ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Θεωρία Ομοτοπιών
και
το Θεώρημα του *Brouwer* του Σταθερού Σημείου για τον δίσκο

Παναγιώτα Δ. Μπίρμπα

Διπλωματική Εργασία

ΑΘΗΝΑ 2011

Επιβλέπων Καθηγητής

Αρβανιτάκης Α. (Επίκουρος Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Μετσόβιου Πολυτεχνείου , Τομέας Μαθηματικών)

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Αρβανιτάκης Α. (Επίκουρος Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου , Τομέας Μαθηματικών)

Κανελλόπουλος Β. (Επίκουρος Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου , Τομέας Μαθηματικών)

Γκίντιδης Δ. (Επίκουρος Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου , Τομέας Μαθηματικών)

Αυτή η διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των υποχρεώσεων μου γαι την απόκτηση πτυχίου από τη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου στην κατεύθυνση του Μαθηματικού Εφαρμογών.

Αποφασιστικό ρόλο στη συγγραφή της έπαιξε η συνεργασία μου με τον επιβλέποντα καθηγητή Αλέξανδρο Αρβανιτάκη τον οποίο και ευχαριστώ.

Παναγιώτα Μπίρμπα

Περιεχόμενα

Εισαγωγή-Ιστορική Επισκόπηση

Η παρούσα εργασία αφορά στην θεωρία Ομοτοπιών, καθώς και στο Θεώρημα του *Brouwer* του σταθερού σημείου για τον δίσκο.

Η θεωρία Ομοτοπιών εντάσσεται σε ένα μεγάλο κλάδο των μαθηματικών, την αλγεβρική τοπολογία, η οποία μελετά τους τοπολογικούς χώρους και τις συνεχείς απεικονίσεις σαν αλγεβρικά αντικείμενα. Στόχος της θεωρίας Ομοτοπιών είναι να εισάγει νέα εργαλεία (όπως η Θεμελιώδης Ομάδα) για την ταξινόμηση των τοπολογικών χώρων με την έννοια του ομοιομορφισμού. Οι τεχνικές που ανπτύσσει η θεωρία αυτή κατορθώνει να ταξινομήσει κάποιους βασικούς χώρους, πέραν όσων ήταν ήδη εφικτό να ταξινομηθούν μέσω της θεωρίας της Γενικής Τοπολογίας. Αυτή η διπλωματική εργασία περιορίζεται στην παρουσίαση ενός μέρους της θεωρίας Ομοτοπιών, εκείνου ακριβώς που είναι απαραίτητο για το στόχο της δηλαδή, την κατανόηση της συμβολής αυτής της Θεωρίας για την απόδειξη του Θεωρήματος του *Brouwer* του σταθερού σημείου για τον δίσκο. Σημειώνουμε ότι, για την ανάπτυξη της εργασίας αυτής, βασιστήκαμε στο Κεφάλαιο 8 του *James R. Munkres, Topology First Course, NJ* : *Prentice Hall of India, New Delhi,* 1992.

Κρίναμε σκόπιμο, πριν την παρουσίαση του καθαρά μαθηματικού μέρους της εργασίας, να αναφερθούμε σε μερικά σχετικά ιστορικά γεγονότα. Προς τούτο, παραθέτουμε κάποια ιστορικά στοιχεία για την Θεωρία των Σταθερών Σημείων και ένα βιογραφικό σημείωμα του *Luitzen Egbertus Jan Brouwer*.

Θεωρία των Σταθερών Σημείων

(Ιστορικά στοιχεία)

Η θεωρία των Σταθερών Σημείων είναι ένα αναπόσπαστο κομμάτι της Τοπολογίας που πρωτοεμφανίστηκε στην εργασία του *Henri Poincare* το 1880. Ο *Poincare* έδειξε ότι οι λύσεις σημαντικών αναλυτικών προβλημάτων μπορούν να μελετηθούν ορίζοντας ένα σύνολο X και μία απεικόνιση $f : X \to X$ με τέτοιο τρόπο ώστε, οι λύσεις να αντιστοιχούν σε *σταθερά σημεία* της απεικόνισης f, δηλαδή στα σημεία $x \in X$ τέτοια ώστε $f(x) = x$.

Στη συνέχεια, η κεντρική ιδέα των Σταθερών σημείων αναπτύχθηκε σε μία τοπολογική βάση από τον *Luitzen Egbertus Jan Brouwer*, ανεξάρτητα πλέον από την προσέγγιση του *Poincare* για τα αναλυτικά προβλήματα, με το γνωστό Θεώρημα του *Brouwer* του σταθερού σημείου. Επιπλέον, η χρήση της θεωρίας Ομολογιών στη θεωρία των Σταθερών σημείων από τον *Solomon Lefschetz* αναπτύχθηκε περαιτέρω κατά την ίδια περίοδο από τον *Heinz Hopf*.

Ο *Solomon Lefschetz* εισήγαγε τον γνωστό "αριθμό *Lefschetz* μίας απεικόνισης" και απέδειξε ότι αν ο αριθμός αυτός είναι μη-μηδενικός τότε η απεικόνιση έχει σταθερό σημείο. Συνεπώς, αν ο "αριθμός *Lefschetz* μίας απεικόνισης" είναι μη-μηδενικός τότε κάθε απεικόνιση που ανήκει στην κλάση ομοτοπίας(βλέπε Κεφάλαιο 2) θα έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο. Στη συνέχεια ο *Jakob Nielsen* το 1913 στη διδακτορική του διατριβή δεν αρκέστηκε στην ύπαρξη του σταθερού σημείου αλλά, προσπάθησε να βρει τον ελάχιστο αριθμό των σταθερών σημείων όλων των απεικονίσεων που ανήκουν στην κλάση ομοτοπίας. Πιο συγκεκριμένα, ο *Jakob Nielsen* για μία απεικόνιση $f : X \to X$, όπου X συμπαγής χώρος, όρισε τον αριθμό $MF[f] = min\{\#Fix(g) : g \simeq f\}$, δηλαδή g, f ομοτοπικές απεικονίσεις(βλέπε Κεφάλαιο 2), όπου $\#Fix(g)$ ο αριθμός των σταθερών σημείων της g, ως εξής:
Όρισε την εξής σχέση ισοδυναμίας στο $Fix(f)$: το x θα είναι ισοδύναμο με το y ανν υπάρχει μονοπάτι a από το x στο y τέτοιο ώστε $f(a) \simeq_p a$, δηλαδή τα $f(a)$, a ομοτοπικά κατά δρόμους(βλέπε Κεφάλαιο 2).
Οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζονται "κλάσεις-*Nielsen*" και για τον "αριθμό *Nielsen*", $N(f)$, ισχύει $N(f) \leq MF[f]$.

Την θεωρία των Σταθερών σημείων εξέλιξαν ακόμη περισσότερο οι *Kurt Reidemeister* και ο μαθητής του *Franz Wecken*, ενώ το 1990 οι *Donco Dimovski* και *Ross Geoghegan* ασχολήθηκαν με το αντίστροφο του θεωρήματος του *Solomon Lefschetz* στην εργασία τους με τίτλο "*One – parameter fixed point theory*".

Luitzen Egbertus Jan Brouwer

(Βιογραφικό σημείωμα)

Γέννηση: 27 Φεβρουαρίου 1881, *Overschie, Netherlands*
Θάνατος: 2 Δεκεμβρίου 1966, *Blaricum, Netherlands*

Ο *L. E. J. Brouwer*, γνωστός στους φίλους του ως *Bertus*, έκανε τις γυμνασιακές του σπουδές στο *Hoorn*, μία πόλη στο *Zuiderzee* βόρεια του *Amsterdam*. Η επίδοση του ήταν εξαιρετική και σε ηλικία δεκατεσσάρων ετών είχε ολοκλιρώση τις σπουδές του. Καθώς δεν είχε διδαχθεί Ελληνικά ή Λατινικά που ήταν προαπαιτούμενα για την είσοδο του στο πανεπιστήμιο, δαπάνησε τα δύο επόμενα χρόνια προκειμένου να αποκτήσει τις σχετικές γνώσεις. Εκείνη την εποχή οι οικογένεια του μετακόμισε στο *Haarlem*, δυτικά του *Amsterdam*, και το 1897 έδωσε εισαγωγικές εξετάσεις γαι το πανεπιστήμιο του *Amsterdam*.

Ο *Korteweg*, καθηγητής των Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του *Amsterdam*, διέκρινε αμέσως τις εξαιρετικές ικανότητες του *Brouwer*. Ο *Brouwer*, ως φοιτητής απέδειξε νέα αποτελέσματα που αφορούσαν τις συνεχείς κινήσεις σε τετραδιάστατο χώρο και ο *Korteweg* τον ενθάρρυνε να τα δημοσιεύσει. Πράγματι, η πρώτη εργασία του *Brouwer* δημοσιεύθηκε το 1904 από τη Βασιλική Ακαδημία Επιστημών του *Amsterdam*. Άλλοι τομείς που ενδιέφεραν τον *Brouwer* ήταν η Τοπολογία και τα Θεμέλια των Μαθηματικών, και οι γνώσεις που απέκτησε γι΄ αυτά προέρχονταν από παρακολούθηση διαλέξεων στο πανεπιστήμιο καθώς και από προσωπική μελέτη. Ολοκλήρωσε τη διπλωματική του εργασία(*Master Degree*) το 1904 και τον ίδιο χρόνο παντρεύτηκε την κατά 11 χρόνια μεγαλύτερη του *Lize de Holl*, η οποία είχε μία κόρη από προηγούμενο γάμο. Μετά το γάμο το ζεύγος (που δεν θα αποκτούσε παιδιά) μετακόμισε στο *Blaricum*.

Από νωρίς ο *Brouwer* ενδιαφέρθηκε για τη Φιλοσοφία των Μαθηματικών ενώ παράλληλα, τον γοήτευαν ο μυστικισμός και τα διάφορα φιλοσοφικά ερωτήματα σχετικά με την ανθρώπινη κοινωνία. Δημοσίευσε τις σκέψεις του για τα ζητήματα αυτά το 1905 στη διατριβή του *Leven, Kunst, en Mystiek*(Ζωή, τέχνη και μυστικισμός).

Η διδακτορική διατριβή του *Brouwer* δημοσιεύτηκε το 1907 και η συμβολή της στη τρέχουσα διαμάχη μεταξύ *Russell* και *Poincare* για τα λογικά θεμέλια των Μαθηματικών ήταν σημαντική. Γρήγορα όμως, ο ίδιος αντιλήφθηκε ότι οι απόψεις του για τα θεμέλια των Μαθηματικών δύσκολα θα γίνονταν αποδεκτές. Παρόλ' αυτά, συνέχισε την ανάπτυξη τω ιδεών του στο *The Unreliability of the Logical Principles*, δημοσιευμένο το 1908.

Ο *Brouwer* κατηύθυνε την έρευνα του σε δύο περιοχές. Συνέχισε τη μελέτη των λογικών θεμελίων των Μαθηματικών και ταυτόχρονα ασχολήθηκε σοβαρά με προβλήματα από τον κατάλογο των προβλημάτων που έθεσε ο *Hilbert*, και ιδιαίτερα με το 5^{o} πρόβλημα του *Hilbert* γαι τη θεωρία συνεχών ομάδων.
Το 1909 προσελήφθη ως *privatdocent* στο πανεπιστήμιο του *Amsterdam*. Στη διάλεξη του στις 12 Οκτωβρίου του 1909 (με τίτλο *The nature of geometry*) περιέγραφε το ερευνητικό του πρόγραμμα. Το 1912, ο *Brouwer* εκλέχθηκε στην Βασιλική Ακαδημία Επιστημών και στο πανεπιστήμιο του *Amsterdam* όπου και παρέμεινε μέχρι την συνταξιοδότηση του.

Πέραν των άλλων μεταξύ των ετών 1909 και 1913, ο *Brouwer* συνέβαλε καθοριστικά στην ανάπτυξη της θεωρίας της Τοπολογίας και πολλοί τον θεωρούν ως έναν από τους θεμελιωτές της. Ανακάλυψε χαρακτηρισμούς των τοπολογικών απεικονίσεων του καρτεσιανού επιπέδου και μία σειρά θεωρημάτων Σταθερού σημείου. Το πρώτο από τα θεωρήματα του αυτά, στο οποίο απέδειξε ότι, μία συνεχής, 1-1 απεικόνιση της σφαίρας στον εαυτό της που διατηρεί τον προσανατολισμό της έχει ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο, προέρχεται από τις έρευνές του στο 5^{o} πρόβλημα του *Hilbert*. Το αποτέλεσμα που αρχικά αποδείχθηκε για τη δισδιάστατη σφαίρα, γενικεύτηκε από τον ίδιο τον *Brouwer* για $n-$διάστατη σφαίρα, εισάγοντας παράλληλα την έννοια του βαθμού απεικόνισης.

Η διδακτορική του διατριβή το 1907 σηματοδοτεί την έναρξη της Ενορατικής Σχολής. Στη δημοσίευση του το 1908 απορρίπτει την Αρχή του Αποκλειομένου Τρίτου, και ακολουθεί μία σειρά δημοσιεύσεων όπου αναπτύσσονται οι βασικές ιδέες του σύμφωνα με το δόγμα του μαθηματικού ενορατισμού, που ο ίδιος είχε εισάγει. Οι θέσεις του αυτές για τα θεμέλια των μαθηματικών δέχθηκαν φοβερές επιθέσεις, αλλά παρόλ' αυτά κατηύθυναν δημιουργικά τους μαθηματικούς μέχρι και τις μέρες μας.

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Άλγεβρας και Τοπολογίας

1.1 Στοιχεία Άλγεβρας

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.1 Έστω σύνολο X. Αν $C = \{X_i\}_{i \in I}$ είναι μία συλλογή υποσυνόλων του X με $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ και $X_i \cap X_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$, τότε λέμε ότι έχουμε μία *διαμέριση του συνόλου* X.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.2 Μία σχέχη $\sim$ σ'ενα σύνολο S λέγεται *σχέση ισοδυναμίας* στο S αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\alpha \sim \alpha$ *(Ανακλαστική)*
(ii) Αν $\alpha \sim \beta$ τότε $\beta \sim \alpha$ *(Συμμετρική)*
(iii) Αν $\alpha \sim \beta$ και $\beta \sim \gamma$ τότε $\alpha \sim \gamma$ *(Μεταβατική)*

Με αυτόν τον τρόπο η $\sim$ ορίζει με φυσιολογικό τρόπο μια διαμέριση C του S, η οποία έχει ως στοιχεία τα υποσύνολα

$$\overline{a} = \{x \in S : x \sim a\}$$

του S, για κάθε $a \in S$. Κάθε υποσύνολο $\overline{a}$ της φυσιολογικής διαμέρισης που ορίζεται από τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ λέγεται *κλάση ισοδυναμίας* .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.3 Ως *ομάδα* $< G, * >$ ορίζεται ένα σύνολο G, μαζί με μια διμελή πράξη $*$ στο G τέτοια ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

$\mathcal{G}_1$: Η διμελής πράξη $*$ είναι προσεταιριστική.

$\mathcal{G}_2$: Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G τέτοιο ώστε $e * x = x * e = x$, για κάθε $x \in G$. Το στοιχείο e λέγεται *ταυτοτικό στοιχείο* ως προς την $*$.

$\mathcal{G}_3$: : Για κάθε $a \in G$, υπάρχει $a' \in G$ με την ιδιότητα $a' * a = a * a'$. Το στοιχείο a' ονομάζεται *αντίστροφο στοιχείο* του a προς την $*$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.4 Έστω G, G' ομάδες. Μία απεικόνιση $\varphi : G \to G'$ θα λέγεται *ομομορφισμός* αν

$$\varphi(a\beta) = \varphi(a)\varphi(\beta), \text{ για κάθε } a, \beta \in G.$$

Αν η φ απεικονίζει κάθε στοιχείο της G στο ταυτοτικό στοιχείο της G' τότε λέγεται *τετριμένος ομομορφισμός*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.5 Έστω G, G' ομάδες. Μία απεικόνιση $\varphi : G \to G'$ θα λέγεται *ισομορφισμός* αν είναι ομομορφισμός, 1-1 και επί.

1.2 Τοπολογικοί χώροι

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1 Μία *τοπολογία* σε ένα σύνολο X είναι μία συλλογή $\mathfrak{I}$ από υποσύνολα του X τα οποία έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. Το $\emptyset$ και ο X ανήκουν στην $\mathfrak{I}$.
2. Αν Ι αυθαίρετο σύνολο δείκτων και $G_i \in \mathfrak{I}$, $\forall i \in$ Ι τότε και η $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathfrak{I}$.
3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \mathfrak{I}$ ισχύει η $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathfrak{I}$.

Το ζεύγος $(X, \mathfrak{I})$ ονομάζεται *τοπολογικός χώρος*. Θα αναφερόμαστε απλά σε ένα τοπολογικό χώρο X αν δεν είναι απαραίτητο να επισημανθεί η τοπολογία του $\mathfrak{I}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.2 Έστω τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{I})$. Θα λέμε ότι ένα υποσύνολο U του X είναι *ανοιχτό σύνολο* του X αν $U \in \mathfrak{I}$.

Παραδείγματα : Έστω σύνολο X.

1. Η οικογένεια που αποτελείται από τα σύνολα $\emptyset$ και X αποτελεί την *τετριμένη τοπολογία* για τον X.
2. Η οικογένεια που αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του X αποτελεί την *διακριτή τοπολογία* για τον X.

Αυτές είναι δύο άμεσα οριζόμενες αλλά " ακραίες " (μέγιστη και ελάχιστη) τοπολογίες για ένα σύνολο X. Παρακάτω θα δούμε την κατασκευή και άλλων τοπολογιών σε ένα σύνολο X.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.3 Έστω $(X, \Im)$ τοπολογικός χώρος. Θα λέμε *περιοχή* του $x \in X$ κάθε ανοιχτό σύνολο που περιέχει το x. Αν U είναι περιοχή του x θα γράφουμε $U \in W(x)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Γενικά είναι αρκετά δύσκολο να αντιλαμβανόμαστε πάντα πλήρως την τοπολογία ενός χώρου αφού δεν μπορούμε να γνωρίζουμε όλα τα ανοιχτά της. Όμως σε κάποιες περιπτώσεις αυτό είναι δυνατόν να γίνει αν έχουμε μία μικρότερη οικογένεια υποσυνόλων του X η οποία θα παράγει όλα τα ανοιχτά της τοπολογίας για τον X. Σχετικά έχουμε τα παρακάτω.

1.3 Βάση τοπολογίας

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.1 Έστω $(X, \Im)$ τοπολογικός χώρος. Μία υποοικογένεια $\mathcal{B}$ της $\Im$ είναι *βάση για την τοπολογία* του X, αν κάθε στοιχείο της $\Im$ γράφεται σαν ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$ δηλαδή, αν $U \in \Im$, υπάρχει οικογένεια $\{B_i\}_{i\in I}$, τέτοια ώστε $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Τα στοιχεία της βάσης $\mathcal{B}$ λέγονται *βασικά στοιχεία*.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.2 Έστω X τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq \Im$. Η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του $\Im$, αν και μόνο αν για κάθε $U \in \Im$ και για κάθε $x \in U$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq U$.

Απόδειξη. "$\Rightarrow$" Έστω $\mathcal{B}$ βάση για την $\Im$, $U \in \Im$ και $x \in U$. Επειδή $\mathcal{B}$ βάση για την $\Im$ έπεται από τον ορισμό 1.3.1 ότι υπάρχει οικογένεια $\{B_i\}_{i\in I}$, τέτοια ώστε $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Συνεπώς θα υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $x \in B_{i_0} \subseteq U$.
"$\Leftarrow$" Έστω $U \in \Im$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει οικογένεια $\{B_i\}_{i\in I}$, τέτοια ώστε $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Πράγματι, αφού $U \in \Im$ τότε για κάθε $x \in U$ υπάρχει $B_x \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x \subseteq U$. Άρα $U = \bigcup_{x\in U} B_x$ και συνεπώς $\mathcal{B}$ βάση για την $\Im$. □

ΛΗΜΜΑ 1.3.3 Έστω σύνολο X και $\mathcal{B}$ μία βάση για την τοπολογία $\Im$ στον X. Τότε η $\Im$ είναι η οικογένεια όλων των ενώσεων των στοιχείων της $\mathcal{B}$ δηλαδή,

$$\Im = \{\textstyle\bigcup_{i\in I} B_i : \ I \text{ σύνολο}, B_i \in \mathcal{B}, \ \forall i \in I\}.$$

Απόδειξη. Προφανώς όλα τα στοιχεία της $\mathcal{B}$ ανήκουν στην τοπολογία $\Im$. Επειδή $\Im$ τοπολογία έπεται ότι οποιαδήποτε αυθαίρετη ένωση των στοιχείων της $\mathcal{B}$ θα ανήκει στην $\Im$. Αντίστροφα, αν $U \in \Im$ τότε για κάθε $x \in U$, υπάρχει $B_x \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in U$ και $B_x \subseteq U$. Συνεπώς $U = \bigcup_{x\in U} B_x$ δηλαδή οποιοδήποτε στοιχείο της τοπολογίας γράφεται ως ένωση στοιχείων της βάσης. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.4 Έστω σύνολο X και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Η $\mathcal{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία $\Im$ του X αν και μόνο αν, έχει τις παρακάτω ιδιότητες
(1) $X = \cup\{B : B \in \mathcal{B}\}$.
(2) Αν $x \in B_1 \cap B_2$ όπου $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, τότε υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ που περιέχει το x τέτοιο ώστε $B_3 \subseteq B_1 \bigcap B_2$.

Απόδειξη. ¨⇒¨ Έστω $\mathcal{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία $\Im$ του X, τότε
(1) αφού X∈ $\Im$ έπεται από τον ορισμό 1.3.1 ότι υπάρχει οικογένεια $\{B_i\}_{i\in I}$, τέτοια ώστε $X = \bigcup_{i\in I} B_i$. Όμως

$$X = \bigcup_{i\in I} B_i \subseteq \{B : B \in \mathcal{B}\}$$

Επίσης, επειδή $\mathcal{B} \subseteq \Im$ έχουμε ότι

$$\{B : B \in \mathcal{B}\} \in \Im.$$

Συνεπώς $X = \cup\{B : B \in \mathcal{B}\}$.
(2) Έστω $x \in B_1 \cap B_2$ όπου $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Τότε από την πρόταση 1.3.2 έπεται ότι υπάχουν B, B' τέτοια ώστε $x \in B \subseteq B_1$ και $x \in B' \subseteq B_2$ αντίστοιχα. Συνεπώς $x \in B \cap B' \subseteq B_1 \cap B_2$ όπου το $B \cap B' \in \Im$ τον ορισμό της τοπολογίας. Από την πρόταση 1.3.2 έπεται ότι υπάρχει $B'' \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B'' \subseteq B \cap B' \subseteq B_1 \cap B_2$. Αν $B \cap B' = \emptyset$ το συμπέρασμα έπεται κατευθείαν.
¨⇐¨ Από το λήμμα 1.3.3 έπεται ότι $\Im = \{\bigcup_{i\in I} B_i : I$ σύνολο, $B_i \in \mathcal{B}, \forall i \in I\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι όταν η $\mathcal{B}$ έχει τις ιδιότητες (1), (2) η $\Im$ είναι τοπολογία για τον X. Οπότε η $\mathcal{B}$ θα είναι μία βάση για την τοπολογία $\Im$.
Ο $X \in \Im$ διότι ο X μπορεί να γραφεί ως $X = \bigcup_{B_i\in\mathcal{B}} B_i$.
Αν $I = \emptyset$ τότε το $\emptyset \in \Im$.
(Η $\Im$ κλειστή στις αυθαίρετες ενώσεις) Έστω I αυθαίρετο σύνολο δείκτων και $U_i \in \Im$, για κάθε $i \in I$ τότε $\bigcup_{j\in J} U_j = \bigcup_{j\in J}(\bigcup_{i\in I_j} B_i) = \bigcup_{i\in I} B_i$ όπου $I = \bigcup_{j\in J} I_j$. Επομένως $\bigcup_{j\in J} U_i \in \Im$.
(Η $\Im$ κλειστή στις πεπερασμένες τομές) Θα το δείξουμε με επαγωγή. Για $n = 2$: Έστω $U_1, U_2 \in \Im$ τότε, $U_1 = \bigcup_{i\in I} B_i$ και $U_2 = \bigcup_{j\in J} B_j$, όπου $B_i, B_j \in \mathcal{B}$ για κάθε $i, j \in I, J$ αντίστοιχα, τότε

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 &= (\bigcup_{i\in I} B_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j) \\ &= \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(B_i \cap B_j) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (2) της υπόθεσης έχουμε ότι για κάθε $x \in B_i \cap B_j$ θα υπάρχει $B_x \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x \subseteq B_i \cap B_j$. Συνεπώς $B_i \cap B_j = \bigcup_{x\in B_i \bigcap B_j} B_x$ δηλαδή, $U_1 \cap U_2 = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(\bigcup_{x\in B_i \bigcap B_j} B_x) = \bigcup_{x\in U_1\cap U_2} B_x$. Άρα $U_1 \cap U_2 \in \Im$
Δεχόμαστε για $n-1$ ότι $\bigcap_{i=1}^{n-1} U_i \in \Im$, θα δείξουμε για n ότι $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \Im$. Πράγματι

$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = (\bigcap_{i=1}^{n-1} U_i) \bigcap U_n$ και από επαγωγική υπόθεση για $n = 2$ έπεται το συμπέρασμα. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Στο σημείο αυτό τίθεται το εξής ερώτημα: Έστω σύνολο X και μία οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του X. Υπάρχει μία μοναδική τοπολογία του X, που να είναι η μικρότερη τοπολογία του X και να περιέχει την $\mathcal{F}$;

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.5 Έστω X σύνολο και $\mathfrak{I}$ μία τοπολογία του X και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Θα λέμε ότι η $\mathfrak{I}$ είναι η *παραγόμενη τοπολογία* από την $\mathcal{F}$ και θα συμβολίζουμε $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathcal{F})$ αν

(i) $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{I}$

(ii) Για κάθε τοπολογία $\mathfrak{I}'$ του X με $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{I}'$, ισχύει $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I}'$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι στον παραπάνω ορισμό η παραγόμενη τοπολογία $\mathfrak{I}(\mathcal{F})$ είναι μοναδική διότι αν υπήρχε μία δεύτερη τοπολογία $\mathfrak{I}'$παραγόμενη από την $\mathcal{F}$ εξ' ορισμού έπεται ότι $\mathfrak{I}' \subseteq \mathfrak{I}$ αλλά ταυτόχρονα $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I}'$. Συνεπώς $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}'$. Η παρακάτω πρόταση δίνει τον εξωτερικό ορισμό της παραγόμενης τοπολογίας καθώς αποδεικνύει και την ύπαρξή της.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.6 Έστω X σύνολο, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ και θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathfrak{I} = \bigcap \{C : C \text{ τοπολογία του X με } \mathcal{F} \subseteq C\}.$$

Η $\mathfrak{I}$ είναι η μικρότερη τοπολογία του X που περιέχει την $\mathcal{F}$ δηλαδή $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathcal{F})$.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι αυτή η οικογένεια $\mathfrak{I} = \bigcap \{C : C$ τοπολογία του X με $\mathcal{F} \subseteq C\}$ αποτελεί τοπολογία για τον X.
Αφού κάθε C είναι τοπολογία για τον X τέτοια ώστε $\mathcal{F} \subseteq C$ έπεται ότι $\emptyset \in C$, για κάθε C, συνεπώς $\emptyset \in \cap C$. Όμοια και X$\in \cap C$.
Έστω I αυθαίρετο σύνολο δεικτων και $G_i \in \mathfrak{I}$, για κάθε $i \in I$ τότε $G_i \in C$, για κάθε C και για κάθε $i \in I$. Επειδή C τοπολογία έπεται ότι $\bigcup_{i \in I} G_i \in C$, για κάθε C δηλαδή, $\bigcup_{i \in I} G_i \in \cap C$, ισοδύναμα $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathfrak{I}$.
Έστω $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \mathfrak{I}$ τότε $G_1, G_2, \ldots, G_n \in C$, για κάθε C. Επειδή C τοπολογία έπεται ότι $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in C$, για κάθε C δηλαδή, $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \cap C$, ισοδύναμα $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathfrak{I}$. Άρα $\mathfrak{I}$ τοπολογία.
Η $\mathfrak{I}$ είναι καλώς ορισμένη διότι $\mathcal{P}(X) \in \{C : C$ τοπολογία του X με $\mathcal{F} \subseteq C\}$ και συνεπώς $\mathfrak{I} \neq \emptyset$. Η $\mathfrak{I}$ εξόρισμού περιέχει τη $\mathcal{F}$. Τέλος η $\mathfrak{I}$ είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την $\mathcal{F}$ διότι αν $\mathfrak{I}'$ τοπολογία του X τέτοια ώστε $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{I}'$ τότε η $\mathfrak{I}' \in \{C : C$ τοπολογία του X με $\mathcal{F} \subseteq C\}$ και συνεπώς $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I}'$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.7 Έστω X σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ορίζουμε

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \{\bigcap_{i=1}^{n} F_i : n \in \mathbb{N} - \{0\}, \{F_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{F}\} \bigcup X$$

Η $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ είναι βάση για την $\mathfrak{I}(\mathcal{F})$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ ικανοποιεί τις ιδιότητες του θεωρήματος 1.3.4. Παρατηρούμε ότι ο X$\in \mathcal{B}(\mathcal{F})$, οπότε $X \subseteq \cup\{B : B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}$ και κατά συνέπεια $X = \cup\{B : B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}$. Έστω τώρα $x \in B_1 \cap B_2$ όπου $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$. Επειδή εξ' ορισμού η $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ είναι πεπερασμένη στις πεπερασμένες τόμες έπεται ότι $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ και προφανώς ισχύει $B_3 = B_1 \cap B_2 \subseteq B_1 \cap B_2$. Συνεπώς μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι η $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ είναι βάση για κάποια τοπολογία $\mathfrak{I}$. Μένει να δείξουμε ότι $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathcal{F})$. Πράγματι, έστω $\mathfrak{I}'$ τοπολογία του X που περιέχει την $\mathcal{F}$. Επειδή η $\mathfrak{I}'$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathcal{F}) \subseteq \mathfrak{I}'$.Επίσης, ισχύει ότι $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I}'$ αφού η $\mathfrak{I}'$ είναι κλειστή ως προς τις αυθαίρετες ενώσεις. Άρα $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathcal{F})$. □

ΛΗΜΜΑ 1.3.8 Έστω X τοπολογικός χώρος. Υποθέτουμε ότι $\mathfrak{C}$ είναι μία οικογένεια από ανοιχτά σύνολα του X τέτοια ώστε για κάθε $x \in$X και για κάθε ανοιχτό σύνολο U του X τέτοιο ώστε $x \in U$, υπάρχει ένα στοιχείο C του $\mathfrak{C}$ τέτοιο ώστε $x \in C \subseteq U$. Τότε $\mathfrak{C}$ είναι βάση για την τοπολογία του X.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι $\mathfrak{C}$ είναι βάση για τον X αρκεί να ικανοποιούνται οι δύο ιδιότητες του θεωρήματος 1.3.4. Για την
(1) Έστω $x \in$X, επειδή X ανοιχτό σύνολο από υπόθεση έπεται ότι θα υπάρχει $C \in \mathfrak{C}$ τέτοιο ώστε $x \in C \subseteq$X.
(2) Έστω $x \in C_1 \bigcap C_2$ όπου $C_1, C_2 \in \mathfrak{C}$. Επειδή C_1, C_2 είναι ανοιχτά έπεται ότι και η τομή τους είναι ανοιχτό και περιέχει το x. Από υπόθεση έπεται ότι υπάρχει ένα στοιχείο C_3 του $\mathfrak{C}$ τέτοιο ώστε $x \in C_3 \subseteq C_1 \bigcap C_2$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Πρέπει να επισημάνουμε ότι στην περίπτωση της παραγόμενης τοπολογίας από τη βάση ξεκινάμε από μία οικογένεια συνόλων με συγκεκριμένες ιδιότητες (ορισμού 1.3.1). Στην περίπτωση που ξεκινίσουμε από μία τυχαία οικογένεια συνόλων και θεωρήσουμε μία νέα οικογένεια που περιλαμβάνει τα στοιχεία της προηγούμενης, όλες τις πεπερασμένες τομές και τις αυθαίρετες ενώσεις των στοιχείων της αυτό είναι τοπολογία; Η ερώτηση αυτή οδήγησε στον παρακάτω ορισμό.

1.4 Υποβάση τοπολογίας

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4.1 Έστω $(X, \mathfrak{I})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Η $\mathcal{F}$ καλείται *υποβάση για την τοπολογία* $\mathfrak{I}$ αν $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathcal{F})$. Τα στοιχεία της υποβάσης $\mathcal{F}$ λέγονται *υποβασικά* υποσύνολα του τοπολογικού χώρου $(X, \mathfrak{I})$.
Η *παραγόμενη τοπολογία από την υποβάση* $\mathcal{F}$ είναι η οικογένεια $\mathfrak{I}(\mathcal{F})$ που αποτελείται

από το $\emptyset$, X, όλες τις πεπερασμένες τομές των στοιχείων της $\mathcal{F}$ και όλες τις αυθαίρετες ενώσεις αυτών των πεπερασμένων τομών.

1.5 Σχετική τοπολογία

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5.1 Έστω $(X, \mathfrak{I})$ τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq$X. Η οικογένεια

$$\mathfrak{I}_Y = \{ Y \bigcap U : U \in \mathfrak{I}\}$$

είναι τοπολογία στον Y και λέγεται *σχετική τοπολογία*. Με την τοπολογία αυτή ο Y καλείται *υπόχωρος* του X.

Στο σημείο αυτό μένει να δείξουμε ότι η $\mathfrak{I}_Y$ είναι τοπολογία. Πράγματι,

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \text{ και } Y = Y \cap \mathrm{X}.$$

$$(U_1 \cap Y) \cap \ldots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap \ldots \cap U_n) \cap Y$$

και αντίστοιχα

$$\bigcup_{a \in J} U_a \cap Y = (\bigcup_{a \in J} U_a) \cap Y$$

ΛΗΜΜΑ 1.5.2 Εάν $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του X, τότε η οικογένεια

$$\mathcal{B}_Y = \{B \bigcap Y : B \in \mathfrak{I}\}$$

είναι βάση για την σχετική τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω $y \in Y$ και U' ανοιχτό στον Y. Από το τελευταίο έπεται ότι υπάρχει U ανοιχτό στον X τέτοιο ώστε $U' = Y \cap U$. Από το λήμμα 1.3.8 έπεται ότι υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $y \in B \subseteq U$. Τότε $y \in B \cap Y \subseteq U \cap Y$, ισοδύναμα $y \in B \cap Y \subseteq U'$. Από το λήμμα 1.3.8 έπεται το συμπέρασμα. □

ΛΗΜΜΑ 1.5.3 Έστω Y υπόχωρος X. Αν U ανοιχτό στον Y και Y ανοιχτό στον X, τότε U ανοιχτό στον X.

Απόδειξη. Αφού U ανοιχτό στον Y, υπάρχει V ανοιχτό στον X τέτοιο ώστε $U = Y \cap V$. Άρα U ανοιχτό στον X ως τομή ανοιχτών στον X. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5.4 Έστω τοπολογικός χώρος X και A$\subseteq$X. Το A θα λέγεται *κλειστό* αν $X - A$ ειναι ανοιχτό στον X.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5.5 Έστω X τοπολογικός χώρος. Τότε ισχύουν τα επόμενα:
(i) Το $\emptyset$ και ο X είναι κλειστά.
(ii) Η αυθαίρετη τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό
(iii) Η πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό.

Απόδειξη. Έστω X τοπολογικός χώρος.

(i) Από τον ορισμό της τοπολογίας το $\emptyset$ και ο X είναι ανοιχτά. Συνεπώς το $X - \emptyset = X$ είναι κλειστό. Όμοια και το $X - X = \emptyset$ είναι κλειστό.

(ii) Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών συνόλων ,όπου I αυθαίρετο σύνολο δεικτών. Αρκεί να δείξουμε ότι το $X - \bigcap_{i\in I} A_i$. Από τους κανόνες *De Morgan* έπεται ότι$X - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(X - A_i)$ το οποίο είναι ανοιχτό ως αυθαίρετη ένωση ανοιχτών (ορισμός τοπολογίας).

(iii) Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ κλειστά σύνολα. Από τους κανόνες *DeMorgan* ισχύει ότι $X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n}(X - A_i)$ το οποίο είναι ανοιχτό από τον ορισμό της τοπολογίας.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5.6 Έστω Y υπόχωρος του X. Τότε ένα σύνολο A είναι κλειστό στον Y αν και μόνο αν γράφεται σαν τομή ενός κλειστού συνόλου στον X με τον Y.

Απόδειξη. ¨$\Rightarrow$¨ Έστω A κλειστό στον Y. Τότε το $Y - A$ θα είναι ανοιχτό στον Y, δηλαδή θα υπάρχει U ανοιχτό στον X τέτοιο ώστε $Y - A = U \cap Y$, ισοδύναμα $A = (X - U) \cap Y$ όπου $X - U$ ανοιχτό στον X.
¨$\Leftarrow$¨ Έστω ότι $A = U \cap Y$ όπου U κλειστό στον X. Τότε το $X - U$ είναι ανοιχτό στον X και $(X - U) \cap Y = Y - A$ δηλαδή το $Y - A$ είναι ανοιχτό στον Y οπότε A κλειστό στον Y. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5.7 Έστω Y υπόχωρος του X. Αν A κλειστό στον Y και Y κλειστό στον X, τότε A κλειστό στον X.

Απόδειξη. Αφού A κλειστό στον Y, υπάρχει F κλειστό στον X τέτοιο ώστε $A = Y \cap F$. Άρα A κλειστό στον X ως τομή κλειστών στον X. □

1.6 Βασικές έννοιες

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.1 Έστω $A \subseteq X$. Ένα σημείο $x \in X$ θα λέγεται *οριακό σημείο* του A αν κάθε περιοχή του x τέμνει το A σε τουλάχιστον ένα σημείο.
Το σύνολο $\overline{A} = \{x \in X :$ για κάθε $U \in W(x),\ U \cap A \neq \emptyset\}$ καλείται *κλειστότητα* του A και περιλαμβάνει όλα τα οριακά σημεία του X.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6.2

(i) $A \subseteq \overline{A}$ για κάθε σύνολο A.

(ii) A είναι κλειστό εάν και μόνο εάν $A = \overline{A}$

Απόδειξη. (i) Έστω $x \in A$ και $x \notin \overline{A}$. Τότε θα υπήρχε $U_0 \in W(x)$ τέτοιο ώστε $U_0 \cap A = \emptyset$. Άτοπο αφού $U_0 \cap A = \{x\}$.

(ii) Έστω A κλειστό. Θα δείξουμε ότι $A = \overline{A}$. Πράγματι, αν $x \in \overline{A}$ τότε για κάθε $U \in w(x)$ θα ισχύει $\emptyset \neq U \cap A \subseteq A$. Προφανώς επειδή $x \in U \cap A$ έπεται ότι $x \in A$. Άρα $\overline{A} \subseteq A$ και από το (i) έχουμε $A = \overline{A}$.
Αντίστροφα, έστω $x \notin A$ άρα από υπόθεση $x \notin \overline{A}$. Τότε θα υπάρχει $U_0 \in W(x)$ τέτοιο ώστε $U_0 \cap A = \emptyset$. Όμως επειδή $U_0 \in W(x)$ έπεται ότι θα υπάρχει βασικό ανοιχτό B τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq U_0 \Rightarrow B \cap A = \emptyset \Rightarrow B \subseteq X - A \Rightarrow A$ είναι κλειστό. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6.3 Ισχύουν:

(i) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(ii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ δηλαδή, $\overline{A}$ είναι κλειστό.

(iii) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

(iv) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο σύνολο που περιέχει το A και ο εξωτερικός ορισμός του είναι

$$\overline{A} = \bigcap \{F : F \text{ κλειστό και } A \subseteq F\}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη των ιδιοτήτων (i) – (iv) δεν εμφανίζουν κάποια δυσκολία.

Θα αποδείξουμε το δεύτερο σκέλος της πρότασης. Οπότε, από την προηγούμενη πρόταση $\overline{A}$ είναι κλειστό και $A \subseteq \overline{A}$. Άρα,

$$\bigcap \{F : F \text{ κλειστό και } A \subseteq F\} \subseteq \overline{A}$$

Αντίστροφα, αν F κλειστό τέτοιο ώστε $A \subseteq F$ από την (i) έπεται ότι $\overline{A} \subseteq \overline{F}$. Συνεπώς,

$$\overline{A} \subseteq \bigcap \{F : F \text{ κλειστό και } A \subseteq F\}$$

και με αυτό ολοκληρώνεται η αποδειξή. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.4 Έστω $A \subseteq X$. Ένα σημείο $x \in X$ θα λέγεται *σημείο συσσώρευσης* του A αν κάθε περιοχή του x αφαιρώντας το x τέμνει το A σε τουλάχιστον ένα σημείο. Το σύνολο $A' = \{x \in X : \text{ για κάθε } U \in W(x),\ U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset\}$ καλείται *παράγωγος* του A και περιλαμβάνει όλα τα σημεία συσσώρευσης του X.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6.5 Έστω $A \subseteq X$ και A' η παράγωγος του A. Τότε

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \overline{A}$ τότε αν $x \in A \Rightarrow x \in A \cup A'$. Αν $x \notin A$ επειδή $x \in \overline{A}$ έπεται ότι για κάθε $U \in W(x)$ ισχύει ότι $U \cap A \neq \emptyset$ και συνεπώς $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$, δηλαδή $x \in A \cup A'$ και συνεπώς $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.
Αντίστροφα, έστω $x \in A \cup A'$. Αν $x \in A$ τότε $x \in \overline{A}$. Αν $x \in A'$ έπεται ότι για κάθε $U \in W(x)$, $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset\} \Rightarrow U \in W(x)$, $U \cap (A - \{x\}) \subseteq U \cap A \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$ για κάθε $U \in W(x)$, άρα $x \in \overline{A}$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.6 Έστω $A \subseteq X$. Το *εσωτερικό* του A είναι το μεγαλύτερο σύνολο που περιέχεται στο A και θα το συμβολίζουμε $Int\,(A)$ δηλαδή,

$$Int\,(A) = \bigcup \{U : U \text{ ανοιχτό και } U \subseteq A\}.$$

1.7 Συνεχείς απεικονίσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7.1 Έστω $(X, \mathfrak{I}_X)$ και $(Y, \mathfrak{I}_Y)$ τοπολογικοί χώροι. Μία απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ θα λέγεται *συνεχής*, εάν η αντίστροφη απεικόνιση οποιοδήποτε ανοιχτού στον Y είναι ανοιχτό στον X δηλαδή, για κάθε $V \in \mathfrak{I}_Y$, το $f^{-1}(V) \in \mathfrak{I}_X$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.2

(1) (Σύνθεση) Αν $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$ συνεχείς συναρτήσεις, τότε $g \circ f : X \longrightarrow Z$ είναι συνεχής.

(2) (Περιορισμός πεδίου ορισμού) Αν $f : X \longrightarrow Y$ και $A \subseteq X$ με την σχετική τοπολογία του A, τότε $f|_A : A \longrightarrow Y$ είναι επίσης συνεχής.

(3) (Περιορισμός πεδίου τιμών) Αν $f : X \longrightarrow Y$ και $f(X) \subseteq X$ με την σχετική τοπολογία του $f(X)$, τότε $f : X \longrightarrow f(X)$ είναι επίσης συνεχής.

Απόδειξη. Έστω οι απεικονίσεις $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$

(1) Έστω $V \in \mathfrak{I}_Z$, τότε $(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$. Το $g^{-1}(V) \in \mathfrak{I}_Y$

λόγω συνέχειας της g και το $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \Im_X$ λόγω συνέχειας της f. Άρα $(g \circ f)^{-1}(V) \in \Im_X$, συνεπώς $g \circ f$ συνεχής.

(2) Έστω $f|_A : A \longrightarrow Y$ και $V \in \Im_Y$, τότε το $f|_A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap Y$ το οποίο είναι ανοιχτό στην σχετική τοπολογία του A ως τομή του ανοιχτού $f^{-1}(V)$ στον X από συνέχεια τη f και του Y.

(3) Έστω $f : X \longrightarrow f(X)$ και $V \subseteq f(X)$ ανοιχτό στο $f(X)$. Από αυτό έπεται ότι υπάρχει U ανοιχτό στον Y τέτοιο ώστε $V = U \cap f(X)$. Οπότε $f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap f(X)) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U)$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7.3 Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \longrightarrow Y$ μία απεικόνιση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) f είναι συνεχής.

(2) Η αντίστροφη εικόνα κάθε κλειστού συνόλου στον Y είναι κλειστό στον X.

(3) Η αντίστροφη εικόνα κάθε στοιχείου της βάσης ή υποβάσης στον Y είναι ανοιχτό στον X.

(4) Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $V \in W(f(x))$ στον Y, υπάρχει $U \in W(x)$ στον X τέτοια ώστε $f(U) \subseteq V$.

(5) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, για κάθε $A \subseteq X$.

(6) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$, για κάθε $B \subseteq Y$.

Απόδειξη. (1)⇒(2) Έστω F κλειστό στον $Y \Rightarrow Y - F$ είναι ανοιχτό στον $Y \overset{f\ \text{συνεχής}}{\Longleftrightarrow} f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F)$ ανοιχτό και άρα $f^{-1}(F)$ κλειστό.

(2)⇒(1) Έστω U ανοιχτό στον $\Upsilon \Rightarrow Y - U$ είναι κλειστό στον Y. Από υπόθεση $f^{-1}(Y - U) = X - f^{-1}(U)$ είναι κλειστό στον $X \Rightarrow f^{-1}(U)$ ανοιχτό στον X. Άρα f είναι συνεχής.

(1)⇔(3) Έστω $\{U_a : a \in \mathcal{A}\}$ υποβάση του Y τότε, επειδή f είναι συνεχής το $f^{-1}(U_a)$ είναι ανοιχτό για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Αντίστοφα, έστω U ανοιχτό στον Y τότε,

$$\begin{aligned} U = \bigcup\{\textstyle\bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i} : \{a_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}\} \Rightarrow f^{-1}(U) &= f^{-1}(\textstyle\bigcup\{\bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i} : \{a_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}\}) \\ &= \textstyle\bigcup f^{-1}(\{\bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i} : \{a_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}\}) \\ &= \textstyle\bigcup(\bigcap_{i=1}^{n}\{f^{-1}(U_{a_i}) : \{a_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}\}) \end{aligned}$$

το οποίο είναι ανοιχτό ως αυθαίρετη ένωση πεπερασμένων τομών ανοιχτών.
(1)⇒(4) Έστω $x \in X$ και $V \in W(f(x))$ στον Y. Επειδή f είναι συνεχής έπεται ότι $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό στον X, δηλαδή υπάρχει βασικό ανοιχτό U τέτοιο ώστε $U \in W(x)$ και $U \subseteq f^{-1}(V)$ ισοδύναμα, $f(U) \subseteq V \cap f(X) \subseteq V$.

(4)⇒(5) Έστω $y \in f(\overline{A})$ δηλαδή, υπάρχει $x \in \overline{A}$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Έστω επίσης $V \in W(f(x))$. Από υπόθεση θα υπάρχει $U' \in W(x)$ στον X τέτοια ώστε $f(U) \subseteq V$ και επειδή $x \in \overline{A}$ έπεται ότι $U' \cap A \neq \emptyset \Rightarrow f(U' \cap A) \neq \emptyset \Rightarrow f(U') \cap f(A) \neq \emptyset$ οπότε $V \cap f(A) \neq \emptyset$. Άρα $y \in \overline{f(A)}$.

(5)⇒(6) Αν θέσουμε όπου $A = f^{-1}(B)$ έπεται το συμπέρασμα.

(6)⇒(2) Από υπόθεση έχουμε ότι $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$. Αν B κλειστό στον Y τότε, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$ και πάντα ισχύει $f^{-1}(B) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$. Συνεπώς $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$, δηλαδή $f^{-1}(B)$ κλειστό στον X.

□

ΛΗΜΜΑ 1.7.4 (*PastingLemma*) Έστω $X = A \cup B$ όπου A και B κλειστά στον X. Έστω $f : A \longrightarrow Y$ και $g : B \longrightarrow Y$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A \cap B$ τότε η συνάρτηση $h : X \longrightarrow Y$ που ορίζεται ως

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{αν } x \in A \\ \\ g(x) & , \text{αν } x \in B \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η h είναι συνεχής αρκεί να δειξούμε ότι για κάθε κλειστό υποσύνολο C του Y, το $h^{-1}(C)$ είναι κλειστό στον X. Πράγματι, έστω C κλειστό υποσύνολο του Y τότε $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$. Επειδή f, g συνεχείς έπεται ότι τα $f^{-1}(C)$ και $g^{-1}(C)$ είναι κλειστά στο A και B αντιστοίχα και κατ΄ επέκταση στον X. Όποτε το $h^{-1}(C)$ είναι κλειστό στον X ως πεπερασμένη ένωση κλειστών. Άρα η h είναι συνεχής. □

1.8 Τοπολογία γινόμενο

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.1 Έστω $\{X_i\}_{i \in I}$ μία μη κενή οικογένεια συνόλων. Ως *καρτεσιανό γινόμενο* $\prod_{i \in I} X_i$ ορίζουμε το σύνολο

$$\prod_{i \in I} X_i = \{x : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i : x(i) \in X_i, \text{ για κάθε } i \in I\}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Σύμφωνα με το αξίωμα της επιλογής, αν $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι μία μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων, δηλαδή $I \neq \emptyset$ και $X_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in I$, τότε $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$. Αυτό μας δίνει το δικαίωμα να υποθέτουμε ότι πάντα μπορεί να υπάρχει το σύνολο $\prod_{i\in I} X_i$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.2 Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μία μη κενή οικογένεια συνόλων, $J \subseteq I$ και ορίζουμε $P\colon \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in J} X_i$ με $P(x) = x|_J$. Τότε P είναι επί.

Απόδειξη. Έστω $f \in \prod_{i\in J} X_i$. Άρκει να βρούμε ένα $x \in \prod_{i\in I} X_i$ τέτοιο ώστε $P(x) = f$. Από το αξίωμα της επιλογής υπάρχει μία συνάρτηση επιλογής $\overline{x} : I - J \longrightarrow \bigcup_{i\in I-J} X_i$. Τότε η απεικόνιση $x : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I-J} X_i$ με $x|_J = f$, $x|_{I-J} = \overline{x}$ είναι ένα στοιχείο της μορφής

$$\prod_{i\in I} X_i \qquad \text{και} \qquad P(x) = x|_J = f.$$

$\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.3 Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μία μη κενή οικογένεια συνόλων. Για κάθε $i \in I$, η απεικόνιση $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ με $\pi_i(x) = x_i$ καλείται *i-προβολή* του $\prod_{i\in I} X_i$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.4 Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένειες συνόλων, με $A_i \subseteq X_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε ισχύουν τα επόμενα:

(*i*) $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} X_i$,

(*ii*) $\prod_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(A_i)$.

Απόδειξη. (*i*) Έστω $x \in \prod_{i\in I} A_i$. Από τον ορισμό 1.8.1 έπεται ότι $x = (x_i)_{i\in I}$ με $x_i \in A_i$ για κάθε $i \in I$, οπότε και $x_i \in X_i$ για κάθε $i \in I$, δηλαδή $x \in \prod_{i\in I} X_i$.
(*ii*)

$$\begin{aligned} x \in \prod_{i\in I} A_i &\Leftrightarrow x = (x_i)_{i\in I} \text{ με } x_i \in A_i \text{ για κάθε } i \in I \\ &\Leftrightarrow x = (x_i)_{i\in I} \text{ με } \pi_i^{-1}(x) \in A_i \text{ για κάθε } i \in I \\ &\Leftrightarrow x = (x_i)_{i\in I} \text{ με } x \in \pi_i^{-1}(A_i) \text{ για κάθε } i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(A_i). \end{aligned}$$

$\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.5 Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i\in I}$ οικογένειες συνόλων. Τότε ισχύουν τα επόμενα:

(*i*) $(\prod_{i\in I} A_i) \cap (\prod_{i\in I} B_i) = \prod_{i\in I}(A_i \cap B_i)$, (*ii*) $(\prod_{i\in I} A_i) \cup (\prod_{i\in I} B_i) \subseteq \prod_{i\in I}(A_i \cup B_i)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη δεν εμφανίζει καμία ιδιαίτερη δυσκολία. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.6 Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένειες συνόλων, με $A_i \subseteq X_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε, για κάθε $i \in I$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(*i*) $(\pi_i^{-1}(A_i))^c = \pi_i^{-1}(A_i^c)$,

(*ii*) $(\prod_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(A_i^c)$.

Απόδειξη. (*i*)

$$\begin{aligned} x \in (\pi_i^{-1}(A_i))^c &\Leftrightarrow x \notin \pi_i^{-1}(A_i) \\ &\Leftrightarrow \pi_i(x) \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \pi_i(x) \in (A_i)^c \\ &\Leftrightarrow x \in \pi_i^{-1}(A_i^c) \end{aligned}$$

(*ii*) Χρησιμοποιώντας το (*i*) και την πρόταση 1.8.4(*ii*) έπεται το συμπέρασμα. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.7 Έστω $\{(X_i, \mathfrak{I}_i)\}_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων. Εφοδιάζουμε το $\prod_{i\in I} X_i$ με την *τοπολογία γινόμενο* $\mathfrak{I}$ η οποία ορίζεται ως η τοπολογία με βάση την οικογένεια

$$\mathfrak{B} = \{\prod_{i\in I} U_i : U_i \in \mathfrak{I}_i, \text{ για κάθε } i \in I \text{ και } \{i \in I : U_i \neq X_i\} \text{ πεπερασμένο}\}.$$

Ο τοπολογικός χώρος $(\prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{I})$ καλείται *χώρος γινόμενο.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.8 Έστω $\{(X_i, \mathfrak{I}_i)\}_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων. Η οικογένεια

$$\mathcal{F} = \{\pi_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \in \mathfrak{I}_i\}$$

είναι υποβάση για την τοπολογία γινόμενο $\mathfrak{I}$ του $\prod_{i\in I} X_i$, δηλαδή $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathcal{F})$. Πιο συγκεκριμένα, η βάση

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \{\bigcap_{i\in F} C_i : C_i \in \mathcal{F} \text{ και } F \text{ πεπερασμένο, μη κενό υποσύνολο του } I\}$$

της $\mathfrak{I}(\mathcal{F})$ ταυτίζεται με τη βάση

$$\mathfrak{B} = \{\prod_{i\in I} U_i :\ U_i \in \mathfrak{I}_i, \text{ για κάθε } i \in I \text{ και } \{i \in I:\ U_i \neq X_i\} \text{ πεπερασμένο}\}.$$

της τοπολογίας γινόμενο $\mathfrak{I}$.

Απόδειξη. Έστω $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{F})$, τότε το $B = \bigcap_{i\in F} C_i$, όπου $C_i = \pi_i^{-1}(U_i)$ για κάθε $i \in F$, $U_i \in \mathfrak{I}_i$ και F πεπερασμένο, μη κενό υποσύνολο του I. Θέτοντας $U_i = X_i$ για κάθε $i \in I-F$ έπεται ότι το σύνολο $\{i \in I:\ U_i \neq X_i\}$ θα είναι πεπεραμένο αφού F πεπερασμένο. Συνεπώς για κάθε $i \in F$ τέτοιο ώστε $U_i = X_i$, θα ισχύει $\prod_{i\in I} X_i = \pi_i^{-1}(U_i)$ αφού από την πρόταση 1.8.4(*ii*). Επιπλέον, $\prod_{i\in I} X_i = \pi_i^{-1}(U_i)$ για κάθε $i \in I-F$. Συνεπώς,

$$B = \bigcap_{i\in F} \pi_i^{-1}(U_i) = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(U_i) = \prod_{i\in I} U_i.$$

Άρα $B \in \mathfrak{B}$.
Έστω $B \in \mathfrak{B}$. Τότε το B θα γράφεται ως $B = \prod_{i\in I} U_i$, όπου $U_i \in \mathfrak{I}_i$, για κάθε $i \in I$ και $\{i \in I:\ U_i \neq X_i\}$ πεπερασμένο. Οπότε,

$$B = \prod_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(U_i) = \bigcap_{i\in F} \pi_i^{-1}(U_i).$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι

$$\bigcap_{i\in I-F} \pi_i^{-1}(U_i) = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(X_i) = \prod_{i\in I} X_i$$

Άρα $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{F})$. Συνεπώς οι δύο βάσεις ταυτίζονται. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.9 Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μία μη κενή οικογένεια συνόλων. Τότε η i–προβολή $\pi_i :\ \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ είναι συνεχής, ανοιχτή και επί για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. Η i–προβολή π_i είναι επί αφού από το θεώρημα 1.8.2 αν το $J = X_i$ έπεται το συμπέρασμα.
Για να δείξουμε ότι η π_i είναι συνεχής, αρκεί για κάθε ανοιχτό U στο X_i, το $\pi_i^{-1}(U)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} X_i$. Πράγματι, από την πρόταση 1.8.8 το συμπέρασμα είναι άμεσο.
Θα δείξουμε ότι η π_i είναι ανοιχτή απεικόνιση. Έστω $i_0 \in I$ και ένα βασικό ανοιχτό B στον $\prod_{i\in I} X_i$ τότε σύμφωνα με την πρόταση 1.8.8 θα έχει τη μορφή $B = \bigcap_{i\in\mathcal{F}} \pi_i^{-1}(U_i)$, όπου $\mathcal{F}$ πεπερασμένο και $U_i \in \mathfrak{I}_i$, για κάθε $i \in I$. Συνεπώς,

$$\pi_{i_0}\big(\bigcap_{i\in\mathcal{F}} \pi_i^{-1}(U_i)\big) = \begin{cases} U_{i_0} & , \text{αν } i_0 \in \mathcal{F} \\ \\ X_{i_0} & , \text{αν } i_0 \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι και στους δύο κλάδους το $\pi_{i_0}\big(\bigcap_{i\in\mathcal{F}} \pi_i^{-1}(U_i)\big)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X_{i_0}. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.10 Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μία μη κενή οικογένεια τοπολογικών χώρων και $\{A_i\}_{i\in I}$ μία μη κενή οικογένεια συνόλων, με $A_i \subseteq X_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε,

$$\prod_{i\in I}\overline{A_i} = \overline{(\prod_{i\in I}A_i)}$$

Απόδειξη. Έστω $x = (x_i)_{i\in I} \in \overline{(\prod_{i\in I}A_i)}$. Θεωρούμε ένα V_{i_0} ανοιχτό υποσύνολο του X_{i_0} με $x_{i_0} \in V_{i_0}$. Θέτουμε

$$U = \pi_{i_0}^{-1}(V_{i_0}) = (\prod_{i\notin i_0} X_i) \times V_{i_0}.$$

Τότε το V είναι ανοιχτό και $x \in V$. Έχοντας λοιπόν μια ανοιχτή περιοχή του x έπεται ότι

$$\begin{aligned} U \cap (\prod_{i\in I} A_i) \neq \emptyset &\Leftrightarrow [(\prod_{i\notin i_0} X_i) \times V_{i_0}] \cap (\prod_{i\in I} A_i) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow [(\prod_{i\notin i_0}(X_i \cap A_i)] \times (V_{i_0} \cap A_{i_0}) \neq \emptyset \end{aligned}$$

Από αυτό έπεται ότι $V_{i_0} \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, ισοδύναμα $x_{i_0} \in A_{i_0}$ για κάθε $i_0 \in I$. Επομένως, $x \in \prod_{i\in I}\overline{A_i}$. Άρα δείξαμε ότι $\overline{(\prod_{i\in I} A_i)} \subseteq \prod_{i\in I}\overline{A_i}$.
Έστω τώρα $x \in \prod_{i\in I}\overline{A_i}$ και $U \in W(x)$ στον $\prod_{i\in I} X_i$. Από αυτό έπεται ότι θα υπάρχει B βασικό ανοιχτό υπόσύνολο του $\prod_{i\in I} X_i$ τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq U$. Από την πρόταση 1.8.8, το B θα έχει τη μορφή

$$B = (\prod_{i\in\mathcal{F}} U_i) \times (\prod_{i\in I-\mathcal{F}} X_i)$$

όπου U_i ανοιχτό υποσύνολο του X_i για κάθε $i \in \mathcal{F}$ και $\mathcal{F} \subseteq I$ πεπερασμένο. Συνεπώς αν $x_i \in U_i$ τότε $U_i \cap A_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in \mathcal{F}$. Οπότε

$$B \cap \prod_{i\in I} A_i = [\prod_{i\in\mathcal{F}}(U_i \cap A_i)] \times \prod_{i\in I-\mathcal{F}} A_i$$

Από αυτό προκύπτει ότι $U \cap \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Συνεπώς $x \in \overline{(\prod_{i\in I} A_i)}$ και άρα $\prod_{i\in I}\overline{A_i} \subseteq \overline{(\prod_{i\in I} A_i)}$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.11 Έστω $\{f_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια απεικονίσεων τέτοια ώστε $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ για κάθε $i \in I$. Ορίζουμε $\prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} Y_i$ με $(\prod_{i\in I} f_i)(\{x_i\}_{i\in I}) = \{f_i(x_i)\}_{i\in I}$. Τότε,

(*i*) Εάν f_i συνεχής για κάθε $i \in I$, τότε $\prod_{i\in I} f_i$ συνεχής.

(*ii*) Εάν f_i ανοιχτή απεικόνιση και όλες αλλά το πολύ πεπερασμένα πολλές είναι επί, τότε $\prod_{i\in I} f_i$ είναι επίσης ανοιχτή απεικόνιση.

Απόδειξη. (i) Έστω $\pi_i^{-1}(U_i)$ ένα υποβασικό ανοιχτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} Y_i$, τότε θα ισχύει $(\prod_{i\in I} f_i)^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = \pi_i^{-1}(f_i^{-1}(U_i))$, το οποίο είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} X_i$ αφού f_i είναι συνεχής.
(ii) Έστω B ένα βασικό ανοιχτό του $\prod_{i\in I} X_i$. Τότε το B θα έχει τη μορφή $B = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(U_i)$. Συνεπώς,

$$\prod_{i\in I} f_i\left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(U_i)\right) = f_1(U_1) \times \ldots \times f_n(U_n) \times \prod\{f_\beta(X_\beta) : \beta \neq 1, \ldots n\}$$

Από υπόθεση, επειδή όλες αλλά το πολύ πεπερασμένα πολλές f_β είναι επί, έπεται ότι για όλες αλλά το πολύ πεπερασμένα πολλές $f_\beta(X_\beta) = Y_\beta$. Αυτές που απομένουν είναι ανοιχτά σύνολα. Συνέπως,

$$\prod_{i\in I} f_i\left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(U_i)\right) = f_1(U_1) \times \ldots \times f_n(U_n) \times \prod_{j=1}^{m} f_{\beta_j}(X_{\beta_j}) \times \prod\{Y_\beta : \beta \neq 1, \ldots n, \beta_{j_1}, ..\beta_{j_m}\}$$

το οποίο είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} Y_i$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.12 Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση. Θα λέμε ότι f είναι *ομοιομορφισμός* αν είναι 1-1 και επί και η αντίστροφη της απεικόνιση είναι επίσης συνεχής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.13 Μία απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ θα λέγεται *κλειστή απεικόνιση*, αν για κάθε κλειστό σύνολο A του X, το $f(A)$ είναι κλειστό στον Y.

1.9 Συνεκτικότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.1 Έστω X τοπολογικός χώρος. Ο X θα λέγεται *συνεκτικός* αν δεν υπάρχουν μη κενά U, V ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στον X τέτοια ώστε $X = U \cup V$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.9.2 Ένας τοπολογικός χώρος X είναι συνεκτικός αν και μόνο αν τα μόνα υποσύνολα του X που είναι ανοιχτά και κλειστά στον X είναι το $\emptyset$ και X.

Απόδειξη. ¨ $\Rightarrow$ ¨ Έστω X συνεκτικός και A μη κενό, ανοιχτό και κλειστό γνήσιο υποσύνολο του X, τότε το $X - A$ είναι ανοιχτό και $X = (X - A) \cup A$. Άτοπο, αφού X συνεκτικός χώρος.
¨ $\Leftarrow$ ¨ Έστω X μη συνεκτικός χώρος, τότε θα υπάρχουν μη κενά U, V ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στον X τέτοια ώστε $X = U \cup V$. Από αυτό έπεται ότι $U = X - V$ είναι και κλειστό. Άτοπο, αφού U είναι γνήσιο μη κενό υποσύνολο του X. □

ΛΗΜΜΑ 1.9.3 Έστω Y υπόχωρος του X. Ο Y είναι συνεκτικός αν δεν υπάρχουν ξένα μη κενά σύνολα A, B τέτοια ώστε $Y = A \cup B$ και κανένα από τα δύο να μην περιέχει οριακό σημείο του άλλου.

Απόδειξη. Έστω ξένα μη κενά σύνολα A, B τέτοια ώστε $Y = A \cup B$. Τότε τα A, B θα είναι ανοιχτά και κλειστά στον U. Η κλειστότητα του A στον Y είναι το σύνολο $\overline{A} \cap Y$. Επειδή το A είναι κλειστό στον U θα ισχύει $A = \overline{A} \cap Y \Rightarrow A \cap B = \overline{A} \cap Y \cap B \Rightarrow \emptyset = \overline{A} \cap B$. Επειδή το $\overline{A}$ είναι η ένωση του A με τα οριακά του σημεία έπεται ότι το B δεν περιέχει τα οριακά σημεία του A. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι το A δεν περιέχει τα οριακά σημεία του B.
Αντίστροφα, έστω ξένα μη κενά σύνολα A, B τέτοια ώστε $Y = A \cup B$ και κανένα από τα δύο δεν περιέχει τα οριακά σημεία του άλλου. Τότε $\overline{A} \cap B = \emptyset$ και $\overline{B} \cap A = \emptyset$. Όμως, $\overline{A} \cap Y = \overline{A} \cap (A \cup B) = A$. Όμοια, $\overline{B} \cap Y = B$, συνεπώς τα A, B είναι κλειστά στον Y και επειδή $Y - B = A$ και $Y - A = B$ τα A, B είναι ανοιχτά στον U. □

ΛΗΜΜΑ 1.9.4 Έστω X τοπολογικός χώρος καιι μη κενά U, V ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στον X τέτοια ώστε $X = U \cup V$. Αν U συνεκτικό υποσύνολο του X, τότε ο Y θα περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο U ή V.

Απόδειξη. Έστω Y συνεκτικός και μη κενά U, V ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στον X τέτοια ώστε $X = U \cup V$, τότε τα $U \cap Y$ και $V \cap Y$ είναι ανοιχτά στον Y, ξένα μεταξύ τους και $Y = (U \cap Y) \cup V \cap Y)$. Αν $U \cap Y$ και $V \cap Y$ ήταν μη κενά, τότε ο Y δεν θα ήταν συνεκτικός, άτοπο. Άρα ένα από τα δύο είναι κένο, έστω το $V \cap Y$, δηλαδή $V = \emptyset$ και $Y = U \cap Y \subseteq U$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.9.5 Έστω $\{A_a\}_a$ οικογένεια συνεκτικών συνόλων με $\bigcap_a A_a \neq \emptyset$, τότε η $\bigcup_a A_a$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη. Έστω ότι $\bigcup_a A_a$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν μη κενά U, V ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στον X τέτοια ώστε $\bigcup_a A_a = U \cup V$. Αφού $\bigcap_a A_a \neq \emptyset$, έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in \bigcap_a A_a$ και $x_0 \in U \cup V$. Έστω $x_0 \in U$. Επειδή A_a είναι συνεκτικό, για κάθε a από το λήμμα 1.9.4 θα περιέχεται ολοκληρωτικά στο U ή V. Όμως λόγω του ότι $x_0 \in U$ έπεται ότι $A_a \subseteq U$, για κάθε a, ισοδύναμα $\bigcup_a A_a \subseteq U$. Άτοπο. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.9.6 Το καρτεσιανό γινόμενο συνεκτικών χώρων είναι συνεκτικός χώρος.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε το θεώρημα για το καρτεσιανό γινόμενο δύο συννεκτικών χώρων X, Y. Έστω $(a, \beta) \in X \times Y$. Τότε το $X \times \{\beta\}$ είναι συνεκτικό αφού είναι ομοιομορφικό με τον X. Όμοια το $x \times Y$ είναι συνεκτικό αφού είναι ομοιομορφικό με τον Y. Θεωρούμε το σύνολο

$$T_x = (X \times \{\beta\}) \cup (x \times Y) = X \times Y.$$

Τότε το T_x είναι συνεκτικό ως ένωση συνεκτικών που έχουν κοινό σημείο το (x, β). Επίσης, το $\bigcup_{x\in X} T_x$ είναι συνεκτικό ως ένωση συνεκτικών που έχουν κοινό σημείο το (a, β).
Όμοια αποδεικνύουμε για πεπερασμένο καρτεσιανό γινόμενο συνεκτικών χώρων.
Έστω τώρα $\{X_a\}_{a\in J}$, όπου J αυθαίρετο σύνολο δεικτών, μία οικογένεια συνεκτικών συνόλων και

$$X = \prod_{a\in J} X_a$$

Επιλέγουμε ένα σημείο $b = (b_a)_{a\in J}$ του X και $\{a_i\}_{i=1}^n$ ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων του J. Θεωρούμε το σύνολο

$$H = \{(x_a)_{a\in J} : \ x_a = \beta_a \text{ για } a \neq \{a_i\}_{i=1}^n\}$$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Το H είναι ομοιομορφικό με το πεπερασμένο καρτεσιανό γινόμενο

$$X_{a_1} \times \ldots \times X_{a_n}$$

και συνεπώς είναι συνεκτικό. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$H \longrightarrow (y_a)_{a\in J}$$

όπου

$$y_a = \begin{cases} x_a & , \ a = a_1, \ldots, a_n \\ \beta_a & , \ \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η απεικόνιση αυτή είναι 1-1 και επί και μεταφέρει τα στοιχεία της βάσης του $X_{a_1} \times \ldots \times X_{a_n}$ στα στοιχεία της βάσης του H. Από αυτό έπεται ότι αν θεωρήσουμε την ένωση όλων των H, αυτός θα είναι συνεκτικός υπόχωρος του X. Οπότε, έστω $(x_a)_{a\in J} \in X$ και $U = \prod_{a\in J} U_a$ ένα βασικό ανοιχτό του X. Κάθε U_a είναι ανοιχτό στον X_a και $U_a = X_a$ εκτός από πεπερασμένο το πλήθος $a \in J$, έστω $a = a_1, \ldots, a_n$. Οπότε κατασκευάζουμε ένα σημείο $(y_a)_{a\in J}$ στον X τέτοιο ώστε

$$y_a = \begin{cases} x_a & , \ a = a_1, \ldots, a_n \\ \beta_a & , \ \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Προφανώς το $(y_a)_{a\in J} \in Y$. Επίσης, $(y_a)_{a\in J}$ είναι στοιχείο του U. Άρα το $U \cap Y \neq \emptyset$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.9.7 Η εικόνα ενός συνεκτικού συνόλου μέσω συνεχής απεικόνισης είναι συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση και X συνεκτικός χώρος. Θα δείξουμε ότι $f(X)$ είναι συνεκτικό. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$g : X \longrightarrow f(X).$$

Η g είναι συνεχής και επί και έστω ότι $f(X)$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν μη κενά U, V ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στον X τέτοια ώστε $f(X) = U \cup V$, ισοδύναμα $X = g^{-1}(U) \cup g^{-1}(V)$, όπου $g^{-1}(U)$, $g^{-1}(V)$ είναι ανοιχτά λόγω συνέχειας της g. Άτοπο διότι τότε X θα ήταν συνεκτικός. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.8 Έστω X τοπολογικός χώρος. Δοθέντος x, $y \in X$, ένα *μονοπάτι* από το x στο y είναι μία συνεχής απεικόνιση $f : [0, 1] \longrightarrow X$ τέτοια ώστε $f(0) = x$ και $f(1) = y$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.9 Έστω X τοπολογικός χώρος. Ο X θα λέγεται *συνεκτικός κατά δρόμους* αν $\forall\, x, y \in X$ υπάρχει μονοπάτι f στον X από το x στο y.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.9.10 Αν X συνεκτικός κατά δρόμους, τότε X συνεκτικός.

Απόδειξη. Έστω ότι ο X δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπάρχουν μη κενά U, V ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στον X τέτοια ώστε $X = U \cup V$. Έστω επίσης $f : [0, 1] \longrightarrow X$ ένα μονοπάτι στον X τότε επειδή [0,1] συνεκτικό και f συνεχής έπεται ότι $f([0, 1]) \subseteq X$ είναι επίσης συνεκτικό. Από το λήμμα 1.9.4 έπεται ότι $f([0, 1]) \subseteq U$ ή $f([0, 1]) \subseteq V$, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι ο X είναι συνεκτικός κατά δρόμους. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.9.11 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ αριθμήσιμο και $n \geq 2$. Τότε το $\mathbb{R}^n - A$ είναι κατά δρόμους συνεκτικό.

Απόδειξη. Έστω x_0, $x \in \mathbb{R}^n - A$ τέτοια ώστε $x_0 \neq x$ και (ε) η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος $[x_0, x]$. Για κάθε $z \in (\varepsilon)$, θέτουμε $I_z = [x_0, z] \cup [z, x]$. Τότε για κάθε z_1, $z_2 \in (\varepsilon)$ έπεται ότι $I_{z_1} \cap I_{z_2} = \{x, x_0\}$. Επειδή το A είναι αριθμήσιμο, x_0, $x \notin A$ και τα σημεία της (ε) είναι υπεραριθμήσιμα έπεται ότι υπάρχει $z_0 \in (\varepsilon)$ τέτοια ώστε $I_{z_0} \cap A = \emptyset$, διότι αν για κάθε $z \in (\varepsilon)$ ισχύει $I_{z_0} \cap A \neq \emptyset$, το A θα ήταν υπεραριθμήσιμο, άτοπο. Συνεπώς $I_{z_0} \cap A = \emptyset$, δηλαδή δείξαμε ότι το μονοπάτι που ενώνει τα x_0, x είναι το I_{z_0} και δεν περνά από κανένα σημείο του A. □

1.10 Συνεκτική συνιστώσα και συνιστώσα κατά δρόμους

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10.1 Έστω X τοπολογικός χώρος. Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στον X με $x \sim y$, αν υπάρχει C συνεκτικό υποσύνολο του X τέτοιο ώστε $x, y \in C$. Κάθε κλάση αυτής της σχέσης ισοδυναμίας ονομάζεται *συνεκτική συνιστώσα* του X.

Είναι πόλυ εύκολο να δούμε ότι η σχέση που ορίσαμε παραπάνω είναι σχέση ισοδυναμίας. Η συμμετρική και η ανακλαστική είναι προφανής. Για τη μεταβατική ιδιότητα: Έστω $x \sim y$ και $y \sim z$ τότε υπάρχουν A, B συνεκτικά τέτοια ώστε $x, y \in A$ και $y, z \in B$. Θεωρώντας το $A \cup B$, είναι συνεκτικό και $x, z \in A \cup B$, έπεται ότι $x \sim z$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.10.2 Οι συνεκτικές συνιστώσες του X είναι συνεκτικά υποσύνολα του X και ξένα ανά δύο με την ένωση τους να είναι ο X και κάθε συνεκτικό υποσύνολο του X να τέμνει μία από τις συνεκτικές συνιστώσες.

Απόδειξη. Πρόφανως οι συνεκτικές συνιστώσες του X είναι ξένα ανά δύο υποσύνολα του X που η ένωση τους να είναι ο X αφού είναι κλάσεις ισοδυναμίας.
Θα δείξουμε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του X είναι συνεκτικό υποσύνολο του X. Έστω συνεκτική συνιστώσα C και $x_0 \in C$. Τότε για κάθε $x \in C$ έπεται ότι $x_0 \sim x$ δηλαδή, υπάρχει συνεκτικό A_x που περιέχει τα x_0, x και από το λήμμα 1.9.4 έπεται ότι $A_x \subseteq C$. Επίσης,

$$C = \bigcup_{x \in C} A_x$$

που είναι συνεκτικό απο το θεώρημα 1.9.5. Μένει να δειχθεί ότι κάθε συνεκτικό υποσύνολο του X τέμνει ένα από αυτά. Πράγματι, έστω A συνεκτικό υποσύνολο του X. Εάν $A \cap C_1, A \cap C_2 \neq \emptyset$, όπου C_1, C_2 συνεκτικές συνιστώσες του X, τότε θα υπήρχαν $x_1, x_2 \in X$ τέτοια ώστε $x_1 \in A \cap C_1$ και $x_2 \in A \cap C_2$. Από αυτό έπεται ότι $x_1 \sim x_2$ ισοδύναμα $C_1 = C_2$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10.3 Έστω X τοπολογικός χώρος. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στον X, $x \sim y$, αν υπάρχει μονοπάτι f στον X από το x στο y. Η σχέση ισοδυναμίας αυτή απαρτίζεται από κλάσεις που κάθε μία ονομάζεται *συνεκτική συνιστώσα κατά δρόμους* του X.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.10.4 Οι συνεκτικές συνιστώσες κατά δρόμους του X είναι συνεκτικά κατά δρόμους υποσύνολα του X και ξένα ανά δύο που η ένωση τους να είναι ο X και κάθε συνεκτικό κατά δρόμους υποσύνολο του X τέμνει ένα από αυτά.

1.11 Συμπαγείς χώροι

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11.1 Έστω τοπολογικός χώρος X και μία οικογένεια $\mathfrak{Q}$ υποσυνόλων του X. Η $\mathfrak{Q}$ θα λέγεται *κάλυψη* του X, εάν η ένωση των στοιχείων της $\mathfrak{Q}$ ισούται με τον X. Αυτή θα λέγεται *ανοιχτή κάλυψη* του X, αν τα στοιχεία της $\mathfrak{Q}$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του X.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11.2 Ένας τοπολογικός χώρος X θα λέγεται *συμπαγής* αν κάθε ανοιχτή κάλυψη $\mathfrak{Q}$ του X περιέχει μία πεπερασμένη υποκάλυψη του X.

ΛΗΜΜΑ 1.11.3 Έστω τοπολογικός χώρος X και Y ένας υποχωρός του. Τότε ο Y είναι συμπαγής εάν και μόνο εάν κάθε κάλυψη του Y από ανοιχτά του X περιέχει μία πεπερασμένη υποκάλυψη του Y.

Απόδειξη. Έστω Y είναι συμπαγής και $\mathfrak{Q} = \{A_a\}_{a\in J}$ μία κάλυψη του Y από ανοιχτά του X. Τότε η οικογένεια

$$\{A_a \cap Y : a \in J\}$$

είναι μία ανοιχτή κάλυψη του Y από ανοιχτά του Y. Επειδή ο Y είναι συμπαγής έπεται ότι υπάρχουν $a_1, a_2, \ldots, a_n$ τέτοια ώστε η

$$\{A_{a_1} \cap Y, A_{a_2} \cap Y, \ldots, A_{a_n} \cap Y\}$$

να είναι μία πεπερασμένη υποκάλυψη του Y. Τότε η $\{A_{a_1}, A_{a_2}, \ldots, A_{a_n}\}$ είναι μία υποοικογένεια της $\mathfrak{Q}$ που καλύπτει τον Y.
Αντιστρόφως, έστω $\mathfrak{Q}' = \{A'_a\}_{a\in J}$ μία κάλυψη του Y από ανοιχτά του Y, τότε για κάθε $a \in J$ επιλέγουμε ένα A_a ανοιχτό στον X τέτοιο ώστε

$$A'_a = A_a \cap Y.$$

Η οικογένεια $\mathfrak{Q} = \{A_a\}_{a\in J}$ είναι μία κάλυψη του Y από ανοιχτά υποσύνολα του X. Από υπόθεση έπεται ότι υπάρχει μία πεπερασμένη υποκάλυψη του Y, $\{A_{a_1}, A_{a_2}, \ldots, A_{a_n}\}$. Τότε η $\{A'_{a_1}, A'_{a_2}, \ldots, A'_{a_n}\}$ είναι μία πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathfrak{Q}'$ που καλύπτει τον Y. Συνεπώς ο Y είναι συμπαγής. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.4 Κάθε κλειστό υποσύνολο συμπαγούς χώρου είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Έστω συμπαγής τοπολογικός χώρος X και Y ένας κλειστός υποχωρός του. Θεωρούμε μία ανοιχτή κάλυψη $\mathfrak{Q}$ του Y από ανοιχτά υποσύνολα του X. Τότε η οικογένεια $\mathfrak{B} = \mathfrak{Q} \cup \{X - Y\}$ είναι επίσης μία ανοιχτή κάλυψη του X. Επειδή X συμπαγής, θα υπάρχει μία πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathfrak{B}$ που θα καλυπτεί τον X. Η υποοικογένεια αυτή προφανώς θα περιέχει το $X - Y$ αφού αποτελεί πεπερασμένη κάλυψη του X. Η πεπερασμένη αυτή υποοικογένεια χωρίς το $X - Y$ αποτελεί μία πεπερασμένη υποκάλυψη του Y. Συνεπώς ο Y είναι συμπαγής. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.5 Κάθε συμπαγές υποσύνολο χώρου *Hausdorff* είναι κλειστό.

Απόδειξη. Έστω X *Hausdorff* και Y συμπαγές υποσύνολο του. Θα δείξουμε ότι $X - Y$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.

Έστω $x_0 \in X - Y$, τότε επειδή X *Hausdorff* έπεται ότι για κάθε $y \in Y$ υπάρχουν $U_y \in W(x_0)$, $V_y \in W(y)$ τέτοιες ώστε $U_y \cap V_y = \emptyset$. Τότε η οικογένεια $\{V_y : y \in Y\}$ είναι μία κάλυψη του Y από ανοιχτά του X. Επειδή Y συμπαγής έπεται ότι υπάρχουν $y_1, y_2, \ldots, y_n$ τέτοια ώστε $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ να είναι μία πεπερασμένη υποκάλυψη του Y. Για το ανοιχτό σύνολο $V = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$ ισχύει $Y \subseteq V$ και είναι ξένο προφανώς από το σύνολο $U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$.

Αν $z \in V$ τότε $z \in V_{y_{i_0}}$ για κάποιο $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ και $z \notin U_{y_{i_0}}$ και κατά συνέπεια $z \notin U$. Συνεπώς U είναι μία περιοχή του x_0 ξένη από τον Y. Άρα $X - Y$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.6 Η εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου κάτω απο μία συνεχή απεικόνιση είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία συνεχής απεικόνιση και X συμπαγής. Έστω επίσης $\mathfrak{Q}$ μία κάλυψη του συνόλου $f(X)$ από ανοιχτά του Y. Η οικογένεια

$$\{f^{-1}(A) : A \in \mathfrak{Q}\}$$

είναι μία ανοιχτή κάλυψη του X λόγω συνέχειας της f. Επειδή X συμπαγής έπεται ότι

$$f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \ldots, f^{-1}(A_n)$$

είναι μία πεπερασμένη υποκάλυψη του X. Από αυτό έπεται ότι $A_1, \ldots, A_n$ κάλυψη του $f(X)$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.7 Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία 1-1 και επί συνάρτηση. Εάν X είναι συμπαγής και ο Y *Hausdorff*, τότε η f είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής, ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι αν $F \subseteq X$ κλειστό τότε $f(A) \subseteq Y$ είναι επίσης κλειστό. Πράγματι, έστω F κλειστό υποσύνολο του X τότε F συμπαγές από το θεώρημα 1.11.4. Το $f(A)$ είναι επίσης συμπαγές από το θεώρημα 1.11.6 και ως υποσύνολο του Y που είναι *Hausdorff* από θεώρημα 1.11.5 είναι κλειστό. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11.8 Έστω τοπολογικός χώρος X. Αν κάθε άπειρο υποσύνολο του έχει σημείο συσσώρευσης, ο X θα καλείται *limit point συμπαγής*.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.11.9 Η συμπάγεια επάγει την *limit point* συμπάγεια.

Απόδειξη. Έστω συμπαγής τοπολογικός χώρος X και $A \subseteq X$ άπειρο. Έστω ότι το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης, τότε για κάθε $x \in X$, θα υπάρχει $U_x \in W(x)$ τέτοιο ώστε $A \cap U_x - \{x\} = \emptyset$. Η οικογένεια $\{U_x\}_{x \in X}$ θα αποτελεί μία κάλυψη του X. Από υπόθεση ο X είναι συμπαγής, συνεπώς υπάρχουν $x_1, \ldots x_n \in X$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} - \{x_i\}$. Άρα,

$$\bigcup_{i=1}^n A \cap (U_{x_i} - \{x_i\}) = \emptyset \Rightarrow$$

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} - \{x_i\})) = \emptyset \Rightarrow$$

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} - \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}) = \emptyset \Rightarrow$$

$$A \cap (X - \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}) = \emptyset \Rightarrow$$

$$A = \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}.$$

Από αυτό έπεται ότι A είναι πεπερασμένο. Άτοπο, αφού από υπόθεση $A \subseteq X$ άπειρο. □

ΛΗΜΜΑ 1.11.10 (*Λήμμα Lebesgue*) Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $\mathcal{U}$ μία ανοιχτή κάλυψη του. Αν X συμπαγής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε υποσύνολο του X με διάμετρο μικρότερη του δ να υπάρχει στοιχείο της $\mathcal{U}$ που το περιέχει.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι κάθε *limit point* συμπαγής χώρος επάγει ότι κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, ισοδύναμα για κάθε $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, θα υπάρχουν $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$ τέτοιο ώστε $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει.
Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ τότε θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$$

- <u>*Α πεπερασμένο :*</u> Έστω $f : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow A$ με $f(n) = x_n$ τότε το $\mathbb{Z}_+ = \bigcup_{x \in A} f^{-1}(x)$. Επειδή όμως το $\mathbb{Z}_+$ είναι άπειρο έπεται ότι θα υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(x_0)$ είναι αριθμήσιμο. Από αυτό έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $f^{-1}(x_0) = n \Rightarrow f(n) = x_0, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x_0, \forall n \geq n_0$. Συνεπώς, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τελικά σταθερή. Άρα θα υπάρχει $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει στο x_0.

- *A άπειρο:* Αφού X συμπαγής και A άπειρο έπεται από την πρόταση 1.11.9 ότι το A θα έχει σημείο συσσώρευσης, έστω x_0. Επειδή (X, d) μετρικός χώρος έπεται ότι υπάρχει $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ τέτοια ώστε $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{d} x_0$ με $y_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε

  $$n_1 \text{ τέτοιο ώστε } y_{n_1} \in B(x_0, 1)$$

  Έστω ότι έχει οριστεί για

  $$n_{i-1} > n_{i-2} \text{ τέτοιο ώστε } y_{n_{i-1}} \in B(x_0, \tfrac{1}{i-1})$$

  Επειδή η σφαίρα $B(x_0, \frac{1}{i})$ τέμνει το A σε άπειρα σημεία επιλέγουμε $n_i > n_{i-1}$ τέτοιο ώστε

  $$y_{n_1} \in B(x_0, \tfrac{1}{i})$$

  Τότε η υπακολουθία $y_{n_1}, \ldots, y_{n_i, \ldots}$ συγκλίνει στο x_0.

Έστω ότι δεν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε υποσύνολο του X με διάμετρο μικρότερη του δ να υπάρχει στοιχείο της $\mathcal{U}$ που το περιέχει. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$ επιλέγουμε $C_n \subseteq X$ με $diam\, C_n < \frac{1}{n}$ τέτοιο ώστε $C_n \nsubseteq A$ όπου $A \in \mathcal{U}$. Επιλέγω $x_n \in C_n$.
ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
Έστω ότι $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{d} x_0$. Τότε θα υπάρχει $A \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $x_0 \in A$. Επειδή το A είναι ανοιχτό υποσύνολο του X έπεται ότι υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε $B(x_0, \epsilon_0) \subseteq A$. Επιλέγω n_i τέτοιο ώστε $d(x_{n_i}, x_0) < \frac{\epsilon_0}{2}$ και $\frac{1}{n_i} < \frac{\epsilon_0}{2}$.
Τότε $C_{n_i} \subseteq B(x_0, \frac{\epsilon_0}{2}) \subseteq B(x_0, \epsilon_0) \subseteq A$, συνεπώς $C_{n_i} \subseteq A$. Άτοπο από υπόθεση.
Άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άτοπο αφού X ακολουθιακά συμπαγής. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.11.11 Έστω $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση, X συμπαγής και Y *Hausdorff* τότε, f κλειστή απεικόνιση.

Απόδειξη. Έστω A συμπαγές υποσύνολο του X. Επειδή ο X είναι συμπαγής χώρος, από το θεώρημα 1.11.4, το A είναι συμπαγές. Συνεπώς από το θεώρημα 1.11.6 το $f(A)$ θα είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Όμως ο Y είναι *Hausdorff*, οπότε από το θεώρημα 1.11.5 το $f(A)$ είναι κλειστό. □

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Ομοτοπίας και το Θεώρημα του *Brouwer* του Σταθερού Σημείου για τον δίσκο

Οι επόμενοι ορισμοί είναι απαραίτητοι για την εισαγωγή της βασικής έννοιας "Θεμελιώδης Ομάδα" στην επόμενη παράγραφο 2.2.

2.1 Ομοτοπία

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1 Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f, f' : X \longrightarrow Y$ συνεχείς απεικονίσεις. Θα λέμε ότι f είναι *ομοτοπική* με την f' αν υπάρχει $F : X \times I \longrightarrow Y$ συνεχής, όπου $I = [0, 1]$ τέτοια ώστε

$$F(x, 0) = f(x) \text{ και } F(x, 1) = f'(x), \ \forall x \in X .$$

Η απεικόνιση F λέγεται *ομοτοπία* μεταξύ των f και f'. Αν f ομοτοπική με την f', θα συμβολίζουμε $f \simeq f'$.

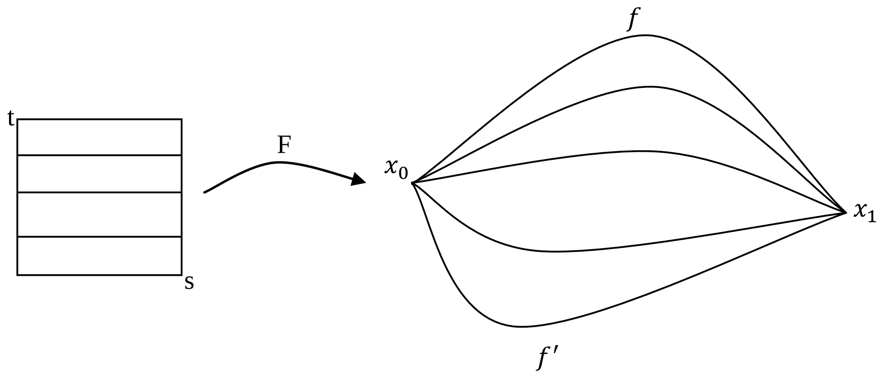
Σύμφωνα με τον ορισμό, η ομοτοπία ειναι μία οικογένεια μονοπαραμετρικών απεικονίσεων απο τον X στον Y, όπου καθώς το t διατρέχει το I, η f "μετασχηματίζεται" στην f'.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.2 Έστω X τοπολογικός χώρος, $x_0, x_1 \in X$ και f, f' μονοπάτια στον X από το x_0 στο x_1 (Ορισμός 1.9.8). Θα λέμε ότι το f είναι *ομοτοπικό κατά δρόμους* με το f' αν υπάρχει συνεχής $F : I \times I \longrightarrow Y$ συνεχής, $I = [0, 1]$ τέτοια ώστε

$$F(s, 0) = f(s) \text{ και } F(s, 1) = f'(s), \ \forall s \in I$$

$$F(0, t) = x_0 \text{ και } F(1, t) = x_1, \ \forall t \in I$$

Η απεικόνιση F λέγετα *ομοτοπία κατά δρόμους* μεταξύ των f και f'. Αν f ομοτοπικό κατά δρόμούς με το f', θα συμβολίζουμε $f \simeq_p f'$.



Σχήμα 2.1: f, f' ομοτοπικά κατά δρόμους

ΛΗΜΜΑ 2.1.3 Οι σχέσεις $\simeq$ και $\simeq_p$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Έστω f, f', f'' συνεχείς απεικονίσεις από τον X στον Y. Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τρεις ιδιότητες του ορισμού 1.1.2.
(i) $f \simeq f$. Αρκεί να βρούμε μία συνεχή απεικόνιση $F: X \times I \longrightarrow Y$, όπου $I = [0, 1]$ τέτοια ώστε $F(x, 0) = f(x)$ και $F(x, 1) = f(x)$, $\forall x \in X$. Προφανώς μία τέτοια απεικόνιση είναι η $F(x, t) = f(x)$.
(ii) Αν $f \simeq f'$ τότε $f' \simeq f$. Έστω $f \simeq f'$ τότε υπάρχει $F: X \times I \longrightarrow Y$ τέτοια ώστε $F(x, 0) = f(x)$ και $F(x, 1) = f'(x)$, $\forall x \in X$. Η $G(x, t) = F(x, 1-t)$ είναι η ζητούμενη ομοτοπία μεταξύ των f' και f.
(iii) Αν $f \simeq f'$ και $f' \simeq f''$ τότε $f \simeq, f''$. Έστω $f \simeq f'$ και $f' \simeq f''$ δηλαδή, υπάρχουν F και F' ομοτοπίες μεταξύ των f, f' και f', f'' αντίστοιχα. Για να ορίσουμε την ομοτοπία $G: I \times I \longrightarrow Y$ μεταξύ των f , f'' αρκεί να φανταστούμε ότι η παράμετρος t αντιπροσωπεύει τον χρόνο και η G ως απεικόνιση πρέπει να αντιπροσωπεύει όπως έχουμε προαναφέρει τον ¨μετασχηματισμό ¨ της f στην f'' σε ¨χρονικό διάστημα¨ I=[0, 1]. Ο μετασχηματισμός αυτός θα γίνει σταδιακά, δηλαδή απο την f στην f' σε ΄χρονικό διάστημα΄ $[0, \frac{1}{2}]$ και από την f' στην f'' σε ¨χρονικό διάστημα¨ $[\frac{1}{2}, 1]$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αυξηθεί ο ρυθμός του ‟σταδιακού μετασχηματισμού”. Με το σκεπτικό αυτό κατασκευάζουμε την G ως εξής :

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x,\ 2t) & ,\text{αν } t \in [0,\ \frac{1}{2}\ ] \\ F'(x,\ 2t-1) & ,\text{αν } t \in [\frac{1}{2}, 1\ ] \end{cases}$$

Μένει να δείξουμε ότι η G είναι συνεχής και ικανοποιεί τις $G(x, 0) = f(x)$ και $G(x, 1) = f''(x)$, $\forall x \in X$. Πράγματι, η $G(x, t)$ είναι συνεχής, λόγω του *PastingLemma*, ενώ

$$G(x,\ 0) = F(x,\ 0) = f(x) \ \text{και} \ G(x,\ 1) = G(x,\ 1) = f''(x).$$

Όμοια αποδεικνύεται και ότι $\simeq_p$ είναι σχέση ισοδυναμίας. □

Εάν f είναι μονοπάτι, θα συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας της ομοτοπίας του κατά δρόμους ως $[f]$.

Παραδείγματα :

1. Έστω f και $g: X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Ορίζουμε $F: X \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ με $F(x,\ t) = (1-t)f(x) + tg(x)$, $\forall x \in X$ και $\forall t \in I$.
Παρατηρούμε ότι

$$F(x,\ 0) = f(x) \quad \text{και} \quad F(x,\ 1) = g(x),\ \forall x \in X\ .$$

Θα δείξουμε ότι $F(x,\ t)$ είναι συνεχής. Έστω $x' \in \mathrm{X}$ και $t' \in I$, τότε,

$$F(x',\ t') - F(x,\ t) = (t' - t)(g(x') - f(x')) + (1-t)(f(x') - f(x)) + t(g(x') - g(x)).$$

Αν d μετρική του $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} d(F(x',\ t'),\ F(x,\ t)) &= \\ = d((t'-t)(g(x') - f(x')) &+ (1-t)(f(x') - f(x)) + t(g(x') - g(x))) \\ \leq |(t'-t)|d(g(x'),\ f(x')) &+ (1-t)d(f(x'),\ f(x)) + td(g(x'),\ g(x)). \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $f,\ g$ συνεχείς στον $\mathbb{R}^n$ έπεται ότι υπάρχουν περιοχές $U_1,\ U_2 \in W(x)$ τέτοιες ώστε

$$x' \in U_1 \Rightarrow d(f(x'),\ f(x))) \leq \tfrac{\varepsilon}{3}$$
$$x' \in U_2 \Rightarrow d(g(x'),\ g(x))) \leq \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Επίσης, εάν $x' \in U_1 \cap U_2$, τότε

$$\begin{aligned} d(g(x'),\ f(x')) &\leq d(g(x'),\ g(x)) + d(g(x),\ f(x)) + d(f(x),\ f(x')) \\ &\leq d(g(x),\ f(x)) + \tfrac{2\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

και αν $|(t'-t)| < \frac{2\varepsilon}{3}$, τότε $d(F(x',\ t'),\ F(x,\ t)) < \varepsilon$, δηλαδή υπάρχει ανοιχτή περιοχή $((U_1 \cap U_2) \times (t - \frac{2\varepsilon}{3},\ t + \frac{2\varepsilon}{3})) \in W((x,\ t))$ τέτοια ώστε

$$F((U_1 \cap U_2) \times (t - \tfrac{2\varepsilon}{3},\ t + \tfrac{2\varepsilon}{3})) \subseteq B_d(F(x,\ t),\ \varepsilon).$$

Άρα F συνεχής απεικόνιση και συνεπώς ομοτοπία. Η συγκεκριμένη ομοτοπία λέγεται *γραμμική ομοτοπία*. Στην περίπτωση που $f,\ g$ είναι μονοπάτια όμοια αποδεικνύεται ότι η F είναι ομοτοπία κατά δρόμους.

2. Έστω τοπολογικός χώρος X και συνεχείς απεικονίσεις $f,\ g:\ X \longrightarrow S^{n-1}$ τέτοιες ώστε $g(x) \neq -f(x),\ \forall x \in X$. Τότε $f \simeq g$ διότι, εάν θεωρήσουμε ότι οι $f,\ g$ απεικονίζονται στον ευρύτερο χώρο $\mathbb{R}^n - \{0\}$, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, υπάρχει ομοτοπία F στον $\mathbb{R}^n - \{0\}$ μεταξύ των $f,\ g$ αφού τα γραμμικά τμήματα που έχουν ως άκρα τα $f(x),\ g(x),\ \forall x \in X$ δεν περνούν από το 0. Έστω επίσης απεικόνιση $\varphi:\ \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$ που ορίζεται ως $\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Η σύνθεση $\varphi \circ F$ είναι η ζητούμενη ομοτοπία.
   Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση που είχαμε $g(x) = -f(x)$ τα ευθύγραμμα τμήματα που θα ένωναν τις $f(x),\ g(x)$, θα διέρχονταν από το 0 αδύνατον, αφού υπάρχει ¨τρύπα¨ στο 0. Με άλλα λόγια, η $\varphi \circ F$ θα ήταν ασυνεχής στο 0. Συνεπώς η συνθήκη $g(x) \neq -f(x),\ \forall x \in X$ είναι αναγκαία.

3. Έστω $X = S^1$ και $Y = B(0,\ 1) \subseteq \mathbb{R}^2$. Έστω $f:\ S^1 \longrightarrow B(0,\ 1)$ απεικόνιση εγκλεισμού και g απεικονίζει την S^1 στο κέντρο της $B(0,\ 1)$. Τότε η απεικόνιση $F\colon\ S^1 \times I \longrightarrow B(0,\ 1)$ με $F(x,\ t) = (1-t)f(x)$ είναι ομοτοπία μεταξύ των $f,\ g$.

2.2 Θεμελιώδης Ομάδα

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα στην τοπολογία είναι πότε δύο χώροι είναι ομοιομορφικοί ή όχι. Δεν υπάρχει μία γενική μέθοδος που να αντιμετωπίζει το πρόβλημα, παρά μόνο τεχνικές που εφαρμόζονται σε ειδικές περιπτώσεις. Σύμφωνα με τον σχετικό ορισμό, δύο τοπολογικοί χώροι είναι ομοιομορφικοί αν υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση, 1-1 και επί, που η αντίστροφη απεικόνιση της είναι επίσης συνεχής. Για να δείξουμε ότι δύο χώροι δεν είναι ομοιομορφικοί αρκεί να υπάρχει κάποια τοπολογική ιδιότητα όπως η συμπάγεια, συνεκτικότητα, κ.λ.π που την διαθέτει ο ένας χώρος αλλά όχι ο άλλος. Ωστόσο ο "έλεγχος" των τοπολογικών ιδιότητων που γνωρίζουμε μέχρι τώρα δεν επαρκεί πάντα για να αντιμετωπισθεί το πρόβλημα αυτό. Στο σημείο αυτό εισάγεται μία αλγεβρική έννοια, η έννοια της *Θεμελιώδους Ομάδας* η οποία όταν ενσωματωθεί στην ήδη υπάρχουσα θεωρία θα μπορεί να λύνει τέτοιου είδους προβλήματα σε μεγαλύτερο βαθμό. Θα δούμε ότι η θεμελιώδης ομάδα είναι αλγεβρική αναλλοίωτος δηλαδή, όταν επισυνάπτεται σε έναν τοπολογικό χώρο παραμένει αναλοίωτη κατόπιν εφαρμογής οποιουδήποτε αλγεβρικού ισομορφισμού, και επιπλέον αν οι θεμελιώδεις ομάδες τους είναι δεν ισομορφικές τότε οι χώροι δεν είναι ομοιομορφικοί. Με αυτό τον τρόπο το πρόβλημα που αναφέραμε στην αρχή από τοπολογικό κατά έναν μεγάλο βαθμό μετατρέπεται σε αλγεβρικό.

Τα στοιχεία και η πράξη της θεμελιώδους ομάδας ορίζονται ως εξής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.1 Έστω μονοπάτι f στον X από το x_0 στο x_1 και αν g μονοπάτι στον X από το x_1 στο x_2, όπου $x_0, x_1, x_2 \in X$. Ορίζουμε ως *σύνθεση* των μονοπατιών και συμβολίζουμε $f * g$ το μονοπάτι h στον X από το x_0 στο x_2 που δίνεται από την σχέση

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & , \ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Η απεικόνιση h είναι καλά ορισμένη από το *PastingLemma*. Πρέπει να σκεφτόμαστε ότι το h ως μοποπάτι είναι κατά το πρώτο ήμισυ το μονοπάτι f και και κατά το δεύτερο ήμισυ το μονοπάτι g. Θα δείξουμε ότι η πράξη της σύνθεσης μεταξύ των μονοπατιών επάγει μία καλά ορισμένη πράξη μεταξύ των αντίστοιχων κλάσεων ισοδυναμίας των ομοτοπιών κατά δρόμους (Λήμμα 2.1.3) δηλαδή, μπορεί να οριστεί η $[f] * [g]$. Επιπλέον θα ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Η πράξη $*$ στην κλάση ισοδυναμίας των ομοτοπιών κατά δρόμους όπως θα δούμε, ικανοποιεί ιδιότητες παρεμφερείς με τα αξιώματα της ομάδας, παρόλο που δεν αποτελεί ομάδα αφού δεν ικανοποιεί την κλειστότητα της πράξης. Για το λόγο αυτό οι ιδιότητες αυτές ονομάζονται *ομαδοειδείς ιδιότητες* της $*$. Η μόνη διαφορά μεταξύ των ιδιοτήτων αυτών και των αξιωμάτων της ομάδας είναι ότι $[f] * [g]$ ορίζεται μόνο για τα ζεύγη κλάσεων $[f]$, $[g]$ για τα οποία ισχύει $f(1) = g(0)$.
Όλα αυτά συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.2 Η πράξη $*$ είναι καλά ορισμένη πράξη στις κλάσεις ισοδυναμίας των ομοτοπιών κατά δρόμους και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) (*Προσεταιριστική*) $[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$

(2) (*Ουδέτερο στοιχείο*) Έστω $x \in X$ και e_x το σταθερό μονοπάτι $e_x : [0, 1] \longrightarrow X$ τέτοια ώστε $e_x(t) = x$, $\forall t \in [0, 1]$. Αν f μονοπάτι στον X από το x_0 στο x_1, τότε

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \text{ και } [e_{x_0}] * [f] = [f].$$

(3) (*Αντίστροφο στοιχείο*) Έστω f μονοπάτι στον X από το x_0 στο x_1 και $\overline{f}$ το μονοπάτι που ορίζεται ως $\overline{f}(s) = f(1-s)$. Τότε

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \text{ και } [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

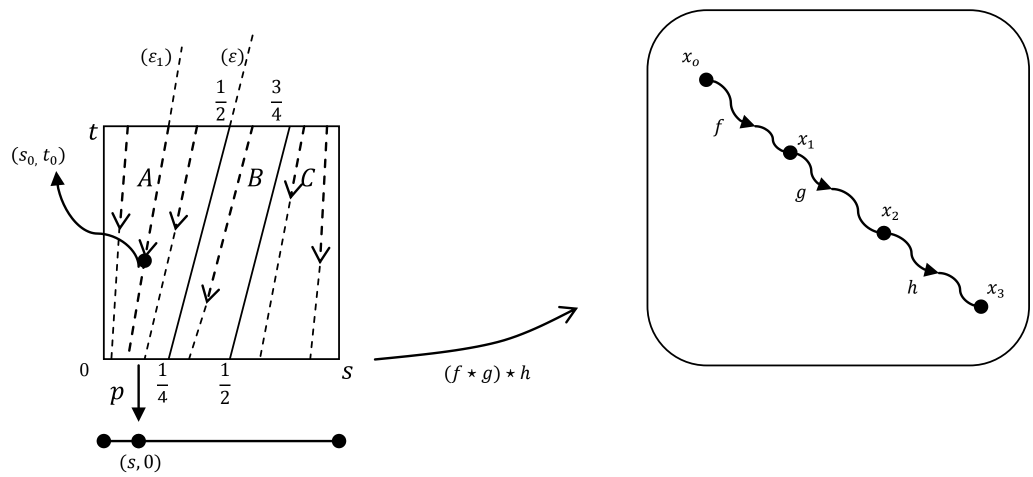
Απόδειξη. Έστω $f' \in [f]$ και $g' \in [g]$ δηλαδή, $f \simeq_p f'$, $g \simeq_p g'$. Οπότε υπάρχουν ομοτοπίες κατά δρόμους F, G των f, f' και g, g' αντίστοιχα. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & , s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,t) & , s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι η H είναι η ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ των μονοπατιών $f * g$, $f' * g'$. Η H είναι καλά ορισμένη αφού $F(1,t) = x_1 = G(0,t)$ και συνεχής από το *PastingLemma*. Επιπλέον,

$$H(s,0) = \begin{cases} F(2s,0) & , s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,0) & , s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (f * g)(s) & , s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (f' * g)(s) & , s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Σχήμα 2.2: $f * (g * h)$

Επίσης,

$$H(0,t) = F(0,t) = x_0 \text{ και } H(1,t) = G(1,t) = x_1$$

Άρα η H είναι η ζητούμενη ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ των μονοπατιών $f * g$, $f' * g'$. Οι απόδειξεις των ιδιότητων (1), (2), (3) που ακολουθούν παρακάτω, υλοποιούν με αρκετά τεχνικό τροπό τον γεωμετρικό χαρακτήρα των ιδιοτήτων αυτών.

(1) Έστω f μονοπάτι από το x_0 στο x_1, g μονοπάτι από το x_1 στο x_2 και h μονοπάτι από το x_2 στο x_3. Για να δείξουμε την προσεταιριστικότητα αρκεί να δείξουμε ότι $f * (g * h) \simeq_p (f * g) * h$.

$$f * (g * h)(s) = \begin{cases} f(2s) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}\ ] \\ (g * h)(2s-1) & , \ s \in [\frac{1}{2}, 1\ ] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(2s) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}\ ] \\ g(4s-2) & , \ s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\ ] \\ h(4s-3) & , \ s \in [\frac{3}{4}, 1\ ] \end{cases}$$

και αντίστοιχα

$$(f * g) * h(s) = \begin{cases} (f * g)(2s) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}\ ] \\ h(2s-1) & , \ s \in [\frac{1}{2}, 1\ ] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(4s) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}\ ] \\ g(4s-1) & , \ s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\ ] \\ h(2s-1) & , \ s \in [\frac{1}{2}, 1\ ] \end{cases}$$

Ορίζουμε την ομοτοπία κατά δρόμους ως εξής: Αρχικά απεικονίζουμε το τετράγωνο I^2 στο I μέσω μιας συνεχούς απεικόνισης p η οποία στέλνει το κάθε χωρίο A, B, C στη βάση I.
Για το χωρίο A του σχήματος 2.2:
Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $(\frac{1}{2},\ 1)$ και $(\frac{1}{4},\ 1)$ είναι $t = 4s-1$. Έστω $(s_0,\ t_0)$ ένα τυχαίο σημείο του χωρίου A. Έστω ευθεία (ε_1) που διέρχεται από τα $(s_0,\ t_0)$ και το $p((s_0,\ t_0)) = (0,\ s)$ και τέμνει τον άξονα των t στον (0,-1) δηλαδή, στο ίδιο σημείο που τον τέμνει και η (ε). Η εξίσωση της (ε_1) θα είναι $t = \frac{t_0+1}{s_0} + s - 1$. Προφανώς το $(s,\ 0)$ ικανοποιεί την εξίσωση της (ε_1) οπότε έχουμε $s = \frac{s_0}{t_0+1}$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για τα χωρία B, C προκύπτει $s = s_0 - \frac{t_0}{4}$ και $s = \frac{2s_0-t_0}{2-t_0}$, αντίστοιχα. Τελικά,

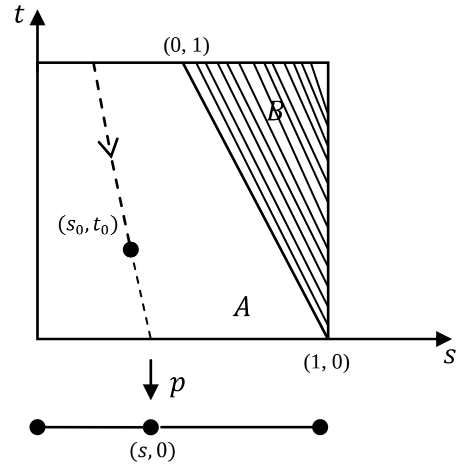
$$F(s,\ t) = \begin{cases} f(\frac{4s}{t+1}) & , \ s \in [0, \frac{t+1}{4}\ ] \\ g(4s-t-1) & , \ s \in [\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}\ ] \\ \frac{h(4s-t-2)}{2-t} & , \ s \in [\frac{t+2}{4}, 1\ ] \end{cases}$$

είναι η ζητούμενη ομοτοπία κατα δρόμους μεταξύ των $f * (g * h)$ και $(f * g) * h$. Η απεικόνιση αυτή είναι συνεχής από το *PastingLemma* και είναι αρκετά εύκολο να δούμε

ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού της ομοτοπίας κατά δρόμους.
(2) Έστω f μονοπάτι από το x_0 στο x_1. Αρκεί να δείξουμε ότι $f * e_{x_1} \simeq_p f$.

$$f * e_{x_1} = \begin{cases} f(2s) & , s \in [0, \frac{1}{2}] \\ e_{x_1} & , s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(2s) & , s \in [0, \frac{1}{2}] \\ x_1 & , s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Σχήμα 2.3: $f * e_{x_1} \simeq_p f$

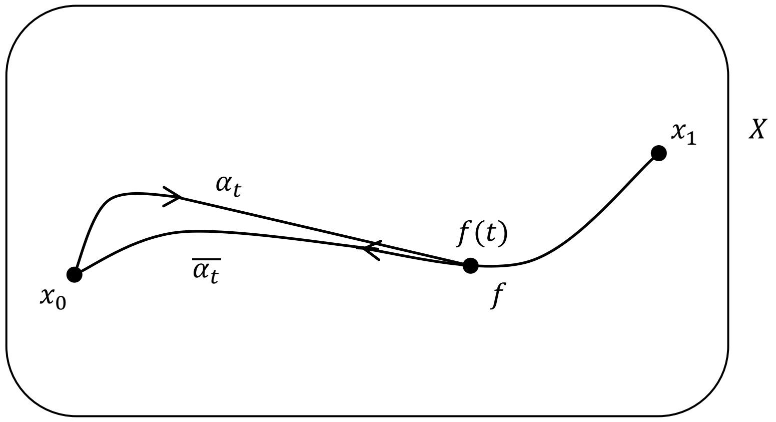
Επιλέγοντας ένα σημείο $(s_0,\ t_0)$ με την ίδια λογική όπως στο (2), βρίσκουμε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από αυτό και το $p((s_0,\ t_0)) = (s,\ 0)$ είναι $t = \frac{t_0-2}{s_0}s+2$ και επειδή το $(s,\ 0)$ την ικανοποιεί έχουμε $s = \frac{2s_0}{2-t_0}$. Οπότε,

$$G(s,\ t) = \begin{cases} f(\frac{4s}{2-t}) & , s \in [0, \frac{2-t}{4}] \\ x_1 & , s \in [\frac{2-t}{4}, 1] \end{cases}$$

είναι η ζητούμενη ομοτοπία κατά δρομούς μεταξύ των $f * e_{x_1}$, f. Η απεικόνιση αυτή είναι συνεχής από το *PastingLemma* και είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού της ομοτοπίας κατά δρόμους. Όμοια αποδεικνύουμε και την $[e_{x_0}] * [f] = [f]$.
(3) Έστω f μονοπάτι στον X από το x_0 στο x_1, τότε το $f * \overline{f}$ είναι μονοπάτι από το x_0 στο x_0. Αρκεί να δείξουμε ότι $f * \overline{f} \simeq_p e_{x_0}$ ή ισοδύναμα, αρκεί να βρούμε την ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ των $f * \overline{f}$, e_{x_0}. Η ομοτοπία κατά δρόμους αυτή θα είναι μία οικογένεια από μονοπάτια a_t στον X από το x_0 στο $f(t)$, $\forall t \in 0,\ 1]$ δηλαδή,

αποτελείται από μονοπάτια τα οποία θα ξεκινούν από το x_0, κινούνται κατά μήκος του f και θα καταλήγουν σ΄ ένα σημείο του (σχήμα 2.4). Τότε,

$$a_t * \overline{a_t}(s) = \begin{cases} a_t(2s) & , s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \overline{a_t}(2s-1) & , s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Σχήμα 2.4: $f * \bar{f}$

$$= \begin{cases} a_t(2s) & , s \in [0, \frac{1}{2}] \\ a_t(2(s-1)) & , s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Όμως με τον τρόπο που ορίσαμε τα a_t έπεται ότι $a_t([0,\ 1]) = f_{|_{[0,\ t]}} \Leftrightarrow a_t(s) = f(st)$. Άρα, ορίζουμε

$$H(s,\ t) = \begin{cases} f(2st) & , s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t(1-s)) & , s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Η H είναι η ζητούμενη ομοτοπία κατά δρομούς μεταξύ των $f * \bar{f},\ e_{x_0}$. Η απεικόνιση αυτή είναι συνεχής από το *PastingLemma* και είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού της ομοτοπίας κατά δρόμους. Όμοια αποδεικνύουμε και την $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.3 Έστω τοπολογικός χώρος X και $x_0 \in X$. Ένα μονοπάτι που ξεκινά και καταλήγει στο x_0 ονομάζεται *βρόγχος* βασισμένος στο x_0. Το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας των βρόγχων που βασίζονται στο x_0, εφοδιασμένο με την πράξη $*$, ονομάζεται *θεμελιώδης ομάδα* του X που βασίζεται στο x_0 και συμβολίζεται $\pi_1(X,\ x_0)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα $(\pi_1(X,\ x_0),\ *)$ είναι το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας κατά δρόμους περιορισμένη στους βρόγχους που είναι βασισμένοι στο x_0 και έχει ως πράξη την $*$ δηλαδή

$$\text{αν } [f],\ [g] \in \pi_1(X,\ x_0) \text{ τότε } [f] * [g] = [f * g]$$

Βάσει αυτού και του θεωρήματος 2.2.2 έπεται ότι η θεμελιώδης ομάδα είναι ομάδα (βλέπε και σχόλια στον Ορισμό 2.2.1). Το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $\pi_1(X,\ x_0)$ είναι το ουδέτερο μονοπάτι e_{x_0} (βλέπε απόδειξη Θεώρηματος 2.2.2).

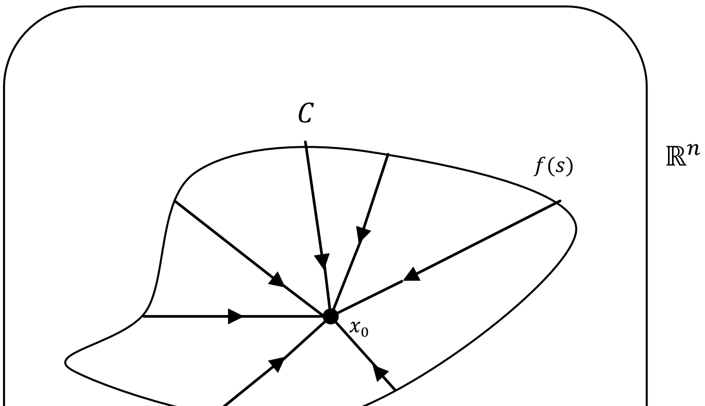
Παραδείγματα :

1. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τότε, $\pi_1(\mathbb{R}^n,\ x_0) = \{\ e_{x_0}\ \}$ διότι, αν f βρόγχος στον $\mathbb{R}^n$ βασισμένος στο x_0 τότε η απεικόνιση

$$F(s,\ t) = tx_0 + (1-t)f(s)$$

   είναι η γραμμική ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ των $f,\ e_{x_0}$.

2. Έστω C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $x_0 \in C$. Τότε $\pi_1(C,\ x_0) = \{\ e_{x_0}\ \}$ διότι, αν f βρόγχος στο C έπεται ότι $\{tx_0 + (1-t)f(s) :\ \forall\ s \in [0,\ 1]\} \in C$ λόγω κυρτότητας του C. Συνεπώς η ομοτοπία κατά δρόμους που υπάρχει είναι και στην περίπτωση αυτή η γραμμική ομοτοπία.



Σχήμα 2.5: Γραμμική ομοτοπία για το κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, C.

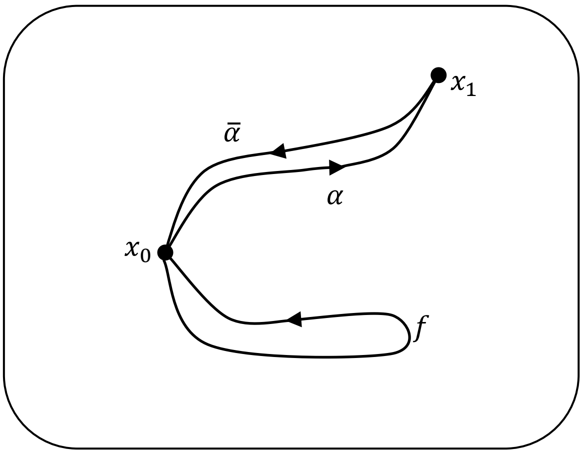
ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.4 Έστω X τοπολογικός χώρος, $x_0,\ x_1 \in X$ και a μονοπάτι στον X από το x_0 στο x_1. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\hat{a} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

με

$$\hat{a}([f]) = [\overline{a}] * [f] * [a]$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Η απεικόνιση $\hat{a}$ είναι καλά ορισμένη επειδή η πράξη $*$ είναι καλά ορισμένη και προσεταιριστική. Προφανώς κάθε βρόγχος βασισμένος στο x_0 μέσω της a απεικονίζεται στον βρόγχο $\overline{a} * (f * a)$ που είναι βασισμένος στο x_1.



Σχήμα 2.6: Ορισμός του $\hat{a}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.5 Η απεικόνιση $\hat{a}$ είναι ισομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{a}$ είναι ομομορφισμός, 1-1 και επί. Πράγματι, η απεικόνιση $\hat{a}$ είναι ομομορφισμός:

$$\hat{a}([f]) * \hat{a}([g]) = ([\overline{a}] * [f] * [a]) * ([\overline{a}] * [g] * [a])$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του θεωρήματος 2.2.2 έχουμε

$$\begin{aligned} &= [\overline{a}] * [f] * [g] * [a] \\ &= \hat{a}([f] * [g]). \end{aligned}$$

Η απεικόνιση $\hat{a}$ είναι 1-1: Έστω $[h] \in \pi_1(X, x_1)$. Τότε, αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $\hat{\overline{a}}$ σύμφωνα με τον ορισμό 2.2.4 έχουμε,

$$\hat{\overline{a}}([h]) = [\overline{\overline{a}}] * [h] * [\overline{a}] = [a] * [h] * [\overline{a}]$$

$$\hat{a}(\hat{\overline{a}}([h])) = [\overline{a}] * [a] * [h] * [\overline{a}] * [a] = [h]$$

Όμοια δείχνουμε ότι $\hat{\overline{a}}(\hat{a}([f])) = [f]$, $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Συνεπώς $\hat{\overline{a}}(\overline{a}([f])) = \hat{a}(\hat{\overline{a}}([f])) = [f]$, $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ δηλαδή, υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση του $\hat{a}$.
Η απεικόνιση $\hat{a}$ είναι επί: Έστω $[f] \in \pi_1(X, x_1)$ τότε το $\hat{\overline{a}}([f]) \in \pi_1(X, x_0)$ και συνεπώς $\hat{a}(\hat{\overline{a}}([f])) = [f]$. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.2.6 Έστω X συνεκτικός κατά δρόμους και $x_0, x_1 \in X$. Τότε, η $\pi_1(X, x_0)$ είναι ισομορφική με την $\pi_1(X, x_1)$.

Απόδειξη. Αν X συνεκτικός κατά δρόμους και $x_0, x_1 \in X$ τότε υπάρχει μονοπάτι a στον X από το x_0 στο x_1. Θεωρώντας την απεικόνση $\hat{a}$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα 2.2.5 έπεται το συμπέρασμα. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Έστω τοπολογικός χώρος X και C η συνεκτική συνιστώσα κατά δρόμους του X που περιέχει το x_0. Σύμφωνα με τον ορισμό 1.10.1 το C περιέχει όλα τα σημεία x του X για τα οποία υπάρχει μονοπάτι f στον X από το x_0 στο x. Συνεπώς $\pi_1(C, x_0) = \pi_1(X, x_0)$. Αυτό σημαίνει ότι η θεμελιώδης ομάδα του X βασισμένη στο x_0 εξαρτάται μόνο απο τη συνεκτική συνιστώσα κατά δρόμους του X που περιέχει το x_0 και δεν μας πληροφορεί για τον υπόλοιπο χώρο. Για το λόγο αυτό ασχολούμαστε κυρίως με τοπολογικούς χώρους συνεκτικούς κατά δρόμους. Από το πόρισμα 2.2.6 παρατηρούμε ότι αν ένας χώρος X είναι συνεκτικός κατά δρόμους τότε οι θεμελιώδεις ομάδες του $\pi_1(X, x)$ είναι ισομορφικές μεταξύ τους, $\forall x \in X$. Το γεγονός αυτό μας προδιαθέτει να βρούμε έναν τρόπο να ταυτίσουμε όλες τις θεμελιώδεις ομάδες ενός χώρου X με μία θεμελιώδη ομάδα που θα τις ¨ εκπροσωπεί ¨, ισοδύναμα να μπορούμε να πούμε ότι όταν ο χώρος είναι συνεκτικός κατά δρόμους, η θεμελιώδης ομάδα είναι ανεξάρτητη από το σημείο που βασίζεται και έτσι να έχουμε την έννοια ‟ θεμελιώδης ομάδα του χώρου ”. Αυτό όμως δεν είναι πάντα εφικτό διότι για διαφορετικά μονοπάτια a, β στον X από το x_0 στο x_1 θα έχουμε και διαφορετικούς ισομορφισμούς των αντίστοιχων ομάδων τους. Είναι εφικτό όμως υπό προυποθέσεις, όπως όταν η θεμελώδης ομάδα είναι αβελιανή δηλαδή εκτός των τριών αξιωμάτων του ορισμού 1.1.3 να ισχύει επιπλέον και η αντιμεταθετική ιδιότητα ($a * \beta = \beta * a$). Οπότε,

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.7 Έστω X τοπολογικός χώρος συνεκτικός κατά δρόμους και $x_0, x_1 \in X$. Η $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή αν και μόνο αν για οποιαδήποτε μονοπάτια a, β στον X από το x_0 στο x_1 έπεται ότι $\hat{a} = \hat{\beta}$.

Απόδειξη. Έστω $\pi_1(X, x_0)$ αβελιανή ομάδα και a, β μονοπάτια στον X από το x_0 στο x_1, τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.2.5, υπάρχουν ισομορφισμοί $\hat{a}$, $\hat{\beta}: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$ τέτοιοι ώστε,

$$\hat{a}([f]) = [\overline{a}] * [f] * [a]$$
$$\hat{\beta}([f]) = [\overline{\beta}] * [f] * [\beta].$$

Στην πρώτη σχέση πολλαπλασιάζοντας αριστερά και δεξιά με $[\overline{\beta}] * [\beta]$ θα έχουμε,

$$\hat{a}([f]) = [\overline{\beta}] * [\beta] * [\overline{a}] * [f] * [a] * [\overline{\beta}] * [\beta]$$

Παρατηρούμε ότι στην σχέση αυτή το $[\beta] * [\overline{a}] \in \pi_1(X, x_0)$ και επειδή $\pi_1(X, x_0)$ αβελιανή έπεται ότι

$$\hat{a}([f]) = [\overline{\beta}] * [f] * [\beta] * [\overline{a}] * [a] * [\overline{\beta}] * [\beta] \Rightarrow$$
$$\hat{a}([f]) = [\overline{\beta}] * [f] * [\beta] * [\overline{\beta}] * [\beta] \Rightarrow$$
$$\hat{a}([f]) = [\overline{\beta}] * [f] * [\beta] \Rightarrow$$
$$\hat{a}([f]) = \hat{\beta}([f])$$

Αντίστροφα, αν για δύο τυχαία μονοπάτια a, β στον X από το x_0 στο x_1 ισχύει $\hat{a} = \hat{\beta}$ θα δείξουμε ότι $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή.
Έστω $[f]$, $[g] \in \pi_1(X, x_0)$. Θεωρούμε τα $g * f * a$, $f * g * a$ μονοπάτια στον X από το x_0 στο x_1. Από υπόθεση έπεται ότι $(\widehat{g * f * a}) = (\widehat{f * g * a})$, ισοδύναμα $(\widehat{g * f * a})([h]) = (\widehat{f * g * a})([h])$, $\forall h \in \pi_1(X, x_0)$. Οπότε,

$$(\widehat{g * f * a})([e_{x_0}]) = (\widehat{f * g * a})([e_{x_0}]) \Rightarrow$$
$$[\overline{g * f * a}] * [e_{x_0}] * [g * f * a] = [\overline{f * g * a}] * e_{x_0} * [f * g * a] \Rightarrow$$
$$[\overline{g}] * [\overline{f}] * [\overline{a}] * [g] * [f] * [a] = [\overline{f}] * [\overline{g}] * [\overline{a}] * [g] * [a].$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη από αριστερά με τον παράγοντα $[a] * [g] * [f]$ έχουμε

$$[g] * [f] * [a] = [a] * [f] * [g] * [\overline{f}] * [\overline{g}] * [\overline{a}] * [f] * [g] * [a] \Rightarrow$$
$$[g] * [f] * [a] = [a] * [f] * [g] * [\overline{f * g}] * [\overline{a}] * [f] * [g] * [a] \Rightarrow$$
$$[g] * [f] * [a] = [a] * [\overline{a}] * [f] * [g] * [a] \Rightarrow$$
$$[g] * [f] * [a] = [f] * [g] * [a] \Rightarrow$$
$$[g] * [f] = [f] * [g].$$

□

Όλα τα παραδείγματα θεμελιωδών ομάδων που έχουμε παραθέσει περιέχουν μόνο το ουδέτερο στοιχείο διότι είναι αρκετά δύσκολο σε πρώτη φάση να βρούμε μη τετριμένες ομάδες. Επίσης όπως έχουμε προαναφέρει προτιμάμε να ασχολούμαστε με χώρους κατά δρόμους συνεκτικούς. Βάσει αύτων, έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.8 Ένας τοπολογικός χώρος X θα λέγεται *απλά συνεκτικός* αν είναι κατά δρόμους συνεκτικός και η $\pi_1(X, x)$ είναι η τετριμένη ομάδα, $\forall x \in X$. Θα συμβολίζουμε τη θεμελιώδη τετριμένη ομάδα ως $\pi_1(X, x) = 0$.

ΛΗΜΜΑ 2.2.9 Έστω τοπολογικός χώρος X απλά συνεκτικός. Οποιαδήποτε δύο μονοπάτια με το ίδιο αρχικό και τελικό σημείο είναι ομοτοπικά.

Απόδειξη. Έστω f, g μονοπάτια στον X από το x_0 στο x_1. Τότε η $f * \overline{g}$ είναι ένας βρόγχος βασισμένος στο x_0. Επειδή ο X είναι απλά συνεκτικός έπεται ότι $f * \overline{g} \simeq e_{x_0}$. Χρησιμοποιώντας τις ομαδοειδείς ιδιότητες έχουμε:

$$[(f * \overline{g}) * g] = [e_{x_0} * g] = [g]$$

και

$$[(f * \overline{g}) * g] = [f * (\overline{g} * g)] = [f * e_{x_1}] = [f].$$

Συνεπώς $[g] = [f]$ και άρα τα μονοπάτια f, g ομοτοπικά κατά δρόμους. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.10 Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Με $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ θα συμβολίζουμε μία συνεχή απεικόνιση με $h(x_0) = y_0$. Ορίζουμε

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

με

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

Η απεικόνιση h_* λέγεται *ομομορφισμός που επάγεται από την* h βασισμένος στο x_0. Ισχύουν τα εξής:

1. Εάν f βρόγχος στον X βασισμένος στο x_0, τότε η $h \circ f : I \longrightarrow Y$ είναι βρόγχος στον Y βασισμένος στο y_0. Οπότε μέσω της h_* κάθε βρόγχος στον X βασισμένος στο

x_0 μεταφέρεται σε βρόγχο στον Y βασισμένο στο y_0 ισοδύναμα η h_* απεικονίζει την $\pi_1(X, x_0)$ στην $\pi_1(Y, y_0)$.

2. Η h_* είναι καλά ορισμένη.
Έστω f, f' βρόγχοι βασισμένοι στο x_0 ομοτοπικοί κατά δρόμους και $F: I \times I \longrightarrow X$ είναι η ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ τους. Τότε $h \circ F$ είναι η ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ των $h \circ f$ και $h \circ f'$.

3. Η h_* είναι ομομορφισμός.
Σύμφωνα με τον ορισμό 2.2.1 έχουμε

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & , \ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Από αυτό έπεται ότι

$$(h \circ (f * g))(s) = \begin{cases} h(f(2s)) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ h(g(2s-1)) & , \ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Όμως

$$((h \circ f) * (h \circ g))(s) = \begin{cases} h(f(2s)) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ h(g(2s-1)) & , \ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Συνεπώς $(h \circ (f * g))(s) = ((h \circ f) * (h \circ g))(s)$ και από αυτό έπεται ότι $h_*([f] * ([g])) = h_*([f]) * h_*([g])$.

4. Αν $x_0, x_1 \in X$ με $x_0 \neq x_1$, δεν θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύμβολο h_* για τους ομομορφισμούς που έχουν ως πεδίο ορισμού $\pi_1(X, x_0)$ και $\pi_1(X, x_1)$ αλλά θα τους συμβολίζουμε $(h_{x_0})_*$ και $(h_{x_1})_*$, αντίστοιχα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.11 Έστω $h: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ και $k: (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$, τότε $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Εάν $i: (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ η ταυτοτική απεικόνιση, τότε i_* είναι ο ταυτοτικός ισομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $h: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ και $k: (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$, τότε

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f],$$

$$(k_* \circ h_*)([f]) = k_*(h_*([f])) = [k_*(h \circ f)] = [(k \circ h) \circ f].$$

Με όμοιο τρόπο,

$$i_*([f]) = [i \circ f] = [f].$$

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.2.12 Αν $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ ομοιομορφισμός του X με τον Y, τότε ο h_* είναι ισομορφισμός των $\pi_1(X, x_0)$ και $\pi_1(Y, y_0)$.

Απόδειξη. Έστω $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ ομοιομορφισμός του X με τον Y και $k : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ η αντίστροφη απεικόνιση του h. Τότε $(k_* \circ h_*) = (k \circ h)_* = i_*$, όπου i η ταυτοτική απεικόνιση του (X, x_0) καθώς και $(h_* \circ k_*) = (h \circ k)_* = j_*$, όπου j η ταυτοτική απεικόνιση του (Y, y_0). Από το θεώρημα 2.2.11 έπεται ότι i_* , j_* ταυτοτικοί ισομορφισμοί των $\pi_1(X, x_0)$ και $\pi_1(Y, y_0)$ αντίστοιχα και συνεπώς k_* είναι η αντίστροφη απεικόνιση της h_*. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.13 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $h : (A, a_0) \longrightarrow (Y, y_0)$. Εάν η h μπορεί να επεκταθεί σε μία συνεχή απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$, τότε η h_* είναι ο *μηδενικός ομομορφισμός* δηλαδή, η h_* απεικονίζει οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ στο ταυτοτικό στοιχείο της $\pi_1(Y, y_0)$.

Απόδειξη. Έστω $[f] \in \pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ τότε όπως έχουμε προαναφέρει, για τη θεμελιώδη ομάδα ισχύει, $\pi_1(\mathbb{R}^n, a_0) = 0$. Συνεπώς $f \simeq_p e_{a_0}$ ισοδύναμα υπάρχει F γραμμική ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ των f, e_{a_0}.Τότε όμως η $h \circ F$ είναι η ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ των $h \circ f$, $h \circ e_{a_0}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $h \circ e_{a_0} = e_{y_0}$. Πράγματι, $h \circ (e_{a_0} * e_{a_0}) = (h \circ e_{a_0}) * (h \circ e_{a_0}) \Rightarrow h \circ e_{a_0} = (h \circ e_{a_0}) * (h \circ e_{a_0}) \Rightarrow (h \circ e_{a_0}) * e_{y_0} = (h \circ e_{a_0}) * (h \circ e_{a_0})$ Από την ιδιότητα της διαγραφής έπεται ότι $h \circ e_{a_0} = e_{y_0}$ και άρα $h \circ f \simeq e_{y_0}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.14 Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $h : X \longrightarrow Y$ συνεχής. Εάν X είναι κατά δρόμους συνεκτικός, $x_0, x_1 \in X$, $h(x_0) = y_0$ και $h(x_1) = y_1$, τότε υπάρχουν ισομορφισμοί $\varphi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$ και $\psi : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_1)$ τέτοιοι ώστε $\psi \circ (h_{x_0})_* = (h_{x_1})_* \circ \varphi$. Επίσης αν $(h_{x_0})_*$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός ή 1-1 ή επί, τότε $(h_{x_1})_*$ είναι μηδενικός ομομορφισμός ή 1-1 ή επί, αντίστοχα.

Απόδειξη. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, $h : X \longrightarrow Y$ συνεχής, $x_0, x_1 \in X$, $h(x_0) = y_0$ και $h(x_1) = y_1$. Επειδή X κατά δρόμους συνεκτικός από το πόρισμα 2.2.6 έπεται ότι αν a μονοπάτι από το x_0 στο x_1 τότε $\hat{a}$ είναι ισομορφισμός των $\pi_1(X, x_0)$, $\pi_1(X, x_1)$. Επιπλέον, το $h \circ a$ είναι μονοπάτι στον Y από το y_0 στο y_1 αφού, $h \circ a : [0, 1] \longrightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση ως σύνθεση συνεχών απεικονίσεων και $(h \circ a)(0) = y_0$ και $(h \circ a)(1) = y_1$. Οπότε, από τον ορισμό 2.2.4 και το θεώρημα 2.2.5, υπάρχει ισομορφισμός $\widehat{h \circ a}$ μεταξύ των θεμελιωδών ομάδων $\pi_1(Y, y_0)$, $\pi_1(Y, y_1)$. Έστω $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, τότε

$$(\widehat{h \circ a} \circ (h_{x_0})_*)([f]) = (\widehat{h \circ a})((h_{x_0})_*([f]))$$

$$= (\widehat{h \circ a})([h \circ f]) = [h \circ \overline{a}] * [h \circ f] * [h \circ a]$$

$$(h_{x_1})_* \circ \hat{a}([f]) = (h_{x_1})_* \circ ([\overline{a}] * [f] * [a])$$

$$= ((h_{x_1})_* \circ [\overline{a}]) * ((h_{x_1})_* \circ [f]) * ((h_{x_1})_* \circ [a]))$$

$$= [h \circ \overline{a}] * [h \circ f] * [h \circ a]$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "(h_{x_0})_*"] \arrow[d, "\hat{a}"'] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "\widehat{h \circ a}"] \\
\pi_1(X, x_1) \arrow[r, "(h_{x_1})_*"'] & \pi_1(Y, y_1)
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 2.7: Διάγραμμα των $\widehat{a}$, $\widehat{h \circ a}$, $(h_{x_0})_*$, $(h_{x_1})_*$

Αν $(h_{x_0})_*$ μηδενικός ομομορφισμός θα δείξουμε ότι, και ο $(h_{x_1})_*$ είναι μηδενικός ομομορφισμός. Για $[f] \in \pi_1(X, x_1)$ έχουμε

$$(h_{x_1})_*([f]) = (\widehat{h \circ a} \circ (h_{x_0})_*) \circ \hat{\hat{a}}([f]) = \widehat{h \circ a} \circ e_{y_0} = e_{y_1}.$$

Έστω $(h_{x_0})_*$ 1-1. Θα δείξουμε ότι και ο $(h_{x_1})_*$ είναι 1-1.
Έστω $[f]$, $[g] \in \pi_1(X, x_1)$ τέτοια ώστε $(h_{x_1})_*([f]) = (h_{x_1})_*([g])$. Θα δείξουμε ότι $[f] = [g]$.

$$(h_{x_1})_*([f]) = (h_{x_1})_*([g]) \Rightarrow$$

$$(\widehat{h \circ a} \circ (h_{x_0})_*) \circ \hat{\hat{a}}([f]) = (\widehat{h \circ a} \circ (h_{x_0})_*) \circ \hat{\hat{a}}([g]) \Rightarrow$$

$$(\widehat{h \circ a} \circ (h_{x_0})_*)([f]) = (\widehat{h \circ a} \circ (h_{x_0})_*)([g]) \Rightarrow$$

$$(\widehat{h \circ a}([f]) = (\widehat{h \circ a}([g]) \Rightarrow$$

$$[f] = [g].$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι αν $(h_{x_0})_*$ επί τότε $(h_{x_1})_*$ είναι επίσης επί. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.15 Έστω τοπολογικός χώρος X και A υπόχωρος του. Θα λέμε ότι ο A είναι *retract* του X εάν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $r : X \longrightarrow A$ τέτοια ώστε $r(a) = a$, για κάθε $a \in A$. Η απεικόνιση r καλείται *retraction* του X επί του A.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.16 Έστω $A \subseteq X$ και $r : X \longrightarrow A$ *retraction* του X επί του A. Τότε, για δεδομένο $a_0 \in A$, η απεικόνιση

$$r_* : \pi_1(X, a_0) \longrightarrow \pi_1(A, a_0)$$

είναι επί.

Απόδειξη. Έστω $[f] \in \pi_1(A, a_0)$. Άρκει να βρούμε $[g] \in \pi_1(X, a_0)$ τέτοιο ώστε $r_*([g]) = [f]$. Θεωρούμε την απεικόνιση εγκλεισμού $j : A \longrightarrow X$. Τότε ο j_* είναι ο ομομορφισμός που επάγει η j και η $j_*([f]) = [f] \Rightarrow r_*(j_*([f])) = r_*([f]) = [f]$, όπου $g = j_*([f])$. □

2.3 Χώροι κάλυψης

Στο σημείο αυτό εισάγουμε την έννοια του χώρου κάλυψης και στη συνέχεια θα βασιστούμε σε αυτήν για τον υπολογισμό μη τετριμένων θεμελιωδών ομάδων. Ουσιαστικά όπως έχουμε προαναφέρει, η θεμελιώδης ομάδα είναι ένα βασικό εργαλείο για τον προσδιορισμό και την ταξινόμηση τοπολογικών χώρων. Το εργαλείο αυτό γίνεται πιο εύχρηστο όταν αυτοί οι τοπολογικοί χώροι είναι χώροι κάλυψης ενός συγκεκριμένου χώρου B.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.1 Έστω $p : E \longrightarrow B$ συνεχής και επί απεικόνιση. Ένα ανοιχτό σύνολο U του B θα λέγεται *άρτια καλυμμένο* από την p εάν υπάρχουν $\{V_a\}_a$ ξένα ανοιχτά στον E τέτοια ώστε $p^{-1}(U) = \bigcup_a V_a$ και $p_{|V_a} : V_a \longrightarrow U$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε a. Τα V_a καλούνται *slices* του $p^{-1}(U)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.2 Έστω $p : E \longrightarrow B$ συνεχής και επί απεικόνιση. Αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει περιοχή $U \in W(b)$ άρτια καλυμμένη από την p, τότε η p ονομάζεται *απεικόνιση κάλυψης* και ο E *χώρος κάλυψης* του B.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3.3 Έστω $p : E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης. Τότε, για κάθε $b \in B$, το $p^{-1}(b) \subseteq E$ έχει την διακριτή τοπολογία.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι τα μονοσύνολα του $p^{-1}(b)$ είναι ανοιχτά ως προς την σχετική τοπολογία του E στο $p^{-1}(b)$. Αν $b \in B$ τότε, υπάρχει $U \subseteq B$ τέτοιο ώστε $p^{-1}(U) = \bigcup_a V_a$ όπου V_a ανοιχτά ξένα στον E.

Έστω $\omega \in p^{-1}(b)$. Τότε υπάρχει μοναδικό V_{a_0} τέτοιο ώστε $\omega \in V_{a_0}$. Από αυτό έπεται ότι $\{\omega\} \subseteq V_{a_0}$. Θα δείξουμε ότι $p^{-1}(b) \cap V_{a_0} = \{\omega\}$.
Αν $\{x,\ \omega\} \subseteq p^{-1}(b) \cap V_a$, με $x \neq \omega$ τότε $x,\ \omega \in p^{-1}(b)$ και $x,\ \omega \in V_a$, δηλαδή $p(x) = b = p(\omega)$ και $x,\ \omega \in V_{a_0}$. Επειδή $p_{|V_a} : V_{a_0} \longrightarrow U$ είναι ομοιομορφισμός σύμφωνα με τον ορισμό 2.3.1 έπεται ότι $x = \omega$. Προφανώς το $p^{-1}(b) \cap V_{a_0}$ είναι ανοιχτό αφού το V_{a_0} είναι ανοιχτό στον E και από τη σχετική τοπολογία $p^{-1}(b) \cap V_{a_0}$ ανοιχτό στον $p^{-1}(b)$. Άρα, το $\{\omega\}$ είναι ανοιχτό. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.4 Η απεικόνιση $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ με $p(x) = (\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x)$ είναι απεικόνιση κάλυψης.

Απόδειξη. Έστω $U = \{(\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x) :\ \cos 2\pi x > 0\} \subseteq S^1$ ανοιχτό. Τότε $p^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} :\ cos 2\pi x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} :\ n - \frac{1}{4} < x < n + \frac{1}{4},\ \forall n \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}(n - \frac{1}{4},\ n + \frac{1}{4})$. Θέτουμε $V_n = (n - \frac{1}{4},\ n + \frac{1}{4})$ και θεωρούμε την απεικόνιση $p : \overline{V_n} \longrightarrow S^1$. Η απεικόνιση αυτή είναι 1-1, αφού στα $\overline{V_n}$ το sin είναι μονότονη συνάρτηση.
ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Η $p : \overline{V_n} \longrightarrow \overline{U}$ είναι επί.
Θεωρούμε την απεικόνιση $p :\ V_n \longrightarrow U$. Τότε, προφανώς, $p(V_n) \subseteq U$. Αρκεί να δείξουμε ότι $U \subseteq p(V_n)$.
Αν $y \in U$ τότε για $y \neq (1,\ 0)$, $y = (\cos 2\pi x_0,\ \sin 2\pi x_0)$. Θεωρώ ένα σημείο $y' = (t,\ z)$ με $0 < t < \cos 2\pi x_0$. και χρησιμοποιούμε τη λεξικογραφική διάταξη(: εάν A, B σύνολα με σχέσεις διατάξης $<_A$, $<_B$ αντίστοιχα, ορίζουμε μία νέα σχέση διάταξης $<$ στο $A \times B$ ως εξής:

$$(a_1,\ \beta_1) < (a_2,\ \beta_2) \text{ αν } a_1 <_A a_2 \text{ ή αν } a_1 = a_2 \text{ και } \beta_1 <_B \beta_2,$$

που ονομάζεται *λεξικογραφική διάταξη* στο $A \times B$). Με την τοπολογία που επάγει η λεξικογραφική διάταξη στο $U \subseteq \mathbb{R}^2$ για τα $y' < y < (0,\ 1)$ από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών έπεται ότι υπάρχει $c \in V_n$ τέτοιο ώστε $p(c) = y$, ισοδύναμα $U \subseteq p(V_n)$. Άρα η $p : \overline{V_n} \longrightarrow \overline{U}$ είναι επί. Συνεπώς, $p(\overline{V_n}) = p(V_n \cup \{n - \frac{1}{4},\ n + \frac{1}{4}\}) = U \cup \{(0,\ 1),\ (0,\ -1)\} = \overline{U}$. Επειδή το $\overline{V_n}$ είναι συμπαγές και η $p :\ \overline{V_n} \longrightarrow \overline{U}$ είναι 1-1 και επί έπεται ότι $p :\ \overline{V_n} \longrightarrow \overline{U}$ ομοιομορφισμός. Οπότε $p :\ V_n \longrightarrow U$ ομοιομορφισμός, αφού $p(V_n) = U$. $\square$

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου παραθέτουμε ιδιότητες και παραδείγματα που αφορούν σε απεικονίσεις κάλυψης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3.5 Αν $p :\ E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης τότε, η p είναι ανοιχτή απεικόνιση.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η p είναι ανοιχτή απεικόνιση αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $U \subseteq E$ ανοιχτό, το $p(U) \subseteq B$ είναι επίσης ανοιχτό, ισοδύναμα ότι, για κάθε $b \in p(U)$ υπάρχει $W \subseteq B$ βασικό ανοιχτό με $b \in W$ τέτοιο ώστε $b \in W \subseteq p(U)$.

Έστω $U \subseteq E$ ανοιχτό στο E και $b \in p(U)$. Αφού p απεικόνιση κάλυψης έπεται ότι υπάρχει περιοχή $V \in W(b)$ τέτοια ώστε $p^{-1}(V) = \bigcup_a V_a$, όπου $\{V_a\}_a$ ξένα ανοιχτά στον E και $p_{|V_a} : V_a \longrightarrow V$ ομοιομορφισμός, για κάθε a. Επειδή το U είναι ανοιχτό στον E έπεται ότι $U \cap V_a$ είναι ανοιχτό στο U και στον E, για κάθε a. Αφού $b \in p(U)$, θα υπάρχει $x_b \in U$ τέτοιο ώστε $p(x_b) = b \Rightarrow x_b \in p^{-1}(b) \subseteq p^{-1}(V) = \bigcup_a V_a$, συνεπώς υπάρχει a_0 τέτοιο ώστε $x_b \in V_{a_0}$. Οπότε $x_b \in V_{a_0} \cap U \Rightarrow b \in p(V_{a_0} \cap U)$. Μένει να δείξουμε ότι το $p(V_{a_0} \cap U)$ είναι ανοιχτό. Προφανώς, $p(V_{a_0} \cap U) \subseteq p(U)$ και $V_{a_0} \cap U \subseteq V_{a_0} \subseteq E$ ανοιχτό στον E. Συνεπώς $p(V_{a_0} \cap U)$ ανοιχτό στον B λόγω του ότι $p_{|V_{a_0}} : V_{a_0} \longrightarrow V$ είναι ομοιομορφισμός. Άρα υπάρχει $W \subseteq B$ βασικό ανοιχτό με $b \in W$ τέτοιο ώστε $b \in W \subseteq p(U)$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3.6 Έστω E_1, E_2, B_1, B_2 τοπολογικοί χώροι, $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ με $(x_1, x_2) \longrightarrow (p_1(x_1), p_2(x_2))$ μία απεικόνιση, όπου p_1, p_2 συνεχείς συναρτήσεις και $\pi_1 : B_1 \times B_2 \longrightarrow B_1, \varphi_1 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1$ οι προβολές των $B_1 \times B_2$, $E_1 \times E_2$ στους B_1, E_1 αντίστοιχα. Τότε, αν V ανοιχτό υποσύνολο του B_1, θα ισχύει

$$((p_1 \times p_2)^{-1} \circ \pi_1^{-1})(V) = (\varphi_1^{-1} \circ p_1^{-1})(V)$$

Απόδειξη. Η $p_1 \times p_2$ είναι συνεχής (προκύπτει άμεσα από το θεώρημα 1.8.11) και το ίδιο ισχύει και για τις π_1, φ_1 λόγω της θεωρήματος 1.8.9.

Έστω $(x, y) \in ((p_1 \times p_2)^{-1} \circ \pi_1^{-1})(V)$. Τότε

$$(p_1 \times p_2)(x, y) \in \pi_1^{-1}(V) \Rightarrow p_1(x) \in V \Rightarrow ((p_1 \times p_2)^{-1} \circ \pi_1^{-1})(V) = p_1^{-1}(V) \times E_2 \qquad (1)$$

Όμοια, αν $(x, y) \in (\varphi_1^{-1} \circ p_1^{-1})(V)$, τότε

$$\varphi(x, y) \in p_1^{-1}(V) \Rightarrow x \in p_1^{-1}(V) \Rightarrow p_1(x) \in V \Rightarrow (\varphi_1^{-1} \circ p_1^{-1})(V) = p_1^{-1}(V) \times E_2 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έπεται το συμπέρασμα. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3.7 Έστω E_1, E_2, B_1 και B_2 τοπολογικοί χώροι και $p_1 : E_1 \longrightarrow B_1$ και $p_2 : E_2 \longrightarrow B_2$ απεικονίσεις κάλυψης. Τότε η $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ με $(x_1, x_2) \longrightarrow (p_1(x_1), p_2(x_2))$ είναι επίσης απεικόνιση κάλυψης.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η $p_1 \times p_2$ με $(x_1, x_2) \longrightarrow (p_1(x_1), p_2(x_2))$ ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες μιας απεικόνισης κάλυψης.

$p_1 \times p_2$ *είναι συνεχής :*

Προκύπτει άμεσα από το θεώρημα 1.8.11.

$$\begin{tikzcd} E_1 \times E_2 \arrow[r, "p_1 \times p_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & B_1 \times B_2 \arrow[d, "\pi_1"] \\ E_1 \arrow[r, "p_1"'] & B_1 \end{tikzcd}$$

$p_1 \times p_2$ είναι επί :

$$\begin{aligned}(p_1 \times p_2)(E_1 \times E_2) &= \{(p_1(x_1),\ p_2(x_2)) :\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\} \\ &= p_1(E_1) \times p_2(E_2) \\ &= B_1 \times B_2\end{aligned}$$

$E_1 \times E_2$ χώρος κάλυψης του $B_1 \times B_2$:

Έστω $x_0 \in B_1 \times B_2$ με $x_0 = (b_1,\ b_2)$, $b_1 \in B_1$ και $b_2 \in B_2$. Επειδή $p_1,\ p_2$ απεικονίσεις κάλυψης, υπάρχουν $U_1 \in W(b_1)$ και $U_2 \in W(b_2)$ τέτοιες ώστε $p_1^{-1}(U_1) = \bigcup_a V_{1_a}$ και $p_2^{-1}(U_2) = \bigcup_\beta V_{2_\beta}$, όπου $V_{1_a} \subseteq E_1$ ανοιχτά, ξένα για κάθε a, $V_{2_\beta} \subseteq E_2$ ανοιχτά, ξένα για κάθε β. Επίσης, $p_{1_{|V_{1_a}}} : V_{1_a} \longrightarrow U_1$ είναι ομοιομορφισμός, για κάθε a και $p_{2_{|V_{2_\beta}}}$: $V_{2_\beta} \longrightarrow U_2$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε β. Θέτουμε $U = U_1 \times U_2$. Τότε το U είναι ανοιχτό για την τοπολογία γινόμενο του $B_1 \times B_2$ και επίσης $U \in W(x_0)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $\{V_\lambda\}_\lambda$ ανοιχτά στον $E_1 \times E_2$ και ξένα τέτοια ώστε $(p_1 \times p_2)^{-1}(U) = \bigcup_\lambda V_\lambda$ και $(p_1 \times p_2)_{|V_\lambda} : V_\lambda \longrightarrow U$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε λ.
Πράγματι, έχοντας $U = U_1 \times U_2$ από την πρόταση 1.8.8 έπεται ότι $U = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \pi_2^{-1}(U_2)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}(p_1 \times p_2)^{-1}(U) &= (p_1 \times p_2)^{-1}(\pi_1^{-1}(U_1) \cap \pi_2^{-1}(U_2)) \\ &= (p_1 \times p_2)^{-1} \circ \pi_1^{-1}(U_1) \cap (p_1 \times p_2)^{-1} \circ \pi_2^{-1}(U_2)\end{aligned}$$

Από την πρόταση 1.6.3 έπεται ότι

$$\begin{aligned}&= (\varphi_1^{-1} \circ p_1^{-1})(U_1) \cap (\varphi_2^{-1} \circ p_2^{-1})(U_2) \\ &= (\varphi_1^{-1} \circ p_1^{-1})(\textstyle\bigcup_a V_{1_a}) \cap (\varphi_2^{-1} \circ p_2^{-1})(\textstyle\bigcup_\beta V_{2_\beta})\end{aligned}$$

$$= (\bigcup_\alpha \varphi_1^{-1}(V_{1_\alpha})) \cap (\bigcup_\beta \varphi_2^{-1}(V_{2_\beta}))$$

$$= \bigcup_{\alpha,\beta} (\varphi_1^{-1}(V_{1_\alpha}) \cap \varphi_2^{-1}(V_{2_\beta}))$$

$$= \bigcup_{\alpha,\beta} (V_{1_\alpha} \times V_{2_\beta})$$

Θέτουμε $V_\lambda = V_{1_\alpha} \times V_{2_\beta}$. Τότε τα V_λ είναι ανοιχτά για την τοπολογία γινόμενο του $E_1 \times E_2$. Θα δείξουμε ότι V_λ ξένα μεταξύ τους.

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} &= (V_{1_{\alpha_1}} \times V_{2_{\beta_1}}) \cap (V_{1_{\alpha_2}} \times V_{2_{\beta_2}}) \\ &= (V_{1_{\alpha_1}} \cap V_{1_{\alpha_2}}) \times (V_{2_{\beta_1}} \cap V_{2_{\beta_2}}) \\ &= \emptyset \times \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Μένει να δείξουμε ότι $(p_1 \times p_2)_{|V_\lambda} : V_\lambda \longrightarrow U$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε λ.

$(p_1 \times p_2)_{|V_\lambda}$ είναι επί :

$$\begin{aligned} (p_1 \times p_2)_{|V_\lambda}(V_\lambda) &= (p_{1_{|V_{1_\alpha}}} \times p_{2_{|V_{2_\beta}}})(V_{1_\alpha} \times V_{2_\beta}) \\ &= (p_{1_{|V_{1_\alpha}}}(V_{1_\alpha}),\ p_{2_{|V_{2_\beta}}}(V_{2_\beta})) \\ &= (U_1,\ U_2) \\ &= U_1 \times U_2 \\ &= U \end{aligned}$$

$(p_1 \times p_2)_{|V_\lambda}$ είναι 1-1 :

Έστω $c_1,\ c_2 \in V_\lambda$ τέτοια ώστε $(p_1 \times p_2)_{|V_\lambda}(c_1) = (p_1 \times p_2)_{|V_\lambda}(c_2)$. Επειδή $V_\lambda = V_{1_\alpha} \times V_{2_\beta}$ έπεται ότι $c_1 = (x_1,\ y_1)$ και $c_2 = (x_2,\ y_2)$ με $x_1,\ x_2 \in V_{1_\alpha}$ και $y_1,\ y_2 \in V_{2_\beta}$. Οπότε,

$$(p_1 \times p_2)_{|V_\lambda}(c_1) = (p_1 \times p_2)_{|V_\lambda}(c_2) \Rightarrow$$

$$(p_{1_{|V_{1_\alpha}}},\ p_{2_{|V_{2_\beta}}})(x_1,\ y_1) = (p_{1_{|V_{1_\alpha}}},\ p_{2_{|V_{2_\beta}}})(x_2,\ y_2) \Rightarrow$$

$$(p_{1_{|V_{1_\alpha}}}(x_1),\ p_{2_{|V_{2_\beta}}}(y_1)) = (p_{1_{|V_{1_\alpha}}}(x_2),\ p_{2_{|V_{2_\beta}}}(y_2)) \Rightarrow$$

$$p_{1_{|V_{1_\alpha}}}(x_1) = p_{1_{|V_{1_\alpha}}}(x_2) \text{ και } p_{2_{|V_{2_\beta}}}(y_1) = p_{2_{|V_{2_\beta}}}(y_2) \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$$

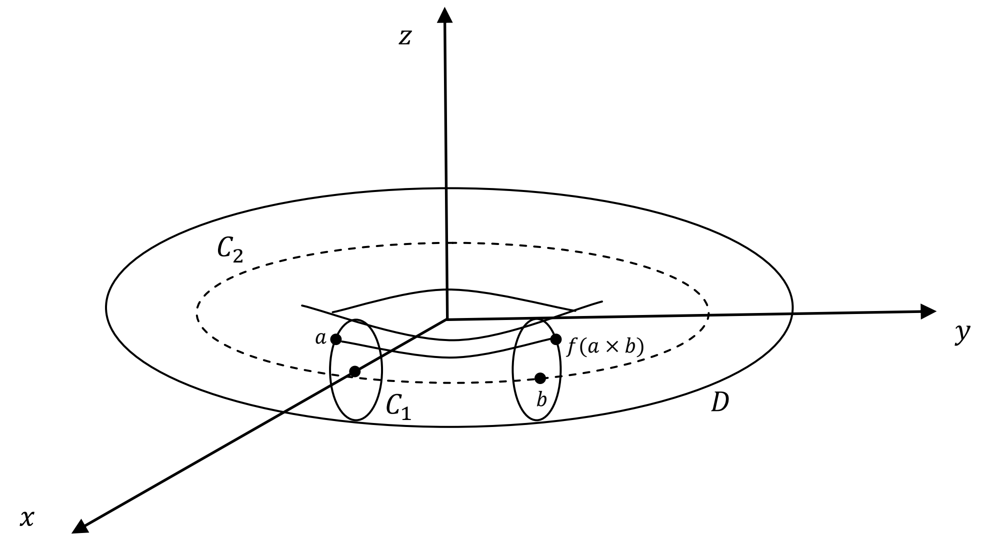
αφού $p_{1_{|V_{1_\alpha}}}$, $p_{2_{|V_{2_\beta}}}$ είναι 1-1. Συνεπώς $c_1 = c_2$.

$(p_1 \times p_2)^{-1}_{|V_\lambda}$ *είναι συνεχής :*

Από την πρόταση 2.3.4 και το θεώρημα 1.8.11 προκύπτει ότι η $(p_1 \times p_2)_{|V_\lambda}$ είναι ανοιχτή απεικόνιση. Συνεπώς $(p_1 \times p_2)^{-1}_{|V_\lambda}$ είναι συνεχής. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Στο θεώρημα 2.3.4 μπορεί κανείς να φανταστεί την p σαν μία συνάρτηση η οποία ¨τυλίγει¨ την ευθεία των πραγματικών αριθμών γύρω από τον κύκλο S^1, έτσι ώστε κάθε κλειστό διάστημα $[n,\ n+1]$ απεικονίζεται επί της S^1.
Με το ίδιο σκεπτικό θεωρώντας τον χώρο $T = S^1 \times S^1$, γνωστό ως *τόρο*, μέσω της απεικόνισης $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$ (Πρόταση 2.3.7) προκύπτει ο χώρος κάλυψης του τόρου από το επίπεδο, όπου p είναι η απεικόνιση κάλυψης που υποδηλώνει το παρακάτω.

Καθένα από τα ορθογώνια $[n,\ n+1] \times [m,\ m+1]$ μπορεί να τυλιχτεί μέσω της $p \times p$ γύρω από τον τόρο.



Σχήμα 2.8: Τόρος

Στο σχήμα 2.7 απεικονίζεται ο τόρος όχι σαν το καρτεσιανό γινόμενο $S^1 \times S^1$ αλλά σαν μία επιφάνεια $D \subseteq \mathbb{R}^3$ η οποία έχει προκύψει από την περιστροφή του κύκλου C_1 που ανήκει στο xz−επίπεδο, με ακτίνα $\frac{1}{3}$ και κέντρο $(1,\ 0,\ 0)$ γύρω από τον άξονα των z. Είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι η επιφάνεια D είναι ομοιομορφική με το $S^1 \times S^1$: Θεωρούμε έναν δεύτερο κύκλο C_2 στο xy−επίπεδο με ακτίνα 1 και κέντρο την αρχή των αξόνων καθώς και την απεικόνιση $f : C_1 \times C_2 \longrightarrow D$ η οποία κάθε $(a,\ b) \in C_1 \times C_2$ το απεικονίζει στο σημείο που βρίσκεται καθώς περιστρέφουμε το a γύρω από τον άξονα των z μέχρι να συναντήσει το κέντρο του C_1 το σημείο b. Η απεικόνιση αυτή είναι ομοιομορφισμός μεταξύ των $C_1 \times C_2$, D. Πιο συγκεκριμένα, αν

$$a = (a_1,\ a_2,\ a_3) \text{ και } b = (b_1,\ b_2,\ 0)$$

τότε

$$f(a \times b) = (a_1 b_1 - a_2 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1,\ a_3)$$

Η f είναι προφανώς συνεχής καθώς και η f^{-1} είναι συνεχής λόγω συμπάγειας του $C_1 \times C_2$. Παρατηρούμε ότι για να βρούμε που απεικονίζεται το σημείο $(a,\ b)$ αρκεί να στρέψουμε κατά γωνία θ τον κύκλο C_1 μέχρι να συναντήσει το σημείο b. Συνεπώς για την κατασκευή της f χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό ¨στροφή κατά γωνία θ¨ η οποία είναι 1-1. Είναι εύκολο να δούμε επίσης ότι η f είναι και επί. Άρα η f είναι ομοιομορφισμός μεταξύ των $C_1 \times C_2$, D.
Επιπλέον, καθένα από τα C_1, C_2 είναι ομοιομορφικά με την S^1. Από αυτό έπεται ότι D, $S^1 \times S^1$ ομοιομορφικοί χώροι. Το γεγονός αυτό μας δίνει το δικαίωμα να μπορούμε να φανταστούμε τον τόρο όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7 και όχι σαν υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ κάτι το οποίο δεν είναι εφικτό.
Τέλος, σύμφωνα με την θεώρημα 2.3.7 έπεται ότι η $p \times p$, όπου p η απεικόνιση κάλυψης της πρότασης 2.3.4, είναι απεικόνιση κάλυψης και επιπλέον ότι ο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι ο χώρος κάλυψης του τόρου.

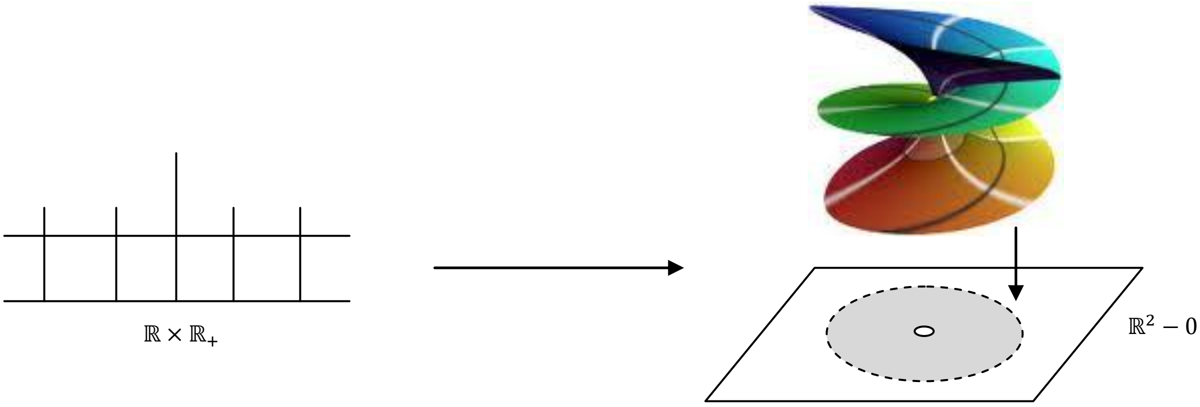
ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.8 Έστω $p: E \longrightarrow B$ μία απεικόνιση. Η p θα λέγεται *τοπικός ομοιομορφισμός* του E με τον B, αν για κάθε $e \in E$ υπάρχει $U \in W(e)$ τέτοια ώστε $p_{|_U}: U \longrightarrow p(U)$ είναι ομοιομορφισμός.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3.9 Έστω $p: E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης. Τότε p τοπικός ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $e \in E$. Επειδή p απεικόνιση κάλυψης, υπάρχει $V \in W(p(e))$ τέτοιο ώστε $p^{-1}(V) = \bigcup_a V_a$ με $\{V_a\}_a$ ξένα, ανοιχτά στον E και $p_{|_{V_a}}: V_a \longrightarrow V$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε a. Συνεπώς, $p^{-1}(p(e)) \in \bigcup_a V_a$, δηλαδή υπάρχει a_0 τέτοιο ώστε $p^{-1}(p(e)) \in V_{a_0}$ και $p_{|_{V_{a_0}}}: V_{a_0} \longrightarrow V$ ομοιομορφισμός, ισοδύναμα $e \in V_{a_0}$ και $p_{|_{V_{a_0}}}: V_{a_0} \longrightarrow V$ ομοιομορφισμός. □

Παραδείγματα : Έστω X τοπολογικός χώρος.

1. Η ταυτοτική απεικόνιση $i: X \longrightarrow X$ είναι προφανώς απεικόνιση κάλυψης.



Σχήμα 2.9: Επιφάνεια *Riemann*

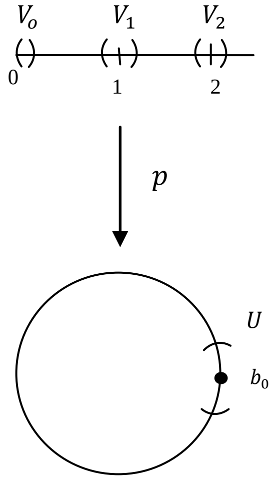
2. Αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $p : X \times \{1, \dots n\} \longrightarrow X$ με $p(x, i) = x$ για κάθε $i \in \{1, \dots n\}$ τότε η απεικόνιση αυτή είναι απεικόνιση κάλυψης αφού εάν θεωρήσουμε $x_0 \in X$ και $U \in W(x_0)$ τότε το $p^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{n}(U, i)$, όπου $\{(U, i)\}_{i=1}^{n}$ είναι ανοιχτά και ξένα στον $X \times \{1, \dots n\}$. Παρατηρούμε ότι η p είναι ομοιομορφισμός οπότε μπορούμε να φανταστούμε τον χώρο $X \times \{1, \dots n\}$ να αποτελείται από πιστά αντίγραφα του X.

3. Έστω p η απεικόνιση του θεωρήματος 2.3.4 και $i : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ η ταυτοτική απεικόνιση. Τότε, σύμφωνα με την πρόταση 2.3.7, η απεικόνιση $p \times i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}_+$ είναι απεικόνιση κάλυψης. Θεωρούμε επίσης τον ομοιομορφισμό $f : S^1 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ με $(x, t) \longrightarrow tx$. Τότε η $(p \times i) \circ f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ είναι απεικόνιση κάλυψης και εμφανίζεται στη μελέτη των μιγαδικών μεταβλητών ως *επιφάνεια Riemann* (Σχήμα 2.8) που αντιστοιχεί στην μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση.

4. Η απεικόνιση $p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow S^1$ με $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ δεν είναι απεικόνιση κάλυψης.

   Απόδειξη. Έστω p απεικόνιση κάλυψης. Τότε για $b_0 = (1, 0)$. Τότε θα υπήρχε $U \in W(b_0)$ τέτοια ώστε $p^{-1}(U) = \bigcup_{n \geq 0} V_n$ με V_n ανοιχτά, ξένα και $p_{|V_n} : V_n \longrightarrow U$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε $n \geq 0$. Παρατηρούμε όμως ότι για $n = 0$ το V_0 θα έχει τη μορφή $(0, \epsilon)$ λόγω του ότι ο χώρος στον οποίο εργαζόμαστε είναι ο $\mathbb{R}_+$. Άρα τα V_n για $n > 0$ είναι ομοιομορφικά με το U αλλά το $p(V_0)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του U. Άτοπο, συνεπώς p δεν είναι απεικόνιση κάλυψης.

   $\square$



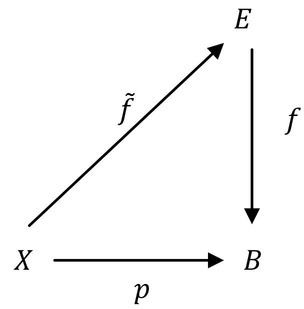
Σχήμα 2.10: $p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow S^1$

Παρατηρούμε επίσης ότι η $p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow S^1$ είναι τοπικός ομοιομορφισμός. Από αυτό έπεται ότι δεν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης 2.3.9.

5. Η απεικόνιση $p : S^1 \longrightarrow S^1$ με $p(z) = z^2$ είναι απεικόνιση κάλυψης.

2.4 *Lifting* απεικόνισης

Στην ενότητα αυτή θα εισάγουμε ακόμη μία έννοια η οποία σε συνδυασμό με τους χώρους κάλυψης θα οδηγήσει στον υπολογισμό της θεμελιώδους ομάδας του κύκλου. Η καινούργια έννοια είναι η έννοια του *lifting* και ο ορισμός της δίνεται παρακάτω:



Σχήμα 2.11: *Lifting* της f

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.1 Έστω απεικόνιση $p : E \longrightarrow B$. Αν $f : X \longrightarrow B$ μία συνεχής απεικόνιση, τότε ως *lifting* της f ορίζουμε μία συνεχή απεικόνιση $\widetilde{f} : X \longrightarrow E$ τέτοια ώστε $p \circ \widetilde{f} = f$.

ΣΧΟΛΙΟ Η έννοια αυτή είναι σημαντικό εργαλείο διότι μπορούμε με έμμεσο τρόπο να μεταφέρουμε ιδιότητες του χώρου B στον χώρο E μέσω της συνάρτησης $\widetilde{f}$ περνώντας από έναν ενδιάμεσο χώρο X. Η ύπαρξη του *lifting* $\widetilde{f}$ εξασφαλίζεται πάντα για ένα μονπάτι $f : [0, 1] \longrightarrow B$ όπως δείχνει και το επόμενο λήμμα 2.4.2. Η γενικότερη περίπτωση εξετάζεται στο λήμμα 2.5.6.

ΛΗΜΜΑ 2.4.2 (*The Covering Path Property*) Έστω $p: E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης και $e_0 \in E$, $b_0 \in B$ τέτοια ώστε $p(e_0) = b_0$. Για κάθε μονοπάτι $f: [0, 1] \longrightarrow B$ με αρχικό σημείο το b_0 υπάρχει ένα μοναδικό *lifting* $\widetilde{f}: [0, 1] \longrightarrow E$ με αρχικό σημείο το e_0.

Απόδειξη. Αν $p: E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης, τότε για κάθε $b \in B$ υπάρχει περιοχή $U_b \in W(b)$ τέτοια ώστε $p^{-1}(U_b) = \bigcup_a V_{b_a}$ όπου $\{V_{b_a}\}_a$ ξένα, ανοιχτά στον E και $p_{|V_{b_a}}: V_{b_a} \longrightarrow U_b$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε a. Η οικογένεια $\{U_b\}_b$ αποτελεί ανοιχτή κάλυψη για τον B. Οπότε $\{f^{-1}(U_b)\}_b$ είναι ανοιχτή κάλυψη για το συμπαγές μετρικό χώρο $[0, 1]$. Επιλέγω $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \delta$, όπου δ ο αριθμός *Lebesgue*. Διαμερίζουμε το $[0, 1]$ ως εξής:

$$[0, \tfrac{1}{n}],\ [\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}],\ \ldots,\ [\tfrac{n-1}{n}, 1].$$

Σύμφωνα με το λήμμα *Lebesgue*, επειδή $diam[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] = \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $i = \{1, \ldots n\}$ έπεται ότι $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \subseteq f^{-1}(U_b)$. Ορίζουμε την $\widetilde{f}$ ως εξής:

- $\widetilde{f}(0) = e_0$
- Θεωρούμε ότι η $\widetilde{f}$ έχει οριστεί στο $0 \leq s \leq s_i$, όπου $s_i = \frac{i}{n}$.
- Θα ορίσουμε την $\widetilde{f}$ για το διάστημα $s_i \leq s \leq s_{i+1}$. Γνωρίζουμε ότι

$$[\tfrac{i}{n}, \tfrac{i+1}{n}] \subseteq f^{-1}(U_b) \Rightarrow f([\tfrac{i}{n}, \tfrac{i+1}{n}]) \subseteq f(f^{-1}(U_b)) \Rightarrow$$

$$f([\tfrac{i}{n}, \tfrac{i+1}{n}]) \subseteq U_{b_0} \cap f([0, 1]) \subseteq U_{b_0}, \text{ για κάποιο } b_0 \in B \Rightarrow$$

$$f([\tfrac{i}{n}, \tfrac{i+1}{n}]) \subseteq U_{b_0}.$$

Για το U_{b_0} ισχύει, $p^{-1}(U_{b_0}) = \bigcup_a V_{b_{0_a}}$ και $p_{|V_{b_{0_a}}}: V_{b_{0_a}} \longrightarrow U_{b_0}$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε a. Οπότε,

$$f(s_i) \in U_{b_0} \Rightarrow p^{-1}(f(s_i)) \in p^{-1}(U_{b_0}). \qquad (1)$$

Από επαγωγική υπόθεση έχει οριστεί όμως το $\widetilde{f}(s_i)$, συνεπώς η (1) γίνεται $\widetilde{f}(s_i) \in p^{-1}(U_{b_0}) = \bigcup_a V_{b_{0_a}} \Rightarrow \widetilde{f}(s_i) \in V_{b_{0_{a_0}}}$ για κάποιο a_0. Επίσης, $f([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subseteq U_{b_0} = p_{|V_{b_{0_{a_0}}}}(V_{b_{0_{a_0}}}) \Rightarrow (p^{-1}_{|V_{b_{0_{a_0}}}} \circ f)([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subseteq p^{-1}_{|V_{b_{0_{a_0}}}}(U_{b_0})$ διοτί το $\widetilde{f}([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ είναι συνεκτικό ως συνεχής εικόνα συνεκτικού και συνεπώς επειδή τα $V_{b_{0_a}}$ είναι ανοιχτά και ξένα πρέπει να ανήκει ολοκληρωτικά σε ένα από τα $V_{b_{0_a}}$ και αυτό είναι το $V_{b_{0_{a_0}}}$ επειδή $\widetilde{f}(s_i) \in V_{b_{0_{a_0}}}$. Θέτω $\widetilde{f}(s) = (p^{-1}_{|V_{b_{0_{a_0}}}} \circ f)(s)$, για κάθε $s \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$, η οποία είναι συνεχής απεικόνιση. Ορίζοντας με τον ίδιο τρόπο την $\widetilde{f}$ και στα υπόλοιπα διαστήματα και χρησιμοποιώντας το *Pasting Lemma*, ορίζουμε την $\widetilde{f}$ σε όλο το $[0\,,1]$.

Μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα της $\widetilde{f}$. Πράγματι, έστω $\widetilde{\widetilde{f}}$ ένα δεύτερο *lifting* της f τέτοιο ώστε $\widetilde{\widetilde{f}}(0) = e_0$ και $\widetilde{f}(s) = \widetilde{\widetilde{f}}(s)$ για κάθε $s \in [0\,,\ \frac{i}{n}]$. Όπως και παραπάνω $\widetilde{f}(s_i) \in V_{b_{0a_0}}$ για κάποιο $a_0 \Rightarrow \widetilde{\widetilde{f}}(s_i) \in V_{b_{0a_0}} \Rightarrow \widetilde{\widetilde{f}}(s) \in V_{b_{0a_0}}$ για κάθε $s_i \le s \le s_{i+1}$. Συνεπώς, αν $\widetilde{f}([\frac{i}{n},\ \frac{i+1}{n}]) \neq \widetilde{\widetilde{f}}([\frac{i}{n},\ \frac{i+1}{n}])$, επειδή $p_{|V_{b_{0a_0}}}$ 1-1, τότε

$$p_{|V_{b_{0a_0}}}(\widetilde{f}([\tfrac{i}{n},\ \tfrac{i+1}{n}])) \neq p_{|V_{b_{0a_0}}}(\widetilde{\widetilde{f}}([\tfrac{i}{n},\ \tfrac{i+1}{n}])) \Rightarrow$$

$$f([\tfrac{i}{n},\ \tfrac{i+1}{n}]) \neq f([\tfrac{i}{n},\ \tfrac{i+1}{n}]),\ \text{άτοπο.}$$

□

ΛΗΜΜΑ 2.4.3 (*The Covering Homotopy Property*) Έστω $p:\ E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης και $e_0 \in E,\ b_0 \in B$ τέτοια ώστε $p(e_0) = b_0$. Έστω $F: I\times I \longrightarrow B$ συνεχής απεικόνιση με $F(0,\ 0) = b_0$. Τότε υπάρχει το *lifting* της F, $\widetilde{F}:\ I\times I \longrightarrow E$ τέτοιο ώστε $F(0\,,\ 0) = e_0$. Εάν F ομοτοπία κατά δρόμους, τότε $\widetilde{F}$ είναι επίσης ομοτοπία κατά δρόμους.

Απόδειξη. Έστω $p:\ E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης και $e_0 \in E,\ b_0 \in B$ τέτοια ώστε $p(e_0) = b_0$ και $F: I\times I \longrightarrow B$ συνεχής απεικόνιση με $F(0,\ 0) = b_0$. Αρχικά ορίζουμε

- $\widetilde{F}(0,\ 0) = e_0$
- Χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.4.2 επεκτείνουμε την $\widetilde{F}$ στα $0 \times I$ και $I \times 0$.
- Επιλέγοντας δύο διαμερίσεις του I, όπως και στην απόδειξη του λήμματος 2.4.2, έχουμε

$$s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < 1 = s_n$$

$$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < 1 = t_m$$

  και έτσι διαμερίζουμε το $I \times I$ σε ορθογώνια της μορφής

$$I_i \times J_j = [s_{i-1},\ s_i] \times [t_{j-1},\ t_j]$$

  Εφαρμόζοντας το λήμμα *Lebesgue* όπως και στην απόδειξη του λήμματος 2.4.2, κάθε τέτοιο ορθογώνιο απεικονίζεται μέσω της F στα ανοιχτά του B που είναι άρτια καλυμμένα από την p.

- Θεωρούμε ότι η $\widetilde{F}$ έχει οριστεί στο σύνολο

$$A = \{ (0 \times I) \cup (I \times 0) \cup \{ I_i \times J_j : j < j_0, j = j_0 \text{ και } i < i_0 \} \}$$

για κάποιο $i_0 \in \{1, \dots n\}$, $j_0 \in \{1, \dots m\}$.

- Θα ορίσουμε την $\widetilde{F}$ στο ορθογώνιο $I_{i_0} \times J_{j_0}$. Επιλέγουμε ένα $U_b \in B$ τέτοιο ώστε $p^{-1}(U_b) = \bigcup_a V_{b_a}$ όπου $\{V_{b_a}\}_a$ ξένα, ανοιχτά στον E, $p_{|V_{b_a}} : V_{b_a} \longrightarrow U_b$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε a και $I_{i_0} \times J_{j_0} \subseteq F^{-1}(U_b)$. Προφανώς η $\widetilde{F}$ είναι ορισμένη στο σύνολο $C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0}) \subseteq A$ το οποίο περιέχει την αριστερή πλευρά και την βάση του ορθογωνίου $I_{i_0} \times J_{j_0}$. Τότε το C είναι συνεκτικό σύνολο και συνεπώς το $\widetilde{F}(C)$ είναι επίσης συνεκτικό, οπότε θα υπάρχει εξ' ολοκλήρου σ'ενα από τα V_{b_a}, έστω στο $V_{b_{a_0}}$. Για κάθε $x \in C$, έχουμε

$$p_{|V_{b_{a_0}}}(\widetilde{F}(x)) = p(\widetilde{F}(x)) = F(x) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$\widetilde{F}(x) = p^{-1}_{|V_{b_{a_0}}}(F(x)), \text{ για κάθε } x \in C.$$

Όμως όπως προαναφέραμε από το λήμμα *Lebesgue* έπεται ότι $I_{i_0} \times J_{j_0} \subseteq F^{-1}(U_b)$. Συνεπώς,

$$F(I_{i_0} \times J_{j_0}) \subseteq U_b = p^{-1}_{|V_{b_{a_0}}}(V_{b_{a_0}}) \Rightarrow p^{-1}_{|V_{b_{a_0}}}(F(I_{i_0} \times J_{j_0})) \subseteq p^{-1}_{|V_{b_{a_0}}}(U_b)$$

διοτί το $F(I_{i_0} \times J_{j_0})$ είναι συνεκτικό ως συνεχής εικόνα συνεκτικού και συνεπώς επειδή τα V_{b_a} είναι ανοιχτά και ξένα πρέπει να ανήκει ολοκληρωτικά σε ένα από τα V_{b_a} και αυτό είναι το $V_{b_{a_0}}$, διότι το $\widetilde{F}(C) \in V_{b_{a_0}}$. Συνεπώς θέτω $\widetilde{F}(s) = (p^{-1}_{|V_{b_{a_0}}} \circ F)(s)$, για κάθε $s \in I_{i_0} \times J_{j_0}$, η οποία είναι συνεχής απεικόνιση. Ορίζοντας με τον ίδιο τρόπο την $\widetilde{F}$ και στα υπόλοιπα ορθογώνια και χρησιμοποιώντας το *Pasting Lemma*, ορίζουμε την $\widetilde{F}$ σε όλο το $I \times I$.

Αν F είναι ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ των μονοπατιών f, g, τότε $F(0 \times I) = b_0 \Rightarrow p^{-1}(F(0 \times I)) = p^{-1}(b_0) \Rightarrow \widetilde{F}(0 \times I) = p^{-1}(b_0)$. Από την πρόταση 2.3.3, το $p^{-1}(b_0)$ έχει την διακριτή τοπολογία και επειδή το $\widetilde{F}(0 \times I)$ είναι συνεκτικό ως συνεχής εικόνα συνεκτικού έπεται ότι είναι μονοσύνολο. Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι, $\widetilde{F}(1 \times I)$ είναι μονοσύνολο. Συνεπώς $\widetilde{F}$ ομοτοπία κατά δρόμους. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.4 (*The Monodromy Theorem*) Έστω $p: E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης και $e_0 \in E$, $b_0 \in B$ τέτοια ώστε $p(e_0) = b_0$. Έστω επίσης f, g δύο μονοπάτια στον B από το b_0 στο b_1 καθώς και τα *lifting* τους $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ αντίστοιχα τα οποία είναι μονοπάτια στον E που ξεκινούν από το e_0. Εάν $f \simeq_p g$ τότε $\widetilde{f} \simeq_p \widetilde{g}$ και έχουν το ίδιο πέρας.

Απόδειξη. Έστω $F: I \times I \longrightarrow B$ ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ των μονοπατιών f, g. Τότε $F(0, 0) = b_0$. Έστω επίσης $\widetilde{F}: I \times I \longrightarrow E$ το *lifting* της F στον E τέτοιο ώστε $\widetilde{F}(0, 0) = e_0$. Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι η $\widetilde{F}$ είναι επίσης ομοτοπία κατά δρόμους τέτοια ώστε $\widetilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$ και $\widetilde{F}(1 \times I) = \{e_1\}$ για κάποιο $e_1 \in E$. Η $\widetilde{F}_{|_{I\times 0}}$ είναι ένα μονοπάτι στον E που ξεκινά από το e_0 και είναι το *lifting* της $F_{|_{I\times 0}} = \{f(s) : s \in I\}$. Όμως και το $\widetilde{f}$ είναι το *lifting* της f. Από μοναδικότητα των *lifting* των μονοπατιών έπεται ότι $\widetilde{F}(s, 0) = \widetilde{f}(s)$. Όμοια και το $\widetilde{F}_{|_{I\times 1}}$ είναι ένα μονοπάτι στον E που ξεκινά από το e_0 και είναι το *lifting* της $F_{|_{I\times 1}} = \{g(s) : s \in I\}$. Από μοναδικότητα των *lifting* των μονοπατιών έπεται ότι $\widetilde{F}(s, 1) = \widetilde{g}(s)$. Επειδή $\widetilde{F}(1 \times I) = \{e_1\}$ έπεται ότι τα $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ έχουν και το ίδιο πέρας. □

2.5 Θεμελιώδης Ομάδα του Κύκλου

Έχοντας αναπτύξει στις προηγούμενες παραγράφους τις έννοιες της απεικόνισης κάλυψης και του *lifting* μιας απεικόνισης τώρα είμαστε σε θέση αρχικά να υπολογίσουμε την θεμελιώδη ομάδα του κύκλου και στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε κάποια σημεία της απόδειξης, που αφορά στη θεμελιώδη ομάδα του κύκλου, σε χώρους κάλυψης απλά συνεκτικούς.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5.1 Η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου είναι άπειρη κυκλική.

Απόδειξη. Έστω $b_0 = (1, 0) \in S^1$. Για να δείξουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου είναι άπειρη κυκλική αρκεί να κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ των ομάδων $\pi_1(S^1, b_0)$ και $(\mathbb{Z}, +)$.
Θεωρούμε την απεικόνιση κάλυψης $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ με $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ και ένα βρόγχο f στην S^1 βασισμένο στο b_0, καθώς και το *lifting* της $\widetilde{f}$ στον $\mathbb{R}$ που σύμφωνα με το λήμμα 2.4.2 είναι ένα μονοπάτι στον $\mathbb{R}$ που με αρχή το 0. Τότε $f(1) = b_0 \Rightarrow p^{-1}(f(1)) \in p^{-1}(b_0) \Rightarrow \widetilde{f}(1) \in p^{-1}(b_0)$ και $\widetilde{f}(1) = n$, όπου $n \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Phi : (\pi_1(S^1, b_0), *) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \quad \text{με} \quad [f] \longrightarrow \Phi([f]) = \widetilde{f}(1).$$

Η Φ είναι επί : Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Τότε $n \in p^{-1}(b_0)$. Επειδή το $\mathbb{R}$ είναι κατά δρόμους συνεκτικό, επιλέγουμε ένα μονοπάτι $\widetilde{f} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ από το 0 στο n και ορίζουμε $f = p \circ \widetilde{f}$. Τότε η f είναι ένας βρόγχος στην S^1 βασισμένος στο b_0 και $\widetilde{f}$ το *lifting* της, που είναι μονοπάτι στον $\mathbb{R}$ που ξεκινά από το 0. Συνεπώς $\Phi([f]) = \widetilde{f}(1) = n$.

Η Φ είναι 1-1 : Έστω f, g δύο βρόγχοι στην S^1 βασισμένοι στο b_0 τέτοιοι ώστε $\Phi([f]) = n = \Phi([g])$. Θεωρούμε τα *lifting* τους $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ αντίστοιχα που είναι δύο μονοπάτια στον $\mathbb{R}$ που ξεκινούν από το 0 και έχουν ως πέρας το n από υπόθεση. Επειδή το $\mathbb{R}$ είναι απλά συνεκτικό από το λήμμα 2.2.9 έπεται ότι είναι κατά δρόμους ομοτοπικά μεταξύ τους. Έστω $\widetilde{F}$ είναι η ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ τους. Όπως μπορεί να ελεγθεί εύκολα ισχύει $F = p \circ \widetilde{F}$ όπου F είναι η ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ των f, g, ισοδύναμα $f \sim_p g$, δηλαδή $[f] = [g]$.

Η Φ είναι ομομορφισμός : Αρκεί να δείξουμε ότι $\Phi([f * g]) = \Phi([f]) + \Phi([g])$. Έστω f, g δύο βρόγχοι στην S^1 βασισμένοι στο b_0 και τα *lifting* τους $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ αντίστοιχα που είναι δύο μονοπάτια στον $\mathbb{R}$ που ξεκινούν από το 0 τέτοια ώστε $\widetilde{f}(1) = n$ και $\widetilde{g}(1) = m$. Ορίζουμε ένα μονοπάτι h ως εξής:

$$h(s) = \begin{cases} \widetilde{f}(2s) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ n + \widetilde{g}(2s-1) & , \ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Επειδή τα sin, cos έχουν περίοδο 2π έπεται ότι $p(n+x) = p(x)$. Οπότε,

$$p(h(s)) = \begin{cases} p(\widetilde{f}(2s)) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ p(n + \widetilde{g}(2s-1)) & , \ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$p(h(s)) = \begin{cases} p(\widetilde{f}(2s)) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ p(\widetilde{g}(2s-1)) & , \ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$p(h(s)) = \begin{cases} f(2s) & , \ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & , \ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

δηλαδή $p \circ h = f * g$. Οπότε η h είναι το *lifting* της $f * g$ που ξεκινά από το 0. Συνεπώς

$$\Phi([f * g]) = h(1) = n + m = \widetilde{f}(1) + \widetilde{g}(1) = \Phi([f] + \Phi([g] \Rightarrow$$

$$\Phi([f * g]) = \Phi([f]) + \Phi([g])$$

Άρα η απεικόνιση Φ μεταξύ των ομάδων $(\pi_1(S^1, b_0), *)$, $(\mathbb{Z}, +)$ είναι ισομορφισμός και συνεπώς η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου είναι άπειρη κυκλική. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5.2 Έστω $p : (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ απεικόνιση κάλυψης και $e_0 \in E$, $b_0 \in B$ τέτοια ώστε $p(e_0) = b_0$. Εάν E είναι κατά δρόμους συνεκτικός, τότε υπάρχει μία επί απεικόνιση

$$\Phi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0).$$

Αν ο E είναι απλά συνεκτικός, τότε η Φ είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $\Phi: \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0)$ με $[f] \longrightarrow \Phi([f]) = \widetilde{f}(1)$. Θα δείξουμε ότι είναι επί.
Έστω $x \in p^{-1}(b_0) \subseteq E$. Επειδή ο E είναι κατά δρόμους συνεκτικός υπάρχει μονοπάτι $\widetilde{f}: [0, 1] \longrightarrow E$ από το 0 στο x και ορίζουμε $f = p \circ \widetilde{f}$. Τότε η f είναι ένας βρόγχος στον B βασισμένος στο b_0 και $\widetilde{f}$ το *lifting* της, που είναι μονοπάτι στον E που ξεκινά από το 0. Συνεπώς $\Phi([f]) = \widetilde{f}(1) = x$.
Έστω τώρα ότι ο E είναι και απλά συνεκτικός. Θα δείξουμε ότι η Φ είναι και 1-1. Πράγματι, έστω f, g δύο βρόγχοι στον B βασισμένοι στο b_0 τέτοιοι ώστε $\Phi([f]) = x = \Phi([g])$. Θεωρούμε τα *lifting* τους $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ αντίστοιχα που είναι δύο μονοπάτια στον E που ξεκινούν από το 0 και έχουν ως πέρας το x από υπόθεση. Επειδή το E είναι απλά συνεκτικό από το λήμμα 2.2.9 έπεται ότι τα f, g είναι κατά δρόμους ομοτοπικά μεταξύ τους και έστω $\widetilde{F}$ είναι η ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ τους. Όπως μπορεί να ελεγθεί εύκολα, ισχύει $F = p \circ \widetilde{F}$ όπου F είναι η ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ των f, g, ισοδύναμα $f \sim_p g$, δηλαδή $[f] = [g]$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Παρατηρούμε ότι, σε αντίθεση με το θεώρημα 2.5.1, στο θεώρημα 2.5.2, η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(B, b_0)$ λειτουργεί σαν ένα σύνολο και όχι σαν μία ομάδα. Αυτό συμβαίνει διότι ο χώρος κάλυψης E και η απεικόνιση κάλυψης p είναι τυχαία και συνεπώς δεν μπορούμε να προσδόσουμε μία πράξη στον χώρο $p^{-1}(b_0)$. Οπότε στο θεώρημα 2.5.1 δεν εξετάζεται η έννοια του ομομορφισμού και συνεπώς του ισομορφισμού που είναι το επιθυμητό. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μπορούμε απλά να αποκομίσουμε σχετικά λίγες πληροφορίες για τη θεμελιώδη ομάδα ενός χώρου (B, b_0) σε σχέση με το υποσυνολό του $p^{-1}(b_0)$. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε μία βασική ιδιότητα για το $p^{-1}(b_0)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5.3 Έστω $p: E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης και E κατά δρόμους συνεκτικός. Τότε όλα τα σύνολα $p^{-1}(b)$, $b \in B$ έχουν τον ίδιο πληθάριθμο.

Απόδειξη. Έστω $b_1, b_2 \in B$. Επειδή η p ως απεικόνιση κάλυψης είναι και επί έπεται ότι υπάρχουν $e_1, e_2 \in E$ τέτοια ώστε $p(e_1) = b_1$ και $p(e_2) = b_2$. Αν $a: [0, 1] \longrightarrow E$ ένα μονοπάτι στον E από το e_1 στον e_2, δηλαδή $a(0) = e_1$ και $a(1) = e_2$, τότε $p(a(0)) = p(e_1) = b_1$, $p(a(1)) = p(e_2) = b_2$ και επειδή $p \circ a: [0, 1] \longrightarrow B$ συνεχής έπεται ότι $p \circ a$ είναι μονοπάτι στον B από το b_1 στον b_2. Συνεπώς αν E κατά δρόμους συνεκτικός, τότε και ο B είναι συνεκτικός κατά δρόμους.
Έστω $b_1, b_2 \in B$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των $p^{-1}(b_1)$ και $p^{-1}(b_2)$. Έστω a ένα μονοπάτι στον B από το b_1 στο b_2. Για κάθε $x \in p^{-1}(b_1)$, από το λήμμα 2.4.2, υπάρχει μοναδικό μονοπάτι $\widetilde{a_x}$ (το *lifting* του a, που ξεκινά από το x). Το πέρας $\widetilde{a_x}(1)$ προφανώς θα ανήκει στο $p^{-1}(b_2)$ αφού $p(\widetilde{a_x}(1)) = a(1) = b_2 \Rightarrow x \in p^{-1}(b_2)$.
Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f: p^{-1}(b_1) \longrightarrow p^{-1}(b_2) \quad \text{με} \quad f(x) = \widetilde{a_x}(1).$$

Αν $\overline{a}$ είναι το αντίστροφο μονοπάτι του a, δηλαδή το μονοπάτι από το b_2 στο b_1 και $\overline{a}(z) = a(1-z)$ τότε με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε αντίστοιχα

$$g : p^{-1}(b_2) \longrightarrow p^{-1}(b_1) \quad \text{με} \quad g(y) = \widetilde{\overline{a}_y}(1) = \widetilde{a_y}(0).$$

Παρατηρούμε ότι

$$(f \circ g)(x) = f(\widetilde{a_x}(0)) = \widetilde{a_{\widetilde{a_x}(0)}}(1) = x, \ \forall x \in p^{-1}(b_2) \qquad (1)$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(\widetilde{a_x}(1)) = \widetilde{a_{\widetilde{a_x}(1)}}(0) = x, \ \forall x \in p^{-1}(b_1) \qquad (2)$$

Από την (1) έπεται ότι g είναι 1-1 και η f είναι επί αφού αν $x_1,\ x_2 \in p^{-1}(b_2)$ τότε αν

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow$$
$$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow$$
$$x_1 = x_2$$

και αν $x_0 \in p^{-1}(b_2)$, τότε

$$x_0 = f(g(x_0))$$

Για τον ίδιο λόγο f είναι 1-1 και η g είναι επί. Συνεπώς $f,\ g$ είναι 1-1 και επί. Άρα τα σύνολα $p^{-1}(b_1),\ p^{-1}(b_2)$ έχουν τον ίδιο πληθάριθμο για κάθε $b_1,\ b_2 \in B$. □

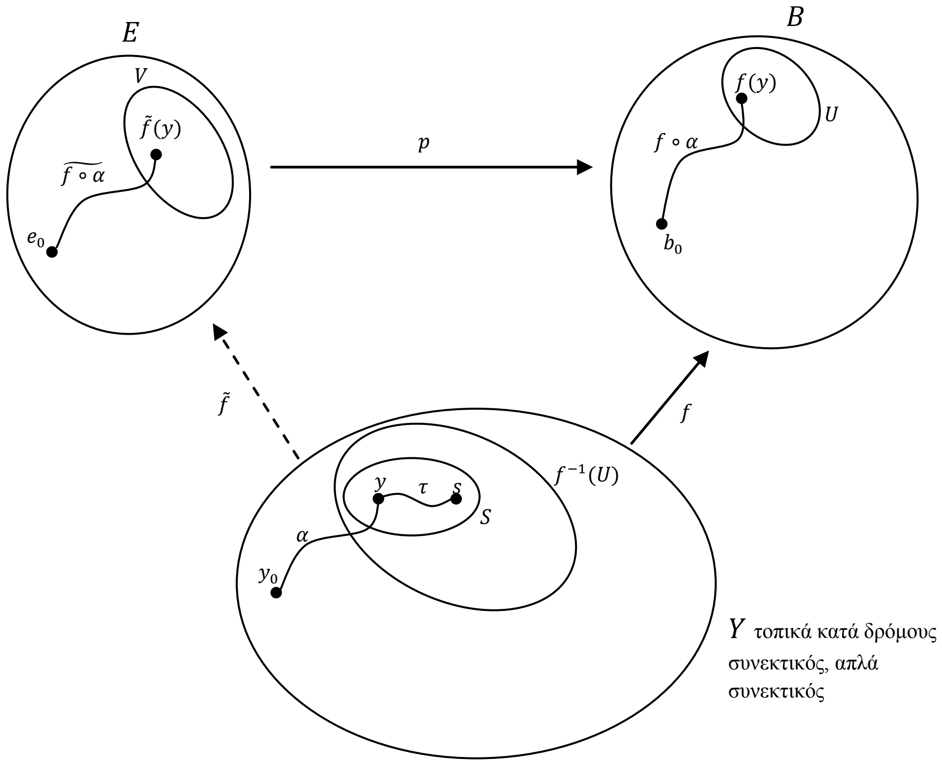
Με βάση το παραπάνω θεώρημα, μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5.4 Έστω E χώρος κάλυψης του B. Ο κοινός πληθάριθμος των συνόλων $p^{-1}(b),\ b \in B$ ονομάζεται *number of sheets*.

Μέχρι τώρα εξετάσαμε την ύπαρξη του *lifting* σε πολύ ειδικες περιπτώσεις απεικονίσεων όπως το *lifting* ενός μονοπατιού κάθως και μίας συνεχούς απεικόνισης της μορφής $F : I \times I \longrightarrow B$. Το λήμμα που θα ακολουθήσει θα στοχεύσει στην ύπαρξη του *lifting* μίας τυχαίας απεικόνισης f, και στη συνέχεια θα ακολουθήσουν δύο θεωρήματα που βασιζόμενα στο λήμμα αυτό θα δείξουν την υπάρξη ομοιομορφισμού μεταξύ δύο απλά συνεκτικών χώρων κάλυψης ενός τοπικά κατά δρόμους συνεκτικό χώρο. Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό ενός τοπικά κατά δρόμους συνεκτικό χώρο και αφού διατυπώσουμε και αποδείξουμε το λήμμα και τα θεωρήματα, θα εξηγήσουμε ακόμη καλύτερα την ισχύ και εμβέλεια τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5.5 Θα λέμε ότι ένας χώρος X είναι *τοπικά κατά δρόμους συνεκτικός στο x* αν για κάθε $U \in W(x)$, υπάρχει $V \in W(x)$ τέτοιο ώστε $V \subseteq U$ κατά δρόμους συνεκτικό. Αν αυτό συμβαίνει για κάθε $x \in X$, ο X θα λέγεται *τοπικά κατά δρόμους συνεκτικός*.

ΛΗΜΜΑ 2.5.6 (*The Lifting Lemma*) Έστω $p : E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης και $e_0 \in E$, $b_0 \in B$ τέτοια ώστε $p(e_0) = b_0$. Έστω $f : (Y, y_0) \longrightarrow (B, b_0)$ μία συνεχής απεικόνιση, όπου $y_0 \in Y$ με $f(y_0) = b_0$. Αν Y τοπικά κατά δρόμους συνεκτικός και απλά συνεκτικός, τότε υπάρχει μοναδικό *lifting* της f, $\widetilde{f} : Y \longrightarrow E$ τέτοιο ώστε $\widetilde{f}(y_0) = e_0$
.



Σχήμα 2.12: Διάγραμμα για την $\widetilde{f}$

Απόδειξη. Έστω $y \in Y$. Επειδή Y είναι απλά συνεκτικός έπεται ότι υπάρχει $a : [0, 1] \longrightarrow Y$ μονοπάτι στον Y από το y_0 στο y. Τότε η απεικόνιση $f \circ a : [0, 1] \longrightarrow B$ είναι μονοπάτι στον B από το b_0 στο b. Από το λήμμα 2.4.2 (*The Covering Path Property*) έπεται ότι, υπάρχει μοναδικό $\widetilde{f \circ a} : [0, 1] \longrightarrow E$ μονοπάτι στον E από το e_0 στο $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f \circ a}(1)$. Ορίζουμε

$$\widetilde{f}(y) \overset{\text{ορ}}{=} \widetilde{f \circ a}(1)$$

<u>*Η $\widetilde{f}$ είναι καλά ορισμένη :*</u> Έστω a' ένα άλλο μονοπάτι στον Y από το y_0 στο y, διαφορετικό του a. Τότε το $a * \overline{a'}$ είναι ένας βρόγχος βασισμένος στο y_0 στον Y και συνεπώς $f \circ (a * \overline{a'})$ είναι βρόγχος στον B στο b_0. Οπότε,

$$\begin{aligned} f \circ a &= f \circ a * (\overline{a'} * a') = f \circ (a * \overline{a'} * a') \\ &= f \circ ((a * \overline{a'}) * a') = (f \circ (a * \overline{a'})) * (f \circ a') \\ &\simeq_p (f \circ y_0) * (f \circ a) = b_0 * (f \circ a') \simeq_p f \circ a'. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα 2.4.4 (*The Monodromy Theorem*) έπεται ότι $\widetilde{f \circ a} \simeq_p \widetilde{f \circ a'}$ και $\widetilde{f \circ a}(1) = \widetilde{f \circ a'}(1)$.

<u>*Η $\widetilde{f}$ είναι συνεχής :*</u> Έστω $y \in Y$ και $V \in W(\widetilde{f}(y))$. Τότε το $(p \circ \widetilde{f})(y) = f(y) \in B$. Επειδή p απεικόνιση κάλυψης, υπάρχει $U \in W(f(y))$ τέτοιο ώστε $p^{-1}(U) = \bigcup_a V_a$, όπου $\{V_a\}_a$ ξένα ανοιχτά στον E και $p_{|V_a} : V_a \longrightarrow U$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε a. Θεωρούμε ότι το V συμπεριφέρεται ως ένα από τα V_a. Επειδή Y τοπικά κατά δρόμους συνεκτικός έπεται ότι υπάρχει $S \in W(y)$ τέτοιο ώστε $S \subseteq f^{-1}(U)$ κατά δρόμους συνεκτικό. Οπότε αν $s \in S$ και αφού $U \in W(f(y))$, δηλαδή $f^{-1}(U) \in W(y)$, υπάρχει μονοπάτι $\tau : [0, 1] \longrightarrow S$ στον S από το y στο s. Άρα,

$$a * \tau : [0, 1] \longrightarrow Y \text{ μονοπάτι από το } y_0 \text{ στο } s \Rightarrow$$

$$f \circ (a * \tau) : [0, 1] \longrightarrow B \text{ μονοπάτι από το } b_0 \text{ στο } f(s) \Rightarrow$$

$$f \circ \widetilde{(a * \tau)} : [0, 1] \longrightarrow E \text{ μονοπάτι από το } e_0 \text{ στο } \widetilde{f}(s) = f \circ \widetilde{(a * \tau)}(1).$$

Όμως,

$$f \circ \tau : [0, 1] \longrightarrow B \text{ είναι μονοπάτι στον } B \text{ από το } f(y) \text{ στο } f(s) \Rightarrow$$

$$p_{|V}^{-1} \circ (f \circ \tau) : [0, 1] \longrightarrow E \text{ μονοπάτι στον } E \text{ από το } p_{|V}^{-1} \circ f(y) \text{ στο } p_{|V}^{-1} \circ f(s) \Rightarrow$$

$$\widetilde{f \circ \tau} : [0, 1] \longrightarrow E \text{ μονοπάτι στον } E \text{ από το } \widetilde{f}(y) \text{ στο } \widetilde{f}(s) \in V \Rightarrow \widetilde{f}(S) \subseteq V.$$

Άρα $\widetilde{f}$ είναι συνεχής.

<u>*Η μοναδικότητα της $\widetilde{f}$:*</u> Έστω f' ένα διαφορετικό *lifting* της f. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{y \in Y : \widetilde{f}(y) = \widetilde{f}'(y)\}$$

Προφανώς το $A \neq \emptyset$ αφού το $f(y_0) = f'(y_0) = b_0$. Αν $y \in Y$ τότε $f(y) \in B$. Επειδή p απεικόνιση κάλυψης έπεται ότι υπάρχει $U \in W(f(y))$ τέτοιο ώστε $p^{-1}(U) = \bigcup_a V_a$, όπου $\{V_a\}_a$ ξένα ανοιχτά στον E και $p_{|V_a} : V_a \longrightarrow U$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε a. Οπότε $(p^{-1} \circ f)(y) \in \bigcup_a V_a$ και συνεπώς $\widetilde{f}(y)$, $\widetilde{f}'(y) \in \bigcup_a V_a$. Άρα, υπάρχουν V_{a_1}, V_{a_2} τέτοια ώστε $\widetilde{f}(y) \in V_{a_1}$ και $\widetilde{f}'(y) \in V_{a_2}$.

- Αν $y \in A$ τότε $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f}'(y) \in V_{a_0}$. Το $\widetilde{f}^{-1}(V_{a_0}) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_{a_0})$ είναι ανοιχτό και $y \in \widetilde{f}^{-1}(V_{a_0}) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_{a_0})$. Συνεπώς, $A \subseteq \widetilde{f}^{-1}(V_{a_0}) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_{a_0})$ και προφανώς $\widetilde{f}^{-1}(V_{a_0}) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_{a_0}) \subseteq A$. Άρα $A = \widetilde{f}^{-1}(V_{a_0}) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_{a_0})$, δηλαδή A ανοιχτό.

- Αν $y \notin A$, τότε $\widetilde{f}(y) \in V_{a_1}$ και $\widetilde{f}'(y) \in V_{a_2} \Rightarrow y \in \widetilde{f}^{-1}(V_{a_1}) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_{a_2}) \Rightarrow Y - A \subseteq \widetilde{f}^{-1}(V_{a_1}) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_{a_2})$ και προφανώς $\widetilde{f}^{-1}(V_{a_1}) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_{a_2}) \subseteq Y - A \Rightarrow Y - A = \widetilde{f}^{-1}(V_{a_1}) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_{a_2})$, δηλαδή $Y - A$ ανοιχτό, οπότε A κλειστό.

Ο Y επειδή είναι κατά δρόμους συνεκτικός έπεται ότι είναι και συνεκτικός. Συνεπώς, το A είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του Y. Από την πρόταση 1.9.2 έπεται ότι, $A = Y$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5.7 Έστω B τοπικά κατά δρόμους συνεκτικός. Υποθέτουμε ότι $p : E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης και $e_0 \in E$, $b_0 \in B$ τέτοια ώστε $p(e_0) = b_0$ και E απλά συνεκτικός. Εάν $p' : E' \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης με $e'_0 \in E'$ τέτοιο ώστε $p(e'_0) = b_0$ και E' κατά δρόμους συνεκτικός, τότε υπάρχει απεικόνιση κάλυψης $q : E \longrightarrow E'$ τέτοια ώστε $p = p' \circ q$.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι ο E είναι τοπικά κατά δρόμους συνεκτικός, διότι τότε εφαρμόζοντας το λήμμα 2.5.6 (*The Lifting Lemma*) θα έχουμε την ύπαρξη της q και στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η απεικόνιση αυτή είναι απεικόνιση κάλυψης.
Έστω $x \in E$ και $U \in W(x)$. Τότε το $p(x) \in B$. Επειδή η p είναι απεικόνιση κάλυψης, θα υπάρχει $V \in W(p(x))$ τέτοιο ώστε και $p^{-1}(V) = \bigcup_a V_a$, όπου $\{V_a\}_a$ ξένα ανοιχτά στον E και $p_{|V_a} : V_a \longrightarrow V$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε a. Θεωρούμε ότι το U συμπεριφέρεται ως ένα από τα V_a. Επιπλέον επειδή B τοπικά κατά δρόμους συνεκτικός, θα υπάρχει $V' \in W(p(x))$ τέτοιο ώστε $V' \subseteq V$ κατά δρόμους συνεκτικό. Οπότε,

$$V' \subseteq V = p_{|U}(U) \Rightarrow p_{|U}^{-1}(V') \subseteq U$$

Επειδή η $p_{|U}^{-1}$ είναι ομοιομορφισμός και V' κατά δρόμους συνεκτικό έπεται ότι και το $p_{|U}^{-1}(V')$ θα είναι κατά δρόμους συνεκτικό και προφανώς ανοιχτό. Συνεπώς βρήκαμε μία κατά δρόμους συνεκτική ανοιχτή περιοχή του $p(x)$ που είναι υποσύνολο του U. Άρα από το λήμμα 2.5.6 (*The Lifting Lemma*) υπάρχει μοναδικό *lifting* της p δηλαδή, $p = p' \circ q$.
Μένει να δειχθεί ότι q απεικόνιση κάλυψης, ισοδύναμα να δείξουμε ότι η q είναι επί και ότι για κάθε $e' \in E'$ υπάρχει περιοχή $U \in W(e')$ τέτοια ώστε $q^{-1}(U) = \bigcup_a U_a$ όπου $\{U_a\}_a$ ξένα, ανοιχτά στον E και $q_{|U_a} : U_a \longrightarrow U$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε a. Η συνέχεια της q είναι προφανής.

Η $\widetilde{f}$ είναι επί : Έστω $x \in E'$. Επειδή E' κατά δρόμους συνεκτικός, υπάρχει μονοπάτι a στον E' από το e_0' στο x. Τότε το $p' \circ a$ είναι μονοπάτι στον B από το b_0 στο $p'(x)$. Από το λήμμα 2.4.2 (*The Covering Path Property*), υπάρχει μονοπάτι $\widetilde{a}$ στον E που ξεκινά από το e_0 τέτοιο ώστε $p \circ \widetilde{a} = p' \circ a$. Όμως,

$$p' \circ q \circ \widetilde{a} = p \circ \widetilde{a} = p' \circ a \Rightarrow p' \circ q \circ \widetilde{a} = p' \circ a$$

και

$$q \circ \widetilde{a}(0) = q(0) = e_0'$$

$$a(0) = e_0'$$

δηλαδή τα $q \circ \widetilde{a}$, a είναι δύο *lifting* του $p \circ \widetilde{a}$ που ξεκινούν από το e_0'. Από μοναδικότητα έπεται ότι $q \circ \widetilde{a}(1) = a(1) = x \Rightarrow q(\widetilde{a}(1)) = x$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5.8 (Μοναδικότητα Καθολικού Χώρου Κάλυψης) Έστω B τοπικά κατά δρόμους συνεκτικός. Υποθέτουμε ότι $p: E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης και $e_0 \in E$, $b_0 \in B$ τέτοια ώστε $p(e_0) = b_0$ και E απλά συνεκτικός. Εάν $p' : E' \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης με $e_0' \in E'$ τέτοιο ώστε $p(e_0') = b_0$ και E' απλά συνεκτικός, τότε υπάρχει ομοιομορφισμός $h: E \longrightarrow E'$ τέτοιος ώστε $p = p' \circ h$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα 2.5.7 έπεται ότι υπάρχει απεικόνιση κάλυψης $h: E \longrightarrow E'$ τέτοια ώστε $p = p' \circ h$. Μένει να δείξουμε ότι η h είναι ομοιομορφισμός. Επειδή η h ως απεικόνιση κάλυψης είναι επί και ανοιχτή (συνεπώς h^{-1} είναι συνεχής), ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι μόνο ότι είναι 1-1. Πράγματι, έστω e_1, $e_2 \in E$ τέτοια ώστε

$$h(e_1) = h(e_2) \Rightarrow (p' \circ h)(e_1) = (p' \circ h)(e_2)$$

$$\Rightarrow p(e_1) = p(e_2)$$

Αφού p απεικόνιση κάλυψης, θα υπάρχει περιοχή $U \in W(p(e_1))$ τέτοια ώστε $p^{-1}(U) = \bigcup_a U_a$ όπου $\{U_a\}_a$ ξένα, ανοιχτά στον E και $p_{|U_a} : U_a \longrightarrow U$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε a. Όμως,

$$p(e_1) = p(e_2) \in U \Rightarrow p_{|U_a}(p(e_1)) = p^{-1}_{|U_a}(p^{-1}(e_2))$$

$$\Rightarrow e_1 = e_2.$$

□

Το θεώρημα 2.5.7 (Μοναδικότητα Καθολικού Χώρου Κάλυψης) έχει κεντρική σημασία για τους χώρους κάλυψης. Ο *Poincaré* ήταν εκείνος που θεωρούσε ότι ένας απλά συνεκτικός χώρος κάλυψης (E, p) ενός χώρου B είναι " καθολικός " χώρος κάλυψης του B με την εξής έννοια:

> Μία καμπύλη γ στον E είναι κλειστή αν και μόνο αν για κάθε χώρο κάλυψης (E', q) του B και για κάθε καμπύλη γ' στον E' τέτοια ώστε $q \circ \gamma' = p \circ \gamma$, η γ' θα είναι κλειστή.

Δηλαδή εάν έχουμε μία κλειστή καμπυλή σ' έναν απλά συνεκτικό χώρο κάλυψης τέτοια ώστε η εικόνα της μέσω οποιασδήποτε q και η εικόνα της μέσω της p να ταυτίζονται στον B τότε αυτή είναι επίσης κλειστή.
Στο σημείο αυτό και με βάση την παραπάνω ιδιότητα ενός απλά συνεκτικού χώρου κάλυψης δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5.8 Εάν E απλά συνεκτικός χώρος και $p : E \longrightarrow B$ απεικόνιση κάλυψης, τότε θα λέμε ότι ο E είναι *καθολικός χώρος κάλυψης* του B.

2.6 Η Θεμελιώδης Ομάδα του $\mathbb{R}^n - \{0\}$

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα του $\mathbb{R}^n - \{0\}$ είναι άπειρη κυκλική. Θα αποδείξουμε το σχετικό συμπέρασμα μόνο για τον $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, καθώς και η γενίκευση για n διαστάσεις ακολουθεί την ίδια ακριβώς γραμμή απόδειξης. Τέλος, θα επισημάνουμε κάποια σημεία της απόδειξης αυτής, από τα οποία απορρέουν οι έννοιες της *retract* απεικόνισης καθώς και του *deformation retract*.

ΛΗΜΜΑ 2.6.1 Έστω $f_0, f_1 : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ συνεχείς απεικονίσεις. Αν $f_0 \simeq f_1$ και $F(x_0, t) = y_0$, όπου F ομοτοπία μεταξύ των f_0, f_1, τότε $f_{0_*} = f_{1_*}$.

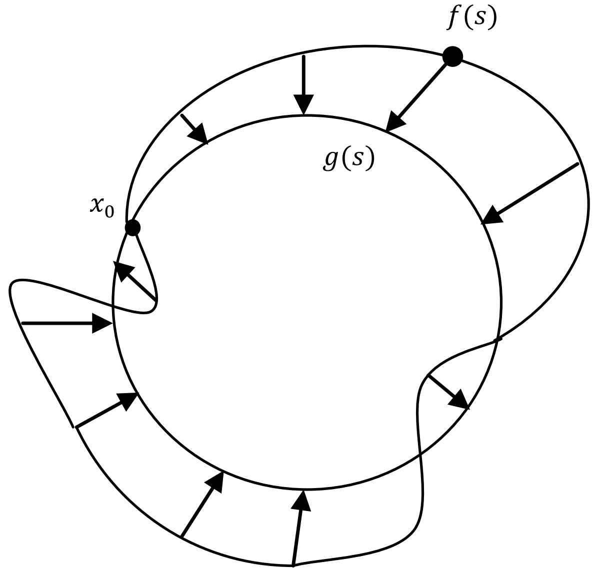
Απόδειξη. Έστω $f_0 \simeq f_1$, τότε $f_0 \circ f \simeq f_1 \circ f$ για κάθε βρόγχο στον X βασισμένο στο x_0. Οπότε $[f_0 \circ f] = [f_1 \circ f]$ για κάθε βρόγχο στον X βασισμένο στο x_0, ισοδύναμα $f_{0_*} = f_{1_*}$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6.2 Έστω $x_0 \in S^1$. Ο ταυτοτικός εγκλεισμός

$$j : (S^1, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 - \{0\}, x_0)$$

επάγει έναν ισομορφισμό των θεμελιωδών τους ομάδων.
Απόδειξη. Έστω $r : \mathbb{R}^2 - \{0\} \longrightarrow S^1$ συνεχής απεικόνιση με

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|}$$



Σχήμα 2.13: Διάγραμμα για την $\widetilde{f}$

τότε έχουμε

$$(S^1,\ x_0) \xrightarrow{j} (\mathbb{R}^2 - \{0\},\ x_0) \xrightarrow{r} (S^1,\ x_0)$$

- Η απεικόνιση $r \circ j:\ (S^1,\ x_0) \longrightarrow (S^1,\ x_0)$ είναι προφανώς η ταυτοτική απεικόνιση. Από το θεώρημα 2.2.11 έπεται ότι η $(r \circ j)_* = r_* \circ j_*$ είναι ταυτοτικός ισομορφισμός.

- Έστω η απεικόνιση $j \circ r:\ (\mathbb{R}^2 - \{0\},\ x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 - \{0\},\ x_0)$. Θα δείξουμε ότι η $j_* \circ r_*$ είναι ταυτοτικός ισομορφισμός της $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\},\ x_0)$.
  Αν $[f] \in \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\},\ x_0)$ τότε $(j_* \circ r_*)([f]) = [j \circ r \circ f]$. Θέτουμε $g = j \circ r \circ f:\ I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, οπότε ο g είναι βρόγχος στον $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ και $g(s) = \frac{f(s)}{\|f(s)\|}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $f \simeq_p g$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $F:\ I \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ με

$$F(s,\ t) = t\frac{f(s)}{\|f(s)\|} + (1-t)f(s)$$

  εύκολα μπορούμε να ελέξουμε ότι είναι ομοτοπία κατά δρόμους μεταξύ των $f,\ g$. Επίσης για $f(s) \neq 0$ και $t\frac{f(s)}{\|f(s)\|} + (1-t) \neq 0$, έπεται ότι $F(s,\ t) \neq 0$. Συνεπώς,

$$f \simeq_p g \Rightarrow j \circ r \circ f \simeq_p i \circ f \Rightarrow j_* \circ r_* = i_*,$$

όπου i η ταυτοτική απεικόνιση του $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Οπότε j_* είναι ισομορφισμός μεταξύ των θεμελιωδών ομάδων των (S^1, x_0), $(\mathbb{R}^2 - \{0\}, x_0)$ αφού $j_*^{-1} = r_*$ και αντίστροφα.

□

Το θεώρημα που ακολουθεί αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος 2.6.2. Η απόδειξη του είναι ακριβώς η ίδια με του θεωρήματος 2.6.2 και την παραλείπουμε.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6.3 Έστω $x_0 \in S^{n-1}$. Ο ταυτοτικός εγκλεισμός

$$j : (S^{n-1}, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n - \{0\}, x_0)$$

επάγει έναν ισομορφισμό των θεμελιωδών τους ομάδων.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν έχουμε υπολογίσει ακόμα την θεμελιώδη ομάδα της S^{n-1}. Παρόλα αυτά μέσω του θεωρήματος 2.6.3 γνωρίζουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα του $\mathbb{R}^n - \{0\}$ είναι ισομορφική με τη θεμελιώδη ομάδα της S^{n-1}.
Στο σημείο αυτό θα επικεντρωθούμε σε κάποια σημεία της απόδειξης του θεωρήματος 2.6.2 Δείξαμε ότι οι βρόγχοι f, $r \circ f$ είναι κατά δρόμους ομοτοπικοί, δηλαδή ότι ο βρόγχος $f \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ " μετασχηματίζεται " σταδιακά στον $r \circ f \in S^1$. Αυτό θα μπορούσαμε να το δούμε και με έναν διαφορετικό τρόπο, δηλαδή μετασχηματίζοντας όλο τον χώρο $\mathbb{R}^n - \{0\}$ στον S^1. Αυτό μπορεί να συμβεί αν θεωρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από ένα οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^n - \{0\}$, είναι συγγραμικό με την ακτίνα της S^1 και καταλήγει πάνω στην S^1. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6.4 Έστω A υπόχωρος του X. Αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times I \longrightarrow X$ τέτοια ώστε

$$H(x, 0) = x \text{ με } x \in X$$

$$H(x, 1) \in A \text{ με } x \in X$$

$$H(a, t) = a \text{ με } a \in A \text{ και } t \in I$$

τότε θα λέμε ότι ο A είναι *strong deformation retract* του X. Η απεικόνιση H καλείται *strong deformation retraction.*

Ο παραπάνω ορισμός αυτός έχει αρκετά κοινά στοιχεία με τον ορισμό της ομοτοπίας που είχαμε δώσει στην αρχή του κεφαλαίου αυτού. Προφανώς και οι δύο ορισμοί εμπεριέχουν την έννοια του " σταδιακού μετασχηματισμού ", δηλαδή καθώς το t διατρέχει το I μια κατάσταση μεταβάλλεται σταδιακά σε μία άλλη. Η μεταξύ τους σημαντική διαφορά είναι ότι, στον συγκεκριμένο ορισμό έχουμε έναν σταδιακό μετασχηματισμό ενός χώρου σε έναν υπόχωρο του αντί μιας απεικόνισης σε μία άλλη, όπου τα σημεία του υποχώρου παραμένουν σταθερά κατά την διάρκεια του μετασχηματισμού. Στο τέλος του μετασχηματισμού έχουμε *retraction* του X επί του A, απεικονίζοντας το x στο $H(x,\ 1)$.

Παραδείγματα :

1. Η απεικόνιση $H\colon\ \mathbb{R}^n - \{0\} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ με

$$H(x,\ t) = t\,\frac{x}{\|x\|} + (1-t)\,x$$

   είναι *strong deformation retract* του $\mathbb{R}^n - \{0\}$ επί της S^{n-1}.

2. Έστω B το σύνολο των σημείων του z–άξονα. Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}^3 - B$ καθώς και τον χώρο $(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times 0$. Τότε ο $\mathbb{R}^3 - B$ είναι *strong deformation retract* του $(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times 0$. Η απεικόνιση

$$H(x,\ y,\ z,\ t) = (x,\ y,\ tz)$$

   είναι *strong deformation retraction*.

3. Έστω $q,\ p \in \mathbb{R}^2$. Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}^2 - q - p$. Ο χώρος " *figure eight* " είναι είναι *strong deformation retract* του $\mathbb{R}^2 - q - p$ (Σχήμα 2.13).

Σύμφωνα με τον ορισμό 2.6.4, το θεώρημα 2.6.2 γενικεύεται και έχει την παρακάτω μορφή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6.5 Έστω A είναι *strong deformation retract* του X. Έστω $a_0 \in A$. Ο ταυτοτικός εγκλεισμός

$$j\colon\ (A,\ a_0) \longrightarrow (X,\ a_0)$$

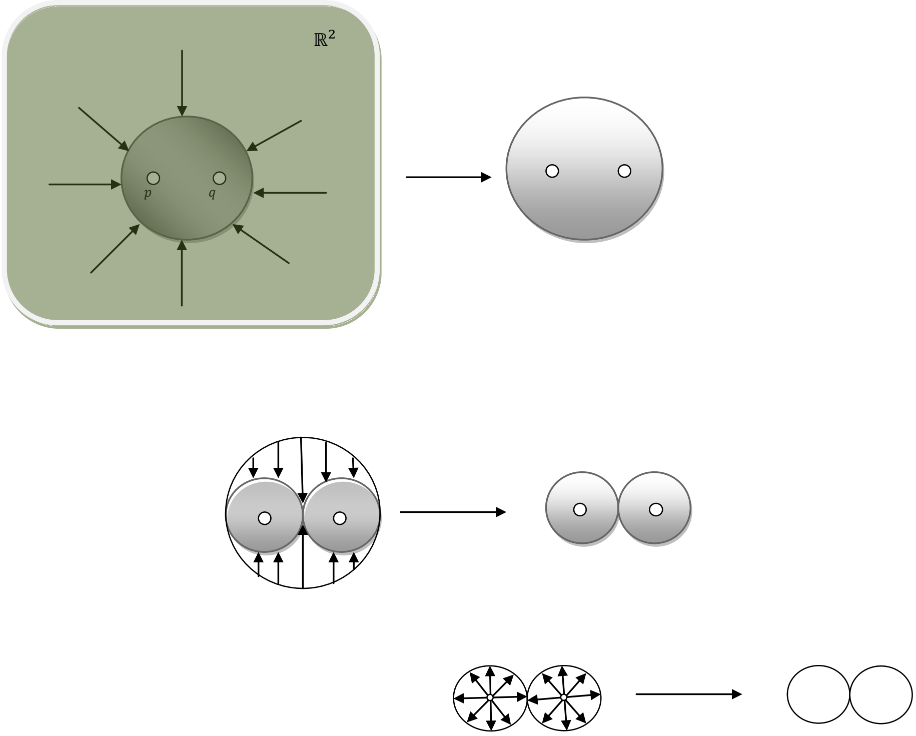
επάγει έναν ισομορφισμό των θεμελιωδών τους ομάδων.

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αφού A είναι *strong deformation retract* του X και $a_0 \in A$, τότε υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H\colon\ X \times I \longrightarrow X$ τέτοια ώστε

$$H(x,\ 0) = x \text{ με } x \in X$$

$$H(x,\ 1) \in A \text{ με } x \in X$$

$$H(a,\ t) = a \text{ με } a \in A \text{ και } t \in I.$$



Σχήμα 2.14: *Figure eight* ως *strong deformation retract* του $\mathbb{R}^2 - q - p$.

Επομένως η $H_{|_{t=1}} : X \times 1 \longrightarrow A$ είναι *retraction* του X επί του A. Οπότε έχουμε

$$(A,\ a_0) \xrightarrow{j} (X,\ a_0) \xrightarrow{H_{|_{t=1}}} (A,\ a_0)$$

Η συνέχεια της απόδειξης και η ολοκλήρωση της είναι όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 2.6.2. □

2.7 Η Θεμελιώδης Ομάδα της S^n

Στην προηγούμενη παράγραφο δεν είμασταν σε θέση ακόμα να υπολογίσουμε την θεμελιώδη ομάδα της S^n για $n \geq 2$. Το μόνο που γνωρίσαμε ήταν ότι η θεμελιώδης ομάδα της S^n είναι ισομορφική με την θεμελιώδη ομάδα του $\mathbb{R}^n - 0$. Στο σημείο αυτό θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα, το *The Special Van Kampen Theorem*, το οποίο είναι μία ειδική περίπτωση του θεωρήματος *The Van Kampen Theorem*. Το θεώρημα αυτό θα είναι εκείνο που θα μας βοηθήσει να υπολογίσουμε την θεμελιώδη ομάδα της S^n για $n \geq 2$ (Θεώρημα 2.7.2).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.7.1 (*The Special Van Kampen Theorem*) Έστω $X = U \cup V$, όπου $U,\ V$

ανοιχτά στον X και $U \cap V$ είναι κατά δρόμους συνεκτικό. Έστω $x_0 \in U \cap V$. Εάν οι ταυτοτικοί εγλεισμοί

$$i : (U, x_0) \longrightarrow (X, x_0) \text{ και } j : (V, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

επάγουν μηδενικούς ομομορφισμούς των θεμελιωδών τους ομάδων, τότε $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Απόδειξη. Έστω f ένας βρόγχος στον X βασισμένος στο x_0. Θα δείξουμε ότι ο f είναι κατά δρόμους ομοτοπικός με τον σταθερό βρόγχο στον X βασισμένος στο x_0. Η απόδειξη θα χωριστεί σε τρία βήματα.

- *Βήμα 1 :* Από το Λήμμα *Lebesgue* υπάρχει μία διαμέριση του [0, 1]

  $$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$$

  τέτοια ώστε $f([a_{i-1}, a_i])$ να περιέχεται εξ' ολοκλήρου σε ένα από τα ανοιχτά U ή V. Μεταξύ όλων των πιθανών διαμερίσεων του [0, 1], επιλέγουμε την ελάχιστη διαμέριση. Από αυτό έπεται ότι $f(a_i) \in U \cap V$ για κάθε $i \in \{1, \ldots n\}$, διότι αν υπήρχε $i_0 \in \{1, \ldots n\}$ τέτοιο ώστε $f(a_{i_0}) \notin U \cap V$, τότε

  $$f(a_{i_0}) \notin U \quad \text{ή} \quad f(a_{i_0}) \notin V$$

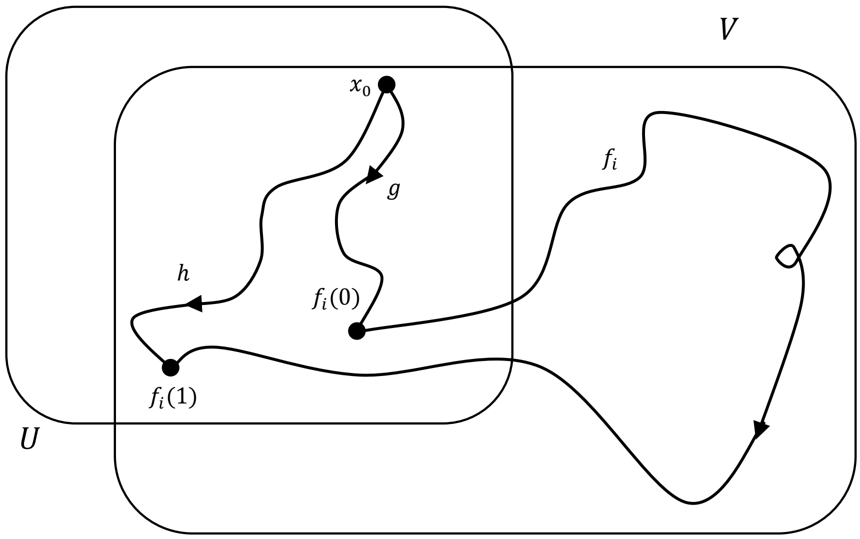
  Έστω ότι $f(a_{i_0}) \notin U$, τότε $f([a_{i_0-1}, a_{i_0}]), f([a_{i_0}, a_{i_0+1}]) \nsubseteq U$. Από αυτό έπεται ότι $f([a_{i_0-1}, a_{i_0}]), f([a_{i_0}, a_{i_0+1}]) \subseteq V$. Συνεπώς μπορούμε να αφαιρέσουμε το a_{i_0}, το οποίο είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι έχουμε την ελάχιστη διαμέριση.

- *Βήμα 2 :* Περιορίζοντας τον βρόγχο f στο διάστημα $[a_{i-1}, a_i]$ και παραμετρικοποιώντας τον στο διάστημα [0, 1], έχουμε

  $$f_i(s) = f((1-s)a_{i-1} + s a_i), \ \forall s \in [0, 1]$$

  ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Το f_i είναι κατά δρόμους ομοτοπικό με ένα μονοπάτι του U.
  Εάν το $f_i \in U$ τότε προφανώς ορίζουμε την τετριμένη κατά δρόμους ομοτοπία $F_i(s, t) = f_i$.
  Εάν το $f_i \notin U$, τότε Εάν το $f_i \in V$. Επειδή $U \cap V$ είναι κατά δρόμους συνεκτικό, επιλέγουμε g, h μονοπάτια στο $U \cap V$ που ξεκινούν από το x_0 και καταλήγουν στα $f_i(0)$ και $f_i(1)$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τον βρόγχο $(g * f_i) * \overline{h}$ στον V βασισμένος στο x_0. Από υπόθεση έπεται ότι

  $$\begin{aligned}(g * f_i) * \overline{h} \simeq_p e_{x_0} &\Rightarrow \overline{g} * (g * f_i) * h * \overline{h} \simeq_p \overline{g} * e_{x_0} * h \\ &\Rightarrow f_i \simeq_p \overline{g} * h\end{aligned}$$



Σχήμα 2.15: Σχηματική περιγραφή, *The Special Van Kampen Theorem*.

Συνεπώς f_i είναι κατά δρόμους ομοτοπικός με το $\overline{g} * h$, έστω F_i η κατά δρόμους ομοτοπία μεταξύ τους για κάθε $i \in \{1, \dots n\}$. Παραμετρικοποιούμε κάθε ομοτοπία κατά δρόμους F_i έτσι ώστε να έχουμε την απεικόνιση

$$F_i : [a_{i-1}, a_i] \times I \longrightarrow X$$

Στη συνέχεια ενώνοντας όλες τις F_i παίρνουμε την κατά δρόμους ομοτοπία μεταξύ του f και ενός μονοπατιού στο U, $F : I \times I \longrightarrow X$ με

$$F(s, t) = F_i\left(\tfrac{s - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}, t\right), \quad s \in [a_{i-1}, a_i]$$

Προφανώς η F είναι καλά ορισμένη αφού κάθε F_i έχει $F_i(s, 0) = f_i(0)$ και $F_i(s, 1) = f_i(1)$. Από το *Pasting Lemma* έπεται ότι F είναι και συνεχής. Έστω $f'(s) = F(s, 1) \in U$.

- *Βήμα 3 :* Επειδή $f' \in U$ και από υπόθεση i_* είναι μηδενικός ομομορφισμός έπεται ότι

$$f' \simeq_p e_{x_0} \qquad \text{και} \qquad f \simeq_p f'$$

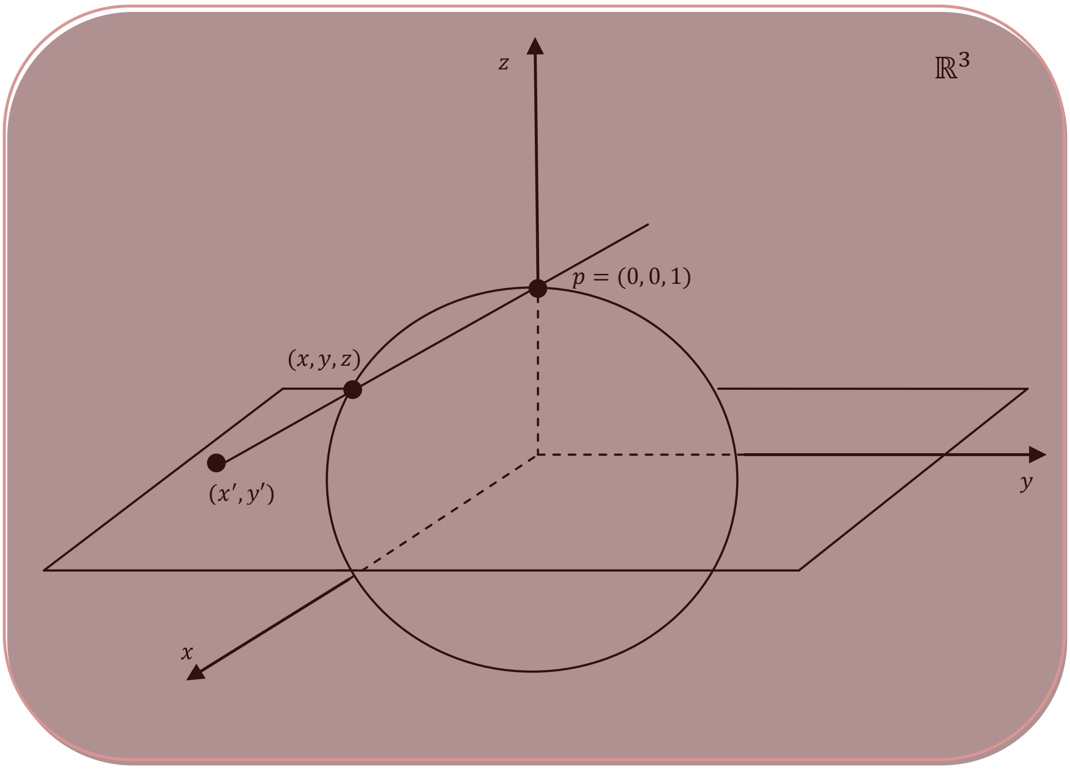
Τότε από μεταβατικότητα έχουμε $f \simeq_p e_{x_0}$.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.7.2 Η n−σφαίρα S^n είναι απλά συνεκτική για $n \geq 2$.

Απόδειξη. Έστω $p = (0, 0, \ldots, 1)$ και $q = (0, 0, \ldots, -1) \in S^n$. Αρχικά θα δείξουμε ότι $S^n - p$ ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^n$. Έστω $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$ με $x \neq p$. Θεωρούμε την ευθεία στον $\mathbb{R}^{n+1}$ που περνά από τα x, p και τέμνει το επίπεδο $x_{n+1} = 0$. Έστω ότι το τέμνει στο $f(x)$. Η απεικόνιση $f : S^n - p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ καλείται *στερεογραφική προβολή* και ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$



Σχήμα 2.16: Στερεογραφική προβολή

Για παράδειγμα στον $\mathbb{R}^3$, χρησιμοποιώντας την αναλυτική εξίσωση της ευθείας στον χώρο έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{x-0}{u_1} &= \frac{y-0}{u_2} = \frac{z-1}{u_3} \Rightarrow \\
\frac{x-0}{(x'-0)-(0-0)} &= \frac{y-0}{(y'-0)-(0-0)} = \frac{z-1}{(0-0)-(1-0)} \Rightarrow \\
\frac{x}{x'} &= \frac{y}{y'} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \\
x' &= \frac{x}{1-z}, \qquad y' = \frac{y}{1-z}
\end{aligned}$$

Άρα η προβολή ενός σημείου (x, y, z) της 3-σφαίρας στο xy−επίπεδο είναι

$$(x', y') = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z}(x, y)$$

Θα υπολογίσουμε την αντίστροφη απεικόνιση της f. Έστω $y_i = \frac{1}{1-x_{n+1}} x_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Θέτουμε $c = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{(1-x_{n+1})^2} = \frac{1-x_{n+1}^2}{(1-x_{n+1})^2} \Rightarrow c = \frac{1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}} \Rightarrow \frac{c-1}{c+1} = x_{n+1}$. Οπότε $(1 + x_{n+1}) y_i = x_i \Rightarrow (1 - \frac{c-1}{c+1}) y_i = x_i \Rightarrow \frac{2}{c+1} y_i = x_i \Rightarrow t y_i = x_i$, οπόυ $t = \frac{2}{c+1} \Rightarrow x_i = t y_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Άρα η απεικόνιση

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - p$$

με

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (t x_1, t x_2, \dots, t x_n, 1 - t)$$

είναι η αντίστροφη απεικόνιση της f η οποία είναι συνεχής. Μένει να δείξουμε ότι η f είναι 1-1 και επί.

<u>*Η f είναι 1-1 :*</u> Έστω $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ και $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1})$ τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$. Τότε

$$\frac{1}{1-x_{n+1}} x_i = \frac{1}{1-y_{n+1}} y_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \qquad (1)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{1-x_{n+1}^2}{(1-x_{n+1})^2} = \frac{1-y_{n+1}^2}{(1-y_{n+1})^2} \Rightarrow \frac{1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}} = \frac{1+y_{n+1}}{1-y_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} = y_{n+1}$$

Άρα από την (1) έπεται ότι $x_i = y_i, \ \forall i = 1, 2, \dots, n$.

<u>*Η f είναι επί :*</u> Έστω $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$. Για $t = \frac{2}{c+1}$ και $y = (t x_1, t x_2, \dots, t x_n, 1 - t)$ έπεται ότι $f(y) = x$.
Συνεπώς f ομοιομορφισμός. Θεωρούμε επίσης και την απεικόνιση

$$g : S^n - q \longrightarrow S^n - p$$

με

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, -x_{n+1})$$

η οποία είναι προφανώς ομοιομορφισμός. Οπότε από την μεταβατική ιδιότητα $S^n - q$, $\mathbb{R}^n$ ομοιομορφικοί μεταξύ τους.
Έστω $U = S^n - p$ και $V = S^n - q$, τότε προφανώς $S^n = U \cup V$, όπου $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά και επειδή είναι ομοιομορφικά με τον $\mathbb{R}^n$ είναι και απλά συνεκτικά. Επειδή $U \cap V = S^n - p - q$, $\mathbb{R}^n - 0$ είναι ομοιομορφικοί μεταξύ τους και $\mathbb{R}^n - 0$ είναι κατά δρόμους συνεκτικό λόγω του θεωρήματος 1.9.11 έπεται ότι και το $U \cap V$ είναι κατά δρόμους

συνεκτικό. Οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.7.1 (*The Special Van Kampen Theorem*) έπεται ότι $\pi_1(S^n, x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in U \cap V$ και $x_0 \neq p, q$. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.7.3 Ο $\mathbb{R}^n - \{0\}$ είναι απλά συνεκτικός για $n > 2$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα 2.6.3 οι $\mathbb{R}^n - \{0\}$, S^{n-1} έχουν ισομορφικές θεμελιώδεις ομάδες και επειδή από το θεώρημα 2.7.2 η S^{n-1} είναι απλά συνεκτική έπεται ότι $\mathbb{R}^n$ είναι απλά συνεκτικός. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.7.4 Για $n > 2$ οι $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^2$ δεν είναι ισομορφικοί.

Απόδειξη. Έστω $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^2$ ισομορφικοί μεταξύ τους. Αν $x_1 \in \mathbb{R}^2$, τότε $\mathbb{R}^n - \{0\}$ και $\mathbb{R}^2 - \{x_1\}$ επίσης ισομορφικοί μεταξύ τους, άτοπο αφού από το προηγούμενο πόρισμα $\mathbb{R}^n$ είναι απλά συνεκτικός για $n > 2$ ενώ για $n = 2$ ο $\mathbb{R}^n$ δεν είναι απλά συνεκτικός. □

2.8 Οι Θεμελιώδεις Ομάδες των επιφανειών

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την τον υπολογισμό των θεμελιωδών ομάδων κάποιων επιφανειών. Συγκρίνοντας τις θεμελιώδεις ομάδες τους και βλέποντας ότι κάποιες επιφάνειες από αυτές έχουν διαφορετικές θεμελιώδεις ομάδες θα μπορέσουμε άμεσα να συμπεράνουμε ότι οι επιφάνειες αυτες δεν είναι ομοιομορφικές μεταξύ τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8.1 Έστω $(A, \cdot)$ και $(B, \cdot)$ δύο ομάδες. Τότε $(A \times B, \cdot)$ είναι επίσης ομάδα όπου

$$(\alpha \times \beta) \cdot (\alpha' \times \beta') = (\alpha \cdot \alpha') \times (\beta \cdot \beta').$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $(A \times B, \cdot)$ ικανοποιεί τα τρία αξιώματα του ορισμού 1.1.3, δηλαδή

$\mathcal{G}_1$: Η διμελής πράξη $\cdot$ είναι προσεταιριστική.

$\mathcal{G}_2$: Υπάρχει ένα στοιχείο e στο $A \times B$ τέτοιο ώστε $e \cdot x = x \cdot e = x$, για κάθε $x \in A \times B$.

$\mathcal{G}_3$: : Για κάθε $a \in A \times B$, υπάρχει $a' \in A \times B$ με την ιδιότητα $a' \cdot a = a \cdot a'$.

Για το $\mathcal{G}_1$:

Έστω $x, x' \in A \times B$, τότε υπάρχουν $\alpha, \alpha' \in A$ και $\beta, \beta' \in B$ τέτοια ώστε $x = \alpha \times \beta$, $x' = \alpha' \times \beta'$. Οπότε,

$$
\begin{aligned}
(a \times \beta) \cdot (a' \times \beta') &= (a \cdot a') \times (\beta \cdot \beta') \\
&= (a' \cdot a) \times (\beta' \cdot \beta) \\
&= (a' \times \beta') \cdot (a \times \beta)
\end{aligned}
$$

Για το $\mathcal{G}_2$:

Έστω $x \in A \times B$, τότε υπάρχουν $a \in A$ και $\beta \in B$ τέτοια ώστε $x = a \times \beta$. Θεωρούμε επίσης τα ουδέτερα στοιχεία e_1, e_2 των A, B αντίστοιχα. Οπότε,

$$(a \times \beta) \cdot (e_1 \times e_2) = (a \cdot e_1) \times (\beta \cdot e_2) = a \times \beta$$

Όμοια αποδεικνύεται και για το

$$(e_1 \times e_2) \cdot (a \times \beta) = a \times \beta$$

Συνεπώς θέτουμε $e = e_1 \times e_2$, το οποίο είναι και το ουδέτερο στοιχείο του $A \times B$.

Για το $\mathcal{G}_3$:

Έστω $a \in A$ και $\beta \in B$ καθώς και τα αντιστροφά τους a^{-1}, β^{-1}. Τότε

$$
\begin{aligned}
(a \times \beta) \cdot (a^{-1} \times \beta^{-1}) &= (a \cdot a^{-1}) \times (\beta \cdot \beta^{-1}) \\
&= e_1 \times e_2 \\
&= e
\end{aligned}
$$

Όμοια αποδεικνύεται και για το

$$(a^{-1} \times \beta^{-1}) \cdot (e_1 \times e_2) = e$$

Συνεπώς θέτουμε $\gamma = a^{-1} \times \beta^{-1}$, το οποίο είναι και το αντίστροφο στοιχείο του στοιχείου $a \times \beta$ στον $A \times B$. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8.2 Έστω $h : C \longrightarrow A$ και $k : C \longrightarrow B$ ομομορφισμοί ομάδων. Τότε η απεικόνιση $\varphi : C \longrightarrow A \times B$ με

$$\varphi(c) = h(c) \times k(c)$$

είναι επίσης ομομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\varphi(c_1 \cdot c_2) = \varphi(c_1) \cdot \varphi(c_2)$, για κάθε $c_1,\ c_2 \in C$. Πράγματι, έστω $c_1,\ c_2 \in C$ τότε

$$\begin{aligned}\varphi(c_1 \cdot c_2) &= h(c_1 \cdot c_2) \times k(c_1 \cdot c_2)\\ &= (h(c_1) \cdot h(c_2)) \times (k(c_1) \cdot k(c_2))\\ &= (h(c_1) \times k(c_1)) \cdot (h(c_2) \times k(c_2))\\ &= \varphi(c_1) \cdot \varphi(c_2)\end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8.3 Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X \times Y,\ x_0 \times y_0)$ είναι ισομορφική με την θεμελιώδη ομάδα $\pi_1(X,\ x_0) \times \pi_1(Y,\ y_0)$.

Απόδειξη. Έστω $p:\ X \times Y \longrightarrow X,\ q:\ X \times Y \longrightarrow Y$ οι προβολές του $X \times Y$ στον X και Y αντιστοιχα, $x_0 \in X$ και $y_0 \in Y$. Τότε οι απεικονίσεις

$$p_*:\ \pi_1(X \times Y,\ x_0 \times y_0) \longrightarrow \pi_1(X,\ x_0)$$

$$q_*:\ \pi_1(X \times Y,\ x_0 \times y_0) \longrightarrow \pi_1(Y,\ y_0)$$

είναι οι αντίστοιχοι ομομορφισμοί που επάγονται από τις $p,\ q$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Phi:\ \pi_1(X \times Y,\ x_0 \times y_0) \longrightarrow \pi_1(X,\ x_0) \times \pi_1(Y,\ y_0) \qquad \text{με}$$

$$\begin{aligned}\Phi([f]) &= p_*([f]) \times q_*([f])\\ &= [p \circ f] \times [q \circ f]\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση Φ είναι ισομορφισμός.

<u>*Η Φ είναι επί :*</u> Έστω $f:\ I \longrightarrow X$ ένας βρόγχος στον X βασισμένος στο x_0 και $g:\ I \longrightarrow Y$ ένας βρόγχος στον Y βασισμένος στο y_0. Θεωρούμε επίσης τον βρόγχο στον $X \times Y$ βασισμένο στο $x_0 \times y_0$, $h:\ I \longrightarrow X \times Y$ που ορίζεται ως $\varphi(s) = f(s) \times g(s)$. Τότε

$$\Phi([h]) = [p \circ h] \times [q \circ h] = [f] \times [g]$$

<u>*Η Φ είναι 1-1 :*</u> Αρκεί να δείξουμε ότι $ker\Phi = 0$. Έστω $f:\ I \longrightarrow X \times Y$ ένας βρόγχος στον $X \times Y$ βασισμένος στο $x_0 \times y_0$ και $\Phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f]$ το ταυτοτικό στοιχείο του $\pi_1(X,\ x_0) \times \pi_1(Y,\ y_0)$. Αυτό σημαίνει ότι $p \circ f \simeq_p e_{x_0}$ και $q \circ f \simeq_p e_{y_0}$, έστω λοιπόν $G,\ H$ οι αντίστοιχες ομοτοπίες κατά δρόμους. Θεωρούμε την απεικόνιση $F:\ I \times I \longrightarrow X \times Y$ που ορίζεται ως

$$F(s,\ t) = G(s,\ t) \times H(s,\ t)$$

Η απεικόνιση αυτή είναι η κατά δρόμους ομοτοπία μεταξύ των f και του σταθερού βρόγχου που βασίζεται στο $x_0 \times y_0$.

<u>*Η Φ είναι ομομορφισμός :*</u> Άμεσο από την πρόταση 2.8.2. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.8.4 Η θεμελιώδης ομάδα του τόρου $T = S^1 \times S^1$ είναι ισομορφική με την ομάδα $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8.5 Ως *προβολικό επίπεδο* P^2 ορίζουμε τον χώρο που κατασκευάζεται από την S^2, ταυτίζοντας κάθε σημείο $x \in S^2$ με το αντιδιαμετικό του $-x$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τον χώρο S^2 με την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ τέτοια ώστε

$$x \sim x, \quad x \sim -x \quad \text{τότε} \quad P^2 = \{[x] : x \in S^2\}$$

όπου $[x]$ η αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας του x. Εφοδιάζουμε το χώρο P^2 με μία τοπολογία ως εξής :
Ορίζουμε την απεικόνιση

$$p : S^2 \longrightarrow P^2, \text{ με}$$
$$x \longrightarrow [x]$$

και θεωρούμε V ανοιχτό στον $P^2 \Leftrightarrow p^{-1}(V)$ ανοιχτό στην S^2.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8.6 Ως *επιφάνεια* ορίζουμε έναν *Hausdorff* χώρο με αριθμήσιμη βάση όπου κάθε στοιχείο του έχει μία ανοιχτή περιοχή η οποία είναι ομοιομορφική με ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8.7 Το προβολικό επίπεδο είναι επιφάνεια και η απεικόνιση

$$p : S^2 \longrightarrow P^2$$

είναι απεικόνιση κάλυψης.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι η p είναι ανοιχτή απεικόνιση. Έστω U ανοιχτό υποσύνολο της S^2. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$a : S^2 \longrightarrow S^2, \text{ με}$$
$$a(x) = -x$$

η οποία προφανώς είναι ομοιομορφισμός και συνεπώς, το $a(U)$ είναι επίσης ανοιχτό στην S^2. Επίσης ισχύει

$$p^{-1}(p(U)) = U \cup a(U)$$

Από τον ορισμό 2.8.5 έπεται ότι $p(U)$ ανοιχτό αφού $U \cup a(U)$ είναι ανοιχτό. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η p είναι απεικόνιση κάλυψης.
Έστω $y \in P^2$ και $x \in p^{-1}(y)$. Έστω U μία $\epsilon-$περιοχή του x με $\epsilon < 1$. Τότε για κάθε $z \in U$ έπεται ότι $z \notin U$ αφού $d(z,\ a(z)) = 2$. Θεωρώ την απεικόνιση $p_{|_U} :\ U \longrightarrow p(U)$ τότε, $p_{|_U}$ είναι 1-1 αφού αν $x,\ y \in U$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} p_{|_U}(x) = p_{|_U}(y) &\Rightarrow [x] = [y] \\ &\Rightarrow \{-x,\ x\} = \{-y,\ y\} \\ &\Rightarrow y = -x \ \text{ ή } \ y = x. \end{aligned}$$

Προφανώς $y = -x$ απορρίπτεται, άρα $y = x$. Συνεπώς η $p_{|_U}$ είναι ανοιχτή, συνεχής, 1-1 και επί, οπότε $p_{|_U}$ είναι ομοιομορφισμός. Όμοια δείχνουμε και για την απεικόνιση $p_{|_{a(U)}} :\ a(U) \longrightarrow p(a(U)) = p(U)$ ότι είναι ομοιομορφισμός. Συνεπώς το $p^{-1}(p(U))$ γράφτηκε σαν ένωση ανοιχτών, ξένων με $p_{|_U},\ p_{|_{a(U)}}$ ομοιομορφισμοί.

Το P^2 είναι χώρος Hausdorff : Έστω $y_1,\ y_2 \in P^2$ με $y_1 \neq y_2$. Το $p^{-1}(y_1) \cup p^{-1}(y_2) = \{y_1,\ -y_1,\ y_2,\ -y_2\}$. Αν ϵ η ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους, επιλέγω U_1, να είναι μία $\frac{\epsilon}{2}-$περιοχή του $p^{-1}(y_1)$ και U_2, να είναι μία $\frac{\epsilon}{2}-$περιοχή του $p^{-1}(y_2)$. Τότε,

$$\begin{aligned} (U_1 \cup a(U_1)) \cap (U_2 \cup a(U_2)) = \emptyset &\Rightarrow p^{-1}(p(U_1)) \cap p^{-1}(p(U_2)) = \emptyset \\ &\Rightarrow p^{-1}(p(U_1) \cap p(U_2)) = \emptyset \\ &\Rightarrow p(U_1) \cap p(U_2) = \emptyset \end{aligned}$$

Άρα το P^2 είναι χώρος *Hausdorff* αφού βρήκαμε δύο ανοιχτές περιοχές των $y_1,\ y_2$ ξένες μεταξύ τους.

Το P^2 είναι επιφάνεια : Επειδή η S^2 έχει αριθμήσιμη βάση $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, έπεται ότι ο P^2 έχει την αριθμήσιμη βάση $\{p(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Επιπλέον, επειδή η S^2 είναι επιφάνεια και κάθε σημείο του P^2 έχει μία ανοιχτή περιοχή ομοιομορφική με ένα ανοιχτό υποσύνολο της S^2, έπεται ότι P^2 είναι επιφάνεια. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.8.8 Η θεμελιώδης ομάδα του προβολικού επιπέδου, $\pi_1(P^2,\ y)$ είναι ομάδα τάξης-2 δηλαδή, περιέχει δύο στοιχεία.

Απόδειξη. Οπώς δείξαμε στο προηγούμενο θεώρημα, η $p: S^2 \longrightarrow P^2$ είναι απεικόνιση κάλυψης. Από το θεώρημα 2.7.2 η S^2 είναι απλά συνεκτική, συνεπώς από το θεώρημα 2.5.2, υπάρχει απεικόνιση $\Phi: \pi_1(P^2, y) \longrightarrow p^{-1}(y)$ η οποία είναι 1-1 και επί. Επειδή το $p^{-1}(y)$ περιέχει δύο στοιχεία, έπεται ότι και η $\pi_1(P^2, y)$ θα περιέχει δύο στοιχεία και συνεπώς θα είναι ομάδα τάξης-2. □

ΛΗΜΜΑ 2.8.9 Η θεμελιώδης ομάδα του *Figure eight* (συμβ. 8) δεν είναι αβελιανή.

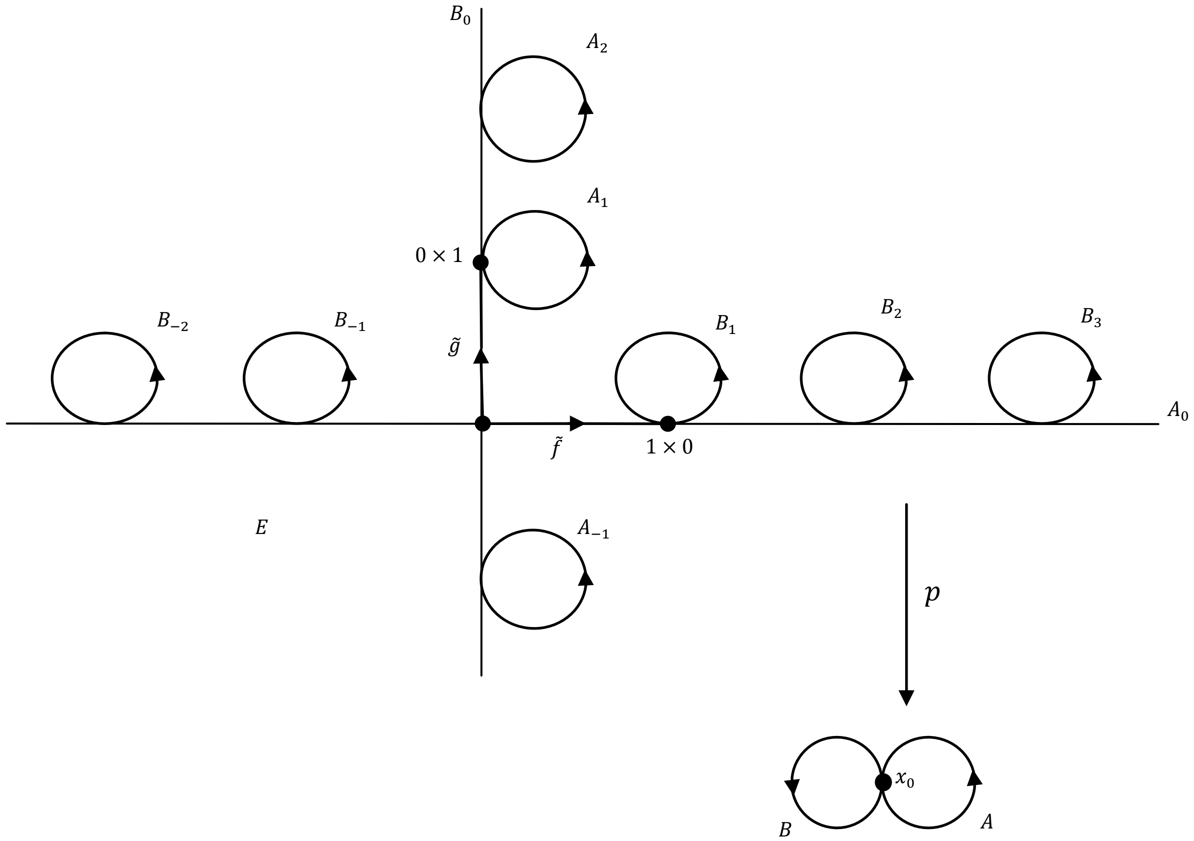
Απόδειξη. Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι ο χώρος *Figure eight* είναι η ένωση δύο κύκλων A και B που εφάπτονται στο σημείο x_0. Θεωρούμε τον χώρο E που αποτελείται από τους x, $y-$άξονες του καρτεσιανού επιπέδου καθώς και από μικρούς κύκλους που εφάπτονται σάυτους σε μη μηδενικά ακέραια σημεία τους. Θεωρούμε την απεικόνιση $p: E \longrightarrow 8$ η οποία τυλίγει τους x, $y-$άξονες του καρτεσιανού επιπέδου γύρω από τους κύκλους A και B αντίστοιχα. Τα εφαπτόμενα σημεία των κύκλων με τους άξονες απεικονίζονται στο x_0 καθώς οι κύκλοι που εφάπτονται στον $x-$άξονα απεικονίζονται ομοιομορφικά στον κύκλο B ενώ οι κύκλοι που εφάπτονται στον $y-$άξονα απεικονίζονται ομοιομορφικά στον κύκλο A. (Σχήμα 2.17)

Η p είναι απεικόνιση κάλυψης (αρκετα εύκολο να δειχθεί). Μένει να δείξουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα του *Figure eight* δεν είναι αβελιανή. Πράγματι, έστω $\widetilde{f}: I \longrightarrow E$ ένα μονοπάτι με $\widetilde{f}(s) = s \times 0$, το οπίο κινείται κατά μήκος του $x-$άξονα και ξεκινά από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο 1×0. Έστω επίσης $\widetilde{g}: I \longrightarrow E$ ένα μονοπάτι με $\widetilde{f}(s) = 0 \times s$, το οπίο κινείται κατά μήκος του $y-$άξονα και ξεκινά από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο 0×1. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $f = p \circ \widetilde{f}$ και $g = p \circ \widetilde{g}$ τότε, οι f, g είναι βρόγχοι στον *Figure eight* βασισμένοι στο x_0 που κινούνται πάνω στον κύκλο A, B αντίστοιχα. Θεωρούμε το μονοπάτι $f * g$, το οποίο έχει ως *lifting* το μονοπάτι που κινείται κατά μήκος του $x-$άξονα, από την αρχή των αξόνων στο σημείο 1×0 και μετά κινείται πάνω στον κύκλο B_1 μέχρι το σημείο 1×0. Αντίστοιχα, το μονοπάτι $g * f$, το οποίο έχει ως *lifting* το μονοπάτι που κινείται κατά μήκος του $y-$άξονα, από την αρχή των αξόνων στο σημείο 0×1 και μετά κινείται πάνω στον κύκλο A_1 μέχρι το σημείο 0×1. Συνεπώς επειδή τα *liftings* των $f * g$, $g * f$ δεν έχουν το ίδιο πέρας έπεται από το θεώρημα 2.4.4 ότι $f * g \not\simeq_p g * f$ και άρα η η θεμελιώδης ομάδα του *Figure eight* δεν είναι αβελιανή. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8.10 Έστω χώρος X και A ένας υποχωρός του, που είναι *retract* του X. Τότε ο ομορφισμός

$$j_*: \pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

που είναι επαγώμενος από τον ταυτοτικό εγκλεισμό $j: A \longrightarrow X$ είναι 1-1.



Σχήμα 2.17: Χώρος κάλυψης E του *Figure eight*

Απόδειξη. Έστω $r : X \longrightarrow A$ *retraction.* Τότε προφανώς $r \circ j = \mathbb{I}$. Οπότε, έστω $[f]$, $[g] \in \pi_1(A,\ x_0)$ τέτοια ώστε,

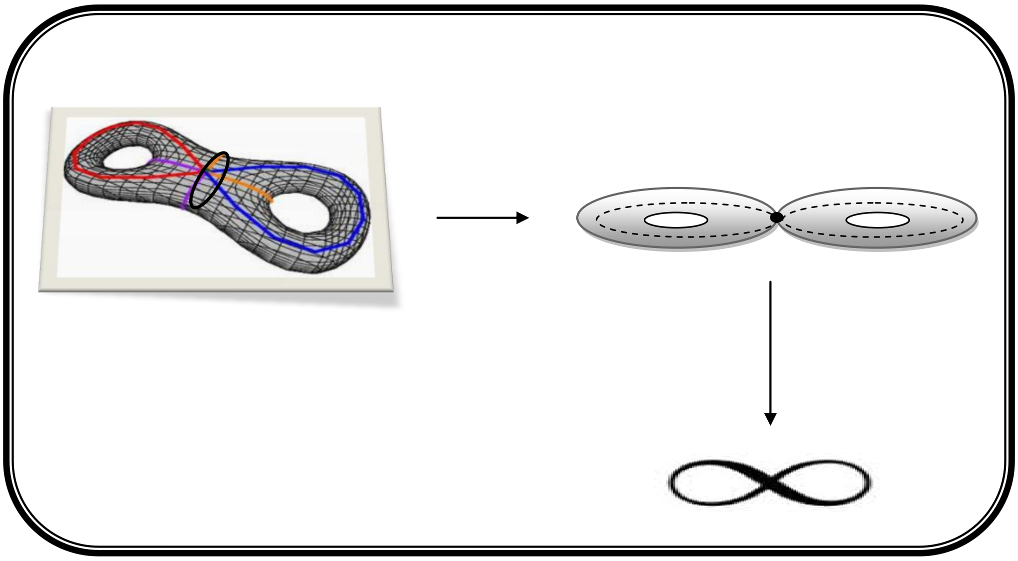
$$
\begin{aligned}
j_*([f]) = j_*([g]) &\Rightarrow [j \circ f] = [j \circ g] \\
&\Rightarrow [(j \circ r) \circ f] = [(j \circ r) \circ g] \\
&\Rightarrow [\mathbb{I} \circ f] = [\mathbb{I} \circ g] \\
&\Rightarrow [f] = [g]
\end{aligned}
$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8.11 Η θεμελιώδης ομάδα του διπλού τόρου T_2 δεν είναι αβελιανή.

Απόδειξη. Ο διπλός τόρος T_2 είναι μία επιφάνεια που αποτελείται από δύο πανομοιότυπους τόρους, όπου έχει αφαιρεθεί ένας μικρός δίσκος από κάθε τόρο και έχουν επικολληθεί οι επιφάνειες που έχουν απομείνει.(Σχήμα 2.18).

Ισχυριζόμαστε ότι το *Figure eight* είναι *retact* του διπλού τόρου T_2. Αυτό είναι αρκετά εύκολο να το αντιληφθούμε σχηματικά όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.18. Οπότε θεωρούμε την απεικόνιση



Σχήμα 2.18: *Figure eight* ως *retract* του T_2

$$r: T_2 \longrightarrow 8$$

που είναι *retraction* του T_2 καθώς και τον ταυτοτικό εγκλεισμό $j: 8 \longrightarrow T_2$ Τότε ο ταυτοτικός εγκλεισμός j επάγει έναν 1-1 ομομορφισμό

$$j_*: \pi_1(8, x_0) \longrightarrow \pi_1(T_2, x_0)$$

Από την πρόταση 2.8.11 έπεται ότι j_* είναι 1-1. Οπότε, έστω ότι $\pi_1(T_2, x_0)$ είναι αβελιανή ομάδα τότε, για οποιαδήποτε $[a], [\beta] \in \pi_1(T_2, x_0)$ θα ισχύει

$$[a] * [\beta] = [\beta] * [a] \Rightarrow (j_*)^{-1}([a] * [\beta]) = (j_*)^{-1}([\beta] * [a]) \Rightarrow$$
$$((j_*)^{-1}([a])) * ((j_*)^{-1}([\beta])) = ((j_*)^{-1}([\beta])) * ((j_*)^{-1}([a]))$$

το οποίο είναι άτοπο αφού η θεμελιώδης ομάδα του *Figure eight* δεν είναι αβελιανή. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.8.12 Οι επιφάνειες S^2, P^2, T και T^2 είναι τοπολογικά διακριτοί χώροι.

2.9 *Nullhotopic* απεικονίσεις

Ένα σημαντικό πρόβλημα στην τοπολογία είναι πότε δύο απεικονίσεις του ίδιου χώρου είναι ομοτοπικές μεταξύ τους. Στην παράγραφο αυτή θα περιοριστούμε σε ένα απλούστερο πρόβλημα: *Έστω απεικόνιση $h: X \longrightarrow Y$. Πότε θα έιναι ομοτοπική με τη σταθερή απεικόνιση;* Θα δείξουμε επίσης, ότι αν μία απεικόνιση είναι ομοτοπική με μία σταθερή απεικόνιση, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός h_* των θεμελιωδών τους ομάδων είναι ο μηδενικός ομομορφισμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.9.1 Μία απεικόνιση $h: X \longrightarrow Y$ θα λέγεται *null – hotopic*, αν η h είναι ομοτοπική με μία σταθερή απεικόνιση.

ΛΗΜΜΑ 2.9.2 Έστω $h: S^1 \longrightarrow Y$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :

1. h είναι *nullhotopic*.

2. h μπορεί να επεκταθεί σε μία συνεχή απεικόνιση $g: B^2 \longrightarrow Y$.

Απόδειξη. (1) ⇒ (2) Έστω h είναι *nullhotopic*. Τότε θα υπάρχει $H: S^1 \times I \longrightarrow Y$ τέτοια ώστε H συνεχής και $H(s, 0) = h(s)$ και $H(s, 1) = k(s) = y_0$ για κάθε $s \in S^1$, όπου $y_0 \in Y$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\pi: S^1 \times I \longrightarrow B^2$ με

$$\pi(x, t) = (1-t)x$$

Η π είναι κλειστή : Επειδή $S^1 \times I$ είναι συπαγής και ο B^2 είναι *Hausdorff*, από την πρόταση 1.11.11 έπεται ότι η π είναι κλειστή.

Η $\pi: S^1 \times [0,1) \longrightarrow B^2 - 0$ είναι 1-1 : Έστω $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in S^1$ και $t_1, t_2 \in [0,1)$ τέτοια ώστε

$$\pi(x, t_1) = \pi(y, t_2) \Rightarrow (1-t_1)x = (1-t_2)y \Rightarrow (1-t_1)(x_1, x_2) = (1-t_2)(y_1, y_2)$$

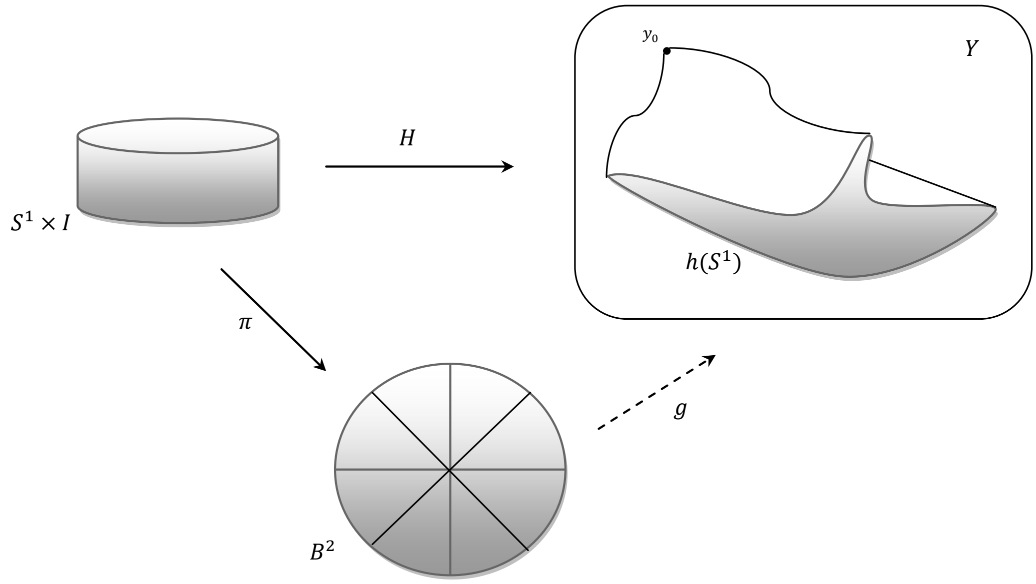
$$\Rightarrow (1-t_1)x_1 = (1-t_2)y_1 \quad \text{και} \quad (1-t_1)x_2 = (1-t_2)y_2 \overset{()^2,+}{\Longrightarrow}$$

$$t_1 = t_2 \quad \text{και} \quad x = y$$

Η $\pi: S^1 \times [0,1) \longrightarrow B^2 - 0$ είναι επί : Έστω $x_0 \in B^2 - 0$ τότε,

$$(1-0)x_0 = x_0 \Rightarrow \pi(x_0, 0) = x_0$$

Προφανώς η π απεικονίζει το $S^1 \times 1$ στο σημείο 0.



Σχήμα 2.19: Διάγραμμα των H, π, g

Έστω η απεικόνιση $H_{|_{S^1 \times I}}$ είναι σταθερή απεικόνιση. Θεωρούμε την απεικόνιση $g : B^2 \longrightarrow Y$ με

$$g(x) = \begin{cases} H(\pi^{-1}(x)) & , \ x \notin S^1 \\ y_0 & , \ x \in S^1 \end{cases}$$

Η g είναι συνεχής αφού αν F κλειστό υποσύνολο του Y τότε το $H^{-1}(F)$ είναι κλειστό στον $S^1 \times I$ και επειδή π κλειστή απεικόνιση, το $\pi(H^{-1}(F)) = g^{-1}(F)$ κλειστό στην B^2. Η g είναι η επιθυμητή επέκταση της h και $g_{|_{S^1}} = h$, αφού αν $x \in S^1$

$$g(x) = g(\pi(x, 0)) = H(x, 0) = h(x).$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Έστω $g : B^2 \longrightarrow Y$ η συνεχής επέκταση της h. Ορίζουμε $F : S^1 \times I \longrightarrow Y$ με $F(x, t) = g((1-t)x)$. Τότε η F είναι η ομοτοπία μεταξύ των h και μίας σταθερής απεικόνισης. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.9.3 Έστω $h : X \longrightarrow Y$. Αν η h είναι *nullhomotopic* τότε, η h_* είναι μηδενικός ομομορφισμός.

Απόδειξη. Αρχικά θα το αποδείξουμε για την ειδική περίπτωση $X = S^1$, όπου και θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο λήμμα, προκειμένου να βασιστούμε σ΄ αυτήν για να α-

ποδείξουμε την γενική περίπτωση.
Έστω $g: B^2 \longrightarrow Y$ η συνεχής επέκταση της *nullhomotopic* απεικόνισης $h: S^1 \longrightarrow Y$. Θεωρούμε επίσης τον ταυτοτικό εγκλεισμό $j: S^1 \longrightarrow B^2$, τότε $g \circ j = h$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1, b_1) \arrow[rr, "h_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & \pi_1(Y, y_1) \\
& \pi_1(B^2, b_1) \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 2.20: Διάγραμμα των h_*, g_*, j_*

Από αυτό έπεται ότι $(g \circ j)_* = h_*$. Όμως η j_* είναι μηδενικός ομομορφισμός αφού $\pi_1(S^1, b_1) = 0$. Οπότε h_* είναι μηδενικός ομομορφισμός.
Τώρα θα δείξουμε την γενική περίπτωση. Έστω f ένας βρόγχος στον X βασισμένος στο x_0. Θεωρούμε την απεικόνιση $\Phi: I \longrightarrow S^1$ με $\Phi(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. Από το θεώρημα 2.3.4 η Φ είναι απεικόνιση κάλυψης.

$$\begin{tikzcd}
& S^1 \arrow[d, "k"] & \\
I \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "f"'] & X \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 2.21: Διάγραμμα των Φ, f, h

Από το λήμμα 2.4.4 (*The Coevering Path Property*), υπάρχει το *lifting* του f, $k: S^1 \longrightarrow X$ τέτοιο ώστε $k \circ \Phi = f \Rightarrow k(a) = f(\Phi^{-1}(a))$ συνεχής. Από υπόθεση η h είναι ομοτοπική με μία σταθερή απεικόνιση, έστω $H: X \times I \longrightarrow Y$ η κατά δρόμους ομοτοπία μεταξύ τους. Η $h \circ k: S^1 \longrightarrow Y$ είναι επίσης ομοτοπική με ένα σταθερό μονοπάτι. Από την ειδική περίπτωση που δείξαμε πριν, έπεται ότι $(h \circ k)_*$ είναι μηδενικός ομομορφισμός, άρα $(h \circ k)_*([\Phi]) = 0$. Συνεπώς,

$$(h \circ k)_*([\Phi]) = [h \circ k \circ \Phi] = [h \circ f] = h_*([f]) \Rightarrow h_*([f]) = 0$$

□

Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε μία εφαρμογή πάνω στο θεώρημα 2.9.3 για τις κλειστές τριγωνικές περιοχές.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.9.4 Έστω T μία τριγωνική κλειστή περιοχή στον $\mathbb{R}^2$ και $Bd\,T$ να είναι η ένωση των ακμών της. Τότε δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f: T \longrightarrow Bd\,T$ τέτοια ώστε να απεικονίζει κάθε ακμή στον εαυτό της.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f: T \longrightarrow Bd\,T$ τέτοια ώστε να απεικονίζει κάθε ακμή στον εαυτό της. □

2.10 Διανυσματικά πεδία και σταθερά σημεία

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.10.1 *Διανυσματικό πεδίο* στην B^2 είναι ένα ζεύγος $(x, u(x))$, όπου $x \in B^2$ και u είναι μία συνεχής απεικόνιση απεικόνιση $\overrightarrow{u}: B^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Συνήθως γράφουμε

$$\overrightarrow{v}(x) = u_1(x)\,i + u_2(x)\,j$$

όπου i, j η βάση του $\mathbb{R}^2$.
Για να έχουμε ένα *μη μηδενικό διανυσματικό πεδίο* στην B^2, πρέπει το $u \neq 0$ για κάθε $x \in B^2$. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $u: B^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.10.2 Έστω ένα μη μηδενικό διανυσματικό πεδίο στην B^2. Τότε υπάρχει ένα σημείο της S^1 όπου το διανυσματικό πεδίο δείχνει κατευθείαν προς τα μέσα και ένα σημείο της S^1 όπου το διανυσματικό πεδίο δείχνει κατευθείαν προς τα έξω.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $u_{|_{S^1}} = w: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ και έστω ότι δεν υπάρχει $x \in S^1$ όπου το διανυσματικό πεδίο δείχνει κατευθείαν προς τα μέσα τότε, για κανένα $x \in S^1$ η $w(x)$ δεν θα ισούται με αρνητικό πολλαπλάσιο του x. Θεωρούμε την απεικόνιση εγκλεισμού $j: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - 0$. Τότε οι απεικονίσεις $w(x)$, $j(x)$ είναι ομοτοπικές μεταξύ τους μέσω της ομοτοπίας $F: S^1 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ με

$$F(x,t) = tx + (1-t)\,w(x)$$

Αν $t = 0$ τότε, $F(x,t) \neq 0$.
Για $0 < t < 1$, αν $F(x,t) = 0 \Rightarrow tx + (1-t)w(x) = 0 \Rightarrow -tx = (1-t)w(x) \Rightarrow w(x) = -\frac{tx}{1-t} \Rightarrow w(x) = -\frac{t}{1-t}x$, το οποίο από υπόθεση απορρίπτεται. Συνεπώς, η $w(x)$ δεν είναι *nullhomotopic*. Όμως η $w(x)$ έχει ως συνεχή επέκταση της την u. Οπότε η $w(x)$ είναι *nullhomotopic* από το λήμμα 2.9.2. Άτοπο.
Όμοια αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένα σημείο της S^1 όπου το διανυσματικό πεδίο δείχνει κατευθείαν προς τα έξω αρκεί να θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο $(x, -\overrightarrow{u}(x))$. □

Για το επόμενο θεώρημα, το οποίο αποτελούσε κεντρικό στόχο της εργασίας αυτής, παραθέτουμε δύο σχετικές αποδείξεις.

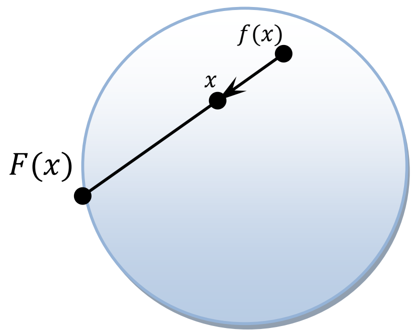
ΘΕΩΡΗΜΑ 2.10.3 (*Θεώρημα του Brouwer του σταθερού σημείου για τον δίσκο*) Έστω μία συνεχής απεικόνιση $f: B^2 \longrightarrow B^2$. Τότε υπάρχει $x_0 \in B^2$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

Απόδειξη. Έστω $f: B^2 \longrightarrow B^2$ μία συνεχής απεικόνιση τέτοια ώστε για κάθε $x \in B^2$, $f(x) \neq x$. Ορίζουμε $u(x) = f(x) - x$. Το $u(x)$ ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο $(x, \vec{u}(x))$ μη-μηδενικό στην B^2. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, θα υπάρχει ένα σημείο της S^1 όπου το διανυσματικό πεδίο δείχνει κατευθείαν προς τα έξω, δηλαδή

$$f(x_1) - x_1 = a x_0, \text{ για κάποιο θετικό } a \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$f(x_1) = (a+1) x_1$$

άτοπο, διότι $f(x_1)$ ανήκει εκτός της B^2. Συνεπώς υπάρχει $x_0 \in B^2$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$. □



Σχήμα 2.22: Ορισμός απεικόνισης F

Στη συνέχεια ακολουθή η δεύτερη απόδειξη.

Απόδειξη. Έστω $f: B^2 \longrightarrow B^2$ μία συνεχής απεικόνιση τέτοια ώστε για κάθε $x \in B^2$, $f(x) \neq x$. Ορίζουμε μία απεικόνιση $F: B^2 \longrightarrow S^1$ η οποία για κάθε $x \in B^2$ φέρουμε την ευθεία που το ενώνει με το $f(x)$, δηλαδή το διάνυσμα $\overrightarrow{f(x)x}$ και προεκτείνουμε μέχρι να τμήσει την S^1. Το σημείο αυτό θα είναι το $F(x)$. Η απεικόνιση αυτή είναι *retraction* προφανώς. Από την πρόταση 2.2.16 έπεται ότι ο επαγώμενος ομομορφισμός.

$$F_*: \pi_1(B^2, x_0) \longrightarrow \pi_1(S^1, x_0)$$

είναι επί. Άτοπο αφού $\pi_1(B^2, x_0) = 0$ ενώ $\pi_1(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$. $\square$

Βιβλιογραφία

1. *Albrecht Dold, Lectures on Algebraic Topology, Springer–Verlag, New York, Heidelberg Berlin,* 1980.

2. *Allen Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press,* 2002.

3. *Charles Richard Francis Maunder, Algebraic Topology, Cambridge University Press,* 1970.

4. *Czes Kosniowski, A First Course in Algebraic Topology, Press Syndicate of the University of Cambridge,* 1980.

5. *Dugundji, J., Topology, Allyn and Bacon, Boston,* 1966.

6. *Fred H. Croom, Basic Concepts of Algebraic Topology, Springer–Verlag, New York, Heidelberg Berlin,* 1978.

7. *James R. Munkres, Topology First Course, NJ : Prentice Hall of India, New Delhi,* 1992.

8. *Jonathan A. Hillman, Algebraic Topology Notes, PARTII : Fundamental Group, University of Sydney,* 2003.

9. *J. P. May, A Concise Course in Algebraic Topology, University of Chicago Press, London,* 1999.

10. *Len Evens, Rob Thompson, Algebraic Topology, Northwestern University, City University of New York.*

11. *Massey, W.S., Algebraic Topology : An Introduction, Harcourt Brace Jovanovich, New York,* 1967.

12. *R.E. Brown, Fixed Point Theory in History of Topology, pp.*271 – 300, *ELSEVIER, Amsterdam, Lausanne, NewYork, Oxford, Shannon, Singapore, Tokyo,* 1999.

13. *Spanier, E. H., Algebraic Topology, McGraw – Hill Book Company. New York,* 1966.

14. *http : //www.gap – system.org/ history/Printonly/Brouwer.html*

Ευρετήριο