



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Πιθανοτικές προβλέψεις
παραγωγής ηλιακής ενέργειας με τη
χρήση Στοχαστικών Διαφορικών
Εξισώσεων και εφαρμογές σε
προβλήματα βέλτιστων πολιτικών
συναλλαγής

Διπλωματική Εργασία
του
Κωνσταντίνου Χατζηανδρέου

Επιβλέπων: Αντώνης Παπαπαντολέων
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούνιος 2022

Κωνσταντίνος Χατζηανδρέου
09117405

Copyright © Κωνσταντίνος Χατζηανδρέου, 2022
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η αυξανόμενη διείσδυση των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας και ειδικά της παραγωγής ηλιακής και αιολικής ενέργειας έχει αλλάξει ριζικά την λειτουργία των σύγχρονων δικτύων καθώς και τους τρόπους με τους οποίους γίνεται η διαχείρισή τους. Η έντονη αυτή αύξηση των μονάδων παραγωγής ΑΠΕ έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή της σταθερότητας του δικτύου καθώς η παραγωγή των μονάδων αυτών είναι άμεσα συνδεδεμένη με την αβεβαιότητα και την στοχαστική φύση των καιρικών φαινομένων. Το γεγονός αυτό καθιστά αναγκαία την ύπαρξη μοντέλων για την ακριβή πρόβλεψη της παραγωγής των ΑΠΕ σε βραχυπρόθεσμο ορίζοντα ώστε η μετάβαση από τις συμβατικές μονάδες παραγωγής στις μονάδες ΑΠΕ να είναι ομαλή. Εφόσον όμως η αβεβαιότητα που προκύπτει από τις ανανεώσιμες πηγές ενέργειας είναι μεγάλη τα τελευταία χρόνια έχει γίνει επιτακτική η ανάγκη για χρήση πιθανοτικών μοντέλων που επιτρέπουν ουσιαστικά την κατασκευή συναρτήσεων κατανομής με σκοπό την ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας που προκύπτει από αυτές.

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής είναι η ανάπτυξη μιας data-driven μεθοδολογίας βασιζόμενη στην θεωρία της Στοχαστικής Ανάλυσης και στην χρήση παραμετρικών Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων Ito για την κατασκευή μοντέλων πιθανοτικής πρόβλεψης ηλιακής και αιολικής ενέργειας. Η χρήση των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων για την παραγωγή πιθανοτικών προβλέψεων στον τομέα των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας έχει λάβει μεγάλο ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια και συγκεκριμένα για την αιολική ενέργεια ορισμένες έρευνες είναι οι ακόλουθες [26],[8],[33] ενώ για την κατασκευή πιθανοτικών προβλέψεων για την ηλιακή ακτινοβολία [23],[19],[7].

Στο δεύτερο μέρος της διπλωματικής εργασίας θα παρουσιάσουμε ορισμένες εφαρμογές των πιθανοτικών προβλέψεων σε προβλήματα βέλτιστης στρατηγικής για παραγωγούς ηλιακής αλλά και αιολικής ενέργειας οι οποίοι συμμετέχουν στην Αγορά Επόμενης Ημέρας και πρέπει να πληρώσουν τις αποκλίσεις στην Αγορά Εξισορρόπησης. Το πρόβλημα αυτό αποτελεί ένα σύννηδες πρόβλημα των συμμετεχόντων στις Αγορές Ενέργειας και στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε την δυνατότητα που προσφέρουν οι πιθανοτικές προβλέψεις για την αύξηση των κερδών ενός στοχαστικού παραγωγού σε σύγκριση με στρατηγικές που επικεντρώνονται στην χρήση των σημειακών προβλέψεων. Οι στρατηγικές που αναπτύσσονται αφορούν αγορές Εξισορρόπησης που αποτελούνται από μια τιμή (Single Pricing) καθώς και αγορές με δύο διαφορετικές τιμές (Dual Pricing) οι οποίες είναι στοχαστικές. Στόχος του παραγωγού είναι η μεγιστοποίηση των κερδών του ελαχιστοποιώντας παράλληλα το κόστος ανισορροπίας που μπορεί να προκύψει λόγω αναντιστοιχιών μεταξύ της εμπορεύσιμης και της πραγματικής παραγωγής ενέργειας. Βασικές αναφορές σε αυτό το κομμάτι της διπλωματικής εργασίας είναι [27], [35],[32],[28],[11].

Λέξεις-κλειδιά: Πιθανοτικές Προβλέψεις, Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις, Βέλτιστες Στρατηγικές, Ηλιακή Ενέργεια, Jacobi Diffusions, Inference SDE, CRPS, Model Selection, Single - Pricing, Dual - Pricing, Day-Ahead Markets.

Abstract

The increasing presence of renewable energy sources and especially solar energy production and wind energy has radically changed the operation of modern grids as well as the ways in which they are managed. This sharp increase in the number of plants of renewable energy production has resulted in a change in the stability of the grid as the production of these units is directly linked to the uncertainty and stochasticity of the weather events. This makes it necessary to have models for accurate forecasting of renewable energy production in the short term so that the transition from conventional generation units to renewable energy sources will be smooth and effective. However, since uncertainty arising from renewable energy sources has been high in recent years, it has become imperative to use probabilistic models in order to quantify the uncertainty arising from them.

The aim of this thesis is to develop a data-driven methodology based on the theory of Stochastic Analysis and the use of parametric Stochastic Differential Equations Ito for the construction of probabilistic forecast models for wind and solar energy. The use of Stochastic Differential Equations for the generation of probabilistic predictions in the field of renewable energy has received much interest in recent years and specifically for wind energy some researches are as follows [26],[8],[33] while for the construction of probabilistic forecasts for solar irradiance and power [23],[19],[7].

In the second part of the thesis some applications of probabilistic forecasting will be presented, regarding the generation of optimal strategies for solar power producers and wind energy producers who participate in the Day-Ahead Market and have to pay their deviations in a Balancing Market. This is a common problem for participants in the Energy Market and our objective is to present the potential of probabilistic forecasting and how they can be used in order to increase the profits of the participants compared to benchmark methods, such as participation using only a point forecast of the total production. The strategies developed involve Balancing markets consisting of one price (Single Pricing scheme) as well as markets with two different prices (Dual Pricing scheme), which are stochastic. Key references in this part of the thesis are [27], [35],[32],[28] [11].

Keywords: Probabilistic Forecasting, Stochastic Differential Equations, Optimal Strategies, Solar power production, Jacobi Diffusions, Inference SDE, CRPS, Model Selection, Uncertainty Quantification.

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Α. Παπαπαντολέων ο οποίος με την συνεχή και πολύτιμη καθοδήγηση του με βοήθησε στην εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας. Η ευκαιρία που μου έδωσε να εργαστώ και να μελετήσω τον κλάδο των Αγορών Ενέργειας και παράλληλα να εφαρμόσω τις γνώσεις που έχω αποκτήσει από την Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών μου έδωσαν μια πιο ξεκάθαρη εικόνα για τους τομείς που θα ήθελα να εργαστώ μελλοντικά. Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Α. Σαπλαούρα ο οποίος μέσω των συζητήσεων που είχαμε καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης της Διπλωματικής μου Εργασίας, με βοήθησε στο να κατανοήσω καλύτερα και να βελτιώσω την παρούσα εργασία.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους της Joule S.A οι οποίοι με την τεχνογνωσία τους στον κλάδο των Αγορών Ενέργειας υποστήριξαν την υλοποίηση της Διπλωματικής μου Εργασίας και μου έδωσαν πρόσβαση στο χαρτοφυλάκιο ενέργειας που διαχειρίζονται.

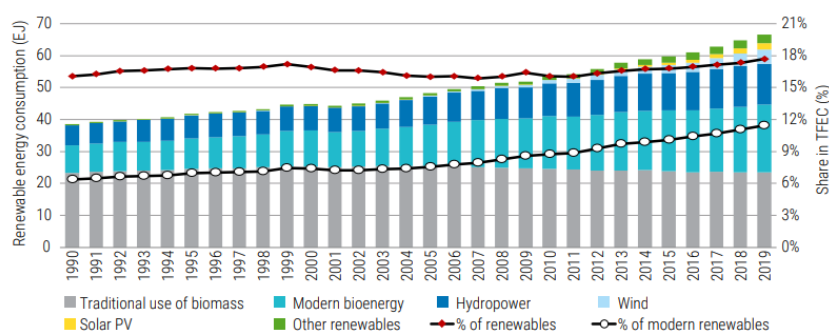
Τέλος θα ήθελα να εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, κύριο Μ. Λουλάκη και κύριο Δ. Φουσκάκη, οι οποίοι αφιέρωσαν χρόνο για να μελετήσουν και να παρακολουθήσουν την διπλωματική μου εργασία.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	7
1.1	Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	10
2	Βασικές Έννοιες Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στοχαστικής Ανάλυσης	15
2.1	Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων	15
2.2	Στοχαστικό Ολοκλήρωμα και Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις	21
2.3	Συναρτήσεις Κατανομής και Στατιστικά ΣΔΕ	28
2.4	Αριθμητικές Λύσεις Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων	30
2.5	Στατιστική Συμπερασματολογία και Εκτίμηση Παραμέτρων ΣΔΕ	36
2.5.1	Προσέγγισεις Gauss	37
2.6	Οικογένεια Διαχύσεων Pearson	40
3	Μοντέλα Πιθανοτικών Προβλέψεων με την χρήση ΣΔΕ	42
3.1	ΣΔΕ 1 - Without Derivative Tracking	43
3.1.1	Στατιστική Συμπερασματολογία - Εκτίμηση Παραμέτρων	50
3.2	ΣΔΕ 2 : With Derivative Tracking	53
3.2.1	Στατιστική Συμπερασματολογία - Εκτίμηση Παραμέτρων	60
3.3	Αξιολόγηση Μοντέλων και Μετρικές για Πιθανοτικά Μοντέλα Προβλέψεων . .	65
4	Εφαρμογές Πιθανοτικών Προβλέψεων σε Πραγματικά δεδομένα	69
4.1	Βαθμολόγηση ΣΔΕ 1: No Derivative Tracking Model	71
4.2	Βαθμολόγηση ΣΔΕ 2: Derivative Tracking Model	72
4.3	Κατασκευή Πιθανοτικών Προβλέψεων	74
4.3.1	Αξιολόγηση Μοντέλων	78
5	Ανάπτυξη Βέλτιστων Στρατηγικών Συμμετοχής για Χαρτοφυλάκιο Ενέργειας	80
5.1	Ελληνικές Αγορές Ενέργειας	80
5.2	Παρουσίαση Προβλήματος Βελτιστοποίησης	87
5.3	Single Pricing Αγορές - Βέλτιστες Στρατηγικές	88
5.4	Dual Pricing Αγορές - Βέλτιστες Στρατηγικές	99
5.4.1	Δεδομένα και Παρουσίαση Dual Pricing Στρατηγικής	104

1 Εισαγωγή

Οι συμβατικές μονάδες παραγωγής ενέργειας όπως τα ορυκτά καύσιμα και η χρήση φυσικού αερίου είναι άμεσα συνδεδεμένες με την κλιματική αλλαγή. Όσο λοιπόν αυξάνεται η χρήση των πηγών αυτών τόσο πιο αισθητή γίνεται η ανάγκη για την χρήση εναλλακτικών πηγών παραγωγής ενέργειας. Η Αιολική και ηλιακή ενέργεια καθώς και η υδροηλεκτρική ενέργεια αποτελεί πλέον μια από τις σημαντικότερες πηγές ενέργειας της σύγχρονης Ευρώπης καθώς η αύξηση της παραγωγής την τελευταία δεκαετία είναι αισθητή. Συγκεκριμένα το 2015 η χρήση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας αποτελούσε το 30% της συνολικής παραγόμενης ενέργειας ποσοστό που έφτασε το 40% της συνολικής παραγωγής το 2020, καθώς η παραγωγή από πηγές άνθρακα μειώθηκαν κατά 50%. Ομοίως, στο Ηνωμένο Βασίλειο, οι ανανεώσιμες πηγές ενέργειας αυξήθηκαν στο 42% της παραγωγής και έγιναν η κύρια πηγή ηλεκτρικής ενέργειας το 2020, ξεπερνώντας το ορυκτό αέριο και τον άνθρακα με συνολικό ποσοστό 41%. Στις Ηνωμένες Πολιτείες, οι ανανεώσιμες πηγές ενέργειας έφτασαν σχεδόν το 20% της καθαρής παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας μέχρι το τέλος του έτους, με την ηλιακή και την αιολική ενέργεια να αντιπροσωπεύουν περισσότερο από το ήμισυ αυτού. Εν το μεταξύ, το μερίδιο του άνθρακα μειώθηκε από περίπου 24% το 2019 σε λιγότερο από 20% το 2020. Περισσότερο από το 19% της ηλεκτρικής ενέργειας της Αυστραλίας προήλθε από αιολική και ηλιακή ενέργεια το 2020 και, συνολικά, οι ανανεώσιμες πηγές ενέργειας αντιπροσώπευαν σχεδόν το 28% της παραγωγή της χώρας, από 24% το 2019. Στην Κίνα, η ηλεκτρική ενέργεια από υδροηλεκτρική ενέργεια, ηλιακή ενέργεια και η αιολική ενέργεια παρείχαν πάνω από το 27% της παραγωγής, από περίπου 26% το 2019. Το μερίδιο της ηλεκτρικής ενέργειας που παράγεται από μεταβλητή ανανεώσιμη ηλεκτρική ενέργεια (αιολική ενέργεια και ηλιακή φωτοβολταϊκή ενέργεια) συνέχισε να αυξάνεται σε αρκετές χώρες σε όλο τον κόσμο. Ενώ οι μεταβλητές ανανεώσιμες πηγές ενέργειας συνεισέφεραν περισσότερο από το 9% της παγκόσμιας ηλεκτρικής ενέργειας το 2020, σε ορισμένες χώρες κάλυψαν πολύ υψηλότερο μερίδιο της παραγωγής, μεταξύ άλλων στη Δανία (63%), την Ουρουγουάη (43%), την Ιρλανδία (38%), τη Γερμανία (33%), την Ελλάδα (32%), την Ισπανία (28%), το Ηνωμένο Βασίλειο (28%), την Πορτογαλία (27%) και την Αυστραλία (20%).



(α') TRACKING SDG 7: The Energy Progress Report 2022

Η οικονομικά αποδοτική ενσωμάτωση της μεταβλητής ηλεκτρικής ενέργειας από ανανεώσιμες πηγές έχει ωθήσει τη βιομηχανία και τις κυβερνήσεις να καταβάλουν προσπάθειες για την αύξηση της ευελιξίας των ενεργειακών τεχνολογιών τους και συστημάτων. Ορισμένες χώρες επέκτειναν ή εκσυγχρόνισαν τις υποδομές μεταφοράς ειδικά για να προσαρμόσουν τα συστήματά τους στα αυξανόμενα μερίδια των μεταβλητών ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Οι κατασκευαστές ανεμογεννητριών και ηλιακών φωτοβολταϊκών μονάδων εργάζονται για να καταστήσουν

τις τεχνολογίες τους πιο ευέλικτες, ώστε να παρέχουν υπηρεσίες στο δίκτυο, καθώς και να διευκολύνουν καλύτερα τη δική τους ενσωμάτωση στην ενέργεια. Οι κυβερνήσεις έχουν θεσπίσει πολιτικές για τη στήριξη μέτρων ευελιξίας της ζήτησης. Όπως η τιμολόγηση του χρόνου χρήσης, οι πληρωμές κινήτρων και οι κυρώσεις για να επηρεάσουν τη χρήση της ηλεκτρικής ενέργειας των καταναλωτών.

Τα κράτη μέλη της ΕΕ συμφώνησαν σε ένα νέο στόχο της ΕΕ για τις ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, ο οποίος θα ανέρχεται σε τουλάχιστον 27% έως το 2030. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι ανανεώσιμες πηγές ενέργειας αποτελούν απαραίτητο κομμάτι για την λειτουργία των δικτύου ενέργειας και είναι απαραίτητη η ομαλή ένταξη σε αυτό.

Μια όμως από τις βασικότερες προκλήσεις των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας είναι η ομαλή ενσωμάτωση τους στο δίκτυο ενέργειας. Στην περίπτωση της παραγωγής ενέργειας μέσω ηλιακών πάνελ η αβεβαιότητα της παραγωγής είναι αισθητά συνδεδεμένη με τα καιρικά φαινόμενα όπως για παράδειγμα το ενδεχόμενο ύπαρξης συννέφων τα οποία επηρεάζουν την βέλτιστη παραγωγή καθώς και την δυνατότητα παραγωγής προβλέψεων με χαμηλό σφάλμα. Αυτή η αβεβαιότητα λοιπόν δημιουργεί πρόβλημα στους διαχειριστές του δικτύου καθώς δεν μπορούν με ευκολία να ποσοτικοποιήσουν την αβεβαιότητα των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Η προαναφερθείσα φύση των ΑΠΕ λοιπόν σε συνδυασμό με την έλλειψη τεχνολογίας αποθήκευσης ενέργειας οδηγεί τις συμβατικές μονάδες παραγωγής να λειτουργούν διακοπτόμενα για να αντιμετωπίσουν τις συχνές ανισορροπίες στο δίκτυο μεταφοράς.

1.1 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η χρήση προβλέψεων για την επόμενη ημέρα παραγωγής είναι ύψιστης σημασίας και για τους διαχειριστές του συστήματος καθώς και για τις μονάδες ΑΠΕ (ΦοΣΕ) οι οποίοι με την σειρά τους συμμετέχουν στις Αγορές Ενέργειας όπου σε μια σειρά δημοπρασιών προσφέρουν την εκτιμώμενη ενέργεια παραγωγής τους. Σχετικά με τα είδη των μοντέλων πρόβλεψης θα τα διαχωρίσουμε σε δύο βασικές κατηγορίες, τις Σημειακές Προβλέψεις (ντετερμινιστικές) και τις Πιθανοτικές προβλέψεις. Το μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας για την παραγωγή προβλέψεων της ηλιακής ενέργειας καθώς και της ηλιακής ακτινοβολίας έχει επικεντρωθεί στις σημειακές προβλέψεις.

Ωστόσο, ένα μοντέλο σημειακής πρόβλεψης περιέχει έντονη αβεβαιότητα και στις περιπτώσεις όπου η χρήση του αποσκοπεί σε λήψεις αποφάσεων, είτε για την λειτουργία του συστήματος από τους διαχειριστές είτε για την συμμετοχή στις Αγορές ενέργειας, η χρήση πιθανοτικών μοντέλων μπορεί να αποδειχθεί σημαντική. Οι πιθανοτικές προβλέψεις μπορούν να παράξουν μια κατανομή γύρω από τις σημειακές προβλέψεις, και μπορούν να παρουσιαστούν είτε ως ιστογράμματα είτε ως συναρτήσεις κατανομής της στοχαστικής ποσότητας υπό μελέτη. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να βρεθεί μια συστηματική μέθοδος για την ανίχνευση ακραίων σεναρίων. Για να το θέσουμε διαφορετικά, οι αξιόπιστες πιθανοτικές προβλέψεις μπορούν να συμβάλουν σε μια αποτελεσματικότερη ενσωμάτωση των διαλείπουσών πηγών στο ενεργειακό δίκτυο [27].

Τα τελευταία χρόνια, έχει αναπτυχθεί ένας μεγάλος αριθμός τεχνικών πρόβλεψης της ηλιακής παραγωγής ενέργειας ο οποίος έχει παρουσιαστεί εκτενώς στη βιβλιογραφία. Σε γενικές γραμμές, η ποσοτική σύγκριση μεταξύ των διαφόρων τεχνικών πρόβλεψης αποτελεί πρόκληση, καθώς οι παράγοντες που επηρεάζουν την απόδοση είναι πολυάριθμοι: τα ιστορικά δεδομένα, τα καιρικά φαινόμενα, ο χρονικός ορίζοντας καθώς και οι συνθήκες εγκατάστασης. Μια πρόσφατη ανασκόπηση [30] παρουσιάζει μια συγκριτική ανάλυση προηγούμενων εργασιών, συμπεριλαμβάνοντας στατιστικά σφάλματα των μεθόδων. Επιπλέον στο [13] παρουσιάζονται σχετικές μετρικές αξιολόγησης για την ακρίβεια πρόβλεψης της ηλιακής παραγωγής. Όσον αφορά τον ορίζοντα πρόβλεψης για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας μέσω ηλιακής ακτινοβολίας, η ενδοημερήσια και η 24ωρη της επόμενης ημέρας [25] θεωρούνται οι πιο σημαντικές.

Σχετικά με τις σημειακές προβλέψεις της ηλιακής παραγωγής και της ηλιακής ακτινοβολίας, τα NWP (Numerical Weather Prediction) (Αριθμητικές προβλέψεις καιρού) χρησιμοποιούνται για την παραγωγή προβλέψεων σε χρονικό ορίζοντα επόμενης ημέρας τα οποία είναι διαθέσιμα από παρόχους μετεωρολογικών προβλέψεων. Στα περισσότερα μοντέλα NWP συνήθως εφαρμόζεται και μια μέθοδος post-processing γνωστή ως MOS (Model Output Statistic). Η MOS είναι μια τεχνική μετα-επεξεργασίας που χρησιμοποιείται για την εμπειρική ερμηνεία των εξόδων ενός αριθμητικού μοντέλου και την παραγωγή προβλέψεων για συγκεκριμένες τοποθεσίες. Επιπλέον στατιστικές μέθοδοι μάθησης χρησιμοποιούνται συχνά για τη διόρθωση σφαλμάτων στις εξόδους των μοντέλων αυτών. Βλέπουμε λοιπόν ότι ενώ τα σημειακά μοντέλα πρόβλεψης έχουν λάβει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον τα μοντέλα για πιθανοτικές προβλέψεις βρίσκονται ακόμη σε πρώιμο στάδιο.

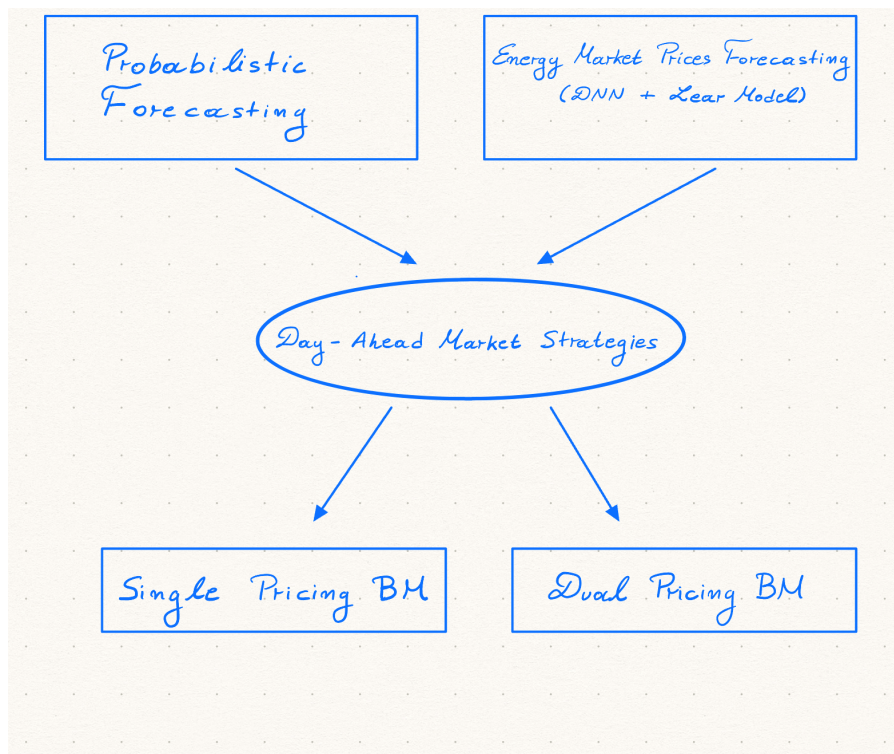
Διάφορες μεθοδολογίες για τη δημιουργία πιθανοτικών προβλέψεων ηλιακής ενέργειας έχουν έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία. Για παράδειγμα, οι προσεγγίσεις Nearest Neighbor [34], Προβλέψεις εκατοστημορίων (Quantile Forecasts) [23], διανυσματικά αυτοπαλινδρομικά μοντέλα (VAR) [6], μέθοδοι εκτίμησης της μεταβλητότητας (volatility models) [9], και μοντέλα συνό-

λου (ensemble models) [5]. Επιπλέον, πιθανοτικές μεθόδους για την ηλιακή ενέργεια πρόβλεψης με χρήση τεχνικών βαθιάς μάθησης μπορούν επίσης να βρεθούν στη βιβλιογραφία [15]. Ωστόσο, παρόλο που οι μεθοδολογίες βαθιάς μάθησης έχουν κερδίσει σε δημοτικότητα τα τελευταία χρόνια, συχνά υποαποδίδουν σε όρους ακρίβειας σε σύγκριση με άλλες στατιστικές τεχνικές πρόβλεψης.

Οι Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις (SDE) έχουν προταθεί για την μοντελοποίηση της δυναμικής εξέλιξης των πιθανοτικών μοντέλων από διάφορους συγγραφείς, βλ. [26], [12], [8] στο πλαίσιο της ταχύτητας του ανέμου και της αιολικής παραγωγής ενέργειας και [7], [19] στο πλαίσιο της πρόβλεψης της ηλιακής ενέργειας και ακτινοβολίας. Σε αυτές τις προσεγγίσεις, το προβλεπόμενο στοχαστικό μέγεθος (π.χ. η ηλιακή ακτινοβολία) μοντελοποιείται απευθείας από μια στοχαστική διαφορική εξίσωση, από την οποία προκύπτουν οι πιθανοτικές προβλέψεις και δίνεται η δυνατότητα να μοντελοποιηθεί η δυναμική του εν λόγω συστήματος σε κλειστή μορφή. Γνώση που προέρχεται από άλλες ντετερμινιστικές προβλέψεις (π.χ η χρήση NWP) μπορούν να ενσωματωθούν σε αυτά τα μοντέλα. Όπως εξηγείται στο [19], τα μοντέλα SDE έχουν πολλά πλεονεκτήματα: μπορούμε να ενσωματώσουμε περιορισμούς στο μοντέλο όπως boundedness properties, οι οποίες είναι απαραίτητες για τη σωστή μοντελοποίηση της ηλιακής ακτινοβολίας καθώς και οι SDE είναι πιο γενικές μεθόδους από άλλα κλασικά μοντέλα χρονοσειρών, όπως οι διαδικασίες ARIMA. Εκτός αυτού, η έξοδος των μοντέλων SDE μπορεί να είναι τόσο μια σημειακή πρόβλεψη, μέσω της προσομοίωσης μιας τροχιάς, με χρήση αριθμητικών μεθόδων για ΣΔΕ, όσο και μια πιθανοτική πρόβλεψη. Πράγματι, με την προσομοίωση πολλαπλών ανεξάρτητων Μαρκοβιανών Διαδικασιών, είναι δυνατόν να συναχθεί η πλήρης εμπειρική κατανομή της στοχαστικής διαδικασίας, όπου στην συνέχεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα βελτίστου ελέγχου, όπως αυτό που θα μελετήσουμε στην [Ενότητα 5](#).

Η υπόλοιπη εργασία οργανώνεται ως εξής. Στην [Ενότητα 2](#), παρουσιάζουμε το θεωρητικό πλαίσιο της Στοχαστικής Ανάλυσης καθώς και τις βασικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων για την κατανόηση της παρούσας εργασίας [3]. Επιπλέον γίνεται μια αναλυτική αναφορά στις μεθόδους εκτίμησης των παραμέτρων μιας ΣΔΕ (inference/ parameter estimation problem). Στην συνέχεια στην [Ενότητα 3](#) προτείνουμε δύο διαφορετικά μοντέλα για την μοντελοποίηση της δυναμικής των σημειακών προβλέψεων $\{p_t, t \in [0, T]\}$ με την χρήση δύο διαφορετικών ΣΔΕ. Συγκεκριμένα τα μοντέλα που εφαρμόζουμε ανήκουν στην οικογένεια διαχύσεων Pearson (Jacobi type diffusions) με χρονοεξαρτώμενους συντελεστές τάσης. Το πρώτο μοντέλο που μελετήθηκε περιέχει μόνο την mean-reverting ιδιότητα στο συντελεστή τάση ενώ σε αντίθετη περίπτωση το δεύτερο μοντέλο που μελετήθηκε ενσωματώνει την παράγωγο της διαθέσιμης πρόβλεψης στο μοντέλο με σκοπό τα διαστήματα εμπιστοσύνης της πιθανοτικής πρόβλεψης να είναι κεντραρισμένα γύρω από αυτήν την σημειακή πρόβλεψη (centering property). Επιπλέον παρουσιάζουμε και τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν σε καθένα από τα δύο μοντέλα για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων του μοντέλου. Στην [Ενότητα 4](#) παρουσιάζονται τα δεδομένα ηλιακής παραγωγής ενέργειας, σημειακή πρόβλεψη καθώς και την πραγματική παραγωγή, τα οποία μας παρείχε η Joule S.A, εταιρεία ΦοΣΕ που συμμετέχει στο Ελληνικό Χρηματιστήριο Ενέργειας. Τα δεδομένα αναφέρονται στην συνολική παραγωγή ισχύος, όπου συνολικά περιέχονται 52 πάρκα σε όλη την Ελλάδα και η συνολική παραγωγή των πάρκων αυτών αποτελεί και το Χαρτοφυλάκιο της εταιρείας για την συμμετοχή τους στις Ελληνικές Αγορές Ενέργειας. Τα δύο μοντέλα που κατασκευάστηκαν εκπαιδεύτηκαν πάνω στα δεδομένα αυτά για την περίοδο 6 μηνών, και αξιολογήθηκαν χρησιμοποιώντας στατιστικές μετρικές (model selection) καθώς

και μετρικές αξιολόγησης πιθανοτικών μοντέλων πρόβλεψης. Τέλος στο τελευταίο μέρος της εργασίας **Ενότητα 5** παρουσιάζονται τα προβλήματα στρατηγικής για έναν παραγωγό ενέργειας (ΑΠΕ) όπου στην συγκεκριμένη περίπτωση αναφερόμαστε στο Χαρτοφυλάκιο της Joule S.A και σκοπός είναι να βρεθούν στρατηγικές βέλτιστης εκπροσώπησης στην Αγορά Επόμενης Ημέρας του Ελληνικού Χρηματιστηρίου Ενέργειας και να ερευνηθεί η χρήση των πιθανοτικών μοντέλων σε αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης. Παρόμοιες προσεγγίσεις όπου χρησιμοποιήθηκαν πιθανοτικά μοντέλα για διαδικασίες λήψης αποφάσεων σε προβλήματα αιολικής εμπορίας ενέργειας σε Αγορές Επόμενης Ημέρας έχουν μελετηθεί [27],[28],[35],[11],[32].



(α') Σκιαγράφηση εργασίας

2 Βασικές Έννοιες Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στοχαστικής Ανάλυσης

Στο παρόν κεφάλαιο παρατίθενται απαραίτητες μαθηματικές έννοιες για την κατανόηση της μετέπειτα ανάλυσης. Συγκεκριμένα στο πρώτο μέρος θα αναφερθούμε στις βασικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων και στην συνέχεια θα επεκταθούμε σε ορισμένες έννοιες της Στοχαστικής ανάλυσης και των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, όπως θέματα ύπαρξης και μοναδικότητας καθώς και σε προβλήματα εκτίμησης των παραμέτρων μια ΣΔΕ. Επιπλέον θα γίνει αναφορά στις μεθόδους αριθμητικής λύσης μιας ΣΔΕ οι οποίες είναι βασικής σημασίας για την προσομοίωση και κατασκευή των πιθανοτικών προβλέψεων που θα παρουσιάσουμε στην Ενότητα 4. Η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνει τα [3],[4],[31],[21].

2.1 Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Ορισμός 2.1.1. (σ - Άλγεβρα)

Έστω ένα μη κενό σύνολο. Μια σ -Άλγεβρα \mathbb{F} στο Ω είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω με τις εξής ιδιότητες:

- (i) Το κενό σύνολο \emptyset είναι στοιχείο της \mathbb{F} ,
- (ii) Εάν $A \in \mathbb{F}$ τότε και $A^c \in \mathbb{F}$,
- (iii) Εάν $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στοιχείων της \mathbb{F} τότε η σ - Άλγεβρα είναι κλειστή ως προς την ένωση, δηλαδή $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathbb{F}$.

Τα στοιχεία της \mathbb{F} ονομάζονται ενδεχόμενα ή \mathbb{F} - μετρήσιμα σύννοα. Ένα ενδεχόμενο A μπορεί να ιδωθεί ως υποσύνολο του Ω ή ως στοιχείο της \mathbb{F} . Το ζεύγος (Ω, \mathbb{F}) ονομάζεται μετρήσιμος χώρος.

Ορισμός 2.1.2. (Μέτρο Πιθανότητας)

Ένα μέτρο πιθανότητας $P : \mathbb{F} \rightarrow [0, 1]$ είναι μια συνολο συνάρτηση τέτοια ώστε

- (i) $P(\Omega) = 1$
- (ii) Ίκανοποιεί την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας, δηλαδή αν A_1, A_2, \dots είναι ανά δύο ξένα στοιχεία της \mathbb{F} τότε

$$P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

Η τριπλέτα (Ω, \mathbb{F}, P) καλείται χώρος πιθανότητας και για ένα $A \in \mathbb{F}$ η $P(A)$ εκφράζει την πιθανότητα του ενδεχομένου A κάτω από το μέτρο P .

Ορισμός 2.1.3. (Ιδιότητες Μέτρου Πιθανότητας)

Έστω (Ω, \mathbb{F}, P) χώρος πιθανότητας. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

- (i) $P(\emptyset) = 0$
- (ii) $P(A^c) = 1 - P(A) \forall A \in \mathbb{F}$
- (iii) $0 \leq P(A) \leq 1 \forall A \in \mathbb{F}$

$$(iv) P(A) = P(A) - P(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathbb{F}$$

$$(v) \text{ Αν } A, B \in \mathbb{F} \text{ με } A \subset B \text{ τότε } P(A) \leq P(B)$$

$$(vi) \text{ Αν } A, B \in \mathbb{F} \text{ τότε } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ορισμός 2.1.4. (Borel σ Άλγεβρα)

Θα συμβολίζουμε με $B(\mathbb{R})$ την οικογένεια των Borel υποσυνόλων του \mathbb{R} , η οποία είναι η σ -άλγεβρα που παράγεται από τα ανοιχτά διαστήματα στο \mathbb{R} .

Ορισμός 2.1.5. (Τυχαία Μεταβλητή)

Εάν (Ω, \mathbb{F}, P) είναι ένας χώρος πιθανότητας, τυχαία μεταβλητή είναι μια \mathbb{F} -μετρήσιμη συνάρτηση $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, δηλαδή για κάθε $B \in B(\mathbb{R})$ έχουμε ότι $\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathbb{F}$.

Ορισμός 2.1.6. (Κατανομή Τυχαίας μεταβλητής)

Κάθε τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ επάγει ένα μέτρο πιθανότητας

$$P^X(B) = P(\{X \in B\})$$

στο \mathbb{R} για κάθε $B \in B(\mathbb{R})$, το οποίο λέγεται κατανομή ή νόμος της X . Η συνάρτηση $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ με

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

ονομάζεται συνάρτηση κατανομής της X (cumulative distribution function). Οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης αυτής είναι:

- (i) Η F είναι αύξουσα.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- (iii) Η F είναι δεξιά συνεχής
- (iv) Αν $F(x-) = \lim_{y \uparrow x} F(y)$ τότε $F(x-) = P(X < x)$
- (v) $P(X = x) = F(x) - F(x-)$

Ορισμός 2.1.7. (Μέση Τιμή, Διασπορά και συνδιακύμανση (διάνυσμα $\tau.\mu$))

Έστω (Ω, \mathbb{F}, P) ένας χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή, τότε:

- (i) Το ολοκλήρωμα της X ως προς το μέτρο P ονομάζεται μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή της X και ορίζεται ως

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP$$

- (ii) Αν επιπλέον ισχύει ότι $X \in L^2(\Omega, \mathbb{F}, P)$ η διασπορά της X ορίζεται ως

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

- (iii) Αν θεωρήσουμε τώρα δύο $\tau.\mu$ $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbb{F}, P)$ και η μέση τιμή $E[XY]$ ορίζεται δηλαδή η $\tau.\mu$ $XY \in L^1(\Omega, \mathbb{F}, P)$ τότε η συνδιακύμανση των X, Y

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

Ορισμός 2.1.8. (Δεσμευμένη Μέση Τιμή)

Για $X : \Omega \rightarrow R$, τ.μ στον (Ω, \mathbb{F}, P) με $E|X| < \infty$, δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς τη σ -άλγεβρα \mathbb{G} ονομάζουμε οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή $Y : \Omega \rightarrow R$ με τις εξής ιδιότητες:

- (i) Η Y είναι \mathbb{G} -μετρήσιμη
- (ii) Ισχύει ότι

$$\int_A X dP = \int_A Y dP$$

Διαισθητικά η δεσμευμένη μέση τιμή $E(X|\mathbb{G})(\omega)$ δίνει την καλύτερη εκτίμηση για το $X(\omega)$ δεδομένης της πληροφορίας που δίνει η σ -άλγεβρα \mathbb{G} για το ω .

Λήμμα 2.1.1. Βασικές Ιδιότητες Δεσμευμένης μέσης τιμής

Έστω $X \in L^1(\Omega, \mathbb{F}, P)$ και $\mathbb{G} \subset \mathbb{F}$ σ -άλγεβρες. Ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $E(E(X|\mathbb{G})) = E(X)$
- (ii) Αν η X είναι \mathbb{G} -μετρήσιμη τότε $E(X|\mathbb{G}) = X$.

Λήμμα 2.1.2.

Έστω $\alpha, \beta \in R$ και $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbb{F}, P)$ με $X, Y \geq 0$ και $\mathbb{G} \subset \mathbb{F}$ σ -άλγεβρες. Τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) $E[X|\mathbb{G}] \geq 0$ (ιδιότητα μονοτονίας).
- (ii) $E[\alpha X + \beta Y|\mathbb{G}] = \alpha E[X|\mathbb{G}] + \beta E[Y|\mathbb{G}]$ (ιδιότητα γραμμικότητας).

Στοχαστικές Διαδικασίες

Ορισμός 2.1.9. (Διύλιση)

Μια αύξουσα ακολουθία $\{\mathbb{F}_n : n \geq 0\}$ από σ -άλγεβρες σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, \mathbb{F}, P) λέγεται Διύλιση στον (Ω, \mathbb{F}, P) . Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \geq 0\}$ θα λέγεται προσαρμοσμένη στην $\{\mathbb{F}_n : n \geq 0\}$ αν για κάθε n , η τυχαία μεταβλητή X_n είναι \mathbb{F}_n μετρήσιμη.

Ορισμός 2.1.10. (Martingale διακριτού χρόνου)

Αν η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X = (X_n)_{n \geq 0}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες

- (i) Η $(X_n)_{n \geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathbb{F})_{n \geq 0}$
- (ii) $E[|X_n|] < \infty \quad \forall n \geq 0$
- (iii) $E(X_{n+1}|\mathbb{F}_n) = X_n \quad \forall n \geq 0$.

τότε λέγεται Martingale ως προς την \mathbb{F}_n και το μέτρο P .

Ορισμός 2.1.11. (Στοχαστική Διαδικασία σε συνεχή χρόνο)

Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X(t)$ οι οποίες είναι παραμετροποιημένες ως προς $t \in T$, όπου το $T \subset R$ καλείται χώρος καταστάσεων. Ο δείκτης t συνήθως αντιπροσωπεύει τον χρόνο και μπορούμε να σκεφτούμε την $X(t)$ ως την κατάσταση της διαδικασίας στο χρόνο t . Στην περίπτωση όπου $T = \{1, 2, \dots\}$ θα αποκαλούμε την X_t ως μια

διαδικασία διακριτού χρόνου, ενώ αν T είναι μη μετρήσιμο σύνολο (π.χ $T = [0, \infty)$) η διαδικασία είναι συνεχούς χρόνου. Συνεπώς για τυχόν αλλά δοσμένο $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση

$$t \mapsto X_t(\omega) \in R^m$$

ονομάζεται μια τροχία ή πραγματοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_t \in T\}$. Συγκεκριμένα

- (i) Για κάθε σταθεροποιημένο t η $X(t, \cdot)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή.
- (ii) Για κάθε σταθεροποιημένο ω η $X(\cdot, \omega)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση (τροχία της στοχαστικής διαδικασίας).

Ορισμός 2.1.12. (Συνεχές Martingale)

Η \mathbb{F}_t προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$ ονομάζεται martingale αν

- (i) $E(|M_t|) < \infty \quad \forall t \geq 0$
- (ii) $E(M_t | \mathbb{F}_s) = M_s \quad \forall s \leq t.$

Ορισμός 2.1.13. (Χρόνος Διακοπής)

Η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή τ ονομάζεται χρόνος διακοπής αν το ενδεχόμενο $\{\tau \leq t\} \in \mathbb{F}_t \quad \forall t \geq 0.$

Ορισμός 2.1.14. (Τοπικό Martingale)

Η \mathbb{F}_t - προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ονομάζεται τοπικό martingale αν υπάρχει αύξουσα ακολουθία χρόνων διακοπής $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ τέτοια ώστε

- (i) $P(\tau_k \rightarrow \infty) = 1$
- (ii) X^{τ_k} είναι \mathbb{F}_t martingale.

Ορισμός 2.1.15. (Κίνηση Brown)

Μια στοχαστική διαδικασία ονομάζεται κίνηση Brown εάν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες

- (i) $P(\omega : B(0, \omega) = 0) = 1$
- (ii) Για κάθε $0 \leq s \leq t$ η τυχαία μεταβλητή $B(t) - B(s)$ είναι κανονικά κατανομημένη με μέσο 0 και διασπορά $t-s$, δηλαδή για κάθε $a < b$

$$P(a \leq B(t) - B(s) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-x^2/2(t-s)} dx$$

- (iii) Η B έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις δηλαδή για κάθε $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$ οι τυχαίες μεταβλητές

$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

είναι ανεξάρτητες.

- (iv) Με πιθανότητα 1 ισχύει ότι

$$P(\omega : B(\cdot, \omega) cont.) = 1$$

2.2 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα και Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Ορισμός 2.2.1. (Κύμανση)

Έστω F είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$. Ονομάζουμε κύμανση της F τη συνάρτηση $V_F(x), x \in [a, b]$ με

$$V_F(x) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |F(s_i) - F(s_{i-1})| \right\}$$

Ορισμός 2.2.2.

Η στοχαστική διαδικασία X καλείται πεπερασμένης κύμανσης αν $\forall \omega \in \Omega, T > 0, V_{X(\omega)}(T) < \infty$

Λήμμα 2.2.1.

Η κίνηση Brown σ.β δεν είναι φραγμένη κύμανσης στο $[0, T]$ για κανένα $T > 0$.

Το παραπάνω Λήμμα είναι ένας απο τους βασικούς λόγους που δεν μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του Στοχαστικού ολοκληρώματος με κλασσικούς μηχανισμούς της Ανάλυσης, όπως στην περίπτωση των ολοκληρωμάτων Riemann-Stieltjes. Αν εφαρμόζαμε την κλασσική διαδικασία ορισμού ενός ολοκληρώματος μέσω των αθροισμάτων Riemann-Stieltjes, τότε αν πάρουμε μια ακολουθία $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ διαμερίσεων του $[0, t]$ έστω $\Delta_n = \{0 = t_0^{(n)} < \dots < t_{k(n)}^{(n)} = t$ με $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ τότε για τυχαία επιλογή σημείων $\Xi_n = \{\xi_j^{(n)}\}$ με $\xi_j^{(n)} \in [t_{j-1}, t_j]$ αν ορίσουμε

$$S(f, B, \Delta_n, \Xi_n) = \sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_j) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$$

και πάρουμε το όριο της ελπίζοντας να υπάρχει. Όμως εφόσον αυτή η διαδικασία αποτυγχάνει να πραγματοποιηθεί σημειακά θα απαιτήσουμε την σύγκλιση της ακολουθίας στον $L^2(P)$ ή κατά πιθανότητα. Το όριο αυτό αποτελεί στο Στοχαστικό ολοκλήρωμα.

Ορισμός 2.2.3.

Ορίζουμε \mathbb{H}^2 το σύνολο των σ.δ της μορφής $X_t(\omega) = \sum_{i=1}^k A_i(\omega) \mathbb{1}(t_i, t_{i+1}](t)$ με $0 \leq t_1 < \dots < t_{k+1}$ όπου $A_i \in \mathbb{F}_{t_i}$ μετρήσιμες και $E(A_i^2) < \infty$.

Ορισμός 2.2.4.

Ορίζουμε με \mathbb{H}^2 το σύνολο των μετρήσιμων και προσαρμοσμένων στοχαστικών διαδικασιών με

$$\|X\|_{L^2(\lambda \times P)} = E \left(\int_0^\infty X^2(s, \omega) ds \right) < \infty$$

Ορισμός 2.2.5. (Ορισμός διακριτού στοχαστικού ολοκληρώματος)

Αν $X \in \mathbb{H}^2$ τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα Ito της X ως προς την κίνηση Brown ως

$$I(X) = \sum_{i=1}^k A_i(\omega) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

.

Λήμμα 2.2.2. (Σύνδεση \mathbb{H}_0^2 και \mathbb{H}^2)

Ο \mathbb{H}_0^2 είναι πυκνός υπόχωρος του \mathbb{H}^2 .

Θεώρημα 2.2.1.

Για $X \in \mathbb{H}^2$ και ακολουθία $(X_n)_{n \geq 1}$ στον \mathbb{H}_0^2 με $\|X - X_n\|_{L^2(\lambda_{xP})} \rightarrow 0$

- (i) Η ακολουθία $(I(X_n))$ συγκλίνει στον $L^2(P)$.
- (ii) Το όριο είναι ανεξάρτητο της επιλογής (X_n) .

Ορισμός 2.2.6.

Για στοχαστικές διαδικασίες $X \in \mathbb{H}^2$ ορίζουμε

$$I(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} I(X_n)$$

όπου (X_n) ακολουθία στον \mathbb{H}_0^2 με $\|X - X_n\|_{L^2(\lambda_{xP})} \rightarrow 0$. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται για το στοχαστικό ολοκλήρωμα Ito είναι

$$\int_0^\infty X(s, \omega) dB_s$$

Πρόταση 2.2.1.

Έστω $X, Y \in \mathbb{H}^2$ τότε

- (i) $I(aX + Y) = aI(X) + I(Y)$
- (ii) $E(I(X)) = 0$

Πρόταση 2.2.2. (Ισομετρία Ito)

Αν $X \in \mathbb{H}^2$, τότε

$$\|I(X)\|_{L^2(P)} = \|X\|_{L^2(\lambda_{xP})}$$

δηλαδή

$$E\left\{\left(\int_0^\infty X(s, \omega)\right)^2\right\} = E\left(\int_0^\infty X(s, \omega)^2 ds\right)$$

Θεώρημα 2.2.2.

Αν η $\{X_t\}$ είναι μετρήσιμη, προσαρμοσμένη και $E(\int_0^t X^2(s, \omega) ds) < \infty \quad \forall t \geq 0$ τότε υπάρχει εκδοχή της $\{I_t(X)\}$ η οποία με πιθανότητα 1 είναι συνεχής συνάρτηση του t και είναι **martingale**.

Στο σημείο αυτό θα επεκτείνουμε τον χώρο των δυνατών ολοκλητέων ποσοτήτων στην περίπτωση των στοχαστικών ολοκληρωμάτων με την χρήση των χρόνων διακοπής.

Πρόταση 2.2.3.

Έστω τ χρόνος διακοπής. Με πιθανότητα 1 ισχύει ότι

$$\int_0^{t \vee \tau} X_s dB_s = \int_0^t X_s \mathbb{1}_{[0, \tau]} dB_s$$

Ορισμός 2.2.7.

Ορίζουμε λοιπόν των χώρο \mathbb{H}_{LOC}^2 το σύνολο όλων των μετρήσιμων προσαρμοσμένων στοχαστικών διαδικασιών X τέτοιες ώστε

$$P\left(\int_0^t X^2(s, \omega) ds < \infty \quad \forall t \geq 0\right) = 1$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η παραπάνω απαίτηση είναι πιο ασθενής από αυτήν που εξασφαλίζει ο χώρος \mathbb{H}^2 .

Ορισμός 2.2.8. (\mathbb{H}^2 - τοπικοποιούσα ακολουθία χρόνων διακοπής)

Έστω $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$. Μία ακολουθία χρόνων διακοπής (τ_n) λέγεται \mathbb{H}^2 - τοπικοποιούσα αν :

- (i) Είναι σ.β αύξουσα
- (ii) $P(\tau_n \rightarrow \infty) = 1$
- (iii) $X^{(\tau_n)} \in \mathbb{H}^2$

Πρόταση 2.2.4.

Αν $X \in \mathbb{H}_{LOC}^2$ τότε η ανέλιξη $(I_t(X))_{t \geq 0}$ έχει συνεχή εκδοχή και είναι τοπικό martingale.

Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Ορισμός 2.2.9. (Ανέλιξη Ito)

Έστω (Ω, \mathbb{F}, P) χώρος πιθανότητας ως προς τον οποίο η B είναι d -διάστατη κίνηση Brown και $\mathbb{F}_t = \mathbb{F}_t^B$ Η διύλιση που παράγει η B . Κάθε ανέλιξη $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$ ονομάζεται ανέλιξη Ito αν γράφεται ως

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s$$

όπου

- (i) Η X_0 είναι \mathbb{F}_0 προσαρμοσμένη.
- (ii) Οι $u : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$ και $v : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$ είναι μετρήσιμες και προσαρμοσμένες
- (iii) Για κάθε $t > 0$ με πιθανότητα 1 ισχύει ότι $\int_0^t u(s, \omega) ds < \infty$ και $\int_0^t v^2(s, \omega) ds < \infty$

Θα αναφέρουμε τώρα τον τύπο του Ito ο οποίος είναι πολύ χρήσιμο εργαλείο στην θεωρία της Στοχαστικής Αναλύσης και θα χρησιμοποιηθεί εκτενώς στην συνέχεια της παρούσας εργασίας

Θεώρημα 2.2.3. (Τύπος Ito)

Έστω $f \in C^{2,1}(Rx[0, \infty))$. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει ότι

$$f(B_t, 0) = f(B_0, 0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s}(B_s, s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_s, s) \right) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B_s, s) dB_s$$

Στην γενική μορφή έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 2.2.4. (Τύπος Ito για Ανελίξεις Ito)

Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$ και X είναι μια m -διάστατη ανέλιξη Ito. Τότε με πιθανότητα 1

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \nabla f(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) dX_s^i dX_s^j$$

όπου η ποσότητα $dX_s^i dX_s^j$ υπολογίζεται με τον παρακάτω διαφορικό λογισμό.

\cdot	dt	$dB_t^{(i)}$	$dB_t^{(j)}$
dt	0	0	0
$dB_t^{(i)}$	0	dt	0
$dB_t^{(j)}$	0	0	dt

Πίνακας 1: Πολλαπλασιασμός διαφορικών για $B^{(i)}, B^{(j)}$ ανεξάρτητα

Ισχυρή και Ασθενής λύση ΣΔΕ

Ορισμός 2.2.10.

Έστω η Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

όπου $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ και $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ μετρήσιμες συναρτήσεις και B μια m -διάστατη κίνηση Brown. Ονομάζουμε ισχυρή λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathbb{F}, P) ως προς την κίνηση Brown $\{B, \mathbb{F}_t^B\}$ και αρχική συνθήκη x_0 τη διαδικασία $X = \{X_t, t \geq 0\}$ με συνεχή μονοπάτια που ικανοποιεί

- (i) Η X είναι προσαρμοσμένη ως προς την διύληση $\mathbb{F}_t = \sigma(x_0) \vee \mathbb{F}_t^B$
- (ii) $P(X_0 = x_0) = 1$
- (iii)

$$P\left(\int_0^t |b_i(s, X_s)| + |\sigma_{ij}(s, X_s)|^2 ds < \infty\right) = 1$$

- (iv) Σχεδόν βέβαιως ισχύει ότι

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

ονομάζουμε τους όρους $\int_0^t b(s, X_s)ds, \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ τάσης και διάχυσης αντίστοιχα.

Ορισμός 2.2.11. (Υπάρξη και μοναδικότητα ισχυρής λύσης)

Υποθέτουμε ότι b, σ είναι Borel - μετρήσιμες συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν μια ολική συνθήκη Lipschitz, τέτοια ώστε για κάθε σταθερά $K > 0$

$$|b(x) - b(y)| \leq K|x - y|$$

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Τότε εξασφαλίζεται η ισχυρή λύση και η μοναδικότητα για την ΣΔΕ

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

Αναφέρονται τώρα διαφορετικές εκδοχές ύπαρξης και μοναδικότητας μια ΣΔΕ καθώς και το θεώρημα ύπαρξης λύσης των Yamada and Watanabe το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια της εργασίας.

Πρόταση 2.2.5.

- (i) **Ασθενής ύπαρξη** : Λέμε ότι ικανοποιείται η Ασθενής ύπαρξη μια ΣΔΕ, αν για κάθε κατανομή μ στο $(R^n, B(R^n))$ υπάρχει μια ασθενής λύση με αρχική κατανομή μ .
- (ii) **Ασθενής Μοναδικότητα ή Μοναδικότητα κατά νόμο** : Λέμε ότι ικανοποιείται αν για δύο ασθενείς λύσεις $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathbb{F}_{t \geq 0}, P, W, X))$ and $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathbb{F}_{t \geq 0}, P, W, \tilde{X}))$ με την ίδια αρχική κατανομή οι \tilde{X}, X έχουν την ίδια κατανομή.
- (iii) **Pathwise uniqueness** : Αν για δύο ασθενείς λύσεις $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathbb{F}_{t \geq 0}, P, W, \tilde{X}))$ με την ίδια αρχική συνθήκη οι \tilde{X}, X είναι μη διακρίσιμες

$$P(X_t = \tilde{X}_t \text{ for all } t \geq 0) = 1$$

Θεώρημα 2.2.5. (Yamada and Watanabe)

Αν ικανοποιείται η ασθενής ύπαρξη και η **Pathwise uniqueness** τότε έχουμε επίσης και ισχυρή ύπαρξη και μοναδικότητα για την λύση της ΣΔΕ.

2.3 Συναρτήσεις Κατανομής και Στατιστικά ΣΔΕ

Ορισμός 2.3.1. (Απειροστικός γεννήτορας μιας διαδικασίας διάχυσης)

Ο απειροστικός γεννήτορας μιας στοχαστικής διαδικασίας X_t για μια ομαλή συνάρτηση $\phi(x)$ ορίζεται ως

$$\mathcal{A}\phi(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{E[\phi(t+s)] - \phi(x(t))}{s}$$

Για μια διαδικασία Ito όπου είναι η λύση της

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

ο γεννήτορας δίνεται ως

$$\mathcal{A}(\cdot) = \sum_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} b_i(x, t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_i \partial x_j} \right) [\sigma(x, t) Q \sigma^T(x, t)]_{ij}$$

όπου Q ο πίνακας διάχυσης της κίνησης Brown στην δεδομένη περίπτωση.

Θεώρημα 2.3.1. (Fokker-Planck-Kolmogorov Equation)

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(x, t)$ της λύσης της ΣΔΕ

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

λύνει ένα πρόβλημα Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} [b_i(x, t)p(x, t)] + \frac{1}{2} \sum_{i, j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \{[\sigma(x, t)Q\sigma^T(x, t)]_{ij}p(x, t)\}$$

Η παραπάνω ΜΔΕ είναι γνωστή ως Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK). Με την συνάρτηση πυκνότητας κατανομής στο t_0 να είναι $p(x(t_0)) = p(x, t_0)$ στην αρχική κατάσταση του συστήματος η ΜΔΕ είναι ένα πρόβλημα αρχικών συνθηκών με αρχική συνθήκη $p(x, t_0)$ την $t=t_0$.

Ιδιότητα Markov και πυκνότητες πιθανότητας μετάβασης ΣΔΕ

Ορισμός 2.3.2. (Διαδικασία Markov)

Μια στοχαστική διαδικασία X_t είναι μια διαδικασία Markov αν οι μελλοντικές καταστάσεις της είναι ανεξάρτητες του παρελθόντος δοθέντος του παρόντος. Δηλαδή

$$p(X_t|X_s) = p(X_t|x(s)) \quad \forall t \geq s$$

Θεώρημα 2.3.2. (Ιδιότητα Markov ΣΔΕ)

Έστω X_t η λύση της ΣΔΕ

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

με τους συντελεστές να πληρούν τις συνθήκες Lipschitz και την συνθήκη γραμμικής αύξησης. Τότε η X_t είναι μια διαδικασία Markov με πιθανότητα μετάβασης

$$p(s, x; t, A) = P(X_t^{(s;x)} \in A)$$

Ορισμός 2.3.3. (Πυκνότητες Πιθανότητας Μετάβασης ΣΔΕ)

Η πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης $p(x_t|x_s)$ μια ΣΔΕ με $t \geq s$ είναι η λύση της Fokker-Planck-Kolmogorov ΜΔΕ με αρχική συνθήκη $p(x_t|x_s) = \delta(x_t - x_s)$ για $t=s$. Πιο συγκεκριμένα να θεωρήσουμε την πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης από την y_s στην x_t ως $p(x, t|y, s)$ τότε λύνει την ΜΔΕ

$$\frac{\partial p(x, t|y, s)}{\partial t} = \mathcal{A}p(x, t|y, s) \quad p(x, s|y, s) = \delta(x - y)$$

Συνεπώς αν βρεθεί μια λύση στην παραπάνω ΜΔΕ, που εν γεννεί δεν είναι ένα τετριμένο πρόβλημα, τότε χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα Markov των λύσεων των ΣΔΕ μπορούμε να βρούμε μια σχέση για τον υπολογισμό της πεπερασμένης συνάρτησης κατανομής των ΣΔΕ (από κοινού συνάρτηση κατανομής)

Πρόταση 2.3.1.

Για ένα πεπερασμένο σύνολο $t_0 < \dots < t_T$ η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τιμών της διαδικασίας χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση κατανομής

$$p(x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_T)) = p(x(t_0)) \prod_{k=1}^T p(x(t_k)|x(t_{k-1}))$$

2.4 Αριθμητικές Λύσεις Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων

Για την προσομοίωση των λύσεων των ΣΔΕ, πρέπει να εφαρμοστεί μια αριθμητική μέθοδος καθώς οι περισσότερες λύσεις των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων δεν μπορούν να βρεθούν σε αναλυτική μορφή. Στην θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων μια από τις θεμελιώδεις αριθμητικές μεθόδους είναι η μέθοδος Euler. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε μια επέκταση της μεθόδου αυτής για ΣΔΕ με χρήση της σειράς Ito-Taylor. Η σειρά Ito-Taylor είναι μια επέκταση της κλασσικής σειράς Taylor η οποία χρησιμοποιείται στις αριθμητικές λύσεις των κλασσικών Διαφορικών εξισώσεων. Στην ενότητα αυτή χρησιμοποιήθηκαν σημειώσεις από τα [4],[31]. Ας θεωρήσουμε μια ΣΔΕ

$$dX_t = f(X_t, t)dt + L(X_t, t)dB_t \quad x(t_0) \sim p(x(t_0))$$

όπου $X_t \in R^d$ και B_t μια κίνηση Brown με πίνακα διάχυσης Q . Υποθέτουμε επίσης ότι η αρχική συνθήκη είναι ανεξάρτητη της κίνησης Brown. Σε ολοκληρωτική μορφή μπορούμε να γράψουμε την δοσμένη ΣΔΕ ως

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(X_s, s)ds + \int_{t_0}^t L(X_s, s)dB_s$$

Αν εφαρμόσουμε την γενική φόρμουλα Ito για μια συνάρτηση $f \in C^2$

$$\begin{aligned} df(X_t, t) &= \frac{\partial f(x_t, t)}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial f(x_t, t)}{\partial x_i} f_i(x_t, t) dt \\ &\quad + \sum_i \frac{\partial f(x_t, t)}{\partial x_i} [L(X_t, t)dB_t]_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_t, t)}{\partial x_i \partial x_j} [L(X_t, t)QL^T(X_t, t)]_{ij} dt \end{aligned}$$

και για τον πίνακα συνδιακύμανσης

$$\begin{aligned} dL(X_t, t) &= \frac{\partial L(x_t, t)}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial L(x_t, t)}{\partial x_i} f_i(x_t, t) dt \\ &\quad + \sum_i \frac{\partial L(x_t, t)}{\partial x_i} [L(X_t, t)dB_t]_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial L^2(x_t, t)}{\partial x_i \partial x_j} [L(X_t, t)QL^T(X_t, t)]_{ij} dt \end{aligned}$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν σε ολοκληρωτική μορφή ως

$$\begin{aligned}
f(X_t, t) &= f(X_{t_0}, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial f(x_s, s)}{\partial s} ds \\
&+ \int_{t_0}^t \sum_i \frac{\partial f(x_s, s)}{\partial x_i} f_i(x_s, s) ds \\
&+ \int_{t_0}^t \sum_i \frac{\partial f(x_s, s)}{\partial x_i} [L(X_s, s) dB_s]_i \\
&+ \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_s, s)}{\partial x_i \partial x_j} [L(X_s, s) Q L^T(X_s, s)]_{ij} ds
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
L(X_t, t) &= L(X_{t_0}, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial L(x_s, s)}{\partial s} ds \\
&+ \int_{t_0}^t \sum_i \frac{\partial L(x_s, s)}{\partial x_i} L_i(x_s, s) ds \\
&+ \int_{t_0}^t \sum_i \frac{\partial L(x_s, s)}{\partial x_i} [L(X_s, s) dB_s]_i \\
&+ \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \frac{\partial L^2(x_s, s)}{\partial x_i \partial x_j} [L(X_s, s) Q L^T(X_s, s)]_{ij} ds
\end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα τους παρακάτω τελεστές

$$\mathcal{L}_t(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} f_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_i \partial x_j} [L Q L^T]_{ij}$$

$$\mathcal{L}_{B,j}(\cdot) = \sum_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} L_{ij}$$

Χρησιμοποιώντας τους δύο αυτούς τελεστές μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω ολοκληρωτικές μορφές με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{aligned}
f(X_t, t) &= f(X_{t_0}, t_0) + \int_{t_0}^t \mathcal{L}_t f(X_s, s) ds \\
&+ \sum_j \int_{t_0}^t \mathcal{L}_{B,j} f(X_s, s) dB_j(s)
\end{aligned}$$

$$L(X_t, t) = L(X_{t_0}, t_0) + \int_{t_0}^t \mathcal{L}_t L(X_s, s) ds \\ + \sum_j \int_{t_0}^t \mathcal{L}_{B,j} L(X_s, s) dB_j(s)$$

Αν λοιπόν αντικαταστήσουμε στην X_t έχουμε

$$X_t = X_{t_0} + f(X_{t_0}, t_0)(t - t_0) + L(X_{t_0}, t_0)(B_t - B_{t_0}) \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}_t f(X_s, s) ds ds + \sum_j \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}_{B,j} f(X_s, s) dB_j(s) ds \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}_t L(X_s, s) ds dB_s \\ + \sum_j \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}_{B,j} L(X_s, s) dB_j(s) dB_s$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι έχουμε καταλήξει σε μια σχέση της μορφής

$$X_t = X_{t_0} + f(X_{t_0}, t_0)(t - t_0) + L(X_{t_0}, t_0)(B_t - B_{t_0}) + r(t)$$

Με τον όρο $r(t)$ να περιέχει στοχασικά ολοκληρώματα υψηλότερων ταξεων. Η τελευταία σχέση αποτελεί το διακριτό σχήμα Euler Maruyama το οποίο θα αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο στην συνέχεια της εργασίας.

Ορισμός 2.4.1. (Σχήμα Euler-Maruyama)

Θεωρούμε μια διαδικασία Ito $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$ η οποία ικανοποιεί την $\Sigma\Delta\epsilon$

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

για $t_0 \leq t \leq T$ και αρχική συνθήκη $X_{t_0} = X_0$. Για μια διαμέριση (mesh) $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$ του διαστήματος $[t_0, T]$ το διακριτό σχήμα Euler είναι μια συνεχής στοχαστικής διαδικασία $Y = \{Y_t, t_0 \leq t \leq T\}$ η οποία ικανοποιεί το παρακάτω επαναληπτικό σχήμα

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(B_{\tau_{n+1}} - B_{\tau_n})$$

και αρχική συνθήκη

$$Y_0 = X_0$$

Στην θεωρία των αριθμητικών μεθόδων για $\Sigma\Delta\epsilon$ υπάρχουν δύο τρόποι ώστε να ποσοτικοποιηθεί το σφάλμα της αριθμητικής μεθόδου. Αυτά τα σφάλματα είναι γνωστά ως Ασθενές και Ισχυρό σφάλμα η διαφορετικά ασθενής ή ισχυρή σύγκλιση της μεθόδου.

Ορισμός 2.4.2. (Ισχυρή Σύγκλιση)

Ένα διακριτό σχήμα $(\hat{X}_{ti}, 0 \leq i \leq n)$ μιας διαδικασίας Ito έχει ισχυρή τάξης σύγκλιση $v > 0$ αν

$$\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} \quad E[\max_{0 \leq i \leq n} \|\hat{X}_{ti} - X_{ti}\|] \leq C/n^v$$

An approximation scheme $(\hat{X}_{ti}, 0 \leq i \leq n)$ for the process X is said to have a strong error of order $v > 0$ if

$$\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} \quad E[\max_{0 \leq i \leq n} \|\hat{X}_{ti} - X_{ti}\|] \leq C/n^v$$

Ορισμός 2.4.3. (Ασθενής Σύγκλιση)

Παρόμοια μια αριθμητική μέθοδος έχει τάξη ασθενής σύγκλισης $v > 0$ αν για κάθε C^∞ συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} \quad |E[f(\hat{X}_T)] - E[f(X_T)]| \leq C/n^v$$

Συγκεκριμένα τώρα για το σχήμα Euler Maruyama έχουμε τα ακόλουθα δύο βασικά θεωρήματα για την τάξη σύγκλισης της μεθόδου.

Θεώρημα 2.4.1. (Ισχυρή σύγκλιση μεθόδου EM-Kanagawa)

Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές τάξης και διάχυσης της $\Sigma \Delta E$

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

a, b είναι Lipschitz συνεχείς

$$\exists K > 0 \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \|b(x) - b(y)\| + \|a(x) - a(y)\| \leq K\|x - y\|$$

Τότε η ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου EM είναι 1/2, δηλαδή

$$\forall p > 0, \exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, E[\max_{0 \leq i \leq n} \|\hat{X}_t^n - X_t\|^p]^{1/p} \leq C/n^{1/2}$$

Θεώρημα 2.4.2. (Ασθενής Σύγκλιση μεθόδου EM- Talay and Tubaro)

Υποθέτουμε ότι a, b είναι C^∞ συναρτήσεις με τις μερικές παραγώγους κάθε τάξης φραγμένες.

$$\forall 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}$$

$$\exists C_a > 0 \quad |\partial_a b_i(X)| + |\partial_a b_j(x)| \leq C_a$$

Έστω $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^∞ συνάρτηση τ.ω

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \exists C_a > 0, k \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \|\partial_a f(x)\| \leq C_a(1 + \|x\|^k)$$

Τότε υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$|E[f(\hat{X}_T)] - E[f(X_T)]| \leq C/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο ασθενής ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου EM είναι μεγαλύτερος από τον ισχυρό.

2.5 Στατιστική Συμπερασματολογία και Εκτίμηση Παραμέτρων ΣΔΕ

Ένα ζήτημα που προκύπτει συχνά στο πλαίσιο της πρακτικής μοντελοποίησης με την χρήση ΣΔΕ είναι το πρόβλημα της εκτίμησης των παραμέτρων. Σε αυτό το πλαίσιο, μπορεί να γνωρίζουμε τις παραμετρική μορφή της ΣΔΕ, αλλά οι παράμετροι της ΣΔΕ έχουν άγνωστες τιμές. Μπορεί να έχουμε όμως ένα σύνολο πειραματικών δεδομένων που επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε για τον προσδιορισμό των τιμών των παραμέτρων. Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι να δώσει μια επισκόπηση των λύσεων σε τέτοιου είδους προβλήματα. Συγκεκριμένα εξετάζουμε μεθόδους εξαγωγής συμπερασμάτων με βάση τη στατιστική πιθανοφάνεια της ΣΔΕ.

Θεωρούμε μια στοχαστική διαδικασία $X_t, t \geq 0$ η οποία παίρνει τιμές στο \mathcal{X} και αποτελεί λύση της ΣΔΕ

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t, t; \theta)dt + \sigma(X_t, t; \theta)dB_t & t > 0 \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

Δοθέντος ενός δείγματος $d_N = \{d_i = X(t_i)\}_{i=1}^N$ που σχετίζονται με την X_t , λύση της παραπάνω ΣΔΕ, θα βρεθούν οι παράμετροι θ που ικανοποιούν την ΣΔΕ μεγιστοποιώντας την (ακριβή) συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$L(\theta; d_N) = p(d_N; \theta)$$

όπου $p(X_{t_1}, \dots, X_{t_N}; \theta)$ δηλώνει την πεπερασμένη απο κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του δείγματος X_{t_1}, \dots, X_{t_N} . Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω θεωρώντας ότι η λύση της ΣΔΕ είναι μια διαδικασία Markov η οποία ικανοποιεί την Markovιανή ιδιότητα μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$L(\theta; d_N) = p_1(d_0) \prod_{i=1}^N p_i(d_i, t_i | d_{i-1}, t_{i-1}; \theta)$$

σύμφωνα με τις πιθανότητες μετάβασης p_i . Στην παρούσα εργασία θα θεωρήσουμε ένα δείγμα της μορφής

$$d_{JN} = \{d^{(j)} = \{d_{ji} = X^{(j)}(t_i)\}_{i=1}^N\}_{j=1}^J$$

το οποίο σχετίζεται με μια οικογένεια στοχαστικών διαδικασιών $X^{(j)}(t)$ που ικανοποιεί διαφορετικές ΣΔΕ αλλά εξαρτάται από το ίδιο σύνολο παραμέτρων θ . Θεωρώντας λοιπόν ότι $\{d^{(j)}\}_{j=1}^J$ είναι ανεξάρτητα η συνάρτηση πιθανοφάνειας γράφεται

$$L(\theta; d_{JN}) = \prod_{j=1}^J p^{(j)}(d^{(j)}; \theta) \quad (A)$$

Συνεπώς δοθέντος ενός συνόλου δεδομένων d_{JN} , οι εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων $\theta \in \Theta$ μπορούν να βρεθούν μεγιστοποιώντας την (A). Το πρόβλημα που δημιουργείται όμως είναι ότι οι πιθανότητες μετάβασης μιας ΣΔΕ $p^{(j)}(x, t | y, s; \theta)$ είναι εν γέννη δύσκολο να βρεθούν σε κλειστή μορφή καθώς όπως έχει ήδη αναφερθεί πρέπει να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΜΔΕ) Fokker-Planck-Kolmogorov. Μια λύση στο πρόβλημα αυτό είναι η διακριτοποίηση της ΜΔΕ Fokker-Planck και η λύση της ΜΔΕ αριθμητικά, κάτι που απαιτεί υψηλό υπολογιστικό κόστος. Συνεπώς θα εφαρμόσουμε διαφορετικές μεθόδους προσέγγισης των πυκνοτήτων μετάβασης μιας ΣΔΕ [31].

2.5.1 Προσέγγισεις Gauss

Ένας τρόπος για την προσέγγιση των πιθανοτήτων μετάβασης μιας $\Sigma\Delta E$ είναι η χρήση διαδικασιών Gauss. Θεωρούμε λοιπόν ότι $G^{(j)}(t)$ είναι η Γκαουσιανή προσέγγιση των διαδικασιών $X^{(j)}(t)$ που ικανοποιούν την $\Sigma\Delta E$

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t, t; \theta)dt + \sigma(X_t, t; \theta)dB_t & t > 0 \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

και την συνάρτηση πιθανοφάνειας. Ορίζουμε με $\mu^{(j)}(t) = E[X^{(j)}(t)]$, $v^{(j)}(t) = E[(X^{(j)}(t) - \mu^{(j)}(t))^2]$ και $v^{(j)}(t, s) = E[(X^{(j)}(t) - \mu^{(j)}(t))(X^{(j)}(s) - \mu^{(j)}(s))]$ την μέση τιμή, διασπορά και συνδιακύμανση της στοχαστικής διαδικασίας. Για την εν λόγω προσέγγιση θεωρούμε ότι περιέχει ένα σφάλμα

$$D^j = G^{(j)} + \epsilon^{(j)}$$

όπου περιγράφει ακριβώς το σφάλμα της προσέγγισης και θεωρούμε ότι ακολουθουθεί κανονική κατανομή $\epsilon^{(j)} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma^{\epsilon, (j)})$. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας μέσω της συγκεκριμένης προσέγγισης μπορεί να γραφεί ως

$$L(\theta; d_{JN}) = \prod_{j=1}^J (2\pi)^{-N/2} |\Sigma^{(j)}(\theta)|^{-1/2} \exp[(d^{(j)} - \mu^j(\theta))^T [\Sigma^{(j)}(\theta)]^{-1} (d^{(j)} - \mu^j(\theta))]$$

όπου $\mu^j(\theta) = (\mu(t_1), \dots, \mu(t_N))$, $\Sigma^{(j)}(\theta) = V^{(j)}(\theta) + \Sigma^{\epsilon, (j)}$.

Σκοπός τώρα είναι να βρεθούν οι ροπές της διαδικασίας X_t . Κάτω από ορισμένες συνθήκες που έχουμε ήδη αναφέρει μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι martingale. Συνεπώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων για την μέση τιμή $\mu(t)$, την διασπορά $v(t)$ και την συνδιακύμανση $v(t, s)$ της στοχαστικής διαδικασίας X_t . Θεωρούμε λοιπόν ότι έχουμε μια $\Sigma\Delta E$

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t, t; \theta)dt + \sigma(X_t, t; \theta)dB_t & t > 0 \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

Αν λάβουμε την μέση τιμή στην παραπάνω $\Sigma\Delta E$ και υποθέτοντας ότι ικανοποιείται η συνθήκη $b \in L^1$ και $E(\int_0^t \sigma^2(X_s, s)ds) < \infty$, η μέση τιμή γράφεται

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = E[b(X_t)]$$

Αν ο όρος τάσης είναι γραμμικός τότε από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος έχουμε ότι

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = b[E(X_t)] = b(\mu(t))$$

Διαφορετικά χρησιμοποιώντας την σειρά Taylor γύρω από την μέση τιμή λαμβάνουμε

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = E[b(\mu(t)) + b'(\mu(t))(X_t - \mu(t)) + \frac{1}{2}b''(\mu(t))(X_t - \mu(t))^2 + \mathcal{O}(X(t))^3]$$

για να λάβουμε μια κλειστή μορφή για την προσεγγιστική μέση τιμή

$$\begin{cases} \frac{d\mu(t)}{dt} = b(\mu(t)) + \frac{1}{2}b''(\mu(t))v(t) \\ \mu(0) = x_0 \end{cases}$$

Για την Διαφορική εξίσωση της δεύτερης ροπής θα εφαρμοστεί ο τύπος του Ito για την διαδικασία $Y_t = X_t^2$, όπου $f(x) = x^2 \in C^2$

$$\begin{aligned} dY(t) &= 2X_t dX_t + \frac{1}{2}2\sigma^2(X_t)(dX_t)^2 \\ &= 2X_t(b(X_t))dt + \sigma(X_t)dW_t + \sigma^2(X_t)dt \\ &= 2(X_t b(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t))dt + 2X_t\sigma(X_t)dW_t \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας μέσες τιμές και στα δύο μέρη της Διαφορικής εξίσωσης και χρησιμοποιώντας μια επέκταση Taylor για τα b, σ^2 γύρω από την μέση τιμή

$$\begin{aligned} dE[Y_t] &= 2E[X_t b(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t)]dt \\ &= 2E[X_t(b(\mu(t))) + b'(\mu(t))(X_t - \mu(t)) + \mathcal{O}(X(t))^3]dt \\ &+ 2E[\frac{1}{2}\sigma^2(\mu(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)'|_{x=\mu(t)}(X_t - \mu(t)) + \frac{1}{4}\sigma^2(x)''|_{x=\mu(t)}(X_t - \mu(t))^2 + \mathcal{O}(X(t))^3] \\ &\approx 2(\mu(t)b(\mu(t)) + b'(\mu(t))v(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(\mu(t)) + \frac{1}{4}(\sigma^2)''(\mu(t))v(t))dt \end{aligned}$$

Για να βρούμε λοιπόν μια προσέγγιση της διασποράς αφαιρούμε την $\mu^2(t)$ και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} dv(t) &= dE[X^2(t)] - d(\mu^2(t)) \\ &\approx (\frac{1}{2}\sigma^2(\mu(t)) + b'(\mu(t))v(t) + \frac{1}{4}(\sigma^2)''(\mu(t))v(t))dt \end{aligned}$$

Συνεπώς η Διαφορική εξίσωση για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής διασποράς είναι

$$\begin{cases} dv(t) = \frac{1}{2}\sigma^2(\mu(t)) + b'(\mu(t))v(t) + \frac{1}{4}(\sigma^2)''(\mu(t))v(t)dt \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Τέλος η συνδιακύμανση μεταξύ X_t και X_s για $0 \leq s \leq t \leq T$, ορίζεται ως

$$v(t, s) = E[(X_t - \mu(t))(X_s - \mu(s))] = E[X_t X_s] - \mu(t)\mu(s)$$

2.6 Οικογένεια Διαχύσεων Pearson

Οι διαχύσεις Pearson είναι μια κλάση διαχύσεων που αποτελούν λύσεις ΣΔΕ με γραμμικούς συντελεστές τάσης και τετραγωνικές συναρτήσεις όρου διάχυσης. Μπορούμε να δείξουμε ότι για αυτή την κλάση Διαχύσεων μπορούμε να εφαρμόσουμε στατιστική συμπερασματολογία χρησιμοποιώντας την πραγματική κατανομή πιθανοτήτων μετάβασης της διαδικασίας. Θα παρουσιάσουμε ορισμένες από τις βασικότερες διαχύσεις οι οποίες ανήκουν σε αυτήν την οικογένεια καθώς και τις κατανομές ισορροπίας για κάθε μια από αυτές της λύσεις των ΣΔΕ.

Μια διάχυση Pearson αποτελεί μια λύση ισορροπίας μιας Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης της μορφής

$$dX_t = -\theta(X_t - \mu) + \sqrt{2\theta(ax_t^2 + bX_t + c)}dB_t$$

όπου $\theta > 0$ και a, b και c είναι τέτοια ώστε η λύση X_t να είναι καλώς ορισμένη. Η B_t στην παραπάνω ΣΔΕ αποτελεί μια κίνηση Brown όπως την έχουμε ορίσει στις προηγούμενες ενότητες. Η παράμετρος θ αποτελεί μια παράμετρο scaling η οποία καθορίζει την ταχύτητα επιστροφής της διάχυσης στο μ . Οι παράμετροι μ, a, b και c καθορίζουν τον χώρο καταστάσεων της διαδικασίας καθώς και την μορφή της κατανομής ισορροπίας. Συγκεκριμένα ο όρος μ μπορεί να αποτελέσει κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες την μέση τιμή της κατανομής ισορροπίας.

Ο λόγος για τον οποίο η κατανομή ισορροπίας της παραπάνω Στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης ανήκει στην οικογένεια Pearson παρουσιάζεται παρακάτω

Πρόταση 2.6.1.

Οι scale και speed densities της διάχυσης είναι

$$s(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{u - \mu}{au^2 + bu + c} du\right) \quad m(x) = \frac{1}{s(x)(ax^2 + bx + c)}$$

όπου x_0 ένα σταθερό σημείο τέτοιο ώστε $ax_0^2 + bx_0 + c > 0$. Θεωρούμε ένα διάστημα (l, r) στο οποίο $ax^2 + bx + c > 0 \quad \forall x \in (l, r)$. Μια μοναδική ασθενής λύση της ΣΔΕ με τιμές στο διάστημα (l, r) υπάρχει αν και μόνο αν $\int_{x_0}^r s(x)dx = \infty$, $\int_l^{x_0} s(x)dx = \infty$ και $\int_l^r m(x)dx < \infty$. Η συνάρτηση κατανομής έχει πυκνότητα η οποία καθορίζεται από την συνάρτηση ταχύτητας $m(x)$. Καθώς

$$\frac{dm(x)}{dx} = -\frac{(2a+1)x - \mu + b}{ax^2 + bx + c}m(x)$$

προκύπτει ότι όταν μια λύση ισορροπίας της ΣΔΕ υπάρχει τότε η κατανομή ισορροπίας ανήκει στην οικογένεια Pearson. Λόγω λοιπόν της συνδεσης της λύσης της ΣΔΕ με την εξίσωση Pearson, οι διαχύσεις αυτές ονομάστηκαν Pearson. Αν επιπλέον $\int_{x_0}^r s(x)dx < \infty$ το όριο του διαστήματος (l, r) μπορεί με θετική πιθανότητα να προσεγγιστεί σε πεπερασμένο χρόνο.

Οι διαχύσεις Pearson μπορούν να χωριστούν σε έξι διαφορετικές υπο-οικογένειες οι οποίες καθορίζονται από την μορφή της συνάρτησης στον όρο διάχυσης. Για τον σκοπό της παρούσας εργασίας μας ενδιαφέρει μόνο η περίπτωση όπου $a < 0$ και $\sigma^2 = 2\theta x(x-1)$. Στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις scale και speed γράφονται ως $s(X) = (1-x)^{\frac{1-\mu}{a}} x^{\frac{\mu}{a}}$ και $m(x) = (1-x)^{-\frac{1-\mu}{a}} x^{-\frac{\mu}{a}-1}$. Η συνθήκες ολοκληρωσιμότητας που παρουσιάσαμε παραπάνω ικανοποιούνται μόνο αν $\mu/a \leq 1$ και $(1-\mu)/a \leq 1$. Συνεπώς για $a < 0$ και για κάθε $\mu > 0$ τέτοιο ώστε $\min(\mu, 1-\mu) \geq -a$ μια μοναδική εργοδική λύση της ΣΔΕ υπάρχει στο διάστημα $(0, 1)$. Για την συγκεκριμένη περίπτωση αποδεικνύεται ότι η κατανομή ισορροπίας της εν λόγω ΣΔΕ είναι η Βήτα κατανομή με

παραμέτρους $\mu/(-a), (1 - \mu)/(-a)$. Συγκεκριμένα η μέση τιμή είναι μηδέν. Η λύση αυτή της ΣΔΕ είναι γνωστή και ως Jacobi διάχυση καθώς τα ιδιοδιανύσματα του εν λόγω γεννήτορα είναι πολυώνυμα Jacobi [14].

3 Μοντέλα Πιθανοτικών Προβλέψεων με την χρήση ΣΔΕ

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστούν τα δύο βασικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των πιθανοτικών προβλέψεων. Αρχικά θα παρουσιάσουμε έναν πρώτο πιο μαθηματικό ορισμό για την έννοια των πιθανοτικών προβλέψεων.

Ορισμός 3.0.1. (Πιθανοτικές Προβλέψεις)

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ένας φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας και μια συγκεκριμένη χρονική περίοδος T . Τότε μια πιθανοτική πρόβλεψη μια \mathcal{F}_T - μετρήσιμης τυχαίας μεταβλητής $X \in R^d$ είναι η δεσμευμένη κατανομή p_t της X δοθέντος την \mathcal{F}_t . Ένα δυναμικό μοντέλο τότε για μια πιθανοτική πρόβλεψη είναι μια ροή του μέτρου αυτού πιθανότητας $(p_t)_{0 \leq t \leq T}$ όπου μπορεί να χαρακτηριστεί από την ροή πιθανότητας της δεσμευμένης κατανομής της X .

Όπως έχει ήδη αναφερθεί σκοπός της εργασίας είναι να κατασκευαστεί η πιθανοτική πρόβλεψη χρησιμοποιώντας μια ήδη υπάρχουσα σημειακή πρόβλεψη για την παραγωγή της ηλιακής παραγωγής ενέργειας. Θεωρούμε λοιπόν πως στην διάθεση μας έχουμε διαθέσιμη μια σημειακή πρόβλεψη η οποία εκδίδεται κάθε μέρα στις 11 π.μ για τον χρονικό ορίζοντα της επόμενης ημέρας. Οι μετρήσεις που έχουμε διαθέσιμες θεωρούμε ότι είναι κανονικοποιημένες σύμφωνα με την μέγιστη χωριτηρότητα του δεδομένου Χαρτοφυλακίου/πάρκου, αν μιλάμε αποκλειστικά για μια μονάδα παραγωγής ενέργειας, το οποίο διαχειρίζεται από έναν ΦοΣΕ και έχει δικαίωμα εκπροσώπησης στις Αγορές Ενέργειας. Θα θεωρήσουμε αρχικά ότι η διαδικασία που περιγράφει τις προβλέψεις είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση $p(t) \in [0, 1]$. Η γενική μορφή της ΣΔΕ που θα μελετηθεί είναι

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t; p_t, \theta)dt + \sigma(X_t; p_t, \theta)dB_t & t \in [0, T] \\ X_0 = x_0 \in [0, 1] \end{cases}$$

όπου $\mu(X_t; p_t, \theta)$ υποδηλώνει τον όρο τάσης και $\sigma(X_t; p_t, \theta)$ τον όρο διάχυσης και $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ ένα διάνυσμα άγνωστων σταθερών που χαρακτηρίζουν την διάχυση. Η B_t αποτελεί μια μονοδιάστατη κίνηση Brown. Παρουσιάζονται λοιπόν οι δύο διαφορετικές ΣΔΕ που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία και στις επόμενες ενότητες θα παρουσιάσουμε μεθόδους και μετρικές αξιολόγησης των αποτελεσμάτων αυτών.

3.1 ΣΔΕ 1 - Without Derivative Tracking

Θα ξεκινήσουμε με την παρουσίαση του πρώτου μοντέλου το οποίο έχει μελετηθεί εκτενώς στην βιβλιογραφία από τους [26],[7],[19] παρουσιάζοντας τα απαραίτητα στοιχεία τα οποία η ΣΔΕ που θέλουμε να κατασκευάσουμε πρέπει να πληροί. Αρχικά θα ασχοληθούμε με τον όρο τάσης. Βασική ιδιότητα που θέλουμε να πληροί τον μοντέλο είναι να έχει την ιδιότητα mean-reverting που υποδηλώνει την επιστροφή της διαδικασίας αυτής στην σημειακή πρόβλεψη $p(t)$. Έχουμε λοιπόν έναν όρο τάσης

$$\mu(X_t; p_t, \theta) = -\theta(t)(X_t - p(t))$$

όπου $(\theta_t)_{t \in [0, T]}$ μια θετική συνάρτηση που ελέγχει την ταχύτητα επιστροφής της διαδικασίας στην σημειακή πρόβλεψη $p(t)$.

Σχετικά με τον όρο διάχυσης, καθώς η σημειακή πρόβλεψη για την παραγωγή καθώς και η πραγματική τιμή για την ηλιακή παραγωγή ενέργειας είναι κανονικοποιημένες θα θέλαμε η διαδικασία να ακολουθεί αυτή την συμπεριφορά και να ανήκει στο διάστημα $[0, 1]$. Αυτήν την ιδιότητα όπως έχουμε ήδη παρουσιάσει την ικανοποιούν οι διαχύσεις Pearson και συγκεκριμένα η υποκλάση αυτών (**Jacobi Diffusions**). Συνεπώς ο όρος διάχυσης περιγράφεται απο την παρακάτω συνάρτηση

$$\sigma(X_t, t; \theta) = \sqrt{2a\theta_0 X_t(1 - X_t)}$$

όπου $\theta_0, a > 0$ άγνωστες παράμετροι. Ο όρος αυτός έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στην βιβλιογραφία και συγκεκριμένα στην μαθηματική βιολογία, και η $\Sigma\Delta E$ είναι γνωστή ως **Wright-Fisher**.

$$\begin{cases} dX_t = -\theta(t)(X_t - p_t)dt + \sqrt{2a\theta_0 X_t(1 - X_t)}dB_t & t \in [0, T] \\ X_0 = x_0 \in [0, 1] \end{cases}$$

Θεωρούμε επιπλέον οτι η συνάρτηση που μοντελοποιεί τις σημειακές προβλέψεις $(p_t)_{t \in [0, T]}$ και $0 \leq p_t \leq 1$ είναι ομαλή έτσι ώστε

$$\sup_{t \in [0, T]} (|p_t| + |\dot{p}_t|) < +\infty$$

Ένα πρώτο πράγμα που πρέπει να εξασφαλιστεί είναι η ύπαρξη λύσης για την παραπάνω $\Sigma\Delta E$ μέσα στο χωρίο $[0, 1]$. Όπως θα παρουσιαστεί όμως και στην συνέχεια δεν θα επιχειρηθεί η λύση της αλλά θα προσεγγιστεί αριθμητικά με μεθόδους που έχουν ήδη παρουσιαστεί. Για να δείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης θα ασχοληθούμε με το πιο απλό μοντέλο όπου θεωρούμε οτι η παράμετρος της ταχύτητας στον όρο τάσης είναι μια σταθερή συνάρτηση και δεν είναι χρονοεξαρτώμενη. Οι παρακάτω αποδείξεις επικεντρώνονται στα [21], [6]. Έστω λοιπόν οτι έχουμε μια κλασσική Wright-Fisher διαδικασία όπου παίρνει τιμές σε ένα χωρίο $D = [0, 1]$ και ικανοποιεί την $\Sigma\Delta E$

$$X_t = x + \int_0^t (a - kX_t)dt + \int_0^t \sigma \sqrt{X_t(1 - X_t)}dB_t \quad t \geq 0$$

όπου η αρχική συνθήκη $x \in [0, 1]$. Για να αποδειχθεί θα χρησιμοποιηθεί το ακόλουθο θεώρημα των Yamada και Watanabe.

Θεώρημα 3.1.1. (Yamada και Watanabe)

Θεωρούμε την μονοδιάσταση Στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

όπου οι συντελεστες ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες.

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$$

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq h(|x - y|)$$

για κάθε $0 \leq t < \infty$, για $x \in R, y \in R$ και K είναι μια θετική σταθερά και $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ είναι μια αυστηρώς αύξουσα συνάρτηση με $h(0) = 0$ και

$$\int_{(0, \epsilon)} h^{-2}(u)du = \infty \quad \forall \epsilon > 0$$

η λεγόμενη Osgood συνθήκη. Τότε η ισχυρή μοναδικότητα εξασφαλίζεται για την λύση της ΣΔΕ.

Λήμμα 3.1.1.

Για την μονοδιάστατη περίπτωση αν ο όρος τάσης είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση και ο όρος διάχυσης σ είναι Holder συνεχής με εκθέτη $1/2$, δηλαδή υπάρχει σταθερά $C > 0$ τ.ω

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C\sqrt{|x - y|} \forall 0 \leq t < \infty$$

τότε η μοναδικότητα pathwise της λύσης της ΣΔΕ εξασφαλίζεται για κάθε αρχική κατανομή μ .

Θεώρημα 3.1.2. (Υπαρξη και μοναδικότητα λύσης)

Έστω $0 \leq a \leq k$, $\sigma \in R$ και $x \in [0, 1]$. Τότε υπάρχει μοναδική ισχυρή λύση X_t^x της Wright-Fisher ΣΔΕ και αυτή η λύση ικανοποιεί ότι $P(\forall t \geq 0, X_t^x \in [0, 1]) = 1$.

Απόδειξη. ■

Αρχικά θεωρούμε την Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση

$$X_t = x + \int_0^t (a - kX_s)ds + \int_0^t \sigma \sqrt{|X_s(1 - X_s)|}dB_s$$

Η συνάρτηση $x \in R \mapsto \sqrt{|x(1 - x)|}$ είναι Holder συνεχής με εκθέτη $1/2$ συνεπώς απο το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να εξασφαλίσουμε την μοναδικότητα της ισχυρής λύσης της ΣΔΕ. Θα αποδειχθεί τώρα ότι $\forall t \geq 0, X_t \in [0, 1]$ σχεδόν βεβαίως. Για να γίνει αυτό θα χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις Yamada ψ_n όπου είναι C^2 συναρτήσεις και ικανοποιούν τις συνθήκες

$$|\psi_n(x)| \rightarrow |x| \text{ for } n \rightarrow \infty$$

$$x|\psi_n'(x)| \rightarrow |x| \text{ for } n \rightarrow \infty$$

$$|\psi_n(x)| \vee |x\psi_n'(x)| \leq |x| \quad \psi_n'(x) \leq 1$$

και

$$\psi_n''(x) = g_n(|x|) \geq 0 \quad g_n(x) \cdot x \leq 2/n$$

Αν εφαρμόσουμε την φόρμουλα Ito για τις συναρτήσεις αυτές λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \psi_n(X_t) &= \psi_n(x) + \int_0^t \psi_n'(X_s)(a - kX_s)ds + \int_0^t \sigma \psi_n'(X_s) \sqrt{|X_s(1 - X_s)|}dB_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} g_n(|X_s|) |X_s| |1 - X_s| ds \end{aligned}$$

Παίρνοντας μέσες τιμές και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\psi_n'(x) \leq 1$ και $g_n(x) \cdot x \leq 2/n$

$$E[\psi_n(X_t)] \leq \psi_n(x) + \int_0^t (a - kE[X_s \psi_n'(X_s)]) ds + \frac{\sigma^2 t}{n} \int_0^t E[|1 - X_s|] ds$$

Καθώς $\psi_n(z) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} |z|$, $z\psi_n'(z) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} |z|$ και $|\psi_n(z)| \vee |z\psi_n'(z)| \leq |z|$ λαμβάνουμε απο το Θεώρημα Lebesgue οτι

$$E[|X_t|] \leq x + \int_0^t (a - kE[|X_s|]) ds$$

Επίσης αν πάρουμε την μέση τιμή στην ΣΔΕ

$$X_t = x + \int_0^t (a - kX_s) ds + \int_0^t \sigma \sqrt{|X_s|} dB_s \quad t \geq 0$$

και θεωρώντας οτι το στοχαστικό ολοκλήρωμα αποτελεί ένα martingale λαμβάνουμε οτι

$$E[X_t] = x + \int_0^t (a - kE[X_s]) ds$$

και συνεπώς απο τις σχέσεις

$$E[|X_t|] \leq x + \int_0^t (a - kE[|X_s|]) ds$$

και

$$E[X_t] = x + \int_0^t (a - kE[X_s]) ds$$

καταλήγουμε οτι

$$E[|X_t|] - E[X_t] \leq -k \int_0^t (E[|X_s|] - E[X_s]) ds$$

Τέλος με χρήση του Λήμματος Gronwall λαμβάνουμε $E[|X_t|] = E[X_t]$

και συνεπώς $P(X_t \geq 0) = 1 \quad \forall t \geq 0$. Με παρόμοιο τρόπο αν θεωρήσουμε την αρχική διαδικασία $1 - X_t$ μπορούμε να δείξουμε οτι

$$P(1 - X_t \geq 0) = 1$$

η οποία ολοκληρώνει το δεύτερο μέρος της απόδειξης οτι δηλαδή σχεδόν βέβαια η λύση της ΣΔΕ ανήκει στο διάστημα $D = [0, 1]$

■

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των ΣΔΕ και συγκεκριμένα για Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις όπου οι λύσεις τους ανήκουν μέσα σε ένα χωρίο D , είναι η συνθήκη Feller. Για $m \geq 0$ θεωρούμε τον χρόνο διακοπής

$$\tau_m = \inf\{t \geq 0, X_t = m\}$$

Για $m, m' \geq 0$ θέτουμε $\tau_{m, m'} = \min(\tau_m, \tau_{m'})$ όπου γνωρίζουμε οτι είναι ένας χρόνος διακοπής. Στόχος των συνθηκών Feller είναι να βρεθούν οι συνθήκες κάτω απο τις οποίες το μοντέλο που έχουμε κατασκευάσει με τον όρο διάχυσης

$$\sigma(X_t, t; \theta) = \sqrt{2a\theta_0 X_t(1 - X_t)}$$

δεν καταλήγει ποτέ στα όρια του διαστήματος $[0, 1]$. [21].

Θεώρημα 3.1.3.

Έστω $x \in (0, 1)$ και $\tau_0 = \inf\{t \geq 0, X_t = 0\}$ και $\tau_1 = \inf\{t \geq 0, X_t = 1\}$ χρόνοι άφιξης με $\inf \emptyset = \infty$. Τότε $\min(\tau_0, \tau_1) = +\infty$ αν και μόνο εάν

$$\theta_t \geq \max\left(\frac{a\theta_0}{1-p_t}, \frac{a\theta_0}{p_t}\right)$$

Απόδειξη. ■

Για όλα τα $t \in [0, \tau]$ έχουμε οτι

$$\frac{dX_t}{X_t} = \left(\frac{\theta_t p_t}{X_t} - \theta_t\right)dt + \sqrt{\frac{2a\theta_0(1-X_t)}{X_t}}dB_t$$

τ.ω

$$X_t = x_0 \exp\left(\int_0^t \frac{\theta_s p_s - \theta_0 a}{X_s} ds + a\theta_0 t - \int_0^t \theta_s ds + M_t\right)$$

όπου $\sqrt{\frac{2a\theta_0(1-X_s)}{X_s}}dB_s$ είναι ένα συνεχές martingale. Τότε για κάθε $t \in [0, T]$ έχουμε οτι $\theta_t p_t - a\theta_0 \geq 0$ και

$$X_t \geq x_0 \exp\left(a\theta_0 t - \int_0^t \theta_s ds + M_t\right)$$

Αν υποθέσουμε τώρα οτι $\{\tau_0 < \infty\}$ και αφήνοντας $t \rightarrow \tau_0$

$$\lim_{t \rightarrow \tau_0} \mathbb{1}_{\{\tau_0 < \infty\}} M_{t \wedge \tau_0} = -\mathbb{1}_{\{\tau_0 < \infty\}} \infty$$

Οστώσο η τελευταία σχέση καταλήγει σε **άτοπο** αφού για ένα συνεχές martingale όπως το M_t δεν μπορεί να συγκλινει σ.β στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Συνεπώς καταλήγουμε οτι $\tau_0 = \infty$. Αν εφαρμόσουμε το ίδιο για τη διαδικασία $Y_t = 1 - X_t$ η οποία αποτελεί λύση της ΣΔΕ

$$dY_t = (\theta_t(1-p_t) - \theta_t Y_t)dt - \sqrt{2a\theta_0 Y_t(1-Y_t)}dB_t$$

θα καταλήξουμε στο γεγονός οτι $\tau_1 = \infty$ χρησιμοποιώντας την σχέση $\theta_t(1-p_t) - a\theta_0 \geq 0$. ■

Σημείωση 1.

Η συνθήκη που παρουσιάστηκε παραπάνω

$$\theta_t \geq \max\left(\frac{a\theta_0}{1-p_t}, \frac{a\theta_0}{p_t}\right)$$

δεν εξασφαλίζει την περίπτωση όπου η θ_t απειρίζεται για $p_t = 0$ ή $p_t = 1$. Για τον λόγο αυτό θα χρησιμοποιηθεί ένας μετασχηματισμός της συνάρτησης που εκφράζει την προβλεπόμενη παραγωγή

$$p_t^\epsilon = \begin{cases} \epsilon & p_t < \epsilon \\ p_t & \epsilon \leq p_t < 1 - \epsilon \\ 1 - \epsilon & p_t \geq 1 - \epsilon \end{cases}$$

ώστε να ικανοποιεί την συνθήκη $p_t^\epsilon \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ για κάθε $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Συνεπώς για κάθε σύνολο δεδομένων που εκφράζει την προβλεπόμενη παραγωγή η οποία έχει περιοριστεί στο σύνολο $[0,1]$ θα εφαρμόζεται ο παραπάνω μετασχηματισμός πριν την κατασκευή των Πιθανοτικών προβλέψεων ώστε να εξασφαλιστεί ότι ο όρος ταχύτητας $(\theta_t)_{t \in [0,T]}$ είναι πεπερασμένος. Στο υπόλοιπο της εργασίας θα χρησιμοποιείται μόνο ο συμβολισμός p_t όπου θα εκφράζει την μετασχηματισμένη τελική συνάρτηση.

3.1.1 Στατιστική Συμπερασματολογία - Εκτίμηση Παραμέτρων

Η στατιστική συμπερασματολογία για την εκτίμηση των παραμέτρων της πρώτης ΣΔΕ βασίζεται στις ροπές της Στοχαστικής Διαφορικής εξίσωσης που κατασκευάστηκε

$$\begin{cases} dX_t = -\theta(t)(X_t - p_t)dt + \sqrt{2a\theta_0 X_t(1 - X_t)}dB_t & t \in [0, T] \\ X_0 = x_0 \in [0, 1] \end{cases}$$

Ορίζουμε ως $\mu_X(t) = E[X_t]$, $v_x(t) = Var[X_t] = E[(X_t - \mu_X(t))^2]$ και $v_X(t, s) = cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))]$ ως την μέση τιμή, διασπορά και συνδιακύμανση της στοχαστική διαδικασίας. Θεωρώντας ότι κάτω από τις παραπάνω συνθήκες το στοχαστικό ολοκλήρωμα αποτελεί ένα Martingale μπορούμε να γράψουμε τις Διαφορικές Εξισώσεις που εκφράζουν την μέση τιμή, διασπορά και συνδιακύμανση της στοχαστική διαδικασίας.

$$\begin{cases} dE[X_t] = -\theta(t)(\underbrace{E[X_t]}_{\mu_X(t)} - p(t))dt \\ E[X_0] = x_0 \end{cases}$$

Η οποία μπορεί να λυθεί σε κλειστή μορφή

$$\mu_X(t) = e^{-\int_0^t \theta(s)ds} (\int_0^t \theta(s)p(s)e^{\int_0^s \theta(u)du} ds + \mu_0)$$

όπως έχουμε παρουσιάσει σε προηγούμενη ενότητα η Διαφορική Εξίσωση για την διασπορά μπορεί να υπολογιστεί αν εφαρμόσουμε την Φόρμουλα Ito στην $g(x, t) = x^2$.

$$\begin{aligned} dY(t) &= 2X_t dX_t + \frac{1}{2} 2\sigma^2(X_t)(dX_t)^2 \\ &= 2X_t(b(X_t))dt + \sigma(X_t)dW_t + \sigma^2(X_t)dt \\ &= 2(X_t b(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t))dt + 2X_t\sigma(X_t)dW_t \end{aligned}$$

Αν πάρουμε πάλι μέση τιμή και εφόσον $X_t \in [0, 1]$ σχεδόν βεβαίως.

$$\begin{aligned} dv(t) &= dE[X_t^2] - d(\mu^2(t)) \\ &= dE[X_t^2] - 2\mu(t)d\mu(t) \\ &= -2\theta(t)((1 + \alpha)v_x(t) = \alpha\mu_x(t)(1 - \mu_x(t)))dt \quad t > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} dv_x(t) = -2\theta(t)((1 + \alpha)v_x(t) - \alpha\mu_x(t)(1 - \mu_x(t)))dt & t > 0 \\ v_x(0) = 0 \end{cases}$$

Και καταλήγουμε πάλι σε μια κλειστής μορφή λύση.

$$v_x(t) = e^{-2(1+\alpha)\int_0^t \theta(s)ds} \left(\int_0^t 2\theta(s)\alpha\mu_x(s)(1 - \mu_x(s))e^{2(1+\alpha)\int_0^s \theta(s)du} ds \right)$$

Η Διαφορική εξίσωση για την συνδιακύμανση μεταξύ δύο διαφορετικών χρονικών στιγμών είναι

$$\begin{cases} \frac{dv_X(t,s)}{dt} = -\theta_t v_X(t,s) \forall t > s \\ v_X(t,s) = v_X(s), \quad t = s \end{cases}$$

Απο την οποία λαμβάνουμε

$$v_X(t,s) = v_X(s)e^{-\int_0^t \theta(u)du} \quad \forall t > s$$

Υπολογισμός συνάρτησης Πιθανοφάνειας για την παραγωγή

Συνεπώς χρησιμοποιώντας τις λύσεις των παραπάνω συστημάτων Διαφορικών εξισώσεων μπορούμε να βρούμε έναν τρόπο για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων μετάβασης αν θεωρήσουμε ότι οι δύο πρώτες ροπές περιγράφουν πλήρως την κατανομή που θα θεωρησουμε για την προσεγγίση. Μια πρώτη ιδέα όπως έχουμε δει είναι να προσεγγίσουμε τις πιθανότητες αυτές μετάβασης μέσω μιας Γκαουσιανής πυκνότητας πιθανότητας. Μπορούμε να γράψουμε λοιπόν την συνάρτηση πιθανοφάνειας έχοντας υπολογίσει τις πρώτες δύο ροπές του της διαδικασίας απο την

$$L(\theta; d_{JN}) = \prod_{j=1}^J (2\pi)^{-N/2} |\Sigma^{(j)}(\theta)|^{-1/2} \exp[(d^{(j)} - \mu^j(\theta))^T [\Sigma^{(j)}(\theta)]^{-1} (d^{(j)} - \mu^j(\theta))]$$

όπου $\mu^j(\theta) = (\mu(t_1), \dots, \mu(t_N))$, $\Sigma^{(j)}(\theta) = V^{(j)}(\theta) + \Sigma^{\epsilon,(j)}$.

Απο την παραπάνω και δοθέντος ενός δείγματος

$$d_{JN} = \{d^{(j)} = \{d_{ji} = X^{(j)}(t_i)\}_{i=1}^N\}_{j=1}^J$$

θα μπορούσαμε να μεγιστοποιήσουμε την εν λόγω συνάρτηση πιθανοφάνειας και να βρούμε τις εκτιμήσεις μέγιστης πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους της $\Sigma\Delta E$.

3.2 ΣΔΕ 2 : With Derivative Tracking

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί μια νέα ΣΔΕ η οποία προτάθηκε στο [12]. Το μοντέλο της συγκεκριμένης έρευνας επικεντρώνεται σε ένα μοντέλο για την κατασκευή Πιθανοτικών προβλέψεων για την στοχαστική διαδικασία της παραγωγής αιολικής ενέργειας καθώς και την χρήση του μοντέλου αυτού για την αξιολόγηση του σφάλματος διαφορετικών σημειακών προβλέψεων που ένας παραγωγός μπορεί να έχει διαθέσιμες απο εταιρείες που παράγουν NWP. Σκοπός της παρούσας εργασίας λοιπόν είναι να εφαρμόσει το μοντέλο που παρουσιάστηκε απο στο [12] και να το επεκτείνει σε μια διαδικασία για την παραγωγή ηλιακών πιθανοτικών προβλέψεων. Στην

συνέχεια θα παρουσιαστούν κάποιες βασικές μετρικές αξιολόγησης των μοντέλων αυτών καθώς και τα οικονομικά οφέλη που αποφέρει καθένα απο τα μοντέλα για τις στρατηγικές συμμετοχής στις Αγορές Ενέργειας που θα παρουσιάστούν στην [Ενότητα 5](#).

Το μοντέλο το οποίο παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στο [12] παρουσιάζει διαφορά στον όρο τάσης. Συγκεκριμένα η ιδέα είναι να χρησιμοποιηθεί πέρα απο την σημειακή πρόβλεψη και η παράγωγος αυτής της ομαλής συνάρτησης, όπως παρακάτω

$$a(X_t; p_t, \dot{p}_t, \theta) = \dot{p}_t - \theta_t(X_t - p_t)$$

Η ιδέα πίσω απο αυτήν την επιλογή είναι οτι η παράγωγος της συνάρτησης πρόβλεψης θα εξασφαλίσει καλύτερες ιδιότητες ως προς το **mean-reverting property**.

Αν θεωρήσουμε οτι $E[X_0] = p_0$ και εφαρμόσουμε την φόρμουλα Ito για το σφάλμα της πρόβλεψης, δηλαδή στην $V_t = X_t - p_t$, όπου p_t πάλι μια ντετερμινιστική συνάρτηση λαμβάνουμε οτι

$$dV_t = dX_t - \dot{p}_t dt = -\theta_t V_t dt + b_t dB_t$$

Παίρνοντας μέσες τιμές

$$\frac{dE[V_t]}{dt} = -\theta_t E[V_t]$$

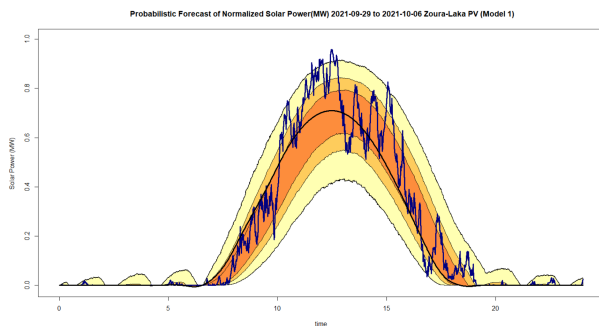
Το οποίο λύνοντας το δίνει $E[V_t] = 0$, $t > 0$. Η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει οτι η Στοχαστική Διαδικασία είναι κεντραρισμένη γύρω απο την σημειακή πρόβλεψη. Σε αντίθετη περίπτωση αν δεν θεωρηθεί η παράγωγος της συνάρτησης σημειακής πρόβλεψης παρατηρείται μια πιο αργή συμπεριφορά στην δυνατότητα της λύσης της ΣΔΕ να προσεγγίσει την σημειακή πρόβλεψη.

$$a(X_t; p_t, \theta) = -\theta_0(X_t - p_t) \quad \theta_0 > 0$$

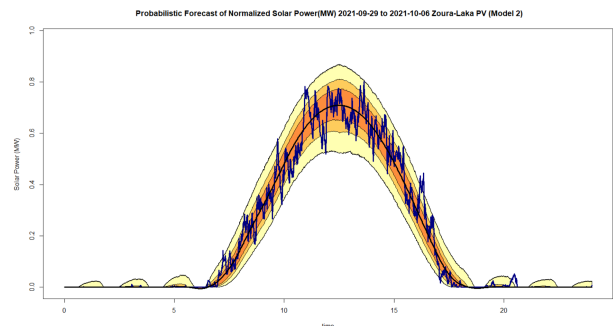
Τότε δοθέντος πάλι $E[X_0] = p_0$ η διάχυση αυτή έχει μέση τιμή

$$E[X_t] = p_t - e^{-\theta_0 t} \int_0^t \dot{p}_s e^{\theta_0 s} ds \neq p_t$$

Για να κάνουμε πιο εμφανή την παραπάνω ιδιότητα παρουσιάζουμε παρακάτω μια Πιθανοτική πρόβλεψη για μια δεδομένη ημέρα του χρόνου που κατασκευάστηκε απο τα δύο μοντέλα ΣΔΕ.



(α') ΣΔΕ 1 : Πρόβλεψη ηλιακής Παραγωγής Ενέργειας 2021-09-29



(β') ΣΔΕ 2 : Πρόβλεψη ηλιακής Παραγωγής Ενέργειας 2021-09-29

Παρατηρούμε λοιπόν οτι το μοντέλο με την mean-reverting ιδιότητα όπου δεν περιέχει την παράγωγο της συνάρτησης πρόβλεψης δεν έχει την centering ιδιότητα γύρω απο την σημειακή

πρόβλεψη. Σε αντίθετη περίπτωση στο δεξιά σχήμα παρατηρείται ότι το δεύτερο μοντέλο που κατασκευάστηκε είναι κεντραρισμένο γύρω από την σημειακή πρόβλεψη, γεγονός που θα αποδείξουμε στην συνέχεια ότι είναι αρκετά σημαντικό στο κομμάτι των βέλτιστων στρατηγικών και σε διαδικασίες λήψης αποφάσεων.

Σχετικά με τον όρο διάχυσης επιλέχθηκε πάλι μια συνάρτηση της μορφής

$$\sigma(X_t; \theta) \sqrt{2a\theta_0 X_t(1 - X_t)}$$

για να εξασφαλισθεί ότι η διαδικασία ανήκει στο χωρίο $[0,1]$. Συνεπώς καταλήγουμε σε μια Στοχαστική Διαφορική εξίσωση για το δεύτερο μοντέλο της μορφής.

$$\begin{cases} dX_t = (\dot{p}_t - \theta_t(X_t - p_t))dt + \sqrt{2a\theta_0 X_t(1 - X_t)}dW_t & t \in [0, T] \\ X_0 = x_0 \in [0, 1] \end{cases}$$

Για να εξασφαλιστεί, όπως έγινε και στον ορισμό του πρώτου μοντέλου, ότι υπάρχει μια X_t η οποία είναι ισχυρή λύση της ΣΔΕ για κάθε $t \in [0, T]$ με την διαδικασία να ανήκει $[0, 1]$ σχεδόν βέβαια, η συνάρτηση της ταχύτητας επιστροφής πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη

$$\theta_t \geq \max\left(\frac{a\theta_0 + \dot{p}_t}{1 - p_t}, \frac{a\theta_0 - \dot{p}_t}{p_t}\right)$$

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για την ΣΔΕ που έχουμε κατασκευάσει.

Θεώρημα 3.2.1. (Ύπαρξη και Μοναδικότητα)

Έστω

$$\forall t \in [0, T], \quad 0 \leq \dot{p}_t + \theta_t p_t \leq \theta_t \quad \text{και} \quad \sup_{t \in [0, T]} |\theta_t| < \infty$$

Τότε υπάρχει μοναδική ισχυρή λύση της ΣΔΕ έτσι ώστε για κάθε $t \in [0, T]$, $X_t \in [0, 1]$ σ.β.

Απόδειξη.

Η απόδειξη είναι αρκετά παρόμοια με αυτή που παρουσιάστηκε παραπάνω για το πρώτο μοντέλο που κατασκευάστηκε. Θεωρούμε αρχικά την ακόλουθη ΣΔΕ $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} X_t = x_0 + \int_0^t (\int p_s - \theta_s(X_s - p_s))ds \\ + \int_0^t \sqrt{2a\theta_0 |X_s(1 - X_s)|} dB_s \quad 0 \leq x_0 \leq 1 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα που χρησιμοποιήθηκε και παραπάνω για τον όρο διάχυσης **π**ορεί να δειχθεί η ύπαρξη και η μοναδικότητα ισχυρής λύσης για την ΣΔΕ. Επιπλέον αφού ο όρος διάχυσης είναι γραμμικής τάξης, έχουμε ότι για $p > 0$ οι ροπές της λύσης είναι πεπερασμένες

$$E\left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^p\right] < \infty$$

Συνεπώς το μόνο που μένει να αποδειχθεί είναι ότι με πιθανότητα 1 η διαδικασία παραμένει εντός του χωρίου $[0, 1]$. Θα γίνει πάλι χρήση των συναρτήσεων Yamada $\psi_n \in C^2$. Εφαρμόζοντας την φόρμουλα Ito έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \psi_n(X_t) &= \psi_n(x_0) + \int_0^t \psi'_n(X_s)(\dot{p}_s + \theta_s p_s - \theta_s X_s) ds \\ &\quad + \int_0^t \psi'_n(X_s) \sqrt{2a\theta_0 |X_s(1 - X_s)|} dB_s \\ &\quad + a\theta_0 \int_0^t g_n(|X_s|) |X_s(1 - X_s)| ds \end{aligned}$$

Απο την σχέση $0 \leq \dot{p}_t + \theta_t p_t \leq \theta_t$ και εφόσον η ροπές είναι πεπερασμένες

$$\begin{aligned} E[\psi_n(X_t)] &\leq \psi_n(x_0) + \int_0^t (\dot{p}_s + \theta_s p_s - \theta_s E[\psi'_n(X_s) X_s]) ds \\ &\quad + \frac{2a\theta_0}{n} \int_0^t E[|1 - X_s|] ds \end{aligned}$$

Αν πάρουμε στην παραπάνω σχέση $n \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Lebesgue παίρνουμε τοι

$$E[|X_t|] \leq x_0 + \int_0^t (\dot{p}_s + \theta_s p_s - \theta_s E[|X_s|]) ds$$

Με παρόμοιο τρόπο αν πάρουμε την μέση τιμή στην αρχική ΣΔΕ που έχουμε ορίσει καταλήγουμε στην

$$E[X_t] = x_0 + \int_0^t (\dot{p}_s + \theta_s p_s - \theta_s E[X_s]) ds$$

Άρα

$$E[|X_t| - X_t] \leq \int_0^t \theta_s E[X_s - |X_s|] ds$$

Απο το λήμμα του Gronwall λαμβάνουμε ότι $E[|X_t|] = E[X_t]$ για κάθε $t \in [0, T]$. Συνεπώς η διαδικασία που έχει οριστεί ικανοποιεί σιγουρα την σχέση $X_t \geq 0$. Παρόμοια να θεωρήσουμε την $Y_t = 1 - X_t$ όπου ικανοποιεί της ΣΔΕ

$$dY_t = (\theta_t(1 - p_t) - \dot{p}_t - \theta_t Y_t) dt - \sqrt{2a\theta_0 Y_t(1 - Y_t)} dB_t$$

λαμβάνουμε ότι

$$P(1 - X_t \geq 0) = 1$$

η οποία ολοκληρώνει το δεύτερο μέρος της απόδειξης ότι δηλαδή σχεδόν βέβαια η λύση της ΣΔΕ ανήκει στο διάστημα $D = [0, 1]$.

■

Επιπλέον παρουσιάζουμε το αντίστοιχο θεώρημα για την Feller συνθήκη του δεύτερου μοντέλου.

Θεώρημα 3.2.2. (Feller ΣΔΕ 2)

Έστω ότι οι συνθήκες του θεωρήματος ύπαεξης και μοναδικότητας λύσης για την δεύτερη ΣΔΕ ικανοποιούνται με $x_0 \in [0, 1]$. Θέτοντας $\tau_0 := \inf\{t \in [0, T], X_t = 0\}$ και $\tau_1 := \inf\{t \in [0, T], X_t = 1\}$ με την συνθήκη για τους χρόνος διακοπής $\inf \emptyset = +\infty$. Θεωρούμε επίσης ότι για όλα τα $t \in [0, T]$ και $p_t \in [0, 1]$ ισχύει ότι

$$\theta_t \geq \max\left(\frac{a\theta_0 + \dot{p}_t}{1 - p_t}, \frac{a\theta_0 - \dot{p}_t}{p_t}\right)$$

Τότε $\tau_0 = \tau_1 = +\infty$ σχεδόν βέβαια.

Απόδειξη. ■

Για $t \in [0, \tau_0]$

$$\frac{dX_t}{X_t} = \left(\frac{\dot{p}_t + \theta_t p_t}{X_t} - \theta_t\right)dt + \sqrt{\frac{2a\theta_0(1 - X_t)}{X_t}}dB_t$$

έτσι ώστε

$$X_t = x_0 \exp\left(\int_0^t \frac{\dot{p}_s + \theta_s p_s - \theta_0 a}{X_s} ds + a\theta_0 t - \int_0^t \theta_s ds + M_t\right)$$

όπου $M_t = \int_0^t \sqrt{\frac{2a\theta_0(1 - X_s)}{X_s}} dB_s$ ένα συνεχές martingale. Για κάθε $t \in [0, T]$ ισχύει ότι $\dot{p}_t + \theta_t p_t - \theta_0 a \geq 0$ οπότε

$$X_t \geq x_0 \exp\left(a\theta_0 t - \int_0^t \theta_s ds + M_t\right)$$

Υποθέτοντας ότι $\{\tau_0 < \infty\}$ τότε για $t \rightarrow \tau_0$ λαμβάνουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{\tau_0 < \infty\}} M_{t \vee \tau_0} = -\mathbb{1}_{\{\tau_0 < \infty\}} \infty \quad \sigma.\beta$$

Αυτό όμως καταλήγει σε άτοπο αφού όπως γνωρίζουμε ένα συνεχές martingale όπως η Διαδικασία Brown δεν μπορεί να συγκλίνει σ.β στο $\infty, -\infty$. Άρα $\tau_0 = \infty$ σχεδόν βέβαια. Παρόμοια αν θεωρήσουμε την διαδικασία $Y_t = 1 - X_t$ λαμβάνουμε ότι $\tau_1 = \infty$.

3.2.1 Στατιστική Συμπερασματολογία - Εκτίμηση Παραμέτρων

Για την εκτίμηση των παραμέτρων του δεύτερου μοντέλου ακολουθήσαμε διαφορετική προσέγγιση η οποία παρουσιάζεται στο [12]. Συγκεκριμένα στην ερευνητική αυτή υπολογίζονται οι παράμετροι του μοντέλου χρησιμοποιώντας μια ΣΔΕ η οποία μοντελοποιεί το σφάλμα των προβλέψεων. Αν θεωρήσουμε λοιπόν μια ΣΔΕ η οποία γράφεται ως

$$V_t = X_t - p_t$$

Τότε εφαρμόζοντας το Λήμμα του Ito έχουμε ότι

$$\begin{cases} dV_t = -\theta_t V_t dt + \sqrt{2a\theta_0(V_t + p_t)(1 - V_t - p_t)} dB_t & t \in [0, T] \\ V_0 = v_0 \in [-p_0, 1 - p_0] \end{cases}$$

Η παραπάνω Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση εκφράζει το σφάλμα της ποσότητας που θέλουμε να προβλέψουμε, στην περίπτωση μας την ηλιακή παραγωγή ενέργειας. Θα παρουσιαστεί μια μεθοδολογία για την εκτίμηση των παραμέτρων της παραπάνω ΣΔΕ. Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα δείγμα M προσομοιώσεων της ανέλιξης Ito $V = \{V_t, t \in [0, T]\}$, όπου κάθε προσομοίωση ξεκινάει ε διαφορετικό χρόνο $t_j, j = 1, \dots, M$ και γίνεται δειγματοληψία σε $N + 1$ ισαπέχοντα διακριτά σημεία με συγκεκριμένο μήκος διαστήματος Δ . Έστω $V^{M, N+1} = \{V_{t_1^{N+1}}, V_{t_2^{N+1}}, \dots, V_{t_M^{N+1}}\}$ το οποίο εκφράζει ακριβώς αυτό το τυχαίο δείγμα.

Επιπλέον συμβολίζουμε με $\rho(v|v_{j,i-1}; \theta)$ την δεσμευμένη πυκνότητα μεταβίβασης της $V_{j,i}$ δοθέντος την $v_{j,i-1}$, υπολογισμένη στο v και $\theta = (\theta_0, a)$ οι άγνωστοι παράμετροι του μοντέλου.

Χρησιμοποιώντας παρόμοιους συλλογισμούς με την προηγούμενη ΣΔΕ, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της διαδικασίας Ito, ότι αποτελεί μια Μαρκοβιανή διαδικασία και συνεπώς να γράψουμε την συνάρτηση πιθανοφάνειας δοθέντος του τυχαίου δείγματος και των άγνωστων παραμέτρων θ ως

$$\mathcal{L}(\theta; V^{M, N+1}) = \prod_{j=1}^M \left\{ \prod_{i=1}^N \rho(V_{j,i} | V_{j,i-1}; p[t_{j,i-1}, t_{j,i}], \theta) \right\}$$

Συνεπώς ο ακριβής υπολογισμός την συνάρτησης πιθανοφάνειας ανάγεται στο πρόβλημα υπολογισμού των πυκνοτήτων μετάβασης της στοχαστικής διαδικασίας V σε κλειστή μορφή, που λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας την οποία εξασφαλίζει η παραπάνω ανέλιξη Ito αρκεί να λυθεί όπως αναφέραμε παραπάνω το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Fokker Planck Equation [31], [18].

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} \rho(v, t | v_{j,i-1}, t_{j,i-1}; \theta) &= -\frac{\partial}{\partial v} (-\theta_t v \rho(v, t | v_{j,i-1}, t_{j,i-1}; \theta)) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (2\theta_0 a (v + p_t) (1 - v - p_t) \rho(v, t | v_{j,i-1}, t_{j,i-1}; \theta)) \end{aligned}$$

δοθέντος την αρχική συνθήκη $\rho(v, t_{j,i-1}; \theta) = \delta(v - V_{j,i-1})$. Όπως αναφέραμε και στην περίπτωση του πρώτου μοντέλου η λύση της παραπάνω ΜΔΕ εν γέννη είναι αρκετά δύσκολο να βρεθεί, συνεπώς χρειαζόμαστε κατάλληλες αριθμητικές μεθόδους για να προσεγγίσουμε τις πυκνότητες μετάβασης της ΣΔΕ. Ένας τρόπος ο οποίος έχει ήδη παρουσιαστεί είναι η προσέγγιση των

πυκνοτήτων μετάβασης της λύσης της ΣΔΕ για την διαδικασία των σφαλμάτων των προβλέψεων με διαδικασίες Gauss. Οι Caballero και Tampone[12], προτείνουν να προσεγγισθούν οι πυκνότητες μετάβασης μέσω μια κατανομής Βήτα. Σαν πρώτη θεώρηση αυτό είναι πιο λογικό διότι κάτω απο συγκεκριμένες συνθήκες έχουμε δείξει οτι η διάχυση Jacobi έχει ως κατανομή ισορροπίας την κατανομή Βήτα.

Για την ΣΔΕ

$$\begin{cases} dV_t = -\theta_t V_t dt + \sqrt{2a\theta_0(V_t + p_t)(1 - V_t - p_t)} dB_t & t \in [0, T] \\ V_0 = v_0 \in [-p_0, 1 - p_0] \end{cases}$$

μπορούμε αρχικά να υπολογίσουμε της διαφορικές εξισώσεις όπου ικανοποιούν οι ροπές της διαδικασίας V_t . Συγκεκριμένα $m_1(t) = E[V_t] = e^{-\int_{t_{j,i-1}}^t \theta_s ds} E[V_{t_{j,i-1}}]$ για $t \in [t_{j,i-1}, t_{j,i}]$, $j=1, \dots, M$ και $i=1, \dots, N$. Για $m \geq 2$ χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ito

$$\begin{aligned} \frac{dE[V_t^m]}{dt} &= -m(\theta_t + (m-1)a\theta_0)E[V_t^m] \\ &+ m(m-1)a\theta_0(1-2p_t)E[V_t^{m-1}] \\ &+ m(m-1)a\theta_0p_t(1-p_t)E[V_t^{m-2}] \end{aligned}$$

μπορούμε να βρούμε τις ροπές πεπερασμένης τάξης $m > 0$. Συνεπώς για τις δύο πρώτες ροπές της διαδικασίας V , $m_1(t)$ και $m_2(t) = E[V_t^2]$ μπορούν να βρεθούν λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{dm_1(t)}{dt} = m_1(t)\theta_t \\ \frac{dm_2(t)}{dt} = -(\theta_t + a\theta_0)m_2(t) + 2a\theta_0(1-2p_t)m_1(t) + 2a\theta_0p_t(1-p_t) \end{cases}$$

με αρχικές συνθήκες $m_1(t_{j,i-1}) = v_{j,i-1}$ και $m_2(t_{j,i-1}) = v_{j,i-1}^2$. Έχοντας βρει λοιπόν το σύστημα των ΣΔΕ για τις πρώτες δύο ροπές θα εφαρμοστεί μια τεχνική Μεθόδου Ροπών για την προσεγγιστική κατανομή Βήτα. Η κατανομή Βήτα χαρακτηρίζεται απο δύο θετικές παραμέτρους a, b . Συνεπώς για κάθε $t \in [t_{j,i-1}, t_{j,i}]$ προσεγγίζοντας οι πυκνότητες μετάβασης της V χρησιμοποιώντας την Κατανομή Βήτα (**Beta Proxy**). Σκοπός είναι να αντιστοιχίσουμε τις πρώτες δύο κεντρικές ροπές της V που υπολογίζονται απο το παραπάνω σύστημα με τις ροπές μια κατανομής Beta στο $[-1+\epsilon, 1-\epsilon]$, όπου αποτελείται απο τις παραμέτρους

$$a(t) = \frac{\mu_t + 1 - \epsilon(\mu_t^2 + \sigma_t^2 - (1 - \epsilon)^2)}{2(1 - \epsilon)\sigma_t^2}$$

και

$$b(t) = \frac{\mu_t - 1 + \epsilon(\mu_t^2 + \sigma_t^2 - (1 - \epsilon)^2)}{2(1 - \epsilon)\sigma_t^2}$$

Συνεπώς η προσεγγιστική συνάρτηση πιθανοφάνειας χρησιμοποιώντας πυκνότητες πιθανότητας μετάβασης που προσεγγίζονται απο την κατανομή Βήτα γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbb{1}(\theta, x^{N+1}) &= \sum_{i=1}^N \log \left\{ \frac{1}{2(1-\epsilon)} \frac{1}{B(a(t_{j,i}^-), b(t_{j,i}^-))} \left(\frac{x_{j,i} + 1 - \epsilon}{2(1-\epsilon)} \right)^{(a(t_{j,i}^-)-1)} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\frac{1 - \epsilon - x_{j,i}}{2(1-\epsilon)} \right)^{(b(t_{j,i}^-)-1)} \right\} \end{aligned}$$

Οι παράμετροι της κατανομής Βήτα $a(t_{j,i}^-), b(t_{j,i}^-)$, υπολογίζονται απο την οριακή συμπεριφορά των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων για τις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης της V . Και η $B(a, b)$ δηλώνει της συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Βήτα.

Αρχική Εκτίμηση Παραμέτρων

Μια ακόμη μεθοδολογία που προτάθηκε στο [12] είναι μια αρχική εκτίμηση των παραμέτρων της $\Sigma\Delta E$ με χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων και την τετραγωνικής κυμανσης του στοχαστικού ολοκληρώματος. Θα μελετήσουμε ξεχωριστά κάθε μεθοδολογία αφού η πρώτη χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων του όρου τάσης και η δεύτερη για τις παραμέτρους του όρου διάχυσης.

Least Square Minimization : Θα θεωρήσουμε ένα δείγμα $v^{M,N+1}$ με διάστημα μεταξύ των παρατηρήσεων Δ όπου $i \in \{0, \dots, N\}$ και $j \in \{1, \dots, M\}$. Για κάθε $t \in [t_{j,i-1}, t_{j,i}]$ η τυχαία μεταβλητή $(V_{j,i}|v_{j,i-1})$ έχει δεσμευμένη πιθανότητα όπου μπορεί να προσεγγιστεί απο το σύστημα

$$\begin{cases} dE[V](t) = -\theta_t E[V](t) dt \\ E[V](t - j, i - 1) = v_{j,i-1} \end{cases}$$

Τότε μπορούμε να δούμε οτι η τυχαία μεταβλητή $(V_{j,i} - E[V](t_{j,i}^-))$ έχει μηδενική μέση τιμή. Αν υποθέσουμε λοιπόν οτι η συνάρτηση της ταχύτητας επιστροφής δεν είναι χρονοεξαρτώμενη αλλά είναι σταθερή τότε για $\theta_t = c \in R^+$ για κάθε $t \in [t_{j,i-1}, t_{j,i}]$ η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι $E[V](t_{j,i}^-) = v_{j,i-1} e^{-c\Delta}$. Αν υποθέσουμε λοιπόν έναν πίνακα με συνολικές μεταβάσης $M \times N$ τότε μπορούμε να γράψουμε το πρόβλημα παλινδρόμησης της δεσμευμένης μέσης τιμής με μια L^2 συνάρτηση απώλειας σαν

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \underset{c \geq 0}{\operatorname{argmin}} \left[\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (v_{j,i} - E[V](t_{j,i}))^2 \right] \\ &\approx \underset{c \geq 0}{\operatorname{argmin}} \left[\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (v_{j,i} - v_{j,i-1}(1 - c\Delta))^2 \right] \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση είναι κυρτή στο c . Συνπώς βρίσκουμε μια εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων

$$\hat{c} \approx \frac{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N v_{j,i-1} (v_{j,i-1} - v_{j,i})}{\Delta \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (v_{j,i-1})^2}$$

Τετραγωνική Κύμανση : Έχοντας λοιπόν υποθέσει οτι η συνάρτηση θ_t είναι αρχικά μια σταθερή συνάρτηση μπορέσαμε να βρούμε μια εκτίμηση για την πρώτη άγνωστη παράμετρο $\theta_0 = \hat{c}$. Θα χρησιμοποιηθούν τώρα οι ιδιότητες των $\Sigma\Delta E$ και συγκεκριμένα του στοχαστικού ολοκληρώματος Ito για να βρεθεί μια αρχική εκτίμηση για την ποσότητα στον όρο τάσης $a\theta_0$. Γνωρίζουμε οτι η τετραγωνική κύμανση μια διαδικασία Ito V είναι $\langle V \rangle_t = \int_0^t b(V_s, \theta, p_s)^2 ds$, όπου

$$b(V_s, \theta, p_s) = \sqrt{2\alpha\theta_0(V_s + p_s)(1 - V_s - p_s)}$$

Συνεπώς αν διακριτοποιήσουμε την λύση της V_t , η τετραγωνική κύμανση θα μπορούσε να προσεγγιστεί από την εκτιμήτρια

$$RV_t = \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \rightarrow IV$$

Συνεπώς σαν αρχική εκτίμηση για τις παραμέτρους $a\theta_0$ διαλέγουμε

$$a^* \theta_0^* = \frac{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (v_{j,i} - v_{j,i-1})^2}{2\Delta \cdot \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (v_{j,i} + p_{j,i})(1 - v_{j,i} - p_{j,i})}$$

όπου το μήκος Δ είναι το μήκος του διαστήματος χρόνου μεταξύ δύο διαδοχικών μετρήσεων.

3.3 Αξιολόγηση Μοντέλων και Μετρικές για Πιθανοτικά Μοντέλα Προβλέψεων

Θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο αυτό το θεωρητικό υπόβαθρο για το κομμάτι της αξιολόγησης των μοντέλων Στοχαστικών Διαφορικών εξισώσεων που έχουν κατασκευαστεί. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στην αξιολόγηση μέσω μετρικών για την ικανότητα προσαρμογής των μοντέλων στο σύνολο δεδομένων που έχουμε τροφοδοτήσει κάθε μοντέλο ξεχωριστά για αξιολόγηση. Το δεύτερο μέρος θα εξετάσει ένα σύνολο μετρικών το οποίο χρησιμοποιείται συγκεκριμένα στο πλαίσιο των Πιθανοτικών Προβλέψεων και αποσκοπών στην ποσοτικοποίηση του σφάλματος των μοντέλων πρόβλεψης.

Κριτήρια Επιλογής Μοντέλου

Η πληροφορία Akaike μετράει την ικανότητα προσαρμογής ενός δεδομένου μοντέλου. Έστω ότι έχουμε ένα στατιστικό μοντέλο για ένα σύνολο δεδομένων $d_N = \{d_i\}_{i=1}^N$ και έστω \hat{L} η συνάρτηση πιθανοφάνειας του μοντέλου η οποία υπολογίστηκε στις βέλτιστες παραμέτρους για το μοντέλο αυτό σύμφωνα με το δεδομένο σετ μετρήσεων ($\hat{L} = L(\hat{\theta}; d_N)$) και k το σύνολο των ελευθερών παραμέτρων. Τότε η στατιστική συνάρτηση AIC ορίζεται ως

$$AIC = 2k - 2\ln(\hat{L})$$

Μια ακόμη παρόμοια στατιστική συνάρτηση είναι η το Μπαγεσιανό κριτήριο πληροφορίας (BIC). Η στατιστική συνάρτηση BIC ορίζεται ως

$$BIC = \ln(J)k - 2\ln(\hat{L})$$

Όπου J είναι το σύνολο των παρατηρήσεων.

Μετρικές αξιολόγησης Πιθανοτικών Προβλέψεων

Στην ενότητα αυτό θα επεκτείνουμε την θεωρία για την αξιολόγηση των μοντέλων ια πιθανοτικές προβλέψεις παρουσιάζοντας κάποιες από τις βασικότερες προσεγγίσεις της βιοβλιογραφίας. Η ενότητα αυτή στηρίζεται στα [24], [10]. Γενικά η αξιολόγηση των πιθανοτικών προβλέψεων είναι αρκετά πιο σύνθετη από αυτήν των σημειακών προβλέψεων. Οι κύριότερες ιδιότητες που μπορούν να χαρακτηρίσουν την ποιότητα μιας πιθανοτικής πρόβλεψης είναι η αξιοπιστία, η ανάλυση και η

ευκρίνεια της πρόβλεψης. Για την αξιολόγηση της αξιοπιστίας των προβλέψεων έχουν αναπτύχθει μέθοδοι όπως το διάγραμμα αξιοπιστίας και τα ιστογράμματα κατάταξης, όπου επιτρέπουν την οπτική αξιολόγηση των χαρακτηριστικών ενός συστήματος πρόβλεψης. Έτσι θα παρουσιάσουμε μια σειρά διαγνωστικών εργαλείων και αποτελεσμάτων για την αξιολόγηση της πιθανοτικής πρόβλεψης της ηλιακής παραγωγής ενέργειας.

Continuous Ranked Probability Score (CRPS)

Η μετρική CRPS (Continuous Ranked Probability Score) μετράει ουσιαστικά την διαφορά μεταξύ της προβλεπόμενης συνάρτησης κατανομής της στοχαστικής ποσότητας με την παρατηρούμενη συνάρτηση κατανομής [17]. Ο ορισμός της μετρικής CRPS για μια δεδομένη πραγματοποίηση της y και μιας προβλεπτικής κατανομής με συνάρτηση κατανομής (cumulative) F είναι

$$CRPS(F, y) = \int_R (F(x) - \mathbb{1}_{\{y \leq x\}})^2 dx = \int_{-\infty}^y F(x)^2 dx + \int_y^{\infty} \{F(x) - 1\}^2 dx$$

Αν η πρώτη ροπή της F είναι πεπερασμένη [16] τότε η CRPS δίνεται από την σχέση

$$CRPS(F, y) = E_F |X_1 - y| - \frac{1}{2} E_{F,F} |X_1 - X_2|$$

όπου οι X_1, X_2 είναι δυο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή την F . Η μετρική CRPS μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά για μια μεγάλη οικογένεια κατανομών πιθανότητας. Απαραίτητο κριτήριο είναι να ορίζεται η πρώτη ροπή της εν λόγω κατανομής. Ένας ακόμη τρόπος για να υπολογίσουμε την μετρική CRPS είναι κατασκευάζοντας μια εκτιμήτρια της ποσότητας αυτής. Όπως στο συγκεκριμένο πρόβλημα που μελετάμε η κατανομή της προβλεπόμενης ποσότητας δεν υπάρχει σε αναλυτική μορφή. Συνεπώς μπορούμε να την περιγράψουμε μέσω προσομοιώσεων της διαδικασίας $X_1, X_2, \dots, X_m \sim F$. Για την CRPS η εμπειρική μετρική που θα χρησιμοποιηθεί κατασκευάζεται σύμφωνα με την

$$\hat{F}_m(z) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{1}\{X_i \leq z\}$$

που αποτελεί μια εκτιμήτρια της συνάρτησης κατανομής F . Σε αυτήν την περίπτωση η CRPS ορίζεται ως

$$CRPS(\hat{F}_m, y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |X_i - y| - \frac{1}{2m^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |X_i - X_j|$$

όπου επιτρέπει τον υπολογισμό της CRPS μέσω των προσομοιώσεων της διαδικασίας. Λόγω της υπολογιστικής δυσκολίας της παραπάνω μετρικής χρησιμοποιήθηκε μια προσέγγιση η οποία παρουσιάζεται στο [20]

$$CRPS(\hat{F}_m, y) = \frac{2}{m^2} \sum_{i=1}^m (X_{(i)} - y) (m \mathbb{1}\{y < X_{(i)}\} - i + \frac{1}{2})$$

Λογαριθμικό Αποτέλεσμα (Logarithmic Score)

Η λογαριθμική πιθανότητα για μια πιθανοτική πρόβλεψη που παράγεται τη χρονική στιγμή t και με χρονικό ορίζοντα $t+k$ δίνεται από την σχέση

$$\text{LogS}(F, y) = -\log(f(y))$$

όπου δηλώνουμε με f την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εν λόγω κατανομή F . Σε αντίθεση με το CRPS, ο υπολογισμός του LogS απαιτεί μια πυκνότητα πρόβλεψης. Ένας εκτιμητής μπορεί να ληφθεί με την κλασική μη παραμετρική εκτίμηση πυκνότητας πυρήνα (KDE, π.χ.). Ωστόσο, αυτός ο εκτιμητής ισχύει μόνο υπό αυστηρές θεωρητικές υποθέσεις. Εάν το αποτέλεσμα εμπίπτει στις ουρές της προσομοιωμένης κατανομής πρόβλεψης, το εκτιμώμενο αποτέλεσμα μπορεί να είναι εξαιρετικά ευαίσθητο στην επιλογή της παραμέτρου συντονισμού του εύρους ζώνης.

Διάγραμμα αξιολογίας

Τα διαγράμματα αξιολογίας παρέχει ένα μέσο οπτικοποίησης της μεροληψίας του συστήματος πιθανοτικής πρόβλεψης. Μπορεί να κατασκευαστεί με διαφορετικούς τρόπους ανάλογα με το αν θεωρήθουν γεγονότα πολλών κατηγοριών οι συνεχείς μεταβλητές. Στην πρώτη περίπτωση το διάγραμμα κατασκευάζεται σχεδιάζοντας την παρατηρηθείσα συχνότητα του γεγονότος σε συνάρτηση με την προβλεπόμενη πιθανότητα όπου το εύρος των προβλεπόμενων πιθανοτήτων διαρείται σε διαστήματα. Η διαγώνια γραμμή δείχνει την τέλεια αξιολογία και η οριζόντια γραμμή αναπαριστά την κλιματολογική συχνότητα. Στην δεύτερη περίπτωση, των συνεχών μεταβλητών, τα διαγράμματα αξιολογίας είναι όμοια με τις γραφικές quantile.

Ιστόγραμμα κατάταξης (Rank Histogram)

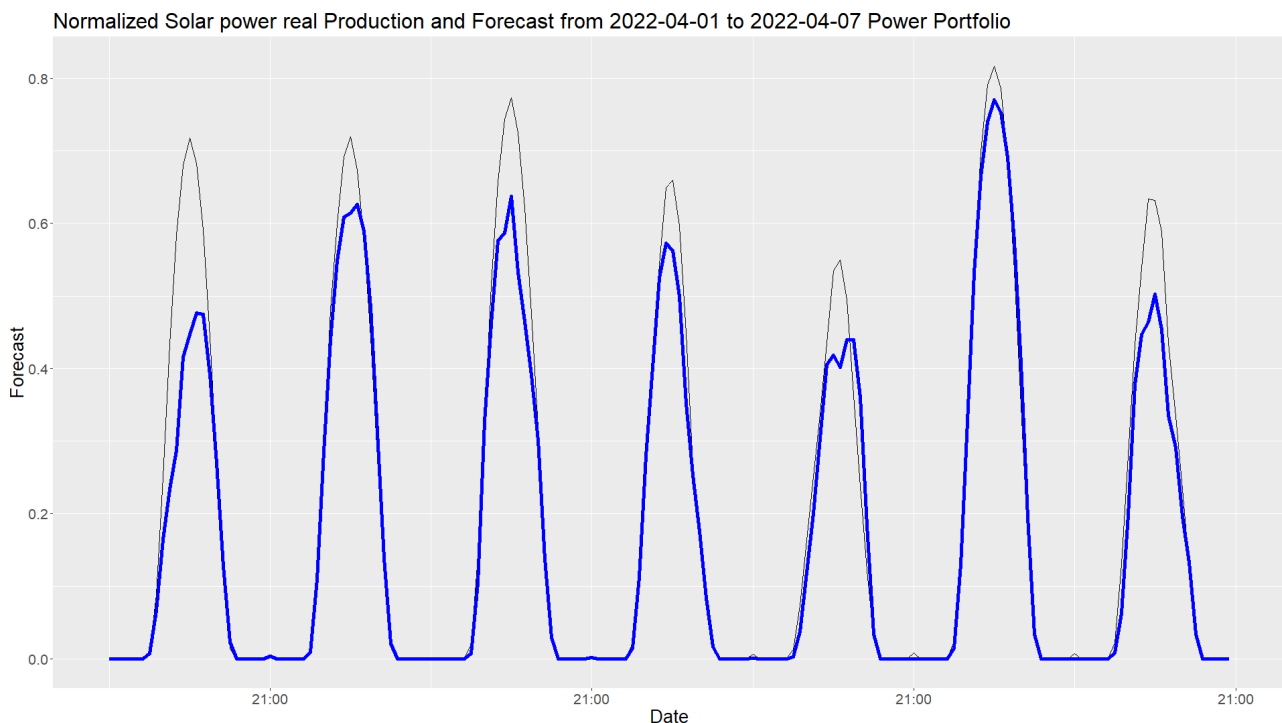
Μια διαφορετική προσέγγιση στην ανάλυση της βαθμονόμησης μιας πιθανοτικής πρόβλεψης ενός συστήματος συνόλου (ensemble system) είναι η κατασκευή ενός ιστογράμματος κατάταξης. Αν η πιθανοτική πρόβλεψη ενός τέτοιου συνόλου είναι καλά βαθμονομημένη, η παρατήρηση είναι εξίσου πιθανό να βρίσκεται μεταξύ δύο οποιονδήποτε διατεταγμένων διπλανών μελών, συμπεριλαμβανομένων των περιπτώσεων όπου η παρατήρηση θα βρίσκεται έξω από το εύρος του συνόλου σε οποιαδήποτε πλευρά της κατανομής. Τότε το ιστόγραμμα κατάταξης θα πρέπει να είναι επίπεδο με τον ίδιο αριθμό επιβεβαιώσεων σε κάθε διάστημα. Λόγω του περιορισμένου μεγέθους του συνόλου, η παρατήρηση μπορεί να βρίσκεται εκτός του εύρους του συνόλου.

4 Εφαρμογές Πιθανοτικών Προβλέψεων σε Πραγματικά δεδομένα

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας όπως έχει ήδη αναφερθεί είναι η χρήση των Στοχαστικών Διαφορικών εξισώσεων για την παραγωγή πιθανοτικών προβλέψεων για την παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια ενός Χαρτοφυλάκιο το οποίο διαχειρίζεται ένας ΦοΣΕ (Φορέας Σωρευτικής Εκπροσώπησης). Στο κεφάλαιο αυτό αφού παρουσιάζουμε την μεθοδολογία για την εξαγωγή των πιθανοτικών προβλέψεων χρησιμοποιώντας τα δύο μοντέλα που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες και θα μελετηθεί η ακρίβεια των προβλέψεων με τους στατιστικούς δείκτες της ενότητας 3.3.

Παρουσίαση Δεδομένων

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή των πιθανοτικών προβλέψεων αποτελούνται από την αθροιστική πραγματική παραγόμενη ηλιακή ενέργεια ενός συνόλου 52 πάρκων τα οποία διαχειρίζεται η εταιρεία **Joule S.A** και αποτελούν μέρος του Χαρτοφυλακίου ενέργειας με το οποίο συμμετέχει στις Αγορές Ενέργειας της Ελλάδας. Η συνολική χωρητικότητα παραγωγής ανανεώσιμης ενέργειας ανέρχεται στα 32 MW. Καθημερινά υπάρχει διαθέσιμη μια σημειακή πρόβλεψη για την παραγωγή ηλιακής ακτινοβολίας για καθένα από τα 52 πάρκα τα οποία η Joule S.A διαχειρίζεται και με βάση τα χαρακτηριστικά και την τοποθεσία του πάρκου υπολογίζεται η τελική παραγωγή σε MW για διαστήματα 15 λεπτών. Επιπλέον υπάρχουν διαθέσιμα και τα τελικά αποτελέσματα της παραγωγής για κάθε μονάδα ξεχωριστά τα οποία λαμβάνονται από τον ΑΔΜΗΕ, ως η έγκυρη τελική προσφορά των μονάδων στο δίκτυο. Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε το πιθανοτικό μοντέλο πρόβλεψης για την συνολική παραγωγή ενέργειας του χαρτοφυλακίου που διαχειρίζεται η Joule.



(α') Σημειακή Πρόβλεψη και Πραγματική τιμή (μπλέ) για την παραγωγή ηλιακής ενέργειας χαρτοφυλακίου σε περίοδο 7 ημερών

Καθώς η συνολική παραγωγή των πάρκων είναι μεταβλητή ειδικά στην περίπτωση όπου έχουμε εισαγωγή νέων φωτοβολταϊκών εγκαταστάσεων στο χαρτοφυλάκιο ενέργειας, η αξιολόγηση του μοντέλου πιθανοτικής πρόβλεψης καθώς και των στρατηγικών συναλλαγής που θα παρουσιαστούν στην τελευταία ενότητα αφορά δεδομένα συνολικής χρονικής περιόδου τριών μηνών. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν μετρήσεις και προβλέψεις για την παραγωγή ηλιακής ενέργειας για το συνολικό χαρτοφυλάκιο στην περίοδο 2022/03/01 - 2022/05/31. Παρακάτω παρουσιάζεται μια πρώτη στατιστική ανάλυση των δεδομένων και του σφάλματος της πρόβλεψης.

4.1 Βαθμολόγηση ΣΔΕ 1: No Derivative Tracking Model

Θα αναφερούμε τώρα την διαδικασία η οποία ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία για την εκτίμηση των παραμέτρων της ΣΔΕ 1 καθώς και την κατασκευή των εμπειρικών διαστημάτων εμπιστοσύνης της πιθανοτικής πρόβλεψης.

Συνολικά έχουμε στην διάθεση μας δεδομένα τριών μηνών δηλαδή 90 ημέρες όπου αποτελούνται απο κανονικοποιημένες παρατηρήσεις ηλιακής παραγωγής και αντιστοιχες προβλέψεις. Θα χωρίσουμε το δείγμα αυτό στην μέση εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία σε καθένα απο τα σύνολα εκπαίδευσης και αξιολόγησης. Παρακάτω παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο που ακολουθηθηκε για την εκτίμηση των παραμέτρων της ΣΔΕ βασιζόμενος στη θεωρία που έχουμε παρουσιάσει στις προηγούμενες ενότητες.

Algorithm 1 Εκτίμηση Παραμέτρων Μοντέλο 1 (ΣΔΕ 1)

- 1: Αρχικά εισάγουμε την προβλεπόμενη παραγωγή p_t καθώς και την πραγματική παραγωγή μετρούμενα κάθε μια μέρα σε διάστημα 15 λεπτών
- 2: Αν οι μετρήσεις έχουν απόκλιση με την προβλεπόμενη μεγαλύτερης της τάξης του 20% αφαιρούμε τις συγκεκριμένες ημέρες
- 3: Χρησιμοποιώντας Cubic Splines κάτασκευάζουμε μια συνάρτηση για την διαδικασία των προβλέψεων
- 4: Εφαρμόζουμε την τεχνική αντιστοίχισης ροπών επιλύοντας το σύστημα των ΔΕ για τις δύο πρώτες ροπές της ΣΔΕ (με χρήση της R (deSolve)) χρησιμοποιώντας τις πραγματικές τιμές για την παραγωγή ηλιακής ενέργειας X_t
- 5: Υπολογίζουμε την συνάρτηση πιθανοφάνειας προσεγγίζοντας την με μια Γκαουσιανή όπως παρουσιάστηκε σε προηγούμενες ενότητες

$$L(\theta; d_{JN}) = \prod_{j=1}^J (2\pi)^{-N/2} |\Sigma^{(j)}(\theta)|^{-1/2} \exp[(d^{(j)} - \mu^j(\theta))^T [\Sigma^{(j)}(\theta)]^{-1} (d^{(j)} - \mu^j(\theta))]$$

όπου $\mu^j(\theta) = (\mu(t_1), \dots, \mu(t_N))$, $\Sigma^{(j)}(\theta) = V^{(j)}(\theta) + \Sigma^{\epsilon, (j)}$.

- 6: Βρίσκουμε τις αρχικές συνθήκες των παραμέτρων (θ_0, a) με τις μεθόδους ελαχίστων τετραγώνων και της τετραγωνικής κύμανσης της ΣΔΕ.
 - 7: Υπολογίζουμε τις βέλτιστες παραμέτρους μεγιστοποιώντας την συνάρτηση πιθανοφάνειας (Χρήση bbmle στην R και αριθμητική μέθοδο βελτιστοποίησης την Nelder-Mead).
-

4.2 Βαθμολόγηση ΣΔΕ 2: Derivative Tracking Model

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την εκτίμηση των παραμέτρων του δεύτερου μοντέλου έχει παρουσιαστεί σε προηγούμενη ενότητα όπου χρησιμοποιήθηκε η κατανομή Βήτα για την προσέγγιση των πυκνότητων μετάβασης σε αντίθεση με την πρώτη ΣΔΕ όπου χρησιμοποιήσαμε την Γκαουσιανή κατανομή.

Algorithm 2 Εκτίμηση Παραμέτρων Μοντέλο 2 (ΣΔΕ 2)

- 1: Αρχικά εισάγουμε την προβλεπόμενη παραγωγή p_t καθώς και την πραγματική παραγωγή μετρούμενα κάθε μια μέρα σε διάστημα 15 λεπτών
- 2: Αν οι μετρήσεις έχουν απόκλιση με την προβλεπόμενη μεγαλύτερης της τάξης του 20% αφαιρούμε τις συγκεκριμένες ημέρες
- 3: Χρησιμοποιώντας Cubic Splines κατασκευάζουμε μια συνάρτηση για την διαδικασία των προβλέψεων
- 4: Υπολογίζουμε την χρονοεξαρτώμενη συνάρτηση θ_t απο τη σχέση

$$\theta_t = \max(\theta_0, \frac{a\theta_0 + |\dot{p}_t|}{\min(p_t, 1 - p_t)})$$

- 5: Υπολογίζουμε τις τιμές του σφάλματος πρόβλεψης $V_t = X_t - p_t$, όπου X_t οι πραγματικές μετρήσεις της παραγωγής ενέργειας οι οποίες είναι διαθέσιμες κάθε 15 λεπτά και p_t η αντίστοιχη πρόβλεψη
- 6: Εφαρμόζουμε την τεχνική αντιστοίχισης ροπών επιλύοντας το σύστημα των ΔΕ για τις δύο πρώτες ροπές της ΣΔΕ (με χρήση της R (deSolve))
- 7: Εύρεση της μέσης τιμής και της διασποράς με χρήση των ροπών

$$\mu_t = m_1(t) \quad \sigma_t^2 = m_2(t) - m_1(t)^2$$

- 8: Υπολογίζουμε τις παραμέτρους της συνάρτησης Βήτα(a,b)

$$a(t) = \frac{-(\mu_t + 1 - \epsilon)(\mu_t^2 + \sigma_t^2 - (1 - \epsilon)^2)}{2(1 - \epsilon)\sigma_t^2}$$

$$b(t) = \frac{(\mu_t - 1 + \epsilon)(\mu_t^2 + \sigma_t^2 - (1 - \epsilon)^2)}{2(1 - \epsilon)\sigma_t^2}$$

- 9: Υπολογισμός της συνάρτησης πιθανοφάνειας (Beta Proxy)

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(\theta, x^{N+1}) &= \sum_{i=1}^N \log \left\{ \frac{1}{2(1 - \epsilon)} \frac{1}{B(a(t_{j,i}^-), b(t_{j,i}^-))} \left(\frac{x_{j,i} + 1 - \epsilon}{2(1 - \epsilon)} \right)^{a(t_{j,i}^-) - 1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\frac{1 - \epsilon - x_{j,i}}{2(1 - \epsilon)} \right)^{b(t_{j,i}^-) - 1} \right\} \end{aligned}$$

- 10: Βρίσκουμε τις αρχικές συνθήκες των παραμέτρων (θ_0, a) με τις μεθόδους ελαχίστων τετραγώνων και της τετραγωνικής κύμανσης της ΣΔΕ.
 - 11: Υπολογίζουμε τις βέλτιστες παραμέτρους μεγιστοποιώντας την συνάρτηση πιθανοφάνειας (Χρήση bbmle στην R και αριθμητική μέθοδο βελτιστοποίησης την Nelder-Mead).
-

4.3 Κατασκευή Πιθανοτικών Προβλέψεων

Έχοντας βρεί τις εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας των άγνωστων παραμέτρων για κάθε ΣΔΕ σύμφωνα με το σύνολο δεδομένων το οποίο έχουμε διαθέσιμο θα συνεχίσουμε στην κατασκευή των εκτιμώμενων διαστημάτων εμπιστοσύνης για την κατανομή που θέλουμε να κατασχυάσουμε γύρω απο την σημειωκή πρόβλεψη. Η μέθοδος Monte Carlo χρησιμοποιήθηκε για τον σκοπό

αυτό.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις παραμέτρους της προηγούμενης υποενότητας θα προσομοιώσουμε τις Στοχαστικές Διαφορικές εξισώσεις που έχουμε ορίσει μέσω ενός διακριτού σχήματος Euler-Maruyama. Στο σύνολο έχουν προσομοιωθεί $M = 10000$ μονοπάτια. Στο πείραμα μας χρησιμοποιήθηκε ένα βήμα σταθερό για την αριθμητική μέθοδο $\Delta t = 1min$ και στις περιπτώσεις όπου η διακριτό σχήμα δίνει τιμές έξω από το διάστημα ορισμού της $X_t \in [0, 1]$ χρησιμοποιήθηκε ένα βήμα truncation για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη της διακριτικής λύσης στο διάστημα αυτό. Συνεπώς το διακριτό σχήμα για καθένα από τα μοντέλα που έχουμε κατασκευάσει είναι

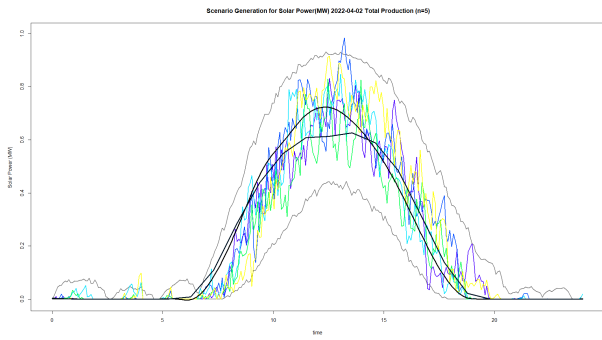
$$\begin{cases} X_{t_{k+1}}^{(i)} = X_{t_k}^{(i)} - \theta_0(X_{t_k}^{(i)} - p_{t_k})\Delta t + \sqrt{2a\theta_0 X_{t_k}^{(i)}(1 - X_{t_k}^{(i)})}(W_{t_{k+1}}^{(i)} - W_{t_k}^{(i)}) \\ X_{t=t_0}^{(i)} = X_{t_0}^{(i)} \end{cases}$$

Η μεθοδολογία για το δευτερο μοντέλο είναι ακριβώς ίδια απλά πρέπει επίσης να βρεθεί μια Κυβική Spline για την παράγωγο της σημειακής πρόβλεψης p_t . Δηλαδή η αριθμητική μέθοδος Euler Maruyama είναι

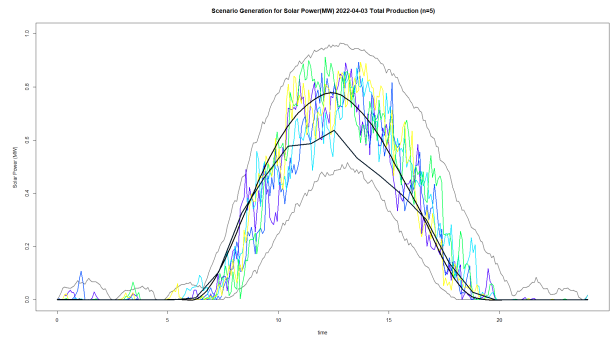
$$\begin{cases} X_{t_{k+1}}^{(i)} = X_{t_k}^{(i)} + \dot{p}_{t_k} - \theta_{t_k}(X_{t_k}^{(i)} - p_{t_k})\Delta t + \sqrt{2a\theta_0 X_{t_k}^{(i)}(1 - X_{t_k}^{(i)})}(W_{t_{k+1}}^{(i)} - W_{t_k}^{(i)}) \\ X_{t=t_0}^{(i)} = X_{t_0}^{(i)} \end{cases}$$

Προσομοιώνοντας λοιπόν τις παραπάνω στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις με χρήση της μεθόδου EM μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο σεναρίων για την εν λόγω στοχαστική ποσότητα που μελετάμε, για την ηλιακή παραγωγή ενέργειας του χαρτοφυλακίου. Τα παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζει πέντε προσομοιώσεις της διαδικασίας για την ημέρα που θέλουμε να μετελετήσουμε.

Αποτελέσματα ΣΔΕ 1 - No Derivative Tracking Μοντέλο

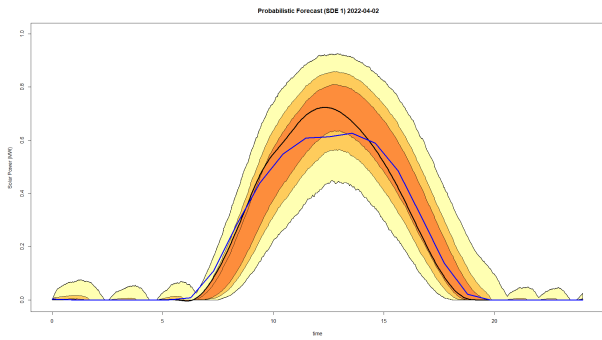


(α') ΣΔΕ 2 : 2022-04-02

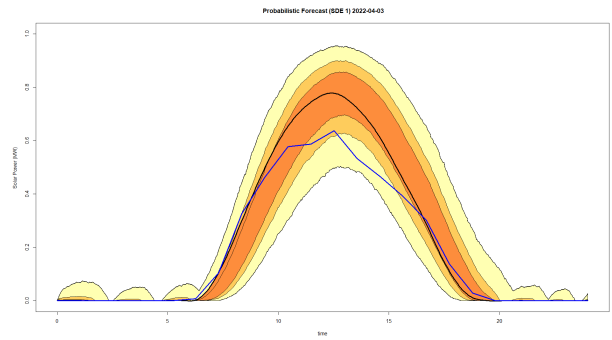


(β') ΣΔΕ 2 : 2022-04-03

Σχήμα 5: Δύο αυθαίρετες ημέρες με πέντε προσομοιωμένες διαδρομές παραγωγής ηλιακής ενέργειας ΣΔΕ 1



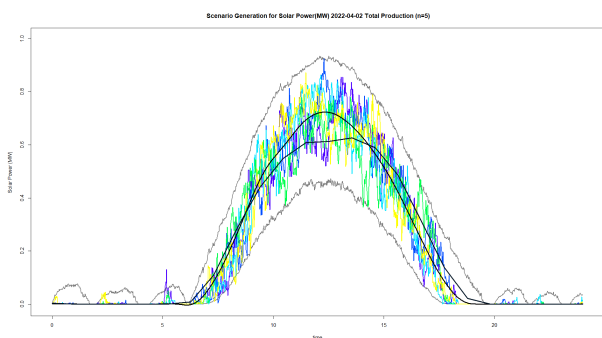
(α') ΣΔΕ 2 : 2022-04-02



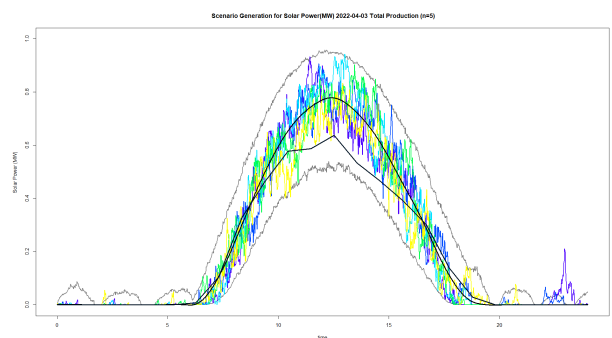
(β') ΣΔΕ 2 : 2022-04-03

Σχήμα 6: Πιθανοτικές Προβλέψεις για δύο αυθαίρετες ημέρες (εμπειρικά διαστήματα εμπιστοσύνης) και Μπλέ γραμμή : Αληθινή Παραγωγή (MWh) ΣΔΕ 1

Αποτελέσματα ΣΔΕ 2 - Derivative Tracking Μοντέλο

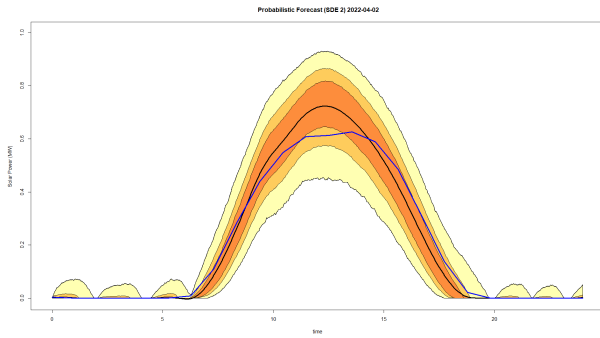


(α') ΣΔΕ 2 : 2022-04-02

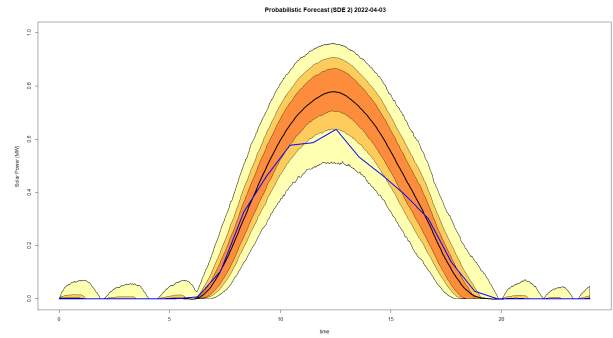


(β') ΣΔΕ 2 : 2022-04-03

Σχήμα 7: Δύο αυθαίρετες ημέρες με πέντε προσομοιωμένες διαδρομές παραγωγής ηλιακής ενέργειας ΣΔΕ 2



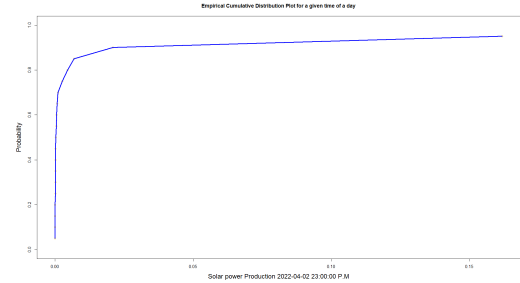
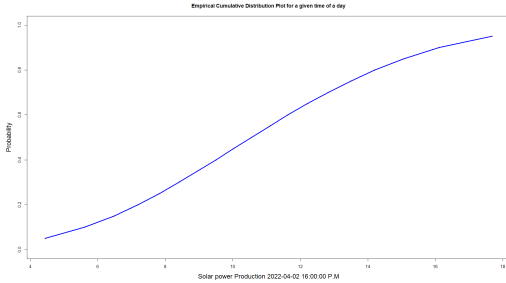
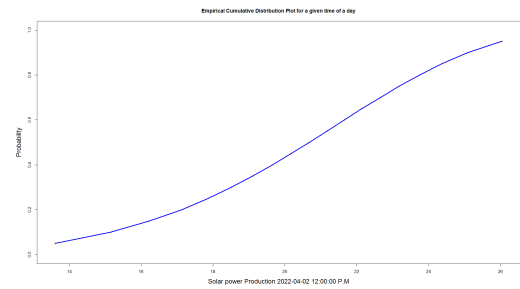
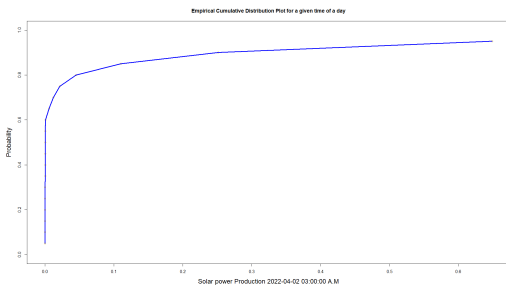
(α') ΣΔΕ 2 : 2022-04-02



(β') ΣΔΕ 2 : 2022-04-03

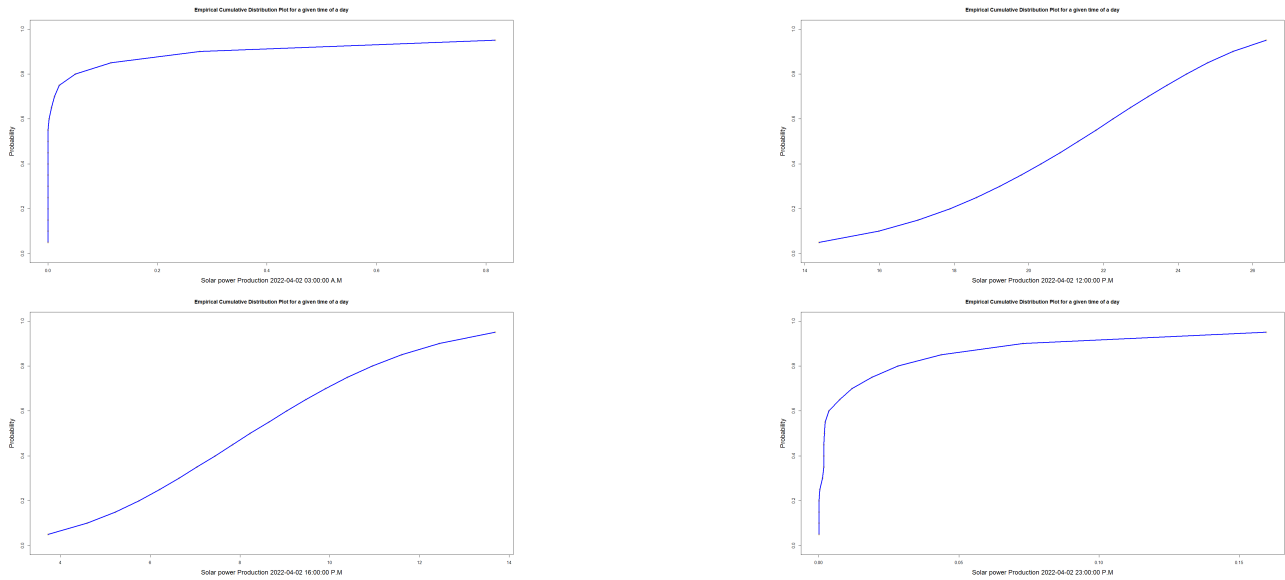
Σχήμα 8: Πιθανοτικές Προβλέψεις για δύο αυθαίρετες ημέρες (εμπειρικά διαστήματα εμπιστοσύνης) και Μπλέ γράμμη : Αληθινή Παραγωγή (MWh) **ΣΔΕ 2**

Επιπλέον για καθένα απο τα δύο μοντέλα παρουσιάζονται παρακάτω τα **διαγράμματα των quantiles** για μια δεδομένη ημέρα (2022-04-02) και για τέσσερις διαφορετικές χρονικές περιόδους $t \in T = \{3a.m, 12p.m, 16p.m, 23p.m\}$.



Σχήμα 9: Διαγράμματα Quantiles για τέσσερις διαφορετικές χρονικές στιγμές $t \in T = \{3a.m, 12p.m, 16p.m, 23p.m\}$ **ΣΔΕ 1**

Μπορούμε να δούμε απο τα παραπάνω διαγράμματα οτι πράγματι επαληθεύεται η συμπεριφορά της στοχαστικής παραγωγής ηλιακής ενέργειας, αφού απο το πάνω αριστερά (3 a.m) και κάτω δεξιά (23 p.m) διάγραμμα μπορούμε να δούμε οτι κατά τις πρωινές και βραδινές ώρες η παραγωγή ηλιακής ενέργειας έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι μηδενική, ενώ για τις μεσημεριανές ώρες αυτό δεν ισχύει.



Σχήμα 10: Διαγράμματα Quantiles για τέσσερις διαφορετικές χρονικές στιγμές $t \in T = \{3a.m, 12p.m, 16p.m, 23p.m\}$ **ΣΔΕ 2**

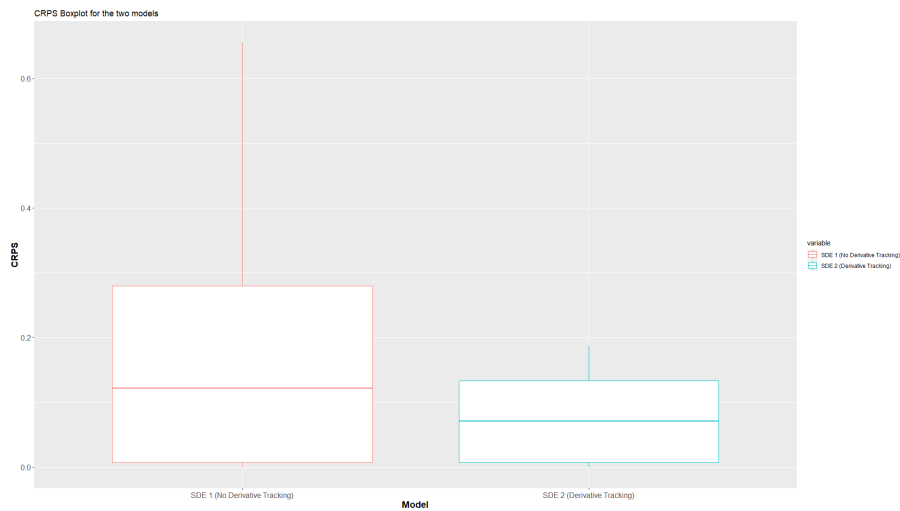
4.3.1 Αξιολόγηση Μοντέλων

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστεί η αξιολόγηση των μοντέλων βάση των στατιστικών μετρικών που έχουν ήδη οριστεί καθώς και τις μετρικές αξιολόγησης πιθανοτικών προβλέψεων που έχουν χρησιμοποιηθεί στην βιβλιογραφία. Αρχικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα κατά την εκπαίδευση των δύο μοντέλων στο σύνολο εκπαίδευσης και στο σύνολο αξιολόγησης χρησιμοποιώντας την πληροφορία AIC και BIC.

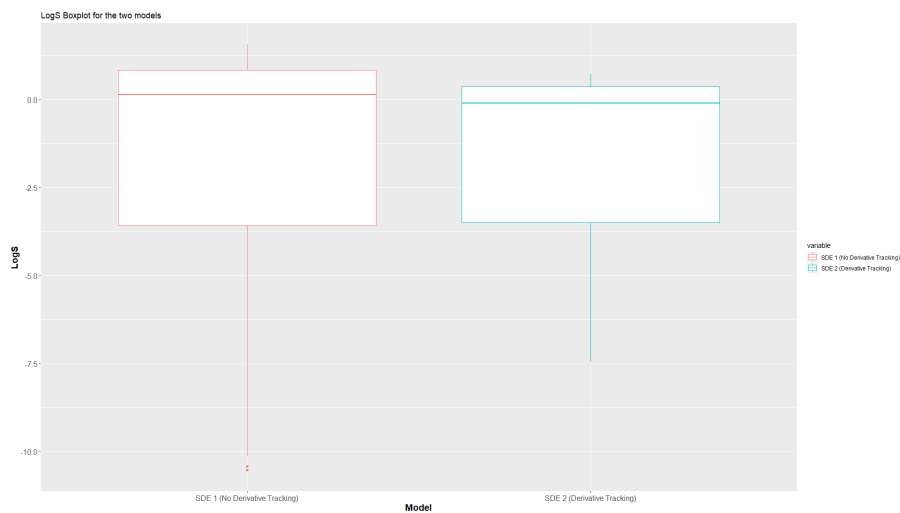
	AIC	BIC
ΣΔΕ 1 : No Derivative Tracking	-8312	-8305
ΣΔΕ 2 : Derivative Tracking	-8430	-8420

Πίνακας 2: Κριτήρια Επιλογής Μοντέλου

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των μετρικών CRPS και LogS που ορίστηκαν στην



(α) Continuous Ranked Probability Score (CRPS) - Αριστερά για την $\Sigma\Delta E 1$ και δεξιά για την $\Sigma\Delta E 2$



(α) Logarithmic score (LogS Score) - Continuous Ranked Probability Score (CRPS) - Αριστερά για την $\Sigma\Delta E 1$ και δεξιά για την $\Sigma\Delta E 2$

Μπορούμε να δούμε ότι και οι δύο μετρικές έχουν χαμηλότερες τιμές για το μοντέλο όπου παρουσιάζει την συνάρτηση της παραγώγου για την σημειακή πρόβλεψη ($\Sigma\Delta E 2$ - **Derivative Tracking**).

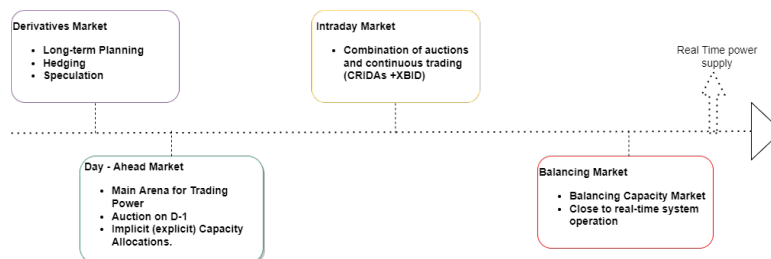
5 Ανάπτυξη Βέλτιστων Στρατηγικών Συμμετοχής για Χαρτοφυλάκιο Ενέργειας

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθεί η ανάπτυξη στρατηγικών εκπροσώπησης για ένα χαρτοφυλάκιο ενέργειας το οποίο αποτελείται από Φωτοβολταϊκά πάρκα τα οποία μελετήθηκαν και για την ανάπτυξη των πιθανοτικών προβλέψεων που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες. Στόχος μας είναι να εξετάσουμε το συνολικό κέρδος που μπορεί να έχει ο ΦοΣΕ, στην παρούσα Διπλωματική Εργασία η **Joule S.A**, λαμβάνοντας υπόψιν το δυναμικό μοντέλο που κατασκευάστηκε σε σύγκριση με τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τις σημειακές προβλέψεις. Πρωτού παρουσιάσθούν οι στρατηγικές θα γίνει μια σύντομη επισκόπηση στις Ελληνικές Αγορές Ενέργειας, ώστε να γίνει πιο αντιληπτός ο τρόπος με τον οποίο λειτουργούν οι συναλλαγές ανάμεσα στους συμμετέχοντες.

5.1 Ελληνικές Αγορές Ενέργειας

Το σύνολο των Αγορών Ενέργειας που έχει οριστεί από την ΡΑΕ (Ρυθμιστική Αρχή Ενέργειας) είναι τέσσερις :

- (i) Ενεργειακή Χρηματοπιστωτική Αγορά (**Derivatives Market**)
- (ii) Αγορά Επόμενης Ημέρας (**Day-Ahead Market**)
- (iii) Ενδο-ημερήσια Αγορά (**Intraday Market**)
- (iv) Αγορά Εξισορρόπησης (**Balancing Market**)



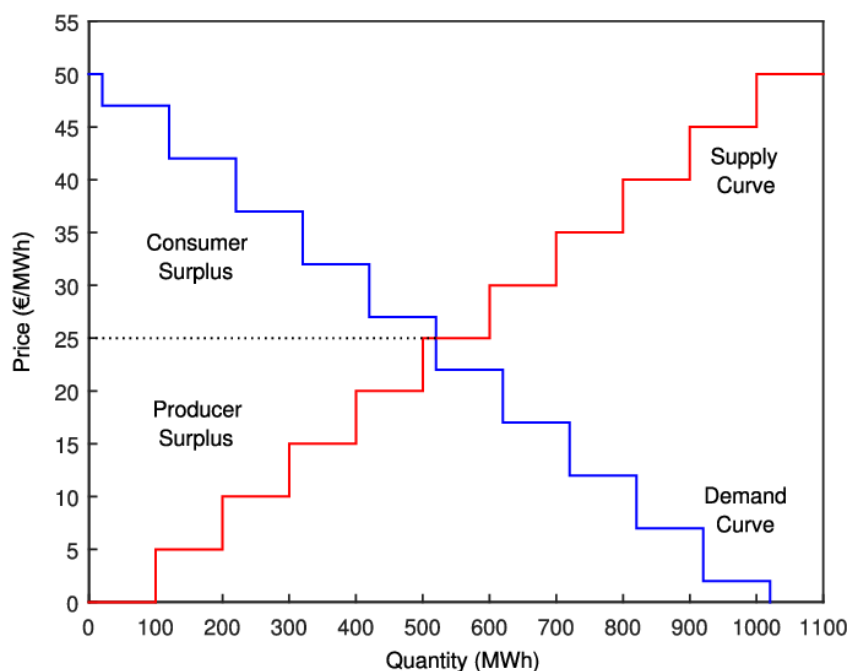
Σχήμα 13: Αγορές Ενέργειας Ελλάδα

Θα αναλύσουμε κάθε αγορά ξεχωριστά και θα επικεντρωθούμε περισσότερο σε αυτές που ενδιαφέρουν τους Φορείς Σωρευτικής Εκπροσώπησης (Φο.Σ.Ε).

Αγορά Επόμενης Ημέρας

Στην Αγορά Επόμενης Ημέρας οι συμμετέχοντες συναλλάσσουν ενέργεια που πρόκειται να παραχθεί (αν μιλάμε για παραγωγούς) ή καταναλωθεί (αν μιλάμε για προμηθευτές) την επόμενη ημέρα. Η συγκεκριμένη αγορά είναι στην ουσία μια δημοπρασία η οποία ολοκληρώνεται την προηγούμενη μέρα (d-1) από την μέρα στην οποία αναφέρονται οι προσφορές (ημέρα d). Στις περισσότερες χώρες το μεσημέρι της ημέρας d-1 έχει ολοκληρωθεί η δημοπρασία ώστε να προλάβουν οι διαχειριστές να υπολογίσουν την τιμή της αγοράς καθώς και να καταρτηθεί πρόγραμμα παραγωγής για τους παραγωγούς. Στην Ελλάδα η δημοπρασία αυτή κλείνει στις 13:00 το μεσημέρι δηλαδή μέχρι εκείνη την ώρα γίνονται αποδεκτές οι προσφορές. Σημειώνεται πως για όλους τους συμμετέχοντες η συμμετοχή στην αγορά αυτήν είναι προαιρετική με εξαίρεση τους

Παραγωγούς (θερμικούς παραγωγούς), οι οποίοι πρέπει να υποβάλουν προσφορές για το σύνολο της εναπομένουσας ενέργειας τους (ενέργεια που δεν έχει πωληθεί στην αγορά παραγωγών που θα δούμε στην συνέχεια). Σε αυτήν την αγορά αναφερόμαστε πάντα σε ωριαία διαστήματα. Με άλλα λόγια η αγορά αυτή αποτελείται από 24 προϊόντα ένα για κάθε ώρα της ημέρας (Αγοραία Χρονική Μονάδα). Φυσικά για κάθε ώρα υπολογίζεται και διαφορετική τιμή αγοράς. Αυτή υπολογίζεται σύμφωνα με την αρχή της μεγιστοποίησης του κοινωνικού πλεονάσματος. Πιο αναλυτικά συλλέγονται όλες οι προσφορές πώλησης (ή έγχυσης ενέργειας) και αγοράς (ή κατανάλωσης ενέργειας) και ταξινομούνται κατά αύξουσα και φθίνουσα σειρά αντίστοιχα. Εκεί που τέμνονται οι δύο καμπύλες προκύπτει η τιμή ισορροπίας της αγοράς (για κάθε ώρα).



(α') Οριακή Τιμή Συστήματος σύμφωνα με την αρχή της μεγιστοποίησης του κοινωνικού πλεονάσματος

Αξίζει να σημειωθεί πως όλες οι συναλλαγές που διενεργούνται επί της Αγοράς Επόμενης Ημέρας έχουν την υποχρέωση φυσικής παράδοσης δηλαδή την πραγματική έγχυση ή κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας με βάση τις προσφορές που έγιναν αποδεκτές.

Ενδο-ημερήσια Αγορά (CRIDA)

Οι ενδοημερήσιες δημοπρασίες συμπεριφέρονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και η προημερήσια αγορά, δηλαδή συλλέγονται προσφορές έγχυσης και απορρόφησης μαζί και κάποια συγκεκριμένη ώρα η αγορά κλείνει. Έπειτα υπολογίζεται η τιμή ισορροπίας πάλι με την μέθοδο της βελτιστοποίησης του κοινωνικού πλεονάσματος. Στο σύνολο τους οι ενδοημερήσιες δημοπρασίες είναι τρεις (CRIDA 1, CRIDA 2, CRIDA 3) με την πρώτη να είναι λίγες ώρες μετά το κλείσιμο της προημερήσιας αγοράς. Μόλις κλείσει η πρώτη, λίγο μετά ανοίγει η δεύτερα και αντίστοιχα και η τρίτη. Ο σχεδιασμός αυτός επιτρέπει στους συμμετέχοντες να διαχειριστούν τις ανισορροπίες μέχρι μέχρι να κλείσει η αντίστοιχη σύνοδος.

Αγορές Εξισορρόπησης

Οι αγορές εξισορρόπησης χρησιμοποιούνται γενικά για την όσο το δυνατόν καλύτερη εξισορρόπηση της παραγωγής και της κατανάλωσης πριν από την παράδοση ενέργειας (π.χ. μισή ώρα

Ενδοημερήσια Αγορά	Έναρξη	Λήξη
CRIDA 1	14:00 D-1	15:30 D-1
CRIDA 2	16:30 D-1	23:00 D-1
CRIDA 3	05:00 D	11:00 D

Πίνακας 3: : Χρονικές στιγμές έναρξης και λήξης των τοπικών ενδοημερήσιων δημοπρασιών (CRIDAs)

πριν). Αυτό είναι σημαντικό, καθώς δεν υπάρχει οικονομικός τρόπος αποθήκευσης μεγάλων ποσοτήτων ηλεκτρικής ενέργειας. Οι αγορές εκτός από τις αγορές εξισορρόπησης εκκαθαρίζονται αρκετά πριν από την φυσική προσφορά ενέργειας και συνεπώς τα επίπεδα παραγωγής και κατανάλωσης που έχουν προγραμματιστεί σε αυτές τις αγορές μπορεί να διαφέρουν σημαντικά από την πραγματική παραγωγή και κατανάλωση κατά την ώρα εξισορρόπησης. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα στις αγορές με σημαντική ποσότητα στοχαστικής παραγωγής, όπως στην περίπτωση της Ελλάδας. Οι αγορές εξισορρόπησης γεφυρώνουν, ή μειώνουν, το χάσμα ισορροπίας μεταξύ άλλων προθεσμιακών αγορών και της παράδοσης ενέργειας σε πραγματικό χρόνο. Η διαμόρφωση των τιμών της Αγοράς Ενέργειας Εξισορρόπησης διαφέρει από κάθε χώρα. Καθώς ο σκοπός της παρούσας διπλωματικής δεν είναι στο να επεκταθεί στους μηχανισμούς με τους οποίους λειτουργούν οι αγορές αρκεί να αναφερθεί ότι το τελικό Revenue καθορίζεται με το αν η τιμή της αγοράς εξισορρόπησης είναι (SP) (single-pricing), όπως στην Ελλάδα και στην Αγγλία ή (DP) (dual-pricing) όπως στην Γερμανία, Ισπανία κλπ. Στη πρώτη περίπτωση η τιμή που εκδίδεται από TSO, στην περίπτωση μας από τον ΑΔΜΗΕ αποτελείται από μια τιμή μόνο. Στην δεύτερη περίπτωση η Dual-Pricing Αγορά Εξισορρόπησης αποτελείται από δύο διαφορετικές τιμές σύμφωνα με το αν το σύστημα είναι σε έλλειμα ή πλεόνασμα ενέργειας. Καθώς μας ενδιαφέρει το πρόβλημα Βελτιστοποίησης των τελικών εσόδων ενός παραγωγού, το οποίο επηρεάζεται από τον μηχανισμό με τον οποίο λειτουργεί η Αγορά Εξισορρόπησης θα αναφέρουμε δύο διαφορετικά προβλήματα βελτιστοποίησης για καθένα από τους δύο μηχανισμούς.

Λοιπές Χρεώσεις

Σύμφωνα με το Άρθρο 101 του κώδικα για την Αγορά Εξισορρόπησης η Ρυθμιστική Αρχή Ενέργειας ΑΔΜΗΕ έχει υποβάλει επιπλέον χρεώσεις για τους διαχειριστές Χαρτοφυλακίων Μονάδων ΑΠΕ, σε περίπτωση σημαντικής απόκλισης, εντός του ημερολογιακού μήνα m . Μεταξύ της ποσότητας ενέργειας που παράγεται από τα Χαρτοφυλάκια Μονάδων ΑΠΕ σε μια Αγοριαία Χρονική Μονάδα και του αντίστοιχου Προγράμματος Αγοράς του Στιμβαλλόμενου Μέρους με Ευθύνη Εξισορρόπησης p , ο Διαχειριστής του ΕΣΜΗΕ επιβάλλει χρέωση η οποία ισούται με $NCBAL_{e,m}$ και υπολογίζεται με βάση τις συνολικές Αποκλίσεις εντός του μήνα m και την ενεργό τιμή των αποκλίσεων εντός του μήνα m .

Ως σημαντική απόκλιση θεωρείται η περίπτωση όπου η κανονικοποιημένη απόλυτη απόκλιση για τον μήνα m υπερβαίνει το όριο ανοχής $TOL_{r,ADEV}$ ή η κανονικοποιημένη ενεργός τιμή των αποκλίσεων για τον μήνα m υπερβαίνει το όριο ανοχής $TOL_{r,RMSDEV}$.

* $DEV_{e,t}$: Η απόκλιση για κάθε Αγοριαία Χρονική μονάδα t .

$$DEV_{e,t} = MQ_{e,t} - MS_{e,t}$$

* $ADEV_{e,m}$ η μηνιαία απόκλιση για τον μήνα m ,

$$ADEV_{e,m} = \sum_{t \in m} |DEV_{e,t}|$$

* $NADEV_{e,m}$: Η μηνιαία ενεργός τιμή των αποκλίσεων

$$NADEV_{e,m} = \frac{ADEV_{e,m}}{\sum_{t \in m} MQ_{e,t}}$$

* $RMSDEV_{e,m}$: Η κανονικοποιημένη ενεργός τιμή για τον μήνα m

$$RMSDEV_{e,m} = \sqrt{\sum_{t \in m} DEV_{e,t}^2}$$

* $NRMSDEV_{e,m}$: Για την οντότητα με ευθύνη εξισορρόπησης

$$NRMSDEV_{e,m} = \frac{RMSDEV_{e,m}}{\sqrt{\sum_{t \in m} (MQ_{e,t}^2)}}$$

όπου

- $DEV_{e,t}$: Η απόκλιση από το Πρόγραμμα Αγοράς για το σύνολο των χαρτοφυλακίων ΑΠΕ που εκπροσωπεί το Συμβαλλόμενο Μέρος με Ευθύνη Εξισορρόπησης p για την Αγοραία Χρονική Μονάδα t
- $MS_{p,t}$: Το Πρόγραμμα Αγοράς του συνόλου των χαρτοφυλακίων ΑΠΕ που εκπροσωπεί το Συμβαλλόμενο Μέρος με Ευθύνη Εξισορρόπησης p για την Αγοραία Χρονική Μονάδα t, και
- $MQ_{e,t}$: Η μετρούμενη παραχθείσα ενέργεια για το σύνολο των χαρτοφυλακίων ΑΠΕ που εκπροσωπεί το Συμβαλλόμενο Μέρος με Ευθύνη Εξισορρόπησης p για την Αγοραία Χρονική Μονάδα t.

Συνεπώς η μηνιαία χρέωση που αντιστοιχεί στο Συμβαλλόμενο Μέρος με Ευθύνη Εξισορρόπησης p για τον μήνα m υπολογίζεται ως το μέγιστο ποσό των κυρώσεων που προκύπτουν από τις μηνιαίες απόλυτες Αποκλίσεις και τις ενεργές τιμές των Αποκλίσεων.

$$NCBAL_{p,m} = \max \begin{cases} (UNCBALR_{ADEV} \cdot ADEV_{p,m}) \cdot (NADEV_{p,m} - TOL_{r,ADEV}) \\ (UNCBALR_{RMSDEV} \cdot RMSDEV_{p,m}) \cdot (NRMSDEV_{p,m} - TOL_{r,RMSDEV}) \\ 0 \end{cases}$$

όπου

- $UNCBALR_{ADEV}$: η μοναδιαία χρέωση που αντιστοιχεί σε Χρεώσεις μη Συμμόρφωσης για τα Χαρτοφυλάκια Μονάδων ΑΠΕ για τη μηνιαία κανονικοποιημένη απόλυτη απόκλιση,
- $UNCBALR_{RMSDEV}$: η μοναδιαία χρέωση που αντιστοιχεί σε Χρεώσεις μη Συμμόρφωσης για Χαρτοφυλάκια Μονάδων ΑΠΕ για τη μηνιαία μη κανονικοποιημένη ενεργό τιμή των αποκλίσεων

- $TOL_{r,ADEV}$: το όριο ανοχής για την επιβολή Χρεώσεων μη Συμμόρφωσης σε Χαρτοφυλάκια Μονάδων ΑΠΕ για τη μηνιαία κανονικοποιημένη απόλυτη απόκλιση, και
- $TOL_{r,RMSDEV}$: το όριο ανοχής για την επιβολή Χρεώσεων μη Συμμόρφωσης σε Χαρτοφυλάκια Μονάδων ΑΠΕ για τη μηνιαία κανονικοποιημένη ενεργό τιμή των αποκλίσεων.

Οι αριθμητικές τιμές των μοναδιαίων χρεώσεων $UNCBALR_{ADEV}, UNCBALR_{RMSDEV}$ και των ορίων ανοχής $TOL_{r,ADEV}, TOL_{r,RMSDEV}$ καθορίζονται με απόφαση της ΡΑΕ μετά απο εισήγηση του διαχειριστή του ΕΣΜΗΕ. Η απόφαση αυτή δημοσιεύεται τουλάχιστον δύο μήνες πριν από την εφαρμογή των νέων τιμών των ανωτέρω παραμέτρων. Ο μέχρι τώρα κανονισμός υπολογίζει τις χρεώσεις αυτές σύμφωνα με τα παρακάτω δεδομένα.

Παράμετρος	Τιμή	
$UNCBALR_{ADEV}$	10 €/MWh	
$UNCBALR_{RMSDEV}$	210 €/MWh	
$TOL_{r,ADEV} = \max \left[\min(TOL_{ADEV}, \min \left(\max(TOL_{ADEV}, (\alpha1_{ADEV} + \alpha2_{ADEV} * (\sum_{i \in \text{em}} MQ_{pt})^{\alpha3_{ADEV}}) \right) \right) \right]$	$\max TOL_{ADEV}$	100%
	$\min TOL_{ADEV}$	20%
	$\alpha1_{ADEV}$	0,35
	$\alpha2_{ADEV}$	-0,009
	$\alpha3_{ADEV}$	0,28
$TOL_{r,RMSDEV} = \max \left[\min(TOL_{RMSDEV}, \min \left(\max(TOL_{RMSDEV}, (\alpha1_{RMSDEV} + \alpha2_{RMSDEV} * (\sum_{i \in \text{em}} MQ_{pt})^{\alpha3_{RMSDEV}}) \right) \right) \right]$	$\max TOL_{RMSDEV}$	100%
	$\min TOL_{RMSDEV}$	20%
	$\alpha1_{RMSDEV}$	0,4
	$\alpha2_{RMSDEV}$	-0,009
	$\alpha3_{RMSDEV}$	0,28

(α') Υπολογισμός αριθμητικών τιμών των μοναδιαίων χρεώσεων $UNCBALR_{ADEV}, UNCBALR_{RMSDEV}$ και των ορίων ανοχής $TOL_{r,ADEV}, TOL_{r,RMSDEV}$

5.2 Παρουσίαση Προβλήματος Βελτιστοποίησης

Θεωρήστε μια διαδοχική διαδικασία λήψης αποφάσεων, όπως η εμπορία ανανεώσιμων πηγών ενέργειας ή η ηλεκτρικός προγραμματισμός της συνολικής παραγωγής, το αποτέλεσμα της οποίας εξαρτάται από την πραγματοποίηση ενός στοχαστικού παράγοντα, όπως για παράδειγμα μια μετεωρολογική μεταβλητή. Συγκεκριμένα στην περίπτωση της συναλλαγής ηλεκτρικής ενέργειας μέσω του Χρηματιστηρίου Ενέργειας ο συμμετέχων διαθέτει μια σημειακή πρόβλεψη της παραγωγής τους η οποία είναι διαθέσιμη σε αυτόν πριν το κλείσιμο κάθε αγοράς και ανανεώνεται ανάλογα. Ο στόχος του trader (Φο.Σ.Ε) είναι να επικαιροποιήσει βέλτιστα τη στρατηγική του σύμφωνα με τις διαθέσιμες πληροφορίες, για να μεγιστοποιήσει έναν συγκεκριμένο λειτουργικό κέρδος.

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε τη βασική διατύπωση του προβλήματος της βέλτιστης διαπραγματεύσεως όταν ο όγκος παραγωγής είναι αβέβαιος, όπως συμβαίνει για τις ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, όπως είναι η αιολική και ηλιακή παραγωγή ενέργειας. Προκειμένου να διαμορφωθεί το πρόβλημα θα εισάγουμε τις ακόλουθες παραδοχές.

Π.1 Ο στοχαστικός παραγωγός, στην περίπτωση μας η Joule S.A συμμετέχει μόνο στην Αγορά Επόμενης Ημέρας (Day-Ahead Market) και στην αγορά εξισορρόπησης όπου χρεώνεται τυχούσες αποκλίσεις από την πραγματική παραγωγή, ενώ οι ενδο-ημερήσιες αγορές (CRIDA) δεν έχουν ληφθεί υπόψιν στην παρούσα ανάλυση.

Π.2 Ο στοχαστικός παραγωγός δεν κατέχει μεγάλο μερίδιο της αγοράς, δηλαδή η παραγωγή του δεν μπορεί να επηρεάσει τις τιμές των αγορών, συνεπώς θεωρούμε ότι είναι price-taker.

Παρόλο που στην περίπτωση των Ελληνικών Αγορών Ενέργειας γνωρίζουμε ότι η Τιμή της Αγοράς Εξισορρόπησης είναι μια (SP) θα μοντελοποιήσουμε και τα δύο προβλήματα για να δείξουμε τους γενικούς μηχανισμούς που χρησιμοποιούνται σε άλλες Ευρωπαϊκές χώρες και να παρουσιάσουμε το κέρδος που μπορεί να εξασφαλισθεί και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιώντας το Πιθανοτικό Μοντέλο Πρόβλεψης. Παρόμοιο έργο έχει παρουσιαστεί στα [27],[28],[35] για την περίπτωση των Dual - Pricing Αγορών, ενώ για την περίπτωση των (SP) [27],[11],[32].

5.3 Single Pricing Αγορές - Βέλτιστες Στρατηγικές

Σε μια αγορά εξισορρόπησης με μία τιμή, οι αποκλίσεις από τα συμβόλαια ημέρας διαπραγματεύονται σε μία μοναδική τιμή εξισορρόπησης, ανεξάρτητα από το πρόσημο των ανισορροπιών του παραγωγού και του συστήματος. Γενικά η τιμή της αγοράς εξισορρόπησης είναι υψηλότερη από αυτήν της Αγοράς Επόμενης Ημέρας αν το σύστημα βρίσκεται σε ανοδική εφεδρεία δηλ. όταν το σύστημα έχει έλλειμμα παραγωγής ενέργειας ως αποτέλεσμα όλων των αποκλίσεων από τους παραγωγούς και καταναλωτές σε σχέση με τις θέσεις τους για την επόμενη ημέρα. Αντίθετα, στην καθοδική περίπτωση ρύθμισης (δηλαδή όταν το σύστημα έχει πλεόνασμα παραγωγής) η τιμή εξισορρόπησης είναι χαμηλότερη από την τιμή της Αγοράς Επόμενης ημέρας.

Ξεκινάμε την εξαγωγή των συμπερασμάτων μας με την καταγραφή του συνολικού κέρδους κατά τη διάρκεια μιας περιόδου διαπραγμάτευσης για τον στοχαστικό παραγωγό ενέργειας, το οποίο ισούται με το γινόμενο μεταξύ της ενέργειας ανταλλαγής και της αντίστοιχης τιμής, αθροιζόμενο σε όλα τα στάδια της αγοράς. Θεωρώντας μόνο την (DA) Αγορά και την Αγορά εξισορρόπησης, και ορίζοντας με λ την τιμή και E την εμπορεύσιμη παραγωγή θα μπορούσαμε να γράψουμε τα συνολικά κέρδη ως εξής

$$\rho = \underbrace{\lambda^D E^D}_{\text{κέρδη DA}} + \underbrace{\lambda^B \tilde{E}^B}_{\text{κέρδη BM}}$$

όπου \tilde{E} δηλώνει στην στοχαστική παραγωγή ενέργειας και E^D το πρόγραμμα του παραγωγού για την Αγορά Επόμενης ημέρας, δηλαδή την προσφορά που θα καταθέσει στο Χρηματιστήριο Ενέργειας. Επιπλέον με $\tilde{E}^B = \tilde{E} - E^D$ δηλώνουμε την απόκλιση από την πραγματική παραχθείσα ενέργεια και την προσφορά στην DA αγορά. Καθώς η πραγματική παραγωγή είναι στοχαστική συμπαιρνόμαστε ότι και τα τελικά κέρδη αποτελούν μια στοχαστική ποσότητα.

Ένα σχετικό ερώτημα σε διαδικασίες λήψης αποφάσεων υπό την έκθεση σε στοχαστικά κέρδη είναι ο ορισμός του στόχου της βέλτιστης στρατηγικής. Εάν υποθέσουμε εδώ έναν ουδέτερο από άποψη κινδύνου συμμετέχοντα, ο παραγωγός σε αυτή την περίπτωση ενδιαφέρεται να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του πιθανοθεωρητικά, ανεξάρτητα από το αν ο σχήμα της κατανομής των κερδών συνεπάγεται την πιθανότητα να υποστεί μεγάλες ζημιές. Στη θεωρία απόφασης, η αναμενόμενη αξία των κερδών για μια συγκεκριμένη απόφαση έχει την ονομασία αναμενόμενη νομισματική αξία (Expected Monetary value - EMV). Μπορούμε να διατυπώσουμε την EMV αν θεωρήσουμε επίσης ότι και οι τιμές των δύο αγορών είναι δύο στοχαστικές διαδικασίες ως

εξής

$$E[\rho] = E[(\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B)E^D] + E[\tilde{\lambda}^B \tilde{E}]$$

Εφόσον ο δεύτερος όρος δεν μπορεί να βελτιστοποιηθεί απο την μεριά του στοχαστικού διαχειριστή του Χαρτοφυλακίου ενέργειας, ο μόνος τρόπος για να μεγιστοποιηθεί το κέρδος είναι η βέλτιστη στρατηγική E^D να μεγιστοποιεί τον πρώτο όρο της αναμενόμενης νομισματικής αξίας. Επίσης θεωρώντας οτι η στοχαστική διαδικασία των διαφορών της τιμή των δύο αγορών $[(\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B)]$ είναι ανεξάρτητη απο την τιμή της DA αγοράς έχουμε οτι

$$E[\rho] = E[(\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B)]E^D + E[\tilde{\lambda}^B \tilde{E}]$$

Συνεπώς το πρόβλημα μεγιστοποίησης των κερδών του στοχαστικού διαχειριστή Χαρτοφυλακίου ενέργειας είναι τετριμένο και συγκεκριμένα

- If $E[\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B] < 0$ βέλτιστη θέση είναι 0.
- If $E[\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B] > 0$ βέλτιστη προσφορά ίση με την συνολική ισχύ του Χαρτοφυλακίου.
- If $E[\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B] = 0$ ο παραγωγός ηλεκτρικής ενέργειας είναι αδιάφορος, δεδομένου ότι οποιαδήποτε απόφαση σχετικά με το E^D θα αποφέρει το ίδιο αναμενόμενο κέρδος.

Algorithm 3 Βέλτιστη Στρατηγική για Στοχαστική Παραγωγή και Στοχαστικές Τιμές Αγορών Ενέργειας χωρίς Διαχείριση Ρίσκου (**Single-Pricing**)

- 1: Αν $E[\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B] < 0 \implies$ **Μηδενική Παραγωγή (MWh)**
 - 2: Αν $E[\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B] > 0 \implies$ **Μέγιστη Ισχύς Χαρτοφυλάκιο (MWh)**
 - 3: Αν $E[\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B] = 0 \implies$ **Οποιαδήποτε Προσφορά (MWh)**
-

Συγκωνεύοντας τις δύο τελευταίες περιπτώσεις της παραπάνω στρατηγικής λαμβάνουμε οτι

$$E^{D*} \begin{cases} E_{max} & \hat{\psi} \geq 0 \\ 0 & \hat{\psi} < 0 \end{cases}$$

Εξετάζοντας λοιπόν την στρατηγική αυτή παρατηρούμε οτι η βέλτιστη προσφορά E^{D*} καθορίζεται πλήρως απο το σήμα της προβλεπόμενης ποσότητας $\hat{\psi} = E[\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B]$, καθώς δεν απαιτείται η χρήση κάποιας σημειωτικής ή πιθανοτικής πρόβλεψης για την παραγωγή της επόμενης ημέρας. Στην πραγματικότητα, αυτή η στρατηγική θα εξέθετε τους συμμετέχοντες σε μεγάλο κίνδυνο λόγω μεγάλων ανισορροπιών. Επιπλέον, η παραδοχή του price-taker παραγωγού θα μπορούσε να παραβιαστεί στην πράξη. Συνεπώς ο περιορισμός της βέλτιστης προσφοράς θα μπορούσε να οδηγήσει σε καλύτερη αντιστάθμιση απόδοσης-κινδύνου [11]. Συνεπώς αν υποθέσουμε οτι γνωρίζουμε την συνάρτηση κατανομή της στοχαστικής παραγωγής ενέργειας \hat{F}_E , η οποία έχει υπολογιστεί εμπειρικά μέσω της Πιθανοτικής Πρόβλεψης που κατασκευάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια χρησιμοποιώντας την θεωρία των Στοχαστικών Διαφορικών εξισώσεων, θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη στρατηγική η οποία λαμβάνει υπόψιν της το Ρίσκο στο οποίο μπορεί να εκτεθεί ο συμμετέχων.

Algorithm 4 Βέλτιστη Στρατηγική για Στοχαστική Παραγωγή και Στοχαστικές Τιμές Αγορών Ενέργειας με χρήση Πιθανοτικής Πρόβλεψης (**Single-Pricing**)

- 1: Αν $E[\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B] < 0 \implies \hat{q}_{.50}$,
 - 2: Αν $E[\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B] > 0 \implies \hat{q}_{1-a}$
 - 3: Αν $E[\tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B] = 0 \implies \hat{q}_a$,
-

όπου \hat{q}_a είναι το a -quantile της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής \hat{F}_E , με $a \in (0, 0.50]$ μια παραμέτρος η οποία ρυθμίζει τον βαθμό αποφυγής κινδύνου. Δηλαδή

$$q_t^{(a)} = F_t^{-1}(a) = \inf\{x \in [0, E_{max}] F_E(x) \geq a\}$$

Καθώς $a \rightarrow 0.50$ ο όρος στο αναμενόμενο κέρδος που υπολογίζει το κέρδος λόγω της απόκλισης γίνεται όλο και μικρότερος και η στρατηγική αποφεύγει πιο πολύ το ρίσκο.

Συνεπώς παρατηρούμε ότι και στις δύο παραπάνω στρατηγικές που κατασκευάστηκαν απαιτείται η πρόβλεψη του προσήμου της διαφοράς των δύο στοχαστικών ποσοτήτων λ^B , λ^D καθώς και στην δεύτερη περίπτωση απαιτείται ένα μοντέλο κατασκευής μιας Πιθανοτικής Πρόβλεψης για την στοχαστική ποσότητα της παραγωγής ενέργειας. Σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε και να συγκρίνουμε τα κέρδη χρησιμοποιώντας κάθε μια από τις παραπάνω στρατηγικές, για καθένα από τα Πιθανοτικά Μοντέλα (**ΣΔΕ 1 : No Derivative Tracking**, **ΣΔΕ 2 : Derivative Tracking**) που κατασκευάσαμε στις προηγούμενες ενότητες καθώς και την αξιολόγηση του μοντέλου που χρησιμοποιεί αποκλειστικά την σημειακή πρόβλεψη. Απαραίτητο και στις δύο περιπτώσεις είναι η κατασκευή ενός μοντέλου Παλινδρόμησης ή Ταξινόμησης ώστε να μπορέσουμε να προβλέψουμε το πρόσημο της ποσότητας $\hat{\psi} = \tilde{\lambda}^D - \tilde{\lambda}^B$. Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για την πρόβλεψη της ποσότητας αυτής.

Περιγραφή πρώτης μελέτης (SP) - Δεδομένα και Αποτελέσματα

Το πρώτο Case Study που θα παρουσιαστεί είναι η συμμετοχή ενός Φο.Σ.Ε, στην περίπτωση μας η εταιρεία Joule S.A, η οποία έχει στην κατοχή της ένα χαρτοφυλάκιο ενέργειας το οποίο έχει συνολική χωριτηρότητα 32 MW, και αποτελείται αποκλειστικά από PV, τα οποία βρίσκονται σε διάφορες τοποθεσίες στην Ελλάδα. Στόχος μας είναι η εκπροσώπηση του Χαρτοφυλακίου αυτού στις Ελληνικές Αγορές ενέργειας, και συγκεκριμένα συμμετοχή στην (DA) και (BM) αγορά. Στην κατοχή μας όπως έχουμε παρουσιάσει στην προηγούμενη ενότητα έχουμε διαθέσιμα δεδομένα σημειακής πρόβλεψης και πραγματικής παραγωγής ενέργειας (MWh) για συνολικά τρεις μήνες $D = (2022/03/01 - 2022/05/31)$. Συνεπώς μέσω της μεθόδου κατασκευής Πιθανοτικών προβλέψεων μπορούμε να κατασκευάσουμε τις πιθανοτικές προβλέψεις για κάθε $t \in D$. Η περίοδος ανάπτυξης και σύγκρισης των στρατηγικών είναι δύο μήνες $D_{strategy} = (2022/04/01 - 2022/05/31)$.

Έχοντας κατασκευάσει τις πιθανοτικές προβλέψεις για την στοχαστική παράγωγη ενέργειας επόμενος στόχος είναι η κατασκευή ενός μοντέλου Παλινδρόμησης ή Ταξινόμησης για την ποσότητα $\hat{\psi}$. Για να το επιτύχουμε αυτό χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα του Ελληνικού Χρηματιστηρίου ενέργειας τα οποία είναι διαθέσιμα πριν το κλείσιμο της DA Αγοράς [2],[1]. Συγκεκριμένα οι επεξηγηματικές μεταβλητές x^{imb} , που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι προβλέψεις του ΑΔΜΗΕ για την συνολική παραγωγή από ΑΠΕ στην χώρα, η πρόβλεψη του συνολικού φορτίου, οι αναγκαία παραγωγή από υδροηλεκτρικά, η συνολική ενέργεια εφεδρείας καθώς και οι κατηγορικές μεταβλητές που μας δείχνουν πιθανές ημερολογιακές επιδράσεις, αν κάθε μια ώρα της ημέρας αποτελεί ημέρα κάποιας γιορτής (εθνικής) και αν η δεδομένη μέρα είναι καθημερινή η Σαββατοκύριακο καθώς και κυκλικά χαρακτηριστικά τα οποία μπορεί να φανερώσουν καθημερινά μοτίβα. Για την πρόβλεψη της συγκεκριμένης ποσότητας χρησιμοποιήθηκαν πολλά διαφορετικά μοντέλα του τομέα Μηχανικής Μάθησης. Στην περίπτωση των Ελληνικών Αγορών και των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν καλύτερη απόδοση είχε το **Lasso Estimated AutoRegressive Model** το

οποίο παρουσιάζεται στο [22] καθώς και ένα μοντέλο DNN το οποίο χρησιμοποιεί recalibration στα διαθέσιμα ιστορικά δεδομένα.

- (i) **Lasso Estimated AutoRegressive Model** [22]. Το μοντέλο αυτό προτείνεται στην βιβλιογραφία από τους Weron και Jesus Lago [22], ως σημείο αναφοράς για την πρόβλεψη της τιμής της Day-Ahead Αγοράς. Στόχος είναι να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη της διαφοράς της τιμής μεταξύ DA και Αγοράς Εξισορρόπησης.
- (ii) **DNN (Deep Neural Network)**: Το DNN είναι ένα βαθύ νευρωνικό δίκτυο που περιέχει 4 στρώματα, χρησιμοποιεί το πολυμεταβλητό πλαίσιο (ενιαίο μοντέλο με 24 εξόδους), εκτιμάται με τη χρήση του Adam, και οι υπερπαραμέτροι και οι χαρακτηριστικά εισόδου βελτιστοποιούνται με τη χρήση του εκτιμητή δέντρου Parzen.

Θα χρησιμοποιηθούν συνολικά τρεις διαφορετικές στρατηγικές και για κάθε μια από αυτές θα παρουσιαστούν πιθανές διαφορετικές εκδοχές. Συγκεκριμένα

- (A) **Στρατηγική Αναφοράς (PK Strategy)**: Η συγκεκριμένη στρατηγική αποτελεί ένα benchmark, στο οποίο ουσιαστικά γνωρίζουμε την συνολική παραγωγή μας (η οποία είναι η στοχαστική ποσότητα που μελετάμε) και οι προσφορές μας είναι ακριβώς ίσες με αυτήν την ποσότητα. Στην πραγματικότητα η στρατηγική αυτή δεν μπορεί να εφαρμοστεί αλλά χρησιμοποιείται ως benchmark. Στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολο ότι τα τελικά κέρδη μας από την Imbalance Αγορά είναι μηδενικά καθώς δεν έχουμε απόκλιση από την πραγματική παραγωγή.
- (B) **Ντετερμινιστική Στρατηγική (Det. Strategy)**: Στην συγκεκριμένη στρατηγική οι θέσεις μας στην DA αγορά είναι ίσες με τις σημειακές προβλέψεις τις οποίες έχουμε διαθέσιμες 1 ώρα πριν το κλείσιμο της αγοράς αυτής. Οι πιθανές αποκλίσεις στην περίπτωση αυτή οφείλονται αποκλειστικά στο σφάλμα της πρόβλεψης.
- (Γ) **Πιθανοτική Στρατηγική (Prob. Strategy)**: Η συγκεκριμένη στρατηγική βασίζεται στις πιθανοτικές προβλέψεις της στοχαστικής διαδικασίας της παραγωγής ηλιακής ενέργειας καθώς και στο μοντέλο πρόβλεψης της ποσότητας $\hat{\psi}$. Θα συγκρίνουμε συνολικά τέσσερις πιθανούς συνδυασμούς
 - (i) **ΣΔΕ 1/LEAR**: Χρήση πρώτου μοντέλου πιθανοτικών προβλέψεων όπου η ΣΔΕ που κατασκευάστηκε δεν περιέχει την παράγωγο της σημειακής πρόβλεψης και το μοντέλο Lasso Estimated AutoRegressive για την $\hat{\psi}$.
 - (ii) **ΣΔΕ 2/LEAR**: Χρήση πρώτου μοντέλου πιθανοτικών προβλέψεων όπου η ΣΔΕ που κατασκευάστηκε περιέχει την παράγωγο της σημειακής πρόβλεψης και το μοντέλο Lasso Estimated AutoRegressive για την $\hat{\psi}$.

Αποτελέσματα Στρατηγικών	Τέλεια Γνώση Παραγωγής(PK)	Det Strategy (EV)	$\alpha = 0.05$		$\alpha = 0.10$		$\alpha = 0.20$	
			ΣΔΕ 1/LEAR	ΣΔΕ 2/LEAR	ΣΔΕ 1/LEAR	ΣΔΕ 2/LEAR	ΣΔΕ 1/LEAR	ΣΔΕ 2/LEAR
Τελικό κέρδος (€/MWh)	216.90	215.13	227.65	226.485	226.20	225.10	223.71	222.70
Κέρδος (DA) Αγορά (€)	2158513.91	2162670.92	2073503.19	2111999.65	2076337.23	2118690.46	2087269.11	2131979.68
Κέρδος Αγορά εξισορρόπησης (€)	0	16071.22	244278.79	194894.12	210002.21	160808.42	158948.37	112857.27
Προσφερόμενη Ενέργεια (MWh)	9951.48	10008.86	9350.23	9450.09	9417.80	9520.46	9529.19	9625.42
Λοιπές Χρεώ- σεις (€)	0	5654.54	52325.74	53029.38	35243.30	40223.26	19911.17	28696.46
CVaR _{5%} (€)	0	-93.556	-22.834	-21.50	-13.09	-15.39	-6.24	-12.78

Πίνακας 4: Αποτελέσματα Στρατηγικών με χρήση μοντέλου **LEAR** για το $\hat{\psi} D_{strategy} = (2022/04/01 - 2022/05/31)$.

Στον παραπάνω πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των στρατηγικών χρησιμοποιώντας το μοντέλο Lasso Estimated AutoRegressive για την διαφορά μεταξύ Day Ahead και Imbalance Αγοράς. Τα κέρδη απο την Day Ahead Αγορά καθώς και τα κέρδη που μπορεί να εξασφαλίσει ο συμμετέχων απο την απόκλιση του φαίνονται να αυξάνονται για μεγαλύτερες τιμές του διαστήματος εμπιστοσύνης $\alpha \in [0, 0.5]$. Συγκεκριμένα τα μέγιστα κέρδη εμφανίζονται για την στρατηγική όπου χρησιμοποιήθηκαν τα $q^{\hat{\delta}5}, q^{\hat{\delta}}$. Στόχος είναι όμως να ποσοτικοποιηθεί και το ρίσκο στο οποίο εκτίθεται ο συμμετέχων χρησιμοποιώντας μεγαλύτερες τιμές του α . Συνεπώς χρησιμοποιήθηκε η ποσότητα Conditional Value at Risk (CVaR).

Το 5% **Conditional Value at Risk (CVaR 5%)**, που ορίζεται ως το αναμενόμενο κέρδος στο χειρότερο 5% των περιπτώσεων χρησιμοποιείται για την μέτρηση του ρίσκου των στρατηγικών που παρουσιάστηκαν. Συγκεκριμένα για να δώσουμε έναν πιο μαθημαματικό ορισμό θα παρουσιάσουμε δύο ορισμούς για το **Value at Risk (VaR)** και το **Conditional Value at Risk (CVaR)**.

Ορισμός 5.3.1. Value at Risk (VaR)

Για $a \in [0, 1]$ και ρ η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τα κέρδη, R το στήριγμα της κατανομής των κερδών η $VaR_{1-a}(\rho)$ ορίζεται ως

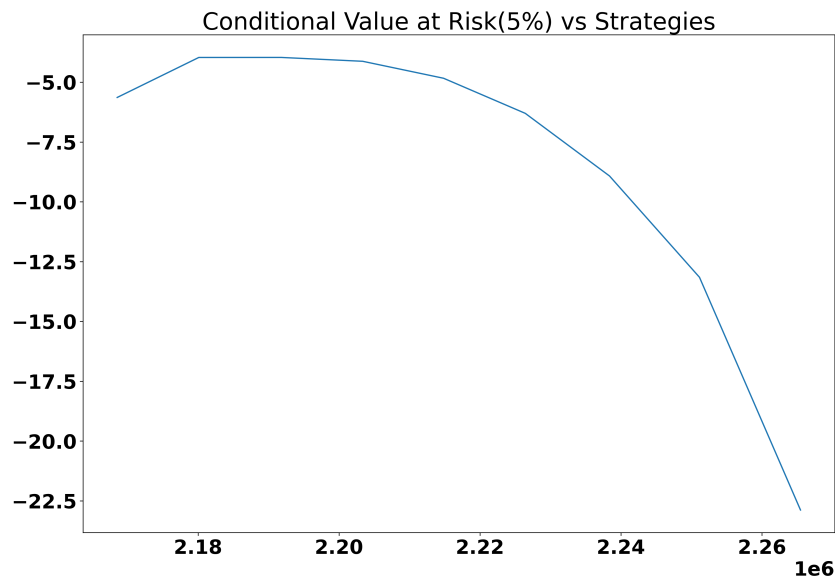
$$VaR_{1-a}(\hat{\rho}) = \sup\{\rho \in R : P(\hat{\rho} < \rho) \leq 1 - a\}$$

Ορισμός 5.3.2. Conditional Value at Risk (CVaR)

Αν θεωρήσουμε τα κέρδη ως μια συνεχή τυχαία μεταβλητή τότε το CVaR ορίζεται ως την αναμενόμενη τιμή των κερδών όπου είναι μικρότερα ή ίσα απο το επίπεδο VaR_{1-a} . Δηλαδή

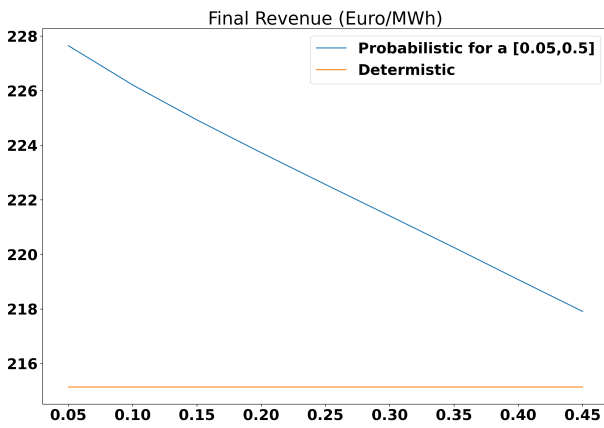
$$CVaR_{1-a}(\rho) = E\{\hat{\rho} | \hat{\rho} \leq VaR_{1-a}(\hat{\rho})\} = \frac{1}{1-a} \int_0^{VaR_{1-a}(\hat{\rho})} \rho p_{\hat{\rho}}(\rho) d\rho$$

όπου $p_{\hat{r}}(\cdot)$ η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής που εκφράζει το τελικό κέρδος.

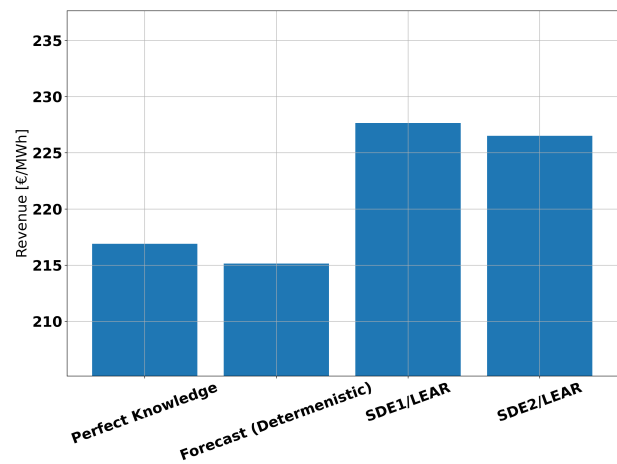


(α') Conditional Value at Risk με Revenue για αυξανόμενο $\alpha \in [0, 0.5]$ (**ΣΔΕ 1/LEAR**)

Ο πίνακας 4 παρουσιάζει αναλυτικά τα αποτελέσματα για τιμές $a = \{0.05, 0.10, 0.20\}$. Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν τις πιθανοτικές προβλέψεις που κατασκευάστηκαν μέσω των Στοχαστικών Διαφορικών εξισώσεων, υπεραποδίδουν σε σύγκριση με την στρατηγική που χρησιμοποιεί την σημειακή πρόβλεψη (EV). Ειδικά στην περίπτωση όπου $\alpha = 0.05$ μπορούμε να δούμε ότι και οι δύο στρατηγικές **ΣΔΕ 1/LEAR** και **ΣΔΕ 2/LEAR** έχουν το μεγαλύτερο αναμενόμενο τελικό κέρδος. Γενικά μικρότερες τιμές του α οδηγούν σε αύξηση και του τελικού κέρδους και του ρίσκου στο οποίο εκτίθεται ο παραγωγός (Joule S.A), το οποίο μπορούμε να το παρατηρήσουμε και από την μείωση της ποσότητας ($CVaR_{5\%}$) 16α'. Επιπλέον ένα ακόμη γεγονός που μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα αποτελέσματα είναι ότι τα κέρδη κέρδη που λαμβάνονται από το Πιθανοτικό Μοντέλο **ΣΔΕ 1/LEAR** είναι πάντα υψηλότερα από αυτά που χρησιμοποιούν το δεύτερο μοντέλο με την Στοχαστική διαφορική εξίσωση που έχει το Centering property και τον όρο της παραγωγού της σημειακής πρόβλεψης. Σε αντίθεση λοιπόν με τις μετρικές αξιολόγησης που παρουσιάστηκαν παραπάνω για την αξιολόγηση των δύο μοντέλων (CRPS, LogS), δεν μπορούμε να καταλήξουμε ότι το δεύτερο μοντέλο είναι καλύτερο από άποψη χρηματοοικονομικής απόδοσης. Αυτό στο οποίο μπορούμε όμως να καταλήξουμε είναι ότι για την συγκεκριμένη περίοδο εξάσκησης της στρατηγικής που παρουσιάστηκε παραπάνω η σημειακή πρόβλεψη αποφέρει χαμηλότερα κέρδη και από τα δύο πιθανοτικά μοντελά **ΣΔΕ 1/LEAR**, **ΣΔΕ 2/LEAR**.



(α) Σύγκριση τελικών κερδών (€/MWh) ($\Sigma\Delta E$ 1/LEAR)

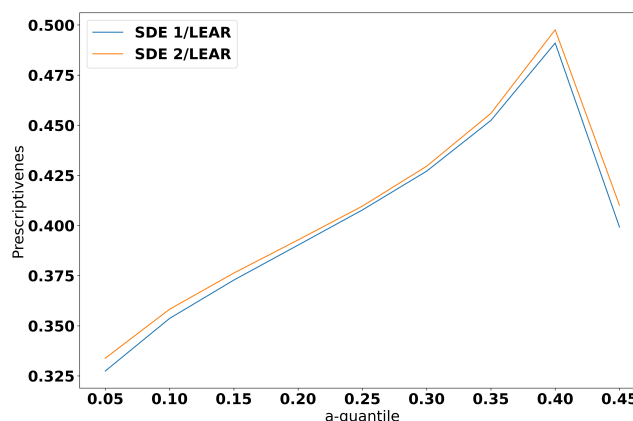


(β) Σύγκριση τελικών κερδών (€/MWh)

Εξετάζουμε περαιτέρω την απόδοση μεταξύ των στρατηγικών που χρησιμοποιούν τα Πιθανοτικά μοντέλα $\Sigma\Delta E$ 1/LEAR, $\Sigma\Delta E$ 2/LEAR, εκτιμώντας μια τροποποιημένη εκδοχή του συντελεστή prescriptiveness P που παρουσιάζεται στο [9]. Για κάθε μοντέλο λοιπόν $\Sigma\Delta E$ 1/LEAR, $\Sigma\Delta E$ 2/LEAR υπολογίζουμε την ποσότητα respectiveness ως

$$P_{i,a} = 1 - \frac{\hat{\rho}_{i,a} - \hat{\rho}_a^*}{\hat{\rho}_{EV} - \hat{\rho}_a^*}$$

όπου $\hat{\rho}_a^*$ εκφράζει το συνολικό κέρδος που θα λαμβάναμαι αν γνωρίζαμε την διαφορά των στοχαστικών τιμών $\psi = \lambda^D - \lambda^B$, και χρησιμοποιούσαμε το αντίστοιχο πιθανοτικό μοντέλο πρόβλεψης και $\hat{\rho}_{EV}$ το κέρδος απο την στρατηγική που χρησιμοποιεί την σημειακή πρόβλεψη. Το μέτρο λοιπόν P , είναι φραγμένο απο πάνω απο την μονάδα και μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μέτρο που ποσοτικοποιεί την “απόσταση”, ως προς τα κέρδη μετραξύ του μέχρι τώρα benchmark (EV) και της αντίστοιχης βέλτιστης λύσης γνωρίζοντας της κατεύθυνση της διαφοράς των τιμών (θετική ή αρνητική). Παρακάτω παρουσιάζεται το γράφημα για τις δύο στρατηγικές $\Sigma\Delta E$ 1/LEAR, $\Sigma\Delta E$ 2/LEAR, στο οποίο δεν παρατηρούμε μεγάλες διαφορές μεταξύ των δύο μοντέλων.



(α) Διαγράμματα P (coefficient perspective) για $\Sigma\Delta E$ 1/LEAR, $\Sigma\Delta E$ 2/LEAR

5.4 Dual Pricing Αγορές - Βέλτιστες Στρατηγικές

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα βέλτιστων στρατηγικών για παραγωγούς ή διαχειριστές Χαρτοφυλακίων ηλεκτρικής ενέργειας στην περίπτωση όπου η Αγορά εξισορρόπησης αποτελεί μια αγορά dual-pricing. Όπως έχει αναφερθεί στην εισαγωγή του κεφαλαίου αυτού οι αγορές Δύο Τιμών (Dual-Price), διαφέρουν στην τιμή που εκδίδεται για την αγορά Εξισορρόπησης. Οι πραγματικές αποκλίσεις σε αυτές τις αγορές τιμολογούνται διαφορετικά ανάλογα με την ανισορροπία του συστήματος το οποίο διαχειρίζεται η αρμόδια αρχή Μεταφοράς Ηλεκτρικής Ενέργειας (ο αντίστοιχος ΑΔΜΗΕ για την περίπτωση της Ελλάδας). Οι αποκλίσεις που έχουν αντίθετη κατεύθυνση από τη συνολική ανισορροπία του συστήματος, η οποία τελικά βοηθάει το σύστημα να αποκαταστήσει την ισορροπία μεταξύ παραγωγής και κατανάλωσης, τιμολογείται με την τιμή της Αγοράς Επόμενης Ημέρας (DA). Αντίθετα οι ανισορροπίες με το ίδιο πρόσημο με αυτό του συστήματος διακανονίζονται στην τιμή εκκαθάρισης της αγοράς εξισορρόπησης, η οποία αποτελείται σε αυτήν την περίπτωση από δύο ξεχωριστές τιμές λ^{UP} , λ^{DW} . Συνεπώς τα συνολικά κέρδη για χαρτοφυλακίου ρ_k μπορούν να γραφούν ως τα κέρδη από $\rho_k^{(D)}$ και $\rho_k^{UP/DW}$. Θεωρούμε επίσης \tilde{W}_k το ποσό ενέργειας το οποίο διακανονίζεται στην Αγορά Επόμενης ημέρας και W_k η στοχαστική παραγωγή. Τα κέρδη λοιπόν στην Αγορά Επόμενης Ημέρας (DA) μπορούν να εκφραστούν ως

$$\rho_k^{(DA)} = \pi_k^{(DA)} \tilde{W}_k$$

Επιπλέον τα κέρδη από την εκκαθάριση και την τιμή της Αγοράς εξισορρόπησης στην περίπτωση της Dual-Pricing προκύπτουν ως

$$\rho_k^{UP/DW} = \begin{cases} \pi_k^{DW} (W_k - \tilde{W}_k), & W_k \geq \tilde{W}_k \\ \pi_{-k}^{UP} (W_k - \tilde{W}_k), & W_k < \tilde{W}_k \end{cases}$$

όπου στην παραπάνω σχέση οι ποσότητες π_k^{DW} (π_k^{UP}), εκφράζουν την διαφοροποίηση των Dual Pricing Αγορών στις οποίες εκδίδονται δύο διαφορετικές τιμές ανάλογα με την "θέση" της ανισορροπίας της παραγωγής, αν δηλαδή υπάρχει υπερπαραγωγή ή υποπαραγωγή. Στην περίπτωση της Nord Pool η οποία θα είναι και αυτή που θα μελετηθεί στην εφαρμογή της πολιτικής υπάρχει επίσης και ο περιορισμός

$$\begin{aligned} \pi_l^{DW} &\leq \pi_k^{(DA)} \\ \pi_l^{UP} &\leq \pi_k^{(DA)} \end{aligned}$$

ισχύει για κάθε χρονική στιγμή. Συνεπώς σύμφωνα με την συνολική απόκλιση του συστήματος, το πρόσημο της ανισότητας αντικαθίσταται από ένα πρόσημο ισότητας στη παραπάνω εξίσωση. Συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε την καθαρή ανισορροπία του συστήματος ως

$$(\tilde{G}_k - G_k) - (\tilde{L}_k - L_k)$$

όπου \tilde{G}_k , G_k η συνολική ενέργεια η οποία συναλλάχθηκε στην DA αγορά και G_k η πραγματική προσφορά των παραγωγών, αντίστοιχα. Επιπλέον \tilde{L}_k , L_k η υποβληθείσα ενέργεια που χρειάζεται προς κατανάλωση και η πραγματική κατανάλωση. Αν λοιπόν η παραπάνω σχέση διαφορετική του μηδενός, πρέπει να ενεργοποιηθούν σε πραγματικό χρόνο προσφορές ώστε να ανακτηθεί η ισορροπία του συστήματος. Συνεπώς σε ώρες όπου έχουμε πλεόνασμα παραγωγής δηλαδή η σχέση $(\tilde{G}_k - G_k) - (\tilde{L}_k - L_k)$ είναι αρνητική οι τιμές της αγοράς εξισορρόπησης ικανοποιούν

$$\pi_k^{DW} \leq \pi_k^{(DA)}$$

$$\pi_k^{UP} = \pi_k^{(DA)}$$

Ενώ στην αντίθεση περίπτωση θα έχουμε

$$\pi_k^{DW} = \pi_k^{(DA)}$$

$$\pi_k^{UP} \geq \pi_k^{(DA)}$$

Σε περίπτωση τέλει ισορροπίας του συστήματος $\pi_k^{DW} = \pi_k^{(DA)} = \pi_k^{UP}$. Σύμφωνα με [35] το σχεπτικό πίσω από αυτή την επιλογή του σχεδιασμού της αγοράς είναι ότι οι παραγωγοί δεν πρέπει να έχουν τη δυνατότητα να επωφεληθούν από την ανισορροπία τους.

Μπορούμε να γράψουμε τα κέρδη λοιπόν σύμφωνα με την σχέση

$$\rho_k = \pi_k^{(DA)} W_k + C_k^{(UP/DW)}$$

Υποθέτοντας ότι ο παραγωγός έχει μικρή ισχύ σε σχέση με το συνολικό μείγμα και δεν μπορεί να επηρεάσει την αγορά (price-taker), ο όρος της παραπάνω σχέσης $\pi_k^{(DA)} W_k$, είναι ανεξάρτητος της στρατηγικής. Ο δεύτερος όρος μπορεί να γραφεί ως

$$C_k^{UP/DW} = \begin{cases} \psi_k^{DW} (W_k - \tilde{W}_k), & W_k \geq \tilde{W}_k \\ \psi_k^{UP} (W_k - \tilde{W}_k), & W_k < \tilde{W}_k \end{cases}$$

όπου οι όροι ψ_k^{DW}, ψ_k^{UP} συμβολίζουν

$$\psi_k^{DW} = \pi_k^{DW} - \pi_k^{(DA)} \leq 0$$

και

$$\psi_k^{UP} = \pi_k^{UP} - \pi_k^{(DA)} \geq 0$$

Η ποσότητα λοιπόν $C_k^{UP/DW}$ λαμβάνει υπόψη τα αρνητικά έσοδα, τα οποία αντιπροσωπεύουν τις απώλειες για τον παραγωγό που συνάπτει συμβόλαιο \tilde{W}_k στην αγορά day-ahead σε σύγκριση με την στρατηγική όπου γνωρίζει ακριβώς την παραγωγή του. Επιπλέον οι τιμές ψ_k^{DW}, ψ_k^{UP} αποτελούν και αυτές στοχαστικές διαδικασίες και στην πραγματικότητα δεν γνωρίζουμε τις τιμές τους πριν της εκκαθάριση κάθε αγοράς. Σκοπός είναι να βρεθεί βέλτιστη στρατηγική για την μεγιστοποίηση των κερδών. Σύμφωνα με [35], [27],[28], αν υποθέσουμε ότι ο παραγωγός ηλεκτρικής ενέργειας έχει ως στόχος την μεγιστοποίηση του Expected Monetary Value, τότε το σύνολο των προσφορών που καταθέτει στην DA αγορά το οποίο μεγιστοποιεί το συνολικό του κέρδος είναι

$$\tilde{W}^*(*) = \underset{\tilde{W}}{argmax} \mathbb{E}\{\rho_k\}$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση του price-taker η μεγιστοποίηση των συνολικών εδосων είναι ισοδύναμη με την μεγιστοποίηση αναμενόμενων κόστων $C_k^{UP/DW}$ τα οποία είναι μη-θετικά.

$$\tilde{W}^*(*) = \underset{\tilde{W}}{argmax} \mathbb{E}\{C_k^{UP/DW}\}$$

Το παραπάνω πρόβλημα είναι μια παραλλαγή του γνωστού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη (newsvendor problem) στο οποίο το κόστος ανισορροπίας που πρέπει να επωμιστεί ο υπεύθυνος λήψης αποφάσεων είναι στοχαστικά, ασύμμετρα και γραμμικά.

Σύμφωνα με τη θεωρία των [29] , ο ορθολογικός λήπτης αποφάσεων μπορεί να προσδιορίσει τη βέλτιστη απόφαση χωρίς να λάβει υπόψη του ολόκληρη τη συνάρτηση κατανομής του μοναδιαίου κόστους. Αντ' αυτού, επιλύεται ένα ισοδύναμο πρόβλημα, στο οποίο το στοχαστικό μοναδιαίο κόστος αντικαθίσταται από ορισμένες ντετερμινιστικές συναρτήσεις του ίδιου του μοναδιαίου κόστους. Δείχνουμε παρακάτω ότι η μεγιστοποίηση του $C_k^{UP/DW}$ είναι ισοδύναμη με την μεγιστοποίηση της αναμενόμενης τιμής της συνάρτησης αυτής με ντετερμινιστικές τιμές ψ_k^{UP}, ψ_k^{DW} .

Η αναμενόμενη τιμή της $C_k^{UP/DW}$

$$E\{C_k^{UP/DW}\} = \int_0^{+\infty} \int_0^{\tilde{W}_k} \psi_k^{UP}(W_k - \tilde{W}_k) dP_{w_k} dP_{\psi_k^{UP}} \\ + \int_{-\infty}^0 \int_{\tilde{W}_k}^{W^{max}} \psi_k^{DW}(W_k - \tilde{W}_k) dP_{w_k} dP_{\psi_k^{DW}}$$

όπου W^{max} μέγιστη χωριτηκότητα Χαρτοφυλάκιο (πάρκου). Θεωρώντας ανεξαρτησία μεταξύ των ψ και της στοχαστικής παραγωγής ,

$$E\{C_k^{UP/DW}\} = \int_0^{+\infty} \psi_k^{UP} dP_{\psi_k^{UP}} \int_0^{\tilde{W}_k} (W_k - \tilde{W}_k) dP_{w_k} \\ + \int_{-\infty}^0 \psi_k^{DW} dP_{\psi_k^{DW}} \int_{\tilde{W}_k}^{W^{max}} (W_k - \tilde{W}_k) dP_{w_k}$$

όπου θεωρώντας ότι $\int_0^{+\infty} \psi_k^{UP} dP_{\psi_k^{UP}} = E[\psi_k^{UP}] = \psi_k^{\hat{UP}}$ και $\int_{-\infty}^0 \psi_k^{DW} dP_{\psi_k^{DW}} = E[\psi_k^{DW}] = \psi_k^{\hat{DW}}$ λαμβάνουμε

$$E\{C_k^{UP/DW}\} = \psi_k^{\hat{UP}} \int_0^{\tilde{W}_k} (W_k - \tilde{W}_k) dP_{w_k} \\ + \psi_k^{\hat{DW}} \int_{\tilde{W}_k}^{W^{max}} (W_k - \tilde{W}_k) dP_{w_k}$$

Βρίσκοντας την πρώτη παράγωγο της συγκεκριμένης ποσότητας ως προς την \tilde{W}_k και θέτοντας την ίση με μηδέν μπορούμε εύκολα να βρούμε την βέλτιστη στρατηγική

$$\tilde{W}_k^* = F_{W_k}^{-1} \left(\frac{|\psi_k^{\hat{DW}}|}{\psi_k^{\hat{UP}} + |\psi_k^{\hat{DW}}|} \right)$$

όπου η F_{W_k} εκφράζει την συνάρτηση κατανομής της στοχαστικής παραγωγής ενέργειας την οποία έχουμε κατασκευάσει εμπειρικά με την χρήση των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων. Συνεπώς η βέλτιση προσφορά είναι ένα quantile της κατανομής της στοχαστικής ποσότητας W_k υπολογισμένο στο επίπεδο πιθανότητας το οποίο δίνεται απο την σχέση

$$r_k^* = \frac{|\psi_k^{\hat{DW}}|}{\psi_k^{\hat{UP}} + |\psi_k^{\hat{DW}}|}$$

Συνεπώς για την εφαρμογή της παραπάνω στρατηγικής είναι αναγκαία η χρήση των πιθανοτικών προβλέψεων καθώς και μιας διαδικασίας υπολογισμού των στοχαστικών ποσοτήτων

$$r_k^* = \frac{|\psi_k^{\hat{D}W}|}{\psi_k^{\hat{U}P} + |\psi_k^{\hat{D}W}|}$$

Παρακάτω παρουσιάζεται μια εφαρμογή της στρατηγικής αυτής σε μια αγορά με Dual Pricing μηχανισμό την DK1 στην Δανία.

5.4.1 Δεδομένα και Παρουσίαση Dual Pricing Στρατηγικής

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα δεδομένα καθώς και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την δοκιμή των Πιθανοτικών προβλέψεων και της στρατηγικής που παρουσιάσαμε παραπάνω, προσομοιώντας την εμπορία ενέργειας στη Nord Pool. Στόχος μας είναι να αξιολογήσουμε τις επιδόσεις της στρατηγικής υποβολής προσφορών σύμφωνα με την μέθοδο των quantiles σε σύγκριση με την παραδοσιακή υποβολή προσφορών σύμφωνα με τις σημειακές προβλέψεις που υπάρχουν διαθέσιμες για την παραγωγή. Επιπλέον θα αξιολογηθεί και η επίδοση κάθε μοντέλου για την κατασκευή των πιθανοτικών προβλέψεων ξεχωριστά σύμφωνα με το τελικό κέρδος.

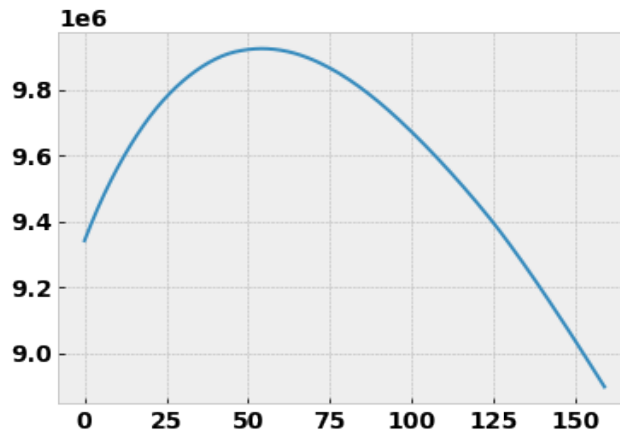
Σε αυτήν την δοκιμαστική περίπτωση η περιοχή αγοράς DK-1 (Δανία Δυτικά) έχει χρησιμοποιηθεί αφού το πάρκο που χρησιμοποιήθηκε για την αξιολόγηση των μοντέλων βρίσκεται σε αυτήν την γεωγραφική θέση. Το Πάρκο που χρησιμοποιήθηκε σε αντίθεση με την περίπτωση των Single Pricing αγορών είναι αιολικό (Horns Rev αιολικό πάρκο) συνολικής παραγωγής ισχύος 160 MW. Έχει μεγάλο ενδιαφέρον συνεπώς να παρουσιάσουμε την δυνατότητα χρήσης των μοντέλων που κατασκευάστηκαν με την χρήση των ΣΔΕ για την κατασκευή πιθανοτικών προβλέψεων και για διαφορετικές μορφές στοχαστικής παραγωγής, όπως αυτή της αιολικής. Τα δεδομένα που έχουμε διαθέσιμα για την Αγορά Ενέργειας DK-1 είναι από το 2013 - 2017. Δεδομένα παραγωγής του πάρκου καθώς και σημειακές προβλέψεις, είναι διαθέσιμες κάθε μια ώρα μόνο για το έτος 2017. Σκοπός μας είναι να αξιολογήσουμε τις μεθόδους που θα παρουσιαστούν παρακάτω για ένα ολόκληρο έτος (2017). Συνολικά θα αξιολογηθούν τέσσερις διαφορετικές στρατηγικές συναλλαγής οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω.

Σταθερή Στρατηγική

Με αυτή τη στρατηγική ο παραγωγός αιολικής ενέργειας προσφέρει την ίδια ποσότητα στην Day-ahead για κάθε μονάδα του έτους. Συνεπώς, η ποσότητα αυτή πρέπει να καθοριστεί πριν από την 1η Ιανουαρίου 2017. Προκειμένου να επιλεγεί η σωστή ποσότητα για προσφορά, χρησιμοποιήθηκε η αγορά ηλεκτρικής ενέργειας του 2016 ως σημείο αναφοράς για την εκτίμηση του 2017. Πρώτα απ' όλα, η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας του αιολικού πάρκου το 2016 είχε εκτιμηθεί μέσω μιας συντελεστή δυναμικότητας c_t . Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκε η συνολική αιολική παραγωγή στο DK1 από δεδομένα της αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας, τα οποία είναι διαθέσιμα στην ιστοσελίδα της NordPool. Όλα τα αιολικά πάρκα της περιοχής υπολογίστηκαν για κάθε ώρα λαμβάνοντας τη μέγιστη αιολική παραγωγή του 2016 - 3401 MWh - ως επίπεδο αναφοράς. Οι τιμές αυτές θεωρήθηκαν ως προσέγγιση του συντελεστή δυναμικότητας του αιολικού πάρκου που εξετάζεται στην παρούσα μελέτη. Με αυτή την υπόθεση η ενέργεια που παράγεται από το αιολικό πάρκο υπολογίστηκε για κάθε ώρα στο 2016 ως

$$E_t^{Wind} = 160c_t \quad \forall t \in T_{2016}$$

ωριαία παραγωγή, ήταν δυνατόν να υπολογιστούν τα ετήσια έσοδα που αποκομίστηκαν από τον παραγωγό το 2016. Τα ετήσια έσοδα υπολογίστηκαν για κάθε ποσότητα προσφοράς μεταξύ 0 και 160 MW με βήμα 1 MW.



(α') Single Bid Στρατηγική

Μπορούμε να δούμε ότι τα κέρδη μεγιστοποιούνται για $E_t^{Wind*} = 54MW$, συνεπώς η στρατηγική είναι να καταθέτουμε για κάθε μια ώρα μέσα στο 2017 την ποσότητα αυτή

$$E_t^{DA, single-bid} = 54MW \quad \forall t \in T_{2017}$$

Ντετερμινιστική Στρατηγική

Η στρατηγική αυτή βασίζεται στην ντετερμινιστική πρόβλεψη (σημειακή) που υπάρχει διαθέσιμη σε κάθε χρονική μονάδα για την ηλεκτρική παραγωγή ενέργειας. Εδώ ο παραγωγός βασίζεται στην πιο πρόσφατη εκτίμηση που είχε για την παραγωγή ενέργειας του αιολικού του πάρκου και προσφέρει την ποσότητα αυτή στην αγορά της επόμενης ημέρας. Δεδομένου ότι οι Αγορά επόμενης ημέρας κλείνει στις 13:00 μ.μ. οι τιμές αυτές είναι διαθέσιμες την προηγούμενη ημέρα στις 12:00 μ.μ .

Πιθανοτική Στρατηγική

Η τελευταία στρατηγική βασίζεται στο πρόβλημα που παρουσιάστην στην προηγούμενη ενότητα, όπου βρέθηκε η βέλτιστη λύση γνωρίζοντας την συνάρτηση κατανομής της стоχαστικής παραγωγής. Εφόσον όμως αυτή δεν υπάρχει διαθέσιμη σε κλειστή μορφή χρησιμοποιήθηκαν οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις που παρουσιάσαμε παραπάνω καθώς και η μέθοδος Monte Carlo για την κατασκευή μιας εμπειρικής κατανομής, για την παραγωγή αιολικής ενέργειας. Συνεπώς η βέλτιστη στρατηγική θα είναι

$$E_t^{DA} = F_{W_t}^{-1}\left(\frac{|\psi_k^{\hat{D}W}|}{\psi_k^{\hat{U}P} + |\psi_k^{\hat{D}W}|}\right)$$

όπου οι τιμές των ψ_k^{DW} και ψ_k^{UP} έχουν υπολογιστεί από ιστορικά δεδομένα που έχουμε διαθέσιμα από το 2013 έως και το 2016. Παράτω περιγράφεται η στρατηγική αυτή

Algorithm 5 Βέλτιστη Στρατηγική για Στοχαστική Παραγωγή και Στοχαστικές Τιμές Αγορών Ενέργειας για Dual Pricing Αγορές)

1: Γνωρίζοντας τα δεδομένα των τιμών της αγοράς απο το 2013 έως το 2016 για κάθε ώρα της ημέρας υπολογίζουμε για το 2017 μια εκτιμήτρια της ποσότητας

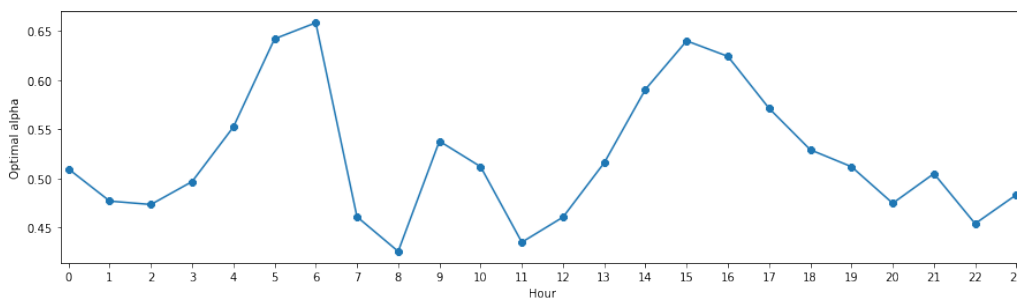
$$\hat{r}_t = \frac{|\psi_k^{\hat{D}W}|}{\psi_k^{\hat{U}P} + |\psi_k^{\hat{D}W}|}$$

2: Υπολογίζουμε την πιθανοτική πρόβλεψη για κάθε μέρα του 2017 με χρήση των μοντέλων Πιθανοτικών Προβλέψεων που παροουσιάστηκαν και βρίσκουμε για κάθε $a \in [0, 1]$ μια εκτιμήτρια των quantile

$$q_t^{(a)} = F_t^{-1}(a) = \inf\{x \in [0, E_{max}] : F_E(x) \geq a\}$$

3: Η βέλτιστη στρατηγική υπολογίζεται για κάθε ώρα $t \in 2017$ ως

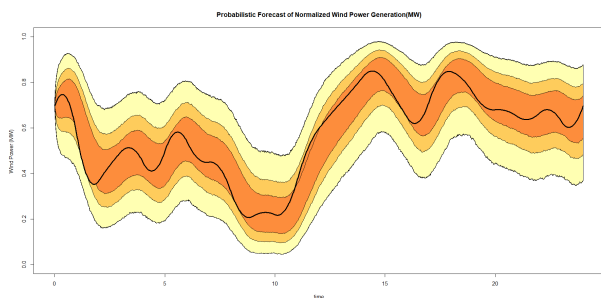
$$E_t^{DA*} = F_{W_t}^{-1}\left(\frac{|\psi_k^{\hat{D}W}|}{\psi_k^{\hat{U}P} + |\psi_k^{\hat{D}W}|}\right)$$



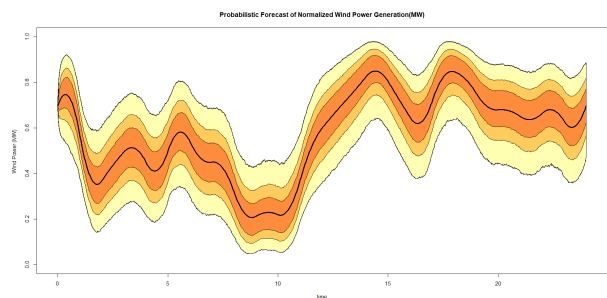
(α') Εκτιμήτριες \hat{r}_t για τα έτη 2013-2016)

Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Αρχικά παρουσιάζονται οι πιθανοτικές προβλέψεις που κατασκευάστηκαν για μια δεδομένη ημέρα μέσα στο έτος 2017 για την κανονικοποιημένη παραγωγή αιολικής ενέργειας.



(α') ΣΔΕ 1 - No Derivative Tracking Model



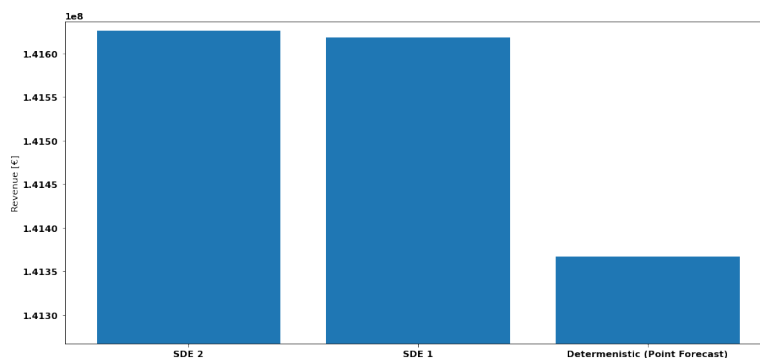
(β') ΣΔΕ 2 - Derivative Tracking Model

Παρατηρούμε οτι και στην περίπτωση όπου η στοχαστική ποσότητα για την οποία θέλουμε να κατασκευάσουμε την Πιθανοτική πρόβλεψη είναι διαφορετική, δηλαδή στην συγκεκριμένη

περίπτωση αιολική ενέργεια, το δεύτερο μοντέλο διατηρεί την ιδιότητα του centering property , κάτι που είναι απόλυτα φυσιολογικό αφού προκύπτει απο την αριθμητική μέθοδο EM που έχει κατασκευαστεί. Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας των τελικών κερδών εξασκώντας τις στρατηγικές που παρουσιάστηκαν παραπάνω για την περίπτωση συναλλαγών στην DA αγορά.

	Ideal	Single Bid	Deterministic	Prob. Model 1	Prob. Model 2
Revenue from day-ahead Market (€)	145708889.59	312189065.60	154270731.71	153060641.52	153015850.45
Revenue from balancing Market (€)	0	-181231752.77	-12903455.19	-11442638.29	- 11389645.29
Net Revenue (€)	145708889.59	130957312.83	141367276.52	141618003.23	141626205.16
Perf. Ratio (%)	100	89.80	97.02	97.18	97.20

Πίνακας 5: Κέρδη στρατηγικών κατά το έτος 2017



(α') Τελικά κέρδη (Deterministic (Σημειακή πρόβλεψη), Prob. Model 1 (ΣΔΕ 1), Prob. Model 2 (ΣΔΕ 2))

Ανασκόπηση Εργασίας και Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία σε συνεργασία με την **Joule S.A** μελετήθηκαν μέθοδοι κατασκευής πιθανοτικών προβλέψεων με την χρήση των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων. Η κανονικοποιημένη σημειακή πρόβλεψη για την παραγωγή των PV, η οποία είναι διαθέσιμη απο εταιρείες μετεωρολογικών προβλέψεων, χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή της εμπειρικής κατανομής που περιγράφει αυτήν την στοχαστική ποσότητα. Δύο διαφορετικά μοντέλα ΣΔΕ παρουσιάστηκαν καθένα απο τα οποία είχε ορισμένες βασικές ιδιότητες. Παρουσιάστηκαν μετρικές αξιολόγησης των δύο μοντέλων ΣΔΕ καθώς και η προσαρμογή τους στα διαθέσιμα δεδομένα του Χαρτοφυλακίου [Ενότητα 3](#) - [Ενότητα 4](#).

Στο δεύτερο μέρος της Διπλωματικής Εργασίας [Ενότητα 5](#) αναπτύχθηκε ένα κλασικό πρόβλημα στο πλαίσιο των Αγορών Ενέργειας. Συγκεκριμένα παρουσιάστηκαν δύο διαφορετικά προβλήματα, στα οποία είχαμε διαφορετικές αρχιτεκτονικές για την Αγορά Εξισορρόπησης (SP) (DP). Στόχος ήταν να παρουσιάσουμε τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζουν οι πιθανοτικές προβλέψεις σε σύγκριση με τις σημειακές, ως προς την μεγιστοποίηση των τελικών κερδών όταν αναπτύσσονται στρατηγικές για την εκπροσώπηση στην Αγορά Επόμενης Ημέρας. Και στα δύο

προβλήματα που μελετήθηκαν επαληθεύεται ότι η χρήση των quantiles της στοχαστικής ποσότητας που μελετάται μπορεί να αποφέρει σημαντικά κέρδη στους Διαχειριστές Χαρτοφυλακίων (ΦοΣΕ).

Αναφορές

- [1] ΑΔΜΗΕ. <https://www.admie.gr/>. Accessed: 2010-09-30.
- [2] Ελληνικό Χρηματιστήριο Ενέργειας. <https://www.enexgroup.gr/el/home>. Accessed: 2010-09-30.
- [3] Χελιώτης, . *Εισαγωγή στον Στοχαστικό Λογισμό*.
- [4] Numerical solution of stochastic differential equations by peter e. kloeden, eckhard platen.
- [5] Alessandrini, S., Delle Monache, L., Sperati, S., and Cervone, G. An analog ensemble for short-term probabilistic solar power forecast. *Applied Energy* **157** (2015), 95–110.
- [6] Alfonsi, A. *Affine Diffusions and Related Processes: Simulation, Theory and Applications*, vol. 6. Springer International Publishing, 2015.
- [7] Badosa, J., Gobet, E., Grangereau, M., and Kim, D. Day-ahead probabilistic forecast of solar irradiance: a stochastic differential equation approach.
- [8] Bensoussan, A., and Brouste, A. Cox–ingersoll–ross model for wind speed modeling and forecasting. *Wind Energy* **19** (08 2015).
- [9] Bertsimas, D., and Kallus, N. From predictive to prescriptive analytics. *Manag. Sci.* **66** (2020), 1025–1044.
- [10] Bjerregård, M. B., Møller, J. K., and Madsen, H. An introduction to multivariate probabilistic forecast evaluation. *Energy and AI* **4** (6 2021), 100058.
- [11] Browell, J. Risk constrained trading strategies for stochastic generation with a single-price balancing market. *Energies* **11**, 6 (2018).
- [12] Caballero, R., Kebaier, A., Scavino, M., and Tempone, R. Quantifying uncertainty with a derivative tracking sde model and application to wind power forecast data.
- [13] Dolara, A., Grimaccia, F., Leva, S., Mussetta, M., and Ogliari, E. Comparison of training approaches for photovoltaic forecasts by means of machine learning. *Applied Sciences* **8**, 2 (2018).
- [14] Forman, J. L., and Sørensen, M. The pearson diffusions: A class of statistically tractable diffusion processes. *Scandinavian Journal of Statistics* **35** (9 2008), 438–465.
- [15] Gensler, A., Henze, J., Sick, B., and Raabe, N. Deep learning for solar power forecasting — an approach using autoencoder and lstm neural networks. In *2016 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)* (2016), pp. 002858–002865.

- [16] Gneiting, T., and Raftery, A. E. Strictly proper scoring rules, prediction, and estimation. *Journal of the American Statistical Association* **102** (3 2007), 359–378.
- [17] Hersbach, H. Decomposition of the continuous ranked probability score for ensemble prediction systems. *Weather and Forecasting* **15** (10 2000), 559–570.
- [18] Iacus, S. M., and Yoshida, N. *Simulation and Inference for Stochastic Processes with YUIMA*. Springer International Publishing, 2018.
- [19] Iversen, E. B., Morales, J. M., Møller, J. K., and Madsen, H. Probabilistic forecasts of solar irradiance by stochastic differential equations.
- [20] Jordan, A., Krüger, F., and Lerch, S. Evaluating probabilistic forecasts with scoringrules.
- [21] Karatzas, I., and Shreve, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, vol. 113. Springer New York, 1998.
- [22] Lago, J., Marcjasz, G., Schutter, B. D., and Weron, R. Forecasting day-ahead electricity prices: A review of state-of-the-art algorithms, best practices and an open-access benchmark. *Applied Energy* **293** (7 2021), 116983.
- [23] Lauret, P., David, M., and Pedro, H. Probabilistic solar forecasting using quantile regression models. *Energies* **10** (10 2017), 1591.
- [24] Lauret, P., David, M., and Pinson, P. Verification of solar irradiance probabilistic forecasts.
- [25] Mellit, A., Massi Pavan, A., Ogliairi, E., Leva, S., and Lughi, V. Advanced methods for photovoltaic output power forecasting: A review. *Applied Sciences* **10**, 2 (2020).
- [26] Møller, J. K., Zugno, M., and Madsen, H. Probabilistic forecasts of wind power generation by stochastic differential equation models. *Journal of Forecasting* **35** (4 2016), 189–205.
- [27] Morales, J. M., Conejo, A. J., Madsen, H., Pinson, P., and Zugno, M. *Integrating Renewables in Electricity Markets*, vol. 205. Springer US, 2014.
- [28] Pinson, P., Chevallier, C., and Kariniotakis, G. N. Trading wind generation from short-term probabilistic forecasts of wind power. *IEEE Transactions on Power Systems* **22** (8 2007), 1148–1156.
- [29] Raiffa, H., Raiffa, F., Schlaifer, R., of Business Administration, H. U. G. S., and of Business Administration. Division of Research, H. U. G. S. *Applied Statistical Decision Theory*. Harvard Business School Publications. Division of Research, Graduate School of Business Administration, Harvard University, 1961.
- [30] Sobri, S., Koochi-Kamali, S., and Rahim, N. A. Solar photovoltaic generation forecasting methods: A review. *Energy Conversion and Management* **156** (2018), 459–497.
- [31] Särkkä, S., and Solin, A. Applied stochastic differential equations.
- [32] Stratigakos, A., Camal, S., Blondel, T., and Kariniotakis, G. Short-term trading of wind energy production using data-driven prescriptive optimization, 2021.
- [33] Tankov, P., and Tinsi, L. Decision making with dynamic probabilistic forecasts.

- [34] Zhang, Y., and Wang, J. Gefcom2014 probabilistic solar power forecasting based on k-nearest neighbor and kernel density estimator. In *2015 IEEE Power Energy Society General Meeting* (2015), pp. 1–5.
- [35] Zugno, M., Jónsson, T., and Pinson, P. Trading wind energy on the basis of probabilistic forecasts both of wind generation and of market quantities. *Wind Energy* **16**, 6 (2013), 909–926.