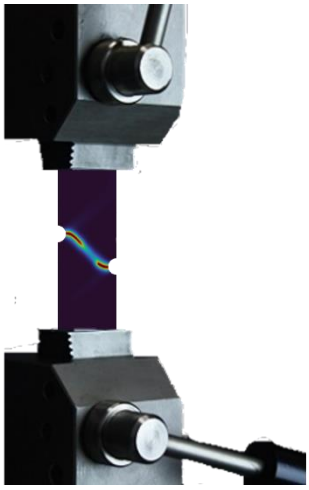
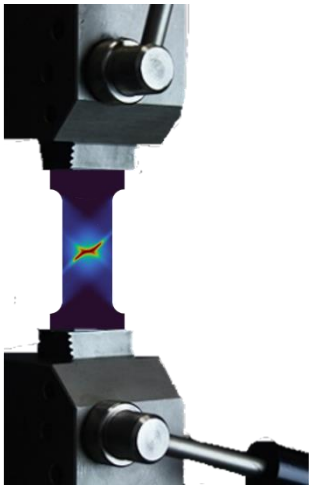
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Προσομοίωση θραύσης όλκιμων και ψαθυρών υλικών με τη μέθοδο πεδίου φάσης





ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΠΑΡΚΟΥΛΗΣ ΓΑΒΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Αθήνα, Ιούλιος 2022

Ευχαριστώ θερμά τον κ. Σάββα Τριανταφύλλου για την επιστημονικά αποδοτική και ανθρώπινα ζεστή υποστήριξή του στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η προσομοίωση της θραύσης των υλικών έχει αποκτήσει τα τελευταία χρόνια ιδιαίτερο ενδιαφέρον κυρίως λόγω των εφαρμογών της στη σύγχρονη βιομηχανία. Η θεωρία πεδίου φάσης και η υλοποίησή της μέσω υπολογιστικών εργαλείων αποτελεί έναν αξιόπιστο τρόπο προσομοίωσης αλλά και αρκετά αποδοτικότερο σε σύγκριση με πειραματικές διαδικασίες. Ο κύριος στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός υπολογιστικού εργαλείου για την προσομοίωση της ψαθυρής και όλκιμης θραύσης μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Αρχικά παρουσιάζονται τα θεωρητικά στοιχεία της μη γραμμικής συμπεριφοράς των υλικών και οι αλγόριθμοί επίλυσης της μεθόδου πεδίου φάσης για την προσομοίωση. Στο τέλος αξιολογείται η ακρίβεια και η στιβαρότητα του προσομοιώματος με μια σειρά αριθμητικών παραδειγμάτων.

Σε πρώτο στάδιο διερευνάται η επιρροή των αρχικών παραμέτρων του προσομοιώματος πεδίου φάσης για την περίπτωση της ψαθυρής θραύσης σε υπάρχον πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων. Έπειτα αναπτύσσονται οι αλγόριθμοί εξέλιξης μεταβλητής πεδίου φάσης για την περίπτωση όλκιμης συμπεριφοράς και τέλος οι αλγόριθμοι εξέλιξης της πλαστικότητας σύμφωνα με τον καταστατικό νόμο Von Mises για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Στην εργασία αυτή εξετάζονται δυο διαφορετικές προσεγγίσεις για την εξέλιξη της μεταβλητής πεδίου φάσης και εφαρμόζονται σε χαρακτηριστικά παραδείγματα με στόχο την επίδειξη της συμπεριφοράς μιας διατομής από όλκιμο υλικό.

ABSTRACT

Fracture simulation has attracted attention over the last few years mainly due to its applications in the modern industry vis-à-vis strength and damage pattern prediction. Phase field theory and its computational implementation is not only a reliable approach for simulation but also very effective compared to experimental procedures. The overarching aim of this thesis is the development of a computational tool for the simulation of brittle and ductile fracture using the Finite Element method. First, the theoretical aspects of simulating material nonlinearities are presented and the algorithmic aspects of phase field modelling are discussed. Finally, the accuracy and robustness of the framework are assessed through a series of numerical examples.

Primarily we investigate the effects of the initial parameters of the phase field model for brittle fracture in an existing Finite Element program. Afterwards we develop the algorithms for the evolution of the phase field for ductile fracture and finally the algorithm for the evolution of plasticity according to Von Mises constitutive law for plain strain conditions. In this work two different approaches for phase field evolution are examined and they are tested in indicative examples to demonstrate the section's behavior made of ductile material.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Πίνακας Σχημάτων

1 Εισαγωγή

Η μελέτη της θραύσης αποτελεί έναν κλάδο της μηχανικής των υλικών που έχει ιδιαίτερη σημασία για πολλούς τομείς της σύγχρονης βιομηχανίας. Παρέχει απαντήσεις σχετικά με τη διάρκεια ζωής μιας κατασκευής, το αποδεκτό εύρος ρωγμής υπό τα φορτία λειτουργίας, τη διάδοσή της σε βάθος χρόνου και κατ' επέκταση το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο θα πρέπει να γίνει επιθεώρηση των ρωγμών. Ο προσδιορισμός του σημείου έναρξης και διάδοσης μιας ρωγμής αποτελεί επομένως βασικό στάδιο για το σχεδιασμό εξαρτημάτων και κατασκευών, κυρίως όταν υπεισέρχονται θέματα βελτιστοποίησης ελαχίστου βάρους. Οι πειραματικές διαδικασίες που απαιτούνται μπορούν να αποφευχθούν εξοικονομώντας μεγάλα ποσά χρημάτων και χρόνου με την κατασκευή κατάλληλων υπολογιστικών εργαλείων. Γι' αυτό το λόγο τον 21^{ο} αιώνα πολλά μέλη της επιστημονικής κοινότητας έχουν επικεντρωθεί στην προσομοίωση της θραύσης μέσω μεθόδων διακριτοποίησης.

1.1 Παρουσίαση Προβλήματος

Η θραύση μιας διατομής εξαρτάται από το υλικό, τη γεωμετρία και τη φόρτιση στην οποία υποβάλλεται και διακρίνεται σε όλκιμη και ψαθυρή. Στην περίπτωση της ψαθυρής θραύσης δεν παρατηρούνται πλαστικές παραμορφώσεις ενώ η επιφάνεια θραύσης παραμένει τις περισσότερες φορές επίπεδη. Η αστοχία επομένως λαμβάνει χώρα για μικρές συνήθως παραμορφώσεις και οδηγεί σε μια απότομη μείωση της αντοχής και μια ξαφνική εμφάνιση ρωγμής. Αντιθέτως κατά την όλκιμη θραύση έχουν σημειωθεί σημαντικές πλαστικές παραμορφώσεις δημιουργώντας έτσι μια τραχιά, ανομοιόμορφη επιφάνεια θραύσης. Η διατομή σε αυτή την περίπτωση απορροφά μέρος της ενέργεια μέσω της πλαστικής συμπεριφοράς με αποτέλεσμα η αστοχία να συμβαίνει για σχετικά μεγαλύτερες παραμορφώσεις.

Για την περιγραφή του φαινομένου της θραύσης η μηχανική του συνεχούς μέσου δεν επαρκεί καθώς προκύπτουν προβλήματα ασυνέχειας και απαιτείται η ενεργειακή προσέγγιση που διατυπώθηκε από τον A.A Griffith το 1920. Η διαφορά μεταξύ όλκιμης και ψαθυρής συμπεριφοράς που περιγράφεται παραπάνω έγκειται στη διατύπωση της εξίσωσης ενέργειας του προβλήματος. Παράλληλα με τις ενεργειακές εξισώσεις ένας αποτελεσματικός τρόπος για την προσομοίωση της συμπεριφοράς σε ένα υπολογιστικό πρόγραμμα είναι η χρήση της θεωρίας πεδίου φάσης κατά την οποία η γεωμετρία της ρωγμής περιγράφεται από μία πρόσθετη μεταβλητή πεδίου φάσης.

(α) (β)

Εικόνα 1 (α) Όλκιμη Θραύση (β) Ψαθυρή θραύση

1.2 Αντικείμενο Διπλωματικής εργασίας

Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας αποτελεί αρχικά η μελέτη της μη γραμμικής συμπεριφοράς των υλικών και η επίλυση των προβλημάτων αυτών μέσω αριθμητικών μεθόδων σε υπολογιστικό περιβάλλον. Σε δεύτερο στάδιο, σε υπάρχον πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων σε περιβάλλον MatLab αναπτύσσονται οι αλγόριθμοι για την επίλυση της όλκιμης θραύσης με χρήση της προσομοίωσης πεδίου φάσης.

1.3 Ερευνητικοί στόχοι

Απώτερος σκοπός της εργασίας αυτής είναι η ανάπτυξη ενός υπολογιστικού εργαλείου και η συγκριτική αποτίμηση διαφορετικών προσομοιωμάτων πεδίου φάσης για την περιγραφή της ψαθυρής και όλκιμης συμπεριφοράς υλικών. Προς επίρρωση αυτού του σκοπού, τίθενται οι ακόλουθοι ερευνητικοί στόχοι:

- Βιβλιογραφική διερεύνηση για τη θεωρία μη γραμμικών αναλύσεων και την εφαρμογή τους στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.
- Βιβλιογραφική διερεύνηση για τη θεωρία θραύσης των υλικών και των αριθμητικών μεθόδων επίλυσης προβλημάτων θραύσης.
- Ανάπτυξη κώδικα για την επίλυση προβλήματος όλκιμης θραύσης
- Διερεύνηση της συμπεριφοράς τυπικών δοκιμίων τόσο με θεώρηση ψαθυρής όσο και με θεώρηση όλκιμης συμπεριφοράς.

1.4 Μεθοδολογία

Τα υπολογιστικά μοντέλα που παρουσιάζονται περιέχουν αρχικές παραμέτρους οι οποίες είναι καθοριστικές για την εξαγωγή ορθών αποτελεσμάτων. Σε πρώτο στάδιο εξετάζεται στο υπάρχον πρόγραμμα η επιρροή της παραμέτρου κλίμακας (lo) των εξισώσεων πεδίου φάσης για την εξέλιξη της ρωγμής στην περίπτωση της ψαθυρής θραύσης. Στη συνέχεια εξετάζονται δυο διαφορετικές προσεγγίσεις και αναπτύσσονται οι σχετικοί αλγόριθμοι για την εξέλιξη της μεταβλητής πεδίου φάσης για την περίπτωση της όλκιμης συμπεριφοράς σύμφωνα με δυο δημοσιεύσεις των προηγούμενων ετών (Ambati et al., 2015; Yin & Kaliske, 2020). Έπειτα αναπτύσσονται οι κατάλληλοι αλγόριθμοι για την εξέλιξη της πλαστικότητας στην περίπτωση της όλκιμης θραύσης με βάση τον καταστατικό νόμο Von Mises σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης με τις κατάλληλες αλλαγές. Τέλος για τα 2 διαφορετικά μοντέλα πραγματοποιούνται αριθμητικές αναλύσεις σε χαρακτηριστικά παραδείγματα και συγκρίνονται τα αποτελέσματα.

1.5 Δομή της διπλωματικής εργασίας

Η διπλωματική εργασία ακολουθεί την παρακάτω δομή. Στο Κεφάλαιο **2** γίνεται αναφορά στο επιστημονικό υπόβαθρο που απαιτείται για την ανάπτυξη του προσομοιώματος. Αναλυτικότερα στο Κεφάλαιο **2.1** αναπτύσσεται η θεωρία ψαθυρής θραύσης, η κλασσική θεωρία πλαστικότητας και η θεωρία όλκιμης θραύσης. Στο Κεφάλαιο **2.2** περιγράφεται ο τρόπος επίλυσης των μη γραμμικών προβλημάτων και η υλοποίηση του αλγορίθμου εξέλιξης τάσεων και παραμορφώσεων σε προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων. Στο Κεφάλαιο **2.3** περιγράφεται η μέθοδος πεδίου φάσης για την προσομοίωση της θραύσης. Στη συνέχεια στο Κεφάλαιο **3** ακολουθεί μέρος του κώδικα σε περιβάλλον MatLab και τέλος στο Κεφάλαιο **4** και **5** αριθμητικά παραδείγματα και συμπεράσματα αντίστοιχα.

1.6 Σύμβολα

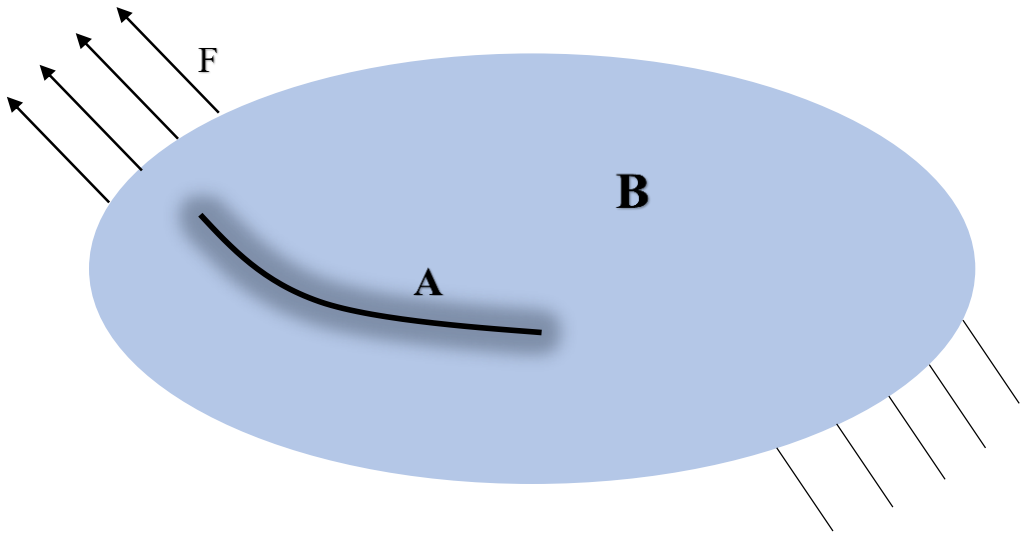
Τα παρακάτω Κεφάλαια περιέχουν μαθηματικές εκφράσεις για την περιγραφή της φυσικής του προβλήματος και την υλοποίηση της εκάστοτε μεθόδου σε υπολογιστικό περιβάλλον. Το σύμβολο ‘**:**’ υποδηλώνει το διπλό γινόμενο δυο τανυστών δεύτερης τάξης ($\alpha : b = \alpha_{ij} b_{ij}$) . Το σύμβολο ‘$\otimes$’ υποδηλώνει το δυαδικό γινόμενο δυο τανυστών δεύτερης τάξης ($\alpha \otimes b = \alpha_{ij} b_{kl}$).

2 Βιβλιογραφική Διερεύνηση

2.1 Θεωρίες μη γραμμικής συμπεριφοράς υλικού

2.1.1 Ψαθυρή θραύση

Για την περιγραφή της ενεργειακής μεθόδου κατά A.A Griffith θεωρούμε το παρακάτω σύστημα, το οποίο αποτελείται από γραμμικά ελαστικό υλικό.



Εικόνα 2 : Σύστημα B με ρωγμή A

Η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι :

$$\Pi = F^{int} - F^{ext} + S$$

Όπου :

F^{int} , η ενέργεια που οφείλεται στην ελαστική παραμόρφωση.

F^{ext} , η ενέργεια που οφείλεται στα εξωτερικά φορτία.

S , η ενέργεια που απαιτείται για δημιουργηθεί η επιφάνεια θραύσης A.

Θεωρώντας ότι η ρωγμή αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου, $da > 0$ το συνολικό δυναμικό του συστήματος είναι :

$$d\Pi = \left[\frac{dF^{int}}{da} - \frac{dF^{ext}}{da} + \frac{dS}{da}\right] da$$

Θεωρώντας στάσιμη τιμή για το συνολικό δυναμικό : $d\Pi = 0$ προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{dF^{ext}}{da} - \frac{dF^{int}}{da} = \frac{dS}{da}$$

Όπου : $\mathrm{G} = \frac{dF^{ext}}{da} - \frac{dF^{int}}{da}$ η ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας της ρωγμής που απελευθερώνεται από το σύστημα κατά τη διάδοση της ρωγμής.

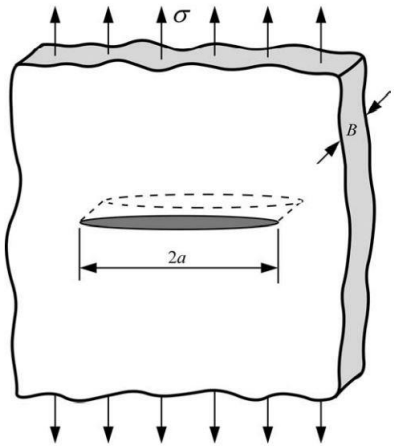
Για τα ψαθυρά υλικά η ενέργεια που απαιτείται για τη δημιουργία επιφάνειας θραύσης είναι ίση με την ενέργεια που απαιτείται για τη διάσπαση των ατομικών δεσμών. Επομένως η ποσότητα $\frac{dS}{da}$ λαμβάνει μια σταθερή τιμή ίση με $Gc = 2\gamma$ λόγω των 2 επιφανειών θραύσης. Η σταθερά γ εξαρτάται από το υλικό και μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά.

Για την περίπτωση όπου δεν έχει σχηματιστεί επιφάνεια θραύσης στη διατομή ισχύει: $da = 0$ και με βάση την εξίσωση της στάσιμης τιμής του ολικού δυναμικού :

$$G = \frac{dF^{ext}}{da} - \frac{dF^{int}}{da} < Gc$$

Τελικά μπορεί να διατυπωθεί το κριτήριο θραύσης για τα ψαθυρά υλικά σύμφωνα με το οποίο :

$$\begin{cases} \mathrm{G} < Gc \rightarrow & \text{μη διάδοση ρωγμής} \\ G \geq Gc \rightarrow & \text{διάδοση ρωγμής} \end{cases}$$

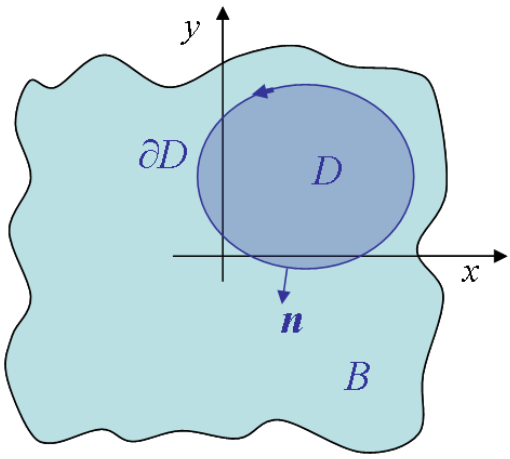


Εικόνα 3 : Διαμπερής ρωγμή σε σώμα υπό εφελκυστικά φορτία

Στο πρόβλημα αυτό $G = \frac{dF^{ext}}{da} - \frac{dF^{int}}{da} = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \alpha}{E}$ και $\frac{dS}{da} = 2\gamma$

Συνεπώς η τάση για την οποία δημιουργείται η επιφάνεια θραύσης A ισούται σύμφωνα με τη θεωρία Griffith : $\sigma = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi \alpha}}$

Για τον προσδιορισμό της ενέργειας που απελευθερώνεται κατά τη θραύση απαιτείται η γνώση της καμπύλης θραύσης πράγμα το οποίο καθιστά δυσχερή τον υπολογισμό της. Ένας εναλλακτικός τρόπος σύμφωνα με τον J.R. Rice είναι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος J που περικλείει τη ρωγμή.



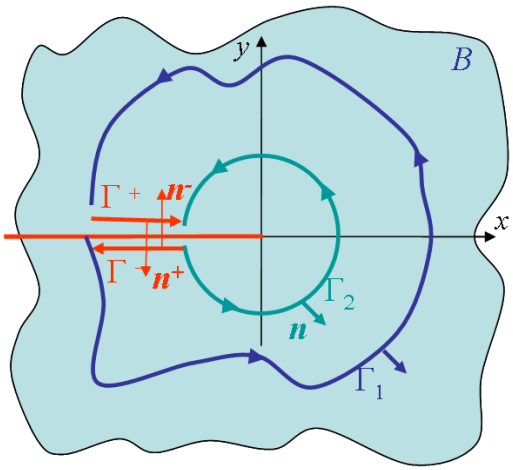
Εικόνα 4 : Κλειστό χωρίο ομογενούς υλικού

Σε ένα κλειστό χωρίο ενός ομογενούς υλικού ισχύει ότι το ολοκλήρωμα J λαμβάνει μηδενική τιμή, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η ενέργεια που απελευθερώνει το σύστημα είναι μηδενική.

Στην περίπτωση ρωγμής ο τύπος του ολοκληρώματος δίνεται :

$$J = \int_{\Gamma} U(\varepsilon)n_x - d_x u(\sigma \cdot n)dl$$

Όπου ο πρώτος όρος του ολοκληρώματος αναφέρεται στην ενέργεια παραμόρφωσης του υλικού, ο δεύτερος στην ενέργεια των εξωτερικών φορτίων και n το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην καμπύλη που περικλείει τη ρωγμή.



Εικόνα 5 : Ολοκλήρωμα J για ύπαρξη ρωγμής

Το ολοκλήρωμα J έχει ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες :

- Αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητο της διαδρομής Γ όταν περικλείει μια ρωγμή A.
- Δεν απαιτεί τη γνώση μεταγενέστερης διαδρομής της ρωγμής για τον υπολογισμό του.
- Δεν προϋποθέτει γραμμικότητα υλικού.

2.1.2 Κλασσική θεωρία πλαστικότητας

Η θεωρία της πλαστικότητας περιγράφει τη συμπεριφορά των υλικών τα οποία όταν υπόκεινται σε φόρτιση πέραν ενός ορίου παρουσιάζουν παραμένουσες παραμορφώσεις. Τα υλικά αυτά ονομάζονται πλαστικά και σε αυτά ανήκουν τα μέταλλα, το σκυρόδεμα, τα πετρώματα κ.α.

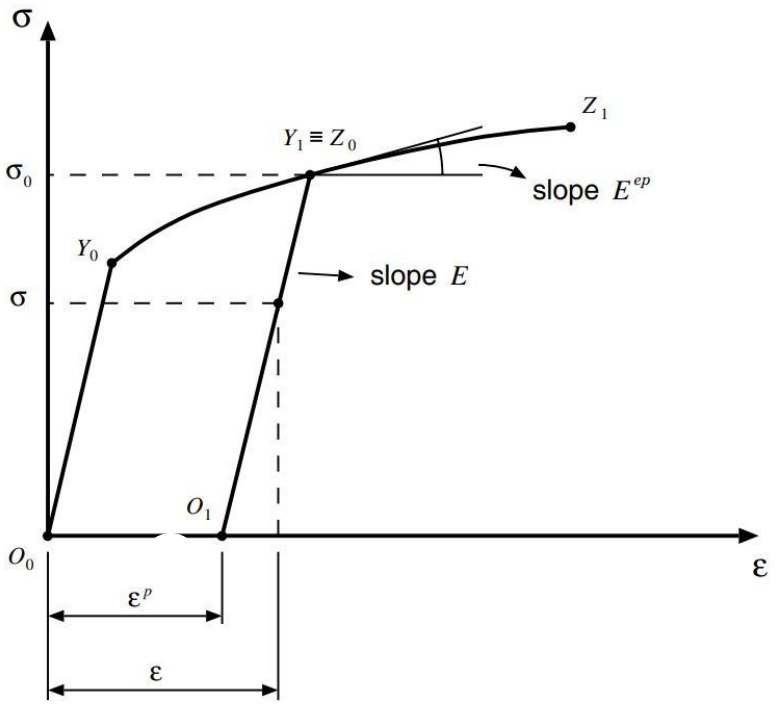
Κατά τη θεωρία της κλασσικής πλαστικότητας, τα πλαστικά υλικά χαρακτηρίζονται από τις ακόλουθες ιδιότητες :

Α) Την ύπαρξη ενός ελαστικού κλάδου $(O_0 - Y_0)$ στον οποίο η συμπεριφορά του υλικού είναι απολύτως ελαστική χωρίς παραμένουσες παραμορφώσεις κατά την αποφόρτιση. Το όριο του ελαστικού κλάδου καθορίζεται από την τάση διαρροής του υλικού.

Β) Η φόρτιση πέραν του ορίου διαρροής επιφέρει παραμένουσες παραμορφώσεις ή αλλιώς πλαστικές παραμορφώσεις (ep).

Γ) Παράλληλα με την εξέλιξη των πλαστικών παραμορφώσεων παρατηρείται και μια αύξηση στο όριο διαρροής του υλικού (κράτυνση υλικού).

Οι ιδιότητες αυτές διακρίνονται στην απόκριση μιας ράβδου υπό μονοαξονικό εφελκυσμό όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.



Εικόνα 6 : Πείραμα μοναξονικού εφελκυσμού ράβδου

2.1.2.1 Γενικευμένο ελαστοπλαστικό καταστατικό προσομοίωμα

Η συνολική παραμόρφωση με βάση τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει ως το άθροισμα των ελαστικών και των πλαστικών παραμορφώσεων :

$$\varepsilon^{total} = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{p}$$

Οι τάσεις με βάση την καταστατική εξίσωση του υλικού υπολογίζονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma = D^{e} : \varepsilon^{e}$$

Όπου D^{e} το μητρώο ελαστικότητας του υλικού.

Όπως αναφέρθηκε στην 1η ιδιότητα ο ελαστικός κλάδος τερματίζεται όταν φτάσει το υλικό σε ένα όριο διαρροής. Η κατάσταση αυτή περιγράφεται από μια συνάρτηση διαρροής $\Phi(\sigma, \sigma y)$, για την οποία ισχύει πάντα :

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) \leq 0 \, .$$

Το όριο διαρροής του υλικού με βάση την 3η ιδιότητα αυξάνεται, επομένως θεωρείται συνάρτηση της πλαστικής παραμόρφωσης:

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^{p})$$

Στο πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού ως συνάρτηση διαρροής μπορούμε να ορίσουμε :

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y$$

Επομένως ο ελαστικός κλάδος ορίζεται όταν : $\Phi(\sigma, \sigma y) < 0$ ενώ όταν $\Phi(\sigma, \sigma y) = 0$ το ελαστοπλαστικό προσομοίωμα βρίσκεται σε πιθανή κατάσταση εξέλιξης πλαστικών παραμορφώσεων.

Για την εξέλιξη των πλαστικών παραμορφώσεων απαιτείται ένας κανόνας πλαστικής ροής και ένας κανόνας κράτυνσης του υλικού. Ως κανόνας πλαστικής ροής και αντιστοίχως κανόνας κράτυνσης ορίζονται :

$$d\varepsilon^{p} = d\gamma \cdot N$$

$$d\alpha = d\gamma \cdot H$$

Όπου N το διάνυσμα πλαστικής ροής και $d\gamma$ ο πλαστικός συντελεστής για τον οποίο ισχύει : $d\gamma \geq 0$ και $\Phi(\sigma, \sigma_y) \cdot d\gamma = 0$. Επιπλέον H είναι το μέτρο κράτυνσης του υλικού.

Ο πλαστικός συντελεστής $d\gamma$ υπολογίζεται με τη θεώρηση ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης διαρροής κατά την πλαστική παραμόρφωση παραμένει μηδενικός :

$$d\Phi(\sigma, \sigma_y) = 0 \ \text{όταν} \ d\gamma \neq 0$$

Με τον υπολογισμό του πλαστικού συντελεστή $d\gamma$ προκύπτει και το εφαπτομενικό ελαστοπλαστικό μητρώο D^{ep} :

$$\mathrm{d}\sigma = D^e : (d\varepsilon - d\gamma \cdot N) \rightarrow d\sigma = D^{ep} : d\varepsilon$$

Σε αρκετά ελαστοπλαστικά καταστατικά προσομοιώματα και κυρίως για όλκιμα μέταλλα εφαρμόζεται η συνθήκη της συνηρημένης πλαστικότητας κατά την οποία η συνάρτηση διαρροής Φ λαμβάνει το ρόλο του πλαστικού δυναμικού Ψ για το καταστατικό προσομοίωμα.

Επομένως για το διάνυσμα πλαστικής ροής ισχύει : $N = \frac{d\Psi}{d\sigma} = \frac{d\Phi}{d\sigma}$

το οποίο σημαίνει ότι το διάνυσμα N είναι κάθετο στην επιφάνεια που ορίζει η συνάρτηση διαρροής στο χώρο των τάσεων.

Για τη συνάρτηση διαρροής ισχύει :

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) < 0 \ => \ d\varepsilon^p = 0$$

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = 0 \ => \begin{cases} d\varepsilon^p = 0 \text{ , για αποφόρτιση} \\ d\varepsilon^p \neq 0, \text{ για πλαστική φόρτιση} \end{cases}$$

Γενικεύοντας στο ελαστοπλαστικό καταστατικό προσομοίωμα ισχύουν οι σχέσεις :

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) \leq 0, \qquad d\gamma \geq 0 \, , \qquad \Phi(\sigma, \sigma_y) \cdot d\gamma = 0$$

Όπου περιγράφουν τις καταστάσεις φόρτισης και αποφόρτισης.

2.1.2.2 Κριτήριο αστοχίας Von Mises

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως για την υλοποίηση ενός ελαστοπλαστικού καταστατικού προσομοιώματος είναι απαραίτητο να οριστεί μια συνάρτηση διαρροής, η οποία θα υπακούει σε ένα κριτήριο αστοχίας.

Σύμφωνα με το κριτήριο αστοχίας Von Mises η πλαστική παραμόρφωση ξεκινά όταν η στροφική ενέργεια του συστήματος φτάσει μια κρίσιμη τιμή $\frac{1}{G}\ R$ ή ισοδύναμα όταν συντελεστής J2 του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του τανυστή των τάσεων φτάσει την τιμή R.

Η συνολική ελαστική ενέργεια ενός συστήματος γραμμικά ελαστικού υλικού μπορεί να διασπαστεί στην ενέργεια λόγω παραμόρφωσης σχήματος $\Psi^e d$ και στην ενέργεια λόγω ογκομετρικής παραμόρφωσης $\Psi^e v$:

$$\Psi^e = \Psi^e d + \Psi^e v$$

$$\Psi^e d = \frac{1}{2G}\ s : s = \frac{1}{G}\ J2$$

$$\Psi^e v = \frac{1}{K}\ p^2$$

Όπου G το μέτρο διάτμησης, K το μέτρο ελαστικότητας όγκου, s οι αποκλίνουσες τάσεις και p οι τάσεις λόγω ογκομετρικής παραμόρφωσης. Οι τάσεις s και p υπολογίζονται :

$$s = \sigma - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \cdot \mathbf{I}$$

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \cdot \mathbf{I}$$

Όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας $3X3$

Η συνάρτηση διαρροής του κριτηρίου Von Mises δίνεται :

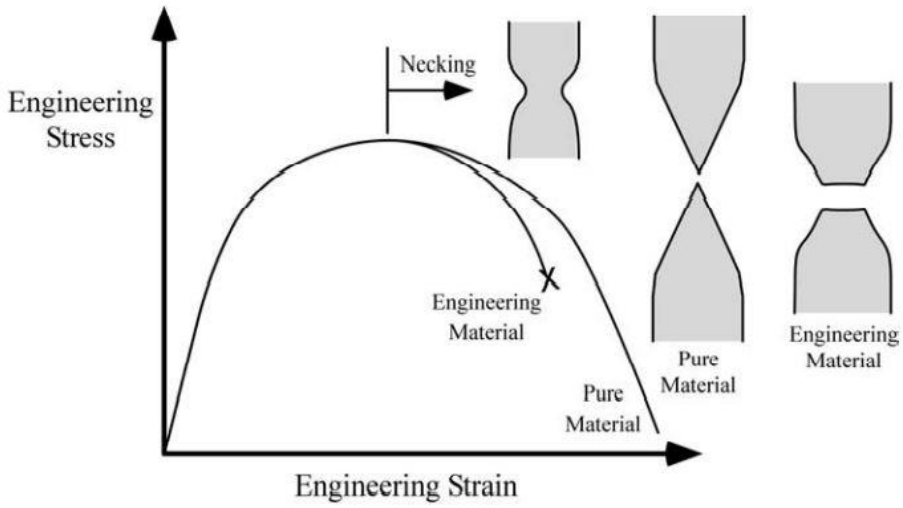
$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = \sqrt{J2(s(\sigma))} - \sigma_y$$

2.1.3 Όλκιμη Θραύση

Η θεωρία του A.A Griffith που περιγράφεται σε προηγούμενο Κεφάλαιο δεν μπορεί να εφαρμοστεί αυτούσια για την περίπτωση της θραύσης των όλκιμων υλικών. Σύμφωνα με τον G.R. Irwin στην ενέργεια που απαιτείται για δημιουργία επιφάνειας θραύσης A πρέπει να προστεθεί η ενέργεια πλαστικής παραμόρφωσης στο σημείο αυτό. Συνεπώς για το αντίστοιχο πρόβλημα του Κεφαλαίου 2.1.1 ισχύει :

$$S = \int_{\Gamma} G_c d\Gamma + W_{pl}$$

Όπου S η ενέργεια που απαιτείται για να δημιουργηθεί η επιφάνεια θραύσης A.



Εικόνα 7 : Πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού σε όλκιμο υλικό

Επομένως στην περίπτωση της όλκιμης θραύσης η ρωγμή σχηματίζεται και διαδίδεται σε μια περιοχή η οποία ελέγχεται από τις πλαστικές παραμορφώσεις καθυστερώντας έτσι το φαινόμενο εμφάνισης ρωγμής.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως η χρήση του ολοκληρώματος J καθιστά τον υπολογισμό της ενέργειας που απελευθερώνεται από ένα σύστημα κατά την εμφάνιση μιας ρωγμής ευμενέστερο. Στην περίπτωση της όλκιμης θραύσης όπου υπεισέρχεται η μη γραμμικότητα του υλικού η χρήση του ολοκληρώματος J έχει ακόμα μεγαλύτερη σημασία.

2.2 Μη γραμμική ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

2.2.1 Μέθοδος Newton Raphson

Για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων εξισώσεων, όπου η αναλυτική λύση είναι δύσκολο ή και αδύνατο να υπολογιστεί, γίνεται χρήση αριθμητικών μεθόδων. Ο αλγόριθμος Newton-Raphson αποτελεί μια αποτελεσματική μέθοδο για την επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων λόγω της ταχύτητας σύγκλισης.

Ο τύπος του αλγορίθμου N-R : $x_{(k+1)} = x_k - \frac{f(k)}{f'(k)}$

Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων το μη γραμμικό πρόβλημα το οποίο προκύπτει ως προς τη ζητούμενη μετατόπιση u είναι :

$$R(u) \equiv f^{int}(u) - f^{ext} = 0$$

Όπου $f^{int}(u)$ το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων και f^{ext} το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων τα οποία υπολογίζονται.

Συνεπώς η μέθοδος N-R στο συγκεκριμένο πρόβλημα για μια επανάληψη k υλοποιείται με τον υπολογισμό αρχικά της παραγώγου $\frac{dR_{(u)}}{du}$.

$$\frac{dR_{(u)}}{du} = \frac{d}{du}\left(f^{int}{}_{(u)} - f^{ext}\right) = \frac{d}{du}\left(f^{int}{}_{(u)}\right)$$

Όπου $K\tau = \frac{d}{du}\left(f^{int}{}_{(u)}\right)$ ορίζεται το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας και στην επίλυση της γραμμικοποιημένης εξίσωσης :

$$K\tau \cdot \delta u^k = -R^{(k-1)}$$

Έχοντας υπολογίσει τη ζητούμενη ποσότητα δu το καθολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων υπολογίζεται σύμφωνα με τη μέθοδο N-R :

$$u^k = u^{(k-1)} + \delta u^k$$

Η μέθοδος που περιγράφεται επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθεί ένα κριτήριο σύγκλισης ή έως ότου η μέθοδος εκτελέσει έναν δοσμένο αριθμό επαναλήψεων. Το κριτήριο σύγκλισης που χρησιμοποιείται είναι :

$$\frac{|R|}{|f^{ext}|} < e \text{ , όπου } e \text{ ένας ελάχιστος αριθμός.}$$

2.2.2 Έλεγχος με βάση τις δυνάμεις

Στον αλγόριθμο Newton Raphson έχει ιδιαίτερη σημασία η επιλογή της κατάλληλης αρχικής τιμή καθώς έτσι επιταχύνεται η σύγκλιση της μεθόδου ενώ διαφορετικά μπορεί να ωθήσει σε απόκλιση.

Ο έλεγχος με βάση τις δυνάμεις υλοποιείται διαιρώντας το συνολικό εξωτερικό επιβαλλόμενο φορτίο σε έναν αριθμό προσαυξητικών βημάτων (Nsteps) τα οποία επιβάλλονται σταδιακά στην κατασκευή. Η μέθοδος N-R που περιγράφεται παραπάνω λαμβάνει ως αρχική τιμή για κάθε προσαυξητικό βήμα $u^{(0)}{}_{\mathrm{n+1}}$ την τιμή για την οποία η μέθοδος έχει συγκλίνει στο προηγούμενο.

Επιλέγοντας έναν κατάλληλο αριθμό βημάτων εξασφαλίζουμε μια μικρή διαφορά των άγνωστων μετατοπίσεων μεταξύ των βημάτων και κατ' επέκταση μια κατάλληλη αρχική τιμή για τη μέθοδο N-R. Τελικά στην εξίσωση του προβλήματος εισάγεται ο φορτικός συντελεστής $\lambda = \frac{f_{total}}{N_{steps}}$ και η μη γραμμική εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$R(u_{n+1}) \equiv f^{int}(u_{n+1}) - f^{ext}{}_{n+1} = 0$$

Όπου $f^{ext}{}_{n+1} = \lambda \cdot f^{ext}{}_{total}$

Ο έλεγχος με βάση τις δυνάμεις αν και πολύ χρήσιμος για την επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης αποτυγχάνει να επιστρέψει λύση όταν η κατασκευή φτάσει την οριακή αντοχή της και παράλληλα δεν μπορεί να εντοπίσει τυχών καθοδικό κλάδο του διαγράμματος δύναμης-μετατόπισης. Η μέθοδος ελέγχου με βάση τις μετατοπίσεις που περιγράφεται παρακάτω δεν αντιμετωπίζει τέτοιου είδους προβλήματα.

2.2.3 Έλεγχος με βάση τις μετατοπίσεις

Για την εφαρμογή της μεθόδου απαιτείται επιπλέον η εισαγωγή ενός συντελεστή φόρτισης $\Delta\lambda$, ο οποίος ορίζεται ως συντελεστής φόρτισης προσαυξητικού βήματος και για τον οποίο ισχύει :

$$\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n$$

Ο συντελεστής φόρτισης είναι μια νέα άγνωστη μεταβλητή που εισάγεται στη μη γραμμική εξίσωση του κάθε προσαυξητικού βήματος. Συνεπώς η ζητούμενη εξίσωση γίνεται :

$$R(u_{n+1}, \Delta\lambda) \equiv f^{int}(u_{n+1}) - (\lambda_n + \Delta\lambda) \cdot f^{ext}{}_{total} = 0$$

Ο έλεγχος με βάση τις μετατοπίσεις πραγματοποιείται εισάγοντας έναν κινηματικό περιορισμό στην εξίσωση του προβλήματος ως προς έναν βαθμό ελευθερίας ενός κόμβου της κατασκευής. Επομένως προκύπτει η δεύτερη εξίσωση του προβλήματος :

$$u_{n+1} = u_{max}$$

Συγκεντρωτικά για μια k επανάληψη ενός προσαυξητικού βήματος της μεθόδου N-R το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει είναι :

$$K\tau \cdot \ \delta u^k - f^{ext} \cdot \Delta\lambda^k = R(u^{(k-1)}, \Delta\lambda^{(k-1)})$$

$$\delta u = l \text{ , για το δεσμευμένο βαθμό ελευθερίας}$$

Από την επίλυση του συστήματος ως προς τις άγνωστες μετακινήσεις της κατασκευής δu λαμβάνουμε :

$$\delta u^k = \delta u^* + \Delta\lambda \cdot \ \delta\bar{u} \ \ (1)$$

Όπου δu^* η μετακίνηση που προκύπτει από την επαναληπτική μέθοδο N-R για το έλεγχο με βάση τις δυνάμεις και είναι :

$$\delta u^* = \ -K\tau^{-1} \cdot \ R^{(k-1)}$$

Και $\delta\bar{u}$ η εφαπτομενική λύση της εξίσωσης που ορίζεται ως :

$$\delta\bar{u} = \ K\tau^{-1} \cdot \ f^{\,ext}$$

Για την εύρεση της άγνωστης μεταβλητής $\Delta\lambda$ υπολογίζονται τα μεγέθη $\delta u^*, \delta\bar{u}$ της κατασκευής και για τη γνωστή μετακίνηση $\delta u = l$ επιλύεται η παραπάνω εξίσωση ως προς $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \frac{\delta u - \delta u^*}{\delta\bar{u}}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η (1) για τις υπόλοιπες άγνωστες μετακινήσεις. Τελικά το πεδίο των μετακινήσεων ενημερώνεται όπως και στην περίπτωση του ελέγχου με βάση τις δυνάμεις σύμφωνα με τη σχέση :

$$\Delta u^k = \Delta u^{(k-1)} + \delta u^k$$

Όπως και προηγουμένως η μέθοδος επαναλαμβάνεται μέχρι έναν ορισμένο αριθμό επαναλήψεων ή έως ότου ο αλγόριθμός φτάσει τη δοσμένη ανοχή.

2.2.4 Υπολογιστική θεωρία πλαστικότητας

Για την εξέλιξη τις πλαστικότητας και κατ' επέκταση τη μελέτη της όλκιμης συμπεριφοράς εξετάζονται οι θεωρήσεις συνθηκών επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης. Και στις δυο περιπτώσεις η επίλυση πραγματοποιείται με βάση το κριτήριο αστοχίας Von Mises .

2.2.4.1 Επίπεδη παραμόρφωση

Οι βασικές εξισώσεις για τη διατύπωση του καταστατικού νόμου Von Mises σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης είναι :

- Καταστατική εξίσωση γραμμικής ελαστικότητας :

$$\sigma = D^e : \varepsilon^e$$

  Όπου D^e το ισότροπο μητρώο ελαστικότητας.

- Συνάρτηση διαρροής σύμφωνα με το κριτήριο αστοχίας Von Mises :

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = \sqrt{3 \cdot J_2(s(\sigma))} - \sigma_y$$

  Όπου $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)$ η τάση διαρροής σε μονοαξονική φόρτιση συναρτήσει της πλαστικής παραμόρφωσης $\bar{\varepsilon}^p$.

- Θεώρηση συνηρημένης πλαστικότητας :

$$d\varepsilon^p = d\gamma \cdot N = d\gamma \cdot \frac{d\Phi}{d\sigma}$$

  Όπου το διάνυσμα πλαστικής ροής N δίνεται από τον τύπο :

$$N = \frac{d\Phi}{d\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s}{\|s\|}$$

- Θεώρηση συνηρημένης κράτυνσης υλικού κατά την οποία η εξέλιξη της κράτυνσης και ο αντίστοιχος συντελεστής υπολογίζεται με βάση την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $d\bar{\varepsilon}^p$ που δίνεται από τον τύπο :

$$d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{3}{2}} \, \|d\varepsilon^p\| = \delta\gamma$$

Ο αλγόριθμος υπολογισμού των τάσεων και των παραμορφώσεων κατά Von Mises διακρίνεται σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο γίνεται η πρόβλεψη των ελαστικών

παραμορφώσεων κατά το συγκεκριμένο προσαυξητικό βήμα και στο δεύτερο η διόρθωση των τάσεων και των παραμορφώσεων εάν απαιτείται.

Στάδιο 1 – Πρόβλεψη

- Αρχικά για τη δεδομένη παραμόρφωση ενός προσαυξητικού βήματος $\Delta\varepsilon$ υπολογίζονται η δοκιμαστική τιμή ελαστικής παραμόρφωσης και πλαστικής παραμόρφωσης :

$$\varepsilon^{e\ \mathrm{trial}}{}_{n+1} = \varepsilon^{e}{}_{n} + \Delta\varepsilon$$

$$\bar{\varepsilon}^{p\ trial}{}_{n+1} = \bar{\varepsilon}^{p}{}_{\mathrm{n}}$$

Οι αντίστοιχες δοκιμαστικές τάσεις προκύπτουν με βάση την καταστατική εξίσωση :

$$\sigma^{\mathrm{trial}}{}_{n+1} = D^{e} : \varepsilon^{e\ \mathrm{trial}}{}_{n+1}$$

Εφαρμόζοντας τη διάκριση σε αποκλίνουσες και υδροστατικές τάσεις προκύπτει :

$$s^{\mathrm{trial}}{}_{n+1} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{d}{}^{e\ \mathrm{trial}}{}_{n+1}, \qquad p^{\mathrm{trial}}{}_{n+1} = K \cdot \varepsilon_{v}{}^{e\ \mathrm{trial}}{}_{n+1}$$

Όπου s οι αποκλίνουσες τάσεις, p οι υδροστατικές τάσεις και ε_d και ε_v οι αντίστοιχες παραμορφώσεις. Οι ποσότητες G και K αντιστοιχούν στο μέτρο διάτμησης και στο μέτρο ελαστικότητας όγκου.

Η τάση διαρροής υπολογίζεται με βάση την πλαστική παραμόρφωση :

$$\sigma_{y}{}^{\mathrm{trial}}{}_{n+1} = \sigma_{y}(\bar{\varepsilon}^{p}{}_{\mathrm{n}})$$

Έχοντας υπολογίσει τις δοκιμαστικές ελαστικές τάσεις γίνεται έλεγχος εάν βρίσκονται εντός ή εκτός από την επιφάνεια της συνάρτησης διαρροής.

- Εάν $\sigma^{\mathrm{trial}}{}_{n+1}$ εντός της επιφάνειας ισχύει :

$$\Phi\left(\sigma^{\mathrm{trial}}{}_{n+1}, \sigma_{y}{}^{\mathrm{trial}}{}_{n+1}\right) \leq 0$$

Η κατάσταση είναι καθαρά ελαστική, συνεπώς η ελαστική πρόβλεψη είναι η λύση του συγκεκριμένου βήματος. Διαφορετικά η κατάσταση περιγράφεται ως ελαστοπλαστική και πρέπει να ενεργοποιηθεί το δεύτερο στάδιο του αλγορίθμου και να ακολουθηθεί η διαδικασία διόρθωσης των τάσεων και των παραμορφώσεων.

Στάδιο 2 – Διόρθωση

Για τη διόρθωση των τιμών απαιτείται η επίλυση του συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων ως προς τις τιμές $\varepsilon^{e}{}_{n+1}$, $\Delta\gamma$, $\bar{\varepsilon}^{p}{}_{n+1}$:

$$\varepsilon^{e}{}_{n+1} = \varepsilon^{etrial}{}_{n+1} - \Delta\gamma \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|}$$

$$\bar{\varepsilon}^{p}{}_{n+1} = \bar{\varepsilon}^{p}{}_{\mathrm{n}} + \Delta\gamma$$

$$\sqrt{3 \cdot J_2(s_{n+1})} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^{p}{}_{\mathrm{n}}) = 0$$

Το κριτήριο Von Mises χρησιμοποιεί μόνο τις αποκλίνουσες τάσεις s_{n+1}, συνεπώς οι υδροστατικές τάσεις υπολογίζονται κατά το πρώτο στάδιο και δεν λαμβάνονται υπόψη κατά τη διόρθωση των τάσεων σε αυτό το στάδιο. Οι εξισώσεις για τις αποκλίνουσες παραμορφώσεις και τις τάσεις που προκύπτουν είναι :

$$\varepsilon^{e}{}_{\mathrm{d}\,n+1} = \varepsilon^{e\,\mathrm{trial}}{}_{\mathrm{d}\,n+1} - \Delta\gamma \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|}$$

$$s_{n+1} = s^{\mathrm{trial}}{}_{n+1} - \Delta\gamma \cdot 2 \cdot G \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|}$$

Ενώ ισχύει ότι οι δοκιμαστικές και οι τελικές αποκλίνουσες τάσεις είναι συγγραμμικές δηλαδή :

$$\frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} = \frac{s^{trial}{}_{n+1}}{\|s^{trial}{}_{n+1}\|}$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση λαμβάνουμε :

$$s_{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta\gamma \cdot 3 \cdot G}{q^{\mathrm{trial}}{}_{n+1}}\right) s^{\mathrm{trial}}{}_{n+1}$$

Όπου $q^{\mathrm{trial}}{}_{n+1} = \sqrt{3 \cdot J_2(s^{\mathrm{trial}}{}_{n+1})}$

Οπότε η ζητούμενη μη γραμμική εξίσωση του προσαυξητικού βήματος δίνεται με μόνο άγνωστο την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\Delta\gamma$:

$$\Phi(\Delta\gamma) = q^{\mathrm{trial}}{}_{n+1} - 3 \cdot G \cdot \Delta\gamma - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^{p}{}_{n+\Delta\gamma}) = 0$$

η οποία επιλύεται με τη μέθοδο Newton Raphson.

Τελικά οι διορθωμένες τάσεις και παραμορφώσεις προκύπτουν :

$$s_{n+1} = (1 - \frac{\Delta\gamma \cdot 3 \cdot G}{q^{\text{trial}}{}_{n+1}})\, s^{\text{trial}}{}_{n+1}$$

$$\sigma_{n+1} = s_{n+1} + p^{\text{trial}}{}_{n+1}\, \mathrm{I}$$

$$\varepsilon^{e}{}_{n+1} = \frac{1}{2G} s_{n+1} + \frac{1}{3} \varepsilon_{\mathrm{v}}{}^{e\ \text{trial}}$$

Για την περίπτωση του γραμμικώς κρατυνόμενου υλικού η τάση διαρροής δίνεται από τη σχέση :

$$\sigma_y(\bar{\varepsilon}^{p}{}_{n+\Delta\gamma}) = \sigma 0 + H \cdot \bar{\varepsilon}^{p}{}_{n}$$

Όπου σ0 η αρχική τάση διαρροής και Η το μέτρο κράτυνσης του υλικού.

Η λύση της εξίσωσης δίνεται σε αυτή την περίπτωση χωρίς την απαίτηση επαναλήψεων N-R :

$$\Delta\gamma = \frac{\Phi}{3 \cdot G + H}$$

Όπως έχει αναφερθεί στο προηγούμενο Κεφάλαιο η μετατόπιση u και επομένως η παραμόρφωση Δε ενός προσαυξητικού βήματος για την έναρξη της διαδικασίας υπολογίζονται με την επίλυση ενός μη γραμμικού προβλήματος με επαναλήψεις N-R. Η μη γραμμικότητα εντοπίζεται στο εφαπτομενικό μητρώο της κατασκευής και ειδικά στο εφαπτομενικό μητρώο ελαστικότητας D το οποίο ορίζεται ως :

$$\mathrm{D} = \frac{d\sigma_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}}$$

Αντίστοιχα με τη διαδικασία που περιγράφεται παραπάνω εάν για τη συνάρτηση διαρροής του προηγούμενου βήματος ισχύει :

$$\Phi^{trial} < 0 \ \text{ ή } \ \Phi^{trial} = 0 \text{ , με ελαστική αποφόρτιση}$$

Τότε το εφαπτομενικό μητρώο ελαστικότητας ισούται με το ελαστικό μητρώο :

$$D = D^{e}$$

$$D^{e} = 2 \cdot G \cdot Id + K \cdot\ I \otimes I$$

Όπου G το μέτρο διάτμησης, K το μέτρο ελαστικότητας όγκου και $Id = Is - \frac{1}{3}\, I \otimes \mathrm{I}$ ο τανυστής που προβάλει 2^{ης} τάξης συμμετρικούς τανυστές στον αποκλίνοντα χώρο.

$Is = \frac{1}{2}$ (δikδjl + δilδjk) ο τανυστής συμμετρικής προβολής.

Ενώ στην περίπτωση όπου :

$$\Phi^{trial} > 0 \text{ ή } \Phi^{trial} = 0, \text{ με περαιτέρω πλαστικοποίηση}$$

Τότε ορίζεται το ελαστοπλαστικό εφαπτομενικό μητρώο σύμφωνα με τον ορισμό :

$$\mathrm{Dep} = \frac{d\sigma_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}}$$

Ειδικά για το καταστατικό προσομοίωμα Von Mises το ελαστοπλαστικό εφαπτομενικό μητρώο υπολογίζεται :

$$Dep = De - \frac{\Delta\gamma \cdot 6 \cdot G^2}{q_{trial}} Id + 6 \cdot G^2 \left(\frac{\Delta\gamma}{q_{trial}} - \frac{1}{3 \cdot G + H}\right) N \otimes \mathrm{N}$$

2.2.4.2 Επίπεδη ένταση

Σε συνθήκες επίπεδης έντασης η τάση εκτός επιπέδου λαμβάνει μηδενική τιμή, επομένως απαιτείται μια επιπλέον εξίσωση στον αλγόριθμο υπολογισμού τάσεων και παραμορφώσεων που περιγράφεται παραπάνω. Η εξίσωση αποτελεί τη δέσμευση των τάσεων εκτός επιπέδου και η επίλυσή της πραγματοποιείται μέσω εμφωλευμένων επαναλήψεων N-R. Μια εναλλακτική υλοποίηση είναι η χρήση ενός προβολικού προσομοιώματος, το οποίο περιλαμβάνει μόνο τις εντός επιπέδου τάσεις και παραμορφώσεις καθώς και τη δέσμευση για την εκτός επιπέδου τάση.

Το προβολικό προσομοίωμα είναι αποτελεσματικότερο λόγω του μειωμένου αριθμού εξισώσεων και για αυτό το λόγο επιλέγεται, ωστόσο απαραίτητο είναι για την εφαρμογή του οι σχέσεις μεταξύ εντός και εκτός επιπέδου παραμόρφωση να δίνονται σε κλειστή μορφή.

Όπως και στο καταστατικό προσομοίωμα επίπεδης παραμόρφωσης Von Mises έτσι και σε αυτή την περίπτωση οι βασικές εξισώσεις είναι :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

$$\sigma = D^e : \varepsilon^e$$

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = \sqrt{3 \cdot J_2(s(\sigma))} - \sigma_y$$

$$d\varepsilon^p = d\gamma \cdot N = d\gamma \frac{d\Phi}{d\sigma}$$

$$d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\|d\varepsilon^p\| = \delta\gamma$$

Επιπλέον οι δεσμεύσεις για τις εκτός επιπέδου τάσεις :

$$\sigma_{xz}(\varepsilon^e) = 0 \quad , \qquad \sigma_{yz}(\varepsilon^e) = 0 \quad , \qquad \sigma_{zz}(\varepsilon^e) = 0$$

Για τις ελαστικές παραμορφώσεις για γραμμικό ισότροπο υλικό ισχύει :

$$\varepsilon^e_{xz} = 0 \ , \qquad \varepsilon^e_{yz} = 0 \ , \qquad \varepsilon^e_{zz} = -\frac{v}{1-v}\,(\varepsilon^e_{xx} + \varepsilon^e_{yy})$$

Ενώ για τις πλαστικές :

$$\varepsilon^p{}_{zz} = -\ \varepsilon^p{}_{xx} + \varepsilon^p{}_{yy}), \quad \varepsilon^p{}_{xz} = \varepsilon^p{}_{yz} = 0$$

Για τις αποκλίνουσες τάσεις s ισχύει :

$$\mathrm{s} = \sigma - \frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)$$

$$\|\mathrm{s}\| = \sqrt{s : s}$$

Επομένως οι εντός επιπέδου τάσεις s μπορούν να γραφτούν με χρήση του πίνακα P :

$$s = P \cdot \sigma$$

Όπου:

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Επομένως οι βασικές εξισώσεις μετατρέπονται σε :

$$\Phi\left(\sigma, \sigma_y\right) = \sqrt{3 \cdot J_2(s(\sigma))} - \sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2}(\,s : s)} - \sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2}(\,\sigma^T \cdot P \cdot \sigma)} - \sigma_y$$

$$d\varepsilon^p = d\gamma \cdot N = d\gamma \cdot \frac{d\Phi}{d\sigma} = d\gamma \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{P \cdot \sigma}{\sqrt{\sigma^T \cdot P \cdot \sigma}}$$

Σε αντιστοιχία με την περίπτωση των συνθηκών επίπεδης παραμόρφωσης ο αλγόριθμος διακρίνεται σε δυο στάδια πρόβλεψης – διόρθωσης.

Στάδιο 1 - Πρόβλεψη

- Αρχικά υπολογίζονται οι δοκιμαστικές τάσεις και παραμορφώσεις :

$$\varepsilon^{etrial}{}_{n+1} = \varepsilon^{e}{}_{n} + \Delta\varepsilon$$

$$\bar{\varepsilon}^{ptrial}{}_{n+1} = \bar{\varepsilon}^{p}{}_{n}$$

$$\sigma^{trial}{}_{n+1} = D^{e} : \varepsilon^{etrial}{}_{n+1}$$

- Για τα μεγέθη αυτά υπολογίζεται η συνάρτηση διαρροής στην οποία για ευκολότερη διατύπωση γίνεται χρήση η τετραγωνική μορφή της :

$$\Phi^{trial} = \frac{1}{2}\sigma^{\text{trial}}{}_{n+1}{}^{T} \cdot P \cdot \sigma^{\text{trial}}{}_{n+1} - \frac{1}{3}\sigma_{y}{}^{2}(\bar{\varepsilon}^{p}{}_{n})$$

Όπου εάν : $\Phi^{trial} \leq 0$ η κατάσταση είναι ελαστική και η πρόβλεψη είναι η λύση του συστήματος.

Ενώ εάν : $\Phi^{trial} > 0$ η κατάσταση είναι ελαστοπλαστική και απαιτείται η ενεργοποίηση του δεύτερου σταδίου και η διόρθωση των μεγεθών.

Στάδιο 2 - Διόρθωση

Το στάδιο διόρθωσης περιλαμβάνει την επίλυση των ακολούθων μη γραμμικών εξισώσεων :

$$\varepsilon^{e}{}_{n+1} = \varepsilon^{\text{etrial}}{}_{n+1} - \Delta\gamma \cdot P \cdot \sigma_{n+1}$$

$$\bar{\varepsilon}^{p}{}_{n+1} = \bar{\varepsilon}^{p}{}_{n} + \Delta\gamma \cdot \sqrt{\frac{3}{2}\,\sigma_{n+1}{}^{T} \cdot P \cdot \sigma_{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{n+1}{}^{T} \cdot P \cdot \sigma_{n+1} - \frac{1}{3}\sigma_{y}{}^{2}(\bar{\varepsilon}^{p}{}_{n+1}) = 0$$

Με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς οι παραπάνω μη γραμμικές εξισώσεις μπορούν να μειωθούν σε μια με άγνωστη μεταβλητή την πλαστική παραμόρφωση $\Delta\gamma$:

$$\Phi(\Delta\gamma) = \frac{1}{2}f(\Delta\gamma) - \frac{1}{3}\sigma_{y}{}^{2}(\bar{\varepsilon}^{p}{}_{n+1}) + \Delta\gamma \cdot \sqrt{\frac{2}{3}f(\Delta\gamma)} = 0$$

Όπου :

$$f(\Delta\gamma) = \frac{1}{2}\sigma^{\text{trial}}{}_{n+1}{}^{T} \cdot A(\Delta\gamma)^{T} \cdot P \cdot A(\Delta\gamma) \cdot \sigma^{\text{trial}}{}_{n+1}$$

$$A(\Delta\gamma) = [C + \Delta\gamma \cdot P]^{-1} \cdot C$$

$$C = (D^e)^{-1}$$

Τελικά υπολογίζοντας την άγνωστη μεταβλητή $\Delta\gamma$ οι παραμορφώσεις και οι τάσεις ενημερώνονται :

$$\sigma_{n+1} = A(\Delta\gamma) \cdot \sigma^{\text{trial}}{}_{n+1}$$

$$\varepsilon^e{}_{n+1} = C \cdot \sigma_{n+1}$$

$$\bar{\varepsilon}^p{}_{n+1} = \bar{\varepsilon}^p{}_n + \Delta\gamma \cdot \sqrt{\frac{2}{3} f(\Delta\gamma)}$$

Η διαδικασία μπορεί να απλοποιηθεί με τη χρήση ορθογώνιου μετασχηματισμού των πινάκων P και D, καθώς έχουν κοινά ιδιοδιανύσματα.

Με τη χρήση του πίνακα :

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Λαμβάνουμε τους διαγώνιους πίνακες :

$$P' = Q \cdot P \cdot Q^T = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D^{e\prime} = Q \cdot D^e \cdot Q^T = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-v} & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

$$A' = [C' + \Delta\gamma \cdot P']^{-1} \cdot C' = \begin{bmatrix} \frac{3(1-v)}{(1-v) + E\Delta\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2G\Delta\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+2G\Delta\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\sigma'^{\text{trial}}{}_{n+1} = Q \cdot \sigma^{\text{trial}}{}_{n+1}$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση $f(\Delta\gamma)$ γράφεται :

$$f(\Delta\gamma) = \frac{1}{2} \sigma'^{\text{trial}}{}_{n+1}{}^T \cdot A'(\Delta\gamma)^T \cdot P' \cdot A'(\Delta\gamma) \cdot \sigma'^{\text{trial}}{}_{n+1}$$

και για την ενημέρωση των τάσεων ισχύει :

$$A(\Delta\gamma) = Q^T \cdot A' \cdot Q$$

Όπου με την εφαρμογή της σχέσης ο πίνακας $A(\Delta\gamma)$ δίνεται :

$$A(\Delta\gamma) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_{11} + A_{22}) & \frac{1}{2}(A_{11} - A_{22}) & 0 \\ \frac{1}{2}(A_{11} - A_{22}) & \frac{1}{2}(A_{11} + A_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \frac{3 \cdot (v - 1)}{3(v - 1) + E \cdot \Delta\gamma}\ , \qquad A_{22} = \frac{1}{1 + 2 \cdot G \cdot \Delta\gamma}\ , \qquad A_{33} = A_{22}$$

Το εφαπτομενικό μητρώο ελαστικότητας D αντιστοίχως με την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης δίνεται με βάση τον τύπο :

$$\mathrm{D} = \frac{d\sigma_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}}$$

Το μέγεθος $d\sigma_{n+1}$ παραγωγίζοντας όλες τις εσωτερικές μεταβλητές προκύπτει :

$$d\sigma_{n+1} = [E - a(E \cdot P \cdot \sigma_{n+1}) \otimes (E \cdot P \cdot \sigma_{n+1})]\ d\varepsilon_{n+1}$$

Όπου :

$$E = [C + \Delta\gamma \cdot P]^{-1}$$

$$a = \frac{1}{{\sigma_{n+1}}^T \cdot P \cdot E \cdot P \cdot \sigma_{n+1} + \frac{2 \cdot \xi \cdot H}{3 - 2 \cdot H \cdot \Delta\gamma}}$$

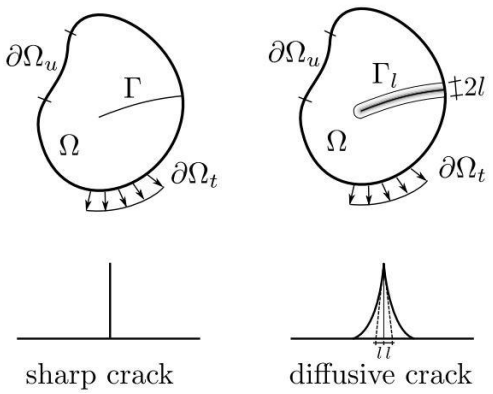
2.3 Μέθοδος πεδίου φάσης για την προσομοίωση της θραύσης

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2.1.1 για τον υπολογισμό της ενέργειας θραύσης απαιτείται η γνώση της καμπύλης θραύσης, η οποία εξελίσσεται στην πάροδο του χρόνου σε ένα πραγματικό πρόβλημα. Για απλοποίηση της διαδικασίας η επιφάνεια θραύσης προσομοιώνεται με τη μεταβλητή πεδίου-φάσης c(x,t) = [0,1] , με τιμή ίση με 0 πάνω στη ρωγμή και τιμή ίση με 1 σε περιοχές που δεν έχουν ρηγματωθεί. Τιμές μικρότερες της μονάδας αντιστοιχούν σε υλικό το οποίο έχει υποστεί απομείωση των μηχανικών του χαρακτηριστικών, χωρίς όμως να έχει ρηγματωθεί πλήρως.

Και η ενέργεια θραύσης προσεγγίζεται με βάση τον ακόλουθο τύπο :

$$\int_{\Gamma} Gc\, d\Gamma \approx \int_{\Omega} Gc \cdot [\frac{(c-1)^2}{4 \cdot lo} + lo \cdot |\nabla c|^2] d\Omega$$

Όπου lo η παράμετρος που ελέγχει το εύρος της ρωγμής στο υλικό. Μια μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου οδηγεί σε εκτενέστερη ρωγμή.



Εικόνα 8 : Παράμετρος κλίμακας πεδίου φάσης

Κατά αυτή την υλοποίηση της προσέγγισης της ενέργειας θραύσης για την τιμή της παραμέτρου lo έχει αποδειχτεί ότι κατά την προσομοίωση πρέπει να ισχύει:

$lo \approx el_{size}$ προκειμένου να προκύψουν λογικά αποτελέσματα, όπου el_{size} το μέγεθος των πεπερασμένων στοιχείων.

Με την παραπάνω προσέγγιση της ενέργειας θραύσης η εξίσωση της συνολικής ενέργειας του συστήματος για την περίπτωση της ψαθυρής θραύσης ορίζεται :

$$\Phi = \int_{\Omega} (g(c) \cdot \varphi_{e^+} + \varphi_{e^-}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} Gc \cdot [\frac{(c-1)^2}{4 \cdot lo} + lo \cdot |\nabla c|^2] \cdot d\Omega$$

Όπου g ο μειωτικός συντελεστής λόγω εξέλιξης της θραύσης, ο οποίος εφαρμόζεται μόνο για την ενέργεια που οφείλεται σε εφελκυσμό, αποτρέποντας με αυτόν τον τρόπο εμφάνιση ρωγμών υπό θλίψη.

Προκειμένου το φαινόμενο εμφάνισης της ρωγμής να είναι μη αναστρέψιμο κατά τη φόρτιση και αποφόρτιση εισάγεται η μεταβλητή He, η οποία ισούται πάντα με την μέγιστη τιμή της ελαστικής ενέργειας :

$$H\mathrm{e} = \max\left(\Psi e^{+}\right)$$

Με την εφαρμογή των εξισώσεων Euler-Lagrange για τη μεταβλητή c του πεδίου φάσης προκύπτει η εξίσωση του προβλήματος για την εξέλιξη της μεταβλητής c :

$$\int_{\Omega} 2 \cdot lo \cdot \ \nabla c : \nabla q \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1-c}{2 \cdot lo} q \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{g'(c)}{Gc} H\mathrm{e} \cdot q \cdot \ d\Omega$$

Όπου q συναρτήσεις βάρους του πεδίου φάσης.

Για την προσομοίωση της ψαθυρής θραύσης (Borden et al., 2012), (Kakouris & Triantafyllou, 2017) ο μειωτικός συντελεστής λαμβάνεται :

$$g(c) = (1-k) \cdot c^2 + k \ , k \ll 1$$

Στην περίπτωση της όλκιμής θραύσης για την ίδια έκφραση της προσέγγισης της ενέργειας θραύσης η συνολική ενέργεια του συστήματος δίνεται :

$$\Phi = \int_{\Omega} \left(g(c) \cdot \psi_e^{+} + \psi_e^{-} + \psi_{pl}\right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} Gc \cdot \ [\frac{(c-1)^2}{4 \cdot lo} + lo \cdot |\nabla c|^2] \cdot d\Omega$$

Όπου ψ_{pl} η ενέργεια πλαστικοποίησης.

Στο πρώτο προσομοίωμα που εξετάζεται (Ambati et al., 2015) για την όλκιμη συμπεριφορά ο μειωτικός συντελεστής λαμβάνεται :

$$g(c) = c^{2p^m} + k \ , k \ll 1 \ \text{ και p} = \frac{\varepsilon_{eq}}{\varepsilon p_{crit}}$$

Όπου ε_{eq} η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση από το κριτήριο Von Mises, εp_{crit} και m παράμετροι του προσομοιώματος.

Στο δεύτερο προσομοίωμα (Yin & Kaliske, 2020) χρησιμοποιείται μια παρεμφερής έκφραση για την προσέγγιση της ενέργειας θραύσης κατά την οποία :

$$\int_{\Gamma} Gc \cdot d\Gamma \approx \int_{\Omega} Gc \cdot [\frac{c^2}{2 \cdot lo} + \frac{lo}{2}|\nabla c|^2] \cdot d\Omega$$

Όπου σε αυτή την περίπτωση για την παράμετρο lo πρέπει να ισχύει : $lo \approx 2 \cdot el_{size}$, προκειμένου να προκύψουν λογικά αποτελέσματα. Ο μειωτικός συντελεστής g λαμβάνεται όπως στην περίπτωση της ψαθυρής θραύσης :

$$g(c) = (1 - c)^2$$

Με τη διαφορά ότι οι τιμές c = 1 αντιστοιχούν σε περιοχές πάνω στη ρωγμή και οι τιμές c = 0 που δεν έχουν ρηγματωθεί.

Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση η όλκιμη συμπεριφορά περιγράφεται μέσω απομείωσης της πυκνότητας ενέργειας της επιφάνειας θραύσης Gc στο χρόνο, σε αντίθεση με τις προηγούμενες θεωρήσεις όπου η παράμετρος Gc λαμβάνει σταθερή τιμή.

3 Ανάπτυξη κώδικα

Η προσομοίωση και ανάλυση της όλκιμης συμπεριφοράς πραγματοποιήθηκε σε υφιστάμενο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων σε περιβάλλον MatLab για την ανάλυση ψαθυρής συμπεριφοράς (Kakouris & Triantafyllou, 2017), με την προσθήκη των απαιτούμενων συναρτήσεων.

3.1 Μοντέλο όλκιμης θραύσης κατά Ambati et al., 2015

Για την προσομοίωση της όλκιμης συμπεριφοράς εξετάζονται δυο μοντέλα, τα οποία διαφέρουν ως προς την έκφραση του πεδίου φάσης. Σύμφωνα με το προσομοίωμα Ambati et al., (2015) η εξέλιξη της μεταβλητής πεδίου βάσης c εξαρτάται από την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση Von Mises η οποία υπεισέρχεται στον ορισμό του μειωτικού συντελεστή g :

$$g(c) = c^{2p^m} + k \text{ , } k \ll 1 \text{ και p} = \frac{\varepsilon_{eq}}{\varepsilon p_{crit}}$$

Όπου ε_{eq} η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση Von Mises και εp_{crit} , m παράμετροι του προσομοιώματος όπου ελέγχουν το σημείο έναρξης του φαινομένου και την ταχύτητα εξέλιξης αντίστοιχα.

Σύμφωνα με το προηγούμενο Κεφάλαιο η εξίσωση του προβλήματος για την εξέλιξη της μεταβλητής c είναι :

$$\int_{\Omega} 2 \cdot lo \ \cdot \nabla c : \nabla q \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1-c}{2 \cdot lo} q \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{g'(c)}{Gc} He \cdot q \cdot d\Omega$$

Όπου $g'(c) = 2 \cdot p^m \cdot c^{2p^m - 1}$, η πρώτη παράγωγος του μειωτικού συντελεστή.

Το πρόβλημα είναι μη γραμμικό και θα επιλυθεί με τη χρήση της μεθόδου N-R όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 2.

Διακριτοποιώντας το χωρίο Ω με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται στην ακόλουθη :

$$R(c) = \sum_{i=1}^{Np} N \cdot \Omega p \ - \sum_{i=1}^{Np} \left(\frac{2 \cdot lo \cdot g'(cp)}{Gc} He + cp \right) N \, \Omega p \ - \sum_{i=1}^{Np} 4lo^2 \cdot Bc^T \cdot Bc \cdot c \, \Omega p \ = 0$$

Όπου cp η τιμή στο Gauss Point, c η τιμή στον κόμβο, N οι συναρτήσεις σχήματος και Bc οι παράγωγοι των συναρτήσεων σχήματος :

$$cp = \sum_{i=1}^{Np} N \cdot c\ \Omega p\ , \qquad \nabla cp = \sum_{i=1}^{Np} Bc \cdot c\ \Omega p$$

Η παράγωγός της ζητούμενης εξίσωσης δίνεται :

$$K(c) = -(\sum_{i=1}^{Np} N \cdot \left(\frac{2 \cdot lo \cdot\ g''(cp)}{Gc} He + 1\right) \cdot N^T\ \Omega p\ - \sum_{i=1}^{Np} 4lo^2 \cdot Bc^T \cdot Bc\ \Omega p\ )$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 1: ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΕΔΙΟΥ ΦΑΣΗΣ

Υπολόγισε : συναρτήσεις σχήματος N, παραγώγους $B = \nabla N$, και τον όγκο των στοιχείων dVolume

Διάβασε : παράμετροι ανάλυσης (lo, Gc, ep_{crit}, m) και υλικού (E, v, fy, H)

Όρισε : αρχική τιμή για όλους τους κόμβους $c_{\ node} = 1$

Για κάθε επαυξητικό βήμα i=1…N :

Εάν δεν η σύγκλιση > tolerance ή επαναλήψεις < MaxIterations :

Για κάθε στοιχείο i =1….Νστοιχεία :

Για κάθε Gauss Point i = 1….NGaussPoints :

Διάβασε : πλαστική παραμόρφωση ep

Υπολόγισε :

$$p = \left(\frac{ep}{ep_{crit}}\right)^m$$

$$g'(c) = 2\ \cdot p \cdot c_{GP}{}^{\ p-1}$$

Υπολόγισε : το τοπικό διάνυσμα Rc_{loc}

$$A1 = \left(2 \cdot g'(c) \cdot lo \cdot H \cdot \frac{1}{Gc} + c_{GP}\right) \cdot N$$

$$A2 = 4 \cdot lo^2 \cdot B^T(\ B \cdot c_{node})$$

$$A3 = N$$

$$Rc_{loc} = Rc_{loc} + (A3 - A2 - A1) \cdot dVol$$

Τέλος

Υπολόγισε : το καθολικό διάνυσμα Rc_{global}

Τέλος

Για κάθε στοιχείο i =1….Νστοιχεία :

Για κάθε Gauss Point i = 1….NGaussPoints :

Διάβασε : πλαστική παραμόρφωση ep

Υπολόγισε :

$$p = \left(\frac{ep}{ep_{crit}}\right)^m$$

$$g''(c) = 2 \cdot\ p \cdot (2p - 1) \cdot c_{GP}{}^{\ p-2}$$

Υπολόγισε : το τοπικό μητρώο Kc_{loc}

$$A1 = N \cdot \left(2 \cdot g \cdot lo \cdot H \cdot \frac{1}{Gc} + 1\right) \cdot N^T$$

$$A2 = B^T \cdot (4 \cdot lo^2) \cdot B$$

$$Kc_{loc} = Kc_{loc} + (A1 + A2) \cdot dVol$$

Τέλος

Υπολόγισε : το καθολικό μητρώο Kc_{global}

Τέλος

22: **Επίλυση** : $c_1 = c_0 + \frac{Rc}{Kc}$

23: **Υπολόγισε** : Το καθολικό διάνυσμα R(c) (Βήμα 6-12)

24: **Εάν :**

$\|R(c)\| < ανοχή \rightarrow σύγκλιση$

$\|R(c)\| > ανοχή \rightarrow επιστροφή\ στο\ βήμα\ 5$

25: **Τέλος**

26: **Τέλος**

27: **Υπολόγισε** : c_{GP} στα Gauss Points, μειωτικό συντελεστή g

28: **Τέλος**

3.2 Μοντέλο όλκιμης θραύσης κατά Yin & Kaliske, 2020.

Σύμφωνα με το δεύτερο προσομοίωμα (Yin & Kaliske, 2020) ο μειωτικός συντελεστής g εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή c επομένως η εξίσωση πεδίου φάσης σε αυτή την περίπτωση είναι γραμμική. Επιπλέον όπως φαίνεται και από τη διατύπωση του g τιμές c ίσες με 1 αντιστοιχούν στις περιοχές πάνω στη θραύση και τιμές c ίσες με 0 σε αρηγμάτωτες περιοχές.

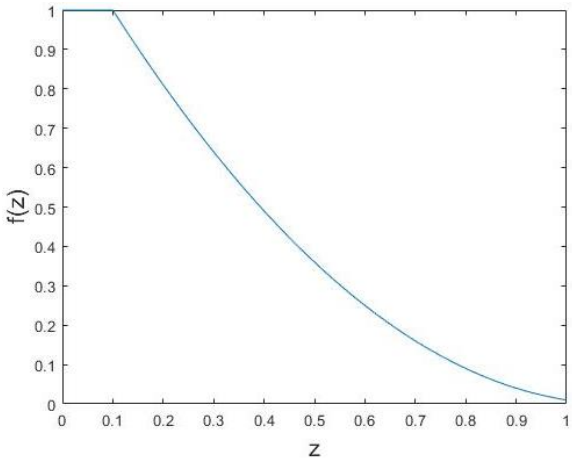
$$g(c) = (1 - c)^2$$

Η προσομοίωση της όλκιμης συμπεριφοράς πραγματοποιείται με τη θεώρηση ενός μειωτικού συντελεστή $f(\zeta)$ για την παράμετρο Gc, η οποία σε αυτή την περίπτωση λαμβάνει μια αρκετά μεγαλύτερη αρχική τιμή σε σύγκριση με το προηγούμενο προσομοίωμα. Η συνάρτηση $f(\zeta)$ εξαρτάται από την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση Von Mises ζ και δίνεται σύμφωνα με τον τύπο :

$$f(\zeta) = \begin{cases} 1 & \zeta \leq \zeta_{crit} \\ \frac{1-b}{\alpha^2}(\zeta - \zeta_{crit} - a)^2 + b & \zeta_{crit} < \zeta < \zeta_{crit} + a \\ b & \zeta_{crit} + a \leq \zeta \end{cases}$$

Όπου α και b σταθερές του προσομοιώματος και ζ_{crit} η τιμής της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης για την οποία ξεκινά η απομείωση. Η τιμή της σταθεράς b επιλέγεται $0 < b \ll 1$ και όχι ίση με 0 για την αποφυγή προβλημάτων της αριθμητικής διαδικασίας.

$$Για\ \alpha = 1\,, \qquad b = 10^{-8}, \qquad \zeta_{crit} = 0{,}1$$



Εικόνα 9 : Διάγραμμα απομείωσης πυκνότητας ενέργειας θραύσης

Η εξίσωση του πεδίου φάσης σε αυτή την περίπτωση, όπου η προσέγγιση της ενέργειας θραύσης διατυπώνεται με μια μικρή διαφορά όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο είναι :

$$\int_{\Omega} lo \ \cdot \nabla c : \nabla q \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \frac{c}{lo} q \ d\Omega = \int_{\Omega} \frac{g'(c)}{Gc} He \cdot q \cdot d\Omega$$

Όπου $Gc = Gc0 \cdot \ f(\zeta)$ με $Gc0$ την αρχική τιμή.

Όπως και στο προηγούμενο προσομοίωμα η ζητούμενη εξίσωση στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μετατρέπεται :

$$R(c) = \sum_{i=1}^{Np} N^T \cdot N \cdot \frac{c}{lo} \ \Omega p \ + \sum_{i=1}^{Np} lo \cdot Bc^T \cdot Bc \cdot c \cdot \Omega p \ - \sum_{i=1}^{Np} \left(\frac{2 \cdot (1 - cp)}{Gc} He \right) N \cdot \Omega p \ = 0$$

Η οποία μπορεί να γραφεί :

$$R(c) = \left(\sum_{i=1}^{Np} N^T \left(\frac{2He}{Gc} + \frac{1}{lo} \right) N \cdot \Omega p \ + \sum_{i=1}^{Np} lo \cdot Bc^T \cdot Bc \ \cdot \Omega p \ \right) \ \mathbf{C} = \sum_{i=1}^{Np} \left(\frac{2}{Gc} He \right) N \cdot \Omega p$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση λαμβάνει τη ακόλουθη μορφή :

$$K \cdot c = F$$

Όπου :

$K = \left(\sum_{i=1}^{Np} N^T \left(\frac{2He}{Gc} + \frac{1}{lo} \right) N \cdot \Omega p \ + \sum_{i=1}^{Np} lo \cdot Bc^T \cdot Bc \cdot \Omega p \ \right)$ ένα μητρώο $N \ x \ N$

$F = \sum_{i=1}^{Np} \left(\frac{2}{Gc} He \right) \cdot N \cdot \Omega p$ ένα διάνυσμα φόρτισης $N \ x \ 1$

c ένα διάνυσμα $N\ x\ 1$ που περιέχει τις άγνωστες μεταβλητές πεδίου φάσης στους κόμβους της κατασκευής.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2: ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΕΔΙΟΥ ΦΑΣΗΣ

1: ***Υπολόγισε*** *: συναρτήσεις σχήματος N, παραγώγους $B = \nabla N$, και τον όγκο των στοιχείων dVolume*

2: ***Διάβασε*** *: παράμετροι ανάλυσης (lo, Gc, ep_{crit}, m) και υλικού (E, v, fy, H)*

3: ***Όρισε*** *: αρχική τιμή για όλους τους κόμβους c = 1*

4: *Για κάθε επαυξητικό βήμα i=1…N :*

6: *Για κάθε στοιχείο i =1….Nστοιχεία :*

7: *Για κάθε Gauss Point i = 1….NGaussPoints :*

8: ***Διάβασε*** *: πλαστική παραμόρφωση ζ*

9: ***Υπολόγισε*** *:*

$$f(\zeta) = \begin{cases} 1 & \zeta \le \zeta_{crit} \\ \frac{1-b}{\alpha^2}(\zeta - \zeta_{crit} - a)^2 + b & \zeta_{crit} < \zeta < \zeta_{crit} + a \\ b & \zeta_{crit} + a \le \zeta \end{cases}$$

$$Gc = Gc_0 \cdot f(\zeta)$$

10: ***Υπολόγισε*** *: το τοπικό διάνυσμα Rc_{loc}*

$$A1 = (2\ \cdot H \cdot \frac{1}{Gc}) \cdot N$$

$$Rc_{loc} = Rc_{loc} + A1 \cdot dVol$$

11: ***Τέλος***

12: ***Υπολόγισε*** *: το καθολικό διάνυσμα Rc_{global}*

13: ***Τέλος***

14: *Για κάθε στοιχείο i =1….Nστοιχεία :*

15: *Για κάθε Gauss Point i = 1….NGaussPoints :*

16: ***Διάβασε*** *: πλαστική παραμόρφωση ep*

17: ***Υπολόγισε*** *:*

$$f(\zeta) = \begin{cases} 1 & \zeta \le \zeta_{crit} \\ \frac{1-b}{\alpha^2}(\zeta - \zeta crit - a)^2 + b & \zeta_{crit} < \zeta < \zeta_{crit} + a \\ b & \zeta_{crit} + a \le \zeta \end{cases}$$

$$Gc = Gc_0 \cdot f(\zeta)$$

18: ***Υπολόγισε*** *: το τοπικό μητρώο Kc_{loc}*

$$A1 = N \cdot (2 \cdot H \cdot \frac{1}{Gc} + \frac{1}{lo}) \cdot N^T$$

$$A2 = B^T \cdot lo \cdot B$$

$$Kc_{local} = Kc_{local} + (A1 + A2) \cdot dVolume$$

19: ***Τέλος***

20: ***Υπολόγισε*** *: το καθολικό μητρώο Kc_{global}*

21: ***Τέλος***

22: ***Επίλυση*** *: $c_1 = c_0 + \frac{Rc}{Kc}$*

23: ***Υπολόγισε*** *: c_{GP} στα Gauss Points, μειωτικό συντελεστή g*

24: ***Τέλος***

Η κεντρική ιδέα των δυο θεωρήσεων που εξετάζονται είναι η καθυστέρηση της εμφάνισης ρωγμής λόγω της όλκιμης συμπεριφοράς του υλικού. Στόχος είναι οι τιμές των πλαστικών παραμορφώσεων να επηρεάζουν την εξέλιξη του φαινομένου της θραύση και τελικά να κατευθύνουν τη θραύση στη διατομή. Στο μοντέλο Ambati et al. (2015) η τιμή της πλαστικής παραμόρφωσης υπεισέρχεται στο μειωτικό συντελεστή που εφαρμόζεται στη συνολική ελαστική ενέργεια του συστήματος. Το αποτέλεσμα είναι η συνολική ελαστική ενέργεια που είναι η κατευθυντήρια δύναμη της θραύσης να απομειώνεται με αργότερο ρυθμό και τελικά η αστοχία να συμβαίνει για μεγαλύτερες παραμορφώσεις. Αντιθέτως στο μοντέλο Yin & Kaliske (2020) η ανθεκτικότητα της διατομής (πυκνότητα ενέργειας της επιφάνειας θραύσης) λαμβάνει σημαντικά μεγαλύτερη αρχική τιμή και απομειώνεται σύμφωνα με την τιμή της πλαστικής παραμόρφωσης. Σε αυτή την περίπτωση το μηχανικό χαρακτηριστικό του υλικού, το οποίο καθορίζει την αντίσταση στην εμφάνιση ρωγμής λόγω της αρχικής τιμής που επιλέγεται καθυστερεί την εξέλιξη του φαινομένου.

3.3 Υπολογισμός τάσεων και ενεργειών

Για την εξέλιξη της πλαστικότητας επιλέγεται η χρήση του καταστατικού προσομοιώματος Von Mises που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3 σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης για γραμμική κράτυνση υλικού με τις κατάλληλες προσαρμογές. Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3, ο συντελεστής g εφαρμόζεται στη συνολική θετική ελαστική ενέργεια του συστήματος, η οποία διαχωρίζεται σε ενέργεια λόγω παραμόρφωσης σχήματος και μεταβολής όγκου έτσι ώστε να υπάρχει αντιστοίχιση με το καταστατικό προσομοίωμα Von Mises. Η ελαστική ενέργεια επομένως δίνεται :

$$\psi el_{+} = \frac{1}{2} K \cdot I_{+}{}^{2} + G \cdot (\varepsilon_{\mathrm{e,dev}} : \varepsilon_{\mathrm{e,dev}}) \quad (1)$$

$$\psi el_{-} = \frac{1}{2} K \cdot I_{-}{}^{2} \quad (2)$$

Όπου ψel_{+} η ενέργεια που οφείλεται σε εφελκυστικές τάσεις και ψel_{-} σε θλιπτικές, K το μέτρο ελαστικότητας όγκου, G το μέτρο διάτμησης, $\varepsilon_{\mathrm{e,dev}}$ οι ελαστικές αποκλίνουσες τάσεις και I το ίχνος του τανυστή των ελαστικών παραμορφώσεων ε_{e}. Ο πρώτος όρος του αθροίσματος (1) αναφέρεται στην ενέργεια λόγω ογκομετρικών παραμορφώσεων και ο δεύτερος στην ενέργεια λόγω παραμόρφωσης σχήματος.

Ο διαχωρισμός μεταξύ θετικών και αρνητικών παραμορφώσεων πραγματοποιείται με τον ακόλουθο τύπο :

$$I_+ = \frac{1}{2}(I + |I|)\,, \quad I_- = \frac{1}{2}(I - |I|)$$

Επομένως η συνολική ελαστική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα :

$$\psi = g \cdot \psi el_+ + \psi el_-$$

Διασφαλίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο την εμφάνιση ρωγμών και την απώλεια αντοχής μόνο υπό εφελκυστικά φορτία.

Η ενέργεια λόγω πλαστικής παραμόρφωσης για γραμμική κράτυνση υλικού προκύπτει:

$$\Psi_{pl} = \sigma_y \cdot \varepsilon_{pl} + \frac{1}{2}\, H \cdot {\varepsilon_{pl}}^2$$

Η εξέλιξη των τάσεων υλοποιείται όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 2 μέσω διαδικασίας πρόβλεψης/διόρθωσης με την κατάλληλη εφαρμογή του μειωτικού συντελεστή g στις σχέσεις.

Αφού υπολογιστούν οι δοκιμαστικές παραμορφώσεις $\varepsilon \mathrm{d}^{e\ \mathrm{trial}}\mathrm{n{+}1}$ υπολογίζονται οι δοκιμαστικές αποκλίνουσες τάσεις :

$$s^{\mathrm{trial}}\mathrm{n{+}1} = 2 \cdot g \cdot G \cdot \varepsilon \mathrm{d}^{e\ \mathrm{trial}}\mathrm{n{+}1}$$

Η εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται ως προς την άγνωστη μεταβλητή πλαστικής παραμόρφωσης $\Delta\gamma$:

$$\Phi(\Delta\gamma\ ) = q^{\mathrm{trial}}{}_{\mathrm{n+1}} - 3 \cdot g \cdot G \cdot \Delta\gamma - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p{}_{\mathrm{n}} + \Delta\gamma) = 0$$

Μετά τον υπολογισμό της άγνωστης πλαστικής παραμόρφωσης $\Delta\gamma$ ακολουθεί το στάδιο διόρθωσης των τάσεων και των παραμορφώσεων :

$$s_{\mathrm{n+1}} = (1 - \frac{\Delta\gamma \cdot 3 \cdot g \cdot G}{q^{\mathrm{trial}}{}_{\mathrm{n+1}}})\, s^{\mathrm{trial}}{}_{\mathrm{n+1}}$$

$$\varepsilon^{e_{dev}}\mathrm{n{+}1} = \frac{1}{2 \cdot g \cdot G}\, s_{\mathrm{n+1}}$$

Οι υδροστατικές τάσεις υπολογίζονται :

$$s_{vol} = K \cdot g \cdot (I_+ + I_-)$$

Και οι τελικές τάσεις προκύπτουν ως το άθροισμα αποκλινουσών τάσεων και υδροστατικών :

$$s = s_{dev} + s_{vol}$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 3: ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ

1: *Για κάθε επαυξητικό βήμα i=1…N :*

2: *Για κάθε στοιχείο i =1….N στοιχεία :*

3: *Για κάθε Gauss Point i = 1….N GaussPoints :*

4: ***Διάβασε*** *: μειωτικό συντελεστή g και τις παραμορφώσεις ε*

5: ***Υπολόγισε*** *: μέτρο ελαστικότητας όγκου K και διάτμησης G*

6: ***Υπολόγισε*** *: τις δοκιμαστικές τιμές των αποκλινουσών παραμορφώσεων* $\varepsilon^{trial}{}_{dev}$ *:*

$$\varepsilon_{11,dev}\ ,\ \varepsilon_{22,dev}, \varepsilon_{21,dev}, \varepsilon_{33,dev}$$

7: ***Υπολόγισε*** *: την τιμή της δοκιμαστικής τάσης Von Mises*

$$\sqrt{3 \cdot J2(s^{trial})}$$

8: ***Υπολόγισε*** *: τη συνάρτηση διαρροής*

$$\Phi = \sqrt{3 \cdot J2(s^{trial})} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p n)$$

9: ***Εάν*** *:*

10: *Φ < 0 : Ελαστικό Βήμα , Οι δοκιμαστικές τιμές είναι σωστές*

11: ***Υπολόγισε*** *: τις αποκλίνουσες τάσεις*

$$s_{dev} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{dev}$$

12: *Φ >0 : Πλαστικό Βήμα , απαιτείται διόρθωση*

14: ***Υπολόγισε*** *: Πλαστική παραμόρφωση Δγ*

$$\Delta\gamma = \frac{\Phi}{3 \cdot g \cdot G + H}$$

15: ***Υπολόγισε*** *: τις αποκλίνουσες τάσεις*

$$S_f = 2 \cdot g \cdot G\left(1 - \frac{g \cdot \Delta\gamma}{\sqrt{3 \cdot J2(s^{trial})}}\right)$$

$$s_{dev} = S_f\ \varepsilon_{dev}$$

16: ***Υπολόγισε*** *: τις αποκλίνουσες παραμορφώσεις*

$$E_f = \frac{S_f}{2 \cdot g \cdot G}$$

$$\varepsilon = E_f \cdot \varepsilon_{dev} + \varepsilon_{vol}/3$$

17: ***Τέλος διαδικασίας***

18: ***Υπολογισμός Συνολικών Τάσεων***

19: ***Υπολόγισε*** *: το ίχνος του τανυστή των παραμορφώσεων* ***I***

$$\boldsymbol{I} = trace(e) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

20: ***Υπολόγισε*** *: Υπολόγισε τις θετικές-εφελκυστικές ογκομετρικές παραμορφώσεις εάν υπάρχουν*

$$I_+ = \frac{1}{2}(I + |I|)$$

21: ***Υπολόγισε*** *: Υπολόγισε τις αρνητικές-θλιπτικές ογκομετρικές παραμορφώσεις εάν υπάρχουν*

$$I_- = \frac{1}{2}(I - |I|)$$

22: ***Υπολόγισε*** *: τις τάσεις λόγω ογκομετρικών παραμορφώσεων*

$$s_{vol} = K \cdot g \cdot (I_+ + I_-)$$

23: ***Υπολόγισε*** *: τις τελικές τάσεις*

$$s = s_{dev} + s_{vol}$$

24: ***Τέλος διαδικασίας Υπολογισμού Τάσεων***

25: ***Υπολογισμός Ενεργειών***

26: ***Υπολόγισε*** *: τον τανυστή των αποκλινουσών παραμορφώσεων* ε_{dev}.

27: ***Υπολόγισε*** *: την ελαστική ενέργεια υπό εφελκυστικές παραμορφώσεις*

$$\psi_+ = \frac{1}{2}\, K \cdot I_+^2 \; + G \cdot (\varepsilon_{dev} : \; \varepsilon_{dev})$$

28: ***Υπολόγισε*** *: την ελαστική ενέργεια υπό θλιπτικές παραμορφώσεις :*

$$\psi_- = \frac{1}{2}\, K \cdot I_-^2$$

29: ***Υπολόγισε*** *: τη συνολική ενέργεια :*

$$\psi = g \cdot \psi_+ + \; \psi_-$$

30: ***Τέλος Διαδικασίας Υπολογισμού Ενεργειών***

31: ***Τέλος***

32: ***Τέλος***

33: ***Τέλος***

Το εφαπτομενικό μητρώο της κατασκευής υπολογίζεται σύμφωνα με το Κεφάλαιο 2.2.4 για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης με την προσθήκη του μειωτικού συντελεστή g στις σχέσεις.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 4 : ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ

1: *Για κάθε επαυξητικό βήμα i=1…N :*

2: *Για κάθε στοιχείο i =1….Nστοιχεία :*

3: *Για κάθε Gauss Point i = 1….NGaussPoints :*

4: ***Διάβασε*** *: Διάβασε μητρώο ελαστικότητας E, λόγο poisson ν*

5: ***Εάν*** *:*

$\varepsilon_{pl} \; = 0$ *,δεν έχει αναπτυχθεί πλαστική παραμόρφωση*

6: ***Υπολόγισε*** *: το ελαστικό μητρώο*

$$D = D^e$$

8: $\varepsilon_{pl} \; > 0$ *, έχει αναπτυχθεί πλαστική παραμόρφωση*

9: ***Διάβασε*** *: μειωτικό συντελεστή g, μέτρο διάτμησης G, μέτρο ελαστικότητας όγκου K, ελαστικές παραμορφώσεις ε, πλαστική παραμόρφωση Δγ και τάσεις σ.*

10: ***Υπολόγισε*** *: Τα μητρώα* ***I*** *και* ***Id****, τις αποκλίνουσες τάσεις s και τις παραγώγους* $\frac{dI_+}{dI}, \frac{dI_-}{dI}$.

11: ***Υπολόγισε*** *: για τις αποκλίνουσες τάσεις s*

$$\sqrt{3 \cdot J2(s)}$$

$$q = \sqrt{3 \cdot J2(s)} + 3 \cdot g \cdot G \cdot \Delta\gamma$$

$$a = g \cdot 2 \cdot G \left(1 - \frac{3 \cdot g \cdot G\, \Delta\gamma}{q}\right)$$

$$b = 6 \cdot g^2 \cdot G^2 \frac{\left(\frac{\Delta\gamma}{q} - \frac{1}{3 \cdot g \cdot G + H}\right)}{2 \cdot J2(s)}$$

12: ***Υπολόγισε*** *: το ελαστοπλαστικό μητρώο*

$$\mathrm{D} = a \cdot \boldsymbol{Id} + b \cdot s + K \cdot g \cdot \left(\frac{dI_+}{\mathrm{dI}} + \frac{dI_-}{\mathrm{dI}}\right) \cdot \boldsymbol{I}$$

13: ***Τέλος διαδικασίας***

14: ***Τέλος***

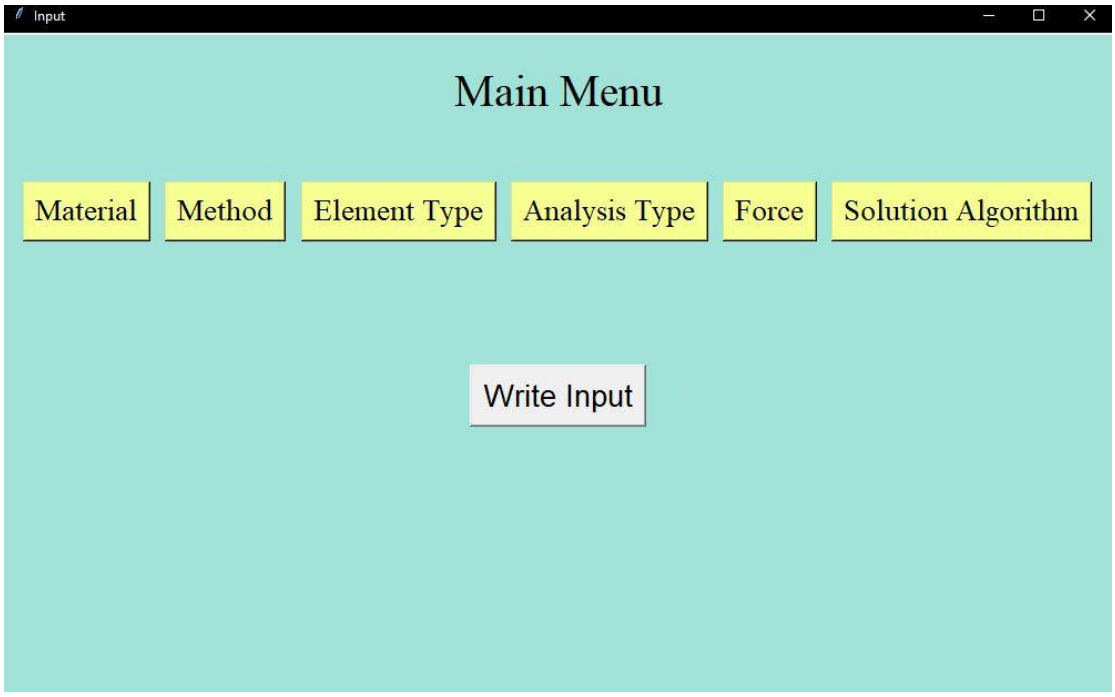
15: ***Τέλος***

16: ***Τέλος***

4 Παραμετρική ανάλυση και αποτελέσματα

Τα δεδομένα της εκάστοτε ανάλυσης λαμβάνονται από ξεχωριστό κώδικα που αναπτύχθηκε σε Python.

4.1 Εισαγωγή Δεδομένων



Εικόνα 10 : Αρχικό μενού εισαγωγής δεδομένων

Στα επιμέρους παράθυρα εισάγονται τα απαιτούμενα δεδομένα που αφορούν το υλικό τον τύπο της ανάλυσης, τον τύπο των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν καθώς και τον αλγόριθμο επίλυσης. Το πρόγραμμα εφόσον δεχθεί όλες τις τιμές επιστρέφει ένα αρχείο δεδομένων κατάλληλα κωδικοποιημένο το οποίο διαβάζεται από το βασικό πρόγραμμα ανάλυσης.

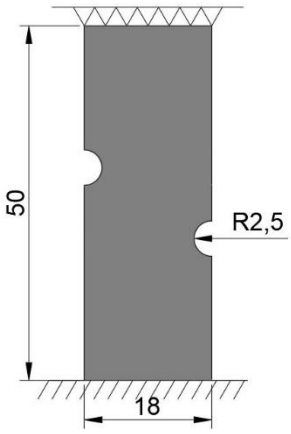
Στο παρόν Κεφάλαιο εξετάζεται αρχικά η επιρροή της παραμέτρου lo για την περίπτωση της ψαθυρής θραύσης και σε δεύτερο στάδιο τα δυο μοντέλα προσομοίωσης όλκιμης συμπεριφοράς σε χαρακτηριστικά παραδείγματα. Σε όλες τις περιπτώσεις για την επίλυση χρησιμοποιήθηκαν τετραπλευρικά ισοπαραμετρικά στοιχεία σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης σύμφωνα με τις παρακάτω παραμέτρους.

Ιδιότητες Υλικού	
Μέτρο Ελαστικότητας (E)	72624 MPa
Λόγος Poisson (v)	0,331
Τάση Διαρροής (fy)	345 MPa
Μέτρο Κράτυνσης (H)	250 MPa
Πυκνότητα Ενέργειας Επιφάνειας Θραύσης (Gc)	9,31 MPa mm

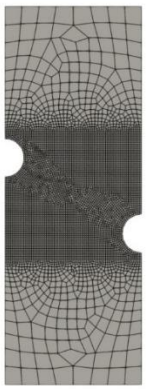
Εικόνα 11 : Πίνακας ιδιοτήτων υλικού

4.2 Εφαρμογή 1η: Δοκίμιο με ασύμμετρες πλευρικές οπές

Ως πρώτο παράδειγμα επιλέγεται ένα ορθογωνικό δοκίμιο με ασύμμετρες οπές ακτίνας 2.5 mm σύμφωνα με τις παρακάτω διαστάσεις, στο οποίο δεσμεύεται η κάτω πλευρά κατά X και Y, η άνω κατά X και ασκείται σταδιακή μετατόπιση κατά Y στην άνω παρειά. Για την παραμετρική ανάλυση της ψαθυρής θραύσης επιλέχθηκε διαβαθμισμένη διακριτοποίηση με πυκνότερο πλέγμα στο σημείο της διατομής με τις οπές ($el_{size} = 0.25$) και αδρότερο στα άκρα ($el_{size} = 2.5$) σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα. Ο συνολικός αριθμός των τετραπλευρικών στοιχείων είναι 5697. Το υλικό για την περίπτωση της ψαθυρής θραύσης θεωρείται γραμμικά ελαστικό.



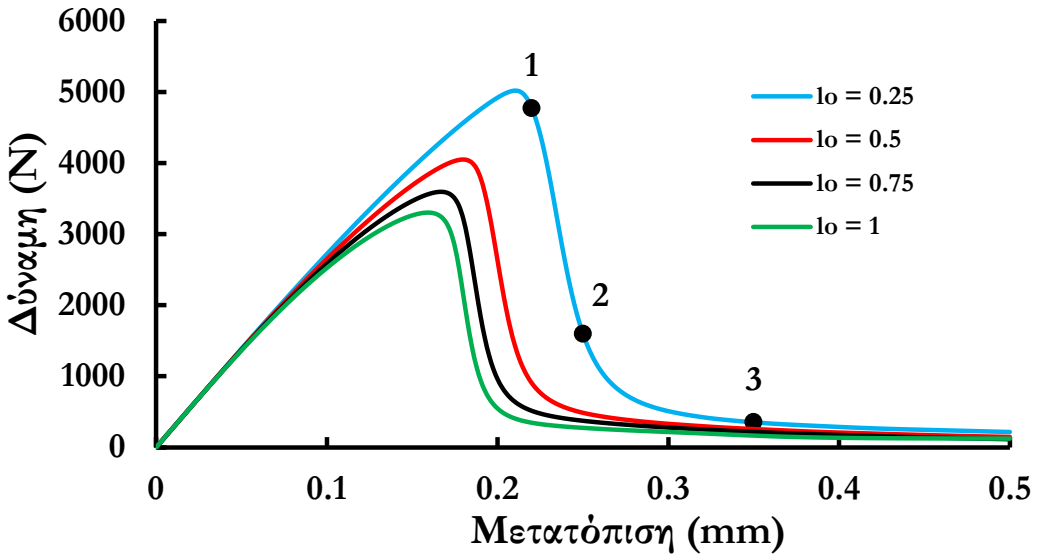
Εικόνα 12 : Ορθογωνικό δοκίμιο με ασύμμετρες πλευρικές οπές



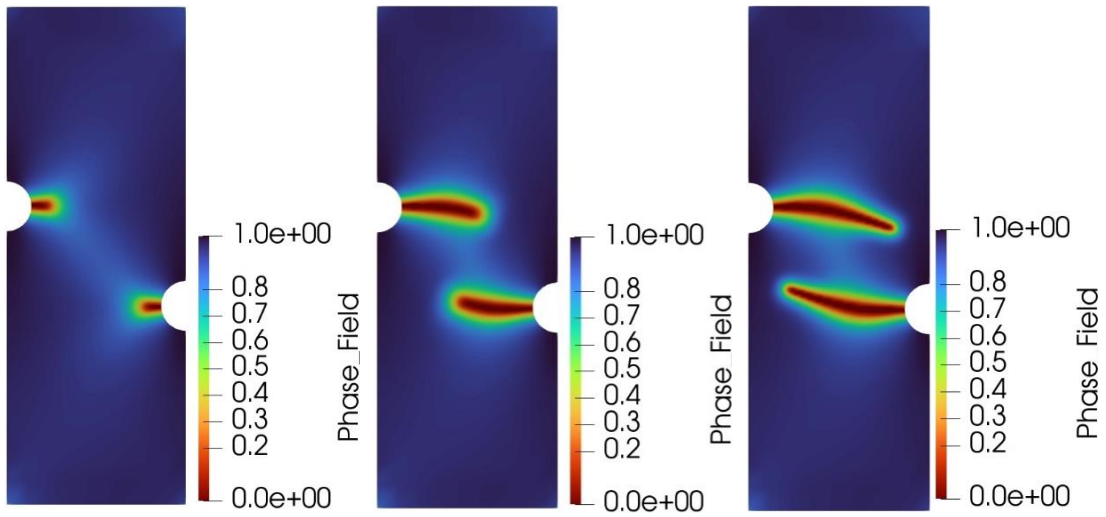
Εικόνα 13 : Διακριτοποίηση ορθογωνικού δοκιμίου με ασύμμετρες πλευρικές οπές

4.2.1 Ψαθυρή θραύση

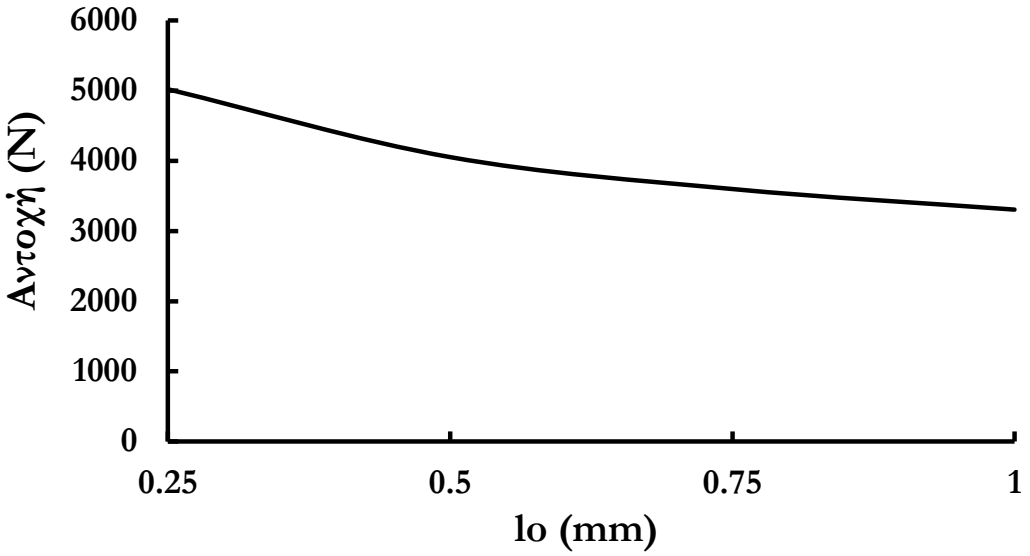
Η ανάλυση πραγματοποιείται για 4 διαφορετικές παραμέτρους : $lo = 0.25$, $lo = 0.5$, $lo = 0.75$ και $lo = 1$ προκειμένου να εντοπιστεί η επίδρασή της παραμέτρου lo στο διάγραμμα δύναμης μετατόπισης.



Εικόνα 14 : Διάγραμμα Δύναμης – Μετατόπισης ορθογωνικού δοκιμίου με ασύμμετρες πλευρικές οπές για ψαθυρή θραύση.



Εικόνα 15 : Ψαθυρή θραύση ορθογωνικού δοκιμίου με ασύμμετρες πλευρικές οπές (a) Στιγμιότυπο 1 (b) Στιγμιότυπο 2 (c) Στιγμιότυπο 3



Εικόνα 16 : Διάγραμμα αντοχής – εύρους ρωγμής για ψαθυρή θραύση ορθογωνικού δοκιμίου με ασύμμετρες πλευρικές οπές

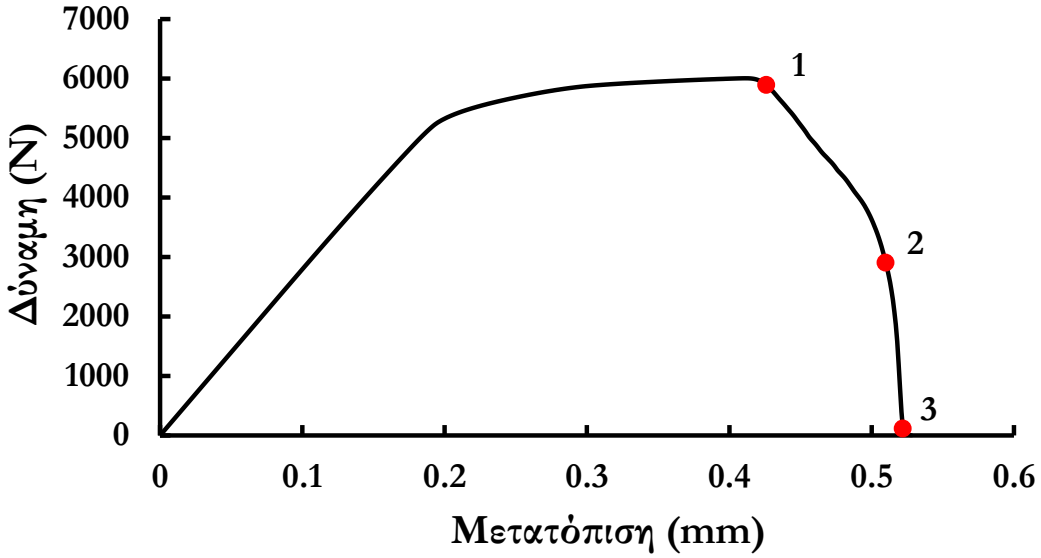
Σύμφωνα με τις Εικόνες 15 και 16 μια μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου κλίμακας lo οδηγεί σε χαμηλότερη τιμή αντοχής του δοκιμίου. Επιπλέον στο πρόβλημα η τιμή της αντοχής του δοκιμίου δεν φράσσεται από μια κατώτατη θετική τιμή με αποτέλεσμα με την αύξηση της παραμέτρου να τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή 0. Αυτό επιβεβαιώνεται από τις κρίσιμες τιμές των τάσεων και των παραμορφώσεων που υπολογίζονται σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις κατά Borden et al. (2012) :

$$\sigma_c = \frac{9}{16}\sqrt{\frac{E \cdot Gc}{6 \cdot lo}}, \quad \varepsilon_c = \sqrt{\frac{Gc}{6 \cdot lo \cdot E}}$$

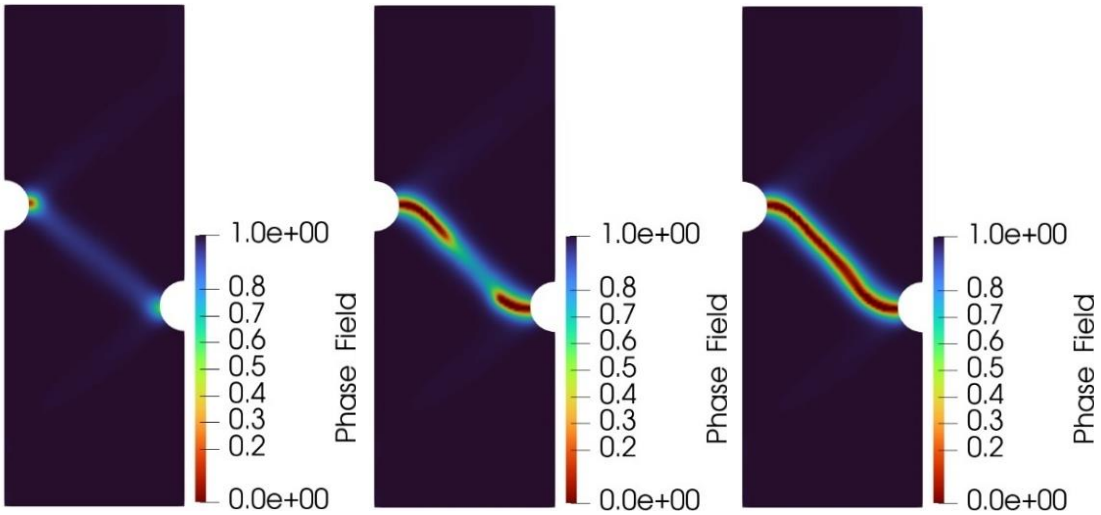
4.2.2 Όλκιμη θραύση

Στο παράδειγμα με τις ασύμμετρες οπές πραγματοποιείται το ίδιο πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού με βάση το προσομοίωμα Ambati et al. (2015) θεωρώντας όλκιμο υλικό με τις παραμέτρους του πίνακα 1 και επιπλέον κρίσιμη πλαστική παραμόρφωση $ep_{crit} = 0.1$, $k = 0$ και $m = 1$. Η ανάλυση πραγματοποιείται για

την ίδια διακριτοποίηση που χρησιμοποιήθηκε στην παραμετρική ανάλυση προηγουμένως και παράμετρο $lo = 0.25$.



Εικόνα 17 : Διάγραμμα Δύναμης – Μετατόπισης ορθογωνικού δοκιμίου με ασύμμετρες πλευρικές οπές για όλκιμη θραύση κατά Ambati et al, 2015



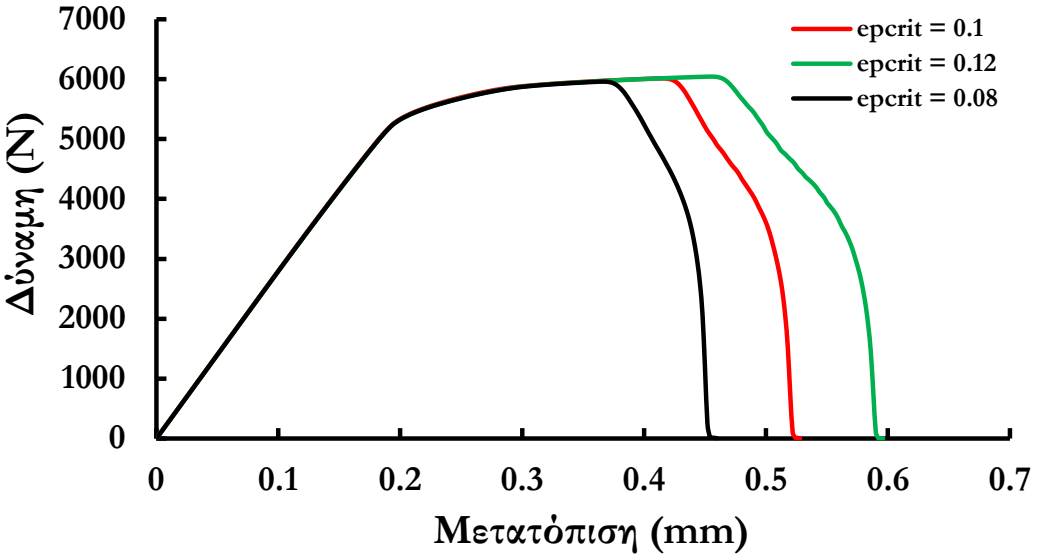
(a) (b) (c)

Εικόνα 18 : Όλκιμη θραύση ορθογωνικού δοκιμίου με ασύμμετρες πλευρικές οπές (a) Στιγμιότυπο 1 (b) Στιγμιότυπο 2 (c) Στιγμιότυπο 3

Στην περίπτωση της όλκιμης θραύσης όπως φαίνεται στις Εικόνες 18 (α), (β), (γ) οι δυο ρωγμές εμφανίζονται αρχικά στις οπές και ενώνονται κατά την πλήρη αστοχία της διατομής. Η εικόνα της όλκιμης θραύσης διαφέρει από τη ψαθυρή (Εικόνες 15 (α), (β),

(γ)) καθώς η ρωγμή διαδίδεται σε αυτή την περίπτωση στην περιοχή με τις μεγαλύτερες πλαστικές παραμορφώσεις.

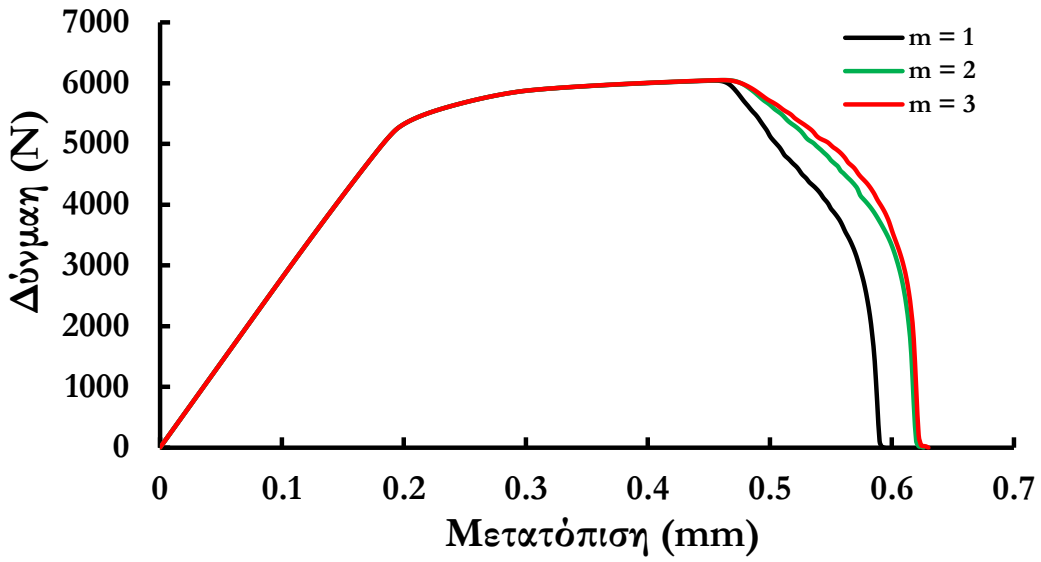
Για την ίδια διακριτοποίηση (5697 στοιχεία), $lo = 0.25$, $k = 0$ $και$ $m = 1$ πραγματοποιείται έλεγχος της παραμέτρου ep_{crit}.



Εικόνα 19 : Διάγραμμα Δύναμης-Μετατόπισης για διάφορες τιμές κρίσιμης πλαστικής παραμόρφωσης epcrit ορθογωνικού δοκιμίου με ασύμμετρες πλευρικές οπές για όλκιμη θραύση κατά Ambati et al, 2015

Η αύξηση της παραμέτρου ep_{crit} λειτουργεί ανασταλτικά στη μείωση της ελαστικής ενέργειας του συστήματος με αποτέλεσμα η αστοχία να συμβαίνει για μεγαλύτερες μετατοπίσεις (Εικόνα 19). Επιπλέον λόγω της θεώρησης κρατυνόμενου υλικού με γραμμική κράτυνση η αντοχή της διατομής αυξάνεται με την αύξηση της οριακής παραμόρφωσης και κατ΄επέκταση την αύξηση της παραμέτρου ep_{crit}.

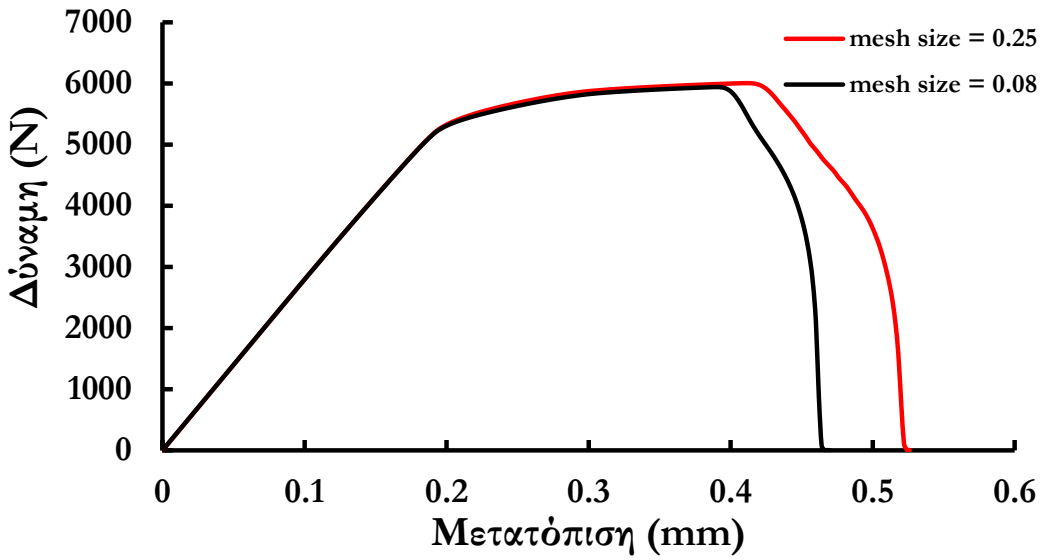
Για κρίσιμη πλαστική παραμόρφωση $ep_{crit} = 0.12$ πραγματοποιείται έλεγχος της παραμέτρου m.



Εικόνα 20 : Διάγραμμα Δύναμης-Μετατόπισης για διάφορες τιμές παραμέτρου m ορθογωνικού δοκιμίου με ασύμμετρες πλευρικές οπές για όλκιμη θραύση κατά Ambati et al, 2015

Η παράμετρος m του προσομοιώματος ελέγχει την ταχύτητα με την οποία εξελίσσεται η θραύση στη διατομή. Μια μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου καθυστερεί αρχικά το φαινόμενο της θραύσης και στη συνέχεια το επιταχύνει. Σύμφωνα με την Εικόνα 20 η επιρροή της παραμέτρου εντοπίζεται στον καθοδικό κλάδο του διαγράμματος Δύναμης – Μετατόπισης αν και η συνολική επίδρασή της είναι μικρή.

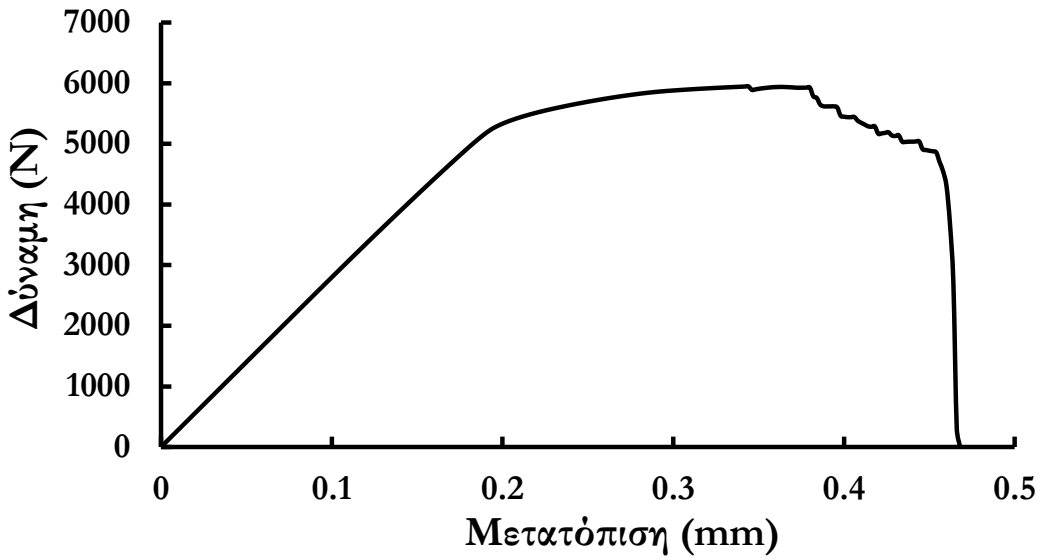
Με κοινές παραμέτρους : $lo = 0.25$, $k = 0$, $ep_{crit} = 0.1$ και $m = 1$ πραγματοποιείται ανάλυση με 49453 στοιχεία ($\min el_{size} = 0.08$).



Εικόνα 21 : Διάγραμμα Δύναμης-Μετατόπισης για αδρό και πυκνό πλέγμα διακριτοποίησης ορθογωνικού δοκιμίου με ασύμμετρες πλευρικές οπές για όλκιμη θραύση κατά Ambati et al, 2015

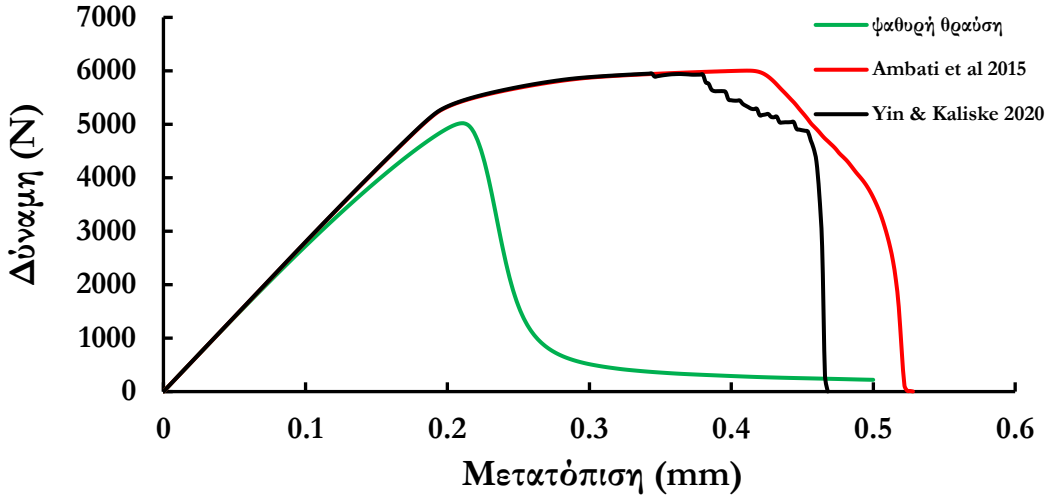
Όπως φαίνεται στην Εικόνα 21 η μορφή του διαγράμματος Δύναμης -Μετατόπισης είναι παρόμοια για τις δυο διαφορετικές διακριτοποιήσεις με μια μικρή διαφορά στην οριακή μετατόπιση αστοχίας καθώς και στον καθοδικό κλάδο. Η πυκνότερη διακριτοποίηση υπόσχεται μεγαλύτερη ακρίβεια για τα οριακά μεγέθη ενώ η εικόνα της θραύσης κατά την ολική αστοχία της διατομής είναι ακριβώς ίδια.

Στο ίδιο παράδειγμα με το προσομοίωμα Yin & Kaliske (2020) για την ίδια διακριτοποίηση και $lo = 0.5$ (λόγω της διαφορετικής έκφρασης της μεταβλητής πεδίου φάσης) θεωρούνται οι παράμετροι $\alpha = 0.1$, $b = 10^{-8}$, $\zeta_{crit} = 0$ και σε αυτή την περίπτωση $G_c = 93100\ MPa\ mm$



Εικόνα 22 : Διάγραμμα Δύναμης-Μετατόπισης ορθογωνικού δοκιμίου με ασύμμετρες πλευρικές οπές για όλκιμη θραύση κατά Yin & Kaliske, 2020

Στο διάγραμμα Δύναμης – Μετατόπισης της Εικόνας 22 κατά τον καθοδικό κλάδο παρατηρείται μια αυξομείωση της αντοχής του δοκιμίου. Αυτό συμβαίνει καθώς κατά την κατασκευή του προσομοιώματος δεν έχει θεωρηθεί απομείωση της τάσης διαρροής του υλικού με αποτέλεσμα ο αλγόριθμος διόρθωσης των τάσεων να επιστρέφει σε ελαστικό βήμα.

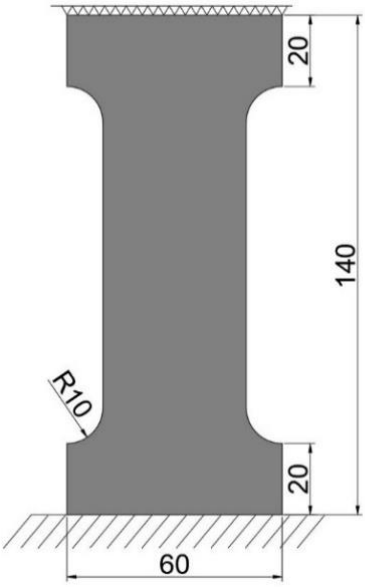


Εικόνα 23 : Διάγραμμα Δύναμης-Μετατόπισης ορθογωνικού δοκιμίου με ασύμμετρες πλευρικές οπές για ψαθυρή θραύση και για όλκιμη θραύση κατά Ambati et al, 2015 και Yin & Kaliske, 2020

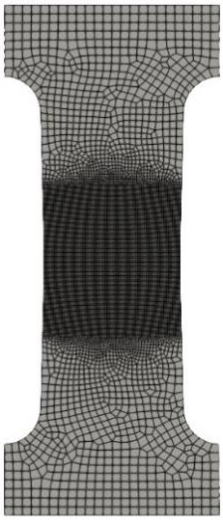
Τα δύο προσομοιώματα όλκιμης συμπεριφοράς όπως φαίνεται στην Εικόνα 23 επιστρέφουν ακριβώς ίδια αποτελέσματα μέχρι μια τιμή μετατόπισης. Ο καθοδικός κλάδος καθώς και τα οριακά μεγέθη διαφέρουν πράγμα το οποίο οφείλεται στην επιλογή των αρχικών παραμέτρων του κάθε προσομοιώματος.

4.3 Εφαρμογή 2η: Πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού

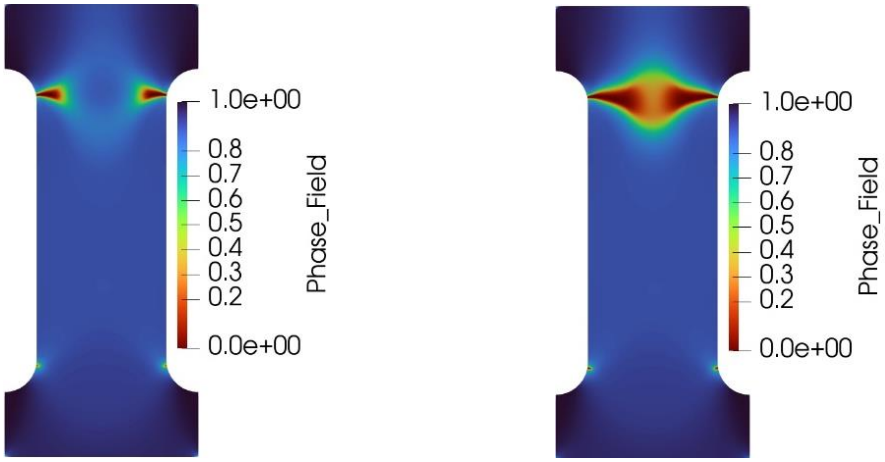
Ως δεύτερο παράδειγμα επιλέγεται ένα δοκίμιο I διατομής με τις ιδιότητες υλικού του πίνακα 1 σύμφωνα με τα παρακάτω χαρακτηριστικά, το οποίο δεσμεύεται κατά Y και X στην κάτω πλευρά και κατά X στην άνω και πραγματοποιείται πείραμα εφελκυσμού. Η διακριτοποίηση όπως και στο 1ο παράδειγμα είναι διαβαθμισμένη με πυκνότερο πλέγμα στον κορμό ($el_{size} = 0.2$) και αδρότερο στα πέλματα ($el_{size} = 2.5$) σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα. Ο συνολικός αριθμός των τετραπλευρικών στοιχείων είναι 43735. Όλες οι διαστάσεις δίνονται σε mm.



Εικόνα 24 : Δοκίμιο διατομής I



Εικόνα 25: Διακριτοποίηση δοκιμίου διατομής I

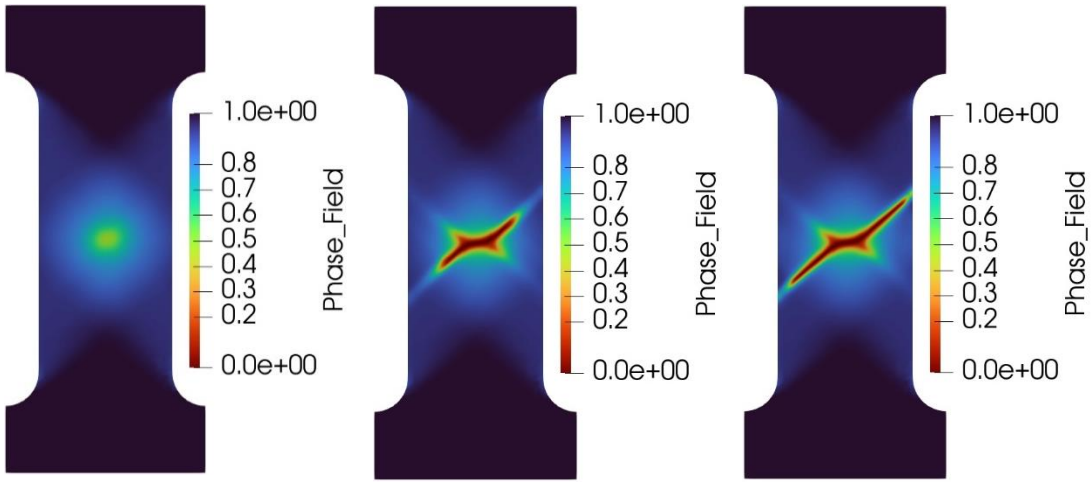


(a) (b)

Εικόνα 26 : Ψαθυρή θράυση δοκιμίου διατομής I (a),(b)

Στο προσομοίωμα Ambati et al. (2015) για όλκιμη συμπεριφορά χρησιμοποιήθηκαν οι εξής παράμετροι: $lo = 0.2$, $k = 0$, $ep_{crit} = 0.1$, $m = 1$

Εικόνα 27 : Διάγραμμα Δύναμης – Μετατόπισης δοκιμίου διατομής I για όλκιμη θραύση κατά Ambati et al, 2015



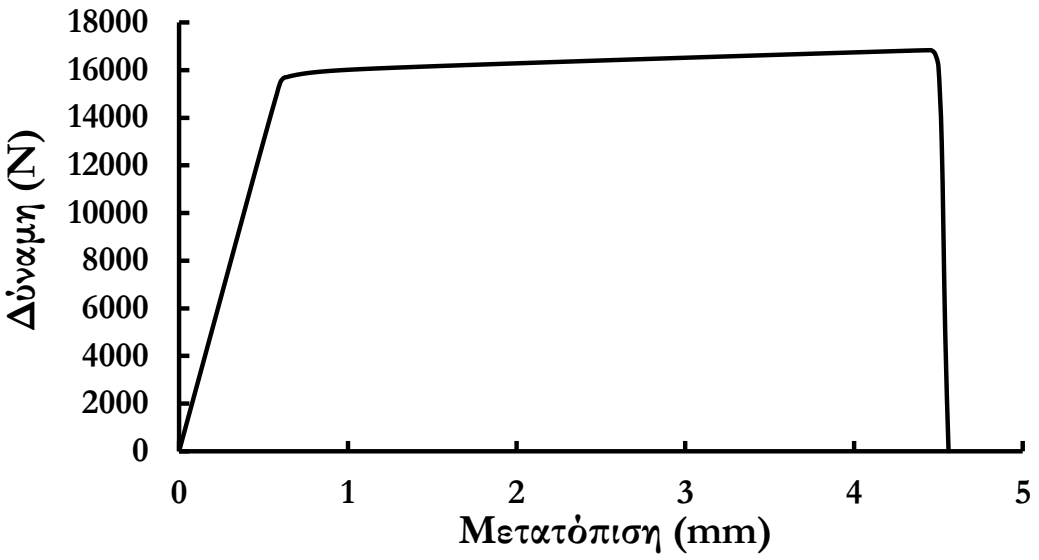
(a) (b) (c)

Εικόνα 28 : Όλκιμη θραύση δοκιμίου διατομής I (a) Στιγμιότυπο 1 (b) Στιγμιότυπο 2 (c) Στιγμιότυπο 3

Στο δεύτερο παράδειγμα λόγω των αυξημένων διαστάσεων αλλά και της γεωμετρίας του δοκιμίου όπως φαίνεται στο διάγραμμα της Εικόνας 27 κατά την όλκιμη θραύση τόσο η τιμή της αντοχής όσο και η οριακή μετατόπιση αστοχίας λαμβάνουν σημαντικά μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με το προηγούμενο παράδειγμα. Επίσης η ρωγμή εξελίσσεται σε μικρό διάστημα μετατοπίσεων συγκριτικά με τη συνολική μετατόπιση που ασκείται στο δοκίμιο. Η ρωγμή στο όλκιμο υλικό εμφανίζεται στο κέντρο του κορμού (Εικόνες 28(α), (β), (γ)) στην περιοχή των μέγιστων πλαστικών παραμορφώσεων, σε αντίθεση με το ψαθυρό υλικό όπου η ρωγμή εμφανίζεται στο σημείο σύνδεσης κορμού και πέλματος (Εικόνες 26 (α) (β)).

Για το προσομοίωμα Yin & Kaliske (2020) πραγματοποιήθηκε η ανάλυση για μια αδρότερη διαβαθμισμένη διακριτοποίηση με ελάχιστο μέγεθος στοιχείου 0.7 mm και συνολικά 5395 στοιχεία και τις εξής παραραμέτρους :

$lo = 1.4$, $a = 0{,}1$, $b = 10^{-8}$, $\zeta_{crit} = 0$ και $Gc = 93100\ MPa\ mm$

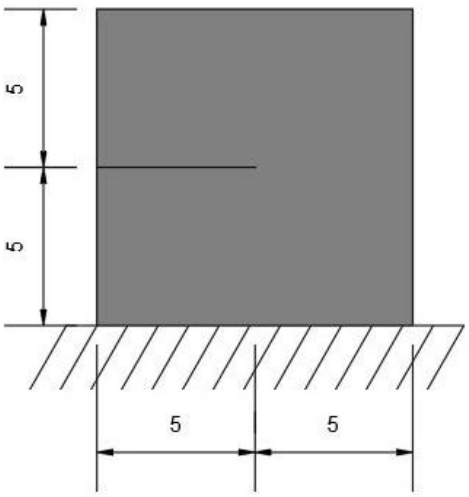


Εικόνα 29 : Διάγραμμα Δύναμης – Μετατόπισης δοκιμίου διατομής Ι για όλκιμη θραύση κατά Yin & Kaliske, 2020

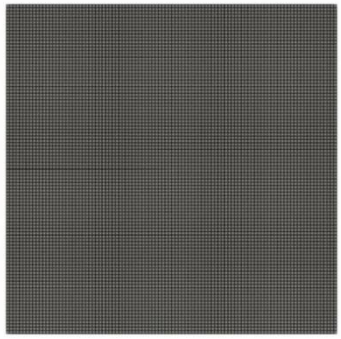
Στο δεύτερο παράδειγμα όλκιμης θραύσης δεν υπάρχει εμφανής διαφορά στη μορφή του διαγράμματος Δύναμης – Μετατόπισης μεταξύ των δυο διαφορετικών προσομοιωμάτων. Προφανώς οι οριακές τιμές αντοχής και παραμόρφωσης διαφέρουν καθώς οφείλονται στην επιλογή των αρχικών παραμέτρων αλλά επιπλέον στη διαφορετική διακριτοποίηση.

4.4 Εφαρμογή 3η: Θραύση Τύπου Ι

Ως 3ο παράδειγμα λαμβάνεται ένα τετραγωνικό δοκίμιο διαστάσεων 10x10 mm στο οποίο στη μια του πλευρά προϋπάρχει ρωγμή μήκους 5 mm με τις ιδιότητες υλικού δίνονται σύμφωνα με τον πίνακα 1. Το δοκίμιο δεσμεύεται κατά Χ και Υ στην κάτω παρειά και πραγματοποιείται το πείραμα εφελκυσμού όπως στα παραδείγματα 4.1 και 4.2. Για τη διακριτοποίηση χρησιμοποιείται πλέγμα 10000 στοιχείων με μέγιστο μέγεθος στοιχείων 0.1 mm.



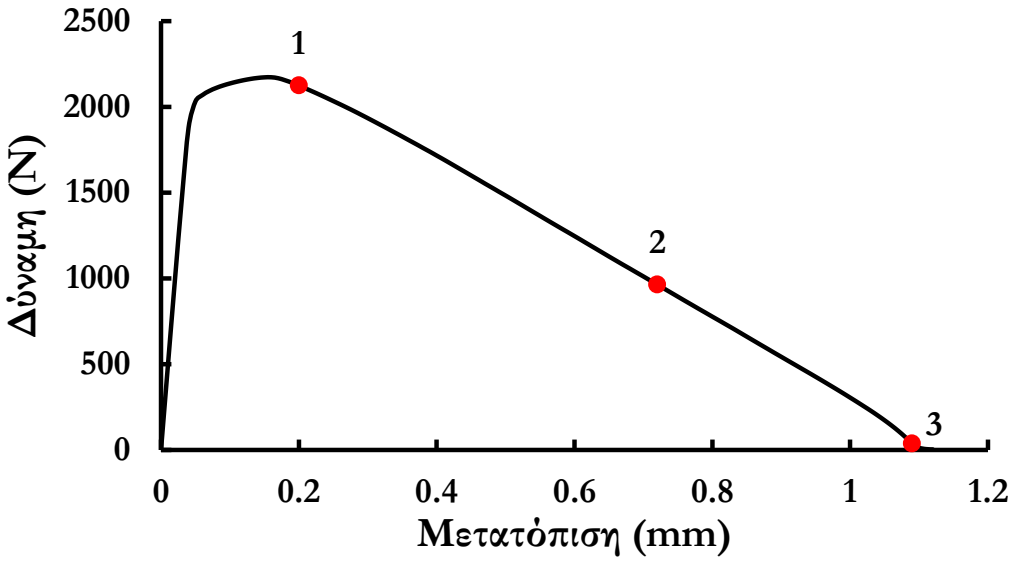
Εικόνα 30 : Τετραγωνικό δοκίμιο με προϋπάρχουσα ρωγμή



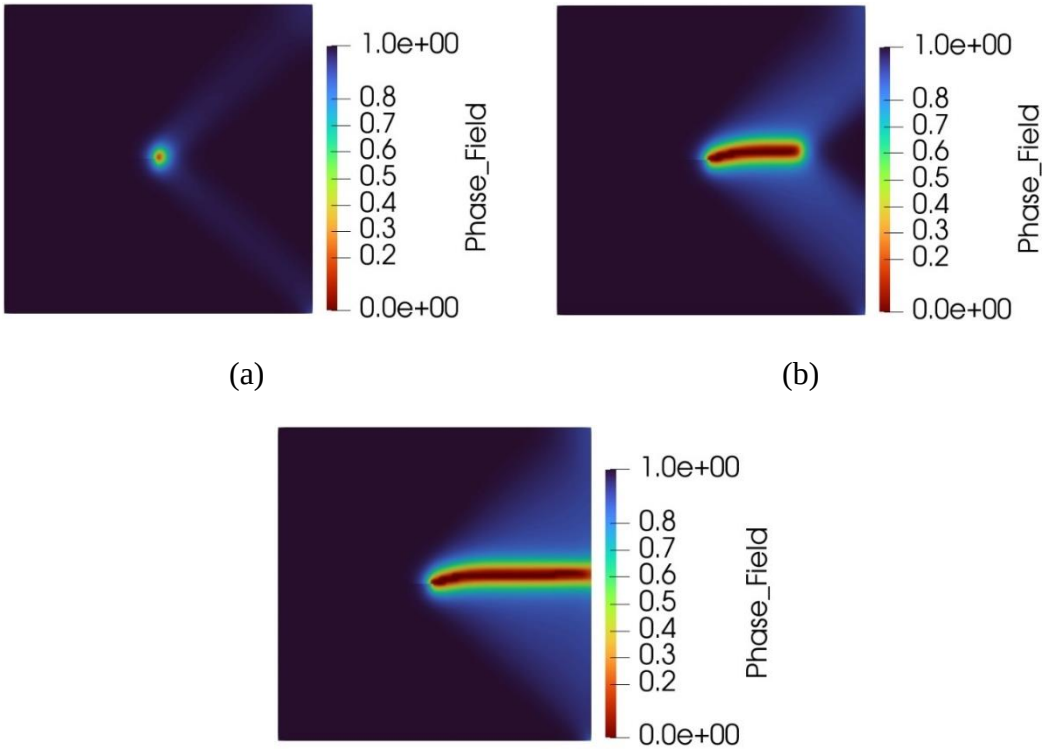
Εικόνα 31 : Διακριτοποίηση τετραγωνικού δοκιμίου με προϋπάρχουσα ρωγμή

Για το προσομοίωμα Ambati et al. (2015) όλκιμης συμπεριφοράς χρησιμοποιήθηκαν οι εξής παράμετροι :

$lo = 0.1, k = 0, ep_{crit} = 0.1, m = 1$



Εικόνα 32 : Διάγραμμα Δύναμης – Μετατόπισης τετραγωνικού δοκιμίου με προϋπάρχουσα ρωγμή για όλκιμη θραύση κατά Ambati et al, 2015



Εικόνα 33: Όλκιμη θραύση τετραγωνικού δοκιμίου με προϋπάρχουσα ρωγμή
(a) Στιγμιότυπο 1 (b) Στιγμιότυπο 2 (c) Στιγμιότυπο 3

Κατά τη θραύση τύπου 1 το τετραγωνικό δοκίμιο φτάνει την οριακή αντοχή για μικρή τιμή μετατόπισης και στη συνέχεια ακολουθεί ο καθοδικός κλάδος με την εξέλιξη της ρωγμής στο δοκίμιο (Εικόνα 32). Η ρωγμή όπως φαίνεται στις Εικόνες 33 (α), (β), (γ) εμφανίζεται στο σημείο ασυνέχειας υλικού και διαδίδεται παράλληλα της κάτω παρειάς μέχρι το δεξί άκρο του δοκιμίου.

5 Συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Η μέθοδος πεδίου φάσης αποτελεί μια χρήσιμη εναλλακτική για την προσομοίωση της θραύσης καθώς προσεγγίζει την πραγματική συμπεριφορά σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό. Για τα ψαθυρά υλικά όπου η αστοχία συμβαίνει για σχετικά μικρές παραμορφώσεις η μεταβλητή πεδίου φάσης μεταβάλλεται σύμφωνα με την ελαστική ενέργεια του συστήματος. Αντιθέτως στην περίπτωση των όλκιμων υλικών η πλαστική παραμόρφωση καθυστερεί την εξέλιξη της μεταβλητής πεδίου φάσης με αποτέλεσμα η αστοχία να συμβαίνει για μεγαλύτερες παραμορφώσεις.

Στην πρώτη προσέγγιση που εξετάζεται (Ambati et al., 2015) η πλαστική παραμόρφωση υπεισέρχεται στην έκφραση του μειωτικού συντελεστή που εφαρμόζεται στη συνολική ελαστική ενέργεια του συστήματος. Σύμφωνα με τη δεύτερη θεώρηση (Yin & Kaliske, 2020) ο μειωτικός συντελεστής είναι παρόμοιος με την περίπτωση της ψαθυρής συμπεριφοράς, ωστόσο η ανθεκτικότητα του υλικού λαμβάνει αρκετά μεγαλύτερη τιμή η οποία απομειώνεται με βάση την τιμή της πλαστικής παραμόρφωσης.

Τα δυο προσομοιώματα αναπτύσσονται σύμφωνα με τον καταστατικό νόμο Von Mises σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης για την εξέλιξη της πλαστικότητας και εξάγουν παραπλήσια αποτελέσματα με την κατάλληλη επιλογή των αρχικών παραμέτρων. Σύμφωνα με τις δυο διαφορετικές θεωρήσεις για την εξέλιξη των εσωτερικών μεγεθών ο μειωτικός συντελεστής εφαρμόζεται μόνο στις τάσεις με αποτέλεσμα μετά από ένα σημείο ο αλγόριθμος εξέλιξης της πλαστικότητας να επιστρέφει σε ελαστικό βήμα. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται στο παράδειγμα 1 για το δεύτερο προσομοίωμα όπου το διάγραμμα δύναμης μετατόπισης παρουσιάζει αυξομειώσεις για ένα διάστημα. Σε μια τρίτη εναλλακτική προσέγγιση (Borden et al., 2016) που δεν εξετάζεται στο παρόν τεύχος εκτός των άλλων διαφορών ο μειωτικός συντελεστής εφαρμόζεται και στην τάση διαρροής διασφαλίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο τη μη αναστρεψιμότητα του πλαστικού βήματος του αλγορίθμου.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται ένα υπολογιστικό εργαλείο το οποίο επιλύει το πρόβλημα της θραύσης σε στατικές συνθήκες φόρτισης, για ένα επιλεγμένο τύπο στοιχείου και με τη θεώρηση μικρών παραμορφώσεων. Οι πραγματικές κατασκευές όμως καταπονούνται και από δυναμικά φαινόμενα ενώ τα επιμέρους εξαρτήματά τους είναι πιθανό να έχουν μια ασυνήθιστη γεωμετρία.

Επομένως μια επέκταση του υπολογιστικού εργαλείου θα μπορούσε αρχικά να εξετάζει την περίπτωση στατικής και δυναμικής ανακυκλιζόμενης φόρτισης έτσι ώστε να εξεταστεί και το φαινόμενο της κόπωσης, το οποίο είναι ιδιαίτερα έντονο στα μέταλλα. Στη συνέχεια ενδιαφέρον έχει η προσομοίωση με χρήση επιφανειακών στοιχείων κελύφους αλλά και η επίλυση του προβλήματος με τη θεώρηση μεγάλων παραμορφώσεων λαμβάνοντας υπόψη και την περίπτωση μη γραμμικότητας γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ambati, M., Gerasimov, T., & de Lorenzis, L. (2015). Phase-field modeling of ductile fracture. *Computational Mechanics*, *55*(5), 1017–1040. https://doi.org/10.1007/s00466-015-1151-4

Borden, M. J., Hughes, T. J. R., Landis, C. M., Anvari, A., & Lee, I. J. (2016). A phase-field formulation for fracture in ductile materials: Finite deformation balance law derivation, plastic degradation, and stress triaxiality effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *312*, 130–166. https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.09.005

Borden, M. J., Verhoosel, C. v., Scott, M. A., Hughes, T. J. R., & Landis, C. M. (2012). A phase-field description of dynamic brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *217–220*, 77–95. https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.01.008

De, E. A., Neto, S., Peri´c, P., Owen, D., & Wiley, A. J. (n.d.). *COMPUTATIONAL METHODS FOR PLASTICITY THEORY AND APPLICATIONS*.

Fracture Mechanics online class. (2015). Fracture Mechanics. http://www.ltas-cm3.ulg.ac.be/FractureMechanics/?p=Lecture2_P1

Kakouris, E. G., & Triantafyllou, S. P. (2017). Phase-field material point method for brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *112*(12), 1750–1776. https://doi.org/10.1002/nme.5580

T. Anderson - Fracture Mechanics - Fundamentals and Applns.-CRC (2005). (n.d.).

Yin, B., & Kaliske, M. (2020). A ductile phase-field model based on degrading the fracture toughness: Theory and implementation at small strain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *366*. https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113068