



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΠΜΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Μέθοδοι Ανάλυσης Αποκομμένων Δεδομένων σε Παραγοντικούς και Παραμετρικούς Σχεδιασμούς

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Ζαφειρία Θεοχαρίδου

Επιβλέπων : Κουκουβίνος Χρήστος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2011

Περιεχόμενα

Περίληψη	6
Abstract	8
Ευχαριστίες	10
Κεφάλαιο 1	
<hr/>	
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	11
1.1 Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων.....	13
1.2 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας	15
1.3 Το Γενικό Γραμμικό Μοντέλο Παλινδρόμησης	17
1.4 Παραγοντικοί Σχεδιασμοί	18
Κεφάλαιο 2	
<hr/>	
ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ.....	20
2.1 Εισαγωγή - Δεδομένα Επιβίωσης.....	20
2.2 Βασικές Έννοιες	22
2.2.1 Συνάρτηση Αξιοπιστίας ή Συνάρτηση Επιβίωσης.....	22
2.2.2 Συνάρτηση Διακινδύνευσης.....	24
2.2.3 Σωρευτική Συνάρτηση Διακινδύνευσης	26
2.2.4 Μοντέλο Αναλογικής Διακινδύνευσης.....	27
2.3 Αποκοπή Δεδομένων.....	28
Κεφάλαιο 3	
<hr/>	
ΜΕΘΟΔΟΣ TAGUCHI.....	35
3.1 Εισαγωγή στον Εκτός Διεργασίας Έλεγχο Ποιότητας	35
3.2 Εισαγωγή στους Παραμετρικούς Σχεδιασμούς.....	36
3.3 Η Μεθοδολογία του Taguchi	37
3.4 Τα Βήματα του Taguchi	41
3.5 Μέτρα Απόδοσης του Taguchi.....	42

Κεφάλαιο 4

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΑΠΟΚΟΜΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ ΣΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟΥΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥΣ	44
4.1 Εισαγωγή – Σχετικές Έρευνες.....	44
4.2 Μη-Παραμετρική Μέθοδος για την Ανάλυση Αποκομμένων Παρατηρήσεων σε Παραγοντικούς Σχεδιασμούς.....	47
4.3 Εκτιμητική Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων για Πειράματα με Αποκομμένες Παρατηρήσεις	51
4.4 Διαδικασία για την Ανάλυση Αποκομμένων Παρατηρήσεων σε Παραγοντικούς Σχεδιασμούς.....	53
4.5 Διαδικασία για την Ανάλυση Αποκομμένων Παρατηρήσεων σε Παραμετρικούς Σχεδιασμούς Taguchi	53

Κεφάλαιο 5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	57
5.1 Αριθμητικό Παράδειγμα για τη μη-Παραμετρική Μέθοδο	57
5.2 Αριθμητικό Παράδειγμα για Παραγοντικό Σχεδιασμό.....	63
5.3 Αριθμητικό Παράδειγμα για Παραμετρικό Σχεδιασμό Taguchi	70

Κεφάλαιο 6

ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΚΟΜΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ ΣΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟΥΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥΣ	78
6.1 Νευρωνικά Δίκτυα	78
6.1.1 Ορισμός και Λειτουργία	78
6.1.2 Εκπαίδευση Νευρωνικών Δικτύων.....	80
6.1.3 Backpropagation Νευρωνικά Δίκτυα.....	82
6.1.4 Εφαρμογές Νευρωνικών Δικτύων	85
6.2 Προτεινόμενες Διαδικασίες Εφαρμογής Νευρωνικών Δικτύων για την Ανάλυση Αποκομμένων Παρατηρήσεων	86
6.3 Αριθμητικά Παραδείγματα.....	91
6.3.1 Παράδειγμα 1	91

6.3.2 Παράδειγμα 2.....	98
Κεφάλαιο 7	
<hr/>	
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	100
Βιβλιογραφία	102

Περίληψη

Οι παραγοντικοί σχεδιασμοί και οι παραμετρικοί σχεδιασμοί Taguchi χρησιμοποιούνται ευρέως στη βιομηχανία για να βελτιστοποιήσουν την παραγωγή ή το προϊόν. Εντούτοις, πολύ συχνά παρατηρούνται αποκομμένες παρατηρήσεις στη διάρκεια ζωής των προϊόντων κατά την πειραματική διαδικασία. Μετά από επαναλαμβανόμενα πειράματα με αποκομμένες παρατηρήσεις τύπου II, η μέθοδος υπολογισμού αυτών καθιερώθηκε να γίνεται βάσει ενός περίπλοκου στατιστικού μοντέλου. Με τη χρήση όμως, των μη ολοκληρωμένων δεδομένων για την προσαρμογή ενός μοντέλου, πιθανώς να μην εκτιμώνται με ακρίβεια οι αποκομμένες παρατηρήσεις. Επιπλέον, η διαδικασία προσαρμογής του μοντέλου είναι περίπλοκη για έναν ερευνητή ο οποίος έχει περιορισμένη στατιστική εκπαίδευση.

Η ακόλουθη εργασία αναφέρεται σε μια λιγότερο περίπλοκη προσέγγιση για την ανάλυση των αποκομμένων δεδομένων, χρησιμοποιώντας μια μη παραμετρική μέθοδο η οποία δε χρειάζεται τη γνώση της κατανομής των μεταβλητών. Η μη παραμετρική μέθοδος και η ανάλυση παλινδρόμησης χρησιμοποιούνται για την ανάλυση πειραματικών αποτελεσμάτων με πολλούς παράγοντες και πολλά επίπεδα συμπεριλαμβανομένων των αποκομμένων παρατηρήσεων.

Επιπλέον, παρατίθεται μια μέθοδος για την ανάλυση των παρατηρήσεων με αποκοπή τύπου II η οποία χρησιμοποιεί τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και την ανάλυση του Torres για μη επαναλαμβανόμενους σχεδιασμούς με πιθανές ανωμαλίες. Αυτή η εργασία αναφέρεται επίσης, σε μια αποτελεσματική μέθοδο για την ανάλυση των αποκομμένων παρατηρήσεων τύπου II από τους

παραμετρικούς σχεδιασμούς Taguchi χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Στη συνέχεια, παρατίθενται παραδείγματα τα οποία απεικονίζουν την αποτελεσματικότητα των προαναφερθεισών μεθόδων.

Τέλος, σε αυτή την εργασία παρουσιάζεται μια καινούρια μέθοδος ανάλυσης ενός πειράματος με μεμονομένες αποκομμένες παρατηρήσεις με τη χρήση των νευρωνικών δικτύων. Αναπτύσσονται δυο διαδικασίες, οι οποίες είναι απλούστερες από τις συμβατικές. Η πρώτη διαδικασία είναι αρκετά απλή και μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί ώστε να καθοριστεί γρήγορα η βέλτιστη κατάσταση. Η δεύτερη διαδικασία, ενώ είναι πιο δύσκολη, παρ'όλα αυτά είναι η πιο ακριβής μεταξύ των προσεγγίσεων που παρουσιάζονται στην προκείμενη εργασία. Επιπλέον, παρατίθενται τρία αριθμητικά παραδείγματα ώστε να υπάρξει σύγκριση μεταξύ των προτεινόμενων διαδικασιών και των συμβατικών. Η σύγκριση αυτή είναι ενδεικτική της αποτελεσματικότητας των διαδικασιών οι οποίες αναλύονται.

Abstract

Experimental design and Taguchi's parameter design are widely employed by industry to optimize the process/product. However, censored data are often observed in product lifetime testing during the experiments. After implementing a repetitious experiment with type II censored data and singly censored data, in which the values in one of the observation tails are not known, the censored data are usually estimated by establishing a complex statistical model. However, using the incomplete data to fit a model may not accurately estimates the censored data. Moreover, the model fitting process is complicated for a practitioner who has only limited statistical training.

This study is referred to a less complex approach to analyze censored data, using a non-parametric method, which do not require a previous knowledge of how the variables are distributed. The non-parametric method and regression analysis are used to analyze multi-factor and multi-level experimental results involving censored data.

Moreover, it is given another method analyzing type II censored data that uses the least square estimation method and Torres's analysis of unreplicated factorials with possible abnormalities. This study also presents an effective method to analyze the type II censored data from Taguchi's parameter design using least square estimation method.

Furthermore, examples are given to illustrate the effectiveness of the above methods.

Finally, it is presented a novel means of applying neural networks to analyze an experiment with singly censored data. Two procedures are

also developed, which are simpler than conventional ones. The first procedure is quite straightforward and can be easily used to rapidly determine the optimal condition. The second procedure, although more laborious, is the most robust among the approaches illustrated herein. In addition, three numerical examples are presented to compare the proposed procedures with the conventional ones. Those comparisons demonstrate that the effectiveness and feasibility of the proposed procedures.

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί τη διπλωματική μου εργασία στα πλαίσια των μεταπτυχιακών σπουδών μου στο τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή του τομέα Μαθηματικών, κ. Χρήστο Κουκουβίνο, στον οποίο οφείλω ιδιαίτερες ευχαριστίες τόσο για τη δυνατότητα που μου προσέφερε να ασχοληθώ με ένα θέμα το οποίο ανήκει στα ερευνητικά μου ενδιαφέροντα, όσο και για τη γενικότερη συμβολή του στη μελλοντική μου επαγγελματική σταδιοδρομία.

Με την ευκαιρία αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον υποψήφιο διδάκτωρα Ανδρουλάκη Εμμανουήλ, για τη βοήθεια, τις πολύτιμες συμβουλές, την υποστήριξη και την καθοδήγηση που μου παρείχε καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για τη συμπαράσταση, τα εφόδια που μου προσέφερε και την υπομονή της.

Κεφάλαιο 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Πειράματα εκτελούνται σε όλες τις επιστήμες, με σκοπό να εξεταστούν και να ανακαλυφθούν νέες διαδικασίες ή καινούρια συστήματα, αλλά και στις βιομηχανίες με στόχο τη βελτιστοποίηση των προϊόντων που παράγουν. Όμως, σε κάθε προϊόν επιδρούν διαφορετικοί παράγοντες, ο καθένας σε ξεχωριστό βαθμό. Για το λόγο αυτό κάθε παράγοντας πρέπει να μελετηθεί χωριστά. Είναι εμφανές ότι, θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο να εντοπιστούν και να εξεταστούν οι παράγοντες που επιδρούν σημαντικά στο προϊόν, με λίγες εκτελέσεις του πειράματος. Στην πραγματικότητα, ο αριθμός των παραγόντων που επηρεάζουν ένα προϊόν είναι μικρός σε σύγκριση με τον αριθμό των παραγόντων που εξετάζονται.

Κάθε πείραμα χαρακτηρίζεται από αγωγές, πειραματικές μονάδες, τη μέθοδο ανάθεσης αγωγών σε πειραματικές μονάδες και την απόκριση που μετράται. Ο ερευνητής ενδιαφέρεται για ποια αλλαγή στις μεταβλητές εισόδου επιφέρει την επιθυμητή αλλαγή στην έξοδο του πειράματος.

Τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα κάθε πειράματος εξαρτώνται από τον τρόπο με τον οποίο συλλέγονται τα δεδομένα - σχεδιασμός του πειράματος- και από τη μέθοδο που χρησιμοποιείται για την ανάλυση αυτών των δεδομένων. Η διαδικασία σχεδιασμού και εκτέλεσης ενός πειράματος, έτσι ώστε να συλλεχθούν δεδομένα

κατάλληλα για στατιστική ανάλυση, που να μπορούν να δώσουν έγκυρα και αντικειμενικά αποτελέσματα καλείται *στατιστικός σχεδιασμός του πειράματος ή πειραματικός σχεδιασμός* (experimental design).

Για να βελτιωθούν τα αποτελέσματα του πειράματος θα πρέπει να επιλεγεί ένα καλύτερο σύνολο από ανεξάρτητες μεταβλητές. Γεγονός που σημαίνει ότι απαιτείται η εφαρμογή συστηματικών πειραμάτων, θέτοντας τις ανεξάρτητες μεταβλητές και παρατηρώντας τα αποτελέσματα. Στην προσέγγιση αυτή χρειάζεται ένας πειραματικός σχεδιασμός, που ακολουθείται από στατιστική ανάλυση.

Σύμφωνα με τους Myers και Montgomery (1995), η πρώτη φάση ενός πειράματος είναι η φάση κρησαρίσματος, γνωστή ως φάση 0. Το κρησάρισμα είναι η σημαντικότερη φάση ενός πειραματικού σχεδιασμού, γιατί κάποιο λάθος στο πείραμα θα έχει ως συνέπεια τη λήψη λανθασμένων συμπερασμάτων.

Σε κάθε πείραμα διακρίνονται δύο στάδια, ο σχεδιασμός, η διεξαγωγή του πειράματος και η ανάλυση των δεδομένων που προκύπτουν από αυτό. Ακόμη, ισχύουν τρεις βασικές αρχές, οι επαναλήψεις (replicates), η τυχαιοποίηση (randomization) και η ομαδοποίηση (blocking) του πειράματος. Οι επαναλήψεις βοηθούν ώστε να εκτιμηθεί το πειραματικό σφάλμα, που είναι βασικό κριτήριο για να αποφασιστεί αν οι παρατηρούμενες διαφορές στα δεδομένα είναι στατιστικά σημαντικές. Με την έννοια τυχαιοποίηση εννοούμε τον τυχαίο τρόπο διεξαγωγής του πειράματος καθώς και τη σειρά επιλογής των παρατηρήσεων. Με την ομαδοποίηση δίνεται η δυνατότητα να αυξηθεί η ακρίβεια του πειράματος.

Τα βήματα πραγματοποίησης ενός πειραματικού σχεδιασμού είναι:

- **Βήμα 1:** Σαφής διατύπωση και κατανόηση του προβλήματος.
- **Βήμα 2:** Επιλογή των παραγόντων, των επιπέδων των παραγόντων και των ορίων τους.
- **Βήμα 3:** Επιλογή μεταβλητής απόκρισης.
- **Βήμα 4:** Επιλογή του πειραματικού σχεδιασμού που θα εφαρμοστεί.
- **Βήμα 5:** Διεξαγωγή πειράματος.
- **Βήμα 6:** Στατιστική ανάλυση των δεδομένων που προκύπτουν.
- **Βήμα 7:** Διατύπωση συμπερασμάτων και εισηγήσεων.

Στη συνέχεια της εργασίας παρουσιάζονται βασικοί ορισμοί που είναι απαραίτητοι για την κατανόηση της μελέτης αυτής.

1.1 Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Σε πολλά πειράματα υπάρχει μία γραμμική σχέση ανάμεσα στα μετρούμενα μεγέθη. Για παράδειγμα, η ταχύτητα ενός σώματος το οποίο εκτελεί ελεύθερη πτώση, μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο, εφόσον αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα. Τοποθετώντας τα σημεία σε ένα διάγραμμα, βλέπουμε ότι αυτά προσεγγίζουν μία ευθεία γραμμή. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την κλίση της ευθείας η οποία προσεγγίζει περισσότερο αυτά τα σημεία, και το σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα y (τεταγμένη). Σε κάθε περίπτωση, δεν περιμένουμε η ευθεία να διέρχεται από όλα τα σημεία, λόγω της παρουσίας τυχαίων σφαλμάτων. Μπορούμε να βρούμε προσεγγιστικές τιμές τόσο για την κλίση όσο και για την τεταγμένη, εάν σχεδιάσουμε μία ευθεία η οποία να διέρχεται ανάμεσα από τα διεσπαρμένα σημεία. Η ακριβέστερη όμως μέθοδος για να το πετύχουμε αυτό είναι η *μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων*.

Έστω λοιπόν ότι τα σημεία μας ακολουθούν μία κανονική κατανομή. Έστω επιπλέον ότι για κάθε τιμή της μεταβλητής x , οι αντίστοιχες τιμές του y κατανέμονται γύρω από μία μέση τιμή με κάποια απόκλιση. Παρά το γεγονός ότι για κάθε τιμή του x θα υπάρχει μία διαφορετική τιμή του y , υποθέτουμε ότι η απόκλιση των τιμών του y είναι η ίδια για κάθε τιμή του x .

Η διαδικασία μέσω της οποίας βρίσκουμε την καλύτερη δυνατή ευθεία είναι η παρακάτω:

Εάν δεν υπάρχουν καθόλου τυχαία σφάλματα, όλες οι πειραματικές τιμές του y θα βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία γραμμή με εξίσωση :

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta}x \quad (1.1.1)$$

Τα \hat{a} και $\hat{\beta}$ είναι οι εκτιμητές των a και β , οι οποίοι επιλέγονται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και επιλέγονται έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων να είναι ελάχιστο.

Δηλαδή:

$$\min \sum_{i=1}^n \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - a - \beta x_i)^2 \quad (1.1.2)$$

Η ελαχιστοποίηση της τελευταίας έκφρασης γίνεται σε σχέση με τα a και β . Μετά από την παραγωγή της ως προς a και β , αφού τεθούν οι πρώτες παράγωγοι ίσες με το μηδέν τότε έχουμε τις εξισώσεις:

$$an + \beta \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + \beta \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i Y_i \quad (1.1.3)$$

Επομένως, καταλήγουμε στους εξής τύπους:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2}$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{x} \quad (1.1.4)$$

όπου \bar{x} και \bar{Y} είναι οι μέσοι των x_1, x_2, \dots, x_n και Y_1, Y_2, \dots, Y_n αντίστοιχα.

Και βέβαια όπου \hat{a} και $\hat{\beta}$ οι λύσεις των κανονικών εξισώσεων.

1.2 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Θέτουμε $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ ένα τυχαίο δείγμα που έχει πυκνότητα πιθανότητας $f(\underline{x}; \theta)$, $\theta \in \Omega \subseteq \mathcal{R}^r$, $r \geq 1$ και έστω x_j η τιμή της τυχαίας μεταβλητής X_j , $j = 1, 2, \dots, n$ που παρατηρήθηκε. Θέτουμε $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)'$ και

$$L(\underline{\theta}|\underline{x}) = \prod_{j=1}^n f(x_j; \underline{\theta}) \quad (1.2.1)$$

Ορισμός 1.2.1: Για σταθερό \underline{x} , η ποσότητα $L(\underline{\theta}|\underline{x})$, η οποία θεωρείται συνάρτηση του $\underline{\theta} \in \Omega$, ονομάζεται **συνάρτηση πιθανοφάνειας**.

Με τη βοήθεια τώρα της συνάρτησης πιθανοφάνειας ορίζεται ένας εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας, ως εξής :

Ορισμός 1.2.2: Ο εκτιμητής $\hat{\theta}_n = \hat{\theta} = \hat{\theta}(\underline{x})$ του θ ονομάζεται **εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας (EMΠ)**, αν αυτός ορίζεται με την ακόλουθη σχέση:

$$L(\hat{\underline{\theta}}|\underline{x}) = \max [L(\underline{\theta}|\underline{x}); \underline{\theta} \in \Omega] \quad (1.2.1)$$

Παρατήρηση:

- i. Πιο αυστηρά, ένας ΕΜΠ $\hat{\underline{\theta}} = \hat{\underline{\theta}}(\hat{X})$ θα έπρεπε να οριστεί με τη σχέση

$$L(\hat{\underline{\theta}}|\underline{X}) = \max [L(\underline{\theta}|\underline{X}); \underline{\theta} \in \Omega]$$

δηλαδή με τη σχέση 1.2.1, όπου το \underline{x} αντικαθίσταται με τη n-διάστατη τυχαία μεταβλητή \underline{X} . Τότε το $\hat{\underline{\theta}} = \hat{\underline{\theta}}(\underline{x})$ όπως ορίστηκε με τον ορισμό 1.2.1 είναι η τιμή του $\underline{\theta}(\underline{X})$ που παρατηρήθηκε για $\underline{X} = \underline{x}$. Στην πράξη, όταν μιλάμε για ένα ΕΜΠ εννοούμε οποιαδήποτε από τις δυο ποσότητες $\hat{\underline{\theta}}(\underline{x})$ και $\hat{\underline{\theta}}(\underline{X})$ χωρίς να βλάπτεται σοβαρά η μαθηματική αυστηρότητα.

- ii. Η μεγιστοποίηση (αναφορικά με το $\underline{\theta}$ της ποσότητας $L(\underline{\theta}|\underline{x})$) συνήθως επιτυγχάνεται με τις μεθόδους του διαφορικού λογισμού. Στην περίπτωση αυτή λύνεται το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της ποσότητας $\text{Log}L(\underline{\theta}|\underline{x})$ αντί της ποσότητας $L(\underline{\theta}|\underline{x})$. Το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με το αρχικό, διότι η συνάρτηση είναι αύξουσα και λύνεται ευκολότερα.
- iii. Αναφορικά με τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας $L(\underline{\theta}|\underline{x})$ μπορεί να εμφανιστούν τα εξής προβλήματα: πρώτον να μην υπάρχει (πεπαρασμένο) μέγιστο και δεύτερον να υπάρχουν περισσότερα από ένα μέγιστα.

1.3 Το Γενικό Γραμμικό Μοντέλο Παλινδρόμησης

Αρκετές φορές συναντάμε προβλήματα, για τα οποία υπάρχει η υποψία ότι οι τιμές κάποιας μεταβλητής εξαρτώνται από $k \geq 2$ επεξηγηματικές μεταβλητές. Το γενικό γραμμικό μοντέλο, το οποίο περιγράφει αυτή τη σχέση είναι:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i,$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

οπότε και η απόκριση y_i (response) είναι μια γραμμική συνάρτηση των συντελεστών παλινδρόμησης (regression coefficients) β_j , με $j = 1, 2, \dots, k$. Ως γνωστόν, έχουμε ότι:

- y_i , είναι οι τιμές της απόκρισης.
- x_{ij} είναι οι τιμές των επεξηγηματικών μεταβλητών. Υποθέτουμε, όπως και στο απλό γραμμικό μοντέλο, ότι οι μετρήσεις μας δεν υπόκεινται σε σφάλματα.
- β_j είναι οι άγνωστες παράμετροι του μοντέλου οι οποίες και πρέπει να εκτιμηθούν.
- ε_i είναι τα σφάλματα ή υπόλοιπα, τα οποία αποτελούν τυχαίες μεταβλητές και υποθέτουμε ότι ικανοποιούν τα παρακάτω:
 - $E(\varepsilon_i) = 0 \forall i$.
 - $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$, δηλαδή τα σφάλματα ικανοποιούν την υπόθεση της ομοιοσκεδαστικότητας.
 - $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$, δηλαδή τα σφάλματα είναι ασυσχέτιστα.

1.4 Παραγοντικοί Σχεδιασμοί

Είναι συχνή η χρήση πειραμάτων που περιλαμβάνουν αρκετούς παράγοντες, στα οποία μελετάται η κοινή επίδραση των παραγόντων αυτών στην απόκριση.

Ορισμός 1.4.1: Με τον όρο παραγοντικοί σχεδιασμοί εννοούμε ότι σε κάθε πλήρη δοκιμή ή επανάληψη του πειράματος εξετάζονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των επιπέδων των παραγόντων.

Έστω ότι υπάρχουν a επίπεδα του παράγοντα A και b επίπεδα του παράγοντα B , τότε κάθε επανάληψη περιλαμβάνει όλους τους ab συνδυασμούς των επιπέδων. Η αλλαγή που γίνεται στην απόκριση, από την αλλαγή στο επίπεδο του παράγοντα, ονομάζεται επίδραση του παράγοντα, η οποία είναι κύρια όταν αναφέρεται στους παράγοντες που είναι πρωταρχικής σημασίας στο πείραμα. Δεν είναι λίγες οι φορές που εμφανίζεται αλληλεπίδραση (interaction) μεταξύ των παραγόντων, αυτό σημαίνει ότι η διαφορά στην απόκριση μεταξύ των επιπέδων ενός παράγοντα δεν είναι ίδια σε όλα τα επίπεδα των άλλων παραγόντων.

Ιδιαίτερα σημαντική είναι η περίπτωση του γενικού παραγοντικού σχεδιασμού με k παράγοντες, όπου ο καθένας έχει μόνο δύο στάθμες, που είναι είτε ποσοτικές (π.χ. δύο τιμές του χρόνου) είτε ποιοτικές (π.χ. η παρουσία και η απουσία ενός παράγοντα). Η επανάληψη αυτού του σχεδιασμού απαιτεί $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^k$ παράγοντες, για το λόγο αυτό χαρακτηρίζεται ως 2^k παραγοντικός σχεδιασμός. Ο σχεδιασμός αυτός είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στην αρχή ενός πειράματος, όταν πρέπει να εξεταστούν πολλοί παράγοντες, αφού δίνει τη δυνατότητα

να έχουμε το μικρότερο αριθμό εκτελέσεων για τον πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό k παραγόντων.

Ορισμός 1.4.2: Ένας 2 επιπέδων $L_n(2^{n-1})$ ορθογώνιος σχηματισμός, είναι ένα κορεσμένο κλασματικό παραγοντικό μοντέλο με n γραμμές και $n - 1$ στήλες, όπου το n είναι πολλαπλάσιο του 4.

Κάθε γραμμή ενός τέτοιου ορθογώνιου σχηματισμού ανταποκρίνεται σε ένα συνδυασμό επιπέδων των παραγόντων, ο οποίος παράγει μία εκτέλεση του πειράματος. Συχνά, στις εφαρμογές επιτρέπονται μόνο $m < n$ διαφορετικές εφαρμογές, εξαιτίας πρακτικών περιορισμών, όπου το m δεν είναι απαραίτητως πολλαπλάσιο του 4. Στην περίπτωση αυτή, αν οι m επιλεγόμενες γραμμές του ορθογώνιου σχηματισμού είναι τέτοιες ώστε ο πειραματικός σχεδιασμός να έχει πλήρη τάξη, πλήθος ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών και να μην υπάρχουν αλληλεπιδράσεις, τότε οι επιδράσεις των $m - 1$ παραγόντων μπορούν να εκτιμηθούν. Ένας πειραματικός σχεδιασμός πλήρους τάξης, είναι ο “*LEAN*” σχεδιασμός, που προτάθηκε από τον Goh (1996).

Στους lean σχεδιασμούς παρατηρείται μείωση στους διαθέσιμους βαθμούς ελευθερίας κατά το στάδιο της κατασκευής του πειραματικού σχεδιασμού, αλλά παρατηρείται και επιπλέον μη εσκεμμένη μείωση των βαθμών ελευθερίας, κατά τον πειραματισμό, που οφείλεται στην αναμενόμενη απώλεια μέρους του δείγματος. Ένας lean σχεδιασμός διαμορφώνεται αφαιρώντας στήλες και γραμμές από έναν ορθογώνιο σχηματισμό, ώστε να επιτευχθεί ένας αποδοτικός υποπίνακας με πλήρη τάξη. Στην κατασκευή των lean σχεδιασμών δεν υπάρχουν καθορισμένοι κανόνες που να αναφέρονται στο πως οι στήλες και οι γραμμές πρέπει να επιλέγονται από τον ορθογώνιο σχηματισμό.

Κεφάλαιο 2

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ

2.1 Εισαγωγή - Δεδομένα Επιβίωσης

Η ανάλυση επιβίωσης (*survival analysis*) αναφέρεται στην ανάλυση δεδομένων που αφορούν στο χρόνο που μεσολαβεί μέχρι κάποιο συγκεκριμένο συμβάν. Αρχικά, η ανάλυση αναφερόταν στο χρόνο μεταξύ της θεραπείας μέχρι το θάνατο και για αυτό το λόγο πήρε και το συγκεκριμένο όνομα. Η ανάλυση επιβίωσης όμως μπορεί να εφαρμοστεί σε αρκετές περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα στη μηχανολογία, για την ανάλυση του χρόνου μέχρι την εμπλοκή ενός μηχανήματος ή τη γεωργία, για την ανάλυση του χρόνου μέχρι την στιγμή να βγάλει καρπό ένα δέντρο. Στην περίπτωση της μηχανολογίας η ανάλυση αναφέρεται και ως θεωρία αξιοπιστίας (*reliability theory*).

Η ανάλυση επιβίωσης, αποτελεί μια περιοχή έρευνας στη Στατιστική, η οποία επικεντρώνεται στην ανάλυση δεδομένων τα οποία δεν μπορούν να επεξεργαστούν με τις συνηθισμένες στατιστικές μεθόδους. Τα δεδομένα αυτά αφορούν το λεγόμενο χρόνο επιβίωσης ή χρόνο αποτυχίας (*survival time or failure time*). Δηλαδή τη διάρκεια του χρόνου από μια αρχική παρατήρηση, όπως π.χ. την έναρξη μιας θεραπείας, έως ότου συμβεί ένα γεγονός, όπως λοίμωξη, υποτροπή νόσου ή θάνατος. Το χαρακτηριστικό των χρόνων επιβίωσης, είναι ότι σπάνια ακολουθούν την κανονική κατανομή κι αυτός είναι ένας από τους λόγους που χρησιμοποιούνται διαφορετικές μέθοδοι στατιστικής

ανάλυσης από τις συνηθισμένες. Γενικά, η ανάλυση επιβίωσης εστιάζεται στην εκτίμηση της πιθανότητας επιβίωσης ενός ατόμου για ένα δεδομένο χρονικό διάστημα.

Μια σημαντική ιδιαιτερότητα που έχουν τα δεδομένα επιβίωσης είναι ότι σε πολλές περιπτώσεις, το υπό μελέτη συμβάν δε θα πραγματοποιηθεί για όλα τα άτομα που συμμετέχουν στην έρευνα. Αυτό συνήθως συμβαίνει επειδή τα άτομα μπορεί να εισέρχονται στη μελέτη σε διαφορετικούς χρόνους, με συνέπεια ο χρόνος παρακολούθησης μερικών ατόμων να μην είναι επαρκής ώστε να καταγραφεί ο χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του υπό μελέτη γεγονότος. Για παράδειγμα, έστω ότι διεξάγεται μια μελέτη όπου συγκρίνεται ο χρόνος επιβίωσης μιας ομάδας γυναικών που έχουν υποβληθεί σε διαφορετικές μεθόδους χειρουργικών επεμβάσεων για τον καρκίνο του στήθους. Παρόλο που η ομάδα θα παρακολουθηθεί για αρκετά χρόνια, είναι πολύ πιθανό, στο τέλος της μελέτης, αρκετά από τα μέλη της ομάδας να βρίσκονται εν ζωή. Προφανώς λοιπόν, για το σύνολο των ασθενών αυτών, δε γνωρίζουμε το χρόνο επιβίωσης έπειτα από την επέμβαση. Υπάρχει επίσης και το ενδεχόμενο κάποιοι εξ αυτών να μετακομίσουν μακριά πριν ολοκληρωθεί η μελέτη, ή ακόμα και να αρνηθούν την περαιτέρω συμμετοχή τους στην έρευνα. Τα άτομα αυτά καλούνται χαμένα από παρακολούθηση (*lost to follow-up*). Σε αυτές τις περιπτώσεις, όπου οι χρόνοι επιβίωσης δεν είναι γνωστοί, οι αντίστοιχες παρατηρήσεις ονομάζονται αποκομμένες ή λογοκριμένες (*censored*). Περισσότερες λεπτομέρειες για τα αποκομμένα δεδομένα αναφέρονται στην παράγραφο 2.3.

2.2 Βασικές Έννοιες

Έστω η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T , η οποία εκφράζει το χρόνο επιβίωσης. Παραθέτουμε στη συνέχεια κάποιους απαραίτητους ορισμούς:

Ορισμός 2.2.1: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (*probability density function*) $f(t)$ της τυχαίας μεταβλητής T , βρίσκεται ως:

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = -\frac{d}{dt} S(t)$$

Ορισμός 2.2.2: Η συνάρτηση κατανομής (*distribution function*), $F(t)$, ορίζεται ως η πιθανότητα να έχουμε αποτυχία πριν το χρόνο t , ήτοι:

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(u) du$$

Εξ'ορισμού η $F(t)$ είναι αύξουσα, με $\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$

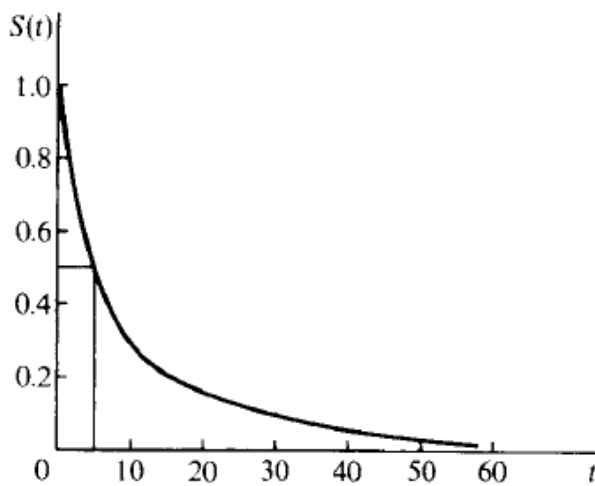
2.2.1 Συνάρτηση Αξιοπιστίας ή Συνάρτηση Επιβίωσης

Ορισμός 2.2.1.1 : Η συνάρτηση αξιοπιστίας ή συνάρτηση επιβίωσης (*survival function*), $S(t)$, ορίζεται ως η πιθανότητα ένα άτομο να επιβιώσει πέραν του χρόνου t

$$S(t) = 1 - F(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(u) du$$

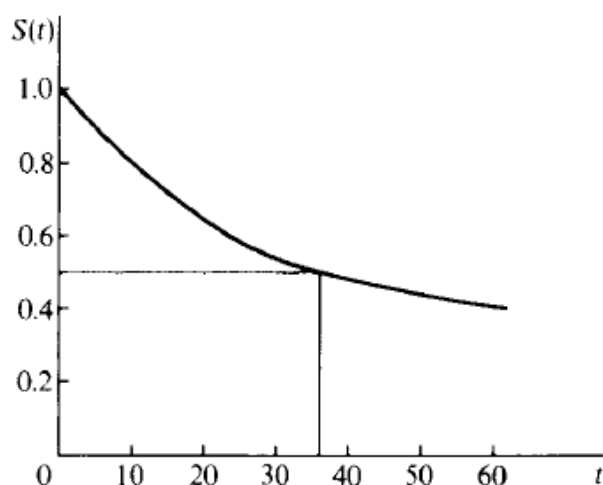
Η συνάρτηση επιβίωσης είναι μη αρνητική και μη αύξουσα συνάρτηση του t με $S(0) = 1$ και $S(t) = 0$. Η γραφική παράσταση της $S(t)$ συναρτήσεως του χρόνου t , ονομάζεται καμπύλη επιβίωσης (*survival curve*) και προτάθηκε από τον Berkson το 1942. Μια απότομα φθίνουσα καμπύλη, όπως αυτή του παρακάτω γραφήματος 2.2.1.1, υποδεικνύει χαμηλό ποσοστό επιβίωσης ή μικρή διάρκεια επιβίωσης.

Γράφημα 2.2.1.1: Απότομα φθίνουσα καμπύλη επιβίωσης



Αντιθέτως, μια βαθμιαία φθίνουσα καμπύλη, όπως του γραφήματος 2.2.1.2, υποδεικνύει υψηλό ποσοστό ή μεγαλύτερη διάρκεια επιβίωσης.

Γράφημα 2.2.1.2: Βαθμιαία φθίνουσα καμπύλη επιβίωσης



Η συνάρτηση επιβίωσης ή η καμπύλη επιβίωσης χρησιμοποιείται για την εύρεση της διαμέσου του χρόνου επιβίωσης (*median survival time*). Η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση αξιοπιστίας τέμνονται όταν $F(t_{.5}) = S(t_{.5}) = 0.5$. Το σημείο $t_{.5}$ είναι η διάμεσος και είναι ένα πιθανό μέτρο περιγραφής της μέσης διάρκειας ζωής. Μπορούμε με αυτόν τον τρόπο να συγκρίνουμε τους χρόνους επιβίωσης δύο ή περισσότερων ομάδων. Στα παραπάνω γραφήματα, οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι κατά προσέγγιση 5 και 36 μονάδες χρόνου αντίστοιχα.

2.2.2 Συνάρτηση Διακινδύνευσης

Ορισμός 2.2.2.1: Η συνάρτηση διακινδύνευσης ή συνάρτηση βαθμού κινδύνου (*hazard function*) εκφράζει την τάση προς διακοπή ενός αντικειμένου στο χρονικό διάστημα $(t, t+\delta t]$ με δεδομένη την επιβίωσή του έως τη χρονική στιγμή t . Ορίζεται ως:

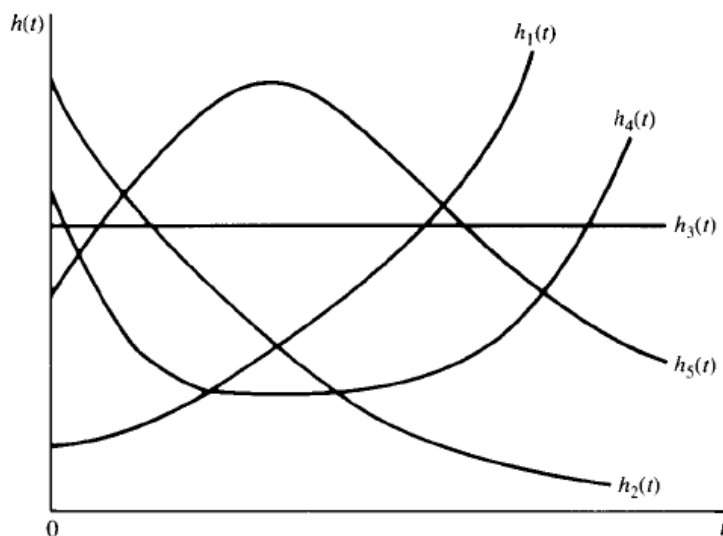
$$h(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{[S(t) - S(t + \delta t)]}{S(t) \delta t} \right] = \frac{f(t)}{S(t)}$$

Ο όρος αυτός χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Barlow το 1963. Στη βιβλιογραφία αναφέρεται και ως στιγμιαίος λόγος αποτυχίας (*instantaneous failure rate*) ή ως δεσμευμένη θνησιμότητα (*conditional mortality*).

Η συνάρτηση διακινδύνευσης $h(t)$ εκφράζει το στιγμιαίο ρυθμό διακοπής και η $h(t)\delta t$ είναι η υπό συνθήκη πιθανότητα της επικείμενης διακοπής μιας μονάδας δοθέντος ότι επέζησε μέχρι τη συγκεκριμένη στιγμή t .

Η συνάρτηση διακινδύνευσης μπορεί να αυξάνει, να μειώνεται, να μένει σταθερή ή να δηλώνει μια πιο περίπλοκη διαδικασία. Στο παρακάτω γράφημα 2.2.2.1 φαίνονται οι διάφορες μορφές που μπορεί να πάρει η συνάρτηση διακινδύνευσης.

Γράφημα 2.2.2.1: Συνάρτηση διακινδύνευσης



Η συνάρτηση $h_1(t)$ είναι αύξουσα, υποδηλώνει αυξημένο κίνδυνο με την πάροδο του χρόνου και τη συναντάμε συχνά στην πράξη. Για παράδειγμα, ασθενείς με οξεία λευχαιμία που δεν ανταποκρίνονται στη φαρμακευτική αγωγή, έχουν αυξανόμενο βαθμό κινδύνου. Η $h_2(t)$ είναι φθίνουσα, η οποία μπορεί π.χ. να υποδεικνύει τον κίνδυνο που διατρέχουν στρατιώτες οι οποίοι έχουν τραυματιστεί από σφαίρα και πρόκειται να υποβληθούν σε χειρουργική επέμβαση. Ο κίνδυνος προφανώς θα μειωθεί στην περίπτωση που η εγχείρηση είναι επιτυχής. Η $h_3(t)$, ως σταθερή που είναι, συνεπάγεται ότι και ο κίνδυνος παραμένει σταθερός. Αυτό συμβαίνει όταν για παράδειγμα εξετάζουμε τον κίνδυνο θανάτου υγιών ατόμων ηλικίας 18-40, των οποίων οι κύριες αιτίες θανάτου είναι τα ατυχήματα. Η $h_4(t)$ είναι γνωστή ως λεκανοειδής καμπύλη (*bathtub curve*), και περιγράφει την εξέλιξη της ανθρώπινης ζωής. Αρχικά ο κίνδυνος είναι μεγάλος (υψηλή βρεφική θνησιμότητα), έπειτα και μέχρι μια συγκεκριμένη ηλικία, παραμένει σταθερός, ενώ σε μεγαλύτερες ηλικίες αυξάνεται ακόμα περισσότερο. Τέλος, ας θεωρήσουμε ένα παράδειγμα ασθενών με φυματίωση. Θα έχουν κίνδυνο ο οποίος αυξάνεται αρχικά, ενώ μετά από τη λήψη θεραπείας ο κίνδυνος θα μειωθεί και η συνάρτηση διακινδύνευσης θα έχει τη μορφή της $h_5(t)$.

2.2.3 Σωρευτική Συνάρτηση Διακινδύνευσης

Ορισμός 2.2.3.1: Η σωρευτική συνάρτηση διακινδύνευσης (*cumulative hazard function*), συμβολιζόμενη με $H(t)$, ορίζεται ως

$$H(t) = \int_0^t h(u) du$$

Από τους παραπάνω ορισμούς, προκύπτουν τα εξής:

$$H(t) = \int_0^t h(u)du = \int_0^t \frac{f(u)}{S(u)} du = \int_0^t \frac{-S'(u)}{S(u)} du = [-\ln(S(u))]_0^t = \\ = -\ln S(t).$$

Άρα

$$S(t) = \exp \{-H(t)\}$$

Η σ.σ.δ. είναι χρήσιμη για την επιλογή ενός κατάλληλου στατιστικού μοντέλου κατά την ανάλυση ενός συνόλου δεδομένων.

Από τους παραπάνω ορισμούς και σχέσεις είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις $S(t)$, $h(t)$, $f(t)$, $F(t)$ και $H(t)$ είναι μαθηματικά ισοδύναμες, διότι γνωρίζοντας τη μία εξ' αυτών, μπορούμε να βρούμε τις υπόλοιπες τέσσερις. Μεγαλύτερη έμφαση δίνεται στην $h(t)$.

2.2.4 Μοντέλο Αναλογικής Διακινδύνευσης

Στην ανάλυση επιβίωσης παίζει μεγάλο ρόλο η εξεύρεση παραγόντων οι οποίοι να σχετίζονται με το χρόνο επιβίωσης. Αυτοί οι παράγοντες θα πρέπει να συμπεριληφθούν στο μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί για τη σχετική ανάλυση των δεδομένων. Αφού η συνάρτηση κινδύνου είναι μη αρνητική, ο λογάριθμός της μπορεί να εκφραστεί ως γραμμική συνάρτηση επεξηγηματικών μεταβλητών:

$$\ln h(t) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p$$

Το μοντέλο αυτό όμως είναι πολύ περιοριστικό αφού υποθέτει ότι η συνάρτηση κινδύνου δεν εξαρτάται από το χρόνο. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι με τις οποίες το μοντέλο θα μπορούσε να υιοθετήσει την εξάρτηση του χρόνου, με την πιο γνωστή να είναι το μοντέλο

αναλόγων συναρτήσεων κινδύνου (Cox 1972). Το μοντέλο αυτό δίνεται από:

$$\ln h(t) = \alpha(t) + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p$$

όπου $\alpha(t)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση του χρόνου. Ο όρος “αναλόγων συναρτήσεων κινδύνου” είναι λόγω του γεγονότος ότι για οποιαδήποτε άτομα για οποιοδήποτε σημείο του χρόνου, ο λόγος των συναρτήσεων κινδύνου είναι σταθερός. Εξαιτίας του ότι η συνάρτηση κινδύνου $\alpha(t)$ δεν είναι ανάγκη να οριστεί εξ’ολοκλήρου, το μοντέλο αναλόγων συναρτήσεων κινδύνου θεωρείται ως ημιπαραμετρικό.

Ο Cox εισηγήθηκε μια μέθοδο δεσμευμένης πιθανοφάνειας για εκτίμηση των παραμέτρων. Το σημαντικό στοιχείο αυτής της μεθόδου είναι ότι οι εκτιμήσεις εξαρτώνται από τη σειρά με την οποία συμβαίνει το γεγονός και όχι από τον ακριβή χρόνο.

2.3 Αποκοπή Δεδομένων

Εδώ θα παρουσιάσουμε ένα σημαντικό χαρακτηριστικό δεδομένων διάρκειας ζωής, το οποίο σπάνια παρουσιάζεται σε άλλα στατιστικά δεδομένα.

Όταν ένα πείραμα, κατά τη διάρκεια του οποίου καταγράφεται ο χρόνος λειτουργίας ενός δείγματος μονάδων, τερματίζεται, είναι πολύ πιθανό κάποιες από τις μονάδες να συνεχίζουν ακόμη να λειτουργούν. Αν και δε γνωρίζουμε τη διάρκεια ζωής μιας τέτοιας μονάδας, ωστόσο διαθέτουμε την πληροφορία ότι έχει ξεπεράσει τη χρονική διάρκεια κατά την οποία η μονάδα ήταν στο πείραμα. Αυτό συνήθως συμβαίνει όταν

χρειαζόμαστε αποτελέσματα άμεσα, για παράδειγμα στη μελέτη μιας ασθένειας δεν μπορούμε να περιμένουμε χρόνια έως ότου όλοι οι ασθενείς αποβιώσουν.

Παράδειγμα 2.3.1

25 ρουλεμάν του ίδιου τύπου δοκιμάζονται με το ίδιο φορτίο. Καταγράφεται ο αριθμός των περιστροφών (σε εκατομμύρια) μέχρι να υποστούν βλάβη. Οι αστερίσκοι δείχνουν ότι στα σημεία που διακόπηκε το πείραμα, οι αντίστοιχες μονάδες δεν είχαν υποστεί ακόμη βλάβη.

17.88	29.82	33.00	41.52	42.12	45.60	48.48
51.84	51.96	54.12	55.56	67.80*	67.80*	67.80
68.64	68.64*	68.88*	84.12	93.12	98.64	105.12
105.84*	127.92	128.04	173.40*			

Οι αστερίσκοι δείχνουν λοιπόν 6 αποκομμένες τιμές (censored data):

$$T_{13} > 67.80, T_{14} > 67.80, T_{16} > 68.64, T_{17} > 68.88, T_{22} > 105.84, T_{25} > 173.40$$

π.χ. το τελευταίο από τα ρουλεμάν είχε συμπληρώσει 173.40 εκατ. περιστροφές όταν διακόπηκε το πείραμα χωρίς να έχει καταστραφεί.

Το παράδειγμα αυτό περιγράφει τη δεξιά αποκοπή σε αντίθεση με την αριστερή αποκοπή δεδομένων που είναι της μορφής $T < 10$, $T < 35$ κτλ. Η αριστερή αποκοπή παρουσιάζεται αρκετά σπάνια σε εφαρμογές. Αποκοπή εντός διαστημάτων είναι μετρήσεις της μορφής $100 < T < 200$. Τέτοιου είδους αποκοπή προκύπτει συνήθως όταν έχουμε ανακριβείς μετρήσεις ή όταν το πείραμα δεν είναι υπό συνεχή επίβλεψη.

- Δεξιά Αποκοπή:

Δεξιά αποκοπή, έχουμε όταν ο χρόνος επιβίωσης είναι μεγαλύτερος από το χρόνο λήξης της μελέτης ή γενικότερα μεγαλύτερος από κάποιο χρονικό όριο (π.χ. τη στιγμή που για κάποιο λόγο χάθηκε η επαφή μαζί του). Αυτό σημαίνει ότι προφανώς δεν είναι γνωστός, αλλά τουλάχιστον ίσος με τη διάρκεια παραμονής του ατόμου στη μελέτη.

- Αριστερή αποκοπή:

Η αριστερή αποκοπή συμβαίνει όταν ο πραγματικός χρόνος επιβίωσης είναι μικρότερος από τον παρατηρούμενο δηλαδή ξέρουμε πως το άτομο είχε ήδη πεθάνει σε χρόνο $t_0 + c$, αλλά το ακριβές χρονικό σημείο $t_0 + t$ (όπου $t < c$ και t_0 η χρονική στιγμή ένταξής του στη μελέτη) που συνέβη αυτό, είναι άγνωστο.

- Αποκοπή διαστήματος:

Η αποκοπή διαστήματος, παρατηρείται όταν ξέρουμε πως το υπό μελέτη συμβάν έχει πραγματοποιηθεί σε ένα διάστημα και πάλι όμως χωρίς να είναι γνωστό το ακριβές σημείο. Αυτό παρατηρείται συνήθως όταν έχουμε περιοδική παρακολούθηση του ασθενή.

Τονίζεται ότι η αποκοπή πρέπει να είναι τυχαία, δηλαδή να μη σχετίζεται με τη μετέπειτα διάρκεια ζωής της μονάδας. Αυτό καλείται και «μη-πληροφοριακή αποκοπή» (uninformative censoring). Αντίθετα, μια παραβίαση αυτής της αρχής θα ήταν η περίπτωση της απόσυρσης της μονάδας όταν αρχίζει να δυσλειτουργεί. Τότε δε θα ίσχυε μόνο ότι $T > t_0$, όπου t_0 η χρονική στιγμή της απόσυρσης, αλλά και ότι $T = t_0 + \delta$, με δ μικρό. Αυτό αποκαλείται και «πληροφοριακή αποκοπή» (informative censoring). Γενικά θεωρείται λογικό σε πλήρως ελεγχόμενα πειράματα, όπως σε εφαρμογές θετικών επιστημών, η αποκοπή να γίνεται τυχαία. Αντίθετα σε εφαρμογές με ανθρώπους (π.χ. ο χρόνος έως ότου

επέλθει ο θάνατος μετά από τη διάγνωση μιας σοβαρής ασθένειας ή ο χρόνος ανάρρωσης μετά από μια θεραπεία), η αποκοπή αντιστοιχεί πολύ συχνά με την αυτόβουλη αποχώρηση του ασθενή από το «πείραμα», που ενώ δείχνει ότι γίνεται «τυχαία» (π.χ. μετακόμιση), ενδέχεται να σχετίζεται με την πορεία της υγείας του. Στην περίπτωση μη τυχαίας αποκοπής, απλές μέθοδοι ανάλυσης μπορεί να οδηγήσουν σε λανθασμένα συμπεράσματα.

Εδώ παρουσιάζονται τρεις βασικοί μηχανισμοί αποκοπής παρατηρήσεων, ανεξάρτητοι της διάρκειας ζωής της μονάδας: τύπος I, τύπος II και τύπος III.

- Αποκοπή τύπου I:

Η παρακολούθηση των μονάδων γίνεται για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα c . Γνωρίζουμε την ακριβή διάρκεια ζωής αν $T_i < c$, αλλιώς γνωρίζουμε ότι η διάρκεια ζωής έχει υπερβεί το c ($T_i > c$). Αυτό μπορεί να γενικευτεί ώστε κάθε μονάδα να έχει το δικό της χρόνο παρακολούθησης c_1, c_2, \dots, c_n . Βέβαια, κάποια ενδέχεται να είναι ίσα μεταξύ τους. Οι χρόνοι είναι δεδομένοι, ενώ ο αριθμός των μονάδων που καταστρέφεται είναι τυχαίος (ισοδύναμα ο αριθμός των μονάδων που επιβιώνει). Για παράδειγμα, υπάρχει ένα δείγμα 100 μπαταριών για να ελεγχθεί. Ο χρόνος λήξης του πειράματος είναι οι επτά μήνες. Η διάρκεια ζωής κάθε μπαταρίας μετριέται στο τέλος του εβδομοου μήνα. Αν η διάρκεια ζωής της μπαταρίας είναι μεγαλύτερη από επτά μήνες, τότε η τιμή της θεωρείται ως αποκομμένη τιμή. Διαφορετικά, η τιμή θεωρείται μη-αποκομμένη (Chiou and Tong, 2001).

- Αποκοπή τύπου II:

Διακόπτεται η παρακολούθηση του πειράματος όταν καταστραφούν k μονάδες. Εδώ το k είναι προκαθορισμένο, ενώ η διάρκεια παρακολούθησης του πειράματος είναι τυχαία. Παραδείγματος χάριν, κατά τη διάρκεια ενός πειράματος με 100 μπαταρίες, το πείραμα λήγει όταν ληφθεί η τιμή της 80^{ns} διάρκειας ζωής. Οι τιμές των υπόλοιπων 20 μπαταριών θεωρούνται αποκομμένες.

- Ενδιάμεση αποκοπή :

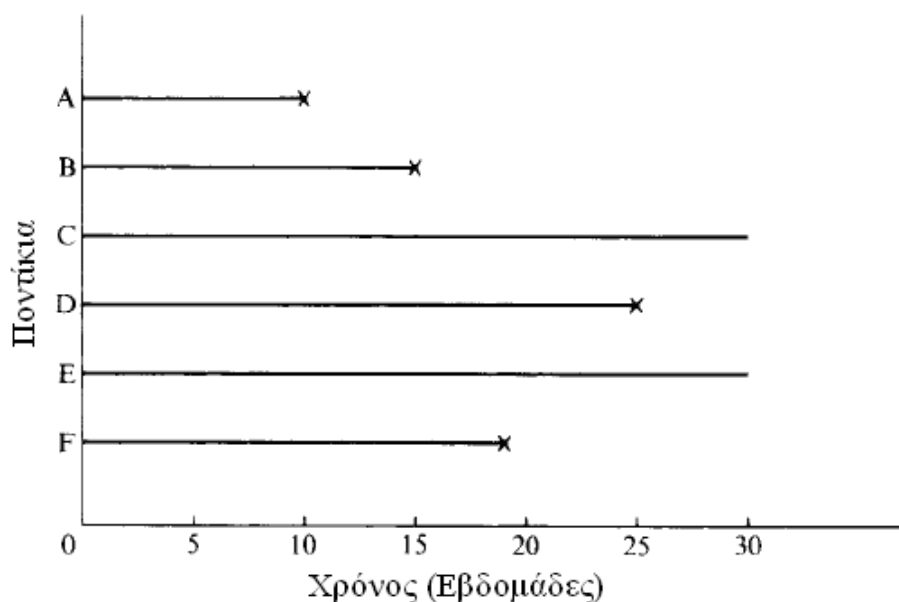
Η ενδιάμεση αποκοπή προκύπτει όταν η διάρκεια ζωής που παίρνουμε από ένα πείραμα δεν είναι γνωστή επακριβώς αλλά γνωρίζουμε ότι κυμαίνεται σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διαστημα. Η ενδιάμεση αποκοπή δε δίνει την ακριβή διάρκεια ζωής. Για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια ενός πειράματος με 100 μπαταρίες, η διάρκεια ζωής των μπαταριών που απέτυχαν καταγράφονται στο τέλος κάθε μήνα και η λήξη του πειράματος είναι στους επτά μήνες. Λαμβάνουμε υπόψιν μόνο τη διάρκεια ζωής των μπαταριών που απέτυχαν ανάμεσα στα χρονικά διαστήματα επιθεώρησης. Αν η διάρκεια ζωής κάποιων μπαταριών ξεπεράσουν τους επτά μήνες θεωρούνται ως αποκομμένες τιμές και γράφονται ως $(7, \infty)$.

Παράδειγμα 2.3.2

Αναφέρουμε ένα ακόμη παράδειγμα, όπου διαφαίνεται τόσο η περίπτωση της (δεξιάς) αποκοπής όσο και οι δύο πρώτοι μηχανισμοί αποκοπής. Έστω ότι 6 ποντίκια (A, B, C, D, E, F) υποβάλλονται σε διαδικασία καρκινογένεσης με εμβολιασμό καρκινικών κυττάρων την ίδια χρονική στιγμή. Αυτό που ενδιαφέρει τον ερευνητή είναι ο χρόνος που απαιτείται για την ανάπτυξη όγκου προκαθορισμένου μεγέθους. Οπότε το υπό μελέτη συμβάν το οποίο και πρέπει να παρουσιαστεί πριν

το πέρας της μελέτης, ώστε να έχουμε πλήρη χρόνο αποτυχίας, είναι η δημιουργία όγκου. Η διάρκεια της μελέτης είναι προκαθορισμένη στις 30 εβδομάδες. Στο παρακάτω γράφημα 2.3.1, βλέπουμε ότι τα ποντίκια A, B και D ανέπτυξαν όγκο έπειτα από 10, 15 και 25 εβδομάδες αντίστοιχα (οι χρόνοι αυτοί είναι πλήρεις χρόνοι αποτυχίας), ενώ τα ποντίκια C και E δεν ανέπτυξαν όγκο κατά τη διάρκεια της μελέτης, άρα οι χρόνοι ανάπτυξης όγκου δεν είναι γνωστοί (δεξιά αποκομμένες παρατηρήσεις). Το ποντίκι F πέθανε ξαφνικά έπειτα από 19 εβδομάδες παρακολούθησης (χωρίς να έχει αναπτύξει κάποιον όγκο), άρα δίνει και αυτό αποκομμένη παρατήρηση. Έτσι, τα δεδομένα επιβίωσης είναι 10, 15, 30+, 25, 30+ και 19+ εβδομάδες. Τα αποκομμένα δεδομένα στην περίπτωση αυτή είναι τύπου I και συμβολίζονται με “+” [25].

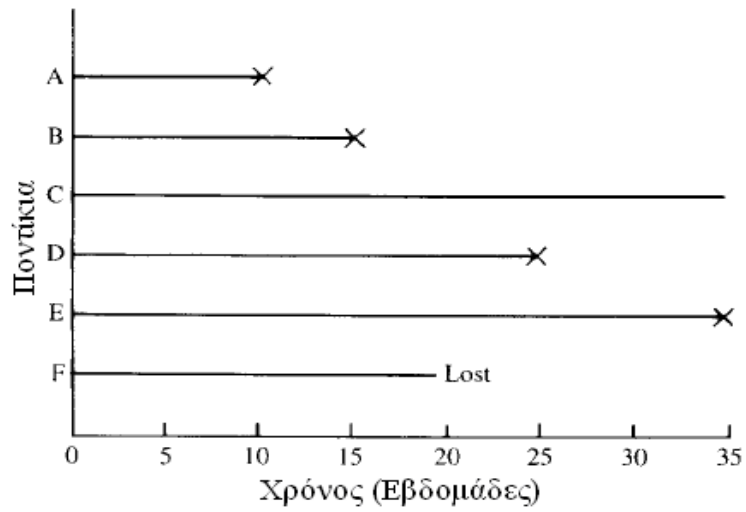
Γράφημα 2.3.1



Στην περίπτωση όμως, που ο ερευνητής ήθελε να σταματήσει τη μελέτη τη στιγμή που 4 ποντίκια εμφανίσουν όγκο (γράφημα 2.3.2), τα δεδομένα

που θα έπαιρνε θα ήταν 10, 15, 35+, 25, 35 και 19+ εβδομάδες και η αποκοπή θα ήταν τύπου II.

Γράφημα 2.3.2



Κεφάλαιο 3

ΜΕΘΟΔΟΣ TAGUCHI

3.1 Εισαγωγή στον Εκτός Διεργασίας Έλεγχο Ποιότητας

Η στατιστική έχει αναγνωριστεί εδώ και πολλά χρόνια για τον κεντρικό ρόλο που παίζει στη διαχείριση ποιότητας. Από τη δεκαετία του 1920 εφαρμόζονταν στατιστικές τεχνικές στην General Electric από τον B. P. Dudding και στα Bell Laboratories από τους W. A. Shewhart, H. F. Dodge και H. G. Romig. Σημαντικό ορόσημο και απαρχή του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασίας (Statistical Process Control) αποτελεί η δημοσίευση του βιβλίου του Shewhart (1931). Στη διάρκεια του 2^{ου} Παγκόσμιου Πολέμου αναπτύχθηκαν στην Αμερική τα στρατιωτικά σχέδια αποδοχής παρτίδων με δειγματοληψία. Παρόλο που οι πρώτες στατιστικές εφαρμογές στον χώρο της ποιότητας αναπτύχθηκαν πριν τον πόλεμο στην Αγγλία και την Αμερική, η βιομηχανία της Δύσης έμεινε πολύ πίσω από την Ιαπωνική βιομηχανία στην γενικευμένη εφαρμογή στατιστικών μεθόδων για έλεγχο και βελτίωση της ποιότητας. Στη μεγάλη υπεροχή της Ιαπωνίας, τις πρώτες δεκαετίες μετά τον πόλεμο, συνέβαλε ο Αμερικανός Δρ. W. Edwards Deming, θεωρούμενος ως πατέρας της Διαχείρισης Ολικής Ποιότητας. Έτσι λοιπόν, ο δυτικός βιομηχανικός κόσμος έχει αφοσιωθεί τα τελευταία χρόνια σε μια προσπάθεια εξερεύνησης των μεθόδων παραγωγής που εφαρμόζονται από τις Ιαπωνικές εταιρείες, ώστε να μπορέσει να εξηγήσει το φαινόμενο που ονομάζεται «Ιαπωνική Επανάσταση», καθώς και την ικανότητα για παραγωγή προϊόντων υψηλής ποιότητας, με χαμηλό κόστος. Τελικά, το

συμπέρασμα ήταν ότι η τεχνική που ακολουθείται για την έρευνα, την ανάπτυξη και τον ποιοτικό έλεγχο των ιαπωνικών προϊόντων, βασίζεται σε γνωστές στατιστικές μεθόδους που ανακαλύφθηκαν εδώ και 50 χρόνια από επιστήμονες στατιστικούς του δυτικού κόσμου.

Η πιο δημοφιλής και πλήρης συλλογή τέτοιων μεθόδων είναι γνωστή με το όνομα «Μέθοδοι του Taguchi» (Taguchi Methods) οι οποίες αποσκοπούν στην ελάττωση του παραγωγικού κόστους και την ποιοτική βελτίωση των προϊόντων μέσω του στατιστικού ποιοτικού ελέγχου πριν από την έναρξη της μαζικής παραγωγής (“Off-line Quality Control”).

Η διάδοση των στατιστικών μεθόδων ποιοτικού ελέγχου πριν από την παραγωγή στην Ιαπωνία, μπορεί να αποδοθεί κυρίως σε έναν πρώην μηχανικό της ιαπωνικής βιομηχανίας τηλεπικοινωνιών, τον G.Taguchi. Ο Taguchi διετέλεσε διευθυντής της Ιαπωνικής Ακαδημίας για την Ποιότητα και έχει τιμηθεί τέσσερις φορές με το βραβείο ‘Deming’. Αυτό δείχνει τη σημασία που αποδίδεται στη συνεισφορά του Taguchi στην εφαρμογή και διάδοση των Στατιστικών μεθόδων για την ποιοτική βελτίωση και ελάττωση του κόστους της ιαπωνικής βιομηχανικής παραγωγής. Ο Taguchi θεωρείται ότι έχει συντελέσει σε μεγάλο βαθμό στην επιτυχία της ιαπωνικής βιομηχανίας. Προήγαγε κατά πολύ την κλειστή συνεργασία στατιστικολόγων και μηχανικών και συνεπώς τη σωστή χρήση των στατιστικών μεθόδων στη βιομηχανία.

3.2 Εισαγωγή στους Παραμετρικούς Σχεδιασμούς

Ο Genichi Taguchi (1987) επινόησε μια τεχνική βελτίωσης, η οποία χρησιμοποιεί τις μεθόδους του Στατιστικού Σχεδιασμού

Πειραμάτων (Statistical Design of Experiments) για τον αποτελεσματικό χαρακτηρισμό ενός προϊόντος ή των μέσων παραγωγής (όσον αφορά την ποιότητα), σε συνδυασμό με τη στατιστική ανάλυση της διασποράς τους, με κύρια επιδίωξη την ελαχιστοποίηση της μεταβλητότητας με το χαμηλότερο κόστος. Η μέθοδος του Taguchi, με τη βοήθεια του *παραμετρικού σχεδιασμού (parameter design)*, εφαρμόζει την αρχή της αλλαγής πολλών παραγόντων κάθε φορά, πράγμα που κοστίζει λιγότερο και δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα, εν γένει. Υπάρχουν διάφοροι στατιστικοί σχεδιασμοί, οι οποίοι προσαρμόζονται σε κάθε πειραματική δυνατότητα. Οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί χρησιμοποιούνται περισσότερο, αφού παρέχουν μια οικονομική μέθοδο μελέτης πολλών παραγόντων σε ένα πείραμα, αγνοώντας μόνο κάποιες αλληλεπιδράσεις παραγόντων υψηλής τάξης, κάτι που θεωρείται ως χαμηλού κινδύνου ζήτημα, εφόσον οι αλληλεπιδράσεις υψηλής τάξης είναι συνήθως μη στατιστικά σημαντικές και ούτως η άλλως δύσκολα ερμηνεύονται.

3.3 Η Μεθοδολογία του Taguchi

Ο Taguchi, με τη βοήθεια του παραμετρικού σχεδιασμού, στοχεύει στο να μειωθεί η μεταβλητότητα ενός προϊόντος ή ενός συστήματος («Στατιστικός έλεγχος ποιότητας», Χ.Κουκουβίνος, 2008). Ο Taguchi ορίζει την ποιότητα ενός προϊόντος με αρνητικό τρόπο, δηλαδή ως την απώλεια που μεταβιβάζεται στην κοινωνία από τη στιγμή που της αποστέλλεται το προϊόν. Η απώλεια αυτή συμπεριλαμβάνει εν γένει και το κόστος, το οποίο προέρχεται από την απόρριψη των προϊόντων που δεν ικανοποιούν τις προδιαγραφές, από τα έξοδα του ποιοτικού ελέγχου, από τη συντήρηση ή αντικατάσταση επιστρεφόμενης

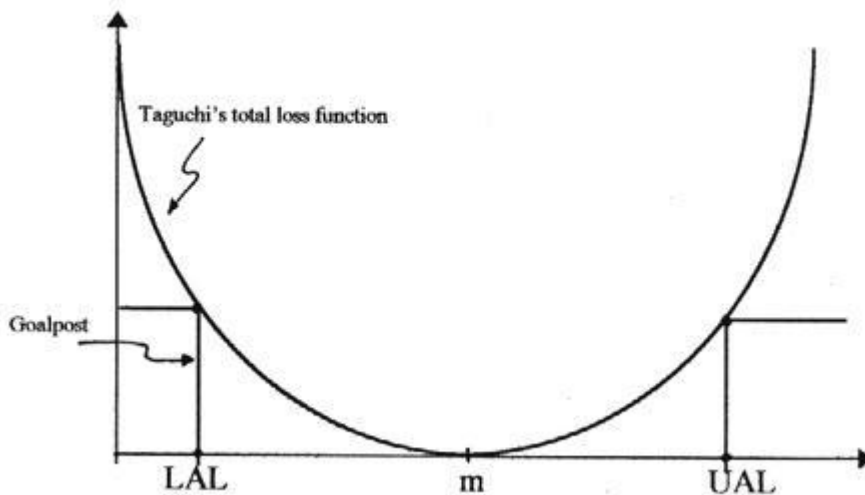
παραγωγής που πωλήθηκε με εγγύηση και από το χάσιμο πελατών που προέρχεται από την κακή ποιότητα του προϊόντος. Το σημαντικότερο όμως, είναι ότι σύμφωνα με τον Taguchi, ένα προϊόν προξενεί απώλεια όχι μόνο όταν βρίσκεται εκτός προδιαγραφών, αλλά και όταν παρεκκλίνει του στόχου του. Κάθε πρόγραμμα ποιοτικής βελτίωσης θα πρέπει να έχει βασικό του στόχο την ελαχιστοποίηση της διασποράς της απόδοσης του προϊόντος σε σχέση με το στόχο του. Όσο μικρότερη είναι η διασπορά της απόδοσης, τόσο καλύτερη είναι η ποιότητα. Όσο μεγαλύτερη είναι η απόκλιση από το στόχο, τόσο μεγαλύτερη είναι και η απώλειά του. Η απώλεια αυτή μετριέται από τη **συνάρτηση απώλειας** (loss function) του Taguchi, η οποία ενοποιεί την απώλεια με τις προδιαγραφές λειτουργίας μέσω μιας τετραγωνικής σχέσης.

Η απώλεια αυτή είναι ανάλογη με το τετράγωνο της απόκλισης από το στόχο. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η βασική σχέση για τη συνάρτηση απώλειας $L(y)$ και μια γραφική παράσταση της απώλειας για την κοινωνία, όταν η απόδοση (y) του προϊόντος αποκλίνει από τον επιθυμητό στόχο t .

Η συνάρτηση απώλειας $L(y)$ δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$L(y) = k(y - t)^2$$

όπου y η απόδοση του προϊόντος, t ο προκαθορισμένος στόχος και k το πηλίκο της απώλειας M προς το τετράγωνο της ανοχής D (προδιαγραφές).



Σύμφωνα με τον Taguchi, η απόκλιση ενός προϊόντος από τον επιθυμητό στόχο οφείλεται σε δύο παράγοντες, τους ελεγχόμενους και τους μη ελεγχόμενους. Ελεγχόμενοι παράγοντες (controllable factors) είναι αυτοί των οποίων τις τιμές μπορεί να θέσει ή να ρυθμίσει εύκολα ο πειραματιστής. Αυτοί οι παράγοντες χωρίζονται σε αυτούς που επηρεάζουν τη διασπορά του αποτελέσματος και ονομάζονται **παράγοντες διασποράς** (variability control factors), σε αυτούς που επιδρούν στο μέσο του αποτελέσματος και ονομάζονται **παράγοντες ελέγχου του στόχου** (target control factors), και τέλος, σε αυτούς που δεν επιδρούν ούτε στη μέση απόδοση ούτε στη μεταβλητότητα και επομένως, μπορούν να ρυθμιστούν έτσι ώστε να εναρμονίζονται με τις οικονομικές απαιτήσεις και ονομάζονται **παράγοντες κόστους**.

Οι μη ελεγχόμενοι **παράγοντες ή παράγοντες θορύβου** (uncontrollable or noise factors) είναι πηγές διασποράς που συνδέονται συνήθως με το περιβάλλον της παραγωγής ή της λειτουργίας. Οι παράγοντες αυτοί διακρίνονται στους εξωτερικούς παράγοντες θορύβου, όπως η υγρασία, η σκόνη, η θερμοκρασία περιβάλλοντος κ.α. και στους

εσωτερικούς παράγοντες θορύβου, όπως οι αποκλίσεις των μηχανημάτων από τις προδιαγραφές της παραγωγικής διαδικασίας.

Ο στόχος του παραμετρικού σχεδιασμού Taguchi είναι να μειωθεί η διασπορά με την τροποποίηση των παραγόντων ελέγχου της διασποράς, ενώ παράλληλα θα διατηρείται η απαιτούμενη μέση απόδοση μέσω της ρύθμισης των παραγόντων ελέγχου του στόχου. Θέτοντας τους ελεγχόμενους παράγοντες στα “βέλτιστα” επίπεδά τους το προϊόν και η διεργασία θα γίνουν στιβαρά έναντι των παραγόντων θορύβου. Αυτό επιτυγχάνεται με το να “απομακρύνουμε την κακή επίδραση του αιτίου και όχι με την απομάκρυνση του αιτίου της κακής επίδρασης”.

Η μέθοδος Taguchi χρησιμοποιεί ορθογώνιους σχηματισμούς (orthogonal arrays) με παράγοντες σε δύο ή τρεις στάθμες. Αν η επίδραση ενός παράγοντα είναι γραμμική τότε παίρνουμε δύο στάθμες για τον παράγοντα αυτό, ενώ αν η επίδραση του δεν είναι γραμμική τότε παίρνουμε τρεις στάθμες. Αν C_i είναι η επίδραση του παράγοντα i και η επίδραση αυτή είναι γραμμική, τότε ο παράγοντας αυτός δοκιμάζεται στις στάθμες:

$$m_i - s_i \text{ και } m_i + s_i$$

όπου m_i, s_i είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της C_i . Αν η C_i έχει καμπυλόγραμμη επίδραση, τότε αυτή ελέγχεται σε τρεις στάθμες:

$$m_i - s_i \sqrt{\frac{3}{2}}, m_i, m_i + s_i \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Εφόσον προσδιορίσουμε τους ελεγχόμενους και τους μη ελεγχόμενους παράγοντες αντιστοιχούμε σε κάθε έναν από αυτούς από έναν κατάλληλο ορθογώνιο σχηματισμό (orthogonal array). Ο σχηματισμός για τους ελεγχόμενους παράγοντες ονομάζεται **εσωτερικός σχηματισμός** (inner array), ενώ για τους μη ελεγχόμενους, **εξωτερικός**

σχηματισμός (outer array). Σε κάθε ένα συνδυασμό αγωγών του εσωτερικού σχηματισμού αντιστοιχούμε όλους τους συνδυασμούς αγωγών του εξωτερικού σχηματισμού. Έτσι, αν για τον εσωτερικό σχηματισμό έχω n παρατηρήσεις και για τον εξωτερικό m , τότε όλος αυτός ο σχεδιασμός, που ονομάζεται **διασταυρωμένος σχεδιασμός** (crossed array), θα αποτελείται από nm παρατηρήσεις.

3.4 Τα Βήματα του Taguchi

Υπάρχουν ορισμένα βήματα που προτείνει ο Taguchi για τη βελτίωση της ποιότητας ενός προϊόντος (Χ.Κουκουβίνος, 2008):

1. Ορίζουμε το πρόβλημα. Δίνουμε μια σαφή διατύπωση του προβλήματος προς επίλυση. Είναι σημαντικό να είναι ξεκάθαρο αυτό ακριβώς που το πείραμα σκοπεύει να λύσει.
2. Προσδιορίζουμε τον αντικειμενικό σκοπό. Καθορίζουμε τα χαρακτηριστικά που θα πρέπει να μελετηθούν και τελικά προσδιορίζουμε τη μέθοδο μέτρησης.
3. Οργανώνουμε μια συνεδρίαση καταγισμού ιδεών. Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό στάδιο για τη βελτίωση της ποιότητας ενός προϊόντος ή μιας διαδικασίας. Τα άτομα που έχουν στενή σχέση με την παραγωγική διαδικασία θα πρέπει να αποφασίσουν τους ελεγχόμενους και τους μη ελεγχόμενους παράγοντες.
4. Σχεδιάζουμε το πείραμα.
5. Διεξάγουμε τα απαραίτητα πειράματα και συλλέγουμε τα δεδομένα.
6. Αναλύουμε τα δεδομένα και προσδιορίζουμε τα βέλτιστα επίπεδα των ελεγχόμενων παραγόντων.

7. Προβλέπουμε την απόδοση κάτω από τα βέλτιστα αυτά επίπεδα.

3.5 Μέτρα Απόδοσης του Taguchi

Ο Taguchi πρότεινε την ομαδοποίηση των παρατηρήσεων σε κάθε εξωτερικό σχηματισμό (X.Κουκουβίνος, 2008). Η ομαδοποίηση αυτή γίνεται με τη βοήθεια κάποιων **μέτρων απόδοσης** (performance measures), τα οποία παρέχουν πληροφορία για το μέσο και τη διασπορά. Τα μέτρα απόδοσης ονομάζονται **μέτρα απόδοσης θορύβου** (signal-to-noise ratios) και η στατιστική ανάλυση γίνεται βασισμένη σε αυτά. Όταν επιθυμούμε ελαχιστοποίηση της απόδοσης (the smaller the better), ο Taguchi συνιστά τη χρήση του:

$$SNR_S = -10 \log \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{n}$$

Στον υπολογισμό του SNR_S το άθροισμα ως προς n υπονοεί την άθροιση των τιμών της απόκρισης των συνδυασμών αγωγών του εξωτερικού σχηματισμού. Λόγω του μετασχηματισμού $-10 \log_{10}$ προσπαθούμε πάντα να μεγιστοποιήσουμε το SNR. Όταν επιθυμούμε μεγιστοποίηση της απόδοσης (the larger the better), ο Taguchi συνιστά τη χρήση του:

$$SNR_L = -10 \log \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2}$$

όπου y_i το αποτέλεσμα n μετρήσεων για κάθε συνδυασμό ελεγχόμενων παραγόντων. Όπως και παραπάνω προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε το SNR .

Όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι δυαδικό, δηλαδή επιτυχία ή αποτυχία, τότε χρησιμοποιείται το μέτρο:

$$z = 10 \log_{10} \left(\frac{p}{1-p} \right)$$

όπου p το ποσοστό επιτυχίας στις n προσπάθειες.

Κεφάλαιο 4

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΑΠΟΚΟΜΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ ΣΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟΥΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥΣ

4.1 Εισαγωγή – Σχετικές Έρευνες

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε στις κυριότερες υπάρχουσες μεθόδους για ανάλυση αποκομμένων παρατηρήσεων και θα σημειώσουμε μερικές αδυναμίες τους.

Οι Nelson και Hahn (1972, 1973), εφήρμοσαν μια γραμμική εκτιμητική μέθοδο για ανάλυση παλινδρόμησης χρησιμοποιώντας παρατηρήσεις με αποκομμένες τιμές. Οι Hahn και Nelson (1974), εξέτασαν γραφικά τις μεθόδους της μέγιστης πιθανοφάνειας και της γραμμικής εκτίμησης για την ανάλυση των αποκομμένων τιμών ώστε να προσδιορίσουν τη σχέση μεταξύ της έντασης και της διάρκειας ζωής του προϊόντος. Τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των μεθόδων συγκρίνονται ώστε να επιλεγεί η καταλληλότερη. Οι γραφικές μέθοδοι χρησιμοποιούν μια υποκειμενική διαδικασία, προκαλώντας διαφορετικά αποτελέσματα σύμφωνα με διαφορετικά άτομα. Η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας είναι πιθανώς η πιο γενική προσέγγιση και συχνά χρησιμοποιείται από τους στατιστικούς. Ωστόσο, αυτοί που έχουν περιορισμένο στατιστικό υπόβαθρο είναι δύσκολο να το κατανοήσουν. Επιπλέον, η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE) μπορεί να μην

υπάρχει και το κόστος υπολογισμού μπορεί να είναι πολύ υψηλό αφού πρέπει να προσαρμοστούν πολλά πιθανά μοντέλα. Οι γραμμικές εκτιμητικές μέθοδοι είναι υπολογιστικά απλούστερες από τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας. Εντούτοις, είναι εφαρμόσιμες μόνο στην αποκοπή τύπου II. Οι Krall, Utoff και Harley (1975), πρότειναν μια διαδικασία επιλογής προς τα εμπρός για την επιλογή των πιο σημαντικών μεταβλητών που είναι συσχετισμένες με την επιβίωση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας. Το πλήθος των υπολογισμών στην μέθοδό τους είναι μικρότερο από αυτό της πρωτότυπης μέθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας. Ακόμη και αυτή η μέθοδος, όμως, απαιτεί μεγάλη υπολογιστική δύναμη.

Οι Schmee και Hahn (1979), πρότειναν μια μέθοδο χρησιμοποιώντας επαναληπτικά ελάχιστα τετράγωνα (ILS) ως μια απλή μέθοδο για την ανάλυση αποκομμένων παρατηρήσεων. Αρχικά, γίνεται μια προσαρμογή των ελαχίστων τετραγώνων, όπου οι αποκομμένες παρατηρήσεις αντιμετωπίζονται ως αποτυχίες. Στη συνέχεια, η αρχική προσαρμογή χρησιμοποιείται ώστε να υπολογιστεί ο αναμενόμενος χρόνος αποτυχίας για κάθε αποκομμένη παρατήρηση. Αυτές οι εκτιμήσεις χρησιμοποιούνται στη συνέχεια ώστε να βρεθεί μια αναθεωρημένη προσαρμογή ελαχίστων τετραγώνων και έτσι υπολογίζονται εκ νέου οι αναμενόμενοι χρόνοι αποτυχίας των αποκομμένων παρατηρήσεων. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου επιτευχθεί η σύγκλιση. Εντούτοις, η μέθοδος ILS αντιμετωπίζει τις αποκομμένες παρατηρήσεις σα να ήταν μη αποκομμένες και ως εκ τούτου οδηγεί σε μεροληπτικές εκτιμήσεις της γραμμής παλινδρόμησης. Οι Hahn, Morgan και Schmee (1981), εφήρμοσαν την επαναληπτική προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων για να αναλύσουν τα αποτελέσματα ενός κλασματικού παραγοντικού πειράματος το οποίο συμπεριλάμβανε

αριστερά αποκομμένες παρατηρήσεις. Ο κυριότερος περιορισμός ήταν ότι το τελικό μοντέλο είναι σημαντικά επηρεασμένο από την αρχική επιλογή μοντέλου. Επίσης, αυτή η προσέγγιση δε λαμβάνει υπόψιν την αλληλεπίδραση και τη μεταβλητότητα των μεταβλητών.

Ο Taguchi, το 1987, ανέπτυξε μια μέθοδο, η οποία ονομάζεται “minute accumulating analysis” (MAA), για παρατηρήσεις με ενδιάμεση αποκοπή. Οι παρατηρήσεις παρουσιάζονται με 0 και 1. Σε κάθε περίοδο, εάν το αντικείμενο προς εξέταση είναι ζωντανό, τότε εκφράζεται με το 1, εάν έχει πεθάνει τότε εκφράζεται με το 0. Αυτά τα δυαδικά δεδομένα μπορούν να αντιμετωπιστούν σα να προήλθαν από ένα πείραμα split plot. Οι main plot παράγοντες είναι οι παράγοντες ελέγχου του πειράματος. Ο sub plot παράγοντας είναι ο παράγοντας του χρόνου που δημιουργήθηκε από τα δυαδικά δεδομένα. Παρ’ όλα αυτά, ο Taguchi αντιμετώπιζε τους χρόνους αποκοπής σαν πραγματικούς χρόνους αποτυχίας γεγονός το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε σοβαρά σφάλματα διότι οι μη παρατηρημένες αποτυχίες και οι χρόνοι αποκοπής μπορεί να διαφέρουν σημαντικά.

Οι Hamada και Wu, το 1981, πρότειναν μια επαναληπτική διαδικασία για την ανάλυση αποκομμένων παρατηρήσεων από υψηλούς κλασματικούς σχεδιασμούς. Τα δεδομένα αρχικά μετατρέπονται ώστε να επιτευχθεί κανονικότητα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούνται οι κοινές μέθοδοι για να επιλεγεί ένα δοκιμαστικό μοντέλο βασισμένο στο συνδυασμό των ολοκληρωμένων και των αποκομμένων παρατηρήσεων. Εν συνεχεία, το τωρινό μοντέλο προσαρμόζεται και οι αποκομμένες παρατηρήσεις εισάγονται και πάλι. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται ώσπου το επιλεγμένο μοντέλο να σταματήσει να αλλάζει. Διάφορα μοντέλα μπορεί να προσδιοριστούν και ένας διαγνωστικός έλεγχος μπορεί να πραγματοποιηθεί για να αξιολογηθεί η επάρκειά τους. Τέλος,

μπορεί να προσδιορισθεί η βέλτιστη επιλογή επιπέδου του κάθε παράγοντα. Ένας σημαντικός περιορισμός σε αυτή τη μέθοδο είναι ότι βασίζεται στην ύπαρξη της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας. Ένα ακόμη μειονέκτημα είναι ότι δε συνυπολογίζει τη μεταβλητότητα των παραγόντων ελέγχου.

Ο Torres με το άρθρο του: “A simple analysis of unreplicated factorials with possible abnormalities”, 1993, παρουσίασε μια μέθοδο βασισμένη στη μετατροπή των τάξεων των αποκρίσεων ώστε να συμφωνούν με τις αποκρίσεις από την ανάλυση των μη επαναλαμβανόμενων παραγοντικών σχεδιασμών με πιθανές ανωμαλίες. Οι τάξεις των παρατηρήσεων, όταν υπολογίζονται, αναλύονται σα να ήταν αυτές οι πραγματικές παρατηρήσεις. Το διάγραμμα των επιδράσεων των τάξεων χρησιμοποιείται για να καθοριστούν οι σημαντικοί παράγοντες. Η διαδικασία είναι εύκολο να εφαρμοστεί με ένα απλό στατιστικό πακέτο. Όμως, μπορεί μόνο να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση ενός μη επαναλαμβανόμενου πειράματος με ολοκληρωμένα δεδομένα.

4.2 Μη-Παραμετρική Μέθοδος για την Ανάλυση Αποκομμένων Παρατηρήσεων σε Παραγοντικούς Σχεδιασμούς

Σε αυτήν την ενότητα θα χρησιμοποιηθεί μια μη-παραμετρική τεχνική, όπως πρότειναν οι Lee-Ing και Tong Chao-Ton Su (1997), ώστε να μειωθεί η πολυπλοκότητα της ανάλυσης των δεδομένων. Η βαθμονόμηση των παρατηρήσεων είναι η συμβατική προσέγγιση στη μη-

παραμετρική στατιστική. Η χρήση της βαθμονόμησης για την ανάλυση των παραγοντικών σχεδιασμών έχει πολλά πλεονεκτήματα. Αρχικά, οι βαθμοί (ranks) μπορούν να βρεθούν πολύ πιο εύκολα από ότι οι αναμενόμενες αποκρίσεις των αποκομμένων παρατηρήσεων. Επίσης, οι βαθμοί μπορούν να απλοποιήσουν τη διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων. Στη συνέχεια, η κατανομή των βαθμών παραμένει ίδια με αυτή των αρχικών παρατηρήσεων, ανεξαρτήτως της κατανομής στην οποία ανήκουν. Επιπλέον, η χρήση των βαθμών είναι μια αποτελεσματική μέθοδος για την ανάλυση προβλημάτων στα οποία γνωρίζουμε πολύ λίγα για την κατανομή των παρατηρήσεων. Επομένως, σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιούμε αυτήν τη μέθοδο η οποία βασίζεται στην μετατροπή των βαθμών των αποκρίσεων. Οι παράγοντες οι οποίοι έχουν σημαντική επίδραση στο μέσο και την τυπική απόκλιση της απόκρισης προσδιορίζονται για την ανάλυση των επαναλαμβανόμενων πειραμάτων. Ακολούθως, παρατίθεται η διαδικασία για την ανάλυση ενός επαναλαμβανόμενου πειράματος με μεμονωμένες αποκομμένες παρατηρήσεις:

- **Βήμα 1:** Ξεχωρίζουμε τα αποτελέσματα του πειράματος σε μη αποκομμένες (ολοκληρωμένες) και αποκομμένες (μη ολοκληρωμένες) παρατηρήσεις και τις δηλώνουμε ως Y_U και Y_C αντιστοίχως.

Έστω ότι N είναι το μέγεθος του δείγματος, υποθέτουμε λοιπόν πως έχουμε N παρατηρήσεις. Εάν το σημείο αποκοπής είναι το C και υπάρχουν n μη αποκομμένες παρατηρήσεις, τότε έχουμε $Y_U = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ και $Y_C = [y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_N]^T$ όπου y_i είναι τα δεδομένα του πειράματος. Οι αποκομμένες παρατηρήσεις είναι ταξινομημένες με αύξουσα σειρά και εμφανίζονται ως $R_U = [r_1, r_2, \dots, r_n]^T$ όπου r_i οι βαθμοί (ranks) των y_i .

- **Βήμα 2:** Βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ των Y_U και Z_U χρησιμοποιώντας την ανάλυση παλινδρόμησης:

$$\hat{\mu}_{Y_U|Z_U} = Z_U \hat{\beta}_U \quad (4.2.1)$$

όπου Z_U είναι ο πίνακας των επιπέδων των παραγόντων για τις μη αποκομμένες παρατηρήσεις και $\hat{\beta}_U$ είναι ο πίνακας των συντελεστών της παλινδρόμησης.

- **Βήμα 3:** Βρίσκουμε τις εκτιμήσεις των Y_c, \hat{Y}_c .

Το \hat{Y}_c βρίσκεται αντικαθιστώντας το Z_c με Z_U στη σχέση 4.2.1, όπου Z_c είναι ο πίνακας των επιπέδων των παραγόντων για τις αποκομμένες παρατηρήσεις.

- **Βήμα 4:** Ταξινομούμε τις εκτιμημένες αποκομμένες παρατηρήσεις \hat{Y}_c .

Οι εκτιμημένες αποκομμένες παρατηρήσεις είναι ταξινομημένες σε αύξουσα σειρά και δηλώνονται με $\hat{R}_c = [r_{n+1}, r_{n+2}, \dots, r_N]^T$ όπου r_i είναι ο βαθμός της i -οστής τιμής στο \hat{Y}_c . Για τις n μη αποκομμένες τιμές ενός πειράματος μεγέθους N , εάν οι παρατηρήσεις είναι δεξιά αποκομμένες, τότε το r_i θα πρέπει να είναι μεταξύ $n + 1$ και N . Ενώ εάν οι παρατηρήσεις είναι αριστερά αποκομμένες, τότε το r_i θα πρέπει να κυμαίνεται ανάμεσα στο 1 και το $N - n$.

Προκειμένου να μειώσουμε την επίδραση του σφάλματος στην εκτίμηση, σε αυτήν τη μέθοδο χρησιμοποιείται ο βαθμός των εκτιμημένων αποκομμένων παρατηρήσεων αντί για τις ίδιες τις αποκομμένες παρατηρήσεις για περαιτέρω ανάλυση. Επιπλέον, από τη σχέση 4.2.1, παίρνουμε τις ίδιες αποκρίσεις όταν εισάγουμε τα ίδια επίπεδα παραγόντων. Εντούτοις, η πιθανότητα να πάρουμε τις ίδιες αποκρίσεις σε ένα παράδειγμα είναι γενικώς μικρή. Επομένως, αυτή η

μέθοδος παρέχει τους διαφορετικούς βαθμούς για τις ίδιες εκτιμημένες αποκρίσεις ώστε να μειώσει τη διακύμανση της ανάλυσης.

- **Βήμα 5:** Βρίσκουμε τα μοντέλα παλινδρόμησης για το μέσο και την τυπική απόκλιση της απόκρισης για κάθε εκτέλεση.

Έστω $R = [R_U | \hat{R}_C]^T$ και $Z = [Z_U | Z_C]^T$. Αρχικά υπολογίζουμε τα R_j και S_j χρησιμοποιώντας το R , όπου R_j είναι ο μέσος των βαθμών και S_j είναι η τυπική απόκλιση των βαθμών για την j -οστή εκτέλεση, αντιστοίχως. Στη συνέχεια, τα μοντέλα παλινδρόμησης για τα R_j και Z και S_j και Z μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\hat{\mu}_{R|Z} = \bar{Z}\hat{\beta}_R$$

$$\hat{\mu}_{S|Z} = \bar{Z}\hat{\beta}_S$$

Όπου $\hat{\beta}_R$ και $\hat{\beta}_S$ είναι οι πίνακες των συντελεστών παλινδρόμησης.

- **Βήμα 6:** Προσδιορίζουμε τους παράγοντες οι οποίοι έχουν σημαντική επίδραση στο μέσο και την τυπική απόκλιση της απόκρισης.

Οι γραφικές παραστάσεις των $\hat{\beta}_R$ και $\hat{\beta}_S$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως απόδειξη της σημαντικότητας των επιδράσεων.

- **Βήμα 7:** Καθορίζουμε το βέλτιστο επίπεδο του κάθε παράγοντα.

Η επιλογή γίνεται από τα βέλτιστα επίπεδα των παραγόντων οι οποίοι έχουν σημαντική επίδραση στο μέσο και στην τυπική απόκλιση της απόκρισης. Εάν υπάρχει συμφωνία στην τοποθεσία και στη διασπορά των επιδράσεων, τότε τα βέλτιστα επίπεδα εδραιώνονται. Διαφορετικά, η επιλογή εναπόκειται στην εμπειρία του πειραματιστή ή στις κανονικές πιθανότητες των $\hat{\beta}_R$ και $\hat{\beta}_S$. Εάν αποτύχουν όλα τα παραπάνω, τότε θα πρέπει να πραγματοποιηθεί κι άλλο πείραμα για περαιτέρω ανάλυση.

Η παραπάνω διαδικασία είναι σχεδιασμένη για επαναλαμβανόμενα πειράματα. Όμως, στην περίπτωση ενός μη επαναλαμβανόμενου πειράματος με αποκομμένες παρατηρήσεις, η διαδικασία της ανάλυσης είναι η ίδια εκτός του ότι θα πρέπει να εξεταστεί μόνο η βελτιστοποίηση του μέσου της απόκρισης.

4.3 Εκτιμητική Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων για Πειράματα με Αποκομμένες Παρατηρήσεις

Οι Lee-Ing Tong και Chien-Hui Yang ανέφεραν το 2006 ότι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις αποκομμένες παρατηρήσεις, προκειμένου να εκτιμηθεί ο μέσος και η διακύμανση του πληθυσμού υπό την υπόθεση της κανονικότητας. Έστω $X_{(r+1)} < X_{(r+2)} < \dots < X_{(n-s)}$ ένα δείγμα με διπλά αποκομμένες παρατηρήσεις τύπου II (όταν $r=0$, είναι γνωστό ως δεξιά αποκοπή τύπου II και όταν $s=0$, είναι γνωστό ως αριστερή αποκοπή τύπου II), το οποίο ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2 . Τότε η σωρευτική συνάρτηση κατανομής του X_i , $i = r + 1, \dots, n - s$, εκφράζεται ως εξής:

$$F(X_{(i)}) = \Phi\left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma}\right), \quad r + 1 \leq i \leq n - s \quad (4.3.1)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση κανονικής κατανομής

Από τη σχέση (4.3.1), μπορούμε να πάρουμε το $\hat{F}(X_{(i)})$ από τη σχέση:

$$\hat{F}(X_{(i)}) = \Phi\left(\frac{X_{(i)} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right), \quad r + 1 \leq i \leq n - s \quad (4.3.2)$$

όπου $\hat{F}(X_{(i)})$ ισοδυναμεί με $i/(n+1)$ σύμφωνα με τους D'Agostino και Stephens, (1986).

Η σχέση (4.3.2) μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής:

$$\Phi^{-1}\left(\hat{F}(X_{(i)})\right) = \frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma} = \frac{-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}} X_{(i)}, \quad r+1 \leq i \leq n-s \quad (4.3.3)$$

Η σχέση (4.3.3) μπορεί να θεωρηθεί ως ένα απλό μοντέλο παλινδρόμησης, επομένως οι εκτιμήτριες των μ και σ από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων μπορούν να βρεθούν με ελαχιστοποίηση του αθροίσματος του τετραγώνου των αποκλίσεων:

$$\min \sum_{i=r+1}^{n-s} \varepsilon_i^2 = \min \sum_{i=r+1}^{n-s} (Y_{(i)} - \beta_0 - \beta_1 X_{(i)})^2 \quad (4.3.4)$$

όπου $Y_{(i)} = \Phi^{-1}\left(\hat{F}(X_{(i)})\right)$, $\beta_0 = -\hat{\mu}/\hat{\sigma}$, $\beta_1 = 1/\hat{\sigma}$.

Με μερική διαφορίση της σχέσης (4.3.4) ως προς β_0 και β_1 παίρνουμε τις εκτιμήτριες αυτών :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=r+1}^{n-s} (X_{(i)} - \bar{X}) \cdot Y_{(i)}}{\sum_{i=r+1}^{n-s} (X_{(i)} - \bar{X})^2} = \frac{1}{\hat{\sigma}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}.$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να πάρουμε τα $\hat{\mu}$ και $\hat{\sigma}$ ως εξής:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=r+1}^{n-s} (X_{(i)} - \bar{X})^2}{\sum_{i=r+1}^{n-s} (X_{(i)} - \bar{X}) \cdot Y_{(i)}}$$

$$\hat{\mu} = \bar{X} - \hat{\sigma} \bar{Y}.$$

όπου $\hat{\mu}$ και $\hat{\sigma}$ είναι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των μ και σ , αντιστοίχως.

4.4 Διαδικασία για την Ανάλυση Αποκομμένων Παρατηρήσεων σε Παραγοντικούς Σχεδιασμούς

Ο κύριος στόχος των παραγοντικών σχεδιασμών είναι να καθοριστούν οι σημαντικοί παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά μιας διαδικασίας ή ενός προϊόντος και να επιλεγθούν τα βέλτιστα επίπεδα των παραγόντων. Συνεπώς, αυτή η εργασία παρουσιάζει μια διαδικασία βελτιστοποίησης των πειραμάτων με αποκομμένες τιμές τύπου II, όπως ανέφεραν οι Lee-Ing Tong και Chien-Hui Yang (2006). Το πρώτο βήμα είναι να εκτιμηθεί ο μέσος κάθε παράγοντα και στη συνέχεια με την ανάλυση Torres για μη επαναλαμβανόμενους σχεδιασμούς (Torres, 1993), να βρεθεί το βέλτιστο επίπεδο για κάθε παράγοντα.

4.5 Διαδικασία για την Ανάλυση Αποκομμένων Παρατηρήσεων σε Παραμετρικούς Σχεδιασμούς Taguchi

Οι Lee-Ing Tong και Chien-Hui Yang (2006), αναφέρουν στο άρθρο τους πως στα περισσότερα πειράματα, οι παρατηρήσεις χρησιμοποιούνται για να αναλυθεί η μέση απόκριση. Όμως ο Taguchi δίνει έμφαση στη σπουδαιότητα της μελέτης της μεταβολής της απόκρισης χρησιμοποιώντας τα μέτρα απόδοσης θορύβου (S/N). Υπάρχουν πολλοί τύποι μέτρων απόδοσης θορύβου διαθέσιμοι, αλλά τρεις από αυτούς θεωρούνται πρότυπα και είναι ευρέως εφαρμόσιμοι όταν η απόδοση πρέπει να μεγιστοποιηθεί, όταν πρέπει να

ελαχιστοποιηθεί και όταν το βέλτιστο είναι το μέσο επίπεδο (Byrne και Taguchi, 1987).

Όταν προσπαθούμε να καθορίσουμε τους ελεγχόμενους παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τη μέση απόδοση, δηλαδή τους παράγοντες ελέγχου του στόχου t , πρέπει να χρησιμοποιήσουμε δυο διαφορετικά SNR 's. Η επιλογή του κατάλληλου SNR εξαρτάται από τη φύση του συστήματος. Αν ο μέσος και η διασπορά μπορούν να εναλλαχθούν ανεξάρτητα, ο Taguchi προτείνει ότι ένας ή περισσότεροι παράγοντες συντονισμού πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να εξουδετερώσουν τη μεροληψία του συστήματος, δηλαδή να βρεθούν τα κατάλληλα επίπεδά τους για τα οποία $E(y) = t$. Αυτοί οι παράγοντες συντονισμού επιτρέπουν στον αναλυτή να αλλάξει το μέσο αφήνοντας ανεπηρέαστη τη διασπορά. Σαν αποτέλεσμα η ανάλυση έχει δυο βήματα:

1. Επιλέγουμε τους παράγοντες συντονισμού οι οποίοι καθιστούν $y = t$ και
2. Επιλέγουμε τα επίπεδα των άλλων ελεγχόμενων παραγόντων, οι οποίοι μεγιστοποιούν ένα SNR .

Οι τύποι των μέτρων απόδοσης θορύβου πρέπει να μετατραπούν σε άλλους τύπους οι οποίοι περιέχουν τις εκτιμήτριες του μέσου και της διασποράς κάθε πιθανού συνδυασμού παραγόντων σε περιπτώσεις όπου η απόδοση πρέπει να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί. Πράττοντας αναλόγως, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ώστε να αναλύσουμε τον παραμετρικό σχεδιασμό Taguchi με αποκομμένες παρατηρήσεις. Όταν η απόδοση πρέπει να ελαχιστοποιηθεί, ο τύπος του μέτρου απόδοσης θορύβου εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
SN_{STB} &= -10 \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \\
&= -10 \log \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y}) + \bar{y}]^2 \right\} \\
&= -10 \log(s^2 + \bar{y}^2) \tag{4.5.1}
\end{aligned}$$

Όπου $s^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 / n$.

Για περιπτώσεις στις οποίες η τυπική απόκλιση s^2 των αποκρίσεων σχετίζεται με το μέσο και κυρίως στην περίπτωση που η σχέση είναι γραμμική, ο Taguchi προτείνει τη χρήση ενός άλλου μέτρου. Σε αυτήν την περίπτωση και πάλι οι παράγοντες συντονισμού εκλέγονται έτσι ώστε να εξουδετερώνουν τη μεροληψία και αφήνουν το συντελεστή διασποράς σ/μ σχεδόν ανεπηρέαστο. Εάν η απόδοση πρέπει να μεγιστοποιηθεί, τότε η απόκριση αντιστρέφεται ώστε να θέλουμε ελαχιστοποίηση της απόδοσης και τότε χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.5.1) για να υπολογίσουμε το μέτρο απόδοσης θορύβου. Σε αυτήν την περίπτωση το μέτρο γράφεται ως εξής :

$$SN_{NTB} = 10 \log \left(\frac{\bar{y}^2}{s^2} \right) \tag{4.5.2}$$

Συμπερασματικά, η διαδικασία ανάλυσης του παραμετρικού σχεδιασμού Taguchi παρουσιάζεται ως ακολούθως:

1. Εάν η απόκριση πρέπει να μεγιστοποιηθεί, τότε αντιστρέφεται ώστε να χρειάζεται να ελαχιστοποιηθεί. Εάν πρέπει εξ' αρχής να ελαχιστοποιηθεί, τότε συνεχίζουμε αμέσως στο επόμενο βήμα.
2. Ο μέσος και η τυπική απόκλιση κάθε παράγοντα εκτιμώνται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων όπως περιγράψαμε παραπάνω.

3. Ο μέσος και η τυπική απόκλιση από το βήμα 2 χρησιμοποιούνται ώστε να υπολογιστούν τα μέτρα απόδοσης θορύβου για όλους τους παράγοντες. Όταν η απόδοση πρέπει να ελαχιστοποιηθεί χρησιμοποιείται η σχέση (4.5.1), ενώ όταν το μέσο επίπεδο είναι το βέλτιστο τότε χρησιμοποιείται η σχέση (4.5.2).
4. Το επίπεδο ενός παράγοντα ελέγχου επιλέγεται βάσει της τιμής του μέτρου απόδοσης θορύβου. Για μια απόκριση ελαχιστοποίησης, το επίπεδο το οποίο αντιστοιχεί στο υψηλότερο μέτρο απόδοσης θορύβου επιλέγεται ως το βέλτιστο επίπεδο του παράγοντα. Για μια απόκριση για την οποία το μεσαίο επίπεδο είναι το βέλτιστο, χρησιμοποιείται μια άλλη διαδικασία δυο φάσεων.

Κεφάλαιο 5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

5.1 Αριθμητικό Παράδειγμα για τη μη-Παραμετρική Μέθοδο

Παραθέτουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα το οποίο πρότειναν οι Lee-Ing Tong και Chao-Ton Su το 1997. Οι δοθείσες τιμές ήταν 16 παρατηρήσεις από ένα πείραμα με πέντε παράγοντες δυο επιπέδων όπως φαίνεται στον πίνακα 5.1.1. Έστω ότι επιθυμούμε ελαχιστοποίηση της απόκρισης και πέντε από τις παρατηρήσεις δεν μπορούν να παρατηρηθούν. Οι παρατηρήσεις είναι δεξιά αποκομμένες. Το σημείο αποκοπής είναι το 67.

Πίνακας 5.1.1: Τιμές του παραδείγματος

Εκτέλεση	Παράγοντες					Απόκριση		R_U	
	A	B	C	D	E				
1	1	1	1	1	1	66	66	10.5	10.5
2	1	1	2	2	2	68*	63	*	7.5
3	1	2	1	2	2	80*	88*	*	*
4	1	2	2	1	1	63	65	7.5	9
5	2	1	1	1	2	73*	71*	*	*
6	2	1	2	2	1	37	42	1	4
7	2	2	1	2	1	38	39	2	3
8	2	2	2	1	2	57	48	6	5

- **Βήμα 1:** Από τον πίνακα 5.1.1 έχουμε

$$Y_U = [66,66,63,63,65,37,42,38,39,57,48]^T$$

και $R_U = [10.5,10.5,7.5,7.5,9,1,4,2,3,6,5]^T$

- **Βήμα 2:** Αφού

$$Z_U = \begin{matrix} & A & B & C & D & E & AB & AC & AD & AE & BC & BD & BE & CD & CE & DE \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \end{matrix}_{5 \times 16}$$

έχουμε

$$\hat{\mu}_{Y_U/Z_U} = 88 - 17.5A - 1.5B - 0.5C - 8.5D + 6E \quad \mathbf{5.1.1}$$

- **Βήμα 3:** Οι εκτιμήσεις των αποκομμένων παρατηρήσεων βρίσκονται θέτοντας τα επίπεδα των παραγόντων στη σχέση (5.1.1). Έτσι, έχουμε τις αποκρίσεις 63, 62 και 54.5 και τις δοκιμές 2, 3 και 5 αντιστοίχως.
- **Βήμα 4:** Αφού τα δεδομένα μας είναι δεξιά αποκομμένα και έχουμε πέντε αποκομμένες παρατηρήσεις, οι βαθμοί των εκτιμήσεων των αποκομμένων παρατηρήσεων θα πρέπει να είναι

μεταξύ 12 και 16. Έτσι λοιπόν, έχουμε $\hat{R}_C = [16,14,15,12,13]^T$.

- **Βήμα 5:** Τα $R = [R_U | \hat{R}_C]^T$, R_j και $S_j (j = 1, 2, \dots, 8)$ είναι υπολογισμένα και συγκεντρωμένα στον πίνακα 5.1.2. Τα μοντέλα παλινδρόμησης για τα R_j και Z , και S_j και Z εκτιμώνται ως εξής:

$$\hat{\mu}_{R|Z} = 7.25 + 1.75A + 4.25B - 1.75C - 1.25D + 5E - 4AB - 0.75AC \quad 5.1.2$$

$$\mu_{S|Z} = -3.0185 + 0.7315A - 1.574B + 3.074C + 1.0158D + 0.5185E + 0.537AB - 1.287AC \quad 5.1.3$$

Πίνακας 5.1.2: Οι εκτιμήσεις των αποκρίσεων και οι τυπικές αποκλίσεις των παρατηρήσεων

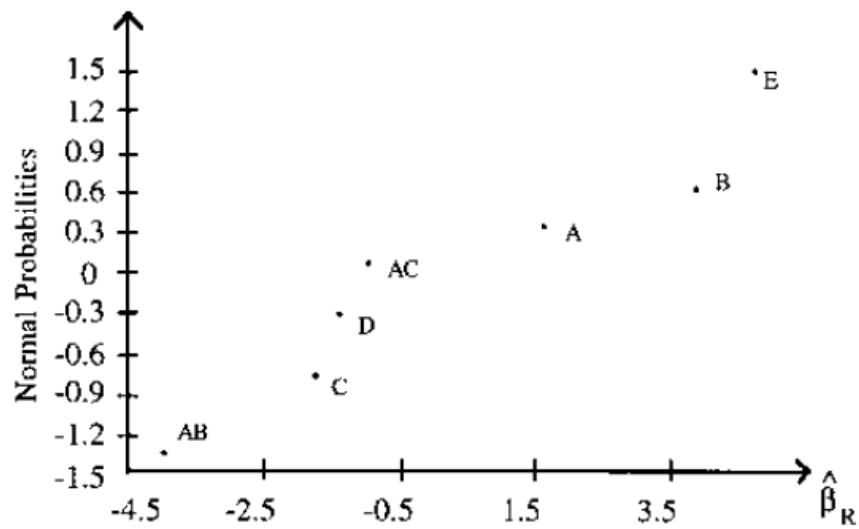
Εκτέλεση	1	2	3	4	5	6	7	8
R_j	10.5	11.75	14.5	8.25	12.5	3	2.5	5.5
S_j	0	3.324	0.5	0.75	0.5	1.5	0.5	0.5

- **Βήμα 6:** Οι κανονικές πιθανότητες των συντελεστών παλινδρόμησης για τις σχέσεις (5.1.2) και (5.1.3) υπολογίζονται στον πίνακα 5.1.3. Τα γραφήματά τους φαίνονται στο διάγραμμα 5.1.1 και 5.1.2, αντίστοιχα. Από τα διαγράμματα αυτά συμπεραίνουμε ότι οι παράγοντες AB, A, B και E έχουν σημαντικές επιδράσεις στην απόκριση, ενώ οι παράγοντες AC, B και C έχουν σημαντικές επιδράσεις στην τυπική απόκλιση.

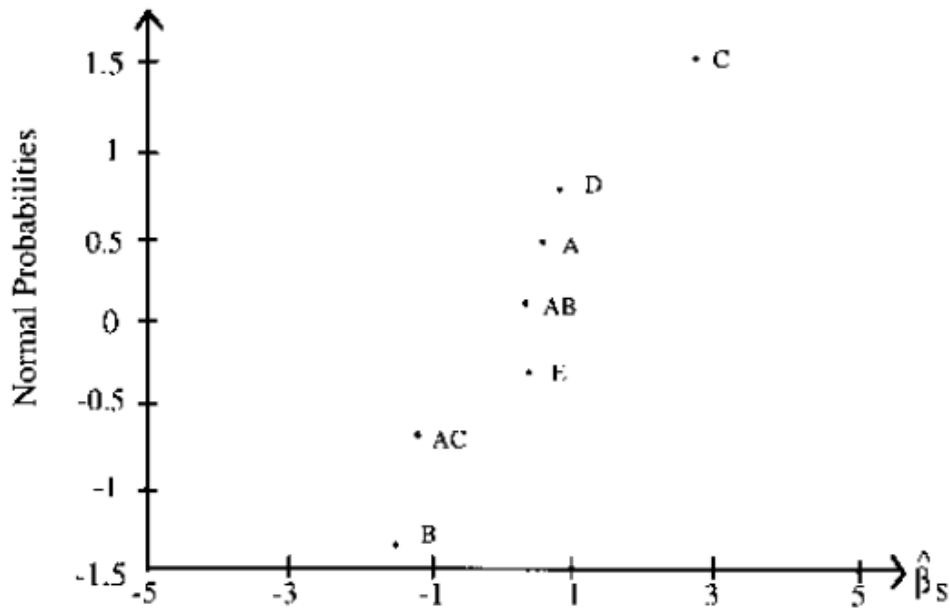
Πίνακας 5.1.3: Οι κανονικές πιθανότητες των $\hat{\beta}_R$ και $\hat{\beta}_S$

Επίδραση	$\hat{\beta}_R$	Κανονικές πιθανότητες	$\hat{\beta}_S$	Κανονικές πιθανότητες
A	1.75	0.35147	0.7315	0.35147
B	4.25	0.75613	-1.574	-1.36459
C	-1.75	-0.75613	3.074	1.336459
D	-1.25	-0.35147	1.0185	0.75613
E	5	1.36459	0.5185	-0.35147
AB	-4	-1.36479	0.537	0
AC	-0.75	0	-1.287	-0.75613

Διάγραμμα 5.1.1: Γράφημα των $\hat{\beta}_R$



Διάγραμμα 5.1.2: Γράφημα των $\hat{\beta}_S$



- Βήμα 7:** Από τη σχέση (5.1.2) το επίπεδο του παράγοντα E έχει τεθεί στη χαμηλή στάθμη αφού θέλουμε να ελαχιστοποιηθεί η απόκριση. Μια σύγκριση στις διαφορές των $\hat{\mu}_{R/Z}$ για τα διάφορα επίπεδα φαίνεται στον πίνακα 5.1.4. Βασιζόμενοι σε αυτόν τον πίνακα τα επίπεδα των παραγόντων A και B πρέπει να τεθούν στα A_2 και B_2 αντίστοιχα, τέτοια ώστε το $\hat{\mu}_{R/Z}$ να μπορεί να ελαχιστοποιηθεί. Επομένως τα δοκιμαστικά βέλτιστα επίπεδα των παραγόντων είναι τα A_2B_2 και E_1 . Ομοίως μια σύγκριση στις διαφορές των $\hat{\mu}_{S/Z}$ για τα διάφορα επίπεδα φαίνεται στον πίνακα 5.1.5. Από τη σχέση (5.1.3) και τον πίνακα 5.1.5 τα δοκιμαστικά βέλτιστα επίπεδα των παραγόντων είναι τα A_2B_2 και C_1 . Εφόσον οι δυο παραπάνω περιπτώσεις συμφωνούν μεταξύ τους έχουμε τα βέλτιστα επίπεδα παραγόντων που είναι τα εξής: $A_2B_2C_1E_1$.

Εάν οι 16 αρχικές παρατηρήσεις του πίνακα 5.1.1 αναλυθούν με τη μέθοδο ANOVA τότε παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα ως βέλτιστα: $A_2B_2C_2E_1$. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων των δυο τεχνικών είναι παρόμοια. Συνεπώς, αποδεικνύεται η εγκυρότητα της παραπάνω μεθόδου.

Πίνακας 5.1.4: Σύγκριση των διαφορών των $\hat{\mu}_{R/z}$

Παράγοντες (συντελεστές παλινδρόμησης)	A (1.75)	B (4.25)	AB (-4)	Διαφορές των $\hat{\mu}_{R/z}$
Επίπεδο 1	1	1	1	2
Επίπεδο 2	1	2	2	2.25
Επίπεδο 3	2	1	2	-0.35
Επίπεδο 4	2	2	4	-4 (min)

Πίνακας 5.1.5: Σύγκριση των διαφορών των $\hat{\mu}_{S/z}$

Παράγοντες (συντελεστές παλινδρόμησης)	A (0.7315)	B (3.074)	AB (-1.287)	Διαφορές των $\hat{\mu}_{S/z}$
Επίπεδο 1	1	1	1	2.5185
Επίπεδο 2	1	2	2	4.3055
Επίπεδο 3	2	1	2	1.963 (min)
Επίπεδο 4	2	2	4	2.463

5.2 Αριθμητικό Παράδειγμα για Παραγοντικό Σχεδιασμό

Περιγραφή προβλήματος

Ένα πρόβλημα με πραγματικές διαστάσεις υιοθετείται από τον Montgomery, (2001). Ένα πείραμα με 16 επαναλήψεις εκτελέστηκε σε ένα εργοστάσιο κατασκευής ημιαγωγών ώστε να μελετηθούν οι επιδράσεις έξι παραγόντων στην καμπυλότητα ή την κυρτότητα του υποστρώματος των παραγόμενων συσκευών. Ο πίνακας 5.2.1 παρουσιάζει τις έξι μεταβλητές και τα επίπεδά τους. Κάθε εκτέλεση επαναλαμβανόταν τέσσερις φορές και κάθε φορά γινόταν μέτρηση της καμπυλότητας του υποστρώματος. Ο πίνακας 5.2.2 δείχνει όλες τις σχετικές τιμές. Υποθέτουμε ότι οι τέσσερις μεγαλύτερες τιμές δεν μπορούν να παρατηρηθούν, έτσι έχουμε δεξιά αποκομμένες παρατηρήσεις τύπου II με $n=4$, $r=0$ και $s=1$. Επίσης, η μεταβλητή απόκρισης φαίνεται να ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Πίνακας 5.2.1: Οι παράγοντες και τα επίπεδά τους στο πείραμα

Ονομασία	Παράγοντας	Χαμηλή στάθμη	Υψηλή στάθμη
A	Θερμοκρασία σφυρηλάτησης (°C)	55	75
B	Χρόνος σφυρηλάτησης (s)	10	25
C	Πίεση σφυρηλάτησης (Ton)	5	10
D	Θερμοκρασία ψησίματος (°C)	1580	1620
E	Χρόνος ψησίματος (h)	17.5	29
F	Σημείο πήξης (°C)	20	26

Πίνακας 5.2.2: Σχεδιασμός και τιμές του πειράματος

Εκτέλεση	A	B	C	D	E	F	Καμπυλότητα σε κάθε επανάληψη			
							X_1	X_2	X_3	X_4
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	167	128	149	185
2	1	-1	-1	-1	1	-1	62	66	44	20
3	-1	1	-1	-1	1	1	41	42	43	50
4	1	1	-1	-1	-1	1	73	81	39	30
5	-1	-1	1	-1	1	1	47	47	40	89
6	1	-1	1	-1	-1	1	219	258	147	296
7	-1	1	1	-1	-1	-1	121	90	92	86
8	1	1	1	-1	1	-1	191	186	162	106
9	-1	-1	-1	1	-1	1	32	23	77	69
10	1	-1	-1	1	1	1	78	158	60	45
11	-1	1	-1	1	1	-1	43	27	28	28
12	1	1	-1	1	-1	-1	186	137	159	158
13	-1	-1	1	1	1	-1	110	86	101	158
14	1	-1	1	1	-1	-1	65	109	126	71
15	-1	1	1	1	-1	1	155	158	145	145
16	1	1	1	1	1	1	93	124	110	133

*το -1 και 1 αντιπροσωπεύουν την υψηλή και χαμηλή στάθμη των παραγόντων.

Ανάλυση των παρατηρήσεων

Στην ανάλυση των δεξιά αποκομμένων παρατηρήσεων τύπου II σε αυτό το παράδειγμα, αρχικά, χρησιμοποιείται η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων για να υπολογιστεί ο μέσος κάθε συνδυασμού παραγόντων. Ο πίνακας 5.2.3 παρουσιάζει τα αποτελέσματα. Η τελευταία στήλη του πίνακα 5.2.3 αποτελείται από τους βαθμούς των εκτιμήσεων των ελαχίστων τετραγώνων (LSE). Ο σχεδιασμός της εκτέλεσης ενός μόνο κλάσματος ολόκληρου του παραγοντικού σχεδιασμού είναι ένας κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός, έτσι κάποιες επιδράσεις ταυτίζονται με κάποιες άλλες. Οι σημαντικοί παράγοντες στο πείραμά μας είναι οι A, B, C, D, E, F, AB, AC, AD, AE, AF, BD, BF, ABD και ACD. Αντιστοίχως, η ανάλυση του Torres εφαρμόζεται ως εξής:

- **Βήμα 1:** Έστω ότι \mathbf{L} είναι ένα διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι οι εκτιμήσεις των ελαχίστων τετραγώνων των 16 παραγόντων. Από τον πίνακα 5.3.3, η μετατροπή του βαθμού του διανύσματος \mathbf{L} γίνεται ως εξής,

$$\mathbf{R} = [13, 4, 2, 6, 3, 16, 8, 15, 5, 7, 1, 10, 9, 12, 11]'$$

- **Βήμα 2:** Έστω ότι \mathbf{X} είναι ένας 16×16 σχεδιασμός στον οποίο όλες οι τιμές είναι +1 και -1. Η πρώτη στήλη είναι ένα διάνυσμα με άσους και οι υπόλοιπες στήλες αναφέρονται στους δεκαπέντε κύριους παράγοντες και στις αλληλεπιδράσεις τους.
- **Βήμα 3:** Έστω \mathbf{R} ότι είναι το διάνυσμα απόκρισης, του οποίου ο συντελεστής παλινδρόμησης (εκτίμηση σταθερού όρου και επιδράσεων) μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\mathbf{a}_R = [\mathbf{X}'\mathbf{X}]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}$$

Η πρώτη στήλη του πίνακα 5.2.4 δείχνει το \mathbf{a}_R .

- **Βήμα 4:** Η εκτίμηση του σταθερού όρου και των επιδράσεων χρησιμοποιούνται στην κατασκευή του διαγράμματος πιθανοτήτων, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 5.2.1.

Πίνακας 5.2.3: Αποκομμένες παρατηρήσεις, LSE και βαθμοί

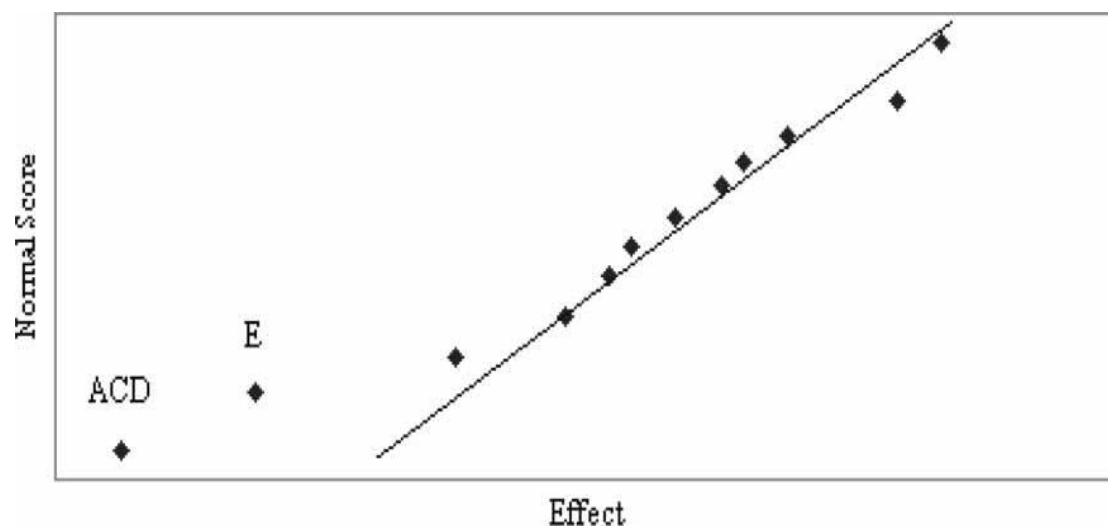
Αριθμός	$X_{(1)}$	$X_{(2)}$	$X_{(3)}$	LSE	Βαθμός
1	128	149	167	157.993	13
2	20	44	62	52.796	4
3	41	42	43	42.512	2
4	30	39	73	59.771	6
5	40	47	47	47.000	3
6	147	219	258	237.062	16
7	86	90	92	90.914	8
8	106	162	186	172.711	15
9	23	32	69	54.778	5
10	45	60	78	69.497	7
11	27	28	28	28.000	1
12	137	158	159	158.364	14
13	86	101	110	105.238	10
14	65	71	109	95.171	9
15	145	145	155	151.836	12
16	93	110	124	116.948	11

Πίνακας 5.2.4: Σταθεροί όροι, επιδράσεις και τιμές που χρησιμοποιούνται για το διάγραμμα πιθανοτήτων

Παράγοντας	α_R	Κανονική τιμή	Βαθμός	Σωρευτική πιθανότητα
A	1.750	1.2450	14	0.8934
B	0.125	-0.2491	6.5	0.4016
C	2.000	1.7394	15	0.9890
D	0.125	-0.2491	6.5	0.4016
E	-1.875	-1.2450	2	0.1066
F	-0.750	-0.9458	3	0.1721
AB	1.125	0.9458	13	0.8279
AC	0.500	0.2491	9.5	0.5984
AD	-0.125	-0.6113	4.5	0.2705
AE	0.875	0.7137	12	0.7623
AF	0.500	0.2491	9.5	0.5984
BD	0.750	0.5150	11	0.6967
BF	-0.125	-0.6113	4.5	0.2705
ABD	0.250	0.0000	8	0.5000
ACD	-2.625	-1.7394	1	0.0410

Το διάγραμμα 5.2.1 δείχνει ότι οι παράγοντες E και ACD είναι σημαντικοί. Αφού η απόκριση (βαθμός) θέλουμε να ελαχιστοποιηθεί, ο παράγοντας E τοποθετείται στην υψηλή στάθμη μιας και ο συντελεστής παλινδρόμησης είναι αρνητικός. Επιπροσθέτως, αφού η αλληλεπίδραση ACD είναι σημαντική, όλοι οι συντελεστές παλινδρόμησης των A, C, D, AC, AD και ACD πρέπει να ληφθούν υπόψιν.

Διάγραμμα 5.2. : Διάγραμμα πιθανοτήτων των κύριων επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων



Ο πίνακας 5.2.5 παρουσιάζει τους βαθμούς των αποκρίσεων που υπολογίστηκαν από τους διάφορους συνδυασμούς των A, C, D, ACD, AC και AD. Από τον πίνακα 5.2.5, η κατάσταση 7 (στην οποία ο A και ο C είναι στη χαμηλή τους στάθμη και ο D στην υψηλή) θα παράγουν το μικρότερο βαθμό, έτσι η βέλτιστη τοποθέτηση του επιπέδου κάθε παράγοντα είναι οι A και C στη χαμηλή στάθμη και D και E στην υψηλή. Τα επίπεδα των υπόλοιπων σημαντικών παραγόντων μπορούν επίσης να καθοριστούν από τους συντελεστές παλινδρόμησης. Σε αυτή την περίπτωση, ο παράγοντας B τοποθετείται στη χαμηλή στάθμη και ο F στην υψηλή. Ως εκ τούτου, η βέλτιστη τοποθέτηση των επιπέδων είναι $A_-B_-C_-D_+E_+F_+$ (τα πλην και συν δηλώνουν τη χαμηλή και υψηλή στάθμη των παραγόντων, αντιστοίχως).

Πίνακας 5.2.5: Εκτιμώμενη τάξη από τους διάφορους συνδυασμούς των επιδράσεων A, C, D, AC, AD και ACD

Επίδραση	A	C	D	ACD	AC	AD	Απόκριση (βαθμός)
Συντελεστής παλινδρόμησης	1.75	2.00	0.125	-2.625	0.5	-0.125	–
Κατάσταση 1	1	1	1	1	1	1	1.625
Κατάσταση 2	1	1	-1	-1	1	-1	6.875
Κατάσταση 3	1	-1	1	-1	-1	1	1.875
Κατάσταση 4	1	-1	-1	1	-1	-1	-3.375
Κατάσταση 5	-1	1	1	-1	-1	-1	2.625
Κατάσταση 6	-1	1	-1	1	-1	1	-3.125
Κατάσταση 7	-1	-1	1	1	1	-1	-5.625
Κατάσταση 8	-1	-1	-1	-1	1	1	-0.875

Σύγκριση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης των αποκομμένων παρατηρήσεων με αυτή των ολοκληρωμένων δεδομένων

Όταν έχουμε όλες τις τιμές, οι παράγοντες A, B, C, D και E είναι σημαντικοί και η βέλτιστη τοποθέτηση των επιπέδων των παραγόντων είναι A, B και C στη χαμηλή τους στάθμη ενώ οι D και E τοποθετούνται στην υψηλή στάθμη. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα όταν οι παρατηρήσεις είναι ολοκληρωμένες με τα παραπάνω όπου οι παρατηρήσεις είναι αποκομμένες καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο παράγοντας B δε συμπεριλαμβάνεται στους σημαντικούς παράγοντες από την προτεινόμενη μέθοδο. Εντούτοις, σύμφωνα με τον πίνακα 4, ο παράγοντας B θα τοποθετηθεί στη χαμηλή στάθμη, συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε και με τις δυο μεθόδους.

5.3 Αριθμητικό Παράδειγμα για Παραμετρικό Σχεδιασμό Taguchi

Περιγραφή προβλήματος

Το ακόλουθο παράδειγμα υιοθετείται από τους Byrne και Taguchi (1987). Διεξήχθει ένα πείραμα ώστε να βρεθεί μια μέθοδος η οποία θα συναρμολογούσε με μικρό κόστος έναν ελαστομερή σύνδεσμο σε ένα νάυλον σωλήνα ο οποίος θα παρείχε την απαιτούμενη απόδοση σε εξαρτήματα του κινητήρα ενός αυτοκινήτου. Ο στόχος του πειράματος είναι να μεγιστοποιηθεί η δύναμη της έλξης.

Προσδιορίστηκαν 4 παράγοντες ελέγχου και 3 παράγοντες θορύβου οι οποίοι θα μπορούσαν να επηρεάσουν τη δύναμη της έλξης. Ο πίνακας 5.3.1 παραθέτει τους 4 παράγοντες ελέγχου και τα επίπεδά τους. Οι 3 παράγοντες θορύβου είναι ο χρόνος, η θερμοκρασία και η σχετική υγρασία. Οι 3 παράγοντες θορύβου δε συμπεριλαμβάνονται στην εκτέλεση του πειράματος επί του παρόντος. Κάθε εκτέλεση επαναλαμβάνεται οκτώ φορές και οι δυνάμεις έλξης καταγράφονται σε λίβρες. Ο πίνακας 5.3.2 παρουσιάζει ολοκληρωμένα τα δεδομένα (Byrne και Taguchi, 1987). Υποθέτουμε μια περίπτωση στην οποία οι οκτώ μεγαλύτερες τιμές δεν μπορούν να παρατηρηθούν και έχουμε αποκομμένες τιμές τύπου II με $n=8$, $r=2$ και $s=1$.

Πίνακας 5.3.1: Παράγοντες και επίπεδα για κάθε παράγοντα του πειράματος

Ονομασία	Παράγοντας	Επίπεδο		
A	Παρεμβολή	Low	Medium	High
B	Πάχος τοιχώματος υποδοχέα	Thin	Medium	Thick
C	Βάθος εισχώρησης	Shallow	Medium	Deep
D	Ποσοστιαία συγκόλληση του υποδοχέα	Low	Medium	High

Πίνακας 5.3.2: Σχεδιασμός και τιμές του πειράματος

εκτέλεση	A	B	C	D	δύναμη έλξης σε κάθε επανάληψη								SN ratio
					X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
1	1	1	1	1	15.6	9.5	16.9	19.9	19.6	19.6	20.0	19.1	24.045
2	1	2	2	2	15.0	16.2	19.4	19.6	19.7	19.8	24.2	21.9	25.522
3	1	3	3	3	16.3	16.7	19.1	15.6	22.6	18.2	23.3	20.4	25.335
4	2	1	2	3	18.3	17.4	18.9	18.6	21.0	18.9	23.2	24.7	25.904
5	2	2	3	1	19.7	18.6	19.4	25.1	25.6	21.4	27.5	25.3	26.908
6	2	3	1	2	16.2	16.3	20.0	19.8	14.7	19.6	22.5	24.7	25.326
7	3	1	3	2	16.4	19.1	18.4	23.6	16.8	18.6	24.3	21.6	25.711
8	3	2	1	3	14.2	15.6	15.1	16.8	17.8	19.6	23.2	24.4	24.832
9	3	3	2	1	16.1	19.9	19.3	17.3	23.1	22.7	22.6	28.6	26.152

*το 1 αντιπροσωπεύει τη χαμηλή στάθμη, το 2 τη μεσαία και το 3 τη χαμηλή στάθμη κάθε παράγοντα

Ανάλυση Δεδομένων

Σε αυτό το πρόβλημα, θέλουμε τη μεγιστοποίηση των μέτρων απόδοσης SNR_L , έτσι, σύμφωνα με τη διαδικασία ανάλυσης των αποκομμένων παρατηρήσεων από τους παραμετρικούς σχεδιασμούς Taguchi η οποία περιγράφηκε παραπάνω, η απόκριση πρέπει να αντιστραφεί σε ελαχιστοποίηση των μέτρων απόδοσης SNR_S και οι δεξιά αποκομμένες παρατηρήσεις τύπου II του προβλήματος να αλλάξουν σε αριστερά αποκομμένες παρατηρήσεις τύπου II με $n=8, r=1$ και $s=0$. Ο πίνακας 5.3.3 παρουσιάζει τις τροποποιημένες αριστερά αποκομμένες παρατηρήσεις τύπου II. Αναλύοντας τις αριστερά αποκομμένες παρατηρήσεις τύπου II, αρχικά, χρησιμοποιείται η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων προκειμένου να εκτιμηθούν οι μέσοι και οι διαφορές κάθε αλληλεπίδρασης παραγόντων. Ο πίνακας 5.3.4 παρουσιάζει τα αποτελέσματα.

Αυτή η ανάλυση μπορεί να εκτελεστεί με διάφορους τρόπους. Ένας κοινός τρόπος είναι να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος ANOVA ώστε να αναλυθούν οι επιδράσεις των παραγόντων. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και μια άλλη μέθοδος στην οποία οι επιδράσεις των παραγόντων να παρουσιάζονται σε διάγραμμα και οι παράγοντες που είναι σημαντικοί να ξεχωρίζουν από τους υπόλοιπους.

Το διάγραμμα 5.3.1 παριστάνει τα μέτρα απόδοσης του θορύβου για κάθε επίπεδο των τεσσάρων παραγόντων ελέγχου. Το διάγραμμα 5.3.1 υποδεικνύει ότι οι παράγοντες A και C είναι πιο σημαντικοί από τους παράγοντες B και D. Τα μέτρα απόδοσης μεγιστοποιούνται, έτσι ο παράγοντας A τίθεται στη μεσαία στάθμη και παράγοντας C στην υψηλή στάθμη. Η βέλτιστη τοποθέτηση των επιπέδων των παραγόντων μπορεί να προσδιοριστεί ως $A_2B_2C_3D_1$. Η μέθοδος ANOVA χρησιμοποιείται

επίσης για να ελέγξει τη σημαντικότητα των τεσσάρων παραγόντων. Ο πίνακας 5.3.5 παρουσιάζει τα αποτελέσματα. Ο πίνακας 5.3.5 δείχνει ξεκάθαρα ότι οι παράγοντες A και C είναι σημαντικοί, επομένως, το συμπέρασμα αυτής της ανάλυσης είναι ότι οι παράγοντες A και C είναι σημαντικοί και η βέλτιστη τοποθέτηση των επιπέδων των παραγόντων είναι $A_2B_2C_3D_1$ από τους οποίους οι παράγοντες B και D δεν είναι σημαντικοί.

Πίνακας 5.3.3: Αριστερά αποκομμένες παρατηρήσεις τύπου II των αλληλεπιδράσεων

εκτέλεση	δύναμη έλξης σε κάθε επανάληψη							
	$X_{(1)}$	$X_{(2)}$	$X_{(3)}$	$X_{(4)}$	$X_{(5)}$	$X_{(6)}$	$X_{(7)}$	$X_{(8)}$
1	–	0.05025	0.05102	0.05102	0.05236	0.05917	0.06410	0.10526
2	–	0.04566	0.05051	0.05076	0.05102	0.05155	0.06173	0.06667
3	–	0.04425	0.04902	0.05236	0.05495	0.05988	0.06135	0.06410
4	–	0.04310	0.04762	0.05291	0.05291	0.05376	0.05464	0.05747
5	–	0.03906	0.03953	0.03984	0.04673	0.05076	0.05155	0.05376
6	–	0.04444	0.05000	0.05051	0.05102	0.06135	0.06173	0.06803
7	–	0.04237	0.04630	0.05236	0.05376	0.05435	0.05952	0.06098
8	–	0.04310	0.05102	0.05618	0.05952	0.06410	0.06623	0.07042
9	–	0.04329	0.04405	0.04425	0.05025	0.05181	0.05780	0.06211

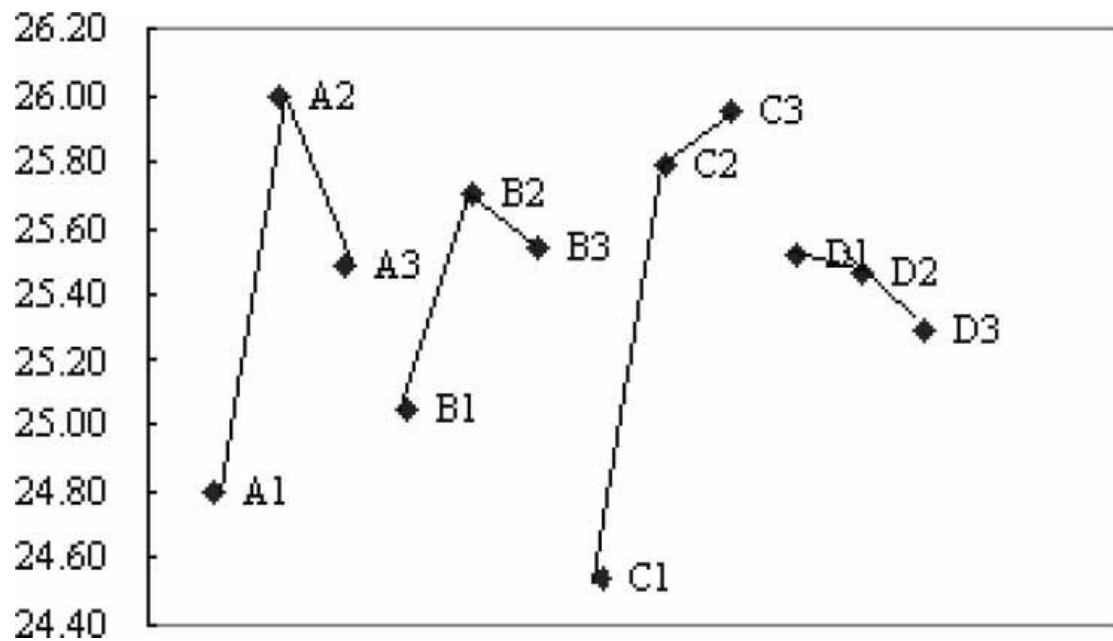
Πίνακας 5.3.4: Αποκομμένες παρατηρήσεις, LSE και μέτρα απόδοσης θορύβου

αριθμός	$X_{(2)}$	$X_{(3)}$	$X_{(4)}$	$X_{(5)}$	$X_{(6)}$	$X_{(7)}$	$X_{(8)}$	LSE του μέσου	LSE της διακύμανσης	Μέτρα απόδοσης θορύβου
1	0.05025	0.05102	0.05102	0.05236	0.05917	0.06410	0.10526	0.05577	0.00123	23.627
2	0.04566	0.05051	0.05076	0.05102	0.05155	0.06173	0.06667	0.05196	0.00013	25.475
3	0.04425	0.04902	0.05236	0.05495	0.05988	0.06135	0.06410	0.05330	0.00011	25.300
4	0.04310	0.04762	0.05291	0.05291	0.05376	0.05464	0.05747	0.05045	0.00006	25.845
5	0.03906	0.03953	0.03984	0.04673	0.05076	0.05155	0.05376	0.04420	0.00009	26.888
6	0.04444	0.05000	0.05051	0.05102	0.06135	0.06173	0.06803	0.05309	0.00016	25.260
7	0.04237	0.04630	0.05236	0.05376	0.05435	0.05952	0.06098	0.05107	0.00010	25.675
8	0.04310	0.05102	0.05618	0.05952	0.06410	0.06623	0.07042	0.05622	0.00019	24.742
9	0.04329	0.04405	0.04425	0.05025	0.05181	0.05780	0.06211	0.04860	0.00012	26.052

Πίνακας 5.3.5: Πίνακας ANOVA για τα μέτρα απόδοσης θορύβου

Παράγοντες	Βαθμοί ελευθερίας	SS	MS	F-value	Pure sum of squares	Contribution %
A	2	2.1656	1.0828	5.5817	1.7776	27.28
B	2	0.6914*	-	-	-	-
C	2	3.5753	1.7877	9.2153	3.1873	48.91
D	2	0.0845*	-	-	-	-
Error	0	-	-	-	-	-
Pooling error	(4)	(0.7760)	(0.1940)		1.5519	23.81
Total	8	6.5169			6.5169	100.00

Γράφημα 5.3.1: Μέτρα απόδοσης θορύβου για κάθε επίπεδο των τεσσάρων παραγόντων ελέγχου



Σύγκριση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης των αποκομμένων παρατηρήσεων με αυτή των ολοκληρωμένων δεδομένων

Όταν αναλυθούν όλες οι τιμές, οι παράγοντες A και C φαίνονται να είναι σημαντικοί και η βέλτιστη τοποθέτηση των επιπέδων των παραγόντων καθορίζεται ως $A_2B_2C_3D_1$. Αυτό το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό με τις αποκομμένες παρατηρήσεις στην παραπάνω ανάλυση.

Κεφάλαιο 6

ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΚΟΜΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ ΣΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟΥΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥΣ

6.1 Νευρωνικά Δίκτυα

Νευρωνικό δίκτυο ονομάζεται ένα κύκλωμα διασυνδεδεμένων νευρώνων. Στην περίπτωση *βιολογικών νευρώνων*, πρόκειται για ένα τμήμα νευρικού ιστού. Στην περίπτωση *τεχνητών νευρώνων*, πρόκειται για ένα αφηρημένο αλγοριθμικό κατασκεύασμα το οποίο εμπίπτει στον τομέα της υπολογιστικής νοημοσύνης, και στόχος του νευρωνικού δικτύου είναι είτε η επίλυση κάποιου υπολογιστικού προβλήματος ή της υπολογιστικής νευροεπιστήμης, είτε η υπολογιστική προσομοίωση της λειτουργίας των βιολογικών νευρωνικών δικτύων με βάση κάποιο μαθηματικό μοντέλο τους.

6.1.1 Ορισμός και Λειτουργία

Το νευρωνικό δίκτυο είναι ένα δίκτυο από απλούς υπολογιστικούς κόμβους (νευρώνες, νευρώνια), διασυνδεδεμένους μεταξύ τους. Είναι εμπνευσμένο από το Κεντρικό Νευρικό Σύστημα (ΚΝΣ), το οποίο προσπαθεί να προσομοιώσει.

Οι νευρώνες είναι τα δομικά στοιχεία του δικτύου. Κάθε τέτοιος κόμβος δέχεται ένα σύνολο αριθμητικών εισόδων από διαφορετικές πηγές (είτε από άλλους νευρώνες, είτε από το περιβάλλον), επιτελεί έναν υπολογισμό με βάση αυτές τις εισόδους και παράγει μία έξοδο. Η εν λόγω έξοδος είτε κατευθύνεται στο περιβάλλον, είτε τροφοδοτείται ως είσοδος σε άλλους νευρώνες του δικτύου. Υπάρχουν τρεις τύποι νευρώνων: οι νευρώνες εισόδου (*input layer*), οι νευρώνες εξόδου (*output layer*) και οι υπολογιστικοί νευρώνες ή κρυμμένοι νευρώνες (*hidden layer*). Οι νευρώνες εισόδου δεν επιτελούν κανέναν υπολογισμό, μεσολαβούν απλώς ανάμεσα στις περιβαλλοντικές εισόδους του δικτύου και στους υπολογιστικούς νευρώνες. Οι νευρώνες εξόδου διοχετεύουν στο περιβάλλον τις τελικές αριθμητικές εξόδους του δικτύου. Οι υπολογιστικοί νευρώνες πολλαπλασιάζουν κάθε είσοδό τους με το αντίστοιχο συναπτικό βάρος και υπολογίζουν το ολικό άθροισμα των γινομένων. Το άθροισμα αυτό τροφοδοτείται ως όρισμα στη συνάρτηση ενεργοποίησης, την οποία υλοποιεί εσωτερικά κάθε κόμβος. Η τιμή που λαμβάνει η συνάρτηση για το εν λόγω όρισμα είναι και η έξοδος του νευρώνα για τις τρέχουσες εισόδους και βάρη.

Εάν x_{k_i} είναι η i -οστή είσοδος του k νευρώνα, w_{k_i} είναι το i -οστό συναπτικό βάρος του k νευρώνα και $\varphi(\cdot)$ η συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρωνικού δικτύου, τότε η έξοδος y_k του k νευρώνα δίνεται από την εξίσωση:

$$y_k = \varphi\left(\sum_{i=0}^N x_{k_i} w_{k_i}\right)$$

Στον k -οστό νευρώνα υπάρχει ένα συναπτικό βάρος w_{k_0} με ιδιαίτερη σημασία, το οποίο καλείται **πόλωση** ή **κατώφλι** (bias, threshold). Η τιμή της εισόδου του είναι πάντα η μονάδα, $x_{k_0} = 1$. Εάν το συνολικό άθροισμα από τις υπόλοιπες εισόδους του νευρώνα είναι μεγαλύτερο από την τιμή αυτή, τότε ο νευρώνας ενεργοποιείται. Εάν είναι μικρότερο, τότε ο νευρώνας παραμένει ανενεργός. Η ιδέα προέκυψε από τα βιολογικά νευρικά κύτταρα.

Το κύριο χαρακτηριστικό των νευρωνικών δικτύων είναι η εγγενής ικανότητα **μάθησης** (learning rate). Ως μάθηση μπορεί να οριστεί η σταδιακή βελτίωση της ικανότητας του δικτύου να επιλύει κάποιο πρόβλημα (π.χ. η σταδιακή προσέγγιση μίας συνάρτησης). Η μάθηση επιτυγχάνεται μέσω της **εκπαίδευσης**, μίας επαναληπτικής διαδικασίας σταδιακής προσαρμογής των παραμέτρων του δικτύου (συνήθως των βαρών και της πόλωσής του) σε τιμές κατάλληλες ώστε να επιλύεται με επαρκή επιτυχία το προς εξέταση πρόβλημα. Αφού ένα δίκτυο εκπαιδευτεί, οι παράμετροί του συνήθως «παγώνουν» στις κατάλληλες τιμές και από εκεί κι έπειτα είναι σε λειτουργική κατάσταση. Το ζητούμενο είναι το λειτουργικό δίκτυο να χαρακτηρίζεται από μία ικανότητα **γενίκευσης**: αυτό σημαίνει πως δίνει ορθές εξόδους για εισόδους καινοφανείς και διαφορετικές από αυτές με τις οποίες εκπαιδεύτηκε.

6.1.2 Εκπαίδευση Νευρωνικών Δικτύων

Μια από τις πιο βασικές ιδιότητες των Νευρωνικών Δικτύων είναι η ικανότητά τους για εκπαίδευση. Η εκπαίδευση αυτή επιτυγχάνεται μέσω της ανταλλαγής τιμών και βαρών, που αποσκοπεί στη βαθμιαία

σύλληψη της πληροφορίας η οποία στη συνέχεια θα είναι διαθέσιμη προς ανάκτηση. Υπάρχουν, βέβαια, πολλοί αλγόριθμοι που η εφαρμογή τους έχει στόχο την προσαρμογή των τιμών των βαρών ενός Τεχνητού Νευρωνικού Δικτύου. Όλες οι μέθοδοι μάθησης μπορούν να καταταχθούν σε δύο κατηγορίες: τη **μάθηση με επίβλεψη** (supervised learning) και τη **μάθηση χωρίς επίβλεψη** (unsupervised learning).

- **Μάθηση με επίβλεψη:** Η μάθηση αυτή είναι μια διαδικασία η οποία συνδυάζει έναν εξωτερικό εκπαιδευτή και τη συνολική ή γενικευμένη πληροφορία. Κάποιες από τις μεθόδους οι οποίες συγκαταλέγονται σε αυτή την κατηγορία είναι η μάθηση με διόρθωση σφάλματος, η στοχαστική μάθηση. Παραδείγματα τα οποία αντιπροσωπεύουν τη μάθηση με επίβλεψη συμπεριλαμβάνουν αποφάσεις για το πότε θα πρέπει να σταματήσει η διαδικασία εκπαίδευσης, αποφάσεις αναφορικά με τη συχνότητα παρουσίασης στο δίκτυο τα πρότυπα εκπαίδευσης και η παρουσίαση προόδου του δικτύου. Η μάθηση με επίβλεψη χωρίζεται σε δύο ακόμα κατηγορίες: στη **δομική** (structural) και στην **προσωρινή** (temporal) εκμάθηση. Οι αλγόριθμοι οι οποίοι βρίσκονται στην πρώτη κατηγορία, χρησιμοποιούνται για την εύρεση της βέλτιστης σχέσης μεταξύ εισόδων και εξόδων για κάθε ξεχωριστό ζευγάρι προτύπων. Παραδείγματα της δομικής εκμάθησης αποτελούν η αναγνώριση και η κατηγοριοποίηση προτύπων, ενώ παραδείγματα της προσωρινής εκμάθησης η πρόβλεψη και ο έλεγχος.
- **Μάθηση χωρίς επίβλεψη:** Οι αλγόριθμοι της εν λόγω μάθησης αναφέρονται ως αυτό-οργανώμενοι (self-organized) και είναι διαδικασίες οι οποίες δεν απαιτούν να είναι παρών ένας «εξωτερικός» δάσκαλος ή επιβλέπων. Βασίζονται, μάλιστα, μόνο

σε τοπική πληροφορία καθ' όλη τη διάρκεια της εκπαίδευσης του Τεχνητού Νευρωνικού Δικτύου. Οι συγκεκριμένοι αλγόριθμοι οργανώνουν τα δεδομένα και ανακαλύπτουν τις σημαντικές συλλογικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, αλγόριθμοι εκπαίδευσης χωρίς επίβλεψη είναι ο αλγόριθμος Hebbian, ο διαφορικός αλγόριθμος Hebbian και ο Min-Max αλγόριθμος.

Κατά κύριο λόγο οι περισσότερες διαδικασίες εκπαίδευσης είναι off line. Όταν χρησιμοποιείται όλο το δείγμα για προτύπων για την τροποποίηση των τιμών των βαρών, πριν της τελικής χρήσης του δικτύου ως εφαρμογή, τότε ονομάζεται off line εκπαίδευση. Οι αλγόριθμοι εκπαίδευσης off line έχουν την απαίτηση να βρίσκονται στην εκπαίδευση του δικτύου παρόντα όλα τα πρότυπα. Το γεγονός αυτό αποκλείει την πιθανότητα εισαγωγής νέων πληροφοριών μέσω νέων προτύπων. Βέβαια, υπάρχουν και Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα τα οποία δεν αποκλείουν την εισαγωγή νέας πληροφορίας, μετά την τελική τους μοντελοποίηση. Αν παρουσιαστεί ανάγκη εισαγωγής νέου προτύπου στο δίκτυο, μπορεί να γίνει απευθείας χωρίς τον κίνδυνο να χαθεί κανένα μέρος της αρχικής πληροφορίας. Το πλεονέκτημα των δικτύων που χρησιμοποιούν off line διαδικασίες εκπαίδευσης επικεντρώνεται κυρίως στη δυνατότητα να δίνουν καλύτερες λύσεις σε δύσκολα προβλήματα.

6.1.3 Backpropagation Νευρωνικά Δίκτυα

Στα νευρωνικά δίκτυα με επίβλεψη ανήκουν και τα backpropagation (BP) τα οποία χρησιμοποιούνται ευρέως αφού προσφέρουν πολύ καλές λύσεις σε βιομηχανικές εφαρμογές (Dayhoff, 1990; Fynahasi, 1989; Lippmann, 1987). Ένα BP νευρωνικό δίκτυο

αποτελείται από τρία ή περισσότερα στρώματα (layers) γι' αυτό και ανήκει στα πολυστρωματικά δίκτυα (multilayer). Στο σχήμα 6.1.3.1 φαίνεται ένα απλό backpropagation δίκτυο με τρία στρώματα. Ένα BP νευρωνικό δίκτυο εκπαιδεύεται με τη βοήθεια ενός gradient-descent αλγόριθμου. Αρχικά, συλλέγεται μια πληροφορία ώστε να δημιουργηθεί ένα μοντέλο BP νευρωνικού δικτύου. Σύμφωνα με τους κανόνες της μάθησης με επίβλεψη τα δεδομένα αποτελούν τα διανύσματα εισόδου και εξόδου. Ο gradient-descent αλγόριθμος επιτρέπει στο δίκτυο να βελτιώνει την απόδοσή του με την αυτοεκπαίδευση. Υπάρχουν δύο φάσεις υπολογισμού: **προς τα εμπρός** (forward) και **προς τα πίσω** (backward). Ένα BP νευρωνικό δίκτυο αρχικά λαμβάνει την πληροφορία μέσω του διανύσματος εισόδου και κατευθείαν την περνάει στους κρυμμένους νευρώνες. Κάθε στοιχείο των κρυμμένων νευρώνων υπολογίζει μια τιμή αθροίζοντας τα βάρη των νευρώνων εισόδου και έτσι μετατρέπει τα βάρη σε επίπεδα μέσω μιας συνάρτησης μεταφοράς. Κάθε στοιχείο των νευρώνων εξόδου χρησιμοποιείται για να υπολογίσει μία τιμή αθροίζοντας τα βάρη των νευρώνων εισόδου τα οποία έχουν αποδοθεί στους κρυμμένους νευρώνες. Στη συνέχεια, μία συνάρτηση μεταφοράς χρησιμοποιείται για να υπολογίσει το αποτέλεσμα του δικτύου. Το αποτέλεσμα αυτό συγκρίνεται με την τιμή στόχο. Εάν προκύψει διαφορά, ένα σφάλμα για παράδειγμα, χρησιμοποιείται ο gradient-descent αλγόριθμος για να προσαρμόσει τα συνδεδεμένα βάρη. Εάν δεν προκύψει κάποια διαφορά, δεν υπάρχει εκπαίδευση. Η σχέση που χρησιμοποιείται για να προσαρμόσει τα βάρη για το νευρώνα εξόδου k είναι:

$$\Delta W_{kj} = \eta \delta_k O_j$$

όπου ΔW_{kj} = η μεταβολή που πρέπει να γίνει στο βάρος από τη μονάδα j στην k.

η = η ικανότητα μάθησης
 δ_k = το σφάλμα για τη μονάδα k
 O_j = η j-οστή τιμή του αποτελέσματος

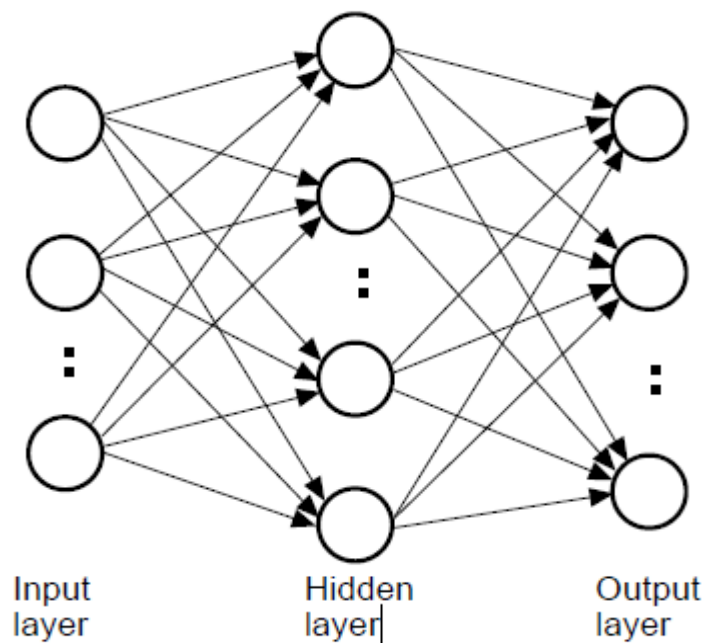
Ο κανόνας του backpropagation για την αλλαγή βαρών για τον κρυμμένο νευρώνα j είναι:

$$\Delta W_{ji} = \eta \delta_j O_i$$

όπου ΔW_{ji} = η μεταβολή που πρέπει να γίνει στο βάρος από τη μονάδα i στην j.

η = η ικανότητα μάθησης
 δ_j = το σφάλμα για τη μονάδα j
 O_i = η i-οστή τιμή του αποτελέσματος

Σχήμα 6.1.3.1: Ένα backpropagation νευρωνικό δίκτυο



6.1.4 Εφαρμογές Νευρωνικών Δικτύων

Τα τελευταία χρόνια έχει υπάρξει μία έκρηξη ενδιαφέροντος για τα νευρωνικά δίκτυα καθώς εφαρμόζονται με μεγάλη επιτυχία σε ένα ασυνήθιστα μεγάλο φάσμα τομέων της επιστήμης και της τεχνολογίας, όπως τα χρηματοοικονομικά, η ιατρική, η επιστήμη μηχανικού, η γεωλογία, η φυσική, η ρομποτική, η επεξεργασία σήματος κτλ. Στην πραγματικότητα, τα νευρωνικά δίκτυα εισάγονται οπουδήποτε τίθεται θέμα πρόβλεψης, ταξινόμησης ή ελέγχου. Η σαρωτική αυτή επιτυχία, μπορεί να αποδοθεί σε δύο βασικά στοιχεία: την ισχύ και την ευχρηστία.

- **Ισχύς:** Τα νευρωνικά δίκτυα είναι πολύ εξελιγμένες τεχνικές μη γραμμικής μοντελοποίησης, ικανές να μοντελοποιήσουν εξαιρετικά πολύπλοκες λειτουργίες. Η γραμμική μοντελοποίηση υπήρξε ευρέως διαδεδομένη για πολύ καιρό, δεδομένου ότι στα γραμμικά μοντέλα εφαρμόζονται πολύ γνωστές στρατηγικές βελτιστοποίησης. Στις συνήθειες, όμως, περιπτώσεις όπου η γραμμική προσέγγιση δεν ήταν έγκυρη, τα μοντέλα αυτά αποτύγχαναν αναλόγως. Τα νευρωνικά δίκτυα βέβαια, αν και επιτρέπουν τη μη γραμμικότητα μέσω χρήσης μη γραμμικών συναρτήσεων ενεργοποίησης, μεταθέτουν με τη σειρά τους το πρόβλημα στο ζήτημα της διάστασης (του πλήθους των διαφορετικών εισόδων και εξόδων), το οποίο αποτελεί αγκάθι στις προσπάθειες μοντελοποίησης μη γραμμικών συναρτήσεων με μεγάλο αριθμό μεταβλητών.

- **Ευχρηστία:** Τα νευρωνικά δίκτυα εκπαιδεύονται με παραδείγματα. Ο χρήστης συγκεντρώνει αντιπροσωπευτικά δεδομένα και στη συνέχεια, καθώς τα τροφοδοτεί συστηματικά στο δίκτυο μέσω των κατάλληλων αλγορίθμων εκπαίδευσης, το δίκτυο «αντιλαμβάνεται» αυτομάτως τη δομή των δεδομένων και η «γνώση» αυτή εκφράζεται ως κατάλληλες

επιλογές συναπτικών βαρών. Επομένως το τελικό αποτέλεσμα της εκπαίδευσης με ένα συγκεκριμένο σύνολο παραδειγμάτων είναι ο προσδιορισμός των κατάλληλων βαρών του δικτύου. Ο χρήστης χρειάζεται να έχει κάποιες ουσιώδεις γνώσεις σχετικά με τον τρόπο επιλογής και προετοιμασίας των δεδομένων, τον τρόπο εκλογής του κατάλληλου νευρωνικού δικτύου και στο πως θα ερμηνευτούν τα αποτελέσματα. Παρά ταύτα, το επίπεδο των γνώσεων του χρήστη που απαιτούνται για μια επιτυχημένη εφαρμογή των νευρωνικών δικτύων, είναι πολύ χαμηλότερο συγκριτικά με κάποια περίπτωση που θα χρησιμοποιούνταν ορισμένες πιο παραδοσιακές, μη γραμμικές στατιστικές μέθοδοι.

6.2 Προτεινόμενες Διαδικασίες Εφαρμογής Νευρωνικών Δικτύων για την Ανάλυση Αποκομμένων Παρατηρήσεων

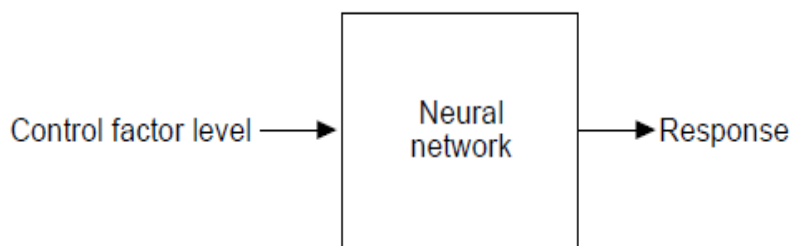
Τα νευρωνικά δίκτυα χρησιμοποιούνται απευθείας στην ανάπτυξη των προτεινόμενων διαδικασιών. Στο παρόν κείμενο, αναπτύσσονται δύο διαδικασίες. Η πρώτη διαδικασία μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί ώστε να καθοριστεί η βέλτιστη κατάσταση όταν ο χρόνος της ανάλυσης είναι πρωταρχικής σημασίας (Chao-Ton Su and Chia-Li Miao, 1998). Στην εικόνα 6.2.1 φαίνεται η πορεία της πρώτης διαδικασίας. Ένα BP νευρωνικό δίκτυο εκπαιδεύεται να βρίσκει τη σχέση μεταξύ των επιπέδων των παραγόντων ελέγχου και των αποκρίσεων. Το εκπαιδευμένο δίκτυο μπορεί να προβλέψει τη συμπεριφορά όλων των πιθανών συνδυασμών των επιπέδων των παραγόντων. Έτσι, εισάγοντας

όλους τους πιθανούς συνδυασμούς στο εκπαιδευμένο δίκτυο, ο συνδυασμος με την πιο ικανοποιητική απόκριση είναι η βέλτιστη κατάσταση που αναζητούμε. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται ακολούθως:

Διαδικασία 1

1. Ανάπτυξη ενός μοντέλου BP δικτύου για την εύρεση της σχέσης μεταξύ των επιπέδων των παραγόντων ελέγχου και των αποκρίσεων.
2. Παρουσίαση όλων των πιθανών συνδυασμών των επιπέδων των παραγόντων στο νευρωνικό δίκτυο και υπολογισμός των εκτιμημένων αποκρίσεων.
3. Έυρεση της βέλτιστης κατάστασης με την επιλογή του συνδυασμού με την πιο ικανοποιητική απόκριση.

Εικόνα 6.2.1: Πορεία Διαδικασίας 1

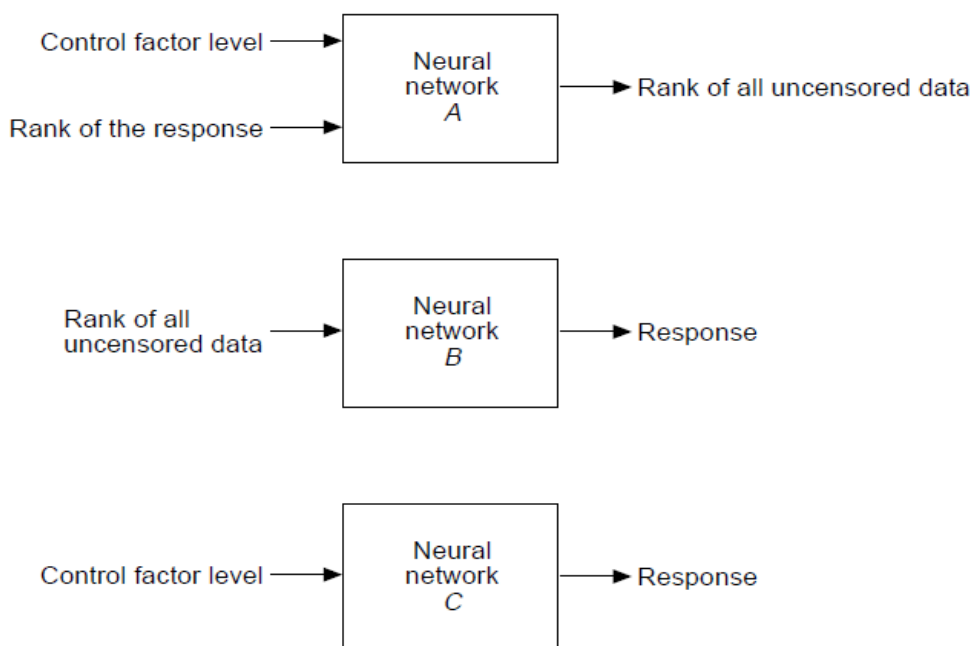


Η πρώτη διαδικασία είναι αρκετά απλή. Παρ'όλα αυτά, οι πληροφορίες εκπαίδευσης μπορεί να είναι ανεπαρκείς με αποτέλεσμα να περιορίζεται η αποτελεσματικότητα της διαδικασίας. Για παράδειγμα,

εάν οι παρατηρήσεις είναι δεξιά αποκομμένες, οι τιμές των αποκομμένων παρατηρήσεων θα έπρεπε να υπερβαίνουν αυτές των μη αποκομμένων παρατηρήσεων. Αυτή η πληροφορία θα έπρεπε να συμπεριλαμβάνεται στην εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου.

Προκειμένου να βελτιωθεί αυτή η κατάσταση, προτείνεται η διαδικασία 2 (Chao-Ton Su and Chia-Li Miao, 1998). Στην εικόνα 6.2.2 φαίνεται η πορεία της δεύτερης διαδικασίας. Με στόχο τη μείωση της πολυπλοκότητας της ανάλυσης των παρατηρήσεων, η διαδικασία αυτή χρησιμοποιεί, αρχικά, μια μέθοδο βασιζόμενη στη μετατροπή των βαθμών των αποκρίσεων. Στη συνέχεια, τρία BP δίκτυα εκπαιδεύονται να προβλέψουν τους βαθμούς και τις αποκρίσεις. Τέλος, βρίσκεται ο βέλτιστος συνδυασμός των επιπέδων των παραγόντων. Η δεύτερη διαδικασία παρουσιάζεται αναλυτικά στη συνέχεια

Εικόνα 6.2.2: Πορεία διαδικασίας 2



Διαδικασία 2

1. Καθορισμός των βαθμών, r , των αποκρίσεων κάθε εκτέλεσης. Οι μη αποκομμένες παρατηρήσεις για κάθε εκτέλεση είναι βαθμονομημένες σε αύξουσα σειρά. Για μία εκτέλεση, υποθέτουμε ότι το μέγεθος του δείγματος είναι p και υπάρχουν q μη αποκομμένες παρατηρήσεις. Εάν οι παρατηρήσεις είναι δεξιά αποκομμένες, οι βαθμοί των αποκομμένων παρατηρήσεων θα έπρεπε να είναι μεταξύ $q + 1$ και p . Εάν οι παρατηρήσεις είναι αριστερά αποκομμένες, οι βαθμοί των αποκομμένων παρατηρήσεων θα κυμαίνονταν από 1 έως $p - q$.
2. Καθορισμός των βαθμών, d , όλων των μη αποκομμένων παρατηρήσεων στο πείραμα. Εάν αρκετές από τις παρατηρούμενες τιμές είναι ίσες, θα πρέπει να εκχωρηστεί στην καθεμιά ο μέσος όρος των αντίστοιχων βαθμών.
3. Ανάπτυξη ενός μοντέλου BP δικτύου A για την εύρεση της σχέσης μεταξύ των επιπέδων των παραγόντων ελέγχου (r) και του d .
4. Πρόβλεψη των βαθμών των αποκομμένων παρατηρήσεων στο πείραμα παρουσιάζοντας τα επίπεδα των παραγόντων ελέγχου (r) στο μοντέλο BP δικτύου A .
5. Καθορισμός των βαθμών, d' , των προβλεπόμενων βαθμών των αποκομμένων παρατηρήσεων.

Για n μη αποκομμένες παρατηρήσεις ενός πειράματος μεγέθους N , εάν οι παρατηρήσεις είναι δεξιά αποκομμένες, οι βαθμοί των αποκομμένων παρατηρήσεων θα έπρεπε να είναι μεταξύ $n + 1$ και N . Εάν οι παρατηρήσεις είναι αριστερά αποκομμένες, οι βαθμοί των αποκομμένων παρατηρήσεων θα πρέπει να κυμαίνονται μεταξύ 1 και $N - n$.

6. Ανάπτυξη ενός μοντέλου BP δικτύου B για την εύρεση της σχέσης μεταξύ των τιμών d και των αποκρίσεων.
7. Πρόβλεψη των αποκρίσεων των αποκομμένων παρατηρήσεων στο πείραμα παρουσιάζοντας το d' στο μοντέλο BP δικτύου B.
8. Ανάπτυξη ενός μοντέλου BP δικτύου C για την εύρεση της σχέσης μεταξύ των επιπέδων των παραγόντων ελέγχου και των αποκρίσεων (συμπεραλαμβανομένων των παρατηρούμενων αποκρίσεων και των προβλεπόμενων αποκρίσεων).
9. Καθορισμός του βέλτιστου συνδυασμού επιπέδων των παραγόντων.

Παρουσιάζοντας όλους τους πιθανούς συνδυασμούς στο μοντέλο C, ο συνδυασμός με την πιο ικανοποιητική απόκριση είναι η βέλτιστη κατάσταση.

Η παραπάνω διαδικασία είναι σχεδιασμένη για επαναλαμβανόμενα πειράματα. Στην περίπτωση μη επαναλαμβανόμενων πειραμάτων με αποκομμένες παρατηρήσεις, η διαδικασία ανάλυσης είναι η ίδια εκτός του ότι η βαθμονόμηση των αποκρίσεων κάθε εκτέλεσης είναι περιττή.

6.3 Αριθμητικά Παραδείγματα

6.3.1 Παράδειγμα 1

Οι Tong και Su (1997) πρότειναν μία μη παραμετρική μέθοδο για την ανάλυση ενός πειράματος με μεμονωμένα αποκομμένα δεδομένα. Οι παρατηρήσεις ήταν 16 από ένα πείραμα με 5 παράγοντες σε δύο επίπεδα. Έγιναν 8 εκτελέσεις, όπως φαίνεται και στον πίνακα 6.3.1.1. Ας υποθέσουμε ότι επιθυμούμε την ελαχιστοποίηση της απόκρισης και 5 από τα σημεία δεν μπορούν να παρατηρηθούν. Το σημείο αποκοπής είναι το 67. Το πείραμα αυτό θα αναλυθεί σύμφωνα με τις δύο διαδικασίες που προαναφέραμε.

Πίνακας 6.3.1.1: Δεδομένα του πειράματος

Εκτέλεση	Παράγοντες					Απόκριση		r	
	A	B	C	D	E				
1	1	1	1	1	1	66	66	1	2
2	1	1	2	2	2	63	*(68)	1	2
3	1	2	1	2	2	*(80)	*(88)	1	2
4	1	2	2	1	1	63	65	1	2
5	2	1	1	1	2	*(71)	*(73)	1	2
6	2	1	2	2	1	37	42	1	2
7	2	2	1	2	1	38	39	1	2
8	2	2	2	1	2	48	57	1	2

*αποκομμένες παρατηρήσεις, οι αριθμοί στις παρενθέσεις είναι οι πραγματικές τιμές των αποκομμένων παρατηρήσεων

Όταν εφαρμόζεται η διαδικασία 1 σε αυτό το πείραμα, χρησιμοποιούνται αρχικά οι 11 μη αποκομμένες αποκρίσεις για να

αναπτυχθεί το απαιτούμενο μοντέλο πρόβλεψης. Τα επίπεδα των παραγόντων ελέγχου και οι αποκρίσεις αποτελούν τα διανύσματα εισόδου/εξόδου του δικτύου. Το βασικό κριτήριο για την εκπαίδευση του δικτύου είναι η μεση τετραγωνική ρίζα του σφάλματος (RMSE). Ο πίνακας 6.3.1.2 δείχνει διαφορετικές επιλογές της δομής του δικτύου. Η δομή 5-15-1 επιλέγεται ως αυτή με την καλύτερη απόδοση. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί επιπέδων των παραγόντων στο δίκτυο 5-15-1. Ο πίνακας 6.3.1.3 περιέχει τις 32 εκτιμημένες αποκρίσεις. Ο βέλτιστος συνδυασμός είναι ο $A_2B_2C_1D_2E_1$ αφού έχει τη μικρότερη απόκριση.

Πίνακας 6.3.1.2: Επίδοση πέντε διαφορετικών δικτύων (διαδικασία 1)

Architecture	RMSE	
	Training	Testing
5-10-1	0.0285	0.1515
5-12-1	0.0342	0.1419
5-15-1	0.0273	0.1469
5-17-1	0.0479	0.1181
5-20-1	0.0369	0.1336

Πίνακας 6.3.1.3: 32 εκτιμήμένες αποκρίσεις (διαδικασία 1)

No	Επίπεδο Παράγοντα					Απόκριση	No	Επίπεδο Παράγοντα					Απόκριση
1	1	1	1	1	1	71.615	17	2	1	1	1	1	45.771
2	1	1	1	1	2	73.108	18	2	1	1	1	2	52.348
3	1	1	1	2	1	66.720	18	2	1	1	2	1	28.655
4	1	1	1	2	2	69.544	20	2	1	1	2	2	34.913
5	1	1	2	1	1	71.405	21	2	1	2	1	1	47.159
6	1	1	2	1	2	73.131	22	2	1	2	1	2	53.919
7	1	1	2	2	1	66.158	23	2	1	2	2	1	28.747
8	1	1	2	2	2	69.318	24	2	1	2	2	2	36.647
9	1	2	1	1	1	70.335	25	2	2	1	1	1	37.038
10	1	2	1	1	2	71.705	26	2	2	1	1	2	43.876
11	1	2	1	2	1	64.482	27	2	2	1	2	1	27.336
12	1	2	1	2	2	67.317	28	2	2	1	2	2	28.870
13	1	2	2	1	1	70.378	29	2	2	2	1	1	39.623
14	1	2	2	1	2	72.034	30	2	2	2	1	2	46.736
15	1	2	2	2	1	64.330	31	2	2	2	2	1	27.343
16	1	2	2	2	2	67.522	32	2	2	2	2	2	30.554

Όταν εφαρμοστεί η διαδικασία 2 στο πείραμα, αρχικά υπολογίζονται οι βαθμοί (r) των αποκρίσεων για κάθε εκτέλεση και οι βαθμοί (d) όλων των μη αποκομμένων παρατηρήσεων του πειράματος και παρουσιάζονται στον πίνακα 6.3.1.4. Στη συνέχεια, αναπτύσσεται το νευρωνικό δίκτυο A. Τα r και d έχουν το ρόλο των διανυσμάτων εισόδου και εξόδου του νευρωνικού δικτύου. Ο πίνακας 6.3.1.5 περιέχει αρκετές επιλογές δομής του δικτύου A. Επιλέγεται η δομή 6-20-1. Οι αντίστοιχοι βαθμοί, όπως φαίνεται στον πίνακα 6.3.1.6, μπορούν να υπολογιστούν εισάγοντας τα επίπεδα των παραγόντων και το r των αποκομμένων παρατηρήσεων στο δίκτυο A. Αφού οι παρατηρήσεις είναι δεξιά

αποκομμένες και υπάρχουν 5 αποκομμένες τιμές, οι βαθμοί των εκτιμημένων αποκομμένων παρατηρήσεων θα πρέπει να κυμαίνονται μεταξύ 12 και 16. Ως εκ τούτου, οι προβλέψεις για τους βαθμούς των αποκομμένων παρατηρήσεων προσαρμόστηκαν σε $d' = 12\sim 16$, όπως φαίνεται στον πίνακα 6.3.1.6.

Πίνακας 6.3.1.4: Βαθμοί των μη αποκομμένων παρατηρήσεων (διαδικασία 2)

A	Παράγοντες Ελέγχου				r	Απόκριση	d
	B	C	D	E			
1	1	1	1	1	1	66	10.5
1	1	1	1	1	2	66	10.5
1	1	2	2	2	1	63	7.5
1	2	2	1	1	1	63	7.5
1	2	2	1	1	2	65	9
2	1	2	2	1	1	37	1
2	1	2	2	1	2	42	4
2	2	1	2	1	1	38	2
2	2	1	2	1	2	39	3
2	2	2	1	2	1	48	5
2	2	2	1	2	2	57	6

Πίνακας 6.3.1.5: Απόδοση του δικτύου A (διαδικασία 2)

Architecture	RMSE	
	Training	Testing
6-15-1	0.0216	0.1578
6-18-1	0.0201	0.1544
6-20-1	0.0201	0.1447
6-22-1	0.0202	0.1577
6-25-1	0.0224	0.1541

Πίνακας 6.3.1.6: Προβλεπόμενοι βαθμοί και αποκρίσεις των αποκομμένων παρατηρήσεων (διαδικασία 2)

Παράγοντες Ελέγχου					r	Προβλεπόμενοι βαθμοί	d'	Προβλεπόμενες αποκρίσεις
A	B	C	D	E				
1	1	2	2	2	2	18.320	1	81.859
1	2	1	2	2	1	17.914	13	78.815
1	2	1	2	2	2	18.952	16	87.023
2	1	1	1	2	1	17.280	12	75.474
2	1	1	1	2	2	18.335	15	84.594

Στη συνέχεια, εκπαιδεύεται το δίκτυο B εισάγοντας το d και τις αποκρίσεις ως διανύσματα εισόδου και εξόδου του δικτύου, αντίστοιχα. Ο πίνακας 6.3.1.7 συγκεντρώνει τα αποτελέσματα των διαφορετικών δομών του δικτύου B. Η δομή 1-3-1 επιλέγεται ως η βέλτιστη για το δίκτυο B. Εισάγοντας το d' στο δίκτυο B, μπορούν να εκτιμηθούν οι αντίστοιχες αποκρίσεις, όπως φαίνεται στην τελευταία στήλη του πίνακα 6.3.1.7. Τώρα λοιπόν, μπορεί να βρεθεί η σχέση μεταξύ των επιπέδων των παραγόντων ελέγχου και των αποκρίσεων. Έτσι, αναπτύσσουμε το δίκτυο C. Ο πίνακας 6.3.1.8 παρουσιάζει τις επιλογές των δομών και τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Η δομή 5-10-1 δείχνει να είναι η καλύτερη για το δίκτυο C. Ο πίνακας 6.3.1.9 περιέχει τις 32 εκτιμημένες αποκρίσεις από όπου επιλέγουμε το συνδυασμό $A_2B_2C_2D_2E_1$ ως αυτό με τη μικρότερη απόκριση άρα και το βέλτιστο.

Πίνακας 6.3.1.7: Επιλογές δικτύου B (διαδικασία 2)

Architecture	RMSE	
	Training	Testing
1-1-1	0.0255	0.0796
1-2-1	0.0254	0.0656
1-3-1	0.0249	0.0665
1-4-1	0.0303	0.0655
1-5-1	0.0311	0.0677

Πίνακας 6.3.1.8: Επιλογές δικτύου C (διαδικασία 2)

Architecture	RMSE	
	Training	Testing
5-5-1	0.0529	0.1448
5-8-1	0.0481	0.1500
5-10-1	0.0455	0.1430
5-12-1	0.0519	0.1511
5-15-1	0.0463	0.1447

Εάν οι 16 αρχικές παρατηρήσεις αναλύθούν με τη μέθοδο Taguchi, έχουμε την εξής βέλτιστη κατάσταση: $A_2B_2C_2D_2E_1$. Ο πίνακας 6.3.1.10 συγκρίνει τα αποτελέσματα των αναλύσεων των διαφορετικών μεθόδων. Η βέλτιστη κατάσταση που προκύπτει από τη διαδικασία 2 είναι ίδια με αυτή της μεθόδου Taguchi. Επομένως η διαδικασία 2 είναι πιο έγκυρη από τη διαδικασία 1 και πιο απλή στην εφαρμογή της από τη μέθοδο Taguchi

Πίνακας 6.3.1.9: 32 εκτιμημένες αποκρίσεις (διαδικασία 2)

No	Επίπεδο Παράγοντα					Απόκριση	No	Επίπεδο Παράγοντα					Απόκριση
1	1	1	1	1	1	67.904	17	2	1	1	1	1	56.038
2	1	1	1	1	2	85.270	18	2	1	1	1	2	78.560
3	1	1	1	2	1	67.960	19	2	1	1	2	1	43.626
4	1	1	1	2	2	85.405	20	2	1	1	2	2	62.597
5	1	1	2	1	1	63.813	21	2	1	2	1	1	40.026
6	1	1	2	1	2	82.776	22	2	1	2	1	2	60.682
7	1	1	2	2	1	49.727	23	2	1	2	2	1	39.004
8	1	1	2	2	2	72.713	24	2	1	2	2	2	54.937
9	1	2	1	1	1	66.980	25	2	2	1	1	1	52.952
10	1	2	1	1	2	80.788	26	2	2	1	1	2	72.552
11	1	2	1	2	1	62.429	27	2	2	1	2	1	38.712
12	1	2	1	2	2	82.686	28	2	2	1	2	2	59.219
13	1	2	2	1	1	62.406	29	2	2	2	1	1	38.409
14	1	2	2	1	2	77.588	30	2	2	2	1	2	53.759
15	1	2	2	2	1	44.777	31	2	2	2	2	1	35.491
16	1	2	2	2	2	67.857	32	2	2	2	2	2	52.387

Πίνακας 6.3.1.10: Ανάλυση αποτελεσμάτων

Μέθοδος	Βέλτιστη κατάσταση
Μεθοδος Taguchi	$A_2B_2C_2D_2E_1$
Διαδικασία 1	$A_2B_2C_1D_2E_1$
Διαδικασία 2	$A_2B_2C_2D_2E_1$

6.3.2 Παράδειγμα 2

Ας θυμηθούμε το παράδειγμα της παραγράφου 5.3 των Byrne and Taguchi (1987). Οι παράγοντες είναι 4 και οι εκτελέσεις του πειράματος 9. Στον πίνακα 6.3.2.1 εμφανίζονται οι 72 παρατηρήσεις που συλλέχθηκαν. Η βέλτιστη κατάσταση, όπως την είχαμε βρει με τη μέθοδο Taguchi, ήταν η: $A_2B_2C_3D_1$.

Πίνακας 6.3.2.1: Δεδομένα του πειράματος

No	A	B	C	D	Απόκριση								
1	1	1	1	1	19.1	20.0	19.6	19.6	19.9	16.9	9.5	15.6	
2	1	2	2	2	21.9	24.2	19.8	19.7	19.6	19.4	16.2	15.0	
3	1	3	3	3	20.4	23.3	18.2	22.6	15.6	19.1	16.7	16.3	
4	2	1	2	3	24.7	23.2	18.9	21.0	18.6	18.9	17.4	18.3	
5	2	2	3	1	25.3	27.5	21.4	25.6	25.1	19.4	18.6	19.7	
6	2	3	1	2	24.7	22.5	19.6	14.7	19.8	20.0	16.3	16.2	
7	3	1	3	2	21.6	24.3	18.6	16.8	23.6	18.4	19.1	16.4	
8	3	2	1	3	54.4	23.2	19.6	17.8	16.8	15.1	15.6	14.2	
9	3	3	2	1	28.6	22.6	22.7	23.1	17.3	19.3	19.9	16.1	

Υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις είναι δεξιά αποκομμένες και το σημείο αποκοπής είναι το 22. Ο παραπάνω πίνακας λοιπόν, περιέχει 19 αποκομμένες παρατηρήσεις και 53 μη αποκομμένες. Εάν εφαρμόσουμε τη διαδικασία 1, ο βέλτιστος συνδυασμός επιπέδων των παραγόντων είναι ο $A_1B_1C_3D_1$. Ενώ με τη διαδικασία 2, έχουμε $A_2B_2C_3D_1$ που είναι ο ίδιος με αυτόν της μεθόδου Taguchi. Οι συγκρίσεις αυτές φαίνονται συνοπτικά στον πίνακα 6.3.2.2.

Πίνακας 6.3.2.2: Ανάλυση αποτελεσμάτων

Μέθοδος	Βέλτιστη κατάσταση
Μεθοδος Taguchi	$A_2B_2C_3D_1$
Διαδικασία 1	$A_1B_1C_3D_1$
Διαδικασία 2	$A_2B_2C_3D_1$

Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής συμπέρασμα:

1. Ο βέλτιστος συνδυασμός από τη διαδικασία 1 είναι πολύ κοντά στη βέλτιστη κατάσταση που επιλέχθηκε απο τα ολοκληρωμένα δεδομένα.
2. Η διαδικασία 2 είναι πιο αποτελεσματική απο τη διαδικασία 1.
3. Οι δύο διαδικασίες είναι ευρύτερα εφαρμόσιμες από τη μέθοδο Taguchi.

Κεφάλαιο 7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι παραγοντικοί σχεδιασμοί και η μέθοδος Taguchi είναι δύο χρήσιμα εργαλεία για τη βελτιστοποίηση και τη βελτίωση προϊόντων. Ωστόσο, συχνά οι παρατηρήσεις είναι αποκομμένες εξαιτίας του χρόνου και του κόστους που συνοδεύει τη συλλογή δεδομένων, όπως επίσης εξαιτίας περιορισμών σε πηγές και στα όργανα μέτρησης. Σε αυτή την περίπτωση, η παραδοσιακή μέθοδος ANOVA είναι ακατάλληλη για την ανάλυση της επίδρασης των παραγόντων, έτσι μια άλλη μέθοδος αναφέρεται σε αυτήν την εργασία προκειμένου να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα.

Η μέθοδος, την οποία αναλύσαμε, μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αποκομμένες παρατηρήσεις τύπου II. Η διαδικασία αυτή αρχικά χρησιμοποιεί τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ώστε να υπολογιστεί ο μέσος του κάθε παράγοντα, και έπειτα εφαρμόζει την ανάλυση Torres σε μη επαναλαμβανόμενους σχεδιασμούς προκειμένου να καθορίσει τη σημαντικότητα του επιπέδου κάθε παράγοντα. Η παραπάνω μέθοδος δεν αναλύει τα δεδομένα επαναληπτικώς και δεν εμπεριέχει περίπλοκα μοντέλα, επομένως είναι απλούστερη από τις συμβατικές μεθόδους. Επιπλέον, αυτή η εργασία παρουσιάζει μια αποτελεσματική μέθοδο για την ανάλυση των αποκομμένων παρατηρήσεων από παραμετρικούς σχεδιασμούς Taguchi κάνοντας χρήση της εκτιμητικής μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Πρέπει να σημειωθεί ότι ανεξάρτητα από το εάν οι αναφερθείσες μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των παραγοντικών σχεδιασμών ή των σχεδιασμών Taguchi, οι αποκομμένες

παρατηρήσεις από κάθε συνδυασμό παραγόντων πρέπει να περικλείει τουλάχιστον δύο παρατηρήσεις που να μπορούν να παρατηρηθούν.

Επιπροσθέτως, παρατίθεται μια ακόμη αποτελεσματική διαδικασία για την ανάλυση μεμονομένων αποκομμένων δεδομένων βάσει της μετατροπής της τάξεως της απόκρισης και της ανάλυσης παλινδρόμησης. Η διαδικασία είναι απλούστερη από τις συμβατικές μεθόδους όπως αυτή της μέγιστης πιθανοφάνειας. Προκειμένου να εξασφαλιστεί η αποτελεσματικότητα, θα πρέπει να τονίσουμε ότι θα πρέπει να συμπεριλαμβάνονται στο πείραμα τουλάχιστον τα δυο τρίτα των ολοκληρωμένων παρατηρήσεων. Εάν το R^2 του προβλεπόμενου μοντέλου παλινδρόμησης είναι πολύ μικρό, θα πρέπει οι παράγοντες του σχεδιασμού να επαναπραδιαγματευτούν. Διαφορετικά, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποια άλλη μέθοδος

Μια ακόμη μέθοδος με πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα είναι η ανάλυση των αποκομμένων παρατηρήσεων η οποία βασίζεται στα νευρωνικά δίκτυα. Η προσέγγιση των νευρωνικών δικτύων μπορεί να θεωρηθεί κι αυτή μια στατιστική μέθοδος και σίγουρα ξεπερνάει σε αποτελεσματικότητα όλες τις υπόλοιπες συμβατικές προσεγγίσεις.

Καταλήγοντας θα πρέπει να αναφέρουμε ότι οι προαναφερθείσες διαδικασίες, ενώ υστερούν σε αυστηρή θεωρητική αιτιολόγηση, μπορούν εύκολα να εφαρμοστούν σε υπολογιστικό περιβάλλον. Τα αριθμητικά παραδείγματα αποδεικνύουν την αποτελεσματικότητα των μεθόδων.

Βιβλιογραφία

1. **Ανδρουλάκης Εμμανουήλ (2008)**, “Μέθοδοι επιλογής μεταβλητών στο μοντέλο αναλογικής διακινδύνευσης του Cox και εφαρμογές σε πραγματικά ιατρικά δεδομένα με αποκομμένες παρατηρήσεις”, μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, ΕΜΠ.
2. **Bullington, R.G., Lovin, S., Miller, D.M. and Woodall, W.H. (1993)**, “Improvement of an industrial thermostat using designed experiments”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 25 No. 4, pp. 262-70.
3. **Byrne, D. M. & Taguchi, S. (1987)**, “The Taguchi approach to parameter design”, *Quality Progress*, 20, pp. 19–26.
4. **Chao-Ton Su & Chia-Li Miao (1998)**, “Neural network procedures for experimental analysis with censored data”, *International Journal of Quality Science*, Vol.3, No 3, pp.239-253.
5. **Chiou, K. C. & Tong, L. I. (2001)**, “Average type II censoring times for two parameter Pareto and Rayleigh distributions”, *International Journal of Quality and Reliability Management*, 18(6), pp. 643–65.
6. **Chowdhury, A. H. & Fard, N. S. (2001)** “Analysis of interval censored data from highly fractionated experiment”, *International Journal of Industrial Engineering*, 8(3), pp. 241–250.
7. **D’Agostino, R. B. & Stephens, M. A. (1986)** “Goodness-of-fit Techniques” (New York: Marcel Dekker).
8. **Dayhoff, J.E. (1990)**, *Neural Network Architectures*, Van Nostrand Reinhold, New York, NY.
9. **Funahashi, K. (1989)**, “On the approximate realization of continuous mappings by neural networks”, *Neural Networks*, Vol. 2, pp. 183-92.

10. **Hahn, G. J. & Nelson, W. (1974)** “A comparison of methods for analyzing censored life data to estimate relationships between stress and product life”, *IEEE Transactions on Reliability*, 23, pp. 2-11.
11. **Hahn, G.J., Morgan, C.B. and Schmee, J. (1981)**, “The analysis of a fractional factorial experiment with censored data using iterative least squares”, *Technometrics*, Vol. 23, pp. 33-36.
12. **Hamada, M. & Wu, C. F. J. (1991)**. “Analysis of censored data from highly fractionated experiments”, *Technometrics*, 33, pp. 25–38.
13. **Hamada, M. & Wu, C. F. J. (1995)** “Analysis of censored data from fractionated experiments: a Bayesian approach”, *Journal of the American Statistical Association*, 90, pp. 467–477.
14. **Καρόνη Χ. (2009)**, “Μοντέλα αξιοπιστίας και επιβίωσης”, ΕΜΠ.
15. **Κουκουβίνος Χ. (2008)**, “Στατιστικός έλεγχος ποιότητας”, ΕΜΠ.
16. **Krall, J. M. et al. (1975)** “A step-up procedure for selection variables associated with survival”, *Biometrics*, 31, pp. 49–57.
17. **Lawless, J. F. (1982)** “Statistical Models and Methods for Lifetime Data” (New York: Wiley).
18. **Lee-Ing Tong & Chao-Ton Su (1997)**, “A non-parametric method for experimental analysis with censored data”, *International Journal of Quality and Reliability Management*, Vol.14, No 5, pp.456-463.
19. **Lee-Ing Tong & Chien-Hui Yang (2006)**, “Analysing Type II Censored Data Obtained from Repetitious Experiments”, *Journal of Applied Statistics*, Vol. 33, No1, 49-63.
20. **Lippmann, R.P. (1987)**, “An introduction to computing with neural nets”, *IEEE ASSP Magazine*, April, pp. 4-22.
21. **Lu, J. C. & Unal, C. (1994)** “Process characterization and optimization based on censored data from highly fractionated experiments”, *IEEE Transactions on Reliability*, 43, pp. 145–155.

22. **Montgomery, D. C. (2001)** “Design and Analysis of Experiments Fourth Edition” (New York: Wiley).
23. **Nelson, W. & Hahn, G. J. (1972)** “Linear estimation of a regression relationship from censored data, part I – simple methods and their application”, *Technometrics*, 14, pp. 247–269.
24. **Nelson, W. & Hahn, G. J. (1973)** “Linear estimation of a regression relationship from censored data, part II – best linear unbiased estimation and theory”, *Technometrics*, 15, pp. 133–150.
25. **Peace, G. S. (1993)** “Taguchi Methods: A Hands-On Approach” (New York: Addison-Wesley Publishing Company).
26. **Pettitt, A.N. (1996)**, “Infinite estimates with fractional factorial experiments”, *The Statistician*, Vol. 45 No. 2, pp. 197-206.
27. **Rumelhart, D.E. and McClelland, J.L. (1989)**, *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition*, Vol. I, MIT Press, Cambridge, MA.
28. **Sarhan, A. E. & Greenberg, B. G. (1962)** “Contributions to Order Statistics” (New York: Wiley).
29. **Schmee, J. & Hahn, G. J. (1979)** “A simple method for regression analysis with censored data”, *Technometrics*, 21, pp. 417–434.
30. **Stern, H.S. (1996)**, “Neural networks in applied statistics (with discussion)”, *Technometrics*, Vol. 38, pp. 205-20.
31. **Taguchi, G. (1987)** “System of Experiment Design” (New York: White Plains, Unipub).
32. **Tong, L. I. & Su, C. T. (1997)** “A non-parametric method for experimental analysis with censored data”, *International Journal of Quality and Reliability Management*, 14(5), pp. 456–463.
33. **Torres, V. A. (1993)** “Simple analysis of unreplicated factorials with possible abnormalities”, *Journal of Quality Technology*, 25(3), pp. 183–187.