Εφαρμογές των Τοπολογικών και Αλγεβρικών Ιδιοτήτων του Χώρου των Υπερφίλτρων στη Συνδυαστική

Μιλτιάδης Καραμανλής

Επιβλέπων: Βασίλης Κανελλόπουλος Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Σολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Εφαρμογές των Τοπολογικών και Αλγεβρικών Ιδιοτήτων του Χώρου των Υπερφίλτρων στη Συνδυαστική

Μιλτιάδης Καραμανλής

Στην γιαγιά

Πρόλογος

Τα υπερφίλτρα έκαναν για πρώτη φορά την εμφάνιση τους στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα και από τότε έχουν βρει πληθώρα εφαρμογών. Είναι αξιοσημείωτο ότι εκτός από άλλα πεδία των μαθηματικών όπως η λογική, η θεωρία μοντέλων και η συνδυαστική, τα οποία κάνουν "βαριά" χρήση των εργαλείων αυτών, τα υπερφίλτρα έχουν χρησιμοποιηθεί και σε τομείς που λίγη σχέση έχουν με τα καθαρά μαθηματικά όπως η κοινωνιολογία, η φιλοσοφία και τα οικονομικά.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, προσπάθησα να συγκεντρώσω εκείνα τα στοιχεία της θεωρίας, που θα βοηθήσουν τον ενδιαφερόμενο να πάρει μια ιδέα για το τι είναι τα υπερφίλτρα και πως χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά. Εκτός από τα προαπαιτούμενα της θεωρίας της τοπολογίας, όλες οι προτάσεις και τα θεωρήματα έχουν αποδειχθεί με κάθε λεπτομέρεια με το σκεπτικό ότι έτσι το κείμενο θα έχει περισσότερες πιθανότητες να διαβαστεί από κάποιον άλλο, εξαιρουμένης της εξεταστικής επιτροπής και του λόγου μου.

Κλείνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή Βασίλη Κανελλόπουλο για την αμέριστη συμπαράσταση που έδειξε. Την Αγγελική, χωρίς την βοήθεια της οποίας το κείμενο θα είχε χαρακτηριστικά έκθεσης παιδιού δημοτικού. Τον Γιάννη, τον Φώτη, τον Μήτσο, τον Φοίβο και το Αριστοτέλη για την παρέα, καθώς επίσης την μητέρα μου, τον πατέρα μου, τον ξάδερφο της κοπέλας του αδερφού μου και τα δύο μου αδέρφια. Για οποιαδήποτε λάθη τυπογραφικά, ορθογραφικά, γραμματικά ή λογικά μοναδικός υπεύθυνος είμαι εγώ και πραγματικά θα ήθελα πολύ αν κάποιος ανακαλύψει λάθη να με ενημερώσει μέσω email ώστε να προβώ στην διόρθωση τους.

Ελλάδα, Αθήνα

Νοέμβριος 2011

Μιλτιάδης Καραμανλής
kararemilt@gmail.com

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως κύριο αντικείμενο μελέτης τα υπερφίλτρα και τις εφαρμογές αυτών. Τα υπερφίλτρα έκαναν την εμφάνιση τους για πρώτη φορά στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα μέσα από μία εργασία του Riesz [15] η οποία είχε ως αντικείμενο μελέτης την έννοια της συνέχειας και της εγγύτητας. Από τοπολογική σκοπιά μία έννοια σύγκλισης βασισμένη στα υπερφίλτρα (όπως και στα δίκτυα) φάνηκε ότι μπορεί να χαρακτηρίσει έννοιες όπως η συνέχεια, η κλειστότητα και η συμπάγεια σε γενικούς τοπολογικούς χώρους (σε αντίθεση με τις ακολουθίες). Επιπλέον τα υπερφίλτρα βρήκαν εφαρμογές σε πολλούς και φαινομενικά ανεξάρτητους τομείς των μαθηματικών, ενώ παράλληλα ανέδειξαν συνδέσεις μεταξύ κλάδων όπως η θεωρία μέτρου, η λογική, οι άλγεβρες Boole, η θεωρία μοντέλων και βεβαίως η τοπολογία από όπου και γεννήθηκαν.

Στο κείμενο θεμελιώνονται αρχικά οι βασικές ιδιότητες των υπερφίλτρων και στην συνέχεια μελετώνται οι τοπολογικές ιδιότητες της Stone Ĉech συμπαγοποίησης βS ενός διακριτού τοπολογικού χώρου S που μπορεί να θεωρηθεί φυσιολογικά ως ο χώρος των υπερφίλτρων του S. Ύστερα αναπτύσσονται βασικές έννοιες και θεωρήματα της αλγεβρικής θεωρίας των ημιομάδων τα οποία και εφαρμόζονται για να εξαχθούν κάποια αποτελέσματα σχετικά με την αλγεβρική δομή της Stone Ĉech συμπαγοποίησης μίας διακριτής ημιομάδας. Τέλος γίνεται χρήση των προαναφερθέντων προς απόδειξη κάποιων θεωρημάτων της θεωρίας Ramsey όπως το Finite Sums Theorem του Hindman [9], το θεώρημα Hales-Jewett [7] και το θεώρημα van der Waerden [22].

Πιο αναλυτικά τα κεφάλαια περιλαμβάνουν τα εξής:

Εισαγωγή: Τοπολογικές Ιδιότητες και Σύγκλιση

Σε αυτό το πρώτο κεφάλαιο πρώτα παρατίθενται χωρίς απόδειξη βασικοί ορισμοί και θεωρήματα της θεωρίας της Τοπολογίας που αφορούν έννοιες όπως οι βάσεις περιοχών, το εσωτερικό συνόλου, η κλειστότητα συνόλου, η συμπάγεια, η συνέχεια συναρτήσεως, η επαγόμενη τοπολογία και η τοπολογία γινόμενο. Στην συνέχεια δίνεται μία όμορφη τοπολογική απόδειξη της απειρίας των πρώτων αριθμών η οποία οφείλεται στον Furstenberg [6]. Τέλος γίνεται μία μελέτη της ικανότητας των ακολουθιών στον χαρακτηρισμό ιδιοτήτων όπως η συνέχεια η συμπάγεια και η κλειστότητα και δείχνεται ότι αυτές δεν επαρκούν στην περίπτωση γενικών τοπολογικών χώρων.

Υπερφίλτρα και Εφαρμογές

Αφού δοθεί ο κλασικός τοπολογικός ορισμός των φίλτρων και των υπερφίλτρων, παραθέτονται κάποια παραδείγματα και αποδεικνύονται βασικές ιδιότητες όπως π.χ το γεγονός ότι κάθε οικογένεια συνόλων που ικανοποιεί την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής μπορεί να επεκταθεί σε ένα υπερφίλτρο. Στην συνέχεια ορίζεται η έννοια της σύγκλισης ενός φίλτρου και αποδεικνύεται ότι αυτή ανεξαρτήτως τοπολογίας μπορεί να χαρακτηρίσει όλες οι σημαντικές ιδιότητες όπως η συνέχεια συναρτήσεως και η συμπάγεια. Ύστερα αφού οριστεί η έννοια του φίλτρου γινομένου, δίνεται μία απόδειξη του γνωστού θεωρήματος Tychonoff. Αφού δοθεί ο ορισμός της Stone Ĉech συμπαγοποίησης ενός τελείως κανονικού χώρου, αποδεικνύεται ότι αν το σύνολο των υπερφίλτρων ενός διακριτού χώρου εφοδιαστεί με την Stone τοπολογία δηλαδή την τοπολογία που έχει ως βάση τα σύνολα της μορφής $\widehat{A} = \{\,\mathcal{U} \mid A \in \mathcal{U}\,\}$, ο τοπολογικός χώρος που προκύπτει είναι ομοιομορφικός με την Stone Ĉech συμπαγοποίηση του αρχικού χώρου. Εν συνεχεία δίνεται μία αντιστοιχία μεταξύ των υπερφίλτρων σε ένα σύνολο των δίτιμων πεπερασμένα αθροιστικών μέτρων και των γενικευμένων ποσοδεικτών που επιμερίζονται με όλους τους λογικούς συνδέσμους. Τέλος αποδεικνύεται η αντιστοιχία μεταξύ υπερφίλτρων $\mathcal{U}$ και ομοιόμορφων $\mathcal{U}$-ορίων τα οποία δείχνεται ότι είναι το ίδιο αποτελεσματικά και ευέλικτα με τα δίκτυα.

Ημιομάδες, Ιδεώδη και Ταυτοδύναμα Στοιχεία

Αφού δοθούν κάποιοι βασικοί ορισμοί της Θεωρίας Ημιομάδων, η μελέτη επικεντρώνεται στις ιδιότητες των ταυτοδύναμων στοιχείων και των μονόπλευρων και δίπλευρων ιδεωδών. Συγκεκριμένα δίνονται ικανές συνθήκες ώστε τα ελαχιστικά μονόπλευρα και ελάχιστα δίπλευρα ιδεώδη να περιέχουν ταυτοδύναμα στοιχεία. Στην συνέχεια ορίζεται μία διάταξη στα ταυτοδύναμα στοιχεία μιας ημιομάδας και χαρακτηρίζονται τα ελαχιστικά ταυτοδύναμα ως προς αυτή. Το κεφάλαιο κλείνει με την απόδειξη του Θεωρήματος Δομής 3.74 που οφείλεται στον Suschkewitsch [20] για την πεπερασμένη περίπτωση και τον Rees [14] για την άπειρη.

Η Stone Ĉech Συμπαγοποίηση μιας Διακριτής Ημιομάδας

Αρχικά δίνεται ο ορισμός των δεξιά τοπολογικών ημιομάδων και στην συνέχεια αποδεικνύεται ότι κάθε συμπαγής δεξιά τοπολογική ημιομάδα έχει τουλάχιστον ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων του Κεφαλαίου 3 χαρακτηρίζονται πλήρως τα ελαχιστικά μονόπλευρα ιδεώδη και τα ελαχιστικά ταυτοδύναμα που περιέχουν. Στην συνέχεια η πράξη μίας ημιομάδας S επεκτείνεται στην Stone Ĉech συμπαγοποίηση της βS κάνοντας χρήση της χαρακτηριστικής ιδιότητας της μοναδικής συνεχούς επέκτασης. Μετά από την απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας της επέκτασης από όπου βγαίνει το συμπέρασμα ότι η βS είναι μια συμπαγής δεξιά τοπολογική ημιομάδα εξετάζονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους νοείται η επεκτεταμένη πράξη μεταξύ των υπερφίλτρων στοιχείων της βS. Το κεφάλαιο κλείνει με δύο αποδείξεις μίας γενικευμένης μορφής του Finite Sums Theorem του Hindman [9] στις οποίες γίνεται χρήση του γεγονότος ύπαρξης ταυτοδύναμου στοιχείου στην βS.

Το Θεώρημα των Hales-Jewett

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο δίνεται μία απόδειξη του Θεωρήματος Hales-Jewett [7] κάνοντας επιπλέον χρήση και της διάταξης των ταυτοδύναμων στοιχείων. Στην συνέχεια εξάγονται ως πόρισμα τα θεωρήματα των van der Waerden [22] και Rado [13].

Summary

The subject of this diploma thesis is ultrafilters and their applications. Ultrafilters made their first appearance at the beginning of the 20^{th} century in a paper of Riesz [15] concerning the continuity and the notion of "nearness". From a topological point of view the convergence of ultrafilters (as nets) has the capability to characterize concepts like the closure of a set, the continuity of functions and the compactness in abstract topological spaces. Furthermore, ultrafilters have found applications in many fields of Mathematics such as Measure Theory, Logic, Boolean Algebra, Model Theory and of course Topology from, which they originate, providing a link between them.

In this text after the introduction of the basic definitions and the examination of the most essential properties of ultrafilters, the Stone Ĉech compactification βS of a discrete space S is being studied. Subsequently, some of the theory of Semigroups is developed and then applied in the study of the algebraic structure of the Stone Ĉech compactification of a discrete semigroup. Finally the Finite Sums Theorem Hindman, the Hales-Jewett Theorem [7] and the Van De Waerden Theorem [22] are proved.

More specifically the content of each chapter is as follows:

Chapter 1: Topological Introduction

This chapter starts with a presentation of the basic definitions and some of the most fundamental theorems of Topology. For example notions such as the closure of a set, compactness, the product topology and the continuity

of a function are defined and some of their properties are exposed. After the description of a beautiful topological proof of the infinitude of Primes due to Furstenberg [6], the power of characterization of properties by means of sequence convergence is explored to conclude that these fail to achieve this goal in abstract topological spaces.

Chapter 2: Ultrafilters

After the classic topological definition of filters and ultrafilters some of the basic properties are presented and proved, such as the fact that every family of subsets of a set that has the Finite Intersection Property can be expanded to an ultrafilter. Subsequently, the notion of filter convergence and the image of a filter through a function are defined and it is shown that these are sufficient for characterizing concepts like continuity, compactness and the closure of a set in abstract topological spaces. Next, the definition of the product filter is presented and the Tychonoff Theorem is proved using the theory of ultrafilters. After the definition of the Stone Ĉech compactification βX of a completely regular Hausdorff space X, it is shown that in the case of a discrete space S its Stone Ĉech compactification βS is homeomorphic to the space of ultrafilters of S with the Stone topology, whose basic open sets are exactly those of the form $\widehat{A} = \{\, \mathcal{U} \mid A \in \mathcal{U} \,\}$, where the symbol $\mathcal{U}$ symbolizes an ultrafilter on S. Subsequently, a description of a $1-1$ correspondence between ultrafilters, $0-1$ finitely additive measures and generalized quantifiers which distribute with all propositional connectives is provided. Finally the notion of uniform limit is defined and is shown that it is as versatile as the notion of nets.

Chapter 3: Semigroups

In this chapter the basic definition and properties of the Theory of Semigroups is presented with more attention paid on the concepts of idempotent elements, one-sided and two-sided Ideals. After some theorems which give necessary conditions for an one-side ideal to contain an idempotent element, a partial order is defined on the set of idempotents of a semigroup and a characterization of those that are minimal with respect to this order is given. The chapter closes with the proof of the Structure Theorem 3.74 which we owe to Suschkewitsch [20] for the finite case and Rees [14] for the infinite case.

Chapter 4: The Stone Ĉech Compactification of a Discrete Semigroup

After a brief presentation of the topological hierarchy of algebraic structures equipped with a topology the focus is given at right topological semigroups. It is proved that the set of the idempotent elementsof a compact right topological semigroup it is always non void. This fact has as a consequence that for every idempotent $e \in S$ there exists minimal idempotent f with $f \leq e$. Subsequently the operation of a discrete semigroup is expanded by the fundamental property of the Stone Ĉech compactification to the entire space βS and it is proved that it becomes a compact right topological semigroup. After a presentation of the various ways in which someone can understand the operation between ultrafilters (which are the elements of βS), two proofs are given concerning a generalization of Hindmans Finite Sums Theorem [9] using the fact that there exist an idempotent ultrafilter.

Chapter 5: The Theorem of Hales-Jewett

In this last chapter, by using the results which concern minimal idempotent elements in compact right topological semigroups a proof of the well known Theorem of Hales-Jewett [7] is presented. The chapter ends with a proof of Van De Waerdens Theorem [22] and Gallais Theorem for abelian groups [13].

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή: Τοπολογικές Ιδιότητες και Σύγκλιση

Στο κεφάλαιο αυτό, θα προετοιμάσουμε το έδαφος για την εισαγωγή της έννοιας των υπερφίλτρων, αναπτύσσοντας παράλληλα κάποια βασικά στοιχεία της θεωρίας που θα χρειαστούμε στην συνέχεια. Θα γίνει επίσης μία προσπάθεια να αναδειχθούν τα κίνητρα εισαγωγής της έννοιας των υπερφίλτρων, τα οποία αν και αρχικώς βρήκαν εφαρμογή κυρίως στην τοπολογία μέσα από την οποία γεννήθηκαν, αποδείχθηκαν όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια πολύ γόνιμα αφού συνδέθηκαν με πολλούς και διαφορετικούς τομείς των μαθηματικών.

1.1 Λίγη Τοπολογία

Η είναι μία δομή η οποία μας επιτρέπει να περιγράψουμε την έννοια της εγγύτητας ενός σημείου από ένα σύνολο και της συνέχειας μίας συνάρτησης. Παρακάτω, χάριν πληρότητας, θα περιγράψουμε τις βασικές έννοιες και αποτελέσματα της θεωρίας της τοπολογίας τα οποία θα χρησιμεύσουν στην συνέχεια. Για μία πιο πλήρη ανάπτυξη της θεωρίας της τοπολογίας ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε κάποιο από τα [26], [12] και [24] ή οποιοδήποτε άλλο βιβλίο της αρεσκείας του.

Ορισμός 1.1 Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{T} \subset 2^X$. Τότε η συλλογή $\mathcal{T}$ ονομάζεται *τοπολογία* (**topology**) (στο X) όταν:

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$

(ii) Αν $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$, τότε $\bigcup A_i \in \mathcal{T}$

(iii) Αν $(A_k)_{k=1}^n \subset \mathcal{T}$, τότε $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{T}$

Παρατήρηση 1.2 Το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ το ονομάζουμε τοπολογικό χώρο, τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ τα ονομάζουμε ανοιχτά υποσύνολα του X, ενώ τα συμπληρώματα αυτών θα τα λέμε κλειστά υποσύνολα του X. Όταν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θα γράφουμε $\mathcal{T}_X$ για αναφερθούμε ρητώς στο σύνολο X στο οποίο θεωρούμε την τοπολογία.

Παράδειγμα 1.3 Αν X ένα σύνολο τότε οι παρακάτω οικογένειες αποτελούν παραδείγματα τοπολογιών που ορίζονται στο X.

(i) Η *τετριμμένη τοπολογία* (**trivial topology**)

$$T_1 = \{ \varnothing, X \}.$$

(ii) Η *διακριτή τοπολογία* (**discrete topology**)

$$T_2 = 2^X (\text{το δυναμοσύνολο του } X).$$

(iii) Η *συμπεπερασμένη τοπολογία* (**cocounable topology**)

$$T_3 = \{ U \subset X \mid U^c \text{πεπερασμένο} \}.$$

Ορισμός 1.4 Για κάθε $A \subset X$, ορίζουμε το *εσωτερικό* (**interior**) του A, ως το σύνολο

$$\mathrm{Int}(A) \overset{\text{def}}{=} \bigcup \{ G \mid G \subset A \wedge G \in \mathcal{T} \}$$

δηλαδή ως την ένωση όλων των ανοιχτών που περιέχονται στο A.

Παρατήρηση 1.5 Διαισθητικά το εσωτερικό ενός συνόλου A, το οποίο μερικές φορές θα το συμβολίζουμε και ως A^o, είναι το μεγαλύτερο (ως προς την διάταξη του περιέχεσθαι) ανοιχτό υποσύνολο του A.

Ορισμός 1.6 Για κάθε $A \subset X$, ορίζουμε την *κλειστότητα* (**closure**) του A, ως το σύνολο

$$\mathrm{Cl}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{ F \subset X \mid A \subset F \wedge F^c \in \mathcal{T} \}$$

δηλαδή ως την τομή όλων των κλειστών που περιέχουν το A.

Παρατήρηση 1.7 Διαισθητικά η κλειστότητα ενός συνόλου A, την οποία μερικές φορές θα τη συμβολίζουμε και ως $\overline{A}$, είναι το μικρότερο κλειστό που περιέχει το A.

Ορισμός 1.8 Αν $x \in X$ λέμε ότι το σύνολο V είναι *περιοχή* (**neighborhood**) του x, όταν το x ανήκει στο εσωτερικό του V. Η συλλογή όλων των περιοχών ενός σημείου x λέγεται *σύστημα περιοχών* (**neighborhood system**) του x και συμβολίζεται με $\mathcal{N}_x$. Μία συλλογή $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ λέγεται *βάση περιοχών* (**neighborhood base**) του x αν για κάθε $V \in \mathcal{N}_x$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$ τ.ω $B \subset V$.

Η έννοια της περιοχής ενός σημείου μας δίνει τον εξής χαρακτηρισμό των ανοιχτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου:

Πρόταση 1.9 *Ένα υποσύνολο U ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι ανοιχτό ανν είναι περιοχή κάθε σημείου του, δηλαδή ανν $U \in \mathcal{N}_x \,\forall\, x \in U$.*

Πρόταση 1.10 *Αν $\mathcal{N}_x$ το σύστημα περιοχών του x, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.*

(i) $\varnothing \notin \mathcal{N}_x$.

(ii) Αν $V, U \in \mathcal{N}_x$, τότε $V \cap U \in \mathcal{N}_x$.

(iii) Αν $V \in \mathcal{N}_x$, και $V \subset U$, τότε $U \in \mathcal{N}_x$.

Πρόταση 1.11 *Η κλειστότητα του συνόλου A είναι το σύνολο όλων των σημείων των οποίων κάθε περιοχή τέμνει το A δηλαδή:*

$$\mathrm{Cl}(A) = \{ x \in X \mid V \cap A \neq \varnothing \,\forall\, V \in \mathcal{N}_x \}.$$

Παρατήρηση 1.12 Τα σημεία που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση λέγονται και *σημεία κλειστότητας* (**closure points**) ή *οριακά σημεία* (**limit points**). Να σημειώσουμε ότι υπάρχει μία ασυμφωνία στην ορολογία και κάποιοι λέγοντας οριακά σημεία εννοούν αυτό που εμείς παρακάτω θα ορίσουμε ως σημείο συσσώρευσης. Σε κάθε περίπτωση στην παρούσα εργασία θα μείνουμε συνεπείς με τα παραπάνω.

Ορισμός 1.13 Έστω $A \subset X$ ένα στοιχείο $x \in A$ λέγεται μεμονωμένο σημείο του A αν υπάρχει ανοιχτό G τ.ω $G \cap A = \{ x \}$.

Ορισμός 1.14 Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, ένα υποσύνολο του A λέγεται *πυκνό* (**dense**) υποσύνολο του X αν $\overline{A} = X$, δηλαδή αν το μικρότερο κλειστό που το περιέχει είναι ολόκληρος ο χώρος X.

Ορισμός 1.15 Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται *Hausdorff* αν για κάθε ζεύγος σημείων του $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν περιοχές $U \in \mathcal{N}_x$ και $V \in \mathcal{N}_y$ τ.ω $U \cap V = \varnothing$.

Ορισμός 1.16 Ένα σημείο x λέγεται *σημείο συσσώρευσης* (**accumulation point**) του συνόλου A, αν για κάθε περιοχή V του x έχουμε ότι, $(V \setminus \{ x \}) \cap A \neq \varnothing$. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του συνόλου A το καλούμε το *παράγωγο σύνολο* (**derived set**) του A και το συμβολίζουμε με A'.

Ορισμός 1.17 Έστω $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ συνάρτηση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων και $x_0 \in X$, η f λέγεται *συνεχής στο* x_0, αν η αντίστροφη εικόνα οποιασδήποτε περιοχής του $f(x_0)$ είναι περιοχή του x_0, δηλαδή αν $\forall\, N \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$, ισχύει ότι $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{x_0}$. Η συνάρτηση f θα λέγεται *συνεχής* (**continuous**) αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X.

Παρακάτω δίνουμε μία λίστα από ισοδύναμες προτάσεις που χαρακτηρίζουν τις συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.18 *Έστω μία συνάρτηση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Η f είναι συνεχής.

(ii) $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X, \forall\, U \in \mathcal{T}_Y$ (Αντιστρέφει ανοιχτά σε ανοιχτά).

(iii) $X \setminus f^{-1}(F) \in \mathcal{T}_X, \forall\, F^c \in \mathcal{T}_Y$ (Αντιστρέφει κλειστά σε κλειστά).

(iv) $\forall\, A \subset X\,,\, f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(v) $\forall\, B \subset Y\,,\, \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

(vi) $\forall\, B \subset Y\,,\, f^{-1}(B^o) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^o$.

Στην τοπολογία, για να μπορέσουμε να μελετήσουμε τις συναρτήσεις που μας ενδιαφέρουν παίζει σημαντικό ρόλο η συνέχεια αυτών, έτσι συχνά επιλέγουμε την τοπολογία μας ώστε να ικανοποιείται αυτή η απαίτηση. Βέβαια όσο περισσότερα είναι τα στοιχεία της τοπολογίας, τόσο πιο περίπλοκη γίνεται η δομή της και επομένως χρειαζόμαστε μία μέθοδο για να παράγουμε την ελάχιστη δυνατή τοπολογία που πληρεί τις προϋποθέσεις που έχουμε θέσει. Τα παρακάτω στοχεύουν ακριβώς σε αυτό.

Πρόταση 1.19 *Αν $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια τοπολογιών σε ένα χώρο X, τότε η τομή τους $\mathcal{T} = \bigcap \mathcal{T}_i$, είναι επίσης τοπολογία στο X.*

Με χρήση της πρότασης 1.19 μπορούμε να δούμε ότι ο παρακάτω ορισμός είναι καλός.

Ορισμός 1.20 Αν $\mathcal{C}$ μία οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X, η τομή όλων των τοπολογιών που περιέχουν την $\mathcal{C}$ είναι η μικρότερη τοπολογία στο X που περιέχει την $\mathcal{C}$ και ονομάζεται η *τοπολογία που παράγεται από* την $\mathcal{C}$.

Ο ορισμός 1.20 αν και χρήσιμος σαν έννοια, δεν μας δίνει πολλές πληροφορίες για την εσωτερική δομή της παραγόμενης τοπολογίας, χρειαζόμαστε λοιπόν έναν τρόπο να περιγράφουμε τα στοιχεία μίας τοπολογίας από τα στοιχεία ενός πιο απλού υποσυνόλου της.

Ορισμός 1.21 Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, η οικογένεια $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ λέγεται βάση της $\mathcal{T}$ αν κάθε ανοιχτό ισούται με την ένωση κάποιων στοιχείων της $\mathcal{B}$, δηλαδή αν $\forall G \in \mathcal{T}$ υπάρχει $(B_i)_{i\in I}$ τ.ω $G = \bigcup B_i$.

Παρατήρηση 1.22 Σύμφωνα με τον ορισμό 1.21 κάθε ανοιχτό είναι ένωση στοιχείων της βάσης και αφού $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ κάθε ένωση στοιχείων της βάσης είναι ανοιχτό επομένως αν $\mathcal{B}$ βάση για την $\mathcal{T}$ τότε $\mathcal{T} = \{\, \cup B_i \mid B_i \in \mathcal{B}\,\}$.

Παρατήρηση 1.23 Έπεται από τα προηγούμενα ότι αν $\mathcal{B}$ βάση για μία τοπολογία $\mathcal{T}$, αυτή θα ταυτίζεται με την ελάχιστη τοπολογία που παράγεται από την $\mathcal{B}$.

Στην περίπτωση που θέλουμε να εξετάσουμε αν ένα ”βολικό” υποσύνολο μία καθορισμένης τοπολογίας είναι βάση της, έχουμε τον εξής χαρακτηρισμό.

Πρόταση 1.24 *Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, και $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Η $\mathcal{B}$ είναι βάση της $\mathcal{T}$.

(ii) Για κάθε $G \in \mathcal{T}$ και $x \in G$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ τ.ω $x \in B \subset G$.

Συνήθως τα βασικά ανοιχτά είναι λιγότερα και πιο απλά σε δομή, έτσι όταν γνωρίζουμε μία βάση για την τοπολογία στην οποία εργαζόμαστε είναι προτιμότερο να ψάξουμε πληροφορίες στα βασικά.

Πρόταση 1.25 *Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, και $\mathcal{B}$ μία βάση για την $\mathcal{T}$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Το G είναι ανοιχτό.

(ii) Για κάθε $x \in G$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ τ.ω $x \in B \subset G$.

Είναι επίσης χρήσιμο να γνωρίζουμε, πότε μία οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X είναι βάση για κάποια τοπολογία διότι τότε από τις παρατηρήσεις 1.22 και 1.23 θα έχουμε έναν πολύ βολικό τρόπο να περιγράψουμε τα ανοιχτά της τοπολογίας που παράγεται από αυτή την οικογένεια.

Θεώρημα 1.26 *Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{B}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία στο X ανν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $X = \bigcup \{ B \mid B \in \mathcal{B} \}$.

(ii) Αν B_1,$B_2 \in \mathcal{B}$ και $x \in B_1 \cap B_2$, τότε υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ τ.ω $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Αν και η έννοια της βάσης μίας τοπολογίας είναι πολύ χρήσιμη, το αντικείμενο που περιγράφει είναι αρκετά δομημένο και έτσι αν συλλέξουμε όλα τα υποσύνολα που θέλουμε να χαρακτηρίσουμε ως ανοιχτά (ώστε οι συναρτήσεις που μας ενδιαφέρουν να είναι συνεχείς) αυτά συνήθως δεν θα αποτελούν βάση για κάποια τοπολογία. Προκύπτει λοιπόν η ανάγκη να μπορούμε να παράγουμε μία τοπολογία από μία συλλογή πιο απλής δομής.

Ορισμός 1.27 Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Μία υποοικογένεια $\mathcal{C}$ της $\mathcal{T}$ λέγεται *υποβάση* (**subbase**) για την $\mathcal{T}$ αν η οικογένεια των τομών πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της $\mathcal{C}$ μαζί με το χώρο X είναι βάση της $\mathcal{T}$, δηλαδή αν η οικογένεια:

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in F} C_i \;\middle|\; C_i \in \mathcal{C} \wedge F \text{ πεπερασμένο} \right\} \cup \{ X \}$$

είναι βάση της $\mathcal{T}$.

Παρατήρηση 1.28 Αυτό που καθιστά τον παραπάνω ορισμό πολύ σημαντικό εργαλείο είναι ότι αν η οικογένεια $\mathcal{C}$ είναι υποβάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$ τότε αυτή ταυτίζεται με την τοπολογία που παράγεται από την $\mathcal{C}$ και έτσι έχουμε ένα τρόπο να περιγράφουμε τα στοιχεία της ελάχιστης τοπολογίας που περιέχει την $\mathcal{C}$ αφού κάθε ανοιχτό G θα είναι της μορφής:

$$G = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} C_{ij} \text{ όπου } C_{ij} \in \mathcal{C} \cup \{ X \} \text{ και } \forall\, i \in I \text{ το } J_i \text{ πεπερασμένο.} \tag{1.1}$$

Μία άλλη χρήσιμη δυνατότητα που έχουμε είναι να δημιουργούμε καινούργιους τοπολογικούς χώρους από ήδη υπάρχοντες. Είναι βεβαίως επιθυμητό κάθε φορά και ανάλογα με την περίπτωση η τοπολογία που θα προκύψει να έχει μία σύνδεση με την τοπολογία από την οποία προήλθε.

Ορισμός 1.29 Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$ ένα υποσύνολο του. Η οικογένεια υποσυνόλων του A

$$\mathcal{T}_A \stackrel{\text{def}}{=} \{ B \subset A \mid \exists G \in \mathcal{T} \text{ τ.ω } B = A \cap G \}$$

είναι τοπολογία στο A και την ονομάζουμε *σχετική τοπολογία* (**relative topology**) (ως προς X) στο A.

Ο τοπολογικός χώρος $(A, \mathcal{T}_A)$, θα καλείται *υπόχωρος* (**subspace**) του $(X, \mathcal{T})$ και τα στοιχεία της $\mathcal{T}_A$ θα τα λέμε ανοιχτά στο A, ενώ τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ θα τα λέμε απλώς ανοιχτά.

Παρατήρηση 1.30 Αν και γενικά στο σύνολο A θα μπορούσαμε να ορίσουμε πολλές διαφορετικές τοπολογίες, η σχετική τοπολογία είναι μία φυσική επιλογή τοπολογίας, συσχετισμένης με την τοπολογία του X αφού όπως μπορεί εύκολα να αποδείξει κάποιος είναι η μικρότερη τοπολογία στο A, η οποία κάνει την ταυτοτική απεικόνιση στο A συνεχή. Στο εξής, όταν αναφερόμαστε στην τοπολογία ενός υποσυνόλου ενός τοπολογικού χώρου, θα εννοούμε την σχετική τοπολογία εκτός και αν ρητά δηλώσουμε κάτι διαφορετικό.

Παρακάτω δίνουμε κάποιες από τις πιο βασικές ιδιότητες που προκύπτουν από την έννοια της σχετικής τοπολογίας

Πρόταση 1.31 *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subset X$ και $\mathcal{T}_A$ η σχετική τοπολογία στο A, τότε:*

(i) Ένα υποσύνολο B του A είναι κλειστό στο A ανν υπάρχει κλειστό υποσύνολο F τ.ω $B = A \cap F$.

(ii) Αν το A είναι ανοιχτό, ένα υποσύνολο B του A είναι ανοιχτό στο A ανν είναι ανοιχτό.

(iii) Αν το A είναι κλειστό, ένα υποσύνολο B του A είναι κλειστό στο A ανν είναι κλειστό.

(iv) Για κάθε υποσύνολο B του A, $\mathrm{Cl}_{\mathcal{T}_A}(B) = \mathrm{Cl}(B) \cap A$.

(v) Για κάθε υποσύνολο B του A, $\mathrm{Int}(B) \cap A \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{T}_A}(B)$.

(vi) Για κάθε $x \in A$ το σύστημα περιοχών του x ως προς την σχετική τοπολογία στο A, είναι η οικογένεια συνόλων $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}_A} = \{ V \cap A \mid G \in \mathcal{N}_x \}$.

(vii) Αν $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση τότε ο περιορισμός της στο A, δηλαδή η συνάρτηση $f|_A : (A, \mathcal{T}_A) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ θα είναι συνεχής.

Μία πολύ σημαντική έννοια στη τοπολογία είναι αυτή της συμπάγειας και αυτό διότι τα συμπαγή σύνολα σε πολλές περιπτώσεις συμπεριφέρονται το ίδιο καλά με τα πεπερασμένα σύνολα.

Ορισμός 1.32 Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ θα λέγεται *συμπαγής* (**compact**) αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα του, δηλαδή κάθε οικογένεια ανοιχτών $(U_i)_{i \in I}$ τ.ω $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχει $F \subset I$ πεπερασμένο τ.ω

$X \subset \bigcup_{i\in F} U_i$. Ένα υποσύνολο A του X θα λέγεται *συμπαγές* αν είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος με την σχετική τοπολογία.

Ορισμός 1.33 Μία οικογένεια συνόλων $(F_i)_{i\in I}$ λέμε ότι έχει την *ιδιότητα της πεπερασμένης τομής* (**finite intersection property**) (FIP) αν για κάθε επιλογή δεικτών $i_1, i_2, \dots, i_n$ ισχύει ότι $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} \neq \varnothing$.

Πρόταση 1.34 *Έστω X τοπολογικός χώρος, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι συμπαγής.

(ii) Για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την FIP ισχύει ότι $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$.

(iii) Για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ υποσυνόλων του X με την FIP ισχύει ότι $\bigcap_{i\in I} \overline{F}_i \neq \varnothing$.

Για τα επόμενα είναι απαραίτητο να υπενθυμίσουμε τον συνολοθεωρητικό ορισμό του καρτεσιανού γινομένου συνόλων, ο οποίος γενικεύει την πεπερασμένη περίπτωση σε αυθαίρετες οικογένειες.

Ορισμός 1.35 Έστω $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια συνόλων, το *καρτεσιανό γινόμενο* της οικογένειας είναι το σύνολο:

$$\prod_{i\in I} X_i \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup X_i \;\middle|\; \forall i \in I\, f(i) \in X_i \right\}$$

Είναι δηλαδή το σύνολο όλων των συναρτήσεων οι οποίες αντιστοιχούν σε κάθε δείκτη ένα στοιχείο του αντίστοιχου συνόλου.

Παρατήρηση 1.36 Για να καταλάβουμε τον τρόπο με τον οποίο συνδέεται ο ορισμός 1.35 με τον συνήθη ορισμό που δίνεται στην πεπερασμένη περίπτωση, αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση ενός διατεταγμένου ζεύγους πραγματικών αριθμών που στην ουσία είναι μία συνάρτηση από το σύνολο δεικτών $\{ 1, 2 \}$ στο $\mathbb{R}$.

Μια έννοια που συνδέεται άρρηκτα με το καρτεσιανό γινόμενο συνόλων είναι αυτή της προβολής πάνω σε μία συντεταγμένη του γινομένου.

Ορισμός 1.37 Έστω $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια συνόλων, *προβολή* στην i συντεταγμένη ή i-προβολή καλείται η συνάρτηση $\pi_i : \prod_{j\in J} X_j \longrightarrow X_i$ με $\pi_i(x) = x(i) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$.

Έστω τώρα ότι έχουμε μία οικογένεια τοπολογικών χώρων και θέλουμε να ορίσουμε μία τοπολογία πάνω στο καρτεσιανό τους γινόμενο, η πρώτη σκέψη είναι να θεωρήσουμε την οικογένεια όλων των υποσυνόλων του καρτεσιανού γινομένου τα οποία είναι γινόμενο ανοιχτών. Η οικογένεια αυτή ικανοποιεί τον ορισμό της τοπολογίας, υπάρχει όμως μία πιο "φυσική" επιλογή τοπολογίας, αυτή είναι η ελάχιστη τοπολογία η οποία κάνει τις προβολές συνεχείς συναρτήσεις.

Ορισμός 1.38 Έστω $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, και $X = \prod_{i\in I} X_i$ το καρτεσιανό γινόμενο των X_i. Η *τοπολογία γινόμενο* (**product topology**) ορίζεται ως η τοπολογία της οποίας μία βάση είναι η οικογένεια:

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i\in I} U_i \;\middle|\; U_i \in \mathcal{T}_I \text{ για κάθε } i \in I \wedge \{\, i \in I \mid U_i \neq X_i \,\} \text{ πεπερασμένο} \right\}.$$

Το σύνολο X αν δεν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό θα θεωρείται εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο και θα λέγεται *χώρος γινόμενο* (**product space**).

Την σύνδεση της τοπολογίας γινόμενο με τις προβολές φανερώνει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.39 *Έστω $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $(X, \mathcal{T})$ ο χώρος γινόμενο, τότε:*

(i) Η οικογένεια

$$\mathcal{C} = \left\{ \pi_i^{-1}(U) \;\middle|\; i \in I \wedge U \in \mathcal{T}_i \right\}$$

είναι μία υποβάση για την $\mathcal{T}$.

(ii) Η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπολογία στον X για την οποία οι προβολές είναι συνεχείς.

(iii) Μία συνάρτηση $f : Z \longrightarrow X$ είναι συνεχής ανν για κάθε $i \in I$ οι συναρτήσεις $f_i : Z \longrightarrow X_i$ με $f_i = \pi_i \circ f$ είναι συνεχείς.

(iv) Κάθε προβολή $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ είναι ανοιχτή απεικόνιση αλλά όχι απαραίτητα κλειστή.

Η σχέση μεταξύ της τοπολογίας γινόμενο σε ένα υποσύνολο του χώρου και της σχετικής τοπολογίας είναι ακριβώς αυτή που θέλουμε.

Πρόταση 1.40 *Έστω $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, X ο χώρος γινόμενο και για κάθε $i \in I$, $\varnothing \neq A_i \subset X_i$. Τότε*

(i) Η τοπολογία γινόμενο του $A = \prod_{i\in I} A_i$ όπου θεωρούμε κάθε A_i εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία ως προς X_i,είναι ίση με την σχετική τοπολογία του A ως προς X.

(ii) $\overline{\left(\prod_{i\in I} A_i\right)} = \prod_{i\in I} \overline{A}_i$.

(iii) $\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^o \subset \prod_{i\in I} A_i^o$.

Η σχέση ισοδυναμίας είναι μία έννοια που γενικεύει αυτή της ισότητας και ορίζεται ως μία διμελής σχέση η οποία είναι αυτοπαθής συμμετρική και μεταβατική. Όταν μελετάμε μαθηματικά αντικείμενα τα οποία έχουμε εφοδιάσει με μία τοπολογική δομή χρειαζόμαστε ένα τρόπο να αποφαινόμαστε πότε είναι τοπολογικά ισοδύναμα, δηλαδή θέλουμε να ορίσουμε μία σχέση ισοδυναμίας τέτοια ώστε από τοπολογική σκοπιά, τα δύο αντικείμενα να ταυτίζονται.

Ορισμός 1.41 Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ και $(Y, \mathcal{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι, μία συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ λέγεται *ομοιομορφισμός* αν είναι αμφισυνεχής, 1-1 και επί.

Ορισμός 1.42 Δύο τοπολογικοί χώροι $(X, \mathcal{T}_X)$ και $(Y, \mathcal{T}_Y)$ θα λέγονται *Ομοιομορφικοί* (**homeomorfic**), όταν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $f : X \longrightarrow Y$.

Παρατήρηση 1.43 *Τοπολογικές αναλλοίωτες* (**topological invariants**) λέγονται οι ιδιότητες εκείνες οι οποίες παραμένουν αμετάβλητες μεταξύ ομοιόμορφων τοπολογικών χώρων. Μερικά παραδείγματα είναι η ιδιότητα Hausdorff η πληθικότητα και η συμπάγεια. Η μελέτη των αναλλοίωτων είναι πολύ σημαντική αφού για να αποδείξει κάποιος ότι δύο χώροι δεν είναι ομοιομορφικοί αρκεί να βρει έστω και μία τοπολογική ιδιότητα στην οποία δεν συμφωνούν, ενώ αν μεταξύ δύο μαθηματικών αντικειμένων μπορεί να βρεθεί ένας ομοιομορφισμός αυτομάτως οι τοπολογικές τους ιδιότητες ταυτίζονται.

1.2 Μια Τοπολογική Απόδειξη της Απειρίας των Πρώτων

Στην ενότητα αυτή θα δούμε μία όμορφη τοπολογική απόδειξη της απειρίας των πρώτων αριθμών η οποία οφείλεται στον Furstenberg [6].

Θεώρημα 1.44 *Οι πρώτοι αριθμοί δηλαδή οι φυσικοί που είναι μεγαλύτεροι του ένα και διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και την μονάδα είναι άπειροι.*

Απόδειξη

Θεωρούμε το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία που έχει ως βάση όλες τις αριθμητικές προόδους δηλαδή σύνολα της μορφής

$$B = \{\, m + \lambda n \mid \lambda \in \mathbb{Z} \,\}$$

για κάποια $m, n \in \mathbb{Z}$ με $n \neq 0$. Είναι σχετικά εύκολο να δούμε ότι το κριτήριο που προκύπτει από την πρόταση 1.26 ικανοποιείται και επομένως όντως η συλλογή αυτή είναι βάση για μία τοπολογία. Μία αριθμητική πρόοδος εκτός από ανοιχτό είναι και κλειστό σύνολο αφού το συμπλήρωμα της μπορεί να γραφτεί ως πεπερασμένη ένωση αριθμητικών προόδων σταθερής διαφοράς και ίσης με την αρχική. Από τα παραπάνω έπεται ότι η πεπερασμένη ένωση αριθμητικών προόδων σε αυτή την τοπολογία θα είναι κλειστό σύνολο. Έστω τώρα

$$A = \bigcup_{p \in P} A_p$$

όπου A_p το σύνολο όλων των πολλαπλασίων του πρώτου p και P το σύνολο όλων των πρώτων αριθμών. Τα A_p αποτελούν αριθμητικές προόδους και αν υποθέσουμε ότι οι πρώτοι είναι πεπερασμένοι το A ως πεπερασμένη ένωση κλειστών θα πρέπει να είναι κλειστό και άρα το συμπλήρωμα του $\{\, -1, 1 \,\}$ ανοιχτό πράγμα άτοπο αφού αυτό δεν περιέχει κανένα βασικό ανοιχτό δηλαδή καμία αριθμητική πρόοδο. □

1.3 Οι Ακολουθίες ως Μέσο Χαρακτηρισμού

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε κάποιες ιδιότητες των ακολουθιών σε μετρικούς χώρους, οι οποίες ως συναρτήσεις ορισμένες πάνω στους φυσικούς αριθμούς, αποτελούν ένα πολύ εύχρηστο και αποτελεσματικό εργαλείο στην ανάλυσης. Οι αποδείξεις των προτάσεων που ακολουθούν παραλείπονται αλλά αν κάποιος έχει κενά στην θεωρία μετρικών χώρων οι σημειώσεις [25] αποτελούν ένα συμπυκνωμένο και πολύ καλογραμμένο εγχειρίδιο. Σε ένα μετρικό χώρο (X, d) μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέμε ότι συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $x_n \in B(x, \varepsilon)\,\forall n \geq n_0$. Από τον ορισμό είναι άμεσο ότι στους μετρικούς χώρους το όριο μίας ακολουθίας αν υπάρχει είναι μοναδικό.

Ορισμός 1.45 Ένα σημείο x λέγεται οριακό σημείο της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν κάθε περιοχή του x περιέχει άπειρους το πλήθος όρους της ακολουθίας.

Πρόταση 1.46 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X, τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Το σημείο $x \in X$ είναι οριακό σημείο της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο x.

Στους μετρικούς χώρους οι έννοιες της ακολουθίας και υπακολουθίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν όλες τις σημαντικές τοπολογικές έννοιες που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Πρόταση 1.47 *Έστω A υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, d) και $x \in X$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) $x \in \overline{A}$

(ii) Υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A τ.ω $x_n \to x$.

Παρατήρηση 1.48 Μπορούμε να ορίσουμε ως ακολουθιακή κλειστότητα ενός συνόλου A το σύνολο

$$\mathrm{Sc}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\, x \in X \;\middle|\; \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ τ.ω } (\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in A) \wedge x_n \to x \,\right\}.$$

Τότε η πρόταση 1.47 μας λέει ότι στους μετρικούς χώρους η ακολουθιακή κλειστότητα συμπίπτει με την κλειστότητα και επομένως οι ακολουθίες αρκούν για να περιγράψουν την έννοια της κλειστότητας.

Οι ακολουθίες στους μετρικούς χώρους είναι επίσης επαρκείς για να χαρακτηρίσουν την συνέχεια των συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.49 *Έστω $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ συνάρτηση μεταξύ των μετρικών χώρων (X, d_X) και (Y, d_Y), τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Η f είναι συνεχής.

(ii) Αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον X με $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$.

Ομοίως για την έννοια της συμπάγειας έχουμε την επόμενη πρόταση:

Θεώρημα 1.50 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Ο X είναι συμπαγής.

(ii) Κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Η ιδιότητα (ii) στην πρόταση 1.50, καλείται ακολουθιακή συμπάγεια η οποία στους μετρικούς χώρους δεν διαχωρίζεται από την συμπάγεια. Βλέπουμε λοιπόν ότι όσο δουλεύουμε σε μετρικούς χώρους δεν χρειαζόμαστε καμία προσθήκη στην εργαλειοθήκη μας, είναι όμως οι ακολουθίες πάντα αρκετές; Εξ ορισμού οι ανοιχτές μπάλες με κέντρο το x αποτελούν μία βάση περιοχών της τοπολογίας που επάγεται από την μετρική d και επομένως στην γλώσσα της τοπολογίας ισοδύναμα μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $x \in X$ αν για κάθε περιοχή U του x όλοι οι όροι εκτός από πεπερασμένο πλήθος, βρίσκονται μέσα στην περιοχή U. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό για να επεκτείνουμε την έννοια της σύγκλισης μίας ακολουθίας σε γενικούς τοπολογικούς χώρους έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 1.51 *Οι ακολουθιακή σύγκλιση είναι μία τοπολογική ιδιότητα, δηλαδή αν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον X, τότε $x_n \to x$ ανν $f(x_n) \to f(x)$.*

Η ακολουθία $1/n$ συγκλίνει στο μηδέν και επομένως σε έναν οποιοδήποτε μετρικό χώρο η οικογένεια $\{\, B(x, {}^1\!/_n) \,\}_{n \in \mathbb{N}}$ αποτελεί μία αριθμήσιμη το πλήθος βάση περιοχών του x. Η ιδιότητα της αριθμησιμότητας του πλήθους των στοιχείων της βάσης περιοχών ενός τοπολογικού χώρου είναι πολύ χρήσιμη ώστε αξίζει να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.52 Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται πρώτος αριθμήσιμος αν κάθε στοιχείο $x \in X$ έχει μία αριθμήσιμη βάση περιοχών $\mathcal{B}_x$.

Μία σημαντική κοινή ιδιότητα των πρώτων αριθμήσιμων με τους μετρικούς χώρους είναι ότι για οποιοδήποτε σημείο x μπορούμε πάντα να βρούμε μία φωλιασμένη βάση περιοχών αφού αν $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία βάση περιοχών του x το ίδιο θα ισχύει και για την οικογένεια $(B'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $B'_n = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$. Η περιγραφική δύναμη των ακολουθιών στους πρώτους αριθμήσιμους τοπολογικούς χώρους βασίζεται πολύ στο παραπάνω γεγονός.

Πρόταση 1.53 *Έστω $(X, \mathcal{T})$ πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και A υποσύνολο του X. Τότε η κλειστότητα του A είναι το σύνολο όλων των ορίων ακολουθιών στοιχείων του A, δηλαδή $\overline{A} = \mathrm{Sc}(A)$.*

Η συνέχεια των συναρτήσεων εξακολουθεί να περιγράφεται από ακολουθίες.

Πρόταση 1.54 *Έστω $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ συνάρτηση μεταξύ των τοπολογικών χώρων X και Y, έστω επίσης ότι ο X είναι πρώτος αριθμήσιμος, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Η f είναι συνεχής.

(ii) Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X με $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$.

Σε έναν πρώτο αριθμήσιμο τοπολογικό χώρο, το όριο μίας ακολουθίας μπορεί να μην είναι μοναδικό αφού όπως μπορούμε να δούμε από το ακραίο παράδειγμα της τετριμμένης τοπολογίας ενός οποιουδήποτε συνόλου, $\{\, \varnothing, X \,\}$ για κάθε σημείο $x \in X$ το μονοσύνολο $\{\, X \,\}$ είναι μία βάση περιοχών του x και κάθε ακολουθία συγκλίνει σε κάθε στοιχείο του χώρου! Αν ένας τοπολογικός χώρος είναι Hausdorff το όριο κάθε ακολουθίας αν υπάρχει είναι μοναδικό ενώ στους πρώτους αριθμήσιμους ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 1.55 *Έστω $(X, \mathcal{T})$ πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, αν κάθε ακολουθία στον X συγκλίνει το πολύ σε ένα στοιχείο τότε ο χώρος είναι Hausdorff.*

Η σχέση που περιγράψαμε στην πρόταση 1.46 μεταξύ οριακών σημείων μίας ακολουθίας και υπακολουθιών της εξακολουθεί να ισχύει στους πρώτους αριθμήσιμους τοπολογικούς χώρους.

Πρόταση 1.56 *Έστω $(X, \mathcal{T})$ πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X, τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Το σημείο $x \in X$ είναι οριακό σημείο της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(ii) *Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο x.*

1.4 Η μη Επάρκεια των Ακολουθιών

Τα προηγούμενα δείχνουν ότι στους πρώτους αριθμήσιμους οι ακολουθίες εξακολουθούν να είναι αρκετά περιγραφικές, όπως θα δούμε αμέσως αν χαλαρώσουμε ακόμα περισσότερο τις απαιτήσεις μας ως προς την δομή της τοπολογίας, μπορούμε να βρούμε αντιπαραδείγματα στα οποία οι ακολουθίες να μην μπορούν να περιγράψουν καμία από τις ιδιότητες που αναφέραμε πιο πάνω.

Παράδειγμα 1.57 Έστω X ένα οποιοδήποτε υπεραριθμήσιμο σύνολο και έστω η συναριθμήσιμη τοπολογία $\mathcal{T} = \{ G \subset X \mid X \setminus G \sim \mathbb{N} \}$ του X. Παρατηρούμε ότι αν μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε ένα στοιχείο $x \in X$, τότε θα πρέπει για την περιοχή $G_x = X \setminus \{ x_n \mid x_n \neq x \}$ του x να υπάρχει ένα n_0 για το οποίο $x_n \in G_x$ για κάθε $n \geq n_0$ δηλαδή η ακολουθία θα πρέπει να είναι τελικά σταθερή με τιμή x. Από αυτό έπεται ότι $\mathrm{Sc}(A) = A$ για κάθε υποσύνολο A του X ενώ αφού τα μόνα κλειστά της τοπολογίας είναι τα αριθμήσιμα και όλος ο χώρος, η κλειστότητα κάθε υπεραριθμήσιμου συνόλου του X θα είναι ολόκληρος ο χώρος. Έστω $x \neq y$ και U_x, V_y δύο περιοχές των x και y αντίστοιχα, τότε $(U_x \cap V_y)^c = U_x^c \cup V_y^c \sim \mathbb{N}$ και άρα αφού ο χώρος X είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο $U_x \cap V_y \neq \varnothing$, δηλαδή αν και κάθε συγκλίνουσα ακολουθία έχει μοναδικό όριο ο χώρος αυτός δεν είναι Hausdorff. Αν τώρα θεωρήσουμε την ταυτοτική συνάρτηση $I : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_1)$, όπου $\mathcal{T}_1$ μία οποιαδήποτε άλλη ισχυρότερη της $\mathcal{T}$ τοπολογία στο X, δηλαδή $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_1$, τότε αυτή δεν θα είναι συνεχής παρόλο που αν $x_n \to x$ τότε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τελικά σταθερή και επομένως $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ τελικά σταθερή άρα $f(x_n) \to f(x) = x$.

Παραδείγματα τοπολογικών χώρων στους οποίους οι ακολουθίες δεν συμπεριφέρονται όπως θα ήθελε κανείς υπάρχουν πολλά και βοηθούν στην βαθύτερη κατανόηση της φύσης των αντικειμένων που εξετάζει η τοπολογία ενώ το [19] είναι μία πολύ καλή και συστηματική προσπάθεια καταγραφής πολλών αντιπαραδειγμάτων στην τοπολογία. Από την στιγμή που ήταν σαφές ότι οι ακολουθίες σε κάποιες περιπτώσεις δεν επαρκούν για τον χαρακτηρισμό των διαφόρων εννοιών ο δρόμος της έρευνας σε αυτόν τον τομέα πήρε δύο διαφορετικές κατευθύνσεις, η μία οδός είναι ο χαρακτηρισμός των χώρων στους οποίους στους οποίους οι ακολουθίες κάνουν την δουλειά που θέλουμε, ενώ ο δεύτερος είναι η επινόηση ισχυρότερων εργαλείων τα οποία να επαρκούν ανεξαρτήτως του χώρου του οποίου μελετάμε.

Προς την πρώτη κατεύθυνση έχουν μελετηθεί οι χώροι *Fréchet* στους οποίους η ακολουθιακή κλειστότητα $\mathrm{Sc}(A)$ ενός οποιουδήποτε συνόλου ισούται με την κλειστότητα του $\overline{A}$ ενώ έντονο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι ακολουθιακοί χώροι στους οποίους τα ακολουθιακά κλειστά σύνολα είναι κλειστά.

Προς την δεύτερη κατεύθυνση αναπτύχθηκαν κυρίως δύο εργαλεία, τα δίκτυα και τα υπερφίλτρα. Τα δίκτυα τα όρισαν για πρώτη φορά οι Moore και Smith [11] σε μία εργασία τους το 1922 η οποία ολοκληρώθηκε με ακόμα μία εργασία του Smith [17] το 1938. Τα δίκτυα είναι μία πολύ άμεση επέκταση της έννοιας των ακολουθιών σε τέτοιο βαθμό ώστε στις περισσότερες των περιπτώσεων αν αλλάξουμε την λέξη ακολουθία με την αυτή του δικτύου έχουμε μία πρόταση που ισχύει σε γενικούς τυπολογικούς χώρους! Αν και τα δίκτυα έχουν την δική τους αξία εμείς δεν θα επεκταθούμε περισσότερο. Τον πρωταγωνιστικό ρόλο από εδώ και πέρα θα πάρουν τα υπερφίλτρα των οποίων την μελέτη θα ξεκινήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

2 Υπερφίλτρα και Εφαρμογές

Η έννοια των υπερφίλτρων εισήχθει από τον Riesz [15] σε μία εργασία του το 1908 αλλά το όνομα τους το οφείλουν στον Cartan [2, 3]. Στο κεφάλαιο αυτό αφού περιγράψουμε τα βασικά στοιχεία της θεωρίας των υπερφίλτρων, θα ορίσουμε μία έννοια σύγκλισης για αυτά και θα δείξουμε πως επιτυγχάνει να περιγράψει ιδιότητες όπως η συνέχεια η κλειστότητα και η συμπάγεια σε γενικούς τοπολογικούς χώρους. Στην συνέχεια θα δώσουμε κάποιους εναλλακτικούς ορισμούς των υπερφίλτρων και θα δούμε κάποιες ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Ένα κλασικό εγχειρίδιο με αντικείμενο μελέτης τα υπερφίλτρα είναι το [4] των Comfort και Negrepontis ενώ τα περισσότερα από τα αποτελέσματα τους παρόντος κεφαλαίου μπορεί να τα βρεί κανείς στο [10] των Hindman και Strauss.

2.1 Φίλτρα και Υπερφίλτρα

Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

Ορισμός 2.1 Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μία οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του X ονομάζεται *Φίλτρο* (**Filter**) στο X αν για κάθε $U, V \subset X$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $X \in \mathcal{F}$ και $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

(ii) Αν $V, U \in \mathcal{F}$, τότε $V \cap U \in \mathcal{F}$.

(iii) Αν $V \in \mathcal{F}$, και $V \subset U$, τότε $U \in \mathcal{F}$.

Ορισμός 2.2 Ένα φίλτρο στο X είναι ένα *υπερφίλτρο* (**ultrafilter**) αν είναι μεγιστικό ως προς την διάταξη του περιέχεσθαι, δηλαδή αν δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα φίλτρο στον X.

Παρατήρηση 2.3 Χρησιμοποιώντας επαγωγή και την ιδιότητα (ii) μπορούμε να δούμε ότι τα φίλτρα είναι κλειστά στις πεπερασμένες τομές ενώ η ιδιότητα (iii) δηλώνει κλειστότητα ως προς τα υπερσύνολα.

Παράδειγμα 2.4 Ίσως το πιο σημαντικό παράδειγμα φίλτρου είναι το σύστημα περιοχών ενός σημείου κάποιου τοπολογικού χώρου αφού όπως είδαμε στην Πρόταση 1.10 ικανοποιεί και τις τρεις ιδιότητες του ορισμού. Παρατηρήστε ότι το σύστημα περιοχών ενός σημείου είναι υπερφίλτρο ανν το σημείο είναι μεμονωμένο σημείο του χώρου δηλαδή ανν το $\{x\}$ είναι ανοιχτό.

Παράδειγμα 2.5 Έστω $S \subset X$ με $S \neq \varnothing$. Τότε η οικογένεια

$$\mathcal{F}(S) = \{ A \subset X \mid S \subset A \}$$

είναι ένα φίλτρο στο X. Δεν είναι υπερφίλτρο παρά μόνο αν το $S = \{x\}$ είναι μονοσύνολο οπότε το συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_x$ και το καλούμε *τετριμμένο* (**principal ή trivial**) υπερφίλτρο στο x.

Παράδειγμα 2.6 Αν X ένα σύνολο με άπειρα το πλήθος στοιχεία και

$$\mathcal{F} = \{ A \subset X \mid A^c \text{ πεπερασμένο} \}$$

η οικογένεια των συμπεπερασμένων υποσυνόλων του X τότε $\mathcal{F}$ είναι ένα φίλτρο στο X το οποίο καλείται και Fréchet φίλτρο στο X. Πραγματικά, $X \in \mathcal{F}$ και $\varnothing \notin \mathcal{F}$. Αν U, V συμπεπερασμένα τότε αφού το συμπλήρωμα της τομής είναι η ένωση των (πεπερασμένων) συμπληρωμάτων και άρα πεπερασμένο σύνολο, θα ισχύει επίσης ότι $U \cap V \in \mathcal{F}$. Τέλος είναι προφανές ότι ένα υπερσύνολο ενός συμπεπερασμένου είναι επίσης συμπεπερασμένο κα άρα $\mathcal{F}$ όντως φίλτρο.

Μία πολύ χρήσιμη ιδιότητα των φίλτρων είναι η εξής:

Πρόταση 2.7 *Αν $\mathcal{C}$ μία οικογένεια φίλτρων στο X τότε η τομή της $\cap\mathcal{C}$ είναι φίλτρο στο X.*
Απόδειξη
$X \in \mathcal{F} \forall \mathcal{F} \in \mathcal{C}$ και επομένως $X \in \cap\mathcal{C}$. Ομοίως $\varnothing \in \cap\mathcal{C}$. Αν $A, B \in \cap\mathcal{C}$ τότε $A, B \in F \forall \mathcal{F} \in \mathcal{C}$ και άρα $A \cap B \in \mathcal{F} \forall \mathcal{F} \in \mathcal{C}$ δηλαδή $A \cap B \in \cap\mathcal{C}$. Τέλος αν $B \subset A \in \cap\mathcal{C}$ τότε $B \in \mathcal{F} \forall \mathcal{F} \in \mathcal{C}$ και άρα $B \in \cap\mathcal{C}$. □

Η Πρόταση 2.7 μας δίνει την εξής δυνατότητα, αν $\mathcal{C}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του X και υπάρχει τουλάχιστον ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X ώστε $\mathcal{C} \subset F$ τότε η τομή όλων των φίλτρων που περιέχουν την $\mathcal{C}$ είναι το ελάχιστο φίλτρο που περιέχει την $\mathcal{C}$ το οποίο ονομάζουμε το φίλτρο που παράγεται από την $\mathcal{C}$.

Πρόταση 2.8 *Έστω $\mathcal{C}$ μία οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X. Υπάρχει τουλάχιστον ένα φίλτρο που περιέχει την $\mathcal{C}$ ανν η $\mathcal{C}$ ικανοποιεί την FIP.*
Απόδειξη
Έστω ότι υπάρχει ένα φίλτρο $\mathcal{F} \supset \mathcal{C}$, αν $(A_k)_{k=1}^n \subset \mathcal{C}$ τότε $(A_k)_{k=1}^n \subset \mathcal{F}$ και επομένως από την Παρατήρηση 2.3 έχουμε ότι $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}$ δηλαδή $\bigcap_{k=1}^n A_k \neq \varnothing$. Αντίστροφα αν η $\mathcal{C}$ έχει την FIP ορίζουμε την οικογένεια

$$\mathcal{F} = \left\{ U \subset X \;\middle|\; \exists\, (A_k)_{k=1}^n \subset \mathcal{C} \text{ τ.ω } (\bigcap_{k=1}^n A_k \subset U) \right\}$$

και βλέπουμε ότι $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$ και $\varnothing \notin \mathcal{F}$. Αν $A, B \in \mathcal{F}$ τότε υπάρχουν $(A_k)_{k=1}^n \subset \mathcal{C}$ και $(B_k)_{k=1}^n \subset \mathcal{C}$ τ.ω $\bigcap_{k=1}^{n_A} A_k \subset A$ και $\bigcap_{k=1}^{n_B} B_k \subset B$ και επομένως $\bigcap_{k=1}^{n_A} A_k \cap \bigcap_{k=1}^{n_B} B_k \subset A \cap B$ δηλαδή $A \cap B \in \mathcal{F}$. □

Ορισμός 2.9 Μία μη κενή οικογένεια $\mathcal{B}$ υποσυνόλων του X λέγεται βάση φίλτρου αν:

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}$.

2. αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ τότε υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ τ.ω $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Πρόταση 2.10 *Αν $\mathcal{B}$ είναι βάση φίλτρου τότε το φίλτρο που παράγεται από την $\mathcal{B}$ είναι το*

$$\mathcal{F} = \{\, U \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B} \text{ τ.ω } B \subset U \,\}$$

Απόδειξη

Θα δείξουμε πρώτα ότι $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο και ύστερα ότι αυτό είναι το ελάχιστο που περιέχει την $\mathcal{B}$. Αφού $\mathcal{B} \neq \varnothing$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ και άρα $X \in \mathcal{F}$. Αφού $\varnothing \notin \mathcal{B}$ θα πρέπει επίσης $\varnothing \notin \mathcal{F}$. Αν $U, V \in \mathcal{F}$ τότε υπάρχουν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ τ.ω $B_1 \subset U$ και $B_2 \subset V$, επομένως από τον ορισμό της βάσης υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ τ.ω $B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U \cap V$ και έτσι $U \cap V \in \mathcal{F}$. Η κλειστότητα ως προς τα υπερσύνολα προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του $\mathcal{F}$. Έστω $\mathcal{F}'$ ένα οποιοδήποτε φίλτρο που περιέχει την $\mathcal{B}$. Τότε αν $U \in \mathcal{F}$ θα πρέπει να υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $B \subset U$ όμως $B \in \mathcal{F}'$ και έτσι θα πρέπει $U \in \mathcal{F}'$ δηλαδή $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. □

Πρόταση 2.11 *Έστω $\mathcal{C}$ οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X η οποία έχει την FIP. Το φίλτρο που παράγεται από την $\mathcal{C}$ είναι το*

$$\mathcal{F} = \left\{ U \subset X \;\middle|\; \exists\, (A_k)_{k=1}^{n} \subset \mathcal{C} \text{ τ.ω } (\bigcap_{k=1}^{n} A_k \subset U) \right\}$$

Απόδειξη

Το ότι είναι φίλτρο το δείξαμε στην απόδειξη της Πρότασης 2.8. Έστω $\mathcal{F}'$ ένα οποιοδήποτε φίλτρο που περιέχει την $\mathcal{C}$ και $U \in \mathcal{F}$ τότε υπάρχουν $(A_k)_{k=1}^{n} \subset \mathcal{C}$ ώστε $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \subset U$ τότε όμως $(A_k)_{k=1}^{n} \subset \mathcal{F}'$ και άρα $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}'$, συνεπώς $U \in \mathcal{F}'$ δηλαδή $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. □

Είδαμε μερικούς τρόπους να παράγουμε φίλτρα, για την ύπαρξη υπερφίλτρων διαφορετικών από τα τετριμμένα που είδαμε στο Παράδειγμα 2.5 μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα το οποίο το οφείλουμε στον Tarski [21].

Θεώρημα 2.12 (Tarski (1930)) *Κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X μπορεί να επεκταθεί σε ένα υπερφίλτρο στο X.*

Απόδειξη
Πράγματι έστω $\mathcal{X}$ το σύνολο όλων των φίλτρων που περιέχουν το $\mathcal{F}$. Αυτό είναι τετριμμένα μη κενό και μερικά διατεταγμένο από την σχέση εγκλεισμού συνόλων. Αν $\mathcal{C}$ μία αλυσίδα στο $\mathcal{X}$ τότε το σύνολο $\cup\mathcal{C}$ είναι φίλτρο που περιέχει το $\mathcal{F}$. Όντως εύκολα βλέπουμε ότι $X \in \cup\mathcal{C}$ και $\varnothing \notin \cup\mathcal{C}$, αν $A, B \in \cup\mathcal{C}$ τότε υπάρχει $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$ ώστε $A, B \in \mathcal{G}$ και επομένως $A \cap B \in \mathcal{G}$ άρα $A \cap B \in \cup\mathcal{C}$. Αν $B \supset A \in \cup\mathcal{C}$ τότε $B \supset A \in \mathcal{G}$ για κάποιο $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$ δηλαδή $B \in \mathcal{G}$ και επομένως $B \in \cup\mathcal{C}$. □

Πόρισμα 2.13 *Συνδυάζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με την Πρόταση 2.8 βλέπουμε ότι κάθε οικογένεια με την FIP μπορεί να επεκταθεί σε ένα υπερφίλτρο.* □

Παρατήρηση 2.14 Ένα απλό αλλά πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα είναι ότι αν $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ υπερφίλτρα τότε $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ ανν $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.

Πρόταση 2.15 *Τα υπερφίλτρα στο X είναι τα μεγιστικά στοιχεία του συνόλου των στοιχείων του 2^{2^X} που ικανοποιούν την FIP διατεταγμένου από την σχέση εγκλεισμού.*

Απόδειξη
($\Rightarrow$) Έστω $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο σύνολο X και έστω $\mathcal{G}$ ένα οποιοδήποτε στοιχείο του 2^{2^X} που ικανοποιεί την FIP με $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$, θα δείξουμε ότι $\mathcal{G} = \mathcal{U}$. Έστω $A \in \mathcal{G}$, τότε $A \cap U \neq \varnothing$ για κάθε $U \in \mathcal{U}$. Θέτουμε $\mathcal{B} = \{\, A \cap U \mid U \in \mathcal{U} \,\}$. Η $\mathcal{B}$ είναι βάση φίλτρου, θεωρούμε το φίλτρο $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ που παράγεται από την $\mathcal{B}$, τότε $U \supset A \cap U \in \mathcal{B}$ για κάθε $U \in \mathcal{U}$ και συνεπώς από την Πρόταση 2.10 θα πρέπει $U \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ άρα $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \supset \mathcal{U}$. Από τα προηγούμενα έπεται πώς $\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \mathcal{U}$ όμως $A = A \cap X \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$ άρα $A \in \mathcal{U}$ και επομένως $\mathcal{U} = \mathcal{G}$.
($\Leftarrow$) Έστω $\mathcal{U}$ μεγιστικό στοιχείο του συνόλου 2^{2^X} που ικανοποιούν την FIP διατεταγμένου από την σχέση εγκλεισμού. Αφού $\mathcal{U}$ έχει την FIP το $\varnothing \notin \mathcal{U}$. Το $X \in \mathcal{U}$ διότι αλλιώς θα μπορούσαμε να το προσθέσουμε χωρίς να παραβιάσουμε την FIP το οποίο θα ήταν άτοπο από την μεγιστικότητα του $\mathcal{U}$. Ομοίως αν $A, B \in \mathcal{U}$ τότε λόγο της FIP $(A \cap B) \cap C \neq \varnothing$ για κάθε $C \in \mathcal{U}$ και έτσι από μεγιστικότητα $A \cap B \in \mathcal{U}$. Αν τώρα $A \in \mathcal{U}$ και $A \subset B$ τότε πάλι μπορούμε να προσθέσουμε το B στο $\mathcal{U}$ χωρίς να παραβιάσουμε την FIP και άρα θα πρέπει $B \in \mathcal{U}$. Είναι προφανές ότι αν $\mathcal{F}$ φίλτρο που περιέχει το $\mathcal{U}$ τότε αυτό θα έχει την FIP και άρα θα πρέπει $\mathcal{F} = \mathcal{U}$. □

Το παρακάτω θεώρημα μας παρέχει κάποιους ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των υπερφίλτρων κάποιου συνόλου X.

Θεώρημα 2.16 *Αν X σύνολο και $\mathcal{U} \subset 2^X$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Το $\mathcal{U}$ είναι ένα υπερφίλτρο στο X.

(ii) Το $\mathcal{U}$ έχει την FIP και για κάθε $A \subset X$ με $A \notin \mathcal{U}$, υπάρχει $B \in \mathcal{U}$ τ.ω $A \cap B = \varnothing$

(iii) Το $\mathcal{U}$ είναι μεγιστικό ως προς την FIP.

(iv) Το $\mathcal{U}$ είναι φίλτρο και αν $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{U}$ τότε τουλάχιστον ένα από τα A_k ανήκει στο $\mathcal{U}$.

(v) Το $\mathcal{U}$ είναι φίλτρο και για κάθε $A \subset X$ είτε $A \in \mathcal{U}$ είτε $A^c \in \mathcal{U}$.

Απόδειξη

(i)$\Rightarrow$(ii) Το ότι το $\mathcal{U}$ έχει την FIP έπεται από τον ορισμό. Έστω $A \subset X$ με $A \notin \mathcal{U}$ και έστω ότι για κάθε $B \in \mathcal{U}$ έχουμε $A \cap B \neq \varnothing$. Τότε η οικογένεια $\{\, A \cap B \mid B \in \mathcal{U} \,\}$ είναι βάση φίλτρου και αν $\mathcal{F}$ το φίλτρο που παράγεται έχουμε ότι $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ και άρα $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ όμως $A \in \mathcal{F}$ άρα $A \in \mathcal{U}$, άτοπο.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Έστω ότι υπάρχει $\mathcal{V}$ υποσύνολο του 2^X με την FIP τέτοιο ώστε $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{V}$ και έστω $A \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. Από την υπόθεση υπάρχει $B \in \mathcal{U}$ τ.ω $A \cap B = \varnothing$, ισχύει όμως επίσης ότι $B \in \mathcal{F}$ και άρα το $\mathcal{V}$ δεν ικανοποιεί την FIP, άτοπο.

(iii) $\Rightarrow$(iv) Το ότι το $\mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο (και άρα φίλτρο) έχει δειχθεί στην Πρόταση 2.15. Έστω $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{U}$, αν υποθέσουμε ότι κανένα A_k δεν ανήκει στο $\mathcal{U}$ το οποίο είναι μεγιστικό ως προς την FIP αυτό αναγκαστικά θα σημαίνει ότι για κάθε A_k υπάρχει πεπερασμένη οικογένεια $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{U}$ τ.ω $A_k \cap \mathcal{A}_k = \varnothing$. Τότε όμως $(\bigcap_{k=1}^n \mathcal{A}_k) \in \mathcal{U}$ και $(\bigcup_{k=1}^n A_k) \cap (\bigcap_{k=1}^n \mathcal{A}_k) = \varnothing$, άτοπο.

(iv)$\Rightarrow$(v) Το $X = A \cup A^c$ ανήκει στο $\mathcal{U}$, το συμπέρασμα είναι άμεσο από την υπόθεση.

(v)$\Rightarrow$(i) Έστω $\mathcal{F}$ φίλτρο στο X με $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$, τότε αν $A \in \mathcal{F}$ το A^c δεν μπορεί να ανήκει στο $\mathcal{U}$, διότι τότε θα είχαμε $A, A^c \in \mathcal{F}$ και $A \cap A^c = \varnothing$ άτοπο αφού το $\varnothing \notin \mathcal{F}$. Έτσι αναγκαστικά $A \in \mathcal{U}$ και άρα $\mathcal{F} = \mathcal{U}$, αφου αυτό ισχύει για τυχαίο $\mathcal{F}$ το $\mathcal{U}$ είναι ένα μεγιστικό φίλτρο δηλαδή ένα υπερφίλτρο. $\square$

Ορισμός 2.17 Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ λέγεται *ελεύθερο υπερφίλτρο* (**free ultrafilter**) αν ισχύει ότι $\bigcap \mathcal{U} \neq \varnothing$. Τα ελεύθερα λέγονται και *μη τετριμμένα* (**non principal**) διότι όπως εύκολα μπορεί να ελέγξει κάποιος τα μόνα υπερφίλτρα τα οποία δεν είναι ελεύθερα είναι τα τετριμμένα υπερφίλτρα τα οποία είδαμε στο Παράδειγμα 2.5.

Τα τετριμμένα υπερφίλτρα χαρακτηρίζονται από οποιαδήποτε από τις επόμενες προτάσεις.

Θεώρημα 2.18 *Έστω X σύνολο και $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο X, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Το $\mathcal{U}$ είναι ένα τετριμμένο υπερφίλτρο στο X.

(ii) Υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο του X που ανήκει στο $\mathcal{U}$.

(iii) Η οικογένεια των συμπεπερασμένων δεν περιέχεται στο $\mathcal{U}$.

(iv) Το $\mathcal{U}$ δεν είναι ελεύθερο.

(v) $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$.

Απόδειξη
(i)⇒(ii) Αν $\mathcal{U}$ ένα τετριμμένο υπερφίλτρο που αντιστοιχεί στο x το μονοσύνολο $\{x\}$ ανήκει στο $\mathcal{U}$.
(ii)⇒(iii) Αν το X είναι πεπερασμένο τότε το κενό σύνολο ανήκει στην οικογένεια των συμπεπερασμένων αλλά προφανώς δεν μπορεί να ανήκει στο $\mathcal{U}$. Αν το X είναι άπειρο και F το πεπερασμένο που ανήκει από την υπόθεση στο $\mathcal{U}$ το $X \setminus F$ που ανήκει στην οικογένεια των συμπεπερασμένων δεν μπορεί να ανήκει στο $\mathcal{U}$.
(iii)⇒(iv) Από την υπόθεση υπάρχει συμπεπερασμένο A που δεν ανήκει στο $\mathcal{U}$. Από το Θεώρημα 2.16 (v) το πεπερασμένο A^c ανήκει στο $\mathcal{U}$ δηλαδή το $\bigcup_{x \in A^c} \{x\}$ είναι μία πεπερασμένη ένωση που ανήκει στο $\mathcal{U}$ και έτσι από το Θεώρημα 2.16 (iv) υπάρχει $\{x\} \in \mathcal{U}$. Για κάθε $B \in \mathcal{U}$ θα πρέπει να ισχύει $\{x\} \cap B \neq \varnothing$ και έτσι $\{x\} \subset \bigcup \mathcal{U}$, δηλαδή $\bigcup \mathcal{U} \neq \varnothing$.
(iv)⇒(v) Έστω $x \in \bigcup \mathcal{U}$ τότε για κάθε $B \in \mathcal{U}$ έχουμε ότι $x \in B$ και επομένως το $\mathcal{U}$ είναι υποσύνολο του τετριμμένου υπερφίλτρου που αντιστοιχεί στο x και έτσι από την Παρατήρηση 2.14 έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Παρατήρηση 2.19 Από το Θεώρημα 2.18 έπεται ότι μη τετριμμένα υπερφίλτρα μπορούν να υπάρξουν μόνο σε άπειρα σύνολα.

Παρατήρηση 2.20 Αν αναδιατυπώσουμε την πρόταση (iii) του Θεωρήματος 2.18 έχουμε ότι κάθε μη τετριμμένο υπερφίλτρο περιέχει το Fréchet φίλτρο.

Παρατήρηση 2.21 Το Θεώρημα 2.12 μας βεβαιώνει ότι υπάρχουν πολλά υπερφίλτρα, παρόλα αυτά τα μόνα υπερφίλτρα των οποίων μπορούμε να περιγράψουμε τα στοιχεία είναι τα τετριμμένα υπερφίλτρα. Αυτό οφείλεται στην ουσιαστική χρήση του *Αξιώματος Επιλογής* (**Axiom of Choice (AC)**) στην απόδειξη του θεωρήματος. Πράγματι έχει αποδειχθεί ότι υπάρχει μοντέλο της αξιωματικής συνολοθεωρίας *Zermelo Fraenkel* (**ZF**) στο οποίο τα μόνα υπερφίλτρα είναι τα τετριμμένα (Blass [1]). Επίσης έχει αποδειχθεί (Halpern and Lévy [8]) ότι το γεγονός ότι κάθε φίλτρο επεκτείνεται σε ένα υπερφίλτρο είναι γνησίως ασθενέστερο από το (**AC**).

Σύγκλιση υπερφίλτρων και χαρακτηρισμός τοπολογικών ιδιοτήτων

Αν και έχουμε διατυπώσει αρκετές ιδιότητες των φίλτρων και των υπερφίλτρων, ακόμα δεν έχει γίνει φανερό με ποιόν τρόπο αυτά θα πάρουν τον ρόλο των ακολουθιών ώστε να μας δώσουν αποτελέσματα όσον αφορά τον χαρακτηρισμό τοπολογικών χώρων. Τα παρακάτω αποσκοπούν ακριβώς σε αυτό.

Ορισμός 2.22 Έστω X τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στον X. Λέμε ότι το φίλτρο $\mathcal{F}$ συγκλίνει στο στοιχείο $x \in X$ και συμβολίζουμε με $\mathcal{F} \to x$ αν το σύστημα περιοχών $\mathcal{N}_x$ του x περιέχεται στο $\mathcal{F}$. Όμοια η βάση φίλτρου $\mathcal{B}$ θα λέμε ότι συγκλίνει στο x και θα συμβολίζουμε επίσης με $\mathcal{B} \to x$ αν το φίλτρο που παράγει συγκλίνει στο x.

Παρατήρηση 2.23 Είναι φανερό ότι η βάση περιοχών $\mathcal{N}_x$ ενός στοιχείου x παίζει για τα φίλτρα τον ίδιο ρόλο που παίζει για τις ακολουθίες η σταθερή ακολουθία αφού πάντα ισχύει ότι $\mathcal{N}_x \to x$.

Η παρακάτω πρόταση είναι το πρώτο παράδειγμα εφαρμογής των υπερφίλτρων στον χαρακτηρισμό γενικών τοπολογικών χώρων. Στο Παράδειγμα 1.57 είδαμε ότι αν έχουμε έναν Hausdorff τοπολογικό χώρο το όριο οποιασδήποτε ακολουθίας αν υπάρχει είναι μοναδικό, το αντίστροφο δεν ισχύει. Με τα υπερφίλτρα ξεπερνάμε αυτό το εμπόδιο.

Πρόταση 2.24 *Έστω X τοπολογικός χώρος. Ο X είναι Hausdorff ανν κάθε φίλτρο συγκλίνει το πολύ σε ένα σημείο.*

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω X Hausdorff, αν υπάρχει φίλτρο $\mathcal{F}$ και $x \neq y$ τ.ω $\mathcal{F} \to x$ και $\mathcal{F} \to y$ τότε $\mathcal{N}_x$ και $\mathcal{N}_y$ περιέχονται στο $\mathcal{F}$ Επομένως από τον ορισμό του φίλτρου θα πρέπει για κάθε $U_x \in \mathcal{N}_x$ και $V_y \in \mathcal{N}_y$ να έχουμε $U_x \cap V_y \neq \varnothing$ το οποίο είναι άτοπο αφού ο X Hausdorff.

($\Leftarrow$) Έστω ότι κάθε φίλτρο έχει το πολύ ένα όριο, αν ο X δεν είναι Hausdorff θα υπάρχουν $x \neq y$ τ.ω για κάθε περιοχή U_x του x και κάθε περιοχή V_y του y να ισχύει ότι $U_x \cap V_y \neq \varnothing$. Αυτό σημαίνει ότι η οικογένεια $\mathcal{N}_x \cup \mathcal{N}_y$ έχει την FIP και επομένως είναι υποβάση για κάποιο φίλτρο, έστω το $\mathcal{F}$. Το φίλτρο $\mathcal{F}$ περιέχει και το $\mathcal{N}_x$ και το $\mathcal{N}_y$ και έτσι από τον ορισμό της σύγκλισης το $\mathcal{F}$ συγκλίνει και στο x και στο y το οποίο είναι άτοπο. □

Έστω X τοπολογικός χώρος και A ένα υποσύνολο του. Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε την κλειστότητα του A μέσω φίλτρων πρέπει πρώτα να μπορούμε να μιλάμε για φίλτρα στο A τα οποία συγκλίνουν σε ένα στοιχεία εκτός του A.

Παρατήρηση 2.25 Ο επόμενος ορισμός στηρίζεται στο γεγονός ότι ένα φίλτρο στο $A \subset X$ είναι μία βάση φίλτρου στο X.

Ορισμός 2.26 Έστω X τοπολογικός χώρος, $A \subset X$ και $\mathcal{F}$ φίλτρο στο A. Αν $x \in X$ λέμε ότι το φίλτρο $\mathcal{F}$ συγκλίνει στο x αν το φίλτρο $\mathcal{F}'$ στον X που παράγεται από το $\mathcal{F}$ συγκλίνει στο x.

Πρέπει να δείξουμε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι καλός, δηλαδή ότι αν $x \in A$ τότε $\mathcal{F} \to x$ (όπου το A είναι εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία) ανν $\mathcal{F}' \to x$.

($\Rightarrow$) Έστω ότι $\mathcal{F} \to x$ τότε κάθε περιοχή U^A του x στο A είναι της μορφής $U \cap A$ με U περιοχή του x στον X. επομένως για κάθε περιοχή U του x ισχύει ότι $U \cap A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ και αφού $U \supset U \cap A$ θα πρέπει $U \in \mathcal{F}'$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\mathcal{F}' \to x$ και έστω $U \cap A$ μία τυχούσα περιοχή του x στο A. Τότε $U \in \mathcal{U}$ κάθε περιοχή U του x. Αφού το $\mathcal{F}$ είναι βάση για το $\mathcal{F}'$ όπως δείξαμε στην

Πρόταση 2.10 θα πρέπει να υπάρχει ένα $V \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $V \subset U$. Συνεπώς θα πρέπει $V \subset U \cap A$ (αφού $V \subset A$) και έτσι $U \cap A \in \mathcal{F}$.

Θεώρημα 2.27 *Έστω X τοπολογικός χώρος $A \subset X$ και $x \in X$. Τότε $x \in \overline{A}$ ανν υπάρχει ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στο A τ.ω $\mathcal{F} \to x$.*

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ Έστω $x \in \overline{A}$ τότε $\{ U \cap A \mid U \in \mathcal{N}_x \}$ έχει την FIP. Αν $\mathcal{F}_A$ είναι το φίλτρο στο A που παράγεται και $\mathcal{F}$ το φίλτρο που παράγεται από το $\mathcal{F}_A$, τότε $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$ και επομένως $\mathcal{F}_A \to x$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $\mathcal{F}$ φίλτρο στο A τ.ω $\mathcal{F} \to x$ τότε υπάρχει $\mathcal{F}'$ στον X ώστε $\mathcal{F}' \to x$. Το $A \in \mathcal{F}'$ και επομένως για κάθε περιοχή U του x πρέπει να ισχύει ότι $U \cap A \neq \varnothing$.□

Η αντίστοιχη έννοια της υπακολουθίας είναι αυτή του υποφίλτρου, αν και ο ορισμός του ίσως δεν είναι αυτός που θα περίμενε κανείς.

Ορισμός 2.28 Έστω $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο σε κάποιο σύνολο X. Κάθε φίλτρο $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ ονομάζεται υποφίλτρο του $\mathcal{F}$.

Όπως για τις ακολουθίες έτσι και για τα φίλτρα ορίζουμε την έννοια του οριακού σημείου.

Ορισμός 2.29 Έστω X τοπολογικός χώρος, $x \in X$ και $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στον X. Το x λέγεται οριακό σημείο του φίλτρου $\mathcal{F}$ αν $x \in \overline{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$.

Παρατήρηση 2.30 Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι αν ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ συγκλίνει σε κάποιο σημείο x, τότε αυτό θα είναι και οριακό σημείο του φίλτρου. Πράγματι αφού κάθε περιοχή U_x του x ανήκει στο φίλτρο αναγκαστικά $U_x \cap A \neq \varnothing$ για κάθε στοιχείο A του φίλτρου. Το αντίστροφο δεν ισχύει όπως φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.31 Έστω X σύνολο και έστω x, y και z τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του X. Εφοδιάζουμε το X με την τοπολογία που περιέχει το κενό σύνολο και όλα τα υποσύνολα του X τα οποία περιέχουν το x. Έστω επίσης

$$\mathcal{F} = \{ A \subset X \mid \{ x, y, z \} \subset A \} \cup \{x, y\} \cup \{x, z\}.$$

Τότε το x είναι το μοναδικό οριακό σημείο του $\mathcal{F}$ αλλά παρόλα αυτά το $\mathcal{F}$ δεν συγκλίνει σε αυτό αφού δεν περιέχει την περιοχή $\{x\}$ του x.

Πρόταση 2.32 *Έστω X τοπολογικός χώρος $x \in X$ και $\mathcal{F}$ φίλτρο στον X. Το x είναι οριακό σημείο του $\mathcal{F}$ ανν υπάρχει υποφίλτρο του $\mathcal{F}$ το οποίο να συγκλίνει.*

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω ότι το x είναι οριακό σημείο του φίλτρου $\mathcal{F}$. Τότε το σύνολο

$$\{\, U \cap A \mid U \in \mathcal{N}_x \wedge A \in \mathcal{F} \,\}$$

είναι μία βάση φίλτρου. Έστω $\mathcal{F}'$ το φίλτρο που παράγεται, τότε $U \in \mathcal{F}'$ για κάθε U περιοχή του x και $A \in \mathcal{F}'$ για κάθε στοιχείο A του $\mathcal{F}$. Επομένως το $\mathcal{F}'$ είναι ένα υποφίλτρο του $\mathcal{F}$ το οποίο συγκλίνει στο x.

($\Leftarrow$) Έστω ότι υπάρχει ένα υποφίλτρο $\mathcal{F}'$ του $\mathcal{F}$ το οποίο συγκλίνει στο x. Τότε εξ ορισμού $U \in \mathcal{F}'$ για κάθε περιοχή U του x. Όμως αφού $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$ θα πρέπει $A \in \mathcal{F}'$ και επομένως $A \cap U \neq \varnothing$ για κάθε στοιχείο A του $\mathcal{F}$ και για κάθε περιοχή U του x. $\square$

Μία ακόμα σημαντική έννοια που θα θέλαμε να μπορούμε να περιγράψουμε μέσω φίλτρων είναι αυτή της συμπάγειας.

Θεώρημα 2.33 *Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Ο X είναι συμπαγής.

(ii) Κάθε φίλτρο στον X έχει τουλάχιστον ένα υποφίλτρο που συγκλίνει.

(iii) Κάθε υπερφίλτρο συγκλίνει.

Απόδειξη

(i)$\Rightarrow$(ii) Έστω X συμπαγής. Τότε κάθε οικογένεια κλειστών που ικανοποιεί την FIP έχει μη κενή τομή. Έστω $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στον X. Η οικογένεια $\mathcal{B} = \left\{\, \overline{U} \;\middle|\; U \in \mathcal{F} \,\right\}$ είναι μία οικογένεια κλειστών που ικανοποιεί την FIP και επομένως θα υπάρχει $x \in \bigcap B$. Τότε $x \in \overline{U}$ για κάθε $U \in \mathcal{F}$ και επομένως για κάθε περιοχή V του x και κάθε $U \in \mathcal{F}$ θα ισχύει ότι $V \cap U \neq \varnothing$. Η οικογένεια

$$\{\, V \cap U \mid V \in \mathcal{N}_x \wedge U \in \mathcal{F} \,\}$$

είναι μη κενή δεν περιέχει το κενό και είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές οπότε αποτελεί βάση για ένα φίλτρο το οποίο προφανώς θα περιέχει κάθε περιοχή του x.

(ii)⇒(i) Έστω ότι κάθε φίλτρο έχει υποφίλτρο που συγκλίνει. Αν $\mathcal{C}$ μία οικογένεια κλειστών με FIP, τότε αυτή αποτελεί υποβάση για κάποιο φίλτρο $\mathcal{F}$. Το $\mathcal{F}$ από υπόθεση έχει ένα υποφίλτρο $\mathcal{G}$ που συγκλίνει έστω σε ένα σημείο x. Επομένως για κάθε περιοχή U του x και κάθε $C \in \mathcal{C}$ θα πρέπει να ισχύει $U \cap C \neq \varnothing$ δηλαδή $x \in \overline{C}$ για κάθε C στην $\mathcal{C}$. Τα C είναι κλειστά και επομένως $x \in C$ για κάθε $C \in \mathcal{C}$ δηλαδή $x \in \bigcap \mathcal{C} \neq \varnothing$.
(ii)⇒(iii) Έστω $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο, από υπόθεση έχει υποφίλτρο που συγκλίνει. Το $\mathcal{U}$ λόγο μεγιστικότητας ταυτίζεται με κάθε υποφίλτρο του και άρα συγκλίνει.
(iii)⇒(ii) Έστω φίλτρο αυτό μπορεί να επεκταθεί σε ένα υπερφίλτρο το οποίο από υπόθεση θα συγκλίνει και θα αποτελεί ένα υποφίλτρο του αρχικού φίλτρου. □

Έστω X και Y δύο σύνολα και έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία τυχούσα συνάρτηση. Αν $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στο X τότε γενικά το σύνολο $\mathcal{B} = \{ f(U) \mid U \in \mathcal{F} \}$ δεν είναι φίλτρο στο Y, αποτελεί όμως μία βάση φίλτρου. Πράγματι η οικογένεια είναι μη κενή αφού $f(X) \in \mathcal{B}$, επίσης για κάθε U στο $\mathcal{F}$ το $U \neq \varnothing$ και επομένως $f(U) \neq \varnothing$. Τέλος αν $f(U_1), f(U_2) \in \mathcal{B}$ τότε $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ και συνεπώς $\varnothing \neq f(U_1 \cap U_2) \subset f(U_1) \cap f(U_2)$.

Ορισμός 2.34 Έστω X και Y δύο σύνολα και έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία τυχούσα συνάρτηση. Αν $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στο X τότε ορίζουμε την *εικόνα* (**direct image**) του $\mathcal{F}$ μέσω της f ως το φίλτρο στο Y που παράγεται από την οικογένεια συνόλων $\{ f(U) \mid U \in \mathcal{F} \}$.

Παρατήρηση 2.35 Το φίλτρο που ορίζεται μέσω του παραπάνω ορισμού έχει την μορφή

$$f[\mathcal{F}] = \{ V \subset Y \mid \exists U \in \mathcal{F} \text{ τ.ω } f(U) \subset V \}$$

ή ισοδύναμα

$$f[\mathcal{F}] = \left\{ V \subset Y \;\middle|\; f^{-1}(V) \in \mathcal{F} \right\}$$

Πρόταση 2.36 *Έστω X και Y δύο σύνολα και έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία τυχούσα συνάρτηση. Αν $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο X τότε η εικόνα του είναι ένα υπερφίλτρο στο Y.*

Απόδειξη

Από τον ορισμό το $f[\mathcal{U}]$ είναι ένα φίλτρο. Έστω $\mathcal{V}$ ένα γνήσιο υποφίλτρο του $f[\mathcal{U}]$, και έστω $V \in \mathcal{V} \setminus f[\mathcal{U}]$. Από τον ορισμό του $f[\mathcal{U}]$ πρέπει $f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}$. Ισοδύναμα πρέπει $U \overset{\text{def}}{=} X \setminus f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$, επίσης $U \subset f^{-1}(f(U))$ άρα $f^{-1}(f(U)) \in \mathcal{U}$ το οποίο συνεπάγεται ότι $f(U) \in f[\mathcal{U}]$. Τότε όμως $f(U) = f(X \setminus f^{-1}(V)) \in \mathcal{V}$ και $f(X \setminus f^{-1}(V)) \subset V^c$ άρα $V^c \in \mathcal{V}$ άτοπο. □

Θεώρημα 2.37 *Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι με $x \in X$ και $f : X \longrightarrow Y$ συνάρτηση. Τότε η f είναι συνεχής ανν για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ που συγκλίνει στο x το φίλτρο εικόνα συγκλίνει στο $f(x)$.*

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω ότι η f είναι συνεχής και έστω ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X για το οποίο $\mathcal{F} \to x$. Έστω V μία περιοχή του $f(x)$, από την συνέχεια της f υπάρχει μία περιοχή U του x τ.ω $f(U) \subset V$, όμως το $\mathcal{F}$ συγκλίνει στο x, έπεται λοιπόν ότι $U \in \mathcal{F}$ και επομένως η περιοχή V θα πρέπει να ανήκει στο φίλτρο εικόνα του $\mathcal{F}$.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα έστω ότι οποτεδήποτε ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X συγκλίνει στο x το φίλτρο εικόνα μέσω της f συγκλίνει στο $f(x)$. Τότε $f[\mathcal{N}_x] \to f(x)$ και έτσι για κάθε περιοχή V του $f(x)$ ισχύει ότι $V \in f[\mathcal{N}_x]$. Δηλαδή για κάθε περιοχή V του $f(x)$ υπάρχει περιοχή U του x τ.ω $f(U) \subset V$, που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής.□

Μία σημαντική εφαρμογή

Θέλουμε στην συνέχεια να παρουσιάσουμε μία σημαντική εφαρμογή, αυτή είναι μία πολύ κομψή απόδειξη του θεωρήματος Tychonoff το οποίο είναι ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της γενικής τοπολογίας. Για τον σκοπό αυτό θα ορίσουμε την έννοια του φίλτρου γινόμενου.

Ορισμός 2.38 Έστω $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, θεωρούμε ένα φίλτρο $\mathcal{F}_i$ σε κάθε X_i και σχηματίζουμε την οικογένεια

$$\left\{ \prod_{i\in I} U_i \;\middle|\; \forall i \in I \ (U_i \in \mathcal{F}_i) \ \text{και} \ \{ \, i \in I \mid U_i \neq X_i \, \} \ \text{πεπερασμένο} \right\}$$

αυτή αποτελεί βάση για ένα φίλτρο το οποίο ονομάζουμε φίλτρο γινόμενο των $(F_i)_{i\in I}$ και θα το συμβολίζουμε ως $\mathcal{F}$ ή $\prod_{i\in I} \mathcal{F}_i$.

Παρατήρηση 2.39 Να σημειώσουμε ότι αν $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ είναι η οικογένεια βάσεων που αντιστοιχεί στα φίλτρα $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ αντίστοιχα τότε μία βάση για το φίλτρο γινόμενο αποτελεί επίσης η οικογένεια:

$$\left\{ \prod_{i\in I} U_i \;\middle|\; \forall i \in I \ (U_i \in \mathcal{B}_i) \text{ και } \{\, i \in I \mid U_i \neq X_i \,\} \text{ πεπερασμένο} \right\}$$

Πρόταση 2.40 *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, θεωρούμε ένα φίλτρο $\mathcal{F}_i$ σε κάθε X_i και σχηματίζουμε το φίλτρο γινόμενο των $\mathcal{F}_i$. Αν $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ η i-προβολή τότε $\pi_i[\mathcal{F}] = \mathcal{F}_i$ για κάθε $i \in I$.*

Απόδειξη
Αν $U_i \in \pi_i[\mathcal{F}]$ τότε $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$ επομένως $U_i \times \prod_{j\in I\setminus\{\, i\,\}} X_j \in \mathcal{F}$ και άρα υπάρχει $B_i \in \mathcal{F}_i$ τ.ω $B_i \subset U_i$ δηλαδή $U_i \in \mathcal{F}_i$. Αντίστροφα αν $U_i \in \mathcal{F}_i$ τότε $U = U_i \times \prod_{j\in I\setminus\{\, i\,\}} X_i \in \mathcal{F}$ δηλαδή $\pi_i(U) \in \pi_i[\mathcal{F}]$. □

Παρατήρηση 2.41 Αν $\mathcal{F}$ φίλτρο στο $X = \prod_{i\in I} X_i$ τότε το φίλτρο εικόνα μέσω της i-προβολής του $\mathcal{F}$ θα λέγεται απλά προβολή του $\mathcal{F}$ (στην i-συντεταγμένη) και θα συμβολίζεται με $\mathcal{F}_i$.

Πρόταση 2.42 *Το φίλτρο γινόμενο $\mathcal{F} = \prod_{i\in I} \mathcal{F}_i$ είναι το μικρότερο φίλτρο στον χώρο γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$ το οποίο $\pi_i[\mathcal{F}] = \mathcal{F}_i$.*

Απόδειξη
Έστω $\mathcal{F}$ ένα τυχαίο φίλτρο στον χώρο γινόμενο για το οποίο $\pi_i[\mathcal{F}] = \mathcal{F}_i$. Έστω $U = \prod_{i\in F} U_i \times \prod_{i\in I\setminus F} X_i$ ένα τυχαίο στοιχείο της βάσης του φίλτρου γινομένου όπου F πεπερασμένο υποσύνολο του I. Τότε $U = \bigcap_{i\in F} \pi_i^{-1}(U_i)$ όμως αφού $\pi_i[\mathcal{F}] = \mathcal{F}_i$ από την Παρατήρηση 2.35 για κάθε $i \in I$ και για κάθε $U_i \in \mathcal{F}_i$ θα πρέπει $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$. Έτσι κάθε στοιχείο της βάσης του φίλτρου γινομένου είναι πεπερασμένη τομή στοιχείων του $\mathcal{F}$ και επομένως ανήκει το $\mathcal{F}$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\prod_{i\in I} \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$. □

Πρόταση 2.43 *Έστω X ο χώρος γινόμενο και $x = (x_i)_{i\in I} \in X$. Το σύστημα περιοχών $\mathcal{N}_x$ του x είναι το φίλτρο γινόμενο των συστημάτων περιοχών $\mathcal{N}_{x_i}$ δηλαδή $\mathcal{N}_x = \prod_{i\in I} \mathcal{N}_{x_i}$.*

Απόδειξη
Έστω $U \in \mathcal{N}_x$ τότε υπάρχει βασικό ανοιχτό $B \subset U$ τ.ω $B = \prod_{i\in I} B_i$ όπου τα ανοιχτά $B_i \neq X_i$ είναι πεπερασμένα. Τότε όμως κάθε $B_i \in \mathcal{N}_{x_i}$ και επομένως

$B \in \prod_{i\in I} \mathcal{N}_{x_i}$ από το οποίο έπεται ότι και $U \in \prod_{i\in I} \mathcal{N}_{x_i}$. Αντίστροφα αν $U \in \prod_{i\in I} \mathcal{N}_{x_i}$ τότε $U = \prod_{i\in I} U_i$ όπου $U_i \in \mathcal{N}_{x_i}$ για κάθε $i \in I$ και τα $U_i \neq X_i$ είναι πεπερασμένα. Για κάθε U_i διάφορο του X_i θεωρούμε B_i ανοιχτό του X_i τέτοιο ώστε $B_i \subset U_i$ και επομένως $U = \prod_{i\in I} U_i \supset B = \prod_{i\in I} B_i \in \mathcal{N}_x$. □

Τώρα είναι πολύ εύκολο να αποδείξουμε το παρακάτω σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.44 *Έστω $X = \prod_{i\in I} X_i$ χώρος γινόμενο, $x \in X$ και $\mathcal{F}$ φίλτρο ορισμένο στον X. Τότε $\mathcal{F} \to x$ ανν $\mathcal{F}_i \to x_i$ για κάθε $i \in I$.*

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω $\mathcal{F} \to x$ τότε από τον χαρακτηρισμό συνεχών συναρτήσεων 2.37 και από το γεγονός ότι οι προβολές είναι συνεχείς συναρτήσεις έχουμε ότι $\mathcal{F}_i \to x_i$ για κάθε $i \in I$.

($\Leftarrow$) Έστω $\mathcal{F}_i \to x_i$ για κάθε $i \in I$ τότε $\mathcal{N}_{x_i} \subset \mathcal{F}_i$ για κάθε $i \in I$. Επομένως $\prod_{i\in I} \mathcal{N}_{x_i} \subset \prod_{i\in I} \mathcal{F}_i$ και από την Πρόταση 2.42 έχουμε ότι $\prod_{i\in I} \mathcal{N}_{x_i} \subset F$. Τέλος από την Πρόταση 2.43 θα ισχύει επίσης ότι $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$, δηλαδή $\mathcal{F} \to x$. □

Πρόταση 2.45 *Έστω $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ φίλτρα στο $X = \prod_{i\in I} X_i$ τ.ω υπάρχει $j \in J$ με $\mathcal{U}_j \neq \mathcal{V}_j$, τότε $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$.*

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη τις γενικότητας υποθέτουμε ότι υπάρχει $U_j \in \mathcal{U}_j \setminus \mathcal{V}_j$. Τότε για κάθε $V_j \in \mathcal{V}_j$ πρέπει $V_j \nsubseteq U_j$ και έτσι $\pi_j^{-1}(U_j) = U_j \times \prod_{i\in I\setminus\{j\}} X_i \notin \mathcal{V}$. □

Πρόταση 2.46 *Έστω $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο $X = \prod_{i\in I} X_i$, τότε το $\mathcal{U}_i$ είναι υπερφίλτρο για κάθε $i \in I$.*

Απόδειξη

Από την Πρόταση 2.36 έπεται άμεσα. □

Παρατήρηση 2.47 Το αντίστροφο της Πρότασης 2.46 δεν ισχύει.

Μετά από αυτή την προεργασία το θεώρημα Tychonoff του οποίου η συνήθης απόδειξη είναι αρκετά μακροσκελής, μπορεί να αποδειχθεί με πολύ απλά επιχειρήματα.

Θεώρημα 2.48 (Tychonoff) *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος γινόμενο είναι συμπαγής.*

Απόδειξη
Έστω $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στον X τότε από την Πρόταση 2.46 κάθε προβολή $\mathcal{U}_i$ είναι υπερφίλτρο στον X_i. Από την συμπάγεια του X_i, λόγο του Θεωρήματος 2.33 κάθε $\mathcal{U}_i$ συγκλίνει (τουλάχιστον) σε ένα $x_i \in X_i$. Από το Θεώρημα 2.44 το $\mathcal{U} \to (x_i)_{i\in I}$ και επομένως πάλι λόγω του Θεωρήματος 2.33 ο X είναι συμπαγής. □

2.2 Ισοδύναμοι Ορισμοί των Υπερφίλτρων

Σε ολόκληρη την συνέχεια θα θεωρούμε ότι όλοι οι χώροι είναι Hausdorff. Παρακάτω θα μελετήσουμε το σύνολο των υπερφίλτρων ενός διακριτού τοπολογικού χώρου S δηλαδή ενός συνόλου εφοδιασμένου με την διακριτή τοπολογία. Υπάρχουν πολλοί ισοδύναμοι τρόποι να περιγράψει κάποιος το σύνολο των υπερφίλτρων στον χώρο S. Ο λόγος για τον οποίο θα προτιμήσει κάποιος να εργαστεί με τον ένα ή τον άλλο ορισμό είναι ότι ορισμένες ιδιότητες και έννοιες γίνονται περισσότερο κατανοητές σε κάποιο πλαίσιο παρά σε ένα άλλο.

Η Stone-Ĉech Συμπαγοποίηση και ο Χώρος των Υπερφίλτρων του S

Ορισμός 2.49 Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι, μία συνάρτηση $\phi : X \longrightarrow Y$ καλείται *εμφύτευση* (**embeding**) του X στον Y αν είναι ένας ομοιομορφισμός από τον X στην εικόνα του $\phi(X)$.

Η συμπάγεια είναι μια επιθυμητή ιδιότητα και αυτό διότι πολλά χρήσιμα θεωρήματα ενώ ισχύουν σε συμπαγείς τοπολογικούς χώρους δεν ισχύουν γενικότερα. Όταν εργαζόμαστε σε ένα μη συμπαγή τοπολογικό χώρο έστω τον X για να εκμεταλλευτούμε τις καλές ιδιότητες των συμπαγών χώρων μπορούμε π.χ αντί για τον ίδιο τον χώρο να μελετήσουμε την εικόνα του X μέσω μίας εμφύτευσης σε ένα συμπαγή χώρο.

Ορισμός 2.50 Έστω X τοπολογικός χώρος. *Συμπαγοποίηση* (**compactification**) του X είναι ένα ζεύγος (ϕ, Z) όπου Z είναι ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος ϕ είναι μία ομοιομορφική εμφύτευση του X στον Z και η εικόνα του $\phi(X)$ είναι πυκνή στον Z δηλαδή $\overline{\phi(X)} = Z$.

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος X έχει (τουλάχιστον) μία συμπαγοποίηση (ϕ, Z), ανν είναι τελείως φυσιολογικός.

Παράδειγμα 2.51 Ίσως ένα από τα πιο γνώριμα παραδείγματα συμπαγοποίησης είναι η *επεκτεταμένη γραμμή* (**extended line**) $(I_{\mathbb{R}}, [-\infty, \infty])$ η οποία είναι μία συμπαγοποίηση του $\mathbb{R}$ όπου $I_{\mathbb{R}}$ η ταυτοτική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και στο $[-\infty, \infty]$ θεωρούμε την συνήθη τοπολογία.

Παράδειγμα 2.52 Αν $\mathbb{N}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών με την διακριτή τοπολογία τότε το ζεύγος $(\phi, \{ 1/n \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ 0 \})$ όπου $\phi(n) = 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και το $\{ 1/n \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ 0 \}$ είναι εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία ως προς το $\mathbb{R}$ είναι μία συμπαγοποίηση του $\mathbb{N}$.

Το Παράδειγμα 2.52 είναι ειδική περίπτωση της συμπαγοποίησης ενός σημείου ενός τοπολογικού χώρου και είναι κατά κάποιο τρόπο η μικρότερη δυνατή συμπαγοποίηση μη συμπαγούς χώρου. Εμάς μας ενδιαφέρει μία άλλου είδους συμπαγοποίηση που κατά κάποιο (άλλο) τρόπο είναι η μεγαλύτερη δυνατή.

Ορισμός 2.53 Έστω X τελείως κανονικός τοπολογικός χώρος. Μία *Stone-Ĉech συμπαγοποίηση* του X είναι ένα ζευγάρι (ϕ, Z) τ.ω

(i) Το (ϕ, Z) είναι μία συμπαγοποίηση του X.

(ii) Αν $f : X \longrightarrow K$ μία οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση από τον X σε κάποιο συμπαγή χώρο K, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : Z \longrightarrow K$ τέτοια ώστε $g \circ \phi = f$.

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[ur, hook, "\phi"] \arrow[rr, "f"] & & K
\end{tikzcd}
$$

Παρατήρηση 2.54 Η ιδιότητα (ii) του ορισμού, καλείται συχνά ιδιότητα ύπαρξης συνεχούς επέκτασης διότι η g είναι συνεχής επέκταση της $f \circ \phi^{-1} : \phi(X) \longrightarrow K$.

Πράγματι για κάθε $z = \phi(x)$ για κάποιο $x \in X$ έχουμε ότι:

$$f \circ \phi^{-1}(z) = f \circ (\phi^{-1} \circ \phi)(x) = f(x) = g \circ \phi(x) = g(z).$$

Επίσης η επέκταση αυτή είναι μοναδική διότι οποιαδήποτε άλλη αναγκαστικά θα ταυτίζεται στο $\phi(X)$ το οποίο εξ' ορισμού είναι πυκνό στον Z και έτσι λόγω συνέχειας θα ταυτίζεται παντού.

Πρόταση 2.55 *Έστω X τελείως κανονικός τοπολογικός χώρος. Αν (ϕ, Z) και (ϕ', Z') δύο Stone-Čech συμπαγοποιήσεις του X τότε υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $h : Z \longrightarrow Z'$ μεταξύ τους.*

Απόδειξη

Από την ιδιότητα (i) του ορισμού της συμπαγοποίησης Stone-Čech, έπεται ότι $\phi : X \longrightarrow Z$ και $\phi' : X \longrightarrow Z'$ είναι εμφυτεύσεις στους συμπαγείς Z και Z' αντίστοιχα. Από την ιδιότητα (ii) και την Παρατήρηση 2.54 υπάρχουν μοναδικές $g : Z \longrightarrow Z'$ και $g' : Z' \longrightarrow Z$ ώστε $g \circ \phi = \phi'$ και $g' \circ \phi' = \phi$.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, hook, "\phi"'] \arrow[dr, hook, "\phi'"] & \\
Z \arrow[rr, shift left, "g"] & & Z' \arrow[ll, shift left, "g'"]
\end{tikzcd}$$

Για $x \in X$ και $z_x = \phi(x) \in Z$ έχουμε ότι:

$$g' \circ g(z_x) = g' \circ g(\phi(x)) = g' \circ (g \circ \phi)(x) = g' \circ \phi'(x) = \phi(x) = z_x.$$

Επίσης για $x \in X$ και $z'_x = \phi'(x) \in Z'$ έχουμε ότι:

$$g \circ g'(z'_x) = g \circ g'(\phi'(x)) = g \circ (g' \circ \phi')(x) = g \circ \phi(x) = \phi'(x) = z'_x.$$

Έτσι $g' \circ g|_{\phi(X)} = I_{\phi(X)}$ και $g \circ g'|_{\phi'(X)} = I_{\phi'(X)}$ ενώ οι $g' \circ g$ και $g \circ g'$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ως συνθέσεις συνεχών. Αφού τα $\phi(X)$ και $\phi'(X)$ είναι πυκνά υποσύνολα του Z και του Z' αντίστοιχα θα πρέπει $g' \circ g = I_Z$ και $g \circ g' = I_{Z'}$.

Αυτό συνεπάγεται ότι $g' = g^{-1}$ και επομένως η συνάρτηση g είναι $1-1$, επί και αμφισυνεχής δηλαδή ένας ομοιομορφισμός από τον Z στον Z'. $\square$

Παρατήρηση 2.56 Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα από τοπολογική σκοπιά η συμπαγοποίηση Stone-Ĉech ενός χώρου X θεωρείται μοναδική και θα συμβολίζεται με βX.

Η συμπαγοποίηση Stone-Ĉech ενός χώρου X είναι η μεγαλύτερη δυνατή με την έννοια που περιγράφεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.57 *Έστω X τελείως κανονικός τοπολογικός χώρος. Τότε για κάθε συμπαγοποίηση (ϕ', Z) αν $(\phi, \beta X)$ η Stone-Ĉech συμπαγοποίηση του X τότε υπάρχει μία συνεχής και επί συνάρτηση $f : \beta X \longrightarrow Z$.*

Απόδειξη

Από τα δεδομένα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \beta X \longrightarrow Z$ ώστε $f \circ \phi = \phi'$ και επομένως $\phi'(X) = f \circ \phi(X) \subset f(\beta X)$. Επομένως $Z = \overline{\phi'(X)} \subset f(\beta X)$. Διότι $f(\beta X)$ συμπαγές υποσύνολο του Z ως συνεχής εικόνα συμπαγούς και έτσι επίσης κλειστό ως συμπαγές υποσύνολο χώρου Hausdorff. $\square$

Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι αν S διακριτός τοπολογικός χώρος, ο βS μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο των υπερφίλτρων στο S εφοδιασμένο με μία κατάλληλη τοπολογία. Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της σχέσης αυτής θα δούμε μία εφαρμογή της Stone-Ĉech συμπαγοποίησης στην περιοχή της συναρτησιακής ανάλυσης.

Θεώρημα 2.58 *Έστω $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ο χώρος των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Ο $\ell^\infty(\mathbb{N})$ είναι γραμμικά ισομετρικός με τον χώρο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στον $\beta\mathbb{N}$, δηλαδή υπάρχει μία γραμμική $1-1$, επί και αμφισυνεχής συνάρτηση $f : \ell^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow C(\beta\mathbb{N})$ όπου έχουμε θεωρήσει και στους δύο χώρους την νόρμα άπειρο $\|\cdot\|_\infty$.*

Απόδειξη

Έστω $\alpha \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ μία φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Τότε αν θεωρήσουμε το κλειστό και φραγμένο δηλαδή συμπαγές σύνολο $B = \{\, x \in \mathbb{R} \mid -\|\alpha\|_\infty \leq x \leq \|\alpha\|_\infty \,\}$ βλέπουμε ότι $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow B$ και α συνεχής συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο B διότι θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{N}$ εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία. Επομένως από την ιδιότητα ύπαρξης μοναδικής συνεχούς επέκτασης υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $\beta\alpha : \beta\mathbb{N} \longrightarrow B$ τέτοια ώστε $\beta\alpha \circ \phi = \alpha$, όπου ϕ η θεωρούμενη εμφύτευση του $\mathbb{N}$ στον $\beta\mathbb{N}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \beta\mathbb{N} \arrow[dr, "\beta\alpha"] & \\
\mathbb{N} \arrow[ur, hook, "\phi"] \arrow[rr, "\alpha"] & & B \subset \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Αντίστροφα τώρα, αν $\beta\alpha$ μία συνεχής συνάρτηση από το $\beta\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$ τότε σε αυτή αντιστοιχεί μία μοναδική συνάρτηση $\beta\alpha \circ \phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Επίσης αφού $\beta\mathbb{N}$ είναι συμπαγής χώρος η εικόνα του μέσω της $\beta\alpha$ θα είναι επίσης συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ως συνεχής εικόνα συμπαγούς και άρα φραγμένο υποσύνολο. Έτσι $\beta\alpha \circ \phi\,(\mathbb{N})$ επίσης φραγμένο και άρα η $\alpha = \beta\alpha \circ \phi$ είναι μία φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η αντιστοιχία $\alpha \to \beta\alpha$ από τον $\ell^\infty(\mathbb{N})$ στον $C\,(\beta\mathbb{N})$ είναι $1-1$ και επί.

Αφού η $\beta\alpha$ επεκτείνει την α διατηρώντας το (φραγμένο) πεδίο τιμών της θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\beta\alpha(\beta\mathbb{N}) \subset B = \{\, x \in \mathbb{R} \mid -\|\alpha\|_\infty \leq x \leq \|\alpha\|_\infty \,\}$$

δηλαδή $\|\beta\alpha\|_\infty \leq \|\alpha\|_\infty$. Η αντίστροφη ανισότητα ισχύει τετριμμένα και επομένως $\|\beta\alpha\|_\infty = \|\alpha\|_\infty$.

Για την γραμμικότητα αν υποθέσουμε ότι x, y φραγμένες ακολουθίες στον $\mathbb{R}$ και $\alpha, b \in \mathbb{R}$ τότε:

$$\beta\,(\alpha x + by) \circ \phi = (\alpha x + by) = \beta\,(\alpha x) \circ \phi + \beta\,(by) \circ \phi.$$

Αφού οι συνεχείς $\beta\,(\alpha x + by)$ και $\beta\,(\alpha x) + \beta\,(by)$ ταυτίζονται στο $\phi(\mathbb{N})$ το οποίο είναι πυκνό στον $\beta\mathbb{N}$ θα πρέπει να ταυτίζονται παντού και επομένως η $\alpha \to \beta\alpha$ είναι και γραμμική. $\square$

Παρατήρηση 2.59 Το παραπάνω θεώρημα ισχύει αυτούσιο αν αντί του $\mathbb{N}$ θεωρήσουμε έναν οποιοδήποτε χώρο S εφοδιασμένο με την διακρητή τοπολογία.

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε το σύνολο των υπερφίλτρων που ορίζονται σε ένα διακριτό τοπολογικό χώρο S. Για να το κάνουμε αυτό θα ορίσουμε μια τοπολογία η οποία θα καθιστά το σύνολο των υπερφίλτρων του S έναν συμπαγή τοπολογικό χώρο.

Ορισμός 2.60 Έστω S σύνολο, ορίζουμε:

(i) $Z_S = \{\, \mathcal{U} \mid \mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο στο $S\,\}$

(ii) $\widehat{A} = \{\, \mathcal{U} \in Z_S \mid A \in \mathcal{U}\,\}$ για κάθε $A \subset S$

(iii) $e : S \longrightarrow Z_S$ με $e(s) = \{\, A \subset S \mid s \in A\,\}$.

Παρατήρηση 2.61 Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση e απεικονίζει τα στοιχεία του S στα τετριμμένα υπερφίλτρα στο S. Όπως θα δούμε αργότερα η e είναι μία εμφύτευση του S στον Z_S.

Πρόταση 2.62 *Έστω S σύνολο και A, B υποσύνολα του S.*

(i) $\widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$.

(ii) $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$.

(iii) $\widehat{S \setminus A} = Z_S \setminus \widehat{A}$.

(iv) $\widehat{A} = \varnothing$ *ανν* $A = \varnothing$.

(v) $\widehat{A} = Z_S$ *ανν* $A = S$.

(vi) $\widehat{A} = \widehat{B}$ *ανν* $A = B$.

Απόδειξη

(i) Έστω $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο S και έστω ότι $\mathcal{U} \in \widehat{A \cap B}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{U}$ και επομένως $A \in \mathcal{U}$ και $B \in \mathcal{U}$ το οποίο σημαίνει ότι $\mathcal{U} \in \widehat{A}$ και $\mathcal{U} \in \widehat{B}$ δηλαδή $\mathcal{U} \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$. Αντίστροφα αν $\mathcal{U} \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$ τότε $A \in \mathcal{U}$ και $B \in \mathcal{U}$ από το οποίο προκύπτει ότι $A \cap B \in \mathcal{U}$ δηλαδή ότι $\mathcal{U} \in \widehat{A \cap B}$.

(ii) Αν $\mathcal{U} \in \widehat{A \cup B}$, τότε $A \cup B \in \mathcal{U}$ και επομένως από την ιδιότητα (iv) του Θεωρήματος 2.16 είτε $A \in \mathcal{U}$ είτε $B \in \mathcal{U}$ δηλαδή ή $\mathcal{U} \in \widehat{A}$ ή $\mathcal{U} \in \widehat{B}$ και άρα $\mathcal{U} \in \widehat{A} \cup \widehat{B}$. Αντίστροφα αν $\mathcal{U} \in \widehat{A} \cup \widehat{B}$ τότε είτε $A \in \mathcal{U}$ είτε $B \in \mathcal{U}$ από το οποίο προκύπτει ότι $A \cup B \in \mathcal{U}$ δηλαδή ότι $\mathcal{U} \in \widehat{A \cap B}$.

(iii) Αν $\mathcal{U} \in \widehat{S \setminus A}$ τότε $S \setminus A \in \mathcal{U}$ και επομένως $A \notin \mathcal{U}$ δηλαδή $\mathcal{U} \notin \widehat{A}$ άρα $\mathcal{U} \in Z_S \setminus \widehat{A}$. Αντίστροφα αν $\mathcal{U} \in Z_S \setminus \widehat{A}$ τότε $\mathcal{U} \notin \widehat{A}$ και άρα $A \notin \mathcal{U}$ δηλαδή $S \setminus A \in \mathcal{U}$ που σημαίνει ότι $\mathcal{U} \in \widehat{S \setminus A}$.

(iv) Το κενό δεν ανήκει σε κανένα υπερφίλτρο και έτσι τετριμμένα $\widehat{\varnothing} = \varnothing$. Αντιστρόφως αν $\widehat{A} = \varnothing$ τότε αναγκαστικά $A = \varnothing$ διότι αν όχι η οικογένεια συνόλων $\{ A \}$ έχει την FIP και έτσι από το Πόρισμα 2.13 υπάρχει ένα υπερφίλτρο που περιέχει το A, άτοπο.

(v) Αν $A = S$ τότε προφανώς $A \in \mathcal{U}$ για κάθε $\mathcal{U} \in Z_S$. Αν τώρα $\widehat{A} = Z_S$ τότε $\varnothing = Z_S \setminus \widehat{A} \overset{\text{(iii)}}{=} \widehat{S \setminus A}$ και έτσι από την ιδιότητα (iv) πρέπει $S \setminus A = \varnothing$ δηλαδή $A = S$.

(vi) Αν $A = B$ το συμπέρασμα είναι άμεσο. Στην περίπτωση πού $\widehat{A} = \widehat{B} = \varnothing$ από την ιδιότητα (iv) προκύπτει το ζητούμενο. Έστω ότι $\widehat{A} = \widehat{B} \neq \varnothing$ τότε τα A και B είναι μη κενά. Αν υποθέσουμε ότι $A \neq B$ τότε είτε $A \setminus B \neq \varnothing$ είτε $B \setminus A \neq \varnothing$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $A \setminus B \neq \varnothing$, τότε η $\{ A \setminus B, A \}$ έχει την FIP και άρα παράγει ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$. Το $\mathcal{U}$ θα πρέπει να περιέχει το $A \setminus B$ και το A άρα από την υπόθεση και το B το οποίο όμως είναι άτοπο διότι $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$. $\square$

Παρατήρηση 2.63 Κάποιος μπορεί εύκολα να δείξει ότι οι ιδιότητες (i) και (ii) ισχύουν και για πεπερασμένο το πλήθος πράξεις, ενώ στην γενική περίπτωση έχουμε αντίστοιχα τις σχέσεις $\widehat{\bigcap A_i} \subset \bigcap \widehat{A_i}$ και $\widehat{\bigcup A_i} \supset \bigcup \widehat{A_i}$.

Παρατήρηση 2.64 Από την Πρόταση 2.62 μπορεί να επαληθευτεί σχεδόν άμεσα το συμπέρασμα ότι το σύνολο $\left\{ \widehat{A} \;\middle|\; A \subset S \right\}$ αποτελεί βάση για μία τοπολογία στο Z_S. Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε το Z_S εφοδιασμένο με την τοπολογία που παράγεται από τα υποσύνολα του Z_S που είναι της μορφής $\widehat{A}$ για κάποιο $A \subset S$.

Πριν συνεχίσουμε θα χρειαστούμε ακόμα έναν ορισμό. Όπως τα ανοιχτά έτσι και τα κλειστά μπορούν να περιγράψουν την τοπολογία ενός χώρου, αφού αν γνωρίζεις τα κλειστά του χώρου αυτομάτως γνωρίζεις και τα ανοιχτά.

Ορισμός 2.65 Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, καλούμε *βάση για τα κλειστά σύνολα* (**base for the closed sets**) μία οικογένεια υποσυνόλων του X η οποία έχει την ιδιότητα κάθε κλειστό του χώρου να ισούται με την τομή κάποιων στοιχείων της βάσης.

Παρακάτω δίνουμε και έναν πολύ χρήσιμο χαρακτηρισμό.

Θεώρημα 2.66 *Μία οικογένεια υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X αποτελεί βάση για τα κλειστά ανν τα συμπληρώματα των στοιχείων της αποτελούν μία βάση για τα ανοιχτά.*

Απόδειξη

Έστω F ένα τυχαίο κλειστό του χώρου. Το F^c είναι ανοιχτό και από την υπόθεση θα γράφεται ως $F^c = \bigcup F_i^c$ για κάποια στοιχεία F_i της οικογένειας. Αυτό όμως σημαίνει ότι $F = \bigcap F_i$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 2.67 Από τα παραπάνω και από την ιδιότητα (iii) της πρότασης 2.62 βλέπουμε ότι η οικογένεια $\left\{ \widehat{A} \;\middle|\; A \subset S \right\}$ είναι μία βάση για τα κλειστά του χώρου Z_S.

Το παρακάτω θεώρημα αφορά κάποια βασικά χαρακτηριστικά του τοπολογικού χώρου Z_S και της συνάρτησης e.

Θεώρημα 2.68 *Έστω S σύνολο και Z_S ο τοπολογικός χώρος των υπερφίλτρων στο S. Τότε:*

(i) *Ο χώρος Z_S είναι συμπαγής και Hausdorff.*

(ii) *Τα στοιχεία της βάσης της τοπολογίας του Z_S είναι ακριβώς εκείνα που είναι και* ανοιχτά και κλειστά *(**clopen**).*

(iii) *Για κάθε $A \subset S$, $\widehat{A} = \mathrm{Cl}_{Z_S}\, e[A]$.*

(iv) *Για κάθε $A \subset S$ και κάθε $\mathcal{U} \in Z_S$, το $\mathcal{U}$ ανήκει στο $\mathrm{Cl}_{Z_S}\, e[A]$ ανν $A \in \mathcal{U}$.*

(v) *Η συνάρτηση $e : S \longrightarrow Z_S$ είναι $1-1$, το $e[S]$ είναι πυκνό υποσύνολο του Z_S και τα στοιχεία του είναι ακριβώς τα μεμονωμένα σημεία του Z_S.*

(vi) *Αν G ένα ανοιχτό υποσύνολο του Z_S τότε η κλειστότητα του, $\mathrm{Cl}_{Z_S} G$ είναι επίσης ανοιχτό.*

Απόδειξη

(i) Έστω $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ δύο υπερφίλτρα στο Z_S τότε υπάρχει $A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ και επομένως $S \setminus A \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ έτσι $\mathcal{U} \in \widehat{A}$ και $\mathcal{V} \in \widehat{S \setminus A}$ δηλαδή $\widehat{A}$ και $\widehat{S \setminus A}$ δύο περιοχές που διαχωρίζουν τα σημεία $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ και έτσι ο Z_S είναι Hausdorff. Λόγω της παρατήρησης 2.67 για δείξουμε ότι ο Z_S είναι συμπαγής αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε οικογένεια $\mathcal{A}$ με στοιχεία της μορφής $\widehat{A}$ η οποία ικανοποιεί την FIP, έχει μη κενή τομή. Πράγματι έστω

$$\mathcal{B} = \left\{ A \subset S \;\middle|\; \widehat{A} \in \mathcal{A} \right\}.$$

Αν $(A_k)_{k=1}^n \subset \mathcal{B}$ τότε υπάρχει ένα υπερφίλτρο

$$\mathcal{U} \in \bigcap_{k=1}^{n} \widehat{A}_k$$

και έτσι σύμφωνα με την ιδιότητα (i) της πρότασης 2.62 το $\bigcap_{k=1}^n A_k$ θα ανήκει στο $\mathcal{U}$, πράγμα που σημαίνει ότι $\bigcap_{k=1}^n A_k \neq \varnothing$. Έτσι η $\mathcal{B}$ έχει την FIP και άρα υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ το οποίο να την περιέχει. Αυτό σημαίνει ότι $A \in \mathcal{U}$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$ δηλαδή $\mathcal{U} \in \widehat{A}$ για κάθε $\widehat{A} \in \mathcal{A}$ και άρα $\cap \mathcal{A} \neq \varnothing$.

(ii) Το ότι τα στοιχεία της βάσης είναι ανοιχτά και κλειστά είναι άμεσο από την ιδιότητα (iii) της πρότασης 2.62. Έστω C ένα υποσύνολο του Z_S το οποίο είναι και ανοιχτό και κλειστό. Αφού το C είναι ανοιχτό θα γράφεται ως ένωση στοιχείων της βάσης:

$$C = \bigcup_{i \in I} \widehat{A}_i$$

Έτσι $(A_i)_{i \in I}$ είναι ένα κάλυμμα του C, το οποίο είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς χώρου και άρα συμπαγές. Επομένως υπάρχει πεπερασμένο υποκά-

λυμμα τ.ω
$$C = \bigcup_{k=1}^{n} \widehat{A}_{i_k}$$
τώρα από την ιδιότητα (ii) της πρότασης 2.62 το C είναι στοιχείο της βάσης.

(iii) Για $s \in A$ το $e(s) \in \widehat{A}$ και επομένως $e[A] \subset \widehat{A}$ άρα αφού το $\widehat{A}$ είναι κλειστό $\mathrm{Cl}_{Z_S}\, e[A] \subset \widehat{A}$. Έστω $\mathcal{U} \in \widehat{A}$ και έστω $\widehat{B}$ μία βασική περιοχή του $\mathcal{U}$. Τότε και το A και το B είναι στοιχεία του $\mathcal{U}$ και άρα $A \cap B \neq \varnothing$. Έστω $s \in A \cap B$ τότε $e(s) \in e[A]$ και $e(s) \in \widehat{A \cap B} \subset \widehat{B}$ δηλαδή $e[A] \cap \widehat{B} \neq \varnothing$.

(iv) Το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από την προηγούμενη ιδιότητα και τον ορισμό των βασικών στοιχείων του χώρου.

(v) Αν α, b διαφορετικά στοιχεία του S τότε $\alpha \in e(\alpha) \setminus e(b)$ και άρα $e(\alpha) \neq e(b)$. Από την ιδιότητα (v) της πρότασης 2.62 και την προηγούμενη ιδιότητα έχουμε ότι:
$$\mathrm{Cl}_{Z_S}\, e[S] = \widehat{S} = Z_S.$$
Για κάθε $s \in S$ το $e(s)$ είναι μεμονωμένο σημείο του χώρου Z_S αφού το $\widehat{\{s\}}$ είναι ανοιχτό και το μοναδικό του στοιχείο είναι το $e(s)$. Αν $\mathcal{U}$ ένα μεμονωμένο στοιχείο του Z_S τότε υπάρχει βασικό ανοιχτό ώστε $\widehat{A} = \{\mathcal{U}\}$. Επομένως και αφού $e[S]$ πυκνό $\{\mathcal{U}\} \cap e[S] \neq \varnothing$ δηλαδή $\mathcal{U} = e(s)$ για κάποιο s στο S.

(vi) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $U \neq \varnothing$. Θέτουμε $A = e^{-1}[U]$ τότε προφανώς $e[A] \subset U$ και επομένως $\mathrm{Cl}_{Z_S}\, e[A] \subset \mathrm{Cl}_{Z_S}\, U$. Αντίστροφα αν $\widehat{B}$ μία βασική περιοχή ενός οποιουδήποτε σημείου $\mathcal{U}$ του U από την πυκνότητα του $e[S]$ υπάρχει $\widehat{B} \cap U \cap e[S] \neq \varnothing$. Έστω $b \in B$ τ.ω $e(b) \in \widehat{B} \cap U$. τότε $b \in A$ και επομένως $e(b) \in e[A] \cap \widehat{B}$. Έτσι $\widehat{B} \cap e[A] \neq \varnothing$ και άρα $\mathcal{U} \in \mathrm{Cl}_{Z_S}\, e[A]$. Από τα παραπάνω έχουμε ότι $\mathrm{Cl}_{Z_S}\, U = \mathrm{Cl}_{Z_S}\, e[A] = \widehat{A}$ δηλαδή $\mathrm{Cl}_{Z_S}\, U$ είναι ανοιχτό. $\square$

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο Z_S είναι μία Stone-Ĉech συμπαγοποίηση του S.

Θεώρημα 2.69 *Έστω S ένας διακριτός τοπολογικός χώρος, τότε το ζεύγος (e, Z_S) είναι μία Stone-Ĉech συμπαγοποίηση του S.*

Απόδειξη
Όπως δείξαμε στην Θεώρημα 2.68 ο χώρος Z_S είναι συμπαγής και η e είναι $1-1$ με πυκνή εικόνα. Αυτές οι ιδιότητες δεν απαιτούν από το σύνολο S να είναι εφοδιασμένο με κάποια τοπολογική δομή. Αν το S είναι ένας διακριτός τοπολογικός χώρος η e είναι τετριμμένα συνεχής ενώ αν $A \subset S$ τότε

$$e[A] = \bigcup_{\alpha \in A} \widehat{\{\alpha\}}$$

δηλαδή $e[A]$ ανοιχτό σύνολο και επομένως η e είναι μία εμφύτευση του S στον συμπαγή Z_S και (e, Z_S) μία συμπαγοποίηση του S. Απομένει να επαληθεύσουμε την ιδιότητα επέκτασης της που χαρακτηρίζει την Stone-Ĉech συμπαγοποίηση. Έστω $f : S \longrightarrow K$ μία συνεχής συνάρτηση από τον S στον συμπαγή χώρο K. Για κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο S θέτουμε

$$\mathcal{A}_{\mathcal{U}} = \{\ \mathrm{Cl}_K(f[A]) \mid A \in \mathcal{U}\ \}\,.$$

Τότε για κάθε $\mathcal{U}$ το $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ έχει την FIP. Πραγματικά αν $\{\mathrm{Cl}_K(f[A_k])\}_{k=1}^{n}$ πεπερασμένη οικογένεια στοιχείων του $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ τα A_k ανήκουν στο $\mathcal{U}$ για κάθε k και επομένως $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \varnothing$. Έστω $x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ τότε $f(x) \in f\left[\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right] \subset \bigcap_{k=1}^{n} f[A_k]$ και έτσι $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Cl}_K(f[A_k]) \neq \varnothing$. Αφού το $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ έχει την FIP και ο K είναι συμπαγής πρέπει $\bigcap \mathcal{A}_{\mathcal{U}} \neq \varnothing$. Για κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στον Z_S επιλέγουμε ένα $g(\mathcal{U}) \in \bigcap \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$, έτσι έχουμε ορίσει καλώς μία συνάρτηση $g : Z_S \longrightarrow K$ και έχουμε το παρακάτω διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
 & Z_S \arrow[dr, "g"] & \\
S \arrow[ur, hook, "e"] \arrow[rr, "f"] & & K
\end{tikzcd}$$

Απομένει να δείξουμε ότι η g είναι συνεχής και ότι $g \circ e = f$. Έστω $s \in S$ τότε $\{s\} \in e(s)$ και έτσι $g\,(e(s)) \in \mathrm{Cl}_K(f[\{s\}]) = \{f(s)\}$, δηλαδή $g\,(e(s)) = f(s)$ για κάθε $s \in S$. Για την συνέχεια της g ας θεωρήσουμε μία περιοχή U της εικόνας $g(\mathcal{U})$

ενός υπερφίλτρου $\mathcal{U} \in Z_S$. Αφού ο K είναι συμπαγής είναι και φυσιολογικός και επομένως μπορούμε να βρούμε μία περιοχή V του $g(\mathcal{U})$ τέτοια ώστε $V \subset \mathrm{Cl}_K(V) \subset U$. Θέτουμε $A = f^{-1}[V]$ και ισχυριζόμαστε ότι $A \in \mathcal{U}$. Πράγματι αν όχι τότε $S \backslash A \in \mathcal{U}$ και από τον ορισμό της g θα πρέπει να ισχύει ότι $g(\mathcal{U}) \in \mathrm{Cl}_K(f[S \backslash A])$ και αφού η V είναι μία περιοχή του $g(\mathcal{U})$ από τον χαρακτηρισμό της κλειστότητας $V \cap f[S \backslash A] \neq \varnothing$ το οποίο είναι άτοπο διότι όλα τα στοιχεία του S που αντιστοιχούνται στο V μέσω της f ανήκουν στο A. Έτσι $A \in \mathcal{U}$ και επομένως $\widehat{A}$ μία βασική ανοιχτή περιοχή του $\mathcal{U}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $g[\widehat{A}] \subset U$. Έστω $\mathcal{V} \in \widehat{A}$ τότε αν $g(\mathcal{V}) \notin U$ το $K \setminus \mathrm{Cl}_K(V)$ θα είναι μία περιοχή του $g(\mathcal{V})$. Από τον ορισμό της g έχουμε ότι $g(\mathcal{V}) \in \mathrm{Cl}_K(f[A])$ και έτσι

$$\varnothing \neq K \setminus \mathrm{Cl}_K(V) \cap f[A] \subset K \setminus \mathrm{Cl}_K(V) \cap V$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Παρατήρηση 2.70 Λόγω της μοναδικότητας της g προκύπτει ότι τα $\bigcap \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ είναι μονοσύνολα. Ο χώρος των υπερφίλτρων σε ένα διακριτό τοπολογικό χώρο S θα συμβολίζεται με βS που είναι ο συνήθης συμβολισμός για την Stone-Ĉech συμπαγοποίηση ενώς χώρου.

Παρατήρηση 2.71 Μία συνήθης πρακτική είναι να ταυτίζουμε τα στοιχεία του S με τα αντίστοιχα τετριμμένα υπερφίλτρα. Αυτό είναι δυνατό λόγω της (τοπολογικά) απόλυτης ταύτισης του χώρου S και της εικόνας του $e(S)$. Έτσι από δώ και στο εξής ο χώρος S θα θεωρείται υποσύνολο του βS και δεν θα κάνουμε διαχωρισμό μεταξύ του s και του $e(s)$. Επιπλέον με αυτή την σύμβαση η ιδιότητα (iii) του θεωρήματος 2.68 θα γράφεται $\widehat{A} = \mathrm{Cl}_{\beta S} A$ ή πιο απλά $\widehat{A} = \overline{A}$. Διαισθητικά λοιπόν η κλειστότητα του $A \subset S$ στον βS είναι το σύνολο όλων των υπερφίλτρων που περιέχουν το A και συγχρόνως μία βασική περιοχή για κάθε ένα από αυτά.

Παρατήρηση 2.72 Αν $A \subset S$ και $\mathcal{U} \in \beta S$ υπερφίλτρο με $A \in \mathcal{U}$ η οικογένεια $\{ B \cap A \mid B \in \mathcal{U} \}$ είναι ένα υπερφίλτρο στο βA και αντίστροφα για κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{U}$του βA η οικογένεια $\{ B \subset S \mid B \cap A \in \mathcal{U} \}$ είναι ένα υπερφίλτρο στο βS. Οι διαδικασίες αυτές είναι αντίστροφες η μία της άλλης, θα δείξουμε ότι είναι επίσης συνεχείς και επομένως τα $\widehat{A}$ και βA είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους και από τοπολογικής απόψεως ταυτίζονται. Πράγματι αν $f : \widehat{A} \longrightarrow \beta A$ και $\widehat{V}$ περιοχή του $f(\mathcal{U})$ τότε υπάρχει $\widehat{B} \in \mathcal{U}$ περιοχή του $\mathcal{U}$ ώστε $V = B \cap A$ άρα για κάθε $\mathcal{V} \in \widehat{B}$ το V ανήκει στο $f(\mathcal{V})$ και επομένως $f(\mathcal{V}) \in \widehat{V}$. Όμοια για την άλλη φορά.

Τα Υπερφίλτρα ως Πεπερασμένα Αθροιστικά Μέτρα

Ένα υπερφίλτρο σε κάποιο σύνολο X έχει χαρακτηριστικά που θα περίμενε κανείς από την συλλογή όλων των "μεγάλων" υποσυνόλων του X. Πράγματι προφανώς το X θα πρέπει να ανήκει στα μεγάλα υποσύνολα του ενώ το $\varnothing$ όχι. Επίσης αν A ένα μεγάλο υποσύνολο του X και $A \subset B$ τότε και το B θα πρέπει να είναι μεγάλο. Δύο ακόμα ιδιότητες που είναι ανοιχτές προς συζήτηση αλλά μπορούμε να περιμένουμε από τα μεγάλα υποσύνολα του X είναι οι εξής.

(α) Αν A και B μεγάλα υποσύνολα του X αυτά θα έχουν κοινό σημείο τομής, δηλαδή $A \cap B \neq \varnothing$.

(β) Αν Αφαιρέσουμε ένα μικρό σύνολο από ένα μεγάλο τότε αυτό θα παραμείνει μεγάλο.

Αν λάβουμε υπόψη τις δύο παραπάνω ιδιότητες και υποθέσουμε ότι δύο σύνολα A και B είναι μεγάλα τότε η τομή τους θα είναι επίσης μεγάλη. Πραγματικά αν όχι τότε από το (β) τα $A \setminus (A \cap B)$ και $B \setminus (A \cap B)$ θα είναι μεγάλα χωρίς όμως να έχουν κοινό σημείο τομής. Εύκολα μπορεί να προκύψει και ότι για κάθε σύνολο είτε αυτό είτε το συμπλήρωμα του θα πρέπει να είναι μεγάλο οπότε πραγματικά τα υπερφίλτρα περιγράφονται από αυτές τις ιδιότητες. Υπάρχει επίσης μία έννοια που είναι δυϊκή των υπερφίλτρων και είναι αυτή του *ιδεώδους* (**ideal**). Τα ιδεώδη με έναν αντίστοιχο τρόπο περιγράφουν τα μικρά υποσύνολα και παρόλο που η μελέτη τους είναι πολύ ενδιαφέροντα, εδώ δεν θα ασχοληθούμε με αυτά.

Ορισμός 2.73 Ένα $0-1$ πεπερασμένα αθροιστικό μέτρο σε κάποιο σύνολο X είναι μία συνάρτηση $\mu : 2^X \longrightarrow \{ 0, 1 \}$ για την οποία ισχύουν τα παρακάτω.

(i) $\mu(X) = 1$

(ii) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι μία πεπερασμένη οικογένεια ξένων ανά δύο υποσυνόλων του X τότε $\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu\left(A_i\right)$.

Πρόταση 2.74 *Υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των $0-1$ πεπερασμένα αθροιστικών μέτρων σε ένα σύνολο X και των υπερφίλτρων του X. Αν$\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο τότε το μέτρο που του αντιστοιχεί είναι το*

$$\mu_{\mathcal{U}}\left(A\right) = \begin{cases} 1 & \text{αν } A \in \mathcal{U}. \\ 0 & \text{αν } A \notin \mathcal{U}. \end{cases}$$

Αντίστροφα αν μ ένα $0-1$ πεπερασμένα αθροιστικό μέτρο τότε το υπερφίλτρο που του αντιστοιχεί είναι το

$$\mathcal{U}_\mu = \left\{ A \subset X \mid \mu(A) = 1 \right\}.$$

Απόδειξη

Έστω $\mu_{\mathcal{U}}$ όπως παραπάνω. Προφανώς, $\mu_{\mathcal{U}}\left(X\right) = 1$ για την δεύτερη ιδιότητα θα αποδείξουμε την περίπτωση για $n = 2$ αφού το επιχείρημα γενικεύεται εύκολα με επαγωγή. Έστω A και B υποσύνολα του X με $A \cap B = \varnothing$. Αν ακριβώς το ένα από τα δύο ανήκει στο $\mathcal{U}$ τότε $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = 1$. Να ανήκουν και τα δύο δεν είναι δυνατόν αφού έχουν κενή τομή. Τέλος Αν κανένα από τα δύο δεν ανήκει στο $\mathcal{U}$ τότε $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in \mathcal{U}$ και επομένως $A \cup B \notin \mathcal{U}$ και έτσι $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = 0$. Για την αντίστροφη διαδικασία είναι άμεσο ότι $\mu_{\mathcal{U}_\mu} = \mu$. □

Τα Υπερφίλτρα ως Γενικευμένοι Ποσοδείκτες

Όταν γράφουμε τυπικές μαθηματικές προτάσεις χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\forall$ και $\exists$ τα οποία λέγονται λογικοί ποσοδείκτες. Έστω ότι $P(x)$ συμβολίζει την πρόταση "το x έχει την ιδιότητα P" και έστω X κάποιο σύνολο, θέτουμε $\mathcal{A} = \{X\}$ και $\mathcal{E} = 2^X \setminus \{\varnothing\}$. Με αυτόν τον συμβολισμό αντί για την πρόταση $\forall x \in X\ P(x)$ ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε $\left\{ x \in X \mid P(x) \right\} \in \mathcal{A}$ και αντί για $\exists x \in X\ P(x)$ γράφουμε $\left\{ x \in X \mid P(x) \right\} \in \mathcal{E}$. Έτσι έχουμε περιγράψει τους λογικούς ποσοδείκτες ως συστήματα συνόλων. Αν ακολουθήσουμε την αντίστροφη διαδικασία μπορούμε να δούμε τα υπερφίλτρα ως κάποιου είδους γενικευμένο ποσοδείκτη. Αν $\mathcal{U}$

ένα υπερφίλτρο στο X και λαμβάνοντας υπόψη ότι διαισθητικά τα υπερφίλτρα περιγράφουν τα ”μεγάλα” υποσύνολα κάποιου συνόλου, ο καινούργιος αυτός ποσοδείκτης χρησιμοποιείται γράφοντας $\mathcal{U}x \in X\, P(x)$ αντί του $\{\, x \in X \mid P(X) \,\} \in \mathcal{U}$ και διαβάζοντας “Για $\mathcal{U}$ σχεδόν όλα τα x στο X ισχύει η $P(x)$. Αν μεταφράσουμε τα αξιώματα που ορίζουν τα υπερφίλτρα στην γλώσσα των ποσοδεικτών έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες.

Ορισμός 2.75 Υπερφίλτρο σε ένα σύνολο X είναι ένας ποσοδείκτης $\mathcal{U}$ στο X με τις παρακάτω ιδιότητες.

(i) $(\mathcal{U}x \in X)\, P(x) \Rightarrow (\exists x \in X)\, P(x)$.

(ii) $(\mathcal{U}x \in X)\, P(x) \wedge (\mathcal{U}x \in X)\, Q(x) \Leftrightarrow (\mathcal{U}x \in X)\, P(x) \wedge Q(x)$.

(iii) Αν $\mathcal{U}x \in X\, P(x)$ και $P(x) \Rightarrow Q(x)$ τότε $\mathcal{U}x \in X\, Q(x)$.

(iv) $(\mathcal{U}x \in X)\, P(x) \vee (\mathcal{U}x \in X)\, Q(x) \Leftrightarrow (\mathcal{U}x \in X)\, P(x) \vee Q(x)$.

(v) $(\mathcal{U}x \in X)\, \neg P(x) \Leftrightarrow \neg\, (\mathcal{U}x \in X)\, P(x)$.

Παρατήρηση 2.76 Τα παραπάνω είναι άμεσα από τον συνολοθεωρητικό ορισμό των υπερφίλτρων και την αντιστοιχεία που ορίσαμε και έτσι βλέπουμε ότι ο ποσοδείκτης $\mathcal{U}$ επιμερίζεται με όλους του λογικούς συνδέσμους.

Το παρακάτω μπορεί να φανεί χρήσιμο και είναι εύκολο να ελεγχθεί.

Πρόταση 2.77 *Αν $f : X \longrightarrow Y$ συνάρτηση, $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο X και $f[\mathcal{U}]$ το υπερφίλτρο στο Y που παράγεται από την f, τότε ισχύει ότι*

$$f[\mathcal{U}]y \in Y P(y) \Longleftrightarrow \mathcal{U}x \in X P\,(f(x))$$

Τα Υπερφίλτρα ως Ομοιόμορφοι Τελεστές

Στην συνέχεια εισάγουμε μία έννοια ορίου για κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ σε ένα σύνολο S έτσι ώστε αν $(x_s)_{s \in S}$ μία οικογένεια στοιχείων ενός χώρου X η πρόταση $\mathcal{U}-\lim\limits_{s \in S} x_s = x$ να σημαίνει ότι το x_s είναι συχνά κοντά στο x. Το κοντά καθορίζεται από το σύστημα περιοχών του x ενώ το συχνά καθορίζεται από το υπερφίλτρο $\mathcal{U}$.

Ορισμός 2.78 Έστω S ένα σύνολο, $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο S και $(x_s)_{s\in S}$ μία οικογένεια στοιχείων ενός τοπολογικού χώρου X. Αν $y \in X$ τότε $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s = y$ αν για κάθε περιοχή U του y το σύνολο $\{\ s \in S \mid x_s \in U\ \}$ ανήκει στο $\mathcal{U}$.

Παρατήρηση 2.79 Είναι φανερό ότι αν θεωρήσουμε την $(x_s)_{s\in S}$ ως συνάρτηση $x : S \longrightarrow X$ τότε ισοδύναμα $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s = y$ ανν $x^{-1}[U] \in \mathcal{U}$ για κάθε περιοχή U του y. Αν θυμηθούμε τον ορισμό 2.34 του φίλτρου εικόνα μίας συνάρτησης και τον χαρακτηρισμό που δώσαμε στην Παρατήρηση 2.35 βλέπουμε ότι το $y \in X$ ισούται με το $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s$ ανν $x[\mathcal{U}] \to y$.

Παρατήρηση 2.80 Αν S διακριτός τοπολογικός χώρος και αφού έχουμε ταυτίσει το $\widehat{A}$ με το βA για $A \subset S$ αν $A \in \mathcal{U}$ και η x_s ορίζεται για όλα τα $s \in A$ μπορούμε να γράφουμε $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in A} x_s$ χωρίς να ανησυχούμε για τις τιμές x_s για $s \in A^c$ αφού $\mathcal{U} \in \beta A$ και $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in A} x_s = x$ ανν $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s = x$.

Υπάρχει μία γενικότερη έννοια ορίου σε κάποιον τοπολογικό χώρο, παρακάτω θα δείξουμε ότι οι δύο έννοιες ορίου ταυτίζονται όταν το πεδίο ορισμού είναι ο βS.

Ορισμός 2.81 Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι, A ένα υποσύνολο του X και $f : A \longrightarrow Y$. Για $x \in \overline{A}$ και $y \in Y$ ισχύει ότι $\lim\limits_{\alpha\to x} f(\alpha) = y$ αν για κάθε περιοχή V του y υπάρχει μία περιοχή U του x τέτοια ώστε $f[A \cap U] \subset V$.

Παρατήρηση 2.82 Παρατηρούμε ότι αφού θεωρούμε μόνο Hausdorff χώρους το όριο αν υπάρχει είναι μοναδικό.

Θεώρημα 2.83 *Έστω S διακριτός τοπολογικός χώρος Y τοπολογικός χώρος, $\mathcal{U} \in \beta S$ και $y \in Y$. Αν $A \in \mathcal{U}$ και $f : A \longrightarrow Y$, τότε $\mathcal{U}-\lim\limits_{\alpha\in A} f(\alpha) = y$ ανν $\lim\limits_{\alpha\to\mathcal{U}} f(\alpha) = y$.*

Απόδειξη
($\Rightarrow$) Έστω $\mathcal{U}-\lim\limits_{\alpha\in A} f(\alpha) = y$ και έστω V μία περιοχή του y, τότε $f^{-1}[V] \in \mathcal{U}$ και επομένως αν $B = f^{-1}[V]$ θα έχουμε ότι $\widehat{B}$ μία περιοχή του $\mathcal{U}$. Επίσης αφού τα στοιχεία του A είναι τετριμμένα υπερφίλτρα και $B \subset A$ έπεται ότι $\widehat{B} \cap A = B$ και άρα $f[A \cap \widehat{B}] = f[B] \subset V$.
($\Leftarrow$) Αντίστροφα έστω ότι $\lim\limits_{\alpha\to\mathcal{U}} f(\alpha) = y$ και έστω V μία περιοχή του y. Τότε από τον ορισμό της σύγκλισης υπάρχει μία βασική περιοχή $\widehat{U}$ του $\mathcal{U}$ στο βS για την

οποία $f[A \cap \widehat{U}] \subset V$. Αφού $A \cap \widehat{U} \in \mathcal{U}$ και ισχύει ότι $A \cap \widehat{U} \subset f^{-1}[f[A \cap \widehat{U}]] \subset f^{-1}[V]$ έπεται ότι $f^{-1}[V] \in \mathcal{U}$. $\square$

Παρατήρηση 2.84 Έστω S ένας διακριτός τοπολογικός χώρος και $\mathcal{U} \in \beta S$. Αν δούμε την $(s_s)_{s\in S}$ ως οικογένεια στοιχείων του βS τότε $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} s = \mathcal{U}$.

Θεώρημα 2.85 *Έστω S σύνολο, $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο του βS. και $(x_s)_{s\in S}$ οικογένεια στοιχείων του X. Τότε*

(i) Αν το $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s$ υπάρχει τότε είναι μοναδικό

(ii) Αν X συμπαγής χώρος τότε το $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s$ υπάρχει.

Απόδειξη

(i) Από την Παρατήρηση 2.79 και την μοναδικότητα των ορίων των υπερφίλτρων σε χώρους Hausdorff, έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Έστω ότι ο X συμπαγής και το $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s$ δεν υπάρχει, τότε μπορούμε για κάθε $y \in X$ να θεωρήσουμε μία περιοχή U_y τέτοια ώστε $x^{-1}[U_y] \notin \mathcal{U}$. Το $\bigcup_{y\in X} U_y$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X και από συμπάγεια θα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα έστω το $\bigcup_{k=1}^{n} U_{y_k} = X$ τότε

$$S = x^{-1}\left[\bigcup_{k=1}^{n} U_{y_k}\right] = \bigcup_{k=1}^{n} x^{-1}[U_{y_k}]$$

και επομένως θα υπάρχει k με $x^{-1}[U_{y_k}] \in \mathcal{U}$, άτοπο. Εναλλακτικά πάλι λόγο της 2.79 και της συμπάγειας του χώρου το συμπέρασμα είναι άμεσο. $\square$

Πρόταση 2.86 *Έστω $(x_s)_{s\in S}$ οικογένεια στοιχείων ενός τοπολογικού χώρου X και $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο S. Τότε*

$$\mathcal{U}-\lim_{s\in S} x_s = x \text{ ανν } \{x\} = \bigcap_{A\in\mathcal{U}} \mathrm{Cl}\{\, x_s \in X \mid s \in A \,\} = \bigcap_{A\in\mathcal{U}} \overline{x[A]}.$$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s = x$ τότε $\mathcal{U} \to x$ και άρα $U \in x[\mathcal{U}]$ για κάθε περιοχή του x. Επίσης όμως $x[A] \in x[\mathcal{U}]$ για κάθε $A \in \mathcal{U}$ και επομένως $A \cap U \neq \varnothing$ για κάθε

$A \in \mathcal{U}$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι

$$\{x\} = \bigcap_{A \in \mathcal{U}} \mathrm{Cl}\{\, x_s \in X \mid s \in A \,\}$$

τότε αν U περιοχή του x για κάθε $A \in \mathcal{U}$ ισχύει ότι $U \cap \{\, x_s \in X \mid s \in A \,\} \neq \varnothing$. Επομένως για κάθε $A \in \mathcal{U}$ υπάρχει $s \in A \cap x^{-1}[U]$ και άρα $x^{-1}[U] \cap A \neq \varnothing$ για κάθε $A \in \mathcal{U}$ και έτσι $x^{-1}[U] \in \mathcal{U}$. □

Πόρισμα 2.87 *Αφού $S \in \mathcal{U}$ για κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ έπεται ότι*

$$\mathcal{U}-\lim_{s \in S} x_s \in \mathrm{Cl}\{\, x_s \in X \mid s \in S \,\}.$$

□

Παρακάτω δίνουμε ένα κριτήριο για την συνέχεια μίας συνάρτησης.

Θεώρημα 2.88 *Έστω S σύνολο και X, Y τοπολογικοί χώροι. Έστω επίσης ότι $(x_s)_{s\in S}$ μία οικογένεια στοιχείων του X, $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο S ώστε το $\mathcal{U}-\lim_{s\in S} x_s$ να υπάρχει και $f : X \longrightarrow Y$ μία συνάρτηση από τον X στον Y. Αν η f είναι συνεχής τότε $\mathcal{U}-\lim_{s\in S} f(x_s) = f(\mathcal{U}-\lim_{s\in S} x_s)$.*

Απόδειξη

Έστω f συνεχής και U μία περιοχή του $f(\mathcal{U}-\lim_{s\in S} x_s)$ τότε υπάρχει μία περιοχή V του x_s τ.ω $f[V] \subset U$. Αν $A = x^{-1}[V]$ τότε από υπόθεση $A \in \mathcal{U}$ αλλά επίσης $V \subset f^{-1}[f[V]] \subset f^{-1}[U]$ και επομένως $A \subset x^{-1}[f^{-1}[U]]$ δηλαδή $x^{-1}[f^{-1}[U]] \in \mathcal{U}$. □

Τα παραπάνω είναι αρκετά για να δώσουμε ακόμα έναν χαρακτηρισμό για τα υπερφίλτρα ενός διακριτού χώρου.

Ορισμός 2.89 Έστω S ένας διακριτός τοπολογικός χώρος. Ένας ομοιόμορφος τελεστής που δρά στις συναρτήσεις από τον S σε συμπαγείς χώρους είναι ένας τελεστής $\mathcal{O}$ ο οποίος σε κάθε συνάρτηση $f : S \longrightarrow K$ όπου K συμπαγής χώρος, αντιστοιχεί ένα σημείο $\mathcal{O}(f) \in K$ έτσι ώστε για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $g : K \longrightarrow Z$ όπου ο Z συμπαγής χώρος να ισχύει ότι $g(\mathcal{O}(f)) = \mathcal{O}(g \circ f)$.

Είναι φανερό ότι το Θεώρημα 2.88 μαζί με το Θεώρημα 2.85 μας βεβαιώνει ότι αν μας δοθεί ένας διακριτός χώρος S για κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ ο τελεστής $\mathcal{U}-\lim_{s\in S}$ όπως ορίστηκε είναι ένας ομοιόμορφος τελεστής που δρά στις συναρτήσεις από τον S σε συμπαγείς χώρους. Παρακάτω δείχνουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 2.90 *Έστω S ένας διακριτός χώρος και $\mathcal{O}$ ένας ομοιόμορφος τελεστής που δρά στις συναρτήσεις από τον S σε συμπαγείς χώρους. Υπάρχει ένα μοναδικό υπερφίλτρο $\mathcal{U} \in \beta S$ τέτοιο ώστε για κάθε συμπαγή χώρο K και για κάθε συνάρτηση $f : S \longrightarrow K$ να ισχύει ότι $\mathcal{O}(f) = \mathcal{U} - \lim\limits_{s \in S} f(s)$.*

Απόδειξη

Έστω $I : S \longrightarrow S \subset \beta S$ η ταυτοτική εμφύτευση του S στον βS. Τότε $\mathcal{O}(I) \in \beta S$, ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{O}(I) = \mathcal{U}$. Τότε $\mathcal{O}(I) = \mathcal{U} = \mathcal{U} - \lim\limits_{s \in S} s$. Έστω λοιπόν K ένας συμπαγής χώρος $f : S \longrightarrow K$ συνάρτηση και $\tilde{f} : \beta S \longrightarrow K$ η συνεχής επέκταση της. Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{U} - \lim_{s \in S} f(s) = \mathcal{U} - \lim_{s \in S} \tilde{f}(s) = \tilde{f}(\mathcal{U} - \lim_{s \in S} s) &= \tilde{f}(\mathcal{U}) = \tilde{f}(\mathcal{O}(I)) \\ = \mathcal{O}(\tilde{f} \circ I) &= \mathcal{O}(f) \end{aligned}$$

□

Δείχνουμε στην συνέχεια ότι τα $\mathcal{U}-$όρια έχουν τις ίδιες δυνατότητες χαρακτηρισμού τοπολογικών ιδιοτήτων με τα υπερφίλτρα.

Λήμμα 2.91 *Έστω ότι $\mathcal{A}$ είναι μία οικογένεια κλειστών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X που έχει την FIP. Έστω $S = \{ \bigcap \mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ πεπερασμένο υποσύνολο της $\mathcal{A} \}$ και για κάθε $A \in S$ θέσουμε $\mathcal{B}_A = \{ B \in S \mid B \subset A \}$ τότε η $\{ \mathcal{B}_A \mid A \in S \}$ έχει την FIP.*

Απόδειξη

Αφού S έχει την FIP για κάθε $A \in S$ το $\mathcal{B}_A$ δεν περιέχει το κενό. Επίσης προφανώς το S είναι και κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές. Τώρα για κάθε $(A_k)_{k=k=1}^n$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{B}_{A_k} &= \bigcap_{k=1}^{n} \{ B \in S \mid B \subset A_k \} \quad = \{ B \in S \mid B \subset A_k \text{ για κάθε } k \} \\ &= \left\{ B \in S \;\middle|\; B \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k \right\} = \mathcal{B}_{\cap A_k} \end{aligned}$$

δηλαδή $\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{B}_{A_k} \neq \varnothing$. □

Θεώρημα 2.92 *Έστω X τοπολογικός χώρος. Ο X είναι συμπαγής ανν οποτεδήποτε $(x_s)_{s \in S}$ είναι μία οικογένεια στοιχείων του X και $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο σύνολο S το $\mathcal{U} - \lim\limits_{s \in S} x_s$ υπάρχει.*

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Είναι η πρόταση ii του θεωρήματος 2.85.

($\Leftarrow$) Έστω $\mathcal{A}$ μία τυχαία οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την FIP. Θα δείξουμε ότι $\cap\mathcal{A} \neq \varnothing$. Θέτουμε $S = \{ \bigcap \mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ πεπερασμένο υποσύνολο της $\mathcal{A} \}$ και $\mathcal{B}_A = \{ B \in S \mid B \subset A \}$ για κάθε $A \in S$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.91 η οικογένεια $\{ \mathcal{B}_A \mid A \in S \}$ έχει την FIP και επομένως υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο S ώστε $\{ \mathcal{B}_A \mid A \in S \} \subset \mathcal{U}$. Τώρα έστω $(x_A)_{A\in S}$ οικογένεια στοιχείων του X τ.ω $x_A \in A$ για κάθε $A \in S$. Από την υπόθεση υπάρχει το $\mathcal{U}-\lim\limits_{A\in S} x_A = x \in X$. Υποστηρίζουμε ότι $x \in \cap\mathcal{A}$. Πράγματι έστω όχι, τότε υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $x \notin A$ και επομένως $x \in A^c$ και αφού το A κλειστό σύνολο το A^c θα είναι μία περιοχή του x. Επομένως $\{ B \in S \mid x_B \in A^c \} \in \mathcal{U}$, όμως το $\mathcal{B}_A$ ανήκει επίσης στο $\mathcal{U}$ και άρα υπάρχει $B \in \mathcal{B}_A$ τ.ω $x_B \in A^c$ δηλαδή $\varnothing \neq B \cap A^c \subset A \cup A^c = \varnothing$. □

Θεώρημα 2.93 *Έστω X τοπολογικός χώρος $A \subset X$ και $x \in X$. Τότε $x \in \overline{A}$ ανν υπάρχει οικογένεια $(x_s)_{s\in S}$ στοιχείων του A και $\mathcal{U}$ τ.ω $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s = x$.*

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω ότι $y \in \overline{A}$, για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$ επιλέγουμε ένα $x_U \in A \cup U$. Για $U \in \mathcal{N}_x$ θέτουμε $\mathcal{B}_U = \{ V \in \mathcal{N}_x \mid V \subset U \}$, η οικογένεια $\{ \mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{N}_x \}$ έχει την FIP και επομένως υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο $\mathcal{N}_x$ ώστε $\{ \mathcal{B}_U \mid U \in \mathcal{N}_x \} \subset \mathcal{U}$. Έστω τώρα μία περιοχή U του x τότε θα ισχύει ότι $B_U \subset \{ V \in \mathcal{N}_x \mid x_V \in U \}$ και επομένως $\{ V \in \mathcal{N}_x \mid x_V \in U \} \in \mathcal{U}$ δηλαδή $\mathcal{U}-\lim\limits_{U\in\mathcal{N}_x} x_U = x$ με $x_U \in A$ για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$.

($\Leftarrow$) Αν υπάρχει οικογένεια $(x_s)_{s\in S}$ στοιχείων του A ώστε $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s = x$ τότε για κάθε περιοχή U του x έχουμε ότι $\{ s \in S \mid x_s \in U \} \neq \varnothing$ (αφού ανήκει στο $\mathcal{U}$ και επομένως υπάρχει $x_s \in A \cap U \neq \varnothing$. □

Θεώρημα 2.94 *Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \longrightarrow Y$ συνάρτηση. Τότε η f είναι συνεχής ανν για κάθε οικογένεια $(x_s)_{s\in S}$ στοιχείων του X και για κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο S τ.ω το $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s$ να υπάρχει έχουμε ότι $f(\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s) = \mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} f(x_s)$.*

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Αν είναι συνεχής τότε από το Θεώρημα 2.88 έχουμε το ζητούμενο. ($\Leftarrow$) Έστω $\alpha \in X$ και V μία περιοχή του $f(\alpha)$. Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο α τότε για κάθε περιοχή U του α ισχύει ότι $f[U] \cap V^c \neq \varnothing$. Επομένως $U \cap f^{-1}[V^c] \neq \varnothing$ για κάθε περιοχή του α και άρα $\alpha \in \overline{f^{-1}[V^c]}$. Από το θεώρημα 2.93 έχουμε ότι υπάρχει $(x_s)_{s\in S}$ οικογένεια στοιχείων του $f^{-1}[V^c]$ και υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ τ.ω $\mathcal{U} - \lim\limits_{s\in S} x_s = \alpha$. Έτσι $\mathcal{U} - \lim\limits_{s\in S} f(x_s) = f(\mathcal{U} - \lim\limits_{s\in S} x_s) = f(\alpha)$ και επομένως $\{\, s \in S \mid f(x_s) \in V \,\} \in \mathcal{U}$, δηλαδή υπάρχει $x_s \in f^{-1}(V)$ άτοπο. □

Η επόμενη πρόταση περιγράφει την σχέση μεταξύ των $\mathcal{U}$-ορίων και των συνηθισμένων ορίων ακολουθιών στοιχείων κάποιου χώρου X.

Πρόταση 2.95 *Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων κάποιου τοπολογικού χώρου X. Τότε:*

(i) Το στοιχείο x είναι το όριο της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανν $\mathcal{U} - \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = x$ για κάθε μη τετριμμένο υπερφίλτρο $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$.

(ii) Αν $\mathcal{U} = \{\, A \subset \mathbb{N} \mid k \in A \,\}$ τετριμμένο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$ τότε $\mathcal{U} - \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = x_k$.

Απόδειξη

(i) ($\Rightarrow$) Έστω ότι $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ τότε για κάθε περιοχή U του x όλοι εκτός ίσως από πεπερασμένοι το πλήθος όροι της ακολουθίας περιέχονται στην U. Άρα αν $\lim\limits_{n\to\infty} = x$ τότε για κάθε περιοχή U του x το σύνολο $\{\, n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U \,\}$ είναι συμπεπερασμένο και άρα περιέχεται στο φίλτρο Fréchet το οποίο με την σειρά του σύμφωνα με το Θεώρημα 2.18 περιέχεται σε κάθε μη τετριμμένο υπερφίλτρο.

($\Leftarrow$) Το κλειδί για την απόδειξη είναι το γεγονός ότι το φίλτρο Fréchet $\mathcal{F}$ σε ένα σύνολο X είναι ακριβώς η τομή όλων των μη τετριμμένων υπερφίλτρων του X. Πράγματι το $\mathcal{F}$ περιέχεται σε κάθε μη τετριμμένο υπερφίλτρο. Αν υπάρχει A μη συμπεπερασμένο και μη πεπερασμένο το οποίο να περιέχεται σε κάθε μη τετριμμένο υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ τότε $A^c \cap B \neq \varnothing$ για κάθε $B \in \mathcal{F}$ διότι αν όχι τότε $A^c \cap B^c = A^c$ πεπερασμένο, άτοπο. Έτσι $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ έχει την FIP και επομένως υπάρχει μη τετριμμένο υπερφίλτρο που περιέχει το A^c και το A, άτοπο. Αν τώρα υποθέσουμε ότι $\mathcal{U} - \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = x$ για κάθε μη τετριμμένο $\mathcal{U}$ έπεται ότι για κάθε περιοχή U του x, $\{\, n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U \,\} \in \mathcal{F}$ δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(ii) Έστω $\mathcal{U} = \{ A \subset \mathbb{N} \mid k \in A \}$ τετριμμένο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$. Τότε αν U περιοχή του x_k το σύνολο $\{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U \}$ περιέχει το k και επομένως περιέχεται στο $\mathcal{U}$. □

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο δίνοντας μία πιο αναλυτική περιγραφή της μοναδικής συνεχούς επέκτασης $\widetilde{x} : \beta S \longrightarrow K$ μίας συνάρτησης $x : S \longrightarrow K$ από ένα διακριτό χώρο S σε ένα συμπαγή χώρο K.

Θεώρημα 2.96 *Έστω S σύνολο και $(x_s)_{s\in S}$ μία οικογένεια στοιχείων ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου K. Αν για κάθε $\mathcal{U} \in \beta S$ θέσουμε $\widetilde{x} : \beta S \longrightarrow K$ με $\widetilde{x}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s$ τότε ισχύουν τα επόμενα:*

(i) Για κάθε $s \in S, \widetilde{x}(s) = x_s$.

(ii) Η $\widetilde{x}$ είναι συνεχής.

(iii) $\widetilde{x}[\beta S] = \mathrm{Cl}\{ x_s \mid s \in S \}$.

Απόδειξη

(i) Για κάθε $s \in S$, και για κάθε περιοχή U του x_s ισχύει ότι $\{ d \in S \mid x_d \in U \} \in s$.

(ii) Έστω U μία περιοχή του $\widetilde{x}(\mathcal{U})$ Αφού ο K είναι συμπαγής είναι και φυσιολογικός χώρος και άρα μπορούμε να βρούμε μία περιοχή V του $\widetilde{x}(\mathcal{U})$ τ.ω $V \subset \overline{V} \subset U$. Αφού $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} x_s = \widetilde{x}(\mathcal{U})$ έπεται ότι $A = \{ s \in S \mid x_s \in V \} \in \mathcal{U}$, έπεται λοιπόν ότι $x[A] \subset V$ και άρα $\overline{x[A]} \subset \overline{V} \subset U$. Το $\widehat{A}$ είναι μία περιοχή του $\mathcal{U}$ και για κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{V} \in \widehat{A}$ το $A \in \mathcal{V}$ και σύμφωνα με την Πρόταση 2.86 $\mathcal{V}-\lim\limits_{s\in S} x_s \in \mathrm{Cl}\, x[A]$ και επομένως $\widetilde{x}[A] \subset U$.

(iii) Είναι άμεσο από τον ορισμό της $\widetilde{x}$ και το Πόρισμα 2.87. □

Παρατήρηση 2.97 Από το παραπάνω έπεται ότι αν S διακριτός τοπολογικός χώρος και $f : S \longrightarrow K$ συνάρτηση από τον S σε κάποιο συμπαγή χώρο K η μοναδική επέκταση $\widetilde{f} : \beta S \longrightarrow K$ που προβλέπεται από την σχετική ιδιότητα της Stone-Ĉech συμπαγοποίησης του S σε κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο S παίρνει την τιμή x ανν $\mathcal{U}-\lim\limits_{s\in S} f(s) = x$ ανν $x[\mathcal{U}] \to x$.

Το τελευταίο θεώρημα θέλει λίγο προσοχή στον διαχωρισμό μεταξύ των εννοιών του υπερφίλτρου εικόνα και της εικόνας ενός υπερφίλτρου μέσω μίας συνάρτησης.

Θεώρημα 2.98 *Έστω S, T διακριτοί χώροι και $f : S \longrightarrow T$ συνάρτηση. Θεωρώντας της f ως συνάρτηση από το S στο βT έστω $\widetilde{f} : \beta S \longrightarrow \beta T$ η μοναδική συνεχής επέκταση της. Τότε για κάθε $\mathcal{U} \in \beta S$ και κάθε $B \subset T$ ισχύει ότι $B \in \widetilde{f}(\mathcal{U})$ ανν $f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$.*

Απόδειξη

Έστω $B \in \widetilde{f}(\mathcal{U})$ τότε $f[\mathcal{U}] \to \widetilde{f}(\mathcal{U}) \ni B$ και επομένως κάθε περιοχή του $\widetilde{f}(\mathcal{U})$ ανήκει στο φίλτρο εικόνα $f[\mathcal{U}]$ άρα και $B \in f[\mathcal{U}]$ το οποίο σημαίνει ότι $f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$. Αντιστρόφως αν $f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$ τότε αφού $f[\mathcal{U}] \to \widetilde{f}(\mathcal{U})$ έπεται ότι για κάθε περιοχή V του $\widetilde{f}(\mathcal{U})$ ισχύει ότι $V \in f[\mathcal{U}]$ δηλαδή για κάθε $V \in \widetilde{f}(\mathcal{U})$ η τομή $B \cap V$ θα πρέπει να είναι μη κενή και επειδή $\widetilde{f}(\mathcal{U})$ είναι υπερφίλτρο αναγκαστικά θα έχουμε $B \in \widetilde{f}(\mathcal{U})$. □

Λόγω τις ευελιξίας τους η θεωρία των υπερφίλτρων έχει γνωρίσει αξιοσημείωτη ανάπτυξη τα τελευταία χρόνια. Τα κύρια πεδία εφαρμογής τους είναι η *συνολοθεωρητική τοπολογία* (**set theoretic topology**) και το παρακλάδι της μαθηματικής λογικής που λέγεται *θεωρία μοντέλων* (**model theory**) όπου η κατασκευή του *υπεργινομένου* (**ultraproduct**) με το οποίο δυστυχώς δεν θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία είναι ένα βασικό εργαλείο.

Το [23] είναι κατάλληλο για περισσότερες πληροφορίες στο θέμα της Stone-Ĉech συμπαγοποίησης της οποίας η ιδιότητα μοναδικής επέκτασης την καθιστά ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο, ενώ η έννοια του $\mathcal{U}$- ορίου πιθανώς οφείλεται στον Frolík [5].

3 Ημιομάδες, Ιδεώδη και Ταυτοδύναμα Στοιχεία

Η *αφηρημένη άλγεβρα* (**abstract algebra**) έχει ως αντικείμενο μελέτης τις πράξεις και σχέσεις που μπορούν να οριστούν μεταξύ των στοιχείων κάποιου συνόλου. Τα αντικείμενα που μελετάμε λοιπόν είναι δομές που αποτελούνται από ένα σύνολο και μία, δύο ή ακόμα και περισσότερες πράξεις.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μόνο εκείνα τα στοιχεία της θεωρίας που θα μας χρησιμεύσουν σε αυτή την εργασία. Αν και το περιεχόμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι αρκετά τεχνικό, τα αποτελέσματα που θα προκύψουν, θα μας βοηθήσουν να εξάγουμε σημαντικά συμπεράσματα που θα μας χρησιμεύσουν στην συνέχεια. Ένα συνοπτικό εισαγωγικό βιβλίο στην αφηρημένη άλγεβρα είναι το [16] ενώ το [10] εξειδικεύεται στην αλγεβρική δομή της Stone-Čech συμπαγοποίησης ενός χώρου.

3.1 Η Δομη Ημιομάδας

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε την αλγεβρική δομή που ονομάζεται ημιομάδα. Λόγω της απλής δομής της είναι πολύ σημαντική στις εφαρμογές αφού είναι πολλά τα αντικείμενα μελέτης που εμπίπτουν στον ορισμό.

Ορισμός 3.1 Έστω S ένα μή κενό σύνολο. Μία *διμελής πράξη* (**binary operation**) στο S είναι μία συνάρτηση $* : S \times S \longrightarrow S$. Να σημειώσουμε ότι αντί του $*(x, y)$ συνηθίζεται να γράφουμε $x*y$. Επίσης το γεγονός ότι για κάθε $x, y \in S$ το $x*y \in S$ περιγράφεται λέγοντας ότι "το S είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$".

Ορισμός 3.2 Έστω S ένα μη κενό σύνολο. Μία διμελής πράξη $*$ στο S λέγεται *προσεταιριστική* (**associative**) αν για κάθε $x, y, z \in S$ ισχύει ότι $(x*y)*z = x*(y*z)$.

Ορισμός 3.3 Έστω S ένα μη κενό σύνολο και $*$ μία προσεταιριστική διμελής πράξη στο S. Το ζεύγος $(S, *)$ καλείται *ημιομάδα* (**semigroup**).

Παράδειγμα 3.4 Τα παρακάτω είναι παραδείγματα ημιομάδων.

(i) $(\mathbb{N}, +)$

(ii) $(\mathbb{R}, \vee)$ όπου $x \vee y = \max\{x, y\}$

(iii) $(S, *)$ όπου $S \neq \varnothing$ και $x * y = y$ για κάθε $x, y \in S$

(iv) $(S, *)$ όπου $S \neq \varnothing$ και $x * y = x$ για κάθε $x, y \in S$

Παρατήρηση 3.5 Τα παραδείγματα (iii) και (iv) καλούνται *δεξιά μηδενική* (**right zero**) και *αριστερά μηδενική* (**left zero**) ημιομάδα αντίστοιχα. Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε "η ημιομάδα S" και αντί του $x * y$ θα γράφουμε xy, υπονοώντας την πράξη όπου αυτό δεν μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση.

Εισάγουμε ένα συμβολισμό ο οποίος προέρχεται από την συνολοθεωρία. Για κάθε θετικό ακέραιο n ορίζουμε $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Ορισμός 3.6 Έστω A ένα μη κενό σύνολο το οποίο ονομάζουμε αλφάβητο και έστω ότι $S = \{\, w \mid w : n \longrightarrow A \,\}$ το σύνολο του οποίου τα στοιχεία ονομάζουμε λέξεις. Για $w : n \longrightarrow A$ και $v : m \longrightarrow A$ στοιχεία του S ορίζουμε:

$$w^\frown v = \begin{cases} w(i) & \text{αν } i < n \\ v(i-n) & \text{αν } n \leq i \leq n+m-1 \end{cases}$$

Η ελεύθερη ημιομάδα στο αλφάβητο A είναι το ζεύγος $(S, ^\frown)$ όπου η πράξη $^\frown$ λέγεται *παράθεση* (**concatenation**), ακριβώς διότι ισοδυναμεί με την απλή παράθεση των λέξεων w και v. Ορίζουμε επίσης την *ελεύθερη ημιομάδα* (**free semigroup**) με *ταυτοτικό (ή ουδέτερο) στοιχείο* (**identity element**) στο αλφάβητο A την $(S \cup \{\varnothing\}, ^\frown)$ όπου για κάθε $w \in S$ θέτουμε $w^\frown\varnothing = \varnothing^\frown w = w$.

Ορισμός 3.7 Ονομάζουμε μήκος της λέξης $w \in S$ την τιμή του πεδίου ορισμού της οπότε αν $w : n \longrightarrow A$ τότε το μήκος της w είναι n ενώ το μήκος του $\varnothing$ είναι μηδέν.

Παρατήρηση 3.8 Πολλές φορές αντί για $x \cdot y$ θα γράφουμε xy. Κάνοντας χρήση της αντιστοιχίας $\alpha \to \{(0, \alpha)\}$ θα θεωρούμε ότι $A \subset S$. Έτσι τα στοιχεία του A μπορούμε να τα "δούμε" είτε ως σύμβολα είτε ως λέξεις μήκους 1 και επομένως για κάθε $w \in S$ μήκους n ισχύει ότι

$$w = w_0^\frown w_1^\frown \cdots ^\frown w_{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} w_0 w_1 \cdots w_{n-1}.$$

Όπως και στην περίπτωση των τοπολογικών χώρων έτσι και στην περίπτωση των αλγεβρικών δομών μας ενδιαφέρει πότε δύο τέτοια αντικείμενα είναι "ουσιαστικά" ίσα.

Ορισμός 3.9 Έστω $(S, *)$ και $(T, \cdot)$ δύο ημιομάδες.

(i) *Ομομορφισμός* (**homomorphism**) ονομάζεται μία συνάρτηση $\varphi : S \longrightarrow T$ τ.ω

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

για κάθε $x, y \in S$.

(ii) *Ισομορφισμός* (**isomorphism**) ονομάζεται ο ομομορφισμός ο οποίος είναι επίσης $1-1$ και επί.

(iii) Δύο ημιομάδες $(S, *)$ και $(T, \cdot)$ θα ονομάζονται *ισομορφικές* (**isomorphic**) αν υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ τους. Τότε γράφουμε $(S, *) \sim (T, \cdot)$ και από καθαρά αλγεβρική σκοπιά οι δύο δομές ταυτίζονται.

Παρατήρηση 3.10 Αν $\varphi : S \longrightarrow T$ ομομορφισμός τότε για κάθε $(x_k)_{k=1}^n \subset S$ ισχύει ότι

$$\varphi(x_1 * x_2 * \cdot * x_n) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n).$$

Η σύνθεση ομομορφισμών είναι ομομορφισμός και η σύνθεση ισομορφισμών είναι ισομορφισμός. Επίσης η σχέση '$\sim$' που ορίσαμε είναι μία σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των ημιομάδων.

Η ελεύθερη ημιομάδα επί ενός αλφάβητου έχει την παρακάτω πολύ σημαντική ιδιότητα.

Πρόταση 3.11 *Έστω $(S, ^\frown)$ η ελεύθερη ημιομάδα στο αλφάβητο A. Έστω επίσης ότι $(T, *)$ είναι μιά οποιαδήποτε ημιομάδα και $f : A \longrightarrow T$ μία συνάρτηση. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : S \longrightarrow T$, με την ιδιότητα $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in A$.*

Απόδειξη

Ορίζουμε την συνάρτηση $\varphi : S \longrightarrow T$ ως εξής:

$$h(w) = \begin{cases} f(w) & \text{αν } w \in A \\ f(w_0) * f(w_1) * \cdots * f(w_{n-1}) & \text{αν } w \in S \setminus A \end{cases}.$$

Τότε για κάθε $w, v \in S$ μήκους n, m αντίστοιχα θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \phi(w^\frown v) &= f(w_0) * f(w_1) * \cdots * f(w_{n-1}) * f(v_0) * f(v_1) * \cdots * f(v_{m-1}) \\ &= \phi(w) * \phi(v). \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι φ είναι ομομορφισμός. Έστω τώρα ότι υπήρχε και δεύτερος ομομορφισμός φ' τέτοιος ώστε $\varphi'(\alpha) = f(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in A$. Τότε φ και φ' θα ταυτίζονται σε όλες τις λέξεις μήκους 1. Αν w μία λέξη μήκους n τότε

$$\begin{aligned} \varphi'(w) &= \varphi'(w_0 w_1 \cdots w_{n-1}) = \varphi'(w_0) * \varphi'(w_1) * \cdots * \varphi'(w_{n-1}) \\ &= \varphi(w) \end{aligned}$$

και επομένως από αρχή της επαγωγής οι φ και φ' ταυτίζονται παντού. $\square$

Ορισμός 3.12 Έστω $(S, *)$ μία ημιομάδα και έστω $\alpha \in S$.

(i) Το στοιχείο α είναι αριστερά ταυτοτικό για την S αν $\alpha * x = x$ για κάθε $x \in S$.

(ii) Το στοιχείο α είναι δεξιά ταυτοτικό για την S αν $x * \alpha = x$ για κάθε $x \in S$.

(iii) Το στοιχείο α είναι ταυτοτικό για την S αν είναι αριστερά και δεξιά ταυτοτικό.

Παράδειγμα 3.13 Στην ελεύθερη ημιομάδα με ταυτοτικό στοιχείο S το $\varnothing$ είναι ταυτοτικό για την S. Στην αριστερά μηδενική ημιομάδα κάθε στοιχείο είναι δεξιά ταυτοτικό ενώ στην δεξιά μηδενική ημιομάδα κάθε στοιχείο είναι αριστερά ταυτοτικό.

Παρατήρηση 3.14 Αν $(S, *)$ ημιομάδα, e είναι αριστερό ταυτοτικό και f είναι δεξί ταυτοτικό στοιχείο, τότε $e = f$. Συγκεκριμένα κάθε ημιομάδα έχει το πολύ ένα ταυτοτικό στοιχείο. Επίσης μία ημιομάδα που έχει ταυτοτικό στοιχείο ονομάζεται *μονοειδές* (**monoid**).

Όταν έχουμε μία οικογένεια ημιομάδων $(S_i, *_i)_{i\in I}$ μπορούμε να ορίσουμε μία διμελή πράξη κατά συντεταγμένη.

Ορισμός 3.15 (i) Έστω $(S_i, *_i)_{i\in I}$ οικογένεια ημιομάδων. Αν θέσουμε $S = \prod_i S_i$ και για κάθε $x, y \in S$ ορίσουμε $x * y = (x_i *_i y_i)_{i\in I}$ τότε $(S, *)$ είναι ημιομάδα και ονομάζεται το *ευθύ γινόμενο* (**direct product**) των S_i.

(ii) Έστω $(S_i, *_i)_{i\in I}$ οικογένεια μονοειδών με e_i το ταυτοτικό στοιχείο του S_i. Ορίζουμε το *ευθύ άθροισμα* (**direct sum**) των S_i ως

$$\bigoplus_{i\in I} S_i = \{\, x \in S \mid \{\, i \in I \mid x_i \neq e_i \,\} \text{ πεπερασμένο} \,\}.$$

Ορισμός 3.16 Έστω S μία ημιομάδα και $x, y, z \in S$.

(i) Το στοιχείο x είναι αριστερά z-αντίστροφο για το y αν $x * y = z$.

(ii) Το στοιχείο x είναι δεξιά z-αντίστροφο για το y αν $y * x = z$.

(iii) Το στοιχείο x είναι z-αντίστροφο για το y αν $x * y = y * x = z$.

Ορισμός 3.17 *Ομάδα* (**group**) λέγεται ένα ζεύγος $(S, *)$ τ.ω

(i) $(S, *)$ είναι ημιομάδα.

(ii) Υπάρχει ένα στοιχείο $e \in S$ ώστε e είναι αριστερά ταυτοτικό για την S και για κάθε $x \in S$ υπάρχει $y \in S$ τ.ω το y να είναι ένα αριστερά e-αντίστροφο για το x.

Θεώρημα 3.18 *Έστω $(S, *)$ μία ημιομάδα. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) $(S, *)$ είναι ομάδα.

(ii) Υπάρχει ένα ταυτοτικό στοιχείο για την S με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in S$ υπάρχει ένα $y \in S$ το οποίο είναι ένα e-αντίστροφο για το x.

(iii) Υπάρχει ένα αριστερά ταυτοτικό στοιχείο για την S και δοθέντος οποιοδήποτε αριστερά ταυτοτικό στοιχείο e για την S και για κάθε $x \in S$ υπάρχει $y \in S$ τ.ω το y να είναι ένα αριστερά e-αντίστροφο για το x.

(iv) Υπάρχει ένα δεξιά ταυτοτικό στοιχείο e για την S τ.ω για κάθε $x \in S$ υπάρχει $y \in S$ τ.ω y να είναι ένα δεξιά e αντίστροφο για το x.

(v) Υπάρχει ένα δεξιά ταυτοτικό στοιχείο e για την S και δοθέντος οποιοδήποτε δεξιά ταυτοτικό στοιχείο e για την S και για κάθε $x \in S$ υπάρχει $y \in S$ τ.ω το y να είναι ένα δεξιά e-αντίστροφο για το x.

Απόδειξη

$(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω e το στοιχείο που εγγυάται ο Ορισμός 3.17. Έστω $x \in S$ και y ένα οποιοδήποτε αριστερά e-αντίστροφο για το x. Έστω επίσης z ένα αριστερά e-αντίστροφο για το y. Τότε $x * y = e * x * y = z * y * x * y = z * y = e$ δηλαδή το y είναι επίσης ένα δεξιά e-αντίστροφο για το x. Τώρα για οποιοδήποτε $x \in S$ έχουμε ότι $x * e = x * y * x = e * x = x$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Έστω e ένα ταυτοτικό στοιχείο για την S και έστω f ένα αριστερά ταυτοτικό για την S. Τότε από την Παρατήρηση 3.14 έπεται ότι $e = f$και επομένως από την υπόθεση έπεται αμέσως το ζητούμενο.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Έπεται άμεσα.

$(iv) \Rightarrow (ii)$ Έστω $x \in S$ και y ένα οποιοδήποτε δεξιά e-αντίστροφο για το x. Έστω επίσης z ένα δεξιά e-αντίστροφο για το y. Τότε $y * x = y * x * e = y * x * y * z = y * z = e$ δηλαδή το y είναι e-αντίστροφο για το x. Τώρα για οποιοδήποτε $x \in S$

έχουμε ότι $e * x = x * y * x = x * e = x$. Άρα το e είναι ταυτοτικό για την S.
$(ii) \Rightarrow (v)$ Έστω e ένα ταυτοτικό στοιχείο για την S και έστω f ένα δεξιά ταυτοτικό για την S. Τότε από την Παρατήρηση 3.14 έπεται ότι $e = f$και επομένως από την υπόθεση έπεται αμέσως το ζητούμενο.
$(v) \Rightarrow (iv)$ Έπεται άμεσα. □

Παράδειγμα 3.19 Σε μία δεξιά μηδενική ημιομάδα όπως στο Παράδειγμα 3.4 (iv) κάθε στοιχείο είναι αριστερά ταυτοτικό και για κάθε αριστερά ταυτοτικό e και για κάθε x το e είναι δεξιά e αντίστροφο για το x. Παρόλα αυτά η δομή αυτή δεν είναι ομάδα αφού δεν ικανοποιείται κανένα από τα κριτήρια του θεωρήματος Θεώρημα 3.18.

Ορισμός 3.20 Έστω S μία ημιομάδα.

(i) Η S είναι *αντιμεταθετική* (**commutative**) αν $xy = yx$ για κάθε $x, y \in S$.

(ii) Το *κέντρο* (**center**) της S είναι το σύνολο $\{ x \in S \mid xy = yx$ για κάθε $y \in S \}$, δηλαδή το σύνολο των στοιχείων που αντιμετατίθενται με όλα τα στοιχεία του S.

(iii) Για $x \in S$ ορίζουμε την συνάρτηση $\lambda_x : S \longrightarrow S$ με $\lambda_x(y) = xy$ για κάθε $y \in S$.

(iv) Για $x \in S$ ορίζουμε την συνάρτηση $\rho_x : S \longrightarrow S$ με $\rho_x(y) = yx$ για κάθε $y \in S$.

Ορισμός 3.21 Έστω $(S, \cdot)$ μία ημιομάδα. Για $(x_k)_{k=1}^n \subset S$ ορίζουμε το $\prod_{k=1}^{n} x_k$ επαγωγικά ως:

(i) $\prod_{k=1}^{1} x_k = x_1$

(ii) $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = \prod_{k=1}^{n} x_k \cdot x_{n+1}$

Ορισμός 3.22 Έστω S μία ημιομάδα.

(i) Ένα στοιχείο $x \in S$ λέγεται *δεξιά διαγράψιμο* (**right cancelable**) αν $yx = zx \Rightarrow y = z$ για κάθε $y, z \in S$.

(ii) Ένα στοιχείο $x \in S$ λέγεται *αριστερά διαγράψιμο* (**left cancelable**) αν $xy = xz \Rightarrow y = z$ για κάθε $y, z \in S$

(iii) Η S είναι δεξιά διαγράψιμη ή ικανοποιεί τον δεξί νόμο διαγραφής αν κάθε στοιχείο $x \in S$ είναι δεξιά διαγράψιμο.

(iv) Η S είναι αριστερά διαγράψιμη ή ικανοποιεί τον αριστερό νόμο διαγραφής αν κάθε στοιχείο $x \in S$ είναι αριστερά διαγράψιμο.

(v) Η S είναι *διαγράψιμη* (**cancelable**) αν είναι δεξιά και αριστερά διαγράψιμο.

Παρατήρηση 3.23 Προφανώς η ύπαρξη δεξιού ή αριστερού e-αντιστρόφου, όπου e ένα δεξί ή αριστερά ταυτοτικό στοιχείο συνεπάγεται την ικανοποίηση του δεξιού ή αριστερού νόμου διαγραφής αντίστοιχα.

Παράδειγμα 3.24 Το σύνολο των συναρτήσεων ${}^{X}X$ από ένα σύνολο X στον εαυτό του με πράξη την σύνθεση είναι ημιομάδα με ταυτοτικό στοιχείο την ταυτοτική συνάρτηση. Τα αριστερά διαγράψιμα στοιχεία είναι οι συναρτήσεις που είναι $1-1$ ενώ τα δεξιά διαγράψιμα είναι οι επί συναρτήσεις. Πράγματι αν f μια $1-1$ συνάρτηση τότε $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X$ και επομένως αν $g, h \in {}^{X}X$ με $fg = fh$ θα έχουμε ότι για κάθε $x \in X$

$$(f^{-1} \circ f) \circ g(x) = (f^{-1} \circ f) \circ h(x) \Rightarrow g(x) = h(x).$$

Αν τώρα $fg = fh \Rightarrow g = h$ και $f(x_1) = f(x_2) = y$ τότε αν

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{Id}(x) & x \neq y \\ x_2 & x = y \end{cases} \quad \text{και} \quad h(x) = \begin{cases} \mathrm{Id}(x) & x \neq y \\ x_1 & x = y \end{cases}$$

βλέπουμε ότι $fg = fh$ και άρα $g = h$ που σημαίνει ότι $x_1 = x_2$. Έστω τώρα ότι η f είναι επί. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $x' \in X$ τ.ω $f(x') = x$ και επομένως το γεγονός ότι $gf = hf$ σημαίνει ότι οι g και h ταυτίζονται σε κάθε σημείο x του X.

Αν πάλι $gf = hf \Rightarrow g = h$ τότε αν υπάρχει $x \in X$ τ.ω $f(y) \neq x$ για κάθε $y \in X$ έπεται ότι για

$$g(y) = \begin{cases} \mathrm{Id}(y) & y \neq x \\ x_2 & y = x \end{cases} \quad \text{και} \quad h(y) = \begin{cases} \mathrm{Id}(y) & y \neq x \\ x_1 & y = x \end{cases}$$

με $x_1 \neq x_2$ θα ισχύει ότι $gf = hf$ και επομένως $g = h$ άτοπο.

3.2 Ταυτοδύναμα στοιχεία και υποημιομάδες

Ορισμός 3.25 Έστω S μία ημιομάδα.

(i) Ένα στοιχείο $x \in S$ λέγεται *ταυτοδύναμο* (**idempotent**) αν $xx = x$. Το σύνολο των ταυτοδύναμων στοιχείων της S θα το συμβολίζουμε ως $E(S) = \{\, x \in S \mid xx = x \,\}$.

(ii) T είναι *υποημιομάδα* (**subsemigroup**) της S αν $T \subset S$ και T με τον περιορισμό της πράξης της S στο T είναι ημιομάδα.

(iii) T είναι *υποομάδα* (**subgroup**) της S αν $T \subset S$ και T με τον περιορισμό της πράξης της S στο T είναι ομάδα.

(iv) Έστω $e \in E(S)$ ένα ταυτοδύναμο στοιχείο της S. Τότε

$$H(e) = \bigcap \{\, G \mid G \text{ υποομάδα της } S \text{ και } e \in G \,\}\,.$$

Λήμμα 3.26 *Έστω G μια ομάδα με ταυτοτικό στοιχείο το e. Τότε $E(G) = \{e\}$.*

Απόδειξη

Έστω $f \in E(S)$ τότε $ff = f = fe$ άρα πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με το e-αντίστροφο του f έχουμε ότι $f = e$. □

Παρατήρηση 3.27 Λόγω του λήμματος 3.26 στον ορισμό του $H(e)$ η δήλωση “$e \in G$” είναι συνώνυμη της “e είναι το ταυτοτικό της G”. Επίσης το $H(e)$ δεν είναι ποτέ κενό αφού πάντα $e \in H(e)$. Από εδώ και ύστερα αν e ταυτοτικό στοιχείο και δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης θα χρησιμοποιούμε την φράση “αντίστροφο του στοιχείου x” αντί του τυπικά σωστότερου e-αντίστροφου.

Θεώρημα 3.28 *Έστω S μία ημιομάδα και $e \in E(S)$. Τότε $H(e)$ είναι η μεγαλύτερη υποομάδα της S που έχει το e ως ταυτοτικό στοιχείο.*

Απόδειξη

Προφανώς αν e ταυτοτικό για την G θα πρέπει να ισχύει ότι $G \subset H(e)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $H(e)$ είναι υποομάδα της S αφού το e από την Παρατήρηση 3.27 είναι ταυτοτικό στοιχείο για την $H(e)$. Έστω $x, y \in H(e)$ τότε υπάρχουν G_1, G_2 ομάδες με $x \in G_1$ και $y \in G_2$. Θέτουμε $G = \{ xy \mid x, y \in G_1 \cup G_2 \}$, τότε η G είναι κλειστή ως προς την πράξη της S, το e είναι ταυτοτικό για την G και αν $xy \in G$ τότε $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \in G$ άρα G ομάδα με $G \subset H(e)$. □

Παρατήρηση 3.29 Οι υποομάδες $H(e)$ λέγονται και μεγιστικές υποομάδες της S.

Μέσω του ορισμού 3.21 και με χρήση διπλής επαγωγής μπορεί να δει κανείς ότι δοθέντος μίας ημιομάδας S και ενός στοιχείου $x \in S$ ισχύει πάντα ότι $x^n x^m = x^m x^n$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και επομένως $\{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ είναι μία αντιμεταθετική υποημιομάδα της S.

Ορισμός 3.30 Έστω S μία ημιομάδα και $x \in S$ ένα στοιχείο της S. *Τάξη* (**order**) της S ονομάζουμε τον *πληθάριθμο* (**cardinal**) του συνόλου S. Τάξη του στοιχείου x ονομάζουμε τον πληθάριθμο της υποημιομάδας $\{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \}$. Συνήθως διαχωρίζουμε μεταξύ στοιχείων πεπερασμένης και άπειρης τάξης.

Παρατήρηση 3.31 Στην περίπτωση που η S έχει ένα ταυτοτικό στοιχείο e μπορούμε να ορίσουμε $x^0 = e$ για κάθε $x \in S$. Αν x έχει αντίστροφο τότε θα το συμβολίζουμε ως x^{-1} και έτσι μπορούμε να ορίζουμε $x^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} (x^{-1})^n$. Οπότε αν το x έχει αντίστροφο το $\{ x^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ σχηματίζει μία υποομάδα της S. Τέλος να σημειώσουμε ότι αν χρησιμοποιούμε προσθετικό συμβολισμό αντί του x^n γράφουμε nx.

Θεώρημα 3.32 *Έστω S μία ημιομάδα και $x \in S$ ένα στοιχείο της S άπειρης τάξης. Τότε η υποημιομάδα $T = \{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ της S είναι ισομορφική με την ημιομάδα* $(\mathbb{N}, +)$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow T$ με $f(n) = x^n$ είναι τετριμμένα επί και ομομορφισμός αφού για $n.m \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $f(n+m) = x^{n+m} = x^n x^m = f(n)f(m)$. Μένει να δείξουμε ότι είναι και $1-1$. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ με $m < n$. Αν υποθέσουμε ότι $x^n = x^m$

τότε το x^{n-m} είναι ένα ταυτοτικό για το x^m και το ίδιο ισχύει για το $x^{q(n-m)}$ για κάθε $q \in \mathbb{N}$. Έστω ότι $s > m$ τότε υπάρχει $q, r < (n-m)$ ώστε $s-m = q(n-m)+r$. Έτσι $x^s = x^{s-m}x^m = x^{q(n-m)+r}x^m = x^r x^m = x^{r+m} \in \left\{ x^k \mid k < n \right\}$ δηλαδή $\{ x^s \mid s > m \} \subset \left\{ x^k \mid k < n \right\}$ και άρα πεπερασμένης τάξης, άτοπο. □

Θεώρημα 3.33 *Κάθε πεπερασμένη ημιομάδα έχει τουλάχιστον ένα ταυτοδύναμο στοιχείο.*

Απόδειξη
Αν η S έχει ένα και μοναδικό στοιχείο τότε το συμπέρασμα είναι άμεσο. Για την γενική περίπτωση χρησιμοποιούμε επαγωγή. Έστω λοιπόν ότι η υπόθεση ισχύει για όλες τις ημιομάδες με στοιχεία λιγότερα από τα στοιχεία της S. Έστω $x \in S$ τότε υπάρχουν m, n τ.ω $m < n$ ώστε $x^m = x^n$ διότι αλλιώς $\{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ θα είναι άπειρο υποσύνολο της S το οποίο είναι άτοπο. Έτσι $x^{n-m}x^m = x^m$. Το $T = \{ y \in S \mid x^{n-m}y = y \}$ είναι υποημιομάδα της S. Αν x^{n-m} ανήκει σε αυτή τότε αυτό θα είναι ταυτοδύναμο, αν όχι τότε υποημιομάδα της S με λιγότερα στοιχεία από την S και άρα περιέχει ένα ταυτοδύναμο το οποίο προφανώς είναι και στοιχείο της S. □

3.3 Ιδεώδη

Ο Όρος *ιδεώδες* (**ideal**) προέρχεται από την θεωρία *δακτυλίων* (**ring theory**), αν και είναι στενά συνδεδεμένος με τα ιδεώδη όπως αυτά νοούνται στην συνολοθεωρία και γενικότερα στην *θεωρία διάταξης* (**order theory**) δεν είναι ταυτόσημος. Αν A, B υποσύνολα μίας ημιομάδας S τότε

$$AB \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha b \mid \alpha \in A \wedge b \in B \} .$$

Ορισμός 3.34 Έστω S μία ημιομάδα.

(i) Το L είναι αριστερό ιδεώδες της S αν $\varnothing \neq L \subset S$ και $SL \subset L$.

(ii) Το R είναι δεξί ιδεώδες της S αν $\varnothing \neq R \subset S$ και $RS \subset R$.

(iii) Το I είναι ένα ιδεώδες της S αν είναι και αριστερό και δεξί ιδεώδες της S.

Ένα ιδεώδες $I \neq S$ καλείται *γνήσιο* (**proper**) ιδεώδες της S.

Σημαντικό ρόλο στην θεωρία παίζουν τα ελαχιστικά αριστερά και δεξιά ιδεώδη, όπου με τον όρο αυτό εννοούμε απλά ότι είναι ελαχιστικά ως προς την σχέση του εγκλεισμού.

Ορισμός 3.35 Έστω S μία ημιομάδα.

1. Το L είναι *ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες* (**minimal left ideal**) της S αν είναι ιδεώδες και για κάθε αριστερό ιδεώδες J της S με $J \subset L$ ισχύει ότι $J = L$.

2. Το R είναι *ελαχιστικό δεξί ιδεώδες* (**minimal right ideal**) της S αν είναι ιδεώδες και για κάθε δεξί ιδεώδες J της S με $J \subset R$ ισχύει ότι $J = R$.

3. Η S είναι *αριστερά απλή* (**left simple**) αν S είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S.

4. Η S είναι *δεξιά απλή* (**right simple**) αν S είναι ένα ελαχιστικό δεξί ιδεώδες της S.

5. Η S είναι *απλή* (**simple**) αν S είναι το μοναδικό ιδεώδες της S.

Παρατήρηση 3.36 Δεν ορίσαμε την έννοια του ελαχιστικού ιδεώδους διότι όπως θα δούμε παρακάτω αν υπάρχει είναι ακριβώς ένα, έτσι θα χρησιμοποιούμε τον όρο ελάχιστο ιδεώδες. Επίσης είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι S είναι αριστερά απλή ανν δεν έχει γνήσιο αριστερό ιδεώδες, όμοια είναι δεξιά απλή ανν δεν έχει γνήσιο δεξί ιδεώδες. Αν μία ημιομάδα είναι είτε αριστερά είτε δεξιά απλή είναι απλή, το αντίστροφο δεν ισχύει. Γενικότερα η έννοια του αριστερού ιδεώδους είναι δυική αυτής του δεξιού ιδεώδους και έτσι οποτεδήποτε υπάρχει ένα θεώρημα που αφορά τα αριστερά ιδεώδη υπάρχει ένα αντίστοιχο για τα δεξιά ιδεώδη. Συνήθως δεν θα παραθέτουμε και τις δύο εκδοχές.

Λήμμα 3.37 *Έστω S μία ημιομάδα.*

(i) Έστω L_1 και L_2 αριστερά ιδεώδη της S. Τότε $L_1 \cap L_2$ είναι ένα αριστερό ιδεώδες της S ανν $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$.

(ii) Έστω L και R ένα αριστερό και δεξί ιδεώδες της S αντίστοιχα. Τότε $L \cap R \neq \varnothing$.

Απόδειξη

Το (i) έπεται λόγο του ότι $S(L_1 \cap L_2) \subset SL_j$ για $j = 1, 2$. Για $x \in L$ και $y \in R$ έχουμε $yx \in L$ και $yx \in R$. □

Πόρισμα 3.38 *Για κάθε ημιομάδα S υπάρχει το πολύ ένα ελαχιστικό ιδεώδες.*

Απόδειξη

Έστω δύο ελαχιστικά ιδεώδη I_1 και I_2. Από το (ii) του προηγούμενου λήμματος $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$ ενώ από το (i) του ίδιου $I_1 \cap I_2$ είναι ιδεώδες και υποσύνολο και των δύο άρα και τα τρία πρέπει να ταυτίζονται. □

Στα παρακάτω όταν γράφουμε xS εννοούμε το σύνολο όλων των γινομένων του x με κάποιο στοιχείο του S από δεξιά. Είναι φανερό επίσης ότι xS, Sx και SxS είναι πάντα υποημιομάδες της S.

Λήμμα 3.39 *Έστω S μία ημιομάδα.*

(i) Για κάθε $x \in S$, xS είναι ένα δεξί ιδεώδες, Sx είναι ένα αριστερό ιδεώδες και SxS είναι ένα ιδεώδες της S.

(ii) Αν $e \in E(S)$ ένα ταυτοδύναμο της S τότε το e είναι αριστερά ταυτοτικό για το eS, δεξί ταυτοτικό για το Se και ταυτοτικό για το eSe.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι άμεση. □

Θεώρημα 3.40 *Έστω S μία ημιομάδα.*

(i) Αν S είναι αριστερά απλή τότε κάθε ταυτοδύναμο είναι δεξί ταυτοτικό.

(ii) Αν L είναι ένα αριστερό ιδεώδες της S τότε $Ss \subset L$ για κάθε $s \in L$.

(iii) Αν $\varnothing \neq L \subset S$ τότε το L είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες ανν $Ss = L$ για κάθε $s \in L$.

Απόδειξη

(i) Αν $e \in E(S)$ τότε από το συμπέρασμα (i) του λήμματος 3.39 το Se είναι αριστερό ιδεώδες. Από το (ii) του ίδιου λήμματος e δεξί ταυτοτικό για το Se όμως αφού S αριστερά απλή $Se = S$.

(ii) Είναι άμεσο από τον ορισμό του αριστερού ιδεώδους.

(iii) $(\Rightarrow)$ Από το (i) του λήμματος 3.39 το Ss είναι αριστερό ιδεώδες για κάθε $s \in L$. Επίσης ισχύει ότι $Ss \subset SL \subset L$ ενώ από την ελαχιστικότητα του L έχουμε ότι $Ss = L$. □

Παρατήρηση 3.41 Προφανώς ισχύει επίσης το δεξί ανάλογο του θεωρήματος 3.40. Από το (iii) του ίδιου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν L_1 καιL_2 ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη της S και $s \in L_1 \cap L_2$ τότε $L_1 = L_2$. Το συμπέρασμα αυτό νομιμοποιεί τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.42 Έστω S μία ημιομάδα.

(i) Το μικρότερο ιδεώδες της S που περιέχει ένα δεδομένο στοιχείο x της S ονομάζεται το *κύριο* (**principal**) ιδεώδες που παράγεται από το x.

(ii) Το μικρότερο αριστερό ιδεώδες της S που περιέχει ένα δεδομένο στοιχείο x της S ονομάζεται το κύριο αριστερό ιδεώδες που παράγεται από το x.

(iii) Το μικρότερο δεξί ιδεώδες της S που περιέχει ένα δεδομένο στοιχείο x της S ονομάζεται το κύριο δεξί ιδεώδες που παράγεται από το x.

Θεώρημα 3.43 *Έστω S μία ημιομάδα και έστω $x \in S$.*

(i) Το κύριο ιδεώδες που παράγεται από το x είναι το $SxS \cup xS \cup Sx \cup \{x\}$.

(ii) Το κύριο αριστερό ιδεώδες που παράγεται από το x είναι το $Sx \cup \{x\}$.

(iii) Το κύριο δεξί ιδεώδες που παράγεται από το x είναι το $xS \cup \{x\}$.

(iv) Αν το S έχει ένα ταυτοτικό στοιχείο τότε το κύριο ιδεώδες που παράγεται από το x είναι το SxS.

Απόδειξη

(i) Θέτουμε $I = SxS \cup xS \cap Sx \cup \{x\}$. Είναι φανερό ότι $SI = SxS \cup Sx \subset I$ και $IS = SIS \cup xS \subset I$ επομένως το I είναι ένα ιδεώδες της S που περιέχει το x. Αν I' ένα άλλο ιδεώδες που περιέχει το x τότε $xS \subset I'$, $Sx \subset I'$ και $SxS \subset SI'S \subset SI' \subset I'$ άρα $I \subset I'$.

(ii) Θέτουμε $I = Sx \cup \{x\}$. Τότε $SI = SSx \cup Sx = Sx \subset I$ άρα το I είναι αριστερό ιδεώδες που περιέχει το x. Αν I' ένα άλλο αριστερό ιδεώδες που περιέχει το x τότε $Sx \subset SI \subset I$ άρα $I \subset I'$.

(iii) Όμοια με το (ii).

(iv) Αν e ένα ταυτοτικό για την S τότε

$$Sx \cup xS \cup \{x\} = Sx \cup xS = Sxe \cup exS \subset SxS.$$

□

Παράδειγμα 3.44 Έστω το σύνολο ${}^X X$ με πράξη την σύνθεση. Θα χαρακτηρίσουμε τα ελαχιστικά αριστερά και δεξιά ιδεώδη. Αν C το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων του ${}^X X$ και $c \in C$ τότε $c{}^X X = \{c\}$ και επομένως $\{c\}$ ελαχιστικό δεξί ιδεώδες για κάθε $c \in C$. Αν τώρα G ένα ελαχιστικό δεξί ιδεώδες διαφορετικής μορφής δεν μπορεί να περιέχει καμία σταθερή συνάρτηση. Όμως από το δυικό του θεωρήματος 3.40 θα πρέπει $g{}^X X = G$ για κάθε $g \in G$ αλλά για $c \in C \subset {}^X X$ και $g \in G$ η συνάρτηση $gc \in G$ είναι σταθερή με τιμή $g(c)$ άτοπο. Έστω τώρα $c \in C$ τότε ${}^X Xc = C$ και επομένως C ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες του ${}^X X$. Αν $G \subset {}^X X$ και $g \in G$ τότε για κάθε $c \in C$ ισχύει ότι $cg = c$ και επομένως $C = Cg \subset {}^X Xg$ άρα αν G ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες του ${}^X X$ τότε αναγκαστικά θα περιέχει το C και επομένως C το μοναδικό ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες του ${}^X X$.

3.4 Ταυτοδύναμα στοιχεία και διάταξη

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε μία διάταξη το σύνολο $E(S)$ των ταυτοδύναμων στοιχείων κάποιας ημιομάδας S. Όπως θα δούμε παρακάτω τα ελαχιστικά ταυτοδύναμα στοιχεία είναι στενά συνδεδεμένα με τα ελαχιστικά αριστερά και δεξιά ιδεώδη

Ορισμός 3.45 Έστω S μία ημιομάδα και έστω $e, f \in E(S)$. Τότε

(i) $e \leq_L f$ αν $e = ef$.

(ii) $e \leq_R f$ αν $e = fe$.

(iii) $e \leq f$ αν $e = ef = fe$.

Παρατήρηση 3.46 Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι και οι τρεις σχέσεις που ορίστηκαν παραπάνω είναι μεταβατικές και αυτοπαθείς ενώ η $\leq$ είναι επίσης αντισυμμετρική και άρα μερική διάταξη στο σύνολο των ταυτοδύναμων στοιχείων της S.

Όταν λέμε ότι ένα στοιχείο e είναι ελαχιστικό ως προς μία όχι απαραίτητα αντισυμμετρική σχέση $\preceq$ εννοούμε ότι αν $f \preceq e$ τότε και $e \preceq f$.

Θεώρημα 3.47 *Έστω S μία ημιομάδα και $e \in E(S)$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Το στοιχείο e είναι ελαχιστικό ως προς την $\leq$

(ii) Το στοιχείο e είναι ελαχιστικό ως προς την $\leq_R$

(iii) Το στοιχείο e είναι ελαχιστικό ως προς την $\leq_L$

Απόδειξη
Θα δείξουμε μόνο ότι $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Έστω e ελαχιστικό ως προς $\leq$ και έστω επίσης $f \in E(S)$ με $f \leq_R e$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $e \leq_R f$ δηλαδή ότι $e = fe$. Αν $g = fe$ τότε $gg = fefe = ffe = fe = g$ και επομένως το g είναι ταυτοδύναμο. Επίσης $g = fe = efe$ και επομένως $eg = eefe = efe = g = ge$ άρα $g \leq e$ έτσι από ελαχιστότητα του e έχουμε $fe = g = e$ δηλαδή $e \leq_R f$. Αν τώρα e ελαχιστικό ως προς $\leq_R$ και $f \leq e$ δηλαδή $f = fe = ef$ τότε $f \leq_R e$ και έτσι από ελαχιστότητα του e θα πρέπει $e \leq_R f$ δηλαδή $e = fe$ και επομένως $f = e$. □

Λόγο του θεωρήματος 3.47 δικαιολογείται ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 3.48 Έστω S μία ημιομάδα και $e \in E(S)$. Το e θα λέγεται *ελαχιστικό ταυτοδύναμο* (**minimal idempotent**) της S αν είναι ελαχιστικό ως προς κάποια από τις $\leq_L, \leq_R$ ή $\leq$.

Θεώρημα 3.49 *Έστω S μία ημιομάδα και $e \in E(S)$.*

(i) Αν e είναι στοιχείο κάποιου ελαχιστικού αριστερού ιδεώδους, τότε e είναι ένα ελαχιστικό ταυτοδύναμο.

(ii) Αν S είναι απλή και e είναι ελαχιστικό ταυτοδύναμο, τότε Se ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες.

(iii) Αν κάθε αριστερό ιδεώδες της S περιέχει ένα ταυτοδύναμο και e είναι ελαχιστικό ταυτοδύναμο, τότε Se είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες.

Απόδειξη

(i) Έστω $e \in L$ και L ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες. Από το Θεώρημα 3.40 έχουμε ότι $Se = L$. Αν $f \in E(S)$ με $f \leq e$ έπεται ότι $f = fe \in L$ και έτσι από το (ii) του θεωρήματος 3.43 $L = Sf$ και άρα $e \in Sf$. Από το Λήμμα 3.39 έπεται ότι $e = ef = f$.

(ii) Έστω L αριστερό ιδεώδες με $L \subset Se$ θα δείξουμε ότι $Se \subset L$. Έστω $s \in L$ τότε $s \in Se$ και άρα $s = se$. αφού το e είναι δεξί ταυτοτικό για το Se. Αφού S απλή και SsS ιδεώδες έπεται ότι $SsS = S$ και επομένως υπάρχουν $u, v \in S$ τ.ω $e = vsu$. Θέτουμε $r = eue$ και $t = ev$ τότε $tsr = evseue = evsue = e$ και $er = eeue = eue = r$. Αν $f = rts$ τότε $ff = rtsrts = rets = rts = f$ και $fe = rtse = rts = f$ και $ef = erts = rts = f$ και έτσι $f \leq e$ άρα $f = e$ και συνεπώς $Se = Sf = Srts \subset Ss \subset ST \subset T$.

(iii) Έστω $L \subset Se$ ένα αριστερό ιδεώδες. Θα δείξουμε ότι $e \in L$ και επομένως $Se \subset L$. Έστω f ένα ταυτοδύναμο στο L. Θέτουμε $t = ef$ και έχουμε ότι $t \in Sf \subset L$. Αφού $f \in Se$ και e ταυτοτικό για το Se έπεται ότι $f = fe$ και άρα $t = ef = efe$, συνεπώς $tt = efef = eff = ef = t$. $et = eefe = efe = t$ και $te = efee = efe = t$ άρα $t \leq e$ και έτσι $t = e$ δηλαδή $e \in L$. □

Υπενθυμίζουμε ότι ισχύει επίσης η δεξιά παραλλαγή του θεωρήματος.

Πόρισμα 3.50 *Αν S είναι απλή ή κάθε αριστερό ιδεώδες της S έχει τουλάχιστον ένα ταυτοδύναμο τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) e είναι ελαχιστικό ταυτοδύναμο.

(ii) e είναι στοιχείο κάποιου ελαχιστικού αριστερού ιδεώδους της S.

(iii) Se είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S. □

Θεώρημα 3.51 *Έστω S μία ημιομάδα και έστω e ένα αριστερά ταυτοτικό για την S τ.ω για κάθε $x \in S$ να υπάρχει $y \in S$ ώστε $xy = e$. Θέτουμε $Y = E(S)$ και $G = Se$. Τότε*

Y είναι μία δεξιά μηδενική ημιομάδα, G είναι μία ομάδα και $S = GY$ ισομορφική με το ευθύ γινόμενο $G \times Y$.

Απόδειξη

Δείχνουμε πρώτα ότι $xy = y$ για κάθε $y \in S$ και για κάθε $x \in Y$. Πράγματι έστω $x \in Y$ και $y \in S$. Από υπόθεση υπάρχει $z \in S$ τ.ω $xz = e$ επομένως $xe = xxz = xz = e$ και άρα $xy = x(ey) = ey = y$. Από το προηγούμενο έπεται ότι Y είναι μία δεξιά μηδενική υποημιομάδα της S.

Δείχνουμε τώρα ότι $G = Se$ είναι μία υποομάδα της S. Αφού e αριστερά ταυτοτικό για την S για κάθε $x, y \in S$ ισχύει ότι $xeye = xye \in Se$ και άρα Se υποημιομάδα της S. Επίσης το e είναι δεξί ταυτοτικό για την Se και από υπόθεση κάθε στοιχείο της S και άρα κάθε στοιχείο της G έχει ένα δεξί e-αντίστροφο. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του G έχει δεξί e-αντίστροφο στο G. Έστω $x \in G$ και $y \in S$ τ.ω $xy = e$. Τότε $ye \in G$ και $xye = ee = e$.

Μένει να δείξουμε ότι $S = GY \cong G \times Y$. Θέτουμε $\varphi : G \times Y \longrightarrow S$ με $\varphi(g, y) = gy$ και δείχνουμε ότι είναι ισομορφισμός. Τότε για $g_1, g_2 \in G$ και $y_1, y_2 \in Y$

$$\begin{aligned}\varphi(g_1, y_1)\varphi(g_2, y_2) &= g_1 y_1 g_2 y_2 = g_1 g_2 y_2 \\ &= g_1 g_2 y_1 y_2 = \varphi(g_1 g_2, y_1 y_2)\end{aligned}$$

και άρα η φ ομομορφισμός. Έστω $s \in S$ τότε $se \in G$ και επομένως υπάρχει $x \in G$ τ.ω $xse = sex = e$. Άρα $sexs = es = s$ με $se \in G$ και $xs \in Y$ αφού $xsxs = xsexs = xes = xs$. Έτσι η φ είναι επί και άρα επίσης $S = GY$.

Τέλος για να δούμε ότι η φ είναι $1-1$ υποθέτουμε ότι $s = \varphi(g, y)$ για κάποια $g \in G$ και $y \in Y$. Τότε $se = gye = ge = g$ και $xs = xgy = xgyey = xsey = ey = y$ δηλαδή τα g, y είναι μονοσήμαντα ορισμένα. □

3.5 Ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη

Παρακάτω θα δούμε κάποιες συνέπειες που που προκύπτουν από την ύπαρξη ελαχιστικού αριστερού (ή δεξιού) ιδεώδους σε μία ημιομάδα.

Θεώρημα 3.52 *Έστω S μία ημιομάδα και έστω L ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S το οποίο περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο e. Τότε $L = XG \cong X \times G$ όπου X είναι η* *αριστερά μηδενική ημιομάδα των ταυτοδύναμων του L και $G = eL = eSe$ είναι ομάδα. Επίσης όλες οι μεγιστικές ομάδες στο L είναι ισομορφικές με την G.*

Απόδειξη

Για $x \in L$ το Lx είναι αριστερό ιδεώδες της S και $Lx \subset L$ επομένως $Lx = L$. Επομένως υπάρχει κάποιο $y \in L$ τ.ω $yx = e$ ενώ από το Λήμμα 3.39 το e είναι δεξί ταυτοτικό για το $Le = L$ άρα αφού L ημιομάδα, από την δυική μορφή του θεωρήματος 3.51 έχουμε ότι $L = XG \cong X \times G = E(L) \times eLe$. Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε μεγιστική ομάδα στο $X \times G$ είναι της μορφής $\{x\} \times G$ και επομένως ισομορφική με την G. Έχουμε ότι, αν $(x, g) \in E(X \times G)$ τότε για $x' \neq x$ θα ισχύει ότι $(x, g)(x', g') = (x, gg') \neq (x', g)$ και επομένως αφού το (x, g) είναι ταυτοτικό για την $H(x, g)$ πρέπει αναγκαστικά $H(x, g) \subset \{x\} \times G$. Όμως $\{x\} \times G$ ομάδα με $(x, g) \in \{x\} \times G$ και από το Θεώρημα 3.28 έχουμε ότι $H(x, g) = \{x\} \times G$. □

Λήμμα 3.53 *Έστω S μία ημιομάδα, L ένα αριστερό ιδεώδες της S. και T ένα αριστερό ιδεώδες του L.*

(i) Για κάθε $t \in T$, Lt είναι ένα αριστερό ιδεώδες της S και $Lt \subset T$.

(ii) Αν L είναι ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S, τότε $T = L$. (Επομένως τα ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη είναι αριστερά απλές ημιομάδες.)

(iii) Αν T είναι ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες του L τότε είναι αριστερό ιδεώδες της S.

Απόδειξη

(i) $SLt \subset Lt \subset LT \subset T$.

(ii) Από το προηγούμενο Lt αριστερό ιδεώδες της S με $Lt \subset T \subset L$ και από ελαχιστικότητα του L έπεται ότι $Lt = T = L$.

(iii) Από το (i) το Lt είναι αριστερό ιδεώδες της S για κάθε $t \in T$ και άρα αριστερό ιδεώδες του L, οπότε από ελαχιστότητα $Lt = T$ έτσι $ST = SLt \subset Lt = T$.□

Λήμμα 3.54 *Έστω S μία ημιομάδα, I ένα ιδεώδες της S και L ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S. Τότε $L \subset I$.*

Απόδειξη
Από τον ορισμό του ιδεώδους το I είναι δεξί και αριστερό ιδεώδες της S. Από το Λήμμα 3.37 έχουμε ότι $I \cap L \neq \varnothing$ και $I \cap L$ αριστερό ιδεώδες άρα $I \cap L = L$ επομένως $L \subset I$. □

Θεώρημα 3.55 *Έστω S μία ημιομάδα L ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S και $T \subset S$. Τότε T είναι ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S ανν υπάρχει $\alpha \in S$ τ.ω $T = L\alpha$.*
Απόδειξη
($\Rightarrow$) Αν T ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες και $\alpha \in T$ τότε $SL\alpha \subset L\alpha$ και $L\alpha \subset LT \subset ST \subset T$ επομένως $L\alpha = T$.
($\Leftarrow$) Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in S$ τ.ω $L\alpha = T$. Τότε $ST = SL\alpha \subset L\alpha = T$ άρα το T είναι ένα αριστερό ιδεώδες. Θεωρούμε ένα αριστερό ιδεώδες $B \subset T = L\alpha$ της S. Θέτουμε $A = \{ s \in L \mid s\alpha \in B \}$. Τότε $A \subset L$ και $A \neq \varnothing$. Αν $s \in A$ και $t \in S$ τότε $s\alpha \in B$ και αφού B αριστερό ιδεώδες $ts\alpha \in B$ και έτσι $ts \in A$ (αφού $s \in L$, $ts \in L$). Επομένως A αριστερό ιδεώδες με $A \subset L$ άρα $A = L$ και έτσι $A\alpha = L\alpha \subset B$. □

Πόρισμα 3.56 *Έστω S μία ημιομάδα. Αν S έχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες, τότε κάθε αριστερό ιδεώδες της S περιέχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S.*
Απόδειξη
Έστω L ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S και έστω T ένα αριστερό ιδεώδες της S. Επιλέγουμε $\alpha \in T$. Τότε $L\alpha$ είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S με $L\alpha \subset ST \subset T$. □

Θεώρημα 3.57 *Έστω S μία ημιομάδα και $e \in E(S)$. Τότε οι προτάσεις (i) έως (vi) είναι ισοδύναμες και συνεπάγονται την (vii). Εάν είτε η S είναι απλή είτε κάθε αριστερό ιδεώδες της S έχει ένα ταυτοδύναμο, τότε όλες οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(i) *Se είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες.*

(ii) *Se είναι αριστερά απλή υποημιομάδα της S.*

(iii) *eSe είναι ομάδα.*

(iv) *$eSe = H(e)$.*

(v) eS *είναι ένα ελαχιστικό δεξί ιδεώδες.*

(vi) eS *είναι δεξιά απλή υποημιομάδα της* S*.*

(vii) e *είναι ένα ελαχιστικό ταυτοδύναμο της* S*.*

Απόδειξη
Θα δείξουμε τις ισοδυναμίες (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i). Τότε από δυικότητα των εννοιών και την συμμετρία των προτάσεων (iii) και (iv) θα έχουμε ότι (v) $\Longrightarrow$ (vi) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (v). Το ότι όλες οι προτάσεις συνεπάγονται την (vii) έπεται τότε από το Θεώρημα 3.49 ενώ η ισοδυναμία όλων των προτάσεων μπορεί να συναχθεί από το Πόρισμα 3.50.
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Έπεται από το Λήμμα 3.53.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Η eSe είναι κλειστή ως προς την πράξη της S και το e είναι ταυτοτικό για την eSe. Αν $x \in eSe$ τότε $x \in Se$ και άρα $Sex = Sx$ είναι αριστερό ιδεώδες για την Se η οποία είναι αριστερά απλή και άρα $Sx = Se$. Έπεται ότι $e \in Sx$ και άρα υπάρχει $y \in S$ τ.ω $yx = e$. Τότε $eyex = eyx = ee = e$ με $eye \in eSe$.
(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Από την μεγιστικότητα της $H(e)$ και το γεγονός ότι $e \in eSe$ έπεται ότι $eSe \subset H(e)$. Από την Παρατήρηση 3.27 το e είναι ταυτοτικό για την $H(e)$ και επομένως αν $x \in H(e)$ τότε $x = exe \in eSe$ και άρα $H(e) \subset eSe$.
(iv) $\Longrightarrow$ (i) Έστω L ένα αριστερό ιδεώδες της S τ.ω $L \subset Se$. Αν $t \in L$ τότε $t \in Se$ και άρα $et \in eSe$. Επιλέγουμε $x \in eSe$ τ.ω $xet = e$ τότε $xt = xet = e$ και άρα $e \in L$. Έπεται ότι $Se \subset SL \subset L$. □

Όπως είδαμε στο Πόρισμα 3.38 αν μία ημιομάδα S έχει ελαχιστικό ιδεώδες τότε αυτό είναι μοναδικό και άρα ελάχιστο.

Ορισμός 3.58 Έστω S μία ημιομάδα. Αν η S έχει ελάχιστο ιδεώδες τότε αυτό συμβολίζεται με $K(S)$.

Μία συνθήκη για την ύπαρξη του $K(S)$ μας δίνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.59 *Έστω* S *μία ημιομάδα η οποία έχει τουλάχιστον ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες. Τότε το* $K(S)$ *υπάρχει και*

$$K(S) = \bigcup \{\, L \mid L \text{ ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της } S \,\}\,.$$

Απόδειξη
Θέτουμε $I = \bigcup \{ L \mid L$ ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της $S \}$. Από υπόθεση το I δεν είναι κενό. Από το Λήμμα 3.54 έπεται ότι για κάθε ιδεώδες K της S ισχύει ότι $I \subset K$. Αρκεί να δείξουμε ότι το I είναι ιδεώδες. Έστω $x \in I$ και $s \in S$ τότε $sx \in SL$ για κάποιο ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες L και άρα $sx \in I$ δηλαδή $SI \subset I$. Επίσης από το Θεώρημα 3.55 το Ls είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S με $xs \in Ls \subset I$ και άρα και $IS \subset I$. □

Λήμμα 3.60 *Έστω S ημιομάδα.*

(i) Έστω L ένα αριστερό ιδεώδες της S. Τότε L είναι ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S ανν $Lx = L$ για κάθε $x \in L$.

(ii) Έστω I ένα ιδεώδες της S. Τότε το I είναι το ελάχιστο ιδεώδες της S ανν $IxI = I$ για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη

(i) Αν L ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S και $x \in L$ τότε Lx είναι αριστερό ιδεώδες της S και $Lx \subset L$ άρα $Lx = L$. Αν $Lx = L$ για κάθε $x \in L$ τότε αν J αριστερό ιδεώδες της S με $J \subset L$ τότε $L \subset LJ \subset SJ \subset J$.

(ii) Έστω ότι $x \in K(S)$. Τότε $K(S)x \subset K(S)$ και $xK(S) \subset K(S)$ επομένως $K(S)xK(S) \subset K(S)$. Ισχύει επίσης ότι $SK(S)xK(S) \subset K(S)xK(S)$ και από συμμετρία έπεται ότι το $K(S)xK(S)$ είναι ένα ιδεώδες της S συνεπώς $K(S)xK(S) = K(S)$ για κάθε $x \in K(S)$. Αν $IxI = I$ για κάθε $x \in I$, τότε για κάθε ιδεώδες $J \subset I$ και για κάποιο $x \in J$ έχουμε ότι $I = IxI \subset SxS \subset SJS \subset J$. □

Θεώρημα 3.61 *Έστω S μία ημιομάδα. Αν L είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S και R ένα ελαχιστικό δεξί ιδεώδες της S τότε $K(S) = LR$.*

Απόδειξη
Τό ότι είναι ιδεώδες είναι άμεσο. Αν $x \in LR$ τότε $SLRxL \subset LRxL$ άρα $LRxL$ είναι αριστερό ιδεώδες της S με $LRxL \subset L$ και άρα $RLxL = L$ δηλαδή $LRxLR = LR$. □

Θεώρημα 3.62 *Έστω S μία ημιομάδα για την οποία υπάρχει το ελάχιστο ιδεώδες $K(S)$ και έστω $e \in E(S)$ ένα ταυτοδύναμο της S. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες και συνεπάγονται από οποιαδήποτε από τις προτάσεις (i)-(vi) του θεωρήματος 3.57.*

(viii) $e \in K(S)$.

(ix) $K(S) = SeS$.

Απόδειξη
Από το (i) του θεωρήματος 3.57 και το Θεώρημα 3.59 έπεται το (viii). Αφού SeS είναι ιδεώδες $K(S) \subset SeS$. Αν $e \in K(S)$ τότε $SeS \subset SK(S)S \subset K(S)$. Αν $K(S) = SeS$ τότε $e = eee \in K(S)$. □

3.6 Ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη με ταυτοδύναμα στοιχεία

Παρακάτω θα δούμε αρκετά αποτελέσματα που ξεκινάνε με την υπόθεση ύπαρξης κάποιου ελαχιστικού αριστερού ιδεώδους με τουλάχιστον ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Τα αποτελέσματα αυτά είναι σημαντικά διότι όπως θα δούμε αυτή η υπόθεση ικανοποιείται από κάθε *συμπαγή δεξιά τοπολογική ημιομάδα* (**compact right topological semigroup**), έννοια την οποία θα ορίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 3.63 *Έστω S μία ημιομάδα και έστω ότι υπάρχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S το οποίο περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Τότε κάθε ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες έχει ένα ταυτοδύναμο.*

Απόδειξη
Έστω L ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S, $e \in L$ ένα ταυτοδύναμο και έστω T ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S. Από το Θεώρημα 3.55 έπεται ότι υπάρχει $x \in S$ τ.ω $T = Lx$. Από το Θεώρημα 3.52 έχουμε ότι $eL = eSe$ είναι ομάδα. Έστω ότι $y = eye$ είναι το αντίστροφο του exe. Τότε $yx \in Lx = T$ και $yxyx = yexeyx = eyx = yx$ δηλαδή το T περιέχει ένα ταυτοδύναμο. □

Λήμμα 3.64 *Έστω S μία ημιομάδα και έστω ότι υπάρχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S το οποίο περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Τότε υπάρχει ένα ελαχιστικό δεξί ιδεώδες που περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο.*

Απόδειξη
Έστω L ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S και $e \in L$ ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Από το Θεώρημα 3.40 έπεται ότι $Se = L$ και από το Θεώρημα 3.57 έπεται ότι eS είναι ένα ελαχιστικό δεξί ιδεώδες και $e \in eS$. □

Πόρισμα 3.65 *Έστω S μία ημιομάδα και έστω ότι υπάρχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S το οποίο περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Τότε κάθε ελαχιστικό αριστερό ή δεξί ιδεώδες έχει ένα ταυτοδύναμο.* □

Θεώρημα 3.66 *Έστω S μία ημιομάδα και έστω ότι υπάρχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S το οποίο περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Αν $T \subset S$ τότε:*

(i) Το T είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S ανν υπάρχει κάποιο ταυτοδύναμο $e \in E\left(K(S)\right)$ τ.ω $T = Se$.

(ii) Το T είναι ένα ελαχιστικό δεξί ιδεώδες της S ανν υπάρχει κάποιο ταυτοδύναμο$e \in E\left(K(S)\right)$ τ.ω $T = eS$.

Απόδειξη

(i) ($\Rightarrow$) Έστω T ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S τότε από το Θεώρημα 3.63 υπάρχει $e \in E(S)$ ταυτοδύναμο με $e \in T$. Από το Θεώρημα 3.59 έχουμε ότι $e \in K(S)$ και από το Θεώρημα 3.40 $Se = T$.
($\Leftarrow$) Αν υπάρχει $e \in E(K(S))$ τ.ω $Se = T$ τότε από το Θεώρημα 3.59 έπεται ότι υπάρχει ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες L τ.ω $e \in L$. Από το Θεώρημα 3.40 $Se = L$ και άρα $L = T$.

(ii) Είναι η δυική μορφή του (i). □

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί την "πλήρωση" των θεωρημάτων 3.57 και 3.62.

Θεώρημα 3.67 *Έστω S μία ημιομάδα και έστω ότι υπάρχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S το οποίο περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Αν $e \in E(S)$, τότε οι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Se είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες.

(ii) Se είναι αριστερά απλή υποημιομάδα της S.

(iii) eSe *είναι ομάδα.*

(iv) $eSe = H(e)$.

(v) eS *είναι ένα ελαχιστικό δεξί ιδεώδες.*

(vi) eS *είναι δεξιά απλή υποημιομάδα της* S.

(vii) e *είναι ένα ελαχιστικό ταυτοδύναμο της* S.

(viii) $e \in K(S)$.

(ix) $K(S) = SeS$.

Απόδειξη
Από το Πόρισμα 3.56 κάθε αριστερό ιδεώδες περιέχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες. Από το Θεώρημα 3.63 έπεται ότι κάθε αριστερό ιδεώδες περιέχει ένα ταυτοδύναμο και άρα από το Θεώρημα 3.67 οι (i)-(vii) είναι ισοδύναμες. Από το Θεώρημα 3.62 αρκεί να δείξουμε ότι (viii)⇒(i) το οποίο ισχύει λόγο του θεωρήματος 3.66. □

Πόρισμα 3.68 *Αν* $e \in E(S)$ *και* e *είναι στοιχείο κάποιου ελαχιστικού αριστερού (δεξιού) ιδεώδους τότε αφού το* $K(S)$ *είναι η ένωση όλων των ελαχιστικών αριστερών (δεξιών) ιδεωδών το* $e \in K(S)$ *και επομένως το* e *είναι ένα ελαχιστικό ταυτοδύναμο.*

Το επόμενο θεώρημα θα φανεί πολύ χρήσιμο στην συνέχεια.

Θεώρημα 3.69 *Έστω* S *μία ημιομάδα και έστω ότι υπάρχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της* S *το οποίο περιέχει ένα ταυτοδύναμο. Αν* e *ένα ταυτοδύναμο στοιχείο της* S *τότε υπάρχει ένα ελαχιστικό ταυτοδύναμο* f *για το οποίο ισχύει ότι* $f \leq e$.
Απόδειξη
Το Se είναι ένα αριστερό ιδεώδες το οποίο από την υπόθεση το Πόρισμα 3.56 και το Θεώρημα 3.63 περιέχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες L το οποίο περιέχει ένα ελαχιστικό ταυτοδύναμο g. Αφού $g \in Se$ έπεται ότι $ge = g$. Έστω $f = eg$ τότε $ff = gege = gge = ge = f$ δηλαδή το f είναι ταυτοδύναμο και αφού $f = eg$ και $g \in Se$ ανήκει στο ελαχιστικό L και άρα θα είναι ελαχιστικό ταυτοδύναμο. Τέλος $fe = ege = eg = f$ και $ef = eeg = eg = f$ δηλαδή $f \leq e$. □

Θεώρημα 3.70 *Έστω S μία ημιομάδα και έστω ότι υπάρχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S το οποίο περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Δοθέντος οποιοδήποτε ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες L της S και οποιοδήποτε ελαχιστικό δεξί ιδεώδες R της S, υπάρχει ένα ταυτοδύναμο $e \in R \cap L$ τ.ω $R \cap L = RL = eSe$ και eSe είναι ομάδα.*

Έστω S μία ημιομάδα και έστω ότι υπάρχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S το οποίο περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο.
Απόδειξη
Έστω L και R όπως στην υπόθεση. Τότε υπάρχει $f \in K(S)$ ταυτοδύναμο τ.ω $L = Sf$. Από το Θεώρημα 3.57 fSf είναι ομάδα. Έστω $\alpha \in R$ και $x \in fSf$ το αντίστροφο του $f\alpha f$ στην fSf. Τότε $x \in Sf = L$ και άρα $\alpha x \in R \cap L$. Από το Θεώρημα 3.59 έπεται ότι $\alpha x \in K(S)$ αλλά ισχύει επίσης ότι

$$\alpha x \alpha x = \alpha x f \alpha f x = \alpha f x = \alpha x$$

και επομένως $e = \alpha x$ ταυτοδύναμο στο $K(S)$. Τώρα $eSe \subset Sx \subset L$ και $eSe \subset \alpha S \subset R$ άρα $eSe \subset R \cap L$. Από το Θεώρημα 3.40 $Se = L$ και $eS = R$ επομένως αν $s \in R \cap L$ τότε $s \in eS \cap Se = eSe$. Έτσι $eSe = R \cap L$, επίσης $RL = eSSe = eSe \subset RL$ δηλαδή $RL = R \cap L = eSe$. Το ότι eSe είναι ομάδα έπεται από το Θεώρημα 3.67 διότι $e \in K(S)$. □

Λήμμα 3.71 *Έστω S μία ημιομάδα και έστω ότι υπάρχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S το οποίο περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Τότε όλα τα ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη είναι ισομορφικά μεταξύ τους.*
Απόδειξη
Έστω L ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες και $e \in L$ ένα ταυτοδύναμο στοιχείο του. Τότε $L = Se$ και άρα από το Θεώρημα 3.67 eSe είναι ομάδα. Δείχνουμε πρώτα ότι δοθέντος οποιουδήποτε $s \in K(S)$ και $t \in S$ ισχύει ότι $s(ese)^{-1} = st(este)^{-1}$, όπου τα αντίστροφα βρίσκονται στην eSe. Πράγματι από το γεγονός ότι $(ese)^{-1}e = e(ese)^{-1} = (ese)^{-1}$, έπεται ότι

$$s(ese)^{-1}s(ese)^{-1} = s(ese)^{-1}ese(ese)^{-1} = s(ese)^{-1}e = s(ese)^{-1}.$$

Όμοια $st(este)^{-1}$ είναι επίσης ταυτοδύναμο. Όμως από το Λήμμα 3.64 και το Θεώρημα 3.59 έχουμε ότι $K(S) = \bigcup \{ R \mid R$ ελαχιστικό δεξί ιδεώδες της $S \}$. Επιλέγουμε ελαχιστικό δεξί ιδεώδες R τ.ω $s \in R$. Τότε $s(ese)^{-1}$ και $st(este)^{-1}$ είναι ταυτοδύναμα στοιχεία του $R \cap L$ το οποίο είναι ομάδα από το Θεώρημα 3.70 και επομένως $s(ese)^{-1} = st(este)^{-1}$.

Έστω L' ένα άλλο ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S. Από το Θεώρημα 3.67 eS είναι ελαχιστικό δεξί ιδεώδες της S και άρα $eS \cap L'$ είναι ομάδα, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα ταυτοδύναμο $d \in eS \cap L'$. Τότε $L' = Sd$ και $dS = eS$ από το οποίο συνεπάγεται ότι $de = e$, $ed = d$ και $sd = s$ για κάθε $s \in L'$.

Ορίζουμε $\varphi : Sd \longrightarrow Se$ με $\varphi(S) = s(ese)^{-1}dse$ για κάθε $s \in Sd$, όπου ο αντίστροφος βρίσκεται στην ομάδα eSe. Δείχνουμε πρώτα ότι φ είναι ένας ομομορφισμός. Έστω λοιπόν $s, t \in Sd$. Τότε

$$\begin{aligned}
\varphi(s)\varphi(t) &= s(ese)^{-1}dset(ete)^{-1}dte \\
&= s(ese)^{-1}dsete(ete)^{-1}dte && \big(e(ete)^{-1} = (ete)^{-1}\big) \\
&= s(ese)^{-1}dsedte \\
&= s(ese)^{-1}dste && (ed = d \text{ και } sd = s) \\
&= st(este)^{-1}dste && \big(s(ese)^{-1} = st(este)^{-1}\big) \\
&= \varphi(st)
\end{aligned}$$

Τώρα ορίζουμε $\psi : Se \longrightarrow Sd$ με $\psi(t) = t(dtd)^{-1}$ για κάθε $t \in Se$, όπου το αντίστροφο βρίσκεται στην ομάδα dSd. Θα δείξουμε ότι η ψ είναι η αντίστροφη της φ και άρα η φ είναι $1-1$ και επί. Έστω $s \in L'$. Τότε $ds \in L'$ οπότε Sds είναι ένα αριστερό ιδεώδες το οποίο περιέχεται στο L' και επομένως $L' = Sds$.

Επιλέγουμε λοιπόν $x \in S$ τ.ω $s = xds$ τότε

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi(s)) &= \varphi(s)(d\varphi(s)d)^{-1}e\varphi(s)d \\
&= s(ese)^{-1}dse(ds(ese)^{-1}dsed)^{-1}es(es(ese)^{-1}dsed \\
&= xds(ese)^{-1}dsed(ds(ese)^{-1}dsed)^{-1}ese(ese)^{-1}dsed \\
&= xdedsed \\
&= xddsd \\
&= xds \\
&= s
\end{aligned}$$

Ομοίως αν $t \in L$, τότε $\varphi(\psi(t)) = t$. □

Τα επόμενα δύο θεωρήματα θα μας επιτρέψουν να αναλύσουμε την δομή του ελάχιστου ιδεώδους μίας οποιασδήποτε ημιομάδας η οποία έχει ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες με ένα ταυτοδύναμο στοιχείο.

Θεώρημα 3.72 *Έστω X μία αριστερά μηδενική ημιομάδα, Y μία δεξιά μηδενική ημιομάδα και G μία ομάδα. Έστω e το ταυτοτικό στοιχείο της G. Για δεδομένα $u \in X$ και $v \in Y$ ορίζουμε $[,] : Y \times X \longrightarrow G$ συνάρτηση τ.ω $[y, u] = [v, x] = e$ για κάθε $y \in Y$ και $x \in X$. Θέτουμε $S = X \times G \times Y$ και ορίζουμε μία πράξη στην S έτσι ώστε $(x, g, y)(x', g', y') = (x, g[y, x']g', y')$. Τότε S είναι μία αριστερά απλή ημιομάδα (οπότε $K(S) = S = X \times G \times Y$) και κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις ισχύει.*

(i) Για κάθε $(x, y) \in X \times Y$ το $(x, [y, x]^{-1}, y)$ είναι ταυτοδύναμο και όλα τα ταυτοδύναμα είναι αυτής της μορφής. Πιο συγκεκριμένα τα ταυτοδύναμα στο $X \times G \times \{v\}$ είναι της μορφής (x, e, v) και τα ταυτοδύναμα στο $\{u\} \times G \times Y$ είναι της μορφής (u, e, y).

(ii) Για κάθε $y \in Y$ το $X \times G \times \{y\}$ είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S και όλα τα ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη της S είναι αυτής της μορφής.

(iii) Για κάθε $x \in X$ το $\{x\} \times G \times Y$ είναι ένα ελαχιστικό δεξί ιδεώδες της S και όλα τα ελαχιστικά δεξιά ιδεώδη είναι αυτής της μορφής.

(iv) *Για κάθε* $(x, y) \in X \times Y$ *το* $\{x\} \times G \times \{y\}$ *είναι μία μεγιστική υποομάδα της* S *και κάθε μεγιστική υποομάδα της* S *είναι αυτής της μορφής.*

(v) *Το ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες* $X \times G \times \{v\}$ *είναι το ευθύ γινόμενο των* X, G *και* $\{v\}$ *και το ελαχιστικό δεξί ιδεώδες* $\{u\} \times G \times Y$ *είναι το ευθύ γινόμενο των* $\{u\}$, G *και* Y.

(vi) *Όλα τα ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη της* S *είναι ισομορφικά με την* $X \times G$ *ενώ όλα τα ελαχιστικά δεξιά ιδεώδη της* S *είναι ισομορφικά με την* $G \times Y$.

(vii) *Όλες οι μεγιστικές υποομάδες της* S *είναι ισομορφικές με την* G.

Απόδειξη

Το ότι η πράξη ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα είναι άμεσο. Για να δούμε ότι η S είναι απλή σύμφωνα με το Λήμμα 3.60 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε (x, g, y) και (x', g', y') στην S ισχύει ότι $(x', g', y') \in S(x, g, y)S$ αφού τότε $S = SxS$ για κάθε $x \in S$. Αν θέσουμε $h = g'g^{-1}[y, x]^{-1}g^{-1}[y, x]^{-1}$ βλέπουμε ότι $(x', g', y') = (x', h, y)(x, g, y)(x, g, y')$.

(i) Το ότι $(x, [y, x]^{-1}, y)$ είναι ταυτοδύναμο είναι άμεσο. Αν (x, g, y) είναι ταυτοδύναμο τότε $g[y, x]g = g$ και άρα $g = [y, x]^{-1}$.

(ii) Έστω $y \in Y$. Το $X \times G \times \{y\}$ είναι αριστερό ιδεώδες της S. Από το Λήμμα 3.60 για να αποδείξουμε ότι είναι ελαχιστικό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε (x, g) και (x', g') στοιχεία του $X \times G$ ισχύει ότι

$$(x', g', y) = (x', g'g^{-1}[y, x]^{-1}, y)(x, g, y).$$

Δοθέντος οποιοδήποτε ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες L επιλέγουμε $(x, g, y) \in L$ και έχουμε ότι $L \cap X \times G \times \{y\} \neq \varnothing$ και επομένως $L = X \times G \times \{y\}$.

(iii) Αποδεικνύεται όμοια με την προηγούμενη.

(iv) Από το θεώρημα Θεώρημα 3.66 έπεται ότι οι μεγιστικές υποομάδες της S είναι ακριβώς της μορφής fSf όπου $f \in K(S) = S$. Από το (i) το f είναι της

μορφής $f = (x, [y, x]^{-1}, y)$ και άρα οι μεγιστικές υποομάδες της S είναι της μορφής
$$(x, [y, x]^{-1}, y)S(x, [y, x]^{-1}, y) = \{x\} \times G \times \{y\}.$$

(v) Έστω (x, g) και (x', g') στοιχεία του $X \times G$. Τότε

$$\begin{aligned}(x, g, v)(x', g', v) &= (x, g[v, x']g', v)\\ &= (x, geg', v)\\ &= (xx', gg', vv)\end{aligned}$$

Η δεξιά εκδοχή αποδεικνύεται ομοίως.

(vi) Από το Λήμμα 3.71 έπεται ότι όλα τα ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη είναι ισομορφικά μεταξύ τους. Από το (v) έπεται ότι $X \times G \times \{v\}$ είναι ισομορφικό με το $X \times G$.

(vii) Είναι σαφές ότι $\{u\} \times G \times \{v\}$ είναι ισομορφική με το G. Έστω $(x, y) \in X \times Y$. Τότε $\{x\} \times G \times \{v\}$ και $\{u\} \times G \times \{v\}$ είναι μεγιστικές υποημιομάδες του ελαχιστικού αριστερού ιδεώδους $X \times G \times \{v\}$ και άρα ισομορφικές σύμφωνα με το Θεώρημα 3.52. Επίσης $\{x\} \times G \times \{v\}$ και $\{x\} \times G \times \{y\}$ είναι μεγιστικές υποομάδες του ελαχιστικού δεξιού ιδεώδους $\{x\} \times G \times Y$ και επομένως ισομορφικές. □

Παρατήρηση 3.73 Στο Θεώρημα 3.72 παρόλο που το σύνολο S είναι το καρτεσιανό γινόμενο των X, G και Y δεν είναι το ευθύ γινόμενο τους παρά μόνο αν $[y, x] = e$ για κάθε $(x, y) \in X \times Y$. Επίσης παρόλο που $X \times G \times \{y\} \cong X \times G$, μπορούμε να εκφράσουμε αναλυτικά έναν ισομορφισμό μόνο στην περίπτωση που $[y, x] = e$ για κάθε $x \in X$.

Το Θεώρημα 3.72 περιγράφει την δομή της $X \times G \times Y$. Θα δούμε τώρα ότι αυτή είναι η δομή του ελάχιστου ιδεώδους οποιασδήποτε ημιομάδας η οποία περιέχει τουλάχιστον ένα ελαχιστικό αριστερό (ή δεξί) ιδεώδες με ταυτοδύναμο στοιχείο.

Θεώρημα 3.74 *Έστω S μία ημιομάδα η οποία έχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες που περιέχει τουλάχιστον ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Έστω L ένα ελαχιστικό αριστερό* *ιδεώδες και R ένα ελαχιστικό δεξί ιδεώδες της S. Θέτουμε $X = E(L)$, $Y = E(R)$ και $G = RL$ και για κάθε $x, x' \in X$, $g, g' \in G$ και $y, y' \in Y$ ορίζουμε μία πράξη στο $X \times G \times Y$ από την σχέση $(x, g, y)(x', g', y') = (x, gyx'g', y')$. Τότε η ημιομάδα $X \times G \times Y$ ικανοποιεί τα συμπεράσματα του θεωρήματος 3.72 (όπου $[y, x] = yx$) και $K(S) \cong X \times G \times Y$. Συγκεκριμένα*

(i) Τα ελαχιστικά δεξιά ιδεώδη του S διαμερίζουν το $K(S)$.

(ii) Τα ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη του S διαμερίζουν το $K(S)$.

(iii) Οι μεγιστικές υποομάδες του $K(S)$ διαμερίζουν το $K(S)$.

(iv) Όλα τα ελαχιστικά δεξιά ιδεώδη της S είναι ισομορφικά μεταξύ τους, όπως και όλα τα ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη της S είναι ισομορφικά μεταξύ τους.

(v) Όλες οι μεγιστικές υποομάδες του $K(S)$ είναι ισομορφικές μεταξύ τους.

Απόδειξη

Από το Λήμμα 3.53 και το Θεώρημα 3.59 συμπεραίνουμε ότι τα ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη της S και του $K(S)$ είναι ταυτόσημα. Ομοίως για τα ελαχιστικά δεξιά ιδεώδη της S και του $(K(S)$. Τα (i),(ii),(iii),(iv) και (v) είναι άμεσα συμπεράσματα του θεωρήματος 3.72 και επομένως είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του από την ημιομάδα $X \times G \times Y$ και ότι $K(S) \cong X \times G \times Y$.

Από το Λήμμα 3.64 γνωρίζουμε ότι η S έχει τουλάχιστον ένα ελαχιστικό δεξί ιδεώδες που περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Από το Πόρισμα 3.65 έπεται ότι τα L και R υπάρχουν και τα X και Y είναι μη κενά. Από το Θεώρημα 3.70 έχουμε ότι το $G = RL = R \cap L = eSe$ είναι ομάδα με ταυτοτικό στοιχείο το $e \in R \cap L$, ενώ από το Θεώρημα 3.52 και το δεξί ανάλογο του έπεται ότι το X είναι μία αριστερά μηδενική ημιομάδα και το R είναι μία δεξιά μηδενική ημιομάδα. Θέτουμε $u = v = e$ και ορίζουμε $[,] : Y \times X \longrightarrow G$ με $[y, x] = yx$ για κάθε $(y, x) \in Y \times X$, τότε δοθέντος $y \in Y$ έχουμε ότι $[y, u] = yu = u = e$ και δοθέντος $x \in X$ έχουμε ότι $[v, x] = vx = v = e$. Επομένως οι υποθέσεις του θεωρήματος 3.72 ικανοποιούνται.

Μένει να δείξουμε ότι $K(S) \cong X \times G \times Y$. Ορίζουμε $\varphi : X \times G \times Y \longrightarrow S$ με $\varphi(x, g, y) = xgy$. Τότε η φ είναι ομομορφισμός ενώ από το Θεώρημα 3.61 και το

Θεώρημα 3.52 έχουμε ότι $K(S) = XGGY = XGY = \phi(X \times G \times Y)$ και επομένως η φ είναι επί του $K(S)$. Αρκεί να βρούμε μία $\psi : K(S) \longrightarrow X \times G \times Y$ η οποία να είναι αντίστροφη της φ. Για κάθε $t \in K(S)$ ορίζουμε $\gamma(t) = (ete)^{-1}$ όπου το αντίστροφο βρίσκεται στην G. Τότε $t\gamma(t) = t\gamma(t)e \in Se = L$ και

$$\begin{aligned} t\gamma(t)t\gamma(t) &= t\gamma(t)ete\gamma(t) \\ &= t\gamma(t) \end{aligned}$$

και άρα $t\gamma(t) \in X$. Ομοίως $\gamma(t)t \in Y$.

Για κάθε $t \in K(S)$ ορίζουμε ως $\psi(t) = (t\gamma(t), ete, \gamma(t)t)$ και ισχυριζόμαστε ότι $\psi = \varphi^{-1}$. Έστω $(x, g, y) \in X \times G \times Y$. Τότε

$$\psi(\varphi(x, g, y)) = (xgy\gamma(xgy), exgye, \gamma(xgy)xgy) = (xgy\gamma(xgy), xgy, \gamma(xgy)xgy)$$

Όμως

$$\begin{aligned} xgy\gamma(xgy) &= xxgy\gamma(xgy) && (x = xx) \\ &= xexgye\gamma(xgy) && (x = xe \text{ και } \gamma(xgy) = e\gamma(xgy)) \\ &= xe && (\gamma(xgy) = (exgye)^{-1}) \\ &= x \end{aligned}$$

Πανομοιότυπα δείχνουμε ότι $\gamma(xgy)xgy = y$ και έτσι έχουμε ότι $\psi = \varphi^{-1}$. $\square$

Τα αποτελέσματα που είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο θα παίξουν κύριο ρόλο στην συνέχεια όπου θα εισάγουμε μια αλγεβρική δομή στον χώρου των υπερφίλτρων που θα μας επιτρέψει να εξάγουμε ενδιαφέροντα συμπεράσματα για αυτά. Το Θεώρημα 3.74 είναι ένα αποτέλεσμα που οφείλεται στον Suschkewitsch [20] στην περίπτωση των πεπερασμένων ημιομάδων και στον Rees [14] στην γενική περίπτωση.

4 Η Stone Ĉech Συμπαγοποίηση μιας Διακριτής Ημιομάδας

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε είτε με τοπολογικές δομές είτε με καθαρά αλγεβρικές. Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί μία μείξη των μεθόδων και αποτελεσμάτων των δύο προηγουμένων. Αφού ορίσουμε την έννοια της δεξιά τοπολογικής ημιομάδας, θα δούμε ότι η ιδιότητα της συμπάγειας μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός ταυτοδύναμου στοιχείου. Αυτό το γεγονός είναι καίριας σημασίας για την μελέτη της επέκτασης της πράξης μίας διακριτής ημιομάδας στην Stone Ĉech συμπαγοποίηση της.

4.1 Δεξιά Τοπολογικές Ημιομάδες

Να υπενθυμίσουμε ότι θεωρούμε όλους τους τοπολογικούς χώρους Hausdorff και ότι αν $(S, \cdot)$ είναι μία ημιομάδα έχουμε ορίσει για κάθε $x \in S$ τις συναρτήσεις

$$\lambda_x : S \longrightarrow S \text{ και } \rho_x : S \longrightarrow S$$

με $\lambda_x(y) = xy$ και $\rho_x(y) = yx$ για κάθε $y \in S$.

Ορισμός 4.1 Έστω S μη κενό σύνολο.

(i) *Δεξιά τοπολογική ημιομάδα* (**right topological semigroup**) λέγεται μία τριάδα $(S, \cdot, \mathcal{T})$ για την οποία $(S, \cdot)$ είναι ημιομάδα και $(S, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος τέτοιος ώστε για κάθε $x \in S$ η συνάρτηση ρ_x να είναι συνεχής.

(ii) *Αριστερά τοπολογική ημιομάδα* (**left topological semigroup**) είναι μία τριάδα $(S, \cdot, \mathcal{T})$ όπου $(S, \cdot)$ είναι ημιομάδα και $(S, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος τέτοιος ώστε για κάθε $x \in S$ η συνάρτηση λ_x να είναι συνεχής.

(iii) *Ημιτοπολογική ημιομάδα* (**semitopological semigroup**) είναι μία δεξιά τοπολογική ημιομάδα η οποία είναι επίσης και αριστερά τοπολογική ημιομάδα.

(iv) *Τοπολογική ημιομάδα* (**topological semigroup**) είναι μία τριάδα $(S, \cdot, \mathcal{T})$ όπου $(S, \cdot)$ είναι ημιομάδα και $(S, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος τέτοιος ώστε η $\cdot : S \times S \longrightarrow S$ να είναι συνεχής.

(v) *Τοπολογική ομάδα* (**topological group**) είναι μία τριάδα $(S, \cdot, \mathcal{T})$ όπου $(S, \cdot)$ είναι ομάδα και $(S, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός χώρος τέτοιος ώστε και η $\cdot : S \times S \longrightarrow S$ και η $\mathrm{In} : S \longrightarrow S$ (όπου $\mathrm{In}(x)$ ο αντίστροφος του x) να είναι συνεχής.

Παρατήρηση 4.2 Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι κάθε τοπολογική ομάδα είναι τοπολογική ημιομάδα και κάθε τοπολογική ημιομάδα είναι ημιτοπολογική ημιομάδα. Από το παρακάτω παράδειγμα φαίνεται ότι μπορεί μία τοπολογική ημιομάδα να είναι ομάδα αλλά όχι τοπολογική ημιομάδα.

Παρατήρηση 4.3 Είναι σκόπιμο να κάνουμε ένα σχόλιο που αφορά την ορολογία που χρησιμοποιείται στην διεθνή μαθηματική κοινότητα σχετικά με τις έννοιες που μόλις ορίσαμε. Λέμε ότι σε μία δεξιά τοπολογική ημιομάδα η πράξη "$\cdot$" είναι "δεξιά συνεχής". Πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τον όρο "αριστερά τοπολογική" για να περιγράψουν αυτό που εμείς εδώ έχουμε ορίσει ως "δεξιά τοπολογική" και αντίστροφα

Παράδειγμα 4.4 Έστω $\mathcal{T}$ η τοπολογία στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει ως βάση το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{\, (\alpha, b] \mid \alpha, b \in \mathbb{R} \wedge \alpha < b \,\}\,.$$

Τότε η τριάδα $(\mathbb{R}, +, \mathcal{T})$ είναι μία τοπολογική ημιομάδα αλλά όχι και τοπολογική ομάδα, παρόλο που $(\mathbb{R}, +)$ είναι ομάδα.

Απόδειξη

Έστω $x_0+y_0 \in R$ και $(x_0+y_0-\epsilon, x_0+y_0+\epsilon]$ μία βασική ανοιχτή περιοχή του $x+y$. Τότε το $G = (x_0 - \epsilon/2, x_0 + \epsilon/2] \times (y_0 - \epsilon/2, y_0 + \epsilon/2]$ είναι μία βασική ανοιχτή περιοχή του (x_0, y_0) για την οποία ισχύει ότι $x + y \in (x_0 + y_0 - \epsilon, x_0 + y_0 + \epsilon]$ για κάθε $(x, y) \in G$ και άρα η πρόσθεση είναι συνεχής. Τώρα για να αποδείξουμε ότι η In δεν είναι συνεχής αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\mathrm{In}^{-1}(-b, -\alpha] = [\alpha, b)$ το οποίο δεν είναι ανοιχτό διότι αν υποθέσουμε ότι γράφεται ως ένωση στοιχείων της βάσης θα υπάρχει διάστημα $(\alpha_i, b_i]$ ώστε $\alpha \in (\alpha_i, b_i]$ και άρα θα υπάρχει $\alpha' < \alpha$ ώστε $\alpha' \in [\alpha, b)$ το οποίο είναι άτοπο. □

Εδώ θα κάνουμε μία μικρή παρένθεση για να αναφέρουμε κάποια ενδιαφέροντα πράγματα που αφορούν το σύνολο ${}^X X$ των συναρτήσεων από το X στο X. Υπενθυμίζουμε ότι αν $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός χώρος ο χώρος γινόμενο είναι ο ${}^X X$ εφοδιασμένος με την τοπολογία γινόμενο της οποίας μία υποβάση είναι το σύνολο $\left\{ \pi_x^{-1}(G) \;\middle|\; x \in X \wedge U \in \mathcal{T} \right\}$, όπου για $f \in {}^X X$ και $x \in X$ η προβολή της f στην x συντεταγμένη είναι η $\pi_x(f) = f(x)$.

Θεώρημα 4.5 *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{V}$ η τοπολογία γινόμενο στον ${}^X X$.*

(i) $\left({}^X X, \circ, \mathcal{V}\right)$ *είναι μία δεξιά τοπολογική ημιομάδα.*

(ii) Για κάθε $f \in {}^X X$ η λ_f είναι συνεχής ανν η f συνεχής.

Απόδειξη

(i) Θέλουμε να δείξουμε ότι η για κάθε $f \in {}^X X$ η $\rho_f : {}^X X \longrightarrow {}^X X$ με $\rho_f(g) = g \circ f$ για κάθε $g \in {}^X X$ είναι συνεχής. Έστω $(g_s)_{s \in S}$ ένα δίκτυο που συγκλίνει στην g. Τότε $(g_s(f(x)))_{s \in S}$ συγκλίνει στο $g(f(x))$ για κάθε $x \in X$ και επομένως $(g_s \circ f)_{s \in S}$ συγκλίνει στο $g \circ f$.

(ii) Αν f συνεχής και $(g_s)_{s \in S}$ ένα δίκτυο που συγκλίνει στην g, τότε $\mathcal{U}\text{–}\lim\limits_{s \in S} f \circ g_s = f \circ \mathcal{U}\text{–}\lim\limits_{s \in S} g_s = f \circ g$. Αν $f \circ g$ συνεχής για κάθε g τότε $f = f \circ \mathrm{Id}$ συνεχής. □

Πόρισμα 4.6 *Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Το ${}^X X$ είναι μία τοπολογική ημιομάδα.

(ii) Το ${}^X X$ είναι μία ημιτοπολογική ημιομάδα.

(iii) Για κάθε $f \in {}^X X$ η f είναι συνεχής.

(iv) Ο X είναι διακριτός τοπολογικός χώρος.

Απόδειξη

(i)⇒(ii) Είναι άμεσο.

(ii)⇒(iii) Είναι άμεσο από το (ii) του προηγούμενου θεωρήματος.

(iii)⇒(iv) Αν A ένα τυχαίο υποσύνολο του X τότε υπάρχει συνάρτηση f επί του A τ.ω $f(x) \in A$ για κάθε $x \in X$. Επομένως το A είναι η αντίστροφη εικόνα του X και άρα ανοιχτό σύνολο.

(iv)⇒(i) Αν X διακριτός και $(f_s, g_s)_{s \in S}$ δίκτυο που συγκλίνει στο f, g τότε θα πρέπει για κάθε $x \in X$ τα δίκτυα $f_s(x)$ και $g_s(x)$ να είναι τελικά σταθερά με τιμή $f(x)$ και $g(x)$ αντίστοιχα και επομένως $(f_s \circ g_s)(x)$ τελικά σταθερό με τιμή $(f \circ g)(x)$ για κάθε $x \in X$ το οποίο συνεπάγεται ότι $(f_s \circ g_s) \to (f \circ g)$. □

Ορισμός 4.7 Έστω S μία δεξιά τοπολογική ημιομάδα. Το σύνολο

$$\Lambda(S) = \{ \, x \in S \mid \lambda_x \text{ συνεχής} \, \} .$$

ονομάζεται *τοπολογικό κέντρο* (**topological center**) της S.

Παρατηρούμε ότι μία δεξιά τοπολογική ημιομάδα είναι μία ημιτοπολογική ημιομάδα όταν και μόνο όταν $\Lambda(S) = S$. Είναι επίσης φανερό ότι το αλγεβρικό κέντρο της S είναι πάντα υποσύνολο του τοπολογικού κέντρου.

Παρακάτω το κύριο αντικείμενο ασχολίας μας θα είναι οι *συμπαγείς δεξιά τοπολογικές ημιομάδες* (**compact right topological semigroups**), οι οποίες παρουσιάζουν ενδιαφέρουσες και χρήσιμες ιδιότητες.

Θεώρημα 4.8 *Έστω S μία συμπαγής δεξιά τοπολογική ημιομάδα. Τότε $E(S) \neq \varnothing$.*

Απόδειξη

Θεωρούμε την συλλογή $\mathcal{A} = \{ \, T \subset S \mid T \neq \varnothing \wedge T \text{ συμπαγές } \wedge T \cdot T \subset T \, \}$ των συμπαγών υποημιομάδων της S. Αν $\mathcal{C}$ μία αλυσίδα στην $\mathcal{A}$ τότε αυτή έχει την FIP και επομένως $\cap \mathcal{C} \neq \varnothing$. Επίσης $\cap \mathcal{C}$ είναι συμπαγές και ημιομάδα άρα $\cap \mathcal{C}$ ένα κάτω φράγμα της C στην $\mathcal{A}$. Από το λήμμα του Zorn υπάρχει ελαχιστικό στοιχείο A στην $\mathcal{A}$.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $xx = x$. Έστω λοιπόν $x \in A$ και $B = Ax \neq \varnothing$. Ισχύει ότι $\rho_x[A] = B$ δηλαδή το B είναι συνεχής εικόνα συμπαγούς και άρα συμπαγές σύνολο. Επίσης $BB = AxAx \subset AAAx \subset Ax = B$ και επομένως B μη κενή συμπαγής ημιομάδα της S με $B \subset A$ άρα $Ax = B = A$. Θέτουμε $C = \{\, y \in A \mid yx = x \,\}$. Αφού $x \in A = Ax$ το C είναι μη κενό με $C = A \cap \rho_x^{-1}[\{x\}]$, δηλαδή κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς A και άρα συμπαγές. Για $y, z \in C$ έχουμε ότι $zyx = zx = x$, επομένως $CC \subset C$ και άρα $C = A$ δηλαδή $Ax = \{x\}$ και συνεπώς $xx = x$. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι επίσης ότι $A = Ax = \{x\}$. □

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε αρκετά αποτελέσματα που προέκυψαν από την υπόθεση ύπαρξης ελαχιστικού αριστερού ιδεώδους με ταυτοδύναμο στοιχείο. Το επόμενο πόρισμα θα μας επιτρέψει να ενσωματώσουμε όλα αυτά τα αποτελέσματα στις ιδιότητες των συμπαγών δεξιά τοπολογικών ημιομάδων.

Πόρισμα 4.9 *Έστω S μία συμπαγής δεξιά τοπολογική ημιομάδα. Τότε κάθε αριστερό ιδεώδες της S περιέχει ένα ελαχιστικό ιδεώδες και κάθε ελαχιστικό ιδεώδες είναι κλειστό υποσύνολο της S και περιέχει τουλάχιστον ένα ταυτοδύναμο στοιχείο.*

Απόδειξη

Έστω L ένα αριστερό ιδεώδες της S και $x \in L$. Τότε αφού $Sx = \rho_x[S]$ το Sx είναι συμπαγές αριστερό ιδεώδες που περιέχεται στο L. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι κάθε ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S είναι κλειστό ενώ από το Θεώρημα 4.8 περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε αριστερό ιδεώδες περιέχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες. Έστω L αριστερό ιδεώδες της S και

$$\mathcal{A} = \{\, T \subset L \mid T \text{ κλειστό αριστερό ιδεώδες του } S \wedge T \subset L \,\}.$$

Τότε αν $\mathcal{C}$ αλυσίδα στην A η $\mathcal{C}$ έχει την FIP και άρα $\cap\mathcal{C} \neq \varnothing$ ενώ επίσης $\cap\mathcal{C} \in \mathcal{A}$ έτσι από Zorn έχουμε ότι υπάρχει ελαχιστικό κλειστό αριστερό ιδεώδες M της S. Όμως κάθε ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S είναι κλειστό οπότε το M είναι ένα κλειστό ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S που περιέχεται στο L. □

Τα επόμενα θεωρήματα είναι άμεση συνέπεια του πορίσματος 4.9 και των θεωρημάτων 3.66, 3.67, 3.70, και 3.74.

Θεώρημα 4.10 *Έστω S συμπαγής δεξιά τοπολογική ημιομάδα. Τότε*

(i) *Κάθε δεξί ιδεώδες της S περιέχει ένα ελαχιστικό δεξί ιδεώδες με ταυτοδύναμο στοιχείο.*

(ii) *Αν $L \subset S$ τότε το L είναι ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες της S ανν υπάρχει ταυτοδύναμο $e \in E\left(K(S)\right)$ τ.ω $T = Se$.*

(iii) *Αν $R \subset S$ τότε το R είναι ελαχιστικό δεξί ιδεώδες της S ανν υπάρχει ταυτοδύναμο $e \in E\left(K(S)\right)$ τ.ω $T = eS$.*

(iv) *Δοθέντος οποιουδήποτε ελαχιστικού αριστερού ιδεώδους L του S και οποιουδήποτε ελαχιστικού δεξιού ιδεώδους R της S, υπάρχει ταυτοδύναμο στοιχείο $e \in R \cap L$ τ.ω $R \cap L = eSe$ και eSe ομάδα.*

Θεώρημα 4.11 *Έστω S συμπαγής δεξιά τοπολογική ημιομάδα. Τότε S έχει ένα ελάχιστο ιδεώδες $K(S)$ το οποίο ισούται με την ένωση όλων των ελαχιστικών αριστερών(δεξιών) ιδεωδών της S τα οποία αποτελούν μία διαμέριση του $K(S)$.*

Θεώρημα 4.12 *Έστω S συμπαγής δεξιά τοπολογική ημιομάδα και $e \in E(S)$. Τότε ισχύουν τα συμπεράσματα του θεωρήματος 3.67.*

4.2 Η Επέκταση της Πράξης στο βS

Είναι προφανές ότι αν η ημιομάδα S είναι εφοδιασμένη με την διακριτή τοπολογία τότε αυτή είναι μία τοπολογική ημιομάδα την οποία θα ονομάζουμε *διακριτή ημιομάδα* (**discrete semigroup**). Σε αυτή την ενότητα θα δούμε πώς μπορούμε να επεκτείνουμε την πράξη μίας διακριτής ημιομάδας S στην Stone-Čech συμπαγοποίηση της βS, κάνοντας τη μία συμπαγή δεξιά τοπολογική ημιομάδα.

Θεώρημα 4.13 *Έστω S μία διακριτή ημιομάδα εφοδιασμένη με την πράξη "$\cdot$". Τότε υπάρχει μία μοναδική διμελής πράξη $* : \beta S \times \beta S \longrightarrow \beta S$ η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Η "$*$" είναι επέκταση της "$\cdot$" (δηλαδή $s * t = s \cdot t$ για κάθε $s, t \in S$).*

(ii) *Για κάθε $s \in S$ η $\lambda_s : \beta S \longrightarrow \beta S$ με $\lambda_s(\mathcal{U}) = s * \mathcal{U}$ είναι συνεχής.*

(iii) Για κάθε $\mathcal{U} \in \beta S$ η $\rho_{\mathcal{U}} : \beta S \longrightarrow \beta S$ με $\rho_s(\mathcal{V}) = \mathcal{V} * \mathcal{U}$ είναι συνεχής.

Απόδειξη
Θα αποδείξουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα συγχρόνως, κάνοντας διαδοχική χρήση της χαρακτηριστικής ιδιότητας ύπαρξης μοναδικής συνεχούς επέκτασης στην Stone-Ĉech συμπαγοποίηση ενός διακριτού χώρου. Έστω $l_s : S \longrightarrow S \subset \beta S$ με $l_s(t) = s \cdot t$ για κάθε $t \in S$. Τότε υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση $\lambda_s : \beta S \longrightarrow \beta S$ της l_s. Ορίζουμε $s * \mathcal{U} = \lambda_s(\mathcal{U})$ για κάθε $s \in S$ και $\mathcal{U} \in \beta S$ και βλέπουμε ότι οι (i) και (ii) ικανοποιούνται. Τώρα επεκτείνουμε την "$*$" στο $\beta S \times \beta S$. Έστω $r_{\mathcal{U}} : S \longrightarrow \beta S$ όπου $r_{\mathcal{U}}(s) = s*\mathcal{U} = \lambda_s(\mathcal{U})$. Τότε υπάρχει μοναδική επέκταση $\rho_{\mathcal{U}} : \beta S \longrightarrow \beta S$ της $r_{\mathcal{U}}$. Για κάθε $\mathcal{U} \in \beta S$ και $\mathcal{V} \in \beta S \setminus S$ ορίζουμε $\mathcal{V} * \mathcal{U} = \rho_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ και από τον ορισμό έχουμε ότι η (iii) ισχύει και η "$*$" είναι η μοναδική διμελής πράξη που ικανοποιεί και τις τρεις ιδιότητες. $\square$

Συνήθως την επέκταση της πράξης της S την συμβολίζουμε με το ίδιο σύμβολο που χρησιμοποιούμε και την πράξη της S. Ακόμα δεν έχουμε δείξει ότι $(\beta S, \cdot)$ είναι ημιομάδα, για να το κάνουμε αυτό πρέπει να αποδείξουμε την επιμεριστική ιδιότητα της πράξης.

Αν θυμηθούμε ότι το S είναι πυκνό στο βS λόγω του γεγονότος ότι η λ_s είναι συνεχής για κάθε $s \in S$ και η $\rho_{\mathcal{U}}$ είναι συνεχής για κάθε $\mathcal{U} \in \beta S$ βλέπουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω.

Παρατήρηση 4.14 Έστω S μία διακριτή ημιομάδα.

(i) Αν $s \in S$ και $\mathcal{U} \in \beta S$ τότε $s \cdot \mathcal{U} = \lim\limits_{t \to \mathcal{U}} s \cdot t$.

(ii) Αν $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι στοιχεία της βS, τότε $\mathcal{V} \cdot \mathcal{U} = \lim\limits_{s \to \mathcal{V}} (\lim\limits_{t \to \mathcal{U}} s \cdot t)$.

Παρατήρηση 4.15 Αν επιπλέον θυμηθούμε την Παρατήρηση 2.80 το Θεώρημα 2.83 και το γεγονός ότι αν $A \subset S$ τότε $\mathcal{U} \in \mathrm{Cl}_{\beta S} A$ ανν $A \in \mathcal{U}$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν $\mathcal{V}$,$\mathcal{U} \in \beta S$ με $V \in \mathcal{V}$ και $U \in \mathcal{U}$, τότε

$$\mathcal{V} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{V}\text{-}\lim_{s \in V} (\mathcal{U}\text{-}\lim_{t \in U} s \cdot t).$$

Το παρακάτω θεώρημα στην ουσία επιβεβαιώνει ότι το βS εφοδιασμένο με την επεκταμένη πράξη που ορίσαμε παραπάνω είναι μία ημιομάδα.

Θεώρημα 4.16 *Έστω S μία διακριτή ημιομάδα. Η επεκταμένη πράξη στην Stone Ĉech συμπαγοποίηση της βS είναι προσεταιριστική.*

Απόδειξη

Έστω $\mathcal{W},\mathcal{V},\mathcal{U} \in \beta S$. Τότε

$$\begin{aligned}(\mathcal{W}\cdot\mathcal{V})\cdot\mathcal{U} &= \lim_{q\to W}(q\cdot\mathcal{V})\cdot\mathcal{U} && (\text{Αφού } \rho_{\mathcal{U}}\circ\rho_{\mathcal{V}} \text{ συνεχής.})\\ &= \lim_{q\to W}\lim_{t\to\mathcal{V}}(q\cdot t)\cdot\mathcal{U} && (\text{Αφού } \rho_{\mathcal{U}}\circ\lambda_q \text{ συνεχής.})\\ &= \lim_{q\to W}\lim_{t\to\mathcal{V}}\lim_{s\to\mathcal{U}}(q\cdot t)\cdot s && (\text{Αφού } \lambda_{q\cdot t} \text{ συνεχής.})\end{aligned}$$

όμως

$$\begin{aligned}\lim_{q\to W}\lim_{t\to\mathcal{V}}\lim_{s\to\mathcal{U}}(q\cdot t)\cdot s &= \lim_{q\to W}\lim_{t\to\mathcal{V}}\lim_{s\to\mathcal{U}} q\cdot(t\cdot s)\\ &= \lim_{q\to W}\lim_{t\to\mathcal{V}} q\cdot(t\cdot\mathcal{U}) && (\text{Αφού } \lambda_q\circ\lambda_t \text{ συνεχής.})\\ &= \lim_{q\to W} q\cdot(\mathcal{V}\cdot\mathcal{U}) && (\text{Αφού } \lambda_q\circ\rho_{\mathcal{U}} \text{ συνεχής.})\\ &= \mathcal{W}\cdot(\mathcal{V}\cdot\mathcal{U}) && (\text{Αφού } \rho_{\mathcal{V}\cdot\mathcal{U}} \text{ συνεχής.})\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 4.17 Θα μπορούσαμε κάλλιστα να κάνουμε την επέκταση της πράξης με διαφορετική σειρά οπότε θα καταλήγαμε σε μία πράξη με την οποία το βS θα ήταν συμπαγής αριστερά τοπολογική ημιομάδα. Αν συνδυαστεί αυτό το γεγονός με την Παρατήρηση 4.3 καταλαβαίνει κανείς ότι πρέπει να είναι πολύ προσεκτικός όταν ερμηνεύει σχετικά αποτελέσματα.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η επεκταμένη πράξη και τα ομοιόμορφα όρια συμπεριφέρονται ακριβώς όπως θα θέλαμε.

Θεώρημα 4.18 *Έστω $(S,\cdot)$ ημιομάδα, X τοπολογικός χώρος, $(x_s)_{s\in S}$ οικογένεια στοιχείων του X και $\mathcal{V},\mathcal{U} \in \beta S$. Αν όλα τα όρια που εμπλέκονται υπάρχουν τότε*

$$(\mathcal{V}\cdot\mathcal{U})-\lim_{v\in S} x_v = \mathcal{V}-\lim_{s\in S}(\mathcal{U}-\lim_{t\in S} x_{st})$$

Απόδειξη

Θέτουμε $z = (\mathcal{V}\cdot\mathcal{U}) - \lim\limits_{v\in S} x_v$ και για κάθε $s \in S$ θέτουμε $y_s = \mathcal{U}-\lim\limits_{t\in S} x_{st}$. Έστω $\mathcal{V}-\lim\limits_{s\in S} y_s \neq z$ και έστω U, V ανοιχτές και ξένες μεταξύ τους περιοχές του $\mathcal{V}-\lim\limits_{s\in S} y_s$

και z αντίστοιχα. Θέτουμε $A = \{ v \in S \mid x_v \in V \}$ και $B = \{ s \in S \mid y_s \in U \}$. Τότε $\in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U} = \rho_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ και $B \in \mathcal{V}$. Το $\widehat{A}$ είναι μία βασική περιοχή του $\rho_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ και από την συνέχεια της $\rho_{\mathcal{U}}$ μπορούμε να βρούμε βασική περιοχή $\widehat{C}$ του $\mathcal{V}$ τ.ω $\rho_{\mathcal{U}}[\widehat{C}] \subset \widehat{A}$. Έχουμε ότι $B \cap C \in \mathcal{V}$, έστω $s \in B \cap C$ τότε $s \in B$ και άρα $\mathcal{U} - \lim_{t \in S} x_{st} \in U$. Έστω $D = \{ t \in S \mid x_{st} \in U \}$ τότε $D \in \mathcal{U}$. Αφού $s \in C$ πρέπει $s \cdot \mathcal{U} \in \widehat{A}$ και άρα $\widehat{A}$ είναι ανοιχτή περιοχή του $\lambda_s(\mathcal{U})$. Από συνέχεια της λ_s μπορούμε να επιλέξουμε $E \in \mathcal{U}$ τ.ω $\lambda_s[\widehat{E}] \subset \widehat{A}$. Τότε $D \cap E \in \mathcal{U}$ και έστω $t \in D \cap E$. Αφού το $t \in D$ έπεται ότι $x_{st} \in U$ και αφού $t \in E$ το $st \in A$ και άρα $x_{st} \in V$ δηλαδή $U \cap V \neq \varnothing$, άτοπο. □

Παρατήρηση 4.19 Αν θυμηθούμε τον χαρακτηρισμό των υπερφίλτρων ως ποσοδείκτες η πράξη μεταξύ υπερφίλτρων παίρνει την παρακάτω μορφή.

$$(\mathcal{V} \cdot \mathcal{U} v \in S) P(v) \iff (\mathcal{V} s \in S)(\mathcal{U} t \in S) P(st)$$

Τα ομοιόμορφα όρια και οι ποσοδείκτες είναι πολύ χρήσιμα εργαλεία, αφού οι διάφορες αποδείξεις μέσω αυτών είναι πολύ ευκολότερες από ότι θα ήταν αν προσπαθούσαμε να δούμε τα υπερφίλτρα απλώς σαν μία οικογένεια υποσυνόλων της S.

Για να δούμε ποια σύνολα είναι μέλη του υπερφίλτρου $\mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ θα πρέπει πρώτα να δώσουμε κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 4.20 Έστω S ημιομάδα, $A \subset S$ και $s \in S$. Τότε

(i) $s^{-1}A = \{ t \in S \mid st \in A \}$.

(ii) $As^{-1} = \{ t \in S \mid ts \in A \}$.

Αν χρησιμοποιείται προσθετικός συμβολισμός για την πράξη της ημιομάδας έχουμε αντίστοιχα:

(i) $-s + A = \{ t \in S \mid s + t \in A \}$.

(ii) $A - s = \{ t \in S \mid t + s \in A \}$.

Παρατήρηση 4.21 Το $s^{-1}A$ είναι απλώς ένας άλλος τρόπος να συμβολίσουμε το $\lambda_s^{-1}[A]$ και δεν απαιτεί την ύπαρξη αντιστρόφου του s. Αν το αντίστροφο υπάρχει το $s^{-1}A$ όπως το ορίσαμε συμπίπτει με τον συνήθη ορισμό που είναι $s^{-1}A =$

$\{s^{-1}\}A = \left\{ s^{-1}\alpha \in S \,\middle|\, \alpha \in A \right\}$ και άρα μπορούμε και εξακολουθούμε να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $sA = \{ s\alpha \mid \alpha \in A \}$ παραμένοντας συνεπείς. Είναι χρήσιμο να διαπιστώσει κανείς ότι $sB \subset A$ ανν $B \subset s^{-1}A$.

Θεώρημα 4.22 *Έστω S μία ημιομάδα και $A \subset S$. Τότε*

(i) Για κάθε $s \in S$ και $\mathcal{U} \in \beta S$ έχουμε ότι $A \in s \cdot \mathcal{U}$ ανν $s^{-1}A \in \mathcal{U}$.

(ii) Για κάθε $\mathcal{V}, \mathcal{U} \in \beta S$ έχουμε ότι $A \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ ανν $\left\{ s \in S \,\middle|\, s^{-1}A \in \mathcal{U} \right\} \in \mathcal{V}$.

Απόδειξη

(i) ($\Rightarrow$) Έστω $A \in s \cdot \mathcal{U}$ τότε $\widehat{A}$ είναι μία βασική περιοχή του $\lambda_s(\mathcal{U})$ και επομένως υπάρχει βασική περιοχή $\widehat{B}$ του $\mathcal{U}$ ώστε $\lambda_s[\widehat{B}] \subset \widehat{A}$. Επομένως $sB \subset A$ και άρα $B \subset s^{-1}A$ το οποίο σημαίνει ότι $s^{-1}A \in \mathcal{U}$.
($\Leftarrow$) Έστω ότι $s^{-1}A \in \mathcal{U}$ και $A \notin s \cdot \mathcal{U}$. Τότε $A^c \in s \cdot \mathcal{U}$ και επομένως όπως δείξαμε προηγουμένως $s^{-1}A^c \in \mathcal{U}$ το οποίο είναι άτοπο αφού $s^{-1}A \cap s^{-1}A^c = \varnothing$.

(ii) ($\Rightarrow$) Έστω $A \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ τότε $\widehat{A}$ είναι μία περιοχή του $\rho_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ και επομένως υπάρχει $B \in \mathcal{V}$ τ.ω $\rho_{\mathcal{U}}^{-1}[\widehat{B}] \subset \widehat{A}$ άρα για κάθε $s \in B$ ισχύει ότι $s \cdot \mathcal{U} \in \widehat{A}$ δηλαδή $A \in s \cdot \mathcal{U}$ και άρα $s^{-1}A \in \mathcal{U}$. Έτσι $B \subset \left\{ s \in S \,\middle|\, s^{-1}A \right\}$ και επομένως $\left\{ s \in S \,\middle|\, s^{-1}A \in \mathcal{U} \right\} \in \mathcal{V}$.
($\Leftarrow$) Αν υποθέσουμε ότι $\left\{ s \in S \,\middle|\, s^{-1}A \in \mathcal{U} \right\} \in \mathcal{V}$ και $A \notin \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$, τότε $A^c \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ και επομένως $\left\{ s \in S \,\middle|\, s^{-1}A^c \in \mathcal{U} \right\} \in \mathcal{V}$, όμως

$$\left\{ s \in S \,\middle|\, s^{-1}A \in \mathcal{U} \right\} \cap \left\{ s \in S \,\middle|\, s^{-1}A^c \in \mathcal{U} \right\} = \varnothing$$

και επομένως καταλήγουμε σε άτοπο. □

Για να καταλάβουμε την χρησιμότητα του συμβολισμού που υιοθετήσαμε είναι αρκετό να γράψουμε αναλυτικά το υπερφίλτρο $\mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$.

$$\mathcal{V} \cdot \mathcal{U} = \{ A \subset S \mid \{ s \in S \mid \{ t \in S \mid st \in A \} \in \mathcal{U} \} \in \mathcal{V} \}.$$

Υπάρχει ακόμα ένας τρόπος να περιγράψουμε τα στοιχεία του υπερφίλτρου $\mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$.

Πρόταση 4.23 *Έστω S μία ημιομάδα, $A \subset S$ και $\mathcal{V}, \mathcal{U}$ στοιχεία του βS. Το A είναι στοιχείο του $\mathcal{V}$ ανν υπάρχει $V \in \mathcal{V}$ και οικογένεια $(U_v)_{v \in V}$ στοιχείων του $\mathcal{U}$ ώστε $\bigcup_{v \in V} v \cdot U_v \subset A$.*

Απόδειξη

Έστω $A \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ τότε αν θέσουμε $V = \left\{ s \in S \;\middle|\; s^{-1}A \in \mathcal{U} \right\}$ και $U_s = s^{-1}A$ για κάθε $s \in V$ το $U_s \in \mathcal{U}$ με $V \in \mathcal{V}$ και αν $x \in \bigcup_{s \in V} s \cdot U_s$ τότε υπάρχει $t \in s^{-1}A$ ώστε $x = st$ δηλαδή $x \in A$. Αντιστρόφως αν υπάρχει $V \in \mathcal{V}$ και οικογένεια $(U_v)_{v \in V}$ στοιχείων του $\mathcal{U}$ ώστε $\bigcup_{v \in V} v \cdot U_v \subset A$ τότε $U_v = v^{-1} \bigcup_{v \in V} v \cdot U_v$ για κάθε $v \in V$ άρα

$$\left\{ s \in S \;\middle|\; v^{-1} \bigcup_{v \in V} v \cdot U_v \in \mathcal{U} \right\} \supset V \in \mathcal{V}$$

και επομένως $A \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$. □

Από αυτό τον χαρακτηρισμό μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

Πρόταση 4.24 *Έστω S μία ημιομάδα, $A, , C$ υποσύνολα της S και $\mathcal{V}, \mathcal{U} \in \beta S$.*

(i) Αν $A \in \mathcal{V}$ και $B \in \mathcal{U}$ τότε $A \cdot B \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$.

(ii) Αν T μία υποημιομάδα της S τότε $\widehat{T}$ υποημιομάδα του βS.

(iii) Αν L αριστερό ιδεώδες της S τότε $\widehat{L}$ είναι αριστερό ιδεώδες της βS.

(iv) Αν T μία υποημιομάδα της S τότε η υποημιομάδα $\widehat{T}$ της βS είναι ομοιομορφικά ισομορφική με την ημιομάδα βT που προκύπτει αν επεκτείνουμε την πράξη της T στο βT.

Απόδειξη

(i) Αν θέσουμε $U_\alpha = B \in \mathcal{U}$ για κάθε $\alpha \in A \in \mathcal{V}$ τότε $AB = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha U_\alpha \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$.

(ii) Από το (i) έπεται ότι $\widehat{A} \cdot \widehat{B} \subset \widehat{A \cdot B}$. Αν λοιπόν $AB \subset C$ τότε $\widehat{A} \cdot \widehat{B} \subset \widehat{C}$ και επομένως αν T υποημιομάδα της S τότε $\widehat{T} \cdot \widehat{T} \subset \widehat{T}$ δηλαδή $\widehat{T}$ υποημιομάδα της βS.

(iii) Έστω $\mathcal{V} \in \beta S$ και $\mathcal{U} \in \widehat{V}$ τότε $V \in \mathcal{U}$ αλλά επίσης $s^{-1}V \supset V$ για κάθε $s \in S$ και επομένως $S = \left\{ s \in S \;\middle|\; s^{-1}V \in \mathcal{U} \right\} \in \mathcal{V}$. Έτσι $V \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ δηλαδή $\mathcal{V} \cdot \mathcal{U} \in \widehat{V}$ και άρα το $\widehat{V}$ είναι αριστερό ιδεώδες της βS.

(iv) Στην παρατήρηση 2.72 περιγράψαμε πως κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{U} \in \widehat{T}$ μπορεί να ταυτιστεί με το υπερφίλτρο $\widetilde{U} = \{ B \cap T \mid B \in \mathcal{U} \}$ μέσω ενός ομοιομορφισμού. Θα δείξουμε ότι η αντιστοιχία αυτή είναι και ισομορφισμός δηλαδή ότι σέβεται τις πράξεις των $\widehat{T}$ και βT. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι $A \in f(\mathcal{V} \cdot \mathcal{U})$ τότε θα πρέπει να υπάρχει $A' \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ ώστε $A = A' \cap T$. Αυτό σημαίνει ότι $\left\{ s \in T \;\middle|\; s^{-1}A' \in \mathcal{U} \right\} \in \mathcal{V}$ και επομένως $\left\{ s \in S \;\middle|\; s^{-1}A \in f(\mathcal{U}) \right\} \in f(\mathcal{V})$ δηλαδή $A \in f(\mathcal{V}) \cdot f(\mathcal{U})$ όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $s^{-1}A' \in \mathcal{U}$ ανν $s^{-1}A' \cap T \in f(\mathcal{U})$ και επίσης ότι $s^{-1}A' \cap T \subset s^{-1}(A' \cap T)$. Τώρα αν $A \in f(\mathcal{V}) \cdot f(\mathcal{U})$ τότε θέτοντας $A = A' \cap T$ με $A' \subset S$ έχουμε ότι $\left\{ s \in T \;\middle|\; s^{-1}(A' \cap T) \in f(\mathcal{U}) \right\} \in f(\mathcal{V})$ αλλά $s^{-1}(A' \cap T) \subset T$ άρα

$$\left\{ s \in T \;\middle|\; s^{-1}A' \cap T \in f(\mathcal{U}) \right\} \in \mathcal{V}$$

από το οποίο έπεται ότι

$$\left\{ s \in S \;\middle|\; s^{-1}A' \in \mathcal{U} \right\} \cap T \in f(\mathcal{V})$$

δηλαδή $A' \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ και άρα $A \in f(\mathcal{V} \cdot \mathcal{U})$. □

Από το Θεώρημα 4.16 και το Θεώρημα 4.13 έπεται ότι βS είναι μία συμπαγής δεξιά τοπολογική ημιομάδα και επομένως ισχύουν για αυτή τα συμπεράσματα των θεωρημάτων της προηγούμενης ενότητας. Πιο συγκεκριμένα υπάρχει τουλάχιστον ένα ταυτοδύναμο στοιχείο $\mathcal{U} \in \beta S$ τέτοιο ώστε $\mathcal{U} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Ορισμός 4.25 Έστω S ημιομάδα, $A \subset S$ και $\mathcal{U} \in \beta S$. Τότε ορίζουμε το σύνολο $A^*(\mathcal{U})$ να είναι το σύνολο όλων των στοιχείων s του A για τα οποία $A \in s \cdot \mathcal{U}$.

$$A^*(\mathcal{U}) = \left\{ s \in A \;\middle|\; s^{-1}A \in \mathcal{U} \right\}.$$

Πολλές φορές για λόγους συντομίας θα γράφουμε A^* και όχι $A^*(\mathcal{U})$.

Πρόταση 4.26 *Έστω S ημιομάδα, $A \subset S$ και $\mathcal{U} \in \beta S$. Τότε το $\mathcal{U}$ είναι ταυτοδύναμο ανν $A^*(\mathcal{U})$ για κάθε $A \in \mathcal{U}$.*

Απόδειξη
Έστω $\mathcal{U}$ ένα ταυτοδύναμο υπερφίλτρο και $A \in \mathcal{U}$ τότε $A \in \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}$ και επομένως $\{ s \in S \mid s^{-1}A \in \mathcal{U} \} \in \mathcal{U}$ άρα $A^*(\mathcal{U}) = \{ s \in S \mid s^{-1}A \in \mathcal{U}\mathcal{U} \} \cap A \in \mathcal{U}$. Αν τώρα $A \in \mathcal{U}$ τότε $A^*(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$ και άρα $A \in \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}$ δηλαδή $\mathcal{U} \subset \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}$ και άρα $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}$. □

Λήμμα 4.27 *Έστω S μία ημιομάδα $A \subset S$ και $s, t \in S$. Τότε $s^{-1}(t^{-1}A) = (ts)^{-1}A$.*

Απόδειξη
Αν $x \in s^{-1}(t^{-1}A)$ τότε $sx \in t^{-1}A$ και επομένως $tsx \in A$ το οποίο σημαίνει ότι $x \in (ts)^{-1}A$. Αν $x \in (ts)^{-1}A$ τότε $tsx \in A$, επομένως $sx \in t^{-1}A$ και άρα $x \in s^{-1}(t^{-1}A)$. □

Πρόταση 4.28 *Έστω S μία ημιομάδα, $\mathcal{U}$ ένα ταυτοδύναμο υπερφίλτρο και $A \subset S$. Τότε $s^{-1}A^*(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$ για κάθε $s \in A^*(\mathcal{U})$.*

Απόδειξη
Έστω $s \in A^*(\mathcal{U})$ και $B = s^{-1}A$. Τότε $B \in \mathcal{U}$ και αφού το $\mathcal{U}$ είναι ταυτοδύναμο $B^*(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$. Θα δείξουμε ότι $B^*(\mathcal{U}) \subset s^{-1}A^*(\mathcal{U})$. Αν $t \in B^*(\mathcal{U})$, τότε $t \in B$ και άρα $st \in A$. Επιπλέον $t^{-1}B \in \mathcal{U}$ και επομένως $(st)^{-1}A \in \mathcal{U}$. Αφού $st \in A$ έχουμε ότι $st \in A^*(\mathcal{U})$ και άρα $t \in s^{-1}A^*(\mathcal{U})$. □

Παρατήρηση 4.29 Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι αν $\mathcal{U}$ ένα ταυτοδύναμο υπερφίλτρο $(A^*)^* = A^*$.

4.3 Το Θεώρημα του Hindman

Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα από την μελέτη της αλγεβρικής δομής της ημιομάδας βS σε ένα πρόβλημα που προέρχεται από τον κλάδο της *Συνδυαστικής* (**Combinatorics**) που ονομάζουμε *Θεωρία Ramsey* (**Ramsey Theory**).

Θα εισάγουμε ξεχωριστό συμβολισμό για πεπερασμένα γινόμενα και πεπερασμένα αθροίσματα, ανάλογα με το σύμβολο της πράξης της ημιομάδας στην οποία αναφερόμαστε. Επειδή γενικά ασχολούμαστε με μη αβελιανές ημιομάδες, η διάταξη σε ένα γινόμενο παίζει ρόλο και επομένως κάνουμε την σύμβαση αν F ένα πεπερασμένο υποσύνολο των φυσικών $\prod_{n \in F} x_n$ να είναι το γινόμενο που σχηματίζεται θεωρώντας αύξουσα σειρά των δεικτών.

Ορισμός 4.30 Ορίζουμε τα σύνολα των πεπερασμένων αθροισμάτων και πεπερασμένων γινομένων όπως παρακάτω.

(i) Έστω $(S, \cdot)$ μία ημιομάδα. Αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων της S τότε θέτουμε:

$$\mathrm{FP}\left((x_n)_{n \in \mathbb{N}}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \prod_{n \in F} x_n \;\middle|\; F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}.$$

Αν $(x_k)_{k=1}^n$ πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων της S τότε θέτουμε:

$$\mathrm{FP}\left((x_k)_{k=1}^n\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \prod_{k \in F} x_k \;\middle|\; F \in \mathcal{P}_f(\{1, 2, \ldots, n\}) \right\}.$$

(ii) Έστω $(S, +)$ μία ημιομάδα. Αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων της S τότε θέτουμε:

$$\mathrm{FS}\left((x_n)_{n \in \mathbb{N}}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{n \in F} x_n \;\middle|\; F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}.$$

Αν $(x_k)_{k=1}^n$ πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων της S τότε θέτουμε:

$$\mathrm{FS}\left((x_k)_{k=1}^n\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k \in F} x_k \;\middle|\; F \in \mathcal{P}_f(\{1, 2, \ldots, n\}) \right\}.$$

Το πρώτο αποτέλεσμα που θα παρουσιάσουμε σε αυτή την ενότητα είναι η απόδειξη των Galvin και Glazer του θεωρήματος που είναι γνωστό ως Finite Sums Theorem και αρχικά αποδείχτηκε από τον Hindman. Η απόδειξη αυτή ήταν η πρώτη εφαρμογή της αλγεβρικής δομής του βS στην Θεωρία Ramsey. Στην συνέχεια θα δώσουμε μία μεταγενέστερη πιο απλή απόδειξη.

Θεώρημα 4.31 *Έστω S μία ημιομάδα, $\mathcal{U}$ ένα ταυτοδύναμο στοιχείο της βS και $A \in \mathcal{U}$. Τότε υπάρχει μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων της S τ.ω* $\mathrm{FP}\left((x_n)_{n \in \mathbb{N}}\right) \subset A$.

Απόδειξη (Galvin-Glazer)

Θέτουμε $A_1 = A$ και $B_1 = \left\{ x \in S \;\middle|\; x^{-1} A_1 \in \mathcal{U} \right\}$. Αφού το $A_1 \in \mathcal{U}$ και $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}$ έχουμε ότι $B_1 \in \mathcal{U}$. Έτσι $A_1 \cap B_1 \neq \varnothing$ και άρα μπορούμε να επιλέξουμε

$x_1 \in A_1 \cap B_1$. Θέτουμε τώρα $A_2 = A_1 \cap (x_1^{-1} A_1)$ και παρατηρούμε ότι $A_2 \in \mathcal{U}$ αφού είναι τομή στοιχείων του $\mathcal{U}$. Επαγωγικά αν έχουμε κατασκευάσει το $A_n \in \mathcal{U}$ θέτουμε $B_n = \left\{ x \in S \;\middle|\; x^{-1} A_n \in \mathcal{U} \right\}$ και έχουμε ότι $B_n \in \mathcal{U}$ και άρα μπορούμε να επιλέξουμε ένα $x_n \in A_n \cap B_n$ και να θέσουμε $A_{n+1} = A_n \cap (x_n^{-1} A_n)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n < m$ ισχύει ότι $A_m \subset A_n$ και $A_m \subset x_n^{-1} A_n$.

Έχουμε λοιπόν κατασκευάσει μία ακολουθία στοιχείων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A. Θα δείξουμε με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του F ότι αν $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ και $m = \min F$ τότε $\prod_{n\in F} x_n \in A_m \subset A$ και επομένως $\mathrm{FP}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \subset A$.

Έστω $|F| = 1$, τότε

$$\prod_{n\in F} x_n = x_m \in A_m.$$

Έστω ότι $|F| > 1$. Θέτουμε $G = F \setminus \{m\}$ και $k = \min G$. Από την επαγωγική υπόθεση

$$\prod_{n\in G} x_n \in A_k$$

όμως $A_k \subset x_m^{-1} A_m$ διότι $m < k$ και επομένως

$$\prod_{n\in F} x_n = x_m \cdot \prod_{n\in G} x_n \in A_m.$$

□

Απόδειξη (Πιο σύντομη)

Έστω $A^* = A^*(\mathcal{U})$. Επιλέγουμε $x_1 \in A^*$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και υποθέστε ότι έχουμε επιλέξει τα $(x_k)_{k=1}^n$ έτσι ώστε $\mathrm{FP}\left((x_k)_{k=1}^n\right) \subset A^*$. Αν θέσουμε $B = \mathrm{FP}\left((x_k)_{k=1}^n\right)$ τότε το B είναι πεπερασμένο και για κάθε $b \in B$. Επίσης από την Πρόταση 4.28 έχουμε ότι $b^{-1} A^* \in \mathcal{U}$ και επομένως $\bigcap_{b\in B} b^{-1} A^* \in \mathcal{U}$. Επιλέγουμε λοιπόν $x_{n+1} \in A^* \cap \bigcap_{b\in B} b^{-1} A^*$. Τότε $x_{n+1} \in A^*$ και $b \cdot x_{n+1} \in A^*$ για κάθε $b \in B$ και άρα $\mathrm{FP}\left((x_k)_{k=1}^{n+1}\right) \subset A^* \subset A$. □

Πόρισμα 4.32 *Έστω S μία ημιομάδα και $m \in \mathbb{N}$. Αν $(A_i)_{i=1}^m$ πεπερασμένη οικογένεια υποσυνόλων της S τ.ω $S = \bigcup_{i=1}^m A_i$ τότε υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ και ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της S τ.ω $\mathrm{FP}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \subset A_i$.*

Απόδειξη
Αφού βS είναι συμπαγής δεξιά τοπολογική ημιομάδα υπάρχει ένα ταυτοδύναμο $\mathcal{U} \in \beta S$. Αφού $S \in \mathcal{U}$ υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ τ.ω $A_i \in \mathcal{U}$. Τώρα απλά εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.31. □

Παρατήρηση 4.33 Αν S σύνολο και $\{A_i\}_{i=1}^m$ μία πεπερασμένη διαμέριση του S τότε αυτή πολλές φορές λέγεται και χρωματισμός του S όπου κάθε A_i θεωρείται το σύνολο των στοιχείων του S που αντιστοιχούν στο χρώμα i.

Παρατήρηση 4.34 Αν $A_i = \bigcup_{j=1}^{m'} A_j$ τότε αφού $A_i \in \mathcal{U}$ υπάρχει $A_j \in \mathcal{U}$ και επομένως υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\mathrm{FP}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \subset A_j \subset A_i$.

Παρατήρηση 4.35 Αν υποθέσουμε ότι το ταυτοδύναμο υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ είναι επίσης μή τετριμμένο μπορούμε να κατασκευάσουμε την ακολουθία έτσι ώστε αυτή να είναι $1-1$ δηλαδή κάθε όρος της να είναι μοναδικός. Πράγματι αν το $\mathcal{U}$ είναι μη τετριμμένο κάθε στοιχείο του πρέπει να είναι άπειρο υποσύνολο της S. Επομένως σε κάθε βήμα της κατασκευής μπορούμε να επιλέγουμε τον επόμενο όρο από το σύνολο $\left(A_n \cap (x_n^{-1}A_n)\right) \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ γνωρίζοντας ότι αυτό δεν μπορεί να είναι κενό.

Πόρισμα 4.36 (Finite Sums Theorem) *Έστω $m \in \mathbb{N}$. Αν $(A_i)_{i=1}^m$ πεπερασμένη οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τ.ω $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^m A_i$ τότε υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ και ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathbb{N}$ τ.ω $\mathrm{FS}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \subset A_i$.* □

Παρατήρηση 4.37 Στην περίπτωση του Finite Sums Theorem (FST) λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της πρόσθεσης στους φυσικούς αριθμούς η σειρά στο πεπερασμένο άθροισμα δεν παίζει ρόλο. Επίσης αν $\mathcal{U}$ ένα ταυτοδύναμο υπερφίλτρο στους φυσικούς αριθμούς αυτό αναγκαστικά θα είναι μη τετριμμένο. Πραγματικά αφού η πράξη στα υπερφίλτρα είναι επέκταση της πρόσθεσης δεν γίνεται να έχουμε $n+n=n$ για κανένα $n \in \mathbb{N}$. Έτσι λόγω του της απειρίας των επιλογών που έχουμε σε κάθε βήμα κατασκευής της ακολουθίας, και της ολικής διάταξης του $\mathbb{N}$ στην περίπτωση των φυσικών αριθμών μπορούμε να επιλέξουμε την ακολουθία ώστε αυτή να είναι γνησίως αύξουσα αφού μπορούμε να επιλέγουμε κάθε φορά τον επόμενο όρο από το σύνολο

$$\left(A_n \cap (x_n^{-1}A_n)\right) \setminus \{1, 2, \ldots, x_n\}.$$

Το παρακάτω αποτέλεσμα του Hilbert είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας το FST.

Θεώρημα 4.38 (1892 Hilbert) *Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $N = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, μία πεπερασμένη ακολουθία $(x_k)_{k=1}^{n}$ στοιχείων του $\mathbb{N}$ και ένα άπειρο υποσύνολο B του $\mathbb{N}$ τ.ω να ισχύει ότι* FS $\left((x_k)_{k=1}^{n}\right) + B \subset A_i$.

Απόδειξη

Λόγω της παρατήρησης 4.37 η απόδειξη είναι πολύ απλή. Επιλέγουμε μία άπειρη και γνησίως αύξουσα ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τ.ω FS $\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \subset A_i$. Τώρα θέτουμε $(y_k)_{k=1}^{n} = (x_k)_{k=1}^{n}$ και $B = \{\, x_i \mid i > n \,\}$. Είναι προφανές ότι FS $\left((y_k)_{k=1}^{n}\right) + B \subset$ FS $\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \subset A_i$. □

Θεώρημα 4.39 (1916 Schur) *Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Τότε υπάρχει $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ και $x, y \in \mathbb{N}$ ώστε $\{x, y, x + y\} \subset A_i$.* □

Παρατήρηση 4.40 Παρατηρούμε ότι όλα τα παραπάνω θεωρήματα είναι της εξής μορφής: Έχουμε ένα σύνολο X και μία συλλογή $\mathcal{G}$ από "καλά" υποσύνολα του X. Στην συνέχεια υποθέτοντας ότι $X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ βγάζουμε το συμπέρασμα ότι υπάρχει A_i με την ιδιότητα ότι περιέχει ένα "καλό" υποσύνολο $G \in \mathcal{G}$ του X. Στο FST παραδείγματος χάριν τα $G \in \mathcal{G}$ είναι της μορφής $FS\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ ενώ για το Θεώρημα του Hilbert είναι της μορφής FS $\left((x_k)_{k=1}^{n}\right) + B$. Χωρίς να ακριβολογούμε θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε την θεωρία Ramsey ως τον κλάδο των μαθηματικών που αναζητά τα ζεύγη $(X, \mathcal{G})$ για τα οποία κάτι τέτοιο ισχύει.

Αν δεχτούμε τον παραπάνω ορισμό της θεωρίας Ramsey το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι κάθε ερώτημα της θεωρίας Ramsey είναι ένα ερώτημα που αφορά υπερφίλτρα.

Θεώρημα 4.41 *Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Οποτεδήποτε $m \in \mathbb{N}$ και $X = \bigcup_{i=1}^{m}$ υπάρχει $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ και $G \in \mathcal{G}$ τ.ω $G \subset A_i$.

(ii) Υπάρχει ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο X τ.ω για κάθε στοιχείο A του $\mathcal{U}$, υπάρχει $G \in \mathcal{G}$ με $G \subset A$.

Απόδειξη
(i)⇒(ii) Αν το κενό ανήκει στην $\mathcal{G}$ τότε το (ii) ικανοποιείται από κάθε υπερφίλτρο στο X. Έστω $\varnothing \notin \mathcal{G}$. Θέτουμε $\mathcal{A} = \{\, B \subset X \mid (\forall G \in \mathcal{G}) B \cap G \neq \varnothing \,\}$. Τότε $\mathcal{A} \neq \varnothing$ αφού $X \in \mathcal{A}$ και η $\mathcal{A}$ έχει την FIP αφού αν $\bigcap_{k=1}^{n} B_k = \varnothing$ για κάποια $\{B\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{A}$ τότε $X = \bigcup_{k=1}^{n} B_k^c$ και επομένως από την υπόθεση υπάρχει $G \in \mathcal{G}$ και k ώστε $G \subset B_k^c$ δηλαδή $B_k \cap G = \varnothing$ άτοπο. Έτσι υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ που περιέχει την $\mathcal{A}$, ενώ για $A \in \mathcal{U}$ έχουμε $A^c \notin \mathcal{A}$ και άρα υπάρχει $G \in \mathcal{G}$ ώστε $G \subset A$.
(ii)⇒(i) Για κάποιο A_i ισχύει ότι $A_i \in \mathcal{U}$ και επομένως υπάρχει $G \in \mathcal{G}$ ώστε $G \subset A_i$. □

Σημειώσεις

Το Πόρισμα 4.36 έχει μία ιστορία η οποία αξίζει να ειπωθεί. Η εν' λόγω πρόταση ήταν αρχικά μία εικασία των Graham και Rothschild. Κάποια στιγμή το 1971 ο Galvin ρώτησε τον Erdös αν υπήρχε υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο $\mathbb{N}$ τ.ω αν $A \in \mathcal{U}$ τότε $\{\, x \in \mathbb{N} \mid -x + A \in \mathcal{U} \,\} \in \mathcal{U}$. Αργότερα ο Erdös έκανε την ίδια ερώτηση στον Comfort ο οποίος έθεσε το ερώτημα στον Hindman του οποίου ήταν υπεύθυνος καθηγητής.

Όταν ο Hindman ρώτησε τον Galvin γιατί ενδιαφερόταν για τέτοιου είδους υπερφίλτρα αυτός του είπε για την πολύ απλή απόδειξη που θα προέκυπτε στην εικασία των Graham και Rothchild αν τέτοια υπερφίλτρα υπήρχαν. Ο Hindman αργότερα απέδειξε ότι αν δεχτούμε την υπόθεση του συνεχούς, η εικασία των Graham και Rothchild είχε σαν συνέπεια την ύπαρξη τέτοιων υπερφίλτρων και το 1974 στο [9] έδωσε μία περίπλοκη απόδειξη αυτής χρησιμοποιώντας στοιχειώδη συνδυαστικά εργαλεία. Έτσι τέτοιου είδους υπερφίλτρα παρέμεναν επινοήματα της υπόθεσης του συνεχούς.

Όταν το 1975 ο Galvin ρώτησε τον Glazer αν μπορούσε να αποδειχθεί ότι τέτοια υπερφίλτρα υπήρχαν αυτός του απάντησε αμέσως "ναι!" σαστίζοντας τον Galvin ο οποίος του είπε ότι μάλλον δεν κατάλαβε ακριβώς τι εννοούσε διότι δεν γινόταν η απάντηση να ήταν τόσο απλή! Παρόλα αυτά ο Glazer είχε δίκιο και ο λόγος που μπόρεσε και απάντησε την ερώτηση του Galvin με τόση ευκολία ήταν ότι γνώρισε συγχρόνως τρία πράγματα. Πρώτον ότι κάθε συμπαγής δεξιά τοπολογική ημιομάδα έχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Το δεύτερο ότι ο χώρος $\beta\mathbb{N}$ δέχεται μία φυσική επέκταση της πρόσθεσης η οποία τον μετατρέπει σε μία συμπαγή δεξιά τοπολογική ημιομάδα. Αυτά τα γνώριζαν αρκετοί ακόμα μαθηματικοί αλλά ο Glazer γνώριζε επίσης ότι ο $\beta\mathbb{N}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ο χώρος των υπερφίλτρων του $\mathbb{N}$ και αν $\mathcal{V}$, $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ τότε $A \in \mathcal{V} + \mathcal{U}$ ανν $\{ x \in \mathbb{N} \mid -x + A \in \mathcal{U} \} \in \mathcal{V}$. Γνωρίζοντας αυτά τα τρία πράγματα το συμπέρασμα είναι πραγματικά άμεσο αφού τα υπερφίλτρα που έψαχνε ο Galvin ήταν ακριβώς τα ταυτοδύναμα στοιχεία του $\beta\mathbb{N}$.

Χαρακτηριστική είναι η δήλωση του ίδιου του Hindman όσον αφορά τα παραπάνω γεγονότα.

> "I never understood the original complicated proof (no, I did not plagiarize it), so when I was made aware of the above facts, I began a career-long love affair with the algebraic structure of the set of all ultrafilters on a discrete semigroup S."

Από τότε και ύστερα πολλά θεωρήματα της θεωρίας Ramsey αποδείχθηκαν χρησιμοποιώντας την αλγεβρική δομή του χώρου των υπερφίλτρων μίας ημιομάδας και για τα οποία ακόμα δεν έχει βρεθεί στοιχειώδης απόδειξη. Επιπλέον πολλές αποδείξεις τέτοιων αποτελεσμάτων έχουν απλουστευτεί σημαντικά.

5 Το Θεώρημα των Hales-Jewett

Σε αυτό το κεφάλαιο θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το θεώρημα που είναι γνωστό στην βιβλιογραφία με το όνομα Hales - Jewett [7]. Το αποτέλεσμα αυτό θεωρείται πάρα πολύ σημαντικό για την θεωρία Ramsey και πάρα πολλά θεωρήματα προκύπτουν από αυτό. Για την απόδειξη του θα χρειαστούμε όλο το φάσμα των εργαλείων που παρουσιάσαμε. Συγκεκριμένα εκτός της αλγεβρικής και τοπολογικής δομής της Stone Ĉech συμπαγοποίησης μίας διακριτής ημιομάδας, θα κάνουμε χρήση και της διάταξης που ορίσαμε στα ταυτοδύναμα στοιχεία.

5.1 Η Διατύπωση Του Θεωρήματος

Για την συνέχεια θα χρειαστούμε κάποιους ορισμούς. Θυμηθείτε ότι για $n \in \mathbb{N}$ υιοθετήσαμε την συνολοθεωρητικής προέλευσης σύμβαση $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Έστω A πεπερασμένο σύνολο χαρακτήρων και $v \notin A$ ένα σύμβολο που θα ονομάζουμε μεταβλητή. Θεωρούμε την ελεύθερη ημιομάδα $(W, ^\frown)$ των λέξεων στο αλφάβητο $A \cup \{v\}$, με πράξη την παράθεση σύμφωνα με τον ορισμό 3.6. Αν $w \in W$ με $w : n \longrightarrow A \cup \{v\}$ τότε το σύνολο $C = \{ w \in W \mid w[n] \subset A \}$ είναι το σύνολο των σταθερών λέξεων του οποίου τα στοιχεία θα συμβολίζουμε με c. Το συμπλήρωμα $W \setminus C \stackrel{\text{def}}{=} V$ του C ως προς W θα λέγεται και σύνολο μεταβλητών λέξεων. Βλέπουμε λοιπόν ότι το V είναι το σύνολο των λέξεων στις οποίες το v εμφανίζεται. Είναι φανερό ότι το C είναι μία υποημιομάδα της W και ότι το V είναι ιδεώδες της W και επομένως ισχύει ότι $x^\frown y \in C$ ανν $x, y \in C$.

Ορισμός 5.1 Για κάθε $\alpha \in A$ ορίζουμε την συνάρτηση $f_\alpha : A \cup \{v\} \longrightarrow C$ η οποία στέλνει κάθε στοιχείο του A στον εαυτό του ενώ το v στο α. Από την Πρόταση 3.11 υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $s_\alpha : W \longrightarrow C$ που επεκτείνει την f_α και τον οποίο θα ονομάσουμε συνάρτηση αντικατάστασης. Η συνάρτηση αντικατάστασης στέλνει κάθε $w \in W$ στο $s_\alpha(w) = c = c_0 c_1 \cdots c_{n-1}$ όπου

$$c_i = \begin{cases} w_i & \text{αν } w_i \in A \\ \alpha & \text{αν } w_i = v \end{cases} \quad \text{για κάθε } i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης αντικατάστασης έπεται άμεσα ότι ο περιορισμός της στο C είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Λήμμα 5.2 *Έστω $s_\alpha : W \longrightarrow C$ η συνάρτηση αντικατάστασης. Τότε υπάρχει μοναδικός συνεχής ομομορφισμός $\beta s_\alpha : \beta W \longrightarrow \beta C$ ο οποίος την επεκτείνει. Επιπλέον ο περιορισμός της βs_α στο βC είναι η ταυτοτική απεικόνιση.*

Απόδειξη

Πράγματι η s_α είναι συνεχής συνάρτηση από τον διακριτό χώρο W στο $C \subset \beta C$ και επομένως έχει μοναδική συνεχή επέκταση βs_α. Θα δείξουμε ότι η βs_α είναι και ομομορφισμός. Θυμηθείτε ότι η συνεχής επέκταση $\beta f : \beta S \longrightarrow K$ στο $\mathcal{U} \in \beta S$

παίρνει την τιμή $\beta f(\mathcal{U}) = \mathcal{U} - \lim_{s \in S} f(s)$. Έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{U}$ στοιχεία του βW.

$$\begin{aligned}
\beta s_\alpha \left(\mathcal{V}^\frown \mathcal{U}\right) &= \mathcal{V}^\frown \mathcal{U} - \lim_{w \in W} s_\alpha(w) \\
&= \mathcal{V} - \lim_{w \in W} \left(\mathcal{U} - \lim_{v \in W} s_\alpha\left(w^\frown v\right)\right) && \text{(Θεώρημα 4.18)} \\
&= \mathcal{V} - \lim_{w \in W} \left(\mathcal{U} - \lim_{v \in W} s_\alpha(w)^\frown s_\alpha(v)\right) && \text{(η } s_\alpha \text{ είναι ομομορφισμός)} \\
&= \mathcal{V} - \lim_{w \in W} \left(s_\alpha(w)\right)^\frown \beta s_\alpha(\mathcal{U}) && \text{(η } \lambda_{s_\alpha(w)} \text{ είναι συνεχής)} \\
&= \beta s_\alpha(\mathcal{V})^\frown \beta s_\alpha(\mathcal{U}) && \text{(η } \rho_{\beta s_\alpha(\mathcal{U})} \text{ είναι συνεχής)}
\end{aligned}$$

Επίσης για κάθε $\mathcal{U} \in \beta C$ έχουμε ότι $\beta s_\alpha(\mathcal{U}) = \mathcal{U} - \lim_{c \in C} s_\alpha(c) = \mathcal{U} - \lim_{c \in C} c = \mathcal{U}$. $\square$

5.2 Η Απόδειξη του Hales - Jewett

Θεώρημα 5.3 (Hales - Jewett 1963) *Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο χαρακτήρων με $v \notin A$ μία μεταβλητή, W το σύνολο των λέξεων από το αλφάβητο $A \cup \{v\}$ και C το σύνολο των σταθερών λέξεων. Αν $\{B_i\}_{i=1}^m$ ένας πεπερασμένος χρωματισμός του C, τότε υπάρχει μεταβλητή λέξη x και $i \in \{1, 2 \ldots, m\}$ ώστε $\{\ s_\alpha(x) \mid \alpha \in C\ \} \subset B_i$.*

Απόδειξη

Θεωρούμε την Stone Ĉech συμπαγοποίηση βW του W την οποία εφοδιάζουμε με την επέκταση της πράξης της παράθεσης με τρόπο τέτοιο ώστε αυτή να είναι μία συμπαγής δεξιά τοπολογική ημιομάδα.

Από την Πρόταση 4.24 έπεται ότι $\widehat{C}$ είναι μία υποημιομάδα της βW η οποία είναι ομοιομορφικά ισόμορφη με την βC και επομένως ταυτίζονται και από αλγεβρική και από τοπολογική άποψη. Όμοια ταυτίζουμε το $\widehat{V}$ με το βV το οποίο είναι επίσης και ιδεώδες της βW και επομένως $\mathcal{V}^\frown \mathcal{U} \in \widehat{C}$ ανν $\mathcal{V}$ και $\mathcal{U}$ στοιχεία της $\widehat{C}$. Επίσης αφού $V = W \setminus C$ έχουμε ότι $\widehat{V} \cap \widehat{C} = \varnothing$ και $\beta W = \widehat{V} \cup \widehat{C}$.

Η βC είναι συμπαγής δεξιά τοπολογική ημιομάδα και επομένως από το Πόρισμα 4.9 υπάρχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο $\mathcal{U}$ το οποίο είναι στοιχείο κάποιου ελαχιστικού αριστερού ιδεώδους της βC. Από το Πόρισμα 3.68 το $\mathcal{U}$ είναι ελαχιστικό (στο βC) ταυτοδύναμο. Η βW είναι επίσης δεξιά τοπολογική ημιομάδα και από το

Θεώρημα 3.69 έχει ένα ελαχιστικό ταυτοδύναμο $\mathcal{V}$ τ.ω $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ δηλαδή

$$\mathcal{V}^\frown\mathcal{U} = \mathcal{U}^\frown\mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Το $\mathcal{V} \in \beta W^\frown\mathcal{V}$ το οποίο είναι ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες και το ελάχιστο ιδεώδες $K(\beta W)$ είναι η ένωση όλων των ελαχιστικών αριστερών ιδεωδών. Το $\beta V = \widehat{V}$ είναι ιδεώδες και επομένως περιέχει το $K(\beta W)$ δηλαδή το $\mathcal{V} \in \widehat{V}$ και άρα $V \in \mathcal{V}$. Αυτό επίσης σημαίνει ότι $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\beta s_\alpha(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$ για κάθε $\alpha \in A$. Πράγματι λόγω του ότι $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ και του γεγονότος ότι η βs_α είναι ομομορφισμός που περιορισμένος στο βC είναι η ταυτοτική συνάρτηση έχουμε ότι:

$$\beta s_\alpha(\mathcal{V}) = \beta s_\alpha\left(\mathcal{V}^\frown\mathcal{U}\right) = \beta s_\alpha(\mathcal{V})^\frown\beta s_\alpha(\mathcal{U}) = \beta s_\alpha(\mathcal{V})^\frown\mathcal{U}$$

και

$$\beta s_\alpha(\mathcal{V}) = \beta s_\alpha\left(\mathcal{U}^\frown\mathcal{V}\right) = \beta s_\alpha(\mathcal{U})^\frown\beta s_\alpha(\mathcal{V}) = \mathcal{U}^\frown\beta s_\alpha(\mathcal{V})$$

δηλαδή $\beta s_\alpha(\mathcal{V}) \leq \mathcal{U}$ με $\beta s_\alpha(\mathcal{V}) \in \beta C$ και άρα από την ελαχιστικότητα του $\mathcal{U}$ στο βC έπεται ότι $\beta s_\alpha(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$.

Αφού η οικογένεια $\{B_i\}_{i=1}^m$ είναι μία πεπερασμένη διαμέριση του C και $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο C θα πρέπει να υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ώστε $B_i \in \mathcal{U}$ όμως $\mathcal{U} = \beta s_\alpha(\mathcal{V}) = \mathcal{V}-\lim_{c \in C} s_\alpha(c)$ για κάθε $\alpha \in A$. Αυτό από το Θεώρημα 2.98 έπεται ότι $s_\alpha^{-1}[B_i] \in \mathcal{V}$ για κάθε $\alpha \in A$ το οποίο μαζί με το γεγονός ότι $V \in \mathcal{V}$ σημαίνει ότι

$$V \cap \bigcap_{\alpha \in A} s_\alpha^{-1}[B_i] \neq \varnothing$$

ως πεπερασμένη τομή στοιχείων του υπερφίλτρου $\mathcal{V}$. Επομένως μπορούμε να επιλέξουμε ένα $x \in V \cap \bigcap_{\alpha \in A} s_\alpha^{-1}[B_i]$ για το οποίο βλέπουμε ότι είναι μεταβλητή λέξη και η εικόνα του μέσω οποιασδήποτε αντικατάστασης βρίσκεται στο B_i. □

5.3 Εφαρμογές του Hales - Jewett

Παρακάτω θα δούμε μερικά ακόμη θεωρήματα από την περιοχή της συνδυαστικής θεωρίας τα οποία μπορούν να προκύψουν εύκολα με την χρήση του θεωρήματος Hales-Jewett. Το πρώτο θεώρημα είναι το θεώρημα του van der Waerden [22] ο οποίος έδωσε μία απόδειξη σε αυτό το θεώρημα το 1927.

Θεώρημα 5.4 (Van De Waerden 1927) *Έστω ότι έχουμε μία πεπερασμένη διαμέριση (χρωματισμό) $\{B_i\}_{i=1}^m$ του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχουν $l, d \in \mathbb{N}$ και $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ώστε να ισχύει $\{\, l + \alpha d \mid 0 \leq \alpha \leq n \,\} \subset B_i$. Δηλαδή μπορούμε να βρούμε μονοχρωματικές αριθμητικές προόδους φυσικών αριθμών οποιουδήποτε μήκους.*

Απόδειξη
Έστω $\{B_i\}_{i=1}^m$ ένας χρωματισμός του $\mathbb{N}$ και $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το αλφάβητο $A = \{0, 1, \ldots, n\}$ και μία μεταβλητή v. Όπως και στο θεώρημα Hales-Jewett θεωρούμε το σύνολο W των λέξεων από το αλφάβητο $A \cup \{v\}$ το σύνολο C των σταθερών λέξεων και V το σύνολο των λέξεων όπου η v εμφανίζεται.

Ορίζουμε την συνάρτηση $f : C \longrightarrow \mathbb{N}$ με $f(c) = \sum_{c_i \in c} c_i$ δηλαδή η συνάρτηση f αθροίζει τους χαρακτήρες της λέξης c. Παρατηρούμε ότι για κάθε $c \in C$ υπάρχει ακριβώς ένα χρώμα B_i για το οποίο $f(c) \in B_i$. Έτσι ο χρωματισμός $\{B_i\}_{i=1}^m$ του $\mathbb{N}$ επάγει ένα χρωματισμό $\{A_i\}_{i=1}^m$ του C για τον οποίο ισχύει ότι $c \in A_i$ αν $f(c) \in B_i$.

Από το θεώρημα Hales-Jewett έχουμε ότι υπάρχει μεταβλητή λέξη $x \in V$ και χρώμα A_i τ.ω $s_\alpha(x) \in A_i$ για κάθε $\alpha \in A$. Αν τώρα θέσουμε ως d το πλήθος των εμφανίσεων της v στην x και $l = \sum_{v_i \neq v} v_i$ το άθροισμα των χαρακτήρων της μεταβλητής λέξης x που είναι διάφοροι της v έχουμε ότι $f(s_\alpha(x)) = l + \alpha d$ όμως $s_\alpha(x) \in A_i$ για κάθε $\alpha \in A$ και επομένως $l + \alpha d \in B_i$ για κάθε $\alpha \in \{0, 1, 2 \ldots, n\}$ δηλαδή υπάρχει μία μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος μήκους $n + 1$. $\square$

Από το θεώρημα Van De Waerden μπορούμε να βγάλουμε ως πόρισμα μία φαινομενικά πιο ισχυρή πρόταση.

Πόρισμα 5.5 *Έστω $\{B_i\}_{i=1}^m$ ένας χρωματισμός του $\mathbb{N}$ τότε υπάρχει ένα B_i το οποίο περιέχει αριθμητικές προόδους οποιουδήποτε μήκους.*

Απόδειξη
Πράγματι για να το δούμε αυτό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν κάποιο B_i περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους n τότε προφανώς περιέχει και αριθμητική πρόοδο μήκους k για οποιοδήποτε k μικρότερο του n. Έστω λοιπόν ότι δεν υπάρχει B_i

το οποίο να περιέχει αριθμητικές προόδους αυθαίρετου μήκους. Τότε για κάθε B_i υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ ώστε το B_i να μην περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους n_i. Αν θέσουμε $n = \max\{x_i\}$ θα έχουμε από το Van de Waerden ότι υπάρχει B_i το οποίο περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους n. Όμως αφού $n_i \leq n$ το B_i περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους n_i το οποίο είναι άτοπο. □

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε μία γενίκευση του θεωρήματος Van De Waerden οποία είναι γνωστή και ως Θεωρημα Gallai για αβελιανές ομάδες. Η απόδειξη μίας ειδικής περίπτωσης του παρακάτω πρωτοδημοσιεύτηκε στο [13] από τον Rado. Σύμφωνα με το [18] ο Gallai που τότε λεγόταν Grünwald παρόλο που είχε βρει μία απόδειξη δεν την είχε δημοσιεύσει όπως το συνήθιζε.

Πόρισμα 5.6 (Gallai) *Έστω $(S,+)$ αβελιανή ομάδα, F ένα πεπερασμένο υποσύνολο της S και $\{B_i\}_{i=1}^m$ ένας πεπερασμένος χρωματισμός της S. Τότε υπάρχουν B_i, $\alpha \in S$ και $d \in \mathbb{N}$ ώστε $\{\, \alpha + d \cdot e \mid e \in E \,\} \subset B_i$.*

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι πανομοιότυπη με αυτή του Van De Waerden. Θεωρούμε το σύνολο των λέξεων με χαρακτήρες από το αλφάβητο $E \cup \{v\}$ όπου $v \notin E$ μία μεταβλητή και $f : C \longrightarrow S$ με $f(c) = \sum_{e \in c} e$. □

Θα κλείσουμε δίνοντας μια γενίκευση του Hales-Jewett. Αυτή τη φορά θα επιτρέψουμε στην συνάρτηση αντικατάστασης $s : W \longrightarrow C$ να αντικαθιστά την μεταβλητή v με οποιαδήποτε σταθερή λέξη. Το συμπέρασμα παραμένει το ίδιο.

Θεώρημα 5.7 *Έστω A πεπερασμένο σύνολο χαρακτήρων, $v \notin A$ μία μεταβλητή, W το σύνολο των λέξεων από το αλφάβητο $A \cup \{v\}$ και C το σύνολο των σταθερών λέξεων. Αν $\{B_i\}_{i=1}^m$ ένας πεπερασμένος χρωματισμός του C, τότε υπάρχει μεταβλητή λέξη x ώστε όλες οι λέξεις που προκύπτουν από αντικαταστάσεις της v με λέξεις από το C να έχουν το ίδιο χρώμα.*

Απόδειξη

Όπως στον ορισμό 5.1 αλλά για κάθε $c \in C$ ορίζουμε την συνάρτηση $f_c : A \cup \{v\} \longrightarrow C$ η οποία στέλνει κάθε στοιχείο του A στον εαυτό του ενώ το v το στέλνει στην λέξη c. Αυτή θα έχει μία επέκταση s_c σε όλο το W η οποία θα είναι ομομορφισμός που περιορισμένος στο C να είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Αυτά τα δεδομένα είναι τα μόνα που χρειάζονται ώστε αυτός με την σειρά του να μπορεί να επεκταθεί σε έναν συνεχή ομομορφισμό βs_c στο βW ο οποίος περιορισμένος στο βC να είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Η συνέχεια της απόδειξης είναι εντελώς πανομοιότυπη με την απόδειξη του θεωρήματος Hales-Jewett που δώσαμε παραπάνω. $\square$

Επίλογος

Σε αυτή την εργασία καταπιαστήκαμε με τις βασικές έννοιες της θεωρίας των υπερφίλτρων και είδαμε κάποιους από τους τρόπους, με τους οποίους μπορούμε να εφαρμόσουμε τις τοπολογικές και αλγεβρικές ιδιότητες των υπερφίλτρων, για να δώσουμε σχετικά απλές αποδείξεις σε μή τετριμμένα προβλήματα.

Εκτός από τα ταυτοδύναμα υπερφίλτρα υπάρχουν και άλλα είδη *ειδικών υπερφίλτρων* (**special ultrafilters**), οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των οποίων τα καθιστά ένα χρήσιμο εργαλείο για τις εφαρμογές. Παραδείγματος χάριν τα *επιλεκτικά υπερφίλτρα* (**selective ultrafilters**) και τα P-points που είναι μία ευρύτερη κλάση από αυτά. Ειδικότερα η κινητικότητα στην έρευνα που αφορά τα υπερφίλτρα στο $\mathbb{N}$ είναι αξιοσημείωτη ενώ οι εφαρμογές που προκύπτουν μέσα από την χρήση τους φαίνονται ανεξάντλητες.

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] A. Blass. A model without ultrafilters. *Bull. Acad. Sci. Polon., Ser. Sci. Math. Astr. Phys*, 25:329–331, 1977. 26

[2] Henri Cartan. Théorie des filtres. *CR Acad. Paris*, 205:595–598, 1937. 19

[3] Henri Cartan. Filtres et ultrafiltres. *CR Acad. Paris*, 205:777–779, 1937. 19

[4] W. W. Comfort and S. Negrepontis. *The theory of ultrafilters*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1974. ISBN 9783540066040. URL `http://books.google.com/books?id=f3R2QgAACAAJ`. 19

[5] Z. Frolík. Sums of ultrafilters. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 73(1):87–91, 1967. 56

[6] Harry Furstenberg. On the infinitude of primes. *The American Mathematical Monthly*, 62(5):p. 353, 1955. ISSN 00029890. URL `http://www.jstor.org/stable/2307043`. iv, viii, 12

[7] A. W. Hales and R. I. Jewett. Regularity and positional games. *Trans. Am. Math. Soc.*, 106: 222–229, 1963. iii, v, vii, ix, 109

[8] J. D. Halpern and A. Lévy. The boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice. In *Proc. of Symposium Pure Math. of the AMS*, volume 13, pages 83–134, 1971. 26

[9] N. Hindman. Finite sums from sequences within cells of a partition of n. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 17(1):1–11, 1974. iii, v, vii, ix, 106

[10] N. Hindman and D. Strauss. *Algebra in the Stone-Ĉech compactification: theory and applications*. De Gruyter expositions in mathematics. Walter de Gruyter, 1998. ISBN 9783110154207. URL `http://books.google.com/books?id=KYXgdiegKDsC`. 19, 57

[11] E. H. Moore and H. L. Smith. A general theory of limits. *American Journal of Mathematics*, 44(2):102–121, 1922. ISSN 00029327. URL `http://www.jstor.org/stable/2370388`. 17

[12] J. R. Munkres. *Topology a first course*. Prentice-Hall, 1974. ISBN 9780139254956. URL `http://books.google.com/books?id=LtEPAQAAMAAJ`. 1

[13] R. Rado. Note on combinatorial analysis. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):122, 1945. v, ix, 114

[14] D. Rees. On semi-groups. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 36, pages 387–400, 1940. v, viii, 88

[15] F. Riesz. Stetigkeitsbegriff und abstrakte mengenlehr. 1908. iii, vii, 19

[16] D. J. S. Robinson. *An introduction to abstract algebra*. De Gruyter textbook. Walter de Gruyter, 2003. ISBN 9783110175448. URL `http://books.google.com/books?id=OVkoCcszEZ0C`. 57

[17] H. L. Smith. A general theory of limits. *National Mathematics Magazine*, 12(8):371–379, 1938. ISSN 15395588. URL `http://www.jstor.org/stable/3028618`. 17

[18] A. Soifer. *Ramsey Theory: Yesterday, Today, and Tomorrow*, volume 285. Birkhauser, 2010. 114

[19] L. A. Steen and J. A. Seebach. *Counterexamples in topology*. Dover books on mathematics. Dover Publications, 1995. ISBN 9780486687353. URL `http://books.google.com/books?id=DkEuGkOtSrUC`. 16

[20] A. Suschkewitsch. Über die endlichen gruppen ohne das gesetz der eindeutigen umkehrbarkeit. *Mathematische Annalen*, 99(1):30–50, 1928. v, viii, 88

[21] A. Tarski. Une contribution à la théorie de la mesure. *Fund. Math*, 15:42–50, 1930. 22

[22] B. L. van der Waerden. Beweis einer baudetschen vermutung. *Nieuw Arch. Wisk*, 15: 212–216, 1927. iii, v, vii, ix, 113

[23] R. C. Walker. *The Stone-Ĉech compactification*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 1974. ISBN 9783540066996. URL `http://www.google.com/books?id=INDDtx2yJXsC`. 56

[24] S. Willard. *General Topology*. Dover books on mathematics. Dover Publications, 2004. ISBN 9780486434797. URL http://www.google.com/books?id=-o8xJQ7Ag2cC. 1

[25] Σ. Αργυρός. Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης. 2004. URL http://www.semfe.gr/files/users/795/pragmatiki_book.pdf. 13

[26] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, and Β. Φαρμάκη. *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*. Συμμετρία, 1997. 1

“I never understood the original complicated proof (no, I did not plagiarize it), so when I was made aware of the above facts, I began a career-long love affair with the algebraic structure of the set of ultrafilters on a discrete semigroup S.”

N. Hindman

Τομέας Μαθηματικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο