Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συμπαγείς Τελεστές σε χώρους Banach

Επιμέλεια:

Αριστείδης Αλευρομάγειρος

Επιβλέπων καθηγητής:

Δημήτρης Κραββαρίτης

21 Νοεμβρίου 2011

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το παρών σύγγραμμα αποτελεί μια πτυχιακή εργασία βασιζόμενη στη θεωρία τελεστών. Οι συμπαγείς τελεστές οι οποίοι είναι και το θέμα το οποιο πραγματεύται αυτη η πτυχιακή εργασία, συνιστούν μια σημαντική κλάση φραγμένων τελεστών. Η ιδέα προέρχεται απο την θεωρία ολοκληρωτικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Επίσης παρέχουν μια φυσική γενίκευση τελεστών με εύρος πεπερασμένης διάστασης. Ένα από τα βασικά προβλήματα στη θεωρία τελεστών, που παραμένει μέχρι σήμερα αναπάντητο, είναι το πρόβλημα του αναλλοίωτου υποχώρου: *Αν κάθε φραγμένος τελεστής T σε ένα χώρο Banach E έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο.* Στην περίπτωση που είναι $E = l^1$, έχει δοθεί απάντηση από τον P.Enflo πρώτα (το 1981) και αργότερα (το 1984) από τον C.J.Read. Οι Enflo και Read έδωσαν παραδείγματα φραγμένων τελεστών στον l^1, οι οποίοι δεν έχουν μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο. Είναι άγνωστο όμως μέχρι σήμερα, ποιοι χώροι Banach έχουν αυτή την ιδιότητα του l^1. Το πρόβλημα παραμένει ακόμα ανοικτό ακόμα και στην περίπτωση που ο E είναι ανακλαστικός χώρος Banach ή χώρος Hilbert. Θετική απάντηση έχει δοθεί για συγκεκριμένους τελεστές και για ειδικές κατηγορίες τελεστών, όπως είναι οι συμπαγείς τελεστές.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία των συμπαγών τελεστών σε χώρους Banach, η θεώρια Riesz-Fredholm, το πρόβλημα του αναλλοίωτου υποχώρου καθώς και η θεωρία ασθενών συμπαγών τελεστών. Στην παραγραφο αυτη επισης δίνονται δύο σημαντικά παραδείγματα συμπαγών τελεστών οι Hilbert Schmidt και οι trace-class τελεστές.

Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται τη φασματική ανάλυση των συμπαγών τελεστών καθώς και των αυτοσυζυγών συμπαγών τελεστών. Επίσης στο κεφαλαίο αυτό δίνεται ένα παράδειγμα ολοκληρωτικού τελεστή του οποίου βρίσκεται το φάσμα και οι ιδιοσυναρτήσεις του.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στο φασματικό θεώρημα, πρώτα για φυσιολογικούς τελεστές σε χώρους πεπερασμένης διάστασης και κατόπιν για συμπαγείς αυτοσυζυγείς και συμπαγείς φυσιολογικούς τελεστές, σε απειροδιάστατους χώρους. Το κεφάλαιο κλείνει με διάφορες εφαρμογές του φασματικού θεωρήματος.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο της διπλωματικής δίνονται ορισμενα παραδείγματα συμπαγών ολοκληρωτικών τελεστών όπως είναι οι τελεστές Fredholm και Voltera. Στο τέλος της πτυχιακής εργασίας υπάρχουν: πίνακας συμβόλων, ευρετήριο ελληνικών και ξενόγλωσσων όρων και ένα παράρτημα θεωρίας,στοιχεία χρησιμα για τον αναγνώστη.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Δημήτριο Κραββαρίτη για την πολύτιμη βοήθεια του που είχα στην επιλυση διαφόρων προβλημάτων που παρουσιάστηκαν καθώς και για το θετικό κλίμα συνεργασίας που φρόντισε νας δημιουργήσει από την πρώτη στιγμή.

Κεφάλαιο 1

Θεωρία Συμπαγών Τελεστών

1.1 Συμπαγείς Τελεστές

Ορισμοί 1.1.1

1. *Έστω E και F δυο χώροι Banach.Θα λεμέ οτι ενας τελεστής T* $\in \mathcal{L}(E,F)$ *είναι συμπαγής αν το T(B_E) είναι σχετικά συμπαγές για την ισχυρή τοπολογία. Συμβολίζουμε με* $\mathcal{K}(E,F)$ *το σύνολο των συμπαγών τελεστών και θέτουμε* $\mathcal{K}(E)$=$\mathcal{K}(E,E)$.

2. *Ένας τελεστής T σε ένα χωρο Banach E καλείται συμπαγής τελεστής (ή απόλυτα συνεχής τελεστής) αν, για κάθε φραγμένη ακολουθία (x_n) στον E, η ακολουθία (Tx_n) περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Πρόταση 1.1.1 *Οι συμπαγείς τελεστές είναι φραγμένοι.*

Απόδειξη. Αν ένας τελεστής T δεν είναι φραγμένος, τότε υπάρχει μια ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε $||x_n||$=1, για ολα τα n $\in \mathbb{N}$ και $||(Tx_n)|| \to \infty$. Τότε η (Tx_n) δεν περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία, το οποίο σημαίνει οτι ο τελεστής T δεν είναι συμπαγής. *Άτοπο*, άρα οι συμπαγείς τελεστές είναι φραγμένοι. ■

Πρόταση 1.1.2 *Το σύνολο των συμπαγών τελεστών $\mathcal{K}(E)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}(E)$.*

Απόδειξη.

i. Έστω A, B $\in \mathcal{K}(E)$ και (x_n) μια φραγμένη ακολουθία στοιχείων του E. Τότε, επειδή:

- ο A είναι συμπαγής έπεται οτι υπάρχει υπακολουθία (x_{i_n}) της (x_n), ώστε η (Ax_{i_n}) να συγκλίνει.
- ο B είναι συμπαγής έπεται οτι υπάρχει υπακολουθία ($x_{i_{n_k}}$) της (x_{i_n}), ώστε η ($Bx_{i_{n_k}}$) να συγκλίνει.

Τότε η ακολουθία (A+B)$x_{i_{n_k}}$ συγκλίνει και είναι μια υπακολουθία της ακολουθίας (A+B)x_n. Άρα (A+B) $\in \mathcal{K}(E)$.

ii. Έστω A $\in \mathcal{K}(E)$, (x_n) μια φραγμένη ακολουθία στοιχείων του E και λ $\in \mathbb{C}$. Τότε, επειδή:

- ο A είναι συμπαγής έπεται οτι υπάρχει υπακολουθία (x_{i_n}) της (x_n), ώστε η (Ax_{i_n}) να συγκλίνει.

Τότε η ακολουθία (λAx_{i_n}) συγκλίνει και είναι μια υπακολουθία της ακολουθίας (λAx_n). Άρα (λA) $\in \mathcal{K}(E)$.

Συνεπώς το σύνολο των συμπαγών τελεστών $\mathcal{K}(E)$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}(E)$.

■

Πρόταση 1.1.3 *Κάθε τελεστής σε έναν πεπερασμένης διάστασης χώρο Hilbert είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν T είναι ένας τελεστής στον $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, τότε είναι φραγμένος. Επιπλέον, αν (x_n) είναι μία φραγμένη ακολουθία, τότε η (Tx_n) είναι μια φραγμένη ακολουθια στον $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass η (Tx_n) περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. ■

Θεώρημα 1.1.1 *Έστω T ένας συμπαγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H και έστω S ένας φραγμένος τελεστής στον H. Τότε TS και ST είναι συμπαγείς.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) μια φραγμένη ακολουθία στον H. Εφόσον ο S είναι φραγμένος, η ακολουθία (Sx_n) είναι φραγμένη. Επίσης αφού ο T είναι συμπαγής, η ακολουθία (TSx_n) περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, το οποίο σημαίνει οτι ο TS είναι συμπαγής. Όμοια, εφόσον ο T είναι συμπαγής, η ακολουθία (Tx_n) περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (Tx_{p_n}). Όμως, εφόσον S είναι φραγμένος (και άρα συνεχής), η ακολουθία (STx_{p_n}) συγκλίνει. Άρα ο τελεστής ST είναι συμπαγής. ■

Πόρισμα 1.1.1 *Έστω E ένας απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε:*

1. *Ο ταυτοτικός τελεστής I δεν είναι συμπαγής, παρ' ολο που είναι φραγμένος.*
   Πράγματι, έστω μια ορθοκανονική ακολουθία (e_n) στον E. Τότε η ακολουθία $Ie_n = e_n$ δεν περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα $I \notin \mathcal{K}(E)$ άρα $\mathcal{K}(E) \subsetneqq \mathcal{B}(E)$.

2. *Κάθε αντιστρέψιμος τελεστής του $\mathcal{L}(E)$ δεν είναι συμπαγής.*
   Έστω $T \in \mathcal{K}(E)$, T αντιστρέψιμος. Τότε $T^{-1} \in \mathcal{B}(E)$ $TT^{-1} = I \in \mathcal{K}(E)$, Άτοπο.

Παρατηρήσεις 1.1.1

1. *Οι φραγμένοι τελεστές δεν είναι απαραίτητα και συμπαγείς.*

2. *Ενας συνεχής τελεστής είναι πεπερασμένου βαθμού αν το εύρος του είναι πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή αν $dimR(T) < \infty$.*

3. *Το σύνολο όλων των συμπαγών τελεστών σε ένα χώρο Hilbert H είναι ένας διανυσματικός χώρος.*

4. *Έστω S ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Ο τελεστής προβολής P_S είναι συμπαγής τελεστής.*

Θεώρημα 1.1.2 *Το σύνολο $\mathcal{K}(E, F)$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{L}(E, F)$ (για τη νόρμα $||\cdot||_{\mathcal{L}(E,F)}$).*

Απόδειξη. Υποθετουμε ότι $T_n \in \mathcal{K}(E,F)$,$T \in \mathcal{L}(E,F)$ και $||T_n\text{-}T||_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$. Επειδη ο F είναι πλήρης ως χώρος Banach, αρκεί να δείξουμε οτι για κάθε ε>0 το $T(B_E)$ μπορεί να καλυφθεί με έναν πεπερασμένο αριθμό από μπάλες $B(f_i,\varepsilon)$ του F. Έστω n σταθερό τέτοιο ώστε $||T_n\text{-}T||_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon/2$. Επειδή το $T_n(B_E)$ είναι σχετικά συμπαγές ισχύει $T_n(B_E) \subset \bigcup_{i\in I} B(f_i,\varepsilon/2)$ με I πεπερασμένο. Άρα $T(B_E) \subset \bigcup_{i\in I} B(f_i,\varepsilon)$. ■

Πόρισμα 1.1.2 *Έστω (T_n) μια ακολουθία συνεχών τελεστών πεπερασμένου βαθμού απο τον E στον F και $T \in \mathcal{L}(E,F)$ τέτοια ώστε $||T_n\text{-}T||_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$. Τότε $T \in \mathcal{K}(E,F)$.*

Πόρισμα 1.1.3 *Το περίφημο **πρόβλημα της προσεγγίσεως** (Banach-Grothendieck) αφορά το αντίστροφο του παραπάνω πορίσματος, δηλαδή για δεδομένο συμπαγή τελεστή υπάρχει ακολουθία τελεστών (T_n) πεπερασμένου βαθμού τέτοια ώστε $||T_n\text{-}T||_{L(E,F)} \to 0$.*

Απόδειξη. Γενικά η απάντηση είναι αρνητική ακόμα και για ορισμένους κλειστούς υποχώρους του l^p ($1<p<\infty, p\neq 2$). Ωστόσο είναι δυνατό να υπάρξει λύση του προβλήματος της προσεγγίσεως στην περίπτωση που ο F είναι χώρος Hilbert. Πράγματι έστω $K=\overline{T(B_E)}$. Για δεδομένο ε>0 καλύπτουμε το K με $\bigcup_{i\in I} B(f,\varepsilon)$, I πεπερασμένο. Έστω G γραμμικός χώρος που παράγεται απο τα f_i και έστω $T_\varepsilon = P_G \circ T$ (ο T_ε είναι πεπερασμένου βαθμού). Θα δείξουμε οτι $||T_\varepsilon\text{-}T||_{L(E,F)} < 2\varepsilon$. Αν $x \in B_E$, τότε υπάρχει $\iota_0 \in I$ τέτοιο ώστε

$$||Tx - f_{i_o}|| < \varepsilon \tag{1.1.3.α}$$

άρα

$$||P_G \circ T - P_G f_{io}|| < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$||P_G \circ T - f_{i_o}|| < \varepsilon \tag{1.1.3.β}$$

Συνδυάζοντας τις (1.1.3.α) και (1.1.3.β), βλέπουμε ότι

$$||P_G \circ T - Tx|| < \varepsilon \;\; \forall x \in B_E,$$

δηλαδή,

$$||T_\varepsilon - T|_{\mathrm{L(E,F)}} < 2\varepsilon$$

■

Θεώρημα 1.1.3 *Έστω A $\in \mathcal{K}(H)$ και (T_n), $T_n \in \mathcal{B}(H)$ μια φραγμένη ακολουθία τελεστών, τέτοια ώστε $||T_n x - Tx|| \to 0$ για κάθε x $\in$ H. Τότε T $\in \mathcal{L}(H)$ και $||T_n A - TA|| \to 0$, δηλαδή $T_n A \xrightarrow{||\ ||} TA$.*

Απόδειξη. Αν $||T_n|| \leq c$ για κάθε n $\in \mathbb{N}$, τότε $||Tx|| = \lim_n ||T_n x|| \leq c||x||$. Άρα $||T|| \leq ||c||$ Έστω ότι $||T_n A - TA|| \nrightarrow 0$. Τότε υπάρχει ε > 0 και υπακολουθία (T_{n_i}) ώστε $||T_{n_i} A - TA|| >$ ε. Επομένως υπάρχει ακολουθία (x_{n_i}), $||x_{n_i}|| = 1$ τέτοια ώστε $||T_{n_i} A x_{n_i} - TAx_{n_i}|| >$ ε. Επειδή ο A είναι συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία (x_{n_j}) της x_{n_i}, τέτοια ώστε η (Ax_{n_j}) να συγκλίνει, έστω στο y. Άρα

$$\begin{aligned}\varepsilon < ||T_{n_j} A x_{n_j} - TAx_{n_j}|| &\leq ||(T_{n_j} - T)(Ax_{n_j} - y)|| + ||(T_{n_j} - T)y|| \\ &\leq 2c||Ax_{n_j} - y|| + ||T_{n_j} y - Ty|| \to 0,\end{aligned}$$

άτοπο. Επομένως $||T_n A - TA|| \to 0$. ■

Πόρισμα 1.1.4 *Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, τότε A $\in \mathcal{K}(H)$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία τελεστών πεπερασμένης τάξης, η οποία να συγκλίνει ως προς την τοπολογία της νόρμας, στον A.*

Απόδειξη. Έστω A $\in \mathcal{K}(H)$, (x_n) μια ορθοκανονική βάση του H και οι τελεστές $E_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i$. Οι E_n, n $\in \mathbb{N}^*$ είναι ορθογώνιες προβολές, οπότε $||E_n|| = 1$ για κάθε n $\in \mathbb{N}^*$. Άρα οι (E_n) είναι φραγμένη ακολουθία και για κάθε x $\in$ H είναι $\lim_n E_n x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i = x = Ix$. Επομένως από το προηγούμενο θεώρημα (1.1.4), έπεται $||E_n A - A|| \to 0$. Όμως οι E_n είναι πεπερασμένης τάξης (rankE_n = n), οπότε και οι $E_n A$ είναι πεπερασμένης τάξής.
Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα από την πρόταση (1.1.2), αφού καθε πεπερασμένης τάξης τελεστής είναι συμπαγής.

■

Θεώρημα 1.1.4 *Ο συζυγής ενός συμπαγούς τελεστή σε ένα χώρο Hilbert ειναι συμπαγής και αντίστροφα.*

Απόδειξη. Έστω T ένας συμπαγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H και έστω (x_n) μια φραγμένη ακολουθία στον H, τέτοια ώστε, $||x_n|| \leq M$ για κάποια M και για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $y_n=T^* x_n$, n=1,2....Εφόσον T^* είναι φραγμένος, η ακολουθία y_n είναι φραγμένη. Επιπλέον περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία y_{k_n} τέτοια ώστε η ακολουθία Ty_{k_n} να συγκλίνει στον H. Τώρα για κάθε $n,m \in \mathbb{N}$, έχουμε

- $$\begin{aligned} ||y_{k_m} - y_{k_n}|| &= ||T^* x_{k_m} - T^* x_{k_n}||^2 \\ &=< T^*(x_{k_m} - x_{k_n}), T^*(x_{k_m} - x_{k_n}) > \\ &=< TT^*(x_{k_m} - x_{k_n}), (x_{k_m} - x_{k_n}) > \\ &\leq ||TT^*(x_{k_m} - x_{k_n})|| ||x_{k_m} - x_{k_n}|| \\ &\leq 2M||(Ty_{k_m} - Ty_{k_n})|| \to 0. \end{aligned}$$

  όταν $m,n \to \infty$. Επομένως y_{k_n} είναι μια ακολουθία Cauchy στον H, το οποίο υποδηλώνει ότι η y_{k_n} συγκλίνει. Αυτό αποδεικνύει οτι ο T^* είναι συμπαγής τελεστής.

- Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $T^* \in \mathcal{K}(H)$, τοτε θα δείξουμε οτι $T \in \mathcal{K}(H)$. Από τα παραπάνω προκύπτει οτι $T^{**} \in \mathcal{K}(H)$ και επειδή $T^{**}(H)=T(H)$ συνεπάγεται ότι ο τελεστής T είναι συμπαγής.

■

Λήμμα 1.1.1 *Έστω S ένα υποσύνολο ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο τέτοιο ώστε η γραμμική θήκη του S να είναι πυκνή στο E. Αν (x_n) μια φραγμένη ακολουθία στον E και*

$$< x_n, y > \to < x, y > \forall y \in S,$$

τότε

$$x_n \xrightarrow{w} x.$$

Λήμμα 1.1.2 *Ασθενώς συγκλίνουσες ακολουθίες σε ένα χώρο Hilbert είναι φραγμένες, δηλαδή αν (x_n) είναι μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία, τότε υπάρχει ένας αριθμός M τέτοιος ώστε $||x_n|| \leq M$ για ολα τα $n \in \mathbb{N}$*

Θεώρημα 1.1.5 *Ένας τελεστής T σε ένα χώρο Hilbert H είναι συμπαγής αν και μόνο αν ισχύει η συνεπαγωγη,* $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow Tx_n \to Tx$.

Απόδειξη. Έστω T ένας συμπαγής τελεστής. Υποθέτουμε ότι $x_n \xrightarrow{w} x$ και ότι $Tx_n \nrightarrow Tx$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και μία υπακολουθία x_{p_n} της x_n τέτοια ώστε

$$||Tx_{p_n} - Tx|| > \varepsilon \tag{1.1.5.α}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον η ακολουθία x_{p_n} είναι ασθενώς συγκλίνουσα, τότε απο το παραπάνω λήμμα είναι και φραγμένη. Η συμπάγεια του T υποδηλώνει ότι η ακολουθία Tx_{p_n} έχει μια ισχυρώς συγκλίνουσα υπακολουθία Tx_{q_n}. Επίσης, για κάθε $y \in H$ έχουμε,

$$< Tx_n, y >=< x_n, T^*y > \ \to \ < x, T^*y >=< Tx, y >,$$

έτσι ώστε $T\, x_n \xrightarrow{w} Tx$ και $Tx_{q_n} \xrightarrow{w} Tx$. Εφόσον ήδη γνωρίζουμε ότι η ακολουθία (Tx_{q_n}) είναι ισχυρώς συγκλίνουσα και οτι συγκλίνει ασθενως έχουμε ότι $Tx_{q_n} \to Tx$. Αυτό ομως αντιτίθεται στην σχέση (1.1.5.α)

Υποθέτουμε τώρα ότι ο τελεστής T είναι τέτοιος ώστε $Tx_n \to Tx$ όποτε $x_n \xrightarrow{w} x$. Έστω (z_n) μια αυθαίρετη φραγμένη ακολουθία στον H. Θέλουμε να δείξουμε ότι η (Tz_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω (e_n) μία πλήρης ορθοκανονική ακολουθία στον H και έστω M μία σταθερά τέτοια ώστε $||z_n)|| \leq M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον

$$| < z_n, e_1 > | \leq M,$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $z_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(z_{1,n})$ τέτοια ώστε η ακολουθία $|<z_n,e_1>|$ να συγκλίνει. Όμοια, αφού

$$| < z_{1,n}, e_2 > | \leq M,$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $z_{1,n})$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(z_{2,n})$ τέτοια ώστε η ακολουθία $|<z_{2,n},e_2>| \leq M$ να συγκλίνει. Όμοια, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, κατασκευάζουμε ακολουθλιες (z_m, n), m=1,2,3..... τέτοιες ώστε

1. $(z_{m+1,n})$ είναι μία υπακολουθία της $(z_{m,n})$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και

2. το όριο $\lim\limits_{n\to\infty}\langle z_{m,n}, e_m>$ υπάρχει για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Τώρα ορίζουμε

$$x_n = z_{n,n}, \quad n = 1, 2$$

Προφανώς, η (x_n) είναι μια υπακολουθία (z_n) και το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} < x_n, e_n >$ υπάρχει για κάθε για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η (x_n) είναι ασθενώς συγκλίνουσα. Ορίζουμε

$$a_k = \lim_{n\to\infty} < x_n, e_k > \quad k = 1, 2, ...$$

Για κάθε $l,n \in \mathbb{N}$ έχουμε,

$$\sum_{k=1}^{l} | < x_n, e_k > |^2 \leq \sum | < x_n, e_k > |^2 = ||x_n||^2 \leq M^2.$$

Αρχικά αφήνωντας το n να τρέξει στο άπειρο δηλαδή $n \to \infty$ έχουμε,

$$\sum_{k=1}^{l} |a_k|^2 \leq M^2,$$

και έπειτα, αφήνωντας το l να τρέξει στο άπειρο δηλαδή $\to \infty$ έχουμε,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq M^2$$

Ορίζουμε

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε,

$$\begin{aligned} < x_n, e_m > - < z, e_m > &=< x_n, e_m > - \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, e_m \right\} \\ &=< x_n, e_m > - < a_m e_m, e_m > \\ &=< x_n, e_m > - a_m \to 0 \quad \kappa\alpha\theta\omega\varsigma \quad n \to \infty \end{aligned}$$

Συνεπώς, $<x_n,e_m> \to <z,e_m>$ καθώς το $n \to \infty$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Εφόσον η θήκη $e_1,e_2,.....$ είναι πυκνή στον H, έπεται από το λήμμα 1.1 ότι $x_n \xrightarrow{w} z$. Επομένως $Tx_n \to Tz$. ■

Πόρισμα 1.1.5 *Αν T είναι ένας συμπαγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H και (x_n) είναι μία ορθοκανονική ακολουθία στον H, τότε* $\lim_{n\to\infty} Tx_n \to 0$.

Απόδειξη. Οι ορθοκανονικές ακολουθίες συγκλίνουν ασθενώς στο 0. ■

Παρατηρήσεις 1.1.2

1. *Απο το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι ο αντίστροφος ενός συμπαγούς τελεστή σε έναν απειροδιάστατο χώρο Banach, αν υπάρχει, είναι μη-φραγμένος.*

2. *Οι φραγμένοι τελεστές είναι ακριβώς αυτοί οι τελεστές που απεικονίζουν ισχυρώς συγκλίνουσες ακολουθίες σε ισχυρώς συγκλίνουσες ακολουθίες. Το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύει ότι οι συγμπαγείς τελεστές σε ένα χώρο Hilbert μπορούν να χαρακτηριστούν ως εκείνοι οι τελεστές οι οποίοι απεικονίζουν ασθενώς συγκλίνουσες ακολουθίες σε ισχυρώς συγκλίνουσες ακολουθίες. Από αυτήν την σκοπιά, η συμπάγεια των τελεστών είναι μία ισχυρότερη μορφή συνέχειας. Για αυτό το λόγο οι συμπαγείς τελεστές συχνά καλούνται και ως απόλυτα συνεχείς τελεστές. Η παραπάνω συνθήκη έχει χρησιμοποιηθεί απο τον F.Riesz σαν ορισμός για την συμπάγεια τελεστών. Αντίθετα ο Hilbert χρησιμοποίησε τον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό για τους συμπαγείς τελεστές.*

Ορισμός 1.1.2 *Αν E και F είναι χώροι Banach και* $T \in \mathcal{K}(E, F)$, *τότε ο T είναι απόλυτα συνεχής αν για κάθε ακολουθία (x_n) στον E τέτοια ώστε* $x_n \xrightarrow{w} x$ *έπεται ότι* $||Tx_n - Tx|| \to 0$.

Πρόταση 1.1.4 *Αν T είναι ένας συμπαγής τελεστής, τότε ο T είναι απόλυτα συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) μια ακολουθία στον E τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow{w} 0$. Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος έχουμε M = $\sup||x_n|| \leq \infty$. Ως εκ τούτου $(Tx_n) \subseteq \overline{TB_E}$. Χώρις βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε οτι $M \leq 1$.Εφόσον ο T είναι συμπαγής, υπάρχει μια υπακολουθία (x_{n_k}) και ενα y στον F τέτοιο ώστε $||Tx_{n_k} - y|| \to 0$. Όμως $x_{n_k} \xrightarrow{w} 0$ και ο T είναι συνεχης απο τον E στον F με την ασθενη τοπολογία. Συνεπώς $(Tx_{n_k}) \xrightarrow{w} 0$. Οπότε y = 0. Αφού το 0 είναι το μοναδικό σημείο συσσώρευσης της (Tx_n) και η ακολουθία αυτή περιέχεται σε συμπαγές σύνολο έπεται ότι $||Tx_n|| \to 0$. ■

1.2 Η θεωρία Riesz-Fredholm

Λήμμα 1.2.1 *(**Λήμμα Riesz**) Έστω E ένας γραμμικός χώρος με νόρμα και M⊂E ένας κλειστός υπόχωρος τέτοιος ώστε M≠E. Τότε*

$$\forall \varepsilon > 0 \ni u \in E \ \ \tau\epsilon\tau o\iota o \ \ \omega\sigma\tau\epsilon \ \ ||u|| = 1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ dist(u, M) \geq 1.$$

Απόδειξη. Έστω v $\in$ E και v $\notin$ M. Επειδή ο M είναι κλειστός υπόχωρος, έχουμε d = dist(v,M) $>$ 0. Επιλέγουμε $m_0 \in$ M τέτοιο ώστε

$$d \leq ||v - m_0|| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

τότε το

$$u = \frac{v - m_0}{||v - m_0||}$$

είναι το ζητούμενο. Πράγματι αν m $\in$ M, έχουμε

$$||u - m|| = \left\| v - m_0 ||v - m_0|| - m \right\| \geq 1 - \varepsilon,$$

αφού

$$m_0 + ||v - m_0|| m \in M$$

■

Παρατήρηση 1.2.1 *Αν dimM$< \infty$ (ή, γενικότερα αν ο M είναι ανακλαστικός), μπορούμε να επιλέξουμε ε=0 στο παραπάνω λήμμα, αλλά όχι στη γενική περίπτωση.*

Θεώρημα 1.2.1 *(**Riesz**) Έστω E ένας γραμμικός χώρος με νόρμα τέτοιος ώστε η B_E να είναι συμπαγής. Τότε ο E είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο ας υποθέσουμε οτι ο E είναι απείρου διαστάσεως. Τότε υπάρχει ακολουθία υποχώρων (E_n) πεπερασμένης διαστάσεως τέτοια ώστε $E_{n-1} \subsetneqq E_n$. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα (1.2.1) μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία (u_n) με $||u_n||$ = 1 και dist(u_n,$E_{n-1} \geq \frac{1}{2}$. Ειδικότερα, $||u_n$-$u_m|| \geq \frac{1}{2}$ για m<n. Άρα η ακολουθία (u_n) δεν έχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία,γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση οτι η B_E είναι συμπαγής. ■

Θεώρημα 1.2.2 ***(Εναλλακτικότητα Fredholm)*** *Έστω $T \in \mathcal{K}(E)$. Τότε*

1. *ο N(I - T) είναι πεπερασμένης διάστασης,*

2. *ο R(I - T) είναι κλειστός και, ακριβέστερα*

$$R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$$

3. *N(I - T) = $\{$ 0 $\}$ <=> R(I - T) = E*

4. *dimN(I - T) = dimN(I - T*)*

Παρατήρηση 1.2.2 *Η εναλλακτικότητα Fredholm αφόρα την επίλυση της εξίσωσης u - Tu = f. Εκφράζει ότι: είτε για κάθε f $\in$ E η εξίσωση u - Tu = f έχει μοναδική λυση, είτε η ομογενής εξίσωση u - Tu = 0 έχει n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις και, στην περίπτωση αυτή, η μη ομογενής εξίσωση u - Tu = f είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η f ικανοποιεί n συνθήκες ορθογωνιότητας (δηλαδή f $\in$ N(I - T*)$^{\perp}$).*

Παρατήρηση 1.2.3 *Η τρίτη ιδιότητα είναι γνωστή ως πεπερασμένη διάσταση. Αν dimE $< \infty$, ένας γραμμικός τελεστής από τον E στον εαυτό του είναι αμφιμονοσήμαντος αν και μονο αν είναι επί. Αντίθετα, σε απειρη διάσταση ένας φραγμένος τελεστής μπορεί να είναι αμφιμονοσήμαντος χώρις να είναι και επί και αντίστροφα: π.χ., η μετακίνηση δεξία (αντ. αριστερά) στον (l^2). Συνεπώς, το τρίτο συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος εκφράζει μια αξιοσημείωτη ιδιότητα τελεστών της μορφής (I - T) $\in \mathcal{K}(E)$.*

Απόδειξη.

1. Έστω E_1 = N(I - T). Τότε $B_{E_1} \subset T(B_E)$ και άρα η B_{E_1} είναι συμπαγής. Από το θεώρημα (1.2.1) του Riesz, ο E_1 είναι πεπερασμένης διάστασης.

2. Έστω $f_n = u_n - Tu_n \to f$. Πρέπει να δείξουμε ότι f $\in$ R(I - T). Θέτουμε $d_n = dist(u_n, N(I - T))$. Επειδη ο N(I - T) είναι πεπερασμένης διάστασης ύπαρχει $\upsilon_n \in$ N(I - T) τέτοιο ώστε

d_n = $||u_n$ - $\upsilon_n||$. Έχουμε

$$f_n = (u_n - \upsilon_n) - T(u_n - \upsilon_n). \tag{1.2.2.α}$$

Θα δείξουμε ότι η $||u_n$ - $\upsilon_n||$ είναι φραγμένη. Με απαγωγή σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει υπακολουθία τέτοια ώστε $||u_{n_k}$ - $\upsilon_{n_k}|| \to \infty$. Θέτοντας w_n = $\frac{u_n - \upsilon_n}{||u_n - \upsilon_n||}$, θα είχαμε τότε λόγω της (1.2.2.α), w_{n_k} - $Tw_{n_k} \to \infty$. Εξάγοντας μια υπακολουθία από την (w_{n_k}) (την οποία σημειώνουμε για απλούστευση πάλι με (w_{n_k})) μπόρουμε να υποθέσουμε ότι $Tw_{n_k} \to$ z. Άρα $w_{n_k} \to$ z και z $\in$ N(I - T).
Εξάλλου,

$$dist(w_n, N(I - T)) = \frac{dist(u_n, N(I - T)}{||u_n - \upsilon_n||} = 1$$

(αφού $u_n \in$ N(I - T). Στο όριο παίρνουμε dist(z,N(I - T) = 1, που είναι *άτοπο*. Επομένως, η $||u_n$ - $\upsilon_n||$ παραμένει φραγμένη και, επειδή ο T είναι συμπαγής μπορούμε να εξάγουμε μία υπακολουθία τέτοια ώστε T($||u_{n_k}$ - $\upsilon_{n_k}||$) $\to$ l. Από την (1.2.2.α), προκύπτει ότι u_{n_k} - $\upsilon_{n_k} \to$ f + l. Θέτοντας g = f + l έχουμε g - Tg = f, δηλαδή f $\in$ R(I - T). Άρα έχουμε αποδείξει ότι ο τελεστής I - T είναι μια κλειστή εικόνα. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τις σχέσεις,

$$R(I - T) = N(I - T^*)^{\perp} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; R(I - T^*) = N(I - T)^{\perp}.$$

3. • Θα δείξουμε πρώτα τη συνεπαγωγή =>. Με απαγωγή σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι

$$E_1 = R(I - T) \neq E.$$

Ο E_1 είναι χώρος Banach και T(E_1) $\subset$ E_1. Άρα $T_{|E_1} \in \mathcal{K}(E_1)$ και ο E_2 = (I - T)(E_1) είναι ένας κλειστός υπόχωρος του E_1. Επιπλέον $E_2 \neq E_1$ (αφου (I - T) αμφιμονοσήμαντος). Θέτοντας E_n = (I - T)^n(E) παίρνουμε έτσι μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποχώρων. Σύμφωνα με το λήμμα (1.2.1) του Riesz, υπάρχει ακολουθία (u_n) τέτοια ώστε $u_n \in E_n$, $||u_n||$ = 1 και dist(u_n,E_{n+1}) $\geq \frac{1}{2}$. Έχουμε

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m).$$

Σημειώνουμε ότι, αν n > m, τότε $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$ και επομένως

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in E_{m+1}.$$

Άρα $||Tu_n - Tu_m|| \geq \frac{1}{2}$ που είναι *άτοπο* αφού ο T είναι συμπαγής. Συνεπώς R(I - T) = E.

- Αντίστροφα, υποθέτουμε οτι R(I - T) = E. Τότε λόγω της σχέσης $N(T^*) = R(T)^\perp$ έχουμε $N(I - T^*) = R(I - T)^\perp = \{0\}$. Επειδή $T^* \in \mathcal{K}(E')$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω στον T^* και να συμπεραίνουμε ότι $R(I - T^*) = E'$. Επομένως λόγω της σχέσης $N(T) = R(T^*)^\perp$ έχουμε ότι $N(I - T) = R(I - T^*) = \{0\}$.

4. Έστω d = dimN(I - T), d^* = dimN(I - T^*). Θα δείξουμε πρώτα οτι $d^* \leq d$. Με απαγωγή σε άτοπο, ας υποθέσουμε οτι $d < d^*$. Επειδή ο χώρος N(I - T) είναι πεπερασμένης διάστασης, έχει ένα τοπολογικό συμπλήρωμα στον E. Υπάρχει άρα ένας συνεχής τελεστής προβολής P από τον E επί του N(I - T).
Εξάλλου, ο $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$ είναι πεπερασμένης συνδιάστασης d^* και επομένως ο R(I - T) έχει στον E ενα τοπολογικό συμπλήρωμα, έστω F, διάστασης d^*. Επειδή $d < d^*$, υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση Λ : N(I - T) → F που είναι αμφιμονοσήμαντη και όχι επί. Θέτουμε S = T + (Λ ∘ P). Τότε $S \in \mathcal{K}(E)$ αφού η απεικόνιση Λ ∘ P είναι πεπερασμένου βαθμού.
Θα δείξουμε ότι N(I - S) = $\{0\}$. Πράγματι, αν

$$0 = u - Su = (u - Tu) - (\Lambda \circ Pu)$$

τότε

$$u - Tu = 0 \;\; \textit{και} \;\; \Lambda \circ Pu = 0$$

δηλαδή $u \in$ N(I - T) και Λu = 0, οπότε u = 0. Εφαρμόζοντας την τρίτη σχέση του θεωρήματος στον τελεστή S, βλέπουμε οτι R(I - S) = E, που είναι *άτοπο*, αφού υπάρχει $f \in F$ με $f \notin R(\Lambda)$. Η εξίσωση u - Su = f δεν έχει λυση. Επομένως έχουμε δείξει ότι $d^* \leq d$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα αυτό στον T^*, βλέπουμε ότι

$$dimN(I - T^{**}) \leq dimN(I - T^*) \leq dimN(I - T)$$

Επειδή N(I- T**) $\supset$ N(I - T) συμπεραίνουμε ότι d* = d.

■

1.3 Hilbert-Schmidt και Trace class τελεστές

Ορισμός 1.3.1 *Ένας τελεστής $T \in \mathcal{L}(H)$, όπου H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, λέγεται Hilbert-Schmidt αν υπάρχει ορθοκανονική βάση (e_n), $n \in \mathbb{N}^*$ τέτοια ώστε: $\sum_{n=1}^{\infty} ||Te_n||^2 < \infty$. Συμβολίζουμε με B_2(H) το συνολο των Hilbert-Schmidt τελεστών στον H, δηλαδή:*

$$B_2(H) = \{A \in B(H) : ||A||_2 < \infty\}$$

με

$$||A||_2 = \sqrt{\sum_{i \in I} ||Ae_i||^2}$$

Πρόταση 1.3.1 *Έστω A $\in$ B(H) και έστω $(e_i)_{i \in I}$ $(f_j)_{j \in J}$ δύο ορθοκανονικές βασεις του H. Τότε*

$$\sum_{i \in I} ||Ae_i||^2 = \sum_{j \in J} ||A^* f_j||^2 \quad \in \quad [0, \infty]$$

Απόδειξη. *Υποθέτωντας ότι το πρώτο όριο υπάρχει, από το θεώρημα Fubini έχουμε,*

$$\sum_{i \in I} ||Ae_i||^2 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} | < Ae_i, f_j > |^2$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} | < A^* f_j, e_i > |^2 = \sum_{j \in J} ||A^* f_j||^2$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει για δύο ορθοκανονικές βάσεις του H. Έτσι θέτοντας $f_j = e_j$ έπεται οτι για κάθε ορθοκανονική βάση (f_j) έχουμε ότι,

$$\sum_j \|Af_j\|^2 = \sum_j \|A^* f_j\|^2.$$

Άρα έπεται ότι,

$$\sum_i \|Ae_i\|^2 = \sum_j \|Af_j\|^2 = \sum_j \|A^* f_j\|^2.$$

Επομένως με βάση τα παραπάνω και το δεύτερο όριο υπάρχει. ■

Πρόταση 1.3.2 *Κάθε Hilbert-Schmidt τελεστής είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω T ένας Hilbert-Schmidt τελεστής και (e_n) μια ορθοκανονική βάση τέτοια ώστε: $\sum_{n=1}^{\infty} ||Te_n||^2 < \infty$. Ορίζουμε τους τελεστές πεπερασμένης τάξης T_k:

$$T_k x = T_k \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle T e_n$$

Είναι rank$T_k \leq$ k. Άρα ο T_k είναι συμπαγής για κάθε k και (T - T_k)x = $\sum_{n=k+1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle T e_n$, οπότε

$$||(T - T_k)x|| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle| ||Te_n|| \leq (\sum_{n=k+1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=k+1}^{\infty} ||Te_n||^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq ||x|| (\sum_{n=k+1}^{\infty} ||Te_n||^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$||T - T_k|| \leq (\sum_{n=k+1}^{\infty} ||Te_n||^2)^{\frac{1}{2}} \to 0 \Rightarrow T_k \xrightarrow{||\ ||} T \Rightarrow T \in \mathcal{K}(H).$$

■

Θεώρημα 1.3.1 ***(Hilbert-Schmidt)*** *Για κάθε αυτοσυζυγή, συμπαγή τελεστή T σε έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert H, υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία ιδιοδιανυσμάτων (u_n) που αντιστοιχούν σε μη μηδενικές ιδιοτιμές λ_n τέτοιες ώστε κάθε στοιχείο $x \in H$ να έχει μοναδική αναπαράσταση της μορφής*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n + \upsilon, \tag{1.3.1}$$

όπου τα $a_n \in \mathbb{C}$ και το υ ικανοποιεί την εξίσωση $T\upsilon = 0$. Αν ο T έχει απείρως πολλές διακεκριμένες ιδιοτιμές λ_1,λ_2,..., τότε $\lambda_n \to 0$ οταν $n \to \infty$.

Μια σημαντική ιδιότητα σε πεπερασμένης διάστασης τελεστές είναι το ίχνος. Αυτό, πράγματι, έχει την ιδιότητα και να είναι εύκολο να υπολογιστεί όταν ο τελεστής είναι εκφρασμένος ως πίνακας με μια συγκεκριμένη βαση, αλλά και της υπαρξής του ανεξάρτητα από την επιλογή της βάσης.

Ορισμός 1.3.2 *Έστω H ένας χώρος Hilbert και έστω T ένας θετικός συμπαγής τελεστής με μη μηδενικές ιδιοτιμές* $(\lambda_n(T))_{n\geq 1}$. *Το ίχνος του T είναι το άθροισμα της σειράς,*

$$\sum_{n\geq 1} \lambda_n(T)$$

Πρόταση 1.3.3

1. *Έστω H ένας διαχωρίσιμος χώροος Hilbert. Αν T είναι ένας θετικός συμπαγής τελεστής και* (e_n) *μια οποιαδήποτε ορθοκανονικη βάση του H, τότε έχουμε,*

$$Tr(T) = \sum_{n\geq 1} < Te_n, e_n > . \tag{1.3.2}$$

2. *Αν* T_1, T_2 *είναι δύο θετικοί συμπαγείς τελεστές και* $(a, b) \in [0, \infty]$, *τότε έχουμε*

$$Tr(aT_1 + bT_2) = aTr(T_1) + bTr(T_2)$$

3. *Αν ο T είναι θετικός συμπαγής τελεστής, και αν* $U \in B(H)$ *ένας ορθομοναδιαίος φραγμένος τελεστής, τότε ο* UTU^{-1} *ειναι θετικός και συμπαγής και επιπλέον,*

$$Tr(UTU^{-1}) = Tr(T)$$

Απόδειξη.

1. *Επειδή T θετικός, η σειρά που αναφέρεται έχει νόημα στο* $[0,+\infty]$ *ως σειρά με μη αρνητικούς όρους. Αν επιλέξουμε* (e_n) *την βάση των ιδιοδιανυσμάτων του T με* $T(e_n) = \lambda_n(T)e_n$ *τότε έχουμε* $\langle T(e_n), e_n \rangle = \lambda_n(T)$ *και τότε η (1.3.2) ισχύει για αυτή τη βάση. Οπότε αρκεί να δείχθεί ότι το δεξιό μέλος είναι ανεξάρτητο από την ορθοκανονική που επιλέγει για τον υπολογισμό.*

Έστω $(f_m)_{m\geqslant 1}$ μια άλλη ορθοκανονική βάση. Έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq 1}\langle T(f_m), f_m\rangle &= \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\lambda_n(T)|\langle f_m, e_n\rangle|^2\\ &= \sum_{n\geq 1}\lambda_n(T)\sum_{m\geq 1}|\langle f_m, e_n\rangle|^2\\ &= \sum_{n\geq 1}\lambda_n(T)\sum_{m\geq 1}|\langle e_n, f_m\rangle|^2\\ &= \sum_{n\geq 1}\lambda_n(T)||e_n||^2 = Tr(T)\end{aligned}$$

2. *Ο τελεστής (aT_1 + bT_2) είναι προφανές οτι είναι συμπαγής και θετικός. Έστω λοιπόν μια ορθοκανονική βαση (e_n) του H, τότε έχουμε:*

$$\sum_{n\geq 1} < (aT_1 + bT_2)(e_n), e_n) >= a\sum_{n\geq 1} < T_1(e_n), e_n > +b\sum_{n\geq 1} < T_2(e_n), e_n >$$

3. *Αυτό είναι επίσης προφανές διότι,*

$$< UTU^{-1}e_n, e_n >=< Tf_n, f_n >$$

με $f_n = U^{-1}e_n = U^{*}e_n$ λογω της ορθομοναδιαιότητας του U, και επειδή η e_n είναι ορθοκανονική βάση τότε και η f_n είναι αφού ο U είναι ορθομοναδιαιος. Άρα από το πρώτο σκέλος της πρότασης αποδεικνύεται και το ζητούμενο.

■

Ορισμός 1.3.3 *Έστω H ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας συμπαγής τελεστής T ∈ K(H) λέγεται trace class αν*

$$Tr(\|T\|) = Tr(\sqrt{(T^{*}T)}) < +\infty$$

Αν s_n(T) είναι οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του $\|T\|$, έχουμε τότε τον ακόλουθο ορισμό:

$$Tr(|T|) = \sum_{n\geq 1} s_n(T).$$

Πρόταση 1.3.4 *Η σειρά συγκλίνει απολύτως και είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της βάσης.*

Απόδειξη. *Έστω $\lambda_i \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $|<Ae_i,e_i>| = \lambda_i|<Ae_i,e_i>|$ και $|\lambda_i| = 1$ ($i \in I$). Τότε για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $I_0 \subseteq I$ έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση,*

$$\begin{aligned}\sum_i | < Ae_i, e_i > | &= \sum_i \lambda_i < Ae_i, e_i >= \sum_i \lambda_i < A, < \cdot, e_i > e_i >_2 \\ &=< A, \sum_i \lambda_i < \cdot, e_i > e_i >_2 \leq ||A||_1 || \sum_i \lambda_i < \cdot, e_i > || \leq ||A||_1\end{aligned}$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Έστω f_j $(j \in J)$ μία άλλη ορθοκανονική βάση στον Η τότε έχουμε,

$$\begin{aligned}\sum_i < Ae_i, e_i > \;=\; \sum_{i,j} < Ae_i, f_j >< f_j, e_i > \;&=\; \sum_{j,i} < f_j, e_i >< e_i, A^* f_i > \\ &=\; \sum_j < f_j, A^* f_j >= \;\sum < Af_j, f_j >,\end{aligned}$$

και επομένων η σειρά είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της βάσης. ■

Πρόταση 1.3.5 *Για οποιαδήποτε φυσιολογικό τελεστή $T \in TC(H)$ με μη-μηδενικές ιδιοτιμές $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, η σειρά*

$$\sum_{n\geq 1} \lambda_n$$

συγκλίνει απολύτως και έχουμε

$$Tr(T) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n$$

Απόδειξη. *Αν $T \in$ T‘(H) είναι φυσιολογικός, μπορούμε να πάρουμε μια ορθοκανονική βάση (e_n) για την οποία $T(e_n) = \lambda_n e_n$ για να υπολογίσουμε το ίχνος της $\sum_{n\geq 1} \langle T(e_n), e_n \rangle$, έτσι έχουμε*

$$\sum_{n\geq 1} < T(e_n), e_n >= \sum_{n\geq 1} \lambda_n$$

η οποία είναι συγκλίνουσα σειρά με τιμή $Tr(T)$. ■

Πρόταση 1.3.6 *Για κάθε ορθομοναδιαίο φραγμένο τελεστή $S \in B(H)$ και κάθε τελεστή $T \in K(H)$, έχουμε ST, $TS \in TC(H)$ και*

$$Tr(ST) = Tr(TS)$$

Απόδειξη. *Αν ο τελεστής S είναι ορθομοναδιαίος, είναι προφανές οτι ST, TS $\in$ TC(H) για κάθε T $\in$ T'(H). Πράγματι, (ST)*(ST) = T*T, (TS)*(TS) = S^{-1}T*TS,ο οποίος έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον T*T. Επιπλέον, αν (e$_n$) μια ορθοκανονική βάση, έχουμε*

$$\sum_{n\geq 1} < (ST)(e_n), e_n >= \sum_{n\geq 1} < S(TS)(f_n), e_n >= \sum_{n\geq 1} < (TS)(f_n), f_n >,$$

όπου f_n = S^{-1}e$_n$είναι μια άλλη ορθοκανονίκη βάση επειδή ο S είναι ορθομοναδιαίος. Το γεγόνος οτι το ίχνος έιναι ανεξάρτητο από την επιλογή της βάσης μας οδηγεί στο αποτέλεσμα Tr(TS) = Tr(ST) για έναν ορθομοναδιαίο τελεστή S. ■

1.4 Αναλλοίωτοι Υπόχωροι

Ορισμός 1.4.1 *Έστω E ένας χώρος Banach και T $\in \mathcal{B}(E)$. Ένας κλειστός υπόχωρος M του E λέγεται* ***αναλλοίωτος υπόχωρος*** *του T, αν για κάθε x $\in$ E είναι Tx $\in$ M, ισοδύναμα TM$\subseteq$M. Ο M είναι μη τετριμμένος αν M $\neq \{0\}$, E. Το σύνολο όλων των αναλλοίωτων υποχώρων του T θα το συμβολίζουμε με Lat T.*

Πρόταση 1.4.1

1. *Αν M$_1$, M$_2$ $\in$ Lat T κλειστοί, τότε M$_1$ $\vee$ M$_2$ $\equiv \overline{M_1 + M_2} \in$ Lat T και M$_1$ $\wedge$ M$_2$ $\equiv$ M$_1$ $\cap$ M$_2$ $\in$ Lat T.*

2. *Αν $\{M_i\ i \in I\} \subseteq$ Lat T κλειστοί, τότε $\vee\{M_i \in I\}$, η κλειστή γραμμική θήκη του $\bigcup_{i\in I} M_i \in$ Lat T, και $\wedge\{M_i \in I\} \equiv \bigcap_{i\in I} M_i \in$ Lat T.*

Ορισμός 1.4.2 *Έστω T $\in \mathcal{B}(E)$. Ένας κλειστός υπόχωρος M του E καλείται υπεραναλλοίωτοςγια τον T, αν AM$\subseteq$M, για κάθε τελεστή A που αντιμετατίθεται με τον T. Είναι δηλαδή AM$\subseteq$M, αν AT = TA.*

Λήμμα 1.4.1 *Αν $\mathcal{A}$, είναι μια υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(E)$, η οποία περιέχει τη μονάδα, Lat $\mathcal{A}$ = $\{\{0\}$,X$\}$ και αν K $\in \mathcal{K}(E)$ είναι ένας μη μηδενικός συμπαγής τελεστής, τότε υπάρχει τελεστής A $\in \mathcal{A}$ τέτοιος ώστε ker(AK - I) $\neq \{0\}$.*

Παρατήρηση 1.4.1 *Το 1973 ο V.Lomonosov απέδειξε ένα θεώρημα το οποίο έδωσε απαντήσεις σε γενικότερα προβλήματα σχετικά με την ύπαρξη αναλλοίωτων υποχώρων. Όταν εμφανίστηκε το αποτέλεσμα αυτό, προκάλεσε μεγάλο ενθουσιασμό, διότι δημιούργησε την πεποίθηση ότι έλυνε ή ήταν κοντά στη λύση, του προβλήματος του αναλλοίωτου υποχώρου. Μέχρι το 1980 δεν υπήρχε παράδειγμα τελεστή που να μην ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Lomonosov. Το 1980 όμως, οι Hadvin-Nordgren-Radjavi-Rosenthal κατασκεύασαν ένα τέτοιο παράδειγμα τελεστή που δεν ικανοποιούσε το θεώρημα Lomonosov. Ας σημειωθεί ότι μέχρι και σήμερα δεν είναι γνωστό πόσο μεγάλη είναι η κλάση των τελεστών στην οποία εφαρμόζεται το θεώρημα Lomonosov.*

Θεώρημα 1.4.1 *(**Θεώρημα Lomonosov**) Αν ο $T \in \mathcal{B}(E)$ δεν είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή και ισχύει $TK = KT$ για κάποιο μη-μηδενικό συμπαγή τελεστή K, τότε ο T έχει μη τετριμμένο υπεραναλλοίωτο υπόχωρο.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ = $\{$T$\}$ το σύνολο των τελεστών που αντιμετατίθενται με τον T. Θέλουμε να δείξουμε οτι Lat$\mathcal{A} \neq \{\{0\}$,E$\}$. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Τοτε απο το λήμμα (1.4.1) έχουμε οτι θα υπάρχει τελεστής A στην $\mathcal{A}$ με M = ker(AK - I) $\neq \{0\}$. Όμως M $\in$ Lat (AK), οπότε ο περιορισμός AK$|_M$ του AK θα είναι ο ταυτικός τελεστής. Επειδή ο AK είναι συμπαγής, ο AK$|_M$ θα ειναι συμπαγής ως τελεστής επί του M. Επομένως dim M $< \infty$. Επιπλέον, επειδή AK $\in \mathcal{A}$, για κάθε x $\in$ M θα είναι (AK)(Tx) = T(AKx) = Tx, οπότε M $\in$ Lat T. Όμως dim M $< \infty$, οπότε ο T$|_M$ θα πρέπει να έχει μια ιδιοτιμή, έστω λ. Τότε ker(T - λI) = N $\neq \{0\}$. Επειδή ο T δεν είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού, είναι N $\neq$ E και εύκολα διαπιστώνεται οτι ο N είναι υπεραναλλοίωτος υπόχωρος του T. Το αποτέλεσμα των Aronszajn-Smith είναι τώρα ένα απλό πόρισμα του θεωρήματος Lomonosov. ∎

Παρατήρηση 1.4.2 *Το 1954 οι Aronszajn-Smith έδειξαν οτι κάθε συμπαγής τελεστής σε χώρο Banach έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο.*

Πόρισμα 1.4.1 *Καθε συμπαγής τελεστής σε ένα χώρο Banach έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο.*

Πόρισμα 1.4.2 *Έστω E χώρος Banach, άπειρης διάστασης και $A \in \mathcal{L}(E)$. Αν υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε ο τελεστής p(A) να είναι συμπαγής, τότε ο A έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο.*

Πόρισμα 1.4.3 *Αν K_1, $K_2 \in \mathcal{L}(E)$ και $K_1K_2 = K_2K_1$, τότε K_1 και K_2 έχουν ένα κοινό μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο.*

1.5 Ασθενώς Συμπάγεις Τελεστές

Οι ασθενώς συμπαγείς τελεστές αποτελούν γενίκευση των συμπαγών τελεστών, αλλά η υπόθεση δεν είναι αρκετά ισχυρή ώστε να αντλουμε αρκετές καλές πληροφορίες για την δομή τους.

Ορισμός 1.5.1 *Έστω E και F δυο χώροι Banach.Θα λεμέ οτι ενας τελεστής $T \in \mathcal{L}(E,F)$ είναι ασθενώς συμπαγής αν το $\overline{T(B_E)}$ είναι ασθενώς συμπαγές για την ασθενή τοπολογία.*

Πρόταση 1.5.1

1. *Αν είτε ο E είτε ο F είναι ανακλαστικός, τότε κάθε τελεστής $T \in \mathcal{L}(E,F)$ είναι ασθενώς συμπαγής.*

2. *Αν ο $T : E \to F$ είναι ασθενώς συμπαγής και $A \in \mathcal{L}(F,R)$, τότε ο AT είναι ασθενώς συμπαγής.*

3. *Αν ο $T : E \to F$ είναι ασθενώς συμπαγής και $A \in \mathcal{L}(R,E)$, τότε ο TB είναι ασθενώς συμπαγής.*

Από την παραπάνω πρόταση εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η ασθενής συμπάγεια ενός τελεστή δεν είναι ισχυρή υπόθεση. Για παράδειγμα, αν ο E είναι ανακλαστικός, κάθε τελεστής T $\in \mathcal{L}(E)$ είναι ασθενώς συμπαγής. Συγκεκριμένα, κάθε τελεστής σε ένα χώρο HIlbert είναι ασθενώς συμπαγής. Έτσι κάθε θεώρημα σχετικά με ασθενώς συμπαγείς τελεστές είναι ένα θεώρημα για όλους τους τελεστές σε ένα ανακλατικό χώρο. Στην πραγματικότητα, υπάρχει ένας βαθμός εγκυρότητας για το αντιστροφο του παραπάνω πορίσματος. Στην ουσία ισχύει ότι τα θεωρήματα σχετικά με τελεστές σε ανακλαστικούς χώρους είναι επίσης θεωρήματα για ασθενώς συμπαγείς τελεστές.

Θεώρημα 1.5.1 *Ένας συνεχής τελεστής $T \in \mathcal{L}(E,F)$ είναι ασθενώς συμπαγής αν και μόνο αν το $T^{**}E^{**}$ περιέχεται στην κανονική εμφύτευση κF του F στον F^{**}.*

Απόδειξη. Έστω B_E, $B_{E^{**}}$ να είναι οι μοναδιαίες μπάλες των χώρων E, E^{**} αντίστοιχα. Ας σημειώσουμε ότι ο T^{**} είναι συνεχής με τις E^*, F^* τοπολογίες στις E^{**}, F^{**} αντίστοιχα. Συνεπως, αφού T^{**} είναι μία επέκταση του T,

$$T^{**}(B_{E_1}) \subseteq \overline{T^{**}(\kappa B_E)} = \overline{\kappa(TB_E)} \subseteq \overline{\kappa(\overline{TB_E})}, \tag{1.4.1.α}$$

όπου B_{E_1} είναι το E^*-κλείσιμο του κB_E και οι μπάρες δηλώνουν τα κλεισίματα στην τοπολογία F^*. Αν ο τελεστής T είναι ασθενώς συμπαγής, τοτε το $\overline{T(B_E)}$ είναι συμπαγές στην F^* τοπολογία του F και άρα το κ$\overline{T(B_E)}$ είναι συμπαγές και συνεπώς κλειστό στην F^* τοπολογία του F^{**}. Επομένως αν ο T είναι ασθενώς συμπαγής έχουμε ότι,

$$T^{**}(B_{E_1}) \subseteq \kappa(\overline{TB_E}),$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Goldstine B_E = $B_{E^{**}}$ και άρα T^{**}($B_{E^{**}}$)⊆$\overline{T(B_E)}$ το οποίο αποδεικνύει ότι

$$T^{**}E^{**} \subseteq \kappa F. \tag{1.4.1.β}$$

Αντίστροφα, έστω T ένας τελεστής T $\in \mathcal{L}(E,F)$ που ικανοποιεί την (1.4.1.β). Τότε ο T^{**} είναι συνεχής με την E^*, F^* τοπολογιές στις E^{**}, F^{**}, αντίστοιχα, και T($B_{E^{**}}$) είναι E^* συμπαγές στην E^{**}. Επομένως το T^{**}($B_E **$)⊆ κF είναι F^* συμπαγές. Άρα η F^*-ομοιομορφική εικόνα κ(TB_E) του T(B_E) είναι ένα υποσύνολο ενός F^* συμπαγούς υποσυνόλου του κF. Συνεπώς, το F^*-κλείσιμο του κ$\overline{T(B_E)}$ είναι ένα F^*-συμπαγές υποσύνολο του κF, και το F^* κλείσιμο του T(B_E) είναι ένα F^* συμπαγές υποσύνολο του F. ∎

Θεώρημα 1.5.2 *Γραμμικός συνδυασμός ασθενώς συμπαγών τελεστών είναι ασθενώς συμπαγής τελεστής. Το γινόμενο ενός ασθενούς συμπαγούς γραμμικού τελεστή και ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή είναι ασθενώς συμπαγής τελεστής.*

Απόδειξη. Έστω T, U $\in \mathcal{L}(E, F)$, W $\in \mathcal{L}(F, C)$, V $\in \mathcal{L}(C, E)$, α,β $\in \mathbb{R}$ και έστω T, U να είναι ασθενώς συμπαγείς τελεστές. Τότε,

$$(aT + bU)^{**}E^{**} = (aT^{**} + bU^{**})E^{**} \subseteq \kappa F,$$

$$(TV)^{**}C^{**} = T^{**}V^{**}C^{**} \subseteq T^{**}E^{**} \subseteq \kappa F,$$

$$(WT)^{**}E^{**} = W^{**}T^{**}E^{**} \subseteq W^{**}\kappa F = WF \subseteq \kappa C.$$

■

Πόρισμα 1.5.1 *Αν είτε ο E είτε ο F είναι ανακλαστικός, κάθε τελεστής T $\in \mathcal{L}(E, F)$ είναι ασθενώς συμπαγής.*

Απόδειξη.

- Έστω T $\in \mathcal{L}(E, F)$. Αν ο F είναι ανακλαστικός, τοτε

$$T^{**}E^{**} \subseteq E^{**} = \kappa F.$$

- και αν ο E είναι ανακλαστικός,

$$T^{**}E^{**} = T^{**}\kappa E = \kappa T E \subseteq \kappa F$$

■

Λήμμα 1.5.1 *Αν E και F είναι χώροι Banach και T $\in \mathcal{L}(E, F)$, τότε ο T είναι ασθενώς συμπαγής αν και μόνο αν ο T^* είναι συνεχής όσον αφορά τις E^{**},F τοπολογίες στις E^*,F^* αντίστοιχα.*

Θεώρημα 1.5.3 *Αν E και F είναι χώροι Banach και T $\in \mathcal{L}(E, F)$, τότε ο T είναι ασθενώς συμπαγής αν και μόνο αν ο T^* είναι ασθενώς συμπαγής.*

Απόδειξη.

- Έστω T ένας ασθενώς συμπαγής τελεστής. Από το θέωρημα του Alaoglu έχουμε ότι το B_{E^*} είναι συμπαγές. Λόγω της ασθενούς συμπάγειας του T από το παραπάνω λήμμα έπεται ότι ο T^* είναι συνεχής όσον αφορά τις E^{**},F τοπολογίες στις E^*,F^* αντίστοιχα. Επίσης επειδή το γινόμενο ενός συνεχούς τελεστή και ενός ασθενούς συμπαγούς τελεστή είναι ασθενώς συμπαγής τελεστής έπεται οτι $T^*(B_{E^*})$ είναι συμπαγές για την E^{**} τοπολογία του E^*. Συνεπώς ο T^* είναι ασθενώς συμπαγής.

- Αντίστροφα, αν ο T^* είναι ασθενώς συμπαγής έπεται από το παραπάνω λήμμα ότι ο τελεστής T^{**} είναι συνεχής όσον αφορά τις E^*, F^{***} τοπολογίες στις E^{**}, F^{**} αντίστοιχα. Αν B_E, $B_{E^{**}}$ είναι οι κλειστές μοναδιαίες μπάλες στους χώρους E, E^{**} αντίστοιχα, και αν κ είναι η κανονική εμφύτευση του E στον E^{**} τότε από το θεώρημα του Goldstine έχουμε οτι το κB_E είναι E^* πυκνό στην $B_{E^{**}}$ και επομένως από την συνέχεια του T^{**} βλεπουμε ότι το $T^{**}(B_{E^{**}})$ περιέχεται στο F^{***} κλείσιμο του $T^{**}(\kappa B_E) = \kappa T(B_E)$. Σύμφωνα με θεώρημα που λέει ότι ένα κυρτό υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού γραμμικο χώρου είναι E^* κλειστό αν και μόνο αν είναι κλειστό λαμβάνουμε ότι το F^{***} κλείσιμο του κυρτού συνόλου κTB_E είναι το ίδιο με το ισχυρό κλείσιμο. Επομένως $T^{**}E^{**} \subseteq \kappa F$ και άρα ο T είναι συμπαγής.

■ Η συμπάγεια ενος τελεστή T σε χώρους Banach είναι αλληλένδετη με την συμπάγεια του τελεστή T^*. Αξίζει να σημειώσουμε ότι το θεώρημα του Schauder το οποίο δίνεται παρακάτω ισχύει τόσο για ισχύρως συμπαγέις τελεστές όσο και για ασθενώς συμπαγείς τελεστές.

Θεώρημα 1.5.4 **(Θεώρημα Schauder** *) Αν ο $T \in \mathcal{L}(E, F)$, τότε ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο T^* είναι συμπαγής.*

Απόδειξη.

- Υποθέτουμε ότι ο T είναι ένας συμπαγής τελεστής και έστω (y_n^*) μία ακολουθία στην B_{F^*}. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(T^*y_n^*)$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Από το θεώρημα του Alaoglu, υπάρχει ένα $y^* \in B_{F^*}$ τέτοιο ώστε $y_n^* \xrightarrow{w^*} y^*$. Θα αποδείξουμε ότι

($T^*y_n^* \to T^*y^*$) κατα νόρμα.

Λόγω της συμπάγειας του T έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ότι το $T(B_E)$ μπορεί να καλυφθεί με έναν πεπαρασμένο αριθμό από μπάλες $B(f_i, \frac{\varepsilon}{3})$ του F. Επομένως, $T(B_E) \subset \bigcup_{i\in I} B(f, \frac{\varepsilon}{3})$ με I πεπερασμένο ή $T(B_E) \subset \bigcup_{k=1}^{m} \{ y \in F : ||y - y_k|| < \frac{\varepsilon}{3}\}$ όπου $y_1, \ldots y_m$ συγκεκριμένα διανύσματα του F. Εφόσον $y_n^* \xrightarrow{w^*} y^*$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|<y_k, y^* - y_n^*>| < \frac{\varepsilon}{3}$ για $1 \leq k \leq m$.Έστω x ένα τυχαίο στοιχείο της B_E και επιλέγουμε ένα (y_k) τέτοιο ώστε $||Tx - y_k|| < \frac{\varepsilon}{3}$. Τότε,

$$\begin{aligned} | < x, T^*y^* - T^*y_n^* > | &= | < Tx, y^* - y_n^* > | \\ &\leq | < Tx - y_k, y^* - y_n^* > | + | < y_k, y^* - y_n^* > | \\ &\leq 2||Tx - y_k|| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

Άρα $||T^*y^*|| - ||T^*y_n^*|| \leq \varepsilon$.

- Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $T^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $T^{**} \in \mathcal{K}(F^{**}, E^{**})$ και ειδικά ότι το $T^{**}(B_E)$ είναι σχετικά συμπαγές στον E^{**}. Επειδή $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ και ο E είναι κλειστός στον E^{**}, συμπεραίνουμε ότι το $T(B_E)$ είναι σχετικά συμπαγές στον E.

■

Κεφάλαιο 2

Φασματική Θεωρία Συμπαγών Τελεστών

2.1 Φασματική Θεωρία Συμπαγών Τελεστών

Ορισμοί 2.1.1 *1. Έστω $T \in \mathcal{L}(E)$. Το επιλύον σύνολο είναι*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (T - \lambda I) \text{ είναι αμφιμονοσήμαντος από τον } E \text{ επί του } E\}.$$

2. *Το φάσμα σ(T) είναι το συμπλήρωμα του επιλύοντος συνόλου, $\sigma(T) = \mathbb{R} \backslash \rho(T)$. Λέμε ότι το λ είναι μια ιδιοτιμή και γράφουμε $\lambda \in$ Ιδ(T), αν*

$$N(T - \lambda I) \neq 0.$$

Ο N(T - λI) καλείται ιδιόχωρος και είναι το σύνολο όλων των ιδιοδιασμάτων που αντιστοιχούν στην κάθε ιδιοτιμή λ. Η διάσταση του χώρου αυτού καλείται πολλαπλότητα του λ. Μία ιδιοτιμή πολλαπλότητας ένα καλείται απλή ή μη-εκφυλισμένη. Μια ιδιοτιμή πολλαπλότητας μεγαλύτερης της μονάδας καλείται πολλαπλή ή εκφυλισμένη. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο αριθμός των γραμμικών ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων καλείται βαθμός εκφυλισμού.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι, αν $\lambda \in \rho(T)$, τότε ο $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

Παρατήρηση 2.1.1 *Είναι φανερό οτι Ιδ(T) $\subset$ σ(T). Γενικά, ο εγκλεισμός αυτός είναι αυστηρός (εκτός, βέβαια, αν dimE $< \infty$ αφού τότε Ιδ(T) = σ(T)) : μπορεί να υπάρχει λ τέτοιο ώστε*

$$N(T-\lambda I)=\{0\}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ R(T-\lambda I)\neq E$$

(ένα τέτοιο λ ανήκει στο φάσμα, αλλά δεν είναι ιδιοτιμή). Για παράδειγμα, ας πάρουμε στον E = l^2, Tu = (0,υ_1,υ_2,...), όπου u = (u_1,u_2,...) (δηλαδή ο T είναι η μετακίνηση δεξιά). Τότε 0 $\in$ σ(T) και 0 $\notin$ Ιδ(T).

Παρατήρηση 2.1.2 *Είναι σημαντικό να τονίσουμε οτι κάθε ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχεί ακριβώς σε μία ιδιοτιμή, αλλά πάντα υπάρχουν απείρως πολλά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή. Πράγματι, κάθε πολλαπλότητα ενός ιδιοδιανύσματος είναι ένα ιδιοδιάνυσμα. Επιπροσθέτως, αρκετά γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα μπορεί να αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή. Το σύνολο όλων των ιδιοδιασμάτων που αντιστοιχούν σε μία συγκεκριμένη ιδιοτιμή ενός τελεστή είναι ένας διανυσματικός χώρος.*

Θεώρημα 2.1.1 *Έστω T ένας αντιστρέψιμος τελεστής σε ένα διανυσματικό χώρο E και έστω A ένας τελεστής στον E. Τότε οι τελεστές A και TAT^{-1} έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

Απόδειξη. Έστω λ μία ιδιοτιμή του A. Αυτό σημαίνει οτι υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα u τέτοιο ώστε Au=λu. Αφού ο T είναι αντιστρέψιμος, Tu $\neq$ 0 και

$$TAT^{-1}(Tu)=TAu=T(\lambda u)=\lambda Tu$$

Συνεπώς το λ είναι μια ιδιοτιμη του TAT^{-1}. Ας υποθέσουμε τώρα οτι λ είναι μία ιδιοτιμή του TAT^{-1}, TAT^{-1}u=λu για κάποιο μη-μηδενικό διάνυσμα u=Tu. Εφόσον AT^{-1}u=λT^{-1}u και T^{-1}u $\neq$ 0, το λ είναι μία ιδιοτιμή του τελεστή A. ■

Πρόταση 2.1.1 *Έστω B ένας γραμμικός υπόχωρος ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο και έστω A η προβολή στον B. Οι μόναδικές ιδιοτιμές του A είναι το 0 και το 1.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν, για καποια λ $\in \mathbb{C}$, και 0 $\neq$ $\in$ E, έχουμε Au=λu

$$\lambda\upsilon=\lambda^2\upsilon$$

επειδή A^2=A. Επιπλέον, λ=0 ή λ=1. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο 0 είναι τα διανύσματα του E τα οποία είναι ορθογώνια στο B. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο 1 είναι όλα τα στοιχεία του B. ■

Θεώρημα 2.1.2 *Όλες οι ιδιοτιμές ενός ορθμονοδιαίου τελεστή σε ένα χώρο HIlbert είναι μιγαδικοί αριθμοί μέτρου 1.*

Απόδειξη. Έστω λ μία ιδιοτιμή ενός ορθομονοδιαίου τελεστή T και έστω u ένα ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο του λ, $u \neq 0$. Τότε

$$< Tu, Tu >=< \lambda u, \lambda u >= |\lambda|^2 ||u||^2.$$

επίσης,

$$< Tu, Tu >=< u, T^* Tu >=< u, u >= ||u||^2.$$

Συνεπώς |λ|=1 ■

Θεώρημα 2.1.3 *Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές ενός ορθομοναδιαίου τελεστή σε ένα χώρο Hilbertείναι ορθογώνιες.*

Απόδειξη. Έστω τώρα ότι ο T είναι ένας ορθομοναδιαίος τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε $TT^*=T^*T$= I και ||Tu|| = ||u|| για όλα τα $u \in H$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ τότε $\lambda_1 \overline{\lambda_2} \neq 1$. Πράγματι, αν $\lambda_1 \overline{\lambda_2} = 1$ τότε

$$\lambda_2 = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \lambda_2 = \lambda_1 |\lambda_2|^2 = \lambda_1,$$

επειδή $|\lambda_2| = 1$, από το θεώρημα (2.1.2). Τώρα

$$\lambda_1 \overline{\lambda_2} < u_1, u_2 >=< \lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2 >=< u_1, A^* A u_2 >=< u_1, u_2 > .$$

Αφού $\lambda_1 \overline{\lambda_2} \neq 1$, έχουμε ότι $<u_1,u_2>$ = 0, το οποίο αποδεικνύει ότι τα ιδιοδιανύσματα u_1 και u_2 είναι ορθογώνια.

■

Θεώρημα 2.1.4 *Για κάθε ιδιοτιμή λ ενός φραγμένου τελεστή T, έχουμε $|\lambda| \leq ||A||$.*

Απόδειξη. Έστω u ένα μη-μηδενικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Εφόσον Au=λu, έχουμε

$$||\lambda u|| = ||Tu||$$

και συνεπώς

$$||\lambda||||u|| = ||T||||u||$$

Άρα έχουμε |λ|≤ ||T||. Αν οι ιδιοτιμές θεωρούνται ως σημεία στο μιγαδικό επίπεδο το παραπάνω αποτέλεσμα δηλώνει οτι όλες οι ιδιοτιμές ενός φραγμένου τελεστή βρίσκονται μέσα στον κύκλο με ακτίνα ||T||. ■

Παράδειγμα 2.1.1 *Έστω ο ολοκληρωτικός τελεστής A : L^2([0,2π]) → L^2([0,2π]) ο οποίος ορίζεται ως,*

$$(Au)(t) = \int_0^{2\pi} cos(t-y)u(y)dy.$$

Να δειχθεί οτι ο T έχει ακριβώς μία μηδενική ιδιοτιμή την $\lambda = \pi$, και ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του είναι

$$u(t) = acost + bsint$$

όπου α και b τυχαίες σταθερές.

Απόδειξη. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$(Au)(t) = \int_0^{2\pi} cos(t-y)u(y)dy = \lambda u(t)$$

ή

$$cost \int_0^{2\pi} cos(y)u(y)dysint \int_0^{2\pi} sin(y)u(y)dy = \lambda u(t). \qquad (2.1.1.α)$$

Αυτό σημαίνει ότι, για λ ≠ 0, u είναι ένας γραμμικός συνδυασμός ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών συναρτήσεων της μορφής:

$$u(t) = acost + bsint$$

όπου a και b τυχαίες σταθερές στον $\mathbb{C}$. Αντικαθιστώντας αυτο στην (2.1.1.α), παίρνουμε

$$\pi a = \lambda a \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \pi b = \lambda b.$$

Επομένως, λ = π, το οποίο σημαίνει οτι ο A έχει ακριβώς μία μη μηδενική ιδιοτιμή και οι ιδιοσυναρτήσεις του δίνονται από την εξίσωση u(t) = acost + bsint. Αυτός είναι ένας δυο διαστάσεων ιδιόχωρος και άρα η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι ίση με 2.
Από την σχέση (2.1.1.α) παρατηρούμε ότι η τιμή λ = 0 είναι ιδιοτιμή του A. Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι όλες συναρτήσεις ορθογώνιες στο cost και sint. Επομένως, το λ=0 είναι μία ιδιοτιμή άπειρης πολλαπλότητας. ■ ——————————————————

Λήμμα 2.1.1 *Έστω $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών διαφορετικών μεταξύ τους τέτοια ώστε*

$$\lambda_n \to \lambda$$

και

$$\lambda_n \in (T)\backslash\{0\} \ \ \forall n.$$

τότε $\lambda = 0$.
Με άλλα λόγια, όλα τα σημεία του σ(T)$\backslash\{0\}$ είναι μεμονωμένα.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε οτι $\lambda_n \in$ Iδ(T). Έστω $e_n \neq 0$ με (T - λ_nI)e_n = 0. Έστω E_n ο γραμμικός χώρος που παράγεται απο τα $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Θα δείξουμε ότι $E_n \subsetneqq E_{n+1}$ για κάθε n. Αρκεί να επαληθεύσουμε ότι, για κάθε n, τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θα το δείξουμε με επαγωγή ως προς n. Ας δεχθούμε ότι το συμπέρασμα ισχύει μέχρι τον όρο n και ας υποθέσουμε οτι $e_{n+1} = \sum_{n=1}^{n} a_i e_i$. Τότε

$$Te_{n+1} = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i \lambda_{n+1} e_i$$

Επομένως $a_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ για κάθε i = 1,2,...,n και άρα $a_i = 0$ για κάθε i = 1,2,...n που είναι άτοπο. Συνεπώς $E_n \subsetneqq E_{N+1}$ για κάθε n. Εξάλλου είναι φανερό ότι (T - λ_nI)$E_n \subset E_{n-1}$. Εφαρμόζοντας το λήμμα Riesz κατασκευάζουμε μια ακολουθία $(u_n)_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε $u_n \in E_n$,

$||υ_n||$ = 1 και dist(u_n,E_{n-1}) $\geq \frac{1}{2}$ για n$\geq$2. Έστω $2 \leq m < n$, οπότε

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset \ E_n.$$

Έχουμε

$$\left\|\frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m}\right\| = \left\|\frac{Tu_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} + u_n - u_m\right\| \geq dist(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Αν $λ_n \to λ \neq 0$, καταλήγουμε σε άτοπο, αφού η (Tu_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

■

Θεώρημα 2.1.5 *Έστω $T \in \mathcal{K}(E)$ με dimE $= \infty$. Τότε ισχύει*

1. *0 $\in$ σ(T),*
2. *σ(T)$\setminus$0 $=$ Iδ(T)$\setminus$0*
3. *ένας από τους ακόλουθους ορισμούς:*

- *σ(T)= $\{$ 0 $\}$,*
- *σ(T)$\setminus\{0\}$ είναι πεπερασμένο,*
- *σ(T)$\setminus\{0\}$ είναι μια ακολουθία που τείνει στο 0.*

Απόδειξη.

1. Υποθέτουμε οτι 0 $\notin$ σ(T). Τότε ο T είναι αμφιμονοσήμαντος επί και ο I = T $\circ$ T^{-1} είναι συμπαγής. Άρα η B_E είναι συμπαγής και επομένως από το θεώρημα (1.2.1)του Riesz ο E είναι πεπερασμενης διαστάσεως.

2. Έστω λ $\in$ σ(T), λ $\neq$ 0. Θα δείξουμε ότι λ $\in$ Iδ(T). Με την εις άτοπο απαγωγή, ας υποθέσουμε οτι N(T - λI) = $\{0\}$. Τότε από το θεώρημα εναλλακτικότητας Fredholm γνωρίζουμε ότι R(T - λI) = E και αρα λ $\in$ ρ(T), που είναι άτοπο.

3. Για κάθε ακέραιο n ≥ 1, το σύνολο

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$$

   είναι κενό η πεπερασμένο(αν περιείχε άπειρο πλήθος σημείων θα υπήρχε ένα σημείο συσσωρεύσεως, αφού το σ(T) είναι συμπαγές και θα καταλήγαμε σε άταπο λόγω του παραπάνω λήμματος (2.1.1)). Όταν το σ(T)$\setminus\{0\}$ περιέχει ένα άπειρο πλήθος σημείων, μπορούμε να τα διατάξουμε σε μια ακολουθία που τείνει στο 0.

■

Παρατήρηση 2.1.3 *Για δεδομένη ακολουθία (a_n) που τείνει στο 0, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν συμπαγή τελεστή τέτοιον ώστε σ(T) = (a_n)$\cup\{0\}$. Αρκεί να θεωρήσουμε στον E = l^2 τον τελεστή T : u = (u_n) $\mapsto$ Tu = ($a_n u_n$). Σημειωτέον οτι ο T είναι συμπαγής, επειδή υπάρχει ακολουθία τελεστών (T_n) πεπερασμένου βαθμού τέτοια ώστε $||T_n$ - $T|| \to 0$. Στο παράδειγμα αυτό βλέπομε επίσης ότι το 0 μπορεί να ανήκει, ή όχι στο Ιδ(T). Επιπλέον, αν 0 $\in$ Ιδ(T), τότε μπορεί ο αντίστοιχος ιδιόχωρος, δηλαδή ο N(T) να είναι απείρου διαστάσεως.*

2.2 Φασματική Ανάλυση των αυτοσυζυγών συμπαγών τελεστών

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι ο E = H είναι χώρος Hilbert και ότι T $\in \mathcal{L}(H)$. Ταυτίζοντας τον H′ με τον H, μπορούμε να θεωρήσουμε οτι T* $\in \mathcal{L}(H)$.

Ορισμός 2.2.1 *Λέμε ότι ένας τελεστής T $\in \mathcal{L}(H)$ είναι αυτοσυζυγής αν T* = T, δηλαδή*

$$(Tu, v) = (u, Tv) \;\; \forall u, v \;\; \in \;\; H.$$

Θεώρημα 2.2.1 *΄Ολες οι ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγή τελεστή σε ένα χώρο Hilbert είναι πραγματικοι αριθμοί.*

Απόδειξη. Έστω λ μία ιδιοτιμή ενός αυτοσυζυγή τελεστή T και έστω u ένα ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ, u $\neq$ 0. Τότε,

$$\lambda < u, u >=< \lambda u, u >=< Au, u >=< u, Au >=< u, \lambda u >= \overline{\lambda} < u, u >$$

Αφου $<$u,u$>$ $>$ 0 συμπεραίνουμε ότι λ=$\overline{\lambda}$ ∎

Θεώρημα 2.2.2 *'Ολες οι ιδιοτιμές ενός θετικού τελεστή είναι μη-αρνητικές. 'Ολες οι ιδιοτιμές ενός αυστηρά θετικού τελεστή είναι θετικές.*

Απόδειξη. Έστω T ένας θετικός τελεστής και έστω Tx=λx για κάποιο x $\neq$ 0. Εφόσον ο T είναι αυτοσυζυγής, έχουμε

$$0 \leq \ < Tx, x >= \lambda < x, x >= \lambda ||x||^2$$

Συνεπώς λ $\geq$ 0.

Έστω A ένας θετικός τελεστής και έστω Tx=λx x $\neq$ 0. Εφόσον ο T είναι αυτοσυζυγής, έχουμε

$$0 < \ < Tx, x >= \lambda < x, x >= \lambda ||x||^2.$$

Συνεπώς λ $>$ 0. ∎

Θεώρημα 2.2.3 *Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγή τελεστή σε ένα χώρο Hilbert είναι ορθογώνιες.*

Απόδειξη. Έστω T ένας αυτοσυζυγής τελεστής και έστω u_1και u_2 ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις διακεκριμένες ιδιοτιμές $λ_1$ και $λ_2$ έτσι ώστε $Tu_1 = λ_1u_1$ και $Tu_2 = λ_2u_2$. Από το θεώρημα (2.2.1) οι ιδιοτιμές $λ_1$ και $λ_2$ είναι πραγματικές. Τότε

$$\lambda_1 < u_1, u_2 >=< Tu_1, u_2 >=< u_1, Tu_2 >=< u_1, \lambda_2 u_2 >= \overline{\lambda_2} < u_1, u_2 >= \lambda_2 < u_1, u_2 >,$$

και επομένως

$$(\lambda_1 - \lambda_2) < u_1, u_2 >= 0.$$

Εφόσον $λ_1 \neq λ_2$, έχουμε $<u_1,u_2>$ = 0, άρα u_1,u_2 είναι ορθογώνιες. ∎

Πόρισμα 2.2.1 *Όλες οι ιδιοτιμές ενός φραγμένου αυτοσυζυγή τελεστή T ικανοποιούν την ανίσωση*

$$|\lambda| \leq \sup_{||x|| \leq 1} | < Ax, x > |.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα (2.1.4) έχουμε οτι $|\lambda| \leq ||T||$. Επίσης από τον ορισμό του αυτοσυζυγούς τελεστή ισχύει ότι $||T|| = \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Επομένως από τα παραπάνω ισχύει η ζητούμενη ανισότητα,

$$|\lambda| \leq \sup_{||x|| \leq 1} | < Ax, x > |.$$

■

Πόρισμα 2.2.2 *Αν T είναι ένας μη-μηδενικός συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H, τότε υπάρχει ένα διάνυσμα ω τέτοιο ωστε $||\omega|| = 1$ και*

$$| < Tw, w > | = \sup_{||x|| \leq 1} | < Tx, x > |.$$

Απόδειξη. Έστω w, $||w|| = 1$, να είναι ένα ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί σε μία ιδιοτιμή λ τέτοια ώστε $|\lambda| = ||T||$. Τότε

$$| < Tw, w| >= | < \lambda w, w > | = |\lambda| ||w||^2 = |\lambda| = ||A|| = \sup_{||x|| \leq 1} < Tx, x > |.$$

■

Πρόταση 2.2.1 *Αν $T \in \mathcal{L}(H)$ ένας συμπαγής, αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε οι ιδιόχωροί του T, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι ορθογώνιοι.*

Απόδειξη. Έστω λ, μ, $\lambda \neq \mu$, οι δύο ιδιοτιμές του T και N_λ, N_μ οι αντίστοιχοι ιδιόχωροί. Είναι λ, $\mu \in \mathbb{R}$ και αν $x \in N_\lambda$, $y \in N_\mu$ τότε:

$$\lambda < x, y > = < Tx, y > = < x, Ty > = \overline{\mu} < x, y > = \mu < x, y > => (\lambda - \mu) < x, y > = 0$$

$$=> \ < x, y > = 0 => x \perp y. \ \ A\rho\alpha \ \ N_\lambda \perp N_\mu$$

■

Πρόταση 2.2.2 *Έστω $T \in \mathcal{L}(H)$ ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Θέτουμε*

$$m = \inf_{u \in H, |u|=1} (Tu, u) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; M = \sup_{u \in H, |u|=1} (Tu, u)$$

Τότε σ(T) $\subset$ [m,M], m $\in$ σ(T) και M $\in$ σ(T).

Έστω λ $>$ M. Θα δείξουμε ότι λ $\in$ ρ(T). Έχουμε

$$(Tu, u) \leq M|u|^2 \;\; \forall u \in H,$$

και επομένως,

$$(\lambda u - Tu, u) \geq (\lambda - M)|u|^2 = \alpha |u|^2 \;\; \forall u \in H \;\; \mu\varepsilon \;\; \alpha > 0.$$

Εφαρμόζοντας το θέωρημα Lax-Milgram , βλεπουμε ότι ο λI - T είναι αμφιμονοσήμαντος και επί. Θα δείξουμε τώρα οτι M $\in$ σ(T). Το α(u,υ) = (Mu - Tu,υ) είναι ένα διγραμμικό συναρτησιακό, συμμετρικό και

$$\alpha(u, \upsilon) \geq 0 \;\; \forall \;\; \upsilon \;\; \in \;\; H.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz στο συναρτησιακό α(u,υ), παίρνουμε

$$\|(Mu - Tu, \upsilon)\| \leq (Mu - Tu, u)^{1/2} (M\upsilon - T\upsilon, \upsilon)^{1/2} \;\; \forall u, \upsilon \in H,$$

από όπου προκύπτει, ειδικά, ότι

$$|Mu - Tu| \leq C(Mu - Tu, u)^{1/2} \;\; \forall u \in H.$$

Έστω (u$_n$) μια ακολουθία τέτοια ώστε $|$υ$_n|$ = 1 και (Tu$_n$,u$_n$) $\to$ M. Λόγω της τελευταίας εξισωσης βλέπουμε ότι $|$Mu$_n$ - Tu$_n|$ και άρα M $\in$ σ(T) (διότι, αν M $\in$ ρ(T), τότε u$_n$ = (MI - T)$^{-1}$(Mu$_n$ - Tu$_n$ $\to$ 0). Οι ιδιότητες του m προκύπτουν αν αντικατασταθεί ο T με τον -T.

Πόρισμα 2.2.3 *Έστω $T \in \mathcal{L}(H)$ ένας αυτοσυζυγής τελεστής τέτοιος ώστε σ(T) $=$ $\{$0$\}$. Τότε T $=$ 0.*

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση (2.2.2) γνωρίζουμε ότι

$$(Tu, u) = 0 \ \ \forall u \in H.$$

Προκύπτει ότι

$$2(Tu, \upsilon) = (T(u+\upsilon), u+\upsilon) - (Tu, u) - (T\upsilon, \upsilon) = 0 \ \ \forall u, \upsilon \in H$$

Άρα T = 0. ■

Θεώρημα 2.2.4 *Έστω (P_n) μια ακολουθία ανά δύο ορθογωνίων τελεστών προβολής σε ένα χώρο Hilbert H και έστω (λ_n) μια ακολουθία αριθμών τέτοια ώστε $\lambda_n \to 0$ όταν $n \to \infty$. Τότε*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ *συκλίνει στο $\mathcal{B}(H, H)$ και επομένως ορίζει φραγμένο τελεστή.*

2. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η λ_n είναι ιδιοτιμή ενός τελεστη $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$, και κάθε άλλη πιθανή ιδιοτιμή του T είναι το 0.*

3. *Αν όλα τα λ_n είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ο τελεστής T είναι αυτοσυζυγής.*

4. *Αν όλες οι προβολές P_n είναι πεπερασμένης διάστασης, τοτε ο T είναι συμπαγής.*

Απόδειξη.

1. Λόγω της πληρότητας του $\mathcal{B}(H, H)$, αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ είναι Cauchy ακολουθία. Έστω ε ένας αυθαίρετος θετικός αριθμός. Αφού $\lambda_n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\lambda_n| < \varepsilon$ για όλα τα $n > n_0$. Για κάθε x $\in$ H και κάθε k, m $\in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $n_0 < k < m$, έχουμε

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{n=k}^{m} \lambda_n P_n x \right\|^2 &= \sum_{n=k}^{m} ||\lambda_n P_n x||^2 = \sum_{n=k}^{m} |\lambda_n|^2 ||P_n x||^2 \\ &\leq \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{m} ||P_n x||^2 = \varepsilon^2 \left\| \sum_{n=k}^{m} x P_n x \right\|^2 \leq \varepsilon^2 \left\| \sum_{n=k}^{m} P_n \right\|^2 ||x||^2,\end{aligned}$$

Το άθροισμα $\sum_{n=k}^{m} P_n$ είναι ένα πεπερασμένο αθροισμα τελεστών προβολών και άρα είναι τελεστης προβολη με νόρμα ίση με τη μονάδα. Συνεπώς από την προηγούμενη σχέση ισχύει

$$\left\| \sum_{n=k}^{m} \lambda_n P_n \right\| = \sup_{||x||=1} \left\| \sum_{n=k}^{m} \lambda_n P_n x \right\| \leq \varepsilon,$$

για κάθε $n_0 < k < m$, το οποίο αποδεικνύει οτι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sum_{n=k}^{m} \lambda_n P_n$ είναι Cauchy ακολουθία.

2. Ορίζουμε το εύρος του P_n ως $R(P_n)$ και έστω $n_0 \in \mathbb{N}$. Αν $u \in R(P_{n_0})$, τότε $P_{n_0}u = u$ και $P_n u = u$ για όλα τα $n \neq n_0$, επειδη οι προβολές P_n είναι ορθογώνιες. Άρα,

$$Tu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n u = \lambda_{n_0} u$$

το οποίο δείχνει ότι το λ_{n_0} είναι μία ιδιοτιμή του T. Για να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν μη μηδενικές ιδιοτιμές, υποθέτουμε ότι u είναι ενα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Θέτουμε $\upsilon_n = P_n u$, n = 1,2,..., και έστω w = Qu, όπου Q είναι η προβολή στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του R(T). Τότε,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n + w \tag{2.2.5.α}$$

με $w \perp R(P_n)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς,

$$A(\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n + w) = A(\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n) = \sum_{n=1}^{\infty} A\upsilon_n$$

αφού $P_n w = 0$ και ο T είναι συνεχής. Έπεται, οτι η χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \upsilon_n = \lambda(\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n + w)$$

ή

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n)\upsilon_n + \lambda w = 0. \tag{2.2.5.β}$$

Εφόσον όλα τα διανύσματα στην (2.2.5.β) είναι ορθογώνια, το άθροισμα μηδενίζεται μόνο αν κάθε όρος είναι ίσος με μηδέν. Συνεπώς λw = 0, και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είτε $\lambda = \lambda_n$

είτε $υ_n$ = 0. Τέλος, αν το u στην σχέση (2.2.5.α) είναι ένα μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα, τότε είτε w = 0 ειτε $υ_k$ = 0 για κάποια k $\in \mathbb{N}$. Επομένως, λ = 0 ή λ = $λ_k$ για κάποια k $\in$ $\mathbb{N}$, από την (2.2.5.β).

3. Έστω ότι όλα τα $λ_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Αφού προβολές είναι αυτοσυζυγείς τελεστές, για καθε x,y $\in$ H, έχουμε

$$\begin{aligned} < Tx, y > &= \sum_{n=1}^{\infty} < \lambda_n P_n x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < P_n x, y > \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} < x, P_n y >= \sum_{n=1}^{\infty} < x, \lambda_n P_n y >= \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n y \right\rangle =< x, Ty > . \end{aligned}$$

4. Αν όλες οι προβολές P_n είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε ο T είναι συμπαγής απο το πόρισμα (1.1.2).

■

Θεώρημα 2.2.5 *Υποθέτουμε ότι ο H είναι διαχωρίσιμος. Έστω T ένας αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής. Τότε ο H έχει μια βάση Hilbert που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T.*

Απόδειξη. Έστω $(λ_n)_{n\geq 1}$ η ακολουθία των διαφορετικών μεταξύ τους ιδιοτιμών του T, εκτός του 0, και $λ_0$ = 0. Θέτουμε E_0 = N(T) και E_n = N(T - $λ_n$I). Υπενθυμίζουμε ότι

$$0 \leq dim E_0 \leq \infty \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \sigma\tau\iota \ \ 0 < dim E_n < \infty.$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι ο H είναι άθροισμα Hilbert των $(E_n)_{n\geq 0}$:

1. Οι χώροι $(E_n)_{n\geq 0}$ είναι ανά δύο ορθογώνιοι. Πράγματι, αν u $\in$ E_m και υ $\in$ E_n με m $\neq$ n, τότε

$$Tu = \lambda_m u, \ \ T\upsilon = \lambda_n \upsilon$$

και

$$(Tu, \upsilon) = \lambda_m (u, \upsilon) = (u, T\upsilon) = \lambda_n (u, \upsilon).$$

Άρα

$$(u, \upsilon) = 0$$

2. Έστω F ο γραμμικός χώρος που παράγεται απο τους $(E_n)_{n\geq 0}$. Θα δείξουμε ότι ο F είναι πυκνός στο H. Είναι φανερό ότι $T(F) \subset F$. Προκύπτει ότι $T(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$. Πράγματι, αν $u \in F^{\perp}$ και $\upsilon \in F$, τότε $(Tu,\upsilon) = (u,T\upsilon) = 0$. Ο τελεστής $T_0 = T|_{F^{\perp}}$ είναι αυτοσυζυγής συμπαγής. Εξάλλου, $\sigma(T_0) = \{0\}$. Πράγματι, αν

$$l \in \sigma(T_0)\backslash\{0\}, \quad \tau o \tau \varepsilon \ \ \lambda \in I\delta(T_0)$$

και άρα υπάρχει $u \in F^{\perp}$ τέτοιο ώστε $T_0 u = \lambda u$. Επομένως, το λ είναι μία από τις ιδιοτιμές του λ_n του T και $u \in F^{\perp} \cap E_n$. Συνεπώς, u = 0, που είναι άτοπο. Απο το πορισμα (2.2.3) προκύπτει οτι $T_0 = 0$ και επομένως

$$F^{\perp} \subset N(T) \subset F \ \ \kappa\alpha\iota F^{\perp} = \{0\}.$$

Συνεπώς ο F είναι πυκνός στον H.

Τέλος επιλέγουμε σε κάθε E_n μια βάση Hilbert. Η ένωση των βάσεων αυτών είναι μια βάση Hilbert του H που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T.

■

Παρατήρηση 2.2.1 *Έστω T ένας αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής. Από τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε κάθε $u \in H$ στη μορφή*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \ \ \mu\epsilon \ \ u_n \in E_n,$$

οπότε $T_u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \upsilon_n$. Ορίζουμε

$$T_k u = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n u_n.$$

Είναι φανερό ότι ο T_k είναι ένας τελεστής πεπερασμένου βαθμού και ότι

$$||T_k - T|| \leq \sup_{n\geq k+1} |\lambda_n| \to 0 \ \ o\tau\alpha\nu \ \ k \to 0.$$

Ξαναβρίσκουμε έτσι το αποτέλεσμα οτι ο T είναι όριο μιας ακολουθίας τελεστών (T_k) πεπερασμένου βαθμού.

Κεφάλαιο 3

Φασματικό Θεώρημα

3.1 Το φασματικό θεώρημα-πεπερασμένη διάσταση

Ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων (με μιγαδικούς συντελεστές) με n (μιγαδικούς) αγνώστους ορίζει μία σχέση:

$$Ax = y$$

όπου A : $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ είναι γραμμική απεικόνιση και y $\in \mathbb{C}^n$. Η λύση του συστήματος είναι άμέση, αν συμβεί να υπάρχει μια βάση $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{C}^n$ με την ιδιότητα $Ae_n = \lambda_n e_n$ όπου $\lambda_n \in \mathbb{C}$, αν δηλαδή η A διαγωνοποιείται ως προς την $\{e_k\}$. Το φασματικό θεώρημα σε χώρους πεπερασμένης διάστασης χαρακτηρίζει τους τελεστές που διαγωνοποιούνται ως προς μια ορθοκανονική βάση του χώρου. Στην παράγραφο αυτή θα επεκτείνουμε το θεώρημα αυτό για συμπαγείς τελεστές σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert.

Ορισμός 3.1.1 *Έστω H ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας τελεστής $T \in B(H)$ λέγεται διαγωνοποιήσιμος αν υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του H και μια ακολουθία $a = \{a_n\}$ μιγαδικών αριθμών ώστε $Te_n = a_n e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\|a_n\| = \|\|Te_n\|\| \leq \|\|T\|\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $a \in l^\infty$, και για κάθε $x = \sum_n x_n e_n \in H$,*

$$T(\sum_n x_n e_n) = \sum_n a_n x_n e_n$$

Θεώρημα 3.1.1 ***(Φασματικό θεώρημα στην πεπερασμένη διάσταση)*** *Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, $dimH < \infty$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ οι διάφορες ανά δυο ιδιοτιμές του T, N_i, $1 \leq i \leq \kappa$ οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι και P_i η ορθή προβολή επι του N_i $1 \leq i \leq \kappa$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. $N_i \perp N_j$, *αν* $i \neq j$, $\sum\limits_{n=1}^{\kappa} N_i = H$.
2. $P_i \perp P_j$, *αν* $i \neq j$, $\sum\limits_{n=1}^{\kappa} P_i = I$ *και* $T = \sum\limits_{n=1}^{\kappa} \lambda_i P_i$.
3. *Ο T είναι φυσιολογικός.*

Απόδειξη.

(1)=>(2) Κάθε x $\in$ H γράφεται μονοσήμαντα ως

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_\kappa, \;\; \text{οπου} \;\; x_i \;\; \in \;\; N_i \;\; \text{και} \;\; x_i \perp x_j, \;\; i \neq j.$$

τότε,

$$Tx = Tx_1 + Tx_2 + \ldots + Tx_\kappa = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\kappa x_\kappa. \qquad (3.1.1.\alpha)$$

Ωστόσο γνωρίζουμε ότι $P_i P_j = 0$, $i \neq j$ και επειδή για κάθε $i \neq j$ είναι $N_j \subseteq N_i^{\perp}$, έχουμε $P_i x = x_i$. Επομένως,

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_\kappa = P_1 x + P_2 x + \ldots + P_\kappa x$$
$$= (P_1 + P_2 + \ldots + P_\kappa)x => I = P_1 + P_2 + \ldots + P_\kappa.$$

Επίσης η σχέση (3.1.1.α) γράφεται:

$$Tx = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\kappa x_\kappa = \lambda_1 P_1 x + \lambda_2 P_2 x + \ldots + \lambda_\kappa P_\kappa x$$
$$= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_\kappa P_\kappa)x$$
$$=> T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_\kappa P_\kappa.$$

(2)=>(3) Είναι $T^* = \overline{\lambda_1} P_1 + \overline{\lambda_2} P_2 + \ldots + \overline{\lambda_k} P_k$, οπότε $TT^* = |\lambda_1|^2 P_1 + |\lambda_2|^2 P_2 + |\lambda_k|^2 P_k = T^* T$ => T φυσιολογικός.

(3)=>(1) Έστω T φυσιολογικός θα δείξουμε ότι:

1. Το x είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμλη λ, αν και μόνο αν το x είναι ιδιοδιάνυσμα του T^* με ιδιοτιμή $\overline{\lambda}$.

   Πράγματι, επειδή T - λI είναι φυσιολογικός, είναι : $||Tx - \lambda x|| = ||T^*x - \overline{\lambda}x||$.

2. Οι ιδιόχωροι N_i είναι ανά δύο κάθετοι.

   Πράγματι, έστω $x_i \in N_i$, $x_j \in N_j$, $i \neq j$. Τότε, $Tx_i = \lambda x_i$, $Tx_j = \lambda x_j$ και

   $$\lambda_i\langle x_i, x_j\rangle = \langle\lambda_i x_i, x_j\rangle = \langle Tx_i, x_j\rangle = \langle x_i, T^*x_j\rangle = \langle x_i, \overline{\lambda_j}x_j\rangle = \lambda_j\langle x_i, x_j\rangle$$

   οπότε, επειδή $\lambda_i \neq \lambda_j$ είναι $\langle x_i, x_j\rangle = 0$.

3. Κάθε ιδιόχωρος N_i είναι και T^* αναλλοίωτος (T-αναλλοίωτος πάντα).

   Πράγματι, αν $x_i \in N_i$ τότε $Tx_i = \lambda_i x_i \Rightarrow T^*x_i = \overline{\lambda_i}x_i \Rightarrow T^*x_i \in N_i$.

■

Θεώρημα 3.1.2 *Έστω (N_i), $i \in \mathbb{N}^*$ μια ακολουθία ανά δύο κάθετων υποχώρων του H και P_i η ορθή προβολή στον N_i. Τότε για κάθε $x \in H$, η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty}P_i x$ συγκλίνει σε ένα $x' \in H$ τέτοιο, ώστε $x - x' \perp N_i$, για κάθε $i = 1,2,...$*

Απόδειξη. Είναι,

$$\begin{aligned}0 \leq ||x - \sum_{i=1}^{\infty} P_i x||^2 &= ||x||^2 - 2\sum_{i=1}^{\infty}\langle x, P_i x\rangle + \sum_{i=1}^{\infty}\langle P_i x, P_i x\rangle \\ &= ||x||^2 - \sum_{i=1}^{\infty}||P_i x||^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}||P_i x||^2 \leq ||x||^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}||P_i x||^2 \;\; \sigma\upsilon\gamma\kappa\lambda\iota\nu\varepsilon\iota.\end{aligned}$$

Έστω $s_n = \sum_{i=1}^{n}P_i x$. Τότε, για $m > n$ είναι $||s_m - s_n||^2 = \sum_{i=n+1}^{m}||P_i x||^2 \to 0$, όταν $n,m \to \infty$. Άρα η ακολουθία (s_n) είναι βασική και επομένως συγκλίνει. Έστω $s_n \to x'$. Για κάθε j (σταθερό) και για κάθε $n > j$ είναι $P_j(\sum_{i=1}^{n}P_i x) = P_j x$ και επειδή P_j συνεχής, έπεται

$$P_j(\sum_{i=1}^{n} R_i x) = P_j x \Rightarrow P_j x' = P_j x \Rightarrow P_j(x - x') = 0 \Rightarrow x - x' \perp N_j \tag{3.1.1}$$

Έστω ότι τα N_i παράγουν τον H, δηλαδή $\overline{[N_i, i \in \mathbb{N}]} = H$. Τότε $x - x' \perp H$, οπότε $x - x' = 0$ και $x = x' = \sum_{i=1}^{\infty}P_i x$. Στην περίπτωση αυτή λέμε, ότι ο H είναι το άπειρο ευθύ εσωτερικό άθροισμα των υποχώρων N_i και το συμβολίζουμε με $H = \bigoplus_{i=0}^{\infty}N_i$. ■

3.2 Το φασματικό θεώρημα για συμπαγείς τελεστές

Ο στόχος μας είναι να επιτύχουμε μια διαγώνια μορφή για έναν τελεστή T $\in$ B(H). Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι δυνατό για έναν αυθαίρετο τελεστή: αν ο T είναι διαγωνοποιήσιμος ως προς μια ορθοκανονική βάση του H, τότε είναι φυσιολογικός. Ας υποθέσουμε οτι ο T είναι ένας φυσιολογικός τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H. Αναγκαία συνθήκη για την διαγωνοποιησιμότητα του T είναι η ύπαρξη ιδιοτιμών. Αυτή η συνθήκη όμως δεν ικανοποιείται πάντα σε απειροδιάστατους χώρους καθώς υπάρχουν τελεστές όπως ο πολλαπλασιαστικός τελεστής ο οποίος είναι μεν φυσιολογικός και αυτοσυζυγής αλλά δεν έχει ιδιοτιμές.

Θεώρημα 3.2.1 ***(Φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς συμπαγείς τεﬂεστές)*** *Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τεﬂεστής, $\{\lambda_i\}$, $i \geq 1$ οι διαφορετικές μη μηδενικές ιδιοτιμές του (για τις οποίες μπορούμε χώρις βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$) και P_i η ορθή προβολή επί του ιδιόχωρου N_i αντίστοιχου της ιδιοτιμής λ_i, $i \geq 1$. Τότε,*

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i,$$

όπου σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

Απόδειξη. Έστω N_i ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και N_0 = kerT. Οι χώροι αυτοί είναι ανά δύο κάθετοι. Με βάση το προηγούμενο θεώρημα (3.1.2) ορίζονται οι υπόχωροι,

$$M' = \bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i \quad \kappa\alpha\iota \quad M = \left\{ \bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i \right\}^{\perp}.$$

Θα δείξουμε κατ' αρχάς οτι οι υπόχωροι M', M είναι T-αναλλοίωτοι.

- Αν m' $\in$ M', τότε m' = $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i||^2 < \infty$ και Tm' = $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$, τότε η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ συγκλίνει. Πράγματι, είναι $\sum_{i=1}^{\infty} ||\lambda_i x_i||^2 \leq ||T||^2 \sum_{i=1}^{\infty} ||x_i||$. Άρα Tm' $\in$ M', οπότε TM'$\subseteq$M'.
- Αν m $\in$ M τότε για κάθε m' $\in$ M' είναι $\langle$Tm,m'$\rangle$ = $\langle$m,Tm'$\rangle$ = 0, αφού Tm' $\in$ M' και M$\perp$M'. Άρα Tm$\perp$M'. Επομένως Tm $\in$ M και TM$\subseteq$M. Έστω T_M ο περιορισμός του T στο M. Τότε ο T_M είναι συμπαγής, αυτοσυζυγής και δεν έχει ιδιοτιμές, διότι δεν υπάρχουν

ιδιοδιανύσματα του T στον M. Άρα σ(T_M) $\subseteq \{0\}$ οπότε, T_M = 0. Επομένως για κάθε x $\in$ M είναι Tx = T_Mx = 0 και άρα M $\subseteq$ N_0. Όμως M$\perp$$N_0$. Άρα M = $\{0\}$. Επομένως,

$$\left\{ \bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i \right\}^{\perp} = \{0\}, \quad οποτε \;\; H = \bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i,$$

και άρα για κάθε x $\in$ H, έχουμε :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} P_i x => Tx = \sum_{i=1}^{\infty} TP_i x = \sum_{i=1}^{\infty} P_i Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i x,$$

όπου η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i P_i x$ συγκλίνει. Μένει να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i P_i$ συγκλίνει, ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$, στον T. Είναι :

$$||Tx - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i x||^2 = ||\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i P_i x||^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 ||P_i x||^2.$$

Η παραπάνω σχέση ή θα έχει πεπερασμένο πλήθος όρων, οπότε η απόδειξη ολοκληρώνεται ή $\lambda_i \to 0$. Τότε για κάθε ε > 0 υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $|\lambda_i| <$ ε για κάθε i > n_0. Αν n > n_0 είναι,

$$||Tx - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i x||^2 < \varepsilon^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} ||P_i x||^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} ||P_i x||^2 = \varepsilon^2 ||x||^2 =>$$

$$||T - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i||^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x||}{||x||} < \varepsilon => ||T - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i|| \to 0.$$

Άρα T = $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i P_i$ ως προς τη νόρμα.

■

Θεώρημα 3.2.2 *Έστω (x_n) μια ορθοκανονική ακολουθία διανυσμάτων του H και (μ_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, η οποία είναι είτε μηδενική είτε πεπερασμένη. Η γραμμική απεικόνιση T : H $\to$ H, που ορίζεται από τη σχέση*

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \langle x, x_i \rangle x_i$$

είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής.

Απόδειξη. Είναι,

$$||Tx||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_i|^2 \langle x, x_i\rangle^2 ||x_i||^2 \leq sup|\mu_i|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_i|^2 |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \sup |\mu_i|^2 ||x||^2.$$

Άρα T $\in \mathcal{L}(H)$. Αν η ακολουθία είναι πεπερασμένη τότε και ο T είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης και άρα συμπαγής. Έστω $\mu_n \to 0$ και ο πεπερασμένης τάξης τελεστής $T_n = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \langle x, x_i \rangle x_i$, $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε, επειδή

$$||T - T_n||^2 = \sup_{||x||=1} \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i \langle x, x_i\rangle x_i \right\|^2 \leq \sup_{i>n} |\mu_i|^2 \to 0,$$

έπεται οτι ο T είναι συμπαγής. Επιπλέον, για x,y $\in$ H, είναι:

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \langle x, x_i\rangle \langle x_i, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

οπότε ο T είναι και αυτοσυζυγής. ∎

Θεώρημα 3.2.3 *Έστω $T \in \mathcal{K}(H)$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και $T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$. Αν $S \in \mathcal{B}(H)$ τότε : $TS = ST <=> SP_i = P_i S$ για κάθε i$\geq$ 1.*

Απόδειξη.

- Έστω $SP_i = P_iS$ για καθε i $\geq$ 1. Τότε,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i SP_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i S, \quad \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\alpha \quad S(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i) = (\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i)S.$$

  Όμως, ακολουθία $(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i)$, συγκλίνει ως προς τη νόρμα, στον T, οπότε ST = TS.

- Αντιστρόφως, έστω TS = TS και ο N_i, ο ιδιόχωρος αντίστοιχος της ιδιοτιμής λ_i. Θα δείξουμε κατ' αρχάς ότι ο N_i είναι S αναλλοίωτος. Έστω x $\in N_i$. Τότε $(T - \lambda_i I)Sx = S(T - \lambda_i I) = 0$. Άρα Sx $\in N_i$, δηλαδή $SN_i \subseteq N_i$, οπότε $P_iSP_i = SP_i$. Επειδή είναι και $S^*T = TS^*$, (αφού $(TS)^* = (ST)^* => S^*T = TS^*$) ο N_i είναι και S^*-αναλλοίωτος, οπότε $P_iS^*P_i = S^*P_i$ => $P_iSP_i = P_iS$. Άρα $SP_i = P_iS$ για κάθε i $\geq$ 1.

∎

Λήμμα 3.2.1 *Έστω M ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H και $T \in \mathcal{B}(H)$. Αν ο M είναι A-αναλλοίωτος και $T|_M = S \in \mathcal{S}(M)$ είναι ο περιορισμός του T στον M, τότε ο συζυγής S^* είναι ο περιορισμός του T^* στον M, αν και μόνο αν ο M είναι T^*-αναλλοίωτος. Αν επιπλέον ο T είναι φυσιολογικός, τότε και ο S είναι φυσιολογικός.*

Απόδειξη.

- Επειδή $S^* \in \mathcal{S}(M)$ είναι $S^*M \subseteq M$, οπότε αν, $S^* = T^*|_M$ τότε $T^*M \subseteq M$.
- Αντιστρόφως, έστω $T^*M \subseteq M$. Για να δείξουμε ότι $S^* = T^*|_M$, αρκεί να δείξουμε ότι $S^*x = T^*x$ για κάθε $x \in M$. Έστω x, $y \in M$. Τότε:

$$\langle S^*x, y\rangle = \langle x, Sy\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle.$$

Άρα $(S^*x - T^*x) \perp y$ για κάθε $y \in M$, οπότε, $(S^*x - T^*x) \in M^{\perp}$. Όμως, $T^*M \subseteq M$, οπότε $(S^*x - T^*x) \in M$. Άρα $(S^*x - T^*x) \in M \cap M^{\perp} = \{0\}$ και επομένως $(S^*x = T^*x)$ για κάθε x $\in M$. Αν τώρα ο T είναι φυσιολογικός, τοτε για κάθε $x \in M$ έχουμε:

$$||S^*x|| = ||T^*x|| = ||Tx|| = ||Sx||,$$

και άρα απο τον ορισμό του φυσιολογικού τελεστή ο S είναι φυσιολογικός.

■

Θεώρημα 3.2.4 ***(Φασματικό θεώρημα για συμπαγείς φυσιολογικούς τελεστές πρώτη μορφή)*** *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση (e_n) του H από ιδιοδιανύσματα του A και μια ακολουθία (λ_n) μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε,*

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$$

για κάθε $x \in H$

Απόδειξη. Έστω A συμπαγής φυσιολογικός τελεστής και ο αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής $T = AA^*$. Από την απόδειξη του θεωρήματος (3.2.1), έχουμε ότι οι ιδιόχώροι N_i του T είναι ανά δύο κάθετοι κα παράγουν τον H. Οι ιδιόχωροι αυτοί είναι αναλλοίωτοι από τους A, A^*.

Πράγματι, αρκεί να δειχθεί ότι οι A, A^* αντιμετατίθενται με τον T (αν BT = TB και x $\in$ N_i τότε, 0 = B(T- λ_iI)x = (T - λ_iI)Bx, οπότε Bx $\in$ N_i και άρα BN_i $\subseteq$ N_i). Είναι

$$A(A^*A) = (AA^*)A = (A^*)A \ \ \kappa\alpha\iota \ \ A^*(A^*A) = A^*(AA^*) = (A^*A)A^*.$$

Επομένως, από το προηγούμενο λήμμα (3.2.1), αν B_i = A$|_{N_i}$, ο περιορισμός του A στον N_i, τότε B_i^* = $A^*|_{N_i}$, και ο B_i είναι φυσιολογικός, αφού ο A είναι φυσιολογικός. Όταν τώρα είναι $\lambda_i \neq 0$, ο αντίστοιχος ιδιόχωρος N_i είναι πεπερασμένη διάστασης και ο B_i ως φυσιολογικός τελεστής σε χώρο πεπερασμένης διάστασης διαγωνοποιείται. Άρα υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_{i_n}$: n = 1,2,...,$k_i\}$ του N_i από ιδιοδιανύσματα του B_i. Η αριθμήσιμη ένωση όλων αυτών των βάσεων, είναι μια ορθοκανονική βάση του χώρου N = $\overline{[N_i : \lambda_i \in \sigma(T)\backslash\{0\}]}$, αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του τελεστή B = A$|_N$. Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί, αν δείξουμε οτι kerA = $N^\perp$. O T = A^*A είναι συμπαγής, αυτοσυζυγής τελεστής με ανά δύο κάθετους ιδιόχωρους N_i, που παράγουν τον H. Αρα $N_\perp$ = N_0 = kerT. Όμως kerA^*A = kerA και επομένως $N^\perp$ = kerA. ∎

Πρόταση 3.2.1 *Έστω H χώρος Hilbert. Αν (a_n) είναι μια μηδενική ακολουθία μιγαδικών αριθμών και (P_n) μια ακολουθία ανά δύο κάθετων προβολών, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n$ *συγκλίνει ως προς τη νόρμα του* $\mathcal{B}(H)$.

Απόδειξη. Έστω s_n = $\sum_{i=1}^{n} a_i P_i$. Τότε για κάθε x $\in$ H και για n $>$ m έχουμε,

$$\begin{aligned} ||(s_n - s_m)x||^2 = || \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i P_i x||^2 &= \sum_{i=m+1}^{n} ||\alpha_i P_i x||^2 \\ &\leq \max_{m+1 \leq i \leq n} |\alpha_1|^2 \sum_{i=m+1}^{n} ||P_i x||^2 \\ &= \max_{m+1 \leq i \leq n} |\alpha_1|^2 || \sum_{i=m+1}^{n} P_i x||^2 \leq \max_{m+1 \leq i \leq n} |\alpha_1|^2 ||x||^2 \end{aligned}$$

Όμως η (a_i) είναι μηδενική, οπότε για ε $>$ 0 υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_i|$ $<$ ε για κάθε i $>$ i_0. Επομένως για n $>$ m $>$ i_0 έχουμε $||s_n$ - $s_m||$ $<$ ε, που σημαίνει οτι η ακολουθία (s_n) είναι βασική ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$ και άρα συγκλίνει.

∎

Θεώρημα 3.2.5 ***(Φασματικό θεώρημα για συμπαγείς φυσιολογικούς τελεστές δεύτερη μορφή)*** *Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ ένας συμπαγής τελεστής. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Οι ιδιόχωροι (N_i) του T είναι αριθμήσιμου πλήθους, ανά δυο κάθετοι και παράγουν τον H.*

2. *Οι ορθές προβολές P_i επί των ιδιόχωρων (N_i) με αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_i, είναι ανά δύο κάθετες, αριθμήσιμου πλήθους και ισχύει*

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i x = x \ \ \forall \ \ x \ \ \in \ \ H \ \ \kappa\alpha\iota T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

3. *Ο τελεστής T είναι φυσιολογικός.*

Απόδειξη.

(1)⇒(2) Από το θεώρημα (3.1.2) έχουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_i$x συγκλίνει για κάθε x $\in$ H και μάλιστα, επειδή H = $\oplus$N$_i$, είναι $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_i$x = x. Επίσης για κάθε x $\in$ H είναι P$_i$x $\in$ N$_i$, οπότε TP$_i$x = λ$_i$x$_i$ και λόγω της συνέχειας του T, έχουμε:

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} TP_i x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i x. \qquad (3.2.5.\alpha)$$

Όμως από την πρόταση (3.2.1), λόγω του ότι η ακολουθία (λ$_i$) είναι μηδενική, η σειρά $\sum\limits_{i=1}^{\infty}$λ$_iP_i$ συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$, οπότε από τη σχέση (3.2.5.α) θα συγκλίνει υποχρεωτικά στον T. Άρα είναι T = $\sum\limits_{i=1}^{\infty}$λ$_iP_i$, ως προς τη νόρμα.

(2)⇒(3) Είναι, για κάθε x $\in$ H

$$||T^*x||^2 = ||\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda_i} P_i x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\overline{\lambda_i}|^2 ||P_i x||^2 = ||\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i x||^2 = ||Tx||^2.$$

Επομένως $||$T*x$||^2$ = $||$Tx$||^2$ για κάθε x $\in$ H, οπότε ο T είναι φυσιολογικός.

(3)$\Rightarrow$(1) Από το θεώρημα (3.2.4) έχουμε ότι αν ο T είναι φυσιολογικός τελεστής τοτε οι ιδιόχωροί του είναι ανα δύο κάθετοι και παράγουν τον H. Μένει λοιπόν να δείξουμε οτι οι ιδιόχωροι του T ειναι αριθμησίμου πλήθους.Ας υποθέσουμε οτι σ_p(T) είναι άπειρο και δεν αποτελεί μηδενική ακολουθία, θα υπάρχει θετικός αριθμός δ ώστε το σύνολο $\{$ λ $\in \sigma_p$(T) : $\|$λ$\| \geq$ δ $\}$ να είναι άπειρο. Θα υπάρχει λοιπόν μια ακολουθία (λ_n) διακεκριμένων ιδιοτιμών ώστε $\|\lambda_n\| \geq$ δ για κάθε n $\in \mathbb{N}$. Αν x_n είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ώστε Tx_n = $\lambda_n x_n$, η ακολουθία (x_n) είναι ορθοκανονική, γιατί οι ιδιόχωροι του T είναι ανά δύο κάθετοι. Επομένως από το θεώρημα (2.1.5) οδηγούμαστε σε άτοπο και άρα το σ_p(T) έχει πεπερασμένη διάσταση και δεν περιέχει το μηδεν. Άρα και το σύνολο των ιδιόχωρων ειναι πεπερασμένο.

■

3.3 Εφαρμογές φασματικού θεωρήματος

Πρόταση 3.3.1 *Έστω T ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert, με ακολουθία μη μηδενικών ιδιοτιμών (λ_n).Η ακολουθία (x_n) είναι μια ορθοκανονική βάση του (kerT)$^\perp$ $= \overline{ImT}$ και κάθε x $\in$ H γράφεται ώς x = x_0 + $\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,x_i\rangle x_i$ όπου $x_0 \in$ kerT.*

Απόδειξη. Είναι Tx_i = $\lambda_i x_i \Rightarrow x_i$ = $\frac{1}{\lambda}Tx_i \in$ ImT και από το φασματικό θεώρημα έχουμε Tx = $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\langle x,x_i\rangle x_i$. Άρα η γραμμική θήκη $[\{x_n\}]$ του $\{x_n\}$ είναι πυκνή στο ImA, οπότε $\overline{[\{x_n\}]}$ = $\overline{ImT}$ = (kerT)$^\perp$. Από H = kerT$\oplus$(kerT)$^\perp$, κάθε x $\in$ H γράφεται x = x_0 + x_1, όπου $x_0 \in$ kerT και $x_1 \in$ (kerT)$^\perp$. Όμως x_1 = $\sum_{i=1}^{\infty}\langle x_1,x_i\rangle x_i$ = $\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,x_i\rangle x_i$, αφού $\langle x_1,x_i\rangle$ = $\langle x,x_i\rangle$ για κάθε i. ■

Πρόταση 3.3.2 *Για κάθε $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_n$ για όλα τα $n \geq 1$, ο τελεστής λI - T είναι αντιστρέψιμος με*

$$(\lambda I - T)^{-1}y = \frac{1}{\lambda}[y + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i}{\lambda - \lambda_i}\langle y, x_i\rangle x_i]$$

Απόδειξη. Έστω y $\in$ H. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό x $\in$ H τέτοιο ώστε (λI - T)x = y. Πράγματι, η τελευταία ισότητα γράφεται:

$$\lambda x = y + Tx = y + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, x_i \rangle x_i \tag{3.3.2.α}$$

Από τη σχέση (3.3.2.α) προκύπτει:

$$\lambda \langle x, x_k \rangle = \langle y, x_k \rangle + \lambda_k \langle x, x_k \rangle \Rightarrow (\lambda - \lambda_k)\langle x, x_k \rangle = \langle y, x_k \rangle, \quad k \geq 1. \tag{3.3.2.β}$$

Λύνοντας τη σχέση (3.3.2.α) ως προς x, αφού αντικαταστήσουμε το $\langle$x,x$_i\rangle$ από τη σχέση (3.3.2.β), παίρνουμε

$$x = \frac{1}{\lambda}[y + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda - \lambda_i} \langle y, x_i \rangle x_i]. \tag{3.3.2.γ}$$

Η σειρά στην τελευταία σχέση συγκλίνει, διότι η ακολουθία ($\frac{\lambda_i}{\lambda-\lambda_i}$) είναι φραγμένη ως μηδενική.

Αντιστρόφως, με απλό υπολογισμό, προκύπτει ότι ο λI - T απεικονίζει κάθε x, που δίνεται από τον τύπο (3.3.2.γ), στο y. Επομένως για κάθε y $\in$ H υπάρχει μοναδικό x, αυτό που δίνεται από τον τύπο (3.3.2.γ), τέτοιο ώστε (λI - T)x = y. Άρα η απεικόνιση λI - T είναι αντιστρέψιμη με

$$(\lambda I - T)^{-1} y = \frac{1}{\lambda}(I + K)y \tag{3.3.1}$$

όπου Ky = $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda-\lambda_i}\langle$y,x$_i\rangle$x$_i$. Επειδη η ακολουθία ($\frac{\lambda_i}{\lambda-\lambda_i}$) είναι μηδενική, ο K είναι φραγμένος συμπαγής τελεστής. Άρα από τη σχέση (3.3.2.γ) προκύπτει ότι ο (λI - T)$^{-1}$ είναι φραγμένος και επομένως ο λI - T είναι αντιστρέψιμος. ∎

Πρόταση 3.3.3 *Αν T$\in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής φυσιολογικός τελεστής και λ $\in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, δεν είναι ιδιοτιμή του T τότε ο τελεστής λI - A είναι αντιστρέψιμος με*

$$(\lambda I - T)^{(-1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_i} P_i \tag{3.3.2}$$

όπου η σειρά συγκλίνει κατα σημείο.

Απόδειξη. Αφού ο T είναι συμπαγής έπεται από την θεώρημα (1.2.2) οτι λI - T είναι *ένα προς ένα* και *επί* και συνεπώς αντιστρέψιμος. Από το θεώρημα (3.2.5) έχουμε οτι $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_i$x

= x για κάθε x $\in$ H και T = $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i P_i$, όπου ($\lambda_i$) οι ιδιοτιμές του T και P_i οι ορθές προβολές στους αντίστοιχους ιδιόχωρους. Θα δείξουμε οτι $(\lambda I - T)^{-1}x = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}P_i x$, x $\in$ H. Για αυτό αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε x $\in$ H, η σειρά $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}P_i x$ συγκλίνει. Πράγματι, τότε θα είναι

$$(\lambda I - T)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}P_i x = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}(\lambda I - T)P_i x = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}(\lambda-\lambda_i)P_i x$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}P_i x = x$$

δηλαδή το ζητούμενο. Θεώρουμε τους τελεστές $K_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}P_i$. Τότε, για κάθε x $\in$ H και m $>$ n $>$ 1 είναι

$$||K_m x - K_n x||^2 = ||\sum_{i=n+1}^{m}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}P_i x||^2 = \sum_{i=n+1}^{m}\frac{1}{|\lambda-\lambda_i|^2}||P_i x|| \leq \frac{1}{d^2}\sum_{i=n+1}^{m}||P_i x||^2 \to 0,$$

όταν m,n $\to \infty$ (Πρόταση (3.2.1)), όπου d = $\inf\limits_n|\lambda - \lambda_i| > 0$, αφού $\lambda \notin \sigma_p$(T). Άρα η ακολουθία (K_nx) είναι βασική και επομένως συγκλίνει. Έστω Kx = $\lim\limits_n K_n x$. Ορίζεται έτσι η γραμμική απεικόνιση K : x $\to$ Kx, η οποία είναι και φραγμένη, αφού $||Kx||^2 = \sum\limits_n||K_n x||^2 \leq \frac{1}{d^2}||x||^2$. Είναι Kx = $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}P_i x$ και Kx = $(\lambda I - T)^{-1}x$για κάθε x $\in$ H. ■

Θεώρημα 3.3.1 *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι ένας συμπαγής τελεστής, τότε υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες διανυσμάτων (x_n), (y_n) και μια ακολουθία θετικών αριθμών (κ_n), τέτοιες ώστε Tx = $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_n\langle x,x_n\rangle y_n$, x $\in$ H. Επιπλέον, αν η (k_n) δεν είναι πεπερασμένη και θέσουμε (T_mx) = $\sum\limits_{n=1}^{m}\kappa_n\langle x,x_n\rangle y_n$ τότε $||T - T_m|| \to 0$, όταν m $\to$ 0. Οι αριθμοί k_n^2 είναι ιδιοτιμές του συμπαγούς αυτοσυζυγή τελεστή T^*T, όπου η κάθε μία επαναλαμβάνεται τόσες φορές όση η γεωμετρική της πολλαπλότητα (όση δηλαδή η διάσταση του αντίστοιχου ιδιόχωρου).*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς ο τελεστής T^*T είναι συμπαγής, αλλά είναι και θετικός, αφού $\langle T^*Tx,x\rangle = \langle Tx,Tx\rangle = ||Tx||^2 \geq 0$. Άρα είναι αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής. Επομένως με βάση το φασματικό θεώρημα ο T^*T γράφεται: $T^*Tx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n\langle x,x_n\rangle x_n$. Επιπλέον οι ιδιοτιμές του T^*T είναι θετικοί αριθμοί. Πράγματι είναι: $T^*Tx = \lambda x \Rightarrow \lambda\langle x,x\rangle = \langle T^*Tx,x\rangle = \langle Tx,Tx\rangle \geq 0$.

Μπορούμε επομένως να θέσουμε μ_n = k_n^2, $k_n > 0$. Είναι $||Tx_n||^2$ = $\langle T^*Tx_n, x_n\rangle$ = k_n^2, οπότε $||Tx_n||$ = k_n. Άρα η ακολουθία των ιδιοδιανυσμάτων (y_n) : y_n = $\frac{1}{k_n}Tx_n$ είναι ορθοκανονική. Επειδή κάθε $x \in H$ γράφεται $x = x_0 + \sum\langle x, x_n\rangle x_n$ με $T^*Tx_0 = Tx_0 = 0$, έχουμε

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} k_n\langle x, x_n\rangle y_n = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x_n \otimes y_n)(x)$$

Τέλος, αν $T_m x = \sum\limits_{n=1}^{m} \kappa_n\langle x, x_n\rangle y_n$ και η ακολουθία k_n δεν είναι πεπερασμένη, τότε:

$$||(T - T_m)x||^2 = \Big\| \sum_{n=M+1}^{\infty} k_n\langle x, x_n\rangle y_n\Big\|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} k_n^2|\langle x, x_n\rangle|^2 \le k_{m+1}^2||x||^2,$$

οπότε $||T - T_m|| \to 0$, όταν $m \to \infty$. Άρα $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n(x_n \otimes y_m)$ ■

Πόρισμα 3.3.1 *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και T^*T είναι συμπαγής τελεστής, τότε και ο T είναι συμπαγής*

Παράδειγμα 3.3.1 *Θεωρούμε την ολοκληρώτικη εξίσωση*

$$f(t) - \lambda\int_a^b k(t,s)f(s)ds = g(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.3.1.α}$$

όπου η συνάρτηση πυρήνας $k(t,s)$ ορίζει έναν αυτοσυζυγή συμπαγή τελεστή $T : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$, $(Kf)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds$ και $g \in L^2[a,b]$ γνώστη συνάρτηση. Ζητάμε την λύση $f \in L^2[a,b]$ της εξισωσης (3.3.1.α).

Απόδειξη. Από το φασματικό θεώρημα ο τελεστής T γράφεται:

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\langle f, x_n\rangle x_n \tag{3.3.1.β}$$

όπου (μ_n) η ακολουθία των μη μηδενικών ιδιοτιμών του T με αντίστοιχη ορθοκανονική ακολουθία ιδιοδιανυσμάτων (x_n). Η σχέση (3.3.1.α) γράφεται ισοδύναμα, ως εξίσωση στο χώρο $L^2[a,b]$,

$$f - \lambda Tf = g. \tag{3.3.1.γ}$$

Απο τη σχέση (3.3.1.γ) πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με x_m προκύπτει:

$$\langle f, x_m\rangle - \lambda\mu_m\langle f, x_m\rangle = \langle g, x_m\rangle \Rightarrow (1 - \lambda\mu_m)\langle f, x_m\rangle = \langle g, x_m\rangle. \tag{3.3.1.δ}$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

- Το $\frac{1}{\lambda}$ δεν είναι ιδιοτιμή του T. Τότε ο τελεστής I - λT είναι αντιστρέψιμος και άρα η εξίσωση (3.3.1.γ) έχει μοναδική λύση. Στην περίπτωση αυτή είναι 1 - $\lambda\mu_m \neq 0$ για όλα τα m $\geq$ 1 οπότε από τη σχέση (3.3.1.δ) έχουμε:

$$\langle f, x_m \rangle = \frac{\langle g, x_m \rangle}{1 - \lambda\mu_m}. \quad (3.3.1.ε)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις σχέσεις (3.3.1.β), (3.3.1.γ) και (3.3.1.ε) παίρνουμε:

$$f = g + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda\mu_n \langle g, x_n \rangle}{1 - \lambda\mu_n} x_n. \quad (3.3.1.ζ)$$

Η σειρά στην τελευταία σχέση συγκλίνει ως προς τη νόρμα του L^2[a,b], διότι η ακολουθία $(\frac{\lambda\mu_n}{1-\lambda\mu_n})$, ως μηδενική είναι φραγμένη και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle g, x_n \rangle|^2 \leq ||g||^2$. Η σχέση (3.3.1.ζ) γράφεται αναλυτικά:

$$f(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda\mu_n}{1 - \lambda\mu_n} (\int_a^b g(t)\overline{x_n(t)}dt) x_n(x) \ \ \sigma.\pi. \ \ \sigma\tau o \ \ [a, b]. \quad (3.3.1.η)$$

- Το $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του T. Τότε υπάρχει πεπερασμένο πλήθος φυσικών αριθμών m τέτοιοι ώστε $\frac{1}{\lambda}$ = $\mu_m \Rightarrow 1 - \lambda\mu_m = 0$. Θεωρούμε τα σύνολα A = $\{m \in \mathbb{N}^* : 1 - \lambda\mu_m \neq 0\}$ και B = $\{m \in \mathbb{N}^* : 1 - \lambda\mu_m = 0\}$. Στην περίπτωση αυτή αν η εξίσωση έχει λύση, από τη σχέση (3.3.1.δ) θα έχουμε $\langle g, x_m \rangle = 0$ για κάθε m $\in$ B. Αυτή αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να έχει λύση η εξίσωση. Πράγματι, το σύνολο $\{x_m : m \in B\}$ είναι βάση του ker(I - λT) = ker(I - $\overline{\lambda}T^*$). Επειδή ο $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του T, είναι ker(I - λT) $\neq \{0\}$ και Im(T - λ^{-1}I) κλειστός υπόχωρος, αφού T συμπαγής. Όμως η εξίσωση έχει λύση, αν και μόνο αν g $\in$ Im(I - λT) = Im(T - λ^{-1}I) = $\overline{Im(T - \lambda^{-1}I}$ = (ker(T - $\lambda^{-1}I)^*)^{\perp}$ = ker(I - $\overline{\lambda}T^*)^{\perp}$, που ισοδυναμεί με $\langle g, x_m \rangle = 0$ για κάθε m $\in$ B.

  Επομένως, αν g ικανοποιεί τη σχέση $\langle g, x_m \rangle = 0$ για κάθε m $\in$ B, τότε η εξίσωση λύνεται και η λύση της θα έχει τη μορφή

$$f = g + \sum_{n \in A} \frac{\lambda\mu_n \langle g, x_n \rangle}{1 - \lambda\mu_n} x_n + \sum_{n \in B} c_n x_n,$$

  όπου c_n, n $\in$ B αυθαίρετες σταθερές.

■

Κεφάλαιο 4

Ολοκληρωτικοί Τελεστές

Όπως έχει προανεφερθεί οι συμπαγείς τελεστές συνιστούν μια σημαντική κλάση φραγμένων τελεστών των οποίων η ιδέα προέρχεται απο την θεωρία ολοκληρωτικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Επομένως η μελέτη των συμπαγών τελεστών συνδέεται άρρηκτα με την μελέτη ολοκληρωτικών εξισώσεων. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα ολοκληρωτικού τελεστή για τον οποίο θα αποδειχθεί ότι είναι συμπαγής.

Παράδειγμα 4.0.2 *Σημαντικά παραδείγματα συμπαγών τελεστών είναι οι ολοκληρωτικοί τελεστές T στον L^2([a,b]) που ορίζονται ως,*

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt,$$

όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί και K συνεχής συνάρτηση. Να αποδειχτεί η συμπάγεια αυτού του τελεστή.

Απόδειξη. Έστω (x_n) $\in$ L^2([a,b]) και $||x_n|| \leq$ M για n = 1,2...... και για κάποιο M $>$ 0. Τότε

$$|(Tx_n)(s)| \leq \int_a^b |K(s,t)x_n(t)|\,dt \leq M max|K(s,t)|\sqrt{b-a}$$

και συνεπώς η ακολουθία (Tx_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Επι προσθέτως για κάθε s_1,s_2, $\in$ [α,β], έχουμε

$$\begin{aligned}|(Tx_n)(s_1) - (Tx_n)(s_2)| &\le \int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)||x_n(t)|\,dt \\ &\le \sqrt{\int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)|^2\,dt}\sqrt{\int_a^b |x_n(t)|^2\,dt} \\ &\le \sqrt{b-a}\max_{t\in(a,b)} |K(s_1,t) - K(s_2,t)|.\end{aligned}$$

Εφόσον K ειναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, από την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι η ακολουθία $T(x_n)$ είναι ισοσυνεχής. Επομένως από το θεώρημα Arzela η ακολουθία $T(x_n)$ περιέχει μια ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία. Αυτο αποδεικνύει ότι ο τελεστής T είναι συμπαγής, επειδή ομοιόμορφη σύγκλιση στο [a,b] ισοδυναμεί με σύγκλιση στο L^2([a,b]).

■

4.1 Ολοκληρωτικοί Τελεστές Fredholm

Θεώρουμε τον χώρο Banach X = C[a,b] a, b $\in \mathbb{R}$, τον χώρο L^2[a,b] τον οποιο θα συμβολίζουμε με $\mathcal{H}$ και είναι ένας χώρος Hilbert, καθώς και τα σύνολα:

$$R_{a,b} = [a,b] \times [a,b] \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\Delta_{a,b} = \{(s,t) \in R_{a,b} : t \le s\}.$$

όπου το σύνολο $R_{a,b}$ είναι ένα τετράγωνο στο χώρο $\mathbb{R}^2$ και το $\Delta_{a,b}$ ένα τρίγωνο στο χώρο $R_{a,b}$. Θεώρουμε τη συνάρτηση k : $R_{a,b} \to \mathbb{C}$ ώστε να είναι συνεχής. Για κάθε s $\in$ [a,b] ορίζουμε τη συνάρτηση k_s(t) = k(s,t), t $\in$ [a,b]. Επίσης, ορίζουμε τους αριθμούς M, N ως

$$M = \max\{|k(s,t)| : (s,t) \in R_{a,b}\},$$

$$N^2 = \int_a^b \int_a^b |k(s,t)|^2 ds dt = \int_a^b \{\int_a^b |k_s(t)|^2 dt\} ds = \int_a^b ||k_s||^2_{\mathcal{H}} dt.$$

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση f : [a,b] $\to \mathbb{C}$ για κάθε u $\in \mathcal{H}$ ως

$$f(s) = \int_a^b k(s,t)u(t)dt.. \tag{*}$$

Λήμμα 4.1.1 *Για κάθε $u \in L^2$[a,b] η συνάρτηση που ορίζεται από την* (*) *ανήκει στο $X \subset \mathcal{H}$. Επιπλέον*

$$||f||_X \leq M(b-a)^{\frac{1}{2}}||u||_{\mathcal{H}}, \tag{4.1.1.a}$$

$$||f||_{\mathcal{H}} \leq N||u||_{\mathcal{H}} \tag{4.1.1.β}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι ε $>$ 0 και s $\in$ [a,b]. Τότε μπορούμε να βρούμε δ $>$ 0 με οποιοδήποτε s' $\in$ [a,b] τέτοιο ώστε |s - s'| $<$, τότε

$$|f(s) - f(s') \leq \int_a^b |k(s,t) - k(s',t)||u(t)| \leq ||k_s - k_{s'}||_{\mathcal{H}}||u||_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon(b-a)^{\frac{1}{2}}||u||_{\mathcal{H}},$$

απο την ανισότητα Caychy-Schwarz. Αυτό δείχνει ότι η f είναι συνεχής. Ένας παρόμοιος υπολογισμός μας δείχνει ότι:

$$|f(s) - f(s')| \leq \int_a^b |k(s,t)|||u(t)||dt \leq ||k_s||_{\mathcal{H}}||u||_{\mathcal{H}},$$

από την οποία βγαίνει η (4.1.1.β), και επίσης

$$\int_a^b |f(s)|^2 ds \leq ||u||^2_{\mathcal{H}} \int_a^b ||k_s||^2_{\mathcal{H}} ds,$$

από την οποία βγαίνει η (4.1.1.β) ■

Από το λήμμα (4.1.1) μπορούμε να ορίσουμε ένα τελεστή K : $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ θέτοντας Ku = f, για οποιοδήποτε u $\in \mathcal{H}$, όπου η f ορίζεται από την (*). Διαπιστώνουμε λοιπόν, ότι ο K είναι γραμμικός και, από το λήμμα (4.1.1) ότι είναι και φραγμένος με

$$||K||_{\mathcal{H}} \leq N.$$

Ο τελεστής K καλείται ολοκληρωτικός τελεστής Fredholm και η συνάρτηση k ονομάζεται πυρήνας του τελεστή K. Αν θεώρησουμε την f ως γνωστή συνάρτηση και το u ως άγνωστο η (*) καλείται ολοκληρωτική εξίσωση. Στην πραγματικότητα, αυτός ο τύπος της εξίσωσης είναι γνωστός ως πρώτου βαθμού ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm. Η ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δεύτερου βαθμού έιναι της μορφης:

$$f(s) = u(s) - \mu \int_a^b k(s,t)u(t)dt, \quad s \in [a,b], \tag{**}$$

όπου $0 \neq$ μ $\in \mathbb{C}$. Οι εξισώσεις (*) και (**) μπορούν να γραφτούν στη τελεστική μορφή:

$$Ku = f, \tag{4.1.1}$$

$$(I - \mu K)u = f \tag{4.1.2}$$

Πρόταση 4.1.1 *Ο ολοκληρωτικός τελεστής T : $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ο T είναι ένας Hilbert-Schmidt τελεστής και επομένως από την πρόταση (1.3.2) θα είναι και συμπαγής. Έστω (e_n) μια ορθοκανονική βάση του H. Για κάθε s $\in$ [a,b] και n $\in \mathbb{N}$ έχουμε,

$$(Ke_n)(s) = \int_a^b k(s,t)e_n(t)dt = (k_s, \overline{e_n}),$$

όπου $\overline{e_n}$ είναι ο συζυγής του e_n. Όμως η ακολουθία ($\overline{e_n}$) είναι και αυτή μια ορθοκανονική βάση και

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||Te_n||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |k_s, \overline{e_n}|^2 ds = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} |k_s, \overline{e_n}|^2 ds$$
$$= \int_a^b ||k_s||^2 ds < \infty,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Ορισμός 4.1.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και T $\in$ L(V). Μία βαθμωτή τιμή μ $\in \mathbb{F}$ είναι χαρακτηριστική τιμή του T αν η εξίσωση υ - μTυ = 0 έχει μη μηδενική λυση υ $\in$ V.*

Παρατήρηση 4.1.1 *Αξίζει να σημειώθει ότι, για οποιαδήποτε τελεστή T, το σημείο μ = 0 δεν μπορεί να είναι χαρακτηριστική τιμή του T, και μ $\neq$ 0 είναι μια χαρακτηριστική τιμή του T αν και μόνο αν λ = μ^{-1} είναι ιδιοτιμή του T. Συνεπώς υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στις χαρακτηριστικές τιμές και στις μη μηδενικές ιδιοτιμές του T.*

Τώρα, η ομογενής περίπτωση της 8.6 μπορεί να γραφτεί ως (I - μK)u = 0, έτσι το μ είναι μια χαρακτηριστική τιμή του K αν αυτή εξίσωση έχει μη μηδενική λύση u(μη μηδενικό u σημαίνει μη μηδενικό σαν ένα στοιχείο του X ή του $\mathcal{H}$. Επομένως μπορούμε να εξηγήσουμε τη διαφορά μεταξύ των εξισώσεων πρώτου και δεύτερου είδους με την παρατήρηση ότι η εξίσωση πρώτου είδους αντιστοιχεί στην περίπτωση του λ = 0 ενώ η εξίσωση δεύτερου είδους αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου λ $\neq$ 0.

Παράδειγμα 4.1.1 *Θεωρούμε την εξίσωση Fredholm δευτέρου βαθμού:*

$$u(s) - \mu \int_0^1 e^{s-t} u(t)dt = f(s), \tag{4.1.1.α'}$$

για s $\in$ [0,1] και κάποια σταθερά μ $\neq$ 0. Να βρεθούν λύσεις της u.

Απόδειξη. Αναδιατάσοντας την εξίσωση (4.1.1.α') κάθε λύση της u έχει την μορφή:

$$u(s) = f(s) + (\mu \int_0^1 e^{-t} u(t)dt)e^s = f(s) + ce^s, \tag{4.1.1.β'}$$

όπου c είναι μια άγνωστη σταθερά η οποία θα υπολογιστεί αργότερα. Αντικαθιστώντας την σχέση (4.1.1.β') στην (4.1.1.α') βρίσκουμε ότι

$$c(1-\mu) = \mu \int_0^1 e^{-t} f(t)dt. \tag{4.1.1.γ'}$$

Ας υποθέσουμε ότι μ $\neq$ 1. Τότε η σταθερά c ορίζεται μοναδικά από την σχέση (4.1.1.γ'), και έτσι η εξίσωση (4.1.1.α') έχει μοναδική λύση την

$$u(s) = f(s) + \frac{\mu \int_0^1 e^{-t} f(t)dt}{1-\mu} e^s.$$

Αν μ = 1, τότε η εξίσωση (4.1.1.γ') δεν έχει λύση έκτος αν

$$\int_0^1 e^{-t} f(t)dt = 0, \tag{4.1.1.δ'}$$

όπου η (4.1.1.γ') ικανοποιείται για κάθε c $\in \mathbb{C}$, και η εξίσωση (4.1.1.β'), με τυχαίο c παρέχει τον πλήρες σύνολο των λύσεων της (4.1.1.α'). Σε αυτή την περίπτωση η ομογενής εξίσωση που αντιστοιχεί στον συζυγή τελεστή είναι:

$$u(t) - \int_0^1 e^{s-t} u(s)ds = 0,$$

για s $\in$ [0,1], και μπορεί να δειχθεί ότι οποιαδήποτε λύση αυτής της εξίσωσης είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της συνάρτησης ut = e^{-t}. Το σύνολο όλων των λύσεων αυτής της εξίσωσης είναι μιας διάστασης υποχώρος με βάση αύτη τη συνάρτηση. ■

4.2 Ολοκληρωτικοί Τελεστές Voltera

Σε αυτή την παράγραφο θεωρούμε μια σημαντική κατηγορία ολοκληρωτικών τελεστών K που έχουν την μορφή:

$$Ku(s) = \int_a^s k(s,t)u(t)dt, \quad s \in [a,b] \tag{4.2.1}$$

όπου το άνω όριο του ολοκληρώματος στον ορισμό του K είναι μεταβλητό και η συνάρτηση πυρήνα k : $\Delta_{a,b} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής. Όταν ο K έχει την μορφή της παραπάνω εξίσωσης καλείται ολοκληρωτικός τελεστής Voltera και οι αντίστοιχες εξισώσεις (*) και (**) θεώρουνται οι πρώτου και δευτέρου βαθμού ολοκληρωτικές εξισώσεις Voltera.
Επιπλέον $||$Ku$||_2 \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})$ και άρα $||$K$|| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Οι τελεστές Voltera μπορούν να θεωρηθούν σαν μια ειδική κατηγορία τελεστών Fredholm επεκτείνοντας τον ορισμό της συνάρτησης πυρήνα από το σύνολο $\Delta_{a,b}$ στο σύνολο R$_{a,b}$ ορίζοντας k(s,t) = 0 όταν το t $>$ s. Ωστόσο αυτή η επέκταση της συνάρτησης πυρήνα γενικά δεν είναι συνεχής κατά μήκος της γραμμής s = t στο σύνολο R$_{a,b}$. Η ιδιομορφία αυτή είναι που κανουν ξεχωρίστους του τελεστές Voltera και καθιστούν την μελετη τους ξεχωριστή απο αυτή των τελεστων Fredholm.

Λήμμα 4.2.1 *Αν K είναι ένας ολοκληρωτικός τελεστής Voltera τότε υπάρχει σταθερά C $>$ 0 τέτοια ώστε $||K^n||_{\mathcal{H}} \leq \frac{C^m}{n!}$, για κάθε θετικό ακέραιο n $\geq$ 1.*

Απόδειξη. Για κάθε u $\in \mathcal{H}$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε,

$$|(Ku)(s)| \leq \int_a^s |k_s(t)||u(t)|dt \leq (\int_a^s |k_s(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} ||u||_{\mathcal{H}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{2}} ||u||_{\mathcal{H}},$$

$$|(K^2u)(s)| \leq \int_a^s |k_s(t)||(Ku)(t)|dt \leq (s-a)M^2(b-a)^{\frac{1}{2}} ||u||_{\mathcal{H}}.$$

Με επαγωγή, με τον ίδιο τρόπο όπως στην δεύτερη ανισότητα παραπάνω, μπορούμε να το δείξουμε οτι για κάθε n $\geq$ 2,

$$|(K^n u)(s)| \leq \int_a^s |k_s(t)||(K^{n-1}u)(t)|dt \leq \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} M^n (b-a)^{\frac{2}{2}} ||u||_{\mathcal{H}}$$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$||K^n u||_{\mathcal{H}} \leq \frac{M^n (b-a)^n}{(n-1)!\sqrt{2n-1}} ||u||_{\mathcal{H}} \leq \frac{C^n}{n!} ||u||_{\mathcal{H}},$$

για κάποια σταθερά C, από το οποίο το ζητούμενο είναι άμεσο. ■

Θεώρημα 4.2.1 *Ένας K ολοκληρωτικός τελεστής Voltera στον $\mathcal{H}$ δεν έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές. Επομένως*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε οτι το λ είναι μια ιδιοτιμή του K, τέτοιο ώστε, Ku = λu, για κάποιο u $\neq$ 0. Τότε από το λήμμα (4.2.1), για όλους τους ακέραιους n $\geq$ 1 έχουμε,

$$|\lambda|^n ||u||_{\mathcal{H}} = ||K^n u||_{\mathcal{H}} \leq ||K^n||_{\mathcal{H}} ||u||_{\mathcal{H}} \leq \frac{C^n}{n!} ||u||_{\mathcal{H}},$$

το οποίο σημαίνει ότι |λ| = 0 ■

Ευρετήριο

Παράρτημα Α′

Συμπλήρωμα Θεωρίας

Θεώρημα Α′.0.2 ***(Banach-Alaoglu)***. *Η κλειστή μοναδιαία μπάλα* $B_{E^*} = \{f \in E^* : ||f|| \leq 1\}$ *είναι συμπαγής για την ασθενή * τοπολογία σ(*E^**,E).*

Θεώρημα Α′.0.3 ***(Goldstine)***. *Έστω Ε ένας χώρος Banach. Τότε το J(*B_E*) είναι πυκνό στη* $B_{E^{**}}$ *για την τοπολογία σ(*E^{**}*,*E^**).*

Θεώρημα Α′.0.4 ***(Arzela-Ascoli)***. *Έστω Κ συμπαγής μετρικός χώρος και* $\mathcal{H}$ *ένα φραγμένο υποσύνολο του C(K). Υποθέτουμε ότι το* $\mathcal{H}$ *είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχές, δηλαδη:*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0 \ \ \tau\epsilon\tau o\iota o \ \ \omega\sigma\tau\epsilon \ \ d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \ \ \forall f \in \mathcal{H}.$$

Τότε το $\mathcal{H}$ *είναι σχετικά συμπαγές στο C(K).*

Θεώρημα Α′.0.5 ***(Lax-Milgram)***. *Έστω α(u,υ) ενα διγραμμικό, συνεχές και πιεστικό συναρτησιακό. Τότε για κάθε* $\varphi \in H'$ *υπάρχει* $u \in H$ *μοναδικό τέτοιο ώστε:*

$$\alpha(u, \upsilon) = \langle \varphi, \upsilon \rangle \ \ \forall \upsilon \in H$$

Βιβλιογραφία

[1] John B.Conway, A Course in Functional Analysis, Springer, 2nd Edition, 1989.

[2] Haim Brezis, Functional Analysis, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π 1997.

[3] Lokenath Debnath and Piotr Mikusinski, Introduction to Hilbert Spaces with Applications, Academic Press 2nd Edition 1999.

[4] Nelson Dunford and Jacob T.Schwartz, Linear operators Part 1, General Theory, Interscience Publishers, 1957.

[5] Nelson Dunford and Jacob T.Schwartz, Linear operators Part 2, Spectral Theory, Interscience Publishers, 1957.

[6] Σωτήριος Καρανάσιος, Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές, 1st Edition 2009.

[7] Gilbert Helmberg, Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space, North Holland Publishing Company, 2nd Edition, 1957.

[8] Bryan Rynne and M.A.Youngson, Linear Functional Analysis, Springer, 2nd Edition, 2008.

[9] Αριστείδης Καταβολος, Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών, Εκδόσεις Συμμέτρια, 1st Edition, 2008.

[10] Walter Rudin, Functional Analysis, International Editions, 2nd Edition, 1991.

[11] Michael Walter, Hilbert-Schmidt and trace class operators