ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ HILBERT ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Διπλωματική εργασία του

Χασαπλαδάκη Μιλτιάδη

Επιβλέπων: Δ.Χ. Κραββαρίτης

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Νοέμβριος 2011

Πρόλογος

Οι γραμμικοί τελεστές σε έναν διανυσματικό χώρο με νόρμα χρησιμοποιούνται ευρέως για να αντιπροσωπεύσουν φυσικές ποσότητες, και ως εκ τούτου η σημασία τους ενισχύεται ακόμη περισσότερο στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και τη μαθηματική φυσική. Η έννοια ενός τελεστή σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα είναι μια φυσική γενίκευση της ιδέας μιας συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής. Οι πιο σημαντικοί τελεστές περιλαμβάνουν διαφορικούς , ολοκληρωτικούς , και τελεστές πίνακα.

Ο στόχος αυτής της εργασίας είναι η μελέτη διαφόρων ειδών γραμμικών τελεστών σε χώρους Hilbert και των βασικών ιδιοτήτων τους.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται η μελέτη των φραγμένων γραμμικών τελεστών. Αρχικά δίνεται προσοχή στα διγραμμικά συναρτησιακά και στις τετραγωνικές μορφές, ακόμη αποδεικνύεται το θεώρημα Lax-Milgram. Αυτό το θεώρημα είναι μια σημαντική γενίκευση του Θεωρήματος Riesz. Σημαντικές κατηγορίες των φραγμένων γραμμικών τελεστών σε χώρους Hilbert είναι οι λεγόμενοι συζυγείς και αυτοσυζυγείς τελεστές που εξετάζονται στη Τρίτη παράγραφο. Απο την τέταρτη έως την έβδομη παράγραφο παρουσιάζουμε ειδικούς γραμμικούς τελεστές , όπως αντιστρέψιμους, κανονικούς , ισομετρία, ορθομοναδιαίους, θετικούς , συμπαγείς, και τελεστές προβολή . Στην όγδοη παράγραφο, θεωρούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα γραμμικών τελεστών. Οι έννοιες αυτές διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στη θεωρία των γραμμικών τελεστών και των εφαρμογών τους, όπου η φασματική ανάλυση των τελεστών είναι ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία. Το φασματικό θεώρημα για τους αυτο-συζυγείς συμπαγείς τελεστές και άλλα συναφή αποτελέσματα συζητούνται στη παράγραφο ενιά. Η δέκατη παράγραφος αφιερώνεται σε έναν σημαντικό τελεστή πανω στον $L^2(\mathbb{R})$: το μετασχηματισμό Fourier.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσουμε τις βασικές έννοιες της θεωρίας των μη φραγμένων τελεστών. Δίνεται ακόμη ένα παράδειγμα από το φασματικό θεώρημα για μη φραγμένους τελεστές.

Στην τελευταία παράγραφο κάνουμε μια αναφορά σε τελεστές που διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη Κβαντομηχανική. Εκεί βλέπουμε ότι με την βοήθεια της θεωρίας των γραμμικών τελεστών ορίζεται ένα σημαντικό αξίωμα της Κβαντομηχανικής η Αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΦΡΑΓΜΕΝΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

1.1. Παραδείγματα τελεστών

Σε αυτό το κεφάλαιο, μας ενδιαφέρει η περίπτωση, $E = E_1 = E_2$ ή $E_1 \subset E_2 = E$, όπου E είναι ένας χώρος με νόρμα ή ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Σε αυτή την περίπτωση το όνομα «γραμμικός τελεστής» ή «γραμμικός μετασχηματισμός » χρησιμοποιείται συνήθως. Δεδομένου ότι οι μη γραμμικοί τελεστές δεν θα ληφθούν υπόψη σε αυτή την εργασία, θα λέμε απλά τελεστές, που σημαίνει γραμμικοί τελεστές. Θα ξεκινήσουμε με μερικά παραδείγματα τελεστών. Σε κάθε περίπτωση, μας ενδιαφέρει ο εν λόγω τελεστής να είναι φραγμένος. Υπενθυμίζουμε ότι ένας τελεστής *A* ονομάζεται φραγμένος αν υπάρχει αριθμός *K* τέτοιος ώστε $\|Ax\| \le K\|x\|$, $\forall$ x στο πεδίο ορισμού του A. Η νόρμα του A ορίζεται ώς , η ελάχιστη απ 'όλους αυτούς τους αριθμούς *K*, ή ισοδύναμα, από :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \ .$$

Συχνά είναι πολύ πιο δύσκολο να βρούμε τη νόρμα ενός τελεστή από το να αποδείξουμε ότι είναι φραγμένος.

Παράδειγμα 1.1.1 (Ταυτοτικός τελεστής και μηδενικός τελεστής). Το απλούστερο παράδειγμα ενός τελεστή είναι ο ταυτοτικός τελεστής *I*, ο οποίος αφήνει κάθε στοιχείο αναλλοίωτο: $Ix = x$ για όλα τα $x \in E$ και ο μηδενικός τελεστής, ο οποίος θέτει το μηδενικό διάνυσμα σε κάθε στοιχείο του E . Η μηδενικός τελεστής θα συμβολίζεται με το **0**. Προφανώς ο ταυτοτικός τελεστής, και ο μηδενικός τελεστής είναι φραγμένοι και έχουμε $\|I\| = 1$ και $\|0\| = 0$. Το βαθμωτό γινόμενο aI του ταυτοτικού τελεστή είναι ο τελεστής ο οποίος πολλαπλασιάζει κάθε στοιχείο με το a : $(aI)x = ax$ **.**

Παράδειγμα 1.1.2. Έστω A ένας τελεστής στον $\mathbb{C}^N$ και έστω $\{ e_1,...,e_N \}$ είναι η πρότυπη ορθοκανονική βάση στο $\mathbb{C}^N$ δηλαδή,

$$e_1 = (1.0, 0, ..., 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$$
$$...$$
$$e_N = (0, 0, ..., 0, 1).$$

Ορίζουμε, για $i, j \in \{1, 2, ..., N\}$,

$$a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle.$$

Τότε για $x = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j \quad x \in \mathbb{C}^N$, έχουμε $Ax = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j A\, e_j$, και ως εκ τούτου

$$\left\langle Ax, e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \left\langle Ae_j , e_i \right\rangle \; = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \lambda_j . \tag{1.1.1}$$

Έτσι, κάθε τελεστής στον $\mathbb{C}^N$ χώρο ορίζεται από έναν πίνακα *N* x *N*. Αντιστρόφως, $\forall$ *N* x *N* πίνακα (a_{ij}),ο τύπος (1.1.1) ορίζει έναν τελεστή στον $\mathbb{C}^N$. Έχουμε έτσι μια «1-1» αντιστοιχία μεταξύ των τελεστών σε έαν *N*-διάστατο διανυσματικό χώρο και στους *N* x *N* πίνακες.

Αν ο τελεστής A ορίζεται από τον πίνακα (a_{ij}), τότε:

$$\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left| a_{ij} \right|^2} .$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε τελεστής στον $\mathbb{C}^N$, και συνεπώς και κάθε τελεστής σε οποιονδήποτε πεπερασμένης διαστάσεως χώρο Hilbert, είναι φραγμένος .

Παράδειγμα 1.1.3 (Διαφορικός τελεστής). Ένας απο τους σημαντικότερους τελεστές είναι ο *διαφορικός* τελεστής ,

$$(D\,f)(x) = \frac{df}{dx}(x) = f'(x)$$

που ορίζεται σε ένα χώρο διαφορίσιμων συναρτήσεων. Θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή στον χώρο

$$E_1 = \left\{ f \in L^2\left(\left[-\pi, \pi\right]\right) \; : \; f' \in L^2\left(\left[-\pi, \pi\right]\right) \right\}$$

Με τη νόρμα

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) \right|^2 dx}$$

Για $f_n(x) = \sin nx, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$ έχουμε

$$\|f_n\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin nx \right|^2 dx} = \sqrt{\pi} \qquad \text{και} \quad \|Df_n\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left| n \cos nx \right|^2 dx} = n\sqrt{\pi}$$

Ως εκ τούτου, $\|Df_n\| = n\|f_n\|$, που αποδεικνύουν ότι ο διαφορικός τελεστής δεν είναι φραγμένος. Σαφώς, αυτό το παράδειγμα, μπορεί εύκολα να γενικευθεί σε ένα αυθαίρετο διάστημα [*a, b*], ή ακόμα και στο $(-\infty, \infty)$.

Παράδειγμα 1.1.4 (Ολοκληρωτικός τελεστής). Άλλο ένα σημαντικό είδος τελεστή είναι ο *ολοκληρωτικός* τελεστής T που ορίζεται ως

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt,$$

όπου a και b είναι πεπερασμένα ή άπειρα, $a < b$, και K είναι μια συνάρτηση που ορίζεται στο (a,b) x (a,b). Η συνάρτηση K καλείται ο *πυρήνας* ενός τελεστή. Το πεδίο ορισμού ενός ολοκληρωτικού τελεστή εξαρτάται από το K. Αν

$$\sqrt{\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\,dtds} < \infty,$$

τότε ο T ένας φραγμένος τελεστής στον $L^2([a,b])$ και

$$\|T\| \le \sqrt{\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\,dtds}$$

Πράγματι, $\forall\ x \in L^2([a,b])$, έχουμε

$$\|Tx\|^2 = \int_a^b \left| \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt \right|^2 ds$$

$$\le \int_a^b \left(\int_a^b |K(s,t)|^2\,dt \int_a^b |x(t)|^2\,dt \right) ds \qquad \text{(ανισότητα Schwarz's)}$$

$$\le \int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\,dtds \int_a^b |x(t)|^2\,dt$$

Έτσι,

$$\|Tx\| \le \sqrt{\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\,dtds}\,\|x\|.$$

Παράδειγμα 1.1.5 (πολλαπλασιαστικός τελεστής). Έστω $z \in C([a,b])$. Ο τελεστής A στόν $L^2([a,b])$ που ορίζεται από την $(Ax)(t) = z(t)x(t)$ είναι σαφώς γραμμικός. Η συνάρτηση z ονομάζεται ο πολλαπλασιαστής. Από την

$$\|Ax\|^2 = \int_a^b |x(t)|^2 |z(t)|^2\,dt \le \max_{[a,b]} |z(t)|^2 \int_a^b |x(t)|^2\,dt,$$

Έχουμε
$$\|Ax\| \le \max_{[a,b]} |z(t)|\,\|x\|,$$

Συνεπώς ο A είναι φραγμένος.

Δύο τελεστές A και B σε ένα διανυσματικό χώρο E λέμε ότι είναι ίσοι, $A = B$, αν

$Ax = Bx \ \forall x \in E$. Το σύνολο όλων των τελεστών αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από τις:

$$(A+B)x = Ax + Bx \qquad \text{και} \qquad (aA)x = a(Ax)$$

Το γινόμενο AB των τελεστών A και B ορίζεται από την:

$$(AB)x = A(Bx).$$

Έτσι, το AB δηλώνει απλά τη σύνθεση των A και B. Παραδοσιακά, στο πλαίσιο των τελεστών , η λέξη «γινόμενο» χρησιμοποιείται αντί του όρου «σύνθεση». Όταν ένας τελεστής A πολλαπλασιάζεται με ένα βαθμωτό μέγεθος λ, τότε το αποτέλεσμα μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως το γινόμενο του πολλαπλασιαστικού τελεστή λI και του A: $\lambda A = (I\lambda)A$. Αυτή η διαφορετική ερμηνεία δεν αλλάζει τις ιδιότητες ενός τελεστή. Σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί να είναι βολικό να προσδιορίσουμε σταθερές με την βοήθεια πολλαπλασιαστικών τελεστών. Από την $IA = 1A$, ο μοναδιαίος τελεστής συχνά συμβολίζεται με 1.

Οι τελεστές που ορίσαμε έχουν τις ακόλουθες προφανείς ιδιότητες:

$$A + B = B + A, \qquad (A+B)+C = A+(B+C), \qquad A+0 = A,$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A+\alpha B, \qquad (\alpha + \beta)A = \alpha A+\beta B\,, \qquad A0 = 0\,,$$

$$A(BC) = (AB)C, \qquad (A+B)C = AC + BC, \qquad AI = IA.$$

Σε γενικές γραμμές, ο AB δεν χρειάζεται να ισούται με τον BA. Οι τελεστές A και B, για τους οποίους $AB = BA$ ονομάζονται *αντιμεταθετικοί* τελεστές.

Παράδειγμα 1.1.6 (Μη αντιμεταθετικοί τελεστές). Θεωρούμε το χώρο των διαφορίσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$ και τους τελεστές

$$Af(x) = xf(x) \quad \text{και} \qquad D = \frac{d}{dx}.$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $AD \neq DA$.

Το τετράγωνο ενός τελεστή A ορίζεται ως $A^2x = A(Ax)$. Με την επαγωγή, μπορούμε να ορίσουμε

$$A^n x = A\left(A^{n-1}x\right) \qquad \forall \ \text{θετικό ακέραιο } n.$$

Ως συνήθως, $A^1 = A$ και $A^0 = I$.

Θεώρημα 1.1.1. Το γινόμενο AB των φραγμένων τελεστών A και B είναι φραγμένο και

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|.$$

Απόδειξη. Έστω *A* και *B* φραγμένοι τελεστές σε έναν χώρο με νόρμα *E*, $\|A\| = K_1$ και $\|B\| = K_2$ Τότε $\|ABx\| \le K_1 \|Bx\| \le K_1 K_2 \|x\| \quad \forall x \in E.$

Θεώρημα 1.1.2. Ένας φραγμένος τελεστής *A* σε έναν διαχωρίσιμα απειροδιάστατο χώρο Hilbert μπορεί να αντικατασταθεί από μια άπειρη μήτρα.

Απόδειξη. Έστω *A* ένας φραγμένος τελεστής σε έναν χώρο Hilbert *H* και έστω (e_n), n = 1,2,...,
να είναι μια πλήρης ορθοκανονική βάση στον *H*. Για i, j $\in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$$

Για κάθε $\forall x \in H$, έχουμε

$$\begin{aligned} Ax &= A\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \right) \qquad (\textit{από τη συνέχεια του} A) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle Ae_j \right) \qquad (\textit{από γραμμικότητα του } \mathrm{A}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle Ae_j. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\langle Ax, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle Ae_j, e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Ae_j, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \langle x, e_j \rangle.$$

Έτσι, ο *A* αντικαθίσταται απο τον πίνακα (a_{ij}).

1.2. Διγραμμικά συναρτησιακά και τετραγωνικές μορφές

Οι έννοιες του διγραμμικού συναρτησιακού και μιάς τετραγωνικής μορφής δεν απαιτούν τη δομή ενός χώρου εσωτερικού γινομένου. Μπορούν να οριστούν σε κάθε διανυσματικό χώρο.

1.2.1 Ορισμός (Διγραμμικά συναρτησιακά). *Διγραμμικό συναρτησιακό* φ σε ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο *E*, εννοούμε την απεικόνιση $\varphi : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{C}$ ικανοποιώντας τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

(α) $\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = a\varphi(x_1, y) + \beta\varphi(x_2, y)$,

(β) $\varphi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{a}\varphi(x, y_1) + \overline{\beta}\varphi(x, y_2)$, για κάθε σταθερά α και β και κάθε $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$.

Τα διγραμμικά συναρτησιακά συχνά αποκαλούνται *ημιαντι-διγραμμικά*. Σημειώνουμε ότι ένα διγραμμικό συναρτησιακό είναι γραμμικό σε σχέση με την πρώτη μεταβλητή και αντιγραμμικό σε σχέση με τη δεύτερη μεταβλητή. Είναι σαφές ότι όλα τα διγραμμικά συναρτησιακά στον E αποτελούν ένα διανυσματικό χώρο.

Παράδειγμα 1.2.1. Το εσωτερικό γινόμενο είναι διγραμμικό συναρτησιακό.

Παράδειγμα 1.2.2. Έστω A και B τελεστές σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου E. Τότε, $\varphi_1(x,y) = \langle Ax, y\rangle$, $\varphi_2(x,y) = \langle x, By\rangle$ και $\varphi_3(x,y) = \langle Ax, By\rangle$ είναι διγραμμικά συναρτησιακά στον E.

Παράδειγμα 1.2.3. Έστω f και g γραμμικά συναρτησιακά σε ένα διανυσματικό χώρο E. Τότε, $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$ είναι ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον E.

Ορισμός 1.2.2. Έστω φ ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον E.

(α) Το φ λέγεται *συμμετρικό* αν $\varphi(x,y) = \bar{\varphi}(y,x)$ για όλα τα $x, y \in E$

(β) Το φ ονομάζεται *θετικό* αν $\varphi(x,x) > 0 \quad \forall x \in E$.

(γ) Το φ ονομάζεται *γνήσια θετικό*, αν είναι θετικό και $\varphi(x,x) > 0$ για όλα τα $x \neq 0$.

(δ) Αν E είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε το φ ονομάζεται *φραγμένο* αν $|\varphi(x,y)| \leq K\|x\|\|y\|$

για κάποια $K > 0$ και όλα τα $x, y \in E$. Η νόρμα ενός διγραμμικού συναρτησιακού ορίζεται από

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\varphi(x,y)|.$$

Αν $f = g$ στο παράδειγμα 1.2.3, τότε ο φ είναι συμμετρικός και θετικός. Το εσωτερικό γινόμενο είναι αυστηρά θετικό. Αν οι τελεστές A και B στο Παράδειγμα 1.2.2 είναι φραγμένοι, τότε φ_1, φ_2, και φ_3 είναι φραγμένοι. Ομοίως, αν f και g στο Παράδειγμα 1.2.3 είναι φραγμένοι, τότε το ορισμένο διγραμμικό συναρτησιακό είναι επίσης φραγμένο. Σημειώνουμε ότι για ένα φραγμένο διγραμμικό συναρτησιακό φ στον E έχουμε

$$|\varphi(x,y)| \leq \|\varphi\|\|x\|\|y\| \qquad \text{για όλα τα } x, y \in E$$

Ορισμός 1.2.3 (Τετραγωνική μορφή). Έστω φ ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον διανυσματικό χώρο E. Η συνάρτηση $\Phi: E \to \mathbb{C}$ που ορίζεται από την $\Phi(x) = \varphi(x,x)$ καλείται η *τετραγωνική μορφή* που σχετίζεται με το φ. Μια τετραγωνική μορφή Φ σε ένα χώρο με νόρμα καλείται *φραγμένη* αν υπάρχει σταθερά k > 0 τέτοια ώστε $\left|\Phi\left(\chi\right)\right| \le k\|x\|^2$ για όλα τα $x, y \in E$. Η νόρμα μιας τετραγωνικής μορφής ορίζεται απο την

$$\|\Phi\| = \sup_{\|x\|=1}\left|\Phi\left(x\right)\right|.$$

Σημειώνουμε ότι για μια φραγμένη τετραγωνική μορφή Φ σε έναν χώρο με νόρμα έχουμε $\left|\Phi\left(x\right)\right| \le \|\Phi\|\|x\|^2$. Ένα διγραμμικό συναρτησιακό και η σχετική τετραγωνική μορφή έχουν ιδιότητες παρόμοιες με ένα εσωτερικό γινόμενο $\left\langle x, y\right\rangle$ και του τετραγώνου της νόρμας που ορίζεται από το εν λόγω εσωτερικό γινόμενο $\|x\|^2 = \left\langle x, x\right\rangle$, αντίστοιχα.

1.2.1 Θεώρημα (Ταυτότητα πολικότητας). Έστω φ ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον E και έστω Φ η τετραγωνική μορφή που συνδέεται με τη φ. Τότε

$$4\varphi\left(x, y\right) = \Phi\left(x+y\right) - \Phi\left(x-y\right) + i\Phi\left(x+iy\right) - i\Phi\left(x-iy\right) \qquad (1.2.1)$$

για όλα τα $x, y \in E$.

Απόδειξη. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$\Phi\left(\alpha x+\beta y\right) = \varphi\left(\alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y\right)$$

$$= \left|\alpha\right|^2 \Phi\left(x\right) + \alpha\bar{\beta}\varphi\left(x, y\right) + \bar{\alpha}\beta\varphi\left(y, x\right) + \left|\beta\right|^2 \Phi\left(y\right)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ισότητα στη συνέχεια για $\alpha = \beta = 1$; $\alpha = 1$ και $\beta = -1$; $\alpha = 1$ και $\beta = i$; $\alpha = 1$ και $\beta = -i$; Παίρνουμε

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \Phi(y),$$

$$-\Phi(x - y) = -\Phi(x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) - \Phi(y),$$

$$i\,\Phi(x + i\,y) = i\,\Phi(x) + \varphi(x,y) - \varphi(y,x) + i\,\Phi(y),$$

$$-i\,\Phi(x - i\,y) = -i\,\Phi(x) + \varphi(x,y) - \varphi(y,x) - i\,\Phi(y).$$

Με την προσθήκη αυτών των ισοτήτων παίρνουμε την (1.2.1).

Πόρισμα 1.2.1 Έστω φ_1 και φ_2 διγραμμικά συναρτησιακά στον *E*. Αν $\varphi_1\left(x, x\right) = \varphi_2\left(x, x\right)$ για όλα τα $x \in E$, τότε $\varphi_1 = \varphi_2$ δηλ $\varphi_1\left(x, y\right) = \varphi_2\left(x, y\right)$ για όλα τα $x, y \in E$. Ομοίως, εάν *A* και *B*, τελεστές στον *E* έτσι ώστε $\left\langle Ax, x\right\rangle = \left\langle Bx, x\right\rangle$ για όλα τα $x \in E$, τότε *A* = *B*.

Απόδειξη. Αν $\varphi_1\left(x, x\right) = \varphi_2\left(x, x\right)$ $\forall x \in E$, τότε οι τετραγωνικές μορφές Φ_1 και Φ_2 είναι ίσες, και ως εκ τούτου, από την (1.2.1), τα συναρτησιακά φ_1 και φ_2 είναι ίσα. Η απόδειξη για τους τελεστες προκύπτει θετωντας $\varphi_1(x,y)=\langle Ax,y\rangle$ και $\varphi_2(x,y)=\langle x,By\rangle$.

Θεώρημα 1.2.2. Ένα διγραμμικό συναρτησιακό φ στον E είναι συμμετρικό αν και μόνο αν η σχετική τετραγωνική μορφή του Φ είναι πραγματική.

Απόδειξη. Εάν $\varphi(x,y) = \overline{\varphi}(y,x)$ για όλα τα $x,y\in E$, τότε

$$\Phi(x)=\varphi(x,x)=\overline{\varphi}(x,x)=\overline{\Phi}(x),$$

$\forall x\in E$ και ως εκ τούτου το Φ είναι πραγματικό.

Ας υποθέσουμε τώρα $\Phi(x)=\overline{\Phi}(x)$ για όλα τα $x\in E$. Ορίζουμε ένα διγραμμικό συναρτησιακό ψ στον E ώς

$$\psi(x,y)=\overline{\varphi}(y,x)$$

Στη συνέχεια, για τις αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές Ψ έχουμε:

$$\Psi(x)=\varphi(x,x)=\overline{\Phi}(x)=\Phi(x)$$

Έτσι, από το 1.2.1 πόρισμα, $\varphi(x,y)=\psi(x,y)$ για όλα τα $x,y\in E$. Σαφώς, αυτό σημαίνει ότι $\varphi(x,y)=\overline{\varphi}(y,x)$ για όλα τα $x,y\in E$.

Θεώρημα 1.2.3. Ένα διγραμμικό συναρτησιακό φ σε ένα χώρο με νόρμα E είναι φραγμένο αν και μόνο αν η σχετική τετραγωνική μορφή Φ είναι φραγμένη. Επιπλέον, έχουμε

$$\|\Phi\|\le\|\varphi\|\le 2\|\Phi\| \tag{1.2.2}$$

Απόδειξη. Από

$$\|\Phi\|=\sup_{\|x\|=1}|\Phi(x)|=\sup_{\|x\|=1}|\varphi(x,x)|\le\sup_{\|x\|=\|y\|=1}|\varphi(x,y)|=\|\Phi\|,$$

αν φ είναι φραγμένο , τότε Φ είναι φραγμένη και η πρώτη ανισότητα προκύπτει.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η Φ είναι φραγμένη. Σύμφωνα με τη (1.2.1), έχουμε:

$$\left|\varphi(x,y)\right| = \frac{1}{4}\left|\Phi(x+y) - \Phi(x-y) + i\Phi(x+iy) - i\Phi(x-iy)\right|$$
$$\leq \frac{1}{4}\|\Phi\|\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\right).$$

Ως εκ τούτου, από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\left|\varphi(x,y)\right| \leq \|\Phi\|\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Κατά συνέπεια,

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1}\left|\varphi(x,y)\right| \leq \sup_{\|x\|=\|y\|=1}\|\Phi\|\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 2\|\Phi\|.$$

Έτσι, αν *Φ* είναι φραγμένη , τότε φ είναι φραγμένο και η δεύτερη ανισότητα στην (1.2.2) προκύπτει.

Θεώρημα 1.2.4. Εάν ένα διγραμμικό συναρτησιακό φ σε ένα χώρο με νόρμα *E* είναι φραγμένο και συμμετρικό, στη συνέχεια, για την σχετιζόμενη τετραγωνική μορφή *Φ* έχουμε $\|\varphi\| = \|\Phi\|$.

Απόδειξη. Απο το Θεώρημα 1.2.3, $\|\Phi\| \leq \|\varphi\|$. Πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει και η αντίθετη ανισότητα. Αφού φ είναι συμμετρικό, Φ είναι πραγματική, από θεώρημα 1.2.2. Τότε , από την ταυτότητα πολικότητας, παίρνουμε

$$\Re\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left[\Phi(x+y) - \Phi(x-y)\right],$$

και ως εκ τούτου

$$\left|\Re\varphi(x,y)\right| \leq \frac{1}{4}\|\Phi\|\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\|\Phi\|\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

από τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Έστω *x* και *y* είναι αυθαίρετα σταθερά στοιχεία του *E* τέτοια ώστε $\|x\| = \|y\| = 1$, και έστω θ είναι ένας μιγαδικός αριθμός τέτοιο ώστε $|\theta| = 1$ και $\left|\varphi(x,y)\right| = \theta\varphi(x,y)$. Τότε:

$$\left|\varphi(x,y)\right| = \theta\varphi(x,y) = \varphi(\theta x,y) = \left|\Re\varphi(\theta x,y)\right| \leq \frac{1}{2}\|\Phi\|\left(\|\theta x\|^2 + \|y\|^2\right) = \|\Phi\|,$$

και ως εκ τούτου

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1}\varphi(x,y) \leq \|\Phi\|$$

Θεώρημα 1.2.5. Έστω A ένας φραγμένος τελεστής σε χώρο Hilbert H. Τότε το διγραμμικό συναρτησιακό που ορίζεται από $\varphi(x,y)=\langle x,Ay\rangle$ είναι φραγμένο και $\|\varphi\|=\|A\|$.

Απόδειξη. για όλα τα $x,y\in H$ από την ανισότητα Schwarz, έχουμε

$$|\varphi(x,y)|\le|\langle x,Ay\rangle|\le\|x\|\|Ay\|\le\|A\|\|x\|\|y\|.$$

Έτσι, το φ είναι φραγμένο και $\|\varphi\|\le\|A\|$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε:

$$\|\mathrm{A}x\|^2=|\langle Ax,Ax\rangle|=|\varphi\langle Ax,x\rangle|\le\|\varphi\|\|Ax\|\|x\|.$$

Ως εκ τούτου, για $Ax\neq 0$, έχουμε

$$\|Ax\|\le\|\varphi\|\|x\|.$$

Δεδομένου ότι η παραπάνω ανισότητα ικανοποιείται ασθενώς όταν $Ax=0$, παίρνουμε

$$\|A\|\le\|\varphi\|.$$

Θεώρημα 1.2.6. Έστω φ ένα φραγμένο διγραμμικό συναρτησιακό σε ένα χώρο Hilbert H. Υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής A στον H, έτσι ώστε:

$$\varphi(x,y)=\langle Ax,y\rangle \qquad \text{για όλα τα } x,y\in H$$

Απόδειξη. Για ένα σταθερό στοιχείο $y\in H$, το $\varphi(x,y)$ είναι ένα φραγμένο διγραμμικό συναρτησιακό στον H. Συνεπώς από το θεώρημα Riesz, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $Ay\in H$ τέτοιο ώστε $\varphi(x,y)=\langle Ax,y\rangle$ για όλα τα $x\in H$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $y\to Ay$ είναι ένας φραγμένος τελεστής στον E. Πράγματι, για κάθε $x,y_1,y_2\in H$ και $a,\beta\in\mathbb{C}$
έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle x,A(ay_1+\beta y_2)\rangle&=\varphi\langle x,ay_1+\beta y_2\rangle\\&=\bar{\alpha}\varphi(x,y_1)+\bar{\beta}\varphi(x,y_2)\\&=\langle x,aAy_1+\beta Ay_2\rangle,\end{aligned}$$

και ως εκ τούτου

$$A(ay_1+\beta y_2)=aAy_1+\beta Ay_2.$$

Τώρα θα δείξουμε ότι ο A είναι φραγμένος. Αφού το φ είναι φραγμένο, έχουμε:

$$|\langle x,Ay\rangle|=|\varphi(x,y)|\le k\|x\|\|y\|$$

για κάποια $k>0$ και για όλα τα $x,y\in H$. Συγκεκριμένα, για $x=Ay$ παίρνουμε

$$\|Ay\|^2 = |\langle Ay, Ay\rangle| = |\varphi(Ay, y)| \le k\|Ay\|\|y\|$$

Ως εκ τούτου, αν $Ay \neq 0$, παίρνουμε

$$\|Ay\| \le \|y\|$$

η οποία έχει τετριμμένη λύση όταν $Ay = 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο A είναι φραγμένος. Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα, παρατηρούμε ότι

$$\langle x, Ay\rangle = \langle x, By\rangle \quad \text{για όλα τα } x, y \in H$$

που συνεπάγεται ότι $A = B$.

Ορισμός 1.2.4 (Πιεστικό συναρτησιακό). Ένα διγραμμικό συναρτησιακό φ σε ένα χώρο με νόρμα καλείται *πιεστικό* (ή ελλειπτικό) αν υπάρχει μια θετική σταθερά K, έτσι ώστε

$$\varphi(x, x) \ge K\|x\|^2 \quad \text{για όλα τα} \quad x \in E .$$

Παράδειγμα 1.2.4. Αν z είναι μια συνεχής συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής στο $[0,1]$, τέτοια ώστε $\min_{t\in[0,1]} z(t) > 0$ τότε το διγραμικό συναρτησιακό φ ορίζεται στον $L^2([0,1])$ με

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y}(t)z(t)\,dt$$

να είναι πιεστικό. Πράγματι, έχουμε

$$\varphi(x, x) = \int_0^1 \left|x(t)^2\right| z(t)\,dt \ge K\|x\|^2 ,$$

όπου $K = \min_{t\in[0,1]} z(t) > 0$.

Το επόμενο θεώρημα, αποδείχθηκε από τον P. Lax και A. N Milgram το 1954, είναι μια σημαντική γενίκευση του θεωρήματος αναπαράστασεως Riesz.

Θεώρημα 1.2.7 (Lax-Milgram θεώρημα). Έστω φ ένα φραγμένο, πιεστικό, διγραμμικό συναρτησιακό σε ένα χώρο Hilbert H. Για κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό f στον H, υπάρχει ένα μοναδικό $x_f \in H$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) = \varphi(x, x_f) \quad \text{για όλα τα } x \in H .$$

Απόδειξη. Απο το Θεώρημα 1.2.6, υπάρχει ένας φραγμένος τελεστής A τέτοιος ώστε

$$\varphi(x, y) = \langle x, Ay\rangle \quad \text{για όλα τα } x, y \in H .$$

Το φ είναι πιεστικό , άρα έχουμε

$$K\|x\|^2 \le \varphi(x, x) = \langle x, Ax\rangle \le \|Ax\|\|x\|,$$

και ως εκ τούτου $K\|x\| \le \|Ax\|$ για όλα τα $x \in H$.

Έστω $x_1, x_2 \in H$.Αν $Ax_1 = Ax$, τότε $A(x_1 - x_2) = 0$, και έτσι

$$\|x_1 - x_2\| \le \frac{1}{K}\|A(x_1 - x_2)\| = 0,$$

πράγμα που συνεπάγεται $x_1 = x_2$. Ως εκ τούτου, ο A είναι «1-1».

Συμβολίζουμε το σύνολο τιμών του A με $\mathcal{R}$(A). Έστω (x_n) είναι μια ακολουθία από στοιχεία του H. Αν $\|Ax_n - y\| \to 0$ για κάποιο $y \in H$, τότε

$$\|x_1 - x_2\| \le \frac{1}{K}\|Ax_n - Ax_m\| \underset{m\to\infty}{\overset{n\to\infty}{\to}} 0,$$

Ως εκ τούτου, η (x_n) είναι μια ακολουθία Cauchy στον H. Επειδή το H είναι πλήρης, υπάρχει $x \in H$ τέτοιο ώστε $\|x_n - x\| \to 0$. Ως εκ τούτου, $\|Ax_n - Ax\| \to 0$, δεδομένου ότι η ο A είναι συνεχής. Ως εκ τούτου, $Ax = y$, και συνεπώς , $y \in \mathcal{R}(A)$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\mathcal{R}$ (A) είναι ένας κλειστός υπόχωρος του H. Θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{R}(A) = H$. Υποθέσουμε ότι $\mathcal{R}(A)$ είναι ένας κατάλληλος υπόχωρος του H. Τότε, υπάρχει ένα μη μηδενικό $x \in H$ που είναι ορθογώνιο στο $\mathcal{R}(A)$, δηλαδή,

$$\langle x, Ay \rangle = 0 \quad \forall y \in H$$

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$0 = |\langle x, Ax \rangle| = |\varphi(x,x)| \ge K\|x\|^2,$$

η οποία έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση $x \neq 0$.

Αν f είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον H, τότε υπάρχει ένα μοναδικό $x_0 \in H$ τέτοια ώστε $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ για όλα τα $x \in H$.

Δεδομένου ότι ο A είναι «1-1» απεικόνιση και, $\mathcal{R}(A) = H$ υπάρχει ένα μοναδικό $x_f \in H$ τέτοιο ώστε $x_0 = Ax_f$, και ως εκ τούτου

$$f(x) = \langle x, Ax_f \rangle = \varphi(x, x_f) \quad \text{για όλα τα } x \in H.$$

1.3 Συζυγείς και αυτοσυζυγείς τελεστές.

Έστω A είναι ένας φραγμένος τελεστής σε έναν χώρο Hilbert H. Για κάθε σταθερό $x_0 \in H$, το συναρτησιακό f που ορίζεται στον H από

$$f(x) = \langle Ax, x_0 \rangle$$

είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον *H*. Έτσι, από το θεώρημα αναπαράστασης Riesz, υπάρχει μοναδικό $y_0 \in H$ τέτοιο ώστε $f(x) = \langle x, y_0 \rangle$ για όλα τα $x \in H$, ή, ισοδύναμα, $\langle Ax, x_0 \rangle = \langle x, y_0 \rangle$ για όλα τα $x \in H$. Αν συμβολίζουμε με *A** τον τελεστή οπου σε κάθε $x_0 \in H$ εκχωρεί το μοναδικό y_0, τότε θα έχουμε $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ για όλα τα $x, y \in H$.

Ορισμός 1.3.1 (Συζυγής τελεστής). Έστω *A* φραγμένος τελεστής σε χώρο Hilbert *H*. Ο τελεστής *A**: $H \to H$ που ορίζεται ώς

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \qquad \text{για όλα τα } x, y \in E .$$

καλείται ο *συζυγής* τελεστής του *A*.
Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού:

$$(A + B)^* = A^* + B^* , \qquad (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^* , \qquad (A^*)^* = A ,$$

$$I^* = I , \qquad (AB)^* = B^* A^*$$

για αυθαίρετους τελεστές *A* και *B* και μια σταθερά *α*.

Θεώρημα 1.3.1. Ο συζυγής τελεστής *A** ενός φραγμένου τελεστή *A* είναι φραγμένος. Επιπλέον, έχουμε $\|A\| = \|A^*\|$ και $\|A^* A\| = \|A\|^2$.

Απόδειξη. Απο την ανισότητα Schwarz, $\forall x, y \in H$, έχουμε

$$|\langle A^* x, y \rangle| = |\langle x, Ay \rangle| \le \|A\| \|x\| \|y\|.$$

Ως εκ τούτου, για $y = A^* x$ παίρνουμε

$$\|A^* x\|^2 = \langle A^* x, A^* x \rangle \le \|A\| \|x\| \|A^* x\|. \qquad \text{Συνεπώς} \qquad \|A^*\| \le \|A\| . \qquad (1.3.1)$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο συζυγής ενός φραγμένου τελεστή είναι φραγμένος. Ως εκ τούτου,στην ανισότητα (1.3.1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί A* αντί του A, το οποίο δίνει

$$\|A\| = \|(A^*)^*\| \le \|A^*\|$$

Έτσι, $\|A\| = \|A^*\|$.
Από το θεώρημα 1.1.1 προκύπτει ότι:

$$\|AA^*\| \le \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2 .$$

Από την άλλη πλευρά, $\forall x \in H$, έχουμε

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^* Ax, Ax \rangle \le \|A^* Ax\| \|x\| \le \|A^* A\| \|x\|^2 .$$

Ως εκ τούτου, $\|A^* A\| = \|A\|^2$.

Σε γενικές γραμμές A και A^*, δεν χρειάζεται να είναι ίσοι. Για παράδειγμα, έστω $H = \mathbb{C}^2$ και έστω A να ορίζεται ώς : $A(z_1, z_2) = (0,\ z_1)$.
Τότε

$$\left\langle A(x_1, x_2), (y_1, y_2) \right\rangle = x_1 \overline{y}_2 \qquad \text{και} \qquad \left\langle (x_1, x_2), A(y_1, y_2) \right\rangle = x_2 \overline{y}_1$$

Οι τελεστές για τους οποίους $A = A^*$ έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ορισμός 1.3.2 (Αυτοσυζυγής τελεστής). Αν $A = A^*$, δηλαδή, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ $\forall x, y \in H$, τότε ο A ονομάζεται αυτοσυζυγής.

Παράδειγμα 1.3.1. Έστω $H = \mathbb{C}^N$ και $\{ e_1, ..., e_N \}$ είναι η τυπική ορθοκανονική βάση στον H. Έστω A ένας τελεστής που παριστάνεται από τον πίνακα (a_{ij}), όπου $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$ (βλ. παράδειγμα 1.1.2). Στη συνέχεια, ο συζυγής τελεστής A^* παριστάνεται από τον πίνακα $b_{kj} = \langle A^* e_j, e_k \rangle$. Ως εκ τούτου,

$$b_{kj} = \langle A^* e_j, e_k \rangle = \overline{\langle Ae_k, e_j \rangle} = \overline{a_{jk}}.$$

Συνεπώς, ο τελεστής A είναι αυτοσυζυγής, αν και μόνο αν $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. . Ένας πίνακας που ικανοποιεί την προϋπόθεση αυτή καλείται συχνά *ερμητιανός*.

Παράδειγμα 1.3.2. Έστω H διαχωρίσιμος, απειροδιάστατος χώρος Hilbert και έστω $\{ e_1, e_2, e_3, ... \}$ να είναι μια πλήρης ορθοκανονική ακολουθία στον H. Έστω A ένας φραγμένος τελεστής στον H που αναπαριστάται από έναν πίνακα (a_{ij}) (Θεώρημα 1.1.2.). Όπως και στη περίπτωση πεπερασμένης διαστάσεως, ο συζυγής τελεστής A^* αναπαριστάται από μια άπειρη μήτρα ($\overline{a_{ji}}$). Ο A είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ για όλα τα $i, j \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.3.3. Έστω T ένας *Fredholm* τελεστής στο $L^2([a,b])$ που ορίζεται ώς

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s,t) x(t)\, dt,$$

όπου K είναι μια συνάρτηση που ορίζεται στο $[a,b] \times [a,b]$ τέτοια ώστε

$$(Tx)(s) = \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, ds dt < \infty.$$

Σημειώνουμε ότι η συνθήκη ικανοποιείται αν ο K είναι συνεχής. Έχουμε

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,x(t)\,\overline{y(s)}\,dsdt\\ &= \overline{\int_a^b\int_a^b \overline{K(s,t)\,x(t)}\,y(s)\,dsdt}\\ &= \int_a^b x(t)\overline{\int_a^b \overline{K(s,t)}\,y(s)\,dsdt}.\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι

$$(T^*x)(s) = \int_a^b \overline{K(t,s)}\,x(t)\,dsdt\,.$$

Έτσι, ένας τελεστής Fredholm είναι αυτοσυζυγής αν ο πυρήνας του ικανοποιεί την ισότητα $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$.

Παράδειγμα 1.3.4. Έστω A τελεστής στον $L^2([a,b])$ που ορίζεται από $(Ax)(t) = tx(t)$. Έχουμε

$$\langle Ax, y\rangle = \int_a^b tx(t)\overline{y(t)}dt = \int_a^b x(t)\overline{ty(t)}dt = \langle x, Ay\rangle,$$

Άρα ο A είναι αυτοσυζυγής.

Παράδειγμα 1.3.5. Θεωρούμε τον τελεστή A ορισμένο στον $L^2(\mathbb{R})$ που καθορίζεται από την

$$(Ax)(t) = e^{-|t|}\,x(t).$$

Αυτός είναι ένας φραγμένος αυτοσυζυγής τελεστής. Μπορεί να αποδειχθεί, όπως στο παράδειγμα 1.1.5 ότι είναι φραγμένος. Επιπλέον, έχουμε

$$\langle Ax, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}x(t)\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{\left[e^{-|t|}y(t)\right]}dt = \langle x, Ay\rangle,$$

Έτσι, ο A είναι αυτοσυζυγής.

Παράδειγμα 1.3.6. Έστω φ ένα φραγμένο διγραμμικό συναρτησιακό στον H, και έστω A ένας τελεστής στον Η τέτοιος ώστε $\varphi(x,y) = \langle x, Ay\rangle$ για όλα τα $x, y \in H$.. Τότε ο A είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν ο φ είναι συμμετρικός. Στην πραγματικότητα, για όλα τα $x, y \in H$ έχουμε:

$$\langle x, Ay\rangle = \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)} = \overline{\langle y, Ax\rangle} = \langle Ax, y\rangle \text{ (αν } \varphi \text{ είναι συμμετρικό)},$$

Και

$$\varphi(x,y) = \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle = \overline{\langle y, Ax\rangle} = \overline{\varphi(y,x)} \text{ (αν } A \text{ είναι αυτοσυζυγής)}.$$

Θεώρημα 1.3.2. Έστω A ένας φραγμένος τελεστής σε χώρο Hilbert H. Οι τελεστές T_1 = A^*A και $T_2 = A + A^*$ είναι αυτοσυζυγείς.

Απόδειξη. Για όλα τα $x, y \in H$, έχουμε

$$\langle T_1 x, y\rangle = \langle A^* Ax, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, A^* Ay\rangle = \langle x, T_1 y\rangle$$

και $$\langle T_2 x, y\rangle = \langle (A + A^*)x, y\rangle = \langle x, (A + A^*)^* y\rangle = \langle x, (A + A^*) y\rangle = \langle x, T_2 y\rangle.$$

Θεώρημα 1.3.3. Το γινόμενο δύο αυτοσυζυγών τελεστών είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν οι τελεστές αντιμετατίθενται.

Απόδειξη. Έστω A και B αυτοσυζυγείς τελεστές. Τότε

$$\langle ABx, y\rangle = \langle Bx, Ay\rangle = \langle x, BAy\rangle.$$

Έτσι, αν $AB = BA$, τότε ο AB είναι αυτοσυζυγής. Αντιστρόφως, εάν ο AB είναι αυτοσυζυγής,
τότε απο την παραπάνω σχέση συνεπάγεται $AB = (AB)^* = BA$.

Πόρισμα 1.3.1. Αν ο A είναι αυτοσυζυγής, τότε είναι και το τυχόν πολυώνυμο του A

$$a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I$$

με πραγματικούς συντελεστές $a_n, \ldots, a_0$.

Στον ορισμό του συζυγή τελεστή A έχουμε υποθέσει ότι το πεδίο ορισμού του A είναι ολόκληρος ο χώρος H. Στη συνέχεια, η ύπαρξη και η μοναδικότητα του συζυγή τελεστή A^* ήταν εγγυημένη από το θεώρημα αναπαράστασης Riesz. Στην πράξη, έχουμε συχνά ασχοληθεί με τελεστές που ορίζονται σε ένα κατάλληλο υπόχωρο του H, για παράδειγμα, ο διαφορικός τελεστής. Σε μια τέτοια περίπτωση ο συζυγής τελεστής μπορεί να οριστεί ως εξής. Έστω A: $\mathcal{D}(A) \to H$ και B: $\mathcal{D}(\mathrm{B}) \to H$ τελεστές, $\mathcal{D}(A), \mathcal{D}(B) \subset H$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και $\mathcal{D}(A)$ και $\mathcal{D}(B)$ είναι διανυσματικοί χώροι. Στη συνέχεια, ο B καλείται συζυγής τελεστής του A εάν

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathrm{A}) \text{ και } y \in \mathcal{D}(\mathrm{B}).$$

Στην περίπτωση αυτή, ο συζυγής τελεστής δεν χρειάζεται να είναι μοναδικός. Μπορεί να αποδειχθεί ότι, εάν $\mathcal{D}(A)$ είναι πυκνό στον H, ο συζυγής είναι μοναδικός.

Παράδειγμα 1.3.7. Έστω ο διαφορικός τελεστής D στο χώρο όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το άπειρο. Τότε

$$\langle Dx,y\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)\overline{y(t)}dt=-\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left(\frac{d}{dt}\overline{y(t)}\right)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{\left(-\frac{d}{dt}y(t)\right)}dt=\langle x,-Dy\rangle.$$

Έτσι, ο -D είναι ο συζυγής του D.

Παράδειγμα 1.3.8. Έστω ο τελεστής $T = i\left(d/_{dt}\right)$ στο χώρο όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το άπειρο. Έχουμε

$$\langle Tx,y\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}i\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)\overline{y(t)}dt=-i\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left(\frac{d}{dt}\overline{y(t)}\right)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{\left(i\frac{d}{dt}y(t)\right)}dt=\langle x,Ty\rangle.$$

Ως εκ τούτου, ο T είναι συζυγής τελεστής.

Θεώρημα 1.3.4. Για κάθε φραγμένο τελεστή T σε ένα χώρο Hilbert H, υπάρχουν μοναδικοί αυτοσυζυγείς τελεστές A και B τέτοιοι ώστε $T = A + iB$ και $T^* = A - iB$.

Απόδειξη. Έστω T φραγμένος τελεστής στον H. Ορίζουμε

$A = \dfrac{1}{2}$ $(T+ T^*)$ και $B = \dfrac{1}{2i}$ $(T - T^*)$.

Σαφώς, A και B είναι η αυτοσυζυγείς και $T = A + iB$. Επιπλέον, για κάθε $x, y \in H$ έχουμε

$$\langle Tx,y\rangle=\langle (A+iB)x,y\rangle=\langle Ax,By\rangle+i\langle Bx,y\rangle$$
$$=\langle x,Ay\rangle+i\langle x,By\rangle=\langle x,(A-iB)y\rangle.$$

Ως εκ τούτου, $T^* = A - iB$. Εύκολα με απαγωγή εις άτοπον αποδεικνύεται η μοναδικότητα. Συγκεκριμένα, αν ο T είναι αυτοσυζυγής, τότε $A = T$ και $B = 0$. Οι αυτοσυζυγείς τελεστές είναι σαν πραγματικοί αριθμοί στο $\mathbb{C}$.

Η ακόλουθη ιδιότητα των αυτοσυζυγών τελεστών θα είναι χρήσιμη για τη διερεύνηση των φασματικών ιδιοτήτων των εν λόγω τελεστών στη παράγραφο 1.8.

Θεώρημα 1.3.5. Έστω T φραγμένος τελεστής στον χώρο Hilbert H .Τότε

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}|\langle Tx,x\rangle|. \tag{1.3.2}$$

Απόδειξη. Έστω

$$M = \sup_{\|x\|=1} \left|\left\langle Tx, x \right\rangle\right|.$$

Εάν , $\|x\| = 1$ τότε

$$\left|\left\langle Tx, x \right\rangle\right| \leq \|Tx\|\|x\| = \|Tx\| \leq \|T\|\|x\| = \|T\|.$$

Έτσι,

$$M \leq \|T\| \tag{1.3.3}$$

Έστω $x \in H$ τέτοιο ώστε $Tx \neq 0$. Ορίζουμε

$$a = \sqrt{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}} \qquad \text{και} \qquad z = \frac{Tx}{a}. \text{ Τότε}$$

Τότε

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \left\langle T(ax), z \right\rangle = \frac{1}{4}\left[\left\langle T(ax+z), ax+z \right\rangle - \left\langle T(ax-z), ax-z \right\rangle\right] \\ &\leq \frac{1}{4} M \left(\|ax+z\|^2 + \|ax-z\|^2\right) = \frac{1}{2} M \left(\|ax\|^2 + \|z\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2} M \left[a^2 \|x\|^2 + \frac{1}{a^2}\|Tx\|^2\right] = M\|x\|\|Tx\|.\end{aligned}$$

Έτσι, $\|Tx\| \leq M\|x\|$. Επειδή αυτή η ανισότητα ικανοποιείται ασθενώς όταν $Tx = 0$, έχουμε $\|T\| \leq M$. Αυτό, σε συνδυασμό με την (1.3.3), αποδεικνύει την επιθυμητή ισότητα.□

Ορισμός 1.3.3 Αντιερμητιανοί τελεστές (Anti-Hermitian). Ο τελεστής A ονομάζεται *αντιερμητιανός* αν $A = -A^*$.
Ο τελεστής στο Παράδειγμα 1.3.7 είναι αντιερμητιανός.

1.4. Αντιστρέψιμοι, φυσιολογικοί, ισομετρία, και ορθομοναδιαίοι τελεστές.

Ορισμός 1.4.1 (Αντίστροφος τελεστής). Έστω A ένας τελεστής που ορίζεται σε έναν διανυσματικό υπόχωρο του E. Ένας τελεστής B ορισμένος στο $\mathcal{R}(A)$ ονομάζεται *αντίστροφος* του A εάν $ABx = x$ για όλα τα $x \in \mathcal{R}(A)$ και $BAx = x$ για όλα τα $x \in \mathcal{D}(A)$. Ο τελεστής που έχει έναν αντίστροφο καλείται αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφος του A δηλώνεται από ένα A^{-1}.

Εάν ένας τελεστής έχει αντίστροφο, τότε είναι μοναδικός. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι B_1 και B_2 είναι αντίστροφοι του A. Τότε,

$$B_1 = B_1 I = B_1 A B_2 = I B_2 .$$

Σημειώνουμε επίσης ότι:

$$\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A) \quad \text{και το} \quad \mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A).$$

Πρώτα θα υπενθυμίσουμε μερικές απλές αλγεβρικές ιδιότητες των αντιστρέψιμων τελεστών.

Θεώρημα 1.4.1.
(α) Ο αντίστροφος ενός γραμμικού τελεστή είναι ένας γραμμικός τελεστής.
(β) Ο τελεστής A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $Ax = 0$ που συνεπάγεται $x = 0$.
(γ) Εάν ο τελεστής A είναι αντιστρέψιμος και τα διανύσματα $x_1,...,x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα $Ax_1,...,Ax_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(δ) Αν οι τελεστές A και B είναι αντιστρέψιμοι, τότε ο τελεστής AB είναι αντιστρέψιμος και έχουμε $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Απόδειξη, (α) Για κάθε $x, y \in \mathcal{R}(A)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha x + \beta y) &= A^{-1}\left(\alpha A A^{-1} x + \beta A A^{-1} y\right) \\ &= A^{-1} A\left(\alpha A^{-1} x + \beta A^{-1} y\right) = \alpha A^{-1} x + \beta A^{-1} y. \end{aligned}$$

(β) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $Ax = 0$, τότε $x = A^{-1}Ax = A^{-1}0 = 0.$ Υποθέτουμε τώρα ότι $Ax = 0$ που συνεπάγεται $x = 0$. Αν $Ax_1 = Ax_2$, τότε $A(x_1 - x_2) = 0$, και έτσι $x_1 - x_2 = 0$. Συνεπώς $x_1 = x_2$, πράγμα που αποδεικνύει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.
(γ) Υποθέτουμε ότι $a_1 Ax_1 + ... + a_n Ax_n = 0 = 0$. Τότε $A(a_1x_1 + ... + a_nx_n) = 0$, και επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος, $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$. Η γραμμική ανεξαρτησία των $x_1,...,x_n$ συνεπάγεται $a_1 = ... = a_n = 0$. Έτσι, τα διανύσματα $Ax_1,...,Ax_n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
(δ) Λόγω του (β), εάν το $A(Bx) = 0$, τότε $Bx = 0$, διότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Αν $Bx = 0$, τότε $x = 0$, διότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Έτσι, ο AB είναι αντιστρέψιμος, απο (β). Επιπλέον,

$$\left(BA^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}B = I.$$

Ομοίως, $(AB)\left(B^{-1}B\right) = I.$ Αυτό αποδεικνύει ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Προκύπτει από το (γ) στο παραπάνω θεώρημα ότι, αν E είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος και A είναι ένας γραμμικός αντιστρέψιμος τελεστής στον E, τότε $\mathcal{R}(A) = E$. Όπως δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα, σε έναν απειροδιάστατο διανυσματικό χώρο αυτό δεν ισχύει απαραίτητα.

Παράδειγμα 1.4.1. Έστω Ε = ℓ^2. Ορίζουμε ένα τελεστή *A* στον *E* ώς

$$A(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...).$$

Σαφώς, αυτός είναι ένας γραμμικός αντιστρέψιμος τελεστής στον ℓ^2 η έκταση του οποίου είναι κατάλληλος υπόχωρος του ℓ^2.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι ο αντίστροφος ενός φραγμένου τελεστή δεν είναι αναγκαστικά φραγμένος.

Παράδειγα 1.4.2. Έστω *E* = ℓ^2. Ορίζουμε έναν τελεστή *A* στον *E* ώς

$$A(x_1, x_2, ...) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, ...\right).$$

Έχω

$$\|A(x_1, x_2, ...)\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2}} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \|(x_1, x_2, ...)\|,$$

Άρα ο *A* είναι φραγμένος τελεστής. Παράλληλα, ο *A* είναι αντιστρέψιμος:

$$(x_1, x_2, ...) = (x_1, 2x_2, 3x_3, ..., nx_n, ...).$$

Ωστόσο, ο A^{-1} δεν είναι φραγμένος. Στην πραγματικότητα, θεωρούμε την ακολουθία (e_n) στοιχείων του ℓ^2, όπου e_n είναι η ακολουθία της οποίας το n- οστός όρος είναι 1 και όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι 0. Τότε $\|e_n\| = 1$ και $\|A^{-1}e_n\| = n$. Ως εκ τούτου, ο A^{-1} είναι μη φραγμένος .

Αν ο *E* είναι πεπερασμένης διαστάσεως, τότε ο αντίστροφος κάθε αντιστρέψιμου τελεστή στον *E* είναι φραγμένος, επειδή κάθε τελεστής σε πεπερασμένης διαστάσεως χώρο είναι φραγμένος.

Θεώρημα 1.4.2. Έστω *A* είναι φραγμένος τελεστής στον χώρο Hilbert *H*, τέτοιος ώστε $\mathcal{R}(A) = H$. Αν ο *A* έχει ένα φραγμένο αντίστροφο, τότε ο συζυγής Α* είναι αντιστρέψιμος και $(A^*)^{-1}$ = $(A^{-1})^*$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(A^{-1})^* A^* x = A^*(A^{-1})^* x = x \tag{1.4.1}$$

$\forall$ $x \in H$. Πράγματι, $\forall y \in H$ έχουμε

$$\langle y, (A^{-1})^* A^* x\rangle = \langle A^{-1}y, A^* x\rangle = \langle AA^{-1}y, x\rangle = \langle y, x\rangle$$

και

$$\langle y, A^*(A^{-1})^* x\rangle = \langle Ay, (A^{-1})^* x\rangle = \langle A^{-1}Ay, x\rangle = \langle y, x\rangle$$

Έτσι,

$$\left\langle y,\left(A^{-1}\right)^* A^* x\right\rangle = \left\langle y, A^*\left(A^{-1}\right)^* x\right\rangle = \left\langle y,x\right\rangle \text{ για όλα τα } y \in H, \tag{1.4.2}$$

πράγμα που συνεπάγεται την (1.4.1).

Πόρισμα 1.4.1. Εάν ένας φραγμένος αυτοσυζυγής τελεστής A έχει φραγμένο αντίστροφο A^{-1}, τότε ο A^{-1} είναι αυτοσυζυγής.

Απόδειξη. $(A^{-1})^* = \left(A^*\right)^{-1} = A^{-1}$.

Ορισμός 1.4.2 (Φυσιολογικός τελεστής). Ένας φραγμένος τελεστής T λέγεται *φυσιολογικός* εάν αντιμετατίθεται με το συζυγή του, δηλαδή, $TT^* = T^*T$.

Προφανώς, κάθε αυτοσυζυγής τελεστής είναι φυσιολογικός. Το επόμενο θεώρημα θα μας βοηθήσει να βρούμε παραδείγματα φυσιολογικών τελεστών που δεν είναι αυτοσυζυγείς.

Θεώρημα 1.4.3 Ένας φραγμένος τελεστής T είναι φυσιολογικός αν και μόνο αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για όλα τα $x \in H$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\left\langle T^*Tx, x\right\rangle = \left\langle Tx, Tx\right\rangle = \|Tx\|^2.$$

Αν ο T είναι φυσιολογικός, τότε επίσης έχουμε

$$\left\langle T^*Tx, x\right\rangle = \left\langle TT^*x, x\right\rangle = \left\langle T^*x, T^*x\right\rangle = \|T^*x\|^2. \quad \forall x \in H$$

Έτσι,

$$\|Tx\| = \|T^*x\|$$

Ας υποθέσουμε τώρα $\|Tx\| = \|T^*x\|$. Απο την παραπάνω υπόθεση έχουμε

$$\left\langle TT^*x, x\right\rangle = \left\langle T^*Tx, x\right\rangle \quad \text{για όλα τα } x \in H$$

Ως εκ τούτου, απο το πόρισμα 1.2.1, $TT^* = T^*T$.

Σημειώνουμε εδώ ότι η συνθήκη $\|Tx\| = \|T^*x\|$ είναι ισχυρότερη από ότι η $\|T\| = \|T^*\|$.

Παράδειγμα 1.4.3. Έστω H ένας χώρος Hilbert και έστω $Tx = ix$ για όλα τα $x \in H$ Δεδομένου ότι $T^*x = -ix = -Tx$, ο T δεν είναι αυτοσυζυγής. Από την άλλη πλευρά, $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για όλα τα $x \in H$ και επομένως ο T είναι φυσιολογικός.

Θεώρημα 1.4.4. Αν ο Α είναι φυσιολογικός, τότε ο $(aI - A)$ είναι φυσιολογικός $\forall a \in \mathbb{C}$

Απόδειξη. Από την $(aI - A)^* = (\bar{a}I - A^*)$, έχουμε

$$\left(aI - A\right)\left(aI - A\right)^* = |a|^2 I - \bar{a}A - aA^* + AA^* = \left(aI - A\right)^*\left(aI - A\right).$$

Θεώρημα 1.4.5. Έστω T ένας φραγμένος τελεστής στον χώρο Hilbert H και έστω A και B είναι αυτοσυζυγείς τελεστές στον H τέτοιοι ώστε $T = A + iB$. Τότε, ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνο αν οι A και B αντιμετατίθενται.

Απόδειξη. Έστω ότι ο T είναι φυσιολογικός. Δεδομένου ότι η $T^* = A - i\beta$, έχουμε

$$TT^* = \left(A+iB\right)\left(A-iB\right) = A^2 + B^2 - i\left(AB - BA\right) \qquad (1.4.3)$$

και

$$T^*T = \left(A-iB\right)\left(A+iB\right) = A^2 + B^2 + i\left(AB - BA\right) \qquad (1.4.4)$$

Έτσι, $AB - BA = 0$, το οποίο αποδεικνύει ότι οι A και B αντιμετατίθενται.
Από την άλλη πλευρά, αν A και B αντιμετατίθενται, τότε από την (1.4.3) και (1.4.4) έχουμε
T*T = $A^2 + B^2$ = TT*.

Ορισμός 1.4.3 (Τελεστής ισομετρία). Ο φραγμένος τελεστής T στον χώρο Hilbert H ονομάζεται *ισομετρία* αν $\|Tx\| = \|x\| \quad \forall x \in H$.

Παράδειγμα 1.4.4. Έστω (e_n), $n \in \mathbb{N}$, είναι μια πλήρης ορθοκανονική ακολουθία σε ένα χώρο Hilbert H. Υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής A τέτοιος ώστε $e_n = e_{n+1}$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Στην πραγματικότητα, αν $x = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, τότε $Ax = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_{n+1}$. Είναι σαφές ότι ο A είναι γραμμικός και $\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = \|x\|^2$. Ως εκ τούτου, ο A είναι ένας τελεστής ισομετρία. Ο τελεστής A ονομάζεται τελεστής *μονόπλευρη μετατόπιση*.

Θεώρημα 1.4.6. Ο φραγμένος τελεστής T στον χώρο Hilbert H ονομάζεται ισομετρία αν και μόνο αν Α $T^*T = I$ στον H.

Απόδειξη. Αν ο T είναι ισομετρία , τότε $\forall x \in H$ έχουμε $\|Tx\|^2 = \|x\|^2$, και ως εκ τούτου

$$\left\langle T^*Tx, x\right\rangle = \left\langle Tx, Tx\right\rangle = \left\langle x, x\right\rangle. \text{ για όλα τα } x \in H .$$

Αυτό συνεπάγεται, από το πόρισμα 1.3.1, $T^*T = I$, στη συνέχεια,

$$\|Tx\| = \sqrt{\left\langle Tx, Tx\right\rangle} = \sqrt{\left\langle T^*Tx, x\right\rangle} = \sqrt{\left\langle x, x\right\rangle} = \|x\|.$$

Σημειώνουμε ότι οι τελεστές ισομετρία "διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο": $\left\langle Tx, Ty\right\rangle$ = $\left\langle x, y\right\rangle$. Ειδικότερα, $x \perp y$ αν και μόνο αν $Tx \perp Ty$. Ο τελεστής στο Παράδειγμα 1.4.1 είναι τελεστής ισομετρία.

Ορισμός 1.4.4 (Ορθομονοδιαίος τελεστής). Ο φραγμένος τελεστής T στον χώρο Hilbert H ονομάζεται *ορθομονοδιαίος*, αν $T^*T = TT^* = I$ στον H.

Στο παραπάνω ορισμό είναι σημαντικό ότι το σύνολο αφετηρίας και σύνολο αφήξεως του *T* είναι το σύνολο του χώρου *H*.

Θεώρημα 1.4.7. Ένας τελεστής *T* είναι ορθομοναδιαίος, αν και μόνο αν είναι αναστρέψιμος και $T^{-1} = T^*$.

Απόδειξη. Υποθέτωντας ότι ο *T* είναι αντιστρέψιμος τελεστής σε ένα χώρο Hilbert *H*, έτσι ώστε $T^{-1} = T^*$.Στη συνέχεια, $T^*T = T^{-1}T = I$ και $TT^* = TT^{-1} = I$. Ως εκ τούτου, ο *T* είναι ορθομοναδιαίος. Η απόδειξη για το αντίστροφο είναι παρόμοια.

Θεώρημα 1.4.8. Έστω *T* ένας ορθομοναδιαίος τελεστής. Τότε

(α) *T* είναι η ισομετρία.
(β) *T* είναι φυσιολογικός.
(γ) *T* και *T** είναι ορθομοναδιαίοι.

Απόδειξη, (α) Προκύπτει απο το Θεώρημα 1.4.6. (β) Είναι άμεση συνέπεια των ορισμών. Για να αποδείξουμε το (γ), σημειώνουμε ότι

$$\left(T^{-1}\right)^* T^{-1} = T^{**}T^{-1} = TT^{-1} = I.$$

Ομοίως, $T^{-1}\left(T^{-1}\right)^* = I$, και ως εκ τούτου T^{-1} είναι ορθομοναδιαίος. Δεδομένου ότι $T^* = T^{-1}$ από το θεώρημα 1.4.7, ο T^* είναι επίσης ορθομοναδιαίος.
Σημειώνουμε ότι ένας φυσιολογικός τελεστής δεν είναι απαραίτητα ορθομοναδιαίος: θεωρούμε κάθε αυτοσυζυγή τελεστή *A* τέτοιο ώστε $\|A\| \neq 1$.

Παράδειγμα 1.4.5. Θέτουμε *H* να είναι ο χώρος Hilbert όλων των ακολουθιών των μιγαδικών αριθμών $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$ τέτοιων ώστε $\sum_{-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται από την

$$\langle x, y \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Ορίζουμε έναν τελεστή *T* από την $T(x_n) = T(x_{n-1})$.

Λύση: Ο *T* είναι ένας ορθομοναδιαίος τελεστής. Ο T είναι αντιστρέψιμος και

$$\langle Tx, y \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} x_{n-1}\bar{y}_n = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_{n+1}} = \langle x, T^{-1}y \rangle,$$

πράγμα που σημαίνει $T^* = T$.

Παράδειγμα 1.4.6. Έστω $H = L^2([a,b])$. Ορίζουμε έναν τελεστή *T* στον *H* από $(Tx)(t) = x(1 - t)$. Αυτός ο τελεστής είναι μια ένα-προς-ένα απεικόνιση του *H* πάνω στον *H*. Επιπλέον, έχουμε $T = T^* = T^{-1}$. Έτσι, ο *T* είναι ορθομοναδιαίος.

1.5 Θετικοί τελεστές

Ορισμός 1.5.1 (Θετικός τελεστής). Ένας τελεστής *A* ονομάζεται *θετικός* αν είναι αυτόσυζυγής και $\langle Ax,x\rangle \geq 0$ για όλα τα $x \in H$.

Παράδειγμα 1.5.1. Ας φ είναι μια μη αρνητική συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, b]$. Ο πολλαπλασιαστικός τελεστής Α στον $L^2([a,b])$ που ορίζεται από $Ax = \varphi x$ είναι θετικός. Στην πραγματικότητα, $\forall x \in L^2([a,b])$ έχουμε

$$\langle Ax,x\rangle = \int_a^b \varphi(t)x(t)\overline{x(t)}dt = \int_a^b \varphi(t)|x(t)|^2\, dt \geq 0.$$

Παράδειγμα 1.5.2. Έστω *K* μια θετική συνεχής συνάρτηση που ορίζεται στο $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$. Ο ολοκληρωτικός τελεστής *T* στον $L^2([a,b])$ που ορίζεται ως

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt$$

και είναι θετικός. Πράγματι, έχουμε

$$\langle Tx,x\rangle = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,x(t)\overline{x(t)}dtds = \int_a^b\int_a^b K(s,t)|x(t)|^2 dtds \geq 0$$

$\forall x \in L^2([a,b])$.

Θεώρημα 1.5.1. Για κάθε φραγμένο τελεστή *A* σε ένα χώρο Hilbert *H*, οι τελεστές A^*A και AA^* είναι θετικοί.

Απόδειξη. $\forall x \in H$ έχουμε

$$\langle A^*Ax,x\rangle = \langle Ax,Ax\rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$$

και

$$\langle AA^*x,x\rangle = \langle A^*x,A^*x\rangle = \|A^*x\|^2 \geq 0.$$

Θεώρημα 1.5.2. Αν ο Α είναι αντιστρέψιμος θετικός τελεστής στον χώρο Hilbert *H*, τότε ο αντίστροφος του A^{-1} είναι θετικός.

Απόδειξη. Αν $y \in \mathcal{D}(A^{-1})$, τότε $y = Ax$ για κάποιο $x \in H$, και τότε

$$\langle A^{-1}y,y\rangle = \langle A^{-1}Ax,Ax\rangle = \langle x,Ax\rangle \geq 0$$

Για να υποδηλώσουμε ότι ο Α είναι ένας θετικός τελεστής, γράφουμε $A \geq 0$. Εάν η διαφορά $A - B$ δύο αυτοσυζυγών τελεστών είναι ένας θετικός τελεστής , δηλαδή, A - $B \geq 0$, τότε γράφουμε $A \geq B$. Ως εκ τούτου,

$$A \geq B \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \langle Ax, x \rangle \geq \langle Bx, x \rangle \qquad \text{για όλα τα} \quad x \in H$$

Η σχέση αυτή έχει τις εξείς ιδιότητες:

1) Αν $A \geq B$ και $C \geq D$, τότε , $A + C \geq B + D$
2) Αν $A \geq 0$ και $a \geq 0$ $(a \in \mathbb{R})$, τότε $aA \geq 0$
3) Αν $A \geq B$ και $B \geq C$, τότε $A \geq C$.

Θεώρημα 1.5.3. Αν A είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής στον H και $\|A\| \leq 1$, τότε $A \leq I$.

Απόδειξη
Αν $\|A\| \leq 1$, τότε

$$\langle Ax, x \rangle \leq \|A\| \|x\|^2 \leq \langle x, x \rangle \leq \langle Ix, x \rangle \qquad \text{για όλα τα } x \in H .$$

Πόρισμα 1.5.1. Αν ο Α είναι ένας θετικός τελεστής στον χώρο Hilbert H, τότε $\exists\ \alpha > 0$ $(a \in \mathbb{R})$, έτσι ώστε $\alpha A < I$.

Παράδειγμα 1.5.3. Το γινόμενο δύο θετικών τελεστών δεν είναι απαραίτητα θετικό. Πράγματι, θεωρούμε τελεστές στον $\mathbb{R}^2$ που ορίζονται από τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι και ο Α και ο Β είναι θετικοί τελεστές , αλλά το γινόμενο AB δεν είναι.

Θεώρημα 1.5.4. Το γινόμενο δύο αντιμεταθετικών θετικών τελεστών σε ένα χώρο Hilbert είναι ένας θετικός τελεστής.

Απόδειξη. Έστω A και B αντιμεταθετικοί θετικοί τελεστές . Χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $A \neq 0$. Ορίζουμε την ακολουθία των τελεστών

$$A / \|A\| \qquad \text{και} \qquad A_{n+1} = A_n - A_n^2 \quad \text{για } n = 1, 2, ...$$

Σημειώνουμε ότι οι τελεστές A_n , είναι αυτοσυζυγείς και αντιμεταθετικοί. Θα δείξουμε, από την επαγωγή, ότι

$$0 \leq A_n \leq I \tag{1.5.1}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.
Για n = 1, η (1.5.1) ικανοποιείται από το θεώρημα Α.6.3. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η (1.5.1) ισχύει για κάποια $k \in \mathbb{N}$.Τότε

$$\left\langle A_k^{\,2}\left(I-A_k\right)x, x\right\rangle = \left\langle A_k\left(I-A_k\right)x, A_k x\right\rangle \geq 0$$

και

$$\left\langle A_k\left(I-A_k\right)^2 x, x\right\rangle = \left\langle A_k\left(I-A_k\right)x, \left(I-A_k\right)x\right\rangle \geq 0,$$

, που σημαίνει

$$A^2{}_k\left(I-A_k\right) \geq 0 \quad \text{και} \quad A_k\left(I-A_k\right)^2 \geq 0 .$$

Ως εκ τούτου,

$$A_{k+1} = A^2{}_k\left(I-A_k\right) + A_k\left(I-A_k\right)^2 \geq 0 .$$

και

$$I - A_{k+1} = \left(I-A_k\right) + A^2{}_k \geq 0 .$$

Αυτό δείχνει ότι η (1.5.1) ισχύει για k + 1, και, επομένως, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, με επαγωγή, Έχουμε

$$A_1 = A_1^{\,2} + A_2 = A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + A_3 = \ldots = \sum_{k=1}^{n} A_k^{\,2} + A_{n+1},$$

και ως εκ τούτου

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{\,2} = A_1 - A_{n+1} \leq A_1.$$

Τότε,

$$\sum_{k=1}^{n} \left\langle A_k x, A_k x\right\rangle \leq \left\langle A_1 x, x\right\rangle.$$

Αυτό δείχνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n x\|^2$ συγκλίνει και $\|A_n x\| \to 0.$

Επιπλέον,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^{\,2}\right)x = A_1 x - A_{n+1}x \to A_1 x \text{ καθώς } \mathrm{n} \to \infty.$$

Ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\,2} x = A_1 x .$$

Ο Β αντιμετατίθεται με τον A_n για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, άρα έχουμε

$$\left\langle ABx, x\right\rangle = \|A\|\left\langle BA_1 x, x\right\rangle = \|A\|\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle BA_n^{\,2}x, x\right\rangle = \|A\|\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle BA_n x, A_n x\right\rangle \geq 0.$$

Πόρισμα 1.5.2. Έστω A και B να είναι αυτοσυζυγείς τελεστές σε ένα χώρο Hilbert H. Αν

$A \le B$, τότε $AC \le BC$ για κάθε θετικό τελεστή C που αντιμετατίθεται και με τον A και με τον B.

Το επόμενο θεώρημα είναι χρήσιμο για τη μελέτη των ιδιοτήτων των κυματιδίων.

Θεώρημα 1.5.5. Έστω A ένας θετικός τελεστής σε ένα χώρο Hilbert *H*, τέτοιος ώστε

$$aI \le A \le \beta I \tag{1.5.2}$$

για κάποιο $0 < \alpha < \beta$. Τότε
(α) Ο A είναι αντιστρέψιμος,
(β) R $(A) = H$,
(γ) $\frac{1}{\beta} I \le A^{-1} \le \frac{1}{a} I.$

Απόδειξη. Πρώτα σημειώνουμε ότι η (1.5.2) είναι ισοδύναμη με την

$$a\|x\|^2 \le \langle Ax, x\rangle \le \beta \|x\|^2 \quad \text{για όλα τα } x \in H . \tag{1.5.3}$$

Έτσι, $Ax = 0$ που συνεπάγεται $x = 0$, αποδεικνύοντας το (α).
Για να αποδείξουμε το (β) θα αποδείξουμε ότι το R (A) είναι κλειστό και ότι το R $(A)^{\perp}$ = $\{0\}$, και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα :

(Αν S είναι ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε $S^{\perp\perp} = S$.)

Θεωρούμε μια ακολουθία $y_n \in$ R (A), έτσι ώστε $y_n \to y$ για κάποιο $y \in H$. Θέτουμε $y_n = Ax_n$ για κάποια $x_n \in H$. Από

$$\begin{aligned} a\|x_n - x_m\|^2 &\le \langle A(x_n - x_m), x_n - x_m\rangle \\ &= \langle Ax_n - Ax_m, x_n - x_m\rangle \\ &= \langle y_n - y_m, x_n - x_m\rangle \le \|y_n - y_m\|\|x_n - x_m\|, \end{aligned}$$

έχουμε

$$a\|x_n - x_m\| \le \|y_n - y_m\|,$$

πράγμα που σημαίνει ότι η ακολουθία (x_n) είναι μια ακολουθία Cauchy, επειδή τέτοια είναι η (y_n). Έτσι, η (x_n) έχει ένα όριο στον *H*, δηλ $x_n \to x$. Από τη συνέχεια του *A* παίρνουμε

$$y_n = Ax_n \to Ax \ .$$

Αυτό συνεπάγεται $y = Ax$, αποδεικνύοντας ότι το R (A) είναι κλειστό.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\langle Ax, y\rangle = 0 \quad \forall x \in H$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι πρέπει να έχουμε $\langle Ay, y\rangle = 0$, πράγμα που συνεπάγεται ότι $y = 0$ από την (1.5.3).

Ως εκ τούτου, $\mathrm{R}(A)^{-1} = \{0\}$.
Τέλος, αν

$$\alpha I < A < \beta I,$$

τότε, από το θεώρημα 1.5.2 και το πόρισμα 1.5.2,

$$aA^{-1} \le AA^{-1} \le \beta A^{-1}$$

και, κατά συνέπεια,

$$A^{-1} \le \frac{1}{\alpha} I \quad \text{και} \quad \frac{1}{\beta} I \le A^{-1},$$

αποδεικνύοντας το (γ).
Το ακόλουθο θεώρημα είναι ένα άλλο παράδειγμα μιας ιδιότητας των θετικών τελεστών που είναι ανάλογη της ιδιότητας των πραγματικών αριθμών.

Θεώρημα 1.5.6. Έστω $A_1 \le A_2 \le ... \le A_n \le ...$ να είναι αυτοσυζυγείς τελεστές σε ένα χώρο Hilbert *H,* έτσι ώστε $A_n A_m = A_m A_n$, για όλα τα $m, n \in \mathbb{N}$. Αν ο *B* είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής στον *H* τέτοιο ώστε $A_n B = BA_n$ και $A_n \le B$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει ένας αυτοσυζυγής τελεστής *A* τέτοιος ώστε

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax \quad \forall x \in H \qquad \text{και} \qquad A_n \le A \le B \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $C_n = B - A_n$. Οι τελεστές C_n, μετατίθενται μεταξύ τους και

$$C_1 \ge C_2 \ge ... \ge 0.$$

Απο το θεώρημα 1.5.4, για *n*> *m* οι τελεστές

$$\left(C_m - C_n\right)C_n \qquad \text{και} \qquad \left(C_m - C_n\right)C_n \qquad \text{είναι θετικοί.}$$

Ως εκ τούτου,

$$\left\langle C_m{}^2 x, x\right\rangle \ge \left\langle C_m C_n x, x\right\rangle \ge \left\langle C_n{}^2 x, x\right\rangle. \quad \forall x \in H$$

Δεδομένου ότι, για ένα αυθαίρετο σταθερό $x \in H$, $\left(\left\langle C_k{}^2 x, x\right\rangle\right)$ είναι μια μη αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, που συγκλίνει και ως εκ τούτου

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\langle C_m C_n x, x\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\left\langle C_n{}^2 x, x\right\rangle.$$

Ως εκ τούτου,

$$\left\|C_m x - C_n x\right\|^2 = \left\langle \left(C_m - C_n\right)^2 x, x\right\rangle = \left\langle C_m{}^2 x, x\right\rangle - 2\left\langle C_m C_n x, x\right\rangle + \left\langle C_n{}^2 x, x\right\rangle \to 0.$$

καθώς $m, n \to \infty$. Ως εκ τούτου, ($C_n x$) είναι μια ακολουθία Cauchy $\forall x \in H$. και συνεπώς και οι ($A_n x$),συγκλίνουν $\forall x \in H$.Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ο τελεστής *A* ορίζεται από $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ που είναι αυτοσυζυγής και $A_n \le A \le B \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 1.5.2 (Τετραγωνική ρίζα). Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού τελεστή *A* είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής *B* που ικανοποιεί $B^2 = A$.

Θεώρημα 1.5.7. Κάθε θετικός τελεστής *A* έχει μια μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα *B*. Επιπλέον, ο *B* αντιμετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A.

Απόδειξη. Θεέτουμε $A > 0$ και $\alpha > 0$ ($a \in \mathbb{R}$) να είναι τέτοια ώστε $a^2 A \leq I$. Ορίζουμε $T_0 = 0$ και

$$T_{n+1} = T_n + \frac{1}{2}\left(a^2 A - T_n^{\,2}\right) \tag{1.5.4}$$

για $n = 0,1,2,...$. Σημειώνουμε ότι οι τελεστές T_n είναι αυτοσυζυγείς (ως πολυώνυμα του *A* με πραγματικούς συντελεστές) και αντιμετατίθενται με κάθε τελεστή που αντιμετατίθεται με τον *A*. Ειδικότερα, $T_n T_m = T_m T_n$ για όλα τα *m* και *n*. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$I - T_{n+1} = \frac{1}{2}\left(I - T_n\right)^2 + \frac{1}{2}\left(I - a^2 A\right) \tag{1.5.5}$$

Και

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{2}\Big(\left(I - T_{n-1}\right) + \left(I - T_n\right)\Big)\left(T_n - T_{n-1}\right) \tag{1.5.6}$$

Με βάση την (1.5.5), έχουμε $T_n \leq I$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον,

$$T_0 \leq T_1 \leq ... T_n \leq ... .$$

Πράγματι, $$T_1 = \frac{1}{2} a^2 A \geq 0 = T_0$$

και αν $T_n - T_{n-1} \geq 0$, τότε $T_{n+1} - T_n \geq 0,$ απο την (1.5.6).

Απο το θεώρημα 1.5.6, η ακολουθία (T_n) συγκλίνει σε ένα θετικό αυτοσυζυγή τελεστή *T*. Θέτοντας $n \to \infty$ στην (1.5.4), πέρνουμε

$$T = T + \frac{1}{2}\left(a^2 A - T\right),$$

που είναι,

$$\left(\frac{1}{a} T\right)^2 = A\,.$$

Συμβολίζουμε *B* = *T* /*α*. Ο τελεστής *B* είναι προφανώς θετικός. Δεδομένου ότι, $\forall n \in \mathbb{N}$, οι T_n αντιμετατίθενται με κάθε τελεστή που αντιμετατίθενται με τον *A*, όπως το ίδιο κάνουν οι *T* και *B*. Μένει να αποδείξοτμε τη μοναδικότητα. Έστω *C* ένας θετικός τελεστής, έτσι ώστε $C^2 = A$. Επειδή ο *C* αντιμετατίθεται με τον *A*, ο *C* αντιμετατίθεται με τον *B*. Έστω $x \in H$ και έστω $y_0 = \left(B - C\right)x$. Τότε

$$\begin{aligned}\langle By_0, y_0\rangle + \langle Cy_0, y_0\rangle &= \langle (B+C)\, y_0, y_0\rangle \\ &= \langle (B+C)(B-C)\, x, y_0\rangle \\ &= \langle (B^2-C^2)\, x, y_0\rangle = 0.\end{aligned}$$

Και επειδή ο B και ο C είναι θετικοί, έχουμε $\langle By_0, y_0\rangle = \langle Cy_0, y_0\rangle = 0.$ Εάν D είναι μια θετική τετραγωνική ρίζα του B, τότε

$$\|Dy_0\|^2 = \langle D^2 y_0, y_0\rangle = \langle By_0, y_0\rangle = 0.$$

Ως εκ τούτου, $Dy_0 = 0$ και επίσης $By_0 = D(Dy_0) = 0.$ Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $Cy_0 = 0.$ Τελικα,

$$\|Bx - Cx\|^2 = \langle (B-C)^2\, x, x\rangle = \langle (B-C)\, y_0, x\rangle = 0. \text{ για αυθαίρετο } x \in H .$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $B = C$.

Ορισμός 1.5.3 (Γνήσια θετικός τελετής). Ένας αυτοσυζυγής τελεστής ονομάζεται *γνήσια θετικός* ή *θετικά ορισμένος* εάν $\langle Ax, x\rangle > 0 \quad \forall x \in H \ , \ x \neq 0$.

Αν φ στο Παράδειγμα 1.5.1 είναι τέτοιο που

$$\int_a^b \varphi(t)dt > 0.,$$

τότε σαφώς ο A είναι γνήσια θετικός.

1.6 Οι τελεστές προβολή

Με βάση την ιδιότητα του πλησιέστερου σημείου προκύπτει ότι αν S είναι ένας κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, τότε $\forall x \in H$, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $y \in S$ τέτοιο ώστε $x = y + z$ και $z \in S^{\perp}$ Έτσι, κάθε κλειστός υπόχωρος επάγει έναν τελεστή στον H ο οποίος εκχωρεί στο x εκείνο το μοναδικό y.

Ορισμός 1.6.1 (Τελεστής ορθογώνια προβολή). Έστω S ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Ο τελεστής P στον H ορίζεται ως

$$Px = y \text{ όταν } x = y + z,\ y \in S, \text{ και } z \in S^{\perp}, \tag{1.6.1}$$

καλείται *τελεστής ορθογώνια προβολή* επάνω στον S, ή απλά τελεστής προβολή επάνω στο S. Το διάνυσμα y ονομάζεται η προβολή του x πάνω στον S.

Από τη μοναδικότητα της ανάθεσης $x = y + z$, προκύπτει ότι οι τελεστές προβολή είναι γραμμικοί. Απο το Πυθαγόρειο θεώρημα συνεπάγεται:

$$\|Px\|^2 = \|y\|^2 = \|x\|^2 - \|z\|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Έτσι, οι τελεστές προβολή είναι φραγμένοι και $\|P\|<1$. Ο μηδενικός τελεστής είναι ένας τελεστής προβολή πάνω στον υπόχωρο μηδέν. Αν ο *P* είναι ένας μη μηδενικός τελεστής προβολή, τότε $\|P\|=1$, γιατί $\forall x \in S$, έχουμε $Px = x$. Ο μοναδιαίος τελεσστής *I* είναι τελεστής προβολή σε ολόκληρο το χώρο *H*. Σημειώνουμε ότι από την (1.6.1) παίρνουμε

$$\langle Px, x-Px\rangle = 0 \qquad \forall x \in H .$$

Παράδειγμα 1.6.1. Έστω S ένα κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert *H*, και έστω $\{e_{1,}e_2,...\}$ να είναι πλήρες ορθοκανονικό σύνολο στον *S*. Ακολούθως ο τελεστής προβολή *P* επάνω στον S μπορεί να οριστεί ώς

$$Px = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n .$$

Ειδικότερα, εάν ο *S* είναι διάστασης 1 και $\upsilon \in S, \|\upsilon\|=1$, τότε $Px = \langle x,\upsilon\rangle\upsilon$.

Παράδειγμα 1.6.2. Έστω $H = L^2([a,b])$. Κάθε $x \in H$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως $x = y + z$, όπου *y* είναι μια άρτια και *z* είναι μια περιττή συνάρτηση. Ο τελεστής που ορίζεται ώς $Px = y$ είναι ο τελεστής προβολή πάνω στον υπόχωρο όλων των άρτιων συναρτήσεων. Ο εν λόγω τελεστής μπορεί επίσης να οριστεί όπως και στο παράδειγμα 1.6.1:

$$Px = \sum_{n=0}^{\infty}\langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n ,$$

όπου $\varphi_0(t) = 1/\sqrt{2\pi}$ και $\varphi_n(t) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\cos nt$ για $n = 1,2,....$

Παράδειγμα 1.6.3. Έστω $H = L^2([-\pi,\pi])$ και έστω *P* είναι ένας τελεστής στον *H* που ορίζεται ώς εξής

$$(Px)(t) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \ \mathrm{t} \le 0, \\ x(t) & \alpha\nu \ \mathrm{t}>0. \end{cases}$$

Τότε, ο *P* είναι ο τελεστής προβολή πάνω στο χώρο όλων των συναρτήσεων που μηδενίζονται για $t<0$.

Ορισμός 1.6.2 (Αυτοδύναμος τελεστής). Ένας τελεστής *T* ονομάζεται *αυτοδύναμος* αν $T^2 = T$.

Κάθε τελεστής προβολή είναι αυτοδύναμος. Πράγματι, αν *P* είναι ο τελεστής προβολή σε έναν υπόχωρο *S*, τότε ο *P* είναι ο ταυτότικός τελεστής στον *S*. Επειδή $Px \in S \quad \forall x \in H$, έχουμε $P^2x = P(Px) = Px$ για όλα τα $x \in H$.

Παράδειγμα 1.6.4. Θεωρούμε τον τελεστή *T* στον $\mathbb{C}^2$ που ορίζεται από την $T(x,y) = (x-y,0)$. Προφανώς, ο *T* είναι αυτοδύναμος. Από την άλλη πλευρά, δεδομένου ότι

$$\langle T(x,y),(x,y)-T(x,y)\rangle = x\overline{y} - |y|^2 ,$$

ο $T(x,y)$ δεν χρειάζεται να είναι ορθογώνιος με τον - $T(x,y)$, και επομένως ο T δεν είναι μια προβολή.

Θεώρημα 1.6.1. Ένας φραγμένος τελεστής είναι προβολή αν και μόνο αν είναι αυτοδύναμος και αυτόσυζυγής.

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δείξει ότι κάθε τελεστής προβολή είναι ταυτοδύναμος. Εάν $Px_1 = y_1$ και $Px_2 = y_2$, τότε

$$\langle Px_1, x_2 \rangle = \langle y_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle x_1, y_2 \rangle = \langle x_1, Px_2 \rangle.$$

Έτσι, ο P είναι αυτοσυζυγής.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο T είναι ένας ταυτοδύναμος αυτοσυζυγής τελεστής στον H. Ορίζουμε

$$S = \{ x \in H : Tx = x \}.$$

Δεδομένου ότι ο T είναι ένας φραγμένος τελεστής, ο S είναι ένας κλειστός υπόχωρος του H. Για να αποδείξουμε ότι ο T είναι η προβολή επάνω στον S πρέπει να δείξουμε ότι $Tx \in S$ και $x - Tx \in S^{\perp}$ για όλα τα $x \in H$. Η πρώτη ιδιότητα απορέει αμέσως από το γεγονός ότι ο T είναι αυτοδύναμος. Για τη δεύτερη αρκεί να σημειώσουμε ότι $x \in H$ και $z \in S$ έχουμε

$$\langle x - Tx, z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, Tz \rangle = \langle x, z \rangle \langle x, z \rangle = 0.$$

Πόρισμα 1.6.1. Αν P είναι ένας τελεστής προβολή επάνω σε ένα υπόχωρο του χώρου Hilbert H, τότε $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$ για όλα τα $x \in H$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα 1.6.1, έχουμε

$$\langle Px, x \rangle = \langle PPx, x \rangle = \langle Px, P^* x \rangle = \langle Px, Px \rangle = \|Px\|^2.$$

Παράδειγμα 1.6.5. Αν P είναι ο τελεστής προβολή σε ένα κλειστό υπόχωρο του S, τότε ο $I- P$ είναι ο τελεστής προβολή επάνω στον $S^{\perp}$ και $S^{\perp} = \{x\text{: } Px = 0\}$. Ο τελεστής $I- P$ είναι μερικές φορές συμβολίζεται με $P^{\perp}$ και καλείται συμπληρωματική προβολή.
Σε γενικές γραμμές, το άθροισμα δύο τελεστών προβολής δεν είναι ένας τελεστής προβολή. Για παράδειγμα, αν P είναι ένας μη μηδενικός τελεστής, τότε ο $P + P = 2P$ δεν είναι ένας τελεστής προβολή, επειδή $\|P + P\| = 2$. Από την άλλη πλευρά, ο $P + P^{\perp}$ είναι ένας τελεστής προβολή.

Ορισμός 1.6.3 (ορθογωνιότητα τελεστών προβολής). Δύο τελεστές προβολή P και Q ονομάζονται *ορθογώνιοι* αν $PQ = 0$.

Σημειώνουμε ότι για οποιουσδήποτε δύο τελεστές προβολή P και Q έχουμε $PQ = P^*Q^* = (QP)^*$. Έτσι, $PQ = 0$ αν και μόνο αν $QP = 0$.

Θεώρημα 1.6.2. Δύο τελεστές προβολή $P_R : H \to R$ και $P_S : H \to S$ είναι *ορθογώνιοι* εάν και μόνο εάν $R \perp S$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $P_R P_S = 0$. Αν $x \in \mathbb{R}$ και $y \in S$, τότε

$$\langle x, y \rangle = \langle P_R x, P_S y \rangle = \langle x, P_R P_S y \rangle = 0.$$

Ως εκ τούτου, $R \perp S$.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $R \perp S$. Αν $x \in H$, τότε $P_S x \in S$, και ως εκ τούτου $P_S x \perp R$.

Συνεπώς, $P_R\left(P_S x\right) = 0$ για όλα τα $x \in H$. Αυτό σημαίνει ότι οι τελεστές P_R και P_S είναι ορθογώνιοι.

Θεώρημα 1.6.3. Το άθροισμα δύο τελεστών προβολής P_R και P_S είναι ένας τελεστής προβολή αν και μόνο αν $P_R P_S = 0$. Στην περίπτωση αυτή, $P_R + P_S = P_{R \oplus S}$

Απόδειξη. Αν $P = P_R + P_S$ είναι ένας τελεστής προβολή, τότε

$$\left(P_R + P_S\right)^2 = P_R + P_S$$

ή

$$P_R P_S + P_S P_R = 0$$

Ο πολλαπλασιασμός της ισότητας από το από το P_R απο τα αριστερά δίνει

$$P_R P_S + P_R P_S P_R = 0. \tag{1.6.2}$$

Ο πολλαπλασιασμός της τελευταίας ισότητας από το P_R από τα δεξιά δίνει

$$2 P_R P_S P_R = 0. \tag{1.6.3}$$

Συνδυάζοντας την (1.6.2) και (1.6.3), προκύπτει $P_R P_S = 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $P_R P_S = 0$ Τότε, και $P_S P_R = 0$, και έτσι

$$\left(P_R + P_S\right)^2 = P_R + P_S.$$

Ως εκ τούτου, ο P είναι αυτοδύναμος. Δεδομένου ότι ο P είναι επίσης αυτοσυζυγής, ως άθροισμα δύο αυτοσυζυγών τελεστών , είναι μια προβολή, από το Θεώρημα 1.6.1. Για κάθε $x \in H$, έχουμε

$$Px = P_R x + P_S x \in R \oplus S.$$

Επιπλέον, αν $x = x_1 + x_2$ με $x_1 \in R$, $x_2 \in S$, τότε

$$Px = P_R x + P_S x = x_1 + x_2 = x,$$

έτσι ο P είναι ο ταυτοτικός στον $R \oplus S$.

Θεώρημα 1.6.4. Το γινόμενο δύο τελεστών προβολή P_R και P_S είναι ένας τελεστής προβολή αν και μόνο αν οι P_R και P_S αντιμετατίθενται. Στην περίπτωση αυτή, $P_R P_S = P_{R \cap S}$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο $P = P_R P_S$ είναι μια προβολή. Στη συνέχεια, $P = P^*$, και ως εκ τούτου $P_R P_S = (P_R P_S)^* = P_S^* P_R^* = P_S P_R$.

Αντίστροφα, αν $P_R P_S = P_S P_R$, τότε

$(P_R P_S)^* = P_S^* P_R^* = P_S P_R = P_R P_S$, οπότε ο $P = P_R P_S$ είναι αυτοσυζυγής Επιπλέον,

$$P^2 = P_R P_S P_R P_S = P_R^{\,2} P_S^{\,2} = P_R P_S = P,$$

έτσι ο P είναι αυτοδύναμος. Άρα, ο P είναι μια προβολή.

Για , $x \in H$ έχουμε $Px = P_R\left(P_S x\right) = P_S\left(P_R x\right)$, και ως εκ τούτου $Px \in R \cap S$.

Επιπλέον, για $x \in R \cap S$, έχουμε $Px = P_R\left(P_S x\right) = P_R x = x$. Κατά συνέπεια, $P = P_{R\cap S}$.

Θεώρημα 1.6.5. Έστω R και S είναι δύο κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H, και έστω P_R και P_S είναι οι αντίστοιχες προβολές. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(α) $R \subset S$

(β) $P_S P_R = P_R$

(γ) $P_R P_S = P_R$

(δ) $\|P_R x\| \le \|P_S x\|$ για όλα τα $x \in H$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $R \subset S$. Στη συνέχεια, $P_R x \in S$ για όλα τα $x \in H$. Κατά συνέπεια, $P_S P_R x = P_R x$, και ως εκ τούτου το (α) συνεπάγεται την (β). Αν $P_S P_R = P_R$, τότε το (β) συνεπάγεται (γ).

Ας υποθέσουμε τώρα $P_R P_S = P_R$. Τότε

$$\|P_R x\| = \|P_R P_S x\| \le \|P_R\|\|P_S x\| \le \|P_S x\|$$

για όλους τα $x \in H$. Έτσι, η (γ) συνεπάγεται την (δ).

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι (δ) ισχύει και η (α) δεν το κάνει. Τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \notin S$. Έστω $x = y + z$ με $y \in S$ και $z \in S^{\perp}$. Επειδή $x \notin S$, έχουμε $z \neq 0$ και

$$\|P_R x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 > \|y\|^2 = \|P_S x\|^2,$$

η οποία έρχεται σε αντίθεση με τη (δ). Έτσι, $R \subset S$.

1.7. Συμπαγείς τελεστές

Οι συμπαγείς τελεστές αποτελούν μια σημαντική κατηγορία φραγμένων τελεστών. Η ιδέα προήλθε από τη θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων του δεύτερου είδους. Επίσης, παρέχουν μια φυσική γενίκευση των τελεστών με πεπερασμένης διαστάσης σύνολο τιμών.

Ορισμός 1.7.1 (Συμπαγής τελεστης). Ο τελεστής A σε ένα χώρο Hilbert H ονομάζεται *συμπαγής* τελεστής (ή πλήρως συνεχής τελεστής) αν, για κάθε φραγμένη ακολουθία (x_n) στον *H*, η ακολουθία ($A\,x_n$) περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Παράδειγμα 1.7.1. Κάθε τελεστής σε ένα πεπερασμένης διαστάσεως χώρο Hilbert είναι συμπαγής. Πράγματι, αν ο *A* είναι έανς τελεστής στον $\mathbb{C}^n$, τότε είναι φραγμένος. Επομένως, εάν (x_n) είναι μια φραγμένη ακολουθία, τότε ($A\,x_n$) είναι μια φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{C}^n$. Με το Bolzano-Weierstrass Θεώρημα, η ($A\,x_n$) περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα 1.7.1. Οι Συμπαγείς τελεστές είναι φραγμένοι.

Απόδειξη. Εάν πρόκειται ένας τελεστής *A* δεν είναι φραγμένος, τότε υπάρχει μια ακολουθία (x_n) έτσι ώστε , $\|x_n\| = 1,$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, και $\|Ax_n\| \to \infty.$. Στη συνέχεια η (Ay_n)
δεν περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, πράγμα που σημαίνει ότι δεν είναι συμπαγής.

Δεν είναι κάθε φραγμένος τελεστής συμπαγής.

Παράδειγμα 1.7.2. Ο ταυτοτικός τελεστής *I* σε ένα άπειροδιάστατο χώρο Hilbert *H* δεν είναι συμπαγής, παρόλο που είναι φραγμένος. Στην πραγματικότητα, θεωρούμε μία ορθοκανονική ακολουθία (e_n) στον *H*. Τοτε, η ακολουθία, $I e_n = e_n$ δεν περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Παράδειγμα 1.7.3. Έστω *y* και *z* σταθερά στοιχεία ενός χώρου Hilbert *H*.
Ορίζουμε $Tx = \langle x, y \rangle z$.

Θέτουμε (x_n) να είναι μια φραγμένη ακολουθία δηλαδή, $\|x_n\| \le M$ για κάποια $M > 0$ και όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \langle x_n, y \rangle \right| \le \|x_n\| \|y\| \le M \|y\|,$$

η ακολουθία $\left(\langle x_n, y \rangle \right)$, περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\left(\langle x_{Pn}, y \rangle \right)$. Η οποία χαρακτηρίζει το όριο της εν λόγω υπακολουθίας από *α*. Τότε

$$Tx_{Pn} = \langle x_{Pn}, y \rangle z \to az \qquad \text{καθώς } n \to \infty .$$

Ως εκ τούτου, ο T είναι ένας συμπαγής τελεστής.

Παράδειγμα 1.7.4. Σημαντικά παραδείγματα συμπαγών τελεστών είναι οι ολοκληρωτικοί τελεστές *T* στον $L^2\left(\left[a,b\right]\right)$ που ορίζεται από την

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt,$$

όπου a και b είναι πεπερασμένα και K είναι συνεχής. Θα σκιαγραφίσουμε την απόδειξη της συμπάγιας του εν λόγω τελεστή.
Έστω $x_n \in L^2([a,b])$ και $\|x_n\| \le M$ για $n = 1,2, \ldots$ και μερικά $M > 0$. Τότε

$$|(Tx_n)(s)| \le \int_a^b |K(s,t)\,x_n(t)|\,dt \le M \max |K(s,t)| \sqrt{b-a},$$

και έτσι η ακολουθία (Tx_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Επιπλέον, $\forall s_1, s_2 \in [a,b]$, έχουμε

$$\begin{aligned} |(Tx_n)(s_1) - (Tx_n)(s_2)| &\le \int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)|\,|x_n(t)|\,dt \\ &= \sqrt{\int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)|^2\,dt}\,\sqrt{\int_a^b |x_n(t)|^2\,dt} \\ &\le M\sqrt{b-a} \max_{t\in(a,b)} |K(s_1,t) - K(s_2,t)|. \end{aligned}$$

Επειδή ο K είναι ομοιόμορφα συνεχής, απο την τελευταία ανισότητα συνεπάγεται ότι η ακολουθία (Tx_n) είναι ισοσυνεχής. Ως εκ τούτου, από Θεώρημα Arzela, η (Tx_n) περιέχει μία ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία. Αυτό αποδεικνύει ότι η T είναι συμπαγής, γιατί η ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[a, b]$ συνεπάγεται σύγκλιση στο $L^2([a,b])$.

Παράδειγμα 1.7.5. Έστω S ένας πεπερασμένης διαστάσεως υπόχωρος του χώρου Hilbert H. Ο τελεστής προβολή P_S είναι ένας συμπαγής τελεστής.

Θεώρημα 1.7.2. Η κλάση όλων των συμπαγών τελεστών σε ένα χώρο Hilbert H είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Θεώρημα 1.7.3. Έστω A ένας συμπαγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H, και B είναι ένας φραγμένος τελεστής στον H. Τότε, οι AB και BA είναι συμπαγείς.

Απόδειξη. Έστω (x_n) είναι μια φραγμένη ακολουθία στον H. Επειδή ο B φραγμένος , η ακολουθία (Bx_n) είναι φραγμένη. Στη συνέχεια, από την συμπάγια του A, η ακολουθία (ABx_n) περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, πράγμα που σημαίνει ότι ο τελεστής AB είναι συμπαγής. Ομοίως, δεδομένου ότι ο A είναι συμπαγής, η ακολουθία (Ax_n) περιέχει μια
συγκλίνουσα υπακολουθία (Ax_{P_n}). Τώρα, εφόσον ο B είναι φραγμένος (και ως εκ τούτου συνεχής), η ακολουθία (BAx_{P_n}) συγκλίνει. Ως εκ τούτου, ο τελεστής BA είναι συμπαγής.

Ο τελεστής που ορίστηκε στο παράδειγμα 1.7.5 είναι μια ειδική περίπτωση ενός πεπερασμένης διαστάσης τελεστή.

Ορισμός 1.7.2 (Πεπερασμένης διαστάσης τελεστής). Ένας τελεστής καλείται πεπερασμένης διάστασης αν το σύνολο τιμών του είναι πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 1.7.4. Οι πεπερασμένης διαστάσης φραγμένοι τελεστές είναι συμπαγείς.

Απόδειξη. Έστω *A* ένας πεπερασμένης διαστάσης φραγμένος τελεστής και έστω $\{ z_1,\dots,z_k \}$ είναι μια ορθοκανονική βάση στο σύνολο αφήξεως του *A*. Ορίζουμε

$$T_n x = \langle Ax, z_n \rangle z_n \quad , \text{για } n = 1 ,\dots, k.$$

Όμως

$$T_n x = \langle Ax, z_n \rangle z_n = \langle x, A^* z_n \rangle z_n ,$$

άρα οι τελεστές T_n είναι συμπαγείς, όπως αποδείχθηκε στο Παράδειγμα 1.7.3. Ακόμη

$$A = \sum_{n=1}^{k} T_n ,$$

Συνεπώς ο *A* είναι συμπαγής, από το Θεώρημα 1.7.2.

Θεώρημα 1.7.5. Εάν T_1, T_2 , ... είναι συμπαγείς τελεστές σε έναν χώρο Hilbert *H* και $\| T_n\text{-}T \| \to 0$ καθώ $n \to \infty$ για κάποιο τελεστή *T* στον *H*, τότε ο *T* είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Έστω (x_n) είναι μια φραγμένη ακολουθία στο *H*. Δεδομένου ότι ο T_1 είναι συμπαγής, υπάρχει μια υπακολουθία $(x_{1.n})$ της (x_n), έτσι ώστε η $(T_1 x_{1.n})$ είναι συγκλίνουσα. Ομοίως, η ακολουθία $(T_2 x_{1.n})$ περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(T_2 x_{2.n})$. Σε γενικές γραμμές, για $k \geq 2$, θέτουμε $(x_{k.n})$ να είναι μια υπακολουθία της $(x_{k-1.n})$ τέτοια ώστε η $(T_k x_{k.n})$ να είναι συγκλίνουσα. Θεωρούμε την ακολουθία $(x_{n.n})$. Δεδομένου ότι είναι μια υπακολουθία της (x_n), μπορούμε να θέσουμε $x_{Pn} = x_{n.n}$, όπου (P_n) είναι μια αυξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων. Προφανώς, η ακολουθία $(T_k x_{Pn})$ συγκλίνει $\forall\ k \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι και η ακολουθία $(T x_{Pn})$ συγκλίνει.
Έστω $\varepsilon > 0$. Δεδομένου ότι $\| T_n\text{-}T \| \to 0$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο που $\| T_k\text{-}T \| < \varepsilon/3M$, όπου *M* είναι μια σταθερά τέτοια ώστε $\|x_n\| \leq M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Ακολούθως, θέτουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ να είναι τέτοιο ώστε

$$\|T_k x_{Pn} - T_k x_{Pm}\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{για όλα τα } n,\ m > k_1 .$$

Τότε

$$\|Tx_{Pn} - Tx_{Pm}\| \leq \|Tx_{Pn} - T_k x_{Pm}\| + \|T_k x_{Pm} - Tx_{Pm}\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

για αρκετά μεγάλο n και m. Έτσι, η (Tx_{P_n}) είναι μια ακολουθία Cauchy στο H.
Η πληρότητα του H σημαίνει ότι η (Tx_{P_n}) συγκλίνει.

Πόρισμα 1.7.1. Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας των πεπερασμένης διαστάσης τελεστών είναι ένας συμπαγής τελεστής.

Απόδειξη. Οι πεπερασμένης διαστάσης τελεστές είναι συμπαγείς.

Θεώρημα 1.7.6. Ο συζυγής ένος συμπαγούς τελεστή είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Έστω T ένας συμπαγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H και (x_n) είναι μια φραγμένη ακολουθία στον Η, δηλαδή, $\|x_n\| \le M$ για κάποια M για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.
Ορίζουμε $y_n = T^* x_n$, n = 1,2,.... Δεδομένου ότι ο T^* φραγμένος, η ακολουθία (y_n) είναι φραγμένη. Περιέχει έτσι μια υπακολουθία (y_{k_n}), τέτοια ώστε η ακολουθία (Ty_{k_n}) συγκλίνει στον H. Τώρα, $\forall\ m,n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\left\|y_{k_m} - y_{k_n}\right\| &= \left\|T^* x_{k_m} - T^* x_{k_n}\right\|^2 \\
&= \left\langle T^*\left(x_{k_m} - x_{k_n}\right), T^*\left(x_{k_m} - x_{k_n}\right)\right\rangle \\
&= \left\langle TT^*\left(x_{k_m} - x_{k_n}\right), \left(x_{k_m} - x_{k_n}\right)\right\rangle \\
&\le \left\|TT^*\left(x_{k_m} - x_{k_n}\right)\right\|\left\|x_{k_m} - x_{k_n}\right\| \\
&\le 2M\left\|Ty_{k_m} - Ty_{k_n}\right\| \to 0
\end{aligned}
$$

Καθώς m , n $\to \infty$. Ως εκ τούτου, η (y_{k_n}) είναι μια ακολουθία Cauchy στον H, πράγμα που σημαίνει ότι η (y_{k_n}) συγκλίνει. Αυτό αποδεικνύει ότι ο T^* είναι ένας συμπαγής τελεστής.

Στο επόμενο θεώρημα, μελετούμε την συμπάγεια των τελεστών όσον αφορά τις ασθενώς συγκλίνουσες ακολουθίες. Υπενθυμίζουμε ότι γράφουμε "$x_n \to x$" για να δηλώσουμε ισχυρή σύγκλιση και "$x_n \xrightarrow{w} x$" για να δηλώσουμε ασθενή σύγκλιση.

Θεώρημα 1.7.7. Ένας τελεστής T σε ένα χώρο Hilbert H είναι συμπαγής αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{w} x$ που συνεπάγεται $Tx_n \to Tx$.

Απόδειξη. Έστω Τ ένας συμπαγής τελεστής. Ας υποθέσουμε ότι $x_n \xrightarrow{w} x$ και έστω ότι $Tx_n \not\to Tx$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και μια υπακολουθία (x_{p_n}) της (x_n) έτσι ώστε

$$\left\| Tx_{p_n} - Tx \right\| > \varepsilon \tag{1.7.1}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Δεδομένου ότι η ακολουθία (x_{p_n}) είναι ασθενώς συγκλίνουσα, είναι φραγμένη. Η Συμπάγεια του T σημαίνει ότι η ακολουθία (Tx_{p_n}) έχει υσχηρά συγκλίνουσα υπακολουθία (Tx_{q_n}). Από την άλλη πλευρά, $\forall\, y \in H$ έχουμε

$$\langle Tx_n, y\rangle = \langle x_n, T^* y\rangle \to \langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

έτσι ώστε $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$, καθώς και $Tx_{q_n} \xrightarrow{w} Tx$. Από τη στιγμή που ήδη γνωρίζουμε ότι η ακολουθία (Tx_{q_n}) είναι ισχυρά συγκλίνουσα, συνεπάγεται ότι $Tx_{q_n} \to Tx$. Αλλά αυτό έρχεται σε αντίθεση με την (1.7.1).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο T είναι τέτοιος που $Tx_n \to Tx$ όποτε $x_n \xrightarrow{w} x$. Έστω (z_n) είναι μια αυθαίρετη φραγμένη ακολουθία στον *H*. Θέλουμε να δείξουμε ότι η (Tz_n) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω (e_n) είναι μια πλήρης ορθοκανονική ακολουθία στον *H* και έστω M είναι μια σταθερά τέτοια ώστε $\|z_n\| \le M$ για όλους τους $n \in \mathbb{N}$. Δεδομένου ότι

$$|z_n, e_1| \le M,$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία (z_n) έχει μια υπακολουθία ($z_{1.n}$) έτσι ώστε η ακολουθία ($\langle z_{1.n}, e_1\rangle$) να συγκλίνει. Ομοίως, δεδομένου ότι

$$|\langle z_{1.n}, e_2\rangle| \le M,$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία ($z_{1.n}$) έχει μια υπακολουθία ($z_{2.n}$) έτσι ώστε η ακολουθία ($\langle z_{2.n}, e_2\rangle$) να συγκλίνει. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, κατασκευάζουμε ακολουθίες ($z_{m.n}$), $m = 1,2,3$,..., τέτοιες που

(1) ($z_{m+1.n}$) είναι μια υπο-ακολουθία της ($z_{m.n}$) $\forall\ m \in \mathbb{N}$, και

(2) το όριο $\lim_{n\to\infty}\langle z_{m.n}, e_m\rangle$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$.

Τώρα ορίζουμε

$$x_n = z_{n.n} \quad \text{n} = 1, 2, \ldots.$$

Σαφώς, η (x_n) είναι μια υπακολουθία της (z_n) και το όριο $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, e_m\rangle$ υπάρχει $\forall\ m \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε ότι η (x_n) είναι ασθενώς συγκλίνουσα. Ορίζουμε

$$a_k = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, e_k\rangle \quad k = 1,2,\ldots$$

Για οποιαδήποτε *l*, *n* $\in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{l} |\langle x_n, e_k\rangle|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x_n, e_k\rangle|^2 = \|x_n\|^2 \le M^2.$$

Και θέτωντας πρώτα $n \to \infty$, παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{l} |a_k|^2 \le M^2,$$

και στη συνέχεια, θέτωντας $l \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \le M^2.$$

Ορίζουμε

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

Ακολούθως, $\forall\ m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle x_n, e_m \rangle - \langle z, e_m \rangle &= \langle x_n, e_m \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, e_m \right\rangle \\ &= \langle x_n, e_m \rangle - \langle a_m e_m, e_m \rangle \\ &= \langle x_n, e_m \rangle - a_m \to 0 \quad \text{καθώς } n \to \infty \end{aligned}$$

Έτσι, $\langle x_n, e_m \rangle \to \langle z, e_m \rangle$ καθώς $n \to \infty \quad \forall\ m \in \mathbb{N}$. Δεδομένου ότι η γραμμική θήκη $\{e_1, e_2, ...\}$ είναι πυκνή στον H, έπεται ότι $x_n \xrightarrow{w} z$,. Ως εκ τούτου, $Tx_n \to Tz$.

Πόρισμα 1.7.2. Αν ο T είναι ένας συμπαγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H και η (x_n) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία στον H, τότε $\lim_{n\to\infty} Tx_n = 0.$.

Απόδειξη. Ορθοκανονικές ακολουθίες είναι ασθενώς συγκλίνουσες στο 0.

Σημειώνουμε ότι από το παραπάνω θεώρημα, προκύπτει ότι ο αντίστροφος ενός συμπαγούς τελεστή σε ένα απειροδιάστατο χώρο Hilbert, αν υπάρχει, δεν είναι φραγμένος. Έχει ήδη σημειωθεί ότι η συμπάγεια των τελεστών είναι ισχυρότερη κατάσταση από ότι της ένοιας του φραγμένου. Για τους τελεστές, κατάσταση φραγμένου είναι ισοδύναμη με τη συνέχεια: φραγμένοι τελεστές είναι ακριβώς εκείνοι οι τελεστές οι οποίοι αντιστοιχούν ισχυρά συγκλίνουσες ακολουθίες σε ισχυρά συγκλίνουσες ακολουθίες. Το Θεώρημα 1.7.7 λέει ότι συμπαγείς τελεστές σε ένα χώρο Hilbert μπορεί να χαρακτηριστούν ως οι τελεστές οι οποίοι αντιστοιχούν ασθενώς συγκλίνουσες ακολουθίες σε ασθενώς συγκλίνουσες ακολουθίες. Από αυτή την άποψη, η συμπάγεια των τελεστών είναι ένα ισχυρότερο είδος συνέχειας. Για το λόγο αυτό οι συμπαγείς τελεστές ονομάζεται μερικές φορές πλήρως συνεχείς τελεστές. Η παραπάνω συνθήκη έχει χρησιμοποιηθεί από τον F. Riesz ως τον ορισμό των συμπαγών τελεστών. Ο Hilbert έχει χρησιμοποιήσει ακόμα ένα άλλο (ισοδύναμο) ορισμό των συμπαγών τελεστών: Ο τελεστής A που ορίζεται σε ένα χώρο Hilbert H είναι συμπαγής, αν:

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ και } y_n \xrightarrow{w} y \ \Rightarrow\ \langle Ax_n, y_n \rangle \to \langle Ax, y \rangle.$$

1.8 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Οι Έννοιες που θα αναφερθούν σε αυτό το τμήμα διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στη θεωρία των τελεστών και των εφαρμογών τους. Πρώτα πρέπει να εισαγάγουμε έναν αριθμό νέων ιδεών.

Ορισμός 1.8.1 (ιδιοτιμή). Έστω A ένας τελεστής σε ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο *E*. Ένας μιγαδικός αριθμός λ ονομάζεται ιδιοτιμή του *A*, αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $u \in E$ τέτοιο ώστε

$$Au = \lambda u\ . \tag{1.7.1}$$

Κάθε διάνυσμα *u* που ικανοποιεί την (1.7.1) ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα του *A* που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή *λ*. Αν E είναι ένας χώρος συναρτήσεων, τα ιδιοδιανύσματα συχνά καλούνται ιδιοσυναρτήσεις.

Παράδειγμα 1.8.1. Έστω *S* ένας γραμμικός υπόχωρος ενός χώρου εσωτερικού γινομένου E και έστω A η προβολή στον *S*. Τα μόνα ιδιοδανύσματα του A είναι τα 0 και 1. Πράγματι, αν, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$ και $0 \neq u \in E$, έχουμε $Au = \lambda u$, τότε

$$\lambda u = \lambda^2 u,$$

δεδομένου ότι $A^2 = A$. Ως εκ τούτου, λ = 0 ή λ = 1. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο 0 είναι τα διανύσματα του E που είναι ορθογώνια στο *S*. Το ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο 1 είναι όλα τα στοιχεία του *S*.
Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχεί σε ακριβώς μια ιδιοτιμή, αλλά υπάρχουν πάντα απείρως πολλά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μία ιδιοτιμή. Πράγματι, κάθε πολλαπλάσιο ενός ιδιοδιανύσματος είναι ιδιοδιάνυσμα. Επιπλέον, αρκετά γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα μπορεί να αντιστοιχού στην ίδια ιδιοτιμή. Έχουμε λοιπόν το εξής απλό θεώρημα:

Θεώρημα 1.8.1. Η κλάση όλων των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή ενός τελεστή είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Ορισμός 1.8.2 (Ιδιόχωρος). Το σύνολο όλων των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή *λ* ονομάζεται *ιδιόχωρος* του *λ*. Η διάσταση του χώρου αυτού ονομάζεται *πολλαπλότητα* της λ. Μια ιδιοτιμή της πολλαπλότητας ένα ονομάζεται απλά ή *μη εκφυλισμένη*. Μια ιδιοτιμή της πολλαπλότητας που υπερβαίνει το ένα ονομάζεται *πολλαπλή* ή *εκφυλισμένη*. Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων ονομάζεται επίσης *βαθμός εκφυλισμού*.

Παράδειγμα 1.8.2. Θεωρούμε έναν ολοκληρωτικό τελεστή $A : L^2\left(\left[0,2\pi\right]\right) \to L^2\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ που ορίζεται από την

$$\left(Au\right)\left(t\right) = \int_0^{2\pi} \cos\left(t-y\right) \mathrm{u}\left(y\right) \mathrm{dy}\ . \tag{1.8.2}$$

Θα δείξουμε ότι ο *A* έχει ακριβώς μία μη μηδενική ιδιοτιμή λ = *π*, και τα ιδιοδιανυσματά της είναι

$$u\,(t) = acost + \; bsint$$

με αυθαίρετα τα α και b.
Η εξίσωση ιδιοτιμών είναι

$$(Au)(t) = \int_0^{2\pi} \cos(t-y)\mathrm{u}(y)\,\mathrm{dy} = \lambda \mathrm{u}(t)$$

ή

$$\cos t \int_0^{2\pi} \cos y \mathrm{u}(y)\,\mathrm{dy} + \sin t \int_0^{2\pi} \sin y \mathrm{u}(y)\,\mathrm{dy} = \lambda \mathrm{u}(t). \quad (1.8.3)$$

Αυτό σημαίνει ότι, για $\lambda \neq 0$, το *u* είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των συνημιτονικών καιτων ιμητονικών συναρτήσεων, δηλαδή,

$$u\,(t) = acost + bsint, \quad (1.8.4)$$

Όπου $\alpha, b \in \mathbb{C}$. Αντικαθιστώντας αυτό στην (A.9.3), παίρνουμε

$$\pi\alpha = \lambda\alpha \;\; \text{και} \;\; \pi b = \lambda b. \quad (1.8.5)$$

Ως εκ τούτου, *λ* = *π*, γεγονός που σημαίνει ότι ο *A* έχει ακριβώς μια μη μηδενική ιδιοτιμή και οι ιδιοσυναρτήσεις της δίνονται από την (1.8.4). Αυτός είναι ένας δισδιάστατος ιδιοχώρος, τέτοιος που η πολλαπλότητα των ιδιοτιμών είναι 2.
Η εξίσωση (1.8.3) αποκαλύπτει ότι η *λ* = 0 είναι επίσης μια ιδιοτιμή του *A*. Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι όλες ορθογώνιες του *cos t* και *sin t*. Ως εκ τούτου, η *λ* = 0 είναι μια ιδιοτιμή άπειρης πολλαπλότητας.

Σημειώνουμε ότι, αν το *λ* δεν είναι ιδιοτιμή του *A*, τότε ο τελεστής *A* - *λI* είναι αντιστρέψιμος, και αντιστρόφως. Αν ο *E* είναι πεπερασμένης διαστάσεως και το *λ* δεν είναι ιδιοτιμή του *A*, τότε ο τελεστής $(A-\lambda \mathrm{I})^{-1}$ είναι φραγμένος, επειδή όλοι οι τελεστές σε ένα πεπερασμένης διαστάσεως χώρο, είναι φραγμένοι. Η αυτή κατάσταση για απειροδιάστατους χώρους είναι πιο περίπλοκη .

Ορισμός 1.8.3 (Επιλύων, Φασμα). Έστω *A* ένας τελεστής σε ένα χώρο νόρμας *E*. Ο τελεστής

$$A_\lambda = (A-\lambda \mathrm{I})^{-1}$$

καλείται *επιλύων* του *A*. Οι τιμές *A* για τις οποίες ο A_λ ορίζεται στο σύνολο του χώρου *E* και είναι φραγμένος καλούνται *ομαλά σημεία* του A. Το σύνολο όλων αυτων των *λ* που δεν είναι ομαλά ονομάζεται το *φάσμα* του *A*.

Κάθε ιδιοτιμή ανήκει στο φάσμα. Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι το φάσμα μπορεί να περιέχει σημεία που δεν είναι ιδιοτιμές. Στην πραγματικότητα, ένα μη κενό του φάσμα μπορεί να μην περιέχει ιδιοτιμές καθόλου.

Παράδειγμα 1.8.3. ‘Εστω Ε είναι ο χώρος $\mathcal{C}([a, b])$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$. Για ένα σταθερό $u \in \mathcal{C}([a, b])$, θεωρούμε τον τελεστή A, που ορίζεται ως:

$$(Ax)(t) = u(t)x(t).$$

Επειδή

$$\left(A - \lambda \mathrm{I}\right)^{-1} \chi\left(t\right) = \frac{x(t)}{u(t) - \lambda},$$

το φάσμα των A αποτελείται από όλα τα λ τέτοια ώστε $\lambda - u(t) = 0$ για κάποιο $t \in [a,b]$. Αυτό σημαίνει ότι το φάσμα του A είναι ακριβώς το σύνολο τιμών της u. Αν $u(t) = c$ είναι μια σταθερή συνάρτηση, τότε η $\lambda = c$ είναι ιδιοτιμή του A. Από την άλλη πλευρά, αν u είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση, τότε ο A δεν έχει ιδιοτιμές. Το φάσμα των A σε μια τέτοια περίπτωση είναι το διάστημα $[u(\alpha), u(\beta)]$.

Το πρόβλημα της εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ονομάζεται πρόβλημα ιδιοτιμών. Ένα από τα βασικά κομμάτια των προβλημάτων ιδιοτιμών στη μηχανική είναι η θεωρία της ταλάντωσης συστημάτων. Η κατάσταση ενός συγκεκριμένου συστήματος σε μια δεδομένη στιγμή μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα στοιχείο $u(t) \in H$, όπου H είναι ο κατάλληλος χώρος Hilbert των συναρτήσεων. Η εξίσωση κίνησης στην κλασική μηχανική είναι

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au, \qquad (1.8.6)$$

όπου A είναι ένας τελεστής στον H. Εάν το σύστημα ταλαντεύεται, η χρονική εξάρτηση του u είναι ημιτονοειδής, τέτοια ώστε $u(t) = \upsilon \sin\omega t$, όπου υ είναι ένα σταθερό στοιχείο του H.Αν ο A είναι γραμμικός, τότε η (1.8.6) γίνεται

$$A\upsilon = \left(-\omega^2\right)\upsilon. \qquad (1.8.7)$$

Αυτό σημαίνει ότι το $-\omega^2$ είναι ιδιοτιμή του A. Φυσικά, οι ιδιοτιμές του A αντιστοιχούν σε πιθανές συχνότητες των ταλαντώσεων. Σε ατομικά συστήματα, οι συχνότητες των ταλαντώσεων είναι ορατά ως φωτεινές γραμμές στο φάσμα του φωτός που εκπέμπουν. Έτσι, το όνομα φάσμα προέρχεται από τις θεωρήσεις της φυσικής.

Τα ακόλουθα θεωρήματα περιγράφουν τις ιδιότητες των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων για ορισμένες ειδικές κατηγορίες των τελεστών. Το ενδιαφέρον μας δίνεται στους αυτοσυζυγείς, στους ορθομοναδιαίους, και στους συμπαγείς τελεστες.

Θεώρημα 1.8.2. Έστω Τ ένας αντιστρέψιμος τελεστής σε ένα διανυσματικό χώρο Ε και A ένας τελεστής στον E. Οι τελεστές A και TAT^{-1} έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη. Έστω λ είναι μια ιδιοτιμή του A. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα u τέτοιο ώστε $Au = \lambda u$. Δεδομένου ότι ο T είναι αντιστρέψιμος, $Tu \neq 0$ και

$$TAT^{-1}\left(Tu\right)\upsilon = T\mathrm{A}u = T\left(\lambda u\right)=\lambda T\mathrm{u}.$$

Έτσι, το λ είναι μια ιδιοτιμή του TAT^{-1}.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το λ είναι μια ιδιοτιμή του TAT^{-1},δηλαδή $TAT^{-1}u = \lambda u$ για κάποιο μη μηδενικο διάνυσμα $u = Tu$. Δεδομένου ότι $AT^{-1}u = \lambda T^{-1}$ και $T^{-1}u \neq 0$, το λ είναι μια ιδιοτιμή του A.

Θεώρημα 1.8.3. Όλες οι ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγή τελεστή σε ένα χώρο Hilbert είναι πραγματικές.

Απόδειξη. Έστω λ είναι μια ιδιοτιμή ενός αυτοσυζυγή τελεστή A, και έστω το u να είναι ένα είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της λ , $u \neq 0$. Τότε

$$\lambda\left\langle u,u\right\rangle = \left\langle \lambda u,u\right\rangle = \left\langle Au,u\right\rangle = \left\langle u,Au\right\rangle = \left\langle u,\lambda u\right\rangle = \overline{\lambda}\left\langle u,u\right\rangle.$$

Και επειδή $\left\langle u,u\right\rangle > 0$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα $\lambda = \overline{\lambda}$.

Θεώρημα 1.8.4. Όλες οι ιδιοτιμές ενός θετικού τελεστή είναι μη αρνητικές. Όλες οι ιδιοτιμές ενός αυστηρά θετικού τελεστή είναι θετικές.

Απόδειξη. Έστω A ένας θετικός τελεστής, και ας $Ax = \lambda x$ για κάποια $x \neq 0$. Δεδομένου ότι ο A είναι αυτοσυζυγής, έχουμε

$$0 \le \left\langle Ax,x\right\rangle = \lambda\left\langle x,x\right\rangle = \lambda\left\|x\right\|^2. \tag{1.8.8}$$

Έτσι, $\lambda > 0$. Η απόδειξη του δεύτερου μέρους του θεωρήματος προκύπτει από τον αντικατάσταση του " $\le$" από το "<" στην (1.8.8).

Θεώρημα 1.8.5. Όλες οι ιδιοτιμές, ενός ορθομοναδιαίου τελεστή σε ένα χώρο Hilbert είναι μιγαδικοί αριθμοί μέτρου 1.

Απόδειξη. Έστω λ είναι μια ιδιοτιμή ενός ορθομοναδιαίου τελεστή A, και το u να είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της λ, $u \neq 0$. Τότε

$$\left\langle Au,Au\right\rangle = \left\langle \lambda u,\lambda u\right\rangle = \left|\lambda\right|^2\left\|u\right\|^2.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\left\langle Au,Au\right\rangle = \left\langle u,A^*Au\right\rangle = \left\langle u,u\right\rangle = \left\|u\right\|^2.$$

Έτσι, $|\lambda| = 1$.

Θεώρημα 1.8.6. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγή τελεστή ή ενός ορθομοναδιαίου τελεστή σε ένα χώρο Hilbert είναι ορθογώνια.

Απόδειξη. Έστω A είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής και u_1 και u_2 είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, δηλαδή, $Au_1 = \lambda_1 u_1$ και $Au_2 = \lambda_2 u_2$,

$\lambda_1 \neq \lambda_2$. Απο το θεώρημα 1.8.3, οι λ_1 και λ_2 είναι πραγματικές. Τότε

$$\lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle = \langle Au_1, u_2 \rangle = \langle u_1, Au_2 \rangle = \langle u_1, \lambda_2 u_2 \rangle = \overline{\lambda_2} \langle u_1, u_2 \rangle = \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle,$$

και ως εκ τούτου

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1, u_2 \rangle = 0.$$

Και επειδή $\lambda_1 \neq \lambda_2$, έχουμε $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$, δηλαδή, τα u_1 και u_2 είναι ορθογώνια.

Ας υποθέσουμε τώρα A είναι ένας ορθομοναδιαίος τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε $AA^* = A^*A\_ = I$ και $\|Au\| = \|u\|$ για όλα τα $u \in H$. Κατ 'αρχάς, σημειώνουμε ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$ συνεπάγεται $\lambda_1 \overline{\lambda_2} \neq 1$. Πράγματι, αν $\lambda_1 \overline{\lambda_2} = 1$, τότε

$$\lambda_2 = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \lambda_2 = \lambda_1 |\lambda_2|^2 = \lambda_1,$$

επειδή $|\lambda_2| = 1$, από Θεώρημα 1.8.5 τώρα,

$$\lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle u_1, u_2 \rangle = \langle \lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2 \rangle = \langle Au_1, Au_2 \rangle = \langle u_1, A^* Au_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Δεδομένου ότι $\lambda_1 \overline{\lambda_2} \neq 1$, , θα έχουμε $\langle u_1, u_2 \rangle = 0,$ πράγμα που αποδεικνύει ότι τα ιδιοδιανύσματα u_1 και u_2 είναι ορθογώνια.

Θεώρημα 1.8.7. Για κάθε ιδιοτιμή λ ενός φραγμένου τελεστή A, έχουμε $|\lambda| \leq \|A\|.$

Απόδειξη. Έστω u ένα μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στο λ. Από την $Au = \lambda u$, έχουμε

$$\|\lambda u\| = \|Au\|,$$

και ως εκ τούτου

$$|\lambda| \|u\| = \|Au\| \leq \|A\| \|u\|.$$

Αυτό συνεπάγεται $|\lambda| < \|A\|$.

Αν οι ιδιοτιμές θεωρούνται σημεία στο μιγαδικό επίπεδο, το πιο πάνω αποτέλεσμα, λέει ότι όλες οι ιδιοτιμές ενός φραγμένου τελεστή A βρίσκονται μέσα σε κύκλο ακτίνας $\|A\|$.

Πόρισμα 1.8.1. Όλες οι ιδιοτιμές ενός φραγμένου αυτοσυζυγή τελεστή A ικανοποιούν την ανισότητα

$$|\lambda| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x \rangle|. \tag{1.8.9}$$

Η απόδειξη προκύπτει αμέσως από το θεώρημα 1.3.5.

Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε αν για οποιοδήποτε φραγμένο τελεστή A υπάρχει πάντα μία ιδιοτιμή λ τέτοια ώστε $|\lambda| = \|A\|$. Σε γενικές γραμμές, η απάντηση είναι αρνητική, αλλά είναι αλήθεια για τους συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές.

Θεώρημα 1.8.8. Αν A είναι ένας μη μηδενικός, συμπαγής, αυτοσυζυγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H, τότε έχει μια ιδιοτιμή λ ίση είτε με $\|A\|$ είτε με - $\|A\|$.

Απόδειξη. Έστω (u_n) είναι μια ακολουθία στοιχείων του H τέτοια που $\|u_n\|=1$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, και

$$\|Au_n\| \to \|A\| \text{ καθώς } n \to \infty \tag{1.8.10}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\left\|A^2u_n - \|Au_n\|^2 u_n\right\|^2 &= \left\langle A^2u_n - \|Au_n\|^2 u_n, A^2u_n - \|Au_n\|^2 u_n \right\rangle \\
&= \left\|A^2u_n\right\|^2 - 2\|Au_n\|^2 \left\langle A^2u_n, u_n \right\rangle + \|Au_n\|^4 \|u_n\|^2 \\
&= \left\|A^2u_n\right\|^2 - 2\|Au_n\|^2 \left\langle Au_n, Au_n \right\rangle + \|Au_n\|^4 \|u_n\|^2 \\
&= \left\|A^2u_n\right\|^2 - \|Au_n\|^4 \\
&\le \|A\|^2 \|Au_n\|^2 - \|Au_n\|^4 \\
&= \|Au_n\|^2 \left(\|A\|^2 - \|Au_n\|^2\right).
\end{aligned}$$

Και δεδομένου ότι η $\|Au_n\|$ συγκλίνει στη $\|A\|$ προκύπτει

$$\left\|A^2u_n - \|Au_n\|^2 u_n\right\| \to 0 \text{ καθώς το } n \to \infty \tag{1.8.11}$$

Ο τελεστής A^2 ,δηλαδή το γινόμενο δύο συμπαγών τελεστών, είναι επίσης συμπαγής. Ως εκ τούτου, υπάρχει μια υπακολουθία (u_{p_n}) της (u_n), έτσι ώστε η ($A^2u_{p_n}$) συγκλίνει.

Επειδη $\|A\| \neq 0$ το όριο μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\|A\|^2 \upsilon, \upsilon \neq 0$. Στη συνέχεια, $\forall \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\left\|\|A\|^2 \upsilon - \|A\|^2 u_{p_n}\right\| \le \left\|\|A\|^2 \upsilon - A^2u_{p_n}\right\| + \left\|A^2u_{p_n} - \|Au_{p_n}\|^2 u_{p_n}\right\| + \left\|\|Au_{p_n}\|^2 - \|A\|^2 u_{p_n}\right\|.$$

Έτσι, από την (1.8.10) και (1.8.11), έχουμε

$$\left\|\|A^2\|\upsilon - \|A\|^2 u_{p_n}\right\| \to 0 \text{ καθώς το } n \to \infty$$

ή

$$\left\|\|A\|^2 \left(\upsilon - u_{p_n}\right)\right\| \to 0 \qquad \text{καθώς το } n \to \infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία (u_{p_n}) συγκλίνει στο υ , και κατά συνέπεια

$$A^2\upsilon = \|A\|^2 \upsilon.$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως

$$\left(A - \|A\|I\right)\left(A + \|A\|I\right)\upsilon = 0.$$

Αν $w = \left(A + \|A\|I\right)\upsilon \neq 0,$ τότε $\left(A - \|A\|I\right)w = 0$, και έτσι η $\|A\|$ είναι μια ιδιοτιμή του A. Από την άλλη πλευρά, αν *w = 0,* τότε -$\|A\|$ είναι μια ιδιοτιμή του A.

Πόρισμα 1.8.2. Αν *A* είναι ένας μη μηδενικός συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert *H*, τότε υπάρχει ένα διάνυσμα *w* τέτοιο ώστε $\|w\|=1$ και

$$\left|\langle Aw,w\rangle\right| = \sup_{\|x\|\le 1}\left|\langle Ax,x\rangle\right|.$$

Απόδειξη. Έστω *w*, $\|w\|=1$, να είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή λ τέτοια ώστε $|\lambda|$ = $\|A\|$ Τότε

$$\left|\langle Aw,w\rangle\right| = \left|\langle \lambda w,w\rangle\right| = |\lambda|\|w\|^2 = |\lambda| = \|\mathrm{A}\| = \sup_{\|x\|\le 1}\left|\langle Ax,x\rangle\right|$$

από το Θεώρημα 1.3.5.
Το Θεώρημα 1.8.8 εγγυάται την ύπαρξη μίας τουλάχιστον μη μηδενικής ιδιοτιμής, αλλά όχι γενικότερα. Το πόρισμα δίνει μια χρήσιμη μέθοδο για την εύρεση τέτοιων ιδιοτιμών με τη μεγιστοποίηση ορισμένων τετραγωνικών εκφράσεων.

Θεώρημα 1.8.9. Το σύνολο των διακριτών μη μηδενικών ιδιοτιμών (λ_n) ενός αυτοσυζυγή συμπαγή τελεστή είναι είτε πεπερασμένο είτε $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο *A* είναι ένας αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής που έχει απείρως πολλές διακριτές ιδιοτιμές λ_n , $n\in\mathbb{N}$. Έστω u_n είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στο λ_n τέτοιο ώστε $\|u_n\|$= 1. Από το Θεώρημα 1.8.6, η (u_n) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία. Δεδομένου ότι οι ορθοκανονικές ακολουθίες είναι ασθενώς συγκλίνουσες στο 0, από το Θεώρημα 1.8.7 συνεπάγεται

$$0 = \lim_{n\to\infty}\|Au_n\|^2 = \lim_{n\to\infty}\langle Au_n, Au_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \lambda_n u_n, \lambda_n u_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\lambda_n^{\ 2}\|u_n\|^2 = \lim_{n\to\infty}\lambda_n^{\ 2}.$$

Παράδειγμα 1.8.4. Θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός τελεστή *A* στον $L^2([0,2\pi])$ που ορίζεται από την

$$(Au)(x) = \int_0^{2\pi} k(x-t)u(t)\,dt,$$

όπου *k* είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο [0,2π]. Για μία δοκιμαστική λύση παίρνουμε

$$u_n(x) = e^{inx}$$

και σημειώνουμε ότι

$$(Au_n)(x) = \int_0^{2\pi} k(x-t)e^{inx}dt = e^{inx}\int_{x-2\pi}^{x} k(s)e^{ins}ds.$$

Έτσι,

$$Au_n = \lambda_n u_n \quad n \in \mathbb{Z},$$

όπου

$$\lambda_n = \int_0^{2\pi} k(s) e^{ins} ds .$$

Το σύνολο των συναρτήσεων $\{u_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι ένα πλήρες ορθογώνιο σύστημα στον $L^2([0,2\pi])$. Σημειώνουμε ότι ο A είναι αυτοσυζυγής, αν $k(x) = k(-x)$ για όλα τα x, αλλά η ακολουθία των ιδιοσυναρτήσεων είναι πλήρης ακόμη και αν ο A δεν είναι αυτοσυζυγής.

Θεώρημα 1.8.10. Ας (P_n) είναι μια ακολουθία από ζεύγη ορθογώνιων τελεστών προβολή σε ένα χώρο Hilbert H και έστω (λ_n) είναι μια ακολουθία αριθμών τέτοια ώστε $\lambda_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Τότε

(α) Η $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ συγκλίνει στον $\mathcal{B}(H,H)$ και ως εκ τούτου ορίζει έναν φραγμένο τελεστή.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το λ_n είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$,
και η μόνη άλλη πιθανή ιδιοτιμή του A είναι 0.

(γ) Εάν όλα τα λ_n είναι πραγματικά, τότε ο A είναι αυτοσυζυγής.

(δ) Αν όλες οι προβολές P_n είναι πεπερασμένης διαστάσης, τότε ο A είναι συμπαγής.

Απόδειξη, (α) Σύμφωνα με την πληρότητα του $\mathcal{B}(H,H)$ αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ είναι μια ακολουθία Cauchy. Έστω ε μια αυθαίρετη θετική ποσότητα. Δεδομένου ότι $\lambda_n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\lambda_n| < \varepsilon$ $\forall$ n $> n_0$. Για κάθε $x \in H$ και κάθε $k,m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $n_0<k<m$, έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=k}^{m} \lambda_n P_n x\right\|^2 &= \sum_{n=k}^{m} \|\lambda_n P_n x\|^2 = \sum_{n=k}^{m} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2 \\ &\le \varepsilon^2 \sum_{n=k}^{m} \|P_n x\|^2 = \varepsilon^2 \left\|\sum_{n=k}^{m} P_n x\right\|^2 \le \varepsilon^2 \left\|\sum_{n=k}^{m} P_n\right\|^2 \|x\|^2 ,\end{aligned} \tag{1.8.12}$$

όπου οι πρώτες και οι τελευταίες ισότητες προκύπτουν από την ορθογωνιότητα των προβολών P_n. Το άθροισμα $\sum_{n=k}^{m} P_n$, ώντας ένα πεπερασμένο άθροισμα τελεστών προβολή, είναι ένας τελεστής προβολή και η νόρμα του είναι 1. Έτσι, η (1.8.12) δίνει

$$\left\|\sum_{n=k}^{m} \lambda_n P_n\right\| = \sup_{\|x\|=1} \left\|\sum_{n=k}^{m} \lambda_n P_n x\right\| \le \varepsilon,$$

για οποιαδήποτε $n_0<k<m$, αποδεικνύοντας ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$\sum_{n=k}^{m} \lambda_n P_n$ είναι μια ακολουθία Cauchy.

(β) Συμβολίζουμε το σύνολο αφίξεως των P_n με $\mathcal{R}(P_n)$ και έστω $n_0 \in \mathbb{N}$. Εάν u $\in$ R (P_{n_0}), τότε $P_{n_0} u = u$ και $P_n u = 0$ για όλα τα $n \neq n_0$, επειδή οι προβολές P_n είναι ορθογώνιες. Έτσι,

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n u = \lambda_{n_0} u,$$

η οποία δείχνει ότι λ_{n_0} είναι μια ιδιοτιμή του A.

Για να αποδείξει ότι δεν υπάρχουν άλλες μη μηδενικές ιδιοτιμές, ας υποθέσουμε ότι u είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Θέτουμε $\upsilon_n = P_n u$, n = 1,2 ,..., και έστω $w = Qu$, όπου Q είναι η προβολή, στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\mathcal{R}(A)$. Τότε

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n + w, \tag{1.8.13}$$

με $w \perp \mathcal{R}(P_n)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Σαφώς,

$$A\left(\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n + w\right) = A\left(\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A\upsilon_n,$$

δεδομένου ότι $P_n w = 0$ και ο A είναι συνεχής. Συνεπώς, η εξίσωση ιδιοτιμών μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \upsilon_n = \lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n + w\right)$$

ή

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n)\upsilon_n + \lambda w = 0. \tag{1.8.14}$$

Δεδομένου ότι όλα τα διανύσματα στην (1.8.14) είναι ορθογώνια, το άθροισμα μοιδενίζεται μόνο αν κάθε όρος μηδενίζεται. Ως εκ τούτου, $\lambda w = 0$, και $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ είτε $\lambda = \lambda_n$ είτε $\upsilon_n = 0$. Τέλος, εάν το u στην (1.8.13) είναι ένα μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα, τότε, είτε $w \neq 0$ είτε $\upsilon_k \neq 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Ως εκ τούτου, $\lambda = 0$ ή $\lambda = \lambda_k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, από την (1.9.14).

(γ) Ας υποθέσουμε ότι όλα τα λ_n είναι πραγματικά. Δεδομένου ότι οι προβολές είναι αυτόσυζυγείς τελεστές, $\forall x, y \in H$, έχουμε

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \lambda_n P_n x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle P_n x, y\rangle =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \langle x, P_n y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \lambda_n P_n y\rangle = \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n y\right\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

(δ) Σε περίπτωση που όλες οι προβολές P_n είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε ο A είναι συμπαγής από το πόρισμα 1.7.1.

Ορισμός 1.8.4 (Κατά προσέγγιση ιδιοτιμή). Έστω T ένας τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H. Η σταθερά λ καλείται *κατα προσέγγιση ιδιοτιμή* του T αν υπάρχει μια ακολουθία διανυσμάτων (x_n), έτσι ώστε $\|x_n\| = 1$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Προφανώς, κάθε ιδιοτιμή είναι μια κατα προσέγγιση ιδιοτιμή.

Παράδειγμα 1.8.5. Έστω (e_n) είναι μια πλήρης ορθοκανονική ακολουθία σε ένα χώρο Hilbert H. Έστω λ_n να είναι μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία σταθερών όρων που συγκλίνει σε κάποιο λ. Ορίζουμε ένα τελεστή στον H από την

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε λ_n, είναι μια ιδιοτιμή του T, αλλά *το* λ δεν είναι. Από την άλλη πλευρά.

$$\|Te_n - \lambda e_n\| = \|\lambda_n e_n - \lambda e_n\| = \|(\lambda_n - \lambda) e_n\| = |\lambda_n - \lambda| \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Έτσι, το λ είναι μια κατα προσέγγιση ιδιοτιμή του T. Σημειώνουμε ότι το ίδιο ισχύει και αν υποθέσουμε ότι $\lambda_n \to \lambda$ και $\lambda_n \neq \lambda$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

1.9. Φασματική ανάλυση

Έστω H ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος Hilbert, δηλαδή $H = \mathbb{C}^N$. Είναι γνωστό από την γραμμική άλγεβρα ότι τα ιδιοδιανύσματα ενός αυτοσυζυγή τελεστή στον H αποτελούν μια ορθογώνια βάση του H. Τα παρακάτω θεωρήματα γενικεύουνε αυτό το αποτέλεσμα σε απειροδιάστατους χώρους.

Θεώρημα 1.9.1 (Hilbert-Schmidt θεώρημα). Για κάθε αυτοσυζυγή, συμπαγή τελεστή A σε ένα απειροδιάστατο χώρο Hilbert H, υπάρχει ένα ορθοκανονικό σύστημα ιδιοδιανυσμάτων(u_n) που αντιστοιχούν σε μη μηδενικές ιδιοτιμές (λ_n) έτσι ώστε κάθε στοιχείο $x \in H$ να έχει μια μοναδική αναπαράσταση της μορφής

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n + \upsilon, \tag{1.9.1}$$

όπου $a_n \in \mathbb{C}$ και το υ ικανοποιεί την εξίσωση $A\upsilon = 0$. Αν ο A έχει απείρως πολλές διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ...$, τότε $\lambda_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.8.8 και το Πόρισμα 1.8.2, υπάρχει μια ιδιοτιμή λ_1 του A τέτοια ώστε

$$|\lambda_1| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

Έστω u_1 είναι ένα κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στο λ_1. Θέτουμε

$$Q_1 = \{ \, x \in H : x \perp u_1 \, \},$$

δηλαδή, Q_1 είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του συνόλου $\{ u_1 \}$. Έτσι, το Q_1 είναι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του *H*. Αν $x \in Q_1$, τότε

$$\langle Ax, u_1 \rangle = \langle x, Au_1 \rangle = \lambda \langle x, u_1 \rangle = 0 \, ,$$

πράγμα που σημαίνει ότι $x \in Q_1$ συνεπάγεται $Ax \in Q_1$. Ως εκ τούτου, ο A απεικονέζει το χώρο Hilbert Q_1 στον εαυτό του. Μπορούμε να εφαρμόσουμε και πάλι το Θεώρημα 1.8.8 και το Πόρισμα 1.8.2 με Q_1 , στη θέση του *H*. Αυτό δίνει μια ιδιοτιμή λ_2, τέτοια ώστε

$$|\lambda_2| = \sup_{\|x\|\leq 1} \left\{ |\langle Ax, x\rangle| \; : x \in Q_1 \right\}$$

Έστω u_2 είναι ένας κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα του λ_2. Σαφώς, $u_1 \perp u_2$. Στη συνέχεια θέτουμε

$$Q_2 = \{x \in Q_2 : \; x \perp u_2 \}$$

και επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία. Έχοντας ιδιοτιμές Μια $\lambda_1, ..., \lambda_n$, και τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα $u_1, ..., \; u_n$, ορίζουμε

$$Q_n = \{x \in Q_{n-1} \; : \; x \perp u_n \}$$

και επιλέγουμε μια ιδιοτιμή λ_{n+1} τέτοια ώστε

$$|\lambda_{n+1}| = \sup_{\|x\|\leq 1} \left\{ |\langle Ax, x\rangle| \; : x \in Q_n \right\} | \tag{1.9.2}$$

Για u_{n+1} επιλέγουμε ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο λ_{n+1}.
Αυτή η διαδικασία μπορεί να τερματίσει μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Πράγματι, μπορεί να συμβεί και υπάρχει ένας θετικός ακέραιος *k* τέτοιος ώστε $\langle Ax, x \rangle = 0$ $\forall \;\; x \in Q_k$. Στη συνέχεια, κάθε στοιχείο *x* του *H* έχει μια μοναδική αναπαράσταση

$$x = a_1 u_1 + ... + a_k u_k + \upsilon ,$$

όπου $A\upsilon = 0$, και

$$\mathrm{A}x = \lambda_1 a_1 u_1 + ... + \lambda_\kappa a_k u_k + \upsilon ,$$

γεγονός που αποδεικνύει το θεώρημα στην περίπτωση αυτή.
Τώρα, ας υποθέσουμε ότι η περιγραφόμενη διαδικασία δίνει μια άπειρη ακολουθία ιδιοτιμών (λ_n) και ιδιοδιανυσμάτων (u_n). Στη συνέχεια η (u_n), ως μία ορθοκανονική ακολουθία, συγκλίνει ασθενώς στο 0. Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα 1.7.7, η ακολουθία (Au_n) συγκλίνει ισχυρά στο 0. Ως εκ τούτου,

$$|\lambda_n| = \|\lambda_n u_n\| = \|\mathrm{A}u_n\| \to 0 \quad \text{καθώς } n \to \infty .$$

Συμβολίζουμε με S το χώρο που καλύπτεται από τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots$. Από το Θεώρημα προβολής, $\forall \ x \in H$ έχει μοναδική ανάλυση $x = u + v$, ή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n + \upsilon,$$

όπο $\upsilon \in S^{\perp}$. Μένει να αποδείξουμε ότι $A\upsilon = 0$ για όλα τα $\upsilon \in S^{\perp}$.

Θεώρημα 1.9.2 (Φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς συμπαγείς τελεστές).

Έστω A είναι είναι αυτοσυζυγής, συμπαγής τελεστής σε ένα απειροδιάστατο χώρο Hilbert H. Τότε υπάρχει στον H ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα (μια ορθοκανονική βάση) $\{u_1, u_2, \ldots\}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Επιπλέον, $\forall x \in H$,

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \upsilon_n \rangle \upsilon_n, \tag{1.9.3}$$

όπου λ_n, είναι η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο υ_n.

Απόδειξη. Το μεγαλύτερο μέρος αυτού θεωρήματος περιέχεται ήδη στο Θεώρημα 1.9.1. Για να πάρουμε ένα πλήρες σύστημα ορθοκανονικό σύστημα $\{\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots\}$, πρέπει να προσθέσουμε
μια αυθαίρετη ορθοκανονική βάση του $S^{\perp}$ στο σύστημα $\{u_1, u_2, \ldots\}$ (που ορίζεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.9.1. Οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε αυτά τα ιδιοδιανύσματααπό το $S^{\perp}$ είναι όλες ίσες με μηδέν. Η ισότητα (1.9.3) προκύπτει από την συνέχεια του A.

Θεώρημα 1.9.3. Για κάθε δύο αντιμεταθετικούς, αυτοσυζυγείς, συμπαγείς τελεστές A και B σε ένα χώρο Hilbert H, υπάρχει ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα κοινών ιδιοδιανυσμάτων.

Απόδειξη. Έστω λ είναι μια ιδιοτιμή του A και S είναι ο αντίστοιχος ιδιοχώρος. Για κάθε $x \in S$, έχουμε

$$ABx = BAx = B(\lambda x) = \lambda Bx$$

Αυτό σημαίνει ότι το Bx είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στο λ, υπό την προϋπόθεση $Bx \neq 0$. Σε κάθε περίπτωση, $Bx \in S$, και ως εκ τούτου ο B απεικονίζει τον S στον εαυτό του. Δεδομένου ότι ο B είναι ένας αυτοσυζυγής, συμπαγής τελεστής, από θεώρημα 1.9.2, ο S έχει μια ορθοκανονική βάση που αποτελείται από τις ιδιοτιμές του B, αλλά αυτά τα διανύσματα είναι επίσης ιδιοδιανύσματα του A, επειδή ανήκουν στον S. Αν επαναλάβουμε το ίδιο για κάθε ιδιοχώρο του A, τότε η ένωση όλων αυτών των ιδιοδιανυσμάτων θα είναι μια ορθοκανονική βάση του H.

Θεώρημα 1.9.4. Έστω A ένας αυτοσυζυγής, συμπαγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H με ένα πλήρες, ορθοκανονικό σύστημα ιδιοδιανυσμάτων $\{\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots\}$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$. Έστω P_n είναι ο τελεστής προβολή πάνω στο μονοδιάστατο χώρο που παράγεται από τα υ_n. Στη συνέχεια, για όλα τα $x \in H$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x \tag{1.9.4}$$

και

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n. \tag{1.9.5}$$

Απόδειξη. Από το Φασματικό Θεώρημα (Θεώρημα 1.9.2), έχουμε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \upsilon_n \rangle \upsilon_n, \tag{1.9.6}$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ο τελεστής προβολή P_k πάνω στον μονοδιάστατο υπόχωρο S_k που παράγεται από τα υ_k δίνεται από τον τύπο

$$P_k x = \langle x, \upsilon_k \rangle \, \upsilon_k.$$

Τώρα η (1.9.6) μπορεί να γραφτεί ως

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x,$$

και ως εκ τούτου, από το Θεώρημα 1.9.2,

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \upsilon_n \rangle \upsilon_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x.$$

Ως εκ τούτου, για όλα τα $x \in H$,

$$Ax = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \right) x.$$

Αυτό αποδεικνύει την (1.9.5), διότι η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ είναι εξασφαλισμένη απο το Θεώρημα 1.8.10.

Το Θεώρημα 1.9.4 είναι μια άλλη εκδοχή του φασματικού Θεωρήματος. Αυτή η έκδοση είναι σημαντική υπό την έννοια ότι μπορεί να επεκταθεί σε μή συμπαγείς τελεστές. Είναι επίσης χρήσιμο, διότι οδηγεί σε μια κομψή έκφραση για τις δυνάμεις και γενικότερα τις συναρτήσεις ενός τελεστή.

Έστω A, λ_n, και P_n είναι όπως στο Θεώρημα 1.9.4. Τότε

$$A^2 = A\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^2 P_n,$$

επειδή $AP_n x = \lambda_n P_n x \ \ \forall x \in H$. Ομοίως, για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$, παίρνουμε

$$A^k = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^k P_n \tag{1.9.7}$$

Γενικότερα, για κάθε πολυώνυμο $p(t) = Aa_n t^n + \dots + a_1 t$, έχουμε

$$p(A) = \sum_{n=1}^{\infty} p(\lambda_n) P_n.$$

Ο σταθερός όρος στο p πρέπει να είναι μηδέν, διότι διαφορετικά η ακολουθία ($p(\lambda_n)$) δεν θα συγκλίνει στο μηδέν. Προκειμένου να ασχοληθούμε με πολυώνυμα με μη μηδενική σταθερά a_0, προσθέτουμε τον όρο $a_0 I$ στις σειρές. Σημειώνουμε ότι, σε μια τέτοια περίπτωση, ο $P(A)$ δεν είναι συμπαγής τελεστής.
Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να γενικευθεί με τον ακόλουθο τρόπο.

Ορισμός 1.9.1 (Συνάρτηση ενός τελεστή). Έστω f μια πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$f(\lambda) \to 0 \text{ καθώς } \lambda \to 0 \quad \text{και} \quad f(0) = 0.$$

Για ένα αυτοσυζυγή, συμπαγή τελεστή $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ ορίζουμε

$$f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n \ . \tag{1.9.8}$$

Το Θεώρημα 1.8.10 εξασφαλίζει ότι οι σειρές στην (1.9.8) συγκλίνουν και ότι ο $f(A)$ είναι αυτοσυζυγής και συμπαγής.

Παράδειγμα 1.9.1. Έστω $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ είναι ένας αυτοσυζυγής, συμπαγής τελεστής, τέτοιος ώστε $\lambda_n \geq 0 \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $\alpha > 0$, μπορούμε να ορίσουμε τον A^a από την

$$A^a x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^a P_n x.$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση $\alpha = \frac{1}{2}$, ο ανωτέρω ορισμός συμφωνεί με τον ορισμό 1.5.2. Πράγματι, από την (1.9.7), έχουμε

$$\left(\sqrt{A}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda_n}\right)^2 P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n = A,$$

επειδή όλα τα λ_n είναι μη αρνητικά.

Παράδειγμα 1.9.2. Έστω $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ είναι ένας αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής. Μπορούμε να ορίσουμε το ιμήτονο του A απο την

$$\sin A = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin \lambda_n) P_n .$$

Η προϋπόθεση ότι $f(\lambda) \to 0$ καθώς $\lambda \to 0$ στον ορισμό 1.9.1 μπορούν να αντικατασταθεί από την φραξιμότητα της f σε μια γειτονιά του αρχικού σημείου. Πράγματι, αν $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ και $P_n x = \langle x, \upsilon_n \rangle \upsilon_n$ τότε, $\forall x \in H$, έχουμε

$$\big(f(A)\big)x = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) \langle x, \upsilon_n \rangle \upsilon_n ,$$

όπου οι σειρές συγκλίνου, επειδή

$$\left| f(\lambda_n) \langle x, \upsilon_n \rangle \right|^2 \le M \left| \langle x, \upsilon_n \rangle \right|^2 ,$$

για κάποια σταθερά M, και ως εκ τούτου $\big(f(\lambda_n) \langle x, \lambda_n \rangle \big) \in l_2$ Σαφώς, στην περίπτωση αυτή, δεν μπορούμε να πούμε ότι ο $f(A)$ είναι ένας συμπαγής τελεστής.

Θεώρημα 1.9.5. Αν τα ιδιοδιανύσματα u_1, u_2,... ενός αυτοσυζυγούς τελεστή T σε ένα χώρο Hilbert H αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον Η και όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές (ή μη αρνητικές), τότε ο T είναι αυστηρά θετικός (ή θετικός).

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι u_1, u_2,... είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα ιδιοδιανυσμάτων του T που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Στη συνέχεια, κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $u \in H$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$, και έχουμε

$$\begin{aligned}\langle Tu, u \rangle &= \left\langle Tu, \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n \langle Tu, u_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n \langle u, Tu_n \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n \langle u, \lambda_n u_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{a}_n \langle u, u_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{a}_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |a_n|^2 \ge 0.\end{aligned}$$

αν όλες οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικές. Εάν όλες οι λ_n είναι θετικές, τότε η τελευταία ανισότητα γίνεται αυστηρή.

1.10. Ο μετασχηματισμός Fourier

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε το μετασχηματισμό Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$ και θα συζητήσουμε τις βασικές του ιδιότητες. Ο ορισμός του μετατασχηματισμού στον $L^2(\mathbb{R})$ δεν είναι τετρημένος. Το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\, dx$$

δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ορισμός του μετασχηματισμού Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$, επειδή δεν είναι όλες οι συναρτήσεις στον $L^2(\mathbb{R})$ ολοκληρώσιμες. Είναι, ωστόσο, δυνατό να επεκτείνουμε το μετασχηματισμό Fourier από τον $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ στον $L^2(\mathbb{R})$. Στο πρώτο μέρος αυτού του τμήματος θα συζητήσουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier στον $L^1(\mathbb{R})$. Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι είναι δυνατή η επέκταση στον $L^2(\mathbb{R})$ και θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της εν λόγω επέκτασης.

Έστω f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}$. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx, \tag{1.10.1}$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-i\omega x}$ είναι συνεχής, το γινόμενο είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\forall \omega \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, δεδομένου ότι $\left|e^{-i\omega x}\right| = 1$ για όλα τα ω, $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left|e^{-i\omega x} f(x)\right| = \left|f(x)\right|$, και ως εκ τούτου, το ολοκλήρωμα (1.10.1) υπάρχει για όλα τα ω ∈ $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.10.1 (Μετασχηματισμός Fourier στον $L^1(\mathbb{R})$). Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Η συνάρτηση $\hat{f}$ ορίζεται από την

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx, \tag{1.10.2}$$

και ονομάζεται ο *μετασχηματισμός* Fourier της f.

Μια άλλη εκδοχή είναι ο ορισμός χωρίς το σύμβολο «-» στον εκθέτη, δηλαδή, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx$. Αυτές οι λεπτομέριες δεν αλλάζουν καθόλου τη θεωρία του μετασχηματισμού Fourier.

Αντί του " $\hat{f}$ " χρησιμοποιείται επίσης ο συμβολισμός "$\mathcal{F}\{f(x)$ " . Το τελευταίο είναι ιδιαίτερα βολικό, αν αντί για το γράμμα "f" ή "g" θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε έναν τύπο που περιγράφει μια συνάρτηση, για παράδειγμα $\mathcal{F}\{ e^{-x^2} \}$. Θα χρησιμοποιήσουμε ελεύθερα και τα δύο σύμβολα.

Παράδειγμα 1.10.1. (α) Έστω $\alpha > 0$. Τότε

$$\mathcal{F}\{e^{-a|x|}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-a|x|} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x(a-i\omega)} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x(a+i\omega)} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\omega^2}.$$

(β)

$$\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a\left(x + \frac{i\omega}{2a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2} du = +\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4\alpha}.$$

Το ακόλουθο θεώρημα είναι μια άμεση συνέπεια του Ορισμού 1.10.1.

Θεώρημα 1.10.1. Έστω f , g $\in L^1(\mathbb{R})$ και α , $\beta \in \mathbb{C}$. Τότε

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g).$$

Θεώρημα 1.10.2. Ο μετασχηματισμός Fourier μίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Για οποιαδήποτε ω , $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\hat{f}(\omega+\lambda) - \hat{f}(\omega)\right| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\left(e^{-i\lambda x} - 1\right) f(x) dx\right| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-i\lambda x} - 1\right| \left|f(x)\right| dx. \end{aligned} \tag{1.10.3}$$

Από την $\quad \left|e^{-i\lambda x} - 1\right| \left|f(x)\right| \le 2\left|f(x)\right|$

Και $\quad \lim_{\lambda\to\infty} \left|e^{-i\lambda x} - 1\right| = 0$ για όλα τα x $\in \mathbb{R}$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-i\lambda x} - 1\right| \left|f(x)\right| dx = 0,$$

από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Αυτό αποδεικνύει τη συνέχεια του $\hat{f}$.
(Στην πραγματικότητα, δεδομένου ότι η ανισότητα στην (1.10.3) είναι ανεξάρτητη του ω, έχουμε αποδείξει ότι $\hat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.)

Θεώρημα 1.10.3. Αν $f_1, f_2, \ldots \in L^1(\mathbb{R})$ και $\|f_n - f\|_1 \to 0$ καθώς $n \to \infty$, τότε $\hat{f}_n \to \hat{f}$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Πρώτα σημειώνουμε ότι

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-i\omega x} f(x)\right| dx \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right| dx, \quad \forall\ \omega \in \mathbb{R}$$

Έτσι,

$$\sup_{\omega\in\mathbb{R}}\left|\hat{f}_n(\omega)-\hat{f}(\omega)\right|\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_n(x)-f(x)\right|dx=\left\|f_n-f\right\|_1\to 0,$$

αποδεικνύει το θεώρημα.

Θεώρημα 1.10.4 (Riemann-Lebesgue Λήμμα). Αν f $\in L^1(\mathbb{R})$, τότε $\lim\limits_{|\omega|\to\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|=0.$

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $e^{-i\omega x} = -e^{-i\omega x-i\pi}$ έχουμε

$$\hat{f}(\omega)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\left(x+\frac{\pi}{\omega}\right)}f(x)dx=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}f\left(x-\frac{\pi}{\omega}\right)dx.$$

Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega)&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}f(x)dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}f\left(x-\frac{\pi}{\omega}\right)dx\right]\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\left(f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{\omega}\right)\right)dx.\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε,

$$\left|\hat{f}(\omega)\right|\leq\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{\omega}\right)\right|dx.$$

και επειδή
$$\lim_{|\omega|\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{\omega}\right)\right|dx=0,$$

έχουμε $\lim\limits_{|\omega|\to\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|=0.$

Σημειώνουμε ότι ο χώρος $C_0(\mathbb{R})$ όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ που μηδενίζονται στο άπειρο είναι ένας χώρος με νόρμα και οσον αφορά τη νόρμα, ορίζεται από την
$$\|f\|=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x)\right|.$$

Τα Θεωρήματα 1.10.1 - 1.10.4 δείχνουν ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας συνεχής γραμμικός τελεστής από το $L^1(\mathbb{R})$ στο $C_0(\mathbb{R})$.

Θεώρημα 1.10.5. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ Τότε

(α) $\mathcal{F}\{e^{-iax}f(x)\}=\hat{f}(\omega-a)$ (παράλληλη μετατόπιση),

(β) $\mathcal{F}\{f(x-x_0)\}=\hat{f}(\omega)e^{-i\omega x_0}$ (μετατόπιση),

(γ) $\mathcal{F}\{f(ax)\}=\dfrac{1}{a}\hat{f}\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right),\quad \alpha>0$ (κλίμακα)

(δ) $\mathcal{F}\{\overline{f}(x)\}=\overline{\mathcal{F}\{f(-x)\}}$ (συζυγής).

Παράδειγμα 1.10.2 (Διαμορφωμένη συνάρτηση Gauss).

Αν $f(x)=e^{i\omega_0 x-x^2/2}$, τότε $\hat{f}(\omega)=e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από το παράδειγμα 1.10.1 (β) σε συνδυασμό με την ιδιότητα παράλληλης μετατόπισης του μετασχηματισμού Fourier. Οι γραφικές παραστάσεις των $\Re f(x)$ και $\hat{f}(\omega)$ φαίνονται στο σχήμα. 1.1.

Θεώρημα 1.10.6. Αν f είναι μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση, $f,\ f' \in L^1(\mathbb{R})$, και $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) \to 0$, τότε $\mathcal{F}\{f'\} = i\omega\mathcal{F}\{f\}$.

Απόδειξη. Απλή ολοκλήρωση κατά παράγοντες δίνει

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)e^{-i\omega x}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}f(x)dx = i\omega\hat{f}(\omega).$$

Σχήμα 1.1 Διαμορφομένη συνάρτηση Gauss και ο μετασχηματισμός Fourier της ($\omega_0 = 4$)

Πόρισμα Α.10.1. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση, n-φορές τμηματικά διαφορίσιμη, και $f,\ f',\ldots,f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, και

$$\lim_{|x|\to\infty} f^{(k)}(x) = 0 \quad \text{για } \kappa = 0,\ldots,n-1,$$

τότε

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}\} = (i\omega)^n\,\mathcal{F}\{f\}.$$

Λόγω του ορισμού μας για το μετασχηματισμό Fourier, είναι καλύτερα να επαναπροσδιορίσουμε τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ως εξής:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\,g(u)du$$

Θεώρημα 1.10.7 (Θεώρημα Συνέλιξης). Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

Απόδειξη. Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ και $h = f * g$. Τότε $h \in L^1(\mathbb{R})$, και έχουμε

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) g(u) du dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x-u) dx du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x+u)} f(x) dx du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega u} du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega).$$

Θα συζητήσουμε τώρα την επέκταση του μετασχηματισμού Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$. Στο παρακάτω θεώρημα, και στο υπόλοιπο μέρος του παρόντος τμήματος, η $\|\cdot\|_2$ δηλώνει την νόρμα στον $L^2(\mathbb{R})$, δηλαδή,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} \text{ για } f \in L^2(\mathbb{R})$$

Θεώρημα 1.10.8. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στον $\mathbb{R}$ που μηδενίζεται εκτός ενός κλειστού διαστήματος. Τότε $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, και

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-\pi, \pi]$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο Parseval για την ορθοκανονική ακολουθία των συναρτήσεων στο $[-\pi, \pi]$,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

παίρνουμε

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-inx} f(x) dx \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(n) \right|^2.$$

Από την παραπάνω ανισότητα που ισχύει και για $g(x) = e^{-i\xi x} f(x)$ αντί για $f(x)$, παίρνουμε

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(n+\xi) \right|^2.$$

Λόγω του ότι $\|\hat{f}\|_2^2 = \|\hat{g}\|_2^2$. Με ολοκλήρωση και των δύο μελών ώς προς ξ απο 0 έως 1 δίνει

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \left| \hat{f}(n+\xi) \right|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_2^2$$

Εάν η f δεν μηδενίζεται εκτός του $[-\pi, \pi]$, τότε παίρνουμε ένα θετικό αριθμό λ για τον οποίο η συνάρτηση $g(x) = f(\lambda x)$ μηδενίζεται εκτός του $[-\pi, \pi]$. Τότε

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

και ως εκ τούτου

$$\|f\|_2^2 = \lambda\|g\|_2^2 = \lambda\|\hat{g}\|_2^2 = \lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda}\hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 dx = \left\|\hat{f}\right\|_2^2 .$$

Ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα είναι πυκνός στο $L^2(\mathbb{R})$. Το Θεώρημα 1.10.8 δείχνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια συνεχής απεικόνιση από εκείνο το χώρο στον $L^2(\mathbb{R})$. Δεδομένου ότι η απεικόνιση είναι γραμμική, έχει μια μοναδική επέκταση σε μια γραμμική απεικόνιση από τον $L^2(\mathbb{R})$ στον εαυτό του. Η επέκταση αυτή θα ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$.

Ορισμός 110.2 (Μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$). Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$ και έστω (φ_n) είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με συμπαγές στήριγμα που συγκλίνουν στην f στον $L^2(\mathbb{R})$, δηλαδή $\|f-\varphi_n\|_2 \to 0$. Ο μετασχηματισμός Fourier του f ορίζεται από

$$\hat{f} = \lim_{n\to\infty}\hat{\varphi}_n, \tag{1.10.4}$$

Όπου το όριο είναι ως προς τη νόρμα στον $L^2(\mathbb{R})$.

Το Θεώρημα 1.10.8 διασφαλίζει ότι το όριο υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από μια συγκεκριμένη ακολουθία που προσεγγίζει την f. Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι η σύγκλιση στον $L^2(\mathbb{R})$ δεν συνεπάγεται κατά σημείο σύγκλιση και συνεπώς ο μετασχηματισμός Fourier μιάς τετραγωνικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης δεν έχει οριστεί σε κάθε σημείο, σε αντίθεση με το μετασχηματισμό Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Ο μετασχηματισμός Fourier μιας τετραγωνικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης ορίζεται σχεδόν παντού. Για το λόγο αυτό δεν μπορούμε να πούμε ότι, αν $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται από την (1.10.2) και αυτός που ορίζεται απο την (1.10.4) είναι ίσοι. Για την ακρίβεια, πρέπει να πούμε ότι η συνάρτηση που ορίζεται από την (1.10.2) ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που ορίζει η (1.10.4). Παρά τη διαφορά αυτή, θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύμβολο για να συμβολίσουμε τους δύο μετασχηματισμούς. Το ακόλουθο θεώρημα είναι μια άμεση συνέπεια του Ορισμού 1.10.2 και του Θεωρήματος 1.10.8.

Θεώρημα 1.10.9 (Σχέση του Parseval). Αν $f \in L^2(\mathbb{R})$, τότε

$$\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2,$$

Σε φυσικά προβλήματα, η ποσότητα $\|f\|_2$ είναι ένα μέτρο της ενέργειας, και η $\left\|\hat{f}\right\|_2$ αντιπροσωπεύει το φάσμα ισχύος της f.

Θεώρημα 1.10.10. Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$, Τότε

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \tag{1.10.5}$$

όπου η σύγκλιση είναι ως προς την νόρμα στον $L^2(\mathbf{R})$.

Απόδειξη. Για n = 1,2,3 ,..., ορίζουμε

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & |x| < n, \\ 0 & |x| \geq n. \end{cases}$$

Τότε $\|f - f_n\|_2 \to 0$, και έτσι $\left\|\hat{f} - \hat{f}_n\right\|_2 \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Θεώρημα 1.10.11. Αν $f,\ g \in L^2(\mathbb{R})$, τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) g(x)\, dx \tag{1.10.6}$$

Απόδειξη. Για n = 1,2,3 ,..., ορίζουμε

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & |x| < n, \\ 0 & |x| \geq n. \end{cases}$$

και

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & |x| < n, \\ 0 & |x| \geq n. \end{cases}$$

Από την
$$f_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f_m(\xi) d\xi$$

έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(x) g_n(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f_m(\xi) d\xi dx$$

Η συνάρτηση

$$e^{-i\xi x} g_n(x) f_m(\xi)$$

είναι ολοκληρώσιμη πάνω στον $\mathbb{R}^2$, και έτσι μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Fubini. Κατά συνέπεια,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(x) g_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} g_n(x) dx d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(\xi) \hat{g}_n(x) d\xi$$

Δεδομένου ότι $\|g - g_n\|_2 \to 0$ και $\|\hat{g} - \hat{g}_n\|_2 \to 0$ καθώς $n \to \infty$, παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(x) g_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) \hat{g}_n(x) dx,$$

από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου. Για τον ίδιο λόγο, θέτωντας $m \to \infty$, παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)\,dx.$$

Το ακόλουθο τεχνικό λήμμα θα είναι χρήσιμο για την απόδειξη του σημαντικού θεωρήματος αντιστροφής για το μετασχηματισμό Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$.

Λήμμα 1.10.1. Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$, και έστω $g = \overline{\hat{f}}$. Τότε, $f = \overline{\hat{g}}$.

Απόδειξη Από τα Θεωρήματα 1.10.9 και 1.10.11 και την ισότητα $g = \overline{\hat{f}}$, παίρνουμε

$$\left\langle f, \overline{\hat{g}} \right\rangle = \left\langle \hat{f}, \overline{g} \right\rangle = \left\langle \hat{f}, \hat{f} \right\rangle = \left\| \hat{f} \right\|_2^2 = \| f \|_2^2 .$$

(1.10.7)

επίσης,

$$\overline{\left\langle f, \overline{\hat{g}} \right\rangle} = \| f \|_2^2 .$$

Τέλος, από την ισότητα Parseval,

$$\| \hat{g} \|_2^2 = \| g \|_2^2 = \left\| \hat{f} \right\|_2^2 = \| f \|_2^2 .$$

(1.10.9)

Χρησιμοποιώντας τις (1.10.7) - (1.10.9), παίρνουμε

$$\left\| f - \overline{\hat{g}} \right\|_2^2 = \left\langle f - \overline{\hat{g}}, f - \overline{\hat{g}} \right\rangle = \| f \|_2^2 - \left\langle f, \overline{\hat{g}} \right\rangle - \overline{\left\langle f, \overline{\hat{g}} \right\rangle} + \| \hat{g} \|_2^2 = 0$$

Αυτό δείχνει ότι $f = \overline{\hat{g}}$.

Θεώρημα 1.10.12 (Αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$).
Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$. Τότε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{i\omega x} f(\omega)\,d\omega,$$

όπου η σύγκλιση είναι ως προς τη νόρμα στον $L^2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$. Αν $g = \overline{\hat{f}}$, τότε, από το λήμμα 1.10.1,

$$f(x) = \overline{\hat{g}}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \overline{e^{-i\omega x} g(\omega)}\,d\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{i\omega x}\, \overline{g(\omega)}\,d\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)\,d\omega$$

Πόρισμα 1.10.2. Αν $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, τότε η ισότητα

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)\,d\omega \tag{1.10.10}$$

ισχύει σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

Ο μετασχηματισμός που ορίζεται από την (1.10.10) ονομάζεται αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier. Ένας από τους κύριους λόγους για την εισαγωγή του συντελεστή $1/\sqrt{2\pi}$ στον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier είναι η συμμετρία του μετασχηματισμού και του αντιστρόφου του:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx,$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(\omega)d\omega.$$

Πόρισμα 1.10.3 (Δυϊκότητα). Αν $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, τότε η $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} = f(-x)$, σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αρκεί να αντικαταστήσουμε το x από το $-x$ στην (1.10.10).

Θεώρημα 1.10.13 (Γενική σχέση του Parseval). Αν $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega.$$

Απόδειξη. Απο την ταυτότητα πολικότητας

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}\left(|f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2\right)$$

συνεπάγεται ότι κάθε ισομετρία διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο. Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια ισομετρία στον $L^2(\mathbb{R})$, $\langle f,g\rangle = \langle \hat{f},\hat{g}\rangle$.

Το επόμενο θεώρημα συνοψίζει τα αποτελέσματα αυτού του τμήματος. Είναι γνωστό ως θεώρημα του Plancherel .

Θεώρημα 1.10.14 (Θεώρημα του Plancherel).

Για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$, υπάρχει $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, τέτοια που:

(α) Αν $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, τότε $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx$,

(β) $\left\| \hat{f}(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} e^{-i\omega x} f(x)dx \right\|_2 \to 0$ καθώς $n \to \infty$,

(γ) $\left\| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} e^{-\omega x} \hat{f}(\omega)d\omega \right\|_2 \to 0$ καθώς $n \to \infty$,

(δ) $\|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$,

(ε) Η αντιστοιχία $f \mapsto \hat{f}$ είναι ένας χώρος Hilbert ισόμορφος του $L^2(\mathbb{R})$ πάνω στον $L^2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Το μόνο μέρος αυτού του θεωρήματος που μένει να αποδειχθεί είναι το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι "επί". Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$ και ορίζουμε $h = \hat{f}$ και $g = \overline{\hat{h}}$.

Τότε, από το λήμμα 1.10.1, $\overline{f} = h = \hat{g}$. Αυτό δείχνει ότι κάθε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας τετραγωνικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Θεώρημα 1.10.15. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας ορθομοναδιάιος τελεστής στον $L^2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Πρώτα, σημειώνουμε ότι $\forall\ g \in L^2(\mathbb{R})$, έχουμε

$$\mathcal{F}\{\overline{g}\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\overline{g(x)}dx = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} g(x)\,dx} = \overline{\mathcal{F}^{-1}\{g\}(\omega)}.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.10.11, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\{f\}, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{F}\{\overline{g}\}(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\mathcal{F}^{-1}\{g(x)\}}dx = \langle f, \mathcal{F}^{-1}\{g\}\rangle.\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ και ως εκ τούτου ο $\mathcal{F}$ είναι ορθομοναδιαίος.

Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να οριστεί για συναρτήσεις στον $L^1(\mathbb{R}^N)$ από την

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\omega x} f(x)\,dx,$$

όπου $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N)$, $x = (x_1, ..., x_N)$ και $\omega \cdot x = \omega_1 x_1 + ... + \omega_N x_N$. Η θεωρία του μετασχηματισμού Fourier στον $L^1(\mathbb{R}^N)$ είναι παρόμοια με τη μονοδιάστατη περίπτωση. Επιπλέον, η επέκταση στον $L^2(\mathbb{R}^N)$ είναι δυνατή και έχει παρόμοιες ιδιότητες, όπως το Θεώρημα αντιστροφή και το θεώρημα του Plancherel.
Κλείνουμε αυτό το τμήμα με μερικά παραδείγματα των μετασχηματισμών Fourier.

Παράδειγμα 1.10.3 (Δεύτερη παράγωγος συνάρτησης Gauss). Αν

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2},$$

τότε

$$\hat{f}(\omega) = \omega^2 e^{-\omega^2/2}.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\mathcal{F}\left\{(1-x^2)e^{-x^2/2}\right\} = -\mathcal{F}\left\{\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2/2}\right\} = -(i\omega)^2\,\mathcal{F}\left\{e^{-x^2/2}\right\} = \omega^2 e^{-\omega^2/2}.$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $\hat{f}(\omega)$ απεικονίζονται στο Σχήμα. 1.2.

Σχήμα 1.2. Δεύτερη παράγωγος συνάρτησης Gauss και Fourier μετασχηματισμού της

Παράδειγμα 1.10.4 (Η συνάρτηση Haar). Η συνάρτηση Haar ορίζεται από την

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad 0\le x<\dfrac{1}{2}, \\ -1 & \alpha\nu \quad \dfrac{1}{2}\le x<1, \\ 0 & \qquad \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma. \end{cases}$$

Σαφώς,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{1/2} e^{-i\omega x}dx-\int_{1/2}^{1} e^{-i\omega x}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\omega}\left(1-2e^{-i\omega/2}+e^{-i\omega}\right)\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega/2}}{i\omega}\left(e^{-i\omega/2}-2+e^{-i\omega}\right)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega/2}\frac{\sin^2(\omega/4)}{\omega/4}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.10.5 (Η συνάρτηση Shannon). Η συνάρτηση Shannon ορίζεται από την

$$f(x) = \frac{\sin 2\pi x - \sin \pi x}{\pi x}.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της $f(x)$ είναι

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi} & \pi < |\omega| < 2\pi \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης Shannon και μετασχηματισμού Fourier του είναι φαίνεται στο σχήμα. 1.3.

Σχήμα 1.3. Η συνάρτηση Shannon και Fourier μετασχηματισμός της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

2.1.Εισαγωγή.

Η ιδιότητα ενός τελεστή να είναι φραφμένος ήταν μια απαραίτητη υπόθεση σχεδόν σε κάθε θεώρημα που αποδείχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι μέθοδοι αναπτύχθηκαν έχοντας κατα νού αυτή την ιδιότητα ή τη συνέχεια. Ωστόσο, στις πιο σημαντικές εφαρμογές της θεωρίας των χώρων Hilbert συχνά έχουμε να κάνουμε με τελεστές που δεν είναι φραγμένοι. Σε αυτή το κεφάλαιο θα συζητήσουμε εν συντομία κάποια βασικά προβλήματα, έννοιες και μεθόδους με τη θεωρία των μη φραγμένων τελεστών.
Για να δείξουμε ότι ένας τελεστής A που ορίζεται σε ένα χώρο Hilbert H ($\mathcal{R}(A) \subset H$) είναι μη φραγμένος, αρκεί να βρούμε μια ακολουθία από στοιχεία του H, $x_n \in H$ τέτοια ώστε $\|x_n\| \le M$ (για κάποιο M και όλα τα $n \in \mathbb{N}$) και $\|Ax_n\| \to \infty$. Δεδομένου ότι για γραμμικούς τελεστές η ιδιότητα να είναι φραγμένοι ισοδυναμεί με τη συνέχεια, η ιδιότητα να μην είναι φραγμένοι είναι ισοδύναμη με την ασυνέχεια (σε κάθε σημείο). Συνεπώς, μπορούμε να δείξουμε ότι ένας τελεστής A είναι μή φραγμένος βρίσκοντας μιά ακολουθία (x_n) που συγκλίνει στο 0 τέτοιο ώστε η ακολουθία ($A\ x_n$) να μην συγκλίνει στο 0.
Ένας από τους πιο σημαντικούς μη φραγμένους τελεστές είναι ο διαφορικός τελεστής (βλ. παράδειγμα 1.1.3). Άλλοι σημαντικοί μη φραγμένοι τελεστές μπορούν να προκύψουν από την κβαντική μηχανική και θα συζητηθούν στο κεφάλαιο 3.

Εάν το πεδίο ορισμού ενός φραγμένου τελεστή A είναι ένας κατάλληλος υπόχωρος του χώρου Hilbert H, τότε ο A έχει μια μοναδική επέκταση σε έναν τελεστή που ορίζεται στην κλειστότητα του $\mathcal{D}$ (A).. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει ένας φραγμένος τελεστής B που ορίζεται στο cl$\mathcal{D}$ (A), έτσι ώστε $Ax = Bx$ για κάθε $x \in \mathcal{D}(A)$. Ένας τέτοιος τελεστής μπορεί να οριστεί από την

$$Bx = \lim_{n\to\infty} Ax_n, \quad \text{όπου } x_n \in \mathcal{D}(A) \quad \text{και } x_n \to x .$$

Σε αυτή την περίπτωση $\|B\| = \|A\|$. Στη συνέχεια, ο B μπορεί να επεκταθεί σε έναν φραγμένο τελεστή C που ορίζεται σε όλο το H από την

$$C = BP_{\mathcal{D}(B)},$$

όπου $P_{\mathcal{D}(B)}$ είναι η ορθογώνια προβολή τελεστή πάνω στον υπόχωρο $\mathcal{D}(B)$. Και πάλι έχουμε $\|B\| = \|C\|$. Μπορούμε έτσι πάντα να υποθέτουμε ότι το πεδίο ορισμού ενος φραγμένου τελεστή είναι όλος ο χώρος H, ή τουλάχιστον ένα κλειστός υπόχωρος του H. Ένας μη φραγμένος τελεστής που ορίζεται σε ένα κατάλληλο υπόχωρο ενός χώρου Hilbert συνήθως δεν έχει μια φυσική επέκταση πάνω στη κλείστότητα του πεδίου ορισμού του. Παράδειγμα, ο διαφορικός τελεστής που ορίζεται σε ένα πυκνό υπόχωρο του $L^2(\mathbb{R})$, αλλά δεν έχει μια φυσική επέκταση στον $L^2(\mathbb{R})$. Από την άλλη πλευρά, μπορεί να είναι ακόμη δυνατό να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού ενός μη φραγμένου τελεστή με τέτοιο τρόπο ώστε, παρότι το πεδίο ορισμού να μην είναι όλος ο χώρος, να έχει καλύτερες ιδιότητες.

Ορισμός 2.2.1 (Επέκταση των τελεστών). Έστω A και B είναι τελεστές σε ένα διανυσματικό χώρο E. Αν

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$$

και

$$Ax = Bx \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

τότε ο B ονομάζεται *επέκταση* του A και γράφουμε $A \subset B$.

Κατά την εκτέλεση τυπικών πράξεων σε τελεστές που ορίζονται σε υποχωρους ενός συνήθους διανυσματικού χώρου E, πρέπει να έχουμε στο νου μας τα πεδία ορισμού. Για παράδειγμα, ο τελεστής $A + B$ ορίζεται για όλα τα $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, δηλαδή, $\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Μπορεί να συμβεί $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \varnothing$, άρα στη συνέχεια το άθροισμα $A + B$ δεν έχει κανένα νόημα. Ομοίως, $\mathcal{D}(AB) = \{ x \in \mathcal{D}(B) : Bx\, x \in \mathcal{D}(A)\}$. Οι συνήθεις ιδιότητες δεν χρειάζεται να διατηρούνται.

Για παράδειγμα, έχουμε την ισότητα $(A + B)\, C = AC + BC$, αλλά, σε γενικές γραμμές, η σχέση εγκλεισμού $AB + AC \subset A\,(B + C)$ δεν μπορεί να αντικατασταθεί από ισότητα.

2.2. Ο συζυγής τελεστής.

Ορισμός 2.2.2 (Πυκνά Ορίζμένος τελεστής). Ένας τελεστής A ορισμένος σε ένα χώρο με νόρμα E καλείται *πυκνά ορισμένος* εάν το πεδίο ορισμού του είναι πυκνό υποσύνολο του E δηλαδή, $\mathcal{D}(A) = E$.

Ο διαφορικός τελεστής $D = d\,/\,dx$ είναι πυκνά ορισμένος στον $L^2(\mathbb{R})$ επειδή ο χώρος των διαφορίσιμων, τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R})$

Ορισμός Β.2.3 (Συζυγής ενός πυκνά ορισμένου τελεστή). Έστω A ένας πυκνά ορισμένος τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H. Ο συζυγής A^* του A είναι ένας τελεστής που ορίζεται για το σύνολο όλων των $y \in H$ για τα οποία $\langle Ax, y\rangle$ είναι ένα συνεχές συναρτησιακό στο $\mathcal{D}(A)$ και τέτοια ώστε

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \text{ για όλα τα } x \in \mathcal{D}(A) \text{ και } y \in \mathcal{D}(A^*).$$

Στον παραπάνω ορισμό, ο A πρέπει να είναι πυκνά ορισμένος προκειμένου να εξασφαλιστεί τη μοναδικότητα του συζυγούς A^*.

Θεώρημα 2.2.1. Έστω A και B πυκνά ορισμένοι τελεστές σε ένα χώρο Hilbert H.

(α) Αν $A \subset B$, τότε $B^* \subset A^*$.

(α) Αν $\mathcal{D}(B^*)$ είναι πυκνό στον H, τότε $B \subset B^{**}$.

Απόδειξη. Πρώτα Σημειώνουμε ότι $A \subset B$ που συνεπάγεται

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, B^* y\rangle \text{ για όλα τα } x \in \mathcal{D}(A) \text{ και } y \in \mathcal{D}(B^*) \tag{2.2.1}$$

Από την άλλη πλευρά, έχουμε

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \text{ για όλα τα } x \in \mathcal{D}(A) \text{ και } y \in \mathcal{D}(A^*) \tag{2.2.2}$$

Απο τις (2.2.1) και (2.2.2), παίρνουμε $\mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{D}(A^*)$ και $A^*(y) = B^*(y)$ για όλα τα $y \in \mathcal{D}(B^*)$. Αυτό αποδεικνύει το (α). Για να αποδείξουμε το (β), παρατηρούμε ότι η σχέση

$$\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^* y\rangle \text{ για όλα τα } x \in \mathcal{D}(B) \text{ και όλα τα } y \in \mathcal{D}(B^*)$$

μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\langle B^* y, x\rangle = \langle y, Bx\rangle \text{ για όλα τα } y \in \mathcal{D}(B^*) \text{ και όλα τα } x \in \mathcal{D}(B) \tag{2.2.3}$$

Ως εκ τούτου, αφού $\mathcal{D}(B^*)$ είναι πυκνό στον H, B^{**} υπάρχει και έχουμε

$$\langle B^* y, x\rangle = \langle y, B^{**}x\rangle \text{ για όλα τα } y \in \mathcal{D}(B^*) \text{ και όλα τα } x \in \mathcal{D}(B^{**}) \tag{2.2.4}$$

Από τις (2.2.3) και (2.2.4), προκύπτει ότι $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(B^{**})$ και $B(x) = B^{**}(x)$ $\forall\ x \in \mathcal{D}(B)$.

Θεώρημα 2.2.2. Αν ο A είναι «1-1» πυκνά ορισμένος τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H τέτοιος που ο αντιστρόφος A^{-1} είναι πυκνά ορισμένος, τότε ο A^* είναι επίσης «1-1» και

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \tag{2.2.5}$$

Απόδειξη. Έστω $y \in$ D (A^*). Τότε, για κάθε $x \in \mathcal{D}(A^{-1})$ έχουμε $A^{-1}x \in \mathcal{D}(A)$ και ως εκ τούτου

$$\langle A^{-1}x, A^* y\rangle = \langle AA^{-1}x, y\rangle = \langle x, y\rangle .$$

Αυτό σημαίνει ότι $A^*y \in \mathcal{D}((A^{-1})^*)$ και

$$(A^{-1})^* A^* y = (AA^{-1})^* y = y. \tag{2.2.6}$$

Στη συνέχεια, παίρνουμε ένα αυθαίρετο $y \in \mathcal{D}(A^{-1})^*$.Μετά, για κάθε $x \in \mathcal{D}(A)$, έχουμε $Ax \in \mathcal{D}(A^{-1})$. Ως εκ τούτου,

$$\langle Ax, (A^{-1})^* y\rangle = \langle A^{-1}Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Αυτό δείχνει ότι $(A^{-1})^*y \in \mathcal{D}(A^*)$ και

$$A^*(A^{-1})^*y = (A^{-1}A)^*y = y. \tag{2.2.7}$$

Τώρα οι (2.2.6) και (2.2.7) δίνουν την (2.2.5).

Θεώρημα 2.2.3. Αν A, B και AB είναι πυκνά ορισμένοι τελεστές στον H τότε $B^*A^* \subset (AB)^*$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $x \in \mathcal{D}(AB)$ και $y \in \mathcal{D}(B^*A^*)$. Δεδομένου ότι $x \in \mathcal{D}(B)$ και $A^*y \in \mathcal{D}(B^*)$, προκύπτει ότι

$$\langle Bx, A^*y \rangle = \langle x, B^*A^*y \rangle.$$

Από την άλλη πλευρά, δεδομένου ότι $Bx \in \mathcal{D}(A)$ και $y \in \mathcal{D}(A^*)$ έχουμε

$$\langle ABx, y \rangle = \langle Bx, A^*y \rangle.$$

Ως εκ τούτου,

$$\langle ABx, y \rangle = \langle x, B^*A^*y \rangle.$$

Δεδομένου ότι αυτό ισχύει για όλα τα $x \in \mathcal{D}(AB)$, έχουμε $y \in \mathcal{D}((AB)^*)$ και $(B^*A^*)y = (AB)^*y$.

2.3. Συμμετρικοί και Αυτοσυζυγείς τελεστές.

Ορισμός 2.3.1 (Αυτοσυζυγής τελεστής). Έστω A ένας πυκνά ορισμένος τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H. Ο A ονομάζεται *αυτοσυζυγής*, αν $A = A^*$.

Θυμόμαστε ότι $A = A^*$ σημαίνει ότι η $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$ και $A(x) = A^*(x)$ για όλα τα $x \in \mathcal{D}(A)$. Αν ο A είναι φραγμένος, πυκνά ορισμένος στον H, τότε έχει μια μοναδική επέκταση σε ένα φραγμένο τελεστή πάνω στον H, και στη συνέχεια το πεδίου ορισμού του, καθώς και το πεδίο ορισμού του συζυγούς του, είναι όλος ο χώρος H. Στην περίπτωση των μη φραγμένων τελεστών, είναι πιθανό ένας πυκνά ορισμένος τελεστής A να έχει έναν συζυγή A^* τέτοιο ώστε $A(x) = A^*(x)$ όποτε $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(A^*)$, αλλά $\mathcal{D}(A^*) \neq \mathcal{D}(A)$ και κατά συνέπεια ο A δεν είναι αυτοσυζυγής. Η ακόλουθη χαλάρωση των όρων του Ορισμού 2.3.1 φαίνεται αιτιολογίσιμη στην περίπτωση των μη φραγμένων τελεστών.

Ορισμός 2.3.2 (Συμμετρικός τελεστής). Ένας πυκνά ορισμένος τελεστής A σε ένα χώρο Hilbert H λέγεται ότι είναι *συμμετρικός*, αν

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad (Ax, y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathcal{D}(A).$$

Σαφώς, κάθε αυτοσυζυγής τελεστής είναι συμμετρικός. Στο πρώτο από τα δύο ακόλουθα παραδείγματα, έχουμε άναν μη φραγμένο αυτοσυζυγή τελεστή. Η δεύτερη δείχνει ότι ένας συμμετρικός τελεστής δεν είναι απαραίτητα αυτοσυζυγής.

Παράδειγμα 2.3.1. Θεωρούμε $H = l_2$ και έναν τελεστή στον H που ορίζεται από την

$$A(x_n) = (x_n/n)$$

Ο τελεστής A είναι ένας «1-1», αυτοσυζυγής τελεστής. Ο υπόχωρος $\mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(A)$ είναι πυκνός στον H, και αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $(y_n) \in l_2$ τέτοιες ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|y_n\right|^2 < \infty.$$

Ο αντίστροφος A^{-1} ορίζεται από την

$$A^{-1}(y_n) = (n\, y_n)$$

Σαφώς, ο A^{-1} είναι ένας μη φραγμένος τελεστής. Πράγματι, αν $e_k = (\delta_{kn})$,$k = 1,2,...,$τότε $\left\|e_k\right\| = 1$ και

$$\left\|A^{-1} e_k\right\| = \left\|k e_k\right\| = k \to \infty .$$

Απο το Θεώρημα 2.2.2,

$$A^{-1} = \left(A^*\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*$$

Έτσι. Ο A^{-1} είναι αυτοσυζυγής.

Παράδειγμα 2.3.2. Θεωρούμε τον τελεστή $A = id / dt$ με πεδίο ορισμού

$\mathcal{D}(A) = \{f \in L^2([a,b]) : f'$ είναι συνεχής και $f(\alpha) = f(\beta) = 0\}$. Τότε

$$\begin{aligned}\left\langle Af, g\right\rangle &= \int_a^b if'(t)\overline{g(t)}dt = if(b)\overline{g(b)} - if(a)\overline{g(a)} - \int_a^b if(t)\overline{g'(t)}dt \\ &= \int_a^b f(t)\overline{ig'(t)}dt = \left\langle f, Ag\right\rangle.\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι ο A είναι συμμετρικός. Δεδομένου ότι το $\left\langle Af, g\right\rangle$ είναι ένα συνεχές συναρτησιακό στο $\mathcal{D}(A)$ για κάθε συνάρτηση g συνεχώς διαφορίσιμη στο $[a, b]$, όχι απαραίτητα ικανοποιώντας την $g(\alpha) = g(\beta)$, $\mathcal{D}(A^*)$ δεν είναι το ίδιο με το $\mathcal{D}(A)$.Συνεπώς, ο A δεν είναι αυτοσυζυγής.

Το ακόλουθο Θεώρημα δίνει ένα ωραίο χαρακτηρισμό των συμμετρικών τελεστών.

Θεώρημα 2.3.4. Ένας πυκνός τελεστής A σε ένα χώρο Hilbert H είναι συμμετρικός αν και μόνο αν ο $A \subset A^*$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $A \subset A^*$. Από την

$$\left\langle Ax, y\right\rangle . = \left\langle x, A^* y\right\rangle \quad \text{για όλα τα } x \in \mathcal{D}(A) \text{ και όλα τα } y \in \mathcal{D}(A^*) \tag{2.3.8}$$

έχουμε

$$\left\langle Ax, y\right\rangle = \left\langle x, Ay\right\rangle \text{ για όλα τα } x, y \in \mathcal{D}(A) \tag{2.3.9}$$

Έτσι, ο Α είναι συμμετρικός.

Αν ο A είναι συμμετρικός, τότε (2.3.8) και (2.3.9) ισχύουν, πράγμα που συνεπάγεται $A \subset A^*$.

2.4. Κλειστοί τελεστές.

Ορισμός 2.4.1 (Γράφημα Τελεστή). Γράφημα του τελεστή Α : $H_1 \to H_2$, ονομάζουμε το σύνολο $\mathrm{Gr}(A) = \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\}$.

Ορισμός 2.4.2 (Κλειστός Τελεστής). Ένας τελεστής Α από ένα χώρο με νόρμα E_1 σε ένα χώρο με νόρμα E_2 λέγεται κλειστός αν το γράφημα του $\mathrm{Gr}(A)$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $E_1 \times E_2$, δηλαδή,

$$x_n \in \mathcal{D}(A),\ x_n \to x \text{ και } Ax_n \to y \text{ συνεπάγεται } x \in \mathcal{D}(A) \text{ και } Ax = y.$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(A)$ ενός κλειστού τελεστή A δεν χρειάζεται να είναι κλείστο. Έτσι, το πεδίο ορισμού ενός μή φραγμένου τελεστή σε ένα χώρο Hilbert H δεν μπορεί να είναι κλειστό, ειδικότερα, δεν μπορεί να είναι όλο το H.

Θεώρημα 2.4.1. Ο αντίστροφος ενός κλειστού τελεστή είναι κλειστός.

Απόδειξη. Αν $\mathrm{Gr}(A) = \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\}$ είναι κλειστό, τότε, προφανώς,

$$\mathrm{Gr}(A^{-1}) = \{(Ax, x) : x \in \mathcal{D}(A)\}$$

είναι κλειστό.

Θεώρημα 2.4.2. Αν Α είναι ένας πυκνά ορισμένος τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H, τότε ο A^* είναι ένας κλειστός τελεστής.

Απόδειξη. Αν $y_n \in \mathcal{D}(A^*)$, $y_n \to y$, και $A^* y_n \to z$, τότε, για κάθε): $x \in \mathcal{D}(A)$ έχουμε

$$\langle Ax, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax, y_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, A^* y_n \rangle = \langle x, z \rangle.$$

Ως εκ τούτου, $y \in \mathcal{D}(A^*)$ και $A^* y = z$.

Η ιδιότητα να είναι ένας τελεστής κλειστός είναι μια επιθυμητή ιδιότητα. Το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα δείχνει ότι αν ο Α είναι συμμετρικός, τότε μπορεί πάντα να επεκταθεί σε ένα κλειστό τελεστή.

Θεώρημα 2.4.3. Αν ο A είναι συμμετρικός, πυκνά ορισμένος τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H, τότε υπάρχει ένας κλειστός, συμμετρικός τελεστής B τέτοιος ώστε $A \subset B$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε με τον ορισμό του πεδίου ορισμού του B: $\mathcal{D}(B)$ θα είναι το σύνολο όλων των $x \in H$ για τα οποία υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots \in \mathcal{D}(A)$ και $y \in H$ τέτοιο ώστε

$x_n \to x$ και $Ax_n \to y$. Είναι εύκολο να ελέγξει ότι ο $\mathcal{D}(B)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος και $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$. Ο B ορίζεται ως εξής:

$$B(x) = \lim_{n\to\infty} A(x_n), \tag{2.4.1}$$

όπου $x_1, x_2, \ldots \in \mathcal{D}(A)$ είναι τέτοια που $x_n \to x$ και το όριο $\lim_{n\to\infty} A(x_n)$ υπάρχει.

Πρώτα απ' όλα, πρέπει να δείξουμε ότι η (2.4.1) ορίζει έναν τελεστή, δηλαδή, έχουμε να δείξουμε ότι, για κάθε $x \in \mathcal{D}(B)$, η τιμή $B(x)$ είναι ανεξάρτητη από μια συγκεκριμένη ακολουθία (x_n). Υποθέτουμε ότι

$$x_n \to x, \qquad A(x_n) \to y,$$
$$z_n \to x, \qquad A(z_n) \to w.$$

Από τη συμμετρία του A, έχουμε

$$\langle u, Ax_n - Az_n \rangle = \langle u, A(x_n - z_n) \rangle = \langle Au, x_n - z_n \rangle, \tag{2.4.2}$$

για κάθε $u \in \mathcal{D}(A)$.Δεδομένου ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχές, η τελευταία συνεπάγεται $\langle u, y-w \rangle = \langle Au, x-x \rangle$=0.

Με άλλα λόγια, $y - w \perp \mathcal{D}(A)$. Δεδομένου ότι το $\mathcal{D}(A)$ είναι πυκνό στον H, καταλήγουμε στο συμπέρασμα $y = w$. Ως εκ τούτου, ο B είναι ένας καλά ορισμένος τελεστής στον H.

Έστω $x \in \mathcal{D}(A)$ Εάν, στην (2.4.1), βάλουμε $x_n = x$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε $A(x) = B(x)$. Έτσι, ο B είναι μια επέκταση του A

Έστω $x, y \in \mathcal{D}(B)$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες (x_n) και (y_n) των στοιχείων του $\mathcal{D}(A)$ τέτοιες ώστε

$$x_n \to x, \qquad Ax_n \to Bx$$
$$y_n \to y, \qquad Ay_n \to By$$

Και δεδομένου ότι ο A είναι συμμετρικός έχουμε

$$\langle Ax_n, y_n \rangle = \langle x_n, Ay_n \rangle.$$

Θέτοντας $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\langle Bx, y \rangle = \langle x, By \rangle.$$

Άρα ο B είναι συμμετρικός.

Τέλος, για να αποδείξουμε ότι ο B είναι κλειστός, θα πάρουμε μια αυθαίρετη ακολουθία (x_n) στο $\mathcal{D}(B)$ έτσι ώστε

$$x_n \to x \text{ και } Bx_n \to y, \tag{2.4.2}$$

για κάποια $x, y \in H$, και ν αποδεικνύουμε ότι $x \in \mathcal{D}(B)$ και $Bx = y$. Απο τον ορισμό του $\mathcal{D}(B)$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $y_m \in \mathcal{D}(B)$ έτσι ώστε

$$\|x_m - y_m\| < \frac{1}{m} \quad \text{και} \quad \|Bx_m - Ay_m\| < \frac{1}{m}.$$

Ως εκ τούτου, από την (2.4.2), έχουμε

$$y_m \to x \ \text{ και } \ Ay_m \to y.$$

Αλλά αυτό σημαίνει ότι $x \in \mathcal{D}(B)$ και $Bx = y$.

Σημειώνουμε ότι η επέκταση που κατασκευάστηκε την προηγούμενη απόδειξη είναι η ελάχιστη επέκταση του A σε ένα κλειστό τελεστή.
Το ακόλουθο είναι ένα παράδειγμα ένος θεωρήματος για την επιλυσιμότητα των γραμμικών εξισώσεων που περιλαμβάνουν κλειστούς και πυκνά ορισμένους τελεστές

Θεώρημα 2.4.4. Έστω A ένας πυκνά ορισμένος κλειστός τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H.
(α) Για κάθε u , $\upsilon \in$ H, υπάρχει μοναδικό $x \in \mathcal{D}(A)$ και $y \in \mathcal{D}(A^*)$ τέτοια ώστε
$Ax + y = u$ και το $x - A^*y = v$.
(β) Για κάθε $\upsilon \in H$, υπάρχει ένα μοναδικό $x \in \mathcal{D}(A^*A)$ τέτοια ώστε
$A^*Ax + x = \upsilon$.

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε το χώρο Hilbert $H1 = H \times H$. O A είναι κλειστός, αρα το Gr(A) είναι ένας κλειστός υπόχωρος του H . Έτσι,

$$H_1 = \mathrm{Gr}(A) \oplus Gr(A)^{\perp}$$

Με $Gr(A) \cap Gr(A)^{\perp} = \{0\}$.Τώρα, $(z, y) \in Gr(A)^{\perp}$ αν και μόνο αν $\langle (x, Ax), (z, y) \rangle = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{D}(A)$ ή ισοδύναμα, $\langle x, z \rangle + \langle Ax, y \rangle = 0$ για ολα τα $x \in \mathcal{D}(A)$
Έτσι,
$(z, y) \in Gr(A)^{\perp}$ αν και μόνο αν $\langle Ax, y \rangle = \langle x, -z \rangle$ για ολα τα $x \in \mathcal{D}(A)$.
Με άλλα λόγια,
$(z, y) \in Gr(A)^{\perp}$ αν και μόνο αν $y \in \mathcal{D}(A^*)$ και $z = - A^*y$.

Κατά συνέπεια, αν $(\upsilon, u) \in H \times H$, τότε υπάρχει μοναδικό $x \in \mathcal{D}(A)$ και $y \in \mathcal{D}(A^*)$, έτσι ώστε

$$(\upsilon, u) = (x, Ax) + (-A^*y, y),$$

(β) Αν $u = 0$ στο (α), τότε προκύπτει ότι υπάρχουν μοναδικά $x \in \mathcal{D}(A)$ και $y \in \mathcal{D}(A^*)$, έτσι ώστε $Ax + y = 0$ και $x - A^*y = \upsilon$ κατά συνέπεια, $x - A^*(-Ax) = \upsilon$ ή $A^*(Ax) + x = \upsilon$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

3.1. Τελεστής θέσης και τελεστής ορμής.

Παράδειγμα 3.1.1. (Τελεστής θέσης *Q*) Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, το υποσύνολο

$$\mathcal{D}(Q) = \{u(x) \in L^2(\mathbb{R}) : xu(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Και ορίζουμε τον τελεστή

$$Q : \mathcal{D}(Q) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (Qu)(x) = xu(x).$$

Ο Q είναι μή φραγμένος (θεωρούμε την ακολουθία των χαρακτηριστικών συναρτήσεων $\chi_{[n,n+1]}$, όπου $[n,n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ κλειστά διαστήματα του $\mathbb{R}$). Είναι όμως πυκνά ορισμένος διότι το $\mathcal{D}(Q)$ περιέχει το σύνολο $C_0^\infty(\mathbb{R})$ όλων των πραγματικών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα και ,ε συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης, το οποίο είναι γνωστό ότι είναι πυκνό στον $L^2(\mathbb{R})$. Ο Q λέγεται *τελεστής θέσης* και είναι συμμετρικός. Πράγματι, για κάθε u , $\upsilon \in \mathcal{D}(Q)$ είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} xu(x)\overline{\upsilon(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\overline{x\upsilon(x)}dx = \langle u, Q\upsilon \rangle.$$

Ο τελεστής Q είναι αυτοσυζυγής. Πράγματι έστω $u \in \mathcal{D}(Q)$, $\upsilon \in \mathcal{D}(Q)$ και $\upsilon^* = Q^*\upsilon$.

Τότε έχουμε: $\langle Qu, \upsilon \rangle = \langle u, Q^*\upsilon \rangle = \langle u, \upsilon^* \rangle$, οπότε $\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\overline{\left(x\upsilon(x) - \upsilon^*(x)\right)}dx = 0$. Η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με $\left(x\upsilon(x) - \upsilon^*(x)\right) \perp \mathcal{D}(Q)$ και επειδή το $\mathcal{D}(Q)$ είναι πυκνό στον $L^2(\mathbb{R})$ θα είναι $x\upsilon(x) - \upsilon^*(x) = 0.$ Επομένως $\upsilon^*(x) = x\upsilon(x)$, οπότε η απεικόνιση $u(x) \to \langle Qu(x), \upsilon(x) \rangle = \langle u(x), x\upsilon(x) \rangle$ είναι φραγμένη. Άρα $\upsilon \in \mathcal{D}(Q)$, $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(Q^*)$ και $(Q\upsilon)(x) = x\upsilon(x) = (Q^*\upsilon)(x)$, δηλαδή $Q = Q^*$.

Παράδειγμα 3.1.2. (Τελεστής θέσης Q_k) Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$, το υποσύνολο

$$\mathcal{D}(Q_k) = \{u(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^n) : x_k u(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

Όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ και ορίζουμε τον τελεστή

$$Q_k : (Q_k) \to L^2(\mathbb{R}) \quad \text{με} \quad (Qu)(\mathbf{x}) = x_k u(\mathbf{x}) \text{ για } \kappa = 1,2,...,n$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο παράδειγμα, αποδεικνύουμε ότι ο Q_k είναι ένας πυκνά ορισμένος συμμετρικός τελεστής.

Παράδειγμα 3.1.3. (Τελεστής ορμής *P*) Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, το υποσύνολο

$\mathcal{D}(P) = C_0^1(\mathbb{R}) = \{ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη με συμπαγή φορέα, u' συνεχής$\}$

Και ορίζουμε τον τελεστή

$$P : \mathcal{D}(P) \to L^2(\mathbb{R}) \quad (Pu)(x) = -\, iu'(x).$$

Είναι γνωστό ότι το $C_0^1(\mathbb{R})$ είναι πυκνό στον $L^2(\mathbb{R})$, άρα ο P είναι πυκνά ορισμένος. Αποδεικνύεται ότι αν $u \in D(P)$ τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x) = 0$. Πράγματι, επειδή $u, u' \in L^2(\mathbb{R})$, απο τη σχέση $\left|u(x)\right|^2 - \left|u(0)\right|^2 = \int_0^x \frac{dy}{dt}\left|u(t)\right|^2 dt = \int_0^x u(t)\overline{u'(t)}dt + \int_0^x u'(t)\overline{u(t)}dt,$ έχουμε ότι τα όρια $x \to \pm\infty$ υπάρχουν. Άρα αφού $u \in L^2(\mathbb{R})$, είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x) = 0.$ Με παραγοντική ολοκλήρωση εύκολα δείχνουμε ότι ο P είναι συμμετρικός. Πράγματι για $u, \upsilon \in \mathcal{D}(P)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\left\langle Pu, \upsilon\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} iu(x)\overline{\upsilon(x)}dt \\ &= -i\lim_{k\to\infty}\left(u(k)\overline{\upsilon(k)} - u(-k)\overline{\upsilon(-k)}\right) - \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\overline{i\upsilon'(x)} = \left\langle u, P\upsilon\right\rangle\end{aligned}$$

Ο συμμετρικός τελεστής P δεν είναι αυτοσυζυγής. Το πεδίο ορισμού του δεν είναι «αρκετά» μεγάλο. Μπορεί να επεκταθεί σε ένα αυτοσυζυγή τελεστή επεκτείνοντας κατάλληλα το πεδίο ορισμού του. Αν θεωρήσουμε ως πεδίο ορισμού το

$$\mathcal{D}(P) = \{ u \in L^2(\mathbb{R}), \text{ απολύτως συνεχής, } u' \in L^2(\mathbb{R})\},$$

Τότε ο P γίνεται αυτόσυζυγής. Αυτό όμως δεν ισχύει γενικά για κάθε συμμετρικό τελεστή. Ένας μη φραγμένος συμμετρικός τελεστής, μπορεί να μη δέχεται καμία αυτοσυζυγή επέκταση, μπορεί όμως να έχει υπεραριθμήσιμο σύνολο διαφορετικών επεκτάσεων και όπως είδαμε να είναι και αυτοσυζυγής.

3.2.Κβαντομηχανική και Τελεστές.

Ορισμός 3.2.1. (Ίχνος τελεστή) Έστω $A : H \to H$ ένας τελεστής. Ονομάζουμε *ίχνος* του τελεστή A, τον αριθμό

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, e_n \rangle, \tag{3.2.1}$$

όπου $\{e_n\}_n$ μια ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert H. Στην περίπτωση που η σειρά στη σχέση (3.2.1.) απειρίζεται ορίζουμε $\operatorname{tr}(A) = \infty$.

Ορισμός 3.2.1. (Μεταθέτης) Για δύο τελεστές A , B σε ένα χώρο Hilbert H,ο τελεστής

$$[A,B] = AB - BA$$

Με πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(AB) \cap \mathcal{D}(BA)$ ονομάζεται *μεταθέτης* των τελεστών A , B.

Απο τον παραπάνω ορισμό προκύπτει άμεσα ότι $[A,B] = -[B,A]$. Επίσης οι τελεστές Α, Β αντιμετατίθενται, αν και μόνο αν $[A,B] = 0$. Ο μεταθέτης τελεστών παίζει σημαντικό ρόλο στην Κβαντομηχανική. Για παράδειγμα, αν οι τελεστές δύο κβαντικών μεγεθών Α, Β έχουν μηδενικό μεταθέτη, τότε τα δύο αυτά μεγέθη μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα, με απόλυτη ακρίβεια. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα γεγονότα είναι *συμβιβαστά*. Επίσης ένα φυσικό μέγεθος είναι διατηρήσιμο όταν ο τελεστής Α, που το εκπρωσοπεί, αντιμετατίθεται με τον τελεστή H, που αντιστοιχεί στην ολική ενέργεια του συστήματος. Αν ο Α δεν μετατίθεται με τον H, τότε η μέση τιμή $\langle A \rangle$ του μεγέθους μεταβάλλεται με τον χρόνο και τον ρυθμό μεταβολής της τον καθορίζει ο μεταθέτης [Α, Η]. Συγκεκριμένα ισχύει η σχέση

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle$$

Όπου $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ και $\hbar$ είναι η σταθερά του Planck.

Ο μεταθέτης των τελεστών θέσης και ορμής εύκολα δείχνεται ότι είναι

$$[Q,P]u(x) = (QP-PQ)u(x) = i\,u(x) \quad \text{για κάθε } u \in \mathrm{D}(Q) \cap \mathrm{D}(P) \tag{3.2.2}$$

Δηλαδή $QP-PQ = iI$. Η σχέση (3.2.2) είναι γνωστή ως *ιδιότητα μετάθεσης Heisenberg*.

Ορισμός 3.2.1. (Τελεστής πυκνότητας) Ένας τελεστής $W:\ H \to H$ λέγεται *τελεστής πυκνότητας*, αν είναι αυτοσυζυγής, tr(W) = 1 και είναι $W \geq W^2 \geq 0$.

Στην κβαντομηχανική, μια κατάσταση είναι μια συνάρτηση πιθανότητας που ορίζεται πάνω στις ναι- όχι προτάσεις. Σε ένα κβαντικό σύστημα όμως οι καταστάσεις βρίσκονται σε μια ενα προς ένα αντιστοιχία με τους τελεστές πυκνότητας. Έτσι μια καθαρή κατάσταση, είναι μια κατάσταση , όπου ο αντίστοιχος τελεστής πυκνότητας ικανοποιεί τη σχέση $W = W^2$. Στην περίπτωση μιας καθαρής κατάστασης, ο αντίστοιχος τελεστής πυκνότητας W, είναι μια ορθογώνια προβολή με μονοδιάστατο σύνολο τιμών. Αν τώρα p είναι μια κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος, που αντιστοιχεί στον τελεστή πυκνότητας W και α ειναι μια ναι-όχι πρόταση, τότε η τιμή της p στην α, δίνεται απο τη σχέση

$$p(\alpha) = \mathrm{tr} WP\alpha = p(P\alpha).$$

Επίσης κάθε καθαρή κατάσταση p,μπορεί να ταυτιστεί με ένα μοναδιαίο διάνυσμα e του χώρου Hilbert H , έτσι ώστε να είναι: $p(P) = \langle Pe, e\rangle$ για κάθε ορθογώνια προβολή P.

Έστω τώρα A,B δύο αυτοσυζυγείς τελεστές(δύο παρατηρήσιμα μεγέθη) ενός κβαντικού συστήματος και έστω ότι ο τελεστής C, που ορίζεται απο τη σχέση

$$iC = AB - BA = [A,B], \tag{3.2.3}$$

είναι πυκνά ορισμένος. Αν e $\in H$ είναι μια καθαρή κατάσταση , $E(A)$,$E(B)$ είναι οι αναμενόμενες τιμές στο e και $\Delta(E(A))$, $\Delta(E(B))$ οι αβεβαιότητες στο e, των παρατηρίσιμων μεγεθών A , B, τότε ισχύουν :

$$\begin{aligned} k &= E(A) = \langle Ae, e\rangle, & \lambda &= E(B) = \langle Be, e\rangle, \\ \left(\Delta\left(E(A)\right)\right)^2 &= \left\|(A - kI)e\right\|^2, & \left(\Delta\left(E(B)\right)\right)^2 &= \left\|(B - kI)e\right\|^2 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

και
$$\Delta\left(E(A)\right)\Delta\left(E(B)\right) \geq \frac{1}{2}\left|E(C)\right| = \frac{1}{2}\left|E\left([A,B]\right)\right|. \tag{3.2.5}$$

Η σχέση (3.2.5) ονομάζεται *αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg*.

Παρατήρηση 3.2.1 Αν θεωρήσουμε τον τελεστή θέσης Q_k και τον τελεστή ορμής P_k , k = *1,2,...,n* στον χώρο Hilbert L^2 ($\mathbb{R}^n$), με πεδίο ορισμού το C_0^∞ ($\mathbb{R}^n$), και τύπο

$$P_k : u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to -i\frac{\partial}{\partial x_k}\, u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \tag{3.2.6}$$

Τότε εύκολα δείχνεται ότι είναι

$$[Q_k, P_k]u = (Q_k\ P_k - P_k\ Q_k)u = iu \text{ για κάθε } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

όπου $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι το σύνολο όλων των συνάρτησεων $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παράγωγους κάθε τάξης και συμπαγή φορέα (υπάρχει δηλαδή $M \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές , τέτοιο ώστε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$).

Αν τώρα απο τη σχέση (3.2.5) αντικαταστήσουμε τον τελεστή A με τον Q_k και τον B με τον $\hbar\ P_k$, τότε προκύπτει η σχέση

$$\Delta(E(Q_k))\Delta(E(\hbar\ P_k)) \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{3.2.7}$$

Η σχέση (3.2.7) στην κβαντομηχανική σημαίνει ότι δεν μπορούμε ποτέ να γνωρίζουμε συγχρόνως την ορμή και τη θέση ενός σωματιδίου με απόλυτη ακρίβεια. Αν προσδιοριστεί πειραματικά με μεγάλη ακρίβεια η θέση του σωματιδίου, η αβεβαιότητα της ορμής του θα είναι πολυ μεγάλη και αντιστρόφως.

Βιβλιογραφία

1. Lokenath Debnath, Piotr Mikusinki : Hilbert Spaces with Aplications, Orlando 1999
2. Haïm Brezis: Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και εφαρμογές, Αθήνα 1997
3. Σωτήριος Καρανάσιος : Θεωρία τελεστών και εφαρμογές, Αθήνα 2009
4. Γ.Ι.Ανδριτσόπουλος: Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική, Παπασωτηρίου, Αθήνα 1995
5. Mackey,G.W.: The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics,W.A.Benjamin, New York , 1963
6. I.Gohberg – S.Goldberg – M.Kaashoek: Basic Classes of Linear operators, Birkhauser,2003
7. A.W.Naylor – G.R.Sell: Linear Operator Theory in Engeineering and Science ,Springer - Verlag 1982
8. R.G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory , 2nd Edition., Springer 1988