ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Θεωρία Κρίσιμων Σημείων και Εφαρμογές

της Ελπιάννας Στ. Εμμανουηλίδη

Γεώργιος Σμυρλής (Επιβλέπων Καθηγητής)

Νικόλαος Γιαννακάκης & Δημήτρης Κοντοκώστας (Μέλη)

Μεταπτυχιακή Εργασία

που υποβλήθηκε στα πλαίσια του

Μ.Δ.Ε. "Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες"

Ροή Α – "Ανάλυση και Διαφορικές Εξισώσεις"

Αθήνα, 23 Σεπτεμβρίου 2022

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής, Αναπληρωτή Καθηγητή Νικόλαο Γιαννακάκη και Επίκουρο Καθηγητή Δημήτρη Κοντοκώστα, για τη συμμετοχή τους στην επίβλεψη της μεταπτυχιακής μου εργασίας, και ιδιαίτερα τον κύριο επιβλέποντα, Αναπληρωτή Καθηγητή Γεώργιο Σμυρλή, ο οποίος δέχτηκε να μου αναθέσει το θέμα της εργασίας και να μου εμπιστευτεί εξαιρετικά κατατοπιστικές προσωπικές του σημειώσεις, χωρίς τις οποίες θα ήταν αδύνατο να υλοποιηθεί από μέρους μου η εργασία στο επίπεδο που παρουσιάζεται.

Αναφέρω ότι είχα τη χαρά να γνωρίσω τα μέλη της επιτροπής κατά τη διάρκεια της φοίτησής μου στο Μ.Δ.Ε. "Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες" (Ροή Α, "Ανάλυση και Διαφορικές Εξισώσεις") του Τομέα Μαθηματικών της ΣΕΜΦΕ· τον Γ.Σμυρλή στα μαθήματα "Συναρτησιακή Ανάλυση" και "Μη Γραμμική Συναρτησιακή Ανάλυση" (από κοινού με τον Καθηγητή Δημήτρη Κραββαρίτη), τον Ν.Γιαννακάκη στο μάθημα "Θεωρία Τελεστών" και τον Δ.Κοντοκώστα στο μάθημα "Τοπικά Ευκλείδειες Γεωμετρίες".

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ **i**

ΚΕΦΑΛΑΙΑ: **1**

1 Εισαγωγή **1**

2 Μεταβολική αρχή για σχεδόν κρίσιμα σημεία **5**

2.1 Κίνητρο & Αντιπαραδείγματα 5

2.2 Το Θεώρημα Ekeland 6

2.3 Η Συνθήκη Palais-Smale 13

3 Το Θεώρημα Mountain Pass **21**

3.1 Ομοτοπία 21

3.2 Συμπληρωματικές ιδιότητες ομοτοπίας 29

3.2.1 Εφαρμογές 32

3.3 Το Θεώρημα Παραμόρφωσης 36

3.4 Το Θεώρημα Mountain Pass 47

4 Εφαρμογή σε μια κλάση Ασυμπτωτικά Γραμμικών Προβλημάτων **53**

Α΄ Χώροι Sobolev - Ασθενείς λύσεις **65**

Α΄.1 Ομαλές συναρτήσεις 65

Α΄.2 Οι χώροι Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ 66

Α΄.2.1 Χρήσιμες ενσφηνώσεις και ανισότητες 67

Α΄.2.2 Ασθενείς λύσεις - Ομαλότητα 67

Α΄.3 Παράγωγος σε χώρο Banach 68

Α΄.3.1 Παράδειγμα 69

Β΄ Φασματικές ιδιότητες **70**

Β΄.1 Το πρόβλημα ιδιοτιμών 70

Β΄.2 Ιδιότητες των ιδιοτιμών 71

Γ΄ Ο τελεστής Nemytski **73**

Γ΄.1 Ο τελεστής Nemytski ως παράγωγος συναρτησιακού 75

Δ΄ Τελεστές μονότονου τύπου **76**

ΑΝΑΦΟΡΕΣ **81**

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

γ.χ.ν.	γραμικός χώρος με νόρμα
δ.π.	διανυσματικό πεδίο
κ.η.σ.	κάτω ημισυνέχεια
ΠΑΤ	Πρόβλημα Αρχικών Τιμών
ΠΣΤ	Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών
σημ.	σημαίνει
σ.π.	σχεδόν παντού
Τ.Α.	Τριγωνική Ανισότητα
τ.χ.	τοπολογικός χώρος
τ.γ.χ.	τοπολογικός γραμικός χώρος
GMPT	Geometric Mountain Pass Theorem
MPT	Mountain Pass Theorem
P.	Ανισότητα Poincaré
PS	Συνθήκη Palais-Smale

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Το Θ. Weierstrass (βλ. Θ. 1) εξασφαλίζει *ικανές* συνθήκες ύπαρξης ολικού ελαχίστου για ένα συναρτησιακό φ ορισμένο πάνω σε *ανακλαστικό* χώρο Banach X. Συγκεκριμένα, αν το φ είναι αφ' ενός *πιεστικό* (γεγονός που εξασφαλίζει ότι οι ελαχιστοποιητικές ακολουθίες είναι *φραγμένες*) και αφ' ετέρου *ασθενώς ακολουθιακά κάτω ημισυνεχές*, τότε το φ λαμβάνει ολικό ελάχιστο σε κάποιο σημείο $u_0 \in X$. Αν επιπλέον $\varphi \in C^1(X)$, τότε το u_0 είναι και *κρίσιμο σημείο* του φ.

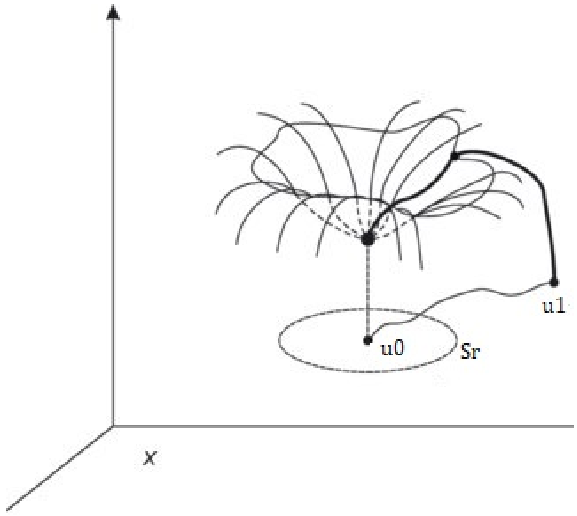
Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με την εύρεση κρίσιμων σημείων για συναρτησιακά ορισμένα πάνω σε απειροδιάστατο χώρο Banach, τα οποία δεν ικανοποιούν υποχρεωτικά τις συνθήκες του Θ. Weierstrass. Η ύπαρξη κρίσιμων σημείων είναι κομβικής σημασίας στην Ποιοτική Θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων, αφού σε πολλές περιπτώσεις οι *ασθενείς λύσεις* ένος Προβλήματος Συνοριακών Τιμών ταυτίζονται με τα *κρίσιμα σημεία* ενός C^1–συναρτησιακού (*συναρτησιακού ενέργειας*) ορισμένου πάνω σε έναν κατάλληλο χώρο Sobolev.

Πιό συγκεκριμένα, μελετάμε τη Μεταβολική Αρχή του Ekeland (βλ. Θ. 2 & Θ. 3, Ενότητα 2.2) και τη συνθήκη συμπάγειας Palais-Smale (PS) (βλ. Ενότητα 2.3) και παραθέτουμε με λεπτομέρειες ένα θεμελιώδες θεώρημα της Θεωρίας Κρίσιμων Σημείων, το Θεώρημα Mountain Pass των Ambrossetti–Rabinowitz (βλ. Θ. 8, Ενότητα 3.4).

Η μεταβολική αρχή Ekeland εξασφαλίζει ότι ένα *κάτω ημισυνεχές* & *κάτω φραγμένο* συναρτησιακό πάνω από έναν *πλήρη μετρικό χώρο*, μπορεί να προσεγγιστεί από κατάλληλη *διαταραχή* του, η οποία έχει ολικό ελάχιστο.

Το γεωμετρικό σκεπτικό του Θ. Mountain Pass έχει ως εξής:

Θεωρούμε δύο κοιλάδες μεταξύ των οποίων μεσολαβεί μια "οροσειρά" και δύο σημεία u_0 & u_1 που βρίσκονται σε αυτές τις δύο κοιλάδες (δηλ. *εκατέρωθεν* της "οροσειράς"). Θεωρούμε επίσης ένα συναρτησιακό φ έτσι ώστε το $\varphi(u)$ να εκφράζει το "ύψος" στο σημείο u. Εάν κάποιος προσπαθήσει να μεταβεί από το σημείο u_0 στο σημείο u_1, αναγκαστικά θα ανέβει την οροσειρά κατά μήκος κάποιου μονοπατιού, θα φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος και στη συνέχεια θα αρχίσει να κατεβαίνει μέχρι να φτάσει στον προορισμό του. Για να ελαχιστοποιήσει όμως τον κόπο που θα καταβάλλει, θα πρέπει να επιλέξει ένα μονοπάτι κατάλληλο ώστε το μέγιστο ύψος να είναι το ελάχιστο σε σχέση με όλα τα άλλα μονοπάτια που συνδέουν τα σημεία u_0 & u_1, διασχίζοντας με αυτόν τον τρόπο την οροσειρά μέσω μιας "διάβασης" (mountain pass). Φυσιολογικά, το μέγιστο ύψος $c = \varphi(u^*)$ αυτού του βέλτιστου



Σχήμα 1.1: "Mountain pass" από το σημείο u_0 στο u_1 [Βλ. Σχ.1 σε σχετικό άρθρο των Pucci & Radulescu, διαθέσιμο εδώ: `https://www.researchgate.net/publication/234044312_The_Impact_of_the_Mountain_Pass_Theory_in_Nonlinear_Analysis_A_Mathematical_Survey`].

μονοπατιού, αναμένεται να είναι κρίσιμη τιμή του φ (στο σημείο u^* λογικά η γη θα είναι "επίπεδη"). Ποιοτικά, το κρίσιμο σημείο u^* αναμένεται να είναι *σαγματικό*.

Η απόδειξη του Θ. Mountain Pass που παρατίθεται στην παρούσα εργασία, βασίζεται στο 1ο Θ. Παραμόρφωσης του Clarke (βλ. Θ. 4). Το θεώρημα αυτό προσφέρει μια μέθοδο εντοπισμού κρίσιμων σημείων του φ, η οποία στηρίζεται στη μελέτη των μεταβολών στην τοπολογία των συνόλων

$$\varphi^c = \{x \in X : \varphi(x) \leq c\}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Συγκεκριμένα, αν το $c \in \mathbb{R}$ *δεν είναι* κρίσιμη τιμή του φ, τότε τα σύνολα $\varphi^{c-\varepsilon}$ & $\varphi^{c+\varepsilon}$ αναμένεται να είναι *τοπολογικά ισοδύναμα*, με την έννοια της *ομοτοπικής ισοδυναμίας* (βλ. Ορισμό 5), για $\varepsilon > 0$ "μικρό". Η μεταβολή εντοπίζεται με κατάλληλη *ομοτοπία παραμόρφωσης*. Το Θ. Παραμόρφωσης έχει ανεξάρτητο ενδιαφέρον και πίσω από τη διατύπωση και την απόδειξή του υποκρύπτονται η *θεωρία ομοτοπίας* - στοιχεία της οποίας επίσης παρατίθενται με λεπτομέρειες στην παρούσα εργασία (βλ. ενότητα 3.1) - καθώς και η κομβικής σημασίας συνθήκη *συμπάγειας Palais-Smale* (βλ. Ορισμό 2). Σχετικά με τη συνθήκη Palais-Smale, παρουσιάζονται ενδιαφέροντα κίνητρα που οδηγούν φυσιολογικά στον ορισμό, καθώς επίσης και βασικές ιδιότητες των συναρτησιακών που ικανοποιούν τη συνθήκη αυτή.

Σαν εφαρμογή των παραπάνω, μελετάμε το ελλειπτικό πρόβλημα p-Laplace-Dirichlet

$$-\Delta_p u(z) = f(z, u(z))\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega\,, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad 1 < p < +\infty\,,$$

όπου $\Delta_p u(\cdot) = \mathrm{div}(\,|\nabla u(\cdot)|^{p-2}\nabla u(\cdot)\,)$ και $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τύπου Καραθεοδωρή τέτοια ώστε η $f(z,\cdot)$ να παρουσιάζει, ασυμπτωτικά στο $\pm\infty$, $(p-1)$-γραμμική αύξηση. Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση f ικανοποιεί μια πολυωνυμική αυξητική συνθήκη βαθμού $p-1$ με $f(z,0)=0$, σ.π. στο Ω. Επιπλέον, οι γενικευμένες "κλίσεις"

$$\frac{f(z,t)}{|t|^{p-2}t}\,, \quad z \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

για t "κοντά" στο $\pm\,\infty$, "εγκλωβίζονται" αυστηρά μεταξύ των δύο πρώτων ιδιοτιμών $\lambda_1\,, \lambda_2$ του τελεστή $-\Delta_p u$ με Dirichlet συνοριακές συνθήκες, ενώ για t "κοντά" στο 0, βρίσκονται "κάτω" από την λ_1 .

Στο Θεώρημα 9 εφαρμόζουμε εργαλεία της Θεωρίας Κρίσιμων Σημείων (π.χ. Θ. Mountain Pass), καθώς και της Μη Γραμμικής Θεωρίας Ομαλότητας, για να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον μη τετριμμένης ασθενούς λύσης του παραπάνω προβλήματος μέσα στο χώρο Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ που είναι ταυτόχρονα και κλάσης C^1.

Η παρούσα εργασία κλείνει με τα Παραρτήματα Α'-Δ' που περιλαμβάνουν το απαραίτητο υπόβαθρο Μη Γραμμικής Ανάλυσης που χρησιμοποιείται στην υπόλοιπη εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μεταβολική αρχή για σχεδόν κρίσιμα σημεία

2.1 Κίνητρο & Αντιπαραδείγματα

Έστω X χώρος Banach και $\varphi \in C^1(X)$ *κάτω φραγμένο* συναρτησιακό. Το φ δεν έχει υποχρεωτικά ολικό ελάχιστο, π.χ. $\varphi(u) = \mathrm{e}^u$, $\varphi(u) = \mathrm{Arctan}(u)$, $u \in \mathbb{R}$, ή (για την άπειρη διάσταση) το συναρτησιακό του παρακάτω παραδείγματος που οφείλεται στον **Weierstrass:**

Παράδειγμα 1. *Θεωρούμε το χώρο Banach* $(\, C^1([-1,1]), \|\cdot\|\,)$, *όπου*

$$\|u\| = \max_{t\in[-1,1]} |u(t)| \; + \; \max_{t\in[-1,1]} |u'(t)|, \quad u \in C^1([-1,1])\,,$$

τον κλειστό γραμμικό υπόχωρο

$$X = \{\; u \in C^1([-1,1]) : u(-1) = -1, \;\; u(1) = 1 \;\}$$

και το συναρτησιακό

$$\varphi : X \to \mathbb{R}\,, \quad \varphi(u) = \int_{-1}^{1} (tu'(t))^2 \, dt\,, \quad u \in X\,.$$

Τότε, το φ *είναι κάτω φραγμένο αλλά δε λαμβάνει ολικό ελάχιστο στον* X.

Απόδειξη: Πράγματι· προφανώς, $\varphi(u) \geq 0\,,\ \forall\, u \in X\,.$

Θεωρούμε την ακολουθία $(u_n) \subset X$ με

$$u_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{\arctan(n)}\,, \quad t \in [-1,1], \quad n \geq 1\,.$$

Για κάθε $n \geq 1$ και $t \in [-1,1]$ έχουμε

$$u_n'(t) = \left(\frac{\arctan(nt)}{\arctan(n)}\right)' = \frac{1}{\arctan(n)}(\arctan(nt))' = \frac{1}{\arctan(n)}\frac{n}{1+n^2t^2}\,,$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\varphi(u_n) &= \int_0^1 (tu_n'(t))^2\, dt = \frac{1}{\arctan^2(n)} \int_0^1 \frac{n^2t^2}{(1+n^2t^2)^2} dt \\
&= -\frac{1}{2\arctan^2(n)} \left\{ \int_0^1 t \left(\frac{1}{1+n^2t^2}\right)' dt \right\} \\
&= -\frac{1}{2\arctan^2(n)} \left(\frac{1}{1+n^2} \; - \; \int_0^1 \frac{dt}{1+n^2t^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2\arctan^2(n)} \left[\frac{1}{1+n^2} \; - \; \frac{\arctan(n)}{n} \right] \\
&= -\frac{1}{2(1+n^2)\arctan^2(n)} \; + \; \frac{1}{2n\arctan(n)}\,.
\end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι $\varphi(u_n) \to 0$ κι επομένως, $\inf\limits_{u \in X} \varphi(u) = 0$. Όμως, το φ δεν επιτυγχάνει ολικό ελάχιστο στον X, διότι η ισότητα $\varphi(u) = 0$ ισχύει μόνο στην περίπτωση που $tu'(t) = 0$, $\forall\, t \in [-1,1]$, δηλ. όταν u σταθερή στο $[-1,1]$ που είναι αδύνατο, αφού $u(-1) \neq u(1)$. $\square$

2.2 Το Θεώρημα Ekeland

Έστω X χώρος Banach και $\varphi \in C^1(X)$ *κάτω φραγμένο* συναρτησιακό. Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι το φ δεν έχει υποχρεωτικά ολικό ελάχιστο. Υπάρχει όμως πάντα *ελαχιστοποιητική* ακολουθία, δηλ.

$$\exists\, (u_n) \subset X \quad \text{τέτοια ώστε} \quad \varphi(u_n) \to m\,, \quad \text{όπου } m := \inf_X \varphi\,. \tag{1}$$

Θα δούμε στη συνέχεια ότι υπάρχουν ελαχιστοποιητικές ακολουθίες που αποτελούνται από *σχεδόν κρίσιμα* σημεία.

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει ικανές συνθήκες ύπαρξης ολικού ελαχίστου.

Θεώρημα 1 (Weierstrass). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$* ***ανακλαστικός χώρος Banach*** *και $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το φ είναι* ***πιεστικό****, δηλ.*

$$\varphi(u) \to +\infty, \quad \text{καθώς } \|u\| \to +\infty \tag{2}$$

και ***ακολουθιακά ασθενώς κάτω ημισυνεχές****, δηλ. ισχύει η συνεπαγωγή*

$$u_n \rightharpoonup u_0 \;\text{ στον } X \implies \varphi(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n)\,. \tag{3}$$

Τότε το φ έχει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $u_0 \in X$. Αν επιπλέον $\varphi \in C^1(X)$, τότε $\varphi'(u_0) = 0_{X^*}$.

Απόδειξη: Έστω ακολουθία $(u_n) \subset X$ με $\varphi(u_n) \to m$, όπου $m := \inf\limits_X \varphi \in [-\infty, +\infty)$.

Ισχυρισμός. *Η ακολουθία (u_n) είναι φραγμένη.*

Απαγωγή σε άτοπο: Αν όχι, τότε υπάρχει υπακολουθία $(\widetilde{u}_n) \subset (u_n)$, τέτοια ώστε $\|\widetilde{u}_n\| \to +\infty$. Επειδή όμως το φ είναι πιεστικό (βλ. σχέση (2)), θα ικανοποιεί $\varphi(\widetilde{u}_n) \to +\infty$. Επομένως, $m = +\infty$, ενώ $m \in [-\infty, +\infty)$ (ΑΤΟΠΟ). $\square$

Επειδή η ακολουθία (u_n) είναι φραγμένη στον ανακλαστικό χώρο X, θα έχει υπακολουθία $(\widetilde{u}_n)$ ασθενώς συγκλίνουσα σε κάποιο $u_0 \in X$. Επειδή το φ είναι ακολουθιακά ασθενώς κάτω ημισυνεχές (σχέση (3)), ικανοποιεί

$$\varphi(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(\widetilde{u}_n) = m\,.$$

Επιπλέον, $m \leq \varphi(u_0)$ και συνεπώς, το $m = \varphi(u_0)$ είναι ολικό ελάχιστο του φ. $\blacksquare$

Το επόμενο θεμελιώδες θεώρημα, γνωστό στη βιβλιογραφία ως *Μεταβολική Αρχή του Ekeland*, μας εξασφαλίζει μεταξύ άλλων την ύπαρξη ελαχιστοποιητικής ακολουθίας *σχεδόν κρίσιμων σημείων*, για ένα λείο κάτω φραγμένο συναρτησιακό πάνω από ένα χώρο Banach. Το θεώρημα στην πιο γενική του μορφή μας εξασφαλίζει ότι ένα κάτω ημισυνεχές και κάτω φραγμένο συναρτησιακό πάνω από έναν πλήρη μετρικό χώρο, μπορεί να προσεγγιστεί από κατάλληλη διαταραχή του, η οποία έχει ολικό ελάχιστο.

Θεώρημα 2 (Ekeland (1974) - 1η εκδοχή)**.** *Έστω* (Y, d) *πλήρης μετρικός χώρος και* $\varphi : (Y, d) \to \mathbb{R}$ *κάτω φραγμένο και κάτω ημισυνεχές συναρτησιακό. Έστω* $\varepsilon > 0$ *και* $y_0 = y_0(\varepsilon) \in Y$ *με την ιδιότητα*

$$\varphi(y_0) \leq \inf_{y' \in Y} \varphi(y') + \varepsilon \,.$$

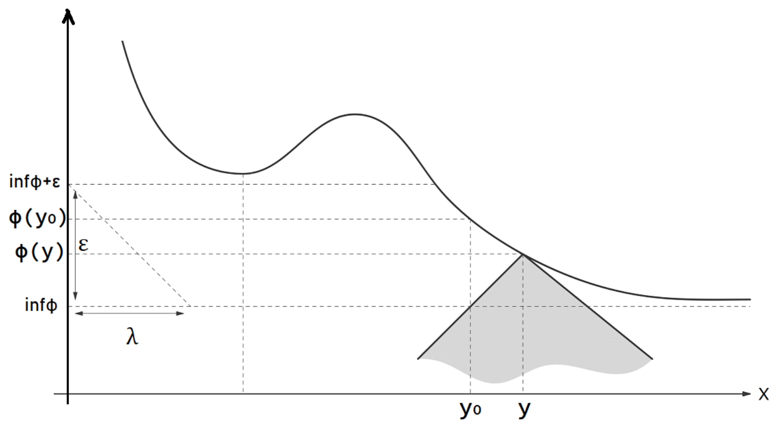
Τότε, για κάθε $\lambda > 0$*, υπάρχει* $y = y(\lambda, \varepsilon) \in Y$ *ώστε*

(i) $\varphi(y) \leq \varphi(y_0)\,,$

(ii) $d(y, y_0) \leq \lambda\,,$

(iii) $\varphi(y) \leq \varphi(y') + \dfrac{\varepsilon}{\lambda} d(y, y')$*, για κάθε* $y' \in Y$ *με* $y' \neq y\,.$

Η ιδιότητα **(i)** εξασφαλίζει ότι το y αποτελεί *μια καλύτερη προσέγγιση* του infimum του φ στον Y, η ιδιότητα **(ii)** ότι το y βρίσκεται *αυθαίρετα κοντά στην αρχική προσέγγιση* y_0 κι επιπλέον, *ελαχιστοποιεί τη διαταραχή* του φ στο δεξί μέλος της **(iii)**.



Σχήμα 2.1: Ο κώνος $\widetilde{\varphi}(y) = \varphi(y) \pm \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y, y_0)$ ακουμπά το γράφημα της φ στο y από κάτω. [Βλ. Σχ.3.1, σ.24, Jabri (2003).]

Απόδειξη: Εφοδιάζουμε τον Y με τη *σχέση μερικής διάταξης* " $\leq_\lambda$ ", η οποία εξαρτάται από την επιλογή του λ:

$$y_1 \leq_\lambda y_2 \iff \varphi(y_1) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y_1, y_2) \leq \varphi(y_2), \quad \forall\, y_1, y_2 \in Y. \tag{4}$$

Η σχέση " $\leq_\lambda$ " έχει τις ιδιότητες της *μερικής διάταξης* :

- Είναι *ανακλαστική* (απλά, θεωρούμε $y_1 = y_2$).
- Είναι *αντισυμμετρική*. Πράγματι· αν $y_1 \leq_\lambda y_2$ & $y_2 \leq_\lambda y_1$, τότε

$$\varphi(y_1) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y_1, y_2) \leq \varphi(y_2) \leq \varphi(y_1) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y_2, y_1)\,,$$

οπότε $d(y_1, y_2) \leq 0 \Longrightarrow y_1 = y_2\,.$

- Είναι *μεταβατική*. Πράγματι· αν $y_1 \leq_\lambda y_2$ & $y_2 \leq_\lambda y_3$, τότε

$$\begin{aligned}\varphi(y_1) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y_1, y_3) &\leq \varphi(y_1) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y_1, y_2) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y_2, y_3) \\ &\leq \varphi(y_2) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y_2, y_3) \leq \varphi(y_3),\end{aligned}$$

  δηλ. $y_1 \leq_\lambda y_3$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\lambda = 1$. Εναλλακτικά, θεωρούμε την *ισοδύναμη μετρική* $d' := \lambda^{-1} d$.

Αφού ο Y είναι *πλήρης* μετρικός χώρος, θα δείξουμε την ύπαρξη του $y \in Y$ εφαρμόζοντας το Θεώρημα Cantor. Για το σκοπό αυτό, θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μια *φθίνουσα* ακολουθία μη κενών, κλειστών συνόλων, $(F_n)_{n\geq 1} \subset Y$ με $\mathrm{diam} F_n \to 0$, τα οποία θα έχουν την ιδιότητα της μη τετριμμένης τομής, συγκεκριμένα $\bigcap_{n\geq 1} F_n = \{y\}$ (μονοσύνολο).

Για κάθε $y \in Y$, θεωρούμε το σύνολο $F_y = \{y' \in Y \mid y' \leq y\}$.

Ισχυρισμός. *Τα σύνολα F_y, $y \in Y$ είναι μη κενά και κλειστά.*

Απόδειξη: Τα σύνολα F_y είναι προφανώς μη κενά, αφού $y \in F_y$ και *κλειστά*, διότι το φ είναι κάτω ημισυνεχές. Πράγματι, αν $(y'_n) \subset F_y$, τέτοια ώστε $\lim_n y'_n = y'$, τότε

$$y'_n \leq y \iff \varphi(y'_n) + \varepsilon d(y'_n, y) \leq \varphi(y), \quad \forall\, n \geq 1.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\varphi(y) &\geq \liminf_{n\to\infty} [\varphi(y'_n) + \varepsilon d(y'_n, y)] \\ &\geq \liminf_{n\to\infty} \varphi(y'_n) + \varepsilon \liminf_{n\to\infty} d(y'_n, y) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \varphi(y'_n) + \varepsilon d(y', y) \\ &\geq \varphi(y') + \varepsilon d(y', y) \quad [\text{το } \varphi \text{ είναι κ.η.σ.}].\end{aligned}$$

□

Κατασκευάζουμε μια ακολουθία $(y_n) \subset Y$ και μια ακολουθία συνόλων (F_n), ώστε

$$F_n = F_{y_n}, \quad y_{n+1} \in F_n, \quad \varphi(y_{n+1}) \leq \inf_{F_n} \varphi + \frac{\varepsilon}{n+1}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Η κατασκευή γίνεται επαγωγικά, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1: Για $n = 1$, θέτουμε $y_1 \equiv y_0$, $F_1 = F_{y_1}$ κι επιλέγουμε $y_2 \in F_1$ με την ιδιότητα $\varphi(y_2) \leq \inf_{F_1} \varphi + \frac{\varepsilon}{2}$.

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$, έχουν κατασκευαστεί τα $(y_k)_{1\leq k\leq n}$ και $(F_k)_{1\leq k\leq n}$.

Βήμα 3: Επιλέγουμε $y_{n+1} \in F_n$ με την ιδιότητα $\varphi(y_{n+1}) \leq \inf_{F_n} \varphi + \frac{\varepsilon}{n+1}$ και θέτουμε $F_{n+1} = F_{y_{n+1}}$.

Επειδή οι όροι της ακολουθίας $(y_n) \subset Y$ ικανοποιούν $y_{n+1} \leq y_n$, για κάθε $n \geq 1$, η ακολουθία συνόλων (F_n) είναι *φθίνουσα*, δηλ. $F_n \supset F_{n+1}$, για κάθε $n \geq 1$.

Ισχυρισμός. *Τα σύνολα* F_n *ικανοποιούν* $\operatorname{diam} F_n \to 0$.

Απόδειξη: Κάθε $y' \in F_{n+1}$ ικανοποιεί $y' \leq y_{n+1}$ και $y' \in F_n$. Επομένως,

$$\varphi(y') + \varepsilon d(y', y_{n+1}) \leq \varphi(y_{n+1}) \leq \varphi(y') + \frac{\varepsilon}{n+1} \Longrightarrow$$
$$d(y', y_{n+1}) \leq \frac{1}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{n+1} \Longrightarrow \operatorname{diam} F_{n+1} \leq \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0, \quad \text{καθώς } n \to +\infty .$$

□

Από το Θεώρημα Cantor έπεται ότι $\bigcap\limits_{n\geq 1} F_n = \{y\}$ για κάποιο $y \in Y$. Θα επαληθεύσουμε ότι αυτό το $y \in Y$ έχει τις ιδιότητες **(i) – (iii)** για $\lambda = 1$:

(i) Προφανώς, $y \in F_1 = \{\, y' \in Y \mid y' \leq y_1 = y_0 \,\}$, οπότε $y \leq y_0 \Longrightarrow \varphi(y) \leq \varphi(y_0)$.

(ii) Το y ικανοποιεί τη **(ii)** επειδή

$$\begin{aligned}
&\varphi(y) + \varepsilon d(y, y_0) \leq \varphi(y_0) \quad [\text{αφού } y \leq y_0] \\
\Longrightarrow \quad & d(y, y_0) \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\varphi(y_0) - \varphi(y)\right) \\
& \qquad\quad\; \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\inf_Y \varphi + \varepsilon - \varphi(y)\right) \quad [\text{από την ιδιότητα του } y_0] \\
& \qquad\quad\; \leq \frac{1}{\varepsilon}\cdot \varepsilon = 1 .
\end{aligned}$$

(iii) Εάν $y' \in Y$ με $y' \leq y$, τότε $y' \leq y_n$, για κάθε $n \geq 1$, δηλ.

$$y' \in \bigcap_{n\geq 1} F_n = \{y\} \Longrightarrow y' = y .$$

Επομένως, αν $y' \in Y$ με $y' \neq y$, τότε δεν ισχύει ότι $y' \leq y$ και άρα ισχύει η **(iii)** .

■

Παρατήρηση 1. *Το* y *είναι ελαχιστοποιητικό ως προς τη μερική διάταξη "* $\leq$ *" κι επιπλέον "σχεδόν σημείο ολικού ελαχίστου" για το* φ *στον* Y.

Παρατήρηση 2. *Οι σχέσεις **(ii)** & **(iii)** του Θεωρήματος 2 είναι συμπληρωματικές: όσο μεγαλώνει (μικραίνει) το* $\lambda > 0$, *η σχέση **(ii)** παρέχει μικρότερη (μεγαλύτερη) πληροφορία για τη θέση του ελαχιστοποιητικού* y *ενώ η σχέση **(iii)** γίνεται περισσότερο (λιγότερο) ακριβής, με το* $\varphi(y)$ *να τείνει στο (απομακρύνεται από το) ολικό ελάχιστο του* φ, *αφού ο διαταρακτικός όρος* $\frac{\varepsilon}{\lambda}d(y, y_0)$ *μικραίνει (μεγαλώνει). Ειδικές περιπτώσεις προκύπτουν όταν* $\lambda = 1$, *οπότε τα όρια μεταβολής του* y *είναι αδιάφορα και όταν* $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$, *οπότε εξασφαλίζονται και τα δύο: το* y *είναι πολύ κοντά στο* y_0 *και ταυτόχρονα είναι σχεδόν σημείο ολικού ελαχίστου του* φ.

Το Πόρισμα 2.1 προκύπτει θέτοντας $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ στο Θεώρημα 2.

Πόρισμα 2.1. *Έστω* Y*,* φ*,* $\varepsilon > 0$ *και* $y_0 = y_0(\varepsilon) \in Y$ *όπως στο Θεώρημα 2. Τότε υπάρχει* $y = y(\varepsilon) \in Y$ *ώστε*

(i) $\varphi(y) \leq \varphi(y_0)\,,$

(ii) $d(y_0, y) \leq \sqrt{\varepsilon}\,,$

(iii) $\varphi(y) \leq \varphi(y') + \sqrt{\varepsilon} d(y, y')$*, για κάθε* $y' \in Y$ *με* $y' \neq y\,.$

Στο Θεώρημα 3 και στα Πορίσματα 3.1–3.3, ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach και το συναρτησιακό $\varphi : X \to \mathbb{R}$ είναι *κάτω φραγμένο*, *κάτω ημισυνεχές* και *Gâteaux-παραγωγίσιμο*.

Θεώρημα 3 (Ekeland - 2η εκδοχή)**.** *Έστω* $\varepsilon > 0$ *και* $u_0 = u_0(\varepsilon) \in X$ *με την ιδιότητα*

$$\varphi(u_0) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon\,, \quad \inf_X \varphi =: m\,.$$

Τότε, για κάθε $\lambda > 0$*, υπάρχει* $\upsilon = \upsilon(\lambda, \varepsilon) \in X$*, ώστε*

(i)′ $\varphi(\upsilon) \leq \varphi(u_0)\,,$

(ii)′ $\|\upsilon - u_0\| \leq \lambda\,,$

(iii)′ $\|\varphi'(\upsilon)\|_\star \leq \dfrac{\varepsilon}{\lambda}\,.$

Απόδειξη: *Βλέπε την απόδειξη του Πορίσματος 3.1.* ■

Παρατήρηση 3. *Οι σχέσεις **(i)’** & **(iii)’** του Θεωρήματος 3 εξασφαλίζουν την ύπαρξη ενός σχεδόν σημείου ελαχίστου του* φ*, το οποίο είναι και σχεδόν κρίσιμο σημείο.*

Το Πόρισμα 3.1 είναι το αντίστοιχο του Πορίσματος 2.1 ($\lambda = \sqrt{\varepsilon}$), όπου d η μετρική που επάγει η νόρμα του X.

Πόρισμα 3.1. *Έστω* $\varepsilon > 0$ *και* $u_0 = u_0(\varepsilon) \in X$ *με την ιδιότητα*

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon\,, \quad \inf_X \varphi =: m\,.$$

Τότε, υπάρχει $\upsilon = \upsilon(\varepsilon) \in X$*, ώστε*

(i)′ $\varphi(\upsilon) \leq \varphi(u_0)\,,$

(ii)′ $\|\upsilon - u_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}\,,$

(iii)′ $\|\varphi'(\upsilon)\|_\star \leq \sqrt{\varepsilon}\,.$

Απόδειξη: Οι σχέσεις **(i)’** & **(ii)’** αντιστοιχούν στις σχέσεις **(i)** & **(ii)** του Πορίσματος 2.1. Θα αποδείξουμε τη σχέση **(iii)’**.

Απο τη σχέση **(iii)** του Πορίσματος 2.1, για κάθε $w \in X$ και $t > 0$, προκύπτει

$$\varphi(\upsilon) \leq \varphi(\upsilon + tw) + t\sqrt{\varepsilon}\|w\| \iff \frac{\varphi(\upsilon) - \varphi(\upsilon + tw)}{t} \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|.$$

Παίρνοντας όριο καθώς $t \to 0$, προκύπτει

$$-\langle \varphi'(v), w \rangle_{X^*,X} \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|\,, \quad \forall\, w \in X\,.$$

Αφού η τελευταία ισχύει για κάθε $w \in X$, θέτοντας όπου w το $-w$, παίρνουμε

$$|\langle \varphi'(v), w \rangle_{X^*,X}| \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|\,, \quad \forall\, w \in X\,.$$

Η σχέση **(iii)'** έπεται από τον ορισμό της δυϊκής νόρμας:

$$|\langle \varphi'(v), w \rangle_{X^*,X}| \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\| \iff \frac{|\langle \varphi'(v), w \rangle_{X^*,X}|}{\|w\|} \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad \forall\, w \in X\,,\; w \not\equiv 0\,,$$

$$\implies \quad \|\varphi'(v)\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle \varphi'(v), w \rangle_{X^*,X}| \leq \sqrt{\varepsilon}\,.$$

■

Οι συνθήκες **(i)'** & **(ii)'** του Πορίσματος 3.1 εξασφαλίζουν την ύπαρξη σχεδόν κρίσιμου σημείου (ελαχίστου) του φ στον X.

Πόρισμα 3.2. *Έστω X, φ και m όπως προηγουμένως. Τότε:*

(α) *Υπάρχει ελαχιστοποιητική ακολουθία $(v_n) \subset X$, τέτοια ώστε*

$$[\,\varphi(v_n) \to m \quad \& \quad \|\varphi'(v_n)\|_\star \to 0\,]\,.$$

(β) *Για κάθε $(u_n) \subset X$, τέτοια ώστε $\varphi(u_n) \to m$, υπάρχει $(v_n) \subset X$ και υπακολουθία $(\widetilde{u}_n) \subset (u_n)$, έτσι ώστε*

$$[\,\varphi(v_n) \to m, \quad \|v_n - \widetilde{u}_n\| \to 0, \quad \|\varphi'(v_n)\|_\star \to 0\,]\,.$$

Απόδειξη:

(α) Για κάθε $n \geq 1$, επιλέγουμε $u_n \in X$ με $m \leq \varphi(u_n) < m + \dfrac{1}{n^2}$.

Σύμφωνα με το Πόρισμα 3.1, για κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $v_n \in X$ ώστε

$$\varphi(v_n) \leq \varphi(u_n) \quad \& \quad \|\varphi'(v_n)\|_\star \leq \frac{1}{n}\,.$$

Η (v_n) έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

(β) Υπάρχει υπακολουθία $(\widetilde{u}_n) \subset (u_n)$, τέτοια ώστε $m \leq \varphi(\widetilde{u}_n) < m + \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 1$.

Σύμφωνα με το Πόρισμα 3.1, για κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $v_n \in X$ ώστε

$$\|v_n - \widetilde{u}_n\| < \frac{1}{n}\,, \quad \varphi(v_n) \leq \varphi(\widetilde{u}_n)\,, \quad \|\varphi'(v_n)\|_\star \leq \frac{1}{n}\,.$$

Η (v_n) έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

■

Το Πόρισμα 3.3 είναι χρήσιμο όταν το φ είναι *κάτω φραγμένο* πάνω σε ένα *κλειστό και φραγμένο υποσύνολο* του X.

Πόρισμα 3.3. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $\varphi : X \to \mathbb{R}$ κάτω ημισυνεχές και Gâteaux-παραγωγίσιμο που είναι κάτω φραγμένο πάνω στην κλειστή μπάλλα $B[u_0, r_0]$ κέντρου u_0 και ακτίνας $r_0 > 0$. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $r \in (0, r_0)$, υπάρχει $(u_n) \subset B[u_0, r]$, ώστε*

$$\varphi(u_n) \longrightarrow \inf_{B[u_0,r_0]} \varphi =: m\,. \tag{5}$$

Τότε, υπάρχει $(v_n) \subset B[u_0, r_0]$ και υπακολουθία $(\widetilde{u}_n) \subset (u_n)$ ώστε

$$[\,\varphi(v_n) \to m, \quad \|v_n - \widetilde{u}_n\| \to 0, \quad \|\varphi'(v_n)\|_\star \to 0\,]\,.$$

Απόδειξη: Ο χώρος $Y = B[u_0, r_0]$ είναι *πλήρης μετρικός χώρος*. Αφού $\varphi(u_n) \to m$, υπάρχει υπακολουθία $(\widetilde{u}_n) \subset (u_n)$, ώστε:

$$m \leq \varphi(\widetilde{u}_n) < m + \frac{1}{n^2}\,, \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

Επιλέγουμε $\boxed{n > (r_0 - r)^{-1}}$. Από το Πόρισμα 2.1 (επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$) , υπάρχει $v_n \in Y$ ώστε

(i) $\varphi(v_n) \leq \varphi(\widetilde{u}_n)$,

(ii) $\|v_n - \widetilde{u}_n\| \leq \frac{1}{n}$,

(iii) $\varphi(v_n) \leq \varphi(y) + \frac{1}{n}\|y - v_n\|$, για κάθε $y \in Y$ με $y \neq v_n$.

Τότε, $\varphi(v_n) \to m$ και $\|v_n - \widetilde{u}_n\| \to 0$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει και $\|\varphi'(v_n)\|_{X^*} \to 0$.

Επιλέγουμε $z \in X$ με $\|z\| = 1$ και $\boxed{0 < t < r_0 - r - n^{-1}}$.

Θέτουμε $y_n := v_n + tz \neq v_n$. Τότε, $y_n \in Y$. Πράγματι,

$$\|y_n - u_0\| \leq \|v_n - \widetilde{u}_n\| + \|\widetilde{u}_n - u_0\| + t\|z\| \leq \frac{1}{n} + r + t < r_0\,.$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση **(iii)** για $y = y_n := v_n + tz$, προκύπτει

$$\varphi(v_n) \leq \varphi(v_n + tz) + \frac{1}{n}\|(v_n + tz) - v_n\| \iff -\frac{\varphi(v_n + tz) - \varphi(v_n)}{t} \leq \frac{1}{n}\,.$$

Παίρνοντας όριο καθώς $t \to 0^+$, προκύπτει

$$-\langle \varphi'(v_n), z\rangle_{X^*,X} \leq \frac{1}{n}\,, \quad \forall\, z \in X \text{ με } \|z\| = 1\,.$$

Αφού η τελευταία ισχύει για κάθε $z \in X$, θέτοντας όπου z το $-z$, παίρνουμε

$$|\langle \varphi'(v_n), z\rangle_{X^*,X}| \leq \frac{1}{n}\,, \quad \forall\, z \in X \text{ με } \|z\| = 1$$

και συνεπώς

$$\|\varphi'(v_n)\|_\star \leq \frac{1}{n}\,.$$

Η τελευταία ισχύει για κάθε $n > (r_0 - r)^{-1}$, οπότε

$$\|\varphi'(v_n)\|_\star \to 0\,, \text{ καθώς } n \to +\infty\,.$$

■

2.3 Η Συνθήκη Palais-Smale

Η συνθήκη Palais-Smale είναι μια πολύ χρήσιμη συνθήκη *συμπάγειας* γιατί συμβάλλει ουσιωδώς στον εντοπισμό κρίσιμων σημείων για C^1-συναρτησιακά πάνω από χώρους Banach. Η ύπαρξη κρίσιμων σημείων είναι κομβικής σημασίας στην Ποιοτική Θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων, αφού σε πολλές περιπτώσεις οι λύσεις ένος Προβλήματος Συνοριακών Τιμών ταυτίζονται με τα κρίσιμα σημεία κάποιου κατάλληλου συναρτησιακού.

Ένα **πρώτο κίνητρο** για τον ορισμό της συνθήκης Palais-Smale αφορά σε *κάτω φραγμένα* C^1- συναρτησιακά και προέρχεται από τη *Μεταβολική Αρχή του Ekeland*. Συγκεκριμένα, έστω X χώρος Banach και $\varphi \in C^1(X)$ φραγμένο κάτω. Από το Πόρισμα 3.2, γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(u_n) \subset X$, τέτοια ώστε

$$[\,\varphi(u_n) \to m \quad \& \quad \|\varphi'(u_n)\|_* \to 0\,]\,, \quad \text{όπου } m := \inf_X \varphi\,.$$

Εάν μπορούσαμε να εξαγάγουμε μια *υπακολουθία* της (u_n) που είναι *ισχυρώς συγκλίνουσα* σε κάποιο $u_0 \in X$, τότε θα παίρναμε ότι $\varphi(u_0) = m$ & $\varphi'(u_0) = 0$, δηλ. το u_0 θα ήταν σημείο ολικού ελαχίστου και φυσικά κρίσιμο σημείο για το φ στον X.

Ένα **δεύτερο κίνητρο** προκύπτει από την ανάγκη να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη κρίσιμων σημείων για κάποιες κατηγορίες συναρτησιακών που *δεν είναι* κάτω φραγμένα.

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε το C^1- συναρτησιακό $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^x - e^y - xy$. Το φ δεν είναι φραγμένο κάτω αφού $\varphi(x, x) = -x^2 \to -\infty$, καθώς $x \to \pm\infty$.

Έστω x_0 η μοναδική πραγματική ρίζα της εξίσωσης $e^{e^x} + x = 0$.

[Η ύπαρξη και μοναδικότητα της ρίζας εξασφαλίζεται από το Θ. Ενδιάμεσων Τιμών αν εφαρμοστεί στη συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $x \mapsto e^{e^x} + x$. Σημ. ότι τα όρια της συνάρτησης στα $\pm\infty$ είναι $\pm\infty$, αντίστοιχα.]

Θέτουμε $y_0 = e^{x_0}$. Διαπιστώνεται εύκολα ότι το (x_0, y_0) είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο του φ.

Εάν $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ με $x_n \to x_0$ & $y_n \to y_0$, τότε προφανώς (λόγω συνέχειας των $\varphi, \nabla\varphi$) ισχύει

$$\varphi(x_n, y_n) \to \varphi(x_0, y_0) \quad \& \quad \nabla\varphi(x_n, y_n) \to \nabla\varphi(x_0, y_0) = (0, 0)\,.$$

Αντίστροφα, έστω $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$ ώστε για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\varphi(x_n, y_n) \to c \quad \& \quad \nabla\varphi(x_n, y_n) \to (0, 0)\,.$$

Τότε,

$$\lim_{n\to\infty} (e^{x_n} - y_n) = 0 \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} (e^{y_n} + x_n) = 0\,.$$

Το 2ο όριο δίνει άμεσα ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη.

Υποθέτοντας ότι δεν είναι φραγμένη κάτω, μπορούμε να επιλέξουμε υπακολουθία (x_{k_n}) με $x_{k_n} \to -\infty$. Τώρα όμως το 1ο όριο δίνει $y_{k_n} \to 0$ κι επιστρέφοντας ξανά στο 2ο όριο παίρνουμε $x_{k_n} \to -1$ (ΑΤΟΠΟ).

Επομένως, η (x_n) είναι φραγμένη. Από το 1ο όριο παίρνουμε ότι και η (y_n) είναι φραγμένη, οπότε η ακολουθία $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$ έχει ισχυρώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

Ένα **τρίτο κίνητρο** αποτελεί το παρακάτω Θεώρημα [βλ. Schechter (2004), Θεώρ. 2.1, σ.47]:

Θεώρημα. *Έστω $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ κλάσης C^2 τέτοιο ώστε*

$$m_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}} \inf_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x,y) \neq -\infty\,, \quad m_1 = \inf_{x\in\mathbb{R}} \sup_{y\in\mathbb{R}} \varphi(x,y) \neq +\infty\,.$$

Τότε, υπάρχουν ακολουθία $u_n = (x_n, y_n)$, $n \geq 1$ στον $\mathbb{R}^2$ και $c \in [m_0, m_1]$, τέτοια ώστε

$$\varphi(u_n) \to c \quad \& \quad \nabla\varphi(u_n) \to (0,0)\,.$$

Σε αυτή την περίπτωση, αν μπορούσαμε να εξαγάγουμε μια υπακολουθία της (u_n) που είναι ισχυρώς συγκλίνουσα σε κάποιο $u_0 \in \mathbb{R}^2$, τότε το u_0 θα ήταν κρίσιμο σημείο του φ.

Το συναρτησιακό $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του παραπάνω Θεωρήματος, αφού

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \inf_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x,y) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \sup_{y\in\mathbb{R}} \varphi(x,y) = 0\,.$$

Σημ. ότι το φ *δεν είναι φραγμένο κάτω* [π.χ. $\varphi(0,y) = -y^2 \to -\infty$, καθώς $y \to \pm\infty$] αλλά έχει ένα και μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(0,0)$, που είναι *σαγματικό.*

Ορισμός 1 (Συνθήκη Palais-Smale, (PS))**.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $\varphi \in C^1(X)$. Το φ ικανοποιεί τη συνθήκη PS ανν κάθε ακολουθία $(u_n) \subset X$ τέτοια ώστε η ακολουθία $(\varphi(u_n))$ να είναι φραγμένη και $\|\varphi'(u_n)\|_\star \to 0$, έχει ισχυρώς συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Ορισμός 2 (Τοπική συνθήκη Palais-Smale, $(\mathrm{PS})_c$)**.** *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ χώρος Banach και $\varphi \in C^1(X)$. Το φ ικανοποιεί τη συνθήκη (PS) τοπικά στο επίπεδο $c \in \mathbb{R}$, ισοδύναμα τη συνθήκη $(PS)_c$, ανν κάθε ακολουθία $(u_n) \subset X$ τέτοια ώστε*

$$\varphi(u_n) \to c \quad \& \quad \|\varphi'(u_n)\|_\star \to 0\,,$$

έχει ισχυρώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

Παρατήρηση 4. *Επειδή κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, το φ ικανοποιεί τη συνθήκη (PS) ανν ικανοποιεί τη συνθήκη $(PS)_c$ σε κάθε $c \in \mathbb{R}$.*

Πρόταση 1. *Αν το $\varphi \in C^1(X)$ είναι κάτω φραγμένο και έχει την ιδιότητα (PS), τότε το φ έχει ολικό ελάχιστο.*

Απόδειξη: Θέτουμε $m := \inf\limits_X \varphi$.

Από το Πόρισμα 3.2 **(α)**, $\exists\ (u_n) \subset X$ ώστε $\varphi(u_n) \to m$ & $\|\varphi'(u_n)\|_\star \to 0$. Επειδή το φ έχει την ιδιότητα (PS), περνώντας σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_n \to u$ για κάποιο $u \in X$. Από τη συνέχεια του φ, έπεται ότι $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ κι επομένως, $m = \varphi(u)$. ∎

Όπως θα δούμε στην Πρόταση 4, ισχύει και κάτι *ισχυρότερο.* Αν $\varphi \in C^1(X)$ κάτω φραγμένο συναρτησιακό με την ιδιότητα (PS), τότε το φ είναι πιεστικό.

Παρατήρηση 5. *Αν το φ έχει την (PS)$_c$ σε κάποιο $c \in \mathbb{R}$, τότε το $\mathbb{K}_\varphi^c$ είναι συμπαγές.*

Παρατήρηση 6. *Αν το φ έχει την (PS), τότε κάθε σύνολο κρίσιμων σημείων $S \subset \mathbb{K}_\varphi$, τέτοιο ώστε ο περιορισμός $\varphi|_S$ να είναι φραγμένο συναρτησιακό, είναι σχετικά συμπαγές.*

Παράδειγμα 3. *Έστω $X = \mathbb{R}$ και $\varphi \equiv k \in \mathbb{R}$. Τότε το φ έχει την (PS)$_c$ σε κάθε επίπεδο $c \neq k$ και $\mathbb{K}_\varphi = X$. Επιπλέον, δεν έχει την (PS)$_k$.*

Παράδειγμα 4. *Έστω $X = \mathbb{R}$ και $\varphi(u) = \sin(u)$ για κάθε $u \in X$. Τότε το φ έχει την (PS)$_c$ για κάθε $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$, ενώ το $\mathbb{K}_\varphi$ είναι μη φραγμένο και άπειρο σύνολο.*

Πράγματι, αν $\sin(u_n) \to c$ & $\cos(u_n) \to 0$, τότε $c^2 = \lim\limits_{n\to\infty} [\sin^2(u_n) + \cos^2(u_n)] = 1$. Επιπλέον,

$$\sin\left(2n\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1, \quad \cos\left(2n\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad n \geq 1$$

και οι ακολουθίες $2n\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$, $2n\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$, $n \geq 1$, δεν είναι φραγμένες.

Παράδειγμα 5. *Έστω $X = \mathbb{R}$ και $\varphi(u) = \cos(u)$ για κάθε $u \in X$. Τότε το φ έχει την (PS)$_c$ για κάθε $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$, ενώ το $\mathbb{K}_\varphi$ είναι μη φραγμένο και άπειρο σύνολο.*

Πράγματι, αν $\cos(u_n) \to c$, $-\sin(u_n) \to 0$, τότε $c^2 = \lim\limits_{n\to\infty} [\sin^2(u_n) + \cos^2(u_n)] = 1$. Επιπλέον,

$$\cos(2n\pi) = 1, \quad \cos(2n\pi + \pi) = -1, \quad -\sin(2n\pi) = -\sin(2n\pi + \pi) = 0, \quad n \geq 1$$

και οι ακολουθίες $2n\pi$, $2n\pi + \pi$, $n \geq 1$, δεν είναι φραγμένες.

Πρόταση 2. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $\varphi \in C^1(X)$ συναρτησιακό. Αν το φ είναι κάτω φραγμένο και ικανοποιεί τη συνθήκη (PS)$_c$ στο επίπεδο $c := \inf_X \varphi$, τότε κάθε ελαχιστοποιητική ακολουθία του φ έχει ισχυρώς συγκλίνουσα υπακολουθία, το όριο της οποίας είναι σημείο ολικού ελαχίστου του φ.*

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται στο Πόρισμα 3.2 **(β)** και στον Ορισμό 2. ∎

Η Πρόταση 3 υποθέτει ότι το φ' είναι τελεστής $(S)_+$ (βλ. και Ορισμό 24 στο Παράρτημα Δ').

Ορισμός 3 (Τελεστής τύπου $(S)_+$). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $A : X \to X^*$. Ο τελεστής A είναι τύπου $(S)_+$ ανν κάθε ακολουθία $(u_n) \subset X$, τέτοια ώστε*

$$[\, u_n \rightharpoonup u \ \text{ στον } X \quad \& \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_{X,X^*} \leq 0\,], \tag{6}$$

είναι ισχυρώς συγκλίνουσα, δηλ. $\|u_n - u\| \to 0$ στον X.

Πρόταση 3. *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ χώρος Banach και $\varphi \in C^1(X)$ συναρτησιακό. Αν ο X είναι ανακλαστικός και ο τελεστής $\varphi' : X \to X^*$ είναι τύπου $(S)_+$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το φ ικανοποιεί τη συνθήκη (PS).*

(ii) *Κάθε ακολουθία $(u_n) \subset X$, τέτοια ώστε*

$$[\, \varphi(u_n) \to c \in \mathbb{R} \quad \& \quad \|\varphi'(u_n)\|_\star \to 0\,],$$

έχει φραγμένη υπακολουθία.

Απόδειξη.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Προφανές από τον Ορισμό 2 της συνθήκης (PS). ∎

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Έστω $(u_n) \subset X$ όπως στο **(ii)** και $(\widetilde{u}_n) \subset (u_n)$ φραγμένη υπακολουθία της. Θα δείξουμε ότι έχει *ισχυρώς* συγκλίνουσα υπακολουθία. Αφού ο X είναι *ανακλαστικός*, υπάρχει *ασθενώς* συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλ. $\exists\, u \in X$ & $(\widetilde{u}_{k_n}) \subset (\widetilde{u}_n)$, τέτοια ώστε $\widetilde{u}_{k_n} \rightharpoonup u \in X$. Αφού $\|\varphi'(\widetilde{u}_{k_n})\|_\star \to 0$, έπεται ότι $\langle \varphi'(\widetilde{u}_{k_n}), \widetilde{u}_{k_n} - u\rangle_{X,X^*} \longrightarrow 0$. Επειδή ο φ' είναι τελεστής $(S)_+$, θα πρέπει $\|\widetilde{u}_{k_n} - u\| \to 0$. ∎

Παράδειγμα 6. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ φραγμένο πεδίο (δηλ. ανοικτό & συνεκτικό) με σύνορο κλάσης C^1 και $X = W_0^{1,p}(\Omega)$. Τότε, το συναρτησιακό $\varphi : X \to \mathbb{R}$ με*

$$\varphi(u) = \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{r}\int_\Omega |u(z)|^r dz, \quad 1 < p < r < p^*, \tag{7}$$

όπου p^* ο κρίσιμος εκθέτης Sobolev (βλ. Παράρτημα Α'.2.1), ικανοποιεί τη συνθήκη (PS).

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι $\varphi \in C^1(X)$, με Fréchet παράγωγο που δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\langle \varphi'(u), v\rangle_{X^*,X} &= \int_\Omega |\nabla u(z)|^{p-2} (\nabla u(z), \nabla v(z))_{\mathbb{R}^N}\, dz \\ &\quad - \int_\Omega |u|^{r-2} uv\, dz, \quad \forall\, u, v \in X\end{aligned} \tag{8}$$

κι επιπλέον ο τελεστής φ' είναι $(S)_+$ (βλ. Παρατήρηση 15 στο Παράρτημα Δ').

Θα δείξουμε ότι το φ ικανοποιεί τη συνθήκη (PS), με χρήση της Πρότασης 3.

Έστω ακολουθία $(u_n) \subset X$, τέτοια ώστε

$$[\,\varphi(u_n) \to c \in \mathbb{R} \quad \& \quad \|\varphi'(u_n)\|_\star = \varepsilon_n \to 0\,]\,.$$

Θέτοντας $u = v = u_n$ στη σχέση (8) παίρνουμε $\forall\, n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{p} - 1\right) \|\nabla u_n\|_p^p &= r\varphi(u_n) - \langle \varphi'(u_n), u_n \rangle_{X^*, X} \\ &\leq rM + \varepsilon_n \|u_n\|_X, \quad M := \sup_n |\varphi(u_n)|\,.\end{aligned}$$

Η (u_n) είναι φραγμένη στον X, αφού $1 < p < r$. Σημ. ότι στο χώρο Sobolev $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, η $\|\nabla u\|_p$ είναι νόρμα ισοδύναμη με την $\|u\|_X$ (βλ. Ανισότητα Poincaré, Παράρτημα A'.2.1). ■

Αν το φ είναι *πιεστικό*, **δεν** έχει απαραίτητα την ιδιότητα (PS), όπως φαίνεται στο παρακάτω.

Παράδειγμα 7 (Πιεστικότητα $\not\Rightarrow$ (PS)). *Έστω $X = H$ διαχωρίσιμος απειροδιάστατος χώρος Hilbert και $\varphi : H \to \mathbb{R}$ με*

$$\varphi(u) = \begin{cases} \|u\|^2 \cdot \ln \|u\|\,, & \text{αν} \quad u \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{αν} \quad u = 0\,. \end{cases}$$

Το φ είναι πιεστικό και $\varphi \in C^1(H)$ με

$$\nabla\varphi(u) = \begin{cases} (1 + 2\ln \|u\|)u\,, & \text{αν} \quad u \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{αν} \quad u = 0\,. \end{cases}$$

Έστω (e_n) μια ορθοκανονική βάση του H και η ακολουθία $(u_n) \subset H$ με $u_n = \mathrm{e}^{-1/2}\, e_n$, για κάθε $n \geq 1$. Ισχύει

$$\varphi(u_n) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}, \quad \varphi'(u_n) = 0\,, \quad n \geq 1\,.$$

Αλλά, για κάθε $n, k \geq 1$ με $n \neq k$, ισχύει

$$\|u_n - u_k\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u_k\|^2 = 2\mathrm{e}^{-1}\,.$$

*Συνεπώς, η (u_n) **δεν** έχει ισχυρώς συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Παρ' όλ' αυτά, εάν $\varphi \in C^1(X)$ πιεστικό, τότε το φ έχει την (PS) στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) $X = \mathbb{R}^N$ με $N \geq 1$ και $\varphi \in C^1(X)$.

(ii) Ο X είναι *ανακλαστικός* χώρος Banach, $\varphi \in C^1(X)$ και φ' τελεστής $(S)_+$.

[Πράγματι, η πιεστικότητα του φ συνεπάγεται ότι κάθε ακολουθία $(u_n) \subset X$ με $\varphi(u_n) \to c \in \mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Στη δεύτερη περίπτωση, εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.]

Επιπλέον έχουμε την παρακάτω.

Πρόταση 4 ((PS) $\Rightarrow$ Πιεστικότητα)**.** *Έστω $\varphi \in C^1(X)$ κάτω φραγμένο συναρτησιακό που ικανοποιεί τη συνθήκη (PS). Τότε, το φ είναι πιεστικό.*

Απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι δεν είναι πιεστικό.

Τότε, $\exists\, (u_n) \subset X$ και $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\varphi(u_n) < c + \frac{1}{n}, \quad \|u_n\| > 2n, \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

Θέτουμε $m := \inf\limits_X \varphi\,.$

Εφαρμόζουμε τη 2η εκδοχή του Θεωρήματος Ekeland (Θ. 3) για $\varepsilon = c + \dfrac{1}{n} - m$ και $\lambda = n$. Τότε, για κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $\upsilon_n \in X$, ώστε

(i)' $\varphi(\upsilon_n) \leq \varphi(u_n)\,,$

(ii)' $\|\upsilon_n - u_n\| \leq n\,,$

(iii)' $\|\varphi'(\upsilon_n)\|_\star \leq \dfrac{\varepsilon}{n}, \quad \varepsilon = c + \dfrac{1}{n} - m\,.$

Λόγω της **(ii)'**, ισχύει $\|\upsilon_n\| > n\,,\ n \geq 1\,.$

Αφού $\|\varphi'(\upsilon_n)\|_\star \to 0$ και το φ ικανοποιεί τη συνθήκη (PS), η (υ_n) θα έχει ισχυρώς συγκλίνουσα υπακολουθία (ΑΤΟΠΟ). ∎

Η ακόλουθη Πρόταση είναι συνέπεια της *Μεταβολικής Αρχής του Ekeland* και της *Συνθήκης Palais-Smale*.

Πρόταση 5. *Έστω $\varphi \in C^1(X)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (PS), $u_0 \in X$ και $r_0 > 0$, τέτοια ώστε*

$$\varphi(u) > \varphi(u_0), \quad \forall\, u \in B[u_0, r_0] \setminus \{u_0\}\,, \tag{9}$$

δηλ. το u_0 είναι μεμονωμένο σημείο τοπικού ελαχίστου. Τότε, για κάθε $r \in (0, r_0)$, ισχύει

$$\inf\{\varphi(u) : \|u - u_0\| = r\} =: \eta_r > \varphi(u_0)\,. \tag{10}$$

Απόδειξη: Θέτουμε $Y = B[u_0, r_0]$. Το $\varphi|_Y$ είναι *κάτω φραγμένο.*

Παρατηρούμε ότι $\inf_Y \varphi = \varphi(u_0)$. Σταθεροποιούμε ένα $r \in (0, r_0)$.

Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι $\eta_r = \varphi(u_0)$.

Επιλέγουμε ακολουθία (u_n) ώστε

$$\varphi(u_n) \to \inf_Y \varphi = \varphi(u_0)\,, \quad \|u_n - u_0\| = r < r_0\,, \quad n \geq 1\,. \tag{11}$$

Από το Πόρισμα 3.3, υπάρχει ακολουθία $(\upsilon_n) \subset Y$ και υπακολουθία $(\widetilde{u}_n) \subset (u_n) \subset B[u_0, r]$ ώστε

$$\varphi(\upsilon_n) \to \varphi(u_0)\,, \quad \|\upsilon_n - \widetilde{u}_n\| \to 0\,, \quad \|\varphi'(\upsilon_n)\|_* \to 0\,.$$

Αφού το φ έχει την (PS), η (v_n) έχει υπακολουθία (v_{k_n}) που είναι ισχυρώς συγκλίνουσα σε κάποιο $v \in Y$. Άρα,

$$v_{k_n},\ \widetilde{u}_{k_n} \longrightarrow v\,, \quad \varphi(v) = \varphi(u_0)\ .$$

Τότε, $v = u_0$ από την υπόθεση (βλ. (9)) και άρα $\widetilde{u}_{k_n} \to u_0$ (ΑΤΟΠΟ) (βλ. (11)). ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το Θεώρημα Mountain Pass

3.1 Ομοτοπία

Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι.

Ορισμός 4 (Ομοτοπικές συναρτήσεις). *Έστω $f_1, f_2 : X \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις. Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις f_1, f_2 είναι ομοτοπικές (homotopy equivalent), $f_1 \sim f_2$, αν $\exists\, h : [0,1] \times X \to Y$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$h(0,x) = f_1(x) \quad \& \quad h(1,x) = f_2(x)\,, \quad \forall\, x \in X\,. \tag{12}$$

Με άλλα λόγια, $f_1 \sim f_2$ ανν η f_1 μπορεί να *παραμορφωθεί* με *συνεχή* τρόπο ώστε να προκύψει η f_2.

Ορισμός 5 (Ομοτοπική ισοδυναμία). *Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία (homotopy equivalence) μεταξύ των X, Y αν $\exists\, g : Y \to X$ συνεχής απεικόνιση τέτοια ώστε*

$$g \circ f \sim \mathrm{Id}_X \quad \& \quad f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y\,. \tag{13}$$

Παρατήρηση 7. *Κάθε ομοιομορφισμός είναι ομοτοπική ισοδυναμία, αλλά όχι απαραίτητα και αντίστροφα (βλ. Ενότητα 3.2.1).*

Ορισμός 6 (Ομοτοπικά ισοδύναμοι χώροι). *Οι τ.χ. X, Y είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι (homotopy equivalent) ανν $\exists\, f : X \to Y$ ομοτοπική ισοδυναμία (homotopy equivalence).*

Ορισμός 7 (Χώροι συστολής). *Ο τ.χ. X είναι χώρος συστολής (συσταλτικός, contractible) αν είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με ένα σημείο $x \in X$, ισοδύναμα, αν η Id_X είναι ομοτοπική με σταθερή συνάρτηση στον X.*

Ορισμός 8 (Περιστολή). *Έστω $A \subset X$. Μια συνεχής συνάρτηση $r : X \to A$ λέγεται περιστολή (retraction) ανν $r(\alpha) = \alpha$, για κάθε $\alpha \in A$. Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι το σύνολο A περιστέλλει τον X.*

Ορισμός 9 (Περισταλτικά παραμορφωτικό σύνολο). *Ένα υποσύνολο $A \subset X$ παραμορφώνει περισταλτικά τον X (deformation retract), $X \sim A$, αν*

$$\exists\, h : [0,1] \times X \to X$$

συνεχής απεικόνιση, τέτοια ώστε

$$[\forall\, x \in X\,,\ h(0,x) = x\,, \quad \forall\, x \in X\,,\ h(1,x) \in A\,, \quad \forall\, a \in A\,,\ h(1,a) = a]\,.$$

Παρατήρηση 8. *Ο τ.χ. X είναι χώρος συστολής, δηλαδή ομοτοπικά ισοδύναμος με ένα σημείο $x \in X$ ανν το $\{x\}$ παραμορφώνει τον X περισταλτικά.*

Παράδειγμα 8. *Έστω X τ.γ.χ.. Τότε κάθε κυρτό σύνολο $C \subset X$ είναι συσταλτικό.*
Πράγματι, αν $x_0 \in C$, τότε η απεικόνιση

$$h : [0,1] \times X \to X : (t,x) \mapsto (1-t)x + tx_0\,, \quad x \in X$$

είναι συνεχής και ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 9:

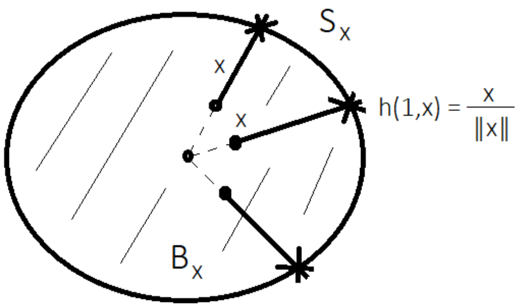
- $\forall\, x \in X\,,\ \ h(0,x) = x\,,$
- $\forall\, x \in X\,,\ \ h(1,x) = x_0 \in C\,,$
- $h(1,x_0) = x_0 \in C\,.$

Ειδικά, αν ο X είναι γ.χ.ν., τότε κάθε μπάλλα του είναι συσταλτική (ως κυρτό υποσύνολο).

Παράδειγμα 9. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ γ.χ.ν. και*

$$B_X := \{\, x \in X : \|x\| \leq 1 \,\}\,, \quad S_X := \{\, x \in X : \|x\| = 1 \,\}\,.$$

Τότε, η περιφέρεια S_X παραμορφώνει περισταλτικά την τρυπημένη μπάλλα $B_X \setminus \{0_X\}$ (κατά μήκος ακτινικών γραμμών συνεχώς σε σημεία της περιφέρειας).



Σχήμα 3.1: Παράδειγμα 9. Η S_X παραμορφώνει περισταλτικά την τρυπημένη μπάλλα B_X.

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : [0,1] \times (B_X \setminus \{0_X\}) \to B_X \setminus \{0_X\} : (t,x) \mapsto (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}\,,\ \ x \in X\,.$$

Η h είναι καλώς ορισμένη.
Πράγματι·
Για κάθε $(t,x) \in [0,1] \times B_X \setminus \{0_X\}\,,$

$$\|h(t,x)\| \leq (1-t)\|x\| + t\frac{\|x\|}{\|x\|} \leq (1-t)\cdot 1 + t \cdot 1 = 1\,.$$

Επιπλέον, αν $h(t,x) = 0$ για κάποιο $(t,x) \in [0,1] \times X$, τότε προκύπτει ΑΤΟΠΟ :

$$\left[(1-t)+\frac{t}{\|x\|}\right]x=0 \xRightarrow{x\neq 0_X} 1-t+\frac{t}{\|x\|}=0 \Longrightarrow 1=t\left(1-\frac{1}{\|x\|}\right)\leq 0\,.$$

Τέλος, η h ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 9:

- $\forall\, x\in B_X\setminus\{0_X\}\,,\quad h(0,x)=x\,,$
- $\forall\, x\in S_X\,,\quad h(1,x)=(1-t)x+tx=x\,,$
- $\forall\, x\in B_X\setminus\{0_X\}\,,\ h(1,x)=\dfrac{x}{\|x\|}\in S_X.$

Παράδειγμα 10. *Έστω $(X,\|\cdot\|)$ γ.χ.ν. και $X_R \coloneqq \{\,x\in X:\|x\|\geq R\,\}$ για $R>0$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(a) *Το σύνολο X_R παραμορφώνει περισταλτικά τον τρυπημένο χώρο $X\setminus\{0_X\}$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h:[0,1]\times(X\setminus\{0_X\})\to X\setminus\{0_X\},$$

με τύπο

$$(t,x)\mapsto h(t,x)=\begin{cases} x\,, & x\in X_R\,,\\ (1-t)x+Rt\dfrac{x}{\|x\|}\,, & x\notin X_R\,.\end{cases}$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι η h είναι συνεχής (αρκεί να ελεγχθεί η συνέχεια στα σημεία x με $\|x\|=R$).

Επιπλέον, η h ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 9:

- $\forall\, x\in X\,,\ \ h(0,x)=x\,,$
- $\forall\, x\in X_R\,,\ \ h(1,x)=x\,,$
- $h(1,x)=\begin{cases} x, & x\in X_R,\\ R\dfrac{x}{\|x\|}, & x\notin X_R\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad h(1,x)\in X_R\,,\ \ \forall\, x\in X_R\setminus\{0\}\,.$

■

(β) *Η $S_R \coloneqq \{\, x \in X : \|x\| = R \,\}$ παραμορφώνει περισταλτικά το σύνολο X_R.*

Απόδειξη: Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : [0,1] \times X_R \to X_R : (t,x) \mapsto (1-t)x + Rt\frac{x}{\|x\|}\,.$$

Η h είναι καλά ορισμένη. Πράγματι· για κάθε $(t,x) \in [0,1] \times X_R$ ισχύει

$$\begin{aligned}\|h(t,x)\| &= \left(1 - t + \frac{Rt}{\|x\|}\right)\|x\| = (1-t)\|x\| + Rt \\ &\geq (1-t)R + Rt = R\,.\end{aligned}$$

Επιπλέον, η h ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 9:

- $\forall\, x \in X\,,\ \ h(0,x) = x\,,$
- $\forall\, x \in X\,,\ \ h(1,x) = R\dfrac{x}{\|x\|} \in S_R\,,$
- $\forall\, x \in S_R\,,\ \ h(1,x) = R\dfrac{x}{\|x\|} = R\dfrac{x}{R} = x\,.$

■

Παράδειγμα 11. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ γ.χ.ν. και Y πεπερασμένης διάστασης (άρα κλειστός) γραμμικός υπόχωρος του X. Τότε ο Y παραμορφώνει περισταλτικά το χώρο X*

Απόδειξη: Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : [0,1] \times X \to X : (t,x) \mapsto (1-t)x + t\mathrm{P}_Y(x)\,,$$

όπου $\mathrm{P}_Y : X \to Y$ η προβολή του X στον Y (δηλ. P_Y φραγμένος γραμμικός τελεστής με $P_Y(x) = x,\ \forall\, x \in Y$).

Η h ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 9:

- $\forall\, x \in X\,,\ \ h(0,x) = x\,,$
- $\forall\, x \in X\,,\ \ h(1,x) = \mathrm{P}_Y(x) \in Y\,,$
- $\forall\, y \in Y\,,\ \ h(1,y) = (1-t)y + ty = y\,.$

■

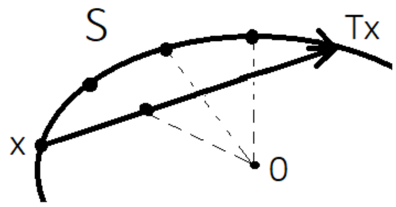
Παράδειγμα 12. *Εάν H απειροδιάστατος χώρος Hilbert, το σύνολο*

$$S \coloneqq \{\, x \in H : \|x\| = 1 \,\}$$

είναι συσταλτικό.

Η απόδειξη θα γίνει για την ειδική περίπτωση όπου $H = l^2(\mathbb{N})$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η Id_S είναι ομοτοπική με μια σταθερή συνάρτηση. Ας θεωρήσουμε τον τελεστή δεξιάς μετατόπισης $T : H \to H$ με $T(z_1, z_2, z_3, \cdots) = (0, z_1, z_2, \cdots)$, για κάθε $z = (z_1, z_2, z_3, \cdots) \in H$.



Σχήμα 3.2: Παράδειγμα 12.

Ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η T είναι ισομετρία.
- Για κάθε $x \in H \setminus \{0_H\}$, τα σημεία x, Tx δεν είναι συγγραμμικά. Επομένως, το ευθύγραμμο τμήμα $[x, Tx]$ δεν περιέχει το μηδενικό στοιχείο 0_H.

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : [0,1] \times S \to S : (t,x) \mapsto \frac{(1-t)x + tTx}{\|(1-t)x + tTx\|} .$$

Η h ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 4:

- $\forall\, x \in S\,,\ \ h(0,x) = \dfrac{x}{\|x\|} = \dfrac{x}{1} = x\,.$
- $\forall\, x \in S\,,\ \ h(1,x) = \dfrac{Tx}{\|x\|} = \dfrac{Tx}{1} = Tx\,.$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{Id}_S \sim T|_S}\,. \tag{14}$$

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\widetilde{h} : [0,1] \times S \to S : (t,x) \mapsto \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) Tx + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) e\,,$$

όπου $e = (1,0,0,\cdots)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in H$, τα e, Tx είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Η $\widetilde{h}$ είναι καλά ορισμένη, αφού ικανοποιεί

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{h}(t,x)\|^2 &= \cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \|Tx\|^2 + \sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \|e\|^2 \\
&= \cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot 1^2 + \sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot 1^2 \\
&= \cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\
&= 1\,, \quad \forall\, (t,x) \in [0,1] \times S\,.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, η $\widetilde{h}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 4:

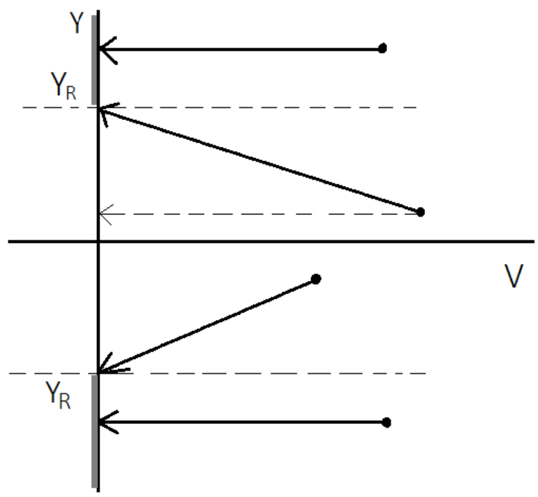
- $\forall\, x \in S\,,\ \widetilde{h}(0,x) = Tx$
- $\forall\, x \in S\,,\ \widetilde{h}(1,x) = e$

$$\Longrightarrow \boxed{T|_S \sim \widetilde{e}}\,, \tag{15}$$

όπου $\widetilde{e} : S \to S$ η σταθερή συνάρτηση $x \mapsto e$. Από τις σχέσεις (14) & (15), προκύπτει ότι $\mathrm{Id}_S \sim \widetilde{e}$, δηλαδή η S είναι συσταλτική στο σημείο e. ■

Παράδειγμα 13. *Εάν $(X, \|\cdot\|)$ πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα, το σύνολο $S = \{\, x \in X : \|x\| = 1\,\}$ δεν είναι συσταλτικό. [Η απόδειξη βασίζεται σε αλγεβροτοπολογικά εργαλεία που ξεφεύγουν από τους στόχους αυτής της εργασίας και παραλείπεται.]*

Παράδειγμα 14. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ γ.χ.ν. με την ιδιότητα $X = Y \oplus V$, όπου $Y, V < X$ γραμμικοί υπόχωροι και ο Y πεπερασμένης διάστασης (άρα κλειστός). Τότε το σύνολο $Y_R := \{\, y \in Y : \|y\| \geq R\,\}$, όπου $R > 0$, παραμορφώνει περισταλτικά το χώρο $X \setminus V$.*



Σχήμα 3.3: Παράδειγμα 14.

Απόδειξη: Αρχικά σημειώνουμε ότι $\forall\, x \in X,\ P_Y(x) - x \in V$, όπου $P_Y : X \to Y$ ο τελεστής προβολής του X στον Y.

Στη συνέχεια, ορίζουμε τις απεικονίσεις $h_1, h_2 : [0,1] \times (X \setminus V) \longrightarrow X \setminus V$ με τύπους

$$(t,x) \mapsto h_1(t,x) = (1-t)x + t\mathrm{P}_Y(x) = x + t(\mathrm{P}_Y(x) - x)\,,$$

$$(t,x) \mapsto h_2(t,x) = (1-t)x + Rt\,\frac{\mathrm{P}_Y(x)}{\|\mathrm{P}_Y(x)\|}$$

και την απεικόνιση

$$h_3(t,x) = \begin{cases} h_1(t,x)\,, & \|\mathrm{P}_Y(x)\| \geq R\,, \\ h_2(t,x)\,, & \|\mathrm{P}_Y(x)\| < R\,. \end{cases}$$

Η h_3 είναι συνεχής. [Πράγματι, λόγω συνέχειας των h_1 , h_2 , P_Y , αρκεί να ελέγξουμε τη συνέχεια στα x με $\|P_Y(x)\| = R$. Εάν όμως $\|\mathrm{P}_Y(x)\| = R$, τότε, για κάθε $t \in [0,1]$, ισχύει $h_2(t,x) = (1-t)x + t\mathrm{P}_Y(x) = h_1(t,x)$ και συνεπώς η h_3 είναι συνεχής στο x.]

Επίσης, η h_3 ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 9:

- Για κάθε $x \in X \setminus V$, ισχύει $h_1(0,x) = h_2(0,x) = x$, οπότε και $h_3(0,x) = x$.
- Για κάθε $x \in X \setminus V$, ισχύει

$$\begin{aligned} h_3(1,x) &= \begin{cases} h_1(1,x)\,, & \|\mathrm{P}_Y(x)\| \geq R\,, \\ h_2(1,x)\,, & \|\mathrm{P}_Y(x)\| < R\,, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathrm{P}_Y(x)\,, & \mathrm{P}_Y(x) \in Y_R\,, \\ R\,\frac{\mathrm{P}_Y(x)}{\|\mathrm{P}_Y(x)\|}\,, & \mathrm{P}_Y(x) \notin Y_R\,. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad h_3(1,x) \in Y_R\,. \end{aligned}$$

- Εάν $y \in Y_R$, τότε $\|P_Y(y)\| = \|y\| \geq R$ και $h_3(1,y) = P_Y(y) = y$.

■

Παράδειγμα 15. *Έστω η συνάρτηση*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)\,, \quad \boxed{a < 0 \leq b}\,,$$

και φ^a, φ^b οι κάτω περιβάλλουσες της φ στα επίπεδα a, b:

$$\varphi^b = \{\, u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(u) \leq b \,\}\,, \quad \varphi^a = \{\, u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(u) \leq a \,\} \subset \varphi^b\,.$$

(a) *Το φ^b είναι συσταλτικό στο $\{0\}$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : [0,1] \times \varphi^b \to \varphi^b : (t,u) \mapsto h(t,u) = (1-t)u\,.$$

Η h είναι καλά ορισμένη· για κάθε $u = (x,y) \in \varphi^a$ και $t \in [0,1]$, ισχύει

$$\varphi((1-t)u) = (1-t)^2(x^2 - y^2) = (1-t)^2\varphi(u) \leq 1 \cdot b = b\,.$$

Επιπλέον, ικανοποιεί τις συνθήκες για συσταλτικότητα στο $\{0\}$:

- $\forall\, u \in \varphi^b\,,\ \ h(0,u) = u\,,$
- $\forall\, u \in \varphi^b\,,\ \ h(1,u) = 0\,.$

Επομένως, $\boxed{\varphi^b \sim \{0\}}$. ■

(β) *Η φ^a είναι ομοτοπική με το σύνολο* $S_a := \{\, (0,y) : |y| \geq \sqrt{|a|}\, \},\ a < 0\,.$

Απόδειξη: Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : [0,1] \times \varphi^a \to \varphi^a : (t,(x,y)) \mapsto h(t,(x,y)) = ((1-t)x, y)\,.$$

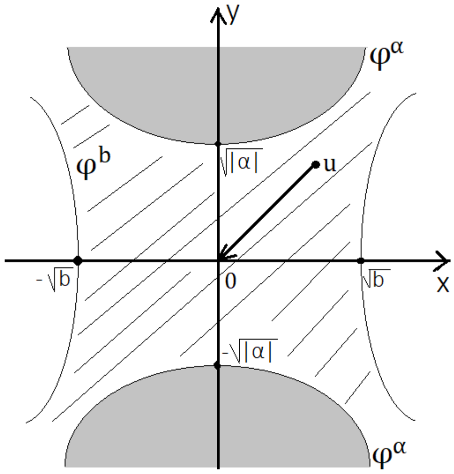
Η h είναι καλά ορισμένη· για κάθε $u = (x,y) \in \varphi^a$ και $t \in [0,1]$ ισχύει

$$\varphi((1-t)x, y) = (1-t)^2 x^2 - y^2 \leq x^2 - y^2 \leq a\,.$$

Επιπλέον, ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 9:

- $\forall\, (x,y) \in \varphi^a,\ \ h(0,(x,y)) = (x,y)\,,$
- $\forall\, (x,y) \in \varphi^a,\ \ h(1,(x,y)) = (0,y) \in S_a\,,$
- $\forall\, (0,y) \in S_a\,,\ \ h(1,(0,y)) = (0,y)\,.$

Επομένως, $\boxed{\varphi^a \sim S_a}$. ■



Σχήμα 3.4: Παράδειγμα 15.

Προφανώς το S_a είναι ομοιομορφικό με το σύνολο $\{\, y \in \mathbb{R} : |y| \geq \sqrt{|a|}\, \}$, το οποίο παραμορφώνει περισταλτικά τον τρυπημένο άξονα των τεταγμένων $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ [βλ. Παράδειγμα 10 **(α)**]. Επομένως,

$$\boxed{\varphi^a \sim S_a \sim \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

και άρα

$$\boxed{\varphi^a \not\sim \varphi^b}\,.$$

Σημ. ότι $0 \in [a,b]$ και $\nabla\varphi(0,0) = \varphi(0,0) = 0$, δηλ. το διάστημα $[a,b]$ περιέχει κρίσιμη τιμή του φ.

3.2 Συμπληρωματικές ιδιότητες ομοτοπίας

Στη συνέχεια, θα αναφέρουμε μερικά χρήσιμα αποτελέσματα σχετικά με την *ομοτοπική ισοδυναμία* και την *περισταλτική παραμόρφωση*.

Πρόταση 6. *Έστω X, Y τ.χ. . Η σχέση ομοτοπίας “ $\sim$ ” (βλ. Ορισμό 4) είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $C(X, Y)$, δηλ. στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to Y$.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η “ $\sim$ ” είναι σχέση ισοδυναμίας, δηλ. έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) *Ανακλαστικότητα.* Έστω $f \in C(X, Y)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : [0, 1] \times X \to Y : (t, x) \mapsto h(t, x) = f(x) \in C(X, Y)\,,$$

ανεξάρτητα της παραμέτρου t. Προφανώς, η h είναι συνεχής και ομοτοπία, αφού ικανοποιεί $h(0, x) = h(1, x) = f(x)$, για κάθε $x \in X$. Επομένως, $f \sim f$.

(ii) *Συμμετρικότητα.* Έστω $f, g \in C(X, Y)$ τέτοιες ώστε $f \sim g$. Εξ ορισμού, $\exists\ h : [0, 1] \times X \to Y$ συνεχής απεικόνιση τέτοια ώστε $h(0, x) = f(x)$ και $h(1, x) = g(x)$, για κάθε $x \in X$. Θεωρούμε την

$$\widetilde{h} : [0, 1] \times X \to Y : (t, x) \mapsto \widetilde{h}(t, x) = h(1 - t, x) \in C(X, Y)\,.$$

Προφανώς, η $\widetilde{h}$ είναι συνεχής και ομοτοπία, αφού ικανοποιεί $\widetilde{h}(0, x) = h(1, x) = g(x)$ και $\widetilde{h}(1, x) = h(0, x) = f(x)$, για κάθε $x \in X$. Επομένως, $g \sim f$.

(iii) *Μεταβατικότητα.* Έστω $f, g, e \in C(X, Y)$ τέτοιες ώστε $f \sim g$, $g \sim e$. Εξ ορισμού, $\exists\ h_1, h_2 : [0, 1] \times X \to Y$ συνεχείς απεικονίσεις, οι οποίες ικανοποιούν $h_1(0, x) = f(x)$, $h_1(1, x) = g(x)$ και $h_2(0, x) = g(x)$, $h_2(1, x) = e(x)$, αντίστοιχα, για κάθε $x \in X$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\widetilde{h} : [0, 1] \times X \to Y : (t, x) \mapsto \widetilde{h}(t, x) = \begin{cases} h_1(2t, x)\,, & t \in [0, 1/2]\,, \\ h_2(2t - 1, x)\,, & t \in [1/2, 1]\,. \end{cases}$$

Προφανώς, η $\widetilde{h}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί $\widetilde{h}(0, x) = h_1(0, x) = f(x)$ και $\widetilde{h}(1, x) = h_2(1, x) = e(x)$, για κάθε $x \in X$. Επομένως, $f \sim e$.

∎

Πρόταση 7. *Έστω X, Y, Z τ.χ. και $f, g : X \to Y$, $u : Y \to Z$, $e : Z \to X$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν $f \sim g$, τότε $u \circ f \sim u \circ g$ (σύνθεση από αριστερά) και $f \circ e \sim g \circ e$ (σύνθεση από δεξιά).*

Απόδειξη: Έστω $H : [0,1] \times X \to Y$ συνεχής απεικόνιση, τέτοια ώστε $H(0,x) = f(x)$ & $H(1,x) = g(x)$, για κάθε $x \in X$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\overline{H} : [0,1] \times X \to Z : (t,x) \mapsto u(H(t,x))$. Προφανώς, η $\overline{H}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί

$$\overline{H}(0,x) = u(H(0,x)) = u(f(x)) \quad \& \quad \overline{H}(1,x) = u(H(1,x)) = u(g(x)), \ \forall\, x \in X.$$

Επομένως, $u \circ f \sim u \circ g$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\widetilde{H} : [0,1] \times Z \to Y : (t,z) \mapsto H(t, e(z))$. Προφανώς, η $\widetilde{H}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί

$$\widetilde{H}(0,x) = H(0,e(z)) = f(e(z)) \quad \& \quad \widetilde{H}(1,x) = H(1,e(z)) = g(e(z)), \ \forall\, z \in Z.$$

Επομένως, $f \circ e \sim g \circ e$. ■

Πρόταση 8. *Η ισοδυναμία ομοτοπίας " $\sim$ " μεταξύ τοπολογικών χώρων (βλ. Ορισμό 6) είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη: Η ανακλαστικότητα και η συμμετρικότητα είναι άμεσες. Ας επαληθεύσουμε τη μεταβατικότητα.

Έστω X, Y, Z τ.χ. με $X \sim Y$ και $Y \sim Z$.

Εξ ορισμού, υπάρχουν $f_1 : X \to Y$, $g_1 : Y \to X$ & $f_2 : Y \to Z$, $g_2 : Z \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $g_1 \circ f_1 \sim \mathrm{Id}_X$, $f_1 \circ g_1 \sim \mathrm{Id}_Y$ & $g_2 \circ f_2 \sim \mathrm{Id}_Y$, $f_2 \circ g_2 \sim \mathrm{Id}_Z$, αντίστοιχα.

$$\boxed{X \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} Y \underset{g_2}{\overset{f_2}{\rightleftarrows}} Z}$$

Τότε $f_2 \circ f_1 \in C(X,Z)$, $g_1 \circ g_2 \in C(Z,X)$ και

$$(g_1 \circ g_2) \circ (f_2 \circ f_1) = g_1 \circ (g_2 \circ f_2) \circ f_1 \overset{\text{Πρότ.7}}{\sim} g_1 \circ \mathrm{Id}_Y \circ f_1 = g_1 \circ f_1 \sim \mathrm{Id}_X,$$

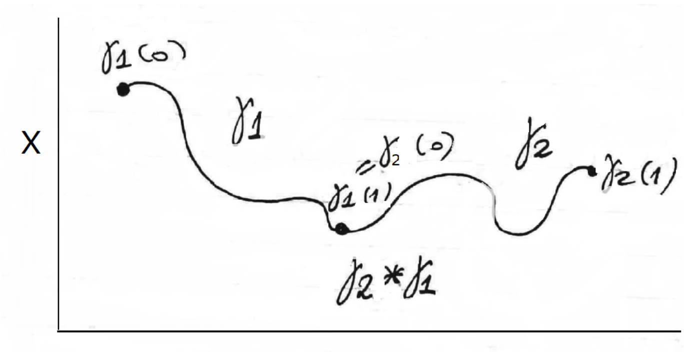
$$(f_2 \circ f_1) \circ (g_1 \circ g_2) = f_2 \circ (f_1 \circ g_1) \circ g_2 \overset{\text{Πρότ.7}}{\sim} f_2 \circ \mathrm{Id}_Y \circ g_2 = f_2 \circ g_2 \sim \mathrm{Id}_Z.$$

Επομένως, $X \sim Z$. ■

Ορισμός 10 (Συνέλιξη μονοπατιών). *Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ συνεχή τόξα (μονοπάτια) με $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Θέτουμε*

$$(\gamma_2 \star \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(2t-1), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

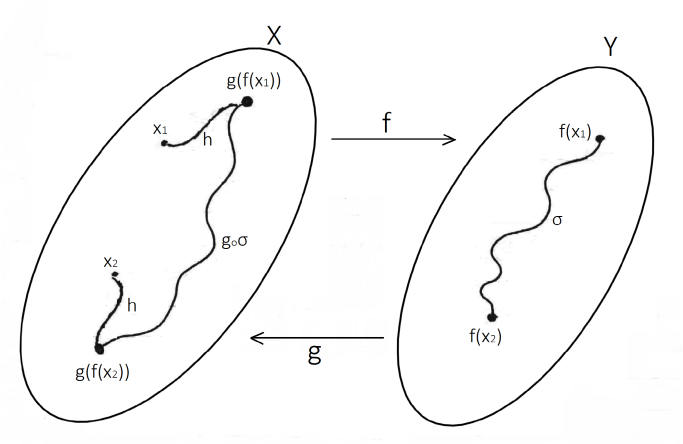
Τότε η συνέλιξη $(\gamma_2 \star \gamma_1)$ είναι συνεχής καμπύλη (τόξο) που ενώνει τα σημεία $\gamma_1(0)$, $\gamma_2(1)$ (βλ. Σχήμα 3.5).



Σχήμα 3.5: Κατά τμήματα (τόξα) συνεχής καμπύλη.

Πρόταση 9. *Η ομοτοπική ισοδυναμία μεταξύ τοπολογικών χώρων διατηρεί την οδική συνεκτικότητα.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $X \sim Y$ με τον Y οδικά συνεκτικό. Έστω $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,X)$ και $h \in C([0,1]\times X, X)$ τέτοια ώστε $h(0,x) = x$ & $h(1,x) = g(f(x))$, για κάθε $x \in X$. Σταθεροποιούμε $x_1, x_2 \in X$. Αφού ο Y είναι οδικά συνε-



Σχήμα 3.6: Πρόταση 9.

κτικός, οι $f-$εικόνες τους θα συνδέονται κατά μήκος ενός συνεχούς μονοπατιού $\sigma : [0,1] \to Y$, δηλ. $\sigma(0) = f(x_1)$ και $\sigma(1) = f(x_2)$ (βλ. Σχήμα 3.6, σύνολο Y). Τότε, θα συνδέονται και οι $g-$εικόνες τους κατά μήκος του συνεχούς μονοπατιού $g \circ \sigma : [0,1] \to X$. Ταυτόχρονα, τα x_1, $g(f(x_1))$ συνδέονται κατά μήκος του συνεχούς μονοπατιού $\gamma_1 : [0,1] \to X : t \mapsto \gamma_1(t) = h(t, x_1)$ και τα $g(f(x_2))$, x_2 κατά μήκος του συνεχούς μονοπατιού $\gamma_2 : [0,1] \to X : t \mapsto \gamma_2(t) = h(1-t, x_2)$ (βλ. Σχήμα 3.6, σύνολο X). Τελικά, τα x_1, x_2 συνδέονται κατά μήκος του συνεχούς μονοπατιού $\gamma_2 \star (g\circ\sigma) \star \gamma_1$. ■

Παρατήρηση 9. *Η ισοδυναμία ομοτοπίας είναι γενικότερη έννοια από τον ομοιομορφισμό. Για παράδειγμα, η ισοδυναμία ομοτοπίας **δε διατηρεί τη συμπάγεια**: οποιαδήποτε δύο διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι ομοτοπικά (μάλιστα είναι αμφότερα συσταλτικά).*

Πρόταση 10 (Ομοτοπία για γινόμενα τ.χ.). *Έστω X, Y τ.χ. . Αν ο Y είναι συσταλτικός, τότε ισχύει $X \times Y \sim X$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι ο Y είναι συσταλτικός σε κάποιο σημείο $y_0 \in Y$. Θεωρούμε $h : [0,1] \times Y \to Y$ συνεχή απεικόνιση, τέτοια ώστε $h(0,y) = y$ και $h(1,y) = y_0$, για κάθε $y \in Y$. Επιπλέον, ορίζουμε τις συνεχείς συναρτήσεις

$$\varepsilon : X \to X \times Y : x \mapsto \varepsilon(x) = (x, y_0) \quad \text{(εμφύτευση)},$$
$$p : X \times Y \to X : (x,y) \mapsto p(x,y) = x \quad \text{(προβολή)}.$$

Τέλος, θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $H : [0,1] \times (X \times Y) \to X \times Y$ με

$$H(t,(x,y)) = (x, h(t,y)), \quad \forall\, t \in [0,1] \quad \& \quad \forall\, (x,y) \in X \times Y.$$

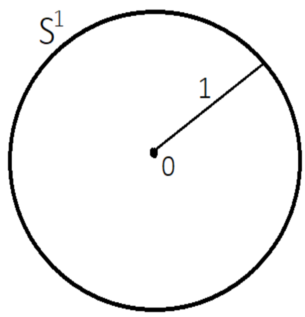
Η H ικανοποιεί τα παρακάτω:

$$H(0,(x,y)) = (x, h(0,y)) = (x,y), \quad \forall\, (x,y) \in X \times Y,$$
$$H(1,(x,y)) = (x, h(1,y)) = (x, y_0) = (\varepsilon \circ p)(x,y), \quad \forall\, (x,y) \in X \times Y,$$
$$\Longrightarrow \boxed{\varepsilon \circ p \sim \mathrm{Id}_{(X\times Y)}}, \quad \boxed{p \circ \varepsilon = \mathrm{Id}_X} \Longrightarrow X \times Y \sim X.$$

■

3.2.1 Εφαρμογές

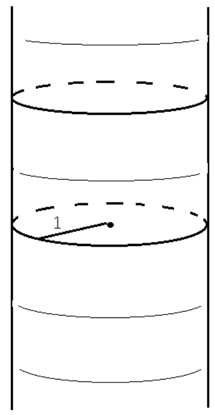
Έστω $\mathbb{S}^1$ ο μοναδιαίος κύκλος στο επίπεδο, $\mathbb{R}^2$.



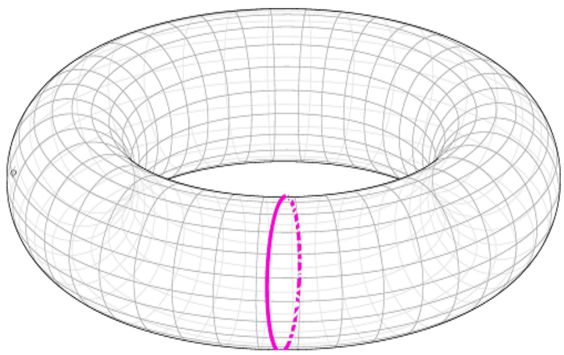
Σχήμα 3.7: Ο μοναδιαίος κύκλος $\mathbb{S}^1$ στο $\mathbb{R}^2$.

Ο $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ είναι ανοικτός κύλινδρος στον $\mathbb{R}^3$ και είναι ομοτοπικός με τον $\mathbb{S}^1$. Όμως, οι $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ και $\mathbb{S}^1$ δεν είναι ομοιομορφικοί, διότι με αφαίρεση δύο σημείων ο πρώτος παραμένει συνεκτικό σύνολο, ενώ ο δεύτερος όχι.

Παρόμοια, ο μοναδιαίος κύκλος $\mathbb{S}^1$ στο επίπεδο είναι ομοτοπικός με τον τόρο $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ στον $\mathbb{R}^3$, όπου $\mathbb{B}^2$ η κλειστή μοναδιαία μπάλλα του $\mathbb{R}^2$. Οι $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ και $\mathbb{S}^1$ δεν είναι ομοιομορφικοί, διότι πάλι με αφαίρεση δύο σημείων ο πρώτος παραμένει συνεκτικό σύνολο, ενώ ο δεύτερος όχι.

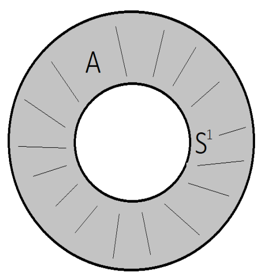


Σχήμα 3.8: Ο ανοικτός κύλινδρος $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ στο χώρο, $\mathbb{R}^3$.



Σχήμα 3.9: Ο τόρος $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ στο επίπεδο, $\mathbb{R}^2$.

Επιπλέον, ο ανοικτός κύλινδρος $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ στο χώρο δεν είναι ομοιομορφικός με τον τόρο $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$, αφού ο δεύτερος είναι συμπαγές σύνολο, ενώ ο πρώτος όχι.



Σχήμα 3.10: Το annulus (δακτυλιοειδές χωρίο) $\mathbb{A}$ στο επίπεδο, $\mathbb{R}^2$.

Θεωρούμε τον κλειστό δακτύλιο στο επίπεδο $\mathbb{A} := \{\, u \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|u\| \leq 2 \,\}$. Οι $\mathbb{A}$ και $\mathbb{S}^1$ είναι ομοτοπικοί αλλά όχι ομοιομορφικοί, αφού και πάλι με αφαίρεση δύο σημείων ο πρώτος παραμένει συνεκτικός, αλλά ο δεύτερος όχι.

Επιπλέον, ο ανοικτός κύλινδρος $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ στο χώρο δεν είναι ομοιομορφικός με το δακτύλιο $\mathbb{A}$, αφού ο δεύτερος, σε αντίθεση με τον πρώτο, είναι συμπαγής.

Τέλος, ο τόρος $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ στο επίπεδο δεν είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{A}$, αφού ο τόρος έχει συνεκτικό σύνορο, ενώ το σύνορο του δακτυλίου αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες (τις περιφέρειες του εσωτερικού και του εξωτερικού κύκλου).

Πρόταση 11. *Έστω X, Y τ.χ. με Y συσταλτικό. Τότε, οποιεσδήποτε δύο συναρτήσεις $f, g \in C(X, Y)$ είναι ομοτοπικές.*

Απόδειξη: Αφού ο Y είναι χώρος συστολής, υπάρχουν $y_0 \in Y$ σταθερό και ομοτοπία $h : [0,1] \times Y \to Y$ τέτοια ώστε $h(0,y) = y$ & $h(1,y) = y_0$, για κάθε $y \in Y$.

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$H(t,x) = \begin{cases} h(2t, f(x)), & t \in [0,1/2], \\ h(2-2t, g(x)), & t \in [1/2,1], \end{cases} \qquad t \in [0,1], \quad x \in X.$$

Η H είναι συνεχής. Πράγματι· αν $t = \frac{1}{2}$, τότε

$$h\left(2 \cdot \frac{1}{2}, f(x)\right) = h(1, f(x)) = y_0 = h(1, g(x)) = h\left(2 - 2 \cdot \frac{1}{2}, g(x)\right), \quad \forall\, x \in X.$$

Επιπλέον, ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- $\forall\, x \in X, \ H(0,x) = h(0, f(x)) = f(x)$,
- $\forall\, x \in X, \ H(1,x) = h(0, g(x)) = g(x)$.

Επομένως, $\boxed{f \sim g}$. ■

Πρόταση 12. *Έστω X, Y τ.χ. με X συσταλτικό και Y οδικά συνεκτικό. Τότε $f \sim g$ για κάθε $f, g \in C(X, Y)$.*

Απόδειξη: Αρχικά, σημειώνουμε ότι κάθε συνάρτηση $f \in C(X,Y)$ είναι ομοτοπική με μια σταθερή συνάρτηση από τον X στον Y.

Πράγματι, αφού X χώρος συστολής, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $h : [0,1] \times X \to X$ συνεχής απεικόνιση, τέτοια ώστε $h(0,x) = x$ & $h(1,x) = x_0$, για κάθε $x \in X$. Ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση $H : [0,1] \times X \to Y : (t,x) \mapsto H(t,x) = f(h(t,x))$ που ικανοποιεί:

- $\forall\, x \in X, \ H(0,x) = f(x)$,
- $\forall\, x \in X, \ H(1,x) = f(x_0)$.

Έπεται ότι $f \sim c_{f(x_0)}$, όπου $c_{f(x_0)}$ η σταθερή συνάρτηση $X \ni x \mapsto f(x_0) \in Y$.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι αφού ο Y είναι οδικά συνεκτικός, όλες οι σταθερές συναρτήσεις $X \to Y$ είναι ομοτοπικές μεταξύ τους.

Πράγματι, εάν $y, y' \in Y$ και $\gamma : [0,1] \to Y$ συνεχές μονοπάτι που συνδέει τα y, y', ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση $G : [0,1] \times X \to Y : (t,x) \mapsto G(t,x) = \gamma(t)$ που ικανοποιεί $G(0,x) = \gamma(0) = y$ & $G(1,x) = \gamma(1) = y'$, για κάθε $x \in X$.

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι δύο τυχαίες συναρτήσεις του $C(X,Y)$ είναι ομοτοπικές. ∎

Πρόταση 13. *Έστω X τ.χ. και $B \subset A \subset X$.*

(i) *Αν το A περιστέλλει τον X και το B παραμορφώνει περισταλτικά τον X, τότε το B παραμορφώνει περισταλτικά το A.*

(ii) *Αν το A παραμορφώνει περισταλτικά τον X και το B παραμορφώνει περισταλτικά το A, τότε το B παραμορφώνει περισταλτικά το X.*

Απόδειξη

(i): Έστω $r : X \to A$ περιστολή, δηλ. συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $r(\alpha) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$ και $h : [0,1] \times X \to X$ συνεχής απεικόνιση, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 9:

- $\forall\, x \in X\,,\ h(0,x) = x\,,$
- $\forall\, x \in X\,,\ h(1,x) \in B\,,$
- $\forall\, \beta \in B\,,\ h(1,\beta) = \beta\,.$

Ορίζουμε την απεικόνιση $\widetilde{h} : [0,1] \times A \to A : (t,\alpha) \mapsto \widetilde{h}(t,\alpha) = r(h(t,\alpha))\,.$
Η $\widetilde{h}$ είναι προφανώς συνεχής και ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 9:

- $\forall\, \alpha \in A\,,\ \widetilde{h}(0,\alpha) = r(h(0,\alpha)) = r(\alpha) = \alpha\,,$
- $\forall\, \alpha \in A\,,\ \widetilde{h}(1,\alpha) = r(h(1,\alpha)) = h(1,\alpha) \in B\,,$
- $\forall\, \beta \in B\,,\ \widetilde{h}(1,\beta) = r(h(1,\beta)) = r(\beta) = \beta\,.$

(ii): Θεωρούμε $h_1 : [0,1] \times X \to X$ & $h_2 : [0,1] \times A \to A$ συνεχείς απεικονίσεις, τέτοιες ώστε

- $\forall\, x \in X\,,\ h_1(0,x) = x\,,$
- $\forall\, x \in X\,,\ h_1(1,x) \in A\,,$
- $\forall\, \alpha \in A\,,\ h_1(1,\alpha) = \alpha\,,$

και

- $\forall\, \alpha \in A\,,\ h_2(0,\alpha) = \alpha\,,$
- $\forall\, \alpha \in A\,,\ h_2(1,\alpha) \in B\,,$
- $\forall\, \beta \in B\,,\ h_2(1,\beta) = \beta\,.$

Ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση $h : [0,1] \times X \to X$ με

$$h(t,x) = \begin{cases} h_1(2t,x)\,, & t \in [0,1/2)\,, \\ h_2(2t-1, h_1(1,x))\,, & t \in [1/2,1]\,. \end{cases}$$

Η h είναι καλά ορισμένη, αφού $h_1(1,x) \in A$, για κάθε $x \in X$.

Επίσης, η h είναι συνεχής. Πράγματι· οι εικόνες των δύο κλάδων ταυτίζονται στο $t = \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in X$:

$$h_2(0, h_1(1,x)) = h_1(1,x)\,.$$

Επιπλέον, η h ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 9:

- $\forall\, x \in X\,,\ \ h(0,x) = h_1(0,x) = x\,,$
- $\forall\, x \in X\,,\ \ h(1,x) = h_2(1, h_1(1,x)) \in B\,.$
- $\forall\, \beta \in B \subset A\,,\ \ h(1,\beta) = h_2(1, h_1(1,\beta)) = h_2(1,\beta) = \beta\,.$ ■

3.3 Το Θεώρημα Παραμόρφωσης

Έστω X χώρος Banach και $\varphi \in C^1(X)$. Θέτουμε

$$\mathbb{K}_\varphi \coloneqq \{u \in X : \varphi'(u) = 0\,\}$$

το σύνολο των κρίσιμων σημείων του φ στον X και

$$\varphi^c \coloneqq \{u \in X : \varphi(u) \le c\}$$

την *κάτω περιβάλλουσα* στο επίπεδο $c \in \mathbb{R}$ (*sublevel set at* c).

Ένας πραγματικός αριθμός c λέγεται *κρίσιμη τιμή* του φ ανν υπάρχει $u \in \mathbb{K}_\varphi$ ώστε $\varphi(u) = c$.

Κάτω από κατάλληλες συνθήκες συμπάγειας για το φ (π.χ. συνθήκη Palais-Smale), το *Θεώρημα Παραμόρφωσης* μας προσφέρει μια μέθοδο εντοπισμού κρίσιμων σημείων του φ που βασίζεται στη μελέτη των *μεταβολών στην τοπολογία* των φ^c, $c \in \mathbb{R}$.

Πιό συγκεκριμένα, αν το $c \in \mathbb{R}$ **δεν είναι** κρίσιμη τιμή του φ, τότε τα σύνολα $\varphi^{c-\varepsilon}$, $\varphi^{c+\varepsilon}$ αναμένεται να είναι τοπολογικά ισοδύναμα (ομοτοπικά) για $\varepsilon > 0$ "μικρό". Διαφορετικά, η τοπολογική δομή του φ^λ ενδεχομένως να μεταβάλλεται καθώς το $\lambda \in \mathbb{R}$ διατρέχει μια περιοχή του c.

Παράδειγμα 16. *Έστω* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ *και* $\varepsilon > 0$. *Διαπιστώνεται εύκολα (βλ. και Παράδειγμα 15) ότι*

$$\mathbb{K}_\varphi = \{(0,0)\}\,, \quad \varphi^\varepsilon \sim \{(0,0)\}\,, \quad \varphi^{-\varepsilon} \sim \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

κι επομένως τα $\varphi^\varepsilon,\ \varphi^{-\varepsilon}$ *δεν είναι ομοτοπικά.*

Το παρακάτω θεώρημα είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως **1ο Θεώρημα Παραμόρφωσης :**

Θεώρημα 4 (Παραμόρφωσης 1ο – Clarke, 1973)**.** *Έστω* $\varphi \in C^1(X)$ *που ικανοποιεί τη συνθήκη Palais-Smale και* $c \in \mathbb{R}$ *που* ***δεν είναι*** *κρίσιμη τιμή του* φ*. Τότε,* $\forall\, \theta > 0$, *υπάρχουν* $\varepsilon \in (0,\theta)$ *και* $h : [0,1] \times X \to X$ *ομοτοπία με τις ιδιότητες*

(i) $\forall\, x \in X,\ h(0,x) = x$,

(ii) $\forall\, x \in X$ *με* $|\varphi(x) - c| \geq 2\varepsilon$ & $\forall\, t \in [0,1]$, *ισχύει* $h(t,x) = x$,

(iii) $\forall\, x \in X$, *η συνάρτηση* $t \mapsto \varphi(h(t,x))$ *είναι φθίνουσα στο διάστημα* $[0,1]$,

(iv) $\forall\, x \in \varphi^{c+\varepsilon},\ h(1,x) \in \varphi^{c-\varepsilon}$.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε **εκτεταμένη προετοιμασία.**

Όπως γνωρίζουμε από το Διανυσματικό Λογισμό, η κατεύθυνση απότομης καθόδου (direction of steepest descent) μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}\ (N \geq 1)$, "κοντά" σε κάποιο σημείο $u_0 \in \mathbb{R}^N$ (που δεν είναι κρίσιμο σημείο), είναι η κατεύθυνση του διανύσματος $-\nabla\varphi(u_0)$.

Για να κατασκευάσουμε λοιπόν ομοτοπία που ικανοποιεί τη συνθήκη **(iii)** του παραπάνω θεωρήματος, είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε μονοπάτια $\sigma : [0,1] \to X$ που είναι λύσεις του διαφορικού συστήματος $\dot{\sigma}(t) = -\nabla\varphi(\sigma(t))$, με την προϋπόθεση βέβαια ότι έχει κάποιο νόημα η έκφραση "$\nabla\varphi$".

Εάν H χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ και $\varphi \in C^1(H)$, από το Θ. Αναπαράστασης του Riesz, για κάθε $x \in H$, υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\nabla\varphi(x) \in H$, τέτοιο ώστε

$$\langle \varphi'(x), z \rangle = (\nabla\varphi(x),\, z)\,, \quad \forall\, z \in H\,.$$

Ειδικότερα,

$$\|\varphi'(x)\|_{H^\star} = \|\nabla\varphi(x)\|_H\,, \quad \forall\, x \in H\,.$$

Η απεικόνιση $\nabla\varphi : H \to H$ που ορίζεται όπως παραπάνω, ονομάζεται *διανυσματικό πεδίο κλίσεων* (δ.π. κλίσεων) για το συναρτησιακό $\varphi \in C^1(H)$.

Ακόμα και σε αυτή την περίπτωση όμως, για να έχει λύση το σύστημα $\dot{\sigma}(t) = -\nabla\varphi(\sigma(t))$, απαιτούνται επιπλέον υποθέσεις πάνω στην απεικόνιση $x \mapsto \nabla\varphi(x)$, π.χ. να είναι *τοπικά Lipschitz*:

Ορισμός 11. *Έστω (Y,d), $(X,\widetilde{d})$ μετρικοί χώροι και $U \subset Y$ ανοικτό. Μια απεικόνιση $F: U \to X$ λέγεται τοπικά Lipschitz ανν για κάθε $y_0 \in U$, υπάρχουν $r,\, K > 0$ τέτοια ώστε $B(y_0\,, r) \subset U$ και η F να είναι $K-$Lipschitz πάνω στην ανοικτή μπάλλα $B(y_0\,, r)$, δηλ.*

$$\widetilde{d}(F(y_1),\ F(y_2)) \ \leq\ K d(y_1,\ y_2), \quad \forall\, y_1,\, y_2\ \in B(y_0\,, r)\,.$$

Σχετικά με την ύπαρξη λύσεων διαφορικών συστημάτων γενικής μορφής $\dot{\sigma}(t) = F(\sigma(t))$ [όπου $F : U \to X$ απεικόνιση με κατάλληλες ιδιότητες, X χώρος Banach και $U \subset X$ ανοικτό], έχουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 5 (Cauchy-Lipschitz-Picard, CLP)**.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach, $U \subset X$ μη κενό ανοικτό και $F: U \to X$ τοπικά Lipschitz απεικόνιση. Τότε, για κάθε $x \in U$, το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ)*

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) &=& F(\sigma(t))\,, \\ \sigma(0) &=& x\,, \end{cases}$$

*έχει μία και μοναδική **τοπική** C^1-λύση $\sigma_x(\cdot)$, ορισμένη σε ένα μεγιστικό ανοικτό διάστημα $J(x)$ που περιέχει το 0, τέτοια ώστε $\sigma_x(t) \in U,\ \forall\, t \in J(x)$.*

Υποθέτουμε επιπλέον ότι

$$\|F(x)\| \leq k_1\|x\| + k_2\,, \quad \forall\, x \in U, \quad \text{όπου } k_1,\ k_2 \text{ θετικές σταθερές}$$

και ότι $\forall\, x \in U$, το $\sigma_x(J(x))$ περιέχεται σε κάποιο κλειστό υποσύνολο του U.

*Τότε, $J(x) = \mathbb{R},\ \forall\ x \in U$, δηλ. οι λύσεις $\sigma_x(\cdot)$, $x \in U$, ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$ (δηλ. είναι **ολικές λύσεις**). Σε αυτή την περίπτωση, η απεικόνιση $(x,t) \mapsto \sigma_x(t)$ είναι συνεχής από το $U \times \mathbb{R}$ στο U.*

Όπως είδαμε παραπάνω, εάν H χώρος Hilbert και $\varphi \in C^1(H)$, ορίζεται το δ.π. κλίσεων $\nabla\varphi : H \to H$. Η απεικόνιση $\nabla\varphi$ όμως δεν είναι κατ'ανάγκη τοπικά Lipschitz ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5 και να παράγουμε λύσεις του διαφορικού συστήματος $\dot{\sigma}(t) = -\nabla\varphi(\sigma(t))$, όπως θα επιθυμούσαμε.

Γενικότερα, εάν X χώρος Banach και $\varphi \in C^1(X)$, η έκφραση "$\nabla\varphi$" δεν έχει καν νόημα.

Παρακάμπτοντας τις παραπάνω δυσκολίες, μπορούμε σε έναν τυχαίο χώρο Banach X να υποκαταστήσουμε το "$\nabla\varphi$" με μια τοπικά Lipschitz απεικόνιση που λέγεται *διανυσματικό πεδίο ψευδοκλίσεων*:

Ορισμός 12. *Έστω X χώρος Banach και $\varphi \in C^1(X)$. Μια τοπικά Lipschitz απεικόνιση $V : X \setminus \mathbb{K}_\varphi \to X$ ονομάζεται διανυσματικό πεδίο ψευδοκλίσεων (δ.π. ψευδοκλίσεων) για το φ ανν*

$$\langle \varphi'(x),\ V(x)\rangle_{X^*,X}\ \geq\ \|\varphi'(x)\|^2 \quad \& \quad \|V(x)\|\ \leq\ 2\|\varphi'(x)\|\,, \quad \forall\, x \in X \setminus \mathbb{K}_\varphi\,.$$

Είναι σαφές ότι εάν H χώρος Hilbert και $\varphi \in C^1(H)$ τέτοιο ώστε το $\nabla\varphi$ να είναι τοπικά Lipschitz πάνω στο σύνολο $H \setminus \mathbb{K}_\varphi$, τότε το $\nabla\varphi$ αποτελεί δ.π. ψευδοκλίσεων για το φ.

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει πάντα ένα δ.π. ψευδοκλίσεων για ένα λείο συναρτησιακό πάνω από ένα χώρο Banach. Για το σκοπό αυτό, θα χρειαστούμε τα Λήμματα 1-3 που ακολουθούν.

Λήμμα 1. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $U \subset X$ ανοικτό και $F : U \to X$, $G : U \to \mathbb{R}$ τοπικά Lipschitz συναρτήσεις. Τότε:*

(i) *Το γινόμενο $G \cdot F$ είναι τοπικά Lipschitz στο U.*

(ii) *Το πηλίκο $\dfrac{1}{G} \cdot F$ είναι τοπικά Lipschitz πάνω στο ανοικτό σύνολο*
$$\hat{U}_G = \{\, x \in U : G(x) \neq 0 \,\}.$$

Απόδειξη.

(i): Έστω $x_0 \in U$. Υπάρχουν $\delta > 0$, $K > 0$ τέτοια ώστε $B[x_0, \delta] \subset U$ και οι F, G να είναι $K-$Lipschitz πάνω στην κλειστή μπάλλα $B[x_0, \delta]$. Τότε, για κάθε $x \in B[x_0, \delta]$, ισχύει:

$$\|F(x)\| \le \|F(x) - F(x_0)\| + \|F(x_0)\| \le K\delta + \|F(x_0)\| =: M_1\,,$$
$$|G(x)| \le |G(x) - G(x_0)| + |G(x_0)| \le K\delta + |G(x_0)| =: M_2\,.$$

Θέτουμε $M = \max\{M_1, M_2\}$. Τότε, για κάθε $x, y \in B[x_0, \delta]$, ισχύει

$$\begin{aligned}
&\|G(x)\cdot F(x) - G(y)\cdot F(y)\| = \\
=&\|G(x)\cdot F(x) - G(y)\cdot F(x) + G(y)\cdot F(x) - G(y)\cdot F(y)\| \\
\le&\|G(x)\cdot F(x) - G(y)\cdot F(x)\| + \|G(y)\cdot F(x) - G(y)\cdot F(y)\| \\
\le&|G(x) - G(y)|\cdot\|F(x)\| + |G(y)|\cdot\|F(x) - F(y)\| \\
\le&KM\|x - y\| + KM\|x - y\| = 2MK\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Επομένως, το γινόμενο $G \cdot F$ είναι τοπικά Lipschitz στο U.

(ii): Έστω $x_0 \in \hat{U}_G$. Επιλέγουμε $\delta > 0$, $K > 0$ τέτοια ώστε $B[x_0, \delta] \subset \hat{U}_G$ και η G να είναι $K-$Lipschitz στη μπάλλα $B[x_0, \delta]$. Επιλέγουμε

$$0 < r < \min\left\{ \delta,\ \frac{|G(x_0)|}{2K} \right\}.$$

Τότε, για κάθε $x \in B[x_0, r]$, ισχύει

$$\begin{aligned}
|G(x)| = |G(x) - G(x_0) + G(x_0)| &\ge |G(x_0)| - |G(x) - G(x_0)| \\
&\ge |G(x_0)| - Kr > \frac{|G(x_0)|}{2}\,.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, για όλα τα $x, y \in B[x_0, r]$, ισχύει

$$\left|\frac{1}{G(x)} - \frac{1}{G(y)}\right| \leq \frac{4K\,||x\ -\ y||}{|G(x_0)|^2}\,.$$

Έπεται ότι η $1/G$ είναι τοπικά Lipschitz στο σύνολο $\hat{U}_G$. Λόγω του **(i)**, το γινόμενο $\dfrac{1}{G} \cdot F$ θα είναι επίσης τοπικά Lipschitz στο $\hat{U}_G$. ■

Το επόμενο λήμμα (Λήμμα 2) μας εξασφαλίζει την ύπαρξη διαμερίσεων της μονάδας που αποτειλείται από τοπικά Lipschitz συναρτήσεις. Θα χρειαστούμε πρώτα τα παρακάτω:

Ορισμός 13. *Έστω Y τοπολογικός χώρος και $\mathcal{G}$ μια ανοικτή κάλυψη του Y.*

(i): *Η $\mathcal{G}$ λέγεται τοπικά πεπερασμένη ανν για κάθε $y \in Y$, υπάρχει περιοχή W_y του y που τέμνει το πολύ πεπερασμένου πλήθους μέλη της $\mathcal{G}$.*

(ii): *Μια ανοικτή κάλυψη $\widetilde{\mathcal{G}}$ λέγεται εκλέπτυνση της ανοικτής κάλυψης $\mathcal{G}$ ανν κάθε μέλος της $\widetilde{\mathcal{G}}$ περιέχεται σε κάποιο μέλος της $\mathcal{G}$.*

Ορισμός 14. *Ένας τοπολογικός χώρος Y λέγεται παρασυμπαγής ανν κάθε ανοικτή κάλυψη του Y επιδέχεται τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση.*

Θεώρημα 6. *Κάθε μετρικός χώρος είναι παρασυμπαγής. [Χωρίς απόδειξη.]*

Λήμμα 2 (Τοπικά Lipschitz διαμέριση της μονάδας)**.** *Έστω (Y, d) μετρικός χώρος και $\{W_i\}_{i\in I}$ μια τοπικά πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη του Y. Τότε, $\exists\ (\rho_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπικά Lipschitz συναρτήσεων στον Y με πραγματικές τιμές, τέτοια ώστε*

$$0 \leq \rho_i \leq 1, \quad \rho_i = 0 \quad \textit{πάνω στο} \quad Y \setminus W_i\,, \quad \forall\, i \in I \tag{16}$$

και

$$\sum_{i\in I} \rho_i(y) = 1\,, \quad \forall\, y \in Y\,. \tag{17}$$

Η οικογένεια $(\rho_i)_{i\in I}$ ονομάζεται τοπικά Lipschitz διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από την ανοικτή κάλυψη $\{W_i\}_{i\in I}$ του Y.

Παρατήρηση 10. *Έστω $y \in Y$. Επειδή η $\{W_i\}_{i\in I}$ είναι τοπικά πεπερασμένη, το σύνολο $\{\, i \in I : y \in W_i \,\}$ είναι πεπερασμένο. Λόγω της (16), στο άθροισμα (17), μόνο πεπερασμένου πλήθους όροι είναι μη μηδενικοί και συνεπώς το άθροισμα ορίζεται.*

Απόδειξη του Λ.2: Σημειώνουμε αρχικά ότι εάν $A \subset Y$, η απεικόνιση−απόσταση $y \mapsto d(y, A) = \inf\{\, d(y, a) : a \in A \,\}$, $y \in Y$, είναι Lipschitz με σταθερά 1, δηλ.

$$|\, d(y_1, A) \; - \; d(y_2, A)\,| \;\le\; d(y_1\,,\, y_2)\,, \quad \forall\, y_1\,,\, y_2 \in Y.$$

Για κάθε $i \in I$, θεωρούμε την Lipschitz απεικόνιση $\xi_i : Y \to [0, +\infty)$ με $\xi_i(y) = d(y, Y \setminus W_i)$, $y \in Y$. Προφανώς, $\xi_i = 0$ πάνω στο $Y \setminus W_i$ και $\xi_i > 0$ πάνω στο $W_i\,,\ \forall\, i \in I$.

Για κάθε $y \in Y$, το σύνολο δεικτών $\{\, i \in I \,:\, y \in W_i \,\}$ είναι μη κενό και πεπερασμένο, οπότε το άθροισμα $\sum_{i\in I} \xi_i(y) > 0$ περιέχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων και συνεπώς είναι καλά ορισμένο.

Ισχυρισμός. *Η απεικόνιση $y \mapsto \sum_{i\in I} \xi_i(y)$ είναι τοπικά Lipschitz.*

Απόδειξη: Πράγματι, έστω $y_0 \in Y$. Υπάρχει ανοικτή περιοχή G του y_0, τέτοια ώστε το σύνολο δεικτών $I_{y_0} = \{i \in I : G \cap W_i \neq \emptyset\}$ να είναι πεπερασμένο.

Για κάθε $i \notin I_{y_0}$, $G \cap W_i = \emptyset \Longrightarrow \xi_i \,|_G = 0$, άρα ο περιορισμός

$$\left.\sum_{i\in I} \xi_i\right|_G = \left.\sum_{i\in I_{y_0}} \xi_i\right|_G$$

είναι τοπικά Lipschitz συνάρτηση, ως πεπερασμένο άθροισμα τοπικά Lipschitz απεικονίσεων. □

Θέτουμε $\rho_i = \dfrac{\xi_i}{\sum_{j\in I} \xi_j}\,, \quad i \in I.$

Με βάση τον παραπάνω Ισχυρισμό και το **(ii)** του Λήμματος 1, επαληθεύεται εύκολα ότι η οικογένεια $(\rho_i)_{i\in I}$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. ■

Λήμμα 3. *Έστω (Y, d) μετρικός χώρος, $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $\mathcal{F} : Y \to 2^X$ συνολοσυνάρτηση με μη κενές κυρτές τιμές.*

Υποθέτουμε ότι για κάθε $y \in Y$, υπάρχει ανοικτή περιοχή $\mathcal{U}_y$ του y τέτοια ώστε

$$\bigcap_{z \,\in\, \mathcal{U}_y} \mathcal{F}(z) \neq \emptyset\,.$$

Τότε, υπάρχει $V : Y \to X$ τοπικά Lipschitz απεικόνιση, τέτοια ώστε $V(y) \in \mathcal{F}(y)$, για κάθε $y \in Y$.

Απόδειξη: Έστω $\{G_i\}_{i\in I}$ μια τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση της ανοικτής κάλυψης $\{\mathcal{U}_y\}_{y\in Y}$ (βλ. Θεώρημα 6) και $(\rho_i)_{i\in I}$ μια τοπικά Lipschitz διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από την εκλέπτυνση $\{G_i\}_{i\in I}$ (βλ. Λήμμα 2).

Για κάθε $i \in I$, επιλέγουμε $y_i \in Y$, τέτοιο ώστε $G_i \subset \mathcal{U}_{y_i}$. Τότε:

$$\emptyset \neq \bigcap_{z\in\mathcal{U}_{y_i}} \mathcal{F}(z) \subset \bigcap_{z\in G_i} \mathcal{F}(z) \Longrightarrow \exists\, v_i \in \bigcap_{z\in G_i} \mathcal{F}(z)\,.$$

Για κάθε $y \in Y$, το σύνολο $I_y = \{ i \in I : y \in G_i \}$ είναι πεπερασμένο, οπότε ορίζεται το άθροισμα

$$V(y) = \sum_{i \in I} \rho_i(y) v_i = \sum_{i \in I_y} \rho_i(y) v_i \,, \quad \text{με} \quad \sum_{i \in I_y} \rho_i(y) = 1 \,.$$

Θα δείξουμε ότι η V έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

Σταθεροποιούμε ένα $y \in Y$. Για κάθε $i \in I_y$, ισχύει $y \in G_i$, οπότε $v_i \in \mathcal{F}(y)$, λόγω του τρόπου επιλογής του v_i. Επειδή το $\mathcal{F}(y)$ είναι κυρτό και ταυτόχρονα $\sum_{i \in I_y} \rho_i(y) = 1$, έπεται ότι $V(y) \in \mathcal{F}(y)$.

Τέλος, η απεικόνιση $V : Y \to X$ είναι τοπικά Lipschitz.

Πράγματι, έστω $y_0 \in Y$. Τότε, υπάρχει $W \subset Y$ ανοικτό με $y_0 \in W$, ώστε το σύνολο $J_W = \{ i \in I : W \cap G_i \neq \emptyset \}$ να είναι πεπερασμένο. Τότε,

$$V(y) = \sum_{i \in I} \rho_i(y) v_i = \sum_{i \in J_W} \rho_i(y) v_i, \ \ \forall \, y \in W \implies V(\cdot) \,|_W = \left(\sum_{i \in J_W} \rho_i(\cdot) v_i \right) |_W$$

και συνεπώς, η $V|_W$ είναι τοπικά Lipschitz, ως πεπερασμένο άθροισμα τοπικά Lipschitz απεικονίσεων. ■

Θεώρημα 7 (Ύπαρξη δ.π. ψευδοκλίσεων – Palais, 1966)**.** *Έστω X χώρος Banach και $\varphi \in C^1(X)$. Τότε υπάρχει δ.π. ψευδοκλίσεων (pseudogradient vector field) $V : X \backslash \mathbb{K}_\varphi \to X$ του φ, δηλαδή το V είναι τοπικά Lipschitz και για κάθε $x \in X \backslash \mathbb{K}_\varphi$, ικανοποιεί*

$$\|V(x)\| \leq 2 \|\varphi'(x)\| \quad \& \quad \langle \varphi'(x), V(x) \rangle \geq \|\varphi'(x)\|^2 \,. \tag{18}$$

Απόδειξη: Για κάθε $y \in X \setminus \mathbb{K}_\varphi$, ορίζουμε το κυρτό σύνολο

$$\mathcal{F}(y) = \{ u \in X \setminus \mathbb{K}_\varphi : \ \|u\| \leq 2 \|\varphi'(y)\|, \ \langle \varphi'(y), u \rangle \geq \|\varphi'(y)\|^2 \} \,.$$

Έστω $y \in X \setminus \mathbb{K}_\varphi$. Τότε, $\|\varphi'(y)\| > 0$ οπότε, από τον ορισμό της νόρμας ενός φραγμένου γραμμικού συναρτησιακού, μπορούμε να επιλέξουμε $w_y \in X$ τέτοιο ώστε

$$\|w_y\| = 1 \,, \quad \langle \varphi'(y), w_y \rangle > \frac{2}{3} \|\varphi'(y)\| \,.$$

Θέτουμε $u_y = \dfrac{3}{2} \|\varphi'(y)\| w_y$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|u_y\| \ &= \ \frac{3}{2} \|\varphi'(y)\| < 2 \|\varphi'(y)\| \,, \\ \langle \varphi'(y), u_y \rangle &= \frac{3}{2} \|\varphi'(y)\| \langle \varphi'(y), w_y \rangle > \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \|\varphi'(y)\| \cdot \|\varphi'(y)\| = \|\varphi'(y)\|^2 \,. \end{aligned}$$

Θωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{U}_y = \{ z \in X \setminus \mathbb{K}_\varphi : \|u_y\| \ < \ 2 \|\varphi'(z)\|, \ \langle \varphi'(z), u_y \rangle \ > \ \|\varphi'(z)\|^2 \} \,.$$

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι $y \in \mathcal{U}_y$.

Επιπλέον, λόγω της συνέχειας της φ', το $\mathcal{U}_y$ είναι ανοικτό και ταυτόχρονα

$$u_y \in \mathcal{F}(z)\,, \quad \forall\, z \in \mathcal{U}_y \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{z\,\in\,\mathcal{U}_y} \mathcal{F}(z) \neq \emptyset\,.$$

Από το Λήμμα 3, έπεται ότι υπάρχει $V : X\setminus\mathbb{K}_\varphi \to X$ τοπικά Lipschitz απεικόνιση, τέτοια ώστε $V(y) \in \mathcal{F}(y)$, για κάθε $y \in Y$. Προφανώς, η V έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. ■

Πόρισμα 7.1. *Υπάρχει $V_1 : X \setminus \mathbb{K}_\varphi \to X$ τοπικά Lipschitz απεικόνιση, τέτοια ώστε*

$$\forall\, x \in X \setminus \mathbb{K}_\varphi\,, \quad \frac{1}{4} \leq \langle \varphi'(x), V_1(x)\rangle \leq \|\varphi'(x)\| \cdot \|V_1(x)\| \leq 1\,. \tag{19}$$

Απόδειξη: Έστω V όπως στο Θεώρημα 7. Θέτουμε

$$V_1(x) = \frac{V(x)}{\|V(x)\|^2}\,, \quad x \in X \setminus \mathbb{K}_\varphi\,. \tag{20}$$

Το **(ii)** του Λήμματος 1 μας εξασφαλίζει ότι η V_1 είναι τοπικά Lipschitz.

Επιπλέον, $\forall\, x \in X \setminus \mathbb{K}_\varphi\,,$

$$\langle \varphi'(x), V_1(x)\rangle = \frac{1}{\|V(x)\|^2}\langle \varphi'(x), V(x)\rangle \overset{(18)}{\geq} \frac{\|\varphi'(x)\|^2}{\|V(x)\|^2} \overset{(18)}{\geq} \frac{1}{4}$$

και

$$\|\varphi'(x)\| \cdot \|V_1(x)\| \overset{(20)}{=} \frac{\|\varphi'(x)\|}{\|V(x)\|} \leq 1\,,$$

διότι $\langle \varphi'(x), V(x)\rangle \geq \|\varphi'(x)\|^2 \implies \|V(x)\| \geq \|\varphi'(x)\|\,.$ ■

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη του Θ. 4 (Θ. Παραμόρφωσης - 1η εκδοχή). Θα χρειαστούμε ένα ακόμη λήμμα:

Λήμμα 4. *Έστω $\varphi \in C^1(X)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη Palais-Smale και $c \in \mathbb{R}$ που **δεν είναι** κρίσιμη τιμή του φ. Τότε, $\forall\, \theta > 0$, υπάρχει $\varepsilon \in (0,\theta)$ τέτοιο ώστε*

$$\inf\{\, \|\varphi'(x)\| : c - \varepsilon \leq \varphi(x) \leq c + \varepsilon \,\} \;>\; 0\,.$$

Απαγωγή σε άτοπο: Υποθέτουμε αντιθέτως ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon \in (0,\theta)$ ισχύει

$$\inf\{\, \|\varphi'(x)\| : c - \varepsilon \leq \varphi(x) \leq c + \varepsilon \,\} = 0\,.$$

Έπεται ότι, για κάθε $n > \dfrac{1}{\theta}$, υπάρχει $x_n \in X$, τέτοιο ώστε

$$c - \frac{1}{n} \leq \varphi(x_n) \leq c + \frac{1}{n}\,, \quad \|\varphi'(x_n)\| \;<\; \frac{1}{n}\,.$$

Προφανώς,

$$\varphi(x_n) \;\to\; c \quad \& \quad \|\varphi'(x_n)\| \;\to\; 0$$

κι επειδή το φ ικανοποιεί τη συνθήκη Palais-Smale, υπάρχει υπακολουθία $(\widetilde{x}_n)$ της (x_n) με $\widetilde{x}_n \to x \in X$, σε κάποιο $x \in X$. Τότε, $\varphi'(x) = 0$ & $\varphi(x) = c$ (ΑΤΟΠΟ). ■

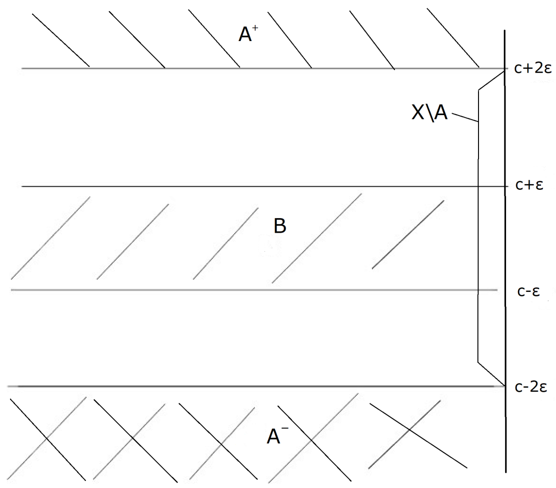
Απόδειξη του Θ. 4: Έστω $\theta > 0$. Αφού το φ έχει την ιδιότητα Palais-Smale και το c **δεν είναι** κρίσιμη τιμή του φ, το Λήμμα 4 εξασφαλίζει την ύπαρξη κάποιου $\varepsilon \in (0,\ \theta)$ ώστε

$$\inf\{\, \|\varphi'(x)\| : |\varphi(x) - c| \le \varepsilon \,\} = \delta \ > \ 0\,.$$

Θεωρούμε τα σύνολα

$$A = \{\, x \in X : |\varphi(x) - c| \ge 2\varepsilon \,\} \cup \left\{\, x \in X : \|\varphi'(x)\| \le \frac{\delta}{2} \,\right\},$$
$$B = \{\, x \in X : |\varphi(x) - c| \le \varepsilon \,\}\ .$$

Είναι σαφές ότι τα A, B είναι κλειστά και ξένα με $X \setminus A \subset X \setminus K_\varphi$, $B \subset X \setminus K_\varphi$.



Σχήμα 3.11: $A = A^- \cup A^+,\ A^+ = A \cap (\varphi \ge c + 2\varepsilon),\ A^- = A \cap (\varphi \le c - 2\varepsilon)$.

Θεωρούμε τη διαχωριστική απεικόνιση

$$\gamma : X \to [0,1] \quad \text{με} \quad \gamma(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}\,,$$

όπου d η Lipschitz-συνεχής απεικόνιση της απόστασης σημείου από σύνολο, και $V_1 : X \setminus \mathbb{K}_\varphi \to X$ τοπικά Lipschitz απεικόνιση με την ιδιότητα (19) του Πορίσματος 7.1, δηλ.

$$\forall\, x \in X \setminus \mathbb{K}_\varphi\,, \quad \frac{1}{4} \ \le\ \langle \varphi'(x), V_1(x) \rangle \ \le\ \|\varphi'(x)\| \cdot \|V_1(x)\| \le 1\,.$$

Επειδή η απεικόνιση γ είναι Lipschitz, η απεικόνιση $x \mapsto -\gamma(x)V_1(x)$ είναι τοπικά Lipschitz στο $X \setminus \mathbb{K}_\varphi$ [βλ. και το **(ii)** του Λήμματος 1].

Ορίζουμε την απεικόνιση (επέκταση στον X)

$$F : X \to X : x \mapsto F(x) = \begin{cases} -\gamma(x)V_1(x)\,, & x \in X \setminus A\,, \\ 0\,, & x \in A\,. \end{cases}$$

Η F είναι τοπικά Lipschitz και φραγμένη, αφού για κάθε $x \in X \setminus A$,

$$\|F(x)\| = \| - \gamma(x)V_1(x)\| \ \le\ \gamma(x) \cdot \|V_1(x)\| \overset{(19)}{\le} 1 \cdot \frac{1}{\|\varphi'(x)\|} \ \le\ \frac{2}{\delta}\,. \tag{21}$$

Επιπλέον, για κάθε $x \in X$,

$$\langle \varphi'(x), F(x)\rangle \leq 0\,. \tag{22}$$

Πράγματι· προφανώς αληθεύει για κάθε $x \in A$. Αν $x \in X \setminus A$, τότε

$$\langle \varphi'(x), F(x)\rangle = -\gamma(x)\langle \varphi'(x), V(x)\rangle \leq -\frac{1}{4}\gamma(x) \leq 0\,.$$

Αφού η F είναι φραγμένη και τοπικά Lipschitz στο X, το Θεώρημα 5 (CLP) μας εξασφαλίζει ότι, για κάθε $x \in X$, το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ)

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) &= F(\sigma(t)), \\ \sigma(0) &= x \end{cases} \tag{ΠΑΤ}$$

έχει μία και μοναδική **ολική λύση** $\sigma_x \in C^1([0,+\infty), X)$ και η απεικόνιση $(x,t) \mapsto \sigma_x(t)$ είναι *συνεχής* από το $X \times [0,+\infty)$ στο X.

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$h(t,x) = \sigma_x(8\varepsilon t), \quad t \in [0,1], \; x \in X, \tag{23}$$

είναι συνεχής και ικανοποιεί τις **(i)**–**(iv)** του Θ. 4. Πράγματι·

- Η h είναι συνεχής, αφού η $(x,t) \mapsto \sigma_x(t)$ είναι συνεχής.
- $\forall\, x \in X\,,\; h(0,x) = \sigma_x(0) = x$ (ιδιότητα **(i)**).
- $\forall\, x \in A\,,\; h(t,x) = x\,$, για κάθε $t \in [0,1]$ (που συνεπάγεται την ιδιότητα **(ii)**). Πράγματι, αν $x \in A$, τότε $F(x) = 0$ εξ ορισμού της F, οπότε η σταθερή συνάρτηση $[0,+\infty) \ni t \mapsto x$ είναι μια λύση του ΠΑΤ. Λόγω της μοναδικότητας της λύσης, θα ισχύει $\sigma_x(t) = x$ για κάθε $t \geq 0$, άρα και $\sigma_x(8\varepsilon t) = x \Longrightarrow h(t,x) = x$, για κάθε $t \in [0,1]$.
- Ισχύει και η ιδιότητα **(iii)**, αφού για κάθε $t \geq 0$,
$$\frac{d}{dt}\left[\varphi(\sigma_x(t))\right] = \langle \varphi'(\sigma_x(t)), \dot{\sigma}_x(t)\rangle \overset{\text{(ΠΑΤ)}}{=} \langle \varphi'(\sigma_x(t)), F(\sigma_x(t))\rangle \overset{(22)}{\leq} 0\,.$$

Απομένει να δείξουμε την ιδιότητα **(iv)**, δηλ. $h(1,x) \in \varphi^{c-\varepsilon}$, για κάθε $x \in \varphi^{c+\varepsilon}$.

Έστω $x \in \varphi^{c+\varepsilon}$.

— Αν υπάρχει $t_0 \in [0,1]$ ώστε $\varphi(\sigma_x(8\varepsilon t_0)) \leq c - \varepsilon$, τότε

$$\varphi(h(1,x)) = \varphi(\sigma_x(8\varepsilon)) \overset{[\,\varphi(\sigma_x(\cdot))\downarrow\,]}{\leq} \varphi(\sigma_x(8\varepsilon t_0)) \leq c-\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad h(1,x) \in \varphi^{c-\varepsilon}.$$

— Υποθέτουμε ότι $\varphi(\sigma_x(8\varepsilon t)) > c - \varepsilon$, για κάθε $t \in [0,1]$.

Τότε, για κάθε $\tau \in [0, 8\varepsilon]$ ώστε $0 \leq \dfrac{\tau}{8\varepsilon} \leq 1$, προκύπτει

$$\varphi(\sigma_x(\tau)) = \varphi\left(\sigma_x\left(8\varepsilon\frac{\tau}{8\varepsilon}\right)\right) > c-\varepsilon \quad \& \quad \varphi(\sigma_x(\tau)) \overset{[\,\varphi(\sigma_x(\cdot))\downarrow\,]}{\leq} \varphi(\sigma_x(0)) = \varphi(x) \leq c+\varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{c - \varepsilon < \varphi(\sigma_x(\tau)) \leq c + \varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sigma_x(\tau) \in B}\,.$$

Επειδή $\gamma|_B = 1$ εξ ορισμού της γ, έχουμε

$$F(\sigma_x(\tau)) = -V_1(\sigma_x(\tau)), \quad \forall\, \tau \in [0, 8\varepsilon] \tag{24}$$

εξ ορισμού της F.

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma_x(8\varepsilon)) - \varphi(\sigma_x(0)) &= \int_{\tau=0}^{\tau=8\varepsilon} \frac{d}{dt}[\varphi(\sigma_x(\tau))]\, d\tau \\
&= \int_{\tau=0}^{\tau=8\varepsilon} \langle \varphi'(\sigma_x(\tau)),\, \dot{\sigma}_x(\tau)\rangle\, d\tau \\
&\overset{(\text{ΠΑΤ})}{=} \int_{\tau=0}^{\tau=8\varepsilon} \langle \varphi'(\sigma_x(\tau)),\, F(\sigma_x(\tau))\rangle\, d\tau \\
&\overset{(24)}{=} -\int_{\tau=0}^{\tau=8\varepsilon} \langle \varphi'(\sigma_x(\tau)),\, V_1(\sigma_x(\tau))\rangle\, d\tau \\
&\overset{(19)}{\leq} -8\varepsilon\frac{1}{4} = -2\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ \varphi(\sigma_x(8\varepsilon)) \leq \varphi(x) - 2\varepsilon \leq (c+\varepsilon) - 2\varepsilon = c - \varepsilon \ \Longrightarrow\ \varphi(\sigma_x(8\varepsilon))\ \leq\ c - \varepsilon\,,$$

ΑΤΟΠΟ, αφού $\boxed{\varphi(\sigma_x(8\varepsilon t)) > c - \varepsilon}$, $\forall\, t \in [0, 1]$.

Συνεπώς, η ομοτοπία h έχει και την ιδιότητα **(iv)**.

■

3.4 Το Θεώρημα Mountain Pass

Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε την απόδειξη του κλασικού Θεωρήματος Mountain Pass που οφείλεται στους Ambrossetti-Rabinowitz.[1] Η απόδειξη βασίζεται στο 1ο Θεώρημα Παραμόρφωσης του Clarke (Θ. 4).

Θεώρημα 8 (Ambrossetti-Rabinowitz, 1973 - Κλασική εκδοχή)**.** *Έστω X χώρος Banach, $\varphi \in C^1(X)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη Palais-Smale, $u_0,\ u_1 \in X$ και $r > 0$ ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες γεωμετρικές συνθήκες:*

(i) $0 < r < \|u_0 - u_1\|\,,$

(ii) $\inf\{\, \varphi(u) : \|u - u_0\| = r \,\} = \eta_r > \max\{\, \varphi(u_0), \varphi(u_1) \,\}\,.$

Θέτουμε

$$\Gamma = \{\, \gamma \in (C([0,1]),\ X) : \gamma(0) = u_0, \gamma(1) = u_1 \,\} \tag{25}$$

το σύνολο των μονοπατιών με άκρα $u_0,\ u_1$ και

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))\,. \tag{26}$$

Τότε, $c \geq \eta_r$ και το c είναι κρίσιμη τιμή του φ.

Παρατήρηση 11. *Εάν ένα συναρτησιακό φ ικανοποιεί τις συνθήκες **(i) - (ii)**, θα λέμε ότι έχει τη Γεωμετρία του Θεωρήματος Mountain Pass (GMPT) γύρω από το u_0.*

Ισχυρισμός. *Ισχύει* $\boxed{c \geq \eta_r}$.

Απόδειξη: Έστω $\gamma \in \Gamma$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\xi : [0,1] \to \mathbb{R} \ : t \mapsto \xi(t) = \|\gamma(t) - u_0\|\,.$$

Η ξ είναι συνεχής και ικανοποιεί

$$\xi(0) = 0 < r < \|u_1 - u_0\| = \xi(1)\,.$$

Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, $\exists\, t_1 \in [0,1]$ με $\xi(t_1) = r$, οπότε

$$\max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)) \ \geq\ \varphi(\gamma(t_1)) \ \geq\ \eta_r\,.$$

Επειδή η τελευταία ισχύει για τυχαία $\gamma \in \Gamma$, έπεται ότι $c \geq \eta_r$. □

Απόδειξη του Θ. 8: Από τον παραπάνω Ισχυρισμό και την υπόθεση **(ii)** προκύπτει ότι

$$c > \max\{\varphi(u_0)\,, \varphi(u_1)\}\,.$$

Θέτουμε

$$\theta = \frac{1}{2} \min\{\, c - \varphi(u_0),\ c - \varphi(u_1) \,\}\,, \tag{27}$$

[1] Βλ. Εισαγωγή, σ.1, σχετικά με το γεωμετρικό σκεπτικό του Θεωρήματος Mountain Pass.

και υποθέτουμε ότι το c **δεν είναι** κρίσιμη τιμή του φ.

Από το Θεώρημα Παραμόρφωσης του Clarke (Θ. 4), υπάρχουν $\varepsilon \in (0,\theta)$ και $h : [0,1] \times X \to X$ ομοτοπία παραμόρφωσης με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\forall\, x \in X,\;\; h(0,x) = x$,

(ii) $\forall\, x \in X$ με $|\varphi(x) - c| \geq 2\varepsilon$ & $\forall\, t \in [0,1]$, ισχύει $h(t,x) = x$,

(iii) $\forall\, x \in X$, η συνάρτηση $t \mapsto \varphi(h(t,x))$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$,

(iv) $\forall\, x \in \varphi^{c+\varepsilon}$, $h(1,x) \in \varphi^{c-\varepsilon}$.

Λόγω της σχέσης (27) έχουμε

$$|\varphi(u_0) - c| \geq 2\theta > 2\varepsilon, \quad |\varphi(u_1) - c| \geq 2\theta > 2\varepsilon,$$

οπότε η ιδιότητα **(ii)** της h δίνει $u_0 = h(1,u_0)$ & $u_1 = h(1,u_1)$.

Από τον τρόπο που ορίζεται το c (βλ. (26)), μπορούμε να επιλέξουμε $\gamma \in \Gamma$ ώστε

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) < c + \varepsilon\,.$$

Θέτουμε $\widetilde{\gamma}(t) = h(1,\gamma(t)),\; t \in [0,1]$. Τότε, $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ διότι

$$\widetilde{\gamma}(0) = h(1,\gamma(0)) = h(1,u_0) = u_0 \quad \& \quad \widetilde{\gamma}(1) = h(1,\gamma(1)) = h(1,u_1) = u_1\,.$$

Αφού όμως $\gamma(t) \in \varphi^{c+\varepsilon}$, για κάθε $t \in [0,1]$, παίρνουμε ότι

$$\widetilde{\gamma}(t) = h(1,\gamma(t)) \in \varphi^{c-\varepsilon}, \quad \forall\, t \in [0,1],$$

από την ιδιότητα **(iv)** της παραμόρφωσης h. Άρα,

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\widetilde{\gamma}(t)) \leq c - \varepsilon \implies \boxed{c \leq c - \varepsilon} \qquad \text{(ΑΤΟΠΟ)}.$$

Επομένως, το c είναι κρίσιμη τιμή του φ. ■

Όπως είδαμε, η απόδειξη του MPT απαιτεί το συναρτησιακό να έχει την ιδιότητα Palais-Smale (ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή του Θ. Παραμόρφωσης). Το Παράδειγμα 17 αναδεικνύει την αναγκαιότητα της υπόθεσης αυτής.

Παράδειγμα 17 (Brezis-Nirenberg, 1991). *Έστω $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με*

$$(x,y) \mapsto \varphi(x,y) = x^2 - (x-1)^3 \cdot y^2. \tag{28}$$

Τότε, το φ έχει τη GMPT γύρω από το σημείο $(0,0)$ αλλά το Θ. 8 δεν εφαρμόζεται στο σημείο αυτό. Επιπλέον, το φ ικανοποιεί τη συνθήκη $(PS)_c$ μόνο στο επίπεδο $c = 0$.

Απόδειξη: Αρχικά, διαπιστώνουμε εύκολα ότι $\mathbb{K}_\varphi = \{(0,0)\}$.

Ισχυρισμός 1. *Υπάρχουν $C > 0,\; \rho > 0$ τέτοια ώστε*

$$\varphi(u) \geq C\|u\|^2, \quad \forall\, u \in B[0,\rho]\,.$$

Απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι δεν αληθεύει.

Τότε, υπάρχει ακολουθία $(u_n) = \{(x_n,\ y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{n}, \quad \varphi(u_n) < \frac{1}{n}\|u_n\|^2, \quad \forall\, n \geq 1\,. \tag{29}$$

Θέτουμε

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|} = \left(\frac{x_n}{\|u_n\|}, \frac{y_n}{\|u_n\|}\right), \quad n \geq 1.$$

Προφανώς, $\|v_n\| = 1, \ \ n \geq 1$.

Αφού η ακολουθία $(v_n) \subset \mathbb{R}^2$ είναι φραγμένη, υπάρχει υπακολουθία (v_{k_n}) ώστε

$$v_{k_n} \to v, \quad \text{για κάποιο } v = (v_1\,, v_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } v_1^2 + v_2^2 = 1\,.$$

Τότε,

$$\frac{x_{k_n}}{\|u_{k_n}\|} \to v_1\ , \quad \frac{y_{k_n}}{\|u_{k_n}\|} \to v_2\ .$$

Επιπλέον,

$$|x_{k_n}| \leq \sqrt{|x_{k_n}|^2 + |y_{k_n}|^2} = \|u_{k_n}\| \ \leq \ \frac{1}{k_n} \downarrow 0 \quad [\text{βλ. } (29)].$$

Συνεπώς,

$$\frac{\varphi(u_{k_n})}{\|u_{k_n}\|^2} = \left(\frac{x_{k_n}}{\|u_{k_n}\|}\right)^2 - \ (x_{k_n} \ - \ 1)^3 \left(\frac{y_{k_n}}{\|u_{k_n}\|}\right)^2 \longrightarrow v_1^2 + v_2^2 = 1\,.$$

Ταυτόχρονα, λόγω της (29), ισχύει

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(u_{k_n})}{\|u_{k_n}\|^2} \ \leq \ 0 \quad \text{(ΑΤΟΠΟ)}.$$

Η απόδειξη του Ισχυρισμού 1 ολοκληρώθηκε. □

Έστω $C > 0, \ \rho > 0$ όπως στον Ισχυρισμό 1.

Θέτουμε $u_0 = (0,0)$ (το κρίσιμο σημείο) και $u_1 = (2,2)$ κι επιλέγουμε $0 < r < \min\{2\sqrt{2}, \rho\}$. Τότε,

(i) $\|u_0 - u_1\| = 2\sqrt{2} \ > \ r$,

(ii) $\eta_r = \inf\{\, \varphi(u) : \|u - u_0\| = r\,\} \ \geq \ Cr^2 \ > \ 0 = \max\{\varphi(u_0), \varphi(u_1)\}\,,$

ενώ δεν υπάρχει κρίσιμη τιμή c του φ με $c \geq \eta_r$ (η μοναδική κρίσιμη τιμή του φ είναι το 0). Επομένως, το συμπέρασμα του Θεωρήματος 8 δεν ισχύει στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Ισχυρισμός 2. *Εάν* $\{(x_n\,, y_n)\}$ *ακολουθία στον* $\mathbb{R}^2$ *και* $\nabla\varphi(x_n, y_n) \to 0$, *τότε*

- *είτε* $|y_n| \to \infty \quad \& \quad \varphi(x_n, y_n) \to 1\,,$
- *είτε υπάρχουν υπακολουθίες* (x_{k_n}), (y_{k_n}) *των* (x_n), (y_n) *αντίστοιχα, ώστε*

$$x_{k_n}\,, y_{k_n} \to 0 \quad \& \quad \varphi(x_{k_n}, y_{k_n}) \to 0\,.$$

Απόδειξη: Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κλίσης, προκύπτει

$$\begin{cases} \textbf{(i) :} & 2x_n - 3(x_n-1)^2 \cdot y_n^2 \ \to 0\,, \\ \textbf{(ii) :} & 2(x_n-1)^3 \cdot y_n \ \to 0\,. \end{cases} \tag{30}$$

- Υποθέτουμε ότι $x_n \to 1$. Τότε, $(x_n-1)^2 \cdot y_n^2 \ \to \ \dfrac{2}{3}$, από το **(i)** της σχέσης (30). Θέτοντας $\theta_n := |y_n| \cdot |x_n - 1|, \quad n \geq 1,$ έχουμε

$$\theta_n \to \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad |y_n| = \frac{|\theta_n|}{|x_n-1|} \to +\infty$$

και

$$\varphi(x_n, y_n) = x_n^2 - (x_n-1)^3 \cdot y_n^2 = x_n^2 - (x_n-1)\theta_n^2 \ \to \ 1.$$

- Υποθέτουμε ότι $x_n \not\to 1$. Τότε, μπορούμε να επιλέξουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών (k_n) και $\delta > 0$, ώστε

$$|x_{k_n} - 1| \geq \delta\,, \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

Έχουμε

$$2\delta^3 |y_{k_n}| \ \leq \ |2(x_{k_n}-1)^3 \cdot y_{k_n}| \xrightarrow{(30)(ii)} 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y_{k_n} \to 0}\,. \tag{31}$$

Επίσης,

$$|(x_{k_n}-1)^2 \cdot y_{k_n}^2|^{\frac{3}{2}} = |(x_{k_n}-1)^3 \cdot y_{k_n}^3| = |(x_{k_n}-1)^3 y_{k_n}| \cdot |y_{k_n}|^2 \xrightarrow[(31)]{(30)(ii)} 0$$

$$\xRightarrow{(30)(i)} \boxed{x_{k_n} \to 0}\,. \tag{32}$$

Από τις σχέσεις (31) & (32) προκύπτει άμεσα ότι $\varphi(x_{k_n}, y_{k_n}) \to 0$.

Η απόδειξη του Ισχυρισμού 2 ολοκληρώθηκε. □

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι το φ δεν ικανοποιεί τη συνθήκη $(\mathrm{PS})_c$ για $c \neq 0$.

Πράγματι, εάν $\{(x_n\,,\,y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$ με $\varphi(x_n, y_n) \to c \neq 0$ & $\nabla\varphi(x_n, y_n) \to 0$, τότε αναγόμαστε στην 1η περίπτωση του Ισχυρισμού 2 και συνεπώς $|y_n| \to \infty$. Άρα, η ακολουθία $\{(x_n\,,\,y_n)\}$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Τέλος, το φ ικανοποιεί την $(\mathrm{PS})_0$.

Πράγματι, εάν $\{(x_n\,,\,y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$ με $\varphi(x_n, y_n) \to 0$ & $\nabla\varphi(x_n, y_n) \to 0$, τότε αναγόμαστε στη 2η περίπτωση του Ισχυρισμού 2 και συνεπώς η $\{(x_n\,,\,y_n)\}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο $(0,0)$. ■

Χρήσιμη συνέπεια του Θεωρήματος Mountain Pass είναι η Πρόταση 14, η οποία βασίζεται στην Πρόταση 5 και επικαλείται τη μεταβολική αρχή Ekeland και τη συνθήκη Palais-Smale.

Πρόταση 14. *Έστω $\varphi \in C^1(X)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (PS). Αν το φ έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία τοπικού ελαχίστου, τότε έχει τουλάχιστον τρία κρίσιμα σημεία.*

Απόδειξη: Έστω $u_0\,,\,u_1\;\in\;X$ δύο σημεία τοπικού ελαχίστου του φ. Προφανώς, $u_0,\,u_1\;\in\;\mathbb{K}_\varphi$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varphi(u_0) \geq \varphi(u_1)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν το u_0 είναι *σημείο συσσώρευσης* του $\mathbb{K}_\varphi$, τότε το $\mathbb{K}_\varphi$ περιέχει άπειρα σημεία, οπότε προφανώς ισχύει το συμπέρασμα της Πρότασης.

(β) Ας υποθέσουμε ότι το u_0 είναι *μεμονωμένο σημείο* του $\mathbb{K}_\varphi$.[2] Τότε, αφού το u_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου του φ, υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $\varphi(u) > \varphi(u_0)$ για κάθε $u \in B(u_0, \rho) \setminus \{u_0\}$. Επιλέγουμε $0 < r < \min\{\rho, \|u_0 - u_1\|\}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5, σχέση (10), θα ισχύει η ακόλουθη:

$$\inf\{\,\varphi(u) : \|u - u_0\| = r\,\} = \eta_r > \varphi(u_0).$$

Τότε, $0 < r < \|u_0 - u_1\|$ και $\eta_r > \varphi(u_0) \geq \varphi(u_1)$. Επομένως, από το Θ. Mountain Pass (Θ. 8), θα υπάρχει $u_2 \in \mathbb{K}_\varphi$, τέτοιο ώστε $\varphi(u_2) \geq \eta_r$. Προφανώς, $u_2 \notin \{u_0, u_1\}$, άρα τα $u_0,\,u_1,\,u_2$ είναι τρία διακριτά κρίσιμα σημεία του φ.

■

[2]Εξ ορισμού, $\exists\,\rho > 0$ τέτοιο ώστε $B(u_0, \rho) \cap \mathbb{K}_\varphi = \{u_0\}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εφαρμογή σε μια κλάση Ασυμπτωτικά Γραμμικών Προβλημάτων

Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε μια εφαρμογή του Θ. Mountain Pass σε ελλειπτικά προβλήματα συνοριακών τιμών της μορφής

$$[\,-\Delta_p u(z) = f(z, u(z))\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega \quad \& \quad u|_{\partial\Omega} = 0\,]\,, \quad 1 < p < +\infty,$$

όπου Ω φραγμένο πεδίο στον $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ με αρκούντως λείο σύνορο, $\Delta_p u(\cdot) = \mathrm{div}(\,|\nabla u(\cdot)|^{p-2}\nabla u(\cdot)\,)$ και $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τύπου Καραθεοδωρή, τέτοια ώστε η $f(z, \cdot)$ να παρουσιάζει, ασυμπτωτικά στο $\pm\infty$, $(p-1)$-γραμμική αύξηση. Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση f ικανοποιεί μια πολυωνυμική αυξητική συνθήκη βαθμού $p-1$, με $f(z, 0) = 0$ σ.π. στο Ω. Επιπλέον, οι γενικευμένες "κλίσεις"

$$\frac{f(z,t)}{|t|^{p-2}t}\,, \quad z \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R},$$

για t "κοντά" στο $\pm\infty$, "εγκλωβίζονται" αυστηρά μεταξύ των δύο πρώτων ιδιοτιμών $\lambda_1\,, \lambda_2$ του τελεστή $-\Delta_p$ με Dirichlet συνοριακές συνθήκες, ενώ για t "κοντά" στο 0, βρίσκονται "κάτω" από την λ_1 .

Κάτω από τις παραπάνω συνθήκες, αποδεικνύεται (βλ. Θ. 9 παρακάτω) η ύπαρξη μιας τουλάχιστον μη μηδενικής λείας ασθενούς λύσης για το παραπάνω πρόβλημα. Για το σκοπό αυτό, θα χρειαστούμε κάποια προπαρασκευαστικά αποτελέσματα.

Ορισμός 15 (Κυρτό μπλοκ). *Έστω X χώρος Banach και $(x_n) \subseteq X$. Κυρτό μπλοκ της (x_n) είναι μια ακολουθία (z_n), τέτοια ώστε*

$$z_n = \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \lambda_j x_j\,, \quad n \geq 1\,, \tag{33}$$

όπου

- $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ *γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών με* $k_1 \geq 1$,
- $(\lambda_j) \subseteq [0,1]$ *με*
$$\sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \lambda_j = 1\,, \quad \forall n \geq 1\,.$$

Πρόταση 15. *Αν $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ στον X και (z_n) κυρτό μπλοκ της (x_n), τότε $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ στον X, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\|x_n - x\| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $j > k_n \geq n_0$, θα ισχύει:

$$
\begin{aligned}
\|z_n - x\| &\overset{(33)}{=} \left\| \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \lambda_j x_j - x \right\| = \left\| \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \lambda_j (x_j - x) \right\| \\
&\leq \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \lambda_j \|x_j - x\| \leq \varepsilon \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \lambda_j = \varepsilon\,.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

■

Λήμμα 5 (Mazur). *Αν $x_n \rightharpoonup x$ στον X, τότε υπάρχει κυρτό μπλοκ (z_n) της (x_n), τέτοιο ώστε $\|z_n - x\| \to 0$.*

Σε ό,τι ακολουθεί, το Ω είναι φραγμένο πεδίο (σημ. ανοικτό & συνεκτικό) στον $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης C^2. Επιπλέον, συμβολίζουμε με $|\cdot|$ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^N$.

Λήμμα 6 (Βασικό). *Έστω $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Καραθεοδωρή (Ορισμός 23) με $f(z,0) = 0$ σ.π. στο Ω, που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

(Σ1): $|f(z,t)| \leq c(1 + |t|^{p-1})$, *για όλα σχεδόν τα* $z \in \Omega$ & $\forall\, t \in \mathbb{R}$,
όπου $c > 0$ *και* $1 < p < +\infty$.

(Σ2): $\exists\, \eta, \theta \in L^\infty_+(\Omega)$ *ώστε*

$$
\eta(z) \;\leq\; \liminf_{|t|\to\infty} \frac{f(z,t)}{|t|^{p-2}t} \;\leq\; \limsup_{|t|\to\infty} \frac{f(z,t)}{|t|^{p-2}t} \;\leq\; \theta(z)\,,
\tag{35}
$$

ομοιόμορφα για όλα σχεδόν τα $z \in \Omega$.

Έστω $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ και $(\rho_n) \subset (0,+\infty)$, τέτοιες ώστε

$$
\rho_n \to +\infty, \quad y_n = \frac{u_n}{\rho_n} \to y\,, \quad \text{στον } L^p(\Omega)\,.
$$

Τότε, υπάρχουν $\xi \in L^\infty_+(\Omega)$ και υπακολουθία $(\widetilde{u}_n)$ της (u_n) ώστε

$$
\eta(z) \leq \xi(z) \leq \theta(z)\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega \quad \&
$$

$$
\frac{f(\cdot,\widetilde{u}_n(\cdot))}{\rho_n^{p-1}} \rightharpoonup \xi(\cdot)|y(\cdot)|^{p-2}y(\cdot) \quad \text{στον } L^{p'}(\Omega)\,.
\tag{36}
$$

Απόδειξη: Θέτουμε

$$
g_n(z) = \frac{f(z,u_n(z))}{\rho_n^{p-1}}\,, \quad z \in \Omega, \quad n \geq 1.
$$

Από την αυξητική συνθήκη **(Σ1)** προκύπτει ότι, για κάθε $n \geq 1$,

$$
|g_n(z)| \leq c\left(\frac{1}{\rho_n^{p-1}} + |y_n(z)|^{p-1}\right), \quad \text{σ.π. στο } \Omega\,,
\tag{37}
$$

οπότε η (g_n) είναι *φραγμένη* στον *ανακλαστικό* χώρο $L^{p'}(\Omega)$. Περνώντας λοιπόν σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$g_n \rightharpoonup g \ \text{ στον } \ L^{p'}(\Omega)\,. \tag{38}$$

Από το Λήμμα (5) (Mazur), υπάρχει *κυρτό μπλοκ* $(\hat{g}_n)$ της (g_n) με την ιδιότητα

$$\|\hat{g}_n - g\|_{L^{p'}} \longrightarrow 0\,. \tag{39}$$

Επιπλέον, $\|y_n - y\|_{L^p} \to 0$ από την υπόθεση. Περνώντας λοιπόν ακόμη μια φορά σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$y_n(z) \to y(z)\,, \quad \hat{g}_n(z) \to g(z)\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega\,. \tag{40}$$

Επιλέγουμε $E_1 \subseteq \Omega$ μετρήσιμο σύνολο με $|E_1| = 0$ και τέτοιο ώστε, για κάθε $z \in \Omega \setminus E_1$ να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις (37) & (40).

Εστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της συνθήκης **(Σ2)**, υπάρχουν $R > 0$ και $E_2 \subseteq \Omega$ μετρήσιμο, τέτοια ώστε $|E_2| = 0$ και

$$\eta(z) - \varepsilon \,\leq\, \frac{f(z,t)}{|t|^{p-2}t} \,\leq\, \theta(z) + \varepsilon\,, \quad \forall\, z \in \Omega \setminus E_2 \quad \& \quad \forall\, |t| \geq R\,. \tag{41}$$

Θέτουμε $E = E_1 \cup E_2$. Προφανώς, $|E| = 0$. Επιλέγουμε $z \in \Omega \setminus E$.

1η περίπτωση: $\boxed{y(z) > 0}$. Τότε, $y_n(z) \to y(z) > 0$ (βλ. σχέση (40)) και $u_n(z) = \rho_n y_n(z) \to +\infty$. Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $u_n(z) > R$ και $y_n(z) > 0$, για κάθε $n \geq n_0$.

Τότε, από τη σχέση (41), για κάθε $n \geq n_0$, ισχύει

$$\eta(z) - \varepsilon \,\leq\, \frac{f(z,u_n(z))}{u_n(z)^{p-1}} \,\leq\, \theta(z) + \varepsilon \implies$$

$$(\eta(z) - \varepsilon) y_n(z)^{p-1} \,\leq\, g_n(z) \,\leq\, (\theta(z) + \varepsilon) y_n(z)^{p-1}. \tag{42}$$

Αν $\hat{g}_n = \displaystyle\sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \lambda_j g_j$, $n \geq 1$, όπως στον Ορισμό (15), θέτουμε

$$\sigma_n(z) = \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \lambda_j y_j(z)^{p-1}, \quad \forall\, n \geq 1\,. \tag{43}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (42), προκύπτει

$$(\eta(z) - \varepsilon)\, \sigma_n(z) \,\leq\, \hat{g}_n(z) \,\leq\, (\theta(z) + \varepsilon)\, \sigma_n(z), \quad \forall\, n \geq n_0\,. \tag{44}$$

Από τη σχέση (40) και την Πρόταση 15 έπεται ότι

$$\sigma_n(z) \to y(z)^{p-1}.$$

Παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$ στη σχέση (44) και λαμβάνοντας υπόψη ξανά την (40), παίρνουμε

$$\eta(z) - \varepsilon \le \frac{g(z)}{y(z)^{p-1}} \le \theta(z) + \varepsilon\,. \tag{45}$$

2η περίπτωση: $\boxed{y(z) < 0}$. Παρόμοια με τη σχέση (45), προκύπτει η ακόλουθη:

$$\eta(z) - \varepsilon \le \frac{g(z)}{|y(z)|^{p-2}y(z)} \le \theta(z) + \varepsilon\,. \tag{46}$$

Με βάση τα παραπάνω, ισχύει το εξής:
για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $S_\varepsilon \subseteq \Omega$ μετρήσιμο τέτοιο ώστε $|S_\varepsilon| = 0$ και

$$\eta(z) - \varepsilon \le \frac{g(z)}{|y(z)|^{p-2}y(z)} \le \theta(z) + \varepsilon\,, \quad \forall\, z \in (y \neq 0) \setminus S_\varepsilon\,. \tag{47}$$

Θέτουμε $S = \cup_{k=1}^{\infty} S_{1/k}$. Τότε, $|S| = 0$ και

$$\eta(z) \le \frac{g(z)}{|y(z)|^{p-2}y(z)} \le \theta(z)\,, \quad \forall\, z \in (y \neq 0) \setminus S\,. \tag{48}$$

Ταυτόχρονα, για κάθε $z \in (y = 0) \setminus E_1$, οι σχέσεις (37) & (40) δίνουν

$$|g_n(z)| \le c\left(\frac{1}{\rho_n^{p-1}} + |y_n(z)|^{p-1}\right) \to 0\,, \tag{49}$$

δηλ. $g_n(z) \to 0$ κατά σημείο σ.π. στο Ω, άρα και $\hat{g}_n(z) \to 0$ ως κυρτό μπλοκ αυτής.

Συνεπώς, πάλι λόγω της (40),

$$g(z) = 0, \quad \forall\, z \in (y = 0) \setminus E_1\,. \tag{50}$$

Θέτουμε

$$\xi(z) = \begin{cases} \dfrac{g(z)}{|y(z)|^{p-2}y(z)}\,, & y(z) \neq 0\,, \\[2ex] \dfrac{\theta(z) + \eta(z)}{2}\,, & y(z) = 0\,. \end{cases} \tag{51}$$

Οι σχέσεις (48), (50) & (51) δίνουν ότι $\xi \in L_+^{\infty}(\Omega)$ και

$$g(z) = \xi(z)|y(z)|^{p-2}y(z)\,, \quad \eta(z) \le \xi(z) \le \theta(z)\,, \quad \forall\, z \in \Omega \setminus (S \cup E_1)\,. \tag{52}$$

■

Πρόταση 16. *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες **(Σ1)** & **(Σ2)** του Λήμματος 6 κι επιπλέον*

$$\lambda_1 \le \eta(z) \le \theta(z) < \lambda_2\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega\,, \quad \eta(\cdot) \not\equiv \lambda_1\,,$$

όπου λ_1, λ_2 οι δύο πρώτες ιδιοτιμές του τελεστή $-\Delta_p$ με Dirichlet συνοριακές συνθήκες (βλ. Παράρτημα Β').

Τότε, το συναρτησιακό $\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *με*

$$\varphi(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(z)|^p\, dz \;-\; \int_\Omega F(z,u(z))\, dz\,, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{53}$$

όπου

$$F(z,t) = \int_0^t f(z,s)\, ds\,, \quad z \in\ \Omega \quad t \in \mathbb{R},$$

ικανοποιεί τη συνθήκη (PS).

Απόδειξη: Έστω $X = W_0^{1,p}(\Omega)$. Αρχικά σημειώνουμε ότι το φ είναι κλάσης $C^1(X)$ με

$$\langle \varphi'(u), h\rangle = \langle A_p u, h\rangle \;-\; \int_\Omega f(z,u(z))h(z)\, dz, \quad \forall\, u,\ h \in X,$$

όπου $A_p : X \to X^*$ με

$$\langle A_p u, h\rangle = \int_\Omega |\nabla u(z)|^{p-2}\cdot(\nabla u(z), \nabla h(z))_{\mathbb{R}^N}\, dz\,, \quad \forall\, u,\ h \in X.$$

Έστω $(u_n) \subseteq X$ με

$$[\,\varphi(u_n) \to c \in \mathbb{R} \quad \& \quad \|\varphi'(u_n)\|_* =: \varepsilon_n \to 0\,]\,. \tag{54}$$

Τότε, για όλα τα $h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ και για όλα τα $n \geq 1$, ισχύει

$$\left|\langle A_p u_n,\ h\rangle - \int_\Omega f(z,u_n(z))h(z)dz\right| \;=\; |\langle \varphi'(u_n), h\rangle| \;\leq\; \varepsilon_n\|h\|\,. \tag{55}$$

Επειδή ο τελεστής φ' είναι τύπου $(S)_+$ (βλ. Παρατήρηση 15, Παράρτημα Δ'), αρκεί να δείξουμε ότι η (u_n) είναι φραγμένη.

Υποθέτουμε αντιθέτως ότι η (u_n) **δεν είναι** φραγμένη. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $(\widetilde{u}_n)$ της (u_n) με

$$\|\widetilde{u}_n\| \to +\infty\ . \tag{56}$$

Θέτουμε $y_n = \frac{\widetilde{u}_n}{\|\widetilde{u}_n\|}$, για κάθε $n \geq 1$. Προφανώς, $\|y_n\| = 1,\ \ n \geq 1$.

Περνώντας σε υπακολουθίες και χρησιμοποιώντας τη *συμπαγή ενσφήνωση* $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ (βλ. Θεώρημα 10, Παράρτημα Α'.2.1), μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάποιο $y \in X$ ισχύει

$$y_n \rightharpoonup y \text{ στον } X, \quad y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} y, \quad y_n(z) \to y(z)\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega. \tag{57}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της σχέσης (55) με $\|\widetilde{u}_n\|^{p-1}$, παίρνουμε

$$\left|\langle A_p y_n, h\rangle - \int_\Omega g_n(z)h(z)dz\right| \leq \frac{\varepsilon_n\|h\|}{\|\widetilde{u}_n\|^{p-1}}\,, \quad \forall\, h \in X \quad \& \quad \forall\, n \geq 1\,, \tag{58}$$

όπου

$$g_n(z) := \frac{f(z,\widetilde{u}_n(z))}{\|\widetilde{u}_n\|^{p-1}}\,, \quad z \in \Omega\,,\ \ n \geq 1\,.$$

Από το Λήμμα 6, υπάρχει $\xi \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ ώστε

$$\eta(z) \leq \xi(z) \leq \theta(z)\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega, \tag{59}$$

$$g_n \rightharpoonup \xi(\cdot)|y(\cdot)|^{p-2}y(\cdot)\,, \quad \text{στον } L^{p'}(\Omega). \tag{60}$$

Επειδή $\eta(z) \geq \lambda_1 > 0$, σ.π. στο Ω, έπεται ότι $\xi \in L^{\infty}_{+}(\Omega) \setminus \{0\}$.

Θέτοντας $h = y_n - y$ στη σχέση (58) και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (57), (60) & (56), προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \langle A_p y_n, y_n - y\rangle = 0\,.$$

Επειδή ο τελεστής A_p είναι τύπου $(S)_+$ (βλ. Παράρτημα Δ΄, Πρόταση 24) κι επειδή $y_n \rightharpoonup y$, παίρνουμε ότι

$$\|y_n - y\| \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \|y\| = 1\,. \tag{61}$$

Παίρνοντας το όριο στη σχέση (58) καθώς $n \to +\infty$, έπεται ότι

$$\langle A_p y, h\rangle = \int_{\Omega} \xi(\cdot)|y|^{p-2}yh\,, \quad \forall\, h \in X. \tag{62}$$

Επομένως, η y είναι μια ασθενής λύση του σταθμισμένου προβλήματος συνοριακών τιμών

$$[\,-\Delta_p u(z) = \xi(z)|u(z)|^{p-2}u(z)\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega \quad \& \quad u|_{\partial\Omega} = 0\,]\,. \tag{Π_ξ}$$

Αφού $y \not\equiv 0$ (βλ. σχέση (61)), η y είναι μια $1-$ιδιοσυνάρτηση του σταθμισμένου προβλήματος ιδιοτιμών

$$[\,-\Delta_p u(z) = \lambda\xi(z)|u(z)|^{p-2}u(z)\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega \quad \& \quad u|_{\partial\Omega} = 0\,]\,. \tag{$\Pi_{\lambda,\xi}$}$$

Από τη σχέση (59) και τη μονοτονία των (μεταβολικών) LS ιδιοτιμών (βλ. Παράρτημα Β΄.2), προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\lambda_1 \leq \eta(z) \leq \xi(z) \text{ σ.π. στο } \Omega \;\&\; \eta(\cdot) \not\equiv \lambda_1 \Longrightarrow \xi(\cdot) \not\equiv \lambda_1 \Longrightarrow \boxed{\hat{\lambda}_1(\xi) < \hat{\lambda}_1(\lambda_1) = 1},$$
$$\xi(z) \leq \theta(z) < \lambda_2 \text{ σ.π. στο } \Omega \;\Longrightarrow \boxed{\hat{\lambda}_2(\xi) > \hat{\lambda}_2(\lambda_2) = 1}.$$

Άρα, το 1 βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ιδιοτιμές του προβλήματος ($\Pi_{\lambda,\xi}$) ενώ είναι ιδιοτιμή του (ΑΤΟΠΟ). Επομένως, η ακολουθία $(u_n) \subseteq X = W^{1,p}_0(\Omega)$ είναι φραγμένη και η συνθήκη (PS) ικανοποιείται από το χαρακτηρισμό της Πρότασης 3. ■

Στο σημείο αυτό είμαστε έτοιμοι για τη διατύπωση και απόδειξη του βασικού θεωρήματος ύπαρξης αυτού του κεφαλαίου.

Θεώρημα 9. *Έστω $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Καραθεοδωρή (Ορισμός 23) με $f(z,0) = 0$ για όλα σχεδόν τα $z \in \Omega$, που ικανοποιεί τιςπαρακάτω συνθήκες:*

(Σ1): $|f(z,t)| \leq c(1+|t|^{p-1})$, *για όλα σχεδόν τα* $z \in \Omega$ & $\forall\, t \in \mathbb{R}$, *όπου* $c > 0$ *και* $1 < p < +\infty$.

(Σ2): $\exists\, \eta, \theta \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ *ώστε*

$$\lambda_1 \;\leq\; \eta(z) \;\leq\; \liminf_{|t|\to\infty} \frac{f(z,t)}{|t|^{p-2}t} \;\leq\; \limsup_{|t|\to\infty} \frac{f(z,t)}{|t|^{p-2}t} \;\leq\; \theta(z) \;<\; \lambda_2 \tag{63}$$

ομοιόμορφα για όλα σχεδόν τα $z \in \Omega$ *με* $\eta(\cdot) \not\equiv \lambda_1$.

(Σ3): $\exists\, k(\cdot) \in L^{\infty}(\Omega)$ *ώστε* $k(z) \leq \lambda_1$ *σ.π. στο* Ω, $k(\cdot) \not\equiv \lambda_1$ *και*

$$\limsup_{t\to 0} \frac{p\,F(z,t)}{|t|^p} \;\leq\; k(z)\,,$$

ομοιόμορφα για όλα σχεδόν τα $z \in \Omega$, *όπου*

$$F(z,t) = \int_0^t f(z,s)ds\,, \qquad z \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Τότε, το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$[\,-\Delta_p u(z) = f(z,u(z))\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega \quad \& \quad u|_{\partial\Omega} = 0\,]\,, \tag{ΠΣΤ}$$

έχει τουλάχιστον μία μη τετριμμένη ασθενή λύση $u \in C^1_0(\overline{\Omega})$.

Η συνθήκη **(Σ2)** (βλ. και Πρόταση 16) συνεπάγεται για το ενεργειακό συναρτησιακό την ιδιότητα συμπάγειας (PS). Επιπλέον, όπως θα δούμε στην απόδειξη, οι συνθήκες **(Σ2)** & **(Σ3)** θα εξασφαλίσουν για το ενεργειακό συναρτησιακό τη γεωμετρία Mountain Pass κοντά στο 0.
Για την απόδειξη θα χρειαστούμε και το παρακάτω:

Λήμμα 7. *Έστω $k(\cdot) \in L^{\infty}(\Omega)$ ώστε $k(z) \leq \lambda_1$ σ.π. στο Ω, $k(\cdot) \not\equiv \lambda_1$. Τότε, υπάρχει $c_1 > 0$, τέτοιο ώστε*

$$\|\nabla u\|_p^p \;-\; \int_\Omega k(z)|u(z)|^p dz \;\geq\; c_1 \|\nabla u\|_p^p\,, \quad \forall\, u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Απόδειξη: Αν υποθέσουμε ότι αυτό δεν αληθεύει, τότε μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $(u_n) \subset W^{1,p}_0(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\|\nabla u_n\|_p^p \;-\; \int_\Omega k(z)|u_n(z)|^p dz \;<\; \frac{1}{n}\|\nabla u_n\|_p^p\,, \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

Θέτοντας

$$y_n = \frac{u_n}{\|\nabla u_n\|_p}\,, \qquad n \geq 1\,,$$

η τελευταία δίνει

$$\|\nabla y_n\|_p^p \;<\; \int_\Omega k(z)|y_n(z)|^p dz \;+\; \frac{1}{n}\,, \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

Προφανώς, $\|\nabla y_n\|_p = 1,\ n \geq 1$. Περνώντας σε υπακολουθίες και χρησιμοποιώντας τη *συμπαγή ενσφήνωση* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ για $p \in (1, p^*)$ (βλ. Θ. 10), μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάποιο $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$y_n \rightharpoonup y \quad \text{στον } W_0^{1,p}(\Omega), \quad y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} y, \quad y_n(z) \to y(z) \quad \text{σ.π. στο } \Omega.$$

Αφού $y \in L^p(\Omega)$, από το Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega k(z)|y_n(z)|^p dz = \int_\Omega k(z)|y(z)|^p dz \leq \lambda_1 \|y\|_p^p .$$

Επιπλέον,

$$\nabla y_n \rightharpoonup \nabla y \quad \text{στον } L^p(\Omega) \implies \|\nabla y\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla y_n\|_p .$$

Με βάση τα παραπάνω και την (70) (Παράρτημα Α΄.2), έχουμε

$$\lambda_1 \|y\|_p^p \leq \|\nabla y\|_p^p \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla y_n\|_p^p \leq \limsup_{n\to\infty} \|\nabla y_n\|_p^p \leq \int_\Omega k(z)|y(z)|^p dz \leq \lambda_1 \|y\|_p^p$$

κι επομένως,

$$\|\nabla y\|_p^p = \lambda_1 \|y\|_p^p = \int_\Omega k(z)|y(z)|^p dz = \lim_n \|\nabla y_n\|_p^p = 1 .$$

Επειδή $\|\nabla y\|_p^p = \lambda_1 \|y\|_p^p$ και $y \neq 0$, έπεται ότι η y είναι πρωταρχική ιδιοσυνάρτηση της $-\Delta_p^D$. Συνεπώς, $y \in C_0^1(\overline{\Omega})$ και η y έχει σταθερό πρόσημο. Άρα, $|y(z)| > 0,\ \forall\, z \in \Omega$. Επιπλέον,

$$\int_\Omega [\lambda_1 - k(z)] \cdot |y(z)|^p dz = \lambda_1 \|y\|_p^p - \int_\Omega k(z)|y(z)|^p dz = 0$$

$$\implies \quad k(z) = \lambda_1 \quad \text{σ.π. στο } \Omega \quad \text{(ΑΤΟΠΟ)}. \qquad \blacksquare$$

Απόδειξη του Θ. 9: Είναι γνωστό ότι οι ασθενείς λύσεις του προβλήματος (ΠΣΤ) είναι τα κρίσιμα σημεία του ενεργειακού συναρτησιακού $\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (βλ. σχέση (53)). Επιπλέον, $\varphi(0) = 0$ & $\varphi'(0) = 0_{X^\star}$ (σημ. ότι $f(z,0) = 0$ για όλα σχεδόν τα $z \in \Omega$) κι επομένως η μηδενική συνάρτηση είναι η τετριμμένη λύση του (ΠΣΤ). Θα δείξουμε ότι το πρόβλημα (ΠΣΤ) έχει μία τουλάχιστον ασθενή λύση διάφορη της μηδενικής.

Ισχυρισμός 1. *Υπάρχει* $\rho > 0$ *τέτοιο ώστε*

$$\inf\{\, \varphi(u) : \|\nabla u\|_p = \rho \,\} > 0 = \varphi(0).$$

Απόδειξη: Αρχικά διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$|F(z,t)| \leq c\left(|t| + \frac{|t|^p}{p}\right), \quad \text{σ.π. στο } \Omega \quad \& \quad \forall\, t \in \mathbb{R} .$$

Πράγματι· για κάθε $(z,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$,

$$|F(z,t)| = |t| \cdot \left| \int_0^1 f(z,t\sigma)d\sigma \right| \leq |t| \int_0^1 |f(z,t\sigma)|\, d\sigma$$
$$\overset{\textbf{(Σ1)}}{\leq} c|t| \int_0^1 (\, 1 + |t|^{p-1}\sigma^{p-1}\,)\, d\sigma = c\left(|t| + \frac{|t|^p}{p} \right).$$

Στη συνέχεια, επιλέγουμε $r \in (p,\ p^*)$ και $\varepsilon \in (0,\ \lambda_1 c_1)$, όπου $c_1 > 0$ η θετική σταθερά που εμφανίζεται στο β′ μέλος της ανισότητας του Λήμματος 7. Λόγω της συνθήκης **(Σ3)**, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$F(z,t) \leq \frac{k(z)+\varepsilon}{p}\, |t|^p\,, \quad \forall\, t \ \text{ με } \ |t| < \delta, \quad \text{σ.π. στο } \Omega.$$

Έστω $|t| \geq \delta$. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{rl} \dfrac{|t|}{\delta} \leq \left(\dfrac{|t|}{\delta}\right)^r \iff & |t| \ \leq \ \dfrac{|t|^r}{\delta^{r-1}} \\[3ex] \text{και} \quad & \dfrac{|t|}{\delta} \ \leq \ \left(\dfrac{|t|}{\delta}\right)^{r/p} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{|t|^p}{\delta^p} \leq \frac{|t|^r}{\delta^r} \iff |t|^p \ \leq \ \frac{|t|^r}{\delta^{r-p}}\,,$$

οπότε

$$|F(z,t)| \ \leq \ c\left(|t| + \frac{|t|^p}{p} \right) \ \leq \ c_2|t|^r\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega,$$

όπου $\quad c_2 = c\left(\dfrac{1}{\delta^{r-1}} + \dfrac{1}{\delta^{r-p}} \right).$

Θέτοντας

$$c_3 = c_2 \ + \ \frac{\|k\|_\infty + \varepsilon}{p} \cdot \frac{1}{\delta^{r-p}}$$

έχουμε

$$|F(z,t)| \ - \ \frac{k(z)+\varepsilon}{p}|t|^p \ \leq \ c_2|t|^r \ + \ \frac{\|k\|_\infty + \varepsilon}{p}\frac{|t|^r}{\delta^{r-p}} \ = \ c_3|t|^r, \quad \text{σ.π. στο } \Omega.$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$F(z,t) \ \leq \ c_3|t|^r \ + \ \frac{k(z)+\varepsilon}{p}|t|^p\,, \qquad \text{σ.π. στο } \Omega \quad \& \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{64}$$

Αντικαθιστώντας στο συναρτησιακό ενέργειας της σχέσης (53) και λαμβάνοντας υπόψη την (64), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &\geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p \;-\; \frac{1}{p}\int_\Omega k(z)|u(z)|^p dz \;-\; \frac{\varepsilon}{p}\|u\|_p^p \;-c_3\;\|u\|_r^r \\
&\geq \frac{c_1}{p}\|\nabla u\|_p^p \;-\; \frac{\varepsilon}{p}\|u\|_p^p \;-c_3\;\|u\|_r^r \quad [\text{βλ. Λήμμα } 7] \\
&\geq \frac{c_1}{p}\|\nabla u\|_p^p \;-\; \frac{\varepsilon}{p\lambda_1}\|\nabla u\|_p^p \;-c_3\;\|u\|_r^r \quad [\text{πηλίκο Rayleigh } (70)] \\
&\geq \frac{c_1}{p}\|\nabla u\|_p^p \;-\; \frac{\varepsilon}{p\lambda_1}\|\nabla u\|_p^p \;-c_4^r\;\|\nabla u\|_p^r\,, \quad \forall\; u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,,
\end{aligned}$$

όπου c_4 θετική σταθερά, τέτοια ώστε

$$\|u\|_r \;\leq\; c_4\|\nabla u\|_p\,, \quad \forall\; u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Σημ. ότι επειδή $1 < r < p^*$, ο $W_0^{1,p}(\Omega)$ ενσφηνώνεται συνεχώς στον $L^r(\Omega)$.

Τελικά, $\forall\; u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\varphi(u) \;\geq\; \frac{\|\nabla u\|_p^p}{p}\left(\frac{c_1\lambda_1 - \varepsilon}{\lambda_1} \;-\; c_4^r||\nabla u||_p^{r-p}\right) \quad (\text{σημ. ότι } r > p).$$

Επιλέγοντας $\rho > 0$ με

$$0 \;<\; \rho^{r-p} \;<\; \frac{c_1\lambda_1 - \varepsilon}{\lambda_1 c_4^r}\,,$$

καταλήγουμε στο ότι

$$\inf\{\;\varphi(u) : \|\nabla u\|_p = \rho\;\} \;\geq\; \frac{\rho^p}{p}\left(\frac{c_1\lambda_1 - \varepsilon}{\lambda_1} \;-\; c_4^r\rho^{r-p}\right) \;>\; 0 = \varphi(0).$$

Η απόδειξη του Ισχυρισμού 1 ολοκληρώθηκε. □

Στη συνέχεια, θεωρούμε μια πρωταρχική ιδιοσυνάρτηση $\hat{u}_1 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ της $-\Delta_p^D$, τέτοια ώστε $\hat{u}_1(z) > 0, \;\; \forall\; z \in \Omega$ (βλ. Παράρτημα Β΄.1).

Ισχυρισμός 2. *Το συναρτησιακό ενέργειας φ είναι αντι-πιεστικό, δηλ.*

$$\varphi(t\hat{u}_1) \;\to\; -\infty, \quad \textit{καθώς} \quad t \to +\infty\,.$$

Απόδειξη: Από τη συνθήκη **(Σ2)** (σχέση (63)) διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$\liminf_{|t|\to\infty} p\,\frac{F(z,t)}{|t|^p} \geq \eta(z), \quad \text{ομοιόμορφα για όλα σχεδόν τα } z \in \Omega\,. \tag{65}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη σχέση (65) έπεται ότι υπάρχει $R_\varepsilon > 0$ ώστε για $|t| > R_\varepsilon$,

$$F(z,t) \geq \frac{\eta(z) - \varepsilon}{p}\,|t|^p\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega\,.$$

Επιπλέον, για $|t| \leq R_\varepsilon$, η συνθήκη **(Σ1)** δίνει

$$|F(z,t)| \;\leq\; c\left(|t| + \frac{|t|^p}{p}\right) \;\leq\; c\left(R_\varepsilon \;+\; \frac{R_\varepsilon^p}{p}\right) = C_\varepsilon\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega$$

(βλ. και απόδειξη του Ισχυρισμού 1).

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω παίρνουμε

$$F(z,t) \geq \frac{\eta(z)-\varepsilon}{p}|t|^p - C_\varepsilon\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega \quad \& \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{66}$$

Τότε, για κάθε $t>0$, ισχύει

$$\begin{aligned}
\varphi(t\hat{u}_1) &\overset{(53)}{=} \frac{t^p}{p}\|\nabla\hat{u}_1\|_p^p - \int_\Omega F(z,t\hat{u}_1(z))dz = \frac{\lambda_1 t^p}{p}\|\hat{u}_1\|_p^p - \int_\Omega F(z,t\hat{u}_1(z))dz \\
&\overset{(66)}{\leq} \frac{\lambda_1 t^p}{p}\|\hat{u}_1\|_p^p - \frac{t^p}{p}\int_\Omega \left[\eta(z)-\varepsilon\right]\hat{u}_1(z)^p dz + C_\varepsilon|\Omega| \\
&= \frac{t^p}{p}\int_\Omega \left[\lambda_1 - \eta(z) + \epsilon\right]\hat{u}_1(z)^p dz + C_\varepsilon|\Omega| \\
&= \frac{t^p}{p}\left\{\varepsilon\|\hat{u}_1\|_p^p - \int_\Omega \left[\eta(z)-\lambda_1\right]\hat{u}_1(z)^p dz\right\} + C_\varepsilon|\Omega|.
\end{aligned}$$

Επειδή όμως

$$\int_\Omega \left[\eta(z)-\lambda_1\right]\hat{u}_1(z)^p dz > 0$$

[υπενθυμίζουμε ότι $\eta(\cdot) \geq \lambda_1$, $\eta(\cdot) \not\equiv \lambda_1$ και $\hat{u}(\cdot) > 0$], μπορούμε να επιλέξουμε το ε έτσι ώστε

$$0 < \varepsilon \; < \; \frac{\displaystyle\int_\Omega [\eta(z)-\lambda_1]\hat{u}_1(z)^p dz}{\|\hat{u}_1\|_p^p}\,.$$

Τότε όμως

$$\varphi(t\hat{u}_1) \to -\infty\,, \quad \text{καθώς } t \to +\infty\,,$$

δηλ. το φ είναι *αντι-πιεστικό.*

Η απόδειξη του Ισχυρισμού 2 ολοκληρώθηκε. □

Σύμφωνα με τους Ισχυρισμούς 1 & 2, υπάρχουν $\rho > 0$ & $t > \dfrac{\rho}{\|\nabla\hat{u}_1\|_p}$ ώστε

$$0 < \rho < \|\nabla(\,t\hat{u}_1\,)\|_p \quad \& \quad \inf\{\,\varphi(u) : \|\nabla u\|_p = \rho\,\} = \eta_\rho \; > \; 0 = \varphi(0) \; > \; \varphi(t\hat{u}_1),$$

δηλαδή το συναρτησιακό φ έχει τη Γεωμετρία του Θεωρήματος Mountain Pass (GMPT) γύρω από το σημείο $u_0 = 0_X$ (βλ. Παρατήρηση 11). Ταυτόχρονα, η Πρόταση 16 μας εξασφαλίζει ότι το φ ικανοποιεί τη συνθήκη Palais-Smale.

Με βάση τα παραπάνω, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Mountain Pass (Θ. 8), οπότε

$$\exists\, w_0 \in \mathbb{K}_\varphi \mid \varphi(w_0) \; \geq \; \eta_\rho \; > \; 0 = \varphi(0) \Longrightarrow w_0 \not\equiv 0_X\,,$$

δηλαδή το $\varphi(w_0)$ είναι κρίσιμη τιμή του φ στον X.

Από τη Θεωρία Ομαλότητας (βλ. Παράρτημα Α΄.2.2) και τη συνθήκη **(Σ1)**, έπεται ότι $w_0 \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Άρα, το πρόβλημα (ΠΣΤ) έχει μία τουλάχιστον μη τετριμμένη ασθενή λύση στον $C_0^1(\overline{\Omega})$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 9 ολοκληρώθηκε. ■

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄

Χώροι Sobolev - Ασθενείς λύσεις

Α΄.1 Ομαλές συναρτήσεις

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ φραγμένο πεδίο (δηλ. ανοικτό και συνεκτικό) με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης C^1 και $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Τα στοιχεία του Ω θα συμβολίζονται συνήθως με $z = (z_1\ ,\ z_2\ , \ldots , z_N)$.

Έστω $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ πολυδείκτης με στοιχεία μη αρνητικούς ακεραίους και $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \leq k$, όπου $k \geq 0$ ακέραιος που συμβολίζει την τάξη της παραγώγισης.

Έστω $C(\overline{\Omega})$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ και $C^k(\overline{\Omega})$ ο χώρος των συναρτήσεων $u \in C(\overline{\Omega})$ που έχουν μερικές παραγώγους έως και τάξης k πάνω στο Ω που επεκτείνονται συνεχώς στο $\overline{\Omega}$.

Εάν $u \in C^k(\overline{\Omega})$ και $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ πολυδείκτης με $|\alpha| \leq k$, θέτουμε

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2} \ldots \partial z_N^{\alpha_N}} u\ .$$

Ο χώρος $C^k(\overline{\Omega})$ είναι Banach αν εφοδιαστεί με τη νόρμα

$$\|u\|_{k,\overline{\Omega}} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup\{\, |\partial^\alpha u(z)| : z \in \Omega\,\}, \quad u \in C^k(\overline{\Omega})\,.$$

Συμβολίζουμε με $C^\infty(\overline{\Omega}) := \bigcap_{k \geq 0} C^k(\overline{\Omega})$ το χώρο των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων στο Ω με συνεχή επέκταση στο $\overline{\Omega}$.

Συμβολίζουμε με $C_c(\Omega)$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων *με συμπαγή φορέα* $\mathrm{supp}(u)$ μέσα στο Ω, όπου $\mathrm{supp}(u) := \overline{\{\, z \in \Omega : u(z) \neq 0\,\}}$. Θεωρούμε το χώρο *συναρτήσεων δοκιμής*

$$C_c^\infty(\Omega) := C^\infty(\overline{\Omega}) \cap C_c(\Omega).$$

Συμβολίζουμε με

$$C_0^1(\overline{\Omega}) := \{\, u \in C^1(\overline{\Omega}) : u\,|_{\partial\Omega} = 0\,\}$$

τις συναρτήσεις του χώρου $C^1(\overline{\Omega})$ που μηδενίζονται στο σύνορο και με

$$\emptyset \neq C_+ := \{\, u \in C_0^1(\overline{\Omega})\ : u(z) \geq 0,\ \forall\, z \in \Omega\,\}$$

το *θετικό κώνο* του χώρου $C_0^1(\overline{\Omega})$.

Το *εσωτερικό* του C_+ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{1,\overline{\Omega}}$ συμβολίζεται με $\mathrm{int}C_+$. Αποδεικνύεται ότι

$$\mathrm{int}C_+ := \left\{ u \in C_+\ : u(z) > 0,\ \forall\, z \in \Omega \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial n}(z) < 0,\ \forall\, z \in \partial\Omega \right\},$$

όπου $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ η κατευθυνόμενη παράγωγος της u κατά την κατεύθυνση του n, όπου n το διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου στο σύνορο $\partial\Omega$.

Α΄.2 Οι χώροι Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ ανοικτό. Συμβολίζουμε με $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ το χώρο των συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμες στα συμπαγή υποσύνολα του Ω. Τότε,

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega), \quad \forall\, 1 \leq p \leq +\infty.$$

Ορισμός 16 (Γενικευμένη ή Ασθενής μερική παράγωγος)**.** *Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Η u έχει ασθενή μερική παράγωγο ως προς τη μεταβλητή $1 \leq i \leq N$ στο Ω ανν $\exists\, g_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ τέτοια ώστε*

$$\int_\Omega u(z)\partial_i\varphi(z)dz = -\int_\Omega g_i(z)\varphi(z)\,, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Σε αυτή την περίπτωση, γράφουμε $g_i \equiv \partial_i u$ με τη γενικευμένη έννοια.

Έστω $1 \leq p \leq +\infty$.

Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις του $L^p(\Omega)$ με ασθενείς μερικές παραγώγους που ανήκουν στον $L^p(\Omega)$.

Εάν $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ και $\partial_i u \in L^p(\Omega)$ $(1 \leq i \leq N)$ οι κλασικές μερικές παράγωγοι της u, τότε $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Ειδικότερα, αν το Ω είναι φραγμένο, τότε $C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$.

Για $1 \leq p < \infty$, ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach ως προς τη νόρμα

$$\|u\|_{1,p} := (\, \|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p\,)^{1/p}\,,$$

όπου

$$\|\nabla u\|_p^p = \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_p^p = \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u(z)|^p dz\,.$$

Εάν $1 < p < \infty$, ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι επιπλέον *ανακλαστικός*.

Θεωρούμε τον κλειστό γραμμικό υπόχωρο $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}$. Ο εγκλεισμός $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ είναι εν γένει γνήσιος, ενώ για $\Omega = \mathbb{R}^N$ οι δύο χώροι ταυτίζονται.

Εάν το Ω έχει σύνορο κλάσης C^1 και $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow u\,|_{\partial\Omega} = 0\,.$$

Α΄.2.1 Χρήσιμες ενσφηνώσεις και ανισότητες

Ορισμός 17. *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^N \ \ (N \geq 1)$ *φραγμένο πεδίο (σημ. ανοικτό & συνεκτικό) με ομαλό σύνορο κλάσης* C^1 *και* $p \in [1, +\infty)$. *Ορίζουμε*

$$p^\star := \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p}\,, & \text{αν } N > p\,, \\ +\infty\,, & \text{αν } N \leq p\,, \end{cases}$$

τον κρίσιμο (ή συζυγή) εκθέτη Sobolev.

Θεώρημα 10 (Rellich-Kondrashov ή Ενσφήνωσης του Sobolev)**.** *Έστω* $p \in [1, +\infty)$. *Τότε, έχουμε τις παρακάτω ενσφηνώσεις:*

(i) *Αν* $p \leq N$,

- $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{\text{συνεχώς}} L^r(\Omega), \quad \text{αν} \ \ 1 \leq r \leq p^\star\,,$
- $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{\text{συμπαγώς}} L^r(\Omega), \quad \text{αν} \ \ 1 \leq r < p^\star\,.$

  Ειδικότερα, επειδή $1 \leq p < p^\star$, *ισχύει και* $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{\text{συμπαγώς}} L^p(\Omega)$.

(ii) *Αν* $p > N$, $\ W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{\text{συμπαγώς}} C(\overline{\Omega})$.

Σημ. ότι οι παραπάνω ενσφηνώσεις ισχύουν και για το χώρο $W_0^{1,p}(\Omega)$ *χωρίς υποθέσεις ομαλότητας* στο σύνορο $\partial\Omega$.

Θεώρημα 11 (Ανισότητα Poincaré)**.** *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^N \ \ (N \geq 1)$ *ανοικτό και φραγμένο και* $p \in [1, +\infty)$. *Τότε υπάρχει σταθερά* $C = C(p, \Omega) > 0$, *τέτοια ώστε*

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p\,, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Παρατήρηση 12. *Είναι άμεσο από την ανισότητα Poincaré ότι οι νόρμες* $\|u\|_{1,p}$ *και* $\|\nabla u\|_p$ *είναι ισοδύναμες στο χώρο Sobolev* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Α΄.2.2 Ασθενείς λύσεις - Ομαλότητα

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N \, (N \geq 1)$ φραγμένο πεδίο και $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Καραθεοδωρή (βλ. Ορισμό 23 παρακάτω) που ικανοποιεί την *πολυωνυμική αυξητική συνθήκη*

$$|f(z,t)| \leq c(1 + |t|^{p-1}), \quad c > 0, \quad 1 < p < +\infty, \tag{67}$$

για όλα σχεδόν τα $z \in \Omega$ και για όλα τα $t \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε το μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$[\, -\Delta_p u(z) = f(z, u(z))\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega \quad \& \quad u|_{\partial\Omega} = 0\,]\,, \tag{ΠΣΤ}$$

όπου $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ ο διαφορικός τελεστής p-Laplace.

Ορισμός 18 (Ασθενής λύση). *Η συνάρτηση $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι ασθενής λύση του προβλήματος* (ΠΣΤ) *ανν η **μεταβολική εξίσωση***

$$\int_\Omega |\nabla u(z)|^{p-2} \left(\nabla u(z), \nabla v(z)\right)_{\mathbb{R}^N} dz = \int_\Omega f(z, u(z))\, v(z)\, dz\,,$$

ικανοποιείται από κάθε $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Σημ. ότι λόγω πυκνότητας του $C_c^\infty(\Omega)$ στον $W_0^{1,p}(\Omega)$, έπεται ότι για να είναι μια συνάρτηση $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ασθενής λύση του προβλήματος (ΠΣΤ), αρκεί η παραπάνω μεταβολική εξίσωση να κανοποιείται από κάθε $v \in C_c^\infty(\Omega)$.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα κεντρικής σημασίας ισχυρό **θεώρημα ομαλότητας** που οφείλεται στον **Lieberman (1988)** (βλ. Lieberman (1988)):

Θεώρημα 12 (Ομαλότητας). *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ φραγμένο πεδίο με σύνορο κλάσης C^2, $p \in [1, +\infty)$ και $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Καραθεοδωρή που ικανοποιεί την (67). Τότε, κάθε ασθενής λύση του προβλήματος* (ΠΣΤ) *ανήκει στο χώρο $C_0^1(\overline{\Omega})$.*

Α΄.3 Παράγωγος σε χώρο Banach

Ορισμός 19 (Fréchet παραγωγισιμότητα σε χώρο Banach.). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $\varphi : X \to \mathbb{R}$ συναρτησιακό. Θα λέμε ότι το φ είναι Fréchet-παραγωγίσιμο στο σημείο $u_0 \in X$ ανν υπάρχει γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό $\varphi' \in X^*$ με την ιδιότητα*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|\varphi(u_0 + h) - \varphi(u_0) - \langle \varphi'(u_0), h \rangle_{X^*, X}|}{\|h\|} = 0\,.$$

Αν το φ είναι Fréchet-παραγωγίσιμο σε κάθε σημείο του X κι επιπλέον η απεικόνιση

$$X \ni u \mapsto \varphi'(u) \in X^*$$

είναι συνεχής, τότε γράφουμε $\varphi \in C^1(X)$.

Ορισμός 20 (Gâteaux παραγωγισιμότητα σε χώρο Banach.). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $\varphi : X \to \mathbb{R}$ συναρτησιακό. Θα λέμε ότι το φ είναι Gâteaux-παραγωγίσιμο στο σημείο $u_0 \in X$ ανν υπάρχει γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό $\varphi' \in X^*$ με την ιδιότητα*

$$\langle \varphi'(u_0),\ h \rangle_{X^*, X} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(u_0 + \varepsilon h) - \varphi(u)}{\varepsilon}\,, \quad \forall\ h \in X.$$

Παρατήρηση 13. *Όταν υπάρχει η Fréchet παράγωγος σε κάποιο σημείο, τότε υπάρχει και η Gâteaux παράγωγος στο σημείο αυτό και οι δύο παράγωγοι ταυτίζονται. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.*

Παρ΄ όλ΄ αυτά, εάν $\varphi : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-παραγωγίσιμο σε όλα τα σημεία του X και η απεικόνιση

$$X \ni u \mapsto \varphi'(u) \in X^*$$

είναι συνεχής, τότε το φ είναι και Fréchet-παραγωγίσιμο σε όλα τα σημεία του X (και φυσικά οι δύο παράγωγοι ταυτίζονται σε κάθε σημείο του X).

Ορισμός 21 (Κρίσιμο σημείο συναρτησιακού). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $\varphi : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-παραγωγίσιμο σε κάποιο σημείο $u_0 \in X$. Το u_0 λέγεται κρίσιμο σημείο του φ ανν $\varphi'(u_0) = 0_{X^*}$. Εάν το u_0 είναι σημείο τοπικού ακροτάτου του φ, τότε το u_0 είναι κρίσιμο του φ.*

Έστω $\varphi \in C^1(X)$. Συμβολίζουμε με

$$\mathbb{K}_\varphi := \{\, u \in X \mid \varphi'(u) = 0_{X^*} \,\}$$

το σύνολο των κρίσιμων σημείων του φ στον X και με

$$\mathbb{K}_\varphi^c := \{\, u \in \mathbb{K}_\varphi \mid \varphi(u) = c \,\}$$

το σύνολο των κρίσιμων σημείων του φ στο επίπεδο $c \in \mathbb{R}$.

Συχνά, οι "ασθενείς" λύσεις ενός Προβλήματος Συνοριακών Τιμών είναι τα κρίσιμα σημεία κάποιου C^1-συναρτησιακού που ορίζεται πάνω από έναν κατάλληλο χώρο Sobolev. Αυτό φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα.

Α΄.3.1 Παράδειγμα

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ φραγμένο πεδίο, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Καραθεοδωρή (βλ. Ορισμό 23 παρακάτω) που ικανοποιεί την (67) και $1 < p < \infty$.

Θεωρούμε το συναρτησιακό $\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\varphi(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(z)|^p dz \; - \int_\Omega F(z, u(z))dz\,, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ &\text{όπου} \quad F(z,t) = \int_0^t f(z,s)ds\,, \quad \forall\, z \in \Omega\,, \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{68}$$

Εάν $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, αποδεικνύεται ότι $\varphi \in C^1(X)$ με παράγωγο Fréchet

$$\begin{aligned} \langle \varphi'(u),\, v\rangle_{X^*,X} := &\int_\Omega |\nabla u(z)|^{p-2}\, (\nabla u(z), \nabla v(z))_{\mathbb{R}^N}\, dz \\ &- \int_\Omega f(z, u(z))\, v(z)\, dz, \quad \forall\, u, v \,\in X. \end{aligned} \tag{69}$$

Επομένως, τα *κρίσιμα σημεία* του φ είναι οι *ασθενείς λύσεις* του προβλήματος (ΠΣΤ).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄

Φασματικές ιδιότητες

Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ το μέτρο Lebesgue κι έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ φραγμένο πεδίο με σύνορο κλάσης C^2 και $p \in (1, +\infty)$.

Β΄.1 Το πρόβλημα ιδιοτιμών

Έστω $\xi \in L^\infty(\Omega)_+ \setminus \{0\}$ συνάρτηση στάθμισης.
Θεωρούμε το ***σταθμισμένο*** μη γραμμικό ***πρόβλημα ιδιοτιμών***

$$[-\Delta_p u(z) = \lambda \xi(z)|u(z)|^{p-2}u(z)\,, \quad \text{σ.π. στο } \Omega \quad \& \quad u|_{\partial\Omega} = 0]\,. \tag{$\Pi_{\lambda,\xi}$}$$

Ορισμός 22. *Ένας αριθμός $\hat{\lambda}(\xi) \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του προβλήματος ($\Pi_{\lambda,\xi}$) αvv το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών έχει τουλάχιστον μία μη τετριμμένη ασθενή λύση $0 \not\equiv u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Σε αυτή την περίπτωση, η u ονομάζεται $\hat{\lambda}(\xi)-$ιδιοσυνάρτηση. Το ελάχιστο $\hat{\lambda}(\xi) \in \mathbb{R}$ με αυτή την ιδιότητα ονομάζεται **πρωταρχική ιδιοτιμή** του προβλήματος ($\Pi_{\lambda,\xi}$) και συμβολίζεται με $\hat{\lambda}_1(\xi)$.*

Πρόταση 17. *Η πρωταρχική ιδιοτιμή $\hat{\lambda}_1(\xi)$ υπάρχει, είναι θετική και ικανοποιεί*

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1(\xi) &= \min\left\{ \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\int_\Omega \xi(z)|u|^p dz} : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\} \\ &= \min\{\, \|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \int_\Omega \xi(z)|u|^p dz = 1\,\}.\end{aligned} \tag{70}$$

Απόδειξη: Θέτουμε

$$\hat{\lambda}_1(\xi) := \inf\{\, \|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,,\ \int_\Omega \xi(z)|u(z)|^p dz = 1\,\} \geq 0\,.$$

Προκύπτει εύκολα ότι

$$\hat{\lambda}_1(\xi) \ \leq \ \frac{\|\nabla w\|_p^p}{\int_\Omega \xi(z)|w(z)|^p dz}\,, \quad \forall\, w \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Υπάρχει $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ ώστε

$$\|\nabla u_n\|_p^p \searrow \hat{\lambda}_1(\xi) \quad \& \quad \int_\Omega \xi |u_n|^p dz = 1\,, \qquad \forall\, n \geq 1\,.$$

Από την ανισότητα Poincaré (Θ. 11), η (u_n) είναι φραγμένη στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Αφού $p \in (1, +\infty)$, ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι ανακλαστικός χώρος Banach, ενώ η ενσφήνωση $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ είναι συμπαγής (βλ. Θ. 10). Περνώντας λοιπόν σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάποια $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$u_n \rightharpoonup u_1 \ \text{στον } W_0^{1,p}(\Omega), \quad u_n \to u_1 \ \text{στον } L^p(\Omega).$$

Από το Λήμμα 8 (βλ. παρακάτω Παράρτημα Γ'), περνώντας σε περαιτέρω υπακολουθίες μπορούμε να υποθέσουμε ότι για όλα σχεδόν τα $z \in \Omega$,

$$u_n(z) \to u_1(z) \quad \& \quad |u_n(z)| \leq k(z)\,, \quad \forall\, n \geq 1,$$

όπου $k \in L^p_+(\Omega)$. Επομένως, λόγω του Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, παίρνουμε

$$\int_\Omega \xi |u_1|^p dz = \lim_n \int_\Omega \xi |u_n|^p dz = 1 \neq 0 \implies u_1 \not\equiv 0\,.$$

Αφού η νόρμα είναι ασθενώς κ.η.σ. στο χώρο $L^p(\Omega)$, έχουμε

$$\|\nabla u_1\|_p^p \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_p^p \implies \hat{\lambda}_1(\xi) = \|\nabla u_1\|_p^p > 0\,.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει εύκολα ότι το συναρτησιακό

$$\varphi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(z)|^p dz - \frac{\hat{\lambda}_1(\xi)}{p}\int_\Omega \xi(z)|u(z)|^p dz, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

λαμβάνει ελάχιστο ίσο με 0 στο σημείο u_1 και συνεπώς $\varphi'(u_1) = 0$. Άρα,

$$\int_\Omega |\nabla u_1(z)|^{p-2}(\nabla u_1(z), \nabla h(z))_{\mathbb{R}^N} dz - \hat{\lambda}_1(\xi)\int_\Omega \xi(z)|u_1(z)|^{p-2}h(z)dz, \quad \forall\ h \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Έπεται ότι το $\hat{\lambda}_1(\xi)$ είναι ιδιοτιμή του προβλήματος ($\Pi_{\lambda,\xi}$) και η u_1 είναι $\hat{\lambda}_1(\xi)-$ιδιοσυνάρτηση.

Η $\hat{\lambda}_1(\xi)$ είναι η μικρότερη ιδιοτιμή. Πράγματι, έστω $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή του προβλήματος ($\Pi_{\lambda,\xi}$) και u αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. Τότε,

$$\int_\Omega |\nabla u(z)|^{p-2}(\nabla u(z), \nabla h(z))_{\mathbb{R}^N} dz = \hat{\lambda}\int_\Omega \xi(z)|u(z)|^{p-2}u(z)h(z)dz\,, \quad \forall\ h \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Η τελευταία για $h = u$ δίνει

$$\|\nabla u\|_p^p = \hat{\lambda}\int_\Omega \xi(z)|u(z)|^p dz \implies \hat{\lambda} = \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\int_\Omega \xi(z)|u(z)|^p dz} \geq \hat{\lambda}_1(\xi).$$

■

Το min της σχέσης (70) ονομάζεται **πηλίκο Rayleigh**.

Β'.2 Ιδιότητες των ιδιοτιμών

Έστω $\xi \in L^\infty(\Omega)_+ \setminus \{0\}$.

Σύμφωνα με τη μη γραμμική θεωρία ομαλότητας (βλ. Παράρτημα Α'.1 και Lieberman (1988)), αν $\hat{\lambda}(\xi)$ ιδιοτιμή και $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση, τότε $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

Σημ. ότι αν $\hat{\lambda}(\xi)$ ιδιοτιμή, το σύνολο των $\hat{\lambda}(\xi)-$ιδιοσυναρτήσεων δεν είναι γραμμικός χώρος (εκτός από την ειδική περίπτωση $p = 2$) και καλείται *γενικευμένος* $\hat{\lambda}(\xi)-$*ιδιόχωρος*.

Συνοπτικά, η πρωταρχική ιδιοτιμή $\hat{\lambda}_1(\xi)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $\hat{\lambda}_1(\xi) > 0\,.$

- Είναι *απλή*, δηλ. αν u, v δύο $\hat{\lambda}_1(\xi)-$ιδιοσυναρτήσεις, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ ώστε $v = c \cdot u$. Θα μπορούσαμε καταχρηστικά να πούμε ότι ο αντίστοιχος γενικευμένος ιδιόχωρος είναι μονοδιάστατος.

- Είναι *μεμονωμένη*, δηλ. $\exists\, \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε να μην περιέχονται ιδιοτιμές στο διάστημα $(\hat{\lambda}_1(\xi), \hat{\lambda}_1(\xi) + \varepsilon)$.

- Χαρακτηρίζεται από το πηλίκο Rayleigh (σχέση (70)).

- Κάθε $\hat{\lambda}_1(\xi)-$ιδιοσυνάρτηση διατηρεί πρόσημο στο Ω. Ειδικότερα, υπάρχει $\hat{\lambda}_1(\xi)-$ιδιοσυνάρτηση $u_1 \in \mathrm{int} C_+$.

- Το ελάχιστο στην (70) επιτυγχάνεται στον αντίστοιχο μονοδιάστατο γενικευμένο ιδιόχωρο της $\hat{\lambda}_1(\xi)$. Συγκεκριμένα, υπάρχει $\hat{\lambda}_1(\xi)-$ιδιοσυνάρτηση u_1 τέτοια ώστε
$$u_1 \in \mathrm{int} C_+\,, \quad \int_\Omega \xi(z) u_1(z)^p dz = 1\,, \quad \hat{\lambda}_1(\xi) = \|\nabla u_1\|_p^p\,.$$

Σχετικά με το ανώτερο μέρος του φάσματος του προβλήματος $(\Pi_{\lambda,\xi})$, η θεωρία Ljusternik-Schnirelmann (L-S) (βλ. Κεφ. 5.5, Papageorgiou et al. (2005)) εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας γνησίως αύξουσας ακολουθίας ιδιοτιμών $(\hat{\lambda}_k(\xi))_{k\geq 1}$, τέτοιας ώστε
$$\hat{\lambda}_k(\xi) \to +\infty\,, \quad \text{καθώς} \quad k \to +\infty\,.$$

Οι ιδιοτιμές αυτές ονομάζονται **LS ή μεταβολικές ιδιοτιμές**. Διευκρινίζεται ότι οι LS-ιδιοτιμές *δεν είναι όλες οι ιδιοτιμές του* προβλήματος $(\Pi_{\lambda,\xi})$.

Αποδεικνύεται ότι η $\hat{\lambda}_2(\xi)$ είναι η *δεύτερη ιδιοτιμή του* $(\Pi_{\lambda,\xi})$, δηλ. ισχύει ότι
$$\hat{\lambda}_2(\xi) := \min\{\, \hat{\lambda} > \hat{\lambda}_1(\xi) : \ \hat{\lambda} \text{ ιδιοτιμή του προβλ. } (\Pi_{\lambda,\xi}) \ \}\,.$$

Σημ. ότι η δεύτερη ιδιοτιμή χρησιμοποιείται ουσιωδώς στο Θεώρημα 9 του Κεφ. 4.

Θεωρώντας ότι η ξ μεταβάλλεται μέσα στο σύνολο $L^\infty(\Omega)_+ \setminus \{0\}$, προκύπτουν οι απεικονίσεις $\xi \mapsto \hat{\lambda}_1(\xi)$, $\xi \mapsto \hat{\lambda}_2(\xi)$. Αποδεικνύεται ότι οι απεικονίσεις αυτές είναι **συνεχείς** πάνω στο $L^\infty(\Omega)_+ \setminus \{0\}$ (ως προς τη μετρική που επάγει η ουσιώδης νόρμα) με τις ακόλουθες **ιδιότητες μονοτονίας**:

- Αν $\xi(z) \leq \widetilde{\xi}(z)$ σχεδόν παντού στο Ω και γνήσια πάνω σε ένα σύνολο θετικού μέτρου, τότε $\hat{\lambda}_1(\widetilde{\xi}) < \hat{\lambda}_1(\xi)$.

- Αν $\xi(z) < \widetilde{\xi}(z)$ σχεδόν παντού στο Ω, τότε $\hat{\lambda}_2(\widetilde{\xi}) < \hat{\lambda}_2(\xi)$.

Ειδικές περιπτώσεις ιδιοτιμών ανάλογα με τη συνάρτηση στάθμισης ξ:

- Αν $\xi \equiv 1$ (πρόβλημα ιδιοτιμών χωρίς στάθμιση), θέτουμε $\lambda_k = \hat{\lambda}_k(1)$, $k \geq 1$. Η $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ είναι *η ακολουθία των LS$-$ιδιοτιμών της* $-\Delta_p$ *με Dirichlet συνοριακές συνθήκες* ή συντομότερα, της $-\Delta_p^D$.

- Αν $\xi \equiv \lambda_k$ για κάποιο $k \geq 1$, προφανώς $\hat{\lambda}_k(\xi) = 1$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ΄

Ο τελεστής Nemytski

Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ το μέτρο Lebesgue κι έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό φραγμένο.

Ορισμός 23 (Συνάρτηση Καραθεοδωρή)**.** *Μια συνάρτηση $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται τύπου Καραθεοδωρή ανν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(i): *για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $z \mapsto f(z,t)$ είναι μετρήσιμη·*

(ii): *για όλα σχεδόν τα $z \in \Omega$, η συνάρτηση $t \mapsto f(z,t)$ είναι συνεχής.*

Θεωρούμε συνάρτηση $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τύπου Καραθεοδωρή. *Αποδεικνύεται* ότι αν η $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, τότε και η συνάρτηση

$$z \mapsto f(z, u(z)), \quad z \in \Omega$$

είναι μετρήσιμη.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι η f ικανοποιεί την παρακάτω πολυωνυμική αυξητική συνθήκη:

$$|f(z,t)| \leq |a(z)| + b|t|^{r-1}, \quad \text{για όλα σχεδόν τα } z \in \Omega \text{ και για όλα τα } t \in \mathbb{R}, \tag{71}$$

όπου $1 < r < \infty$, $a(\cdot) \in L^{r'}(\Omega)$, $\quad 1/r + 1/r' = 1$, $b > 0$.

Ορίζουμε τον τελεστή *Nemytski*

$$N_f : L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$$

που αντιστοιχεί στην f με

$$N_f(u)(z) = f(z, u(z)), \quad u \in L^r(\Omega), \quad z \in \Omega.$$

Στις Προτάσεις 18-20 που ακολουθούν, θα δείξουμε ότι ο $N_f : L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ είναι καλά ορισμένος, φραγμένος και συνεχής.

Θα χρειαστούμε την Ανισότητα 1 και το Λήμμα 8 (βλ. σελ. 83, Brezis (1997)).

Ανισότητα 1. *Για κάθε $a, b \geq 0$ και $s \in (1, +\infty)$ ισχύει*

$$(a+b)^s \leq 2^{s-1}(a^s + b^s)\,. \tag{72}$$

Πράγματι· όταν $s > 1$, η συνάρτηση $\phi(t) = t^s$ είναι κυρτή για $t \geq 0$, οπότε

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^s \leq \frac{a^s + b^s}{2} \Leftrightarrow (a+b)^s \leq 2^{s-1}(a^s + b^s)\,.$$

Λήμμα 8. *Έστω $r \in [1, +\infty]$ και $(u_n) \subset L^r(\Omega)$, $u \in L^r(\Omega)$ με $\|u_n - u\|_r \to 0$. Τότε, υπάρχουν υπακολουθία $(\widetilde{u}_n) \subset (u_n)$ και μη αρνητική συνάρτηση $h \in L^r(\Omega)$ τέτοια ώστε*

- *$\widetilde{u}_n(z) \to u(z)$, κατά σημείο σ.π. στο Ω.*
- *$\forall\, n \geq 1$, $|\widetilde{u}_n(z)| \leq h(z)$ σ.π. στο Ω.*

[Χωρίς απόδειξη.]

Πρόταση 18. *Ο τελεστής $N_f : L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ είναι καλά ορισμένος.*

Απόδειξη: Έστω $u \in L^r(\Omega)$. Τότε

$$|N_f(u)(z)| = |f(z, u(z))| \leq |a(z)| + b|u(z)|^{r-1} \quad \text{σ.π. στο } \Omega.$$

Από την Ανισότητα 1, προκύπτει ότι

$$|N_f(u)(z)|^{r'} \leq 2^{r'-1} \left(|a(z)|^{r'} + b^{r'} |u(z)|^{r'(r-1)} \right) = 2^{r'-1} \left(|a(z)|^{r'} + b^{r'} |u(z)|^{r} \right), \quad \text{σ.π. στο } \Omega,$$

οπότε $N_f(u) \in L^{r'}(\Omega)$. ■

Πρόταση 19. *Ο τελεστής $N_f : L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ είναι φραγμένος.*

Απόδειξη: Από την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης προκύπτει ότι

$$\|N_f(u)\|_{r'}^{r'} \leq 2^{r'-1} \left(\|a\|_{r'}^{r'} + b^{r'} \|u\|_r^r \right), \quad \forall\, u \in L^r(\Omega).$$

Η τελευταία δίνει άμεσα ότι ο N_f απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του $L^r(\Omega)$ σε φραγμένα υποσύνολα του $L^{r'}(\Omega)$. ■

Πρόταση 20. *Ο τελεστής $N_f : L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω $(u_n) \subset L^r(\Omega)$, $u \in L^r(\Omega)$ ώστε $u_n \to u$ στον $L^r(\Omega)$.

Από το Λήμμα 8, υπάρχει υπακολουθία $(\widetilde{u}_n) \subset (u_n)$, με τις ιδιότητες $\widetilde{u}_n(z) \to u(z)$ κατά σημείο σ.π. στο Ω και $|\widetilde{u}_n(z)| \leq h(z)$ κατά σημείο σ.π. στο Ω, για κάθε $n \geq 1$, όπου $0 \leq h \in L^r(\Omega)$.

Θέτουμε $g_n(z) := |f(z, \widetilde{u}_n(z)) - f(z, u(z))|^{r'}$, $z \in \Omega$, $n \geq 1$. Από τη συνθήκη **(i)** του Ορισμού 23, έπεται ότι $g_n(z) \to 0$ κατά σημείο σχεδόν παντού στο Ω.

Επιπλέον, με βάση την (72) και την απόδειξη της Πρότασης 18, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq g_n(z) &\leq 2^{r'-1} \left(|f(z, \widetilde{u}_n(z))|^{r'} + |f(z, u(z))|^{r'} \right) \\ &\leq 2^{2r'-1} \left(|a(z)|^{r'} + b^{r'} |h(z)|^{r} \right) =: g(z), \end{aligned}$$

$\forall\, n \geq 1$, σ.π. στο Ω.

Προφανώς, $g \in L^1(\Omega)$.

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έπεται ότι

$$\int_\Omega g_n(z) dz \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \|N_f(\widetilde{u}_n) - N_f(u)\|_{r'}^{r'} \to 0.$$

Με απαγωγή σε άτοπο, αποδεικνύεται η (ακολουθιακή) συνέχεια του N_f. ■

Παρατήρηση 14. *Τα παραπάνω γενικεύονται και για διανυσματικές συναρτήσεις* $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ *τύπου Καραθεοδωρή που ικανοποιούν την* (71). *Συγκεκριμένα, ορίζεται πάλι ο τελεστής Nemytski*

$$N_f : L^r(\Omega, \mathbb{R}^N) \to L^{r'}(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

που αντιστοιχεί στη συνάρτηση f *με* $N_f(u)(z) = f(z, u(z)), \quad u \in L^r(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad z \in \Omega$ *και είναι συνεχής και φραγμένος.*

Γ΄.1 Ο τελεστής Nemytski ως παράγωγος συναρτησιακού

Έστω $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τύπου Καραθεοδωρή που ικανοποιεί την (71).

Θέτουμε

$$F(z,t) = \int_0^t f(z,s)ds\,, \quad z \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}$$

και

$$\Psi(u) = \int_\Omega F(z, u(z))dz, \quad u \in L^r(\Omega).$$

Αποδεικνύεται ότι $\Psi \in C^1(\, L^r(\Omega))$ με

$$\Psi' = T \circ N_f\,,$$

όπου $T : L^{r'}(\Omega) \to (L^r(\Omega))^*$ η κανονική ισομετρία.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ΄

Τελεστές μονότονου τύπου

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $A : X \to X^*$ τελεστής.

Ορισμός 24. *Ο τελεστής A ονομάζεται*

(i): ***Μονότονος*** *ανν $\forall\, u, v \in X$ ισχύει $\langle Au - Av, u - v\rangle_{X^*,X} \geq 0$.*

(ii): ***Ψευδομονότονος*** *ανν για κάθε $(u_n) \subset X$*

$$[\, u_n \rightharpoonup u \text{ στον } X\,, \quad Au_n \rightharpoonup u^* \text{ στον } X^*\,, \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_{X^*,X} \leq 0\,]$$
$$\Longrightarrow \quad [\, u^* = Au\,, \quad \langle Au_n, u_n\rangle_{X^*,X} \;\to\; \langle Au, u\rangle_{X^*,X}\,]\,.$$

(iii): ***Τύπου*** *$(S)_+$ ανν για κάθε $(u_n) \subset X$*

$$[\, u_n \rightharpoonup u \text{ στον } X\,, \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_{X^*,X} \leq 0\,] \quad \Longrightarrow \quad [\, u_n \to u \text{ στον } X\,]\,.$$

Πρόκειται για ιδιότητα συμπάγειας χρήσιμη σε διαφορικούς τελεστές.

(iv): ***Ισχυρώς συνεχής*** *ανν για κάθε $(u_n) \subset X$*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ στον } X \quad \Longrightarrow \quad Au_n \to Au \text{ στον } X^*\,.$$

Αν επιπλέον ο X είναι ανακλαστικός χώρος, τότε η ισχυρή συνέχεια είναι ισοδύναμη με τη συμπάγεια του τελεστή.

Πρόταση 21. *Αν ο X είναι ανακλαστικός χώρος Banach και ο τελεστής A είναι μονότονος, συνεχής και φραγμένος, τότε είναι ψευδομονότονος.*

Απόδειξη: Έστω $(u_n) \subset X$ τέτοια ώστε

$$[\, u_n \rightharpoonup u \text{ στον } X\,, \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_{X^*,X} \leq 0\,]\,. \tag{73}$$

Αφού ο A είναι φραγμένος, η ακολουθία (Au_n) είναι φραγμένη στον X^*. Επειδή ο X^* είναι ανακλαστικός, ως ο δυϊκός του ανακλαστικού χώρου Banach X, περνώντας σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάποιο $u^* \in X^*$,

$$[\, Au_n \rightharpoonup u^* \text{ στον } X^*\,]\,. \tag{74}$$

Θα δείξουμε ότι $Au = u^*$.

Λόγω της μονοτονίας του A, για κάθε $n \geq 1$ & $w \in X$, ισχύει

$$\langle Au_n - Aw, u_n - w\rangle_{X^*,X} \geq 0\,,$$
$$\langle Aw, u_n - w\rangle_{X^*,X} \leq \langle Au_n, u_n - w\rangle_{X^*,X}$$
$$\overset{\mp u}{=} \langle Au_n, u_n - u\rangle_{X^*,X} + \langle Au_n, u - w\rangle_{X^*,X}\,. \tag{75}$$

Παίρνοντας $n \to +\infty$, από τις σχέσεις (73), (74) & (75) έπεται:

$$\langle Aw, u-w\rangle_{X^*,X} \le \langle u^*, u-w\rangle_{X^*,X}\,, \quad \forall\, w \in X. \tag{76}$$

Έστω $\upsilon \in X$ και $t>0$. Αφού ο A είναι ευθειακά συνεχής (δηλ. hemi-συνεχής) ως συνεχής, θέτοντας $w_t = u - t\upsilon$ στη σχέση (76), παίρνουμε

$$\langle Aw_t, \upsilon\rangle_{X^*,X} \le \langle u^*, \upsilon\rangle_{X^*,X}\,, \quad \forall\, t>0 \overset{t\to 0}{\Longrightarrow} \langle Au, \upsilon\rangle_{X^*,X} \le \langle u^*, \upsilon\rangle_{X^*,X}\,, \quad \forall\, \upsilon \in X.$$

Αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\upsilon \in X$, θα ισχύει και για $-\upsilon$. Συνδυάζοντας, προκύπτει η ακόλουθη ισότητα:

$$\langle Au, \upsilon\rangle_{X^*,X} = \langle u^*, \upsilon\rangle_{X^*,X}\,, \quad \forall\, \upsilon \in X \implies Au = u^*\,. \tag{77}$$

Αντικαθιστώντας στην (74), προκύπτει η πρώτη συνθήκη για ψευδομονότονο τελεστή:

$$\boxed{Au_n \rightharpoonup Au}\,. \tag{78}$$

Θέτοντας $w = u$ στην (75), για κάθε $n \ge 1$, προκύπτει:

$$\begin{aligned}\langle Au, u_n - u\rangle_{X^*,X} &\le \langle Au_n, u_n - u\rangle_{X^*,X}\\ &= \underline{\langle Au_n, u_n\rangle_{X^*,X}} - \langle Au_n, u\rangle_{X^*,X}.\end{aligned}$$

Καθώς $n \to \infty$, από τις σχέσεις (73) & (77) κι επειδή το υπακολουθιακό όριο (lim inf) υπάρχει πάντα, έπεται:

$$\begin{aligned} 0 &\le \liminf_{n\to\infty}\left(\langle Au_n, u_n\rangle_{X^*,X} - \langle Au_n, u\rangle_{X^*,X}\right)\\ &\le \liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n\rangle_{X^*,X} - \lim\langle Au_n, u\rangle_{X^*,X}\\ &= \liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n\rangle_{X^*,X} - \langle Au, u\rangle_{X^*,X}\\ \therefore&\quad \langle Au, u\rangle_{X^*,X} \le \liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n\rangle_{X^*,X}. \end{aligned} \tag{79}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (73) & (79), προκύπτει η οριακή σχέση

$$\langle Au, u\rangle_{X^*,X} \le \liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n\rangle_{X^*,X} \le \limsup_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n\rangle_{X^*,X} \le \langle Au, u\rangle_{X^*,X}. \tag{80}$$

Ικανοποιείται και η δεύτερη συνθήκη για ψευδομονότονο τελεστή:

$$\boxed{\langle Au_n, u_n\rangle_{X^*,X} \to \langle Au, u\rangle_{X^*,X}}\,.$$

■

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \ge 1)$ φραγμένο πεδίο (σημ. ανοικτό & συνεκτικό) και $p \in (1, +\infty)$. Θεωρούμε τον τελεστή

$$A_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*, \tag{81}$$

με

$$\langle A_p u, \upsilon\rangle = \int_\Omega |\nabla u(z)|^{p-2}\cdot(\nabla u(z), \nabla\upsilon(z))_{\mathbb{R}^N}\,dz\,, \quad \forall\, u, \upsilon \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{82}$$

όπου $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^N}$ το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^N$.

Πρόταση 22. *Ο τελεστής A_p είναι μονότονος.*

Απόδειξη: Έστω $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ και $u, \upsilon \in X$. Τότε:

$$|\langle A_p u, \upsilon\rangle_{X^*,X}| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|\nabla u\|_p^{p-1}\cdot\|\nabla \upsilon\|_p \quad \& \quad |\langle A_p \upsilon, u\rangle_{X^*,X}| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|\nabla \upsilon\|_p^{p-1}\cdot\|\nabla u\|_p\,.$$

Η συνθήκη μονοτονίας για μονότονο τελεστή προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\langle A_p u - A_p \upsilon, u-\upsilon\rangle_{X^*,X} = \\
&= \langle A_p u, u\rangle_{X^*,X} - \langle A_p u, \upsilon\rangle_{X^*,X} - \langle A_p \upsilon, u\rangle_{X^*,X} + \langle A_p \upsilon, A_p \upsilon\rangle_{X^*,X} \\
&= \|\nabla u\|_p^p - \langle A_p u, \upsilon\rangle_{X^*,X} - \langle A_p \upsilon, u\rangle_{X^*,X} + \|\nabla \upsilon\|_p^p \\
&\geq \|\nabla u\|_p^p - \|\nabla u\|_p^{p-1}\cdot\|\nabla \upsilon\|_p - \|\nabla \upsilon\|_p^{p-1}\cdot\|\nabla u\|_p + \|\nabla \upsilon\|_p^p \\
&= \left(\|\nabla u\|_p^{p-1} - \|\nabla \upsilon\|_p^{p-1}\right)\cdot(\|\nabla u\|_p - \|\nabla \upsilon\|_p) \geq 0 \\
&\Longrightarrow \quad \langle A_p u - A_p \upsilon, u-\upsilon\rangle_{X^*,X} \geq 0\,,
\end{aligned}$$

αφού η συνάρτηση $t \mapsto t^{p-1}$ είναι αύξουσα στο $[0,+\infty)$ για $1<p<+\infty$. ■

Πρόταση 23. *Ο τελεστής A_p είναι ψευδομονότονος.*

Απόδειξη: Από τις Προτάσεις 21 & 22, αρκεί να δείξουμε ότι ο A_p είναι *συνεχής* και *φραγμένος*.

Θεωρούμε τον τελεστή Nemytski $N_f : L^p(\Omega,\mathbb{R}^N) \to L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$, $\xi\in\mathbb{R}^N$, $N\geq 1$ (βλ. Παρατήρηση 14) και την κανονική ισομετρία $T : L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^N) \to (L^p(\Omega,\mathbb{R}^N))^*$ με

$$\langle Tu, v\rangle = \int_\Omega (u(z), v(z))_{\mathbb{R}^N} dz, \quad \forall\, u\in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^N),\ v\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)\,.$$

Επιπλέον, θεωρούμε το φραγμένο γραμμικό τελεστή

$$S : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)$$

με $S(u) = \nabla u$, $\forall\, u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Παρατηρούμε ότι

$$A_p = S^*\circ T\circ N_f\circ S\,,$$

οπότε ο A_p είναι *συνεχής* και *φραγμένος*. ■

Πριν προχωρήσουμε στην επόμενη πρόταση υπενθυμίζουμε ότι οι χώροι $L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $1<p<+\infty$, είναι *ομοιόμορφα κυρτοί* κι άρα έχουν την ιδιότητα *Kadec-Klee*:

Ορισμός 25. *Ένας χώρος Banach $(X,\|\cdot\|_X)$ έχει την ιδιότητα Kadec-Klee αν ισχύει η παρακάτω συνεπαγωγή:*

$$[\, u_n \rightharpoonup u\in X \quad \& \quad \|u_n\|_X\to\|u\|_X \,] \quad \Longrightarrow \quad \|u_n - u\|_X \to 0.$$

Πρόταση 24. *Ο τελεστής* A_p *είναι τύπου* $(S)_+$.

Απόδειξη: Έστω $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ και $(u_n)_n \subset X$ τέτοια ώστε $u_n \rightharpoonup u$ στον X & $\limsup_{n\to\infty}\langle A_p u_n, u_n - u\rangle \le 0$. Θα δείξουμε ότι η (u_n) συγκλίνει ισχυρώς στον X.

Λόγω της Πρότασης 23, ισχύει

$$\langle A_p u_n, u_n\rangle_{X^*,X} \to \langle A_p u, u\rangle_{X^*,X} \implies \|\nabla u_n\|_p^p \to \|\nabla u\|_p^p \implies \|\nabla u_n\|_p \to \|\nabla u\|_p .$$

Ταυτόχρονα, $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ στον *ομοιόμορφα κυρτό* χώρο $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ κι επομένως

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_p \to 0 .$$

■

Πρόταση 25. *Έστω* X *χώρος Banach και* $A, B : X \to X^*$ *τελεστές. Αν ο* A *είναι τύπου* $(S)_+$ *και ο* B *ισχυρώς συνεχής, τότε το άθροισμα* $A + B$ *είναι τύπου* $(S)_+$.

Απόδειξη: Έστω $(u_n)_n \subset X$, τέτοια ώστε

$$[\, u_n \rightharpoonup u \in X \quad \& \quad \limsup_{n\to\infty}\langle Au_n + Bu_n, u_n - u\rangle \le 0\,] .$$

Επειδή ο B είναι ισχυρώς συνεχής, εξ ορισμού ισχύει

$$Bu_n \to Bu \text{ στον } X^* \implies \lim_{n\to\infty}\langle Bu_n, u_n - u\rangle = 0 . \tag{83}$$

Στη συνέχεια παίρνουμε

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle \quad &\le \quad \limsup_{n\to\infty}\big(\langle Au_n + Bu_n, u_n - u\rangle \; - \; \langle Bu_n, u_n - u\rangle \big) \\ &\overset{(83)}{=} \quad \limsup_{n\to\infty}\langle Au_n + Bu_n, u_n - u\rangle \;\le\; 0.\end{aligned}$$

Αφού ο τελεστής A είναι τύπου $(S)_+$, $u_n \to u$ στον X. ■

Η Πρόταση 26 δίνει μια ειδική περίπτωση τελεστή τύπου $(S)_+$. Εφαρμόζεται στο Παράδειγμα 6 της Ενότητας 2.3.

Πρόταση 26. *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \ge 1)$ *φραγμένο πεδίο με σύνορο κλάσης* C^1 *και* $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση Καραθεοδωρή που ικανοποιεί την αυξητική συνθήκη* (71) *με* $1 < r < p^*$. *Θεωρούμε τον τελεστή*

$$B : W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*,$$

όπου

$$\langle Bu, v\rangle = \int_\Omega g(z, u(z))v(z)dz\,, \quad \forall\, u, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{84}$$

Τότε, ο τελεστής $A_p - B$ *είναι τύπου* $(S)_+$.

Απόδειξη: Λόγω των Προτάσεων 24 & 25, αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής B είναι ισχυρώς συνεχής (βλ. Ορισμό 24).

Επειδή $1 < r < p^*$, το Θ. Rellich -Kondrashov (βλ. Θεώρ. 10, Παράρτημα Α'.2.1) μας εξασφαλίζει ότι ο τελεστής

$$e : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^r(\Omega)\,, \quad e(u) = u\,, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

είναι *ισχυρώς συνεχής*.

Παρατηρούμε ότι $\boxed{B = e^* \circ T \circ N_g \circ e}$, όπου $N_g : L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ $(1/r + 1/r' = 1)$ ο τελεστής Nemytski που αντιστοιχεί στη συνάρτηση g και $T : L^{r'}(\Omega) \to (L^r(\Omega))^*$ η κανονική ισομετρία, δηλ.

$$\langle Tu, v\rangle = \int_\Omega u(z)v(z)dz, \quad \forall\, u \in L^{r'}(\Omega),\ v \in L^r(\Omega).$$

Επειδή ο N_g είναι συνεχής, έπεται ότι ο B είναι ισχυρώς συνεχής. ■

Παρατήρηση 15. *Κάτω από τις υποθέσεις της Πρότασης 26, θεωρούμε το συναρτησιακό φ του Παραδείγματος στο Παράρτημα Α'.3.1. Τότε, ο τελεστής φ' είναι τύπου $(S)_+$.*

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ambrosetti, Antonio & Rabinowitz, Paul H. (1973). Dual variational methods in critical point theory and applications, *Journal of Functional Analysis*, 14, 349–381. `https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7`.

Aubin, Jean-Pierre & Ekeland, Ivar (1984). *Applied Nonlinear Analysis*. Series: Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc. [Κεφ. 5.5]

Brezis, Haim (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York. `https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-70914-7`

Brezis, Haim (1997). *Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ. ISBN: 960-254-519-4

Evans, Lawrence C. (1998). *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics 19. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. [Κεφ. 8.5]

Jabri, Youssef (2003). *The Mountain Pass Theorem, Variants, Generalizations and Some Applications*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 95. Cambridge University Press. `www.cambridge.org/9780521827218` [Κεφ. 3]

Gasinski, Leszek & Papageorgiou, Nikolaos S. (2005). *Nonlinear Analysis*. Series in Mathematical Analysis and Applications, 9. Chapman & Hall/CRC. `https://doi.org/10.1201/9781420035049` [Κεφ. 5.2 & 6.2]

Lieberman, Gary M. (1988). Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations, *Nonlinear Analysis*, 12, 1203-1219. `https://doi.org/10.1016/0362-546X(88)90053-3`

Motreanu, Dumitru, Motreanu, Viorica Venera & Papageorgiou, Nikolaos (2014). *Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems*. Springer, New York, NY. `https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9323-5` [Κεφ. 2.3]

Schechter, Martin (2004). *An Introduction to Nonlinear Analysis*. Cambridge Studies In Advanced Mathematics. [Θεώρ. 2.1, σ.47]