ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ GEOGEBRA ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πάτση Καλλιόπη

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Παυλοπούλου Καλλιόπη

ΑΘΗΝΑ, 2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ GEOGEBRA ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πάτση Καλλιόπη (09108057)

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια
Παυλοπούλου Καλλιόπη

Τριμελής Επιτροπή
Παυλοπούλου Καλλιόπη, Ε.ΔΙ.Π. Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
Ψαρράκος Παναγιώτης, Καθηγητής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
Στεφανέας Πέτρος, Αναπληρωτής Καθηγητής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

ΑΘΗΝΑ, 2022

Ευχαριστίες

Με αφορμή την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους συνέβαλλαν στην εκπόνησή της.

Εξαιρετικά ευγνώμων και μόνο θα μπορούσα να είμαι για τη συνεργασία μου με την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου κ. Παυλοπούλου Καλλιόπη. Με καθοδήγησε σε όλη την πορεία της εργασίας, με ενέπνεε με νέες ιδέες και εύστοχες παρατηρήσεις και δεν έπαψε να με στηρίζει σε κάθε βήμα.

Ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω και προς τα μέλη της εξεταστικής μου επιτροπής, τους καθηγητές κ. Ψαρράκο Παναγιώτη και κ. Στεφανέα Πέτρο που διέθεσαν ένα μέρος από τον πολύτιμο χρόνο τους για να αξιολογήσουν την εργασία μου και να παρακολουθήσουν την παρουσίασή της.

Τέλος, ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω και θέλω να εκφράσω στα μέλη της οικογένειας μου. Καθένας με τον τρόπο του αλλά και όλοι μαζί ως ομάδα συνέβαλλαν στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ GEOGEBRA ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Στις ημέρες μας η διδασκαλία με τον παραδοσιακό τρόπο είναι η μόνη που εφαρμόζεται ευρύτερα στο εκπαιδευτικό μας σύστημα παρά την ποικιλία των τεχνολογικών μέσων που υπάρχουν. Στην παρούσα εργασία γίνεται μία προσπάθεια μέσω εμπεριστατωμένης και τεκμηριωμένης ανάλυσης να καταγραφούν οι επικρατούσες *αντιλήψεις* αλλά και οι *δυσκολίες* στην ενσωμάτωση των τεχνολογικών εφαρμογών στην διδασκαλία όπως επίσης και τα *οφέλη* που μπορούν να προκύψουν από την χρήση των εργαλείων αυτών. Αναδεικνύεται η *αξία των μέσων οπτικοποίησης των μαθηματικών εννοιών* και γίνεται επισκόπηση των *βασικών δυνατοτήτων του GeoGebra* καθώς αποτελεί το κατεξοχήν προτεινόμενο λογισμικό στην *δευτεροβάθμια εκπαίδευση.* Σε δεύτερο επίπεδο, μέσω μιας *διδακτικής παρέμβασης με τη χρήση του λογισμικού* στο φυσικό περιβάλλον της σχολικής τάξης επιχειρήθηκε να αναδυθούν οι δυνατότητες που προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες στη διδασκαλία μιας ενότητας των Μαθηματικών. Με οδηγό το *νέο πρόγραμμα σπουδών* που θα εφαρμοστεί στο άμεσο μέλλον, επιλέχθηκε η *ενότητα των γραμμικών συστημάτων* και μελετήθηκε η προσέγγιση της μέσω σεναρίου/προβλήματος πραγματικής ζωής που συνδυάζει αρμονικά την *διεπιστημονικότητα* και την τεχνολογία με τα Μαθηματικά.

Λέξεις κλειδιά

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων, δευτεροβάθμια εκπαίδευση, διεπιστημονικότητα, οπτικοποίηση, GeoGebra, νέος οδηγός σπουδών, διδακτική παρέμβαση.

ABSTRACT

SOLVING LINEAR SYSTEMS USING AN INTERDISCIPLINARY APPROACH SUPPORTED BY THE SOFTWARE GEOGEBRA IN THE SECONDARY EDUCATION

Despite the abundance of technological tools that are being made available for educational use, wide use of traditional teaching methods is still being reported and implemented. The present study presents a well-documented and comprehensive report regarding the prevailing views and difficulties encountered in integrating technological tools in the teaching process, and outlines the benefits deriving from their use. The value of *visualizing mathematical concepts* is highlighted and an overview, regarding the basic capabilities of *Geogebra*, the mainly featured software in *secondary education,* is included. An attempt is made to showcase the capabilities that the new technological tools can bring in Mathematics education, through *a teaching intervention* using the Geogebra software at the physical environment of a classroom. Using the *new curriculum guidelines* to be implemented in the near future as a starting point, the topic of the systems of linear equations was selected and a teaching approach integrating *interdisciplinary real-life problems/scenarios* and modern technological tools in Mathematics teaching is proposed.

Keywords

Systems of linear equations, secondary education, interdisciplinary scenarios, visualization, GeoGebra, new curriculum, teaching intervention.

Πίνακας Περιεχομένων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ***7***

Κεφάλαιο 1 – Μαθηματικά και οι άλλες επιστήμες ***15***

1.1 Διεπιστημονικότητα στα Μαθηματικά **15**

1.2 Δυσκολίες εκμάθησης Μαθηματικών **18**

1.3 Νέες προσεγγίσεις **21**

Κεφάλαιο 2 – Περί Προγραμμάτων Σπουδών ***23***

2.1 Το «παλιό» Πρόγραμμα Σπουδών **23**

2.2 Προτάσεις νέου Προγράμματος Σπουδών **34**

Κεφάλαιο 3 – Σχέση τεχνολογίας και διδασκαλίας ***41***

3.1 Ο ρόλος της τεχνολογίας στην εκμάθηση μαθηματικών **41**

3.2 Δυσκολίες ενσωμάτωσης της τεχνολογίας στη τάξη **42**

3.3 Στάσεις των καθηγητών απέναντι στη χρήση τεχνολογίας στην τάξη **43**

3.4 Θετικές επιδράσεις της τεχνολογίας στη διδασκαλία **46**

3.5 Παιδαγωγικές επιδράσεις της τεχνολογίας στους μαθητές **47**

Κεφάλαιο 4 – Η οπτικοποίηση μαθηματικών εννοιών ***49***

4.1 Επίδραση της οπτικοποίησης μαθηματικών εννοιών στην εκπαίδευση **49**

4.2 Διαδραστικά μέσα οπτικοποίησης **50**

Κεφάλαιο 5 – Εισαγωγή και εξοικείωση με το λογισμικό Geogebra ***51***

5.1 Εισαγωγή στο GeoGebra **51**

5.2 Εκκίνηση του λογισμικού GeoGebra **52**

5.3 Εργαλεία του GeoGebra **53**

5.4 Παράδειγμα χρήσης του λογισμικού **57**

Κεφάλαιο 6 – Διεπιστημονικά φύλλα εργασίας ***59***

6.1 «Μελετώντας ένα πλακόστρωτο» **59**

6.2 «Ένα μικρό καράβι» **64**

Κεφάλαιο 7 – Διδακτική παρέμβαση ***72***

7.1 Στόχοι της έρευνας **72**

7.2 Ερευνητική Μέθοδος **73**

7.3 Φύλλα εργασίας και αποτελέσματα **76**

7.4 Παρατηρήσεις από τη διδακτική παρέμβαση **91**

Κεφάλαιο 8 – Συμπεράσματα ***93***

Βιβλιογραφία ***97***

Παράρτημα Ι - Απαντήσεις φύλλων εργασίας ***107***

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην επιστήμη των Μαθηματικών η θεωρία των γραμμικών εξισώσεων αποτελεί θεμελιώδες και αναπόσπαστο κομμάτι, με πολυάριθμες εφαρμογές, τόσο στα ίδια τα Μαθηματικά, όσο και σε όλες τις άλλες φυσικές και κοινωνικές επιστήμες. Είναι ένα αποτελεσματικό εργαλείο περιγραφής της σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών, που διευκολύνει στη μελέτη και μοντελοποίηση φαινομένων και μεταβολών. Τα συστήματα δύο ή περισσότερων γραμμικών εξισώσεων, με ισάριθμους αγνώστους, αφορούν την ταυτόχρονη προσέγγιση των εξισώσεων αυτών με σκοπό την αναζήτηση κοινών λύσεων που θα ικανοποιούν τις επιμέρους συνθήκες από τις οποίες αρχικά προέκυψαν.

Στο σχολικό περιβάλλον, παραδοσιακά, τα Μαθηματικά και γενικότερα οι επιστήμες διδάσκονται ξεχωριστά, με τα όρια τους να τίθενται στην αρχή και το τέλος της κάθε διδακτικής ώρας. Οι μαθητές, ακολουθώντας το πρόγραμμα σπουδών που εφαρμόζεται, σε πολλές περιπτώσεις αδυνατούν να συνδέσουν τις γνώσεις που αποκτούν σε ένα μάθημα με τις εφαρμογές που θα μπορούσαν να έχουν αυτές σε ένα άλλο.

Με αφορμή τη δημοσίευση από το ΙΕΠ του νέου προγράμματος σπουδών 2021-2022 για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, σκοπός μας είναι να υπογραμμιστεί η αξία της διεπιστημονικής προσέγγισης στη διδασκαλία Μαθηματικών και ο καθοριστικός ρόλος που μπορούν να παίξουν τεχνολογικές εφαρμογές, τύπου GeoGebra, στη διευκόλυνσή της. Το λογισμικό GeoGebra είναι ένα ευέλικτο εργαλείο που κάνει την προσέγγιση των μαθηματικών προβλημάτων που συναντώνται σε σχολικό επίπεδο απλή, γρήγορη και αποτελεσματική. Η χρήση του λογισμικού κάνει εφικτή την οργάνωση διεπιστημονικών δραστηριοτήτων που ένας εκπαιδευτικός θα μπορεί να επιλέξει για την οργάνωση του μαθήματός του.

Χρησιμοποιώντας τη θεματική ενότητα των γραμμικών συστημάτων σαν έννοια αναφοράς, τα οποία ως μαθηματικό εργαλείο εντοπίζονται σε μία σειρά από εφαρμογές/ενότητες σε όλη την πορεία από τη Β γυμνασίου έως και το τέλος του Λυκείου, επιχειρούμε να απαντήσουμε στο διαρκές ερώτημα των μαθητών «σε τί θα μας χρειαστεί αυτό;». Έτσι από την πρακτική αξιοποίηση μίας έννοιας που διδάχθηκαν στο μάθημα των Μαθηματικών, μέσα από το πρίσμα και άλλων μαθημάτων του ωρολογίου

προγράμματος, επιχειρούμε να παρουσιάσουμε πως συνδυάζονται η γνώση και οι εφαρμογές της με τρόπο σύγχρονο, ελκυστικό και προσιτό προς τους μαθητές. Απώτερο στόχο αποτελεί η καλλιέργεια της πεποίθησης ότι στο σχολείο δεν διδάσκονται απλά ασύνδετες γνώσεις αλλά δεξιότητες που είναι σε συνάρτηση με πραγματικά προβλήματα και άμεσα εφαρμόσιμες.

Στην παρούσα εργασία :

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται η άρρηκτη σύνδεση που έχουν τα Μαθηματικά με τις άλλες επιστήμες η οποία μπορεί να αποτυπωθεί καλύτερα στους μαθητές μέσω της διεπιστημονικής προσέγγισης στη διδασκαλία τους. Η στρατηγική αυτή προσομοιώνει ζητήματα που καθημερινά καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε και προσφέρει τις ευκαιρίες για καλλιέργεια συνδυαστικής αντίληψης και κριτικής σκέψης. Ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας απωθεί όλο και περισσότερο τους μαθητές που αδυνατούν να συλλάβουν αφηρημένες έννοιες, κάνοντάς τους εν τέλει να χάνουν το ενδιαφέρον τους για το μάθημα. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να παρέμβουν και να άρουν τις δυσκολίες αυτές εκμεταλλευόμενοι τα σύγχρονα εργαλεία που ενθαρρύνουν την οργάνωση διεπιστημονικών δραστηριοτήτων και να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν την αξία της επιστήμης των Μαθηματικών.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται τα αποσπάσματα του τρέχοντος και του αναθεωρημένου οδηγού σπουδών, που θα εφαρμοστεί, τα οποία αφορούν τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων, τις προτάσεις για χρήση μαθηματικών λογισμικών και διεπιστημονικών προβλημάτων. Ταυτόχρονα παρατίθενται οι προτεινόμενες διαθεματικές ασκήσεις από τα σχολικά εγχειρίδια που, αν και περιλαμβάνονται στην ύλη, δεν αξιοποιούνται ευρέως.

Στο Κεφάλαιο 3 αναλύεται ο ενισχυτικός ρόλος που μπορεί να διαδραματίσει η τεχνολογία ώστε να αναβαθμίσει τη διδασκαλία των Μαθηματικών αλλά και οι δυσκολίες που συναντά η ενσωμάτωσή της στο μάθημα οι οποίες σε πολλές περιπτώσεις αποθαρρύνουν τους καθηγητές από τη μετάβαση αυτή. Η έλλειψη χρόνου και κατάλληλης ψηφιακής και παιδαγωγικής επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών αλλά και οι επιφυλακτικές αντιλήψεις τους θα πρέπει με κατάλληλες ενέργειες να αρθούν ώστε να

μπορέσουν να αξιοποιηθούν αποτελεσματικά τα πολλαπλά διδακτικά και παιδαγωγικά πλεονεκτήματα που προσφέρει η τεχνολογία.

Στο Κεφάλαιο 4 τονίζεται η σημασία της οπτικοποίησης των εννοιών για την ορθή αφομοίωση τους αλλά και πως βοηθούν τα διαδραστικά μέσα οπτικοποίησης προς την κατεύθυνση αυτή.

Στο Κεφάλαιο 5 παρατίθεται ένας σύντομος οδηγός χρήσης του λογισμικού GeoGebra με τις βασικές λειτουργίες που μπορούν να φανούν χρήσιμες σε ένα σχολικό πρόβλημα γραμμικών εξισώσεων ή συστημάτων.

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται δύο διεπιστημονικά φύλλα εργασίας που συντέθηκαν με αφορμή την παρούσα εργασία και ενδείκνυνται για την επίλυσή τους η χρήση του GeoGebra.

Στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζεται η πορεία και τα αποτελέσματα μιας διδακτικής παρέμβασης που οργανώθηκε και εφαρμόστηκε σε φυσική τάξη.

Στο Κεφάλαιο 8 διατυπώνονται τα συνολικά συμπεράσματα από την βιβλιογραφική έρευνα και τη διδακτική παρέμβαση.

Κεφάλαιο 1 – Μαθηματικά και οι άλλες επιστήμες

1.1 Διεπιστημονικότητα στα Μαθηματικά

Η ανάπτυξη των φυσικών επιστημών συνοδεύεται από την παρατήρηση, περιγραφή και ανάλυση των φυσικών φαινομένων με τη διαμόρφωση και χρήση μαθηματικών μοντέλων, τα οποία επιβεβαιώνουν ή απορρίπτουν τις αρχικές υποθέσεις και ερμηνεύουν εργαστηριακά αποτελέσματα. Σύμφωνα με τον J. Lützen, υπάρχει άρρηκτη σχέση μεταξύ των μαθηματικών και των υπόλοιπων επιστημών και αναφερόμενος στο παράδειγμα της φυσικής του 17ου αιώνα εξηγεί πως οι επιστήμες αποτελούν κινητήριες δυνάμεις για ανάπτυξη νέων μαθηματικών εννοιών και την εξέλιξή τους. Σημαντικοί τομείς των μαθηματικών, όπως η γεωμετρία και η ανάλυση, διαμορφώθηκαν σε μεγάλο βαθμό έχοντας ως πηγή έμπνευσης τη φυσική από την απαρχή τους μέχρι και τον 20ο αιώνα (Lützen, 2011).

Η διεπιστημονικότητα, δηλαδή ο συνδυασμός των διαφορετικών επιστημών, στα πλαίσια της διδασκαλίας γίνεται ολοένα και πιο απαραίτητη, αφού αντικατοπτρίζει καλύτερα τον πραγματικό κόσμο. Τα προβλήματα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε, καθημερινά ή επαγγελματικά απαιτούν σφαιρική γνώση και αντίληψη που θα συνδυάζει αρχές από διάφορες επιστήμες. Για το λόγο αυτό, τα εκπαιδευτικά προγράμματα σπουδών θα πρέπει να ανταποκρίνονται στην ανάγκη να κατανοήσουν οι μαθητές ότι η γνώση είναι χρήσιμη όχι όταν είναι χωρισμένη σε διαμερίσματα, αλλά όταν μπορεί να αξιοποιείται σωρευτικά (Rooks and Winkler, 2012).

Ο στόχος της διεπιστημονικής διδασκαλίας είναι να προάγει και να αναδείξει τη αξία όλων των επιστημών και παράλληλα να εκπαιδεύει τους μαθητές να χρησιμοποιούν μια συνδυαστική προοπτική στην αντιμετώπιση των προβλημάτων στην καθημερινή τους ζωής (Braber et al, 2019). Δραστηριότητες που οργανώνονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να προσομοιώνουν «πραγματικές καταστάσεις», δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν δεξιότητες περιγραφής και ανάλυσης συνθηκών αλλά και οργάνωσης επιχειρημάτων (Lesh & Doerr, 2003). Η διάδραση αυτή μπορεί να επεκταθεί και σε επίπεδο συνεργασίας μεταξύ των παιδιών τα οποία θα συζητούν με τους συμμαθητές τους ανταλλάσσοντας απόψεις, εντοπίζοντας λάθη ή αδυναμίες στον αρχικό συλλογισμό

τους, βελτιώνοντας με το τρόπο αυτό διαρκώς την λογική τους σκέψη και κριτική τους ικανότητα (Mayes & Koballa, 2012). Ο μαθητής που έχει αναπτύξει μια διεπιστημονική αντίληψη, χρησιμοποιεί πιο εύκολα διαθεματικές αναλογίες, όπως συνδετικές έννοιες και μεταφορές, που κάνουν τη σκέψη του ολοκληρωμένη και τη γραφή του περισσότερο ισορροπημένη (Mansilla, 2009).

Παράλληλα με τα οφέλη της διεπιστημονικής αντίληψης, η χρήση του διαθεματικού τρόπου διδασκαλίας συμβάλλει στο να αυξηθεί το ενδιαφέρον και η συμμετοχή των μαθητών στο ίδιο το μάθημα (Schroeder et al,2007). Η χρήση προβλημάτων στη διδασκαλία τα οποία βασίζονται στη ζωή των μαθητών, τόσο ενδοσχολική όσο και εξωσχολική, στις εμπειρίες και στα ενδιαφέροντά τους, βοηθά στη σύνδεση των διαφορετικών μαθημάτων και τα κάνει περισσότερο ενδιαφέροντα (Osborne & Dillon, 2008).

Για παράδειγμα, τα Μαθηματικά αποτελούν ένα αναπόσπαστο μέρος της Φυσικής, και η μονομερής διδασκαλία κάθε μίας από τις δύο επιστήμες έχει ως αποτέλεσμα την απομάκρυνση των Μαθηματικών από τη βασική μεθοδολογία των φυσικών επιστημών (παρατήρηση, διατύπωση υποθέσεων, δημιουργία και μελέτη μοντέλων, συμπεράσματα) και τη μετατροπή τους σε ένα μάθημα στείρων ορισμών, θεωρημάτων και αποδείξεων. Άλλωστε οι βασικοί άξονες μεθοδολογίας της Φυσικής και των Μαθηματικών είναι σε πολλά τους σημεία κοινοί. Γι’ αυτό το λόγο τα Μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν τη γέφυρα ανάμεσα στη φυσική γλώσσα των μαθητών και την επιστημονική γλώσσα που καλούνται να χρησιμοποιήσουν για την περιγραφή φαινομένων (Osborne, 2002) .

Η μαθηματική σκέψη σχετίζεται με το συλλογισμό, την επίλυση προβλημάτων, αλλά και με τη σύνδεση με άλλες επιστήμες. Μέσα από προβλήματα που προσομοιώνουν πραγματικές καταστάσεις οι μαθητές εκπαιδεύονται, ώστε να αξιοποιούν αποτελεσματικά τα μαθηματικά εργαλεία και να μπορούν μέσα σε μια ποικιλία πλαισίων να αναλύουν, να σχεδιάζουν λύσεις και στρατηγικές, να ερμηνεύουν αποτελέσματα, αποκτώντας με αυτό το τρόπο μαθηματικό γραμματισμό (OECD, 2016).

Ένα από τα πλέον χρήσιμα μαθηματικά εργαλεία αποτελούν οι γραμμικές εξισώσεις αφού περιγράφουν με ικανοποιητική ακρίβεια πολυάριθμα φαινόμενα από την καθημερινή ζωή. Παρόλα αυτά, οι μαθητές δύσκολα επιλέγουν να προσεγγίσουν τέτοιου είδους προβλήματα χρησιμοποιώντας μαθηματικές έννοιες. Επομένως, αξιοποιώντας αντίστοιχα παραδείγματα στην διδασκαλία, μπορούν να επιτευχθούν καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα αφού οι μαθητές θα κατανοούν και θα ερμηνεύσουν αφηρημένες μαθηματικές σχέσεις καθώς θα τις παρατηρούν από τη θεωρία να εφαρμόζονται στην πράξη. Χαρακτηριστικά παραδείγματα γραμμικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται σε διάφορες επιστήμες και τέχνες αποτελούν:

- Μετατροπές μονάδων μέτρησης (θερμοκρασία, μήκος, όγκος, κλπ.)
- Ισοτιμίες νομισμάτων
- Θέματα οικολογίας, όπως η συγκέντρωση ενός ρυπαντή σε μία λίμνη
- Κλίμακες σε χάρτες γεωγραφίας
- Σχέδια με προοπτική στην αρχιτεκτονική
- Αναλογίες σε σχήματα στη ζωγραφική
- Η εύρεση συντελεστών μιας χημικής εξισώσεις δεν είναι ένα καθαρό πρόβλημα χημείας αλλά μπορεί να γίνει ένα πρόβλημα συστήματος γραμμικών εξισώσεων (Hamid, 2019)
- Οι καρδιακοί παλμοί σε σχέση με την ροή αίματος είναι μία γραμμική σχέση που μελετάται στην βιολογία (Horak, 2005)

Η σημασία των μαθηματικών δεν γίνεται πάντα ξεκάθαρη για τους μαθητές στο πλαίσιο της παραδοσιακής διδασκαλίας στα σχολεία, με αποτέλεσμα ένα μεγάλο ποσοστό τους να δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη σχέση της μαθηματικής επιστήμης και τη συνάφειά της με τις υπόλοιπες και το σημαντικό της ρόλο σε αυτές. Η παρέμβαση των εκπαιδευτικών, επομένως, είναι κρίσιμη ώστε να στρέψει τους μαθητές προς τη σωστή κατεύθυνση, αίροντας τις ενστάσεις τους, προάγοντας παράλληλα την αξία των μαθηματικών και την διεπιστημονική τους προοπτική (Repko et al, 2017).

Η διδασκαλία των μαθηματικών στα σχολεία θα πρέπει να ανταποκρίνεται στις σύγχρονες απαιτήσεις της επιστημονικής γνώσης μιας και η ανάπτυξη των τεχνολογικών επιστημών έχει φέρει τα Μαθηματικά σε ρόλο καταλυτικού παράγοντα στην εξέλιξη του κάθε κλάδου αλλά και αναπόσπαστου κομματιού σε προβλήματα

καθημερινής ζωής (Deloitte, 2013). Σύμφωνα με το National Research Council (NRC, 2013) τα Μαθηματικά «*γίνονται όλο και περισσότερο ένα ουσιαστικό μέρος σε διάφορες διαδικασίες στη βιολογία, ιατρική, κοινωνικές επιστήμες, επιχειρήσεις, σχέδιο, κλίμα, οικονομικά, κ.α.*». Επομένως, μια βασική προσέγγιση στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η οργάνωση διαθεματικών μαθημάτων που προωθούν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσω της διεπιστημονικής γνώσης και των συνδέσεων με τις άλλες επιστήμες.

1.2 Δυσκολίες εκμάθησης Μαθηματικών

Η αδυναμία του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας είναι να μπορέσει να απαντήσει στο μαθητή γιατί πρέπει να μάθει κάτι και ποιες δυνατότητες έχει για να εφαρμόσει τις έννοιες και τις τεχνικές που διδάσκεται σε πραγματικά πλαίσια ή σε άλλα μαθήματα. Βασικό κίνητρο των μαθητών είναι συνήθως μόνο η καλή επίδοση στις τελικές εξετάσεις και όχι η κατάρτιση τους με γνώσεις που έχουν αποκτήσει στη διάρκεια του μαθήματος. Τα Μαθηματικά θα πρέπει να μην είναι μόνο ένα μάθημα που διδάσκεται και εφαρμόζεται μόνο για χάρη των μαθηματικών αυτών καθ' εαυτών, αλλά να διδάσκεται διότι θα βοηθήσει τους μαθητές να καταλάβουν καλύτερα τον κόσμο γύρω τους. Γι' αυτό και η ενσωμάτωση παραδειγμάτων από άλλες επιστήμες από τους εκπαιδευτικούς, με στόχο να δώσουν μορφή σε μαθηματικές έννοιες και θεωρίες, θα δώσει ένα κίνητρο στους μαθητές να συμμετάσχουν ενεργά στη διαδικασία μάθησης (Banks, 1993). Επομένως η διδασκαλία των υπολοίπων επιστημών μπορεί να συνδυαστεί με αυτή των Μαθηματικών για να κάνουν τα μαθήματα αυτά πιο σχετικά και ουσιαστικά για τους μαθητές. Η βασική προϋπόθεση για την αποδοτική σύνθεση της διεπιστημονικής διδασκαλίας είναι η ανάπτυξη συνάφειας των μαθηματικών με την καθημερινότητα των μαθητών, οι οποίοι θα πρέπει να δουν τα μαθηματικά και τις επιστήμες ως χρήσιμα συστατικά του κόσμου τους (Davison et al, 1995).

Είναι γεγονός πως τα περισσότερα από τα θέματα των μαθηματικών αλλά και των υπολοίπων επιστημών προσεγγίζονται κυρίως από υπολογιστική σκοπιά με περισσότερη σημασία να δίνεται στην απλή κάλυψη της ύλης και όχι στο πλαίσιο στο οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί η παρεχόμενη γνώση (Davison et al, 1995). Στα βιβλία

μαθηματικών τα περισσότερα παραδείγματα ασκήσεων επιτρέπουν κατά κύριο λόγο την εφαρμογή μεθόδων και εννοιών με διεκπεραιωτικό τρόπο μόνο μέσα σε αφηρημένα πλαίσια (π.χ. «λύσε την εξίσωση.. », ή «βρες την παράγωγο της συνάρτησης… », ή «υπολόγισε…») και δε βοηθούν τους καθηγητές να υποκινήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών με απτά προβλήματα. Αυτό έχει προφανώς ως φυσικό επακόλουθο την εκδήλωση χαμηλού ενδιαφέροντος από τους μαθητές στην εκμάθηση νέων εννοιών, ιδιαίτερα όταν αυτές γίνονται πιο αφηρημένες, με αποτέλεσμα να μην επιτυγχάνεται η ολοκληρωμένη κατανόησή τους (Văcăretu, 2011).

Αρκετοί μαθητές συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση περίπλοκων προβλημάτων, θεωριών και εξισώσεων κατά την εκμάθηση Μαθηματικών, με αποτέλεσμα να τα θεωρούν ως ένα αρκετά απαιτητικό μάθημα και να αποθαρρύνονται από τη συμμετοχή τους σε αυτό. Η στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τους εκπαιδευτικούς τους και συγκεκριμένα την εμπειρία τους, τις γνώσεις τους και τις μεθόδους διδασκαλίας που χρησιμοποιούν (Papanastasiou, 2000). Επιπλέον, σημαντική επίδραση έχουν παράγοντες, όπως η οργάνωση της τάξης, τα τεχνολογικά εργαλεία και ψηφιακά μέσα, η διεπιστημονικότητα και η συσχέτιση των μαθηματικών εννοιών με προβλήματα της καθημερινής ζωής, οι οποίοι κάνουν το μάθημα των Μαθηματικών πιο προσιτό για τους μαθητές (Yilmaz et al, 2010).

Οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τις αφηρημένες έννοιες που δομούν την Άλγεβρα, όπως οι πράξεις, τα κλάσματα και οι δεκαδικοί αριθμοί, στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου. Στη συνέχεια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, τα Μαθηματικά αρχίζουν να περιλαμβάνουν πιο αφηρημένες έννοιες, και προβλήματα Άλγεβρας που απαιτούν πολλαπλά στάδια επίλυσης, με τους μαθητές να αδυνατούν σε πολλές περιπτώσεις να ακολουθήσουν τη ροή της ύλης και να αντιληφθούν όσα διδάσκονται. Οι δυσκολίες αυτές έχουν ως αποτέλεσμα τη μείωση του ενδιαφέροντος και της αυτοπεποίθησης στο μάθημα, παρανοήσεις, και μειωμένες μαθηματικές δεξιότητες (Fahlberg-Stojanovska, 2009). Επιπλέον, σε πολλές περιπτώσεις στην παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας μαθηματικών οι καθηγητές περιμένουν από τους μαθητές τους να χρησιμοποιήσουν τη φαντασία τους για να οπτικοποιήσουν νοητά μια αφηρημένη ιδέα ή μία γεωμετρική έννοια, ειδικά όταν αυτή είναι δύσκολο να αποτυπωθεί σωστά με ένα σχέδιο στον πίνακα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργούνται επιπρόσθετες

δυσκολίες στη δημιουργία της σύνδεσης που πρέπει να πραγματοποιηθεί μεταξύ μιας αλγεβρικής έννοιας και της αντίστοιχης γεωμετρικής ερμηνείας της (Duval, 1998). Οι μαθητές, για παράδειγμα, αντιλαμβάνονται συνήθως τους πίνακες και τα γραφήματα ως συλλογές μεμονωμένων σημείων και όχι ως σύνολο, κάνοντας δύσκολη την ανάλυση γραφήματος και την εξαγωγή των πληροφοριών που παρέχει (Knuth, 2000). Αν και μπορούν σχετικά εύκολα να αποκτήσουν μια βασική εμπειρία στο να σχεδιάζουν ένα γράφημα με βάση ένα πίνακα τιμών, αρκετοί δυσκολεύονται να λειτουργήσουν προς την αντίθετη κατεύθυνση και να δημιουργήσουν εξισώσεις από ένα δεδομένο γράφημα ή να καταλάβουν ότι τα γραφήματα αποτελούν λύσεις από μόνα τους και όχι απλά παρουσίαση αλγεβρικών λύσεων (Knuth, 2000). Η αδυναμία κατανόησης των συνδέσεων μεταξύ αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων εμποδίζει τους μαθητές από το να κατανοήσουν σε βάθος τα Μαθηματικά (Bayazit & Aksoy, 2010).

Σε έρευνα που έγινε σχετικά με την εκμάθηση των Μαθηματικών κατά τη διάρκεια της σχολικής εκπαίδευσης, διαπιστώθηκε ότι δημιουργούνται σε ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών αρνητικές εμπειρίες (Jackson & Leffingwell, 1999). Σε αυτό συμβάλλουν συνήθως η συμπεριφορά των διδασκόντων, η αντικειμενική δυσκολία του μαθήματος, αλλά και η ποιότητα, ο τρόπος και τα μέσα της διδασκαλίας. Ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας των Μαθηματικών, ο όποιος βασίζεται σε μια στείρα μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων και όχι στην δημιουργική και διαδραστική συμμετοχή των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία, έχει συνδεθεί πολλές φορές με ένα βασικό αρνητικό συναίσθημα που δημιουργείται στους μαθητές (Furner & Berman, 2005). Αυτό έχει χαρακτηριστεί ως «άγχος στα Μαθηματικά» και αποτελεί αντικείμενο μελέτης από τη δεκαετία του 1970 (Richardson & Suinn, 1972). Αυτός ο, πολλές φορές, παράλογος φόβος αντιμετώπισης των μαθηματικών εννοιών και προβλημάτων, συνεχίζει να υπάρχει ακόμα και στις σημερινές τάξεις. Είναι ένα συναίσθημα που έχει αρνητικές επιδράσεις στις μαθησιακές επιδόσεις των μαθητών, εμποδίζει την οργάνωση της σκέψης τους, μειώνει το ενδιαφέρον τους και γενικώς τους αποθαρρύνει από το να συμμετέχουν ενεργά στο μάθημα (Finlayson, 2014).

1.3 Νέες προσεγγίσεις

Στις σύγχρονες τάξεις οι εκπαιδευτικοί των Μαθηματικών θα πρέπει να κατανοήσουν τις μαθησιακές δυσκολίες των μαθητών τους, λαμβάνοντας υπόψη τα άγχη, την έλλειψη ενδιαφέροντος για συμμετοχή, και τη δυσκολία κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Χρησιμοποιώντας τα νέα τεχνολογικά εργαλεία, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να δημιουργήσουν μαθησιακά περιβάλλοντα που θα ενισχύουν τη διαδικασία διδασκαλίας, προάγοντας το διάλογο, την επικοινωνία, και τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών και των εκπαιδευτικών. Αυτό θα οδηγήσει στην αύξηση της αυτοπεποίθησης και της συμμετοχής των μαθητών στο μάθημα. Η αποδοτική χρήση σύγχρονων εργαλείων, όπως το λογισμικό Geogebra, μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να κάνουν πιο ουσιώδη τη διαδικασία εκμάθησης για τους μαθητές, και να τους οδηγήσουν στην κατανόηση της αξίας των μαθηματικών και στη σύνδεσή τους με τις άλλες επιστήμες, καθώς και τις εφαρμογές τους στην καθημερινή ζωή (Gonzalez-DeHass et al, 2017).

Οι νέες μέθοδοι διδασκαλίας των Μαθηματικών, όπως οι διερευνητικές δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων, τα μοντέλα, οι προσομοιώσεις, και τα εκπαιδευτικά παιχνίδια, προάγουν το διάλογο ανάμεσα στους διδάσκοντες και τους διδασκόμενους, ενθαρρύνουν τη διαδραστική διδασκαλία, και κάνουν το μάθημα περισσότερο ενδιαφέρον (NCTM, 2006). Οι νέες αυτές μέθοδοι βοηθούν στην εξομάλυνση των μαθησιακών ανισοτήτων μεταξύ των μαθητών μειώνοντας έτσι το χάσμα που δημιουργείται στην κατανόηση των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών και εν τέλει περιορίζουν το μαθησιακό άγχος. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν στη μείωση του άγχους των μαθητών, χρησιμοποιώντας μεθόδους διδασκαλίας, όπως η συζήτηση μέσα σε συνεργατικές ομάδες, η διεπιστημονική προσέγγιση, η οπτικοποίηση αφηρημένων εννοιών, οι οποίες θα ενισχύσουν την αυτοπεποίθηση των μαθητών (Stuart, 2000). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιώντας τα νέα τεχνολογικά εργαλεία, τα οποία είναι πλέον διαθέσιμα στις τάξεις, μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές στη διαδικασία εκμάθησης και στη σφαιρική κατανόηση των προβλημάτων μέσα από μία μαθητο-κεντρική προσέγγιση (Zemelman et al, 2005). Οι μαθητές καταλήγουν οι ίδιοι στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών με το σχηματισμό και αυτοέλεγχο των υποθέσεων τους, και μέσω προσωπικών μεθόδων επίλυσης, καταλήγουν στη λήψη αποφάσεων και συμπερασμάτων (Jonsson et al, 2014).

Κεφάλαιο 2 – Περί Προγραμμάτων Σπουδών

2.1 Το «παλιό» Πρόγραμμα Σπουδών

Σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών, το οποίο εφαρμόζεται τα τελευταία χρόνια και παρουσιάζεται για κάθε μάθημα στην ιστοσελίδα του ηλεκτρονικού βιβλίου (**http://ebooks.edu.gr/**) η διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών στοχεύει ο μαθητής να:

- Αναπτύξει μεθοδική σκέψη και κριτική ικανότητα
- Διατυπώνει με σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια τη σκέψη του.
- Καλλιεργεί τη φαντασία και την ελεύθερη σκέψη

Οι ειδικοί σκοποί της διδασκαλίας του μαθήματος των Μαθηματικών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα ανά βαθμίδα εκπαίδευσης:

ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΚΟΠΟΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΗΜΟΤΙΚΟ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ	ΛΥΚΕΙΟ
➢ Η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων. ➢ Η καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας. ➢ Η κατανόηση στοιχειωδών Μαθηματικών μεθόδων. ➢ Η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία. ➢ Η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. ➢ Η ανάδειξη της δυνατότητας εφαρμογής και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών. ➢ Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης (ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών). ➢ Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά	➢ Η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων. ➢ Η καλλιέργεια της Μαθηματικής Γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας αλλά και περιγραφής πραγματικών φαινομένων και καταστάσεων. ➢ Η σταδιακή κατανόηση των βασικών χαρακτηριστικών της δομής των Μαθηματικών. ➢ Η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία. ➢ Η σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων. ➢ Η ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών από την αρχαιότητα ως της μέρες μας, τόσο στις θετικές όσο και στις ανθρωπιστικές και κοινωνικοοικονομικές επιστήμες. ➢ Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης που εκφράζεται μέσα από τη ραγδαία ανάπτυξή της, και της σημασίας της ως απαραίτητου εργαλείου όλων των ανθρώπινων δραστηριοτήτων. ➢ Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά, χωρίς την οποία η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων αποβαίνει εξαιρετικά δυσχερής.	➢ Την ολοκλήρωση της μαθηματικής εκπαίδευσης που οι μαθητές απέκτησαν στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο και ➢ Το πέρασμα σε έναν πιο προωθημένο, θεωρητικό μαθηματικό τρόπο σκέψης.

Οι διαθέσιμες ώρες διδασκαλίας των εξισώσεων και των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων ανά βαθμίδα και ανά τάξη φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ (ΔΙΑΤΙΘΕΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ)

ΔΗΜΟΤΙΚΟ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ		ΛΥΚΕΙΟ
Τάξη ΣΤ	**Τάξη Β**	**Τάξη Γ**	**Τάξη Β**
➢ Επίλυση προβλήματος (24 ώρες)	➢ Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων (4 ώρες) ➢ Καρτεσιανές συντεταγμένες ➢ Γραφική παράσταση συνάρτησης (3 ώρες)	➢ Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης ➢ Η έννοια του γραμμικού συστήματος και γραφική επίλυσή του ➢ Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος (7 ώρες)	➢ Επίλυση και διερεύνηση γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. ➢ Επίλυση συστημάτων τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. ➢ Επίλυση μη γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι οι διαθέσιμες ώρες ανά τάξη στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων και συστημάτων είναι οριακά οι ελάχιστες διαθέσιμες και σε καμία περίπτωση δεν επαρκούν για να καλυφθούν όλοι οι στόχοι των αναλυτικού προγράμματος, οι οποίοι σχετικά με τα γραμμικά συστήματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

ΣΤΟΧΟΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΗΜΟΤΙΚΟ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ	
	Τάξη Β	**Τάξη Γ**
➢ Πριν από τους άξονες: 1. Αριθμοί και πράξεις 2. Μετρήσεις 3. Γεωμετρία, 4. Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων - Στατιστική 5. Λόγοι αναλογίες 6. Εξισώσεις, γίνονται επαναληπτικές δραστηριότητες και αυτο- αξιολόγηση, ώστε οι μαθητές: ➢ Να ενεργοποιούν, να εφαρμόζουν και να σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, για τη διατήρηση της συνέχειας και για την ομαλή μετάβαση στις νέες έννοιες. ➢ Να εργάζονται ατομικά ή ομαδικά χωρίς καθοδήγηση για μια στερεότυπη λύση. ➢ Να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής. ➢ Να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις. ➢ Να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα για την επίλυσή του. ➢ Να επιχειρηματολογούν ως προς την αλήθεια μιας λύσης. ➢ Να παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους με σαφήνεια την απάντησή τους, η οποία περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα. ➢ Να προβλέπουν την απάντηση του προβλήματος και διατυπώνουν υποθέσεις σχετικά με την ύπαρξη ή όχι μιας ή περισσότερων λύσεων. ➢ Να βρίσκουν ενδιάμεσα ερωτήματα που υποβοηθούν την πορεία προς τη λύση. ➢ Να θέτουν δικά τους ερωτήματα και παρόμοια προβλήματα. ➢ Να αυτο-αξιολογούνται στις γνώσεις και ικανότητες που απέκτησαν ώστε να γίνεται ανατροφοδότηση στη μαθησιακή διαδικασία. ➢ Να τους δίνεται η ευκαιρία να χρησιμοποιούν τον Η/Υ με ανάλογα προγράμματα **SketchPad, Cabri, Logo, Word**, **Paint** κ.λπ. για την ευχερέστερη αντιμετώπιση των προβλημάτων.	➢ Να διακρίνουν τα δεδομένα από τα ζητούμενα του προβλήματος. ➢ Να κάνουν εισαγωγή του αγνώστου. ➢ Να καταστρώνουν την εξίσωση, να την επιλύουν, να ελέγχουν το αποτέλεσμα και να καταγράφουν την απάντηση. ➢ Να βρίσκουν τις συντεταγμένες ενός σημείου. ➢ Να βρίσκουν ένα σημείο όταν δίνονται οι συντεταγμένες του. ➢ Να βρίσκουν τις συντεταγμένες του συμμετρικού ενός σημείου ως προς τους άξονες και την αρχή των αξόνων. ➢ Να υπολογίζουν την απόσταση δυο σημείων αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες τους. ➢ Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης από τον αντίστοιχο πίνακα τιμών. ➢ Να βρίσκουν κατά προσέγγιση τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης. ➢ Να ελέγχουν αν ένα σημείο ανήκει ή όχι στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.	➢ Να παριστάνουν γραφικά μια γραμμική εξίσωση. ➢ Να λύνουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα. ➢ Να λύνουν ένα γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο: -της αντικατάστασης -των αντίθετων συντελεστών. ➢ Να λύνουν προβλήματα με τη βοήθεια συστημάτων.

Μέσα στον οδηγό σπουδών παρατηρούμε, επίσης, να διατυπώνονται στόχοι και ενδεικτικές δραστηριότητες σύμφωνα με τα οποία φαίνεται ότι υπάρχει μία προσπάθεια εισαγωγής και ενσωμάτωσης ΤΠΕ ακόμα και από το δημοτικό. Επιπλέον, από το γυμνάσιο υπάρχουν στοιχειώδεις προτάσεις εισαγωγής των γραμμικών συστημάτων μέσω μίας διεπιστημονικής προσέγγισης, η οποία όμως δεν έχει καθολική εφαρμογή στις τάξεις συνήθως λόγω έλλειψης χρόνου, δυνατοτήτων, μέσων ή επιμόρφωσης των καθηγητών.

ΓΕΝΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ, ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

	Τάξη	**Άξονες γνωστικού περιεχομένου**	**Γενικοί στόχοι (γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις και αξίες)**	**Ενδεικτικές Θεμελιώδεις έννοιες διαθεματικής προσέγγισης**
ΔΗΜΟΤΙΚΟ	**ΣΤ**	Εξισώσεις	Να λύνουν απλές εξισώσεις με τη βοήθεια του ορισμού των πράξεων.	Σύστημα Άτομο – Σύνολο Ομοιότητα- Διαφορά
ΓΥΜΝΑΣΙΟ	**Γ**	Εξισώσεις – Ανισώσεις - Συστήματα	Να μπορούν να επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά εξισώσεις α΄ και β΄ βαθμού, ανισώσεις α΄ βαθμού και γραμμικά συστήματα.	Αλληλεπίδραση Ομοιότητα-Διαφορά (Ισότητα) Σύστημα
ΛΥΚΕΙΟ	**Β**	Συστήματα	➢ Επίλυση και διερεύνηση γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. ➢ Επίλυση συστημάτων τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. ➢ Επίλυση μη γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.	

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΔΗΜΟΤΙΚΟ	**ΓΥΜΝΑΣΙΟ**		**ΛΥΚΕΙΟ**
Τάξη ΣΤ	**Τάξη Β**	**Τάξη Γ**	
➢ Αναγνώριση προβλημάτων παρόμοιων ή ανάλογων με ένα δοσμένο πρόβλημα. ➢ Έλεγχος των διαδικασιών επίλυσης προβλήματος. ➢ Σκέψη πάνω στις δικές τους στρατηγικές επίλυσης προβλήματος. ➢ Ευρετικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, όπως: - Σχεδιάζω έναν πίνακα, ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση - Δοκιμάζω απλούστερους αριθμούς και εργάζομαι με ειδικές περιπτώσεις. - Βρίσκω ένα μοντέλο. - Εκτιμώ και ελέγχω. ➢ Ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος αναφέρονται παρακάτω στον κάθε επιμέρους άξονα	➢ Επιλεγμένα προβλήματα τα οποία θα προσπαθήσουν οι μαθητές να λύσουν με πρακτική αριθμητική αλλά και με εξισώσεις, με σκοπό να αναδειχθεί η υπεροχή ως προς τη λειτουργικότητα της μεθόδου επίλυσης προβλημάτων με εξισώσεις. ➢ Δραστηριότητες οι οποίες αποσκοπούν στην ανάγνωση, κατασκευή και ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που περιγράφουν τη λύση **πραγματικών προβλημάτων.** «Η αισθητοποίηση φαινομένων, γεγονότων ή καταστάσεων μέσα από την κατασκευή αναπαραστάσεων (πίνακες, διαγράμματα κλπ.)» **(Μαθηματικά, Ιστορία, Φυσική, Βιολογία, Γεωγραφία).**	Η γραφική επίλυση θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της λύσης ενός συστήματος ως ζεύγους αριθμών και επίσης να κατανοήσουν ότι ένα σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρες λύσεις.	➢ Επανάληψη των γνωστών από το Γυμνάσιο μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων 2x2. ➢ Εισαγωγή την έννοιας της Ορίζουσας, ➢ Επίλυση παραμετρικών συστημάτων με χρήση οριζουσών.

Ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα διεπιστημονικών ασκήσεων γραμμικών εξισώσεων και συστημάτων που προτείνονται από τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών της Γ' γυμνασίου και Β' γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2021-2022, παρουσιάζονται στις παρακάτω εικόνες.

Από το βιβλίο «Μαθηματικά Γ Γυμνασίου» (Αργυράκης κα, ΙΤΥΕ, 2021)

Κάποιος περπάτησε από το σημείο Α στο σημείο Β με ταχύτητα 4 km/h και μετά κολύμπησε με ταχύτητα 2 km/h μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ. Αν ο συνολικός χρόνος που μεσολάβησε μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ είναι μια ώρα, τότε:

α) Να βρείτε τη γραμμική εξίσωση με την οποία συνδέονται οι αποστάσεις x, y.

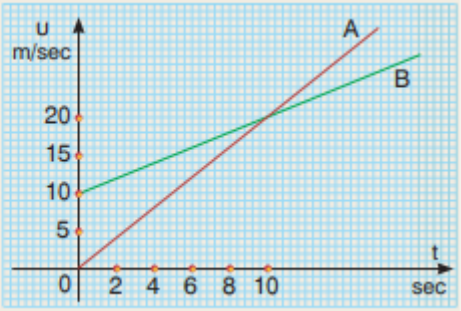
β) Αν περπάτησε 3 km, πόσο χρόνο κολύμπησε;

Εικόνα 2.1.1: *Άσκηση 7 σελίδα 127*

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου δύο αυτοκινήτων Α και Β. Να βρείτε:

α) Την αρχική ταχύτητα κάθε αυτοκινήτου.

β) Σε πόσο χρόνο μετά την εκκίνησή τους τα δύο αυτοκίνητα θα έχουν την ίδια ταχύτητα και ποια θα είναι αυτή;

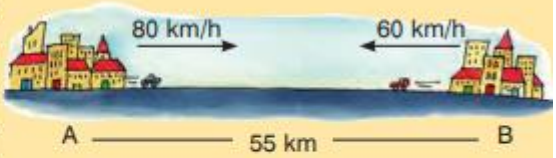


Εικόνα 2.1.2: *Άσκηση 3 σελίδα 132*

Ένα αυτοκίνητο μετά την ενεργοποίηση των φρένων του συνέχιζε να κινείται με ταχύτητα $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t$, όπου t ο χρόνος που μεσολάβησε από τη στιγμή του φρεναρίσματος. Αν 2 sec μετά το φρεναρίσμα το αυτοκίνητο είχε ταχύτητα 12m/sec και 2sec αργότερα είχε ταχύτητα 4 m/sec, να βρείτε την αρχική ταχύτητα υ_0 και την επιβράδυνση α. Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή του φρεναρίσματος θα σταματήσει το αυτοκίνητο;

Εικόνα 2.1.3: *Άσκηση 19 σελίδα 139*

Οι πόλεις Α και Β απέχουν 55 km. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α και με μέση ταχύτητα 80 km/h κινείται προς την πόλη Β. Δεκαπέντε λεπτά μετά την εκκίνησή του ένα άλλο αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 60 km/h κινείται προς την πόλη Α. Πόσο χρόνο κινήθηκε κάθε αυτοκίνητο μέχρι τη συνάντησή τους;



Εικόνα 2.1.4: *Άσκηση 14 σελίδα 141*

Οι αντιστάσεις R_1, R_2, αν συνδεθούν παράλληλα, έχουν ολική αντίσταση 2,4 Ω. Αν η αντίσταση R_2 συνδεθεί παράλληλα με αντίσταση 12 Ω, τότε η ολική τους αντίσταση είναι R_1. Να βρείτε τις τιμές των αντιστάσεων R_1, R_2.

Εικόνα 2.1.5: *Άσκηση 17 σελίδα 141*

Μια ποτοποιία παρασκεύασε 400 λίτρα ούζο περιεκτικότητας 38% vol, αναμειγνύοντας δύο ποιότητες με περιεκτικότητες 32% vol και 48% vol αντίστοιχα. Πόσα λίτρα από κάθε ποιότητα χρησιμοποίησε;

Εικόνα 2.1.6: *Άσκηση 18 σελίδα 139*

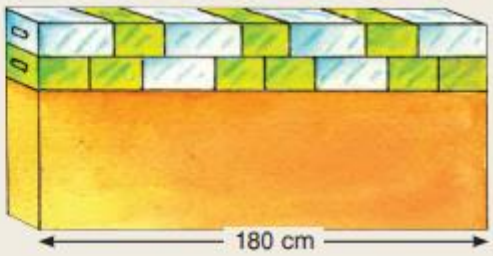
Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά απέχουν 12 cm. Αν οι κύκλοι μετατοπιστούν έτσι ώστε να εφάπτονται εξωτερικά, τότε τα κέντρα τους απέχουν 58 cm. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

Εικόνα 2.1.7: *Άσκηση 16 σελίδα 139*

Αν ελαττώσουμε το μήκος ενός ορθογωνίου κατά 2 m και αυξήσουμε το πλάτος του κατά 5 m, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 94 m^2. Αν όμως, αυξήσουμε το μήκος του κατά 4 m και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 6 m, το εμβαδόν του ελαττώνεται κατά 104 m^2. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

Εικόνα 2.1.8: *Άσκηση 13 σελίδα 141*

Στο πάνω μέρος ενός τοίχου μήκους 180 cm έχουν τοποθετηθεί πράσινα και γαλάζια διακοσμητικά τούβλα σε δύο σειρές. Να υπολογίσετε το μήκος κάθε πράσινου και γαλάζιου τούβλου.



Εικόνα 2.1.9: *Άσκηση 13 σελίδα 138*

Σ' ένα ξενώνα υπάρχουν x δίκλινα και y τρίκλινα δωμάτια. Αν ο ξενώνας έχει συνολικά 25 κρεβάτια, τότε να βρείτε τη γραμμική εξίσωση που συνδέει τα x, y. Να χαράξετε σε τετραγωνισμένο χαρτί την αντίστοιχη ευθεία και από το σχήμα να διαπιστώσετε πόσα δίκλινα και πόσα τρίκλινα δωμάτια είναι δυνατόν να έχει ο ξενώνας.

Εικόνα 2.1.10: *Άσκηση 8 σελίδα 127*

Σ' ένα ταξίδι με πλοίο, το εισιτήριο της Α' θέσης κοστίζει 18 € και της Β' θέσης κοστίζει 6 € λιγότερα. Αν σ' ένα ταξίδι κόπηκαν 350 εισιτήρια συνολικής αξίας 4500 €, να βρείτε πόσα εισιτήρια κόπηκαν από κάθε κατηγορία.

Εικόνα 2.1.11: *Άσκηση 10 σελίδα 140*

Από το βιβλίο «Άλγεβρα Β λυκείου» (Ανδρεαδάκης κα ΙΤΥΕ, 2021)

Ένα ξενοδοχείο έχει 26 δωμάτια, άλλα δίκλινα και άλλα τρίκλινα και συνολικά 68 κρεβάτια. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

Εικόνα 2.1.12: *Άσκηση 2 σελίδα 22*

Σε έναν αγώνα το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 1,5 € και το εισιτήριο ενός ενήλικα 4€. Τον αγώνα παρακολούθησαν 2200 άτομα και εισπράχτηκαν 5050 €. Να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά και πόσοι οι ενήλικες που παρακολούθησαν τον αγώνα.

Εικόνα 2.1.13: *Άσκηση 3 σελίδα 22*

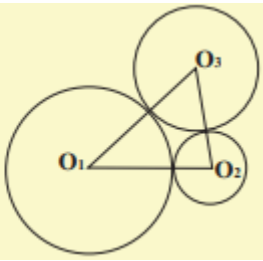
Η αντίσταση R ενός σύρματος ως συνάρτηση της θερμοκρασίας T μπορεί να βρεθεί με τον τύπο $R = \alpha T + \beta$. Αν στους $20^\circ C$ η αντίσταση ήταν $0,4\ \Omega$ και στους $80^\circ C$ η αντίσταση ήταν $0,5\ \Omega$, να βρείτε τα α και β.

Εικόνα 2.1.14: *Άσκηση 4 σελίδα 22*

Ένας χημικός έχει δύο διαλύματα υδροχλωρικού οξέως, το πρώτο έχει περιεκτικότητα 50% σε υδροχλωρικό οξύ και το δεύτερο έχει περιεκτικότητα 80% σε υδροχλωρικό οξύ. Ποια ποσότητα από κάθε διάλυμα πρέπει να αναμείξει ώστε να πάρει 100 ml διάλυμα περιεκτικότητας 68% σε υδροχλωρικό οξύ;

Εικόνα 2.1.15: *Άσκηση 5 σελίδα 22*

Οι κύκλοι του διπλανού σχήματος εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο και ισχύει $O_1O_2 = 6$, $O_1O_3 = 5$ και $O_2O_3 = 7$. Να υπολογίσετε τις ακτίνες των τριών κύκλων.



Εικόνα 2.1.16: *Άσκηση 9 σελίδα 23*

Μελετώντας όλα τα σχολικά εγχειρίδια παρατηρούμε ότι διεπιστημονικά προβλήματα αναφέρονται μόνο στο σχολικό βιβλίο της Γ' Γυμνασίου, όταν οι μαθητές στη τάξη αυτή πολλές φορές δεν έχουν έρθει ακόμα σε επαφή με τις αντίστοιχες έννοιες των άλλων επιστημών. Λιγότερα, και όχι σε σύνδεση με την αντίστοιχη ύλη των άλλων μαθημάτων, δίνονται και στη Β' Λυκείου. Τα προβλήματα αυτά δίνονται συνήθως μόνο σε μαθητές προχωρημένου επίπεδου και δεν αποτελούν μέρος της διδασκαλίας μέσα στην τάξη.

Η διδασκαλία μέσα στην τάξη επικεντρώνεται κυρίως στις μεθόδους επίλυσης και σε χαρακτηριστικά παραδείγματα που «εκ παραδρομής» μπορούν να χαρακτηριστούν διεπιστημονικά.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ενδεικτικά προβλήματα Μαθηματικών, Φυσικής, Χημείας και Βιολογίας, στο πνεύμα εκείνων που χρησιμοποιούνται και από τα σχολικά εγχειρίδια, με τον συνήθη τρόπο που προσεγγίζονται στις αίθουσες διδασκαλίας, αλγεβρικά ή/και γεωμετρικά, όπου είναι δυνατό.

1) **Πρόβλημα Μαθηματικών**

Για να στρώσουμε με πλακάκια μία αυλή χρησιμοποιήσαμε 350 πλακάκια δύο ειδών: στρογγυλά και τετράγωνα. Αν το φορτηγό μας παρέδωσε 185 kg εμπόρευμα για την παραγγελία μας και στη συσκευασία αναγράφεται ότι κάθε στρογγυλό πλακάκι ζυγίζει 200 g και κάθε τετράγωνο 700 g πόσα χρησιμοποιήσαμε από το κάθε είδος;

Λύση:

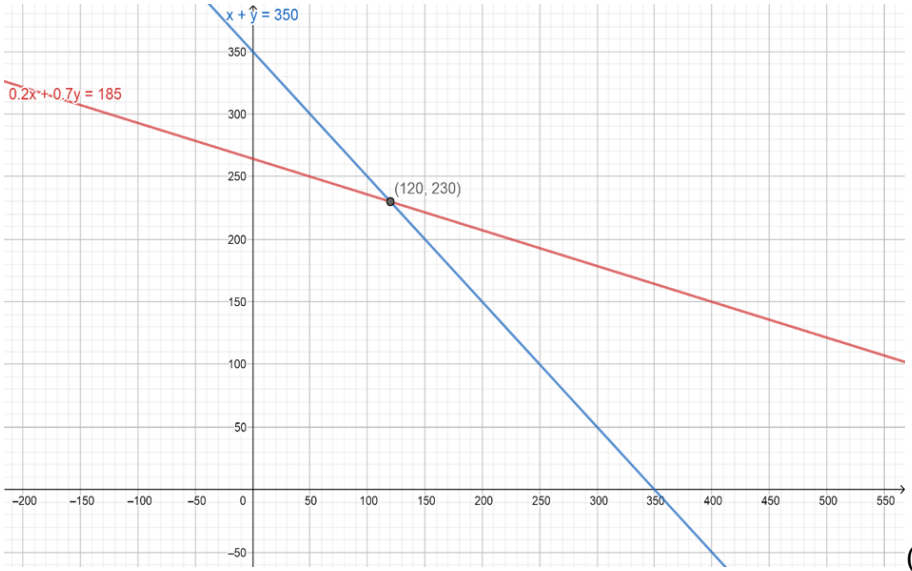
Έστω x ένα στρογγυλό πλακάκι που ζυγίζει 0,2 kg και y ένα τετράγωνο πλακάκι που ζυγίζει 0,7 kg. Προκύπτει το σύστημα: $\begin{cases} x + y = 350 \\ 0{,}2x + 0{,}7y = 185 \end{cases}$

<u>Αλγεβρική επίλυση:</u>

$$\begin{cases} x + y = 350 \\ 0{,}2x + 0{,}7y = 185 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 350 - y \\ 0{,}2(350 - y) + 0{,}7y = 185 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 350 - y \\ 70 - 0{,}2y + 0{,}7y = 185 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 350 - y \\ 0{,}5y = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 350 - y \\ y = 230 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 350 - 230 \\ y = 230 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 120 \\ y = 230 \end{cases}$$

Επομένως, χρησιμοποιήσαμε 120 στρογγυλά και 230 τετράγωνα πλακάκια.



$(x = 120, y = 230)$

2) Πρόβλημα Φυσικής

Η συνολική ορμή ενός συστήματος σωμάτων είναι 21 kg·m/s όταν αυτά κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Αν όμως κινηθούν σε αντίθετες κατευθύνσεις η ορμή τους γίνεται 9kg·m/s. Αν το ένα σώμα έχει μάζα 2 kg και το δεύτερο 3 kg να βρείτε τα μέτρα των ταχυτήτων τους. Για την ορμή κάθε σώματος ισχύει $\vec{p} = m \cdot \vec{u}$.

Λύση:

Προκύπτει το σύστημα: $\begin{cases} p_1 + p_2 = 21 \\ p_1 - p_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_1 + 3u_2 = 21 \\ 2u_1 - 3u_2 = 9 \end{cases}$

<u>Αλγεβρική επίλυση:</u>

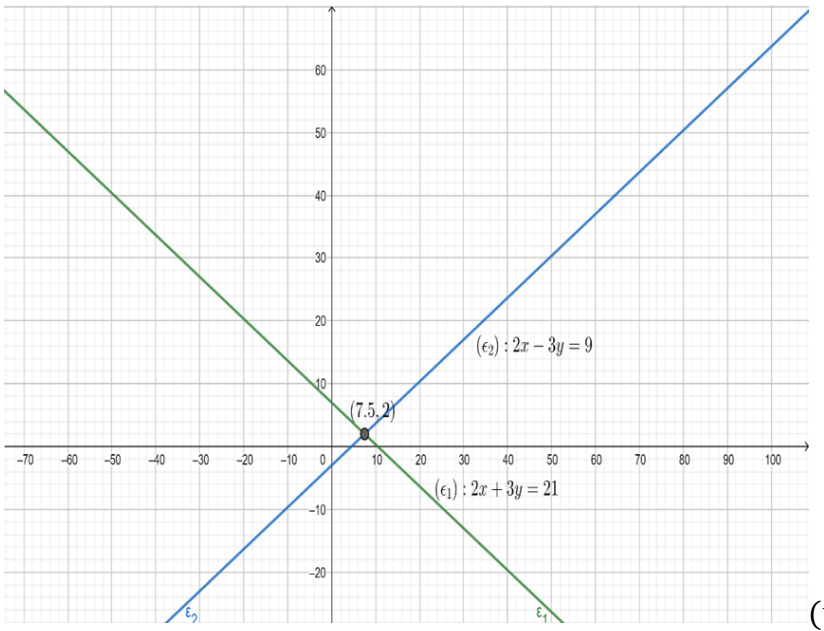
Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις προκύπτει ότι:

$2u_1 + 3u_2 + (2u_1 - 3u_2) = 21 + 9 \Rightarrow 4u_1 = 30 \Rightarrow u_1 = 7.5\ m/s$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση $2u_1 + 3u_2 = 21$ έχουμε ότι: $2 \cdot 7.5 + 3u_2 = 21 \Rightarrow$

$15 + 3u_2 = 21 \Rightarrow 3u_2 = 21 - 15 \Rightarrow 3u_2 = 6 \Rightarrow u_2 = \frac{6}{3} \Rightarrow u_2 = 2\ m/s$

Επομένως, οι ταχύτητες των 2 σωμάτων είναι: $u_1 = 7.5 m/s$ και $u_2 = 2 m/s$.



$(u_1 = 7.5\ m/s\ , u_2 = 2\ m/s)$

3) Πρόβλημα Χημείας

Να ισοσταθμίσετε την παρακάτω χημική αντίδραση : $xCaO + yN_2O_5 \rightarrow zCa(NO_3)_2$

Λύση:

Σύμφωνα με το αρχή διατήρησης μάζας ισοσταθμίζουμε την αντίδραση για το κάθε χημικό στοιχείο:

$Ca : x = z$

$N : 2y = 2z$

$O : x + 5y = 6z$

Επομένως προκύπτει το σύστημα γραμμικών εξισώσεων: $\begin{cases} x = z \\ 2y = 2z \\ x + 5y = 6z \end{cases}$

<u>Αλγεβρική επίλυση:</u>

Το παραπάνω σύστημα επιλύεται με διαδοχικές αντικαταστάσεις:

$$\begin{cases} x = z \\ y = z \\ z + 5z = 6z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ 6z = 6z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = z \\ \\ \end{cases}$$

Επομένως, το σύστημα έχει λύση της μορφής: $(x, y, z) = (\alpha, \alpha, \alpha)$, όπου α θετικός ακέραιος αφού εκφράζει τον αριθμό μορίων χημικών ενώσεων.

Θέτοντας για α=1 παίρνουμε τη λύση $(x, y, z) = (1,1,1)$ άρα έχουμε τη χημική αντίδραση:

$$CaO + N_2O_5 \rightarrow Ca(NO_3)_2$$

4) **Πρόβλημα Βιολογίας:**

Ένα τμήμα DNA έχει 10 φωσφοδιεστερικούς δεσμούς και 15 δεσμούς υδρογόνου. Πόσες A, G, C, T περιέχει;

Λύση:

Ένας φωσφοδιεστερικός δεσμός σχηματίζεται μεταξύ δύο νουκλεοτιδίων της ίδιας αλυσίδας. Άρα οι 10 φωσφοδιεστερικοί δεσμοί προϋποθέτουν την ύπαρξη 12 νουκλεοτιδίων, 6 σε κάθε κλώνο. Έτσι: $A + T + G + C = 12$. Λόγω του κανόνα της συμπληρωματικότητας των βάσεων ισχύει: $A = T$ και $G = C$. Άρα η εξίσωση γράφεται: $2A + 2G = 12$.

Μεταξύ A και T σχηματίζονται 2 δεσμοί H, ενώ μεταξύ G και C σχηματίζονται 3 δεσμοί H. Επομένως για τους 15 δεσμούς H θα ισχύει: $2A + 3G = 15$.

Επομένως για τις δύο μέρες προκύπτει το σύστημα: $\begin{cases} 2A + 2G = 12 \\ 2A + 3G = 15 \end{cases}$

<u>Αλγεβρική επίλυση:</u>

$$\begin{cases} 2A + 2G = 12 \\ 2A + 3G = 15 \end{cases} \Bigg| \cdot (-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2A - 2G = -12 \\ 2A + 3G = 15 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις έχουμε:

$$-2A + 2A - 2G + 3G = -12 + 15 \Rightarrow -G = -3 \Rightarrow G = 3$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση $2A + 3G = 15$ έχουμε:

$$2A + 3 \cdot 3 = 15 \Rightarrow 2A = 15 - 9 \Rightarrow A = 3$$

Επομένως, το τμήμα DNA περιέχει 3 Αδενίνες, 3 Θυμίνες, 3 Γουανίνες και 3 Κυτοσίνες .

Στο υπάρχον πρόγραμμα σπουδών οι ώρες που διατίθενται για την επίλυση προβλημάτων και ειδικότερα συστημάτων γραμμικών εξισώσεων είναι τόσες λίγες που δεν υπάρχει το χρονικό περιθώριο για τους μαθητές να αναρωτηθούν, αναλύσουν και σχεδιάσουν εξισώσεις και να επιλύσουν προβλήματα που συνδέονται με την καθημερινότητα. Οι κλασικές μέθοδοι διδασκαλίας με κιμωλία και πίνακα καλύπτουν μόνο την μεθοδολογία επίλυσης των συστημάτων και όχι την διδασκαλία τους σε βάθος. Η βούληση που επικρατεί για την αλλαγή της οπτικής στο θέμα αυτό φαίνεται και από το περιεχόμενο του νέου προγράμματος σπουδών.

2.2 Προτάσεις νέου Προγράμματος Σπουδών

Σύμφωνα με την τελευταία πράξη του ΙΕΠ προτάθηκαν νέοι οδηγοί σπουδών (ΠΣ) με σκοπό να διαμορφωθεί νέο πρόγραμμα σπουδών από το δημοτικό έως το λύκειο. Σύμφωνα με τις ανακοινώσεις του ΙΕΠ 2021 φαίνονται τα ακόλουθα:

Α. Φυσιογνωμία και σκοποί του μαθήματος

Βασική στόχευση του νέου ΠΣ είναι ο μαθηματικός τρόπος σκέψης, δηλαδή ικανότητα των μαθητές να διαχειρίζονται τα βασικά δομικά στοιχεία των μαθηματικών. Και σύμφωνα με τους εισηγητές του ΠΣ, οι βασικοί σκοποί του μαθήματος είναι:

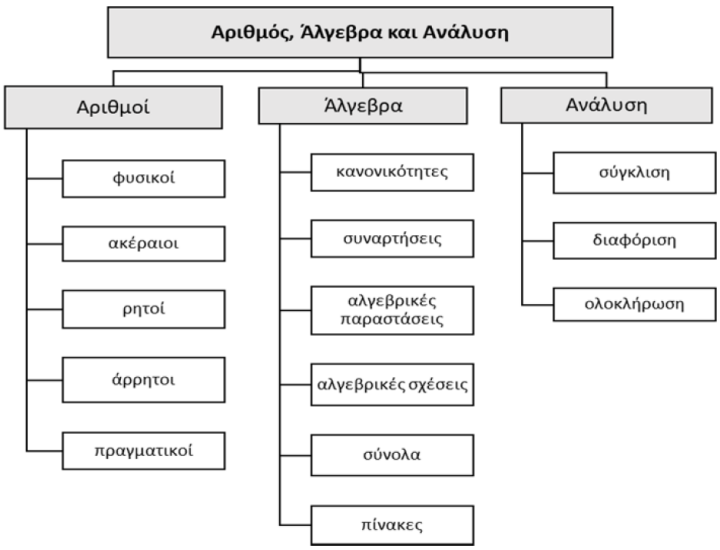
- Εκτίμηση και απόδοση αξίας στα Μαθηματικά
- Ανάπτυξη μαθηματικών διεργασιών και πρακτικών
- Αξιοποίηση ποικιλίας πόρων και εργαλείων
- Αναγνώριση συνδέσεων μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων πεδίων την ανθρώπινης γνώσης και δράσης και εκτίμηση των Μαθηματικών ως προσπελάσιμο και ενδιαφέρον πεδίο μελέτης
- Χρησιμοποίηση με αυτοπεποίθηση και εμπιστοσύνη των Μαθηματικών για την κατανόηση με κριτικό τρόπο του κόσμου. Στην κατεύθυνση αυτή γίνεται συλλογή, ανάλυση, οργάνωση και αξιολόγηση δεδομένων, ελέγχοντας τις πηγές προέλευσης τους και υπερασπίζοντας τις απόψεις τους. Έτσι, οι μαθητές δρουν ως υπεύθυνοι πολίτες.
- Κατανόηση και αξιοποίηση του μαθηματικού λόγου, εντοπίζοντας κρίσιμες μαθηματικές ιδέες, αναλύοντας και ερμηνεύοντας διαφορετικά αναπαραστατικά συστήματα.

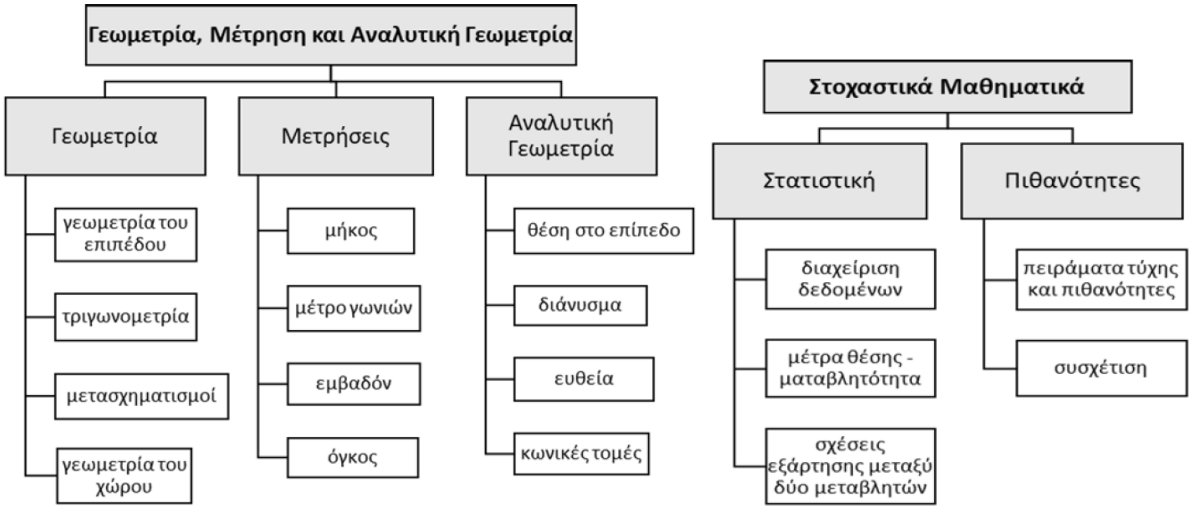
Β. Διδακτική Πλαισίωση– Σχεδιασμός Μάθησης

Το νέο πρόγραμμα σπουδών υποστηρίζει πέρα από την αυστηρή προσέγγιση στην μάθηση των μαθηματικών και την αλληλεπίδρασή τους με τις άλλες επιστήμες. Βοηθά τους μαθητές να διατυπώσουν και να επιλύσουν βασικά αλλά και ολοένα πιο περίπλοκα προβλήματα εντός και εκτός του χώρου των μαθηματικών. Το πρόγραμμα σπουδών επιδιώκει να προσφέρει πολλαπλούς τρόπους συμμετοχής των μαθητών μέσα στη σχολική τάξη, με στόχο τη βελτίωση του μαθηματικού εγγραμματισμού, δηλαδή της ικανότητας των μαθητών να αναλύουν, να ερμηνεύουν, και να συνδέουν τα προβλήματα της καθημερινότητας, ώστε να μπορούν να λαμβάνουν αποφάσεις. Αυτή η στόχευση του νέου ΠΣ συμφωνεί με τις θέσεις του Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD, 2016, p. 5). Για το λόγο αυτό και η πρόταση που υιοθετείται ως προς τη διαδικασία της αξιολόγησης είναι η «αξιολόγηση για μάθηση», δηλαδή μία διαδικασία που δεν θα βασίζεται εξ ολοκλήρου στη «βαθμολογία», «μέτρηση», «συμπλήρωμα διδασκαλίας», αλλά σε έναν μηχανισμό συνεχούς αποτίμησης και ανατροφοδότησης της μάθησης και της διδασκαλίας.

Γ . Διαμόρφωση ύλης στη δευτεροβάθμια

Στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο η ύλη των Μαθηματικών διαμορφώνεται, ανά τομέα, σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα.





Εικόνα 2.2 : Διαγραμματική παράσταση της διαμόρφωσης της ύλης των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Σε κάθε τάξη η ύλη οργανώνεται σε τρεις ενότητες που είναι: 1) η Άλγεβρα, 2) Γεωμετρία και 3) Στοχαστικά Μαθηματικά (Εικόνα 2.2). Το βάθος ανάλυσης της κάθε ενότητας από τάξη σε τάξη γίνεται όλο και μεγαλύτερο και η προσέγγιση αποκτά αυξανόμενη πολυπλοκότητα.

Δ. Αναλυτική απεικόνιση του Προγράμματος Σπουδών

Όσον αφορά την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων οι θεματικές ενότητες, τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα και οι ενδεικτικές δραστηριότητες που προτείνει το νέο πρόγραμμα σπουδών (ΙΕΠ, 2021) φαίνονται στους παρακάτω πίνακες. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι από την πρώτη Γυμνασίου τα παιδιά έρχονται σε επαφή με ψηφιακά εργαλεία μάθησης, ένα εκ των οποίων είναι και το Geogebra, με αποτέλεσμα η επίλυση εξισώσεων και η επίλυση συστημάτων να μπορεί να γίνει απλά και σύντομα. Ταυτόχρονα, οι ενδεικτικές δραστηριότητες που προτείνονται συμπεριλαμβάνουν τη αξιοποίηση ρεαλιστικών παραδειγμάτων για αποδοτικότερη αφομοίωση της αντίστοιχης ύλης

Στην Α' γυμνασίου εισάγεται η έννοια της εξίσωσης και η μοντελοποίηση απλών προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων.

Α' Γυμνασίου			
Θεματικό πεδίο	**Θεματικές Ενότητες**	**Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
ΑΡΙΘΜΟΙ	Αλγεβρικές σχέσεις	Να επιλύουν εξισώσεις της μορφής αχ+β=γ με εφαρμογή των ιδιοτήτων της διατήρησης της ισότητας και των πράξεων. Να επιλύουν προβλήματα της καθημερινής ζωής με εξισώσεις της μορφής αx+β=γ αριθμητικά, μέσω κατάλληλων μοντέλων και αλγεβρικά με τις ιδιότητες της ισότητας. Να συνθέτουν προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις της μορφής αx+β=γ.	Έργα μοντελοποίησης - μαθηματικοποίησης που μπορούν να αφορούν γνώριμες στους/στις μαθητές/-τριες καταστάσεις και η λύση τους να απαιτεί επίλυση απλής γραμμικής εξίσωσης, όπως η εύρεση του χρόνου ομιλίας ενός κινητού τηλεφώνου, αν είναι δεδομένα τα πάγια και η χρέωση ανά λεπτό. Η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας μπορεί να υποβοηθήσει την κατανόηση ιδιοτήτων της ισότητας και της ισοδυναμίας μέσω κατάλληλων μοντέλων (όπως της ζυγαριάς, της μπάρας κ.λπ.). **Πηγές μπορούν να είναι το φωτόδεντρο ή το GeoGebra**: https://www.geogebra.org/ m/etjvekuy https://www.geogebra.org/ m/PfkuZ79f https://www.geogebra.org/ m/xfqjck9q

Στη Β΄ γυμνασίου προτείνεται οι μαθητές να έρθουν σε επαφή για πρώτη φορά με συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Β' Γυμνασίου			
Θεματικό πεδίο	**Θεματικές Ενότητες**	**Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
ΑΛΓΕΒΡΑ	Αλγεβρικές σχέσεις	Να αναγνωρίζουν τους όρους: εξίσωση πρώτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, πρώτο και δεύτερο μέλος, ισοδύναμες εξισώσεις, άγνωστος, λύση ή ρίζα. Να επιλύουν εξισώσεις της μορφής αx+β=γx+δ με εφαρμογή των ιδιοτήτων διατήρησης της ισότητας και των πράξεων. Να συνθέτουν προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις της μορφής αx+β=γx+δ με άγνωστο και στα δύο μέλη.	
	Συναρτήσεις.	Να αναγνωρίζουν σε καταστάσεις της καθημερινότητας μεγέθη που συμμεταβάλλονται και να διακρίνουν ποιο μέγεθος καθορίζει το άλλο. Να εξετάζουν αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Να υπολογίζουν αλγεβρικά και να εκτιμούν γραφικά τις τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως. Να επιλύουν (γραφικά και αλγεβρικά) προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης y=αx+β. Να επιλύουν γραφικά εξισώσεις της μορφής αx+βy=γ.	Μετάφραση **ρεαλιστικών καταστάσεων** σε αλγεβρικές παραστάσεις και συναρτήσεις. Αξιοποίηση συγκεκριμένων υλικών ή/και οπτικών αναπαραστάσεων και σύνδεση ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις. Αξιοποίηση **ψηφιακών περιβαλλόντων** ώστε να διερευνήσουν οι μαθητές/-τριες στη συνάρτηση y=αx+β τον ρόλο των μεταβλητών , x, y καθώς και των παραμέτρων α και β.

Στην Γ' γυμνασίου οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων και από άλλες επιστήμες καθώς και από την καθημερινή ζωή.

Γ' Γυμνασίου			
Θεματικό πεδίο	**Θεματικές Ενότητες**	**Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
ΑΡΙΘΜΟΙ, ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ	Άλγεβρα/ Συναρτήσεις.	Να αναγνωρίζουν γραμμικές εξισώσεις της μορφής αx+βy=γ και να τις ερμηνεύουν γραφικά.	
		Να επιλύουν γραφικά προβλήματα με γραμμικά συστήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους. **Να διερευνούν και να ερμηνεύουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα και το πλήθος των λύσεων του.** **Να χρησιμοποιούν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων για να επιλύουν προβλήματα.**	Έργα **μοντελοποίησης** και επίλυσης προβλημάτων τα οποία μπορεί να προέρχονται από άλλα πεδία των Μαθηματικών, από άλλες επιστήμες και από την **καθημερινή ζωή** και μοντελοποιούνται με εξισώσεις
	Άλγεβρα/ Αλγεβρικές σχέσεις	Να αναγνωρίζουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και να εξετάζουν αν ένα ζεύγος αριθμών είναι λύση του. Να επιλύουν το σύστημα αλγεβρικά με τις μεθόδους των αντίθετων συντελεστών και της αντικατάστασης και να επαληθεύουν τη λύση με βάση το πλαίσιο του προβλήματος.	Έργα γραφικής επίλυσης γραμμικού συστήματος με τη βοήθεια της **ψηφιακής τεχνολογίας** εστιάζοντας στις πολλαπλές αναπαραστάσεις των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, καθώς και τις συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων (λεκτική εκφώνηση, αλγεβρικός τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση).

Η Β' λυκείου είναι η τελευταία σχολική χρονιά στην οποία τα γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα εξισώσεων αποτελούν αυτοτελές τμήμα της διδακτέας ύλης .

Β' Λυκείου Γενικής Παιδείας			
Θεματικό πεδίο	**Θεματικές Ενότητες**	**Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
ΑΛΓΕΒΡΑ	Αλγεβρικές σχέσεις	Επιλύουν αλγεβρικά μη γραμμικά συστήματα με δύο αγνώστους και ερμηνεύουν γραφικά τις λύσεις. Χρησιμοποιούν συστήματα για τη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων. Ερμηνεύουν τις λύσεις τους στο πλαίσιο του προβλήματος και αιτιολογούν την άποψη τους. Κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα που επιλύονται με σύστημα.	Έργα τα οποία μοντελοποιούν φαινόμενα και καταστάσεις που επιλύονται με συστήματα αλγεβρικά ή/και γεωμετρικά.

Στο πνεύμα του νέου προγράμματος σπουδών στο **Κεφάλαιο 6** παρουσιάζονται δύο διεπιστημονικά φύλλα εργασίας για τη διδασκαλία της κατασκευής και επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με τη χρήση του Geogebra.

Κεφάλαιο 3 – Σχέση τεχνολογίας και διδασκαλίας

3.1 Ο ρόλος της τεχνολογίας στην εκμάθηση μαθηματικών

Είναι αναμφισβήτητο γεγονός ότι οι τεχνολογίες πληροφοριών και επικοινωνίας αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι των τεχνολογικά αναπτυγμένων κοινωνίων (Fraillon et al, 2014), όπου διάφορες νέες εφευρέσεις και νέες επινοήσεις, έχουν αλλάξει τον τρόπο της επικοινωνίας και έχουν επιδράσεις στην οικονομική, κοινωνική, και πολιτιστική ζωή μας, καθώς και στην εκπαίδευση (Asterhan & Rosenberg, 2015 OECD, 2015). Η τεχνολογία έπαιξε καθοριστικό ρόλο κατά τη διάρκεια της πανδημίας του Covid-19 σε πολλούς τομείς της καθημερινής μας ζωής και ιδιαίτερα σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης με την εκτεταμένη χρήση του διαδικτύου και τις ποικίλες ψηφιακές πλατφόρμες που υποστήριξαν τη διεξαγωγή μαθημάτων εξ αποστάσεως (Seufert et al, 2021). Η πρόσφατη αυτή εμπειρία με την αναγκαία χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση έχει κάνει πιο αισθητή τη σημασία για μια τεχνολογική αλλαγή από τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας, καθώς τα νέα ψηφιακά εργαλεία δημιουργούν εκπαιδευτικά περιβάλλοντα, στα οποία οι μαθητές θα μπορούν να αναπτύσσουν κατάλληλες δεξιότητες για να μπορούν να συμμετέχουν στην έντονα ψηφιοποιημένη κοινωνία (Cöster & Westelius, 2016).

Στην Ευρώπη, στις τάξεις δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, τα τεχνολογικά εργαλεία, όπως οι υπολογιστές, τα tablet, τα κινητά τηλέφωνα, το διαδίκτυο, οι ψηφιακές πλατφόρμες και τα λογισμικά, χρησιμοποιούνται ευρύτερα, ιδιαίτερα την τελευταία δεκαετία επηρεάζοντας σε σημαντικό βαθμό τους τρόπους διδασκαλίας των καθηγητών, αλλά και τις δραστηριότητες εκμάθησης που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές (Olofsson et al, 2017). Η εξοικείωση τους με τα τεχνολογικά εργαλεία από νεαρή ηλικία θα τους βοηθήσει στο γίνουν τεχνολογικά εγγράμματοι και να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις της σύγχρονης κοινωνίας. Αυτό καθιστά καίριο το ρόλο των εκπαιδευτικών, οι οποίοι θα πρέπει να ενσωματώσουν αποδοτικά την τεχνολογία στην διδασκαλία τους, στηρίζοντας τους μαθητές τους στη διαδικασία εκμάθησης με τη συνειδητή και υπεύθυνη χρήση των τεχνολογικών εργαλείων (Castillo-Manzano et al, 2016).

3.2 Δυσκολίες ενσωμάτωσης της τεχνολογίας στη τάξη

Πάρα όλες τις θετικές επιδράσεις που έχουν αναφερθεί σχετικά με τη χρήση των τεχνολογιών στην διδασκαλία, υπάρχουν ορισμένα παραδείγματα στην βιβλιογραφία, όπου οι προσπάθειες για την ενσωμάτωση ψηφιακών εργαλείων στα σχολεία δεν ενίσχυσαν αυτομάτως τη διαδικασία διδασκαλίας, αλλά οδήγησαν και σε αρνητικά αποτελέσματα (Schneider et al, 2005). Πολλές έρευνες αναφέρουν ότι ένα βασικό πρόβλημα αποτελεί ο περιοριστικός τρόπος με τον οποίο οι καθηγητές χρησιμοποιούν τα ψηφιακά εργαλεία, μόνο ως μέσα παράδοσης, ακόμα και αν έχουν τις τεχνικές γνώσεις και την κατάλληλη εμπειρία, καταφεύγουν μόνο στην ψηφιοποίηση των διδασκομένων εννοιών (So & Kim, 2009), συντηρώντας έτσι τους παραδοσιακούς τρόπους διδασκαλίας (Selwyn et al, 2017). Αυτή η πρακτική δεν οδηγεί σε καμία ουσιαστική αλλαγή και στον εκσυγχρονισμό της διδακτικής διαδικασίας (Montrieux et al, 2015). Επιπλέον, η ενσωμάτωση και ο τρόπος χρήσης των νέων τεχνολογικών εργαλείων βασίζεται κυρίως στην ατομική επιλογή των καθηγητών και έτσι όταν ορισμένοι εκπαιδευτικοί συναντούν δυσκολίες, όπως η έλλειψη τεχνικών γνώσεων, η δυσκολία πρόσβασης στα ψηφιακά μέσα, η έλλειψη χρόνου, οι παγιωμένες πεποιθήσεις τους σχετικά με τον τρόπο διδασκαλίας, οδηγούνται στην επιλογή των παραδοσιακών μεθόδων που χρησιμοποιούσαν στην εκπαιδευτική διαδικασία (Dawson 2008, Walan, 2020).

Οι κυβερνήσεις πολλών χωρών έχουν επικεντρωθεί στην τεχνολογικό εκσυγχρονισμό των σχολείων, επενδύοντας κυρίως στον εξοπλισμό με σύγχρονα τεχνολογικά μέσα, προσδοκώντας μία άμεση βελτίωση των μαθησιακών επιδόσεων των μαθητών (Kearney et al, 2018). Η αναμενόμενη επιτυχία δεν επιβεβαιώθηκε από τα ευρήματα έρευνας σχετικά με τη σχέση της χρήσης υπολογιστών στις τάξεις και στις επιδόσεις των μαθητών, του Programme for International Student Assessment (PISA) το 2012. Μάλιστα, παρόλο που η αυξημένη χρήση υπολογιστών οδήγησε σε καλύτερες επιδόσεις των μαθητών, διαπιστώθηκε ότι η υπέρμετρη χρήση της τεχνολογίας μπορεί να οδηγήσει γενικά σε μειωμένες μαθησιακές επιδόσεις (OECD, 2015). Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι η αποδοτική ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην τάξη απαιτεί πέρα από την διαθεσιμότητα των ψηφιακών μέσων στα σχολεία, οι εκπαιδευτικοί να έχουν τις απαραίτητες δεξιότητες, γνώσεις και εμπειρία, ώστε να δημιουργήσουν τα κατάλληλα ψηφιακά εκπαιδευτικά περιβάλλοντα (OECD, 2017).

3.3 Στάσεις των καθηγητών απέναντι στη χρήση τεχνολογίας στην τάξη

Στον 21ο αιώνα οι νέες τεχνολογίες επηρεάζουν όλες τις εκφάνσεις της καθημερινότητας και δε θα μπορούσαν να απουσιάζουν και από το εκπαιδευτικό περιβάλλον. Τα τεχνολογικά μέσα συμβάλλουν σημαντικά στη βελτίωση της ποιότητας της διδασκαλίας αφού απευθύνονται σε όλα τα επίπεδα μαθητών και προσφέρουν μια σειρά δυνατοτήτων στο χρήστη για να αναπτύξει τις απαραίτητες δεξιότητες για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Όπως επισημαίνει ο NCTM (2000), η τεχνολογία διευκολύνει τους μαθητές να προσεγγίζουν τις μαθηματικές έννοιες και τα προβλήματα από διάφορες οπτικές, να αναπτύσσουν το συλλογισμό, την παρατηρητικότητα και τις ικανότητες επικοινωνίας τους και εν τέλει να μπορούν να κατανοούν καλύτερα τα προβλήματα που καλούνται να αντιμετωπίσουν εντός και εκτός τάξης (NRC, 2000). Παράλληλα, πολλαπλά είναι και τα οφέλη ως προς την απόκτηση γνώσεων τεχνολογίας όταν αυτή καθίσταται εργαλείο της διδασκαλίας των επιστημών, αφού οι μαθητές θα εξοικειώνονται από μικρή ηλικία με την χρήση των τεχνολογικών εργαλείων που αποτελούν έτσι και αλλιώς αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινής τους ζωής. (Furner & Marinas, 2007).

Η τεχνολογία στη διδασκαλία μαθηματικών και των επιστημών γενικότερα, προσφέρει πολυάριθμες δυνατότητες και αναβαθμίζει την ποιότητα μάθησης σε σύγκριση με τις παραδοσιακές μεθόδους (Zakaria et al, 2007). Με τη χρήση νέων τεχνολογικών μέσων και λογισμικών οι καθηγητές μπορούν να διαμορφώσουν στις τάξεις τους ένα περιβάλλον μάθησης σύγχρονο, ελκυστικό και κυρίως αποδοτικότερο σε σύγκριση με το παρελθόν. Βέβαια, η ένταξη της τεχνολογίας στη σχολική τάξη είναι μία πρόκληση που για να επιτευχθεί θα πρέπει να έχει οργανωθεί στρατηγικά. Ένα κατάλληλα δομημένο πλάνο μαθήματος θα είναι ευέλικτο ώστε να αξιοποιεί όλα τα διαθέσιμα εργαλεία διδασκαλίας, να κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών και παράλληλα να επικεντρώνεται με εύστοχες εφαρμογές στην αντίστοιχη έννοια που πρέπει να διδαχθεί (Niess, 2005). Επομένως, οι καθηγητές θα πρέπει, συμβαδίζοντας με τα δεδομένα της εποχής, να αναλάβουν ενεργό ρόλο στην προσπάθεια ενσωμάτωσης της τεχνολογίας στις τάξεις τους. Αυτό προϋποθέτει κατάλληλη εκπαίδευσή τους στη χρήση των νέων τεχνολογιών αλλά και στους αποδοτικούς τρόπους με τους οποίους μπορούν

να τις ενσωματώσουν στο μάθημά τους, πρωτίστως όμως να είναι έτοιμοι να δεχτούν τις αλλαγές που θα επέλθουν στον τρόπο με τον οποίο είχαν συνηθίσει να διδάσκουν. (Zulnaidi & Syed Zamri, 2017).

Η στάση που παρουσιάζουν οι καθηγητές απέναντι στις νέες τεχνολογίες, παίζει καθοριστικό ρόλο στη στρατηγική διδασκαλίας που θα ακολουθήσουν στο μάθημά τους, στο κατά πόσο θα επιλέξουν ή όχι τη χρήση τεχνολογικών μέσων και σε τι βαθμό θα συμβεί αυτό. (NCTM, 2000). Για το λόγο αυτό, οι πεποιθήσεις και οι αντιλήψεις των καθηγητών σχετικά με την ενσωμάτωση νέων τεχνολογικών εργαλείων στη διδασκαλία, αλλά και οι λόγοι πίσω από την όποια αρνητική τους στάση, θα πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη.

Οι απόψεις των καθηγητών σχετικά με την αξιοποίηση των τεχνολογικών εργαλείων γενικά διίστανται. Αρκετές έρευνες αναφέρουν τόσο οι καθηγητές όσο και οι μαθητές έχουν γενικά μια θετική στάση απέναντι στην ενσωμάτωση προγραμμάτων οπτικοποίησης μαθηματικών (Shadaan & Leong, 2013, Zakaria & Lee, 2012). Έρευνα του National Centre for Education Statistics το 2005 έδειξε ότι το 44% των καθηγητών μαθηματικών χρησιμοποιούσε τεχνολογία στη τάξη, με τη μορφή λογισμικών και προγραμμάτων οπτικοποίησης αλγεβρικών εννοιών. Υπάρχουν όμως και μελέτες που υπογραμμίζουν την παρουσία ενός μεγάλου ποσοστού καθηγητών που έχει ακόμα δυσκολίες με τη χρήση προγραμμάτων οπτικοποίησης μαθηματικών (Hohenwarter et al, 2010), αν και αυτά διατίθενται στις σχολικές μονάδες, οπότε δεν επιλέγουν να τα ενσωματώσουν στην καθημερινή τους διδασκαλία (Žilinskienė, 2015). Ως βασική δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι καθηγητές με τη χρήση νέων τεχνολογιών καταγράφεται η έλλειψη των προαπαιτούμενων τεχνολογικών δεξιοτήτων άρα και η έλλειψη αυτοπεποίθησης αξιοποίησης ενός εργαλείου που δεν τους είναι οικείο, αλλά και η έλλειψη χρόνου (Meng, 2012).

Η έλλειψη χρόνου αποτελεί έναν από τους κύριους ανασταλτικούς παράγοντες που καθιστά τους καθηγητές διστακτικούς ως προς το κατά πόσο είναι εφικτή η ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών στο μάθημα. Σε πολλές περιπτώσεις, καθηγητές δήλωναν πως, ενώ υπήρχε επάρκεια ψηφιακών μέσων στη σχολική μονάδα, εκείνοι αδυνατούσαν να τα εντάξουν στο μάθημα καθώς αντιμετώπιζαν δυσκολίες στη χρήση

τους λόγω ελλιπούς εξοικείωσης με αυτά (Hasse, 2017). Επιπλέον, ο περιορισμένος χρόνος που αντιστοιχεί, στο ακαδημαϊκό ημερολόγιο, σε κάθε μάθημα συνήθως δεν επαρκεί για την επιπλέον εκπαίδευση μαθητών και καθηγητών σε νέα τεχνολογικά εργαλεία, παράλληλα με τις ώρες που χρειάζονται για τις παραδόσεις της διδακτέας ύλης του μαθήματος (Simonsen & Dick, 1997). Σημειώνουν δε πως τέτοια εργαλεία θα πρέπει να επικουρούν το πρόγραμμα σπουδών και όχι να απαιτούν την επέκτασή του περιορίζοντας τις ώρες της παραδοσιακής διδασκαλίας.

Ένας άλλος βασικός παράγοντας που καθορίζει άμεσα το βαθμό αξιοποίησης της τεχνολογίας στη τάξη είναι η φιλοσοφία την οποία έχει ο κάθε καθηγητής ως προς την αποτελεσματικότερη μέθοδο διδασκαλίας του μαθήματός του. Σε έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί παρατηρείται η γενική τάση των καθηγητών να προτιμούν την εισαγωγή ψηφιακών μέσων στο μάθημα μόνο αφότου οι μαθητές έχουν αποκτήσει ισχυρές βασικές υπολογιστικές δεξιότητες λύνοντας με το χέρι όλα τα προβλήματα της αντίστοιχης ύλης που βρίσκονται στο σχολικό βιβλίο. Έτσι, η χρήση αριθμομηχανών ή αριθμομηχανών σχεδιαστικών προγραμμάτων επιτρέπονταν μετά το τέλος της κύριας διδασκαλίας με το αντικείμενο και όχι παράλληλα με αυτή (Goos, 2005). Επιπλέον, σε μικρότερες ειδικά τάξεις η χρήση ακόμα και αριθμομηχανών θα έκανε τους μαθητές, σύμφωνα με τους καθηγητές, αδρανείς και εξαρτώμενους από την τεχνολογία αφού θα έτειναν να επιλέγουν τον «εύκολο δρόμο» και θα παραμελούσαν την εξάσκηση για την ανάπτυξη των βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων (Dewey et al, 2009). Σύμφωνα με τους Lee και McDougall (2010) αρκετοί καθηγητές είναι ιδιαίτερα διστακτικοί στο να χρησιμοποιήσουν νέα τεχνολογικά εργαλεία γιατί νιώθουν ότι χάνουν τον έλεγχο της διδασκαλίας τους όταν το κάνουν. Αυτό συμβαίνει ειδικά σε περιπτώσεις που η παρουσία της τεχνολογίας ως εργαλείο διδασκαλίας μέσα στην τάξη δεν τους είναι οικεία εικόνα, αφού οι καθηγητές τείνουν να επιλέγουν να διδάξουν με τρόπο ανάλογο με τις μεθόδους που είχαν διδαχθεί και οι ίδιοι τα μαθηματικά.

Παρά τις παγιωμένες αντιλήψεις ως προς τις μεθόδους διδασκαλίας, οι καθηγητές στην πλειοψηφία τους είναι γενικά ανοικτοί στην ιδέα ενσωμάτωσης νέων τεχνολογικών εργαλείων στη τάξη μιας και αναγνωρίζουν τα πλεονεκτήματα που θα τους προσφέρουν (Wachira & Keengwe, 2011). Ιδιαίτερα καθηγητές μεγαλύτερης ηλικίας και με περισσότερα χρόνια εμπειρίας, δήλωναν πως αν και θα ήθελαν να αναβαθμίσουν

τεχνολογικά τη διδασκαλίας τους συναντούν πρακτικές δυσκολίες καθώς δεν διαθέτουν τις απαραίτητες τεχνολογικές δεξιότητες για να το υλοποιήσουν (Dewey et al, 2009). Η απουσία εξειδίκευσης των καθηγητών γίνεται αισθητή ιδιαίτερα αν αναλογιστεί κανείς πως πέρα από τα εμπόδια που συναντούν κατά τη χρήση ηλεκτρονικών μέσων, δεν διαθέτουν και τις απαραίτητες παιδαγωγικές γνώσεις ως προς τις ενέργειες που απαιτούνται για την αποδοτική ενσωμάτωση εργαλείων, όπως τα προγράμματα λογισμικού, στο μάθημά τους, αλλά ούτε τους έχουν δοθεί οι απαραίτητες οδηγίες για το σχεδιασμό εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων εκμάθησης μίας έννοιας με χρήση των νέων εργαλείων (Agyei & Voogt, 2011). Επιτακτική κρίνεται, λοιπόν, η ανάγκη ουσιαστικής στήριξης των καθηγητών σε πρώτο επίπεδο για την επιμόρφωσή τους αλλά και στη συνέχεια η παροχή βοήθειας κατά τη χρήση νέων λογισμικών και τεχνολογικών εργαλείων, ενώ ταυτόχρονα θα προωθείται με κατάλληλες ενέργειες ακόμα και στους πλέον δύσπιστους η αξία των νέων δυνατοτήτων που μας προσφέρει η τεχνολογία και τα πολλαπλά οφέλη της στον αγώνα για ποιοτικότερη μάθηση των επιστημών (Cuban et al 2001, Oldknow & Taylor, 2000).

3.4 Θετικές επιδράσεις της τεχνολογίας στη διδασκαλία

Τις τελευταίες δεκαετίες πλήθος ερευνητών έχουν μελετήσει τα αποτελέσματα της εισαγωγής νέων τεχνολογικών εργαλείων στο εκπαιδευτικό σύστημα (Lesmeister, 1996, Weber, 1998), με αρκετές από αυτές τις έρευνες να τονίζουν τις θετικές τους επιδράσεις, τόσο ως εξαιρετικά διδακτικά εργαλεία στα χέρια των καθηγητών, αλλά και ως ευέλικτα μέσα διερευνητικής εκμάθησης για τους μαθητές (Balanskat et al (2013), Ditzler et al (2016)). Μια από τις βασικές χρήσεις της τεχνολογίας στην εκπαίδευση είναι η ψηφιοποίηση και οπτικοποίηση των αφηρημένων επιστημονικών εννοιών, τις οποίες οι μαθητές θα δυσκολευόταν να φανταστούν και να κατανοήσουν με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας, βοηθώντας έτσι στη δημιουργία πιο ουσιαστικών πλαισίων που ενισχύουν τη διαδικασία εκμάθησης (Varma et al, 2008). Επιπλέον, η χρήση ψηφιακών εργαλείων στις τάξεις παρέχει αυξημένες δυνατότητες στους μαθητές για τη συνεργατική αναζήτηση σε ενημερωμένες επιστημονικές πήγες πληροφοριών, στηρίζει την ενεργή συμμετοχή, το διάλογο, την κριτική αναθεώρηση και δόμηση επιχειρημάτων, την παρουσίαση των ιδεών, και εν τέλη την κατανόηση μιας επιστημονικής έννοιας,

μετατρέποντας την εκπαίδευση περισσότερο σε μαθητο-κεντρική (Traxler (2010), Goos et al (2003)). Άλλες χρήσεις των ψηφιακών μέσων περιλαμβάνουν διαδικτυακά μαθήματα, quizzes , λογισμικά, βάσεις δεδομένων, και εκπαιδευτικά ηλεκτρονικά παιχνίδια που παρέχουν μία διαφορετική εμπειρία εκμάθησης, η οποία παρακινεί και αυξάνει το δημιουργικό ενδιαφέρον των μαθητών (Bakar (2010), Shaffer (2006)). Μέσω αυτών των εργαλείων οι καθηγητές από τη μεριά τους αποκτούν καλύτερο έλεγχο της διδασκαλίας και παίρνουν το ρόλο του συμβούλου και διαμεσολαβητή. Στηρίζουν τους μαθητές τους στην εκμάθηση, παρακολουθώντας την διαδικασία σκέψης και τις επιδόσεις τους, εντοπίζοντας ευκολότερα πιθανές μαθησιακές δυσκολίες, εμπνέοντας το σεβασμό στη διαφορετικότητα (φύλλο, μειονότητες, αναπηρίες) και εξαλείφοντας πιθανές διακρίσεις που μπορεί να υπάρχουν σε μια παραδοσιακή τάξη (Hanımoğlu (2018), Walan (2020)).

3.5 Παιδαγωγικές επιδράσεις της τεχνολογίας στους μαθητές

Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στις τάξεις των Μαθηματικών έχει θετικές επιδράσεις στις επιδόσεις των μαθητών, παρακινώντας το ενδιαφέρον και τη συμμετοχή τους στο μάθημα (Wawan et al, 2018). Η εκμάθηση των μαθηματικών γίνεται πιο ελκυστική, διότι τα ψηφιακά μέσα βοηθούν στην οπτικοποίηση και εν τέλει στην κατανόηση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας τεχνολογικά εργαλεία κατά την εκμάθηση, αποκτούν ένα πιο ενεργό ρόλο, συνεργάζονται, και ξεπερνούν τις δυσκολίες και τα άγχη τους, με αποτέλεσμα η μάθηση να γίνεται πιο ευχάριστη και πιο παραγωγική (Ruthven et al, 2009) .

Υπάρχουν αρκετές έρευνες τη τελευταία δεκαετία σχετικά με τις επιδράσεις δυναμικών λογισμικών γεωμετρίας, όπως το Geogebra, στους μαθητές μαθηματικών (Munakata & Vaidya, 2012). Το Geogebra, δεδομένου ότι επιτρέπει την οπτικοποίηση των εννοιών και τους εύκολους μετασχηματισμούς στα διαγράμματα που παρουσιάζονται, ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση των εννοιών μέσω της διαδικασίας διερευνητικής μάθησης (Stupel & Ben-Chaim, 2014). Οι μαθητές με τη χρήση του Geogebra μπορούν συνεργατικά

να δημιουργήσουν και να τεστάρουν υποθέσεις τροποποιώντας σε άμεσο χρόνο τις παραμέτρους των μαθηματικών προβλημάτων, με αποτέλεσμα να διεγείρεται το ενδιαφέρον τους για το μάθημα (Disbudak & Akyuz, 2019). Μέσω του Geogebra οι μαθητές αποκτούν καλύτερο έλεγχο των βημάτων που ακολουθούν για την επίλυση ενός προβλήματος (Takaci et al, 2015), και μπορούν να προσεγγίσουν σε γρήγορο χρόνο τις δυναμικές σχέσεις μεταξύ των αλγεβρικών, γραφικών, και αριθμητικών εννοιών, (Haciomeroglu et al, 2009), κάτι που συμβαδίζει με την εποικοδομητική φιλοσοφία εκμάθησης (Ogbonnaya & Mushipe, 2020). Η αποδοτική ενσωμάτωση του Geogebra στις τάξεις κάνει το μάθημα πιο ευχάριστο για τους μαθητές (Dockendorff & Solar, 2018) και μπορεί να συμβάλλει στη μείωση του μαθηματικού άγχους (Beilock & Willingham, 2014).

Λογισμικά, όπως το GeoGebra, παρέχουν πολυάριθμες δυνατότητες για οργάνωση δραστηριοτήτων στην τάξη που στοχεύουν στην εξοικείωση των μαθητών με την αναπαράσταση μαθηματικών όρων (Tamam & Dasari, 2021). Με τον τρόπο αυτό αποτελούν ένα χρήσιμο βοήθημα στην οργάνωση και διδασκαλία των φυσικών επιστημών (STEM) στο σύνολό τους (Kramarenko, Pylypenko, & Zaselskiy, 2020). Το GeoGebra, βοηθά τους μαθητές να δημιουργήσουν κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο για κάθε πρόβλημα και να αναπτύξουν ένα πλάνο προσέγγισής του. Παράλληλα, τους επιτρέπουν αξιοποιώντας οπτικά ερεθίσματα να σχεδιάσουν στρατηγικές επίλυσης αλγεβρικών συστημάτων που σχετίζονται με αφηρημένες έννοιες και έχουν προκύψει από προβλήματα όλων των φυσικών επιστημών (Bayazit & Aksov, 2010).

Σε μελέτες που έγιναν σχετικά με τη χρήση του GeoGebra στη τάξη, οι μαθητές όλων των γνωστικών επιπέδων που χρησιμοποιούσαν προγράμματα οπτικοποίησης έδειξαν να έχουν γενικώς καλύτερη εννοιολογική αντίληψη των όσων διδάσκονταν, σε σχέση με μαθητές που δεν είχαν στη διάθεσή τους οπτικά μέσα. Οι μαθητές που χρησιμοποιούσαν GeoGebra μπορούσαν εύκολα να αναπαραστήσουν αφηρημένες επιστημονικές έννοιες και να βρουν σχέσεις μεταξύ τους (Antohe, 2009).

Κεφάλαιο 4 – Η οπτικοποίηση μαθηματικών εννοιών

Η διδασκαλία μαθηματικών συνδέεται με την έννοια της αντίληψης του χώρου, που χρησιμοποιείται για την κατανόηση αφηρημένων εννοιών μέσω της αναπαράστασής τους με σύμβολα και διαγράμματα. Αυτός ο τύπος συλλογισμού περιλαμβάνει την ικανότητα δημιουργίας και επεξεργασίας χωρικών πληροφοριών στο μυαλό ενός ανθρώπου με βάση μια νοερή εικόνα, που περιγράφεται με τον όρο «οπτικοποίηση» (Presmeg, 2006). Η «οπτικοποίηση» αφορά τη διαδικασία δημιουργίας και ερμηνείας μιας εικόνας, ή ενός αντικειμένου, ή μιας έννοιας, είτε νοητικά είτε με τη χρήση τεχνολογικών εργαλείων, με στόχο την απεικόνιση και μετάδοση πληροφορίας, την ανάπτυξη ιδεών, και την κατανόηση εννοιών (Presmeg (2020), Fekete et al. (2008)).

4.1 Επίδραση της οπτικοποίησης μαθηματικών εννοιών στην εκπαίδευση

Η χρήση της οπτικοποίησης στην εκπαίδευση θεωρείται ως ένας βασικός τρόπος εκμάθησης μαθηματικών (Fischbein (1987), Bishop (1988)). Η χρήση οπτικών μέσων κατά τη διδασκαλία δίνει η ευκαιρία στους μαθητές να καλλιεργήσουν νέους τρόπους έκφρασης των ιδεών τους σε περιπτώσεις που οι λέξεις και τα νούμερα δεν επαρκούν, αναπτύσσοντας έτσι οπτικό γραμματισμό (visual literacy) (Avgerinou & Ericson, 1997). Επιπλέον, υποβοηθούν την αποτελεσματικότερη διδασκαλία για ένα εύρος διαφορετικών μαθητικών αναγκών αφού ενισχύουν την οπτική μάθηση παράλληλα με την λεκτική δίνοντας πρόσβαση στην πληροφορία σε μαθητές με διαφορετική μαθητική αντίληψη (Murphy, 2019).

Η εκμάθηση μέσω της οπτικοποίησης στηρίζεται στη διαμόρφωση νέων ιδεών διεγείροντας τις αισθήσεις των μαθητών, θέτοντάς τους σε θέση όχι απλού ακροατή αλλά ενεργού συμμετέχοντα και δημιουργού. Τα οφέλη της είναι πολλαπλά αφού αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο μάθησης, καθώς αναπτύσσει δεξιότητες όπως η παρατήρηση, ανάλυση, αντίληψη και έκφραση. Δίνοντας στους μαθητές οπτικά παραδείγματα που συνδέονται με μια αφηρημένη μαθηματική έννοια, τους επιτρέπει να τη μελετήσουν και, αποδομώντας τη, να ερμηνεύσουν τις πληροφορίες που παρουσιάζει,

με τελικό στόχο να οδηγηθούν σε καλύτερη κατανόηση και ανάπτυξη των μαθηματικών τους δεξιοτήτων (Murphy, 2019). Ταυτόχρονα, οι μαθητές είναι σε θέση να ανακαλύψουν σχέσεις μεταξύ εννοιών, φαινομένων, και διαδικασιών. Η οπτικοποίηση έχει συσχετιστεί στη βιβλιογραφία με την ενίσχυση της νόησης μέσω της αύξησης της μνήμης, της μείωσης του χρόνου εύρεσης πληροφορίας και αναγνώρισης μοτίβων και της διαδικασίας κωδικοποίησης πληροφοριών σε ένα διαδραστικό μέσο (Card et al, 1998). Παράλληλα, τα οπτικά μέσα μπορούν να δείξουν πως τα Μαθηματικά εφαρμόζονται στον έξω κόσμο και πως είναι σχετικά με την καθημερινή ζωή των μαθητών (Kohen και Orenstein, 2021).

4.2 Διαδραστικά μέσα οπτικοποίησης

Ένα στατικό σχήμα, σχεδιασμένο στο χαρτί, έχει δομηθεί ικανοποιώντας συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες και αποτελεί απεικόνιση από μια μόνο οπτική γωνία. Αντιθέτως, λογισμικά οπτικοποίησης επιτρέπουν τη δημιουργία δυναμικών και εύκολα μεταβλητών γεωμετρικών σχημάτων που μπορούν να αποδίδουν αρτιότερα έννοιες που παρουσιάζονται σε δύο ή τρεις διαστάσεις, βοηθώντας στην κατανόηση τους (Leung, 2008). Η αλληλεπίδραση των μαθητών με προγράμματα οπτικοποίησης, όπως για παράδειγμα εργαλεία σχεδίασης, ενισχύει την περιέργειά τους, ιδιαίτερα στην περίπτωση μαθητών μικρής ηλικίας. Τέτοια λογισμικά ελκύουν τους μαθητές ώστε να συμμετάσχουν ενεργά στην εκπαίδευσή τους και να έρθουν σε πρακτική αλληλεπίδραση με τις μαθηματικές έννοιες, να κάνουν εύκολα συγκρίσεις γεωμετρικών σχημάτων με άλλα φυσικά αντικείμενα και να κατανοήσουν πιο αφηρημένες μαθηματικές σχέσεις (Furner & Marinas, 2007). Έτσι, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να πειραματιστούν μεταβάλλοντας τις διαστάσεις, τα χαρακτηριστικά και το είδος των αναπαραστάσεών τους, με αποτέλεσμα να αντιλαμβάνονται πιο σφαιρικά το φαινόμενο που διδάσκονται (Hill & Hannafin, 2001). Σύμφωνα με τον Santos-Trigo (2004), η ενεργή χρήση εργαλείων οπτικοποίησης από τους μαθητές μπορεί να επιταχύνει την ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης και την εξέλιξη της από ένα επίπεδο ενστίκτου (συμβολισμός) σε ένα πιο αφηρημένο και επαγωγικό επίπεδο. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές μπορούν να πειραματίζονται με τα μέσα οπτικοποίησης δυναμικών γεωμετρικών σχημάτων δημιουργώντας συνθήκες «εργαστηρίου» για το μάθημα των μαθηματικών (Tabach, 2011).

Κεφάλαιο 5 – Εισαγωγή και εξοικείωση με το λογισμικό Geogebra

5.1 Εισαγωγή στο GeoGebra

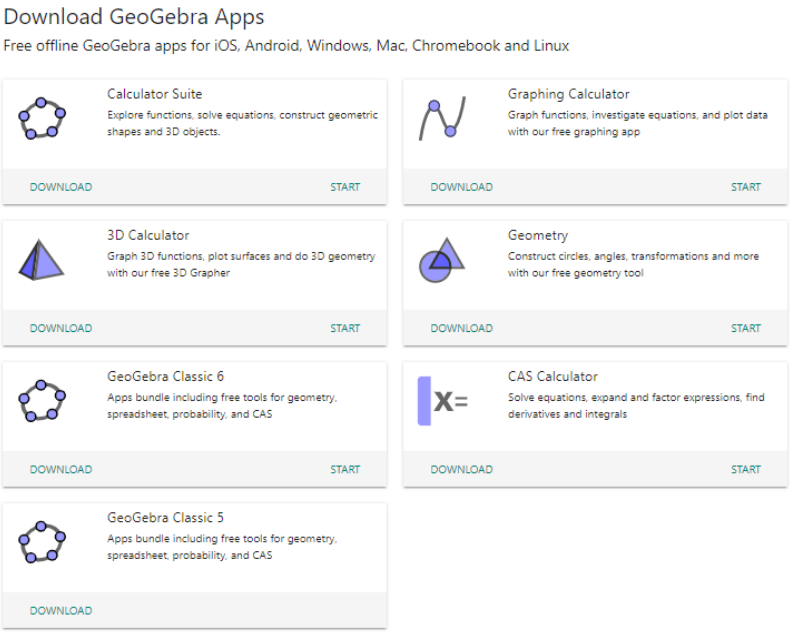
Το GeoGebra είναι ένα διαδραστικό λογισμικό που προσφέρει πολλαπλά μαθηματικά εργαλεία, ανταποκρινόμενο σε εκπαιδευτικές ανάγκες που ξεκινούν από το δημοτικό και φτάνουν ως και το πανεπιστημιακό επίπεδο. Το ευρύ φάσμα υπολογιστικών και γραφικών δυνατοτήτων του καλύπτει τις διδακτικές απαιτήσεις των μαθηματικών και γενικότερα των θετικών επιστημών και της μηχανικής. Η κατασκευή γραφημάτων στο επίπεδο και το χώρο, τα υπολογιστικά φύλλα, οι υπολογισμοί σύνθετων αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων χάρη στις αριθμομηχανές που διαθέτει, είναι μόνο μερικά από τα πλεονεκτήματά του. Το δυναμικό περιβάλλον από το οποίο αποτελείται είναι φιλικό προς το χρήστη, ο οποίος μπορεί να επέμβει, μεταβάλλοντας δεδομένα ή τροποποιώντας παραμέτρους και να λαμβάνει απευθείας τα αποτελέσματα αποτυπωμένα παραστατικά στην οθόνη του.

Παρακάτω παρατίθενται οι οδηγίες που αφορούν μόνο στην επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη χρήση του Geogebra. Αυτές οι οδηγίες χρήσης καθώς και μία εισαγωγική παράγραφος σχετικά με το Geogebra θα πρέπει να δίνονται στους χρήστες πριν από κάθε διαθεματικό φύλλο εργασίας, ώστε να χρησιμοποιούνται οι δυνατότητες του λογισμικού πλήρως.

5.2 Εκκίνηση του λογισμικού GeoGebra

Α) Εγκατάσταση εφαρμογής τοπικά

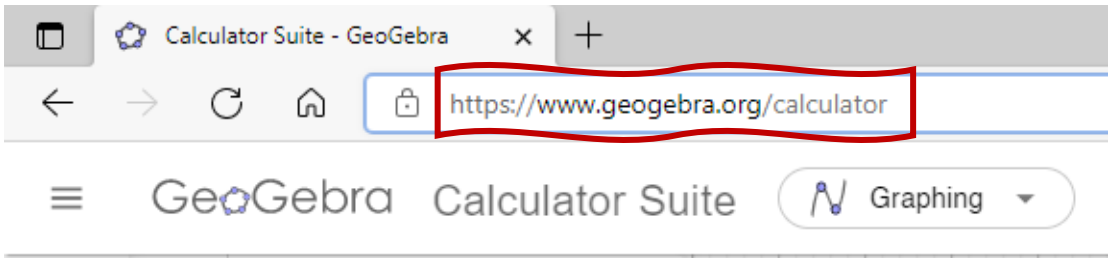
Από την διεύθυνση : [App Downloads – GeoGebra](https://www.geogebra.org/download) (https://www.geogebra.org/download) μπορούμε να επιλέξουμε και να κατεβάσουμε όποια εφαρμογή είναι κατάλληλη για να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση των προβλημάτων.



Β) Εκκίνηση εφαρμογής στο διαδίκτυο

Αν υπάρχει διαθέσιμη σύνδεση διαδικτύου το πρόγραμμα μπορεί να “τρέξει” χωρίς να απαιτείται καμία εγκατάσταση σε τοπικό δίσκο. Αρκεί σε έναν φυλλομετρητή να εισάγουμε την διεύθυνση :

[Calculator Suite - GeoGebra](http://www.geogebra.org/calculator) (http://www.geogebra.org/calculator).



Τι είναι το GeoGebra Calculator Suite;

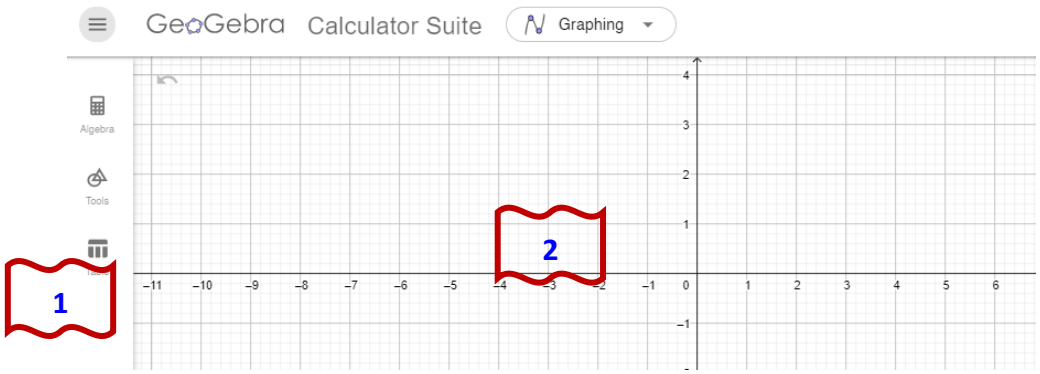
Το GeoGebra Calculator Suite είναι η εξέλιξη της παλαιότερης εφαρμογής GeoGebra Classic και είναι μία ολοκληρωμένη δυναμική μαθηματική εφαρμογή που συνδέει γεωμετρία και άλγεβρα και μπορεί να καλύψει όλες τις απαιτήσεις στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση και όχι μόνο.

Συνοπτικά με την εφαρμογή αυτή μπορούν να γίνουν:

- Μετρήσεις (μήκη , περίμετροι , εμβαδά)
- Επίλυση εξισώσεων (ρίζες, ελάχιστα, μέγιστα, κοινά σημεία)
- Επίλυση συστημάτων
- Γραφική παράσταση συναρτήσεων, εξισώσεων , επιφανειών σε 2D και 3D
- Παραγώγιση και ολοκλήρωση συναρτήσεων
- Δυναμικές γεωμετρικές κατασκευές
- Πίνακες τιμών
- Στατιστική

5.3 Εργαλεία του GeoGebra

Στην εκκίνηση του προγράμματος [Ver. 6.0.659.0-wsuite (2021)4.0] στην διεύθυνση: http://www.geogebra.org/calculator ο χρήστης βρίσκεται απέναντι από την οθόνη που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Η περιοχή 1 περιέχει τρεις ενεργές συνδέσεις:

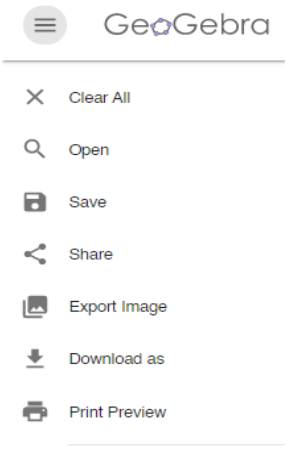
Α) Algebra : Χρησιμοποιήστε το κουμπί για να ανοίξετε το παράθυρο για την εισαγωγή των εντολών χρησιμοποιώντας το πληκτρολόγιο.
Η γραφική αναπαράσταση των εντολών εμφανίζεται στην Προβολή γραφικών (περιοχή 2).

Β) Tools : Χρησιμοποιήστε το κουμπί για να επιλέξετε κατηγορίες εργαλείων GeoGebra και να δημιουργήστε νέα αντικείμενα στην προβολή γραφικών.

Γ) Table : Χρησιμοποιήστε το κουμπί για να ενεργοποιηθεί ο πίνακας τιμών για μια συνάρτηση.

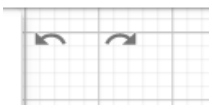
1. **Το Μενού (≡)**

Στην πάνω αριστερή άκρη της οθόνης θα βρείτε ένα ενεργό κουμπί : ≡ (Menu) που πατώντας το μπορείτε να :



- Να σβήσετε ότι έχετε κάνει στο τρέχον φύλλο
- Να ανοίξετε ένα αρχείο
- Να αποθηκεύσετε μία εργασία
- Να μοιραστείτε
- Να δημιουργήσετε μια εικόνα
- Να κατεβάσετε το τρέχον φύλλο με διαφορετική μορφή
- Να εκτυπώσετε

2. **Undo and Redo**

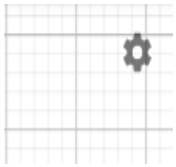


Από τη στιγμή που στην περιοχή 2 (προβολή γραφικών) έχει δημιουργηθεί ένα αντικείμενο, στην πάνω αριστερή γωνία εμφανίζονται τα βέλη Undo και Redo

Χρησιμοποιώντας το κουμπί : (Undo) μπορείτε να κάνετε βήματα πίσω και να αναιρέσετε μια πράξη.

Από τη στιγμή που επιλέξετε το κουμπί (Undo) ενεργοποιείται και το κουμπί (Redo) για να μη χαθεί κανένα βήμα.

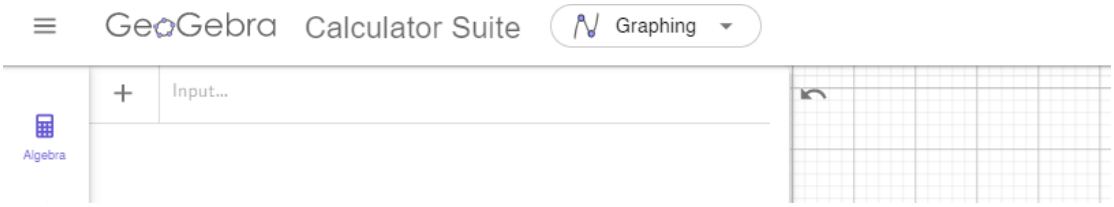
3. Ρυθμίσεις γραφικών (Settings)



Στην πάνω δεξιά περιοχή 2 (προβολή γραφικών) το κουμπί (Settings) ανοίγει τον πίνακα ρυθμίσεων των γραφικών. Με το κουμπί αυτό μπορεί να γίνουν επιλογές για την εμφάνιση και τα όρια τιμών των αξόνων. Επίσης μπορούν να γίνουν και πιο σύνθετες ρυθμίσεις που επηρεάζουν και την περιοχή γραφικών (περιοχή 2) αλλά και την εισαγωγή των εντολών (περιοχή 1 - Algebra View)

4. Παράθυρο ΑΛΓΕΒΡΑ (Algebra View)

Στην αρχική οθόνη το κουμπί (Algebra View) ανοίγει την περιοχή της αλγεβρικής εισαγωγής των δεδομένων του προβλήματος.

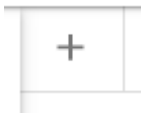


Μπορούμε να εισάγουμε κάθε αλγεβρική έκφραση ή εντολή στην περιοχή δεξιά από το ενεργό κουμπί + στην γραμμή εισαγωγής (Input...)

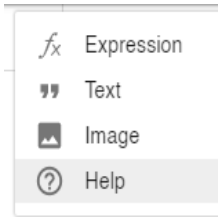
Στην κάτω αριστερή γωνία το ενεργό κουμπί ενεργοποιεί ένα πληκτρολόγιο οθόνης με το οποίο μπορούμε να εισάγουμε όλες τις αλγεβρικές εκφράσεις .

Το πληκτρολόγιο αυτό περιέχει διάφορες μορφές για αριθμούς, μαθηματικές συναρτήσεις, τελεστές, και γράμματα.
Μπορούμε να κλείνουμε το πληκτρολόγιο με ένα κλικ στην περιοχή των γραφικών (περιοχή 2)

Input Help



Το ενεργό κουμπί + (Input Help) στην πάνω αριστερή γωνία της εισαγωγής δεδομένων μας επιτρέπει να επιλέξουμε τον τύπο των δεδομένων εισαγωγής



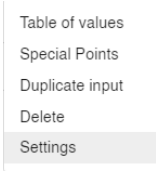
- *Συναρτήσεις*
- *Κείμενο*
- *Εικόνες*
- *Βοήθεια*

Με την επιλογή (Help) έχουμε άμεση πρόσβαση στην βοήθεια για όλες τις εντολές και μαθηματικές συναρτήσεις.

5. Επεξεργασία ενός αντικειμένου

Επιλέγοντας ένα αντικείμενο στο παράθυρο της Άλγεβρας (Algebra View) μπορούμε να το επεξεργαστούμε ξανά.

Ένα αντικείμενο στο παράθυρο της Άλγεβρας (Algebra View) έχει στην δεξιά του άκρη του ένα ενεργό κουμπί ⋮ με το οποίο μπορούν να επιλέξουμε μια σειρά τροποποιήσεων :

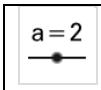
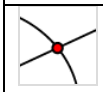
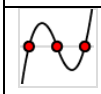


- Να πάρουμε ένα πίνακα τιμών
- Να ορίσουμε ειδικά σημεία
- Να αντιγράψουμε
- Να διαγράψουμε

Ένα αντικείμενο στο παράθυρο της Άλγεβρας (*Algebra View)* έχει στην αριστερή του άκρη του ένα ενεργό κουμπί *(* **Show / Hide objects**) με το οποίο μπορούμε να εμφανίζουμε / κρύβουμε το αντικείμενο στην περιοχή γραφικών.

6. Παράθυρο ΕΡΓΑΛΕΙΑ (Tools View)

Στην αρχική οθόνη το κουμπί (Tools View) ανοίγει την περιοχή των διαθέσιμων εργαλείων που κάνει ευκολότερη την ανάλυση των δεδομένων και ζητούμενων ενός προβλήματος. Μερικά από τα εργαλεία είναι:

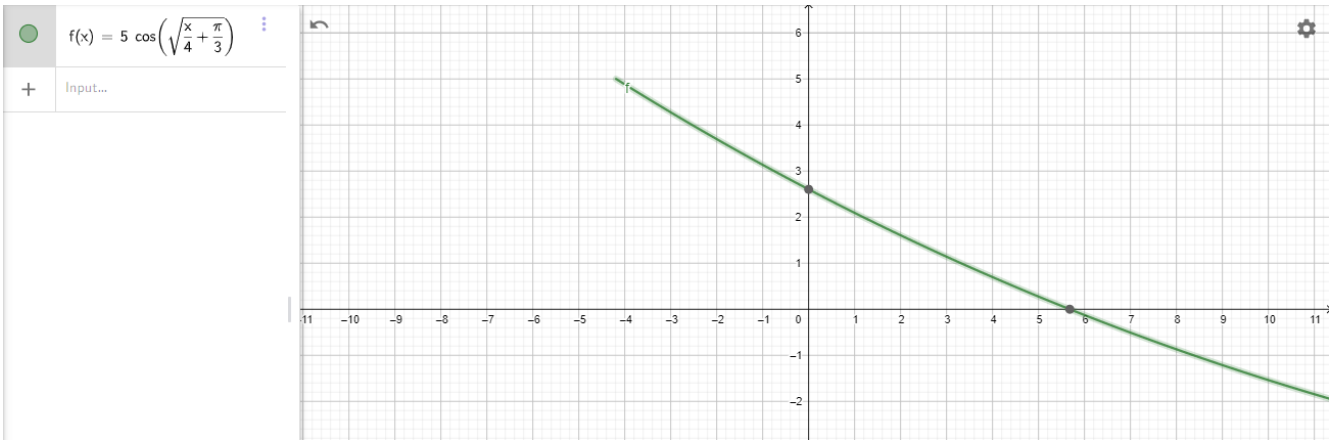
	**Σημείο κύλισης -Slider create** Για μία μεταβλητή που μπορεί να πάρει όλες τις τιμές σε ένα διάστημα. Μπορεί να είναι αριθμοί ή γωνίες
	**(Σημείο τομής - Intersection)** Για να εντοπίσεις το σημείο τομής δύο γραμμών.
	**(Ρίζες - Roots)** Με ένα κλικ στη συνάρτηση και επιλέγοντας το εργαλείο αυτό μπορούν να εντοπιστούν οι ρίζες της συνάρτησης όπως αυτή φαίνεται στο παράθυρο των γραφικών.
	(Ακρότατα - Extremum) Για τον προσδιορισμό τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης.

5.4 Παράδειγμα χρήσης του λογισμικού

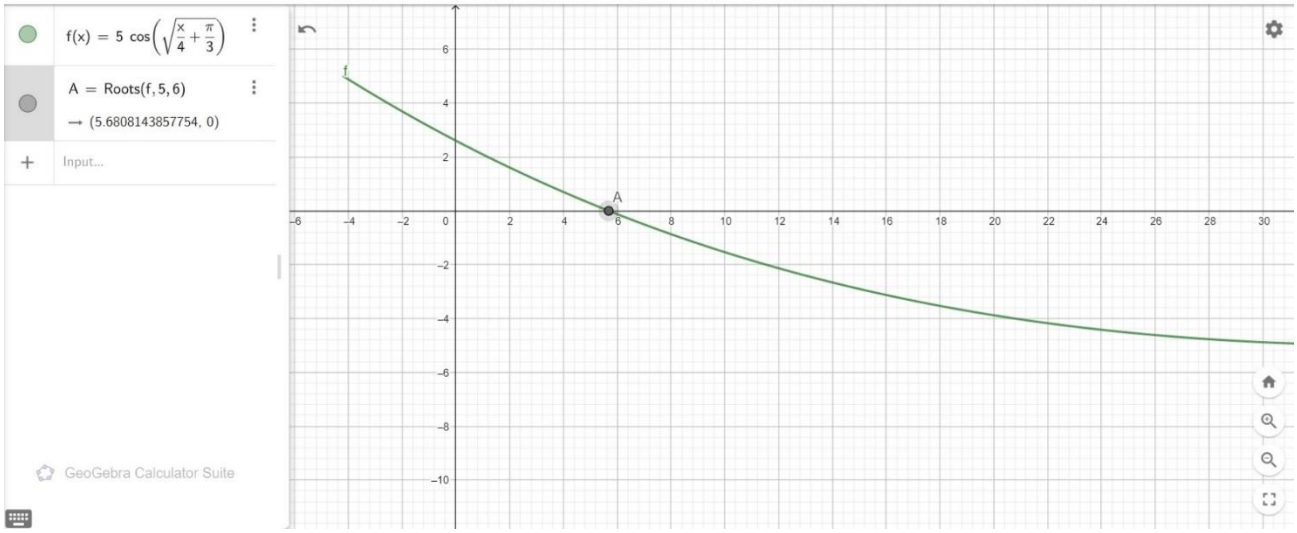
1) Ανοίξτε το παράθυρο της Άλγεβρας (*Algebra View)*

2) Στην γραμμή εισαγωγής χρησιμοποιώντας το πληκτρολόγιο οθόνης *(Virtual Keyboard)* γράψτε την συνάρτηση: $f(x) = 5 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{x}{4} + \frac{pi}{3}}\right)$

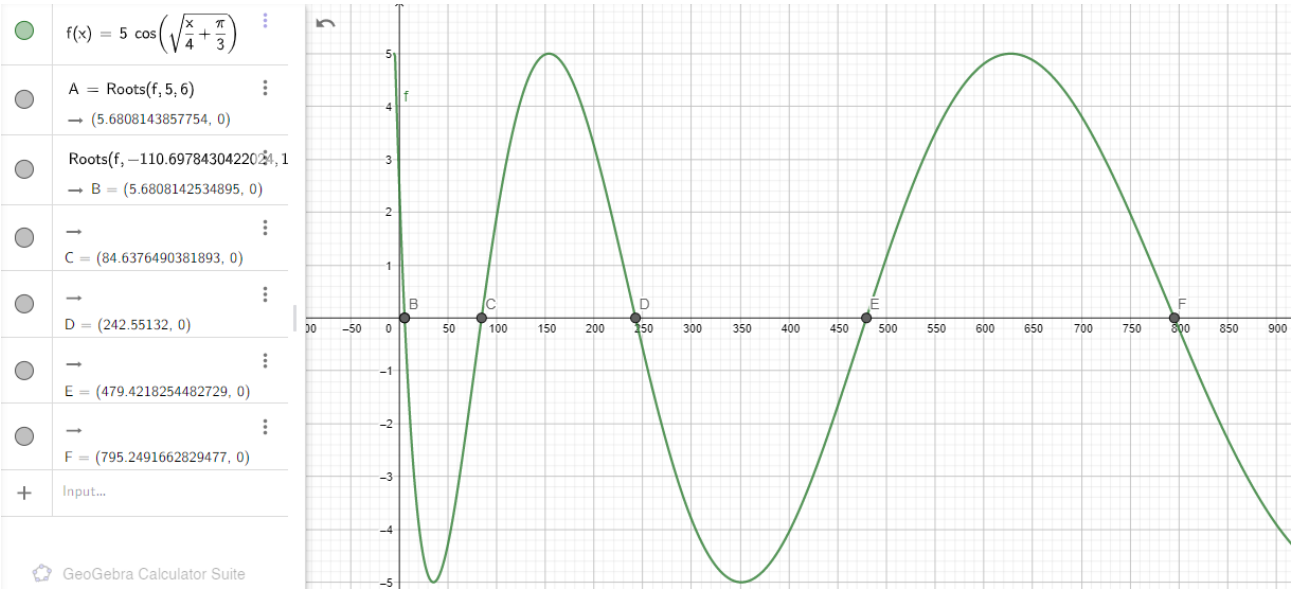
3) Πατώντας ENTER στην περιοχή των γραφικών πρέπει να βλέπετε:



4) Στην επόμενη γραμμή εισαγωγής χρησιμοποιώντας πάλι το πληκτρολόγιο οθόνης εισάγετε την έκφραση: Roots(f, 5, 6) και πατήστε enter. Θα εμφανιστεί το σημείο Α που είναι η ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (5, 6)



5) Αν στην επόμενη γραμμή εισαγωγής χρησιμοποιώντας πάλι το πληκτρολόγιο οθόνης εισάγετε την έκφραση: Roots(f) μπορείτε να βρείτε και άλλες ρίζες σε άλλα διαστήματα αλλάζοντας κατάλληλα τα όρια του άξονα x.



Κεφάλαιο 6 – Διεπιστημονικά φύλλα εργασίας

Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων δίνει τη δυνατότητα μιας άλλης προσέγγισης στις παραδοσιακές ασκήσεις που έχουν τετριμμένο τρόπο λύσης και διευκολύνει στο να απαντηθούν στον ίδιο χρόνο περισσότερα ερωτήματα. Με τον τρόπο αυτό βοηθά τους λύτες στο να εμπεδώσουν την ύλη και να θέτουν εύκολα και δικά τους ερωτήματα.

Στο πνεύμα των νέων προγραμμάτων σπουδών παρατίθενται δύο διαθεματικά φύλλα εργασίας που επεξεργάζονται γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, με τη βοήθεια του GeoGebra. Στο πρώτο παράδειγμα «Μελετώντας ένα πλακόστρωτο» η άσκηση, αρχικά, επιλύεται με τον παραδοσιακό τρόπο που θα ακολουθούταν και στην τάξη, ενώ στη συνέχεια παρουσιάζεται η λύση του με τη χρήση του λογισμικού Geogebra. Το δεύτερο παράδειγμα «Ένα μικρό καράβι» επιλύεται μόνο με τη χρήση του λογισμικού με αναλυτικές οδηγίες προς το χρήστη για τα βήματα που θα μπορούσε να ακολουθήσει.

6.1 «Μελετώντας ένα πλακόστρωτο»

Για να στρώσουμε με πλακάκια μία αυλή χρησιμοποιήσαμε 350 πλακάκια δύο ειδών: στρογγυλά και τετράγωνα. Αν το φορτηγό μας παρέδωσε 185 kg εμπόρευμα για την παραγγελία μας και στη συσκευασία αναγράφεται ότι κάθε στρογγυλό πλακάκι ζυγίζει 200 g και κάθε τετράγωνο 700 g πόσα χρησιμοποιήσαμε από το κάθε είδος;

Εισαγωγή των μεταβλητών:

Έστω x ο αριθμός των στρογγυλών και y ο αριθμός των τετράγωνων πλακιδίων

Δημιουργία του συστήματος:

1) Ποιά εξίσωση αντιπροσωπεύει τον συνολικό αριθμό των πλακιδίων;
2) Ποιά εξίσωση περιγράφει το συνολικό βάρος των πλακιδίων;

Έστω x το πλήθος των στρογγυλών πλακιδίων και y το πλήθος των τετράγωνων.

Επομένως προκύπτει το σύστημα,

$$\begin{cases} 200x + 700y = 185000 \\ x + y = 350 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 7y = 1850 \ (\varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta \ \mu\alpha\zeta\acute{\omega}\nu) \\ x + y = 350 \ (\varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta \ \pi\lambda\acute{\eta}\theta o\upsilon\varsigma) \end{cases}$$

Επίλυση με τον «κλασικό τρόπο»

Αν τις εξισώσεις τις μελετήσουμε μαζί (επίλυση του συστήματος)

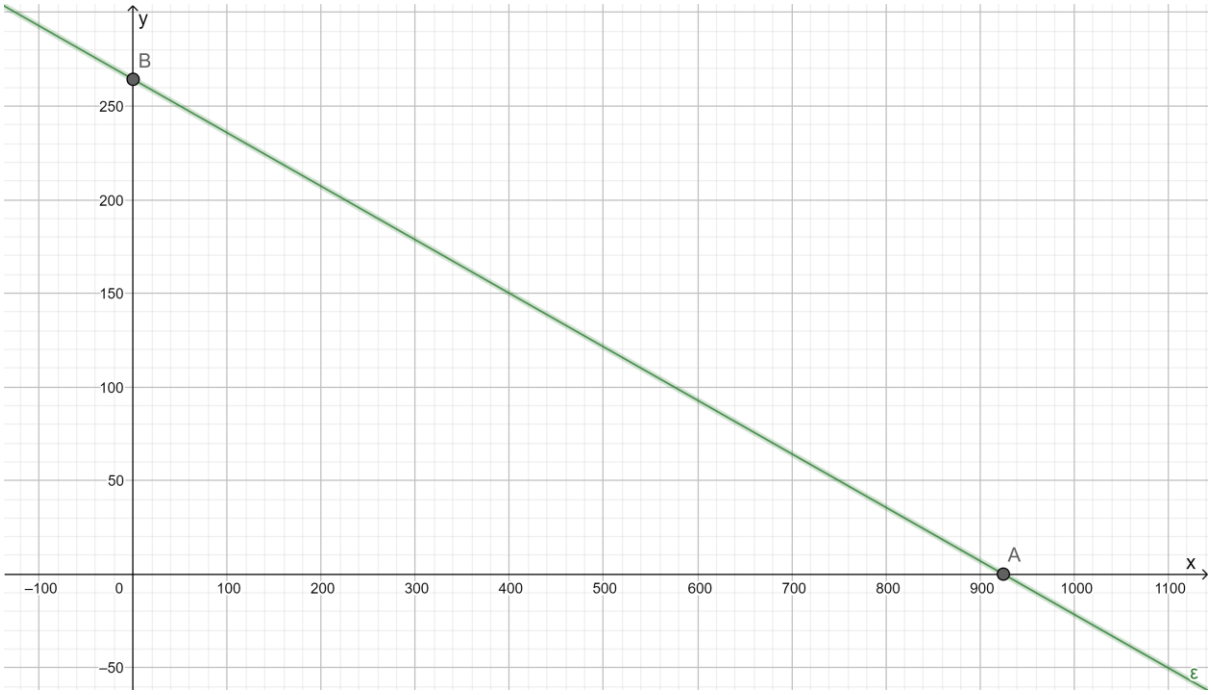
$$\begin{cases} 200x + 700y = 185000 \\ x + y = 350 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 7y = 1850 \\ x + y = 350 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(350 - y) + 7y = 1850 \\ x = 350 - y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5y = 1150 \\ x = 350 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 230 \\ x = 120 \end{cases}$$

Επίλυση με τη χρήση GEOGEBRA

Μελέτη των εξισώσεων (χωριστά)

Α) Η εξίσωση $200x + 700y = 185000$

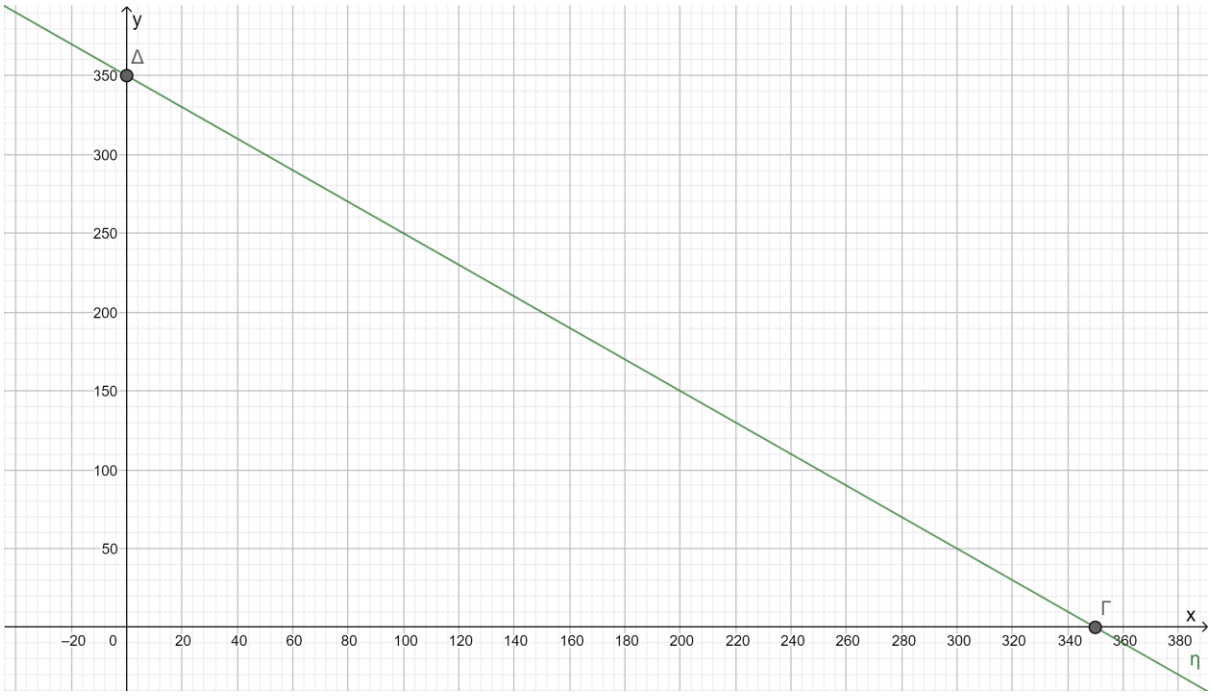


Παρατηρήσεις:

- Ο **άξονας x** αντιπροσωπεύει τον αριθμό των στρογγυλών πλακιδίων.
- Ο **άξονας y** εκφράζει τον αριθμό των τετράγωνων πλακιδίων.
- Όλα τα σημεία της ευθείας παριστάνουν το μέγιστο βάρος που μπορεί να παραδώσει το φορτηγό (και είναι 185Kg).

- Κάθε σημείο **εσωτερικό του τριγώνου ΑΟΒ** αναπαριστά ένα “επιτρεπτό” βάρος για το φορτηγό: Για παράδειγμα, το σημείο (200, 150) αντιστοιχεί σε ένα βάρος 145Kg, αφού $200 \cdot 200 + 700 \cdot 150 = 145000$.
- Κάθε σημείο **εξωτερικό του τριγώνου ΑΟΒ** αναπαριστά ένα “μη επιτρεπτό” βάρος για το φορτηγό: Για παράδειγμα, το σημείο (500, 250) αντιστοιχεί σε ένα βάρος 275Kg, αφού $200 \cdot 500 + 700 \cdot 250 = 275000$.
- Αν το φορτηγό έχει πχ. 400 στρογγυλά πλακάκια τότε μπορεί να κουβαλήσει “νομιμά” και 150 τετράγωνα πλακάκια, αφού $200 \cdot 400 + 700 \cdot 150 = 185000$.

Β) Η εξίσωση $x + y = 350$

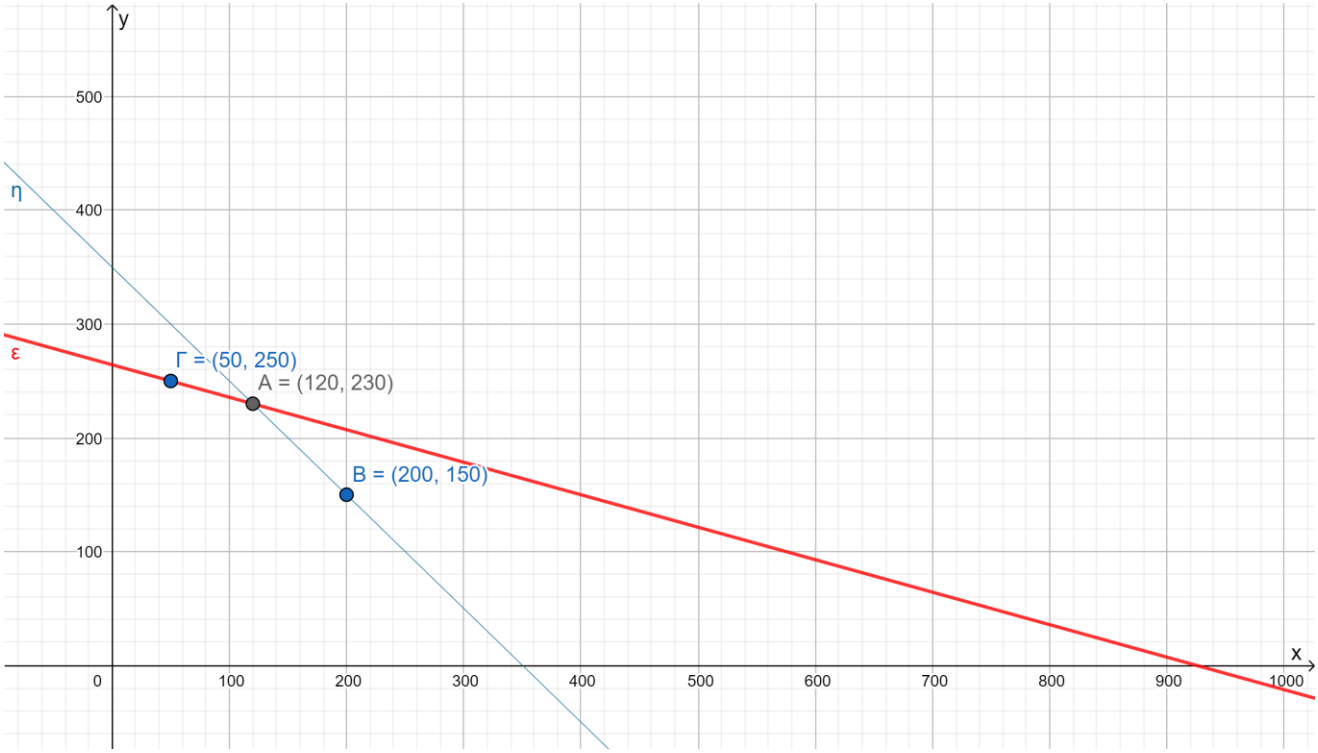


Παρατηρήσεις:

- Ο **άξονας x** αντιπροσωπεύει τον αριθμό των στρογγυλών πλακιδίων.
- Ο **άξονας y** εκφράζει τον αριθμό των τετράγωνων πλακιδίων.
- Όλα τα σημεία της ευθείας παριστάνουν το αριθμό που μπορεί να παραδώσει το φορτηγό (και είναι 350 πλακάκια).
- Κάθε σημείο εσωτερικό του **τριγώνου ΓΟΔ** αναπαριστά ένα “επιτρεπτό” αριθμό πλακιδίων που μπορεί να μεταφέρει το φορτηγό: Για παράδειγμα, το σημείο (100, 150) αντιστοιχεί σε ένα αριθμό πλακιδίων 250.

- Κάθε σημείο εξωτερικό του **τριγώνου ΓΟΔ** αναπαριστά ένα “μη επιτρεπτό” αριθμό για το φορτηγό: Για παράδειγμα, το σημείο (200, 350) αντιστοιχεί σε έναν αριθμό πλακιδίων 550.
- Αν το φορτηγό έχει πχ. 250 στρογγυλά πλακάκια τότε μπορεί να κουβαλήσει “νόμιμα” και 100 τετράγωνα πλακάκια.

Μελέτη του συστήματος



Παρατηρήσεις:

- Το σημείο Κ(120, 230) είναι η λύση του συστήματος.
- Το σημείο Β(200, 150) ενώ αληθεύει την εξίσωση του “πλήθους” των πλακιδίων, δεν επαληθεύει την εξίσωση “μάζας”, άρα δεν είναι λύση του συστήματος.
- Το σημείο Γ(50, 250) ενώ δεν αληθεύει την εξίσωση του “πλήθους” των πλακιδίων, επαληθεύει την εξίσωση “μάζας”, άρα δεν είναι λύση του συστήματος.

Περαιτέρω μελέτη:

Με τη χρήση του λογισμικού οι καθηγητές και οι μαθητές μπορούνε να θέσουν εύκολα νέα ερωτήματα και νέες παραμέτρους, έτσι ώστε να προεκτείνουν το αρχικό ερώτημα που κινείται κυρίως στο χώρο των μαθηματικών και σε άλλες επιστήμες ή σε προβλήματα καθημερινότητας. Για παράδειγμα, μπορούν να μελετήσουν ερωτήματα όπως:

1) Αν τα πλακάκια έχουν διαφορετική ενεργειακή απορρόφηση, μπορεί να μελετηθεί η θερμομόνωση ενός κτιρίου.

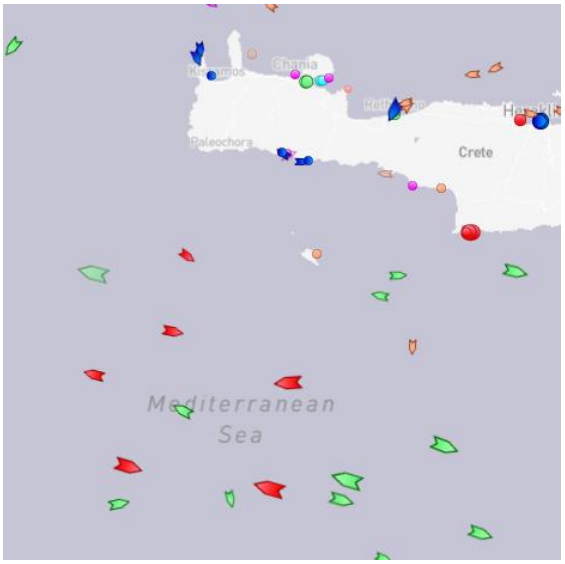
2) Αν τα πλακάκια έχουν διαφορετική τιμή αγοράς μπορεί το πρόβλημα να γίνει πρόβλημα οικονομίας ή να μελετηθούν καμπύλες κέρδους και κόστος.

6.2 «Ένα μικρό καράβι»

Η κίνηση των πλοίων γίνεται σε έναν διδιάστατο χώρο και η ρότα κάθε πλοίου, όσο είναι σε ευθεία γραμμή και μπορεί να περιγραφεί με γραμμικές εξισώσεις. Τα δεδομένα της θέσης πλοίων σε πραγματικό χρόνο, δίνουν την ευκαιρία πολλαπλών αναπαραστάσεων και μελέτης του βασικού προβλήματος της επίλυσης γραμμικών συστημάτων, από τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται η θέση των πλοίων σε μια περιοχή νότια της Κρήτης και με βάση αυτή παρουσιάζεται το παρακάτω φύλλο εργασίας.

Φύλλο εργασίας

Στην ιστοσελίδα https://www.marinetraffic.com/
παρατηρούμε σε πραγματικό χρόνο την πορεία πλοίων που ταξιδεύουν στην Μεσόγειο Θάλασσα (Εικόνα 6.2.1).



Εικόνα 6.2.1: *Οι θέσεις των πλοίων και η κατεύθυνση τους.* *https://www.marinetraffic.com/*

Αν η αρχή των αξόνων τοποθετηθεί στην νήσο Γαύδο (Εικόνα 6.2.2) και η θετική φορά των αξόνων είναι δική σας επιλογή τότε:

Α) Ποιες οι συντεταγμένες των 4 πλοίων;

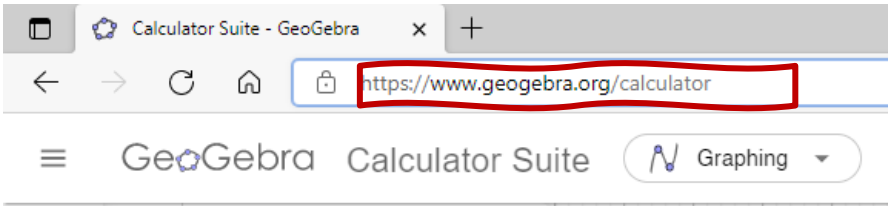
Β) Αν θεωρήσουμε ότι οι ρότες των πλοίων είναι ευθείες γραμμές, να βρεθούν οι συντεταγμένες των τομών της ρότας του πράσινου πλοίου με αυτές των κόκκινων πλοίων.

Γ) Τα δύο πλοία που είναι πλησιέστερα στην Γαύδο, αν κινούνται με την ίδια ταχύτητα, κινδυνεύουν να συγκρουστούν;

Εικόνα 6.2.2: *Τα πλοία γύρω από τη νήσο Γαύδο (η αρχή των αξόνων)*

Σχετικές οδηγίες λογισμικού Geogebra

1. Αν υπάρχει διαθέσιμη σύνδεση διαδικτύου σε έναν φυλλομετρητή, εισάγουμε την διεύθυνση : Calculator Suite - GeoGebra (http://www.geogebra.org/calculator).

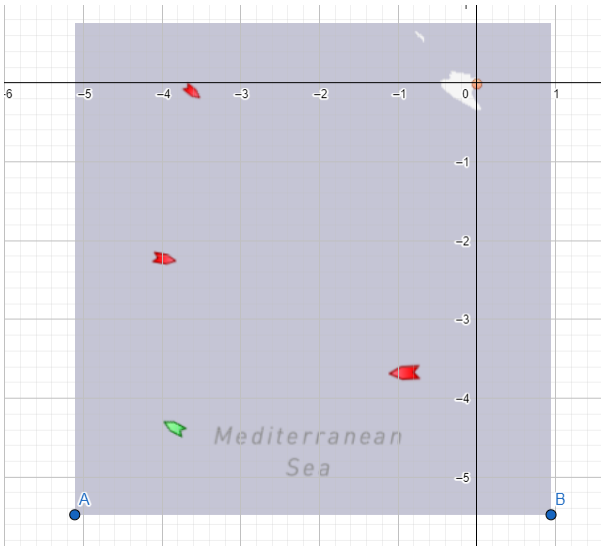


2. Από τα εργαλεία TOOLS → MEDIA (Εργαλεία → Μέσα Ενημέρωσης) μπορείτε να κάνετε εισαγωγή (Browse) της εικόνας με τις πορείες των πλοίων στην περιοχή των γραφικών.

3. Επιλέγοντας Εργαλεία → Βασικά Εργαλεία → Σημείο , μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα σημείο Γ στην αρχή των αξόνων, ως οδηγό.

4. Είτε με τα βέλη του πληκτρολογίου είτε μετακινώντας τα ενεργά σημεία Α και Β στις γωνίες της εικόνας μπορεί να μετακινηθεί ή να περιστραφεί. Μετακινούμε την εικόνα με τέτοιο τρόπο ώστε η νήσος Γαύδος να είναι στην ΑΡΧΗ των ΑΞΟΝΩΝ (Εικόνα 6.2.3). Το κόκκινο σημείο θα πρέπει να ταυτίζεται με το σημείο Γ.

5. Με δεξι κλικ πάνω στην εικόνα θα εμφανιστεί το μενού με τις ρυθμίσεις τις εικόνας (SETTINGS), ώστε να τοποθετηθεί πίσω από το σύστημα αξόνων ως υπόβαθρο (Φόντο Εικόνας/Background Image) και να σταθεροποιηθεί η θέση της εικόνας (ένα click στο ενεργό μενού Σταθερό Αντικείμενο/FIX OBJECT).



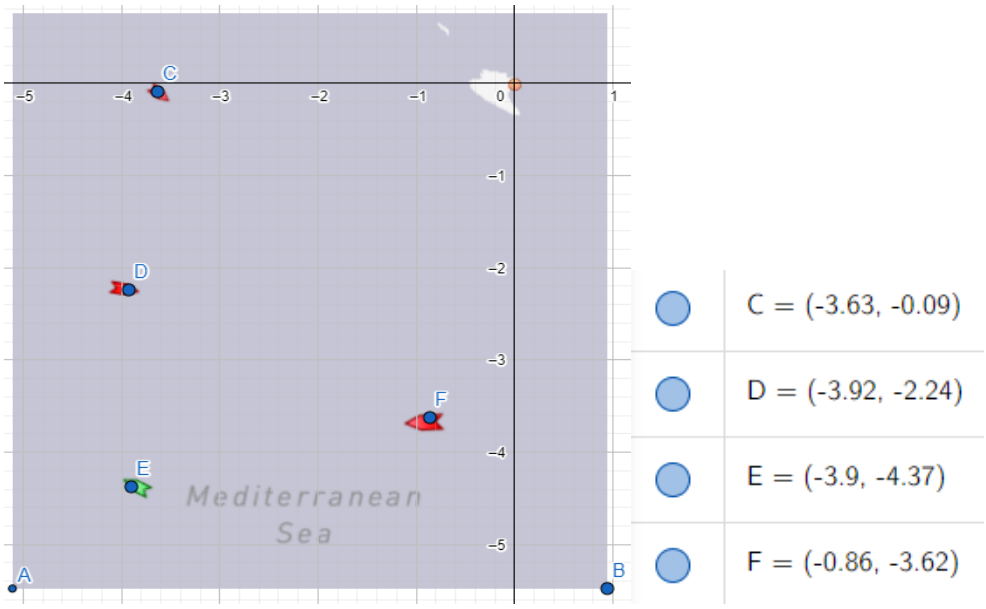
Εικόνα 6.2.3: *Η νήσος στην εικόνα τίθεται ως αρχή των αξόνων*

Ερώτημα Α:

Για να βρούμε τις συντεταγμένες των πλοίων αρκεί να τοποθετήσουμε σημεία στις θέσεις που αυτά βρίσκονται :

Από τα TOOLS (Εργαλεία) ενεργοποιούμε το κουμπί POINTS (Σημεία) και στην περιοχή των γραφικών τοποθετούμε σημεία στις θέσεις των πλοίων επιλέγοντας τις αντίστοιχες θέσεις.

Οι θέσεις των πλοίων φαίνονται άμεσα στην περιοχή Άλγεβρα/Algebra και για παράδειγμα θα είναι (Εικόνα 6.2.4):



Εικόνα 6.2.4 *Οι θέσεις των πλοίων*

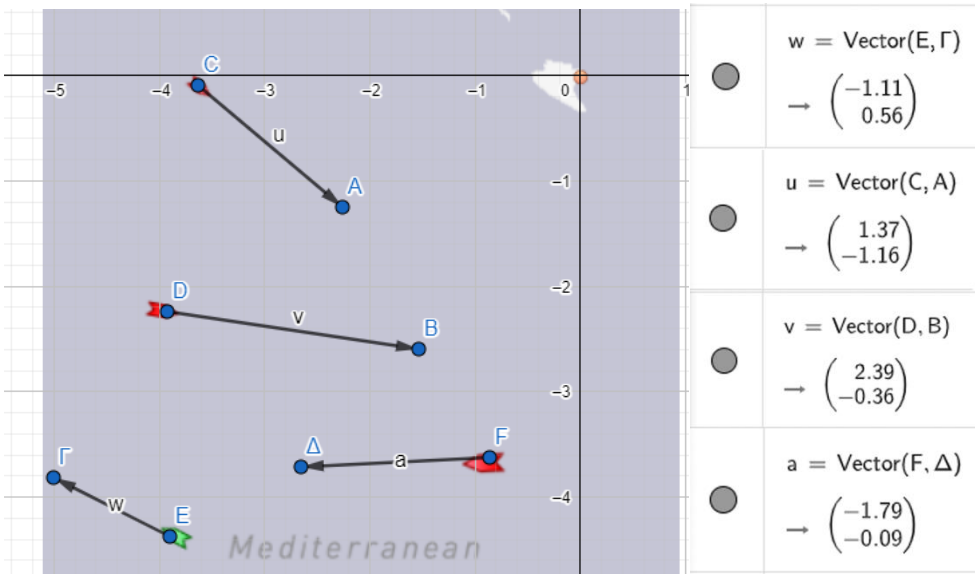
Εάν η ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι πολύ μεγάλη μπορούμε κάνοντας δεξί κλικ να επιλέξουμε Ρυθμίσεις → Γενικές Ρυθμίσεις ⚙ → Στρογγυλοποίηση σε: και επιλέγουμε την επιθυμητή ακρίβεια.

Ερώτημα Β:

i) Για να προσδιορίσουμε τις ρότες των πλοίων ορίζουμε τα διανύσματα που έχουν την κατεύθυνση της κίνησής τους, η οποία από τα δεδομένα υποθέσαμε πως είναι ευθύγραμμη:

Από τα ΕΡΓΑΛΕΙΑ (TOOLS) και από τις ΓΡΑΜΜΕΣ (LINES) επιλέγουμε τα ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (VECTORS) και σχεδιάζουμε τις ρότες των πλοίων.

Στο παράθυρο της ΑΛΓΕΒΡΑΣ εμφανίζονται τα στοιχεία των διανυσμάτων (Εικόνα 6.2.5):

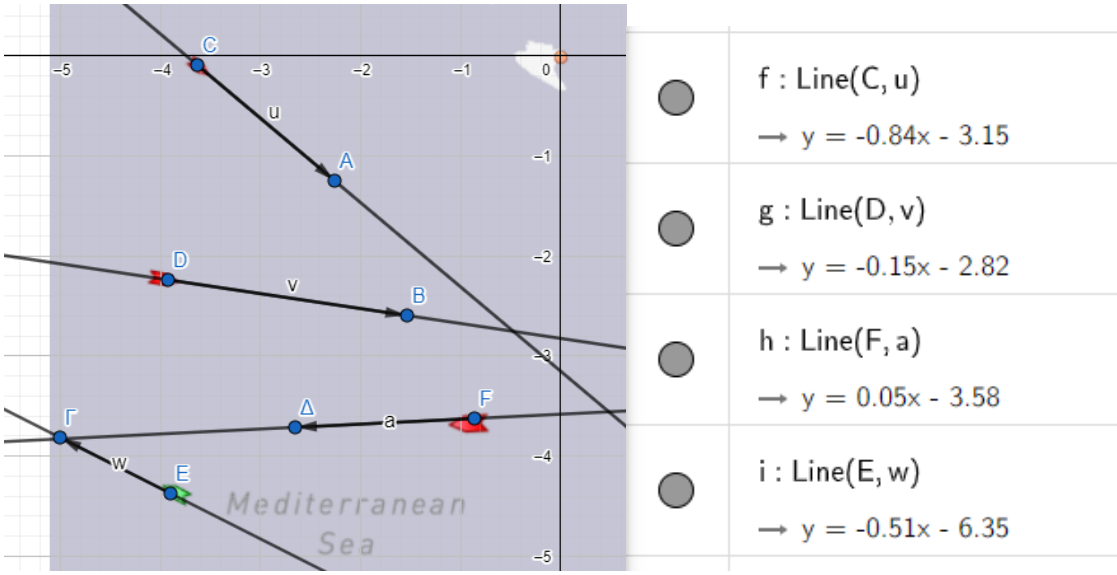


Εικόνα 6.2.5 *Τα διανύσματα των ροτών*

ii) Για να εντοπίσουμε τα σημεία τομής των ροτών τους θα κατασκευάσουμε την ευθεία που περνά από δεδομένο σημείο και είναι παράλληλη με το κάθε διάνυσμα

Η εντολή στο πεδίο της ΑΛΓΕΒΡΑΣ για την ευθεία που περνά από το σημείο *C* και είναι παράλληλη στην διεύθυνση του διανύσματος *u* θα είναι της μορφής: *line(C, u)* Έτσι, εμφανίζεται η ευθεία στην περιοχή των γραφημάτων και η αντίστοιχη ευθεία στην περιοχή της ΑΛΓΕΒΡΑΣ.

Με όμοιο τρόπο κατασκευάζονται και οι άλλες τρεις ευθείες και το αποτέλεσμα θα είναι της μορφής (Εικόνα 6.2.6):



Εικόνα 6.2.6 *Ευθύγραμμες πορείες των πλοίων*

Τα σημεία τομής των ευθειών για τις ρότες μπορούν να προσδιοριστούν με βήματα όπως έχει αναλυθεί προηγουμένως με τη χρήση των εργαλείων του λογισμικού.

Εργαλεία → Τομή → Επιλογή διαδοχικά των δύο ευθειών

ή εναλλακτικά από το πεδίο της Άλγεβρας με την εντολή Intersect(f,g) όπου για παράδειγμα f,g οι επιθυμητές ευθείες.

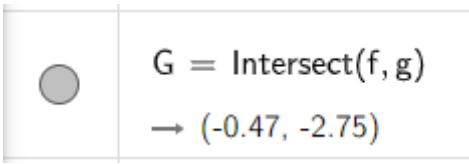
Ερώτημα Γ:

Τα δύο πλοία που είναι πλησιέστερα στην Γαύδο, ας υποθέσουμε ότι είναι το C και το D (η ακριβής λύση προκύπτει αν υπολογίσουμε τις αποστάσεις των θέσεων των πλοίων από την αρχή των αξόνων)

Για να καταλήξουμε αν τα πλοία είναι σε πορεία σύγκρουσης, αφού κινούνται με την ίδια ταχύτητα, αρκεί να υπολογίσουμε την απόσταση της θέσης των πλοίων από το κοινό σημείο των τροχιών τους.

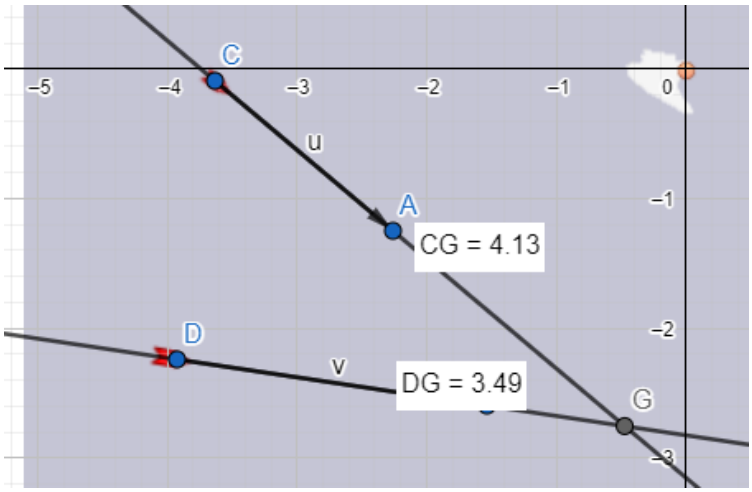
Το κοινό σημείο βρίσκεται πχ. με την εντολή: *Intersect(f, g)* , όπου f η ευθεία τροχιά του πλοίου C και g η ευθεία που διέρχεται από το πλοίο D.

Στο παράδειγμά μας, το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το G:



Η απόσταση δύο σημείων υπολογίζεται από τα βήματα:
ΕΡΓΑΛΕΙΑ (TOOLS) → ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ (MEASURE) => ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ (DISTANCE)

Επομένως, η απόσταση του C και D από το G θα προκύψει όπως φαίνεται στην (Εικόνα 6.2.7)



Εικόνα 6.2.7 *Οι αποστάσεις των πλοίων από το σημείο τομής των ροτών τους*

Στα παραπάνω φύλλα εργασίας γίνεται κατανοητό ότι το λογισμικό GeoGebra μας δίνει τη δυνατότητα εύκολης σύνδεσης μεταξύ σεναρίων της πραγματικής ζωής και ανάλυσής τους μέσω των εξισώσεων που προκύπτουν. Σύμφωνα με το νέο προτεινόμενο πρόγραμμα σπουδών τέτοιου είδους φύλλα εργασίας μπορούν να καλύψουν το εκπαιδευτικό πρόγραμμα των μαθητών, αποτελώντας μια γέφυρα μεταξύ διαφορετικών μαθημάτων και χρησιμοποιώντας παράλληλα και τα εργαλεία των ΤΠΕ στην ανάλυση των προβλημάτων. Με τον τρόπο αυτό, στον ίδιο χρόνο μπορούν να απαντηθούν περισσότερες ερωτήσεις σχετικά με το πρόβλημα και παρέχονται σε μαθητές και εκπαιδευτικούς πολλαπλές δυνατότητες για περαιτέρω μελέτη και νέες προεκτάσεις στο εννοιολογικό πλαίσιο του προβλήματος.

Κεφάλαιο 7 – Διδακτική παρέμβαση

Οι αρχές του εποικοδομισμού και της ανακαλυπτικής μάθησης (Bruner, 1960) έχουν μελετηθεί για μακρύ χρονικό διάστημα και πλέον σε αυτές τις αρχές στηρίζεται, κατά κύριο λόγο, τόσο ο σχεδιασμός όσο και η υλοποίηση της διδασκαλίας που εφαρμόζεται στο σύγχρονο σχολείο. Στα πλαίσια της εργασίας πραγματοποιήθηκε διδακτική παρέμβαση συνοδευόμενη από μία σύντομη έρευνα με σκοπό τη μελέτη της επίδρασης των διαδραστικών μέσων οπτικοποίησης και υπολογισμών στη βελτίωση της κατανόησης της διδαχθείσας ύλης από τους μαθητές. Ο λόγος που πραγματοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση είναι αφενός για να δείξει ότι το μάθημα μπορεί να γίνει πιο ενδιαφέρον και διασκεδαστικό με την χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών, όπως είναι το GeoGebra, και αφετέρου ότι μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες σχετικά με τα γραμμικά συστήματα.

7.1 Στόχοι της έρευνας

Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η διδασκαλία με τον παραδοσιακό τρόπο (κιμωλία – πίνακας) είναι η μόνη που προσπαθεί να καλύψει τις εκπαιδευτικές ανάγκες και τις γνωστικούς στόχους ακόμα και στις μέρες μας, που υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία τεχνολογικών μέσων και εφαρμογών και στα πλαίσια της παρούσας εργασίας σχεδιάστηκε και πραγματοποιήθηκε μία διδακτική παρέμβαση για την εφαρμογή του λογισμικού GeoGebra στην επίλυση των γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, σε μαθητές Γ' γυμνασίου για το σχολικό έτος 2021-2022.

Η παρούσα παρέμβαση στοχεύει:

- Στην αξιοποίηση του λογισμικού GeoGebra και των δυνατοτήτων που έχει .
- Στη διερεύνηση της αποδοχής μικτής διδασκαλίας στη μελέτη της επίλυσης γραμμικών συστημάτων με χρήση του εκπαιδευτικού λογισμικού GeoGebra.
- Ο κάθε μαθητής να έχει την δυνατότητα να δοκιμάσει την δική του προσέγγιση σε ένα πρόβλημα και να βρει εναλλακτικούς τρόπους «στο πώς να μαθαίνει»
- Να βοηθήσει τους μαθητές στην συνεργασία, στον έλεγχο υποθέσεων και στην επίλυση προβλημάτων

- Στην καταγραφή των αντιλήψεων και στάσεων των μαθητών ως προς την εφαρμογή αυτού του τρόπου μάθησης και του κατά πόσο είναι θετικοί στις εναλλακτικές προσεγγίσεις των διδασκόντων.

Με τον τρόπο αυτό, αυξάνονται οι διδακτικές προσεγγίσεις που διατίθενται στους μαθητές, καλλιεργείται η δημιουργικότητα, η κριτική σκέψη και αναδύονται νέες ευκαιρίες στη μάθηση.

7.2 Ερευνητική Μέθοδος

Στην έρευνα που πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιήσαμε ένα μικρό δείγμα μαθητών που ανήκαν σε μια συγκεκριμένη σχολική μονάδα. Η έρευνά μας λόγω του μικρού δείγματος μπορεί να είναι μόνο ποιοτική και τα συμπεράσματα που προκύπτουν μπορεί να χαρακτηριστούν ως ενδεικτικά και όχι αντιπροσωπευτικά για το τι ακριβώς συμβαίνει στο σύνολο των μαθητών που τελειώνουν τη βασική εκπαίδευση στη χώρα μας. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Απρίλιο του 2022 σε τρία στάδια και το δείγμα που μελετήθηκε αποτελούταν από 3 τμήματα, της Γ' Γυμνασίου και σε σύνολο 67 μαθητών. Κάθε τμήμα απασχολήθηκε για συνολικά 4 ώρες στα πλαίσια της διαδικασίας αυτής. Στους μαθητές είχε ήδη προηγηθεί η διδασκαλία, με την παραδοσιακή μέθοδο στην τάξη, της ενότητας των γραμμικών συστημάτων, σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών που ακολουθήθηκε από τα σχολεία το διδακτικό έτος 2021-2022. Το μάθημα έγινε στο εργαστήριο πληροφορικής όπου χρησιμοποιήθηκαν 10 σταθεροί υπολογιστές και 10 φορητές συσκευές (tablet) ενώ έγινε και χρήση του ψηφιακού προβολέα (projector).

Κατά τη διάρκεια της έρευνας ακολουθήθηκαν τα εξής βήματα:

ΒΗΜΑ 1ο: Οι μαθητές είχαν διδαχθεί την επίλυση των γραμμικών συστημάτων με την κλασική διδασκαλία του διδάσκοντος τον προηγούμενο μήνα από την μέρα εφαρμογής της διδακτικής παρέμβασης. Οι μαθητές είχαν παρακολουθήσει από τον διδάσκοντα με τον κλασικό τρόπο (κιμωλία – πίνακας) αναλυτικά την παράδοση του θέματος και είχαν κάνει τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου και των φυλλάδιο ασκήσεων εργασίας που τους είχε δώσει.

ΒΗΜΑ 2ο: Ένα μήνα μετά από τη διδασκαλία στην τάξη δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (pre-lab) που περιλαμβάνει 8 θέματα ανοικτού και κλειστού τύπου για να διερευνηθεί ο βαθμός κατανόησης του θέματος. Το φύλλο εργασίας περιλαμβάνει θέματα παρόμοια με αυτά που οι μαθητές είχαν ασχοληθεί στην τάξη. Οι μαθητές , μέσα στη διάρκεια μίας διδακτικής ώρας, κλήθηκαν να συμπληρώσουν το φύλλο εργασίας έχοντας την ελευθερία να επιλέξουν οποιαδήποτε μεθοδολογία για να προσεγγίσουν το κάθε θέμα. Τα θέματα στα οποία εργάστηκαν είχαν ως στόχο να αξιολογηθεί το υπάρχον γνωστικό υπόβαθρο και να αναδειχτούν τυχόν αδυναμίες ώστε να προσαρμοστεί αναλόγως η διδακτική παρέμβαση στο επόμενο βήμα.
Στην παράγραφο 7.3.1 παρατίθεται το φύλλο εργασίας που μοιράστηκε και συμπληρώθηκε ανώνυμα από τους μαθητές

ΒΗΜΑ 3ο: Στο συγκεκριμένο σχολείο δεν είχε γίνει ποτέ χρήση του GeoGebra, επομένως κρίθηκε απαραίτητο να γίνει μια εισαγωγή στο λογισμικό. Για το λόγο αυτό, την επόμενη ημέρα, έγινε μία σύντομη παρουσίαση στους μαθητές του λογισμικού Geogebra και των βασικών εργαλείων που προσφέρει, τόσο στο υπολογιστικό κομμάτι όσο και σε επίπεδο αναπαράστασης. Επεξηγήθηκαν, σε αδρές γραμμές, τα βασικά βήματα που πρέπει να ακολουθήσει ο χρήστης για να πραγματοποιήσει συγκεκριμένους υπολογισμούς, κυρίως με στόχο να ξεπεραστεί η αρχική δυσκολία προσαρμογής στο χειρισμό και να γίνει το λογισμικό οικείο για τις διαδικασίες που θα ακολουθούνταν στο επόμενο βήμα. Η παρουσίαση έγινε στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου, οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες των 2-3 ατόμων και εργάστηκαν, ανάλογα με το εκάστοτε ζητούμενο, εκ περιτροπής ή συνεργατικά στον ίδιο υπολογιστή.

ΒΗΜΑ 4ο: Στη συνέχεια, έγινε ανατροφοδότηση του φύλλου εργασίας pre-lab που είχε δοθεί και τέθηκε ως προβληματισμός που συζητήθηκε στο κατά πόσο το λογισμικό θα μπορούσε να βοηθήσει στην επίλυσή του. Η συζήτηση κατέληξε στον έλεγχο των δυνατότητων του λογισμικού και στην επαλήθευση της αποτελεσματικότητάς του θέτοντας ως παράδειγμα αναφοράς το Θέμα 8.

ΒΗΜΑ 5ο: Επιδιώκοντας να επεκτείνουμε την εφαρμογή του GeoGebra σε πιο ανοικτά ή και διεπιστημονικά προβλήματα, προχωρήσαμε στην παρουσίαση και από κοινού επίλυση με τους μαθητές του διαθεματικού φύλλου εργασίας «Ένα Μικρό Καράβι».

Επεξηγήσαμε το σενάριο του προβλήματος και οι μαθητές σε ελεύθερη συζήτηση εξέφραζαν παρατηρήσεις και διατύπωσαν υποθέσεις σχετικά με την πορεία που θα έπρεπε να ακολουθήσουμε στην προσέγγιση του προβλήματος.
Έπειτα, με καθοδηγούμενη ανακαλυπτική διδασκαλία, προχωρήσαμε βήμα βήμα στην επίλυση των ερωτημάτων του προβλήματος χρησιμοποιώντας το λογισμικό. Οι απαραίτητοι υπολογισμοί και οι γραφικές παραστάσεις έγιναν στο περιβάλλον εργασίας του Geogebra από τους μαθητές κάθε ομάδας.
Στην παράγραφο 7.3.2 παρατίθεται το ενδεικτικό πρόβλημα με τίτλο «Ένα Μικρό Καράβι» που χρησιμοποιήθηκε για μελέτη στη διάρκεια της παρέμβασης.

ΒΗΜΑ 6ο: Στο τέλος της διαδικασίας ζητήθηκε από τους μαθητές να συμπληρώσουν ανώνυμα ένα φύλλο αξιολόγησης post-lab της παρέμβασης που περιελάμβανε ασκήσεις ανοικτού τύπου αλλά και ένα ερωτηματολόγιο ώστε να καταγραφεί τυχόν αλλαγή στάσης των μαθητών απέναντι στο μάθημα μετά τη χρήση λογισμικού στα Μαθηματικά.
Στην παράγραφο 7.3.3 παρατίθεται το φύλλο αξιολόγησης post-lab της διδακτικής παρέμβασης.

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται τα φύλλα εργασίας που μοιράστηκαν και συμπληρώθηκαν από τους μαθητές κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης καθώς και τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις που συλλέξαμε.

7.3 Φύλλα εργασίας και αποτελέσματα

7.3.1 Φύλλο εργασίας πριν το εργαστήριο (pre-lab)

Το παρακάτω φύλλο εργασίας δόθηκε στους μαθητές πριν το εργαστήριο ώστε να διερευνήσουμε τις προϋπάρχουσες γνώσεις πάνω στο θέμα που θα συζητηθεί. Στον μικρό χρόνο που μπορεί να διατεθεί σε επίπεδο σχολικής μονάδας θέλαμε να καταγράψουμε το βαθμό κατανόησης της επίλυσης των γραμμικών συστημάτων 2x2.

ΘΕΜΑ 1

Σε μία online παραγγελία αγόρασες σοκολάτες των 2€. Τα έξοδα αποστολής ήταν 3€ και συνολικά χρεώθηκες 27€.

Οι σοκολάτες που αγόρασες είναι : …….

ΘΕΜΑ 2

Συμπλήρωσε τον πίνακα τιμών για τις παρακάτω συναρτήσεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ

- **y = 2x – 1**

x	y
0	
2	
4	
6	

- **y = 3x – 5**

x	y
0	
2	
4	
6	

Τι παρατηρείς για τις δύο συναρτήσεις ;

ΘΕΜΑ 3

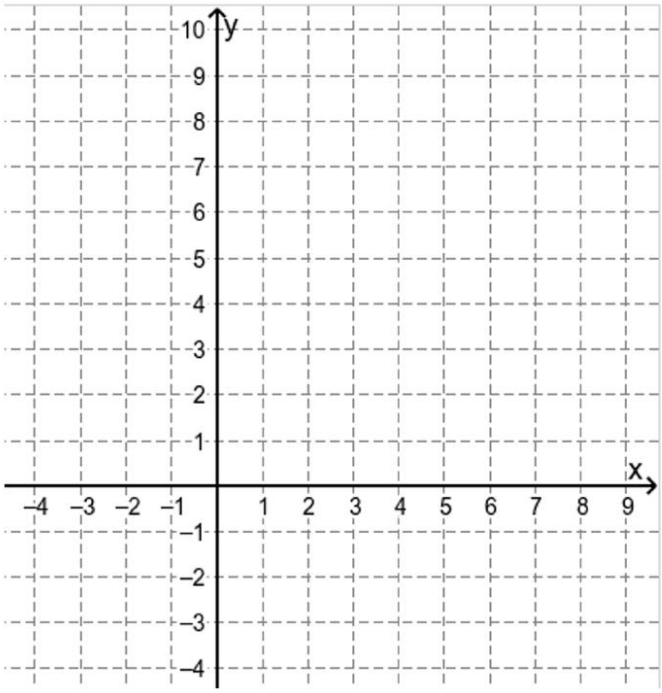
Δίνεται η σχέση: y = 2x -4.

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα με τουλάχιστον 5 ζεύγη τιμών και κάνε την γραφική παράσταση της σχέσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ

x	y

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ



ΘΕΜΑ 4

Στο γυμναστήριο της γειτονιάς υπάρχει ο ακόλουθος τιμοκατάλογος

ΠΑΚΕΤΑ ΣΥΝΔΡΟΜΩΝ

Χρήση οργάνων γυμναστικής

Μέλη : 2€ / επίσκεψη

Μη μέλη : 5€ / επίσκεψη

Κόστος εγγραφής μέλους : 25€

Μπορείς να υπολογίσεις:

Ποιά είναι η οικονομικότερη επιλογή για σένα που θέλεις να πηγαίνεις 3 μέρες την εβδομάδα για ένα μήνα στο γυμναστήριο;

ΘΕΜΑ 5

Η πρόγνωση της μετεωρολογικής υπηρεσίας για της μέγιστες και ελάχιστες θερμοκρασίες των επόμενων ημερών φαίνεται στο διπλανό πίνακα

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα

Ημέρα	Θερμοκρασία
1η	
2η	
3η	
4η	
5η	
6η	

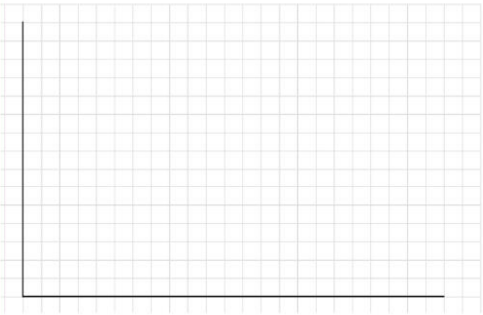
Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία είναι συνάρτηση της ημέρας;

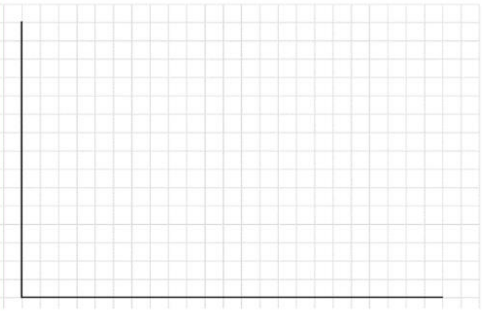
Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα

Θερμοκρασία	Ημέρα
	1η
	2η
	3η
	4η
	5η
	6η

Αν θεωρήσουμε την ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την ΗΜΕΡΑ ως εξαρτημένη μεταβλητή, μπορούμε να πούμε ότι η ημέρα είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας;

Δοκίμασε να σχεδιάσεις τις δύο γραφικές παραστάσεις





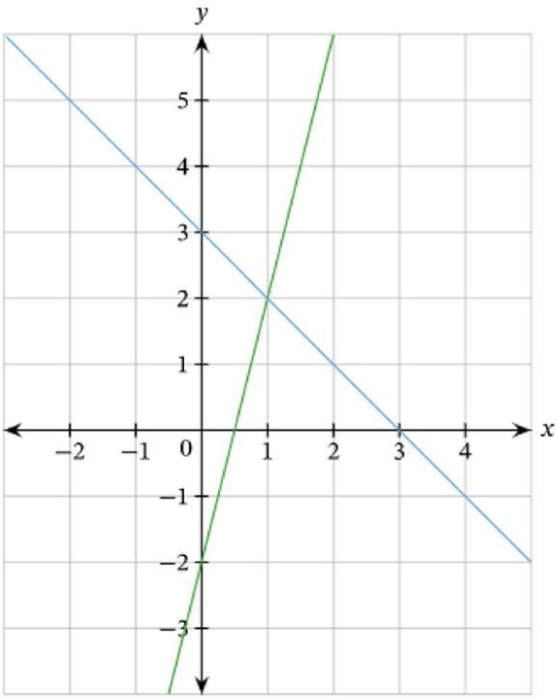
Τι παρατηρείς;

ΘΕΜΑ 6

Χρησιμοποίησε το παρακάτω διάγραμμα στο οποίο φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών

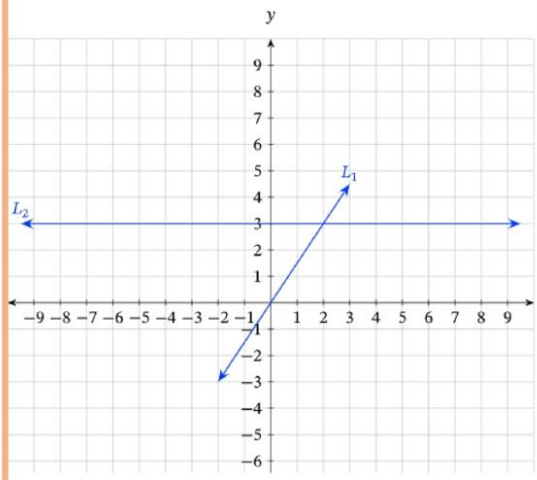
$$\begin{cases} \varepsilon_1 : y = 4x - 2 \\ \varepsilon_2 : y = -x + 3 \end{cases}$$

και βρες τη λύση του συστήματος



ΘΕΜΑ 7

Να βρείτε τις συνταταγμένες του κοινού σημείου των εξισώσεων που παριστάνονται με τις ευθείες L_1 και L_2 .



Κύκλωσε τη σωστή απάντηση:

Α(3,3) Β(3,2) Γ(2,0)

Δ(2,3) Ε(2,2)

Τι παρατηρείς ;

ΘΕΜΑ 8

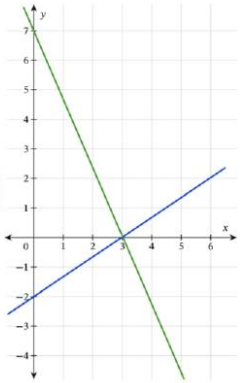
Μας δίνεται το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

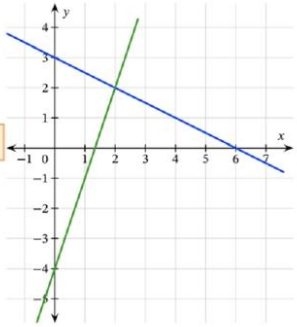
Ποια από τα παρακάτω γραφήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να σας βοηθήσουν στην επίλυση του συστήματος;

Ποια βήματα θα ακολουθήσεις;

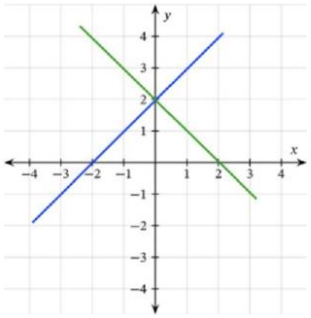
Α



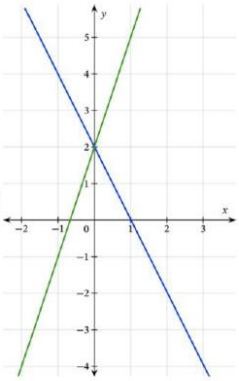
Β



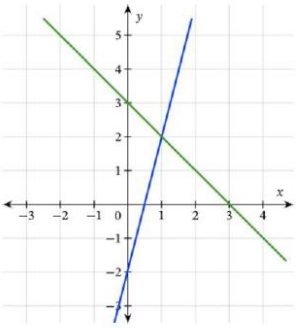
Γ



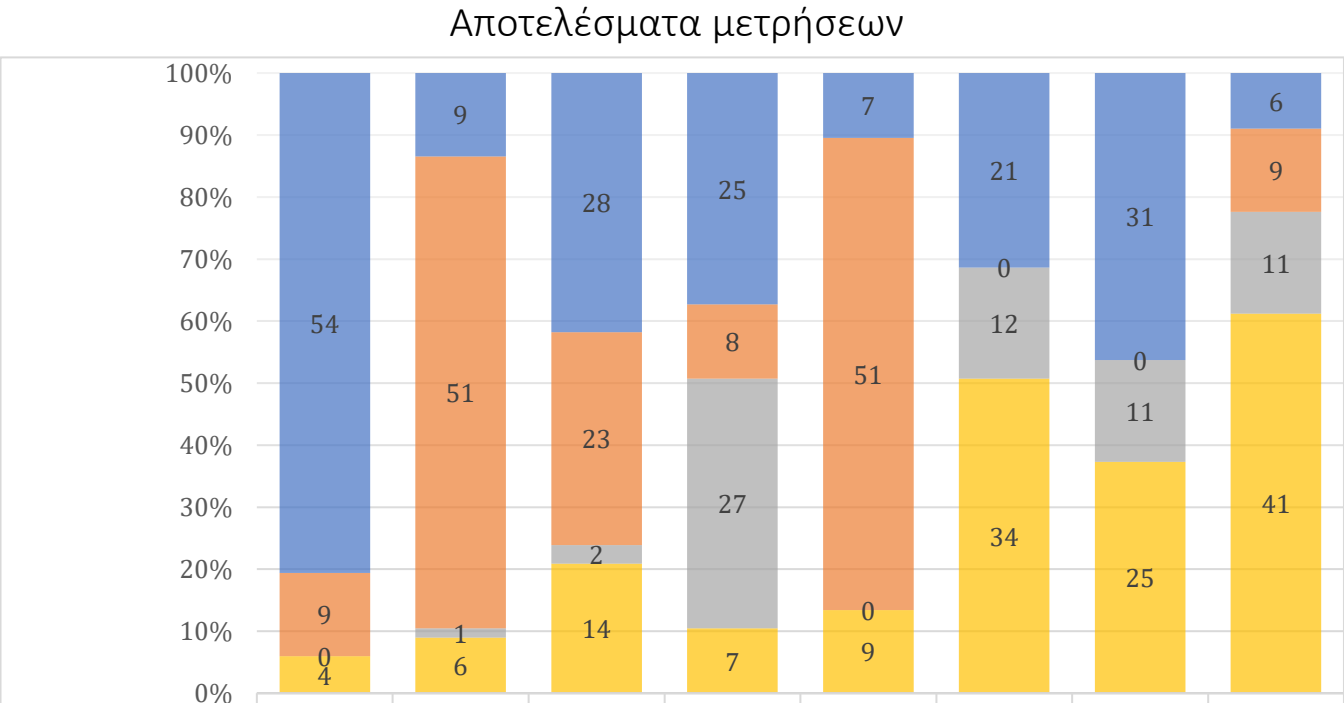
Δ



Ε



Το φύλλο εργασίας διανεμήθηκε και συμπληρώθηκε από 67 μαθητές της Γ' γυμνασίου.



	ΘΕΜΑ 1	ΘΕΜΑ 2	ΘΕΜΑ 3	ΘΕΜΑ 4	ΘΕΜΑ 5	ΘΕΜΑ 6	ΘΕΜΑ7	ΘΕΜΑ 8
Σωστό	54	9	28	25	7	21	31	6
Μερικώς σωστό	9	51	23	8	51	0	0	9
Λάθος	0	1	2	27	0	12	11	11
Δεν απαντήθηκε	4	6	14	7	9	34	25	41

Σύμφωνα με τις απαντήσεις των μαθητών μπορούμε να συμπεράνουμε ποιοτικά τα εξής ανά θέμα:

ΘΕΜΑ 1: Οι περισσότεροι μαθητές υπολογίζουν το αποτέλεσμα χωρίς τη χρήση κάποιας εξίσωσης

ΘΕΜΑ 2: Συμπληρώνουν εύκολα τον πίνακα τιμών αλλά δύσκολα συμπεραίνουν ότι υπάρχει κοινή λύση

ΘΕΜΑ 3: Σχηματίζουν τον πίνακα τιμών αλλά οι μισοί περίπου κάνουν τη γραφική παράσταση

ΘΕΜΑ 4: Η εύρεση λύσης γίνεται διαισθητικά στην πλειοψηφία των προσπαθειών

ΘΕΜΑ 5: Η καταγραφή του πίνακα γίνεται εύκολα αλλά η γραφική παράσταση δύσκολα

ΘΕΜΑ 6 & 7: Η κοινή λύση προσδιορίζεται άμεσα μόνο από μικρή μειοψηφία μαθητών

ΘΕΜΑ 8: Από τους μαθητές που δοκίμασαν το θέμα αυτό, οι περισσότεροι προτίμησαν να λύσουν αλγεβρικά το σύστημα και όχι να αντιστοιχήσουν τις γραφικές παραστάσεις με τις εξισώσεις

Σχολιασμός

Από την ανάλυση των φύλλων εργασίας φαίνεται ότι η επίλυση των γραμμικών συστημάτων δεν είναι μία κατεκτημένη γνώση από την πλειοψηφία των μαθητών. Οι περισσότεροι μαθητές αποφεύγουν να ασχοληθούν με σύνθετα ερωτήματα. Ο φόβος για τα Μαθηματικά και η παραίτηση από την μαθηματική σκέψη είναι κυριαρχούσα αντίληψη. Μόνο για μια μικρή μειοψηφία μαθητών «το δύσκολο είναι πρόκληση».

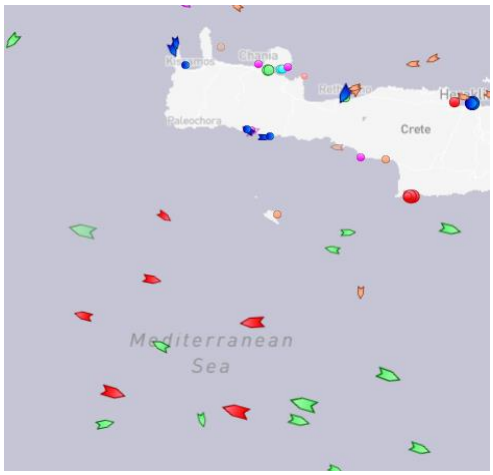
Από το παραπάνω δεδομένα γίνεται φανερό ότι αν θέλουμε να άρουμε αυτή την αρνητική προδιάθεση πρέπει να έχουμε τη δυνατότητα να προσεγγίζουμε το ίδιο θέμα με πολλαπλές αναπαραστάσεις που θα καλύπτουν κάθε μαθησιακό τύπο ώστε να δίνουμε ευκαιρίες στο μεγαλύτερο μέρος των μαθητών να ακολουθήσει το πρόγραμμα σπουδών και όχι απλά να παρευρίσκεται στην τάξη.

7.3.2 Φύλλο εργασίας στο εργαστήριο (lab)

Σε συμφωνία με τον σκοπό της διδακτικής παρέμβασης θα διερευνήσουμε αν η χρήση των ΤΠΕ συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση του μαθήματος. Για το σκοπό αυτό αφού παρουσιάστηκε το λογισμικό GeoGebra (που οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν γνώριζαν) τέθηκε το παρακάτω πρόβλημα ώστε να διερευνηθεί ένας τρόπος επίλυσης.

«Ένα μικρό καράβι»

Στην ιστοσελίδα https://www.marinetraffic.com/ παρατηρούμε σε πραγματικό χρόνο την πορεία πλοίων που ταξιδεύουν στην Μεσόγειο Θάλασσα (Εικόνα 6.2.1).



Εικόνα 6.2.1: *Οι θέσεις των πλοίων και η κατεύθυνση τους.*

Αν η αρχή των αξόνων τοποθετηθεί στην νήσο Γαύδο (Εικόνα 6.2.2) και η θετική φορά των αξόνων είναι δική σας επιλογή τότε:

Α) Ποιες οι συντεταγμένες των 4 πλοίων;

Β) Αν θεωρήσουμε ότι οι ρότες των πλοίων είναι ευθείες γραμμές, να βρεθούν οι συντεταγμένες των τομών της ρότας του πράσινου πλοίου με αυτές των κόκκινων πλοίων.

Γ) Τα δύο πλοία που είναι πλησιέστερα στην Γαύδο, αν κινούνται με την ίδια ταχύτητα, κινδυνεύουν να συγκρουστούν;

Εικόνα 6.2.2: *Τα πλοία γύρω από τη νήσο Γαύδο (η αρχή των αξόνων)*

Σχολιασμός

Από τους μαθητές ζητήθηκε να συζητήσουν σε μικρές ομάδες και να διατυπώσουν προφορικά τρόπους που θα μπορούσε να λυθεί το πρόβλημα.

Μετά από την συζήτηση που προηγήθηκε, ακολούθησε η επίλυση του προβλήματος με την βοήθεια του GeoGebra. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας τους διαθέσιμους υπολογιστές του εργαστηρίου καθώς και tablet δοκίμασαν, σε ομάδες, με την καθοδήγησή μας να καταλήξουν σε συμπεράσματα.

Κατά τη διάρκεια του εργαστηρίου παρατηρήθηκε μεγαλύτερη εμπλοκή των μαθητών με το θέμα. Ακόμα και μαθητές με χαμηλές επιδόσεις αυτοί που δεν τα κατάφεραν στο φύλλο εργασίας πριν το εργαστήριο – έδειξαν καλύτερη διάθεση και η ευκολία που είχαν με τους υπολογιστές τους έδωσε τη δυνατότητα να εμπλακούν δημιουργικά. Το διαφορετικό περιβάλλον και η χρήση πιο σύγχρονων εργαλείων τους έδωσε το κίνητρο να δραστηριοποιηθούν.

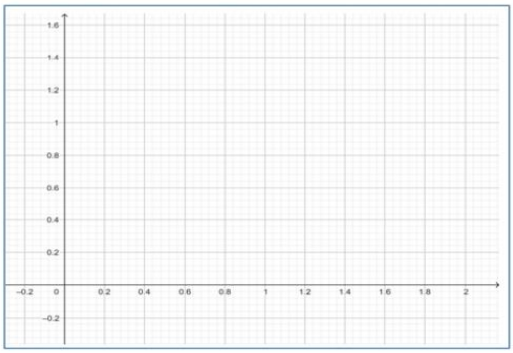
7.3.3 Φύλλο εργασίας μετά το εργαστήριο (post-lab)

Το παρακάτω φύλλο εργασίας δόθηκε στους μαθητές για την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης. Λόγω του περιορισμένου χρόνου που ήταν διαθέσιμος, η κάθε ομάδα είχε ελεύθερη επιλογή να εργαστεί στο 1ο ή το 2ο θέμα του φύλλου. Το 3ο θέμα αφέθηκε σαν άσκηση για το σπίτι ως μία ευκαιρία περεταίρω ενασχόλησης με το λογισμικό και εκτός σχολικού πλαισίου.

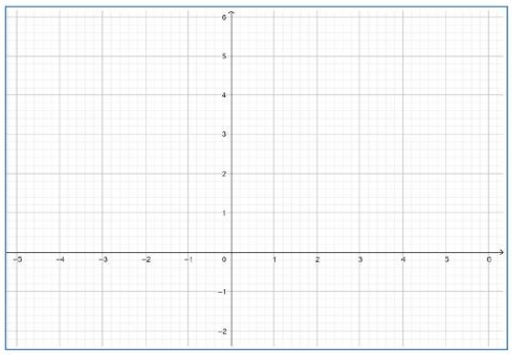
ΘΕΜΑ 1

Να σχεδιαστούν, με τη βοήθεια του Geogebra, τα παρακάτω συστήματα συναρτήσεων και να σημειωθεί η λύση του συστήματος.

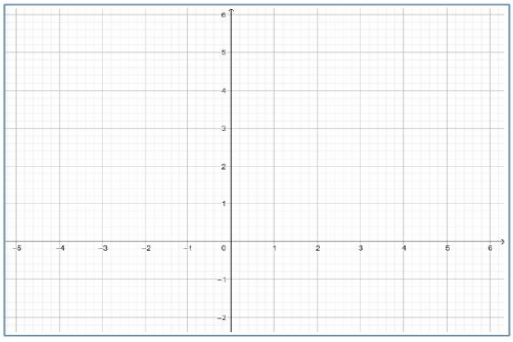
Α) $\begin{cases} y = -5x + 1 \\ 2y + 10x = 2 \end{cases}$



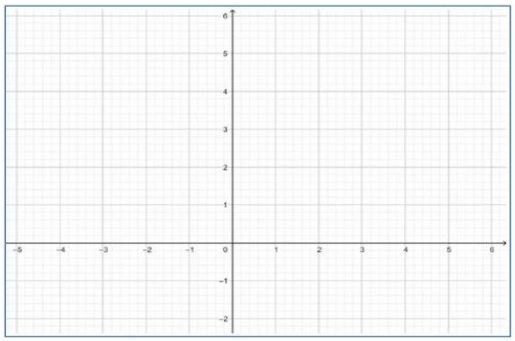
Γ) $\begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$



Β) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ y = x + 3 \end{cases}$



Δ) $\begin{cases} -6y + 4x = -2 \\ -3y + 2x = 6 \end{cases}$



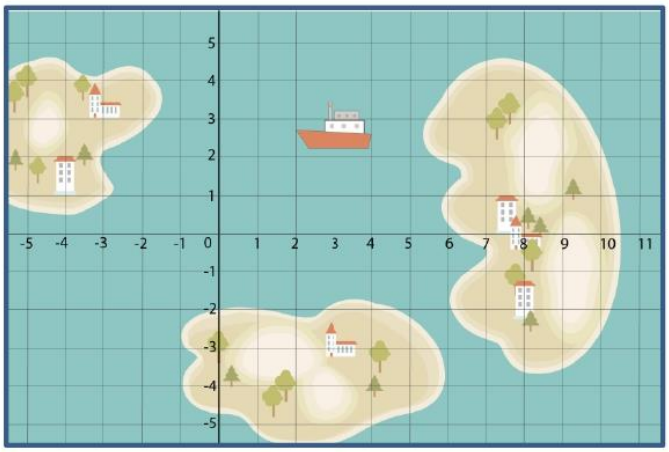
ΘΕΜΑ 2

Σχεδιάστε με τη βοήθεια του GeoGebra τις ρότες των πλοίων που εκτελοι δρομολόγια μεταξύ των νησίων . Σε κάθε περίπτωση ελέξτε αν υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης μεταξύ των πλοίων.

Α) Πλοίο 1: $2x + 7y = 8$
Πλοίο 2: $x - y = 5$

Υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης?

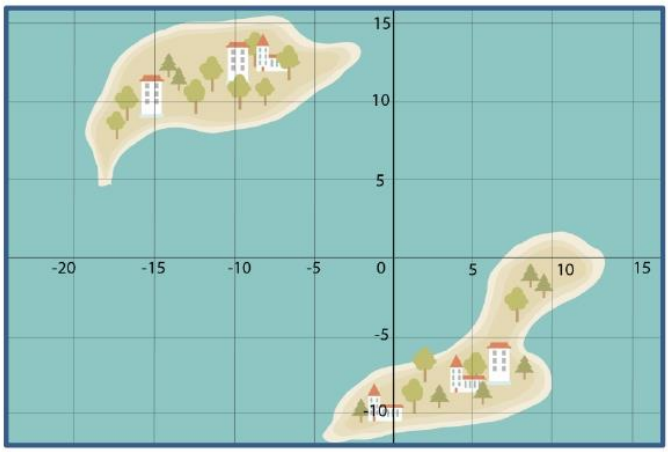
☐ **ΝΑΙ** ☐ **ΟΧΙ**



Β) Πλοίο 1: $x + y = 5$
Πλοίο 2: $2x + 2y = 0$

Υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης?

☐ **ΝΑΙ** ☐ **ΟΧΙ**



Γ) Πλοίο 1: $x + 6\psi = 24$
Πλοίο 2: $-x + 2y = -3$

Υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης?

☐ **ΝΑΙ** ☐ **ΟΧΙ**

ΘΕΜΑ 3

Σκοπεύουμε να στρώσουμε την αυλή μας με πλακάκια.
Γνωρίζουμε ότι:

- Η αυλή χωράει 300 πλακάκια
- Τα χρήματα που διαθέτουμε είναι 200 €.

Χρώμα	Τιμή τεμαχίου(€)
Λευκό	0.4
Καφέ	0.9

Μετά από μια έρευνα αγοράς επιλέξαμε λευκά και καφέ πλακάκια και συγκεντρώσαμε τις πληροφορίες που φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

Αν x το λευκό και y το καφέ πλακάκι, τότε

- Η εξίσωση του πλήθους των πλακιδίων θα είναι : x + y = ……. (1)
- Η εξίσωση της τιμής των πλακιδίων θα είναι : ……. x + ……. y = …… (2)

Με τη βοήθεια του GeoGebra, λύσε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2).

Η λύση του συστήματος είναι : ……

Στα παρακάτω μοτίβα συμπληρώστε την αναλογία καφέ προς λευκών πλακιδίων.

Α

$\frac{\text{καφέ}}{\text{λευκά}} = _____$

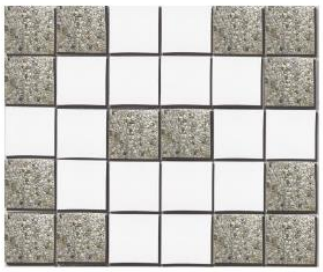
Β

$\frac{\text{καφέ}}{\text{λευκά}} = _____$

Γ

$\frac{\text{καφέ}}{\text{λευκά}} = _____$

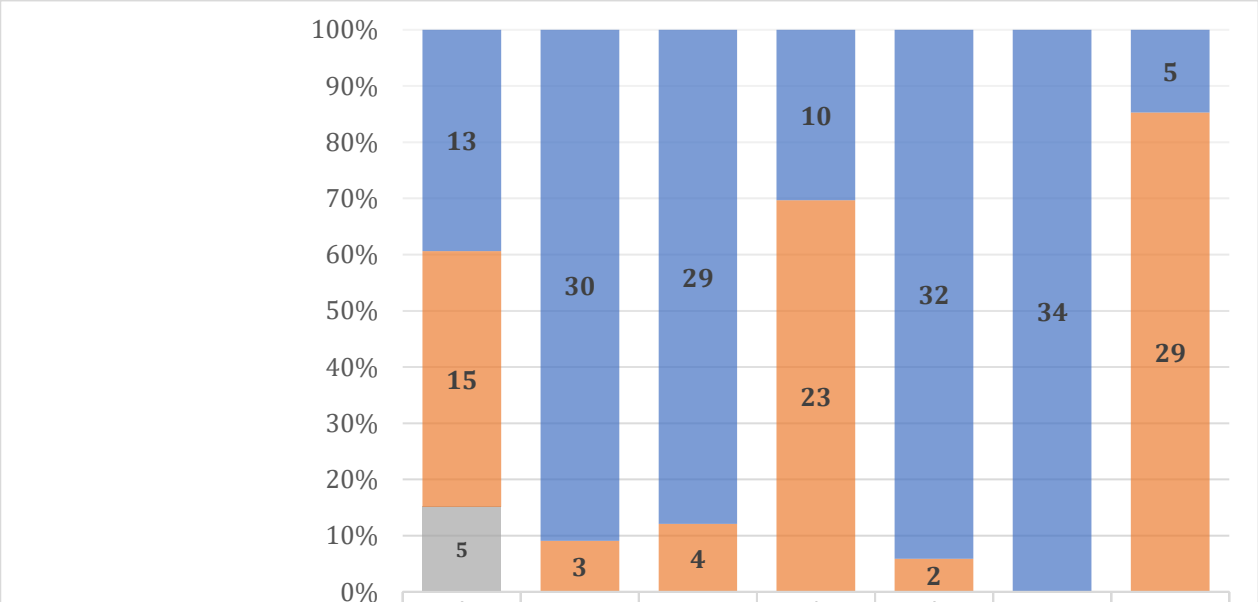
Δ



$\frac{\text{καφέ}}{\text{λευκά}} = _____$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα από τη λύση του συστήματος επέλεξε ποιο σχέδιο θα μπορούσαμε να φτιάξουμε στην αυλή με τα πλακίδια που αγοράσαμε.

Αποτελέσματα μετρήσεων



	ΘΕΜΑ 1				ΘΕΜΑ 2		
	Α	Β	Γ	Δ	Α	Β	Γ
Σωστό	13	30	29	10	32	34	5
Σωστή γραφική παράσταση αλλά λάθος απάντηση	15	3	4	23	2	0	29
Δεν απαντήθηκε	5	0	0	0	0	0	0

Σχολιασμός

Σύμφωνα με τις απαντήσεις που λάβαμε στα δύο πρώτα θέματα, μπορούμε ποιοτικά να συμπεράνουμε ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών κατάφερε, με τη χρήση του GeoGebra, να υπολογίσει και να μεταφέρει σωστά στην κόλλα τις γραφικές παραστάσεις των γραμμικών εξισώσεων και να εντοπίσει το σημείο τομής τους.

Στο 2ο θέμα όμως παρουσιάστηκε δυσκολία σύνδεσης του μαθηματικού αποτελέσματος της λύσης του συστήματος με το φυσικό του νόημα, αφού υπήρξαν πολλοί μαθητές που επέλεξαν τη θετική απάντηση για τον κίνδυνο σύγκρουσης των πλοίων στην περίπτωση που οι γραφικές παραστάσεις των ροτών τους τεμνόταν πάνω στο έδαφος του νησιού (ερώτημα Γ).

Η παρουσίαση του λογισμικού GeoGebra και η παρουσίαση του διδακτικού παραδείγματος έληξαν με τη συμπλήρωση ενός ανώνυμου ερωτηματολογίου, που επισυνάπτεται παρακάτω, με το οποίο διερευνήθηκε αν:

Α) το μάθημα γίνεται πιο ευχάριστο με τη χρήση του λογισμικού

Β) οι μαθητές έδειξαν περισσότερο ενδιαφέρον κατά τη διάρκεια του μαθήματος

Γ) άλλαξε η στάση τους στην προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών

Δ) για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων θα έκαναν χρήση λογισμικών

Ένα μικρό ερωτηματολόγιο για το τέλος …

Γνωρίζω να χρησιμοποιώ Η/Υ σε ικανοποιητικό βαθμό;

Έχω προηγούμενη εμπειρία στην χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού;

Χρησιμοποιείτε σε άλλα μαθήματα εκπαιδευτικά λογισμικά;

Θα ήθελες να γίνονται και άλλα μαθήματα με τη βοήθεια τέτοιων προγραμμάτων;

Η χρήση του GeoGebra σε βοήθησε στην επίλυση των προβλημάτων;

Το μάθημα με τη βοήθεια του GeoGebra ήταν πιο ευχάριστο;

Η χρήση του GeoGebra σε βοήθησε να καταλάβεις καλύτερα το μάθημα;

Θα ήθελες στο μάθημα να γίνεται χρήση του GeoGebra πιο συχνά;

Σκέφτεσαι να δοκιμάσεις το λογισμικό GeoGebra στη μελέτη στο σπίτι;

Θεωρείς ότι το GeoGebra βοηθά στην εξοικονόμηση χρόνου;

Θεωρείς ότι το GeoGebra βοηθά στην καλύτερη κατανόηση;

7.4 Παρατηρήσεις από τη διδακτική παρέμβαση

Η συμπλήρωση των φύλλων εργασίας και του ερωτηματολογίου έγινε ανώνυμα από όλους τους μαθητές. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές αλλά και τις παρατηρήσεις που καταγράψαμε κατά τη διάρκεια της παρέμβασης μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής:

- Η πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποιούν Η/Υ σε ικανοποιητικό βαθμό και όλοι είναι κάτοχοι κινητού τηλεφώνου.
- Έχουν μικρή ή ελάχιστη εμπειρία στη χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών αν και είναι καλοί χρήστες εφαρμογών των κοινωνικών δικτύων.
- Στο σχολείο δεν γίνεται χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών. Οι παραδόσεις σε κάποια μαθήματα γίνεται μέσω λογισμικού παρουσιάσεων (PowerPoint).
- Έχουν θετική στάση στην δοκιμή των νέων τεχνολογιών στην καθημερινή εκπαιδευτική διαδικασία.
- Οι μαθητές έδειξαν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για το μάθημα. Ακόμα και μαθητές με χαμηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά κινητοποιήθηκαν για να συμμετέχουν.
- Η επίλυση του προβλήματος με GeoGebra τους φάνηκε πιο ευχάριστη και «εκτός πλαισίου».
- Οι περισσότεροι δήλωσαν ότι θα «ψάξουν» περαιτέρω το λογισμικό.
- Φάνηκε ότι η δημιουργία ομάδων και η συνεργατική διδασκαλία εμπλέκει ενεργά μεγαλύτερο αριθμό μαθητών.

Συμπερασματικά, το μάθημα με τη χρήση του λογισμικού GeoGebra απομακρύνθηκε από τη συνηθισμένη του μορφή και οι περισσότεροι μαθητές υποστήριξαν πως ήταν «ένας διαφορετικός τρόπος διδασκαλίας» που καλό θα ήταν να υπάρχει συχνά στο μάθημα. Ο διδάσκων παύει να κατευθύνει μετωπικά τους λίγους αλλά υποστηρίζει περισσότερους να αυτενεργήσουν και να αλλάξουν στάση απέναντι στα Μαθηματικά. Επιπλέον, αφού η πλειοψηφία των μαθητών βρήκε το μάθημα πιο ενδιαφέρον και ότι «η ώρα πέρασε ευχάριστα» μπορούμε αξιοποιώντας ποικίλους πόρους και εργαλεία να δώσουμε την δυνατότητα να αναπτύξουν αυτοπεποίθηση στη μαθηματική σκέψη και θετική στάση ως προς τη νέα ύλη που θα διδαχθούν. Στα οφέλη του λογισμικού μπορεί επίσης να καταγραφεί η βοήθεια που προσφέρει στην ανάπτυξη της διερευνητικής μάθησης. Οι μαθητές πολύ εύκολα μπορούν να αναζητήσουν και να πειραματιστούν με μία εκπαιδευτική εφαρμογή και μακριά από το σχολείο.

Κεφάλαιο 8 – Συμπεράσματα

Η διδασκαλία, ιδιαίτερα των Μαθηματικών, είναι μία διαδικασία αντίληψης. Ο μαθητής θα πρέπει να μπορεί αντιληφθεί με τις αισθήσεις του την έννοια που διδάσκεται και στον σκοπό αυτό μπορεί να συμβάλλει αποτελεσματικά η επιλογή του κατάλληλου συστήματος σημειωτικής αναπαράστασης. Οι διαφορετικές μορφές αναπαράστασης παρουσιάζουν διαφορετικές «όψεις ενός ίδιου θεωρητικού περιεχομένου» (R.Duval, 1996), επομένως ο συνδυασμός τους οδηγεί στην καλύτερη αντίληψη μίας έννοιας. Το αντικείμενο δε θα πρέπει να ταυτίζεται με την αναπαράσταση με την οποία συνήθως επιλέγεται να αποδοθεί. Αντιθέτως είναι ουσιώδες να παρουσιάζεται μέσα από πολλαπλές μορφές αναπαραστάσεων. Μάλιστα, η δυνατότητα μετάβασης από το ένα επίπεδο αναπαράστασης στο άλλο και ο συνδυασμός τους μπορούν να αποδειχθούν καθοριστικά στην ευκολότερη προσέγγιση ενός προβλήματος. Ανάλογα με τα απαιτούμενα του κάθε προβλήματος θα πρέπει να αξιοποιούνται οι δυνατότητες που προσφέρει η κάθε αναπαράσταση και να συντίθενται οι παρατηρήσεις τους ώστε να οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα με τον πιο εύκολο τρόπο (Δαγδιλέλης, Παυλοπούλου, Τρίγγα, 1998).

Το Geogebra , όπως και όλα τα αντίστοιχα λογισμικά, προσφέρουν στην διδασκαλία των Μαθηματικών μία σημαντική βοήθεια ώστε να αναβαθμίσει τις δυνατότητες της στην οπτική αναπαράσταση των εννοιών. Ξεπερνώντας, έτσι, το σκόπελο της κατασκευής μιας οπτικής αναπαράστασης, όπως για παράδειγμα μια γραφική παράσταση, οι μαθητές μπορούν να επικεντρωθούν στις πληροφορίες ή τις ιδιότητες που μπορούν να εξάγουν από αυτή.

Ταυτόχρονα, με δεδομένο ότι τελικός στόχος είναι να επιτευχθεί η βέλτιστη αφομοίωση μίας έννοιας από τους μαθητές, εξίσου σημαντικό ρόλο κατέχει και η κατάλληλη επιλογή σεναρίων - προβλημάτων που θα αποτελέσουν παραδείγματα εφαρμογής της έννοιας αυτής. Η διδασκαλία εφαρμογών που συνδέονται με την πραγματική ζωή δίνει στους μαθητές νόημα και πλαίσιο για το τί μπορούν να μάθουν. Κάνουν συνδέσεις μεταξύ Μαθηματικών και καθημερινής ζωής και από πολύ νωρίς συνειδητοποιούν πως τα Μαθηματικά είναι μία παγκόσμια γλώσσα που βρίσκει πολλαπλές εφαρμογές και εκτός σχολείου. Πολλοί εκπαιδευτικοί ερευνητές υποστηρίζουν πως οι μαθητές πρέπει να

περάσουν από την τεχνική της απλής αποστήθισης, που επικρατεί στο σχολείο, σε καταστάσεις πραγματικής ζωής για να μπορέσουν να κατανοήσουν ουσιαστικά τη μαθηματική σκέψη. Τα Μαθηματικά δεν αφορούν μόνο τους αριθμούς και τις αφηρημένες έννοιες αλλά μας βοηθούν να αντιμετωπίσουμε τον πραγματικό κόσμο και παίζουν σημαντικό ρόλο στην καθημερινότητά μας όπου συνειδητά ή ασυνείδητα εφαρμόζουμε τις αρχές τους σε πολλές περιπτώσεις. Από την οργάνωση του οικογενειακού προϋπολογισμού μέχρι τις αναλογίες συστατικών μιας συνταγής μαγειρικής. Αν η σπουδαιότητα τους αυτή κοινοποιείται στους μαθητές χρησιμοποιώντας κατάλληλα εργαλεία και δραστηριότητες είναι σίγουρο πως θα υπάρξει αλλαγή στη στάση τους απέναντι στα Μαθηματικά και έτσι θα βρεθούν στην κοινωνία ενημερωμένοι και με κριτική ικανότητα.

Η παρούσα εργασία αποτελεί ένα πρώτο βήμα που μπορεί να λειτουργήσει ως οδηγός για ένα διδάσκοντα που επιθυμεί να εισαγάγει τη χρήση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία του και να την εκσυγχρονίσει. Είναι μία έτοιμη δραστηριότητα που μπορεί να τροποποιηθεί ανάλογα με τις ανάγκες και να χρησιμοποιηθεί άμεσα. Τα οφέλη όπως αποδείχθηκε είναι πολλαπλά τόσο σε επίπεδο θετικής απόκρισης προς το μάθημα όσο και σε επίπεδο αφομοίωσης της διδαχθείσας ύλης. Οι συνοπτικές οδηγίες χρήσης του λογισμικού σε συνδυασμό με την ολοκληρωμένη διεπιστημονική δραστηριότητα τριών σταδίων που διαμορφώθηκε καθώς και οι παρατηρήσεις από την εφαρμογή της μπορούν να γίνουν το έναυσμα για περαιτέρω μελέτη και οργάνωση νέων δραστηριοτήτων.

Η μακρόχρονη εξ αποστάσεως εκπαίδευση που εφαρμόστηκε στα σχολεία, λόγω πανδημίας, ώθησε όλο και περισσότερους εκπαιδευτικούς, ακόμα και κατά ανάγκη, να καταφύγουν στην αναζήτηση εναλλακτικών μεθόδων διδασκαλίας, ξεφεύγοντας από την τεχνική πίνακας – κιμωλία, ώστε να αλληλεπιδρούν με τους μαθητές τους και να διατηρηθεί, όσο κατά το δυνατόν , ομαλή η εκπαιδευτική διαδικασία.

Τα εκπαιδευτικά λογισμικά θα πρέπει, ακολουθώντας τα δεδομένα της εποχής, να γίνουν μέρος της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών ώστε ο διδακτικός τους σχεδιασμός να περιλαμβάνει την χρήση τους. Μέσα στους ειδικότερους στόχους των προγραμμάτων σπουδών προτείνεται να ενταχθούν και:

- Η σύνδεση της γλωσσικής και συμβολικής αναπαράστασης των προβλημάτων
- Η εφαρμογή προβλημάτων που προσομοιάζουν πραγματικές καταστάσεις
- Η πρακτική άσκηση στην κατανόηση των δεδομένων του προβλήματος
- Η ορθή αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του προβλήματος και τη σύνδεσή τους με τις πραγματικές παραμέτρους

Η στρατηγική τους πρέπει να περιλαμβάνει

- Ανάλυση δεδομένων: τι πληροφορίες δίνονται, τι ερωτήσεις ζητούνται
- Σχεδιασμός απαιτούμενων υπολογισμών
- Αξιολόγηση των λύσεων – Έλεγχος εγκυρότητας αποτελεσμάτων
- Ανασχεδιασμός, όταν απαιτείται, των ερωτήσεων ώστε να γίνονται κατανοητές στο μαθητή

Με απλές αλλά ουσιαστικές παρεμβάσεις από την πολιτεία και με τη συνεργασία των διδασκόντων, το μάθημα των Μαθηματικών μπορεί να μεταμορφωθεί ριζικά ακολουθώντας τους σύγχρονους ρυθμούς και η ποιότητά του θα αναβαθμιστεί κατακόρυφα.

Βιβλιογραφία

Agyei, D. D., & Voogt, J. (2011). ICT use in the teaching of mathematics: Implications for professional development of pre-service teachers in Ghana. Education and information technologies, 16(4), 423- 439.

Antohe, V. (2009). Limits of Educational Soft "GeoGebra" in a Critical Constructive Review. *ArXiv, abs/0905.4430*.

Asterhan, C. S., Rosenberg, H. (2015). The promise, reality and dilemmas of secondary school teacher-student interactions in Facebook: The teacher perspective. *Computers & Education,* 85, 134-148.
Author (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology:
Author (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology:
Author (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology:

Avgerinou, M. and Ericson, J., (1997). A Review of the Concept of Visual Literacy. British Journal of Educational Technology, 28(4), pp.280-291.

Balanskat, A., Bannister, D., Hertz, B., Sigillò, E., Vourikari, R., Kampylis, P., & Punie, Y. (2013). Overview and analysis of 1:1 learning initivatives in Europe. JRC Scientific and Policy Reports.

Banks, J. (1993). Multicultural education: Development, dimensions, andchallenges. Phi Delta Kappan 75 (1) p 22-28.

Bayazit, I., & Aksov, Y. (2010). Connecting representations and mathematical ideas with GeoGebra. GeoGebra : *The New Language for the Third Millennium*, 1(1), 93-106.

Beilock, S. L., & Willingham, D., (2014). Ask the cognitive scientist-math anxiety: can teachers help students reduce it? *American Education,* 38, pp.28-33.

Bishop, A. J. (1988). A review of research on visualization in mathematics education. In A. Borbás (Ed.), Proceedings of the 12th PME International Conference, 1, 170-176.

Braber N., Krüger J., Mazereeuw M., Kuiper W. (2019). Reflecting on the value of mathematics in an interdisciplinary STEM course. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University.

Bruner, J. (1960). *The Process of Education.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Castillo-Manzano, J. I., Castro-Nu~no, M., L opez-Valpuesta, L., Sanz-Díaz, M. T., & Yniguez, R. (2016). Measuring the effect of ARS on academic performance: A global meta-analysis. Computers & Education, 96, 109-121. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.02.007

Cöster, M., and A. Westelius, (2016). Digitalisering [Digitalisation]. Stockholm: Liber.

Cuban, L., Kirkpatrick, H. and Peck, C., (2001). High Access and Low Use of Technologies in High School Classrooms: Explaining an Apparent Paradox. *American Educational Research Journal*, 38(4), pp.813-834.

Davison, D., Miller, K. and Metheny, D., (1995). What Does Integration of Science and Mathematics Really Mean?. *School Science and Mathematics*, 95(5), pp.226-230.

Dawson, V. (2008). Use of information communication technology by early career science teachers in Western Australia. International Journal of Science Education, 30(2), 203–219.

Deloitte (2013). *Mathematical sciences and their value for the Dutch economy*. Amsterdam: Deloitte Netherlands, p 21.

Dewey, B., Singletary, T. and Kinzel, M., (2009). Graphing Calculator Use in Algebra Teaching. *School Science and Mathematics*, 109(7), pp.383-393.

Disbudak, O., & Akyuz, D. (2019). The comparative effects of concrete manipulates and Dynamic Software on the geometry achievement of fifth-grade students. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *26* (1), 3–20.

Ditzler, C., Eunsook Hong, E., & Strudler, N. (2016). How tablets are utilized in the classroom. Journal of Research on Technology in Education, 48(3), 181–193.

Δαγδιλέλης, Παυλοπούλου, Τρίγγα (1998). *Διδακτική: μέθοδοι και εφαρμογές*, Μπένου, ISBN: 960-359-055-X

Dockendorff, M. and Solar, H., (2017). ICT integration in mathematics initial teacher training and its impact on visualization: the case of GeoGebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(1), pp.66-84.

Duval R.,(1996) "Sémiosis et la pensée Humaine", Peter Lang

Duval, R. (1998). Geometry from a Cognitive Point of View. In C Mammana and V Villani (Eds), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study.

Eady, M. and Lockyer, L., (2013). *Tools for learning: technology and teaching strategies', Learning to Teach in the Primary School*. Eady, M. J. & Lockyer, L. 2013.

Fahlberg-Stojanovska, L. and Stojanovski, V., (2009). GeoGebra -- freedom to explore and learn. *Teaching Mathematics and its Applications*, 28(2), pp.69-76.

Fekete, J., van Wijk, J., Stasko, J. and North, C., (2008). The Value of Information Visualization. Lecture Notes in Computer Science, pp.1-18.

Finlayson, M., (2014). Addressing math anxiety in the classroom. *Improving Schools*, 17(1), pp.99-115.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics: An educational approach. Dordrecht, Holland: Reidel Pub.

Fraillon, J., Ainley, J., Schulz, W., & Friedman, T. (2014). Preparing for life in a digital age: The IEA international computer and information literacy study 2013 international report. Springer.

Furner, J., & Berman, B. (2005). Confidence in their ability to do mathematics: The need to eradicate math anxiety so our future students can successfully compete in a high-tech globally competitive world. Dimensions in Mathematics, 18(1), pp. 28–31.

Furner, J. M., Marinas, C. A., 2007. Geometry Sketching Software for Elementary Children: Easy as 1, 2, 3. Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 3(1), 83-91

Gonzalez-DeHass, A., Furner, J., Vásquez-Colina, M. and Morris, J.,(2017). Pre-service elementary teachers' achievement goals and their relationship to math anxiety. *Learning and Individual Differences*, 60, pp.40-45.

Goos, M. (2005). A sociocultural analysis of the development of pre-service and beginning teachers' pedagogical identities as users of technology. Journal of Mathematics Teacher Education, 8(1), 35-59.

Goos, M., Galbraith, P., Renshaw, P. and Geiger, V., (2003). Perspectives on technology mediated learning in secondary school mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), pp.73-89.

Haciomeroglu, E., Bu, L., Schoen, R. and Hohenwarter, M., (2009). Learning to Develop Mathematics Lessons with GeoGebra. *MSOR Connections*, 9(2), pp.24-26.

Hanımoğlu, E., (2018). The Impact Technology Has Had on High School Education over the Years. *World Journal of Education*, 8(6), p.96.

Hasse, C. (2017). Technological literacy for teachers. *Oxford Review of Education, 43*(3), 365–378.

Hill, J., & Hannafin, M. (2001). Teaching and Learning in Digital Environments: The Resurgence of Resource-Based Learning. Educational Technology, Research and Development, 49, 37-52.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M. & Lavicza, Z. (2010). Evaluating Difficulty Levels of Dynamic Geometry Software Tools to Enhance Teachers' Professional Development. International Journal for Technology in Mathematics Education, 17(3), 127-134.

IEP- ΙΕΠ (2021). Πράξη «Αναβάθμιση των Προγραμμάτων σπουδών και Δημιουργία Εκπαιδευτικού Υλικού Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης» - MIS: 5035542, http://iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli

Jackson, C. D. & Leffingwell, R. J. (1999) The Role of Instructors in Creating Math Anxiety in Students from Kindergarten through College. *The Mathematics Teacher,* 92, 7, pp. 583-586.

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. and Lithner, J., (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, pp.20-32.

Kamariah Abu Bakar, Ahmad Fauzi Mohd Ayub, Wong Su Luan, and Rohani Ahmad Tarmizi (2010). "Exploring secondary school students' motivation using technologies in teaching and learning mathematics" Procedia - Social and Behavioral Sciences, vol. 2, no. 2.

Kearney, M., Schuck, S., Aubusson, P., & Burke, P. F. (2018). Teachers' technology adoption and practices: Lessons learned from the IWB phenomenon. Teacher Development, 22(4), 481-496.

Knuth, E., (2000). Student Understanding of the Cartesian Connection: An Exploratory Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 500.

Kohen, Z., Orenstein, D. (2021). Mathematical modeling of tech-related real-world problems for secondary school-level mathematics. *Educ Stud Math* 107**,** 71–91.

Kramarenko, T., Bondar, K. and Shestopalova, O., (2021). The ICT usage in teaching mathematics to students with special educational needs. *Journal of Physics: Conference Series*, 1840(1), p.012009.

Lee, Jane A.; McDougall, Douglas E. (2010). Secondary School Teachers' Conceptions and Their Teaching Practices Using Graphing Calculators. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41 (7) p857-872

Lesh, R., & Doerr, H.M. (2003). *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on mathematics problem solving, learning and teaching*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesmeister, L. M. (1996). The effect of graphing calculators on secondary mathematics achievement. (Unpublished MS thesis, University of Houston). Dissertation Abstracts International, 35, 01.

Leung, A. (**2008)**. Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through the Lens of Variation. Int J Comput Math Learning 13, 135–157.

Li. (2007). Student and teacher views about technology. *Journal of research on Technology in Education 39(4)*. Retrieved from: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ768884.pdf

Lützen, J., (2011). The Physical Origin of Physically Useful Mathematics. *Interdisciplinary Science Reviews*, 36(3), pp.229-243.

Mansilla B. V., Duraisingh D. E., Wolfe C. & Haynes C. (2009). Targeted assessment rubric: an empirically grounded rubric for inter- disciplinary writing. The Journal of Higher Education 80(3), 334-353.

Mayes, R. & Kabbala, T. (2012). *Exploring the science framework; making connections in math with the common core state standards*. Retrieved from https://ngss.nsta.org/making-connections-common-core.aspx

Meng, C. C. (2012). Assessing pre-service secondary mathematics teachers' attitude towards geometry's sketchpad. Asia Pacific Journal of Educators and Education, 27, 105-117.

Montrieux, H., Vanderlinde, R., Schellens, T. and De Marez, L., (2015). Teaching and Learning with Mobile Technology: A Qualitative Explorative Study about the Introduction of Tablet Devices in Secondary Education. *PLOS ONE*, 10(12), p.e0144008.

Munakata, M. & Vaidya A., (**2012).** Encouraging creativity in mathematics and science through photography. *Teaching Mathematics and Its Applications,* 31, pp.121-132.

Murphy, C. (2019). Exploring the role of visual imagery in learning mathematics. 42nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2006). Curriculum focal points for prekindergarten through Grade 8 mathematics.

National Research Council (2000). How people learn. Washington, DC: National Academy Press.

National Research Council (2013). *The mathematical sciences in 2025*. Washington, DC.

Niess M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge.Teaching and Teacher Education, 21(5).

OECD (2016), PISA 2015 Mathematics Framework. In *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*, OECD Publishing, Paris.
OECD. (2012). PISA 2009 technical report. OECD Publishing.

OECD. (2015). Students, computers and learning. Making the connection. OECD Publishing.

OECD. (2017). PISA 2015 results (volume V): Collaborative problem solving. OECD Publishing.

Ogbonnaya, U. & Mushipe, M., (2020). The Efficacy of GeoGebra-Assisted Instruction on Students' Drawing and Interpretations of Linear Functions. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, 19(9), pp.1-14.

Oldknow, A., Taylor, R. and Tetlow, L., (2010). *Teaching mathematics using ICT*. London: Continuum International Pub. Group.

Olofsson, A. D., J. O. Lindberg, and G. Fransson (2017). "What Do Upper Secondary School Teachers Want to Know from Research on the Use of ICT and How Does This Inform a Research Design?" Education and Information Technologies 22 (6): 2897–2914. doi:10.1007/s10639-017-9590-5.

Osborne J. (2002). Science Without Literacy: A ship without a sail?, Cambridge Journal of Education, 32:2, 203-218.

Osborne, J. & Dillon, J. (2008). Science education in Europe: critical reflections: a report to the Nuffield Foundation. London: The Nuffield Foundation.

Papanastasiou, C. (2000). Effects of attitudes and beliefs on mathematics achievement. *Studies in Educational Evaluation,* 26*, pp.* 27-42.

Presmeg, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 205-236).

Presmeg, N., (2020). Visualization and Learning in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp.900-904.

Repko, A.F., Szostak, R., & Buchberger, M. (2017). *Introduction to interdisciplinary studies.* London: Sage. p 125.

Richardson, F. C., & Suinn, R. M. (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology, 19*(6), pp. 551–554.

Rooks, D. & Winkler, C. (2012). Learning interdisciplinarity: service learning and the promise of interdisciplinary teaching. Teaching Sociology, 40, 2 20.

Ruthven, K., Deaney, R. & Hennessy, S., (2009). Using graphing software to teach about algebraic forms: a study of technology-supported practice in secondary-school mathematics. *Educ Stud Math* 71, 279–297

S. Card, J. MacKinlay, and B. Shneiderman, (1998). "Readings in Information Visualization: Using Vision to Think". Morgan Kaufmann.

Santos-Trigo, M. (2004). The Role of Dynamic Software in the Identification and Construction of Mathematical Relationships. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 23(4), 399-413.

Schneider, R. M., Krajcik, J., & Blumenfeld, P. (2005). Enacting reform based science materials: the range of teacher enactments in reform classrooms. Journal of Research in Science Teaching, 42(3), 283–312.

Schroeder, C. M., Scott, T. P., Tolson, H., Huang, T. Y., & Lee, Y. H. (2007). A meta-analysis of national research: Effects of teaching strategies on student achievement in science in the United States. Journal of Research in Science Teaching, 44(10), 25.

Selwyn, N., Nemorin, S., Bulfin, S.,&Johnson, N. F. (2017). Left to their own devices: the everyday realities of one-to-one classrooms. Oxford Review of Education, 43(3), 289–310.

Seufert, S., Guggemos, J., & Sailer, M, (2021). Technology-related knowledge, skills and attitudes of pre- and in-service teachers: The current situation and emerging trends. Computers in Human Behaviour. https://doi.org/10.1016/j.chb.2020.106552

Shadaan, P. and Leong K. E., (2013). Effectiveness of Using Geogebra on Students' Understanding in Learning Circles. *The Malaysian Online Journal of Educational Technology,* 1 (4).

Shaffer, D. W., & Gee, J. P. (2006). Before Every Child Is Left Behind: How Epistemic Games Can Solve the Coming Crisis in Education. WCER Working Paper No. 2005-7.

Simonsen, L.M. & Dick, T.P. (1997). Teachers' Perceptions of the Impact of Graphing Calculators in the Mathematics Classroom. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 16*(2), 239-368

So, H. J., & Kim, B. (2009). Learning about problem-based learning: student teachers integrating technology, pedagogy and content knowledge. Australasian Journal of Educational Technology, 25(1), 101–116.

Stuart, V., (2000). Math Curse or Math Anxiety?. *Teaching Children Mathematics*, 6(5), pp.330-335.

Stupel, M. and Ben-Chaim, D., (2014). Absolute value equations – what can we learn from their graphical representation?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(6), pp.923-928.

Tabach, M., (2011). A Mathematics Teacher's Practice in a Technological Environment: A Case Study Analysis Using Two Complementary Theories. Technology, Knowledge and Learning, 16 (3).

Takači, D., Stankov, G. and Milanovic, I., (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers & Education*, 82, pp.421-431.

Tamam, B. and Dasari, D., (2021). The use of Geogebra software in teaching mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*, 1882(1), p.012042.

Traxler, J. (2010). Students and mobile devices. Research in Learning Technology, 18(2), 149–160.

Văcăretu A. S. (2011). Teaching and learning high school mathematics through an interdisciplinary approach Proceedings -The Mathematics Education into the 21st Century Project, Grahamstown Conference.

Varma, K., Husic, F., & Linn, M. C. (2008). Targeted support for using technology-enhanced science inquiry modules. Journal of Science Education and Technology, 17(4), 341–356.

Wachira, P. and Keengwe, J., (2011). Technology Integration Barriers: Urban School Mathematics Teachers Perspectives. *Journal of Science Education and Technology*, 20(1), pp.17-25.

Walan, S., (2020). Embracing Digital Technology in Science Classrooms—Secondary School Teachers' Enacted Teaching and Reflections on Practice. *Journal of Science Education and Technology*, 29(3), pp.431-441.

Wawan, W., Marsigit, M., Fitria Ningsih, E., Widyawati, S., Kusumaningtyas, W., Mahmudi, M., Suhono, S., Mukhlishin, A., Ganda Putra, F. and Setiawan, A., (2018). Technology-Integrated Collaborative

Learning: Convenient Alternative in Developing the Problem Solving Capability and Positive Attitude towards Mathematics. *International Journal of Engineering & Technology*, 7(3.2), p.737.

Weber, T. E. (1998). Graphing technology and its effect on solving inequalities. (Unpublished doctoral dissertation,Wayne State University). Dissertation Abstracts International, 60(01A), 88.

Yilmaz, Ç., Altun, S. and Olkun, S., (2010). Factors affecting students' attidude towards Math: ABC theory and its reflection on practice. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2(2), pp.4502-4506.

Zakaria E., Nordin N, M. and Ahmad S. (2007). The Trend of teaching and learning Mathematics. Kuala Lumpur: Utusan Publications & Distributors

Zakaria, E. and Lee, L., 2012. Teachers Perceptions toward the use of GeoGebra in the Teaching and Learning of Mathematics. *Journal of Mathematics and Statistics*, 8(2), pp.253-257.

Zemelman, S., Daniels, H., and Hyde, A. (2005). Best practice: New standards for teaching and learning in America's school (3rd Edition). Portsmouth, NH: Heinemann.

Žilinskienė, I. and Demirbilek, M., 2015. Use of GeoGebra in Primary Math Education in Lithuania: An Exploratory Study from Teachers' Perspective. *Informatics in Education*, 14(1), pp.127-142.

Zulnaidi, H. and Syed Zamri, S., (2017). The Effectiveness of the GeoGebra Software: The Intermediary Role of Procedural Knowledge On Students' Conceptual Knowledge and Their Achievement in Mathematics. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6).

Παράρτημα Ι - Απαντήσεις φύλλων εργασίας

Φύλλο εργασίας pre-lab

ΘΕΜΑ 1

Σε μία online παραγγελία αγόρασες σοκολάτες των 2€. Τα έξοδα αποστολής ήταν 3€ και συνολικά χρεώθηκες 27€.

Οι σοκολάτες που αγόρασες είναι : ..12..

ΘΕΜΑ 2

Συμπλήρωσε τον πίνακα τιμών για τις παρακάτω συναρτήσεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ

- $y = 2x - 1$

x	y
0	-1
2	3
4	7
6	11

- $y = 3x - 5$

x	y
0	-5
2	1
4	7
6	13

Τι παρατηρείς για τις δύο συναρτήσεις ;

Οι δύο συναρτήσεις επαληθεύονται για το ζεύγος τιμών (x, y) = (4,7)

ΘΕΜΑ 3

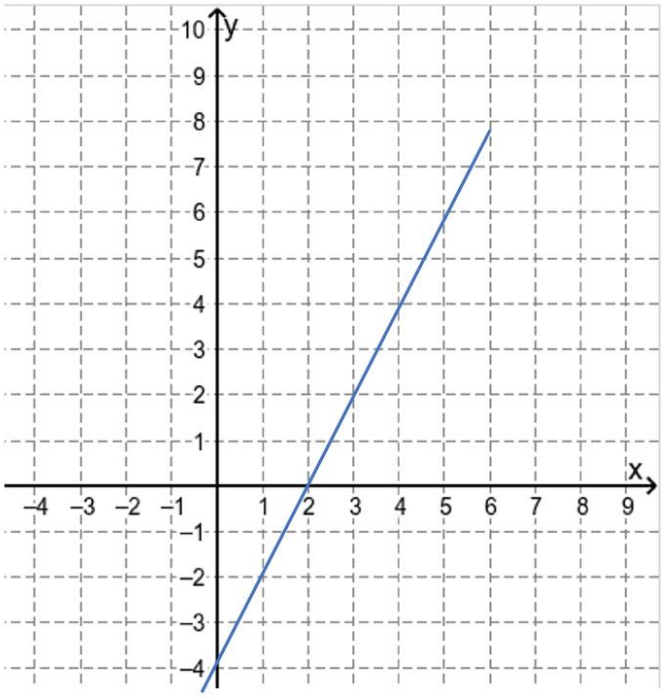
Δίνεται η σχέση: y = 2x -4.

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα με τουλάχιστον 5 ζεύγη τιμών και κάνε την γραφική παράσταση της σχέσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ

x	y
0	-4
1	-2
2	0
3	2
4	4

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ



ΘΕΜΑ 4

Στο γυμναστήριο της γειτονιάς υπάρχει ο ακόλουθος τιμοκατάλογος

ΠΑΚΕΤΑ ΣΥΝΔΡΟΜΩΝ

Χρήση οργάνων γυμναστικής

Μέλη : 2€ / επίσκεψη

Μη μέλη : 5€ / επίσκεψη

Κόστος εγγραφής μέλους : 25€

Μπορείς να υπολογίσεις:

Ποιά είναι η οικονομικότερη επιλογή για σένα που θέλεις να πηγαίνεις 3 μέρες την εβδομάδα για ένα μήνα στο γυμναστήριο;

Αν είμαι μέλος: $25 + 2 \cdot (3 \cdot 4) = 49$ €
Αν δεν είμαι μέλος: $5 \cdot (3 \cdot 4) = 60$ €

Η οικονομικότερη επιλογή είναι να εγγραφούμε ως μέλη στο γυμναστήριο

ΘΕΜΑ 5

Η πρόγνωση της μετεωρολογικής υπηρεσίας για της μέγιστες και ελάχιστες θερμοκρασίες των επόμενων ημερών φαίνεται στο διπλανό πίνακα

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα

Ημέρα	Μέγιστη Θερμοκρασία
1η	22
2η	22
3η	18
4η	18
5η	20
6η	24

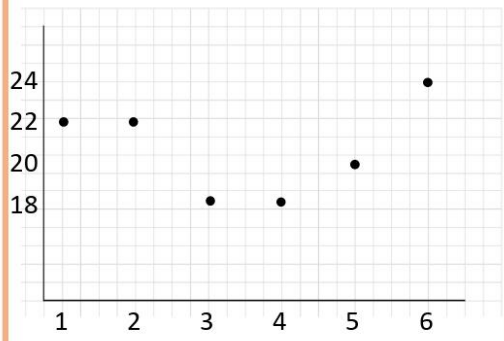
Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία είναι συνάρτηση της ημέρας;

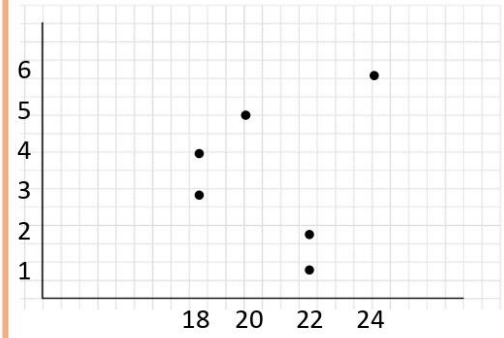
Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα

Μέγιστη Θερμοκρασία	Ημέρα
22	1η
22	2η
18	3η
18	4η
20	5η
24	6η

Αν θεωρήσουμε την ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την ΗΜΕΡΑ ως εξαρτημένη μεταβλητή, μπορούμε να πούμε ότι η ημέρα είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας;

Δοκίμασε να σχεδιάσεις τις δύο γραφικές παραστάσεις





Τι παρατηρείς;

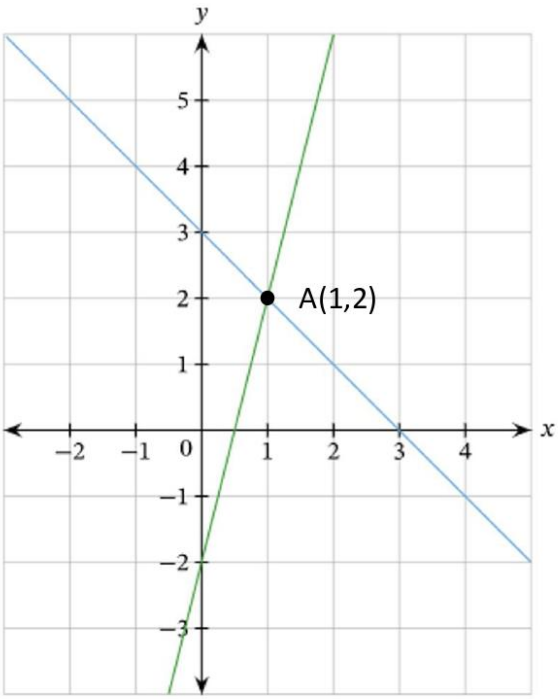
Η θερμοκρασία μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση της ημέρας. Η 2η περίπτωση αντιβαίνει στον ορισμό της συνάρτησης.

ΘΕΜΑ 6

Χρησιμοποίησε το παρακάτω διάγραμμα στο οποίο φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών

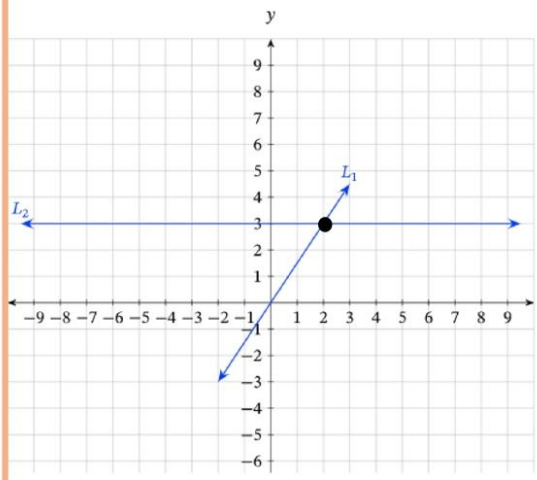
$$\begin{cases} \varepsilon_1 : y = 4x - 2 \\ \varepsilon_2 : y = -x + 3 \end{cases}$$

και βρες τη λύση του συστήματος



ΘΕΜΑ 7

Να βρείτε τις συνταταγμένες του κοινού σημείου των εξισώσεων που παριστάνονται με τις ευθείες L_1 και L_2 .



Κύκλωσε τη σωστή απάντηση:

Α(3,3) Β(3,2) Γ(2,0)

Δ(2,3) Ε(2,2)

Τι παρατηρείς ;

Οι ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο

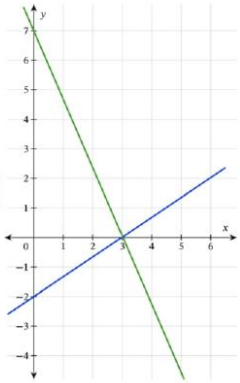
ΘΕΜΑ 8

Μας δίνεται το παρακάτω σύστημα:

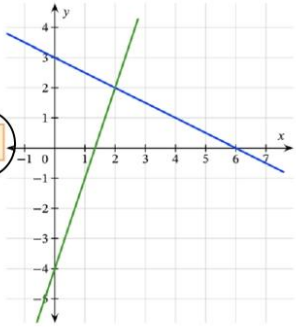
$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Ποια από τα παρακάτω γραφήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να σας βοηθήσουν στην επίλυση του συστήματος;

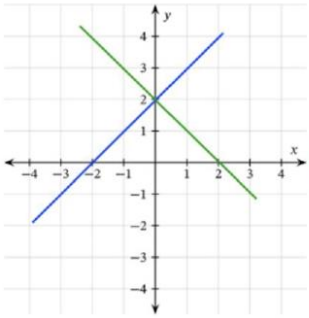
Α



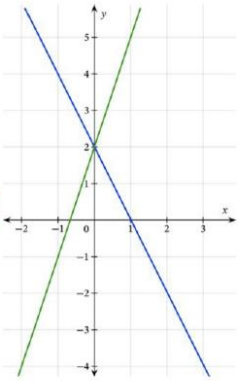
Β



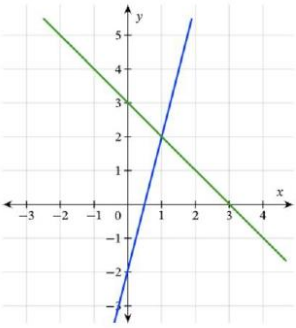
Γ



Δ



Ε



Ποια βήματα θα ακολουθήσεις;

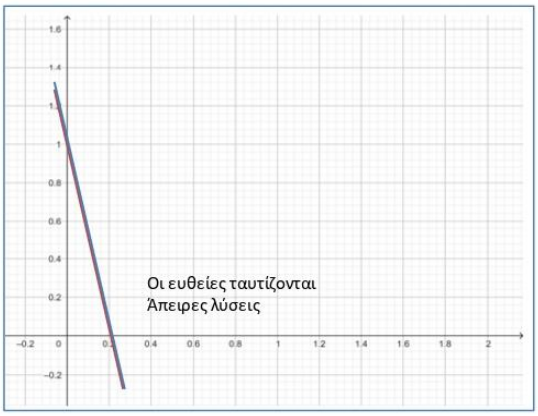
Ελεύθερη επιλογή μεταξύ γραφικής ή αλγεβρικής επίλυσης του συστήματος των δύο εξισώσεων.
Μέθοδος 1η : αντιστοίχιση των αλγεβρικών εξισώσεων του συστήματος με τις γραφικές παραστάσεις
Μέθοδος 2η : Επίλυση του συστήματος και εντοπισμός της λύσης γραφικά

Σημείωση:
Εάν είχε δοθεί σύστημα με λύση (0,2) για παράδειγμα το: $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$
Τότε η 2η μέθοδος δεν θα επαρκούσε για επιλογή μεταξύ των Γ και Δ

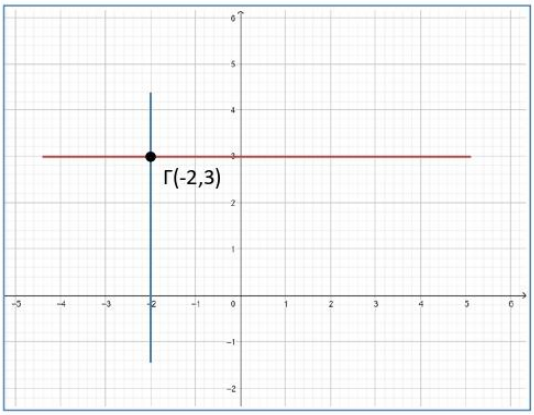
Φύλλο εργασίας meta-lab

ΘΕΜΑ 1
Να σχεδιαστούν, με τη βοήθεια του Geogebra, τα παρακάτω συστήματα συναρτήσεων και να σημειωθεί η λύση του συστήματος.

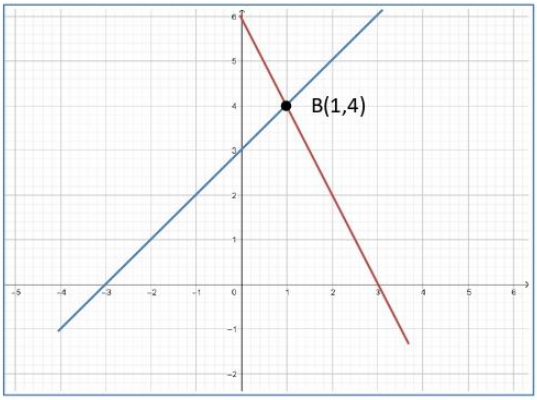
Α) $\begin{cases} y = -5x + 1 \\ 2y + 10x = 2 \end{cases}$



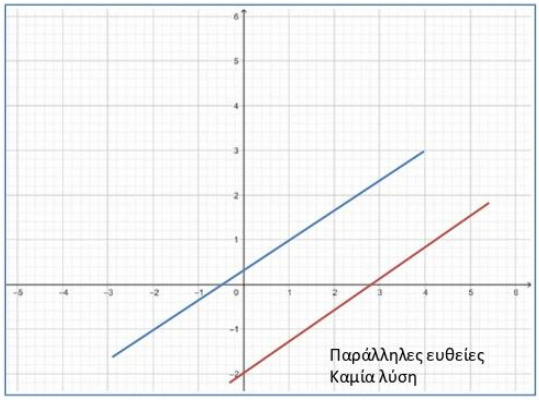
Γ) $\begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$



Β) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ y = x + 3 \end{cases}$



Δ) $\begin{cases} -6y + 4x = -2 \\ -3y + 2x = 6 \end{cases}$



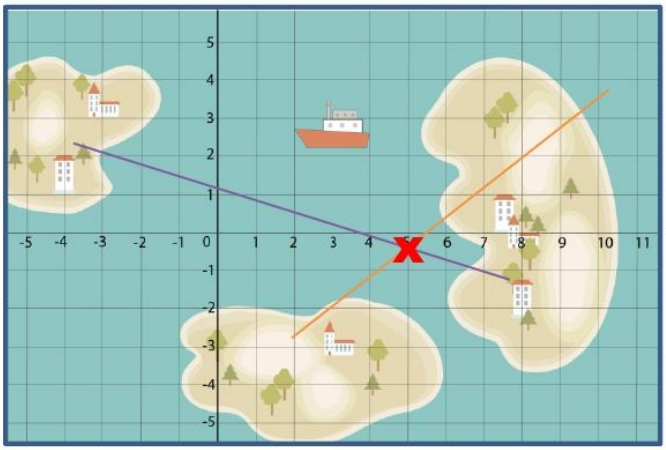
ΘΕΜΑ 2

Σχεδιάστε με τη βοήθεια του GeoGebra τις ρότες των πλοίων που εκτελούν δρομολόγια μεταξύ των νησίων . Σε κάθε περίπτωση ελέξτε αν υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης μεταξύ των πλοίων.

Α) Πλοίο 1: $2x + 7y = 8$
Πλοίο 2: $x - y = 5$

Υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης?

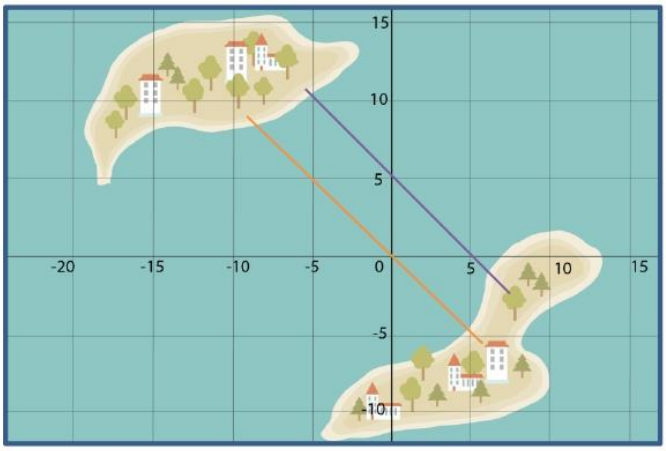
☑ ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ



Β) Πλοίο 1: $x + y = 5$
Πλοίο 2: $2x + 2y = 0$

Υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης?

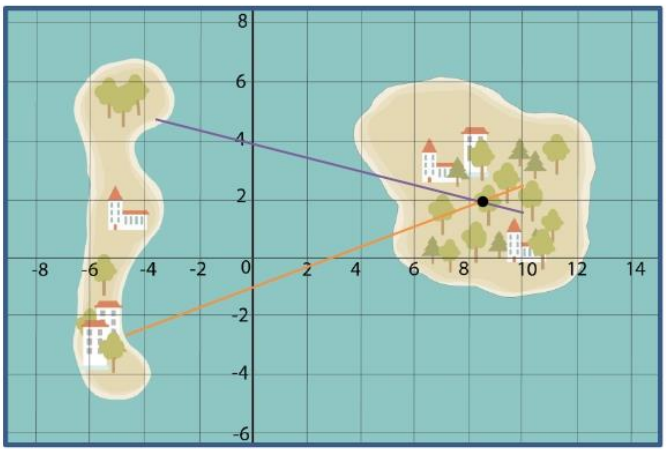
☐ ΝΑΙ ☑ ΟΧΙ



Γ) Πλοίο 1: $x + 6\psi = 24$
Πλοίο 2: $-x + 2y = -3$

Υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης?

☐ ΝΑΙ ☑ ΟΧΙ



ΘΕΜΑ 3

Σκοπεύουμε να στρώσουμε την αυλή μας με πλακάκια.
Γνωρίζουμε ότι:

- Η αυλή χωράει 300 πλακάκια
- Τα χρήματα που διαθέτουμε είναι 200 €.

Μετά από μια έρευνα αγοράς επιλέξαμε λευκά και καφέ πλακάκια και συγκεντρώσαμε τις πληροφορίες που φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

Χρώμα	Τιμή τεμαχίου(€)
Λευκό	0.4
Καφέ	0.9

Αν x το λευκό και y το καφέ πλακάκι, τότε

- Η εξίσωση του πλήθους των πλακιδίων θα είναι : x + y = ...300.. (1)
- Η εξίσωση της τιμής των πλακιδίων θα είναι : ..0,4.. x + ..0,9.. y = ..200.. (2)

Με τη βοήθεια του GeoGebra, λύσε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2).

Η λύση του συστήματος είναι : ..(140,160)..

Στα παρακάτω μοτίβα συμπληρώστε την αναλογία καφέ προς λευκών πλακιδίων.

Α

$$\frac{\text{καφέ}}{\text{λευκά}} = \frac{18}{12}$$

Β

$$\frac{\text{καφέ}}{\text{λευκά}} = \frac{15}{15}$$

Γ

$$\frac{\text{καφέ}}{\text{λευκά}} = \frac{10}{20}$$

Δ

$$\frac{\text{καφέ}}{\text{λευκά}} = \frac{14}{16}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα από τη λύση του συστήματος επέλεξε ποιο σχέδιο θα μπορούσαμε να φτιάξουμε στην αυλή με τα πλακίδια που αγοράσαμε.

Σχέδιο Δ, αφού έχει τη σωστή αναλογία σύμφωνα με τη λύση του συστήματος: $\frac{\text{καφέ}}{\text{λευκά}} = \frac{140}{160} = \frac{14}{16}$