ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Φίλιππος Κατσαρός

ΤΙΤΛΟΣ: Θεωρήματα Σταθερού Σημείου και Εφαρμογές

Τριμελής Επιτροπή:

Γ. Σμυρλής (επιβλέπων)	**Ν.Γιαννακάκης**	**Δ.Κοντοκώστας**
Αναπλ.Καθηγ. ΕΜΠ	**Αναπλ. Καθηγ. ΕΜΠ**	**Επίκ. Καθηγ. ΕΜΠ**

ΑΘΗΝΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2021

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την συνεχή στήριξη τους. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα κ. Σμυρλή Γεώργιο για την εξαιρετική διάθεση συνεργασίας και βοήθειας που προσέφερε καθώς και την ελευθερία που μου έδωσε για την συγγραφή της εργασίας. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους καθηγητές Ν.Γιαννακάκη και Δ.Κοντοκώστα για το χρόνο που αφιέρωσαν στην αξιολόγηση της εργασίας μου.

Περίληψη

Η θεωρία σταθερού σημείου είναι ένας από τους βασικότερους κλάδους της Μη Γραμμικής Ανάλυσης, καθώς πολύ συχνά συμβάλλει καταλυτικά στην παραγωγή θεωρημάτων ύπαρξης σε πολλά και διαφορετικά μη γραμμικά προβλήματα που αντιστοιχούν σε εξισώσεις και εγκλεισμούς (πλειονότιμα προβλήματα). Αντλεί τα εργαλεία της τόσο από την Ανάλυση όσο και από την Τοπολογία και για το λόγο αυτό έχουμε την άτυπη ταξινόμηση σε "μετρική θεωρία σταθερού σημείου " και "τοπολογική θεωρία σταθερού σημείου ".

Οι παράγραφοι 1.1 έως και 1.6 του Κεφ. 1 περιλαμβάνουν αποτελέσματα της μετρικής θεωρίας σταθερού σημείου, όπου η μετρική δομή του χώρου αλλά και οι μετρικές ιδιότητες των απεικονίσεων που εμπλέκονται στο πρόβλημα παίζουν καθοριστικό ρόλο.

Στις παραγράφους 1.1 και 1.2 παρουσιάζονται θεωρήματα σταθερού σημείου για συσταλτικές απεικονίσεις . Το πλέον χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το περίφημο θεώρημα σταθερού σημείου του Banach το οποίο αποτελεί μια αφηρημένη εκδοχή της γνωστής από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων. Παρατίθενται σημαντικές επεκτάσεις του θεωρήματος αυτού με έμφαση στο Θ.Caristi.

Η παράγραφος 1.3 περιλαμβάνει αποτελέσματα που αφορούν στις ασθενείς συστολές κι επιπλέον το εντυπωσιακό θεώρημα του Bessaga που αποτελεί μια αντίστροφη εκδοχή του θεωρήματος του Banach.

Στην παράγραφο 1.4 μελετάται το πρόβλημα της σύγκλισης της ακολουθίας σταθερών σημείων μιας ακολουθίας συναρτήσεων πάνω από ένα μετρικό χώρο.

Στην παράγραφο 1.5 διατυπώνεται το Θ. Browder-Kirk για μη επεκτατικές απεικονίσεις (non-expansive maps) πάνω από ομοιόμορφα κυρτούς χώρους Banach και δίνεται η απόδειξη για χώρους Hilbert.

Η παράγραφος 1.6 αφιερώνεται στο Μέσο Εργοδικό Θεώρημα του Riesz για μια μη επεκτατική γραμμική απεικόνιση πάνω από ένα ομοιόμορφα κυρτό χώρο Banach.

Το υπόλοιπο μέρος του Κεφ. 1 αφιερώνεται στην παρουσίαση αποτελεσμάτων της τοπολογικής θεωρίας σταθερού σημείου όπου καθοριστικό ρόλο παίζουν οι τοπολογικές ιδιότητες του χώρου και των απεικονίσεων. Η έννοια της συμπάγειας κυριαρχεί προς αυτή την κατεύθυνση.

Τα θεμελιώδη θεωρήματα της τοπολογικής θεωρίας σταθερού σημείου είναι το περίφημο Θ. Brower και η απειροδιάστατη γενίκευσή του – Θ. Schauder- τα οποία παρατίθενται στις παραγράφους 1.7, 1.8. Στις ίδιες παραγράφους παρουσιάζονται και κάποιες συνέπειες του Θ. Schauder, π.χ. Θ. Schaefer και Θ. Krasnoselskii (για σταθερά σημεία αθροίσματος δύο απεικονίσεων με κατάλληλες τοπολογικές ιδιότητες). Η παράγραφος 1.8 κλείνει με το εντυπωσιακό Θ. Klee που αποτελεί μια αντίστροφη εκδοχή του Θ. Schauder.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην παράγραφο 1.9 (τελευταία παράγραφο του Κεφ. 1) διατυπώνονται για τοπικά κυρτούς τοπολογικούς γραμμικούς χώρους και περιλαμβάνουν κυρίως τα θεωρήματα Markov-Kakutani και Kakutani-Ky Fan. Το Θ. Markov-Kakutani εξασφαλίζει την ύπαρξη κοινού σταθερού σημείου για μια αβελιανή ομάδα γραμμικών συνεχών τελεστών από ένα συμπαγές κυρτό σύνολο στον εαυτό του.

Το Θ. Kakutani-Ky Fan είναι μια πλειονότιμη εκδοχή του Θ. Schauder.

Το Κεφ. 2 αφιερώνεται εξ ολοκλήρου στην παρουσίαση επιλεγμένων εφαρμογών της θεωρίας σταθερού σημείου (κάποιες από αυτές δεν είναι τόσο ευρέως γνωστές).

Στις παραγράφους 2.1 -2.3 παρατίθενται εφαρμογές στην ποιοτική θεωρία διαφορικών εξισώσεων με έμφαση στα θεωρήματα Picard και Schauder (ως εφαρμογές των Θ. Banach και Schauder αντίστοιχα).

Στην παράγραφο 2.4 και με χρήση του Θ.Schauder, αποδεικνύεται το περίφημο Θ. Lomonov που αφορά στην ύπαρξη υπεραναλλοίωτου υπόχωρου για ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή πάνω από ένα χώρο Banach που αντιμετατίθεται με συμπαγή τελεστή.

Το Κεφ. 2 κλείνει με εφαρμογές στη θεωρία παιγνίων (παράγραφος 2.5): με χρήση του Θ. Ky-Fan αποδεικνύονται τα Θ. Nash και Θ. Von Neumann που αφορούν στην ισορροπία Nash.

Abstract

Fixed point theory(FPT) is one of the most important branches of Nonlinear Analysis. Through FPT we derive numerous existence theorems(for non linear problems) that correspond to equations and inclusions(multivalued problems). The tools being used are coming both from Analysis and Topology and that's why FTP is usually divided into "metric theory of fixed points"and "topological theory of fixed points".

The first half of Chapter 1 includes the results concerning metric theory of fixed points. The structure of the metric space and the metric properties of the functions being involved in the problems are of vital importance.

In paragraphs 1.1 and 1.2 we present fixed point theorems for contractive mappings. The most typical example is the famous Banach's fixed point theorem which constitutes an abstract version of what is known from differential equations theory as method of successive approximations. We also prove some important extensions of this theorem with emphasis on Caristi's theorem.

Section 1.3 contains results about weak contractions and in addition the Bessaga theorem that constitutes a converse version of Banach's theorem.

In paragraph 1.4 we consider the problem of convergence of fixed points for a sequence of maps over a metric space.

In paragraph 1.5 we state the Browder-Kirk theorem for non-expansive maps over uniformly convex Banach spaces and we give a proof for Hilbert spaces.

Section 1.6 is entirely devoted to Riesz mean ergodic theorem for non expansive linear maps over a uniformly convex Banach space.

The rest of Chapter 1 is devoted to the presentation of results of topological fixed point theory , where the topological properties(particularly the notion of compactness) play an important role.

The fundamental theorems of topological fixed point theory are the seminal Brouwer’s theorem and its infinite dimensional extension –Schauder's theorem, both of which are presented in sections 1.7, 1.8. In the same paragraphs we also present some consequences of Schauder theorem, in particular Schaefer's theorem and Krasnoselskii's theorem. We conclude section 1.8 with Klee's theorem which constitutes an inverse version of Schauder's theorem.

The results presented in section 1.9 are formulated for locally convex topological linear spaces and include mainly the theorem of Markov-Kakukatani and the theorem of Kakutani-Ky Fan. The first theorem ensures the existence of common fixed point for an Abelian group of continuous linear operators from a compact convex set to itself while the later is a multivalued version of Schauder's theorem.

Chapter 2 is entirely devoted to the presentation of selected applications of fixed point theory(some of them are not so widely known).

In Sections 2.1 - 2.3 we list some applications in qualitative theory of differential equations with emphasis on Picard’s and Peano’s theorems (as applications of Th. Banach and Schauder respectively).

In paragraph 2.4 and by using Schauder's theorem we prove the celebrated Lomonosov’s theorem that provides the existence of hyperinvariant subspaces for a linear bounded operator over a Banach space who commutes with a compact operator.

We conclude Chapter 2 with some applications in Game Theory : using Ky-Fan's theorem we prove Nash's theorem and Von Neumann's theorem regarding Nash equilibrium.

Περιεχόμενα

Συμβολισμοί

Έστω X χώρος με νόρμα και $x \in X, r > 0$, τότε :

$$B_X(x,r) = \{y \in X : ||y-x|| < r\}$$

$$\overline{B}_X(x,r) = \{y \in X : ||y-x|| \leq r\}$$

$$\partial B_X(x,r) = \{y \in X : ||y-x|| = r\}.$$

Για υποσύνολο $Y \subset X$ συμβολίζουμε $\overline{Y}$ την κλειστότητα του Y,$Y^{\complement}$ το συμπλήρωμα, $span(Y)$ τον γραμμικό χώρο που παράγεται απο τον Y και $co(Y)$ την κυρτή θήκη του Y, δηλαδή το σύνολο όλων των πεπερασμένων κυρτών συνδυασμών στοιχείων του Y.

Ένας χώρος Banach καλείται *ομοιόμορφα κυρτός* αν για $x_n, y_n \in X, n \geq 1$ με $||x_n|| \leq 1,\ ||y_n|| \leq 1,\ \lim_{n\to\infty} ||x_n + y_n|| = 2$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - y_n|| = 0.$$

Ειδικότερα, από τον ορισμό προκύπτει ότι οι minimizing ακολουθίες σε κλειστούς κυρτούς χώρους συγκλίνουν. Συγκεκριμένα, αν $C \subset X$ μη κενό, κλειστό, κυρτό και υπάρχει $x_n \in C$ ώστε $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = \inf_{y\in C} ||y||$, τότε υπάρχει μοναδικό $x \in C$ ώστε

$$||x|| = \inf_{y\in C} ||y|| \text{ και } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Μια ασθενέστερη εκδοχή είναι η αυστηρή κυρτότητα. Ένας χώρος Banach καλείται *αυστηρά κυρτός*, αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, η σχέση $||x|| = ||y|| \leq 1$ συνεπάγεται ότι $||x+y|| \leq 2$. Από τον ορισμό προκύπτει ότι ένας ομοιόμορφα κυρτός χώρος θα είναι και αυστηρά κυρτός.

Ακόμα θα ασχοληθούμε με τοπικά κυρτούς χώρους. Ένας τοπικά κυρτός χώρος X είναι ενας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με μια οικογένεια διαχωριστικών ημινορμών $\mathbb{P}$. Έτσι για κάθε στοιχείο $x \in X$ υπάρχει ημινόρμα $p \in \mathbb{P}$ ώστε $p(x) = 0$.

Κεφάλαιο 1

Θεωρήματα σταθερών σημείων

1.1 Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach

Ορισμός
Έστω X μετρικός χώρος εφοδιασμένος με μετρική d. Η συνάρτηση

$$f : X \to X$$

θα καλείται Lipschitz συνεχής αν υπάρχει σταθερά $\lambda \geq 0$ ώστε

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

- Αν $\lambda = 1$, τότε θα λέμε ότι η f είναι μη επεκτατική.
- Αν $\lambda < 1$, τότε θα λέμε ότι η f είναι συστολή.

Ορισμός
Για $f : X \to X$ και $n \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε με f^n τη σύνθεση της f, δηλαδή

$$f^n \doteq \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n}$$

Με f^0 θα συμβολίζουμε την ταυτοτική απεικόνιση.
Θεώρημα 1 (Banach)
Έστω f συνάρτηση συστολή στον πλήρη μετρικό χώρο X. Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο $\dot{x} \in X$.

Απόδειξη:

Έστω $x_0 \in X$. Ορίζουμε την αναδρομική ακολουθία

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Σημειώνουμε ότι από τον ορισμό της αναδρομικής σχέσης προκύπτει

$$x_{n+1} = f^n(x_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε φυσικό n και τυχαίο $x_0 \in X$ ισχύει η σχέση

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n d(f(x_0), x_0).$$

Πράγματι, με επαγωγή στο n έχουμε :

$$d\big(f(x_0), f^2(x_0)\big) = d\Big(f(x_0), f\big(f(x_0)\big)\Big) \leq \lambda d\big(x_0, f(x_0)\big).$$

Αν υποθέσουμε ότι,

$$d\big(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)\big) \leq \lambda^n d\big(x_0, f(x_0)\big)$$

τότε :

$$\begin{aligned} d\big(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)\big) &= d\Big(f\big(f^n(x_0)\big), f\big(f^{n+1}(x_0)\big)\Big) \\ &\leq \lambda d\big(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)\big) \\ &\leq \lambda \cdot \lambda^n d\big(x_0, f(x_0)\big) \\ &= \lambda^{n+1} \cdot d\big(x_0, f(x_0)\big). \end{aligned}$$

Ακόμα, για n φυσικό και $m \geq 1$ έχουμε :

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (\lambda^{n+m-1} + ... + \lambda^n) d\big(f(x_0), x_0\big) \\ &\leq \lambda^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\right) d\big(f(x_0), x_0\big) \\ &= \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d\big(f(x_0), x_0\big), \qquad \star \end{aligned}$$

αφού η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j$ συγκλίνει.

Όμως $\lambda^n \to 0$, άρα η x_n είναι Cauchy και επειδή ο X είναι πλήρης, θα συγκλίνει σε κάποιο $\dot{x} \in X$.
Αφού η f είναι συνεχής, από την αρχή μεταφοράς έχουμε :

$$f(\dot{x}) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \dot{x}.$$

Η μοναδικότητα προκύπτει άμεσα, αφού αν είχαμε 2 σταθερά σημεία x, y τότε :

$$d(x, y) = d\big(f(x), d(f(y)\big) \leq \lambda d(x, y).$$

Συνεπώς (αφού $0 < \lambda < 1$), $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. ♦

Παρατηρήσεις

- Το συμπέρασμα δεν ισχύει γενικά για μη επεκτατικές συναρτήσεις $f : X \to X$.

  Για παράδειγμα, ο $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική είναι πλήρης και η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 1$ ικανοποιεί την $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, ενώ η f δεν έχει σταθερό σημείο.

- Η υπόθεση της πληρότητας δεν μπορεί παραλειφθεί.

  Για παράδειγμα, η $g : (0,1) \to (0,1)$, με $g(x) = \frac{x}{2}$ είναι συστολή με $\lambda = 1/2$ αλλά δεν έχει σταθερό σημείο.

Σημείωση
Από τη σχέση $\star$ με $m \to \infty$, λαμβάνουμε

$$d(x_n, \dot{x}) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x_0), x_0).$$

Πόρισμα 1
Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και Y τοπολογικός χώρος και

$$f : X \times Y \to X$$

συνεχής συστολή με την εξής ιδιότητα :

$$d(f(x_1, y), f(x_2, y)) \leq \lambda d(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X, \ \forall y \in Y.$$

Τότε για κάθε σταθερό $y \in Y$, η απεικόνιση $x \to f(x, y)$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο $\phi(y)$. Ακόμα η $y \to \phi(y)$ είναι συνεχής από τον Y στον X.

Απόδειξη:

Το πρώτο συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το θεώρημα 1.
Θα αποδείξουμε τη συνέχεια της ϕ.
Έστω $y, y_0 \in Y$. Τότε :

$$d\big(\phi(y), \phi(y_0)\big) = d\Big(f\big(\phi(y), y\big), f\big(\phi(y_0), y_0\big)\Big)$$

$$\leq d\Big(f\big(\phi(y), y\big), f\big(\phi(y_0), y\big)\Big) + d\Big(f\big(\phi(y_0), y\big), f\big(\phi(y_0), y_0\big)\Big)$$

$$\leq \lambda d\Big(\phi(y), \phi(y_0)\Big) + d\Big(f\big(\phi(y_0), y\big), f\big(\phi(y_0), y_0\big)\Big).$$

Άρα

$$d\big(\phi(y), \phi(y_0)\big) \leq \frac{1}{1-\lambda} d\Big(f\big(\phi(y_0), y\big), f\big(\phi(y_0), y_0\big)\Big).$$

Το δεξί μέλος $\to 0$ για $y \to y_0$, άρα $\phi(y) \to \phi(y_0)$. ♦

Παρατήρηση
Το θεώρημα Banach δίνει ικανή συνθήκη για την ύπαρξη σταθερού σημείου. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} 1/2 + 2x & x \in [0, 1/4] \\ 1/2 & x \in (1/4, 1]. \end{cases}$$

Η g απεικονίζει το $[0, 1]$ στον εαυτό του. Παρατηρούμε ότι η g δεν είναι συνεχής αλλά έχει μοναδικό σταθερό σημείο το $x = 1/2$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια γενίκευση του θεωρήματος 1.

Πόρισμα 2
Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to X$. Αν για κάποιο $n \geq 1$ η f^n είναι συστολή, τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Απόδειξη:

Απο το θεώρημα 1 έπεται ότι η f^n έχει μοναδικό σταθερό σημείο $\dot{x}$.
Παρατηρούμε επίσης ότι :

$$f^n\big(f(\dot{x})\big) = f^{n+1}(\dot{x}) = f\big(f^n(\dot{x})\big) = f(\dot{x}).$$

Δηλαδή και το $f(\dot{x})$ είναι σταθερό σημείο της $f^n(x)$, άρα από τη μοναδικότητα :

$$f(\dot{x}) = \dot{x}.$$

Συνεπώς, η f έχει σταθερό σημείο το οποίο είναι μοναδικό, αφού αν είχε 2 σταθερά σημεία τότε και η f^n θα ειχε 2 σταθερά σημεία, άτοπο. ♦

Για τη συνάρτηση g που ορίσαμε προηγουμένως, βλέπουμε ότι $g^2(x) \equiv 1/2$.

Σημείωση
Το θεώρημα Banach ισχύει για κάθε $K \subset X$ με K κλειστό και X πλήρη μετρικό χώρο. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο πλήρους μετρικού χώρου είναι πλήρης χώρος. Άρα, ορίζοντας τη συστολή $f : K \to K$, η f έχει σταθερό σημείο στο K.

1.2 Θεώρημα Boyd-Wong

Σε αυτή τη παράγραφο παρουσιάζουμε τα θεωρήματα Boyd-Wong και Caristi. Όπως θα δούμε, το θεώρημα Banach είναι ειδική περίπτωση αυτών.

Θεώρημα 2 (Boyd-Wong)
Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνεχής

$$\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$$

ώστε $\phi(r) < r$ αν $r > 0$, και

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq \phi\big(d(x, y)\big), \quad \forall x, y \in X.$$

Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.Επιπλέον, η ακολουθία $x_n = f^n(x_0)$ συγκλίνει σε αυτό για κάθε x_0.

Σημείωση:
Για $\phi(r) = \lambda r$ παίρνουμε το θεώρημα 1.

Απόδειξη:

Αν x_1, x_2 διαφορετικά σταθερά σημεία τότε :

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \phi(d(x_1, x_2)) < d(x_1, x_2), \text{ άτοπο.}$$

Έστω $x_0 \in X$ και ορίζουμε την ακολουθία $x_{n+1} = f(x_n)$. Θα δείξουμε ότι η x_n είναι βασική. Από την υπόθεση η f είναι Lipschitz, άρα συνεχής.

Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την ακολουθία θετικών όρων $a_n = d(x_{n+1}, x_n)$ και :

$$a_{n+1} = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq \phi(d(x_{n+1}, x_n)) = \phi(a_n) \leq a_n.$$

Άρα η a_n είναι κάτω φραγμένη από το 0 και φθίνουσα, συνεπώς συγκλίνει σε κάποιο $a \geq 0$.
Από κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει :

$$\phi(a_n) \to a.$$

Επιπλέον από τη συνέχεια της φ, το θεώρημα μεταφοράς δίνει :

$$a_n \to a \Rightarrow \phi(a_n) \to \phi(a).$$

Άρα από τη μοναδικότητα του ορίου σε μετρικούς χώρους παίρνουμε :

$$\phi(a) = a.$$

Έτσι, προκύπτει $a = 0$.
Πράγματι, σε αντίθετη περίπτωση θα ίσχυε $a > 0 \Rightarrow \phi(a) < a$, άτοπο.

Έστω ότι η x_n δεν είναι βασική. Τότε, υπάρχουν $\epsilon > 0$ και θετικοί ακέραιοι $m_k \geq n_k \geq k$ ώστε :

$$d_k \doteq d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \epsilon, \quad \forall k \geq 1.$$

Για k αρκετά μεγάλο, υποθέτουμε

$$d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) < \epsilon, \quad (\text{ αφού } a_n \to 0 \text{ }).$$

Ακόμα ισχύει :

$$\epsilon \leq d_k \leq d(x_{m_k}, x_{m_{k-1}}) + d(x_{m_{k-1}}, x_{n_k}) < a_{m_{k-1}} + \epsilon$$

Άρα $d_k \to \epsilon$ όταν $k \to \infty$.

Επίσης :

$$\begin{aligned} d_k &\leq d(x_{m_k}, x_{m_{k+1}}) + d(x_{m_{k+1}}, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \\ &= a_{m_k} + d\big(f(x_{m_k}), f(x_{n_k})\big) + a_{n_k} \\ &\leq a_{m_k} + \phi(d_k) + a_{n_k} \end{aligned}$$

Με $k \to \infty$ λαμβάνουμε $\epsilon \leq \phi(\epsilon)$, άτοπο αφού $\epsilon > 0$.

Συνοψίζοντας, η x_n είναι Cauchy στον πλήρη χώρο X και η f είναι συνεχής, άρα όπως και στο θεώρημα 1 προκύπτει το συμπέρασμα. ♦

Θεώρημα 3 (Caristi)
Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάτω ημισυνεχής συνάρτηση

$$\psi : X \to [0, \infty)$$

ώστε

$$d(x, f(x)) \leq \psi(x) - \psi(f(x)), \quad \forall x \in X.$$

Τότε, η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στον X.

Σημείωση
Για $\psi(x) = \frac{d(x,f(x)))}{1-\lambda}$ παίρνουμε το θεώρημα 1.

Απόδειξη:

Αρχικά σημειώνουμε ότι αφού η ψ είναι κάτω ημισυνεχής, το σύνολο $\{x : \psi(x) > b\}$ είναι ανοικτό στο X για κάθε $b \in \mathbb{R}$.

Ως συνέπεια του ορισμού έχουμε ότι $\forall\ (x_n) \subseteq X$ και $\forall\ \dot{x} \in X$ ισχύει :

$$x_n \to \dot{x} \Rightarrow \psi(\dot{x}) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \psi(x_n).$$

Εισάγουμε τη σχέση μερικής διάταξης στον X ως εξής :

$$x \preceq y \Leftrightarrow d(x,y) \leq \psi(x) - \psi(y).$$

Έστω $X_0 \subset X$ μη κενό, ολικά διατεταγμένο υποσύνολο και $(x_n) \subseteq X_0$ ώστε :

$$\psi(x_{n+1}) \leq \psi(x_n) \ \text{ και } \ \psi(x_n) \to a,$$

όπου

$$a = \inf \{\psi(x) : x \in X_0\}.$$

Αφού ο X_0 είναι ολικά διατεταγμένος, θα ισχύει :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} \preceq x_n \ \text{ ή } \ x_n \preceq x_{n+1}.$$

Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x_{n+1} \preceq x_n$, τότε

$$d(x_{n+1},\ x_n) \leq \psi(x_{n+1}) - \psi(x_n) \leq 0 \quad \Rightarrow x_{n+1} = x_n.$$

Άρα, $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \preceq x_{n+1} \Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(x_n) - \psi(x_{n+1}).$$

Επομένως, αν $n \in \mathbb{N}$ και $m \geq 1$ παίρνουμε :

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \sum_{i=0}^{m-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \leq \sum_{i=0}^{m-1} [\psi(x_{n+i}) - \psi(x_{n+i+1})]$$

$$= \psi(x_n) - \psi(x_{n+m}) \overset{n,\ m\to\infty}{\to} 0.$$

Άρα, η ακολουθία (x_n) είναι βασική.

Αφού ο X είναι πλήρης $\exists\ \dot{x} \in X : x_n \to \dot{x}$. Επειδή η ψ είναι κάτω ημισυνεχής θα ισχύει :

$$\psi(\dot{x}) = a = \lim_{n\to\infty} \psi(x_n).$$

Έστω $x \in X_0$ με $d(x, \dot{x}) > 0$. Θα δείξω οτι το $\dot{x}$ είναι άνω φράγμα του $(X_0, \preceq)$.

Αν ίσχυε $x_n \preceq x$ τελικώς, τότε :

$$d(x_n, x) \leq \psi(x_n) - \psi(x), \quad \text{τελικώς}$$

και περνώντας στο όριο καθώς $n \to \infty$,

$$0 < d(\dot{x}, x) \le \psi(\dot{x}) - \psi(x) \le 0,$$

άτοπο!
Συνεπώς, περνώντας σε υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$x \preceq x_n \Rightarrow d(x, x_n) \le \psi(x) - \psi(x_n).$$

Για $n \to \infty$ παίρνουμε

$$d(x, \dot{x}) \le \psi(x) - \psi(\dot{x})$$

δηλαδή

$$x \preceq \dot{x}.$$

Επομένως, το $\dot{x}$ είναι ένα άνω φράγμα για το X_0 ως προς την $\preceq$.

Από το λήμμα του $Zorn$ υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο $\bar{x}$ του $(X, \preceq)$.
Ταυτόχρονα :

$$d\big(\bar{x}, f(\bar{x})\big) \le \psi(\bar{x}) - \psi\big(f(\bar{x})\big) \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \preceq f(\bar{x}).$$

Όμως το $\bar{x}$ είναι μεγιστικό στοιχείο, άρα πρέπει υποχρεωτικά :

$$\bar{x} = f(\bar{x}). \quad \blacklozenge$$

Σημείωση
Στην παραπάνω απόδειξη δεν έχουμε κάνει κάποια υπόθεση για τη συνέχεια της f.

Θεώρημα 4
Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και συνεχής $f : X \to X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει

$$\psi : X \to [0, \infty)$$

ώστε

$$d(x, f(x)) \le \psi(x) - \psi(f(x)), \quad \forall x \in X.$$

Τότε η f έχει σταθερό σημείο στον X. Επιπλέον, για κάθε $x_0 \in X$, η ακολουθία $f^n(x_0)$ συγκλίνει σε σταθερό σημείο της f.

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in X$ και ορίζουμε

$$x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow x_n = f^n(x_0).$$

Η ακολουθία $\psi(x_n) = \psi\big(f^n(x_0)\big)$ είναι φθίνουσα :

$$0 \leq d\big(x_n, f(x_n)\big) \leq \psi(x_n) - \psi\big(f(x_n)\big) = \psi(x_n) - \psi(x_{n+1}).$$

Ακόμα η ψ είναι κάτω φραγμένη από το 0 άρα συγκλίνουσα. Δείχνουμε ότι η (x_n) είναι βασική :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq \sum_{i=0}^{m-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) = \sum_{i=0}^{m-1} d\big(x_{n+i}, f(x_{n+i})\big) \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} [\ \psi(x_{n+i}) - \psi(x_{n+i+1})\ ] \\ &= \psi(x_n) - \psi(x_{n+m}) \overset{n,\, m \to \infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

άρα η (x_n) είναι βασική στον πλήρη X, επομένως

$$\exists\, \dot{x} \in X : x_n \to \dot{x}.$$

Από τη συνέχεια της f παίρνουμε :

$$f(\dot{x}) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \dot{x}.$$

Άρα το $\dot{x}$ είναι σταθερό σημείο της f και επιπλέον η ακολουθία $f^n(x_0)$ συγκλίνει στο $\dot{x}$, $\forall\, x_0 \in X$. ♦

Κλείνοντας την παράγραφο, παρουσιάζουμε ακόμα μια γενίκευση του θεωρήματος Banach, χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 5
Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to X$ ώστε :

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda max\,\{d(x_1, x_2), d(x_1, f(x_1)), d(x_2, f(x_2)), d(x_1, f(x_2)), d(x_2, f(x_1))\}$$

για κάποιο $\lambda < 1$ και $\forall x_1, x_2 \in X$. Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο και ισχύει $d(f^n(x_0), \dot{x}) = O(\lambda^n)$, $\forall\, x_0 \in X$.

1.3 Ασθενείς συστολές

Ορισμός
Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \to X$ λέγεται *ασθενής συστολή* αν :

$$d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y), \quad \forall\, x \neq y \in X.$$

Το ερώτημα είναι αν μια ασθενής συστολή f έχει σταθερό σημείο. Γενικά, η απάντηση είναι αρνητική και το βλέπουμε με το εξής παράδειγμα:

Θεωρούμε τον πλήρη μετρικό χώρο $X = [0, \infty)$ και την $f : X \to X$ με :

$$f(x) = x + 1/x\ .$$

Τότε η f είναι ασθενής συστολή αλλά δεν έχει σταθερά σημεία.

Παρ' όλ' αυτά, εάν ο X είναι συμπαγής, τότε έχουμε συμπέρασμα για την ύπαρξη σταθερού σημείου, όπως θα δούμε στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 6
Έστω f ασθενής συστολή στον συμπαγή μετρικό χώρο X. Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο στον X. Επιπλέον, η $f^n(x_0)$ συγκλίνει στο σταθερό σημείο για κάθε επιλογή του $x_0 \in X$.

Απόδειξη.

Ορίζουμε την συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$x \mapsto d(x, f(x)).$$

Έστω $(x_n) \subseteq X$ συγκλίνουσα ακολουθία με

$$x_n \to x.$$

Τότε:

$$\begin{aligned} |g(x_n) - g(x)| &= |d\big(x_n, f(x_n)\big) - d\big(x, f(x)\big)| \\ &\leq d(x_n, x) + d\big(f(x_n), f(x)\big) \\ &< d(x_n, x) + d(x_n, x) \overset{n\to\infty}{\to} 0, \end{aligned}$$

άρα

$$g(x_n) \to g(x).$$

Επομένως, η g είναι συνεχής.
Σημειώνουμε ότι σε κάθε μετρικό χώρο ισχύει :

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w).$$

Αφού ο X είναι συμπαγής, τότε η συνεχής συνάρτηση g θα παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $\dot{x} \in X$. Αν ισχύει $\dot{x} \neq f(\dot{x})$, τότε :

$$d\big(\dot{x}, f(\dot{x})\big) = \min_{x\in X} \{d(x, f(x))\} \leq d\Big(f(\dot{x}), f\big(f(\dot{x})\big)\Big) < d\big(\dot{x}, f(\dot{x})\big), \text{ άτοπο.}$$

Ακόμα είναι μοναδικό, αφού σε αντίθετη περίπτωση θα υπήρχαν δύο διαφορετικά σταθερά σημεία x, y ώστε :

$$d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y) \text{ με } x \neq y, \text{ άτοπο .}$$

Φυσικά, το σταθερό σημείο της f είναι και σταθερό σημείο της $f^n, \forall\ n \geq 2$.

Έστω $x_0 \in X$ με $x_0 \neq \dot{x}$. Ορίζουμε την ακολουθία

$$d_n = d\big(f^n(x_0), \dot{x}\big)$$

η οποία είναι φθίνουσα αφού :

$$d_{n+1} = d\big(f^{n+1}(x_0), \dot{x}\big) < d(f^n(x_0), \dot{x}) = d_n\ .$$

Άρα θα συγκλίνει σε κάποιο $r \geq 0$. Αν $f^{n_k}(x_0)$ υπακολουθία της $f^n(x_0)$ που συγκλίνει σε κάποιο $z \in X$ τότε έχουμε :

$$\begin{aligned} r = d(\dot{x}, z) &= \lim_{k\to\infty} d_{n_k} = \lim_{k\to\infty} d_{n_{k+1}} \\ &= \lim_{k\to\infty} d\Big(f\big(f^{n_k}(x_0)\big), \dot{x}\Big) \\ &= d\big(f(z), \dot{x}\big). \end{aligned}$$

Αν ισχύει $z \neq \dot{x}$, τότε :

$$d\big(f(z), \dot{x}\big) = d\big(f(z), f(\dot{x})\big) < d(z, \dot{x}), \text{ άτοπο λόγω της άνω σχέσης.}$$

Άρα, κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία της $f^n(x_0)$ συγκλίνει στο $\dot{x}$. Αφού ο X είναι συμπαγής, η $f^n(x_0)$ θα συγκλίνει στο $\dot{x}$.♦

Πόρισμα 3
Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$. Αν f^n ασθενής συστολή για κάποιο $n \geq 1$, τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο $\dot{x} \in X$.

Απόδειξη
Ίδια τεχνική με αυτή του πορίσματος 2. ♦

Θα παρουσιάσουμε μια αντίστροφη εκδοχή του θεωρήματος 1. Υποθέτουμε ότι δίνονται σύνολο X και συνάρτηση $f : X \to X$. Μας ενδιαφέρει να βρούμε μια μετρική d ώστε ο (X, d) να είναι πλήρης μετρικός χώρος και η f να είναι συστολή στον X.

Θεώρημα (Bessaga)
Έστω X τυχαίο σύνολο και συνάρτηση $f : X \to X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $z \in X$ τέτοιο ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$, η f^n έχει μοναδικό σταθερό σημείο το z. Τότε για κάθε $\epsilon \in (0,1)$ υπάρχει μετρική $d = d_\epsilon$ ώστε ο X να είναι πλήρης και f συστολή με σταθερά $Lipschitz$ μικρότερη ή ίση του ϵ.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω

Λήμμα
Έστω X τυχαίο σύνολο, $\epsilon \in (0,1)$ και $f : X \to X$ συνάρτηση. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
(i) υπάρχει πλήρης μετρική d στον X τέτοια ώστε η f να είναι $\epsilon-$ συστολή.
(ii) υπάρχει συνάρτηση $\varphi : X \to [0, +\infty)$ τέτοια ώστε $\varphi^{-1}(\{0\})$ μονοσύνολο και

$$\varphi(fx) \ \leq \ \epsilon\varphi x, \quad \forall\, x \in X.$$

Απόδειξη:
[(i) $\Longrightarrow$ (ii)] Έστω $\bar{x}$ το μοναδικό σταθερό σημείο της f.
Θέτουμε $\varphi(z) = d(z, \bar{x}),\ z \in X$. Προφανώς $\varphi^{-1}(\{0\})$ μονοσύνολο και $\forall\, z \in X$,

$$\varphi(fz) = d(fz, \bar{x}) = d(fz, f\bar{x}) \ \leq \ \epsilon d(z, \bar{x}) = \epsilon\varphi(z).$$

[(ii) $\Longrightarrow$ (i)] Έστω φ όπως στην υπόθεση.
Θέτουμε

$$d(x, x) = 0, \quad \forall\, x, \quad d(x, y) = \varphi x + \varphi y, \quad \forall\, x \neq y.$$

Επειδή $\varphi \geq 0$ και $\varphi^{-1}(\{0\})$ μονοσύνολο, επαληθεύεται εύκολα ότι η d είναι μετρική.
Επιπλέον, $\forall\, x, y \in X$,

$$d(fx, fy) \ = \ \varphi fx + \varphi fy \ \leq \ \epsilon(\varphi x + \varphi y) = \epsilon d(x, y),$$

οπότε f $\epsilon-$ συστολή.

Απομένει να δείξουμε ότι ο (X, d) είναι πλήρης.

Έστω $(x_n) \subseteq X$ βασική. Θα δείξουμε ότι συγκλίνει. Αρκεί να δείξουμε ότι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

–Εάν το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πεπερασμένο, τότε η (x_n) έχει σταθερή υπακολουθία και άρα συγκλίνουσα.

–Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο. Τότε, περνώντας σε υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_n \neq x_m,\ \forall\, n \neq m$.
Θέτουμε $\{z\} = \varphi^{-1}(\{0\})$. Θα δείξουμε ότι $x_n \to z$.

Έχουμε
$$\varphi x_n + \varphi x_m = d(x_n, x_m) \overset{n,\, m \to \infty}{\to} 0$$
οπότε $\varphi x_n \overset{n \to \infty}{\to} 0$. Επομένως,
$$d(x_n, z) = \varphi x_n + \varphi z = \varphi x_n \overset{n \to \infty}{\to} 0$$
και άρα $x_n \to z$. ♦

Απόδειξη του Θ. Bessaga:
Θεωρούμε το σύνολο Φ όλων των ζευγών (D, φ) που ικανοποιούν τα παρακάτω:
$$\emptyset \neq D \subseteq X, \quad z \in D, \quad \varphi : D \to \mathbb{R}_+, \quad f(D) \subseteq D, \quad \varphi^{-1}(\{0\}) = \{z\}$$
και
$$\varphi f x \ \leq \ \epsilon \varphi x, \quad \forall \, x \in D.$$
Είναι $\Phi \neq \emptyset$. Πράγματι, αν θέσουμε $D_* = \{z\}$ και $\varphi_*(z) = 0$, τότε
$\varphi f z = \varphi z = 0 = \epsilon \varphi z$ κι επομένως $(D_*, \varphi_*) \in \Phi$.

Στο σύνολο Φ ορίζουμε τη σχέση διάταξης $(\preceq)$ ως εξής:
$\forall \, (D_1, \varphi_1), \ (D_2, \varphi_2) \in \Phi$,
$$(D_1, \varphi_1) \ \preceq \ (D_2, \varphi_2) \Longleftrightarrow [\, D_1 \subseteq D_2, \quad \varphi_2 \,|_{D_1} = \varphi_1. \,]$$

Ισχυρισμός 1: Το $(\Phi, \preceq)$ έχει maximal στοιχείο.
Πράγματι, έστω $(D_i, \ \varphi_i)_{i \in I}$ ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $(\Phi, \preceq)$.
Θέτουμε $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ και ορίζουμε $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ με
$$\varphi x = \varphi_i x, \quad \forall \, x \in D_i.$$
Επειδή $(D_i, \ \varphi_i)_{i \in I}$ ολικά διατεταγμένο, η φ είναι καλώς ορισμένη και προφανώς $(D, \varphi) \in \Phi$. Επιπλέον, το (D, φ) είναι άνω φράγμα του $(D_i, \ \varphi_i)_{i \in I}$ ως προς τη διάταξη $(\preceq)$.
Το συμπέρασμα του Ισχυρισμού έπεται από το Λήμμα του Zorn.

Για τη συνέχεια, θεωρούμε maximal στοιχείο $(D_0, \ \varphi_0)$ του $(\Phi, \preceq)$.
Θα δείξουμε ότι $D_0 = X$, οπότε το συμπέρασμα του θεωρήματος θα προκύψει από το προηγούμενο λήμμα.
Υποθέτουμε αντιθέτως ότι υπάρχει $x_0 \in X \setminus D_0$.
Θέτουμε $S(x_0) = \{ \ f^n(x_0) : n \geq 1 \ \}$.

Ισχυρισμός 2: $S(x_0) \cap D_0 \neq \emptyset$.
Υποθέτουμε αντιθέτως ότι $S(x_0) \cap D_0 = \emptyset$.
Τότε, τα στοιχεία του συνόλου $S(x_0)$ είναι ανά δύο διαφορετικά.

[Πράγματι, έστω ότι $f^k(x_0) = f^\rho(x_0)$, για κάποια k, $\rho \geq 1$ με $k > \rho$. Αν $j = k - \rho$, τότε $j \geq 1$ και

$$f^j(f^\rho x_0) = f^\rho x_0 \quad \Rightarrow \ f^\rho x_0 = z \quad \Rightarrow z \in S(x_0) \cap D_0,$$

άτοπο.]
Θέτουμε $D = D_0 \cup S(x_0)$ και ορίζουμε $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ με

$$\varphi \mid_{D_0} = \varphi_0 \ , \quad \varphi(f^n x_0) = \epsilon^n, \quad \forall \ n \geq 1.$$

Είναι $f(S(x_0)) \subseteq S(x_0)$, $f(D_0) \subseteq D_0$, οπότε $f(D) \subseteq D$ και

$$\varphi^{-1}(\{0\}) \subseteq D_0 \ \Rightarrow \ \varphi^{-1}(\{0\}) = \varphi_0^{-1}(\{0\}) = \{z\}.$$

Επιπλέον, $\forall \ n \geq 1$,

$$\varphi(f f^n x_0) = \varphi(f^{n+1} x_0) = \epsilon^{n+1} = \epsilon \cdot \epsilon^n = \epsilon \varphi(f^n x_0).$$

Συνεπώς, $(D, \varphi) \in \Phi$ και $D_0 \subseteq D$, $D \neq D_0$, άτοπο, διότι το $(D_0, \ \varphi_0)$ είναι maximal στοιχείο του $(\Phi, \preceq)$.

Λόγω του Ισχυρισμού 2, έχουμε $S(x_0) \cap D_0 \neq \emptyset$. Θέτουμε

$$m = \min\{ \ n \geq 1 : f^n x_0 \in D_0 \ \}.$$

Τότε, $f^m x_0 \in D_0$, $f^{m-1} x_0 \notin D_0$.
Θέτουμε $D = D_0 \cup \{f^{m-1} x_0\}$ και ορίζουμε $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ με

$$\varphi \mid_{D_0} = \varphi_0 \ , \quad \varphi(f^{m-1} x_0) = 1, \quad \text{εάν } z = f^m x_0, \quad \varphi(f^{m-1} x_0) = \frac{\varphi_0(f^m x_0)}{\epsilon}, \quad \text{εάν } z \neq f^m x_0 \ .$$

Επειδή $\varphi_0^{-1}(\{0\}) = \{z\}$, από τον τρόπο που ορίζεται η φ προκύπτει ότι

$$\varphi(f^{m-1} x_0) \neq 0 \Rightarrow \varphi^{-1}(\{0\}) \subseteq D_0 \ \Rightarrow \ \varphi^{-1}(\{0\}) = \varphi_0^{-1}(\{0\}) = \{z\}.$$

Επιπλέον, $f(D) = f(D_0) \cup \{f^m x_0\} \subseteq D_0$ και

– εάν $z \neq f^m x_0$, τότε $\varphi(f f^{m-1} x_0) = \varphi(f^m x_0) = \varphi_0(f^m x_0) = \epsilon \varphi(f^{m-1} x_0)$.

– εάν $z = f^m x_0$, τότε $\varphi(f f^{m-1} x_0) = \varphi(z) = \varphi_0(z) = 0 < \epsilon = \epsilon \varphi(f^{m-1} x_0)$.

Συνεπώς, $(D, \varphi) \in \Phi$ και $D_0 \subseteq D$, $D \neq D_0$, άτοπο, διότι το $(D_0, \ \varphi_0)$ είναι maximal στοιχείο του $(\Phi, \preceq)$.

Άρα, $D_0 = X$. ♦

1.4 Ακουλουθίες συναρτήσεων και σταθερά σημεία

Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος. Θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα σύγκλισης σταθερών σημείων για μια ακολουθία συναρτήσεων
$f_n : X \to X, \;\; n \geq 1$.

Το πόρισμα 2 που παρουσιάσαμε σε προηγούμενη ενότητα θα χρησιμοποιηθεί στις αποδείξεις.

Θεώρημα 7
Υποθέτουμε ότι $\forall\, n \geq 1,$ η f_n έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο $x_n \in X$, δηλ.

$$x_n = f_n(x_n).$$

Έστω $f : (X,d) \to (X,d)$ ομοιόμορφα συνεχής απεικόνιση ώστε η f^m να είναι $d-$ συστολή για κάποιο $m \geq 1$. Αν $\dot{x}$ το σταθερό σημείο της f^m και η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, τότε

$$x_n \xrightarrow{d} \dot{x}, \quad f(\dot{x}) = \dot{x}.$$

Απόδειξη:
Υποθέτουμε αρχικά ότι η f $(m=1)$ είναι $d-$ συστολή. Έστω $\lambda < 1$ η σταθερά Lipschitz της f. Για δοθέν $\epsilon > 0$ διαλέγουμε $n_0 = n_0(\epsilon)$ τέτοιο ώστε :

$$d\big(f_n(x), f(x)\big) \leq \epsilon(1-\lambda),\ \forall\, n \geq n_0,\ \forall\, x \in X.$$

Τότε για $n \geq n_0$ έχουμε :

$$d(x_n, \dot{x}) = d\big(f_n(x_n), f(\dot{x})\big)$$
$$\leq d\big(f_n(x_n), f(x_n)\big) + d\big(f(x_n), f(\dot{x})\big)$$
$$\leq \epsilon(1-\lambda) + \lambda d(x_n, \dot{x}).$$

Άρα, $d(x_n, \dot{x}) \leq \epsilon$ και συνεπώς $x_n \xrightarrow{d} \dot{x}$.

Για τη γενική περίπτωση, υποθέτουμε ότι για κάποιο $\lambda \in (0,1)$ ισχύει

$$d\big(f^m(x), f^m(y)\big) \leq \lambda^m d(x,y), \quad \forall\, x,\ y\ \in X.$$

Έστω $\dot{x}$ το σταθερό σημείο της f^m.
Ορίζουμε μια νέα μετρική d_0:

$$d_0(x,y) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda^k} d\big(f^k(x), f^k(y)\big), \quad x,\ y \in X.$$

Λόγω ομοιόμορφης συνέχειας των $f^k,\ 0 \le k \le m-1,$ ισχύει το εξής:

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{ώστε}$$

$$d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_0(x,y) < \epsilon.$$

Έπεται ότι η d_0 είναι ισοδύναμη με την d και ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f και ως προς την d_0.
Επιπλέον, η f είναι συστολή και ως προς την d_0. Πράγματι,

$$d_0\big(f(x), f(y)\big) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda^k} d\big(f^{k+1}(x), f^{k+1}(y)\big)$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda^k} d\big(f^k(x), f^k(y)\big) + \frac{1}{\lambda^{m-1}} d\big(f^m(x), f^m(y)\big)$$

$$\le \lambda \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda^k} d\big(f^k(x), f^k(y)\big) + \frac{\lambda^m}{\lambda^{m-1}} d(x,y)$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda^k} d\big(f^k(x), f^k(y)\big) = \lambda d_0(x,y)\ .$$

Εάν z το μοναδικό σταθερό σημείο της f, τότε

$$f^m(z) = z \ \Rightarrow\ z = \dot{x} \ \Rightarrow\ f(\dot{x}) = \dot{x}.$$

Σύμφωνα με την περίπτωση "$m = 1$", "$d = d_0$", παίρνουμε

$$x_n \overset{d_0}{\to} \dot{x} \quad \Rightarrow \quad x_n \overset{d}{\to} \dot{x}.$$

♦

Θεώρημα 8
Έστω (X,d) τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_n \ge 1$ ώστε η $f_n^{m_n}$ να είναι συστολή. Ακόμα, ας είναι $f : X \to X$ απεικόνιση ώστε f^m να είναι συστολή για κάποιο $m \ge 1$. Αν f_n συγκλίνει σημειακά στην f και f_n είναι ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων, τότε η $x_n = f(x_n)$ συγκλίνει στο $\dot{x} = f(\dot{x})$.

Απόδειξη:

Έστω $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε το σύνολο :

$$K(\dot{x}, \epsilon) := \{x \in X : d(x, \dot{x}) \le \epsilon\} \subset X$$

να είναι συμπαγές.

Έτσι, από θεώρημα Ascoli η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $K(\dot{x},\epsilon)$, αφόυ είναι ισοσυνεχής και σημειακά συγκλίνουσα. Διαλέγουμε $n_0 = n_0(\epsilon)$ ώστε :

$$d\big(f_n^m(x), f^m(x)\big) \leq \epsilon(1-\lambda),\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in K(\dot{x},\epsilon)$$

Όπου $\lambda < 1$ είναι η σταθερά Lipschitz της f^m. Τότε για $n \geq n_0$ και $x \in K(\dot{x},\epsilon)$:

$$d\big(f_n^m(x), \dot{x}\big) = d\big(f_n^m(x), f^m(\dot{x})\big)$$

$$\leq d\big(f_n^m(x), f^m(x)\big) + d\big(f^m(x), f^m(\dot{x})\big)$$

$$\leq \epsilon(1-\lambda) + \lambda d(x,\dot{x}) \leq \epsilon$$

Άρα $f_n^m(K(\dot{x},\epsilon)) \subset K(\dot{x},\epsilon)$ για ολα τα $n \geq n_0$. Αφού οι απεικονίσεις $f_n^{m_n}$ είναι συστολές, τότε για $n \geq n_0$, τα σταθερά σημεία x_n των f_n ανήκουν στο σύνολο $K(\dot{x},\epsilon)$, συνεπώς $d(x_n,\dot{x}) \leq \epsilon$.♦

1.5 Σταθερά σημεία μη επεκτατικών απεικονίσεων

Έστω X χώρος Banach, $C \subset X$, μη κενό, φραγμένο, κλειστό, κυρτό και $f : C \to C$ μη επεκτατική απεικόνιση. δηλ.

$$||f(x)\ -\ f(y)||\ \leq\ ||x\ -\ y||,\quad \forall\ x,\ y\ \in C.$$

Το ερώτημα είναι αν η f έχει σταθερό σημείο στο C. Γενικά, η απάντηση είναι αρνητική, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα:
Έστω $X = c_0$ εφοδιασμένος με την νόρμα :

$$\|x\| = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \qquad x = (x_0, x_1, x_2, ...).$$

Θέτουμε $C = \overline{B_{c_0}}(0,1)$ και ορίζουμε $f : C \to C$ ως εξής :

$$f(x) = (1, x_0, x_1, ...).$$

Τότε, η f είναι μη επεκτατική αλλά δεν έχει σταθερό σημείο στο C.

Θεώρημα 9 (Browder-Kirk)
Έστω X ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach και $C \subset X$, μη κενό, φραγμένο, κλειστό και κυρτό. Αν $f : C \to C$ είναι μη επεκτατική, τότε η f έχει σταθερό σημείο στο C.

Θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου X είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Απόδειξη:
Έστω $x_* \in C$ σταθερό και θεωρούμε ακολουθία $(r_n) \subseteq (0,1)$ που συγκλίνει στο 1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f_n : C \to C$:

$$f_n(x) = r_n f(x) + (1 - r_n)x_*.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι συστολή στο C, άρα υπάρχει μοναδικό $x_n \in C$ ώστε

$$f_n(x_n) = x_n \ .$$

Πράγματι, $\forall\, x,\ y\ \in X$,

$$||f_n(x)\ -\ f_n(y)|| = r_n \, \|f(x) - f(y)\| \leq r_n ||x - y||$$

και $0 < r_n < 1$.

Αφού το C είναι ασθενώς συμπαγές, περνώντας σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (x_n) συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $\dot{x} \in C$. Θα δείξουμε ότι το $\dot{x}$ είναι σταθερό σημείο της f.
Έχουμε ότι $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$||f(\dot{x}) - x_n||^2 - ||\dot{x} - x_n||^2 = ||f(\dot{x}) - \dot{x}||^2 + 2\langle f(\dot{x}) - \dot{x},\ \dot{x} - x_n\rangle,$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}(||f(\dot{x}) - x_n||^2 - ||\dot{x} - x_n||^2) = ||f(\dot{x}) - \dot{x}||^2. \qquad \bigstar$$

Αφού η f είναι μη επεκτατική έχουμε :

$$\begin{aligned} ||f(\dot{x}) - x_n|| &\leq ||f(\dot{x}) - f(x_n)|| + ||f(x_n) - f_n(x_n)|| \\ &\leq ||\dot{x} - x_n|| + ||f(x_n) - f_n(x_n)|| \\ &= ||\dot{x} - x_n|| + (1 - r_n)||f(x_n) - x_*||. \end{aligned}$$

Επειδή $r_n \to 1$ όταν $n \to \infty$ και το C είναι φραγμένο, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left(||f(\dot{x}) - x_n||^2 - ||\dot{x} - x_n||^2\right) \leq 0.$$

Επομένως, λόγω της $\bigstar$ προκύπτει ότι $f(\dot{x}) = \dot{x}$. $\blacklozenge$

Πρόταση
Με τις υποθέσεις του θεωρήματος 9, το σύνολο F των σταθερών σημείων της f είναι κλειστό και κυρτό.

Απόδειξη:
Έστω $(x_n) \subseteq F$ ακολουθία σταθερών σημείων της f με $x_n \to x$. Τότε από τη συνέχεια της f :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

άρα $x = f(x)$, δηλαδή $x \in F$.

Έστω $x_0, x_1 \in F$ με $x_0 \neq x_1$. Θέτουμε

$$x_t = (1-t)x_0 + tx_1, \qquad t \in (0,1).$$

Τότε, ισχύουν οι :

$$||f(x_t) - x_0|| = ||f(x_t) - f(x_0)|| \leq ||x_t - x_0|| = t||x_1 - x_0||,$$

$$||f(x_t) - x_1|| = ||f(x_t) - f(x_1)|| \leq ||x_t - x_1|| = (1-t)||x_1 - x_0||.$$

Από τις 2 παραπάνω σχέσεις λαμβάνουμε :

$$||f(x_t) - x_0|| + ||f(x_t) - x_1|| \leq ||x_1 - x_0||$$

και παρατηρούμε ότι ακόμα ισχύει :

$$||x_1 - x_0|| \leq ||f(x_t) - x_0|| + ||f(x_t) - x_1||$$

άρα τελικά θα ισχύουν οι ισότητες :

$$||f(x_t) - x_0|| = t||x_1 - x_0||, \quad ||f(x_t) - x_1|| = (1-t)||x_1 - x_0||.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x_t) = (1-t)x_0 + tx_1$, το οποίο προκύπτει απο το επόμενο λήμμα.♦

Λήμμα

Έστω X γνήσια κυρτός χώρος Banach και $a, x, y \in X$ ώστε να ισχύουν

$$||a - x|| = t||x - y|| \text{ και } ||a - y|| = (1-t)||x - y||$$

για κάποιο $t \in [0,1]$. Τότε $a = (1-t)x + ty$.

Απόδειξη:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $t \geq 1/2$ (αλλιώς εναλλάσσουμε τους ρόλους των x, y και των $t,\ 1-t$). Τότε :

$$||(1-t)(a-x) + t(y-a)|| = ||(1-2t)(a-x) - t(x-y)||$$

$$\geq t||x-y|| - (2t-1)||a-x|| = t||x-y|| - (2t-1)t||x-y|| = 2t(1-t)||x-y||.$$

Επιπλέον

$$(1-t)||a-x|| = t||a-y|| = t(1-t)||x-y||,$$

οπότε

$$\begin{aligned} ||(1-t)(a-x) + t(y-a)|| &\leq (1-t)||a-x|| + t||y-a|| \\ &= t(1-t)||x-y|| + t(1-t)||x-y|| \\ &= 2t(1-t)||x-y||. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$$u = (1-t)(a-x), \quad v = t(y-a), \quad p = t(1-t)||x-y||,$$

από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$||u|| = ||v|| = p, \quad ||u+v|| = 2p.$$

Εφ'όσον ο X είναι γνήσια κυρτός, θα είναι $u = v$, από το οποίο έπεται το ζητούμενο.♦

1.6 Μέσο εργοδικό θεώρημα Riesz

Αν T μη επεκτατική γραμμική απεικόνιση σε ομοιόμορφα κυρτό χώρο Banach, τότε όλα τα σταθερά σημεία της T προκύπτουν από μια διαδικασία ορίων.

Ορισμός
Έστω X γραμμικός χώρος. Ένας γραμμικός τελεστής $P : X \to X$ λέγεται *προβολή* στον X αν $P^2(x) = PPx = Px$, $\forall\, x \in X$.

Εάν $P : X \to X$ προβολή, τότε ο περιορισμός του P πάνω στο $rank(P)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής.
Επιπλέον:

- $ker(P) = rank(I - P)$
- $rank(P) = ker(I - P)$
- $ker(P) \cap rank(P) = \{0\}$.

Πράγματι, για την πρώτη :
Έστω $x \in ker(P)$. Τότε, $Px = 0$ άρα :

$$(I - P)x = Ix - Px = x.$$

Έστω $y \in rank(I - P)$. Τότε, $y = (I - P)v$ για κάποιο $v \in X$, άρα:

$$Py = P(v - Pv) = 0.$$

Ομοίως προκύπτει και η δεύτερη σχέση. Ακόμα σημειώνουμε ότι κάθε $x \in X$ έχει μοναδική γραφή :

$$x = y + z, \quad y \in ker(P), \quad z \in rank(P).$$

Πρόταση
Αν X χώρος Banach, τότε η προβολή P είναι συνεχής αν και μόνο αν

$$X = ker(P) \oplus rank(P)\ .$$

Ο συμβολισμός $X = A \oplus B$ δηλώνει ότι τα A, B είναι κλειστά υποσύνολα του X ώστε $A \cap B = \{0\}$ και $A + B = X$.

Απόδειξη:
Αν P συνεχής, τότε και ο $I-P$ είναι συνεχής.
Άρα, τα σύνολα $ker(P)$ και $rank(P) = ker(I-P)$ είναι κλειστά, αφού συνεχείς συναρτήσεις αντιστρέφουν κλειστά σύνολα σε κλειστά.

Αντίστροφα, έστω $x_n \to x$ και $Px_n \to y$. Αφού $rank(P)$ κλειστό, τότε περιέχει τα οριακά του σημεία άρα $y \in rank(P)$, συνεπώς $Py = y$.

Όμως $Px_n - x_n \in ker(P)$ και $ker(P)$ είναι κλειστό. Άρα $x - y \in ker(P)$, δηλαδή $y = Py = Px$.
Απο θεώρημα κλειστού γραφήματος προκύπτει ότι ο P είναι συνεχής.

Θεώρημα 10 (Riesz).
Έστω X ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach και $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής ώστε $||Tx|| \leq ||x||$, $\forall\, x \in X$. Τότε για κάθε $x \in X$ το όριο

$$p_x = \lim_{n\to\infty} \frac{x + Tx + \ldots.. + T^n x}{n+1}$$

υπάρχει. Ακόμα, ο τελεστής $P : X \to X$ με $Px = p_x$ είναι συνεχής προβολή στο γραμμικό χώρο $M = \{y \in X : Ty = y\}$.

Απόδειξη:
Έστω $x \in X$ σταθερό και

$$C = \overline{co(\{x, Tx, T^2x, T^3x, \ldots..\})}$$

το οποίο έιναι κλειστό, μη κενό και κυρτό. Από την ομοιόμορφη κυρτότητα του X υπάρχει μοναδικό $p_x \in C$ ώστε

$$\mu = ||p_x|| = \inf\{||z|| : z \in C\}.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $p_x \in C$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και μη αρνητικές σταθερές $a_0, a_1, \ldots.., a_m$ με $\sum_{j=0}^{m} a_j = 1$, ώστε θέτοντας

$$z = \sum_{j=0}^{m} a_j T^j x$$

να ισχύει

$$||p_x - z|| < \epsilon.$$

Συγκεκριμένα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει :

$$\left\|\frac{z + Tz + T^2z \ldots + T^n z}{n+1}\right\| \leq ||z|| \leq ||z - p_x|| + ||p_x|| \leq \mu + \epsilon.$$

Επίσης, ισχύει

$$z+Tz+T^2z+....+T^nz=$$
$$(a_0x+....+a_mT^mx)+(a_0Tx+....+a_mT^{m+1}x)+....+(a_0T^nx+....+a_mT^{n+m}x).$$

Υποθέτουμε ότι $n \gg m$ και παίρνουμε :

$$z+Tz+....+T^nz = x+Tx+....+T^nx+r$$

όπου :

$$r=(a_0-1)x+...+(a_0+a_1+...+a_{m-1}-1)T^{m-1}x$$
$$+(1-a_0)T^{1+n}x+...+(1-a_0-a_1-...-a_{m-1})T^{m+n}x$$

Άρα προκύπτει :

$$\frac{x+Tx+....+T^nx}{n+1} = \frac{z+Tz+...+T^nz}{n+1} - \frac{r}{n+1}.$$

Επειδή

$$||\tfrac{r}{n+1}|| \leq \tfrac{2m||x||}{n+1},$$

διαλέγοντας $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $2m||x|| < \epsilon(n+1)$ παίρνουμε :

$$||\frac{x+Tx+....+T^nx}{n+1}|| \leq ||\frac{z+Tz+...+T^nz}{n+1}||.+||\frac{r}{n+1}|| \leq \mu+2\epsilon$$

Ταυτόχρονα ισχύει

$$||\frac{x+Tx+....+T^nx}{n+1}|| \geq \mu.$$

Επειδή το ϵ ήταν τυχαίο συμπεραίνουμε ότι :

$$\lim_{n\to\infty}||\frac{x+Tx+....+T^nx}{n+1}|| = \mu$$

Άρα το παραπάνω όριο αποτελεί minimizing ακολουθία στο C και απο την ομοιόμορφη κυρτότητα του X παίρνουμε :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x+Tx+....+T^nx}{n+1} = p_x\ .$$

Θα δείξουμε ότι ο τελεστής P είναι συνεχής προβολή στο M.
Αρχικά, αν $x \in M$ τότε προφανώς $p_x = x$. Γενικά, ισχύει :

$$Tp_x = \lim_{n\to\infty}\frac{Tx+T^2x+....+T^{n+1}x}{n+1} = p_x + \lim_{n\to\infty}\frac{T^{n+1}-x}{n+1} = p_x.$$

Ακόμα $P^2x = PPx = Pp_x = \frac{n+1}{n+1}p_x = Px$. Η συνέχεια προκύπτει απο τη σχέση $||p_x|| \leq ||x||$.♦

Δίνουμε ένα παράδειγμα που τονίζει την σημασία της κυρτότητας στην υπόθεση του θεωρήματος Riesz.

Παράδειγμα
Θεωρούμε το χώρο X των φραγμένων ακολουθιών με την νόρμα

$$||x|| = \sup |x_n|, \ x = (x_0, x_1, ...).$$

Ορίζουμε $T \in L(X)$ ως εξής :

$$T(x) = (0, x_0, x_1, ...).$$

Τότε ο T έχει μοναδικό σταθερό σημείο στον X (το μηδενικό του στοιχείο), όμως αν $y = (1, 1, 1.....)$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$||\frac{y+Ty+....+T^n y}{n+1}|| = \frac{||(1,2,...,n,n+1,n+1,...)||}{n+1} = 1$$

Πρόταση
Έστω H χώρος Hilbert, $P = P^2 : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής με $||P|| \leq 1$. Τότε ο P είναι κάθετη προβολή.

Απόδειξη:
Επειδή ο P είναι συνεχής, το $rank(P)$ είναι κλειστό αφού όπως δείξαμε

$$rank(P) = ker(I - P).$$

Έστω E η ορθογώνια προβολή με σύνολο τιμών $rank(P)$.
Τότε :

$$P = E + P(I - E).$$

Έστω $x \in rank(P)^{\perp}$. Για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε :

$$(1 + \epsilon)||Px|| = ||P(Px + \epsilon x)|| \leq ||Px + \epsilon x|| \qquad \star$$

από όπου προκύπτει

$$||Px||^2 \leq \frac{\epsilon}{\epsilon+2}||x||^2 \qquad *$$

Άρα, $Px = 0$ οπότε ισχύει η ισότητα :

$$P = E. \qquad \blacklozenge$$

Σημειώνουμε ότι η σχέση $*$ προκύπτει από την $\star$ λαμβάνοντας υπόψη τα παρακάτω :

- $||x||^2 = < x, x >$
- $< x, Px >= 0.$

1.7 Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer

Έστω

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}.$$

Ένα υποσύνολο $E \subset D^n$ καλείται *retract* του D^n αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $r : D^n \to E$ (*retraction*) ώστε :

$$r(x) = x, \ \forall \ x \in E.$$

Λήμμα
Το σύνολο $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$ δεν είναι retract του D^n.

Απόδειξη:
Παραλείπεται, μπορεί να αποδειχθεί με εργαλεία αλγεβρικής τοπολογίας.

Θεώρημα 11 (Brouwer)
Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : D^n \to D^n$ έχει σταθερό σημείο $\bar{x} \in D^n$.

Απόδειξη:
Υποθέτουμε αντιθέτως ότι η f δεν έχει σταθερά σημεία. Για κάθε $x \in D^n$, θεωρούμε το σημείο τομής $r(x)$ της σφαίρας S^{n-1} με την προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος $[f(x), x]$ προς την πλευρά του x, δηλαδή

$$||r(x)|| = 1, \quad r(x) = t(x)f(x) + \big(1 - t(x)\big)x, \quad \text{με} \ \ t(x) \leq 0.$$

Για κάθε $x \in D^n$, έχουμε $||r(x)||^2 = 1$ απ' όπου, μετά από πράξεις, προκύπτει ότι το $t(x)$ είναι ρίζα του τριωνύμου

$$||x - f(x)||^2 t^2 \ - \ 2(\ \langle x, f(x) \rangle - ||x||^2 \ )t + (||x||^2 - 1) = 0$$

και συνεπώς,

$$t(x) = \frac{||x||^2 - \langle x, f(x) \rangle - \sqrt{\big(||x||^2 - \langle x, f(x) \rangle\big)^2 + (1 - ||x||^2)||x - f(x)||^2}}{||x - f(x)||^2}.$$

Η συνάρτηση $t(\cdot)$ είναι καλά ορισμένη(αφού η f δεν έχει σταθερό σημείο) και συνεχής, οπότε και η $r(\cdot)$ είναι συνεχής. Επιπλέον,

$$r(b) = b, \quad \forall \ b \ \ \text{με} \ \ ||b|| = 1.$$

Σημειώνουμε ότι

$$| < b, f(b) > | \leq ||b|| \cdot ||f(b)|| = ||f(b)|| \leq 1, \quad \forall \ b \ \text{με} \ ||b|| = 1.$$

Άρα, η $r(\cdot)$ είναι retraction από το D^n στο S^{n-1}, γεγονός που αντιφάσκει με το παραπάνω λήμμα. ♦

Θεώρημα 12
Έστω X χώρος Banach πεπερασμένης διάστασης και K μη κενό, κυρτό, και συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : K \to K$ έχει σταθερό σημείο $\dot{x} \in K$.

Απόδειξη:
Αφού ο X είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $X = \mathbb{R}^n$. Επιπλέον μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K \subset D^n$. Για κάθε $x \in D^n$, ας είναι $p(x)$ το μοναδικό στοιχείο του K με την ιδιότητα

$$||x - p(x)|| = \inf_{z \in K} ||x - z||.$$

Παρατηρούμε ότι $p(x) = x, \ \forall x \in K$.

Επίσης, η $p(\cdot)$ είναι συνεχής στο D^n. Πράγματι, για $x_n, x \in D^n$ με $x_n \to x$ έχουμε :

$$||x - p(x)|| \leq ||x - p(x_n)|| \leq ||x - x_n|| + \inf_{z \in K} ||x_n - z|| \overset{n \to \infty}{\to} ||x - p(x)||.$$

Συνεπώς, η $x - p(x_n)$ είναι minimizing ακολουθία καθώς $x_n \to x$ στο $x - K$, άρα προκύπτει η σύγκλιση :

$$p(x_n) \to p(x).$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση g ως εξής :

$$g(x) = f(p(x)).$$

Τότε, η g απεικονίζει συνεχώς το D^n στο $K \subset D^n$. Από το θεώρημα Brouwer έπεται ότι υπάρχει $\dot{x}$ ώστε :

$$g(\dot{x}) = \dot{x} = f(\dot{x}). \quad ♦$$

Θα παρουσιάσουμε μια εφαρμογή του Πορίσματος 12 στη Γραμμική Άλγεβρα.

Θεώρημα 13 Frobenius
Έστω $\mathbb{A}$ πίνακας μεγέθους $n \times n$ με θετικά στοιχεία. Τότε ο $\mathbb{A}$ έχει θετική ιδιοτιμή.

Απόδειξη:

Μπορούμε να χειριστούμε τον $\mathbb{A}$ ως γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το σύνολο

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \geq 0, j = 1, 2..., n \right\}.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση f ως εξής :

$$f(x) = \tfrac{\mathbb{A}x}{||\mathbb{A}x||_1}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $x \in K$, τότε όλα τα στοιχεία του x είναι μη αρνητικά και τουλάχιστον ένα είναι αυστηρά θετικό. Άρα τα στοιχεία του $\mathbb{A}x$ είναι όλα θετικά. Τότε η f είναι συνεχής συνάρτηση απο το K στο K και άρα υπάρχει $\vec{x} \in K$ με :

$$\mathbb{A}\vec{x} = ||\mathbb{A}\vec{x}||_1 \vec{x}. \quad \blacklozenge$$

1.8 Θεώρημα σταθερού σημείου του Schauder

Θεώρημα σταθερού σημείου Schauder
Έστω K κυρτό και συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach X και συνεχής συνάρτηση

$$f : K \to K.$$

Τότε, η f έχει σταθερό σημείο.

Για την απόδειξη θα κάνουμε χρήση της επόμενης πρότασης.

Πρόταση
Έστω X χώρος Banach και $K \subset X$ συμπαγές. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένης διαστάσεως γραμμικός υπόχωρος $X_\epsilon \subset X$ και συνεχής απεικόνιση $P_\epsilon : K \to X_\epsilon$, ώστε :

$$\|P_\epsilon(x) - x\| < \epsilon, \forall x \in K.$$

Αν επιπλέον K κυρτό τότε $P_\epsilon : K \to K$.

Απόδειξη:
Επειδή το K είναι συμπαγές, $\forall \epsilon > 0$,υπάρχουν $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ με $n = n_\epsilon$, έτσι ώστε :

$$K \subset \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon/2)$$

Θεωρούμε τον γραμμικό υπόχωρο

$$X_\epsilon = span\left\{x_1, x_2, ..., x_n\right\}.$$

Ορίζουμε τις απεικονίσεις :

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \epsilon/2 - ||x - x_i|| & , \ x \in B(x_i, \epsilon/2), i = 1, 2, .., n, x \in K \\ 0 & , \ \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma \end{cases} \quad \bigstar$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $P_\epsilon : K \to X_\epsilon$ ως εξής :

$$P_\epsilon(x) = \frac{\mu_1(x)x_1 + \mu_2(x)x_2 + ... + \mu_n(x)x_n}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + ... + \mu_n(x)}, \ x \in K.$$

Στον παρονομαστή του παραπάνω κλάσματος ένας τουλάχιστον όρος του αθροίσματος είναι διάφορος του μηδενός, επειδή λόγω κατασκευής το x θα ανήκει σε μια τουλάχιστον μπάλα απο τις $B(x_i, \epsilon), 1 \leq i \leq n$. Επίσης, $\mu_i(x) \geq 0$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n, \ x \in K$.

Το κλάσμα είναι κυρτός συνδυασμός των $x_1, x_2, ..., x_n$, άρα ανήκει στον υπόχωρο X_ϵ.

Η απεικόνιση P_ϵ είναι συνεχής, αφού εκ κατασκευής όλες οι $\mu_i, \ 1 \leq i \leq n$, είναι συνεχείς.
Έχουμε, $\forall x \in K$:

$$||P_\epsilon(x) - x|| = ||\frac{\mu_1(x)x_1 + \mu_2(x)x_2 + ... + \mu_n(x)x_n}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + ... + \mu_n(x)} - x|| =$$
$$||\frac{\mu_1(x)(x_1 - x) + \mu_2(x)(x_2 - x) + ... + \mu_n(x)(x_n - x)}{\mu_1 x + \mu_2(x) + ... + \mu_n(x)}|| \leq$$
$$\frac{\mu_1(x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) ... + \mu_n(x)}||x_1 - x|| + ... + \frac{\mu_n(x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) ... + \mu_n(x)}||x_n - x|| \leq \epsilon/2 \leq \epsilon \ ,$$

αφού απο την $\bigstar$ έχουμε :

$$\frac{\mu_i(x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + ... + \mu_n(x)}||x_i - x|| \leq \frac{\mu_i(x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + ... + \mu_n(x)}\frac{\epsilon}{2}, 1 \leq i \leq n. \ \blacklozenge$$

Απόδειξη θεωρήματος Schauder:

Για $\epsilon > 0$, έστω X_ϵ και P_ϵ όπως ορίστηκαν στην προηγούμενη πρόταση. Επειδή το K είναι κυρτό, η P_ϵ παίρνει τιμές στο K.
Έστω $K_\epsilon = conv\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Αφού K κυρτό ισχύουν :

$$K_\epsilon \subset X_\epsilon \text{ και } K_\epsilon \subset K.$$

Επομένως, K_ϵ συμπαγές, ως κλειστό υποσύνολο του K.
Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f_\epsilon(x) = P_\epsilon\big(f(x)\big).$$

Η f_ϵ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών P_ϵ και f.

Επίσης, $f_\epsilon : K_\epsilon \to K_\epsilon$ και K_ϵ κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του πεπερασμένης διάστασης χώρου Banach X_ϵ.
Από το Πόρισμα 12, η f_ϵ έχει σταθερό σημείο, δηλαδή

$$\exists \, x_\epsilon \in K_\epsilon \subset K : x_\epsilon = f_\epsilon(x_\epsilon).$$

Το K είναι συμπαγές επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$x_\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\to} x \in K. \quad \star$$

Έχουμε:

$$\|x_\epsilon - f(x)\| = \|f_\epsilon(x_\epsilon) - f(x)\| = \big\|P_\epsilon\big(f(x_\epsilon)\big) - f(x)\big\| \leq$$
$$\big\|P_\epsilon\big(f(x_\epsilon)\big) - f(x_\epsilon)\big\| + \|f(x_\epsilon) - f(x)\| < \epsilon + \|f(x_\epsilon) - f(x)\| \overset{\epsilon\to 0^+}{\to} 0$$

, όπου κάναμε χρήση της προηγούμενης πρότασης και της σύγκλισης $x_\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\to} x$.

Άρα, $f(x) = x$, πάλι λόγω της $\star$. ♦

Το παρακάτω θεώρημα αφορά τοπικά κυρτούς χώρους.

Θεώρημα σταθερού σημείου (Schauder-Tychonoff)
Έστω X τοπικά κυρτός χώρος, $K \subset X$ μη κενό και κυρτό. Επίσης θεωρούμε το συμπαγές $K_0 \subset K$. Αν η απεικόνιση $f : K \to K_0$ είναι συνεχής, τότε η f έχει σταθερό σημείο.

Ορισμός

Έστω X, Y χώροι Banach. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται *συμπαγής* αν απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε σχετικώς συμπαγή σύνολα.

Αν $f \in L(X, Y)$ τότε ισχύει η ισοδυναμία :

f συμπαγής $\Leftrightarrow$ η εικόνα της μοναδιαίας κλειστής μπάλας είναι σχετικά συμπαγής.

Επιπλέον, η f είναι συμπαγής αν για κάθε φραγμένη ακολουθία (x_n), η ακολουθία $(f(x_n))$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Πόρισμα 4

Αν X χώρος Banach , $K \subset X$ κυρτό, κλειστό και φραγμένο και $f : K \to K$ συμπαγής απεικόνιση, τότε η f έχει σταθερό σημείο.

Απόδειξη:

Θεωρούμε το σύνολο $K_1 = \overline{conv f(K)}$.

Η f είναι συμπαγής, άρα το $\overline{f(K)} \subset K$ είναι συμπαγές(το K είναι κλειστό).

Από το θεώρημα Mazur γνωρίζουμε ότι αν ένα υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι σχετικά συμπαγές, τότε το κυρτό περίβλημα του είναι επίσης σχετικά συμπαγές. Συνεπώς, το K_1 είναι συμπαγές.

Το $K_1 = \overline{conv f(K)}$ είναι υποσύνολο του K, αφού $\overline{f(K)} \subset K$ και το K είναι κλειστό και κυρτό.

Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο υποσύνολο K_1 του K :

$$f : K_1 \to K_1.$$

Η f είναι συνεχής ως συμπαγής. Επομένως, αφού το K_1 είναι κυρτό και συμπαγές, από το Θεώρημα Schauder :

$$\exists x_0 \in K_1 \subset K, \text{ ώστε } x_0 = f(x_0). \ \blacklozenge$$

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζουμε 2 προτάσεις που είναι συνέπειες του θεωρήματος του Schauder. Έστω X χώρος Banach και $r > 0$, τότε

$$B_r = \overline{B}_X(0, r)$$

Επιπλέον, θεωρούμε την συνάρτηση $g : B_r \to X$ ώστε το $g(B_r)$ να είναι σχετικά συμπαγές.

Πρόταση

Έστω $g(x) \notin \{\lambda x : \lambda > 0\}$, για κάθε $x \in \partial B_r$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in B_r$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε αντιθέτως ότι η g δεν έχει ρίζα.

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = r\frac{g(x)}{||g(x)||}\ .$$

Η f είναι συνεχής από το B_r στο B_r και το $f(B_r)$ είναι σχετικά συμπαγές. Από το άνω θεώρημα η f έχει σταθερό σημείο $\bar{x} \in B_r$.

Τότε, ισχύει

$$g(\bar{x}) = \frac{\bar{x}||g(\bar{x})||}{r} \text{ με } ||\bar{x}|| = r \ \ (\text{αφού } ||f(\bar{x})|| = ||\bar{x}||),$$

άτοπο, λόγω της υπόθεσης. ♦

Πρόταση

Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \partial B_r$ υπάρχει $\Lambda_x \in X^*$ ώστε :

$$\Lambda_x x = 1 \text{ και } \Lambda_x g(x) \geq 0$$

Τότε, υπάρχει $x_0 \in B_r$ ώστε $g(x_0) = 0$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε αντιθέτως ότι η g δεν έχει ρίζα.

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = -\frac{rg(x)}{||g(x)||}\ .$$

Τότε, όπως παραπάνω, η f θα έχει σταθερό σημείο $\dot{x}$ και θα ισχύει :

$$-g(\dot{x}) = \frac{||g(\dot{x})||\dot{x}}{r} \text{ με } ||\dot{x}|| = r.$$

Παίρνοντας $\Lambda \in X^*$ με $\Lambda\dot{x} = 1$, καταλήγουμε σε άτοπο :

$$\Lambda g(\dot{x}) = \Lambda(-\frac{||g(\dot{x})||\dot{x}}{r}) = \frac{-||g(\dot{x})||}{r} < 0. \quad ♦$$

Πόρισμα 5
Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ συνεχής με :

$$\lim_{||x|| \to \infty} \frac{< f(x), x >}{||x||} = \infty \ .$$

Τότε $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη:
Έστω σταθερό $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Θέτουμε

$$g(x) = f(x) - y_0 \ .$$

Τότε, λόγω της υπόθεσης, για $r > 0$ αρκετά μεγάλο ισχύει

$$\left\langle g(x), \tfrac{x}{||x||} \right\rangle \geq 0, \ \forall x \in \partial B_r.$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in \partial B_r$ το συναρτησοειδές :

$$\Lambda_x := \langle \cdot, \tfrac{x}{||x||^2} \rangle$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης.

Άρα, υπάρχει $x_0 \in B_r$ ώστε $g(x_0) = 0$, δηλαδή $f(x_0) = y_0$.♦

Θεώρημα 14 (Schaefer)
Έστω X χώρος Banach, $f : X \to X$ συνεχής και συμπαγής. Επιπλέον υποθέτουμε ότι το σύνολο :

$$F = \{x \in X : x = \lambda f(x), \lambda \in [0, 1]\}$$

είναι φραγμένο. Τότε η f έχει σταθερό σημείο.

Απόδειξη:

Επιλέγουμε $r > \sup_{x\in F} ||x||$ και ορίζουμε :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , ||f(x)|| \leq 2r \\ \frac{2rf(x)}{||f(x)||} & , ||f(x)|| > 2r. \end{cases}$$

Τότε, η $g : \overline{B}_X(0,2r) \to \overline{B}_X(0,2r)$ είναι συνεχής και συμπαγής.

Από το Πόρισμα του Θ. Schauder, υπάρχει $x_0 \in \overline{B}_X(0,2r)$ με $g(x_0) = x_0$.

Παρατηρούμε ότι $||f(x_0)|| \leq 2r$. Πράγματι, σε αντίθετη περίπτωση θα ίσχυε :

$$x_0 = \lambda_0 f(x_0) \text{ με } \lambda_0 = \tfrac{2r}{||f(x_0)||} < 1,$$

οπότε

$$x_0 \in F, \quad ||x_0|| = 2r > r,$$

άτοπο, αφού $r > \sup_{x\in F} ||x|| \geq ||x_0||$.

Επομένως,

$$f(x_0) = g(x_0) = x_0. \qquad \blacklozenge$$

Θεώρημα 15 (Krasnoselskii)

Έστω X χώρος Banach, $C \subset X$ μη κενό, κλειστό και κυρτό. Επιπλέον, έστω συναρτήσεις $f, g : C \to X$ τέτοιες ώστε:

- $f(x_1) + g(x_2) \in C, \ \forall x_1, x_2 \in C$
- f συνεχής και συμπαγής
- g συστολή από το C στον X.

Τότε υπάρχει $\dot{x} \in C$ ώστε $f(\dot{x}) + g(\dot{x}) = \dot{x}$.

Απόδειξη:

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η $\mathbb{I} - g$ απεικονίζει το C στο $(\mathbb{I} - g)(C)$ ομοιομορφικά. Πράγματι, η $\mathbb{I} - g$ είναι συνεχής και $\forall x_1, x_2 \in C$ ισχύει

$$||(\mathbb{I} - g)(x_1) - (\mathbb{I} - g)(x_2)|| \geq ||x_1 - x_2|| - ||g(x_1) - g(x_2)|| \geq (1 - \lambda)||x_1 - x_2||,$$

όπου $\lambda < 1$ η σταθερά Lipschitz της g.

Άρα, η $(\mathbb{I} - g)^{-1} : (\mathbb{I} - g)(C) \to C$ είναι συνεχής.

Ισχυρισμός: $f(C) \subseteq (\mathbb{I} - g)(C)$.

Πράγματι, έστω $y \in C$. Η απεικόνιση

$$x \mapsto f(y) + g(x)$$

είναι συστολή στο C αφού $\forall x_1, x_2 \in C$ ισχύει

$$||f(y) + g(x_1) - f(y) - g(x_2)|| = ||g(x_1) - g(x_2)|| \leq \lambda ||x_1 - x_2||.$$

Λόγω του Θ. Banach, υπάρχει $z = z(y) \in C$ ώστε $z = f(y)+g(z)$ κι επομένως $f(y) = (\mathbb{I} - g)(z)$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι η συνάρτηση

$$(\mathbb{I} - g)^{-1} \circ f$$

είναι καλώς ορισμένη, συνεχής και συμπαγής από το C στο C, ως σύνθεση μιας συνεχούς και μιας συνεχούς και συμπαγούς συνάρτησης.

Από το Θεώρημα 13 έπεται ότι υπάρχει $\dot{x} \in C$ ώστε :

$$(\mathbb{I} - g)^{-1}\big(f(\dot{x})\big) = \dot{x} \Rightarrow f(\dot{x}) + g(\dot{x}) = \dot{x}.\blacklozenge$$

Παράδειγμα [Kakutani]:

Θεωρούμε το χώρο Hilbert ℓ^2 με την νόρμα :

$$\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}, \ x = (x_0, x_1, x_2, ...).$$

Για σταθερό $\epsilon \in (0, 1]$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_\epsilon : \overline{B}_{\ell^2}(0,1) \to \overline{B}_{\ell^2}(0,1)$$

με τύπο :

$$f_\epsilon(x) = \big(\epsilon(1 - ||x||), x_0, x_1, .., \big), \ x = (x_0, x_1, x_2, ...) \in \ell^2.$$

Σημ. ότι η f είναι καλώς ορισμένη διότι $\epsilon^2(1-t)^2 + t^2 \leq 1, \ \forall \, t \in [0, 1]$.

Η f_ϵ δεν έχει σταθερό σημείο στην $\overline{B}_{\ell^2}(0,1)$ αλλά είναι Lipschitz συνεχής :

$$||f_\epsilon(x) - f_\epsilon(y)|| \leq \sqrt{1+\epsilon^2}||x-y||, \ \forall x, y \in \overline{B}_{\ell^2}(0,1),$$

όπου κάναμε χρήση της τριγωνικής : $||x|| - ||y|| \leq ||x - y||.\blacklozenge$

Είναι λοιπόν εύλογο να αναρωτηθούμε αν μια συνεχής συνάρτηση

$$f : C \to C$$

όπου C κλειστό, φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του χώρου Banach X, έχει σταθερά σημεία. Στην περίπτωση όπου ο X είναι πεπερασμένης διάστασης, από το θεώρημα 13 η απάντηση είναι θετική αφού οι χώροι πεπερασμένης διάστασης έχουν την ιδιότητα Heine-Borel.

Θα δούμε ότι στην περίπτωση απειροδιάστατου χώρου Banach κάτι τέτοιο δεν ισχύει αν δεν έχουμε την υπόθεση της συμπάγειας.

Λήμμα

Έστω X χώρος Banach, $C \subset X$, κλειστό, φραγμένο και μη συμπαγές.Τότε, υπάρχει $\epsilon > 0$ και ακολουθία $(x_n) \subseteq C$ ώστε :

$$dist\big(x_{n+1}, span(\{x_0, x_1, ..., x_n\})\big) \geq \epsilon. \quad (1)$$

Απόδειξη:

Αρχικά παρατηρούμε ότι ο X πρέπει να είναι απειροδιάστατος αλλιώς δεν υπάρχει τέτοιο C.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε πεπερασμένο $F \subset X$ να ισχύει :

$$C \setminus [span(F) + B_X(0, \epsilon)] \neq \varnothing.$$

Αν όχι, για κάθε $\epsilon > 0$ βρίσκουμε πεπερασμένο $F \subset X$ ώστε :

$$C \subset span(F) + B_X(0, \epsilon).$$

Αφού C είναι φραγμένο, έχουμε ότι $C \subset B_X(0, r)$ για κάποιο $r > 0$. Τότε,

$$C \subset [span(F) + B_X(0, \epsilon)] \cap B_X(0, r) \subset [span(F) \cap B_X(0, r + \epsilon)] + B_X(0, \epsilon).$$

Αλλά το $span(F) \cap B_X(0, r+\epsilon)$ είναι ολικά φραγμένο (σημ. ότι ο $span(F)$ είναι πεπερασμένης διάστασης) και άρα δέχεται πεπερασμένο κάλυμμα σφαιρών ακτίνας ϵ. Συνεπώς και το C δέχεται πεπερασμένο κάλυμμα σφαιρών ακτίνας 2ϵ, άρα το C είναι ολικά φραγμένο, ως εκ τούτου συμπαγές (αφού είναι κλειστό), γεγονός που αντιφάσκει με την υπόθεση.

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε την ακολουθία (x_n) επαγωγικά.

Επιλέγουμε αρχικά τυχαίο $x_0 \in C$.

Αν μας δοθούν $x_0, ..., x_n$ που ικανοποιούν την (1), επιλέγουμε

$$x_{n+1} \in C \setminus [span(\{x_0, ..., x_{n+1}\}) + B_X(0, \epsilon).] \blacklozenge$$

Θεώρημα 16 (Klee)

Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach, $C \subset X$ κλειστό, φραγμένο, κυρτό και μη συμπαγές.

Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : C \to C$ χωρίς σταθερά σημεία.

Απόδειξη:

Έστω (x_n) ακολουθία του C που ικανοποιεί την (1) για κάποιο $\epsilon > 0$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in C$ και $||x_0|| \geq \epsilon$.

Κατασκευάζουμε τμηματικά γραμμική καμπύλη που ενώνει τα σημεία $x_0, x_1, x_2 ...$, θέτοντας :

$$\Gamma = \bigcup_{n=0}^{\infty} [x_n, x_{n+1}], \qquad \text{όπου } [x_n, x_{n+1}] = co(\{x_n, x_{n+1}\}).$$

Τότε το $\Gamma \subset C$ είναι κλειστό και δέχεται παραμέτρηση $\gamma : [0, \infty) \to \Gamma$, με τύπο :

$$\gamma(t) = (1-s)x_n + s x_{n+1}, \qquad \text{όπου } n = [t] \text{ και } s = t - n.$$

Είναι σαφές ότι η γ είναι επί.
Ισχυρισμός: Η γ είναι 1-1.
Πράγματι, έστω $t, t' \in [0, \infty)$ με $\gamma(t) = \gamma(t')$.
Θέτουμε

$$n = [t], \quad s = t - n, \quad m = [t'], \quad s' = t' - m.$$

Τότε,

$$(1-s)x_n + s x_{n+1} = (1-s')x_m + s' x_{m+1}\ . \quad (1')$$

- Εάν $n = m$, η $(1')$ δίνει $(s'-s)(x_n - x_{n+1})$ και λόγω της (1) παίρνουμε $s' = s$. Τότε, $t - n = t' - n$ και άρα $t = t'$.

- Υποθέτουμε ότι $n \neq m$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n < m$ οπότε

  $$n < n+1 \leq m < m+1.$$

  Από τις (1), $(1')$ έπεται ότι υποχρεωτικά θα ισχύει $s' = 0$ και συνεπώς

  $$x_m = (1-s)x_n + s x_{n+1}.$$

  Η τελευταία όμως πάλι λόγω της (1) δίνει $m = n+1$, οπότε $(1-s)(x_n - x_{n+1}) = 0$ και άρα $s = 1$.

  Τελικά παίρνουμε ότι $t' = s' + m = m = n+1 = n+s = t$ κι ολοκληρώνεται η απόδειξη του ισχυρισμού.

Επιπλέον, η γ είναι και ανοικτή αφού για κάθε ανοικτό σύνολο $O \subset [0, \infty]$, το $\gamma(O)$ περιέχει την τομή του Γ με μια ανοικτή μπάλα του X ακτίνας ν,για κάποιο $\nu < \epsilon$.
Έπεται ότι η αντίστροφη $\gamma^{-1} : \Gamma \to [0, \infty)$ είναι συνεχής.

Εφαρμόζοντας μια παραλλαγή του θεωρήματος επέκτασης Tietze μπορούμε να επεκτείνουμε την γ^{-1} σε μια συνεχή συνάρτηση $g : C \to [0, \infty)$. Τότε η συνάρτηση $f(x) = \gamma(g(x)+1)$ δεν έχει σταθερό σημείο. Πράγματι, αν ήταν $f(\dot{x}) = \dot{x}$ τότε $\dot{x} \in \Gamma$ και $\gamma(\gamma^{-1}(\dot{x})+1) = \gamma(\gamma^{-1}(\dot{x}))$, άτοπο αφού η γ είναι 1-1. ♦

Το παραπάνω θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη συνεχούς συνάρτησης

$$f : \overline{B}_X(0,1) \to \overline{B}_X(0,1)$$

χωρίς σταθερά σημεία, όπου ο X είναι απειροδιάστατος χώρος Banach.

Δίνουμε ένα αποτέλεσμα που χαρακτηρίζει τους απειροδιάστατους χώρους Banach.

Πόρισμα

Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε, η κλειστή μοναδιαία σφαίρα είναι retract της κλειστής μοναδιαίας μπάλας.

Απόδειξη:

Έστω συνάρτηση $f : \overline{B}_X(0,1) \to \overline{B}_X(0,1)$ συνεχής χωρίς σταθερά σημεία. Επεκτείνουμε την f στην $\overline{B}_X(0,2)$ ως εξής :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } ||x|| \leq 1 \\ (2-||x||)f(\frac{x}{||x||}) & \text{αν } 1 < ||x|| \leq 2 \end{cases}$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση $f_2 : \overline{B}_X(0,1) \to \overline{B}_X(0,1)$ με τύπο :

$$f_2(x) = \tfrac{1}{2} f_1(2x).$$

Παρατηρούμε ότι η f_2 δεν έχει σταθερά σημεία και για κάθε $x \in \partial\overline{B}_X(0,1)$ είναι $f_2(x) = 0$. Τότε, η συνάρτηση $r : \overline{B}_X(0,1) \to \partial\overline{B}_X(0,1)$ με

$$r = \tfrac{x - f_2(x)}{||x - f_2(x)||}$$

είναι retraction αφού $r(x) = x, \ \forall x \in \partial\overline{B}_X(0,1)$. ♦

1.9 Θεώρημα Markov-Kakutani

Θεώρημα 17 (Markov-Kakutani)
Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος και $K \subset X$, μη κενό, συμπαγές και κυρτό. Υποθέτουμε ότι G είναι οικογένεια γραμμικών συνεχών τελεστών από τον X στον X, ώστε :

- α) G αβελιανή, δηλαδή, $TS = ST$ για κάθε $T, S \in G$.
- β) $TK \subset K$ για κάθε $T \in G$.

Τότε, υπάρχει $\dot{x} \in K$ ώστε $T\dot{x} = \dot{x}$ για κάθε $T \in G$.

Απόδειξη:
Για κάθε $T \in G$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τον τελεστή

$$T_n = \frac{\mathbb{I} + T + ... + T^n}{n+1} .$$

Από το (β) και την κυρτότητα του K θα ισχύει $T_n K \subset K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Επιπλέον, λόγω του (α), για οποιαδήποτε $T, S \in G$ και $n, m \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$T_n K \supset T_n S_m K = S_m T_n K \neq \emptyset$$

και

$$S_m K \supset S_m T_n K = T_n S_m K \neq \emptyset,$$

οπότε

$$T_n K \cap S_m K \supset T_n S_m K = S_m T_n K \neq \emptyset.$$

Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι η οικογένεια συμπαγών υποσυνόλων του K

$$\{T_n K : T \in G,\ n \in \mathbb{N}\}$$

έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, δηλ. η οποιαδήποτε τομή πεπερασμένων μελών της οικογένειας είναι μη κενή.
Από την συμπάγεια του K παίρνουμε

$$F = \bigcap_{T \in G, n \in N} T_n K \neq \emptyset.$$

Ισχυριζόμαστε ότι κάθε $x \in F$ είναι σταθερό σημείο για κάθε $T \in G$.
Έστω $\dot{x} \in F$ και $T \in G$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $y = y(n) \in K$ ώστε :

$$\dot{x} = T_n y.$$

Έχουμε:

$$T\dot{x} - \dot{x} = \frac{Ty + T^2 y + ... + T^{n+1} y}{n+1} - \frac{y + Ty + ... + T^n y}{n+1}$$

$$= \frac{T^{n+1}y - y}{n+1} \in \frac{1}{n+1}(K-K).$$

Άρα,

$$T\dot{x} - \dot{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}(K-K).$$

Το σύνολο $L = K - K$ είναι συμπαγές, ως εικόνα του $K \times K$ μέσω της συνεχούς απεικόνισης

$$\phi(x_1, x_2) = x_1 - x_2.$$

Επειδή ο X είναι τοπικά κυρτός, η τοπολογία του X επάγεται από μια οικογένεια ημινορμών $\mathscr{C}$ που χωρίζει σημεία στον X.

Έστω $p \in \mathscr{C}$. Τότε,

$$\sup_{x\in L} p(x) = M \ < \ \infty.$$

Πράγματι, για κάθε $x \in L$, το σύνολο $U_x = \{z \in X : p(z-x) < 1\}$ είναι ανοικτό και η οικογένεια συνόλων $\{U_x \ : x \in L\}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του L. Λόγω συμπάγειας του L, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο S του L τέτοιο ώστε

$$L \ \subseteq \ \bigcup_{x\in S} U_x \ .$$

Τότε, για κάθε $z \in L$, υπάρχει $x \in S$ με $z \in U_x$, οπότε $p(z-x) < 1$ και άρα

$$p(z) \le p(z-x) + p(x) \le 1 + \max_{x\in S} p(x) = M.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε :

$$\frac{1}{n+1}L \subset \{x \in X : p(x) < \epsilon\} \quad \Rightarrow p(T\dot{x} - \dot{x}) < \epsilon.$$

Συμπεραίνουμε ότι $p(T\dot{x} - \dot{x}) = 0$ για κάθε ημινόρμα $p \in \mathscr{C}$ κι επειδή η $\mathscr{C}$ χωρίζει σημεία, έπεται ότι $T\dot{x} = \dot{x}$.♦

1.10 Θεώρημα Kakutani-Ky Fan

Ορισμός

Έστω $C \subset X$ κυρτό. Μια συνάρτηση $f : C \to (-\infty, \infty]$ λέγεται *κυρτή* ανν :

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \ \ \forall x_1, \ x_2 \in X, \ \ \lambda \in [0,1].$$

Μια συνάρτηση g λέγεται *κοίλη* ανν η $-g$ είναι κυρτή.

Σε ό,τι ακολουθεί, ο X είναι τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος.

Ορισμός

Έστω Y τοπολογικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : Y \to (-\infty, \infty]$ λέγεται *κάτω ημισυνεχής* ανν το $f^{-1}\big((a, \infty]\big)$ είναι ανοιχτό για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Όμοια, η $g : Y \to [-\infty, \infty)$ είναι *άνω ημισυνεχής* ανν η $-g$ είναι κάτω ημισυνεχής.

Σημειώνουμε ότι αν f είναι κάτω ημισυνεχής και ο Y είναι συμπαγής, τότε η f λαμβάνει ελάχιστο στον Y.

Πράγματι, σε αντίθετη περίπτωση, αν $m = \inf_{y \in Y} f(y)$, τότε τα σύνολα

$$f^{-1}((a, \infty]),\ a > m$$

συνιστούν ανοικτό κάλυμμα του Y που δεν δέχεται πεπερασμένα υποκαλύμματα.

Θεώρημα 18 (Ky Fan)

Έστω $K \subset X$ μη κενό, συμπαγές και κυρτό και $\Phi : K \times K \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

- α) η $\Phi(., y)$ είναι κάτω ημισυνεχής, $\forall\ y \in Y$.
- β) η $\Phi(x, .)$ είναι κοίλη, $\forall\ x \in K$.

Τότε υπάρχει $x_0 \in K$ ώστε

$$\sup_{y \in K} \Phi(x_0, y) \leq \sup_{y \in K} \Phi(y, y).$$

Απόδειξη:

Επειδή η απεικόνιση $x \mapsto [\sup_{y\in K}\Phi(x,y)]$ είναι κάτω ημισυνεχής, υπάρχει $x_0 \in K$ ώστε :

$$\inf_{x\in K}[\sup_{y\in K}\Phi(x,y)] = \sup_{y\in K}[\Phi(x_0,y)].$$

Έστω $\epsilon > 0$ σταθερό.

Για κάθε $x \in K$, υπάρχει $y_x \in K$ ώστε

$$\Phi(x,y_x) > \sup_{y\in K}\Phi(x,y) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Αφού η $\Phi(.,y_x)$ είναι κάτω ημισυνεχής, υπάρχει ανοιχτή περιοχή U_x του x ώστε

$$\Phi(z,y_x) > \Phi(x,y_x) - \tfrac{\epsilon}{2}, \forall\ z \in U_x \cap K.$$

Άρα

$$\Phi(z,y_x) > \sup_{y\in K}\Phi(x,y) - \epsilon, \forall\ z \in U_x \cap K.$$

Επειδή K συμπαγές, τοτε για κάποια $x_1,...,x_n \in K$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$K \subset U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$$

Έστω $\phi_1,...,\phi_n \in C(K)$ διαμέριση της μονάδας για το K ως προς το ανοιχτό κάλυμμα $\left\{U_{x_j}\right\}$ και ορίζουμε

$$f(x) = \textstyle\sum_{j=1}^n \phi_j(x) y_{x_j},\ \forall x \in K.$$

Η f είναι συνεχής και ισχύει

$$f(co(\{y_{x_1},...,y_{x_n}\})) \subset co(\{y_{x_1},...,y_{x_n}\}).$$

Τότε το θεώρημα Schauder-Tychonoff εξασφαλίζει την ύπαρξη σταθερού σημείου $\dot{x} \in K$ της f. Επειδή $\Phi(\dot{x},.)$ είναι κοίλη παίρνουμε :

$$\sup_{y\in K}\Phi(y,y) \geq \Phi(\dot{x},\dot{x}) = \Phi(\dot{x},f(\dot{x})) \geq \sum_{j=1}^n \phi_j(\dot{x})\Phi(\dot{x},y_{x_j})$$

Ακόμα, $\phi_j(\dot{x}) = 0$ όταν $\dot{x} \notin U_{x_j}$, έτσι :

$$\sum_{j=1}^n \phi_j(\dot{x})\Phi(\dot{x},y_{x_j}) \geq \sum_{j=1}^n \phi_j(\dot{x})[\sup_{y\in K}\Phi(x_j,y) - \epsilon] \geq \inf_{x\in K}[\sup_{y\in K}\Phi(x,y)] - \epsilon$$

Άρα βρήκαμε $x_0 \in K$, ανεξάρτητο του ϵ ώστε :

$$\sup_{y\in K}\Phi(y,y) \geq \sup_{y\in K}\Phi(x_0,y) - \epsilon$$

Για $\epsilon \to 0$ παίρνουμε την επιθυμητή ανισότητα. ♦

Στα παρακάτω θα ασχοληθούμε με σταθερά σημεία συναρτήσεων που απεικονίζουν σημεία σε σύνολα. Έστω $K \subset X$ και θεωρούμε την συνάρτηση $f : K \to 2^K := \{Y : Y \subset K\}$. Ένα σταθερό σημείο της f είναι ένα $x \in K$ ώστε $x \in f(x)$.

Ορισμός
Η συνάρτηση f λέγεται *άνω ημισυνεχής* αν για κάθε $x \in K$ και κάθε ανοιχτό $U \supset f(x)$, υπάρχει περιοχή V του x ώστε αν $y \in V$ τότε $f(y) \subset U$.

Πρόταση
Έστω $K \subset X$ συμπαγές και $f : K \to 2^K$ με $f(x)$ κλειστό για κάθε $x \in K$.
Τότε η f είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν το σύνολο

$$G(f) = \{(x, y) \in K \times K : y \in f(x)\}$$

είναι κλειστό στο $K \times K$.

Απόδειξη:
Έστω ότι η f είναι άνω ημισυνεχής και $(x_0, y_0) \in (K \times K) \setminus G(f)$. Τότε $y_0 \notin f(x_0)$. Από τη συμπάγεια του K βρίσκουμε δύο ξένα μεταξύ τους ανοικτά σύνολα U_1, U_2 ώστε

$$y_0 \in U_1 \,, \quad f(x_0) \subset U_2 \,.$$

Λόγω της άνω ημισυνέχειας της f, υπάρχει ανοιχτό σύνολο $V \ni x_0$ ώστε

$$f(x) \subset U_2 \,, \quad \forall\, x \in V.$$

Άρα η γειτονιά $V \times U_1$ του (x_0, y_0) δεν έχει κοινά σημεία με το $G(f)$ κι επομένως το $G(f)$ είναι κλειστό.

Αντίστροφα, ας είναι $G(f)$ κλειστό.
Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι άνω ημισυνεχής σε κάποιο x.
Αν $\mathscr{N}_x$ το σύνολο των περιοχών του x, τότε υπάρχει U ανοιχτό σύνολο που περιέχει το $f(x)$ με την παρακάτω ιδιότητα:
για κάθε $V \in \mathscr{N}_x$, υπάρχει $y_V \in V$ ώστε $f(y_V) \not\subset U$.
Ισοδύναμα

$$G(f) \cap (\overline{V} \times U^{\complement}) \neq \emptyset, \quad \forall\, V \in \mathscr{N}_x \,.$$

Από την τελευταία έπεται ότι η οικογένεια

$$\left\{G(f) \cap (\overline{V} \times U^{\complement})\right\}_{V \in \mathscr{N}_x}$$

συμπαγών υποσυνόλων του $K \times K$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

[Σημ. ότι τα σύνολα $G(f)$ και $\overline{V} \times U^{\complement}$, $V \in \mathscr{N}_x$ είναι συμπαγή, ως κλειστά στον συμπαγή χώρο $K \times K$. Επιπλέον, κάθε πεπερασμένη τομή μελών του $\mathscr{N}_x$ ανήκει στο $\mathscr{N}_x$.]

Συμπεραίνουμε ότι

$$\bigcap_{V\in\mathcal{N}_x}\left\{G(f)\cap(\overline{V}\times U^{\complement})\right\}\neq\emptyset.$$

Επιλέγουμε (x_0,y_0) στην παραπάνω τομή.
Προκύπτει ότι $x_0=x$ και αφού $y_0\in f(x_0)=f(x)$, τότε $y_0\in U$, άτοπο. ♦

Θεώρημα 19 (Kakutani-Ky Fan)
Έστω K μη κενό, συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του τοπικά κυρτού τοπολ. γραμμ. χώρου X. Έστω $f:K\to 2^K$ άνω ημισυνεχής ώστε το $f(x)$ να είναι μη κενό, κυρτό και κλειστό για κάθε $x\in K$.
Τότε η f έχει σταθερό σημείο $\dot{x}\in K$.

Απόδειξη:
Αν δεν ίσχυε το συμπέρασμα, από το διαχωριστικό θεώρημα Hahn-Banach, για κάθε $x\in K$, υπάρχει $a_x\in\mathbb{R}$ και $\Lambda_x\in X^*$ ώστε :

$$\sup_{z\in f(x)} Re\Lambda_x z<a_x<Re\Lambda_x x.$$

Το σύνολο

$$U_x=\{z\in X: Re\Lambda_x z<a_x\}$$

είναι ανοιχτό και περιέχει το $f(x)$. Άρα υπάρχει ανοιχτή περιοχή V_x του x ώστε :

$$f(y)\subset U_x,\quad \forall\ y\in V_x\cap K.$$

Εάν θέσουμε $W_x=V_x\cap\{z\in X: a_x<Re\Lambda_x z\},\ \ x\in K,$ τότε W_x ανοικτή περιοχή του x και ισχύει:

$$Re\Lambda_x y>a_x,\ \forall y\in W_x\cap K$$

και

$$Re\Lambda_x z<a_x,\ \forall y\in W_x\cap K,\quad \forall z\in f(y).$$

Από τη συμπάγεια του K υπάρχουν $x_1,...,x_n\in K$ ώστε :

$$K\subset W_{x_1}\cup...\cup W_{x_n}\ .$$

Έστω $\phi_1,....,\phi_n$ διαμέριση της μονάδας για το K ως προς το ανοιχτό κάλυμμα W_{x_j} και ορίζουμε $\Phi:K\times K\to\mathbb{R}$

$$\Phi(x,z)=\sum_{j=1}^n\phi_j(x)Re\Lambda_{x_j}x-\sum_{j=1}^n\phi_j(x)Re\Lambda_{x_j}z.$$

Η Φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 17, άρα υπάρχει $x_0\in K$ ώστε :

$$\sup_{z\in K}\Phi(x_0,z)\leq\sup_{z\in K}\Phi(z,z)=0.$$

Άρα, για $z \in f(x_0)$ έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_j(x_0) a_{x_j} < \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x_0) Re\Lambda_{x_j} x_0 \leq \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x_0) Re\Lambda_{x_j} z < \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x_0) a_{x_j}$$

άτοπο. Στα παραπάνω αθροίσματα, μη μηδενική συνεισφορά έχουμε μόνο για τα j με $x_0 \in W_{x_j}$.♦

Κεφάλαιο 2

Εφαρμογές

2.1 Θεώρημα Peano

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής σε περιοχή του $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Τότε, υπάρχει $a > 0$ ώστε το πρόβλημα αρχικών τιμών :

$$u'(x) = f(x, u(x)),\ u(x_0) = y_0$$

να έχει λύση $u = u(x)$ στο διάστημα $I := [x_0 - a, x_0 + a]$.

Απόδειξη:
Αφού η f είναι συνεχής σε περιοχή του (x_0, y_0), υπάρχει $\widetilde{a} > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο τετράγωνο :

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq \widetilde{a},\ |y - y_0| \leq \widetilde{a}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι η $u = u(x)$ είναι λύση του ΠΑΤ αν και μόνο αν είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης :

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, u(t)\big)dt\ .$$

Θέτουμε $M = \max_Q |f(x, y)|$(το οποίο υπάρχει αφού η f είναι συνεχής σε συμπαγές σύνολο) και $a = \dfrac{\widetilde{a}}{M}$, όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρήσαμε $M \geq 1$. Επιπλέον, θέτουμε

$$I := [x_0 - a, x_0 + a].$$

Αναζητούμε σταθερό σημείο του τελεστή $T : \dot{C} \to \dot{C}$ με

$$\big(Tu\big)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, u(t)\big)dt\ , \quad x \in I,$$

όπου $\dot{C}$ ο χώρος Banach $C(I)$ εφοδιασμένος με τη νόρμα $||u|| = \max\limits_{x \in I}|u(x)|$.

Σημειώνουμε ότι σύγκλιση ως προς αυτή τη νόρμα ισοδυναμεί με ομοιόμορφη σύγκλιση στο I.

Ισχυρισμός 1: Ο T είναι συνεχής.
Πράγματι, έστω $(u_n) \subseteq \dot{C}$ ομοιόμορφα συγκλίνουσα σε κάποια $u \in \dot{C}$. Εάν $\rho = \sup_n ||u_n||$, από την ομοιόμορφη συνέχεια της f πάνω στο συμπαγές σύνολο $I \times [-\rho, \rho]$ παίρνουμε εύκολα ότι και η ακολουθία $f(\cdot, u_n(\cdot))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(\cdot, u(\cdot))$, δηλ.

$$\lim_n ||f(\cdot, u_n(\cdot)) \; - \; f(\cdot, u(\cdot))|| = 0.$$

Ταυτόχρονα, $||Tu_n \; - \; Tu|| \; \leq \; a||f(\cdot, u_n(\cdot)) \; - \; f(\cdot, u(\cdot))||, \;\; n \geq 1$ κι έτσι έπεται το ζητούμενο.

Ορίζουμε το σύνολο

$$A := \Big\{ u \in \dot{C} : |u(x) - y_0| \leq \widetilde{a}, \quad |u(x_1) - u(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|, \;\; \forall \, x, \; x_1 \, , x_2 \; \in I \Big\}.$$

Είναι σαφές ότι το A είναι *ισοσυνεχές* (προκύπτει άμεσα από τη δεύτερη ανιοότητα στον ορισμό του A). Επιπλέον, είναι κλειστό (προκύπτει εύκολα από το ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλιση). Από το θεώρημα Ascoli-Arzela, το A είναι συμπαγές. Τέλος, το A είναι προφανώς κυρτό.

Ισχυρισμός 2: Ισχύει $T(A) \subseteq A$.
Έστω $u \in A$.
Εάν t μεταξύ δύο σημείων του I, τότε $t \in I$ κι επειδή $M \geq 1$, παίρνουμε

$$|t - x_0| \leq a \leq aM = \widetilde{a}, \quad |u(t) - y_0| \leq \widetilde{a},$$

δηλ. $(t, u(t)) \in Q$ κι επομένως $f(t, u(t)) \leq M$.
Εάν $x, x_1 \, , x_2 \; \in I$ έχουμε

$$|Tu(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f\big(t, u(t)\big) dt \right| \leq M|x - x_0| \leq Ma = \tilde{a}$$

και

$$|Tu(x_1) - Tu(x_2)| = \left| \int_{x_0}^{x_1} f\big(t, u(t)\big) dt - \int_{x_0}^{x_2} f\big(t, u(t)\big) dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f\big(t, u(t)\big) dt \right|$$

$$\leq M|x_1 - x_2|.$$

Το θεώρημα Schauder εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός σταθερού σημείου $u \in A \subseteq C(I)$ του T που είναι λύση του ΠΑΤ. ⧫

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζουμε το θεώρημα Picard το οποίο εξασφαλίζει και την μοναδικότητα της λύσης.

2.2 Θεώρημα Picard

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα ύπαρξης λύσης και μοναδικότητας για το ΠΑΤ :

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad u(x_0) = y_0 \ ,$$

όπου x_0, y_0 πραγματικοί αριθμοί.
Έστω f συνεχής συνάρτηση στο τετράγωνο :

$$R = \{(x,y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \, .$$

Προφανώς η f είναι φραγμένη στο R, άρα υπάρχει c ώστε :

$$|f(x,y)| \leq c \ , \ \forall \ (x,y) \in R.$$

Ακόμα υποθέτουμε ότι υπάρχει k(σταθερά Lipschitz) ώστε για όλα τα $(x, y_1), \ (x, y_2) \in R$ να ισχύει :

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k|y_1 - y_2| \ . \ (1)$$

Τότε το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$, όπου

$$\beta < min\left\{a, \tfrac{b}{c}, \tfrac{1}{k}\right\} . \ (2)$$

Απόδειξη:
Έστω $C(J)$ ο μετρικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων στο διάστημα $J = [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ με την μετρική :

$$d(u,v) = \max_{x \in J} |u(x) - v(x)|.$$

Ο $C(J)$ είναι πλήρης. Έστω $\widetilde{C}$ το υποσύνολο του $C(J)$ που περιέχει όλες τις συναρτήσεις $u \in C(J)$ με :

$$|u(x) - y_0| \leq c\beta, \quad \forall \ x \in J.$$

Επειδή το $\widetilde{C}$ είναι κλειστό, ο μετρικός χώρος $(\widetilde{C}, d)$ είναι πλήρης.

Με ολοκλήρωση, η αρχική διαφορική παίρνει την μορφή $u = Tu$ όπου :

$$T : \widetilde{C} \to \widetilde{C}$$

με τύπο

$$Tu(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, u(t)\big) dt, \quad x \in J. \ (4)$$

Ισχυρισμός 1: Ο T ορίζεται καλώς.
Πράγματι, έστω $u \in \widetilde{C}$. Επειδή $\beta < a, \ c\beta < b$ [βλ. (2)], έχουμε ότι $\big(t, u(t)\big) \in R, \ \forall \ t \in J$ και το ολοκλήρωμα στην (4) υπάρχει αφού f συνεχής στο R.

Επιπλέον ο T απεικονίζει το $\widetilde{C}$ στο $\widetilde{C}$ αφού για κάθε $x \in J$,

$$|Tu(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f\big(t, u(t)\big) dt \right| \leq c|x - x_0| \leq c\beta.$$

Ισχυρισμός 2. Ο T είναι συστολή στο $\widetilde{C}$.
Πράγματι, από την (1) έχουμε, $\forall x \in J$,

$$\begin{aligned} |Tu(x) - Tv(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} [f\big(t, u(t)\big) - f\big(t, v(t)\big)] dt \right| \\ &\leq k|x - x_0| \max_{t \in J} \ |u(t) - v(t)| \\ &\leq k\beta d(u, v) \end{aligned}$$

και άρα

$$d(Tu, Tv) \leq ad(u, v) \ , \quad \text{όπου } a = k\beta.$$

Όμως $k\beta < 1$, άρα ο τελεστής T είναι συστολή στον $\widetilde{C}$.

Από θεώρημα του Banach, ο T έχει μοναδικό σταθερό σημείο $u \in \widetilde{C}$ που είναι και η μοναδική λύση του ΠΑΤ στο διάστημα J. ♦

2.3 Ένα αφηρημένο ελλειπτικό πρόβλημα

Έστω X, V χώροι Banach ώστε V ανακλαστικός και

$$V \hookrightarrow X \hookrightarrow V^*$$

με συμπαγείς και πυκνές εμφυτεύσεις και τελεστές $A : V \to V^*, \ B : X \to V^*$ τέτοιοι ώστε:

- A γραμμικός και φραγμένος.
- B μη γραμμικός, συνεχής και φραγμένος, δηλ. απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε φραγμένα σύνολα.
- $\langle Au, u \rangle \geq \epsilon ||u||_V^2, \ \forall u \in V. \quad (1)$
- $\langle B(u), u \rangle \geq -c(1 + ||u||_V^a), \ \forall u \in X, \quad (2)$

για κάποια $\epsilon > 0, \ c \geq 0$ και $a \in [0, 2)$.

Πρόβλημα: Για δοθέν $g \in V^*$, να βρεθεί η λύση $u \in V$ της :

$$A(u) + B(u) = g \quad (3)$$

Για $v \in X$, ας είναι w η λύση της :

$$Aw = g - B(v)$$

Από την (1) ο A είναι 1-1 (αφού $KerA = 0_V$) και επι του V^*, απο το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης(και αφού για κάθε ανοιχτό G είναι $(T^{-1})^{-1}(G) = T(G)$ ανοιχτό) ο A^{-1} είναι γραμμικός και φραγμένος(συνεχής) απο τον V^* στον V. Άρα

$$w = A^{-1}(f - B(v)) \in V.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : X \to X$ ως εξής :

$$f(v) = A^{-1}\big(f - B(v)\big).$$

Η f είναι συνεχής και συμπαγής λόγω των υποθέσεων για τον τελεστή B. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\lambda \in [0, 1]$υπάρχει u_λ ώστε $u_\lambda = \lambda f(u_\lambda)$. Τότε το u_λ αποτελεί λύση της :

$$Au_\lambda + \lambda B(u_\lambda) = \lambda g$$

Συνεπώς έχουμε :

$$\langle Au_\lambda, u_\lambda\rangle + \langle \lambda B(u_\lambda), u_\lambda\rangle = \langle \lambda g, u_\lambda\rangle$$

Λόγω των (1),(2) προκύπτει :

$$\epsilon||u_\lambda||_V^2 \leq \lambda c(1 + ||u_\lambda||_V^a) + \lambda||g||_{V^*}||u_\lambda||_V$$

Όμως $\lambda \in [0,1]$ και απο ανισότητα Young

$$ab \leq \nu a^p + K(\nu,p)b^q \;, (a,b \geq 0, \nu > 0)$$

όπου $K(\nu,p) = (\nu p)^{-q/p} q^{-1} \quad , (1 < p,q < \infty, 1/p + 1/q = 1)$ παίρνουμε την priori εκτίμηση

$$||u_\lambda||_V^2 \leq \frac{2}{\epsilon}(c + K(\epsilon/4, 2/a)c^{2/2-a} + \frac{1}{\epsilon}||g||_{V^*}^2)$$

Άρα το σύνολο

$$F = \{u_\lambda \in V : u_\lambda = \lambda f(u_\lambda), \lambda \in [0,1]\}$$

είναι φραγμένο στο V. Απο θεώρημα Schaefer υπάρχει σταθερό σημείο της f, το οποίο αποτελεί λύση της (3). ♦

Παράδειγμα
Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο με λείο σύνορο $\partial\Omega$. Ψάχνουμε λύση(ασθενή) στο μη γραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα :

$$\begin{cases} -\Delta u + u^5 = g \\ \quad u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Σε αυτή την περίπτωση είναι $V = H_0^1(\Omega)$, $X = L^6(\Omega)$.
Επίσης $g \in H_0^1(\Omega)^* = H^{-1}(\Omega)$.
Αποδεικνύεται ότι η εμφύτευση $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ είναι συμπαγής όταν $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
Τότε, οι τελεστές A = -Δ και $B(u) = u^5$ ικανοποιούν τις παραπάνω υποθέσεις.

2.4 Το πρόβλημα αναλλοίωτου υπόχωρου

Το πρόβλημα εύρεσης αναλλοίωτου υπόχωρου έχει κεντρικό ρόλο στην θεωρία τελεστών. Η διατύπωση του είναι απλή :
Για έναν χώρο Banach X και τελεστή $T \in L(X)$, να βρεθεί κλειστός μη τετριμμένος υπόχωρος M του $X(M \neq X, M \neq \{0\})$ για τον οποίο ισχύει

$$TM \subset M.$$

Τότε λέμε ότι ο M είναι *αναλλοίωτος* υπόχωρος του T.

Είναι γνωστό ότι δεν έχουν όλοι οι γραμμικοί τελεστές σε χώρους Banach αναλλοίωτους υποχώρους.
Το ερώτημα είναι ακόμα ανοιχτό για τους χώρους Hilbert.
Το πιο γενικό αποτέλεσμα σε αυτό το θέμα είναι το θεώρημα Lomonosov που εξασφαλίζει την ύπαρξη υπεραναλλοίωτου υποχώρου για μια μεγάλη κλάση τελεστών. Θα χρειαστούμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός
Έστω X χώρος Banach. Ένας αναλλοίωτος υπόχωρος του $T \in L(X)$ θα λέγεται *υπεραναλλοίωτος* αν είναι αναλλοίωτος για κάθε τελεστή που αντιμετατίθεται με τον T, δηλαδή για κάθε $T' \in L(X)$ ώστε $TT' = T'T$.

Παρατήρηση 1
Αν ο $T \in L(H)$ δεν είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού και έχει ιδιοτιμή λ, τότε ο ιδιοχώρος M που αντιστοιχεί στην λ είναι υπεραναλλοίωτος για τον T. Πράγματι, αν $x \in M$ και ο T' αντιμετατίθεται με τον T τότε :

$$\lambda T'x = T'Tx = TT'x, \text{ άρα } T'x \in M.$$

Παρατήρηση 2
Έστω $S \in L(X)$ συμπαγής τελεστής. Αν $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του S, τότε ο ιδιοχώρος

$$F := \{x \in X : Sx = \lambda x\}$$

που αντιστοιχεί στην λ έχει πεπερασμένη διάσταση.
Πράγματι, ο περιορισμός του S στο F είναι (μη μηδενικό) πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή και ο ταυτοτικός είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα Lomonosov
Έστω X χώρος Banach. Θεωρούμε τελεστή $T \in L(X)$(όχι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού) που αντιμετατίθεται με μη μηδενικό συμπαγή τελεστή $S \in L(X)$. Τότε ο T έχει υπεραναλλοίωτο υπόχωρο.

Απόδειξη:
Έστω $\mathbb{A}$ η άλγεβρα των γραμμικών, συνεχών, τελεστών που αντιμετατίθενται με τον T. Σημειώνουμε ότι μια άλγεβρα $\mathbb{A}$ στον $L(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $L(X)$ ώστε το γινόμενο(σύνθεση) δύο στοιχείων του $\mathbb{A}$ να ανήκει επίσης στο $\mathbb{A}$. Αν ο T δεν έχει υπεραναλλοίωτους υποχώρους τότε

$$\overline{\mathbb{A}x} = X, \ \forall x \in X, \ x \neq 0.$$

Πράγματι, αν ίσχυε

$$\overline{\mathbb{A}x} \neq X \text{ για κάποιο } x \neq 0,$$

τότε ο $\overline{\mathbb{A}x}$ είναι υπεραναλλοίωτος για τον T αφού για κάθε $T' \in \mathbb{A}$ ισχύει

$$T'\overline{\mathbb{A}x} \subset \overline{T'\mathbb{A}x} \subset \overline{\mathbb{A}x}\ ,$$

όπου στον πρώτο εγκλεισμό κάναμε χρήση της συνέχειας του T'.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε $||S||_{L(X)} \leq 1$. Διαλέγουμε $x_0 \in X$ με

$$||Sx_0|| > 1 \text{ (άρα } ||x_0|| > 1)$$

και θέτουμε $B = \overline{B}_X(x_0, 1)$
Για $x \in \overline{SB}$ (και επειδή $x \neq 0$), υπάρχει $T' \in \mathbb{A}$ ώστε

$$||T'x - x_0||_X < 1.$$

Άρα κάθε $x \in \overline{SB}$ έχει ανοιχτή περιοχή V_x ώστε

$$T'V_x \subset B \text{ για κάποιο } T' \in \overline{\mathbb{A}}.$$

Από τη συμπάγεια του $\overline{SB}$ βρίσκουμε πεπερασμένο κάλυμμα $V_1, ..., V_n$ και $T'_1, ..., T'_n \in \mathbb{A}$ ώστε

$$T'_j V_j \subset B, \ \forall \, j = 1, ..., n.$$

Έστω $\phi_1, ..., \phi_n \in C(\overline{SB})$ διαμέριση της μονάδας για το $\overline{SB}$ ως προς το ανοιχτό κάλυμμα $\{V_j\}$ και ορίζουμε για $x \in B$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(Sx) T'_j Sx.$$

Παρατηρούμε ότι οι μόνοι μη μηδενικοί όροι στο άθροισμα είναι αυτοί που αντιστοιχούν στο j για το οποίο ισχύει $Sx \in V_j$. Ακόμα, το άθροισμα είναι κυρτός συνδυασμός στοιχείων του B, άρα η f είναι συνάρτηση από το B στο B κι επιπλέον συνεχής.

Ισχυρισμός: Το $f(B)$ είναι σχετικά συμπαγές.
Αρκεί να δείξουμε ότι το $\phi_j(SB) T'_j SB$ είναι σχετικά συμπαγές για κάθε j.
Έστω $(x_n) \subseteq B$ τυχαία ακολουθία. Λόγω της συμπάγειας του S και περνώντας σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Sx_n \to \xi$, για κάποιο $\xi \in X$.
Αφού, οι T'_j, ϕ_j είναι συνεχείς, θα έχουμε

$$\phi_j(Sx_n) T'_j S x_n \to \phi_j(\xi) T'_j \xi$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Από θεώρημα Schauder-Tychonoff έπεται ότι υπάρχει $\dot{x} \in B$ ώστε $f(\dot{x}) = \dot{x}$, δηλ.

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(S\dot{x}) T'_j S\dot{x}.$$

Ορίζουμε τον τελεστή $\widetilde{T} \in \mathbb{A}$ ως

$$\widetilde{T} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \phi_j(S\dot{x}) T'_j.$$

Τότε η άνω ισότητα γράφεται

$$\widetilde{T}S\dot{x} = \dot{x}.$$

Άρα το 1 είναι ιδιοτιμή του $\widetilde{T}S$. Όμως ο $\widetilde{T}S$ είναι συμπαγής τελεστής και άρα ο ιδιόχωρος F που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 είναι πεπερασμένης διάστασης. Επειδή ο $\widetilde{T}S$ αντιμετατίθεται με τον T έχουμε ότι ο F είναι αναλλοίωτος για τον T. Πράγματι, για κάθε $x \in F$,

$$Tx = T\widetilde{T}Sx = \widetilde{T}STx \ \Rightarrow Tx \in F.$$

Άρα ο T έχει ιδιοτιμή (αφού ο τετραγωνικός πίνακας του T ως προς μία βάση του F έχει μια τουλάχιστον ιδιοτιμή) κι επομένως έχει υπεραναλλοίωτο υπόχωρο, άτοπο.♦

2.5 Θεωρία παιγνίων

Θεωρούμε παίγνιο με περισσότερους από n παίχτες($n \geq 2$) με την υπόθεση ότι δεν συνεργάζονται μεταξύ τους. Κάθε παίχτης ακολουθεί μια στρατηγική που έχει εξάρτηση από τη στρατηγική του αντιπάλου. Συμβολίζουμε με K_k το σύνολο όλων των πιθανών στρατηγικών του k-οστου παίχτη και θέτουμε :

$$K = K_1 \times ... \times K_n.$$

Ένα στοιχείο $x \in K$ καλείται *προφίλ στρατηγικής*.
Για κάθε k, ορίζουμε τη *συνάρτηση απώλειας* του k-οστου παίχτη $f_k : K \to \mathbb{R}$.
Αν ισχύει

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 0, \quad \forall x \in K \bigstar$$

τότε λέμε ότι το παιχνίδι είναι *μηδενικού αθροίσματος*.

Ορισμός:
Ισορροπία Nash είναι ένα προφίλ στρατηγικής με την ιδιότητα : κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει την απόδοσή του αλλάζοντας την στρατηγική του ενώ οι άλλοι παίχτες δεν αλλάζουν την στρατηγική τους. Δηλαδή, είναι ένα διάνυσμα $\overline{x} = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in K$ ώστε :

$$f_k(\overline{x}) \leq f_k(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_{k-1}, x_k, \overline{x}_{k+1}, ..., \overline{x}_n), \ \forall x_k \in K_k \ , \tag{1}$$

για κάθε $k = 1, ..., n$.
Σημειώνουμε ότι αν υπάρχει ισορροπία Nash δεν είναι απαραίτητα μοναδική.

Χρειαζόμαστε περισσότερες υποθέσεις για τα K_k και τις συναρτήσεις f_k. Είναι φυσιολογικό να υποθέσουμε ότι, με όλες τις άλλες στρατηγικές σταθερές, για μικρή μεταβολή στο x_k η συνάρτηση απώλειας έχει μικρή μεταβολή.
Επίσης, υποθέτουμε ότι η μέση απώλεια που αντιστοιχεί σε 2 διαφορετικές στρατηγικές του k-οστου παίχτη είναι μεγαλύτερη από την απώλεια που αντιστοιχεί στη ''μέση'' στρατηγική. Συνεπώς, η υπόθεση της κυρτότητας είναι απαραίτητη .
Το παρακάτω θεώρημα είναι θεμελιώδες στη θεωρία παιγνίων.

Θεώρημα Nash
Για κάθε $k = 1, ..., n$, έστω K_k μη κενό συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του τοπικά κυρτού χώρου X_k. Υποθέτουμε ότι για κάθε k η συνάρτηση απώλειας f_k είναι συνεχής στο K. Επιπλέον, για κάθε σταθερό $x_j \in K_j$ με $j \neq k$, η απεικόνιση

$$f_k(x_1, ..., x_{k-1}, ., x_{k+1}, ..., x_n) : K_k \to \mathbb{R}$$

είναι κυρτή.
Τότε υπάρχει $\overline{x} \in K$ που ικανοποιεί την (1), δηλαδή υπάρχει ισορροπία Nash.

Απόδειξη
Ορίζουμε $\Phi : K \times K \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \left[f_k(x) - f_k(x_1, ..., x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, ..., x_n) \right].$$

Η Φ είναι συνεχής και η $\Phi(x, .)$ είναι κοίλη για κάθε σταθερό $x \in K$. Από το Θεώρημα 17, υπάρχει $\overline{x} \in K$ ώστε

$$\sup_{y \in K} \Phi(\overline{x}, y) \leq \sup_{y \in K} \Phi(y, y) = 0.$$

Ειδικότερα, αν θέσουμε $\overline{y} = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_{k-1}, x_k, \overline{x}_{k+1}, ..., \overline{x}_n)$, για $x_k \in K_k$ παίρνουμε

$$\Phi(\overline{x}, \overline{y}) \leq 0, \; \forall \; x_k \in K_k$$

που είναι η (1). ♦

Μπορούμε να χαλαρώσουμε τις υποθέσεις αν θεωρήσουμε ένα παίγνιο 2 παιχτών μηδενικού αθροίσματος(duel). Σε αυτή την περίπτωση λόγω της ★ έχουμε :

$$f_1(x_1, x_2) = -f_2(x_1, x_2) = \Psi(x_1, x_2).$$

Μπορούμε να επαναλάβουμε την απόδειξη με Ψ να είναι κυρτή και κάτω ημισυνεχής στην πρώτη μεταβλητή και κοίλη και άνω ημισυνεχής στην δεύτερη μεταβλητή.
Τώρα η Ψ είναι η συνάρτηση απώλειας για τον πρώτο παίχτη, ισοδύναμα η συνάρτηση κέρδους του δεύτερου παίχτη.

Θεώρημα Von Neumann
Έστω $K_1 \subset X_1$ και $K_2 \subset X_2$ όπως στο προηγούμενο θεώρημα. Ακόμα θεωρούμε $\Psi : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ ώστε :

- $\Psi(., x_2)$ κάτω ημισυνεχής και κυρτή $\forall x_2 \in K_2$ (1)
- $\Psi(x_1, .)$ άνω ημισυνεχής και κοίλη $\forall x_1 \in K_1$ (2)

Τότε υπάρχει ισορροπία Nash $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in K_1 \times K_2$.

Απόδειξη
Σε αυτή την περίπτωση είναι $\Phi : (K_1 \times K_2) \times (K_1 \times K_2) \to \mathbb{R}$ με

$$\Phi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = -\Psi(y_1, x_2) + \Psi(x_1, y_2)$$

Εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα.
Πράγματι, η $\Phi(., (y_1, y_2))$ είναι κάτω ημισυνεχής ενώ η $\Phi((x_1, x_2), .)$ είναι κοίλη και άνω ημισυνεχής, άρα άνω φραγμένη αφού λαμβάνει μέγιστο στο συμπαγές $K_1 \times K_2$. Τελικά ισχύει :

$$\Psi(\overline{x}_1, x_2) \leq \Psi(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \leq \Psi(x_1, \overline{x}_2) \ , \forall x_1 \in K_1, x_2 \in K_2. \blacklozenge$$

Το άνω θεώρημα είναι γνωστό και ως θεώρημα Minimax.

Πόρισμα
Με τις υποθέσεις του άνω θεωρήματος ισχύει η ισότητα

$$\inf_{x_1 \in K_1} \sup_{x_2 \in K_2} \Psi(x_1, x_2) = \Psi(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \sup_{x_2 \in K_2} \inf_{x_1 \in K_1} \Psi(x_1, x_2)$$

Απόδειξη:
Ορίζουμε

$$g(x_1) = \sup_{x_2 \in K_2} \Psi(x_1, x_2) \text{ και } h(x_2) = \inf_{x_1 \in K_1} \Psi(x_1, x_2)$$

Τότε $\forall x_1 \in K_1$ και $\forall x_2 \in K_2$ είναι :

$$h(x_2) \leq \Psi(x_1, x_2) \leq g(x_1)$$

Άρα ισχύει :

$$\sup_{x_2 \in K_2} h(x_2) \leq \inf_{x_1 \in K_1} g(x_1).$$

Από το προηγούμενο θεώρημα :

$$h(\overline{x}_2) = \inf_{x_1 \in K_1} \Psi(x_1, \overline{x}_2) = \Psi(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \sup_{x_2 \in K_2} \Psi(\overline{x}_1, x_2) = g(\overline{x}_1)$$

Συνεπώς :

$$\sup_{x_2 \in K_2} h(x_2) \geq h(\overline{x}_2) = g(\overline{x}_1) \geq \inf_{x_1 \in K_1} g(x_1) \geq \sup_{x_2 \in K_2} h(x_2)$$

Επομένως ισχύουν οι ισότητες παντού και προκύπτει το συμπέρασμα.♦

Κλείνοντας θα ασχοληθούμε με παίγνιο 2 παιχτών όπου τα σύνολα K_1 και K_2 όλων των δυνατών στρατηγικών κάθε παίχτη είναι πεπερασμένα. Ακόμα υποθέτουμε οτι για $k = 1, 2$ ο παίχτης k παίζει τυχαία μια στρατηγική $x_k \in K_k$ με πιθανότητα $p_k(x_k)$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε οτι οι παίχτες ακολουθούν μικτή στρατηγική.
Συμβολίζοντας με Ψ την συνάρτηση απώλειας(του πρώτου παίχτη), η συνάρτηση μέσης απώλειας είναι :

$$\widehat{\Psi}(p_1, p_2) = \sum_{x_1 \in K_1} \sum_{x_2 \in K_2} p_1(x_1) p_2(x_2) \Psi(x_1, x_2)$$

Ορισμένη στο $\widehat{K_1} \times \widehat{K_2}$ όπου $\widehat{K}_k = \left\{ p_k : K_k \to [0, 1] : \sum_{x_k \in K_k} p_k(x_k) = 1 \right\}$.

Θεώρημα
Οποιοδήποτε duel με πεπερασμένο προφίλ στρατηγικών λαμβάνει ισορροπία Nash αποτελούμενη απο μεικτές στρατηγικές.

Απόδειξη:
Παρατηρούμε ότι οι $\widehat{K}_k$ και $\widehat{\Psi}$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Neumann(στην πραγματικότητα, η $\widehat{\Psi}$ είναι γραμμική και στις 2 μεταβλητές).♦

Bibliography

[1] Vittorino Pata, *Fixed Point Theorems and Applications,Springer, UNITEXT, https://doi.org/10.1007/978-3-030-19670-7.*

[2] Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications,Wiley, 1978.*

[3] Σπύρος Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης.*

[4] Σπύρος Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης.*