανή σπιν – τροχιάς συζεύγνει καταστάσεις διαφορετικού τροχιακού και σπιν:  $\langle n'l' \uparrow | H_{SO} | nl \downarrow \rangle \neq 0$  για  $n'l' \neq nl$ . Αυτό επανακανονικοποιεί την ενέργεια Zeemann (αλλάζει ο παράγοντας  $g$ ) και αυτές οι μικτές καταστάσεις συζεύγνυνται με μεταβολές του ηλεκτρικού πεδίου σε δεύτερη τάξη.

Σε πρώτη τάξη, η μίξη αυτή δεν οδηγεί σε απώλεια της συνάφειας φάσης. Η απώλεια της συνάφειας φάσης προκύπτει από την υπέρλεπτη υφή (μαγνητική αλληλεπίδραση στροφορμής του ηλεκτρονίου και πυρηνικού σπιν). Το πιο ευρέως διαδεδομένο υλικό που χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη ημιαγωγίων κβαντικών σημείων είναι το GaAs (IIIIV), το οποίο έχει μη μηδενική σύζευξη πυρηνικού μαγνητικού πεδίου. Παρόλο που το μαγνητικό πεδίο στον πυρήνα είναι μικρό, μπορεί να υπάρξει μια σχετική επίδραση του φαινομένου. Από μια ημικλασική σκοπιά, το πεδίο αυτό επιδρά ως ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο πέραν του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $B$ , αλλάζοντας έτσι το μέγεθος και την κατεύθυνση του πεδίου που αισθάνεται το ηλεκτρόνιο, με ένα μη ελεγχόμενο τρόπο.

Η χαλάρωση απαιτεί την απελευθέρωση ενέργειας στο περιβάλλον και μπορεί να προκλυθεί από την αλληλεπίδραση σπιν – τροχιάς αλλά και από την υπέρλεπτη υφή. Στην αλληλεπίδραση σπιν – τροχιάς η ευθύνη εντοπίζεται στα φωνόνια που προκαλούν διακυμάνσεις στο ηλεκτρικό πεδίο, οδηγώντας έτσι σε χαλάρωση μεταξύ των αναμεμιγμένων καταστάσεων που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Το φαινόμενο της υπέρλεπτης υφής καταστέλλεται για ισχυρά εξωτερικά μαγνητικά πεδία  $B$ .

Σε αντίθεση με το σπιν, είναι ευκολότερο να διαχειριστεί κανείς και να διαβάσει την τελική κατάσταση του φορτίου του ηλεκτρονίου, εάν το qubit κωδικοποιηθεί σε αυτόν το βαθμό ελευθερίας. Η ισχυρή όμως αλληλεπίδραση Coulomb οδηγεί σε διακυμάνσεις του φορτίου, οι οποίες προκαλούν έναν ευρέως διαδεδομένο θόρυβο στο περιβάλλον του ημιαγωγού. Αυτό οδηγεί σε χρόνους αποσυνέπειας της τάξεως των ns [Nak99, Hay03]. Ο χρόνος απώλειας συνάφειας φάσης όμως του σπιν εκτιμάται στο  $1\mu s$ ,  $T_2 \approx 1\mu s$ , και ο χρόνος χαλάρωσης  $T_1 \approx 1ms$  [Han07], δηλ. τέσσερις τάξεις μεγέθους μεγαλύτεροι. [Gol04].

Το σπιν ηλεκτρονίων κβαντικών σημείων θα είναι το σύστημα που θα μελετηθεί στο Κεφ. 4, όπου θα μελετηθούν αλγόριθμοι δημιουργίας εναγκαλισμένων καταστάσεων χρησιμοποιώντας τους βασικούς τελεστές  $R_{x/y}(\beta)$  και  $(U_J)^a$ .

## **Κεφάλαιο 4**

# **Εναγκαλισμένες Καταστάσεις Ηλεκτρονιακών Σπιν Εντοπισμένων σε Κβαντικά Σημεία**

### **4.1 Εισαγωγή**

Ο διμερής εναγκαλισμός (bipartite entanglement) αφορά σε μη κλασικές συσχετίσεις [Ein35, Bel64] δυο κβαντικών σωματιδίων, ενώ ο πολυμερής εναγκαλισμός (multipartite entanglement) αφορά σε μη κλασικές συσχετίσεις τριών ή περισσότερων σωματιδίων. Η μελέτη και η εφαρμογή του πολυμερούς εναγκαλισμού είναι πολύ λιγότερο κατανοητή [Hor09] σε σχέση με το διμερή εναγκαλισμό. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση του πολυμερούς εναγκαλισμού δεν αρκεί μόνο να γνωρίζουμε εάν τα qubit είναι εναγκαλισμένα, αλλά απαραίτητη είναι και η γνώση του *πώς* είναι εναγκαλισμένα, αφού υπάρχουν διάφοροι τρόποι - γνωστοί ως κλάσεις εναγκαλισμού- με τους οποίους τρία ή περισσότερα qubit μπορούν να εναγκαλιστούν. Για τρία qubit υπάρχουν δυο διαφορετικής ισοδυναμίας κλάσεις γνήσιου εναγκαλισμού [Dur00], για τέσσερα qubit υπάρχουν εννιά [Ver02] ή οχτώ [Lam07], και ο αριθμός των κλάσεων αυξάνεται με το πλήθος των qubit. Δυο εναγκαλισμένες καταστάσεις ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας και ονομάζονται τοπικά ισοδύναμες εάν είναι δυνατός ο μετασχηματισμός μεταξύ τους χρησιμοποιώντας μόνο τοπικές πράξεις και κλασική μετάδοση (LOCC), δηλ. χωρίς αλληλεπιδράσεις ανάμεσα σε δυο ή περισσότερα qubit. Οι δυο κλάσεις εναγκαλισμού για τρία qubit είναι η GHZ- (Greenberger Horne Zeilinger) και η W- κλάση [Dur00,Aci01] με αντιπροσωπευτικά παραδείγματα τις καταστάσεις

$$|GHZ_3\rangle = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |W_3\rangle = \frac{|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle}{\sqrt{3}} \quad (4.1)$$

Για έναν μεγαλύτερο και τυχαίο αριθμό qubit οι καταστάσεις GHZ μπορούν να περιγραφούν ως μια υπέρθεση της κατάστασης όπου όλα τα υποσυστήματα βρίσκονται στην κατάσταση  $|0\rangle$  με την κατάσταση όπου όλα τα υποσυστήματα βρίσκονται στην κατάσταση  $|1\rangle$ . Η κατάσταση  $W$  των  $N$  qubit μπορεί να θεωρηθεί ως μια υπέρθεση των καταστάσεων στις οποίες το ένα qubit βρίσκεται στη διεγερμένη κατάσταση  $|1\rangle$  και όλα τα υπόλοιπα στη βασική κατάσταση  $|0\rangle$ . Η σημαντική ιδιότητα της κατάστασης  $W$  είναι ότι εάν υπάρξει απώλεια ενός qubit, τα εναπομείναντα  $N-1$  qubit εξακολουθούν να είναι εναγκαλισμένα, σε αντίθεση με την κατάσταση GHZ που διασπάται μετά την απώλεια ενός qubit.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα κλάση εναγκαλισμού για τέσσερα ή περισσότερα qubit είναι η κλάση cluster [Bri01], η οποία αποτελεί τη βάση για τη δημιουργία κβαντικών υπολογιστών “one way” [Rau01] και για τέσσερα qubit είναι

$$|\varphi_4\rangle = \frac{|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle}{2} \quad (4.2)$$

Ο εναγκαλισμός λοιπόν πολλών qubit δεν είναι μια επέκταση του διμερούς εναγκαλισμού κι επιφέρει νέα φαινόμενα, τα οποία βρίσκουν εφαρμογές σε διαδικασίες κβαντικών υπολογισμών, όπως για παράδειγμα τα κβαντικά πρωτόκολλα επικοινωνίας που απαιτούν πολυμερή εναγκαλισμό [Gro97, Laa96, Ben96]. Επίσης πολυμερείς καταστάσεις με υψηλό εναγκαλισμό είναι απαραίτητες για αποδοτικούς κβαντικούς υπολογισμούς. Όλοι οι γνωστοί κβαντικοί αλγόριθμοι, όπως πχ. του Shor [Sho97] ή του Grover [Gro96], δουλεύουν με πολυμερή εναγκαλισμό, και οι GHZ καταστάσεις μπορούν να συντελέσουν στη σύνθεση ενός καθολικού κβαντικού υπολογιστή [Got99]. Επιπροσθέτως, εναγκαλισμένες καταστάσεις πολλών qubit παρέχουν ένα ισχυρότερο τεστ της τοπικής πραγματικότητας [Mer90], το οποίο βασίζεται σε ξεχωριστά αποτελέσματα μετρήσεων παρά σε στατιστικά αποτελέσματα, όπως στην περίπτωση των δυο qubit. Μπορεί λοιπόν να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι όσο περισσότερα qubit βρίσκονται σε εναγκαλισμό, τόσο πιο σαφείς είναι οι μη κλασικές συνέπειες και τόσο πιο ικανές είναι οι εναγκαλισμένες καταστάσεις για την πραγματοποίηση κβαντικών υπολογισμών.

Μέχρι στιγμής έχει πραγματοποιηθεί μια σειρά από πειραματικές προσεγγίσεις του πολυμερούς εναγκαλισμού, χρησιμοποιώντας NMR υγρής κατάστασης [Laa98], φωτόνια [Bou99, Pan00, Eib04, Pan01, Kie07, Zha04, LuZ07], ψυχρά άτομα [Rau00, Man03] και ιόντα [Sac00, Lei04, Roo04]. Οι τελευταίες εργασίες σε παγιδευμένα ιόντα έχουν παρουσιάσει ντετερμινιστικές δημιουργίες καταστάσεων GHZ και  $W$ . Τριμερής και ανώτερης τάξης πολυμερής εναγκαλισμός δεν έχει ακόμα πραγματοποιηθεί πειραματικά για qubit που βρίσκονται σε περιβάλλον στερεάς κατάστασης. Αυτή η κατηγορία qubit, όπως πχ. ηλεκτρόνια περιορισμένα σε κβαντικά σημεία [Elz05b] ή υπεραγώγιμες επαφές Josephson [Wen05, Wen06,

Mak01] έχουν προσελκύσει το ενδιαφέρον αφού καθιστούν εύκολη την αυξομείωση των qubit. Έχουν προταθεί διάφορες απόψεις για τη δημιουργία τριμερών εναγκαλισμένων καταστάσεων, που αξιοποιούν πχ. εξιτονικές καταστάσεις κβαντικών σημείων [Qui99, Zha03], εναγκαλισμό ηλεκτρονίου – οπής στη θάλασσα Fermi [Bee04] κá.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα πλάνο για τη ντετερμινιστική δημιουργία GHZ, W- και cluster καταστάσεων για qubit ηλεκτρονικού σπιν σε κβαντικά σημεία χρησιμοποιώντας την αλληλεπίδραση δυο qubit (ανταλλαγή Heisenberg) και περιστροφές μονού σπιν, όπως έχει προταθεί από τους *F.Bodoky et.al.* [Bod07]. Στην επιλογή του συγκεκριμένου συστήματος των *F.Bodoky et.al.* οδήγησε το γεγονός ότι και οι περιστροφές μονού σπιν αλλά και οι αλληλεπιδράσεις δυο qubit έχουν πραγματοποιηθεί πειραματικά [Kor06, Pet05]. Στις παραγράφους που ακολουθούν αποδεικνύεται ότι ο απαιτούμενος αριθμός των αλληλεπιδράσεων δυο qubit για τη δημιουργία N-μερών εναγκαλισμένων καταστάσεων και για το μετασχηματισμό από μια μη εναγκαλισμένη σε μια μέγιστα εναγκαλισμένη βάση αυξάνεται γραμμικά με το N για όλους τους τύπους εναγκαλισμένων καταστάσεων που συζητώνται στην παρούσα εργασία.

## 4.2.Δημιουργία εναγκαλισμένων καταστάσεων N-qubit

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφεται η δημιουργία εναγκαλισμένων καταστάσεων N-qubit σε μια σειρά κβαντικών σημείων, όπου κάθε σημείο καταλαμβάνεται από ένα ηλεκτρόνιο, με τη χρήση περιστοφών μονού qubit συνδυασμένων με ζεύγη αλληλεπιδράσεων ανταλλαγής μεταξύ γειτονικών κβαντικών σημείων. Ξεκινώντας από τη βασική κατάσταση, η οποία αποτελείται από N μη εναγκαλισμένα σπιν ‘άνω’  $|000\dots0\rangle$ , και εφαρμόζοντας ακολουθίες περιστοφών μονού qubit καθώς και πράξεις  $(U_{\text{SWAP}})^a$  δύο qubit στη βασική αυτή κατάσταση, τελικά αποδίδονται N-μερείς GHZ-, W- και cluster καταστάσεις.

Για δυο qubit, η συντομότερη ακολουθία πράξεων που χρειάζεται για να μετασχηματιστεί η βασική κατάσταση  $|00\rangle$  σε μια μέγιστα εναγκαλισμένη κατάσταση είναι

$$\sqrt{U_J^{(1,2)}} R_k^{(i)}(\pi) \quad (4.3)$$

όπου k ένας τυχαίος άξονας στο επίπεδο των (x,y) και i=1,2. Επίσης η συντομότερη ακολουθία πράξεων που χρειάζεται για να πραγματοποιηθεί ο μετασχηματισμός της βάσης σε μια μέγιστα εναγκαλισμένη βάση που αποτελείται από ζεύγη Bell είναι [Vis06]

$$E_k^{(1,2,i)} = \sqrt{U_J^{(1,2)}} R_k^{(i)}(\pi) \sqrt{U_J^{(1,2)}} \quad (4.4)$$

με  $i=1,2$ . Στη σχέση (4.4) χρειάζονται δυο μετασχηματισμοί  $\sqrt{U_J^{(1,2)}}$ , αφού ένας μόνο μετασχηματισμός  $\sqrt{U_J^{(1,2)}}$  δημιουργεί εναγκαλισμό των δυο από τις τέσσερις καταστάσεις βάσης. Δοθήςας μιας γραμμικής συστοιχείας κβαντικών σημείων, όπου το κάθε σημείο είναι κατειλημμένο από ένα σπιν qubit στην κατάσταση  $|0\rangle$  ή  $|1\rangle$ , μπορούν να δημιουργηθούν εναγκαλισμένες καταστάσεις τριών ή περισσότερων qubit από κατάλληλα δυνδιασμένες εφαρμογές της σχέσης (4.4). Επιπλέον, εφαρμόζοντας και τοπικές πράξεις μεταξύ των εφαρμογών της (4.4), μπορεί να καθοριστεί η κλάση εναγκαλισμού στην οποία θα ανήκουν οι τελικές εναγκαλισμένες καταστάσεις. Στις επόμενες παραγράφους θεωρούμε ότι ο άξονας  $k$  είναι ο  $x$  και ότι  $i=1$  στη σχέση (4.4) παραλείποντας έτσι τους δείκτες  $k$  και  $l$  στις σχέσεις, χωρίς κίνδυνο απώλειας της γενικότητας.

### 4.2.1. Καταστάσεις Cluster

Σύμφωνα με τον ορισμό, μια κατάσταση cluster προκύπτει από την εφαρμογή της αλληλεπίδρασης Ising

$$Z^{(n,n+1)}(\theta) = \exp\left[\frac{-i\theta}{4}(1-\sigma_z^{(n)})(1-\sigma_z^{(n+1)})\right] \quad (4.5)$$

με  $\theta=\pi$  (η λεγόμενη πύλη φάσης  $z$ ) σε κάθε γειτονικό qubit σε μια αλληλουχία  $N$ -qubit που βρίσκονται στην κατάσταση  $\otimes_{i=1}^N (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ . Η πύλη φάσης  $z$  μπορεί να δημιουργηθεί σε κβαντικά σημεία ως [Los98]

$$Z^{(n,n+1)} = R_z^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)R_z^{(n+1)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{U_J^{(n,n+1)}}R_z^{(n)}(\pi)\sqrt{U_J^{(n,n+1)}} \quad (4.6)$$

Για να δημιουργηθεί η κατάσταση cluster σε qubit κβαντικών σημείων θα πρέπει να εφαρμοστεί η παραπάνω σχέση (4.6) σε κάθε ζεύγος qubit που ήδη βρίσκονται στην κατάσταση

$1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle) = R_y\left(\frac{\pi}{2}\right)|0\rangle$ . Θα πρέπει δηλ. να εφαρμοστεί η σχέση

$$Z^N \equiv Z^{(N,N-1)} \dots Z^{(1,2)} R_y^{(N)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \dots R_y^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (4.7)$$

Επίσης όπως φαίνεται από τη σχέση (4.4), η διαδοχική εφαρμογή της σε μια σειρά από  $N$  μη εναγκαλισμένα qubit, που το καθένα βρίσκεται στην κατάσταση  $|0\rangle$  ή  $|1\rangle$ , καταλήγει στη

δημιουργία μιας cluster εναγκαλισμένης κατάστασης των N-qubit. Στην παράγραφο αυτή θα αποδειχτεί ότι η εφαρμογή της ακολουθίας μετασχηματισμών

$$E_{CL}^N \equiv E^{(N-1,N)} \dots E^{(1,2)} \quad (4.8)$$

μετασχηματίζει μια τυχαία μη εναγκαλισμένη κατάσταση της βάσης των N-qubit σε μια κατάσταση cluster [Bod07], ότι δηλ. οι σχέσεις (4.7) και (4.8) είναι τοπικά ισοδύναμες. Η ακολουθία  $Z^N$  γράφεται:

$$Z^N = Z^{(N-1,N)} R_y^{(N)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \dots Z^{(2,3)} R_y^{(3)} \left( \frac{\pi}{2} \right) Z^{(1,2)} R_y^{(2)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_y^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.9)$$

Η σχέση (4.9) αποτελείται από N-1 εφαρμογές του τελεστή  $Z^{(n-1,n)} R_y^{(n)} (\pi/2)$  και μιας επιπλέον περιστροφής  $R_y^{(1)} (\pi/2)$ . Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$Z^{(1,2)} R_y^{(2)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_y^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) = R_y^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_x^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_y^{(2)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_x^{(2)} \left( -\frac{\pi}{2} \right) E^{(1,2)} \quad (4.10)$$

και αντικαθιστούμε την (4.10) στην (4.9).

$$Z^N = Z^{(N-1,N)} R_y^{(N)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \dots Z^{(2,3)} R_y^{(3)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_y^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_x^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_y^{(2)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_x^{(2)} \left( -\frac{\pi}{2} \right) E^{(1,2)}$$

Οι δυο τελεστές περιστροφής που δρουν στο πρώτο (1) qubit μετατίθενται με τους τελεστές που βρίσκονται αριστερά τους, αφήνοντας έτσι τους  $Z^{(2,3)} R_y^{(3)}$  να δράσουν στους  $R_y^{(2)} R_x^{(2)}$ . Η ταυτότητα τη (4.10) για τα τυχαία n, n+1 qubit γίνεται:

$$Z^{(n,n+1)} R_y^{(n+1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_y^{(n)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_x^{(n)} \left( -\frac{\pi}{2} \right) = R_y^{(n)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_y^{(n+1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_x^{(n+1)} \left( -\frac{\pi}{2} \right) E^{(n,n+1)} \quad (4.11)$$

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι με επαναληπτική αντικατάσταση της (4.11) στην (4.9) για αυξανόμενα n και μεταθέτοντας κάθε φορά κατάλληλα τους τελεστές έτσι ώστε οι τελεστές περιστροφής να συγκεντρωθούν αριστερά των τελεστών  $\sqrt{U_j}$ , τελικά καταλήγουμε στη σχέση:

$$Z^N = L E^{(N-1,N)} \dots E^{(1,2)} = L E_{CL}^N \quad (4.12)$$

όπου

$$L = R_y^{(N)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_x^{(N)} \left( -\frac{\pi}{2} \right) R_y^{(N-1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \dots R_y^{(2)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_y^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_x^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.13)$$

Εφόσον ο  $L$  δε μεταβάλλει την κλάση εναγκαλισμού της κατάστασης που δημιουργείται από το  $E_{CL}^N$ , έχει αποδειχτεί ότι η εφαρμογή του μετασχηματισμού  $E^N$  σε οποιαδήποτε κατάσταση της βάσης δημιουργεί μια κατάσταση cluster. Σύμφωνα με τις (4.4) και (4.12) χρειάζονται  $2(N-1)$  εφαρμογές του  $\sqrt{U_J}$  και  $(N-1)$  περιστροφές για να δημιουργηθεί μια  $N$ -μερής κατάσταση cluster, ενώ με τη χρήση του τελεστή  $Z^{(n, n+1)}$  χρειάζονταν  $(4N-3)$  περιστροφές [Los05].

Σημαντική ιδιότητα της πύλης φάσης  $z$  είναι ότι οι τελεστές  $Z^{(n, n+1)}$  (διαγώνιος) μετατίθενται για διαφορετικό  $n$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο μετασχηματισμός (4.7) από την κανονική βάση σε μια βάση cluster μπορεί να παραγματοποιηθεί σε δυο βήματα: πρώτα όλα τα άρτια (αριθμημέα) qubit υφίστανται συγχρόνως εναγκαλισμό με τους περιττούς τους γείτονες (δεξιά) κι έπειτα συμβαίνει το ίδιο και για τα περιττά qubit, δηλ.:

$$Z^{(N-1, N)} Z^{(N-3, N-2)} \dots Z^{(3, 4)} Z^{(1, 2)} Z^{(N-2, N-1)} \dots Z^{(2, 3)} R_y^{(N)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \dots R_y^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.14)$$

Εφόσον οι  $Z^{(n, n+1)}$  μετατίθενται για διαφορετικά  $n$ , η έκφραση (4.14) ισούται με το δεύτερο σκέλος της (4.9) και άρα ισούται και με την (4.12), δηλ.

$$Z^{(N-1, N)} Z^{(N-3, N-2)} \dots Z^{(1, 2)} Z^{(N-2, N-1)} \dots Z^{(2, 3)} R_y^{(N)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \dots R_y^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) = Z^N = L E_{CL}^N \quad (4.15)$$

Αντίστοιχα βήματα εναγκαλισμού με τον τελεστή  $E^N$  (μη διαγώνιος) θα έδιναν μια ακολουθία:

$$E^{(N-1, N)} E^{(N-3, N-2)} \dots E^{(3, 4)} E^{(1, 2)} E^{(N-2, N-1)} \dots E^{(2, 3)} \quad (4.16)$$

Οι τελεστές όμως  $E^{(n, n+1)}$  και  $E^{(n, n+2)}$  μετατίθενται:

$$\left[ E^{(n, n+1)}, E^{(n+1, n+2)} \right] = 0$$

κι επομένως η (4.16) πολλαπλασιασμένη με τις περιστροφές  $L$  θα ισούται με την (4.15). Είναι δηλ. εφικτό με τα ίδια βήματα εναγκαλισμού αλλά εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς  $E^N$  να δημιουργηθούν εναγκαλισμένες καταστάσεις cluster.

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι ακολουθίες τελεστών (4.8) και (4.16), που περιέχουν μόνο τελεστές εναγκαλισμού  $E^{(n, n+1)}$ , δημιουργούν μια κατάσταση τάξης cluster. Το ερώτημα όμως είναι εάν είναι δυνατή η δημιουργία της cluster αυτής κατάστασης με λιγότερους τελεστές, άρα και με λιγότερες πράξεις. Για να εξεταστεί αυτό θεωρούμε αρχικά τρία qubit. Εάν κατάσταση εκκίνησης είναι η βασική κατάσταση  $|000\rangle$ , τότε ο πρώτος τελεστής  $\sqrt{U_J}$  της σχέσης (4.8) μπορεί να παραληφθεί αφού οι εναπομείναντες τελεστές  $\sqrt{U_J^{(1,2)}} R_x^{(1)}(\pi)$  αρκούν για μέγιστο εναγκαλισμό των δυο πρώτων qubit. Εάν κατάσταση εκκίνησης είναι μια κατάλληλη διεγερμένη κατάσταση δε χρειάζεται επίσης η πρώτη περιστροφή. Έτσι υπολείπεται η ακολουθία  $\sqrt{U_J^{(1,2)}} R_x^{(1)}(\pi) \sqrt{U_J^{(1,2)}} \sqrt{U_J^{(2,3)}}$ . Ο υπολογισμός του μεγέθους του εναγκαλισμού  $\tau$  [Cof00] της εναγκαλισμένης κατάστασης που δημιουργείται, δείχνει ότι αυτή είναι η συντομότερη ακολουθία



τελεστών  $\sqrt{U_J}$  και περιστροφών μονού qubit που δημιουργεί μια 3-μερή κατάσταση cluster. Εάν παραληφθεί κάποιος από τους τέσσερις τελεστές, τότε  $t=0$  και η κατάσταση που δημιουργείται δεν είναι cluster. Γενικεύοντας για τυχαίο αριθμό qubit μπορεί να ειπωθεί ότι η παράληψη κάποιου τελεστή στις ακολουθίες (4.8) και (4.16) οδηγεί σε μια κατάσταση που δεν είναι κατάσταση cluster [Bri01].

## 4.2.2. Καταστάσεις Greenberger-Horn-Zeilinger (GHZ)

Αυτή η παράγραφος αφορά στο μετασχηματισμό μιας μη εναγκαλισμένης κατάστασης  $|00\dots0\rangle$  N-qubit σε μια κατάσταση GHZ N-qubit, χρησιμοποιώντας περιστροφές μονού qubit και τελεστές  $\sqrt{U_J}$ . Εάν η κατάσταση εκκίνησης είναι μια μη εναγκαλισμένη κατάσταση  $|000\dots0\rangle$  των N-qubit, τότε η N-μερής κατάσταση  $|GHZ_N\rangle = |00\dots0\rangle + |11\dots1\rangle$  (αγνοώντας εδώ την κανονικοποίηση) δημιουργείται από N – 2 εφαρμογές του τελεστή  $U_{CNOT}$  [Qin09]:

$$|GHZ_N\rangle = \left( \prod_{n=N-1}^2 U_{CNOT}^{(n,n+1)} \right) R_y^{(1)} \left( -\frac{\pi}{2} \right) R_x^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_x^{(2)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{U_J^{(1,2)}} R_y^{(1)} (\pi) |00\dots0\rangle \quad (4.17)$$

όπου  $U_{CNOT}^{(n,n+1)}$  είναι ο τελεστής  $U_{CNOT}$  με bit ελέγχου το n-qubit και bit στόχο το (n+1)-qubit. Η ακολουθία των τελεστών  $R_y^{(1)} \left( -\frac{\pi}{2} \right) R_x^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_x^{(2)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{U_J^{(1,2)}} R_y^{(1)} (\pi)$  στα πρώτα δυο qubit παράγει το ζεύγος Bell  $(1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$  και κάθε διαδοχική πύλη  $U_{CNOT}$  προσθέτει άλλο ένα εναγκαλισμένο qubit σε αυτήν την υπέρθεση, καταλήγοντας έτσι στην N-μερή κατάσταση GHZ,  $|GHZ_N\rangle$ . Η πιο σύντομη ακολουθία τελεστών που χρειάζονται για να υλοποιηθεί μια πύλη  $U_{CNOT}$ , χρησιμοποιώντας μόνο τελεστές περιστροφής μονού σπιν και τελεστές  $\sqrt{U_J}$ , είναι [Div00]:

$$U_{CNOT}^{(n,n+1)} = R_y^{(n)} \left( -\frac{\pi}{2} \right) R_x^{(n)} \left( -\frac{\pi}{2} \right) R_x^{(n+1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{U_J^{(n,n+1)}} R_x^{(n)} (\pi) \sqrt{U_J^{(n,n+1)}} R_y^{(n)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.18)$$

Αντικαθιστώντας την (4.18) στην (4.17), μεταφέρουμε αριστερά των τελεστών  $\sqrt{U_J}$  όλους τους τελεστές περιστροφής που μπορούν να μετατεθούν με την ακολουθία των τελεστών που βρίσκονται αριστερά τους και ορίζουμε:

$$\widetilde{U}_{CNOT}^{(n,n+1)} \equiv \sqrt{U_J^{(n,n+1)}} R_x^{(n)} \sqrt{U_J^{(n,n+1)}} R_y^{(n)} \left( \frac{\pi}{2} \right) R_x^{(n)} \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.19)$$

Η (4.17) γίνεται:

$$|GHZ_N\rangle = L \left( \prod_{n=N-1}^2 \widetilde{U}_{CNOT}^{(n,n+1)} \right) \sqrt{U_J^{(1,2)}} R_y^{(1)}(\pi) |00\dots 0\rangle, \quad N \geq 3 \quad (4.20)$$

όπου ο τελεστής L αποτελείται από περιστροφές μονού σπιν. Σύμφωνα με τη σχέση (4.20) χρειάζεται ένας αριθμός  $(2N - 3)$  τελεστών  $\sqrt{U_J}$  και τουλάχιστον  $(3N - 5)$  περιστροφές μονού σπιν για να μετασχηματιστεί η κατάσταση  $|00\dots 0\rangle$  σε N-μερή εναγκαλισμένη κατάσταση της κλάσης GHZ. Σε σύγκριση με τις καταστάσεις cluster, η δημιουργία μιας κατάστασης GHZ απαιτεί  $(2n - 4)$  περισσότερες περιστροφές μονού σπιν. Η πιο αποδοτική υλοποίηση της (4.20) μπορεί να πραγματοποιηθεί εφαρμόζοντας δυο τελεστές  $\sqrt{U_J}$  συγχρόνως, σε κάθε βήμα. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ξεκινώντας από το υπ' αριθμημόν qubit  $m=N/2$  που βρίσκεται στη μέση της αλληλουχίας των qubit (για άρτιο N, ή  $m=(N+1)/2$  για περιττό N) και αναδιατάσσοντας την ακολουθία της (4.20) ως εξής:

$$\left( \prod_{j=N-1}^{m+1} \widetilde{U}_{CNOT}^{(N-j+1, N-j)} \widetilde{U}_{CNOT}^{(j, j+1)} \right) \sqrt{U_J^{(m, m+1)}} R_y^{(m)}(\pi) |00\dots 0\rangle \quad (4.21)$$

Οι δυο δράσεις των τελεστών  $\widetilde{U}_{CNOT}$  μπορούν να εκτελεστούν ταυτόχρονα. Λόγω του γεγονότος ότι οι καταστάσεις GHZ είναι μέγιστα εναγκαλισμένες [Bri01], και με το σκεπτικό που ακολουθήθηκε και για τις καταστάσεις cluster, φαίνεται ότι το πλήθος των τελεστών  $\sqrt{U_J}$  και των περιστροφών μονού σπιν της σχέσης (4.20) είναι ο ελάχιστος δυνατός.

### 4.2.3. Καταστάσεις W

Η κατάσταση W για N-qubit είναι μια N-μερής εναγκαλισμένη κατάσταση της μορφής:

$$|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \underbrace{(|10\dots 0\rangle + |01\dots 0\rangle + \dots + |00\dots 1\rangle)}_N \quad (4.22)$$

Αποτελεί δηλ. μια υπέρθεση  $N$  καταστάσεων των  $N$ -qubit, όπου μεταξύ τους διαφέρουν στην τιμή ενός μόνο bit. Αυτή η παράγραφος αφορά στο δημιουργία μιας κατάστασης  $|W_N\rangle$  με τη χρήση του ελάχιστου αριθμού περιστροφών μονού qubit και τελεστών  $\sqrt{U_J}$ , ξεκινώντας από  $N$  μη εναγκαλισμένα qubit στην κατάσταση  $|00\dots 0\rangle$ .

Για τη δημιουργία αυτής της κατάστασης  $|W_N\rangle$  θα πρέπει ξεκινώντας από τη βασική κατάσταση  $|00\dots 0\rangle$  να μεταβληθεί η τιμή ενός qubit σε '1' κι έπειτα να διαμοιραστεί η τιμή αυτή και στα υπόλοιπα qubit έτσι ώστε κάθε qubit να διεγείρεται κατά ένα κλάσμα  $1/N$ . Περιστρέφοντας το πρώτο qubit (1) και στη συνέχεια εφαρμόζοντας την αλληλεπίδραση  $(U_{SWAP})^\alpha$  στα qubit 1 και 2, καταλήγουμε στο κλάσμα του πρώτου qubit να είναι  $\cos[\alpha/2]$ . Άρα για να διεγερθεί το πρώτο qubit με κλάσμα  $1/N$ , το  $\alpha$  θα πρέπει να είναι  $\alpha = 2 \arccos\left[\sqrt{1/N}\right]$ . Εφαρμόζοντας τα παραπάνω σε όλα τα qubit καταλήγουμε:

$$|W_N\rangle = J^{(N-1,N)}(\mu_{N-1}) \dots J^{(1,2)}(\mu_1) R_y^{(1)}(\pi) \quad (4.23)$$

$$\text{με } \mu_n = \frac{2}{\pi} \arccos\left[\sqrt{\frac{1}{N-n+1}}\right],$$

όπου  $J^{(n,n+1)}(\mu)$  αναπαριστά την πύλη  $(U_{SWAP})^\mu$  που δρα άνω στα qubit  $n$  και  $(n+1)$ .

Η υλοποίηση της (4.23) μπορεί να πραγματοποιηθεί εφαρμόζοντας την ίδια λογική που χρησιμοποιήθηκε και στις καταστάσεις GZH, ξεκινώντας δηλ. από το qubit που βρίσκεται στο μέσω της αλληλουχίας των qubit κι εφαρμόζοντας δυο τελεστές  $\sqrt{U_J}$  προς τις δυο κατευθύνσεις συγχρόνως. Στην περίπτωση του άρτιου αριθμού qubit, περιστρέφεται το qubit υπ' αριθμόν  $m=N/2$ , δρα ο τελεστής  $J^{(m,m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)$  και στη συνέχεια η διαδικασία συνεχίζεται δρώντας ουσιαστικά σε δυο ανεξάρτητες αλληλουχίες qubit μήκους  $m$ . Στην περίπτωση περιττού αριθμού qubit, περιστρέφεται το qubit υπ' αριθμόν  $m=(N+1)/2$ , δρα ο τελεστής  $J^{(m,m+1)}\left(2 \arccos\left[\sqrt{m/N}\right]\right)$  και στη συνέχεια η διαδικασία συνεχίζεται δρώντας ουσιαστικά σε δυο ανεξάρτητες αλληλουχίες qubit μήκους  $m$  (αριστερά και  $m+1$  (δεξιά). Έτσι το απαιτούμενο πλήθος τελεστών που χρειάζεται για να μετασχηματιστεί η κατάσταση  $|00\dots 0\rangle$  σε  $N$ -μερή κατάσταση  $W$  αποτελείται από  $(N-1)$  τελεστές  $(U_{SWAP})^\mu$  και μια περιστροφή.

### 4.3. Πιστότητα

Στη μέχρι τώρα συζήτηση θεωρήθηκε ότι υπάρχει ο πλήρης έλεγχος των λειτουργιών ενός και δυο qubit, ότι δηλ. η διάρκεια των παλμών του μαγνητικού πεδίου είναι σταθερή, απόλυτα ελεγχόμενη και καλά καθορισμένη. Σε ένα φυσικό σύστημα όμως δεν είναι δυνατή η άψογη λειτουργία, αλλά θα υπάρχουν ατέλειες στη λειτουργία της πύλης  $(U_{SWAP})^\alpha$  και των περιστροφών των μονών qubit με συνέπειες στις τελικές εναγκαλισμένες καταστάσεις. Οι ατέλειες αυτές μπορούν να εκφραστούν ως μια πολύ μικρή παράμετρος  $\varepsilon$  που επιδρά στη λειτουργία του τελεστή  $\sqrt{U_J} \rightarrow (U_{SWAP})^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}$  και, ομοίως, ως μια άλλη πολύ μικρή παράμετρος  $\delta$  που επηρεάζει τον τελεστή περιστροφής  $R(\pi) \rightarrow R(\pi + \delta)$ , όπου  $|\varepsilon| \ll 1/2$  και  $|\delta| \ll \pi$ . Μέτρο των επιδράσεων των σφαλμάτων  $\varepsilon$  και  $\delta$  αποτελεί η πιστότητα  $F$  (fidelity) [Nie00], η οποία περιγράφει την επικάλυψη της επιθυμητής ('τέλειας') κατάστασης  $|\varphi_N\rangle$  με την πραγματική (υπό την παρουσία σφαλμάτων) κατάσταση  $|\tilde{\varphi}_N\rangle$ :

$$F \equiv \sqrt{\langle \varphi_N | \tilde{\varphi}_N \rangle \langle \tilde{\varphi}_N | \varphi_N \rangle} \quad (4.24)$$

Οι καταστάσεις cluster  $|\varphi_N\rangle$  και  $|\tilde{\varphi}_N\rangle$  είναι οι

$$|\varphi_N\rangle = E^{(N-1,N)} \dots E^{(1,2)} |00\dots 0\rangle \quad \text{και} \quad |\tilde{\varphi}_N\rangle = E^{(\tilde{N}-1,N)} \dots E^{(\tilde{1},2)} |00\dots 0\rangle \quad (4.25)$$

Οι τελεστές  $(U_{SWAP})^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}$  και  $R(\pi + \delta)$  αναλυτικά γράφονται:

$$(U_{SWAP})^{\frac{1}{2}+\varepsilon} = e^{-\frac{i\pi}{4}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} \begin{bmatrix} e^{\frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right] & i \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right] & 0 \\ 0 & i \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right] & \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$R_x(\pi + \delta) = \begin{bmatrix} \cos\left[\frac{\pi + \delta}{2}\right] & 0 & -i \sin\left[\frac{\pi + \delta}{2}\right] & 0 \\ 0 & \cos\left[\frac{\pi + \delta}{2}\right] & 0 & -i \sin\left[\frac{\pi + \delta}{2}\right] \\ -i \sin\left[\frac{\pi + \delta}{2}\right] & 0 & \cos\left[\frac{\pi + \delta}{2}\right] & 0 \\ 0 & -i \sin\left[\frac{\pi + \delta}{2}\right] & 0 & \cos\left[\frac{\pi + \delta}{2}\right] \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Αφού  $|\varepsilon| \ll 1/2$  και  $|\delta| \ll \pi$ , γράφουμε αναλυτική τις (4.26) και (4.27) σε ορους 2<sup>ης</sup> τάξης

$$\exp\left[\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{2}\varepsilon\right] = \exp\left[\frac{i\pi}{4}\right] \left(1 + \frac{i\pi\varepsilon}{2} + \frac{\left(\frac{i\pi\varepsilon}{2}\right)^2}{2!}\right) = c \left(1 + iA - \frac{A^2}{2}\right) \quad (4.28)$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right] = \sin\left[\frac{\pi}{4}\right] \cos\left[\frac{\pi}{2}\varepsilon\right] + \cos\left[\frac{\pi}{4}\right] \sin\left[\frac{\pi}{2}\varepsilon\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + A - \frac{A^2}{2}\right) \quad (4.29)$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon\right] = \cos\left[\frac{\pi}{4}\right] \cos\left[\frac{\pi}{2}\varepsilon\right] - \sin\left[\frac{\pi}{4}\right] \sin\left[\frac{\pi}{2}\varepsilon\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - A - \frac{A^2}{2}\right) \quad (4.30)$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}\right] = \sin\left[\frac{\pi}{2}\right] \cos\left[\frac{\delta}{2}\right] + \cos\left[\frac{\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{\delta}{2}\right] = 1 - \frac{B^2}{2} \quad (4.31)$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2}\right] \cos\left[\frac{\delta}{2}\right] - \sin\left[\frac{\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{\delta}{2}\right] = -B \quad (4.32)$$

$$\text{με } c = \exp\left[\frac{i\pi}{4}\right], \quad A \equiv \frac{\pi\varepsilon}{2}, \quad B \equiv \frac{\delta}{2}.$$

Με χρήση των σχέσεων (4.26) – (4.32) κατασκευάζουμε τον ‘πραγματικό’ τελεστή εναγκαλισμού

$\tilde{E}$  με όρους μέχρι 2<sup>ης</sup> τάξης για τις παραμέτρους  $\varepsilon$  και  $\delta$ :

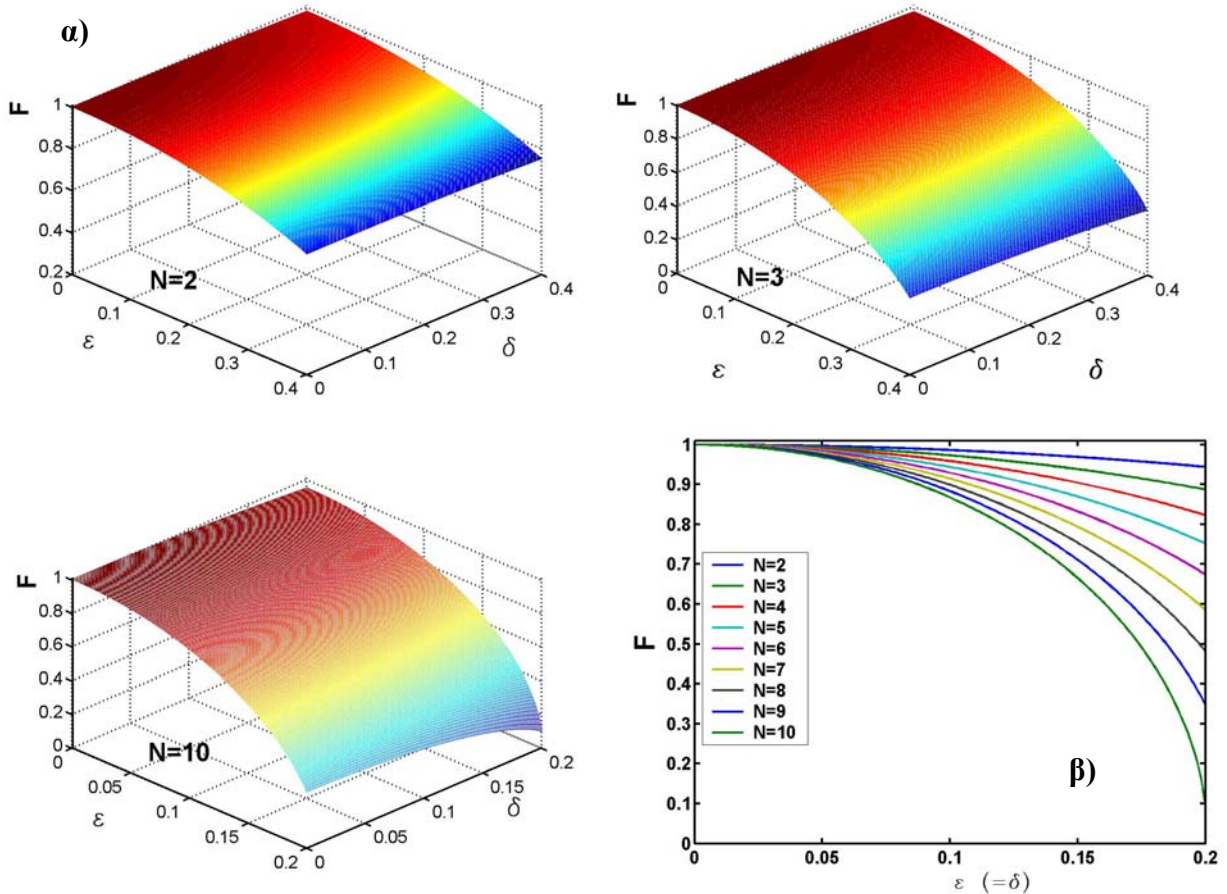
$$\begin{aligned}
\tilde{E} &\equiv (U_{SWAP})^{1/2+\varepsilon} R_x^{(1)}(\pi + \delta) (U_{SWAP})^{1/2+\varepsilon} = \\
&= \begin{bmatrix}
-c(1+2iA)B & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1+(1+i)A - (1-i)A^2 - \frac{B^2}{2} \right] & \dots \\
\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1+(1+i)A - (1-i)A^2 - \frac{B^2}{2} \right] & -2c^3 AB & \dots \\
\frac{-i}{\sqrt{2}} \left[ 1-(1-i)A - (1+i)A^2 - \frac{B^2}{2} \right] & -cB & \dots \\
0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \left[ 1-(1-i)A - (1+i)A^2 - \frac{B^2}{2} \right] & \dots \\
\dots & \frac{-i}{\sqrt{2}} \left[ 1-(1-i)A - (1+i)A^2 - \frac{B^2}{2} \right] & 0 \\
\dots & -cB & \frac{-i}{\sqrt{2}} \left[ 1-(1-i)A - (1+i)A^2 - \frac{B^2}{2} \right] \\
\dots & -2c^3 AB & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1+(1+i)A - (1-i)A^2 - \frac{B^2}{2} \right] \\
\dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1+(1+i)A - (1-i)A^2 - \frac{B^2}{2} \right] & -c(1+2iA)B
\end{bmatrix} \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Υπολογίζοντας αυτές τις καταστάσεις και στη συνέχεια την πιστότητα F από τη (4.24) βρίσκουμε ότι είναι

$$F = \sqrt{1 - (N-1)A^2 - \frac{5N-9}{2}B^2}, \quad N \geq 3 \quad (4.34)$$

ενώ για N=2 είναι  $F = \sqrt{1 - A^2 - B^2}$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι η πιστότητα αυξάνεται με την τετραγωνική ρίζα του  $N^2$ , με τον αριθμό δηλ. των qubit.

Στην Εικ.4.1. παρουσιάζεται η πιστότητα ως συνάρτηση των παραμέτρων  $\varepsilon$  και  $\delta$  για την περίπτωση των τριών qubit. Έχει διαπιστωθεί ότι η (4.34) ισχύει έως N=10 και πιθανόν να ισχύει κάθε τιμή του N [Bod07]. Αυτό αποτελεί μια ένδειξη ότι η προτεινόμενη δημιουργία καταστάσεων cluster παράγει εναγκαλισμένες καταστάσεις cluster πολλών qubit με υψηλή πιστότητα. Παρόλο που η πιστότητα για τη δημιουργία πχ. N-μερών καταστάσεων GHZ είναι χαμηλή, λόγω του μεγαλύτερου πλήθους περιστοφών μονού qubit που απαιτούνται για να



**Εικόνα 4.1. α)** 3D απεικόνιση της ακρίβειας  $F$ , σχέση (4.34), για  $N=2,3$  και 10 qubit ως συνάρτηση των παραμέτρων  $\epsilon$  και  $\delta$ . **β)** Η ακρίβεια  $F$  ως συνάρτηση του  $\epsilon$  (εδώ επιλέχθηκε  $\delta=\epsilon$ ) για  $2 < N < 10$ .

μετασχηματιστεί μια βασική κατάσταση σε κατάσταση GHZ, οι καταστάσεις αυτές μπορούν να προσεγγιστούν πειραματικά, όπως συζητάται στην επόμενη παράγραφο.

#### 4.4. Δυνατότητα Πειραματικής Υλοποίησης

Έχει αποδειχτεί πειραματικά ότι η διάρκεια της εφαρμογής της πύλης  $\sqrt{U_J}$  σε δυο ηλεκτρονικά σπιν είναι  $\sim 180\text{ps}$  [Pet05] και μιας περιστροφής σπιν κατά  $\pi/2$  είναι  $\sim 27\text{ns}$  [Kor06]. Η εφαρμογή λοιπόν της ακολουθίας τελεστών (4.16) με σκοπό τη δημιουργία  $N$ -μερών καταστάσεων cluster με σύγχρονη εφαρμογή των τελεστών  $\sqrt{U_J}$  σε κάθε ζεύγος qubit απαιτεί χρόνο  $\sim 2 \times 50 = 100\text{ns}$  για κάθε  $N$ , εφόσον μια γραμμική αλληλουχία qubit μπορεί να γίνει εναγκαλισμένη σε δυο μόνο βήματα: πρώτα όλα τα άρτια αριθμημένα qubit με τα γειτονικά τους και στη συνέχεια ομοίως για τα περιττά αριθμημένα. Ο χρόνος που απαιτείται για τη δημιουργία

της N-μερούς κατάστασης GHZ (4.21) εξαρτάται από το πλήθος των qubit και εκτιμάται ότι είναι  $\sim \frac{N-1}{2} 100 \text{ ns}$ .

Ο περιοριστικός παράγοντας για την υλοποίηση αυτών των ακολουθιών τελεστών είναι ο χρόνος αποσυνέπειας  $T_2$ , ο οποίος μέχρι στιγμής δεν έχει μετρηθεί πειραματικά για ένα μόνο σπιν. Οι ταλαντώσεις Rabi για ένα μόνο ηλεκτρονικό σπιν [Kor06] έχουν παρατηρηθεί για περισσότερο από 1μs, υποδεικνύοντας έτσι ένα χρόνο αποσυνέπειας της τάξης  $T_2 \geq 1\mu s$ . Με βάση αυτήν την εκτίμηση του  $T_2$ , μπορεί να διατυπωθεί ο ισχυρισμός ότι η δημιουργία N-μερών καταστάσεων cluster και N-μερών καταστάσεων W είναι εφικτή για κάθε N σε χρόνο μικρότερο του  $T_2$ , ενώ η δημιουργία καταστάσεων GHZ είναι πραγματοποιήσιμη για πλήθος μέχρι  $\sim 10$  qubit [DiV00b]. Για να ξεπεραστεί αυτός ο περιορισμός, έχουν παρουσιαστεί προτάσεις με σκοπό την αντικατάσταση των 'αργών' περιστροφών από πιο 'γρήγορες' αλληλεπιδράσεις, αλλά απαιτούν την παρουσία συμπληρωματικών ('βοηθητικών') qubit κι έτσι αυξάνουν το πλήθος των απαιτούμενων qubit κατά έναν παράγοντα 3 [DiV00].



## **Κεφάλαιο 5**

### ***Εναγκαλισμένες Καταστάσεις Ηλεκτρονιακών Σπιν σε Κβαντικά Σημεία υπό την Επίδραση της Αποσυνέπειας (Decoherence)***

Σε αυτήν την παράγραφο διερευνάται η εξέλιξη εναγκαλισμένων καταστάσεων υπό την επίδραση της αποσυνάπειας (decoherence) [Han07]. Παρουσιάζονται τρόποι για την ανίχνευση του εναγκαλισμού καθώς επίσης και μια εκτίμηση της χρονικής διάρκειάς του, πριν την κατάρρευσή του λόγω της αποσυνέπειας. Επίσης πραγματοποιείται μια εκτίμηση του χρόνου ζωής των πολυμερών εναγκαλισμένων καταστάσεων GHZ και W καθώς και του πλήθους των εναγκαλισμένων qubit που μπορούν να δημιουργηθούν και να ανιχνευθούν πειραματικά για τους ήδη γνωστούς χρόνους αποσυνέπειας.

#### **5.1 Εισαγωγή**

Στην παρακάτω διερεύνηση η αποσυνέπεια θεωρείται τοπική, ότι δηλ. τα qubit υφίστανται αποσυνέπεια με έναν μη συσχετισμένο τρόπο, όπως πράγματι συμβαίνει στα νανοσυστήματα στερεάς κατάστασης, πχ. qubit ηλεκτρονιακού σπιν σε κβαντικά σημεία που εξετάζονται στην παρούσα εργασία [Han07].

Η αποσυνέπεια είναι αποτέλεσμα μη ελεγχόμενων αλληλεπιδράσεων μεταξύ των qubit και του περιβάλλοντος [Sch05]. Αυτή η επίδραση χαρακτηρίζεται από δυο χρόνους, το χρόνο  $T_1$  κατά τον οποίο η διεγερμένη κατάσταση  $|1\rangle$  μεταβαίνει και αποδιεγείρεται στη βασική κατάσταση  $|0\rangle$  ανταλλάσσοντας ενέργεια με το περιβάλλον (χρόνος χαλάρωσης/relaxation time) και το χρόνο  $T_2$  κατά τον οποίο δημιουργείται μια τυχαιότητα στη φάση (χρόνος απώλειας της συνάφειας φάσης/dephasing time) [Eng02]. Για τα qubit ηλεκτρονικού σπιν σε κβαντικά σημεία ο χρόνος απώλειας της συνάφειας φάσης είναι πολύ μικρότερος από το χρόνο χαλάρωσης,  $T_2 \ll T_1$ , και συνεπώς έχει τον κυριότερο ρόλο στην απώλεια των κβαντικών συσχετισμών του συστήματος.

Όπως έχει περιγραφεί σε προηγούμενες παραγράφους, η αρχική ιδέα υλοποίησης qubit ηλεκτρονικών σπιν εντοπισμένων σε κβαντικά σημεία ανήκει στους Loss & DiVincenzo [Los98], σύμφωνα με την οποία μονήρη ηλεκτρόνια υφίστανται κβαντικό περιορισμό σε κβαντικά σημεία και στη συνέχεια η εφαρμογή ενός μαγνητικού πεδίου άρει τον εκφυλισμό των καταστάσεων με σπιν άνω και σπιν κάτω, δημιουργώντας έτσι το σύστημα δυο καταστάσεων που χρειάζεται ένα qubit. Δυο qubit ηλεκτρονικού σπιν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω της σύζευξης Heisenberg, η οποία μπορεί να ρυθμιστεί μεταβάλλοντας το φράγμα δυναμικού μεταξύ των δυο γειτονικών κβαντικών σημείων [Pet05]. Οι λειτουργίες μονού qubit βασίζονται στο συντονισμό ηλεκτρονικού σπιν (ESR) και μπορούν να πραγματοποιηθούν με την εφαρμογή τοπικών ηλεκτρικών ή μαγνητικών πεδίων [Kor06, Now07].

Η αποσυνέπεια (αλληλεπίδραση με το περιβάλλον) οφείλεται κυρίως σε δυο διαδικασίες, στη σύζευξη σπιν – τροχιάς και στην υπέρλεπτη υφή [Han07]. Η σύζευξη σπιν – τροχιάς δεν έχει άμεση επίδραση στο σπιν του ηλεκτρονίου (αφού το ηλεκτρόνιο δεν κινείται), αλλά προκαλεί μια μίξη του σπιν και των τροχιακών βαθμών ελευθερίας [Kha01]. Στα κβαντικά σημεία, πχ. GaAs, η αλληλεπίδραση σπιν – τροχιάς εκτιμάται τόσο θεωρητικά [Gol04] όσο και πειραματικά [Zum02, Mil03] ότι είναι πολύ ασθενής σε σύγκριση με την υπέρλεπτη υφή, η οποία καθίσταται καθοριστική πηγή της απώλειας συνάφειας φάσης.

Εάν τα άτομα του προς μελέτη ημιαγωγίου υλικού, πχ. GaAs, έχουν μη μηδενική πυρηνική μαγνητική στροφορμή, τότε το ηλεκτρονικό σπιν  $\mathbf{S}$  αλληλεπιδρά με τα πυρηνικά σπιν μέσω της αλληλεπίδρασης υπέρλεπτης υφής [Abr61]. Η χαμιλτονιανή ενός τέτοιου συστήματος είναι [Kha02, Mer02]

$$H_{hf} = b_0 S_z + \varepsilon_{nz} I_z + \hbar \cdot \vec{S} \quad (5.1)$$

όπου  $b_0 = g^* \mu_B B_0$  ( $\varepsilon_{nz} = g_I \mu_n B_0$ ) είναι ο διαχωρισμός Zeeman για το ηλεκτρόνιο (πυρήνα),  $\mu_B$  ( $\mu_n$ ) το (πυρηνικό) μαγνητόνιο Bohr ( $\mu_n \ll \mu_B$ ) και  $g^*$  ( $g_I$ ) ο ενεργός παράγοντας Lande του

ηλεκτρονίου (πυρήνα), ο οποίος για το GaAs έχει την τιμή  $g^* = -0.44$ . Επίσης,  $I_z = \sum_{k=0}^{n-1} I_z^k$  είναι

το άθροισμα όλων των πυρηνικών σπιν  $I^k$  στη z συνιστώσα και  $\vec{h} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k I_k$  το κβαντικό

πεδίο των πυρήνων που επιδρά στο σπιν του ηλεκτρονίου, όπου n είναι ο αριθμός των πυρήνων των οποίων η κυματοσυνάρτηση επικαλύπτεται με την κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου (n ~ 10<sup>5</sup> για συνήθη κβαντικά σημεία) και A<sub>k</sub> δηλώνει την ισχύ της αλληλεπίδρασης μεταξύ του k – οστού πυρήνα και του ηλεκτρονίου. Εφόσον η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου είναι μηδενική εκτός του κβαντικού σημείου, δεν υπάρχει αλληλεπικάλυψη με τους πυρήνες έξω από το κβαντικό σημείο. Έτσι κάθε ηλεκτρόνιο αλληλεπιδρά με διαφορετική ‘δεξαμενή’ πυρήνων και η αποσυνέπεια είναι τελικά τοπική, όπως αναφέρθηκε αρχικά.

Για την περιγραφή της αποσυνέπειας λόγω της υπέρλεπτης υφής, το κβαντικό πεδίο των πυρηνικών σπιν μπορεί να θεωρηθεί ως ένα επιπρόσθετο μαγνητικό πεδίο, το πεδίο Overhauser, αντικαθιστώντας  $g^* \mu_B B_n \equiv h$ . Η μέγιστη τιμή που μπορεί νς φτάσει αυτό το πεδίο στο GaAs είναι  $B_{\max} \equiv 5T$  [Pag77]. Υπό την παρουσία ασθενών εξωτερικών μαγνητικών πεδίων, το πεδίο Overhauser υφίσταται γκαουσιανές διακυμάνσεις γύρω από μια μέση τιμή  $B_{\max} / \sqrt{n}$  [Kha02, Mer02, Bra05, Kor05, Tay07]. Έτσι το ηλεκτρόνιο αισθάνεται ένα συνολικό μαγνητικό πεδίο, το οποίο αποτελείται από το άθροισμα του ελεγχόμενου εξωτερικού πεδίου  $\mathbf{B}_0$  και του τυχαίου πεδίου Overhauser  $\mathbf{B}_n$ . Η z συνιστώσα  $B_n^z$  (παράλληλη στο  $\mathbf{B}_0$ ) μεταβάλλει τη συχνότητα μετάπτωσης του ηλεκτρονιακού σπιν κατά  $h_z = g^* \mu_B B_n^z$ . Οι δυο κάθετες συνιστώσες  $B_n^{x,y}$  μεταβάλλουν τη συχνότητα μετάπτωσης κατά  $\approx g^* \mu_B (B_n^{x,y})^2 / B_0$ . Αυτό το τυχαίο πυρηνικό μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου: δυο πυρήνες με διαφορετική ισχύ σύζευξης A<sub>k</sub> μπορούν να ανταλλάξουν σπιν, οδηγώντας έτσι σε μεταβολή του πεδίου Overhauser. Οι διακυμάνσεις αυτές της τιμής του πεδίου B<sub>n</sub> έχουν μια διάρκεια 10 – 100 μs (για ασθενές εξωτερικό πεδίο) [Shu58], η οποία όμως εκτιμάται ότι μπορεί να επεκταθεί σε μερικά sec έως και min (γιν ισχυρό εξωτερικό πεδίο) [Hut04].

Ο χρόνος απώλειας της συνάφειας φάσης T<sub>2</sub> δεν έχει μετρηθεί ακόμα. Η πειραματική μέτρηση του T<sub>2</sub> παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες, αφού δεν είναι εφικτή η μέτρηση του αρχικού προσανατολισμού και ισχύος του πυρηνικού πεδίου με ικανοποιητική ακρίβεια. Έχουν πραγματοποιηθεί όμως εκτιμήσεις οι οποίες προβλέπουν χρόνους T<sub>2</sub> ~ 1 – 100 μs, όπως πχ. η τεχνική αντήχησης Hahn (Hahn echo technique) η οποία εξάγει T<sub>2</sub> = 10 μs [116, 42].

Η χαλάρωση σε ένα qubit ηλεκτρονιακού σπιν είναι αποτέλεσμα των ίδιων διαδικασιών που προκαλούν και την απώλεις συνάφειας φάσης: της αλληλεπίδρασης σπιν – τροχιάς και της υπέρλεπτης υφής. Η απαιτούμενη ενέργεια ώστε η αλληλεπίδραση σπιν – τροχιάς να αναστέψει το ηλεκτρονιακό σπιν παρέχεται από τα φωνόνια του κρυσταλλικού πλέγματος και μπορεί να υπολογιστεί ως συνάρτηση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου B<sub>0</sub> [Kha01]. Η συνεισφορά της υπέρλεπτης υφής στη χαλάρωση έγκειται στην ανταλλαγή των σπιν ηλεκτρονίου – πυρήνα.

Καθώς αυξάνεται το εξωτερικό πεδίο, αυξάνεται και η ενεργειακή διαφορά των καταστάσεων σπιν μεταξύ ηλεκτρονίου και πυρήνα και απαιτείται μεγαλύτερη απορρόφηση ενέργειας από τα φωνόνια. Έτσι η χαλάρωση μπορεί να περιοριστεί με την εφαρμογή ενός ισχυρότερου εξωτερικού πεδίου. Ο χρόνος χαλάρωσης  $T_1$  έχει μετρηθεί πειραματικά στην περιοχή των 170ms (για  $B_0 = 1.75$  T) – 120  $\mu$ s (για  $B_0 = 14$  T) [Han03, Elz04].

Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφ. 3, σε ένα σχετικά απλοποιημένο μοντέλο αποσυνέπειας, οι χρόνοι  $T_1$  και  $T_2$  εισάγονται στον πίνακα του τελεστή πυκνότητας με τον  $T_1$  να επιδρά στα στοιχεία της διαγωνίου (περιγράφοντας την επίδραση της χαλάρωσης) και τον  $T_2$  στα στοιχεία εκτός της διαγωνίου (περιγράφοντας την απώλεια φάσης):

$$\frac{d\rho}{dt} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{T_1}\right)\rho_{11} & -\left(\frac{1}{T_2}\right)\rho_{12} \\ -\left(\frac{1}{T_2}\right)\rho_{21} & -\left(\frac{1}{T_1}\right)\rho_{22} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

με συνθήκη κανονικοποίησης την  $Tr[\rho(t)] = 1$ . Η σχέση (5.2) είναι ένα γενικό μοντέλο περιγραφής της αποσυνέπειας, χωρίς όμως να περιλαμβάνει πληροφορίες των κβαντικών διαδικασιών που πιθανόν να παίρνουν μέρος.

Όπως περιγράφηκε στο Κεφ.3., η (5.2) γράφεται με τη βοήθεια του φορμαλισμού Lindblad [Lin76]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = L\rho(t) = & \frac{\Gamma_1}{2} (2\sigma_+\rho\sigma_- - \sigma_-\sigma_+\rho - \rho\sigma_-\sigma_+) \\ & + \frac{\Gamma_2}{2} (2\sigma_s\rho\sigma_s - \sigma_s\sigma_s\rho - \sigma_s\sigma_s\rho) \end{aligned} \quad (5.3)$$

όπου  $\sigma_{\pm} = 1/2(\sigma_x \pm i\sigma_y)$  και  $\sigma_s = \sigma_+\sigma_-$  είναι παράγωγα των μητρών Pauli.

Συγκρίνοντας τις (5.2) και (5.3) βλέπουμε αμέσως ότι  $\Gamma_1 = 1/T_1$  και  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 1/T_2$ . Η χρονική εξέλιξη λοιπόν του τελεστή πυκνότητας για ένα qubit βρίσκεται επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση (5.3). Επεκτείνοντας το σύστημα σε περισσότερα qubit, η χρονική εξέλιξη του N-

μερούς qubit βρίσκεται επιλύοντας την  $L_N\rho(t) = d\rho/dt$  με  $L_N = \sum_{k=1}^N L_k$ , όπου  $L_k$  ο τελεστής Lindblad για το k – οστό qubit.

## 5.2. Δυο Qubit

Μια διαχωριζόμενη κατάσταση  $\rho_S$  (separable state) ορίζεται ως η κατάσταση εκείνη που μπορεί να γραφεί ως συνδυασμός γινομένων των καταστάσεων  $\rho_A$  και  $\rho_B$  των υποσυστημάτων A και B [Ein35, Sch35, Wer89] (στην περίπτωση των δυο qubit), δηλ.

$$\rho_S = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \quad (5.4)$$

με συνθήκη κανονικοποίησης την  $\sum_i p_i = 1$ . Εάν μια κατάσταση δεν μπορεί να γραφεί με αυτήν την μαθηματική έκφραση, τότε είναι εναγκαλισμένη ( $\rho_E$ ).

Ο τελεστής  $W$  αποτελεί τελεστή επιβεβαίωσης εναγκαλισμού (entanglement witness) [94, 95, 96, 97, 24] εάν πληροί τα ακόλουθα δυο κριτήρια:

- Για κάθε διαχωριζόμενη κατάσταση  $\rho_S$ , η αναμενόμενη τιμή του  $W$  είναι θετική:

$$\text{Tr}[W \rho_S] \equiv \langle W \rangle_{\rho_S} \geq 0 \quad \forall \rho_S$$

- Θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μια εναγκαλισμένη κατάσταση  $\rho_E$ , για την οποία η αναμενόμενη τιμή του  $W$  είναι αρνητική:

$$\text{Tr}[W \rho_E] \equiv \langle W \rangle_{\rho_E} < 0 \text{ για τουλάχιστον ένα } \rho_E.$$

Συνεπώς μια μέτρηση του  $\langle W \rangle$  με αρνητική τιμή επιβεβαιώνει την ύπαρξη της εναγκαλισμένης κατάστασης. Πειραματικά είναι εύκολη η μέτρηση των  $W$ , καθώς χρειάζονται πολύ λιγότερες διαδικασίες από πχ. την τομογραφία καταστάσεων (full state tomography) [Bra05, Cav06, Guh07, Eis07].

Οι τελεστές  $W$  που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία είναι [Bou04]:

$$W_\psi = c \mathbb{1} - |\psi\rangle\langle\psi| \quad (5.5)$$

Όπου η σταθερά  $c$  αντιπροσωπεύει τη μέγιστη αλληλεπικάλυψη μεταξύ της  $|\psi\rangle$  και κάθε διαχωριζόμενης κατάστασης. Από τη σκοπιά της φυσικής, ο  $W$  εκφράζει το γεγονός ότι εάν η κατάσταση  $\rho$  έχει πιστότητα (fidelity)  $F = \text{Tr}[\rho |\psi\rangle\langle\psi|]$  μεγαλύτερη του  $c$ , τότε η κατάσταση αυτή είναι εναγκαλισμένη.

Αρχικά θα διερευνηθεί η χρονική εξέλιξη της κατάστασης Bell [Ein35, Bel64]  $|\psi^-\rangle \equiv (|01\rangle - |10\rangle) / \sqrt{2}$ . Η επιλογή αυτής της κατάστασης Bell έγινε λόγω του ότι αποτελεί την βασική κατάσταση τού συστήματος των δυο ηλεκτρονιακών σπιν σε ένα κβαντικό σημείο [Han07]. Η κατάσταση αυτή λοιπόν είναι η απλούστερη εναγκαλισμένη κατάσταση που μπορεί να δημιουργηθεί σε κβαντικά σημεία.

Ο πίνακας πυκνότητας της κατάστασης αυτής είναι, σύμφωνα με τις σχέσεις (5.2) και (5.3):

$$\rho_{\psi^-}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2[1-\alpha(t)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(t) & -\beta(t) & 0 \\ 0 & -\beta(t) & \alpha(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

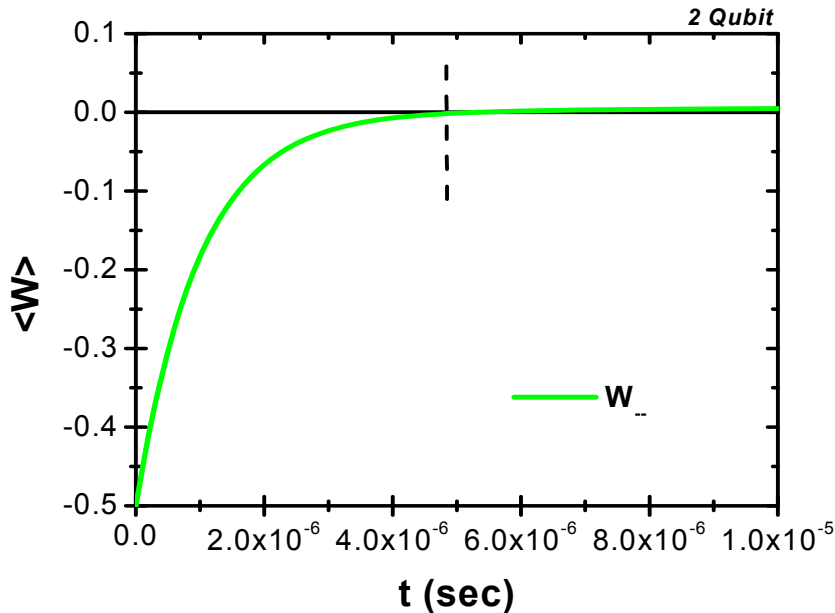
με  $\alpha(t) = \exp[-t/T_1] \equiv \exp[-\Gamma_1 t]$  για τη χαλάρωση και  $\beta(t) = \exp[-2t/T_2] \equiv \exp[-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t]$  για την απώλεια φάσης. Έτσι η ακρίβεια  $F = \text{Tr} [ |\psi^-\rangle \langle \psi^- | \rho_{\psi^-}(t) ]$  είναι:

$$F(t) = \frac{1}{2} [\alpha(t) + \beta(t)] \quad (5.7)$$

και η αναμενόμενη τιμή του  $W$  υπολογίζεται από τη σχέση (5.5)

$$\text{Tr} [ W_S \rho_{\psi^-}(t) ] \equiv \langle W_S \rangle_{\psi^-}(t) = \frac{1}{2} [1 - \alpha(t) - \beta(t)] \quad (5.8)$$

Όπου  $W_S \equiv \frac{1}{2} (| \psi^- \rangle \langle \psi^- | - | \psi^+ \rangle \langle \psi^+ |)$  είναι ο τελεστής επιβεβαίωσης της κατάστασης  $\psi^-$ . Στην Εικ.5.1. παρουσιάζεται η εξασθένιση του εναγκαλισμού γι' αυτό το μοντέλο άρσης της συνέπειας.



**Εικόνα 5.1.** Αναμενόμενες τιμές του τελεστή επιβεβαίωσης  $W$  (σχέση (5.8)) για την εναγκαλισμένη κατάσταση Bell  $|\psi^-\rangle$ , όπου θεωρήθηκαν οι χρόνοι  $\Gamma_1 = 10^3 \text{ s}^{-1}$  και  $\Gamma_2 = 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Μετά από κάποια χρονική στιγμή (διακεκομμένη γραμμή) οι τιμές γίνονται θετικές και δεν είναι πλέον ανοχνεύσιμη η εναγκαλισμένη κατάσταση  $|\psi^-\rangle$ .

Εξετάζοντας τη σχέση (5.8) βλέπουμε ότι παίρνει θετικές τιμές όταν μετά από κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα η παράμετρος  $\beta(t)$  γίνεται μεγαλύτερη από την  $1 - \alpha(t)$ , υποδεικνύοντας έτσι ότι η κατάσταση δεν είναι εναγκαλισμένη. Μπορεί όμως να αποδειχτεί [Pre96, Hor96] ότι η κατάσταση παραμένει εναγκαλισμένη για κάθε χρονική στιγμή  $t < \infty$ , δηλ. για κάθε  $\beta(t) > 0$ . Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί χρησιμοποιώντας κατάλληλους τελεστές φίλτρων. Η τεχνική αυτή όμως δεν αποδίδει κάποιο σημαντικό πλεονέκτημα σε πειραματικό επίπεδο, καθώς ο θόρυβος κατά την αρχικοποίηση του συστήματος και η πιστότητα των μετρήσεων καθιστούν αδύνατη τη μέτρηση των αναμενόμενων τιμών με υψηλή ακρίβεια.

Υπό πραγματικές συνθήκες λοιπόν, είναι αδύνατο να παρατηρηθεί εναγκαλισμός για περισσότερα από μερικά  $\mu\text{s}$ . Συνεπώς οποιαδήποτε μέθοδος κατασκευής καταστάσεων Bell που απαιτεί χρόνο δημιουργίας μεγαλύτερο από μερικά  $\mu\text{s}$  δεν είναι εφικτό να πραγματοποιηθεί πειραματικά.

### 5.3. Τρια Qubit

Στην παρούσα παράγραφο μελετώνται δυο κλάσεις εναγκαλισμού τριών qubit, η GHZ και η W. Κάθε κατάσταση εναγκαλισμού τριών qubit μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια από τις δυο καταστάσεις

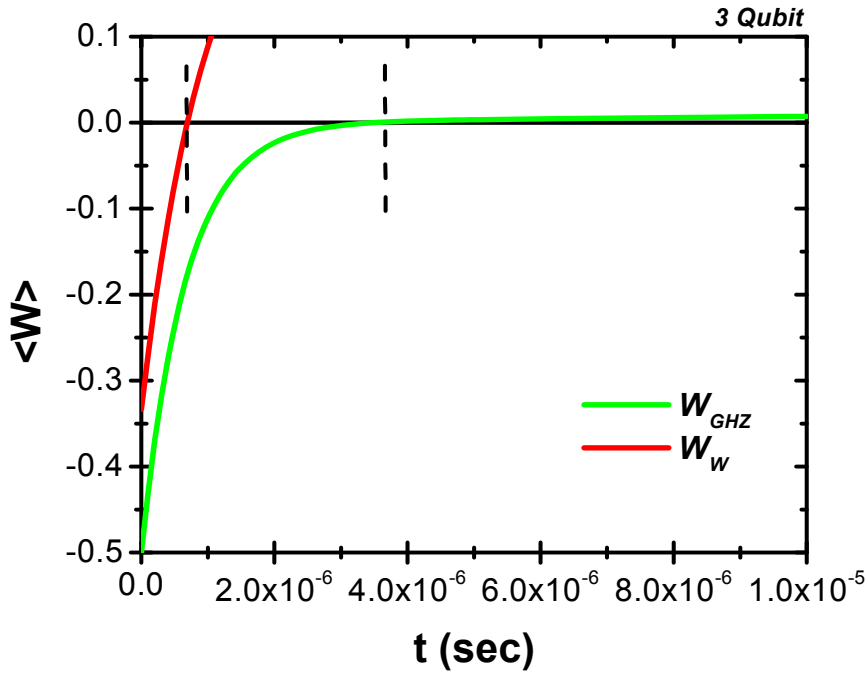
$$|GHZ\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle + |101\rangle) \quad (5.9)$$

$$|W\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle) \quad (5.10)$$

αλλά αυτές οι δυο δεν μπορούν να μετασχηματιστούν μεταξύ τους, αντιπροσωπεύοντας έτσι διαφορετικές κλάσεις εναγκαλισμού. Με τη βοήθεια των σχέσεων (5.3) και (5.5) υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή του τελεστή επιβεβαίωσης W των δυο καταστάσεων:

$$\begin{aligned} \langle W_{GHZ} \rangle(t) &= \frac{1}{2} - F_{GHZ}(t) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left( \exp[-2\Gamma_1 t] + \exp[-\Gamma_1 t] + 2 \exp\left[-\frac{3}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)t\right] \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\langle W_w \rangle(t) = \frac{2}{3} - F_w(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left( \exp[-\Gamma_1 t] + 2 \exp[-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t] \right) \quad (5.12)$$



**Εικόνα 5.2.** Αναμενόμενες τιμές των τελεστών επιβεβαίωσης  $W$  για τις καταστάσεις GHZ και  $W$  τριων qubit (σχέσεις (5.11), (5.12)), όπου θεωρήθηκαν οι χρόνοι  $\Gamma_1 = 10^3 \text{ s}^{-1}$  και  $\Gamma_2 = 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Μετά από κάποια χρονική στιγμή (διακεκομμένες γραμμές) οι τιμές γίνονται θετικές και δεν είναι πλέον ανοιχτή η εναγκαλισμένη κατάσταση.

Η χρονική εξέλιξη των τελεστών παρουσιάζεται στην Εικ.5.2. (για  $\Gamma_1 = 10^3 \text{ s}^{-1}$  και  $\Gamma_2 = 10^6 \text{ s}^{-1}$ ). Όπως φαίνεται στην Εικ.5.2., οι αναμενόμενες τιμές του τελεστή επιβεβαίωσης  $W$  για τις καταστάσεις  $W$  γίνονται θετικές πριν οι αναμενόμενες τιμές του  $W$  για τις καταστάσεις GHZ αλλάξουν πρόσημο. Ο εναγκαλισμός δηλ. των καταστάσεων GHZ τριών qubit είναι ανιχνεύσιμος για  $\sim 30\mu\text{s}$  περισσότερο, σε σύγκριση με τις καταστάσεις  $W$ .

#### 5.4. Τέσσερα Qubit

Για τέσσερα qubit, οι καταστάσεις που ανήκουν στις κλάσεις GHZ και  $W$  είναι:

$$|GHZ\rangle_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle + |1010\rangle) \quad (5.13)$$

$$|W\rangle_4 = \frac{1}{2}(|1000\rangle + |0100\rangle + |0010\rangle + |0001\rangle) \quad (5.14)$$

Μέχρι στιγμής οι καταστάσεις αυτές έχουν πραγματοποιηθεί πειραματικά για διάφορα φυσικά συστήματα, όπως πχ. φωτόνια [Bou04, LuZ07] και ιόντα [Haf05, Lei05], όχι όμως σε νανοσυστήματα στερεάς κατάστασης. Επίσης, έχει μελετηθεί ο μηχανισμός αποσυνέπειας σε

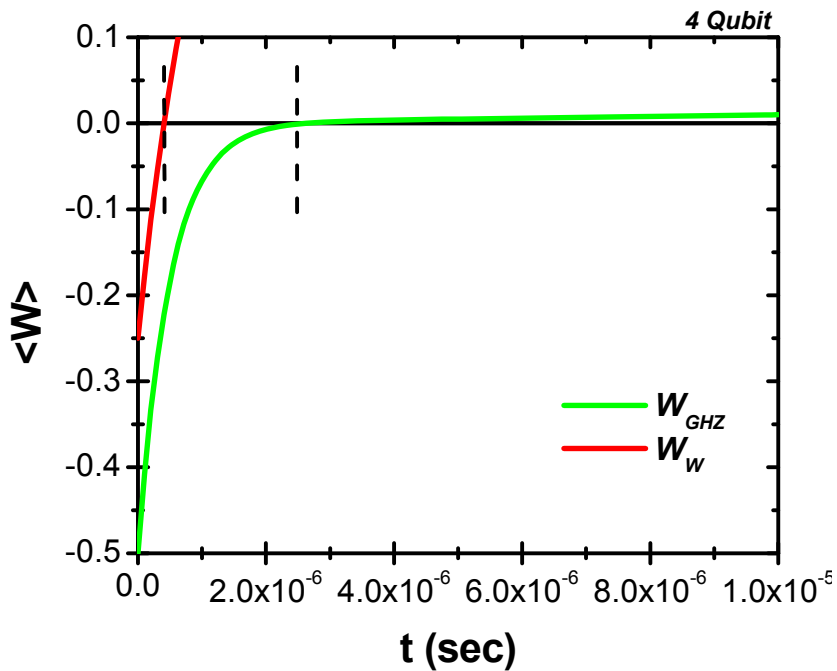


διάφορα θεωρητικά πλαίσια [Sim02, Dur04, Aoi08, Bor09, Guh08]. Η πιστότητα αυτών των καταστάσεων εξαρτάται από το χρόνο ως:

$$F_{GHZ_4}(t) = \frac{1}{2} \left( \exp[-2\Gamma_1 t] + \exp[-2(\Gamma_1 + \Gamma_2)t] \right) \quad (5.15)$$

$$F_{W_4}(t) = \frac{1}{4} \left( \exp[-\Gamma_1 t] + 3 \exp[-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t] \right) \quad (5.16)$$

Οι αντίστοιχοι τελεστές επιβεβαίωσης προκύπτουν από τη σχέση  $W_y = c \mathbb{1} - F(t)$  με  $c = 1/2$  για την κατάσταση GHZ και  $c = 3/4$  για την κατάσταση W.



**Εικόνα 5.3.** Αναμενόμενες τιμές των τελεστών επιβεβαίωσης  $W$  για τις καταστάσεις GHZ και  $W$  τεσσάρων qubit (σχέσεις (5.15), (5.16)), όπου θεωρήθηκαν οι χρόνοι  $\Gamma_1 = 10^3 \text{ s}^{-1}$  και  $\Gamma_2 = 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Μετά από κάποια χρονική στιγμή (διακεκομμένες γραμμές) οι τιμές γίνονται θετικές και δεν είναι πλέον ανοχνεύσιμη η εναγκαλισμένη κατάσταση.

Στην Εικ. 5.3. παρουσιάζονται οι αναμενόμενες τιμές του τελεστή επιβεβαίωσης  $W$  για τις δυο καταστάσεις GHZ και  $W$  τριών qubit. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα αυτό, η κατάσταση GHZ είναι ανιχνεύσιμη για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα από την  $W$ , καθώς προσεγγίζει το μηδέν με πιο αργό ρυθμό από την  $W$ . Στη συγκεκριμένη γραφική παράσταση των τελεστών  $W$  θεωρήθηκαν οι χρόνοι  $\Gamma_1 = 10^3 \text{ s}^{-1}$  και  $\Gamma_2 = 10^6 \text{ s}^{-1}$ .

## 5.5. N Qubit

Οι κλάσεις GHZ και W για N qubit γράφονται:

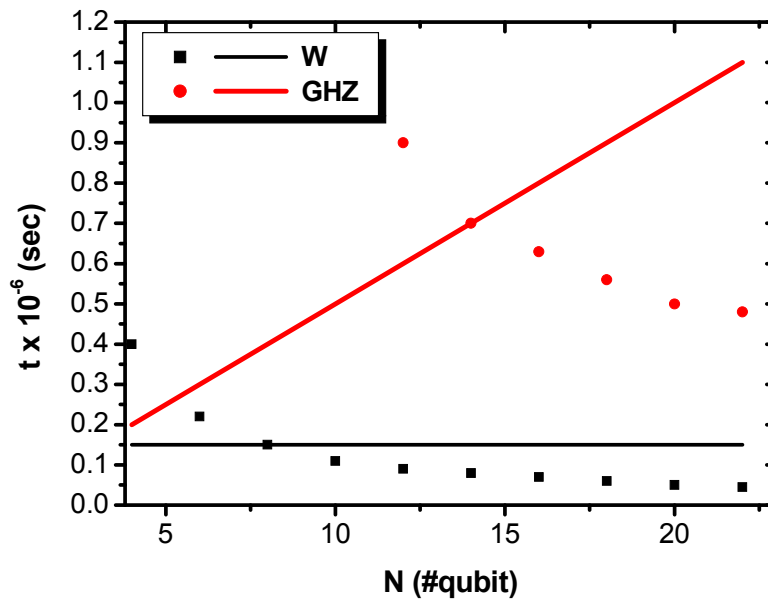
$$|GHZ\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\dots 01\rangle + |10\dots 10\rangle) \quad (5.17)$$

$$|W\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{N}}(|10\dots 00\rangle + |01\dots 00\rangle + \dots + |00\dots 01\rangle) \quad (5.18)$$

Οι αναμενόμενες τιμές των τελεστών επιβεβαίωσης είναι:

$$\langle W_{GHZ} \rangle_N(t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \exp\left[-\frac{N}{2}\Gamma_1 t\right] - \exp\left[-\frac{N}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)t\right] \right) \quad (5.19)$$

$$\langle W_w \rangle_N(t) = \frac{1}{N} \left( N - 1 - \exp[-\Gamma_1 t] - (N - 1)\exp[-(\Gamma_1 + \Gamma_2)t] \right) \quad (5.20)$$



**Εικόνα 5.4.** Οι χρόνοι στους οποίους οι αναμενόμενες τιμές των τελεστών επιβεβαίωσης  $W$  για τις καταστάσεις GHZ και W αλλάζουν πρόσημο (γίνονται θετικοί) ως συνάρτηση του αριθμού των qubit  $N$  (διακριτά σημεία), όπου θεωρήθηκαν οι χρόνοι  $\Gamma_1 = 10^3 \text{ s}^{-1}$  και  $\Gamma_2 = 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Επίσης παρουσιάζονται οι χρόνοι που απαιτούνται για τη δημιουργία και την παρατήρηση των εναγκαλισμένων αυτών καταστάσεων (ευθείες γραμμές).

Στην Εικ. 5.4. παρουσιάζεται ο χρόνος στον οποίο η αναμενόμενη τιμή του τελεστή επιβεβαίωσης  $W$  γίνεται θετική για κάθε κατάσταση, ως συνάρτηση των αριθμού  $N$  των qubit. Η γραφική αυτή παράσταση περιέχει επίσης μια εκτίμηση του χρόνου που χρειάζεται για να δημιουργηθεί και να μετρηθεί κάθε κατάσταση, ως συνάρτηση του αριθμού των qubit  $N$ . Οι χρόνοι δημιουργίας για qubit ηλεκτρονιακών σπιν σε κβαντικά σημεία, όπως συζητήθηκε στο

προηγούμενο Κεφ.4., για τις καταστάσεις  $W$  είναι ανεξάρτητοι του αριθμού  $N$  κι εκτιμώνται  $\sim 100\text{ns}$ , ενώ για τις καταστάσεις GHZ είναι γραμμικά εξαρτημένοι από το  $N$  κι εκτιμώνται  $\sim \frac{N-1}{2}100\text{ ns}$ . Οι χρόνοι μέτρησης εκτιμώνται στα  $\sim 50\text{ ns}$  [Kor06]. Το άθροισμα των χρόνων δημιουργίας και μέτρησης αναπαρίσταται στην Εικ.5.4.

Σύμφωνα με την Εικ.5.4., ο εναγκαλισμός της κατάστασης GHZ μπορεί να ανιχνευτεί για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, αλλά καταναλώνεται περισσότερος χρόνος για τη δημιουργία του, σε σύγκριση με τις καταστάσεις  $W$ . Με βάση τις εκτιμήσεις στην Εικ.5.4., δημιουργία και μέτρηση των καταστάσεων GHZ είναι εφικτές για ένα πλήθος μέχρι 14 qubit. Οι καταστάσεις  $W$  είναι λιγότερο κατάλληλες, καθώς οι μεγαλύτερη εναγκαλισμένη κατάσταση θα περιέχει  $\sim 10$  qubit.



# Κεφάλαιο 6

## Συμπεράσματα

Στη παρούσα εργασία έγινε μια σύντομη μελέτη του φαινομένου του εναγκαλισμού που αποτελεί βασική αρχή στην πειραματική υλοποίηση κι εξέλιξη των κβαντικών υπολογιστών.

Αρχικά πραγματοποιήθηκε μια εισαγωγή στα συστήματα κβαντικών σημείων. Αναφέρθηκαν οι βασικές φυσικές αρχές που διέπουν αυτά τα συστήματα καθώς και οι διαδικασίες ανάπτυξης για τους δυο σημαντικότερους εκπροσώπους, όσον αφορά στην εφαρμογή τους σε κβαντικούς υπολογιστές: τα αυτο-οργανωμένα κβαντικά σημεία και τα ηλεκτροστατικά.

Στη συνέχεια έγινε μια σύντομη ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη της ιδέας των κβαντικών υπολογιστών. Περιγράφηκαν οι βασικές θεωρητικές αρχές που διέπουν τα συστήματα αυτά και το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε στον εναγκαλισμό καταστάσεων και στους μηχαισμούς αποσυνέπειας.

Στο τρίτο μέρος έγινε μια προσάθεια παρουσίασης των διαδικασιών δημιουργίας εναγκαλισμένων καταστάσεων των κλάσεων cluster, GHZ και W ξεκινώντας από τη βασική κατάσταση ενός πλήθους N-qubit και χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο δυνατό αριθμό περιστροφών μονού qubit και αλληλεπιδράσεων ανταλλαγής δυο qubit. Ο συνολικός αριθμός τελεστών που απαιτούνται για τη δημιουργία όλων αυτών των εναγκαλισμένων καταστάσεων αυξάνεται γραμμικά με τον αριθμό N των qubit. Η δημιουργία N-μερών καταστάσεων W απαιτεί τον μικρότερο αριθμό τελεστών, ο οποίος είναι  $(N - 1)$  τελεστές  $\sqrt{U_J}$  και μια περιστροφή. Ακολουθούν οι N-μερείς καταστάσεις cluster που απαιτούν  $(2N - 3)$  αλληλεπιδράσεις ανταλλαγής και  $(N - 1)$  περιστροφές κατ'ελάχιστο. Τέλος είναι οι καταστάσεις GHZ οι οποίες χρειάζονται επίσης  $(2N - 3)$  τελεστές  $\sqrt{U_J}$  αλλά  $(3N - 5)$  περιστροφές μονού qubit. Επίσης παρουσιάστηκε ο υπολογισμός της πιστότητας F για τη δημιουργία των N-μερών καταστάσεων

cluster υπό την παρουσία ατελών λειτουργιών  $\sqrt{U_J}$  και περιστροφής μονού qubit. Η πιστότητα  $F \sim \sqrt{1 - \mu N + \nu}$  μειώνεται καθώς ο αριθμός των qubit αυξάνεται, με  $\mu, \nu > 0$  και  $\mu N - \nu \geq 1$ . Τέλος πραγματοποιήθηκε μια σύντομη μελέτη του περιορισμού που επιβάλλει στη δημιουργία των αναφερθέντων καταστάσεων ο χρόνος αποσυνέπειας  $T_2$ .

Στο τελευταίο μέρος μελετήθηκε η εξέλιξη των εναγκαλισμένων καταστάσεων μιας γραμμικής συστοιχίας qubit ηλεκτρονικού σπιν υπό την επίδραση της αποσυνέπειας. Προσδιορίστηκε ο μέγιστος χρόνος για τον οποίο είναι εφικτή η παρατήρηση του εναγκαλισμού για δυο ηλεκτρόνια, με τη χρήση των τελεστών επιβεβαίωσης  $W$ . Στη συνέχεια παρουσιάστηκε η επέκταση του μοντέλου αυτού για την περίπτωση τριών, τεσσάρων και  $N$  qubit και για τις κλάσεις εναγκαλισμού GHZ και  $W$ . Τέλος έγινε μια εκτίμηση για το μέγιστο αριθμό εναγκαλισμένων qubit που είναι εφικτό να δημιουργηθούν και να μετρηθούν, με βάση τους μέχρι τώρα γνωστούς χρόνους αποσυνέπειας. Η πιο κατάλληλη κλάση φαίνεται να είναι η GHZ.

## Βιβλιογραφία

- [Abr61] A. Abragam, “*The Principles of Nuclear Magnetism*”, Oxford University Press, (1961).
- [Aci01] A. Acin, D. Bruss, M. Lewenstein, A. Sanpera, Phys. Rev. Lett. **87**, 040401 (2001).
- [Ada00] J. Adamowski, M. Sobkowicz, B. Szafran, S. Bednarek, Phys. Rev. B **62**, 4234, (2000).
- [Ada01] Adamowski J., Bednarek S., Szafran B. Acta Phys. Polon. A **100**, 145, (2001).
- [Ada05] J. Adamowski, S. Bednarek, B. Szafran, Schadae Informaticae **14**, 95, (2005).
- [Aha99] D. Aharonov, M. Ben-Or, quant-ph/9906129 (1999).
- [Aol08] L. Aolita, R. Chaves, D. Cavalcanti, A. Acin, L. Davidovich, Phys. Rev. Lett. **100**, 080501 (2008).
- [Asp81] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).
- [Bar95] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin, and H. Weinfurter, Phys. Rev. A **52**, 3457 (1995).
- [Bar96] A. Barenco, Contemp. Phys. **37**, 375 (1996).
- [Bay01] M. Bayer, P. Hawrylak, K. Hinzer, S. Fafard, M. Korkusinski, Z.R. Wasilewski, O. Stern, A. Forchel, Science **291**, 451 (2001).
- [Bed01] Bednarek S., Szafran B., Adamowski J.; Phys. Rev. B **64**, 195303, (2001).
- [Bed03] Bednarek S., Szafran B., Lis K., Adamowski J.; Phys. Rev. B **68**, 155333, (2003).
- [Bee04] C. W. J. Beenakker, C. Emary, M. Kindermann, Phys. Rev. B **69**, 115320 (2004).
- [Bel64] J.S. Bell. Physics **1** **195**, (1964).
- [Ben93] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [Ben95] C. H. Bennett, Physics Today **48** (10), 24 (1995).
- [Ben96] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).

- [Bim99] D. Bimberg, M. Grundmann, N.N. Lebedtsov, *Quantum Dot Heterostructures* (Wiley 1999).
- [Bla08] M. Blaauboer, R. L. de Visser, J. Phys. A **41**, 395307 (2008).
- [Bod07] F. Bodoky, M. Blaauboer, Phys. Rev. A **76**, 052309 (2007).
- [Bor06] P. Borri, S. Schneider, W. Langbein, D. Bimberg, J. Opt. A **8**, 33 (1999).
- [Bor09] A. Borrás, A. P. Majtey, A. R. Plastino, M. Casas, and A. Plastino, Phys. Rev. A **79**, 022108 (2009).
- [Bou99] D. Bouwmeester, J. Pan, M. Daniell, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **82**, 1345 (1999).
- [Bou04] M. Bourennane, M. Eibl, C. Kurtsiefer, S. Gaertner, H. Weinfurter, O. Gühne, P. Hyllus, D. Bruff, M. Lewenstein, A. Sanpera, Phys. Rev. Lett. **92**, 087902 (2004).
- [Bra05] P. Braun, X. Marie, L. Lombez, B. Urbaszek, T. Amand, P. Renucci, V. K. Kalevich, K. V. Kavokin, O. Krebs, P. Voisin, Y. Masumoto, Phys. Rev. Lett. **94**, 116601 (2005).
- [Bra05] F. G. S. L. Brandao, Phys. Rev. A **72**, 022310 (2005).
- [Bri01] H. J. Briegel, R. Raussendorf, Phys. Rev. Lett. **86**, 910 (2001).
- [Bug01] Bugajski S., Klamka J., and Wegrzyn S.; *Archiwum Informatyki Teoretycznej i Stosowanej* **13**, 97 (2001).
- [Bur99] G. Burkard, D. Loss, D. P. DiVincenzo, Phys. Rev. B **59**, 2070 (1999).
- [Cal96] Calderbank A.R., Shor P.W.; Phys. Rev. A **54**, 1098, (1996).
- [Cav06] D. Cavalcanti, M. O. T. Cunha, App. Phys. Lett. **89**, 084102 (2006).
- [Chu98] I. Chuang, N. Gershenfeld, M. Kubinec, Phys. Rev. Lett. **80**, 3408 (1998).
- [Cio00] M. Ciorga, A. S. Sachrajda, P. Hawrylak, C. Gould, P. Zawadzki, S. Jullian, Y. Feng, Z. Wasilewski, Phys. Rev. B **61**, R16315 (2000).
- [Cir91] J. Cirac, P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091, (1995).
- [Cir95] J. Cirac, P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091–4094 (1995).
- [Cir96] J.-I. Cirac, T. Pellizzari, P. Zoller, Science **273**, 1207 (1996).
- [Cof00] V. Coffman, J. Kundu, W. K. Wootters, Phys. Rev. A **61**, 052306 (2000).
- [Deu85] Deutsch D.; Proc. Royal Soc. London A **400**, 97 (1985).
- [Deu92] D. Deutsch and R. Jozsa, Proc. R. Soc. Lon. A **439**, 553 (1992).
- [Dir27] Dirac, P.A.M., (Proc. Roy. Soc. London) A **114**, 243–265 (1927).
- [DiV95] D. P. DiVincenzo, Phys. Rev. A **51**, 1015 (1995).
- [DiV95] D.P. DiVincenzo, Science **269**, 255 (1995).
- [DiV00] D. P. DiVincenzo, D. Bacon, J. Kempe, G. Burkard, and K. B. Whaley, Nature **408**, 339 (2000).
- [DiV00b] D. P. DiVincenzo, Fortschr. Phys. **48**, 771 (2000).



- [DiV01] D.P. DiVincenzo, D.A. Lidar, D. Bacon, J. Kempe, K.B. Whaley. In *International Conference on Experimental Implementation of Quantum Computation, Sydney, Australia (IQC 01)*, p. 257 (2001).
- [Dom07] S. Dommers et al., *Appl. Phys. Lett.* **90**, 033508 (2007).
- [Dur00] W. Dur, G. Vidal, J. I. Cirac, *Phys. Rev. A* **62**, 062314 (2000).
- [Dur04] W. Dur and H. Briegel, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 180403 (2004).
- [Eib04] M. Eibl, N. Kiesel, M. Bourennane, C. Kurtsiefer, H. Weinfurter, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 077901 (2004).
- [Ein35] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [Eis07] J. Eisert, F. G. S. L. Brandao, K. M. R. Audenaert, *New J. Phys* **9**, 46 (2007).
- [Eke91] A.K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661-663 (1991)
- [Elz03] J.M. Elzerman, R. Hanson, J. S. Greidanus, L. H. Willems van Beveren, S. De Franceschi, L. M. K. Vandersypen, S. Tarucha, L. P. Kouwenhoven, *ibid.* **67**, 161308(R) (2003).
- [Elz04] J. M. Elzerman, R. Hanson, L. H. W. van Beveren, B. Witkamp, L. M. K. Vandersypen, L. P. Kouwenhoven, *Nature* **430**, 431 (2004).
- [Elz05] J. M. Elzerman, R. Hanson, L. H. W. van Beveren, S. Tarucha, L. M. K. Vandersypen, L. P. Kouwenhoven, *Lect. Notes Phys.* **667**, 25 (2005).
- [Elz05b] J. Elzerman, R. Hanson, L. van Beveren, S. Tarucha, L. Vandersypen, L. Kouwenhoven, "Semiconductor few-electron quantum dots as spin qubits in *Quantum Dots: a Doorway to Nanoscale Physics*", p. 25, Springer, (2005).
- [Eng02] H. Engel and D. Loss, *Phys. Rev. B* **65**, 195321 (2002).
- [Erl02] S.I. Erlingsson, Yu.V. Nazarov, *Phys. Rev. B* **66**, 155327 (2002).
- [Fey82] Feynman R.P.; *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467, (1982).
- [Fey86] Feynman R.P.; *Foundations of Physics* **16**, 507, (1986).
- [Fra49] F.C. Frank, J.H. van der Merwe, *Proc. Roy. Soc. London A* **198**, 205 (1949).
- [Fre72] S. J. Freedman, J. F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938 (1972).
- [Ger22] W. Gerlach, O. Stern, *Zeitschrift fur Physik* **9**, 353 (1922).
- [Gol04] V.N. Golovach, A. Khaetskii, D. Loss, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 016601 (2004).
- [Got99] D. Gottesman, I. L. Chuang, *Nature* **402**, 390 (1999).
- [Gre90] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, A. Zeilinger, *Am. J. Phys.* **58**, 1131 (1990).
- [Gro96] L.K. Grover, In *Proc. 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computation*, 212, (1996).
- [Gro97] L. K. Grover, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 325 (1997).
- [Guh07] O. Guhne, M. Reimpell, R. F. Werner, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 110502 (2007).
- [Guh08] O. Guhne, F. Bodoky, M. Blaubaer, *Phys. Rev. A* **78**, 060301 (2008).

- [Guh09] O. Guhne, G. Toth, Phys. Rep. **474**, 1 (2009).
- [Gun94] L. Gunther, B. Barbara, "Quantum Tunneling of Magnetization" (Kluwer, Dordrecht) (1994).
- [Haf05] H. Haffner, W. Hansel, C. F. Roos, J. Benhelm, D. C. al kar, M. Chwalla, T. Korber, U. D. Rapol, M. Riebe, P. O. Schmidt, C. Becher, O. Guhne, W. Dur, R. Blatt, Nature **438**, 643 (2005).
- [Han03] R. Hanson, B. Witkamp, L. M. K. Vandersypen, L. H. W. van Beveren, J. M. Elzerman, L. P. Kouwenhoven, Phys. Rev. Lett. **91**, 196802 (2003).
- [Han05] R. Hanson, L. H. Willems van Beveren, I. T. Vink, J. M. Elzerman, W. J. M. Naber, F. H. L. Koppens, L. P. Kouwenhoven, L. M. K. Vandersypen, Phys. Rev. Lett. **94**, 196802 (2005).
- [Han07] R. Hanson, L. P. Kouwenhoven, J. R. Petta, S. Tarucha, L. M. K. Vandersypen, Rev. Mod. Phys. **79**, 1217 (2007).
- [Hay03] Hayashi T., Fujisawa T., Cheong H.D., Jeong Y.H., and Hirayama Y.; Phys. Rev. Lett. **91**, 226804, (2003).
- [Hei06] M. Hein, W. Dur, J. Eisert, R. Raussendord, M. V. den Nest, H.J. Briegel, in Proceedings of the *International School of Physics Enrico Fermi on Quantum Computers, Algorithms and Chaos* (Varenna, Italy, 2005) (G. Casati, D. Shepelyansky, P. Zoller, G. Benenti, eds.), IOS Press, 2006
- [Her56] B. Herzog, E. L. Hahn, Phys. Rev. **103**, 148 (1956).
- [Hir01] Hirvensalo M.; Quantum Computing, Springer-Verlag, Berlin (2001).
- [Elz03] Elzerman J.M., and Kouwenhoven L.P.; Phys. Rev. Lett. **91**, 196802 (2003).
- [Hor96] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [Hor09] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
- [Hub63] J. Hubbard, Proc. R. Soc. Lond. A **276**, 238 (1963).
- [Hui98] A. G. Huibers, M. Switkes, C. M. Marcus, K. Campman, A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **81**, 200 (1998).
- [Hut04] A. K. Huttel, J. Weber, A. W. Holleitner, D. Weinmann, K. Eberl, R. H. Blick, Phys. Rev. B **69**, 073302 (2004).
- [Jac98] L. Jacak, P. Hawrylak, A. Wojs, "Quantum Dots", Springer, Berlin (1998).
- [Joh05] A. C. Johnson, J. R. Petta, J. M. Taylor, A. Yacoby, M. D. Lukin, C. M. Marcus, M. P. Hanson, A. C. Gossard, Nature **435**, 925 (2005).
- [Jon00] Jones J.A.; Fortschr. Physik **48**, 909 (2000).
- [Joz97] R. Jozsa, Proc. R. Soc. Lond. A **454**, 323 (1997).
- [Kha01] A. V. Khaetskii, Y. V. Nazarov, Phys. Rev. B **64**, 125316 (2001).
- [Kha02] A. V. Khaetskii, D. Loss, L. Glazman, Phys. Rev. Lett. **88**, 186802 (2002).

- [Kie07] N. Kiesel, C. Schmid, G. T\_oth, E. Solano, H. Weinfurter, Phys. Rev. Lett. **98**, 063604 (2007).
- [Kik98] J. M. Kikkawa, D. D. Awschalom, Phys. Rev. Lett. **80**, 4313 (1998).
- [Kir94] N. Kirstaedter, N.N. Leventsov, M. Grundmann, D. Bimberg, V.M. Ustinov, S.S. Ruvimov, M.V. Maximov, P.S. Kopev, Z.I. Alferov, U. Richter, P. Werner, U. Goesele, J. Heydenreich, Electron Lett. **30**, 1416 (1994).
- [Kit97] A.Y. Kitaev, in *Quantum Communication, Computing, and Measurement*, edited by A.S. Holevo, O. Hirota and C.M. Caves, 181, Plenum Press, (1997).
- [Kop05] F.H.L. Koppens, *Coherence and control of a single electron spin in a quantum dot*, PhD thesis, Delft University of Technology (2005).
- [Kop05] F. H. L. Koppens, J. A. Folk, J. M. Elzerman, R. Hanson, L. H. W. Van Beveren, I. T. Vink, H. P. Tranitz, W. Wegscheider, L. P. Kouwenhoven, L. M. K. Vandersypen, Science **309**, 1346 (2005).
- [Kop06] F. H. L. Koppens, C. Buizert, K. J. Tielrooij, I. T. Vink, K. C. Nowack, T. Meunier, L. P. Kouwenhoven, L. M. K. Vandersypen, Nature **442**, 766 (2006).
- [Laa96] R. Laamme, C. Miquel, J. P. Paz, W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **77**, 198 (1996).
- [Laa98] R. Laamme, E. Knill, W. H. Zurek, P. Catasti, S. V. S. Mariappan, Trans. R. Soc. Lon. A **356**, 1941 (1998).
- [Lam07] L. Lamata, J. Leon, D. Salgado, E. Solano, Phys. Rev. A **75**, 022318 (2007).
- [Lei04] D. Leibfried, M. D. Barrett, T. Schaetz, J. Britton, J. Chiaverini, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer, D. J. Wineland, Science **304**, 1476 (2004).
- [Lei05] D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, J. Britton, R. B. Blakestad, J. Chiaverini, D. B. Hume, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, R. Reichle, D. J. Wineland, Nature **438**, 639 (2005).
- [Lin76] G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
- [Li03] X.Q. Li et al., Science **301**, 809 (2003).
- [Llo93] S. Lloyd, Science **261**, 1589 (1993).
- [Los98] D. Loss, D. P. DiVincenzo, Phys. Rev. A **57**, 120 (1998).
- [Los05] D. Loss, M. Borhani, Phys. Rev. A **71**, 034308 (2005)].
- [LuZ07] C. Lu, X. Zhou, O. G□uhne, W. Gao, J. Zhang, Z. Yuan, A. Goebel, T. Yang, J. Pan, Nat. Phys. **3**, 91 (2007).
- [Mak01] Y. Makhlin, G. Sch□on, A. Shnirman, Rev. Mod. Phys. **73**, 357 (2001).
- [Man03] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hansch, I. Bloch, Nature **425**, 937 (2003).
- [Mar04] G. M. Marinescu, Dan C. Marinescu. *Approaching Quantum Computing*. Prentice Hall, (2004).
- [Mer90] N. D. Mermin, Phys. Rev. Lett. **65**, 1838 (1990).
- [Mer02] I. A. Merkulov, A. L. Efros, M. Rosen, Phys. Rev. B **65**, 205309 (2002).

- [Mic00] P. Michler, A. Kiraz, C. Becher, W.V. Schoenfeld, P.M. Petroff, L. Zhang, E. Hu, A. Imamoglu, *Science* **290**, 2282 (2000).
- [Mil03] J. B. Miller, D. M. Zumbuhl, C. M. Marcus, Y. B. Lyanda-Geller, D. Goldhaber-Gordon, K. Campman, A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 076807 (2003).
- [Mon95] C. Monroe *et al.*, *ibid.* **75**, 4714 (1995).
- [Moo65] G.E. Moore, *Electronics* **38**, 8 (1965).
- [Moo99] J. Mooij, T. Orlando, L. Levitov, L. Tian, C. van der Wal, S. Lloyd, *Science* **285**, 1036 (1999).
- [Nak99] Y. Nakamura, Yu.A. Pashkin, J.S. Tsai, *Nature* **398**, 786 (1999).
- [Nie00] M.A. Nielsen, I.L. Chuang, *"Quantum Computation and Quantum Information"*, Cambridge University Press, UK (2000).
- [Now07] K. C. Nowack, F. H. L. Koppens, Y. V. Nazarov, L. M. K. Vandersypen, *Science* **318**, 1430 (2007).
- [Ohn98] H. Ohno, *Science* **281**, 951 (1998).
- [Pag77] D. Paget, G. Lampel, B. Sapoval, V. I. Safarov, *Phys. Rev. B* **15**, 5780 (1977).
- [Pan00] J. Pan, D. Bouwmeester, M. Daniell, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Nature* **403**, 515 (2000).
- [Pan01] J. Pan, M. Daniell, S. Gasparoni, G. Weihs, A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4435 (2001).
- [Per96] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).
- [Pet05] J. R. Petta, A. C. Johnson, J. M. Taylor, E. A. Laird, A. Yacoby, M. D. Lukin, C. M. Marcus, M. P. Hanson, A. C. Gossard, *Science* **309**, 2180 (2005).
- [Ple07] M. B. Plenio and S. Virmani, *Quant. Inf. Comp.* **7**, 1 (2007).
- [Poh05] U.W. Pohl, D. Bimberg, Quantum structures in semiconductors, in R.G. Lerner, G.L. Trigg (Eds.), *Encyclopedia of Physics*, 3<sup>rd</sup> Ed., pp. 2138-2144, Wiley, Weinheim (2005).
- [Qui99] L. Quiroga, N. F. Johnson, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2270 (1999).
- [Qin09] Qing-Yu Xu, *Int. Journ. Theor. Phys.* **48**, 1415 (2009).
- [Rau00] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. Raimond, S. Haroche, *Science* **288**, 2024 (2000).
- [Rau01] R. Raussendorf, H. J. Briegel, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5188 (2001).
- [Rau03] R. Raussendorf, D. E. Browne, H. J. Briegel, *Phys. Rev. A* **68**, 022312 (2003).
- [Ric95] J. Rice, *"Mathematical Statistics and Data Analysis"*, Duxbury Press (1995).
- [Roo04] C. F. Roos, M. Riebe, H. Häner, W. Hansel, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, R. Blatt, *Science* **304**, 1478 (2004).
- [Sac00] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, D. J. Wineland, C. Monroe, *Nature* **404**, 256 (2000).

- [Sch35] E. Schrodinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
- [Sch05] M. Schlosshauer, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 1267 (2005).
- [Sih05] V. Sih, Y. Kato, D. D. Awschalom, *Phys. World* **18**, 33 (2005).
- [Sim02] C. Simon and J. Kempe, *Phys. Rev. A* **65**, 052327 (2002).
- [Sin03] Jasprit Singh, *Electronic and Optoelectronic Properties of Semiconductor Structures*, Cambridge University Press, UK (2003).
- [She13] H. Sheffer, *Trans. Am. Math. Soc.* **14**, 481 (1913).
- [Sho94] P. Shor, in *Proceedings of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, IEEE Press (1994).
- [Sho96] P.W. Shor, in *Proceedings of 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 56, IEEE Press, (1996).
- [Sho97] P. W. Shor. In *SIAM J. Computing* **26**,1484 (1997).
- [Shu58] R. G. Shulman, B. J. Wyluda, H. J. Hrostowski, *Phys. Rev.* **109**, 808 (1958).
- [Ste96] A.M. Steane, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 793 (1996).
- [Sti98] O. Stier, M. Grundmann, D. Bimberg, *Phys. Rev. B* **59**, 5688 (1998).
- [Str37] I.N. Stranski, V. L. Krastanow, *Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften in Wien. Math-Naturwissen. Klasse, Abteilung IIb*, **146**, 796 (1937).
- [Tay07] J. M. Taylor, J. R. Petta, A. C. Johnson, A. Yacoby, C. M. Marcus, M. D. Lukin, *Phys. Rev. B* **76**, 035315 (2007).
- [Tur95] Turchette Q.A., Hood C.J., Lange W., Mabuchi H., Kimble H.J.; *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4710 (1995).
- [Urs07] R. Ursin, F. Tiefenbacher, T. Schmitt-Manderbach, H. Weier, T. Scheidl, M. Lindenthal, B. Blauensteiner, T. Jennewein, J. Perdigues, P. Trojek, B. Omer, M. Furst, M. Meyenburg, J. Rarity, Z. Sodnik, C. Barbieri, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Nat. Phys.* **3**, 481 (2007).
- [Van01] L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood, I. L. Chuang, *Nature* **414**, 883 (2001).
- [Ver02] F. Verstraete, J. Dehaene, B. D. Moor, H. Verschelde, *Phys. Rev. A* **65**, 052112 (2002).
- [Vis06] R. L. de Visser, M. Blaauboer, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 246801 (2006).
- [Vol26] M. Volmer, A. Weber, *Z. Phys. Chem.* **119**, 277 (1926).
- [Wan99] L.G. Wang, P. Kratzer, M. Scheffer, N. Moll, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4042 (1999).
- [Wen05] G. Wendin, V. S. Shumeiko, arXiv, cond-mat/0508729 (2005).
- [Wen06] G. Wendin, V. S. Shumeik, "Superconducting quantum circuits, qubits and computing" in *Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology* (M. Rieth and W. Schommers, eds.), p. 129, American Scientific Publishers, (2006).
- [Wer89] R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).

- [Wil05] L.H. Willems van Beveren, *Electron spins in few-electron lateral quantum dots*, PhD thesis, Delft University of Technology (2005).
- [Wolf99] R. De Wolf, *Quantum Computation & Schor's Factoring Algorithm*, CWI and University of Amsterdam (1999).
- [Wol01] S.A. Wolf, D. D. Awschalom, R. A. Buhrman, J. M. Daughton, S. von Molnar, M. L. Roukes, C. A. Y., D. M. Treger, *Science* **294**, 1488 (2001).
- [Woo82] W.K. Wootters and W.H. Zurek, *Nature* **299**, 802 (1982).
- [Woo02] L.M.Woods, T.L. Reinecke, Y. Lyanda-Geller, *Phys. Rev. B* **66**, 161318(R) (2002).
- [Yu01] Peter Y.Yu, Manuel Cardona, "*Fundamentals of semiconductors : physics & materials properties*", Springer, Berlin (2001).
- [Zha03] P. Zhang, C. K. Chan, Q. Xue, X. Zhao, *Phys. Rev. A* **67**, 012312 (2003).
- [Zha04] Z. Zhao, Y. Chen, A. Zhang, T. Yang, H. J. Briegel, J. Pan, *Nature* **430**, 54 (2004).
- [Zut04] I. Zutic, J. Fabian, S. Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 323 (2004).
- [Zum02] D. M. Zumbuhl, J. B. Miller, C. M. Marcus, K. Campman, A.C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 276803 (2002).







---

## Personal Information

**Name:** Anastasia Karkatzinou  
**Date of Birth:** November 30, 1983  
**Contact:** [natassa.karkatzinou@gmail.com](mailto:natassa.karkatzinou@gmail.com) Grainauerstr. 15  
Tel: +49 (0)30 | 417 68 460 10777 Wilmersdorf  
Cell: +49 (0)1 | 5786 5857 38 Berlin, Germany

---

## Education

**National Technical University of Athens (NTUA), Greece** September 2011

MSc. , Interdisciplinary program *Micro-systems & Nano-devices*

Thesis: *“Entangled Electron Spin States in Quantum Dots for Quantum Computers”*

Course highlights: quantum theory of mater, quantum computers, development & characterization of nanostructures, experimental techniques for nanomaterials, organic nanomaterials & nanoelectronics,

**National Technical University of Athens (NTUA), Greece** 2001 – 2008

Diploma in *Applied Physics*. School of Applied Mathematical & Physical Sciences.

GPA **8.08/10** (very good - top 10%).

Thesis: *“Optical Investigation of InAs/InP Quantum Dots for Optical Communication relevant Laser-Technology” \**

Concentration in Physics of Materials and Optoelectronics & Laser Technology.

**\*Technical University of Berlin (TU-Berlin), Germany** 2006 – 2007

Two semesters abroad: elaboration of the Diploma Thesis under the co-supervision of Prof. Dr. D. Bimberg, in collaboration with Fraunhofer Institute for Telecommunications, Heinrich Hertz Institute (Berlin, Germany).

---

## Experience

**National Technical University of Athens (NTUA), Greece** 2011

Graduate Student

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. G. Varelogiannis (NTUA).

Master Thesis: *“Entangled Electron Spin States in Quantum Dots for Quantum Computers”*

**Helmholtz Centre Berlin for Materials & Energy (HZB), Germany** 01.06.2010 – 31.08.2010

Internship at the **ILGAR** lab (Ion Layer Gas Reaction).

Supervisor: Prof. Dr. C.-H. Fischer.

Project: *“Development and Characterization of sprayed ZnO thin-films for Cu(In,Ga)(S,Se)<sub>2</sub> Solar Cells”*

Internship

Supervisor: Ass. Prof. Dr. D. Papadimitriou (NTUA).

Project: **“Strain/Stress and Optical Study of InAs/InGaAsP/InP Quantum Dots for Long Wavelength Lasers”**

Helmholtz Centre Berlin for Materials & Energy (HZB), Germany

01.08.2009 – 30.09.2009

Internship during the 21<sup>st</sup> International Summer Student Program

Supervisors: Priv.- Doz. Dr. Th. Schedel-Niedrig and Dr. Chr. Merschjann

Project: **“Characterization of novel CCSVT-grown thin film AgGaSe<sub>2</sub> absorber layers”**

\* Technical University of Berlin (TU-Berlin), Germany

2006-2007

Undergraduate Student

Supervisors: Ass. Prof. Dr. D. Papadimitriou (NTUA), Prof. Dr. D. Bimberg, Priv.-Doz. Dr. U. Pohl (TU-Berlin).

Diploma Thesis: **“Optical Investigation of InAs/InP Quantum Dots for Optical Communication relevant Laser-Technology”**

Ecole Polytechnique, Paris, France

01.10.2005 – 30.11.2005

Internship at LULI laboratory (Laboratoire pour l'Utilisation des Lasers Intenses)

Supervisor: Prof. Dr. Cl. Chenais-Popovic

Project: **“Study of High Density Plasma via Time- and Space- resolved X-ray Absorption Spectroscopy by a Femtosecond High-power Laser”**

---

## Peer-reviewed Journal Articles

1. C. Merschjann, A. Karkatzinou, M. Mews, T. Mete, M. Rusu, Th. Schedel-Niedrig, M. Chr. Lux-Steiner, B.V. Korzun, S. Schorr, S. Seeger  
**“AgGaSe<sub>2</sub> Thin Films grown by Chemical Close-Spaced Vapor Transport for Photovoltaic Applications: Structural, Electrical and Optical Properties”**  
Acta Materialia (submitted)
2. A. Karkatzinou, U.W. Pohl, D. Papadimitriou, D. Bimberg  
**“Optical Characterization and Strain/Stress Analysis of InAs/InGaAsP/InP Quantum Dots emitting at 1.55 μm”**  
J. Appl. Phys. (to be submitted)

## Papers in Conference Proceedings

1. C. Merschjann, B. Korzun, A. Karkatzinou, T. Schedel-Niedrig, M. Chr. Lux-Steiner  
**“Optical Characterization of AgGaSe<sub>2</sub> Thin Films grown by Chemical Close Spaced Vapor Transport (CCSVT)”**  
DPG (Deutsche Physikalische Gesellschaft) Spring Meeting, Regensburg, Germany, March 2010.
2. D. Franke, M. Möhrle, J. Böttcher, P. Harde, A. Sigmund, H. Künzel, A. Karkatzinou, U. W. Pohl, D. Bimberg  
**“InAs/InP Quantum Dot Lasers for 1.55 μm Operation Grown Using Metalorganic Vapor Phase Epitaxy”**  
Int. Workshop on Long Wavelength Quantum Dots LWQD 2007, Rennes, France, July 2007.

3. D. Franke, M. Möhrle, J. Böttcher, P. Harde, A. Sigmund, H. Künzel, A. Karkatzinou, U. W. Pohl, D. Bimberg

**“Fabrication of stable 1.55  $\mu\text{m}$  emission wavelength Quantum Dot Lasers using an all MOVPE approach”**

Int. Workshop on Quantum Dots and Laser Applications IWQDLA 2007, Wroclaw, Poland, July 2007.

---

## Language Competences

**Native Language**      **Greek**

**Other Languages**    **English**      (CPEC2, proficient)\*

**German**      (Goethe – Zertifikat C1, advanced)\*

**Spanish**      (beginner)

**French**      (beginner)

(\*)Common European Framework of Reference (CEF) level

---

## Computer Skills

**Programming**      Pascal, C, HTML

**Applications**      Origin, MS Office, Open Office, Matlab, Mathematica, PeakFit, LabVIEW, Autocad, Latex.

**Operating Systems**    Windows, Linux (Ubuntu)

---

## Scholarships / Awards

**Thomaidion Prize (NTUA)** 2008

Awarded for publishing part of the diploma thesis at international conferences, as undergraduate student.

**State Scholarships Foundation** 01.10.2006 – 30.09.2007

Erasmus-Socrates: two semesters abroad at TU-Berlin, Germany.

---

## Interests

Piano, handmade jewelry / puppets, traveling, story-telling, literature, cinema, theater, photography.





