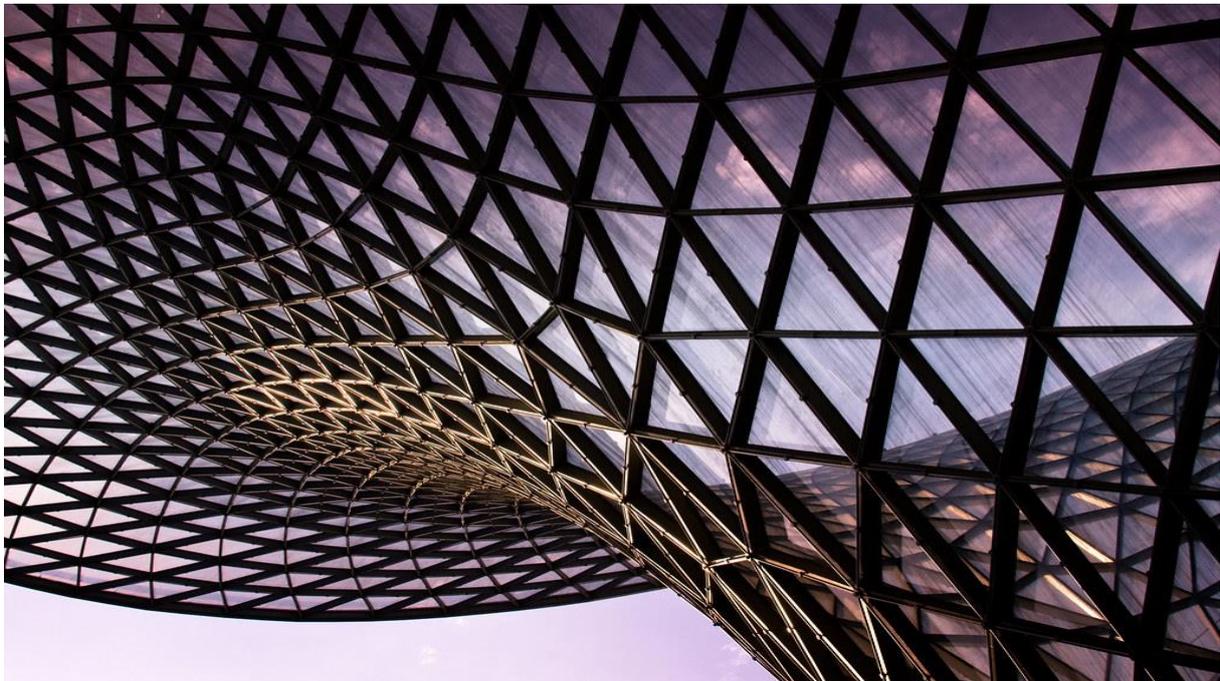




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών  
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών



## Κριτική Αξιολόγηση Διατάξεων Προτύπου CEN/TR 1993-1-103 για τα Μήκη Λυγισμού Χαλύβδινων Μελών



Διπλωματική Εργασία  
**ΛΕΩΝΙΔΑ ΤΑΛΙΑΔΟΥΡΟΥ**

EMK 2022 13

Επιβλέπων: Χάρης Γαντές, Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
Αθήνα, Ιούλιος 2022

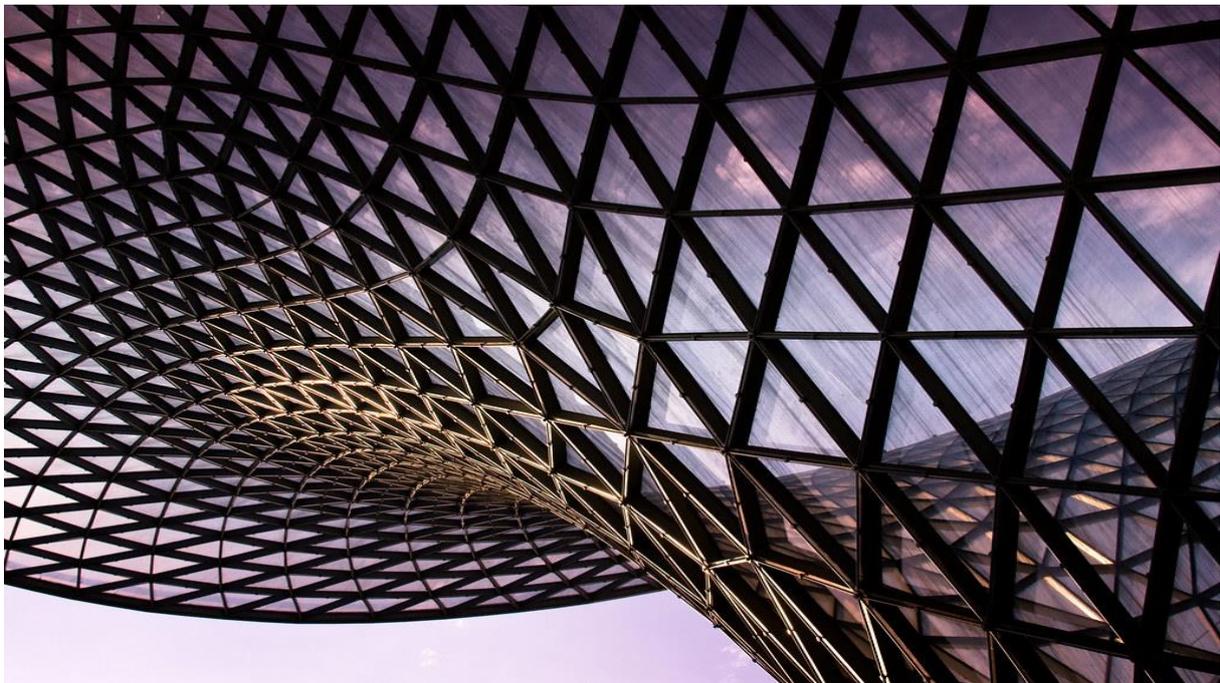




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών  
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών



## Κριτική Αξιολόγηση Διατάξεων Προτύπου CEN/TR 1993-1-103 για τα Μήκη Λυγισμού Χαλύβδινων Μελών



Διπλωματική Εργασία  
**ΛΕΩΝΙΔΑ ΤΑΛΙΑΔΟΥΡΟΥ**

EMK 2022 13  
Επιβλέπων: Χάρης Γαντές, Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
Αθήνα, Ιούλιος 2022



Copyright © Λεωνίδας Ταλιαδούρος, 2022

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση σε αρχείο πληροφοριών, διανομή, αναπαραγωγή, μετάφραση ή μετάδοση της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό, υπό οποιαδήποτε μορφή και με οποιοδήποτε μέσο επικοινωνίας, ηλεκτρονικό ή μηχανικό, χωρίς την προηγούμενη έγγραφη άδεια του/της συγγραφέα/εως. Επιτρέπεται η αναπαραγωγή, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον/την συγγραφέα.

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από τη Σχολή Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του/της συγγραφέα/εως (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202).

Copyright © Leonidas Taliadouros, 2022

All Rights Reserved

Neither the whole nor any part of this diploma thesis may be copied, stored in a retrieval system, distributed, reproduced, translated, or transmitted for commercial purposes, in any form or by any means now or hereafter known, electronic or mechanical, without the written permission from the author. Reproducing, storing and distributing this thesis for non-profitable, educational or research purposes is allowed, without prejudice to reference to its source and to inclusion of the present text. Any queries in relation to the use of the present thesis for commercial purposes must be addressed to its author.

Approval of this diploma thesis by the School of Civil Engineering of the National Technical University of Athens (NTUA) does not constitute in any way an acceptance of the views of the author contained herein by the said academic organisation (L. 5343/1932, art. 202).



Λεωνίδας Ταλιαδούρος (2022)  
Κριτική αξιολόγηση διατάξεων προτύπου CEN/TR 1993-1-103 για τα μήκη λυγισμού  
χαλύβδινων μελών  
Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ 2022 13  
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Leonidas Taliadouros (2022)  
Diploma Thesis EMK 2022 13  
Critical Evaluation of the Provisions of CEN/TR 1993-1-103 Regarding Buckling  
Length of Steel Members  
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece

## Ευχαριστίες

Η περάτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας σηματοδοτεί τον τερματισμό ενός άκρως δημιουργικού πενταετούς ταξιδιού, μέσα από το οποίο κατάφερα να γνωρίσω και να αγαπήσω το αντικείμενο μελέτης του δομοστατικού πολιτικού μηχανικού, αλλά και να εξελιχθώ ως υποψήφιος μελλοντικός ερευνητής, όπως και συνολικά ως προσωπικότητα.

Κύριοι συντελεστές της παραπάνω διαδικασίας, τους οποίους και θα ήθελα να ευχαριστήσω, συντέλεσαν το σύνολο των καθηγητών της κατεύθυνσης του δομοστατικού μηχανικού και κυρίως οι καθηγητές του Εργαστηρίου Μεταλλικών Κατασκευών. Ξεχωριστή αναφορά θα ήθελα να κάνω στον Καθηγητή Χάρη Γαντέ, επιβλέποντα της διπλωματικής μου, που μου έδωσε την ευκαιρία να γνωρίσω τον κόσμο των μη γραμμικών αναλύσεων και να ασχοληθώ με αυτό το τόσο ενδιαφέρον αντικείμενο, ενώ με καθοδήγησε και με βοήθησε κατά την πορεία υλοποίησης του συνόλου της εργασίας μου.

Επιπροσθέτως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την στήριξη τόσο σε οικονομικό, όσο και σε προσωπικό επίπεδο καθ'ολη την διάρκεια των σπουδών μου, την αδερφή μου για την τεράστια βοήθεια που παρείχε σε τεχνικό επίπεδο, την κοπέλα μου που έκανε πολλές θυσίες και ταξίδια, αφιερώνοντας άπειρο χρόνο για να είναι συνεχώς δίπλα μου, αλλά και τους φίλους μου για την αμέριστη κατανόηση και υποστήριξη τους.

Επιλογικά, τίποτα δεν θα ήταν δυνατό να είχε γίνει χωρίς την συμβολή του συνόλου των προαναφερθέντων και ευελπιστώ το τέλος των σπουδών μου να αποτελέσει την αρχή μίας γόνιμης ερευνητικής πορείας.

## Acknowledgement

This research has been supported by the ADDOPTML project: "ADDitively Manufactured OPTimized Structures by means of Machine Learning" (No: 101007595) belonging to the Marie Skłodowska-Curie Actions (MSCA) Research and Innovation Staff Exchange (RISE) H2020-MSCA-RISE-2020.

*Αφιερωμένη στους γονείς μου Χρήστο και Αναστασία, στην αδερφή μου  
Ηρώ και στην κοπέλα μου Κατερίνα.*





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΜΚ ΔΕ 2022 13

## **Κριτική Αξιολόγηση Διατάξεων Προτύπου CEN/TR 1993-1-103 για τα Μήκη Λυγισμού Χαλύβδινων Μελών**

**Λεωνίδας Ταλιαδούρος**

Επιβλέπων: Χάρης Γαντές, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

### **ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Η εξέλιξη της τεχνολογίας, αλλά και των ίδιων των δομικών υλικών, μέσω της ανάπτυξης νέων τρόπων παραγωγής και κατεργασίας τους, καθιστά εφικτή την δημιουργία μελών με οποιαδήποτε σχεδόν γεωμετρία και σχήμα, αλλά και πάχος, γεγονός που σε συνδυασμό με την εισαγωγή των αριθμητικών μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων οδήγησε στην χρησιμοποίηση όλο και πιο εύκαμπτων μελών και κατασκευών, που επακολούθως είναι ευαίσθητες στις διαφορετικές μορφές λυγισμού.

Το σύνολο των μεθόδων υπολογισμού των κρίσιμων φορτίων λυγισμού για τις διαφορετικές μορφές εκδήλωσης της μη γραμμικότητας γεωμετρίας, δεν αναλύεται στις μεθόδους σχεδιασμού του Ευρωκώδικα 3, αλλά περιγράφεται αναλυτικά στις διατάξεις του νέου προτύπου CEN/TR 1993-1-103. Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής είναι η δημιουργία κατάλληλων εφαρμογών των επιμέρους κεφαλαίων του προτύπου, προκειμένου να αξιολογηθεί η αξιοπιστία τους, όπως και η συνύπαρξη με τις αντίστοιχες μεθόδους σχεδιασμού του EN1993-1-103. Η επιλογή των διαφόρων παραδειγμάτων αποσκοπεί επίσης στην ανάδειξη περιπτώσεων ιδιαίτερου ενδιαφέροντος και αρκετών αβεβαιοτήτων.

Πιο συγκεκριμένα πρόκειται να μελετηθεί ο καμπτικός λυγισμός ενός προβόλου μεταβλητής διατομής υπό θλίψη, ο λυγισμός του άνω θλιβόμενου πέλματος μίας δικτυωτής γέφυρας κάτω διάβασης, μία διατομή μονής συμμετρίας υπό θλίψη η οποία υφίσταται στρεπτικό-καμπτικό λυγισμό, μία δεύτερη διατομή μονής συμμετρίας υπό κάμψη περί τον ισχυρό που εκδηλώνει πλευρικό λυγισμό, αλλά και η τιμή της δυσκαμψίας που απαιτείται για να θεωρηθεί μία ελαστική στήριξη, αμετάθετη.

Επιπροσθέτως έχει αναλυθεί τόσο το θεωρητικό υπόβαθρο, όσο και ο τρόπος εφαρμογής της μοναδικής τοπικής και καθολικής στέλειας σύμφωνα με το σχήμα της κυρίαρχης ιδιομορφής λυγισμού, η οποία φαίνεται να είναι ο αποτελεσματικότερος τρόπος οικουμενικής αντιμετώπισης των ατελειών στις περισσότερες των περιπτώσεων μελών από δομικό χάλυβα.

Αντί επιλόγου, αξίζει να σημειωθεί πως βασικό συνοδοιπόρο κατά την διάρκεια περάτωσης της παρούσας εργασίας αποτέλεσε το σύνολο των μη γραμμικών αναλύσεων, το οποίο έδωσε απαραίτητες

πληροφορίες τόσο για την συμπεριφορά, όσο και την αντοχή των διαφόρων μελών και κατασκευών, με αποτέλεσμα να καταδεικνύεται στο τέλος της ανάγνωσης κάθε κεφαλαίου κατά πόσο συνιστά αναγκαιότητα, η εφαρμογή του συγκεκριμένου υπολογιστικού εργαλείου στα επιμέρους παραδείγματα.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING  
INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES



DIPLOMA THESIS  
EMK ΔΕ 13 2022

## **Critical Evaluation of the Provisions of CEN/TR 1993-1-103 Regarding Buckling Length of Steel Members**

**Leonidas Taliadouros**

Supervisor: C. Gantes, Professor, N.T.U.A.

### **ABSTRACT**

The advancement of technology of the building materials through the development of new methods of production and processing, makes it possible to create members with almost any geometry and shape, as well as thickness, which, in combination with the introduction of finite element analysis software, led in the use of increasingly thin members and constructions, which are subsequently sensitive to different forms of buckling.

The set of methods for calculating the critical buckling loads for the different forms of manifestation of geometry nonlinearity are not analyzed in the design methods of Eurocode 3, but are described in detail in the provisions of the new CEN/TR 1993-1-103. The object of this thesis is the creation of appropriate applications of the individual chapters of the standard, in order to evaluate their reliability, but also the coexistence with the corresponding design methods of EN1993-1-103. The selection of the various examples is also intended to highlight cases of particular interest and several uncertainties.

More specifically, it is to be studied, the flexural buckling of a cantilever of non-uniform section under compression, the buckling of the upper chord of steel truss bridge, a mono-symmetrical cross-section of single symmetry under compression which undergoes torsional-flexural buckling, a second mono-symmetrical cross-section under bending that manifest lateral buckling, but also the stiffness value required, for an elastic constraint, to be considered fixed.

In addition, both the theoretical background and the application method of the single local and global imperfection in the shape of elastic critical buckling model (UGLI) have been

analyzed, which seems to be the most effective way to universally treat the imperfections in most of the cases of structural steel members.

Lastly, it is worth noting that a key ally during the completion of this diploma thesis was the set of non-linear analysis, which provided necessary information both for the behavior and the strength of the various members and structures. Consequently, at the end of each chapter, one can tell whether it is necessary to apply non-linear to the individual examples.



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1</b>	<b>ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ .....</b>	<b>1</b>
1.1	Εισαγωγή.....	1
1.2	Κύριες προϋποθέσεις γραμμικής συμπεριφοράς .....	2
1.3	Μη-γραμμικότητα υλικού .....	2
1.3.1	Μηχανικές ιδιότητες χάλυβα .....	3
1.3.2	Μοντέλα συμπεριφοράς χάλυβα.....	4
1.4	Μη γραμμικότητα γεωμετρίας.....	6
1.4.1	Μέθοδος ισορροπίας.....	7
1.4.2	Ενεργειακή μέθοδος .....	7
1.4.3	Δυναμική μέθοδος .....	8
1.5	Χαρακτηριστικές μορφές αστάθειας .....	8
1.5.1	Καμπτικός λυγισμός .....	8
1.5.1.1	Γραμμικός ελαστικός καμπτικός λυγισμός τέλει ράβδου.....	9
1.5.1.2	Μη-γραμμικός ελαστικός καμπτικός λυγισμός τέλει ράβδου .....	10
1.5.2	Πλευρικός-Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός .....	10
1.6	Πολυβάθμια συστήματα.....	12
1.7	Αλληλεπίδραση μορφών λυγισμού .....	12
1.8	Φιλοσοφία σχεδιασμού μεταλλικών κατασκευών έναντι διαρροής και λυγισμού κατά τον Ευρωκώδικα 3.....	14
1.8.1	Εισαγωγή .....	14
1.8.2	Καμπτικός λυγισμός .....	14
1.8.3	Πλευρικός λυγισμός .....	16
1.9	Πρότυπο CEN/TR 1993-1-103 .....	16
1.10	Είδη μη-γραμμικών αναλύσεων .....	16
1.10.1	Εισαγωγή .....	16
1.10.2	Γραμμική ανάλυση λυγισμού .....	17
1.10.3	Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας .....	19
1.10.4	Μη γραμμική ανάλυση υλικού .....	22
1.10.5	Μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας .....	22
<b>2</b>	<b>ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΤΕΛΕΙΑΣ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟΝ ΕΥΡΩΚΩΔΙΚΑ-3 .....</b>	<b>23</b>

2.1	Εισαγωγή.....	23
2.2	Θεωρητικό υπόβαθρο μεθόδου.....	24
2.2.1	Μέλη όπου η κρίσιμη διατομή είναι εκ των προτέρων γνωστή.....	26
2.2.2	Μέλη πλαισίων με ομοιόμορφη διατομή.....	29
2.2.3	Μέλη όπου η κρίσιμη διατομή δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή.....	30
2.3	Μέλη ευαίσθητα σε πλευρικό-στρεπτικό λυγισμό.....	30
2.4	Αριθμητικές εφαρμογές.....	32
2.4.1	Πρόβολος σταθερής διατομής.....	32
2.4.2	Πρόβολος μεταβλητής διατομής.....	34
2.4.3	Άνω πέλμα δικτυωτής γέφυρας κάτω διάβασης χωρίς πλευρικές εξασφαλίσεις.....	38
2.4.4	Πρόβολος διατομής μονής συμμετρίας υπό θλίψη.....	42
<b>3</b>	<b>ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΡΟΒΟΛΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ.....</b>	<b>47</b>
3.1	Εισαγωγή.....	47
3.2	Επιλογή διατομών και υλικών.....	47
3.3	Εύρεση κρίσιμου φορτίου από τον κανονισμό.....	48
3.3.1	Υπολογισμός συνολικής αντοχής σε θλίψη και διαρροή.....	50
3.4	Ανάλυση φορέα με το λογισμικό.....	50
3.4.1	Έλεγχος ευαισθησίας προσομοιώματος.....	50
3.4.2	Γραμμική ανάλυση λυγισμού.....	51
3.5	Μη γραμμική ανάλυση.....	54
3.5.1	Αρχική ατέλεια.....	54
3.5.2	Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας.....	58
3.5.3	Μη γραμμικότητα υλικού.....	59
3.5.4	Μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες.....	60
3.6	Συγκεντρωτικά αποτελέσματα.....	63
3.7	Συμπεράσματα.....	63
<b>4</b>	<b>ΘΛΙΒΟΜΕΝΟ ΠΕΛΜΑ ΔΙΚΤΥΩΤΗΣ ΓΕΦΥΡΑΣ ΚΑΤΩ ΔΙΑΒΑΣΗΣ.....</b>	<b>65</b>
4.1	Εισαγωγή.....	65
4.2	Περιγραφή φορέα.....	66
4.2.1	Αναλυτικός υπολογισμός κρίσιμου φορτίου ελαστικού λυγισμού θλιβόμενου άνω πέλματος.....	66
4.2.2	Μέθοδος Timoshenko.....	67

4.2.3	Εύρεση κρίσιμου φορίου με το CEN/TR 1993-1-103.....	70
4.2.3.1	Η αξονική δύναμη είναι σταθερή.....	72
4.2.3.1.1	Παλιός κανονισμός.....	72
4.2.3.1.2	Νέος κανονισμός.....	73
4.2.3.2	Η αξονική δύναμη δεν είναι σταθερή.....	74
4.2.4	Μέθοδος Ραυτογιάννη – Αβραάμ.....	74
4.3	Αριθμητικές επιλύσεις προσομοιωμάτων πεπερασμένων στοιχείων.....	76
4.3.1	Γραμμική ανάλυση λυγισμού.....	76
4.3.1.1	Δισδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων.....	76
4.3.1.2	Τρισδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων.....	79
4.3.1.3	Εύρεση αντοχής σε θλίψη και διαρροή από τον ΕΚ-3 με βάση τα κρίσιμα φορτία των προσομοιωμάτων.....	84
4.3.2	Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας.....	85
4.3.2.1	Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας δισδιάστατου προσομοιώματος.....	85
4.3.2.2	Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας τρισδιάστατου προσομοιώματος.....	88
4.3.3	Μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες.....	90
4.3.3.1	Μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες στο δισδιάστατο μοντέλο.....	90
4.3.3.2	Μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες στο τρισδιάστατο μοντέλο.....	91
4.4	Συμπεράσματα.....	93

## **5 ΣΤΡΕΠΤΙΚΟΣ-ΚΑΜΠΤΙΚΟΣ ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΜΟΝΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΥΠΟ ΚΑΘΑΡΗ ΘΛΙΨΗ**

5.1	Εισαγωγή.....	95
5.2	Εξέλιξη της μεθόδου.....	95
5.3	Προσεγγιστική μέθοδος.....	96
5.4	Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου σε συγκολλητή διατομή μονής συμμετρίας.....	98
5.4.1	Εύρεση ελαστικής κρίσιμης δύναμης σύμφωνα με το CEN/TR 1993-1-103 ..	99
5.4.2	Μελέτη στρεπτοκαμπτικού λυγισμού με λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων	102
5.4.3	Εύρεση συνολικής αντοχής διατομής σε διαρροή και λυγισμό.....	104
5.5	Μη-γραμμικές αναλύσεις με το λογισμικό.....	106
5.5.1	Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες.....	106
5.5.2	Μη γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες.....	107
5.6	Συμπερασματα.....	109

<b>6</b>	<b>ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΗΡΙΞΗ .....</b>	<b>111</b>
6.1	Εισαγωγή.....	111
6.2	Περιπτώσεις όπου μία ελαστική στήριξη θεωρείται αμετάθετη σύμφωνα με το CEN/TR 1993-1-103 .....	111
6.3	Επαλήθευση τιμών κανονισμού και σύγκριση με μοντέλο λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων.....	112
6.3.1	Υπολογισμός κρίσιμης δυσκαμψίας από τον κανονισμό .....	112
6.3.2	Επίλυση με λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων .....	113
6.4	Συμπεράσματα .....	118
<b>7</b>	<b>ΣΤΡΕΠΤΟΚΑΜΠΤΙΚΟΣ ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΜΟΝΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ .....</b>	<b>119</b>
7.1	Εισαγωγή.....	119
7.2	Μέθοδος ισορροπίας για τον υπολογισμό της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού .....	120
7.3	Ενεργειακή μέθοδος για τον υπολογισμό της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού.....	121
7.4	Εύρεση ελαστικής κρίσιμης τιμής πλευρικού λυγισμού προβόλου μονής συμμετρίας σύμφωνα με το CEN/TR 1993-1-103 .....	122
7.5	Εύρεση ελαστικής κρίσιμης τιμής ροπής πλευρικού λυγισμού προβόλου μονής συμμετρίας με την βοήθεια λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων .....	126
7.6	Εύρεση συνολικής αντοχής μέλους έναντι πλευρικού λυγισμού σύμφωνα με τον κανονισμό.....	127
7.7	Εύρεση συνολικής αντοχής μέλους έναντι πλευρικού λυγισμού με τη βοήθεια λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων .....	128
7.7.1	Αρχικές ατέλειες .....	128
7.7.2	Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες .....	129
7.7.3	Μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες .....	129
7.8	Συμπεράσματα .....	131
<b>8</b>	<b>ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....</b>	<b>133</b>
<b>9</b>	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>135</b>

# 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

## 1.1 Εισαγωγή

Βασικός στόχος στο επάγγελμα του πολιτικού μηχανικού είναι η δημιουργία κατασκευών που αφενός θα είναι ασφαλείς, αφετέρου θα είναι κατά το μέγιστο δυνατό οικονομικές. Η εξέλιξη της τεχνολογίας, αλλά και των ίδιων των δομικών υλικών μέσω της ανάπτυξης νέων τρόπων παραγωγής και κατεργασίας τους καθιστά εφικτή την δημιουργία μελών με οποιαδήποτε σχεδόν γεωμετρία και σχήμα, αλλά και πάχος. Η ανάπτυξη των διάφορων λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων που συνοδεύτηκε από την είσοδο και την εξέλιξη των υπολογιστών στο επάγγελμα του πολιτικού μηχανικού επέτρεψε την πραγματοποίηση εξειδικευμένων αριθμητικών αναλύσεων με αποτέλεσμα την καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς των μελών, αλλά και των κατασκευών ως σύνολο. Αποτέλεσμα όλων των παραπάνω είναι η δημιουργία κατασκευών των οποίων τα δομικά στοιχεία είναι όλο και ελαφρύτερα στοχεύοντας στην καλύτερη αξιοποίηση του ίδιου του υλικού, με φυσικό επακόλουθο την εμφάνιση έντονων παραμορφώσεων τόσο τοπικά, όσο και σε επίπεδο μέλους, όταν αυτές φορτίζονται.

Το συγκεκριμένο φαινόμενο μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα η κατασκευή να εμφανίσει μία μορφή αστοχίας που χαρακτηρίζεται ως αστάθεια, δηλαδή μικρή αύξηση του φορτίου πάνω από ένα συγκεκριμένο όριο να οδηγήσει σε απότομη αύξηση των παραμορφώσεων και η αρχή της κλασικής στατικής, ότι δηλαδή η παραμορφωμένη γεωμετρία δεν διαφέρει σημαντικά από την απαραμόρφωτη, να μην ισχύει. Η έκφραση των εξισώσεων σε αυτήν περίπτωση απαιτεί εξειδικευμένες τεχνικές καθώς παύει πλέον να ισχύει η αναλογική σχέση μεταξύ φορτίων και αναπτυσσόμενης παραμόρφωση, μία κατάσταση που περιγράφεται ως μη-γραμμική συμπεριφορά.

Τα προηγούμενα χρόνια, όταν τόσο τα λογισμικά, όσο και η γνώση μας σχετικά με την συμπεριφορά του υλικού δεν βρισκόταν στον σημερινό βαθμό εξέλιξης ο σχεδιασμός γινόταν με βάση την μέθοδο των επιτρεπόμενων τάσεων, δηλαδή οι τάσεις που αναπτύσσονται σε συγκεκριμένες θέσεις δεν θέλαμε να ξεπεράσουν μία τιμή, που συνήθως λαμβανόταν ίση με το όριο διαρροής, διαιρεμένο με κάποιο συντελεστή ασφαλείας. Αυτή η φιλοσοφία σχεδιασμού έχει αλλάξει και οι έλεγχοι αντοχής πραγματοποιούνται με την μέθοδο συνολικής αντοχής στο επίπεδο φόρτισης όπου εξαντλείται η

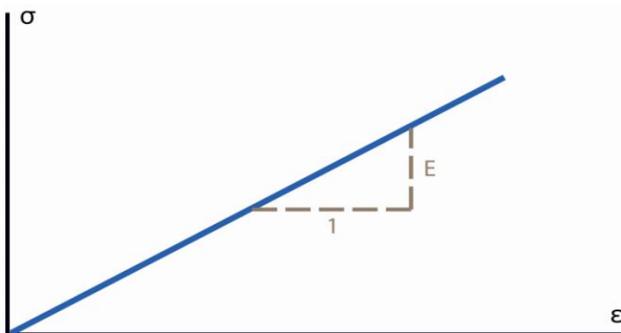
αντοχή της κατασκευής, ενώ για συγκεκριμένες περιπτώσεις επιτρέπεται η είσοδος στην ανελαστική περιοχή του διαγράμματος τάσεων παραμορφώσεων του υλικού, μία κατάσταση που ονομάζεται μη-γραμμικότητα υλικού και απαιτεί εξειδικευμένες τεχνικές προκειμένου να μελετηθεί. (Μη γραμμική συμπεριφορά των κατασκευών, Χ. Γαντές, 2016)

Επομένως μία κατασκευή μπορεί να αστοχήσει εξαιτίας τόσο της μη-γραμμικότητας υλικού, όσο και της μη-γραμμικότητας γεωμετρίας, αλλά και αυτών των δύο συνδυαστικά, με αποτέλεσμα να πρέπει κατά τον σχεδιασμό να ληφθούν υπόψη και οι δύο προκειμένου να προσδιοριστεί η συνολική αντοχή του μέλους

## 1.2 Κύριες προϋποθέσεις γραμμικής συμπεριφοράς

Στο σημείο αυτό θα ήταν γόνιμο να θυμίσουμε της βασικές προϋποθέσεις που θα πρέπει να πληρούνται για να θεωρηθεί πως έχουμε γραμμική συμπεριφορά, σε περίπτωση πάντα όπου η προαναφερθείσες μορφές μη-γραμμικότητας αγνοηθούν, ή δεν υπάρχουν.

Πρώτη προϋπόθεση είναι το υλικό να συμπεριφέρεται ως γραμμικά ελαστικό δηλαδή οι ανηγμένες παραμορφώσεις που αναπτύσσονται να είναι ανάλογες των τάσεων που τις προκαλούν. Επιπλέον η κλίση του διαγράμματος τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων είναι ίση με το μέτρο ελαστικότητας  $E$  του υλικού, δηλαδή την αντίσταση του υλικού σε παραμόρφωση υπό συγκεκριμένη τάση, επομένως θα ισχύει σε αυτήν την περίπτωση ο νόμος του Hooke. Η πλειοψηφία των υλικών παρουσιάζει γραμμική συμπεριφορά μέχρι μία στάθμη φόρτισης, επομένως ουσιαστικά ζητάμε να είναι τέτοιο το επίπεδο φόρτισης ώστε σε κάθε θέση του φορέα να βρισκόμαστε στην ελαστική περιοχή



Σχήμα 1-1: Διάγραμμα τάσεων - ανηγμένων παραμορφώσεων γραμμικά ελαστικού υλικού (Μη γραμμική συμπεριφορά των κατασκευών, Χ. Γαντές, 2016)

Δεύτερη προϋπόθεση είναι οι μετατοπίσεις όλων των σημείων να είναι αρκετά μικρές, με συνέπεια να ισχύει η παραδοχή της κλασικής στατικής ότι η γεωμετρία του παραμορφωμένου ταυτίζεται με αυτή του απαραμόρφωτου. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε την δυνατότητα να εκφράσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας στην απαραμόρφωτη κατάσταση, ενώ ο φορέας αφού φορτιστεί θα ισορροπεί σε μία παραμορφωμένη

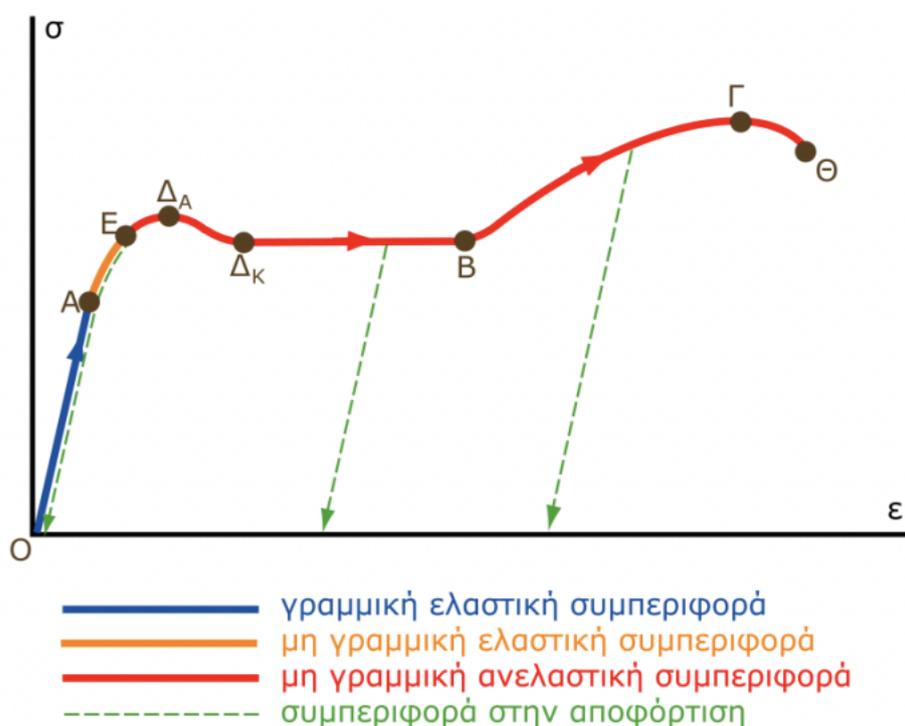
## 1.3 Μη-γραμμικότητα υλικού

Ο δομικός χάλυβας, το υλικό δηλαδή από το οποίο συνίστανται κυρίως οι μεταλλικές κατασκευές, είναι ένα κράμα ενός μετάλλου, του σιδήρου και ενός μη-μεταλλικού στοιχείου, του άνθρακα, ο οποίος αποτελείται από μικροσκοπικούς κρυστάλλους. Οι ιδιότητες αλλάζουν με την μεταβολή της αναλογίας του άνθρακα στο μείγμα, όπως και με την προσθήκη διάφορων πρόσμικτων στοιχείων, όπως για

παράδειγμα μαγγάνιο, χρώμιο, χαλκό, ή και νικέλιο. Η ποσοστιαία χημική σύνθεση του μείγματος του δομικού χάλυβα καθορίζεται κατά την βιομηχανική παραγωγή, σε συμφωνία με τα αντίστοιχα εθνικά και διεθνή πρότυπα

### 1.3.1 Μηχανικές ιδιότητες χάλυβα

Η συμπεριφορά του χάλυβα κατά την επιβολή εξωτερικής φόρτισης και η αντίσταση του σε αυτά, οι μηχανικές ιδιότητες του δηλαδή, έχουν προκύψει με βάση την μελέτη δοκιμών ράβδων κυκλικής διατομής, διαμέτρου 1.5 cm, σε βαθμιαία αυξανόμενη εφελκυσμό, μέχρι την εμφάνιση θραύσης, με τελικό αποτέλεσμα το παρακάτω διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων χάλυβα (Μη γραμμική συμπεριφορά των κατασκευών, Χ. Γαντές, 2016)



Σχήμα 1-2: Μηχανική συμπεριφορά δομικού χάλυβα υπό αξονικό εφελκυσμό (Μη γραμμική συμπεριφορά των κατασκευών, Χ. Γαντές, 2016)

Στο παραπάνω σχήμα διακρίνουμε ένα αρχικά ευθύγραμμο τμήμα μέχρι το σημείο A, το τελευταίο σημείο γραμμικής συμπεριφοράς που καλείται όριο αναλογίας, όπου το υλικό είναι γραμμικά ελαστικό με κλίση το μέτρο ελαστικότητας E (αλλιώς μέτρο Young). Στη συνέχεια η κλίση μειώνεται μέχρι το σημείο E, το τελευταίο επίπεδο φόρτισης πριν την εμφάνιση παραμενουσών παραμορφώσεων, που καλείται όριο ελαστικότητας και το υλικό βρίσκεται πλέον στην περιοχή μη-γραμμικής ελαστικότητας.

Έπειτα το υλικό εισέρχεται στην περιοχή διαρροής και παρατηρούνται δύο όρια τα  $\Delta_A$  και  $\Delta_B$ , μεταξύ των οποίων παρατηρούνται ζώνες ολίσθησης (ζώνες Luders) στην κρυσταλλική δομή του χάλυβα σε επίπεδα λοξά ως προς την διεύθυνση φόρτισης, εξαιτίας της «σχετικής ολίσθησης κάποιου κρυσταλλικού πλέγματος ως προς το γειτονικό του, όταν οι διατμητικές τάσεις που ασκούνται σε αυτό υπερνικούν τις δυνάμεις συνοχής τους. Στην περιοχή αυτή, όπου αργότερα θα εμφανιστεί η θραύση,

εμφανίζεται έντονη πλαστικοποίηση, χαλάρωση του υλικού και έντονη πτώση του διαγράμματος» (Μη γραμμική συμπεριφορά των κατασκευών, Χ. Γαντές, 2016). Ως όριο διαρροής λαμβάνεται το χαμηλότερο, εξαιτίας της ανεξαρτησίας του από την πειραματική διάταξη. Η αύξηση της τάσης μετά την περιοχή πλαστικοποίησης έως το σημείο Γ, οφείλεται στη κράτυνση του υλικού, η οποία διαφέρει από χάλυβα σε χάλυβα. Τέλος στο σημείο Θ παρατηρείται η θραύση του υλικού.

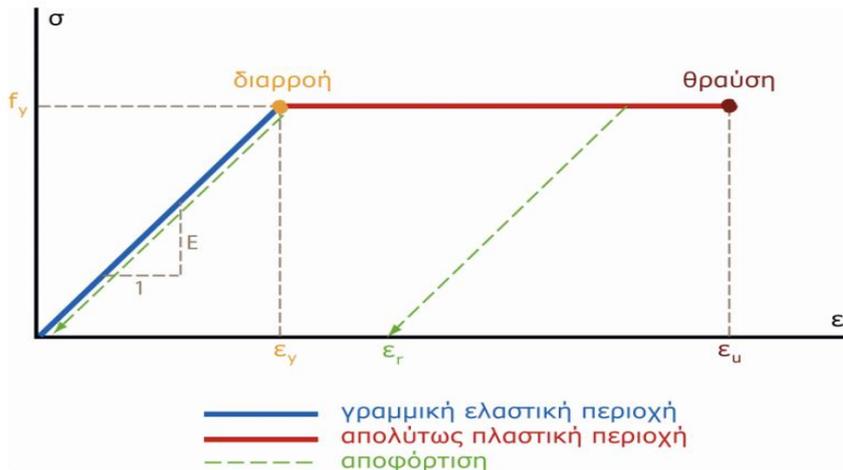
Η παρατηρούμενη μεγάλη ικανότητα του χάλυβα να φέρει μεγάλες παραμορφώσεις από την πλαστικοποίηση μέχρι την θραύση, είναι μία πολύ σημαντική ιδιότητα που καλείται ολκιμότητα και έχει ιδιαίτερη αξία κατά την σεισμική καταπόνηση του υλικού.

### 1.3.2 Μοντέλα συμπεριφοράς χάλυβα

Στην πράξη συνήθως η συμπεριφορά του χάλυβα που αναλύθηκε προηγουμένως υποθέτετε ως αρκετά απλούστερη για την εξοικονόμηση υπολογιστικού φόρτου και την απλοποίηση σύνθετων προβλημάτων. Χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα τρία μοντέλα

- Γραμμικά ελαστικό – απολύτως πλαστικό

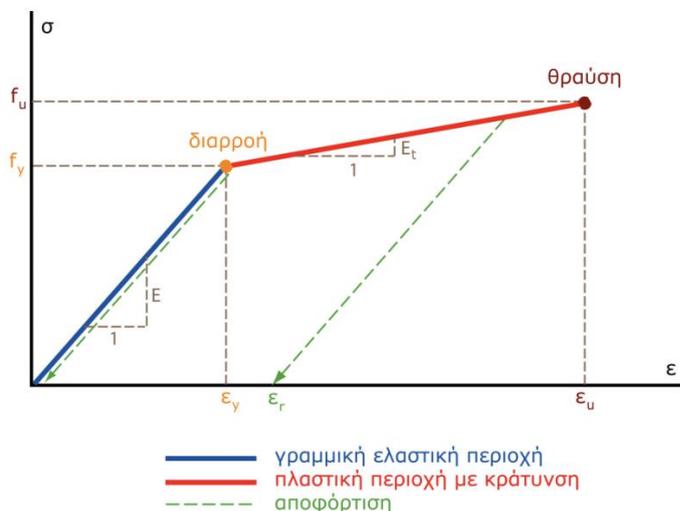
Αρχικά γραμμική ελαστική περιοχή ακολουθούμενη από οριζόντια περιοχή διαρροής, αποφόρτιση από την οποία οδηγεί σε πλαστικές παραμορφώσεις



Σχήμα 1-3: Γραμμικά ελαστικό – απολύτως πλαστικό μοντέλο χάλυβα (Μη γραμμική συμπεριφορά των κατασκευών)

- Γραμμικά ελαστικό – γραμμικά κρατυνόμενο

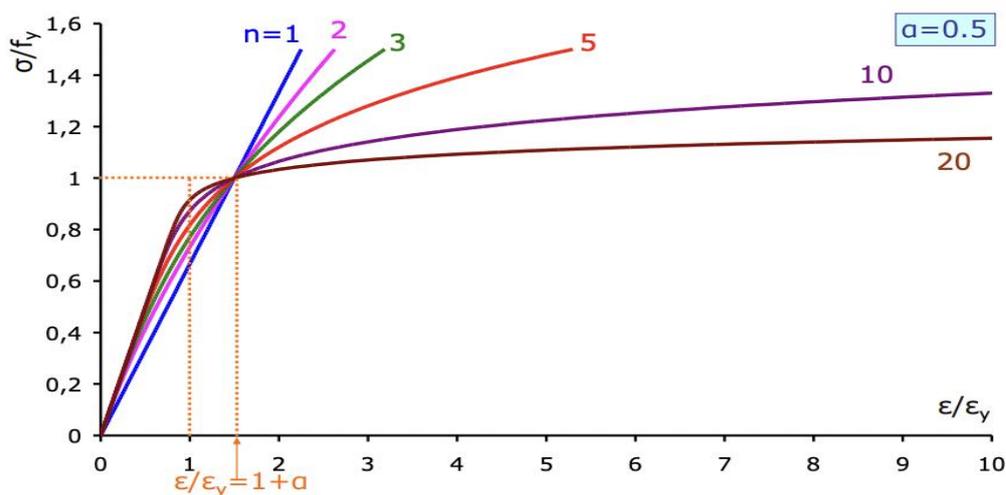
Την γραμμικά ελαστική περιοχή ακολουθεί κρατυνόμενη περιοχή, με συντελεστή αναλογίας  $E_t$ , ο οποίος κυμαίνεται από 0.005 έως 0.05



Σχήμα 1-4: Γραμμικά ελαστικό – γραμμικά κρατυνόμενο μοντέλο χάλυβα (Μη-γραμμική συμπεριφορά των κατασκευών, Χ. Γαντές, 2016)

- Προσομοίωμα Ramberg – Osgood

Είναι ένα από τα σύνθετα μοντέλα περιγραφής της συμπεριφοράς του χάλυβα, που περιέχει δύο παραμέτρους  $a$ ,  $n$  και έχει το πλεονέκτημα πως περιγράφει την ανελαστική συμπεριφορά του χάλυβα μαθηματικά με μία εξίσωση, με αποτέλεσμα να μπορεί εύκολα να ενταχθεί σε προγραμματιστικό κώδικα

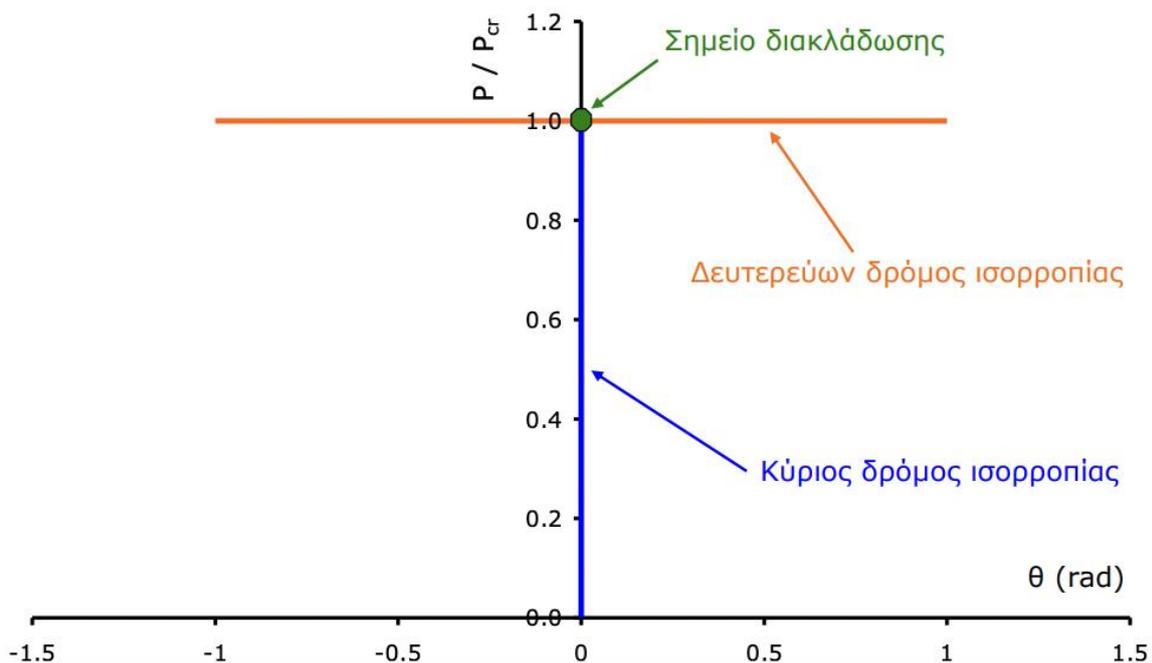


Σχήμα 1-5: Προσομοίωμα Ramberg – Osgood για  $a = 0.5$  (Μη γραμμική συμπεριφορά των κατασκευών, Χ. Γαντές, 2016)

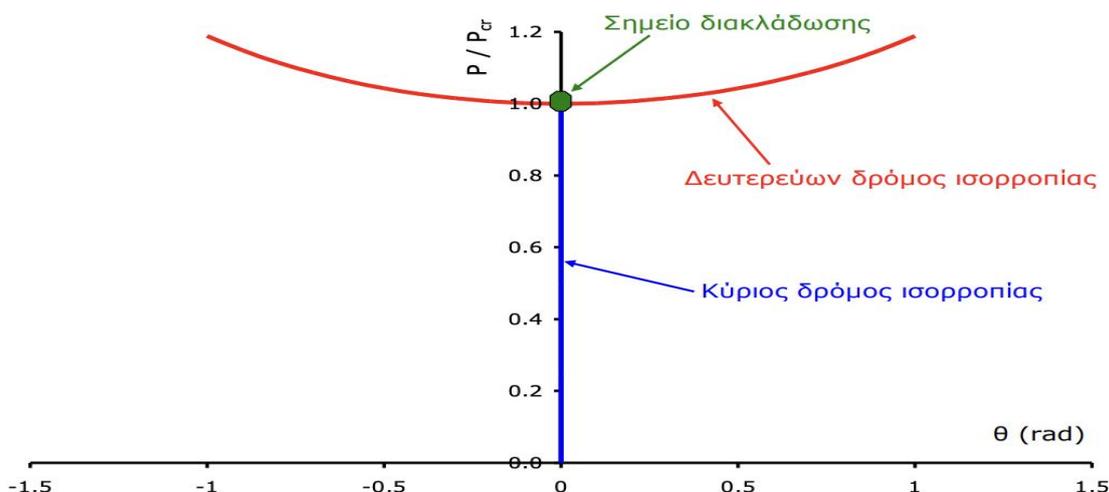
## 1.4 Μη γραμμικότητα γεωμετρίας

Ήδη από την εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου έχει περιγραφεί η αστάθεια, η μορφή αστοχίας δηλαδή που οδηγεί σε απότομη αύξηση των μετακινήσεων όταν η τιμή του φορτίου ξεπεράσει μία συγκεκριμένη τιμή. Συνέπεια του τελευταίου είναι η παραμορφωμένη γεωμετρία να διαφέρει σημαντικά από την απαραμόρφωτη και να μην ισχύει η βασική παραδοχή της στατικής, που μας επιτρέπει να εκφράσουμε τις εξισώσεις στην παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα.

Διακρίνουμε τρεις διαφορετικές μεθόδους μελέτης προβλημάτων όπου το εξεταζόμενο σύστημα εμφανίζει μη-γραμμικότητα γεωμετρίας, την μέθοδο ισορροπίας, την ενεργειακή μέθοδο και την μέθοδο . Πρέπει να τονιστεί ότι κατά την περιγραφή των εξισώσεων που περιγράφουν την απόκριση του παραμορφωμένου φορέα διακρίνουμε την γραμμική και την μη-γραμμική θεωρία λυγισμού. Κατά την γραμμική θεωρία η παραμορφωμένη γεωμετρία διαφέρει από την απαραμόρφωτη, όχι όμως σε βαθμό που να μην μπορεί να γίνει κατά τις επιλύσεις η παραδοχή μικρών μετατοπίσεων όπου θα απλουστεύσει τα προβλήματα. Το αντίθετο συμβαίνει στην μη-γραμμική θεωρία αστάθειας, όπου η συγκεκριμένη παραδοχή είναι αδύνατη. Το βασικό μειονέκτημα της γραμμικής θεωρίας λυγισμού όμως, παρά την απλότητα που προσφέρει, αποτελεί το γεγονός πως αδυνατεί να περιγράψει την συμπεριφορά μετά τον λυγισμό, με αποτέλεσμα σε κάποιες περιπτώσεις να μην οδηγούμαστε σε ακριβή συμπεράσματα



Διάγραμμα 1-1: Δρόμος ισορροπίας γραμμικής ανάλυσης λυγισμού τέλει φορέα (Μη γραμμική συμπεριφορά των κατασκευών, Χ. Γαντές, 2016)



Διάγραμμα 1-2: Δρόμος ισορροπίας γραμμικής ανάλυσης λυγισμού τέλει φορέα (Μη γραμμική συμπεριφορά των κατασκευών, Χ. Γαντές, 2016)

#### 1.4.1 Μέθοδος ισορροπίας

Επιστρέφοντας στις μεθόδους ανάλυσης της μη-γραμμικότητας γεωμετρίας, πρώτη και απλούστερη είναι η μέθοδος ισορροπίας, η αλλιώς μέθοδος Euler. Στην συγκεκριμένη εκφράζονται οι εξισώσεις ισορροπίας, συμβιβαστού των παραμορφώσεων και ο καταστατικός νόμος του υλικού στην παραμορφωμένη κατάσταση του συστήματος και με κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία και αναλόγως την παραδοχή που έχουμε κάνει για μικρές, ή μεγάλες μετατοπίσεις στην παραμορφωμένη κατάσταση εξαγάγουμε τις πληροφορίες για την συμπεριφορά του φορέα.

#### 1.4.2 Ενεργειακή μέθοδος

Η ενεργειακή μέθοδος αποτελεί τον πιο διαδεδομένο τρόπο εύρεσης της κρίσιμης ροπής πλευρικού ελαστικού λυγισμού, καθώς παρότι είναι λιγότερη εποπτική από την μέθοδο ισορροπίας, μπορεί να προγραμματιστεί και για αυτό συνιστά την βάση των περισσότερων προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων. Η ενεργειακή μέθοδος εφαρμόζεται μόνο σε συντηρητικά συστήματα και βασίζεται στην αρχή πως η συνολική δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε ένα σύστημα είναι αποκλειστικά αποτέλεσμα του έργου των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό. Η συνολική αυτή δυναμική ενέργεια είναι το άθροισμα της δυναμικής ενέργειας  $U$  των εσωτερικών δυνάμεων και της δυναμικής ενέργειας  $W$  των εξωτερικών δυνάμεων. Η εσωτερική δυναμική ενέργεια είναι ίση με την ενέργεια παραμόρφωσης που αποθηκεύεται στο παραμορφωμένο σύστημα, ενώ η δυναμική ενέργεια των εξωτερικών φορτίων δίνεται από τον τύπο

$$W = - \sum_i \int P_i(q_i) dq_i \quad (1.1)$$

Στον συγκεκριμένο τύπο ο συμβολισμός  $q_i$  αναφέρεται στις γενικευμένες συντεταγμένες, δηλαδή μετακινήσεις, ή στροφές που περιγράφουν την παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα. Τα δύο βασικά κριτήρια που χαρακτηρίζουν την μέθοδο είναι το κριτήριο ισορροπίας και το κριτήριο ευστάθειας, σύμφωνα με το οποίο κάθε παραμορφωμένο σώμα ισορροπεί σε μία θέση ισορροπίας, στην οποία η συνολική δυναμική ενέργεια έχει στάσιμη τιμή και ευρίσκεται από την θεωρία ακροτάτων από τον μηδενισμό της παραγώγου της συνολικής δυναμικής ενέργειας ως προς τις αντίστοιχες γενικευμένες συντεταγμένες. Για παράδειγμα για την περίπτωση ενός σώματος ενός βαθμού ελευθερίας υπό σταθερή δύναμη,

$$\frac{\partial \Pi(P, q)}{\partial q} = 0 \quad (1.2)$$

Το δεύτερο κριτήριο είναι αυτό της ευστάθειας, κατά το οποίο μία θέση ισορροπίας είναι ευσταθής, για μικρού μεγέθους διαταραχή, στην περίπτωση όπου η συνολική δυναμική ενέργεια εμφανίζει τοπικό ελάχιστο, η αλλιώς στην περίπτωση όπου μαθηματικά ισχύει (για την ίδια περίπτωση όπου περιεγράφηκε προηγουμένως

$$\left| \frac{\partial^2 \Pi(P, q)}{\partial q^2} \right|_{q=q_0} > 0 \quad (1.3)$$

Η ενεργειακή μέθοδος παρότι λιγότερη εποπτική από την μέθοδο Euler, μπορεί να δώσει πληροφορίες για οποιοδήποτε θέση ισορροπίας.

### 1.4.3 Δυναμική μέθοδος

Τελευταία μέθοδος περιγραφής της παραμορφωμένης κατάστασης της μη-γραμμικότητας γεωμετρίας είναι η δυναμική μέθοδος που παρακολουθεί την ταλάντωση του σώματος, όταν του δοθεί μία μικρή διαταραχή από μία θέση ισορροπίας.

Θεωρείται αρχικά κατάλληλο σύστημα γενικευμένων συντεταγμένων  $q_i$  που εκφράζουν την θέση ενός συστήματος στον χώρο και γενικευμένες συντεταγμένες  $q_i^*$  που περιγράφουν την παραμόρφωση του συστήματος σε κάποια θέση ισορροπίας. Στην συνέχεια μπορούμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό  $q_i' = q_i - q_i^*$ , με αποτέλεσμα η θέση ισορροπίας να δίνεται από την σχέση  $q_i' = 0$ . Για να ερευνηθεί κατά πόσο η συγκεκριμένη θέση ισορροπίας είναι ευσταθής, επιβάλλουμε τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , μία διαταραχή που μπορεί να περιλαμβάνει τόσο ταχύτητες, ή/και μετακινήσεις

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι η διαταραχή που επιβάλλαμε είναι αρκετά μικρή συγκριτικά με το μέγεθος των βασικών διανυσμάτων που περιγράφουν την χωρική θέση του σώματος, θεωρούμε δηλαδή πως υπάρχει τέτοιος μικρός αριθμός  $n$  ώστε

$$\|q_i(0)\| < \eta \text{ και } \left\| \frac{\partial q_i}{\partial t}(0) \right\| < \eta \quad (1.4)$$

Όπου  $\| \dots \|$  κατάλληλη νόρμα των αρχικών επιβαλλόμενων διαταραχών, πχ  $\|X_i\| = \sum_{i=1}^n |X_i|$

Έπειτα ο φορέας αφήνεται ελεύθερος να εκτελέσει ταλάντωση και προκειμένου να χαρακτηρίσουμε μία θέση ισορροπίας ως ευσταθής, εάν η κίνηση είναι φραγμένη, αν δηλαδή μπορούν να βρεθούν αρχικές συνθήκες  $n = n(\varepsilon)$ , για οποιονδήποτε αριθμό  $\varepsilon > 0$ , που να επαληθεύουν την σχέση

$$|q_i(t)| < \varepsilon \text{ και } \left| \frac{\partial q_i}{\partial t}(t) \right| < \varepsilon \quad (1.5)$$

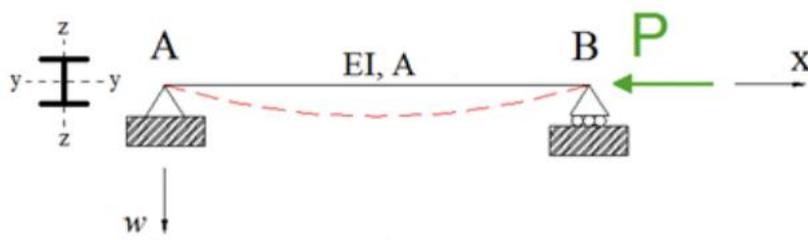
## 1.5 Χαρακτηριστικές μορφές αστάθειας

### 1.5.1 Καμπικός λυγισμός

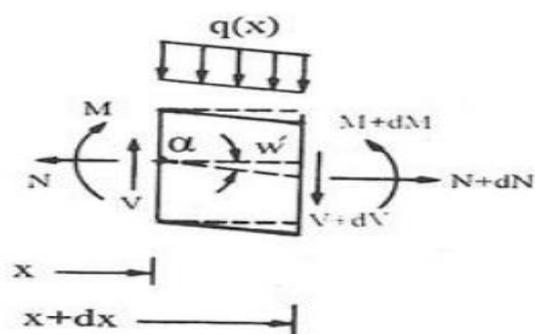
Η συγκεκριμένη μορφή αστάθειας αποτελεί την απλούστερη μορφή λυγισμού και τον βασικότερο τρόπο προκειμένου να εισαχθούμε στην ποιοτική σημασία του φαινομένου. Περιγράφει την συμπεριφορά μίας απλής ράβδου, υπό κάποιες συνθήκες στήριξης φορτιζόμενη με αξονική θλίψη. Όταν αυτή φτάσει μία συγκεκριμένη τιμή θα εμφανιστεί απότομη αύξηση των μετακινήσεων, όπως έχει περιγραφεί στο εισαγωγικό κεφάλαιο και θα είναι απαραίτητη η έκφραση των εξισώσεων ισοδυναμίας στην παραμορφωμένη κατάσταση. Ανάλογα με την παραδοχή μικρών, η μεγάλων μετακινήσεων στην παραμορφωμένη κατάσταση θα αναφερόμαστε σε γραμμικό, ή μη-γραμμικό λυγισμό

### 1.5.1.1 Γραμμικός ελαστικός καμπτικός λυγισμός τέλει ράβδου

Για την περίπτωση της υπόθεσης γραμμικού λυγισμού θα διατυπώσουμε την διαφορική εξίσωση ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση, θεωρώντας πως  $M(x) = -EIw''(x)$ ,  $k = \frac{P}{EI} \Rightarrow$



Σχήμα 1-6: Αμφιέριστη ράβδος υπό αξονική θλίψη



Σχήμα 1-7: Διατύπωση εξισώσεων ισορροπίας παραμορφωμένου φορέα (Σιδηρές Κατασκευές 3, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Ε.Μ.Π.)

$$w''(x) + k^2 w(x) = 0 \Rightarrow (1.6)$$

$$w(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \text{ όπου με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών } w(0) = 0, w(l) = 0 \Rightarrow$$

$$\sin(kl) = 0 \Rightarrow kl = n\pi \Rightarrow$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \text{ (κρίσιμο φορτίο πρώτης ιδιομορφής λυγισμού)} \quad (1.7)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε ξεκινώντας από την διαφορική εξίσωση ισορροπίας 4<sup>ης</sup> τάξης, η έκφραση της οποίας είναι ανεξάρτητη συνοριακών συνθηκών. Η συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση θα προκύψει ξεκινώντας από τις εξισώσεις ισορροπίας κατακόρυφων, οριζόντιων δυνάμεων και ροπών ενός στοιχείου  $dx$

#### Ισορροπία στον οριζόντιο άξονα

$$N + dN - N = 0 \Rightarrow dN = 0 \Rightarrow N = c \Rightarrow N = -P \quad (1.8)$$

#### Ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα

$$V + dV - V + q dx = 0 \Rightarrow -q(x) = \frac{dV}{dx} \quad (1.9)$$

#### Ισορροπία ροπών

$$M + dM - M - (V + dV)dx - \frac{q(dx)^2}{2} + (N + dN) dw = 0 \Rightarrow (1.10)$$

Απλοποιούμε και παραγωγίζουμε ως προς  $x \Rightarrow$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{dV}{dx} + N \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (1.11)$$

Με αντικατάσταση των (1.8) και (1.9) στην (1.10) καταλήγουμε στην

$$E I w''''(x) + P w''(x) = q(x) \quad (1.12)$$

Η οποία είναι η προαναφερθείσα ανεξάρτητη συνοριακών συνθηκών διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξης της θλιβόμενης ράβδου.

### 1.5.1.2 Μη-γραμμικός ελαστικός καμπτικός λυγισμός τέλει ράβδου

Σε περίπτωση τώρα που γίνει η παραδοχή μεγάλων μετακινήσεων, παύει να ισχύει η προσεγγιστική έκφραση της καμπυλότητας που χρησιμοποιήθηκε κατά την επίλυση της ράβδου υπό γραμμικό λυγισμό και γράφεται ως:

$$k = -\frac{d^2 w}{dx^2} = -w'' \quad (1.13)$$

Στην περίπτωση αυτή πρέπει να εφαρμοστεί η ακριβής σχέση υπολογισμού της καμπυλότητας σε μία θέση  $\chi$  κατά μήκος της ράβδου που γράφεται ως:

$$k = \frac{-\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{-w''}{[1 + (w')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.14)$$

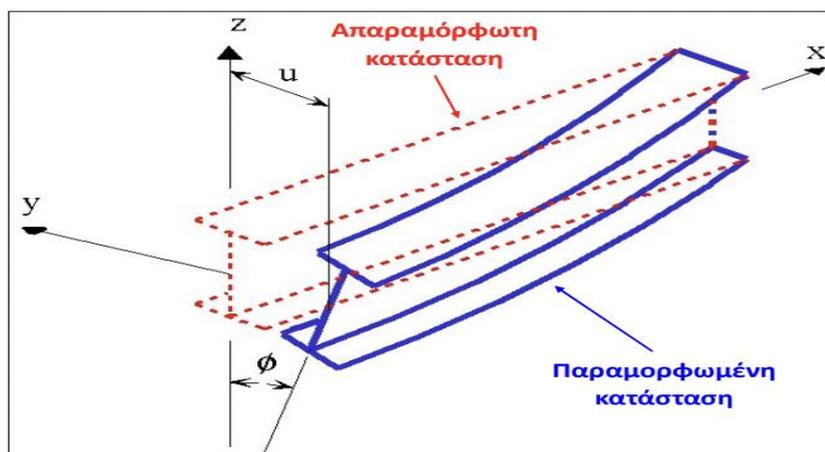
Αν εφαρμοστεί η ακριβής σχέση υπολογισμού της καμπυλότητας στην σχέση (1. ) που προέκυψε από την ισορροπία στην παραμορφωμένη μορφή της τέλει ράβδου θα καταλήξουμε στην διαφορική εξίσωση ισορροπίας

$$\frac{-w''}{[1 + (w')^2]^{\frac{3}{2}}} + k^2 w = 0 \quad (1.15)$$

Ελλείπει αναλυτικών λύσεων των συγκεκριμένων διαφορικών εξισώσεων, θα πρέπει να καταφύγουμε σε κάποια επαναληπτική διαδικασία σε περίπτωση που θέλουμε να τις λύσουμε, αναλόγως τις παραμέτρους του εκάστοτε προβλήματος.

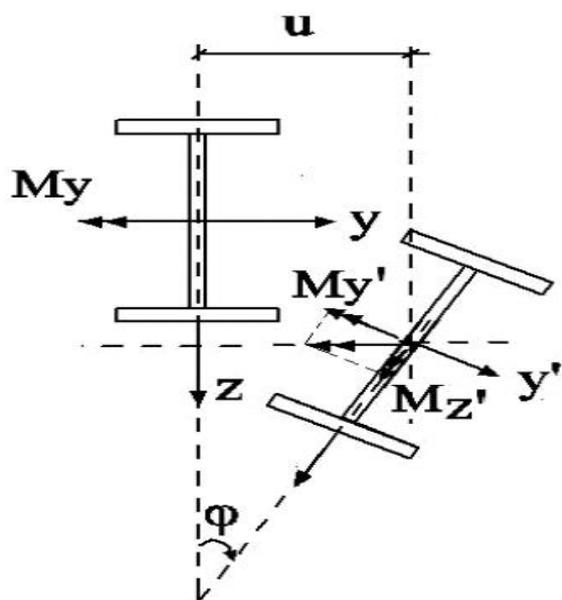
### 1.5.2 Πλευρικός-Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός

Η πλειοψηφία των μελών από δομικό χάλυβα φορτίζεται στο επίπεδο του ασθενή άξονα, με απώτερο σκοπό κατά την κάμψη να ενεργοποιείται η ροπή αδρανείας του ισχυρού άξονα και η αντοχή του μέλους να είναι η μεγαλύτερη δυνατή. Ωστόσο σε περίπτωση που η φορτιζόμενη διατομή είναι ανοιχτή, όπως για παράδειγμα μία διατομή μορφής διπλού ταυ, και η πλευρική και στρεπτική δυσκαμψία είναι σημαντικά μικρότερη από την αντίστοιχη καμπτική του επιπέδου φόρτισης, το μέλος θα εκτραπεί πλευρικά στρεφόμενο ταυτόχρονα περί τον διαμήκη άξονα, όταν η εξωτερικά εφαρμοζόμενη ροπή γίνει ίση με μία κρίσιμη τιμή. Αυτή η μορφή αστάθειας ονομάζεται πλευρικός λυγισμός και εξαρτάται από πληθώρα παραγόντων, όπως οι συνθήκες στήριξης, το σχήμα και η κατηγορία της διατομής, το είδος φόρτισης και το σημείο εφαρμογής της. Οι διατομές οι οποίες είναι ευαίσθητες στην εμφάνιση αυτού του φαινομένου είναι οι ανοικτές, εξαιτίας της αρκετά μικρότερης τιμής της στρεπτικής δυσκαμψίας συγκριτικά με τις κλειστές.



Σχήμα 1-8: Πλευρικός λυγισμός διατομής διπλού ταυ υπό κατανεμημένο σταθερό εγκάρσιο φορτίο (Μάθημα Σιδηρών Κατασκευών 1, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Ε.Μ.Π.)

Κατά την φόρτιση του το θλιβόμενου άνω πέλμα φορτίζεται με θλιπτικές διαμήκειες τάσεις εξαιτίας της κάμψης, με συνέπεια να τείνει να συμπεριφερθεί ως θλιβόμενη πλάκα που τείνει να λυγίσει περί τον ασθενή άξονα και συγκρατείται από τον κορμό και το κάτω πέλμα, μέχρι κάποια τιμή του φορτίου στην οποία το θλιβόμενο πέλμα και παρατηρείται πλευρική εκτροπή. Το κάτω πέλμα παραμένει ευθύγραμμο.



Σχήμα 1-9: Παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας προβόλου διατομής διπλού ταυ υπό εγκάρσια φορτία (Σιδηρές Κατασκευές 3, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Ε.Μ.Π.)

Η διαφορική εξίσωση ισορροπίας που περιγράφει την συμπεριφορά του φορέα υπό πλευρικό λυγισμό είναι η ακόλουθη και έχει προκύψει από την ισορροπία του φορέα στην παραμορφωμένη κατάσταση,

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} + M_0 = 0 \quad (1.16)$$

$$EI_z \frac{d^2 u}{dx^2} + \varphi M_0 = 0 \quad (1.17)$$

Με κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία καταλήγουμε στην

$$\frac{d^4 \varphi}{dx^4} - 2a \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - b \varphi = 0 \quad (1.18)$$

$$\text{Όπου } a = \frac{G It}{2 EI_w} \text{ και } b = \frac{M_0^2}{2 EI_z EC_w}$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής είναι

$$\Phi(x) = \sin(mx) + \cos(mx) + \sinh(\bar{m}x) + \cosh(\bar{m}x) \quad (1.19)$$

$$Με \ m = \sqrt{-a + \sqrt{(a^2 + b)}} \quad (1.20)$$

$$\bar{m} = \sqrt{-a + \sqrt{(a^2 + b)}} \quad (1.21)$$

Από όπου θα προκύψει η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού

Διατομές φορτιζόμενες καμπτικά και αξονικά εμφανίζεται το ίδιο φαινόμενο, για μικρότερη όμως στάθμη του εγκάρσιου φορτίου καθώς αναπτύσσονται επιπρόσθετες θλιβόμενες τάσεις εξαιτίας της αξονικής θλίψης και στην διαφορική εξίσωση (1.15) προστίθεται ο όρος  $P \cdot w$  που αφορά την επίδραση της αξονικής δύναμης.

## 1.6 Πολυβάθμια συστήματα

Στην περίπτωση των συστημάτων με περισσότερους του ενός βαθμούς ελευθερίας, όπως δηλαδή συμβαίνει συνήθως στην πραγματικότητα, παρότι η φιλοσοφία του σχεδιασμού παραμένει η ίδια, αυξάνεται σημαντικά η υπολογιστική δυσκολία στην περίπτωση των αναλυτικών υπολογισμών. Συνεπώς, η συνήθης εφαρμοζόμενη πρακτική θέλει τις εξισώσεις ισορροπίας να διατυπώνονται σε μητρική μορφή και στην συνέχεια να επιλύονται αριθμητικά. Για παράδειγμα στην περίπτωση επίλυσης για ένα σύστημα  $n$  βαθμών ελευθερίας θα πρέπει να καταστρώσουμε  $n$  διαφορικές εξισώσεις.

Αυτή ακριβώς η μαθηματική διατύπωση στην περίπτωση γραμμικής ανάλυσης είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, όπου οι ιδιοτιμές είναι τα διάφορα φορτία λυγισμού των διαφορετικών βαθμών ελευθερίας και τα ιδιοδιανύσματα οι ιδιομορφές λυγισμού που προκύπτουν (πλήθος βαθμών ελευθερίας = πλήθος κρίσιμων φορτίων λυγισμού = πλήθος ιδιομορφών). Δεν πρέπει πάντως να ξεχνάμε πως τα διάφορα 'στιγμιότυπα λυγισμού', οι ιδιομορφές δηλαδή, δεν έχουν συγκεκριμένο μέγεθος, αλλά μόνο σχήμα και εκφράζουν την σχετική μετακίνηση μεταξύ των διάφορων μορφών ελευθερίας.

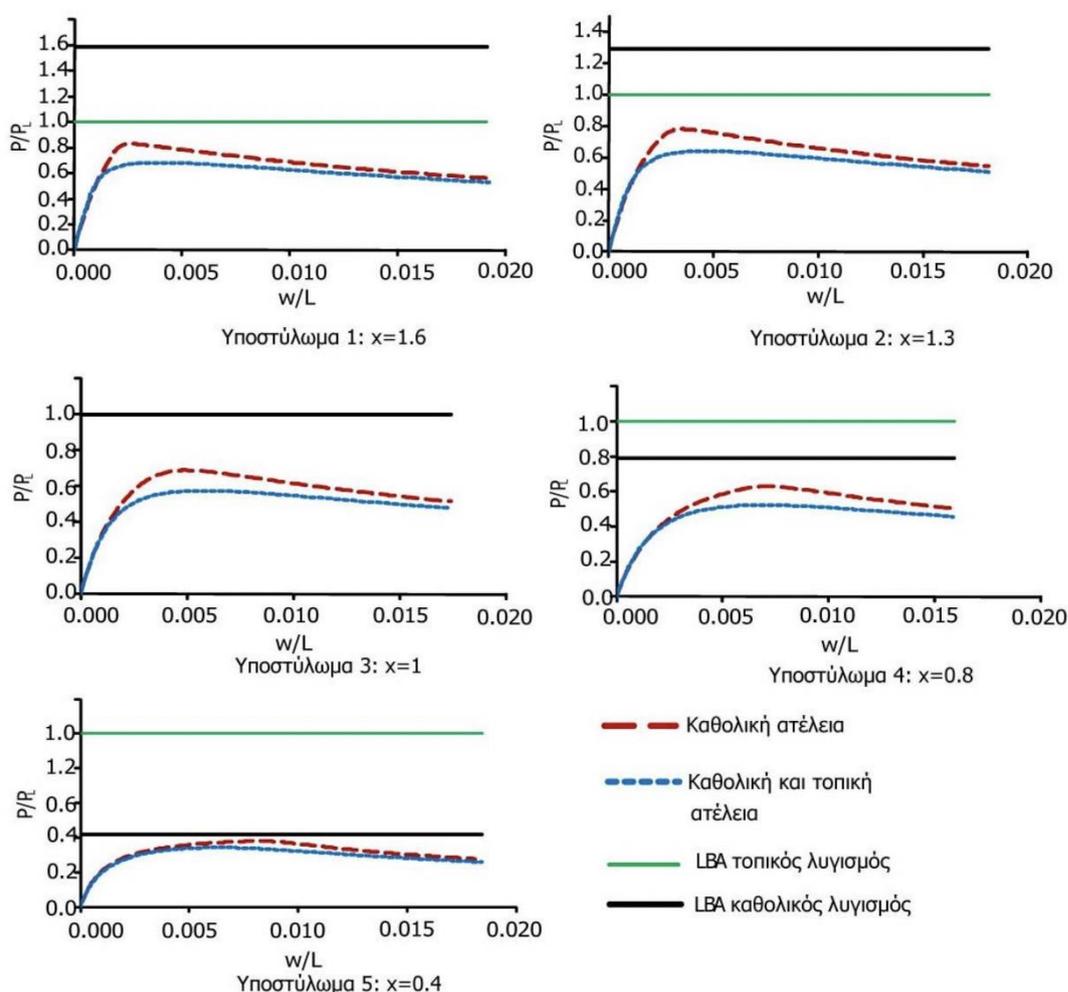
Για την περίπτωση τώρα της μη-γραμμικής ανάλυσης, όπως περιγράφεται στο βιβλίο Μη-γραμμική συμπεριφορά Μεταλλικών Κατασκευών (Χ. Γαντές, 2016) «η λύση του μη-γραμμικού συστήματος εξισώσεων για κάθε τιμή φορτίων εκφράζει τις μετακινήσεις και στροφές για αυτά τα φορτία, ενώ συνηθίζεται να προσυζητάται βαθμιαία κατά το ίδιο ποσοστό η στάθμη όλων των φορτίων και να παρακολουθεί μέσω των αποτελεσμάτων η αντίστοιχη μεταβολή παραμορφώσεων και εντάσεων του φορέα»

## 1.7 Αλληλεπίδραση μορφών λυγισμού

Στο κεφάλαιο 1. Περιεγράφηκαν οι διαφορετικοί τύποι απόκρισης που μπορεί να εμφανιστούν κατά τον λυγισμό ενός φορέα. Θα ήταν όμως λάθος που θα μπορούσε να οδηγήσει σε αρκετά αναξιόπιστο σχεδιασμό να αγνοήσουμε το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης μεταξύ των διαφορετικών αυτών μορφών αστάθειας που εμφανίζονται στα πολυβάθμια συστήματα, κυρίως για τις περιπτώσεις όπου τα κρίσιμα φορτία λυγισμού βρίσκονται το ένα σχετικά κοντά στο άλλο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι

η περίπτωση όπου το σύστημα αστοχεί μέσω δύο ευσταθών ιδιομορφών λυγισμού και τα κρίσιμα του φορτία βρίσκονται κοντά το ένα με το άλλο. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα το τελικό φορτίο που θα προκύψει να είναι σημαντικά μικρότερο από το μικρότερο φορτίο λυγισμού μεταξύ των δύο ιδιομορφών λυγισμού εξαιτίας αυτής ακριβώς της αλληλεπίδρασης, αλλά και μεγάλη εξάρτηση από τις αρχικές ατέλειες που συνήθως είναι παράμετροι με σημαντικό βαθμό αβεβαιότητων

Αρκετά εμφανές μπορεί να γίνει το συγκεκριμένο φαινόμενο στην περίπτωση των σύνθετων υποστυλωμάτων, όταν εξαιτίας πιθανώς μιας αφελούς βελτιστοποίησης τα φορτία τοπικού και καθολικού λυγισμού βρεθούν κοντά. Παρατηρούμε στη συνέχεια μέσα από τις σημειώσεις του μαθήματος Μη-γραμμική Ανάλυση Μεταλλικών Κατασκευών, Χ. Γαντές, Ε.Μ.Π., τα αποτελέσματα αναλύσεων για ατέλειες σύμφωνα με την τοπική και καθολική αστοχία σύνθετου υποστυλώματος και συμπεραίνουμε πως όταν τα φορτία τοπικού και καθολικού λυγισμού ταυτιστούν η επιρροή των ατελειών γίνεται μέγιστη. Ο συντελεστής  $\chi$  αναφέρεται στην σχέση μεταξύ του φορτίου τοπικού και καθολικού λυγισμό



Σχήμα 1-10 Δρόμοι ισορροπίας αριθμητικών αναλύσεων σύνθετων υποστυλωμάτων για διαφορετικές τιμές φορτίων τοπικού και καθολικού λυγισμού (Μη-γραμμική ανάλυση μεταλλικών κατασκευών, Χ. Γαντές, Ε.Μ.Π)

## 1.8 Φιλοσοφία σχεδιασμού μεταλλικών κατασκευών έναντι διαρροής και λυγισμού κατά τον Ευρωκώδικα 3

### 1.8.1 Εισαγωγή

Ο Ευρωκώδικας 3, ο κανονισμός δηλαδή που περιγράφει τις μεθόδους σχεδιασμού των μεταλλικών κατασκευών, θα έπρεπε με κάποιο τρόπο να συνδυάσει αποτελεσματικά τόσο τον κάθε μηχανισμό αστοχίας ξεχωριστά, όσο και την αλληλεπίδραση τους, προκειμένου να πετύχει έναν ασφαλή και οικονομικό σχεδιασμό. Για αυτό ακολούθησε την εξής διαδικασία

### 1.8.2 Καμπτικός λυγισμός

Σε μία αμέριστη ράβδο το άθροισμα των τάσεων γίνεται μέγιστο στην μέση της ράβδου όπου το βέλος εμφανίζει την μέγιστη τιμή του. Επομένως η συνολική τάση θα προκύψει από την θλίψη που εισάγει η ίδια η αξονική και τις θλιπτικές τάσεις που εισάγει η ροπή δευτέρας τάξης που ισούται με το γινόμενο της αξονικής πολλαπλασιαζόμενης με το μέγιστο βέλος  $w_{max}$ , στο οποίο προστίθεται και το επιπλέον βέλος  $w_0(x)$  που εισάγει πιθανή ατέλεια  $e_0$ . Επομένως το σύνολο των ορθών τάσεων γράφεται:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \frac{1}{N} e_0}{\frac{1}{Ncr} W_{el}} \quad (1.22)$$

Στην συνέχεια, προκειμένου να βρεθεί η συνολική αντοχή, γίνεται η αρκετά συντηρητική θεώρηση πως η αστοχία επέρχεται μόλις η μέγιστη τάση γίνει ίση με την τάση διαρροής, αγνοώντας τόσο την κράτυνση, όσο και το περιθώριο να διαρρεύσει η υπόλοιπη διατομή.

$$\text{Δηλαδή θεωρούμε } \sigma = f_y \quad (1.23)$$

Επιπλέον θεωρούμε πως εκείνη την στιγμή η ασκούμενη δύναμη ισούται με την αντοχή σε θλίψη της διατομής, πολλαπλασιαζόμενη με έναν μειωτικό συντελεστή  $\chi$ , στον οποίο συμπεριλαμβάνονται η επίδραση τόσο του λυγισμού, όσο και των ατελειών. Αυτόν τον συντελεστή θα πρέπει να υπολογίσουμε.

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στην (1.22) και γράφοντας τον λόγο  $I/A$  με τον τετράγωνο της ακτίνας αδρανείας παίρνουμε (Μη γραμμική συμπεριφορά των κατασκευών, Χ. Γαντές, 2016)

$$\frac{N}{Ncr} = \frac{x A f_y}{\pi^2 E I} L^2 = \frac{x \left(\frac{L}{i}\right)^2}{\pi^2 \frac{E}{f_y}} = x \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} = x \bar{\lambda}^2 \quad (1.24)$$

Αντικαθιστώντας την (1.24) και την  $N = \chi A f_y$  στην (1.22) προκύπτει

$$f_y = x f_y + \frac{x A f_y e_0}{1 - x \bar{\lambda}^2 W_{el}} \Rightarrow 1 = x + \frac{A}{W_{el}} \frac{e_0 x}{1 - x \bar{\lambda}^2} \quad (1.25)$$

Για λόγους διευκόλυνσης υπολογισμών μπορούμε στην συνέχεια να θέσουμε  $\frac{A}{W_{el}} e_0 = \eta$  και μετά από κάποιες πράξεις να μετασχηματίσουμε την (1.25) στην εξίσωση Ayrton-Perry

$$x^2 \bar{\lambda}^2 - (1 + \bar{\lambda}^2 + \eta) x + 1 = 0 \quad (1.26)$$

Η παράμετρος  $\eta$  περιλαμβάνει το σύνολο των ατελειών του μέλους και εξαιτίας της συσχέτισης της με το μήκος του μέλους έχει καθιερωθεί να εκφράζεται από την σχέση

$$\eta = a(\bar{\lambda}^2 - 0.2) \quad (1.27)$$

Όπου αντικαθιστώντας στην (1.26) παίρνουμε

$$x^2 \bar{\lambda}^2 - (1 + \bar{\lambda}^2 + a(\bar{\lambda}^2 - 0.2))x + 1 = 0 \quad (1.28)$$

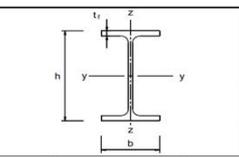
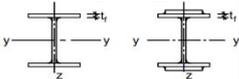
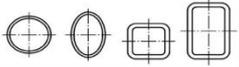
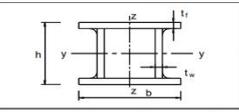
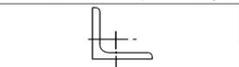
Όπου θέτοντας

$$\Phi = 0.5 [1 + a(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2] \quad (1.29)$$

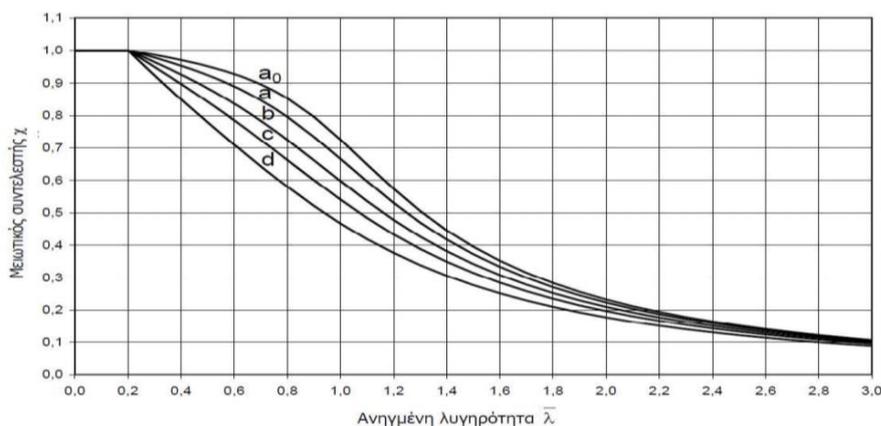
Καταλήγουμε στην σχέση για τον υπολογισμό του μειωτικού συντελεστή

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad (1.30)$$

Μέσα από συνδυασμό πειραματικών και αριθμητικών αναλύσεων έχουν υπολογιστεί οι καμπύλες λυγισμού από τις οποίες προκύπτει ο μειωτικός συντελεστής ανάλογα με την τιμή της ανηγμένης λυγηρότητας για κάθε κατηγορία ατελειών (Πίνακας 8.5). Η κατάταξη των διατομών σε κατηγορίες ατελειών γίνεται με βάση τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά στο σχήμα 8.3 του EN1993-1-1

Διατομή	Όρια	Λυγισμός περί τον άξονα	Καμπύλη λυγισμού	
			S235 S275 S355 S420	S460 έως και S700
Ελατές διατομές 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	Y-Y	a	a <sub>0</sub>
		Z-Z	b	a
	$t_f > 40 \text{ mm}$ $t_f \leq 100 \text{ mm}$	Y-Y	b	a
		Z-Z	c	b
$t_f > 100 \text{ mm}$	Y-Y	d	c	
	Z-Z	d	c	
Συγκολλητές Γ-διατομές 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	Y-Y	b	b
	$t_f > 40 \text{ mm}$	Z-Z	c	c
Κόλλες Διατομές 	Εν θερμώ έλαση	Κάθε	a	a <sub>0</sub>
	Ψυχρή έλαση	Κάθε	c	c
Συγκολλητές κρίσιμα κλάσες διατομές 	Γενικά (εκτός των κατωτέρω)	Κάθε	b	b
	Μεγάλα πάχη ραφής: $a > 0,5 \cdot t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	Κάθε	c	c
U-, T- και συμμορφές διατομές 	Ελατές	Κάθε	c	c
	Συγκολλητές	Κάθε	c	c
L-διατομές 	Ελατές	Κάθε	b	a
	Συγκολλητές	Κάθε	c	c

Διάγραμμα 1-3: Καμπύλες λυγισμού EN1993-1-1 (Πίνακας 8.5)



Πίνακας 1-1: Εύρεση καμπύλων λυγισμού διατομών (Σχήμα 8.3)

### 1.8.3 Πλευρικός λυγισμός

Στην περίπτωση όπου μία δοκός φορτίζεται εγκάρσια τότε κριτήριο αντοχής παραμένει η πρώτη εμφάνιση διαρροής, επομένως η συνολική τάση που θα εξισωθεί με το όριο διαρροής είναι

$$\sigma_y + \sigma_z^I + \sigma_z^{II} = 0 \quad (1.31)$$

$$\frac{M_{y,ed}}{M_{y,rd}} + \frac{M^I_{z,ed}}{M_{z,rd}} + \frac{M^{II}_{z,ed}}{M_{z,rd}} \leq 1 \quad (1.32)$$

Η ανηγμένη λυγηρότητα δίνεται από την σχέση

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{Mrk}{Mc_r}} \quad (1.33)$$

Ενώ η συνολική αντοχή του μέλους υπολογίζεται ως

$$M_{b,rd} = \chi_{LT} \frac{Mrk}{\gamma_{M1}} \quad (1.34)$$

Περισσότερες πληροφορίες για τον τρόπο εύρεσης της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού, αλλά και της συνολικής αντοχής του μέλους αναπτύσσονται στο κεφάλαιο 6 για την περίπτωση διατομής με έναν άξονα συμμετρίας

## 1.9 Πρότυπο CEN/TR 1993-1-103

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε σωστό να αναφέρουμε λίγα λόγια για το πρότυπο CEN/TR 1993-1-103, η κριτική αξιολόγηση του οποίου αποτελεί βασικό θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Το συγκεκριμένο πρότυπο περιγράφει το σύνολο των διαδικασιών που ακολουθούνται για την ανάκτηση του κρίσιμου μήκους αλλά και του φορτίου λυγισμού φορέων υπό διαφορετικές συνθήκες καταπόνησης, καθώς στον ίδιο τον Ευρωκώδικα δίνονται από λίγες έως και καθόλου πληροφορίες για τους συγκεκριμένους υπολογισμούς της εκάστοτε εξεταζόμενης περίπτωσης. Με δεδομένο πως πληθώρα λύσεων είναι διαθέσιμες στην βιβλιογραφία για κάθε εξεταζόμενη σκοπός των κειμένων του προτύπου, είναι να συνοψίσει τις, κατά το δυνατόν, απλούστερες και πιο αποτελεσματικές λύσεις προκειμένου να διευκολυνθεί η δουλειά του επαγγελματία πολιτικού μηχανικού.

Το κείμενο απαρτίζεται από έξι κεφάλαια, κάθε ένα από τα οποία αναφέρεται και σε μία διαφορετική περίπτωση αστάθειας. Περισσότερες πληροφορίες για τις διατάξεις, την φιλοσοφία που κρύβεται από πίσω τους, αλλά και τον τρόπο εφαρμογής τους, πρόκειται να δοθούν στα εξεταζόμενα παραδείγματα που περιγράφονται στην συνέχεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας

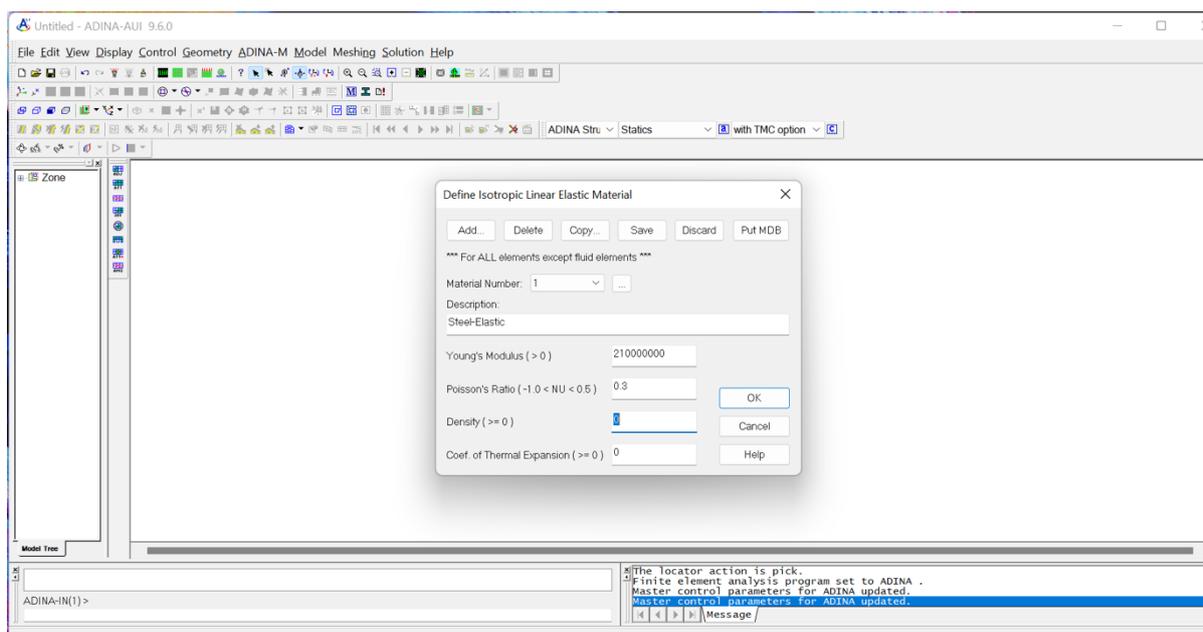
## 1.10 Είδη μη-γραμμικών αναλύσεων

### 1.10.1 Εισαγωγή

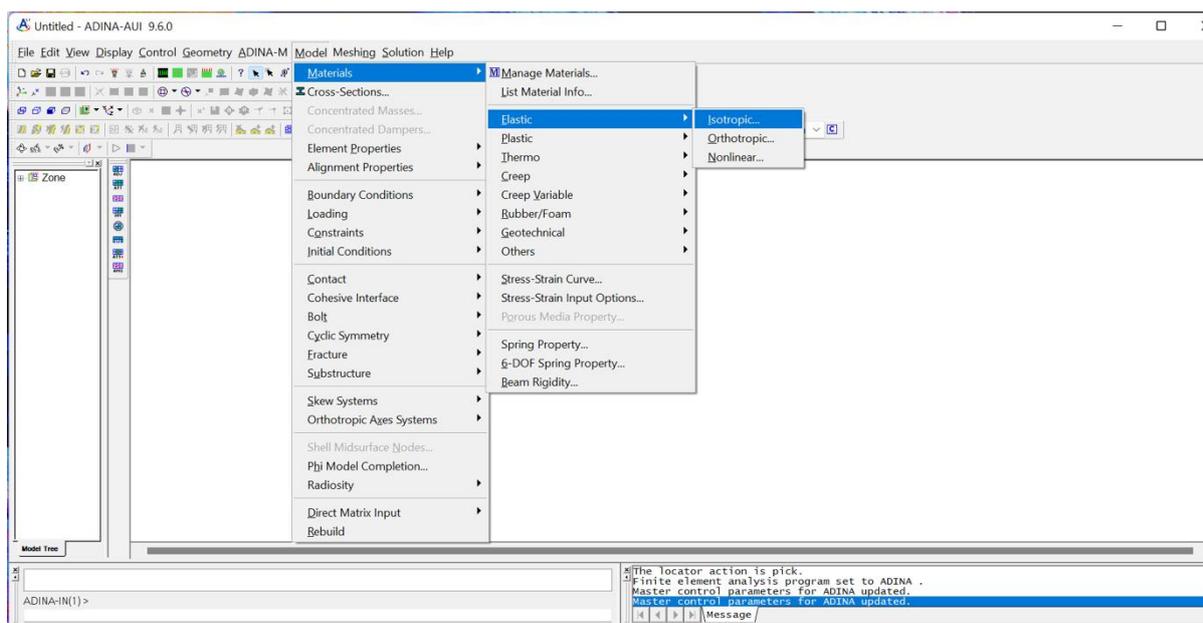
Προκειμένου να είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην σωστή μελέτη των διατάξεων του προτύπου, χτίζοντας τα διάφορα παραδείγματα εφαρμογής, θα πρέπει να γνωρίζουμε τα διαφορετικά είδη αναλύσεων που πρόκειται να εφαρμοστούν, αλλά και τον τρόπο εκτέλεσής τους στο λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων. Πρώτο βήμα για την εκτέλεση μίας μη-γραμμικής ανάλυσης είναι πραγματοποίηση μίας γραμμικής ανάλυσης λυγισμού (LBA) η οποία πέρα από τα κρίσιμα φορτία ελαστικού λυγισμού, θα μας δώσει τις ιδιομορφές που ίσως χρησιμοποιηθούν ως σχήματα ατελειών. Στη συνέχεια θα διεξαχθούν οι μη-γραμμικές αναλύσεις χωριστά, προκειμένου να έχουμε καλύτερη εποπτεία της συμπεριφοράς του φορέα και τέλος θα γίνει μία μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας υλικού και γεωμετρίας, με, ή χωρίς αρχικές ατέλειες, η οποία και θα μας δώσει την συνολική αντοχή του φορέα

### 1.10.2 Γραμμική ανάλυση λυγισμού

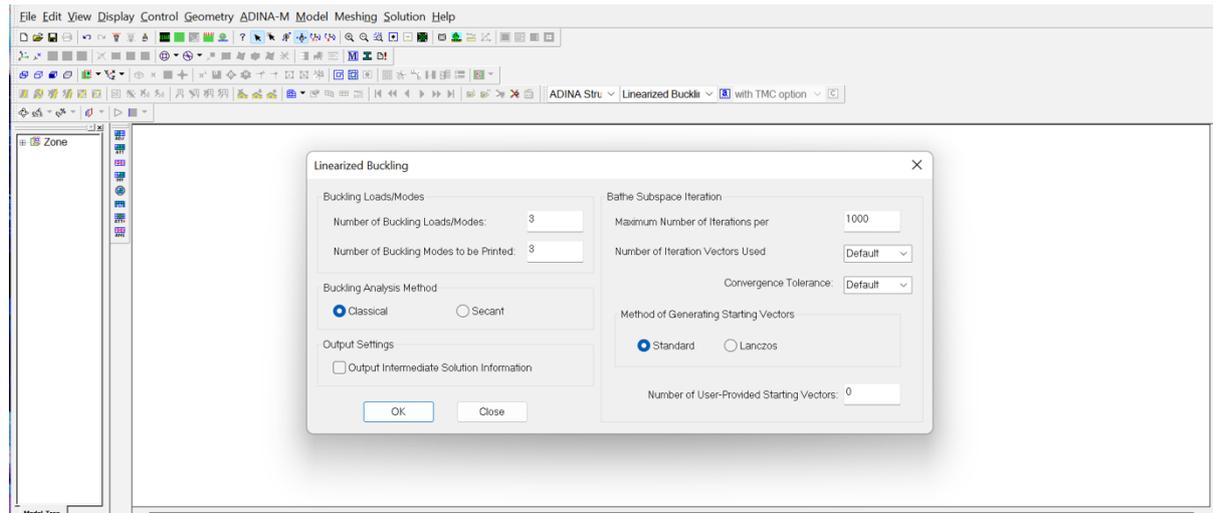
Η γραμμική ανάλυση λυγισμού συνιστά το πρώτο βήμα μίας μη-γραμμικής ανάλυσης και εφαρμόζεται στο λογισμικό με τον εξής τρόπο. Αρχικά πρέπει να εισαχθεί ένα γραμμικό-ελαστικό υλικό και αφού δημιουργηθεί η κατάλληλη γεωμετρία, όπως και το κατάλληλο πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων, επιλέγεται η καρτέλα LBA από την βιβλιοθήκη αναλύσεων, στην οποία εισάγουμε το πλήθος των ιδιομορφών που θέλουμε να τυπωθούν. Επιπλέον διαλέγουμε έναν αρκετά μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, αλλά και τύπο ανάλυσης λυγισμού 'Standard', καθώς βρίσκεται πιο κοντά στην κλασική έννοια του γραμμικού λυγισμού. Επιπλέον στην καρτέλα 'kinematics' πρέπει να επιλέξουμε 'large displacement'.



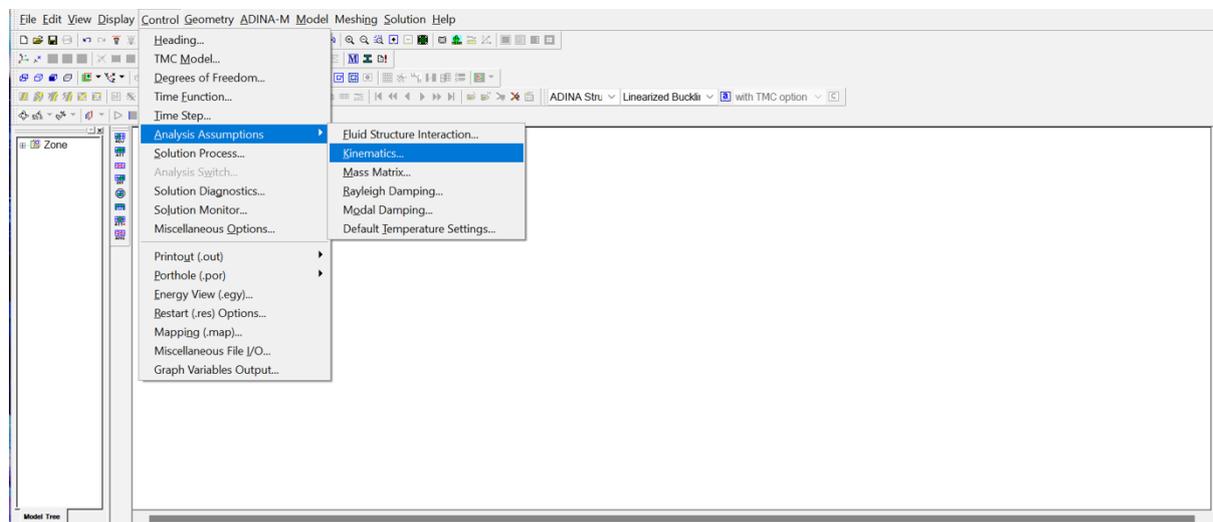
Εικόνα 1-1: Εισαγωγή γραμμικά ελαστικού υλικού στο λογισμικό



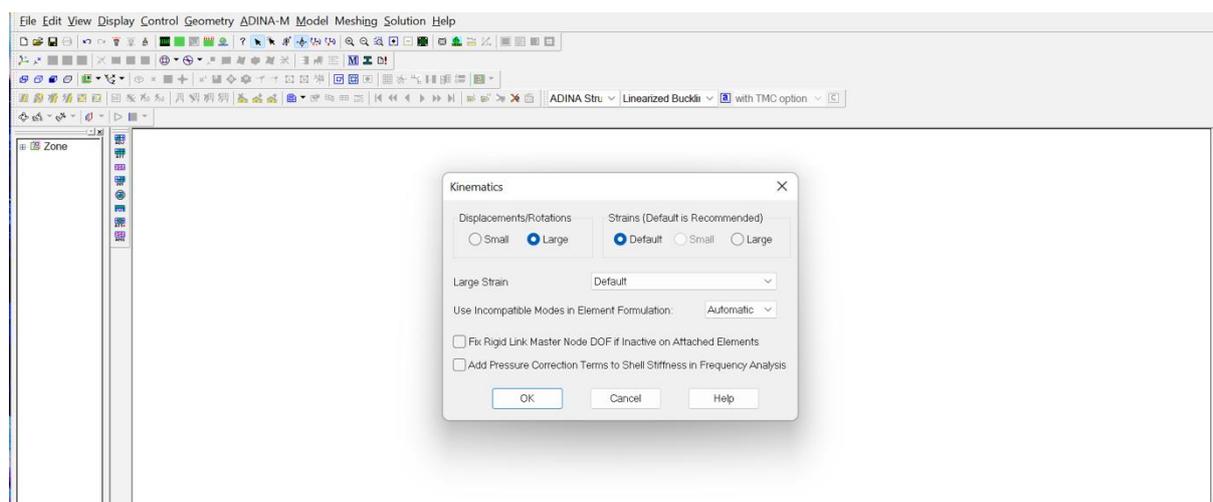
Εικόνα 1-2: Εισαγωγή γραμμικά ελαστικού υλικού στο λογισμικό



Εικόνα 1-3: Εφαρμογή γραμμικής ανάλυσης λυγισμού στο λογισμικό



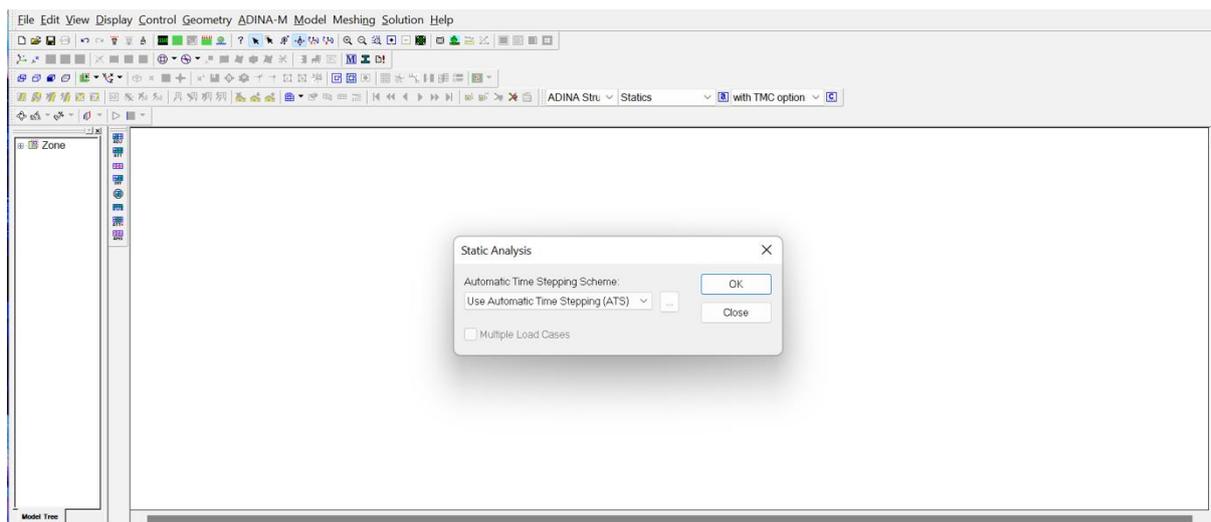
Εικόνα 1-4: Εφαρμογή μεγάλων μετακινήσεων γραμμικής ανάλυσης λυγισμού στο λογισμικό



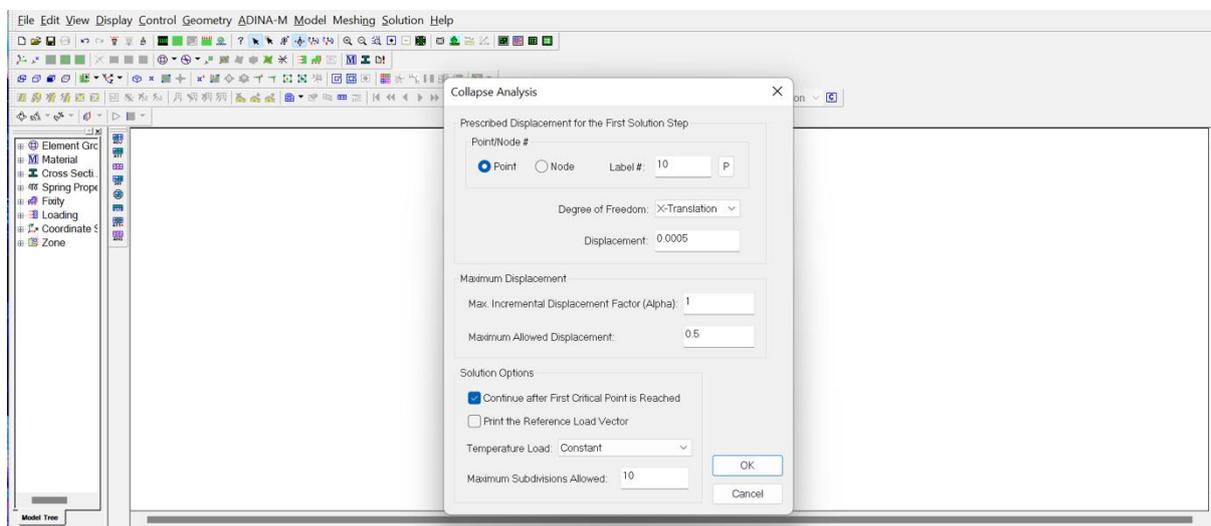
Εικόνα 1-5: Εφαρμογή μεγάλων μετακινήσεων γραμμικής ανάλυσης λυγισμού στο λογισμικό

### 1.10.3 Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας

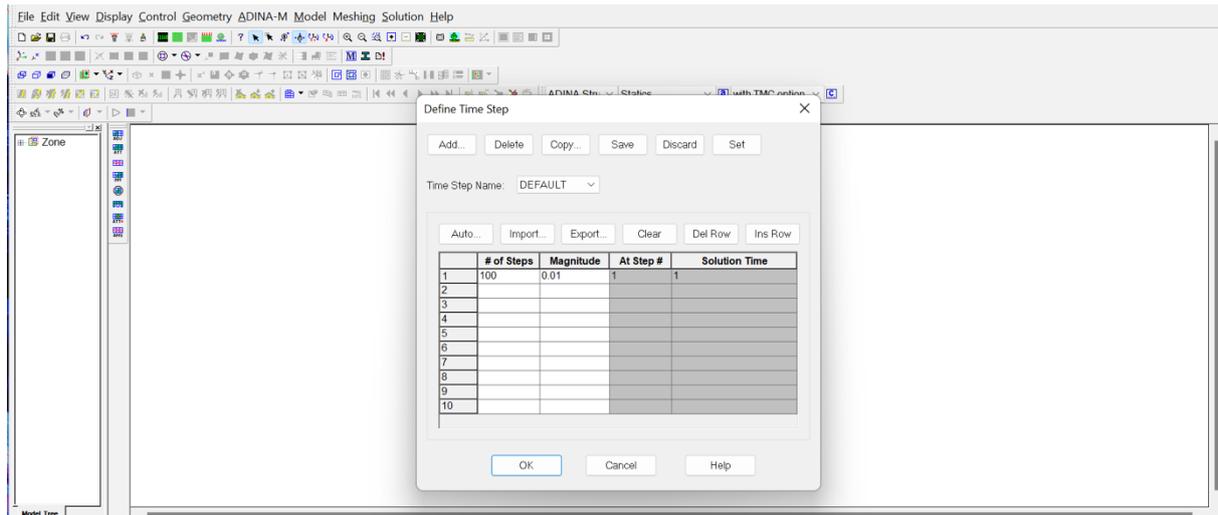
Επόμενο βήμα είναι η εκτέλεση μίας μη-γραμμικής ανάλυσης γεωμετρίας, η οποία θα μας δώσει πληροφορίες για την μεταλυγισμική συμπεριφορά του φορέα, πράγμα αδύνατο να καταλάβουμε μέσα από την γραμμική ανάλυση λυγισμού. Η μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας μπορεί να επιβληθεί τόσο με την επιβολή φορτίου μέσα από την επιλογή 'statics', όσο και μετακινήσεων 'collapse analysis'. Η τελευταία έχει το πλεονέκτημα της ανίχνευσης πιθανών καθοδικών κλάδων. Ανεξαρτήτως της επιλεγείσας μεθόδου θα πρέπει να ορίσουμε ένα time function αλλά και time steps τα οποία θα υποδηλώνουν τον αριθμό των βημάτων διεξαγωγής της ανάλυσης.



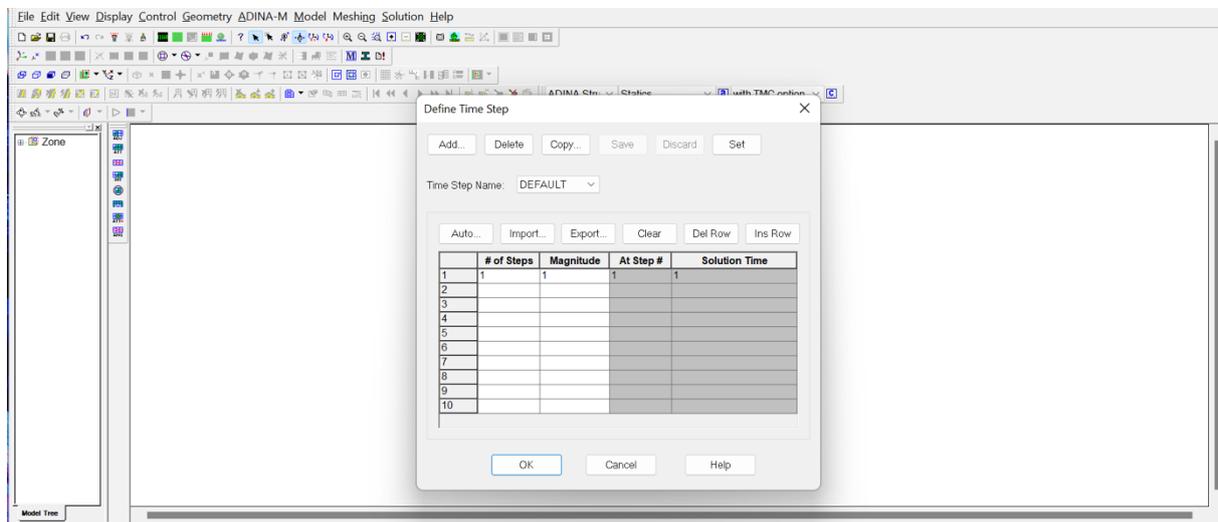
Εικόνα 1-6: Ανάλυση statics για προσαυξητική επιβολή φορτίου



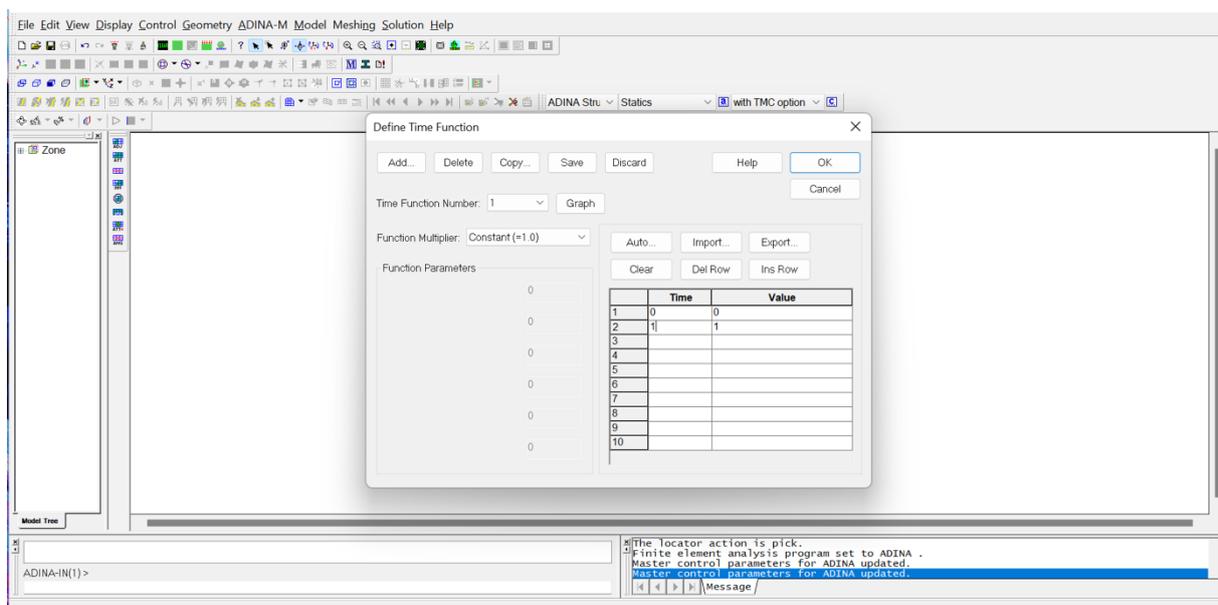
Εικόνα 1-7: Ανάλυση collapse για προσαυξητική επιβολή μετακινήσεων



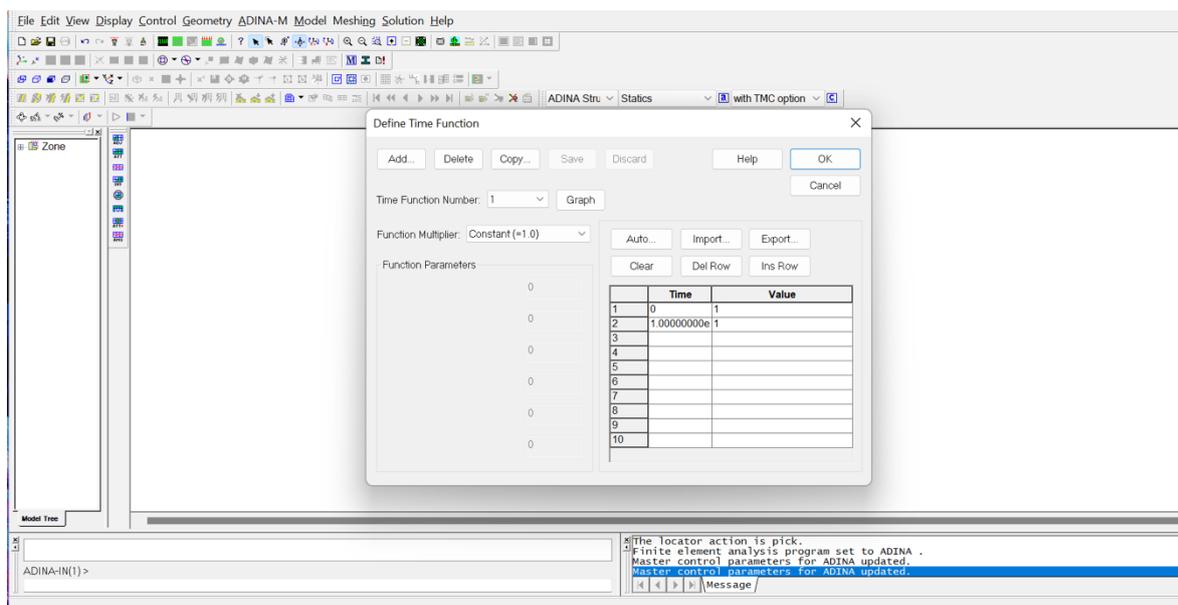
Εικόνα 1-8: Ορισμός time step μη-γραμμικής ανάλυσης



Εικόνα 1-9: Time Step σε περίπτωση εκτέλεσης κλασικής στατικής ανάλυσης

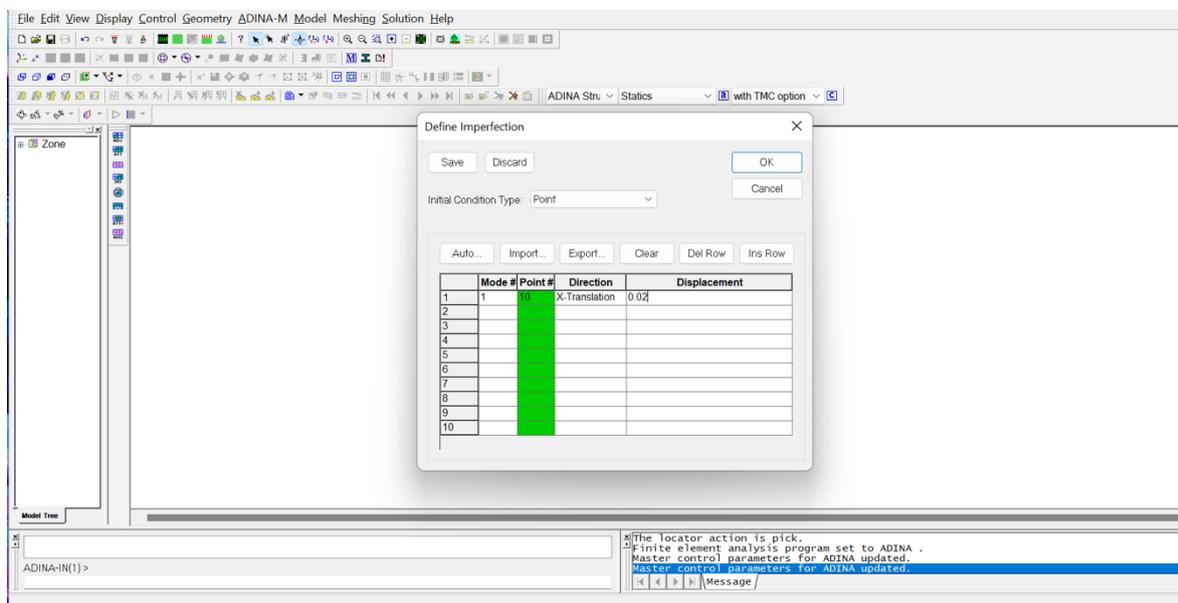


Εικόνα 1-10: Ορισμός time function



Εικόνα 1-11: Ορισμός time function LBA

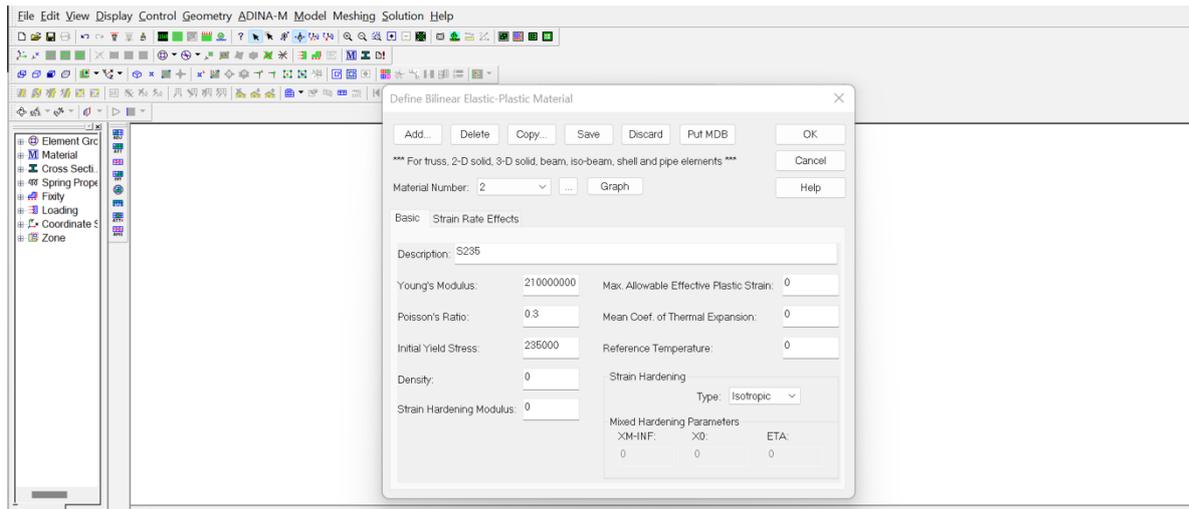
Σε περίπτωση επιλογής του αλγόριθμου collapse θα πρέπει να δηλώσουμε τον κόμβο, ή το σημείο στο οποίο θέλουμε να επιβάλουμε τις μετακινήσεις, την ακρίβεια της ανάλυσης, αλλά και την μέγιστη μετακίνηση που θέλουμε να έχουμε για να ολοκληρωθεί η ανάλυση. Επιπροσθέτως, η εισαγωγή αρχικών ατελειών σε περίπτωση που θέλουμε να πραγματοποιήσουμε μη-γραμμική ανάλυση με αρχικές ατέλειες τότε θα τις εισάγουμε στην ανάλυση μέσα από την επιλογή 'initial conditions -> imperfections'.



Εικόνα 1-12: Εισαγωγή ατελειών μη-γραμμικής ανάλυσης σύμφωνα με το σχήμα της πρώτης ιδιομορφής σε κόμβο επιλογής, με πλάτος ιδιομορφής 0.02 m

### 1.10.4 Μη γραμμική ανάλυση υλικού

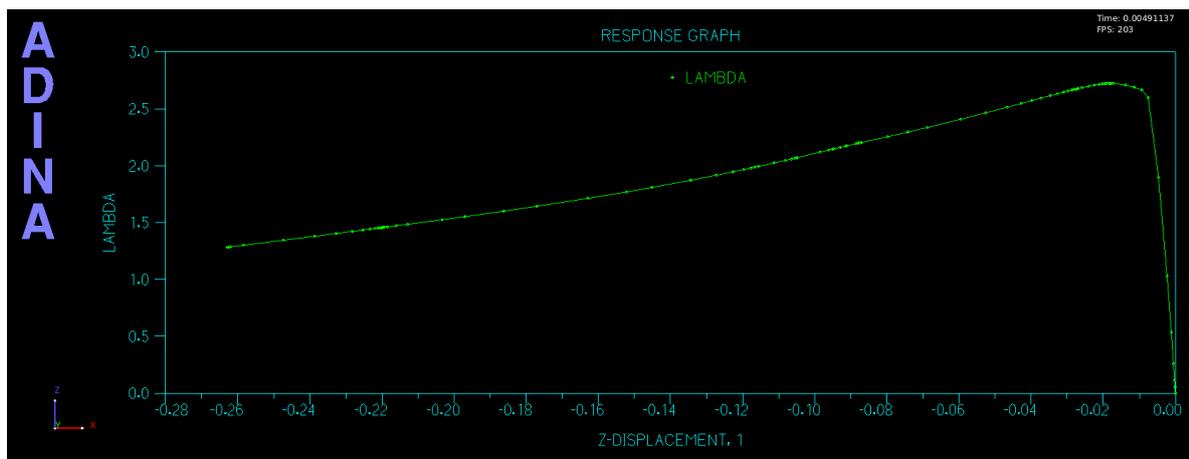
Η μη-γραμμική ανάλυση υλικού θα μας δώσει πληροφορίες σχετικά με την αστοχία λόγω πλαστικοποίησης και θα πραγματοποιηθεί με την ίδια ακριβώς λογική που περιεγράφηκε για την εκτέλεση των αναλύσεων μη-γραμμικότητας γεωμετρίας. Η διαφορά είναι πως τώρα αγνοούμε τον λυγισμό, επομένως δεν επιλέγουμε 'large displacement' στην καρτέλα 'kinematics' και επιπλέον πρέπει να εισάγουμε υλικό με μη-γραμμικό κλάδο, όπως για παράδειγμα υλικό με νόμο ελαστικό-απολύτως πλαστικό (bilinear). Οι πιθανές ατέλειες θα εισαχθούν με τον τρόπο που περιεγράφηκε και προηγουμένως



Εικόνα 1-13: Εισαγωγή μη-γραμμικού υλικού

### 1.10.5 Μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας

Τελευταίο βήμα κατά την πραγματοποίηση μίας μη-γραμμικής ανάλυσης είναι η μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας, που θα συνδυάσει τους δύο προαναφερθέντες μηχανισμούς αστοχίας και θα μας δώσει εικόνα της συνολικής αντοχής του μέλους, ή της διατομής, ή οποία και θα είναι σε θέση να συγκριθεί με την αντίστοιχη κανονιστική. Για την εκτέλεση της θα εισαχθεί τόσο το μη-γραμμικό υλικό, όσο και οι μεγάλες μετακινήσεις για το φαινόμενο του λυγισμού.



Εικόνα 1-14: Παράδειγμα δρόμου ισορροπίας μη γραμμικής ανάλυσης υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες

## 2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΤΕΛΕΙΑΣ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟΝ ΕΥΡΩΚΩΔΙΚΑ-3

### 2.1 Εισαγωγή

Οι ατέλειες των μελών από χάλυβα αποτελούν αντικείμενο χρόνιας μελέτης και ενδιαφέροντος στον χώρο των μεταλλικών κατασκευών καθώς μπορεί να διατελέσουν σημαντικό ρόλο στην τελική διαμόρφωση του είδους της απόκρισης ενός μέλους κατά την φόρτιση του. Εξαιτίας του γεγονότος πως βρίσκονται εντός των ανεκτών κατασκευαστικών ορίων, όπως αυτά ορίζονται από τα αντίστοιχα πρότυπα δεν είναι εμφανείς και συνεπώς είναι αδύνατο να υπολογιστούν με ακρίβεια προκαταβολικά. Αρκετές προσπάθειες έχουν πραγματοποιηθεί για να μελετηθούν οι ατέλειες οι οποίες μειώνουν την αντίσταση των μελών (Taheri-Behrooz & Omidí, 2018), αλλά και ειδικότερα των θλιβόμενων μελών υπό θλίψη (Kala, 2015).

Δύο διαφορετικές μέθοδοι προτείνονται από τον Ευρωκώδικα 3 (NF EN 1993-1-1, 2005) για να συμπεριληφθεί η δυσμενής επίδραση των ατελειών στην αντοχή των κατασκευαστικών μελών. Η πρώτη είναι η συμβατική μέθοδος και βασίζεται στον ορισμό μίας τοπικής και μία καθολικής ατέλειας της κατασκευής, όπως περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 7.3. ,ενώ η δεύτερη βασίζεται στον ορισμό μίας μοναδικής καθολικής και τοπικής ατέλειας (Ugfi) η οποία θα προσομοιάζει την κυρίαρχη ιδιομορφή ελαστικού λυγισμού της κατασκευής.

Αναλυτικές μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί προκειμένου να μελετηθεί ο αποτελεσματικότερος τρόπος λήψης στο μοντέλο προσομοίωσης της κατασκευής, η μοναδική τοπική και καθολική ατέλεια (Goncalves and Camotim, 2005, Agüero et al., 2015, Chladný Y., Štujberová M., 2013), με βασικά πλεονεκτήματα της μεθόδου να είναι η καθολικότητα της εφαρμογής της, σε αντίθεση με την συμβατική μέθοδο καθώς και το γεγονός πως το σχήμα της κρίσιμης ιδιομορφής λυγισμού είναι κατάλληλο για υπολογισμούς παραμορφώσεων και εντατικών μεγεθών δευτέρας τάξης σε μέλη υπό θλίψη με αρχικές ατέλειες.

## 2.2 Θεωρητικό υπόβαθρο μεθόδου

Πρέπει πρωταρχικά να ξεκαθαριστεί πως η μοναδική τοπική και καθολική ατέλεια στο σχήμα της κρίσιμης ιδιομορφής ελαστικού λυγισμού περιλαμβάνει το σύνολο των ατελειών ενός μέλους, ή ενός πλαισίου.

Η θεμελιώδης αρχή που καθορίζει το μέγεθος της προαναφερθείσας ατέλειας αναφέρει πως η αντοχή έναντι λυγισμού του θλιβόμενου μέλους με την συγκεκριμένη ατέλεια θα πρέπει να είναι ίση με την αντοχή έναντι καμπτικού λυγισμού ενός ισοδύναμου μέλους, το οποίο εδράζεται σε αρθρωτές στηρίξεις, έχει μήκος τέτοιο ώστε το κρίσιμο φορτίο να είναι ίσο με την αξονική δύναμη στην κρίσιμη διατομή και διατομή και φόρτιση ίση με αυτήν της κρίσιμης διατομής.

Η ανηγμένη λυγηρότητα είναι:

$$\bar{\lambda m} = \sqrt{\frac{Am fy}{Ncr,m}} = \sqrt{\frac{Nrk,m}{Ncr,m}} \quad (2.1)$$

Η θέση της κρίσιμης διατομής προκύπτει από την προϋπόθεση ότι ο συντελεστής αξιοποίησης επιτρέποντας την επίδραση της αξονικής δύναμης και της καμπτικής ροπής εξαιτίας των ατελειών στην κρίσιμη διατομή είναι

$$U_m = \frac{N^{II} ed,m}{Nrd,m} + \frac{M^{II} \eta_{init,m,m}}{Mrd,m} = U_{N,m} + U_{M,\eta_{init,m,m}} \quad (2.2)$$

Και είναι μικρότερος από την συντελεστή αξιοποίησης σε οποιαδήποτε άλλη διατομή

$$U_m = \frac{N^{II} ed(x)}{Nrd(x)} + \frac{M^{II} \eta_{init,m}(x)}{Mrd(x)} = U_N(x) + U_{M,\eta_{init,m}}(x) \quad (2.3)$$

Η ροπή  $M_{\eta_{init,m}}^{II}$  αναφέρεται στην ροπή κάμψης στην κρίσιμη διατομή  $m$  του θλιβόμενου μέλους εξαιτίας της αρχικής ατέλειας  $\eta_{init,m}(x)$ , υπολογισμένη χρησιμοποιώντας ανάλυση δεύτερης τάξης.

Για το ισοδύναμο μέλος με αρχική ατέλεια, η ροπή κάμψης  $M_{\eta_{init,m}}^{II}$  στην οριακή κατάσταση αστοχίας ( $U_m=1$ ) είναι  $M_{\eta_{init,m}}^{II} = M_{\eta_{init,max}}^{II}$ , όπου

$$M_{\eta_{init,m,max}}^{II} = -EI_m \left[ \left( e_{od,m} \sin \frac{\pi x}{Lcr,m} \right) \right]_{\max} \frac{1}{acr-1} = N_{ed,m} e_{od,m} \frac{1}{1-\frac{1}{acr}} \quad (2.4)$$

Η αξονική δύναμη  $N_{ed,m}$  είναι η δύναμη σχεδιασμού στην κρίσιμη διατομή ενώ ο όρος  $e_{od,m} \sin \left( \frac{\pi x}{Lcr,m} \right)$  είναι η ισοδύναμη γεωμετρική αρχική ατέλεια του ισοδύναμου μέλους με

$$e_{od,m} = a (\bar{\lambda m} - \bar{\lambda o}) \frac{Mrk,m}{Nrk,m} \frac{1 - \frac{x \bar{\lambda m}^2}{\gamma \mu 1}}{1 - x \bar{\lambda m}^2} = e_{ok} \delta_e \quad (2.5)$$

Για το ισοδύναμο μέλος η αρχική ατέλεια στο σχήμα της κρίσιμης ιδιομορφής ελαστικού λυγισμού μπορεί να εκφραστεί ως

$$\eta_{init,m}(x) = \eta_{init,m,max} \frac{\eta_{cr}(x)}{|\eta_{cr}|_{max}} \quad (2.6)$$

Όπου  $\eta_{init,m,max}$  είναι τιμή σχεδιασμού του μέγιστου πλάτους της μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας και  $|\eta_{cr}|_{max}$  είναι το μέγιστο πλάτος της ιδιομορφής λυγισμού  $\eta_{cr}(x)$ , το οποίο μπορεί να έχει μία αυθαίρετη μη μηδενική τιμή.

Η ροπή κάμψης στην κρίσιμη διατομή του μέλους που έχει αρχικά λυγίσει σύμφωνα με το σχήμα της  $\eta_{init,m}$  είναι

$$M_{\eta_{init,m,max}}^{II} = \frac{\eta_{init,m,max}}{acr-1} \frac{|E I_m \eta_{cr}''|_m}{|\eta_{cr}|_{max}} \quad (2.7)$$

Εύκολα προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις πως

$$\eta_{init,m,max} = e_{od,m} \frac{Ncr,m}{E I_m |\eta_{cr}''|_m} |\eta_{cr}|_{max} \quad (2.8)$$

Αλλά και

$$\eta_{\text{init},m}(x) = e_{\text{od},m} \frac{N_{cr,m}}{E I_m |\eta''_{cr}|_m} \eta_{cr}(x) \quad (2.9)$$

Ο παρονομαστής της παραπάνω σχέσης είναι η τιμή των καμπτικών ροπών που απαιτούνται για να λυγίσουν την κατασκευή (στην κατάσταση χωρίς τις εσωτερικές δυνάμεις) στην μορφή της κρίσιμης ιδιόμορφης λυγισμού. Στις απλές περιπτώσεις όπου η αναλυτική έκφραση για την κρίσιμη ιδιόμορφη είναι γνωστή, ο υπολογισμός του συγκεκριμένου όρου είναι δυνατός. Η ύπαρξη τουλάχιστον 20 γνωστών σημείων στην καμπύλη της ιδιόμορφης είναι αρκετή για να υπολογιστεί η καμπυλότητα (δεύτερη παράγωγος) με ακρίβεια που αγγίζει το 1%. Αναλυτικό παράδειγμα εφαρμογής της συγκεκριμένης μεθόδου παρατίθεται στην συνέχεια.

Μία άλλη προσέγγιση που προκύπτει ως αποτέλεσμα εφαρμογής των παραπάνω σχέσεων (Chladný Y., Štujberová M.) οδηγεί στις σχέσεις:

$$E I_{(x)} [\eta_{cr}(x)]'' = E I_{(x)} [\eta^{II}(x)]'' = M^{II}_{\eta_{cr}}(x) (a_{cr} - 1) \quad (2.10)$$

Αλλά και στην

$$a_{cr} - 1 = \frac{\eta_{cr}(x)}{|\eta^{II}|_{\text{max}}} \quad (2.11)$$

Όπου  $M^{II}_{\eta_{cr}}(x)$  είναι η ροπή κάμψης στο μέλος με γεωμετρία επηρεασμένη από την αρχική ατέλεια στην μορφή της κρίσιμης ιδιομορφής ελαστικού λυγισμού  $\eta_{cr}(x)$ , με την αυθαίρετα ορισμένη τιμή για το μέγιστο πλάτος  $|\eta_{cr}|_{\text{max}}$ .

Στην κρίσιμη διατομή  $m$  ισχύει:

$$E I_m |\eta_{cr}''|_m = |M^{II}_{\eta_{cr}}|_m (a_{cr} - 1) = |M^{II}_{\eta_{cr}}|_m \frac{|\eta_{cr}|_{\text{max}}}{|\eta^{II}|_{\text{max}}} \quad (2.12)$$

Όπου  $|\eta^{II}|_{\text{max}}$  είναι η μέγιστη παραμόρφωση που εκδηλώνεται κατά την εμφάνιση της ιδιομορφής λυγισμού.

Αποτέλεσμα αντικαταστάσεων στην παραπάνω σχέση οδηγεί στην

$$\eta_{\text{init},m}(x) = e_{\text{od},m} \frac{N_{cr,m} |\eta^{II}|_{\text{max}}}{|M^{II}_{\eta_{cr}}|_m} \frac{\eta_{cr}(x)}{|\eta_{cr}|_{\text{max}}} = e_{\text{od},m} \frac{N_{cr,m} |\eta^{II}|_{\text{max}}}{|M^{II}_{\eta_{cr}}|_m} \frac{\eta_{cr}(x)}{|\eta_{cr}|_{\text{max}}} = \eta_{\text{init},m,\text{max}} \frac{\eta_{cr}(x)}{|\eta_{cr}|_{\text{max}}} \quad (2.13)$$

Όπου,

$$\eta_{\text{init},m,\text{max}} = e_{\text{od},m} \frac{N_{cr,m} |\eta^{II}|_{\text{max}}}{|M^{II}_{\eta_{cr}}|_m} = \frac{a(\bar{\lambda}m - \bar{\lambda}o)}{\bar{\lambda}m^2} \frac{1 - \frac{x \bar{\lambda}m^2}{\gamma \mu 1}}{1 - x \bar{\lambda}m^2} \frac{M_{rk,m} |\eta^{II}|_{\text{max}}}{|M^{II}_{\eta_{cr}}|_m} \quad (2.14)$$

Το σύνολο των θεωρητικών σχέσεων περιλαμβάνονται στον παρακάτω πίνακα (Chladný Y., Štujberová M., 2013)

bending moment

$$M_{\eta_{\text{init},m}}^{\text{II}}(\mathbf{x}) = \frac{\eta_{\text{init},m,\text{max}}}{|\eta_{\text{cr}}|_{\text{max}}} M_{\eta_{\text{cr}}}^{\text{II}}(\mathbf{x}) = \frac{\eta_{\text{init},m,\text{max}}}{|\eta^{\text{II}}|_{\text{max}} (\alpha_{\text{cr}} - 1)} M_{\eta_{\text{cr}}}^{\text{II}}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha(\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_0)}{\bar{\lambda}_m^2 (\alpha_{\text{cr}} - 1)} \delta_e \frac{M_{\text{Rk},m}}{|M_{\eta_{\text{cr}}}|_m} M_{\eta_{\text{cr}}}^{\text{II}}(\mathbf{x})$$

utilization

$$U_{\eta_{\text{init},m}}(\mathbf{x}) = \frac{N_{\text{Ed}}(\mathbf{x})}{N_{\text{Rd}}(\mathbf{x})} + \frac{M_{\eta_{\text{init},m}}^{\text{II}}(\mathbf{x})}{M_{\text{Rd}}(\mathbf{x})} = U_{N,\text{Ed}}(\mathbf{x}) + U_{M\eta_{\text{init},m}}(\mathbf{x})$$

$$U_{M\eta_{\text{init},m}}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha(\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_0)}{\bar{\lambda}_m^2 (\alpha_{\text{cr}} - 1)} \frac{1 - \bar{\lambda}_m^2 \chi}{\gamma_{\text{M1}}} \frac{M_{\text{Rk},m}}{|M_{\eta_{\text{cr}}}|_m} \frac{M_{\eta_{\text{cr}}}^{\text{II}}(\mathbf{x})}{M_{\text{Rd}}(\mathbf{x})}$$

utilization at critical cross-section m

$$U_{M\eta_{\text{init},m,m}} = \frac{\alpha(\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_0)}{\bar{\lambda}_m^2 (\alpha_{\text{cr}} - 1)} \frac{1 - \bar{\lambda}_m^2 \chi}{\gamma_{\text{M1}}} \gamma_{\text{M1}}$$

$$U_{M\eta_{\text{init},m}}(\mathbf{x}) = U_{M\eta_{\text{init},m,m}} \frac{|\sigma_{\eta_{\text{cr}}}^{\text{II}}(\mathbf{x})|}{|\sigma_{\eta_{\text{cr}}}|_m}$$

maximum normal stress at cross-section x due  $M_{\eta_{\text{init},m}}^{\text{II}}(\mathbf{x})$

$$\sigma_{M,\eta_{\text{init},m}}^{\text{II}}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha(\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_0)}{\bar{\lambda}_m^2 (\alpha_{\text{cr}} - 1)} \frac{1 - \bar{\lambda}_m^2 \chi}{\gamma_{\text{M1}}} \frac{M_{\text{Rk},m}}{|M_{\eta_{\text{cr}}}|_m} \frac{M_{\eta_{\text{cr}}}^{\text{II}}(\mathbf{x})}{W(\mathbf{x})} = U_{M,\eta_{\text{init},m}}(\mathbf{x}) \frac{f_{\text{yk}}}{\gamma_{\text{M1}}}$$

maximum normal stress at critical cross-section m due to  $M_{\eta_{\text{init},m}}^{\text{II}}(\mathbf{x})$

$$\sigma_{M,\eta_{\text{init},m,m}}^{\text{II}}(\mathbf{x}) = U_{M,\eta_{\text{init},m,m}} \frac{f_{\text{yk}}}{\gamma_{\text{M1}}}$$

amplitude of  $\eta_{\text{init},m}$  imperfection

$$\eta_{\text{init},m,\text{max}} = U_{M,\eta_{\text{init},m,m}} \frac{f_{\text{yk}} \times |\eta_{\text{cr}}|_{\text{max}}}{\gamma_{\text{M1}} \times |\sigma_{\eta_{\text{cr}}}^{\text{II}}|_m} = \frac{\sigma_{M,\eta_{\text{init},m,m}}^{\text{II}}}{|\sigma_{\eta_{\text{cr}}}^{\text{II}}|_m} |\eta_{\text{cr}}|_{\text{max}}$$

Πίνακας 2-1: Συγκεντρωτικό τυπολόγιο σχέσεων εφαρμογής μεθόδου μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας (Chladný Y., Štujberová M., 2013)

### 2.2.1 Μέλη όπου η κρίσιμη διατομή είναι εκ των προτέρων γνωστή

Σε απλές περιπτώσεις ομοιόμορφων μελών, μεμονωμένων είτε μερών πλαισίων, η θέση της κρίσιμης διατομής ταυτίζεται με το σημείο μέγιστης , δηλαδή με το σημείο όπου η καμπυλότητα γίνεται μέγιστη.

Η αντοχή έναντι λυγισμού υπολογίζεται χρησιμοποιώντας ανάλυση δεύτερης τάξης με ανέχεια ότι η μοναδική τοπική και καθολική ατέλεια έχει την τιμή ίδια με αυτή που προκύπτει χρησιμοποιώντας την μέθοδο του ισοδύναμου μέλους σύμφωνα με την παράγραφο 8.3.1.1 του κανονισμού. Αυτό αποτελεί και το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου συγκριτικά με την συμβατική μέθοδο που περιεγράφηκε στην εισαγωγή του παρόντος.

Ο συντελεστής χρησιμοποίησης της κρίσιμης διατομής στην οριακή κατάσταση αστοχίας είναι  $U_m = U_{N,m} + U_{M,\eta,init,m,m} = 1$ , από την οποία και προκύπτει

$$U_{M,\eta,init,m,m} = \frac{a(\bar{\lambda}m - \bar{\lambda}o)}{\bar{\lambda}m^2(acr-1)} \frac{1 - \frac{x\bar{\lambda}m^2}{\gamma m_1}}{1 - x\bar{\lambda}m^2} \gamma_{M1} = 1 - U_{N,m} = 1 - \chi \quad (2.15)$$

Στο παρακάτω γράφημα φαίνεται η κρίσιμη διατομή και η ροπή του ισοδύναμου μέλους λόγω της μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας, όπως αυτά προέκυψαν από την μελέτη των Baláz & Koleková

*I. Baláz and Y. Koleková / Procedia Engineering 40 (2012) 32 – 37*

35

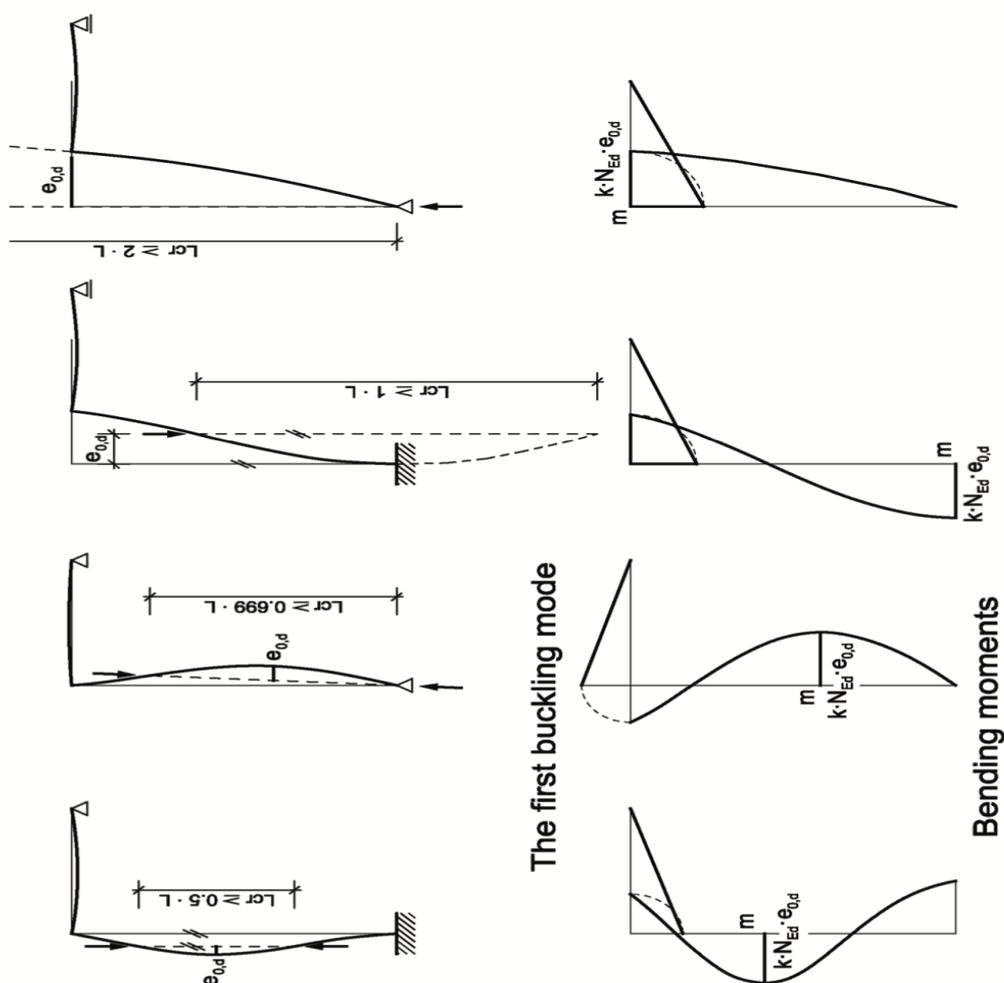


Fig. 2. Shape of elastic buckling mode applied as "ugli" imperfection. Bending moments due to "ugli" imperfection and location of "m".

Σχήμα 2-1.α: Κρίσιμες διατομές συνήθων μελών και ροπές λόγω ατέλειας σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή λυγισμού υπολογισμένες από τους Baláz I., Koleková Y

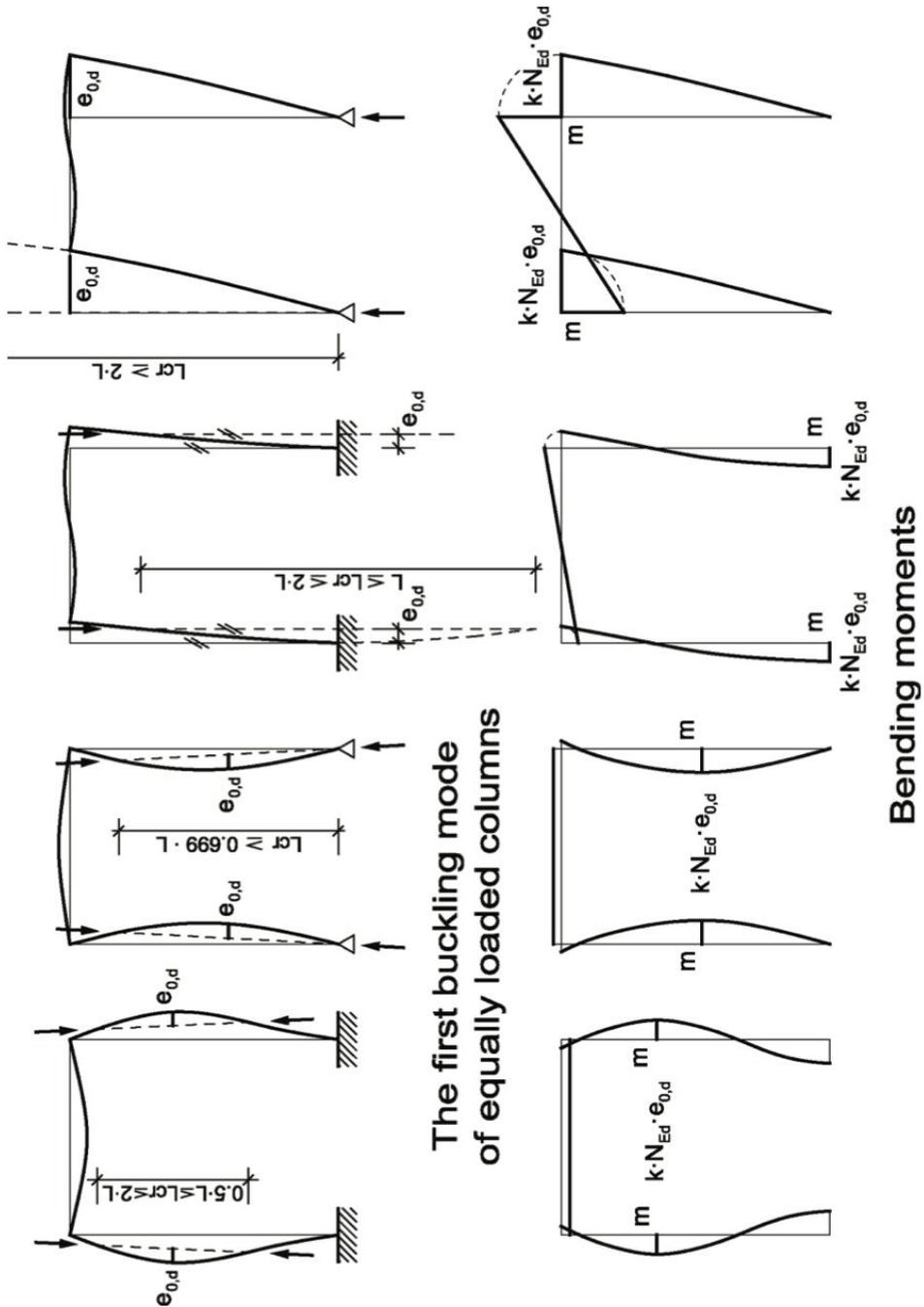


Fig. 3. Shape of elastic buckling mode applied as “ugli” imperfection. Bending moments due to “ugli” imperfection and location of “m”.

Σχήμα 2-1.β: Κρίσιμες διατομές συνήθων μελών και ροπές λόγω ατέλειας σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή λυγισμού υπολογισμένες από τους Baláz I., Koleková Y

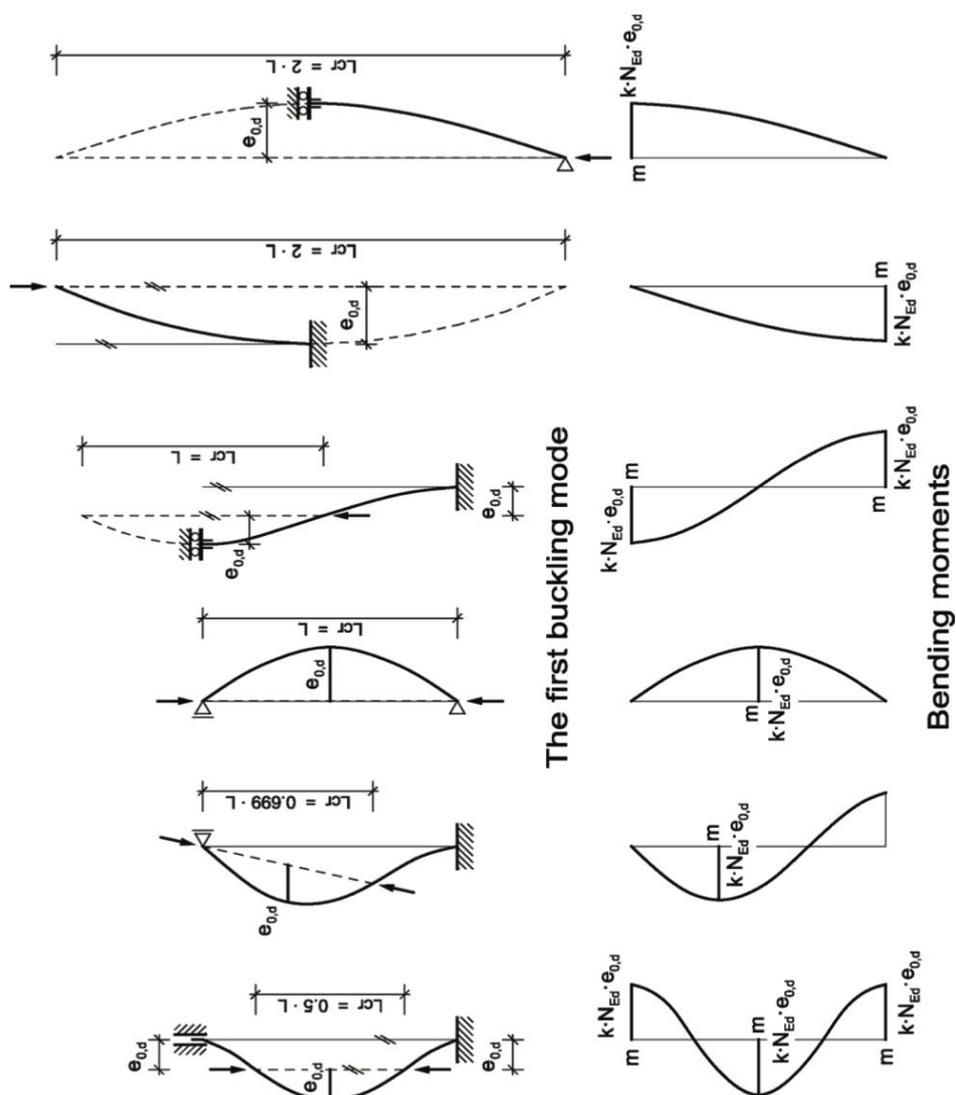


Fig. 1. Shape of elastic buckling mode applied as "ugli" imperfection. Bending moments due to "ugli" imperfection and location of "m".

Σχήμα 2-1.γ: Κρίσιμες διατομές συνήθων μελών και ροπές λόγω ατέλειας σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή λυγισμού υπολογισμένες από τους Βαλάζ Ι., Κολεκονά Υ.

## 2.2.2 Μέλη πλαισίων με ομοιόμορφη διατομή

Πιο συγκεκριμένα η διαδικασία που ακολουθείται για τον υπολογισμό της μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας σε πλαίσια με ενιαία διατομή είναι η ακόλουθη

- Εκτέλεση γραμμικής ανάλυσης λυγισμού από την οποία θα προκύψουν οι ιδιομορφές
- Εκλογή αυθαίρετης τιμής για το μέγιστο πλάτος της ιδιομορφής

- Εκτέλεση ανάλυσης δευτέρας τάξης με ατέλεια σύμφωνα με το σχήμα της κυρίαρχης ιδιομορφής και υπολογισμός του διαγράμματος ροπών  $M_{ncr}^{II}(x)$ .
- Εύρεση κρίσιμης διατομής από την θέση μέγιστης ροπής.
- Υπολογισμός ανηγμένης λυγηρότητας κρίσιμης διατομής και μέγιστου πλάτους της μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας
- Εύρεση ροπών που προκύπτουν από την αυτή την αρχική ατέλεια
- Υπολογισμός συντελεστή αξιοποίησης και έλεγχος ότι η κρίσιμη διατομή έχει ληφθεί σωστά

Σε περίπτωση που η θέση της κρίσιμης δεν είναι αναμφίβολα γνωστή εκ των προτέρων τότε τόσο ο  $U_{m, \eta}^{II_{init, m}}$  όσο και η  $\sigma_{\eta}^{II_{init, m}}$  πρέπει να υπολογιστούν σε όλες τις υποψήφιες πιθανές θέσεις. Το σημείο όπου τόσο ο συνολικός συντελεστής αξιοποίησης, όσο και το σύνολο των ορθών τάσεων λόγω θλίψης και ροπής δευτέρας τάξης εξαιτίας της μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας, γίνεται μέγιστο.

Αναλυτικά αριθμητικά παραδείγματα εφαρμογής της παραπάνω μεθόδου έχουν υπολογιστεί από τους Chladný Y., Štujberová M., (Frames with unique global and local imperfection in the shape of the elastic buckling mode – part 1)

### 2.2.3 Μέλη όπου η κρίσιμη διατομή δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή

Έχουμε ήδη αναφέρει την διαδικασία που ακολουθείται σε περίπτωση που σε ένα πλαίσιο η θέση της κρίσιμης διατομής δεν είναι ξεκάθαρη από πριν. Πράγματι, στις περισσότερες των φορών η αλλαγή της διατομής κατά μήκος του μέλους, η ύπαρξη διαξονικής κάμψης, ή πλευρικού λυγισμού, αλλά και διάφορες άλλες ανωμαλίες καθιστούν την εκ των προτέρων πρόβλεψη της κρίσιμης διατομής αδύνατη. Σε αυτή την περίπτωση η εκτέλεση μίας επαναληπτικής διαδικασίας είναι απαραίτητη για τον καθορισμό της.

Πιο συγκεκριμένα αυτή περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα

- Επιλογή μίας αρχικής θέσης της κρίσιμης διατομής με βάση το γνωστό διάγραμμα του  $U_n(x) = N_{ed}(x)/N_{rb}(x)$  και του εκτιμώμενου  $U_{m, \eta}^{II_{init, m}}$ , για την προσδοκώμενη κρίσιμη ανηγμένη λυγηρότητα. Η θέση της  $m$  κινείται από την θέση της  $|M_{ncr}^{II}|_{max}$ , προς υψηλότερες τιμές  $U_n$
- Ο συντελεστής αξιοποίησης  $U_{\eta}^{II_{init, m}}$  υπολογίζεται για επιλεγμένα σημεία της κατασκευής για την εκτιμώμενη θέση της κρίσιμης διατομής. Η επιλεγμένη θέση της κρίσιμης διατομής δεν είναι σωστή εάν ο συντελεστής αξιοποίησης  $U_{\eta}^{II_{init, m}}(x)$  εν φτάνει την μέγιστη τιμή του στη θέση  $m$
- Εάν η αρχική πρόβλεψη δεν είναι σωστή, τότε επιλέγεται ένα δεύτερο σημείο μεταξύ της αρχικής εκτίμησης και του σημείο με τον μέγιστο συντελεστή αξιοποίησης λόγω ροπής δευτέρας τάξης εξαιτίας της μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας.
- Επαναλαμβάνεται το βήμα 2 και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση

Οι Chladný Y., Štujberová M., (Frames with unique global and local imperfection in the shape of the elastic buckling mode – Part2) ανέπτυξαν την εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας για την εύρεση της συνολικής ατέλειας σε ένα τόξο γέφυρας, αλλά και στο άνω πέλμα μίας δικτυωτής γέφυρας άνω διάβασης.

## 2.3 Μέλη ευαίσθητα σε πλευρικό-στρεπτικό λυγισμό

Μέχρι στιγμής έχουμε αναφερθεί σε περιπτώσεις μελών όπου το κέντρο διάτμησης, ταυτίζεται με το κ.β. της διατομής. Σε περιπτώσεις όπου αυτό δεν συμβαίνει, όπως για παράδειγμα σε ανοιχτές διατομές με έναν, ή κανέναν άξονα συμμετρίας η κεντρική θλίψη έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ενός φαινομένου που ονομάζεται καμπτικός-στρεπτικός, ή καμπτικός-καμπτικός-στρεπτικός λυγισμός αντίστοιχα και που πρόκειται να αναλυθεί εκτενώς στο κεφάλαιο 4.

Η φιλοσοφία της διαδικασίας δεν αλλάζει συγκριτικά με αυτήν που έχει ήδη αναφερθεί προηγουμένως για διατομές διπλής συμμετρίας, δηλαδή την προσπάθεια εξεύρεσης της κατάλληλης μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας, η εφαρμογή της οποίας θα έχει ως αποτέλεσμα η καμπτική, ή στην προκειμένη καμπτική-στρεπτική αντοχή του μέλους, να είναι ίση με αυτή του ισοδύναμου, υπολογιζόμενη κατά την παράγραφο 6.3 του EN1993-1-1.

Αν επικεντρωθούμε στην πορεία υπολογισμού του πλάτους της ατέλειας και θεωρώντας διατομή κατηγορίας 3, όπως αυτή που πρόκειται να αναλύσουμε στην συνέχεια, πρώτο βήμα συνιστά ο υπολογισμός των τάσεων Von Mises στις υποψήφιες κρίσιμες διατομές. Στην παρούσα φάση δεν θα εμβαθύνουμε στον υπολογισμό της κρίσιμης διατομής, καθώς η διαδικασία δεν διαφέρει σε τίποτα από αυτή που περιεγράφηκε σε προηγούμενη παράγραφο. Έπειτα θα ορίσουμε συνάρτηση  $\Gamma(\chi, \gamma, z)$  ή οποία θα αφορά το μέγεθος με το οποίο θα πρέπει να έχει η ατέλεια προκειμένου η τάση στο τυχαίο σημείο να γίνει ίση με το όριο διαρροής. (A. Agüero, L.Pallares, F.J. Pallares, 2015)

Συνεπώς το σύνολο των ορθών τάσεων θα δίνεται από την σχέση

$$\sigma = \frac{N}{A} \alpha_b + \frac{ec}{\psi-1} \left( \frac{Mz, \eta}{Iz} \gamma + \frac{My, \eta}{Iy} z + \frac{B\eta}{Iw} \omega(\gamma, z) \right) \Rightarrow (2.16)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \alpha_b + \frac{ec}{\psi-1} \left( \frac{Mz, \eta}{Wz} \gamma + \frac{My, \eta}{Wy} z + \frac{B\eta}{W\omega} \right) \Rightarrow (2.17)$$

όπου  $\psi = \frac{\alpha cr}{\alpha b}$  και με  $W_y, W_z, W_w$  συμβολίζονται οι αντίστοιχες ροπές αντίστασης

Ενώ οι διατμητικές τάσεις του ατελούς φορέα στην περίπτωση ανοιχτών διατομών εξαιτίας μίας στρεπτικής ροής St.Venant δίνονται από την σχέση

$$\tau = \frac{\xi ec}{\psi-1} \frac{Tt, \eta t}{It}, (2.18)$$

με το  $\xi$  να παίρνει τιμές από 0 έως 1

Επομένως για να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης  $\Gamma(\chi, \gamma, z)$ , θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο αστοχίας von Mises,  $\sigma^2 + 3\tau^2 = \left(\frac{fy}{\gamma Mo}\right)^2$  (2.19)

Επομένως εξισώνοντας το σύνολο των ορθών τάσεων με  $\sigma$  και των διατμητικών με  $\tau$ , προκύπτει

$$\left( \frac{N}{A} \alpha_b + \frac{ec}{\psi-1} \left( \frac{Mz, \eta}{Wz} \gamma + \frac{My, \eta}{Wy} z + \frac{B\eta}{W\omega} \right) \right)^2 + 3 \left( \frac{\xi \Gamma(\chi, \gamma, z) Tt, \eta t}{\psi-1 It} \right)^2 = \left( \frac{fy}{\gamma Mo} \right)^2 (2.20)$$

Η οποία μπορεί να γραφεί και στην μορφή εξίσωσης δευτέρου βαθμού (A. Agüero, L.Pallares, F.J. Pallares, 2015)

$$a \Gamma(\chi, \gamma, z)^2 + b \Gamma(\chi, \gamma, z) + c = 0 (2.21)$$

$$\text{με } a = \left( \frac{\gamma \mu o}{fy(\psi-1)} \right)^2 [\omega_1^2 + 3\omega_2^2], (2.22)$$

$$\omega_1 = \left( \frac{Mz, \eta}{Wz} \gamma + \frac{My, \eta}{Wy} z + \frac{B\eta}{W\omega} \right) (2.23)$$

$$\omega_2 = \frac{N \alpha b \gamma Mo}{A fy} (2.24)$$

**Table 1**  
Definition of  $\omega_1$  as a function of the stress resultants and the displacements of the buckling mode.

Buckling mode	$\omega_1$ for $I_w \neq 0$	$\omega_1$ for $I_w \approx 0$
Flexural torsional buckling. Bending about y and z axis coupled with torsions	$\frac{M_{yz}}{W_y} + \frac{M_{zy}}{W_z} + \frac{B\eta}{W_\omega} = E \left( \frac{I_y}{W_y} \frac{d^2 \eta_y}{dx^2} + \frac{I_z}{W_z} \frac{d^2 \eta_z}{dx^2} + \frac{I_w}{W_\omega} \frac{d^2 \eta_\omega}{dx^2} \right)$	$\frac{M_{yz}}{W_y} + \frac{M_{zy}}{W_z} = E \left( \frac{I_y}{W_y} \frac{d^2 \eta_y}{dx^2} + \frac{I_z}{W_z} \frac{d^2 \eta_z}{dx^2} \right)$
Flexural torsional buckling. Bending about z axis coupled with torsions	$\frac{M_{yz}}{W_y} + \frac{B\eta}{W_\omega} = E \left( \frac{I_y}{W_y} \frac{d^2 \eta_y}{dx^2} + \frac{I_w}{W_\omega} \frac{d^2 \eta_\omega}{dx^2} \right)$	$\frac{M_{yz}}{W_y} = \frac{E I_y}{W_y} \frac{d^2 \eta_y}{dx^2}$
Torsional buckling	$\frac{B\eta}{W_\omega} = \frac{E I_w}{W_\omega} \frac{d^2 \eta_\omega}{dx^2}$	0
Flexural buckling	$\frac{M_{yz}}{W_z} = \frac{E I_z}{W_z} \frac{d^2 \eta_z}{dx^2}$	

Πίνακας 2-2 Ορισμός συνάρτησης  $\omega_1$  ανάλογα την μορφή λυγισμού και την πιθανή, ή όχι, αμέλεια των διατμητικών τάσεων από A. Agüero, L. Pallares, F.J. Pallares, 2015

Στην περίπτωση όπου η σταθερά στρέψης  $I_\omega$  δεν είναι μηδέν και οι διατμητικές τάσεις μπορούν να αμεληθούν τότε η συνάρτηση  $\Gamma$  αποκτά απλούστερη μορφή,

$$\Gamma(x,y,z) = (1 - \omega_2) \frac{(\psi-1) \frac{fy}{\gamma M_0}}{\omega_1} \quad (2.25)$$

Αν αντικαταστήσουμε  $\psi = \frac{\gamma M_1}{\lambda^2 x}$  και εφαρμόσουμε την σχέση της παραγράφου 6.3.1.2 του EN1993-1-1 καταλήγουμε μετά από κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία στην σχέση για το μέγεθος της ατέλειας  $e_c$

$$e_c = \min \left| \left( \frac{a(\bar{\lambda} - 0.2)}{\bar{\lambda}^2} \frac{1-x}{1-x\bar{\lambda}^2} \frac{\gamma M_1}{\omega_1} \frac{fy}{\omega_1} \right) \right| \quad (2.26)$$

## 2.4 Αριθμητικές εφαρμογές

Ακολουθούν παραδείγματα υπολογισμού της μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας σε περιπτώσεις καμπτικού λυγισμού. Οι εφαρμογές αφορούν τα παραδείγματα που θα αναλυθούν στα επόμενα κεφάλαια της παρούσας διπλωματικής

### 2.4.1 Πρόβολος σταθερής διατομής

Η πρώτη αριθμητική εφαρμογή αφορά πρόβολο σταθερής διατομής CHS 508x10 και μήκους 8 μέτρων και ποιότητας χάλυβα S235. Η κρίσιμη διατομή έχουμε δείξει πως βρίσκεται στην στήριξη.

Τα αδρανειακά χαρακτηριστικά υπολογίζονται παρακάτω, όπως και το κρίσιμο φορτίο ελαστικού λυγισμού

$$W_{pl,y} = 2480 * 10^3 \text{ mm}^3$$

$$A = 15600 \text{ mm}^2$$

$$f_y = 235 \text{ Mpa}$$

$$\gamma_{M1} = 1.0$$

$$a = 0.21 \text{ (καμπύλη λυγισμού } a)$$

Κρίσιμη διατομή αυτή της στήριξης όπως αυτή προκύπτει από το παραπάνω σχήμα,

$$N_{ed} = 1 \text{ kN}$$

$$N_{rk} = 3666 \text{ kN}$$

$$M_{rk} = M_{pl,y,rk} = 582.8 \text{ kNm}$$

$$a_{cr} = 3928.26 \text{ kN}$$

$$k = \frac{a_{cr}}{a_{cr}-1} = 1.0002 = 1$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{a_{ult}}{a_{cr}}} = \sqrt{\frac{A * f_y / N_{ed}}{N_{cr}}} = 0.97$$

$$\Phi = 1.028$$

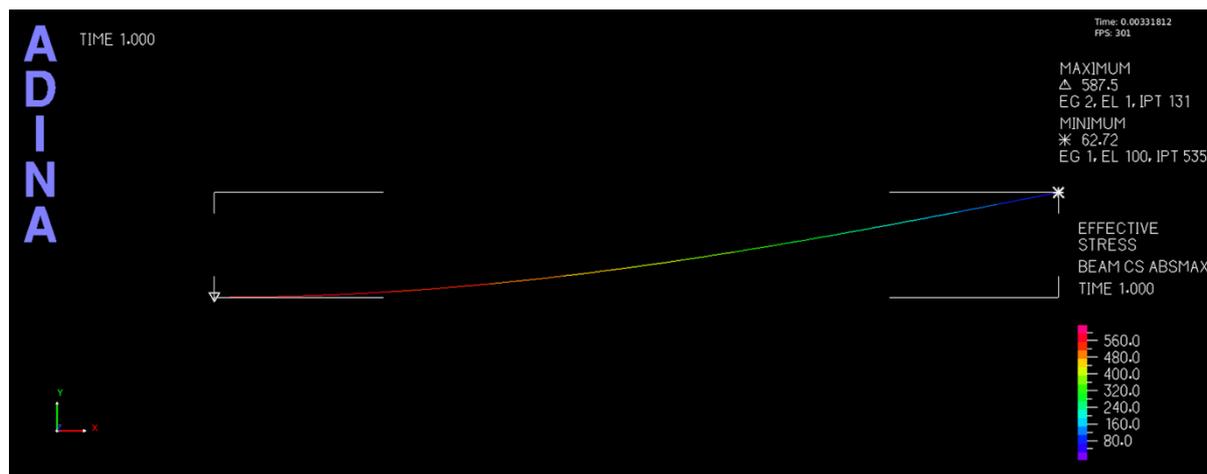
$$\chi = 0.724$$

$$e_{o,d} = e_{o,k} * \frac{1 - \frac{x m * \bar{\lambda} m^2}{\gamma M_1}}{1 - x m * \bar{\lambda} m^2} = e_{o,k} = a_m * (\bar{\lambda} - 0.2) * \frac{M_{rk}}{N_{rk}} = 0.0257 \text{ m}$$

$$U_{M,\eta,init,m,m} = \frac{a(\bar{\lambda}m - \bar{\lambda}o)}{\bar{\lambda}m^2(\alpha cr - 1)} \frac{1 - x\bar{\lambda}m^2}{\gamma M1} \gamma M1$$

$$U_{M,\eta,init,m,m} = 4.38 * 10^{-5}$$

Θεωρούμε πως  $|\eta_{cr}|_{max} = 1000$  mm ως ελεύθερη παράμετρος και με την βοήθεια κατάλληλου προσομοιώματος πεπερασμένων στοιχείων θα υπολογίσουμε την  $\sigma_{II}^{init,m}$  στην στήριξη που αποτελεί την κρίσιμη διατομή, αλλά και θα ελέγξουμε επιπλέον πως είναι η μεγαλύτερη που εμφανίζεται στο μέλος. Για τις αναλύσεις χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων Adina.



Σχήμα 2-2: Διάγραμμα τάσεων ανάλυσης δεύτερης τάξης προβόλου μεταβλητής διατομής με ατέλεια σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή και πλάτος 1 m

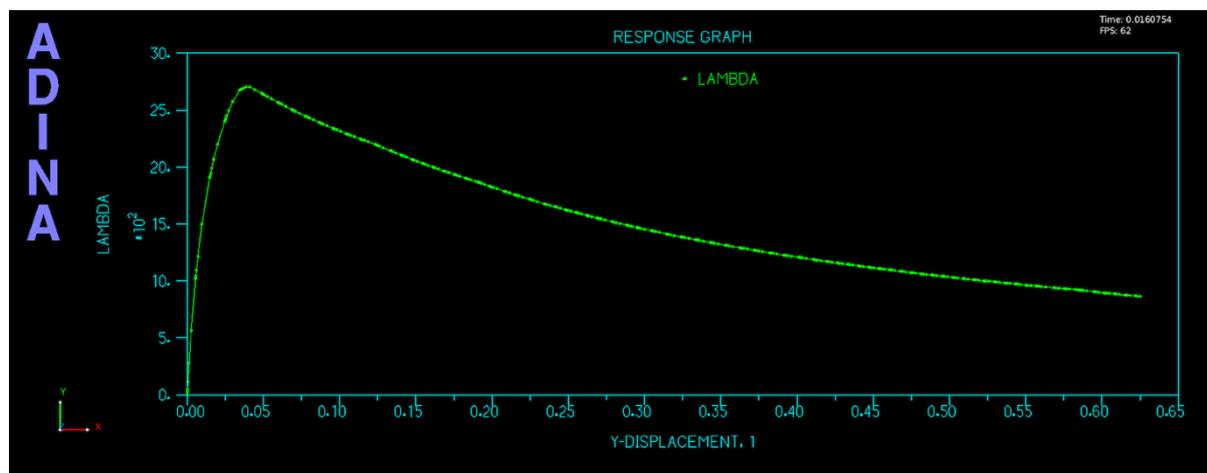
Στην κρίσιμη διατομή  $|\sigma_{II}^{cr}| = 587.5$  kN/m<sup>2</sup>

$$\eta_{init,max} = U_{M,\eta,init,m,m} \frac{f_{yk} * |\eta_{cr}|_{max}}{\gamma M1 * |\sigma_{II}^{cr}|_m} = \frac{\sigma_{II}^{init,m,m}}{|\sigma_{II}^{cr}|_m} |\eta_{cr}|_{max}$$

Από το μεσαίο μέλος της εξίσωσης υπολογίζουμε

$$\eta_{init,max} = 0.118 * \frac{235 \text{ Mpa} * 1000 * 1 \text{ m}}{1 * 587.5 \text{ KN/m}^2} = 0.0175 \text{ m}$$

Στην συνέχεια φαίνεται ο δρόμος ισορροπίας για ανάλυση GMNIA σύμφωνα με την παραπάνω ατέλεια



Διάγραμμα 2-1: Δρόμος ισορροπίας ανάλυσης μη-γραμμικότητας γεωμετρίας και υλικού με αρχική ατέλεια σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή και πλάτος 0.0175 m

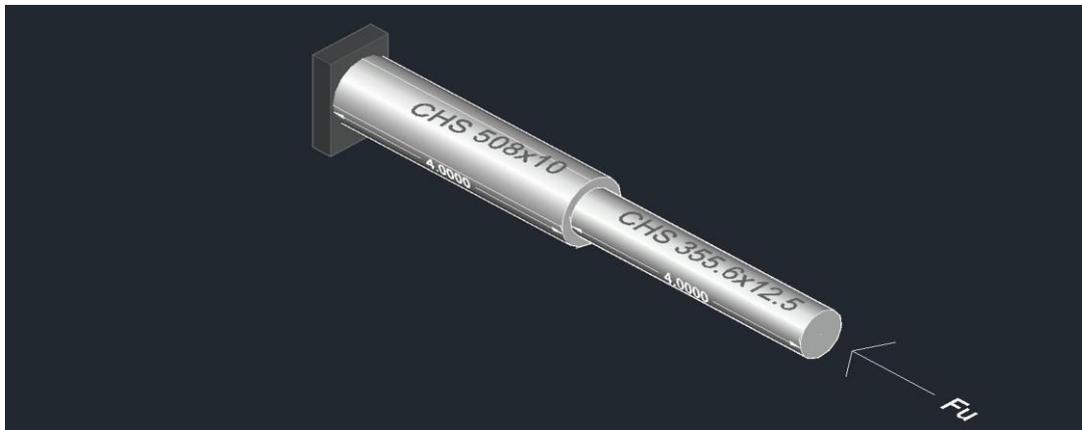
Από όπου η αντοχή του μέλους προκύπτει  $N_{b,rd} = 2700 \text{ kN}$

Με εφαρμογή των σχέσεων του Ευρωκώδικα για μέλη υπό θλίψη προκύπτει για τον μειωτικό συντελεστή που υπολογίσαμε προκύπτει  $N_{b,rd} = 2620 \text{ kN}$

Στα ίδια αποτελέσματα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε εισάγοντας σε φύλλο Excell το βέλος της ιδιομορφής, θεωρώντας μέγιστη εκτροπή  $|η_{cr}|_{\max} = 1000 \text{ mm}$  κατά την εμφάνιση της πρώτης ιδιομορφής λυγισμού. Στην συνέχεια παραγωγίζουμε δύο φορές με την βοήθεια του Excell και διαιρούμε με τον φορτιστικό συντελεστή  $\alpha_{cr}$  για να πάρουμε την κατανομή των ροπών δευτέρας τάξης  $M_{η^{II}}(\chi)$ , αλλά και των πρόσθετων παραμορφώσεων  $\eta(\chi)$ . Από την μέγιστη ροπή και την μέγιστη εκτροπή θα υπολογίσουμε το πλάτος της ατέλειας, ενώ από την κατανομή των παραμορφώσεων θα προκύψει η κατανομή της ίδιας της ατέλειας  $\eta_{init}(\chi)$

## 2.4.2 Πρόβολος μεταβλητής διατομής

Μελετάται πρόβολος 8 μέτρων, χαλύβδινης μέλους μεταβλητής διατομής. Θα γίνει ανάλυση της περίπτωσης όπου και οι δύο τύποι διατομών δέχονται την ίδια αξονική θλιπτική δύναμη.

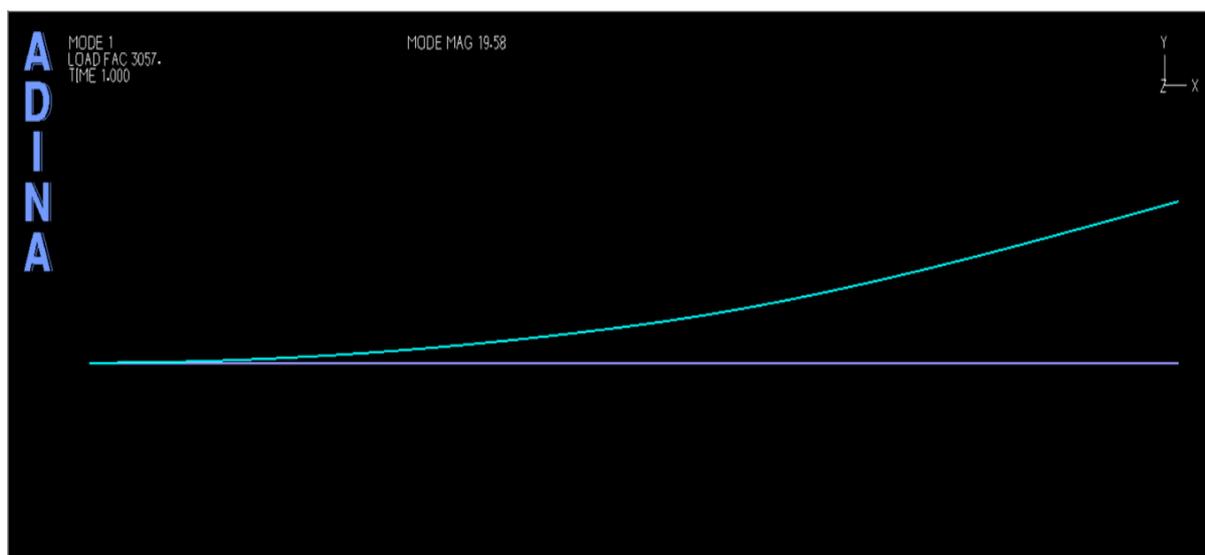


Σχήμα 2-3: Μοντέλο προβόλου μεταβλητής διατομής υπό σταθερή θλιπτική δύναμη στην άκρη του

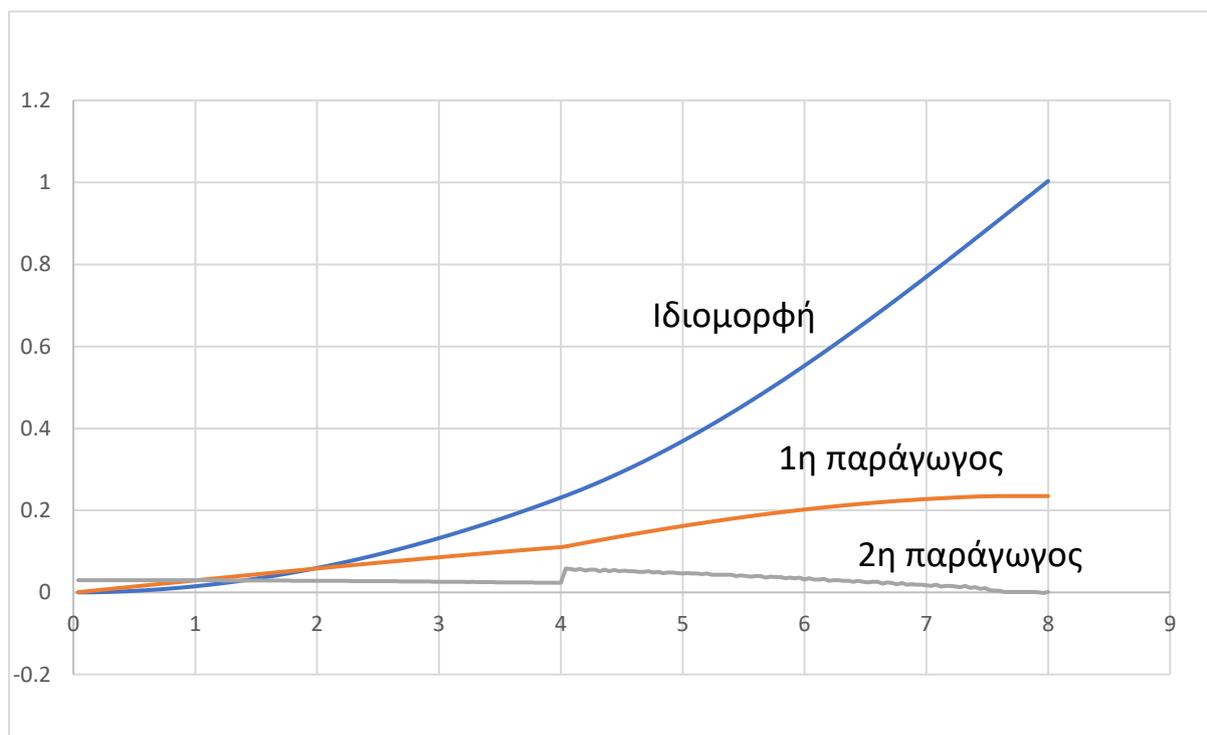
Η περίπτωση αυτή με μία πρώτη ματιά υπάγεται στην κατηγορία αυτών όπου η αναλυτική μορφή της ιδιομορφής είναι δυνατόν να εξαχθεί, και συνεπώς να παραγωγιστεί αριθμητικά, με την βοήθεια ενός λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων.

Η μεταβολή όμως της διατομής κατά μήκος του προβόλου δημιουργεί αμφιβολίες σχετικά με την θέση της κρίσιμης διατομής, επομένως θα εφαρμοστεί μία υβριδική μέθοδος, που θα περιλαμβάνει τόσο την περίπτωση όπου η παραγωγή της ιδιομορφής είναι εφικτή, όσο και αυτής όπου η κρίσιμη διατομή δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή με βεβαιότητα

Με την βοήθεια του λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων Adina πραγματοποιείται η γραμμική ανάλυση λυγισμού και εξάγονται οι ιδιομορφές, οι οποίες στην συνέχεια παραγωγίζονται σε φύλλο Excel



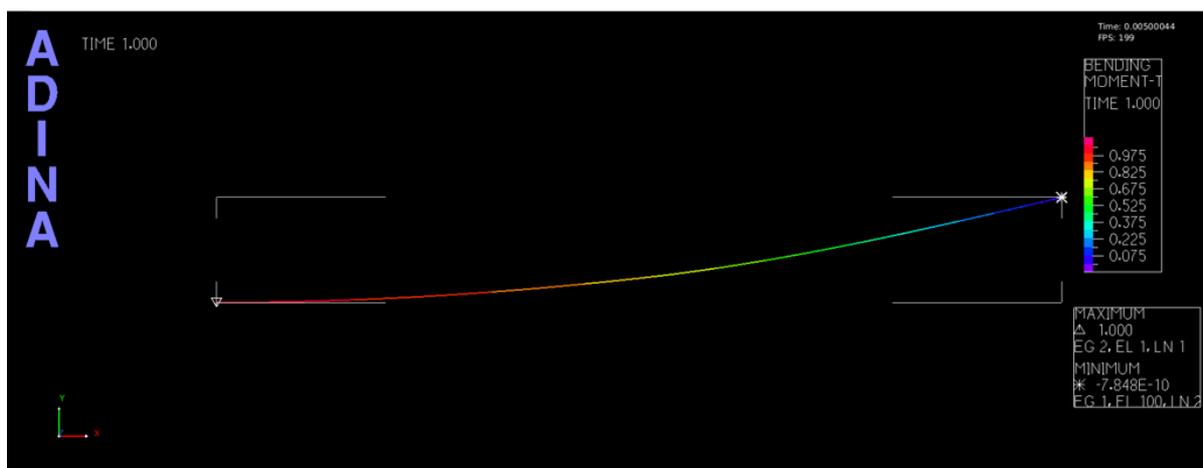
Σχήμα 2-4: Πρώτη ιδιομορφή λυγισμού προβόλου μεταβλητής διατομής



Διάγραμμα 2-2: Ιδιομορφές λυγισμού προβόλου μεταβλητής διατομής

Παρατηρούμε όμως πως μετά το σημείο αλλαγής της κλίσης η απλή παραγωγή δεν δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται ροπή μεγαλύτερη του 1 kNm, για την ακρίβεια 1.96 kNm, στο σημείο αλλαγής της διατομής (15η στήλη φύλλου Excel)

Node	0.00000E+00			1st differentiating	2nd differentiating	Scale Factor 1	Stress	Momenta(M)krc(x)	hntit(k)	Mh,Initial	U		
Node 1													
Node 2		0.11	0.04	3.54736E-05	0.000886815	0.03	0.039851528	12325,65	3056,76	0,99992149	4,9031E-07	0,01382	2,3715E-05
Node 3		0.42	0.08	0.000160188	0.002653268	0.04433261	0.026955383	18215,79	4517,52	1,47776132	9,9511E-06	0,02043	3,5046E-05
Node 4		0.95	0.12	0.00031921	0.004432321	0.04432409	0.026972826	18210,77	4516,27	1,47775354	4,4122E-06	0,02042	3,5038E-05
Node 5		1.68	0.16	0.00056744	0.006205655	0.04431059	0.026981044	18205,22	4514,89	1,47690357	7,8432E-06	0,02041	3,5027E-05
Node 6		2.63	0.2	0.0008653	0.007977403	0.04429371	0.026991323	18198,29	4513,17	1,47634112	1,2254E-05	0,02041	3,5014E-05
Node 7		3.78	0.24	0.00127648	0.009748519	0.04427789	0.027000967	18191,79	4511,56	1,47581381	1,7644E-05	0,0204	3,5002E-05
Node 8		5.15	0.28	0.00173723	0.011518959	0.04426102	0.027011261	18184,85	4509,84	1,47525136	2,4012E-05	0,02039	3,4988E-05
Node 9		6.72	0.32	0.00226878	0.013288556	0.04423992	0.027020414	18176,19	4507,69	1,47454829	3,1359E-05	0,02038	3,4972E-05
Node 10		8.51	0.36	0.00282107	0.015057309	0.04421883	0.027037031	18167,52	4505,54	1,47384522	3,9684E-05	0,02037	3,4955E-05
Node 11		10.50	0.4	0.00354405	0.016824628	0.04418297	0.027058975	18152,79	4501,89	1,4727261	4,8987E-05	0,02036	3,4927E-05
Node 12		12.70	0.44	0.00428774	0.018592031	0.04418508	0.027057683	18153,65	4502,11	1,47272031	5,9266E-05	0,02036	3,4928E-05
Node 13		15.12	0.48	0.00510202	0.020357156	0.04412812	0.027092605	18130,25	4496,3	1,47082202	7,0521E-05	0,02039	3,4883E-05
Node 14		17.74	0.52	0.00598688	0.022121438	0.04410703	0.027105561	18121,59	4494,15	1,4701895	8,2752E-05	0,02032	3,4867E-05
Node 15		20.57	0.56	0.00694227	0.023888875	0.04408594	0.027118531	18112,92	4492	1,46945188	9,5957E-05	0,02031	3,485E-05
Node 16		23.61	0.6	0.00796814	0.025646625	0.04404375	0.027144506	18095,59	4487,71	1,46800974	0,00011014	0,02029	3,4817E-05
Node 17		26.86	0.64	0.00906441	0.027406688	0.04400156	0.027170532	18078,25	4483,41	1,46660306	0,00012529	0,02027	3,4783E-05
Node 18		30.31	0.68	0.01023108	0.02916675	0.04400156	0.027170532	18078,25	4483,41	1,46660306	0,00014142	0,02027	3,4783E-05
Node 19		33.98	0.72	0.01146805	0.030924281	0.04393828	0.027209664	18052,26	4476,96	1,46449439	0,00015851	0,02024	3,4733E-05
Node 20		37.85	0.76	0.01277529	0.032680969	0.04391719	0.027222733	18043,59	4474,81	1,46379132	0,00017658	0,02023	3,4717E-05
Node 21		41.93	0.8	0.01415269	0.034435125	0.04385391	0.027262015	18017,59	4468,36	1,46168211	0,00019562	0,02022	3,4666E-05
Node 22		46.22	0.84	0.0156002	0.036187594	0.04381172	0.027288266	18000,26	4464,06	1,46027597	0,00021563	0,02018	3,4633E-05
Node 23		50.72	0.88	0.01711776	0.037939219	0.04379063	0.027301411	17991,59	4461,91	1,4595729	0,0002366	0,02017	3,4616E-05
Node 24		55.42	0.92	0.0187053	0.039688312	0.04372734	0.027340921	17965,59	4455,47	1,45746369	0,00025855	0,02015	3,4566E-05
Node 25		60.33	0.96	0.02036269	0.041434875	0.04366406	0.027380545	17939,59	4449,02	1,45535448	0,00028146	0,02012	3,4516E-05
Node 26		65.45	1	0.02208992	0.043180594	0.04362497	0.027393779	17930,92	4446,87	1,45465411	0,00030533	0,02011	3,45E-05
Node 27		70.78	1.04	0.0238683	0.044922937	0.04355859	0.027446842	17896,26	4438,27	1,45183913	0,00033017	0,02007	3,4433E-05
Node 28		76.31	1.08	0.02575338	0.046663594	0.04351641	0.027473451	17878,93	4433,97	1,45043299	0,00035597	0,02005	3,44E-05
Node 29		82.04	1.12	0.02768948	0.048402563	0.04347422	0.027500111	17861,59	4429,68	1,44902866	0,00038273	0,02003	3,4366E-05
Node 30		87.99	1.16	0.02969497	0.050137132	0.04336875	0.027566989	17818,26	4418,93	1,44551151	0,00041045	0,01998	3,4283E-05
Node 31		94.13	1.2	0.03176985	0.051872063	0.04336875	0.027566989	17818,26	4418,93	1,44551151	0,00043913	0,01998	3,4283E-05
Node 32		100.49	1.24	0.03391403	0.053604281	0.04330547	0.027607272	17792,26	4412,48	1,44340203	0,00046877	0,01995	3,4233E-05
Node 33		107.04	1.28	0.03612735	0.05533125	0.04322109	0.027661166	17757,6	4403,88	1,44059002	0,00049396	0,01991	3,4166E-05
Node 34		113.81	1.32	0.03840953	0.057054375	0.04303125	0.027783201	17679,6	4384,54	1,43426239	0,0005309	0,01982	3,4016E-05
Node 35		120.77	1.36	0.04076055	0.058775625	0.04303125	0.027783201	17679,6	4384,54	1,43426239	0,00056564	0,01982	3,4016E-05
Node 36		127.94	1.4	0.04318076	0.060505312	0.04324219	0.02784673	17666,26	4406,03	1,44129309	0,00059685	0,01992	3,4183E-05
Node 37		135.32	1.44	0.04566949	0.062218125	0.04282031	0.027920064	17592,93	4363,05	1,42723169	0,00063125	0,01973	3,3849E-05
Node 38		142.89	1.48	0.04822673	0.063930937	0.04282031	0.027920064	17592,93	4363,05	1,42723169	0,00066666	0,01973	3,3849E-05
Node 39		150.68	1.52	0.05085281	0.065652188	0.04303125	0.027783201	17679,6	4384,54	1,43426239	0,0007029	0,01982	3,4016E-05
Node 40		158.66	1.56	0.05354674	0.067348125	0.04239844	0.028197875	17419,6	4320,06	1,4131703	0,00074013	0,01953	3,3516E-05
Node 41		166.84	1.6	0.05630918	0.069060938	0.04282031	0.027920064	17592,93	4363,05	1,42723169	0,00077832	0,01973	3,3849E-05
Node 42		175.23	1.64	0.05913979	0.070765312	0.04260937	0.028058282	17506,27	4341,55	1,42020099	0,00081744	0,01963	3,3683E-05
Node 43		183.82	1.68	0.06203824	0.07246125	0.04239844	0.028197875	17419,6	4320,06	1,4131703	0,0008575	0,01953	3,3516E-05
Node 44		192.61	1.72	0.06500453	0.074157187	0.04239844	0.028197875	17419,6	4320,06	1,4131703	0,0008985	0,01953	3,3516E-05
Node 59		348.25	2.32	0.11753336	0.099115313	0.04071094	0.029366699	16726,29	4148,12	1,35692471	0,00162457	0,01876	3,2182E-05
Node 60		360.19	2.36	0.12156345	0.100752187	0.04092187	0.029215324	16812,95	4169,61	1,36395541	0,00168027	0,01885	3,2349E-05
Node 61		372.32	2.4	0.12565834	0.102372188	0.04050000	0.029519651	16639,62	4126,63	1,34898401	0,00173687	0,01866	3,2015E-05
Node 62		384.65	2.44	0.12981803	0.103992187	0.04050000	0.029519651	16639,62	4126,63	1,34898401	0,00179437	0,01866	3,2015E-05
Node 63		397.16	2.48	0.13404251	0.105612188	0.04050000	0.029519651	16639,62	4126,63	1,34898401	0,00185276	0,01866	3,2015E-05
Node 64		409.87	2.52	0.13831113	0.107215313	0.04007813	0.029830384	16466,29	4083,64	1,33583262	0,00191204	0,01846	3,1682E-05
Node 65		422.77	2.56	0.14268386	0.108818438	0.04007813	0.029830384	16466,29	4083,64	1,33583262	0,00197272	0,01846	3,1682E-05
Node 66		435.85	2.6	0.14710073	0.110421563	0.04007813	0.029830384	16466,29	4083,64	1,33583262	0,00203325	0,01846	3,1682E-05
Node 67		449.13	2.64	0.15158171	0.112024688	0.04007813	0.029830384	16466,29	4083,64	1,33583262	0,00209519	0,01846	3,1682E-05
Node 68		462.60	2.68	0.15612581	0.1136205	0.03944531	0.030308946	16206,3	4019,16	1,31474052	0,002158	0,01817	3,1181E-05
Node 69		476.25	2.72	0.16073336	0.115218875	0.03965625	0.030147728	16292,96	4040,65	1,32177122	0,00222168	0,01827	3,1348E-05
Node 70		490.09	2.76	0.16540403	0.116766563	0.03944531	0.030308946	16206,3	4019,16	1,31474052	0,00228624	0,01817	3,1181E-05
Node 71		504.11	2.8	0.17013746	0.118335938	0.03923437	0.030471897	16119,63	3997,67	1,30770983	0,00235167	0,01808	3,1015E-05
Node 72		518.32	2.84	0.17493368	0.119905313	0.03923438	0.030471897	16119,63	3997,67	1,30770983	0,00241796	0,01808	3,1015E-05
Node 73		532.72	2.88	0.17979233	0.12146625	0.03902344	0.030636661	16032,97	3976,18	1,30067913	0,00248512	0,01798	3,0848E-05
Node 74		547.30	2.92	0.18471341	0.123027188	0.03902344	0.030636661	16032,97	3976,18	1,30067913	0,00255314	0,01798	3,0848E-05
Node 75		562.06	2.96	0.18969626	0.12457125	0.03860156	0.030971437	15859,64	3933,19	1,28661773	0,00262201	0,01778	3,0515E-05
Node 76		577.01	3	0.18474074	0.126168875	0.03839063	0.031146609	15772,97	3911,7	1,2795703	0,00269174	0,01769	3,0348E-05
Node 77		592.14	3.04	0.19848558	0.127650938	0.03860156	0.030971437	15859,64	3933,19	1,28661773	0,00276231	0,01778	3,0515E-05
Node 78		607.45	3.08	0.20501404	0.129186563	0.03839063	0.031146609	15772,97	3911,7	1,2795703	0,00283374	0,01769	3,0348E-05
Node 79		622.94	3.12	0.21024225	0.130705313	0.03796875	0.031487627	15599,64	3868,71	1,26552564	0,002906	0,01749	3,0014E-05
Node 80		638.61	3.16	0.21553121	0.132224063	0.03796875	0.031487627	15599,64	3868,71	1,26552564	0,00297911	0,01749	3,0014E-05
Node 81		654.46	3.2	0.22080903	0.133742813	0.03796875	0.031487627	15599,64	3868,71	1,26552564	0,00305305	0,01749	3,0014E-05
Node 82		670.49	3.24	0.22629038	0.13523625	0.03733594	0.032021316	15339,65	3804,23	1,24443354	0,00312782	0,0172	2,9514E-05



Σχήμα 2-5: Διάγραμμα τάσεων προβόλου μεταβλητής διατομής υπό θλίψη εξαιτίας της επίδρασης αρχικής ατέλειας σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή και πλάτος 1 m.

Η αλλαγή της διατομής στην μέση του προβόλου, δεν μας επιτρέπει να θεωρήσουμε με βεβαιότητα εκ των προτέρων το σημείο εύρεσης της κρίσιμης διατομής, καθώς αυτό μπορεί να μην ταυτίζεται με το σημείο μέγιστης ροπής δευτέρας τάξης.

Παρόλα αυτά θεωρούμε ως αρχική υπόθεση πως η κρίσιμη διατομή βρίσκεται στην στήριξη, δηλαδή στο σημείο μέγιστης ροπής.

Από τα χαρακτηριστικά αυτής της διατομής υπολογίζουμε

$$M_{rk} = M_{pl,y,rk} = 582.8 \text{ kNm}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{a_{ult}}{a_{cr}}} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = 1.02$$

$$|M_{\eta_{cr}}^{II}|_{\max} = 1 \text{ kNm}$$

$$\eta_{init,\max} = \frac{\alpha \cdot (\lambda m - \lambda_0) \cdot |\eta_{II}|_{\max} \cdot M_{rk}}{(\lambda m^2) \cdot |M_{\eta_{II}}|_{\max}} = \frac{0.21 \cdot (1.02 - 0.2) \cdot \left(\frac{1000}{3057}\right) \cdot 582.8}{(1.02^2) \cdot 1} = 30.78 \text{ mm}$$

Η κατανομή της αρχικής ατέλειας δίνεται από την σχέση

$$\eta_{init}(x) = \eta_{init,\max} \cdot \frac{\eta_{cr}(x)}{\eta_{cr,\max}}$$

Ενώ οι ροπές λόγω της ατέλειας αυτής είναι

$$M_{\eta_{init},m}^{II} = \eta_{init,\max} \cdot \frac{M_{\eta_{cr}}(x)}{|\eta_{cr}|_{\max}}$$

Οι οποίες θα μας δώσουν τον συντελεστή αξιοποίησης  $U_{m_{init}}$

Στην περίπτωση μας θα υπολογίσουμε κατευθείαν τον συντελεστή αξιοποίησης, μέσα από την πρώτη σχέση του πίνακα συγκεντρωτικών αποτελεσμάτων. Στην διατομή που έχουμε υποθέσει αρχικά ως κρίσιμη

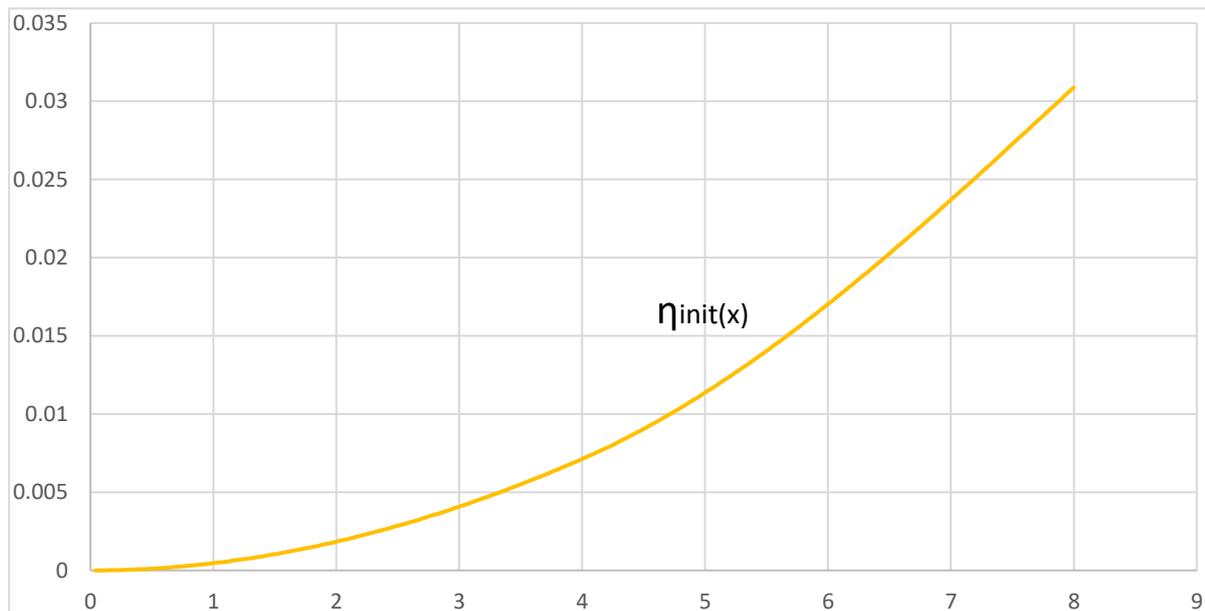
$$U_{m_{init}} = \frac{\alpha \cdot (\lambda m - \lambda_0) \cdot |\eta_{II}|_{\max} \cdot M_{rk} \cdot M_{hII}(x)}{(\lambda m^2) \cdot |M_{\eta_{II}}|_{\max} \cdot (a_{cr} - 1) \cdot M_{rd}(x)} = \frac{0.21 \cdot (1.02 - 0.2) \cdot \left(\frac{1000}{3057}\right) \cdot 582.8 \cdot 1}{(1.02^2) \cdot 1 \cdot (3057 - 1) \cdot 582.8} = 5.15 \cdot 10^{-5}$$

Αυτός ο συντελεστής αξιοποίησης είναι πράγματι ο μεγαλύτερος μεταξύ όλων των διατομών, συνεπώς η αρχική μας υπόθεση, για την κρίσιμη διατομή, είναι σωστή

$$U_{m_{init}} = \frac{\alpha \cdot (\lambda m - \lambda_0) \cdot |\eta_{II}|_{\max} \cdot M_{rk} \cdot \mu \cdot M_{hII}(x)}{(\lambda m^2) \cdot |M_{\eta_{II}}|_{\max} \cdot (a_{cr} - 1) \cdot M_{rd}(x)} = \frac{0.21 \cdot (1.02 - 0.2) \cdot \left(\frac{1000}{3057}\right) \cdot 582.8 \cdot 0.76}{(1.02^2) \cdot 1 \cdot (3057 - 1) \cdot 345.92} = 2.27 \cdot 10^{-5}$$

Ο συντελεστής λόγω αξονικής είναι αμελητέος με δεδομένη την φύση της φόρτισης.

Το σχήμα της μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας είναι το ακόλουθο



Διάγραμμα 2-4: Σχήμα ατέλειας UGLI προβόλου μεταβλητής διατομής

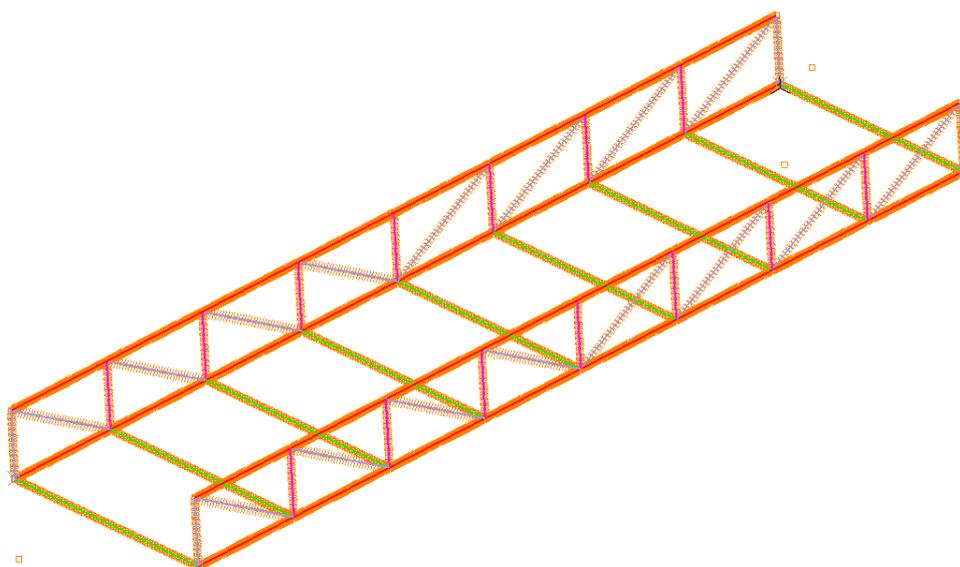
### 2.4.3 Άνω πέλμα δικτυωτής γέφυρας κάτω διάβασης χωρίς πλευρικές εξασφαλίσεις

Όπως πρόκειται να αναλυθεί εκτενέστερα στο κεφάλαιο της αντίστοιχης εφαρμογής, οι δικτυωτές γέφυρες κάτω διάβασης αντιμετωπίζουν προβλήματα καμπτικού λυγισμού του άνω θλιβόμενου πέλματος εκτός του επιπέδου της δικτύωσης.

Η πλευρική εξασφάλιση έναντι του συγκεκριμένου λυγισμού παρέχεται από την δυσκαμψία των ανοιχτών ημιπλαισίων ορθοστάτης-διαδοκίδα-ορθοστάτης.

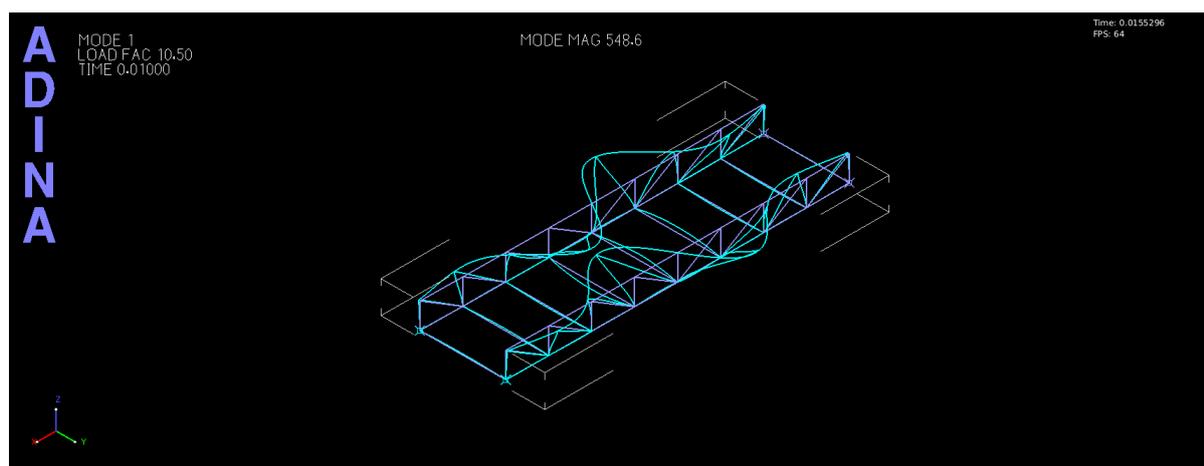
Η διαφορά της συγκεκριμένης περίπτωσης από τις προηγούμενες έγκειται στο γεγονός πως η κυρίαρχη ιδιομορφή βρίσκεται κοντά με τις υπόλοιπες, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να αγνοηθούν. Επομένως θα δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο της μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας σε κάθε ιδιομορφή ξεχωριστά

Το άνω πέλμα της δοκού του δικτύωματος αποτελείται από σταθερή διατομή CHS 273x10, ενώ τα μέλη συνίστανται από δομικό χάλυβα S355. Οι διαδοκίδες βρίσκονται ανά 3 μέτρα, το ύψος του δικτύωματος είναι 1.80 μέτρα, ενώ το συνολικό μήκος της γέφυρας είναι 24 μέτρα.



Σχήμα 2-6: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων δικτυωτής γέφυρας κάτω διάβασης

#### Επίλυση για την πρώτη ιδιομορφή



Σχήμα 2-7: Πρώτη ιδιομορφή λυγισμού

Για την πρώτη ιδιομορφή λυγισμού  $N_{cr} = 11239$  kN

Στην συγκεκριμένη περίπτωση όπου όλα τα μέλη έχουν την ίδια διατομή είναι εκ των προτέρων γνωστά τα χαρακτηριστικά της κρίσιμης διατομής.

$$W_{pl,y} = 186 \text{ cm}^3$$

$$A = 82.6 \text{ cm}^2$$

$$f_y = 355 \text{ Mpa}$$

$$\gamma_{m1} = 1.0$$

$$\alpha = 0.21 \text{ (καμπύλη λυγισμού } \alpha \text{)}$$

Κρίσιμη διατομή αυτή της στήριξης όπως αυτή προκύπτει από το παραπάνω σχήμα,

$$N_{rk} = 2932.3 \text{ kN} \text{ (2.27)}$$

$$M_{rk} = M_{pl,y,rk} = 660.3 \text{ kNm} \text{ (2.28)}$$

$$k = \frac{acr}{acr-1} = 1.11$$

Με δεδομένη την τραπεζοειδής κατανομή της φόρτισης, θα διακρίνουμε τρία διαφορετικά μέλη

$$Ned_1 = 667 \text{ kN}$$

$$\bar{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{a_{ult}}{acr}} = \sqrt{\frac{A*fy/Ned_1}{Ncr/Ned_1}} = 0.51 \quad (2.29)$$

$$Ned_2 = 1000 \text{ kN}$$

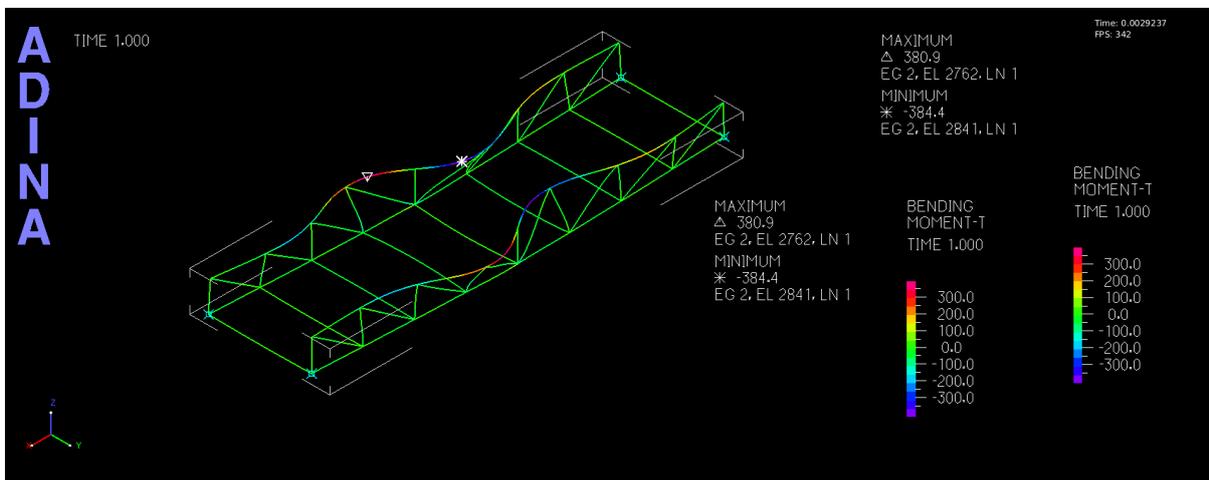
$$\bar{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{a_{ult}}{acr}} = \sqrt{\frac{A*fy/Ned_2}{Ncr/Ned_2}} = 0.51 \quad (2.30)$$

$$Ned_1 = 1183 \text{ kN}$$

$$\bar{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{a_{ult}}{acr}} = \sqrt{\frac{A*fy}{Ncr}} = 0.51 \quad (2.31)$$

Επομένως η λυγηρότητα του ισοδύναμου μέλους είναι γνωστή

Στην συνέχεια γίνεται ανάλυση δεύτερης τάξης με το σχήμα της πρώτης ιδιομορφής και πλάτος 1 m



Σχήμα 2-7 Ροπές δευτέρας τάξης για ατέλεια πλάτους 1 μέτρου σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή

Η ροπή δευτέρας τάξης στο μέλος 1 είναι υπερβολικά μικρή, επομένως θα ασχοληθούμε με τα μέλη 2 και 3

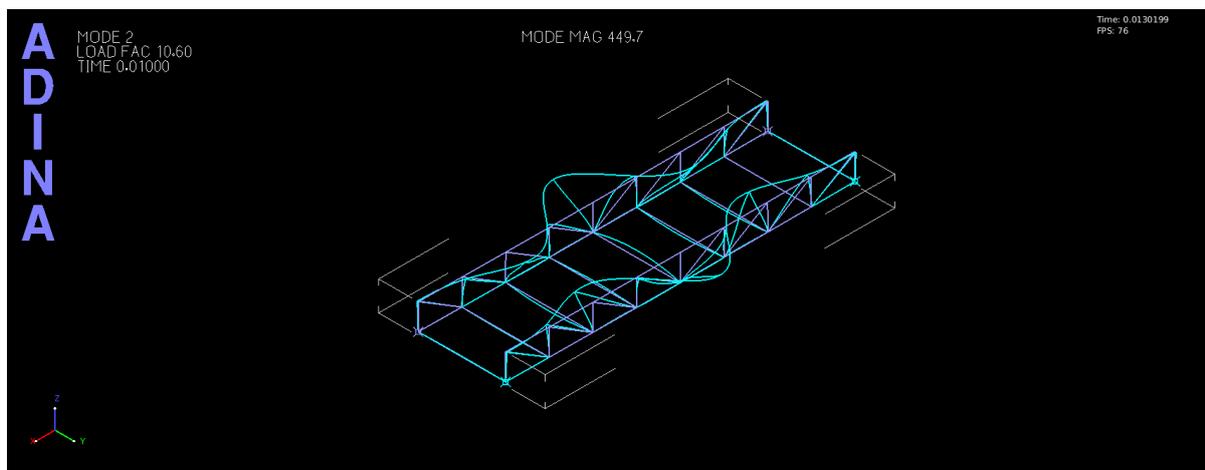
$$e_{o,d} = e_{o,k} * \frac{1 - \frac{xm*\lambda m^2}{\gamma \mu 1}}{1 - xm*\lambda m^2} = e_{o,k} = a_m * (\underline{\lambda} - 0.2) * \frac{Mrk}{Nrk} = 0.0147 \text{ m} \quad (2.32)$$

Θεωρούμε αρχικά πως η κρίσιμη διατομή βρίσκεται στο μέλος 3, όπου εμφανίζεται και η μέγιστη ροπή

$$\eta_{init,max} = \frac{\alpha * (\lambda m - \lambda 0) * |\eta II|_{max} * Mrk}{(\lambda m^2) * |M \eta II|_{max}} = \frac{0.21 * (0.51 - 0.2) * \left(\frac{1000}{10.5}\right) * 660.3}{(0.51^2) * 384.4} = 40.95 \text{ mm} \quad (2.33)$$

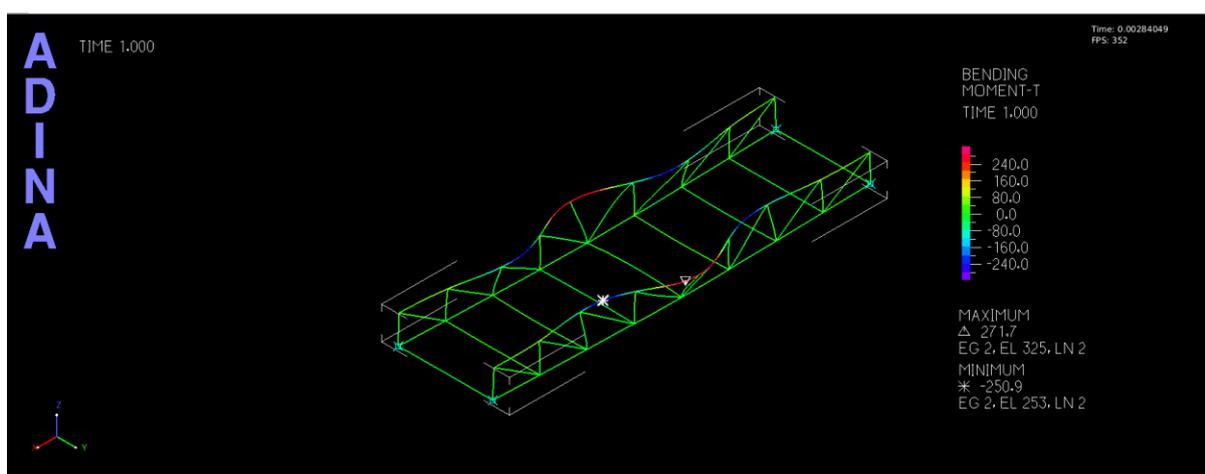
Η μέγιστη μετακίνηση εμφανίζεται στο σημείο σύνδεσης μέλους 2 και μέλους 3, επομένως η αρχική μας υπόθεση για το κρίσιμο μέλος είναι σωστή, αφού είναι δεδομένο πως το μέλος με την μεγαλύτερη αξονική και ροπή, θα έχει τον μεγαλύτερο συντελεστή εκμετάλλευση

## 2η ιδιομορφή



Σχήμα 2-8 Δεύτερη ιδιομορφή λυγισμού

- Ακολουθείται η ίδια διαδικασία



Σχήμα 2-9 Ροπές δευτέρας τάξης λόγω ατέλειας σύμφωνα με την δεύτερη ιδιομορφή, με πλάτος 1 μέτρο

Η κρίσιμη διατομή είναι στο μέλος 3 και πάλι, όπου έχουμε μέγιστη ροπή

$$\bar{\lambda m} = 0.51 \quad (2.34)$$

$$\eta_{init,max} = \frac{\alpha * (\lambda m - \lambda_0) * |\eta_{II}|_{max} * Mrk}{(\lambda m^2) * |M \eta_{II}|_{max}} = \frac{0.21 * (0.51 - 0.2) * \left(\frac{1000}{10.6}\right) * 660.3}{(0.51^2) * 271.7} = 57.38 \text{ mm} \quad (2.35)$$

#### 2.4.4 Πρόβολος διατομής μονής συμμετρίας υπό θλίψη

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της μοναδικής τοπικής και καθολικής αρχικής ατέλειας στην περίπτωση του προβόλου διατομής μονής συμμετρίας υπό θλίψη, πράγμα που θα έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση καμπτικού-στρεπτικού λυγισμού.

H	900 mm
b <sub>u</sub>	400 mm
t <sub>u</sub>	24 mm
d <sub>g</sub>	850 mm
t <sub>g</sub>	22 mm
b <sub>o</sub>	600 mm
t <sub>o</sub>	26 mm

Πίνακας 2-4 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά εξεταζόμενης διατομής μονής συμμετρίας για τον υπολογισμό της UGLI

Υπολογίζουμε τα γεωμετρικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής

Ροπή αδράνειας περί τον ασθενή

$$I_z = \frac{t_o \cdot (b_o^3)}{12} + \frac{t_u \cdot (b_u^3)}{12} + \frac{d_g \cdot (t_g^3)}{12} = 59675.42 \text{ cm}^4 \quad (2.36)$$

Περί τον ισχυρο

$$I_y = 579483.19 \text{ cm}^4 \quad (2.37)$$

Σταθερά στρέψης

$$\sum_i \frac{b_i \cdot (t_i^3)}{3} = 837.53 \text{ cm}^4 \quad (2.38)$$

Απόσταση μεταξύ των κ.β. των πελμάτων

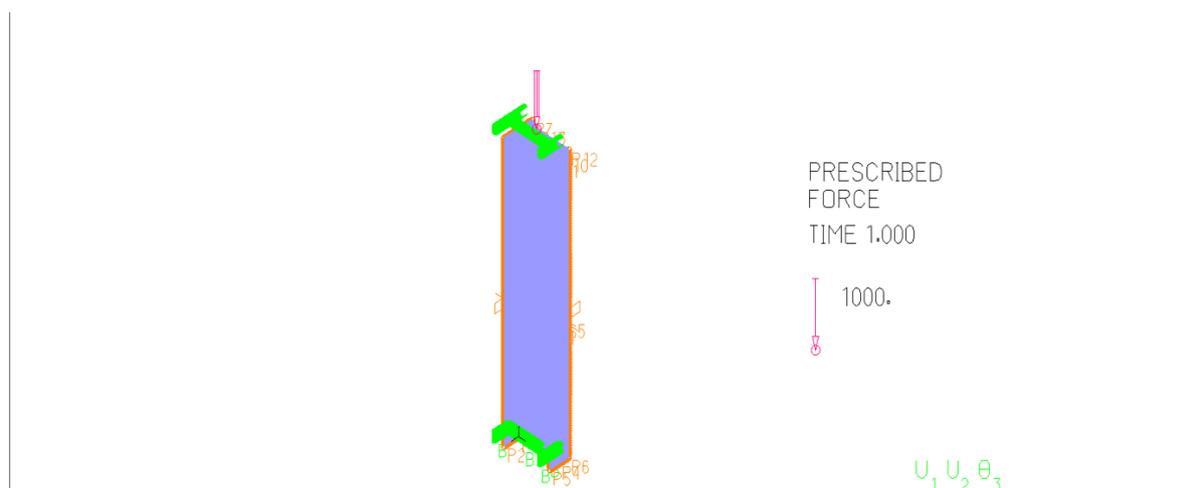
$$h_s = 87.5 \text{ cm} \quad (2.39)$$

$$\beta_f = \frac{I_{fc}}{I_{fc} + I_{ft}} = 0.57 \quad (2.40)$$

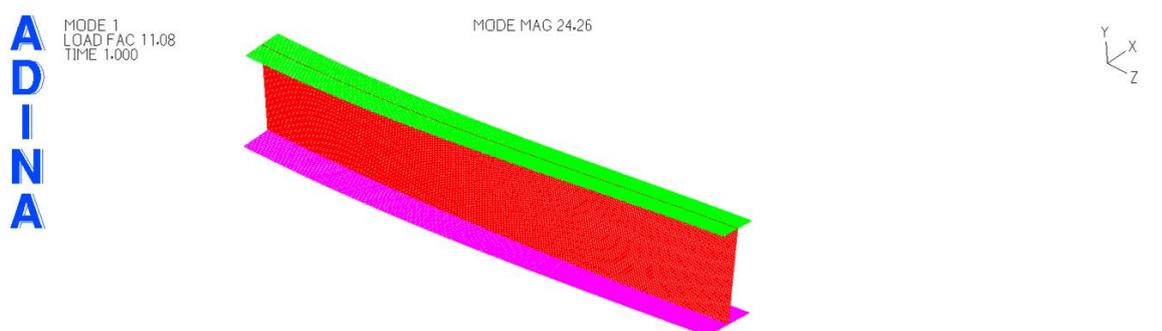
Σταθερά στρέβλωσης

$$I_w = \beta_f \cdot (1 - \beta_f) = 77050403.60 \quad (2.41)$$

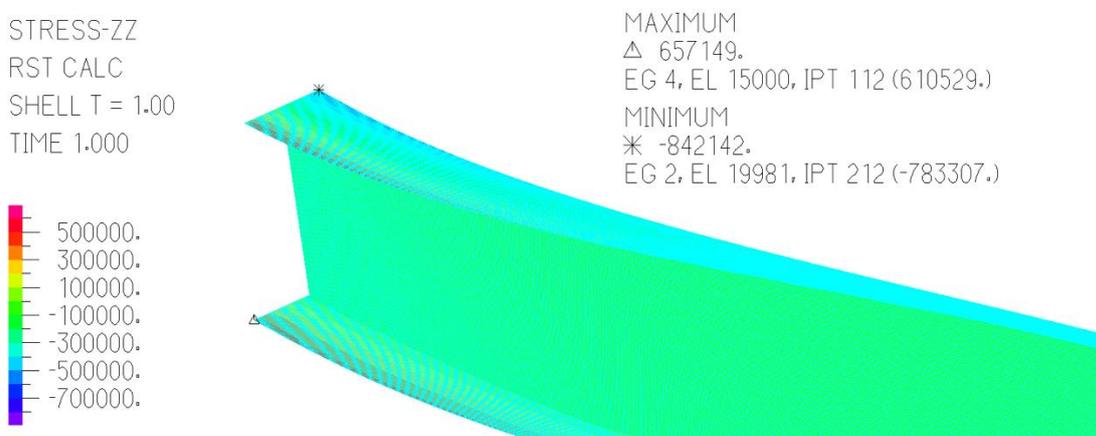
Στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε το προσομοίωμα σε λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιώντας επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία



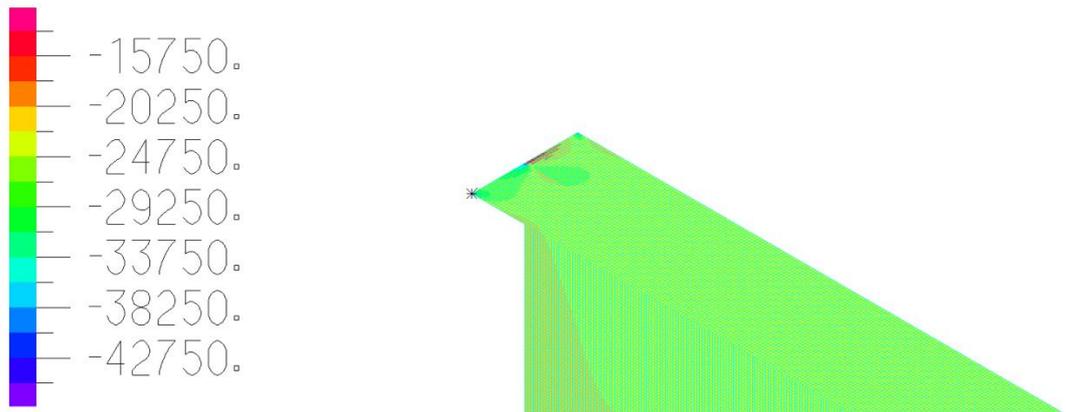
Σχήμα 2-10: Προσομοίωμα πεπερασμένων στοιχείων προβόλου διατομής μονής συμμετρίας υπό κεντρική θλίψη  
 Θα ξεκινήσουμε διεξάγοντας μία γραμμική ανάλυση λυγισμού για να βρούμε τις ιδιομορφές καμπτικού-στρεπτικού λυγισμού, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε ως σχήματα ατελειών  
 Στη συνέχεια θα πραγματοποιηθεί στατική ανάλυση με ατέλεια που θα έχει το σχήμα της πρώτης ιδιομορφής λυγισμού και πλάτος 1 m



Σχήμα 2-11: Ιδιομορφή καμπτικού-στρεπτικού λυγισμού προβόλου διατομής μονής συμμετρίας υπό θλίψη



Διάγραμμα 2-5: Διάγραμμα συνολικών ορθών τάσεων  $\sigma_{zz}$  ατελούς φορέα προβόλου διατομής μονής συμμετρίας υπό θλίψη



Διάγραμμα 2-6: Διάγραμμα συνολικών ορθών τάσεων  $\sigma_{xx}$  τέλειου φορέα προβόλου διατομής μονής συμμετρίας υπό θλίψη

Οι αναλύσεις αυτές αποσκοπούν στον υπολογισμό του συντελεστή  $\omega_1$  για την περίπτωση όπου η σταθερά στρέψης δεν είναι μηδέν. Ο συντελεστής  $\omega_1$  αναφέρεται στις πρόσθετες τάσεις λόγω της εφαρμογής της αρχικής ατέλειας σύμφωνα με το σχήμα της ιδιομορφής και με πλάτος 1 μέτρο, επομένως από τις τάσεις που υπολογίσαμε για τον ατελή φορέα, πρέπει να αφαιρέσουμε αυτές του τέλειου.

$$\text{Συνεπώς } \omega_1 = 84.21 - 4.28 + 25.15 - 1.84 \frac{kN}{m^2} = 103.245 \frac{kN}{cm^2} \quad (2.42)$$

Η εύρεση του πολλαπλασιαστικού συντελεστή θα γίνει με δύο τρόπους, με εφαρμογή της διαδικασίας των Chladny & Stujberona, αλλά και αυτής που πρότεινε οι Aguerro et al, για την περίπτωση πλευρικού λυγισμού.

Ξεκινώντας από την δεύτερη είναι προφανές, με δεδομένα και όσα έχουμε δείξει στο προηγούμενο παράδειγμα προβόλου σταθερής διατομής πως η κρίσιμη διατομή είναι αυτή της στήριξης, πράγμα το οποίο θα θεωρήσουμε ως δεδομένο στην συνέχεια

$$e_c = \min\left(\left|\frac{a(\bar{\lambda}-0.2)}{\bar{\lambda}^2} \frac{1-x\bar{\lambda}^2}{1-x\bar{\lambda}^2} \frac{f_y}{\omega_1}\right|\right) = 0.198 \quad (2.43)$$

$$\bar{\lambda} = 1.12 \quad (2.44)$$

$$\chi = 0.41 \quad (2.45)$$

Στο κεφάλαιο 4 φαίνεται αναλυτικά ο υπολογισμός της ανηγμένης λυγηρότητας και του συντελεστή  $\chi$

Εφαρμόζοντας την συγκεκριμένη ατέλεια όμως το φορτίο λυγισμού που προκύπτει βρίσκεται αρκετά μακριά από το αντίστοιχο του κανονισμού, πράγμα που σε συνδυασμό με το υπερβολικά μεγάλο μέγεθος της ατέλειας μας οδηγεί σε αμφιβολίες σχετικά με τον τρόπο έκφρασης της συγκεκριμένης μεθοδολογίας για την περίπτωση μας, αλλά και για το γεγονός πως δεν υφίσταται κάποια συγκεκριμένη κατεύθυνση για το τρόπο πραγματοποίησης της ανάλυσης δεύτερης τάξης από την οποία θα προκύψουν οι ιδιομορφές.

Στην συνέχεια θα δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε την διαδικασία που διαλέξαμε και για την περίπτωση του προβόλου μεταβλητής διατομής, θεωρώντας και πάλι για τους ίδιους λόγους με πριν, πως η κρίσιμη διατομή βρίσκεται στην στήριξη του προβόλου. Θα εφαρμόσουμε τις σχέσεις τάσεων του πίνακα , ξεκινώντας από τον υπολογισμό του συντελεστή αξιοποίησης

$$U_{M,\eta,init,m,m} = \frac{a(\bar{\lambda}m - \bar{\lambda}o)}{\bar{\lambda}m^2(\alpha cr - 1)} \frac{1-x\bar{\lambda}m^2}{1-x\bar{\lambda}m^2} \gamma_{M1} = \frac{0.76(1.12-0.2)}{1.12^2(9.68-1)} = 0.067 \quad (2.46)$$

$$\eta_{init,max} = U_{M,\eta,init,m,m} \frac{f_{yk*|\eta cr|max}}{\gamma_{M1*|\sigma \eta cr^{II}|m}} = 0.067 \frac{275}{103.95} = 0.018 \text{ m} \quad (2.47)$$

Επιπλέον με δεδομένο πως το σχήμα της ιδιομορφής δίνεται από την σχέση

$$\eta_{\text{init}}(x) = \eta_{\text{init,max}} * \frac{\eta_{\text{cr}}(x)}{\eta_{\text{cr,max}}} \quad (2.48)$$

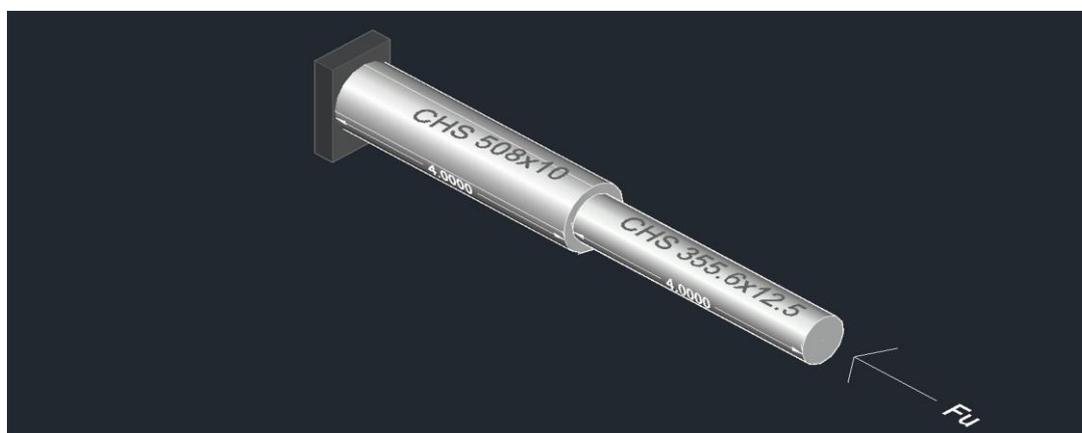
Καθώς και από το γεγονός πως η μέγιστη απομάκρυνση στην εγκάρσια διεύθυνση παρατηρείται στην άκρη του προβόλου, η ατέλεια πλάτους 0.018 m και μεγέθους σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή θα εφαρμοστεί στο ελεύθερο άκρο και πιο συγκεκριμένα στην άκρη του θλιβόμενου πέλματος



## 3 ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΡΟΒΟΛΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

### 3.1 Εισαγωγή

Μελετάται πρόβολος 8 μέτρων, χαλύβδινης μέλους μεταβλητής διατομής. Θα γίνει αρχικά μελέτη της περίπτωσης όπου και οι δύο τύποι διατομών δέχονται την ίδια αξονική θλιπτική δύναμη.



Σχήμα 3-1 Μελετώμενος πρόβολος μεταβλητής διατομής υπό καθαρή θλίψη

### 3.2 Επιλογή διατομών και υλικών

Η διατομές του παρόντος case study έχουν επιλεγεί με κριτήριο την λυγνότητα τους, από την σειρά των CHS θερμής έλασης. Επιλέγουμε διατομή βάσης με λυγνότητα κοντά στο 1, προκειμένου να είναι η οριακή αντοχή αισθητά μικρότερη από το κρίσιμο φορτίο. Η λυγνότητα ελέγχεται θεωρώντας αρχικά ενιαία διατομή στο μέλος και ποιότητα χάλυβα S235

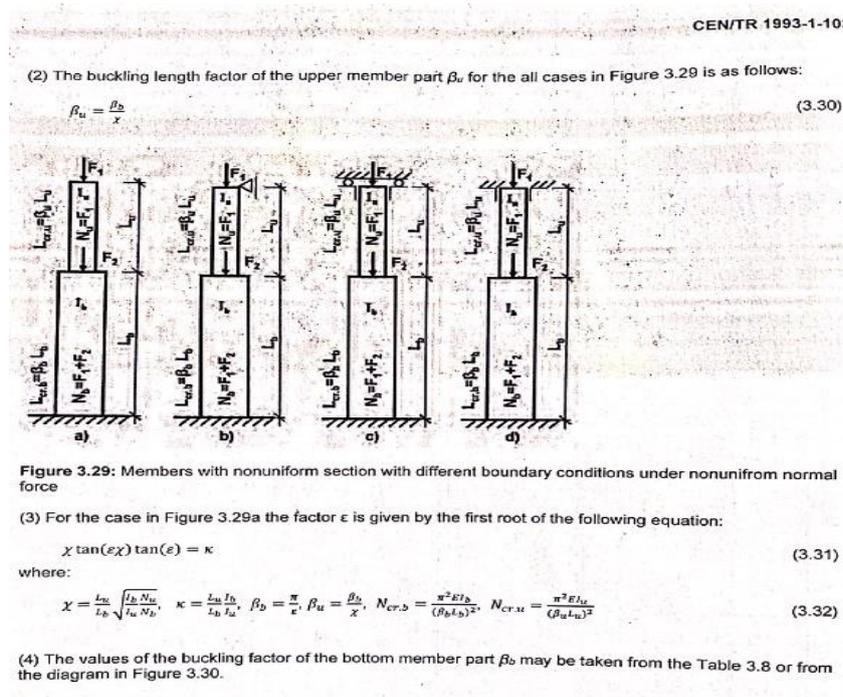
$$\text{CHS} \Rightarrow L_{cr_y} = L_{cr_z} = 2 * 800 = 1600 \text{ cm} \quad (3.1)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{Lcr}{i \cdot \sqrt{235/235}} \Rightarrow i = 17,039 \text{ cm για λυγηρότητα 1} \quad (3.2)$$

Επιλέγουμε CHS 508x10 στη βάση και CHS 355.6x12.5 στην άκρη του προβόλου

### 3.3 Εύρεση κρίσιμου φορτίου από τον κανονισμό

Η εύρεση του μήκους λυγισμού θα γίνει με εφαρμογή του πίνακα 3.8 της παραγράφου 3.4.3 του CEN/TR 1993-1-103

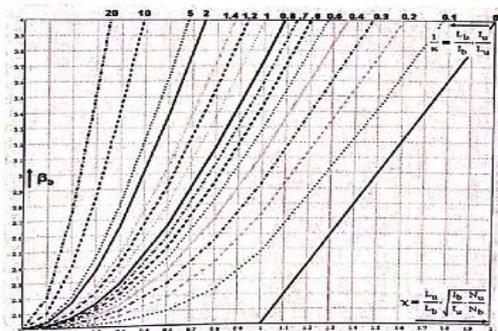


Σχήμα 3-2: Κανονιστικές σχέσεις υπολογισμού κρίσιμων φορτίων διατομών

CEN/TR 1993-1-

Table 3.8: Buckling length factor  $\beta_b = f(\chi, \kappa)$  for the case in Figure 3.29a

$\frac{1}{\kappa} = \frac{I_b I_u}{I_b L_u}$	$\chi = \frac{L_u}{L_b} \sqrt{\frac{I_b N_u}{I_u N_b}}$									
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.0	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000
0.1	2.000	2.008	2.037	2.100	2.236	2.484	3.422	4.477	5.556	6.644
0.2	2.000	2.017	2.073	2.193	2.411	2.731	3.766	4.905	6.072	7.250
0.3	2.000	2.025	2.109	2.280	2.562	2.937	4.070	5.268	6.551	7.818
0.4	2.000	2.033	2.144	2.363	2.698	3.120	4.347	5.659	7.000	8.353
0.5	2.000	2.041	2.179	2.442	2.825	3.289	4.604	6.000	7.423	8.859
0.6	2.000	2.050	2.214	2.517	2.943	3.446	4.846	6.322	7.825	9.340
0.7	2.000	2.058	2.248	2.590	3.056	3.594	5.075	6.628	8.207	9.799
0.8	2.000	2.066	2.282	2.661	3.163	3.735	5.293	6.920	8.573	10.238
0.9	2.000	2.074	2.315	2.729	3.266	3.870	5.502	7.201	8.924	10.659
1.0	2.000	2.082	2.348	2.796	3.366	4.000	5.703	7.470	9.262	11.065
1.2	2.000	2.099	2.413	2.924	3.555	4.246	6.084	7.982	9.904	11.837
1.4	2.000	2.115	2.476	3.045	3.733	4.477	6.442	8.463	10.507	12.562
1.6	2.000	2.131	2.538	3.162	3.902	4.696	6.780	8.918	11.078	13.248
1.8	2.000	2.148	2.598	3.274	4.063	4.905	7.101	9.351	11.621	13.901
2.0	2.000	2.164	2.657	3.383	4.218	5.104	7.409	9.764	12.139	14.524
2.5	2.000	2.204	2.800	3.639	4.582	5.571	8.136	10.728	13.348	15.978
5.0	2.000	2.400	3.429	4.709	6.072	7.470	11.029	14.622	18.230	21.845
10.0	2.000	2.762	4.431	6.322	8.277	10.257	15.255	20.279	25.313	30.352
20.0	2.000	3.389	5.951	8.690	11.476	14.281	21.326	28.39	35.426	42.538

Figure 3.30: Buckling length factor  $\beta_b = f(\chi, \kappa)$  for the case in Figure 3.29a(5) For the case in Figure 3.29b the buckling factor of the bottom member part  $\beta_b$  is

$$\beta_b = \sqrt{\frac{\beta_{11}^2 \left( \frac{N_u}{N_b} - 1 \right) + \beta_{22}^2}{\frac{N_u}{N_b}}} \quad (3.33)$$

The values of  $\beta_{11}$  and  $\beta_{22}$  are given in Table 3.9 and Table 3.10 respectively.

Σχήμα 3-3: Πίνακας 3.8 CEN/TR 1993-1-103 για τον υπολογισμό των μηκών λυγισμού μελών μεταβλητής διατομής υπό θλίψη

Στην περίπτωση μας ισχύουν τα ακόλουθα:

- Μέλος στην βάση του προβόλου

$$L_1 = L_2 \quad (3.3)$$

$$N_b = N_u \quad (3.4)$$

$$I_u/I_b = 19852/48520 = 0.41 \quad (3.5)$$

$$1/k = 0.41 \quad (3.6)$$

$$\chi = 1.56 \quad (3.7)$$

$$\beta_b = 4.511 \quad (3.8)$$

$$L_b = \beta_b * L_1 = 1791.6 \text{ cm} \quad (3.9)$$

$$N_{cr,b} = 3035.98 \text{ kN} \quad (3.10)$$

- Μέλος στην κορυφή του προβόλου

$$\beta_b/\chi = 2.871 \quad (3.11)$$

$$L_u = 1148.46 \text{ cm} \quad (3.12)$$

$$N_{cr,u} = 3022.94 \text{ cm} \quad (3.13)$$

$$N_{cr} = \min(3035.98, 3022.94) = 3022.94 \text{ kN} \quad (3.14)$$

### 3.3.1 Υπολογισμός συνολικής αντοχής σε θλίψη και διαρροή

Στη συνέχεια με βάση το κρίσιμο φορτίο που υπολογίστηκε, βρίσκεται η θλιπτική αντοχή του προβόλου με βάση την παράγραφο 8 του EN1993-1-1

- Μέλος στη βάση

#### Κατάταξη

$$\text{Όλο το μέλος βρίσκεται σε θλίψη} \Rightarrow \frac{d}{t} = \frac{508}{10} = 50.8 < 70 * \epsilon^2 = 70 \quad (3.15)$$

Άρα η διατομή είναι κατηγορίας 2

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A * f_y}{N_{cr}}} \Rightarrow \bar{\lambda} = 1.098 \quad (3.16)$$

$$\text{Καμπύλη λυγισμού } \alpha \Rightarrow \chi = 0.61 \quad (3.17)$$

$$N_{b,rd} = \frac{\chi * A * f_y}{\gamma_{M1}} = 2236.26 \text{ kN} \quad (3.18)$$

- Μέλος στη κορυφή

#### Κατάταξη

$$\text{Όλο το μέλος βρίσκεται σε θλίψη} \Rightarrow \frac{d}{t} = \frac{355.6}{12.5} = 28.48 < 50 * \epsilon^2 = 50 \quad (3.19)$$

Άρα η διατομή είναι κατηγορίας 1

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A * f_y}{N_{cr}}} \Rightarrow \bar{\lambda} = 1.049 \quad (3.20)$$

Καμπύλη λυγισμού  $\alpha \Rightarrow$

$$\Phi = 1.139 \quad (3.21)$$

$$\chi = 0.63 \quad (3.22)$$

$$N_{b,rd_u} = \frac{\chi * A * f_y}{\gamma_{M1}} = 2002.86 \text{ kN} \quad (3.23)$$

$$N_{b,rd} = \min(N_{b,rd_d}, N_{b,rd_u}) = 2002.86 \text{ kN} \quad (3.24)$$

## 3.4 Ανάλυση φορέα με το λογισμικό

### 3.4.1 Έλεγχος ευαισθησίας προσομοιώματος

Θα χρησιμοποιηθεί το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina και με βάση τις αναμενόμενες μορφές αστοχίας επιλέγουμε πεπερασμένα στοιχεία δοκού. Μετά την δημιουργία του προσομοιώματος στο λογισμικό, πραγματοποιήθηκε έλεγχος ευαισθησίας της πυκνότητας του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων. Παρατηρήθηκε πως πλέγμα πυκνότερο των 100 subdivisions σε κάθε γραμμή 4 μέτρων, αυξάνει των υπολογιστικό φόρτο, χωρίς να εξυπηρετεί σκοπούς μεγαλύτερης ακρίβειας υπολογισμών, η οποία με τα 100 subdivision είναι επαρκής. Ο έλεγχος έγινε θεωρώντας σταθερή διατομή CHS508x10 σε όλο το μήκος, για την οποία γνωρίζουμε το κρίσιμο φορτίο ελαστικού λυγισμού σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή,  $N_{cr} = 3928.26 \text{ kN}$  ( $N_{cr} = \pi^2 * E * I / (L_{cr}^2)$ )

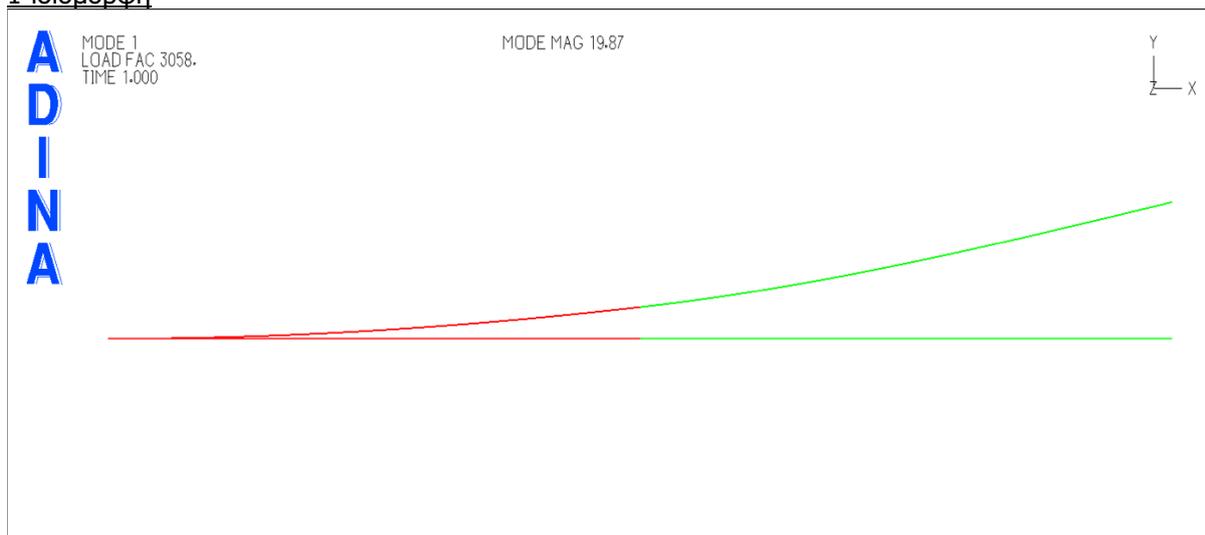


Σχήμα 3-4: Γραμμική ανάλυση λυγισμού προβόλου σταθερής διατομής

### 3.4.2 Γραμμική ανάλυση λυγισμού

Μετά τον έλεγχο ευαισθησίας του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων εισήχθη η διατομή CHS 355.6x12.5 στα τελευταία 4 μέτρα του προβόλου και πραγματοποιήθηκε γραμμική ελαστική ανάλυση λυγισμού. Ακολουθούν οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές στις οποίες οι συντελεστές δίνουν και τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία, καθώς το θλιπτικό φορτίο που έχει εισαχθεί στο λογισμικό είναι 1 kN

#### 1<sup>η</sup> ιδιομορφή



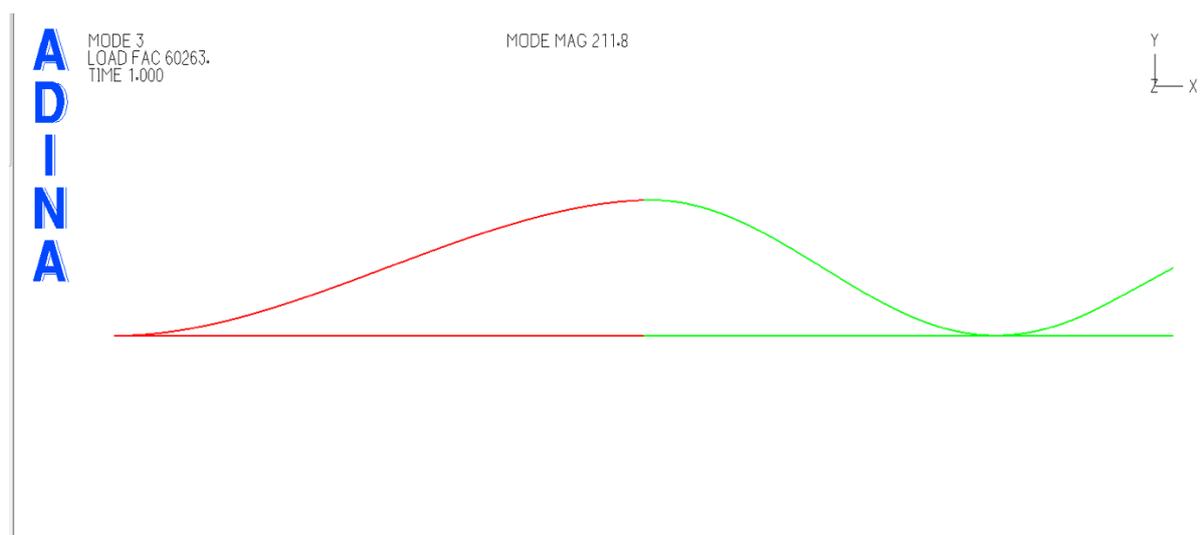
Σχήμα 3-5: Πρώτη ιδιομορφή λυγισμού προβόλου μεταβλητής διατομής

### 2<sup>η</sup> ιδιομορφή

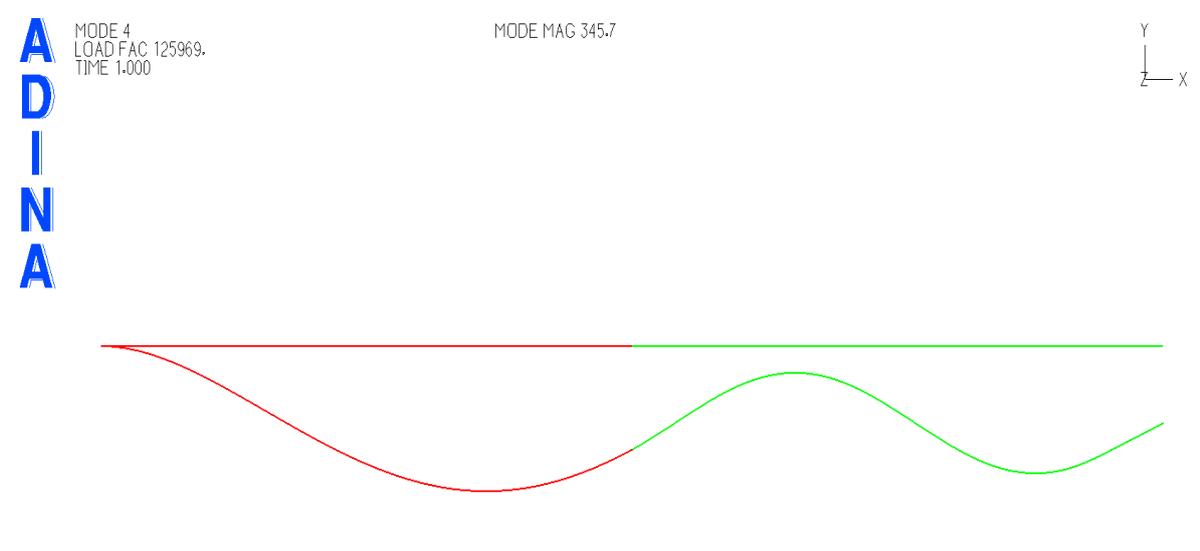


Σχήμα 3-6: Δεύτερη ιδιομορφή λυγισμού προβόλου μεταβλητής διατομής

### 3<sup>η</sup> ιδιομορφή



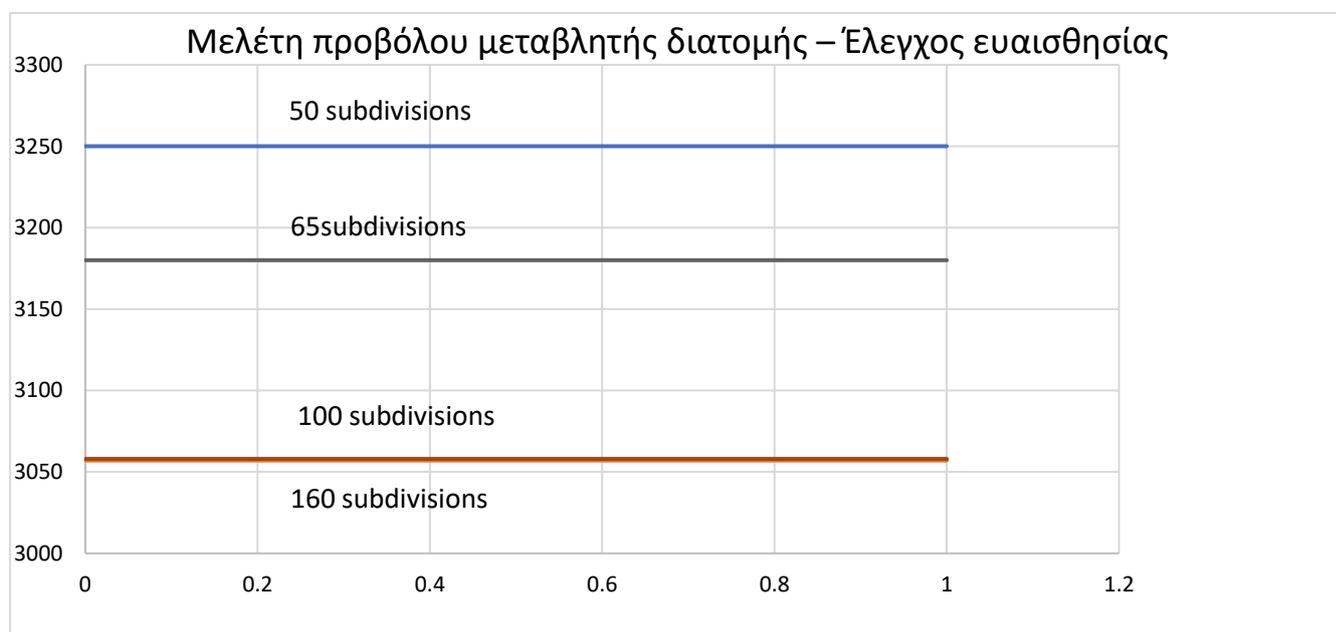
Σχήμα 3-7: Τρίτη ιδιομορφή λυγισμού προβόλου μεταβλητής διατομής

4<sup>η</sup> ιδιομορφή

Σχήμα 3-8: Τέταρτη ιδιομορφή λυγισμού προβόλου μεταβλητής διατομής

Παρατηρούμε την μεγάλη διαφορά στο κρίσιμο φορτίο μεταξύ των ιδιομορφών, ενώ πρακτικά προκύπτει ίδιο φορτίο σε σύγκριση με αυτό που προέκυψε από την επίλυση με το CEN/TR 1993-1-103

Στην συνέχεια πραγματοποιείται έλεγχος ευαισθησίας με πύκνωση του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων, τα αποτελέσματα της οποίας φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα



Διάγραμμα 3-1: Έλεγχος ευαισθησίας προβόλου μεταβλητής διατομής υπό θλίψη

Συμπεραίνουμε συνεπώς πως περαιτέρω πύκνωση του πλέγματος δεν βελτιώνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων

### 3.5 Μη γραμμική ανάλυση

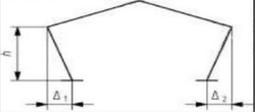
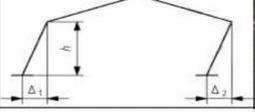
#### 3.5.1 Αρχική ατέλεια

Θα μελετήσουμε κάθε μηχανισμό μη-γραμμικότητας χωριστά για καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς του φορέα. Αρχικά θα μελετήσουμε την μη-γραμμικότητα γεωμετρίας, μέσω μη γραμμικής ανάλυσης με έλεγχο μετακινήσεων (collapse analysis στο Adina), για να εντοπίσουμε και πιθανούς καθοδικούς κλάδους. Αρχική διέγερση θα θεωρήσουμε την  $\gamma=0.001$  m, της επιρροή της οποίας θα μελετήσουμε παραμετρικά στην συνέχεια.

Ένα από τα βασικά προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στο σύνολο των αναλύσεων είναι πως οι πραγματικές αρχικές ατέλειες δεν είναι εκ των προτέρων γνωστές. Παρότι στις αριθμητικές αναλύσεις που θα πραγματοποιηθούν στην συνέχεια θα γίνει παραμετρική διερεύνηση τόσο του μεγέθους όσο και του σχήματος τους, θα πρέπει να βρούμε το εύρος μέσα στο οποίο θα γίνει η ανάλυση, να βρούμε δηλαδή την μέγιστη αρχική ατέλεια. Αυτό θα πραγματοποιηθεί με την χρήση του προτύπου EN1090-2, όπου περιγράφονται οι κατασκευαστικές ανοχές κατά την εκτέλεση μεταλλικών κατασκευών.

Η ζητούμενη ατέλεια εμφανίζεται ως απόκλιση από την ευθυγραμμία και συνεπώς για κατηγορία 2 προκύπτει  $L/500 = 0.016$  m, όπως φαίνεται στον πίνακα B.17 που ακολουθεί

**Table B.17 — Erection tolerances - Columns of single storey buildings**

No	Criterion	Parameter	Essential tolerances Permitted deviation $\Delta$	Functional tolerances Permitted deviation $\Delta$	
			Class 1 and 2	Class 1	Class 2
1	Inclination of columns of single-storey buildings: 	Overall inclination in storey height h:	$\Delta = \pm h / 300$	$\Delta = \pm h / 300$	$\Delta = \pm h / 500$
2	Inclination of individual columns in single storey portal frame buildings: 	Inclination $\Delta$ of each column: $\Delta = \Delta_1$ or $\Delta_2$	No requirement	$\Delta = \pm h / 150$	$\Delta = \pm h / 300$
3	Inclination of single storey portal frame buildings: 	Average inclination of all the columns in the same frame: [For two columns the average is: $\Delta = (\Delta_1 + \Delta_2) / 2$ ]	$\Delta = \pm h / 500$	$\Delta = \pm h / 500$	$\Delta = \pm h / 500$

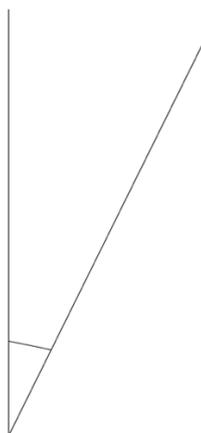
Πίνακας 3-1: Κατασκευαστικές ανοχές μελών

Πρέπει όμως με κάποιο τρόπο να λάβουμε υπόψη και τις παραμένουσες τάσεις που υπάρχουν κατά την δημιουργία των μελών. Για αυτό το λόγο θα πάρουμε μία 'ισοδύναμη γεωμετρική ατέλεια', αντί της γεωμετρικής ίση με 0.020 m. Επιπλέον ως αρχική ατέλεια για τις αναλύσεις θα χρησιμοποιηθεί και αυτή που υπολογίστηκε σύμφωνα με το κεφάλαιο 1.5 και αφορά την μοναδική ατέλεια σύμφωνα με το σχήμα της κυρίαρχης ιδιομορφής, δηλαδή της πρώτης και πλάτους 0.031 m

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις διαφορετικές μορφές ατέλειας σύμφωνα με τον EN1993-1-1, δηλαδή τον συνδυασμό ατέλειας για καμπτικό λυγισμό και μεταθετό μέλος. Δημιουργούνται όμως αμφιβολίες εξαιτίας της μορφολογίας του μέλους, καθώς δεν γνωρίζουμε αν η bow ατέλεια θα είναι ενιαία για το

μέλος μεταβλητής διατομής, ή αν θα αφορά κάθε μέλος ξεχωριστά, όπως και για το ποια φορά θα έχει σε περίπτωση που ληφθεί για κάθε μέλος ξεχωριστά. Διακρίνουμε δηλαδή τις ακόλουθες περιπτώσεις

### Sway imperfection



+

### bow imperfection



Εικόνα 3-1 Πρώτος πιθανός τρόπος θεώρησης αρχικών ατελειών

#### Περίπτωση α

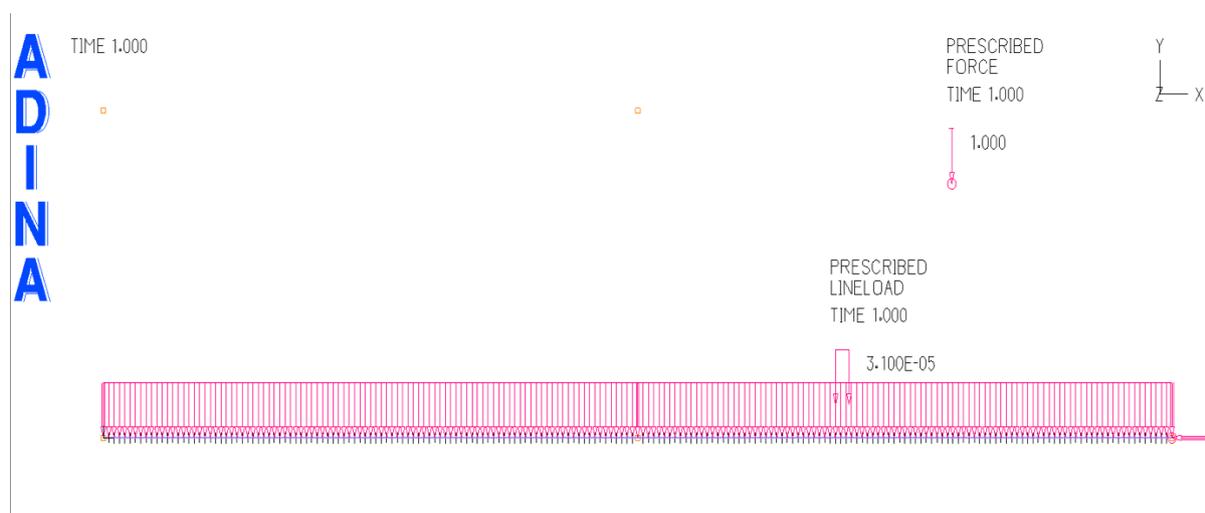
- Bow imperfection

$$e_0 = \frac{\alpha}{\varepsilon} * \beta * L \Rightarrow (3.25)$$

Διατομή κατηγορίας 3  $\Rightarrow \beta = 1/200 \Rightarrow$

$$e_0 = 0.21 * 800 * \frac{1}{200} = 2.47 \text{ cm} (3.26)$$

Επομένως το ισοδύναμο φορτίο που θα αντικαταστήσει την ατέλεια είναι  $q_0 = \frac{4 N e d e_0}{(L^2)} = 3.087 \cdot 10^{-5} \frac{kN}{m}$   
(3.27)



Εικόνα 3-2 Ισοδύναμο φορτίο που αντικαθιστά την bow imperfection στην περίπτωση α

- Sway imperfection

$$\varphi = \varphi_0 * \alpha_H * \alpha_m \quad (3.28)$$

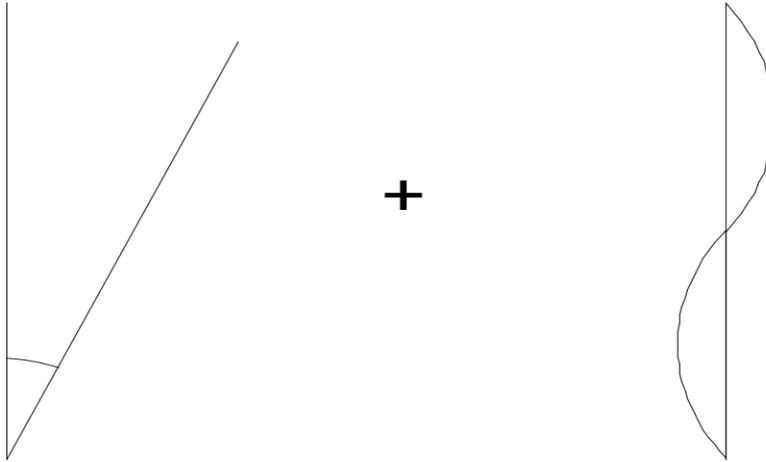
$$\varphi_0 = \frac{1}{400} \quad (3.29)$$

$$\alpha_H = \frac{2}{\sqrt{H}} = \frac{2}{\sqrt{500}} = 0.089 \quad (3.30)$$

$$\varphi = 2.23 * 10^{-4} \text{ rad} \quad (3.31)$$

Sway imperfection

bow imperfection



Εικόνα 3-2 Δεύτερος πιθανός τρόπος θεώρησης αρχικών ατελειών

Περίπτωση β

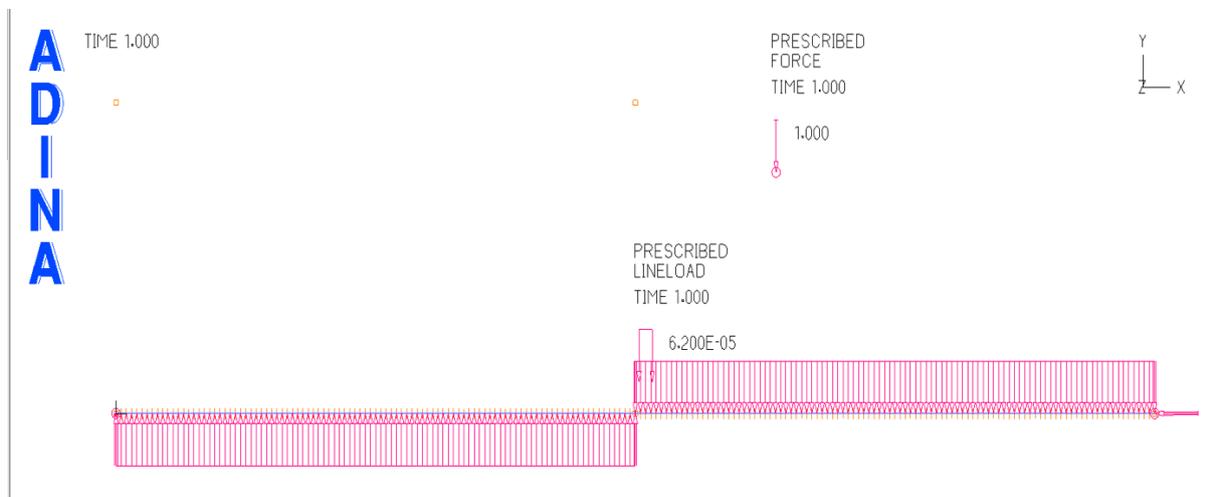
- Bow imperfection

$$e_0 = \frac{\alpha}{\varepsilon} * \beta * L \Rightarrow \quad (3.32)$$

Πλαστικός έλεγχος, παίρνω την μεγαλύτερη  $\Rightarrow \beta = 1/65 \Rightarrow$

$$e_0 = 0.21 * 400 * \frac{1}{200} = 1.235 \text{ cm} \quad (3.33)$$

Επομένως το ισοδύναμο φορτίο που θα αντικαταστήσει την ατέλεια είναι  $q_0 = \frac{4 N e d e_0}{(L^2)} = 6.2 * 10^{-5} \frac{kN}{m} \quad (3.34)$



Εικόνα 2-4 Ισοδύναμο φορτίο που αντικαθιστά την bow imperfection στην περίπτωση β

- Sway imperfection (ίδια με πριν)

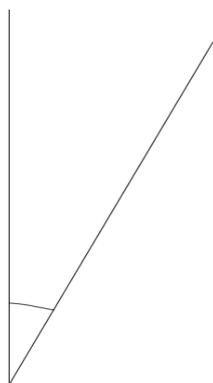
$$\varphi = \varphi_0 * a_H * a_m \quad (3.35)$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{200} \quad (3.36)$$

$$a_H = \frac{2}{\sqrt{H}} = \frac{2}{\sqrt{800}} \quad (3.37)$$

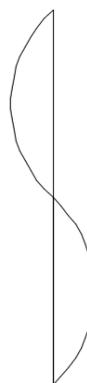
$$\varphi = 3.54 * 10^{-3} \text{ rad} \quad (3.38)$$

Sway imperfection



+

bow imperfection



### Περίπτωση γ

- Bow imperfection

$$e_0 = \frac{a}{\varepsilon} * \beta * L \Rightarrow \quad (3.39)$$

Πλαστικός έλεγχος, παίρνω την μεγαλύτερη  $\Rightarrow \beta = 1/65 \Rightarrow$

$$e_0 = 0.21 * 400 * \frac{1}{200} = 1.235 \text{ cm} \quad (3.40)$$

Επομένως το ισοδύναμο φορτίο που θα αντικαταστήσει την ατέλεια είναι  $q_0 = \frac{4 N e_0}{(L^2)} = 6.2 * 10^{-5} \frac{kN}{m}$   
(3.41)

- Sway imperfection (ίδια με πριν)

$$\varphi = \varphi_0 * a_H * a_m \quad (3.42)$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{200} \quad (3.43)$$

$$a_H = \frac{2}{\sqrt{H}} = \frac{2}{\sqrt{800}} \quad (3.44)$$

$$\varphi = 3.54 * 10^{-3} \text{ rad} \quad (3.45)$$

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων θα γίνει στο τελευταίο κεφάλαιο όπου θα ληφθεί υπόψη η μη γραμμικότητα υλικού, όσο και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες

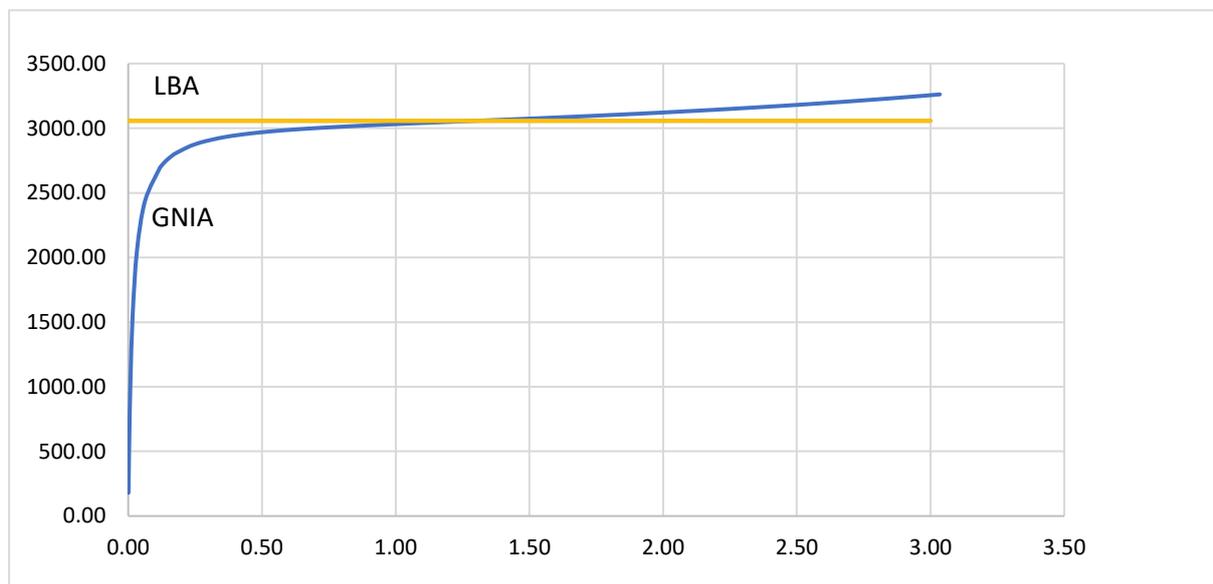
### 3.5.2 Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας

Στη συνέχεια θα πραγματοποιηθεί ανάλυση μη γραμμικότητας γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες. Θα πραγματοποιηθεί έλεγχος μετατοπίσεων για να μπορέσουμε να εντοπίσουμε και πιθανούς καθοδικούς κλάδους. Το μέγεθος της αρχικής διαταραχής θα είναι 0.001 μ.

Εξαιτίας της μεγάλης απόκλισης μεταξύ των φορτίων των ιδιομορφών, θα λάβουμε υπόψη ατέλειες σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή μόνο, πράγμα που θα ελεγχθεί στη συνέχεια. Για την περίπτωση αυτή αναμένεται η επιρροή των ατελειών να είναι μικρή. Πράγματι επιπλέον μεταβολή των αρχικών ατελειών εντός των κατασκευαστικών ορίων δεν φαίνεται να επηρεάζει σημαντικά τον συγκεκριμένο μηχανισμό αστοχίας.

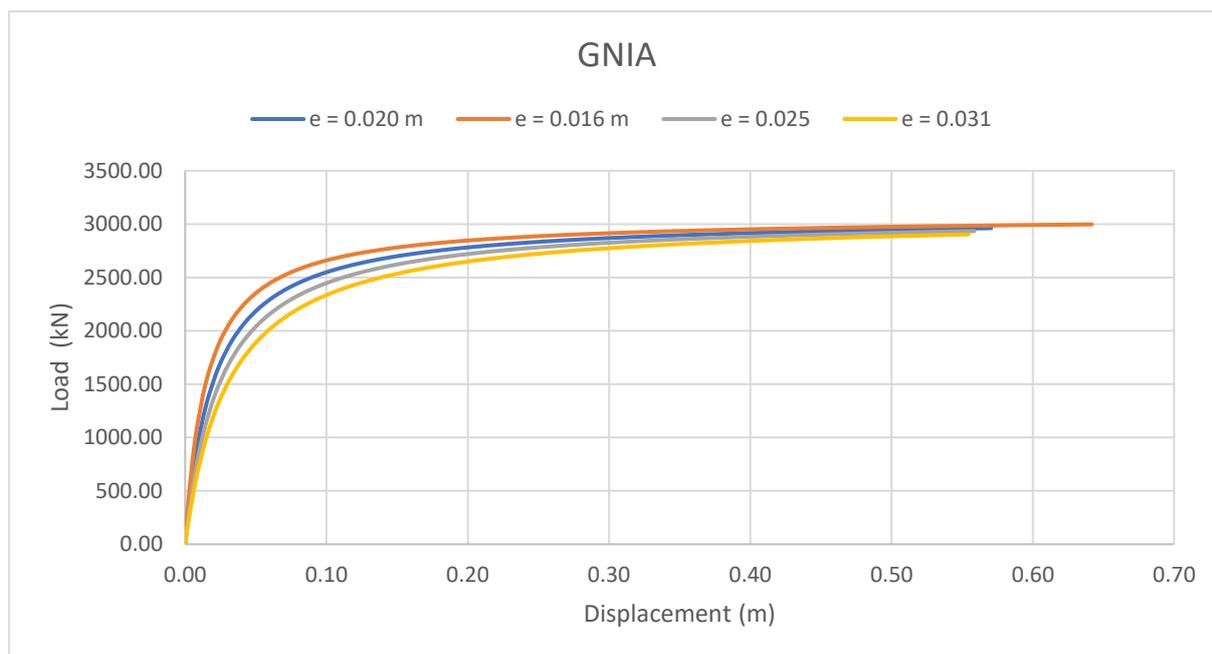
Παρατηρούμε πως ο φορέας έχει ευσταθή μεταλυγισμικό κλάδο και μεταλυγισμική αντοχή. Σε ανάλυση όπου επιτρέπονται μεγάλες μετακινήσεις (άνω του 1μ) το οριακό φορτίο της GNIA ξεπερνάει αυτό της LBA

Η μεταλυγισμική αντοχή του φορέα φαίνεται καθαρότερα όταν στην ανάλυση μη-γραμμικότητας γεωμετρίας θέσουμε μεγαλύτερο όριο στις μέγιστες μετακινήσεις



Διάγραμμα 3-2: Σύγκριση δυο δρόμων ισορροπίας μη-γραμμικής ανάλυσης γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες σύμφωνα με το σχήμα των ιδιομορφών και γραμμικής ανάλυσης λυγισμού

Στην συνέχεια μελετάται η επιρροή της μεταβολής της πυκνότητας του πλέγματος, αλλά και της αρχικής διέγερσης στην συμπεριφορά του φορέα. Παρατηρούμε πως οι δρόμοι ισορροπίας για πυκνότερο πλέγμα (160 subdivisions), μικρότερη αρχική διέγερση ( $10^{-5}$ ), αλλά και για γραμμικό συνδυασμό 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> ιδιομορφής, πρακτικά ταυτίζονται



Διάγραμμα 3-3: Συγκεντρωτικοί δρόμοι ισορροπίας αναλύσεων μη-γραμμικής ανάλυσης γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες, για ατέλειες σύμφωνα με τα σχήματα των ιδιομορφών

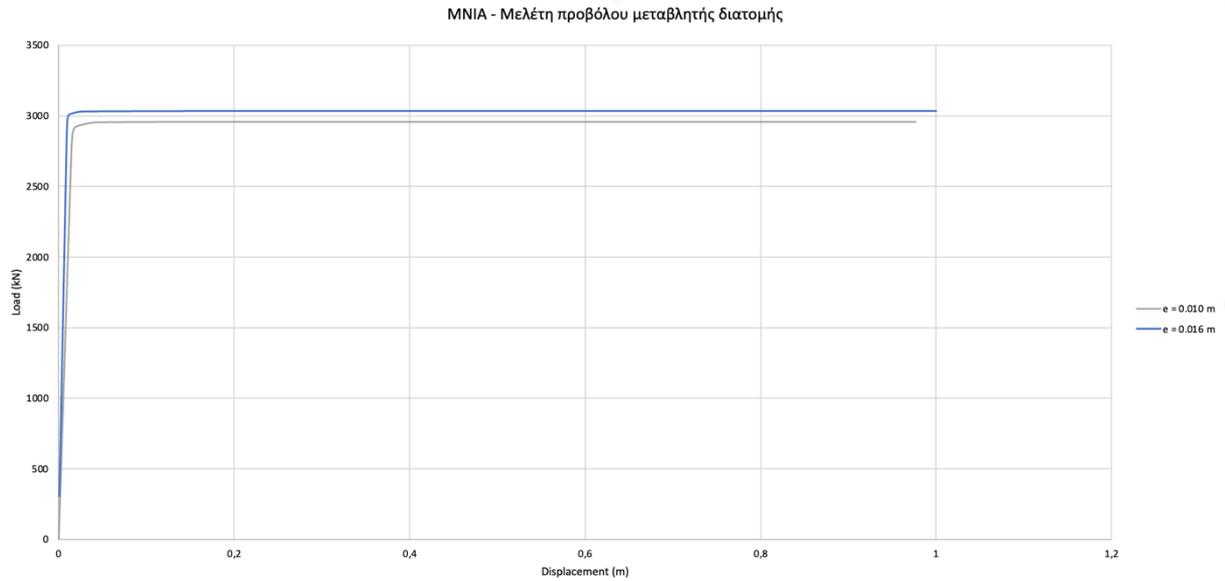
### 3.5.3 Μη γραμμικότητα υλικού

Στη συνέχεια θα ελέγξουμε την συμπεριφορά του φορέα για μη γραμμικότητα υλικού, πάλι μέσω της collapse analysis, αλλά αυτή την φορά επιλέγοντας small displacement στις παραμέτρους ανάλυσης, προκειμένου να μη ληφθεί υπόψη η μη γραμμικότητα γεωμετρίας.

Θυμίζουμε σε αυτό το σημείο πως έχουμε επιλέξει διατομές με λυγηρότητες κοντά στο ένα, επομένως περιμένουμε διαρροή και λυγισμός να συμβαίνουν σχεδόν ταυτόχρονα

Θεωρούμε χάλυβα S235 με νόμο υλικού ελαστικό-απολύτως πλαστικό

Προκύπτουν οι παρακάτω δρόμοι ισορροπίας



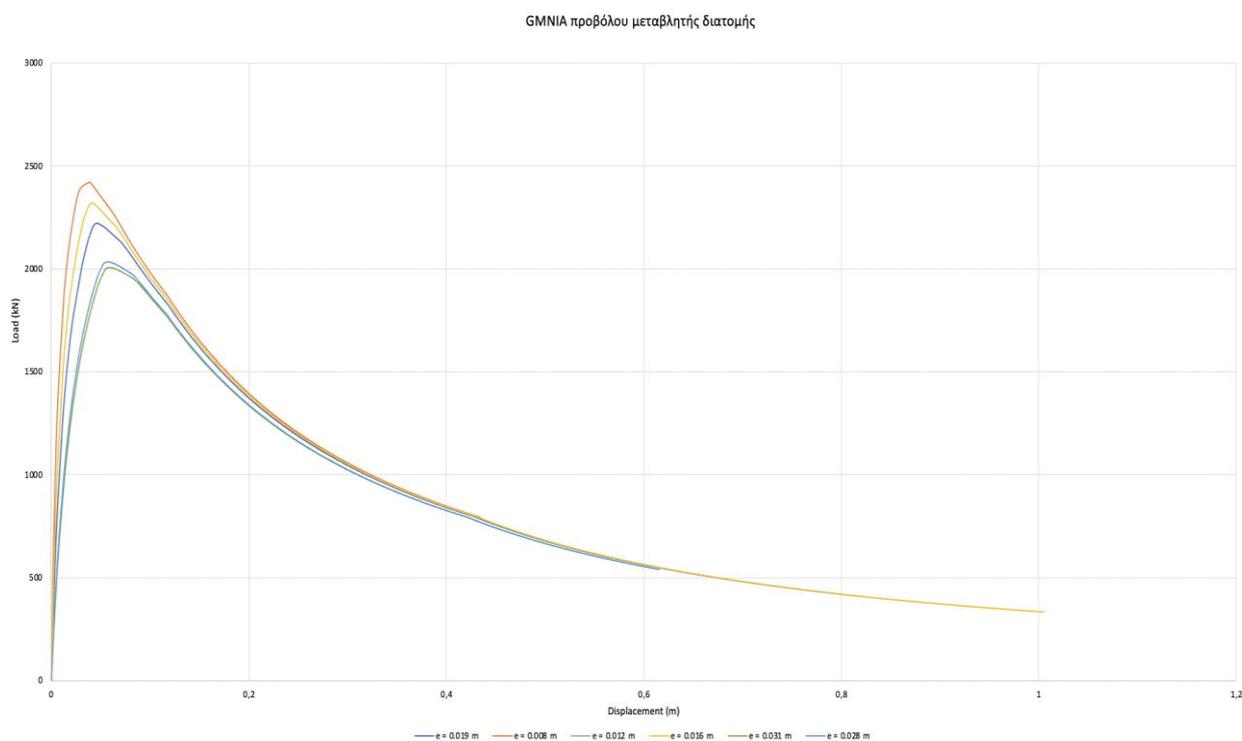
Διάγραμμα 3-4: Συγκεντρωτικοί δρόμοι ισορροπίας αναλύσεων μη-γραμμικότητας υλικού με αρχικές ατέλειες, για ατέλειες σύμφωνα με τα σχήματα των ιδιομορφών

- Παρατηρούμε πως πράγματι τα φορτία αστοχίας των δυο μη-γραμμικότητων βρίσκονται κοντά, επομένως αναμένουμε αλληλεπίδραση

#### 3.5.4 Μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες

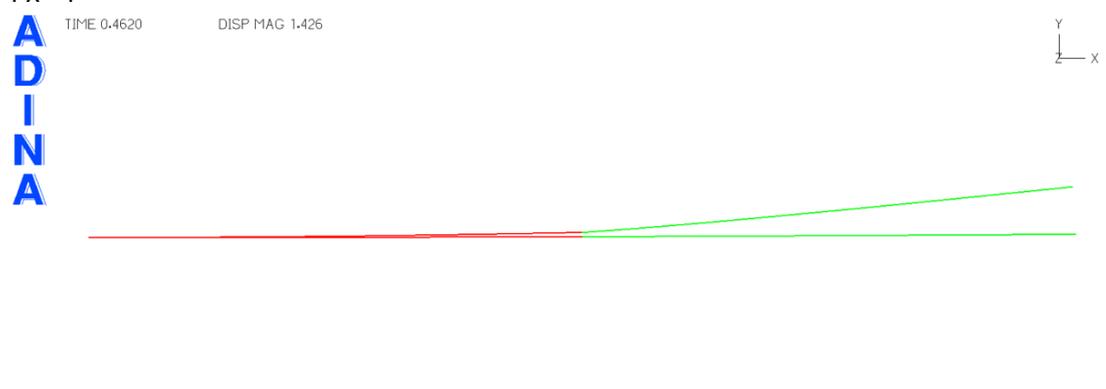
Στη συνέχεια εισάγεται ελαστικό-απολύτως πλαστικό υλικό χάλυβα S235, προκειμένου να πραγματοποιηθεί ανάλυση μη γραμμικότητας υλικού και γεωμετρίας (GMNIA).

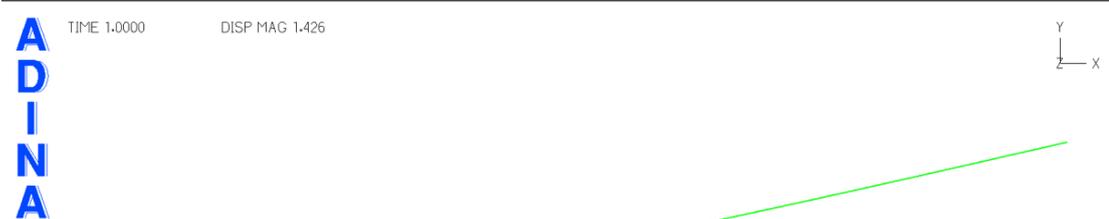
Με το αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης θα συγκρίνουμε το φορτίο που υπολογίσαμε με την εφαρμογή των σχέσεων του κανονισμού



Διάγραμμα 3-5: Συγκεντρικοί δρόμοι ισορροπίας αναλύσεων GMNIA για ατέλειες σύμφωνα με τα σχήματα των ιδιομορφών

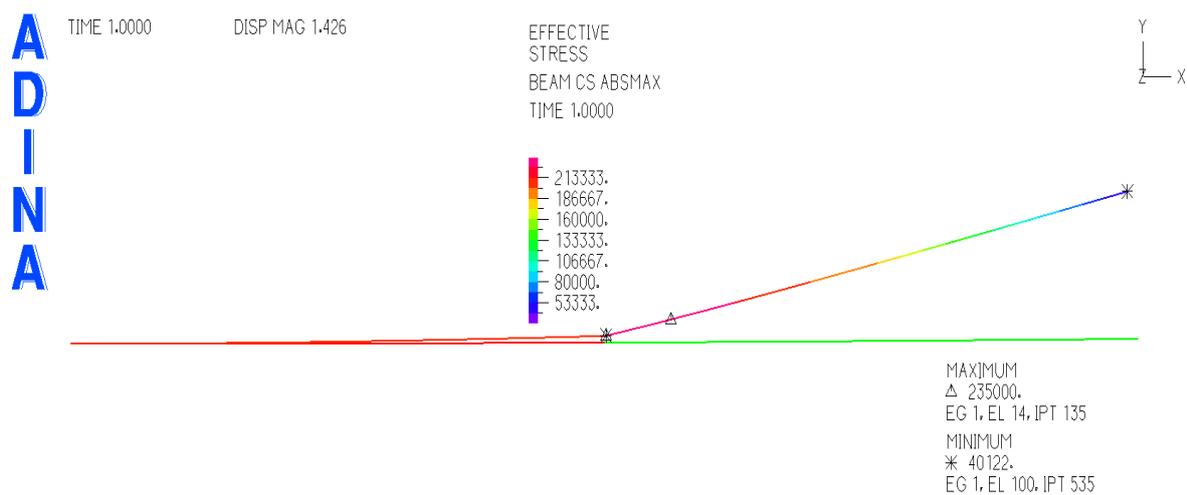
- Διάγραμμα τάσεων GMNIA και εικόνες παραμόρφωσης κατά την αστοχία για την μέγιστη αρχική ατέλεια





Σχήμα 3-9: Πορεία παραμόρφωσης ανάλυσης GMNIA με ατέλεια με το σχήμα της πρώτης ιδιομορφής, προβόλου μεταβλητής διατομής

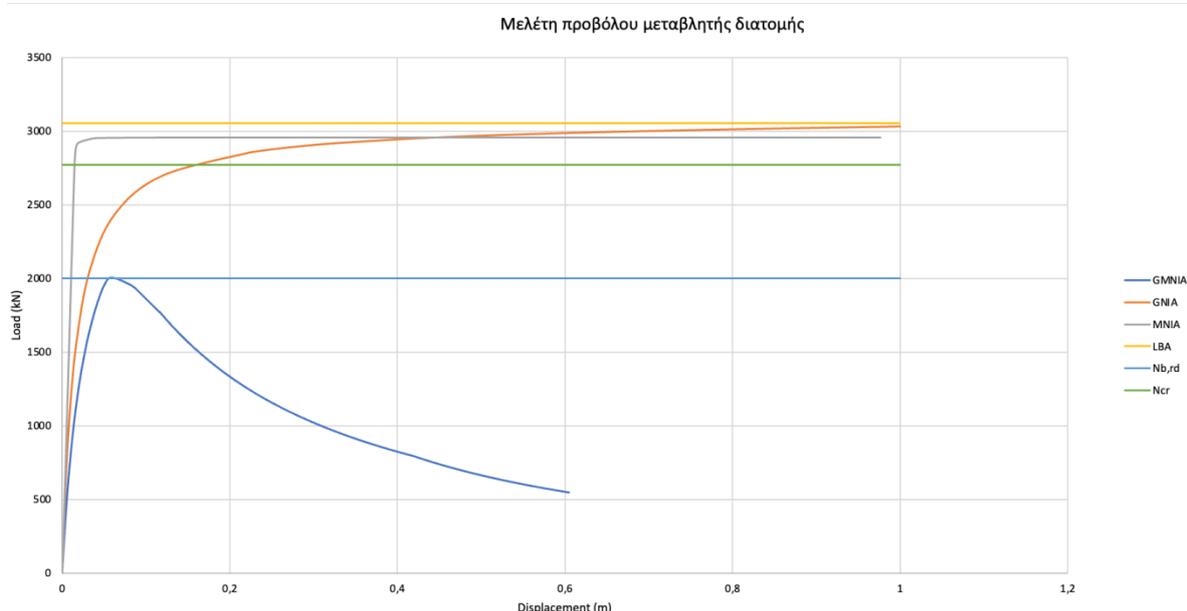
#### Διάγραμμα τάσεων GMNIA



Σχήμα 3-10: Διάγραμμα τάσεων GMNIA για ατέλεια σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή και πλάτος 0.031 m

### 3.6 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

- Συγκεντρωτικά οι δρόμοι ισορροπίας του συνόλου των αναλύσεων για την μέγιστη αρχική ατέλεια φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα



Διάγραμμα 3-6: Συγκεντρωτικοί δρόμοι ισορροπίας αναλύσεων προβόλου μεταβλητής διατομής

Στην παράγραφο 2.5.1 αναλύσαμε τους διαφορετικούς τρόπους λήψης των αρχικών ατελειών και αναφέραμε πως κατά την εκτέλεση των μη-γραμμικών αναλύσεων υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες θα γίνει η σύγκριση της συνολικής αντοχής του φορέα για κάθε περίπτωση ατελειών. Τα αποτελέσματα φαίνονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα.

Ατέλεια EN1993-1-1 Περίπτωση α	Ατέλεια EN1993-1-1 Περίπτωση β	Ατέλεια EN1993-1-1 Περίπτωση γ	Ατέλεια UGLI
2131.13 kN	2100.74 kN	2111.32 kN	2016 kN

Πίνακας 3-1 Συγκριτικά αποτέλεσμα συνολικής αντοχής φορέα σε διαρροή και λυγισμό για τους διαφορετικούς τρόπους λήψης αρχικών ατελειών

### 3.7 Συμπεράσματα

Μέσα από το σύνολο των αναλύσεων για τον πρόβολο αποτελούμενο από δύο διαφορετικές διατομές, υπό σταθερή θλιπτική δύναμη στη άκρη προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα

- Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή των κανονιστικών σχέσεων φαίνονται ιδιαίτερα αξιόπιστα, καθώς δίνουν αποτελέσματα παρεμφερή με αυτά των αριθμητικών αναλύσεων
- Για την εύρεση της συνολικής αντοχής συνίσταται να λαμβάνεται ως κρίσιμο φορτίο το μικρότερο εκ των δύο και στην συνέχεια να γίνεται εφαρμογή των σχέσεων της παραγράφου 8 του EN-1993-1-1 για μέλος υπό θλίψη, κατά τα γνωστά

- Προτείνεται για λόγους υπολογιστικής ακρίβειας, αλλά και ταχύτερης σύγκλισης του λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων να χρησιμοποιείται ως ατέλεια η μοναδική τοπική και καθολική ατέλεια UGLI, όπως στο παράδειγμα εφαρμογής του κεφαλαίου 1

## 4 ΘΛΙΒΟΜΕΝΟ ΠΕΛΜΑ ΔΙΚΤΥΩΤΗΣ ΓΕΦΥΡΑΣ ΚΑΤΩ ΔΙΑΒΑΣΗΣ

### 4.1 Εισαγωγή

Σε πολλές γέφυρες ο φορέας τους αποτελείται από ραβδωτά στοιχεία που έχουν αυξημένη αντοχή αλλά λόγω των διαστάσεων τους καθοριστικό ρόλο στο δομοστατικό σχεδιασμό τους παίζουν κυρίως οι μετατοπίσεις-παραμορφώσεις και λιγότερο η ανελαστική συμπεριφορά των υλικών.

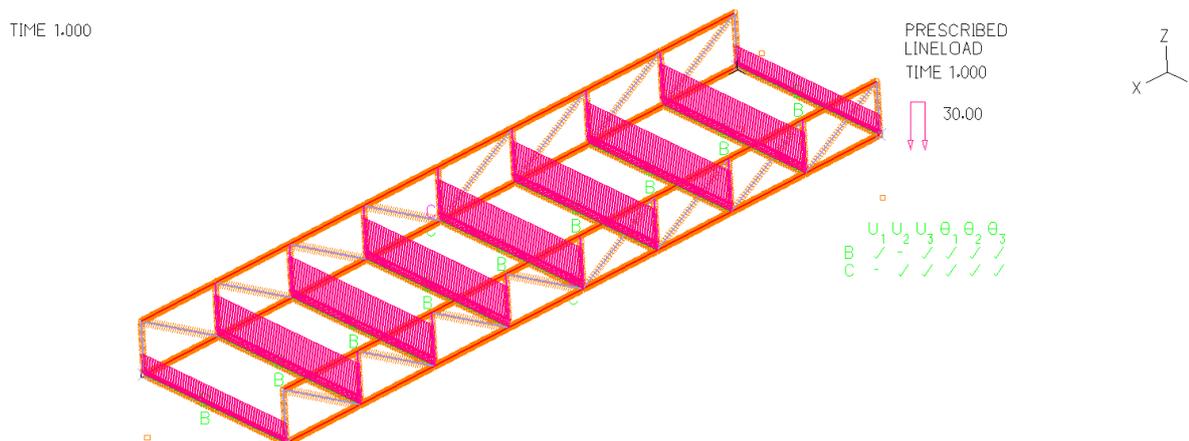
Το πρόβλημα προσδιορισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού για την περίπτωση του άνω θλιβόμενου πέλματος μια δικτυωτής ή ολόσωμης γέφυρας κάτω διάβασης, μελετήθηκε από πολλούς ερευνητές όπως ο Timoshenko και ο Bleich, εφαρμόζοντας τη θεωρία γραμμικής ευστάθειας, και τελικά κατέληξαν σε διάφορες προσεγγιστικές μεθόδους για τον υπολογισμό του. Ο αντίστοιχος έλεγχος ευστάθειας έχει αποδειχθεί αναγκαίος για γέφυρες κάτω διάβασης εξαιτίας της απουσίας άνω αντανέμιου συνδέσμου. Σε αυτού του είδους τις γέφυρες, όπου το θλιβόμενο άνω πέλμα δεν διαθέτει πλευρική στήριξη, ο πλευρικός λυγισμός αποτρέπεται μέσω της ελαστικής ακαμψίας που προσφέρουν τα ανοιχτά άνω ημιπλαίσια. Καθένα από αυτά αποτελείται από την διαδοκίδα και τους δύο ορθοστάτες εκατέρωθεν της διαδοκίδας. Μια θεωρητική λύση αυτού του προβλήματος δόθηκε αρχικά από τον Timoshenko, στην προσέγγιση του οποίου βασίζονται και οι μετέπειτα διατάξεις του Ευρωκώδικα 3 - Μέρος 2.

Η φιλοσοφία των δύο μεθόδων βασίζεται στη θεώρηση ότι το άνω πέλμα της κύριας δοκού (είτε δικτυωτής, είτε ολόσωμης), προσομοιάζεται με μια αμφιαρθρωτή δοκό, εδραζόμενη επί ελαστικού εδάφους, με πλήρως άκαμπτες τις ακραίες στηρίξεις και με την αξονική θλιπτική καταπόνηση να ακολουθεί μια παραβολική κατανομή.

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει αρχικά επίλυση του φορέα με τις δύο προαναφερθείσες μεθόδους προκειμένου να ευρεθεί το κρίσιμο φορτίο αρχικά και στην συνέχεια η συνολική αντοχή του φορέα σε λυγισμό και διαρροή. Έπειτα τα αποτελέσματα θα συγκριθούν με αυτά ενός μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων στο λογισμικό Adina

## 4.2 Περιγραφή φορέα

Θα ξεκινήσουμε με την περιγραφή του προς επίλυση φορέα πριν περάσουμε στις πρώτες επιλύσεις. Αυτός θα είναι μία δικτυωτή πεζογέφυρα κάτω διάβασης μήκους 24 μέτρων, πλάτους 6 μέτρων, με τις διαδοκίδες να διατάσσονται ανά 3 μέτρα. Ο φορέας συνίσταται από διατομές CHS 273x10 στα πέλματα των δικτυωμάτων και στους ορθοστάτες στις άκρες, CHS 168,3x12,5 στους υπόλοιπους ορθοστάτες και HEB 400 στις διαδοκίδες, ενώ φορτίζεται με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο 30 kNm στις ενδιάμεσες διαδοκίδες και 15 kNm στις διαδοκίδες στις άκρες. Τέλος, κάθε δικτύωμα έχει ύψος 1.80 m, ενώ το σύνολο των μελών συνίσταται από δομικό χάλυβα S355. Ο φορέας στηρίζεται σε 4 ελαστομεταλλικά εφάδρανα δυσκαμψίας  $2000 \frac{kN}{m}$ .



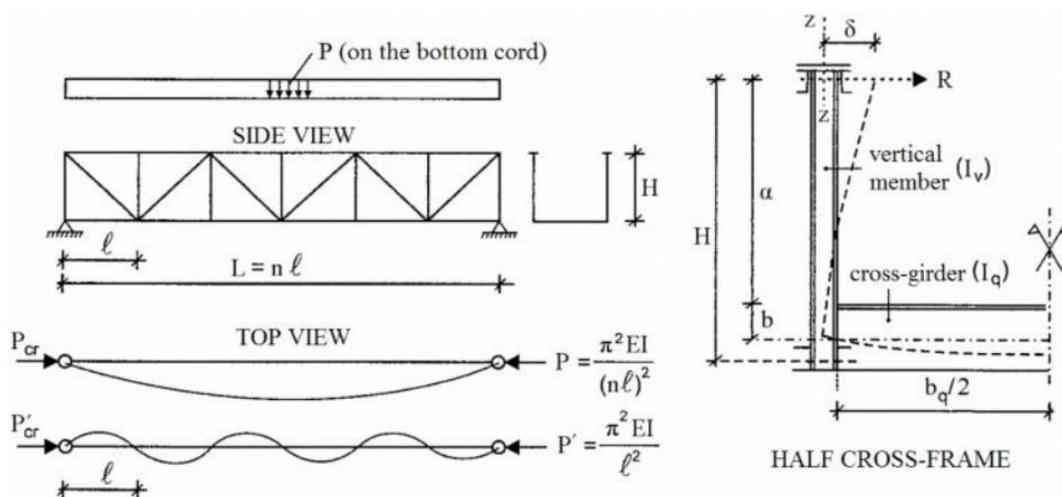
Σχήμα 4.1: Μοντέλο φορέα δικτυωτής γέφυρας άνω διάβασης

### 4.2.1 Αναλυτικός υπολογισμός κρίσιμου φορτίου ελαστικού λυγισμού θλιβόμενου άνω πέλματος

Σε δικτυωτές ή ολόσωμες γέφυρες κάτω διάβασης, σε περιπτώσεις όπου τα θλιβόμενα άνω πέλματα δεν έχουν άνω αντανέμιο σύνδεσμο, εξασφαλίζονται έναντι πλευρικής εκτροπής (καθέτως προς το επίπεδο των κυρίων δοκών) μέσω των εγκάρσιων συνδέσμων, δηλαδή των άνω ανοιχτών ημιπλαισίων, συντιθέμενα από τη διαδοκίδα και τους αντίστοιχους προς αυτήν ορθοστάτες (για δικτυωτές κύριες δοκούς), ή τα γωνιακά ακαμψίας (για ολόσωμες κύριες δοκούς).

Οι σύνδεσμοι αυτοί, τοποθετημένοι ανά ίσες αποστάσεις κατά μήκος της γέφυρας (στις θέσεις των διαδοκίδων), εξασφαλίζουν λόγω της ακαμψίας τους μία πλευρική ελαστική υποστήριξη στα άνω πέλματα των κυρίων δοκών, μειώνοντας έτσι τις ανεπιθύμητες πλευρικές εκτροπές. Για να θεωρηθεί επαρκής η ασφάλεια του άνω θλιβόμενου πέλματος έναντι του κινδύνου καμπτικού λυγισμού, πρέπει η ακαμψία των ημιπλαισίων να είναι μεγαλύτερη από κάποιο ελάχιστο όριο. Τα ημιπλαίσια αυτά κατασκευάζονται ίδια, εκτός των ακραίων, τα οποία κατασκευάζονται συνήθως ισχυρότερα, ώστε να μπορούν να θεωρηθούν τελείως άκαμπτα.

Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται μια δικτυωτή γέφυρα με τον αντίστοιχο εγκάρσιο σύνδεσμο.



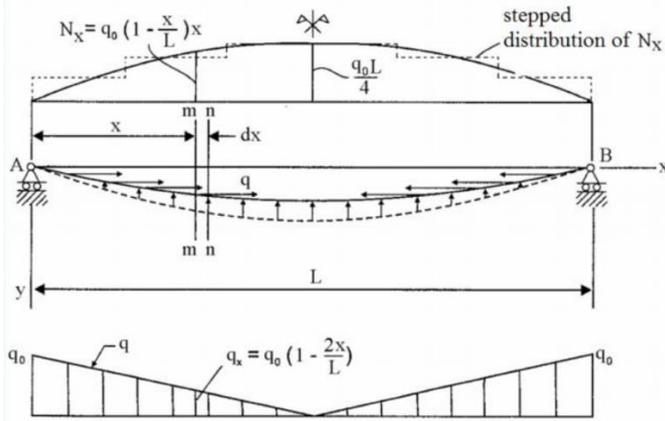
Σχήμα 4-2: Δικτυωτή γέφυρα με τον αντίστοιχο εγκάρσιο σύνδεσμο από Σταθόπουλο Α. (2013)

Όταν οι εγκάρσιοι σύνδεσμοι έχουν ελάχιστη ακαμψία, το άνω θλιβόμενο πέλμα λυγίζει κατά ένα ημικύμα μήκους  $L$ , αφού δεν υπάρχει ενδιάμεσα κάποια πλευρική ελαστική στήριξη. Όταν όμως οι σύνδεσμοι έχουν επαρκή ακαμψία, τότε το άνω πέλμα λυγίζει κατά ημικύματα μήκους ίσου προς την απόσταση των διαδοκίδων. Στις δύο ακραίες αυτές περιπτώσεις, τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία, για καμπτικό λυγισμό, έχουν λόγο  $P'_{cr} / P_{cr} = n^2$

Για ενδιάμεσες τιμές ακαμψίας των ημιπλαισίων, ο λυγισμός γίνεται κατά ημικύματα ενδιάμεσου μήκους και το αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο βρίσκεται ανάμεσα στα δύο προηγούμενα όρια. Τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση που το άνω θλιβόμενο πέλμα έχει σε όλο το μήκος του σταθερό εμβαδόν και σταθερή αξονική θλιπτική δύναμη, ενώ συγχρόνως τα ακραία ημιπλάσια είναι τελείως άκαμπτα. Στην πραγματικότητα όμως, η μεν αξονική δύναμη είναι πάντα μεταβλητή από φάτνωμα σε φάτνωμα (ή και ανά δύο φατνώματα, ανάλογα με τη μορφή της δικτύωσης), ενώ το εμβαδόν είναι δυνατόν να μεταβάλλεται κατά μήκος του άνω πέλματος. Επίσης, τα ακραία ημιπλάσια μπορεί να μην είναι τελείως άκαμπτα. Το πρόβλημα του υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου του άνω θλιβόμενου πέλματος στη γενική του μορφή μελετήθηκε από πολλούς ερευνητές όπως ο Timoshenko, ο Bleich κ.α., με εφαρμογή της γραμμικής θεωρίας ευστάθειας και έχουν διατυπώσει προσεγγιστικές μεθόδους υπολογισμού. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις βασικές αυτές μαθοδολογίες.

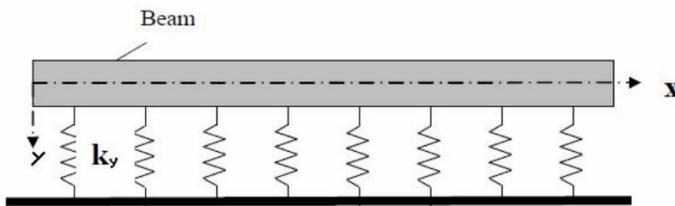
#### 4.2.2 Μέθοδος Timoshenko

Θεωρούμε αμφιαρθρωτή ράβδο η οποία έχει σταθερό εμβαδόν κατά μήκος του άξονά της και υπόκειται σε ένα αξονικό θλιπτικό φορτίο  $q$ , με τιμή στα μεν άκρα  $q=q_0$ , στη δε μέση  $q=0$ . Η μορφή της φόρτισης αυτής αντιστοιχεί, κατά προσέγγιση, με την αξονική καταπόνηση των ράβδων του άνω πέλματος ενός δικτυώματος. Στην πραγματικότητα, το διάγραμμα των αξονικών δυνάμεων των ράβδων είναι κλιμακωτής (πριωνωτής) μορφής, αλλά σε περιπτώσεις όπου τα φατνώματα είναι πολλά, η γραμμικοποίηση του διαγράμματος δίνει αρκετά καλή προσέγγιση. Πιο συγκεκριμένα, σε απόσταση  $\chi$  από το αριστερό άκρο, η θλιπτική δύναμη της ράβδου είναι το εμβαδόν του διαγράμματος αυτού μέχρι τη θέση  $\chi$ . Τα παραπάνω φαίνονται αναλυτικότερα στο σχήμα που ακολουθεί



Σχήμα 4-3: Αμφιαρθρωτή θλιβόμενη ράβδος με ελαστικές στηρίξεις

Η πλευρική ελαστική στήριξη της ράβδου θεωρείται συνεχής, με μέτρο ελαστικής στήριξης  $c=Cd / \ell$ , όπου το  $Cd$  είναι η κοινή ακαμψία των ενδιάμεσων ημιπλαισίων και  $\ell$  η μεταξύ τους απόσταση. Η παραδοχή αυτή είναι ακριβέστερη, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των ενδιάμεσων στηρίξεων της ράβδου.



Σχήμα 4-4: Ελαστική έδραση τύπου Winkler

Στη συνέχεια με εφαρμογή της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας προκύπτει το κρίσιμο φορτίο ελαστικού λυγισμού σύμφωνα με τον Timoshenko

$$Ncr = \left(\frac{q_0 \cdot L}{4}\right) cr = \frac{(\pi^2) \cdot E \cdot Iz}{(\beta l)^2} \quad (4.1)$$

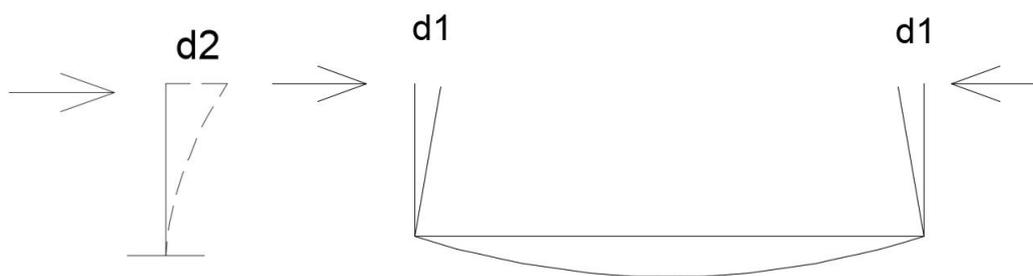
Ο συντελεστής  $\beta$  υπολογίζεται από το παρακάτω πίνακα σε σχέση με τον αδιάστατο δείκτη  $\Psi$

$$\Psi = \frac{cL^4}{16 \cdot E \cdot Iz} \quad (4.2)$$

$\Psi$	0	5	10	15	22.8	56.5	100	162.8	200	300	500	1000
$\beta$	0.696	0.524	0.443	0.396	0.363	0.324	0.290	0.259	0.246	0.225	0.204	0.174

Πίνακας 4-1: Τιμές συντελεστή  $\beta$

Στην συνέχεια θα πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να υπολογίσουμε την σταθερά δυσκαμψίας των ελατηρίων που αντικαθιστούν τα άνω ανοιχτά ημιπλάισια



Εικόνα 4-1 Υπολογισμός δυσκαμψίας άνω ανοιχτών ημιπλασιών

Γνωρίζουμε πως η δυσκαμψία ενός μέλους με μετατόπιση  $d$ , εξαιτίας μίας δύναμης  $F$ , δίνεται από την σχέση:

$$C_d = \frac{F}{d} \quad (4.2)$$

Όμως στην περίπτωση μας η συνολική μετακίνηση προκύπτει ως άθροισμα των  $d_1$ ,  $d_2$ , οι οποίες ισούνται με την μετακίνηση εξαιτίας της παραμόρφωσης του ορθοστάτη με απαραμόρφωτη τη διαδοκίδα και την μετακίνηση εξαιτίας της στροφής του κόμβου στήριξης με απαραμόρφωτο τον ορθοστάτη. Επομένως αν ο πρόβολος έχει μήκος  $L$  και ύψος  $h$  και γωνία στροφής  $\varphi$ , ενώ το πλάτος της διαδοκίδας είναι ίσο με  $b$

$$d_1 = \frac{F L^3}{3 E I_v} \quad (4.3)$$

$$d_2 = \tan(\varphi) * h \Rightarrow$$

$$d_2 = \frac{F h^2 b}{2 E I_q} \quad (4.4)$$

Άρα προσθέτοντας της δύο μετακινήσεις καταλήγουμε στην σχέση της δυσκαμψίας που θα χρησιμοποιήσουμε και η οποία είναι ισοδύναμη με αυτή του CEN/TR 1993-1-103, καθώς έχουν προκύψει με την ίδια διαδικασία

$$C_d = \frac{E}{\frac{h^3}{3I_v} + \frac{h^2 b}{2I_q}} \quad (4.5)$$

Στην περίπτωση μας προκύπτουν τα ακόλουθα

$$C = \frac{C_d}{l} = 0.11 \frac{kN}{cm^2} \quad (4.6)$$

$$\Psi = 1550.94 \quad (4.7)$$

$$\beta = 0.12 \quad (4.8)$$

$$N_{cr} = 17876 \text{ kN} \quad (4.9)$$

Επιπλέον μία από τις παρατηρήσεις που προκύπτει μέσα από την συγκεκριμένη θεωρία είναι πως για μια ράβδο σταθερής διατομής, που υπόκειται σε σταθερή θλιπτική δύναμη σε όλο το μήκος της, ενώ στηρίζεται πλευρικά σε  $n-1$  ενδιάμεσες ισαπέχουσες ελαστικές στηρίξεις με δείκτη  $C_d$ , η ράβδος αρχίζει να συμπεριφέρεται ως συνεχής επί ανυποχώρητων στηρίξεων, όταν ο δείκτης  $C_d$  αποκτήσει τιμές που δίνονται από τη σχέση,

$$C_d = \frac{n^3 * \pi^2 * E * I_f}{\gamma * L^3} = 208.81 \frac{kN}{cm^2} \quad (4.10)$$

Στην παραπάνω σχέση ο δείκτης  $n$  αναφέρεται στον αριθμό των φατνωμάτων,  $I_f$  είναι η ροπή αδράνειας στο εγκάρσιο επίπεδο της γέφυρας,  $L/n$  το μήκος των επιμέρους φατνωμάτων

Οι τιμές του συντελεστή  $\gamma$ , ο οποίος εξαρτάται από τον αριθμό των φατνωμάτων, δίνεται στον επόμενο πίνακα για σταθερή τιμή της αξονικής δύναμης.

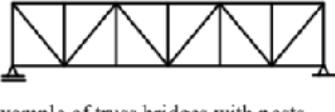
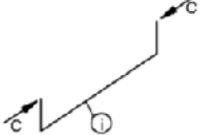
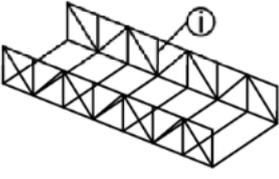
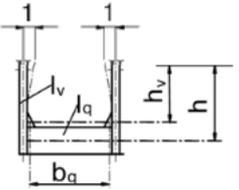
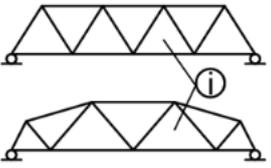
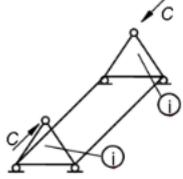
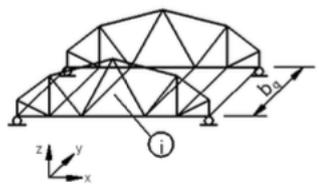
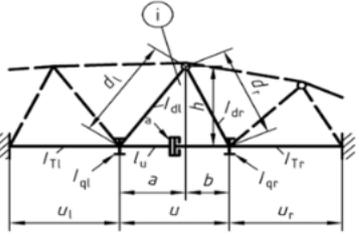
n	2	3	4	5	6	7	9	11	$\infty$
$\gamma$	0.500	0.333	0.293	0.276	0.268	0.263	0.258	0.255	0.250

Πίνακας 4-2: Τιμές συντελεστή  $\gamma$  για σταθερή αξονική και διατομή σύμφωνα με τη θεωρία Timoshenko

#### 4.2.3 Εύρεση κρίσιμου φορίου με το CEN/TR 1993-1-103

Στο μέρος 2 του Ευρωκώδικα 3 αναφέρεται πως οι θλιβόμενοι ράβδοι πελμάτων δικτυωτών δοκών θα πρέπει να ελέγχονται έναντι πλευρικής εκτροπής, στην περίπτωση που δεν είναι πλήρως εξασφαλισμένες πλευρικά.

Σύμφωνα με την προσέγγιση του κανονισμού τα θλιβόμενα αυτά πέλματα μπορούν να προσομοιωθούν με ένα υποστύλωμα το οποίο φορτίζεται με αξονική θλιπτική δύναμη και εδράζεται επί ελαστικών στηρίξεων (μετακινησιακά ελατήρια). Η δυσκαμψία αυτών των ελαστικών στηρίξεων είναι ίση με αυτήν του ανοιχτού ημιπλαισίου ορθοστάτης-διαδοκίδα-ορθοστάτης, σύμφωνα με την σχέση που ακολουθεί

	1	2
1	 <p>Example of truss bridges with posts</p>	
1a	 <p>Modelling</p>	 $C = \frac{EI_v}{\frac{h_v^3}{3} + \frac{h^2 b_q I_v}{2I_q}}$
2	 <p>Example of truss bridges without posts</p>	 <p>2U-frame in truss bridges without posts</p>
2a	 <p>Modelling</p>	 <p>*) torsional hinge</p> <p>Modelling: bottom chord of the U-frame with flexural stiffness <math>I_t</math> only, adjacent bottom chords with torsional stiffness <math>I_T</math></p>
2b	spring stiffness $C = \frac{A+B-2D}{AB-D^2} EI_u$	
2c	$A = \frac{h^2 I_u}{n_t} + \frac{d_t^3 I_u}{3I_{dt}} + \frac{a^2 u}{3} \quad n_t = \frac{2}{b_q} I_{qt} + \frac{GI_{Tt}}{Eu_t}$ $B = \frac{h^2 I_u}{n_r} + \frac{d_r^3 I_u}{3I_{dr}} + \frac{b^2 u}{3} \quad n_r = \frac{2}{b_q} I_{qr} + \frac{GI_{Tr}}{Eu_r}$ $D = \frac{1}{6} abu$ <p>The length <math>d_t</math>, <math>d_r</math>, <math>a</math>, <math>b</math>, <math>u</math> and <math>b_q</math> may be reduced in case of rigid ends.  <math>u_t</math> and <math>u_r</math> may be reduced in case of end that are torsionally rigid.</p> <p><math>EI_{dt}</math>, <math>EI_{dt}</math>, <math>EI_u</math> = bending stiffness of diagonals and bottom chords for out-of-plane bending  <math>EI_{qt}</math>, <math>EI_{qr}</math> = bending stiffness of the crossbeam  <math>GI_{Tt}</math>, <math>GI_{Tr}</math> = St. Venant torsional stiffness of the adjacent chords</p>	

Πίνακας 4-3: Υπολογισμός σταθερών δυσκαμψίας ελαστικών στηρίξεων σύμφωνα με το CEN/TR 1993-1-103

Στην περίπτωση μας, όπου οι ορθοστάτες των ενδιάμεσων ημιπλαισίων είναι διατομής CHS 168.3x12.5 και οι διαδοκίδες HEB400, υπολογίζουμε

$$Cd_1 = \frac{21000 \cdot 1868}{\left(\frac{140^3}{3}\right) + (160^2) \cdot 600 \cdot \frac{1868}{2 \cdot 57680}} = 33.71 \frac{kN}{cm} \quad (4.11)$$

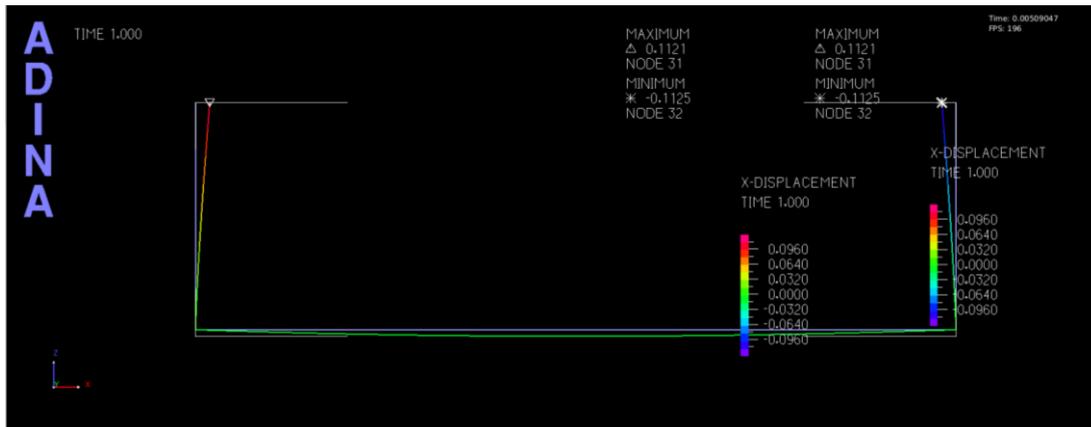
Ενώ στα ακραία ημιπλάσια όπου οι ορθοστάτες είναι διατομής CHS 273x10 υπολογίζουμε,

$$Cd_2 = \frac{21000 \cdot 7154}{\frac{157^3}{3} + (180^2) \cdot 600 + \frac{7150}{57680}} = 60.20 \frac{kN}{cm} \quad (4.12)$$

Η επάρκεια της σχέσης του κανονισμού θα ελεγχθεί με την δημιουργία ενός απλού άνω ανοιχτού πλαισίου στο λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων με ορθοστάτες παρόμοιες με αυτές των ενδιάμεσων πλαισίων και διαδοκίδες CHS 273x10, επομένως  $Cd = 10.85 \frac{kN}{cm}$ . Στην συνέχεια θα ασκήσουμε στις άνω γωνίες του δικτυώματος δύναμη 100 kN. Σύμφωνα με την παραπάνω τιμή της δυσκαμψίας η αναμενόμενη τιμή της μετατόπισης είναι

$$\delta = \frac{100}{1080.72} = 0.094 \text{ m}$$

Παρατηρούμε πως η τιμή αυτή σχεδόν επαληθεύεται



Σχήμα 4-5: Παραμόρφωση ημιπλαισίου με φόρτιση 100 kN για έλεγχο σχέσης κανονισμού

Για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου και στην συνέχεια του μειωτικού συντελεστή, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με την φύση της αξονικής φόρτισης

4.2.3.1 Η αξονική δύναμη είναι σταθερή

4.2.3.1.1 Παλιός κανονισμός

Το κρίσιμο φορτίο δίνεται από την παρακάτω σχέση συναρτήσεως του κρίσιμου φορτίου ελαστικού λυγισμού του θλιβόμενου πέλματος χωρίς πλευρικές εξασφαλίσεις

$N_{crit} = m \cdot N_{cr}$ , όπου  $N_{cr}$  είναι το κρίσιμο φορτίο ελαστικού λυγισμού του μέλους με εξασφαλίσεις στα άκρα

$$\text{Στην περίπτωση μας } N_{cr} = \frac{(\pi^2) \cdot 21000 \cdot 7150}{(2400^2)} = 257.28 \text{ kN} \quad (4.13)$$

$$m = \frac{2 \cdot \sqrt{\gamma}}{(\pi^2)}, \text{ όπου } \gamma = \frac{c \cdot (L^4)}{E \cdot I_f}, \text{ και } c = \frac{Cd}{l}, \text{ άρα}$$

Να σημειωθεί πως στις προηγούμενες σχέσεις το μήκος  $L$  αφορά την απόσταση μεταξύ ακλόνητων άκρων, δηλαδή το συνολικό μήκος της γέφυρας, ενώ το μήκος  $l$  την απόσταση μεταξύ των ανοιχτών ημιπλαισίων που προσομοιώνονται με τα μετακινησιακά ελατήρια. Τέλος η ροπή  $I_f$  αναφέρεται στην ροπή αδρανείας που ενεργοποιείται κατά την εκτροπή του μέλους εκτός επιπέδου.

Επομένως για την μελετώμενη γέφυρα

$$c = 0.11 \quad (4.14)$$

$$\gamma = 35.97 \frac{kN}{cm^2} \quad (4.15)$$

$$m = 35.94 \quad (4.16)$$

$$N_{crit} = 9260.25 \text{ kN} \quad (4.17)$$

#### 4.2.3.1.2 Νέος κανονισμός

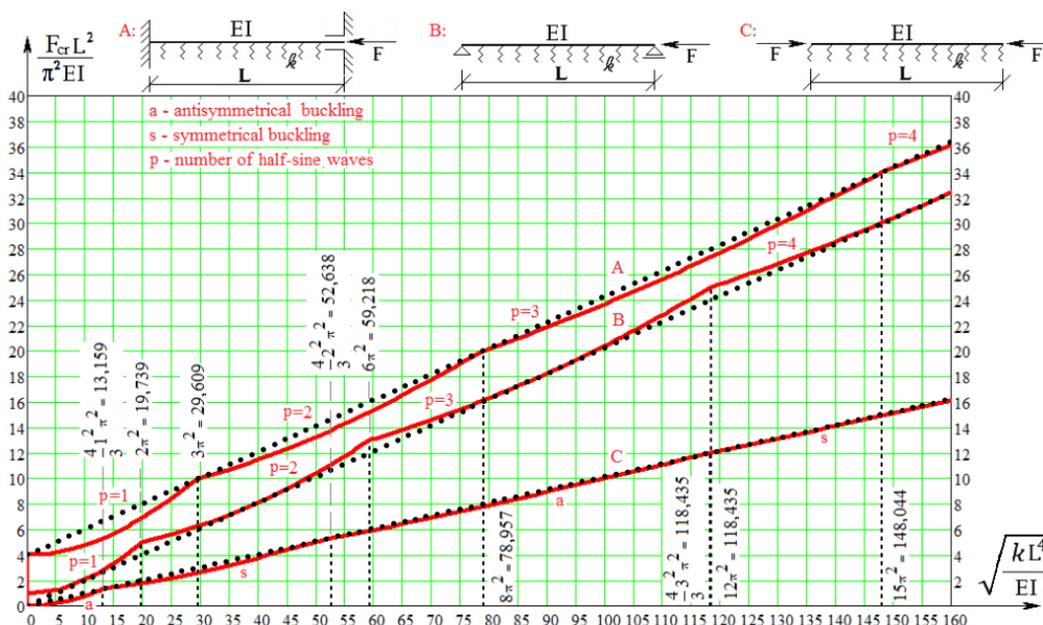
Στην παράγραφο 3.8.2 του CEN/TR 1993-1-103 περιγράφεται η νέα προτεινόμενη διαδικασία για τις περιπτώσεις όπου μία ράβδος βρίσκεται επί ελαστικών στηρίξεων. Για την περίπτωση όπου οι στηρίξεις είναι άνω των 7, όπως στην δική μας, οι ελαστικές στηρίξεις θεωρούνται πως

Αναλόγως τις συνθήκες στήριξης ο κανονισμός δίνει τις σχέσεις από τις οποίες θα προκύψει το κρίσιμο φορτίο ελαστικού λυγισμού. Στην περίπτωση όπου τα άκρα του φορέα είναι ελεύθερα το κρίσιμο φορτίο ελαστικού λυγισμού δίνεται από την σχέση

$$\frac{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{k+\pi^2} Fcr})}{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{k-\pi^2} Fcr})} \pm \frac{(\sqrt{k+\pi^2} Fcr) \sqrt{2\sqrt{k+\pi^2} Fcr}}{(\sqrt{k-\pi^2} Fcr) \sqrt{2\sqrt{k-\pi^2} Fcr}} \quad (4.18)$$

Η ακριβής λύση για το σύνολο των περιπτώσεων δίνεται σε μορφή διαγράμματος για τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Εύκολα κανείς αντιλαμβάνεται το ποσοστό αύξησης του κρίσιμου φορτίου σε περίπτωση που οι συνθήκες στήριξης μεταβληθούν και γίνουν αρθρώσεις.

Στην πράξη αυτό όμως είναι αδύνατο καθώς θα απαιτούνταν τα ακραία ημιπλαίσια να έχουν εκατό, ή και χίλιες φορές την δυσκαμψία των ενδιάμεσων. Αυτός είναι ο λόγος που η περίπτωση μας προσομοιάζεται καλύτερα από την καμπύλη C. Η θεώρηση όμως σταθερής δύναμης αναμένεται να οδηγήσει σε σημαντικό σφάλμα από την πλευρά της ασφάλειας, με αποτέλεσμα να αποτελεί στην ουσία ένα κάτω όριο.



Διάγραμμα 4-1: Διάγραμμα 3.79 του CEN/TR 1993-1-103 όπου αναπαρίσταται η σχέση της  $\frac{F_{cr}}{F_e}$  για διαφορετικές συνθήκες στήριξης

$$\text{Υπολογίζουμε } k = \frac{33.17}{300} = 0.1123 \text{ kN/cm}^2, \sqrt{\frac{k*(L^4)}{E*I}} = 157.53 \quad (4.18)$$

Επομένως αν θεωρήσουμε πως τα άκρα είναι τελείως ελεύθερα, πράγμα που σημαίνει ότι η δυσκαμψία των ελατηρίων που προσομοιάζουν τα ακραία ανοιχτά ημιπλαίσια, είναι ίδια με τα ενδιάμεσα τότε από το διάγραμμα  $F_{cr}/F_e = 15.80 \Rightarrow F_{cr} = 7965.03 \text{ kN}$  (4.19)

Η δυσκαμψία των ακραίων ημιπλαισίων είναι διπλάσια από αυτή των ενδιάμεσων, επομένως η προηγούμενη παραδοχή δεν είναι ακριβής. Αν υποθέσουμε πως οι στηρίξεις είναι αρθρώσεις, τότε από την καμπύλη B =>  $F_{cr}/F_e = 31 \Rightarrow F_{cr} = 15611.46 \text{ kN}$  (4.20)

#### Υπολογισμός συνολικής θλιπτικής αντοχής

Με βάση την παράγραφο 8 του Ευρωκώδικα 3 υπολογίζουμε για τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις

##### Ελεύθερα άκρα

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{82.6 \cdot 35.5}{7965.03}} = 0.606 \text{ (4.21)}$$

$$\alpha = 0.21 \text{ (4.22)}$$

$$\Phi = 0.727 \text{ (4.23)}$$

$$\chi = 0.88 \text{ (4.24)}$$

$$N_{b,rd} = \frac{82.6 \cdot 35.5 \cdot 0.88}{1} = 2549.55 \text{ kN (4.25)}$$

##### Αρθρώσεις στις στηρίξεις

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{82.6 \cdot 35.5}{15611.46}} = 0.434 \text{ (4.26)}$$

$$\alpha = 0.21 \text{ (4.27)}$$

$$\Phi = 0.622 \text{ (4.28)}$$

$$\chi = 0.940 \text{ (4.29)}$$

$$N_{b,rd} = \frac{82.6 \cdot 35.5 \cdot 0.94}{1} = 2762.05 \text{ kN (4.30)}$$

Συνθήκες στήριξης	Καμπύλη	$N_{b,rd}$ (kN)
Άρθρωση	B	2762.05
Ελεύθερα άκρα (Ελατήρια)	C	2549.55

Πίνακας 4-4: Συνολικά αποτελέσματα θλιπτικών αντοχών για διαφορετικές συνθήκες στήριξης

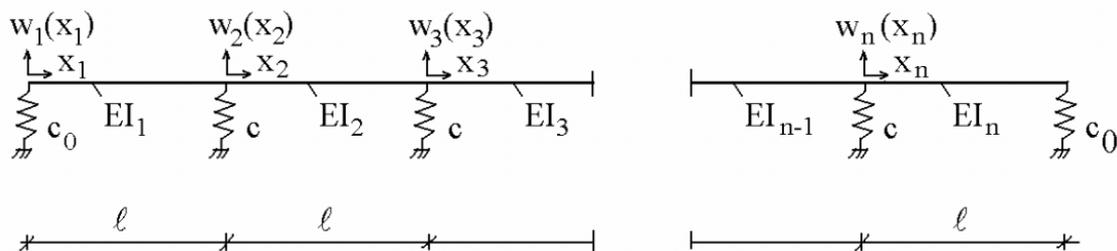
#### 4.2.3.2 Η αξονική δύναμη δεν είναι σταθερή

Η ακριβής επίλυση για την περίπτωση όπου η δύναμη που ασκείται σε ράβδο επί ελαστικών στηρίξεων δεν είναι σταθερή δεν δίνεται στον Ευρωκώδικα 3. Στον Ευρωκώδικα 9 υπάρχει μία προτεινόμενη διαδικασία, με την συμβουλή βέβαια να απευθυνθούμε στα αντίστοιχα εθνικά προσαρτήματα. Για τον λόγο αυτόν δεν θα αναπτυχθεί, καθώς ξεφεύγει από τον σκοπό της παρούσας διπλωματικής.

#### 4.2.4 Μέθοδος Ραυτογιάννη – Αβραάμ

Αναφορά αξίζει να γίνει στην μέθοδο που παρουσίασαν οι κύριοι Ραυτογιάννης και Αβραάμ για τον αναλυτικό υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου του άνω θλιβόμενου πέλματος

Αρχικά θεωρούμε δοκό ίσων ανοιγμάτων υπό αξονικό θλιπτικό φορτίο κλιμακωτής μορφής, που στηρίζεται σε ελατήρια με σταθερές  $C_0$  στην άκρη και C στην μέση



Εικόνα 4-1: Μοντέλο θλιβόμενου άνω πέλματος της μεθοδολογίας

Η λύση θα προκύψει στην λογική της μεθόδου που εφαρμόστηκε αναλυτικά στο μάθημα των Σιδηρών Κατασκευών 3. Ξεκινώντας από την διαφορική εξίσωση 4<sup>ης</sup> τάξης, η οποία είναι ανεξάρτητη συνοριακών συνθηκών καταλήγουμε στην έκφραση του βέλους κάθε ράβδου

$$W_i(x) = A_i \sin(k_i x_i) + B_i \cos(k_i x_i) + C X_i + D_i \quad (4.31)$$

$$\text{Με } k^2 = \frac{N_i}{EI_i} \quad (4.32)$$

Οι συντελεστές της εξίσωσης του βέλους θα προκύψουν από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών κάθε μέλους. Για παράδειγμα για το πρώτο και το τελευταίο μέλος έχουμε

$$M_1(0) = 0 \quad (4.33)$$

$$V(0) - c_0 w_1(0) = 0 \quad (4.34)$$

$$M_n(l) = 0 \quad (4.35)$$

$$V(l) + c_0 w(l) = 0 \quad (4.36)$$

Ενώ έχουμε επιπλέον και τις συνθήκες συνέχειας κάθε μέλους

$$W_{1-i}(l) = w_i(0) \quad (4.37)$$

$$W'_{1-i}(l) = w'_i(0) \quad (4.38)$$

$$M_{i-1}(l) + M_i(0) = 0 \quad (4.39)$$

$$V_{i-1}(l) - V_i(0) + c_0 w_i(0) = 0 \quad (4.40)$$

Με την ροπή και την τέμνουσα να δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις

$$M_1(x_i) = -EI_i w''(x_i) \quad (4.41)$$

$$V_i(x_i) = -EI_i w'''(x_i) - N_i w'_i(x_i) \quad (4.42)$$

Στη συνέχεια ορίζονται οι αδιάστατες ποσότητες

Το κρίσιμο φορτίο θα προκύψει αφού εκφράσουμε την οριζουσα ισορροπίας του συστήματος και απαιτήσουμε να έχει μη-τετριμμένη λύση, δηλαδή η οριζουσα να είναι μηδέν

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \dots & A_{i-1} & B_{i-1} & C_{i-1} & D_{i-1} & A_i & B_i & C_i & D_i & \dots & A_n & B_n & C_n & D_n & & \\
 0 & -\bar{k}^2 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 & \\
 0 & -\bar{c}_0 & -\bar{k}^2 & -\bar{c}_0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & B_1 & \\
 \dots & & & & \dots & & & & & & & & & \dots & & & & & & \dots & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & \sin \bar{k} & \cos \bar{k} & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & A_i & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & \bar{k} \cos \bar{k} & -\bar{k} \sin \bar{k} & 1 & 0 & -\bar{k} & 0 & -1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & B_i & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & \bar{k}^2 \sin \bar{k} & \bar{k}^2 \cos \bar{k} & 0 & 0 & 0 & -\bar{k}^2 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & C_i & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & -\bar{k}^2 & 0 & 0 & \bar{c} & \bar{k}^2 & \bar{c} & & 0 & 0 & 0 & 0 & D_i & \\
 \dots & & & & \dots & & & & & & & & & \dots & & & & & & \dots & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & -\bar{k}^2 \sin \bar{k} & -\bar{k}^2 \cos \bar{k} & 0 & 0 & C_n & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \bar{c}_0 \sin \bar{k} & \bar{c}_0 \cos \bar{k} & \bar{c}_0 - \bar{k}^2 & \bar{c}_0 & D_n & 
 \end{array}$$

όπου  $i = 0$  αριθμός των ενδιάμεσων στηρίξεων και  $\bar{k}^2 = N/EI$ .

Εικόνα 4-2: Μορφή οριζουσας ευστάθειας συστήματος από Ραυτογιάννη-Αβραάμ

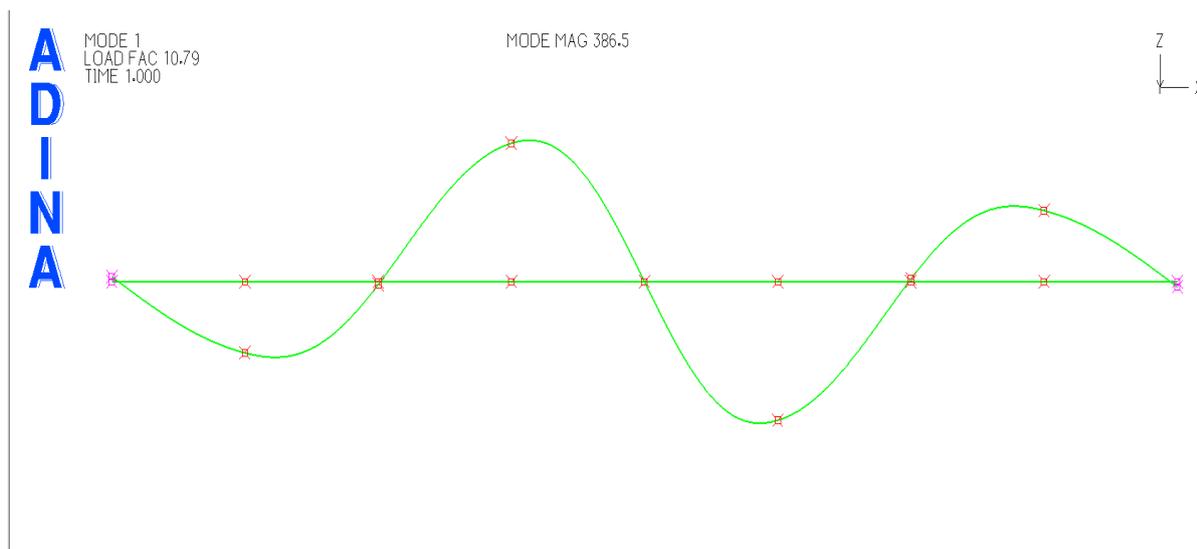
### 4.3 Αριθμητικές επιλύσεις προσομοιωμάτων πεπερασμένων στοιχείων

#### 4.3.1 Γραμμική ανάλυση λυγισμού

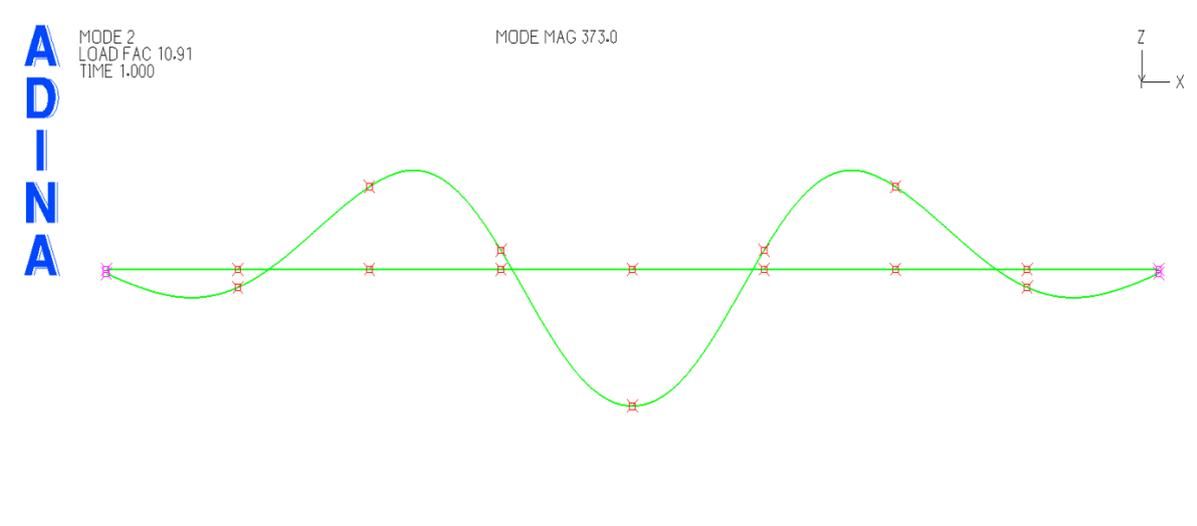
##### 4.3.1.1 Δισδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων

Το σύνολο της θεωρητικής επίλυσης που περιεγράφηκε θα ελεγχθεί με την βοήθεια λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων. Αρχικά θα κατασκευαστεί ένα δισδιάστατο προσομοίωμα, σύμφωνα με την λογική του κανονισμού, που θέλει το θλιβόμενο πέλμα του δικτυώματος να αντιμετωπίζεται σαν ένα υποστύλωμα επί ελαστικών στηρίξεων, οι οποίες αντιστοιχούν σε μετακινησιακά ελατήρια με δυσκαμψία αντίστοιχη των εκάστοτε άνω ανοιχτών ημιπλαισίων.

Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθούν πεπερασμένα στοιχεία δοκού, με 3 ενεργούς βαθμούς ελευθερίας. Αφού στηθεί το μοντέλο και γίνει ο κατάλληλος έλεγχος ευαισθησίας για την πυκνότητα του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων, θα πραγματοποιηθεί γραμμική ανάλυση λυγισμού από την οποία θα προκύψουν οι πρώτες ιδιομορφές



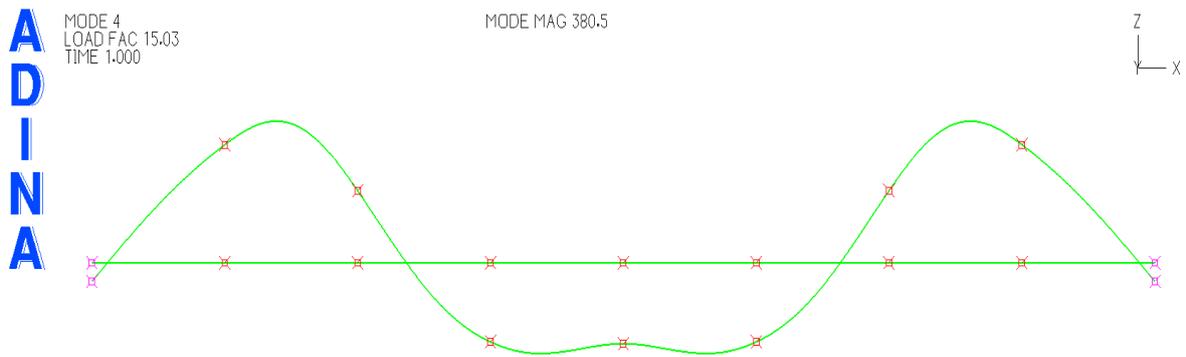
Σχήμα 4-6: Πρώτη ιδιομορφή λυγισμού



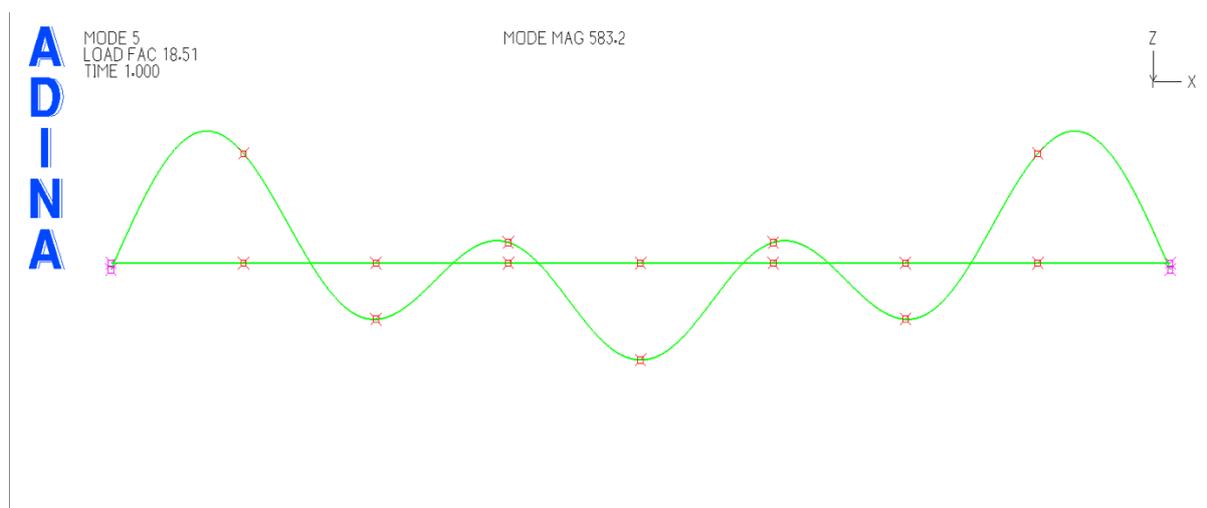
Σχήμα 4-7: Δεύτερη ιδιομορφή λυγισμού 2-D μοντέλου



Σχήμα 4-8: Τρίτη ιδιομορφή λυγισμού 2-D μοντέλου



Σχήμα 4-9: Τέταρτη ιδιομορφή λυγισμού 2-D μοντέλου



Σχήμα 4-10 Πέμπτη ιδιομορφή λυγισμού 2-δ μοντέλου

Συνολικά κρίσιμα φορτία των τριών ιδιομορφών είναι

Mode	$N_{cr}$
1	10790
2	10910
3	14720
4	15030
5	18510

Πίνακας 4-5: Κρίσιμα φορτία ιδιομορφών 3-D μοντέλου

#### 4.3.1.2 Τρισδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων

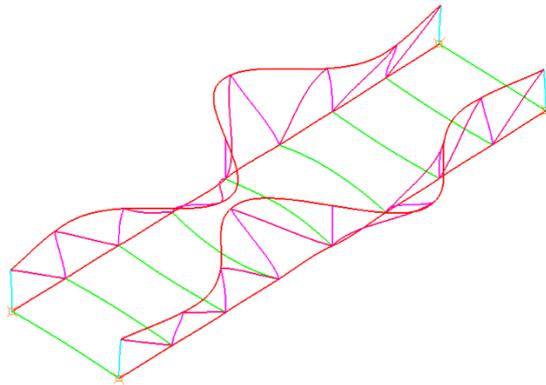
Εν συνεχεία θα δημιουργηθεί και ένα ακριβέστερο τρισδιάστατο μοντέλο, στο οποίο κάθε πεπερασμένο στοιχείο δοκού θα έχει 6 ενεργούς βαθμούς ελευθερίας, το οποίο και θα μπορέσει να αποδώσει με μεγαλύτερη αξιοπιστία την συμπεριφορά του φορέα

Μετά τον κατάλληλο έλεγχο ευαισθησίας του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων, πραγματοποιείται γραμμική ανάλυση λυγισμού από την οποία θα προκύψουν τα σχήματα των ιδιομορφών και τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία.

**A  
D  
I  
N  
A**

MODE 1  
LOAD FAC 10.50  
TIME 0.01000

MODE MAG 551.1

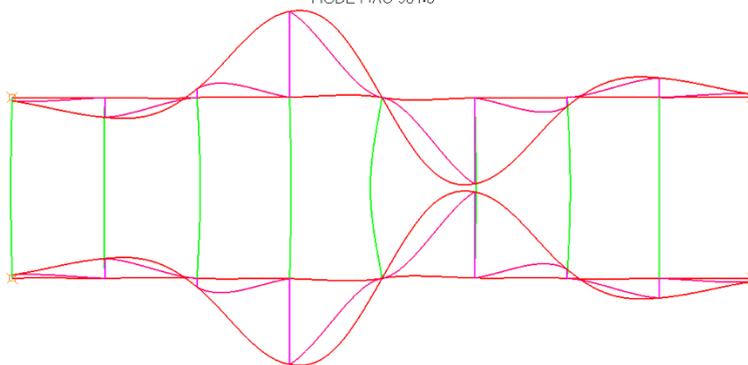


Σχήμα 4-11: Τρισδιάστατη απεικόνιση πρώτης ιδιομορφής λυγισμού 3-D μοντέλου

**A  
D  
I  
N  
A**

MODE 1  
LOAD FAC 10.50  
TIME 0.01000

MODE MAG 581.8

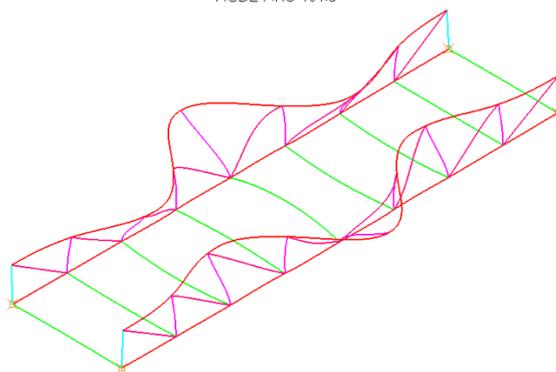


Σχήμα 4-12: Κάτοψη πρώτης ιδιομορφής λυγισμού 3-D μοντέλου

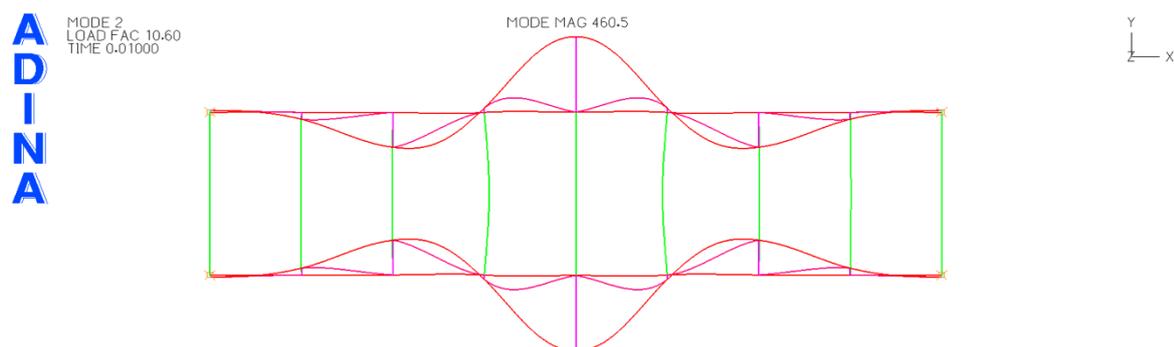
**A  
D  
I  
N  
A**

MODE 2  
LOAD FAC 10.60  
TIME 0.01000

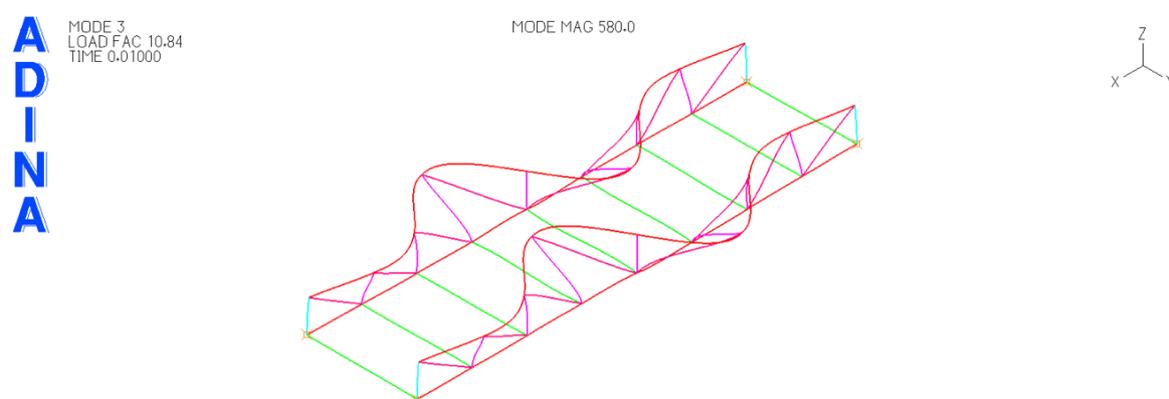
MODE MAG 451.8



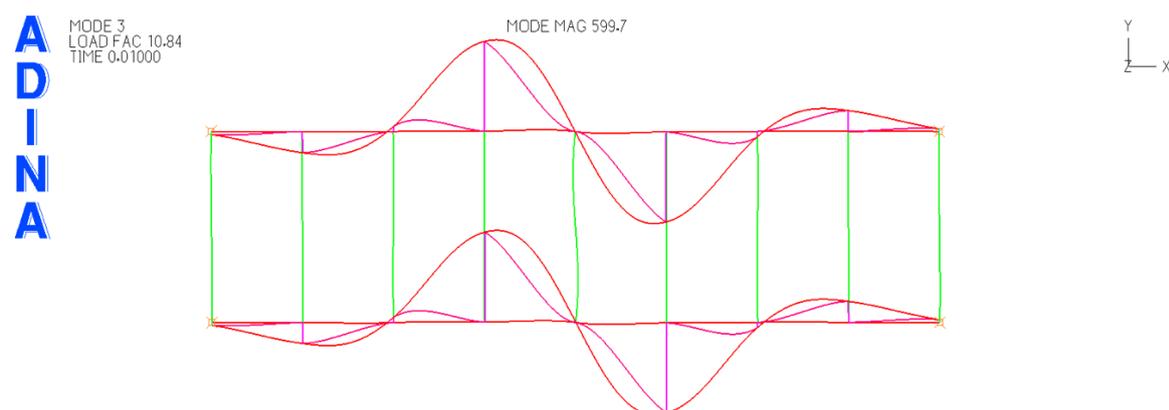
Σχήμα 4-13: Τρισδιάστατη απεικόνιση δεύτερης ιδιομορφής λυγισμού 3-D μοντέλου



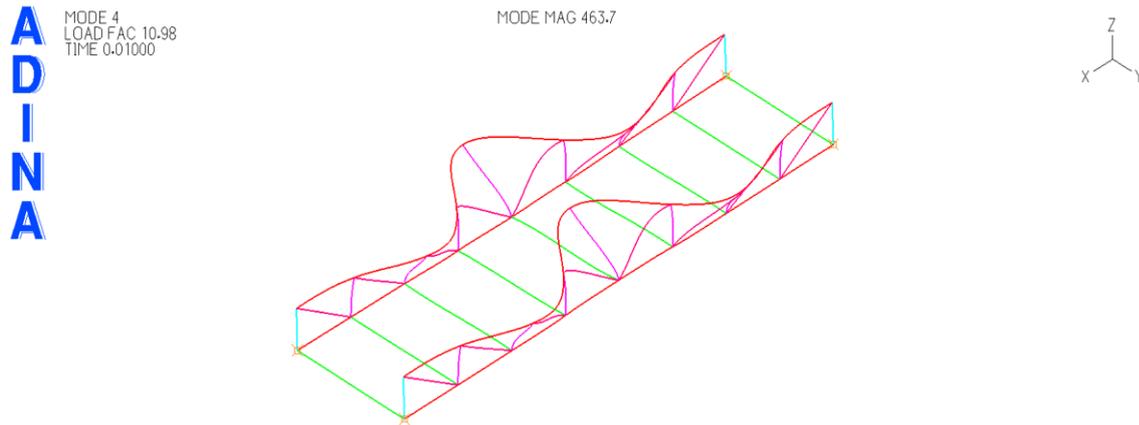
Σχήμα 4-14: Κάτοψη δεύτερης ιδιομορφής λυγισμού 3-D μοντέλου



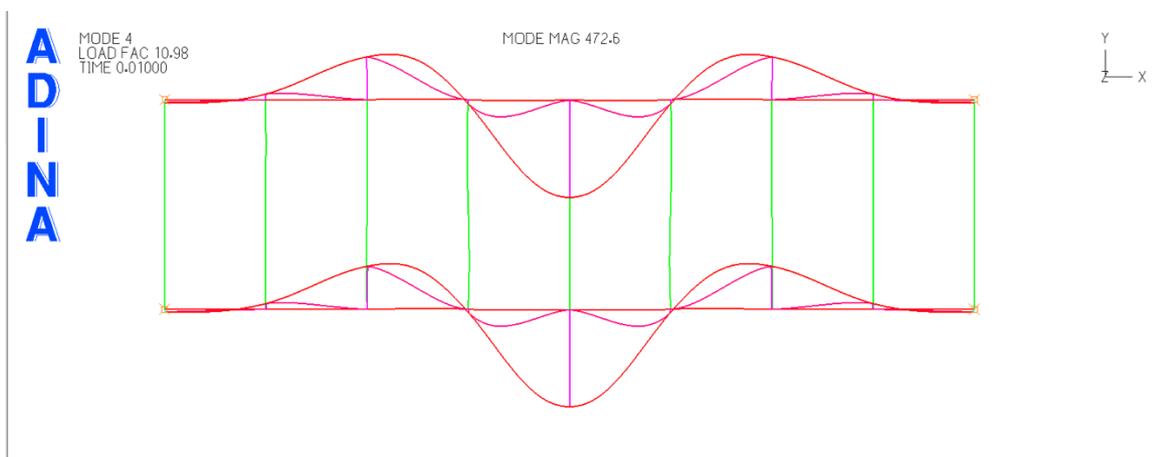
Σχήμα 4-15: Τρισδιάστατη απεικόνιση τρίτης ιδιομορφής λυγισμού 3-D μοντέλου



Σχήμα 4-16: Κάτοψη τρίτης ιδιομορφής λυγισμού 3-D μοντέλου



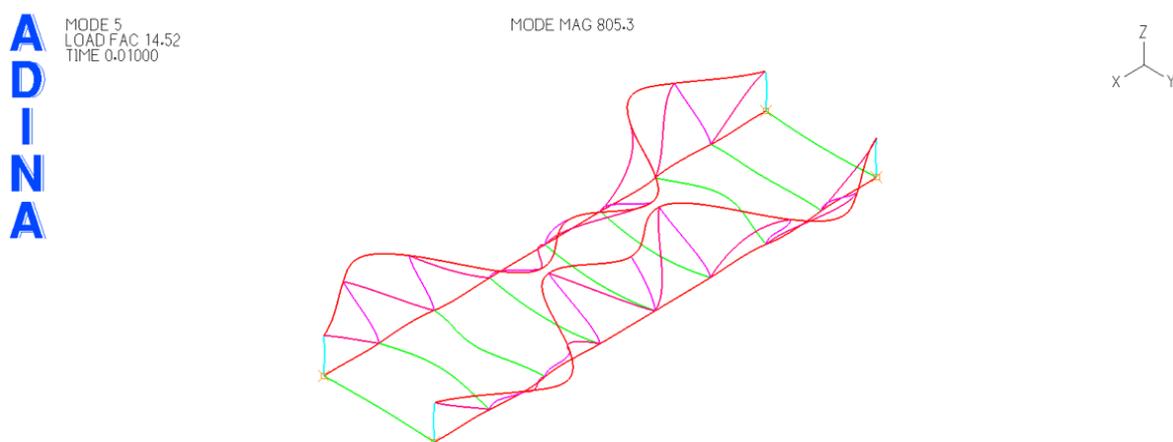
Σχήμα 4-17: Τρισδιάστατη απεικόνιση τέταρτης ιδιομορφής λυγισμού 3-D μοντέλου



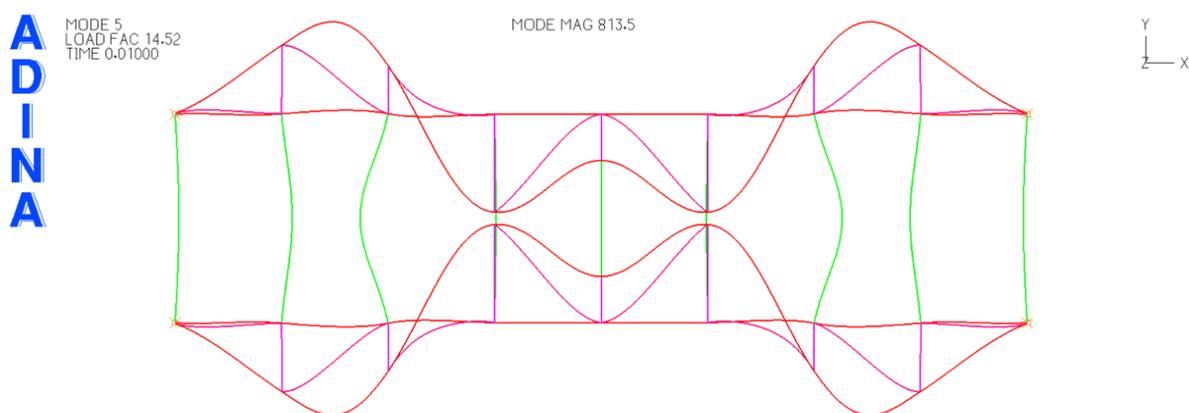
Σχήμα 4-18: Κάτοψη τέταρτης ιδιομορφής λυγισμού 3-D μοντέλου

Mode	$N_{cr}$ (kN)
1	12422.00
2	12529.20
3	12812.88
4	12978.36
5	17162.64

Πίνακας 4-6: Κρίσιμα φορτία ιδιομορφών λυγισμού

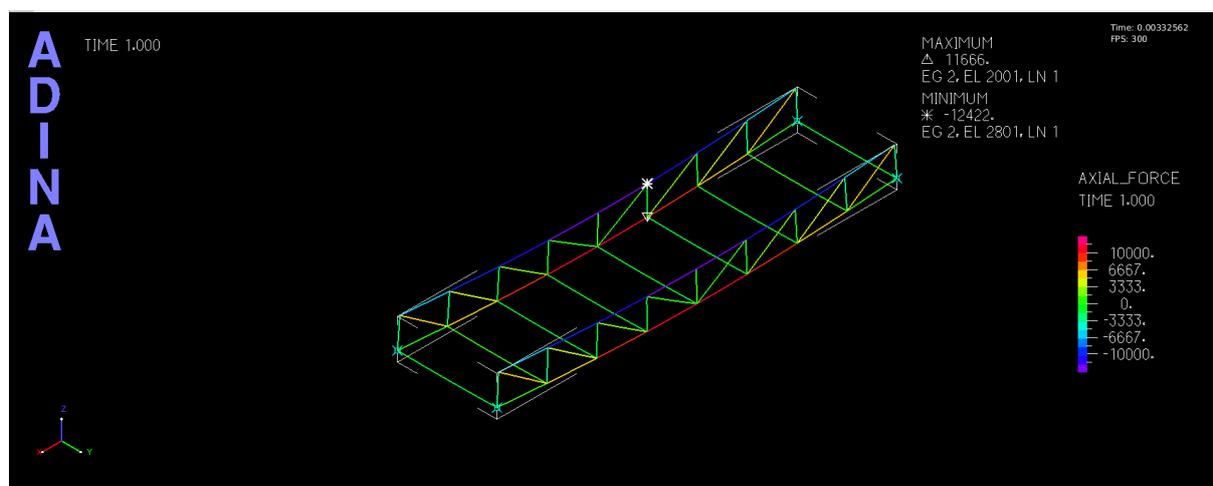


Σχήμα 4-19: Τρισδιάστατη απεικόνιση πέμπτης ιδιομορφής λυγισμού 3-D μοντέλου



Εικόνα 4-20: Κάτοψη πέμπτης ιδιομορφής λυγισμού 3-D μοντέλου

Από τον πολλαπλασιαστικό συντελεστή της γραμμικής ανάλυσης λυγισμού θα προκύψει στην συνέχεια το κρίσιμο φορτίο κάθε ιδιομορφής. Για την πρώτη ιδιομορφή υπολογίζουμε



Σχήμα 4-21: Στατική ανάλυση για εύρεση φορτίου λυγισμού πρώτης ιδιομορφής

Συνολικά τα κρίσιμα φορτία των ιδιομορφών είναι αντίστοιχα

Ιδιομορφή	$N_{cr}$ (kN)
1	12422.00
2	12529.20
3	12812.88
4	12978.36
5	17162.64

Πίνακας 4-7: Κρίσιμα φορτία ιδιομορφών 3-D μοντέλου

4.3.1.3 Εύρεση αντοχής σε θλίψη και διαρροή από τον ΕΚ-3 με βάση τα κρίσιμα φορτία των προσομοιωμάτων

Στην συνέχεια θα εφαρμοστεί η προτεινόμενη διαδικασία του ΕΚ-3 για την εύρεση της συνολικής αντοχής σε θλίψη και διαρροή  $N_{b,rd}$ , μέσω της εύρεσης της ανηγμένης λυγηρότητα και του μειωτικού συντελεστή  $\chi$

$$N_{Ed} \leq N_{b,Rd} \quad \text{με} \quad N_{b,Rd} = \begin{cases} \frac{\chi \cdot f_y \cdot A}{\gamma_{M1}} & \text{για διατομές κατηγορίας 1, 2 και 3} \\ \frac{\chi \cdot f_y \cdot A_{eff}}{\gamma_{M1}} & \text{για διατομές κατηγορίας 4} \end{cases}$$

$$\text{Μειωτικός συντελεστής λυγισμού: } \chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1,0 \quad \text{με} \quad \Phi = 0,5 \cdot \left[ 1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right]$$

Ο συντελεστής ατελειών  $\alpha$  που αντιστοιχεί στην ανάλογη καμπύλη λυγισμού θα λαμβάνεται από τον ακόλουθο πίνακα (EN1993-1-1 Πίν. 8.2).

Καμπύλη λυγισμού	$a_0$	$a$	$b$	$c$	$d$
Συντελεστής ατελειών $\alpha$	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Ανηγμένη λυγηρότητα:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{για διατομές κατηγορίας 1, 2, 3}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff} \cdot f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \cdot \frac{\sqrt{A_{eff}/A}}{\lambda_1} \quad \text{για διατομές κατηγορίας 4}$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_{cr}^2} \quad \lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93,9 \cdot \varepsilon \quad \varepsilon = \sqrt{235/f_y}^{[MPa]} \quad i = \sqrt{I/A}$$

Αν  $\bar{\lambda} \leq 0,2$  ή  $N_{Ed}/N_{cr} \leq 0,04$  δε χρειάζεται έλεγχος έναντι καμπτικού λυγισμού

Εικόνα 4-16: Παράγραφος 8.3.1 του ΕΚ-3 για τον υπολογισμό της συνολικής αντοχής σε θλίψη και διαρροή

- Με βάση το 2-δ προσομοίωμα προκύπτει

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{82,6 \cdot 35,5}{10790}} = 0,521 \quad (4.43)$$

$$\alpha = 0,21 \quad (4.43)$$

$$\Phi = 0,6696 \quad (4.44)$$

$$\chi = 0,917 \quad (4.45)$$

$$N_{b,rd} = \frac{82.6 \cdot 35.5 \cdot 0.917}{1} = 2689.57 \text{ kN (4.46)}$$

- Με βάση το 3-δ προσομοίωμα προκύπτει

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{82.6 \cdot 35.5}{11290}} = 0.510 \text{ (4.47)}$$

$$\alpha = 0.21 \text{ (4.48)}$$

$$\Phi = 0.662 \text{ (4.49)}$$

$$\chi = 0.922 \text{ (4.50)}$$

$$N_{b,rd} = \frac{82.6 \cdot 35.5 \cdot 0.922}{1} = 2702.69 \text{ kN (4.51)}$$

### 4.3.2 Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας

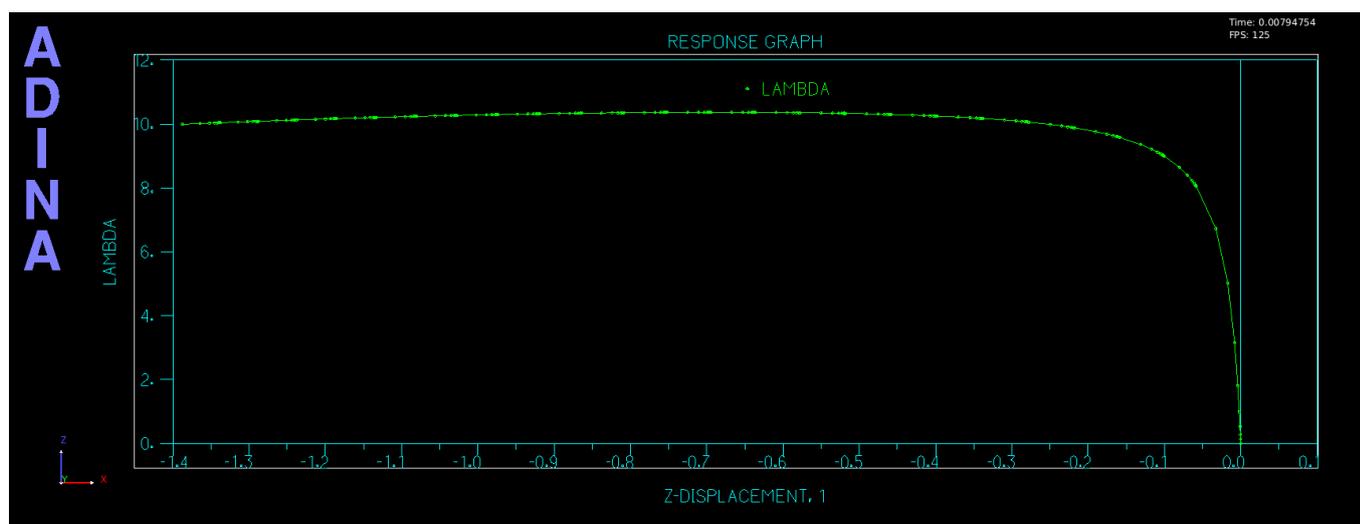
Για την καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς του φορέα θα προχωρήσουμε σε μη-γραμμικές αναλύσεις, οι οποίες και θα μας δώσουν μια καλή εικόνα για την αξιοπιστία των προτεινόμενων μεθόδων, αλλά και για την απόκριση του φορέα εν-γένει.

Πρόκειται να μελετήσουμε κάθε μορφή μη-γραμμικότητας ξεχωριστά, ξεκινώντας από την μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες, οι οποίες θα έχουν το σχήμα των διάφορων ιδιομορφών. Η ανάλυση θα πραγματοποιηθεί μέσω της επιβολής μετατόπισης, οι οποίες θα μας επιτρέψουν να πιάσουμε και πιθανούς καθοδικούς κλάδους, πράγμα αδύνατο κατά την αυξητική επιβολή φορτίου.

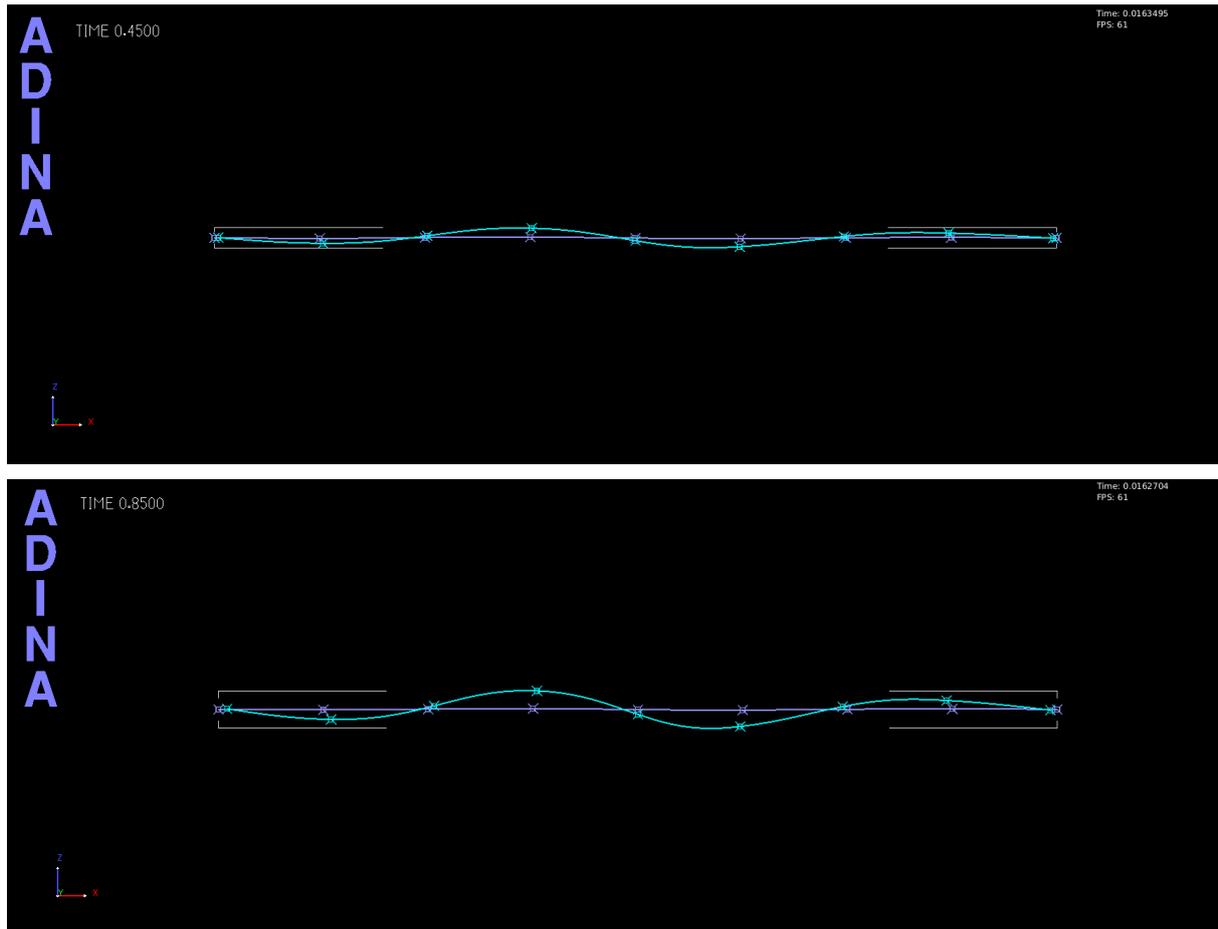
Η συγκεκριμένη ανάλυση θα πραγματοποιηθεί διαδοχικά και στα δύο μοντέλα

#### 4.3.2.1 Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας δισδιάστατου προσομοιώματος

Ξεκινώντας την παραμετρική διερεύνηση των ατελειών και έχοντας στο μυαλό μας πως το κρίσιμο φορτίο της πρώτης ιδιομορφής είναι 10790 kN, το πρώτο πράγμα που παρατηρούμε είναι πως σχεδόν για όλες τις περιπτώσεις συνδυασμού ατελειών ο φορέας παρουσιάζει την παρακάτω μορφή σχετικά με τον δρόμο ισορροπίας του σημείου όπου εμφανίζεται το πλάτος της ατέλειας σύμφωνα με την ιδιομορφή



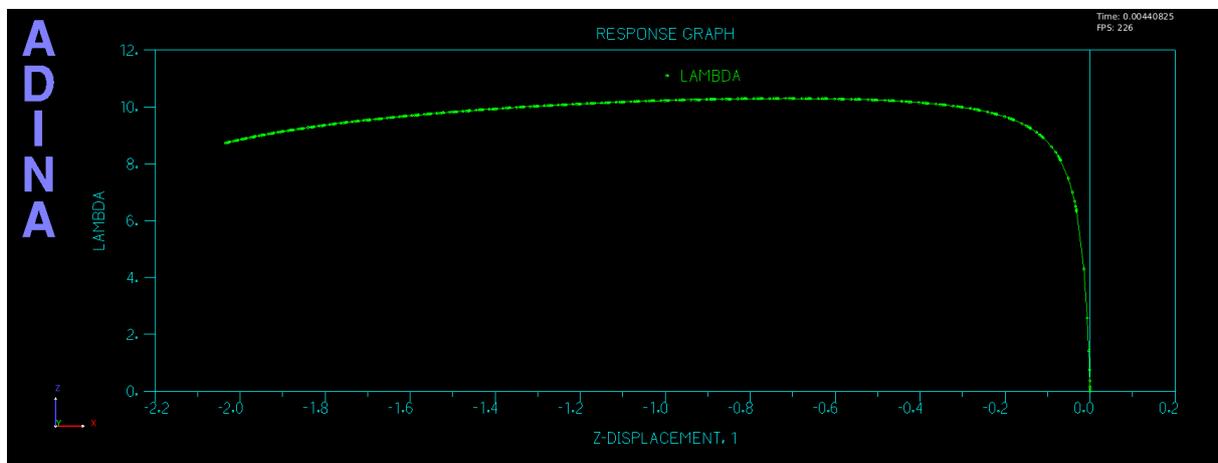
Διάγραμμα 4-2: Δρόμος ισορροπίας δισδιάστατου μοντέλου με κυρίαρχη την ατέλεια της πρώτης ιδιομορφής και πλάτος τετραπλάσια των άλλων δύο



Σχήμα 4-22: Διαδοχικές φάσεις παραμόρφωσης μη-γραμμικής ανάλυσης γεωμετρίας με κυρίαρχη την δεύτερη ιδιομορφή

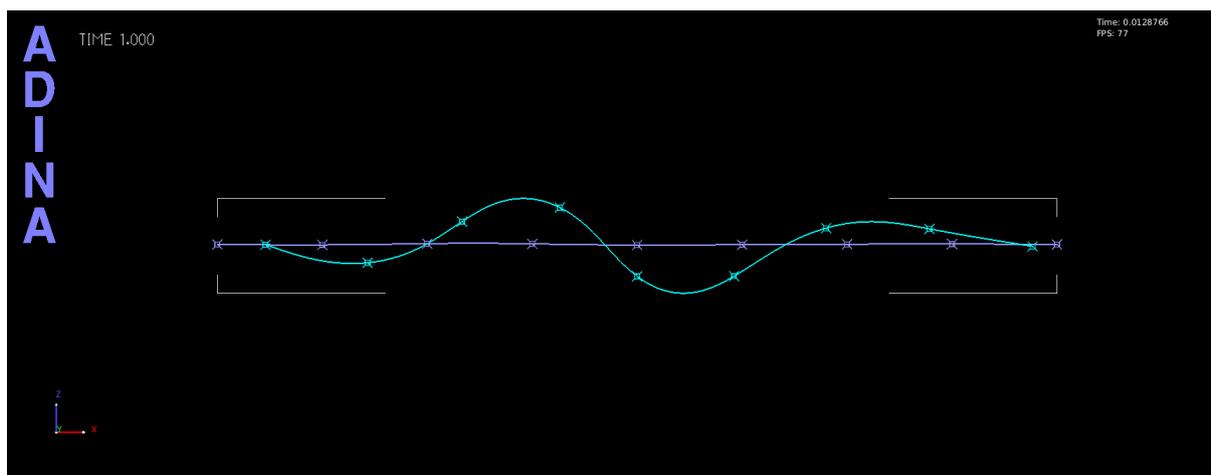
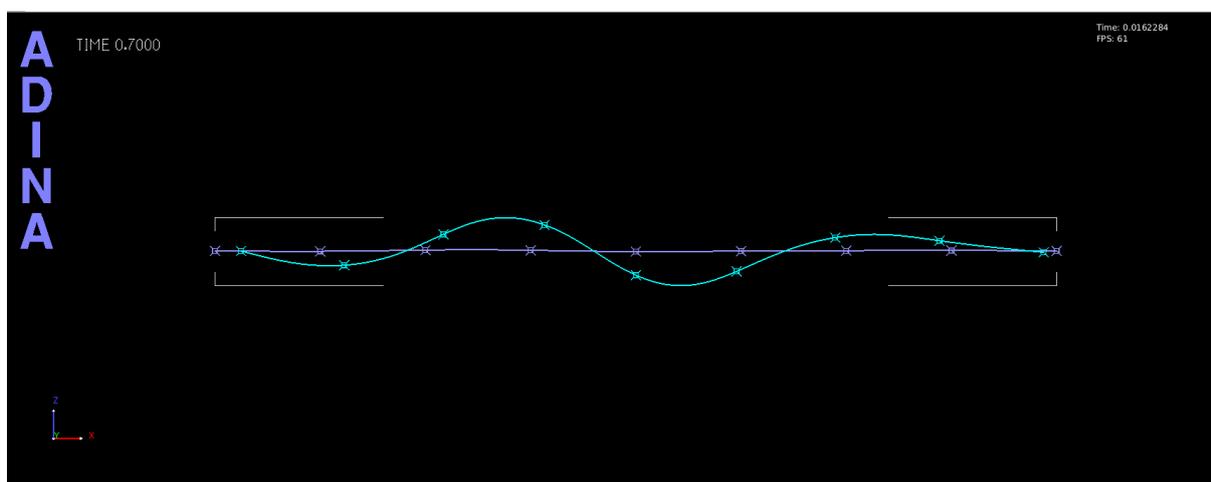
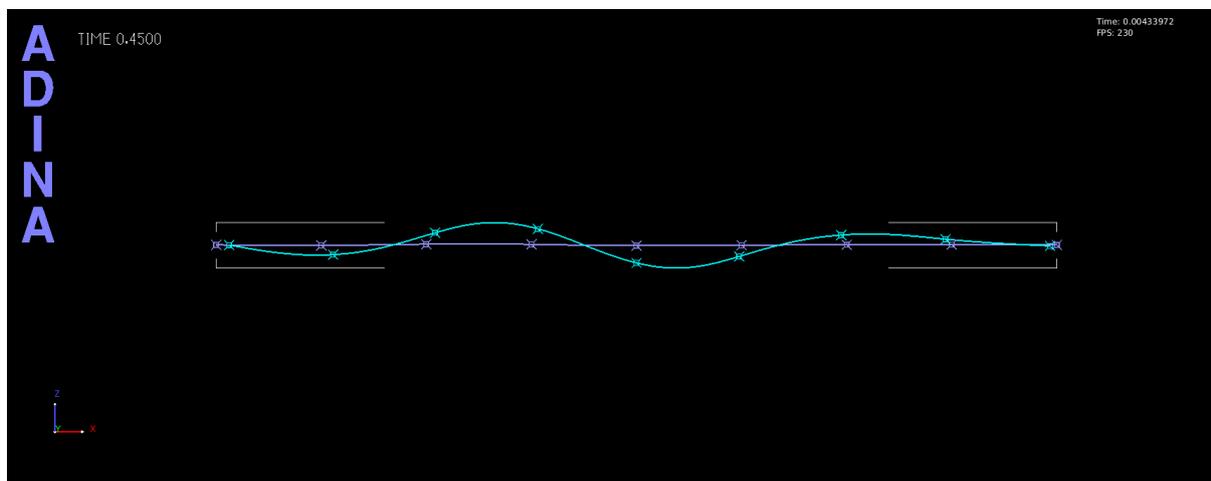
Όσο αυξάνεται η μετατόπιση ο ανοδικός δρόμος ισορροπίας με μία πρώτη ματιά φαίνεται να ξεπερνά το κρίσιμο φορτίο της γραμμικής ανάλυσης λυγισμού, με αποτέλεσμα ο φορέας να παρουσιάζει μεταλυγισμική αντοχή.

Ωστόσο όταν επιτρέψαμε στον φορέα να εμφανίσει μεγαλύτερες μετατοπίσεις παρατηρήσαμε πως στην πραγματικότητα ο φορέας δεν έχει μεταλυγισμική αντοχή, για μεγάλες μετατοπίσεις ο δρόμος ισορροπίας αρχίζει να γίνεται καθοδικός, ενώ το οριακό σημείο είναι ελαφρώς μικρότερο από αυτό της γραμμικής ανάλυσης λυγισμού



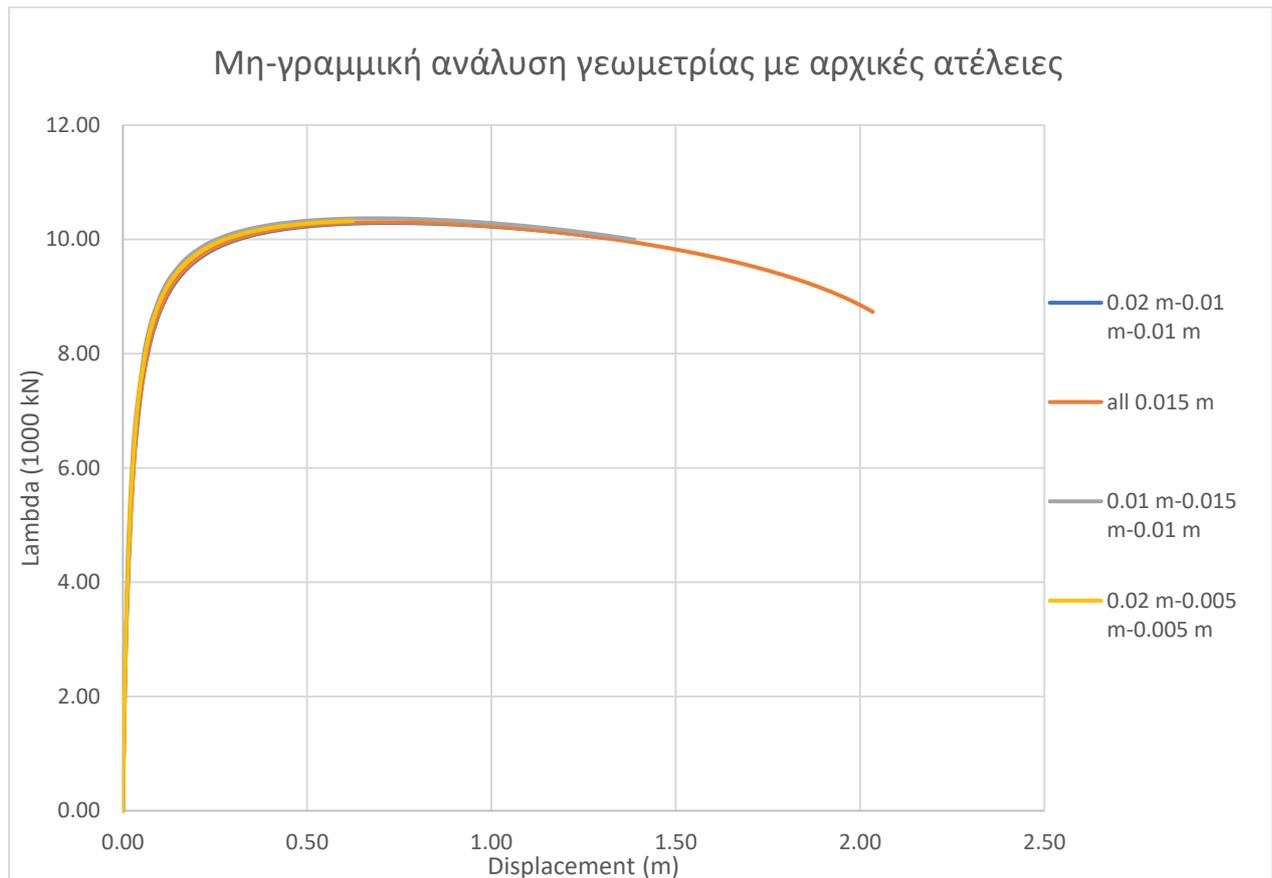
Διάγραμμα 4-3: Δρόμος ισορροπίας δισδιάστατου μοντέλου με κυρίαρχη την ατέλεια της δεύτερης ιδιομορφής

Στην συνέχεια παρατίθενται οι διαδοχικές φάσεις παραμόρφωσης για την περίπτωση όπου κυρίαρχη είναι η δεύτερη ιδιομορφή



Σχήμα 4-23: Πορεία παραμόρφωσης μη-γραμμικής ανάλυσης γεωμετρίας δισδιάστατου μοντέλου με κυρίαρχη την δεύτερη ιδιομορφή

Στην συνέχεια παρατίθενται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των δρόμων ισορροπίας των διαφορετικών αναλύσεων όπου γίνεται παραμετρική διερεύνηση των ατελειών σύμφωνα με τα σχήματα των ιδιομορφών

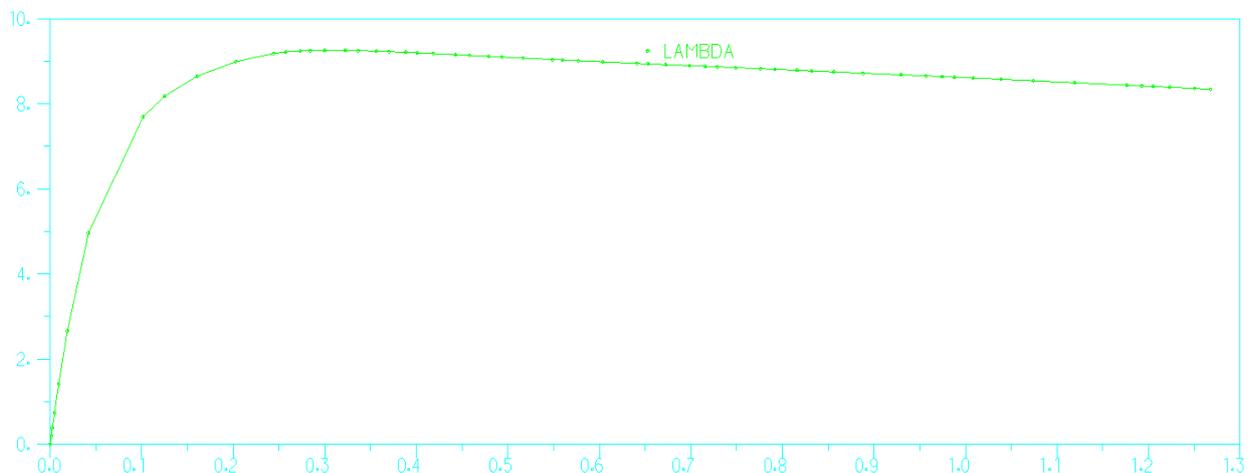


Διάγραμμα 4-4: Δρόμοι ισορροπίας GNIA δισδιάστατου μοντέλου για παραμετρική διερεύνηση των ατελειών σύμφωνα με τα σχήματα των ιδιομορφών

#### 4.3.2.2 Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας τρισδιάστατου προσομοιώματος

Έπειτα πραγματοποιείται ο ίδιος τύπος και στο τρισδιάστατο μοντέλο το οποίο θα μας δώσει μία ακριβέστερη εικόνα για την πραγματική συμπεριφορά του φορέα μέχρι την εκδήλωση της μη-γραμμικότητας γεωμετρίας και θα επιβεβαιώσει την επάρκεια της προσέγγισης του κανονισμού. Όπως και πριν θα γίνει επιβολή μετακινήσεων

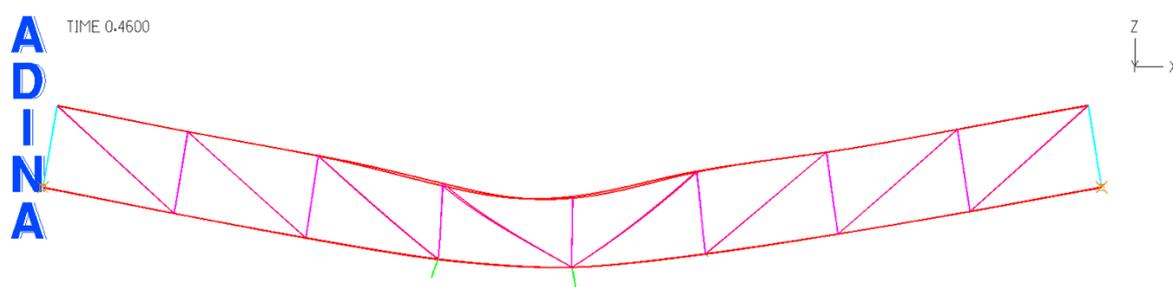
Παρατηρούμε πως ανεξάρτητα από τους διαφορετικούς συνδυασμούς για τις ατέλειες σύμφωνα με την φύση των ιδιομορφών, παίρνουμε τον παρακάτω δρόμο ισορροπίας



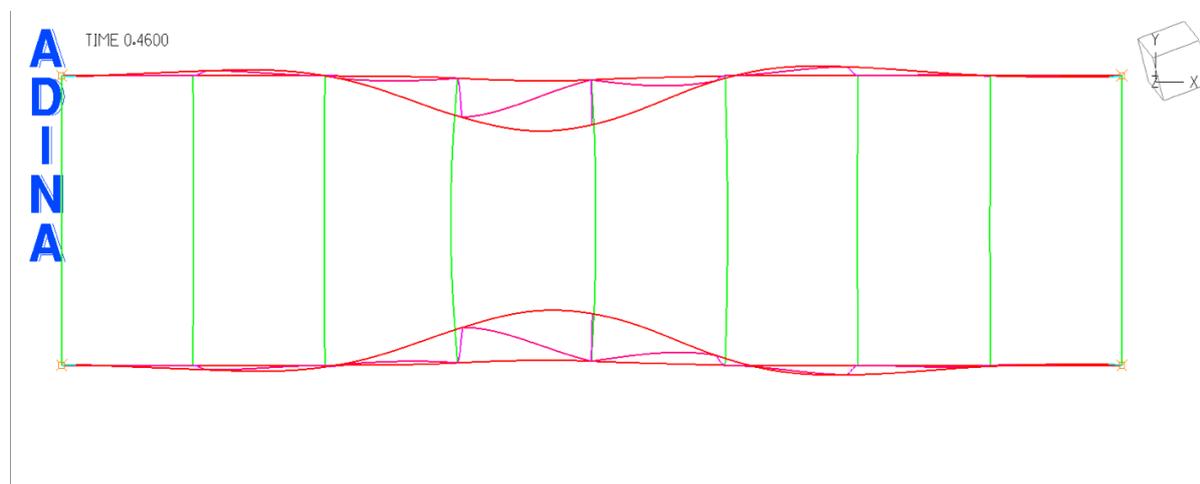
Διάγραμμα 4-5: Δρόμος ισορροπίας GNIA για ατέλειες ίδιου μεγέθους σύμφωνα με τις τέσσερις πρώτες ιδιομορφές

Παρατηρούμε πως στην περίπτωση του τρισδιάστατου μοντέλου ο δρόμος ισορροπίας που εμφανίζεται στο σημείο με την μέγιστη μετατόπιση είναι εντονότερα καθοδικός σε σχέση με τον αντίστοιχο του δισδιάστατου μοντέλου, ενώ υπάρχει μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ του οριακού σημείου και του κρίσιμου φορτίου της γραμμικής ανάλυσης λυγισμού.

Αιτία αυτής της διαφοράς υποθέτουμε πως είναι η επιπλέον κατακόρυφη ατέλεια που εισάγεται στον φορέα εξαιτίας του βέλους του δικτυώματος, πράγμα που είναι αδύνατο να αποτυπωθεί στο δισδιάστατο μοντέλο. Αυτή η ατέλεια αναμένεται να παίξει σημαντικό ρόλο και GMNIA, μειώνοντας την συνολική θλιπτική αντοχή του υλικού

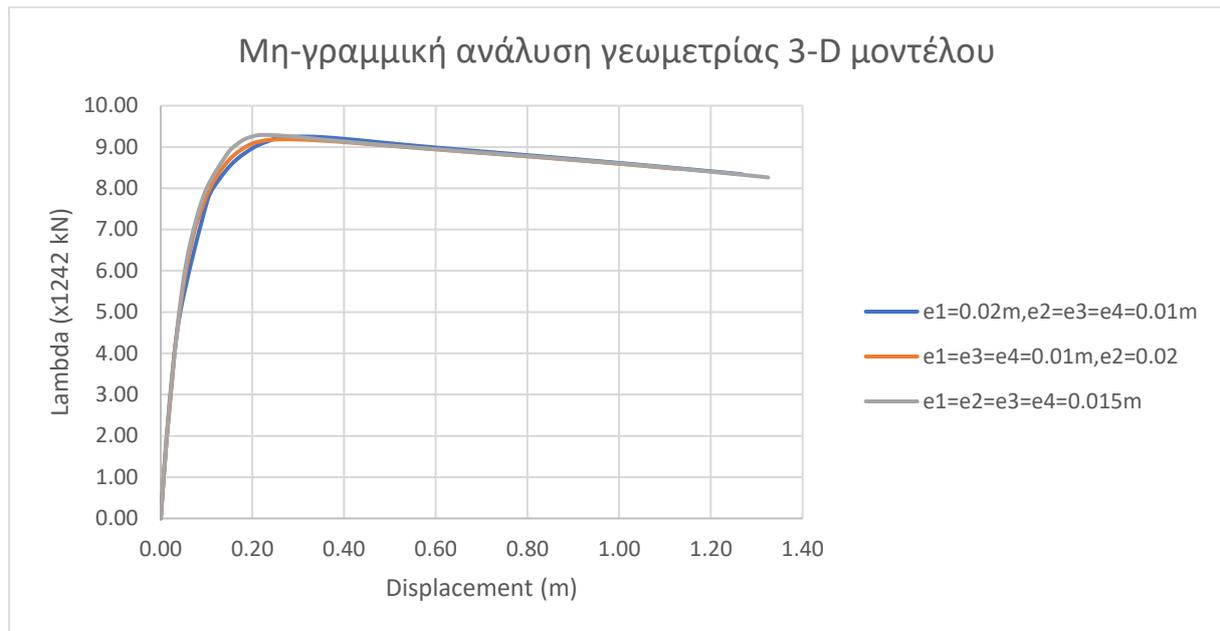


Σχήμα 4-24: Όψη παραμορφωμένου φορέα κατά την μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας



Σχήμα 4-25: Κάτοψη παραμορφωμένου φορέα κατά την μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας

Ακολουθεί παραμετρική διερεύνηση των διαφορετικών μεγεθών και σχημάτων ατελειών σύμφωνα με τις διάφορες ιδιομορφές λυγισμού και συγκεντρωτικά οι δρόμοι ισορροπίας για το σημείο όπου εμφανίζεται η μέγιστη εγκάρσια παραμόρφωση φαίνεται παρακάτω. Η οριζόντια γραμμή αναφέρεται στο αντίστοιχο φορτίο της γραμμικής ανάλυσης λυγισμού



Διάγραμμα 4-6: Δρόμοι ισορροπίας GNIA για παραμετρική διερεύνηση των ατελειών σύμφωνα με τα σχήματα των ιδιομορφών

### 4.3.3 Μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες

Μετά το πέρας των αναλύσεων μη-γραμμικότητας γεωμετρίας των δύο μοντέλων, θα πραγματοποιηθεί ανάλυση μη-γραμμικότητας υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες με σκοπό να αποκαλυφθεί η πραγματική αντοχή του φορέα.

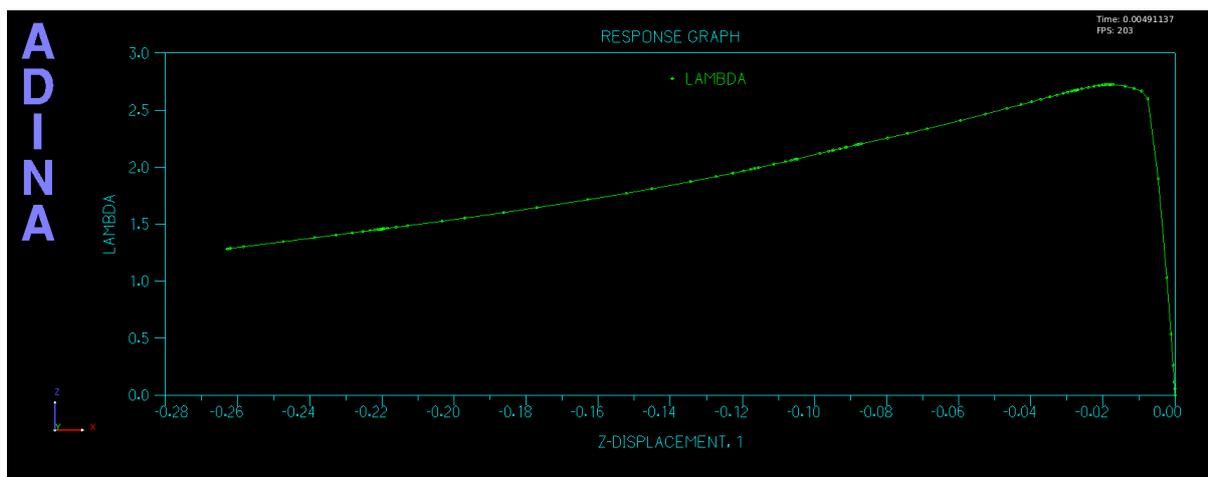
Αναμένεται εκ των προτέρων κυρίαρχος μηχανισμός αστοχίας να είναι η μη-γραμμικότητα υλικού, με δεδομένη την αρκετά μικρότερη αντοχή του φορέα σε διαρροή, σε σχέση με αυτή σε λυγισμό. Για την ανάλυση μη-γραμμικότητας υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες εισάγεται υλικό δομικός χάλυβας S355 με νόμο ελαστικό-απολύτως πλαστικό. Οι αναλύσεις θα πραγματοποιηθούν και πάλι με επιβολή μετατοπίσεων για την ανίχνευση καθοδικών κλάδων.

#### 4.3.3.1 Μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες στο δισδιάστατο μοντέλο

Οι πρώτες αναλύσεις GMNIA θα πραγματοποιηθούν στο δισδιάστατο μοντέλο, το οποίο έχει κατασκευαστεί στην λογική επίλυσης του κανονισμού. Ως αρχικές ατέλειες θα χρησιμοποιηθούν τα σχήματα των ιδιομορφών, ενώ πρόκειται να πραγματοποιηθεί μία παραμετρική ανάλυση σχετικά με το σχήμα και την φορά τους.

Μία από τις πρώτες μας παρατηρήσεις είναι πως ο δρόμος ισορροπίας του σημείου με την μέγιστη μετατόπιση είναι παρεμφερής και ουσιαστικά ανεξάρτητος από τους διαφορετικούς συνδυασμούς των ατελειών

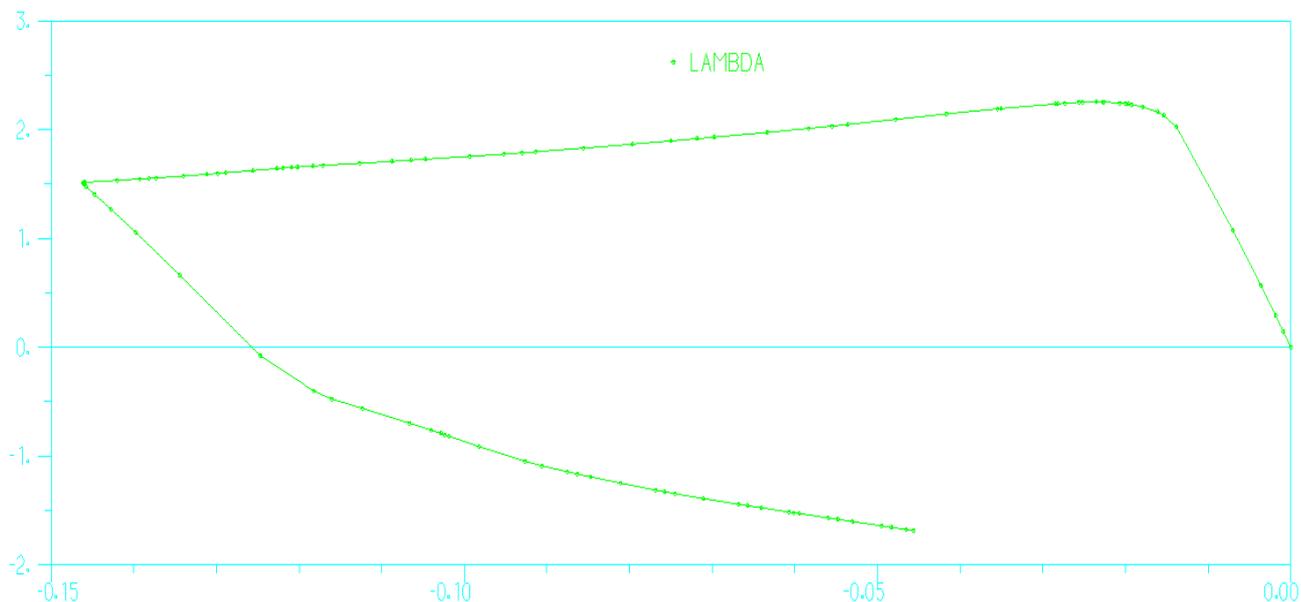
Ενδεικτικά για την περίπτωση όπου το μέγεθος της ατέλειας σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή είναι τετραπλάσια των άλλων τεσσάρων παίρνουμε



Διάγραμμα 4-7: Δρόμος ισορροπίας GMNIA για ατέλεια σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή τετραπλάσια των άλλων τεσσάρων

#### 4.3.3.2 Μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες στο τρισδιάστατο μοντέλο

Αντίστοιχη διαδικασία πραγματοποιείται και στο τρισδιάστατο μοντέλο με την εισαγωγή υλικού με νόμο ελαστικό – απολύτως πλαστικό και πραγματοποιείται ανάλυση μη-γραμμικότητας υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες, με τις τελευταίες να λαμβάνονται υπόψη σύμφωνα με τα σχήματα των ιδιομορφών. Θα πραγματοποιηθεί παραμετρική διερεύνηση για τα διαφορετικά μεγέθη και σχήματα των ατελειών.

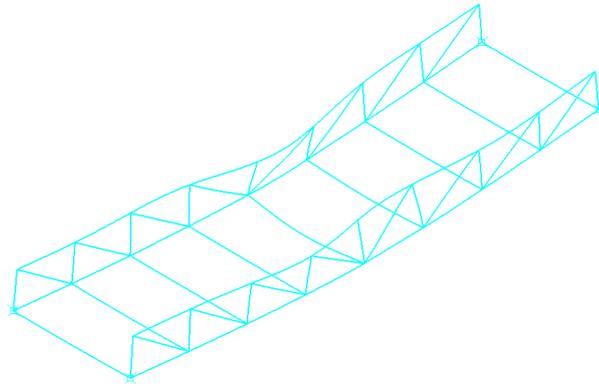


Διάγραμμα 4-8: Δρόμος ισορροπίας σημείου μέγιστης εγκάρσιας μετακίνησης ανάλυσης GMNIA 3-D μοντέλου, για ατέλεια σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή πλάτους 0.015 μέτρων, ενώ ατέλειες σύμφωνα με τα σχήματα των ιδιομορφών 2,3 και 4 με πλάτος 0.010 μέτρα.

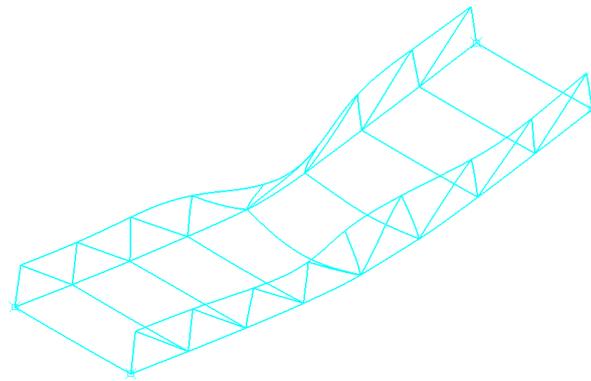
Αν προσέξουμε την πορεία παραμόρφωσης, παίρνουμε την παρακάτω εικόνα

**A  
D  
I  
N  
A**

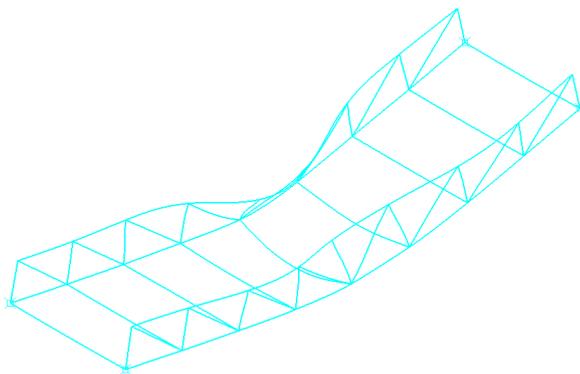
TIME 0.3000

**A  
D  
I  
N  
A**

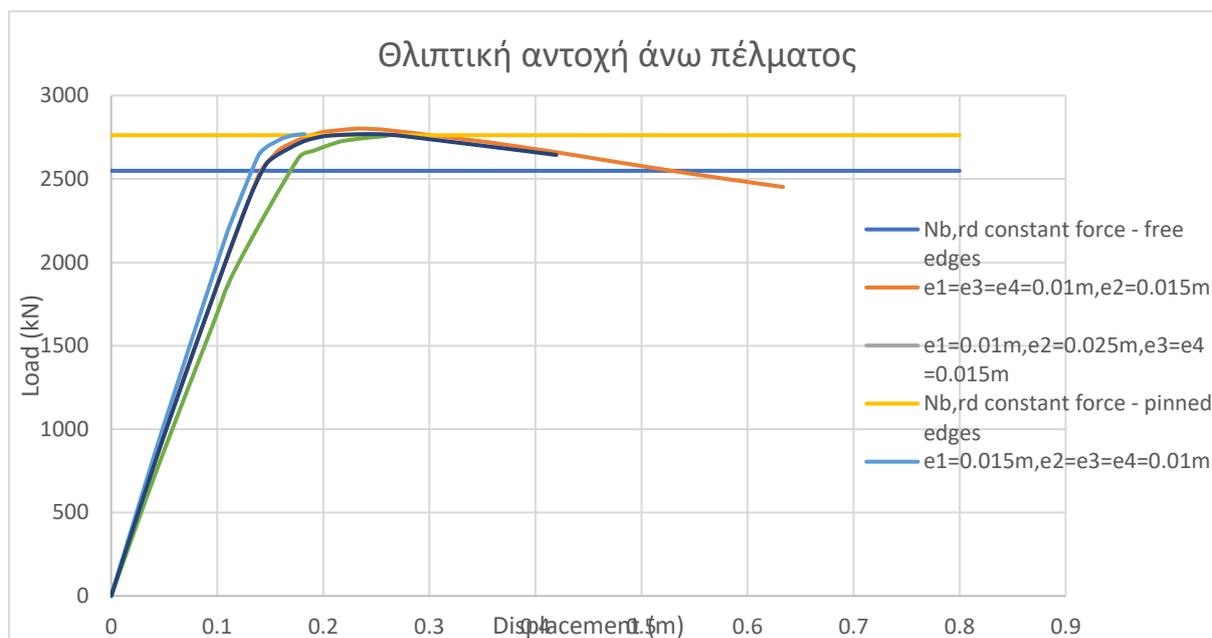
TIME 0.5000

**A  
D  
I  
N  
A**

TIME 0.5800



Σχήμα 4-26: Πορεία παραμόρφωσης ανάλυσης GMNIA 3-D μοντέλου με κυρίαρχο πλάτος αυτό της ατέλειας σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή



Διάγραμμα 4-9: Συγκεντρωτικοί δρόμοι ισορροπίας αναλύσεων GMNIA 3-D μοντέλου, για ατέλειες σύμφωνα με τα σχήματα των ιδιομορφών. Με  $e_i$  συμβολίζεται το πλάτος κάθε ιδιομορφής.

#### 4.4 Συμπεράσματα

Από το σύνολο των πραγματοποιηθεισών αναλύσεων για το θλιβόμενο πέλμα της δικτυωτής γέφυρας κάτω διάβασης εξάγουμε τα παρακάτω βασικά συμπεράσματα

- Οι τιμές της δυσκαμψίας του κανονισμού ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα, όμως το δισδιάστατο μοντέλο αγνοεί σημαντικές παραμέτρους, με βασικότερη την ατέλεια που φαίνεται να εισάγει το συνολικό βέλος της γέφυρας στην κατακόρυφη διεύθυνση
- Το κρίσιμο φορτίο που προκύπτει από τον κανονισμό θεωρώντας ελεύθερα άκρα, όπως και οι αντίστοιχες αντοχές του EN 1993-1-1 με βάση αυτά τα κρίσιμα φορτία, είναι υπερ της ασφαλείας, αλλά θα μπορούσε να θεωρηθεί κάποιες φορές πως είναι αρκετά συντηρητικό.
- Συνίσταται η χρήση τρισδιάστατου προσομοιώματος για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου και της συνολικής αντοχής



## 5 ΣΤΡΕΠΤΙΚΟΣ-ΚΑΜΠΤΙΚΟΣ ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΜΟΝΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΥΠΟ ΚΑΘΑΡΗ ΘΛΙΨΗ

### 5.1 Εισαγωγή

Τα μέλη ανοιχτών διατομών τα οποία φορτίζονται θλιπτικά εμφανίζουν τρεις διαφορετικές παραμορφωσιακές καταστάσεις ως αποτέλεσμα της συγκεκριμένης εντατικής κατάστασης. Αυτές είναι μία εκτροπή εξαιτίας του καμπτικού λυγισμού περί τον κατακόρυφο άξονα Z, μία εκτροπή εξαιτίας του λυγισμού περί τον οριζόντιο άξονα Y, αλλά και μία στρέψη περί τον διαμήκη άξονα X. Η συγκεκριμένη στρέψη είναι σημαντική στις ελαφριές ανοιχτές μεταλλικές διατομές, όπου η στρεπτική δυσκαμψία είναι ιδιαιτέρως μικρή. Στην συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζει ο κανονισμός αυτούς τους φορείς, την λογική πίσω από αυτές τις σχέσεις, αλλά και την σύγκρισή τους με τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από αναλύσεις με λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων.

### 5.2 Εξέλιξη της μεθόδου

Όπως είναι γνωστό, για να την αντιμετωπίσει των ανοιχτών φορέων υπό θλίψη είναι απαραίτητη η εύρεση της ελαστικής κρίσιμης δύναμης, η οποία για τις απλές περιπτώσεις διπλά συμμετρικών φορέων ταυτίζεται με το φορτίο του Euler. Στις περιπτώσεις όμως λεπτότοιχων φορέων, χωρίς διπλό άξονα συμμετρίας το παραπάνω δεν ισχύει. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η παραμορφωσιακή κατάσταση του φορέα χαρακτηρίζεται από τις εκτροπές που προκαλούνται λόγω των καμπτικών λυγισμών περί τους δύο άξονες και οι οποίες συμβολίζονται με  $v(x)$  για λυγισμό περί τον άξονα Z και  $w(x)$  για λυγισμό περί τον Y και από την στρέψη εξαιτίας του στρεπτικού λυγισμού περί τον διαμήκη άξονα X. Η συμπεριφορά του συστήματος στην παραμορφωμένη κατάσταση εκφράζεται από το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$E I_y w(x)^{IV} + N [w(x)^{II} - y_s \theta(x)^{II}] = 0 \quad (5.1)$$

$$E I_z v(x)^{IV} + N [v(x)^{II} + z_s \theta(x)^{II}] = 0 \quad (5.2)$$

$$E I \omega \theta(x)^{IV} - G I_t \theta(x)^{II} + N [-y_s w(x)^{II} + z_s v(x)^{II} + i_s^2 \theta(x)^{II}] = 0 \quad (5.3)$$

Στις περιπτώσεις όπου η διατομή έχει δύο, ή περισσότερους άξονες συμμετρίας οι τρεις αυτές μορφές αστάθειας είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, ενώ η κρίσιμη ελαστική δύναμη είναι ίση με την μικρότερη εκ των  $N_{cr,y}$ ,  $N_{cr,z}$  και  $N_{cr,T}$ . Όταν όμως ο φορέας είναι ασύμμετρος τότε οι τρεις μορφές λυγισμού δεν είναι ανεξάρτητες και η ελαστική κρίσιμη δύναμη είναι μικρότερη από κάθε μία από τις ανεξάρτητες  $N_{cr,y}$ ,  $N_{cr,z}$  και  $N_{cr,T}$ , με την μορφή αστάθειας να έχει την μορφή ενός στρεπτικού-καμπτικού-καμπτικού λυγισμού. Όταν η διατομή έχει έναν άξονα συμμετρίας, με άξονα συμμετρίας τον Z, τότε το σύστημα των τριών διαφορικών εξισώσεων θα μετατραπεί σε μία ανεξάρτητη εξίσωση που περιγράφει τον λυγισμό περί το επίπεδο xz και δύο συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τον στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Η αναλυτική λύση αυτών των εξισώσεων είναι δυνατή μόνο σε αρκετές απλές περιπτώσεις, ωστόσο ο Gol'denveizer (1941) εισήγαγε μία προσεγγιστική μέθοδο για την επίλυση τους για οποιοδήποτε συνθήκες στήριξης, στην οποία θα αναφερθούμε αργότερα και η οποία αποτέλεσε την βάση των μεταγενέστερων επιλύσεων (Vlasov 1961, Κονας 2012) που οδήγησαν, συνεπικουρούμενες από αποτελέσματα αριθμητικών αναλύσεων και πειραματικών διατάξεων στις σημερινές κανονιστικές διατάξεις.

Για την περίπτωση της διατομής μονής συμμετρίας περί τον κατακόρυφο ασθενή άξονα, η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων οδηγεί στις σχέσεις του κανονισμού, δηλαδή

$$N_{cr,y} = \frac{(\pi^2) * E * I_y}{(L_{cr,y})^2} \quad (5.4)$$

$$N_{cr,z} = \frac{(\pi^2) * E * I_z}{(L_{cr,z})^2} \quad (5.5)$$

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_p^2} * \left( \frac{(\pi^2) * E * I_w}{(L_{cr,w^2})} + G * I_t \right) \quad (5.6)$$

$$N_{cr,Tf} = \frac{1}{2 * (1 - a_{zw} * (\frac{z_s^2}{i_s^2}))} * \left[ (N_{cr,z} + N_{cr,T}) - \sqrt{(N_{cr,z} + N_{cr,T})^2 - 4 * N_{cr,z} * N_{cr,T} (1 - a_{zw} * (\frac{z_s^2}{i_s^2}))} \right] \quad (5.7)$$

### 5.3 Προσεγγιστική μέθοδος

Έχουμε ήδη αναφερθεί πως η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων περιγραφής της παραμορφωμένης κατάστασης είναι αρκετά σύνθετη, ειδικά στις περιπτώσεις όπου οι συνθήκες στήριξης δεν είναι απλές. Πρώτος που δοκίμασε να ασχοληθεί με την μελέτη τους και την επίλυση τους για οποιαδήποτε συνθήκη στήριξης των ξεταζόμενων μελών ήταν ο Gol'denveizer (1941), η μέθοδος του οποίου αποτέλεσε το βασικό εργαλείο για όλες τις μεταγενέστερες επιλύσεις.

Αρχικά θεώρησε τις θεμελιώδεις συναρτήσεις  $w(x) = A \chi(x)$ ,  $v(x) = B \varphi(x)$ ,  $\theta(x) = C \psi(x)$ , τις οποίες αντικατέστησε στις διαφορικές εξισώσεις κίνησης και μετά από κατάλληλες απλοποιήσεις κατέληξε σε ένα σύστημα ομογενών εξισώσεων με αγνώστους τις σταθερές A, B, C. Η εύρεση του κρίσιμου φορτίου θα προκύψει από την αναζήτηση μη-μηδενικής λύσης του συστήματος απαιτώντας η ορίζουσα του συστήματος για τις σταθερές A, B, C να είναι ίση με μηδέν. Από την έκφραση της ορίζουσας θα καταλήξουμε στην σχέση που δίνει ο κανονισμός ως γενική περίπτωση για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει άξονας συμμετρίας.

$$(N_{cr,y} - N)(N_{cr,z} - N)(N_{cr,T} - N) i_s^2 - y_s^2 a_{yw} N^2 (N_{cr,z} - N) - z_s^2 a_{zw} N^2 (N_{cr,y} - N) = 0 \quad (5.8)$$

Όπου

$$N_{cr,y} = k_{11} \frac{(\pi^2) * E * I_y}{(L)^2} \quad (5.9)$$

$$N_{cr,z} = k_{22} \frac{(\pi^2) * E * I_z}{(L)^2} \quad (5.10)$$

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i p^2} * (k_{33} \frac{(\pi^2) * E * I_w}{L} + G * I_t) \quad (5.11)$$

Οι παράμετροι  $a_{zw}$ ,  $a_{yw}$  δίνονται από τις σχέσεις

$$a_{zw} = k_{13} k_{31} \quad (5.12)$$

$$a_{yw} = k_{23} k_{32} \quad (5.13)$$

Στην συνέχεια οι παράμετροι  $k_{ii}$  γράφονται

$$k_{11} = - \frac{L^2 \int x^{IV}(x)x(\chi)dx}{\pi^2 \int x^{II}(x)x(\chi)dx} \quad (5.14)$$

$$k_{22} = - \frac{L^2 \int \varphi^{IV}(x)\varphi(\chi)dx}{\pi^2 \int \varphi^{II}(x)\varphi(\chi)dx} \quad (5.15)$$

$$k_{33} = - \frac{L^2 \int \psi^{IV}(x)\psi(\chi)dx}{\pi^2 \int \psi^{II}(x)\psi(\chi)dx} \quad (5.16)$$

$$k_{13} = - \frac{L^2 \int \psi^{IV}(x)\varphi(\chi)dx}{\pi^2 \int x^{II}(x)x(\chi)dx} \quad (5.17)$$

$$k_{23} = - \frac{L^2 \int \psi^{IV}(x)\varphi(\chi)dx}{\pi^2 \int \varphi^{II}(x)\varphi(\chi)dx} \quad (5.18)$$

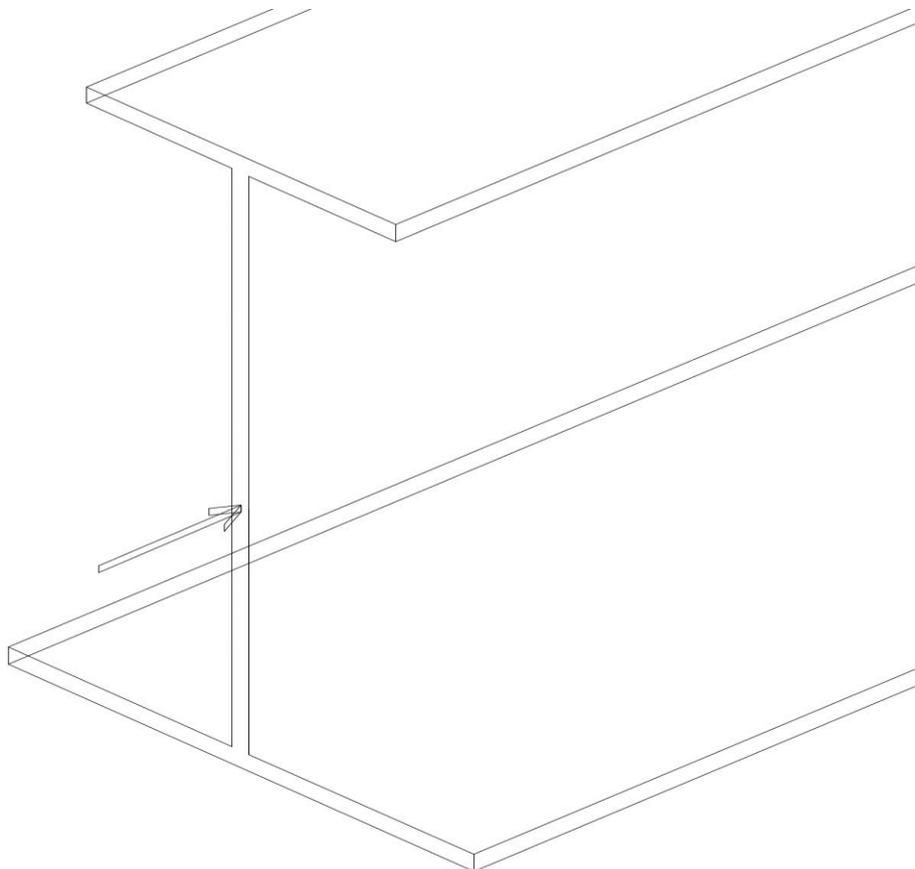
$$k_{31} = - \frac{L^2 \int x^{IV}(x)\psi(\chi)dx}{\pi^2 \int \psi^{II}(x)\psi(\chi)dx} \quad (5.19)$$

$$k_{32} = - \frac{L^2 \int \varphi^{IV}(x)\psi(\chi)dx}{\pi^2 \int \psi^{II}(x)\psi(\chi)dx} \quad (5.20)$$

Η λύση για την τιμή της κρίσιμης ελαστικής δίνεται αναζητώντας την χαμηλότερη λύση της εξίσωσης (5.8). Οι συνθήκες στήριξης ικανοποιούνται από μία κατάλληλη επιλογή των θεμελιωδών συναρτήσεων όπως και την πραγματικών συναρτήσεων παραμόρφωσης. Η αρχική δοκιμή της μεθόδου έγινε με θεώρηση θεμελιωδών συναρτήσεων των ιδιομορφών καμπτικού και στρεπτικού λυγισμού μίας αμφιέριστης ράβδου.

Ένα από τα πολλά συμπεράσματα που προέκυψαν κατά την περαιτέρω μελέτη της συγκεκριμένης ανάλυσης προήλθε από τους Chalupa et al. (1982) και αναφέρει πως για τις περιπτώσεις ίδιων συνθηκών στήριξης στα δύο άκρα οι συντελεστές  $a_{zw}$ ,  $a_{yw}$  μπορούν να λαμβάνονται ίσοι με 1 για λόγους απλούστευσης, με το αποτέλεσμα να είναι υπερ της ασφαλείας. Αυτή η περίπτωση θα ελεγχθεί, καθώς αποτελεί τις διαγώνιες στήλες του πίνακα συντελεστών του CEN/TR 1993-1-103

#### 5.4 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου σε συγκολλητή διατομή μονής συμμετρίας



Εικόνα 5-1: Πρόβολος μονής συμμετρίας υπό αξονική θλίψη ασκούμενη στο κ.β.

Όλα τα παραπάνω θα εφαρμοστούν σε τρεις προβόλους διατομής μονής συμμετρίας, φορτιζόμενους με δύναμη 1000 kN στο κέντρο βάρους τους, με τα παρακάτω γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

H	900 mm	900 mm	900 mm
$b_u$	400 mm	400 mm	400 mm
$t_u$	24 mm	21 mm	20 mm
$d_g$	850 mm	850 mm	859 mm
$t_g$	22 mm	19 mm	18 mm
$b_o$	600 mm	600 mm	600 mm
$t_o$	26 mm	22 mm	21 mm

Πίνακας 5-1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατομής μελετώμενων μονής συμμετρίας

### 5.4.1 Εύρεση ελαστικής κρίσιμης δύναμης σύμφωνα με το CEN/TR 1993-1-103

Η συγκεκριμένες συγκολλητή διατομές είναι μονής συμμετρίας, με άξονα συμμετρίας τον Z-Z', επομένως είναι ευαίσθητη σε στρεπτο(περί τον διαμήκη) – καμπτικό (περί τον κατακόρυφο) – λυγισμό, πράγμα που θα έχει ως αποτέλεσμα το τελικό κρίσιμο φορτίο να είναι μικρότερο από τα αντίστοιχα φορτία  $N_{cr,T}$  και  $N_{cr,z}$  των δύο άλλων μορφών λυγισμού.

#### Διατομή 1

Αρχικά θα γίνει κατάταξη της διατομής.

Όλη η διατομή βρίσκεται σε θλίψη επομένως έχουμε

$$\text{Κορμός} \Rightarrow \frac{c}{t_g} = 38.64 < 42 * \epsilon = 42 \Rightarrow \text{Κατηγορία 3}$$

$$\text{Πέλμα 1} \Rightarrow \frac{c}{t_{fo}} = 7.83 < 12 \Rightarrow \text{Κατηγορία 2}$$

$$\text{Πέλμα 2} \Rightarrow \frac{c}{t_{fu}} = 11.15 < 12 \Rightarrow \text{Κατηγορία 2}$$

Άρα όλη η διατομή είναι κατηγορίας 3

Υπολογίζουμε τα γεωμετρικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής

Ροπή αδράνειας περί τον ασθενή

$$I_z = \frac{t_o * (b o^3)}{12} + \frac{t_u * (b u^3)}{12} + \frac{d g * (t g^3)}{12} = 59675.42 \text{ cm}^4 \quad (5.21)$$

Περί τον ισχυρο

$$I_y = 579483.19 \text{ cm}^4 \quad (5.22)$$

Σταθερά στρέψης

$$\sum_i \frac{b i * (t i^3)}{3} = 837.53 \text{ cm}^4 \quad (5.23)$$

Απόσταση μεταξύ των κ.β. των πελμάτων

$$h_s = 87.5 \text{ cm} \quad (5.24)$$

$$\beta_f = \frac{I_{fc}}{I_{fc} + I_{ft}} = 0.57 \quad (5.25)$$

Σταθερά στρέβλωσης

$$I_w = \beta_f * (1 - \beta_f) = 77050403.60 \quad (5.26)$$

Απόσταση κέντρου διάτμησης από άνω ίνα

$$Z_i = 21.37 \text{ cm} \quad (5.27)$$

Απόσταση κέντρου βάρους από κέντρο διάτμησης

$$Z_s = 17.72 \text{ cm} \quad (5.28)$$

Επομένως υπολογίζουμε τα κρίσιμα φορτία καμπτικού και στρεπτικού λυγισμού

$$N_{cr,y} = \frac{(\pi^2) * E * I_y}{(L_{cr,y})^2} = 120104.67 \text{ kN} \quad (5.29)$$

$$N_{cr,z} = \frac{(\pi^2) * E * I_z}{(L_{cr,z})^2} = 12368.43 \text{ kN} \quad (5.30)$$

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_p^2} * \left( \frac{(\pi^2) * E * I_w}{(L_{cr,w^2})} + G I_t \right) = 15628.10 \text{ kN} \quad (5.31)$$

Όπου  $i_p^2$  είναι η πολική ροπή συστροφής και ισούται με  $\frac{I_y + I_z}{A} = 1455.94 \text{ cm}^2$  (5.32)

Στην συνέχεια θα καταφύγουμε στην εξίσωση υπολογισμού του φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού διατομής μονής συμμετρίας  $N_{cr,Tf}$ , της οποίας η γενεσιουργός διαδικασία έχει ήδη περιγραφεί στην προηγούμενη παράγραφο του παρόντος κεφαλαίου.

Η εξίσωση υπολογισμού της  $N_{cr,Tf}$  περιγράφεται στην παράγραφο 5.3 (εξίσωση 5.4) του CEN/TR 1993-1-103 και δίνει τιμές μικρότερες από τα επιμέρους κρίσιμα φορτία των υπόλοιπων τριών μορφών ασταθειών.

Θεωρούμε ίδιες συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης στην άκρη του προβόλου, επομένως βρισκόμαστε στην διαγώνιο του πίνακα, όπου δηλαδή έχουμε  $a_{zw} = 1$

$$N_{cr,Tf} = \frac{1}{2 * (1 - a_{zw} * (\frac{z_s}{i_s})^2)} [(N_{cr,z} + N_{cr,T}) - \sqrt{(N_{cr,z} + N_{cr,T})^2 - 4 N_{cr,z} N_{cr,T} (1 - a_{zw} * (\frac{z_s}{i_s})^2)}] =$$

$$= 9628.08 \text{ kN} \quad (5.33)$$

Αντίστοιχα για την διατομή 2 υπολογίζουμε

Όλη η διατομή βρίσκεται σε θλίψη επομένως έχουμε

$$\text{Πέλμα 1} \Rightarrow c/t = 11.20 \quad (5.34)$$

$$\text{Κορμός} \Rightarrow c/t = 41.11 \quad (5.35)$$

$$\text{Πέλμα 2} \Rightarrow c/t = 13.21 \quad (5.36)$$

Άρα όλη η διατομή είναι κατηγορίας 4

Υπολογίζουμε τα αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής 2

$$I_z = \frac{t_o * (b_o^3)}{12} + \frac{t_u * (b_u^3)}{12} + \frac{d_g * (t_g^3)}{12} = 50848.99 \text{ cm}^4 \quad (5.37)$$

$$I_y = 504805.28 \text{ cm}^4 \quad (5.38)$$

$$\sum_i \frac{b_i * (t_i^3)}{3} = 532.38 \text{ cm}^4 \quad (5.39)$$

$$h_s = 87.85 \text{ cm} \quad (5.40)$$

$$\beta_f = \frac{I_f c}{I_f c + I_f t} = 0.56 \quad (5.41)$$

$$I_w = \beta_f * (1 - \beta_f) = 67445286.10 \quad (5.42)$$

$$Z_i = 21.67 \text{ cm} \quad (5.43)$$

$$Z_s = 17.80 \text{ cm} \quad (5.44)$$

$$N_{cr,y} = \frac{(\pi^2) * E * I_y}{(L_{cr,y})^2} = 104626.79 \text{ kN} \quad (5.45)$$

$$N_{cr,z} = \frac{(\pi^2) * E * I_z}{(L_{cr,z})^2} = 10539.05 \text{ kN} \quad (5.46)$$

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_p^2} * \left( \frac{(\pi^2) * E * I_w}{(L_{cr,w})^2} + G * I_t \right) = 12470.37 \text{ kN} \quad (5.47)$$

$$i_p^2 = 1466.76 \text{ cm}^2 \quad (5.48)$$

Θεωρούμε ίδιες συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης στην άκρη του προβόλου, επομένως βρισκόμαστε στην διαγώνιο του πίνακα, όπου δηλαδή έχουμε  $a_{zw} = 1$

$$N_{cr,Tf} = \frac{1}{2 * (1 - a_{zw} * (\frac{z_s}{i_s})^2)} [(N_{cr,z} + N_{cr,T}) - \sqrt{(N_{cr,z} + N_{cr,T})^2 - 4 N_{cr,z} N_{cr,T} (1 - a_{zw} * (\frac{z_s}{i_s})^2)}]$$

$$= 7998.34 \text{ (5.49)}$$

Ενώ για την διατομή 3 έχουμε

Όλη η διατομή βρίσκεται σε θλίψη επομένως έχουμε

$$\text{Κορμός} \Rightarrow \frac{c}{t_g} = 38.64 < 42 * \epsilon = 42 \Rightarrow \text{Κατηγορία 4 (5.50)}$$

$$\text{Πέλμα 1} \Rightarrow \frac{c}{t_{fo}} = 11.35 < 12 \Rightarrow \text{Κατηγορία 2 (5.51)}$$

$$\text{Πέλμα 2} \Rightarrow \Rightarrow \frac{c}{t_{fo}} = 13.86 < 12 \Rightarrow \text{Κατηγορία 4 (5.52)}$$

Άρα όλη η διατομή είναι κατηγορίας 4

Υπολογίζουμε τα αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής 2

$$I_z = \frac{t_o*(b_o^3)}{12} + \frac{t_u*(b_u^3)}{12} + \frac{d_g*(t_g^3)}{12} = 48508.31 \text{ cm}^4 \text{ (5.53)}$$

$$I_y = 482208.38 \text{ cm}^4 \text{ (5.54)}$$

$$\sum_i \frac{b_i*(t_i^3)}{3} = \text{cm}^4 \text{ (5.55)}$$

$$h_s = 87.95 \text{ cm (5.56)}$$

$$\beta_f = \frac{I_{fc}}{I_{fc} + I_{ft}} = 0.559 \text{ (5.57)}$$

$$I_w = \beta_f * (1 - \beta_f) = 64405504.10 \text{ (5.58)}$$

$$Z_i = 21.78 \text{ (5.59)}$$

$$Z_s = 17.64 \text{ (5.60)}$$

$$N_{cr,y} = \frac{(\pi^2)*E*I_y}{(L_{cr,y})^2} = 99943.34 \text{ kN (5.61)}$$

$$N_{cr,z} = \frac{(\pi^2)*E*I_z}{(L_{cr,z})^2} = 10053.94 \text{ kN (5.62)}$$

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_p^2} * \left( \frac{\pi^2}{L_{cr,w}^2} * E * I_w + G * I_t \right) = 11596.07 \text{ kN (5.63)}$$

$$i_p^2 = 1471.68 \text{ cm}^2 \text{ (5.64)}$$

Θεωρούμε ίδιες συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης στην άκρη του προβόλου, επομένως βρισκόμαστε στην διαγώνιο του πίνακα, όπου δηλαδή έχουμε  $a_{zw} = 1$

$$N_{cr,Tf} = \frac{1}{2*(1 - a_{zw} * (\frac{Z_s^2}{I_s}))} \left[ (N_{cr,z} + N_{cr,T}) - \sqrt{(N_{cr,z} + N_{cr,T})^2 - 4 * N_{cr,z} * N_{cr,T} * (1 - a_{zw} * (\frac{Z_s^2}{I_s}))} \right] =$$

$$= 7569.55 \text{ kN (5.65)}$$

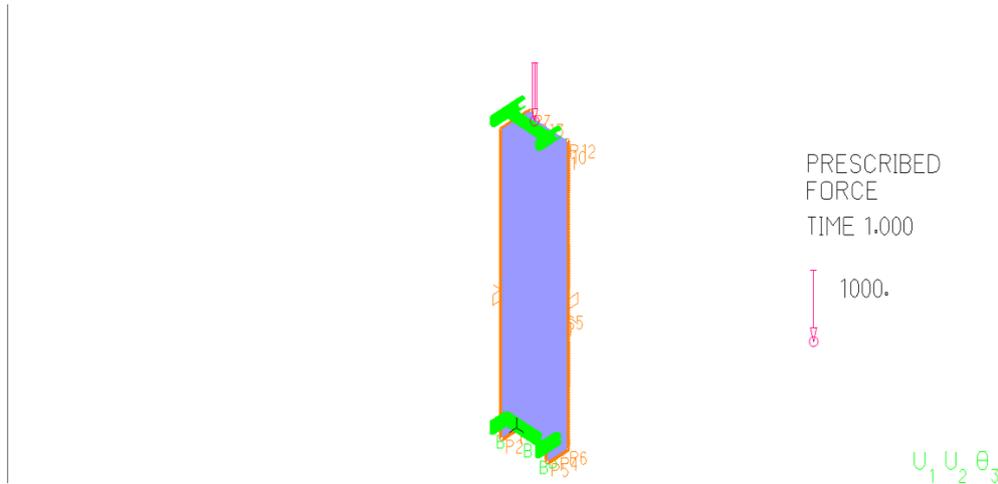
Διατομή	$N_{cr,y}$	$N_{cr,z}$	$N_{cr,T}$	$N_{cr,Tf}$
1	120104.67 kN	12368.43 kN	15628.10 kN	9628.08 kN
2	104626.79 kN	10539.05 kN	12470.37 kN	7998.34 kN
3	99943.34 kN	10053.94 kN	11596.07 kN	7569.55 kN

Πίνακας 5-2 Κρίσιμα φορτία καμπτικών, στρεπτικού και στρεπτοκαμπτικών λυγισμών μελετώμενων διατομών μονής συμμετρίας

### 5.4.2 Μελέτη στρεπτοκαμπτικού λυγισμού με λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων

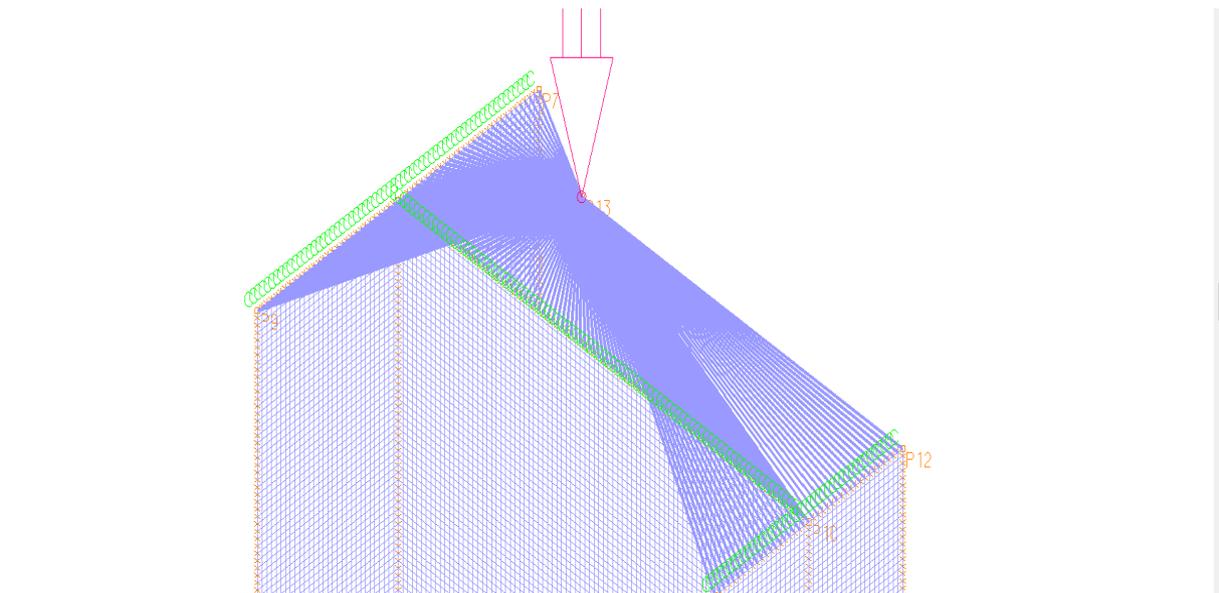
Μετά την επίλυση των παραπάνω παραδειγμάτων με την βοήθεια των κανονιστικών σχέσεων για την εύρεση της κρίσιμης ελαστικής δύναμης, θα δημιουργηθούν κατάλληλα προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων τα οποία θα επαληθεύσουν τα παραπάνω αποτελέσματα.

Για να μελετηθεί κατάλληλα η συγκεκριμένη μορφή αστάθειας είναι απαραίτητη η χρησιμοποίηση πεπερασμένων στοιχείων κελύφους 4 κόμβων (4 nodes) και έξι βαθμών ελευθερίας σε κάθε κόμβο. Θα χρησιμοποιηθεί γραμμικό ελαστικό υλικού, θα επιλεγθούν μεγάλες μετακινήσεις και θα πραγματοποιηθεί αρχικά γραμμική ελαστική ανάλυση λυγισμού στα τρία προσομοιώματα, από την οποία θα προκύψουν οι ιδιομορφές και τα κρίσιμα φορτία

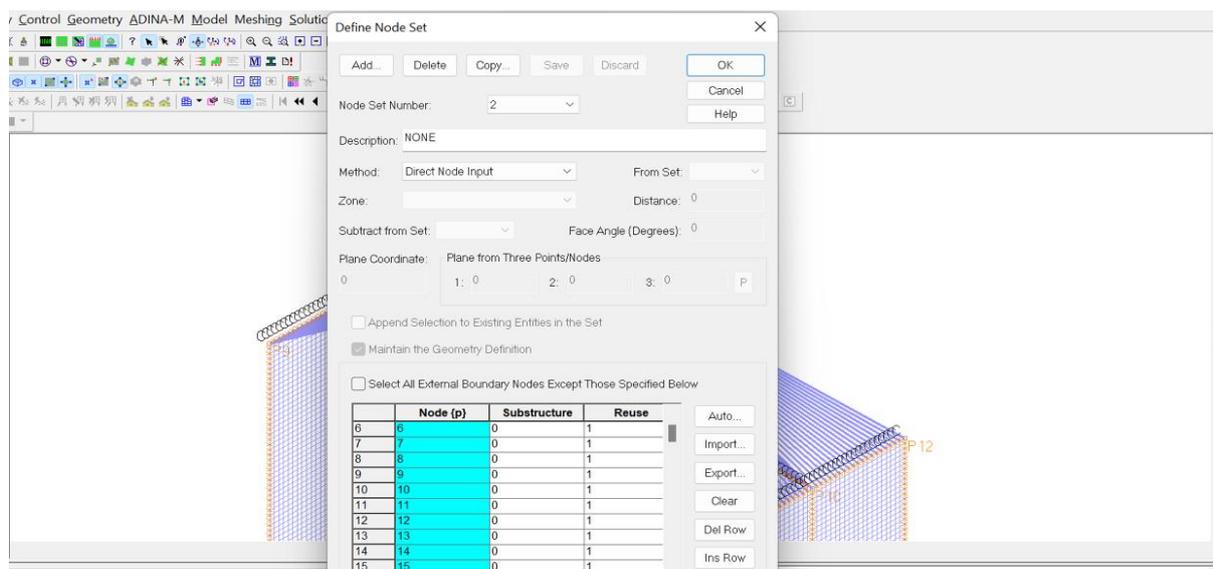


Σχήμα 5-1: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων πρώτης διατομής

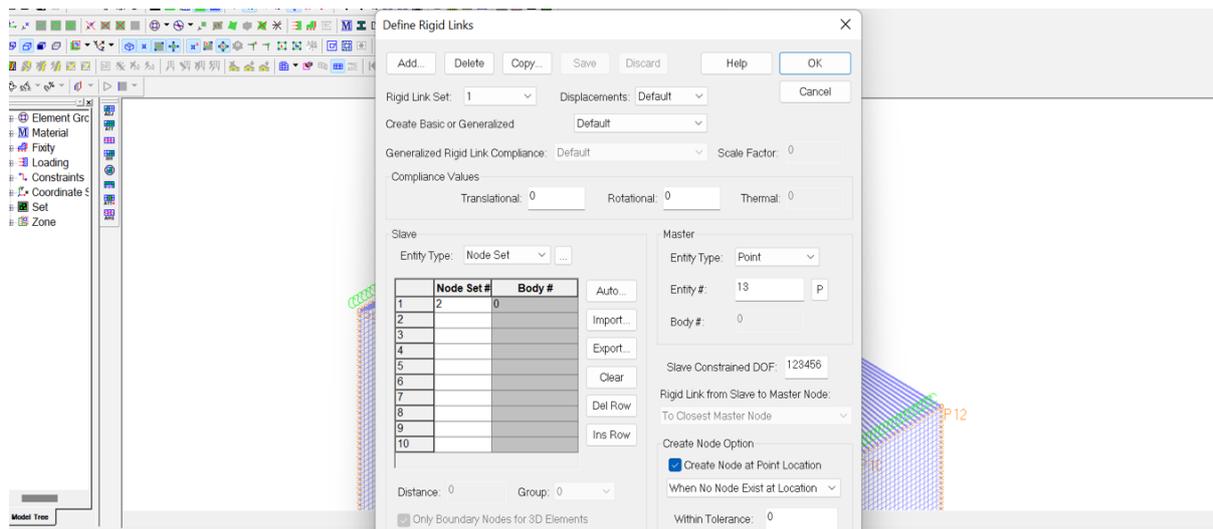
Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στον τρόπο επιβολής του φορτίου, καθώς αν δοκιμάσουμε να επιβάλουμε την θλίψη απευθείας στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων θα παρατηρήσουμε την εμφάνιση τοπικών αστοχιών στο σημείο επιβολής της δύναμης. Για αυτό το λόγο θα εφαρμόσουμε την δύναμη μέσω rigid link. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να ορίσουμε ένα node set στο οποίο θα συμπεριλάβουμε το σύνολο των κόμβων στην διατομή επιβολής του φορτίου.



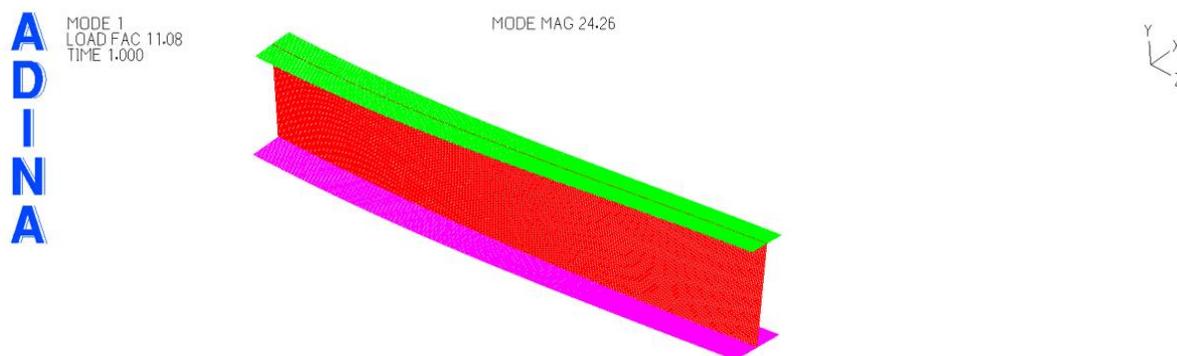
Σχήμα 5-2: Επιβολή θλίψης στο κέντρο βάρους προβόλου διατομής μόνης συμμετρίας



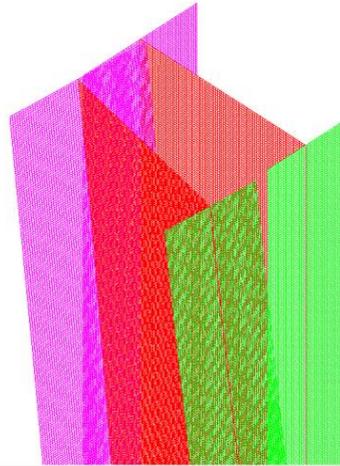
Σχήμα 5-3: Ορισμός node set για την επιβολή φορτίου σε πρόβολο διατομής μονής συμμετρίας



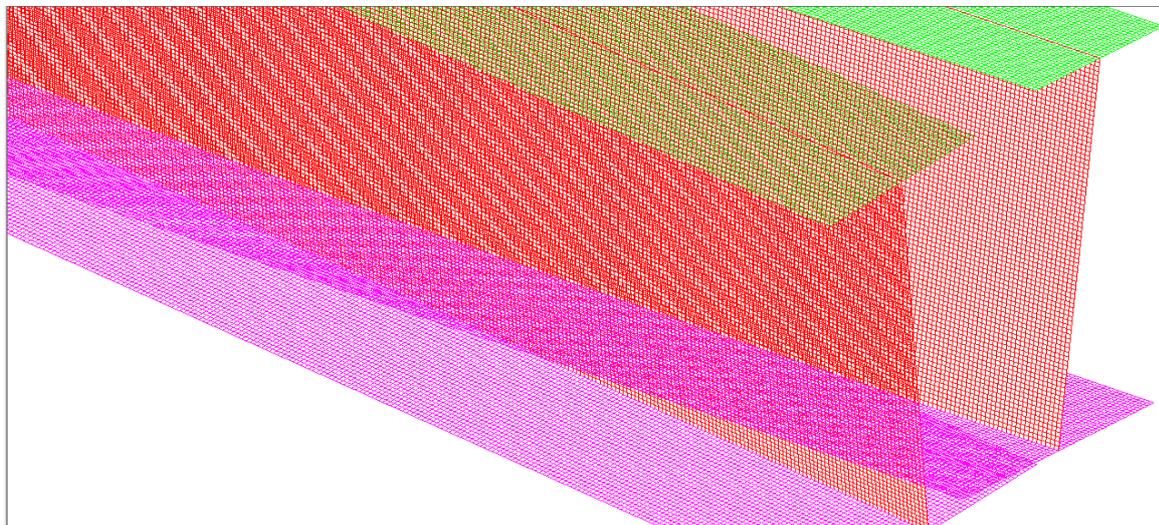
Σχήμα 5-4: Ορισμός rigid link για την επιβολή φορτίου σε πρόβολο διατομής μονής συμμετρίας



Σχήμα 5-5: Πρώτη ιδιομορφή λυγισμού μοντέλου διατομής 1



Σχήμα 5-6: Όψη Α πρώτης ιδιομορφής λυγισμού μοντέλου διατομής 1



Σχήμα 5-7: Όψη Β πρώτης ιδιομορφής λυγισμού μοντέλου διατομής 1

Παρατηρούμε, όπως αναμέναμε από το θεωρητικό υπόβαθρο από το οποίο παραθέσαμε άνωθεν, πως για τις περιπτώσεις όπου βρισκόμαστε στις διαγώνιες θέσεις του πίνακα ο κανονισμός δίνει συντηρητικότερες τιμές σε σχέση με το λογισμικό

Διατομή	$N_{cr,y}$	$N_{cr,z}$	$N_{cr,T}$	$N_{cr,Tf}$	Λογισμικό
1	120104.67 kN	12368.43 kN	15628.10 kN	9628.08 kN	11080 kN
2	104626.79 kN	10539.05 kN	12470.37 kN	7998.34 kN	9454 kN
3	99943.34 kN	10053.94 kN	11596.07 kN	7569.55 kN	8998 kN

Πίνακας 5-3 Κρίσιμη ελαστική δύναμη κανονισμού και λογισμικού

### 5.4.3 Εύρεση συνολικής αντοχής διατομής σε διαρροή και λυγισμό

Έχουμε ήδη αναφέρει πως η συνολική θλιπτική αντοχή του μέλους που υπόκειται σε λυγισμό και διαρροή, δίνεται από την σχέση (8.67) της παραγράφου 8.2.4 του νέου EN1993-1-1, η οποία είναι η εξής

$$\frac{N_{ed}}{N_{b,rd}} \leq 1 \quad (5.67)$$

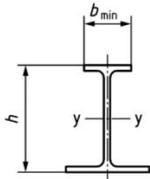
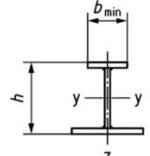
Όπου στον συντελεστή  $N_{b,rd}$  λαμβάνεται υπόψη τόσο η πιθανή πλαστικοποίηση, όσο και η επίδραση του λυγισμού, αλλά και των αρχικών ατελειών μέσω του μειωτικού συντελεστή  $\chi$ , ο οποίος με την σειρά του σχετίζεται με αντίστοιχες καμπύλες λυγισμού που προσμοιάζουν τις πιθανές ατέλειες για διαφορετικές κατηγορίες διατομών, όπως αυτές έχουν προκύψει μέσα από σειρά πειραματικών διαδικασιών.

$$N_{b,rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (5.66)$$

Ο μειωτικός συντελεστής  $\chi$  είναι μία συνάρτηση της ανηγμένης λυγηρότητας  $\bar{\lambda}$ , η οποία για διατομές κατηγορίας 3 είναι ίση με  $\sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}}$  (5.67)

Σύμφωνα με τον κανονισμό στον παραπάνω τύπο για την περίπτωση στρεπτοκαμπτικού λυγισμού λαμβάνεται ως ελαστική κρίσιμη δύναμη  $N_{cr}$ , η υπολογισθείσα σύμφωνα με το EN1993-1-103,  $N_{cr,TF}$ , η οποία θα οδηγήσει σε μία ανηγμένη λυγηρότητα  $\bar{\lambda}_{TF}$  και στην συνέχεια σε έναν αντίστοιχο μειωτικό συντελεστή  $\chi_{TF}$ .

Ελλείψει κάποιας επιπλέον πληροφόρησης, θα χρησιμοποιήσουμε τις καμπύλες λυγισμού διατομών μονής συμμετρίας, που περιγράφονται στην παράγραφο 8.3.1.4 που αφορά την περίπτωση πλευρικού λυγισμού και στην συνέχεια θα ελέγξουμε τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα των μη-γραμμικών αναλύσεων.

Cross-section		Limits	Lateral torsional buckling curve
Rolle I- or H-sections <sup>a</sup>		$h/b_{min} \leq 2,0$	a
		$h/b_{min} > 2,0$	b
Welded I-sections <sup>a</sup>		$h/b_{min} \leq 2,0$	c
		$h/b_{min} > 2,0$	d
Other sections (e.g. C-, U-, T-sections)		—	d
NOTE The selection of the lateral torsional buckling curve is based on the minimum flange width $b_{min}$ , irrespective of this being the tension or compression flange.			
<sup>a</sup> This may also be applied to doubly symmetric sections, where $b_{min} = b$ .			

Πίνακας 4-4: Επιλογή καμπυλών πλευρικού λυγισμού διάφορων διατομών

Επομένως για την διατομή 1 υπολογίζουμε

$$\bar{\lambda}_{TF} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr,TF}}} = \sqrt{\frac{439 \cdot 27,5}{9628,08}} = 1.12 \quad (5.68)$$

$$\frac{h}{b_{min}} < 2 \Rightarrow \text{Καμπύλη λυγισμού d} \Rightarrow a = 0.76 \quad (5.69)$$

$$\Phi_{TF} = 0.5 [1 + a (\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2] = 1.48 \quad (5.69)$$

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} = 0.51 \quad (5.70)$$

$$N_{b,rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0.41 \cdot 439 \cdot 27.5}{1} = 4986.54 \text{ kN (5.71)}$$

Εξαιτίας των διάφορων αβεβαιοτήτων σχετικά με την επιλογή της σωστής καμπύλης λυγισμού, θα επαναληφθούν οι υπολογισμοί θεωρώντας αυτή τη φορά πως η σωστή καμπύλη λυγισμού της διατομής, είναι η καμπύλη

Διατομή	Κατηγορία	Καμπύλη λυγισμού	$\bar{\lambda}_{TF}$	$\chi_{TF}$	$N_{b,rd}$
1	3	d	1.12	0.41	4986.54
1	3	c	1.12	0.51	6112.20

Πίνακας 5-5 Υπολογισμός συνολικής θλιπτικής αντοχής σε κάμψη και θλίψη διατομών μονής συμμετρίας

## 5.5 Μη-γραμμικές αναλύσεις με το λογισμικό

### 5.5.1 Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες

Συνέχεια των γραμμικών αναλύσεων λυγισμού που πραγματοποιήθηκαν πριν θα γίνουν μη-γραμμικές αναλύσεις, οι οποίες θα φανερώσουν την πραγματική συμπεριφορά του μέλους. Για την καλύτερη κατανόηση της θα μελετηθεί κάθε μορφή μη-γραμμικότητας ξεχωριστά. Ο έλεγχος θα γίνει με επιβολή μετακινήσεων για να μπορέσουμε να ανιχνεύσουμε την ύπαρξη πιθανών καθοδικών κλάδων. Πιο συγκεκριμένα θα επιβάλουμε μία μικρή μετακίνηση κατά τον εγκάρσιο άξονα, μεγέθους 0.0005 m

Για εξοικονόμηση χώρου, αλλά και υπολογιστικού χρόνου, το σύνολο των αναλύσεων θα πραγματοποιηθεί για την διατομή, τα γεωμετρικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά της οποίας μπορούν να αναζητηθούν στην προηγούμενη παράγραφο.

Εξαιτίας των διάφορων αβεβαιοτήτων που υπάρχουν σχετικά με τον τρόπο λήψης των ατελειών θα ληφθεί υπόψη τόσο η equivalent bow imperfection, όσο και η sway imperfection με την μορφή των ισοδύναμων δυνάμεων, όπως αυτές περιγράφονται στις παραγράφους 7.3.2 και 7.3.3.1 του EN1993-1-1 και έχουν αναλυθεί ήδη σε προηγούμενο κεφάλαιο. Μας ενδιαφέρει η bow imperfection περί τον άξονα Z, καθώς αυτός είναι που συμμετέχει εντονότερα στην εμφάνιση του φαινομένου. Θα χρησιμοποιήσουμε την καμπύλη λυγισμού c. Η εφαρμογή των ισοδύναμων δυνάμεων θα πραγματοποιηθεί στο κέντρο διάτμησης και όχι στο κέντρο βάρους όπου εφαρμόζεται η κεντρική θλίψη.

- Bow imperfection

$$e_o = \frac{\alpha}{\varepsilon} * \beta * L \Rightarrow (5.72)$$

Διατομή κατηγορίας 3 =>  $\beta = 1/200 \Rightarrow$

$$e_o = 0.49 * 500 * \frac{1}{200} = 1.25 \text{ cm (5.73)}$$

- Sway imperfection

$$\varphi = \varphi_o * a_H * a_m (5.74)$$

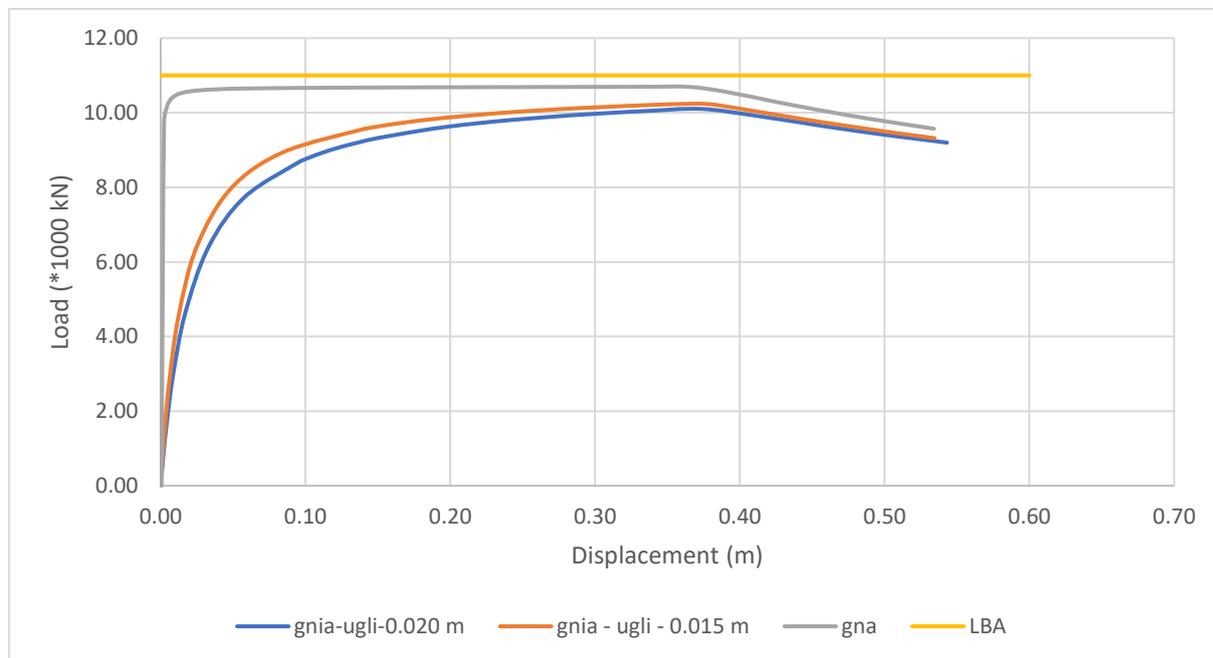
$$\varphi_o = \frac{1}{400} (5.75)$$

$$a_H = \frac{2}{\sqrt{H}} = \frac{2}{\sqrt{500}} = 0.089 (5.76)$$

$$\varphi = 2.23 * 10^{-4} \text{ rad (5.77)}$$

Παρατηρούμε όμως πως όταν δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε τις ισοδύναμες δυνάμεις που αντιστοιχούν στις συγκεκριμένες ατέλειες εμφανίζονται διάφορα προβλήματα σύγκλισης, για αυτό η

συνέχεια των αναλύσεων θα πραγματοποιηθεί εφαρμόζοντας ως ατέλεια την μοναδική τοπική και καθολική ατέλεια που υπολογίστηκε στο κεφάλαιο 1.



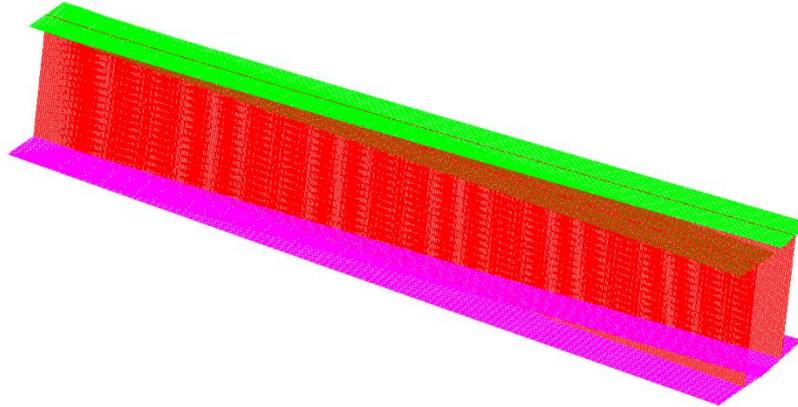
Διάγραμμα 5-1: Δρόμος ισορροπίας μη-γραμμικής ανάλυσης γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες διατομής μονής συμμετρίας

Στη συνέχεια θα πραγματοποιηθεί και μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες με σκοπό να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα. Θα χρησιμοποιηθεί η πρώτη ιδιομορφή μόνο προφανώς και θα γίνει παραμετρική διερεύνηση του πλάτους της

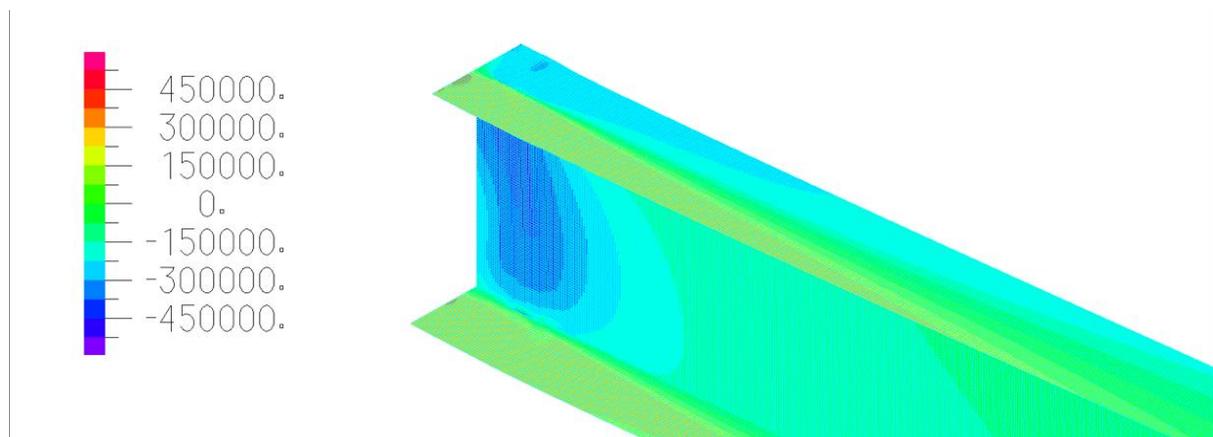
### 5.5.2 Μη γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες

Τέλος θα πραγματοποιηθεί μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες με εφαρμογή μετακινήσεων για να ανιχνευθούν και πιθανοί καθοδικοί κλάδοι. Μετά και τα προβλήματα σύγκλισης που αντιμετωπίσαμε κατά την πραγματοποίηση της μη-γραμμικής ανάλυσης με αρχικές ατέλειες σύμφωνα με τις παραγράφους 7.3.3.2 και 7.3.2 του EN1993-1-1 που αναφέρονται σε καμπτικό λυγισμό, θα πραγματοποιήσουμε τις αναλύσεις GMNIA χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα σχήματα των ιδιομορφών. Ως πλάτος θα εφαρμοστεί αυτό που υπολογίστηκε στην παράγραφο 1 για τον πρόβολο διατομής μονής συμμετρίας.

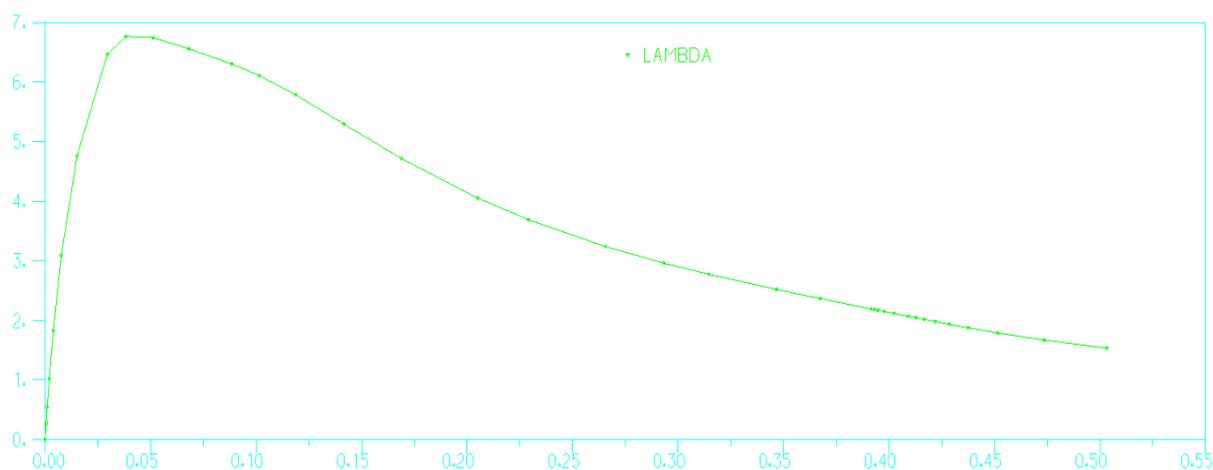
Αξίζει σε αυτό το σημείο να υπενθυμίσουμε τις αβεβαιότητες των αποτελεσμάτων αφενός εξαιτίας του γεγονότος πως οι καμπύλες λυγισμού για τον υπολογισμό της  $N_{b,rd}$  κατά τον κανονισμό έχουν ληφθεί όπως στην περίπτωση του πλευρικού λυγισμού, αφετέρου λόγω τις αδυναμίας επαλήθευσης του σωστού τρόπου λήψης των ατελειών.



Σχήμα 5-11: Παραμορφωμένος φορέας προβόλου μονής συμμετρίας από ανάλυση GMNIA με ατέλεια UGLI πλάτους 0.018 m

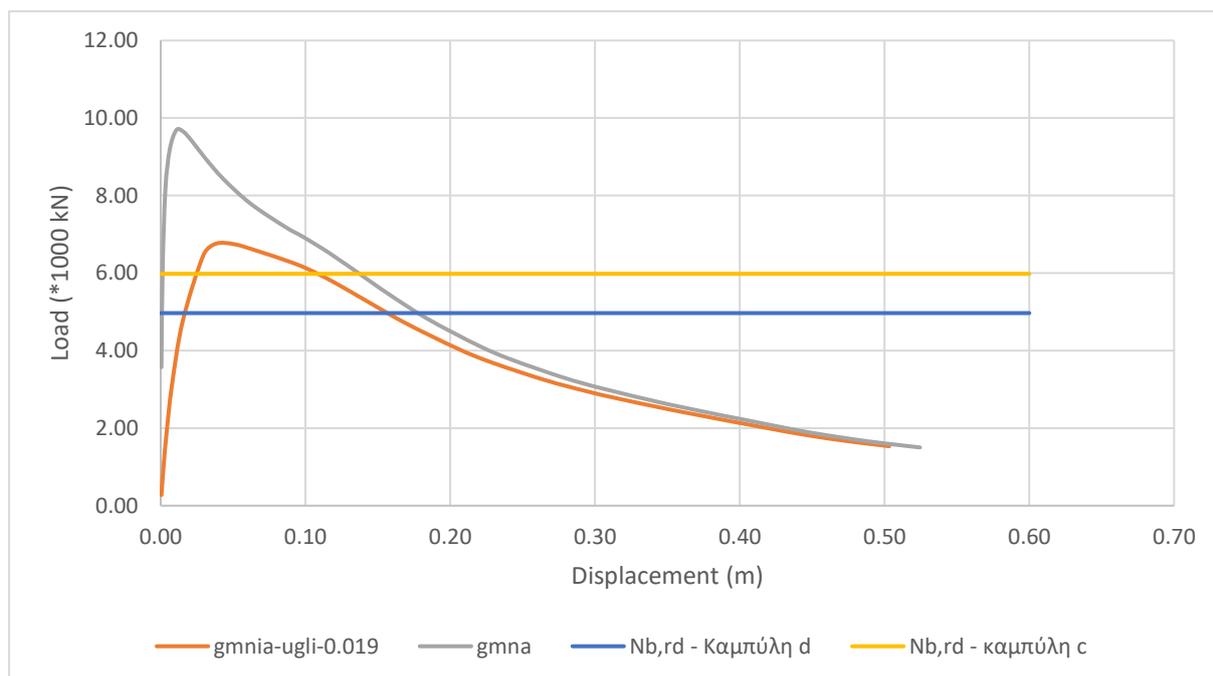


Σχήμα 5-12: Διάγραμμα τάσεων  $\sigma_{zz}$  προβόλου μονής συμμετρίας από ανάλυση GMNIA με ατέλεια UGLI πλάτους 0.018 m



Διάγραμμα 5-2: Δρόμος ισορροπίας GMNIA με ατέλεια UGLI πλάτους 0.018 m

Στην συνέχεια παρατίθενται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των παραπάνω αναλύσεων για ατέλειες σύμφωνα με τα σχήματα των ιδιομορφών, αλλά και η συνολική αντοχή σε διαρροή και θλίψη, όπως αυτή προέκυψε από την εφαρμογή των σχέσεων του Ευρωκώδικα-3



Διάγραμμα 5-3: Συγκεντρωτικοί δρόμοι ισορροπίας μη-γραμμικών αναλύσεων υλικού και γεωμετρίας και αντοχών κατά το EN1993-1-1 με βάση τα φορτία λυγισμού κατά CEN/TR 1993-1-103

## 5.6 Συμπεράσματα

Από το σύνολο των αναλύσεων εξάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Σε αναλογία με τα συμπεράσματα των Chalupa et al. (1982), τα κρίσιμα φορτία για συντελεστές  $a_{zw}$ ,  $a_{yw} = 1$  είναι υπερ της ασφαλείας
- Η επιλογή των καμπυλών λυγισμού με βάση τον πίνακα 8.4 της παραγράφου 8.3.1.4 του EN1993-1-1 που αναφέρεται στον πλευρικό λυγισμό μονοσυμμετρικών διατομών, για τον υπολογισμό της συνολικής αντοχής μονοσυμμετρικών διατομών υπό κεντρική θλίψη, κρίνεται υπερ της ασφαλείας, όχι όμως ιδιαίτερα οικονομική
- Συνίσταται η χρήση της ατέλειας UGLI για ευκολότερη σύγκλιση του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων



## 6 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΗΡΙΞΗ

### 6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο 4 αντιμετωπίσαμε την περίπτωση της ράβδου επί ελαστικών στηρίξεων, όταν προσπαθήσαμε να λύσουμε με τις σχέσεις του κανονισμού τον φορέα προκειμένου να υπολογίσουμε το κρίσιμο φορτίο ελαστικού λυγισμού για το θλιβόμενο πέλμα της δικτυωτής γέφυρας κάτω διάβασης. Απόρροια αυτού όμως είναι η αναζήτηση της τιμής της δυσκαμψίας η οποία θα μετατρέψει τις στηρίξεις από ελαστικές σε αμετάθετες, μειώνοντας το μήκος λυγισμού στην απόσταση μεταξύ των διαδοκίδων. Με την περίπτωση αυτή πρόκειται να ασχοληθούμε στο παρόν κεφάλαιο

### 6.2 Περιπτώσεις όπου μία ελαστική στήριξη θεωρείται αμετάθετη σύμφωνα με το CEN/TR 1993-1-103

Η απαιτούμενη δυσκαμψία που χρειάζεται να έχει ένα μέλος υπό σταθερή θλίψη προκειμένου η στήριξη να θεωρηθεί αμετάθετη περιγράφεται στην παράγραφο 6.4.3. Από εκεί η κρίσιμη δυσκαμψία, την οποία και πρέπει να ξεπεράσει η δυσκαμψία της ελαστικής στήριξης προκειμένου να θεωρηθεί αμετάθετη, υπολογίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις, για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις

$$K_{cr} = \frac{A \cdot f_y}{\alpha \cdot r \cdot \xi} \left( \left( \frac{50}{3} \cdot \varphi_1 \right) - \left( \frac{250}{9} \cdot \varphi_1 \cdot \underline{\lambda}^2 \right) \right) \text{ για } \bar{\lambda} < \bar{\lambda}_1 \quad (6.1)$$

$$K_{cr} = \frac{A \cdot f_y \cdot 2.5}{\alpha \cdot r \cdot \xi \cdot (\lambda^2)} \left( 1 - \left( \frac{\lambda - 0.7}{0.3} \right)^2 \right) \text{ για } \bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda} < \bar{\lambda}_2 \quad (6.2)$$

$$K_{cr} = \frac{A \cdot f_y \cdot 2.5}{\alpha \cdot r \cdot \xi \cdot (\lambda^2)} \text{ για } \bar{\lambda} \geq \bar{\lambda}_2 \quad (6.3)$$

Ο συντελεστής  $\xi$  δίνεται από τον παρακάτω πίνακα

$n_r$	$\xi$
2	0.500
3	0.333
4	0.293
5	0.276
6	0.268
7	0.263
9	0.258
11	0.255

Πίνακας 6-1: Τιμές συντελεστή  $\xi$  ανάλογα με τον αριθμό των φατνωμάτων

Ενώ οι τιμές των  $\bar{\lambda}_1$ ,  $\bar{\lambda}_2$ ,  $\varphi$  από τον ακόλουθο πίνακα

Factors	Buckling curves			
	a	b	c	d
$\bar{\lambda}_1$	0.50	0.50	0.41	0.38
$\bar{\lambda}_2$	0.95	0.84	0.74	0.62
$\varphi$	0.30	0.46	0.64	0.93

Πίνακας 6-2: Τιμές συντελεστών  $\bar{\lambda}_1$ ,  $\bar{\lambda}_2$ ,  $\varphi$ , ανάλογα με την καμπύλη λυγισμού του μέλους

### 6.3 Επαλήθευση τιμών κανονισμού και σύγκριση με μοντέλο λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων

#### 6.3.1 Υπολογισμός κρίσιμης δυσκαμψίας από τον κανονισμό

Η περίπτωση η οποία θα μελετηθεί αφορά έναν φορέα με διατομή CHS 273x10 υπό σταθερή θλίψη, ελαστικές στηρίξεις ανά 3 μέτρα και συνολικό μήκος φορέα 15 μέτρα. Σύμφωνα με την 6.4.3 υπολογίζουμε την κρίσιμη τιμή της δυσκαμψίας.

Αρχικά υπολογίζουμε την ανηγμένη λυγηρότητα του μέλους, θεωρώντας πως το μήκος λυγισμού είναι ίσο με την περίπτωση όπου οι στηρίξεις είναι ακλόνητες. Δηλαδή το κρίσιμο μήκος είναι 3 μέτρα. Υποθέτουμε δομικό χάλυβα S355

$$N_{cr} = \frac{(\pi^2) \cdot 21000 \cdot 7150}{(300^2)} = 16465.79 \text{ kN} \quad (6.4)$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{82.6 \cdot 35.5}{16465.79}} = 0.43 < \bar{\lambda}_1 = 0.50 \quad (6.5)$$

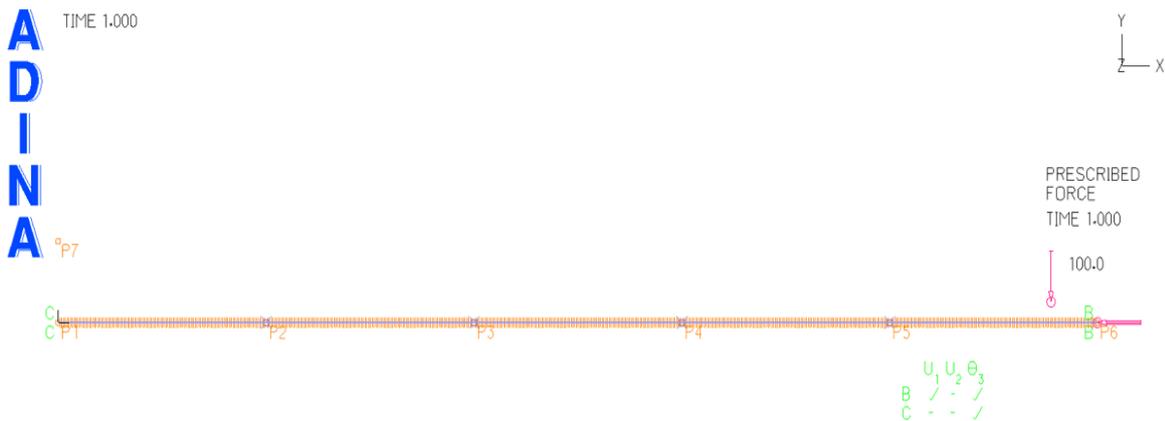
Άρα βρισκόμαστε στην πρώτη περίπτωση όπου η κρίσιμη τιμή της δυσκαμψίας υπολογίζεται από την σχέση

$$K_{cr} = \frac{A \cdot f_y}{\alpha \cdot r \cdot \xi} \left( \left( \frac{50}{3} \varphi_1 \right) - \left( \frac{250}{9} \varphi_1 \bar{\lambda}^2 \right) \right) = 178.025 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} = 17802.50 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (6.6)$$

### 6.3.2 Επίλυση με λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων

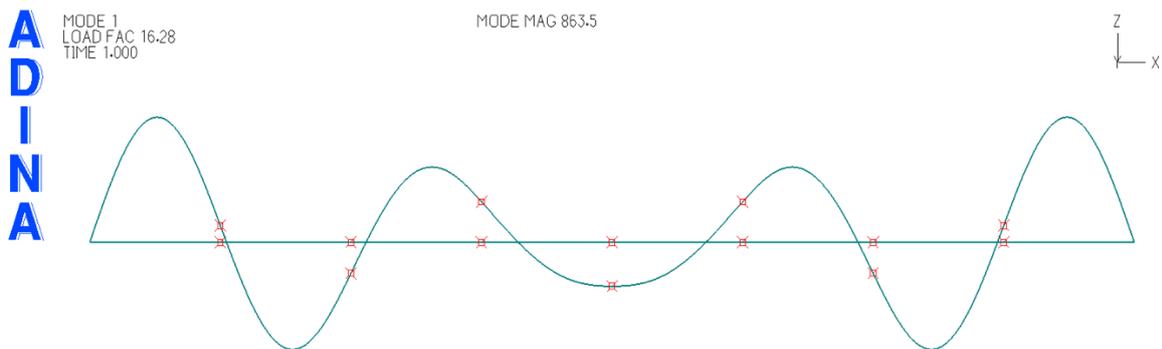
Στην συνέχεια θα μορφωθεί κατάλληλο λογισμικό με στοιχεία δοκού και τρεις διαθέσιμους βαθμούς ελευθερίας, το οποίο θα μας επαληθεύσει τις τιμές του κανονισμού για την κρίσιμη δυσκαμψία. Θα φορτίσουμε τον φορέα με θλιπτική δύναμη 1000 kN και θα πραγματοποιήσουμε γραμμική ανάλυση λυγισμού, για να διαπιστώσουμε από τις ιδιομορφές κατά πόσο το κρίσιμο φορτίο ελαστικού λυγισμού είναι το αναμενόμενο.

Οι δοκιμές μας θα ξεκινήσουν από τιμές δυσκαμψίας ελάχιστα μεγαλύτερες από την τιμή που υπολογίσαμε για την κρίσιμη δυσκαμψία



Σχήμα 6-1: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων για έλεγχο τιμών κρίσιμης δυσκαμψίας

Στη συνέχεια παρατίθενται τα αποτελέσματα για γραμμικές αναλύσεις λυγισμού, για διαφορετικές τιμές της δυσκαμψίας των στηρίξεων.



Σχήμα 6-2: Μήκος λυγισμού CHS 273x10 για δυσκαμψία  $18000 \frac{kN}{m}$



Σχήμα 6-3: Μήκος λυγισμού CHS 273x10 για δυσκαμψία  $22000 \frac{kN}{m}$

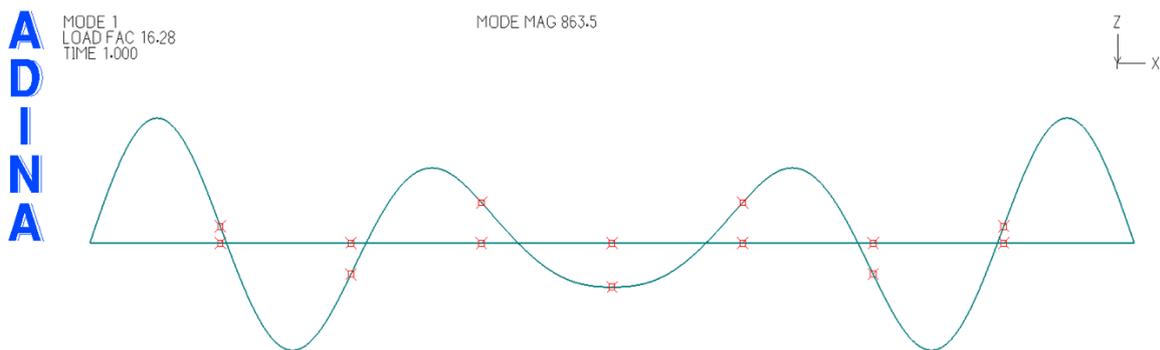
Παρατηρούμε πως στην περίπτωση όπου η δυσκαμψία αποκτήσει την κρίσιμη τιμή της οι στηρίξεις δεν ξεκινάνε να συμπεριφέρονται ως αμετακίνητες, προκειμένου το μήκος λυγισμού να είναι η απόσταση μεταξύ αυτών των στηρίξεων.

Για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει να αυξήσουμε την δυσκαμψία των στηρίξεων προκειμένου να γίνει τουλάχιστον 1.2 φορές η αντίστοιχη κρίσιμη.

Επεκτείνουμε το φάσμα των δοκιμών μας και για περιπτώσεις με μικρότερο αριθμό φανωμάτων. Πιο συγκεκριμένα για την περίπτωση 5 φανωμάτων, ίδιων όμως διατομών και αποστάσεων μεταξύ των στηρίξεων, η ανηγμένη λυγηρότητα παραμένει ίδια, αλλάζει όμως το  $\xi$  και συνεπώς η κρίσιμη δυσκαμψία.

$$\text{Για } 5 \text{ φανώματα } \xi = 0.276, \Rightarrow K_{cr} = 160.70 \frac{kN}{cm} = 16070 \frac{kN}{m} \quad (6.7)$$

Από το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων παρατηρούμε πως για  $K_{el} = K_{cr}$ , το κρίσιμο μήκος λυγισμού



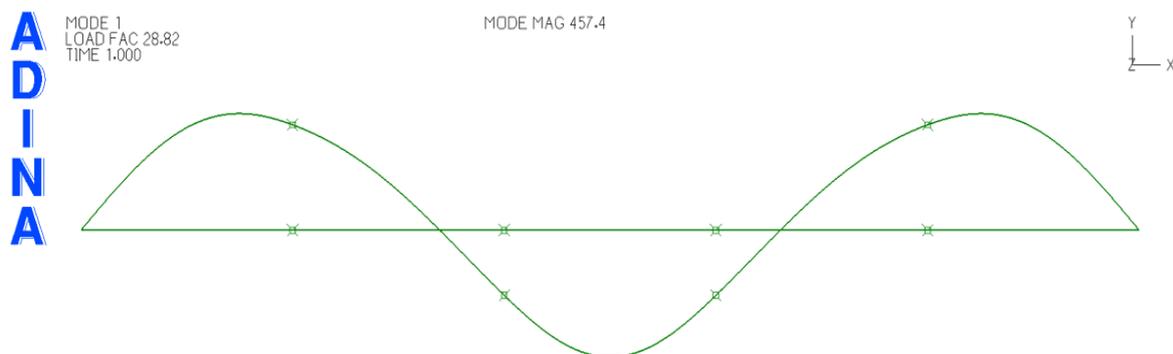
Σχήμα 6-4: Μήκος λυγισμού φορέα για δυσκαμψία ελατηρίων ίση με την κρίσιμη

Πρέπει η τιμή της δυσκαμψία να γίνει 1.25 φορές μεγαλύτερη από τη κρίσιμη προκειμένου το μήκος λυγισμού να είναι ίσο με την απόσταση των ελαστικών στηρίξεων

Παρόμοια ανορθογραφία παρατηρούμε και σε άλλες περιπτώσεις φορέων με μικρή λυγηρότητα, τέτοια δηλαδή ώστε να είμαστε στην περίπτωση όπου  $\bar{\lambda} < \bar{\lambda}_1$

Πιο συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε στον ίδιο, με τον προηγούμενο, φορέα πως η διατομή είναι CHS 355,6x10 τότε υπολογίζουμε  $\bar{\lambda} = 0.32$ ,  $N_{cr} = 37603$  kN και από την πρώτη σχέση υπολογίζουμε πως η κρίσιμη τιμή της δυσκαμψίας είναι  $k_{cr} = 19378 \frac{kN}{m}$  (6.7)

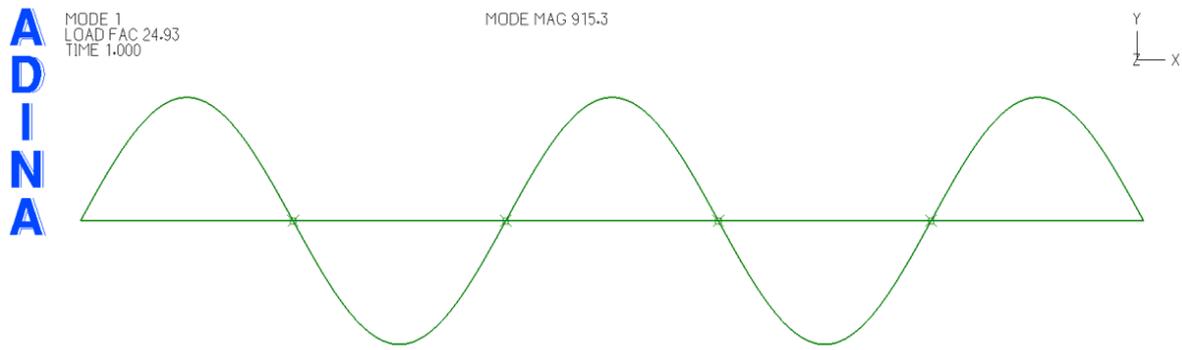
Από την γραμμική ανάλυση λυγισμού του φορέα όμως με το λογισμικό παρατηρούμε πως ούτε στην περίπτωση όπου η δυσκαμψία είναι ίση με την κρίσιμη, ούτε στην περίπτωση όπου την ξεπερνάει 1.25 φορές, το μήκος λυγισμού του φορέα γίνεται ίσο με την απόσταση μεταξύ των ελατηρίων. Μάλιστα για να συμβεί αυτό η δυσκαμψία των στηρίξεων πρέπει να γίνει ίση με  $48000 \frac{kN}{m}$ , δηλαδή 2.5  $k_{cr}$



Σχήμα 6-4: Γραμμική ανάλυση λυγισμού φορέα CHS 355,6x10 με δυσκαμψία ελατηρίων ίση με την κρίσιμη



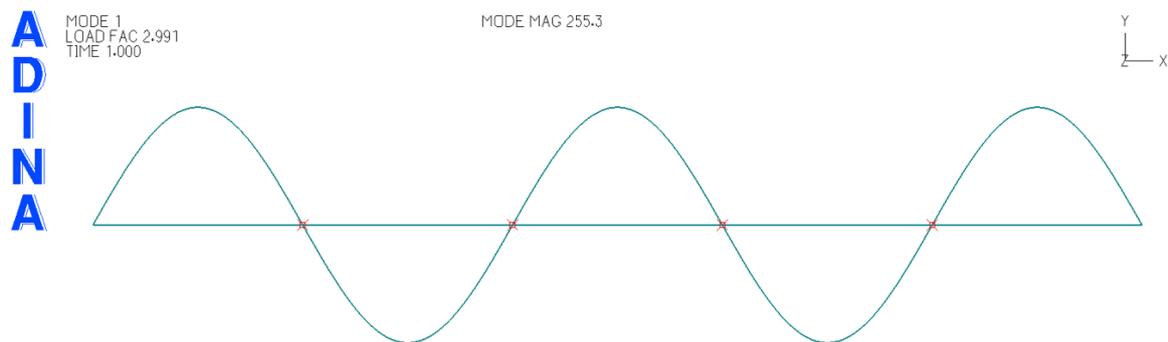
Σχήμα 6-5: Γραμμική ανάλυση λυγισμού φορέα CHS 355,6x10 με δυσκαμψία ελατηρίων ίση με 1.40  $k_{cr}$



Σχήμα 6-6: Γραμμική ανάλυση λυγισμού φορέα CHS 355,6x10 με δυσκαμψία ελατηρίων ίση με  $2.5 k_{cr}$

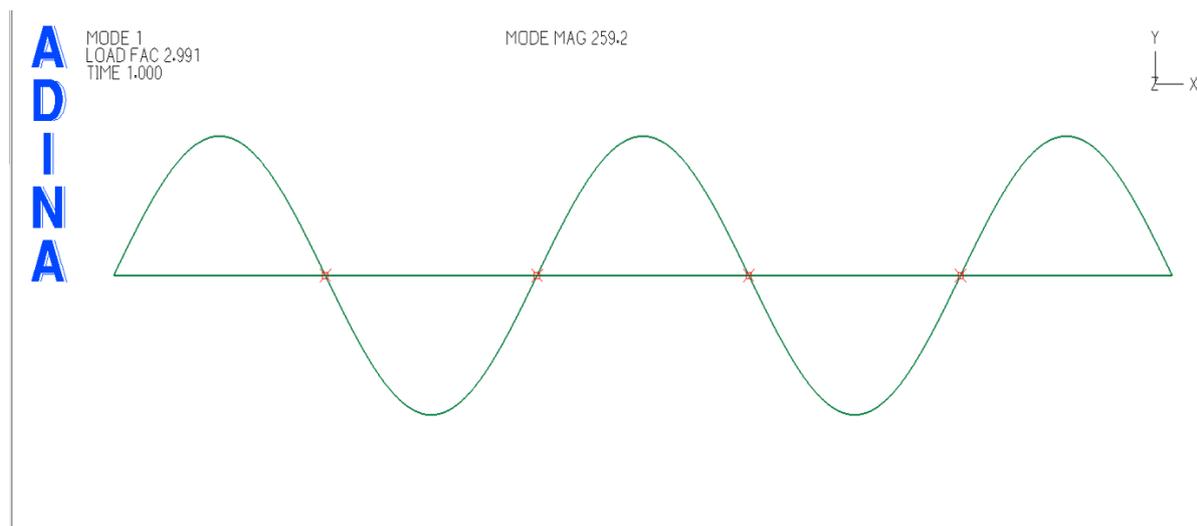
Αυτή η αναντιστοιχία όμως μεταξύ αποτελεσμάτων με το λογισμικό και κανονισμού δεν υφίσταται σε περίπτωση που η λυγηρότητα γίνει σημαντικότερη. Για παράδειγμα σε περίπτωση που στον ίδιο φορέα η διατομή γίνει CHS 139.7x8  $\bar{\lambda} = 0.816$ ,  $\chi = 0.78$ ,  $N_{cr} = 1658$  kN και από την δεύτερη σχέση υπολογίζουμε πως η κρίσιμη τιμή της δυσκαμψίας είναι  $k_{cr} = 4450 \frac{kN}{m}$  (6.8)

Παρατηρούμε πως για δυσκαμψία ίση με την κρίσιμη το μήκος λυγισμού είναι ίσο με την απόσταση των ελαστικών στηρίξεων



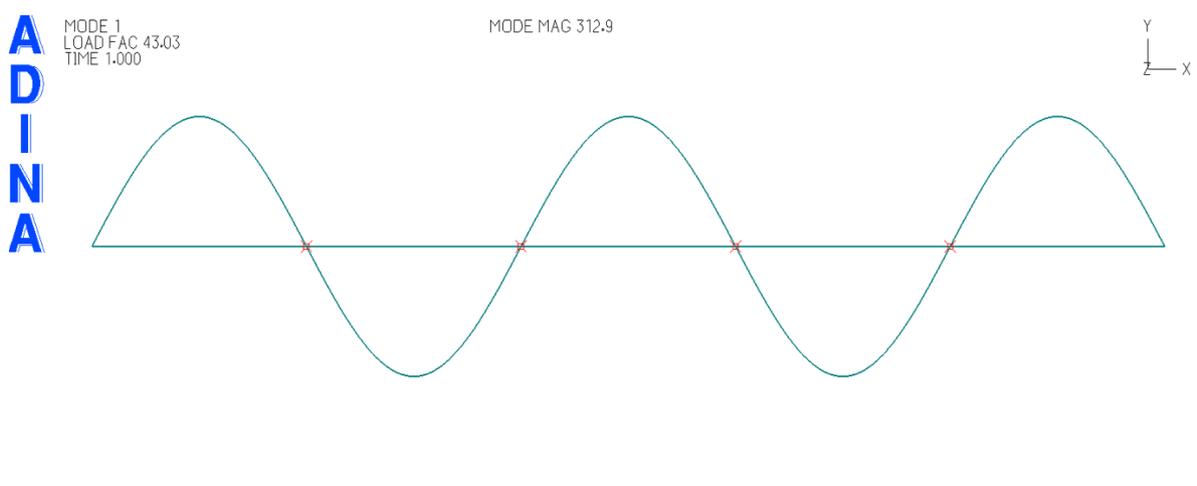
Σχήμα 6-7: Γραμμική ανάλυση λυγισμού φορέα CHS 139,7x8 με δυσκαμψία ελατηρίων ίση με  $k_{cr}$

Βέβαια παρατηρούμε πως ούτε αυτός ο τύπος είναι τελείως ακριβής, καθώς ακόμα και αν μειώσουμε την τιμή της δυσκαμψίας και γίνει ελαφρώς μικρότερη από την κρίσιμη, συνεχίζει να δίνει τα ίδια αποτελέσματα

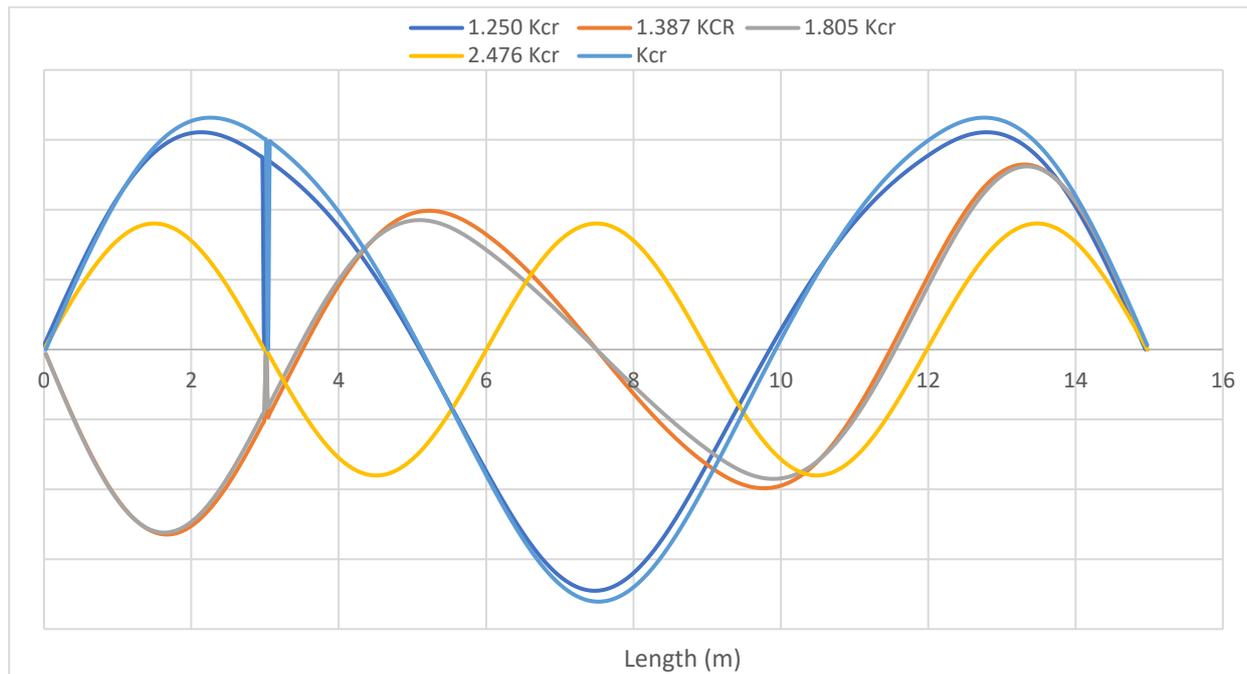


Σχήμα 6-7: Γραμμική ανάλυση λυγισμού φορέα CHS 139.7x8 με δυσκαμψία ελατηρίων ίση με  $k_{cr}/1.18$

Το ίδιο παρατηρούμε και στην περίπτωση διατομής CHS 168.3x12.5, όπου υπολογίζουμε  $\bar{\lambda} = 0.71$ ,  $\chi = 0.78$   $N_{cr} = 4301.83$  kN και από την δεύτερη σχέση η κρίσιμη τιμή της δυσκαμψίας είναι  $k_{cr} = 13172 \frac{kN}{m}$  (6.9)



Σχήμα 6-8: Γραμμική ανάλυση λυγισμού φορέα CHS 168.3x12.5 με δυσκαμψία ελατηρίων ίση με  $k_{cr}$



Διάγραμμα 6-1: Ιδιομορφές λυγισμού CHS 355,6x10 για διαφορετικές τιμές της δυσκαμψίας των στηρίξεων

#### 6.4 Συμπεράσματα

Μέσα από τις συγκεκριμένες αναλύσεις μπορέσαμε να βγάλουμε ορισμένα συμπεράσματα για την αξιοπιστία της παραγράφου 6.3 του CEN/TR 1993-1-103 για το πότε μία ελαστική στήριξη μπορεί να θεωρηθεί ακλόνητη

- Όταν  $\bar{\lambda} < \bar{\lambda}_1$  οι τιμές του CEN/TR 1993-1-103 όχι μόνο δεν είναι αξιόπιστες, αλλά είναι και κατά της ασφαλείας
- Προτείνεται τότε εκτέλεση LBA, ή πολλαπλασιασμός της σχέσης με 2.5
- Στις υπόλοιπες περιπτώσεις τα αποτελέσματα είναι αξιόπιστα, παρότι σε ορισμένες περιπτώσεις το επιθυμητό κρίσιμο μήκος λυγισμού επιτυγχάνεται και για μικρότερες τιμές της δυσκαμψίας

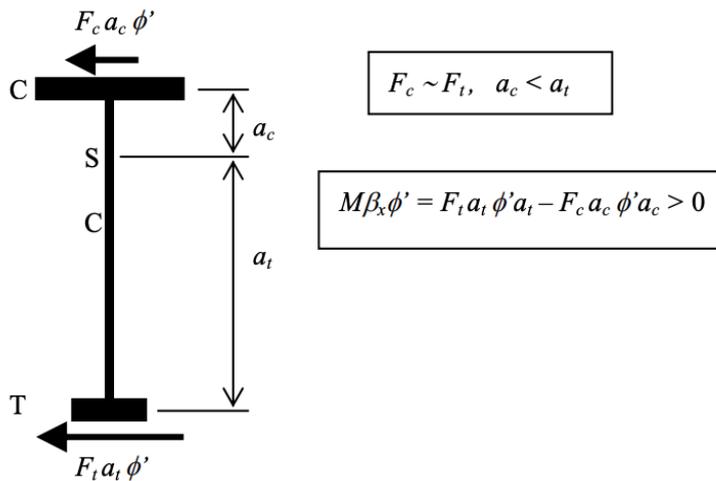
## 7 ΣΤΡΕΠΤΟΚΑΜΠΤΙΚΟΣ ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΜΟΝΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

### 7.1 Εισαγωγή

Η πλειοψηφία των μελών από δομικό χάλυβα φορτίζεται στο επίπεδο του ασθενή άξονα, με απώτερο σκοπό κατά την κάμψη να ενεργοποιείται η ροπή αδρανείας του ισχυρού άξονα και η αντοχή του μέλους να είναι η μεγαλύτερη δυνατή. Ωστόσο σε περίπτωση που η φορτιζόμενη διατομή είναι ανοιχτή, όπως για παράδειγμα μία διατομή μορφής διπλού ταυ, και η πλευρική και στρεπτική δυσκαμψία είναι σημαντικά μικρότερη από την αντίστοιχη καμπτική του επιπέδου φόρτισης, το μέλος θα εκτραπεί πλευρικά στρεφόμενο ταυτόχρονα περί τον διαμήκη άξονα, όταν η εξωτερικά εφαρμοζόμενη ροπή γίνει ίση με μία κρίσιμη τιμή. Αυτή η μορφή αστάθειας ονομάζεται πλευρικός λυγισμός και εξαρτάται από πληθώρα παραγόντων, όπως οι συνθήκες στήριξης, το σχήμα και η κατηγορία της διατομής, το είδος φόρτισης και το σημείο εφαρμογής της. Στο παρόν κεφάλαιο πρόκειται να ασχοληθούμε με τον στρεπτοκαμπτικό λυγισμό ανοιχτών διατομών με μόνο άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο.

Στις τελευταίες βασικό χαρακτηριστικό αποτελεί το γεγονός πως το κέντρο διάτμησης δεν ταυτίζεται με το κέντρο βάρους. Η σημασία αυτού του φαινομένου φαίνεται στην λεγόμενη 'Wagner effect' (Anderson and Trahair, 1972) όπου δηλαδή η στροφή του μέλους προκαλεί επιπλέον θλιπτικές και εφελκυστικές τάσεις στα αντίστοιχα θλιβόμενα και εφελκυσόμενα τμήματα της διατομής, μειώνοντας την θλιπτική δυσκαμψία του μέλους υπό θλίψη. Στις διατομές διπλού ταυ διπλής συμμετρίας (HEA, HEB κ.α.), οι παραγόμενες εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις εξαιτίας της στροφής εξισορροποούνται, με αποτέλεσμα το Wagner effect να μην προκαλεί κάποια μεταβολή στην στρεπτική δυσκαμψία του μέλους. Στην περίπτωση όμως των διατομών μονής συμμετρίας το μικρότερο πέλμα βρίσκεται μακρύτερα από το κέντρο διάτμησης σε σχέση με το αντίστοιχο θλιβόμενο, με αποτέλεσμα η μεταβολή στην στρεπτική δυσκαμψία. Ειδικότερα στην περίπτωση όπου το θλιβόμενο πέλμα είναι το μικρότερο, άρα και αυτό που έχει τον μεγαλύτερο βραχίονα, η επίδραση του συγκεκριμένου φαινομένου είναι ιδιαίτερος σημαντική.

Σε απλές περιπτώσεις φορέων, όπως για παράδειγμα ένας πρόβολος, ή μία αμφιέριστη δοκός σταθερής διατομής και φόρτισης, η ενεργειακή μέθοδος που έχει ήδη αναφερθεί μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ευρεθεί ακόμα και αναλυτικά η κρίσιμη τιμή της ελαστικής ροπής πλευρικού λυγισμού. Σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις όπου το σχήμα της παραμορφωμένης κατάστασης δεν είναι δυνατό να ευρεθεί απαιτείται η χρησιμοποίηση κατάλληλου λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων. Μέσα από τον συνδυασμό των παραπάνω διαδικασιών έχει προκύψει και η διαδικασία υπολογισμού της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού μελών μονής συμμετρίας που πρόκειται να αναλυθεί αργότερα για την απλούστευση των διαδικασιών στην πράξη.



Εικόνα 7-1: Wagner effect μονοσυμμετρικής διατομής (Trahair N.S., 2011)

## 7.2 Μέθοδος ισορροπίας για τον υπολογισμό της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού

Η μέθοδος ισορροπίας είναι η απλούστερη μεταξύ των υπάρχουσών, αφορά την έκφραση των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα και εμφανίζει αρκετούς περιορισμούς σχετικά με την σωστή έκφραση των εξισώσεων σε περίπλοκους φορείς με αρκετούς βαθμούς ελευθερίας, όπως και σε φορείς όπου το σχήμα της παραμορφωμένης κατάστασης παρουσιάζει αβεβαιότητες.

Για την περίπτωση μίας απλής αμφιέριστης δοκού, φορτιζόμενης καμπτικά κατά τον ισχυρό της άξονα και θεωρώντας ως  $v$  την εγκάρσια μετακίνηση στο τοπικό σύστημα του μέλους και  $\varphi$  την αντίστοιχη στροφή, η παραμορφωσιακή κατάσταση του φορέα προκύπτει από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

$$E I_y \frac{d^2 v}{dz^2} = -M y \tan\varphi \quad (7.1)$$

$$G J \frac{d\varphi}{dz} = M y \frac{dv}{dz} \quad (7.2)$$

Οι οποίες με την παραδοχή μικρών παραμορφώσεων ( $\tan\varphi = \cos\varphi = \varphi$ ) και με μία επιπλέον παραγώγιση ως προς  $v$ , μας οδηγούν στις

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M y}{E I_y} \varphi \quad (7.3)$$

$$\frac{dv^2}{dz^2} = \frac{G J}{M} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \quad (7.4)$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση με μία σταθερά μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{M y}{E I_y} \varphi = 0 \quad (7.5)$$

Η παραπάνω ομογενής διαφορική εξίσωση έχει γενική λύση την

$$\Phi(Z) = A \sin\left(-\frac{My(z)Z}{\sqrt{EIyGJ}}\right) + B \cos\left(-\frac{My(z)Z}{\sqrt{EIyGJ}}\right) \quad (7.6)$$

Από συνοριακές συνθήκες όμως η στροφή στην άρθρωση είναι μηδέν, άρα στην παραπάνω διαφορική εξίσωση  $B=0 \Rightarrow$

$$\Phi(Z) = A \sin\left(-\frac{My(z)Z}{\sqrt{EIyGJ}}\right) \quad (7.7)$$

$$\text{Επίσης } \Phi'(L) = 0 \Rightarrow A \sin\left(-\frac{My(z)Z}{\sqrt{EIyGJ}}\right) = 0 \quad (7.8)$$

Επομένως αφού το A δεν μπορεί να είναι ίσο με 0, γιατί σε αυτήν την περίπτωση  $\varphi=0$  και αναφερόμαστε στον απαραμόρφωτο φορέα,

$\sin\left(\frac{My(L)L}{\sqrt{EIyGJ}}\right) = 0$ , από όπου από την επίλυση της τριγωνομετρικής εξίσωσης ως προς M, το οποίο στην συγκεκριμένη περίπτωση θα είναι το ζητούμενο  $M_{cr}$  αφού αναζητούμε το μικρότερο φορτίο που αποτελεί λύση, θα είναι

$$M_{cr} = \pi \frac{\sqrt{EIyGJ}}{L} \quad (7.9)$$

### 7.3 Ενεργειακή μέθοδος για τον υπολογισμό της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού

Η ενεργειακή μέθοδος αποτελεί τον πιο διαδεδομένο τρόπο εύρεσης της κρίσιμης ροπής πλευρικού ελαστικού λυγισμού, καθώς παρότι είναι λιγότερη εποπτική από την μέθοδο ισορροπίας, μπορεί να προγραμματιστεί και για αυτό συνιστά την βάση των περισσότερων προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων. Η ενεργειακή μέθοδος εφαρμόζεται μόνο σε συντηρητικά συστήματα και βασίζεται στην αρχή πως η συνολική δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε ένα σύστημα είναι αποκλειστικά αποτέλεσμα του έργου των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό. Η συνολική αυτή δυναμική ενέργεια είναι το άθροισμα της δυναμικής ενέργειας U των εσωτερικών δυνάμεων και της δυναμικής ενέργειας W των εξωτερικών δυνάμεων. Εάν τα σχήματα παραμόρφωσης είναι εκ των προτέρων γνωστά, όπως συμβαίνει σε αρκετούς απλούς φορείς υπό σταθερές δυνάμεις η κρίσιμη ροπή ελαστικού λυγισμού μπορεί να ευρεθεί αναλυτικά, με κατάλληλη αντικατάσταση των σχημάτων των ιδιομορφών στην προκειπούσα ενεργειακή εξίσωση (μέθοδος Rayleigh-Ritz).

Η συνολική δυναμική ενέργεια των εσωτερικών δυνάμεων ενός μέλους που υπόκειται σε πλευρικό λυγισμό αποτελείται από δύο μέρη, την ενέργεια λόγω της κάμψης περί τον ισχυρό άξονα και την ενέργεια εξαιτίας της στροφής περί τον διαμήκη. Η συνολική δυναμική ενέργεια ενός μέλους σε πλευρικό λυγισμό είναι (J. Vensko, 2003)

$$U = \int_0^L \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)^2 dz + \frac{1}{2} G J \int_0^L \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dz + \frac{1}{2} E I_w \int_0^L \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)^2 dz \quad (7.10)$$

Στην συνέχεια θα χρειαστεί να εκφράσουμε την δυναμική ενέργεια εξαιτίας των εξωτερικών δυνάμεων. Για ένα μέλος που υπόκειται σε ομοιόμορφη κάμψη η εσωτερική δυναμική ενέργεια είναι ίση

$$W = -2 M \varphi, \text{ όπου } \varphi \text{ είναι η γωνία περιστροφής του μέλους περί τον διαμήκη, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως } \frac{1}{2} \int_0^L \frac{du}{dz} \frac{d\varphi}{dz} dz \quad (7.11)$$

Επομένως η συνολική δυναμική ενέργεια είναι

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)^2 dz + \frac{1}{2} G J \int_0^L \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dz + \frac{1}{2} E I_w \int_0^L \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)^2 dz - M \int_0^L \frac{du}{dz} \frac{d\varphi}{dz} dz \quad (7.12)$$

Με εφαρμογή της μεθόδου αντικαθιστούμε τις παραμορφώσεις  $u$ ,  $\varphi$ , με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις που περιγράφουν τα σχήματα των ιδιομορφών.

$$u = A \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (7.13)$$

$$\varphi = B \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (7.14)$$

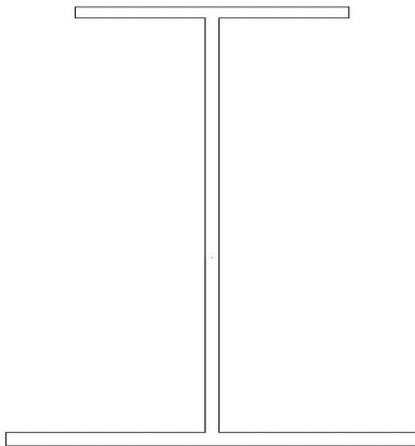
Με κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία καταλήγουμε στην έκφραση της ελαστικής κρίσιμης ροπής

$$M_{cr} = \frac{2\pi}{L} \sqrt{EIy(GJ + 4EIw \frac{\pi^2}{L^2})} \quad (7.15)$$

Βέβαια για πιο περίπλοκες περιπτώσεις είναι σχεδόν αδύνατο να εξαχθεί με τέτοια ακρίβεια η έκφραση των ιδιομορφών λυγισμού και είναι απαραίτητη η χρησιμοποίηση ενός λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων για την εξαγωγή των ενεργειακών εξισώσεων, την εξεύρεση των σχημάτων των ιδιομορφών αλλά και τον έλεγχο των αποτελεσμάτων.

#### 7.4 Εύρεση ελαστικής κρίσιμης τιμής πλευρικού λυγισμού προβόλου μονής συμμετρίας σύμφωνα με το CEN/TR 1993-1-103

Όλα τα παραπάνω θα δοκιμάσουμε να τα εφαρμόσουμε για την περίπτωση ενός προβόλου ομοιόμορφης διατομής με έναν άξονα συμμετρίας, αυτόν τον κατακόρυφο, φορτιζόμενο με εγκάρσιο ομοιόμορφο καταναμημένο φορτίο 30 kNm



Εικόνα 7-1: Διατομή εξεταζόμενου προβόλου μονής συμμετρίας

Η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$M_{cr} = \mu_{cr} \frac{\sqrt{EIzGIt}}{L} \quad (7.16)$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογιστούν τα παρακάτω γεωμετρικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά

Αδιάστατη παράμετρος στρέψης

$$K_{wt} = \frac{\pi}{\beta_w L} \sqrt{\frac{EIw}{GIt}} \quad (7.17)$$

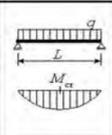
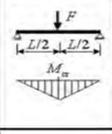
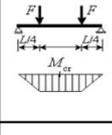
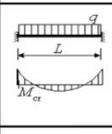
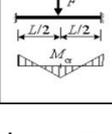
Αδιάστατη συντεταγμένη του σημείου εφαρμογής του φορτίου ως προς το κέντρο διάτμησης

$$\zeta_g = \frac{\pi z_g}{\beta_w L} \sqrt{\frac{EIz}{GIt}} \quad (7.18)$$

Αδιάστατη παράμετρος διατομής μονής συμμετρίας

$$\zeta_i = \frac{\pi z g}{\beta_w L} \sqrt{\frac{EIz}{GIt}} \quad (7.19)$$

Πιο συγκεκριμένα στην παράγραφο 6.1.4 αναφέρεται πως η αδιάστατη κρίσιμη ροπή για την περίπτωση προβόλου σταθερής διατομής μονής συμμετρίας, φορτιζόμενη με ομοιόμορφη ροπή περί τον ισχυρό της άξονα, δίνεται από τον πίνακα 6.4.

Loading and support conditions	Buckling length factors			Values of factors							
	$\beta_y$	$\beta_z$	$\beta_w$	$C_1^{1)}$		$C_2$			$C_3$		
				$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$\perp$ $\psi_{\tau} = -1$	$\perp$ $\perp$ $\perp$ $-0,9 \leq \psi_{\tau} \leq 0,9$	$\top$ $\psi_{\tau} = 1$	$\perp$ $\psi_{\tau} = -1$	$\perp$ $\perp$ $\perp$ $-0,9 \leq \psi_{\tau} \leq 0,9$	$\top$ $\psi_{\tau} = 1$
	1	1	1	1,127	1,132	0,33	0,459	0,50	0,93	0,525	0,38
	1	1	0,5	1,128	1,231	0,33	0,391	0,50	0,93	0,806	0,38
	1	0,5	1	0,947	0,997	0,25	0,407	0,40	0,84	0,478	0,44
	1	0,5	0,5	0,947	0,970	0,25	0,310	0,40	0,84	0,674	0,44
	1	1	1	1,348	1,363	0,52	0,553	0,42	1,00	0,411	0,31
	1	1	0,5	1,349	1,452	0,52	0,580	0,42	1,00	0,666	0,31
	1	0,5	1	1,030	1,087	0,40	0,449	0,42	0,80	0,338	0,31
	1	0,5	0,5	1,031	1,067	0,40	0,437	0,42	0,80	0,516	0,31
	1	1	1	1,038	1,040	0,33	0,431	0,39	0,93	0,562	0,39
	1	1	0,5	1,039	1,148	0,33	0,292	0,39	0,93	0,878	0,39
	1	0,5	1	0,922	0,960	0,28	0,404	0,30	0,88	0,539	0,50
	1	0,5	0,5	0,922	0,945	0,28	0,237	0,30	0,88	0,772	0,50
						$\psi_{\tau} = -1$	$-0,5 \leq \psi_{\tau} \leq 0,5$	$\psi_{\tau} = 1$	$\psi_{\tau} = -1$	$-0,5 \leq \psi_{\tau} \leq 0,5$	$\psi_{\tau} = 1$
	0,5	1	1	2,576	2,608	1,00	1,562	0,15	1,00	-0,859	-1,99
	0,5	0,5	1	1,490	1,515	0,56	0,900	0,08	0,61	-0,516	-1,20
	0,5	0,5	0,5	1,494	1,746	0,56	0,825	0,08	0,61	0,002712	-1,20
	0,5	1	1	1,683	1,726	1,20	1,388	0,07	1,15	-0,716	-1,35
	0,5	0,5	1	0,936	0,955	0,69	0,763	0,03	0,64	-0,406	-0,76
	0,5	0,5	0,5	0,937	1,057	0,69	0,843	0,03	0,64	-0,0679	-0,76

Πίνακας 7-1: Τιμές κρίσιμης ροπής πλευρικού ελαστικού λυγισμού προβόλου σταθερής διατομής μονής συμμετρίας υπό σταθερό εγκάρσιο κατανομημένο φορτίο

Στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε τις σχέσεις του κανονισμού σε διατομή μονής συμμετρίας με τα παρακάτω γεωμετρικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά, αποτελούμενη από χάλυβα S235

$$h = 80 \text{ cm}$$

$$bf_0 = 30 \text{ cm}$$

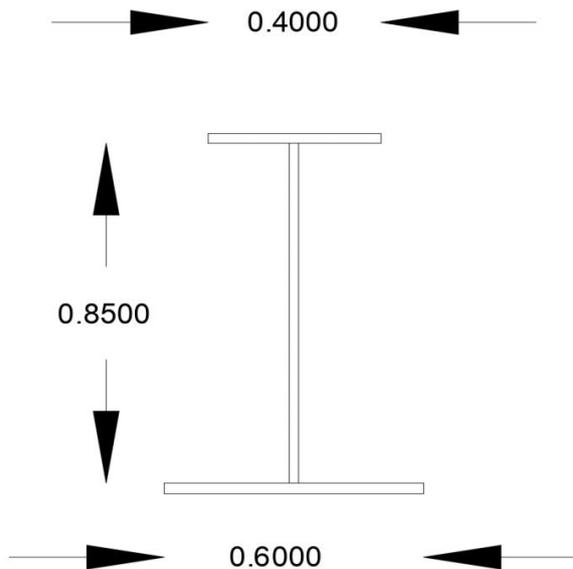
$$tf_0 = 2.3 \text{ cm}$$

$$dg = 75.1 \text{ cm}$$

$$tg = 1.8 \text{ cm}$$

$$bf_w = 50 \text{ cm}$$

$$tf_w = 2.6 \text{ cm}$$



Εικόνα 7-2: Εξεταζόμενη διατομή μονής συμμετρίας.

Όλη η διατομή βρίσκεται σε θλίψη επομένως έχουμε

$$\text{Πέλμα 1} \Rightarrow \frac{c}{t_{fo}} = 9.02 < 14 * \epsilon = 14 \Rightarrow \text{Κατηγορία 2}$$

$$\text{Κορμός} \Rightarrow \frac{c}{t_g} = 41.72 < 72 \Rightarrow \text{Κατηγορία 1}$$

Πέλμα 2  $\Rightarrow$  εφελκύεται

Άρα όλη η διατομή είναι κατηγορίας 2

Υπολογίζουμε τα γεωμετρικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής

Ροπή αδράνειας περί τον ασθενή

$$I_z = \frac{t_o * (b_o^3)}{12} + \frac{t_u * (b_u^3)}{12} + \frac{d_g * (t_g^3)}{12} = 32294.83 \text{ cm}^4 \quad (7.20)$$

Περί τον ισχυρο

$$I_y = 346237.90 \text{ cm}^4 \quad (7.21)$$

Σταθερά στρέψης

$$\sum_i \frac{b_i * (t_i^3)}{3} = 560.60 \text{ cm}^4 \quad (7.22)$$

Απόσταση μεταξύ των κ.β. των πελμάτων

$$h_s = 77.55 \text{ cm} \quad (7.23)$$

$$\beta_f = \frac{I_{fc} - I_{ft}}{I_{fc} + I_{ft}} = -0.68 \quad (7.24)$$

Σταθερά στρέβλωσης

$$I_w = \beta_f * (1 - \beta_f) = 25159247.80 \text{ cm}^5 \quad (7.25)$$

Απόσταση κέντρου διάτμησης από κάτω ίνα

$$Z_i = 33.03 \text{ cm} \quad (7.26)$$

Απόσταση κέντρου βάρους από κέντρο διάτμησης

$$Z_s = 16.25 \text{ cm (7.27)}$$

Επομένως είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τις παραμέτρους

$$K_{wt} = 1.534 \text{ (7.28)}$$

$$\zeta_g = 1.18 \text{ (7.29)}$$

$$\zeta_i = -0.91 \text{ (7.30)}$$

Από τον πίνακα 5.4 διαβάζουμε την αντίστοιχη τιμή της  $\mu_{cr}$

$$\mu_{cr} = 1.268 \text{ (7.31)}$$

$$M_{cr} = 4421.23 \text{ kNm (7.32)}$$

Σε περιπτώσεις όπου δεν είμαστε ακριβώς σε κάποιο από τα κουτάκια του πίνακα ο κανονισμός προτείνει την εκτέλεση μη-γραμμικής παρεμβολής μέσω εκθετικής συνάρτησης. Δοκιμάζουμε την εφαρμογή σε μία διατομή με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά

$$h = 80 \text{ cm}$$

$$bf_o = 30 \text{ cm}$$

$$tf_o = 2.3 \text{ cm}$$

$$dg = 75.1 \text{ cm}$$

$$tg = 1.8 \text{ cm}$$

$$bf_w = 50 \text{ cm}$$

$$tf_w = 2.6 \text{ cm}$$

Υπολογίζουμε στην συνέχεια τα αδρανειακά χαρακτηριστικά για να καταλήξουμε στις τιμές των παραμέτρων

$$Z_i = 33.03 \text{ cm (7.33)}$$

Απόσταση κέντρου βάρους από κέντρο διάτμησης

$$Z_s = 16.25 \text{ cm (7.34)}$$

Επομένως είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τις παραμέτρους

$$K_{wt} = 1.534 \text{ (7.35)}$$

$$\zeta_g = 1.18 \text{ (7.36)}$$

$$\zeta_i = -0.91 \text{ (7.37)}$$

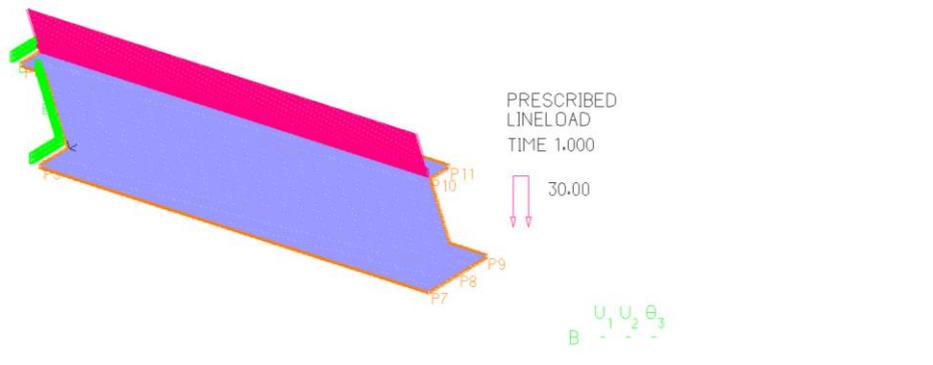
Η τιμή της αδιάστατης κρίσιμης ροπής θα ευρεθεί μέσω τριπλής μη γραμμικής παραβολής (με εκθετική συνάρτηση)

$$\mu_{cr} = 1.7678 \text{ (7.38)}$$

$$M_{cr} = 10246.95 \text{ kNm (7.39)}$$

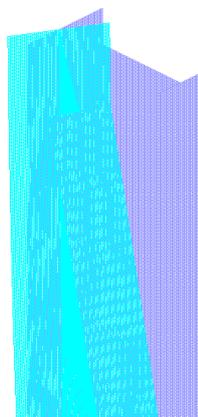
## 7.5 Εύρεση ελαστικής κρίσιμης τιμής ροπής πλευρικού λυγισμού προβόλου μονής συμμετρίας με την βοήθεια λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων

Προκειμένου να επαληθεύσουμε τις τιμές της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού θα κατασκευάσουμε κατάλληλο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων το οποίο θα μας φανερώσει με μεγάλη ακρίβεια την πραγματική συμπεριφορά του φορέα. Για την σύλληψη του φαινομένου θα χρησιμοποιηθούν επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία 6 βαθμών ελευθερίας, σε κάθε έναν από τους 4 κόμβους τους.



Σχήμα 7-1: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων προβόλου διατομής μονής συμμετρίας υπό κάμψη περί τον ισχυρο του άξονα

Αφού γίνει ο απαραίτητος έλεγχος ευαισθησίας του πλέγματος των πεπερασμένων θα εκτελεστεί γραμμική ανάλυση λυγισμού από την οποία θα προκύψει η κρίσιμη τιμή της ροπής πλευρικού λυγισμού



Σχήμα 7-2: Τρισδιάστατη απεικόνιση ιδιομορφής πλευρικού λυγισμού

CEN/TR 1993-1-103	Adina
4421.23 kNm	4425 kNm

Πίνακας 7-1 Σύγκριση κρίσιμων ροπών πλευρικού λυγισμού

Συνεχίζουμε τους υπολογισμούς και για την δεύτερη περίπτωση

CEN/TR 1993-1-103	Adina
10246.95 kNm	9313.75 kNm

Πίνακας 7-2 Σύγκριση κρίσιμων ροπών πλευρικού λυγισμού για περίπτωση μη γραμμικής παρεμβολής

## 7.6 Εύρεση συνολικής αντοχής μέλους έναντι πλευρικού λυγισμού σύμφωνα με τον κανονισμό

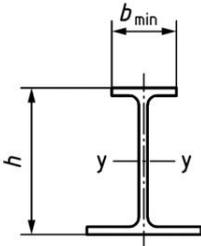
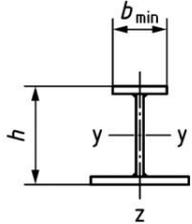
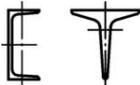
Στο σύνολο των πραγματοποιημένων μέχρι στιγμής αναλύσεων έχει ληφθεί υπόψη μόνο ο λυγισμός και έχει συνεπώς αγνοηθεί η επίπτωση της μη-γραμμικότητας υλικού. Αυτή, όπως και οι πιθανές ατέλειες του μέλους λαμβάνονται υπόψη με την μορφή ενός μειωτικού συντελεστή  $\chi$ , ο οποίος με την σειρά του συνδέεται με την ανηγμένη λυγηρότητα του μέλους. (παρ. 8.3.1.2)

$$M_{b,rd} = \chi_{LT} \frac{M_{rk}}{\gamma_{M1}} \quad (7.40)$$

$$\overline{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_{rk}}{M_{cr}}} \quad (7.41)$$

Όπου  $M_{cr}$  είναι η κρίσιμη ελαστική ροπή που υπολογίστηκε προηγουμένως

Η καμπύλη λυγισμού για τον υπολογισμό του μειωτικού συντελεστή συγκολλητών διατομών μονής συμμετρίας, προκύπτει από τον πίνακα 8.4 του EN 1993-1-1

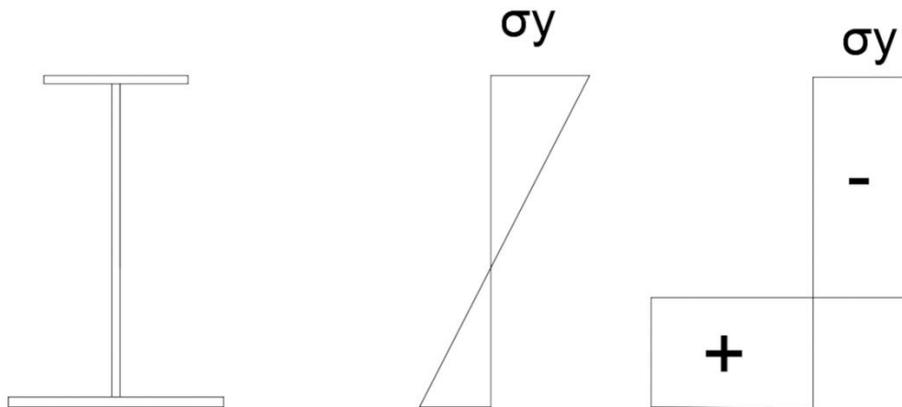
Cross-section		Limits	Lateral torsional buckling curve
Rolled I- or H-sections <sup>a</sup>		$h/b_{\min} \leq 2,0$	a
		$h/b_{\min} > 2,0$	b
Welded I-sections <sup>a</sup>		$h/b_{\min} \leq 2,0$	c
		$h/b_{\min} > 2,0$	d
Other sections (e.g. C-, U-, T-sections)		—	d

Πίνακας 7-3: Υπολογισμός κατάλληλης καμπύλης πλευρικού λυγισμού διατομών μονής συμμετρίας σύμφωνα με τον πίνακα 8-4 του EN 1993-1-1

Συνεπώς στην περίπτωση μας βρισκόμαστε στην καμπύλη λυγισμού d =>

$$a = 0.76$$

Η διατομή μας υπό καθαρή κάμψη είναι κατηγορίας 1, επομένως πρέπει να υπολογίσουμε την πλαστική ροπή αντίστασης. Ο ουδέτερος άξονας πλήρους πλαστικοποίησης θέλουμε να χωρίζει την διατομή σε δύο ίσα εμβαδά, επομένως θα βρίσκεται σε απόσταση 54.49 cm από την άνω ίνα του κορμού, ή ακριβέστερα 56.79 cm από την άνω ίνα της διατομής



Εικόνα 7-4: Εύρεση πλαστικής ροπής αντοχής διατομής μονής συμμετρίας

Επομένως για δομικό χάλυβα S275 =>

$$M_{pl} = A_{f1} * (56.79 - 2.3/2) * 27.5 + A_{w1} * (56.79 - d_{g1}/2 - t_{f1}) * 27.5 + A_{w2} * (56.79 + d_{g2}/2) * 27.5 + A_{f2} * (h - 56.79 - t_{f2}/2) * 27.5 = 182559.01 \text{ kNcm} = 1825.59 \text{ kNm} \quad (7.42)$$

$$W_{pl} = \frac{M_{pl}}{f_y} = 6638.51 \text{ cm}^3 \quad (7.43)$$

$$\lambda_{LT} = 0.643 \quad (7.44)$$

$$\Phi_{LT} = 0.875 \quad (7.45)$$

$$\chi_{LT} = 0.681 \quad (7.46)$$

$$M_{b,rd} = 1572.31 \text{ kNm} \quad (7.47)$$

## 7.7 Εύρεση συνολικής αντοχής μέλους έναντι πλευρικού λυγισμού με τη βοήθεια λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων

Μετά την επίλυση του εξεταζόμενου μέλους με τον κανονισμό και την εξεύρεση της συνολικής αντοχής του, θα καταφύγουμε στην βοήθεια αναλύσεων λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων για να υπολογίσουμε την πραγματική αντοχή του μέλους, μέσω αναλύσεων μη-γραμμικότητας υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες. Για την καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς του μέλους θα μελετήσουμε κάθε μηχανισμό μη-γραμμικότητας ξεχωριστά, χρησιμοποιώντας σε κάθε περίπτωση επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία, με έξι βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο

### 7.7.1 Αρχικές ατέλειες

Ιδιαίτερη σημασία για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων παρουσιάζει ο σωστός τρόπος λήψης των αρχικών ατελειών κατά τις αναλύσεις. Ήδη στο κεφάλαιο 1.5 έγινε εκτενής αναφορά στην λήψη των ατελειών σύμφωνα με τα σχήματα των ιδιομορφών λυγισμού, έχοντας παράλληλα υπολογίσει και το ακριβές πλάτος της ατέλειας για την περίπτωση του εξεταζόμενου μέλους μονής συμμετρίας (εφαρμογή 5, κεφάλαιο 1.5). Εναλλακτικά ο EN1993-1-1 προτείνει στην παράγραφο 7.3.3.2 την χρησιμοποίηση μίας ισοδύναμης bow imperfection για την περίπτωση μελών υπό πλευρικό λυγισμό, η οποία και δίνεται από την σχέση

$$e_o = \beta_{LT} \frac{L}{\epsilon} \quad (7.48)$$

Με τον συντελεστή  $\beta_{LT}$  να δίνεται από τον πίνακα 7.2

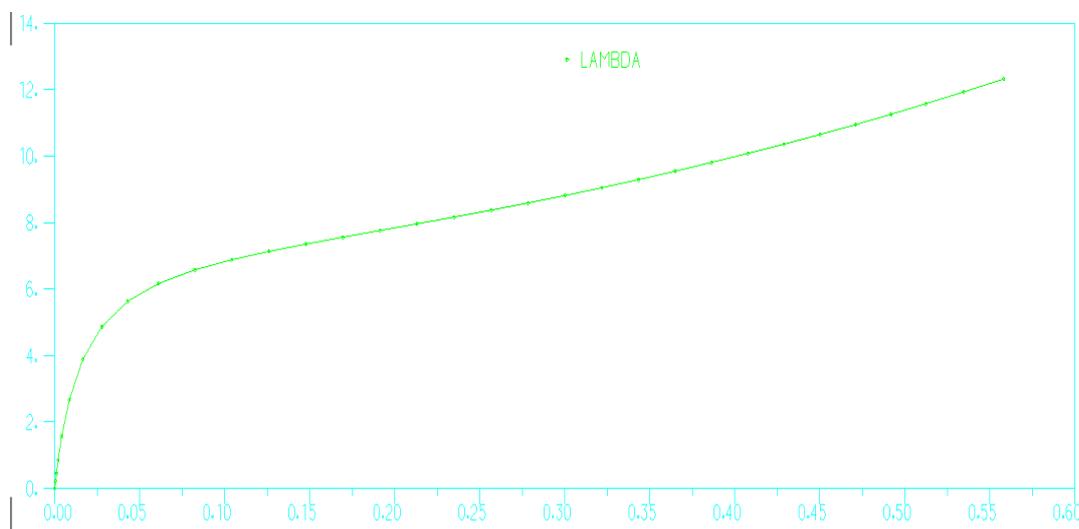
Cross-section	Condition	Elastic cross-section verification	Plastic cross-section verification
rolled	$h/b \leq 2,0$	1/250	1/200
	$h/b > 2,0$	1/200	1/150
welded	$h/b \leq 2,0$	1/200	1/150
	$h/b > 2,0$	1/150	1/100

Πίνακας 7-5: Τιμές συντελεστή  $\beta_{LT}$  για τον υπολογισμό της ατέλειας μελών υπό πλευρικό λυγισμό κατά τον EN 1993-1-1

Με δεδομένες τις αβεβαιότητες που υπάρχουν στην περίπτωση του μέλους μονής συμμετρίας, η οποία και δεν υπάγεται στους πίνακες του κανονισμού, θα χρησιμοποιήσουμε την μεγαλύτερη δυνατή ατέλεια για συγκολλητό μέλος κατηγορίας 1, δηλαδή  $\beta_{LT} = 0.01 \Rightarrow e_0 = 5.43 \text{ cm}$ . Η συγκεκριμένη ατέλεια θα ληφθεί υπόψη με την μέθοδο των ισοδύναμων δυνάμεων

### 7.7.2 Μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες

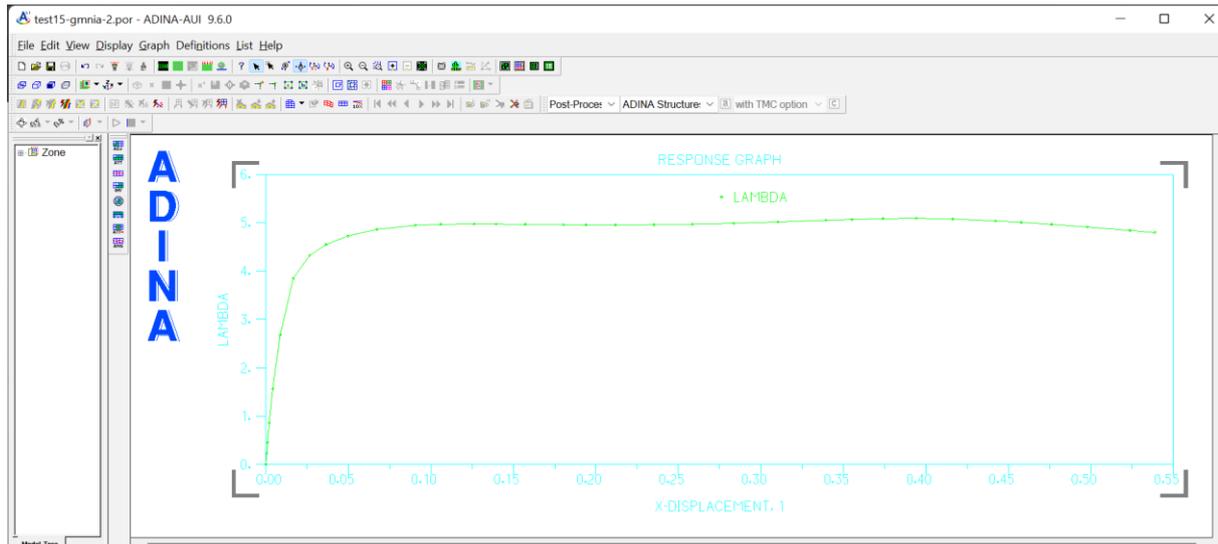
Ο πρώτος μηχανισμός μη-γραμμικότητας, είναι αυτός της μη-γραμμικότητας γεωμετρίας, ο οποίος θα μελετηθεί μέσω των αναλύσεων GNIA, δηλαδή μη-γραμμικότητας γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες. Θα γίνει έλεγχος μετακινήσεων για να ανιχνευθούν και πιθανοί καθοδικοί κλάδοι. Οι ατέλειες θα ληφθούν υπόψη τόσο σύμφωνα με την εφαρμογή της μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας, όσο και αυτής σύμφωνα με τον EN 1993-1-1 που αναλύθηκε προηγουμένως



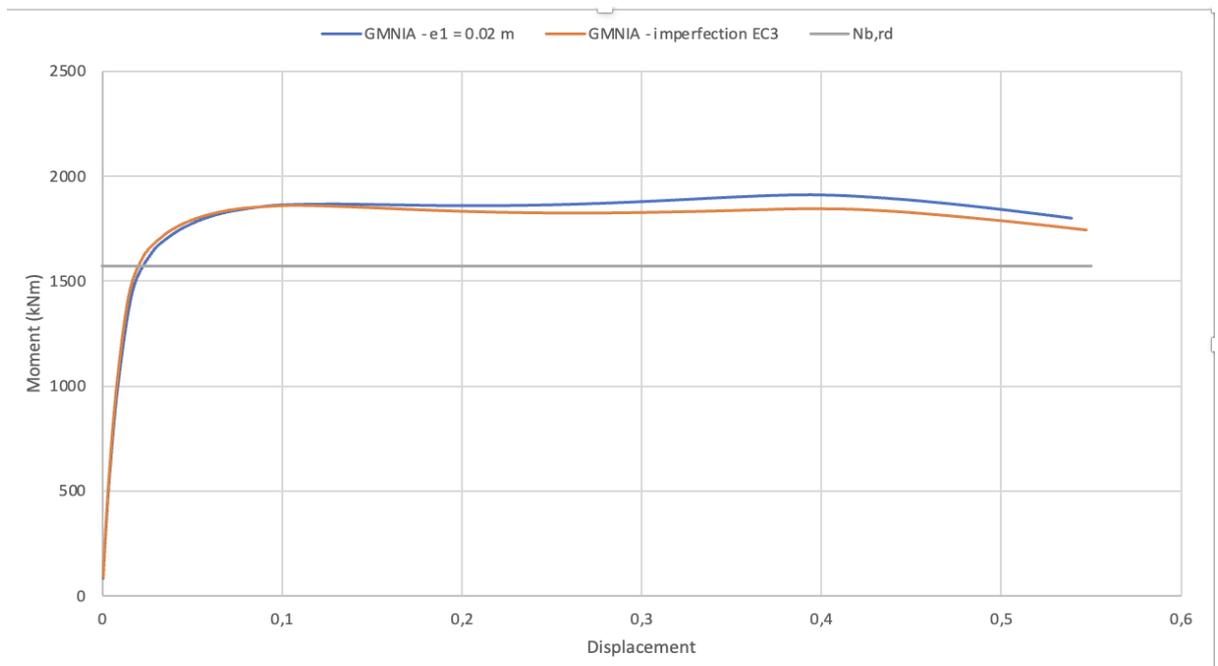
Διάγραμμα 7-1: Δρόμος ισορροπίας μη-γραμμικής ανάλυσης γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες σύμφωνα με το EN 1993-1-1

### 7.7.3 Μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες

Στην συνέχεια θα εισαχθεί το υλικό με νόμο ελαστικό-απολύτως πλαστικό και θα γίνει μη-γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες, η οποία θα μας δώσει την συνολική αντοχή του μέλους σε διαρροή και λυγισμό. Αυτή την αντοχή θα συγκρίνουμε με την  $M_{b,rd}$  που υπολογίσαμε προηγουμένως



Διάγραμμα 7-2: Δρόμος ισορροπίας μη-γραμμικής ανάλυσης υλικού και γεωμετρίας με αρχική ατέλεια σύμφωνα με τον ΕΚ-3



Διάγραμμα 7-3: Συγκεντρωτικοί δρόμοι ισορροπίας μη-γραμμικής ανάλυσης υλικού και γεωμετρίας με αρχικές ατέλειες

## 7.8 Συμπεράσματα

Μετά και την πραγματοποίηση του συνόλου των αναλύσεων καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα

- Οι τιμές της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού από τον πίνακα του κανονισμού είναι αξιόπιστες, με βάση τα αποτελέσματα των αριθμητικών αναλύσεων
- Η εύρεση της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού με μη-γραμμική παρεμβολή δεν συνιστάται
- Ο φορέας έχει μεταλυγισμική αντοχή, όπως φαίνεται από την μη-γραμμική ανάλυση γεωμετρίας
- Οι τιμές της συνολικής αντοχής  $M_{b,rd}$  μπορούν να χαρακτηριστούν αρκετά συντηρητικές σε σχέση με την πραγματική αντοχή του φορέα όπως αυτή προέκυψε από αναλύσεις GMNIA



## 8 ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το σύνολο της διπλωματικής θα μπορούσε να συνοψιστεί στα ακόλουθα συμπεράσματα

- Καμία από τις εξεταζόμενες σχέσεις του προτύπου δεν έδειξε απόκλιση από την αντίστοιχη αριθμητική επίλυση με λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων, με εξαίρεση το κεφάλαιο 6 που αφορά τις στηρίξεις
- Προτείνεται η εφαρμογή της μοναδικής τοπικής και καθολικής ατέλειας σύμφωνα με το σχήμα των ιδιομορφών σε οποιαδήποτε περίπτωση αυτό είναι εφικτό
- Στην περίπτωση διατομών μονής συμμετρίας υπό θλίψη, η εύρεση της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού με μη-γραμμική παρεμβολή δεν συνιστάται
- Στις περιπτώσεις λυγισμού του άνω θλιβόμενου πέλματος δικτυωτών γεφυρών κάτω διάβασης συνιστάται η δημιουργία τρισδιάστατου λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων
- Σε καμία από αυτές τις περιπτώσεις η εκτέλεση μη-γραμμικής ανάλυσης δεν έδωσε ασφαλέστερη λύση. Όμως στις περιπτώσεις του άνω πέλματος δικτυωτών γεφυρών, αλλά και στην περίπτωση πλευρικού λυγισμού μονοσυμμετρικών δοκών, οδήγησαν σε αποτελέσματα με σημαντική οικονομία υλικού

-

## 9 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Γαντές Χ. (2016) “Μη γραμμική συμπεριφορά των κατασκευών” Κάλλιπος, Ανοιχτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις
2. Κουνάδης Α. (1997) “Γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας” Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
3. Ραυτογιάννης Ι., Αβράαμ Τ., (2006). “Διερεύνηση φορτίων λυγισμού θλιβόμενου άνω πέλματος χαλύβδινων γεφυρών με δικτυωτές κύριες δοκούς”. 6<sup>ο</sup> Συνέδριο Μεταλλικών Κατασκευών, Αθήνα.
4. Σταθόπουλος Α. (2011). “Λυγισμός άνω θλιβόμενου πέλματος δικτυωτής γέφυρας.” Μεταπτυχιακή εργασία, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Ε.Μ.Π.
5. Taras A., Greiner R. (2009). “New design curves for lateral-torsional buckling, a proposal based on a consistent derivation” *Journal of Constructional Steel Research*, 66(2010), 688–663.
6. Kovac M., Baláž I. (2019). “Stability of centrally loaded beams with monosymmetric cross-section at various boundary conditions.”, *Journal of Constructional Steel Research* 152(2019) 139-152.
7. Agüero A., Baláž I., Koleková Y. “New method for metal beams sensitive to lateral-torsional buckling with an equivalent geometrical imperfection UGLI”, *Journal Structures*, 29 (2021) 1445-1462 .
8. Chladný Y., Štujberová M. (2013) “Frames with unique local and global imperfection in the shape of the elastic buckling mode – Part A”, *Stahlbau* (2013), Heft 9 .
9. Chladný Y., Štujberová M. (2013) “Frames with unique local and global imperfection in the shape of the elastic buckling mode – Part B”, *Stahlbau* (2013), Heft 9 .
10. Timoshenko Sp., Gere J. (1961) “Theory of elastic Stability”, McGraw – Hill, New York, NY. 1961
11. Bleich F., (1952) “Buckling Strength of Metal Structures”, McGraw – Hill, New York, 1952.

12. Bazant Zp., Cedolin L. (1991) “Stability of Structures”, Oxford University Press, New York, NY, 1991
13. Baláž I., Koleková Y., Zivner T, (2015) “Stability of timber cantilever with doubly symmetrical profile under concentrated end load F”, International Journal of Interdisciplinarity in Theory and Practice.
14. Jalayer F., Cornell, C.A. (2009). “Assesment of in-Plane behavior of Metal Compressed Members with Equivalent Geometrical Imperfection.” Journal Applied Sciences, 10 (2020), 8174.
15. Horacek M., Melcher J., “Lateral-torsional bukling of beams of double and mono-symmetrical cross-section loaded perpendicularly to the axis of symmetry” Conference Eurosteel 2017, Copenhagen, Denmark.
16. Kovac M. (2015) “Elastic critical axial force for the torsional – flexural buckling of thin – walled metal members: an approximate method”, Slovak Journal of Civil Engineering 23 (2015), 23-32
17. Baláž I., Koleková Y. Kovac M., (2016), “Generalization of unique global and local imperfection used in EN 1993-1-1 and EN 1999-1-1”, Eighth International Conference on Steel and Aluminum Structures, edited by B.Young and Y.Chai, Hong kong, Chine, 2016
18. Scott Louw G. (2008) “Lateral Support of Axially Loaded Columns in portal frame structures provided by sheeting rails”, Master of Sciende thesis, Stellenbosch University
19. Eurocode 3 – Design of Steel Structures – Part 1-103: Elastic Critical Buckling of Members, 7<sup>th</sup> draft, October 2020
20. EN 1993-1-14, Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-14: Design assisted by finite element analysis.
21. DVNGL – RP – C208: Determination of structural capacity by non-linear finite element analysis methods
22. Taras A., Greiner R., (2008). “Development of consistent buckling curves for torsional and lateral torsional buckling” Steel Construction Journal, Issue 1.
23. Baláž I., Koleková Y. (2012). “Bending moments due to elastic buckling mode applied as uniform global and local initial imperfection of frames” Procedia Engineering 40 (2012) 32 – 37
24. Vensko M. (2003). “Lateral – torsional buckling of structures with monosymmetric cross - sections” Master of Science thesis, University of Pittsburgh, 2008

