ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ. «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
του
Γεωργίου Παπαγεωργίου

ΤΙΤΛΟΣ: Μελέτη των χώρων $L^p,\ 1 \leq p \leq \infty$. Αναλυτικές, γεωμετρικές και τοπολογικές ιδιότητες.

<u>Τριμελής Επιτροπή:</u>

Γ. Σμυρλής	Β. Κανελλόπουλος	Α. Αρβανιτάκης
(επιβλέπων)	Καθηγ. ΕΜΠ	Επίκ. Καθηγ. ΕΜΠ
Αναπλ.Καθηγ. ΕΜΠ		

ΑΘΗΝΑ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2022

Περιεχόμενα

1 Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιείται στα πλαίσια της απόκτησης του μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών του Δ.Π.Μ.Σ ''Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες'' της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Σκοπός του συγγράμματος είναι να παρέχει στον αναγνώστη μία συγκεντρωτική παρουσίαση των ιδιοτήτων των χώρων $L^p, 1 \leq p \leq \infty$, υπό το πρίσμα των πεδίων της Ανάλυσης και της Τοπολογίας, αναδεικνύοντας συγχρόνως τις γεωμετρικές ιδιότητες που τους χαρακτηρίζουν· προσφέροντας παράλληλα μία βάση άντλησης πληροφοριών για μελλοντικές μελέτες.

Συνοπτικά, αφού παραθέσουμε κάποια βασικά εισαγωγικά στοιχεία από τη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης, θα μελετήσουμε την Ανακλαστικότητα, τη Διαχωρισιμότητα και τους Δυϊκούς των χώρων $L^p, 1 \leq p \leq \infty$. Θα αποδείξουμε την ομοιόμορφη κυρτότητα των L^p για $1 < p < \infty$ και θα παρουσιάσουμε ορισμένες ιδιότητες που τους συνοδεύουν. Έπειτα, θα εισάγουμε τις έννοιες της συνέλιξης και των ομαλοποιητών ως μέρος της προετοιμασίας για την απόδειξη του Κριτηρίου Ισχυρής Συμπάγειας (Θεώρημα Kolmogorov-Riesz-Frechet), το οποίο αποδεικνύουμε αρχικά για $\mu(\Omega) < \infty$ και στη συνέχεια, έχοντας διατυπώσει τις κατάλληλες προϋποθέσεις· και για $\Omega = \mathbb{R}^N$. Κλείνοντας, δίνουμε τον χαρακτηρισμό των ασθενώς συμπαγών υποσυνόλων του $L^1(\Omega)$, με χρήση της έννοιας της ομοιόμορφα ολοκληρώσιμης οικογένειας (Θεώρημα Dunford-Pettis).

Ιδιαίτερη μέριμνα έχει δοθεί στη μεθοδολογία των αποδείξεων και τη σειρά παρουσίασης των αποτελεσμάτων ώστε το κείμενο να είναι προσιτό σε μεταπτυχιακούς αλλά και σε προπτυχιακούς φοιτητές, συμβάλλοντας στην εξοικείωση τους με τα βασικότερα εργαλεία της Συναρτησιακής Ανάλυσης· υπό μορφή θεωρημάτων και τεχνικών που περιλαμβάνονται στις αποδείξεις. Μία εξοικείωση που αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της σταδιοδρομίας κάθε μελλοντικού ερευνητή και συγχρόνως το πρώτο βήμα της μετάβασης σε έναν ωριμότερο τρόπο σκέψης και αντιμετώπισης μαθηματικών προβλημάτων, επικεντρωμένο στη σύνθεση της εν δυνάμει λύσης, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που έχουμε κατακτήσει, για την επίλυση του προβλήματος που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω πρωτίστως τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Σμυρλή Γεώργιο, Αναπληρωτή Καθηγητή ΕΜΠ, για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε κατά τη συγγραφή της διπλωματικής εργασίας, τις συμβουλές του, τη διάθεση της απαραίτητης βιβλιογραφίας και τη συνεχή παρότρυνση του. Θέλω επίσης να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στα μέλη που πλαισιώνουν τον κ. Σμυρλή στην τριμελή επιτροπή· τους κυρίους Αρβανιτάκη Αλέξανδρο (Επίκουρο Καθηγητή ΕΜΠ) και Κανελλόπουλο Βασίλειο (Καθηγητή ΕΜΠ), για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους, τις προτάσεις τους πάνω στη διαμόρφωση της δομής του κειμένου και τη γενικότερη συμβολή τους στην εκπόνηση της διπλωματικής μου διατριβής.

2 Εισαγωγικά στοιχεία Θεωρίας Μέτρου και Ολοκλήρωσης

Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$, όπου $P(\Omega)$ το δυναμοσύνολο του Ω.
Η $\mathcal{A}$ είναι *σ-άλγεβρα* στο Ω όταν πληροί τις τρεις παρακάτω προϋποθέσεις:

(α) $\varnothing \in \mathcal{A}$,

(β) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

(γ) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, για κάθε ακολουθία $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$.

Τα μέλη της $\mathcal{A}$ ονομάζονται *μετρήσιμα σύνολα*.

Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ καλείται *μέτρο* όταν ισχύει ότι:

(α) $\mu(\varnothing) = 0$,

(β) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, για κάθε ακολουθία (A_n) ξένων ανά δύο μελών της $\mathcal{A}$.

Σε αυτή την περίπτωση η τριάδα $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται *χώρος μέτρου*.

Το Ω είναι *σ-πεπερασμένο* αν υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\mu(A_n) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αν ισχύει επιπλέον ότι $\mu(\Omega) < \infty$ τότε το Ω είναι *πεπερασμένο*. Στην περίπτωση που $\mu(\Omega) = 1$ το μ είναι *μέτρο πιθανότητας*.

Κάθε στοιχείο E της $\mathcal{A}$ με $\mu(E) = 0$, ονομάζεται *μηδενοσύνολο*.

Μία συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε κάθε προεικόνα ανοικτού συνόλου να είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$ καλείται *μετρήσιμη*.

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

Συμβολίζουμε με $L^1(\Omega, \mu)$ ή απλούστερα $L^1(\Omega)$ ή L^1 το χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων πάνω στο Ω.

Για κάθε $f \in L^1(\Omega)$ συχνά θα γράφουμε $\int f$ αντί $\int_\Omega f d\mu$ και θέτουμε

$$\|f\|_1 = \|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega f d\mu \ .$$

Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, Beppo Levi). *Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στον $L^1(\Omega)$ με τις ιδιότητες:*

(α) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots$ σχεδόν παντού στο Ω.

(β) $\sup\limits_{n\geq 1} \int_\Omega f_n < \infty$.

Τότε η (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού στο Ω σε μία συνάρτηση $f \in L^1(\Omega)$ και $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Θεώρημα 2.2 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης Lebesgue). *Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στον $L^1(\Omega)$ με τις ιδιότητες:*

(α) $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο Ω.

(β) Υπάρχει συνάρτηση $g \in L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $\forall n \geq 1$ να ισχύει ότι $|f_n(x)| \leq g(x)$ σ.π. στο Ω.

Τότε $f \in L^1(\Omega)$ και $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Λήμμα 2.3 (Λήμμα του Fatou). *Έστω (f_n) μία ακολουθία συναρτήσεων στον $L^1(\Omega)$ για την οποία ισχύει:*

(α) $f_n(x) \geq 0$ σ.π. στο Ω, $\quad \forall n \geq 1$.

(β) $\sup\limits_{n\geq 1} \int_\Omega f_n < \infty$.

Για όλα σχεδόν τα $x \in \Omega$, θέτουμε $f(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leq \infty$. Τότε, $f \in L^1(\Omega)$ και

$$\int_\Omega f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \ .$$

Ορισμός 2.1. *Συμβολίζουμε με* $C_c(\mathbb{R}^N)$ *το χώρο όλων των συνεχών συναρτήσεων του* $\mathbb{R}^N$ *με συμπαγή φορέα, δηλ.*

$$C_c(\mathbb{R}^N) = \{ f \in C(\mathbb{R}^N) : \; f(x) = 0, \quad \forall x \in K^c, \text{ όπου } K \text{ συμπαγές } \} .$$

Υπενθυμίζουμε ότι εάν $f \in C(\mathbb{R}^N)$, *ο φορέας* της f είναι το σύνολο

$$supp(f) = \overline{\{ \, x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0 \, \}}.$$

Θεώρημα 2.4. (Θ. πυκνότητας του Lusin). *Εφοδιάζουμε τον* $\mathbb{R}^N$ *με το μέτρο Lebesgue. Τότε, ο χώρος* $C_c(\mathbb{R}^N)$ *είναι πυκνός στον* $L^1(\mathbb{R}^N)$*, δηλαδή:*

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^N), \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N) \quad \text{τ.ω.} \quad \|f - f_1\|_1 < \epsilon.$$

Η ιδιότητα αυτή του $L^1(\mathbb{R}^N)$ θα συνεισφέρει στην απόδειξη της διαχωρισιμότητας των χώρων $L^p(\mathbb{R}^N)$ για $p \in [1, \infty)$.

Έστω $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ δύο σ - πεπερασμένοι χώροι μέτρου. Έστω $\mathcal{A}$ η σ -άλγεβρα πάνω στο $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, που παράγεται από το $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο μ πάνω στην $\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2), \quad \forall \; A_1 \times A_2 \; \in \; \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \, .$$

Το μ λέγεται *μέτρο γινόμενο* και συμβολίζεται με $\mu = \mu_1 \times \mu_2$.

Θεώρημα 2.5 (**Tonelli**). *Έστω* $F(x,y)$*:* $\Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ *μία μετρήσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

(α) $\displaystyle\int_{\Omega_2} |F(x,y)| d\mu_2 < \infty, \quad$ *για όλα σχεδόν τα* $x \in \Omega$

και

(β) $\displaystyle\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} |F(x,y)| d\mu_2 < \infty.$

Τότε, $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Θεώρημα 2.6 (**Fubini**). *Υποθέτουμε ότι* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$*. Τότε:*

— *σχεδόν για κάθε* $x \in \Omega_1$, $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$ *και* $\displaystyle\int_{\Omega_2} F(\cdot, y) d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$.

— *σχεδόν για κάθε* $y \in \Omega_2$, $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$ *και* $\displaystyle\int_{\Omega_1} F(x, \cdot) d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2)$.

Επιπλέον, ισχύει η ισότητα

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} F(x,y) d\mu_2 = \int_{\Omega_2} d\mu_2 \int_{\Omega_1} F(x,y) d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y) d\mu.$$

Ορισμός 2.2. *Έστω $\mathcal{A}$ σ – άλγεβρα σε ένα μη κενό σύνολο Ω και $A \in \mathcal{A}$. Διαμέριση του A είναι μια οποιαδήποτε ακολουθία (A_n) ξένων ανά δύο μελών της $\mathcal{A}$ τ.ω. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Ορισμός 2.3. *Έστω $\mathcal{A}$ σ – άλγεβρα σε ένα μη κενό σύνολο Ω. Μια συνάρτηση $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται προσημασμένο μέτρο ανν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και για κάθε διαμέριση (A_n) του A, ισχύει*

$$\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Στην περίπτωση αυτή η τριάδα $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ λέγεται χώρος προσημασμένου μέτρου.

Σχόλιο: Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι εάν (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο μελών της $\mathcal{A}$, τότε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ παραμένει αναλλοίωτο ως προς τυχαία αναδιάταξη των όρων του και συνεπώς θα πρέπει

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| < \infty.$$

Ορισμός 2.4. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ χώρος προσημασμένου μέτρου. Η ολική κύμανση του λ είναι η συνολοσυνάρτηση $|\lambda| : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ που ορίζεται ως εξής:*

$$|\lambda|(A) = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| : (A_n) \text{ διαμέριση του } A \right\}, \quad \forall\ A \in \mathcal{A}.$$

Θεώρημα 2.7. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ χώρος προσημασμένου μέτρου. Η ολική κύμανση $|\lambda|$ του λ είναι θετικό μέτρο με $|\lambda|(\Omega) < \infty$.*

Ορισμός 2.5. *Έστω $\mathcal{A}$ σ – άλγεβρα σε ένα μη κενό σύνολο Ω, μ θετικό μέτρο στο Ω και λ προσημασμένο ή θετικό μέτρο στο Ω. Το λ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ ανν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή*

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0.$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\lambda << \mu$.

Πρόταση 2.1. *Έστω $\mathcal{A}$ σ – άλγεβρα σε ένα μη κενό σύνολο Ω, μ θετικό μέτρο στο Ω και λ προσημασμένο μέτρο στο Ω. Εάν $\lambda << \mu$, τότε και $|\lambda| << \mu$.*

Πρόταση 2.2. *Έστω $\mathcal{A}$ σ – άλγεβρα σε ένα μη κενό σύνολο Ω, μ θετικό μέτρο στο Ω και λ προσημασμένο ή θετικό μέτρο στο Ω. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(α) $\lambda << \mu$.

(β) *για κάθε* $\varepsilon > 0$, *υπάρχει* $\delta > 0$ *τ.ω. για κάθε* $A \in \mathcal{A}$ *ισχύει η συνεπαγωγή*

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow |\lambda(A)| < \varepsilon.$$

Θεώρημα 2.8. (**Radon-Nikodym**) *Έστω $\mathcal{A}$ σ – άλγεβρα σε ένα μη κενό σύνολο Ω, μ ένα σ - πεπερασμένο θετικό μέτρο στο Ω και λ προσημασμένο μέτρο στο Ω. Εάν $\lambda << \mu$, τότε υπάρχει $h \in L^1(\Omega, \mu)$ τέτοια ώστε:*

$$\lambda(E) = \int_E h d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Πρόταση 2.3. *Έστω $\mathcal{A}$ σ – άλγεβρα σε ένα μη κενό σύνολο Ω, μ ένα σ -πεπερασμένο θετικό μέτρο στο Ω και $h \in L^1(\Omega, \mu)$. Θέτουμε*

$$\lambda(E) = \int_E h d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Τότε, το λ είναι προσημασμένο μέτρο τέτοιο ώστε

$$\lambda << \mu, \quad |\lambda|(E) = \int_E |h| d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

3 Ανακλαστικότητα, Διαχωρισιμότητα και Δυϊκοί των L^p.

3.1 Ορισμοί και στοιχειώδεις ιδιότητες χώρων L^p.

Ορισμός 3.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leq p \leq \infty$. Θέτουμε:*

$$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \quad f \text{ μετρήσιμη και } |f|^p \in L^1(\Omega) \}$$

και $\quad \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$

Ορισμός 3.2. *Θέτουμε:*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ μετρήσιμη και ουσιωδώς φραγμένη,} \\ \text{δηλαδή } \exists C < \infty \text{ τ.ω. να ισχύει} \\ |f(x)| \leq C \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega. \end{array} \right\}$$

και

$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \inf\{ C : |f(x)| \leq C \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega \}.$

Η επόμενη παρατήρηση μας εξασφαλίζει ότι η $\| \ \|_\infty$ είναι νόρμα.

Παρατήρηση 3.1. *Αν $f \in L^\infty(\Omega)$ τότε:*

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty, \quad \text{σ.π. στο } \Omega.$$

Απόδειξη. Υπάρχει ακολουθία (M_n) τέτοια ώστε $M_n \to \|f\|_\infty$ και $\forall n$ να ισχύει ότι $|f(x)| \leq M_n$ σ.π. στο Ω. Συνεπώς, για κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $E_n \in \mathcal{A}$ με $\mu(E_n) = 0$, τ.ω. για κάθε $x \in \Omega \smallsetminus E_n$, έχουμε ότι $|f(x)| \leq M_n$.
Θέτουμε $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Τότε, $\mu(E) = 0$ και

$$|f(x)| \leq M_n, \quad \forall n, \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus E.$$

Έπεται ότι:

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty, \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus E.$$

□

Συμβολισμός 1. *Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Συμβολίζουμε το συζυγή του p ως τον p' που ικανοποιεί την εξίσωση:*

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.}$$

Παρατήρηση : Αν $p = 1$(αντιστοίχως $p = \infty$), τότε $p' = \infty$(αντιστοίχως $p' = 1$).

Θεώρημα 3.1 (Ανισότητα Hölder). *Υποθέτουμε ότι $f \in L^p$ και $g \in L^{p'}$ με $1 \leq p \leq \infty$. Τότε $fg \in L^1$ και*

$$\boxed{\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} .}$$

Απόδειξη. Για $p = 1$ ή $p = \infty$, το συμπέρασμα είναι προφανές.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $1 < p < \infty$ και χρησιμοποιούμε την ανισότητα Young:

$$\boxed{\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{p'}\beta^{p'}, \quad \forall \alpha \geq 0, \quad \forall \beta \geq 0.} \tag{1}$$

Η ανισότητα (1) είναι άμεση συνέπεια του ότι η συνάρτηση log είναι κοίλη στο $(0, \infty)$:

$$\log(\alpha\beta) = \tfrac{1}{p}\log\alpha^p + \tfrac{1}{p'}\log\beta^{p'} \leq \log\left(\tfrac{1}{p}\alpha^p + \tfrac{1}{p'}\beta^{p'}\right), \quad \forall\ \alpha, \beta > 0\ .$$

Έπεται ότι

$$|f(x)||g(x)| \leq \tfrac{1}{p}|f(x)|^p + \tfrac{1}{p'}|g(x)|^{p'} \text{ , σχεδόν παντού στο } \Omega.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση έχουμε ότι $fg \in L^1$ και:

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{p'}\|g\|_{p'}^{p'} .$$

Έστω $\lambda > 0$. Αντικαθιστώντας το f με λf και το g με $\lambda^{-1}g$ έπεται ότι:

$$\int |\lambda f\ \frac{1}{\lambda}g| \leq \frac{\lambda^p}{p}\|f\|_p^p + \frac{\lambda^{-p'}}{p'}\|g\|_{p'}^{p'} .$$

Επιλέγοντας $\lambda = \|g\|_{p'}^{\frac{1}{p}} \|f\|_p^{\frac{1}{p}-1} = \|g\|_{p'}^{1-\frac{1}{p'}} \|f\|_p^{-\frac{1}{p'}}$ έχουμε ως αποτέλεσμα ότι:

$$\Rightarrow \int |fg| \le \frac{1}{p} \|g\|_{p'} \|f\|_p^{1-p} \|f\|_p^p + \frac{1}{p'} (\|g\|_{p'}^{p'-1} \|f\|_p^{-1})^{-1} \|g\|_{p'}^{p'}$$

$$\Rightarrow \quad \int |fg| \le (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}) \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

$$\Rightarrow \|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'} .$$

□

Πρόταση 3.1. *Έστω $f \in L^p \cap L^q$ με $1 \le p \le q \le \infty$. Τότε, $f \in L^r$, $\forall r \in [p,q]$ και ισχύει η ανισότητα παρεμβολής:*

$$\boxed{\|f\|_r \le \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha}} , \tag{2}$$

όπου $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$ *και* $0 \le \alpha \le 1$.

Απόδειξη. Εάν $r = p$ ή q, το συμπέρασμα είναι προφανές.

Υποθέτουμε ότι

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad \text{και} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Τότε,

$$1 = \frac{1}{\frac{p}{\alpha r}} + \frac{1}{\frac{q}{(1-\alpha)r}} .$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1 έχουμε

$$\int |f|^r = \int |f|^{(r\alpha)} |f|^{(r-r\alpha)} \le \left(\int |f|^{\frac{p}{r\alpha} r\alpha} \right)^{\frac{r\alpha}{p}} \left(\int |f|^{\frac{q}{r-r\alpha}(r-r\alpha)} \right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}}$$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_r^r \le \|f\|_p^{r\alpha} \|f\|_q^{(1-\alpha)r}$$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_r \le \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha} .$$

□

Πρόταση 3.2. *Έστω* $f_i \in L^{p_i},\ 1 \le i \le k,\ k \ge 2$ *και* $\dfrac{1}{p} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{p_i} \le 1$. *Τότε το γινόμενο* $f = f_1 f_2 \cdots f_k$ *ανήκει στον* L^p *και*

$$\boxed{\|f\|_p \le \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_k\|_{p_k}}\,. \tag{3}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $k \ge 2$. Έστω:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \le 1, \qquad f_i \in L^{p_i}, \quad i = 1, 2\ .$$

Τότε:

$$1 = \frac{1}{p_1/p} + \frac{1}{p_2/p} \ \text{ και } \ |f_1|^p \in L^{(p_1/p)},\ |f_2|^p \in L^{(p_2/p)}$$

$$\begin{aligned} \overset{(\Theta.3.1)}{\Rightarrow} \int |f_1|^p |f_2|^p &\le \left[\int (|f_1|^p)^{(p_1/p)}\right]^{(p/p_1)} \cdot \left[\int (|f_2|^p)^{(p_2/p)}\right]^{(p/p_2)} \\ &= \left(\int |f_1|^{p_1}\right)^{(p/p_1)} \cdot \left(\int |f_2|^{p_2}\right)^{(p/p_2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \|f_1 f_2\|_p \le \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}\ .$$

Άρα ισχύει για $k = 2$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $k \ge 2$ και αποδεικνύουμε ότι ισχύει και για $k+1$. Έστω:

$$\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{p_i} \le 1, \quad f_i \in L^{p_i}, \quad 1 \le i \le k+1.$$

Θέτουμε:

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}\ .$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, παίρνουμε ότι:

$$\prod_{i=1}^{k} f_i = h \in L^{\lambda}, \qquad \|h\|_{\lambda} \le \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{p_i}\ .$$

Επιπλέον,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{p_{k+1}} \le 1, \qquad h \in L^{\lambda}, \quad f_{k+1} \in L^{p_{k+1}},$$

οπότε από την περίπτωση “$k=2$”, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\|hf_{k+1}\|_p &\leq \|h\|_\lambda \|f_{k+1}\|_{p_{k+1}} \\ &\leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{p_i} \cdot \|f_{k+1}\|_{p_{k+1}} \\ &= \prod_{i=1}^{k+1} \|f_i\|_{p_i} \quad ,\end{aligned}$$

που είναι η αποδεικτέα.

□

Θεώρημα 3.2. *Ο L^p είναι διανυσματικός χώρος και η $\|\ \|_p$ είναι νόρμα $\forall p \in [1,\infty]$.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αποδείξει στην Παρατήρηση 3.1 ότι η $\|\ \|_\infty$ είναι νόρμα.

Για $p=1$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} &\int |f+g| \leq \int |f| + \int |g| \\ \Rightarrow \quad & \|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1, \quad \text{αν } f,g \in L^1.\end{aligned}$$

Έστω $p \in (1,\infty)$ και $f,g \in L^p$. Εκμεταλλευόμαστε την κυρτότητα της συνάρτησης $t \to t^p$ για $t \geq 0$ και έχουμε:

$$\left|\frac{f(x)+g(x)}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p,$$

$$\Rightarrow \quad |f(x)+g(x)|^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)\ , \quad \forall x \in \Omega.$$

Άρα $f+g \in L^p$ και συνεπώς ο L^p είναι διανυσματικός χώρος.

Επιπλέον,

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g| \leq \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|.$$

Παρατηρούμε ότι $|f+g|^{p-1} \in L^{p'}$ και

$$\left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{p'} = \left(\int |f+g|^{p'(p-1)} \right)^{1-\frac{1}{p}} = \|f+g\|_p^{p-1} . \tag{4}$$

Λόγω του Θεωρήματος 3.1 προκύπτει ότι:

$$\|f+g\|_p^p \le \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{p'} (\|f\|_p + \|g\|_p) = \|f+g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p),$$

$$\Rightarrow \boxed{\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p} . \tag{5}$$

□

Θεώρημα 3.3 (Fischer – Riesz). *Ο L^p είναι χώρος Banach για $p \in [1, \infty]$.*

Απόδειξη. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $p = \infty$.
(β) $1 \le p < \infty$.

Περίπτωση (α) $p = \infty$:

Έστω (f_n) μία ακολουθία Cauchy στον L^∞. Για δοθείσα σταθερά $k \ge 1$ υπάρχει φυσικός αριθμός N_k τέτοιος ώστε $\|f_m - f_n\|_\infty \le \frac{1}{k}$ για $m, n \ge N_k$ και μηδενοσύνολο E_k ώστε:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{k}, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k, \quad \forall m, n \ge N_k . \tag{6}$$

Θέτοντας $E = \bigcup_k E_k$ παρατηρούμε ότι $\mu(E) = 0$ και πως $\forall x \in E^c$ η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$, οπότε $f_n(x) \to f(x)$, για κάποιο $f(x) \in \mathbb{R}$. Υπολογίζοντας το όριο της ανισότητας (6) όταν το $m \to \infty$ λαμβάνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{k}, \quad \forall x \in E^c, \quad \forall n \ge N_k .$$

Συμπεραίνουμε ότι $f \in L^\infty$ και $\|f - f_n\|_\infty \le \frac{1}{k}, \quad \forall n \ge N_k, \ \forall k \ge 1$, που σημαίνει ότι $f_n \to f$ στον L^∞.

Περίπτωση (β) $1 \le p < \infty$:

Έστω (f_n) μία ακολουθία Cauchy στον L^p. Για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να εντοπίσουμε μία συγκλίνουσα υπακολουθία της (f_n) στον L^p. Επιλέγουμε υπακολουθία (f_{n_k}) ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \le \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \ge 1.$$

Για λόγους απλοποίησης θα συμβολίζουμε την υπακολουθία (f_{n_k}) ως (f_k):

$$\|f_{k+1} - f_k\|_p \le \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \ge 1. \tag{7}$$

Έστω

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|, \quad x \in \Omega,\ n \ge 1.$$

Λόγω της (7),

$$\|g_n\|_p \le 1, \quad n \ge 1.$$

Ως συνέπεια του *Θεωρήματος μονότονης σύγκλισης* (2.1) η $g_n(x)$ θα τείνει σε ένα πεπερασμένο όριο, έστω $g(x)$, σχεδόν παντού στο Ω, με $g \in L^p$. Παράλληλα, για $m \ge n \ge 2$ έχουμε ότι:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le g(x) - g_{n-1}(x)\ .$$

Έπεται ότι σχεδόν $\forall x \in \Omega$, η $(f_n(x))$ είναι ακολουθία Cauchy και άρα συγκλίνει σε κάποιο $f(x) \in \mathbb{R}$.

Για σταθερό $n \ge 2$ και για $m \to \infty$ στην παραπάνω ανισότητα παίρνουμε

$$|f(x) - f_n(x)| \le g(x), \quad \forall n \ge 2, \quad \text{σ.π. στο } \Omega \tag{8}$$

και $f \in L^p$. Μέσω του Θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης (2.2), επειδή $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ σχεδόν παντού στο Ω και $|f_n - f|^p \le g^p \in L^1$, συμπεραίνουμε ότι $\|f_n - f\|_p \to 0$.

□

Θεώρημα 3.4. *Έστω* (f_n) *ακολουθία στον* L^p *τ.ω.* $\|f_n - f\|_p \to 0$. *Τότε υπάρχει υπακολουθία* (f_{n_k}) *και συνάρτηση* $h \in L^p$ *τ.ω.*

(α) $f_{n_k}(x) \overset{k}{\to} f(x)$ *σ.π στο* Ω.

(β) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *σ.π στο* Ω, $\forall k \geq 1$.

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση για $p = \infty$.

Έστω $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Θέτουμε:

$$E_n = \{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \|f_n - f\|_\infty\} \cup \\ \cup \{x \in \Omega : |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\}, \qquad n \geq 1$$

και

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Επειδή $\mu(E_n) = 0$, $\forall n \geq 1$, θα ισχύει ότι $\mu(E) = 0$. Επιπλέον

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \to 0, \quad \forall x \in E^c, \quad \forall n \geq 1.$$

Επομένως,

$$f_n(x) \to f(x), \quad \text{σ.π. στο } \Omega.$$

Θέτουμε $M = \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$. Τότε:

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \leq M, \quad \forall x \in E^c, \ \forall n \geq 1,$$

$$\overset{(n\to\infty)}{\Rightarrow} |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in E^c.$$

Άρα, $|f(x)| \leq M$, σ.π. στο Ω και θέτουμε $h = M$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $1 \leq p < \infty$. Εφ' όσον η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy, ανατρέχουμε στην απόδειξη του θεωρήματος Fischer-Riesz (3.3) και κατασκευάζουμε υπακολουθία (f_{n_k}), τέτοια ώστε να επαληθεύει τη σχέση (7) και να συγκλίνει σχεδόν παντού σε πεπερασμένο όριο $f^\star(x)$ με $f^\star \in L^p$.

Επιπροσθέτως, λόγω της (8), έχουμε ότι $|f^\star(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x)$, $\forall k$, σ.π. στο Ω και $g \in L^p$. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης γνωρίζουμε πως $f_{n_k} \to f^\star$ στον L^p και κατά συνέπεια $f = f^\star$ σ.π. στο Ω. Επιπλέον, ισχύει ότι $|f_{n_k}(x)| \leq |f^\star(x)| + g(x) = h(x)$, σ.π. και $h \in L^p$.

□

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leq p \leq \infty$.

Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

(α) $1 < p < \infty$
(β) $p = 1$
(γ) $p = \infty$

3.2 Μελέτη του $L^p(\Omega)$ για $1 < \mathbf{p} < \infty$.

Ορισμός 3.3. *Ένας χώρος Banach $(E, \|\cdot\|)$ καλείται ομοιόμορφα κυρτός αν για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in E$ με $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ και $\|x - y\| \geq \varepsilon$, να ισχύει ότι:*

$$\boxed{\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.}$$

Θεώρημα 3.5. *Ο $L^p(\Omega)$ είναι ανακλαστικός για κάθε $p \in (1, \infty)$.*

Για την απόδειξη θα βασιστούμε στο Θεώρημα **Milman-Pettis:** ‘‘Κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach είναι ανακλαστικός’’.

Θα δείξουμε ότι ο $L^p(\Omega)$ είναι ομοιόμορφα κυρτός για κάθε $p \in (1, \infty)$. Σημ. ότι αυτή η ιδιότητα των χώρων $L^p(\Omega)$ έχει ξεχωριστή σημασία αφού συνεπάγεται, εκτός από την ανακλαστικότητα και την ιδιότητα **Kadec -Klee:**

‘‘Εάν (f_n) ακολουθία στον $L^p(\Omega)$ που συγκλίνει ασθενώς στην $f \in L^p(\Omega)$ και $\limsup_n \|f_n\|_p \leq \|f\|_p$, τότε $\|f_n - f\|_p \to 0$’’ (βλ. Πρόταση 3.3 παρακάτω).

Θεώρημα 3.6. *Ο $L^p(\Omega)$ είναι ομοιόμορφα κυρτός για κάθε $p \in [2, \infty)$.*

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \quad \forall f, g \in L^p. \tag{9}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\eta(\tau) = (\tau^2 + 1)^{\frac{p}{2}} - \tau^p - 1$, για $\tau \geq 0$.
Τότε,

$$\begin{aligned} \eta'(\tau) &= \frac{p}{2}(\tau^2+1)^{\frac{p}{2}-1} 2\tau \ - \ p\tau^{p-1} \\ &= p\tau\left[(\tau^2+1)^{\frac{1}{2}(p-2)} - \tau^{p-2}\right] \ \geq \ 0, \quad \forall \tau \geq 0 \end{aligned}$$

και συνεπώς η $\eta(\tau)$ είναι αύξουσα. Έπεται ότι $\eta(\tau) \geq \eta(0) = 0,\ \forall \tau \geq\ 0$, δηλαδή

$$(\tau^2 + 1)^{\frac{p}{2}} \ \geq\ \tau^p + 1, \quad \forall\ \tau \geq 0.$$

Εφαρμόζοντας την τελευταία για $\tau = t/s,\ t \geq 0,\ s > 0,$ προκύπτει ότι

$$t^p + s^p \leq (t^2 + s^2)^{\frac{p}{2}}\ ,$$

η οποία ισχύει προφανώς και για $s = 0$.

Για $t := \left|\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right|$ και $s := \left|\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right|$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ παίρνουμε

$$\Rightarrow\ \left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^p + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^p \leq \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \leq\ \frac{1}{2}(|\alpha|^p + |\beta|^p) \tag{10}$$

εξαιτίας της κυρτότητας της συνάρτησης $|\tau|^{\frac{p}{2}}$ για $p \in [2, \infty)$.

Εισάγοντας τις f, g στην ανισότητα (10) και ολοκληρώνοντας προκύπτει η (9).

Επιλέγουμε $\varepsilon \in (0,2)$ και $f, g \in L^p$ τ.ω. $\|f\|_p \leq 1,\ \|g\|_p \leq 1$ και $\|f-g\|_p \geq \varepsilon$. Λόγω της (9), έχουμε

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \leq\ \frac{1}{2}\,\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\,\|g\|_p^p \leq\ 1$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leq \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\ .$$

Για $\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\ \geq 0$ έπεται ότι:

$$\boxed{\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leq\ 1 - \delta\ .} \tag{11}$$

$\square$

Έχοντας ως σκοπό να διερευνήσουμε την ομοιόμορφη κυρτότητα των χώρων $L^p(\Omega)$ και για $p \in (1,2]$ παρουσιάζουμε τα παρακάτω λήμματα:

Λήμμα 3.7. *Εάν $u, v \in L^r(\Omega)$ με $0 < r \leq 1$, τότε*

$$\boxed{\|u+v\|_r \geq \ \|u\|_r + \|v\|_r \ .}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\alpha = \dfrac{\|u\|_r}{\Gamma}$, $\beta = \dfrac{\|v\|_r}{\Gamma}$ με $\Gamma = \|u\|_r + \|v\|_r$.

Επειδή η απεικόνιση $t \to |t|^r$ είναι κοίλη, έχουμε

$$|u(x)+v(x)|^r = \left|\alpha\left(\frac{u(x)}{\alpha}\right) + \beta\left(\frac{v(x)}{\beta}\right)\right|^r \geq \ \alpha\left(\frac{|u(x)|}{\alpha}\right)^r + \beta\left(\frac{|v(x)|}{\beta}\right)^r \ , \ \forall \ x \in \Omega$$

$$\Rightarrow \ \|u+v\|_r^r \geq \ (\alpha+\beta)\cdot\Gamma^r = \ (\|u\|_r + \|v\|_r)^r$$

$$\Rightarrow \ \|u+v\|_r \geq \ \|u\|_r + \|v\|_r \ .$$

□

Λήμμα 3.8. *Έστω $1 < p \leq 2$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ και $\beta \in [0,1]$. Τότε:*

$$\boxed{(1+\beta)^{p'} + (1-\beta)^{p'} \leq \ 2(1+\beta^p)^{p'-1} \ .} \tag{12}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\phi_\beta(t) = (1+\beta t^{1-p'})(1+\beta t)^{p'-1}$, $t \in [0, \ 1]$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\phi_\beta(1) &= (1+\beta)^{p'},\\
\phi_{-\beta}(1) &= (1-\beta)^{p'},\\
\phi_\beta(\beta^{p-1}) &= (1+\beta\beta^{(p-1)(1-p')})(1+\beta\beta^{p-1})^{p'-1}\\
&= (1+\beta\beta^{-1})(1+\beta^p)^{p'-1}\\
&= 2(1+\beta^p)^{p'-1}, \quad \beta^{p-1} \in [0,1]\\
\text{και} \qquad \phi_{-\beta}(\beta^{p-1}) &= 0.
\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
\phi'_\beta(t) &= (1-p')\beta t^{-p'}(1+\beta t)^{p'-1} + \beta(1+\beta t^{1-p'})(p'-1)(1+\beta t)^{p'-2}\\
&= (p'-1)(1+\beta t)^{p'-2}[-\beta t^{-p'}(1+\beta t) + \beta(1+\beta t^{1-p'})]\\
&= (p'-1)(1+\beta t)^{p'-2}\beta(1-t^{-p'}) \ , \ \forall \ t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θέτουμε $g(t) = \phi_\beta(t) + \phi_{-\beta}(t),\ t \in [0,1]$. Τότε,

$$g'(t) = (p'-1)(1-t^{-p'})\beta[(1+\beta t)^{p'-2} - (1-\beta t)^{p'-2}] \le 0\ , \qquad \forall t \in [0,1]\ ,$$

καθώς

$$(1+\beta t)^{p'-2} \ge (1-\beta t)^{p'-2}, \quad \forall t \in [0,1]\ ,$$

επειδή

$$p'-2 = \frac{p}{p-1} - 2 = \frac{2-p}{p-1} \ge 0.$$

Άρα, $g(\beta^{p-1}) \ge g(1)$, που είναι και η αποδεικτέα. □

Λήμμα 3.9. *Έστω* $1 < p \le 2\ ,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Τότε,* $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *έχουμε ότι:*

$$\boxed{|x+y|^{p'} + |x-y|^{p'} \le 2(|x|^p + |y|^p)^{p'-1}\ .} \tag{13}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.8 προκύπτει ότι

$$(1+\beta)^{p'} + (1-\beta)^{p'} \le 2(1+|\beta|^p)^{p'-1}, \quad \forall\ \beta \in [-1,1].$$

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|x| \ge |y| > 0$. Θέτοντας $\beta = y/x$ στην παραπάνω ανισότητα, πολλαπλασιάζοντας με $|x|^{p'}$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $p(p'-1) = p'$, παίρνουμε την αποδεικτέα. □

Θεώρημα 3.10. *Ο* $L^p(\Omega)$ *είναι ομοιόμορφα κυρτός για* $1 < p \le 2$.

Απόδειξη. Έστω $f, g \in L^p(\Omega)$. Εισάγοντας τις συναρτήσεις f, g στη σχέση του Λήμματος 3.9 παίρνουμε

$$|f+g|^{p'} + |f-g|^{p'} \le 2(|f|^p + |g|^p)^{p'-1}$$

οπότε

$$\Big\| |f+g|^{p'} + |f-g|^{p'} \Big\|_{p-1} \le 2\left(\int (|f|^p + |g|^p)^{(p'-1)(p-1)} \right)^{\frac{1}{p-1}} = 2\Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \Big)^{p'-1}.$$

Εξαιτίας του Λήμματος 3.7, έπεται ότι

$$\|\, |f+g|^{p'} \,\|_{p-1} + \|\, |f-g|^{p'} \,\|_{p-1} \le 2\Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \Big)^{p'-1}.$$

Παρατηρούμε όμως ότι για κάθε $w \in L^p$ ισχύει

$$\| \, |w|^{p'} \|_{p-1} = \left(\int |w|^{p'(p-1)} \right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\int |w|^p \right)^{\frac{1}{p-1}} = \|w\|_p^{p'} \ ,$$

οπότε

$$\| \, f+g \, \|_p^{p'} + \| \, f-g \, \|_p^{p'} \ \le \ 2\Big(\| f \|_p^p + \|g\|_p^p \Big)^{p'-1}, \quad \forall \ f, \ g \in L^p. \tag{14}$$

Έστω τώρα f, $g \in L^p$ και $\varepsilon \in (0,2)$ ώστε $\|f\|_p \le 1$, $\|g\|_p \le 1$ και $\|f-g\|_p \ge \varepsilon$. Τότε,

$$\begin{aligned} & \|f+g\|_p^{p'} + \varepsilon^{p'} \le 2^{p'} \\ \Rightarrow \ & \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^{p'} \le \ 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{p'} \end{aligned}$$

και για $\delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{p'} \right]^{\frac{1}{p'}}$,

$$\boxed{\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p \le 1 - \delta \ .} \tag{15}$$

Συμπεραίνουμε ότι ο L^p είναι ομοιόμορφα κυρτός και για κάθε $p \in (1, \ 2]$.

□

Από τα Θεωρήματα 3.6, 3.10 προκύπτει άμεσα το παρακάτω

Θεώρημα 3.11. *Ο $L^p(\Omega)$ είναι ομοιόμορφα κυρτός για $1 < p < \infty$.*

Το Θεώρημα 3.11 σε συνδυασμό με το Θεώρημα Millman-Pettis δίνουν άμεσα το Θεώρημα 3.5 (ανακλαστικότητα του $L^p(\Omega)$ για $1 < p < \infty$).

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο $L^p(\Omega)$ έχει την ιδιότητα Kadec-Klee για $1 < p < \infty$. Θα χρειαστούμε το παρακάτω:

Λήμμα 3.12. *Έστω (x_n) ακολουθία στο χώρο με νόρμα $(E, \| \cdot \|)$ ώστε $x_n \rightharpoonup x$ ασθενώς. Τότε, η (x_n) είναι $\| \cdot \|$ - φραγμένη και*

$$\boxed{\|x\| \le \liminf_{n \to \infty} \|x_n\| \, .}$$

Απόδειξη. $\forall \Phi \in E^\star$, η ακολουθία $(\langle \Phi, x_n \rangle)$ συγκλίνει και άρα είναι φραγμένη. Εφαρμόζοντας την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος στην ακολουθία

$$e(x_n) : E^\star \to \mathbb{R}, \quad n \geq 1 \quad (\text{σημ. ότι ο } E^\star \text{ είναι Banach}),$$

όπου $e : E \to E^{\star\star}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση, παίρνουμε

$$\sup_n \|e(x_n)\| < \infty \;\Rightarrow\; \sup_n \|x_n\| < \infty.$$

Επιπλέον,

$$|\langle \Phi, x_n \rangle| \leq \|\Phi\| \, \|x_n\|, \quad \forall \Phi \in E^\star, \quad \forall n \geq 1,$$

$$\Rightarrow |\langle \Phi, x \rangle| \leq \|\Phi\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|, \quad \forall \Phi \in E^\star,$$

$$\Rightarrow \|x\| = \sup_{\Phi \in E^\star,\ \|\Phi\| \leq 1} |\langle \Phi, x \rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

□

Πρόταση 3.3 (Ιδιότητα **Kadec – Klee**). *Έστω (f_n) ακολουθία στον $L^p(\Omega)$ με $1 < p < \infty$ και $f \in L^p(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι:*

(i) $f_n \rightharpoonup f$ στην ασθενή τοπολογία $\sigma(L^p, L^{p'})$.
(ii) $\limsup_n \|f_n\|_p \leq \|f\|_p$.

Τότε $f_n \to f$ ισχυρώς στον $L^p(\Omega)$.

Απόδειξη. Λόγω της υπόθεσης (i) ισχύει ότι,

$$\frac{f_n + f}{2} \rightharpoonup f \text{ , ασθενώς στην } \; \sigma(L^p, L^{p'}). \tag{16}$$

Από την υπόθεση (ii) και το Λήμμα 3.12 προκύπτει ότι:

$$\|f\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_p \leq \limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_p \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|_p + \|f\|_p}{2} \leq \|f\|_p$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_p = \|f\|_p.$$

Ισχύουν επίσης οι ανισότητες Clarkson (βλ. ανισότητες (9), (14)):

$$\left\|\frac{f_n - f}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f_n + f}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\left(\|f_n\|_p^p + \|f\|_p^p\right), \quad \text{για } 2 \leq p < \infty \tag{17}$$

και

$$\left\|\frac{f_n - f}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{f_n + f}{2}\right\|_p^{p'} \leq 2^{1-p'}\Big(\|f_n\|_p^p + \|f\|_p^p\Big)^{p'-1}, \quad \text{για } 1 \leq p < 2. \tag{18}$$

Επειδή

$$\limsup_n \|f_n\|_p \leq \|f\|_p \ , \quad \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{f_n + f}{2}\right\|_p = \|f\|_p \ ,$$

οι (17), (18) δίνουν $\|f_n - f\|_p \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

Η απόδειξη της πρότασης ολοκληρώθηκε.

□

Παρατήρηση 3.2. *Ο $L^1(\Omega)$ δεν έχει εν γένει την ιδιότητα Kadec -Klee. Θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας το παρακάτω*

Λήμμα 3.13 (Λήμμα **Riemann – Lebesgue**). *Εφοδιάζουμε τον $\mathbb{R}$ με το μέτρο Lebesgue και θεωρούμε $\Omega \subset \mathbb{R}$ ανοικτό και $f \in L^1(\Omega)$. Τότε,*

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\int_\Omega f(x)e^{i\xi x}dx = 0.$$

Απόδειξη. Επειδή κάθε συνάρτηση του $L^1(\Omega)$ επεκτείνεται σε μια συνάρτηση του $L^1(\mathbb{R})$ που μηδενίζεται εκτός του Ω, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\xi x}dx = 0.$$

Έστω $f = \mathcal{X}_{(\alpha,\beta)}$, $\alpha < \beta$.
Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\xi x}dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{(\alpha,\beta)}e^{i\xi x}dx = \int_\alpha^\beta e^{i\xi x}dx = \frac{e^{i\xi\beta} - e^{i\xi\alpha}}{i\xi} \to 0, \quad \text{καθώς } |\xi| \to \infty \ .$$

Λόγω της προσθετικότητας των ορίων, εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για

$$“f” = g = \sum_{k=1}^{l} c_k \mathcal{X}_{(\alpha_k,\beta_k)}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad \alpha_k \leq b_k \in \mathbb{R}, \quad l \geq 1 \tag{19}$$

έχουμε ότι

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\xi x}\ dx = 0. \tag{20}$$

Λόγω της πυκνότητας των συναρτήσεων της μορφής (19) στον $L^1(\mathbb{R})$, για τυχαία $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει συνάρτηση g της μορφής (19) τέτοια ώστε:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\ dx < \varepsilon.$$

Από τη σχέση (20) έπεται ότι $\exists N \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall |\xi| > N$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\xi x}\ dx \right| < \varepsilon.$$

Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\xi x}\ dx = \int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))\, e^{i\xi x}\ dx + \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\xi x}\ dx$$

και

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\xi x}dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\ dx + \left| \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\xi x}\ dx \right| < 2\varepsilon,\ \ \forall |\xi| > N,\ \ \forall \varepsilon > 0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\xi x}\ dx = 0, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}).$$

$\square$

Πρόταση 3.4. *Ο $L^1(0,1)$ δεν έχει την ιδιότητα Kadec-Klee. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν ακολουθία $(g_n) \subset L^1(0,1)$ και $g \in L^1(0,1)$ με τις παρακάτω ιδιότητες:*

$$g_n \rightharpoonup g \quad \text{στην ασθενή τοπολογία}, \quad \|g_n\|_1 \to \|g\|_1 \quad \text{και} \quad \|g_n - g\|_1 \nrightarrow 0.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.13 συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\ dx = \mathrm{Im}\left[\int_0^1 f(x)e^{in\pi x}\ dx\right] \overset{n\to\infty}{\to} 0, \quad \forall f \in L^\infty(0,1) \subset L^1(0,1).$$

Επομένως, αν θέσουμε $g_n(x) = 1+\sin(n\pi x),\ x \in (0,1),\ n \geq 1$ και $g(x) = 1$, $x \in (0,1)$ έχουμε ότι $g_n \rightharpoonup g$ ασθενώς στον $L^1(0,1)$.

Επιπλέον,

$$\|g_n\|_1 = \int_0^1 |\sin(n\pi x) + 1|\, dx = \int_0^1 (\sin(n\pi x) + 1)\, dx = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} + 1 \overset{n\to\infty}{\to} 1 = \|g\|_1.$$

Τέλος, $\forall n \geq 1$,

$$\|g_n - g\|_1 = \int_0^1 |sin(n\pi x)|\, dx = \frac{1}{n\pi}\int_0^{n\pi} |sinx|\, dx = \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} |sinx|\, dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} |sin(x + k\pi)|\, dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} sinx\ dx = \frac{1}{n\pi}2n = \frac{2}{\pi}\ >\ 0$$

και άρα $\|g_n - g\|_1 \nrightarrow 0$. □

Συνεχίζουμε με το χαρακτηρισμό του δυϊκού του $(L^p(\Omega))^\star$ για $1 < p < \infty$. Συγκεκριμένα, έχουμε το παρακάτω

Θεώρημα 3.14 (Θεώρημα αναπαράστασης Riesz).
Έστω $1 < p < \infty$ και $\Phi \in (L^p)^\star$. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in L^{p'}$ τέτοια ώστε:

$$\boxed{\langle \Phi, f\rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^p\ .}$$

Επιπροσθέτως,

$$\boxed{\|u\|_{p'} = \|\Phi\|_{(L^p)^\star}}$$

Ορίζεται δηλαδή μία γραμμική επί ισομετρία μεταξύ του αφηρημένου χώρου των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών στον L^p και των στοιχείων του $L^{p'}$, που σημαίνει πως κάθε $\Phi \in L^{p'}$ αναπαρίσταται ως ολοκλήρωμα του γινομένου $u \in L^{p'}$ και $f \in L^p$. Έπεται ότι:

$$\boxed{(L^p)^\star \equiv L^{p'}} \quad , \textit{ισομετρικά.}$$

Απόδειξη. Για κάθε $u \in L^{p'}$ ορίζεται η απεικόνιση $f \mapsto \displaystyle\int uf$ η οποία είναι ένα γραμμικό συνεχές συναρτησιακό στον L^p, δηλαδή στοιχείο του $(L^p)^\star$. Έπεται ότι ο τελεστής $T : L^{p'} \to (L^p)^\star$ με

$$\langle Tu, f\rangle = \int uf \ , \quad \forall f \in L^p$$

είναι καλά ορισμένος και προφανώς γραμμικός. Θα δείξουμε ότι είναι ισομετρία.

Από την ανισότητα Hölder γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&|\langle Tu, f\rangle| = \left| \int uf \right| \le \int |u||f| \le \|u\|_{p'} \|f\|_p \ , \\
\Rightarrow \ &\frac{|\langle Tu, f\rangle|}{\|f\|_p} \le \|u\|_{p'} \ , \quad \forall f \in L^p \smallsetminus \{0\}, \\
\Rightarrow \ &\|Tu\|_{(L^p)^*} \le \|u\|_{p'} \ .
\end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε την ισότητα θα πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλο $f_0 \in L^p$. Θέτουμε

$$f_0(x) = \begin{cases} |u(x)|^{p'-2}u(x), & u(x) \neq 0 \\ 0, & u(x) = 0. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\int |f_0|^p = \int |u|^{p(p'-1)} = \int |u|^{p'} = \|u\|_{p'}^{p'} < \infty \ , \quad \text{διότι } u \in L^{p'}$$

και

$$\begin{aligned}
&|\langle Tu, f_0\rangle| = \left| \int u|u|^{p'-2}u \right| = \int |u|^{p'} = \|u\|_{p'}^{p'} \\
\Rightarrow \ &\frac{|\langle Tu, f_0\rangle|}{\|f_0\|_p} = \frac{\|u\|_{p'}^{p'}}{\|u\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}} = \frac{\|u\|_{p'}^{p'}}{\|u\|_{p'}^{p'-1}} = \|u\|_{p'} \\
\Rightarrow \ &\|u\|_{p'} \le \|Tu\|_{(L^p)^*} \, .
\end{aligned}$$

Άρα $\|u\|_{p'} = \|Tu\|_{(L^p)^*}$, δηλ. T ισομετρία.

Απομένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί.

Επειδή ο T είναι ισομετρία και ο $L^{p'}$ είναι χώρος Banach, ο $T(L^{p'})$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $(L^p)^\star$.

Υποθέτουμε ότι ο $T(L^{p'})$ είναι γνήσιος κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $(L^p)^\star$.

Από το Θ. Banach υπάρχει $\Lambda \in (L^p)^{\star\star}$ τέτοιο ώστε

$$||\Lambda||_{\star\star} = 1, \quad \Lambda(Tu) = 0, \quad \forall\ u \in L^{p'}.$$

Λόγω της ανακλαστικότητας του L^p, υπάρχει $h \in L^p$ τέτοιο ώστε $||h||_p = ||\Lambda||_{\star\star} = 1$ και

$$\langle Tu, h\rangle = 0, \quad \forall u \in L^{p'},$$

δηλαδή

$$\int uh = 0, \quad \forall u \in L^{p'}.$$

Θέτουμε

$$u(x) = \begin{cases} |h(x)|^{p-2}h(x), & h(x) \neq 0 \\ 0, & h(x) = 0. \end{cases}$$

Τότε $u \in L^{p'}$ και

$$\int |h|^p = \int uh = 0 \quad \Rightarrow ||h||_p = 0,$$

άτοπο.

Άρα ο T είναι ισομετρία επί.

□

Στη συνέχεια, θεωρούμε το χώρο μέτρου $\mathbb{R}^N$ εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue.

Θεώρημα 3.15. *Ο χώρος $C_c(\mathbb{R}^N)$ είναι πυκνός στον $L^p(\mathbb{R}^N)$, $\forall\ p \in [1, +\infty)$.*

Πριν αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα θα εισάγουμε δύο νέους συμβολισμούς.

Συμβολισμός 2. *Καλούμε τελεστή αποκοπής $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ την απεικόνιση*

$$T_n(r) = \begin{cases} r\ , & |r| \leq n \\ \dfrac{nr}{|r|}, & |r| > n. \end{cases}$$

Είναι σαφές ότι για όλα τα $r \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ ισχύει

$$|T_n(r)| \leq |r|, \quad |T_n(r)| \leq n.$$

Συμβολισμός 3. *Ορίζουμε επίσης για δοσμένο υποσύνολο E του Ω, τη χαρακτηριστική του E ως:*

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Επιπλέον, θα χρειαστούμε δύο λήμματα:

Λήμμα 3.16. *Για όλα τα $r, s \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ ισχύει*

$$|T_n(r) - T_n(s)| \ \leq \ |r - s|.$$

Απόδειξη. Εάν $|r| \leq n,\ |s| \leq n,$ ισχύει με ισότητα.

Εάν $|r| > n,\ |s| > n,$ τότε

$$\begin{aligned} |T_n(r) - T_n(s)|^2 &= 2n^2\left(1 - \frac{rs}{|r||s|}\right) \leq 2|r||s|\left(1 - \frac{rs}{|r||s|}\right) \\ &= 2|r||s| - 2rs \leq r^2 + s^2 - 2rs = |r-s|^2, \end{aligned}$$

οπότε ισχύει.

Τέλος, υποθέτουμε ότι $|r| > n \geq |s|$. Τότε

$$\begin{aligned} |T_n(r) - T_n(s)|^2 &= \left(\frac{nr}{|r|} - s\right)^2 = n^2 + s^2 - \frac{2nrs}{|r|} \\ &= r^2 + s^2 - 2rs + n^2 - r^2 + 2rs - \frac{2nrs}{|r|} \\ &= |r-s|^2 + (n - |r|)\left(n + |r| - \frac{2rs}{|r|}\right) \leq |r-s|^2, \end{aligned}$$

διότι $n - |r| < 0$ και $\left|\dfrac{2rs}{|r|}\right| \ \leq\ 2|s| \ \leq\ n + |r|$.

Άρα ισχύει και σε αυτή την περίπτωση.

$\square$

Λήμμα 3.17. *Έστω $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ώστε η g να μηδενίζεται στο συμπλήρωμα κάποιου συμπαγούς συνόλου K. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $g_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ τέτοια ώστε*

$$\|g_1\|_\infty \le \|g\|_\infty, \quad \|g - g_1\|_1 < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Πράγματι·

$$\int |g| = \int_K |g| \le \|g\|_\infty \cdot |K| < \infty,$$

όπου $|K|$ το μέτρο Lebesgue του K.

Λόγω του Θεωρήματος 2.4, υπάρχει $h \in C_c(\mathbb{R}^N)$ τέτοια ώστε

$$\|g - h\|_1 < \varepsilon.$$

Θέτουμε $n = \|g\|_\infty$ και $g_1 = T_n \circ h$.

Ο φορέας της g_1 ταυτίζεται με το φορέα της h, οπότε $g_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$.

Επιπλέον, για όλα σχεδόν τα $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|g(x)| \le n, \quad |g_1(x)| \le n,$$

οπότε

$$|g(x) - g_1(x)| = |T_n g(x) - T_n h(x)| \le |g(x) - h(x)|$$

(βλ. Λήμμα 3.16).

Έπεται ότι $\|g - g_1\|_1 \le \|g - h\|_1 < \varepsilon$ και $\|g_1\|_\infty \le n = \|g\|_\infty$.

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.15: Έστω $f \in L^p$.

<u>Ισχυρισμός:</u> Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ που μηδενίζεται στο συμπλήρωμα κάποιου συμπαγούς συνόλου, τέτοια ώστε $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού, θέτουμε $g_n = \mathcal{X}_n \cdot (T_n \circ f)$, όπου

$$\mathcal{X}_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in B[0,n] \\ 0, & x \notin B[0,n]. \end{cases}$$

Είναι σαφές ότι για κάθε $n \ge 1$,

$$|g_n(x)| \le n, \ |g_n(x)| \le |f(x)|, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \quad g_n(x) = 0, \ \forall\, x \notin B[0,n]$$

και το $B[0,n]$ είναι συμπαγές.

Επιπλέον, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$ και για $n > \max\{|x|,\, |f(x)|\}$ ισχύει $g_n(x) = f(x)$ και συνεπώς,

$$g_n(x) \;\to\; f(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Από τα παραπάνω και το Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει ότι $||g_n - f||_p \to 0$.

Επομένως, εάν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \geq 1$ με $||g_{n_0} - f||_p < \varepsilon$ και η $g_1 = g_{n_0}$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

Η απόδειξη του Ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.

Στη συνέχεια, έστω $\varepsilon > 0$. Με βάση τον Ισχυρισμό, υπάρχει $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ που μηδενίζεται στο συμπλήρωμα κάποιου συμπαγούς συνόλου, τέτοια ώστε $||f - g||_p < \varepsilon/2$.

Επιλέγουμε $\delta > 0$ με $(2||g||_\infty)^{1-1/p}\, \delta^{1/p} < \varepsilon/2$.

Το Λήμμα 3.17 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας $g_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ που ικανοποιεί

$$||g_1||_\infty \;\leq\; ||g||_\infty\,, \quad ||g - g_1||_1 \;<\; \delta.$$

Τότε,

$$\|g - g_1\|_p \leq \; \|g - g_1\|_\infty^{1-1/p}\, \|g - g_1\|_1^{1/p} \;\leq\; (2||g||_\infty)^{1-1/p}\, \delta^{1/p} \;<\; \varepsilon/2$$

και άρα

$$\|f - g_1\|_p \leq \; \|f - g\|_p \;+\; \|g - g_1\|_p \;<\; \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Ορισμός 3.4. *Ο χώρος μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ είναι διαχωρίσιμος όταν υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων (E_n), που ανήκουν στην $\mathcal{A}$, ώστε η $\mathcal{A}$ να είναι η μικρότερη $\sigma-$άλγεβρα που παράγεται από τα E_n.*

Πρόταση 3.5. *Έστω E διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $F \subset E$ για τυχαίο F. Τότε ο F θα είναι επίσης διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του E και (α_m) μία ακολουθία θετικών αριθμών, τέτοια ώστε $\alpha_m \to 0$.
Επιλέγουμε στοιχείο $\alpha_{m,n} \in B(u_n, \alpha_m) \cap F$ όταν η τομή δεν είναι το κενό σύνολο. Το σύνολο $(\alpha_{m,n})$ που προκύπτει, θα είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον F.

□

Θεώρημα 3.18. *Αν ο Ω είναι διαχωρίσιμος χώρος μέτρου, τότε και ο $L^p(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμος για κάθε $p \in [1,\infty)$.*

Θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση όπου $\Omega = \mathbb{R}^N$. Αν ο $L^p(\mathbb{R}^N)$ είναι διαχωρίσιμος, τότε και ο $L^p(\Omega)$ θα είναι διαχωρίσιμος, επειδή μέσω κανονικής ισομετρίας θα είναι υπόχωρος του $L^p(\mathbb{R}^N)$(βλ. Πρόταση 3.5).

Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση $u \mapsto \tilde{u}$ με:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \smallsetminus \Omega \end{cases}, \qquad u \in L^p(\Omega),$$

είναι γραμμική ισομετρία από τον $L^p(\Omega)$ στον $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε την αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{R}$ των ορθογωνίων του $\mathbb{R}^N$ με στοιχεία τα

$$R = \prod_{k=1}^{N} (\alpha_k, \beta_k) \ , \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q} \ , \quad N \geq 1.$$

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ πάνω στο $\mathbb{Q}$ που παράγεται από τις $\mathcal{X}_R$, $R \in \mathcal{R}$.

Ισχυριζόμαστε ότι ο $\mathcal{E}$ είναι πυκνός στον $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$, τέτοια ώστε $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$ (βλ. Θ.3.15).

Έστω ακόμα $R \in \mathcal{R}$, ένας κύβος που περιέχει τον φορέα της f_1, *supp* f_1. Για $\delta > 0$ κατασκευάζουμε συνάρτηση $f_2 \in \mathcal{E}$, τέτοια ώστε $\|f_1 - f_2\|_\infty < \delta$ και $f_2 \equiv 0$ στο R^c. Έπειτα, χωρίζουμε το R σε κύβους R_i, $1 \leq i \leq k$, ώστε να ισχύει:

$$\|f_1 - f_2\|_{L^\infty(R_i)} < \delta, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Έχουμε δηλαδή ότι:

$$\|f_1 - f_2\|_p \leq \|f_1 - f_2\|_\infty |R|^{1/p} < \delta |R|^{1/p}.$$

Επομένως, για $\delta |R|^{1/p} < \varepsilon$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\|f - f_2\|_p \leq \|f - f_1\|_p + \|f_2 - f_1\|_p < 2\varepsilon.$$

$\square$

3.3 Μελέτη του $L^1(\Omega)$.

Λήμμα 3.19. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου μ. Τότε, υπάρχουν αύξουσα ακολουθία (Ω_n) μετρήσιμων συνόλων και $\theta \in L^2(\Omega)$ ώστε:*

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \ , \qquad \mu(\Omega_n) < \infty \ , \qquad \inf_{\Omega_n} \theta > 0, \quad n \geq 1.$$

Απόδειξη. Έστω $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n μετρήσιμο με $\mu(A_n) < \infty$, $n \geq 1$. Θέτουμε $\Omega_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, $n \geq 1$.
Τότε,

$$(\Omega_n) \text{ αύξουσα }, \qquad \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \qquad \text{και} \qquad \mu(\Omega_n) < \infty, \ n \geq 1.$$

Θέτουμε ακόμη $E_1 = \Omega_1$, $E_n = \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}$, $n \geq 2$. Τότε,

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \qquad \Omega_n = \bigcup_{j=1}^{n} E_j, \ n \geq 1, \qquad E_i \cap E_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j.$$

Έστω $(\alpha_n) \subset (0, \infty)$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$.

Θέτουμε $\beta_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{1+\mu(E_n)}}$, $n \geq 1$ και ορίζουμε:

$$\theta : \Omega \to \ (0, \infty), \quad \text{με} \ \ \theta|_{E_n} = \beta_n, \quad n \geq 1.$$

Τότε $\inf_{\Omega_n} \theta = \min_{j=1}^{n} \ \beta_j > 0, \quad \forall n \geq 1$.

Η θ είναι μετρήσιμη. Πράγματι· έστω $S_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathcal{X}_{E_j}$, $n \geq 1$.
Τότε, εάν $x \in \Omega$ υπάρχει μοναδικό $j \geq 1$ ώστε $x \in E_j$ και $\forall n > j$ ισχύει ότι:

$$S_n(x) = \beta_j = \theta(x) \quad \Rightarrow \quad S_n(x) \to \theta(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Τέλος, $\theta \in L^2(\Omega)$ διότι:

$$\int_{\Omega} \theta^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \theta^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(E_n)}{1+\mu(E_n)} \alpha_n^2 < \infty \ .$$

□

Θεώρημα 3.20 (Θεώρημα αναπαράστασης Riesz). *Έστω* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου. Για κάθε* $\Phi \in (L^1(\Omega))^\star$ *υπάρχει μοναδικό* $u \in L^\infty(\Omega)$ *τέτοιο ώστε:*

$$\langle \Phi, f \rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^1$$

και

$$\|\Phi\|_{(L^1)^\star} = \|u\|_\infty .$$

Όπως είδαμε και στους χώρους $L^p, 1 < p < \infty$, *έτσι και εδώ το παραπάνω θεώρημα μας δείχνει ότι κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον* L^1 *αναπαρίσταται ως ολοκλήρωμα και ότι υπάρχει γραμμική επί ισομετρία από τον* $(L^1)^\star$ *στον* L^∞.

$$\boxed{(L^1)^\star = L^\infty.}$$

Απόδειξη. Έστω (Ω_n) ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $\theta \in L^2(\Omega)$ όπως στο Λήμμα 3.19. Θέτουμε $\mathcal{X}_n = \mathcal{X}_{\Omega_n},\ n \geq 1$.
Αποδεικνύουμε τη μοναδικότητα. Έστω $u \in L^\infty(\Omega)$ που ικανοποιεί

$$\int uf = 0, \quad \forall f \in L^1.$$

Θέτοντας $f = \mathcal{X}_n sign(u),\ n \geq 1$, παίρνουμε

$$\int \mathcal{X}_n |u| \ \Rightarrow\ \int_{\Omega_n} |u|\ = 0, \ \ \forall n \ \Rightarrow\ u = 0, \text{ σ.π. στο } \Omega.$$

Ακολουθεί η απόδειξη της ύπαρξης u. Η απεικόνιση

$$L^2(\Omega) \ni f \mapsto \langle \Phi, \theta f \rangle ,$$

είναι ένα γραμμικό συνεχές συναρτησιακό, οπότε $\exists v \in L^2(\Omega)$ ώστε

$$\langle \Phi, \theta f \rangle = \int vf \ , \quad \forall f \in L^2(\Omega). \tag{21}$$

Θέτουμε $u = \frac{v}{\theta}$. Επειδή $\theta > 0$ στο Ω, η u είναι καλώς ορισμένη και μετρήσιμη.

__**Ισχυρισμός 1**__ : $\forall n \geq 1, \ \ \forall g \in L^{\infty}(\Omega)$, ισχύει:

$$u\mathcal{X}_n g \in L^1(\Omega) \ \text{ και } \ \langle \Phi, \mathcal{X}_n g \rangle = \int_{\Omega} u\mathcal{X}_n g \ . \tag{22}$$

Πράγματι· έστω $n \geq 1$ και $g \in L^{\infty}(\Omega)$. Τότε,

$$\int_{\Omega} |u\mathcal{X}_n g| \ = \int_{\Omega_n} |u||g| \ \leq \frac{\|g\|_{\infty}}{\left(\inf\limits_{\Omega_n} \theta\right)} \int_{\Omega_n} |v|$$

$$\overset{(\text{Hölder})}{\leq} \ \frac{\|g\|_{\infty}}{\left(\inf\limits_{\Omega_n} \theta\right)} \ \mu(\Omega_n)^{1/2} \left(\int_{\Omega_n} |v|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \ \frac{\|g\|_{\infty}}{\left(\inf\limits_{\Omega_n} \theta\right)} \ \mu(\Omega_n)^{1/2} \, \|v\|_2 \ < \infty.$$

Θέτουμε $f = \dfrac{\mathcal{X}_n g}{\theta}$. Η f είναι καλώς ορισμένη και μετρήσιμη. Επιπλέον,

$$\int_{\Omega} f^2 = \int_{\Omega_n} \frac{g^2}{\theta^2} \leq \ \frac{\|g\|_{\infty}{}^2}{\left(\inf\limits_{\Omega_n} \theta\right)^2} \ \mu(\Omega_n) < \infty \ \Rightarrow \ f \in L^2(\Omega).$$

Η σχέση (21) δίνει

$$\langle \Phi, \mathcal{X}_n g \rangle \ = \ \langle \Phi, \theta f \rangle \ = \ \int_{\Omega} vf \ = \ \int_{\Omega} \frac{v\mathcal{X}_n g}{\theta} \ = \ \int_{\Omega} u\mathcal{X}_n g \ .$$

Η απόδειξη του ισχυρισμού 1 ολοκληρώθηκε.

__**Ισχυρισμός 2**__ : $u \in L^{\infty}(\Omega)$ και $\|u\|_{\infty} \ \leq \ \|\Phi\|_{(L^1)^{\star}}$.

Πράγματι· έστω $C \geq \|\Phi\|_{(L^1)^{\star}}$ και $A = \{x \in \Omega : |u(x)| > C\}$. Υποθέτουμε ότι $\mu(A) > 0$. Τότε $\exists n \geq 1$ ώστε $\mu(A \cap \Omega_n) > 0$.

Θέτοντας $g = \mathcal{X}_A sign(u)$ στην (22) παίρνουμε

$$\int_{\Omega} u\mathcal{X}_n \mathcal{X}_A sign(u) \ = \ \langle \Phi, \mathcal{X}_n \mathcal{X}_A sign(u) \rangle \ ,$$

$$\Rightarrow \int_{A\cap\Omega_n} |u| \;\le\; \|\Phi\|_{(L^1)^\star}\, \|\mathcal{X}_n\mathcal{X}_A sign(u)\|_1 \;=\; \|\Phi\|_{(L^1)^\star}\;\mu(A\cap\Omega_n)$$

και επειδή $|u| > C$ πάνω στο A,

$$C\mu(A\cap\Omega_n) \;\le\; \|\Phi\|_{(L^1)^\star}\,\mu(A\cap\Omega_n) \;\Rightarrow\; C \le \|\Phi\|_{(L^1)^\star}\;,\ \text{άτοπο.}$$

Άρα $\mu(A) = 0$. Συνεπώς, το C είναι ουσιώδες φράγμα της u και

$$u \in L^\infty(\Omega) \quad \text{με} \quad \|u\|_\infty \le C.$$

Η τελευταία ισχύει $\forall\ C > \|\Phi\|_{(L^1)^\star}$, οπότε $\|u\|_\infty \le\ \|\Phi\|_{(L^1)^\star}$ και **η απόδειξη του Ισχυρισμού 2 ολοκληρώθηκε.**

Θα δείξουμε ότι η u έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. Έστω $h \in L^1(\Omega)$. Θέτουμε $g_n = T_n h,\ n \ge 1$. Τότε,

$$|g_n(x)| \le n,\ \ |g_n(x)| \le |h(x)|, \quad n \ge 1, \quad x \in \Omega$$

και επομένως $g_n \in L^\infty(\Omega),\ n \ge 1$. Επιπλέον, $\mathcal{X}_n(x)g_n(x) \to h(x),\ \ \forall x \in \Omega$. Πράγματι· έστω $x \in \Omega$. Επιλέγουμε $n_0 \ge 1$ τ.ω. $x \in \Omega_{n_0}$.

Τότε, $\ \forall n > \max\{n_0, |h(x)|\}$ έχουμε

$$\Omega_{n_0} \subset \Omega_n \qquad \text{και} \qquad \mathcal{X}_n(x)g_n(x) \;=\; h(x).$$

Επιπλέον,

$$|\mathcal{X}_n g_n - h| \le 2|h|.$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι:

$$\mathcal{X}_n g_n \overset{L^1}{\to} h.$$

Ακόμη,

$$\left|\int_\Omega u\mathcal{X}_n g_n - \int_\Omega uh\right| \;\le\; \|u\|_\infty\, \|\mathcal{X}_n g_n - h\|_1 \to 0.$$

Οπότε,

$$\int_\Omega u\mathcal{X}_n g_n \to \int_\Omega uh\ .$$

Εφαρμόζοντας την (22) για “g” = g_n και παίρνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\langle \Phi, h \rangle = \int_\Omega uh \ , \quad \forall h \in L^1(\Omega).$$

Τέλος, $\forall h \in L^1$, έχουμε ότι

$$|\langle \Phi, f \rangle| \ \le \ \|u\|_\infty \|h\|_1 \ \Rightarrow \ \|\Phi\|_{(L^1)^\star} \le \|u\|_\infty$$

και από τον Ισχυρισμό 2 έπεται ότι

$$\boxed{\|u\|_\infty \ = \ \|\Phi\|_{(L^1)^\star}}$$

□

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο $L^1(\Omega)$ είναι ανακλαστικός, μόνο στην περίπτωση που είναι πεπερασμένης διάστασης.

Θα χρειαστούμε κάποια προετοιμασία.

Σε ό,τι ακολουθεί, ο $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου.

Ορισμός 3.5. *Έστω $E \in \mathcal{A}$. Το E ονομάζεται άτομο αν $\mu(E) > 0$ και $\forall B \subset E$ μετρήσιμο με $\mu(B) < \mu(E)$, ισχύει $\mu(B) = 0$.*

Λήμμα 3.21. *Έστω $A \in \mathcal{A}$ πεπερασμένου μέτρου που περιέχει άτομο.Τότε, το A περιέχει άτομο μεγίστου μέτρου, δηλαδή υπάρχει άτομο $E \subset A$ τ.ω. $\mu(F) \le \mu(E)$, για κάθε άτομο $F \subset A$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αντιθέτως ότι για κάθε άτομο $E \subset A$, υπάρχει άτομο $F \subset A$ τ.ω. $\mu(F) > \mu(E)$.

Έστω $E_0 \subset A$ άτομο. Με βάση το παραπάνω, μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία ατόμων (E_n) στο A τ.ω.

$$\mu(E_0) \ < \ \mu(E_1), \quad \mu(E_n) \ < \ \mu(E_{n+1}), \quad \forall \ n \ge 1.$$

Παρατηρούμε ότι $\mu(E_i \cap E_j) = 0$, για $i \ne j$.

Πράγματι, έστω $i < j$. Τότε, $\mu(E_i \cap E_j) \le \mu(E_i) \ < \ \mu(E_j)$ και επειδή E_j άτομο, παίρνουμε ότι $\mu(E_i \cap E_j) = 0$.

Συνεπώς,

$$\mu(A) \ge \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) - \sum_{i \ne j}^\infty \mu(E_i \cap E_j) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) \ge \mu(E_0) \sum_{n=1}^\infty 1 = \infty,$$

άτοπο. □

Λήμμα 3.22. *Έστω $A \in \mathcal{A}$ θετικού πεπερασμένου μέτρου.*

(i) *Εάν το A δεν είναι άτομο, τότε υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ τ.ω.*

$$B \subset A, \quad 0 < \mu(B) \leq \frac{1}{2}\mu(A).$$

(ii) *Εάν το A δεν περιέχει άτομα, τότε $\forall\, \varepsilon > 0$, υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ τ.ω.*

$$B \subset A, \quad 0 < \mu(B) < \varepsilon.$$

Απόδειξη. **(i)** Υπάρχει $B_1 \in \mathcal{A}$ τ.ω. $B_1 \subset A$, $0 < \mu(B_1) < \mu(A)$.

— Εάν $\mu(B_1) \leq \frac{1}{2}\mu(A)$, θέτουμε $B = B_1$.

— Εάν $\mu(B_1) > \frac{1}{2}\mu(A)$, θέτουμε $B = A \setminus B_1$. Τότε, $0 < \mu(B) < \frac{1}{2}\mu(A)$.

(ii) Λόγω του (i), υπάρχει $C_1 \in \mathcal{A}$ τ.ω.

$$C_1 \subset A, \quad 0 < \mu(C_1) \leq \frac{1}{2}\mu(A).$$

Επειδή το C_1 δεν είναι άτομο, εφαρμόζοντας ξανά το (i), υπάρχει $C_2 \in \mathcal{A}$ τ.ω.

$$C_2 \subset C_1, \quad 0 < \mu(C_2) \leq \frac{1}{2}\mu(C_1).$$

Επειδή το C_2 δεν είναι άτομο, εφαρμόζοντας ξανά το (i), υπάρχει $C_3 \in \mathcal{A}$ τ.ω.

$$C_3 \subset C_2, \quad 0 < \mu(C_3) \leq \frac{1}{2}\mu(C_2).$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε επαγωγικά μια ακολουθία $(C_n) \subset \mathcal{A}$ τ.ω.

$$\mu(C_1) \leq \frac{1}{2}\mu(A), \quad C_{n+1} \subset C_n\,, \quad 0 < \mu(C_{n+1}) \leq \frac{1}{2}\mu(C_n)\,, \quad n \geq 1.$$

Έπεται ότι $0 < \mu(C_n) \leq \frac{1}{2^n}\mu(A)$, $\forall\, n \geq 1$, οπότε $\mu(C_n) \to 0$.

Συνεπώς, εάν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \geq 1$ τ.ω. $0 < \mu(C_{n_0}) < \varepsilon$. Θέτουμε $B = C_{n_0}$.

□

Ορισμός 3.6. *Ο $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ καλείται ατομικός ανν κάθε μετρήσιμο σύνολο θετικού μέτρου περιέχει άτομο.*

Σημ. ότι από το Λήμμα 3.21 έπεται ότι σε έναν ατομικό χώρο μέτρου, κάθε μετρήσιμο σύνολο πεπερασμένου θετικού μέτρου περιέχει άτομο μεγίστου μέτρου.

Πρόταση 3.6. *Εάν $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ατομικός χώρος μέτρου με $0 < \mu(\Omega) < \infty$, τότε*

$$\Omega = B \cup C,$$

όπου το B γράφεται σαν το πολύ αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ατόμων και C μετρήσιμο σύνολο μέτρου 0.

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε επαγωγικά ακολουθίες $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μετρήσιμων συνόλων τ.ω. $B_0 = \Omega$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

(α) $E_n \subset B_n$ και στην περίπτωση που $\mu(B_n) > 0$, το E_n είναι άτομο μεγίστου μέτρου στο B_n .

(β) $B_{n+1} = B_n \setminus E_n$.

Η κατασκευή γίνεται επαγωγικά ως εξής:

Θέτουμε $B_0 = \Omega$ και επιλέγουμε $E_0 \subset B_0$ άτομο μεγίστου μέτρου στο B_0 .

Υποθέτουμε ότι έχουν κατασκευαστεί τα E_k , B_k , $0 \le k \le n$, με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Θέτουμε $B_{n+1} = B_n \setminus E_n$.

— Εάν $\mu(B_{n+1}) = 0$, θέτουμε $E_{n+1} = B_{n+1}$.

— Εάν $\mu(B_{n+1}) > 0$, επιλέγουμε άτομο $E_{n+1} \subset B_{n+1}$ μεγίστου μέτρου στο B_{n+1} .

Από τον τρόπο κατασκευής προκύπτει ότι $B_{n+1} \subset B_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον, $E_i \cap E_j = \emptyset$, για $i \neq j$. Πράγματι, εάν $i < j$ τότε $i + 1 \le j$ και συνεπώς, $E_j \subset B_j \subset B_{i+1} \subset \Omega \setminus E_i$.

Τέλος, επαγωγικά προκύπτει εύκολα ότι για κάθε $n \ge 1$,

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} E_k \cup B_n .$$

1η περίπτωση: $\mu(B_n) > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Τότε, E_n άτομο μεγίστου μέτρου στο B_n , $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $C = \Omega \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$. Από τον τρόπο κατασκευής των (B_n), (E_n) κι επαγωγικά, προκύπτει εύκολα ότι

$$C \subset B_n , \quad \forall\, n \ge 1.$$

Ισχυριζόμαστε ότι $\mu(C) = 0$. Πράγματι, έστω $\mu(C) > 0$. Επιλέγουμε $E \subset C$ άτομο. Τότε, $\forall\ n \geq 1$, έχουμε $E \subset B_n$ και άρα $\mu(E_n) \geq \mu(E)$. Επομένως,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \geq \mu(E) \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

άτοπο.

Επειδή $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \cup C$, έπεται το συμπέρασμα της πρότασης.

2η περίπτωση: $\mu(B_n) = 0$, για κάποιο $n \geq 1$.

Έστω n_0 ο ελάχιστος τέτοιος $n \geq 1$. Τότε, για $0 \leq k \leq n_0 - 1$, το B_k είναι θετικού μέτρου, οπότε το E_k είναι άτομο. Επιπλέον,

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{n_0-1} E_k \cup B_{n_0}\ .$$

Οπότε και σε αυτή την περίπτωση προκύπτει το συμπέρασμα της πρότασης.
□

Πόρισμα 3.1. *Εάν $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ - πεπερασμένος ατομικός χώρος μέτρου με $\mu(\Omega) > 0$, τότε*

$$\Omega = B \cup C,$$

όπου το B γράφεται σαν το πολύ αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ατόμων και C μετρήσιμο σύνολο μέτρου 0.

Απόδειξη. Είναι

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n\ , \quad \mu(\Omega_n) < \infty, \quad n \geq 1.$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.6 σε κάθε ένα από τα $\Omega_n\ , n \geq 1$ που έχει θετικό μέτρο, προκύπτει το συμπέρασμα. □

Λήμμα 3.23. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f \in L^1(\Omega)$. Εάν E άτομο, τότε η f είναι σ.π. σταθερή πάνω στο E και*

$$\int_E |f| d\mu = \left| \int_E f d\mu \right|.$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$c = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu\ , \quad E_c^+ = \{x \in E : f(x) > c\}, \quad E_c^- = \{x \in E : f(x) < c\}.$$

Εάν υποθέσουμε ότι $\mu(E_c^+) > 0$, τότε $\mu(E_c^+) = \mu(E)$ (αφού E άτομο) οπότε

$$c\mu(E) = \int_E f d\mu = \int_{E_c^+} f d\mu > c\mu(E_c^+) = c\mu(E),$$

άτοπο. Άρα, $\mu(E_c^+) = 0$.

Όμοια, προκύπτει ότι $\mu(E_c^-) = 0$ και επομένως $f = c$ σ.π. στο E.

Τέλος,

$$\left|\int_E f d\mu\right| = |c\mu(E)| = |c|\mu(E) = \int_E |f| d\mu.$$

□

Θεώρημα 3.24. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ - πεπερασμένος ατομικός χώρος μέτρου με $\mu(\Omega) > 0$. Τότε, ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:*

- *ο $L^1(\Omega)$ είναι ισομετρικός με τον l^1.*
- *$\Omega = B \cup C$, όπου το B γράφεται σαν* **πεπερασμένη** *ένωση ξένων ανά δύο ατόμων και C μετρήσιμο σύνολο μέτρου 0. Στην περίπτωση αυτή, ο $L^1(\Omega)$ είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη. Κατ' αρχήν σημειώνουμε ότι εάν ισχύει η 2η περίπτωση, ο $L^1(\Omega)$ είναι πεπερασμένης διάστασης.

Πράγματι, έστω ότι για κάποιο $n \geq 1$, ισχύει

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \cup C,$$

όπου E_k , $1 \leq k \leq n$ ξένα ανά δύο άτομα και C μετρήσιμο σύνολο μέτρου 0

Με βάση το Λήμμα 3.23, προκύπτει εύκολα ότι ο τελεστής $T : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}^n$ με

$$T(f) = \left(\int_{E_k} f d\mu\right)_{1 \leq k \leq n}, \quad f \in L^1(\mu)$$

είναι γραμμική ισομετρία.

Σημειώνουμε ότι εδώ εφοδιάζουμε τον $\mathbb{R}^n$ με τη νόρμα $\|\xi\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|$, $\forall\ \xi = (\xi_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$.

Στη συνέχεια, αποκλείοντας τη 2η περίπτωση, το Πόρισμα 3.1 μας δίνει ότι

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \cup C,$$

όπου $E_n\ , n \in \mathbb{N}$ ξένα ανά δύο άτομα και $C \in \mathcal{A}$ μέτρου 0.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω σε συνδυασμό με το Λήμμα 3.23 έχουμε ότι $\forall\ f \in L^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega |f| d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f| d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{E_n} f d\mu \right| .$$

Προκύπτει άμεσα ότι ο τελεστής $T : L^1(\Omega) \to l^1$ με

$$T(f) = \left(\int_{E_n} f d\mu \right)_{n \in \mathbb{N}} , \quad f \in L^1(\mu)$$

είναι γραμμική ισομετρία.

Ο T είναι και επί. Πράγματι, θεωρούμε $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ και ορίζουμε $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$f\ |_{E_n} = \frac{a_n}{\mu(E_n)}\ , \quad n \in \mathbb{N}, \quad f\ |_C = 0.$$

Τότε,

$$\int_\Omega |f| d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f| d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \quad \Rightarrow f \in L^1(\Omega)$$

και $T(f) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Θεώρημα 3.25. (Eberlein) *Αν ο E είναι ανακλαστικός χώρος Banach και (x_n) μία φραγμένη ακολουθία στον E, τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{n_k}) που συγκλίνει στην ασθενή τοπολογία.*

Πρόταση 3.7. *Ο l^1 δεν είναι ανακλαστικός.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι ο l^1 είναι ανακλαστικός. Επιλέγουμε την ακολουθία

$$\varepsilon_n = (0, 0,\ \dots\ , \underset{(n)}{1}, 0,\ \dots\ )\ ,$$

που αποτελεί τη φυσική βάση του l^1. Με βάση το Θεώρημα 3.25, υπάρχουν υπακολουθία $(\varepsilon_{n_k})_{k\geq 1}$ της (ε_n) και $x \in l^1$ ώστε,

$$\langle \varepsilon_{n_k}, \phi \rangle \overset{k\to\infty}{\to} \langle x, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in l^\infty\ .$$

Επιλέγοντας

$$\phi_j = (0, 0, \dots, \underset{(j)}{1}, 1, 1,\ \dots)\ ,$$

παρατηρούμε πως για σταθερό j και $k > j$ προκύπτει ότι:

$$\langle \varepsilon_{n_k}, \phi_j \rangle = 1 \ \Rightarrow \ \langle x, \phi_j \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \varepsilon_{n_k}, \phi_j \rangle = 1.$$

Ταυτόχρονα, επειδή $x \in l^1$, ισχύει

$$\lim_{j\to\infty} \langle x, \phi_j \rangle = \lim_{j\to\infty} \sum_{m=j}^{\infty} x(m) = 0,$$

άτοπο.

$\square$

Θεώρημα 3.26. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ - πεπερασμένος χώρος μέτρου με $\mu(\Omega) > 0$. Ο $L^1(\Omega)$ είναι ανακλαστικός ανν $\Omega = B \cup C$, όπου το B γράφεται σαν πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο ατόμων και C μετρήσιμο σύνολο μέτρου 0 (δηλ. ανν ο $L^1(\Omega)$ είναι πεπερασμένης διάστασης).*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο $L^1(\Omega)$ είναι ανακλαστικός.
Εξετάζουμε ξεχωριστά τις δύο επόμενες περιπτώσεις:

(α) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists\, \omega \subset \Omega$ μετρήσιμο με $0 < \mu(\omega) < \varepsilon$.
(β) $\exists \varepsilon > 0$, τ.ω. $\mu(\omega) \geq \varepsilon$, για κάθε μετρήσιμο $\omega \subset \Omega$ με $\mu(\omega) > 0$.

(α) **:** Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να επιλέξουμε ακολουθία (α_k) μετρήσιμων συνόλων τ.ω.

$$0 < \mu(\alpha_k) < \left(\frac{1}{2}\right)^k, \ \forall k \geq 1.$$

Θέτουμε $\omega_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \alpha_k$, $\forall n \geq 1$. Τότε, η (ω_n) είναι φθίνουσα και

$$\mu(\omega_n) > 0, \quad n \geq 1 \quad \text{και} \quad \mu(\omega_n) \to 0.$$

Έπεται ότι $\mu(\omega) = 0$, όπου $\omega = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \omega_n$.

Εάν $\mathcal{X}_n = \mathcal{X}_{\omega_n}$, $n \geq 1$, τότε, $\mathcal{X}_n \to 0$ σ.π.
[Πράγματι, αν $x \notin \omega$, τότε υπάρχει $n_0 \geq 1$ τ.ω. $x \notin \omega_n$, $\forall\, n \geq n_0$.]

Θέτουμε $u_n = \dfrac{\mathcal{X}_n}{\|\mathcal{X}_n\|_1}$, $n \geq 1$. Προφανώς, $\|u_n\|_1 = 1$, $n \geq 1$.

Περνώντας σε υπακολουθίες αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (u_n) συγκλίνει ασθενώς σε κάποια $u \in L^1(\Omega)$ (βλ. Θ.3.25), δηλαδή:

$$\int u_n \phi \to \int u\phi \ , \quad \forall \phi \in L^\infty \ .$$

Διαλέγουμε $\phi = \mathcal{X}_j \in L^\infty$ και παρατηρούμε πως για τυχαίο j ισχύει:

$$\int u_n \mathcal{X}_j = \int \frac{\mathcal{X}_n \mathcal{X}_j}{\|\mathcal{X}_n\|_1} = \int_{\omega_n} \frac{1}{\|\mathcal{X}_n\|_1} = 1, \qquad \forall n > j \ ,$$

$$\Rightarrow \int u\mathcal{X}_j = \lim_{n\to\infty} \int u_n \mathcal{X}_j = 1 \ ,$$

ενώ από το Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι:

$$\lim_{j\to\infty} \int u\mathcal{X}_j = 0 \ ,$$

άτοπο.

(β) **:** Σε αυτή την περίπτωση και με βάση το Λήμμα 3.22, κάθε μετρήσιμο σύνολο θετικού και πεπερασμένου μέτρου περιέχει άτομο. Επειδή ο Ω είναι $\sigma-$ πεπερασμένος, έπεται ότι το ίδιο ισχύει για κάθε μετρήσιμο σύνολο θετικού μέτρου και άρα ο $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ατομικός. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.24, ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

- ο $L^1(\Omega)$ είναι ισομετρικός με τον l^1.
- $\Omega = B \cup C$, όπου το B γράφεται σαν πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο ατόμων και C μετρήσιμο σύνολο μέτρου 0.

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι ο $L^1(\Omega)$ είναι ανακλαστικός, οι $L^1(\Omega)$, l^1 δεν μπορεί να είναι ισομετρικοί, διότι ο l^1 δεν είναι ανακλαστικός (βλ. Πρόταση 3.7).

Τελικά, απομένει μόνο το δεύτερο από τα παραπάνω και εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη.

□

3.4 Μελέτη του $L^{\infty}(\Omega)$.

Σε ό,τι ακολουθεί, ο $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ είναι σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου μ.

Έχουμε ήδη δείξει ότι οι $(L^1(\Omega))^{\star}$, $L^{\infty}(\Omega)$ είναι ισομετρικοί.

Παραθέτουμε δύο θεωρήματα και ένα λήμμα μέσω των οποίων θα μπορέσουμε να αντλήσουμε σημαντικές πληροφορίες για τις ιδιότητες του $L^{\infty}(\Omega)$.

Θεώρημα 3.27 (**Banach – Alaoglu – Bourbaki**). *Έστω E χώρος Banach. Η κλειστή μοναδιαία μπάλα*

$$B_{E^{\star}} = \{f \in E^{\star},\ \|f\| \leq 1\},$$

είναι συμπαγής στην ασθενή* τοπολογία $\sigma(E^{\star}, E)$.

Θεώρημα 3.28. *Ένας χώρος Banach E είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν ο δυϊκός του, $E^{\star}$, είναι ανακλαστικός.*

Λήμμα 3.29. *Έστω E διαχωρίσιμος χώρος Banach και (f_n) φραγμένη ακολουθία στον $E^{\star}$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(f_{n_k}) \in E^{\star}$ που συγκλίνει στην ασθενή* τοπολογία $\sigma(E^{\star}, E)$.*

Οπότε για τον L^{∞} θα ισχύουν:

Πόρισμα 3.2. *Η κλειστή μοναδιαία μπάλα $B_{L^{\infty}}$ είναι συμπαγής στην ασθενή* τοπολογία $\sigma(L^{\infty}, L^1)$.*

Πόρισμα 3.3. *Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^N$ το μέτρο Lebesgue και έστω Ω μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Τότε ο $L^1(\Omega)$ θα είναι διαχωρίσιμος (βλ. Θ.3.18) και για κάθε φραγμένη ακολουθία (f_n) στον $L^{\infty}(\Omega)$ θα υπάρχει υπακολουθία (f_{n_k}) και $f \in L^{\infty}(\Omega)$ ώστε να ισχύει $f_{n_k} \rightharpoonup f$ στην ασθενή* τοπολογία $\sigma(L^{\infty}(\Omega), L^1(\Omega))$.*

Παρατήρηση 3.3. *Απόρροια του Θεωρήματος 3.28 είναι ότι ο $L^\infty(\Omega)$ είναι ανακλαστικός μόνο όταν ο $L^1(\Omega)$ είναι ανακλαστικός, δηλαδή μόνο στην τετριμμένη περίπτωση όπου για κάποιο μηδενοσύνολο $C \subset \Omega$, το $\Omega \smallsetminus C$ αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος ατόμων (Θ.3.26). Κατά συνέπεια, στη μη τετριμμένη περίπτωση, ο $(L^\infty)^\star$, "περιέχει" γνήσια τον L^1 αφού $L^1 \subset (L^1)^{\star\star} \equiv (L^\infty)^\star$.*

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι ο $L^\infty(\Omega)$ δεν είναι διαχωρίσιμος (εκτός φυσικά αν είναι πεπερασμένης διάστασης). Θα χρειαστούμε κάποια προετοιμασία.

Λήμμα 3.30. *Έστω E τοπολογικός χώρος και $(O_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών μη κενών συνόλων τέτοια ώστε:*
(α) $O_i \cap O_j = \varnothing$, για $i \neq j$
(β) Το I είναι **υπεραριθμήσιμο**.
Τότε ο E δεν είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο E είναι διαχωρίσιμος και το σύνολο $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πυκνό σε αυτόν. Για κάθε $i \in I$, επιλέγουμε $n(i)$ ώστε $u_{n(i)} \in O_i$.

Η απεικόνιση $i \mapsto n(i)$ είναι 1-1. Πράγματι· αν $u_{n(i)} = u_{n(j)}$, τότε $O_i \cap O_j \neq \varnothing$ και λόγω της υπόθεσης (α) θα έχουμε ισότητα δεικτών, δηλαδή $i = j$. Συνεπώς, το I καθίσταται αριθμήσιμο, άτοπο.

□

Λήμμα 3.31. *Έστω $A \subset \Omega$ μετρήσιμο θετικού πεπερασμένου μέτρου που δεν περιέχει άτομα και $0 < t < \mu(A)$. Τότε, υπάρχει $S \subset A$ μετρήσιμο τ.ω.*

$$\frac{t}{2} < \mu(S) \leq t.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Θέτουμε

$$\mathcal{S} = \{S \subset A : S \text{ μετρήσιμο με } \mu(S) \leq t\}.$$

$\mathcal{S} \neq \varnothing$, λόγω του Λήμματος 3.22/(ii). Λόγω της υπόθεσης, $\mu(S) \leq t/2$, $\forall\ S \in \mathcal{S}$. Θέτουμε:

$$\theta = \sup_{S\in\mathcal{S}} \mu(S).$$

Είναι σαφές ότι $\theta \leq t/2$.

Εάν $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, τότε

$$\mu(S_1 \cup S_2) \leq \mu(S_1) + \mu(S_2) \leq 2\theta \leq t \quad \Rightarrow \quad S_1 \cup S_2 \in \mathcal{S}.$$

Επαγωγικά προκύπτει εύκολα ότι πεπερασμένες ενώσεις μελών της $\mathcal{S}$ είναι μέλη της $\mathcal{S}$.

$\forall\, n \geq 1$, επιλέγουμε $S_n \in \mathcal{S}$ τ.ω.

$$\theta - \frac{1}{n} < \mu(S_n) \leq \theta.$$

Θέτουμε $T_n = \bigcup_{k=1}^{n} S_k \in \mathcal{S}, \quad n \geq 1$. Τότε, (T_n) αύξουσα οπότε

$$\lim_n \mu(T_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right) = \mu(S), \quad \text{όπου} \quad S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\,.$$

Επιπλέον,

$$\theta - \frac{1}{n} < \mu(S_n) \leq \mu(T_n) \leq \theta, \quad n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_n \mu(T_n) = \theta.$$

Έπεται ότι $\mu(S) = \theta \leq t/2$. Επιπλέον,

$$\mu(A \setminus S) = \mu(A) - \mu(S) \geq t/2 > 0,$$

ενώ το $A \setminus S$ δεν περιέχει άτομα.

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.22, υπάρχει $B \subset A \setminus S$ μετρήσιμο τ.ω. $0 < \mu(B) < t/2$.

Έχουμε

$$\mu(S \cup B) = \mu(S) + \mu(B) \leq t/2 + t/2 = t \Rightarrow S \cup B \in \mathcal{S}$$

και ταυτόχρονα, $\mu(S \cup B) = \mu(S) + \mu(B) > \mu(S) = \theta$, άτοπο.

$\square$

Πρόταση 3.8. *Έστω $A \subset \Omega$ μετρήσιμο, θετικού πεπερασμένου μέτρου που δεν περιέχει άτομα και $0 < t < \mu(A)$. Τότε, υπάρχει $B \subset A$ μετρήσιμο τ.ω.*

$$\mu(B) = t.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αντιθέτως ότι για κάθε $B \subset A$ μετρήσιμο, ισχύει $\mu(B) \neq t$.

Ισχυρισμός: Υπάρχει ακολουθία (S_n) ξένων ανά δύο μετρήσιμων υποσυνόλων του A τ.ω.

$$0 < t - \mu(S_n) < \sum_{k=1}^{n} \mu(S_k) < t, \quad \forall\; n \geq 1.$$

Η απόδειξη του Ισχυρισμού θα γίνει με επαγωγή στο $n \geq 1$.

- Σύμφωνα με το Λήμμα 3.31, υπάρχει $S_1 \subset A$ μετρήσιμο τ.ω.

  $$t/2 < \mu(S_1) \le t \quad \Rightarrow \quad t/2 < \mu(S_1) < t, \quad \text{λόγω της υπόθεσης.}$$

  Τότε, $0 < t - \mu(S_1) < \mu(S_1) < t$ και συνεπώς κατασκευάστηκε το S_1 .

- Έστω ότι για κάποιο $n \ge 1$, έχουν επιλεγεί S_1 , S_2 , $\ldots S_n$ ξένα ανά δύο μετρήσιμα υποσύνολα του A τ.ω.

  $$0 < t - \mu(S_l) < \sum_{k=1}^{l} \mu(S_k) < t, \quad \text{για όλα τα } l \text{ με } 1 \le l \le n.$$

  Έχουμε

  $$\mu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} S_k\right) = \mu(A) - \sum_{k=1}^{n} \mu(S_k) > t - \sum_{k=1}^{n} \mu(S_k) > 0.$$

  Σύμφωνα με το Λήμμα 3.31, υπάρχει $S_{n+1} \subset A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} S_k$ μετρήσιμο τ.ω.

  $$\frac{1}{2}\left[t - \sum_{k=1}^{n} \mu(S_k) \right] < \mu(S_{n+1}) \le t - \sum_{k=1}^{n} \mu(S_k)$$

  $$\Rightarrow \quad t - \mu(S_{n+1}) < \sum_{k=1}^{n+1} \mu(S_k) \le t.$$

  Αλλά, $\sum_{k=1}^{n+1} \mu(S_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} S_k\right) \ne t$, λόγω της υπόθεσης, οπότε

  $$0 < t - \mu(S_{n+1}) < \sum_{k=1}^{n+1} \mu(S_k) < t.$$

  Συνεπώς, κατασκευάστηκε και το S_{n+1} και **η απόδειξη του Ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.**

Από τις ανισότητες

$$0 < t - \mu(S_n) < \sum_{k=1}^{n} \mu(S_k) < t, \quad \forall\ n \ge 1,$$

προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k)$ συγκλίνει, οπότε $\lim_n \mu(S_n) = 0$ και άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k) = t \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) = t,$$

γεγονός που αντιφάσκει με την αρχική μας υπόθεση.

$\square$

Θεώρημα 3.32. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας σ - πεπερασμένος χώρος μέτρου. Τότε, ο $L^{\infty}(\Omega)$ δεν είναι διαχωρίσιμος (εκτός αν είναι πεπερασμένης διάστασης).*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο $L^{\infty}(\Omega)$ δεν είναι πεπερασμένης διάστασης. Τότε και ο $L^1(\Omega)$ δεν είναι πεπερασμένης διάστασης.

Ισχυρισμός: Υπάρχει υπεραριθμήσιμη οικογένεια μετρήσιμων συνόλων τ.ω. ανά δύο τα σύνολα της οικογένειας να έχουν συμμετρική διαφορά θετικού μέτρου.

[Υπενθυμίζουμε ότι εάν A, B μετρήσιμα σύνολα, η συμμετρική τους διαφορά είναι το σύνολο $A \triangle B = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$.

Επιπλέον, $\mu(A \triangle B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, οπότε εάν $\mu(A \triangle B) = 0$, έπεται ότι $\mu(A) = \mu(A \cap B) = \mu(B)$.]

Απόδειξη του Ισχυρισμού:

1η περίπτωση: Ο Ω είναι ατομικός.

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι ο $L^1(\Omega)$ δεν είναι πεπερασμένης διάστασης, το Πόρισμα 3.1 και το Θεώρημα 3.24 συνεπάγονται ότι

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \cup C,$$

όπου E_n , $n \in \mathbb{N}$ ξένα ανά δύο άτομα και $C \in \mathcal{A}$ μέτρου 0.

Για κάθε μη κενό υποσύνολο M του $\mathbb{N}$, θέτουμε $\omega_M = \bigcup_{n \in M} E_n$.

Εάν M, M' διαφορετικά μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{N}$, τότε $M \triangle M' \neq \emptyset$.

Έστω $n_0 \in M \triangle M'$. Τότε,

$$\omega_M \triangle \omega_{M'} = \bigcup_{n \in M \triangle M'} E_n \supset E_{n_0} \quad \Rightarrow \quad \mu(\omega_M \triangle \omega_{M'}) \geq \mu(E_{n_0}) > 0.$$

Ειδικότερα, η απεικόνιση $M \to \omega_M$ είναι 1-1, οπότε η οικογένεια $\{\ \omega_M : M \in P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}\ \}$ είναι υπεραριθμήσιμη, καθώς η πληθικότητα του $P(\mathbb{N})$ είναι ίση με την πληθικότητα του συνεχούς.

2η περίπτωση: Ο Ω δεν είναι ατομικός.

Επειδή ο Ω είναι σ - πεπερασμένος, υπάρχει $A \subset \Omega$ μετρήσιμο θετικού πεπερασμένου μέτρου που δεν περιέχει άτομα.

Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.8, για κάθε $t \in (0,\ \mu(A))$, υπάρχει $\omega_t \subset A$ μετρήσιμο τ.ω. $\mu(\omega_t) = t$.

Για $t \neq s$, προφανώς $\mu(\omega_t) \neq \mu(\omega_s)$, οπότε $\mu(\omega_t \vartriangle \omega_s) > 0$.

Επιπλέον, η οικογένεια $\{\omega_t : t \in (0,\ \mu(A))\ \}$ είναι υπεραριθμήσιμη, αφού το διάστημα $(0,\ \mu(A))$ είναι υπεραριθμήσιμο και η απεικόνιση $t \to \omega_t$ είναι 1-1.

Η απόδειξη του Ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.

Σύμφωνα με τον Ισχυρισμό, υπάρχει υπεραριθμήσιμη οικογένεια μετρήσιμων συνόλων $(\omega_i)_{i\in I}$ του Ω τ.ω. $\mu(\omega_i \vartriangle \omega_j) > 0$, για $i \neq j$. Τότε,

$$\left\| \mathcal{X}_{\omega_i} - \mathcal{X}_{\omega_j} \right\|_\infty = 1, \quad \text{για} \quad i \neq j.$$

Θέτουμε

$$O_i = \left\{\ f \in L^\infty : \| f - \mathcal{X}_{\omega_i} \|_\infty\ < \frac{1}{2}\ \right\},\quad i \in I.$$

Προφανώς, η $\{O_i : i \in I\}$ είναι υπεραριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο ανοικτών μη κενών υποσυνόλων του $L^\infty(\Omega)$, οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 3.30, ο $L^\infty(\Omega)$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

$\square$

Συνοψίζοντας, παρουσιάζουμε τις βασικές ιδιότητες των χώρων $L^p(\Omega)$ όταν το Ω είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$:

	Ανακλαστικός	Διαχωρίσιμος	Δυϊκός Χώρος
$L^p, \quad 1 < p < \infty$	ΝΑΙ	ΝΑΙ	$L^{p'}$
L^1	ΟΧΙ	ΝΑΙ	L^∞
L^∞	ΟΧΙ	ΟΧΙ	$(L^\infty)^\star \supsetneq L^1$

4 Συνελίξεις και ομαλοποίηση

Στον $\mathbb{R}^N$ θεωρούμε το μέτρο Lebesgue το οποίο θα συμβολίζουμε με dx ή $|\cdot|$.

Θεώρημα 4.1 (**Young**). *Έστω συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ και $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ για $1 \le p \le \infty$. Τότε η συνάρτηση $y \mapsto f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}^N$, σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$. Ορίζουμε τη συνέλιξη των f και g ως:*

$$\boxed{(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(x-y)dy.}$$

Επιπροσθέτως η $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ και:

$$\boxed{\|f \star g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p\ .}$$

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις:

(i) $p = \infty$
(ii) $p = 1$
(iii) $1 < p < \infty$

Θέτουμε $F(x,y) = f(x-y)g(y),\ x,y \in \mathbb{R}^N$.

(i) Για $p = \infty$ το αποτέλεσμα είναι προφανές:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|dy \le \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|dy \le \|g\|_\infty \|f\|_1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$
$$\Rightarrow \|f \star g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty .$$

(ii) $p = 1$.

Θα επικαλεστούμε τα Θεωρήματα Tonelli (2.5) και Fubini (2.6). Έχουμε λοιπόν ότι σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}^N$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|dx = |g(y)|\, \|f\|_1 < \infty,$$
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|dx = \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\, \|f\|_1\, dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Από το Θεώρημα Tonelli συμπεραίνουμε ότι η $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini θα ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)| dy < \infty, \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{R}^N.$$

Επιπλέον,

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)| dy = \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)| dx = \|f\|_1 \|g\|_1 ,$$
$$\Rightarrow \|f \star g\|_1 \le \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

(iii) $1 < p < \infty$.

Θεωρούμε, σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$, την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ (βλ. περίπτωση (ii)), για την οποία ισχύει ότι:

— $|f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^N)$

— $|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^{p'}_y(\mathbb{R}^N)$

— $|f(x-y)||g(y)| \in L^1_y(\mathbb{R}^N)$, λόγω ανισότητας Hölder.

Έχουμε, σχεδόν $\forall x \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)| dy \overset{\text{(Hölder)}}{\le} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| dy \Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dy \Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \|f\|_1^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dy \Big)^{\frac{1}{p}} ,$$

$$\Rightarrow |(f \star g)(x)|^p \le \|f\|_1^{\frac{p}{p'}} (|f| \star |g|^p)(x) ,$$
$$\Rightarrow \quad \|f \star g\|_p^p \le \|f\|_1^{\frac{p}{p'}} \|f\|_1 \||g|^p\|_1 , \text{ (βλ. περίπτωση (ii))}$$
$$\Rightarrow \quad \|f \star g\|_p^p \le \|f\|_1^{\left(\frac{p}{p'}+1\right)} \|g\|_p^p ,$$
$$\Rightarrow \quad \|f \star g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p .$$

$\square$

Θεώρημα 4.2 (Ανισότητα **Young**). *Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ και $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ με $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 \ge 0$ και $1 \le r \le \infty$. Τότε $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ και :*

$$\boxed{\|f \star g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q .}$$

Ειδικότερα, αν $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *τότε:*

$$\boxed{\|f \star g\|_\infty \le \|f\|_p \, \|g\|_q \, .}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{q'} + \dfrac{1}{r} = 1$. Πολλαπλασιάζοντας με q και p αντίστοιχα προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$1 - \frac{q}{p'} = \frac{q}{r}, \qquad 1 - \frac{p}{q'} = \frac{p}{r}. \tag{23}$$

Συνεπώς για τις παρακάτω συναρτήσεις, θα ισχύει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$ ότι:

(i) $y \mapsto |f(x-y)|^{p/q'} \in L^{q'}(\mathbb{R}^N)$,

(ii) $y \mapsto |g(y)|^{q/p'} \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$,

(iii) $y \mapsto |f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r} \in L^{r}(\mathbb{R}^N)$ (βλ. Θ.4.1, περίπτωση (ii)).

Σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int |f(x-y)||g(y)|dy &= \int |f(x-y)|^{p/q'}|g(y)|^{q/p'}|f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r}dy \\
&\le \left(\int |f(x-y)|^p dy\right)^{1/q'} \cdot \left(\int |g(y)|^q dy\right)^{1/p'} \cdot \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy\right)^{1/r} \\
\text{(βλ. Πρόταση 3.2)} \quad &= \|f\|_p^{p/q'} \, \|g\|_q^{q/p'} \, [\, (|f|^p \star |g|^q)\,(x)\,]^{1/r} \, ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ |(f \star g)(x)|^r \le \|f\|_p^{pr/q'} \, \|g\|_q^{qr/p'} \, (|f|^p \star |g|^q)\,(x) \\
(\Theta.4.1) \ &\Rightarrow \ \|f \star g\|_r^r \le \|f\|_p^{pr/q'} \, \|g\|_q^{qr/p'} \, \|f\|_p^p \, \|g\|_q^q \\
(23) \ &\Rightarrow \ \|f \star g\|_r \le \|f\|_p \, \|g\|_q \, .
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.1. *Έστω* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *και* $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. *Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f \star g)h = \int_{\mathbb{R}^N} g(\check{f} \star h) \ , \quad \text{όπου } \check{f}(x) = f(-x) \ .$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $F(x,y) = f(x-y)g(y)h(x) \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ καθώς:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)| dx \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^N} (|f| \star |g|)(x)\ |h(x)|\ dx < \infty,$$

διότι $|f| \star |g| \in L^p$ (βλ. Θ.4.1) και $h \in L^{p'}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini (2.6), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (f \star g)(x)h(x)\ dx &= \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} g(y)dy \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(y)\ (\check{f} \star h)(y)dy\ .\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 4.1. *Ως φορέα της f, supp f, έχουμε συνηθίσει να καλούμε το συμπλήρωμα του μεγαλύτερου ανοικτού συνόλου στο οποίο η f μηδενίζεται, δηλαδή την κλειστότητα του $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$. Όταν όμως αντιμετωπίζουμε προβλήματα σε συναρτησιακούς χώρους που εργαζόμαστε με κλάσεις ισοδυναμίας ένας ορισμός όπως ο προηγούμενος καθίσταται προβληματικός.*

Αρκεί να αναλογιστούμε τι συμβαίνει στην περίπτωση που $f = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$. Με $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ εύκολα διακρίνουμε πως $f(\overline{\mathbb{Q}}) = 0$ σ.π. στο $\mathbb{R}$ ενώ $\overline{f(\mathbb{Q})} = \{1\}$.

Με τον επόμενο ορισμό επιδιώκουμε, όταν για δύο τυχαίες μετρήσιμες συναρτήσεις ισχύει ότι $f_1 = f_2$ σ.π., να ισχύει επίσης πως τα σύνολα supp f_1 και supp f_2 διαφέρουν το πολύ κατά ένα μηδενοσύνολο.

Πρόταση 4.2. *Έστω μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ και $(\omega_i)_{i\in I}$ η οικογένεια των ανοικτών συνόλων στο $\mathbb{R}^N$, με την ιδιότητα η f να μηδενίζεται σχεδόν παντού πάνω σε κάθε μέλος της οικογένειας αυτής. Τότε:*

$$f = 0 \quad \sigma.\pi \ \ \sigma\tau o \quad \omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i\ .$$

Το συμπλήρωμα του ω στο $\mathbb{R}^N$ θα είναι το νέο supp f.

Απόδειξη. Επειδή το σύνολο I δεν είναι υποχρεωτικά αριθμήσιμο, δεν είναι προφανές ότι $f = 0$ σ.π. στο ω. Επιλέγουμε αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών συνόλων (O_n) στο $\mathbb{R}^N$ για τα οποία κάθε ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}^N$ γράφεται ως ένωση αυτών. $\forall i \in I$, θέτουμε:

$$A_i = \{n \geq 1 :\ O_n \subset \omega_i\} \ \ \text{και} \quad B = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Τότε,

$$\omega_i = \bigcup_{n\in A_i} O_n, \quad \forall i \in I \quad \text{και} \quad \omega = \bigcup_{n\in B} O_n, \quad B \subset \mathbb{N}.$$

Εφ' όσον $f = 0$ σ.π. σε κάθε σύνολο O_n με $n \in B$ συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ σ.π. στο ω.

□

Σχόλιο: Το *supp* f είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο F με την ιδιότητα $f = \overline{0, \text{σ.π.}}$ στο F^c.

Πρόταση 4.3. *Ο κλασικός ορισμός του φορέα μίας συνάρτησης f συμπίπτει με το νέο (βλ. Παρατήρηση 4.1) όταν η f είναι συνεχής και supp $f \subset \Omega$, για ανοικτό $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.*

Απόδειξη. Έστω $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό με *supp* $f \subset \Omega$. Θα δείξουμε ότι:

$$supp\ f = \overline{\{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}}.$$

Θέτουμε:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^N : \ f(x) \neq 0\}.$$

Λόγω συνέχειας της f, το U είναι ανοικτό. Επιπλέον, $f = 0$ στο $\overline{U}^c \subset U^c$, οπότε:

$$supp\ f \subset \overline{U} \Rightarrow \ supp\ f \ \subset \ \overline{U} \cap \Omega \ \subset \ \overline{U \cap \Omega},$$

διότι το Ω είναι ανοικτό.

Ταυτόχρονα, το μέτρο Lebesgue του συνόλου $V = U \cap (supp f)^c$ είναι 0, αφού $f = 0$, σ.π. στο $(supp f)^c$. Αλλά το V είναι ανοικτό, οπότε θα πρέπει:

$$V = \varnothing \ \ \Rightarrow \ \ U \subset \ supp\ f \ \ \Rightarrow \ \ \overline{U} \ \subset \ supp\ f.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\boxed{supp\ f \ = \ \overline{U \cap \Omega}}\ ,$$

που είναι η αποδεικτέα.

□

Πρόταση 4.4. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ και $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ με $1 \leq p \leq \infty$. Τότε,*

$$\boxed{supp\ (f \star g) \subset \overline{supp\ f + supp\ g}.}$$

Απόδειξη. Όπως και στο Θεώρημα Young (4.1), θα ορίσουμε για σταθερό x, την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $y \mapsto f(x-y)g(y)$. Η $y \mapsto f(x-y)g(y)$ μηδενίζεται σ.π. στο $(x - supp\ f)^c \cup (supp\ g)^c$, οπότε:

$$(f \star g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int_{(x - supp\ f) \cap supp\ g} f(x-y)g(y)dy\ .$$

Αν $x \notin \overline{supp\ f + supp\ g}$, τότε $(x - supp\ f) \cap supp\ g = \emptyset$ και $(f \star g)(x) = 0$. Από τον ορισμό του φορέα έπεται ότι:

$$\boxed{supp\ (f \star g) \subset \overline{supp\ f + supp\ g}\ .}$$

□

Παρατήρηση 4.2. *Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν συμπαγείς φορείς τότε ο φορέας της $f \star g$ θα είναι επίσης συμπαγής. Στην περίπτωση που μόνο ο ένας φορέας εκ των δύο είναι συμπαγής, ο φορέας της $f \star g$ δεν είναι υποχρεωτικά συμπαγής.*

Ορισμός 4.1. *Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ και $1 \leq p \leq \infty$. Μία συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι στοιχείο του $L^p_{loc}(\Omega)$ αν η $f\mathcal{X}_K \in L^p(\Omega)$ για κάθε συμπαγές σύνολο K του Ω.*
Προφανώς, αν $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ τότε $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Πράγματι·

$$\|f\mathcal{X}_K\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |\mathcal{X}_K f| \ \leq \ |K|^{\frac{1}{p'}} \cdot \Big(\int_\Omega |f\mathcal{X}_K|^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

όπου $|\cdot|$ είναι το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}^N$.

Πρόταση 4.5. *Έστω $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ και $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Τότε η $(f \star g)(x)$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής $\ \forall x \in \mathbb{R}^N$.*

Απόδειξη. Καθώς η $y \mapsto f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}^N$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$, η $(f \star g)(x)$ θα είναι καλώς ορισμένη $\ \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Έστω τώρα $x_n \to x$ και K ένα συμπαγές σύνολο του $\mathbb{R}^N$ τ.ω. $x_n - supp\ f \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Παραδείγματος χάρη:

$$K = \big[\{x_n :\ n \geq 1\} \cup \{x\}\big] - supp\ f.$$

Αν $y \notin K$ ϑα ισχύει ότι,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n - y\} \cap supp\ f = \varnothing, \quad x - y \notin supp\ f,$$

οπότε,

$$f(x_n - y) = f(x - y) = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Ακόμη, η f ως συνεχής σε συμπαγή φορέα ϑα είναι ομοιόμορφα συνεχής, οπότε

$$|f(x_n - y) - f(x - y)| \leq \ \varepsilon_n \mathcal{X}_K(y), \quad \forall n, \ \forall y \in \mathbb{R}^N,$$

όπου

$$\varepsilon_n = \sup_{y \in K} |f(x_n - y) - f(x - y)| \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Τελικώς, πολλαπλασιάζοντας με $|g(y)|$ και ολοκληρώνοντας διαπιστώνουμε ότι:

$$|(f \star g)(x_n) - (f \star g)(x)| \leq \ \varepsilon_n \int_K |g(y)| \ dy \to 0.$$

□

Συμβολισμός 4. *Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Τότε συμβολίζουμε με:*

(i) $C(\Omega)$, *τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο Ω.*

(ii) $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, *τον χώρο των k φορές συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων.*

(iii) $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$, *τον χώρο των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων.*

(iv) $C_c(\Omega)$, *τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα μέσα στο Ω.*

(v) $C_c^k(\Omega) = C_c(\Omega) \cap C^k(\Omega)$.

(vi) $C_c^\infty(\Omega) = C_c(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

(vii) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_N} \right)$ *, όταν* $f \in C^1(\Omega)$.

$(viii)$ $D^a f = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} f$ *, όταν* $f \in C^k(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ *και* $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} a_i \leq k$.

Σχόλιο: Εάν $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, *τότε* $\nabla f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ *και* $supp(\nabla f) \ \subset \ supp\ f$.

Πρόταση 4.6. *Έστω* $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ *για* $k \geq 1$ *και* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$*. Τότε* $(f \star g) \in C^k(\mathbb{R}^N)$ *και*

$$\boxed{D^\alpha(f \star g) = (D^\alpha f) \star g \quad \forall \alpha \ \mu\epsilon \ |\alpha| \leq \ k \ .}$$

Ειδικότερα, αν $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *και* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$*, τότε* $(f \star g) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$*.*

Απόδειξη. Λόγω επαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $k = 1$. Για δοθέν $x \in \mathbb{R}^N$, θα δείξουμε ότι η $f \star g$ είναι διαφορίσιμη στο x και

$$\nabla(f \star g)(x) = (\nabla f) \star g(x).$$

Έστω $h \in \mathbb{R}^N$ με $|h| < 1$. Τότε,

$$\begin{aligned} &|f(x+h-y) - f(x-y) - h \cdot \nabla f(x-y)| \\ &\qquad \leq \int_0^1 |h \cdot \nabla f(x+sh-y) - h \cdot \nabla f(x-y)| ds \leq \ |h|\varepsilon(|h|) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \ , \end{aligned}$$

με $\varepsilon(|h|) \to 0$ καθώς $|h| \to 0$, εφ' όσον η ∇f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}^N$.
Έστω συμπαγές $K \subset \mathbb{R}^N$ αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει:

$$x + B(0,1) - supp\ f \subset K.$$

Θα έχουμε ότι:

$$f(x+h-y) - f(x-y) - h \cdot \nabla f(x-y) = 0, \quad \forall y \notin K \ , \forall h \in B(0,1)$$

και

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - h \cdot \nabla f(x-y)| \leq |h|\varepsilon(|h|)\mathcal{X}_K(y), \ \forall y \in \mathbb{R}^N \ , \forall h \in B(0,1).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για $h \in B(0,1)$,

$$|(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x) - h \cdot (\nabla f \star g)(x)| \leq \ |h|\varepsilon(|h|) \int_K |g(y)| \ dy \ .$$

Συνεπάγεται ότι η $f \star g$ είναι διαφορίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^N$ και

$$\boxed{\nabla(f \star g)(x) = (\nabla f) \star g(x).}$$

□

5 Ομαλοποιητές

Ορισμός 5.1. *Ονομάζουμε ακολουθία ομαλοποιητών* $(\rho_n)_{n\geq 1}$, *μία ακολουθία συναρτήσεων στο* $\mathbb{R}^N$ *τέτοια ώστε:*

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad supp\ \rho_n \subset \overline{B(0,\frac{1}{n})}, \quad \int \rho_n = 1 \quad \text{και} \quad \rho_n \geq 0 \text{ στο } \mathbb{R}^N.$$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ακολουθία ομαλοποιητών χρησιμοποιώντας ως σημείο εκκίνησης μία θετική, μη ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *με* $supp\ \rho \subset \overline{B(0,1)}$ *και* $\int \rho = 1$, *όπως :*

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{1/(|x|^2-1)} , & |x| < 1 \\ 0 , & |x| \geq 1 \end{cases}$$

θέτοντας,

$$\boxed{\rho_n(x) = \frac{1}{\int \rho} n^N \rho(nx).}$$

Πρόταση 5.1. *Έστω* $f \in C(\mathbb{R}^N)$. *Τότε* $(\rho_n \star f) \overset{n\to\infty}{\to} f$ *ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του* $\mathbb{R}^N$.

Απόδειξη. Υπενθύμιση:

$$(\rho_n \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y) f(x-y) dy.$$

Για δοσμένα $\varepsilon > 0$ και K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, υπάρχει $\delta > 0$:

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in K, \quad \forall y \in B(0,\delta).$$

Για $x \in \mathbb{R}^N$ έχουμε,

$$\begin{aligned}(\rho_n \star f) - f(x) &= (\rho_n \star f) - f(x) \int \rho_n(y)\ dy \\ &= \int [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)\ dy \\ &= \int_{B(0,\frac{1}{n})} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)\ dy.\end{aligned}$$

Διαλέγοντας $n > \frac{1}{\delta}$ και $x \in K$ προκύπτει το ζητούμενο:

$$|(\rho_n \star f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n(y)\ dy \leq \varepsilon.$$

□

Θεώρημα 5.1. *Έστω* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *με* $1 \le p < \infty$. *Τότε* $(\rho_n \star f) \overset{n\to\infty}{\to} f$ *στον* $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή ο $C_c(\mathbb{R}^N)$ είναι πυκνός στον $L^p(\mathbb{R}^N)$, (βλ. Θ.3.15), έχουμε τη δυνατότητα να διαλέξουμε $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ τ.ω. $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$.

Από την Πρόταση (5.1) είναι γνωστό ότι η $\rho_n \star f_1$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f_1 πάνω σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Επίσης, $\forall n \ge 1$:

$$supp(\rho_n \star f_1) \subset \overline{B(0,\frac{1}{n})} + supp\ f_1 \subset \overline{B(0,1)} + supp\ f_1,$$

οπότε,

$$supp\,(\rho_n \star f_1 - f_1) \subset L = \left(\overline{B(0,1)} + supp\ f_1\right) \cup supp\ f_1,$$

όπου L συμπαγές, και άρα $\rho_n \star f_1 - f_1 \to 0$ ομοιόμορφα στο L,

$$\Rightarrow\ \|\rho_n \star f_1 - f_1\|_p \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Επιπλέον, $\forall n \ge 1$,

$$\begin{aligned}
[(\rho_n \star f) - f] &= [\rho_n \star (f - f_1)] + [(\rho_n \star f_1) - f_1] + [f_1 - f]\ . \\
\Rightarrow\ \|(\rho_n \star f) - f\|_p &\le \|\rho_n \star (f - f_1)\|_p + \|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p + \|f_1 - f\|_p\ , \\
&\le \|\rho_n\|_1 \|f - f_1\|_p + \|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p + \|f_1 - f\|_p\ , \\
&\le\ 2\varepsilon + \|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p\ .
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\Rightarrow\ \limsup_{n\to\infty} \|(\rho_n \star f) - f\|_p \le 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0\ ,$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \|(\rho_n \star f) - f\|_p = 0.}$$

□

Πόρισμα 5.1. *Έστω ανοικτό σύνολο* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *Τότε ο χώρος* $C_c^\infty(\Omega)$ *είναι πυκνός στον* $L^p(\Omega)$ *για κάθε* $p \in [1,\infty)$.

Απόδειξη. Δοθείσης $f \in L^p(\Omega)$ ορίζουμε:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x)\ , & x \in \Omega \\ 0\ , & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}. \quad \text{Τότε } \overline{f} \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Έστω (K_n) ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^N$ τ.ω.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega \quad \text{και η απόσταση} \quad d(K_n, \Omega^c) \geq \frac{2}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παράδειγμα: Έστω $K_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq n \text{ και } d(x, \Omega^c) \geq \frac{2}{n}\}$.

Θέτουμε $g_n = \mathcal{X}_{K_n}\overline{f}$ και $f_n = \rho_n \star g_n$. Τότε,

$$supp\ f_n \subset \overline{B(0, \frac{1}{n})} + K_n \subset \Omega. \tag{24}$$

Εφ' όσον η $g_n \in L^1_{loc}(\Omega)$, η (24) συνεπάγεται ότι $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ (βλ. Πρόταση 4.6) και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} &= \left\|f_n - \overline{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \left\|(\rho_n \star g_n) - (\rho_n \star \overline{f})\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \left\|(\rho_n \star \overline{f}) - \overline{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|\rho_n\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \left\|g_n - \overline{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \left\|(\rho_n \star \overline{f}) - \overline{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \left\|g_n - \overline{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \left\|(\rho_n \star \overline{f}) - \overline{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Αλλά, $\left\|g_n - \overline{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$ λόγω του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης, καθότι η $\overline{f} \in L^1(\Omega)$. Επιπλέον, $(\rho_n \star \overline{f}) \to \overline{f}$ λόγω του Θεωρήματος (5.1). Οπότε,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0\ .}$$

□

Πόρισμα 5.2. *Έστω ανοικτό $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ και $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ τ.ω.*

$$\int uf = 0, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega). \tag{25}$$

Τότε $u = 0$ σ.π. στο Ω.

Απόδειξη. Έστω συνάρτηση $g \in L^\infty(\Omega)$ ώστε ο φορέας της g, $supp\ g$, να είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω.

Τότε, για αρκετά μεγάλο n, η ακολουθία $g_n = \rho_n \star g \in C_c^\infty(\Omega)$ (βλ. Πρόταση 4.6).

Πράγματι, επιλέγουμε $r > 0$ τ.ω.

$$supp\ g + \overline{B(0,r)} = L \subset \Omega.$$

Το L είναι συμπαγές και $\forall n > \frac{1}{r}$,

$$supp\ g_n \subset B(0, \frac{1}{n}) + supp\ g \subset L.$$

Οπότε,

$$\int u g_n \ = 0, \qquad \forall\ n > \frac{1}{r}\ . \tag{26}$$

Επειδή ισχύει ότι $g_n \to g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ισχυρώς στον $L^1(\mathbb{R}^N)$ (βλ. Θ.5.1), υπάρχει υπακολουθία (g_{n_k}) τέτοια ώστε $g_{n_k} \to g$ σ.π. στο $\mathbb{R}^N$ (βλ. Θ.3.4). Επιπλέον, έχουμε ότι,

$$\|g_n\|_\infty = \|\rho_n \star g\|_\infty \le \|g\|_\infty\ , \quad \forall n. \tag{27}$$

Συνεπώς,

$$|u g_n| \le \|u\mathcal{X}_L\|_1 \|g\|_\infty \quad \text{και} \quad u\mathcal{X}_L \in L^1(\Omega), \qquad \forall n > \frac{1}{r}.$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης και τη σχέση (26) έπεται ότι :

$$\int_\Omega ug \ = 0.$$

Επιλέγουμε τη συνάρτηση $g \in L^\infty(\Omega)$ κατάλληλα ως:

$$g(x) = \begin{cases} sign(u), & x \in K \\ 0\ , & x \in \mathbb{R}^N \setminus K \end{cases} \text{, όπου } K \text{ συμπαγές υποσύνολο του } \Omega. \tag{28}$$

Έπεται ότι,

$$\int_K |u| = 0 \Rightarrow \quad u \overset{\text{σ.π.}}{=} 0 \quad \text{στο } K, \quad \forall K \subset \Omega \text{ συμπαγές} \quad \Rightarrow \quad u \overset{\text{σ.π.}}{=} 0 \quad \text{στο } \Omega.$$

□

Παρατήρηση 5.1. *Είδαμε στην παράγραφο 2.1.3, ότι ο* $\left(L^\infty(\mathbb{R}^N)\right)^\star$ *"περιέχει" γνήσια τον* $L^1(\mathbb{R}^N)$.
Συγκεκριμένα, υπάρχουν συναρτησιακά $\Phi \in \left(L^\infty(\mathbb{R}^N)\right)^\star$ *που δεν αναπαρίστανται από στοιχεία του* $L^1(\mathbb{R}^N)$, *δηλαδή δεν υπάρχει πάντα* $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *τ.ω.*

$$\langle \Phi, f\rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Θα δώσουμε ένα παράδειγμα ενός τέτοιου συναρτησιακού.

Παράδειγμα: Έστω

$$\Phi_0 : \left(C_c(\mathbb{R}^N), \|\ \|_\infty\right) \to \mathbb{R}$$

με

$$\langle \Phi_0, f\rangle = f(0), \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^N)\ .$$

Τότε, $\Phi_0 \in \left(C_c(\mathbb{R}^N)\right)^\star$.

Από το Θ.Hahn-Banach, μπορούμε να επεκτείνουμε το Φ_0 σε ένα γραμμικό συνεχές συναρτησιακό Φ πάνω στον $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ που θα ικανοποιεί

$$\langle \Phi, f\rangle = f(0), \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^N)\ . \tag{29}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ για την οποία ισχύει

$$\langle \Phi, f\rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{30}$$

Από τις σχέσεις (29) και (30), συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^N} uf = 0, \qquad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^N) \quad \text{με} \quad f(0) = 0. \tag{31}$$

Επειδή κάθε συνάρτηση του $C_c(\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\})$ επεκτείνεται σε μια συνάρτηση του $C_c(\mathbb{R}^N)$ που μηδενίζεται στο 0, η (31) συνεπάγεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}} uh = 0, \qquad \forall h \in C_c(\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}).$$

Εφαρμόζοντας τώρα το Πόρισμα 5.2 για $\Omega = \mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}$ παίρνουμε ότι

$$u = 0 \ \text{σ. π. στο}\ \mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad u = 0 \ \text{σ. π. στο}\ \mathbb{R}^N$$

και άρα,

$$\langle \Phi, f\rangle = 0, \quad \forall f \in L^\infty(\mathbb{R}^N),$$

άτοπο, λόγω της σχέσης (29).

Πρόταση 5.2. *[9] Έστω E χώρος με νόρμα και $\Phi : E \to \mathbb{R}$ ένα γραμμικό συναρτησιακό που δεν είναι το μηδενικό. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το Φ είναι φραγμένο (δηλαδή συνεχές).*

(β) *Το $Ker\ \Phi$ είναι κλειστό.*

(γ) *Το $Ker\ \Phi$ δεν είναι πυκνό στον E.*

Πόρισμα 5.3. $\left(L^1(\mathbb{R}^N)\right)^\star \subsetneq \left(C_c(\mathbb{R}^N)\right)^\star$.

Απόδειξη. Προφανώς, $\left(L^1(\mathbb{R}^N)\right)^\star \subset \left(C_c(\mathbb{R}^N)\right)^\star$, αφού $C_c(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$. Έστω Φ_0 το συναρτησιακό της (29). Τότε $\Phi_0 \in \left(C_c(\mathbb{R}^N)\right)^\star$ και ο πυρήνας του είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R}^N)$ (βλ. Πόρισμα 5.1). Από την Πρόταση 5.2 έπεται ότι $\Phi_0 \notin \left(L^1(\mathbb{R}^N)\right)^\star$.

□

6 Κριτήριο ισχυρής συμπάγειας σε χώρους L^p

Στον $\mathbb{R}^N$ θεωρούμε το μέτρο Lebesgue το οποίο θα συμβολίζουμε με dx ή $|\cdot|$.

Η συμπάγεια της κλειστότητας ενός συνόλου στους χώρους των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων εξασφαλίζεται από το Θεώρημα Ascoli-Arzela.

Θεώρημα 6.1 (**Ascoli – Arzela**). *Έστω (K,d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathcal{H}$ ένα φραγμένο υποσύνολο του $C(K)$. Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{H}$ είναι ισοσυνεχές, δηλαδή:*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0, \ \ \tau.\omega. \ \ d(x_1, x_2) < \delta \ \Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{32}$$

Τότε, η κλειστότητα του $\mathcal{H}$ στον $C(K)$ είναι συμπαγής.

Παρακάτω θα μελετήσουμε τις L^p– εκδοχές του παραπάνω Θεωρήματος.

Συμβολισμός 5. *Ορίζουμε ως τελεστή μετατόπισης:*

$$(\tau_h f)(x) = f(x+h), \quad \text{όπου } f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^N \ , \ h \in \mathbb{R}^N.$$

Θεώρημα 6.2 (**Kolmogorov – Riesz – Frechet**). *Έστω $\mathcal{F}$ ένα φραγμένο σύνολο συναρτήσεων στον $L^p(\mathbb{R}^N)$ με $1 \le p < \infty$, που ικανοποιεί*

$$\lim_{|h| \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0, \quad \text{ομοιόμορφα} \ \ \forall f \in \mathcal{F}, \tag{33}$$

δηλαδή,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0, \ \ \tau.\omega. \ \ \|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon, \ \ \forall f \in \mathcal{F} \ \ \text{και} \ \ \forall h \in \mathbb{R}^N, \ \ \text{με} \ \ |h| < \delta.$$

Τότε η κλειστότητα του περιορισμού του $\mathcal{F}$ στο Ω στον $L^p(\mathbb{R}^N)$, που συμβολίζουμε με $\mathcal{F}|_\Omega$, είναι συμπαγής για κάθε μετρήσιμο σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ με $|\Omega| < \infty$.

Απόδειξη.

Ισχυρισμός 1: Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$$\|f - (\rho_n \star f)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \ \ \forall n > \frac{1}{\delta} \ . \tag{34}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1:

Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της (33), υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$$\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F} \ \text{ και } \ \forall h \in \mathbb{R}^N, \ \text{ με } \ |h| < \delta.$$

Έστω $f \in \mathcal{F}$, $n > \dfrac{1}{\delta}$.

Για όλα σχεδόν τα $x \in \Omega$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|(\rho_n \star f)(x) - f(x)| &= \left| \int f(x-y)\rho_n(y)dy - f(x) \int \rho_n(y)dy \right| \\
&\le \int |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)dy \\
&= \int |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)^{1/p}\rho_n(y)^{1/p'}dy \\
&\le \left[\int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy \right]^{1/p} \left[\int \rho_n(y)dy \right]^{1/p'} \\
&= \left[\int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy \right]^{1/p}
\end{aligned}$$

(η προτελευταία ανισότητα προέκυψε από την ανισότητα Hölder).

Συνεπώς, για όλα σχεδόν τα $x \in \Omega$,

$$|(\rho_n \star f)(x) - f(x)|^p \le \int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy$$

και άρα

$$\begin{aligned}
\|(\rho_n \star f) - f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\le \int \left[\int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy \right] dx \\
&= \int \rho_n(y) \left[\int |f(x-y) - f(x)|^p dx \right] dy \quad \text{(Fubini)} \\
&= \int_{B(0,1/n)} \rho_n(y) \|\tau_{-y} f - f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} dy.
\end{aligned}$$

Αλλά για $y \in B(0,1/n)$ ισχύει $|-y| < 1/n < \delta$, οπότε $\|\tau_{-y} f - f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon^p$, λόγω του τρόπου επιλογής του δ.

Τελικά, παίρνουμε

$$\|(\rho_n\star f)-f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \ \le\ \varepsilon^p \int_{B(0,1/n)} \rho_n(y)dy = \varepsilon^p \quad \Rightarrow \quad \|(\rho_n\star f)-f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \ \le\ \varepsilon.$$

Η απόδειξη του Ισχυρισμού 1 ολοκληρώθηκε.

Ισχυρισμός 2:

$$\|\rho_n \star f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le C_n \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall f \in \mathcal{F} \tag{35}$$

και

$$|(\rho_n \star f)(x_2) - (\rho_n \star f)(x_1)| \le C_n \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} |x_2 - x_1|, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \ \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N, \tag{36}$$

όπου C_n θετική σταθερά που εξαρτάται αποκλειστικά από το n.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2:

Θέτουμε $C_n = \max\left\{\|\rho_n\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}, \ \|\nabla\rho_n\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}\right\}, \ n \ge 1.$

Η σχέση (35) αποτελεί συνέπεια του Θεωρήματος 4.2, αν το εφαρμόσουμε για $r = \infty$.

Παράλληλα, έχουμε ότι $\nabla(\rho_n \star f) = (\nabla\rho_n) \star f$ (βλ. Πρόταση 4.6), οπότε πάλι από το Θεώρημα 4.2 (για $r = \infty$) παίρνουμε

$$\|\nabla(\rho_n \star f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le \|\nabla\rho_n\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le C_n \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Επιπλέον,

$$(\rho_n\star f)(x_2) - (\rho_n\star f)(x_1) = (x_2-x_1) \int_0^1 \nabla(\rho_n\star f)[\ (1-t)x_1+tx_2\ ]dt, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N.$$

Από τις δύο τελευταίες προκύπτει η (36).

Η απόδειξη του Ισχυρισμού 2 ολοκληρώθηκε.

Ισχυρισμός 3: Έστω $\varepsilon > 0$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ με $|\Omega| < \infty$. Τότε, υπάρχει φραγμένο, μετρήσιμο $\omega \subset \Omega$ τ.ω.

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}. \tag{37}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 3:

Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω του Ισχυρισμού 1, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. να ικανοποιείται η (34) για "ε" $= \varepsilon/2$.

Παράλληλα, η κανονικότητα του μέτρου Lebesgue μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός συμπαγούς συνόλου $\omega \subset \Omega$ τ.ω. $|\Omega \setminus \omega|^{1/p} < \dfrac{\varepsilon}{2C_n \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}$ (βλ. (35)).

Επιλέγουμε $n > \dfrac{1}{\delta}$. $\forall\ f \in \mathcal{F}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} &\leq \|f - (\rho_n \star f)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_n \star f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \\ &\leq \varepsilon/2 + |\Omega \setminus \omega|^{1/p} \|\rho_n \star f\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon \quad (\beta\lambda.\ (35)\ ). \end{aligned}$$

Η απόδειξη του Ισχυρισμού 3 ολοκληρώθηκε.

Εφ' όσον ο $L^p(\Omega)$ είναι πλήρης, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathcal{F}|_\Omega$ είναι ολικώς φραγμένο, δηλαδή για δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του $\mathcal{F}|_\Omega$ από $L^p(\Omega)$ – μπάλες ακτίνας ε.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Επιλέγουμε φραγμένο, μετρήσιμο σύνολο ω ώστε να ισχύει η (37). Η οικογένεια

$$\mathcal{H} = \{\ (\rho_n \star \mathcal{F})\,|_{\overline{\omega}}\ : n \geq 1\ \} = \{\ (\rho_n \star f)\,|_{\overline{\omega}} : n \geq 1\ ,\ f \in \mathcal{F}\}$$

ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ascoli-Arzela 6.1 (βλ. Ισχ. 2) και επομένως, η $\mathcal{H}$ έχει συμπαγή κλειστότητα στον $C(\overline{\omega})$, άρα και στον $L^p(\omega)$. Σημ. ότι επειδή $|\omega| < \infty$, ο χώρος $C(\overline{\omega})$ ενσφηνώνεται συνεχώς στον $L^p(\omega)$.

Συνεπώς, μπορούμε να καλύψουμε το σύνολο $\mathcal{H}$ με πεπερασμένο πλήθος από $L^p(\omega)$ – μπάλες ακτίνας ε, δηλ.

$$\mathcal{H} \subset \bigcup_{i \in I} B_{L^p(\omega)}(g_i, \varepsilon) \quad \text{με} \quad g_i \in L^p(\omega),\ i \in I, \quad I \ \text{πεπερασμένο},$$

όπου $B_{L^p(\omega)}(g_i, \varepsilon) = \{\ u \in L^p(\omega) : \|u - g_i\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon\ \},\ i \in I$.

Για κάθε $i \in I$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\overline{g}_i \in L^p(\Omega)$ με

$$\overline{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x), & x \in \omega \\ 0, & x \in \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

και την $L^p(\Omega)$ – μπάλα

$$B_{L^p(\Omega)}\left(\overline{g}_i, 3\varepsilon\right) = \{\ u \in L^p(\Omega) : \|u - g_i\|_{L^p(\Omega)} < 3\varepsilon\ \}.$$

Θα δείξουμε ότι οι παραπάνω $L^p(\Omega)$ – μπάλες καλύπτουν το $\mathcal{F}|_\Omega$.

Βάσει του Ισχυρισμού 1, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η (34) και επιλέγουμε $n > \dfrac{1}{\delta}$.

Έστω $f \in \mathcal{F}$. Επιλέγουμε $i \in I$ με

$$\|(\rho_n \star f) - g_i\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon.$$

Από την (37) έπεται ότι,

$$\|f - \overline{g_i}\|^p_{L^p(\Omega)} = \|f\|^p_{L^p(\Omega\smallsetminus\omega)} + \|f - g_i\|^p_{L^p(\omega)}\ <\ \varepsilon^p\ +\ \|f - g_i\|^p_{L^p(\omega)}$$

Υπενθυμίζουμε εδώ την ανισότητα $(t+s)^\alpha \le t^\alpha + s^\alpha,\ \forall\, t, s \ge 0,\ \alpha \in (0,1]$.

Θέτοντας $t = \int_{\Omega\smallsetminus\omega} |f|^p$ και $s = \int_\omega |f - \overline{g_i}|^p$, για $\alpha = \frac{1}{p}$ προκύπτει ότι:

$$\left(\|f - \overline{g_i}\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\varepsilon^p + \|f - g_i\|^p_{L^p(\omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon + \|f - g_i\|_{L^p(\omega)}$$

$$\Rightarrow \quad \|f - \overline{g_i}\|_{L^p(\Omega)}\ <\ \varepsilon\ +\ \|f - g_i\|_{L^p(\omega)}\,.$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} \|f - \overline{g_i}\|_{L^p(\Omega)} \ &\le\ \varepsilon\ +\ \|f - (\rho_n \star f)\|_{L^p(\omega)}\ +\ \|(\rho_n \star f) - g_i\|_{L^p(\omega)} \\ &\le\ 2\varepsilon\ +\ \|f - (\rho_n \star f)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\ <\ 3\varepsilon \end{aligned}$$

(βλ. (34)).

Συμπεραίνουμε ότι το $\mathcal{F}|_\Omega$ καλύπτεται από τις μπάλες $B_{L^p(\Omega)}(\overline{g_i}, 3\varepsilon), i \in I$ και άρα έχει συμπαγή κλειστότητα στον $L^p(\Omega)$.

□

Παρατήρηση 6.1. *Για να αποδείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{F}$ έχει συμπαγή κλειστότητα στο $\mathbb{R}^N$ θα χρειαστούμε μία επιπλέον υπόθεση.*

Πόρισμα 6.1. *Έστω $\mathcal{F}$ ένα φραγμένο υποσύνολο στον $L^p(\mathbb{R}^N)$ με $1 \le p < \infty$. Υποθέτουμε ότι ισχύει η (33) και επιπλέον*

$$\begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0, \quad \exists\, \Omega\ \textit{με}\ |\Omega| < \infty\ , \textit{τ.ω.} \\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N\smallsetminus\Omega)} < \varepsilon, \quad \forall\ f \in \mathcal{F}. \end{cases} \tag{38}$$

Τότε η $\mathcal{F}$ έχει συμπαγή κλειστότητα στον $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και Ω όπως στην (38). Από το Θεώρημα 6.2 γνωρίζουμε ότι μπορούμε να καλύψουμε την οικογένεια $\mathcal{F}|_\Omega$ με πεπερασμένο κάλυμμα από $L^p(\Omega)$ – μπάλες ακτίνας ε, δηλ.

$$\mathcal{F}|_\Omega \subset \bigcup_{i \in I} B_{L^p(\Omega)}(g_i, \varepsilon) \ \text{ με } \ g_i \in L^p(\Omega), \quad i \in I, \quad I \text{ πεπερασμένο.}$$

Θέτουμε

$$\overline{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \quad , \ i \in I.$$

Προφανώς, $\overline{g}_i \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\quad i \in I$.
Θα δείξουμε ότι οι μπάλες $B_{L^p(\mathbb{R}^N)}(\overline{g}_i, 2\varepsilon)$, $i \in I$ καλύπτουν το $\mathcal{F}$.
Πράγματι, έστω $f \in \mathcal{F}$. Επιλέγουμε $i \in I$ με $\|f - g_i\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$.
Τότε,

$$\|f - \overline{g_i}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} + \|f - g_i\|^p_{L^p(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|f - \overline{g_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} + \|f - g_i\|_{L^p(\Omega)} \le 2\varepsilon \quad (\text{βλ. (38) }).$$

□

Λήμμα 6.3. *Αν $G \in L^q(\mathbb{R}^N)$ με $1 \le q < \infty$ τότε,*

$$\lim_{|h| \to 0} \|\tau_h G - G\|_q = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω του Θ.3.15, μπορούμε να επιλέξουμε $G_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ ώστε $\|G - G_1\|_q < \varepsilon$.
Τότε,

$$\begin{aligned} \|\tau_h G - G\|_q &\le \|\tau_h G - \tau_h G_1\|_q + \|\tau_h G_1 - G_1\|_q + \|G_1 - G\|_q \\ &\le 2\varepsilon + \|\tau_h G_1 - G_1\|_q . \end{aligned}$$

Θέτουμε $K = supp(G_1)$ και θεωρούμε το συμπαγές σύνολο $L = K + B[0,2]$. Η G_1 είναι ομοιόμορφα συνεχής πάνω στο L, οπότε υπάρχει $\delta \in (0,1)$ τ.ω.

$$\forall\ \xi,\ \eta \in L \quad \text{με } |\xi - \eta| < \delta, \quad \text{ισχύει} \quad |G_1(\xi) - G_1(\eta)| < \varepsilon.$$

Εάν $|h| < \delta$, τότε για $x \notin K + B[0,1]$, έχουμε $x \notin K, x + h \notin K$ οπότε $G_1(x) = G_1(x+h) = 0$, ενώ για $x \in K + B[0,1]$ ισχύει

$$x,\ x + h \in L, \quad |(x+h) - x| = |h| < \delta.$$

Άρα, για $|h| < \delta$,

$$\|\tau_h G_1 - G_1\|_q^q = \int_{K+B[0,1]} |G_1(x+h) - G_1(x)|^q dx \le |L|\varepsilon^q,$$

$$\Rightarrow \quad \|\tau_h G_1 - G_1\|_q \le |L|^{1/q}\varepsilon,$$

όπου $|L|$ το μέτρου Lebesgue του L.

Συνοψίζοντας, για $|h| < \delta$, ισχύει $\|\tau_h G - G\|_q \le 3\varepsilon$. □

Πόρισμα 6.2. *Έστω G μία συνάρτηση του $L^1(\mathbb{R}^N)$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{F} = G \star \mathcal{B}$, όπου το $\mathcal{B}$ είναι φραγμένο σύνολο του $L^p(\mathbb{R}^N)$ με $1 \le p < \infty$. Τότε για κάθε μετρήσιμο σύνολο Ω, η οικογένεια $\mathcal{F}|_\Omega$ έχει συμπαγή κλειστότητα στον $L^p(\Omega)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι λόγω του Θεωρήματος 4.1 (ανισότητα Young), η $\mathcal{F}$ είναι φραγμένη στον $L^p(\mathbb{R}^N)$. Γράφοντας την $f \in \mathcal{F}$ ως $G \star u$, με $u \in \mathcal{B}$, έχουμε ότι,

$$\|\tau_h f - f\|_p = \|(\tau_h G - G) \star u\|_p \le \|\tau_h G - G\|_1 \|u\|_p \le C \|\tau_h G - G\|_1, \qquad (39)$$

όπου $C = \sup_{u \in \mathcal{B}} \|u\|_p$.

Από την (39) και το Λήμμα 6.3 προκύπτει ότι

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0, \quad \text{ομοιόμορφα ως προς τα} \quad f \in \mathcal{F}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η $\mathcal{F} = G \star \mathcal{B}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 6.2 κι έτσι έπεται το συμπέρασμα.

□

7 Ασθενής Συμπάγεια στον $L^1(\Omega)$

Στο παρόν κεφάλαιο θα δώσουμε τον χαρακτηρισμό των ασθενώς συμπαγών υποσυνόλων του $L^1(\Omega)$, με χρήση της έννοιας της ομοιόμορφα ολοκληρώσιμης οικογένειας (Θεώρημα Dunford - Pettis).

Θα χρειαστούμε κάποια προετοιμασία.

Θεώρημα 7.1 (**Baire**). *Έστω (E,d) πλήρης ψευδομετρικός χώρος και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του E ώστε*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E.$$

Τότε υπάρχει n_0 για το οποίο θα ισχύει:

$$Int(X_{n_0}) \neq \varnothing.$$

Λήμμα 7.2. *Έστω (E,d) πλήρης ψευδομετρικός χώρος και $\lambda_n : E \to \mathbb{R},\ n \geq 1$, συνεχείς συναρτήσεις τ.ω. $\forall x \in E,\ \lim\limits_n \lambda_n(x) \in \mathbb{R}$. Τότε, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \neq \varnothing$ ανοικτό και $N \geq 1$ τ.ω.*

$$|\lambda_n(x) - \lambda_m(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in V, \quad \forall n, m \geq N.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. $\forall N \geq 1$, θέτουμε:

$$X_N = \bigcap_{n,m \geq N} \{x \in E : \ |\lambda_n(x) - \lambda_m(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Το X_N είναι κλειστό, $\forall N \geq 1$.

Επειδή $\forall x \in E$ η $(\lambda_n(x))$ είναι Cauchy, ισχύει ότι:

$$E = \bigcup_{N \geq 1} X_N.$$

Από το Θ. Baire (Θ.7.1), έπεται ότι $\exists N \geq 1$ τ.ω. $Int(X_N) \neq \varnothing$. Θέτουμε $V = Int(X_N)$. Τότε $\forall x \in V,\ \forall n, m \geq N$,

$$|\lambda_n(x) - \lambda_m(x)| \leq \varepsilon.$$

□

Σε ό,τι ακολουθεί, ο $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος θετικού μέτρου μ με $\mu(\Omega) < \infty$.

Λήμμα 7.3. *Εάν $A, B \in \mathcal{A}$, θέτουμε:*

$$d(A,B) = \|\mathcal{X}_A - \mathcal{X}_B\|_1 = \int_\Omega |\mathcal{X}_A - \mathcal{X}_B|\, d\mu.$$

Τότε:
(α) Η d είναι πλήρης ψευδομετρική στο $\mathcal{A}$.

(β) Εάν $f \in L^1(\Omega)$, η συνάρτηση $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ με $\lambda(E) = \int_E f d\mu$, $E \in \mathcal{A}$, είναι d-συνεχής.

Απόδειξη. (α) Προφανώς η d είναι ψευδομετρική.
Έστω $(A_n) \subset \mathcal{A}$ μια d – Cauchy ακολουθία. Τότε, η $(\mathcal{X}_{A_n})$ είναι Cauchy στον $L^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \exists f \in L^1(\Omega) \mid \quad \|\mathcal{X}_{A_n} - f\|_1 \to 0,$$

$$\Rightarrow \exists \text{ υπακολουθία } (A_{k_n}) \text{ ώστε } \mathcal{X}_{A_{k_n}} \to f, \text{ σ.π. στο } \Omega \text{ (βλ. Θ.3.4).}$$

Προφανώς τότε $\exists A(= supp\ f) \in \mathcal{A} \mid f = \mathcal{X}_A$, σ.π.

$$\Rightarrow \; d(A_{k_n}, A) = \left\|\mathcal{X}_{A_{k_n}} - \mathcal{X}_A\right\|_1 = \left\|\mathcal{X}_{A_{k_n}} - f\right\|_1 \to 0.$$

Επειδή η (A_n) είναι d -Cauchy κι έχει d -συγκλίνουσα υπακολουθία, θα είναι η ίδια d -συγκλίνουσα.

(β) Παρατηρούμε ότι $\forall A, B \in \mathcal{A}$,

$$d(A,B) = \int_\Omega \mathcal{X}_{A \triangle B} = \mu\,(A \triangle B)\,, \quad \text{όπου} \;\; A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,.$$

Η $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ με $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ είναι προσημασμένο μέτρο με

$$\lambda << \mu, \quad |\lambda|(E) = \int_E |f| d\mu\,, \qquad \forall \;\; E \in \mathcal{A}.$$

(βλ. Πρόταση 2.3).
Επιπλέον, από τις Προτάσεις 2.1, 2.2 έπεται ότι $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \mid \forall E \in \mathcal{A}$,

$$\mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\lambda|(E) < \varepsilon.$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$ όπως παραπάνω. Τότε, $\forall A, B \in \mathcal{A}$ με $d(A,B) < \delta$ έχουμε ότι $\mu\,(A \triangle B) < \delta$ και συνεπώς $|\lambda|\,(A \triangle B) < \varepsilon$.

Άρα, $\forall A, B \in \mathcal{A}$ με $d(A,B) < \delta$,

$$\begin{aligned}
|\lambda(A) - \lambda(B)| &= \left|\int_A f d\mu - \int_B f d\mu\right| = \left|\int_\Omega f \mathcal{X}_A \, d\mu - \int_\Omega f \mathcal{X}_B \, d\mu\right| \\
&= \left|\int_\Omega f\left(\mathcal{X}_A - \mathcal{X}_B\right) \, d\mu\right| \leq \int_\Omega |f| \cdot |\mathcal{X}_A - \mathcal{X}_B| \, d\mu \\
&= \int_\Omega |f| \mathcal{X}_{A \triangle B} \, d\mu = \int_{A \triangle B} |f| \, d\mu = |\lambda|(A \triangle B) \; < \; \varepsilon.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι η λ είναι d - (ομοιόμορφα) συνεχής. □

Ορισμός 7.1. *Έστω $\mathcal{F}$ ένα υποσύνολο του $L^1(\Omega)$. Καλούμε την $\mathcal{F}$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη ανν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall A \in \mathcal{A}$, με $\mu(A) \leq \delta$ και $\forall f \in \mathcal{F}$, έπεται ότι:*

$$\int_A |f| \, d\mu \leq \; \varepsilon \; .$$

Αν η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $L^1(\Omega)$, ο ορισμός που δώσαμε είναι ισοδύναμος με την παρακάτω συνθήκη:

$$\lim_{c \to +\infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| > c\}} |f| \, d\mu = 0.$$

Λήμμα 7.4. *Έστω $\mathcal{F} \subset L^1(\Omega)$ τ.ω. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \mid$ εάν $\mu(E) < \delta$, ισχύει $\left|\int_E f d\mu\right| < \varepsilon$, $\forall f \in \mathcal{F}$. Τότε, η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists \delta > 0 \mid \forall E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) < \delta$ ισχύει

$$\left|\int_E f d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Έστω $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) < \delta$ και $f \in \mathcal{F}$. Θέτουμε:

$$E_1 = \{x \in E : \; f(x) \geq 0\} \;\; \text{και} \;\; E_2 = \{x \in E : \; f(x) < 0\}.$$

Τότε, $\mu(E_1) < \delta$, $\mu(E_2) < \delta$ και συνεπώς,

$$\int_E |f| = \int_{E_1} f - \int_{E_2} f = \left|\int_{E_1} f - \int_{E_2} f\right| \leq \left|\int_{E_1} f\right| + \left|\int_{E_2} f\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

□

Το επόμενο Θεώρημα μας παρέχει μια συνθήκη μέσω της οποίας μία ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων καθίσταται ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα 7.5. *Έστω* (f_n) *ακολουθία στον* $L^1(\Omega)$. *Αν* $\forall E \in \mathcal{A}$ *το όριο* $\lim_n \int_E f_n \, d\mu$ *είναι πραγματικός αριθμός, τότε η* (f_n) *είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον πλήρη ψευδομετρικό χώρο $(\mathcal{A}, d)$ όπως ορίστηκε στο Λήμμα 7.3 και τις συνεχείς συναρτήσεις:

$$\lambda_n : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \quad \lambda_n(E) = \int_E f_n d\mu, \quad E \in \mathcal{A}, \ n \geq 1.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\forall E \in \mathcal{A}$ το $\lim_n \lambda_n(E)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ (λόγω της υπόθεσης), το Λήμμα 7.2 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ανοικτού $V \subset \mathcal{A}$, $V \neq \varnothing$ και $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ τ.ω.

$$\forall n \geq N, \ \forall E \in V, \quad |\lambda_n(E) - \lambda_N(E)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$(\acute{\eta}) \qquad \left| \int_E f_n d\mu - \int_E f_N d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Επιλέγουμε $E_0 \in V =$ ανοικτό $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0 \mid \forall E \in \mathcal{A}$ με $d(E, E_0) < \delta$, να ισχύει $E \in V$, δηλαδή

$$\Rightarrow \quad \left| \int_E f_n d\mu - \int_E f_N d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall n > N.$$

Ταυτόχρονα, το $\{f_1, f_2, \ \dots \ f_N\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο γιατί είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $L^1(\Omega)$, οπότε

$$\exists \delta' > 0 \mid \forall E \in \mathcal{A} \ \text{ με } \ \mu(E) < \delta', \ \text{ισχύει} \quad \int_E |f_k| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Θέτουμε $\delta_1 = \min\{\delta, \delta'\}$.
Έστω $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) < \delta_1$. Θέτουμε $B = E_0 \setminus E$, $C = E_0 \cup E$.
Προφανώς $B \cap E = \varnothing$, $C = B \cup E$.
Έχουμε:

$$d(B, E_0) = \mu(B \triangle E_0) = \mu(E \cap E_0) < \delta_1 \leq \delta,$$
$$d(C, E_0) = \mu(C \triangle E_0) = \mu(E \cap E_0^c) < \delta_1 \leq \delta,$$

$$\Rightarrow \left|\int_B f_n - \int_B f_N\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \left|\int_C f_n - \int_C f_N\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall n > N$$

$$\Rightarrow \left|\int_E f_n - \int_E f_N\right| = \left|\int_E (f_n - f_N)\right| = \left|\int_C (f_n - f_N) - \int_B (f_n - f_N)\right|$$
$$\leq \left|\int_C f_n - \int_C f_N\right| + \left|\int_B f_n - \int_B f_N\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N.$$

Επειδή όμως $\left|\int_E f_N\right| \leq \int_E |f_N| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ (αφού $\mu(E) < \delta_1 \leq \delta'$), παίρνουμε

$$\left|\int_E f_n\right| < \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

Παράλληλα, αφού $\mu(E) < \delta_1 \leq \delta'$, έχουμε

$$\left|\int_E f_k\right| \leq \int_E |f_k| < \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon, \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots N\}.$$

Τελικά,

$$\left|\int_E f_n\right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq 1 \ \text{ και } \ \forall E \in \mathcal{A} \ \text{ με } \ \mu(E) < \delta.$$

Από το Λήμμα 7.4 έπεται ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

□

Πρόταση 7.1. *Έστω $g \in L^\infty(\Omega)$. Τότε, υπάρχει ακολουθία (s_n) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε*

$$\lim_n \|s_n - g\|_\infty = 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $g \geq 0$.

$\forall\ n \geq 1$, τα διαστήματα

$$\Delta_{k,n} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right), \quad 1 \leq k \leq n2^n, \quad n \geq 1,$$

αποτελούν διαμέριση του $[0, n)$.

Θεωρούμε τα μετρήσιμα σύνολα

$$A_{k,n} = g^{-1}(\Delta_{k,n}), \quad 1 \leq k \leq n2^n, \quad n \geq 1 .$$

$\forall\ n \geq 1$, θεωρούμε την απλή μετρήσιμη συνάρτηση

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathcal{X}_{A_{k,n}} \ + \ n\mathcal{X}_{g^{-1}([n,+\infty))} \ .$$

Θέτουμε $M = \|g\|_\infty$ και $C = \{x \in \Omega : g(x) > M\}$. Τότε, $\mu(C) = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $N \geq 1$ τ.ω.

$$N > M, \quad \frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

Έστω $n \geq N,\ x \notin C$.

Τότε, $0 \leq g(x) \leq M < N \leq n$, οπότε υπάρχει μοναδικό $k \in [1, n2^n]$ τ.ω.

$$g(x) \in \Delta_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \ \frac{k}{2^n}\right)$$

και συνεπώς

$$s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \ \leq \ g(x) \ \leq \ M, \quad |s_n(x) - g(x)| \ \leq \ \frac{1}{2^n} \ < \ \frac{1}{2^N} \ < \ \varepsilon.$$

Επειδή η τελευταία ισχύει $\forall\ x \notin C$ και $\mu(C) = 0$, έπεται ότι

$$s_n \in L^\infty(\Omega), \quad \|s_n \ - \ g\|_\infty \ \leq \ \varepsilon, \quad \forall\ n \geq N.$$

Επομένως, $\lim_n \|s_n \ - \ g\|_\infty = 0$.

Στη γενική περίπτωση γράφουμε $g = g^+ \ - \ g^-$ κι εφαρμόζουμε το παραπάνω για τις g^+ , g^-.

□

Το επόμενο Θεώρημα μας δίνει μια ικανή συνθήκη ώστε ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό πάνω στον $L^\infty(\Omega)$ να αναπαρίσταται από μια συνάρτηση του $L^1(\Omega)$.

Θεώρημα 7.6. *Έστω $\Psi \in (L^\infty(\Omega))^\star$. Αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. η επιλογή συνόλου $A \in \mathcal{A}$, με $\mu(A) \leq \delta$, να συνεπάγεται ότι $|\Psi(\mathcal{X}_A)| \leq \varepsilon$, τότε:*

$$\exists\ f \in L^1(\Omega) \quad \text{ώστε} \quad \langle \Psi, g \rangle = \int_\Omega fg\ d\mu, \quad \forall\ g \in L^\infty(\Omega).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ με $\lambda(E) = \Psi(\mathcal{X}_E)$, $\forall E \in \mathcal{A}$.

Ισχυρισμός: Εάν $(C_n) \subset \mathcal{A}$ φθίνουσα με $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing$, τότε $\lambda(C_n) \to 0$.

Πράγματι· έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall A \in \mathcal{A}$, ισχύει η συνεπαγωγή

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow |\Psi(\mathcal{X}_A)| < \varepsilon. \tag{40}$$

Επειδή το μ είναι μέτρο, ισχύει ότι $\mu(C_n) \to 0$. Τότε, $\exists n_0 \geq 1$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$,

$$\mu(C_n) < \delta \Rightarrow |\Psi(\mathcal{X}_{C_n})| < \varepsilon \quad (\beta\lambda.\ 40) \quad \Rightarrow \quad |\lambda(C_n)| < \varepsilon.$$

Η απόδειξη του Ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.

Από τον Ισχυρισμό έπεται ότι το λ είναι προσημασμένο μέτρο στην $\mathcal{A}$.

Πράγματι, λόγω γραμμικότητας του Ψ παίρνουμε ότι το λ είναι πεπερασμένα προσθετικό, δηλ. εάν E_k , $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα, ισχύει

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k).$$

Ειδικότερα, εάν A, B μετρήσιμα με $A \subset B$, ισχύει $\lambda(B \setminus A) = \lambda(B) - \lambda(A)$.

Έστω τώρα $E \in \mathcal{A}$ και $(E_n) \subset \mathcal{A}$ διαμέριση του E.

Θέτοντας $C_n = E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, $n \geq 1$, έχουμε

$$(C_n) \quad \text{φθίνουσα}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing.$$

Με βάση τον Ισχυρισμό, παίρνουμε

$$\lim_n \lambda(C_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n \left[\lambda(E) - \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k) = \lambda(E)$$

και άρα

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) .$$

Λόγω της υπόθεσης, το λ είναι απόλυτα συνεχές ως προς μ.

Πράγματι· έστω $\mu(E) = 0$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η (40). Τότε,

$$\mu(E) = 0 < \delta \Rightarrow |\lambda(E)| < \varepsilon.$$

Η τελευταία ισχύει $\forall \varepsilon > 0$, οπότε $\lambda(E) = 0$.

Από το Θ. Radon-Nikodym (Θ.2.8), έπεται ότι $\exists f \in L^1(\Omega, \mu)$ τ.ω.

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu \ , \quad \forall E \in \mathcal{A},$$

δηλαδή,

$$\Psi(\mathcal{X}_E) = \int_\Omega f \mathcal{X}_E \, d\mu \ , \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Λόγω της γραμμικότητας του Ψ, έπεται ότι:

$$\Psi(s) = \int_\Omega fs \, d\mu \ , \quad \forall s : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ απλή συνάρτηση.}$$

Έστω $g \in L^\infty(\Omega)$. Επιλέγουμε ακολουθία $(s_n) \subset L^\infty(\Omega)$ απλών συναρτήσεων τ.ω.

$$\|s_n - g\|_\infty \to 0$$

(βλ. Πρόταση 7.1).

Τότε,

$$\Psi(s_n) \to \Psi(g), \quad \int_\Omega f s_n \to \int_\Omega fg$$

και άρα

$$\Psi(g) = \int_\Omega fg \ .$$

□

Ορισμός 7.2. *Το υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X ονομάζεται σχετικά συμπαγές αν το A περιέχεται σε κάποιο συμπαγές υποσύνολο του X. Όταν ο X είναι χώρος Hausdorff, μπορούμε να ορίσουμε ισοδύναμα ως συνθήκη σχετικής συμπάγειας τη συμπάγεια της κλειστής θήκης του A στον X.*

Θεώρημα 7.7 (**Eberlein – Smulian**). *Έστω E χώρος με νόρμα και $A \subset E$. Τότε το A είναι ασθενώς συμπαγές αν και μόνο αν είναι ασθενώς ακολουθιακά συμπαγές.*

Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το θεώρημα των Dunford - Pettis που δίνει ένα χαρακτηρισμό για τα ασθενώς σχετικά συμπαγή υποσύνολα του $L^1(\Omega)$.

Θεώρημα 7.8 (**Dunford – Pettis**). *Έστω $\mathcal{F}$ ένα φραγμένο υποσύνολο του $L^1(\Omega)$. Το $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο αν και μόνο αν το $\mathcal{F}$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $L^1(\Omega)$ στην ασθενή τοπολογία.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο.

Θεωρούμε την απεικόνιση $T : L^1(\Omega) \to (L^\infty(\Omega))^\star$ με

$$T(f)(g) = \int_\Omega fg \, d\mu \ , \quad f \in L^1(\Omega), \quad g \in L^\infty(\Omega).$$

Η T είναι γραμμική ισομετρία, διότι $T = \Phi^\star \circ i$, όπου:

$\Phi : L^\infty(\Omega) \to \left(L^1(\Omega)\right)^\star$ είναι η γραμμική ισομετρία με

$$\Phi(g)(f) = \int_\Omega gf d\mu \ , \quad \forall g \in L^\infty(\Omega), \quad \forall f \in L^1(\Omega) \quad (\text{βλ. Θεώρημα 3.20})$$

και

$$i : L^1(\Omega) \to \left(L^1(\Omega)\right)^{\star\star}, \quad \text{η κανονική ισομετρική εμφύτευση.}$$

Τότε το $T(\mathcal{F})$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $(L^\infty(\Omega))^\star$, οπότε περιέχεται σε κάποια κλειστή μπάλα $B \subset (L^\infty(\Omega))^\star$.

Από το Θεώρημα Banach-Alaoglu (Θ. 3.27), η B είναι $w^\star$ - συμπαγής και κατά συνέπεια το σύνολο

$$\mathcal{H} = \overline{T(\mathcal{F})}^{w^\star}$$

είναι $w^\star$ - συμπαγές υποσύνολο του $(L^\infty(\Omega))^\star$.

<u>**Ισχυρισμός:**</u> $\mathcal{H} \subset T(L^1(\Omega))$ και η απεικόνιση $T^{-1}|_{\mathcal{H}} : \ \mathcal{H} \to L^1(\Omega)$ είναι $w^\star - w$ συνεχής.

Απόδειξη του Ισχυρισμού:

Έστω $F \in \mathcal{H}$ και δίκτυο $F_\alpha = T(f_\alpha) \in T(\mathcal{F}), \ f_\alpha \in \mathcal{F}, \ \alpha \in I$, τ.ω. $\forall g \in L^\infty(\Omega)$, να ισχύει ότι $F_\alpha(g) \to F(g)$, δηλαδή

$$\int_\Omega f_\alpha g \, d\mu \ \to F(g), \quad \text{για κάθε} \quad g \in L^\infty(\Omega).$$

Εφ' όσον η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$, ισχύει

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha\in I}\int_A |f_\alpha|\ d\mu\ \leq \varepsilon \quad &\Rightarrow\quad \sup_{\alpha\in I}\Big|\int_\Omega f_\alpha \mathcal{X}_A\ d\mu\Big| \leq \sup_{\alpha\in I}\int_A |f_\alpha| d\mu\ \leq\ \varepsilon \\ &\Rightarrow\quad |F(\mathcal{X}_A)| = \lim_\alpha \Big|\int_\Omega f_\alpha \mathcal{X}_A\ d\mu\Big|\ \leq\ \varepsilon. \end{aligned}$$

Από το Θ.7.6 έπεται ότι $\exists\ f \in L^1(\Omega)$ ώστε

$$F(g) = \int_\Omega fg\ d\mu, \qquad \text{για κάθε} \quad g \in L^\infty(\Omega).$$

Άρα, $F = T(f)$ και

$$\int_\Omega f_\alpha g\ d\mu \to \int_\Omega fg\ d\mu, \ \ \text{για κάθε}\ \ g \in L^\infty(\Omega).$$

Συνεπώς, $f_\alpha \to f$ στην ασθενή τοπολογία $\sigma\left(L^1(\Omega), (L^1(\Omega))^\star\right)$ ή ισοδύναμα $T^{-1}(F_\alpha) \to T^{-1}(F)$ ασθενώς στον $L^1(\Omega)$.

Η απόδειξη του Ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.

Ο $(\mathcal{H}, w^\star)$ είναι ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος, οπότε, λόγω του παραπάνω Ισχυρισμού, το $T^{-1}(\mathcal{H})$ είναι w - συμπαγές υποσύνολο του $L^1(\Omega)$. Όμως, $\mathcal{F} \subset T^{-1}(\mathcal{H})$, γεγονός που μας εξασφαλίζει ότι η $\mathcal{F}$ είναι ένα w - σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $L^1(\Omega)$.

Αντιστρόφως, τώρα υποθέτουμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι ασθενώς σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $L^1(\Omega)$ και συγχρόνως ότι η $\mathcal{F}$ δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Λόγω του ορισμού της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας 7.1, θα υπάρχει $\eta > 0$ τ.ω. $\forall c_0, \ \ \exists c > c_0$ για το οποίο να ισχύει:

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|>c\}} |f|\ d\mu > \eta.$$

Τότε, $\ \forall n, \ \ \exists f_n \in \mathcal{F}$ με:

$$\int_{\{|f_n|>n\}} |f_n|\ d\mu \geq \eta. \tag{41}$$

Λόγω του Θεωρήματος Eberlein-Smulian (Θ.7.7), επειδή η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι ασθενώς σχετικά συμπαγής θα είναι και ασθενώς σχετικά ακολουθιακά συμπαγής, θα υπάρχει δηλαδή μία υπακολουθία (f_{n_k}) της (f_n) και $f \in L^1(\Omega)$ τ.ω. $f_{n_k} \to f$ ασθενώς στον $L^1(\Omega)$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$, αφού $\mathcal{X}_A \in L^\infty(\Omega)$, διαπιστώνουμε ότι

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_{n_k}\ d\mu = \int_A f\ d\mu.$$

Έπεται ότι η (f_{n_k}) είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, βάσει του Θ.7.5 (άτοπο, λόγω της σχέσης (41)). Συνεπώς, η αρχική μας υπόθεση περί μη ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας της $\mathcal{F}$ είναι εσφαλμένη.

□

Πόρισμα 7.1. *Αν η $(f_n) \subset L^1(\Omega)$ είναι φραγμένη και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει υπακολουθία (f_{n_k}) της (f_n) και $f \in L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε*

$$\int_\Omega f_{n_k} g\ d\mu\ \to \int_\Omega fg\ d\mu\ , \quad \forall g \in L^\infty(\Omega).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Dunford-Pettis (Θ.7.8) γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\{f_n : n \geq 1\}$ είναι ασθενώς σχετικά συμπαγές και άρα, λόγω του Θ. Eberlein-Smulian (Θ.7.7), είναι και ασθενώς σχετικά ακολουθιακά συμπαγές, το οποίο δίνει το ζητούμενο.

□

8 Συμπληρωματικές Ιδιότητες

Θεώρημα 8.1 (Θεώρημα κλειστού γραφήματος). *Έστω X και Y δύο χώροι Banach και T ένας γραμμικός τελεστής από τον X στον Y. Αν το γράφημα του T, $G(T)$, είναι κλειστό στην τοπολογία γινόμενο $X \times Y$, τότε ο T είναι συνεχής. Το αντίστροφο είναι επίσης αληθές καθώς το γράφημα κάθε συνεχούς απεικόνισης θα είναι κλειστό.*

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Πρόταση 8.1. *Έστω $1 \le q \le p \le \infty$ και $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\alpha u \in L^q(\Omega), \quad \forall u \in L^p(\Omega)$, τότε $\alpha \in L^r(\Omega)$ με:*

$$r = \begin{cases} \dfrac{pq}{p-q} \ , & p < \infty \\ \quad q \quad , & p = \infty . \end{cases}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον τελεστή $T : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ με τύπο $Tu = \alpha u$ και θα δείξουμε ότι το γράφημα του T είναι κλειστό.

Έστω (u_n) ακολουθία στον $L^p(\Omega)$ τ.ω. η $u_n \to u$ στον $L^p(\Omega)$ και $\alpha u_n \to f$ στον $L^q(\Omega)$. Από το Θεώρημα 3.4 γνωρίζουμε ότι υπάρχει υπακολουθία της (u_n), που τη συμβολίζουμε με (u_{n_k}), ώστε $u_{n_k} \to u$ σ.π. στον $L^p(\Omega)$ και $\alpha u_{n_k} \to f$ σ.π. στο Ω. Συνεπώς, $f = \alpha u$ σ.π. στο Ω και $f = Tu$.

Το Θεώρημα κλειστού γραφήματος συνεπάγεται ότι ο T είναι φραγμένος, δηλ. υπάρχει σταθερά $C > 0$ τ.ω.

$$\|\alpha u\|_q \le C \|u\|_p \ , \quad \forall u \in L^p(\Omega) \ . \tag{42}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $1 \le p < \infty$.

(β) $p = \infty$.

(α) Για κάθε $v \in L^{p/q}(\Omega)$, από τη (42) για $u = |v|^{1/q}$ έπεται ότι:

$$\int_\Omega |\alpha|^q |v| = \int_\Omega |\alpha|^q |u|^q \le C^q \|u\|_p^q = C^q \|v\|_{p/q} \, .$$

Συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $v \to \int_\Omega |\alpha|^q v$ είναι ένα γραμμικό συνεχές συναρτησιακό στον $L^{p/q}(\Omega)$ και ότι $|\alpha|^q \in L^{(p/q)'}(\Omega) = L^{r/q}(\Omega)$.

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \in L^r(\Omega).}$$

(β) Θέτουμε $u(x) = 1,\ x \in \Omega$.
Τότε, $u \in L^\infty(\Omega)$ και $\alpha = \alpha u \in L^q(\Omega) = L^r(\Omega)$.

$\square$

Πρόταση 8.2. *Έστω* $\mu(\Omega) < \infty$ *και* $1 \le p \le q \le \infty$. *Τότε ισχύει ότι* $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *με συνεχή ενσφήνωση.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^q(\Omega)$.
Εάν $1 \le p < q < \infty$, θέτουμε $r = \dfrac{pq}{q-p}$. Τότε,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} \overset{\text{(Hölder)}}{\Rightarrow} \|f\|^p_{L^p(\Omega)} = \int |f|^p |\mathcal{X}_\Omega|^p \le \left(\int (|f|^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int (|\mathcal{X}_\Omega|^p)^{\frac{r}{p}}\right)^{\frac{p}{r}}$$

$$= \mu(\Omega)^{\frac{p}{r}} \|f\|^p_{L^q(\Omega)} \Rightarrow \boxed{\|f\|_{L^p(\Omega)} \le \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}\,.}$$

Για $p = q$ το αποτέλεσμα είναι προφανές, ενώ για $q = \infty$:

$$\boxed{\|f\|_{L^p(\Omega)} \le \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\,.}$$

$\square$

Πόρισμα 8.1. *Έστω* $\mu(\Omega) < \infty$ *και* $1 \le p \le q \le \infty$. *Τότε αν μία συνάρτηση* $f \notin L^p(\Omega)$, *η* f *δε θα ανήκει στον* $L^q(\Omega)$, $\forall q > p$.

Πρόταση 8.3. *Έστω* $\mu(\Omega) < \infty$.

(α) *Αν* $f \in L^\infty(\Omega)$, *τότε* $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty\,.$

(β) *Έστω* $f \in \bigcap\limits_{1\le p<\infty} L^p(\Omega)$ *και σταθερά* C *τ.ω.* $\|f\|_p \le C,\quad \forall p \in [1, +\infty)$.

Τότε $f \in L^\infty(\Omega)$.

(γ) *Εάν* $\Omega = (0,1)$ *με το μέτρο Lebesgue, υπάρχει συνάρτηση* $f \in \bigcap\limits_{1\le p<\infty} L^p(\Omega)$ *τ.ω.* $f \notin L^\infty(\Omega)$.

Απόδειξη.

(α) $\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty, \quad \forall p \in [1, +\infty).$

$$\Rightarrow \limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty .$$

Επιλέγουμε σταθερά $0 < k < \|f\|_\infty$ και θέτουμε:

$$A = \{x \in \Omega : |f(x)| > k\}.$$

Τότε, $\mu(A) > 0$ και:

$$\begin{aligned} k^p \mu(A) \leq \int_A |f|^p &\Rightarrow \|f\|_p \geq k(\mu(A))^{1/p}, \quad \forall p \in [1, \infty) \\ &\Rightarrow \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq k, \quad \forall k \in (0, \|f\|_\infty) \\ &\Rightarrow \lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty . \end{aligned}$$

(β) Ορίζουμε σταθερά $k > C$ και σύνολο A όπως στο ερώτημα (α). Τότε,

$$k^p \mu(A) \leq \|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \leq C^p, \quad \forall p \geq 1$$

και

$$\mu(A) \leq \liminf_{p\to\infty} \left(\frac{C}{k}\right)^p = 0,$$

Άρα,

$$\mu(A) = 0 \ \text{ και } \ f \in L^\infty(\Omega).$$

(γ) Επιλέγουμε ακολουθία (Ω_n) ανοικτών υποσυνόλων του $(0,1)$ ώστε:

$$\mu(\Omega_n) = (e-1)e^{-n}, \ \forall n \geq 1 \quad \text{και} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing, \text{ για } i \neq j.$$

Για κάθε $d \in \mathbb{N}$ με $d \geq 1$ και $\forall p \in [1, +\infty)$ έχουμε:

$$\Big(\sum_{n=1}^{d} \mathcal{X}_{\Omega_n} n\Big)^p = \sum_{n=1}^{d} \mathcal{X}_{\Omega_n} n^p \ , \text{ αφού } \mathcal{X}_{\Omega_i} \cdot \mathcal{X}_{\Omega_j} = 0, \quad \text{για } i \neq j$$

και

$$\int \sum_{n=1}^{d} \mathcal{X}_{\Omega_n} n^p \; dx \;=\; \sum_{n=1}^{d} \int \mathcal{X}_{\Omega_n} n^p dx \;=\; (e-1) \sum_{n=1}^{d} n^p e^{-n}.$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου διαπιστώνουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p e^{-n}$ συγκλίνει διότι εάν $a_n = n^p e^{-n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^p \frac{1}{e} < 1, \quad \forall p \in [1,+\infty).$$

Επομένως,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathcal{X}_{\Omega_n} \in L^p(\Omega), \quad \forall p \in [1,+\infty),$$

ενώ ταυτόχρονα η $f \notin L^\infty(\Omega)$, αφού $f\big|_{\Omega_n} > n, \forall n \geq 1$.

$\square$

Πρόταση 8.4. *Έστω $L^a(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και $|u|^a \in L^1(\Omega)\}$ για $0 < a < 1$ και*

$$[u]_a = \Big(\int_\Omega |u|^a\Big)^{\frac{1}{a}}.$$

Τότε:

(α) $[u+v]_a \geq [u]_a + [v]_a$.
(β) $[u+v]_a^a \leq [u]_a^a + [v]_a^a$.

Απόδειξη. Το ερώτημα (α) έχει ήδη αποδειχτεί στο Λήμμα 3.7.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι $|u+v|^\alpha \leq |u|^\alpha + |v|^\alpha, \quad \forall \alpha \in (0,1)$.
Θεωρούμε, για $x \geq 0$, τη συνάρτηση:

$$f(x) = x^\alpha + 1 - (x+1)^\alpha \;\text{ και }\; f(0) = 0. \tag{43}$$

Είναι $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha(x+1)^{\alpha-1} = \alpha(x^{\alpha-1} - (x+1)^{\alpha-1}) \;>\; 0,\; \forall\, x \geq 0$, οπότε

$$(x+1)^\alpha \leq x^\alpha + 1, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Θέτοντας στην τελευταία $x = t/s$, με $t \geq 0, s > 0$, έπεται ότι:

$$(t+s)^{\alpha} \leq t^{\alpha} + s^{\alpha}, \quad \forall \alpha \in (0,1).$$

$$\Rightarrow |u+v|^{\alpha} \leq (|u|+|v|)^{\alpha} \leq |u|^{\alpha} + |v|^{\alpha} \ ,$$

$$\Rightarrow \boxed{[u+v]_{\alpha}^{\alpha} \leq [u]_{\alpha}^{\alpha} + [v]_{\alpha}^{\alpha} \ .}$$

□

Παρατήρηση 8.1. *Από την Πρόταση 8.4/(β) προκύπτει ότι η συνάρτηση $d(u,v) = [u-v]_{\alpha}^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, ορίζει μία μετρική στον $L^{\alpha}(\Omega)$.*

Πρόταση 8.5. *Έστω $\mu(\Omega) < \infty$ και (f_n) ακολουθία συναρτήσεων τ.ω. $f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ σ.π. στο Ω και $|f| < \infty$ σ.π. στο Ω. Τότε:*

(α) Εάν $r > 0$ και

$$S_n(r) = \bigcup_{k \geq n} \{\, |f_k - f| > r \,\}, \ n \geq 1,$$

τότε $\mu\left(S_n(r)\right) \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

(β) (Θ. Egorov)

$$\begin{cases} \forall \delta > 0, \quad \exists A \subset \Omega \ \text{μετρήσιμο τέτοιο ώστε} \\ \mu(A) < \delta \ \text{και} \ f_n \to f \ \text{ομοιόμορφα στο} \ \Omega \setminus A. \end{cases}$$

(γ) (Θ. Vitali) Έστω $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ με $1 \leq p < \infty$ τέτοια ώστε

(i) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0$ τ.ω. $\displaystyle\int_A |f_n|^p < \varepsilon$, $\forall n$ και $\forall A \subset \Omega$ μετρήσιμο με $\mu(A) < \delta$.
(ii) $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο Ω.

Τότε $f \in L^p(\Omega)$ και $f_n \to f$ στον $L^p(\Omega)$.

Απόδειξη. (α) Επειδή $f_n \to f$ σ.π. στο Ω και $\left(S_n(r)\right)_{n\geq 1}$ φθίνουσα, ισχύει ότι $g_n = \mathcal{X}_{S_n(r)} \to 0$ σ.π. στο Ω. Επιπλέον, $g_n \in L^1(\Omega)$ και $|g_n| \leq 1, \ n \geq 1$.

Λόγω του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης (Θ.2.2), $g_n \to 0$ στον $L^1(\Omega)$, άρα:

$$\mu\left(S_n(r)\right) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

(β) Λόγω του (α), ισχύει ότι

$$\mu\left(S_{N_m}\left(\frac{1}{m}\right)\right) \overset{n\to\infty}{\to} 0, \quad \forall m \geq 1.$$

Έστω $\delta > 0$.
$\forall m \geq 1,\ \exists N_m \geq 1$ ώστε

$$\mu\left(S_{N_m}\left(\frac{1}{m}\right)\right) < \frac{\delta}{2^m}.$$

Θέτουμε

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_{N_m}\left(\frac{1}{m}\right).$$

Τότε,

$$\mu(A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(S_{N_m}\left(\frac{1}{m}\right)\right) \leq \delta.$$

Θα δείξουμε ότι $f_k \to f$, ομοιόμορφα στο $\Omega \smallsetminus A$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $m \geq 1$ ώστε $\frac{1}{m} < \varepsilon$. $\forall x \notin A$, έχουμε $x \notin S_{N_m}\left(\frac{1}{m}\right)$,

$$\Rightarrow\ |f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} < \varepsilon, \quad \forall k \geq N_m.$$

(γ) Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η $(\gamma)/(i)$. Λόγω του Θ.Egorov, $\exists A \subset \Omega$ μετρήσιμο τ.ω.

$$\mu(A) < \delta, \quad f_n \to f \ \text{ ομοιόμορφα στο } \Omega \smallsetminus A.$$

Τότε, $\forall n \geq 1$,

$$\int_A |f_n|^p \leq \varepsilon, \quad \int_{\Omega \smallsetminus A} |f_n|^p \leq C\mu(\Omega), \tag{44}$$

όπου $C = \sup_{n\geq 1} \|f_n\|^p_{L^\infty(\Omega\smallsetminus A)}$.

Από το Λήμμα του Fatou και τα παραπάνω παίρνουμε

$$\int_A |f|^p \le \varepsilon \tag{45}$$

και

$$\int_\Omega |f|^p \le \varepsilon + C\mu(\Omega) < \infty.$$

Συνεπώς, $f \in L^p(\Omega)$.
Επιπλέον, από $(44), (45)$ και $\forall n \ge 1$,

$$\int_A |f_n - f|^p \le 2^{p-1}\left(\int_A |f_n|^p + \int_A |f|^p\right) \le 2^p\varepsilon \tag{46}$$

και

$$\int_{\Omega\setminus A} |f_n - f|^p \le \mu(\Omega)\, \|f_n - f\|^p_{L^\infty(\Omega)}\,. \tag{47}$$

$$(46),\ (47)\ \Rightarrow\ \int_\Omega |f_n - f|^p \le\ 2^p\varepsilon + \mu(\Omega)\, \|f_n - f\|^p_{L^\infty(\Omega\setminus A)}\,.$$

Τότε,

$$\limsup_n \|f_n - f\|_p^p \le 2^p\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$
$$\Rightarrow\ \|f_n - f\|_p \to 0.$$

□

Θεώρημα 8.2. (Mazur). *Έστω E χώρος με νόρμα και $A \subset E$ κυρτό. Τότε, η κλειστότητα του A στην ισχυρή και στην ασθενή τοπολογία ταυτίζονται.*

Λήμμα 8.3. *Έστω E χώρος με νόρμα και (x_n) μία ακολουθία στον E, τέτοια ώστε $x_n \rightharpoonup x$ ασθενώς. Τότε υπάρχει ακολουθία (y_n) ώστε*

$$y_n \in conv\,(\ \{x_i : i \ge n\ \}\ ), \quad \forall n \ge 1 \ \ \textit{και} \ \ ||y_n - x|| \to 0.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα κυρτά σύνολα

$$G_n = conv\,(\ \{x_i : i \ge n\ \}\ ), \quad n \ge 1.$$

$\forall\ n \ge 1$, η ακολουθία $(x_i)_{i\ge n}$ συγκλίνει ασθενώς στο x, οπότε

$$x \in \overline{G_n}^{w} = \overline{G_n}^{\|\cdot\|} \quad (\text{βλ. Θεώρημα 8.2})$$

και συνεπώς, υπάρχει $y_n \in G_n$ τ.ω. $||y_n - x|| < 1/n$.
Η ακολουθία (y_n) έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. □

Πρόταση 8.6. *Έστω $1 < p < \infty$ και (f_n) μία ακολουθία στον $L^p(\Omega)$ που υπακούει στις επόμενες συνθήκες:*

(i) (f_n) φραγμένη στον $L^p(\Omega)$.
(ii) $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο Ω.

Τότε:

(α) $f_n \to f$ ασθενώς στην $\sigma(L^p, L^{p'})$.
(β) Αντικαθιστώντας τη συνθήκη (ii) με τη $(ii)'$, $\|f_n - f\|_1 \to 0$, ισχύει και πάλι το (α).
(γ) Αν υποθέσουμε ακόμη ότι ισχύει $\mu(\Omega) < \infty$, παράλληλα με τις συνθήκες (i) και (ii), έπεται ότι $\|f_n - f\|_q \to 0$, $\forall q$ με $1 \le q < p$.

Απόδειξη. (α) Λόγω της ανακλαστικότητας του $L^p(\Omega)$ (Θ. 3.5) και του Θ. 7.7, υπάρχει υπακολουθία $(f_{n_k})_{k\ge1}$ της (f_n) που συγκλίνει ασθενώς σε κάποια $\tilde{f} \in L^p(\Omega)$.

Το Λήμμα 8.3 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ακολουθίας $(g_{n_k})_{k\ge1}$ ·ώστε

$$g_{n_k} \in \mathrm{conv}\{f_{n_i} :\ i \ge k\},\ \forall\ k \ge 1$$

και

$$g_{n_k} \to \tilde{f},\ \text{ ισχυρώς στον } L^p(\Omega).$$

<u>Ισχυρισμός:</u>

$$\boxed{g_{n_k} \to f,\ \text{ σ.π. στο } \Omega.} \tag{48}$$

Πράγματι· $\forall k \ge 1,\ \exists m_k \ge k$ και $\{\lambda_i^{(k)}\}_{k\le i\le m_k} \subset [0,1]$ ώστε

$$g_{n_k} = \sum_{i=k}^{m_k} \lambda_i^{(k)} f_{n_i}, \qquad \sum_{i=k}^{m_k} \lambda_i^{(k)} = 1.$$

Επιλέγουμε $E \subset \Omega$ με $\mu(E) = 0$, τ.ω.

$$\forall x \in \Omega \setminus E, \quad f_{n_i}(x) \overset{i\to\infty}{\to} f(x).$$

Έστω $x \in \Omega \setminus E,\ \varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $i_0 \ge 1$ |

$$\forall i \ge i_0, \quad |f_{n_i}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Τότε, $\forall k > i_0$ και επειδή

$$f(x) = f(x) \sum_{i=k}^{m_k} \lambda_i^{(k)},$$

έχουμε

$$|g_{n_k}(x) - f(x)| \leq \sum_{i=k}^{m_k} \lambda_i^{(k)} |f_{n_i}(x) - f(x)| < \varepsilon \sum_{i=k}^{m_k} \lambda_i^{(k)} = \varepsilon.$$

Άρα, $\forall x \in \Omega \smallsetminus E,\ g_{n_k}(x) \overset{k\to\infty}{\to} f(x)$.

Η απόδειξη του Ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.

Εφαρμόζοντας το Θ.3.4, κατασκευάζουμε υπακολουθία $(g_{n_{k_l}})_{l\geq 1}$ της (g_{n_k}) τ.ω. να ισχύει

$$g_{n_{k_l}} \to \tilde{f}, \quad \text{σ.π. στο } \Omega. \tag{49}$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα (48) και (49), έπεται ότι:

$$f = \tilde{f}, \quad \text{σ.π. στο } \Omega.$$

Συνεπώς,

$$\boxed{f_{n_k} \rightharpoonup f \ \ \text{στην ασθενή τοπολογία } \sigma(L^p, L^{p'}).}$$

Με βάση τα παραπάνω και απαγωγή σε άτοπο μπορούμε να δείξουμε ότι $f_n \rightharpoonup f$ στην ασθενή τοπολογία $\sigma\left(L^p, L^{p'}\right)$

(β) Επειδή $f_n \to f$ ισχυρώς στον L^1, χρησιμοποιώντας το Θ.3.4, εντοπίζουμε άμεσα υπακολουθία (f_{n_k}) τ.ω. $f_{n_k} \to f$ σ.π. στο Ω κι εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα.

(γ) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Egorov (Θ.8.5 /(γ)) :

$\forall\ \delta > 0,\ \exists A \subset \Omega$ με $\mu(A) \leq \delta$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\Omega \setminus A$ και

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_n - f|^q &= \int_{\Omega \setminus A} |f_n - f|^q + \int_A |f_n - f|^q \\ &\leq \|f_n - f\|^q_{L^\infty(\Omega \setminus A)}\, \mu(\Omega) + (\mu(A))^{1-q/p}\, \|f_n - f\|^q_p \quad \text{(ανισότητα Hölder)} \\ &\leq \|f_n - f\|^q_{L^\infty(\Omega \setminus A)}\, \mu(\Omega) + \delta^{1-q/p}(2C)^q,\end{aligned}$$

όπου $C = \sup\limits_n \|f_n\|_p$. Άρα:

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n - f\|_q^q = \delta^{1-q/p}(2C)^q, \quad \forall \delta > 0.$$

$$\Rightarrow\ \|f_n - f\|_q \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

□

Σχόλιο: Το συμπέρασμα της Πρότασης 8.6 /(α) δεν ισχύει εν γένει για το χώρο $L^1(\Omega)$, όπως προκύπτει από το παρακάτω

Παράδειγμα: Έστω $\Omega = (0,1)$ εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue $|\cdot|$ και η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in (0,1)$, $n \geq 1$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $f_n(x) \to 0$, σχεδόν παντού στο Ω.
(ii) η (f_n) είναι φραγμένη στον $L^1(\Omega)$.
(iii) $f_n \nrightarrow 0$ ασθενώς στην $\sigma(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$.

Πιο συγκεκριμένα, δεν υπάρχει υπακολουθία της (f_n) που συγκλίνει ασθενώς στην $\sigma(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$.

Απόδειξη. (i) Είναι προφανές από L'Hospital:

$$\lim_{t\to\infty} te^{-tx} = 0, \quad \forall x > 0.$$

(ii) Έχουμε ότι

$$\|f_n\|_1 = \int_\Omega f_n = \int_0^1 ne^{-nx}dx = \big[-e^{-nx}\big]_0^1 = 1 - e^{-n} < 1, \quad \forall\ n \geq 1.$$

(iii) Η (f_n) δεν έχει υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς στην $\sigma(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$.

Πράγματι, θέτουμε $\Omega_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ και παρατηρούμε ότι

$$|\Omega_n| \to 0, \quad \int_{\Omega_n} f_n = \int_0^{1/n} ne^{-nx}dx = \Big[-e^{-nx}\Big]_0^{1/n} = 1 - e^{-1}, \ n \geq 1. \qquad (50)$$

Από την (50) προκύπτει ότι καμμία υπακολουθία της (f_n) δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Από το Θ.7.8 έπεται ότι δεν υπάρχει υπακολουθία της (f_n) που συγκλίνει στην ασθενή τοπολογία.

□

Πρόταση 8.7 (**Λήμμα Brezis–Lieb**)**.** *Έστω $1 < p < \infty$. Υπάρχει σταθερά $\mathcal{D}$ εξαρτώμενη από το p τέτοια ώστε:*

(α) $\big||\alpha+\beta|^p - |\alpha|^p - |\beta|^p\big| \ \leq \mathcal{D}\ (|\alpha|^{p-1}|\beta| + |\alpha||\beta|^{p-1}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

(β) *Αν η (f_n) είναι μία φραγμένη ακολουθία στον $L^p(\Omega)$ και συγκλίνει σχεδόν παντού σε μία συνάρτηση f τότε:*

$$f \in L^p(\Omega) \quad \textit{και} \quad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \Big\{|f_n|^p - |f_n - f|^p\Big\} = \int_\Omega |f|^p.$$

Απόδειξη. (α) Θέτουμε:

$$\phi(t) = \frac{\big||t+1|^p - |t|^p - 1\big|}{|t|^{p-1} + |t|}, \quad t \neq 0.$$

<u>**Ισχυρισμός:**</u> $\sup\limits_{t\neq 0} \phi(t) < \infty$.

Επειδή $\phi(\frac{1}{t}) = \phi(t), \ \forall t \neq 0$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\sup_{0<|t|\leq 1} \phi(t) < \infty.$$

Η ϕ είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1,0),(0,1]$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\phi(0^+), \phi(0^-) \in \mathbb{R}$.
Εφ' όσον οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned}\alpha(t) =& (1+t)^p - 1 - t^p, && t \in [0,1],\\ \beta(t) =& (1+t)^p - 1 - (-t)^p, && t \in [-1,0]\end{aligned}$$

είναι γνησίως αύξουσες με $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, έχουμε

$$\alpha(t) \geq 0, \quad \forall\ t \in [0,1], \quad \beta(t) \leq 0, \quad \forall\ t \in [-1,0].$$

Συνεπώς,

$$\phi(t) = \frac{(t+1)^p - t^p - 1}{t^{p-1} + t}, \quad t \in (0,1]$$

και

$$\phi(t) = -\frac{(t+1)^p - |t|^p - 1}{|t|^{p-1} + |t|}, \quad t \in [-1,0).$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $1 < p < 2$ (ii) $p = 2$ (iii) $p > 2$

Με χρήση του κανόνα De L'Hospital ($D.H.$) έπεται ότι

(i) $1 < p < 2$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(t+1)^p - t^p - 1}{t^{p-1} + t} \overset{D.H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{p\left((t+1)^{p-1} - t^{p-1}\right)}{(p-1)\left(\dfrac{1}{t}\right)^{2-p} + 1} = 0,$$

$$\lim_{t\to 0^-} -\frac{(t+1)^p - (-t)^p - 1}{(-t)^{p-1} - t} \overset{D.H.}{=} \lim_{t\to 0^-} \left[p\frac{(t+1)^{p-1} + (-t)^{p-1}}{(p-1)\left(-\frac{1}{t}\right)^{2-p} + 1} \right] = 0.$$

(ii) $p = 2$

Προφανώς,

$$\lim_{t\to 0^+} \phi(t) = \lim_{t\to 0^-} \phi(t) = 1$$

(iii) $p > 2$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(t+1)^p - t^p - 1}{t^{p-1} + t} \overset{D.H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{p\left((t+1)^{p-1} - t^{p-1}\right)}{(p-1)t^{p-2} + 1} = p,$$

$$\lim_{t\to 0^-} -\frac{(t+1)^p-(-t)^p-1}{(-t)^{p-1}-t} \overset{D.H.}{=} \lim_{t\to 0^-}\left[p\frac{(t+1)^{p-1}+(-t)^{p-1}}{(p-1)(-t)^{p-2}+1}\right] = p.$$

Συνεπώς,

$$\phi(0^+) = \phi(0^-) = \begin{cases} p, & p>2 \\ 1, & p=2 \\ 0, & 1<p<2 \end{cases}.$$

Η απόδειξη του Ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.

Λόγω του Ισχυρισμού, $\exists\ \mathcal{D}>0 \mid \forall t\in\mathbb{R}$,

$$||t+1|^p-|t|^p-1| \le \mathcal{D}\left(|t|^{p-1}+|t|\right).$$

Εάν $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \beta\ne 0$, θέτοντας στην τελευταία $t=\frac{\alpha}{\beta}$ παίρνουμε

$$||\alpha+\beta|^p-|\alpha|^p-|\beta|^p| \le \mathcal{D}\left(|\alpha|^{p-1}|\beta|+|\alpha||\beta|^{p-1}\right).$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει και για $\beta=0$.

(β) Θέτουμε $\alpha=f_n(x)-f(x)$, $\beta=f(x)$, $x\in\Omega$ στην παραπάνω ανισότητα και ολοκληρώνοντας πάνω στο Ω παίρνουμε:

$$\int_\Omega\Big||f_n|^p-|f_n-f|^p-|f|^p\Big|d\mu \le\ \mathcal{D}\Big[\int_\Omega|f_n-f|^{p-1}|f|d\mu+\int_\Omega|f_n-f||f|^{p-1}d\mu\Big].$$

Έχουμε ότι $|f_n-f|\rightharpoonup 0$ στην ασθενή τοπολογία του L^p και $|f_n-f|^{p-1}\rightharpoonup 0$ στην ασθενή τοπολογία του $L^{p'}$ (βλ. Πρόταση 8.6), οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|f_n-f|^{p-1}|f| = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega|f_n-f||f|^{p-1}=0.$$

Επειδή η ακολουθία $|f_n|$ είναι φραγμένη στον $L^p(\Omega)$, θα ισχύει λόγω του Λήμματος Fatou (Θ.2.3) ότι:

$$\|f\|_p \le \liminf_{n\to\infty}\|f_n\|_p \le\ M=\sup_{k\ge 1}||f_k||_p<\infty.$$

Άρα $f \in L^p(\Omega)$ και:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \Big| |f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p \Big| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Big| |f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p \Big| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Big\{ |f_n|^p - |f_n - f|^p \Big\} = \int_\Omega |f|^p.$$

$\square$

9 Βιβλιογραφία

Αναφορές

[1] Albiac, Fernando and Kalton, Nigel J. *Topics in Banach Space Theory.* Τόμ. 233. σ.109, Θ. 5.2.9. Springer, 2006.

[2] Bogachev, Vladimir Igorevich. *Measure theory.* Τόμ. 1. Springer, 2007.

[3] Brézis, Haim. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Τόμ. 2. 3. Springer, 2011. Κεφ. 4.

[4] Diestel, Joseph. *Sequences and series in Banach spaces.* Τόμ. 92. σ. 93. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] Edwards, Robert E. *Functional analysis: theory and applications.* σ. 274, Θ. 4.21.2. Courier Corporation, 2012.

[6] Jordan Bell. *The Dunford-Pettis Theorem.* Απρ. 2015, url: https://jordanbell.info/LaTeX/mathematics/dunford-pettis.

[7] Treves, François. 'Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels: Pure and Applied Mathematics, Vol. 25'. Τόμ. 25. σ. 471, Θ. 46.1. Elsevier, 2016.

[8] Wojtaszczyk, Przemyslaw. *Banach spaces for analysts.* 25. σ. 137, Θ. 12. Cambridge University Press, 1996.

[9] Αργυρός Σπυρίδων. 'Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης Ι'. Κεφ.3, σ. 34, Πρόταση 3.16. 2004.