ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ

ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ

Διπλωματική εργασία της: **Τριανταφύλλου Μαρίας**

Επιβλέπων καθηγητής : **Δ.Χ. Κραββαρίτης**

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2011

Πρόλογος

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη των ειδικών συναρτήσεων Bessel.

Στην πρώτη παράγραφο του πρώτου κεφαλαίου αναφέρεται η εξίσωση Bessel και βρίσκονται αναλυτικά οι λύσεις της που αποτελούν και τις συναρτήσεις Bessel τις οποίες και θα μελετήσουμε. Στην δεύτερη παράγραφο παρουσιάζονται οι ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel- μια από τις βασικές ιδιότητες είναι η ορθογωνιότητα, γιατί χωρίς αυτή δε θα είχαμε τις σειρές Fourier-Bessel, οι οποίες χρειάζονται τις εφαρμογές. Τέλος αναφέρεται και μια εφαρμογή, το πρόβλημα Diriclet σε κύλινδρο, όπου χρησιμοποιούνται οι σειρές Fourier-Bessel.

Στο δεύτερο κεφάλαιο επεκτείνεται η συνάρτηση Bessel στο μιγαδικό επίπεδο. Αποδεικνύονται ορισμένες βασικές ιδιότητες και δίνεται μια ολοκληρωτική αναπαράσταση της συνάρτησης αυτής.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Συναρτήσεις Bessel

A. Η εξίσωση Bessel και οι λύσεις της

Η διαφορική εξίσωση Bessel τάξεως p με $p \in [0, \infty)$ είναι,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 .$$

(A.1)

Κάθε μη μηδενική λύση της (A.1) ονομάζεται συνάρτηση Bessel ή κυλινδρική συνάρτηση.

Θα βρούμε την εξίσωση των δεικτών της (A.1).

Η εξίσωση (A.1) παίρνει την μορφή

$$x^2 y'' + xP(x)y' + Q(x)y = 0$$

όπου οι συναρτήσεις $P(x)$ και $Q(x)$ έχουν τα αναπτύγματα:

$$P(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \beta_v x^v ,\ Q(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_v x^v$$

όμως από την (A.1) έχουμε $P(x) = 1$ και $Q(x) = x^2 - p^2$.

Η γενική εξίσωση των δεικτών είναι

$$k(k-1) + \beta k + \gamma = 0$$

όμως $\beta = 1$ και $\gamma = -p^2$ άρα η εξίσωση των δεικτών είναι

$$k(k-1) + k - p^2 = 0$$

που σημαίνει ότι οι δείκτες της είναι $k_1 = p$, $k_2 = -p$.

Πρόταση Α.1: Έστω ότι οι συναρτήσεις $P(x)$, $Q(x)$ της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y'' + xP(x)y' + Q(x)y = 0$$

έχουν τα αναπτύγματα $P(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu x^\nu$, $Q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu x^\nu$ και $k_1, k_2 \in R$ είναι ρίζες της εξίσωσης των δεικτών με $k_1 \geq k_2$.

(i) Αν $k_1 - k_2 \notin \mathrm{N} \cup \{0\}$, τότε η διαφορική εξίσωση έχει δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της μορφής

$$y_1(x) = x^{k_1} \sum a_\nu x^\nu, \;\; y_2(x) = x^{k_2} \sum a'_\nu x^\nu, \;\; 0 < x < \rho .$$

(ii) Αν $k_1 - k_2 \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, τότε η διαφορική εξίσωση έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της μορφής

$$y_1(x) = x^{k_1} \sum a_\nu x^\nu, \;\; y_2(x) = a y_1(x) \ln x + x^{k_2} \sum a'_\nu x^\nu, \;\; 0 < x < \rho .$$

Όλες οι σειρές συγκλίνουν (τουλάχιστον) για $|x| < \rho$.

(i) Αν $k_1 - k_2 = 2p \notin \mathrm{N} \cup \{0\}$, τότε σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Η λύση της (Α.1) που αντιστοιχεί στο δείκτη k_1, είναι της μορφής

$$y_1(x) = x^p \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \;\; x > 0 .$$

Αντικαθιστούμε την y_1 και τις παραγώγους της στην (Α.1), οπότε παίρνουμε την ταυτότητα

$$(1+2p)a_1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} [\nu(\nu+2p)a_\nu + a_{\nu-2}]x^\nu = 0 .$$

Επομένως $a_1 = 0$, αφού $p \geq 0$, και

$$a_\nu = -\frac{a_{\nu-2}}{\nu(\nu+2p)}, \;\; \nu = 2,3,...$$

ή

$$a_1 = a_3 = \ldots = 0$$

και

$$a_{2r} = -\frac{a_{2r-2}}{4r(r+p)}, \ \mathrm{r} = 1, 2, \ldots .$$

Από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε

$$a_{2r} = \frac{(-1)^r a_0}{2^{2r} r!(r+p)(r+p-1)\ldots(1+p)}, \ \mathrm{r} = 1, 2, \ldots \ .$$

Για να απλοποιήσουμε την τελευταία έκφραση θέτουμε $a_0 = \dfrac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$,

όπου $\Gamma(t)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα για την οποία ισχύει

$$(p+1)(p+2)\ldots(p+r)\Gamma(p+1) = \Gamma(p+r+1),$$

οπότε οι συντελεστές της λύσεως γράφονται

$$a_{2r} = \frac{(-1)^r}{2^{2r+p} r!\Gamma(p+r+1)}.$$

Επομένως για τον δείκτη $k_1 = p$ η λύση της εξίσωσης (A.1) είναι

$$J_p(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(p+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+p} \text{ με } \mathrm{x}>0 .$$

(A.2)

Η συνάρτηση $J_p(x)$ ονομάζεται συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξεως p. Είναι φανερό ότι, αν $p \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, τότε η συνάρτηση αυτή ορίζεται για κάθε $x \in R$.
Για να βρούμε μια δεύτερη λύση της (A.1), γραμμικώς ανεξάρτητη από την $J_p(x)$, που να αντιστοιχεί στον δείκτη $-p$, εργαζόμαστε ως εξής:
β) Η λύση της (A.1) που αντιστοιχεί στο δείκτη k_2, είναι της μορφής

$$y_2(x) = x^{-p} \sum_{v=0}^{\infty} a'_v x^v .$$

Η λύση αυτή βρίσκεται από την $J_p(x)$, αν θέσουμε στη θέση του p το $-p$, οπότε παίρνουμε

$$J_{-p}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-p+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-p} \text{ με } x>0 .$$

(A.3)

(ii) Αν $r_1 - r_2 = 2p \in \mathrm{N}\cup\{0\}$, τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) $p=\mu+\frac{1}{2}$, όπου $\mu = 0,1,2,...$ τότε αναζητούμε μια λύση της μορφής

$$y_1(x)=x^p\sum_{v=0}^{\infty}a_v x^v \quad \text{με} \quad x>0 .$$

Αντικαθιστούμε την y_1 και τις παραγώγους της στην (Α.1), οπότε παίρνουμε την ταυτότητα

$$(1+2p)a_1+\sum_{v=2}^{\infty}[v(v+2p)a_v+a_{v-2}]x^v=0 .$$

Επομένως $a_1 = 0,$ αφού $p \geq 0$, και

$$a_v=-\frac{a_{v-2}}{v(v+2p)},\ v=2,3,...$$

άρα

$$v(v+2p)a_v+a_{v-2}=0,\ v=2,3,...$$

αφού $p=\mu+\frac{1}{2}$ έχουμε

$$v(v+2\mu+1)a_v+a_{v-2}=0,\ v=2,3,...$$

παρατηρούμε ότι

$$a_1=a_3=...=a_{2\mu-1}=0$$

και για $v=2\mu+1$ όπου $\mu=0,1,2,...$ έχουμε

$$(2\mu+1)(2\mu+1+2\mu+1)a_{2\mu+1}+a_{2\mu-1}=0$$

άρα

$$(2\mu+1)(2\mu+1+2\mu+1)a_{2\mu+1}+0=0$$

άρα θα πρέπει $a_{2\mu+1} = 0$

άρα η ζητούμενη λύση είναι η

$$J_p(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(p+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+p} \quad \text{με } x > 0,$$

η οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητη της J_{-p}.

β) Αν $p \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ τότε η διαφορική εξίσωση Bessel σύμφωνα με την πρόταση έχει μια δεύτερη λύση της μορφής:

$$y_2(x) = aJ_p(x)\ln x + x^{-p} \sum_{v=0}^{\infty} a'_v x^v, \; a \neq 0$$

βρίσκουμε ότι

$$y_2(x) = J_p(x)\ln x - \frac{1}{2}\sum_{v=0}^{p-1} \frac{(p-v-1)!}{v!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2v-p} - \frac{1}{2}\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v (h_v + h_{v+p})}{v!(p+v)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2v+p}, \quad x > 0, \quad p \in \mathrm{N} \cup \{0\}$$

όπου $h_v = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{v}$.

Συνήθως αντί της λύσεως $y_2(x)$ χρησιμοποιούμε έναν κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των λύσεων $y_2(x)$ και $J_p(x)$, τη λύση

$$Y_p(x) = \frac{2}{\pi}[y_2(x) + (C - \ln 2)J_p(x)] \quad \text{με } x > 0$$

(A.4)

όπου $C = \lim_{v \to \infty}(h_v - \ln v) \cong 0,5772$ είναι η σταθερά Euler.

Ένας άλλος τρόπος ορισμού της Y_p είναι ο εξής: Για $p > 0$, $p \notin \mathrm{N}$, θέτουμε

$$Y_p(x) = \frac{1}{\sin p\pi}[J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)]$$

ενώ για $p_0 \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ θέτουμε

(A.5) $$Y_{p_0}(x) = \lim_{p \to p_0} Y_p(x).$$

Αποδεικνύεται ότι οι σχέσεις (Α.4) και (Α.5) ορίζουν την ίδια συνάρτηση. Οι συναρτήσεις $Y_{p,}\ p\geq 0$ ονομάζονται συναρτήσεις Bessel δευτέρου τάξεως p ή συναρτήσεις Neuman τάξεως p. Έχουμε λοιπόν αποδείξει την πρόταση :

<u>Πρόταση Α.2:</u>

(i) Αν $p \notin \mathrm{N} \cup \{0\}$, τότε η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel τάξεως p είναι:

$$Z_{p(x)} = C_1 J_P(x) + C_2 J_{-p}(x),\ C_1, C_2 \text{ σταθερές.}$$

(ii) Αν $p \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, τότε η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel τάξεως p είναι:

$$Z_{p(x)} = C_1 J_P(x) + C_2 J_p(x),\ C_1, C_2 \text{ σταθερές.}$$

Β. Ιδιότητες συναρτήσεων Bessel

Β.1. Συμπεριφορά των συναρτήσεων Bessel στην περιοχή του μηδενός

Για τις συναρτήσεις Bessel $J_p(x),\ p \geq 0$ ισχύει

$$\lim_{x \to 0} J_p(x) = 0 \text{, όταν } p > 0$$

(σχήμα Β.1.1)

$$\lim_{x \to 0} J_p(x) = 1 \text{, όταν } p = 0 .$$

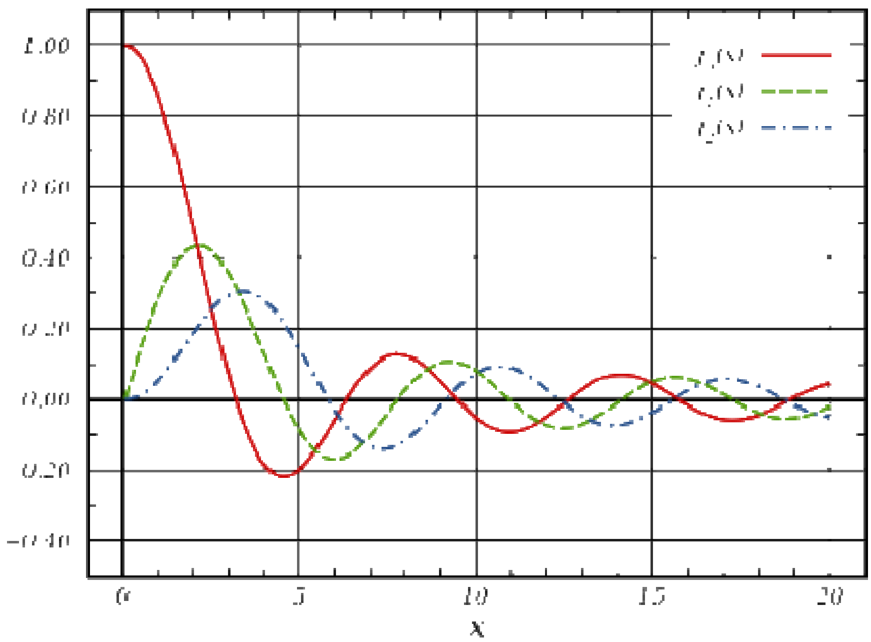
(σχήμα Β.1.1)

Για τις συναρτήσεις Bessel $Y_p(x),\ p \geq 0$ ισχύει

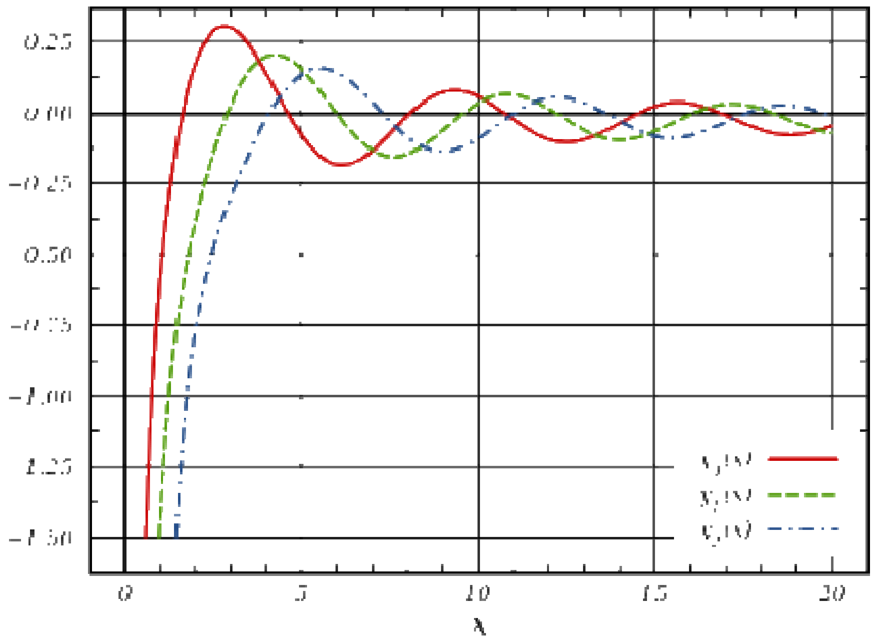
$$\lim_{x \to 0^+} Y_p(x) = -\infty .$$

(σχήμα Β.1.2)

Όλες οι συναρτήσεις Bessel που δεν είναι πολλαπλάσια του J_p, δεν είναι φραγμένες στην περιοχή του 0, αφού περιέχουν το λογαριθμικό όρο, όταν $p \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, και τον όρο x^{-p}, όταν $p \notin \mathrm{N} \cup \{0\}$.



(σχήμα Β.1.1)



(σχήμα Β.1.2)

Β.2. Αναγωγικοί τύποι

Έχουμε ορίσει μέχρι τώρα τις συναρτήσεις J_p για κάθε $p \in R \setminus \{-1,-2,...\}$ (βλέπε τύπους (Α.2) και (Α.3)). Θα επεκτείνουμε τον ορισμό για κάθε $p \in R$ ορίζοντας

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \text{ για } n \text{ θετικό ή αρνητικό ακέραιο.}$$

<u>Απόδειξη:</u> Για $n > 0$.
Σε αυτήν τη περίπτωση έχουμε

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n},$$

όμως το $\Gamma(-n+r+1)$ τείνει στο άπειρο (και έτσι το $\dfrac{1}{\Gamma(-n+r+1)}$ τείνει στο 0) για αρνητικό r ή $r = 0,1,2,...,n-1$ (αυτό είναι δυνατό επειδή το n είναι ακέραιος) έτσι το άθροισμα του r στην παραπάνω έκφραση μπορούμε ισοδύναμα να το πάρουμε από το n ως το άπειρο

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=n}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{1}{(m+n)!\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(m+n)-n}$$

(όπου έχουμε αλλάξει την μεταβλητή άθροισης σε $m = r - n$)

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(m+n)!\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

αλλά

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \text{ από (A.2).}$$

Οπότε αυτό που μένει για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη είναι να δείξουμε ότι

$$(m+n)!\Gamma(m+1) = m!\Gamma(n+m+1) \text{ για } n \text{ και } m \text{ ακέραιους}$$

αλλά

$$(m+n)!\Gamma(m+1) = (m+n)(m+n-1)...(m+1)m!\Gamma(m+1) = m!\Gamma(m+n+1)$$

χρησιμοποιούμε επανειλημμένα τη σχέση $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ και έτσι το αποτέλεσμα αποδείχθηκε.

Για $n < 0$.
Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε $n = -p$ με $p > 0$. Μετά αυτό που πρέπει να αποδείξουμε είναι ότι

$$J_p(x) = (-1)^{-p} J_{-p}(x)$$

ή

$$(-1)^p J_p(x) = J_{-p}(x)$$

το οποίο φυσικά, εφόσον το p είναι θετικό είναι το αποτέλεσμα που αποδείξαμε παραπάνω.

Ας ανακεφαλαιώσουμε τι έχουμε δείξει μέχρι στιγμής:
Έχουμε δείξει ότι εάν το n δεν είναι ακέραιος τότε η $J_n(x)$ και η $J_{-n}(x)$ είναι ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel (τότε λοιπόν η γενική λύση δίνεται από την σχέση $C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$) ενώ εάν το n είναι ένας ακέραιος η $J_n(x)$ και η $J_{-n}(x)$ είναι λύσεις της εξίσωσης Bessel και συνδέονται με τη σχέση

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Μετά από αυτήν την επέκταση ισχύουν, για κάθε $p \in R$, οι αναγωγικοί τύποι

(i) $\dfrac{d(x^n J_n(x))}{dx} = x^n J_{n-1}(x)$

(ii) $\dfrac{d(x^{-n} J_n(x))}{dx} = -x^n J_{n+1}(x)$

(iii) $J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{n}{x} J_n(x)$

(iv) $J_n'(x) = \dfrac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x)$

(v) $J_n'(x) = \dfrac{1}{2}(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x))$

(vi) $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \dfrac{2n}{x} J_n(x)$

Απόδειξη:

(i) Παίρνουμε την εξίσωση $J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \dfrac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2r+n}$ και την πολλαπλασιάζουμε με το x^n και παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη ως προς x.

$$\frac{d(x^n J_n(x))}{dx} = \frac{d\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \dfrac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} \dfrac{1}{2^{2r+n}} x^{2r+2n}}{dx}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)2^{2r+n}} (2r+2n) x^{2r+2n-1}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!(n+r)\Gamma(n+r)2^{2r+n}} 2(r+n) x^{2r+n-1}$$

(γνωρίζουμε ότι $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$)

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n-1}$$

$= x^n J_{n-1}(x)$ (με χρήση της εξίσωσης (A.2)).

Σημείωση: Σε αυτό το θεώρημα δεν υπάρχει περιορισμός για το n, το οποίο μπορεί να είναι ακέραιος μπορεί και όχι, θετικός ή αρνητικός.

(ii) Έχουμε

$$\frac{d(x^{-n}J_n(x))}{dx} = \frac{d\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\frac{1}{2^{2r+n}}x^{2r}}{dx}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\frac{1}{2^{2r+n}}2rx^{2r-1}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\frac{1}{2^{2r+n-1}}rx^{2r-1}$$

(αφού υπάρχει η μεταβλητή r στον αριθμητή. Για $r=0$ το δεξί μέλος εξαφανίζεται αφού $0!=1$)

$$= \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1} \frac{1}{(s+1)!\Gamma(n+s+2)}\frac{1}{2^{2(s+1)+n-1}}(s+1)x^{2(s+1)-1}$$

(έχουμε θέσει $s=r-1$)

$$= \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1} \frac{1}{s!\Gamma(n+s+2)}\frac{1}{2^{2s+n+1}}x^{2s+1}$$

$$= -x^{-n}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s} \frac{1}{s!\Gamma(n+s+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n+1}$$

$$= -x^{-n}J_{n+1}(x)$$

(με χρήση της εξίσωσης (A.2)).

(iii) Παραγωγίζοντας το αριστερό μέλος της σχέσης (i) παίρνουμε

$$nx^{n-1}J_n(x) + x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

η διαίρεση με το x^n δίνει

$$\frac{n}{x}J_n(x) + J_n'(x) = J_{n-1}(x)$$

και έτσι

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) \quad .$$

(iv) Παραγωγίζοντας το αριστερό μέλος της σχέσης (ii) παίρνουμε

$$-nx^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J_n'(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

του οποίου ο πολλαπλασιασμός με το x^n δίνει

$$-\frac{n}{x} J_n(x) + J_n'(x) = -J_{n+1}(x)$$

έτσι

$$J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \, .$$

(v) Προσθέτουμε τις σχέσεις (iii) και (iv)

$$\begin{aligned}
& x^{-n} \frac{d\left(x^n J_n(x)\right)}{dx} + x^n \frac{d\left(x^{-n} J_n(x)\right)}{dx} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\
& x^{-n} \left(nx^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x)\right) + x^n \left(-nx^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J_n'(x)\right) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \\
& nx^{-1} J_n(x) + J_n'(x) - nx^{-1} J_n(x) + J_n'(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \\
& 2J_n'(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \\
& J_n'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right).
\end{aligned}$$

(vi) Αφαιρούμε την (iv) από την (iii)

$$\begin{aligned}
& x^{-n} \frac{d\left(x^n J_n(x)\right)}{dx} - x^n \frac{d\left(x^{-n} J_n(x)\right)}{dx} = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \\
& x^{-n} \left(nx^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x)\right) - x^n \left(-nx^{-n-1} J_n + x^{-n} J_n'(x)\right) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \\
& nx^{-1} J_n(x) + J_n'(x) + nx^{-1} J_n(x) - J_n'(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \\
& J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x).
\end{aligned}$$

Όλες οι παραπάνω σχέσεις παραμένουν όταν οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους αντικατασταθούν με τις ανάλογες συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους.

Όταν το n είναι ακέραιος ισχύει

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) .$$

<u>Απόδειξη:</u> Από την εξίσωση

$$Y_n(x) = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial J_v(x)}{\partial v} - (-1)^n \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right]_{v=n}$$

έχουμε

$$Y_{-n}(x) = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial J_v(x)}{\partial v} - (-1)^{-n} \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right]_{v=-n}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial(-v)} - (-1)^{-n} \frac{\partial J_v(x)}{\partial(-v)}\right]_{v=n}$$

$$= \frac{1}{n}\left[-\frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v} + (-1)^n \frac{\partial J_v(x)}{\partial v}\right]_{v=n}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{n}\left[\frac{\partial J_v(x)}{\partial v} - (-1)^n \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right]_{v=n}$$

άρα

$$Y_n(x) = (-1)^n Y_n(x) .$$

Τα ίδια ισχύουν και για τους υπόλοιπους αναγωγικούς τύπους.
Θα αποδείξουμε ότι το αποτέλεσμα (i) ισχύει για το $Y_n(x)$ με παρόμια μέθοδο αποδεικνύεται το (ii) και στην συνέχεια οι σχέσεις (iii)-(vi) αποδεικνύονται όπως πριν. Έτσι αυτό που έχουμε να αποδείξουμε εδώ είναι ότι

$$\frac{d(x^n Y_n(x))}{dx} = x^n Y_{n-1}(x) .$$

Πρέπει να θεωρήσουμε ξεχωριστά τις υποθέσεις του ακέραιου και μη ακέραιου n.
α) Μη ακέραιος n.
Εδώ μπορούμε να γράψουμε

$$Y_n(x) = \frac{\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

έτσι ώστε

$$\frac{d(x^nY_n(x))}{dx}=\frac{1}{\sin n\pi}\left[\cos n\pi\frac{d(x^nJ_n(x)}{dx}-\frac{d(x^nJ_{-n}(x))}{dx}\right]$$

$$=\frac{1}{\sin n\pi}\left[\cos n\pi(x^nJ_{n-1}(x))-(-x^nJ_{n+1}(x))\right]$$

(όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το (i) για την 1η παράγωγο και το (ii) για την 2η παράγωγο)

$$=\frac{1}{\sin n\pi}x^n\left[\cos n\pi J_{n-1}(x)+J_{-(n-1)}(x)\right]$$

$$=\frac{1}{\sin[(n-1)\pi+\pi]}x^n\{\cos[(n-1)\pi+\pi]J_{n-1}(x)+J_{-(n-1)}(x)\}$$

$$=\frac{1}{-\sin(n-1)\pi}x^n[-\cos(n-1)\pi J_{n-1}(x)+J_{-(n-1)}(x)]$$

$$=\frac{x^n\cos(n-1)\pi J_{n-1}(x)+J_{-(n-1)}(x)}{\sin(n-1)\pi}$$

$$=x^nY_{n-1}(x).$$

β) Ακέραιος n.

Από το (α) μέρος της απόδειξης έχουμε

$$\frac{dx^vY_v(x)}{dx}=x^vY_{v-1}(x).$$

Παίρνοντας το όριο αυτού του αποτελέσματος για $v\to n$ γνωρίζοντας ότι $Y_n(x)=\lim_{v\to n}Y_v(x)$ παίρνουμε το απαιτούμενο αποτέλεσμα.

B.3. Η γεννήτρια συνάρτηση

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n(x)$$

<u>Απόδειξη:</u> Αναλύουμε την $e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ σε γινόμενο δυναμοσειρών και δείχνουμε ότι ο συντελεστής του t^n είναι η $J_n(x)$

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}=e^{\frac{1}{2}xt}e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{t}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}xt\right)^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\frac{x}{t}\right)^s}{s!}=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^r x^r t^r(-1)^s\left(\frac{1}{2}\right)^s x^s t^{-s}}{r!s!}=\sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{2}\right)^{r+s}\frac{x^{r+s}t^{r-s}}{r!s!}$$

Τώρα θέλουμε να πάρουμε τον συντελεστή του t^n για $n\geq 0$. Για να προκύψει το ζητούμενο θέτουμε $s=r-n$. Έτσι ο συντελεστής του t^n είναι

$$(-1)^{r-n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n}\frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!}.$$

Παίρνουμε τον πλήρη συντελεστή του t^n αθροίζοντας όλες τις επιτρεπόμενες τιμές του r. Αφού $s=r-n$ και απαιτούμε $s\geq 0$, θα πρέπει $r\geq n$. Έτσι ο πλήρης συντελεστής του t^n είναι

$$\sum_{r=n}^{\infty}(-1)^{r-n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n}\frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!}=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!p!}$$

(όπου έχουμε θέσει $p=r-n$)

$$=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{\Gamma(p+n+1)p!}$$

(αφού το p και το n είναι ακέραιοι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\Gamma(p+n+1)=(p+n)!$)

$$=J_n(x)$$

(από τη σχέση (A.2)).

Εάν $n<0$ έχουμε τον συντελεστή του t^n για συγκεκριμένη τιμή του r που δίνεται από

$$(-1)^{r-n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n}\frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!}.$$

Αλλά τώρα η απαίτηση ότι $s\geq 0$ με $s=r-n$ ικανοποιείται για όλες τις τιμές του r. Έτσι ο συντελεστής του t^n είναι

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r-n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n}\frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!}=(-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n}}{r!\Gamma(r-n+1)}=(-1)^n J_{-n}(x)=J_n(x)$$

Αποδείχθηκε.

<u>Παρατήρηση:</u> Παρατηρούμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση των $J_n(x)$ ισχύει και όταν $t\in C\setminus\{0\}$.

Για $t=e^{i\theta}$ έχουμε

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}=i\sin\theta\,,$$

οπότε η γεννήτρια συνάρτηση γίνεται

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=e^{ix\sin\theta}=\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)\,.$$

Εξάλλου ισχύουν οι σχέσεις

$$t^{2n}+(-1)^{2n}t^{-2n}=2\cos(2n\theta)$$
$$t^{2n-1}+(-1)^{2n-1}t^{-(2n-1)}=2i\sin(2n-1)\theta$$

οπότε η γεννήτρια συνάρτηση δίνει

$$e^{ix\sin\theta}=\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\cos(2n\theta)+2i\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(x)\sin(2n-1)\theta$$

.

Έχουμε καταλήξει λοιπόν στους τύπους

$$\left.\begin{aligned}\cos(x\sin\theta)&=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\cos(2n\theta),\\ \sin(x\sin\theta)&=2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(x)\sin(2n-1)\theta.\end{aligned}\right.\quad \text{με } x,\theta\in R$$

B.4. Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους

1η ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi \text{, όπου } n \text{ ακέραιος}$$

Απόδειξη: Αφού $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ για n ακέραιο το $e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[t^n + (-1)^n t^{-n}\right]J_n(x) .$$

Εάν τώρα γράψουμε $t = e^{i\varphi}$ τότε

$$t - \frac{1}{t} = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi .$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$e^{ix\sin\varphi} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi}]J_n(x)$$

όμως όταν το n είναι άρτιος έχουμε

$$e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi} = e^{in\varphi} + e^{-in\varphi} = 2\cos n\varphi$$

ενώ όταν το n είναι περιττός έχουμε

$$e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi} = e^{in\varphi} - e^{-in\varphi} = 2i\sin n\varphi$$

έτσι έχουμε

$$e^{ix\sin\varphi} = J_0(x) + \sum_{n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma} 2\cos n\varphi J_n(x) + \sum_{n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} 2i\sin n\varphi J_n(x)$$

$$e^{ix\sin\varphi} = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\cos 2k\varphi J_{2k}(x) + i\sum_{k=1}^{\infty} 2\sin(2k-1)\varphi J_{2k-1}(x) .$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη αυτής της εξίσωσης έχουμε

$$\cos(x\sin\varphi) = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\cos 2k\varphi J_{2k}(x) \tag{B.4.1}$$

$$\sin(x\sin\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\sin(2k-1)\varphi J_{2k-1}(x)$$

(B.4.2)

εάν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (B.4.1) με $\cos n\varphi,\ (n \geq 0)$

και εάν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (B.4.1) με $\cos n\varphi,\ (n \geq 0)$ και τα δύο μέλη της εξίσωσης (B.4.2) με $\sin n\varphi,\ (n \geq 1)$ και ολοκληρώσουμε από το 0 έως το π και χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες έχουμε

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = 0 \ (m \neq n)$$

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \ (m = n \neq 0)$$

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = \pi \ (m = n = 0)$$

και

$$\int_0^{\pi} \sin m\varphi \sin n\varphi d\varphi = 0 \ (\mathrm{m} \neq \mathrm{n})$$

$$\int_0^{\pi} \sin m\varphi \sin n\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \ (m = n \neq 0)$$

παίρνουμε τα αποτελέσματα

$$\int_0^{\pi} \cos n\varphi \cos\left(x\sin\varphi\right) d\varphi = \pi J_n(x) \ (n \ άρτιος)$$

$$\int_0^{\pi} \cos n\varphi \cos\left(x\sin\varphi\right) d\varphi = 0 \ (n \ περιττός)$$

και

$$\int_0^{\pi} \sin n\varphi \sin(x\sin\varphi) d\varphi = 0 \ (n \ άρτιος)$$

$$\int_0^{\pi} \sin n\varphi \sin(x\sin\varphi) d\varphi = \pi J_n(x) \ (n \ περιττός).$$

$$\int_0^{\pi}[\cos n\varphi\cos(x\sin\varphi)+\sin n\varphi\sin(x\sin\varphi)]d\varphi=\pi J_n(x)$$

για όλους τους θετικούς ακέραιους n έχουμε

$\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi=\pi J_n(x)$ Η πρόσθεση των δύο τελευταίων εξισώσεων δίνει

το οποίο είναι το απαιτούμενο αποτέλεσμα για θετικό n.

Εάν το n είναι αρνητικό μπορούμε να θέσουμε $n=-m$ όπου m είναι θετικό, έτσι ώστε το απαιτούμενο αποτέλεσμα να είναι

$$\int_0^{\pi}\cos(-m\varphi-x\sin\varphi)d\varphi=\pi J_{-m}(x)$$

(όπου m είναι θετικό)

αλλά

$$\int_0^{\pi}\cos(-m\varphi-x\sin\varphi)d\varphi=\int_{\pi}^{0}\cos[-m(\pi-\theta)-x\sin(\pi-\theta)](-d\theta)$$

(όπου έχουμε αλλάξει την μεταβλητή θέτοντας $\theta=\pi-\varphi$)

$$=\int_0^{\pi}\cos\left(-m\pi+m\theta-x\sin\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}[\cos(m\theta-x\sin\theta)\cos m\pi+\sin(m\theta-x\sin\theta)\sin m\pi]d\theta$$

$$=(-1)^m\int_0^{\pi}\cos(m\theta-x\sin\theta)d\theta$$

$$=(-1)^m\pi J_m(x)$$

(εφόσον γνωρίζουμε ότι ισχύει για θετικό m)

$$=\pi J_{-m}(x)=\pi J_n(x).$$

2η ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$J_n(x)=\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{ixt}dt,\ (n>-\frac{1}{2})$$

<u>**Απόδειξη:**</u> Θεωρώντας το ολοκλήρωμα I οριζόμενο από

$$I=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{ixt}dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(ixt)^r}{r!}dt=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(ix)^r}{r!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^r dt\,.$$

Τώρα εάν το r είναι περιττός, το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^r dt$ είναι μια περιττή συνάρτηση του t άρα το ολοκλήρωμα είναι μηδέν ενώ εάν το r είναι άρτιος (δηλαδή να ισούται με το 2s), η ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι άρτια, έτσι έχουμε

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^r dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^{2s}dt=2\int_{0}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^{2s}dt=\int_{0}^{1}(1-u)^{n-\frac{1}{2}}u^{s-\frac{1}{2}}du$$

(όπου κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u=t^2,\ du=2tdt$)

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^r dt=B\left(n+\frac{1}{2},s+\frac{1}{2}\right)$$

(από τον ορισμό της συνάρτησης Beta θα πρέπει να έχουμε $n>-\frac{1}{2}$ για να εξασφαλίσουμε τη σύγκλιση του ολοκληρώματος)

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^r dt=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+s+1)}\,.$$

Έτσι

$$I=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2s}}{(2s)!}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+s+1)}=\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{1}{\Gamma(n+s+1)}\frac{(2s)!}{2^{2s}s!}\sqrt{\pi}$$

(χρησιμοποιώντας τη σχέση $\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2x)!}{2^{2x}x!}\sqrt{\pi}$)

άρα

$$I=\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}}{\Gamma(n+s+1)s!}$$

άρα

$$I=\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}J_{n}(x)$$

(από την εξίσωση $J_{n}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}$)

έτσι

$$J_{n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}I$$

άρα

$$J_{n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\int_{-1}^{1}(1-t^{2})^{n-\frac{1}{2}}e^{ixt}dt\,.$$

B.5. Οι ρίζες των συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους

Όσον αφορά τις ρίζες των συναρτήσεων $J_{n}(x)$ ισχύει:

Πρόταση Β.5.1: (i) Οι συναρτήσεις Bessel $J_n(x),\ n\in \mathrm{N}\cup\{0\}$, έχουν αριθμήσιμο πλήθος θετικών απλών ριζών $x_k,\ k\in \mathrm{N}$, με $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\infty$.
(ii) Μεταξύ δύο διαδοχικών θετικών ριζών της $J_n(x)$ υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της $J_{n-1}(x)$ και ακριβώς μια ρίζα της $J_{n+1}(x)$.

Απόδειξη: (i) Οι ρίζες είναι απλές.

Πράγματι· αν το $x_0>0$ ήταν μια πολλαπλή ρίζα της $J_n(x)$, τότε θα έπρεπε $J_n(x_0)=J_n'(x_0)=0.$ Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0,\ y(x_0)=y'(x_0)=0$$

έχει, σύμφωνα με το θεώρημα υπάρξεως και μοναδικότητας, μια μοναδική λύση, την $y(x)\equiv 0$. Επειδή η $J_n(x)$ είναι λύση του παραπάνω προβλήματος, θα έπρεπε $J_n(x)=0$ για κάθε $x>0$. Αυτό όμως είναι άτοπο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $J_0(x)$, η οποία γράφεται:

$$J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)d\theta \xrightarrow{t=x\sin\theta} J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{x}\frac{\cos t}{\sqrt{x^2-t^2}}dt$$

ή

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{x}K(t,x)dt\,,$$

(B.5.1)

όπου $K(t,x)=\dfrac{\cos t}{\sqrt{x^2-t^2}}$.

Έστω $t_k=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in \mathrm{N}\cup\{0\}$, οι θετικές ρίζες του $\cos t$. Τότε για $x=t_\lambda$ από την (B.5.1) παίρνουμε

$$J_0(t_\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{t_0}K(t,t_\lambda)dt+\sum_{k=0}^{\lambda-1}\frac{2}{\pi}\int_{t_k}^{t_{k+1}}K(t,t_\lambda)dt=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{t_0}\left|K(t,t_\lambda)\right|dt}_{=:A_0}+\sum_{k=0}^{\lambda-1}(-1)^{k+1}\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|K(t,t_\lambda)\right|dt}_{:=A_{k+1}}=$$

$$=A_0-A_1+A_2+\ldots+(-1)^{\lambda}A_\lambda$$

Από τον τρόπο που ορίστηκαν τα A_k διαπιστώνεται εύκολα ότι για $k=0,1,\ldots,\lambda-1$ ισχύει $0<A_k<A_{k+1}$. Επομένως

$$J_0(t_\lambda) = A_0 + \left(A_2 - A_1\right) + \ldots + \left(A_\lambda - A_{\lambda-1}\right) > 0, \text{ όταν } \lambda \text{ άρτιος}$$
$$J_0(t_\lambda) = \left(A_0 - A_1\right) + \left(A_2 - A_3\right) + \ldots + \left(A_{\lambda-1} - A_\lambda\right) < 0, \text{ όταν } \lambda \text{ περιττός}$$

που σημαίνει ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $\cos t$ υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $J_0(t_\lambda)$. Μια δυναμοσειρά, όπως η $J_0(x)$, δεν μπορεί να έχει απείρου πλήθους ρίζες σε ένα φραγμένο διάστημα. Επομένως η $J_0(x)$ έχει στα διαστήματα της μορφής $\left[(2k-1)\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$ πεπερασμένου πλήθους ρίζες, που σημαίνει ότι συνολικά οι ρίζες της $J_0(x)$ είναι αριθμήσιμου πλήθους. Επειδή $\lim_k (2k-1)\frac{\pi}{2} = +\infty$ έπεται ότι η ακολουθία των ριζών της $J_0(x)$ συγκλίνει στο $+\infty$.
Η αντίστοιχη ιδιότητα για της συναρτήσεις $J_1, J_2, \ldots$ προκύπτει αμέσως επαγωγικά από το (ii). (ii) Έστω x_1, x_2, με $x_1 < x_2$, δύο διαδοχικές ρίζες της συναρτήσεως $J_n(x)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle και τους αναγωγικούς τύπους (i) και (ii), θα υπάρχει στο διάστημα (x_1, x_2) τουλάχιστον μια ρίζα της $J_{n-1},\ n \geq 1$, και τουλάχιστον μία ρίζα της $J_{n+1},\ n \geq 0$. Επίσης προκύπτει ότι υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της J_{n-1} και ακριβώς μια ρίζα της J_{n+1}.

B.6. Ορθογωνιότητα συναρτήσεων Bessel

Η συνάρτηση Bessel $J_p(x)$, για σταθερό $p \geq 0$, έχει αριθμήσιμο πλήθος απλών θετικών ριζών $(\rho_n),\ n \in \mathrm{N}$, με την ιδιότητα $\lim_{n\to\infty} \rho_n = +\infty$. Για τις ρίζες της $J_p(x)$ ισχύει ο ακόλουθος προσεγγιστικός τύπος

$$\rho_k \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} p + k\pi \,.$$

Στο γραμμικό χώρο $C[\alpha, \beta]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $\left[\alpha, \beta\right]$ εισάγουμε ένα εσωτερικό γινόμενο ως εξής:
Για $f(x), g(x) \in C[\alpha, \beta]$

$$< f, g > := \int_\alpha^\beta f(x) g(x) r(x) dx,$$

όπου $r(x)\in C[\alpha,\beta]$ είναι μια αυθαίρετη και αυστηρά θετική συνάρτηση, την οποία ονομάζουμε συνάρτηση βάρους. Για το παραπάνω γινόμενο ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις $f(x), g(x)\in C[\alpha,\beta]$ είναι ορθογώνιες, όταν $<f,g>=0$. Μια ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $C[\alpha,\beta]$ θα λέμε ότι αποτελεί ένα ορθογώνιο σύστημα ως προς τη συνάρτηση βάρους $r(x)$, όταν

$$<F_n,F_m>=0 \text{ για } n\neq m$$

Ισχύει το επόμενο βασικό θεώρημα, που αφορά στην ορθογωνιότητα των συναρτήσεων Bessel.

<u>Θεώρημα Β.6.1:</u> Δίνονται $p\geq 0$ και $a>0$. Για την ακολουθία των συναρτήσεων Bessel $\left(J_p(\lambda_n x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $\lambda_n=\frac{\rho_n}{\alpha}$ και ρ_n η n-ιοστή θετική ρίζα της $J_p(x)$, ισχύουν:

$$\int_0^a J_p(\lambda_n x)J_p(\lambda_m x)xdx=0, \text{ όταν } n\neq m$$

(Β.6.1)

και

$$\int_0^a J_p^2(\lambda_n x)xdx=\frac{a^2}{2}J_{p+1}^2(\rho_n), \text{ όταν } m=n$$

(Β.6.2)

Η ισότητα (Β.6.1) δηλώνει ότι οι συναρτήσεις $\left(J_p(\lambda_n x)\right)_{n\in\mathrm{N}}$ αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα στο διάστημα $[0,a]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $r(x)=x$. Στην ειδική περίπτωση που $a=1$ οι ισότητες (Β.6.1) και (Β.6.2) παίρνουν την μορφή

$$\int_0^1 J_p(\rho_n x)J_p(\rho_m x)xdx=0, \text{ όταν } m\neq n$$

$$\int_0^1 J_p(\rho_n x)J_p(\rho_m x)xdx=\frac{1}{2}J_{p+1}^2(\rho_n), \text{ όταν } m=n.$$

B.7. Σειρές Fourier-Bessel

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x)$, ορισμένη στο διάστημα $[0,a]$. Σε πολλά προβλήματα εφαρμογών είναι ενδιαφέρον να αναπτύξουμε τη συνάρτηση αυτή σε μια σειρά της μορφής

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_p(\lambda_n x), \qquad \text{(B.7.1)}$$

όπου τα λ_n έχουν οριστεί στο προηγούμενο θεώρημα. Η παραπάνω σειρά ονομάζεται σειρά Fourier-Bessel τάξεως p της f και οι A_n συντελεστές Fourier-Bessel της f. Αν υποθέσουμε ότι το ανάπτυγμα της (B.7.1) ισχύει, τότε για τον υπολογισμό των συντελεστών A_n θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες ορθογωνιότητας των συναρτήσεων J_p, που αναφέρονται στο προηγούμενο θεώρημα.

Πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη της (B.7.1) με $J_p(\lambda_m x)x$ και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[0,a]$ παίρνουμε

$$\int_0^a f(x)J_p(\lambda_m x)xdx=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_o^a J_p(\lambda_n x)J_p(\lambda_m x)xdx \xrightarrow{(B.8.1)} \int_0^a f(x)J_p(\lambda_m x)xdx = A_m \int_0^a J_p^2(\lambda_m x)xdx$$

.

Επομένως από την (B.7.2), βρίσκουμε

$$A_n=\frac{2}{a^2 J_{p+1}^2(\rho_n)}\int_0^a f(x)J_p(\lambda_n x)xdx .$$

(B.7.2)

Το επόμενο θεώρημα δίνει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά Fourier-Bessel.

Θεώρημα Β.7.1: Δίνεται μια συνάρτηση $f(x)$ τμηματικά λεία στο διάστημα $[0,a]$. Για κάθε $x \in (0,a)$ ισχύει

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_p(\lambda_n x),$$

όπου $\lambda_n = \frac{\rho_n}{a}$ και ρ_n η n-ιοστή θετική ρίζα της συναρτήσεως Bessel $J_p(x)$.

Οι συντελεστές A_n δίνονται από τον τύπο (Β.7.2).

Παρατήρηση: Για $x=0$ η σειρά συγκλίνει στο $f(0+0)$, ενώ για $x=a$ συγκλίνει στο 0.

Παράδειγμα Β.7.1: Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier-Bessel τάξεως 2 η συνάρτηση $f(x)=x^2,\ 0<x<1$.

Λύση: Σύμφωνα με το θεώρημα, το ανάπτυγμα δίνεται από την ισότητα

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_2(\rho_n x),\ 0<x<1,$$

όπου ρ_n η n-ιοστή θετική ρίζα της $J_2(x)$.

Οι συντελεστές, σύμφωνα με την (Β.7.2) θα είναι

$$A_n = \frac{2}{J_3^2(\rho_n)} \int_0^1 x^2 J_2(\rho_n x) x dx .$$

Επειδή

$$\int_0^1 x^3 J_2(\rho_n x) dx = \left(\text{θέτουμε } t=\rho_n x\right) = \frac{1}{\rho^4} \int_0^{\rho_n} t^3 J_2(t) dt$$

από $(x^p J_p(x))' = x^p J_{p-1}(x)$ έχουμε

$$\frac{1}{\rho_n^4}[t^3 J_3(t)]_0^{\rho_n} = \frac{1}{\rho_n} J_3\left(\rho_n\right)$$

άρα

$$A_n = \frac{2}{J_3^2(\rho_n)}\frac{J_3(\rho_n)}{\rho_n} = \frac{2}{\rho_n J_3(\rho_n)}$$

και τελικά

$$x^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_n J_3(\rho_n)} J_2(\rho_n x),\ 0 < x < 1.$$

<u>Σημείωση:</u> Σύμφωνα με την παρατήρηση, η σειρά για $x = 0$ συγκλίνει στο 0 και για $x = 1$ επίσης στο 0, αφού το $J_2(\rho_n 1) = J_2(\rho_n) = 0$.

B.8. Παραμετρική μορφή της εξίσωσης Bessel

Πολλές φορές, χρησιμοποιώντας το χωρισμό των μεταβλητών για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, καταλήγουμε σε προβλήματα ιδιοτιμών της μορφής:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (\lambda^2 x^2 - p^2) y(x) = 0,\ 0 \le x \le a \qquad \text{(B.8.1)}$$

$$y(0) < +\infty \qquad \text{(B.8.2)}$$

$$y(a) = 0 \qquad \text{(B.8.3)}$$

όπου $p \ge 0$ σταθερός αριθμός και λ παράμετρος.

Για την επίλυση του προβλήματος κάνουμε την αλλαγή της μεταβλητής $z = \lambda x$ και γράφουμε $u(z) = y(x) = y\left(\dfrac{z}{\lambda}\right)$, οπότε η (B.8.1) παίρνει την μορφή

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - p^2) u(z) = 0$$

η οποία είναι εξίσωση Bessel τάξεως p με γενική λύση

$$u(z) = C_1 J_p(z) + C_2 Y_p(z).$$

Επομένως η γενική λύση της (B.8.1) είναι

$$y(z) = C_1 J_p(\lambda x) + C_2 Y_p(\lambda x).$$

Ένεκα της συνθήκης (B.8.2) και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} Y_p(x) = -\infty$ έπεται ότι $C_2 = 0$. Η συνθήκη (B.8.3) μας δίνει $J_p(\lambda a) = 0$, που σημαίνει ότι οι τιμές της παραμέτρου λ που ικανοποιούν το πρόβλημα είναι $\lambda_n = \dfrac{\rho_n}{a}$ $\left(\lambda_n a = \rho_n\right)$, $n \in \mathrm{N}$ όπου ρ_n είναι οι θετικές ρίζες της συναρτήσεως Bessel $J_p(x)$.

Επομένως μη τετριμμένες λύσεις του προβλήματος είναι

$$y(x) = J_p(\lambda_n x)\text{, όπου } \lambda_n = \frac{\rho_n}{a}.$$

<u>Σημείωση:</u> Πιο σωστά θα έπρεπε τις θετικές ρίζες της συναρτήσεως Bessel $J_p(x)$ να τις συμβολίσουμε με ρ_{pn}, $n \in \mathrm{N}$, οπότε και $\lambda_{pn} = \dfrac{\rho_{pn}}{a}$. Όμως χρησιμοποιούμε την πιο πάνω γραφή όταν δεν υπάρχει περίπτωση συγχύσεως.

Γ. Εφαρμογή: Το πρόβλημα Diriclet σε κύλινδρο

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα Diriclet σε κυλινδρικά πεδία. Η εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες τις συναρτήσεως $u(r,\theta,z)$ είναι

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0\,.$$

Θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε μία ειδική περίπτωση, όπου η λύση δε θα εξαρτάται από τη γωνία θ, οπότε η εξίσωση Laplace θα έχει τη μορφή

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0$$

και θα μηδενίζουμε τη συνάρτηση u στην παράπλευρη επιφάνεια.
Το πρόβλημα αυτό περιγράφεται από τις συνθήκες

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0,\ 0<r<a,\ 0<z<h$$

(Ε)

$$\begin{aligned}&u(r,0)=0,\ 0<r<a\\&u(r,h)=\varphi(r),\ 0<r<a\\&u(a,z)=0,\ 0<z<h\end{aligned}$$

(Σ)

Θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής $u(r,z)=R(r)Z(z)$ (χωριζόμενων μεταβλητών), οπότε από την εξίσωση (Ε) και τις συνοριακές συνθήκες $u(r,0)=0$ και $u(a,z)=0$ προκύπτουν οι εξισώσεις

$$r^2R''+rR'-\mu r^2R=0,\ R(a)=0,$$

(Γ.1)

$$Z''+\mu Z=0,\ Z(0)=0,$$

(Γ.2)

όπου μ είναι η σταθερά χωρισμού των μεταβλητών.

Αν $\mu=0$, τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι $R(r)=0$, δηλαδή έχουμε τετριμμένη λύση.

Αν $\mu=\lambda^2>0$, τότε η (Γ.1) είναι μια παραμετρική μορφή της τροποποιημένης εξίσωσης Bessel τάξεως 0, με γενική λύση

$$R(r)=AI_0(\lambda r)+BK_0(\lambda r)\,.$$

(Γ.3)

Οι συναρτήσεις I_0 και K_0 είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

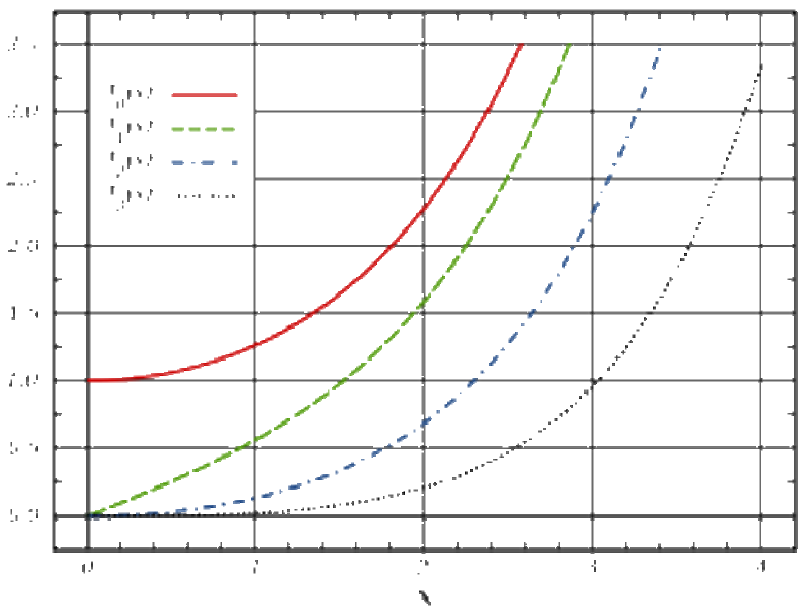
<u>Σημείωση:</u> Η τροποποιημένη διαφορική εξίσωση Bessel είναι

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0$$

και ικανοποιείται από την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξεως p

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!\Gamma(k+p+1)}$$

(σχήμα Γ.1)



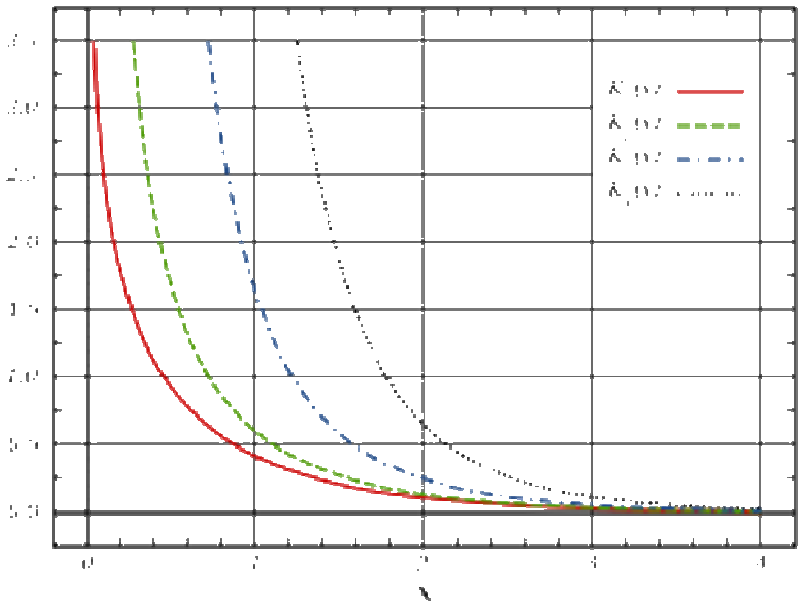
(σχήμα Γ.1)

Αν ο p δεν είναι ακέραιος μια δεύτερη λύση της εξίσωσης αυτής γραμμικώς ανεξάρτητη της $I_p(x)$ είναι η

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2\sin(p\pi)}[I_{-p}(x) - I_p(x)]$$

(σχήμα Γ.2)

που ονομάζεται τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους τάξεως p.



(σχήμα Γ.2)

Επειδή οι συναρτήσεις αυτές δεν φραγμένες, συμπεραίνουμε ότι η (Γ.3) δε δίνει μη τετριμμένες φραγμένες λύσεις. Επομένως θα πρέπει $\mu = -\lambda^2 < 0$. Στην περίπτωση αυτή οι (Γ.1) και η (Γ.2) παίρνουν τη μορφή

$$r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R = 0,\ R(a) = 0,$$

(Γ.4)

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0,\ Z(0) = 0\,.$$

(Γ.5)

Μη τετριμμένες λύσεις της (Γ.4) είναι οι συναρτήσεις

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r)\,,$$

όπου $\lambda_n = \dfrac{\rho_n}{\alpha}$, $n = 1,2,\ldots, \rho_n$ είναι η n-ιοστή θετική ρίζα της συναρτήσεως Bessel J_0 .

Η εξίσωση (Γ.5) έχει λύσεις της μορφής

$$Z_n(z) = \sinh(\lambda_n z),\ n = 1,2,\ldots\,.$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, μια (τυπική) λύση του προβλήματος είναι

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r)\sinh(\lambda_n z)\,.$$

Αν στη τελευταία ισότητα θέσουμε $z = h$, τότε παίρνουμε

$$\varphi(r)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\lambda_n r)\sinh(\lambda_n h),$$

που σημαίνει ότι οι συντελεστές $A_n \sinh(\lambda_n h)$ πρέπει να είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος της $\varphi(r)$ σε σειρά Fourier-Bessel.

Από τη παραπάνω μελέτη συμπεραίνουμε ότι:

Η λύση του προβλήματος (Ε)-(Σ) είναι

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\lambda_n r)\sinh(\lambda_n z),$$

όπου

$$A_n=\frac{2}{\sinh(\lambda_n h)a^2J_1^2(\rho_n)}\int_0^a \varphi(r)J_0(\lambda_n r)rdr,$$

$\lambda_n=\dfrac{\rho_n}{a}$ και ρ_n η n-ιοστή θετική ρίζα της συναρτήσεως Bessel J_0.

<u>Παράδειγμα Γ.1:</u> Να λυθεί το πρόβλημα (Ε)-(Σ) στην περίπτωση $a=1,\ h=2$ και $\varphi(r)=50$.

<u>Λύση:</u> Σύμφωνα με την παραπάνω λύση έχουμε

$$A_n=\frac{2}{\sinh(2\rho_n)J_1^2(\rho_n)}\int_0^1 50J_0(\rho_n r)rdr.$$

Επειδή

$$\int_0^1 J_0(\rho_n r)rdr=(\rho_n r=t)=\frac{1}{\rho_n^2}\int_0^{\rho_n}J_0(t)tdt=\frac{1}{\rho_n^2}[tJ_1(t)]_0^{\rho_n}=\frac{1}{\rho_n}J_1(\rho_n)$$

άρα για τους συντελεστές A_n έχουμε

$$A_n=\frac{100}{\rho_n\sinh(2\rho_n)J_1(\rho_n)},\ n=1,2,\ldots$$

οπότε η λύση του προβλήματος είναι

$$u(r,z)=100\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\rho_n r)}{\rho_n J_1(\rho_n)\sinh(2\rho_n)}\sinh(\rho_n z).$$

Κεφάλαιο 2: Συναρτήσεις Bessel στο μιγαδικό επίπεδο.

Α. Λύσεις της συνάρτησης Bessel στην μιγαδική περίπτωση.

Η διαφορική εξίσωση Bessel προκύπτει από τον χωρισμό των μεταβλητών της εξίσωσης Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες και είναι της μορφής

$$z^2u'' + zu' + \left(z^2 - \lambda^2\right)u = 0, \lambda \in C \qquad (1)$$

Για την εύρεση μιας λύσης, μπορούμε να ακολουθήσουμε τη μέθοδο Frobenius, όπως στην πραγματική πεερίπτωση, αναζητώντας λύσεις της μορφής

$$u(z) = \sum_{\kappa=0}^{(\infty)} a_\kappa z^{r+\kappa}$$

Θα προτιμήσουμε μια άλλη μέθοδο χρησιμοποιώντας έναν κατάλληλο ολοκληρωτικό μετασχηματισμό.

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$u(z) = \int_C K(z,\zeta) w(\zeta)\, d\zeta \qquad (2)$$

όπου C ένας κατάλληλος δρόμος ολοκλήρωσης και $K(z,\zeta)$ ένας κατάλληλος πυρήνας που είναι συνάρτηση ολόμορφη και ως προς z και ως προς ζ .
Αντικαθιστούμε τη μορφή (2) στην (1), υποθέτοντας ότι επιτρέπεται η εναλλαγή της παραγώγισης με την ολοκλήρωση, οπότε έχουμε

$$\int_C \left(z^2 \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + z\frac{\partial K}{\partial z} + \left(z^2 - \lambda^2\right) K \right) w(\zeta)\, d\zeta = 0 \qquad (3)$$

Αν ο πυρήνας $K(z,\zeta)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$z^2\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}+z\frac{\partial K}{\partial z}+\left(z^2-\lambda^2\right)K+\frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2}=0 \qquad (4)$$

τότε η (3) γίνεται

$$\int_C\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2}+\lambda^2 K\right)w\left(\zeta\right)d\zeta=0 \qquad (5)$$

Αν ζ_0 και ζ_1 είναι η αρχή και το πέρας της C, τότε ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες δυο φορές παίρνουμε

$$\int_C\frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2}w\left(\zeta\right)d\zeta=\int_C Kw''\left(\zeta\right)d\zeta+\left[\frac{\partial K}{\partial \zeta}w-Kw'\right]_{\zeta_0}^{\zeta_1}$$

Οπότε από την (5) προκύπτει

$$\int_C\left(w''+\lambda^2 w\right)Kd\zeta+\left[\frac{\partial K}{\partial \zeta}w-Kw'\right]_{\zeta_0}^{\zeta_1}=0 \qquad (6)$$

Μια λύση που είναι ολόμορφη τόσο ως προς z όσο και ως προς ζ στο C της διαφορικής εξίσωσης (4) είναι

$$K\left(z,\zeta\right)=e^{-iz\sin\zeta} \qquad (7)$$

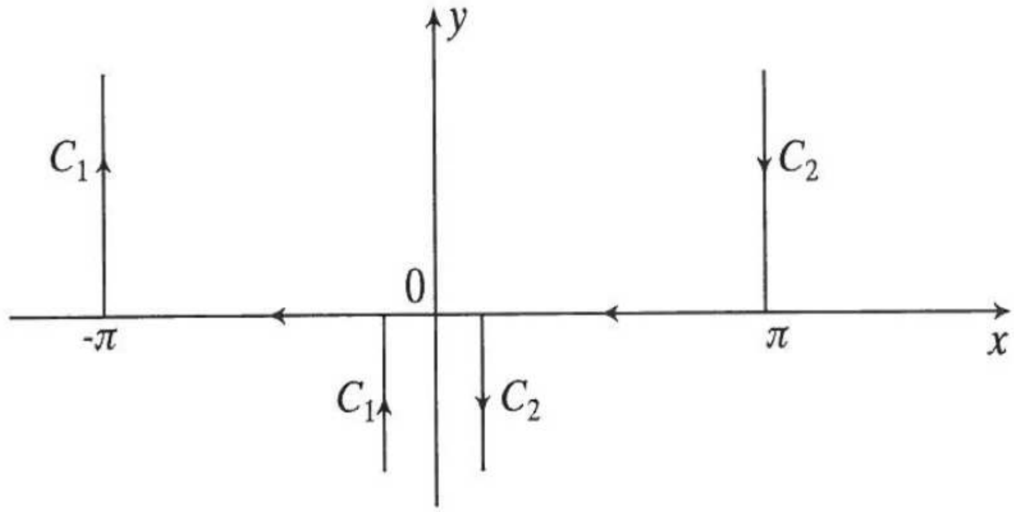
όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί. Επίσης η διαφορική εξίσωση

$$w''+\lambda^2 w=0$$

έχει λύσεις τις συναρτήσεις

$$w\left(\zeta\right)=e^{\pm i\lambda\zeta} \qquad (8)$$

Επομένως αν επιλέξουμε το δρόμο ολοκλήρωσης C έτσι, ώστε ο τελευταίος όρος στην (6) να μηδενίζεται, τότε θα έχουμε λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Bessel της μορφής (2), όπου ο πυρήνας έχει τη μορφή (7) και το $w\left(\zeta\right)$ τη μορφή (8). Αυτό συμβαίνει, λόγου χάριν για τις καμπύλες C_1 και C_2 του παρακάτω σχήματος:



Για τις ημιευθείες $\zeta = -\pi + i\mu, \zeta = \pi + i\mu, \mu \geq 0$ ισχύει

$$\sin\zeta = \sin(\pm\pi + i\mu) = \sin(\mp\pi)\cos(i\mu) + \cos(\mp\pi)\sin(i\mu) = -\sin(i\mu) = -i\sinh\mu$$

Για τον αρνητικό φανταστικό άξονα $\zeta = -i\mu, \mu \geq 0$, ισχύει

$$\sin\zeta = \sin(-i\mu) = -\sin(i\mu) = -i\sinh\mu, \mu \geq 0$$

Για τα μέρη αυτά των καμπυλών C_1 και C_2 ισχύει

$$\left|K(z,\zeta)\right| = \left|e^{-iz\sin\zeta}\right| = \left|e^{-i(x+iy)(-i\sinh\mu)}\right| = \left|e^{-\operatorname{Re}z\sinh\mu}\right|.$$

Επομένως για $\operatorname{Re}z > 0, \lim_{\mu\to\infty} K(z,\zeta) = 0$

Επίσης εύκολα συμπεραίνουμε ότι οι ποσότητες

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial\zeta} w = (-iz)\cos\zeta e^{\pm i\lambda\zeta} K(z,\zeta)$$

Και

$$Kw' = \pm(i\lambda)e^{\pm i\lambda\zeta} K(z,\zeta)$$

Συγκλίνουν στο 0 όταν $\lambda \to \infty$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $\int_{C_1} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} d\zeta$ και $\int_{C_2} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} d\zeta$

Είναι δύο (τυπικές) λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Bessel (1). Οι δύο λύσεις

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{H}_\lambda^1(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} d\zeta \\ \mathrm{H}_\lambda^2(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_{C_2} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} d\zeta \end{aligned}} \qquad (9)$$

Ονομάζονται **συναρτήσεις Hankel.**

Παρατήρηση: Τα ολοκληρώματα (9) υπάρχουν για $\operatorname{Re} z > 0$ και οι συναρτήσεις H_λ^1 και H_λ^2 είναι πράγματι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Bessel (1), και είναι ολόμορφες για $\operatorname{Re} z > 0$.

Γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel

Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις Hankel H_λ^1 και H_λ^2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Επομένως η γενική λύση της (1) θα είναι $u(z) = c_1 H_\lambda^1(z) + c_2 H_\lambda^2(z), c_1, c_2$ σταθερές.

Οι συναρτήσεις Bessel και Neumann

Θα αναζητήσουμε τώρα τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Bessel στην περίπτωση που τα λ και z είναι πραγματικοί αριθμοί.

Οι λύσεις αυτές είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τις εφαρμογές. Γράφουμε τις συναρτήσεις Hankel H_λ^1 και H_λ^2 στη μορφή

$$\boxed{\begin{aligned} J_\lambda(z) &= \frac{H_\lambda^1(z) + H_\lambda^2(z)}{2} \\ N_\lambda(z) &= \frac{H_\lambda^1(z) - H_\lambda^2(z)}{2i} \end{aligned}}$$

(10)

Οι συναρτήσεις $\zeta_\lambda(z)$ ονομάζονται συναρτήσεις Bessel τάξεως λ.

Οι συναρτήσεις $N_\lambda(z)$ ονομάζονται συναρτήσεις Neumann τάξεως λ.

Οι συναρτήσεις J_λ, N_λ και H_λ ονομάζονται επίσης **κυλινδρικές συναρτήσεις πρώτου, δεύτερου και τρίτου είδους αντίστοιχα.**

Ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Οι συναρτήσεις $J_\lambda(z)$ και $N_\lambda(z)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες για κάθε $\lambda \in C$.

Πράγματι, έστω

$aJ_\lambda(z) + \beta N_\lambda(z) = 0, z \in C, a, \beta \in C$.

Θα δείξουμε ότι α=β=0. Πράγματι, έχουμε

$$\frac{a}{2}(H_\lambda^1(z) + H_\lambda^2(z)) + \frac{\beta}{2i}(H_\lambda^1(z) - H_\lambda^2(z)) = 0$$

ή

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{\beta}{2i}\right)H_\lambda^1(z) + \left(\frac{a}{2} - \frac{\beta}{2i}\right)H_\lambda^2(z) = 0$$

Επειδή οι συναρτήσεις $H_\lambda^1(z)$ και $H_\lambda^2(z)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες θα πρέπει

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{\beta}{2i}\right) = 0 \text{ και } \left(\frac{a}{2} - \frac{\beta}{2i}\right) = 0$$

Οπότε α=β=0.

(ii) Για $\lambda, z \in R$ οι συναρτήσεις $J_\lambda(z)$ και $N_\lambda(z)$ είναι πραγματικές.

Γνωρίζουμε ότι

$$H_\lambda^1(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} d\zeta$$

Αν C_1' είναι ο δρόμος που προκύπτει από τον C_1' εξ ανακλάσεως ως προς τον πραγματικό άξονα, τότε για κάθε f, για την οποία το $\int_{C_1} f(\zeta)d\zeta$ υπάρχει , ισχύει

$$\overline{\int_{C_1} f(\zeta)d\zeta} = \int_{C_{1'}} \overline{f(\overline{\zeta})}d\zeta \, .$$

Έστω $f(\zeta) = e^{-iz\sin\zeta + \lambda\zeta}$. Επειδή

$\overline{\left(e^{ix\overline{w}}\right)} = e^{-ixw}(x \in \Re, w \in C)$ και $\overline{\sin\overline{\zeta}} = \sin\zeta(\zeta \in C)$

έχουμε για $\lambda, z \in R$

$$\overline{H_\lambda^1(z)} = -\frac{1}{\pi}\overline{\int_{C_1} f(\zeta)d\zeta} = -\frac{1}{\pi}\int_{C_1'} \overline{f\left(\overline{\zeta}\right)}d\zeta = -\frac{1}{\pi}\int_{C_1'} e^{iz\sin\zeta - i\lambda\zeta}d\zeta$$

Αντικαθιστώντας στο τελευταίο ολοκλήρωμα το ζ με το –ζ, προκύπτει

$$\overline{H_\lambda^1(z)} = -\frac{1}{\pi}\int_{C_2^-} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta = -\frac{1}{\pi}\int_{C_2} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta \, ,$$

Όπου C_2 ο δρόμος της ολοκλήρωσης του σχήματος.

Επομένως

$\overline{H_\lambda^1(z)} = H_\lambda^2(z)$, για λ, z $\in R$,

Οπότε έχουμε

> Η συνάρτηση Bessel $J_\lambda(z)$ και η συνάρτηση Neumann $N_\lambda(z)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις για λ ,z $\in C$ και μάλιστα ισχύει:
>
> $$J_\lambda(z) = \operatorname{Re} H_\lambda^1(z), \quad N_\lambda(z) = \operatorname{Im} H_\lambda^1(z)$$

Για λ ,z $\in C$ ισχύουν οι σχέσεις

$$H_{-\lambda}^1(z) = e^{i\pi\lambda}H_\lambda^1(z), \quad H_{-\lambda}^2(z) = e^{-i\pi\lambda}H_\lambda^2(z) \qquad (11)$$

Επομένως οι συναρτήσεις Hankel $H_\lambda^1(z)$ και $H_{-\lambda}^1(z)$, αντίστοιχα, $H_\lambda^2(z)$ και $H_{-\lambda}^2(z)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Bessel.

Θα δούμε τώρα ότι οι αντίστοιχες συναρτήσεις Bessel $J_\lambda(z)$ και $J_{-\lambda}(z)$ και οι συναρτήσεις Neumann $N_\lambda(z)$ και $N_{-\lambda}(z)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες για ορισμένες τιμές του λ. Πράγματι, έστω

$$aJ_{-\lambda}(z)+\beta J_{\lambda}(z)=0 \text{ για κάθε } z\in C.$$

Από την (11) συμπεραίνουμε ότι

$$\left(ae^{i\pi\lambda}+\frac{\beta}{2}\right)H_{\lambda}^{1}(z)+\left(ae^{-i\pi\lambda}+\frac{\beta}{2}\right)H_{\lambda}^{2}(z)=0,\ z\in C,$$

Και επειδή οι $H_{\lambda}^{1}(z)$ και $H_{\lambda}^{2}(z)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, έχουμε

$$\alpha e^{i\pi\lambda}+\beta=0 \text{ και } \alpha e^{-i\pi\lambda}+\beta=0 \qquad (12)$$

Άρα για $\lambda\notin Z$ ισχύει $\alpha(e^{i\pi\lambda}-e^{-i\pi\lambda})=0$ ή $\alpha\sin\pi\lambda=0$, οπότε α=0. Από την (12) έχουμε β=0. Ανάλογα ισχύουν για την $N_{\lambda}(z)$. Επομένως

Για $\lambda\notin Z$ οι συναρτήσεις Bessel $J_{\lambda}(z)$ και $J_{-\lambda}(z)$, αντίστοιχα $N_{\lambda}(z)$ και $N_{-\lambda}(z)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel είναι

$$u(z)=c_1J_{\lambda}(z)+c_2J_{-\lambda}(z),\ c_1,\ c_2 \text{ σταθερές.}$$

Αν λ=$n\in Z$ οι συναρτήσεις $J_n(z)$ και $J_{-n}(z)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες. Ανάλογα ισχύουν για τις συναρτήσεις $N_n(z)$ και $N_{-n}(z)$.

Αν λ=$n\in Z$, τότε οι συναρτήσεις Bessel $J_n(z)$ και $J_{-n}(z)$, αντίστοιχα , οι συναρτήσεις Neumann $N_n(z)$ και $N_{-n}(z)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες .
Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel είναι

$$u(z)=c_1J_n(z)+c_2N_n(z),\ c_1,\ c_2 \text{ σταθερές.}$$

Β. Ολοκληρωτική αναπαράσταση των συναρτήσεων Bessel

Από τις σχέσεις (9) συμπεραίνουμε ότι

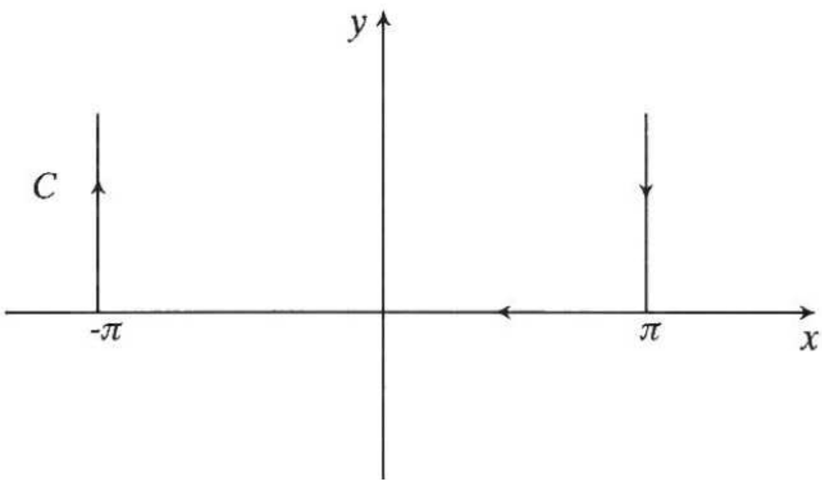
$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2}\left[H_\lambda^1(z)+H_\lambda^2(z)\right]=-\frac{1}{2\pi}\int_{C_1+C_2} e^{-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}d\zeta$$

ή

$$\boxed{J_\lambda(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_C e^{-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}d\zeta,\ \ \operatorname{Re}z>0}$$

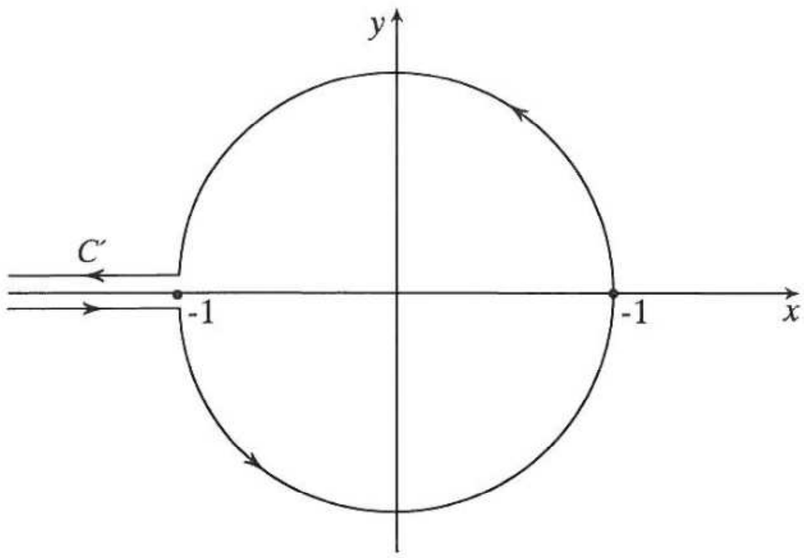
(13)

Όπου C ο δρόμος ολοκλήρωσης του σχήματος



Μια άλλη ολοκληρωτική αναπαράσταση της J_λ προκύπτει αν κάνουμε με την αντικατάσταση $w=e^{-i\zeta}$ στο ολοκλήρωμα (13).

Με την αντικατάσταση αυτή , εύκολα διαπιστώνουμε, ότι ο νέος δρόμος ολοκλήρωσης είναι ο C'



Επίσης έχουμε

$$e^{i\lambda\zeta} = e^{(-i\zeta)(-\lambda)} = w^{-\lambda},$$

$$e^{-iz\sin\zeta} = e^{-iz\frac{e^{i\zeta}-e^{-i\zeta}}{2i}} = e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}$$

και

$$d\zeta = \frac{1}{(-i)e^{-i\zeta}}dw = -\frac{1}{iw}dw$$

Επομένως έχουμε αναπαράσταση

$$\boxed{J_\lambda(w) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}}{w^{\lambda+1}}dw, \operatorname{Re} z > 0}$$

(14)

Έστω τώρα z ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Κάνοντας την αντικατάσταση w=2ζ/z, καταλήγουμε στην ακόλουθη αναπαράσταση

$$\boxed{J_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{C'} e^{\zeta-\frac{z^2}{4\zeta}}\zeta^{-\lambda-1}d\zeta, z\in C}$$

(15)

Το ολοκλήρωμα στη (15) συγκλίνει για κάθε $z\in C$. Επομένως οι συναρτήσεις Bessel παριστάνονται μέσω της (15) για κάθε $z\in C$.

Ανάπτυγμα σε σειρά

Επειδή $e^{-\frac{z^2}{4\zeta}}=e^{-\frac{1}{\zeta}\left(\frac{z}{2}\right)^2}=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\kappa!\zeta^\kappa}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa}$

Από την (15) προκύπτει

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{C'} e^{\zeta}\zeta^{-\lambda-1}\left[\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\kappa!\zeta^\kappa}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa}\right]d\zeta$$

Οπότε

$$J_\lambda(z)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\kappa!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa+\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} e^{\zeta}\zeta^{-(\lambda+\kappa+1)}d\zeta$$

Από τον τύπο (9) έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} e^{\zeta}\zeta^{-(\lambda+\kappa+1)}d\zeta=\frac{1}{\Gamma(\kappa+\lambda+1)'}$$

Οπότε παίρνουμε το ακόλουθο ανάπτυγμα σε σειρά της $J_\lambda(z)$.

$$\boxed{J_{\lambda}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa!\Gamma(\lambda+\kappa+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa},\lambda,z\in C}$$

(16)

Θα εξετάσουμε τώρα μερικές ειδικές περιπτώσεις:

(i) $J_{\lambda}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa!\Gamma(\lambda+\kappa+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa},\lambda,z\in C$. Επειδή $\Gamma(\lambda+\kappa+1)=(n+\kappa)$ από την (16) συμπεραίνουμε

$$\boxed{J_{n}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{n}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa!(n+\kappa)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa},z\in C,n\in N\cup\{0\}}$$

(17)

(ii) $\lambda=-n,n\in \mathrm{N}\cup\{0\}$. Επειδή

$$\frac{1}{\Gamma(\kappa+\lambda+1)}=0,\kappa=0,1,...,n-1$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$J_{-n}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{\kappa=n}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa!(n+\kappa)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa}$$

ή αν αντικαταστήσουμε το κ με το κ-n παίρνουμε ότι

$$\boxed{J_{-n}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{n}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+\kappa}}{\kappa!(n+\kappa)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa},z\in C,n\in \mathrm{N}}$$

(18)

Από τις (17) και (18) προκύπτει η σχέση

$$\boxed{J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), z \in C, n \in \mathrm{N}}$$

iii) $\lambda = -\frac{1}{2}$. Επειδή $\Gamma\left(\kappa + \frac{1}{2}\right) = \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\left(\kappa - \frac{3}{2}\right)......\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ και

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

από την (16) παίρνουμε

$$J_{-1/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-1/2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa!\Gamma\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa} z^{2\kappa}}{\kappa!2^{\kappa}1\cdot 3 \ldots\cdot(2\kappa-1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa)!} z^{2\kappa}$$

Δηλαδή

$$\boxed{J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, z \in C}$$

iv) $\lambda = \frac{1}{2}$. Εργαζόμενοι όπως στην προηγούμενη περίπτωση βρίσκουμε ότι

$$\boxed{J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, z \in C}$$

Επομένως οι συναρτήσεις Bessel $J_{1/2}(z)$ και $J_{-1/2}(z)$ είναι δυνατόν να εκφραστούν με απλό τρόπο μέσω των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sin z$ κ $\cos z$. Θα δείξουμε τώρα, ότι μεταξύ των συναρτήσεων Hankel $H^1_{1/2}(z)$ και $H^2_{1/2}(z)$ και της εκθετικής συνάρτησης ισχύουν ανάλογες σχέσεις.

Από τους τύπους (10) για $\lambda = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$J_{1/2}(z) = \frac{1}{2}\left[H^1_{1/2}(z) + H^2_{1/2}(z)\right], J_{-1/2}(z) = \frac{i}{2}\left[H^1_{1/2}(z) - H^2_{1/2}(z)\right]$$

Οπότε

$$H^1_{1/2}(z) = J_{1/2}(z) - iJ_{-1/2}(z), H^2_{1/2}(z) = J_{1/2}(z) + iJ_{-1/2}(z)$$

Έτσι από τους παραπάνω τύπους, παίρνουμε

$$H^1_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\sin z - i\cos z\right), H^2_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\sin z + \cos z\right)$$

Οπότε

$$\boxed{H^1_{1/2}(z) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{iz}, H^2_{1/2}(z) = i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-iz}} \tag{19}$$

Οι συναρτήσεις Neumann

Ισχύει

$$N_\lambda(z) = \frac{1}{2i}\left[H^1_{1/2}(z) - H^2_{1/2}(z)\right]$$

Θα εκφράσουμε τις συναρτήσεις αυτές με τη βοήθεια των συναρτήσεων Bessel $J_\lambda(z)$ και $J_{-\lambda}(z)$. Για $\lambda \notin Z$, από τις σχέσεις (10) βρίσκουμε

$$H^1_\lambda(z) = -\frac{e^{-i\lambda\pi}J_\lambda(z) - J_{-\lambda}(z)}{i\sin\lambda\pi}, H^2_\lambda(z) = \frac{e^{i\lambda\pi}J_\lambda(z) - J_{-\lambda}(z)}{i\sin\lambda\pi}.$$

Επομένως

$$N_\lambda(z) = \frac{\cos\lambda\pi \cdot J_\lambda(z) - J_{-\lambda}(z)}{\sin\lambda\pi}, \lambda \notin Z$$

Για την περίπτωση $\lambda = n \in Z$, θα ορίσουμε την $N_n(z)$ ως εξής:

$$N_n(z)=\lim_{\lambda\to n}\frac{\cos\lambda\pi\cdot J_\lambda(z)-J_{-\lambda}(z)}{\sin\lambda\pi}=\lim_{\lambda\to n}\frac{-\pi\sin\lambda\pi\cdot J_\lambda(z)+\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial\lambda}\cos\lambda\pi-\frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial\lambda}}{\pi\cos\lambda\pi}$$

Άρα

$$\boxed{N_n(z)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial\lambda}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=n},n\in Z,z\neq 0} \tag{20}$$

Θα δώσουμε τώρα το ανάπτυγμα σε σειρά των συναρτήσεων $N_n(z)$. Γνωρίζουμε ότι

$$J_\lambda(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\kappa!\Gamma(\lambda+\kappa+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa}$$

Επομένως

$$\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial\lambda}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[e^{\lambda Log\frac{z}{2}}\cdot\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\kappa!\Gamma(\lambda+\kappa+1)}(\frac{z}{2})^{2\kappa}\right]$$

$$=Log\frac{z}{2}J_\lambda(z)+(\frac{z}{2})^\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\kappa!\Gamma(\lambda+\kappa+1)}(\frac{z}{2})^{2\kappa},$$

Δηλαδή

$$\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial\lambda}=J_\lambda(z)Log\frac{z}{2}+(\frac{z}{2})^\lambda\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\kappa!}\cdot(\frac{z}{2})^{2\kappa}\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\Big|_{t=\lambda+\kappa+1}$$

Όμοια

$$\frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial\lambda}=-J_{-\lambda}(z)Log\frac{z}{2}-(\frac{z}{2})^{-\lambda}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\kappa!}\cdot(\frac{z}{2})^{2\kappa}\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\Big|_{t=-\lambda+\kappa+1}$$

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\Big|_{t=n}=\frac{1}{(n-1)!}\left(C-1-\frac{1}{2}....-\frac{1}{N-1}\right),n\in\mathrm{N}$$

όπου C η σταθερά Euler και

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\Big|_{t=-n} = (-1)^n n!, n \in \mathrm{N} \cup \{0\}.$$

Έτσι από τη σχέση (20) για $\lambda = n$ παίρνουμε

$$\boxed{\begin{aligned} N_n(z) = {} & \frac{2}{\pi} J_n(z)\left(Log\frac{z}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(n-\kappa-1)!}{\kappa!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa} - \frac{1}{\pi}\cdot \\ & \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + 1\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\kappa!(n+\kappa)}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa}\cdot \\ & \cdot\left(\frac{1}{n+\kappa} + \frac{1}{n+\kappa-1} + ... + 1 + 1 + \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa-1} + ... + 1\right) \end{aligned}}$$

Και για $\lambda = n = 0$:

$$\boxed{N_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z)\left(Log\frac{z}{2} + C\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\kappa!}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa}\left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa-1} + ... + 1\right)}$$

Εφαρμογή: Ακτινικά συμμετρικές λύσεις της εξίσωσης ταλάντωσης

Γνωρίζουμε ότι οι ακτινικά συμμετρικές λύσεις $u(|x|) = f(r)$ της εξίσωσης ταλάντωσης στον R^n

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \qquad (21)$$

Ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) + \kappa^2 f(r) = 0 \qquad (22)$$

Θέτοντας

$$f(r) = r^{-\frac{n-2}{2}} g(\kappa r), \kappa r = \rho$$

Η εξίσωση (22) μετατρέπεται στη διαφορική εξίσωση Bessel τάξεως $\frac{n-2}{2}$:

$$g''(\rho) + \frac{1}{\rho} g'(\rho) + \left[1 - \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{\rho^2}\right] g(\rho) = 0$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της εξίσωσης αυτής είναι οι συναρτήσεις Hankel

$$H^1_{\frac{n-2}{2}}(\rho) \text{ και } H^2_{\frac{n-2}{2}}(\rho)$$

Επομένως λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (22) αποτελούν οι συναρτήσεις

$$r^{-\frac{n-2}{2}} H^1_{\frac{n-2}{2}}(\kappa\rho) \text{ και } r^{-\frac{n-2}{2}} H^2_{\frac{n-2}{2}}(\kappa\rho)$$

Που σημαίνει ότι οι συναρτήσεις

(23)
$$\boxed{|x|^{-\frac{n-2}{2}} H^1_{\frac{n-2}{2}}(\kappa|x|) \text{ και } \quad |x|^{-\frac{n-2}{2}} H^2_{\frac{n-2}{2}}(\kappa|x|)}$$

Είναι θεμελιώσεις λύσεις της εξίσωσης ταλάντωσης (21).

- **Για n=3:** Οι θεμελιώδεις λύσεις της εξίσωσης ταλάντωσης στον χώρο R^3 είναι

$$|x|^{-1/2} H^1_{\frac{1}{2}}(\kappa|x|) \text{ και } |x|^{-1/2} H^2_{\frac{1}{2}}(\kappa|x|)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (19) οι λύσεις αυτές γράφονται απλούστερα

$$\boxed{\frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \text{ και } \frac{e^{-i\kappa|x|}}{|x|}}$$

Επομένως το σύνολο των συμμετρικά ακτινικών λύσεων της (21) για $n=3$ είναι

$$\boxed{u(x)=c_1\frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|}+c_2\frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|},\kappa\neq 0}$$

Όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Για $\kappa=0$, από την (24) προκύπτει μία μόνο λύση. Μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση της (22) είναι $f(r)=1$. Επομένως η γενική λύση στην περίπτωση αυτή είναι

$$u(x)=c_1\frac{1}{|x|}+c_2$$

- **Για n=2:** Οι θεμελιώσεις λύσεις της εξίσωσης στην περίπτωση αυτή είναι

$$H_0^1(\kappa|x|) \text{ και } H_0^2(\kappa|x|),$$

Οπότε η γενική λύση της (21) είναι

$$\boxed{u(x)=c_1H_0^1(\kappa|x|)+c_2H_0^2(\kappa|x|)}$$

Παρατήρηση. Στην περίπτωση n=3 οι θεμελιώδεις λύσεις έχουν στο 0 μια ανωμαλία της μορφής $\frac{1}{|x|}$. Ενώ στην περίπτωση n=, οι θεμελιώδεις λύσεις έχουν στο 0 μια ανωμαλία της μορφής $\ln|x|$.

Βιβλιογραφία

1. Asmar N. : Partial Differential Equations and Boundary Value Problems, Prentice Hall, 2000
2. Bell W. W. : Special Functions for Scientists and Engineers, Dover Publications, 2004
3. Boyce W. E. , Di Prima R. C. : Στοιχειώδης διαφορικές εξισώσεις και προβλήματα συνοριακών τιμών, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π, Αθήνα 1999
4. Κραββαρίτης Δ. Χ. : Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2006
5. Lebedev N. N. : Special Functions and their Applications, New York 1972
6. Παντελίδης Γ. Ν. , Κραββαρίτης Δ. Χ. : Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις Μερικών Παραγώγων, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2003
7. Παντελίδης Γ. Ν. , Κραββαρίτης Δ. Χ. , Χατζησάββα Ν. Σ. : Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα 1990
8. Pinsky M. A. : Partial Differential Equations and Boundary-value problems with applications, McGraw-Hill, 1998
9. Watson G. N. : A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1966