ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

**ΤΙΤΛΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

# Υπολογισμός ασφαλίστρου για κάλυψη του ρίσκου profile των συμβολαίων PPA βάσει της μοντελοποίησης των τιμών ηλεκτρικής ενέργειας.

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:**

Γεώργιος-Μάριος Πετσαγγουράκης

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:**

Αντώνης Παπαπαντολέων,Αναπληρωτής Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ

**ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

Αντώνης Παπαπαντολέων, Αναπληρωτής Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ

Μιχαήλ Λουλάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ

Δημήτρης Φουσκάκης, Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ

Αθήνα, Ιούνιος 2022

# Ευχαριστίες

Στη μνήμη της μητέρας μου Ευαγγελίας που μέχρι και την τελευταία στιγμή της ζωής της με στήριζε και με μάθαινε να κυνηγάω τα όνειρά μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τον καθηγητή μου Αντώνη Παπαπαντολέων και τον μεταδιδακτορικό ερευνητή Αλέξανδρο Σαπλαούρα για την πολύτιμη βοήθειά τους, όπως και τον Χρήστο Νάκο για την παροχή των απαραίτητων δεδομένων αλλα και τη στήριξη στα θέματα της εργασίας.

.....
Γεώργιος-Μάριος Πετσαγγουράκης

© (2022) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ'αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

# Περίληψη

Τα συμβόλαια PPA είναι μια απευθείας συμφωνία μεταξύ παραγωγών ανανεώσιμης ενέργειας και καταναλωτών για την παράδοση ηλεκτρικής ενέργειας. Καθώς ωστόσο η διανομή της ηλεκτρικής ενέργειας γίνεται μέσω του ηλεκτρικού δικτύου, υπάρχουν διάφορα είδη ρίσκου που διέπουν αυτά τα συμβόλαια και που προκύπτουν από διάφορους παράγοντες. Ένα από αυτά είναι η μεταβλητότητα των τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας σε σχέση με την παραγωγή της εκάστοτε μονάδας παραγωγής ενέργειας. Το ρίσκο που δημιουργείται από το συνδυασμό αυτών των παραγόντων ονομάζεται ρίσκο προφίλ και η ποσοτικοποίησή του είναι ένα από τα κύρια κομμάτια που θα αναλυθούν στην παρούσα εργασία. Για να γίνει αυτό εφικτό, θα χρησιμοποιηθούν ορισμένες γνωστές κατανομές όπως η Variance Gamma, η Normal-Inverse Gaussian, η Skewed generalized t και η Γενικευμένη Υπερβολική για να γίνει μοντελοποίηση των τιμών ηλεκτρικής ενέργειας και όσο αφορά την ποσοτικοποίηση αυτή καθαυτή, θα παρουσιαστούν κάποιες συναρτήσεις που ονομάζονται μέτρα ρίσκου. Μια περαιτέρω ανάλυση κάποιων από αυτά που ονομάζονται Expected Shortfall και Value at Risk συμπεριλαμβάνονται και αυτά με τη σειρά τους. Αφού παρουσιαστούν τα απαραίτητα εργαλεία θεωρίας που θα χρησιμοποιηθούν, σκοπός είναι μέσω της ποσοτικοποίησης του ρίσκου, να βρεθεί μια δίκαια τιμή ασφαλίστρου για να καλυφθεί το συγκεκριμένο είδος ρίσκου.

**Λέξεις Κλειδιά:**

PPA, ηλεκτρική ενέργεια, ποσοτικοποίηση ρίσκου, ρίσκο προφίλ,Variance Gamma, Normal-Inverse Gaussian, Γενικευμένη Υπερβολική, (συνεκτικά) μέτρα ρίσκου, Expected Shortfall, Value at Risk, τιμή ασφαλίστρου, εκτιμήτριες, EM, SANN, MCECM.

# Abstract

PPA contracts are a direct agreement between renewable source producers and consumers for electricity delivery. Nevertheless, since the electricity is distributed through the electrical grid, there is a number of risks which is connected with these contracts due to several factors. One of them is the variability of electricity prices depending on the current generation of the asset. The risk which occurs from the combination of these factors is called shape/profile risk and its quantification is one of the main parts which are going to be analyzed in this thesis. In order to accomplish that, some known distributions like the Variance Gamma, the Normal-Inverse Gaussian, the Skewed generalized t and the Generalized Hyperbolic will be used for the electricity price modeling and when it comes to the quantification itself; some functions which are called risk measures will be presented as well. A further analysis of some of them, which are called Expected Shortfall and Value at Risk is included in this thesis. After the presentation of the essential theoretical tools, which will be used afterwards, we aim to find a fair premium price, through the quantification of the risk, in order to minimize this risk.



**Keywords:**

PPA, electricity, risk quantification, shape/profile risk,Variance Gamma, Normal-Inverse Gaussian, Generalized Hyperbolic, (coherent) risk measures, Expected Shortfall, Value at Risk, premium price, estimators, EM, SANN, MCECM.

# Κατάλογος Σχημάτων-Εικόνων


1.1 PPA . . . 10
3.1 Mixed Normal Density με $\boldsymbol{\mu} = (0, 1, 2)^\top, \boldsymbol{\sigma} = (0.3, 0.3, 0.3)^\top$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.4, 0.4)^\top$ . . 43
3.2 Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή με $\lambda = 2, \alpha = 3.5, \delta = 1, \mu = 0$ . . . 54
3.3 Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή με $\alpha = 3.5, \beta = 0, \delta = 1, \mu = 0$ . . . 54
3.4 Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή με $\lambda = 1, \beta = 0, \delta = 1, \mu = 0$ . . . 55
3.5 Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή με $\lambda = 1, a = 4, \beta = 0, \mu = 0$ . . . 55
3.6 QQ Plot (αριστερά) και Ιστόγραμμα (δεξιά) σε μια καλή προσαρμογή Μοντέλου. . . . 66
4.1 Ενδεικτικές ωριαίες τιμές ημερών (αριστερά) και μέσοι όροι ωριαίων τιμών ανα ώρα (δεξιά). . . . 68
4.2 Ενδεικτικά QQ Plots Κανονικής κατανομής ωρών 3,6,13,15 . . . 70
4.3 Ενδεικτικά Ιστογράμματα Κανονικής κατανομής ωρών 3,6,13,15 . . . 71
4.4 Κριτήρια AIC διαφόρων κατανομών στις ώρες 1 εώς 9 . . . 72
4.5 Κριτήρια AIC διαφόρων κατανομών στις ώρες 10 εώς 18 . . . 73
4.6 Κριτήρια AIC διαφόρων κατανομών στις ώρες 19 εώς 24 . . . 74
4.7 Ενδεικτικά Ιστογράμματα και QQ Plots Variance Gamma ωρών 4 και 5 . . . 75
4.8 Ιστογράμματα Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 1 εώς 9 . . . 76
4.9 Ιστογράμματα Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 10 εώς 18 . . . 77
4.10 Ιστογράμματα Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 19 εώς 24 . . . 78
4.11 QQ Plots Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 1 εώς 9 . . . 79
4.12 QQ Plots Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 10 εώς 18 . . . 80
4.13 QQ Plots Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 19 εώς 24 . . . 81
4.14 Log Plots Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 1 εώς 9 . . . 82
4.15 Log Plots Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 10 εώς 18 . . . 83
4.16 Log Plots Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 19 εώς 24 . . . 84
4.17 Μέση παραγωγή ανα ώρα σε Ανεμογεννήτριες και Φωτοβολταϊκά . . . 92
4.18 Εκτίμηση τιμής Ασφαλίστρου Ανεμογεννητριών . . . 93
4.19 Εκτίμηση τιμής Ασφαλίστρου Φωτοβολταϊκών . . . 94
4.20 Ταχύτητα Σύγκλισης τιμής Ασφαλίστρου Ανεμογεννητριών . . . 95
4.21 Ταχύτητα Σύγκλισης τιμής Ασφαλίστρου Φωτοβολταϊκών . . . 95

# Περιεχόμενα

**Ευχαριστίες** **1**

**Περίληψη** **2**

**Abstract** **3**

**Κατάλογος Σχημάτων-Εικόνων** **4**

**1 PPAs** **7**
1.1 Βασικοί Ορισμοί . . . 7
1.2 Είδη Ρίσκου . . . 11

**2 Μέτρα Ρίσκου** **16**
2.1 Ορισμοί . . . 16
2.2 Μέτρα Ρίσκου Value at Risk και Expected Shortfall . . . 23

**3 Μοντέλα Κατανομών και Προσαρμογή** **29**
3.1 Κανονική Κατανομή . . . 29
3.1.1 Κριτήριο Αμεροληψίας . . . 30
3.1.2 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας . . . 33
3.1.3 Κριτήριο Ασυμπτωτικής Αμεροληψίας . . . 36
3.1.4 Κριτήριο Συνέπειας . . . 36
3.1.5 Κριτήριο Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος . . . 37
3.2 Mixtures . . . 40
3.2.1 Μετρήσιμες Συναρτήσεις . . . 40
3.2.2 Countable Mixtures . . . 42
3.2.3 Continuous Mixtures . . . 45
3.2.4 Variance-Mean Mixture of Normals . . . 45
3.3 Γενικευμένη Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή . . . 48
3.3.1 Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή . . . 50
3.3.2 Γάμμα κατανομή . . . 50
3.3.3 Αντίστροφη Γάμμα κατανομή . . . 50
3.3.4 Εκθετική κατανομή . . . 51
3.3.5 Θετική Υπερβολική κατανομή . . . 51
3.3.6 Lévy κατανομή . . . 51
3.4 Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή . . . 51
3.4.1 Ορισμός Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής . . . 51

3.4.2 Πολυδιάστατη Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή . . . 56
3.4.3 Εναλλαγή μεταξύ διαφορετικών παραμετρικοποιήσεων . . . 57
3.4.4 Κανονική - Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή . . . 58
3.4.5 Variance Gamma . . . 58
3.4.6 Hyperbolic Asymmetric (Student's) t κατανομή . . . 58
3.4.7 Υπερβολική κατανομή . . . 58
3.5 Προσαρμογή παραμέτρων . . . 59
3.5.1 Αλγόριθμος SANN . . . 59
3.5.2 Αλγόριθμος EM . . . 63
3.5.3 Αλγόριθμος MCECM . . . 64
3.6 Έλεγχοι καλής προσαρμογής . . . 64
3.6.1 Ιστόγραμμα . . . 64
3.6.2 QQ-Plot . . . 65
3.6.3 Κριτήριο AIC . . . 65

**4 Εφαρμογή** **67**
4.1 Δεδομένα τιμών Ηλεκτρικής Ενέργειας . . . 67
4.2 Εύρεση Κατάλληλου Μοντέλου . . . 68
4.3 Ποσοτικοποίηση του Ρίσκου . . . 85
4.4 Μέθοδος Monte Carlo . . . 88
4.5 Προσομοίωση . . . 91
4.6 Συμπεράσματα . . . 96

**Συντομογραφίες** **97**

**Αναφορές** **98**

# 1 PPAs

## 1.1 Βασικοί Ορισμοί

**Ορισμός 1.1.** *Μια μονάδα παραγωγής ενέργειας (Power Plant) είναι μια βιομηχανική εγκατάσταση που παράγει ηλεκτρισμό από πρωτογενή ενέγεια, δηλαδή ενέργεια που περιέχεται σε ορυκτά καύσιμα και σε ανανεώσιμες πηγές ενέργειας και η οποία δεν έχει υποστεί μετατροπή ή μετασχηματισμό. Τα περισσότερα power plants αποτελούνται από μια ή περισσότερες γεννήτριες, οι οποίες μετατρέπουν τη μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική, ώστε να τροφοδοτήσουν με ενέργεια το ηλεκτρικό δίκτυο και να καλυφθούν οι ενεργειακές ανάγκες της κοινωνίας. Εξαίρεση αποτελούν τα ηλιακά power plants, τα οποία χρησιμοποιούν φωτοβολταϊκα κύτταρα (τεχνολογία που μετατρέπει την ηλιακή ενέργεια σε ηλεκτρική) αντί για τουρμπίνες που χρησιμοποιούν τα υπόλοιπα για να παράξουν ηλεκτρισμό.[1]*

**Ορισμός 1.2.** *Ηλεκτρικό δίκτυο (electrical grid) είναι ένα σύστημα, που έχει σχεδιαστεί με σκοπό την παροχή ηλεκτρισμού και εκτείνεται από την παραγωγή μέχρι και την κάλυψη των καθημερινών αναγκών των πελατών, που είναι συνδεδεμένοι σε αυτό. Τα συστήματα αυτά εμφανίζονται τόσο σε μικρές όσο και σε μεγάλες, περίπλοκες δομές πολλών χιλιομέτρων, που εξυπηρετουν από σπίτια μέχρι και επιχειρήσεις.*

*Ένα ηλεκτρικό δίκτυο αποτελείται από αμέτρητες σύνθετες διασυνδέσεις. Ωστόσο μπορεί κανείς να το ξεχωρίσει σε τρία διαφορετικά μέρη: Παραγωγή Ηλεκτρικής Ενέργειας, τη Μεταφορά Ηλεκτρικής Ενέργειας και τη Διανομή Ηλεκτρικής Ενέργειας. Παρουσιάζονται πιο αναλυτικά παρακάτω:*

*(i)* ***Παραγωγή Ηλεκτρικής Ενέργειας:***
*Η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας αποτελείται από τις μονάδες παραγωγής ενέργειας.*

*(ii)* ***Μεταφορά Ηλεκτρικής Ενέργειας:***
*Επιτυγχάνεται με τη χρήση καλωδίων που συνδέουν τις μονάδες παραγωγής με τα κέντρα ζήτησης. Το ρεύμα μπορεί τυπικά να ταξιδέψει αποστάσεις εως 500 χιλιόμετρα και εξαιτίας αυτού είναι αναπόφευκτη η απώλεια ενέργειας. Το πρόβλημα αυτό λύνεται με την αύξηση της τάσης του ρεύματος. Έτσι λοιπόν το ηλεκτρικό ρεύμα περνάει αρχικά από ένα σταθμό μετάδοσης, όπου αυξάνεται η τάση του.*

*(iii)* ***Διανομή Ηλεκτρικής Ενέργειας:***
*Βρισκόμαστε πλέον στο στάδιο όπου η ηλεκτρική ενέργεια φτάνει στους υποσταθμούς, όπου και γίνεται μείωση της τάσης. Έτσι το ρεύμα μεταφέρεται από αυτούς μέσω γραμμών διανομής σε σπίτια, βιομηχανίες κ.λ.π.. Όπου είναι απαραίτητο, γίνεται περαιτέρω υποβιβασμός τάσης με τη βοήθεια επιπλέον μετασχηματιστών.[2]*

**Ορισμός 1.3.** *Ενα Special Purpose Vehicle (SPV) είναι μια θυγατρική εταιρεία η οποία έχει σχηματιστεί για να αναλάβει συγκεκριμένο επαγγελματικό σκοπό/δράση. Τα SPVs χρησιμοποιούνται*

*συνήθως σε συγκεκριμένες οικονομικές εφαρμογές, όπως ασφάλιση περιουσιακού στοιχείου, συλλογικές επιχειρήσεις-κοινοπραξίες, συμφωνίες ακινήτων ή για να απομονωθούν τα περιουσιακά στοιχεία, οι επιχειρήσεις ή τα ρίσκα μιας μητρικής εταιρείας.[3, p.233]*

**Ορισμός 1.4.** *Ένα Corporate Power Purchase Agreement (CPPA ή PPA) είναι μια σύμβαση προμήθειας μεταξύ δυο αντισυμβαλλομένων, που καλύπτει είτε εικονικά (θα αναλύσουμε και παρακάτω περαιτέρω) είτε σε φυσική μορφή την παράδοση ενέργειας και έχει τη μορφή μακροχρόνιου συμβολαίου (πχ 15ετές, 20ετές). Σύμφωνα με αυτό ο ένας αντισυμβαλλόμενος (Corporate Offtaker) συμφωνεί να αγοράσει την ηλεκτρική ενέργεια που θέλει να καταναλώσει κατευθείαν από ένα SPV (ο άλλος αντισυμβαλλόμενος), το οποίο διαθέτει μονάδα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και ανήκει είτε σε έναν εργολάβο (developer) είτε σε έναν ανεξάρτητο παραγωγό ενέργειας (Indepedent Power Producer(IPP)).[4][3, p.25, p.233]*

**Παρατήρηση 1.5.** *Οι ανανεώσιμες πηγές ενέργειας (ΑΠΕ) ή ήπιες μορφές ενέργειας ή νέες πηγές ενέργειας ή πράσινη ενέργεια είναι μορφές εκμεταλλεύσιμης ενέργειας που προέρχονται από διάφορες φυσικές διαδικασίες, όπως ο άνεμος, η γεωθερμία, η κυκλοφορία του νερού και άλλες. Συγκεκριμένα σύμφωνα με την οδηγία 2009/28/ΕΚ του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου, ως ενέργεια από ανανεώσιμες μη ορυκτές πηγές θεωρείται η αιολική, ηλιακή, αεροθερμική, γεωθερμική, υδροθερμική και ενέργεια των ωκεανών, υδροηλεκτρική, από βιομάζα, από τα εκλυόμενα στους χώρους υγειονομικής ταφής αέρια, από αέρια μονάδων επεξεργασίας λυμάτων και από βιοαέρια.[5]*

**Παρατήρηση 1.6.** *Ένα Renewable PPA είναι ένα PPA στο οποίο ο παραγωγός, που σχετίζεται με αυτό (ο ένας από τους δύο αντισυμβαλλόμενους δηλαδη) διαθέτει μια μονάδα παραγωγής Ανανεώσιμης Πηγής Ενέργειας (ΑΠΕ).*

Τέτοια συμβόλαια παρέχουν οικονομική σταθερότητα τόσο για τους παραγωγούς, όσο και για τους καταναλωτές. Βάσει των PPAs διασφαλίζεται το bankability των έργων ΑΠΕ, δηλαδή διευκολύνεται η πρόσβαση σε δανεισμό, κυρίως μέσω των τραπεζών καθώς ο παραγωγός ΑΠΕ μπορεί να διασφαλίσει τη φερεγγυότητά του ως δανειστής (πιστωτής), επειδή έχει στα χέρια του ένα συμβόλαιο μακράς διαρκείας σύμφωνα με το οποίο θα προμηθεύει ενέργεια έναντι χρηματικού αντιτίμου. Με ένα PPA, όπως θα δούμε παρακάτω, ο παραγωγός (producer) δεν εκτίθεται καθόλου στα ρίσκα της αγοράς (merchant risks).

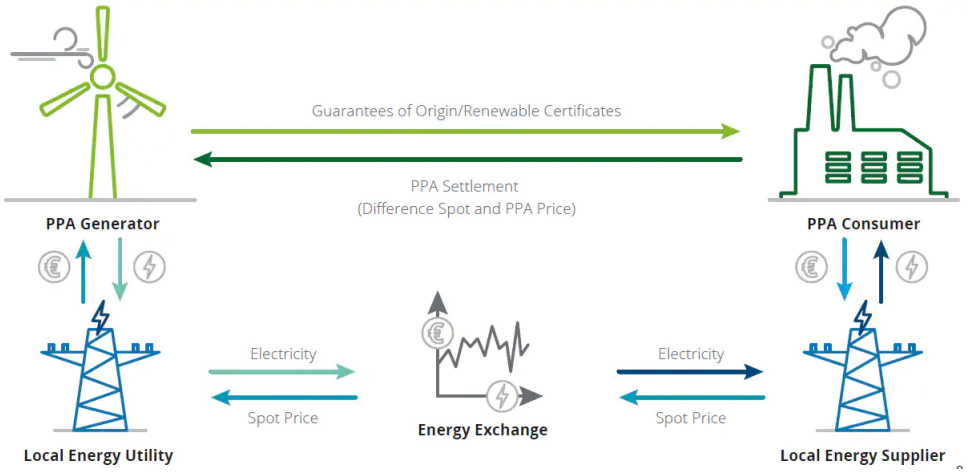
Εκτός από την προμήθευση ενέργειας, ο καταναλωτής προμηθεύεται και Πιστοποιητικά Ανανεώσιμης Ενέργειας (Energy Attribute Certificates (EAC)) με κάθε MWh. Σημειώνουμε οτι τα EAC στην Ευρώπη φέρουν την ονομασία Guarantee of Origin (GoO) ενώ στην Αμερική και τον Καναδά φέρουν την ονομασία Renewable Energy Certificate (REC). Η παραγωγή, η ανταλλαγή και η κατανάλωση ανανεώσιμης ενέργειας μπορεί να καταγραφεί μέσω των παραπάνω πιστοποιητικών, ώστε να πιστοποιείται ότι οι καταναλωτές τροφοδοτούν το δίκτυο με ανανεώσιμη μορφή ενέργειας. Τα πιστοποιητικά αυτά μπορούν να πωληθούν σε άλλους, ώστε να αντισταθμίσουν τις εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα που παράγουν.[6]

Ένα PPA χωρίζεται σε δύο βασικές κατηγορίες, τα Physical PPAs και τα Financial PPAs.

**Ορισμός 1.7** (Financial PPA). *Αυτού του είδους το PPA είναι μια οικονομική συμφωνία μεταξύ του παραγωγού της ανανεώσιμης ενέργειας και του άλλου αντισυμβαλλομένου με σκοπό και οι δύο να αντισταθμίσουν τη μεταβλητότητα των τιμών της αγοράς. Σε αντίθεση με το Physical PPA, που θα δούμε στη συνέχεια, εδώ δεν έχουμε φυσική παράδοση ενέργειας από τον παραγωγό της ανανεώσιμης ενέργειας στον άλλο αντισυμβαλλόμενο. Αντί αυτού, η ενέργεια παραδίδεται από τον παραγωγό στο τοπικό του δίκτυο και ο άλλος αντισυμβαλλόμενος πρέπει να φροντίσει ανεξάρτητα της συμφωνίας για τις ενεργειακές του ανάγκες. Τα Financial PPAs αναφέρονται στη βιβλιογραφία και ως "virtual" ή "synthetic" PPAs. Σε μια κάπως πιο λεπτομερή ανάλυση του πώς λειτουργεί ένα τέτοιου είδους συμβόλαιο, ο αντισυμβαλλόμενος συμφωνεί να δίνει μια συγκεκριμένη τιμή για κάθε κιλοβατώρα που παρέχει ο παραγωγός στο δίκτυο (strike price). Καθώς ο παραγωγός λαμβάνει την τιμή της αγοράς ως εισόδημα, το συμβόλαιο λειτουργεί ως εξής: Η διαφορά μεταξύ της τιμής της αγοράς και της strike price ανταλλάσεται κατάλληλα ώστε πάντα ο παραγωγός να λαμβάνει την προσυμφωνηθείσα τιμή από τον άλλο αντισυμβαλλόμενο για την ηλεκτρική ενέργεια που παρέχει στο δίκτυο. [7]*

Η Εικόνα 1.1 δείχνει το πως λειτουργεί ένα τέτοιο συμβόλαιο.

**Ορισμός 1.8** (Physical PPA). *Σε αυτή την κατηγορία PPA, έχουμε ένα μακρυπρόθεσμο συμβόλαιο μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, όπου ο ένας αντισυμβαλλόμενος (seller) συμφωνεί να χτίσει, να διατηρήσει και να λειτουργήσει ένα σύστημα παραγωγής ανανεώσιμης ενέργειας, που να προμηθεύει αυτή την ενέργεια στην επιχείρηση του άλλου αντισυμβαλλομένου (buyer). Η λειτουργία αυτού του συμβολαίου είναι ακριβώς η ίδια με του Financial PPA με τη διαφορά οτι εδώ υπάρχει φυσική παράδοση ενέργειας. Σχετικά με την τοποθεσία του συστήματος παραγωγής της ενέργειας, αυτή μπορεί να είναι είτε στο μέρος όπου στεγάζεται η επιχείρηση (on-site) είτε σε κάποιο άλλο σημείο (off-site). Σε κάθε περίπτωση η σύνδεση του συστήματος παραγωγής και της επιχείρησης γίνεται μέσω του ηλεκτρικού δικτύου. Στο συμβόλαιο αναγράφονται σαφώς καθορισμένα το σχέδιο παράδοσης του έργου, οι ποινές σχετικά με την παράδοση του, η εμπορική εκμετάλλευση, ο τερματισμός του, καθώς και η τιμή ανα κιλοβατώρα (kWh) Η τελευταία αφορά την τιμή, που θα δίνει η επιχείρηση που καταναλώνει το ηλεκτρικό ρεύμα στην εταιρεία που κατέχει το σύστημα παραγωγής. Σημειώνουμε ότι η εταιρεία που κατέχει το σύστημα παραγωγής επωμίζεται τα ρίσκα ιδιοκτησίας και χρήσης του συστήματος.[8]*




Εικόνα 1.1: PPA

Πηγή: Deloitte

**Ορισμός 1.9** (Βασικό Φορτίο-Base Load)**.** *Βασικό φορτίο (ενέργειας) είναι το ποσό της ενέργειας που παράγεται από έναν παραγωγό ενέργειας και είναι το απαραίτητο για να καλυφθούν οι ανάγκες του καταναλωτή της ενέργειας.*

**Ορισμός 1.10** (Οριακό Κόστος-Marginal Cost)**.** *Οριακό κόστος είναι το επιπλέον κόστος που προκύπτει από την παραγωγή μιας ακόμα μονάδας προϊόντος και βρίσκεται από τη διαίρεση της μεταβολής του συνολικού κόστους με τη μεταβολή της ποσότητας του προϊόντος. Εστιάζοντας στις μονάδες παραγωγής ενέργειας, που εκμεταλλεύονται τις ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, το οριακό κόστος τους είναι σχεδόν μηδεν. Το μηδενικό αυτό κόστος προκύπτει, καθώς για την παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας ενέργειας (δηλαδή προϊόντος) το κόστος είναι σχεδόν μηδενικό. Αυτο συμβαίνει, διότι αν εξαιρέσουμε τα έξοδα συντήρησης που αντιστοιχούν στην παραγωγή αυτής της ενέργειας, το κόστος κατα τα άλλα είναι μηδενικό, επειδή για να παραχθεί αυτή η ενέργεια, γίνεται εκμετάλλευση των ανανεώσιμων πηγών.*

**Ορισμός 1.11** (Φαινόμενο Κανιβαλισμού-Cannibalisation Effect)**.** *Η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας έχει μια αρνητική συσχέτιση με την προσφορά ανανεώσιμης ενέργειας στο δίκτυο και μάλιστα αυτή η αρνητική συσχέτιση αναμένεται να αυξηθεί κι άλλο καθώς όλο και περισσότερες μονάδες παραγωγής ανανεώσιμων μορφών ενέργειας διεισδύουν στην αγορά. Για παράδειγμα, όπως προαναφέρθηκε, αν σε κάποιο χρονικό διάστημα της ημέρας υπάρχουν άνεμοι, οι ανεμογεννήτριες παρέχουν ενέργεια στο δίκτυο με πολύ χαμηλό οριακό κόστος με αποτέλεσμα η διοχέτευση ενέργειας με χαμηλό οριακό κόστος να αναγκάζει τα εργοστάσια συμβατικού τρόπου παραγωγής ενέργειας (π.χ. εργοστάσια παραγωγής λιγνίτη) να μην λειτουργούν και με αυτό τον τρόπο οι τιμές ενέργειας ωθούνται προς τα*

*κάτω. Στην περίπτωση που ο άνεμος δε θα φυσάει τόσο έντονα, τα εργοστάσια παραγωγής λιγνίτη για παράδειγμα, θα μπορούσαν να διοχετεύουν παραπάνω ενέργεια στο δίκτυο και επειδή η παραγωγή ενέργειας σε αυτά έχει υψηλότερο οριακό κόστος, να ανεβάζουν και πάλι τις τιμες. Μια παρόμοια κατάσταση ισχύει και με τα φωτοβολταϊκά το μεσημέρι.*

## 1.2 Είδη Ρίσκου

Για την επίτευξη ενός PPA πρέπει να γίνει μια σωστή κατανομή των ρίσκων στα δύο αντισυμβαλλόμενα μέλη του συμβολαίου. Για την κατανομή των ρίσκων λοιπόν χρησιμοποιείται μια αρχή, σύμφωνα με την οποία, τα διάφορα είδη ρίσκων διανέμονται σε εκείνο το αντισυμβαλλόμενο μέλος που είναι πιο ικανό να τα διαχειριστεί.

Η διαχείριση μέρους των ρίσκων που προκύπτουν από τέτοια συμβόλαια μπορεί να είναι και ευθύνη τρίτων μελών, εκτός των δυο πρωτευόντων - κάτι το οποίο μπορεί να αναφέρεται σε ένα τέτοιο συμβόλαιο.

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το ρίσκο που επωμίζεται η εταιρεία που θα αναλάβει την κατασκευή της μονάδας παραγωγής ενέργειας, η οποία δεν είναι ένα από τα δύο αντισυμβαλλόμενα μέλη του συμβολαίου.

Στη συνέχεια θα δούμε μερικά από τα ρίσκα που συμπεριλαμβάνονται σε ένα PPA.

(i) **Ρίσκο Αγοράς (Merchant/Market Risk):**

Όπως προαναφέρθηκε, ο καταναλωτής συμφωνεί να δίνει μια συγκεκριμένη τιμή ανα κιλοβατώρα (strike price) στον παραγωγό. Καθώς αυτή η τιμή συμφωνείται να δίνεται για μια μεγάλη χρονική περίοδο, υπάρχει ο κίνδυνος, σε περίπτωση που η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας μειωθεί, ο αγοραστής να πληρώνει ένα μεγαλύτερο ποσό (strike price) από αυτό που θα επικρατεί στην αγορά. Αυτό το σενάριο ωστόσο θα μπορούσε να συμβεί στο μέλλον, καθώς η εισαγωγή νέων τεχνολογιών, οι ρυθμιστικές τροποποιήσεις των κρατών, οι καλύτερες δυνατότητες μεταφοράς ή και συνδυασμός αυτών παραγόντων μπορούν να μειώσουν την τιμή του ηλεκτρισμού.

Σχετικά με τη μείωση αυτού του είδους ρίσκου πρέπει οι αγοραστές να συμβουλευτούν τόσο έναν ειδικό στην αγορά ενέργειας όσο και προβλέψεις τιμών.

(ii) **Ρίσκο Διάρκειας (Tenor Risk):**

Το συγκεκριμένο ρίσκο σχετίζεται με τη διάρκεια στην οποία ο καταναλωτής είναι υποχρεωμένος να πληρώνει σύμφωνα με το PPA. Η διάρκεια του συμβολαίου μπορεί είτε να είναι προκαθορισμένη - σταθερή είτε να καθορίζεται από διάφορους παράγοντες που μπορεί να προκαλέσουν τη λύση του συμβολαίου.

Μια προκαθορισμένη τιμή ανα κιλοβατώρα μπορεί να εγείρει είτε την απόκτηση σημαντικής συσσώρευσης κεφαλαίου αν η τιμή ενέργειας ανέβει, είτε το κλείδωμα σε μία υψηλότερη από την αγορά τιμή, αν η τιμή στην ενέργεια μειωθεί.

Σχετικά με τη μείωση αυτού του είδους ρίσκου μια λύση μπορεί να είναι μηχανισμοί πώλησης

και αγοράς (put and call mechanisms) για να αντισταθμίσουν τις προσδοκίες των αντισυμβαλλόμενων του PPA. Για παράδειγμα, αν η τιμή της ενέργειας ανέβει, ο καταναλωτής μπορεί να έχει την επιλογή να επεκτείνει τη διάρκεια του συμβολαίου με μία υψηλότερη τιμή. Αντίστοιχα, αν η τιμή της ενέργειας μειωθεί, ο παραγωγός μπορεί να έχει την επιλογή να επεκτείνει τη διάρκεια του συμβολαίου με μία χαμηλότερη τιμή. Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι τιμές αγοράς και πώλησης (put and call prices) είναι προκαθορισμένες, έχοντας κάποια αποδεκτά άνω και κάτω φράγματα.

(iii) **Νομισματικό (ή συναλλαγματικό) Ρίσκο(Currency (or foreign exchange) risk)**

Πρόκειται για το ρίσκο που προκύπτει από την ασυμφωνία του νομίσματος των υποχρεώσεων του χρέους και του νομίσματος των εισοδημάτων, που εκθέτει το όλο εγχείρημα στην υποτίμηση με το πέρασμα του χρόνου. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα τις μειωμένες επενδύσεις στη χώρα λόγω αυτού του είδους ρίσκου.

Για να μετριαστεί αυτού του είδους το ρίσκο μπορούν να χρησιμοποιηθούν Συμβάσεις Ανταλλαγής Νομισμάτων (currency swaps)(εξηγώ ή όχι? https://el.wikipedia.org/wiki/Συμβάσεις_Ανταλλαγής_(Swaps)) με κάποιον τρίτο πάροχο για προστασία ενάντια σε τυχόν υποτιμήσεις.

(iv) **Πιστωτικό Ρίσκο (Credit Risk):**

Καθώς στα PPA το να μπορεί ο καταναλωτής να πληρώνει το ποσό που προκύπτει από το συμβόλαιο είναι υψίστου σημασίας, η πιστοληπική ικανοτητα (creditwirthiness) είναι και αυτή υψίστου σημασίας. Πιο συγκεκριμένα, το bankability, στο οποίο έχουμε αναφερθεί πιο πάνω, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την πιστοληπτική ικανότητα του αγοραστή. Το πιστωτικό ρίσκο καλύπτει το ενδεχόμενο κάποιος αγοραστής να μην μπορέσει στο μέλλον να πληρώσει τα έξοδα που προκύπτουν από ένα τέτοιο συμβόλαιο. Ακόμα και αν κάποιος αγοραστής έχει μια καλή φήμη, όσο αφορά τη φερεγγυότητά του ως πιστωτής, η πιστοληπτική του ικανότητα θα ελεγχθεί εξονυχιστικά.

Η μετρίαση του συγκεκριμένου ρίσκου μπορεί να μετριαστεί μέσω της ποσοτικοποίησης της πιστοληπτικής ικανότητας ωστε να παρθούν αποφάσεις βάσει αυτού. Σημειώνουμε οτι η ικανότητα αυτή προκύπτει από την αξιολόγηση των χαρακτηριστικών των επιχειρήσεων οι οποίες εξετάζονται και αποτυπώνεται κάποια κλίμακα. Σε κάθε ζώνη της κλίμακας αντιστοιχεί συγκεκριμένη πιθανότητα εμφάνισης ασυνέπειας.

(v) **Ρίσκο Χρονοδρομολόγησης (Scheduling Risk):**

Το συγκεκριμένο ρίσκο σχετίζεται με τις αποκλίσεις ανάμεσα στις προβλέψεις για την αναμενώμενη παραγωγή των γεννητριών που διοχετεύνται στο δίκτυο και τη και στην πραγματική παραγωγή.

Τυπικά η επιβάρυνση αυτού του ρίσκου εκφράζεται μέσω τελών που καταβάλλονται στους χειριστές του δικτύου.

(vi) **Ρίσκο Βάσης (Basis Risk):**

Η τοποθεσία της μονάδας παραγωγής ενέργειας έχει μεγάλη επίδραση στο ρίσκο που αναφέρεται σαν ρίσκο τοποθεσίας (location risk). Ένας μεγάλος αριθμός παραγόντων σχετίζεται με την τοποθεσία όπως η συμφόρηση της γραμμής μετάδοσης της ενέργειας, ο αέρας, η διακοπτόμενη ηλιοφάνεια, ο κορεσμός της αγοράς και η τοπικοί κανονισμοί-νομοθεσίες μπορούν να επηρρεάσουν την τιμή ενός PPA.

Ένα είδος ρίσκο τοποθεσίας είναι και το ρίσκο βάσης όπου ουσιαστικά είναι η πιθανότητα της ασυμφωνίας ανάμεσα στην τιμή που υπάρχει στην αγορά που βρίσκεται η μονάδα παραγωγής και στην προσυμφωνηθείσα τιμή του PPA. Με άλλα λόγια, αν ο αγοραστής και ο παραγωγός βρίσκονται σε διαφορατικές τοποθεσίες και οι πληρωμές του PPA συνδέονται με την αγορά που βρίσκεται στον παραγωγό, τότε ο αγοραστής είναι εκτεθημένος στο ρίσκο βάσης της αγοράς που βρίσκεται στην περιοχή του παραγωγού. Στην περίπτωση που η λιανική τιμή στην αγορά του αγοραστή και στην χονδρική τιμή στην περιοχή της αγοράς του πωλητή δε συνδέονται, ο αγοραστής είναι εκτεθειμένος στη μεταβλητότητα της λιανικής αγοράς ενέργειας.

Ο καταμερισμός αυτού του ρίσκου επιτυγχάνεται μέσω κάποιων Virtual PPAs που προσφέρουν προσαρμογές στις τιμές. Εναλλακτικά κάποιοι ιδιοκτήτες μονάδων παραγωγής κάνουν συμφωνία με τρίτα μέρη ώστε να εξισορροπήσουν αυτό το ρίσκο είτε με δική τους πρωτοβουλία, είτε κατόπιν απαιτήσεως από τους δανειστές τους.

(vii) **Ρίσκο εξισορρόπησης (Balancing Risk):**

Το συγκεκριμένο είδος ρίσκου σχετίζεται με τη συνεχή ανάγκη του αγοραστή για ενέργεια. Είναι το ρίσκο που προκύπτει από το κόστος του συστήματος ενέργειας, που χρησιμοποιείται από τον αγοραστή, όταν μια μονάδα παραγωγής παράγει λιγότερη ενέργεια από την προβλεπόμενη. Όσο περισσότερο συνεισφέρει μια μονάδα στην ανισορροπία του συστήματος παραγωγής, τόσο πιο υψηλό είναι το κόστος ανισορροπίας. Όσο υψηλότερη είναι η συσχέτιση του προφίλ παραγωγής ενός Power Plant με το προφίλ παραγωγής της αντίστοιχης του Power Plant τεχνολογίας της αγοράς, τόσο η ανισορροπία του τεχνολογίας συσχετίζεται με την ανισορροπία ολόκληρου του συστήματος ενέργειας, έχοντας ως αποτέλεσμα υψηλότερα κόστη ανισορροπίας.

Ένας τρόπος να μετριαστεί αυτό το ρίσκο είναι η εξωτερική ανάθεση, όπως για παράδειγμα η ένταξη σε μια συμφωνία με ένα τρίτο μέλος (ή ένα μέλος που να ανήκει στον ίδιο με τον αγοραστή όμιλο), που συμφωνεί να παρέχει την απαιτούμενη ενέργεια σε περίπτωση ανεπαρκούς παραγωγής, ώστε να μπορέσουν να καλυφθούν οι ανάγκες του αγοραστή. Σε κάθε περίπτωση το τρίτο μέλος χρεώνει με κάποιο ποσό για να μπορέσει να γίνει διαχείριση αυτού του ρίσκου.

(viii) **Ρίσκο Ποσότητας (Volume Risk):**

Το εν λόγω ρίσκο σχετίζεται με τη μεταβλητότητα στην παραγωγή μιας μονάδας παραγωγής σε μια συγκεκριμένη περίοδο χρόνου, η οποία μπορεί να είναι μια εποχή ή ένα έτος. Αυτό το ρίσκο προκύπτει από τις κλιματικές διακυμάνσεις, όπως μεγαλύτερες ταχύτητες ανέμων απο το αναμενόμενο σε ένα έτος ή μειωμένη ηλιοφάνεια λόγω ενός συννεφιασμένου καλοκαιριού.

Οι αγοραστές εμμένουν στο οτι οι παραγωγοί πρέπει να δεσμευτούν σε μια ελάχιστη παραγωγή

για ένα εύλογο χρονικό διάστημα, με την οποία να είναι σύμφωνος και ο παραγωγός, ο οποίος θα θεωρεί ότι οι εγκαταστάσεις του είναι δυνατόν να παράξουν την απαιτούμενη ποσότητα σε αυτό το χρονικό διάστημα. Η αποτυχία επίτευξης του στόχου αυτού θα οδηγήσει τον αγοραστή στο να αγοράσει ενέργεια από άλλη πηγή, την οποία θα πρέπει να χρεωθεί ο παραγωγός.

(ix) **Ρίσκο Προφίλ (Shape/Profile Risk):**

Το εν λόγω ρίσκο σχετίζεται με το ρίσκο ποσότητας στο οποίο αναφερθήκαμε πιο πάνω αλλα λαμβάνει υπόψιν το γεγονός ότι η ωριαία παραγωγή είναι μεταβαλλόμενη ανάλογα με την ηλιοφάνεια ή την ταχύτητα του ανέμου, ανεξάρτητα από το αν η συνολική παραγωγή μιας περιόδου είναι ίση με την εκτιμόμενη ποσότητα παραγωγής. Η πραγματική παραγωγή ενέργειας από μια μονάδα παραγωγής ανανεώσιμης ενέργειας, που είναι διακοπτόμενη μπορεί να διαφέρει από τις προβλέψεις παραγωγής και έτσι λοιπόν ίσως να μην μην μπορέσει να καλύψει τη ζήτηση βασικού φορτίου του αγοραστή (η οποία συνήθως είναι σταθερή με μια διαφοροποίηση ανάμεσα στις μέρες που λειτουργεί και που δεν λειτουργεί η εταιρεία του αγοραστή).

Το συγκεκριμένο ρίσκο μπορεί να μειωθεί με διάφορες μεθόδους. Μία από αυτές είναι ο καταναλωτής να χρησιμοποιήσει το ηλεκτρικό δίκτυο σαν παροχέα της επιπλέον ηλεκτρικής ενέργειας που χρειάζεται ώστε να εξασφαλίσει την απαιτούμενη ενέργεια που χρειάζεται. Επίσης χάρη στην εξυπνη ψηφιακή τηλεμετρία (smart digital telemetry) και στον έλεγχο προόδου (process control), ο καταναλωτής μπορεί να προσαρμόζει την παραγωγή του στο προφίλ παραγωγής της μονάδας. Τέλος με την εγκατάσταση συστημάτων αποθήκευσης ενέργειας στις μονάδες παραγωγής μπορεί να περιοριστεί αυτό το ρίσκο καθώς θα εξομαλυνθεί το προφίλ παραγωγής και έτσι κάθε στιγμή θα μπορούν να καλυφθούν οι ανάγκες του αγοραστή. Με αυτή τη μέθοδο μπορεί επίσης να μειωθεί και το ρίσκο ανισορροπίας.

(x) **Ρίσκο Κατασκευής (Construction Risk):**

Για την κατασκευή νέων μονάδων παραγωγής, το ρίσκο κατασκευής είναι άλλο ένα ρίσκο που πρέπει να ληφθεί υπόψιν. Η κατασκευή μιας μονάδας συνήθως έχει κάποιο χρονοδιάγραμμα σύφωνα με το οποίο το έργο θα οφείλει να είναι έτοιμο μέχρι κάποια καταληκτική ημερομηνία. Το ρίσκο αυτό λοιπόν σχετίζεται με τον κίνδυνο μη έγκαιρης παράδοσης του έργου.

Για να μετριαστεί αυτό το ρίσκο ο αγοραστής διαπραγματεύεται στους όρους του συμβολαίου τυς προϋποθέσεις που θα τον κάνουν να έχει το δικαίωμα απόσυρσης από τη συμφωνία, είτε το δικαίωμα αποζημίωσης σε περίπτωση μη έγκαιρης παράδοσης του έργου. Οι ιδιοκτήτες της μονάδας παραγωγής από την άλλη θα δράσουν βάσει τον όρων του συμβολαίου ώστε να μην ξεπεραστεί το χρονικό όριο. Σε περιπτώσης ανωτέρας βίας ωστόσο συχνα μπορεί να υπάρχει η επιλογή επέκτασης της καταληκτικής ημερομηνίας χωρίς συνέπειες.

(xi) **Ρίσκο Απόδοσης ή Λειτουργίας (Performance or Operating Risk):**

Το ρίσκο αυτό σχετίζεται με τον κίνδυνο που υπάρχει για μία μονάδα παραγωγής να μην παράγει τα επιθυμητά ποσά ενέργειας.

Για να περιοριστεί αυτό το ρίσκο, πρέπει ο παραγωγός να εστιάσει στην βελτιστοποίηση του τρόπου παραγωγής της μονάδας του ώστε να υπαρχουν τα επιθυμητά αποτελέσματα. Ανάλογα με τους όρους του συμβολαίου ο αγοραστής θα έχει το δικαίωμα απόσυρσης από τη συμφωνία αν η μονάδα παράγει κάτω από κάποια προσυμφωνηθείσα ποσότητα παραγωγής.

(xii) **Ρίσκο Αλλαγής Νόμου (Change in Law Risk):**

Είτε την περίοδο κατασκευής της μονάδας παραγωγής είτε κατα την περίοδο λειτουργίας μπορεί να υπάρξει κάποια αλλαγή στη νομοθεσία που να επηρρεάσει τους όρους της συμφωνίας του συμβολαίου. Ενα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι μια πιθανή αλλαγή των νόμων σχετικά με τη φορολογία

Ο κύριος μηχανισμός μετρίασης αυτού του ρίσκου είναι να υπάρχουν μηχανισμοί και δικλείδες ασφαλείας ώστε να μπορεί να γίνει επαναδιαπραγμάτευση των όρων του συμβολαίου σε περιπτώσεις αλλαγής της νομοθεσίας.

(xiii) **Ρίσκο Ανωτέρας Βίας (Force Majeure Risk):**

Ένα συμβάν ανωτέρας βίας μπορεί να λάβει χώρα στην μονάδα παραγωγής είτε κατα την περίοδο κατασκευής της είτε κατα την περίοδο λειτουργίας της που να επηρρεάσει τους όρους της συμφωνίας του έργου.Ένα τέτοιο γεγονός θα μπορούσε να είναι ένας πόλεμος ή κάποιο ακραίο καιρικό φαινόμενο.

Σε τέτοιες περιπτώσεις ο κύριος μηχανισμός μετρίασης αυτού του ρίσκου είναι όπως και στην προηγούμενη περίπτωση ρίσκου μηχανισμοί και δικλείδες ασφαλείας για επαναδιαπραγμέτευση των όρων του συμβολαίου. από τη μεριά του αγοραστή, αυτός θα εστιάσει στο οτι ο παραγωγός κάνει οτι μπορεί ώστε στην περίπτωση κάποιου γεγονότοτος ανωτέρας βίας, ο τελευταίος κάνει ότι μπορεί για να αποκαταστήσει την ομαλή λειτουργία ή την διαδικασία κατασκευής της μονάδας. Συχνά επίσης μπορεί να υπάρχει και όρος σύμφωνα με τον οποίο ο αγοραστής θα μπορεί να αποσυρθεί από τη συμφωνία αν το γεγονος ανωτέρας βίας ξεπεράσει μια μη αμελητέα διάρκεια.

# 2 Μέτρα Ρίσκου

Ενα κεντρικό ερώτημα στη διαχείρηση ρίσκου είναι η ποσοτικοποίηση του. Ένας τρόπος να το μετρήσουμε είναι μέσω των μέτρων ρίσκου. Τα μέτρα ρίσκου είναι συναρτήσεις όπου σαν όρισμα δέχονται μετρήσιμες συναρτήσεις και παίρνουν τιμές στους πραγματικούς αριθμούς. Αναλυτικότερα, θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}.P)$ (εφοδιασμένο με μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ και ένα μέτρο πιθανότητας $P$) και $\mathcal{Z} := \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}.P)$ το σύνολο όλων των $\mathcal{F}$-μετρήσιμων τυχαίων μεταβλητών που σχεδόν βέβαια (με πιθανότητα 1) είναι πεπερασμένες. Εναλλακτικά λέμε ότι αν για μια τυχαία μεταβλητή $X \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}.P)$ , τότε $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| < \infty\}) = 1$.[9, p.564],[10, p.239]

Έχοντας ένα συγκεκριμένο σύνολο σεναρίων $\Omega$ λοιπόν, μια οικονομική θέση (financial position) είναι μια απεικόνιση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ όπου $X(\omega)$ συμβολίζει την αποτοκισμένη αξία μίας οικονομικής θέσης στο τέλος μιας περιόδου συναλλαγών (trading period) όταν πραγματοποιείται ένα σενάριο $\omega \in \Omega$. Η αποτοκισμένη αξία αντιστοιχεί στα κέρδη και τις ζημιές της θέσης. Με τον αριθμό $\rho(X)$ που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια θα ποσοτικοποιήσουμε το ρίσκο που συνδέεται με το $X$, όπου με τη σειρά του το $X$ θα λαμβάνει τιμές σε ένα σύνολο $\mathcal{M}$ το οποίο θα είναι συνήθως ένας κυρτός κώνος.

## 2.1 Ορισμοί

**Ορισμός 2.1.** *Έστω $S \subseteq \mathbb{C}^n$.Το $S$ είναι κώνος αν $\forall\, x \in S$ και $\forall\, a > 0$, το $ax \in S$.Αντίστοιχα το $S$ είναι κυρτός κώνος αν $\forall\, x, y \in S$ και $a \in [0,1]$ το $ax + (1-a)y \in S$.[11, p.89]*

**Παρατήρηση 2.2.** *Θεωρούμε έναν κυρτό κώνο $S \subseteq \mathbb{C}^n$. Τότε για κάθε $x, y \in S$ έχουμε οτι αρκεί $\mu, \lambda \geq 0$ ώστε $\mu x + \lambda y \in S$. Ουσιαστικά δηλαδή δεν χρειάζεται να υπάρχει ο περιορισμός $\mu + \lambda = 1$.*

*Απόδειξη.* Έστω $x, y \in S$. Καθώς το σύνολο $S$ είναι κυρτός κώνος έχουμε ότι για κάθε $a \in [0,1]$ ισχύει ότι $ax + (1-a)y \in S$. από την άλλη έχουμε ότι αφου το σύνολο $S$ είναι κώνος ισχύει ότι $\mu x, \lambda y \in S$. Επομένως μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα $x, y$ με τα $\mu x, \lambda y$ αντίστοιχα. Αφού $S$ είναι κυρτός κώνος λοιπόν έχουμε ότι $a\mu x + (1-a)\lambda y \in S$. Καθώς τα $\mu, \lambda$ είναι μη αρνητικά έχουμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα $a\mu, (1-a)\lambda$ με $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ αντίστοιχα. Συμπεραίνουμε λοιπόν οτι $\theta_1 x + \theta_2 y \in S$ και έχουμε το ζητούμενο.

□

Έχοντας όλα τα απαραίτητα εργαλεία τώρα, μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό του μέτρου ρίσκου.

**Ορισμός 2.3.** *Μια απεικόνιση $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ καλείται (χρηματικό) μέτρο ρίσκου αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες για $X, Y \in \mathcal{M}$ όπου $\mathcal{M}$ είναι κυρτός κώνος.*

*(i) Monotonicity : Αν $X \leq Y$, τότε $\rho(X) \geq \rho(Y)$.*

*(ii) Cash Invariance ή Translation Invariance : Αν $m \in \mathbb{R}$, τότε $\rho(X + m) = \rho(x) - m$*

*(a) Κανονικοποίηση (Normalization):* $\rho(0) = 0$.

Θέλοντας να δώσουμε μια χρηματοοικονομική ερμηνεία των παραπάνω ιδιοτήτων, σχετικά με την ιδιότητα (i) οτι το πτωτικό ρίσκο (downside risk), δηλαδή την πιθανή απώλεια αξίας εάν οι συνθήκες της αγοράς προκαλέσουν τη μείωση της τιμής ενός τίτλου[12], μειώνεται όσο το προφίλ αποπληρωμής αυξάνεται. Η ιδιότητα Cash Invariance προκύπτει από τη θεώρηση του $\rho(X)$ ως κεφαλαιακή απαίτηση (capital requirement), κοινώς ο αριθμός $\rho(X)$ είναι το ποσό που πρέπει να προστεθεί σε μια θέση ώστε αυτή να γίνει δεκτή από κάποια εποπτική αρχή. Με αυτή τη λογική, αν προσθέσουμε ένα ποσό $m$ σε μία θέση και αυτό επενδυθεί χωρίς ρίσκο, τότε η κεφαλαιακή απαίτηση θα μειωθεί κατα το ίδιο ποσό. Σχετικά με την κανονικοποίηση η ερμηνεία είναι οτι το ρίσκου ενός τίτλου μηδενικής τιμής είναι μηδέν.

**Παρατήρηση 2.4.** *Τετριμμένα λοιπόν βάσει των παραπάνω λαμβάνουμε ότι*

$$\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$$

Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στην κλάση των μέτρων ρίσκου που έχουν και επιπλέον την ιδιότητα της κυρτότητας.

**Ορισμός 2.5.** *Ένα (χρηματικό) μέτρο ρίσκου* $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *καλείται κυρτό μέτρο ρίσκου (convex risk measure) αν ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα:*
*Για* $X, Y \in \mathcal{M}\,, \lambda \in [0, 1]$

$$\textit{Κυρτότητα(Convexity)}: \rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$$

Τέλος θα εστιάσουμε στην κλαση των συνεκτικών μέτρων ρίσκου, όπου πρόκειται για κυρτά μέτρα ρίσκου που έχουν επιπλέον την ιδιότητα της Θετικής Ομοιογένειας (Positive Homogeneity).

**Ορισμός 2.6.** *Ένα κυρτό μέτρο ρίσκου καλείται συνεκτικό μέτρο ρίσκου (coherent risk measure) αν ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα:*
*Για* $X \in \mathcal{M}\,, \lambda \geq 0$

$$\textit{Θετική Ομοιογένεια(Positive Homogeneity)}: \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$$

**Παρατήρηση 2.7.** *Αν ισχύει η Θετική Ομοιογένεια τότε η Κυρτότητα ισοδυναμεί με :*

$$\textit{Υποπροσθετικότητα(Subadditivity)}: \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Με αυτό τον τρόπο καθώς ο κλασσικός ορισμός του συνεκτικού ρίσκου δεν απαιτεί την κυρτότητα αλλα την υποπροσθετικότητα οδηγούμαστε στον εξής ορισμό για το συνεκτικό μέτρο ρίσκου.

**Ορισμός 2.8** (Συνεκτικό Μέτρο Ρίσκου-Coherent Risk Measure)**.** *Ένα συνεκτικό μέτρο ρίσκου είναι μια συνάρτηση* $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες για κάθε* $X, Y \in \mathcal{M}$ :

*(i) Θετική Ομοιογένεια(Positive Homogeneity) :* $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ *για* $\lambda \geq 0$.

*(ii) Υποπροσθετικότητα(Subadditivity) :* $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

*(iii) Monotonicity : Αν* $X \leq Y$, *τότε* $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

*(iv) Translation Invariance : Αν* $m \in \mathbb{R}$, *τότε* $\rho(X + m) = \rho(x) - m$.

**Λήμμα 2.9.** *Ένα μέτρο ρίσκου* $\rho$ *είναι Lipschitz συνεχές συναρτήσει της supremum νορμας* $\|\cdot\|_\infty$*:*

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty$$

*Απόδειξη.* Ισχύει αρχικά ότι $X - Y \leq \|X - Y\|_\infty \Leftrightarrow X \leq Y + \|X - Y\|_\infty$ από την ιδιότητα του Monotonicity λοιπόν λαμβάνουμε ότι

$$\rho(X) \geq \rho(Y + \|X - Y\|_\infty)$$

ενώ από την ιδιότητα Translation Invariance ισχύει ότι $\rho(X) \geq \rho(Y + \|X - Y\|_\infty) = \rho(Y) - \|X - Y\|_\infty$

Επομένως

$$\rho(X) - \rho(Y) \geq - \|X - Y\|_\infty$$

όμοια με πρίν ισχύει ότι $X - Y \geq - \|X - Y\|_\infty \Leftrightarrow X \geq Y - \|X - Y\|_\infty$ οπότε όμοια με πρίν από τις ιδιότητες Monotonicity και Translation Invariance λοιπόν λαμβάνουμε ότι

$$\rho(X) \leq \rho(Y - \|X - Y\|_\infty) = \rho(Y) + \|X - Y\|_\infty$$

οπότε

$$\rho(X) - \rho(Y) \leq \|X - Y\|_\infty$$

οπότε συνολικά έχουμε ότι

$$- \|X - Y\|_\infty \leq \rho(X) - \rho(Y) \leq \|X - Y\|_\infty \Leftrightarrow |\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty$$

και έχουμε το ζητούμενο

□

**Ορισμός 2.10.** *Ένα μέτρο ρίσκου $\rho$ επάγει την κλάση*

$$\mathcal{A}_\rho := \{X \in \mathcal{M} \,|\, \rho(X) \leq 0\} \tag{2.1}$$

*που αποτελείται από οικονομικές θέσεις οι οποίες είναι αποδεκτές υπο την έννοια του ότι δεν απαιτείται επιπλέον κεφάλαιο για να μην υπάρχει ρίσκο. Η κλάση $\mathcal{A}_\rho$ ονομάζεται λοιπόν αποδεκτό σύνολο του μέτρου ρίσκου $\rho$. Προφανώς ισχύει ότι $\mathcal{A}_\rho \subseteq \mathcal{M}$.*

Αντίστροφα τώρα, δοθείσας μια κλάσης $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ μπορούμε να συσχετίσουμε ένα μέτρο ρίσκου $\rho_\mathcal{A}$ με αυτή την κλάση.

**Ορισμός 2.11.** *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ ένα αποδεκτό σύνολο από τυχαίες μεταβλητές. Το μέτρο ρίσκου $\rho_\mathcal{A}$ που σχετίζεται με αυτό το σύνολο ορίζεται με τον εξής τρόπο: Για $X \in \mathcal{M}$ έχουμε ότι*

$$\rho_\mathcal{A}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \,:\, X + m \in \mathcal{A}\} \tag{2.2}$$

Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό $\rho_\mathcal{A}(X)$ είναι το το ελάχιστο ποσό που πρέπει να προστεθεί σε μια οικονομική θέση για να θεωρηθεί αυτή αποδεκτή.

Σχετικά με τους παραπάνω ορισμούς λοιπόν μπορεί κανείς να παρατηρήσει οτι είτε ξεκινάμε με ένα μέτρο ρίσκου και κατασκευάζουμε ένα αποδεκτό σύνολο, είτε ξεκινάμε με ένα αποδεκτό σύνολο τυχαίων μεταβλητών και κατασκυάζουμε ένα μέτρο ρίσκου.

Ακολουθούν κάποιες προτάσεις που συσχετίζουν τα μέτρα ρίσκου με τα αποδεκτά σύνολα.

**Πρόταση 2.12.** *Έστω $\rho$ ένα κυρτό μέτρο ρίσκου και $\mathcal{A}_\rho$ ένα αποδεκτό σύνολο. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

*(i)* $\rho_{\mathcal{A}_\rho} = \rho$

*(ii)* *$\mathcal{A}_\rho$ είναι ένα μη κενό κυρτό κλειστό σύνολο συναρτήσει της supremum νόρμας $\|\cdot\|_\infty$*

*(iii)* *Αν $X \in \mathcal{A}_\rho$ και $Y \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε $X \leq Y$ ,τότε $Y \in \mathcal{A}_\rho$*

*(iv)* *Αν $\rho$ είναι ένα συνεκτικό μέτρο ρίσκου , τότε $\mathcal{A}_\rho$ είναι ένας κυρτός κώνος.*

*Απόδειξη.*

(i)

Για κάποιο $X \in \mathcal{A}_\rho$

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{A}_\rho} &= \inf\{m \in \mathbb{R} \,:\, m + X \in \mathcal{A}_\rho\} \\ &= \inf\{m \in \mathbb{R} \,:\, m + X \in \{Y \in \mathcal{M} \,:\, \rho(Y) \leq 0\}\}\end{aligned}$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} \,:\, \rho(m+X) \leq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} \,:\, \rho(X) - m \leq 0\}$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} \,:\, \rho(X) \leq m\} = \rho(X)$$

(ii)

Αρχικά έχουμε οτι το $\mathcal{A}_\rho$ είναι μη κενό καθώς το $X = 0 \in \mathcal{A}_\rho$ διότι $\rho(0) = 0$ και άρα ικανοποιείται η συνθήκη $\rho(0) \leq 0$. Για να αποδείξουμε τώρα οτι το $\mathcal{A}_\rho$ είναι ένα κυρτό σύνολο θα κάνουμε μια απόδειξη ως προς άτοπο.

Για να αποδείξουμε το οτι το σύνολο $\mathcal{A}_\rho$ είναι κλειστό θα θεωρήσουμε κάποια ακολουθία $(X_n) \in \mathcal{A}_\rho$ που συγκλίνει σε κάποιο $X \in \mathcal{M}$. Ισχύει λοιπόν ότι $X_n \to X$. Αν αποδείξουμε οτι το όριο $X$ της ακολουθίας ανήκει στο σύνολο $\mathcal{A}_\rho$ έχουμε το ζητούμενο.

Έστω προς άτοπο ότι $X \notin \mathcal{A}_\rho$. Αυτό σημαίνει ότι $\rho(X) > 0$ και άρα υπάρχει ένας αριθμός $M > 0$ τέτοιος ώστε $\rho(X) = M$.

από την άλλη καθώς $X_n \to X$ ισχύει ότι $\|X_n - X\|_\infty \to 0$ και άρα καθώς από το Λήμμα 2.9 έχουμε ότι

$$|\rho(X_n) - \rho(X)| \leq \|X_n - X\|_\infty$$

Άρα $|\rho(X_n) - \rho(X)| \to 0$, επομένως $\rho(X_n) \to \rho(X) = M$

από τον ορισμό του ορίου έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall \, n \geq n_0 \; |\rho(X_n) - M| < \varepsilon$, οπότε

$$-\varepsilon < \rho(X_n) - M < \varepsilon \Leftrightarrow M - \varepsilon < \rho(X_n) < \varepsilon + M$$

Επιλέγουμε τώρα $\varepsilon = \frac{M}{2}$ και λαμβάνουμε ότι $M - \frac{M}{2} < \rho(X_n) < \frac{M}{2} + M \;\Rightarrow \rho(X_n) > 0$ άτοπο αφού $X_n \in \mathcal{A}_\rho \Rightarrow \rho(X_n) \leq 0$.

Επομένως $X \in \mathcal{A}_\rho$ και άρα $\rho(X) \leq 0$ οπότε το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Για να αποδείξουμε οτι το $\mathcal{A}_\rho$ είναι κυρτό τώρα, έχουμε οτι $\rho$ είναι ένα κυρτό μέτρο ρίσκου και έστω οτι το $\mathcal{A}_\rho$ δεν είναι κυρτό. Αυτό σημαίνει οτι αν θεωρήσουμε $X, Y \in \mathcal{A}_\rho$ τότε θα υπάρχει κάποιο $\lambda \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $\lambda X + (1-\lambda)Y \notin \mathcal{A}_\rho$. από τη στιγμή τώρα που ισχύει αυτό έχουμε οτι $\rho\left(\lambda X + (1-\lambda)Y\right) > 0$.

από την άλλη πλευρά έχουμε ωστόσο ότι αφού $X, Y \in \mathcal{A}_\rho$, τότε $\rho(X), \rho(Y) \leq 0$ και άρα $\lambda\rho(X), (1-\lambda)\rho(Y) \leq 0$ το οποίο σημαίνει και ότι $\lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \leq 0$

Επομένως

$$\rho\left(\lambda X + (1-\lambda)Y\right) > \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$$

πράγμα το οποίο είναι άτοπο καθώς το $\rho$ είναι ένα κυρτό μέτρο ρίσκου οπότε ισχύει και ότι

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$$

(iii)

Καθώς ισχύει $X \leq Y$ έχουμε από την ιδιότητα του Monotonicity ότι $\rho(Y) \leq \rho(X)$. Ωστόσο έχουμε οτι $X \in \mathcal{A}_\rho$ οπότε $\rho(X) \leq 0$. Επομένως $\rho(Y) \leq 0$ και άρα $Y \in \mathcal{A}_\rho$.

(iv)

Έστω $\rho$ κάποιο κυρτό μέτρο ρίσκου και θεωρούμε επιπλέον $X, Y \in \mathcal{A}_\rho$, καθώς και $\mu, \lambda \geq 0$. Για να δείξουμε οτι το σύνολο $\mathcal{A}_\rho$ είναι κυρτός κώνος αρκεί σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.2 να δείξουμε ότι $\theta_1 X + \theta_2 Y \in \mathcal{A}_\rho$, δηλαδή οτι $\rho(\theta_1 X + \theta_2 Y) \leq 0$.

Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες Θετικής Ομοιογένειας και Υποπροσθετικότητας έχουμε ότι

$$\rho(\theta_1 X + \theta_2 Y) \leq \rho(\theta_1 X) + \rho(\theta_2 Y) = \theta_1 \rho(X) + \theta_2 \rho(Y) \leq \theta_1 \cdot 0 + \theta_2 \cdot 0 = 0$$

και έχουμε το ζητούμενο □

**Πρόταση 2.13.** *Αντίστροφα τώρα με την προηγούμενη πρόταση, έστω $\mathcal{A}$ ένα μη κενό κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{M}$ με την ιδιότητα οτι αν $X \in \mathcal{A}$ και $Y \in \mathcal{M}$ όπου $X \leq Y$ τότε $Y \in \mathcal{A}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

*(i) $\rho_{\mathcal{A}}$ είναι ένα κυρτό μέτρο ρίσκου.*

*(ii) Αν $\mathcal{A}$ κυρτός κώνος τότε το μέτρο ρίσκου $\rho_{\mathcal{A}}$ είναι συνεκτικό*

*(iii) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$*

*Απόδειξη.*

(i)

Θεωρούμε ένα μέτρο ρίσκου $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ σύμφωνα με τη σχέση (2.2). Επίσης θεωρούμε $\lambda \in [0, 1]$, $X, Y \in \mathcal{M}$. Για να αποδείξουμε οτι είναι ένα κυρτό μέτρο ρίσκου πρέπει να αποδείξουμε οτι ικανοποιεί τις ιδιότητες Monotonicity, Translation Invariance και Κυρτότητας.

- Κυρτότητα

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{A}}(\lambda X + (1-\lambda)Y) &= \inf\{m \in \mathbb{R} : m + \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}\} \\
&= \inf\{m \in \mathbb{R} : \lambda(m + X) + (1-\lambda)(m + Y) \in \mathcal{A}\} \\
&\leq \lambda \inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in \mathcal{A}\} + (1-\lambda) \inf\{m \in \mathbb{R} : m + Y \in \mathcal{A}\} \\
&= \lambda \rho_{\mathcal{A}}(X) + (1-\lambda)\rho_{\mathcal{A}}(Y).
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε οτι η τελευταία ανισότητα ισχύει καθώς η ποσότητα $\lambda \rho_{\mathcal{A}}(X) + (1-\lambda)\rho_{\mathcal{A}}(Y) = K + L$ είναι ένας πραγματικός αριθμός που θα κάνει μια οικονομική θέση να γίνει αποδεκτή. Αυτό συμβαίνει διότι

$$(K + L) + (\lambda X + (1-\lambda)Y) = (K + \lambda X) + (L + (1-\lambda)Y)$$

$$= \lambda\rho_{\mathcal{A}}(X) + \lambda X + (1-\lambda)\rho_{\mathcal{A}}(Y) + (1-\lambda)Y$$

$$= \lambda(\inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in \mathcal{A}\} + X) + (1-\lambda)(\inf\{m \in \mathbb{R} : m + Y \in \mathcal{A}\} + Y) \in \mathcal{A}$$

και αυτό συμβαίνει διότι το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι κυρτό.

- Monotonicity:
  Έστω $X, Y \in \mathcal{M}$ με $X \leq Y$, τότε έχουμε ότι

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in \mathcal{A}\} \geq \inf\{m \in \mathbb{R} : m + Y \in \mathcal{A}\} = \rho_{\mathcal{A}}(Y)$$

  καθώς ισχύει αφού $m+X \in \mathcal{A}$ και $m+Y \in \mathcal{M}$ και ισχύει ότι $m+X \leq m+Y$ τότε $m+Y \in \mathcal{A}$.

- Translation Invariance:
  Θεωρούμε τώρα ένα $k \in \mathbb{R}$ και $X \in \mathcal{M}$ και έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A}}(X+k) = \inf\{m \in \mathbb{R} : m + X + k \in \mathcal{A}\}$$

$$= \inf\{s - k \in \mathbb{R} : s - k + X + k \in \mathcal{A}\} = \inf\{s - k \in \mathbb{R} : s + X \in \mathcal{A}\}$$

$$= \inf\{s \in \mathbb{R} : s + X \in \mathcal{A}\} - k = \rho_{\mathcal{A}}(X) - k$$

  και έτσι αποδείξαμε οτι το $\rho_{\mathcal{A}}$ είναι ένα κυρτό μέτρο ρίσκου.

(ii)

Για να αποδείξουμε τώρα οτι το $\rho_{\mathcal{A}}$ είναι ένα συνεκτικό μέτρο ρίσκου, αρκεί να δείξουμε οτι ικανοποιεί την ιδιότητα της Θετικής Ομοιογένειας.Θεωρούμε ένα $a > 0$ λοιπόν και έχουμε:

$$\rho_{\mathcal{A}}(aX) = \inf\{m \in \mathbb{R} : m + aX \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} : m + aX \in \mathcal{A}\}$$

$$= \inf\left\{m \in \mathbb{R} : \alpha(\frac{m}{a} + X) \in \mathcal{A}\right\}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τώρα οτι το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι ένας κυρτός κώνος έχουμε οτι αφου $\alpha(\frac{m}{a} + X) \in \mathcal{A}$ τότε αφού $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$ και άρα το στοιχείο $\frac{1}{a} \cdot \alpha(\frac{m}{a} + X) = \frac{m}{a} + X \in \mathcal{A}$. Τότε

$$\rho_{\mathcal{A}}(aX) = \inf\left\{m \in \mathbb{R} : \alpha(\frac{m}{a} + X) \in \mathcal{A}\right\} = \inf\left\{m \in \mathbb{R} : \frac{m}{a} + X \in \mathcal{A}\right\}$$

$$= \inf\left\{\alpha k \in \mathbb{R} : \frac{ak}{a} + X \in \mathcal{A}\right\} = \inf\{\alpha k \in \mathbb{R} : k + X \in \mathcal{A}\}$$

$$= \alpha \inf\{k \in \mathbb{R} : k + X \in \mathcal{A}\} = a\rho_{\mathcal{A}}(X)$$

(iii)

Σημειώνουμε αρχικά ότι $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}} = \{X \in \mathcal{M} \,|\, \rho_\mathcal{A}(X) \leq 0\} = \{X \in \mathcal{M} \,|\, \inf\{m \in \mathbb{R} \,:\, m + X \in \mathcal{A}\} \leq 0\}$

Θεωρούμε τώρα κάποιο $X \in \mathcal{A}$. Τότε $\inf\{m \in \mathbb{R} \,:\, m + X \in \mathcal{A}\} \leq 0$. καθώς για $m = 0$ ικανοποιείται, επειδή $X \in \mathcal{A}$. Άρα έχουμε ότι $X \in \mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$

□

**Πρόταση 2.14.** *Το σύνολο $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$ ισούται με την κλειστότητα του $\mathcal{A}$ συναρτήσει της $\|\cdot\|_\infty$. Πιο συγκεκριμένα η σχέση $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ ισχύει αν και μόνο αν το $\mathcal{A}$ είναι $\|\cdot\|_\infty$-κλειστό.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε $\overline{\mathcal{A}}$ την κλειστότητα του $\mathcal{A}$ όσο αφορά τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ . Δείχνουμε πρώτα ότι $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$. Αν $X \in \overline{\mathcal{A}}$ υπάρχει μια ακολουθία $(X_n) \in \mathcal{A}_\rho$ τέτοια ώστε $\|X_n - X\|_\infty \to 0$ και από το Λήμμα (2.9) λαμβάνουμε οτι $|\rho_\mathcal{A}(X_n) - \rho_\mathcal{A}(X)| \to 0$. Όμοια με πρίν που δείξαμε οτι το $\mathcal{A}$ είναι κλειστό αποδεικνύουμε ότι $\rho_\mathcal{A}(X) \leq 0$ και άρα $X \in \mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$, οπότε $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$

Αντίστροφα τώρα, για να δείξουμε τώρα ότι $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}} \subset \overline{\mathcal{A}}$ θεωρούμε κάποιο $X \in \mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$. Τότε

$$0 \geq \rho_\mathcal{A}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \,:\, m + X \in \mathcal{A}\}\,,$$

και άρα υπάρχει ακολουθία $(m_n)$ τέτοια ώστε $m_n \downarrow \rho_\mathcal{A}(X)$ και $m_n + X \in \mathcal{A}$. Επειδή τώρα η τυχαία μεταβλητή $X_n := m_n + X - \rho_\mathcal{A}(X) \geq X$ αφού $m_n \geq \rho_\mathcal{A}(X)$ τότε από την ιδιότητα του Monotonicity ισχύει ότι $\rho(X_n) \leq \rho(X)$ οπότε $X_n \in \mathcal{A}$.

Τέλος, αφού $\|X_n - X\|_\infty = |m_n - \rho_\mathcal{A}(X)| = m_n - \rho_\mathcal{A}(X) \downarrow 0$, λαμβάνουμε πάλι όπως πρίν οτι $X \in \overline{\mathcal{A}}$ και άρα δείξαμε ότι $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}} \subset \overline{\mathcal{A}}$. Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε ότι

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$$

□

## 2.2 Μέτρα Ρίσκου Value at Risk και Expected Shortfall

Έχοντας δεί τους απαραίτητους ορισμούς και ιδιότητες στα μέτρα ρίσκου, θα γίνει εστίαση στα μέτρα ρίσκου Value at Risk (VaR) και Expected Shortfall(ES), τα οποία είναι αρκετά γνωστά και χρησιμοποιούνται ευρέως.

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό του μέτρου ρίσκου Value at Risk, ωστόσο πρώτα θα μας χρειαστεί ένας άλλος ορισμός.

**Ορισμός 2.15.** *Το p-ποσοστημόριο (p-percentile) ή 100p% ποσοστιαίο σημειο (100p% quantile) είναι η παρατήρηση $x_p$, η οποία είναι μεγαλύτερη ή ίση από το 100p% ακριβώς των παρατηρήσεων.*

*Δοθείσας μιας τυχαίας μεταβλητής $X$ με συνάρτηση κατανομής $F_X$ , η συνάρτηση ποσοστημορίων (quantile function) είναι η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής ($F_X^{-1}$). Πιο συγκεκριμένα έχουμε οτι για $a \in (0,1)$ το $\alpha-$ποσοστιαίο $F_X$ ορίζεται ώς:*

$$q_a(X) = inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X \leq x] = F_X(x) \geq a\} \tag{2.3}$$

*[13, p.18]*

*Έχοντας τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να δώσουμε και τον ορισμό του μέτρου ρίσκου Value at Risk.*

*Για μια συνάρτηση $X \in \mathcal{M}$ έχουμε:*

$$VaR_a(X) = -q_a(X) \tag{2.4}$$

*Σημειωνουμε οτι συνήθεις τιμές που χρησιμοποιούνται για το a είναι 0.01, 0,05, 0.1.*

Έχοντας ορίσει το μέτρο ρίσκου Value at Risk μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό του μέτρου ρίσκου Expected Shortfall.

**Ορισμός 2.16.** *Για μια συνάρτηση $L \in \mathcal{M}$ έχουμε:*

$$ES_a(L) = -E(L|L \leq q_a(L)) = -\frac{1}{a}\int_0^a q_u(L)du = -\frac{1}{a}\int_0^1 q_u(L1_{L \leq q_a(L)})du \tag{2.5}$$

Το μέτρο ρίσκου Expected Shortfall είναι ένα συνεπές μέτρο ρίσκου. Για να το δείξουμε αυτό πρέπει να αποδείξουμε αν για αυτό επαληθεύονται τα παραπάνω αξιώματα.

- Υποπροσθετικότητα

  Ορίζουμε $Z = X + Y$

$$a\left(ES_a(X) + ES_a(Y) - ES_a(Z)\right)$$

$$= E\left[X1_{X \leq q_a(X)} + Y1_{Y \leq q_a(Y)} - Z1_{Z \leq q_a(Z)}\right]$$

$$= E\left[X\left(1_{Z \leq q_a(Z)} - 1_{X \leq q_a(X)}\right) + Y\left(1_{Z \leq q_a(Z)} - 1_{Y \leq q_a(Y)}\right)\right]$$

$$\geq q_a(X)E\left[1_{Z \leq q_a(Z)} - 1_{X \leq q_a(X)}\right] + q_a(Y)E\left[1_{Z \leq q_a(Z)} - 1_{Y \leq q_a(Y)}\right]$$

$$= q_a(X)(a - a) + q_a(Y)(a - a) = 0$$

Σημειώνουμε οτι η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι

$$E\left[(X - q_a(X))\left(1_{Z \leq q_a(Z)} - 1_{X \leq q_a(X)}\right)\right] \geq 0$$

καθώς

$$\begin{cases} 1_{Z \leq q_a(Z)} - 1_{X \leq q_a(X)} \geq 0 & \text{αν } X > q_a(X) \\ 1_{Z \leq q_a(Z)} - 1_{X \leq q_a(X)} \leq 0 & \text{αν } X \leq q_a(X). \end{cases}$$

Ομοίως για τον δεύτερο όρο.

- Monotonicity

  Για το μέτρο ρίσκου $VaR$ έχουμε:

  Έστω $L_1 \leq L_2$

  Τότε ισχύει ότι $\mathbb{P}[L_1 \leq l] \geq \mathbb{P}[L_2 \leq l]$ και καθώς έχουμε ότι

$$VaR_a(L_1) = -inf\{l_1 \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L_1 \leq l_1] > a\}$$

  και

$$VaR_a(L_2) = -inf\{l_2 \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L_2 \leq l_2] > a\}$$

  τότε το $l_1$ που θα ικανοποιεί τη συνθήκη παραπάνω θα είναι μικρότερο ή ίσο από το $l_2$ που θα ικανοποιεί την αντίστοιχη συνθήκη και άρα

$$VaR_a(L_1) \geq VaR_a(L_2) \Rightarrow$$

$$ES_a(L_1) = \frac{1}{a}\int_a^1 VaR_u(L_1)du \geq \frac{1}{a}\int_a^1 VaR_u(L_2)du = ES_a(L_2)$$

- Translation equivariance

  Για το μέτρο ρίσκου $VaR$ έχουμε:

  Για $b \in \mathbb{R}$ $VaR_a(L+b) = -inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L+b \leq l] > a\} = -inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L \leq l-b] > a\} =$

$$= -b - inf\{l-b \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L \leq l-b] > a\} \overset{z=l-b}{=} -b - inf\{z \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L \leq z] > a\} = -b + VaR_a(L)$$

  Επομένως

$$ES_a(L+b) = \frac{1}{a}\int_0^a VaR_u(L+b)du = \frac{1}{a}\int_0^a (VaR_u(L) - b)\, du$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a VaR_u(L)du - \frac{a}{a}b = ES_a(L) - b$$

- Θετική Ομοιογένεια

  Για το μέτρο ρίσκου $VaR$ έχουμε:

  Για $c > 0$ $VaR_a(cL) = -inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[cL \leq l] > a\} = -inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L \leq \frac{l}{c}] > a\} =$

  $$-c\,inf\{\frac{l}{c} \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L \leq \frac{l}{c}] > a\} \overset{z=\frac{l}{c}}{=} -c\,inf\{z \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L \leq z] > a\} = cVaR_a(L)$$

  Επομένως

  $$ES_a(cL) = \int_0^a VaR_u(cL)du = \frac{1}{a}\int_0^a VaR_u(cL)du$$

  $$= \frac{1}{a}\int_0^a cVaR_u(cL)du = cES_a(L)$$

- Convexity

  Ορίζουμε $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y$ για $\lambda \in [0,1]$

  $ES_a(Z) = ES_a(\lambda X + (1-\lambda)Y)$

  από την ιδιότητα του Subadditivity έχουμε ότι $ES_a(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq ES_a(\lambda X) + ES_a((1-\lambda)Y)$, ενώ από την ιδιότητα του Positive homogeneity έχουμε ότι $ES_a(\lambda X) = \lambda ES_a(X)$ και $ES_a((1-\lambda)Y) = (1-\lambda)ES_a(Y)$. Επομένως δείξαμε ότι

  $$ES_a(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda ES_a(X) + (1-\lambda)ES_a(Y)$$

Το μέτρο ρίσκου Value at Risk - σε αντίθεση με το Expected Shortfall - δεν είναι ένα συνεκτικό μέτρο ρίσκου. Ενώ οι ιδιότητες θετική ομοιογένεια, Translation equivariance και Monotonicity όπως φαίνεται στις αποδείξεις πάνω ικανοποιούνται, η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας δεν ικανοποιείται. Για να το δεί κανείς αυτό, θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα που αποδεικνύει οτι δεν ικανοποιείται η συγκεκριμένη ιδιότητα.

**Παράδειγμα 2.17.** *Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο από $d = 100$ defaultable corporate ομόλογα. Θεωρούμε επίσης οτι τα ενδεχόμενα χρεοκοπίας των ομολόγων είναι ανεξάρτητα. Θεωρούμε οτι η πιθανότητα χρεοκοπίας κάθε ομολόγου είναι 0.02. Η τωρινή τιμή των ομολόγων (χρόνος $t$) είναι 100. Αν δεν υπάρξει χρεοκοπία, η αποπληρωμή ενός χρεογράφου στο χρόνο $t+1$ (πχ ένα χρόνο μετά) είναι 105, αλλιώς δεν υπάρχει αποπληρωμή. Έτσι λοιπόν $R_i$ είναι το κέρδος του χρεογράφου $i$ και είναι 5 αν δεν επέλθει χρεοκοπία ενώ -100 αν επέλθει. Συμβολίζουμε $Y_i$ τη δείκτρια μη πτώχευσης της εταιρείας $i$ δηλαδή $Y_i$ είναι ίσο με 0 αν το ομόλογο $i$ defaults στο διάστημα $[t, t+1]$ και είναι ίσο με 1 αλλιώς. Έτσι λοιπόν έχουμε*

$$R_i = 5Y_i - 100(1 - Y_i) = 105Y_i - 100$$

*Έτσι λοιπόν για κάθε $i$ ισχύει ότι $\mathbb{P}[R_i = 5] = 0.98$ και $\mathbb{P}[R_i = -100] = 0.02$. Παρατηρούμε από την παραπάνω σχέση οτι $R_i \in \{-100, 5\}$.*

*Συγκρίνουμε δύο χαρτοφυλάκια τώρα, όπου και τα δύο έχουν τωρινή αξία ίση με 10000. Το χαρτοφυλάκιο $A$ είναι fully concentrated και αποτελείται από 100 μονάδες του ομολόγου 1. Το χαρτοφυλάκιο $B$ αντιθέτως είναι compeletely diversified, δηλαδή αποτελείται από 100 ομόλογα μίας μονάδας το καθένα.*

*Για το χαρτοφυλάκιο $A$:*

*Το κέρδος δίνεται από τη σχέση $R_A = 100R_1$ και έτσι ισχύει οτι $VaR_{0.05}(R_A) = VaR_{0.05}(100R_1) = 100VaR_{0.05}(R_1)$*

*Για τον υπολογισμό του $VaR_{0.05}(R_1)$ τώρα έχουμε:*

$$\mathbb{P}[R_i \leq x] = F_{R_1}(x) = \begin{cases} 0 & x < -100 \\ 0.02 & x = -100 \\ 0.02 & -100 < x < 5 \\ 1 & x = 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

*Άρα από τη σχέση (2.3) $q_{0.95}(R_1) = inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[R_1 \leq x] = F_{R_1}(x) \geq 0.05\} = 5$ και από τη σχέση (2.4) λαμβάνουμε ότι $VaR_{0.05}(R_1) = -5$. Συνεπώς*

$$VaR_{0.05}(R_A) = -500$$

*Για το χαρτοφυλάκιο $B$:*

$R_B = \sum_{i=1}^{100} R_i = 105 \sum_{i=1}^{100} Y_i - 100 \cdot 100$

*Παρατηρούμε τώρα από τον τρόπο που έχει οριστεί η $Y_i$, οτι ακολουθεί κατανομή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.98$ (πιθανότητα μη πτώχευσης). από τη Θεωρία Πιθανοτήτων ωστόσο*

*ισχύει ότι η τυχαία μεταβλητή* $\sum_{i=1}^{100} Y_i$ *ακολουθεί την διωνυμική κατανομή. Πιο συγκεκριμένα*

$$\sum_{i=1}^{100} Y_i \sim binom(n = 100, p = 0.98)$$

*Τότε* $VaR_{0.05}(R_B) = VaR_{0.05}(105\sum_{i=1}^{100} Y_i - 10^4) = 105 \cdot VaR_{0.05}(\sum_{i=1}^{100} Y_i) + 10^4 = 10^4 - 105 q_{0.05}(\sum_{i=1}^{100} Y_i)$

*Εκμεταλλευόμενοι τώρα τη σχέση (2.3) έχουμε οτι* $\mathbb{P}[\sum_{i=1}^{100} Y_i \leq 94] = 0.01548364$ *και* $\mathbb{P}[\sum_{i=1}^{100} Y_i \leq 95] = 0.05083045$. *Άρα* $q_{0.05}(\sum_{i=1}^{100} Y_i) = 95$.

*Επομένως* $VaR_{0.05}(R_B) = 10^4 - 105 \cdot 95 = 25$.

*Με αυτόν τον τρόπο λοιπόν μπορεί κανείς να δεί οτι το κεφάλαιο που πρέπει να προστεθεί στο χαρτοφυλάκιο B είναι υψηλότερο από αυτό που πρέπει να προστεθεί στο χαρτοφυλάκιο A.*

*Προκύπτει άρα ότι σε αυτή την περίπτωση*

$$-500 = \sum_{i=1}^{100} \rho(R_i) = 100\rho(R_i) < \rho(\sum_{i=1}^{100} R_i) = 25$$

*ενώ σε ένα συνέκτικό μέτρο ρίσκου θα έπρεπε να ισχύει ότι*

$$\rho(\sum_{i=1}^{100} R_i) \leq \sum_{i=1}^{100} \rho(R_i) = 100\rho(R_i)$$

# 3 Μοντέλα Κατανομών και Προσαρμογή

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα αναλυθούν τα μοντέλα κάποιων κατανομών που θα φανούν χρήσιμες στο επόμενο κεφάλαιο καθώς και ένας αλγόριθμος , ο οποίος βρίσκει τις παραμέτρους του εκάστοτε μοντέλου που αντιστοιχούν στη βέλτιστη προσαρμογή του σε δεδομένα. Για αρχή θα παρουσιαστεί η κανονική κατανομή (Normal distribution) για την οποία υπάρχει κλειστός τύπος για την εκτίμηση των παραμέτρων της $\mu$ και $\sigma^2$. Για την εύρεση των κατάλληλων εκτιμητριών θα παρουσιαστούν κάποια στοιχεία θεωρίας εκτιμητικής. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν γενικεύσεις της κανονικής όπως η Γενικευμένη Αντίστροφη Γκαουσιανή (Generalized inverse Gaussian - GIG), η Κανονική - Αντίστροφη Γκαουσιανή (Normal-inverse Gaussian - NIG), η Variance Gamma - VG, η Hyperbolic Asymmetric (Student's) t και η Γενικευμένη Υπερβολική (Generalized Hyperbolic - GH). Καθώς οι παραπάνω αναφερθείσες κατανομές έχουν παραπάνω από 2 παραμέτρους, ο υπολογισμός των βέλτιστων παραμέτρων είναι ένα πιο σύνθετο πρόβλημά από το αντίστοιχο της κανονικής το οποίο δεν μπορεί να λυθεί με την εύρεση κάποιου κλειστού τύπου, οπότε αναγκάστικά οδηγούμαστε σε κάποιον αριθμητικό τρόπο επίλυσης του. Το πρόβλημα αυτό λοιπόν θα αναχθεί στη βελτιστοποίηση μιας συνάρτησης λογαριθμικής πιθανοφάνειας όπου σαν μεταβλητές έχει τις παραμέτρους του μοντέλου που θέλουμε να προσαρμόσουμε στα εκάστοτε δεδομένα. Ο αλγόριθμος αυτός ονομάζεται Multi-Cycle, Expectation, Conditional Maximization (MCECM) όπου σαν υπορουτίνα του έχει έναν αλγόριθμό βελτιστοποίησης που έχει το όνομά Solid Angle based Nearest Neighbor (SANN).

## 3.1 Κανονική Κατανομή

**Ορισμός 3.1.** *Μια τυχαία μεταβλητή $X$ ακολουθεί την κανονική (ή γκαουσιανή) κατανομή με παραμέτρους $\mu, \sigma^2$, συμβολίζουμε $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, αν*

$$f_N(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

*όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$. Σημειώνουμε οτι η παράμετρος $\mu$ είναι το "κέντρο" της κατανομής και $\sigma$ το πόσο "απλομένη" είναι. Για τιμές $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$ έχουμε μια ειδική περίπτωση της κανονικής κατανομής που λέγεται τυποποιημένη κανονική κατανομή.*

Για την εκτίμηση των παραμέτρων της κανονικής κατανομής θα χρειαστούμε μερικούς ορισμούς σχετικά με την εκτιμητική.

Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, ..., X_n$ το οποίο θα συμβολίζεται $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_d)^\top$ όπου για κάθε τυχαίο δείγμα (τυχαία μεταβλητή) $X_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ έχουμε ότι $X_i \in \mathfrak{X} \subset \mathbb{R}$ και επομένως ισχύει ότι $\boldsymbol{X} \in \mathfrak{X}^n \subset \mathbb{R}^n$. Για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ τώρα θεωρούμε $p(x_i, \boldsymbol{\theta})$ τη συνάρτηση πιθανότητας με $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)^\top$ άγνωστη m-διάστατη παράμετρο που παίρνει τιμές στον παραμετρικό χωρο $\Theta \subset \mathbb{R}^m$.

Για το τυχαίο δείγμα λοιπόν θεωρούμε το στατιστικό μοντέλο

$$\left\{ \boldsymbol{X}, \mathfrak{X}^n, \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \right\}$$

[13, p.39]

**Ορισμός 3.2.** *Στήριγμα (support) μιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $p(x|\boldsymbol{\theta})$ είναι το σύνολο*

$$S = S(\boldsymbol{\theta}) = \{x \in \mathbb{R},\, p(x|\boldsymbol{\theta}) > 0\}$$

**Παρατήρηση 3.3.** *Για πρακτικούς λόγους το σύνολο τιμών $\mathfrak{X}$ της τυχαίας μεταβλητής $X$ θα συμπίπτει με το στήριγμα $S$.*

**Ορισμός 3.4.** *Κάθε πραγματική ή διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) = (t_1(\boldsymbol{x}), ..., t_k(\boldsymbol{x}))^\top$ $(1 \leq k \leq n)$, της "τιμής" $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_d)^\top$ ενός τυχαίου δείγματος $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_d)^\top$ καλείται δειγματοσυνάρτηση.*

**Ορισμός 3.5.** *Κάθε δειγματοσυνάρτηση $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{X}) : \mathfrak{X}^n \to \Theta$ ονομάζεται εκτιμήτρια (estimator) της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$. Η "τιμή" $\boldsymbol{t}$ του $\boldsymbol{T}$ για $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$, δηλαδή το σημείο $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) \in \Theta$, αποτελεί την εκτίμηση της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$.*

### 3.1.1 Κριτήριο Αμεροληψίας

**Ορισμός 3.6.** *Αν $T = t(\boldsymbol{X})$ είναι μια εκτιμήτρια της συνάρτησης $\alpha = \alpha(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ τέτοια ώστε:*

$$E[T|\boldsymbol{\theta}] = E\{t(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{\theta}\} = a \,\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

*τότε η εκτιμήτρια $T$ καλείται (ομοιόμορφη) αμερόληπτη εκτιμήτρια της $\alpha$.*
*Όταν η εκτιμήτρια $T$ της $\alpha = \alpha(\boldsymbol{\theta})$ είναι μεροληπτική τότε η ποσότητα*

$$b = b(T) = E[T|\boldsymbol{\theta}] - \alpha \,, \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

*ονομάζεται μεροληψία (bias) της $T$.*

Στη συνέχεια παρουσιάζονται δύο Λήμματα που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

**Λήμμα 3.7.** *Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή $X$ με μέση τιμή $E[X] = \mu$. Η διασπορά της $X$ σύμφωνα με τον ορισμό δίνεται από τον τύπο $Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right] = Cov(X, X)$, όπου $Cov(\cdot, \cdot)$ είναι η συνδιασπορά (Covariance). Ο τύπος της διασποράς μπορεί να εκφαστεί και ώς*

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

*Απόδειξη.* Έχουμε ότι

$$Var[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[(X^2 - 2XE[X] + E[X]^2\right]$$

$$= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

□

**Λήμμα 3.8.** *Θεωρούμε $X_1, ..., X_n$ τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για τη διασπορά του αθροίσματος $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ισχύει ο τύπος:*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

*Απόδειξη.* Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς τον αριθμό των τυχαίων μεταβλητών.

Για $k = 2$ χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.7 και λαμβάνουμε ότι:

$$Var[X_1 + X_2] = E\left[(X_1 + X_2)^2\right] - E\left[X_1 + X_2\right]^2$$

$$= E\left[X_1^2\right] + E\left[X_2^2\right] + 2E\left[X_1X_2\right] - E\left[X_1\right]^2 - E\left[X_2\right]^2 - 2E\left[X_1X_2\right] \qquad \text{οι } X_1, X_2 \text{ είναι ανεξάρτητες}$$

$$= E\left[X_1^2\right] + E\left[X_2^2\right] + 2E\left[X_1\right]E\left[X_2\right] - E\left[X_1\right]^2 - E\left[X_2\right]^2 - 2E\left[X_1\right]E\left[X_2\right]$$

$$= E\left[X_1^2\right] - E\left[X_1\right]^2 + E\left[X_2^2\right] - E\left[X_2\right]^2 = Var\left[X_1\right] + Var\left[X_2\right]$$

Έστω οτι η υπόθεση ισχύει για $k = n - 1$ ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή $Var\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} Var(X_i)$

Για $k = n$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i + X_n\right)$$

και για $k = 2$ έχουμε ότι

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i + X_n\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + Var\left(X_n\right)$$

από την επαγωγική υπόθεση τώρα λαμβάνουμε ότι $Var\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} Var(X_i)$ και άρα έχουμε ότι

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

□

**Πρόταση 3.9.** *Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα* $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^\top$ *από την κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή* $\mu$ *και άγνωστη διασπορά* $\sigma^2$*(Συμβολίζουμε* $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*) Τότε οι δειγματοσυναρτήσεις* $T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$ *και* $T_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ *είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες των παραμέτρων* $\mu$ *και* $\sigma^2$ *αντίστοιχα.*

*Απόδειξη.* Για να αποδείξουμε οτι οι $T_1, T_2$ είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες των παραμέτρων $\mu$ και $\sigma^2$ αντίστοιχα αρκεί να δείξουμε ότι $E[T_1|\mu, \sigma^2] = \mu$ , $E[T_2|\mu, \sigma^2] = \sigma^2$. Έχουμε λοιπόν:

Για την $T_1$:

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

Για την $T_2$:

$$E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] - 2E\left[\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] + E\left[\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2\right]\right) = \frac{1}{n-1}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] - 2nE\left[\overline{X}^2\right] + nE\left[\overline{X}^2\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i^2\right] - 2nE\left[\overline{X}^2\right]\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[E\left[X_i^2\right] - E[\overline{X}^2]\right]\right)$$

Έχουμε τώρα από το Λήμμα 3.7 ότι

$$E\left[X_i^2\right] = Var[X_i] + E[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2 \text{ και } E\left[\overline{X}^2\right] = Var[\overline{X}] + E[\overline{X}]^2$$

Αντίστοιχα επειδή τα δείγματα $X_1, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους ισχύει από το Λήμμα 3.8 ο τύπος

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

επομένως

$$Var[\overline{X}] = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left(X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Επιπλέον

$$E[\overline{X}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \mu$$

Επομένως $E\left[\overline{X}^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$ και άρα

$$E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(n-1)\sigma^2}{n}\right] = \sigma^2$$

□

Στη συνέχεια θα δούμε τη μέθοδο Μέγιστης Πιθανοφάνειας που είναι μια μέθοδος κατασκευής εκτιμητριών.

### 3.1.2 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Ορίζουμε αρχικά τη συνάρτηση ενός τυχαίου δείγματος $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^\top$ όπου $X_i \in \mathfrak{X} \subset \mathbb{R}\, \forall\, i \in \{1, ..., n\}$ με παραμέτρους $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)^\top \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ ως εξής

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\boldsymbol{\theta})$$

Για γνωστές τιμές $x_i$ $(i \in \{1, ..., n\})$ των τ.μ.$X_i\,, i \in \{1, ..., n\}$ η συνάρτηση $p(x|\boldsymbol{\theta})$ μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ με $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)^\top$ένα σταθερό σημείο του $\mathfrak{X}^n$ με τον εξής τρόπο

$$L(\boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\boldsymbol{\theta})\ , \boldsymbol{\theta} \in \Theta \tag{3.2}$$

Η $L(\boldsymbol{\theta})$ ονομάζεται συνάρτηση πιθανοφάνειας (likelihood function) καθώς μέσω αυτής αποτυπώνεται το πόσο συμφωνεί ένα συγκεκριμένο δείγμα για διάφορες τιμές της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$. από τη μεγιστοποίηση της παραπάνω συνάρτησης προκύπτει η Εκτιμήτρια Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimator(MLE)) της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ που συμβολίζεται $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta_1}, ..., \hat{\theta_m})^\top$. Πιο συγκεκριμένα ότι:

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta})$$

Καθώς η συνάρτηση $\ln(\cdot)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση έχουμε οτι το παραπάνω εκφράζεται και ώς

$$l(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} l(\boldsymbol{\theta})$$

για $l(\boldsymbol{\theta}) = \ln L(\boldsymbol{\theta})$

Γνωρίζουμε τώρα ότι εκτός εάν το σημείο $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ βρίσκεται στο σύνορο του παραμετρικού χώρου $\Theta$, οι μερικές παράγωγοι της $l(\boldsymbol{\theta})$ ως πρός $\theta_i\,, i = 1, ..., m$ θα μηδενίζονται σε αυτό καθώς είναι σημείο ακροτάτου.

Με αυτή τη λογική προκύπτει το σύστημα:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} l(\boldsymbol{\theta})\ , i \in \{1, ..., m\} \tag{3.3}$$

Η λύση αυτού του συστήματος λοιπόν θα μας δώσει την ΕΜΠ $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta_1}, ..., \hat{\theta_m})^\top$. Σημειώνουμε οτι για να είναι η λύση αυτή πράγματι σημείο μεγίστου θα πρέπει ο Εσσιανός πίνακας $\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} l(\boldsymbol{\theta})\right]_{m \times m}$ να είναι αρνητικά ορισμένος [14, p.311].

**Παράδειγμα 3.10.** *Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^\top$ από την κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή $\mu$ και άγνωστη διασπορά $\sigma^2$(Συμβολίζουμε $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$). Οι ΕΜΠ για τις παραμέτρους $\mu$ και $\sigma^2$ είναι $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$ και $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ αντίστοιχα.*

*Απόδειξη.* Έχουμε ότι $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^\top$ και λογαριθμημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} p(X_i|\boldsymbol{\theta})\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left[p(X_i|\boldsymbol{\theta})\right]$$

Βρίσκουμε τώρα τις μερικές παραγώγους ώς πρός $\mu$ και $\sigma^2$ και τις εξισώνουμε με το 0. Για τη μερική παράγωγο ως πρός $\mu$ έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right] = 0$$

Κάνουμε πράξεις και λαμβάνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( \frac{-(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \ln \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right] - \left( \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ - \left( \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(X_i-\mu)}{2\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)}{\sigma^2}$$

Έχουμε ωστόσο ότι $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)}{\sigma^2} = 0$ άρα

$$\sum_{i=1}^{n} X_i - n\hat{\mu} = 0 \Leftrightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} \tag{3.4}$$

Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση πιθανοφάνειας το $\mu$ με $\overline{X}0$,για τη μερική παράγωγο ως πρός $\sigma^2$ έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( \frac{-(X_i-\overline{X})^2}{2\sigma^2} \right) \right] = 0$$

Κάνουμε πράξεις και λαμβάνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( \frac{-(X_i-\overline{X})^2}{2\sigma^2} \right) \right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left\{ -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \left( \frac{(X_i-\overline{X})^2}{2\sigma^2} \right) \right\} =$$

$$= -\frac{n}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2$$

Έχουμε ωστόσο ότι $-\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 = 0$ άρα

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 = n\hat{\sigma^2} \Leftrightarrow \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2$$

□

Παρατηρούμε οτι ενώ από τις μεθόδους που έχουμε αναλύσει μέχρι στιγμής υπάρχει συμφωνία σχετικά με την εκτιμήτρια του $\mu$ οτι είναι η δειγματοσυνάρτηση $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ . Το ίδιο ωστόσο δεν ισχύει για την εκτίμηση της παραμέτρου $\sigma^2$ καθώς έχουμε καταλήξει στις δύο δειγματοσυναρτήσεις

$$\hat{\sigma^2_{1,n}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 \text{ και } \hat{\sigma^2_{2,n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 \tag{3.5}$$

Πρώτα θα δούμε κατα πόσο η εκτιμήτρια $\hat{\sigma^2_{2,n}}$ είναι αμερόληπτη. Έχουμε ότι

$$E\left[\hat{\sigma^2_{2,n}}\right] = E\left[\hat{\sigma^2_{1,n}}\frac{n-1}{n}\right] = \frac{n-1}{n}E\left[\hat{\sigma^2_{1,n}}\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός οτι η εκτιμήτρια $\hat{\sigma^2_{1,n}}$ είναι αμερόληπτη. Επομένως η εκτιμήτρια $\hat{\sigma^2_{2,n}}$ εμφανίζει μεροληψία η οποία είναι ίση με $b = -\frac{\sigma^2}{n}$. Θα δούμε ωστόσο οτι παρόλου που η εκτιμήτρια $\hat{\sigma^2_{2,n}}$ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη- πράγμα το οποίο σημαίνει οτι για αρκετά μεγάλο δείγμα μεγέθους $n$, η $\hat{\sigma^2_{2,n}}$ είναι πρακτικά αμερόληπτη. Παρουσιάζεται ο ορισμός της ασυμπτωτικής αμεροληψίας.

### 3.1.3 Κριτήριο Ασυμπτωτικής Αμεροληψίας

**Ορισμός 3.11.** *Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^\top$ από ανεξάρτητες και ισοκατανεμημένες τ.μ. και συνάρτηση $\alpha = \alpha(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ όπου $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)^\top$ το διάνυσμα παραμέτρων της κατανομής. Τότε μια εκτιμήτρια $T_n = T_n(\boldsymbol{X})$ που βασίζεται στο μέγεθός του δείγματος λέμε οτι είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη εάν:*

$$b(T_n) = E[T_n|\boldsymbol{\theta}] - a \to 0 \;\; \textit{για } n \to +\infty$$

**Παρατήρηση 3.12.** *Η εκτιμήτρια $\hat{\sigma^2_{2,n}}$ που συναντήσαμε πρίν είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη καθώς*

$$\lim_{n\to+\infty} b(\hat{\sigma^2_{2,n}}) = \lim_{n\to+\infty} E[\hat{\sigma^2_{2,n}}|(\mu, \sigma^2)] - \sigma^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = 0$$

Δύο άλλα σημαντικά κριτήρια για την επιλογή μιας εκτιμήτριας είναι το κατα πόσο μια εκτιμήτρια είναι συνεπής και πόσο είναι το μέσο τετραγωνικό της σφάλμα. Ακολουθούν οι σχετικοί ορισμοί των κριτηρίων.

### 3.1.4 Κριτήριο Συνέπειας

**Ορισμός 3.13.** *Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^\top$ με μέγεθος $n$ από κάποιο πληθυσμό $\{\boldsymbol{X}, \mathfrak{X}^n, \prod_{i=1}^n p(x_i, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^m\}$ και $\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{X}) = (t_1(\boldsymbol{X}), ..., t_m(\boldsymbol{X}))$ μια εκτιμήτρια της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$. Η εκτιμήτρια $\boldsymbol{T}_n$ ονομάζεται συνεπής (consistent) όταν $\boldsymbol{T}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\theta}$, δηλαδή όταν για κάθε $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[\|\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\theta}\| > \varepsilon] = 0$$

*όπου $\|\cdot\|$ η Ευκλείδια απόσταση. Η περίπτωση αυτού του είδους σύγκλισης λέγεται σύγκλιση κατά πιθανότητα ή ασθενής σύγκλιση.*

### 3.1.5 Κριτήριο Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος

**Ορισμός 3.14.** *Ονομάζουμε Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Square Error) της εκτιμήτριας $T = t(\boldsymbol{X})$ της συνάρτησης $\alpha = \alpha(\boldsymbol{\theta})\,, \boldsymbol{\theta} \in \Theta$ την ποσότητα*

$$MSE[T] = E\left[\{T-a\}^2|\boldsymbol{\theta}\right] = E\left[\{t(\boldsymbol{X})-a\}^2|\boldsymbol{\theta}\right]$$

*Σημειώνουθμε οτι αν $b(\boldsymbol{\theta})$ είναι η αμεροληψία μιας εκτιμήτριας $T$ τη ποσότητας $a$, τότε*

$$MSE[T] = E\left[\{T-a\}^2|\boldsymbol{\theta}\right] = E\left[\{T-(a+b)+b\}^2|\boldsymbol{\theta}\right]$$

$$= E\left[\{T-(a+b)+b\}^2|\boldsymbol{\theta}\right] + 2bE\left[T-(a+b)|\boldsymbol{\theta}\right] + b^2 = E\left[\{T-(a+b)+b\}^2|\boldsymbol{\theta}\right] + b^2$$

$$= E\left[\{T-a\}^2|\boldsymbol{\theta}\right] + b^2$$

*καθώς γνωρίζουμε ότι $b = E[T|\boldsymbol{\theta}] - \alpha$ και άρα*

$$MSE[T] = Var[T|\boldsymbol{\theta}] + b^2 \tag{3.6}$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την σύγκλιση στο χώρο $L^2$

**Ορισμός 3.15.** *Λέμε οτι η $X_n$ συγκλίνει στη $X$ κατα τετραγωνικό μέσο (quadratic mean) (σύγκλιση στο χώρο $L^2$) αν*

$$E[(X_n - X)^2] \to 0$$

*για $n \to +\infty$. Συμβολίζεται $X_n \overset{qm}{\to} X$*

**Λήμμα 3.16.** *Αν $X_n \overset{qm}{\to} X$ τότε $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$*

*Απόδειξη.* Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την ανισότητα του Markov όπου η απόδειξή της παραθέτεται εδώ [15, p. 397]. Σύμφωνα με την ανισότητα αυτή, αν μια τυχαία μεταβλητή $X$ παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές, τότε για κάθε τιμή $a > 0$ ισχύει ότι

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{E[X]}{a}$$

Έχουμε λοιπόν ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - X|^2 > \varepsilon^2) \overset{\text{ιδιότητα } Markov}{\leq} \frac{E[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2} \to 0$$

□

**Θεώρημα 3.17.** *Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα* $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^\top$. *Αν για μια εκτιμήτρια* $\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{X}) = (t_1(\boldsymbol{X}), ..., t_m(\boldsymbol{X}))$ *της παραμέτρου* $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ *έχουμε για την μεροληψία* $b$ *ότι* $b \to 0$ *και για την τυπική απόκλιση της εκτιμήτριας* $\sqrt{Var[T|\boldsymbol{\theta}]}$ *ότι* $\sqrt{Var[T|\boldsymbol{\theta}]} \to 0$ *τότε* $\boldsymbol{T}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\theta}$, *δηλαδή η εκτιμήτρια είναι συνεπής*

*Απόδειξη.* Καθώς $b \to 0$ και $\sqrt{Var[T|\boldsymbol{\theta}]} \to 0$ έχουμε από τον ορισμό του τετραγωνικού σφάλματος ότι $MSE[T_n] \to 0$ το οποίο σημαίνει ότι $T_n \xrightarrow{qm} \boldsymbol{\theta}$ και άρα από το Λήμμα 3.16 έχουμε το ζητούμενο. □

Έχοντας τα απαραίτητα εργαλεία τώρα, μπορούμε να προχωρήσουμε στην τελική επιλογή της εκτιμήτριας της παραμέτρου $\sigma^2$

**Πρόταση 3.18.** *Οι εκτιμήτριες* $\hat{\mu}$,$\hat{\sigma^2_{1,n}}$ *και* $\hat{\sigma^2_{2,n}}$ *των σχέσεων (3.4) και (3.5) αντίστοιχα είναι συνεπείς.*

*Απόδειξη.* Για την εκτιμήτρια του $\hat{\mu}$ έχουμε ότι:

$$Var\left[\hat{\mu}\right] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \overset{3.8}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left[X_i\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Έτσι λοιπόν

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{Var\left[\hat{\mu}\right]} = 0$$

Για τις εκτιμήτριες $\hat{\sigma^2_{1,n}}$ και $\hat{\sigma^2_{2,n}}$ έχουμε ότι:
Εκμεταλλευόμενοι την Πρόταση 2.11 (Proposition 2.11) του [16] αποδεικνύεται για την $\hat{\sigma^2_{1,n}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ ότι

$$\frac{(n-1)\hat{\sigma^2_{1,n}}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

όπου $\chi^2(n-1)$ είναι η γνωστή κατανομή $\chi^2$ με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Καθώς γνωρίζουμε οτι η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής $X$ που ακολουθεί την κατανομή $\chi^2$ με $n$ βαθμούς ελευθερίας είναι ίση με $Va[X] = 2n$, στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι:

$$Var\left[\frac{(n-1)\hat{\sigma^2_{1,n}}}{\sigma^2}\right] = 2(n-1) \Leftrightarrow \frac{(n-1)^2}{\sigma^4}Var\left[\hat{\sigma^2_{1,n}}\right] = 2(n-1) \Leftrightarrow Var\left[\hat{\sigma^2_{1,n}}\right] = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}$$

Αντίστοιχα καθώς $\hat{\sigma^2_{2,n}} = \hat{\sigma^2_{1,n}}\frac{n-1}{n}$

$$Var\left[\hat{\sigma^2_{2,n}}\right] = Var\left[\hat{\sigma^2_{1,n}}\frac{n-1}{n}\right] = \frac{(n-1)^2}{n^2}Var\left[\hat{\sigma^2_{1,n}}\right] = \frac{2\sigma^4(n-1)}{n^2}$$

'Ετσι λοιπόν $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{Var\left[\hat{\sigma^2_{1,n}}\right]} = 0$ και $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{Var\left[\hat{\sigma^2_{2,n}}\right]} = 0$

Έχουμε τώρα για τις εκτιμήτριες $\hat{\mu}$,$\hat{\sigma^2_{1,n}}$ και $\hat{\sigma^2_{2,n}}$ τα εξής:

Για την $\hat{\mu}$ έχουμε οτι έχει αμεροληψία $b(\hat{\mu}) = 0$

Για την $\hat{\sigma^2_{1,n}}$ έχουμε οτι έχει αμεροληψία $b(\hat{\sigma^2_{1,n}}) = 0$

Για την $\hat{\sigma^2_{2,n}}$ έχουμε οτι έχει αμεροληψία $b(\hat{\sigma^2_{2,n}}) \to 0$ για $n \to +\infty$, δηλαδή ασυμπτωτική αμεροληψία.

Επομένως και οι 3 εκτιμήτριες ικανοποιούν της προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.17 και άρα είναι και οι 3 συνεπείς.

□

Σχετικά με την εκτιμήτρια του $\mu$ έχουμε οτι η $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ικανοποιεί όλα τα κριτήρια και άρα είναι κατάλληλη.

Σχετικά με τις εκτιμήτριες του $\sigma^2$ έχουμε οτι οι $\hat{\sigma^2_{1,n}}, \hat{\sigma^2_{2,n}}$ ικανοποιούν όλα τα κριτήρια.(Η $\hat{\sigma^2_{2,n}}$ είναι πρακτικά αμερόληπτη για ικανοποιητικά μεγάλο δείγμα $n$). Για την τελική επιλογή ωστόσο θα διαλέξουμε την εκτιμήτρια που έχει τη μικρότερη διασπορά.

$$Var\left[\hat{\sigma^2_{2,n}}\right] - Var\left[\hat{\sigma^2_{1,n}}\right] = \frac{2\sigma^4(n-1)}{n^2} - \frac{2\sigma^4}{(n-1)} = 2\sigma^4\left(\frac{(n-1)}{n^2} - \frac{1}{(n-1)}\right) =$$

$$\frac{2\sigma^4}{n^2(n-1)}\left((n-1)^2 - n^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n^2(n-1)}(1-2n) < 0 \text{ για } n > 1$$

Συνεπώς $Var\left[\hat{\sigma^2_{2,n}}\right] < Var\left[\hat{\sigma^2_{1,n}}\right]$ και άρα επιλέγουμε τη $\hat{\sigma^2_{2,n}}$ σαν εκτιμήτρια του $\sigma^2$.

Συνοψίζοντας λοιπόν, οι εκτιμήτριες μέσης τιμής και διασποράς για έναν πληθυσμό που ακολουθεί την κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή και διασπορά είναι

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ και } \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \tag{3.7}$$

## 3.2 Mixtures

Για να προχωρήσουμε στον ορισμό της γενικευμένης υπερβολικής κατανομής θα χρειαστούν μερικοί ορισμοί για να γίνουν κατανοητά τα διάφορα σημεία του τρόπου που ορίζεται η κατανομή. Αρχικά θα χρειαστεί να γίνει κατανοητή η έννοια της μετρησιμότητας.

### 3.2.1 Μετρήσιμες Συναρτήσεις

**Ορισμός 3.19.** *Μια οικογένεια $\mathfrak{M}$ υποσυνόλων ενός συνόλου $X$ είναι μια σ-άλγεβρα, αν η $\mathfrak{M}$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

*(i)* $X \in \mathfrak{M}$

*(ii) Αν $A \in \mathfrak{M}$ τότε $A^c \in \mathfrak{M}$ ($A^c$ το συμπλήρωμα του $A$ ώς προς $X$)*

*(iii) Αν $A_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.*

*[17, p.33]*

**Ορισμός 3.20.** *Αν $\mathfrak{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $X$, ο $X$ λέγεται μετρήσιμος χώρος και τα στοιχεία του $\mathfrak{M}$ λέγονται μετρήσιμα σύνολα του $X$.*

**Ορισμός 3.21.** *Ορίζουμε σαν δυναμοσύνολο του συνόλου $X$ (συμβολίζουμε $\mathcal{P}(X)$) το*

$$\mathcal{P}(X) = \{A \,|\, A \subseteq X\}\,.$$

**Πρόταση 3.22.** *Το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ είναι σ-άλγεβρα.*

*Απόδειξη.* Για να το αποδείξουμε αυτό αρκεί να ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii)

(i)

Έχουμε τετριμμένα ότι $X \subseteq X$ και άρα $X \in \mathcal{P}(X)$.

(ii)

Έστω $A \in \mathcal{P}(X)$ τότε έχουμε $A^c = X \setminus A$ ($A^c$ το συμπλήρωμα του $A$ ώς προς $X$). Τότε καθώς ισχύει ότι $X \setminus A \subseteq X$ έχουμε ότι $A^c = X \setminus A \in \mathcal{P}(X)$.

(iii)

Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ οικογένεια συνόλων όπου $A_n \in \mathcal{P}(X)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Τότε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq X$ καθώς $A_n \subseteq X$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}(X)$.

□

**Πρόταση 3.23.** *Αν $\mathfrak{F}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του $X$, τότε υπάρχει η μικρότερη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}^*$ στο $X$ με $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}^*$. Η $\mathfrak{M}^*$ λέμε οτι είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathfrak{F}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\Omega$ είναι η οικογένεια όλων των σ-αλγεβρών $\mathfrak{M}$ στο $X$ οι οποίες περιέχουν την $\mathfrak{F}$. από την Πρόταση 3.22 το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $X$, η οποία περιέχει την $\mathfrak{F}$, η οικογένεια $\Omega$ δεν είναι το κενό σύνολο. Έστω $\mathfrak{M}^*$ είναι η τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την $\mathfrak{F}$. Προφανώς θα ισχύει ότι $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}^*$ αφού το σύνολο $\mathfrak{M}^*$ περιέχει την $\mathfrak{F}$. Επίσης η $\mathfrak{M}^*$ ως τομή σ-αλγεβρών, περιέχεται σε όλες τις σ-άλγεβρες του $X$ που περιέχου την $\mathfrak{F}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathfrak{M}^*$ είναι σ-άλγεβρα, άρα να δείξουμε οτι ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii)

(i)

Αφού για κάθε σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$ έχουμε ότι $X \subseteq \mathfrak{M}$ τότε θα ισχύει και για την τομή το ίδιο και άρα $X \in \mathfrak{M}^*$

(ii)

Έστω $A \in \mathfrak{M}^*$. Αφου $\mathfrak{M}^*$ είναι η τομή όλων των σ-αλγεβρών ισχύει ότι $A \in \mathfrak{M}$ για κάθε $\mathfrak{M} \in \Omega$. Τότε αφού $\mathfrak{M}$ είναι σ-άλγεβρα έχουμε ότι $A^c = X \setminus A \in \mathfrak{M}$ για κάθε $\mathfrak{M} \in \Omega$ και άρα $A^c \in \mathfrak{M}^*$.

(iii)

Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ οικογένεια συνόλων όπου $A_n \in \mathfrak{M}^*$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ τότε αφου $\mathfrak{M}^*$ είναι η τομή όλων των σ-αλγεβρών ισχύει ότι $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}$ για κάθε $\mathfrak{M} \in \Omega$. Τότε αφού $\mathfrak{M}$ είναι σ-άλγεβρα έχουμε ότι $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$ για κάθε $\mathfrak{M} \in \Omega$ και άρα $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}^*$

□

**Ορισμός 3.24.** *Αν $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, με $\sigma(\mathcal{E})$ συμβολίζουμε τη μοναδική μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το $\mathcal{E}$. Η $\sigma(\mathcal{E})$ λέμε οτι είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{E}$ (Πρόταση 3.23). Η Borel σ-άλγεβρα είναι αυτή που παράγεται από τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}$ και συμβολίζεται με $\mathfrak{B}$. Τα στοιχεία της $\mathfrak{B}$ λέγονται σύνολα Borel.*

Τα παραπάνω θα μας χρειαστούν για να ορίσουμε τη μετρήσιμη συνάρτηση.

**Ορισμός 3.25.** *(i) Θεωρούμε $\mathfrak{M}$ την οικογένεια μετρήσιμων συνόλων και έστω $E \in \mathfrak{M}$. Η επεκτεταμένη συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμη ή απλά μετρήσιμη, αν*

$$f^{-1}(U) = \{x \in E : f(x) \in U\} \in \mathfrak{M},$$

*δηλαδή το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι μετρήσιμο για κάθε ανοικτό σύνολο $U$ του $\overline{\mathbb{R}}$*

*(ii) Έστω $E \in \mathfrak{B}$, δηλαδή το $E$ είναι Borel μετρήσιμο σύνολο. Η επεκτεταμένη συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται Borel μετρήσιμη, αν κάθε ανοικτό σύνολο $U$ του $\overline{\mathbb{R}}$ , το $f^{-1}(U) \in \mathfrak{B}$.*

### 3.2.2 Countable Mixtures

Σε πολλές περιπτώσεις η τυχαία μεταβλητή ενδιαφέροντος $X$ είναι στην πραγματικότητα η υλοποίηση μιας εκ των $k$ τυχαίων μεταβλητών, έστω $X_1, ..., X_k$, όπου είναι άγνωστο από ποια προήλθε. Η τυχαία μεταβλητή που προκύπτει λοιπόν λέμε οτι ακολουθεί μια πεπερασμένη mixture κατανομή. Σημειώνουμε οτι η συνάρτηση της $X_i$ (αναλογα το αν είμαστε σε συνεχή ή διακριτή περίπτωση) ορίζεται ώς $f_{X|i}$, $i = 1..., k$ για να είναι η σαφής η εξάρτηση από το $i$. Η συνάρτηση μάζας ή πυκνότητας πιθανότητας της $X$ λοιπόν δίνεται από

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{X|i}(x), \qquad \lambda_i \in (0,1), \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \tag{3.8}$$

όπου τα $\lambda_i$ αναφέρονται σαν τα mixture component βάρη. Παρακάτω θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα για να γίνει πιο κατανοητή η έννοια.

**Παράδειγμα 3.26.** *Θεωρούμε την k-component mixed normal , $k \in \mathbb{N}$. Μια τυχαία μεταβλητή $X$ λοιπόν που ακολουθεί τη συγκεκριμένη κατανομή, γράφεται ως $X \sim MixN(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ όπου $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_k)^\top, \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, ..., \sigma_k)^\top$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_k)^\top$ και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f_X(x|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x|\mu_i, \sigma_i^2), \qquad \lambda_i \in (0,1), \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

*όπου* $f(x|, \mu_i, \sigma_i^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x-\mu_i)^2\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

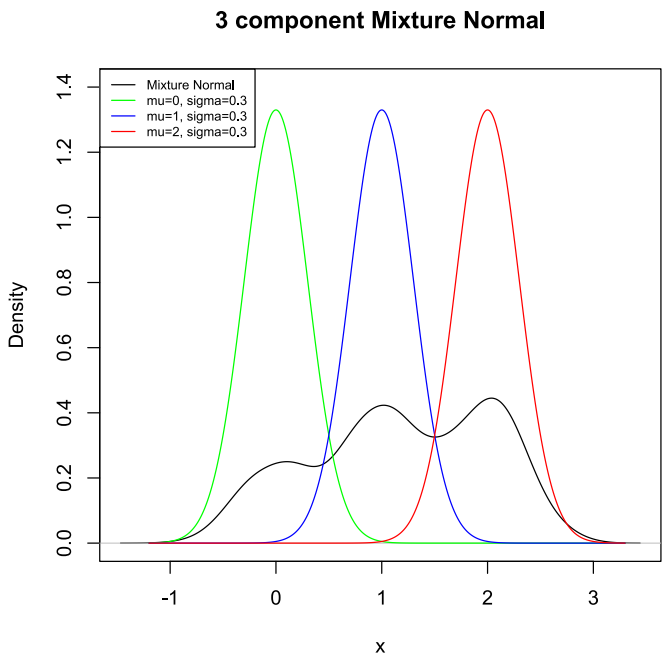
*Στην Εικόνα 3.1 βλέπουμε την περίπτωση μιας mixed normal με 3 components καθώς και τις επιμέρους κατανομές που τη σχηματίζουν.*

Συνεχίζοντας την ανάλυση, η μορφή (3.8) της συνάρτησης πυκνότητας ή μάζας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής $X$ μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητή εισάγωντας τη διακριτή τυχαία μεταβλητή $C$, με στήριγμα $\mathcal{C} = \{1, ..., k\}$ και συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$f_C(c) = \mathbb{P}[C = c] = \lambda_c,\ c \in \mathcal{C},\ \lambda_c \in (0,1),\ \sum_{c=1}^{k} \lambda_c = 1.$$

Με αυτό τον τρόπο η συνάρτηση πυκνοτητας ή μάζας πιθανότητας του $X$ έχει τη μορφή

$$f_X(x) = \int_{\mathcal{C}} f_{X|C}(x|c) dF_C(c) = \sum_{c=1}^{k} f_{X|C}(x|c) f_c(c) = \sum_{c=1}^{k} \lambda_c f_{X|C}(x|c). \tag{3.9}$$




Εικόνα 3.1: Mixed Normal Density με $\boldsymbol{\mu} = (0, 1, 2)^\top, \boldsymbol{\sigma} = (0.3, 0.3, 0.3)^\top$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.4, 0.4)^\top$

**Παρατήρηση 3.27.** *Για $k = \infty$ το $\mathcal{C}$ δεν είναι πλέον πεπερασμένο αλλα αριθμήσιμα άπειρο και η τυχαία μεταβλητή $X$ λέμε οτι ακολουθεί μια αριθμήσιμη mixture κατανομή.*

*Σε αυτό το σημείο θα οριστούν οι ροπές, οι ροπογεννήτριες και οι αναμενόμενες τιμές συναρτήσεων μιας δεσμευμένης κατανομής.*

**Ορισμός 3.28.** *Έχουμε $\boldsymbol{X_m} = (X_1, ..., X_m)$ και $\boldsymbol{Y} = (X_{m+1}, ..., X_n)$ τέτοια ώστε $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X_m}, \boldsymbol{Y})$. Η αναμενόμενη τιμή μιας συνάρτησης $g(\boldsymbol{X_m}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ δοθέντος του οτι το $\boldsymbol{Y}$ είναι σταθερό ($\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}$) είναι*

$$E[g(\boldsymbol{X_m}) \,|\, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}] = \int_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m} g(\boldsymbol{x}) dF_{\boldsymbol{X_m}|\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}). \tag{3.10}$$

*Σημειώνουμε οτι η συνάρτηση $g(\boldsymbol{X_m})$ θα μπορούσε να αντικατασταθεί και από την $g(\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{X_m}, \boldsymbol{Y})$ αν για παράδειγμα η $g$ ήταν συνάρτηση του στοχαστικού διανύσματος $\boldsymbol{X}$ οπού το $\boldsymbol{Y}$ να αντικατασταθεί από το μη στοχαστικό $\boldsymbol{y}$ και να θεωρηθεί σταθερό. Η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής $F_{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}}$ σε αυτή την περίπτωση θα παρέμενε η $F_{\boldsymbol{X_m}|\boldsymbol{Y}}$.*

*[18, p.304]*

**Ορισμός 3.29.** *Έστω $X, Y$ συγκατανεμόμενες τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας ή μάζας*

*πιθανότητας $f_{X,Y}$ και έστω $f_X(x) = \int_{\mathcal{C}_2} f_{X,Y}(x,y)dy$ και $f_Y(y) = \int_{\mathcal{C}_1} f_{X,Y}(x,y)dx$ οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας ή μάζας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X$ και $Y$ αντίστοιχά ($\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathbb{R},\ f_X(x) > 0\}$ και $\mathcal{C}_2 = \{y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) > 0\}$). Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας ή μάζας πιθανότητας της $X$ δοδέντος ότι $Y = y$ είναι η*

$$f_{X|Y}(x\,|\,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

*με $f_Y(y) > 0$.*

*Κατα πλήρη αντιστοιχία η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας ή μάζας πιθανότητας της $Y$ δοδέντος ότι $X = x$ είναι η*

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

*με $f_X(x) > 0$.*

*Μια ειδική περίπτωση της σχέσης (3.10) είναι οταν δυο τυχαίες μεταβλητές $X, Y \in \mathbb{R}$ έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y}$. Η δεσμευμένη μέση τιμή του $X$ δοθέντος ότι $Y = y$ είναι*

$$E[X\,|\,Y = y] = \int_{\mathcal{C}_1} x f_{X|Y}(x\,|\,y)dx. \tag{3.11}$$

Στο [18, p.307, p.309] αποδεικνύεται ότι

$$E_X[g(X)] = E_C[E_{X|C}[g(X)\,|\,C]] \qquad \text{και} \qquad Var[X] = E[Var[X\,|\,C]] + Var[E[X\,|\,C]] \tag{3.12}$$

Συνεχίζοντας τώρα, για να υπολογιστεί η $r-$οστή ροπή (r-moment) της τυχαίας μεταβλητής $X$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.10) όπου $g(X) = X^r$, $r \in \mathbb{N}$ και έχουμε για $c \in \mathcal{C} = \{1, ..., k\}$

$$E[X^r\,|\,C = c] = \mu_r^{'}(X\,|\,C = c) = \int_{x\in\mathbb{R}} x^r dF_{X|C}(x\,|c).$$

Παίρνοντας τη μέση τιμή της παραπάνω σχέσης και χρησιμοποιώντας επιπλέον οτι $E_X[g(X)] = E_C[E_{X|C}[g(X)\,|\,C]]$ έχουμε ότι

$$E[X^r] = \mu_r^{'}(X) = \int_{\mathcal{C}} \mu_r^{'}(X\,|\,C = c)dF_C(c) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_c \mu_r^{'}(X\,|\,C = c). \tag{3.13}$$

Θέλουμε τώρα να αναλύσουμε τη ροπογεννήτρια (moment generating function) $M_X(t) = E_X[e^{tX}]$ της $X$

Στην περίπτωση όπου $g(X) = e^{tX}$ με $t \in (-h, h)$ και $h > 0$ τέτοιο ώστε η $E[e^{tX}]$ να υπάρχει, έχουμε κατα πλήρη αντιστοιχία με τη σχέση (3.13) έχουμε ότι

$$E[e^{tX}] = E_C[E_{X|C}[e^{tX} \,|\, C]] = \int_{\mathcal{C}} M_{X|C=c}(t) dF_C(c) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_c M_{X|C=c}(t). \tag{3.14}$$

### 3.2.3 Continuous Mixtures

Επεκτείνουμε τη μορφή (3.9) στην περίπτωση όπου η τυχαία μεταβλητή $C$ είναι συνεχής με στήριγμα $\mathcal{C}$ αντίστοιχο στη συνεχή περίπτωση. Η τυχαία μεταβλητή $X$ λέμε ότι ακολουθεί συνεχή mixture κατανομή αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας εκφράζεται στη μορφή

$$f_X(x) = \int_{\mathcal{C}} f_{X|C}(x|c) f_C(c) dc \tag{3.15}$$

ή ισοδύναμα αν η συνάρτηση κατανομής έχει τύπο $F_X(x) = \int_{\mathcal{C}} F_{X|C}(x|c) f_c(c) dc$.

Οι αντίστοιχες περιπτώσεις των σχέσεων (3.13) και (3.14) στη συνεχή περίπτωση είναι

$$E[X^r] = \int_{\mathcal{C}} \mu_r^{'}(X \,|\, C = c) f_C(c) dc, \quad E[e^{tX}] = \int_{\mathcal{C}} M_{X|C=c}(t) f_C(c) dc.$$

### 3.2.4 Variance-Mean Mixture of Normals

Θεωρούμε μια ειδική περίπτωση mixture τώρα που λέγεται variance-mean mixture of normals. Το όνομα αυτό δίνεται καθώς είναι ενα mixture από normal distributions ώστε η μέση τιμή (mean) και η διασπορά (variance) των mixed κατανομών υπάρχουν σε μια σχέση που θα δούμε παρακάτω.

Υποθέτουμε ότι $W$ είναι μια θετική τυχαία μεταβλητή και $\mu$ και $\beta$ είναι σταθερές. Αν η τυχαία μεταβλητή $X$ ικανοποιεί το ότι

$$X \,|\, W \sim \mathcal{N}(\mu + \beta W \,,\, W)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τη πυκνότητα $f_X$ της $X$ με τον παρακάτω τρόπο. Αν η $Z$ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση μάζας πιθανότητας $f_Z$ τότε

$$f_X(x) = \sum_{\substack{w > 0 \\ f_w(w) \neq 0}} f_N(x; \mu + \beta w, w) f_W(w) \tag{3.16}$$

ενώ αν η $W$ είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Z$ τότε

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} f_N(x; \mu + \beta w, w) f_W(w) dw. \tag{3.17}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $f_N(x;\mu+\beta w,w)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής με μέση τιμή $\mu+\beta W$ και διασπορά $W$. Για λόγους συμβολισμού θα λέμε ότι η κατανομή της $X$ είναι η $Mix_\pi(\mu,\beta)$ όπου $\pi$ είναι η κατανομή της $W$. Σημειώνουμε οτι $\mu$ είναι η παράμετρος θέσης και $\beta$ η παράμετρος ασυμμετρίας ή λοξότητας (skewness). Για $\beta=0$ η κατανομή της $X$ είναι συμμετρική γύρω από το $\mu$.

**Πρόταση 3.30.** *Για τη μέση τιμή και η διασπορά της $X$ είναι $E[X]=\mu+\beta E[W]$ και $Var[X]=E[W]+\beta^2 Var[W]$.*

*Απόδειξη.*

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\int_0^{+\infty} f_N(x;\mu+\beta w,w)f_W(w)dwdx=$$

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_N(x;\mu+\beta w,w)dx f_W(w)dw=\int_0^{+\infty}(\mu+\beta w)f_W(w)dw=$$

$$=\mu\int_0^{+\infty} f_W(w)dw+\beta\int_0^{+\infty} w f_W(w)dw=\mu+\beta E[W]$$

Για τον υπολογισμό του $Var[X]$ έχουμε από τη σχέση (3.7) οτι $Var[X]=E[X^2]-E[X]^2$ και επομένως αρκεί να υπολογιστεί το $E[X^2]$. Άρα

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\int_0^{+\infty} f_N(x;\mu+\beta w,w)f_W(w)dwdx=$$

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_N(x;\mu+\beta w,w)dx f_W(w)dw$$

και καθώς $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_N(x;\mu+\beta W,w)dx=E[W^2]=Var[W]+E[W]^2=w+(\mu+\beta w)^2=\beta^2w^2+(1+2\mu\beta)w+\mu^2$ έχουμε ότι

$$E[X^2]=\int_0^{+\infty}[\beta^2w^2+(1+2\mu\beta)w+\mu^2]f_W(w)dw=$$

$$\beta^2\int_0^{+\infty} w^2 f_X(w)dw+(1+2\mu\beta)\int_0^{+\infty} w f_W(w)dw+\mu^2\int_0^{+\infty} f_W(w)dw=$$

$$\beta^2E[W^2]+(1+2\mu\beta)E[W]+\mu^2$$

Επομένως

$$Var[X] = \beta^2 E[W^2] + (1 + 2\mu\beta)E[W] + \mu^2 - (\mu + \beta E[W])^2 = \beta^2(E[W^2] - E[W]^2) + E[W] =$$

$$= E[W] + \beta^2 Var[W].$$

□

**Πρόταση 3.31.** *Η ροπογεννήτρια της $X$ είναι $M_X(t) = e^{\mu t} M_W(\beta t + t^2/2)$.*

*Απόδειξη.*

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \int_0^{+\infty} f_N(x; \mu + \beta w, w) f_W(w) dw dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_N(x; \mu + \beta w, w) dx f_W(w) dw =$$

$$\int_0^{+\infty} exp\left[(m + \beta w)t + \frac{w}{2}t^2\right] f_W(w)dw = e^{\mu t} M_W(\beta t + t^2/2).$$

□

Θα παρουσιαστεί τώρα και η πολυδιάστατη περίπτωση, δηλαδή όπου το $\boldsymbol{X}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα.

**Ορισμός 3.32.** *Το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^d$ λέμε οτι έχει μια πολυδιάστατη normal mean-variance mixture κατανομή εάν*

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{m}(W) + \sqrt{W} A \boldsymbol{Z}, \tag{3.18}$$

*όπου*

*(i)* $\boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, I_k)$ ,

*(ii)* $W \geq 0$ *είναι μια μη αρνητική scalar-valued τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη του* $\boldsymbol{Z}$,

*(iii)* $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ *είναι ένας πίνακας και*

*(iv)* $\boldsymbol{m} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ *μια μετρήσιμη συνάρτηση*

*Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι*

$$\boldsymbol{X} \,|\, W = w \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{m}(w), w\Sigma), \tag{3.19}$$

*όπου* $\Sigma = AA'$

Μια συγκεκριμένη περίπτωση της συνάρτησης που θα μας απασχολήσει είναι η

$$\boldsymbol{m}(W) = \boldsymbol{\mu} + W\boldsymbol{\beta}$$

όπου $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$ είναι παράμετροι. από τη σχέση (3.19) έχουμε ότι $E[\boldsymbol{X} \,|\, W] = \boldsymbol{\mu} + w\boldsymbol{\beta}$ και $Var[\boldsymbol{X} \,|\, W] = w\Sigma$ και αντίστοιχα οι σχέσεις που αποδείξαμε για τη μέση τιμή και τη διασπορά στην Πρόταση 3.30 αποδεικνύονται στην πολυδιάστατη περίπτωση μέσω της σχέσης (3.12) . Πιο συγκεκριμένα

$$E[\boldsymbol{X}] = E[E[\boldsymbol{X} \,|\, W]] = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\beta}E[W] \tag{3.20}$$

και

$$Var[\boldsymbol{X}] = E[Var[\boldsymbol{X} \,|\, W]] + Var[E[\boldsymbol{X} \,|\, W]] = E[W\Sigma] + Var[\boldsymbol{\mu} + W\boldsymbol{\beta}] =$$

$$\Sigma E[W] + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}' Var[W]. \tag{3.21}$$

## 3.3 Γενικευμένη Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή

Η συγκεκριμένη κατανομή περιγράφεται από τρείς παραμέτρους και ορίζεται στην θετικό ημιάξονα των πραγματικών αριθμών.

**Ορισμός 3.33.** *Μια τυχαία μεταβλητή $X$ ακολουθεί τη Γενικευμένη Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή με παραμέτρους $\lambda, \chi, \psi$, συμβολίζουμε $X \sim GIG(\lambda, \chi, \psi)$, αν*

$$f_{GIG}(x; \lambda, \chi, \psi) = \frac{(\psi/\chi)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} x^{\lambda-1} exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \psi x)\right\}, \qquad x > 0 \tag{3.22}$$

*όπου ο παραμετρικός χώρος δίνεται από*

$$\begin{array}{rlll} \Theta_{GIG} := \{(\lambda, \chi, \psi) \in \mathbb{R}^3 : & \lambda \in \mathbb{R}, & \chi > 0 & \psi > 0 \\ \text{ή} & \lambda > 0, & \chi = 0 & \psi > 0 \\ \text{ή} & \lambda < 0, & \chi > 0 & \psi = 0 \quad \}. \end{array}$$

*Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $K_\lambda(x)$ είναι η συνάρτηση Bessel τρίτου είδους (Bessel function of third kind) με δείκτη $\lambda$.*

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{2}x(u^{-1} + u)\right) du, \qquad x > 0. \tag{3.23}$$

Για λόγους συμβολισμού θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω σχέση

$$K_\lambda(\chi, \psi) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \psi x)\right) dx$$

και σύμφωνα με το [19, p.302] αποδεικνύεται ότι

$$K_\lambda(\chi,\psi) = 2\left(\frac{\chi}{\psi}\right)^{\lambda/2} K_\lambda(\sqrt{\chi\psi}). \tag{3.24}$$

Σχετικά με τη μέση τιμή και τη διασπορά της συγκεκριμένης κατανομής αποδεικνύεται στο [19, p.308] ότι ο τύπος για την εύρεση των ροπών

$$E[X^r] = \frac{K_{\lambda+r}(\chi,\psi)}{K_\lambda(\chi,\psi)}$$

και άρα από το Λήμμα 3.7

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{\chi}{\psi}\left[\frac{K_{\lambda+2}(\sqrt{\chi\psi})K_\lambda(\sqrt{\chi\psi}) - (K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi}))^2}{(K_\lambda(\sqrt{\chi\psi}))^2}\right]$$

$$\overset{(3.24)}{=} \frac{K_{\lambda+2}(\chi,\psi)K_\lambda(\chi,\psi) - (K_{\lambda+1}(\chi,\psi))^2}{(K_\lambda(\chi,\psi))^2}.$$

**Πρόταση 3.34.** *Η ροπογεννήτρια της μιας τυχαίας μεταβλητής $X$ τέτοια ώστε $X \sim GIG(\lambda,\chi,\psi)$ είναι $M_X(t) = \frac{K_\lambda(\chi,(\psi-2t))}{K_\lambda(\chi,\psi)}$.*

*Απόδειξη.*

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_{GIG}(x)dx = \frac{(\psi/\chi)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}x^{\lambda-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi x^{-1}+\psi x)\right\}dx =$$

$$= \frac{(\psi/\chi)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{\lambda-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi x^{-1}+(\psi-2t)x)\right\}dx \overset{x=\sqrt{\frac{\chi}{\psi-2t}}y}{=}$$

$$\frac{(\psi/\chi)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}\left(\sqrt{\frac{\chi}{\psi-2t}}\right)^{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} y^{\lambda-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\chi\left(\sqrt{\frac{\chi}{\psi-2t}}\right)^{-1}y^{-1}+(\psi-2t)\sqrt{\frac{\chi}{\psi-2t}}y\right)\right\}dy =$$

$$\frac{(\psi/\chi)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}\left(\sqrt{\frac{\chi}{\psi-2t}}\right)^{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} y^{\lambda-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\chi(\psi-2t)}y^{-1}+\sqrt{\chi(\psi-2t)}y\right)\right\}dy =$$

$$\frac{1}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})(\frac{\chi}{\psi})^{\lambda/2}}\left(\frac{\chi}{\psi-2t}\right)^{\lambda/2}\int_{-\infty}^{+\infty} y^{\lambda-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{\chi(\psi-2t)}\left(y^{-1}+y\right)\right\}dy \overset{(3.23)}{=}$$

$$\frac{\left(\frac{\chi}{\psi-2t}\right)^{\lambda/2} 2K_\lambda(\sqrt{\chi(\psi-2t)})}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})(\frac{\chi}{\psi})^{\lambda/2}} = \frac{\left(\frac{\chi}{\psi-2t}\right)^{\lambda/2} K_\lambda(\sqrt{\chi(\psi-2t)})}{(\frac{\chi}{\psi})^{\lambda/2} K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \overset{(3.24)}{=} \frac{K_\lambda(\chi,(\psi-2t))}{K_\lambda(\chi,\psi)}.$$

□

Σημειώνουμε επιπλέον οτι ισχύει η σχέση

$$E[\ln X] = \left.\frac{dE[X^a]}{da}\right|_{a=0}. \tag{3.25}$$

[10, p.513]

Θα δούμε τώρα κάποιες γνωστές κατανομές που προκύπτουν για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων $(\lambda, \chi, \psi)$.

### 3.3.1 Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή

Για τιμή της παραμέτρου $\lambda = -\frac{1}{2}$ λαμβάνουμε την Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή (inverse Gaussian) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x;\eta,\chi) = \sqrt{\frac{\chi}{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{\chi}{2\eta^2}\frac{(x-\eta)^2}{x}\right\}, \qquad x > 0$$

όπου $\eta = \sqrt{\frac{\chi}{\psi}}$. Λεπτομέρειες σχετικά με την απόδειξη βρίσκονται εδώ [19, p.313]

### 3.3.2 Γάμμα κατανομή

Για την οριακή περίπτωση όπου $\lambda > 0,\ \chi = 0,\ \psi > 0$ λαμβάνουμε την κατανομή Γάμμα(Gamma). Πιο συγκεκριμένα αν μια τυχαία μεταβλητή $X \sim GIG(\lambda, 0, \psi)$ τότε ισχύει ότι $GIG(\lambda, 0, \psi) = Gamma(\lambda, \psi/2)$, συνεπώς η $X$ ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $\lambda$ και $\psi/2$.

### 3.3.3 Αντίστροφη Γάμμα κατανομή

Για την οριακή περίπτωση όπου $\lambda < 0,\ \chi > 0,\ \psi = 0$ λαμβάνουμε την αντίστροφη Γάμμα κατανομή (Inverse Gamma). Πιο συγκεκριμένα αν μια τυχαία μεταβλητή $X \sim GIG(\lambda, \chi, 0)$ τότε ισχύει ότι $GIG(\lambda, \chi, 0) = InvGamma(-\lambda, \chi/2)$, συνεπώς η $X$ ακολουθεί την αντίστροφη Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $-\lambda$ και $\chi/2$.

### 3.3.4 Εκθετική κατανομή

Καθώς γνωρίζουμε οτι αν θέσουμε στην Γάμμα κατανομή $\lambda = 1$ θα λάβουμε την Εκθετική (Exponential) κατανομή εξάγουμε το συμπέρασμα οτι για την περίπτωση όπου $\lambda = 1,\ \chi = 0,\ \psi > 0$ λαμβάνουμε την Εκθετική κατανομή. Πιο συγκεκριμένα αν μια τυχαία μεταβλητή $X \sim GIG(1, \chi, 0)$ τότε ισχύει ότι $GIG(1, \chi, 0) = Exp(\chi/2)$, συνεπώς η $X$ ακολουθεί την Εκθετική κατανομή κατανομή με παράμετρο $\chi/2$.

### 3.3.5 Θετική Υπερβολική κατανομή

Για την περίπτωση όπου $\lambda = 1,\ \chi > 0,\ \psi > 0$ λαμβάνουμε την Θετική Υπερβολική (Positive Hyperbolic) κατανομή. Πιο συγκεκριμένα αν μια τυχαία μεταβλητή $X \sim GIG(1, \chi, \psi)$ τότε ισχύει ότι $GIG(\lambda, \chi, 0) = pHyp(\chi, \psi)$, συνεπώς η $X$ ακολουθεί τη Θετική Υπερβολική κατανομή με παραμέτρους $\chi$ και $\psi$.

### 3.3.6 Lévy κατανομή

Για την οριακήπερίπτωση όπου $\lambda = -1/2,\ \chi > 0,\ \psi = 0$ λαμβάνουμε την κατανομή Lévy. Πιο συγκεκριμένα αν μια τυχαία μεταβλητή $X \sim GIG(-1/2, \chi, 0)$ τότε ισχύει ότι $GIG(-1/2, \chi, 0) = Lévy(0, \chi/2)$, συνεπώς η $X$ ακολουθεί την κατανομή Lévy με παραμέτρους 0 και $\chi/2$.

Οι σχετικές αναφορές των παραπάνω κατανομών μπορούν να βρεθούν εδώ [19, pp. 308-314].

## 3.4 Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή

### 3.4.1 Ορισμός Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής

Η περίπτωση της γενικευμένης υπερβολικής κατανομής είναι μια variance-mean mixture of normals όπου στον Ορισμό 3.32 έχουμε ότι η $W$ ακολουθεί τη Γενικευμένη Αντίστροφη Κανονική κατανομή.

Πρόκειται για μια ευμετάβλητη κατανομή όσο αφορά το σχήμα τις- πράγμα που οφείλεται στο γεγονός οτι αποτελείται από πέντε παραμέτρους όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Για δοθείσες παραμέτρους $\alpha, \beta, \delta$, θέτουμε $\chi := \delta^2$ και $\psi := \alpha^2 - \beta^2$. Τώρα ορίζουμε τη Γενικευμένη Υπερβολική κατανομήμε τον εξής τρόπο: Έχουμε $\alpha, \delta \geq 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $b \in [-a, a]$. Για $(\lambda, \chi, \psi) \in \Theta_{GIG}$ ορίζουμε την κατανομή με τον εξής τρόπο

$$GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) := Mix_{GIG(\lambda, \delta^2, \alpha^2 - \beta^2)}(\mu, \beta) \tag{3.26}$$

Σχετικά με το πεδίο ορισμού των παραμέτρων έχουμε οτι $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,$\alpha, \delta \geq 0, \beta \in [-a, a]$ τέτοια

ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω

$$\begin{array}{lllll} |\beta| < \alpha & \text{και} & \delta > 0 & \text{αν} & \lambda = 0 \\ |\beta| < \alpha & \text{και} & \delta \geq 0 & \text{αν} & \lambda > 0 \\ |\beta| = \alpha & \text{και} & \delta > 0 & \text{αν} & \lambda < 0 \end{array}$$

Έχοντας λοιπόν ότι $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \alpha, \delta \geq 0, \beta \in [-a, a]$ τέτοια ώστε $(\lambda, \delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2) \in \Theta_{GIG}$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής σύμφωνα με τη σχέση (3.17) είναι

$$f_{GH}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \int_0^\infty f_N(x; \mu + \beta w, w) f_W(w) dw =$$

$$\int_0^\infty f_N(x; \mu + \beta w, w) f_{GIG}(w; \lambda, \delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2) dw = \int_0^\infty f_N(x; \mu + \beta w, w) \frac{((\alpha^2 - \beta^2)/\delta^2)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{\delta^2(\alpha^2 - \beta^2)})} w^{\lambda - 1} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(\delta^2 w^{-1} + (\alpha^2 - \beta^2) w)\right\} dw =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} \exp\left\{-\frac{1}{2w}(x - (\mu + \beta w))^2\right\} \times$$

$$\frac{1}{K_\lambda(\delta^2, \alpha^2 - \beta^2)} w^{\lambda - 1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\delta^2 w^{-1} + (\alpha^2 - \beta^2) w)\right\} dw =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} K_\lambda(\delta^2, \alpha^2 - \beta^2)} e^{\beta(\chi - \mu)} \times$$

$$\underbrace{\int_0^\infty w^{(\lambda - \frac{1}{2}) - 1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(w^{-1}[(x - \mu)^2 + \delta^2] + w[\alpha^2 - \beta^2 + \beta^2] - 2\beta x + 2\beta x)\right\} dw}_{K_{\lambda - \frac{1}{2}}((x - \mu)^2 + \delta^2, a^2)}$$

$$= \frac{K_{\lambda - \frac{1}{2}}((x - \mu)^2 + \delta^2, a^2)}{\sqrt{2\pi} K_\lambda(\delta^2, \alpha^2 - \beta^2)} e^{\beta(x - \mu)}$$

Σχετικά με τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη ροπογεννήτρια που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη κατανομή θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των Προτάσεων 3.30 και 3.31.

Για μια τυχαία μεταβλητή $X \sim GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ λοιπόν έχουμε ότι

$$E[X] = \mu + \beta E[W]$$

$$Var[X] = E[W] + \beta^2 Var[W]$$

$$M_X(t) = e^{\mu t} M_W(\beta t + t^2/2)$$

όπου $W \sim GIG(\lambda, \delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2)$. Άρα

$$E[X] = \mu + \beta \frac{K_{\lambda+1}(\delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2)}{K_\lambda(\delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2)}.$$

$$Var[X] = \frac{K_{\lambda+1}(\delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2)}{K_\lambda(\delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2)} + \beta^2 \frac{K_{\lambda+2}(\delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2) K_\lambda(\delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2) - (K_{\lambda+1}(\delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2))^2}{(K_\lambda(\delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2))^2}.$$

$$M_X(t) = e^{\mu t} \frac{K_\lambda(\delta^{2,}, (\alpha^2 - \beta^2 - 2(\beta t + t^2/2)))}{K_\lambda(\delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2)} = e^{\mu t} \frac{K_\lambda(\delta^{2,}, (\alpha^2 - (\beta + t)^2)}{K_\lambda(\delta^{2,}, \alpha^2 - \beta^2)}$$

όπου $t \in (-\alpha - \beta, \alpha + \beta)$.

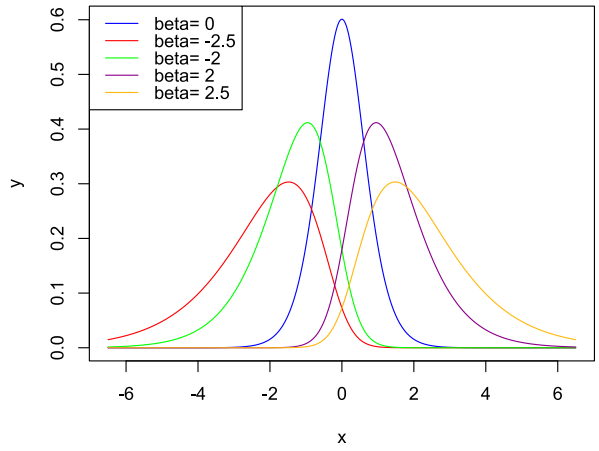
Για να δούμε τώρα τη μορφή της συγκεκριμένης κατανομής θα παρουσιαστούν μερικές περιπτώσεις των παραμέτρων. Σημειώνουμε οτι καθώς η παράμετρος $\mu$ είναι η παράμετρος θέσης, θα τη θεωρήσουμε παντού 0 καθώς δε θα επηρρεάσει το σχήμα της κατανομής. Σχετικά με την παράμετρο $\beta$ που όπως αναφέραμε αντιστοιχεί στη λοξότητα της κατανομής παρουσιάσουμε τρείς περιπτώσεις όπου θα έχουμε $\beta < 0, \beta = 0, \beta > 0$ για κάποιες τιμές των παραμέτρων $\alpha, \delta, \lambda$ . Το αποτέλεσμα φαίνεται στην Εικόνα 3.2.

Στη συνέχεια θα τη θεωρήσουμε 0 και θα δούμε διάφορα σχήματα όπου θα κρατάμε σταθερά τα 2 εκ των $\alpha, \delta, \lambda$ και θα αλλάζουμε τις τιμές της τρίτης παραμέτρου.

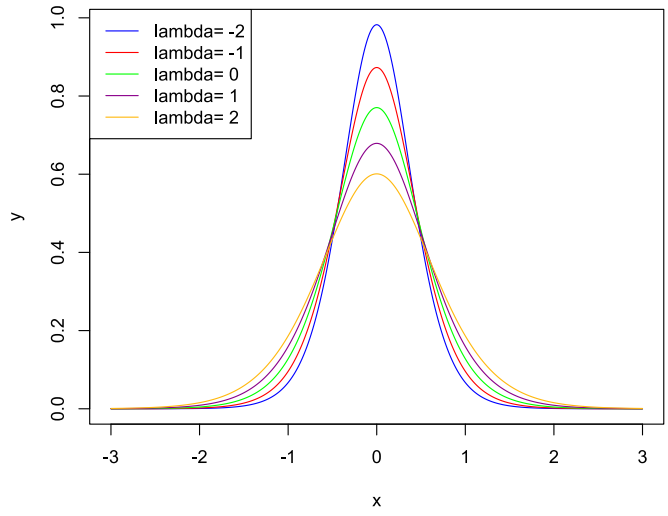
Θεωρώντας $\alpha = 3.5, \delta = 1$ στην Εικόνα 3.3 φαίνονται οι κατανομές για διάφορες τιμές του $\lambda$.

Θεωρώντας $\lambda = 1, \delta = 1$ στην Εικόνα 3.4 φαίνονται οι κατανομές για διάφορες τιμές του $a$.

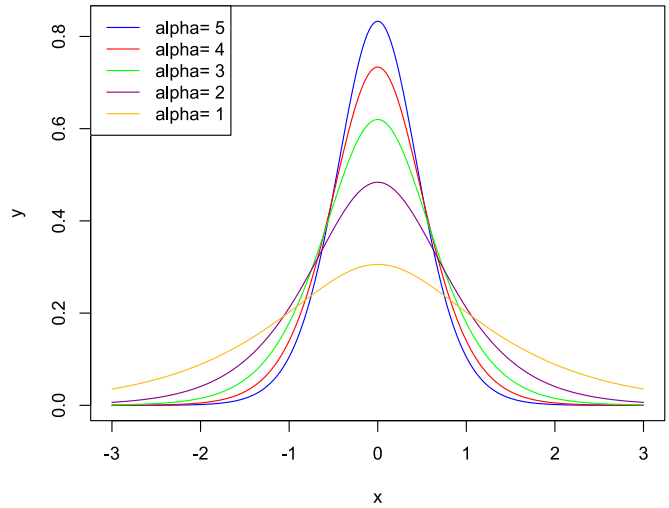
Τέλος θεωρώντας $\lambda = 1, \alpha = 4$ στην Εικόνα 3.5 φαίνονται οι κατανομές για διάφορες τιμές του $\delta$.



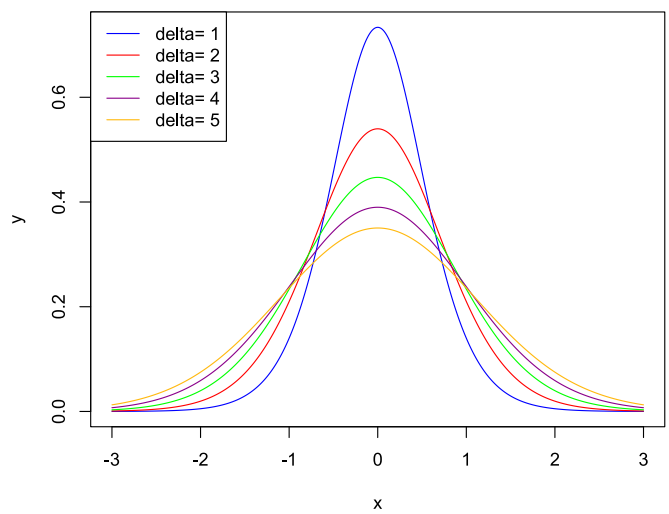

Εικόνα 3.2: Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή με $\lambda = 2, \alpha = 3.5, \delta = 1, \mu = 0$




Εικόνα 3.3: Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή με $\alpha = 3.5, \beta = 0, \delta = 1, \mu = 0$




Εικόνα 3.4: Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή με $\lambda = 1, \beta = 0, \delta = 1, \mu = 0$




Εικόνα 3.5: Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή με $\lambda = 1, a = 4, \beta = 0, \mu = 0$

.

### 3.4.2 Πολυδιάστατη Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή

Στη συνέχεια ακολουθεί η πολυδιάστατη περίπτωση της Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής όπως προτάθηκε εδώ [20].

Μια τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^d$ ακολουθεί την πολυδιάστατη Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή αν έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(\boldsymbol{x}) = \frac{(a^2-\boldsymbol{\beta}'\Delta\boldsymbol{\beta})^{\lambda/2}}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{|\Delta|}\alpha^{\lambda-\frac{d}{2}}\delta^\lambda K_\lambda(\delta\sqrt{a^2-\boldsymbol{\beta}'\Delta\boldsymbol{\beta}})} \times \frac{K_{\lambda-\frac{d}{2}}\left(a\sqrt{\delta^2+(\boldsymbol{x}-\mu)'\Delta^{-1}(\boldsymbol{x}-\mu)}\right)e^{\boldsymbol{\beta}'(\boldsymbol{x}-\mu)}}{\left(\sqrt{\delta^2+(\boldsymbol{x}-\mu)'\Delta^{-1}(\boldsymbol{x}-\mu)}\right)^{\frac{d}{2}-\lambda}} \tag{3.27}$$

όπου $\Delta$ είναι ένας $d \times d$ πίνακας με ορίζουσα $|\Delta| = 1$, $\mu \in \mathbb{R}^d$, $a > 0$ και $\boldsymbol{\beta} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : a^2 - \boldsymbol{x}'\Delta\boldsymbol{x} > 0\}$. Κατα αντιστοιχία με την μονοδιάστατη περίπτωση λοιπόν θα έχουμε βάσει και του Ορισμού 3.32 ότι

$$X|W = w \sim \mathcal{N}_d(\mu + w\boldsymbol{\beta}\Delta, w\Delta)$$

και

$$W \sim GIG(\lambda, \delta^2, a^2 - \boldsymbol{\beta}'\Delta\boldsymbol{\beta})$$

Η συγκεκριμένη παραμετρικοποίηση είναι λοιπόν η $(\lambda, \alpha, \mu, \Delta, \delta, \boldsymbol{\beta})$.

Ακολουθούμε τώρα τον Ορισμό 3.32, τη σχέση (3.19) και χρησιμοποιούμε την αρχική παραμετρικοποίηση του Ορισμού 3.22 όπου $W \sim GIG(\lambda, \chi, \psi)$. 'Ετσι προκύπτει μια εναλλακτική παραμετρικοποίηση και αρα για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f_X(\boldsymbol{x}) &= \int_0^\infty f_{\boldsymbol{X}|W}(\boldsymbol{x}|w)f_W(w)dw \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{(\boldsymbol{x}-\mu)'\Sigma^{-1}\gamma}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}w^{\frac{d}{2}}} exp\left\{-\frac{Q(\boldsymbol{x})}{2w} - \frac{\gamma'\Sigma^{-1}\gamma}{2/w}\right\} f_W(w)dw \\ &= \frac{(\sqrt{\chi\psi})^\lambda(\psi+\gamma'\Sigma^{-1}\gamma)^{\frac{d}{2}-\lambda}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \times \frac{K_{\lambda-\frac{d}{2}}(\sqrt{(\chi+Q(\boldsymbol{x}))(\psi+\gamma'\Sigma^{-1}\gamma)})e^{(\boldsymbol{x}-\mu)'\Sigma^{-1}\gamma}}{(\sqrt{(\chi+Q(\boldsymbol{x}))(\psi+\gamma'\Sigma^{-1}\gamma)})^{\frac{d}{2}-\lambda}} \end{aligned}$$

όπου με $Q(\boldsymbol{x})$ συμβολίζουμε την απόσταση Mahalanobis $Q(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \mu)'\Sigma(\boldsymbol{x} - \mu)$.

Με αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε στην παραμετρικοποίηση $(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$.

Τέλος, όπως αναφέραμε και πρίν, έχουμε οτι η τυχαία μεταβλητή $W$ που λειτουργεί σαν mixture για την Γενυκευμένη Υπερβολική ακολουθεί τη Γενικευμένη Αντίστροφη. Η συνάρτηση πυκνότητας

πιθανότητας της $W$ για $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ γνωστό είναι

$$\begin{aligned} f_{W|X}(w) &= \frac{f_{\boldsymbol{X},W}(\boldsymbol{x},w)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})} = \frac{f_{\boldsymbol{X}|W}(\boldsymbol{x})f_{GIG}(w)}{\int_0^\infty f_{W|\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})f_{GIG}(w)dw} \\ &= \left(\frac{\psi+\gamma'\Sigma^{-1}\gamma}{Q(\boldsymbol{x})+\chi}\right)^{0.5(\lambda-\frac{d}{2})} \times \\ &\quad \frac{w^{\lambda-\frac{d}{2}-1}exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{Q(\boldsymbol{x})+\chi}{w}+w(\psi+\gamma'\Sigma^{-1}\gamma)\right)\right\}}{2K_{\lambda-\frac{d}{2}}(\sqrt{(Q(\boldsymbol{x})+\chi)(\psi+\gamma'\Sigma^{-1}\gamma)})} \end{aligned} \tag{3.28}$$

και παρατηρούμε οτι η $W|X$ ακολουθεί τη Γενικευμένη Αντίστροφη κατανομή με παραμέτρους $(\lambda - \frac{d}{2}, Q(\boldsymbol{x}) + \chi, \psi + \gamma'\Sigma^{-1}\gamma)$

### 3.4.3 Εναλλαγή μεταξύ διαφορετικών παραμετρικοποιήσεων

Υπάρχουν 3 διαδεδομένες παραμετρικοποιήσεις που χρησιμοποιούνται τόσο στη θεωρία όσο και στην εφαρμογή όπως στο στατιστικό πακέτο ghyp στην R.

Οι παραμετρικοποιήσεις λοιπόν είναι οι $(\lambda, \overline{a}, \mu, \Sigma, \gamma)$, $(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ και $(\lambda, \alpha, \mu, \Delta, \delta, \boldsymbol{\beta})$. Σημειώνουμε οτι τις 2 από αυτές τις αναφέραμε στο 3.4.2. Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι $\lambda$ και $\mu$ παραμένουν αναλλοίωτες ανεξαρτήτως παραμετρικοποιήσεως. Για να μπορέσουμε να μεταβούμε στην $(\lambda, \alpha, \mu, \Delta, \delta, \boldsymbol{\beta})$ από τη $(\lambda, \overline{a}, \mu, \Sigma, \gamma)$ θα χρησιμοποιήσουμε τη $(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$. Σχηματικά έχουμε:

$$(\lambda, \overline{a}, \mu, \Sigma, \gamma) \rightleftharpoons (\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma) \rightleftharpoons (\lambda, \alpha, \mu, \Delta, \delta, \boldsymbol{\beta})$$

Συνεχίζουμε με το πώς αναλυτικά θα πάμε από την μία παραμετρικοποίηση στην άλλη
$(\lambda, \overline{a}, \mu, \Sigma, \gamma) \to (\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ :
Έχουμε ότι:

$$\psi = \overline{a}\frac{K_{\lambda+1}(\overline{a})}{K_\lambda(\overline{a})} \text{ και } \chi = \frac{\overline{a}^2}{\psi} = \overline{a}\frac{K_\lambda(\overline{a})}{K_{\lambda+1}(\overline{a})}$$

Οι παράμετροι $\Sigma$ και $\gamma$ παραμένουν ίδιες
$(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma) \to (\lambda, \overline{a}, \mu, \Sigma, \gamma)$ :
Ορίζουμε $k = \sqrt{\frac{\chi}{\psi}\frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}}$ και έχουμε ότι

$$\overline{a} = \sqrt{\chi\psi}, \quad \Sigma \equiv k\Sigma, \quad \gamma \equiv k\gamma$$

$(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma) \to (\lambda, \alpha, \mu, \Delta, \delta, \boldsymbol{\beta})$ :

$$\begin{aligned} \Delta = |\Sigma|^{-\frac{1}{d}}\Sigma \quad &, \boldsymbol{\beta} = \quad \Sigma^{-1}\gamma \\ \delta = \sqrt{\chi|\Sigma|^{\frac{1}{d}}} \quad &, \alpha = \quad \sqrt{|\Sigma|^{-\frac{1}{d}}(\psi + \gamma'\Sigma^{-1}\gamma)} \end{aligned}$$

$(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma) \rightarrow (\lambda, \alpha, \mu, \Delta, \delta, \boldsymbol{\beta})$ :

$$\Sigma = \Delta, \quad \gamma = \Delta\boldsymbol{\beta}, \quad \chi = \delta^2, \quad \psi = \alpha^2 - \boldsymbol{\beta}\,'\Delta\boldsymbol{\beta}$$

Επιστρέφοντας στη μονοδιάστατη περίπτωση, θα δούμε τώρα κάποιες γνωστές κατανομές που προκύπτουν για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων $(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$.

### 3.4.4 Κανονική - Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή

Για την περίπτωση όπου στις από τις παραμέτρους της Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής επιλέξουμε $\lambda = -1/2$ λαμβάνουμε την Κανονική - Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή (Normal-inverse Gaussian). Πιο συγκεκριμένα αν μια τυχαία μεταβλητή $X \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$, τότε ισχύει ότι $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu) = GHyp(-1/2, \alpha, \beta, \delta, \mu)$, συνεπώς η $X$ ακολουθεί την Κανονική - Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή με παραμέτρους $\alpha, \beta, \delta$ και $\mu$.

### 3.4.5 Variance Gamma

Για την οριακή περίπτωση όπου στις από τις παραμέτρους της Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής επιλέξουμε $\delta^2 = 0$ λαμβάνουμε την Κανονική - Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή (Normal-inverse Gaussian). Πιο συγκεκριμένα αν μια τυχαία μεταβλητή $X \sim VG(\lambda, \alpha, \beta, \mu)$ τότε ισχύει ότι $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu) = GHyp(\lambda, \alpha, \beta, 0, \mu)$, συνεπώς η $X$ ακολουθεί την Variance Gamma κατανομή με παραμέτρους $\lambda, \alpha, \beta$ και $\mu$.

### 3.4.6 Hyperbolic Asymmetric (Student's) t κατανομή

Για την οριακή περίπτωση όπου στις από τις παραμέτρους της Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής επιλέξουμε $\lambda < 0$, $\alpha = |\beta|$ λαμβάνουμε την Hyperbolic Asymmetric (Student's) t κατανομή. Πιο συγκεκριμένα αν μια τυχαία μεταβλητή $X \sim HAt(\lambda, \omega, \delta, \mu)$ τότε ισχύει ότι $HAt(\lambda, \beta, \delta, \mu) = GHyp(\lambda, |\beta|, \beta, \delta, \mu)$ με $\lambda < 0$, συνεπώς η $X$ ακολουθεί την Hyperbolic Asymmetric (Student's) t κατανομή με παραμέτρους $\lambda, \beta, \delta$ και $\mu$.

### 3.4.7 Υπερβολική κατανομή

Για την οριακή περίπτωση όπου στις από τις παραμέτρους της Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής επιλέξουμε $\lambda = 1$ λαμβάνουμε την Υπερβολική (Hyperbolic) κατανομή. Πιο συγκεκριμένα αν μια τυχαία μεταβλητή $X \sim Hyp(\lambda, \alpha, \beta, \mu)$ τότε ισχύει ότι $Hyp(\lambda, \beta, \delta, \mu) = GHyp(1, \alpha, \beta, \delta, \mu)$, συνεπώς η $X$ ακολουθεί την Υπερβολική κατανομή με παραμέτρους $a, \beta, \delta$ και $\mu$.

## 3.5 Προσαρμογή παραμέτρων

### 3.5.1 Αλγόριθμος SANN

Οι αλγόριθμοι τυφλής αναζήτησης προχωρούν σε πλάτος ή βάθος με συστηματικό τρόπο, αλλά χωρίς να έχουν καμία απολύτως πληροφορία για το αν το μονοπάτι που ακολουθούν οδηγεί σε κάποια τερματική κατάσταση (λύση). Το παραπάνω έχει ως αποτέλεσμα το ότι η τυφλή αναζήτηση δεν επαρκεί για μεγάλους χώρους καταστάσεων που συνήθως εμφανίζονται σε πραγματικά προβλήματα. Σε τέτοιους χώρους, η τυφλή αναζήτηση έχει τόσο μεγάλες απαιτήσεις σε χώρο και διαρκεί τόσο πολύ χρόνο που πρακτικά η λύση δεν βρίσκεται ποτέ. Σκοπός λοιπόν είναι να μειωθεί ο χρόνος αναζήτησης, δηλαδή ουσιαστικά να μειωθεί ο αριθμός των καταστάσεων που εξετάζει ένας αλγόριθμος. Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο είναι απαραίτητη η ύπαρξη πληροφορίας για την αξιολόγηση των καταστάσεων η οποία θα είναι ικανή να καθοδηγήσει την αναζήτηση σε καταστάσεις που οδηγούν σε μία λύση και ίσως να βοηθήσει στον αποκλεισμό ορισμένων καταστάσεων που θα οδηγήσουν με βεβαιότητα σε μη-τερματικές καταστάσεις. Οι αλγόριθμοι που εκμεταλλεύονται τέτοιες πληροφορίες ονομάζονται αλγόριθμοι ευρετικής αναζήτησης (heuristic search algorithms).

Στα προβλήματα βελτιστοποίησης, ένας heuristic αλγόριθμος είναι ένας αλγόριθμος όπου προσπαθεί με τη λογική που αναφέραμε πρίν να βρεί σε έναν μεγάλο χώρο κατάστασης το σημείο ή τα σημεία που αντιστοιχούν στη βέλτιστη τιμή μιας αντικειμενικής συνάρτησης. Ο αλγόριθμος Solid Angle based Nearest Neighbor (SANN ή SA) είναι ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης ο οποίος ανήκει στην κατηγορία των metaheuristic αλγορίθμων,όπου metaheuristic αλγόριθμοι είναι μια γενίκευση των heuristic αλγορίθμων που είναι πιο αποδοτικοι και πιο ευέλικτοι στο να λύνουν σύνθετα προβλήματα βελτιστοποίησης, όπως τα μη γραμμικά. Σημειώνουμε οτι ένας αρκετά διαδεδομένος αλγόριθμος βελτιστοποίησης που ανήκει στην κατηγορία των heuristic αλγορίθμων είναι ο Nelder–Mead αλγόριθμος, ο οποίος είναι ένας αρκετά αποδοτικός αλγόριθμος που συγκλίνει κατευθείαν στη λύση αρκετά γρήγορα. Ο αλγόριθμος SANN επιπλέον ανήκει στην κατηγορία των αλγορίθμων τυχαίας αναζήτησης (Random Search Algorithms/Methods), δηλαδή πρόκειται για στοχαστικούς αλγόριθμους που βασίζονται στη τυχαία δειγματοληψία (random sampling) μιας ακολουθίας σημείων που ανήκουν στην περιοχή των εφικτών λύσεων (feasible region) βάσει κάποιας συνάρτησης πιθανότητας ή ακολουθίας συναρτήσεων πιθανότητας. Αυτή η κατηγορία αλγορίθμων παρουσιάζει μια καλή απόδοση όσο αφορά την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης σε συναρτήσεις που έχουν παραπάνω από ένα βέλτιστα σημεία [21, p. 20].

Όσο αφορά τον αλγόριθμο SANN λοιπόν, υπάρχουν πολλές παραλλαγές του. Δύο από αυτές είναι η κλασσική μορφή όπου είναι μια παραλλαγή του αρχικού αλγόριθμου SA που προτάθηκε εδώ [22] και που μπορεί κάποιος να υλοποιήσει στην `R` με το πακέτο `optimization` καλώντας τη συνάρτηση `optim` και θέτοντας σαν τιμή στην παράμετρο `method` $=' \texttt{SANN}'$ και μια άλλη παραλλαγμένη μορφή που μπορεί κάποιος να υλοποιήσει στην `R` με το πακέτο `optimization` καλώντας τη συνάρτηση `optim_sa`. Στη συνέχεια της ανάλυσης του αλγορίθμου λοιπόν θα περιγράψουμε την παραλλαγμένη μορφή του και θα συγκρίνουμε τις διαφορές με την κλασσική.

Στη συνέχεια ακολουθεί ο αλγόριθμος καθώς και η περιγραφή των βημάτων. Η παρουσίαση του αλγορίθμου βρίσκεται εδώ (1) .

**Εσωτερικός Βρόχος**

Η λειτουργία του εσωτερικού βρόχου (σειρές 4 εως 29) που επαναλαμβάνεται $n_{inner}$ φορές είναι να επιλέξει συνδυασμούς συμμεταβλητών στοχαστικά και να συγκρίνει τα αποτελέσματα. Η πρώτη διαδικασία που εκτελείται (σειρά 5) είναι να αποθηκευτούν οι συνδυασμοί συμμεταβλητών της τελευταίας επανάληψης στη μεταβλητή $x_j$. Στην πρώτη επανάληψη το $x_j$ ορίζεται από το χρήστη ($x_0$).

Στο επόμενο βήμα (σειρά 6) αλλάζουν οι συμμεταβλητές. Η διαδικασία αλλαγής αποτελεί μια καθοριστική διαφοροποίηση μεταξύ της κλασσικής μεθόδου και της παραλλαγμένης όσο αφορά την υλοποίηση στην R. Η συνάρτηση αλλαγής (variation function) vf χρησιμοποιείται για να δημιουργηθεί το προσωρινό διάνυσμα συμμεταβλητών $x_{i*}$. Εκτός από το $x_i$, η συνάρτηση αλλαγής εξαρτάται επίσης από ένα δυάνυσμα τυχαίων παραγόντων (random factors) $rf$ και θερμοκρασία (temperature) $t$. Καθώς τα $rf$ και $t$ αλλάζουν με το χρόνο, η συνάρτηση αλλαγής έχει δυναμικά στοιχεία. Η προσαρμογή των $rf$ και $t$ γίνεται στον εξωτερικό βρόχο και θα αναλυθεί παρακάτω. Στην κλασσική μορφή του SANN, οι συμμεταβλητές $x_{i*}$ παράγονται προσθέτοντας ή αφαιρώντας από το $x_j$ μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορη κατανομή. Το εύρος της τυχαίας μεταβλητής καθορίζεται από το $rf$ που με τη σειρά του σχετίζεται με το $x_j$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση αλλαγής χρησιμοποιείται και στην παραλλαγμένη μορφή. Μια άλλη παραλλαγή της συγκεκριμένης συνάρτησης θα μπορούσε επίσης να είναι μια κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $x_j$ και τυπική απόκλιση $rf$.

Αφού παραχθούν τα $x_{i*}$, ελέγχονται οι περιορισμοί (σειρές 7 εως 15). Αν όλα τα στοιχεία του $x_{i*}$ ικανοποιούν τους αντίστοιχους περιορισμούς τότε υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης $f(x_{i*})$ με αυτά τα στοιχεία. Αν υπάρχουν μη δεκτά στοιχεία που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς τότε η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι όλα τα στοιχεία του $x_{i*}$ να ικανοποιούν τους αντίστοιχους περιορισμούς. Ο αριθμός των μη δεκτών προσπαθειών μπορεί να είναι μια χρήσιμη πληροφορία ώστε να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε την ποιότητα του πεδίου της αναζήτησης. Έτσι λοιπόν ο αριθμός των μη δεκτών προσπαθειών καταμετράται και αποθηκεύεται (σειρά 13) ώστε η πληροφορία να γίνει προσβάσιμη στον εξωτερικό βρόχο. Ο αριθμός λοιπόν των δεκτών και μη δεκτών προσπαθειών δεν επαναφέρεται σε κάθε εκτέλεση του εσωτερικού βρόχου, αντίθετα αρχικοποιείται στην πρώτη εκτέλεση του εσωτερικού βρόχου και αυξάνεται μέχρι την τελευταία εκτέλεση.

Το επόμενο βήμα είναι η σύγκριση της τιμής της συνάρτησης (σειρές 16 και 17) . Αν η τιμή της συνάρτησης για τον τρέχοντα συνδυασμό συμμεταβλητών $f(x_{i*})$ είναι καλύτερος από τον $f(x_j)$, τα $x_{i*}, f(x_{i*})$ αποθηκεύονται αντίστοιχα στα $x_j, f(x_j)$. Η βασική ιδέα του αλγορίθμου $SANN$ είναι να αντιμετωπίσει το ζήτημα των τοπικών βέλτιστων, έτσι λοιπόν, ακόμα και αν το $f(x_{i*})$ είναι χειρότερο από το $f(x_j)$, υπάρχει μια πιθανότητα του να αποθηκευτεί το $x_{i*}$ στο $x_j$ (σειρές 18 με 25). Η πιθανότητα να κρατήσουμε μια χειρότερη τιμή εξαρτάται από την πιθανότητα Metropolis M

**Αλγόριθμος 1** Ψευδοκώδικας της συνάρτησης optim_sa για ελαχιστοποίηση

```
initialize t,vf
calculate f(x_0) with initial parameter vector x_0
while t > t_min do
    for i in 1 : n_inner do
        x_j ← x_{i-1}
        call the variation function to generate x_{i*} in dependence of x_j , rf and t
        check if all entries in x_{i*} are within the boundaries
        if all x_i valid then
            calculate f(x_{i*})
        else
            while any(x_{i*} invalid) do
                call the variation function again
                count and store invalid combinations
            end while
        end if
        if f(x_{i*}) < f(x_j) then
            x_i ← x_{i*}; f(x_i) ← f(x_{i*})
        else
            calculate Metropolis Probability M (3.29)
            if uniformly distributed random number [0,1] < M then
                x_i ← x_{i*}; f(x_i) ← f(x_{i*})
            else
                x_i ← x_j; f(x_i) ← f(x_j)
            end if
        end if
        if threshold accepting criterion fulfilled then
            break inner loop
        end if
    end for
    reduce t for the next iteration
    rf adaptation for the next iteration
end while
return optimized parameter vector, function value and some additional information
```

$$M = \exp\left(-\frac{|f(i_*) - f(j)|}{kt}\right) \tag{3.29}$$

όπου $k$ είναι μια μεταβλητή που ορίζεται από το χρήστη. Η στρατηγική αυτή έχει υιοθετηθεί από την κλασσική μορφή του $SANN$ χωρίς αλλαγές. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει οτι καθώς η θερμοκρασία $t$ μειώνεται η πιθανότητα $M$ μειώνεται και αυτή. Η πιθανότητα να κρατήσουμε χειρότερες τιμές συνάρτησης εξαρτάται λοιπόν από τις ίδιες παραμέτρους σε ολόκληρό τον εσωτερικό βρόχο (σειρές 19 με 24) και όπως φαίνεται από τον αλγόριθμο το $t$ δεν αλλάζει κατα τη διάρκεια της εκτέλεσης του εσωτερικού βρόχου. Η τροποποίηση του $t$ είναι κομμάτι του εξωτερικού βρόχου και θα αναλυθεί στη συνέχεια. Σημειώνουμε επίσης οτι αν επιλεχθεί μια χειρότερη τιμή από τον προηγούμενο βέλτιστο συνδυασμό συμμεταβλητών, τότε θα αποθηκευτεί πρίν πάρει τη θέση του η νέα τιμή για να μην υπάρξει πιθανότητα να χαθεί το πραγματικό βέλτιστο σημείο.

Αποθηκεύοντας την πληροφορία κατα την εύρεση συμμεταβλητών και αντίστοιχων τιμών συνάρτησης μπορεί να βοηθήσει στην αύξηση της απόδοσης του $SANN$. Έχει υλοποιηθεί επίσης μια στρατηγική αποδοχής (threshold accepting strategy). Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο, αν για κάποιο αριθμό επαναλήψεων που ορίζονται από το χρήστη, οι απόλυτες διαφορές $f(x_i)$ και $f(x_j)$ που αποθηκεύονται ταλαντώνονται, ο εσωτερικός βρόχος σπάει.

### Εξωτερικός Βρόχος

Η κύρια λειτουργία του εσωτερικού βρόχου (σειρές 3 με 32) είναι να καλεί τον εσωτερικό βρόχο και να τροποποιεί τις παραμέτρους που χρειάζονται για αυτόν (σειρές 30 και 31). Έτσι λοιπόν τα $t$ και $rf$ αλλάζουν με την ολοκλήρωση του εσωτερικού βρόχου. Ο εξωτερικός βρόχος επαναλαμβάνεται μέχτι το $t$ να γίνει μικρότερο από κάποια minimum θερμοκρασία $t_{min}$ που θα οριστεί από το χρήστη. Σημειώνουμε οτι η εναρκτήρια θερμοκρασία συμβολίζεται $t_0$ και καθορίζεται και αυτή από το χρήστη.

Το $t$ λοιπόν αλλάζει (σειρά 30) και όπως αναφερθήκαμε και πρίν θα χρησιμοποιηθεί στον εσωτερικό βρόχο (σειρά 19).Το $t$ λοιπόν μειώνεται σε κάθε εκτέλεση του εξωτερικού βρόχου καθώς θα πολλαπλασιαστεί με έναν αριθμό $r$ που παίρνει τιμές μεταξύ του 0 και του 1 και καθορίζεται από το χρήστη.

Στη συνέχεια το $rf$ αλλάζει (σειρά 31). Η δυναμική προσαρμογή του $rf$ είναι ένα από τα στοιχεία της συγκεκριμένης παραλλαγής. Καθώς κάθε συμμεταβλητή έχει τον δικό της τυχαίο παράγοντα (random factor), το $rf$ είναι κι αυτό με τη σειρά του ένα διάνυσμα ιδίου μήκους με το $x_i$. Όπως αναφερθήκαμε και πρίν, το $rf$ χρειάζεται στον εσωτερικό βρόχο (σειρές 6 και 12). Σχετικά με τον ακριβή τρόπο προσαρμογής του $rf$, όπώς και για περαιτέρω βιβλιογραφία μπορεί κάποιος να ανατρέξει εδώ [23]

### 3.5.2 Αλγόριθμος EM

Σε περιπτώσεις κατανομών όπου ο αριθμός παραμέτρων είναι μεγάλος, η εύρεση ενός κλειστού τύπου για την εκτίμηση των παραμέτρων είναι δύσκολη εως αδύνατη. Ωστόσο, μέσω της βελτιστοποίησης της συνάρτησης πιθανοφάνειας που γίνεται αριθμητικά μπορεί κανείς με αρκετή ακρίβεια να κάνει μια εκτίμηση των παραμέτρων. Οι αλγόριθμοι τύπου $EM$ ($Expextation\ Maximization$) που μπορεί κάποιος να βρεί εδώ [24] και εδώ [25] καταφέρνουν να προσαρμόσουν πολλά μοντέλα στα εκάστοτε δεδομένα. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τον αλγόριθμο $EM$ για την Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή. Σημειώνουμε οτι η παραμέτρικοποίηση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η $(\lambda, \overline{a}, \mu, \Sigma, \gamma)$, συνεπώς θα παρουσιάσουμε την πολυδιάστατη περίπτωση.

Υποθέτουμε οτι έχουμε ανεξάρτητα και ισόνομα δεδομένα $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n$ και παραμέτρους $\Theta = (\lambda, \overline{a}, \mu, \Sigma, \gamma)$. Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στη βελτιστοποίηση της συνάρτησης

$$\ln L(\Theta; \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_i; \Theta)$$

Το πρόβλημα αυτό ωστόσο δεν είναι εύκολα επιλύσιμο λόγω του αριθμού των παραμέτρων αλλα και άλλων αιτιών. Γι αυτό το λόγο παρουσιάζουμε την επαυξημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας (augmented likelihood function)

$$\ln \widetilde{L}(\Theta; \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, w_1, ..., w_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_{\boldsymbol{X}|W}(\boldsymbol{x}_i | w_i; \mu, \Sigma, \gamma) + \sum_{i=1}^{n} \ln f_W(w_i; \lambda, \overline{a}) \tag{3.30}$$

και θα εστιάσουμε στην εκτίμηση των mixing μεταβλητών $w_i$ όπως παρουσιάζονται στο Ορισμό 3.32. Παρουσιάζονται τώρα τα βήματα του αλγορίθμου. Έστω οτι είμαστε στο $k-$οστό βήμα του αλγόριθμου. Οι ενέργειες σε αυτό το βήμα είναι οι εξής:

$E - step$ : Υπολογισμός της δεσμευμένης μέσης τιμής της συνάρτησης της σχέσης (3.30) δοθέντων των δεδομένων $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n$ kai των τρέχοντων παραμέτρων $\Theta^{[k]}$. Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στην παρακάτω αντικειμενική συνάρτηση

$$Q(\Theta; \Theta^{[k]}) = E\left[\ln \widetilde{L}(\Theta; \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, w_1, ..., w_n) | \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n; \Theta^{[k]}\right] \tag{3.31}$$

$M - step$ : Βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει του $\Theta$ για να πάρουμε το νέο σετ παραμέτρων $\Theta^{[k+1]}$. Σε αυτό το σημείο έχουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης το οποίο μπορεί να λυθεί με τον αλγόριθμο $SANN$. Ακολουθώντας σε κάθε βήμα τα $E, M$ $steps$ θα οδηγηθούμε αριθμητικά στην εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας.

Σημειώνουμε οτι εκτελώντας το $E-step$ ουσιαστικά μεγιστοποιούμε το δεύτερο όρο της σχέσης (3.30) αριθμητικά. Η λογαριθμημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Γενικευμένης Αντίστροφης Κανονικής κατανομής ακολουθώντας τον Ορισμό 3.22 είναι:

$$\ln f_W(w) = \frac{\lambda}{2}\ln(\psi/\chi) - \ln(2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})) + (\lambda-1)\ln\, w - \frac{\chi}{2}\frac{1}{w} - \frac{\psi}{2}w \tag{3.32}$$

Ωστόσο χρησιμοποιώντας την παραμετρικοποίηση $(\lambda, \overline{a})$ όπου $\overline{a} = \sqrt{\chi\psi}$ έχουμε ένα πρόβλημα διάστασης 2 αντί για 3 όπως θα είχαμε με την κλασσική παραμετρικοποίηση $(\lambda, \chi, \psi)$ και άρα η απόδοση αυξάνεται.

Αναφέρουμε επίσης οτι για να μεγιστοποιήσουμε τη λογαριθμημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας πρέπει να πάρουμε τις αντίστοιχες μέσες τιμές των $\ln w$ και $\frac{1}{w}$. Πιο συγκεκριμένα θέλουμε να βρούμε τα

$$\eta_i^{[k]} := E[w_i \,|\, \boldsymbol{x}_i; \Theta^{[k]}], \quad \eta_i^{[k]} := E[w_i^{-1} \,|\, \boldsymbol{x}_i; \Theta^{[k]}], \quad \eta_i^{[k]} := E[\ln w_i \,|\, \boldsymbol{x}_i; \Theta^{[k]}]$$

όπου εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις (3.25) και (3.28) μπορούμε να τα υπολογίσουμε. Λεπτομέρειες για τον υπολογισμό τους μπορεί κανείς να βρεί εδώ [26].

### 3.5.3 Αλγόριθμος MCECM

Ο αλγόριθμος Multi-Cycle, Expectation, Conditional Maximization είναι μια παραλλαγή του $EM$ αλγορίθμου που χρησιμοποιείται από το πακέτο `ghyp` της `R` και κανείς μπορεί να τον βρεί εδώ [10, p. 83] και εδώ [26, p. 9]

## 3.6 Έλεγχοι καλής προσαρμογής

Έχοντας αναλύσει ορισμένα μοντέλα κατανομών, καθώς και μεθόδους προσαρμογής των παραμέτρων τους σε δεδομένα, μένει να δούμε πώς μέσω ελέγχων μπορεί κανείς να δεί πόσο κατάλληλο είναι ένα μοντέλο. Οι μέθοδοι που θα δούμε είναι το ιστόγραμμα και το QQ- plot. Συχνά ωστόσο παρατηρούμε οτι παραπάνω από ένα μοντέλα θα τύχει να περιγράφουν επαρκώς καλά τα δεδομένα μας και τότε με τη βοήθεια του κριτηρίου $AIC$ θα δούμε ποιό είναι το καλυτερο.

### 3.6.1 Ιστόγραμμα

Έχοντας προσαρμόσει τις παραμέτρους του μοντέλου βάσει των δεδομένων, θέλουμε να δούμε κατα πόσο εν τελει αυτό μπορεί να περιγράψει τα δεδομένα μας. Σχεδιαζοντας λοιπόν τα δεδομένα μας σε κανονικοποιημένη μορφή και την κατανομή με τις παραμέτρους που εκτιμήθηκαν βάσει των δεδομένων, μπορούμε να δούμε κατα πόσο η κατανομή είναι κατάλληλη. Στην Εικόνα 3.6ii παρατηρούμε ένα παράδειγμα ιστογράμματος όπου υπάρχει καλή προσαρμογή.

### 3.6.2 QQ-Plot

Ένα QQ (Quantile-Quantile) Plot είναι ένα γράφημα πιθανότητας όπου αποτελεί μια γραφική μέθοδο για να δεί κανείς κατα πόσο 2 κατανομές συμπίπτουν. Ουσιαστικά σχεδιάζουμε τα ποσοστημόρια της πρώτης κατανομής στον άξονα των $x$ και της δεύτερης στον άξονα των $y$ (Για να δεί κανείς τι είναι τα τεταρτημόρια μπορεί να ανατρέξει στον Ορισμό 2.15). Αν συμπίπτουν, τότε θα έχουμε στο γράφημα την ευθεία $y = x$. Για να δούμε κατα πόσο ταιριάζει ένα σύνολο δεδομένων με μια θεωρητική κατανομή, στον ένα άξονα σχεδιάζουμε τα τεταρτημόρια του συνόλου δεδομένων και στον άλλο τα αντίστοιχα τεταρτημόρια της θεωρητικής κατανομής. Στην Εικόνα 3.6i παρατηρούμε ένα παράδειγμα QQ-Plot που αντιστοιχεί σε καλή προσαρμογή.

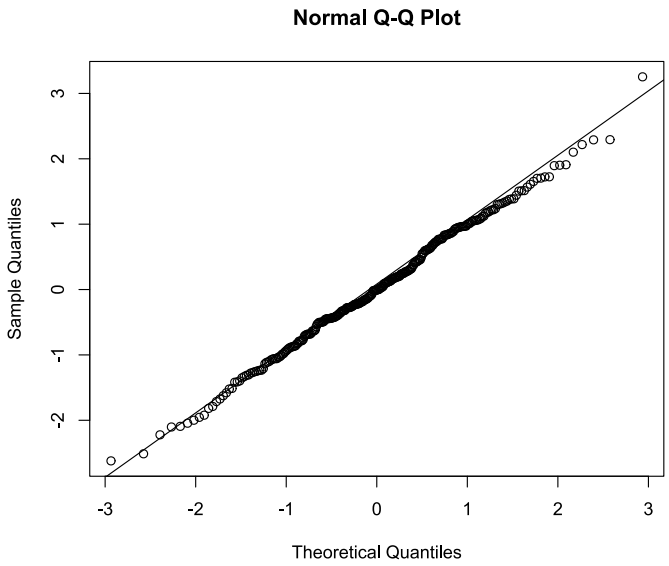
### 3.6.3 Κριτήριο AIC

Όταν έχουμε παραπάνω από ένα μοντέλα που δείχνουν να ταιριάζουν στα δεδομένα μας, μια καλή μέθοδος για να επιλέξουμε το καλύτερο μοντέλο είναι το κριτήριο $AIC$. Ο τύπος του είναι ο εξής:

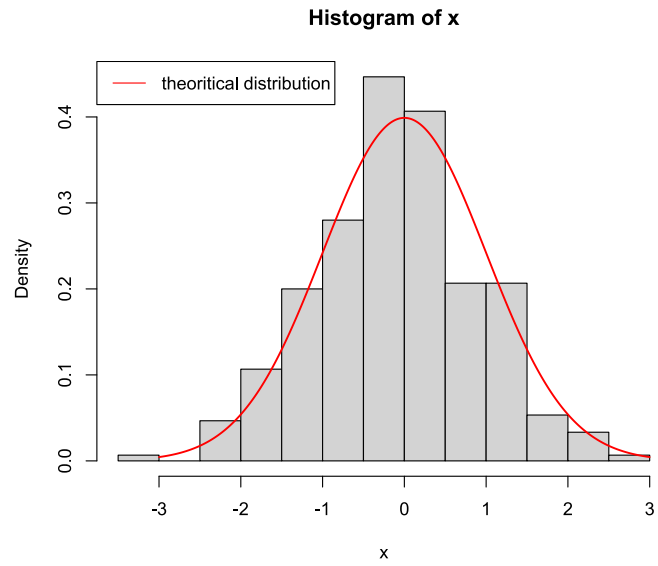
$$AIC = 2k - 2\ln(\hat{L})$$

όπου $k$ είναι ο αριθμός των εκτιμημένων παραμέτρων του μοντέλου και $\hat{L} = L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} L(\boldsymbol{\theta})$ η μέγιστη πιθανοφάνεια που αντιστοιχεί στο διάνυσμα παραμέτρων $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta_1}, ..., \hat{\theta_m})^\top$.

Δοθέντων κάποιων μοντέλων λοιπόν, το καλύτερο μοντέλο σύμφωνα με αυτό το κριτήριο είναι αυτό με τη μικρότερη τιμή $AIC$. Ουσιάστικά αυτό συμβαίνει διότι ο όρος της πιθανοφάνειας έχει μείον. Ο πρώτος όρος λειτουργεί σαν ποινή για τις πολλές παραμέτρους και επομένως όσες παραπάνω έχουμε, αυξάνεται η τιμή $AIC$.




Εικόνα (i)




Εικόνα (ii)

Εικόνα 3.6: QQ Plot (αριστερά) και Ιστόγραμμα (δεξιά) σε μια καλή προσαρμογή Μοντέλου.

# 4 Εφαρμογή

Γνωρίζοντας από το πρώτο κεφάλαιο τι είναι ένα PPA, αναφέραμε πως υπάρχουν διάφορα είδη ρίσκου που διέπουν αυτά τα συμβόλαια. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να επιτευχθεί η ποσοτικοποίηση του ρίσκου που σχετίζεται με τη μεταβλητότητα των τιμών ηλεκτρικής ενέργειας σε σχέση με την παραγωγή μιας μονάδας ΑΠΕ μέσω των μέτρων ρίσκου ώστε να μπορέσει να βρεθεί το ελάχιστο ασφάλιστρο που πρέπει να προστεθεί στην Strike price που πληρώνει ο αγοραστής στον παραγωγό ώστε το project να γίνει κερδοφόρο για μια δοθείσα ανοχή στο ρίσκο. Σημειώνουμε οτι η μορφή ρίσκου που θα μας απασχολήσει είναι το Ρίσκο Προφίλ στο οποίο έγινε αναφορά στο πρώτο Κεφάλαιο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο είδαμε πως το μέτρο ρίσκου Expected Shortfall είναι ένα κατάλληλο μέτρο καθώς ικανοποιεί κάποιες "καλές" ιδιότητες όπως κυρτότητα και συνεκτικότητα. Θα χρειαστεί λοιπόν να καταφέρουμε να βρούμε ένα μοντέλο το οποίο να περιγράφει ικανοποιητικά καλά την κίνηση των τιμών ηλεκτρικής ενέργειας ώστε να μπορούν να γίνουν προβλέψεις για το μέλλον.

Αρχικά λοιπόν θα γίνει η προσπάθεια μοντελοποίησης των τιμών μέσω των μοντέλων που αναλύθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να μελετήσουμε την κίνηση των τιμών και να αποπειραθούμε να βρούμε διάφορες κατανομές που να την περιγράφουν επαρκώς καλά. Για να επιτευχθεί αυτό, θα εκτιμήσουμε μέσω των τιμών τις παραμέτρους της εκάστοτε κατανομής. Σημειώνουμε ότι δεδομένα μας είναι οι τιμές επόμενης μέρας (day-ahead prices) ηλεκτρικής ενέργειας του διαστήματος Νοέμβριος 2020 εως Ιούλιος 2021.

Αφού επιτευχθεί αυτό, θα περιγράψουμε την ποσότητα που θα υπάρχει στο όρισμα του μέτρου ρίσκου και θα δούμε πώς μέσω της παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών της κατανομής που θα βρούμε, θα μπορέσουμε να κάνουμε εκτιμήσεις για το ασφάλιστρο.

## 4.1 Δεδομένα τιμών Ηλεκτρικής Ενέργειας

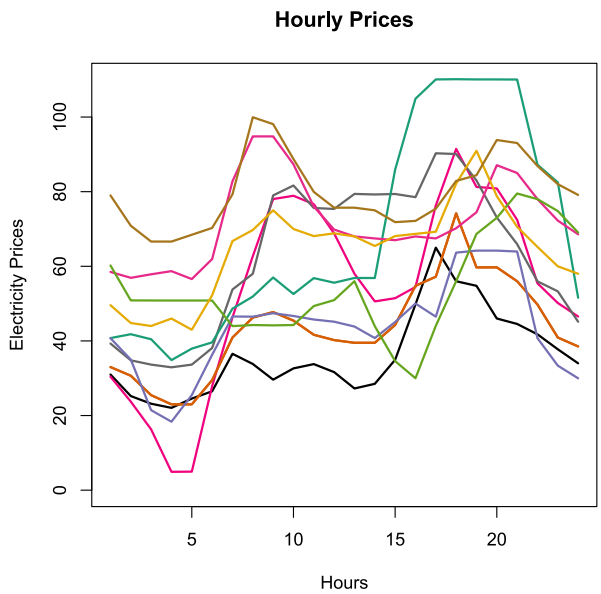
Σχετικά με την κατηγοριοποίηση, τα δεδομένα μας κατηγοριοποιήθηκαν ανα ώρα, έχοντας έτσι 24 χρονοσειρές από τα δεδομένα. Η πρώτη χρονοσειρά αναφέρεται στην πρώτη ώρα της κάθε ημέρας (00.00-01.00), η δεύτερη στη δεύτερη ώρα κάθε μέρας (01.00-02.00) και ούτω κάθε εξής.

Καθώς μιλάμε για ένα μοντέλο πολλαπλών περιόδων, δοθείσας μιας σειράς τιμών $\left(S_d^h\right), h \in \{1, ..., 24\}, d \in \{1, ..., N\}$, όπου $N$ ο αριθμός των ημερών που αντιστοιχούν στο δείγμα. Σημειώνουμε ότι $S_d^h$ είναι η τιμή στη μέρα $d$ και στην αρχή της ώρας $h$. Συγκρίνουμε τα log returns

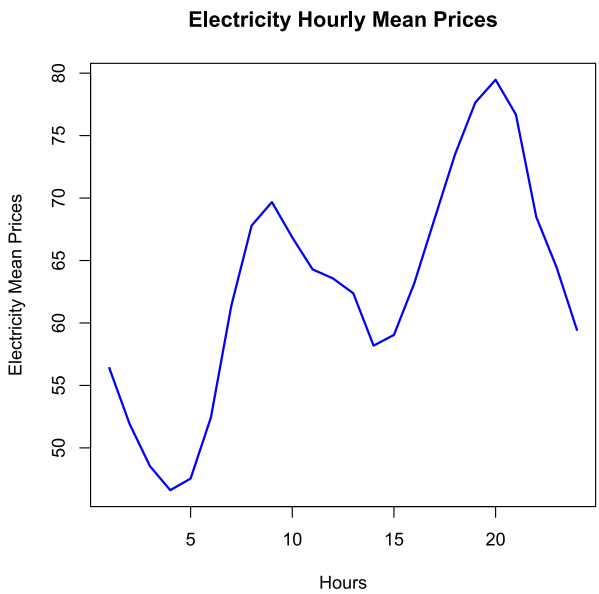
$$X_d^h = \begin{cases} \ln S_d^{h+1} - \ln S_d^h = \ln\left(\frac{S_d^{h+1}}{S_d^h}\right), & h \in \{1, ..., 23\}, d \in \{1, ..., N\} \\ \ln S_{d+1}^1 - \ln S_d^{24} = \ln\left(\frac{S_{d+1}^1}{S_d^{24}}\right), & h = 24, , d \in \{1, ..., N-1\} \end{cases} \tag{4.1}$$

Ο λόγος που οδηγηθήκαμε σε μια τέτοια κατηγοριοποίηση είναι οτι καθώς σχεδιάζαμε τις τιμές σε γράφημα ανα ημέρα, παρατηρήθηκε ότι το γράφημα είχε μια εικόνα με 2 τοπικά μέγιστα, ένα στις ώρες 9-11 και άλλο ένα μεταξύ των ωρών 17-19 περίπου. Στις μεσημεριανές ώρες 14-16 παρατηρείται ένα

τοπικό ελάχιστο, το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι εισέρχεται μεγάλη ποσότητα φωτοβολταϊκών στο δίκτυο τα οποία έχουν πολύ χαμηλό οριακό κόστος και άρα μέσω του φαινομένου του κανιβαλισμού τιμών, οι τιμές ηλεκτρικής ενέργειας μειώνονται (Ορισμοί 1.10 και 1.11). Στην Εικόνα 4.1i φαίνονται κάποιες ενδεικτικές ημέρες που παρατηρείται αυτό το φαινόμενο. Για να έχουμε ωστόσο μια πιο καθαρή εικόνα και να επιβεβαιώσουμε αν όντως ισχύει ή όχι αυτό το φαινόμενο εργαζόμαστε ως εξής: Παίρνουμε τους μέσους όρους των τιμών ανα ώρα και με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε σε 24 τιμές όπου κάθε μια θα μας δίνει μια αντιπροσωπευτική τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας ανα ώρα. Το σχετικό γράφημα υπάρχει στην Εικόνα 4.1ii όπου και μπορεί κάποιος να δεί οτι οτι το φαινόμενο των 2 τοπικών μεγίστων και του ενός τοπικού ελαχίστου είναι σαφές οτι υπάρχει.




Εικόνα (i)




Εικόνα (ii)

Εικόνα 4.1: Ενδεικτικές ωριαίες τιμές ημερών (αριστερά) και μέσοι όροι ωριαίων τιμών ανα ώρα (δεξιά).

## 4.2 Εύρεση Κατάλληλου Μοντέλου

Σαν ένα πρώτο μοντέλο που θα προσπαθήσουμε να δούμε αν ταιριάζει ή όχι στα δεδομένα μας το μοντέλο της κανονικής κατανομής. Πιο συγκεκριμένα θα ελέγξουμε αν οι τιμές $\left(X_d^h\right)$ που περιγράφονται στη σχέση (4.1) ακολουθούν την κανονική κατανομή. Με τις εκτιμήτριες που υπάρχουν στη σχέση (3.7) θα ελέγξουμε κατα πόσο μπορεί η κανονική κατανομή να περιγράψει τα δεδομένα.

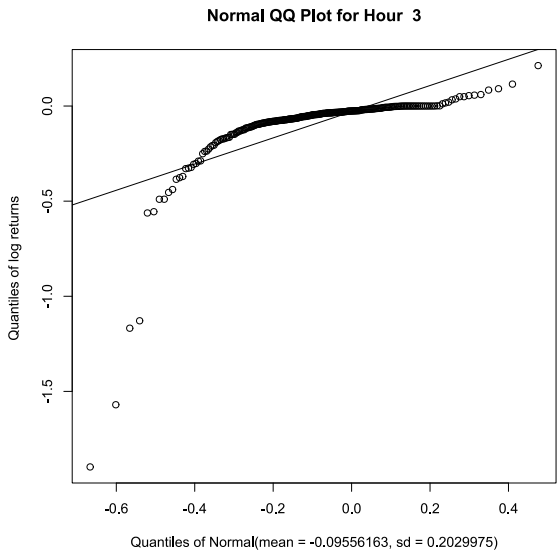
Αυτό θα γίνει μέσω ενός QQ-Plot.

Εκτιμάμε λοιπόν τις παραμέτρους μέσης τιμής και διασποράς για όλες τις ώρες και ενδεικτικά για τις χρονοσειρές 3 ,6, 13 και 15 μέσω QQ- Plots βλέπουμε στην Εικόνα 4.2 τα αποτελέσματα. Παρατηρούμε οτι η κατανομή δεν προσαρμόζεται επαρκώς καλά στα δεδομένα. Για να την αποκλείσουμε ωστόσο παρουσιάζουμε για τις ίδιες χρονοσειρές και τα αντίστοιχα ιστογράμματα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στην Εικόνα 4.3.

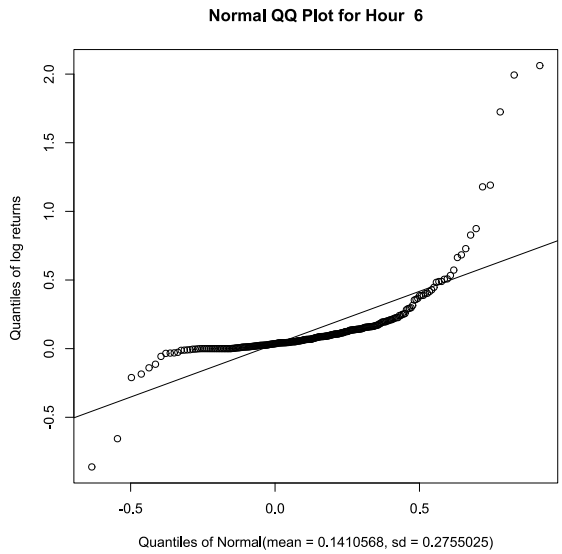
Παρατηρώντας και τα ιστογράμματα, βλέπουμε οτι τα log returns των δεδομένων δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αυτό μας κάνει να αναζητήσουμε το μοντέλο σε μια από τις κατατανομές της κλάσης Mean - Variance Mixtures. από την Εικόνα 4.3 μπορεί κανείς να δεί οτι η κατανομή των log returns έχει μια ασυμμετρία - κάτι το οποίο μας απορρίπτει μια συμμετρική κατανομή ως κατάλληλη. Οι κατανομές που θα δοκιμάσουμε θα είναι η Γενικευμένη Υπερβολική, η Variance - Gamma, η Υπερβολική κατανομή, η Κανονική - Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή και η Hyperbolic Asymmetric (Student's) t κατανομή. Για λόγους πληρότητας θα συμπεριληφθεί και η κανονική. Για την προσαρμογή των παραμέτρων θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο $SANN$ που παρουσιάστηκε στο 3.5. Ως πρώτο κριτήριο επιλογής της κατάλληλης κατανομής που θα περιγράφει την κάθε χρονοσειρά θα χρησιμοποιήσουμε το AIC. Στις Εικόνες 4.4, 4.5 και 4.6 φαίνονται τα αποτελέσματα για κάθε χρονοσειρά. Τα αποτελέσματα αναδεικνύουν τις κατανομές Γενικευμένη Υπερβολική, Υπερβολική, Hyperbolic Asymmetric (Student's) t,Variance - Gamma και την Κανονική - Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή να μην έχουν καμία μεγάλη διαφορά στην τιμή του κριτηρίου AIC. Σε αυτό το σημείο να αναφερθεί οτι και μέσω του κριτηρίου AIC φαίνεται οτι η κανονική κατανομή δεν μπορεί να περιγράψει επαρκώς τα δεδομένα. Στις περιπτώσεις των χρονοσειρών 4 και 5 όπου η Variance - Gamma δείχνει να έχει αισθητά καλύτερη τιμή κριτηρίου AIC, όπως παρατηρούμε στα Ιστογράμματα και QQ- Plots των αντίστοιχων χρονοσειρών στην Εικόνα 4.7, δείχνει να μην προσαρμόζεται τόσο καλα στην πραγματικότητα. Παρατηρώντας τα αντίστοιχα ιστογράμματα και QQ-Plots των υπολοίπων κατανομών, τα αποτελέσματα δείχνουν να είναι πανομοιότυπα. Ως αποτέλεσμα αυτού, θα επιλέξουμε τη Γενικευμένη Υπερβολική ως την κατανομή με την οποία θα συνεχίσουμε την ανάλυσή μας. Λαμβάνοντας υπόψιν τα προαναφερθέντα αποτελέσματα, ο κυριότερος λόγος που την επιλέγουμε είναι οτι αποτελείται από 5 παραμέτρους - κάτι το οποίο δίνει μια παραπάνω προσαρμοστικότητα στο μοντέλο μας. Στις Εικόνες 4.8, 4.9 και 4.10 μπορεί κανείς να δεί τα ιστογράμματα που δείχνουν τη Γενικευμένη Υπερβολική κατανομή να περιγράφει αρκετά καλά τα δεδομένα. Αντίστοιχα στις Εικόνες 4.11, 4.12 και 4.13 φαίνονται τα QQ-Plots ενώ στις Εικόνες 4.14, 4.15 και 4.16 τα αντίστοιχα log-plots που και αυτά με τη σειρά τους αποτελούν ένδειξη καλής προσαρμογής.

Λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, δείξαμε ότι για κάθε $d \in \{1, ..., N\}$ ισχύει ότι $X_d^h \sim GH^h(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) := GH(\lambda_h, \alpha_h, \beta_h, \delta_h, \mu_h)$ με $h \in \{1..., 24\}$.

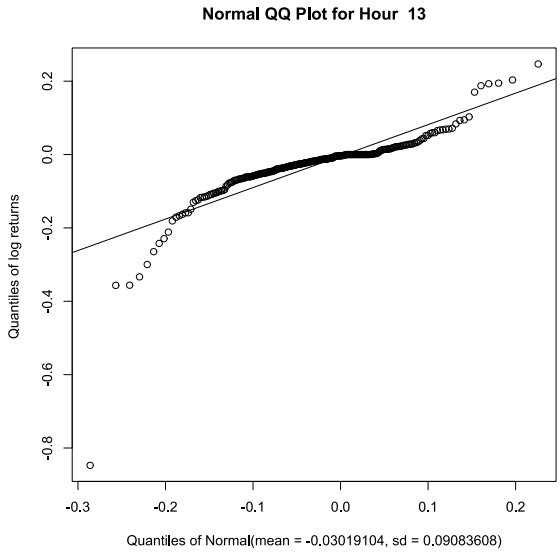
Σημειώνουμε οτι βάσει της ημερήσιας κίνησης των τιμών, θα περιμέναμε μια κατανομή όπου θα έχει μεγαλύτερη πυκνότητα στον θετικό ημιάξονα. Αυτό θα περιμέναμε να συμβαίνει καθώς πχ στο διάστημα ωρών 5-9 όπου η τιμή ηλεκτρικής ενέργειας έχει μια αύξουσα πορεία, περιμένουμε με μία πιθανότητα μεγαλύτερη του 0.5 να ισχύει ότι $S_d^{h+1} > S_d^h \Rightarrow \ln\left(\frac{S_d^{h+1}}{S_d^h}\right) > 0$.



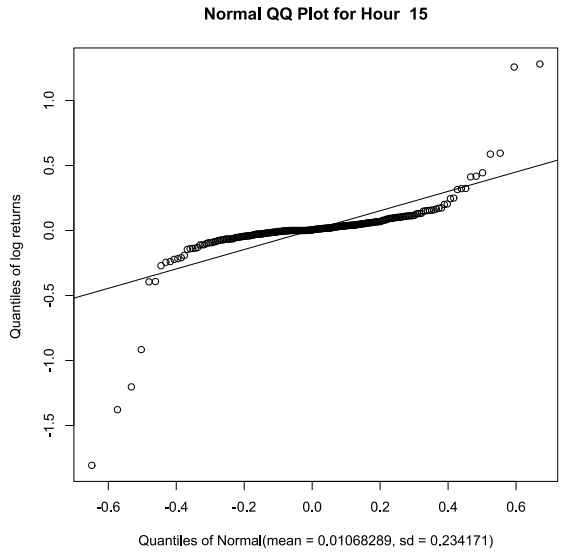

Εικόνα (i)




Εικόνα (ii)

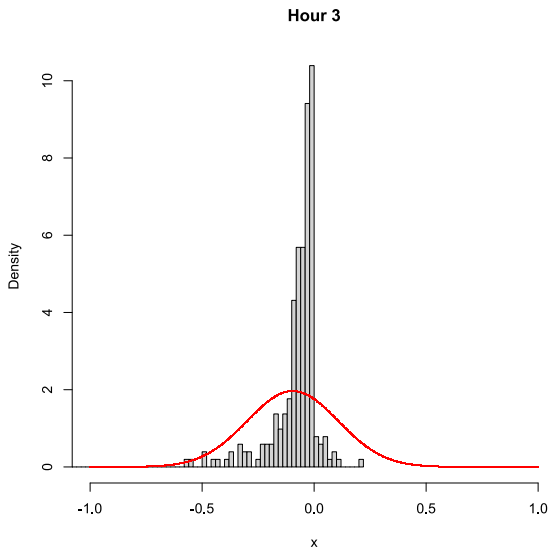



Εικόνα (iii)

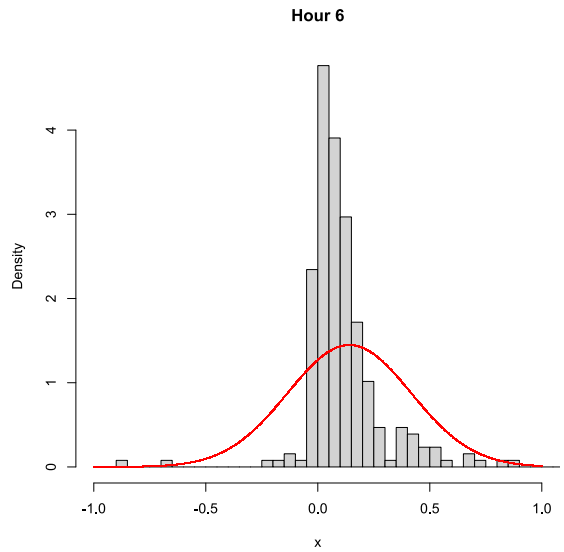



Εικόνα (iv)

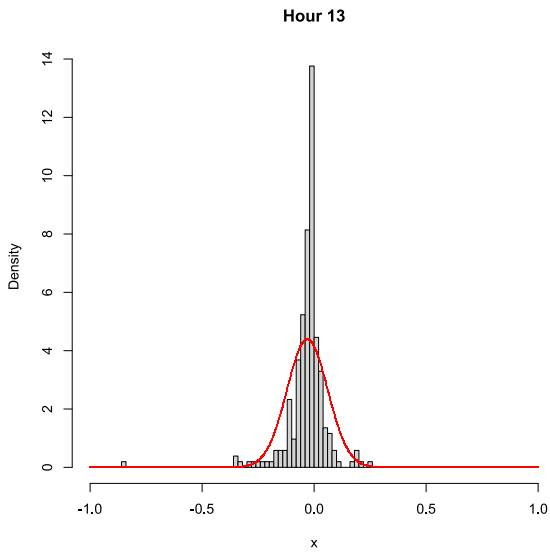
Εικόνα 4.2: Ενδεικτικά QQ Plots Κανονικής κατανομής ωρών 3,6,13,15



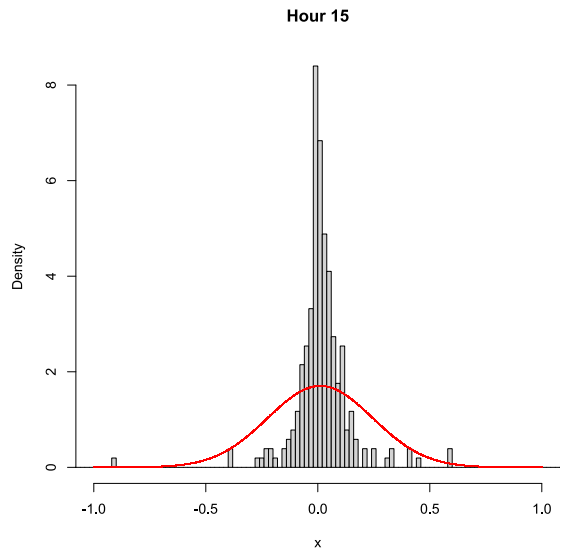

Εικόνα (i)




Εικόνα (ii)

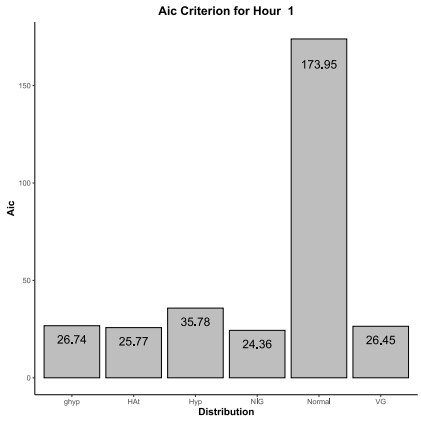



Εικόνα (iii)

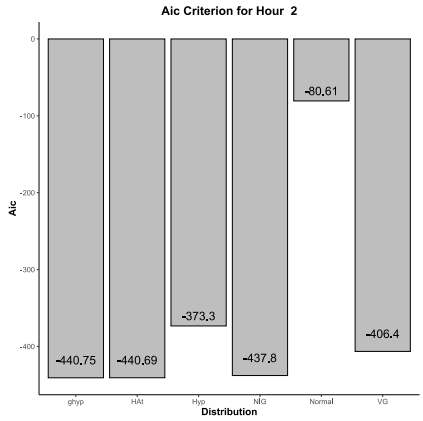



Εικόνα (iv)

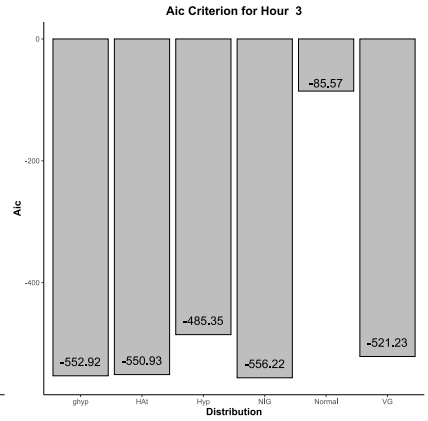
Εικόνα 4.3: Ενδεικτικά Ιστογράμματα Κανονικής κατανομής ωρών 3,6,13,15



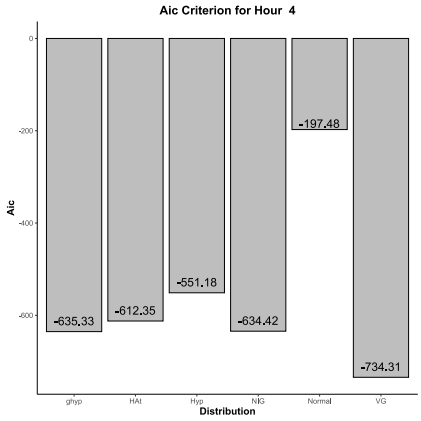

Εικόνα (i)



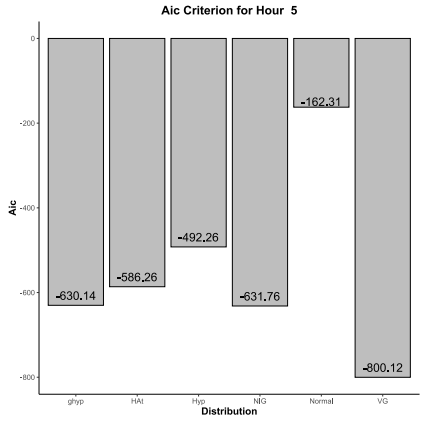

Εικόνα (ii)



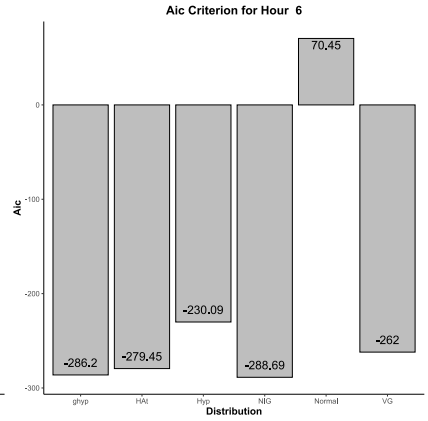

Εικόνα (iii)



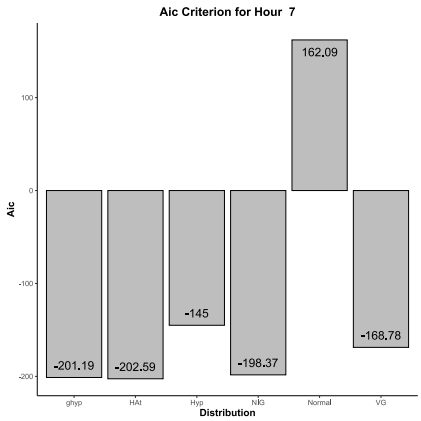

Εικόνα (iv)



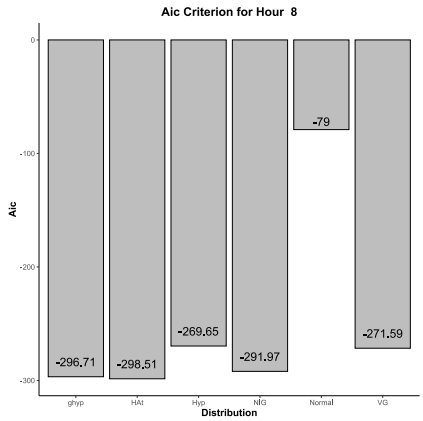

Εικόνα (v)



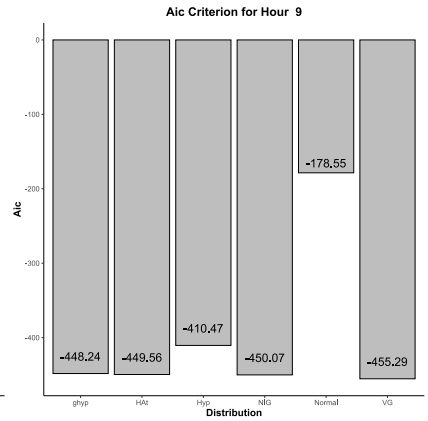

Εικόνα (vi)




Εικόνα (vii)

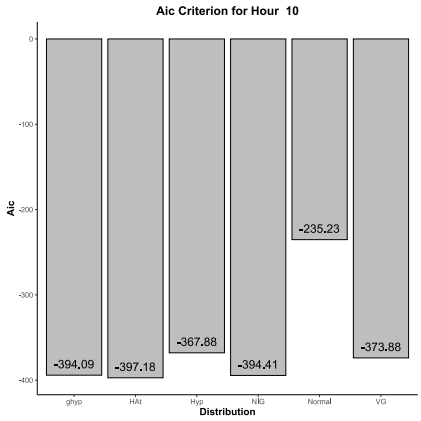



Εικόνα (viii)

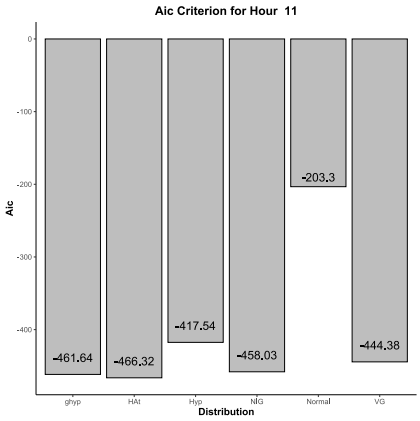



Εικόνα (ix)

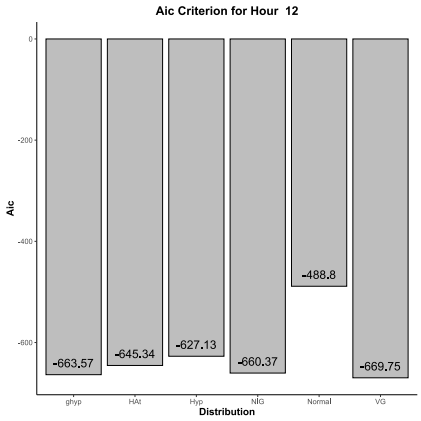
Εικόνα 4.4: Κριτήρια AIC διαφόρων κατανομών στις ώρες 1 εώς 9



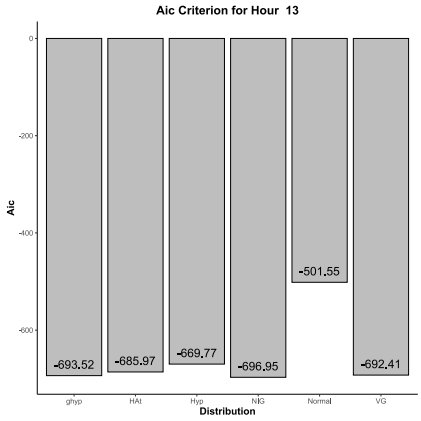

Εικόνα (i)



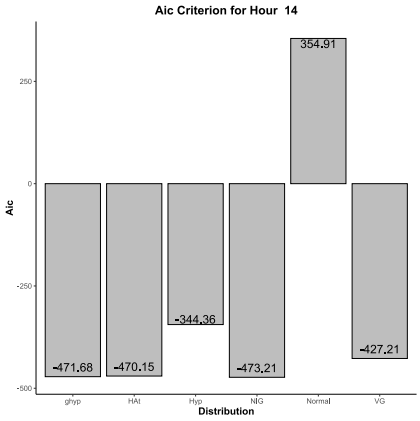

Εικόνα (ii)



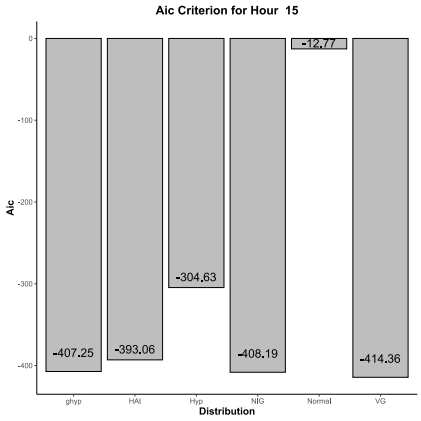

Εικόνα (iii)



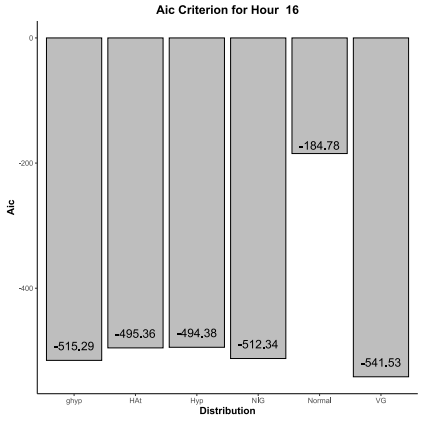

Εικόνα (iv)



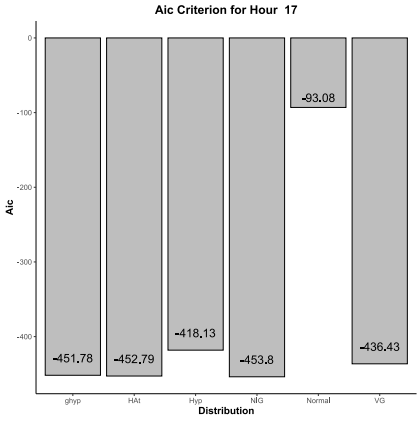

Εικόνα (v)



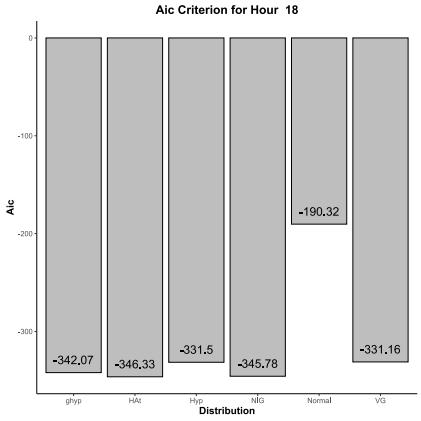

Εικόνα (vi)




Εικόνα (vii)

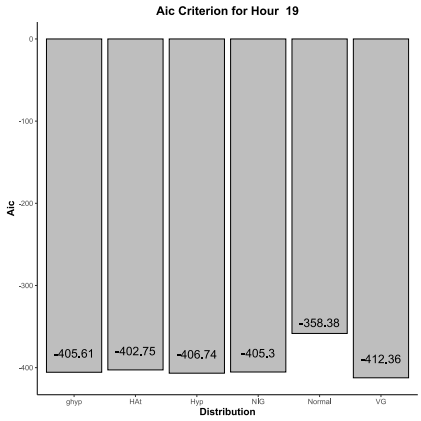



Εικόνα (viii)

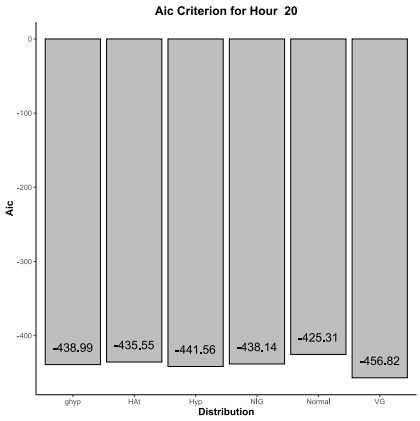



Εικόνα (ix)

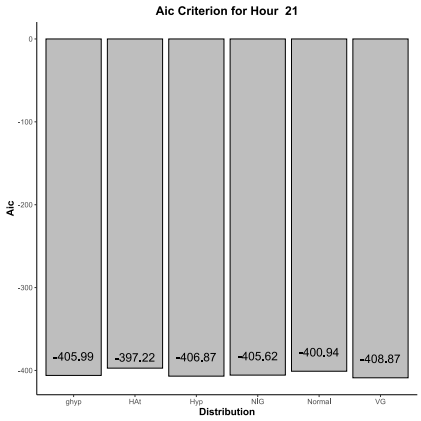
Εικόνα 4.5: Κριτήρια AIC διαφόρων κατανομών στις ώρες 10 εώς 18



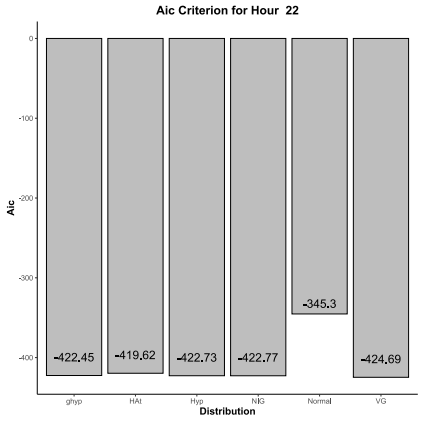

Εικόνα (i)



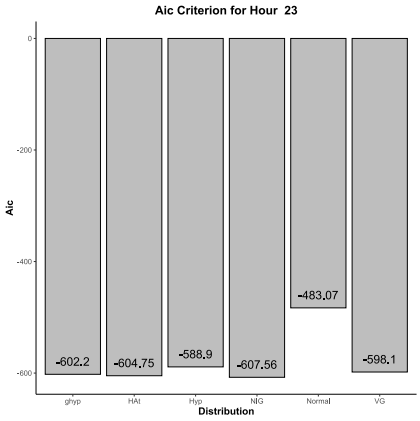

Εικόνα (ii)



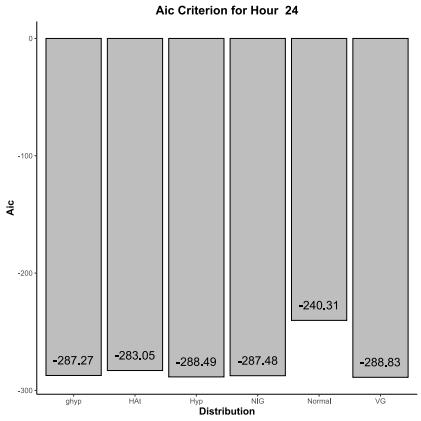

Εικόνα (iii)




Εικόνα (iv)

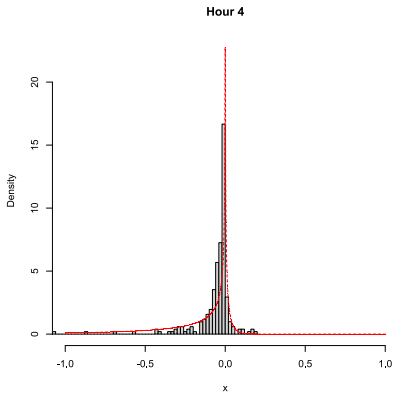



Εικόνα (v)

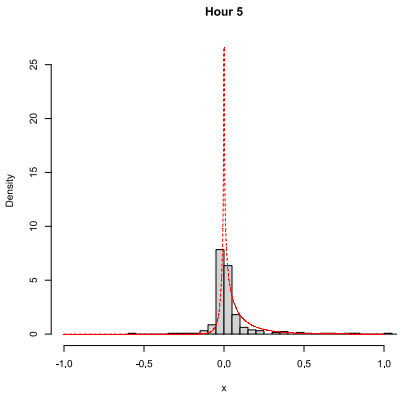



Εικόνα (vi)

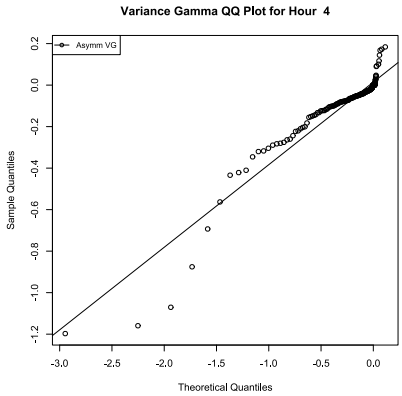
Εικόνα 4.6: Κριτήρια AIC διαφόρων κατανομών στις ώρες 19 εώς 24



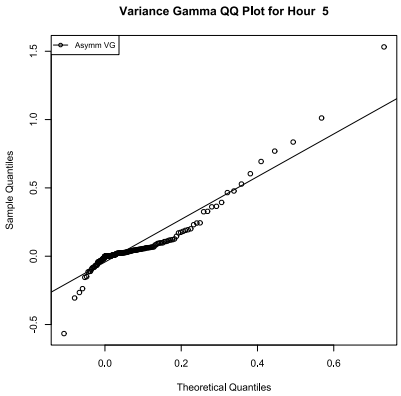

Εικόνα (i)




Εικόνα (ii)

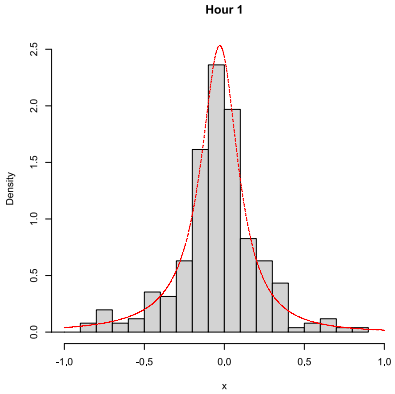



Εικόνα (iii)

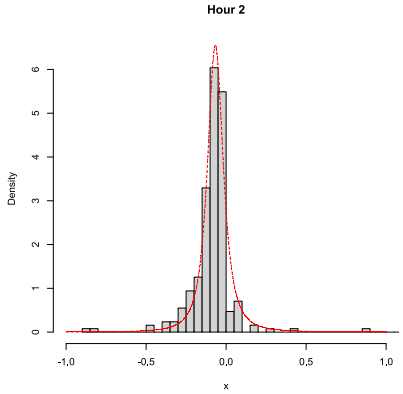



Εικόνα (iv)

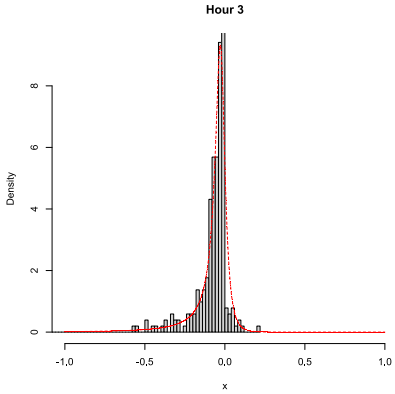
Εικόνα 4.7: Ενδεικτικά Ιστογράμματα και QQ Plots Variance Gamma ωρών 4 και 5



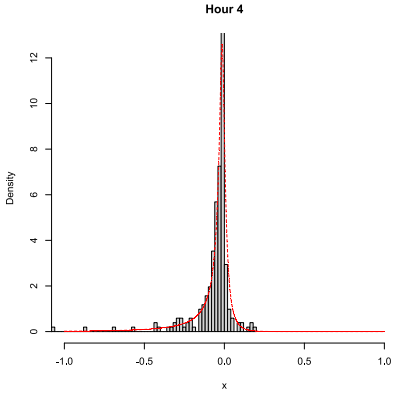

Εικόνα (i)



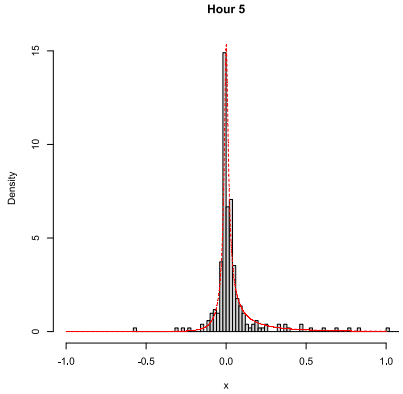

Εικόνα (ii)



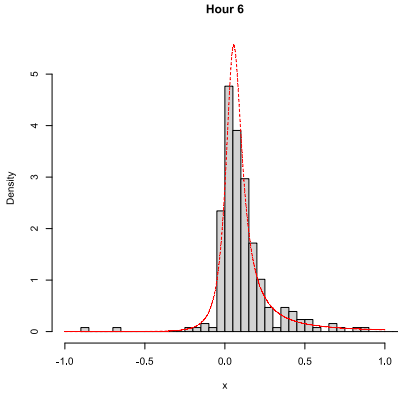

Εικόνα (iii)



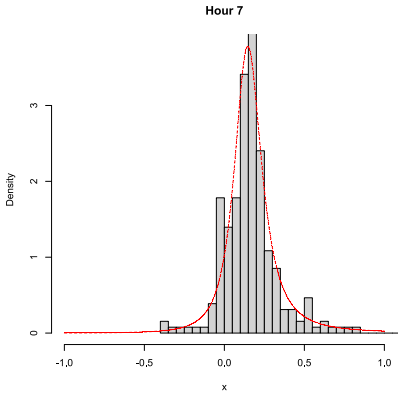

Εικόνα (iv)



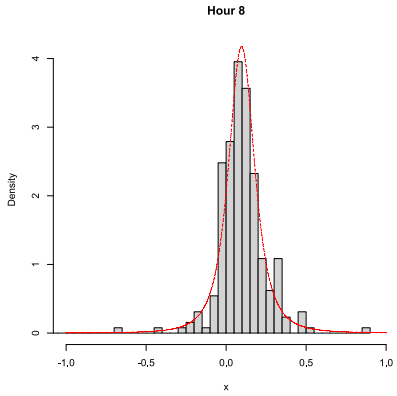

Εικόνα (v)



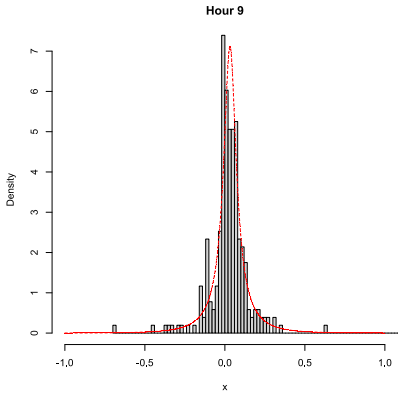

Εικόνα (vi)




Εικόνα (vii)

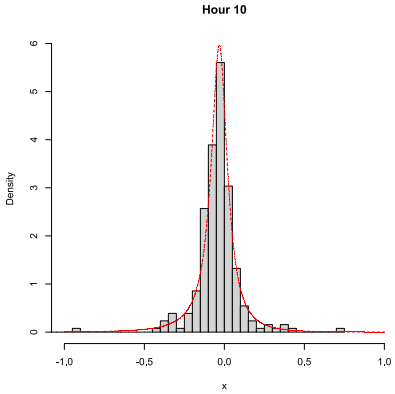



Εικόνα (viii)

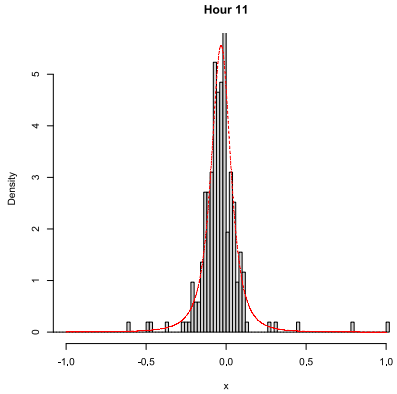



Εικόνα (ix)

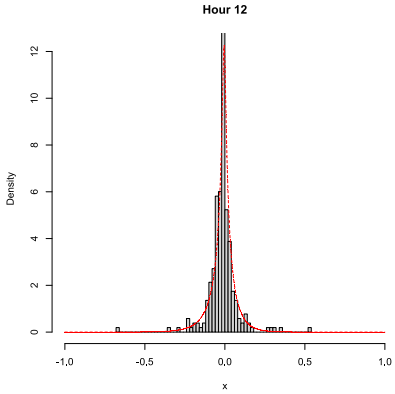
Εικόνα 4.8: Ιστογράμματα Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 1 εώς 9



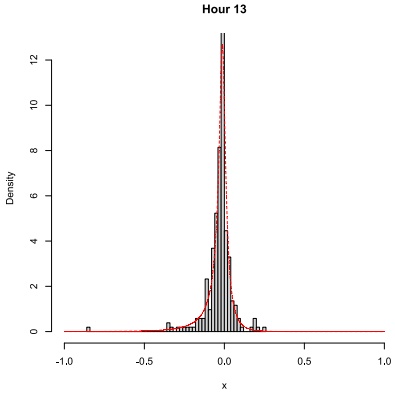

Εικόνα (i)



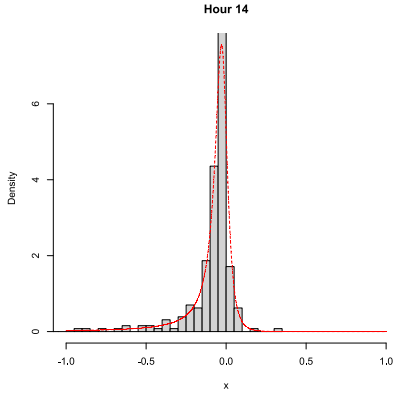

Εικόνα (ii)



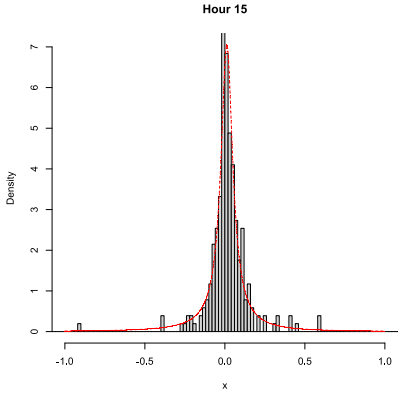

Εικόνα (iii)



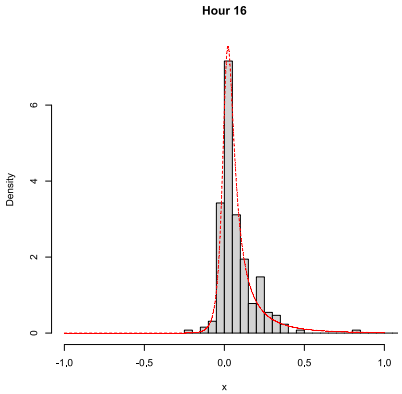

Εικόνα (iv)



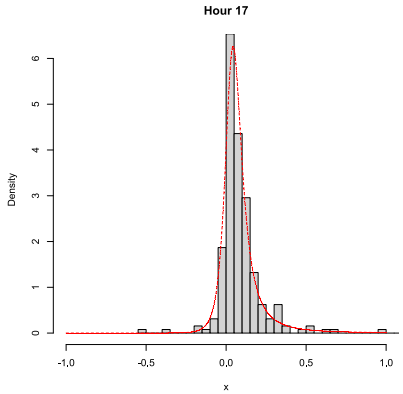

Εικόνα (v)



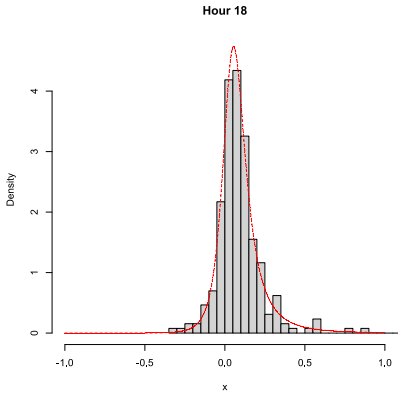

Εικόνα (vi)




Εικόνα (vii)

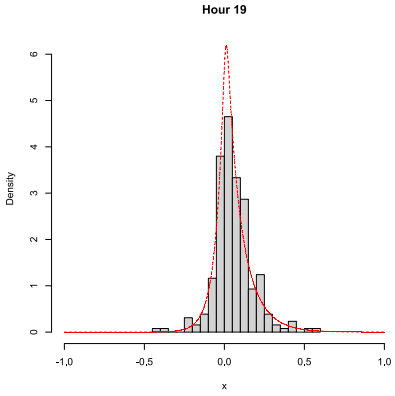



Εικόνα (viii)

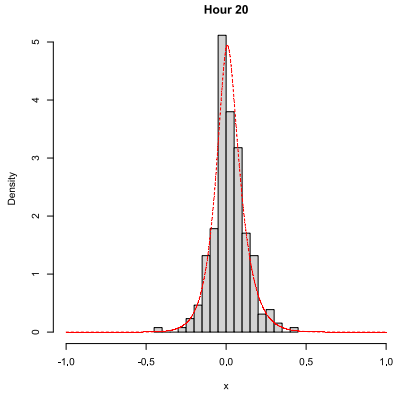



Εικόνα (ix)

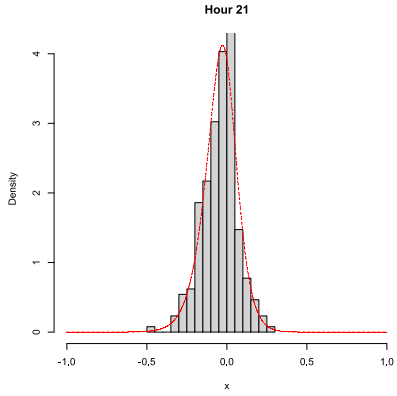
Εικόνα 4.9: Ιστογράμματα Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 10 εώς 18



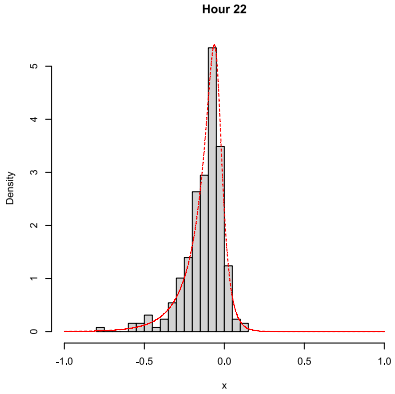

Εικόνα (i)



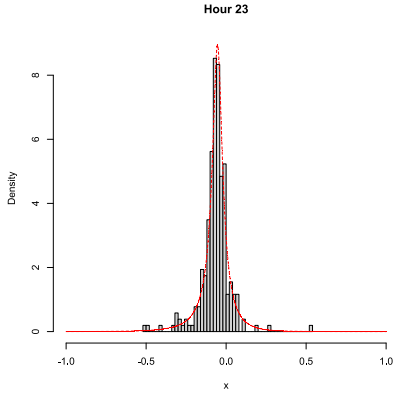

Εικόνα (ii)



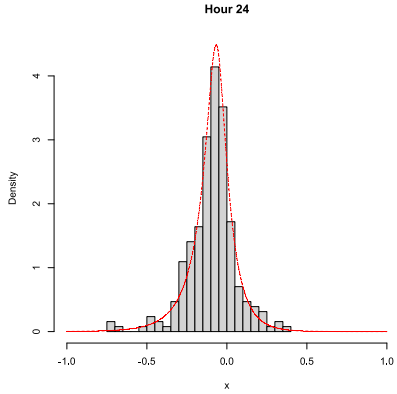

Εικόνα (iii)




Εικόνα (iv)

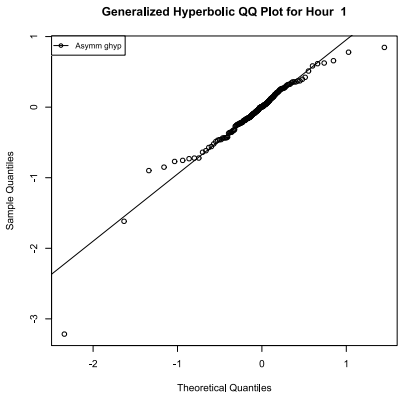



Εικόνα (v)

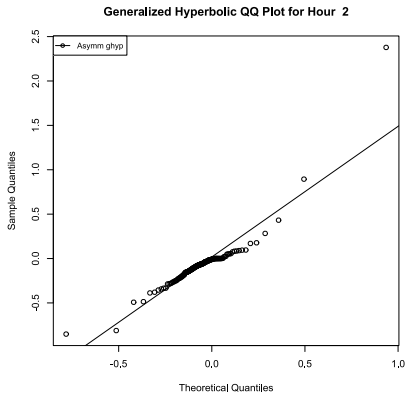



Εικόνα (vi)

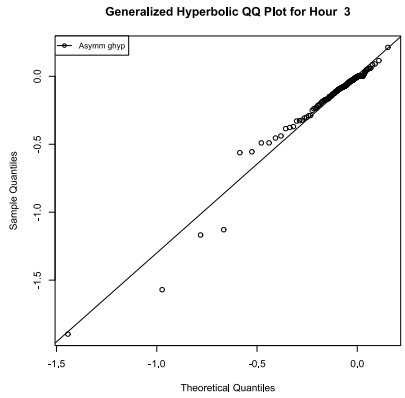
Εικόνα 4.10: Ιστογράμματα Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 19 εώς 24



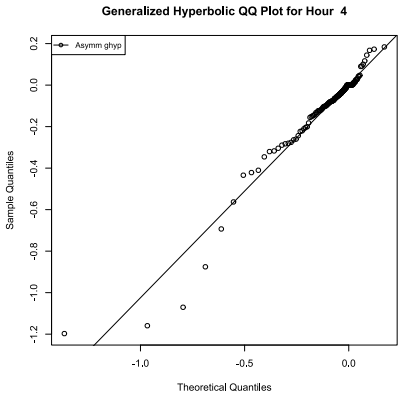

Εικόνα (i)



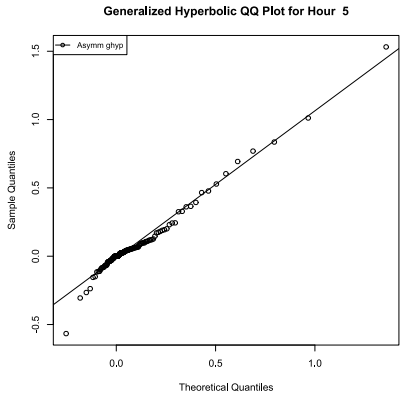

Εικόνα (ii)



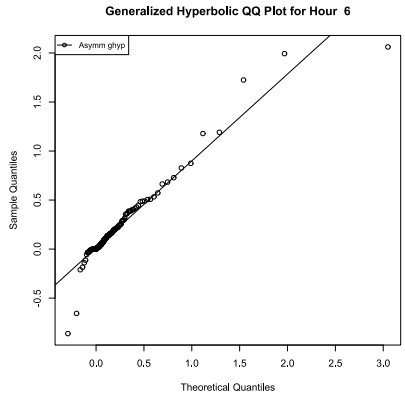

Εικόνα (iii)



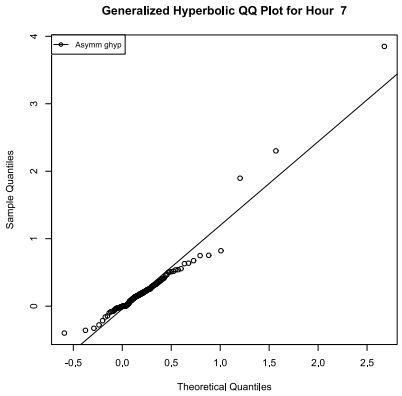

Εικόνα (iv)



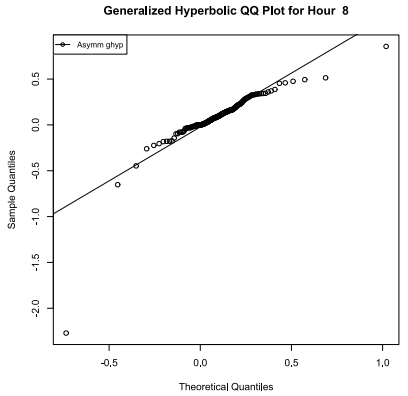

Εικόνα (v)



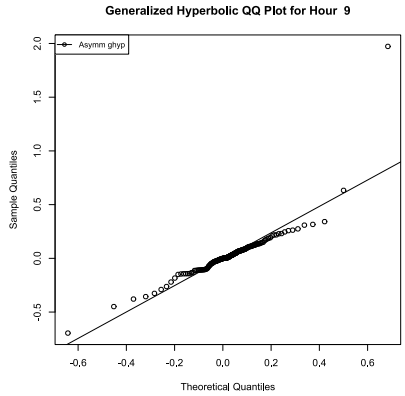

Εικόνα (vi)




Εικόνα (vii)

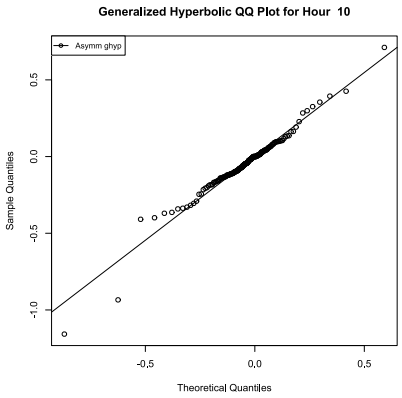



Εικόνα (viii)

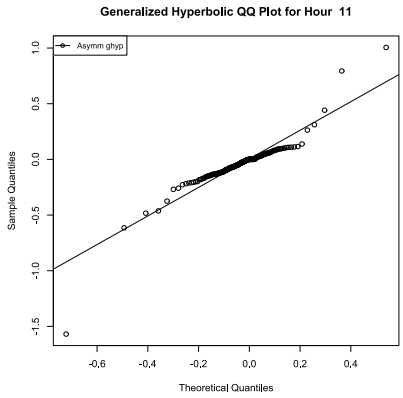



Εικόνα (ix)

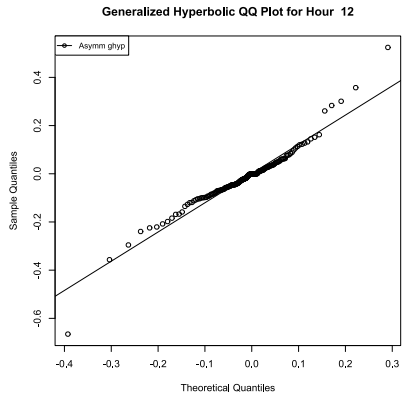
Εικόνα 4.11: QQ Plots Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 1 εώς 9



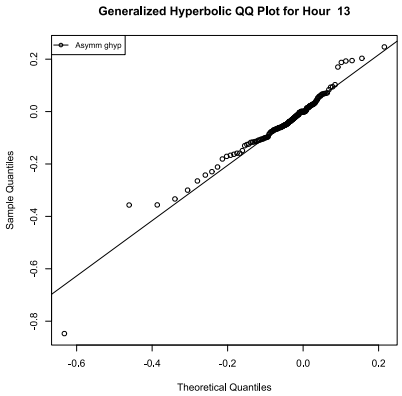

Εικόνα (i)



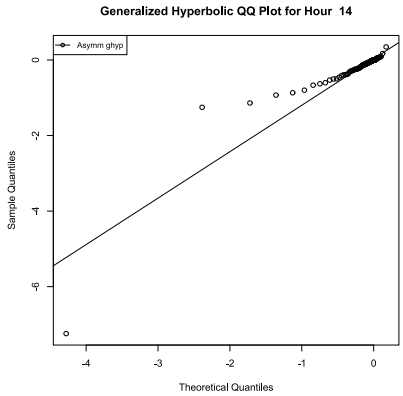

Εικόνα (ii)



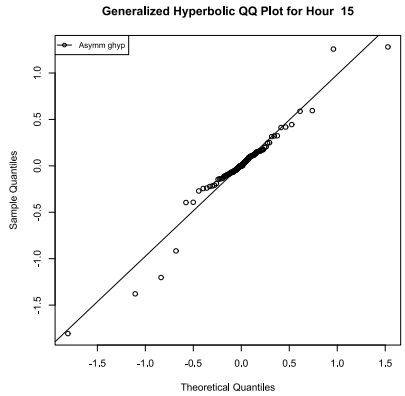

Εικόνα (iii)



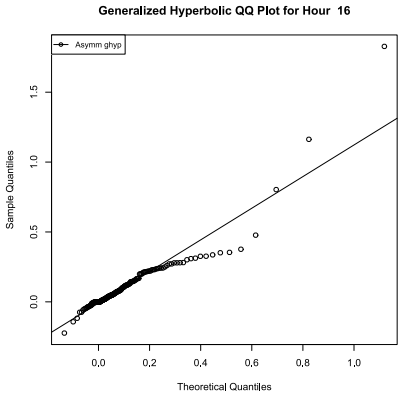

Εικόνα (iv)



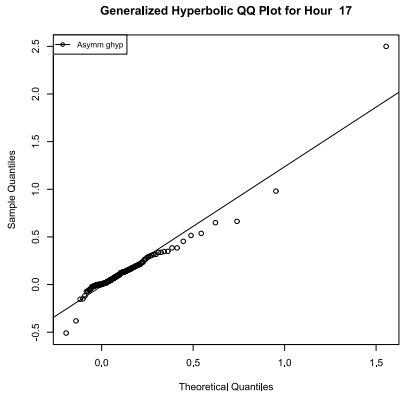

Εικόνα (v)



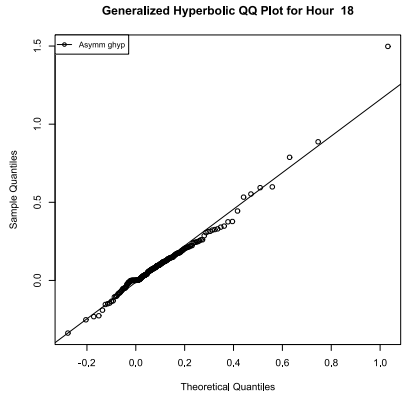

Εικόνα (vi)




Εικόνα (vii)

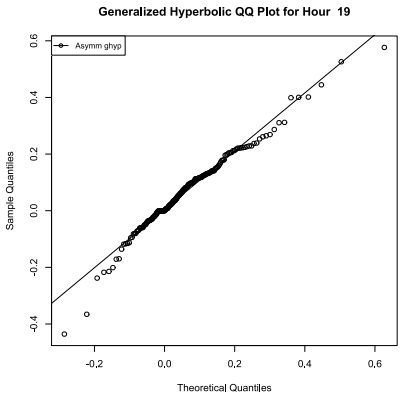



Εικόνα (viii)

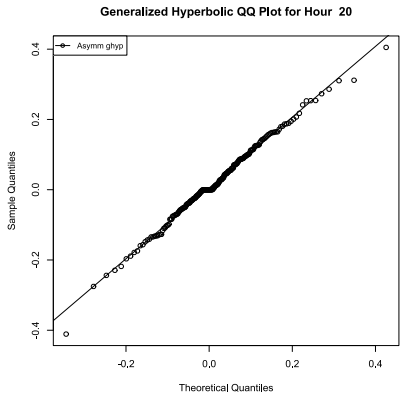



Εικόνα (ix)

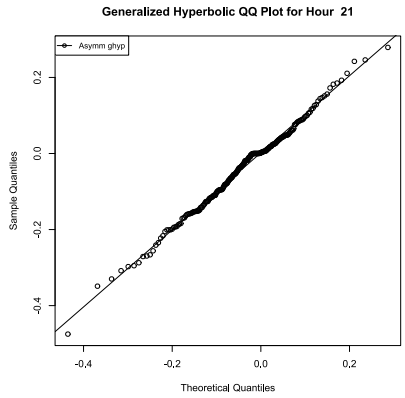
Εικόνα 4.12: QQ Plots Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 10 εώς 18



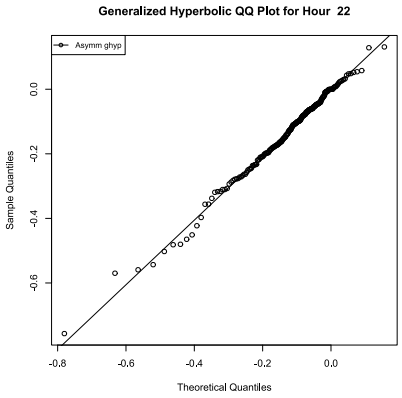

Εικόνα (i)



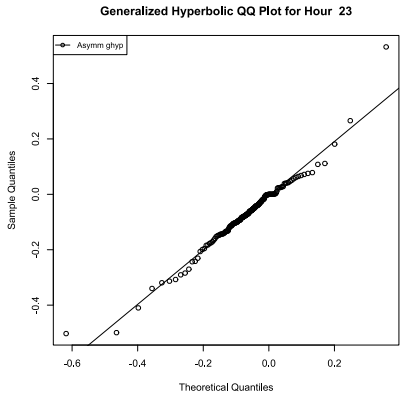

Εικόνα (ii)



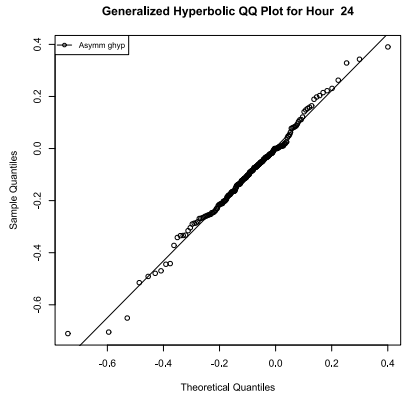

Εικόνα (iii)




Εικόνα (iv)

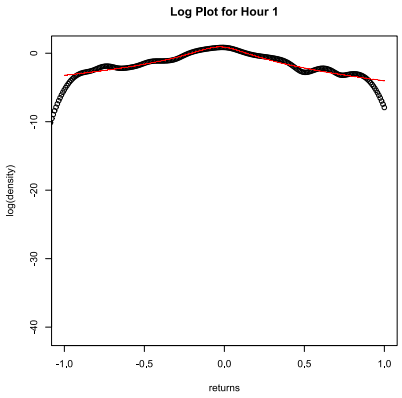



Εικόνα (v)

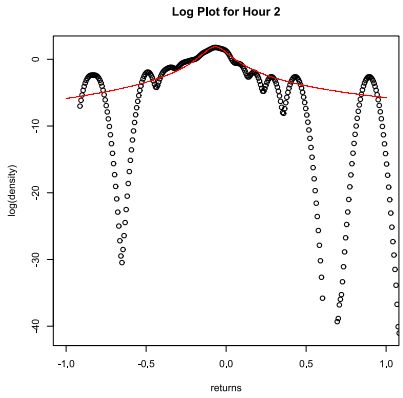



Εικόνα (vi)

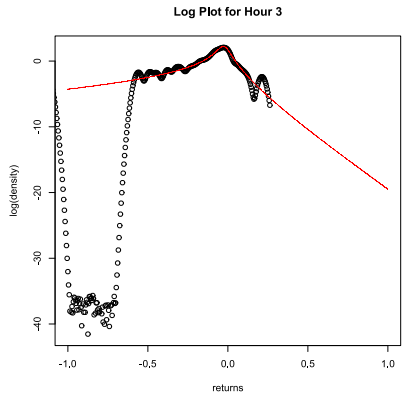
Εικόνα 4.13: QQ Plots Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 19 εώς 24



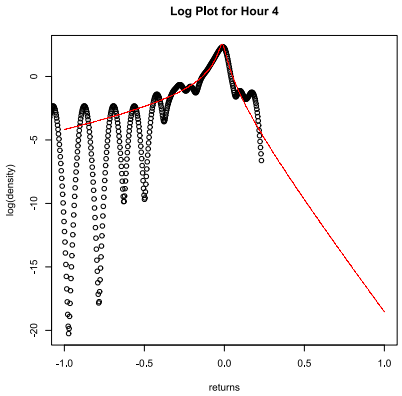

Εικόνα (i)



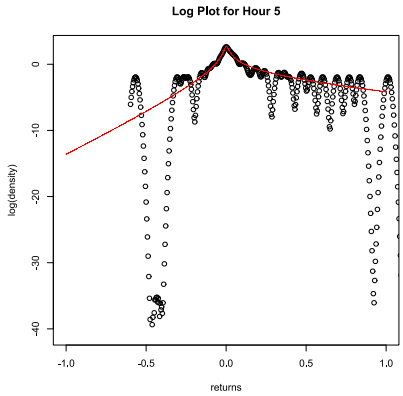

Εικόνα (ii)



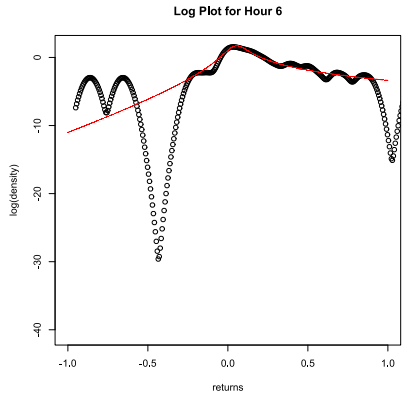

Εικόνα (iii)



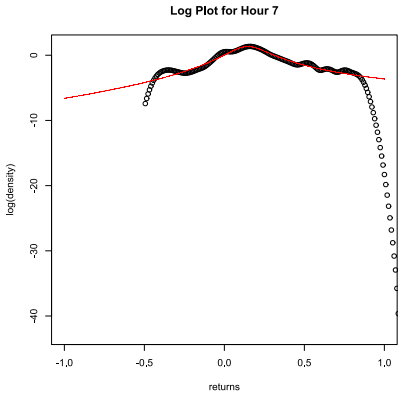

Εικόνα (iv)



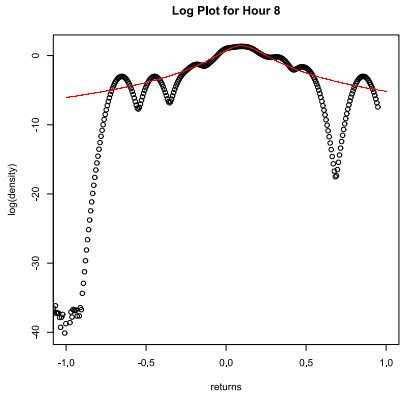

Εικόνα (v)



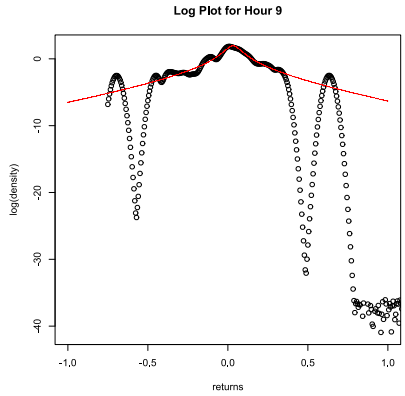

Εικόνα (vi)




Εικόνα (vii)

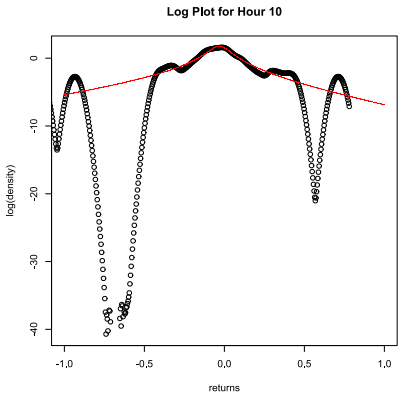



Εικόνα (viii)

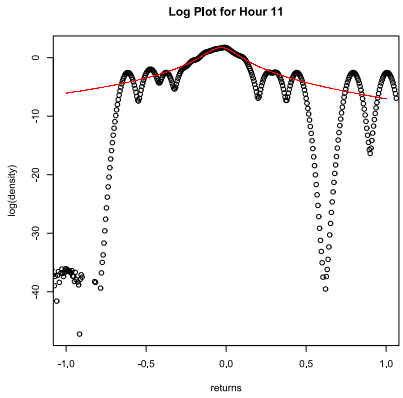



Εικόνα (ix)

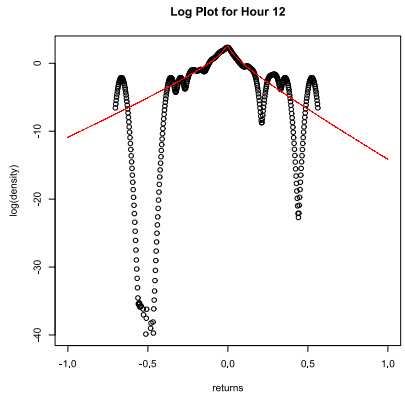
Εικόνα 4.14: Log Plots Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 1 εώς 9



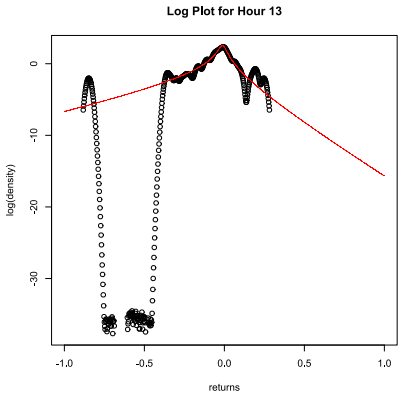

Εικόνα (i)



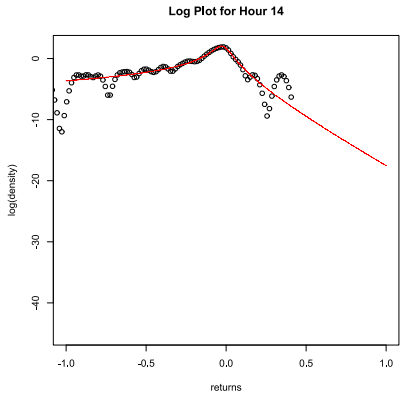

Εικόνα (ii)



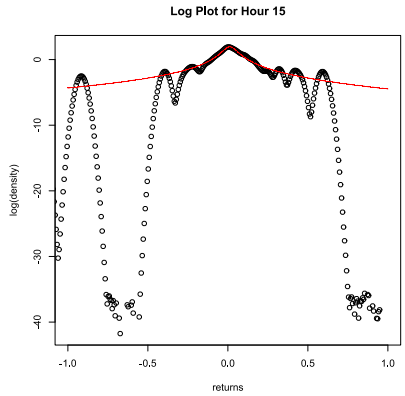

Εικόνα (iii)



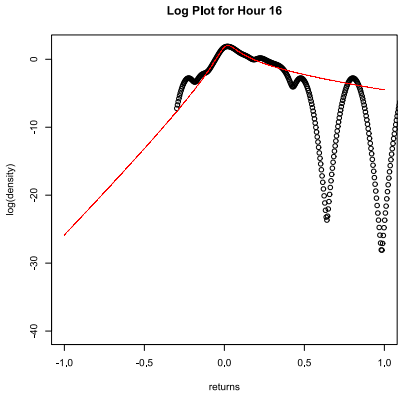

Εικόνα (iv)



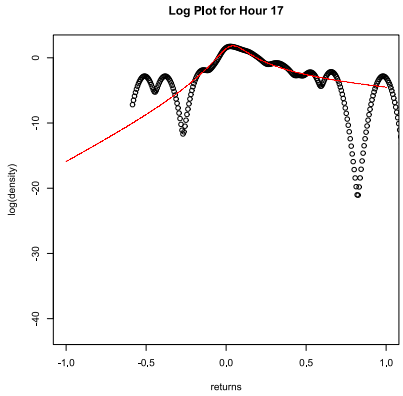

Εικόνα (v)



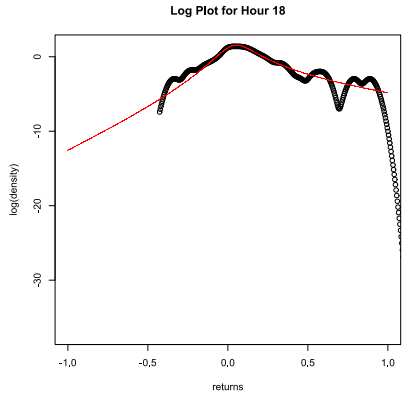

Εικόνα (vi)




Εικόνα (vii)

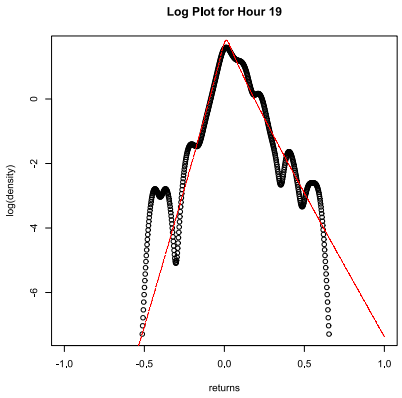



Εικόνα (viii)

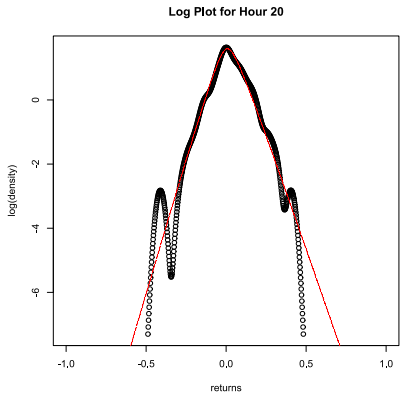



Εικόνα (ix)

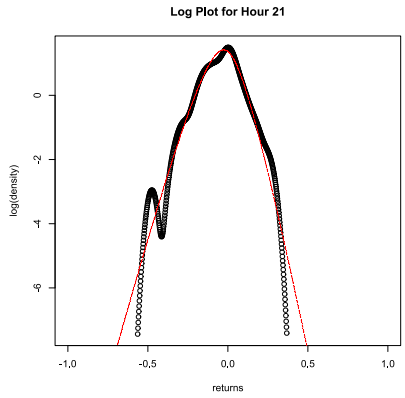
Εικόνα 4.15: Log Plots Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 10 εώς 18



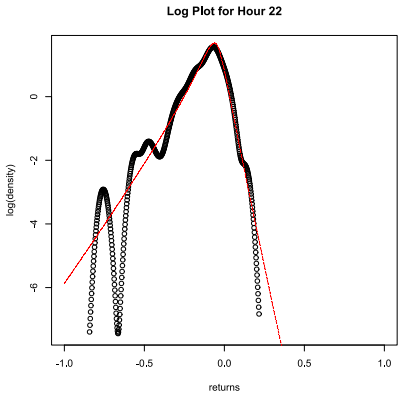

Εικόνα (i)



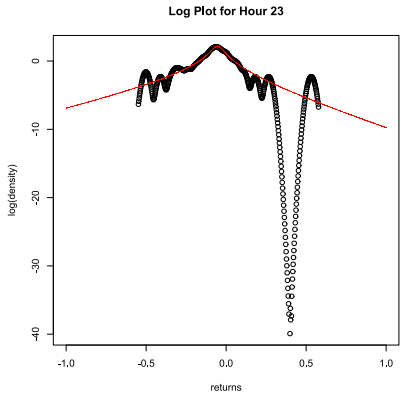

Εικόνα (ii)



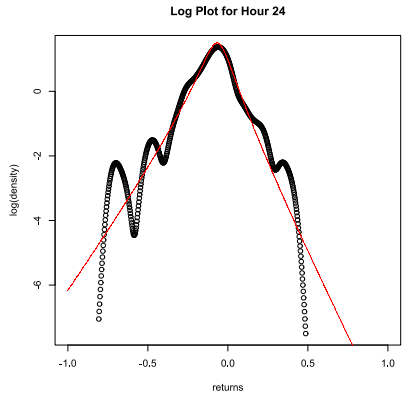

Εικόνα (iii)




Εικόνα (iv)




Εικόνα (v)




Εικόνα (vi)

Εικόνα 4.16: Log Plots Γενικευμένης Υπερβολικής κατανομής ωρών 19 εώς 24

## 4.3 Ποσοτικοποίηση του Ρίσκου

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, σκοπός είναι η ποσοτικοποίηση του ρίσκου που σχετίζεται με το προφίλ. Παίρνοντας σαν χρονικό ορίζοντα έναν χρόνο ή αλλιώς 8760 ώρες, η ποσότητα αυτή είναι η

$$Z(\omega) = \sum_{h=1}^{8760} gen_h(\omega) s_h(\omega) = \sum_{d=1}^{365} \sum_{t=1}^{24} gen_t(\omega) s_d^t(\omega) \tag{4.2}$$

όπου $\omega$ είναι κάποιο σενάριο, $gen_h(\omega)$ η παραγωγή της μονάδας παραγωγής ΑΠΕ την ώρα $h$ υπο το σενάριο $\omega$ και $s_h(\omega)$ η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας την ώρα $h$ υπο το σενάριο $\omega$. Σαν φυσικό μέγεθος, η $Z(\omega)$ αντιπροσωπεύει το εισόδημα της μονάδας παραγωγής ΑΠΕ σε ένα έτος, καθώς για κάθε ώρα $h$ θα έχει εισόδημα $gen_t(\omega)s_d^t(\omega)$, δηλαδή την παραγωγή επί την τιμή ηλεκτρικής ενέργειας. Για λόγους ομοιομορφίας του κειμένου, από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε την τιμη της ηλεκτρικής ενέργειας σαν $s_h(\omega)$ αντί για $S_h(\omega)$. Σημειώνουμε οτι η $Z(\omega)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή ως άθροισμα γινομένου τυχαίων μεταβλητών.

Για να ποσοτικοποιήσουμε το ρίσκο αυτής της ποσότητας λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε τα μέτρα ρίσκου, έτσι το ρίσκο που θα αντιστοιχεί σε αυτή την ποσότητα είναι το $\rho(Z(\omega))$ και όπως έγινε και αναφορά στο δεύτερο κεφάλαιο, η συγκεκριμένη ποσότητα αντιστοχεί στο ποσό που πρέπει να προστεθεί στην ποσότητα $Z(\omega)$ ώστε να γίνει δεκτή από κάποια εποπτική αρχή.

Επιστρέφωντας στο πρόβλημα τώρα, για να καταφέρουμε να έχουμε ένα ρίσκο προφίλ μικρότερο ή ίσο του μηδέν, θα χρειαστεί να προστεθεί μια τιμή ασφαλίστρου στην strike price που δίνει κιλοβατώρα ο αγοραστής στον παραγωγό της μονάδας ΑΠΕ. Η ελάχιστη τιμή του ασφαλίστρου, που θα συμβολιστεί $\mu$ και θα έχει μονάδα €$/KWh$ (η ίδια μονάδα με την strike price), θα είναι η ελάχιστη ποσότητα που όταν πολλαπλασιαστεί με ολήκληρη την ετήσια παραγωγή της μονάδας ΑΠΕ, θα μας δώσει μια τιμή ρίσκου μικρότερη ή ίση του 0. Εκφράζοντας μαθηματικά το προβλημα τώρα έχουμε

$$Min\, \mu \text{ ώστε } \quad \rho(Z(\omega) + \mu g(\omega)) \leq 0 \tag{4.3}$$

όπου $g(\omega) = \sum_{h=1}^{8760} gen_h(\omega)$ είναι η ετήσια παραγωγή υπο το σενάριο $\omega$.

Σημειώνουμε τώρα για τους σκοπούς του συγκεκριμένου προβλήματος θα θεωρήσουμε την ωριαία παραγωγή σταθερή και άρα δε θα εξαρτάται από το σενάριο $\omega$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε για την ποσότητα της σχέσης (4.2) έχουμε ότι $Z(\omega) = \sum_{h=1}^{8760} gen_h s_h(\omega) = \sum_{d=1}^{365}\sum_{t=1}^{24} gen_t s_d^t(\omega)$ και συνεπώς η ετήσια παραγωγή $g(\omega)$ δε θα εξαρτάται ούτε αυτή από το σενάριο $\omega$. Σημειώνουμε οτι η $Z(\omega)$ παραμένει τυχαία μεταβλητή ώς άθροισμα γινομένου τυχαίων μεταβλητών με αριθμούς. Έχοντας αυτές τις συνθήκες, εκμεταλλευόμενοι τώρα την ιδιότητα Translation Invariance που είδαμε στο

δεύτερο Κεφάλαιο, το Πρόβλημα (4.3) γίνεται

$$\rho(Z(\omega)+\mu g)\leq 0 \Leftrightarrow \rho(Z(\omega))-\mu g\leq 0 \Leftrightarrow \mu \geq \frac{\rho(Z(\omega))}{g}.$$

Επομένως για να μην έχει ο παραγωγός ζημιές που να προέρχονται από το ρίσκο προφίλ, το ελάχιστο ποσό ασφαλίστηρίου που πρέπει να καταβάλλει ανα κιλοβατώρα ο αγοραστής είναι $\mu_{min} = \frac{\rho(Z(\omega))}{g}$ και το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στο να βρεθεί η τιμή $\rho(Z(\omega))$. Για να επιτευχθεί αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το μέτρο ρίσκου Expected Shortfall που είναι ένα συνεπές μέτρο ρίσκου. Θα υπολογίσουμε την ποσότητα $ES_a(Z(\omega))$, για $a \in (0,1)$. Σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύχθηκε στο δεύτερο Κεφάλαιο σχετικά με τα συγκεκριμένα μέτρα ρίσκου, για να βρούμε τη συγκεκριμένη ποσότητα πρέπει να γνωρίζουμε την κατανομή του $Z(\omega)$. Καθώς αυτό, λόγω του τύπου της $Z(\omega)$ δεν μπορεί να επιτευχθεί, με την παρακάτω Πρόταση μπορούμε να την προσεγγίσουμε αριθμητικά .

**Πρόταση 4.1.** *Θεωρούμε κάποιο συγκεκριμένο $a \in (0,1)$, $X$ μια πραγματική τυχαία μεταβλητή με $E[X] < \infty$ και $(X_1, ..., X_n)$ μια τυχαία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την ίδια κατανομή με την $X$.*

*Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor na \rfloor} X_{i:n}}{\lfloor na \rfloor} = E(X|X \leq q_a(X)) \tag{4.4}$$

*όπου $X_{1:n} \geq X_{2:n} \geq \cdots \geq X_{n:n}$ τα διατεταγμένα στατιστικά της ακολουθίας $(X_1, ..., X_n)$. Σημειώνουμε οτι με $\lfloor na \rfloor$ συμβολίζουμε τον μέγιστο ακέραιο που δεν ξεπερνά τον αριθμό $na$ ή αλλιώς $\lfloor na \rfloor = \sup\{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \leq na\}$.*

Η απόδειξη της παραπάνω Πρότασης βρίσκεται στην Πρόταση 4.1 εδώ [27].

Λαμβάνοντας υπόψιν λοιπόν την Πρόταση 4.1, αρκεί να μπορέσουμε να παράξουμε μια ακολουθία ψευδοτυχαίων μεταβλητών $Z_1, ..., Z_n$ που να έχουν την ίδια κατανομή με τη $Z$. Παρουσιάζεται η μέθοδος που θα υλοποιηθεί αυτό. Έχουμε ότι

$$Z(\omega) = \sum_{h=1}^{8760} gen_h s_h(\omega) = \sum_{d=1}^{365}\sum_{t=1}^{24} gen_t s_d^t(\omega).$$

Στο 4.2 δείξαμε πώς το μοντέλο της σχέσης (4.1) μπορεί να περιγραφεί επαρκώς καλά αν θεωρήσουμε 24 διαφορετικές Γενικευμένες Υπερβολικές κατανομές, μία για κάθε ώρα. Δηλαδή

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{s_d^{h+1}}{s_d^h}\right) &\sim GH^{h+1}(\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu), \qquad h = 1,2,...,23 \\ \ln\left(\frac{s_{d+1}^1}{s_d^{24}}\right) &\sim GH^1(\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu), \qquad h = 24. \end{aligned}$$

Θεωρώντας τη μέρα $d$ λοιπόν, για $h = 1, 2, ..., 23$ παίρνουμε ψευδοτυχαίο δείγμα από την $GH^{h+1}(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ , έστω $q_d^{h+1}$ ενώ για $h = 24$ παίρνουμε ψευδοτυχαίο δείγμα από την $GH^1(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ , έστω $q_{d+1}^1$. Τότε για $h = 1, 2, ..., 23$

$$\ln\left(\frac{s_d^{h+1}}{s_d^h}\right) = q_d^{h+1} \Leftrightarrow s_d^{h+1} = s_d^h e^{q_d^{h+1}} = s_d^{h-1} e^{q_d^h} e^{q_d^{h+1}} = \cdots = s_d^1 \prod_{i=2}^{h+1} e^{q_d^i}$$

$$\Leftrightarrow s_d^{h+1} = s_d^1 \prod_{i=2}^{h+1} e^{q_d^i}$$

και το ωριαίο εισόδημα μέρας $d$ και ώρας $h+1$ είναι ίσο με

$$s_d^{h+1} gen_{h+1} = gen_{h+1} s_d^1 \prod_{i=2}^{h+1} e^{q_d^i}.$$

Αντίστοιχα για $h = 24$

$$\ln\left(\frac{s_{d+1}^1}{s_d^{24}}\right) = q_{d+1}^1 \Leftrightarrow s_{d+1}^1 = s_d^{24} e^{q_{d+1}^1}$$

και το ωριαίο εισόδημα αυτής της μέρας $d+1$ και ώρας 1 είναι ίσο με

$$s_{d+1}^1 gen_1 = gen_1 s_d^1 e^{q_{d+1}^1} \prod_{i=2}^{24} e^{q_d^i}.$$

και άρα το άθροισμα των εσόδων για μια ημέρα είναι ίσο με

$$\sum_{h=1}^{23} p_d^{h+1} gen_{h+1} + s_{d+1}^1 gen_1 = \sum_{h=1}^{23} s_d^1 gen_{h+1} \prod_{i=2}^{h+1} e^{q_d^i} + gen_1 s_d^1 e^{q_{d+1}^1} \prod_{i=2}^{24} e^{q_d^i}$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το συνολικό εισόδημα σε ένα διάστημα 1 έτους , δηλαδη 365 ημερών θα είχαμε ότι

$$\sum_{d=1}^{365} \sum_{t=1}^{24} gen_t s_d^t(\omega) = s_1^1 + \sum_{d=1}^{365} \left[ \sum_{h=1}^{23} s_d^1 gen_{h+1} \prod_{i=2}^{h+1} e^{q_d^i} \right] + \sum_{d=1}^{364} \left[ gen_1 s_d^1 e^{q_{d+1}^1} \prod_{i=2}^{24} e^{q_d^i} \right]. \tag{4.5}$$

Συνοψίζοντας λοιπόν, παράγοντας $n$ φορές την τιμη τιμή $Z(\omega) = \sum_{d=1}^{365} \sum_{t=1}^{24} gen_t s_d^t(\omega)$ μέσω της σχέσης (4.5), εκμεταλλευόμαστε τη σχέση (4.4) και παίρνοντας τις $\lfloor a \cdot n \rfloor$ μικρότερες τιμές (πχ a=0.05) μπορούμε να κάνουμε μια εκτίμηση της τιμής $ES_a(Z(\omega))$.

## 4.4 Μέθοδος Monte Carlo

Καθώς δεν μπορούμε να βρούμε την ακριβή τιμή $ES_a(Z)$, θα την προσεγγίσουμε μέσω υλοποιήσεων αριθμητικά - κάτι το οποίο θα γίνει μέσω της σχέσης (4.4). Στην πραγματικότητα ωστόσο χρειάζεται ένας εξαιρετικά μεγάλος αριθμος προσομοιώσεων για να δούμε μια εικόνα σαφούς σύγκλισης. Επειδή αυτό δεν είναι συνήθως εφικτό λόγω της περιορισμένης υπολογιστικής ισχύος, αυτό που θέλουμε είναι να ελέγξουμε το σφάλμα. Πιο συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει να κάνουμε μια εκτίμηση του μέσω φραγμάτων-διαστημάτων εμπιστοσύνης αλλα και να δούμε πόσο γρήγορα αυτό τείνει προς το μηδέν όσο αυξάνουμε τον αριθμό των προσομοιώσεων. Για το λόγο αυτό θα εισάγουμε το σφάλμα ολοκλήρωσης Monte Carlo.

$$e_n = e_n(Z) = E(Z) - E_n(Z)$$

όπου $E_n(Z) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} = \overline{Z}$ και $(Z_1, ..., Z_n)$ η ακολουθία των στατιστικών που ακολουθούν τη ίδια κατανομή με τη $Z$ και που προέκυψαν από τις προσομοιώσεις. Σημειώνουμε επίσης ότι η εκτιμήτρια $ES_n(Z)$ είναι αμερόληπτη καθώς ισχύει $E[\overline{Z}] = \frac{E\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i\right]}{n} = E[Z]$ και άρα $E[e_n] = 0$. Για το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Square Error) και τη ρίζα (Root Mean Square Error) του λοιπόν έχουμε ότι

$$MSE[E_n(Z)] = E[e_n^2] \quad \text{και} \quad RMSE[E_n(Z)] = \sqrt{E[e_n^2]}$$

Η σχέση (4.4) δοθέντος ότι $E[Z] < \infty$ μας δίνει κάποια φράγματα για το σφάλμα όπως και πληροφία για την τάξη σύγκλισης όπως θα δούμε στην παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 4.2.** *Θεωρούμε $\sigma = \sigma(Z) < \infty$ την τυπική απόκλιση της τ.μ. $Z$. Τότε η ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος ικανοποιεί τη σχέση*

$$E[e_n(Z)^2]^{1/2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

*Επιπλέον η τιμή $\sqrt{n}e_n(Z)$ ακολουθεί ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $\sigma(Z)$*

*Έτσι λοιπόν για σταθερές $a < b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sigma a}{\sqrt{n}} < e_n < \frac{\sigma b}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{4.6}$$

*όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής.*

Η απόδειξη της παραπάνω Πρότασης βρίσκεται εδώ [28, p.14].

Για να εκτιμήσουμε την τυπική απόκλιση της Πρότασης 4.2 τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω Πρόταση.

**Πρόταση 4.3.** *Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της $\sigma^2(Z)$ είναι*

$$\sigma_n^2(Z) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2$$

*Απόδειξη.*

$$E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2\right] = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2\right] = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(Z_i^2 - 2Z_i\overline{Z} + \overline{Z}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n}Z_i^2\right] - 2E\left[\overline{Z}\sum_{i=1}^{n}Z_i\right] + E\left[\sum_{i=1}^{n}\overline{Z}^2\right]\right) = \frac{1}{n-1}\left(E\left[\sum_{i=1}^{n}Z_i^2\right] - 2nE\left[\overline{Z}^2\right] + nE\left[\overline{Z}^2\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E\left[Z_i^2\right] - 2nE\left[\overline{Z}^2\right]\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[E\left[Z_i^2\right] - E[\overline{Z}^2]\right]\right)$$

Έχουμε τώρα από το Λήμμα 3.7 ότι

$$E\left[Z_i^2\right] = Var[Z_i] + E[Z_i]^2 = \sigma^2 + E[Z_i]^2 \text{ και } E\left[\overline{Z}^2\right] = Var[\overline{Z}] + E[\overline{Z}]^2$$

Αντίστοιχα επειδή τα δείγματα $Z_1, ..., Z_n$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους ισχύει από το Λήμμα 3.8 ο τύπος

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n}Z_i\right) = \sum_{i=1}^{n}Var(Z_i)$$

επομένως

$$Var[\overline{Z}] = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i\right) = \frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n}Z_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var\left(Z_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Επιπλέον

$$E[\overline{Z}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[Z_i\right] = E[Z]$$

Επομένως $E\left[\overline{Z}^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} + E[Z]^2$ και άρα

$$E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma^2 + E[Z]^2 - \frac{\sigma^2}{n} - E[Z]^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(n-1)\sigma^2}{n}\right] = \sigma^2$$

□

Σχετικά με την ταχύτητα σύγκλισης έχουμε από την Παρατήρηση 2.22 που βρίσκεται εδώ [28] ότι η ποσότητα $E[e_n^2]^{1/2}$ συγκλίνει στο 0 όπως η $1/\sqrt{n}$. Αυτό σημαίνει οτι αν θέλουμε να μειώσουμε το παραπάνω σφάλμα κατα μία τάξη μεγέθους, τότε πρέπει να αυξήσουμε τον αριθμό των προσομοιώσεων κατα $10^2$. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει οτι η ταχύτητα σύγκλισης της Monte Carlo $\mathcal{O}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ είναι 1/2.

Ενδιαφερόμαστε τώρα να κατασκευάσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για να προσεγγίσουμε την τιμή $E(Z)$. Αν θέλουμε να εκτιμήσουμε ενα 95% διάστημα εμπιστοσύνης, θα επιλέξουμε στη σχέση (4.6)σαν $\alpha = 1.96$ και $b = -a$ και για σαν εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης $\sigma$ θα επιλέξουμε την αμερόληπτη εκτιμήτρια της Πρότασης 4.3. Τότε θα λάβουμε ότι $\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(1.96) - \Phi(-1.96) = 0.975 - 0.025 = 0.95$ και άρα

$$\mathbb{P}\left(-\frac{1.96\sigma_n}{\sqrt{n}} < e_n < \frac{1.96\sigma_n}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{P}\left(-\frac{1.96\sigma_n}{\sqrt{n}} < E(Z) - E_n(Z) < \frac{1.96\sigma_n}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{P}\left(E_n(Z) - \frac{1.96\sigma_n}{\sqrt{n}} < E(Z) < E_n(Z) + \frac{1.96\sigma_n}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \tag{4.7}$$

Ουσιαστικά από την παραπάνω σχέση μπορούμε να συμπεράνουμε οτι η άγνωστη ποσότητα $E(Z)$ κυμαίνεται στο διάστημα

$$\left[E_n(Z) - \frac{1.96\sigma_n}{\sqrt{n}}, E_n(Z) + \frac{1.96\sigma_n}{\sqrt{n}}\right] \tag{4.8}$$

με πιθανότητα 95%.

Σημειώνουμε επίσης οτι αν θέλουμε άλλο επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha$ διαφορετικό του 95%, τότε πρέπει να βρούμε έναν αριθμό $A$ τέτοιο $\varphi(A) = 1 - \frac{1-a}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε τη σχέση (4.7) να έχει τη μορφή

$$\mathbb{P}\left(E_n(Z) - \frac{A\sigma_n}{\sqrt{n}} < E(Z) < E_n(Z) + \frac{A\sigma_n}{\sqrt{n}}\right) = a. \tag{4.9}$$

Στην περίπτωση μας όπου έχουμε τη δεσμευμένη τιμή (δηλαδή το μέτρο ρίσκου Expected Shortfall) $ES(Z) = E(Z|Z \leq q_a(Z))$, θα ισχύει κατα πλήρη αντιστοιχία με πριν η ανάλυση και οι ιδιότητες για τα σφάλματα. Η διαφορά είναι ότι για την ποσότητα $\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}$, θα έχουμε την $\frac{\sum_{i=1}^{\lfloor na \rfloor} Z_{i:n}}{\lfloor na \rfloor}$ όπου $Z_{1:n} \geq Z_{2:n} \geq \cdots \geq Z_{n:n}$ τα διατεταγμένα στατιστικά της ακολουθίας $(Z_1, ..., Z_n)$ που προέκυψαν από τις προσομοιώσεις. Σχετικά με τον αριθμό των προσομοιώσεων τώρα, αυτός είναι πλέον $\lfloor na \rfloor$ καθώς ο δειγματικός μέσος που παίρνουμε είναι στις $\lfloor na \rfloor$ μικρότερες τιμές της ακολουθίας $(Z_1, ..., Z_n)$.

## 4.5 Προσομοίωση

Έχοντας αναλύσει το πως θα εκτιμήσουμε το ρίσκο προφίλ, μένει η υλοποίηση της μεθόδου. Οι τιμές παραγωγής από ανεμογεννήτριες και φωτοβολταϊκά έχουν δοθεί από την εταιρεία ΜΥΤΙΛΗΝΑΙΟΣ Α.Ε.. Πιο συγκεκριμένα έχουμε 24 τιμές που αντιστοιχούν στη μέση παραγωγή ανα ώρα ενός αιολικού πάρκου και 24 αντίστοιχες τιμές για τα φωτοβολταϊκά, τα γραφήματά των οποίων βρίσκονται στις Εικόνες [] και []. Η υλοποίηση του κώδικα που περιγράφεται παραπάνω έγινε στη γλώσσα προγραμματισμού R. Στις Εικόνες 4.18 και 4.19 βλέπουμε την τιμή του ασφαλίστρου για την περίπτωση των ανεμογενητριών και των φωτοβολταϊκών αντίστοιχα συναρτήσει του αριθμού των προσομοιώσεων που κάνουμε.

Παρατηρούμε αρχικά ότι όσο μεγαλώνει ο αριθμός των προσομοιώσεων, η τιμή του ασφαλίστρου και στις δύο περιπτώσεις εμφανίζει κάποια τάση για σύγκλιση, ωστόσο καθως ο χρόνος εκτέλεσης από ένα σημείο και έπειτα ήταν εξαιρετικά μεγάλος, οι προσομοιώσεις σταμάτησαν καθώς φτάσαμε σε μια επιθυμητή ακρίβεια. Στη μπλέ γραμμή και των δύο εικόνων, όπως αναγράφεται και σε αυτές, μπορεί κανείς να δει τον δειγματικό μέσο, όπως και το γεγονός οτι οι τιμές του ασφαλίστρου όσο ανεβαίνει ο αριθμος των προσομοιώσεων προσεγγίζουν όλο και περισσότερο τη γραμμή του δειγματικού μέσου. Σχετικά με τα διαστήματα εμπιστοσύνης τώρα, εκμεταλλευόμαστε την Πρόταση 4.2. Για να προσεγγίσουμε επαρκώς καλά την τιμή ασφαλίστρων και στις δύο περιπτώσεις πήραμε έναν αρκετά μεγάλο αριθμό επαναλήψεων για να ξέρουμε οτι η τιμή μας είναι αρκετά κοντά στην πραγματική (13.090.000 συγκεκριμένα).

Βλέπουμε οτι η γραμμή του δειγματικού μέσου είναι μέσα στο χωρίο που σχηματίζεται από τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης - πράγμα που μας δείχνει ότι μέσω των διαστημάτων μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή και μάλιστα όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο καλύτερη είναι η εκτίμηση της τιμής. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται από τη σχέση

$$\left[ ES_{a,n}(Z) - \frac{1.96\sigma_{\lfloor na \rfloor}}{\sqrt{\lfloor na \rfloor}}, ES_{a,n}(Z) + \frac{1.96\sigma_{a,n}}{\sqrt{\lfloor na \rfloor}} \right]$$

της θεωρίας ενώ οι όροι $E_n(Z)$, $\sigma_n$ αρχίζουν και συγκλίνουν, ο όρος $\sqrt{\lfloor na \rfloor}$ αυξάνεται. Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο για αποφυγή σύγχυσης, οτι ο όρος $a$ της παραπάνω σχέσης που εδώ ισούται με 0.05

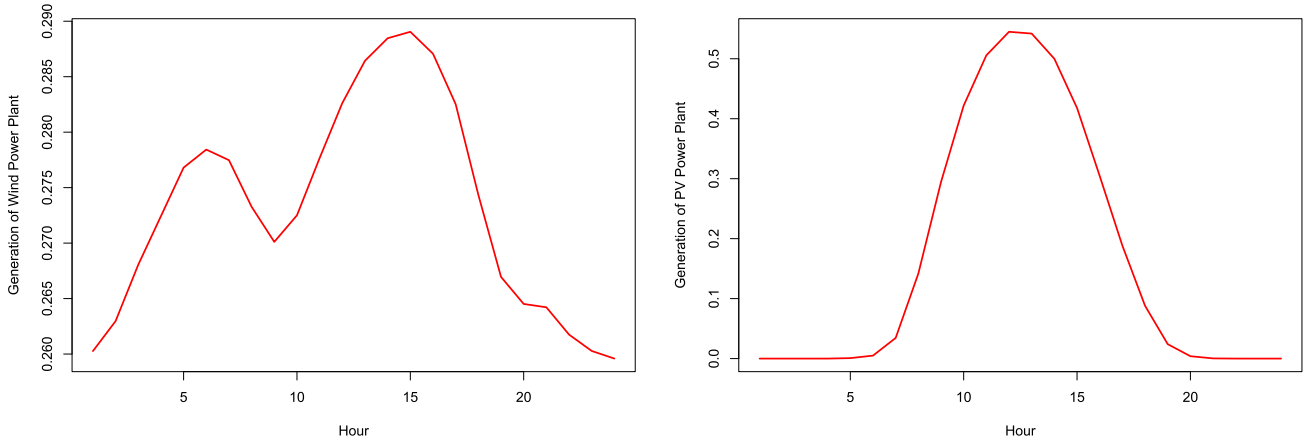
| Ανεμογεννήτριες | Φωτοβολταϊκά |
|---|---|
| -0.5002 | -0.4995 |

Πίνακας 1: Πίνακας τιμών ταχύτητας σύγκλισης για Ανεμογεννήτριες και Φωτοβολταϊκά

σχετίζεται με τον τρόπο που ορίζεται το μέτρο ρίσκου Expected Shortfall και όχι με το 95% διάστημα εμπιστοσύνης. Τέλος, αναφορικά με την ταχύτητα σύγκλισης, εργαστήκαμε ώς εξής: Γνωρίζουμε από τη θεωρία Monte Carlo οτι η ποσότητα $E[e_n^2]^{1/2}$ συγκλίνει στο 0 όπως η $1/\sqrt{n}$. Επομένως θα ισχύει κατα προσέγγιση η σχέση $\frac{E[e_n^2]^{1/2}}{1/\sqrt{n}} = k$ για κάποια σταθερά $k$. Τότε η σχέση αυτή μετατρέπεται στην

$$\log\left(E[e_n^2]^{1/2}\right) = \log k - \frac{1}{2}\log(n)$$

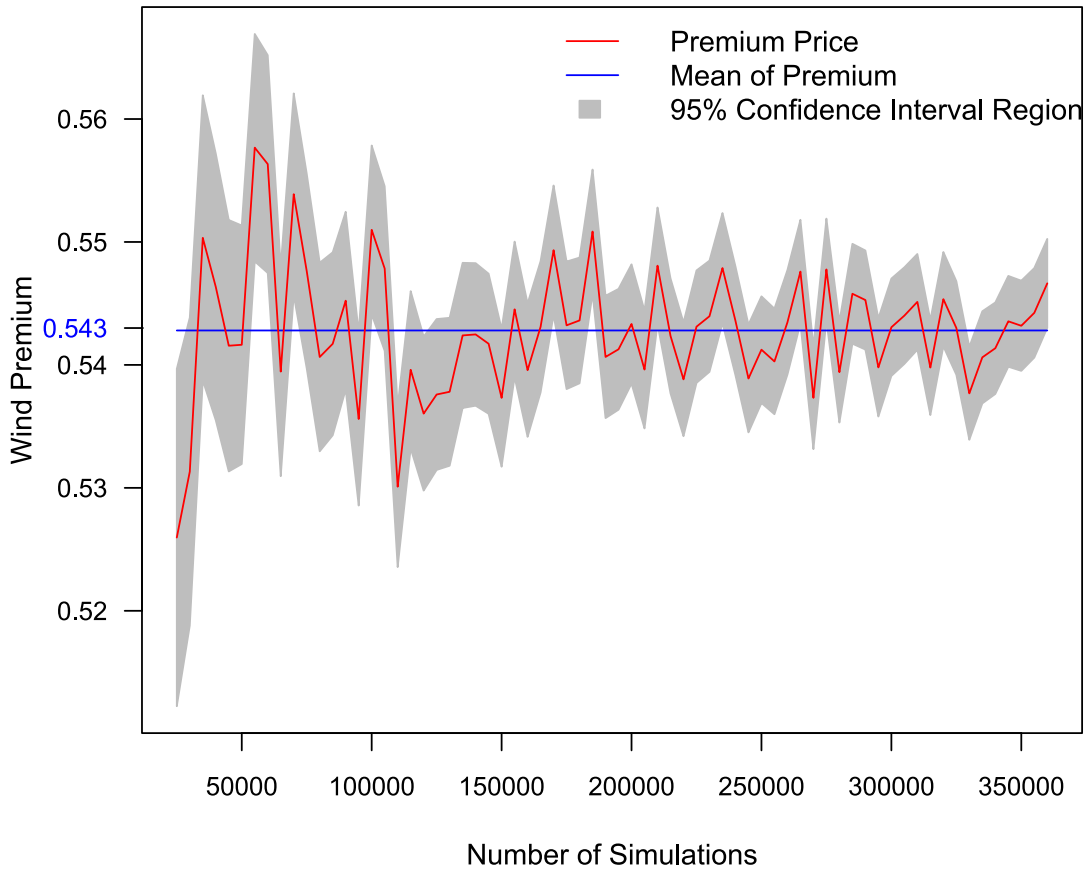
δηλαδή η εικόνα του λογαριθμημένου $RMSE$ συναρτήσει του λογαριθμημένου αριθμού επαναλήψεων είναι μια ευθεία με κλίση $-1/2$. Στις Εικόνες 4.20 και 4.21 βλέπουμε οτι σε λογαριθμική κλίμακα, η κλίση της ευθείας που είναι ουσιαστικά η ταχύτητα σύγκλισης παραμένει σταθερή. Για να παράξουμε τις τιμές της κλίσης των ευθειών που προκύπτουν από τα δεδομένα εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Παίρνοντας την απόλυτη τιμή τους για να έχουμε την ταχύτητα σύγκλισης τιε παρουσιάζουμε στον παρακάτω Πίνακα 1.



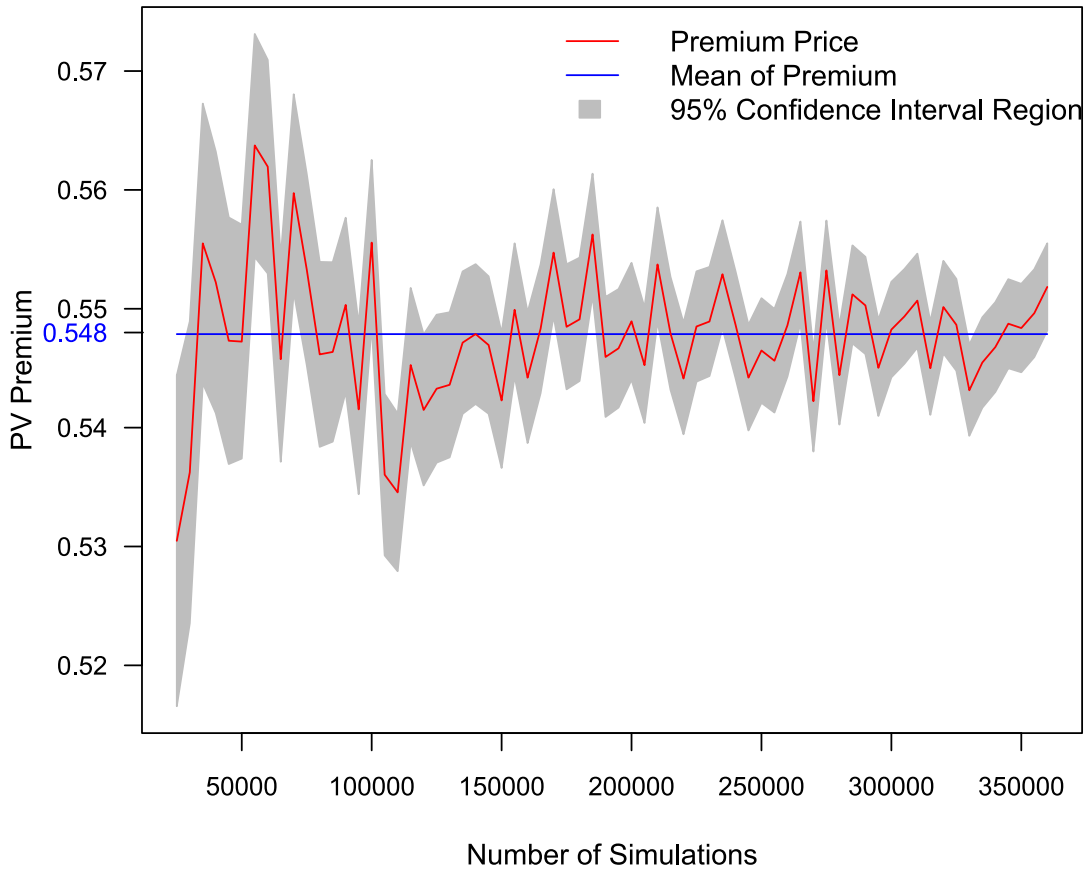

Εικόνα (i) Μέση παραγωγή ανα ώρα σε Ανεμογεννήτριες

Εικόνα (ii) Μέση παραγωγή ανα ώρα σε φωτοβολταϊκά

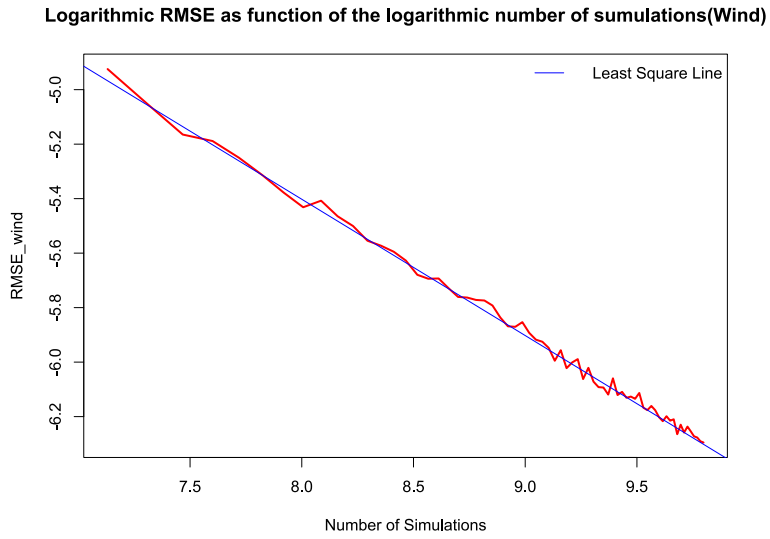
Εικόνα 4.17: Μέση παραγωγή ανα ώρα σε Ανεμογεννήτριες και Φωτοβολταϊκά



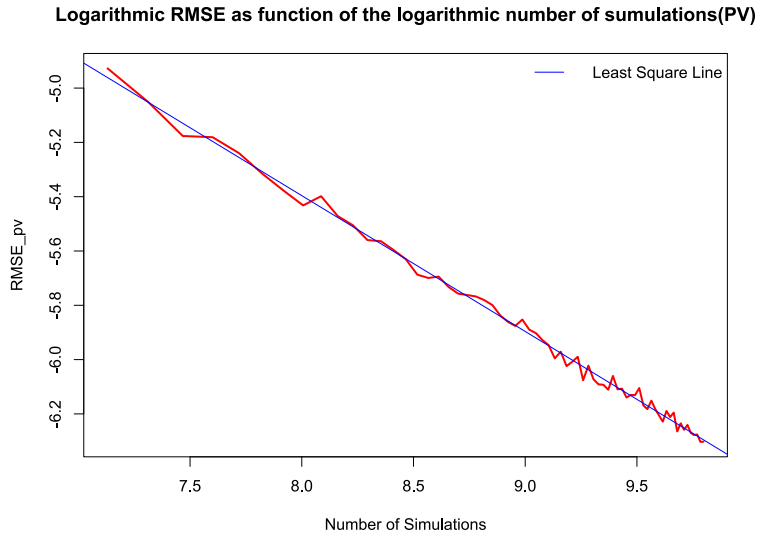

Εικόνα 4.18: Εκτίμηση τιμής Ασφαλίστρου Ανεμογεννητριών




Εικόνα 4.19: Εκτίμηση τιμής Ασφαλίστρου Φωτοβολταϊκών




Εικόνα 4.20: Ταχύτητα Σύγκλισης τιμής Ασφαλίστρου Ανεμογεννητριών




Εικόνα 4.21: Ταχύτητα Σύγκλισης τιμής Ασφαλίστρου Φωτοβολταϊκών

## 4.6 Συμπεράσματα

Όπως αναφέραμε και στην αρχή, η τιμή ασφαλίστρου είναι το ποσό που πρέπει επιπλέον του Strike price να πληρώσει ο αγοραστής ώστε το project να γίνει κερδοφόρο για μια δοθείσα ανοχή στο ρίσκο. Στη σχέση (4.3) φαίνεται η μαθηματική έκφραση αυτού του προβλήματος όπου μπορεί κανείς να δεί οτι πρόκειται πλέον για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, το οποίο με τη σειρά του ανάγεται στην ποσοτικοποίηση του ρίσκου που σχετίζεται με τα έσοδα της μονάδας παραγωγής ΑΠΕ. Η αδυναμία ενός απευθείας τρόπου υπολογισμού της ποσότητας αυτής μας οδήγησε στην προσέγγισή της μέσω προσομοιώσεων. Λαμβάνοντας υπόψιν τώρα την Πρόταση (4.1) μπορούμε με έναν μεγάλο αριθμό προσομοιώσεων να προσεγγίσουμε επαρκώς καλά αυτή την τιμή- πράγμα που μπορεί να φανεί στις Εικόνες 4.18 και 4.19. Συνοψίζοντας λοιπόν όλα τα παραπάνω, η μικρή τιμή ασφαλίστρου μας δείχνει οτι η μέθοδος που αναπτύχθηκε κατάφερε να καλύψει το ρίσκο προφίλ που συνδέει τα συμβόλαια PPA με μια αρκετά ανταγωνιστική για την αγορά τιμή. Σχετικά με τις τιμές ασφαλίστρου, η τιμή ασφαλίστρου για τα φωτοβολταϊκά που προέκυψε 0.548, ελαφρώς υψηλότερο από την αντίστοιχη τιμή ασφαλίστρου για τις ανεμογεννήτριες που είναι 0.543. Η αιτία αποδίδεται στο γεγονός ότι τα φωτοβολταϊκά είναι πιο εκτεθημένα στο ρίσκο προφίλ διότι τις μεσημεριανες ώρες που λειτουργούν με την μεγαλύτερη ισχύ της μέρας, η τιμή της ενέργειας είναι χαμηλότερη απ ότι τις υπόλοιπες ώρες όπως αυτό φάνηκε και στην Εικόνα 4.1ii. Επομένως χρειάζεται μια μεγαλύτερη τιμή ασφαλίστρου για να καλυφθεί αυτή η μορφή ρίσκου.

# Συντομογραφίες

| | |
|---|---|
| Cov | Covariance |
| EAC | Energy Attribute Certificates |
| EM | Expextation Maximization |
| GH | Generalized Hyperbolic |
| GIG | Generalized inverse Gaussian distribution |
| GoO | Guarantee of Origin |
| IPP | Indepedent Power Producer |
| kWh | kilowatt hour |
| MCECM | Multi-Cycle, Expectation, Conditional Maximization |
| MLE | Maximum Likelihood Estimator |
| MSE | Mean Square Error |
| NIG | Normal-inverse Gaussian distribution |
| qm | quadratic mean |
| RMSE | Root Mean Square Error |
| SANN | Solid Angle based Nearest Neighbor |
| SPV | Special Purpose Vehicle |
| Var | Variance |
| VG | Variance Gamma distribution |

# Αναφορές


[1] Bethel Afework, Ethan Boechler, Jordan Hanania, Kailyn Stenhouse, Luisa Vargas Suarez and Jason Donev, "Power plant." https://energyeducation.ca/encyclopedia/Power_plant, 2021. [Online accessed 21-Januar-2022].

[2] Bethel Afework, Ethan Boechler, Jordan Hanania, Kailyn Stenhouse, Luisa Vargas Suarez and Jason Donev, "Power plant." https://energyeducation.ca/encyclopedia/Electrical_grid, 2021. [Online accessed 21-Januar-2022].

[3] Mohamed Badissy, Alex Evans, Nnaemeka Ewelukwa, Jay Govender, Ryan T. Ketchum, Charles Liebenberg, Mohammed Loraoui, Subha Nagarajan and Justin Pavry, *Understanding Power Purchase Agreement*. Commercial Law Development Program, 2nd ed., 2020.

[4] A. Thumann, "Energy project financing: Resources and strategies for success," pp. 93,23–27, 2008.

[5] M. Ciucci, "Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας." https://www.europarl.europa.eu/factsheets/el/sheet/70/renewable-energy, 2021. [Online accessed 21-Januar-2022].

[6] J. Chen, "Renewable energy certificate (rec)." https://www.investopedia.com/terms/r/rec.asp, 2021. [Online accessed 21-Januar-2022].

[7] "Financial ppa." https://www.epa.gov/green-power-markets/financial-ppa. [Online accessed 22-March-2022].

[8] "Physical ppa." https://www.epa.gov/green-power-markets/physical-ppa. [Online accessed 22-March-2022].

[9] H. Föllmer and A. Schied, *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. De Gruyter, 2008.

[10] Alexander J. McNeil and Rüdiger Frey and Paul Embrechts, *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Economics Books, Princeton University Press, 2005.

[11] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas, Second Edition*. Princeton University Press, 2 ed., 2009.

[12] W. Kenton, "Downside risk." https://www.investopedia.com/terms/d/downsiderisk.asp#:~:text=Key%20Takeaways-,Downside%20risk%20is%20an%20estimation%20of%20a%20security's%20potential%20loss,of%20a%20loss%20or%20gain., 2021. [Online accessed 8-March-2022].

[13] Δ. Φουσκάκης Γ. Κοκολάκης, *ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Θεωρία και Εφαρμογές*. 2009.

[14] Θεμιστοκλής Μ. Ρασσιάς, *Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ*. 2014.

[15] S. M. Ross, *First Course in Probability Pearson New International Edition*. Sheldon M. Ross and Pearson, 9ed. ed., 2014.

[16] K. Knight, *Mathematical Statistics*. Chapman and Hall, 2000.

[17] Γιάννης Σαραντόπουλος, *Μια Εισαγωγή στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση*. 2018.

[18] M. Paolella, *Fundamental Probability: A Computational Approach*. Wiley, 1 ed., 2006.

[19] M. S. Paolella, *Intermediate Probability*, ch. 9, pp. 299–340. John Wiley and Sons, Ltd, 2007.

[20] O. Barndorff-Nielsen, "Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae," *Scandinavian Journal of Statistics vol. 5 iss. 3*, vol. 5, 1978.

[21] H. E. Romeijn, *Random Search Methods*, pp. 3245–3251. Boston, MA: Springer US, 2009.

[22] C. J. P. Bélisle, "Convergence theorems for a class of simulated annealing algorithms on rd," *Journal of Applied Probability*, vol. 29, no. 4, pp. 885–895, 1992.

[23] K. Husmann, A. Lange, and E. Spiegel, *The R Package optimization: Flexible Global Optimization with Simulated-Annealing*, 2017.

[24] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin, "Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm," *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 39, no. 1, pp. 1–38, 1977.

[25] X.-L. Meng and D. B. Rubin, "Maximum likelihood estimation via the ecm algorithm: A general framework," *Biometrika*, vol. 80, no. 2, pp. 267–278, 1993.

[26] W. Breymann and D. Lüthi, "ghyp: A package on generalized hyperbolic distributions." https://rdrr.io/rforge/ghyp/f/inst/doc/Generalized_Hyperbolic_Distribution.pdf, 2014. [Online accessed 9-May-2022].

[27] C. Acerbi and D. Tasche, "On the coherence of expected shortfall," *Journal of Banking and Finance*, vol. 26, pp. 1487–1503, 07 2002.

[28] C. Bayer, A. Papapantoleon, and R. Tempone, *Computational Finance*. 2018.

[29] S. T. Račev, *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. Handbooks in Finance 1, Elsevier, 2003.