



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

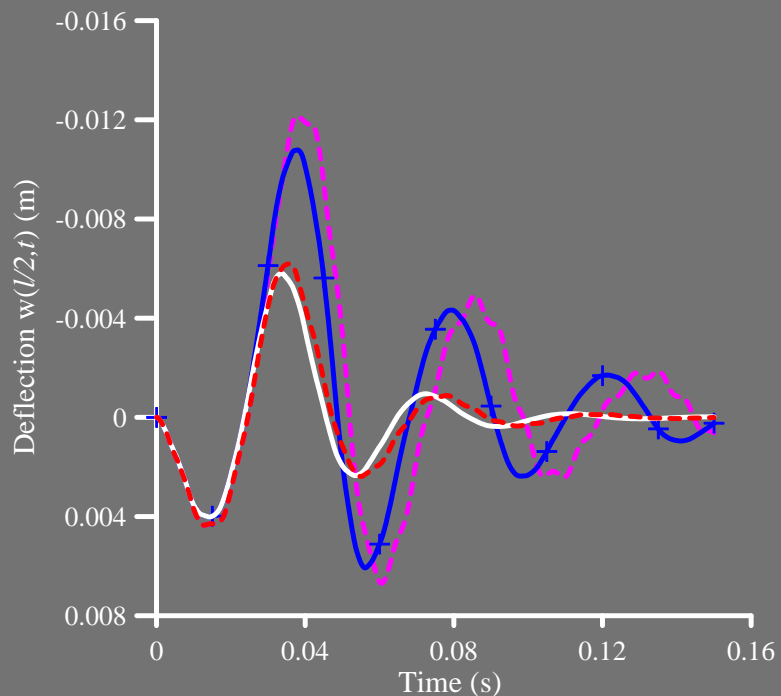
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ”

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Δοκού με Διατμητικές
Παραμορφώσεις Εδραζόμενης επί Ιξωδοελαστικού Μη
Γραμμικού Εδάφους υπό Κινούμενο Φορτίο

ΚΑΜΠΙΤΣΗ Ε. ΑΝΔΡΕΑ



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Ι. ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2011





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ”

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Δοκού με Διατμητικές
Παραμορφώσεις Εδραζόμενης επί Ιξωδοελαστικού Μη
Γραμμικού Εδάφους υπό Κινούμενο Φορτίο**

ΚΑΜΠΙΤΣΗ Ε. ΑΝΔΡΕΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Ι. ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2011

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, παρουσιάζεται η μη γραμμική δυναμική ανάλυση δοκού τυχούσας διατομής (έχοντας τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας), εδραζόμενης επί μη γραμμικού τριπαραμετρικού ελαστικού εδάφους με απόσβεση υποβαλλόμενου σε μετρίως μεγάλες μετακινήσεις και σε τυχούσες συνοριακές συνθήκες, λαμβάνοντας υπόψη τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης και περιστροφικής αδράνειας. Το εδαφικό προσομοίωμα χαρακτηρίζεται από γραμμικά και μη γραμμικά ελατήρια τύπου Winkler, από ελατήρια τύπου Pasternak και από τον συντελεστή απόσβεσης. Η δοκός υπόκειται σε δράση από τυχούσας κατανομής εγκάρσια δυναμική φόρτιση κινούμενη με σταθερή ταχύτητα, καθώς και δυναμικό αξονικό φορτίο. Η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης λαμβάνεται υπόψη με τη βοήθεια του συντελεστή διατμητικής παραμόρφωσης. Μορφώνονται τρία προβλήματα συνοριακών τιμών ως προς τις εγκάρσιες και αξονικές μετατοπίσεις καθώς και ως προς την τασική συνάρτηση, τα οποία επιλύονται με τη μέθοδο της Αναλογικής Εξίσωσης (Analog Equation Method), η οποία βασίζεται στη μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (BEM). Η εφαρμογή της μεθόδου οδηγεί σε σύστημα διαφορικών αλγεβρικών εξισώσεων που λύνονται με την μέθοδο Petzold-Gear. Ο προσδιορισμός του συντελεστή διατμητικής παραμόρφωσης επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της προαναφερθείσας τασικής συνάρτησης χρησιμοποιώντας μόνο συνοριακή ολοκλήρωση. Το προτεινόμενο μαθηματικό προσομοίωμα συνυπολογίζει τα πεπλεγμένα φαινόμενα των καμπτικών και διατμητικών παραμορφώσεων κατά μήκος της δοκού καθώς και τις αναπτυσσόμενες διατμητικές δυνάμεις από το αξονικό φορτίο. Αριθμητικές εφαρμογές μελετήθηκαν για να δείξουν την επιρροή των διάφορων παραμέτρων, όπως της ταχύτητας και της συχνότητας της φόρτισης, των εδαφικών παραμέτρων και της απόσβεσης στις μετατοπίσεις και στα εντατικά μεγέθη.



**NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY ATHENS
SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING
LABORATORY OF STATICS AND ASEISMIC RESEARCH**

**INTERDEPARTMENTAL POSTGRADUATE MSc PROGRAMME
“ANALYSIS AND DESIGN OF EARTHQUAKE RESISTANT STRUCTURES”**

POST GRADUATE M.Sc. DIPLOMA THESIS

**Nonlinear Response of Shear Deformable Beam on Tensionless
Nonlinear Viscoelastic Foundation under Moving Loads**

KAMPITSIS E. ANDREAS

SUPERVISOR: DR. EVANGELOS J. SAPOUNTZAKIS
ASSOCIATE PROFESSOR, NTUA

Athens, October 2011

ABSTRACT

In this M.Sc. thesis, a boundary element method is developed for the geometrically nonlinear response of shear deformable beams of simply or multiply connected constant cross section, traversed by moving loads, resting on tensionless nonlinear three-parameter viscoelastic foundation, undergoing moderate large deflections under general boundary conditions. The beam is subjected to the combined action of arbitrarily distributed or concentrated transverse moving loading as well as to axial loading. To account for shear deformations, the concept of shear deformation coefficients is used. Three boundary value problems are formulated with respect to the transverse displacement, to the axial displacement and to a stress functions and solved using the Analog Equation Method, a Boundary Element based method. Application of the boundary element technique yields a system of nonlinear Differential – Algebraic Equations, which is solved using an efficient time discretization scheme, from which the transverse and axial displacements are computed. The evaluation of the shear deformation coefficient is accomplished from the aforementioned stress function using only boundary integration. Analyses are performed to illustrate, wherever possible, the accuracy of the developed method, to investigate the effects of various parameters, such as the load velocity, load frequency, shear deformation, foundation nonlinearity, damping, on the beam displacements and stress resultants and to examine how the consideration of shear and axial compression affect the response of the system.

Στην οικογένειά μου

Πίνακας Περιεχομένων

<i>Πρόλογος</i>	i
<i>Κεφάλαιο 1</i>	1
Ομοιόμορφη Διάτμηση Δοκού	3
1.1 Εισαγωγή.....	3
1.2 Διατύπωση Προβλήματος Ομοιόμορφης Διάτμησης.....	10
1.3 Ολοκληρωτικές Παραστάσεις - Αριθμητική Επίλυση	25
<i>Κεφάλαιο 2</i>	31
Η ΑΕΜ για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2 ^{ης} και 4 ^{ης} Τάξης	33
2.1 Εισαγωγή.....	33
2.2 Ολοκληρωτικές Παραστάσεις – Αριθμητική Επίλυση	34
2.2.1 Συνήθη Διαφορική Εξίσωση 2 ^{ης} Τάξης	34
2.2.2 Συνήθη Διαφορική Εξίσωση 4 ^{ης} Τάξης	42
<i>Κεφάλαιο 3</i>	55
Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Δοκού Μερικώς Εδραζόμενη επί Μη Γραμμικού Εδάφους υπό Κινούμενο Φορτίο	57
3.1 Εισαγωγή.....	57
3.2 Διατύπωση του Μη Γραμμικού Δυναμικού Προβλήματος	60
3.3 Ολοκληρωτικές Παραστάσεις - Αριθμητική Επίλυση	68
3.3.1 Για την Αξονική $u(x,t)$ και την Εγκάρσια $w(x,t)$ Μετατόπιση	69

Κεφάλαιο 4	73
Αριθμητικές Εφαρμογές	75
4.1 Εισαγωγή.....	75
4.2 Αριθμητικές Εφαρμογές	75
4.2.1 Αριθμητική Εφαρμογή 1.....	75
4.2.2 Αριθμητική Εφαρμογή 2.....	79
4.2.3 Αριθμητική Εφαρμογή 3.....	81
4.2.4 Αριθμητική Εφαρμογή 4.....	84
4.2.5 Αριθμητική Εφαρμογή 5.....	87
Κεφάλαιο 5	91
Ομοιόμορφη Διάτμηση Δοκού	93
5.1 Εισαγωγή.....	93
5.2 Συμπεράσματα	93
5.3 Ιδέες για Μελλοντική Έρευνα	94
Παράρτημα Α	97
Οι Συναρτήσεις Heaviside και Dirac	97
Α.1 Εισαγωγή	97
Α.2 Η συνάρτηση Heaviside	97
Α.3 Η συνάρτηση Dirac	98
Παράρτημα Β	105
Βασικά Θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού	105
Β.1 Εισαγωγή	105
Β.2 Θεώρημα Gauss–Green	105
Β.3 Θεώρημα Απόκλισης του Gauss	107
Β.4 Δεύτερη Ταυτότητα Green για τον Αρμονικό Τελεστή	108
Βιβλιογραφία	111

Πρόλογος

Με την πάροδο του χρόνου και την εξέλιξη της τεχνολογίας οι απαιτήσεις της κοινωνίας για κατασκευές, όλο και μεγαλύτερες, γίνονται επιτακτικές και επιβάλλουν την έρευνα για την εξεύρεση και βελτίωση “εργαλείων” με τα οποία ο Μηχανικός του παρόντος αλλά και του μέλλοντος θα είναι σε θέση να αντιμετωπίσει τις όποιες προκλήσεις του τεθούν. Εντατικές προσπάθειες προς αυτήν την κατεύθυνση γίνονται τα τελευταία χρόνια, με την ανάλυση των κατασκευών να είναι στο στόχαστρο πλήθους μελετητών και ο αριθμός των μεθόδων επίλυσης αλλά και η αξιοπιστία τους να αυξάνεται με ταχείς ρυθμούς συμβαδίζοντας πρακτικά με την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Το πρακτικό ενδιαφέρον του Πολιτικού Μηχανικού εντοπίζεται σε κατασκευές οι οποίες εδράζονται επί του εδάφους και υποβάλλονται σε δυναμικά φορτία δηλαδή σε φορτία των οποίων η διεύθυνση, το μέγεθος αλλά και η θέση εφαρμογής τους είναι συνάρτηση του χρόνου. Συνηθέστερα και κρισιμότερα από αυτά θεωρούνται η κίνηση του υποκείμενου εδάφους (σεισμός), τα κινούμενα φορτία (σιδηροτροχιές), τα ωστικά κύματα, οι κινήσεις βιομηχανικών μηχανών που εντάσσονται στην κατασκευή καθώς και τα κρουστικά φορτία, όπως η πρόσκρουση οχήματος σε μέλος της κατασκευής. Υπενθυμίζεται ότι στην φύση δεν υπάρχει στατική φόρτιση αλλά είναι μια απλοποίηση που δεχόμαστε όταν ο ρυθμός επιβολής του φορτίου είναι μεγάλος (μεγαλύτερος της ιδιοπεριόδου της κατασκευής) χωρίς πρακτικό σφάλμα για τις υπό εξέταση εφαρμογές. Στις κατασκευές αυτές πολλές φορές απαιτούνται στοιχεία (μέλη) με μεγάλο μήκος όπως πάσσαλοι (μερικώς ή ολικώς εμπηγνύομενοι) οι οποίοι θα κληθούν να παραλάβουν μεγάλα αξονικά φορτία καθώς και την κίνηση του εδάφους (ή του κεφαλόδεσμου), πεδιλοδοκοί στις οποίες τα άκρα φορτίζονται με αξιοπρόσεκτες εγκάρσιες δυνάμεις αλλά και ροπές, ενώ το υποκείμενο έδαφος αντιδρώντας στην διάθεση κίνησης φορτίζει επιπροσθέτως τη δοκό ή και απλές δοκοί επί ελαστικού ημίχωρου που φορτίζονται με τυχαία κατανομή (σταθερά, δυναμικά και κινούμενα φορτία) στις οποίες το υπολογιστικό προσομοίωμα διαδραματίζει μείζονα ρολό. Τα μέλη αυτά λόγω του μεγάλου μήκους, της αυξημένης αξονικής έντασης αλλά και της υψηλής αντοχής των υλικών τους (κάνοντας την ανελαστική ανάλυση δευτερεύοντα παράγοντα ο οποίος όμως πρέπει πάντα να ερευνάζεται), αξίζει να μελετηθούν λαμβάνοντας υπόψη τα φαινόμενα 2^{ας} τάξεως καθώς και τη σύγχρονη επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων που σε περιπτώσεις αποδεικνύεται κρίσιμη και δεν μπορεί να αμεληθεί.

Για να ληφθεί υπόψη η επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων υιοθετήθηκε η θεωρία δοκού Timoshenko η οποία λαμβάνει έμμεσα τα φαινόμενα αυτά μέσω διορθωτικών συντελεστών διάτμησης, ενώ διατυπώνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση συνυπολογίζεται η γεωμετρική μη γραμμικότητα, δηλαδή προσθέτοντας στις γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας τις (δευτερεύουσες) ροπές που δημιουργούνται από την αξονική ένταση. Αναλυτικότερα, στη μη γραμμική ανάλυση δευτέρας τάξεως καμπτόμενης δοκού έχοντας τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας, υποβαλλόμενη σε τυχούσα δυναμική φόρτιση κατά τον άξονα

αυτό, θεωρείται η απλοποιημένη έκφραση καμπυλοτήτων (η πλήρης έκφραση λαμβάνεται στη θεωρία 3^{ης} τάξης) ενώ παράλληλα διατηρούνται τα τετράγωνα των κλίσεων των εγκάρσιων μετατοπίσεων στην έκφραση των ορθών παραμορφώσεων ως προς την διαμήκη διεύθυνση αθροίζοντάς τα στις αξονικές μετατοπίσεις. Έτσι, οι μετατοπίσεις έχουν θεωρηθεί μεγάλες ενώ οι στροφές και οι παραμορφώσεις θεωρούνται μικρές (θεωρία μετρίως μεγάλων παραμορφώσεων) καταλήγοντας σε ένα σύστημα δύο μη γραμμικά συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων με μεταβλητούς συντελεστές (οι αξονικές μετατοπίσεις είναι μη γραμμικά συζευγμένες με τις εγκάρσιες μετατοπίσεις) το οποίο περιγράφει την κίνηση του συστήματος και για την επίλυση του επιστρατεύθηκαν αριθμητικές μέθοδοι. Εάν η αξονική ένταση θεωρηθεί σταθερή σε όλο το μήκος της δοκού τότε το βέλος κάμψεως είναι ανάλογο της εγκάρσιας φόρτισης και η ανάλυση μεταπίπτει σε γραμμική χαρακτηριζόμενη ως γραμματικοποιημένη θεωρία 2^{ης} τάξης, δηλαδή ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Τέλος, σε περίπτωση που τα τετράγωνα των κλίσεων των εγκάρσιων μετατοπίσεων δεν ληφθούν υπόψιν οι εξισώσεις ισορροπίας είναι ασύζευκτες (στις εγκάρσιες και αξονική διεύθυνση) αν και η σχέση βυθίσεων και αξονικής φόρτισης είναι ακόμα μη γραμμικές.

Στόχος της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι να αναδείξει τη σημασία των φαινομένων δευτέρας τάξεως (γεωμετρικής μη γραμμικότητας), την επιρροή που έχουν τα φαινόμενα διατμητικών παραμορφώσεων καθώς και να τονιστεί η απόκλιση που μπορεί να προκύψει από τις συμβατικές μεθόδους σε περίπτωση συνδυασμού των παραπάνω. Επίσης, έγινε αξιολογή προσπάθεια στο να διευκρινιστεί ότι η προσομοίωση του υποκείμενου εδάφους είναι παράγοντας ο οποίος κρίνεται καθοριστικός για την όλη κατασκευή και τη συμπεριφορά της.

Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος συνοριακών στοιχείων για την εξεύρεση και των διατμητικών συντελεστών και του κέντρου διάτμησης σύνθετης δοκού τυχαίας διατομής, ενώ το δεύτερο κεφάλαιο αφιερώνεται στην παρουσίαση της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης για διαφορικές εξισώσεις δευτέρας και τετάρτης τάξεως.

Ακολουθεί το τρίτο κεφάλαιο στο οποίο γίνεται λεπτομερής περιγραφή του τρόπου με τον οποίο διατυπώνεται η μη γραμμική θεωρία λαμβάνοντας υπόψη τις διατμητικές παραμορφώσεις καμπτόμενης πρισματικής δοκού τυχαίας διατομής μονής συμμετρίας εδραζόμενη επί ιξωδοελαστικού μη γραμμικού εδάφους υποβαλλόμενη σε τυχαία δυναμική φόρτιση καθώς και σε τυχαίες κατανομής κινούμενο αρμονικό φορτίο, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες συμπεριλαμβανομένων ελαστικών δεσμεύσεων. Η όλη διαδικασία έχει εκτελεστεί με θεώρηση μετρίως μεγάλων παραμορφώσεων όπως αυτή περιγράφηκε παραπάνω (μεγάλες μετατοπίσεις και μικρές στροφές και παραμορφώσεις), ενώ για τη μόνωση των δύο κυρίαρχων εξισώσεων ισορροπίας της δοκού επιστρατεύτηκε ενεργειακή προσέγγιση (Αρχή Hamilton). Περιγράφεται επίσης η αριθμητική μέθοδος (Μέθοδος Αναλογικής Εξίσωσης-AEM) με την οποία επιλύθηκαν οι συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις δίνοντας ως αποτέλεσμα τις εγκάρσιες και αξονικές μετατοπίσεις της δοκού.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της προτεινόμενης μεθόδου μέσα από αριθμητικές εφαρμογές με μεγάλο πρακτικό αλλά και θεωρητικό ενδιαφέρον, της προτεινόμενης μεθόδου. Για να παραχθούν τα αποτελέσματα αυτά συντάχθηκε κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Visual Fortran όπου και διαπιστώθηκε η ευκολία προσαρμογής της μεθόδου σε ηλεκτρονικό περιβάλλον και η ταχύτητα προσομοίωσης και επίλυσης των προβλημάτων. Από τον κώδικα υπολογίζονται όλα τα εντατικά και παραμορφωσιακά

δυναμικά μεγέθη θεωρώντας ελεύθερες ή εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Τα αποτελέσματα συγκριθήκαν, όπου αυτό ήταν δυνατό, με αυτά που υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία, καθώς και με αυτά που εξήχθησαν από αξιόπιστα εμπορικά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων (NX-NASTRAN) με εντυπωσιακή σύγκλιση.

Πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο αποτελούν τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την όλη ερευνητική διαδικασία (θεωρητικό τμήμα και αριθμητικές εφαρμογές), ενώ τέλος δίδονται ιδέες για μελλοντική έρευνα.

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε κατά το τρίτο και τέταρτο εξάμηνο μεταπτυχιακών σπουδών υπό την επίβλεψη του κ. Ε.Ι. Σαπουντζάκη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Εργαστηρίου Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, τον οποίο και ευχαριστώ θερμά για την καθοδήγηση του μέσω καθημερινής συνεργασίας, το συνεχές ενδιαφέρον του και την πολύτιμη βοήθεια του καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας.

Κεφάλαιο 1

Ομοιόμορφη Διάτμηση Δοκού

Κεφάλαιο 1

Ομοιόμορφη Διάτμηση Δοκού

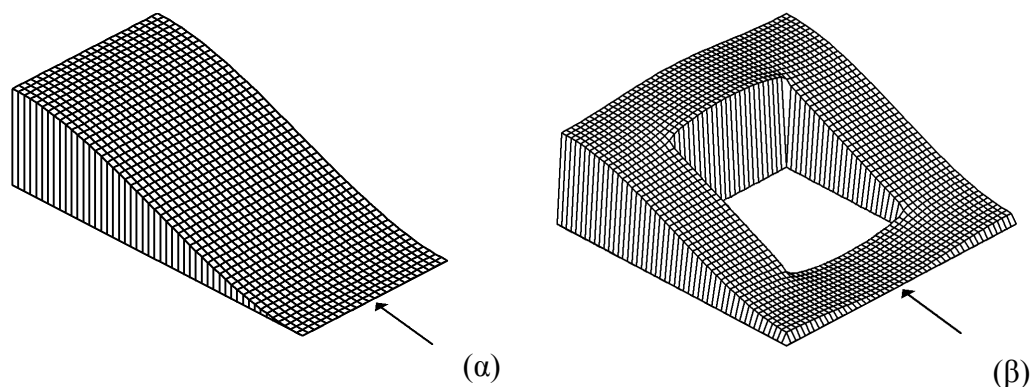
1.1 Εισαγωγή

Δοκός υποβαλλόμενη σε εγκάρσιες δυνάμεις αναπτύσσει διατμητική ένταση, η οποία συνήθως συνδυάζεται με καμπτική. Στην περίπτωση που η διεύθυνση των εξωτερικά επιβαλλόμενων εγκάρσιων δυνάμεων δεν διέρχεται από το κέντρο διάτμησης της διατομής της ράβδου αναπτύσσεται εκτός της διατμητικής και στρεπτική ένταση λόγω εκκεντρότητας, καθώς το κέντρο διάτμησης είναι το σημείο εκείνο της διατομής από το οποίο διέρχεται η εσωτερικά αναπτυσσόμενη τέμνουσα δύναμη (ολοκλήρωμα διατμητικών τάσεων). Έτσι, στην περίπτωση αυτή θα πρέπει στην εντατική κατάσταση να προστεθεί και η στρεπτική ένταση. Στη συντριπτική πλειοψηφία των κατασκευών Πολιτικού Μηχανικού συναντάται η ανάλυση μελών φορέα υποκείμενων σε διατμητική ένταση. Ο ψαθυρός (απροειδοποίητος) τρόπος αστοχίας ραβδωτών στοιχείων σκυροδέματος τα οποία δεν είναι σωστά διαστασιολογημένα για τη παραλαβή διάτμησης, καθώς και ότι ο έλεγχος έναντι τέμνουσας δύναμης κατά τη διαστασιολόγηση είναι συνήθως ο κρίσιμος σε κατασκευές που βρίσκονται σε σεισμογενείς περιοχές, όπου ο καθοριστικός συνδυασμός φόρτισης είναι ο σεισμικός, απαιτεί ακριβή ανάλυση.

Σε ραβδωτά στοιχεία από σιδηροπαγές σκυρόδεμα σταδίου II δεν ισχύει η θεωρία ελαστικότητας και για τη διαστασιολόγηση έναντι διάτμησης χρησιμοποιούνται προσεγγιστικά προσομοιώματα τύπου δικτυώματος Mörsch [ΕΚΩΣ 2000, παρ.11.2]. Ωστόσο, κατασκευές από προεντεταμένο σκυρόδεμα, μεταλλικές κατασκευές, καθώς και πολλές σύμμικτες κατασκευές σχεδιάζονται να λειτουργούν στην ελαστική περιοχή και επομένως, στις κατασκευές αυτές η ανάλυση και διαστασιολόγηση έναντι διάτμησης πραγματοποιείται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας.

Οι διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης στη γενική περίπτωση αναπτύσσονται ανομοιόμορφα στη διατομή ράβδου. Επομένως, η κατανομή των διατμητικών παραμορφώσεων θα είναι και αυτή ανομοιόμορφη με αποτέλεσμα η διατομή (όπως και στη στρέψη) να στρεβλώνει διατμητικά προς τη διαμήκη διεύθυνση, δηλαδή να μην ισχύει πλέον η παραδοχή Bernoulli περί επιπεδότητας διατομής όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Στην περίπτωση ράβδου που η τέμνουσα δύναμη κατά μήκος της είναι σταθερή και οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση δεν παρεμποδίζονται, η εφαρμοζόμενη διατμητική φόρτιση αναλαμβάνεται μόνο από διατμητικές τάσεις οι οποίες μεγιστοποιούνται στο σύνορο. Η διάτμηση αυτή ονομάζεται ομοιόμορφη [(Love, 1944), (Sokolnikoff, 1956), (Timoshenko and Goodier, 1951)]. Αντίθετα, εάν η τέμνουσα δύναμη μεταβάλλεται κατά μήκος της ράβδου ή/και η διατμητική στρέβλωση παρεμποδίζεται λόγω φόρτισης ή συνθηκών στήριξης, η διάτμηση στη ράβδο αναπτύσσεται ανομοιόμορφα. Θεωρίες αναφορικά με την ανομοιόμορφη διάτμηση ομογενών ραβδών διατυπώνονται από τους Hofmann [1992] και Fatmi [2007a, 2007b].

Η στρέβλωση λόγω διάτμησης θεωρείται εν γένει μικρή συγκρινόμενη με την αντίστοιχη λόγω στρέψης, με αποτέλεσμα οι αναπτυσσόμενες τάσεις στρέβλωσης λόγω διάτμησης να επιτρέπεται με ικανοποιητική προσέγγιση να αγνοούνται στην ανάλυση. Έτσι, η εντατική κατάσταση (τάσεις) σε ράβδους λόγω τέμνουσας δύναμης προσδιορίζεται με τη θεώρηση ομοιόμορφης διάτμησης, ενώ στην παραμορφωσιακή κατάσταση η επιρροή της στρέβλωσης λαμβάνεται έμμεσα υπόψη με τη βοήθεια κατάλληλων διορθωτικών συντελεστών διάτμησης. Ο Timoshenko [1921, 1922] ήταν ο πρώτος που έλαβε υπόψη την επιρροή διατμητικής παραμόρφωσης μέσω διορθωτικών συντελεστών διάτμησης, τροποποιώντας κατάλληλα τις εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου. Για το λόγο αυτό η θεωρία δοκού που λαμβάνει υπόψη την επιρροή διατμητικών παραμορφώσεων είναι γνωστή ως θεωρία Timoshenko. Σημειώνεται ότι ο αντίστροφος του διορθωτικού συντελεστή διάτμησης (κ) καλείται συντελεστής διατμητικής παραμόρφωσης ($a = 1/\kappa$).



Σχήμα 1.1. Στρέβλωση λόγω τέμνουσας δύναμης ορθογωνικής (α) και κοίλης τετραγωνικής (β) διατομής.

Το πρόβλημα της ομοιόμορφης διάτμησης περιλαμβάνει τον υπολογισμό των παρακάτω μεγεθών:

- I. Υπολογισμός διατμητικών τάσεων
- II. Υπολογισμός θέσης κέντρου διάτμησης S
- III. Υπολογισμός συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης

Η ακριβής διατύπωση του προβλήματος ομοιόμορφης διάτμησης περιγράφεται από προβλήματα συνοριακών τιμών, τα οποία μορφώνονται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας. Η μόρφωση των προβλημάτων αυτών μπορεί να πραγματοποιηθεί με βάση το πεδίο των μετατοπίσεων ή το πεδίο των τάσεων. Η διατύπωση με τη βοήθεια του πεδίου των τάσεων προσφέρεται, καθώς έτσι λαμβάνεται ευκολότερα υπόψη ο λόγος του Poisson ν , η επιρροή του οποίου ενδέχεται να είναι σημαντική. Σε ορισμένες διατομές απλής γεωμετρίας η λύση των προβλημάτων συνοριακών τιμών μπορεί να δοθεί σε κλειστή μορφή [Fung, 1965]. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η λύση προσδιορίζεται μόνο αριθμητικά (FDM, FEM, BEM).

Στην πράξη συνήθως οι διατμητικές τάσεις σε χοντρότοιχες διατομές με έναν άξονα συμμετρίας, π.χ. άξονα συμμετρίας ο z και εγκάρσια δύναμη Q_z ως προς τον

άξονα z , υπολογίζονται σε μια οριζόντια τομή παράλληλη στο άξονα y από τη γνωστή σχέση ($\tau_{xy} = 0$)

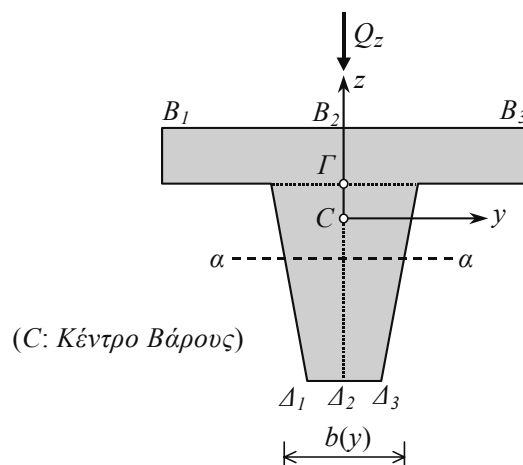
$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^{cut}}{I_{yy} b} \quad (1.1)$$

όπου S_y^{cut} η στατική ροπή ως προς τον κεντροβαρικό άξονα y της αποκομμένης διατομής, I_{yy} η καμπτική ροπή αδράνειας της συνολικής διατομής ως προς τον κεντροβαρικό άξονα y και b το πλάτος της τομής. Στην παραπάνω σχέση τα μόνα μεταβλητά μεγέθη είναι η S_y^{cut} και το b , ενώ η αξονική δύναμη κατά μήκος της ράβδου θεωρείται σταθερή. Ωστόσο πολλές φορές στην πράξη αγνοείται το γεγονός ότι η εξίσωση (1.1), που προκύπτει με τη βοήθεια της τεχνικής θεωρία δοκού, είναι προσεγγιστική και παρουσιάζει αρκετά μειονεκτήματα [(Hartmann and Katz, 2004), (Sauer, 1980)]. Σημειώνεται ότι η εξίσωση (1.1) δίδει την ακριβή τιμή των διατμητικών τάσεων μόνο σε ράβδους ορθογωνικής διατομής με μηδενικό λόγο Poisson ($\nu = 0$). Τα κύρια μειονεκτήματα της εξίσωσης (1.1) είναι τα ακόλουθα:

- Η εξίσωση (1.1) ισχύει σε διατομές με άξονα συμμετρίας
- Η εξίσωση (1.1) δεν ισχύει για διατομές πολλαπλής συνοχής (δηλαδή διατομές με οπές), διότι κατά τη μόρφωσή της δεν λαμβάνονται υπόψη οι εξισώσεις συμβιβαστού.
- Η εξίσωση (1.1) δεν λαμβάνει υπόψην το λόγο Poisson, ο οποίος σε χοντρότοιχες διατομές ενδέχεται να επηρεάζει σημαντικά την κατανομή και το μέγεθος των διατμητικών τάσεων.
- Η εξίσωση (1.1) στηρίζεται στην παραδοχή ότι οι διατμητικές τάσεις κατά το πλάτους b της τομής είναι σταθερά κατανομημένες. Στην τομή $a-a$ της διατομής του Σχήματος 1.2 η παραδοχή αυτή δεν τηρείται. Επίσης, δεν τηρείται και σε ορθογωνικές διατομές με λόγο Poisson διάφορο του μηδενός. Μόνο η τιμή της διατμητικής ροής (επικαμπύλια ολοκλήρωση τάσεων, δύναμη ανά μήκος) κατά μήκος του πλάτους b της τομής που υπολογίζεται με τη βοήθεια της εξίσωσης (1.1) είναι ακριβής, διότι η εξίσωση (1.1) προέκυψε απαιτώντας την ισορροπία τμήματος ράβδου πεπερασμένων διαστάσεων και όχι την ισορροπία κάθε στοιχειώδους κύβου της θεωρίας ελαστικότητας.
- Παρατηρώντας την (1.1) συμπεραίνουμε ότι στα ακραία σημεία της διατομής κατά τον άξονα z η στατική ροπή μηδενίζεται και επομένως η διατμητική τάση στα σημεία αυτά είναι μηδενική. Ωστόσο, στη διατομή του Σχήματος 1.2 οι διατμητικές τάσεις στα τμήματα B_1B_3 και A_1A_3 δεν είναι παντού μηδενικές.
- Σύμφωνα με την εξίσωση (1.1), στις θέσεις απότομης μεταβολής του πλάτους της διατομής οι διατμητικές τάσεις παρουσιάζουν ασυνέχεια. Έτσι, στη διατομή του Σχήματος 1.2 κατά μήκος του τμήματος B_2A_2 στο σημείο Γ η διατμητική τάση θα παρουσιάζει άλμα, το οποίο όμως στην πραγματικότητα δεν μπορεί να υπάρχει, αφού δεν υπάρχει κάποια εξωτερική δύναμη που να επιβάλλεται στο σημείο εμφάνισης του άλματος.

Επομένως, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα σε χοντρότοιχες διατομές ράβδων οι διατμητικές τάσεις θα πρέπει να υπολογίζονται από την επίλυση του ακριβούς προβλήματος ομοιόμορφης διάτμησης. Αξίζει εδώ να αναφερθεί ότι οι διατμητικές

τάσεις μηδενίζονται στις γωνιακές εσοχές και “απειρίζονται” (θεωρητικά) στις γωνιακές εσοχές. Κατά την ανάλυση διατομών με γωνιακές εσοχές συνιστάται πρώτον, να μην λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι τοπικές τάσεις αλλά να αξιολογείται η κατανομή των τάσεων σε ολόκληρο το σύνολο της διατομής και δεύτερον, κοντά στην περιοχή της γωνιακής εσοχής οι τάσεις να ολοκληρώνονται και να αξιολογείται η προκύπτουσα διατμητική ροή.



Σχήμα 1.2. Χοντρότοιχη διατομή μορφής πλακοδοκού μονής συμμετρίας ως προς άξονα z .

Στις λεπτότοιχες ράβδους (όπως και στη στρέψη) λόγω της ιδιαιτερότητας του πάχους τους μπορούν να γίνουν ορισμένες απλοποιητικές παραδοχές αναφερόμενες στη μέση γραμμή s των τοιχωμάτων, με τη βοήθεια των οποίων η ολοκλήρωση των κυρίαρχων διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος ομοιόμορφης διάτμησης να είναι εφικτή σε κλειστή μορφή. Οι βασικές παραδοχές στις οποίες στηρίζεται η θεωρία λεπτότοιχων ράβδων [Vlasov, 1964, 1965] για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων λόγω τέμνουσας είναι οι εξής:

- Οι διατμητικές τάσεις στη διεύθυνση του πάχους των τοιχωμάτων της διατομής θεωρούνται σταθερές.
- Οι διατμητικές τάσεις έχουν διεύθυνση παράλληλη προς τη μέση γραμμή της διατομής.
- Η φορά των διατμητικών τάσεων είναι τέτοια ώστε η συνολική δύναμη λόγω των διατμητικών τάσεων να είναι ίση με την εγκάρσια δύναμη που καταπονεί τη διατομή.
- Στα ελεύθερα άκρα των τοιχωμάτων οι διατμητικές ροές μηδενίζονται.
- Σε κάθε κόμβο της διατομής (τομή μέσω γραμμών) πρέπει για λόγους ισορροπίας το αλγεβρικό άθροισμα όλων των εισερχόμενων και εξερχόμενων διατμητικών ροών να μηδενίζεται. Αυτή είναι η αιτία που η διατμητική ροή συγκρίνεται με τη ροή νερού.
- Για φόρτιση Q_z και θεωρώντας κύριο σύστημα αξόνων, το μέτρο των διατμητικών τάσεων υπολογίζεται από τη σχέση

$$\tau_{xs} = \frac{|q_s|}{t} \quad (1.2)$$

όπου t το πάχος του τοιχώματος στη θέση υπολογισμού της τάσης και q_s η διατμητική ροή στα τοιχώματα της διατομής, που ορίζεται ως

$$q_s = (q_s^o) + (q_s^c) = \left(\frac{Q_z S_y^{cut}}{I_{yy}} \right) + \left(- \frac{\int \frac{q_s^o}{t} ds}{\int \frac{ds}{t}} \right) \quad (1.3)$$

Σημειώνεται ότι η διατμητική ροή q_s^c μηδενίζεται σε ανοικτές διατομές, καθώς και σε κλειστές συμμετρικές διατομές που φορτίζονται κατά τον άξονα συμμετρίας, εάν η νοητή τομή γίνει σε ένα από τα σημεία όπου ο άξονας τέμνει τη διατομή. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, στις ανοικτές διατομές το μέτρο των διατμητικών τάσεων υπολογίζεται με τη βοήθεια της εξίσωσης (1.1), αρκεί το b να αντικατασταθεί από το πάχος t του τοιχώματος.

Επειδή δεν υπάρχουν σαφή όρια που να καθορίζουν πότε μια διατομή μπορεί να υπολογιστεί ικανοποιητικά ως λεπτότοιχη και δεδομένου ότι, στις λεπτότοιχες διατομές, λόγω της μεγάλης φέρουσας ικανότητάς τους και του μικρού εμβαδού τους, οι διατμητικές τάσεις είναι ιδιαίτερα σημαντικές και παίζουν ισοδύναμο ρόλο με τις ορθές (για το πλήθος των φορτίσεων), η πιο ενδεδειγμένη μεθοδολογία για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων και στις λεπτότοιχες ράβδους αποτελεί η επίλυση του ακριβούς προβλήματος ομοιόμορφης διάτμησης.

Εφόσον οι διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης είναι γνωστές, η θέση του κέντρου διάτμησης και οι διορθωτικοί συντελεστές διάτμησης (συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης) μπορούν να υπολογιστούν. Το κέντρο διάτμησης προκύπτει από την απαίτηση, ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου της διατομής, η στρεπτική ροπή των εξωτερικά επιβαλλόμενων στο κέντρο διάτμησης εγκάρσιων δυνάμεων να ισούται με την εσωτερικά αναπτυσσόμενη στρεπτική ροπή που οφείλεται στις διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης. Συνιστάται το σημείο υπολογισμού των στρεπτικών ροπών να είναι το κέντρο βάρους. Εάν το σημείο αυτό είναι το κέντρο διάτμησης, τότε προκύπτει ότι η στρεπτική ροπή που οφείλεται στις διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης στο κέντρο διάτμησης μηδενίζεται. Στην περίπτωση που οι διατμητικές τάσεις υπολογιστούν για μηδενικό λόγο Poisson ν , τότε το υπολογιζόμενο κέντρο διάτμησης είναι καθαρά γεωμετρικό μέγεθος και ταυτίζεται με το κέντρο στρέψης [(Weber, 1924), (Trefftz, 1935)]. Υπάρχουν επομένως δύο ανεξάρτητοι μεταξύ τους τρόποι προσδιορισμού της θέσης των δύο αυτών σημείων της διατομής ράβδων.

Οι διορθωτικοί συντελεστές διάτμησης έχουν αποτελέσει αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας [(Kaneko, 1975), (Renton, 1991, 1997), (Hutchinson, 2001)]. Σύμφωνα με τον Timoshenko [1921, 1922], ο διορθωτικός συντελεστής διάτμησης προκύπτει ως ο λόγος της μέσης τιμής όλων των αναπτυσσόμενων στη διατομή διατμητικών τάσεων διαιρεμένη με την τιμή της διατμητικής τάσης στο κέντρο βάρους της διατομής. Προφανώς όταν το κέντρο βάρους βρίσκεται εκτός διατομής, ο προαναφερόμενος ορισμός παρουσιάζει δυσκολίες στην εφαρμογή του. Αργότερα ο Cowper [1966], μορφώνοντας τις εξισώσεις ισοροπίας της ράβδου με ολοκλήρωση των εξισώσεων ισοροπίας της τρισδιάστατης ελαστικότητας, πρότεινε ένα νέο

διορθωτικό συντελεστή διάτμησης ο οποίος λάμβανε (σε σχέση με τον συντελεστή του Timoshenko) καλύτερα υπόψιν την επιρροή της στρέβλωσης κυρίως στη δυναμική ανάλυση υψίσυχων δοκών. Οι προτεινόμενοι συντελεστές των Timoshenko και Cowper για διάφορες απλές διατομές ταυτίζονται για μηδενικό λόγο Poisson ν . Ο συντελεστής Cowper αφορά μόνο συμμετρικές διατομές προσανατολισμένες στο κύριο καμπτικό σύστημα αξόνων, με αποτέλεσμα την ύπαρξη δύο συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης a_{yy} και a_{zz} . Οι Mason και Herrmann [1968] επιχείρησαν να επεκτείνουν τη μέθοδο Cowper σε μη συμμετρικές διατομές με τυχαίο προσανατολισμό του συστήματος αξόνων, με αποτέλεσμα, εκτός από τους συντελεστές a_{yy} και a_{zz} , να δώσουν και συντελεστές a_{yz} και a_{zy} άνισους όμως μεταξύ τους. Προφανώς η χρήση άνισων συντελεστών a_{yz} και a_{zy} στην ανάλυση δεν προσφέρεται, διότι μη συμμετρικοί συντελεστές διάτμησης οδηγούν και σε μη συμμετρικά μητρώα δυσκαμψίας. Οι προαναφερθέντες συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης δεν λαμβάνουν υπόψη το λόγο πλάτος b προς ύψος h της διατομής, με αποτέλεσμα η χρήση τους να οδηγεί σε ανακριβή αποτελέσματα καθώς το ύψος της διατομής μειώνεται. Έτσι, ο Stephen [1980] στηριζόμενος στη θεωρία του Cowper πρότεινε μια νέα έκφραση για τους συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης που λαμβάνει υπόψη το λόγο b/h . Ο Hutchinson [2001] χρησιμοποιώντας διαφορετική μεθοδολογία καταλήγει επίσης στη ίδια έκφραση με τον Stephen. Οι Puchegger et al. [2003] επιβεβαίωσαν πειραματικά την ακρίβεια του συντελεστή Stephen–Hutchinson για ορθογωνική διατομή με λόγο b/h μεταξύ 1 και 4. Ωστόσο ο συντελεστής των Stephen–Hutchinson, που ισχύει για συμμετρικές διατομές, καθώς αυξάνεται ο λόγος b/h παρουσιάζει ασυνέχεια και εν συνεχεία παίρνει αρνητικές τιμές, με αποτέλεσμα να μην λαμβάνει υπόψιν ρεαλιστικά για ορισμένους λόγους b/h την επιρροή της στρέβλωσης.

Μια διαφορετική διατύπωση των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια της ενεργειακής μεθόδου [(Bach und Baumann, 1924), (Stojek, 1964), (Gruttman and Wagner, 2001)], σύμφωνα με την οποία η ακριβής ενέργεια παραμόρφωσης της δοκού, οφειλόμενη στις διατμητικές τάσεις όπως αυτές προκύπτουν από τη θεωρία ελαστικότητας, ισούται με την προσεγγιστική ενέργεια παραμόρφωσης δοκού, οφειλόμενη στις διατμητικές τάσεις όπως αυτές προκύπτουν από τη θεωρία Timoshenko. Η ενεργειακή μέθοδος δίδει για τυχούσα διατομή με τυχαίο προσανατολισμό του συστήματος αξόνων και τους τέσσερις συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης a_{yy} , a_{zz} , a_{yz} , a_{zy} , με τους συντελεστές a_{yz} και a_{zy} συμμετρικούς ($a_{yz} = a_{zy}$), οι οποίοι λαμβάνουν υπόψιν το λόγο του Poisson ν και το λόγο πλάτος προς ύψος της διατομής b/h [(Schramm et al., 1994), (Pilkey, 2002)]. Υπογραμμίζεται ότι, οι συντελεστές που προκύπτουν με την ενεργειακή μέθοδο (επειδή λαμβάνουν υπόψη το λόγο b/h) αποδεικνύονται ιδιαίτερα αποτελεσματικοί στην αντιμετώπιση του υπολογιστικού προβλήματος του διατμητικού κλειδώματος (shear–locking) [(Pilkey, 2002), (Wunderlich and Pilkey, 2003)]. Επίσης, η αξιοπιστία των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης στηριζόμενη στην ενεργειακή μέθοδο επιβεβαιώνεται με τη βοήθεια στερεών πεπερασμένων στοιχείων [Fatmi and Zenzri, 2004]. Επομένως, η πιο ενδεδειγμένη μεθοδολογία για τη μόνωση συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης είναι η ενεργειακή μέθοδος.

Οι συντελεστές $a_{ij}, (i, j = y, z)$ αποτελούν συνιστώσες επίπεδου (2×2) συμμετρικού τανυστή δεύτερης τάξης, καθώς υπακούουν στο νόμο μετασχηματισμού επίπεδων τανυστών δεύτερης τάξης [Schramm et al., 1997]. Έτσι, σε αντιστοιχία με τον επίπεδο τανυστή καμπτικών ροπών αδράνειας, η διαγωνοποίηση του τανυστή $a_{ij}, (i, j = y, z)$ [Pilkey, 2002] θα οδηγήσει σε ένα κύριο σύστημα, που καλείται κύριο διατμητικό σύστημα και το οποίο για μη συμμετρικές διατομές δεν ταυτίζεται με το αντίστοιχο κύριο καμπτικό σύστημα αξόνων. Αποτέλεσμα αυτής της διαφοροποίησης των κυρίων αξόνων είναι οι συνιστώσες των μετατοπίσεων της δοκού ως προς τους άξονες y και z να είναι εν γένει συζευγμένες, έστω και αν το σύστημα αξόνων της διατομής ταυτίζεται με το κύριο καμπτικό σύστημα [(Schramm et al., 1997), (Pilkey, 2002)]. Εάν η διατομή είναι συμμετρική ως προς έναν άξονα, το κύριο διατμητικό σύστημα ταυτίζεται με το αντίστοιχο κύριο καμπτικό σύστημα. Στην περίπτωση αυτή οι συνιστώσες των μετατοπίσεων (βυθίσεις) ως προς τις κύριες διευθύνσεις δεν είναι πλέον συζευγμένες ($a_{yz} = a_{zy} = 0$ και $I_{yz} = I_{zy} = 0$).

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού διατυπώνεται το πρόβλημα ελαστικής ομοιόμορφης διάτμησης ομογενών ή σύνθετων ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος σχήματος με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας και επιλύεται αριθμητικά με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (BEM) [Katsikadelis, 2002]. Η σύνθετη ράβδος αποτελείται από υλικά σε επαφή, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό εγκλεισμάτων. Τα υλικά έχουν διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας και διάτμησης με κοινό λόγο Poisson και είναι σταθερά συνδεδεμένα μεταξύ τους. Η ράβδος με οπές (πολλαπλής συνοχής) προκύπτει ως μερική περίπτωση με μηδενισμό του μέτρου ελαστικότητας και διάτμησης των εγκλεισμάτων, ενώ η συμπαγής ράβδος (απλής συνοχής) προκύπτει ως μερική περίπτωση θεωρώντας τα ίδια μέτρα ελαστικότητας και διάτμησης των υλικών. Η ανάλυση πραγματοποιείται ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων, του οποίου οι άξονες δεν είναι κατ' ανάγκη κύριοι. Η εγκάρσια δύναμη εφαρμόζεται στο κέντρο διάτμησης της διατομής της ράβδου, αποφεύγοντας με τον τρόπο αυτό τη δημιουργία στρεπτικής ροπής. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με βάση το πεδίο των τάσεων δύο προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με δύο τασικές συναρτήσεις, αντίστοιχα. Τα προβλήματα αυτά, τα οποία λαμβάνουν υπόψιν το λόγο Poisson, επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, δηλαδή μεθόδου η οποία χρησιμοποιεί αποκλειστικά συνοριακή διακριτοποίηση. Οι τασικές συναρτήσεις που παρουσιάζονται δεν χρειάζεται να διασπαστούν σε δύο εναλλακτικές συναρτήσεις (κύρια και συμπληρωματική) [(Weber, 1924), (Gruttmann et al., 1999)] και ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας και εξισώσεις συμβιβαστού. Ο υπολογισμός των διατμητικών τάσεων σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της διατομής της ράβδου επιτυγχάνεται με απευθείας παραγωγή των τασικών συναρτήσεων, ενώ οι συντεταγμένες του κέντρου διάτμησης και οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης διατυπώνονται με την ενεργειακή μέθοδο προκύπτουν από αυτές τις συναρτήσεις χρησιμοποιώντας μόνο συνοριακή ολοκλήρωση. Στις σύνθετες ράβδους λαμβάνονται υπόψιν οι συνοριακές συνθήκες στις διεπιφάνειες που διαχωρίζουν τα διαφορετικά υλικά, δηλαδή οι διεπιφάνειες αντιμετωπίζονται ορθώς ως σύνορα και όχι ως εσωτερικές περιοχές του εξεταζομένου σώματος. Έτσι, οι συνοριακές συνθήκες των τασικών συναρτήσεων στις παράπλευρες επιφάνειες των υλικών προκύπτουν από τις ακόλουθες φυσικές θεωρήσεις [Muskhelishvili, 1953]:

a) Η ελεύθερη επιφάνεια της ράβδου είναι αφόρτιση.

- b) Οι διατμητικές τάσεις ως προς το κάθετο διάνυσμα n στις διεπιφάνειες είναι ίσες κατά μέγεθος και αντίθετης φοράς.
- c) Οι συνιστώσες των μετατοπίσεων παραμένουν συνεχείς στις διεπιφάνειες, καθώς εξ ορισμού τα υλικά είναι στερεά συνδεδεμένα μεταξύ τους.

Οι δύο πρώτες θεωρήσεις οδηγούν σε συζευγμένες συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann, ενώ η τρίτη εξασφαλίζει τη συνέχεια των τασικών συναρτήσεων κατά μήκος των συνόρων της σύνθετης διατομής. Σημειώνεται ότι, οι συνοριακές συνθήκες Neumann υπερέχουν των αντίστοιχων τύπου Dirichlet, καθώς σε ομογενείς ράβδους πολλαπλής συνοχής ή σε σύνθετες ράβδους δεν απαιτούνται επιπλέον περιορισμοί για την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών, όπως συμβαίνει στις συνοριακές συνθήκες Dirichlet λόγω αυθαίρετων σταθερών ολοκλήρωσης [(Weber, 1924), (Sauer, 1980)]. Η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί αποτελεσματικά όχι μόνο σε χοντρότοιχες ράβδους, αλλά και σε ομογενείς ή σύνθετες ράβδους λεπτότοιχων διατομών καθώς και σε πολυστρωματικές διατομές, χωρίς να υπόκειται στους περιορισμούς της θεωρίας Vlasov και γενικότερα των “βελτιωμένων προσομοιωμάτων” (“refined models”) [(Reddy, 1989), (Touratier, 1992), (Karama et al., 2003)]. Υπογραμμίζεται ότι, τα “refined models” δεν ικανοποιούν τις συνθήκες συνεχείας των ελκυστών στις διεπιφάνειες των στρωμάτων και υποθέτουν ότι οι διατμητικές τάσεις κατά μήκος της συντεταγμένης του πάχους των στρωμάτων παραμένουν σταθερές, με αποτέλεσμα να μην ικανοποιούνται πάντα κινηματικές ή στατικές παραδοχές. Επίσης, αξίζει εδώ να αναφερθεί ότι τα περισσότερα υπάρχοντα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων της αγοράς επιλύουν ομογενείς ράβδους [NASTRAN, 1999], ενώ αυτά που επιλύουν και σύνθετες ράβδους συνήθως αγνοούν τις συνοριακές συνθήκες στις διεπιφάνειες [SectionBuilder, 2002], με πολύ λίγες εξαιρέσεις κυρίως μη εμπορικών προγραμμάτων [Debard/RDM5.01, 1997].

Ο αλγόριθμος της προτεινόμενης μεθόδου προσφέρεται για την ανάλυση διατμητικά καταπονούμενης ράβδου με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η αριθμητική μέθοδος που προτείνεται για την επίλυση των ιδιόμορφων συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων αποδεικνύεται αποτελεσματική. Η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της μεθόδου έχει παρουσιαστεί μέσα από παραδείγματα με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον και η ακρίβεια των αποτελεσμάτων έχει συγκριθεί με υπάρχουσες αναλυτικές ή αριθμητικές λύσεις και είναι αξιοσημείωτη [διδακτορική διατριβή Βασίλη Μόκου]. Επίσης, η αξιοπιστία και ακρίβεια των υπολογιζόμενων συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης έχει διαπιστωθεί με τη βοήθεια στερεών πεπερασμένων στοιχείων [Fatmi and Zenzgi, 2004].

1.2 Διατύπωση Προβλήματος Ομοιόμορφης Διάτμησης

Έστω σύνθετη ευθύγραμμη ράβδος μήκους l σταθερής διατομής τυχόντος σχήματος αποτελούμενη από υλικά σε επαφή, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό εγκλεισμάτων, με διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας E_j και διάτμησης G_j και ίδιο λόγο Poisson ν , τα οποία καταλαμβάνουν τις περιοχές Ω_j ($j=1,2,\dots,K$) του επιπέδου y,z όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3. Τα υλικά της ράβδου είναι στερεά συνδεδεμένα μεταξύ τους (δηλαδή δεν υπάρχει δυνατότητα σχετικής ολίσθησης μεταξύ των υλικών) και θεωρούνται ομογενή, ισότροπα, συνεχή και γραμμικά ελαστικά (δηλαδή η ράβδος είναι κατά τμήματα συνεχής), ενώ τα

σύνορα τους είναι λεία (μπορούν δηλαδή να περιλαμβάνουν πεπερασμένο αριθμό γωνιών) και συμβολίζονται με Γ_j ($j=1,2,\dots,K$). Χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα, θεωρείται ότι το ένα άκρο της ράβδου είναι πακτωμένο και το άλλο ελεύθερο (πρόβολος), ενώ ο άξονας x του συστήματος συντεταγμένων διέρχεται από το κέντρο βάρους C των διατομών της ράβδου.

Στο ελεύθερο άκρο της, η ράβδος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο στατικό εγκάρσιο φορτίο Q , το οποίο εφαρμόζεται στο κέντρο διάτμησης της σύνθετης διατομής. Οι βυθίσεις λόγω της φόρτισης θεωρούνται μικρές και δεδομένου ότι το υλικό είναι γραμμικά ελαστικό η ανάλυση της ράβδου είναι γραμμική. Κατά την επιβολή του φορτίου θεωρείται ότι το σχήμα της διατομής διατηρείται, δεν αναπτύσσονται δηλαδή εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής (distortion). Σε απόσταση x από το πακτωμένο άκρο λόγω του φορτίου Q αναπτύσσονται εσωτερικές δυνάμεις Q_y και Q_z , οι οποίες αποτελούν τις συνιστώσες του φορτίου Q (τέμνουσες) κατά τους άξονες y και z , αντίστοιχα, καθώς και καμπτικές ροπές M_y , M_z οι οποίες δίδονται από τις σχέσεις

$$M_y = -Q_z(l-x) \quad (1.4\alpha)$$

$$M_z = Q_y(l-x) \quad (1.4\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η ράβδος δεν υποβάλλεται σε αξονική καταπόνηση και υιοθετώντας την παραδοχή περί επιπεδότητας των διατομών οι ορθές τάσεις που δρουν στη σύνθετη διατομή δίδονται ως [Pilkey, 2002]

$$(\sigma_{xx})_j = \frac{E_j}{E_1} \left[- \left(\frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \right) y + \left(\frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \right) z \right] \quad (1.5)$$

με τα γνωστά ολοκληρώματα από την θεωρία κλασικής μηχανικής

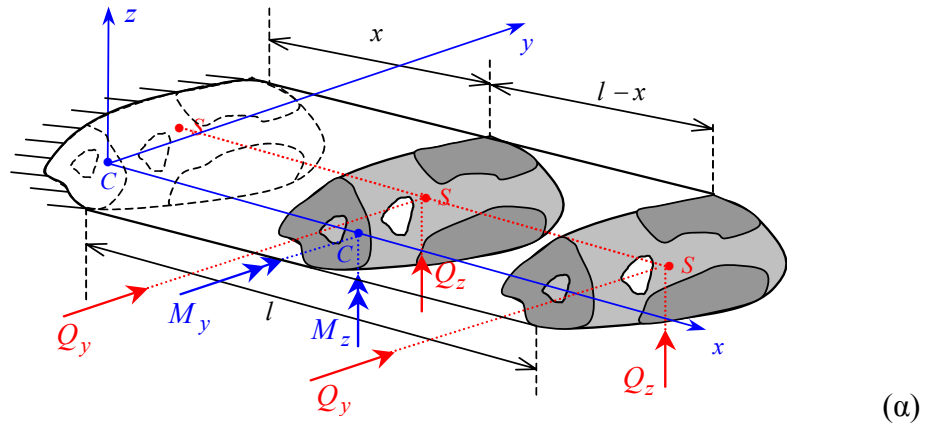
$$I_{yy} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} z^2 d\Omega_j \quad (1.6\alpha)$$

$$I_{zz} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} y^2 d\Omega_j \quad (1.6\beta)$$

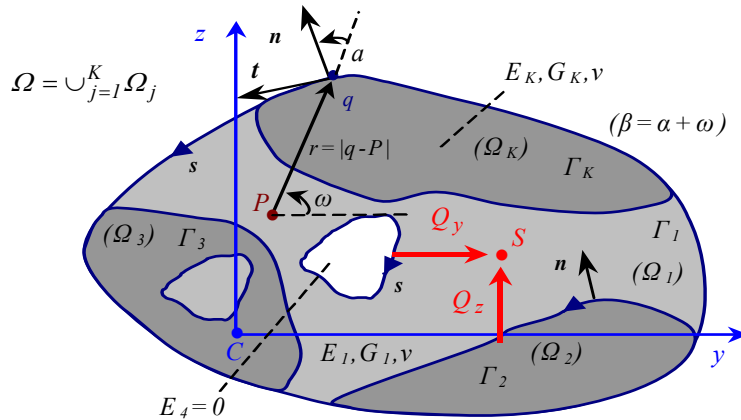
$$I_{yz} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} yz d\Omega_j \quad (1.6\gamma)$$

να είναι οι καμπτικές ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες y και z και το γινόμενο αδρανείας, αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι χωρίς περιορισμό της γενικότητας το πρώτο υλικό της ράβδου (Ω_1) θεωρήθηκε υλικό αναφοράς. Αντικαθιστώντας τις (1.4α,β) στην (1.5) οι συνιστώσες των ορθών τάσεων γράφονται

$$(\sigma_{xx})_j = \frac{E_j}{E_1} \left[\frac{l-x}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \left[Q_z (y I_{yz} - z I_{zz}) + Q_y (z I_{yz} - y I_{yy}) \right] \right] \quad (1.7)$$



(α)



(C: Κέντρο Βάρους, S: Κέντρο Διάτμησης)

(β)

Σχήμα 1.3. Σύνθετη ράβδος υποβαλλόμενη σε διατμητική καταπόνηση (α) με σταθερή διατομή τυχόντος σχήματος (β).

Ακολουθώντας την παραδοχή του Saint Venant για τις ράβδους, ότι οι συνιστώσες των τάσεων $(\sigma_{yy})_j$, $(\sigma_{zz})_j$ και $(\tau_{yz})_j$ είναι πολύ μικρές και επομένως μπορούν να αγνοηθούν, το πεδίο των τάσεων περιγράφεται από τις συνιστώσες των διατμητικών τάσεων $(\tau_{xy})_j$ και $(\tau_{xz})_j$. Απουσία μαζικών δυνάμεων οι δύο τελευταίες εξισώσεις ισορροπίας της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας γράφονται ως

$$\frac{\partial(\tau_{xy})_j}{\partial x} = 0 \quad (1.8\alpha)$$

$$\frac{\partial(\tau_{xz})_j}{\partial x} = 0 \quad (1.8\beta)$$

Από τις εξισώσεις (1.8) προκύπτει ότι οι διατμητικές τάσεις $(\tau_{xy})_j$ και $(\tau_{xz})_j$ είναι συναρτήσεις μόνο των συντεταγμένων y και z και επομένως είναι ίδιες για κάθε διατομή της ράβδου. Ο υπολογισμός αυτών των τάσεων θα πραγματοποιηθεί

θεωρώντας ότι η ράβδος υποβάλλεται ξεχωριστά στις διατμητικές δυνάμεις Q_y και Q_z , οπότε επειδή η ανάλυση είναι γραμμική οι διατμητικές τάσεις λόγω του φορτίου Q θα προκύψουν ως επαλληλία των διατμητικών τάσεων που οφείλονται στις δυνάμεις Q_y και Q_z , αντίστοιχα.

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι, στην πλέον γενική περίπτωση μιας σύνθετης ράβδου αποτελούμενης από υλικά με διαφορετικούς λόγους Poisson, το πρόβλημα της ομοιόμορφης διάτμησης γίνεται ιδιαίτερα περίπλοκο, επειδή στην περίπτωση αυτή δεν μπορούν να αγνοηθούν οι συνιστώσες των τάσεων $(\sigma_{yy})_j$, $(\sigma_{zz})_j$ και $(\tau_{yz})_j$ [Muskhelishvili, 1963]. Ωστόσο έχοντας υπόψιν ότι οι τιμές του λόγου Poisson για τα περισσότερα υλικά είναι σχεδόν ίδιες, ακόμη και για υλικά με σημαντικά διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας, προκύπτει ότι η προαναφερθείσα παραδοχή περί κοινού λόγου Poisson των υλικών είναι σε αρκετές περιπτώσεις ρεαλιστική.

Έτσι, θεωρώντας ότι η ράβδος υποβάλλεται μόνο στη διατμητική δύναμη Q_z η πρώτη εξίσωση ισορροπίας της τρισδιάστατης ελαστικότητας απουσία μαζικών δυνάμεων γράφεται ως

$$\frac{\partial(\tau_{xy})_j}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xz})_j}{\partial z} = \frac{E_j}{E_1} \frac{Q_z}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} (yI_{yz} - zI_{zz}) \quad (1.9)$$

Χρησιμοποιώντας τον καταστατικό νόμο του Hooke για ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό οι παραμορφώσεις δίδονται συναρτήσει των τάσεων ως

$$(\varepsilon_{xx})_j = \frac{(\sigma_{xx})_j}{E_j} \quad (1.10\alpha)$$

$$(\varepsilon_{yy})_j = -\frac{\nu}{E_j}(\sigma_{xx})_j \quad (1.10\beta)$$

$$(\varepsilon_{zz})_j = -\frac{\nu}{E_j}(\sigma_{xx})_j \quad (1.10\gamma)$$

$$(\gamma_{xy})_j = \frac{2(1+\nu)}{E_j}(\tau_{xy})_j \quad (1.10\delta)$$

$$(\gamma_{xz})_j = \frac{2(1+\nu)}{E_j}(\tau_{xz})_j \quad (1.10\epsilon)$$

$$(\gamma_{yz})_j = 0 \quad (1.10\sigma\tau)$$

Οι παραμορφώσεις αυτές ικανοποιούν τέσσερις από τις συνθήκες συμβιβαστού ταυτοτικά. Οι υπόλοιπες δύο συνθήκες χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.7) για $Q_y = 0$ γράφονται ως

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial(\tau_{xz})_j}{\partial y} - \frac{\partial(\tau_{xy})_j}{\partial z} \right) = \frac{E_j}{E_1} \frac{\nu Q_z I_{zz}}{(1+\nu)(I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2)} \quad (1.11\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial(\tau_{xz})_j}{\partial y} - \frac{\partial(\tau_{xy})_j}{\partial z} \right) = \frac{E_j}{E_1} \frac{\nu Q_z I_{yz}}{(1+\nu)(I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2)} \quad (1.11\beta)$$

Οι διατμητικές τάσεις $(\tau_{xy})_j$ και $(\tau_{xz})_j$ εκφράζονται στη συνέχεια συναρτήσει μιας τασικής συνάρτησης $(\Phi(y,z))_j$, η οποία θεωρείται ότι έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι δεύτερης τάξης και έχει επιλεγεί έτσι ώστε οι δύο συνθήκες συμβιβαστού (1.11α,β) να ικανοποιούνται ταυτοτικά, δηλαδή

$$(\tau_{xy})_j = E_j \frac{Q_z}{B} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_j - d_y \right] \quad (1.12\alpha)$$

$$(\tau_{xz})_j = E_j \frac{Q_z}{B} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_j - d_z \right] \quad (1.12\beta)$$

όπου d_y, d_z είναι οι y, z συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{d} που ορίζεται ως

$$\mathbf{d} = d_y \mathbf{i}_y + d_z \mathbf{i}_z = \left[\nu \left(I_{zz} y z - I_{yz} \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \right] \mathbf{i}_y + \left[-\nu \left(I_{zz} \frac{y^2 - z^2}{2} + I_{yz} y z \right) \right] \mathbf{i}_z \quad (1.13)$$

Στις εξισώσεις (1.13) $\mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες y, z αντίστοιχα, ενώ το μέγεθος B ορίζεται ως

$$B = E_1 \Delta = E_1 2(1+\nu)(I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2) \quad (1.14)$$

το οποίο εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας του υλικού αναφοράς, το λόγο Poisson και τη γεωμετρία της διατομής. Προφανώς, οι συνολικές διατμητικές τάσεις στο εσωτερικό του χωρίου Ω_j ($j=1,2,\dots,K$) θα δίδονται από τη σχέση

$$(\tau_{\Omega})_j = \left[(\tau_{xy})_j^2 + (\tau_{xz})_j^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.15)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1.12) στην εξίσωση (1.9) προκύπτει η ακόλουθη δεσπόζουσα μερική διαφορική εξίσωση τύπου Poisson για την τασική συνάρτηση $(\Phi(y,z))_j$

$$(\nabla^2 \Phi)_j = 2(I_{yz}y - I_{zz}z) \quad (1.16)$$

όπου $(\nabla^2)_j \equiv \left(\partial^2 / \partial y^2 \right)_j + \left(\partial^2 / \partial z^2 \right)_j$ είναι ο αρμονικός τελεστής (Παράρτημα Β).

Οι συνοριακές συνθήκες στις παράπλευρες επιφάνειες των υλικών προκύπτουν όπως προαναφέρθηκε από τις ακόλουθες φυσικές θεωρήσεις

- a) Η ελεύθερη παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου είναι αφόρτιστη, επομένως οι κάθετες διατμητικές τάσεις στις εξωτερικές επιφάνειες είναι μηδενικές, δηλαδή

$$(\tau_{xn})_j = (\tau_{xy})_j n_y + (\tau_{xz})_j n_z = 0 \quad (1.17a)$$

- b) Οι κάθετες διατμητικές τάσεις στις διεπιφάνειες που διαχωρίζουν τα διαφορετικά υλικά j και i είναι ίσες κατά μέγεθος και αντίθετης φοράς, δηλαδή

$$(\tau_{xy})_j n_y + (\tau_{xz})_j n_z = -(\tau_{xy})_i n_y - (\tau_{xz})_i n_z \quad (1.17\beta)$$

- c) Οι συνιστώσες των μετατοπίσεων παραμένουν συνεχείς στις διεπιφάνειες, καθώς εξ ορισμού τα υλικά είναι στερεά συνδεδεμένα μεταξύ τους

όπου $n_y = \cos \beta$, $n_z = \sin \beta$ είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στα σύνορα Γ_j ($j=1,2,\dots,K$) της ράβδου, με $\beta = \hat{y}\mathbf{n}$, δηλαδή β είναι η γωνία μεταξύ του άξονα y και του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} . Τονίζεται ότι και στις δύο πλευρές της ισότητας της (1.17β) το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} κατευθύνεται προς μία κοινή κατεύθυνση και είναι θετικό όταν κατευθύνεται προς το εξωτερικό του χωρίου Ω_j , ενώ η τρίτη φυσική θεώρηση εξασφαλίζει τη συνέχεια της τασικής συνάρτησης $(\Phi(y,z))_j$ στο εσωτερικό των χωρίων Ω_j ($j=1,2,\dots,K$) ως επίσης και στα σύνορα που διαχωρίζουν τα υλικά $((\Phi)_j = (\Phi)_i)$.

Αντικαθιστώντας τις (1.12) στις (1.17) προκύπτει η συζευγμένη συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann για την τασική συνάρτηση $(\Phi)_j$ ως

$$E_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i = (E_j - E_i) \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \quad \text{στο } \Gamma_j \quad (j=1,2,\dots,K) \quad (1.18)$$

όπου ο τελεστής $(\partial / \partial n)_j \equiv n_y (\partial / \partial y)_j + n_z (\partial / \partial z)_j$ δηλώνει παραγώγιση ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} και $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}$ δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \mathbf{n} και \mathbf{d} . Στις ελεύθερες επιφάνειες το Γ_j είναι το ελεύθερο σύνορο του χωρίου Ω_j , ενώ στις διεπιφάνειες το Γ_j είναι το κοινό σύνορο που διαχωρίζει τα χωρία Ω_j και Ω_i , όπου κινούμενοι στο κοινό σύνορο τα χωρία Ω_j και Ω_i βρίσκονται αριστερά και δεξιά του Γ_j , αντίστοιχα. Τα E_j και E_i είναι τα μέτρα ελαστικότητας των χωρίων Ω_j και Ω_i , αντίστοιχα, ενώ στις ελεύθερες επιφάνειες το $E_i = 0$ (ελεύθερες επιφάνειες είναι και οι οπές). Υπογραμμίζεται ότι οι παράγωγοι της τασικής συνάρτησης ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} μεταβάλλονται ασυνεχώς κατά μήκος των εσωτερικών συνόρων.

Ομοίως, θεωρώντας ότι η ράβδος υποβάλλεται μόνο στη διατμητική δύναμη Q_y και υποθέτοντας μια τασική συνάρτηση $(\Theta(y,z))_j$ η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι δεύτερης τάξης τέτοια ώστε όλες οι συνθήκες συμβιβαστού (1.11) να ικανοποιούνται ταυτοτικά, οι διατμητικές τάσεις $(\tau_{xy})_j$ και $(\tau_{xz})_j$ διατυπώνονται ως

$$(\tau_{xy})_j = E_j \frac{Q_y}{B} \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_j - e_y \right] \quad (1.19\alpha)$$

$$(\tau_{xz})_j = E_j \frac{Q_y}{B} \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)_j - e_z \right] \quad (1.19\beta)$$

όπου e_y, e_z είναι οι y, z συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{e} που ορίζεται ως

$$\mathbf{e} = e_y \mathbf{i}_y + e_z \mathbf{i}_z = \left[\nu \left(I_{yy} \frac{y^2 - z^2}{2} - I_{yz} yz \right) \right] \mathbf{i}_y + \left[\nu \left(I_{yy} yz + I_{yz} \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \right] \mathbf{i}_z \quad (1.20)$$

Αντικαθιστώντας τις (1.19) στην πρώτη εξίσωση ισορροπίας της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας απουσία μαζικών δυνάμεων και στις συνοριακές συνθήκες (1.17), προκύπτει το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Neumann για την τασική συνάρτηση $(\Theta(y,z))_j$ ως

$$(\nabla^2 \Theta)_j = 2(I_{yz} z - I_{yy} y) \quad \text{στο } \Omega_j \quad (j=1,2,\dots,K) \quad (1.21)$$

$$E_j \left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} \right)_i = (E_j - E_i) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \quad \text{στο } \Gamma_j \quad (j=1,2,\dots,K) \quad (1.22)$$

Τα δύο παρουσιαζόμενα προβλήματα συνοριακών τιμών τύπου Neumann για τις τασικές συναρτήσεις $(\Phi(y,z))_j$ και $(\Theta(y,z))_j$ έχουν λύση, αν και μόνο αν ικανοποιούν αντίστοιχα τις ακόλουθες συνθήκες [Muskhelishvili, 1963]

$$\int_{\Gamma_j} \left[E_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i \right] ds = 0 \quad (1.23\alpha)$$

$$\int_{\Gamma_j} \left[E_j \left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} \right)_i \right] ds = 0 \quad (1.23\beta)$$

Η εξίσωση (1.23α) σύμφωνα με τη συνοριακή συνθήκη (1.18) γράφεται ως

$$\int_{\Gamma_j} \left[E_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i \right] ds = (E_j - E_i) \int_{\Gamma_j} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) ds \quad (1.24)$$

και με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης του Gauss (Παράρτημα Β-εξίσωση Β.14) προκύπτει

$$\int_{\Gamma_j} \left[E_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i \right] ds = (E_j - E_i) \iint_{\Omega_j} \operatorname{div} \mathbf{d} \Omega_j \quad (1.25)$$

Η απόκλιση $\operatorname{div} \mathbf{d}$ ισούται με

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = \frac{\partial d_y}{\partial y} + \frac{\partial d_z}{\partial z} = 2\nu (I_{zz} z - I_{yz} y) \quad (1.26)$$

οπότε η εξίσωση (1.25) γράφεται ως

$$\int_{\Gamma_j} \left[E_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i \right] ds = 2\nu (E_j - E_i) \left[I_{zz} \iint_{\Omega_j} z d\Omega_j - I_{yz} \iint_{\Omega_j} y d\Omega_j \right] \quad (1.27)$$

Τα ολοκληρώματα

$$(S_y)_j = \iint_{\Omega_j} z d\Omega_j \quad (1.28\alpha)$$

$$(S_z)_j = \iint_{\Omega_j} y d\Omega_j \quad (1.28\beta)$$

εκφράζουν τις στατικές ροπές κάμψης ως προς τους άξονες y, z του χωρίου Ω_j . Επειδή το σύστημα αξόνων Cyz είναι κεντροβαρικό οι στατικές ροπές $(S_y)_j$ και $(S_z)_j$ είναι μηδενικές, επομένως το δεξιό μέλος της εξίσωσης (1.27) μηδενίζεται με αποτέλεσμα η συνθήκη ύπαρξης λύσης του προβλήματος Neumann για την τασική συνάρτηση $(\Phi(y, z))_j$ να ικανοποιείται. Ομοίως, αποδεικνύεται και η συνθήκη ύπαρξης λύσης για την τασική συνάρτηση $(\Theta(y, z))_j$.

Το κέντρο διάτμησης προκύπτει από την απαίτηση, ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου της διατομής, η στρεπτική ροπή των εξωτερικά επιβαλλόμενων στο κέντρο διάτμησης εγκάρσιων δυνάμεων να ισούται με την εσωτερικά αναπτυσσόμενη στρεπτική ροπή που οφείλεται στις διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης. Θεωρείται ως σημείο υπολογισμού των στρεπτικών ροπών το κέντρο βάρους, οπότε

$$y_S Q_z - z_S Q_y = M_x \rightarrow y_S Q_z - z_S Q_y = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[(\tau_{xz})_j y - (\tau_{xy})_j z \right] d\Omega_j \quad (1.29)$$

Για $Q_y = 0$ και αντικαθιστώντας τις (1.12) στην (1.29) προκύπτει

$$y_S = \frac{I}{B} \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} E_j \left[y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_j - z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_j - y d_z + z d_y \right] d\Omega_j \quad (1.30)$$

Ομοίως, για $Q_z = 0$ και αντικαθιστώντας τις (1.19) στην (1.29) προκύπτει

$$z_S = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} E_j \left[z \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_j - y \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)_j - z e_y + y e_z \right] d\Omega_j \quad (1.31)$$

Οι σχέσεις (1.30) και (1.31) δίδουν τις συντεταγμένες $\{y_S, z_S\}$ του κέντρου διάτμησης ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων Cyz . Από τις εξισώσεις (1.29) προκύπτει ότι, εάν το σημείο υπολογισμού των στρεπτικών ροπών είναι το κέντρο διάτμησης τότε η στρεπτική ροπή που οφείλεται στις διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης μηδενίζεται.

Οι σχέσεις (1.30) και (1.31) δηλώνουν ότι η θέση του κέντρου διάτμησης είναι ανεξάρτητη της διατμητικής φόρτισης. Εάν οι τασικές συναρτήσεις υπολογιστούν για μηδενικό λόγο Poisson ν , τότε το υπολογιζόμενο από τις σχέσεις (1.30) και (1.31) κέντρο διάτμησης S ταυτίζεται με το κέντρο στρέψης M [(Weber, 1926), (Trefftz, 1935)], δηλαδή

$$y_S = y_M \quad (1.32\alpha)$$

$$z_S = z_M \quad (1.32\beta)$$

Ο Trefftz (1935) απέδειξε την ταύτιση αυτή χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο [Pilkey, 2002]. Έτσι, για σύνθετη ράβδο μήκους l στηριζόμενη ως πρόβολος που στο ελεύθερο άκρο της υποβάλλεται μόνο σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή η στρεπτική ενέργεια παραμόρφωσης της ράβδου αγνοώντας την παρεμπόδιση της στρεπτικής στρέβλωσης δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{in}^t = \sum_{j=1}^K \frac{l}{2G_j} \iint_{\Omega_j} \left[(\tau_{xy}^P)_j^2 + (\tau_{xz}^P)_j^2 \right] d\Omega_j \quad (1.33)$$

όπου $(\tau_{xy}^P)_j, (\tau_{xz}^P)_j$ οι πρωτογενείς στρεπτικές διατμητικές τάσεις ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων Cyz . Υπενθυμίζεται ότι οι τάσεις $(\tau_{xy}^P)_j, (\tau_{xz}^P)_j$ είναι ανεξάρτητες της θέσης του συστήματος αξόνων. Εάν η ράβδος υποβάλλεται στο ελεύθερο άκρο της μόνο σε συγκεντρωμένες εγκάρσιες δυνάμεις Q_y, Q_z η καμπτική ενέργεια παραμόρφωσης της ράβδου αγνοώντας την παρεμπόδιση της διατμητικής στρέβλωσης δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{in}^b = \sum_{j=1}^K \frac{l}{2G_j} \iint_{\Omega_j} \left[(\tau_{xy})_j^2 + (\tau_{xz})_j^2 \right] d\Omega_j + \sum_{j=1}^K \frac{1}{2E_j} \iint_{\Omega_j} (\sigma_{xx})_j^2 d\Omega_j \quad (1.34)$$

όπου $(\tau_{xy})_j, (\tau_{xz})_j$ οι διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης και $(\sigma_{xx})_j$ οι ορθές τάσεις λόγω κάμψης ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων Cyz . Επίσης, εάν η ράβδος υποβάλλεται στο ελεύθερο άκρο της ταυτόχρονα σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή και σε συγκεντρωμένες εγκάρσιες δυνάμεις Q_y, Q_z η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης της ράβδου αγνοώντας την παρεμπόδιση της στρεπτικής και διατμητικής στρέβλωσης δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{in}^{tot} = \sum_{j=1}^K \frac{l}{2G_j} \iint_{\Omega_j} \left\{ \left[(\tau_{xy}^P)_j + (\tau_{xy})_j \right]^2 + \left[(\tau_{xz}^P)_j + (\tau_{xz})_j \right]^2 \right\} d\Omega_j + \sum_{j=1}^K \frac{1}{2E_j} \iint_{\Omega_j} (\sigma_{xx})_j^2 d\Omega_j \quad (1.35)$$

Στην περίπτωση που οι εγκάρσιες δυνάμεις εφαρμόζονται στο κέντρο διάτμησης, τότε εξ' ορισμού δεν παράγουν πρόσθετη στρέψη στη ράβδο, οπότε η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης μπορεί να ληφθεί προσθέτοντας απλά την καμπτική και στρεπτική ενέργεια των εξισώσεων (1.33) και (1.34)

$$\Pi_{in}^{tot} = \Pi_{in}^t + \Pi_{in}^b \quad (1.36)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1.33), (1.34) και (1.35) στην εξίσωση (1.36) προκύπτει

$$\sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[(\tau_{xy}^P)_j (\tau_{xy})_j + (\tau_{xz}^P)_j (\tau_{xz})_j \right] d\Omega_j = 0 \quad (1.37)$$

Η εξίσωση (1.37) καλείται συνθήκη Trefftz και εκφράζει την απαίτηση που πρέπει να τηρείται ώστε η κάμψη να είναι ανεξάρτητη της στρέψης [Trefftz, 1935]. Οι πρωτογενείς στρεπτικές διατμητικές τάσεις ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων Cyz δίδονται από τις σχέσεις (1.10α,γ)

$$(\tau_{xy}^P)_j = G_j \theta'_x \left[\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P}{\partial y} \right)_j - z \right] \quad (1.38\alpha)$$

$$(\tau_{xz}^P)_j = G_j \theta'_x \left[\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P}{\partial z} \right)_j + y \right] \quad (1.38\beta)$$

Με τις τάσεις αυτές η συνθήκη Trefftz της εξίσωσης (1.37) γράφεται ως

$$\sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[\left[\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P}{\partial y} \right)_j - z \right] (\tau_{xy})_j + \left[\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P}{\partial z} \right)_j + y \right] (\tau_{xz})_j \right] d\Omega_j = 0 \quad (1.39)$$

Για $Q_y = 0$ η (1.29) δίδει

$$y_S Q_z = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[(\tau_{xz})_j y - (\tau_{xy})_j z \right] d\Omega_j \quad (1.40)$$

Η σχέση (1.39) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[(\tau_{xz})_j y - (\tau_{xy})_j z \right] d\Omega_j = - \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P}{\partial y} \right)_j (\tau_{xy})_j + \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P}{\partial z} \right)_j (\tau_{xz})_j \right] d\Omega_j \quad (1.41)$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (1.41) εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση (θεώρημα Gauss-Green) γράφεται ως

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P}{\partial y} \right)_j (\tau_{xy})_j + \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P}{\partial z} \right)_j (\tau_{xz})_j \right] d\Omega_j = \\ & \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P \tau_{xy}}{\partial y} \right)_j + \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P \tau_{xy}}{\partial y} \right)_j \right] d\Omega_j - \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (\widehat{\varphi}_O^P)_j \left[\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)_j + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)_j \right] d\Omega_j \end{aligned} \quad (1.42)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss (Παράρτημα Β-εξίσωση Β.14) για κάθε χωρίο Ω_j ($j=1,2,\dots,K$), το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (1.42) γράφεται ως

$$\sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P \tau_{xy}}{\partial y} \right)_j + \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P \tau_{xy}}{\partial y} \right)_j \right] d\Omega_j = \sum_{j=1}^K (\widehat{\varphi}_O^P)_j \int_{\Gamma_j} \left[(\tau_{xn})_j - (\tau_{xn})_i \right] ds \quad (1.43)$$

οπότε σύμφωνα με την σχέση (1.17β) προκύπτει

$$\sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P \tau_{xy}}{\partial y} \right)_j + \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_O^P \tau_{xy}}{\partial y} \right)_j \right] d\Omega_j = 0 \quad (1.44)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (1.42) με τη βοήθεια της (1.9) γράφεται ως

$$\sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (\widehat{\varphi}_O^P)_j \left[\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)_j + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)_j \right] d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\widehat{\varphi}_O^P)_j \frac{Q_z}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} (y I_{yz} - z I_{zz}) d\Omega_j \quad (1.45)$$

Συνδυάζοντας τις (1.40)–(1.42), (1.44), (1.45) προκύπτει

$$y_S Q_z = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\widehat{\varphi}_O^P)_j \frac{Q_z}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} (yI_{yz} - zI_{zz}) d\Omega_j \quad (1.46)$$

Ανάλογα προκύπτει

$$-z_S Q_y = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\widehat{\varphi}_O^P)_j \frac{Q_y}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} (zI_{yz} - yI_{yy}) d\Omega_j \quad (1.47)$$

Οι βασικές ροπές αδράνειας στρέβλωσης της σύνθετης διατομής $\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$ ως προς το κεντροβαρικό σύστημα δίδονται από τις σχέσεις

$$A_{wy}^- = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\widehat{\varphi}_O^P)_j y d\Omega_j \quad (1.48\alpha)$$

$$A_{wz}^- = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\widehat{\varphi}_O^P)_j z d\Omega_j \quad (1.48\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις (1.48α,β) στις (1.46), (1.47) προκύπτει

$$y_S = \frac{I_{yz} A_{wy}^- - I_{zz} A_{wz}^-}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (1.49\alpha)$$

$$z_S = \frac{I_{yy} A_{wy}^- - I_{yz} A_{wz}^-}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (1.49\beta)$$

Επειδή τα μεγέθη A_{wy}^- , A_{wz}^- εξαρτώνται μόνο από τη γεωμετρία της σύνθετης διατομής οι συντεταγμένες $\{y_S, z_S\}$ του κέντρου διάτμησης υπολογιζόμενες από τις σχέσεις (1.49α,β) είναι ανεξάρτητες του λόγου Poisson ν . Οι εξισώσεις (1.49) δίνουν τις συντεταγμένες του κέντρου στρέψης και συνεπώς οι εξισώσεις (1.32) ικανοποιούνται. Αξίζει να σημειωθεί ότι την ταύτιση κέντρου στρέψης και κέντρου διάτμησης για μηδενικό λόγο Poisson απέδειξε πρώτος ο Weber [1926] εφαρμόζοντας την ταυτότητα αμοιβαιότητας Betty–Maxwell.

Η προσεγγιστική έκφραση της ενέργειας παραμόρφωσης δοκού μοναδιαίου μήκους οφειλόμενη στις διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης δίνεται σύμφωνα με τη θεωρία Timoshenko από τη σχέση [Pilkey, 2002]

$$\Pi_{in}^{s,appr.} = \Pi_{in,y}^{s,appr.} + \Pi_{in,z}^{s,appr.} + \Pi_{in,yz}^{s,appr.} + \Pi_{in,zy}^{s,appr.}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{in}^{s,appr.} &= \frac{1}{2G_1} \iint_{A_{sy}} (\tau_{xy})_{Q_y}^2 dA_{sy} + \frac{1}{2G_1} \iint_{A_{sz}} (\tau_{xz})_{Q_z}^2 dA_{sz} \\ &\quad + \frac{1}{2G_1} \iint_{A_{szy}} (\tau_{xy})_{Q_y} (\tau_{xy})_{Q_z} dA_{szy} + \frac{1}{2G_1} \iint_{A_{szy}} (\tau_{xz})_{Q_z} (\tau_{xz})_{Q_y} dA_{szy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{in}^{s,appr.} &= \frac{1}{2G_1} \iint_{A_{sy}} \left(\frac{Q_y}{A_{sy}} \right)^2 dA_{sy} + \frac{1}{2G_1} \iint_{A_{sz}} \left(\frac{Q_z}{A_{sz}} \right)^2 dA_{sz} \\
&\quad + \frac{1}{2G_1} \iint_{A_{szy}} \frac{Q_y}{A_{szy}} \frac{Q_z}{A_{szy}} dA_{szy} + \frac{1}{2G_1} \iint_{A_{szy}} \frac{Q_z}{A_{szy}} \frac{Q_y}{A_{szy}} dA_{szy} \\
\Pi_{in}^{s,appr.} &= \frac{1}{2G_1} \frac{Q_y^2}{A_{sy}^2} \iint_{A_{sy}} dA_{sy} + \frac{1}{2G_1} \frac{Q_z^2}{A_{sz}^2} \iint_{A_{sz}} dA_{sz} \\
&\quad + \frac{1}{2G_1} \frac{Q_y Q_z}{A_{szy}^2} \iint_{A_{szy}} dA_{szy} + \frac{1}{2G_1} \frac{Q_z Q_y}{A_{szy}^2} \iint_{A_{szy}} dA_{szy} \\
\Pi_{in}^{s,appr.} &= \frac{1}{2G_1 A} (a_y Q_y^2 + a_z Q_z^2 + a_{yz} Q_y Q_z + a_{zy} Q_z Q_y) \\
\Pi_{in}^{s,appr.} &= \frac{1}{2E_1 A} \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{G_j} (a_y Q_y^2 + a_z Q_z^2 + a_{yz} Q_y Q_z + a_{zy} Q_z Q_y) \tag{1.50}
\end{aligned}$$

ενώ η αντίστοιχη ακριβής έκφραση της ενέργεια παραμόρφωσης δίδεται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας ως

$$\Pi_{in}^{s,exact} = \sum_{j=1}^K \frac{1}{2G_j} \iint_{\Omega_j} [(\tau_{xy})_j^2 + (\tau_{xz})_j^2] d\Omega_j \tag{1.51}$$

με

$$A = \sum_{j=1}^K \frac{G_j}{G_1} \iint_{\Omega_j} d\Omega_j \tag{1.52}$$

Οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης $a_y, a_z, a_{yz} = a_{zy}$ θα προσδιοριστούν, σύμφωνα με την ενεργειακή μέθοδο [Schramm et al., 1997], εξισώνοντας την ακριβή με την προσεγγιστική έκφραση της ενέργειας παραμόρφωσης. Έτσι, για τον προσδιορισμό του συντελεστή a_y , που λαμβάνει υπόψιν την επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης στις μετατοπίσεις κατά τη διεύθυνση y λόγω εγκάρσιας δύναμης στην ίδια διεύθυνση, θεωρούμε $\{Q_y \neq 0, Q_z = 0\}$ και $\Pi_{in}^{s,exact} = \Pi_{in}^{s,appr.}$. Έτσι, με τη βοήθεια των εξισώσεων (1.12) προκύπτει

$$a_y = \frac{1}{\kappa_y} = \frac{A}{E_1 \Delta^2} \sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} ((\nabla \Theta)_j - \mathbf{e}) \cdot ((\nabla \Theta)_j - \mathbf{e}) d\Omega_j \tag{1.53}$$

Ομοίως, για τον προσδιορισμό του συντελεστή a_z θεωρούμε $\{Q_y = 0, Q_z \neq 0\}$ και $\Pi_{in}^{s,exact} = \Pi_{in}^{s,appr.}$, οπότε σύμφωνα με την σχέση (1.19) προκύπτει

$$a_z = \frac{1}{\kappa_z} = \frac{A}{E_1 \Delta^2} \sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} \left((\nabla \Phi)_j - \mathbf{d} \right) \cdot \left((\nabla \Phi)_j - \mathbf{d} \right) d\Omega_j \quad (1.54)$$

Για τον προσδιορισμό του συντελεστή a_{yz} ($= a_{zy}$), που λαμβάνει υπόψιν την επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης στις μετατοπίσεις κατά τη διεύθυνση y λόγω εγκάρσιας δύναμης στη διεύθυνση z , θεωρούμε $\{Q_y \neq 0, Q_z \neq 0\}$ και $\Pi_{in}^{s,exact} = \Pi_{in}^{s,appr.}$. Στην περίπτωση αυτή οι συνολικές διατμητικές τάσεις δίδονται από τις εξισώσεις (1.12), (1.19) σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας ως

$$\left(\tau_{xy} \right)_j = E_j \frac{Q_z}{B} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_j - d_y \right] + E_j \frac{Q_y}{B} \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_j - e_y \right] \quad (1.55\alpha)$$

$$\left(\tau_{xz} \right)_j = E_j \frac{Q_z}{B} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_j - d_z \right] + E_j \frac{Q_y}{B} \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)_j - e_z \right] \quad (1.55\beta)$$

Έτσι, με τη βοήθεια των εξισώσεων (1.53), (1.54) και (1.55) προκύπτει

$$a_{yz} = \frac{1}{\kappa_{yz}} = \frac{A}{E_1 \Delta^2} \sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} \left((\nabla \Phi)_j - \mathbf{d} \right) \cdot \left((\nabla \Theta)_j - \mathbf{e} \right) d\Omega_j \quad (1.56)$$

Με τη βοήθεια των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης $a_y, a_z, a_{yz} = a_{zy}$ για σύνθετη ράβδο να ορίζονται οι διατμητικές αντιστάσεις της θεωρίας Timoshenko ως

$$G_1 A_{sy} = G_1 A / a_y = \kappa_y G_1 A \quad (1.57\alpha)$$

$$G_1 A_{sz} = G_1 A / a_z = \kappa_z G_1 A \quad (1.57\beta)$$

$$G_1 A_{syz} = G_1 A / a_{yz} = \kappa_{yz} G_1 A \quad (1.57\gamma)$$

Οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης μπορούν να γραφούν σε μητρωϊκή μορφή ως

$$[A] = \begin{bmatrix} a_y & a_{yz} \\ a_{zy} & a_z \end{bmatrix} = \frac{A}{E_1 \Delta^2} \sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} \{B\}^T \{B\} d\Omega_j \quad (1.58)$$

με

$$\{B\} = \left\{ \left((\nabla \Phi)_j - \mathbf{d} \right) \quad \left((\nabla \Theta)_j - \mathbf{e} \right) \right\} \quad (1.59)$$

Το μητρώο $[A]$ είναι επίπεδος συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης [Pilkey, 2002]. Οι κύριες τιμές του τανυστή μπορούν να προσδιοριστούν από το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\left[[A] - a[I] \right] \{x\} = \{0\} \quad (1.60)$$

όπου $[I]$ το μοναδιαίο μητρώο. Από την επίλυση του προβλήματος προκύπτουν τα ιδιοζεύγη $(a_i, \{x\}_i)$, $i=1,2$. Τα ιδιοδιανύσματα $\{x\}_i$, $i=1,2$ είναι τα διανύσματα βάσης του κυρίου συστήματος, που καλείται κύριο διατμητικό σύστημα, ενώ οι ιδιοτιμές a_i , $i=1,2$ είναι οι κύριοι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης, οι οποίοι αποδεικνύεται ότι είναι πάντα μεγαλύτεροι η ίσοι της μονάδας [Schramm et al., 1997]. Σημειώνεται ότι, οι διαγώνιοι συντελεστές $a_{yz} = a_{zy}$ ως προς το κύριο διατμητικό σύστημα με αρχή το κέντρο βάρους μηδενίζονται, ενώ με αρχή το κέντρο διάτμησης μεγιστοποιούνται [Pilkey, 2002]. Η γωνία φ^S του κυρίου διατμητικού συστήματος αξόνων ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς δίδεται από τη σχέση

$$\tan 2\varphi^S = \frac{2a_{yz}}{a_y - a_z} \quad (1.61)$$

Στη γενική περίπτωση, η γωνία φ^S είναι διάφορη της γωνία φ^B του κυρίου καμπτικού συστήματος αξόνων, που δίδεται από τη σχέση

$$\tan 2\varphi^B = \frac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}} \quad (1.62)$$

Αποτέλεσμα αυτής της διαφοροποίησης των κυρίων αξόνων ($\varphi^S \neq \varphi^B$) είναι οι συνιστώσες των μετατοπίσεων της ράβδου ως προς τους άξονες y και z να είναι εν γένει συζευγμένες, έστω και αν το σύστημα αξόνων της διατομής ταυτίζεται με το κύριο καμπτικό σύστημα. Εάν η διατομή είναι συμμετρική ως προς έναν άξονα, το κύριο διατμητικό σύστημα ταυτίζεται με το αντίστοιχο κύριο καμπτικό σύστημα και οι βυθίσεις ως προς τις κύριες διευθύνσεις δεν είναι πλέον συζευγμένες ($a_{yz} = a_{zy} = 0$ και $I_{yz} = I_{zy} = 0$) [Pilkey, 2002].

Τέλος, θεωρώντας ότι η ράβδος υποβάλλεται μόνο στη διατμητική δύναμη Q_z οι συνιστώσες των διατμητικών τάσεων σε σημεία του συνόρου Γ_j ($j=1,2,\dots,K$) προσδιορίζονται από τις υπολογιζόμενες τιμές $(\Phi)_j$ και $(\partial\Phi/\partial n)_j$ σύμφωνα με τις σχέσεις

$$(\tau_{xn})_j = E_j \frac{Q_z}{B} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)_j - \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \right] \quad (1.63\alpha)$$

$$(\tau_{xt})_j = E_j \frac{Q_z}{B} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)_j + d_y \sin\beta - d_z \cos\beta \right] \quad (1.63\beta)$$

Ομοίως, θεωρώντας ότι η ράβδος υποβάλλεται μόνο στη διατμητική δύναμη Q_y οι συνιστώσες των διατμητικών τάσεων σε σημεία του συνόρου Γ_j ($j=1,2,\dots,K$)

προσδιορίζονται από τις υπολογιζόμενες τιμές $(\Theta)_j$ και $(\partial\Theta/\partial n)_j$ σύμφωνα με τις σχέσεις

$$(\tau_{xn})_j = E_j \frac{Q_y}{B} \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial n} \right)_j - \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \right] \quad (1.64\alpha)$$

$$(\tau_{xt})_j = E_j \frac{Q_y}{B} \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial t} \right)_j + e_y \sin\beta - e_z \cos\beta \right] \quad (1.64\beta)$$

Προφανώς, οι συνολικές διατμητικές τάσεις σε σημεία του συνόρου Γ_j ($j=1,2,\dots,K$) θα δίδονται από τη σχέση

$$(\tau_r)_j = \left[(\tau_{xn})_j^2 + (\tau_{xt})_j^2 \right]^{1/2} \quad (1.65)$$

Σημειώνεται ότι οι εφαπτομενικές παράγωγοι $(\partial\Phi/\partial t)_j = (\partial\Phi/\partial s)_j$ και $(\partial\Theta/\partial t)_j = (\partial\Theta/\partial s)_j$ υπολογίζονται αριθμητικά χρησιμοποιώντας κατάλληλα κεντρικές, οπίσθιες ή εμπρόσθιες διαφορές. Στις σύμμικτες ράβδους η γνώση των κάθετων διατμητικών τάσεων $(\tau_{xn})_j$ είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό των διατμητικών συνδέσμων. Τονίζεται ότι οι περισσότερες αστοχίες στις σύμμικτες κατασκευές παρατηρούνται στις συνδέσεις των υλικών.

1.3 Ολοκληρωτικές Παραστάσεις – Αριθμητική Επίλυση

Οι ιδιόμορφες συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις των τασικών συναρτήσεων $(\Phi(y,z))_j$ και $(\Theta(y,z))_j$ διατυπώνονται ως

$$\begin{aligned} \pi(\Phi(p))_j (E_j + E_k) &= \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) \ln r \right] ds_q \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[(I_{yz}y - I_{zz}z)(2 \ln r - 1) r \cos a - (I_{yz} \cos \beta - I_{zz} \sin \beta)(\ln r - 1) r^2 \right] ds_q \end{aligned} \quad (1.66\alpha)$$

$$\begin{aligned} \pi(\Theta(p))_j (E_j + E_k) &= \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[(\Theta(q))_j \frac{\cos a}{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \ln r \right] ds_q \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) &\left[(I_{yz}z - I_{yy}y)(2 \ln r - 1) r \cos a - (I_{yz} \sin \beta - I_{yy} \cos \beta)(\ln r - 1) r^2 \right] ds_q \end{aligned} \quad (1.66\beta)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας N σταθερά συνοριακά στοιχεία για την προσέγγιση των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων και τεχνική διακριτοποίησης σε N συνοριακά

κομβικά σημεία, προκύπτουν τα δύο ακόλουθα γραμμικά σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$[A^\Phi]\{X^\Phi\} = \{B^\Phi\} \quad (1.67\alpha)$$

$$[A^\Theta]\{X^\Theta\} = \{B^\Theta\} \quad (1.67\beta)$$

από την επίλυση των οποίων προκύπτουν οι άγνωστες συνοριακές ποσότητες $\{X^\Phi\}, \{X^\Theta\}$ αναφορικά με τις τασικές συναρτήσεις $(\Phi)_j$ και $(\Theta)_j$, αντίστοιχα, ενώ $[A^\Phi], [A^\Theta]$ είναι τετραγωνικά $N \times N$ γνωστά μητρώα συντελεστών και $\{B^\Phi\}, \{B^\Theta\}$ είναι μητρώα στήλες με διάσταση $N \times 1$ γνωστών συντελεστών.

Οι παράγωγοι ως προς το κάθετο διάνυσμα n των τασικών συναρτήσεων $(\partial\Phi/\partial n)_j$ και $(\partial\Theta/\partial n)_j$ είναι γνωστές μόνο στα ελεύθερα σύνορα. Οι τιμές τους στα εσωτερικά σύνορα των διεπιφανειών μπορούν να υπολογιστούν επιλύοντας ξεχωριστά για κάθε χωρίο Ω_j τις ακόλουθες συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις, αντίστοιχα (πρόβλημα Dirichlet)

$$(\Phi(p))_j = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial\Phi(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q + \quad (1.68\alpha)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(I_{yz}y - I_{zz}z)(2 \ln r - 1)r \cos a - (I_{yz} \cos \beta - I_{zz} \sin \beta)(\ln r - 1)r^2 \right] ds_q$$

$$(\Theta(p))_j = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Theta(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial\Theta(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q + \quad (1.68\beta)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(I_{yz}z - I_{yy}y)(2 \ln r - 1)r \cos a - (I_{yz} \sin \beta - I_{yy} \cos \beta)(\ln r - 1)r^2 \right] ds_q$$

Οι παράγωγοι ως προς το εφαπτομενικό διάνυσμα t των τασικών συναρτήσεων $(\partial\Phi/\partial n)_j$ και $(\partial\Theta/\partial n)_j$ στα σύνορα υπολογίζεται με τη βοήθεια κεντρικής, εμπρόσθιας ή οπίσθιας διαφοράς, αντίστοιχα.

Γνωρίζοντας τις τιμές των συναρτήσεων $(\Phi)_j, (\partial\Phi/\partial n)_j$ και $(\Theta)_j, (\partial\Theta/\partial n)_j$ στα σύνορα, οι τιμές των τασικών συναρτήσεων $(\Phi)_j, (\Theta)_j$ καθώς και οι παράγωγοί τους ως προς y και z σε τυχόν εσωτερικό σημείο του χωρίου Ω_j υπολογίζονται από τις ακόλουθες συνοριακές ολοκληρωτικές παραστάσεις, έτσι για την τασική συνάρτηση $(\Phi)_j$ ισχύει

$$\begin{aligned}
(\Phi(P))_j &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q + \\
&\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(I_{yz}y - I_{zz}z)(2 \ln r - 1)r \cos a - (I_{yz} \cos \beta - I_{zz} \sin \beta)(\ln r - 1)r^2 \right] ds_q
\end{aligned} \tag{1.69}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \Phi(P)}{\partial y} \right)_j &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos(\omega - a)}{r^2} + \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} (I_{zz}z - I_{yz}y)(2 \cos \omega \cos a + (2 \ln r - 1) \cos \beta) ds_q \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} (I_{zz} \sin \beta - I_{yz} \cos \beta)(2 \ln r - 1)r \cos \omega ds_q
\end{aligned} \tag{1.70α}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \Phi(P)}{\partial z} \right)_j &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\sin(\omega - a)}{r^2} + \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \frac{\sin \omega}{r} \right] ds_q \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} (I_{zz}z - I_{yz}y)(2 \sin \omega \cos a + (2 \ln r - 1) \sin \beta) ds_q \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} (I_{zz} \sin \beta - I_{yz} \cos \beta)(2 \ln r - 1)r \sin \omega ds_q
\end{aligned} \tag{1.70β}$$

και αντίστοιχα για την τασική συνάρτηση $(\Theta)_j$

$$\begin{aligned}
(\Theta(P))_j &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Theta(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \Theta(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q + \\
&\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(I_{yz}z - I_{yy}y)(2 \ln r - 1)r \cos a - (I_{yz} \sin \beta - I_{yy} \cos \beta)(\ln r - 1)r^2 \right] ds_q
\end{aligned} \tag{171}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \Theta(P)}{\partial y} \right)_j &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Theta(q))_j \frac{\cos(\omega - a)}{r^2} + \left(\frac{\partial \Theta(q)}{\partial n} \right)_j \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} (I_{yy}y - I_{yz}z)(2 \cos \omega \cos a + (2 \ln r - 1) \cos \beta) ds_q \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} (I_{yy} \cos \beta - I_{yz} \sin \beta)(2 \ln r - 1)r \cos \omega ds_q
\end{aligned} \tag{1.72α}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \Theta(P)}{\partial z} \right)_j &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Theta(q))_j \frac{\cos(\omega - a)}{r^2} + \left(\frac{\partial \Theta(q)}{\partial n} \right)_j \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} (I_{yy}y - I_{yz}z)(2 \sin \omega \cos a + (2 \ln r - 1) \sin \beta) ds_q \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} (I_{yy} \cos \beta - I_{yz} \sin \beta)(2 \ln r - 1)r \sin \omega ds_q
\end{aligned} \tag{1.72β}$$

Προκειμένου να διατηρηθεί ο αμιγώς συνοριακός χαρακτήρας της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων μετατρέπονται, με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης του Gauss και της δεύτερης ταυτότητας του Green (Παράρτημα Β), τα πεδιακά ολοκληρώματα των εξισώσεων (1.6), (1.30), (1.31), (1.52-54), (1.56) σε συνοριακά. Έτσι, χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss για τις ροπές αδράνειας, το γινόμενο αδράνειας και το εμβαδόν μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$I_{yy} = \frac{1}{E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (yz^2 \cos \beta) ds \quad (1.73\alpha)$$

$$I_{zz} = \frac{1}{E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (zy^2 \sin \beta) ds \quad (1.73\beta)$$

$$I_{yz} = \frac{1}{2E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (zy^2 \cos \beta) ds \quad (1.73\gamma)$$

$$A = \frac{1}{2G_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (G_j - G_i) (y \cos \beta + z \sin \beta) ds \quad (1.73\delta)$$

ενώ οι συντεταγμένες $\{y_S, z_S\}$ του κέντρου διάτμησης S προσδιορίζονται από τις ολοκληρωτικές σχέσεις

$$y_S = -\frac{1}{B} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (\Phi)_j (z \cos \beta - y \sin \beta) ds + \frac{1}{4B} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[vI_{zz} \left(\frac{1}{2} y^4 + y^2 z^2 \right) \cos \beta + vI_{yz} \left(\frac{1}{2} z^4 + y^2 z^2 \right) \sin \beta \right] \quad (1.74\alpha)$$

$$z_S = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (\Theta)_j (z \cos \beta - y \sin \beta) ds + \frac{1}{4B} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[vI_{yy} \left(\frac{1}{2} z^4 + y^2 z^2 \right) \sin \beta + vI_{yz} \left(\frac{1}{2} y^4 + y^2 z^2 \right) \cos \beta \right] \quad (1.74\beta)$$

Επίσης, εφαρμόζοντας τη δεύτερη ταυτότητα του Green για τις συναρτήσεις $\{(\Theta)_j, \partial(\Theta)_j/\partial y\}$, $\{(\Theta)_j, \partial(\Theta)_j/\partial z\}$, $\{(\Phi)_j, \partial(\Phi)_j/\partial y\}$, $\{(\Phi)_j, \partial(\Phi)_j/\partial z\}$, $\{(\Theta)_j, \partial(\Phi)_j/\partial y\}$ και $\{(\Theta)_j, \partial(\Phi)_j/\partial z\}$ οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης a_y , a_z , $a_{yz} = a_{zy}$ προσδιορίζονται ως

$$a_y = \frac{A}{E_1 \Delta^2} \left((4\nu + 2)(I_{yy} I_{\Theta y} - I_{yz} I_{\Theta z}) + \frac{1}{4} \nu^2 (I_{yy}^2 + I_{yz}^2) I_{ed} - I_{\Theta e} \right) \quad (1.75\alpha)$$

$$a_z = \frac{A}{E_1 \Delta^2} \left((4\nu + 2)(I_{zz} I_{\Phi z} - I_{yz} I_{\Phi y}) + \frac{1}{4} \nu^2 (I_{zz}^2 + I_{yz}^2) I_{ed} - I_{\Phi d} \right) \quad (1.75\beta)$$

$$a_{yz} = \frac{A}{E_1 \Delta^2} \left(\begin{aligned} & (2\nu + 2)(I_{zz}I_{\Theta z} - I_{yz}I_{\Theta y}) + 2\nu(I_{yy}I_{\Phi y} - I_{yz}I_{\Phi z}) \\ & - \frac{1}{4}\nu^2(I_{yy} + I_{zz})I_{yz}I_{ed} - I_{\Phi e} \end{aligned} \right) \quad (1.75\gamma)$$

όπου $I_{\Theta e}$, $I_{\Phi e}$ και $I_{\Phi d}$ είναι συνοριακά ολοκληρώματα που ορίζονται ως

$$I_{\Theta e} = \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i)(\Theta)_j (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) ds \quad (1.76\alpha)$$

$$I_{\Phi e} = \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i)(\Phi)_j (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) ds \quad (1.76\beta)$$

$$I_{\Phi d} = \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i)(\Phi)_j (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) ds \quad (1.76\gamma)$$

ενώ $I_{\Theta y}$, $I_{\Theta z}$, $I_{\Phi y}$, $I_{\Phi z}$ και I_{ed} είναι πεδιακά ολοκληρώματα που ορίζονται ως

$$I_{\Theta y} = \sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} (\Theta)_j y d\Omega_j \quad (1.77\alpha)$$

$$I_{\Theta z} = \sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} (\Theta)_j z d\Omega_j \quad (1.77\beta)$$

$$I_{\Phi y} = \sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} (\Phi)_j y d\Omega_j \quad (1.77\gamma)$$

$$I_{\Phi z} = \sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} (\Phi)_j z d\Omega_j \quad (1.77\delta)$$

$$I_{ed} = \sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} (y^4 + z^4 + 2y^2z^2) d\Omega_j \quad (1.77\epsilon)$$

και τα οποία μπορούν να μετατραπούν σε συνοριακά ολοκληρώματα εφαρμόζοντας τη δεύτερη ταυτότητα του Green για τις συναρτήσεις $\{(\Theta)_j, z^3\}$, $\{(\Theta)_j, y^3\}$, $\{(\Phi)_j, z^3\}$

και $\{(\Phi)_j, y^3\}$ ως

$$I_{\Theta y} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[(I_{yz}y^3z^2 - 2I_{yy}y^4z) \sin \beta + (3(\Theta)_j \cos \beta - y(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})) y^2 \right] ds \quad (1.78\alpha)$$

$$I_{\Theta z} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[(2I_{yz}z^4y - I_{yy}z^3y^2) \cos \beta + (3(\Theta)_j \sin \beta - z(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})) z^2 \right] ds \quad (1.78\beta)$$

$$I_{\Phi_y} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[(2I_{yz}y^4z - I_{zz}y^3z^2) \sin \beta + (3(\Phi)_j \cos \beta - y(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})) y^2 \right] ds \quad (1.78\gamma)$$

$$I_{\Phi_z} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[(I_{yz}z^3y^2 - 2I_{zz}z^4y) \cos \beta + (3(\Phi)_j \sin \beta - z(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})) z^2 \right] ds \quad (1.78\delta)$$

$$I_{ed} = \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left(y^4z \sin \beta + z^4y \cos \beta + \frac{2}{3} y^2z^3 \sin \beta \right) ds \quad (1.78\epsilon)$$

Ενώ, χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους C ως προς αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων $O\tilde{y}\tilde{z}$ προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$\tilde{y}_C = \frac{\sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (\tilde{y}\tilde{z} \sin \beta) ds}{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (\tilde{y} \cos \beta + \tilde{z} \sin \beta) ds} \quad (1.79\alpha)$$

$$\tilde{z}_C = \frac{\sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (\tilde{y}\tilde{z} \cos \beta) ds}{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (\tilde{y} \cos \beta + \tilde{z} \sin \beta) ds} \quad (1.79\beta)$$

Τέλος, θεωρήθηκε σκόπιμο να παρατεθούν οι εκφράσεις των διατμητικών συντελεστών a_z όπως αυτοί προτάθηκαν για ορθογωνική διατομή από τους Timoshenko [1922], Cowper [1966] και Renton [1991] καθώς και το συντελεστή που προκύπτει με τη βοήθεια της τεχνική θεωρίας, για λόγους πληρότητας και κατανόησης.

- Timoshenko: $a_z = \frac{6+5\nu}{5+5\nu}$
- Cowper: $a_z = \frac{12+11\nu}{10+10\nu}$
- Τεχνική θεωρία: $a_z = \frac{A}{I_{yy}^2} \iint_{\Omega} \left(\frac{S_y^{cut}}{b} \right)^2 d\Omega = \frac{A}{I_{yy}^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} h^2 - z^2 \right) \right]^2 b dz \rightarrow a_z = 6/5$
- Renton: $a_z = \frac{6}{5} + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{144(b/h)^4}{\pi^6 (2m+1)^2 n^2 \left[(2m+1)^2 (b/2h)^2 + n^2 \right]}$

Κεφάλαιο 2

Η ΑΕΜ για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2^{ης}
και 4^{ης} Τάξης

Κεφάλαιο 2

Η ΑΕΜ για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2^{ης} και 4^{ης} Τάξης

2.1 Εισαγωγή

Η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (BEM), η οποία χρησιμοποιεί ολοκληρωτικές παραστάσεις–εξισώσεις, είναι μία από τις πλέον σύγχρονες αριθμητικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων συνοριακών τιμών. Στη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων, σε αντίθεση με άλλες ευρέως χρησιμοποιούμενες πεδιακού τύπου αριθμητικές μεθόδους, όπως η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) και Πεπερασμένων Διαφορών (FDM), διακριτοποιείται μόνο το σύνορο και μειώνεται έτσι κατά μία τάξη η διάσταση του προβλήματος, με αποτέλεσμα την απλοποίηση της διαδικασίας διακριτοποίησης και τη σημαντική μείωση του πλήθους των αγνώστων και συνεπώς του προς επίλυση συστήματος εξισώσεων. Ωστόσο, όπως όλες οι αριθμητικές μέθοδοι έτσι και η BEM δεν είναι απαλλαγμένη από μειονεκτήματα. Αρκετές προσπάθειες έχουν πραγματοποιηθεί τα τελευταία χρόνια αντιμετώπισης των μειονεκτημάτων της μεθόδου. Συγκεκριμένα, προσπάθεια έχει γίνει να αντιμετωπισθούν πολύπλοκα προβλήματα στα οποία υπεισέρχεται ο χρόνος, προβλήματα γραμμικά στα οποία η θεμελιώδης λύση δεν είναι γνωστή καθώς και μη γραμμικά προβλήματα. Στα προβλήματα αυτά, όταν η ανάλυση πραγματοποιείται σε δύο διαστάσεις, εμφανίζονται πεδιακά ολοκληρώματα των οποίων ο υπολογισμός απαιτεί πεδιακή διακριτοποίηση, με αποτέλεσμα να αλλοιώνεται ο αμιγώς συνοριακός χαρακτήρας της μεθόδου. Οι πλέον υποσχόμενες μέθοδοι που επιτρέπουν την αντιμετώπιση των προαναφερθέντων προβλημάτων είναι η Μέθοδος Δυϊκής Αμοιβαιότητας (Dual Reciprocity Method, DRM) [Partridge et al., 1992] και η Μέθοδος Αναλογικής Εξίσωσης (AEM) [Katsikadelis, 1994, 2002b], οι οποίες δεν απαιτούν πεδιακή ολοκλήρωση παρά μόνο τη χρήση εσωτερικών κομβικών σημείων στο εξεταζόμενο χωρίο τα οποία βελτιώνουν τη λύση [Katsikadelis, 2007]. Η πρώτη υπόκειται σε ορισμένους περιορισμούς [Katsikadelis, 2002b], ενώ η δεύτερη είναι απαλλαγμένη από αυτούς.

Η Μέθοδος Αναλογικής Εξίσωσης, που αναπτύχθηκε σχετικά πρόσφατα από τον Katsikadelis [1994, 2002b], αποτελεί αριθμητική μέθοδο επίλυσης γραμμικών και μη γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών, ελλειπτικού, παραβολικού και υπερβολικού τύπου, με γραμμικές ή μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες. Βασίζεται στη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων, την οποία εξελίσσει και καθιστά ικανή για την αντιμετώπιση εγγενών μειονεκτημάτων της. Σύμφωνα με την ΑΕΜ το πραγματικό πρόβλημα, το οποίο περιγράφεται από ένα διαφορικό τελεστή ο οποίος πρακτικά δεν αντιστρέφεται, μετατρέπεται σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα, το οποίο περιγράφεται από ένα γραμμικό διαφορικό τελεστή της ίδιας τάξης με γνωστή θεμελιώδη λύση και άρα γνωστή ολοκληρωτική παράσταση. Στο υποκατάστατο πρόβλημα, η γεωμετρία του εξεταζόμενου χωρίου και οι συνοριακές συνθήκες διατηρούνται, ενώ οι μη ομογενείς όροι του γραμμικού τελεστή παίζουν το ρόλο ιδεατών φορτίων. Τα ιδεατά φορτία υπολογίζονται μέσω της αριθμητικής υλοποίησης της ΑΕΜ, η οποία οδηγεί σε σύστημα γραμμικών ή μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, η επίλυση του οποίου

πραγματοποιείται αριθμητικά. Λεπτομερής παρουσίαση της μεθόδου, καθώς και προβλήματα στα οποία έχει εφαρμοστεί η μέθοδος παρουσιάζονται στις εργασίες των Katsikadelis [2002b], Γιώτης [2003] και Τσιάτας [2003].

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού θα παρουσιαστεί η ΑΕΜ στη γενική της μορφή όπως αυτή εφαρμόζεται για την επίλυση μονοδιάστατων προβλημάτων συνοριακών τιμών, στα οποία οι κυρίαρχες εξισώσεις είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} και 4^{ης} τάξης, ενώ τα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος στο οποίο αναζητείται η λύση υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες. Ας σημειωθεί ότι τόσο οι κυρίαρχες εξισώσεις όσο και οι συνοριακές συνθήκες είναι δυνατόν να είναι μη γραμμικές. Η ανάπτυξη που ακολουθεί βασίζεται στην εργασία των Katsikadelis and Tsiatas [2003] καθώς και στην διδακτορική διατριβή του Βασίλη Μόκου [2007].

2.2 Ολοκληρωτικές Παραστάσεις – Αριθμητική Επίλυση

2.2.1 Συνήθη Διαφορική Εξίσωση 2^{ης} Τάξης

Έστω το μονοδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$N\left(u, \frac{du(x)}{dx}, \frac{d^2u(x)}{dx^2}\right) = g(x) \quad \text{στο εσωτερικό διάστημα } (0, l) \quad (2.1)$$

$$a_1^x u(x) + a_2^x \frac{du}{dx}(x) = a_3^x \quad \text{στα άκρα } x = 0, l \quad (2.2)$$

όπου $N(\cdot)$ είναι γραμμικός ή μη γραμμικός μονοδιάστατος τελεστής δεύτερης τάξης, a_i^x ($i = 1, 2, 3$) είναι γνωστοί συντελεστές που ορίζονται στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος, ενώ $g(x)$ είναι η φόρτιση (πηγή). Το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.1), (2.2) επιλύεται με την ΑΕΜ ως ακολούθως.

Έστω ότι η λύση του προβλήματος είναι η συνάρτηση $u(x)$. Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του εξεταζόμενου διαστήματος $(0, l)$ και μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη στα άκρα του διαστήματος $x = 0, l$, τότε παραγωγίζοντας προκύπτει

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = q_x(x) \quad (2.3)$$

Η εξίσωση (2.3), που στο εξής στο παρόν εδάφιο θα καλείται αναλογική εξίσωση, δηλώνει ότι η λύση της αρχικής εξίσωσης (2.1) μπορεί να προκύψει από την επίλυση της αναλογικής εξίσωσης με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες (2.2), εάν η πλασματική φόρτιση (πηγή) $q_x(x)$ είναι δυνατόν να υπολογιστεί. Η πλασματική φόρτιση $q_x(x)$ μπορεί να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων ως ακολούθως.

Η ασθενής μορφή της αναλογικής εξίσωσης γράφεται ως

$$\int_0^l [u''(x) - q_x(x)] u^*(x, \xi) dx = 0 \quad (2.4)$$

$$\int_0^l u''(x) u^*(x, \xi) dx - \int_0^l q_x(x) u^*(x, \xi) dx = 0$$

όπου ως βοηθητική (δοκιμαστική) συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε η θεμελιώδης λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης $u^* : u^*(x, \xi)$. Η συνάρτηση u^* , που είναι γνωστή και ως θεμελιώδης λύση της μονοδιάστατης εξίσωσης Laplace, αποτελεί μερική ιδιόμορφη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2 u^*(x, \xi)}{dx^2} = \delta(x - \xi) \quad (2.5)$$

όπου $\delta(x - \xi)$ είναι η συνάρτηση Dirac (Παράρτημα Α), ξ είναι το σημείο του διαστήματος στο οποίο εφαρμόζεται η πηγή και το οποίο παραμένει “σταθερό”, ενώ x είναι το σημείο το οποίο “διατρέχει” το διάστημα. Σημειώνεται ότι το σημείο ξ καλείται σημείο ταξιθεσίας. Η θεμελιώδης λύση u^* και οι παράγωγοί της δίδονται από τις σχέσεις [(Gaul und Fiedler, 1997), (Sapountzakis and Katsikadelis, 2000)]

$$A_1 : A_1(x, \xi) = \frac{du^*}{dx} = H(x - \xi) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} [H(x - \xi) - H(\xi - x)] = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} r \quad (2.6\alpha)$$

$$A_2 : A_2(x, \xi) = u^* = \frac{1}{2} |r| \quad (2.6\beta)$$

όπου $r = x - \xi$ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων x και ξ , οι ποσότητες $A_i : A_i(x, \xi)$ με $(i=1,2)$ καλούνται πυρήνες καθώς εμφανίζονται εντός των ολοκληρωμάτων στις ολοκληρωτικές παραστάσεις-εξισώσεις, H είναι η συνάρτηση Heaviside (Παράρτημα Α) και sgn είναι η συνάρτηση signum που ορίζεται ως

$$\operatorname{sgn} r = \begin{cases} +1 & \text{όταν } r > 0 \\ -1 & \text{όταν } r < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

ενώ για $r = 0$ η συνάρτηση signum δεν ορίζεται. Από τη σχέση (2.6β) γίνεται εμφανές ότι η θεμελιώδης λύση δεν αλλάζει τιμή, όταν τα σημεία x και ξ αλλάζουν ρόλο, δηλαδή η u^* είναι συμμετρική ως προς τα σημεία αυτά.

Για το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (2.4) εφαρμόζοντε διαδοχικές παραγοντικές ολοκληρώσεις μέχρις ότου εξαλειφθούν οι παράγωγοι από τη συνάρτηση $u''(x)$, δηλαδή

$$\int_0^l u''(x) u^*(x, \xi) dx = \int_0^l u(x) u^{*''}(x, \xi) dx + \left[u'(x) u^*(x, \xi) - u(x) u^{*'}(x, \xi) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.8)$$

Επομένως, η ασθενής μορφή (2.4) σύμφωνα με την εξίσωση (2.8) γράφεται ως

$$\int_0^l u(x) u''(x, \xi) dx = \int_0^l q_x(x) u'(x, \xi) dx - \left[u'(x) u''(x, \xi) - u(x) u'''(x, \xi) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.9)$$

Επίσης για “δράση” στο σημείο $x = \xi$, η μονοδιάστατη συνάρτηση Dirac $\delta(x - \xi)$ ορίζεται από τη σχέση (Παράρτημα Α)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \xi) h(x) dx = h(\xi) \quad (2.10)$$

Έτσι, σύμφωνα με τις εξισώσεις (2.6) και λαμβάνοντας υπόψιν την εξίσωση (2.10) η σχέση (2.9) γράφεται ως

$$u(\xi) = \int_0^l A_2(x, \xi) q_x(x) dx - \left[A_2(x, \xi) \frac{du(x)}{dx} - A_1(x, \xi) u(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.11)$$

Η εξίσωση (2.11) αποτελεί την ολοκληρωτική παράσταση της $u(\xi)$, όπου ξ είναι εσωτερικό σημείο του εξεταζόμενου διαστήματος. Η εξίσωση (2.11) δηλώνει ότι, εάν είναι γνωστή η πλασματική φόρτιση $q_x(x)$ και όλες οι συνοριακές ποσότητες (u, u') στα άκρα του διαστήματος $0, l$, τότε η $u(\xi)$ με τη βοήθεια της ολοκληρωτικής παράστασης (2.1) μπορεί να υπολογιστεί σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του διαστήματος. Σημειώνεται ότι, σε προβλήματα συνοριακών τιμών όπου η δεσπόζουσα διαφορική εξίσωση είναι συνήθης δεύτερης τάξης, από τις συνολικά τέσσερις συνοριακές ποσότητες (δύο στην αρχή και δύο στο τέλος) μόνο οι δύο είναι γνωστές, ενώ οι υπόλοιπες πρέπει να υπολογιστούν.

Παραγωγίζοντας την ολοκληρωτική παράσταση ως προς ξ και λαμβάνοντας υπόψιν ότι η παραγωγή και ολοκλήρωση ως προς διαφορετικές μεταβλητές μπορούν να εναλλάσσονται αμοιβαία προκύπτει

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \int_0^l \frac{\partial A_2(x, \xi)}{\partial \xi} q_x(x) dx - \left[\frac{\partial A_2(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{du(x)}{dx} - \frac{\partial A_1(x, \xi)}{\partial \xi} u(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.12)$$

όπου

$$\frac{\partial A_1(x, \xi)}{\partial \xi} = 0 \quad (2.13\alpha)$$

$$\frac{\partial A_2(x, \xi)}{\partial \xi} = -A_1(x, \xi) \quad (2.13\beta)$$

οπότε η εξίσωση (2.12) γράφεται ως

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \int_0^l \frac{\partial A_2(x, \xi)}{\partial \xi} q_x(x) dx - \left[-A_1(x, \xi) \frac{du(x)}{dx} \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.14)$$

Προκειμένου να συσχετιστούν οι συνοριακές ποσότητες στα άκρα του διαστήματος $0, l$ συναρτήσει της πλασματικής φόρτισης $q_x(x)$, διατυπώνεται η ολοκληρωτική παράσταση (2.11) “αφήνοντας” το σημείο ταξιθεσίας ξ να συμπέσει στα άκρα του διαστήματος $0, l$

$$\xi_0 = 0 + \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad \text{στην αρχή του διαστήματος} \quad (2.15\alpha)$$

$$\xi_l = l - \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad \text{στο τέλος του διαστήματος} \quad (2.15\beta)$$

λαμβάνοντας έτσι δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις οι οποίες σε μητρωϊκή μορφή γράφονται ως

$$\left[E_{21}^u \right] \{u_1\} + \left[E_{22}^u \right] \{u_2\} = \{T_2^u\} \quad (2.16)$$

όπου

$$\{T_2^u\} = - \left\{ \begin{array}{l} \int_0^l A_2(x, \xi_0) q_x(x) dx \\ \int_0^l A_2(x, \xi_l) q_x(x) dx \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

$$\{u_1\}^T = \{u'(0) \quad u(0)\} \quad (2.18\alpha)$$

$$\{u_2\}^T = \{u'(l) \quad u(l)\} \quad (2.18\beta)$$

$$\left[E_{21}^u \right] = \begin{bmatrix} A_2(0, \xi_0) & -(A_1(0, \xi_0) + 1) \\ A_2(0, \xi_l) & -A_1(0, \xi_l) \end{bmatrix} \quad (2.19\alpha)$$

$$\left[E_{22}^u \right] = \begin{bmatrix} -A_2(l, \xi_0) & A_1(l, \xi_0) \\ -A_2(l, \xi_l) & (A_1(l, \xi_l) - 1) \end{bmatrix} \quad (2.19\beta)$$

Σημειώνεται ότι, τα μητρώα των εξισώσεων (2.19α,β) με τη βοήθεια των σχέσεων (2.6) και (2.15) γράφονται ως

$$\left[E_{21}^u \right] = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ l/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.20\alpha)$$

$$\left[E_{22}^u \right] = \begin{bmatrix} -l/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (2.20\beta)$$

Ακολούθως διατυπώνονται οι συνοριακές συνθήκες (2.2) για τα άκρα του διαστήματος $0, l$, οι οποίες σε μητρωϊκή μορφή γράφονται ως

$$\left[E_{11}^u \right] \{u_1\} + \left[E_{12}^u \right] \{u_2\} = \{D_1^u\} \quad (2.21)$$

$$\{T_2^u\} \approx - \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^L q_{xj} \int_{\Gamma_j} A_2(x, \xi_0) dx \\ \sum_{j=1}^L q_{xj} \int_{\Gamma_j} A_2(x, \xi_l) dx \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^L q_j F_{1j}^u \\ \sum_{j=1}^L q_j F_{2j}^u \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

σε μητρωϊκή μορφή η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\{T_2^u\} = - \left[\begin{array}{cccc} F_{11}^u & F_{12}^u & \cdots & F_{1L}^u \\ F_{21}^u & F_{22}^u & \cdots & F_{2L}^u \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} q_{x1} \\ q_{x2} \\ \vdots \\ q_{xL} \end{array} \right\} \rightarrow \{T_2^u\} = - [F_2^u] \{q_x\} \quad (2.25)$$

όπου οι συντελεστές F_{ij}^u ($i=1,2$) και ($j=1,2,\dots,L$) του μητρώου $[F_2^u]$ (διάσταση $2 \times L$) ορίζονται ως

$$F_{1j}^u = \int_{\Gamma_j} A_2(x, \xi_0) dx \quad (2.26\alpha)$$

$$F_{2j}^u = \int_{\Gamma_j} A_2(x, \xi_l) dx \quad (2.26\beta)$$

ενώ το μητρώο στήλη $\{q_x\}$ με διάσταση $L \times 1$ περιλαμβάνει τις άγνωστες L εσωτερικές κομβικές τιμές της πλασματικής φόρτισης $q_x(x)$. Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.6) οι συντελεστές F_{ij}^u μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά ως

$$F_{1j}^u = \frac{1}{4} \left[x^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (2.27\alpha)$$

$$F_{2j}^u = -\frac{1}{4} \left[(l-x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (2.27\beta)$$

όπου x_{j1}, x_{j2} είναι οι συντεταγμένες των άκρων του στοιχείου Γ_j (2.1).

Το μητρώο στήλη $\{T^u\}$ της σχέσης (2.22) σύμφωνα με τη σχέση (2.25) γράφεται ως

$$\{T^u\} = \left\{ \begin{array}{l} \{0\} \\ \{T_2^u\} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{l} [0] \\ -[F_2^u] \end{array} \right] \{q_x\} \rightarrow \{T^u\} = [F^u] \{q_x\} \quad (2.28)$$

όπου $[0]$ είναι μητρώο με μηδενικά στοιχεία με διάσταση $2 \times L$, ενώ το μητρώο $[F^u]$ έχει διάσταση $4 \times L$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.22) και (2.28) προκύπτει

$$[E^u] \{u\} = \{D^u\} + [F^u] \{q_x\} \quad (2.29)$$

Ενώ λύνοντας ως προς την άγνωστη ποσότητα $\{u\}$ η παραπάνω εξίσωση λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\{u\} = [E^u]^{-1} \{D^u\} + [E^u]^{-1} [F^u] \{q_x\} \quad (2.30)$$

Εν συνεχεία, με βάση την προαναφερθείσα διακριτοποίηση και εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές παραστάσεις (2.11) και (2.14) στα L εσωτερικά κομβικά σημεία του διαστήματος προκύπτει

$$\{U\} = [A^u] \{q_x\} + [C^u] \{u\} \quad (2.31\alpha)$$

$$\{U'\} = [A^{u'}] \{q_x\} + [C^{u'}] \{u\} \quad (2.31\beta)$$

όπου τα

$$\{U\}^T = \{(u)_1 \quad (u)_2 \quad \dots \quad (u)_L\} \quad (2.32\alpha)$$

$$\{U'\}^T = \{(u')_1 \quad (u')_2 \quad \dots \quad (u')_L\} \quad (2.32\beta)$$

είναι μητρώα στήλες διαστάσεων $L \times 1$ τα οποία περιλαμβάνουν τις τιμές της u και των παραγώγων της ως προς x στα L εσωτερικά κομβικά σημεία κατά μήκος του εξεταζόμενου διαστήματος. Τα τετραγωνικά μητρώα $[A^u]$, $[A^{u'}]$ είναι διαστάσεων $L \times L$ των οποίων οι συντελεστές δίδονται από τις σχέσεις

$$A_{ij}^u = \int_{\Gamma_j} A_2(x, \xi_i) dx \quad (2.33\alpha)$$

$$A_{ij}^{u'} = -\int_{\Gamma_j} A_1(x, \xi_i) dx \quad (2.33\beta)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.6) οι συντελεστές των μητρώων $[A^u]$, $[A^{u'}]$ μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά ως

$$A_{ij}^u = -\frac{1}{4} \left[(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (2.34\alpha)$$

$$A_{ij}^u = \frac{1}{4} \left[(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (2.34\beta)$$

$$A_{ij}^u = -\frac{1}{4} \left[(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j0}} + \frac{1}{4} \left[(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j0}}^{x=x_{j2}}, \quad i = j \quad (2.34\gamma)$$

$$A_{ij}^{u'} = \frac{1}{2} [x]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (2.34\delta)$$

$$A_{ij}^{u'} = -\frac{1}{2} [x]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (2.34\epsilon)$$

$$A_{ij}^{u'} = 0, \quad i = j \quad (2.34\zeta)$$

όπου x_{j1}, x_{j2} και x_{j0} είναι οι συντεταγμένες των άκρων και του μέσου του στοιχείου Γ_j , αντίστοιχα, ενώ x_{i0} οι συντεταγμένες του μέσου του στοιχείου Γ_i (Σχήμα 2.1).

Τα μητρώα $[C^u], [C^{u'}]$ είναι διαστάσεων $L \times 4$ και ορίζονται ως

$$[C^u] = \left[\begin{array}{cc|cc} A_2(0, \xi_1) & -A_1(0, \xi_1) & -A_2(l, \xi_1) & A_1(l, \xi_1) \\ A_2(0, \xi_2) & -A_1(0, \xi_2) & -A_2(l, \xi_2) & A_1(l, \xi_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_2(0, \xi_L) & -A_1(0, \xi_L) & -A_2(l, \xi_L) & A_1(l, \xi_L) \end{array} \right] \quad (2.35\alpha)$$

$$[C^{u'}] = \left[\begin{array}{cc|cc} -A_1(0, \xi_1) & 0 & A_1(l, \xi_1) & 0 \\ -A_1(0, \xi_2) & 0 & A_1(l, \xi_2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_1(0, \xi_L) & 0 & A_1(l, \xi_L) & 0 \end{array} \right] \quad (2.35\beta)$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (2.6) προκύπτει

$$A_1(0, \xi_i) = -\frac{1}{2} \quad A_2(0, \xi_i) = \frac{1}{2} \xi_i \quad (2.36\alpha, \beta)$$

$$A_1(l, \xi_i) = \frac{1}{2} \quad A_2(l, \xi_i) = \frac{1}{2} (l - \xi_i) \quad (2.36\gamma, \delta)$$

όπου $\xi_i = x_{i0}$ οι συντεταγμένες του μέσου του στοιχείου Γ_i (Σχήμα 2.1).

Με αντικατάσταση των εξισώσεων (2.30) στις εξισώσεις (2.31) οι αναφερόμενες παίρνουν την ακόλουθη μορφή

$$\{U\} = [B^u] \{q_x\} + \{R^u\} \quad (2.37\alpha)$$

$$\{U'\} = [B^{u'}] \{q_x\} + \{R^{u'}\} \quad (2.37\beta)$$

όπου τα τετραγωνικά μητρώα $[B^u], [B^{u'}]$ διαστάσεων $L \times L$ ορίζονται ως

$$[B^u] = \left[[A^u] + [C^u] [E^u]^{-1} [F^u] \right] \quad (2.38\alpha)$$

$$[B^{u'}] = \left[[A^{u'}] + [C^{u'}] [E^{u'}]^{-1} [F^{u'}] \right] \quad (2.38\beta)$$

και τα μητρώα στήλες $\{R^u\}, \{R^{u'}\}$ διαστάσεων $L \times 1$ δίδονται από τις σχέσεις

$$\{R^u\} = [C^u][E^u]^{-1}\{D^u\} \quad (2.39\alpha)$$

$$\{R^{u'}\} = [C^{u'}][E^{u'}]^{-1}\{D^{u'}\} \quad (2.39\beta)$$

Σημειώνεται ότι, στην περίπτωση ομογενών συνοριακών συνθηκών ($a_3^x = 0$) στην αρχή και στο τέλος του διαστήματος, τα μητρώα στήλες $\{R^u\}, \{R^{u'}\}$ μηδενίζονται. Οι εξισώσεις (2.30) και (2.37) δίδουν τη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.1), (2.2) στα άκρα και στο εσωτερικό του εξεταζόμενου διαστήματος συναρτήσει της πλασματικής φόρτισης $q_x(x)$, αντίστοιχα. Επίσης, η διακριτοποιημένη έκφραση της αναλογικής εξίσωσης (2.3) γράφεται ως

$$\{U''\}^T = \{q_x\}^T = \{(u'')_1 \quad (u'')_2 \quad \cdots \quad (u'')_L\} \quad (2.40)$$

Το τελικό βήμα της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης είναι η εφαρμογή της κυρίαρχη εξίσωσης (2.1) στα L εσωτερικά κομβικά σημεία του εξεταζόμενου διαστήματος και στη συνέχεια η αντικατάσταση των διακριτοποιημένων τιμών στα L εσωτερικά σημεία της u και των παραγώγων της $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}$ σύμφωνα με τις σχέσεις (2.37) και (2.40). Έτσι, προκύπτει ένα σύστημα L αλγεβρικών εξισώσεων με μοναδικό άγνωστο το διάνυσμα της πλασματικής φόρτισης $\{q_x\}$ διαστάσεως $L \times 1$. Επιλύοντας το σύστημα αριθμητικά υπολογίζεται το διάνυσμα $\{q_x\}$, οπότε με τη βοήθεια των σχέσεων (2.30) και (2.37) υπολογίζονται οι τιμές της u και των παραγώγων της $\frac{du}{dx}$ στα άκρα και στο εσωτερικό του εξεταζόμενου διαστήματος στα L κομβικά σημεία, αντίστοιχα.

2.2.2 Συνήθη Διαφορική Εξίσωση 4^{ης} Τάξης

Έστω το μονοδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$N\left(\theta_x, \frac{d\theta_x(x)}{dx}, \frac{d^2\theta_x(x)}{dx^2}, \frac{d^3\theta_x(x)}{dx^3}, \frac{d^4\theta_x(x)}{dx^4}\right) = g(x) \quad (2.41)$$

στο εσωτερικό διάστημα $(0, l)$

$$a_1\theta_x + a_2B\left(\frac{d\theta_x(x)}{dx}, \frac{d^2\theta_x(x)}{dx^2}, \frac{d^3\theta_x(x)}{dx^3}\right) = a_3 \quad (2.42\alpha)$$

$$\beta_1\frac{d\theta_x(x)}{dx} + \beta_2\frac{d^2\theta_x(x)}{dx^2} = \beta_3 \quad (2.42\beta)$$

στα άκρα $x=0, l$, όπου $N(\cdot), B(\cdot)$ είναι γραμμικοί ή μη γραμμικοί μονοδιάστατοι τελεστές τετάρτης και τρίτης τάξης, αντίστοιχα, a_i, β_i ($i=1,2,3$) γνωστοί συντελεστές που ορίζονται στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος, ενώ $g(x)$ είναι η φόρτιση (πηγή). Το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.41), (2.42) επιλύεται με την ΑΕΜ ως ακολούθως.

Έστω ότι η λύση του προβλήματος είναι η συνάρτηση $\theta_x(x)$. Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και τέσσερις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του εξεταζόμενου διαστήματος $(0, l)$ και τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στα άκρα του διαστήματος $x=0, l$, τότε παραγωγίζοντας προκύπτει

$$\frac{d^4 \theta_x(x)}{dx^4} = q(x) \quad (2.43)$$

Η εξίσωση (2.43), που στο εξής στο παρόν εδάφιο θα καλείται αναλογική εξίσωση, δηλώνει ότι η λύση της αρχικής εξίσωσης (2.41) μπορεί να προκύψει από την επίλυση της αναλογικής εξίσωσης με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες (2.42), εάν η πλασματική φόρτιση (πηγή) $q(x)$ είναι δυνατόν να υπολογιστεί. Η πλασματική φόρτιση $q(x)$ μπορεί να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων ως ακολούθως.

Η ασθενής μορφή της αναλογικής εξίσωσης γράφεται ως

$$\int_0^l [\theta_x'''(x) - q(x)] \theta_x^*(x, \xi) dx = 0 \quad (2.44)$$

$$\int_0^l \theta_x'''(x) \theta_x^*(x, \xi) dx - \int_0^l q(x) \theta_x^*(x, \xi) dx = 0$$

όπου ως βοηθητική (δοκιμαστική) συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε η θεμελιώδης λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξης $\theta_x^* : \theta_x^*(x, \xi)$. Η συνάρτηση θ_x^* , που είναι γνωστή και ως θεμελιώδης λύση καμπτόμενης δοκού, αποτελεί μερική ιδιόμορφη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^4 \theta_x^*(x, \xi)}{dx^4} = \delta(x - \xi) \quad (2.45)$$

όπου $\delta(x - \xi)$ είναι η συνάρτηση Dirac (Παράρτημα Α), ξ είναι το σημείο του διαστήματος στο οποίο εφαρμόζεται η πηγή και το οποίο παραμένει “σταθερό”, ενώ x είναι το σημείο το οποίο “διατρέχει” το διάστημα. Σημειώνεται ότι το σημείο ξ καλείται σημείο ταξίθεσίας. Η θεμελιώδης λύση θ_x^* και οι παράγωγοί της δίδονται από τις σχέσεις [(Gaul und Fiedler, 1997), (Sapountzakis and Katsikadelis, 2000)]

$$A_1(x, \xi) = \frac{d^3 \theta_x^*(x, \xi)}{dx^3} = \frac{1}{2} \operatorname{sgnr} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \rho \quad (2.46a)$$

$$A_2(x, \xi) = \frac{d^2 \theta_x^*(x, \xi)}{dx^2} = \frac{1}{2}(|r| - l) = -\frac{1}{2}l(1 - |\rho|) \quad (2.46\beta)$$

$$A_3(x, \xi) = \frac{d \theta_x^*(x, \xi)}{dx} = \frac{1}{4}|r|(|r| - 2l) \operatorname{sgn} r = \frac{1}{4}l^2 |\rho|(|\rho| - 2) \operatorname{sgn} \rho \quad (2.46\gamma)$$

$$A_4(x, \xi) = \theta_x^*(x, \xi) = \frac{1}{12}(|r|^3 - 3l|r|^2 + 2l^3) = \frac{1}{12}l^3(2 + |\rho|^3 - 3|\rho|^2) \quad (2.46\delta)$$

όπου $r = x - \xi$ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων x και ξ , $\rho = r/l$ είναι η ανηγμένη απόσταση μεταξύ των σημείων x και ξ , οι ποσότητες $A_i : A_i(x, \xi)$ με $(i = 1, 2, 3, 4)$ καλούνται πυρήνες καθώς εμφανίζονται εντός των ολοκληρωμάτων στις ολοκληρωτικές παραστάσεις–εξισώσεις και sgn είναι η συνάρτηση signum (εξίσωση 2.7). Από τη σχέση (2.46) γίνεται εμφανές ότι η θεμελιώδης λύση δεν αλλάζει τιμή, όταν τα σημεία x και ξ αλλάζουν ρόλο, δηλαδή η θ_x^* είναι συμμετρική ως προς τα σημεία αυτά.

Για το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (2.44) εφαρμόζονται διαδοχικές παραγοντικές ολοκληρώσεις μέχρις ότου εξαλειφθούν οι παράγωγοι από τη συνάρτηση $\theta_x'''(x)$, δηλαδή

$$\int_0^l \theta_x'''(x) \theta_x^*(x, \xi) dx = \int_0^l \theta_x(x) \theta_x^{*''''}(x, \xi) dx + \left[\theta_x'''(x) \theta_x^*(x, \xi) - \theta_x''(x, \xi) \theta_x^{*'}(x, \xi) + \theta_x'(x) \theta_x^{*''}(x, \xi) - \theta_x(x) \theta_x^{*'''}(x, \xi) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.47)$$

Επομένως, η ασθενής μορφή σύμφωνα με την εξ. (2.47) γράφεται ως ακολούθως

$$\int_0^l \theta_x(x) \theta_x^{*''''}(x, \xi) dx = \int_0^l q(x) \theta_x^*(x, \xi) dx - \left[\theta_x'''(x) \theta_x^*(x, \xi) - \theta_x''(x) \theta_x^{*'}(x, \xi) + \theta_x'(x) \theta_x^{*''}(x, \xi) - \theta_x(x) \theta_x^{*'''}(x, \xi) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.48)$$

Έτσι, σύμφωνα με τις εξισώσεις (2.46α-δ) και λαμβάνοντας υπόψιν την εξίσωση (2.10) η σχέση (2.48) γράφεται ως

$$\theta_x(\xi) = \int_0^l A_4(x, \xi) q(x) dx - \left[A_4(x, \xi) \frac{d^3 \theta_x(x)}{dx^3} - A_3(x, \xi) \frac{d^2 \theta_x(x)}{dx^2} + A_2(x, \xi) \frac{d \theta_x(x)}{dx} - A_1(x, \xi) \theta_x(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.49)$$

Η εξίσωση (2.49) αποτελεί την ολοκληρωτική παράσταση της $\theta_x(\xi)$, όπου ξ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος. Η εξίσωση (2.49) δηλώνει ότι, εάν είναι γνωστή η πλασματική φόρτιση $q(x)$ και όλες οι συνοριακές ποσότητες $(\theta_x, \theta_x', \theta_x'', \theta_x''')$ στα άκρα του διαστήματος $0, l$, τότε η $\theta_x(\xi)$ με τη βοήθεια της ολοκληρωτικής παράστασης (εξίσωση 2.49) μπορεί να υπολογιστεί σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του διαστήματος. Σημειώνεται ότι, σε προβλήματα συνοριακών

τιμών όπου η δεσπόζουσα διαφορική εξίσωση είναι συνήθης τετάρτης τάξης, από τις συνολικά οκτώ συνοριακές ποσότητες (τέσσερις στην αρχή και τέσσερις στο τέλος) μόνο οι τέσσερις είναι γνωστές, ενώ οι υπόλοιπες πρέπει να υπολογιστούν.

Παραγωγίζοντας την ολοκληρωτική παράσταση ως προς ξ και λαμβάνοντας υπόψιν ότι η παραγωγή και ολοκλήρωση ως προς διαφορετικές μεταβλητές μπορούν να εναλλάσσονται αμοιβαία προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_x(\xi)}{d\xi} &= \int_0^l \frac{\partial \mathcal{A}_4(x, \xi)}{\partial \xi} q(x) dx \\ &- \left[\frac{\partial \mathcal{A}_4(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d^3 \theta_x(x)}{dx^3} - \frac{\partial \mathcal{A}_3(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d^2 \theta_x(x)}{dx^2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\theta_x(x)}{dx} - \frac{\partial \mathcal{A}_1(x, \xi)}{\partial \xi} \theta_x(x) \right]_{x=0}^{x=l} \end{aligned} \quad (2.50)$$

όπου

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1(x, \xi)}{\partial \xi} = 0 \quad (2.51\alpha)$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}_2(x, \xi)}{\partial \xi} = -\mathcal{A}_1(x, \xi) \quad (2.51\beta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}_3(x, \xi)}{\partial \xi} = -\mathcal{A}_2(x, \xi) \quad (2.51\gamma)$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}_4(x, \xi)}{\partial \xi} = -\mathcal{A}_3(x, \xi) \quad (2.51\delta)$$

οπότε η εξίσωση (2.50) γράφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_x(\xi)}{d\xi} &= -\int_0^l \mathcal{A}_3(x, \xi) q(x) dx \\ &- \left[-\mathcal{A}_3(x, \xi) \frac{d^3 \theta_x(x)}{dx^3} + \mathcal{A}_2(x, \xi) \frac{d^2 \theta_x(x)}{dx^2} - \mathcal{A}_1(x, \xi) \frac{d\theta_x(x)}{dx} \right]_{x=0}^{x=l} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Δουλεύοντας αντίστοιχα λαμβάνουμε

$$\frac{d^2 \theta_x(\xi)}{d^2 \xi} = \int_0^l \mathcal{A}_2(x, \xi) q(x) dx - \left[\mathcal{A}_2(x, \xi) \frac{d^3 \theta_x(x)}{dx^3} - \mathcal{A}_1(x, \xi) \frac{d^2 \theta_x(x)}{dx^2} \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.53)$$

και

$$\frac{d^3 \theta_x(\xi)}{d^3 \xi} = -\int_0^l \mathcal{A}_1(x, \xi) q(x) dx - \left[-\mathcal{A}_1(x, \xi) \frac{d^3 \theta_x(x)}{dx^3} \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.54)$$

Προκειμένου να συσχετιστούν οι συνοριακές ποσότητες στα άκρα του διαστήματος $0, l$ συναρτήσει της πλασματικής φόρτισης $q(x)$, διατυπώνονται οι ολοκληρωτικές παραστάσεις (2.49) “αφήνοντας” το σημείο ταξίθεσίας ξ να συμπίπτει στα άκρα του διαστήματος $0, l$ (εξίσωση 2.15), λαμβάνοντας έτσι τέσσερις ολοκληρωτικές εξισώσεις οι οποίες σε μητρωϊκή μορφή γράφονται ως

$$[E_{21}]\{\theta_1\} + [E_{22}]\{\theta_2\} = \{T_2\} \quad (2.55)$$

όπου

$$\{T_2\} = - \begin{Bmatrix} \int_0^l A_4(x, \xi_0) q(x) dx \\ \int_0^l A_4(x, \xi_l) q(x) dx \\ \int_0^l A_3(x, \xi_0) q(x) dx \\ \int_0^l A_3(x, \xi_l) q(x) dx \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\{\theta_1\}^T = \{\theta_x''(0) \quad \theta_x''(0) \quad \theta_x'(0) \quad \theta_x(0)\} \quad (2.57\alpha)$$

$$\{\theta_2\}^T = \{\theta_x''(l) \quad \theta_x''(l) \quad \theta_x'(l) \quad \theta_x(l)\} \quad (2.57\beta)$$

$$[E_{21}] = \begin{bmatrix} A_4(0, \xi_0) & -A_3(0, \xi_0) & A_2(0, \xi_0) & -(A_1(0, \xi_0) + 1) \\ A_4(0, \xi_l) & -A_3(0, \xi_l) & A_2(0, \xi_l) & -A_1(0, \xi_l) \\ A_3(0, \xi_0) & -A_2(0, \xi_0) & A_1(0, \xi_0) + 1 & 0 \\ A_3(0, \xi_l) & -A_2(0, \xi_l) & A_1(0, \xi_l) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58\alpha)$$

$$[E_{22}] = \begin{bmatrix} -A_4(l, \xi_0) & A_3(l, \xi_0) & -A_2(l, \xi_0) & A_1(l, \xi_0) \\ -A_4(l, \xi_l) & A_3(l, \xi_l) & -A_2(l, \xi_l) & A_1(l, \xi_l) - 1 \\ -A_3(l, \xi_0) & A_2(l, \xi_0) & -A_1(l, \xi_0) & 0 \\ -A_3(l, \xi_l) & A_2(l, \xi_l) & -(A_1(l, \xi_l) - 1) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58\beta)$$

Σημειώνεται ότι, τα μητρώα των παραπάνω εξισώσεων με τη βοήθεια των σχέσεων (2.46) και (2.15) λαμβάνουν τη μορφή

$$[E_{21}] = \begin{bmatrix} l^3/6 & 0 & -l/2 & -1/2 \\ 0 & -l^2/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & l/2 & 1/2 & 0 \\ l^2/4 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.59\alpha)$$

$$[E_{22}] = \begin{bmatrix} 0 & -l^2/4 & 0 & 1/2 \\ -l^3/6 & 0 & l/2 & -1/2 \\ l^2/4 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -l/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.59\beta)$$

Ακολούθως διατυπώνονται οι συνοριακές συνθήκες (2.42) για τα άκρα του διαστήματος $0, l$, οι οποίες σε μητρωϊκή μορφή γράφονται ως

$$[E_{11}]\{\theta_1\} + [E_{12}]\{\theta_2\} = \{D_1\} \quad (2.60)$$

όπου $[E_{11}], [E_{12}]$ είναι 4×4 γνωστά μητρώα συντελεστών και $\{D_1\}$ είναι μητρώο στήλη με διάσταση 4×1 γνωστών συντελεστών.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.55) και (2.60) προκύπτει

$$\begin{bmatrix} [E_{11}] & [E_{12}] \\ [E_{21}] & [E_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\theta_1\} \\ \{\theta_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{D_1\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{T_2\} \end{Bmatrix} \rightarrow [E]\{\theta\} = \{D\} + \{T\} \quad (2.61)$$

όπου

$$\{0\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (2.62)$$

Η διάσταση του τετραγωνικού μητρώου $[E]$ είναι 8×8 , ενώ τα μητρώα στήλες $\{\theta\}, \{D\}, \{T\}$ έχουν διάσταση 8×1 .

Στη συνέχεια διακριτοποιώντας το διάστημα σε L ίσα σταθερά “συνοριακά” στοιχεία με μήκος l/L το καθένα, στα οποία η πλασματική φόρτιση $q(x)$ θεωρείται σταθερή και ίση με την τιμή στο κομβικό σημείο που βρίσκεται στο μέσο του στοιχείου (Σχήμα 2.1). Έτσι, το μητρώο στήλη $\{T_2\}$ προσεγγίζεται ως

$$\{T_2\} \approx - \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Gamma_j} A_4(x, \xi_0) dx \\ \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Gamma_j} A_4(x, \xi_l) dx \\ \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Gamma_j} A_3(x, \xi_0) dx \\ \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Gamma_j} A_3(x, \xi_l) dx \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^L q_j F_{1j} \\ \sum_{j=1}^L q_j F_{2j} \\ \sum_{j=1}^L q_j F_{3j} \\ \sum_{j=1}^L q_j F_{4j} \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

ή

$$\{T_2\} = - \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1L} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2L} \\ F_{31} & F_{32} & \cdots & F_{3L} \\ F_{41} & F_{42} & \cdots & F_{4L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_L \end{Bmatrix} \rightarrow \{T_2\} = -[F_2]\{q\} \quad (2.64)$$

όπου οι συντελεστές F_{ij} ($i=1,2,3,4$) και ($j=1,2,\dots,L$) του μητρώου $[F_2]$ (διάσταση $4 \times L$) ορίζονται ως

$$F_{1j} = \int_{\Gamma_j} A_4(x, \xi_0) dx \quad (2.65\alpha)$$

$$F_{2j} = \int_{\Gamma_j} A_4(x, \xi_l) dx \quad (2.65\beta)$$

$$F_{3j} = \int_{\Gamma_j} A_3(x, \xi_0) dx \quad (2.65\gamma)$$

$$F_{4j} = \int_{\Gamma_j} A_3(x, \xi_l) dx \quad (2.65\delta)$$

ενώ το μητρώο στήλη $\{q\}$ με διάσταση $L \times 1$ περιλαμβάνει τις άγνωστες L εσωτερικές κομβικές τιμές της πλασματικής φόρτισης $q(x)$. Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.46) οι συντελεστές F_{ij} μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά ως

$$F_{1j} = \frac{1}{12} \left[2l^3 x + \frac{1}{4} x^4 - lx^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (2.66\alpha)$$

$$F_{2j} = \frac{1}{12} \left[2l^3 x - \frac{1}{4} (l-x)^4 + l(l-x)^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (2.66\beta)$$

$$F_{3j} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} x^3 - lx^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (2.66\gamma)$$

$$F_{4j} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} (l-x)^3 - l(l-x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (2.66\delta)$$

όπου x_{j1}, x_{j2} είναι οι συντεταγμένες των άκρων του στοιχείου Γ_j όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.1.

Το μητρώο στήλη $\{T\}$ της σχέσης (2.61) σύμφωνα με τη σχέση (2.64) γράφεται ως

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{T_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ -[F_2] \end{bmatrix} \{q\} \rightarrow \{T\} = [F]\{q\} \quad (2.67)$$

όπου $[0]$ είναι μητρώο με μηδενικά στοιχεία με διάσταση $4 \times L$, ενώ το μητρώο $[F]$ έχει διάσταση $8 \times L$. Συνδυαζόμενες οι σχέσεις (2.61) και (2.67) προκύπτει

$$[E]\{\theta\} = \{D\} + [F]\{q\} \quad (2.68)$$

Ενώ λύνοντας ως προς την άγνωστη ποσότητα $\{\theta\}$ προκύπτει

$$\{\theta\} = [E]^{-1} \{D\} + [E]^{-1} [F] \{q\} \quad (2.69)$$

Ακολουθώντας, χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα διακριτοποίηση και εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές παραστάσεις (2.49), (2.52), (2.53) και (2.54) στα L εσωτερικά κομβικά σημεία της ράβδου προκύπτει

$$\{\Theta\} = [A] \{q\} + [C] \{\theta\} \quad (2.70\alpha)$$

$$\{\Theta'\} = [A'] \{q\} + [C'] \{\theta\} \quad (2.70\beta)$$

$$\{\Theta''\} = [A''] \{q\} + [C''] \{\theta\} \quad (2.70\gamma)$$

$$\{\Theta'''\} = [A'''] \{q\} + [C'''] \{\theta\} \quad (2.70\delta)$$

όπου τα

$$\{\Theta\}^T = \{(\theta_x)_1 \quad (\theta_x)_2 \quad \dots \quad (\theta_x)_L\} \quad (2.71\alpha)$$

$$\{\Theta'\}^T = \{(\theta'_x)_1 \quad (\theta'_x)_2 \quad \dots \quad (\theta'_x)_L\} \quad (2.71\beta)$$

$$\{\Theta''\}^T = \{(\theta''_x)_1 \quad (\theta''_x)_2 \quad \dots \quad (\theta''_x)_L\} \quad (2.71\gamma)$$

$$\{\Theta'''\}^T = \{(\theta'''_x)_1 \quad (\theta'''_x)_2 \quad \dots \quad (\theta'''_x)_L\} \quad (2.71\delta)$$

είναι μητρώα στήλες διαστάσεων $L \times 1$ τα οποία περιλαμβάνουν τις τιμές της θ_x και των παραγώγων της ως προς x στα L εσωτερικά κομβικά σημεία κατά μήκος του εξεταζόμενου διαστήματος. Τα τετραγωνικά μητρώα $[A], [A'], [A''], [A''']$ είναι διαστάσεων $L \times L$ των οποίων οι συντελεστές δίδονται από τις σχέσεις

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_j} A_4(x, \xi_i) dx \quad (2.72\alpha)$$

$$A'_{ij} = -\int_{\Gamma_j} A_3(x, \xi_i) dx \quad (2.72\beta)$$

$$A''_{ij} = \int_{\Gamma_j} A_2(x, \xi_i) dx \quad (2.72\gamma)$$

$$A'''_{ij} = -\int_{\Gamma_j} A_1(x, \xi_i) dx \quad (2.72\delta)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.46) οι συντελεστές των μητρώων $[A], [A'], [A''], [A''']$ μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά ως

$$A_{ij} = \frac{1}{12} \left[2l^3 x - \frac{1}{4} (x_{i0} - x)^4 + l (x_{i0} - x)^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (2.73\alpha)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{12} \left[2l^3 x + \frac{1}{4} (x - x_{i0})^4 - l(x - x_{i0})^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (2.73\beta)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{12} \left[2l^3 x - \frac{1}{4} (x_{i0} - x)^4 + l(x_{i0} - x)^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j0}} + \frac{1}{12} \left[2l^3 x + \frac{1}{4} (x - x_{i0})^4 - l(x - x_{i0})^3 \right]_{x=x_{j0}}^{x=x_{j2}}, \quad i = j \quad (2.73\gamma)$$

$$A'_{ij} = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} (x_{i0} - x)^3 - l(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (2.74\alpha)$$

$$A'_{ij} = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} (x - x_{i0})^3 - l(x - x_{i0})^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (2.74\beta)$$

$$A'_{ij} = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} (x_{i0} - x)^3 - l(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j0}} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} (x - x_{i0})^3 - l(x - x_{i0})^2 \right]_{x=x_{j0}}^{x=x_{j2}}, \quad i = j \quad (2.74\gamma)$$

$$A''_{ij} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (x_{i0} - x)^2 + lx \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (2.75\alpha)$$

$$A''_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (x - x_{i0})^2 - lx \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (2.75\beta)$$

$$A''_{ij} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (x_{i0} - x)^2 + lx \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j0}} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (x - x_{i0})^2 - lx \right]_{x=x_{j0}}^{x=x_{j2}}, \quad i = j \quad (2.75\gamma)$$

και

$$A'''_{ij} = \frac{1}{2} [x]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (2.76\alpha)$$

$$A'''_{ij} = -\frac{1}{2} [x]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (2.76\beta)$$

$$A'''_{ij} = 0, \quad i = j \quad (2.76\gamma)$$

όπου x_{j1}, x_{j2} και x_{j0} είναι οι συντεταγμένες των άκρων και του μέσου του στοιχείου Γ_j , αντίστοιχα, ενώ x_{i0} οι συντεταγμένες του μέσου του στοιχείου Γ_i (Σχήμα 2.1).

Τα μητρώα $[C], [C'], [C''], [C''']$ είναι διαστάσεων $L \times 8$ και ορίζονται ως

$$[C] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} A_4(0, \xi_1) & -A_3(0, \xi_1) & A_2(0, \xi_1) & -A_1(0, \xi_1) & -A_4(l, \xi_1) & A_3(l, \xi_1) & -A_2(l, \xi_1) & A_1(l, \xi_1) \\ A_4(0, \xi_2) & -A_3(0, \xi_2) & A_2(0, \xi_2) & -A_1(0, \xi_2) & -A_4(l, \xi_2) & A_3(l, \xi_2) & -A_2(l, \xi_2) & A_1(l, \xi_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_4(0, \xi_L) & -A_3(0, \xi_L) & A_2(0, \xi_L) & -A_1(0, \xi_L) & -A_4(l, \xi_L) & A_3(l, \xi_L) & -A_2(l, \xi_L) & A_1(l, \xi_L) \end{array} \right] \quad (2.77\alpha)$$

$$[C] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -A_3(0, \xi_1) & A_2(0, \xi_1) & -A_1(0, \xi_1) & 0 & A_3(l, \xi_1) & -A_2(l, \xi_1) & A_1(l, \xi_1) & 0 \\ -A_3(0, \xi_2) & A_2(0, \xi_2) & -A_1(0, \xi_2) & 0 & A_3(l, \xi_2) & -A_2(l, \xi_2) & A_1(l, \xi_2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_3(0, \xi_L) & A_2(0, \xi_L) & -A_1(0, \xi_L) & 0 & A_3(l, \xi_L) & -A_2(l, \xi_L) & A_1(l, \xi_L) & 0 \end{array} \right] \quad (2.77\beta)$$

$$[C''] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} A_2(0, \xi_1) & -A_1(0, \xi_1) & 0 & 0 & -A_2(l, \xi_1) & A_1(l, \xi_1) & 0 & 0 \\ A_2(0, \xi_2) & -A_1(0, \xi_2) & 0 & 0 & -A_2(l, \xi_2) & A_1(l, \xi_2) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_2(0, \xi_L) & -A_1(0, \xi_L) & 0 & 0 & -A_2(l, \xi_L) & A_1(l, \xi_L) & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.77\gamma)$$

$$[C'''] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -A_1(0, \xi_1) & 0 & 0 & 0 & A_1(l, \xi_1) & 0 & 0 & 0 \\ -A_1(0, \xi_2) & 0 & 0 & 0 & A_1(l, \xi_2) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_1(0, \xi_L) & 0 & 0 & 0 & A_1(l, \xi_L) & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.77\delta)$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (2.46) προκύπτει

$$A_1(0, \xi_i) = -\frac{1}{2} \quad A_2(0, \xi_i) = \frac{1}{2}(\xi_i - l) \quad (2.78\alpha, \beta)$$

$$A_3(0, \xi_i) = -\frac{1}{4}\xi_i(\xi_i - 2l) \quad A_4(0, \xi_i) = \frac{1}{12}(\xi_i^3 - 3l\xi_i^2 + 2l^3) \quad (2.78\gamma, \delta)$$

$$A_1(l, \xi_i) = \frac{1}{2} \quad A_2(l, \xi_i) = -\frac{1}{2}\xi_i \quad (2.78\epsilon, \zeta)$$

$$A_3(l, \xi_i) = -\frac{1}{4}(l^2 - \xi_i^2) \quad A_4(l, \xi_i) = +\frac{1}{12}((l - \xi_i)^3 - 3l(l - \xi_i)^2 + 2l^3) \quad (2.78\eta, \theta)$$

όπου $\xi_i = x_{i0}$ οι συντεταγμένες του μέσου του στοιχείου Γ_i

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.69) στις εξισώσεις (2.70) προκύπτει

$$\{\Theta\} = [B]\{q\} + \{R\} \quad (2.79\alpha)$$

$$\{\Theta'\} = [B']\{q\} + \{R'\} \quad (2.79\beta)$$

$$\{\Theta''\} = [B'']\{q\} + \{R''\} \quad (2.79\gamma)$$

$$\{\Theta'''\} = [B''']\{q\} + \{R'''\} \quad (2.79\delta)$$

όπου τα τετραγωνικά μητρώα $[B], [B'], [B''], [B''']$ διαστάσεων $L \times L$ ορίζονται ως

$$[B] = [A] + [C][E]^{-1}[F] \quad (2.80\alpha)$$

$$[B'] = [A'] + [C'][E]^{-1}[F] \quad (2.80\beta)$$

$$[B''] = [A''] + [C''] [E]^{-1}[F] \quad (2.80\gamma)$$

$$[B'''] = [A'''] + [C'''] [E]^{-1}[F] \quad (2.80\delta)$$

και τα μητρώα στήλες $\{R\}, \{R'\}, \{R''\}, \{R'''\}$ διαστάσεων $L \times 1$ δίδονται από τις σχέσεις

$$\{R\} = [C][E]^{-1}\{D\} \quad (2.81\alpha)$$

$$\{R'\} = [C'][E]^{-1}\{D\} \quad (2.81\beta)$$

$$\{R''\} = [C''] [E]^{-1}\{D\} \quad (2.81\gamma)$$

$$\{R'''\} = [C'''] [E]^{-1}\{D\} \quad (2.81\delta)$$

Σημειώνεται ότι, στην περίπτωση ομογενών συνοριακών συνθηκών ($a_3 = \beta_3 = 0$) στην αρχή και στο τέλος του διαστήματος, τα μητρώα στήλες $\{R\}, \{R'\}, \{R''\}, \{R'''\}$ μηδενίζονται.

Οι εξισώσεις (2.68), (2.69) και (2.79) δίδουν τη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.41), (2.42) στα άκρα και στο εσωτερικό του εξεταζόμενου διαστήματος συναρτήσει της πλασματικής φόρτισης $q(x)$, αντίστοιχα. Επίσης, η διακριτοποιημένη έκφραση της αναλογικής εξίσωσης (2.43) γράφεται ως

$$\{\Theta'''\}^T = \{q\}^T = \{(\theta_x'')_1 \quad (\theta_x'')_2 \quad \dots \quad (\theta_x'')_L\} \quad (2.82)$$

Το τελικό βήμα της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης είναι η εφαρμογή της κυρίαρχη εξίσωσης (2.41) στα L εσωτερικά κομβικά σημεία του εξεταζόμενου διαστήματος και στη συνέχεια η αντικατάσταση των διακριτοποιημένων τιμών στα εσωτερικά σημεία της θ_x και των παραγώγων της $\frac{d\theta_x}{dx}$, $\frac{d^2\theta_x}{dx^2}$, $\frac{d^3\theta_x}{dx^3}$ και $\frac{d^4\theta_x}{dx^4}$ σύμφωνα με τις σχέσεις (2.79) και (2.82). Έτσι, προκύπτει ένα σύστημα L αλγεβρικών εξισώσεων με μοναδικό άγνωστο το διάνυσμα της πλασματικής φόρτισης $\{q\}$ διαστάσεως $L \times 1$. Επιλύοντας το σύστημα αριθμητικά υπολογίζεται το διάνυσμα $\{q\}$, οπότε με τη βοήθεια των σχέσεων (2.69) και (2.79) υπολογίζονται οι τιμές της θ_x και των παραγώγων της $\frac{d\theta_x}{dx}$, $\frac{d^2\theta_x}{dx^2}$, $\frac{d^3\theta_x}{dx^3}$ στα άκρα και στο εσωτερικό του εξεταζόμενου διαστήματος στα L κομβικά σημεία, αντίστοιχα.

Τέλος, σημειώνεται ότι η συγκεντρωμένη φόρτιση στο εσωτερικό του εξεταζόμενου διαστήματος, στην περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης 2^{ης} και 4^{ης} τάξης, μπορεί υπολογιστικά να αντιμετωπιστεί ως κατανεμημένη φόρτιση διαιρώντας την τιμή της συγκεντρωμένης φόρτισης με το μήκος του στοιχείου (π.χ. l/L για ίσα στοιχεία) στο οποίο επιβάλλεται, αρκεί το μήκος των στοιχείων να είναι αρκετά μικρό, δηλαδή το πλήθος L των στοιχείων να είναι ικανοποιητικά μεγάλο (π.χ. $L = 41$).

Κεφάλαιο 3

**Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Δοκού Μερικώς
Εδραζόμενη επί Μη Γραμμικού Εδάφους υπό
Κινούμενο Φορτίο**

Κεφάλαιο 3

Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Δοκού Μερικώς Εδραζόμενη επί Μη Γραμμικού Εδάφους υπό Κινούμενο Φορτίο

3.1 Εισαγωγή

Η δυναμική ανάλυση δοκών υπό κινούμενο φορτίο αποτελεί αντικείμενο μεγάλου ενδιαφέροντος στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να προσομοιωθεί από μία δοκό εδραζόμενη επί ελαστικού εδάφους, υποβαλλόμενη σε κινούμενο, με σταθερή ταχύτητα, φορτίο. Όσον αφορά στην προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς του εδάφους καθώς και την αλληλεπίδραση του συστήματος δοκού - εδάφους, το πρώτο και πιθανότατα πιο απλό μαθηματικό προσομοίωμα είναι το ελατηριωτό έδαφος Winkler [Hetenyi, 1946]. Σε αυτό η εδαφική συμπεριφορά προσεγγίζεται από μία σειρά ανεξάρτητων, γραμμικών κατακόρυφων ελατηριωτών στοιχείων, τα οποία παρέχουν αντίδραση σε άμεση αναλογία με τη μετατόπιση της δοκού. Ωστόσο, η εφαρμογή αυτού του προσομοιώματος περιορίζεται σε μη συνεκτικά εδάφη καθώς αδυνατεί να λάβει υπόψη τη συνέχεια ή τη συνεκτικότητα του εδαφικού μέσου (αλληλεπίδραση μεταξύ γειτονικών ελατηρίων). Για να ξεπεραστεί η αδυναμία αυτή, αναπτύχθηκαν προσομοιώματα όπως των Filonenko–Borodich, Pasternak και Hetenyi στα οποία εισάγεται μια δεύτερη παράμετρος για να ληφθεί υπόψη η αλληλεπίδραση μεταξύ των γραμμικών ελαστικών ελατηρίων [Pasternak, 1946]. Με τη χρήση της δεύτερης παραμέτρου, η συμπεριφορά του εδαφικού προσομοιώματος τείνει περισσότερο προς την πραγματική, αλλά η απόκριση του εξακολουθεί να είναι προσεγγιστικού χαρακτήρα. Το γεγονός αυτό, είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία πιο εξελιγμένων προσομοιωμάτων αποτελούμενα από τρεις ανεξάρτητες παραμέτρους, απαραίτητες για την περιγραφή της συμπεριφοράς του εδαφικού μέσου. Συγκεκριμένα, δεδομένου ότι στην πράξη η θεμελίωση μπορεί να είναι εξαιρετικά μη γραμμική λόγω των φαινομένων κράτυνσης (π.χ. έρμα και θεμελίωση σιδηροδρομικής τροχιάς), η προσθήκη μιας τρίτης παραμέτρου που σχετίζεται με την κυβική μη γραμμικότητα της μετατόπισης είναι απαραίτητη, όπως προτείνεται από τον Dahlberg [2002] και επαληθεύτηκε πειραματικά [Dahlberg, 2002]. Επιπλέον, εάν στη προσομοίωση του εδάφους με τρεις ανεξάρτητες παραμέτρους προστεθούν και στοιχεία ιξώδους απόσβεσης, η δυναμική απόκριση δοκού υπό κινούμενο φορτίο μπορεί να αντιμετωπισθεί αποτελεσματικά.

Καθώς η δοκός παραμορφώνεται, οι προαναφερθείσες συμβατικές ελαστικές εδαφικές προσομοιώσεις αντιδρούν τόσο στη συμπίεση όσο και στον εφελκυσμό. Ο διμερής χαρακτήρας των προσομοιωμάτων αυτών, πιθανότατα είχε ως κίνητρο την μαθηματική απλούστευση και όχι τη φυσική συμπεριφορά. Παραδείγματος χάριν, η σιδηροδρομική τροχιά ενός σιδηροδρόμου, ανασηκώνεται και χάνει την επαφή με τη θεμελίωση (έρμα) κατά τη διάρκεια διέλευσης του τρένου. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το ζήτημα, προτάθηκαν προσομοιώματα τα οποία λαμβάνουν υπόψη την αδυναμία ανάληψης εφελκυστικών δυνάμεων (tensionless foundation models) και επιτρέπουν τη δημιουργία περιοχών όπου δεν υπάρχει επαφή μεταξύ δοκού και

εδάφους. Οι περιοχές αυτές δεν είναι γνωστές εκ των προταίρων, ενώ το πρόσημο της εγκάρσιας μετατόπισης παρέχει τις προϋποθέσεις για τον προσδιορισμό των περιοχών επαφής δοκού-εδάφους. Επίσης, γνωρίζοντας το μέγεθος των θλιπτικών και εφελκυστικών αξονικών δυνάμεων που προκύπτουν από περιβαλλοντολογικά αίτια, όπως η αυξομειώσεις της θερμοκρασίας και της υγρασίας, ή λόγω της επιτάχυνσης και επιβράδυνσης των τροχών των αμαξοστοιχιών, η ανάγκη εφαρμογής μη γραμμικών αναλύσεων είναι επιτακτική. Η μη γραμμικότητα συνίσταται στη διατήρηση του ανώτερου όρου του τετραγώνου της κλίσεως στις σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων (θεωρία μετρίως μεγάλων παραμορφώσεων - intermediate non-linear theory) αποφεύγοντας με αυτόν τον τρόπο τις ανακρίβειες που προκύπτουν στη γραμματικοποιημένη θεωρία 2^{ης} τάξης. Επίσης, εξαιτίας της συχνής χρήσης υλικών με σχετικώς μεγάλο μέτρο δυστημσίας, το σφάλμα που προκύπτει αγνοώντας τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης μπορεί να είναι ουσιώδες, ειδικά σε περιπτώσεις μεγάλων εγκαρσίων φορτίσεων. Επομένως, οι επιρροές της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και της διατμητικής παραμόρφωσης δεν θα πρέπει να αμελούνται, διότι μπορεί να οδηγήσουν σε αξιοσημείωτες αποκλίσεις στον υπολογισμό της εντατικής και παραμορφωσιακής κατάστασης του φορέα. Η συνδυαστική αυτή επιρροή είναι ιδιαίτερα εμφανής σε δοκούς που υποβάλλονται σε σημαντικά εγκάρσια και αξονικά φορτία ενώ ταυτόχρονα, για λόγους περιορισμού της παραμόρφωσης, είτε έχουν μικρό μήκος είτε χρησιμοποιούνται διατομές που προσφέρουν σημαντική δυσκαμψία. Όλα τα παραπάνω αποτελούν κίνητρο για μία αυστηρή μη γραμμική δυναμική ανάλυση δοκού με διατμητικές παραμορφώσεις επί μη γραμμικού εδάφους υποβαλλόμενο σε κινούμενο φορτίο

Από την αναδρομή στη διεθνή βιβλιογραφία παρατηρείται ότι όταν οι εγκάρσιες μετατοπίσεις της δοκού θεωρούνται μικρές, ένα ευρύ φάσμα μεθόδων γραμμικής ανάλυσης μπορεί να εφαρμοστεί, ενώ υπάρχουν αναλυτικές λύσεις για ορισμένα απλά προβλήματα. Η εύρεση *αναλυτικών* εκφράσεων για τη λύση της δυναμικής απόκρισης δοκού με απλή γεωμετρία και συνοριακές συνθήκες υπό κινούμενο φορτίο έχει βρεθεί στο στόχαστρο των ερευνητών, με πρωτοπόρα την εργασία του Krylov [1905] και αργότερα του Timoshenko [1911] οι οποίοι καθόρισαν τις τάσεις στη δυναμική ανάλυση κατασκευών από ραβδωτά στοιχεία. Οι Inglis [1934], Lowan [1935] και αργότερα οι Koloušek [1973] και Fryba [1999] παρουσίασαν τη γραμμική δυναμική ανάλυση αμφιέριστης δοκού υπό κινούμενο με σταθερή ταχύτητα φορτίου, όπου συνήθως τα αποτελέσματα προκύπτουν από άπειρο άθροισμα των φυσικών μορφών του στοιχείου, τονίζοντας πως αποτελούν εκτίμηση της πραγματικής συμπεριφοράς της κατασκευής.

Σημαντική εξέλιξη έχει επιτευχθεί τις τελευταίες δεκαετίες στη *γραμμική δυναμική ανάλυση* δοκών υπό κινούμενο φορτίο εφαρμόζοντας είτε αναλυτικές είτε αριθμητικές μεθόδους. Αρχικά, ο Weitsman [1971] συσχέτισε το μέγεθος με την σταθερή ταχύτητα του κινούμενου φορτίου, ώστε η Euler - Bernoulli δοκός να ανασηκώνεται από το έδαφος. Οι Choros and Adams [1979] μελέτησαν τη μόνιμη απόκριση απειρομήκους δοκού επί ελαστικού εδάφους χωρίς δυνατότητα εφελκυσμού υπό κινούμενη συγκεντρωμένη δύναμη, ενώ οι Thambiratnam and Zhuge [1996] χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για να ερευνήσουν την δυναμική συμπεριφορά δοκού επί ελαστικού ελατηριωτού εδάφους με μεταβλητή δυσκαμψία γραμμικών ελατηρίων. Ο Sun [2001α,β, 2002] χρησιμοποίησε τη συνάρτηση Green σε συνδυασμό με το μετασχηματισμό Fourier και πρότεινε μια κλειστή έκφραση των μετατοπίσεων κατασκευών από ραβδωτά στοιχεία υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο ή συγκεντρωμένο κινούμενο φορτίο. Στη συνέχεια, οι Kargarnovin and Younesian [2004, 2005, 2009] μελέτησαν,

εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαταραχών, την απόκριση απειρομήκους δοκού επί ιξωδοελαστικού Pasternak εδάφους υπό αρμονικό κινούμενο φορτίο. Οι Muscolino and Palmeri [2007] εξέτασαν την απόκριση δοκών υπό κινούμενους ταλαντωτές, με σκοπό να παρουσιάσουν την επιρροή της συχνότητας διέγερσης στο ιξωδοελαστικού εδάφους. Η μέθοδος επαλληλίας των ιδιομορφών εφαρμόστηκε από τους Zehsaz *et al.* [2009] σε δοκούς Timoshenko επί ιξωδοελαστικού Pasternak εδάφους, με σκοπό να προσομοιώσουν την απόκριση σιδηροτροχιάς, ενώ οι Chen and Chen [2011] μελέτησαν την επιρροή της απόσβεσης στη μόνιμη απόκριση δοκού επί Winkler εδάφους χωρίς δυνατότητα εφελκυσμού στην περίπτωση που το φορτίο κινείται με ταχύτητα μικρότερη της κρίσιμης. Η μέθοδος των φυσικών μορφών εφαρμόστηκε από την Dimitrova [2010] η οποία παρουσίασε τη δυναμική απόκριση απειρομήκους ή πεπερασμένης δοκού δίνοντας έμφαση στην ενίσχυση της ταλάντωσης που προκύπτει από την ασυνέχεια της θεμελίωσης, ενώ η μέθοδος Galerkin χρησιμοποιήθηκε από τους Ansari *et al.* [2010] για τη διερεύνηση πεπερασμένης Euler – Bernoulli δοκού επί μη γραμμικού εδάφους με ιξώδη απόσβεση, όπου η επίλυση για κάθε αρμονική συχνότητα έγινε με τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων.

Σε αντίθεση με την πληθώρα ερευνών που αφορούν στη γραμμική ανάλυση, οι εργασίες που αφορούν στη γεωμετρικά μη γραμμική δυναμική ανάλυση είναι περιορισμένες. Οι Chang and Liu [1996] πραγματοποίησαν αιτιοκρατικές και τυχαίες δυναμικές μη γραμμικές αναλύσεις δοκών επί ελαστικού εδάφους εφαρμόζοντας τη μέθοδο Galerkin σε συνδυασμό με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Στην παραπάνω εργασία, η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης και της περιστροφικής αδράνειας δεν λαμβάνεται υπόψη, ενώ η διαμήκης μετατόπιση και η αδράνεια έχουν ληφθεί υπόψη ώστε οι πεπλεγμένες συναρτήσεις εγκάρσιας και διαμήκους μετατόπισης να προκύπτουν βάσει της παραδοχής Bernoulli - Euler. Τέλος, οι Chen *et al.* [2001] παρουσίασαν το δυναμικό μητρώο δυσκαμψίας απειρομήκους δοκού Timoshenko επί ελαστικού εδάφους με ιξώδη απόσβεση υπό αρμονικό κινούμενο φορτίο λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα θεωρώντας σταθερό αξονικό φορτίο, ενώ οι Kim and Cho [2006] μελέτησαν την δυναμική απόκριση και το λογισμό δοκού υπό σταθερό αξονικό και κινούμενο εγκάρσιο φορτίο επί ελαστικού εδάφους.

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, παρουσιάζεται η μη γραμμική δυναμική ανάλυση δοκού τυχούσας διατομής (έχοντας τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας), εδραζόμενη επί μη γραμμικού τριπαραμετρικού ελαστικού εδάφους, χωρίς δυνατότητα εφελκυσμού με απόσβεση, υποβαλλόμενου σε μετρίως μεγάλες μετακινήσεις και σε τυχούσες συνοριακές συνθήκες, λαμβάνοντας υπόψη τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης και περιστροφικής αδράνειας. Το εδαφικό προσομοίωμα χαρακτηρίζεται από γραμμικά και μη γραμμικά ελατήρια τύπου Winkler, από ελατήρια τύπου Pasternak και από το συντελεστή απόσβεσης. Η δοκός υπόκειται σε τυχούσας κατανομής εγκάρσια δυναμική φόρτιση κινούμενη με σταθερή ταχύτητα, καθώς και δυναμικό αξονικό φορτίο. Η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης λαμβάνεται υπόψη με τη βοήθεια του συντελεστή διατμητικής παραμόρφωσης. Μορφώνονται τρία προβλήματα συνοριακών τιμών ως προς τις εγκάρσιες και αξονικές μετατοπίσεις καθώς και ως προς την τασική συνάρτηση, τα οποία επιλύονται με τη μέθοδο της Αναλογικής Εξίσωσης [2002], (Analog Equation Method), η οποία βασίζεται στη μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (BEM). Η εφαρμογή της μεθόδου οδηγεί σε σύστημα διαφορικών αλγεβρικών εξισώσεων που λύνονται με την μέθοδο Petzold-Gear. Ο προσδιορισμός του συντελεστή διατμητικής παραμόρφωσης επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της προαναφερθείσας τασικής

συνάρτησης χρησιμοποιώντας μόνο συνοριακή ολοκλήρωση. Το προτεινόμενο μαθηματικό προσομοίωμα συνυπολογίζει τα πεπλεγμένα φαινόμενα των καμπτικών και διατμητικών παραμορφώσεων κατά μήκος της δοκού καθώς και τις αναπτυσσόμενες διατμητικές δυνάμεις από το αξονικό φορτίο. Τα κυρίως χαρακτηριστικά και η πρωτοτυπία της παρούσας έρευνας συγκρινόμενη με την υπάρχουσα βιβλιογραφία συνοψίζονται ακολούθως:

- i. Τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης και περιστροφικής αδράνειας λαμβάνονται υπόψη στη μη γραμμική δυναμική ανάλυση δοκού υποβαλλόμενη στο συνδυασμό τυχούσας συγκεντρωμένης ή κατανεμημένης αξονικής φόρτισης, εγκάρσιας φόρτισης και καμπτικών ροπών καθώς και σε τυχούσας κατανομής κινούμενο με σταθερή ταχύτητα εγκάρσιο φορτίο.
- ii. Ο ομογενής ελαστικός ημίχωρος αντιπροσωπεύεται από γραμμικά, μη γραμμικά και διατμητικά ελατήρια λαμβάνοντας υπόψη την αδυναμία παραλαβής εκφυλιστικών δυνάμεων, καθώς και ιξώδεις αποσβεστήρες.
- iii. Η δοκός στηρίζεται στις πλέον γενικές μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες περιλαμβανομένων και ελαστικών στηρίξεων ή δεσμεύσεων.
- iv. Το προτεινόμενο μαθηματικό μοντέλο συνυπολογίζει τα πεπλεγμένα φαινόμενα των καμπτικών και διατμητικών παραμορφώσεων κατά μήκος της δοκού καθώς και τις διατμητικές δυνάμεις αναπτυσσόμενες από το αξονικό φορτίο.
- v. Οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας ενεργειακή μέθοδο [Sapountzakis και Mokos, 2005] και όχι τις εκφράσεις που προτάθηκαν από τους Timoshenko και Goodier [1984] και Cowper [1966], τις οποίες αρκετοί συγγραφείς έχουν χαρακτηρίσει ως μη ικανοποιητικές, ή εκφράσεις άλλων ερευνητών [Schramm et al. 1994, 1997] οι οποίες ενδέχεται να δώσουν αρνητικές τιμές [Stephen, 1980], [Hutchinson, 2001].
- vi. Το φαινόμενο Poisson του υλικού έχει ληφθεί υπόψιν μέσω του λόγου Poisson ν .
- vii. Η προτεινόμενη μέθοδος εφαρμόζει συνοριακή διακριτοποίηση του φορέα (BEM) καταλήγοντας σε γραμμικά ή παραβολικά στοιχεία αντί για επιφανειακά στα οποία θα κατέληγε η προσέγγιση με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (FEM) ενώ απαιτείται μικρός αριθμός στοιχείων για να επιτευχθεί ικανοποιητική ακρίβεια.

Αριθμητικές εφαρμογές μελετήθηκαν για να δείξουν την επιρροή των διάφορων παραμέτρων, όπως της ταχύτητας και της συχνότητας της φόρτισης, των εδαφικών παραμέτρων και της απόσβεσης στις μετατοπίσεις και στα εντατικά μεγέθη.

3.2 Διατύπωση του Μη Γραμμικού Δυναμικού Προβλήματος

Εξετάζεται ευθύγραμμη δοκός μήκους l , σταθερής διατομής τυχούσας γεωμετρίας, εμβαδού A (στο επίπεδο y, z), με πεπερασμένο αριθμό οπών, έχοντας τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας (άξονα- z), αποτελούμενη από ομογενές ισότροπο και γραμμικώς ελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας E , μέτρο διάτμησης G , πυκνότητας ρ και λόγο Poisson ν (Σχ.3.1). Τα σύνορα της διατομής είναι λεία, δηλαδή μπορούν να περιλαμβάνουν πεπερασμένο αριθμό γωνιών, και συμβολίζονται με Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$). Συμβολίζεται με C_{xyz} το κύριο καμπτικό σύστημα αξόνων το οποίο διέρχεται από το κέντρο βάρους C της διατομής. Η δοκός εδράζεται επί

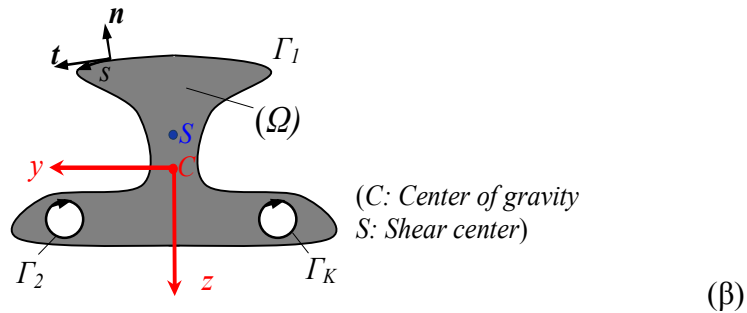
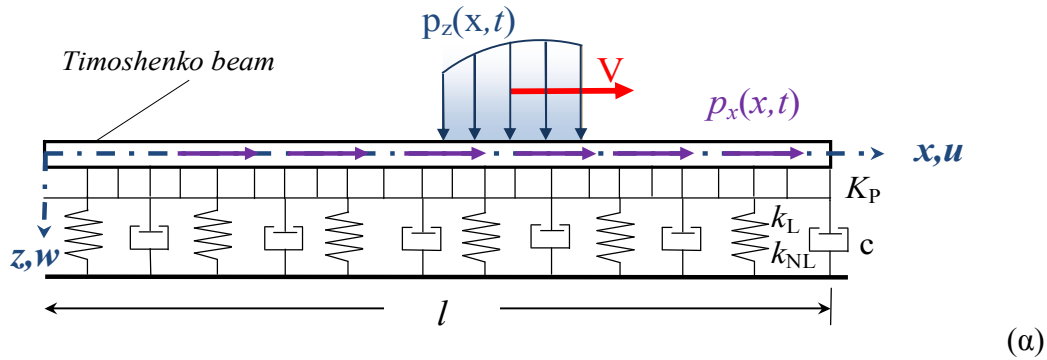
ιξωδοελαστικού εδάφους με δυσκαμψία γραμμικών και μη γραμμικών ελατήριων Winkler k_L και k_{NL} , αντίστοιχα δυσκαμψία διατμητικών ελατήριων Pasternak k_P και συντελεστή απόσβεσης c . Λαμβάνοντας υπόψη την αδυναμία ανάληψης εφελκυστικών δυνάμεων του εδάφους δηλαδή, το ελατηριωτό προσομοίωμα ενεργεί επί της δοκού μόνο σε περίπτωση συμπίεσης (θλίψεως), η εδαφική αντίδραση μπορεί να εκφραστεί από τις ακόλουθες σχέσεις

$$p_{sz}(x,t) = \tilde{H}(x,t) p_{\text{react}}(x,t) \quad (3.1a)$$

$$p_{\text{react}}(x,t) = k_L w(x,t) + k_{NL} w^3(x,t) - k_P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + c \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \quad (3.1b)$$

όπου $\tilde{H}(x,t)$ είναι μοναδιαίου βήματος συνάρτηση οριζόμενη ως

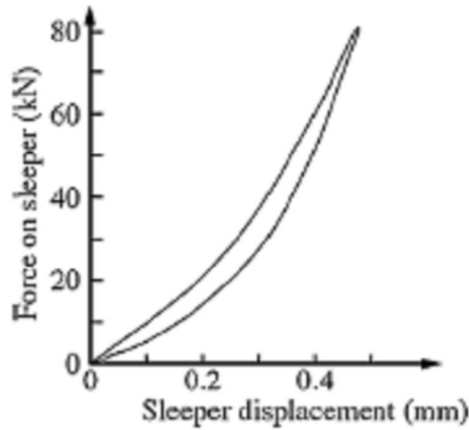
$$\tilde{H}(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{if } p_{\text{react}}(x,t) > 0 \\ 0 & \text{if } p_{\text{react}}(x,t) \leq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$



Σχήμα 3.1. Επίπεδο x - z πρισματικής δοκού επί ιξωδοελαστικού εδάφους (α) με σταθερή διατομή τυχόντος σχήματος μονής συμμετρίας (β).

Η εδαφική αντίδραση p_{react} , η οποία εκφράζεται από τη σχέση (3.1b), λαμβάνει υπόψη τη μη γραμμική συμπεριφορά του εδάφους (π.χ. έρμα και θεμελίωση σιδηροδρομικής τροχιάς) όπως προτάθηκε από τον Dahlberg [2002], ο οποίος απέδειξε ότι η απόκριση της σιδηροδρομικής τροχιάς αντιμετωπίζεται αποτελεσματικά από το προσομοίωμα με κυβική μη γραμμικότητα, ενώ τόνισε πως οι διαφορές μεταξύ των μη γραμμικών και γραμμικών προσομοιωμάτων είναι

σημαντικές. Στη συνέχεια, οι Wu και Thompson [2004] παρουσίασαν ένα παρόμοιο μη γραμμικό προσομοίωμα και μελέτησαν το πρόβλημα της επαφής τροχού/τροχιάς χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Οι μελέτες αυτές, επαληθεύονται από τα αποτελέσματα πραγματικών καταγραφών, όπως αυτά παρουσιάζονται από τον Iwnicky [2007] (Σχ.3.2).



Σχήμα 3.2 Πειραματικά αποτελέσματα μη γραμμικής συμπεριφοράς σιδηροτροχιάς. Iwnicky [2007]

Η δοκός υποβάλλεται, κατά μήκος του κεντροβαρικού άξονα, στο συνδυασμό τυχούσας συγκεντρωμένης ή κατανεμημένης αξονικής φόρτισης $p_x = p_x(x,t)$ εγκάρσιας φόρτισης $p_z = p_z(x,t)$ με διεύθυνση κατά τον άξονα z , και καμπτικών ροπών $m_y = m_y(x,t)$ που ασκούνται περί τον άξονα y . Επιπροσθέτως, η δοκός υποβάλλεται σε τυχούσας κατανομής κινούμενο με σταθερή ταχύτητα V εγκάρσιο φορτίο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1α. Υπό την προαναφερθείσα εξωτερική φόρτιση, στη δοκό δεν εμφανίζεται στροφή της διατομής περί το διαμήκη άξονα (στρέψη).

Για τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος υιοθετείται η Τεχνική Θεωρία κάμψεως Timoshenko. Η θεωρία Timoshenko, σε αντίθεση με τη θεωρία Euler – Bernoulli, λαμβάνει (έμμεσα) υπόψη την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων γ_{xz} στο έργο παραμόρφωσης της δοκού, θεωρώντας μέση τιμή των διατμητικών παραμορφώσεων με τη βοήθεια συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης. Η παραδοχή αυτή έχει ως αποτέλεσμα, οι επίπεδες διατομές να παραμένουν επίπεδες (πρώτη κινηματική παραδοχή) αλλά όχι πλέον κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα. Κατά συνέπεια, στη θεωρία Timoshenko (όπως και στη θεωρία Euler – Bernoulli) το γενικότερο πεδίο μετατοπίσεων (μετατόπιση ενός τυχαίου σημείου της διατομής του επιπέδου y,z) \bar{u}, \bar{w} ως προς τους άξονες x, z , αντίστοιχα, ορίζονται από τις σχέσεις

$$\bar{u} = u - y(\theta_z \cos(\theta_x) - \theta_y \sin(\theta_x)) + z(\theta_y \cos(\theta_x) + \theta_z \sin(\theta_x)) + \Phi \frac{d\theta_x}{dx} \quad (3.3\alpha)$$

$$\bar{w} = w + (y - y_c) \sin(\theta_x) - (z - z_c)(1 - \cos(\theta_x)) \quad (3.3\beta)$$

όπου \bar{u} , \bar{w} η αξονική και εγκάρσια μετατόπιση του τυχαίου σημείου της διατομής, $u(x,t)$, $w(x,t)$ οι αντίστοιχες μετατοπίσεις του κεντροειδούς C , θ_x η γωνία της δοκού στον άξονα x , Φ η συνάρτηση στρέβλωσης, (y_c, z_c) οι συντεταγμένες του κέντρου διάτμησης (SC) και $\theta_y(x,t)$, $\theta_z(x,t)$ είναι οι γωνίες στροφής περί τους κεντροβαρικούς άξονες y, z , αντίστοιχα, λόγω κάμψης. Γνωρίζοντας το γενικότερο πεδίο μετατοπίσεων και εξειδικεύοντας σε διατομές που έχουν τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας (άξονα- z) ενώ παράλληλα το εξωτερικά επιβαλλόμενο δυναμικό φορτίο ασκείται επί του άξονα αυτού, προκύπτει

$$\bar{u} = u - y(\theta_z \cos(\theta_x) - \theta_y \sin(\theta_x)) + z(\theta_y \cos(\theta_x) + \theta_z \sin(\theta_x)) + \Phi \frac{d\theta_x}{dx} \quad (3.4\alpha)$$

$$\bar{w} = w + y \sin(\theta_x) - z(1 - \cos(\theta_x)) \quad (3.4\beta)$$

Για μικρές γωνίες θ_x ισχύει $\cos(\theta_x) = 1$ και $\sin(\theta_x) = \theta_x$ οπότε οι σχέσεις (3.4α,β) μετασχηματίζονται ως ακολούθως

$$\bar{u} = u - y(\theta_z - \theta_y \theta_x) + z(\theta_y + \theta_z \theta_x) + \Phi \frac{d\theta_x}{dx} \quad (3.5\alpha)$$

$$\bar{w} = w + y \theta_x \quad (3.5\beta)$$

Επίσης, θεωρώντας ότι ο όρος $y \frac{d\theta_x}{dx} \theta_x \approx 0$ οι σχέσεις (3.5α,β) απλοποιούνται ως ακολούθως

$$\bar{u} = u - y(\theta_z) + z(\theta_y) + \Phi \frac{d\theta_x}{dx} \quad (3.6\alpha)$$

$$\bar{w} = w + y \theta_x \quad (3.6\beta)$$

Οι τελικές εκφράσεις του πεδίου μετατοπίσεων \bar{u}, \bar{w} ως προς τους άξονες x, z , αντίστοιχα [Ramm and Hofmann, 1995] προκύπτουν λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς του προβλήματος (απουσία στρέψης, $\Phi=0$) ως εξής

$$\bar{u}(x, y, z, t) = u(x, t) - y \theta_z(x, t) + z \theta_y(x, t) \quad (3.7\alpha)$$

$$\bar{w}(x, t) = w(x, t) \quad (3.7\beta)$$

Από τις σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων της τρισδιάστατης ελαστικότητας οι ακριβείς εκφράσεις ανηγμένης παραμόρφωσης δίνονται από τον τανυστή παραμόρφωσης Lagrange–Green ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.8\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.8\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.8\gamma)$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \quad (3.8\delta)$$

$$2\varepsilon_{yx} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial w} \quad (3.8\epsilon)$$

$$2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (3.8\zeta)$$

Υιοθετώντας την παραδοχή μετρίως μεγάλων παραμορφώσεων $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \ll \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$,
 $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \ll \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)$, $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \ll \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$ και
 εφαρμόζοντας τις αναγκαίες συνθήκες, οι σχέσεις (3.8α-ζ) γράφονται ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.9\alpha)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \quad (3.9\beta)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \quad (3.9\gamma)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (3.9\delta)$$

Με αντικατάσταση του πεδίου μετατοπίσεων των εξισώσεων (3.9α,γ) στις σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων (3.7α,β), προκύπτουν οι ακόλουθες συνιστώσες παραμορφώσεων

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z, t) = u' + z\theta_y' - y\theta_z' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \quad (3.10\alpha)$$

$$\gamma_{xz} = w' + \theta_y \quad (3.10\beta)$$

όπου γ_{xz} είναι η επιπρόσθετη γωνία στροφής της διατομής εξαιτίας της διατμητικής παραμόρφωσης, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.3. Η γωνία καμπτικής στροφής προκύπτει

$$\theta_y(x) = -\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_{xz} \quad (3.11)$$

Σημειώνεται ότι για δοκό Euler – Bernoulli, (διατομή παραμένει κάθετη στον παραμορφωμένο ελαστικό άξονα), οι διατμητικές παραμορφώσεις που προσδιορίζονται από τη σχέση (3.10β) προκύπτουν μηδενικές.

$$\theta_y(x) = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.12)$$

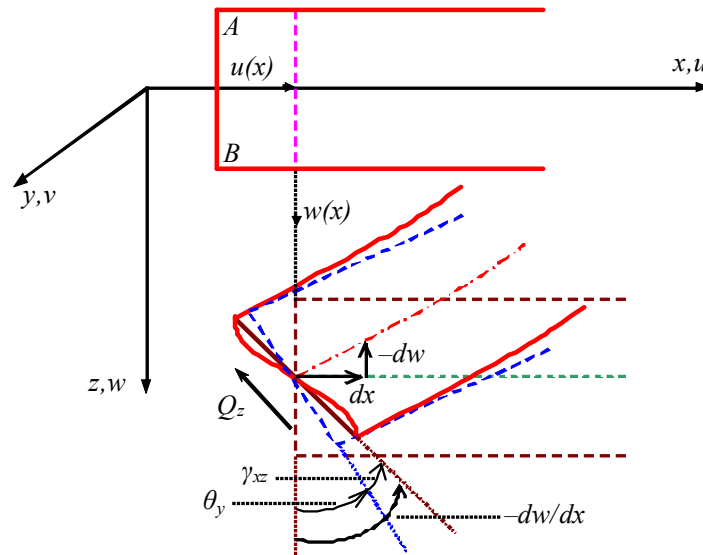
Υιοθετώντας γραμμική σχέση τάσεων – παραμορφώσεων υπολογίζεται ο 2^{ος} τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff ως

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Κατά συνέπεια οι σχέσεις (3.10α,β) γράφονται ως

$$S_{xx} = E \left[u' + z\theta_y' - y\theta_z' + \frac{I}{2}(v'^2 + w'^2) \right] \quad (3.14\alpha)$$

$$S_{xz} = G \cdot (w' + \theta_y) \quad (3.14\beta)$$



Σχήμα 3.3 Παραμορφωσιακά μεγέθη για κάμψη στο επίπεδο xz διατμητικής δοκού κατά Timoshenko.

Για τη διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος επιστρατεύεται το ενεργειακό θεώρημα του W.R. Hamilton (1805-1865) το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε συνεχή όσο και διακριτά συστήματα. Η αρχή του Hamilton λαμβάνοντας υπόψη και δυναμικά φαινόμενα με χρήση της αρχής D'Alembert (δηλαδή προσθέτοντας τις αδρανειακές δυνάμεις στα εξωτερικά φορτία) αποτελεί γενίκευση της Αρχής της Ελάχιστης Δυναμικής Ενέργειας. Η αρχή του Hamilton για τη μεταβολή του Δυναμικού της κίνησης, μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως

“Οι μετατοπίσεις σε ένα ελαστικό σώμα κατά το χρονικό διάστημα $t_1 < t < t_2$ είναι τέτοιες ώστε το ολικό δυναμικό $(U - K - W_{ext})$ να ελαχιστοποιείται.”

Η παραπάνω διατύπωση σε μαθηματική μορφή δίδεται από την ακόλουθη σχέση

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U_{\text{int}} + U_b - K - W_{\text{ext}}) dt = 0 \quad (3.15)$$

όπου $\delta(\cdot)$ το πρώτο διαφορικό των ποσοτήτων, U_{int} η ενέργεια παραμορφώσεως της δοκού, U_b η ενέργεια παραμορφώσεως των ελαστικών συνοριακών συνθηκών της δοκού, K η κινητική ενέργεια του συστήματος (κίνηση μάζας) και W_{ext} το έργο των εξωτερικών φορτίων για μετάβαση από την απαραμόρφωτη στην παραμορφωμένη κατάσταση. Ορίζεται το πεδίο δυνατών μετατοπίσεων $\delta u, \delta w$ (κινηματικά αποδεκτό) το οποίο μεταβάλλεται τόσο κατά τις χωρικές διευθύνσεις x, z όσο και κατά τον χρόνο t . Υποθέτοντας πως τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 το πεδίο μετατοπίσεων είναι γνωστό, δηλαδή οι μεταβολές $\delta u, \delta w$ είναι μηδενικές, οι προαναφερθείσες ποσότητες της σχέσης (3.15) υπολογίζονται ως

$$U_{\text{int}} = \int_V (S_{xx} \varepsilon_{xx} + S_{xz} \gamma_{xz}) dV \quad (3.16\alpha)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \sum_b^2 (k_u^b u_b^2 + k_w^b w_b^2 + k_\theta^b \theta_{yb}^2) \quad (3.16\beta)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (3.16\gamma)$$

$$W_{\text{ext}} = \int_L (p_x u + p_z w - (W_{p_{sz}})) dx + \sum_b^2 (N_x^b u_b + V_z^b w_b + M_y^b \theta_{yb}) \quad (3.16\delta)$$

Εφαρμόζοντας τη θεωρία μεταβολών στις παραπάνω σχέσεις, το πρώτο διαφορικό των ποσοτήτων γράφεται ως

$$\delta U_{\text{int}} = \int_V (S_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + S_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (3.17\alpha)$$

$$\delta U_b = \delta \left(\frac{1}{2} \sum_b^2 (k_u^b u_b^2 + k_w^b w_b^2 + k_\theta^b \theta_{yb}^2) \right) \quad (3.17\beta)$$

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_V \rho (\delta \dot{u}^2 + \delta \dot{w}^2) dV \quad (3.17\gamma)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_L (p_x \delta u + p_z \delta w - \delta (W_{p_{sz}})) dx + \sum_b^2 (N_x^b \delta u_b + V_z^b \delta w_b + M_y^b \delta \theta_{yb}) \quad (3.17\delta)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις προσδιορισμού των εντατικών μεγεθών ως συνάρτηση των τάσεων, δηλαδή

$$N = \int_\Omega S_{xx} d\Omega \quad (3.18\alpha)$$

$$M_y = \int_\Omega S_{xx} z d\Omega \quad Q_z = \int_{A_z} S_{xz} d\Omega \quad (3.18\beta, \gamma)$$

προκύπτει

$$N = EA \left[u' + \frac{I}{2} (v'^2 + w'^2) \right] \quad (3.19\alpha)$$

$$M_y = EI_y \theta_y' \quad Q_z = GA_z \gamma_{xz} = GA_z (w' + \theta_y) \quad (3.19\beta, \gamma)$$

όπου A , A_z είναι το εμβαδόν της διατομής και η επιφάνεια διάτμησης κατά τον άξονα z και I_y είναι η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα y . Η αξονική αντίσταση συμβολίζεται με EA , ενώ EI_y είναι η καμπτική αντίσταση. Ο όρος $GA_z = G(\kappa_z A) = GA/a_z$ αντιπροσωπεύει τη διατμητική αντίσταση της θεωρίας Timoshenko, όπου κ_z ο διατμητικός διορθωτικός συντελεστής και a_z ο συντελεστής διατμητικής παραμόρφωσης.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εξισώσεις (3.14α,β) στην αρχική διατύπωση της αρχής του Hamilton εξ.(3.15) και λαμβάνοντας υπόψη ότι η αξονική δύναμη είναι το ολοκλήρωμα των ορθών τάσεων που ασκούνται στη διατομή προκύπτουν οι τρεις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας ως προς τις μετακινήσεις του κέντρου βάρους u , w και τη στροφή της διατομής θ_y περί τον άξονα y

$$\rho A \ddot{u} - EA(u'' + w'w'') = p_x \quad (3.20\alpha)$$

$$\rho A \ddot{w} - (Nw')' - GA_z(w'' + \theta_y') + p_{sz} = p_z \quad (3.20\beta)$$

$$EI_y \theta_y'' - GA_z(w' + \theta_y) = \rho I_y \ddot{\theta}_y \quad (3.20\gamma)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.20β,γ) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των εντατικών μεγεθών (3.19α,γ) οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται ως

$$\rho A \ddot{u} - EA(u'' + w'w'') = p_x \quad (3.21\alpha)$$

$$EI_y w'''' + \rho A \ddot{w} + p_{sz} + \frac{EI_y}{GA_z} \left((Nw')''' - \rho A (\ddot{w})'' - p_{sz}'' + p_z'' \right) - (Nw')' - \rho I_y (\ddot{\theta}_y)'' - \frac{\rho I_y}{GA_z} \left(\left[(Nw')' \right]'' - \rho A \ddot{w} - \ddot{p}_{sz} + \ddot{p}_z \right) = p_z \quad (3.21\beta)$$

Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα $x = 0, l$ της δοκού, όπως προκύπτουν από την αρχή του Hamilton εξ.(3.15), διατυπώνονται με την ακόλουθη γενική μορφή

$$a_1 u(x, t) + a_2 N(x, t) = a_3 \quad (3.22)$$

$$\beta_1 w(x, t) + \beta_2 V_z(x, t) = \beta_3 \quad \gamma_1 \theta_y(x, t) + \gamma_2 M_y(x, t) = \gamma_3 \quad (3.23\alpha, \beta)$$

όπου a_i, β_i, γ_i $i = 1, 2, 3$ γνωστοί συντελεστές. Στην περίπτωση μη μηδενικών αρχικών συνοριακών συνθηκών θα πρέπει να ικανοποιούνται και οι ακόλουθες σχέσεις για $t = 0$

$$u(x,0) = \bar{u}_0(x) \quad \dot{u}(x,0) = \dot{\bar{u}}_0(x) \quad (3.24\alpha,\beta)$$

$$w(x,0) = \bar{w}_0(x) \quad \dot{w}(x,0) = \dot{\bar{w}}_0(x) \quad (3.25\alpha,\beta)$$

όπου $\bar{u}_0(x)$, $\bar{w}_0(x)$, $\dot{\bar{u}}_0(x)$ και $\dot{\bar{w}}_0(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις. Τα εντατικά μεγέθη που αναπτύσσονται στη διατομή στην παραμορφωμένη κατάσταση και οι στροφές λόγω κάμψης δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$V_z = Nw' - EI_y w''' - \frac{EI_y}{GA_z} \left[(Nw')'' + p_z' - p_{sz}' - \rho A \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right] - \rho I_y \ddot{\theta}_y \quad (3.26\alpha)$$

$$M_y = -EI_y w'' - \frac{EI_y}{GA_z} \left[(Nw')' + p_z - p_{sz} - \rho A \dot{w} \right] \quad (3.26\beta)$$

$$\theta_y = \frac{EI_y}{G^2 A_z^2} \left(-p_z' + p_{sz}' - (Nw')'' + \rho A \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) - \frac{1}{GA_z} (EI_y w''' + \rho I_y \ddot{\theta}_y + GA_z w') \quad (3.26\gamma)$$

Οι προαναφερθείσες εξισώσεις (3.22)-(3.23) αποτελούν τις πλέον γενικές μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες οι οποίες μπορούν να περιγράψουν ελαστικές στηρίξεις ή δεσμεύσεις δίνοντας κατάλληλες τιμές στις συναρτήσεις a_i, β_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$).

Στις παραπάνω εκφράσεις ο συντελεστής διατμητικής παραμόρφωσης a_z μορφώνονται σύμφωνα με την ενεργειακή μέθοδο και υπολογίζονται αριθμητικά με τη βοήθεια της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1. Υπογραμμίζεται ότι, εάν επιθυμείται να αγνοηθούν τα φαινόμενα 2^{ης} τάξης αρκεί στις παραπάνω εκφράσεις να τεθεί $N = p_x = 0$, ενώ εάν επιθυμείται να αγνοηθούν τα φαινόμενα διατμητικών παραμορφώσεων αρκεί να τεθεί $a_z = 0$.

3.3 Ολοκληρωτικές Παραστάσεις – Αριθμητική Επίλυση

Σύμφωνα με την ανάλυση που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, το πρόβλημα της μη γραμμικής δυναμικής απόκρισης καμπτόμενων δοκών Timoshenko - Rayleigh μερικώς εδραζόμενων επί μη γραμμικού ιξωδοελαστικού εδάφους έγκειται στον προσδιορισμό της διαμήκους $u(x,t)$ και εγκάρσιας $w(x,t)$ μετατόπισης. Οι λύσεις του προβλήματος θα πρέπει να ικανοποιούν τις πεπλεγμένες διαφορικές εξισώσεις (3.21α,β), τις συνοριακές συνθήκες (3.22)-(3.23α,β), στα άκρα ($x = 0, l$) και τις αρχικές συνθήκες (3.24α,β)-(3.25α,β). Για την αντιμετώπιση του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε η Μέθοδος Αναλογικής Εξίσωσης σε συνδυασμό με τη μέθοδο Petzold - Gear για την επίλυση των διαφορικών αλγεβρικών εξισώσεων (differential-algebraic equations-DAE).

3.3.1 Για την Αξονική $u(x,t)$ και την Εγκάρσια $w(x,t)$ Μετατόπιση

Έστω $u_1 = u(x,t)$ και $u_2(x,t) = w(x,t)$ λύσεις του προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών οι οποίες έχουν συνεχείς παραγώγους μέχρι δεύτερης και τέταρτης τάξης ως προς x , αντίστοιχα και μέχρι δεύτερης τάξης ως προς t στο εσωτερικό της δοκού και μέχρι πρώτης και τρίτης τάξης ως προς x , αντίστοιχα στα άκρα της. Παραγωγίζοντας τη λύση δύο και τέσσερις φορές ως προς x , αντίστοιχα προκύπτει

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = q_1(x,t) \quad \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} = q_2(x,t) \quad (3.27\alpha,\beta)$$

Η λύση του αρχικού προβλήματος προκύπτει πλέον από την επίλυση των εξισώσεων (3.27α,β) υπό τις συνοριακές συνθήκες εξ.(3.22), (3.23α,β) και τις αρχικές συνθήκες (3.24α,β), (3.25α,β). Η πλασματική φόρτιση q_i ($i=1,2$) είναι συνάρτηση του χρόνου και της θέσης κατά μήκος της δοκού και σε αυτό το στάδιο της επίλυσης είναι άγνωστη. Ωστόσο, μπορεί να υπολογιστεί, ακολουθώντας τη πορεία του Κεφαλαίο 2.

Οι άγνωστες ποσότητες $u_i(\zeta,t)$, $u_{i,x}(\zeta,t)$, $u_{2,xx}(\zeta,t)$ και $u_{2,xxx}(\zeta,t)$ όπου ($i=1,2$) και ($\zeta=0,l$), στα άκρα της δοκού οι οποίες εκφράζουν τις μετατοπίσεις και τις παραγώγους αυτών ως προς x , γράφονται συναρτήσει του πλασματικού φορτίου, εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές παραστάσεις εξ.(2.11), (2.49) και τις συνοριακές συνθήκες εξ.(3.22), (3.23α,β) στα άκρα (0,l). Το εσωτερικό της δοκού διακριτοποιείται σε L ίσα σταθερά στοιχεία, στα οποία το πλασματικό φορτίο $q_i(x,t)$ θεωρείται ότι παραμένει σταθερό.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία, προκύπτουν οι ακόλουθες 12 μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_1^{nl} \\ \mathbf{D}_2^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

όπου

$$\mathbf{T}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_3 & \mathbf{E}_{35} & \mathbf{E}_{36} & \mathbf{E}_{37} & \mathbf{E}_{38} \\ \mathbf{F}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{46} & \mathbf{E}_{47} & \mathbf{E}_{48} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{55} & \mathbf{D}_{56} & \mathbf{D}_{57} & \mathbf{D}_{58} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{65} & \mathbf{D}_{66} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{68} \end{bmatrix} \quad (3.29\alpha,\beta)$$

όπου τα $\mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{68}$ είναι ορθογωνικά υπομητρώα διαστάσεως 2×2 , χρονικά μεταβαλλόμενα, τα οποία περιέχουν τις τιμές των συναρτήσεων a_j, β_j, γ_j ($j=1,2$) των εξισώσεων (3.22), (3.23α,β). Ομοίως, τα $\mathbf{D}_1^{nl}, \mathbf{a}_3$ και $\mathbf{D}_2^{nl}, \mathbf{b}_3$ είναι υπομητρώα στήλες διαστάσεως 4×1 και 8×1 , χρονικά μεταβαλλόμενα, τα οποία περιέχουν τις

τιμές των συναρτήσεων a_3, β_3, γ_3 των εξισώσεων (3.22), (3.23α,β), ενώ τα $\mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{13}, \mathbf{E}_{35}, \mathbf{E}_{36}, \mathbf{E}_{37}, \mathbf{E}_{38}, \mathbf{E}_{46}, \mathbf{E}_{47}, \mathbf{E}_{48}$ είναι ορθογωνικά υπομητρώα διαστάσεως 2×2 , τα οποία περιέχουν τις τιμές των πυρήνων $\Lambda_j(r)$ ($j=1, 2, 3, 4$) στα άκρα της δοκού και τα $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$ είναι υπομητρώα στήλες διαστάσεως $2 \times L$, τα οποία περιέχουν τις τιμές των πυρήνων στα L εσωτερικά σημεία της δοκού. Τέλος, τα γενικευμένα διανύσματα των άγνωστων ποσοτήτων συμβολίζονται με $\mathbf{d}_1^T = \{\mathbf{q}_1 \ \hat{\mathbf{u}}_1 \ \hat{\mathbf{u}}_{1,x}\}$ και $\mathbf{d}_2^T = \{\mathbf{q}_2 \ \hat{\mathbf{u}}_2 \ \hat{\mathbf{u}}_{2,x} \ \hat{\mathbf{u}}_{2,xx} \ \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx}\}$ για την αξονική και την εγκάρσια διεύθυνση, αντίστοιχα και περιλαμβάνουν τις τιμές των πλασματικών φορτίων $q_i = \{q_1^i \ q_2^i \ \dots \ q_L^i\}^T$, ($i=1,2$) στα L εσωτερικά σημεία καθώς και τις μετατοπίσεις και τις παραγώγους αυτών ως προς x στα άκρα της δοκού.

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \{u_i(0,t) \ u_i(L,t)\}^T, \quad (i=1,2) \quad (3.30\alpha)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{i,x} = \left\{ \frac{\partial u_i(0,t)}{\partial x} \ \frac{\partial u_i(L,t)}{\partial x} \right\}^T, \quad (i=1,2) \quad (3.30\beta)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{2,xx} = \left\{ \frac{\partial^2 u_2(0,t)}{\partial x^2} \ \frac{\partial^2 u_2(L,t)}{\partial x^2} \right\}^T \quad (3.30\gamma)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{2,xxx} = \left\{ \frac{\partial^3 u_2(0,t)}{\partial x^3} \ \frac{\partial^3 u_2(L,t)}{\partial x^3} \right\}^T \quad (3.30\delta)$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω διακριτοποίηση για τις εξισώσεις (2.11), (2.14), (2.50)-(2.54) στα L εσωτερικά σημεία προκύπτει

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{q}_1 + \mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}_1 \hat{\mathbf{u}}_{1,x} \quad \mathbf{u}_{1,x} = \mathbf{A}_1^1 \mathbf{q}_1 + \mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{u}}_{1,x} \quad \mathbf{u}_{1,xx} = \mathbf{q}_1 \quad (3.31\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}_2^0 \mathbf{q}_2 + \mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{C}'_1 \hat{\mathbf{u}}_{2,x} + \mathbf{C}_2 \hat{\mathbf{u}}_{2,xx} + \mathbf{C}_3 \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx} \quad (3.31\delta)$$

$$\mathbf{u}_{2,x} = \mathbf{A}_2^1 \mathbf{q}_2 + \mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{u}}_{2,x} + \mathbf{C}'_1 \hat{\mathbf{u}}_{2,xx} + \mathbf{C}_2 \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx} \quad (3.31\epsilon)$$

$$\mathbf{u}_{2,xx} = \mathbf{A}_2^2 \mathbf{q}_2 + \mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{u}}_{2,xx} + \mathbf{C}'_1 \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx} \quad (3.31\sigma\tau)$$

$$\mathbf{u}_{2,xxx} = \mathbf{A}_2^3 \mathbf{q}_2 + \mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx} \quad \mathbf{u}_{2,xxxx} = \mathbf{q}_2 \quad (3.31\zeta,\eta)$$

όπου $\mathbf{A}_1^i, \mathbf{A}_2^j$ ($i=0,1$), ($j=0,1,2,3$) είναι ορθογωνικά υπομητρώα διαστάσεως $L \times L$, $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}'_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ είναι ορθογωνικά υπομητρώα διαστάσεως και $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i,x}, \mathbf{u}_{i,xx}, \mathbf{u}_{i,xxx}, \mathbf{u}_{i,xxxx}$ είναι χρονικά μεταβαλλόμενα υπομητρώα στήλες που περιέχουν τις τιμές των $u_i(x,t)$ και των παραγώγων αυτών στα L εσωτερικά σημεία της δοκού. Οι εξισώσεις (3.30α,β) και (3.30δ-ζ) μπορούν να διατυπωθούν ως ακολούθως

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{H}_1^0 \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{u}_{1,x} = \mathbf{H}_1^1 \mathbf{d}_1 \quad (3.32\alpha,\beta)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{H}_2^0 \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{u}_{2,x} = \mathbf{H}_2^1 \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{u}_{2,xx} = \mathbf{H}_2^2 \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{u}_{2,xxx} = \mathbf{H}_2^3 \mathbf{d}_2 \quad (3.32\gamma-\sigma\tau)$$

όπου $\mathbf{H}_1^i, \mathbf{H}_2^j$ ($i=0,1$), ($j=0,1,2,3$) είναι ορθογωνικά υπομητρώα διαστάσεως $L \times (L+4)$ και $L \times (L+8)$ αντίστοιχα, τα οποία περιέχουν τα $\mathbf{A}_1^i, \mathbf{A}_2^j, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}'_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$.

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις (3.21α,β) στα L εσωτερικά σημεία της δοκού και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.32α-στ), προκύπτουν οι ακόλουθες $2L$ μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης

$$\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}_1 \\ \ddot{\mathbf{d}}_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_1 \\ \dot{\mathbf{d}}_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{k}^{nl}(\mathbf{H}_1^i, \mathbf{H}_2^j, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{f} \quad (3.33)$$

όπου \mathbf{k}^{nl} είναι το μη γραμμικό γενικευμένο διάνυσμα δυσκαμψίας και $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{f}$ είναι τα γενικευμένα μητρώα μάζας, απόσβεσης, δυσκαμψίας και διάνυσμα φορτίου, αντίστοιχα.

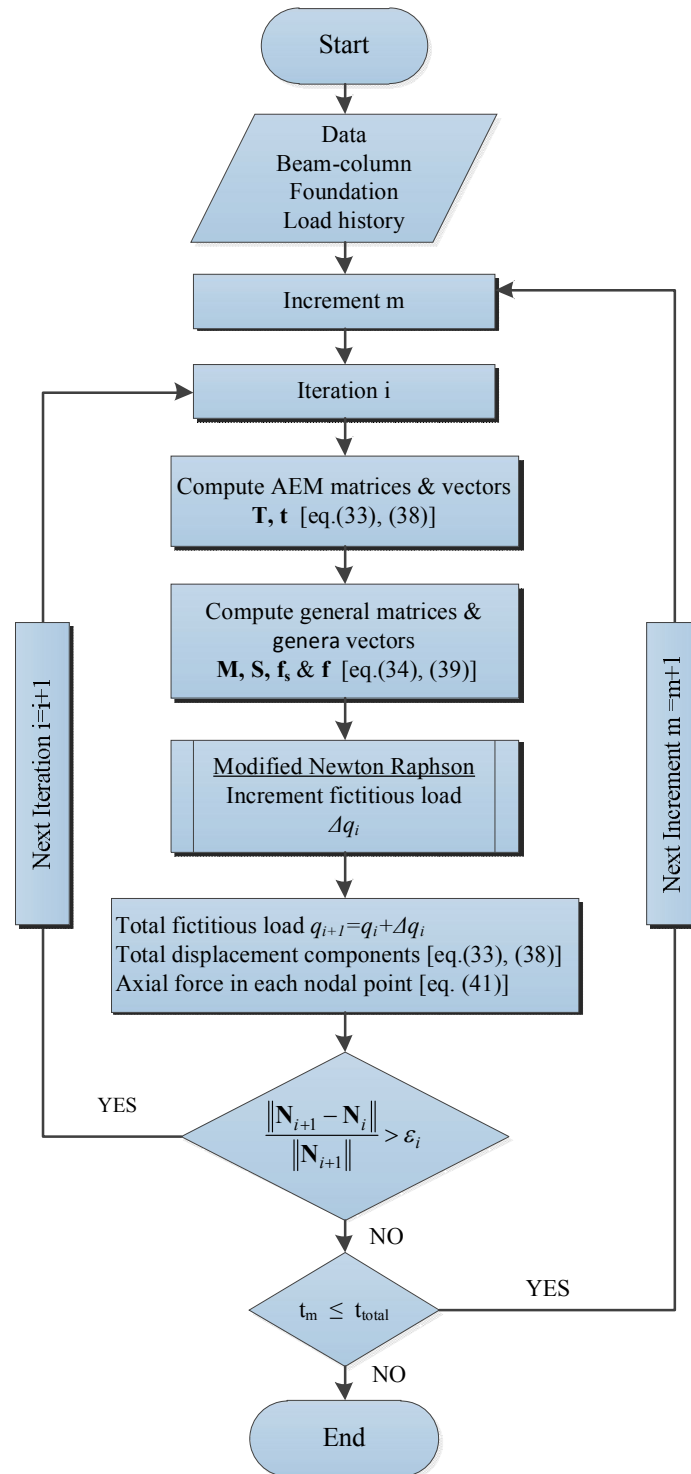
Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.32α,γ) με τις (3.24α), (3.25α) και (3.24β), (3.25β) προκύπτουν οι ακόλουθες $2L$ γραμμικές εξισώσεις, ως προς $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ και $\dot{\mathbf{d}}_1, \dot{\mathbf{d}}_2$, αντίστοιχα για $t=0$

$$\mathbf{H}_1^0 \mathbf{d}_1(0) = \bar{\mathbf{u}}_0 \quad \mathbf{H}_2^0 \mathbf{d}_2(0) = \bar{\mathbf{w}}_0 \quad (3.34\alpha, \beta)$$

$$\mathbf{H}_1^0 \dot{\mathbf{d}}_1(0) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 \quad \mathbf{H}_2^0 \dot{\mathbf{d}}_2(0) = \dot{\bar{\mathbf{w}}}_0 \quad (3.35\alpha, \beta)$$

Οι εξισώσεις (3.34α,β) σε συνδυασμό με την εξίσωση (3.28) θέτοντας $t=0$, προσδιορίζουν ένα σύστημα $2L+12$ μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων το οποίο λύνεται για τον προσδιορισμό των αρχικών συνθηκών $\mathbf{d}_1(0), \mathbf{d}_2(0)$. Ομοίως, οι εξισώσεις (3.35α,β) σε συνδυασμό με τις 12 μη γραμμικές εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν από την παράγωγο ως προς το χρόνο της εξ.(3.28) μορφώνουν ένα σύστημα $2L+12$ μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων το οποίο λύνεται για τον προσδιορισμό των αρχικών συνθηκών $\dot{\mathbf{d}}_1(0), \dot{\mathbf{d}}_2(0)$.

Οι παραπάνω αρχικές συνθήκες σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (3.28) και (3.33), μορφώνουν πρόβλημα αρχικών τιμών διαφορικών αλγεβρικών εξισώσεων (Initial Value Problem of Differential-Algebraic Equations-DAE) το οποίο μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε κατάλληλο επιλύτη. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Petzold - Gear (Bazan and Cedolin, 1991), η οποία αναπτύχθηκε για επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Συνεπώς, εισάγονται $2L+12$ νέες μεταβλητές προκειμένου να μειωθεί η τάξη του προβλήματος αρχικών τιμών. Επίσης, χρησιμοποιούνται δώδεκα διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στην παράγωγο ως προς το χρόνο της εξίσωσης (3.28), καθώς η αρχική αλγεβρική τους μορφή οδηγεί σε αδυναμία του αλγορίθμου να επιλύσει το πρόβλημα. Η παραπάνω αριθμητική διαδικασία συνοψίζεται στο διάγραμμα ροής που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4. Διάγραμμα ροής αριθμητικής διαδικασίας

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικές Εφαρμογές

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικές Εφαρμογές

4.1 Εισαγωγή

Με βάση την ανάλυση και την αριθμητική μέθοδο όπως παρουσιάστηκε στις προηγούμενες ενότητες, αναφορικά με το πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής δυναμικής ανάλυσης καμπτόμενων δοκών Timoshenko-Rayleigh μερικώς εδραζόμενων επί μη γραμμικού εδάφους, συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή σε γλώσσα Visual Fortran. Με χρήση του προγράμματος αυτού, καθώς και των προγραμμάτων Fagus και Tobem τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για τη σχεδίαση των διατομών και τον υπολογισμό των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης αντίστοιχα, μελετήθηκαν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα με πρακτικό ενδιαφέρον προκειμένου να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογών της προτεινόμενης μεθόδου. Η ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων επιβεβαιώνεται από τη σύγκριση τους με την υπάρχουσα βιβλιογραφία και με αναλύσεις σε προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων.

Κύριος σκοπός της παρούσας μελέτης είναι η διερεύνηση της επιρροής τόσο της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και των φαινομένων διατμητικής παραμόρφωσης όσο και του μη γραμμικού εδαφικού προσομοιώματος. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων παρουσιάζονται σε συγκριτικούς πίνακες και γραφικές παραστάσεις όπου επιβεβαιώνεται η σημαντικότητα των φαινομένων αυτών.

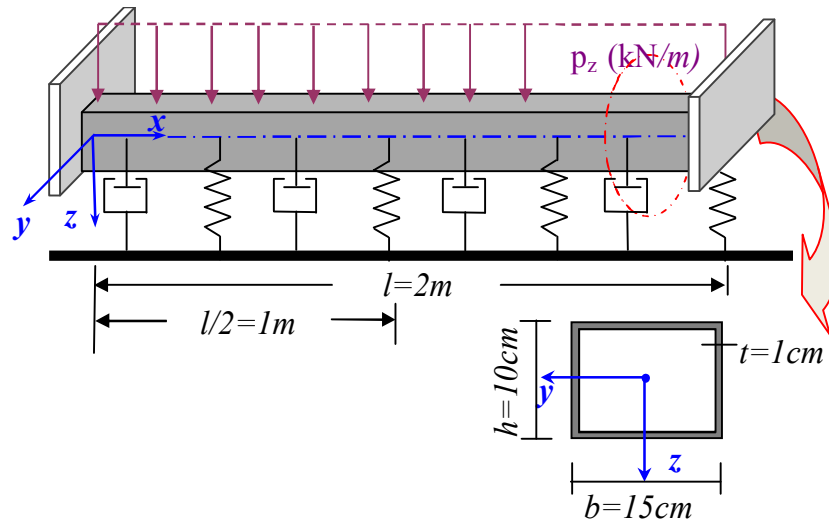
Σε όλες τις αριθμητικές εφαρμογές εφαρμόστηκε η ίδια χωρική και χρονική διακριτοποίηση επιτυγχάνοντας τον επιθυμητό βαθμό ακρίβειας. Χρησιμοποιήθηκαν 41 σταθερά στοιχεία κατά μήκος της δοκού και 300 συνοριακά στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου της διατομής, ενώ το χρονικό βήμα ορίστηκε ως $\Delta t = 1.0 \mu sec$. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων, παρουσιάζει μηδαμινή διαφορά αν πυκνωθεί το δίκτυο των στοιχείων, δηλαδή η απαιτούμενη ακρίβεια επιτυγχάνεται με σχετικά μικρό πλήθος στοιχείων.

4.2 Αριθμητικές Εφαρμογές

4.2.1 Αριθμητική Εφαρμογή 1^η

Στην πρώτη αριθμητική εφαρμογή εξετάζονται οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις αμφίπακτης δοκού, μήκους $l = 2m$, κοίλη ορθογωνική διατομή διαστάσεων $0.15 \times 0.10 \times 0.01 m$, η οποία φορτίζεται με αιφνιδίως επιβαλλόμενο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $p_z(x, t) = 1000 kN/m$, ($t \geq 0$). Η δοκός εδράζεται επί

ιξωδοελαστικού εδάφους με δυσκαμψία ελατήριων Winkler $k_{Lz} = 2000 \text{ kN} / \text{m}^2$ και συντελεστή απόσβεσης $c = 4.8 \text{ kNs} / \text{m}^2$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζονται οι ιδιότητες του υλικού, τα γεωμετρικά, αδρανειακά χαρακτηριστικά καθώς και οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης της διατομής.

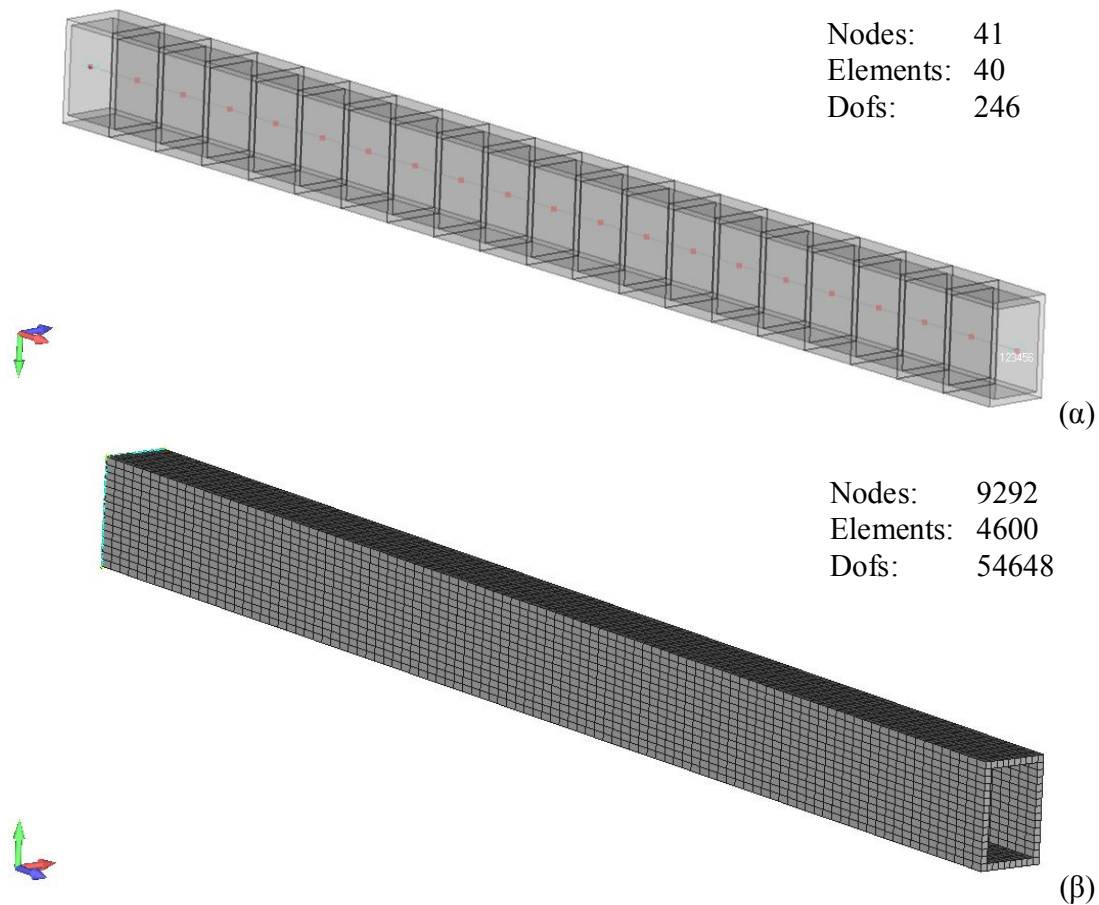


Σχήμα 4.1. Αμφίπακτη δοκός επί ιξωδοελαστικού εδάφους κοίλης ορθογωνικής διατομής, υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο p_z .

Πίνακας 4.1 Γεωμετρικά, αδρανειακά χαρακτηριστικά και συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης της διατομής της Εφαρμογής 1.

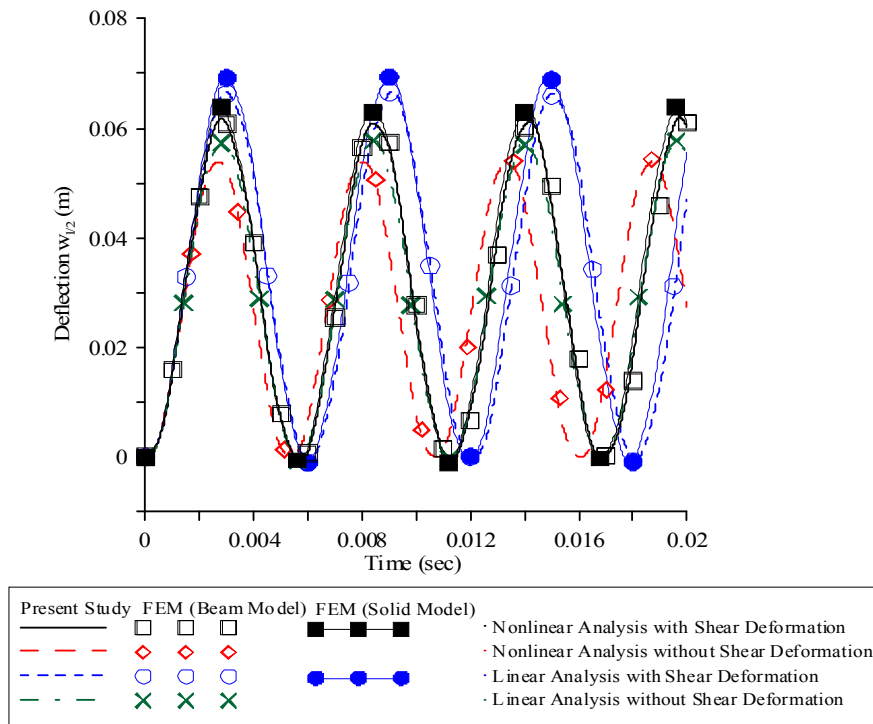
$A = 4.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	$\rho = 7.85 \text{ tn} / \text{m}^3$
$E = 210 \text{ GPa}$	$\nu = 0.3$
$I_y = 6.953 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	$I_z = 1.347 \times 10^{-5} \text{ m}^4$
$a_y = 1.78$	$a_z = 3.26$

Προκειμένου να ελέγχει η ορθότητα της αριθμητικής μεθόδου, τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αυτά που ελήφθησαν από αναλύσεις στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων NX-Nastran (2007) χρησιμοποιώντας δύο τύπους προσομοιωμάτων. Ο πρώτος τύπος βασίζεται σε δισδιάστατα στοιχεία δοκού (2D-Beam Elements) ενώ ο δεύτερος τύπος προσομοίωσης βασίζεται σε εξαεδρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας (3D-Solid Hexahedral (brick) Element). Στο Σχήμα 4.2 παρουσιάζονται οι δύο προσομοιώσεις όπως εμφανίζονται στο γραφικό περιβάλλον του προγράμματος NX-Nastran καθώς και οι αντίστοιχοι βαθμοί ελευθερίας που προκύπτουν μετά από διακριτοποίηση με 40 στοιχεία δοκού και 4600 εξαεδρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας για τους δύο τύπους προσομοίωσης, αντίστοιχα.

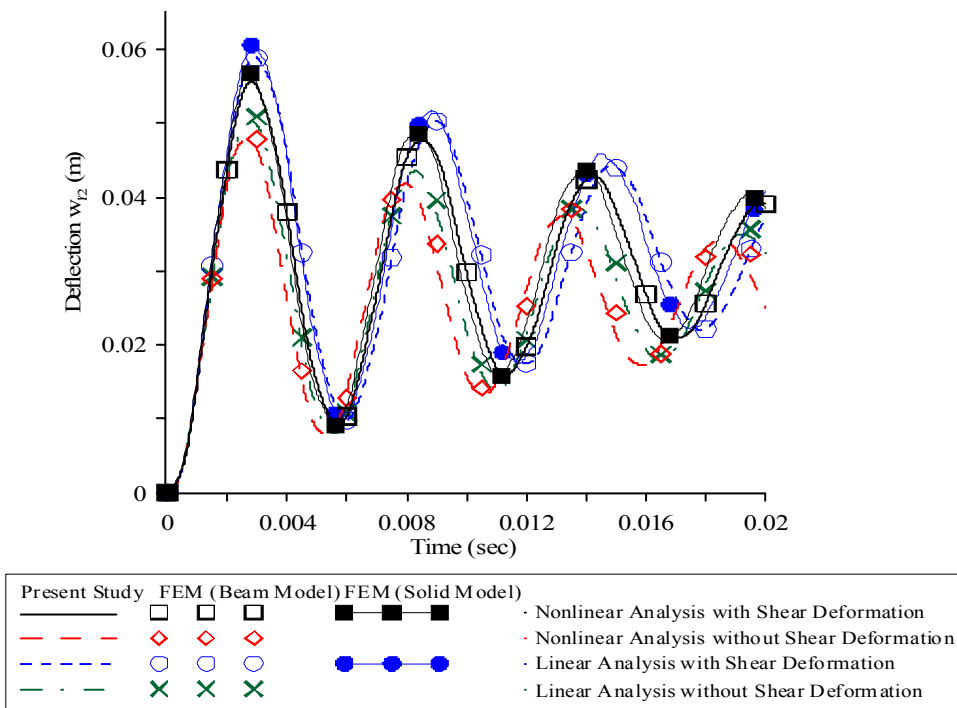


Σχήμα 4.2. Προσομοίωση στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων NX-Nastran με δισδιάστατα στοιχεία δοκού (α) και εξαεδρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας (β) καθώς και οι αντίστοιχοι βαθμοί ελευθερίας.

Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία της εγκάρσιας μετατόπισης του κέντρου βάρους της διατομής στο μέσο της δοκού $w(l/2, t)$ χωρίς έδαφος όπως προκύπτει από τη γραμμική και τη μη γραμμική ανάλυση λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας τη διατμητική παραμόρφωση, σε σχέση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις αναλύσεις με τα προαναφερθέντα προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων. Στο Σχήμα 4.4 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία της εγκάρσιας μετατόπισης του κέντρου βάρους της διατομής στο μέσο της δοκού $w(l/2, t)$ επί ιξωδοελαστικού εδάφους για τις παραπάνω αναλύσεις. Επίσης, στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζονται οι μέγιστες τιμές μετατόπισης w_{max} (cm) λαμβάνοντας υπόψη τη διατμητική παραμόρφωση της δοκού για διάφορες τιμές του κατανεμημένου φορτίου, λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας τον συντελεστή απόσβεσης του εδάφους, σε σχέση με αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις αναλύσεις με προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων. Η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου επιβεβαιώνεται στην περίπτωση τόσο γραμμικής ανάλυσης όσο και γεωμετρικά μη γραμμικής ανάλυσης.



Σχήμα 4.3. Χρονοϊστορία της εγκάρσιας μετατόπισης του μέσου $w(l/2)$ της δοκού χωρίς έδαφος της Εφαρμογής 1.



Σχήμα 4.4. Χρονοϊστορία της εγκάρσιας μετατόπισης του μέσου $w(l/2)$ της δοκού επί ιξωδοελαστικού εδάφους της Εφαρμογής 1.

Πίνακας 4.2 Μέγιστες τιμές μετατόπισης $w_{max}(cm)$ της δοκού της Εφαρμογής 1, λαμβάνοντας υπόψη τη διατμητική παραμόρφωση, για διάφορες τιμές του κατανεμημένου φορτίου.

	Παρούσα ερεύνα		FEM (Beam Model)		FEM (Solid Model)	
	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση
$p_z (kN / m)$	Χωρίς Απόσβεση ($c = 0$)					
1000	6.370	5.936	6.349	5.949	6.623	6.078
2000	12.741	10.431	12.699	10.462	13.245	10.567
3000	19.111	13.841	19.048	13.813	19.868	13.981
	Με Απόσβεση ($c = 4.8kNs / m^2$)					
1000	5.784	5.440	5.772	5.466	6.011	5.6801
2000	11.576	9.732	11.543	9.771	12.021	9.905
3000	17.354	13.063	17.315	13.038	18.031	13.127

4.2.2 Αριθμητική Εφαρμογή 2^η

Στη δεύτερη αριθμητική εφαρμογή εξετάζονται οι γραμμικές εξαναγκασμένες ταλαντώσεις απλά στηριζόμενης δοκού Timoshenko χωρίς την επιρροή του εδάφους. Η δοκός υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο κινούμενο φορτίο υπό σταθερή ταχύτητα $p_z(x,t) = P\delta(x-Vt)$, $P = 700N$, $V = 12km/h$ (δ είναι η συνάρτηση delta του Dirac). Στον Πίνακα 4.3 παρατίθενται οι ιδιότητες του υλικού, τα γεωμετρικά, αδρανειακά στοιχεία της διατομής καθώς και οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης ορθογωνικής διατομής.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει διερευνηθεί εκτενώς στη διεθνή βιβλιογραφία. Οι Esmailzadeh and Ghorashi (1995) διατύπωσαν αναλυτική λύση για το πρόβλημα αμφιέριστης δοκού Euler - Bernoulli υποβαλλόμενης είτε σε κινούμενο φορτίο είτε σε κινούμενη μάζα λαμβάνοντας υπόψη τους όρους αδρανείας τόσο της δοκού όσο και της κινούμενης μάζας ενώ οι Zehsaz *et al.* (2009) βασίζονται στη μέθοδο επαλληλίας των ιδιομορφών, μελέτησαν τη δοκό Timoshenko θεωρώντας την μάζα του κινούμενου φορτίου αμελητέα συγκρινόμενη με τη μάζα της δοκού.

Στον Πίνακα 4.4 παρατίθενται οι μέγιστες τιμές μετατόπισης $w_{max}(l/2,t)$ της δοκού και το ποσοστό απόκλισης για διάφορα σχήματα διακριτοποίησης, επιβεβαιώνοντας πως η απαιτούμενη ακρίβεια επιτυγχάνεται με σχετικά μικρό πλήθος σταθερών στοιχείων κατά μήκος της δοκού. Επιπρόσθετα, στο Σχήμα 4.5 απεικονίζεται η χρονοϊστορία μετατόπισης $w(l/2,t)$ του κέντρου βάρους της διατομής στο μέσο της δοκού, όπως

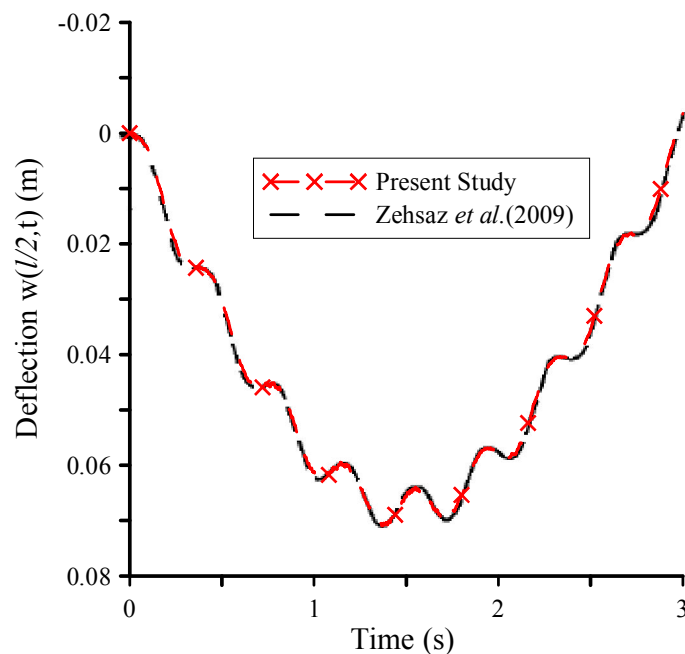
προκύπτει από τη γραμμική ανάλυση λαμβάνοντας υπόψη τη διατμητική παραμόρφωση, σε σχέση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που παρουσιάζονται από τους Zehsaz *et al.* (2009). Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων είναι προφανής η ακρίβεια της προτεινόμενης αριθμητικής μεθόδου.

Πίνακας 4.3 Γεωμετρικά, αδρανειακά χαρακτηριστικά και συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης της διατομής της Εφαρμογής 2.

$A = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	$\rho = 7.04 \text{ tn} / \text{ m}^3$
$E = 207 \text{ GPa}$	$\nu = 0.3$
$I_y = 1.04 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	$a_z = 1.2$

Πίνακας 4.4. Μέγιστες τιμές μετατόπισης $w_{\max}(l/2, t)$ της δοκού της Εφαρμογής 2, και το ποσοστό απόκλισης για διάφορα σχήματα διακριτοποίησης.

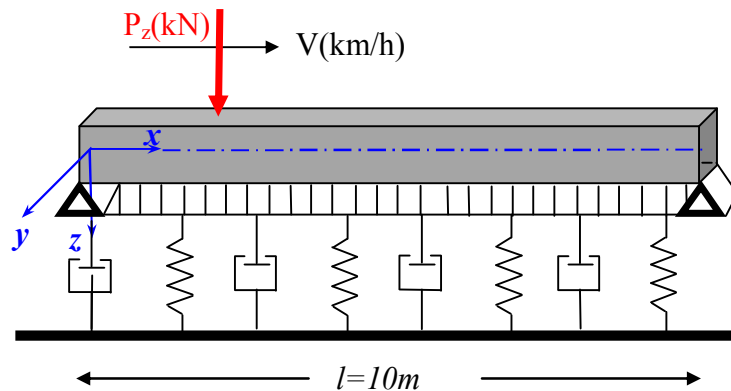
Nodal Points	11	17	21	27	31	37	41
Max Deflection (cm)	6.9578	6.9636	7.0158	7.0167	7.0617	7.0967	7.0968
Divergence (%)	1.96	1.88	1.14	1.13	0.5	0.001	-



Σχήμα 4.5 Χρονοϊστορία μετατόπισης $w(l/2, t)$ στο μέσο της δοκού της Εφαρμογής 2.

4.2.3 Αριθμητική Εφαρμογή 3^η

Στην τρίτη αριθμητική εφαρμογή εξετάζεται η δυναμική απόκριση αμφιέριστης δοκού Timoshenko-Rayleigh, η οποία υποβάλλεται σε κινούμενο συγκεντρωμένο φορτίο υπό σταθερή ταχύτητα $p_z(x,t) = P\delta(x-Vt)$, (δ είναι η συνάρτηση delta του Dirac). Η δοκός εδράζεται επί ιξωδοελαστικού Pasternak εδάφους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.6. Οι ιδιότητες του υλικού, τα γεωμετρικά, αδρανειακά στοιχεία της διατομής καθώς και τα δεδομένα φόρτισης παρατίθενται στον Πίνακα 4.5.



Σχήμα 4.6. Αμφιέριστη δοκός επί ιξωδοελαστικού Pasternak εδάφους ορθογωνικής διατομής, υποβαλλόμενη σε κινούμενο συγκεντρωμένο φορτίο.

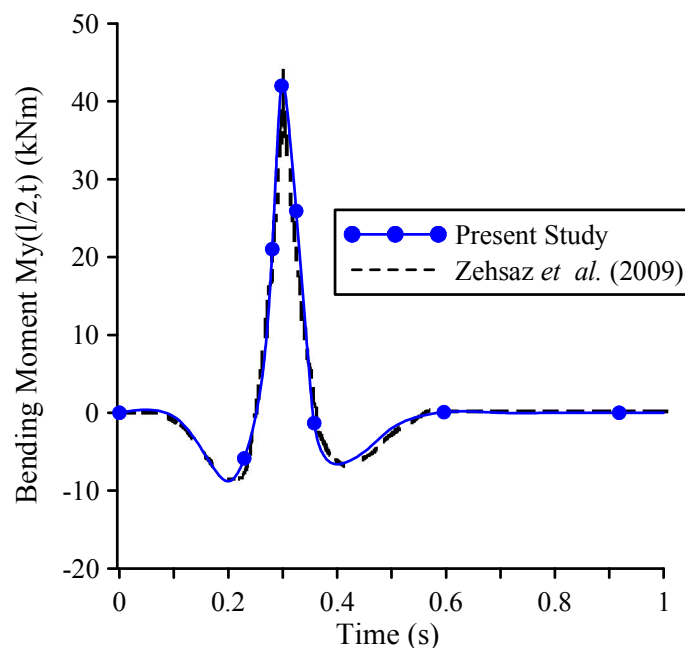
Πίνακας 4.5 Γεωμετρικά, αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής και δεδομένα φόρτισης της Εφαρμογής 3.

l (m)	10	a_z	1.176
E (GPa)	207	k_L (MPa)	20
I_y (m ⁴)	39.5×10^{-6}	k_P (kN)	69
A (m ²)	86.13×10^{-4}	c (kNs / m ²)	138
ρ (kg / m ³)	7820	P (kN)	144
ν	0.3	V (km / h)	60

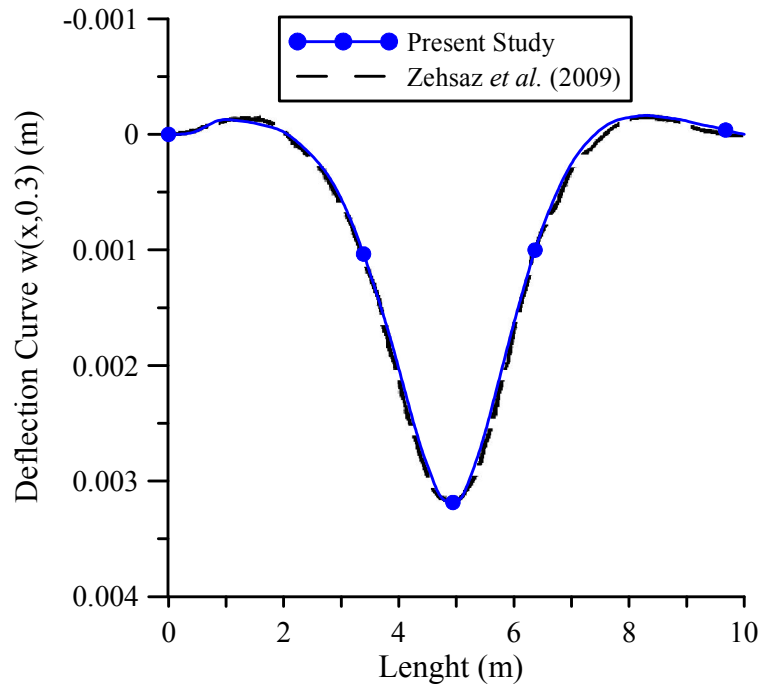
Στο Σχήμα 4.7 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία καμπτικής ροπής του κέντρου βάρους της διατομής στο μέσο της δοκού $M_y(l/2, t)$, ενώ στα Σχήματα 4.8, 4.9 παρουσιάζονται η μετατόπιση $w(x, 0.3)$ (στιγμιότυπο) και η καμπτική ροπή κατά μήκος του άξονα της δοκού τη χρονική στιγμή $t = 0.3s$, αντίστοιχα. Στα σχήματα αυτά, παρουσιάζονται

επίσης τα αποτελέσματα από την επίλυση της ίδιας δοκού επί ιξωδοελαστικού τύπου - Pasternak εδάφους όπως παρουσιάστηκαν από τους Zehsaz et al. (2009) εφαρμόζοντας την μέθοδο επαλληλίας των ιδιομορφών θεωρώντας τις δέκα πρώτες ιδιομορφές. Για το προσδιορισμό του τύπου - Pasternak εδάφους, η ελαστική διατμητική στρώση (η οποία χρησιμοποιείται στο Pasternak εδάφους) αντικαθίσταται με μια ιξώδη διατμητική στρώση ενώ τα στοιχεία ιξώδους απόσβεσης τοποθετούνται σε παράλληλη διάταξη με τα στοιχεία ελατηρίου. Τόσο από τα παραχθέντα όσο και από τα βιβλιογραφικά αποτελέσματα, διαπιστώνεται ότι η δυναμική απόκριση των διατομών της δοκού από τις οποίες έχει μόλις διέλθει το κινούμενο φορτίο προσεγγίζει το μηδέν λόγω της υψηλής τιμής του συντελεστή απόσβεσης, ενώ η επιρροή του εδάφους περιορίζει την επίδραση του κινούμενου φορτίου στην περιοχή γύρω από το σημείο εφαρμογής του σε κάθε χρονική στιγμή.

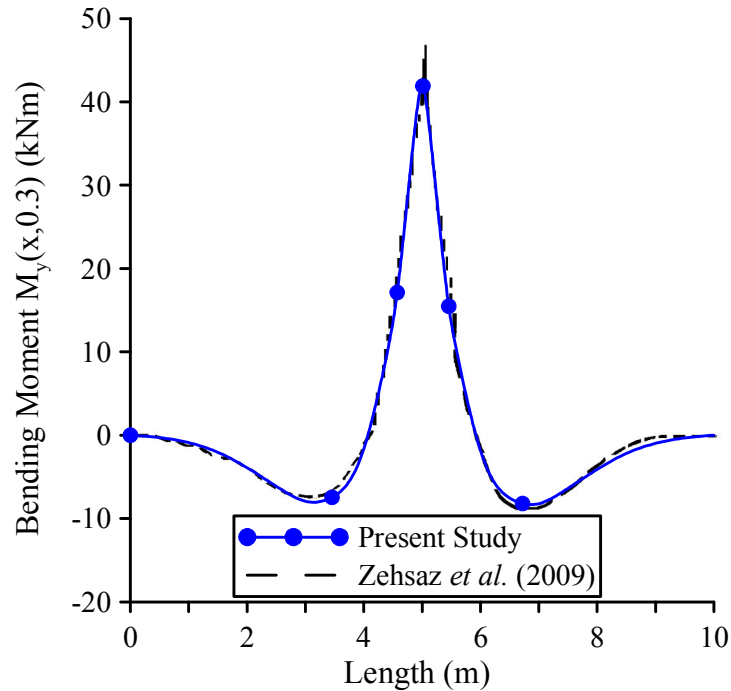
Επιπρόσθετα, στον Πίνακα 4.6 παρατίθενται οι μέγιστες τιμές μετατόπισης w_{max} όπως επίσης και οι μέγιστες τιμές μετατόπισης $w_{max,l/2}$ και καμπτικής ροπής $M_{y,max,l/2}$ στο μέσο της δοκού για διάφορες τιμές της ταχύτητας διέλευσης του φορτίου για ιξωδοελαστικό Pasternak και Winkler έδαφος, λαμβάνοντας υπόψη τη διατμητική παραμόρφωση. Από τα αποτελέσματα του πίνακα, συμπεραίνεται ότι η επιρροή της ελαστικής διατμητικής στρώσης του εδαφικού προσομοιώματος, στο συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα, είναι αμελητέα καθώς αυξάνει ελάχιστα τις εγκάρσιες μετατοπίσεις και τις καμπτικές ροπές.



Σχήμα 4.7 Χρονοϊστορία καμπτικής ροπής $M_y(l/2,t)$ στο μέσο της δοκού της Εφαρμογής 3.



Σχήμα 4.8 Μετατόπιση $w(x, 0.3)$ (στιγμιότυπο) κατά μήκος της δοκού της Εφαρμογής 3, τη χρονική στιγμή $t = 0.3s$.



Σχήμα 4.9 Καμπτική ροπή $M_y(x, 0.3)$ (στιγμιότυπο) κατά μήκος της δοκού της Εφαρμογής 3, τη χρονική στιγμή $t = 0.3s$.

Πίνακας 4.6 Μέγιστες τιμές μετατόπισης w_{\max} (mm) και μέγιστες τιμές μετατόπισης $w_{\max,l/2}$ (mm) και καμπτικής ροπής $M_{y_{\max,l/2}}$ (kNm) στο μέσο της δοκού της Εφαρμογής 3, λαμβάνοντας υπόψη τη διατμητική παραμόρφωση για διάφορες τιμές της ταχύτητας διέλευσης του φορτίου.

V (km / h)	Pasternak			Winkler		
	w_{\max}	$w_{\max,l/2}$	$M_{y_{\max,l/2}}$	w_{\max}	$w_{\max,l/2}$	$M_{y_{\max,l/2}}$
0	3.318	3.171	38.37	3.327	3.185	38.43
10	3.335	3.189	39.91	3.346	3.200	40.92
60	3.345	3.202	41.17	3.350	3.209	41.24
100	3.466	3.281	41.89	3.473	3.285	42.40
120	3.522	3.363	45.99	3.531	3.369	46.17
150	3.649	3.465	48.01	3.657	3.471	48.19

4.2.4 Αριθμητική Εφαρμογή 4^η

Προκειμένου να καταδειχθεί η σημασία της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και της επιρροής των φαινομένων διατμητικής παραμόρφωσης, ως τετάρτη εφαρμογή μελετήθηκε απλά εδραζόμενη σιδηροδρομική τροχιά πρότυπης διατομής UIC60 επί μη γραμμικού τριπαραμετρικού εδάφους με ιξώδη απόσβεση. Η τροχιά υπόκειται σε συγκεντρωμένο κινούμενο αρμονικό φορτίο $p_z(x,t) = P\delta(x-Vt)\sin(\Omega t)$, όπου P , Ω είναι το εύρος και η συχνότητα του αρμονικού φορτίου, αντίστοιχα ενώ δ είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac. Επιπρόσθετος, η τροχιά υποβάλλεται σε ομοιόμορφα καταναμημένο είτε εφελκυστικό είτε θλιπτικό αξονικό φορτίο $p_x(x,t) = \pm 2500$ (kN / m), ($t \geq 0$). Οι ιδιότητες του υλικού της τροχιάς και του εδάφους, τα γεωμετρικά, αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής καθώς και τα δεδομένα φόρτισης παρατίθενται στον Πίνακα 4.7.

Στο Σχήμα 4.10 παρουσιάζονται, η χρονοϊστορία μετατόπισης $w(l/2,t)$ και οι μέγιστες τιμές μετατόπισης του κέντρου βάρους της διατομής στο μέσο της τροχιάς, η οποία εδράζεται επί ιξωδοελαστικού Winkler εδάφους και υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο αρμονικό φορτίο στο μέσο της ($V=0$ m / s, $\Omega=100$ rad / s), όπως προκύπτουν από τη γραμμική και τη μη γραμμική ανάλυση λαμβάνοντας υπόψη την περιστροφική αδράνεια και τη διατμητική παραμόρφωση.

Προκειμένου να αναδειχθεί η σημαντική επιρροή της συχνότητας του αρμονικού φορτίου, στο Πίνακα 4.8 παρατίθενται οι μέγιστες τιμές μετατόπισης $w_{\max}(l/2,t)$ στο μέσο της τροχιάς, η οποία εδράζεται επί μη γραμμικού ιξωδοελαστικού τριπαραμετρικού εδάφους και υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο κινούμενο αρμονικό φορτίο υπό σταθερή ταχύτητα $V=100$ m / s, για διάφορες τιμές της συχνότητας διέγερσης Ω όπως

προκύπτουν από τη γραμμική και τη μη γραμμική ανάλυση τόσο στη περίπτωση εφελκυστικού όσο στη περίπτωση θλιπτικού αξονικό φορτίο.

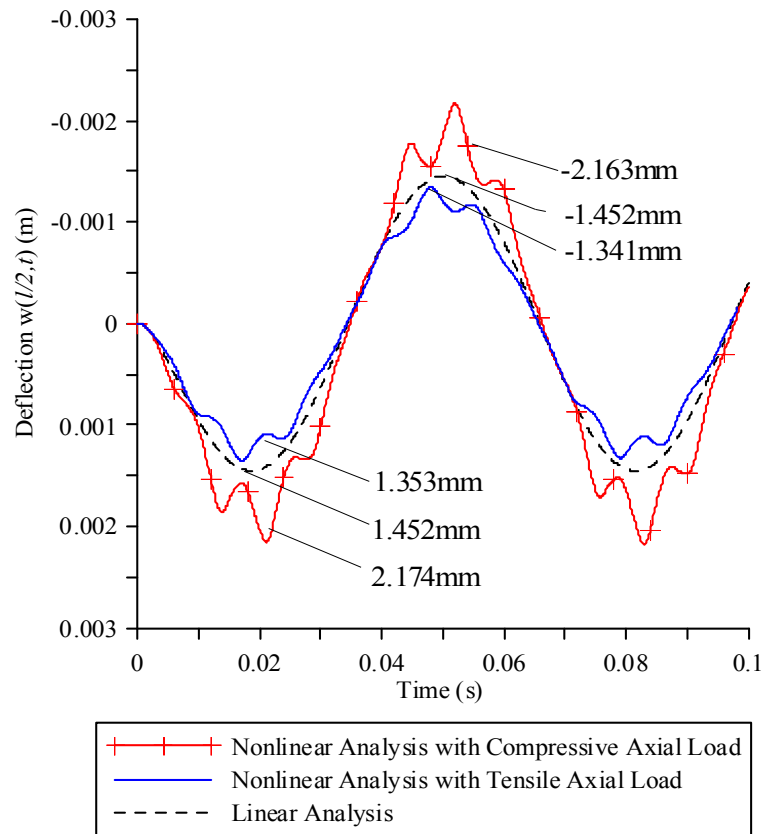
Στον Πίνακα 4.9 παρατίθενται οι μέγιστες τιμές μετατόπισης και καμπτικής ροπής της σιδηροτροχιάς για διάφορους τύπους προσομοίωσης του ιξωδοελαστικού εδάφους θεωρώντας πως το φορτίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $V=100m/s$ και συχνότητα $\Omega=400rad/s$. Τέλος, στο Σχήμα 4.11 παρουσιάζεται η μετατόπιση $w(x,0.055)$ (στιγμιότυπο) κατά μήκος του άξονα της τροχιάς τη χρονική στιγμή $t=0.055s$ καθώς επίσης και οι μέγιστες τιμές της μετατόπισης, όπως προκύπτουν από τη γραμμική και τη μη γραμμική ανάλυση για ιξωδοελαστικό έδαφος τύπου Winkler και τριπαραμετρικού τύπου. Παρατηρείται ότι η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας είναι ουσιώδης ενώ η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης είναι αμελητέα και μπορεί να αγνοηθεί στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Πίνακας 4.7 Γεωμετρικά, αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής σιδηροδρομικής τροχιάς UIC60 και δεδομένα φόρτισης, της Εφαρμογής 4.

$l(m)$	10	a_z	2.68
$E(GPa)$	210	$k_L(MPa)$	35
$G(GPa)$	77	$k_{NL}(MN/m^4)$	4×10^8
$I_y(m^4)$	30.55×10^{-6}	$k_P(kN)$	200
$A(m^2)$	76.86×10^{-4}	$c(kNs/m^2)$	145
$\rho(kg/m^3)$	7850	$P(kN)$	100

Πίνακας 4.8. Μέγιστες τιμές μετατόπισης $w_{max}(mm)$ στο μέσο της τροχιάς της Εφαρμογής 4, για διάφορες τιμές της συχνότητας διέγερσης Ω .

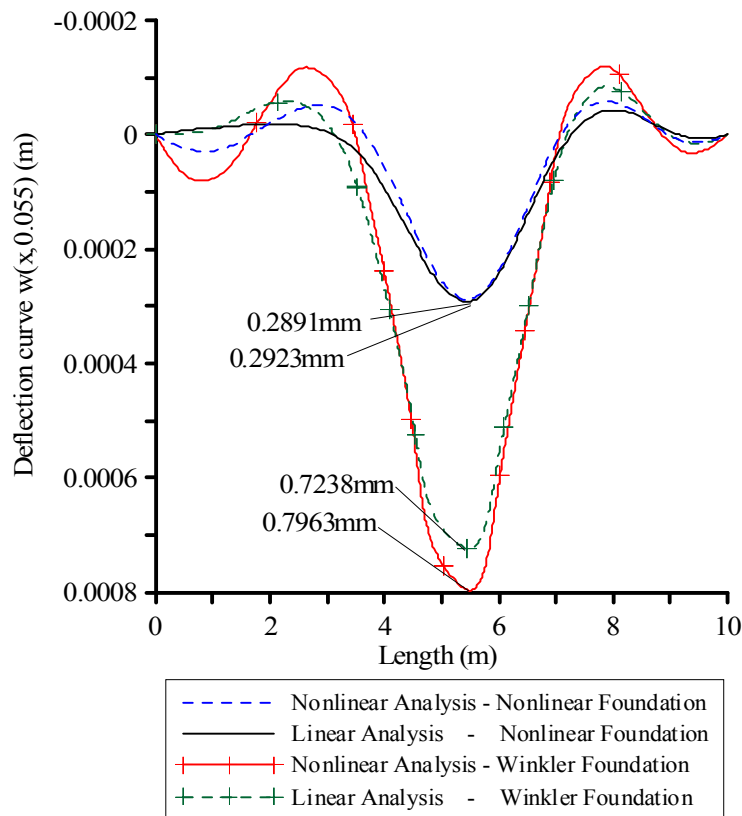
$\Omega(rad/s)$	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση Εφελκυστικό Φορτίο	Μη Γραμμική Ανάλυση Θλιπτικό Φορτίο
1.0	0.0715	0.0607	0.1009
5.0	0.2699	0.2338	0.3374
10	0.3999	0.3626	0.4693
50	0.4609	0.4445	0.5147
100	0.5690	0.5448	0.6272
200	0.5150	0.4724	0.5745
400	0.5782	0.5257	0.6589



Σχήμα 4.10 Χρονοϊστορία μετατόπισης $w(l/2,t)$ και μέγιστες τιμές μετατόπισης στο μέσο της τροχιάς της Εφαρμογής 4.

Πίνακας 4.9. Μέγιστες τιμές μετατόπισης w_{max} και καμπτικής ροπής $M_{y,max}$ της τροχιάς της Εφαρμογής 4, για διάφορους τύπους προσομοίωσης του ιξωδοελαστικού εδάφους.

w_{max} (mm)	Χωρίς Διατμητική Παραμόρφωση		Με Διατμητική Παραμόρφωση	
	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση
$M_{y,max}$ (kNm)	0.9879	1.4336	0.9973	1.4436
	15.449	22.869	15.285	22.805
Linear Winkler	0.5788	0.6859	0.5923	0.6992
	12.906	15.917	12.161	15.916
Linear and Nonlinear Winkler	0.9861	1.4235	0.9937	1.4452
	15.942	22.779	15.255	22.735
Pasternak	0.5783	0.6851	0.5820	0.6893
	12.887	15.886	12.148	15.880
Three-Parameter				



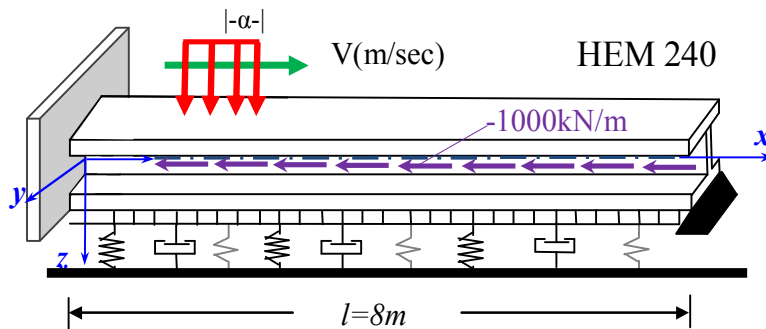
Σχήμα 4.11 Μετατόπιση $w(x, 0.055)$ (στιγμιότυπο) κατά μήκος της τροχιάς της Εφαρμογής 4, τη χρονική στιγμή $t = 0.055s$.

4.2.5 Αριθμητική Εφαρμογή 5^η

Στη πέμπτη αριθμητική εφαρμογή εξετάζεται η δυναμική απόκριση μονόπακτης (πάκτωση-κύλιση) δοκού Timoshenko-Rayleigh πρότυπης διατομής HEM240, μήκους $l = 8m$ ($E = 210GPa$, $\nu = 0.3$, $a_z = 4.344$, $\rho = 7.85tn/m^3$) που απεικονίζεται στο Σχήμα 4.12. Η δοκός εδράζεται επί ιξωδοελαστικού εδάφους με δυσκαμψία γραμμικών και μη γραμμικών ελατήριων Winkler $k_L = 1.5MN/m^2$ και $k_{NL} = 1.5GN/m^4$, αντίστοιχα δυσκαμψία διατμητικών ελατήριων Pasternak $k_P = 400kN$ και συντελεστή απόσβεσης $c(kNs/m^2)$. Η δοκός υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένη αξονική φόρτιση $p_x(x, t) = -1000kN/m$ και σε κινούμενο αρμονικό φορτίο ορθογωνικής μορφής $p_z(x, t)$ μήκους $2a$ το οποίο ορίζεται ως

$$p_z(x, t) = P \frac{H(a^2 - s^2)}{2a} \cos(\Omega t) \quad (4.1)$$

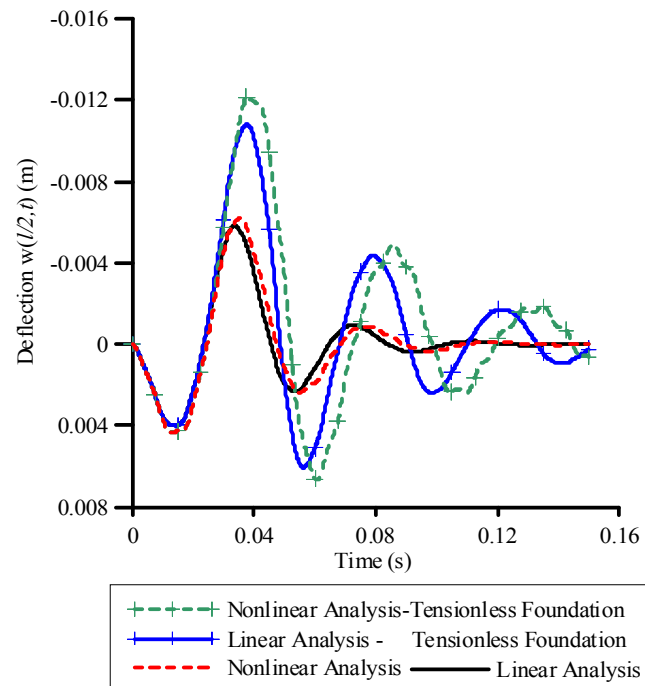
όπου P , Ω είναι το εύρος και η συχνότητα του αρμονικού φορτίου, αντίστοιχα H είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος Heaviside ενώ το διάστημα s ορίζεται ως $s = (x+a) - Vt$. Στην παρούσα αριθμητική εφαρμογή θεωρείται ότι $P = 200kN$, $\Omega = 100rad/s$ και $a = 0.381m$.



Σχήμα 4.12. Δοκός υπό αξονική-καμπτική καταπόνηση επί ιξωδοελαστικού εδάφους υποβαλλόμενη σε κινούμενο αρμονικό φορτίο ορθογωνικής μορφής και ομοιόμορφα κατανεμημένο αξονικό φορτίο.

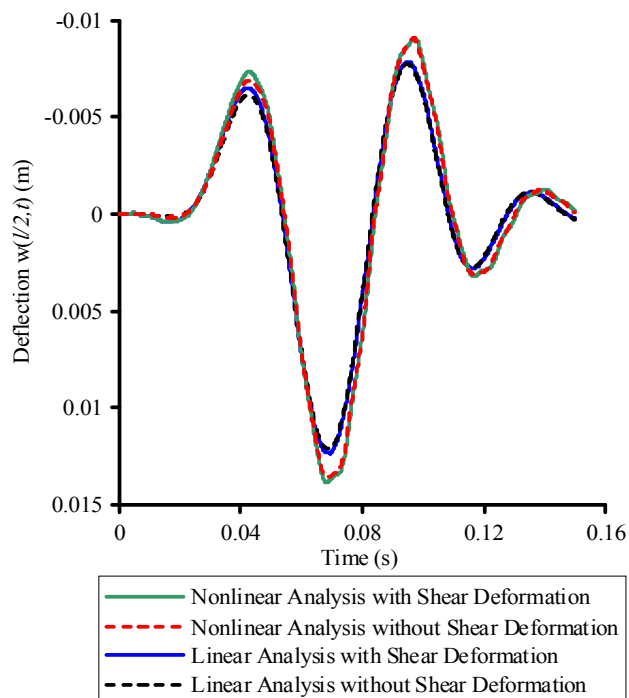
Στο Σχήμα 4.13 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία της εγκάρσιας μετατόπισης του κέντρου βάρους της διατομής στο μέσο της δοκού $w(l/2, t)$ για συντελεστή ιξώδους απόσβεσης $c = 15kNs/m^2$ και μηδενική ταχύτητα του φορτίου $V = 0m/s$ για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 0.03sec$, όπως προκύπτει από τη γραμμική και τη μη γραμμική ανάλυση λαμβάνοντας υπόψη την περιστροφική αδράνεια και τη διατμητική παραμόρφωση όπως επίσης και την μη γραμμικότητα του εδαφικού προσομοιώματος (Tensionless). Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων διαπιστώνεται η σπουδαιότητα της μη γραμμικότητας (αδυναμία παραλαβής εφελκυστικής δύναμης) της εδαφικού αντίδρασης. Στο Σχήμα 4.14 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία της εγκάρσιας μετατόπισης του κέντρου βάρους της διατομής στο μέσο της δοκού $w(l/2, t)$ για συντελεστή ιξώδους απόσβεσης $c = 15kNs/m^2$ και ταχύτητα του φορτίου $V = 80m/s$, όπως προκύπτει από τη γραμμική και τη μη γραμμική ανάλυση λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την περιστροφική αδράνεια και τη διατμητική παραμόρφωση. Η επιρροή της περιστροφικής αδράνειας και διατμητικής παραμόρφωσης είναι αμελητέες και μπορούν να αγνοηθούν στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Τέλος, στον Πίνακα 4.10 παρατίθενται οι μέγιστες τιμές μετατόπισης $w_{max}(x, t)$ της δοκού για γραμμική και μη γραμμική προσομοίωσης του ιξωδοελαστικού τριπαραμετρικού εδάφους για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης, όπως προκύπτει από τη γραμμική και τη μη γραμμική ανάλυση λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την περιστροφική αδράνεια και τη διατμητική παραμόρφωση. Από τα παραπάνω αποτελέσματα διαπιστώνεται η σπουδαιότητα τόσο της προσομοίωσης του εδάφους όσο και της γεωμετρικής μη γραμμικότητας.



Σχήμα 4.13 Χρονοϊστορία μετατόπισης $w(l/2, t)$ στο μέσο της δοκού της Εφαρμογής 5.

$$(c = 15kNs / m^2, V = 0m / s)$$



Σχήμα 4.14 Χρονοϊστορία μετατόπισης $w(l/2, t)$ στο μέσο της δοκού της Εφαρμογής 5.

$$(c = 15kNs / m^2, V = 80m / s)$$

Πίνακας 4.10. Μέγιστες τιμές μετατόπισης $w_{max}(x,t)$ της δοκού της Εφαρμογής 5, για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης.

Ιξωδοελαστικό Τριπαραμετρικό Έδαφος				
	Χωρίς Διατμητική Παραμόρφωση		Με Διατμητική Παραμόρφωση	
w_{max}	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση
$c = 0$	1.985	2.373	2.019	2.448
$c = 5$	1.678	1.966	1.715	2.023
$c = 10$	1.471	1.681	1.487	1.713
$c = 15$	1.323	1.472	1.335	1.484
$c = 20$	1.197	1.305	1.210	1.314
$c = 40$	0.8579	0.924	0.861	0.925
Μη Γραμμικό (Tensionless) Ιξωδοελαστικό Τριπαραμετρικό Έδαφος				
	Χωρίς Διατμητική Παραμόρφωση		Με Διατμητική Παραμόρφωση	
w_{max}	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση
$c = 0$	2.473	3.094	2.568	3.376
$c = 5$	2.169	2.544	2.254	2.651
$c = 10$	1.925	2.251	2.001	2.352
$c = 15$	1.726	2.014	1.794	2.104
$c = 20$	1.561	1.819	1.619	1.896
$c = 40$	1.128	1.298	1.165	1.343

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα και Ιδέες για Μελλοντική
Έρευνα

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα και Ιδέες για Μελλοντική Έρευνα

5.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία διερευνήθηκε η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας (θεωρία 2^{ης} τάξεως), των φαινομένων διατμητικής παραμόρφωσης (θεωρία δοκού Timoshenko) και της περιστροφικής αδρανείας (Rayleigh) στη δυναμική ανάλυση δοκού μονοσυμμετρικής, λεπτότοιχης ή μη, σταθερής διατομής, τυχόντος σχήματος, με πεπερασμένο αριθμό οπών, που αποτελείται από ομογενές, γραμμικά ελαστικό και ισότροπο υλικό. Η δοκός εδράζεται μερικώς επί μη γραμμικού ιξωδοελαστικού τριπαραμετρικού εδάφους λαμβάνοντας υπόψη την αδυναμία παραλαβής εφελκυστικής δύναμης (Tensionless) και υποβάλλεται σε μετρίως μεγάλες παραμορφώσεις υπό τις πλέον γενικές μη γραμμικές συνθήκες στήριξης οι οποίες μπορεί να περιλαμβάνουν ελαστικές στηρίξεις ή δεσμεύσεις. Η δοκός υποβάλλεται, κατά μήκος του κεντροβαρικού άξονα, στο συνδυασμό τυχούσας συγκεντρωμένης ή κατανεμημένης αξονικής και εγκάρσιας φόρτισης όπως επίσης και καμπτικών ροπών, ενώ παράλληλα υπόκειται σε κινούμενο με σταθερή ταχύτητα τυχαίας κατανομής αρμονικό φορτίο. Η επίλυση του προβλήματος έγινε αριθμητικά με τη Μέθοδο Αναλογικής Εξίσωσης (AEM) σε συνδυασμό με τη μέθοδο Μέσης Επιτάχυνσης για την αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης, ενώ χρησιμοποιήθηκε και η τροποποιημένη μέθοδος Newton–Raphson λόγω μη γραμμικότητας του προβλήματος. Ο προσδιορισμός των αδρανειακών στοιχείων και των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης πραγματοποιήθηκε με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων.

5.2 Συμπεράσματα

Τα κύρια συμπεράσματα που προκύπτουν από την προαναφερθείσα ανάλυση είναι τα ακόλουθα

- Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου, συγκρινόμενη με αναλυτικές και αριθμητικές λύσεις που υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία, καθώς και με εφαρμογή άλλων μεθόδων προσομοίωσης του φορέα, (τρειςδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία και πεπερασμένα στοιχεία δοκού) είναι αξιόλογη.
- Αυξημένη ακρίβεια των αποτελεσμάτων επιτυγχάνεται για μικρό αριθμό σταθερών στοιχείων διακριτοποίησης κατά μήκος της δοκού.
- Ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση του δυναμικού προβλήματος είναι μικρός, καθιστώντας την προτεινόμενη μέθοδο αποδοτική και εύχρηστη.

Ειδικότερα για τη δυναμική ανάλυση δοκών Timoshenko-Rayleigh, με επιρροή γεωμετρικών μη γραμμικότητας (μη γραμμική δυναμική ανάλυση), έγιναν οι εξής παρατηρήσεις

- Το ποσοστό επιρροής της διατμητικής παραμόρφωσης εξαρτάται από τις συντοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού.
- Η διατμητική παραμόρφωση οδήγησε σε αύξηση τόσο των μέγιστων τιμών των εγκάρσιων μετατοπίσεων όσο και των περιόδων ταλάντωσης σε γραμμική και μη γραμμική ανάλυση.
- Αύξηση του μήκους της δοκού οδηγεί σε μείωση της επιρροής της διατμητικής παραμόρφωσης στην απόκριση.
- Η περίοδος ταλάντωσης και οι μετακινήσεις της δοκού που προκύπτουν από τη μη γραμμική θεωρία, μπορεί να αποκλίνουν σημαντικά σε ορισμένες περιπτώσεις από τα αντίστοιχα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας.
- Στη περίπτωση αμφίπακτης δοκού παρατηρείται ότι, λόγω δέσμευσης της αξονικής μετακίνησης στα δύο άκρα της δοκού, αναπτύσσονται σημαντικές εφελκυστικές δυνάμεις οι οποίες απομειώνουν τα βέλη και το χρόνο ταλάντωσης που προκαλεί η εξωτερική φόρτιση.
- Στη περίπτωση που ο συνδυασμός φόρτισης και συνθηκών στήριξης δημιουργεί θλιπτική αξονική ένταση, η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδήγησε στην αύξηση του βέλους και του χρόνου ταλάντωσης.

Αναφορικά με την επιρροή και τη συμπεριφορά του μη γραμμικού ιξωδοελαστικού τριπαραμετρικού εδάφους, παρατηρήθηκε ότι

- Το έδαφος προσομοιώθηκε με γραμμικά, μη γραμμικά και διατμητικά ελατήρια καθώς επίσης και με ιξώδης αποσβεστήρες, λαμβάνοντας υπόψη την αδυναμία ανάληψης εφελκυστικών δυνάμεων (Tensionless). Κατά συνέπεια, ακόμα και στην περίπτωση γεωμετρικά γραμμικής ανάλυσης η επίλυση του συστήματος αποτελεί αμιγώς μη γραμμικό πρόβλημα.
- Η απόκριση της δοκού είναι άμεσα εξαρτώμενη από τα γραμμικά και μη γραμμικά ελατήρια Winkler και τα διατμητικά ελατήρια Pasternak.
- Αύξηση του συντελεστή ιξώδους απόσβεσης του εδάφους, οδηγεί σε μείωση του πλάτους και του χρόνου ταλάντωσης.
- Η περιοχή επαφής δοκού - εδάφους και η δυναμικής απόκρισης της δοκού εξαρτάται από την εδαφική δυσκαμψία.

Τέλος, αναφορικά με την επιρροή της μορφής και της συχνότητας διέγερσης της εξωτερικής φόρτισης, παρατηρήθηκε ότι

- Η προτεινόμενη αριθμητική μέθοδος μπορεί να αντιμετωπίσει οποιασδήποτε μορφής κινούμενου με σταθερή ταχύτητα αρμονικό φορτίου και να επεκταθεί και στην επίλυση κινούμενου φορτίου/μάζας με τυχαία ταχύτητα.
- Η ταχύτητα διέλευσης του κινούμενου αρμονικού φορτίου, επηρεάζει την δυναμική απόκριση της δοκού.
- Η απόκριση της δοκού είναι άμεσα εξαρτώμενη από την διεγείρουσα συχνότητα αλλά και η μορφή του κινούμενου αρμονικού φορτίου.

5.3 Ιδέες για Μελλοντική Έρευνα

Η μη γραμμική απόκριση δοκών επί μη γραμμικού εδάφους αποτελεί θέμα μεγάλου ενδιαφέροντος και είναι ένα από τα ζητήματα με τα οποία ασχολείται η παγκόσμια ερευνητική κοινότητα. Η ορθότερη προσομοίωση του συστήματος “δοκού - εδάφους” λαμβάνοντας υπόψη επιρροή της ανελαστικής συμπεριφοράς τόσο του υλικού της δοκού όσο και του εδάφους αποτελεί αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

Παραρτήματα

- A) **Οι Συναρτήσεις Heaviside και Dirac**
- B) **Βασικά Θεωρήματα Ολοκληρωτικού
Λογισμού**

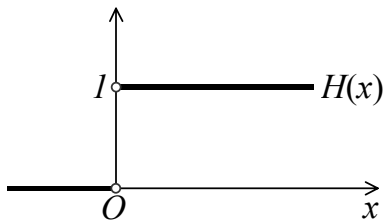
Παράρτημα Α

Οι Συναρτήσεις Heaviside και Dirac

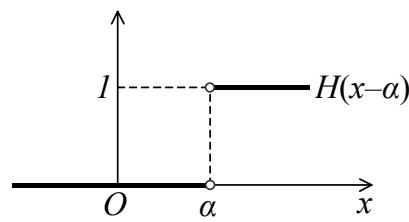
A.1 Εισαγωγή

Στη μόνωση προβλημάτων συνοριακών τιμών της Μηχανική και Φυσικής, καθώς και στη μαθηματική και αριθμητική τους αντιμετώπιση, βοηθά ιδιαίτερα η χρησιμοποίηση των συναρτήσεων Heaviside και Dirac για την περιγραφή κατανομημένων και συγκεντρωμένων φορτίων (διεγέρσεων), αντίστοιχα. Η θεωρία των μαθηματικών που μελετά τέτοιες συναρτήσεις είναι γνωστή ως θεωρία κατανομών ή γενικευμένων συναρτήσεων, βασικά στοιχεία της οποίας παρουσιάζονται στο παράρτημα αυτό.

A.2 Η συνάρτηση Heaviside



(α)



(β)

Σχήμα A.1. Μοναδιαία βηματική συνάρτηση με μηδενική (α) και μη μηδενική σταθερά a (β).

Η συνάρτηση Heaviside ή μοναδιαία βηματική (κλιμακωτή) συνάρτηση ορίζεται όπως φαίνεται στο Σχήμα A.1.α

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } x < 0 \\ 1 & \text{όταν } x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

ή γενικότερα για μη μηδενική σταθερά a ως Σχήμα A.1.β

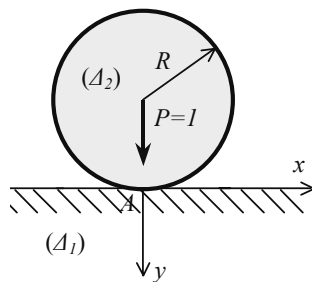
$$H(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } x < a \\ 1 & \text{όταν } x \geq a \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Σημειώνεται ότι η συνάρτηση Heaviside σχετίζεται άμεσα με τη συνάρτηση Dirac που περιγράφεται στο επόμενο εδάφιο.

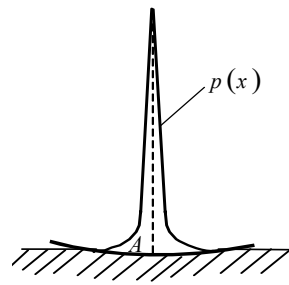
A.3 Η συνάρτηση Dirac

Σε προβλήματα μηχανικής συχνά εμφανίζονται περιπτώσεις συγκεντρωμένων φορτίων, δηλαδή δράσεων οι οποίες εντοπίζονται σε πολύ μικρή περιοχή, θεωρητικά σημειακή, του χώρου ή/και του χρόνου.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον ελαστικό δίσκο (Δ_1) σταθερού πάχους h , ο οποίος καταλαμβάνει το ημιεπίπεδο $-\infty < x < +\infty$ και $y \geq 0$. Στο ελεύθερο σύνορο του $y=0$ και συγκεκριμένα στο σημείο $x=0$, εφάπτεται ελαστικός κυκλικός δίσκος (Δ_2) με το ίδιο πάχος h και ακτίνα R . Ο δίσκος (Δ_2) φορτίζεται στο κέντρο του με κατακόρυφο συγκεντρωμένο μοναδιαίο φορτίο P , όπως φαίνεται στο Σχήμα Α.2. Λόγω της παραμορφώσεως των σωμάτων, η επαφή των δίσκων δεν θα είναι σημειακή, αλλά θα εκτείνεται σε κάποια μικρή περιοχή.



Σχήμα Α.2. Παράδειγμα συγκεντρωμένης δύναμης P .



Σχήμα Α.3. Κατανομή της δύναμης P ανά μονάδα μήκους.

Ας ονομάσουμε $p(x)$ τη συνάρτηση που παριστάνει την κατανομή της δύναμης που εφαρμόζεται στο σύνορο του δίσκου (Δ_1) ανά μονάδα μήκους x . Η συνάρτηση αυτή, η οποία πιθανότατα θα έχει τη μορφή του Σχήματος Α.3, δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων. Ισχύει ότι θα είναι αρκετά συγκεντρωμένη και ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \tag{A.3}$$

δηλαδή η συνολική δύναμη που ασκείται στο δίσκο είναι μοναδιαία. Παρακάμπτοντας το πρόβλημα του αναλυτικού υπολογισμού της συνάρτησης $p(x)$, μπορεί να υποθεθεί εκ των προτέρων μία καθορισμένη μορφή για τη συνάρτηση αυτή, όπως

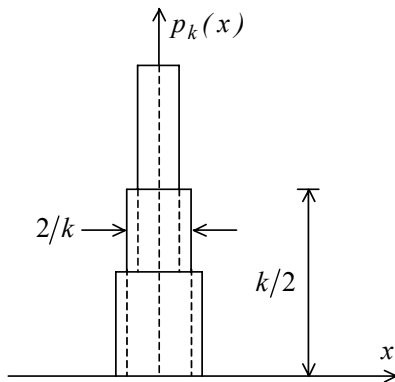
$$p_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } |x| \geq 1/k \\ k/2 & \text{όταν } |x| < 1/k \end{cases} \tag{A.4}$$

ή

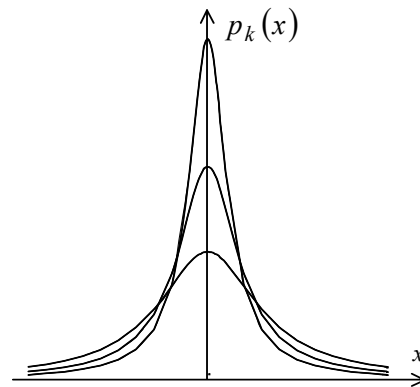
$$p_k(x) = \frac{k}{\pi(1+k^2x^2)} \tag{A.5}$$

όπου k ένας θετικός αριθμός.

Και οι δύο προαναφερθείσες μορφές της συνάρτησης $p(x)$ είναι αρκετά συγκεντρωμένες για μεγάλες τιμές του k , όπως φαίνεται στα Σχήματα Α.4 και Α.5 καθώς και στατικά ισοδύναμες με την πραγματική τιμή της $p(x)$, όπως προκύπτει αντικαθιστώντας την εξίσωση (Α.4) ή την (Α.5) στη εξίσωση (Α.3).



Σχήμα Α.4. Κατανομή συνάρτησης $p(x)$ σύμφωνα με την εξίσωση (Α.5)



Σχήμα Α.5. Κατανομή συνάρτησης $p(x)$ σύμφωνα με την εξίσωση (Α.6)

Η κατανομή $p(x)$ γίνεται πιο συγκεντρωμένη όσο λιγότερο παραμορφώσιμο είναι το υλικό των δίσκων. Αυτό εκφράζεται με αύξηση της τιμής του k στις εξισώσεις (Α.4) και (Α.5). Η οριακή περίπτωση που οι δίσκοι είναι απαραμόρφωτοι εκφράζεται για $k \rightarrow \infty$, οπότε λαμβάνεται μια ιδεατή κατανομή της δύναμης ανά μονάδα μήκους, την οποία συμβολίζουμε με $\delta(x)$ και την περιγράφουμε ως

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k(x) \tag{Α.6}$$

όπου $p_k(x)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση (Α.4) ή (Α.5). Η συνάρτηση $\delta(x)$ είναι γνωστή ως κρουστική συνάρτηση ή συνάρτηση δ του Dirac.

Τα μαθηματικά πραγματεύονται τη συνάρτηση δ στη θεωρία των γενικευμένων συναρτήσεων. Παρατίθεται κατωτέρω το μαθηματικό ορισμό της συνάρτησης δ ως γενικευμένης συνάρτησης μιας και δύο μεταβλητών και αναφέρονται μερικές ιδιότητες της, που χρησιμοποιούνται στην αριθμητική επίλυση των προβλημάτων συνοριακών τιμών της θεωρίας ελαστικότητας.

Μονοδιάστατη συνάρτηση δ καλούμε τη συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) h(x) dx = h(0) \tag{Α.7}$$

για την περίπτωση σημειακής δράσης στη θέση $x = 0$, ενώ γενικότερα για δράση στο σημείο $x = x_0$, η συνάρτηση δ ορίζεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) h(x) dx = h(x_0) \quad (\text{A.8})$$

Στις σχέσεις (A.7) και (A.8) η συνάρτηση $h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα πεπερασμένο διάστημα, το οποίο περιέχει το σημείο $x = 0$ ή $x = x_0$, αντίστοιχα και μηδενική έξω από αυτό. Η μονοδιάστατη συνάρτηση δ μπορεί να περιγραφεί και από τις σχέσεις

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } x \neq 0 \\ \infty & \text{όταν } x = 0 \end{cases} \quad (\text{A.9}\alpha)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{A.9}\beta)$$

όπου ε θετικός αριθμός. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό η συνάρτηση $\delta(x)$ είναι μηδενική παντού εκτός από το σημείο $x = 0$ όπου απειρίζεται, ενώ συγχρόνως πληρούται η σχέση (A.9β).

Η σχέση (A.7) μπορεί να προκύψει από τη σχέση (A.9β) με εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού. Έτσι, με βάση το Σχήμα Α.4 και θέτοντας $\varepsilon = 1/k$ προκύπτει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) h(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} p_\varepsilon(x) h(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\varepsilon} h(x^*) \right] 2\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [h(x^*)] = h(0) \quad (\text{A.10})$$

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι η συνάρτηση $\delta(x)$ ορίζεται και ως η παράγωγος της συνάρτησης Heaviside, δηλαδή

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx} \quad (\text{A.11})$$

Τονίζεται ότι, η συνάρτηση $\delta(x)$ όταν αναφερόμαστε στο χώρο έχει διαστάσεις $1/L$ (π.χ. m^{-1}), ενώ όταν αναφερόμαστε στο χρόνο έχει διαστάσεις $1/T$ (π.χ. sec^{-1}).

Στο χώρο των δύο διαστάσεων, ορίζεται η συνάρτηση $\delta(Q - P)$ ως

$$\iint_{\Omega} \delta(Q - P) h(Q) d\Omega_Q = h(P), \quad P(x_0, y_0), Q(x, y) \in \Omega \quad (\text{A.12})$$

για κάθε συνάρτηση h , η οποία είναι συνεχής στο επίπεδο χωρίο Ω , το οποίο περιέχει το σημείο $P(x_0, y_0)$. Η διδιάστατη συνάρτηση δ μπορεί να περιγραφεί και από τις σχέσεις

$$\delta(Q-P) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } Q \neq P \\ \infty & \text{όταν } Q = P \end{cases} \quad (\text{A.13}\alpha)$$

$$\iint_{\Omega} \delta(Q-P) d\Omega_Q = \iint_{\Omega^*} \delta(Q-P) d\Omega_Q = 1 \quad P(x_0, y_0) \in \Omega^* \subseteq \Omega \quad (\text{A.13}\beta)$$

Όπως και στην περίπτωση της μονοδιάστατης συνάρτησης $\delta(x-x_0)$, σημειώνεται ότι και η διδιάστατη συνάρτηση $\delta(Q-P)$, μπορεί να περιγραφεί ως το όριο σειράς συναρτήσεων, δηλαδή

$$\delta(Q-P) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k(r), \quad P(x_0, y_0), Q(x, y) \in \Omega \quad (\text{A.14})$$

όπου

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (\text{A.15})$$

Έτσι, για παράδειγμα τα όρια των συναρτήσεων

$$p_k(r) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } r \geq 1/k \\ k^2/\pi & \text{όταν } r < 1/k \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

και

$$p_k(r) = \frac{ke^{-kr^2}}{\pi} \quad (\text{A.17})$$

για $k \rightarrow 0$ είναι διδιάστατες συναρτήσεις δ .

Επίσης, η συνάρτηση $\delta(Q-P)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο μονοδιάστατων συναρτήσεων ως

$$\delta(Q-P) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \quad (\text{A.18})$$

Ακολούθως θα αναλύσουμε το μετασχηματισμό της συνάρτησης $\delta(Q-P)$ από το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y) σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (ξ, η) μέσω των σχέσεων μετασχηματισμού

$$x = u(\xi, \eta) \quad y = v(\xi, \eta) \quad (\text{A.19}\alpha, \beta)$$

όπου οι συναρτήσεις u και v είναι μονοσήμαντες με συνεχείς παραγώγους. Έτσι, κατά την αλλαγή των συντεταγμένων η σχέση (A.14)

$$\iint_{\Omega} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) h(x,y) dx dy = h(x_0, y_0) \quad (\text{A.20})$$

Γίνεται

$$\iint_{\Omega} \delta[u(\xi,\eta)-x_0] \delta[v(\xi,\eta)-y_0] h(u,v) |J| d\xi d\eta = h(x_0, y_0) \quad (\text{A.21})$$

όπου

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (\text{A.22})$$

είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού. Η σχέση (A.21) δηλώνει ότι η συμβολική συνάρτηση

$$\delta[u(\xi,\eta)-x_0] \delta[v(\xi,\eta)-y_0] |J| \quad (\text{A.23})$$

ορίζει την τιμή της συναρτήσεως $h(x,y)$ στο σημείο όπου $u = x_0$ και $v = y_0$, δηλαδή στο σημείο $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$. Κατόπιν τούτου προκύπτει

$$\delta[u(\xi,\eta)-x_0] \delta[v(\xi,\eta)-y_0] |J| = \delta(\xi - \xi_0) \delta(\eta - \eta_0) \quad (\text{A.24})$$

η οποία δίδει

$$\delta(x-x_0) \delta(y-y_0) = \frac{\delta(\xi - \xi_0) \delta(\eta - \eta_0)}{|J|} \quad (\text{A.25})$$

με την προϋπόθεση ότι $|J| \neq 0$, δηλαδή οι εξισώσεις (A.19) αντιστρέφονται.

Τέλος, παρουσιάζονται οι ακόλουθες ιδιότητες των παραγώγων της συνάρτησης δ .

- Για την παράγωγο m τάξης της μονοδιάστατης συνάρτησης δ ισχύει η σχέση

$$\int_a^b h(x) \frac{d^m}{dx^m} [\delta(x-x_0)] dx = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} h(x_0), \quad a < x_0 < b \quad (\text{A.26})$$

- Για την παράγωγο $m+n$ τάξης της διδιάστατης συνάρτησης δ ισχύει η σχέση
-

$$\iint_{\Omega} h(Q) \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [\delta(Q-P)] d\Omega_Q = (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} h(P) \quad (\text{A.27})$$

όπου $P(x_0, y_0), Q(x, y) \in \Omega$.

Παράρτημα Β

Βασικά Θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Β.1 Εισαγωγή

Βασική αρχή της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων είναι η αναγωγή του προβλήματος από το εσωτερικό της εξεταζόμενης περιοχής (μονοδιάστατης, διδιάστατης ή τρισδιάστατης) στο σύνορο, με αποτέλεσμα τη μείωση της διάστασης του προβλήματος και κατ' επέκταση του πλήθους των αγνώστων κατά μια τάξη. Στην αναγωγή αυτή σημαντικό ρόλο παίζουν βασικά θεωρήματα του ολοκληρωτικού λογισμού, ορισμένα εκ των οποίων παρουσιάζονται στο παράρτημα αυτό.

Β.2 Θεώρημα Gauss–Green

Το πεδιακό ολοκλήρωμα της παραγώγου μιας συνάρτησης σε τυχαίο χωρίο συνδέεται με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης αυτής στο σύνορο του πεδίου, με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss–Green το οποίο αποτελεί θεμελιώδη σχέση της Συνοριακών Στοιχείων. Το πεδίο μπορεί να είναι διδιάστατο ή τρισδιάστατο. Για την εξαγωγή της εν λόγω σχέσης στις δύο διαστάσεις θεωρείται το επίπεδο χωρίο Ω του Σχήματος Β.1. Το χωρίο Ω μπορεί να είναι απλής ή πολλαπλής συνοχής, δηλαδή μπορεί να περιλαμβάνει πεπερασμένο πλήθος οπών, ενώ το σύνορο του Γ είναι τμηματικά λείο, δηλαδή μπορεί να περιέχει πεπερασμένο αριθμό γωνιών. Θα διατυπωθεί η προαναφερθείσα σχέση πρώτα για την παράγωγο της συναρτήσεως f ως προς x .

Κάθε πεδιακό ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως διπλό ολοκλήρωμα, πρώτα ως προς x και κατόπιν ως προς y . Έτσι προκύπτει

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} d\Omega = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} \{f(x_2) - f(x_1)\} dy \quad (\text{B.1})$$

όπου

$$x_1 = x_1(y) \quad (\text{B.2}\alpha)$$

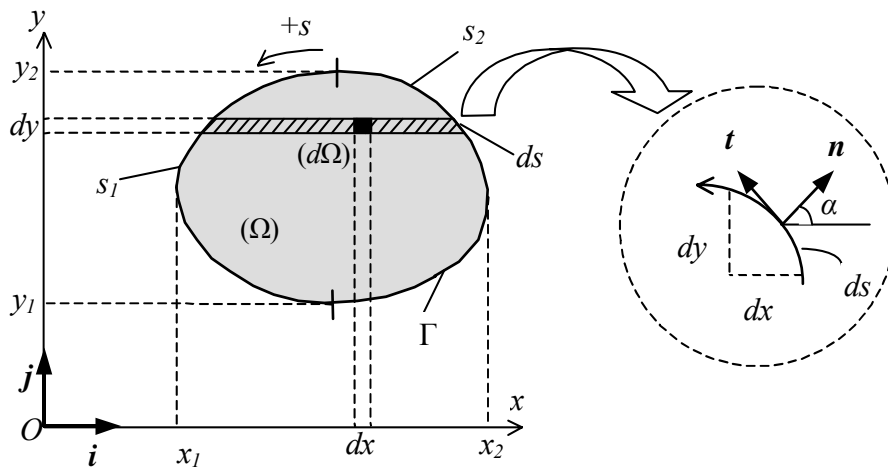
$$x_2 = x_2(y) \quad (\text{B.2}\beta)$$

Από το Σχήμα Β.1 (λεπτομέρεια) με απλή γεωμετρία και παρατηρώντας ότι για $ds > 0$ συνεπάγεται $dx < 0$ προκύπτει

$$n_x = \cos a = \frac{dy}{ds} \rightarrow dy = n_x ds \quad (\text{B.3}\alpha)$$

$$n_y = \sin a = -\frac{dx}{ds} \rightarrow dx = -n_y ds \tag{B.3\beta}$$

όπου n_x, n_y είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης, δηλαδή οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{n} , καθέτου προς το σύνορο Γ . Τονίζεται ότι, το σύνορο Γ (ή $\partial\Omega$) διαγράφεται θετικά όταν κινούμενοι πάνω σε αυτό αφήνουμε διαρκώς το χωρίο Ω αριστερά, δηλαδή όταν το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} στοχεύει προς το εξωτερικό του χωρίου Ω . Έτσι, σε χωρίο απλής συνοχής η θετική φορά διαγραφής είναι η αντιωρολογιακή, ενώ σε χωρίο πολλαπλής συνοχής, η θετική φορά διαγραφής είναι η αντιωρολογιακή για το εξωτερικό σύνορο και η ωρολογιακή για τα εσωτερικά.



Σχήμα Β.1. Επίπεδο χωρίο Ω απλής συνοχής.

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι, πολλαπλά συνεκτικά χωρία μετατρέπονται πάντα σε απλά συνεκτικά με κατάλληλες νοητές τομές (όχι κατ' ανάγκη ευθείες) όπως αυτές φαίνονται στο Σχήμα Β.2, με την προϋπόθεση τα απλά συνεκτικά χωρία που δημιουργούνται να μην είναι επικαλυπτόμενα, δηλαδή οι τομές δεν πρέπει να εισέρχονται στο εσωτερικό των οπών [Παντελίδης, 1991]. Τονίζεται ότι, στις νοητές τομές τα επικαμπύλια ολοκληρώματα αλληλοαναιρούνται.

Με τη βοήθεια των σχέσεων (B.3) το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (B.1) γράφεται

$$\int_{y_1}^{y_2} \{f(x_2) - f(x_1)\} dy = \int_{s_2} f(x_2) n_x ds - \int_{s_1} f(x_1) n_x ds \tag{B.4}$$

Στην ανωτέρω σχέση το τόξο s_1 διαγράφεται κατά την αρνητική φορά (ωρολογιακή), όταν το y μεταβάλλεται από το y_1 στο y_2 . Επομένως, θεωρώντας ενιαία φορά για το s , η σχέση (B.4), άρα και η (B.1), μπορεί να γραφεί ως

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} d\Omega = \int_{\Gamma} f n_x ds \tag{B.5}$$

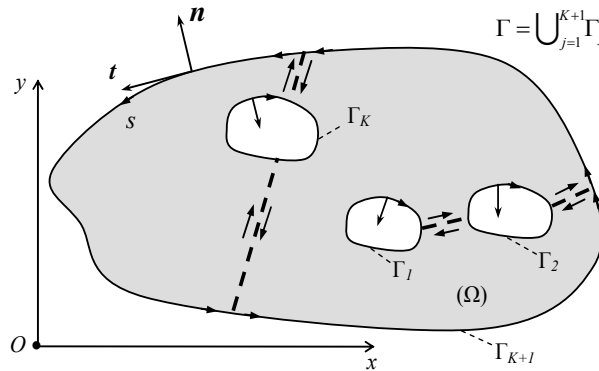
ενώ εναλλάσσοντας τον ρόλο των x και y στην ανωτέρω σχέση προκύπτει

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} d\Omega = \int_{\Gamma} f n_y ds \tag{B.6}$$

Θεωρώντας δύο συναρτήσεις $f = f(x, y)$ και $g = g(x, y)$ οι σχέσεις (B.5) και (B.6) για τη συνάρτηση (fg) δίδουν

$$\iint_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x} d\Omega = -\iint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} f g n_x ds \tag{B.7}$$

$$\iint_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial y} d\Omega = -\iint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma} f g n_y ds \tag{B.8}$$



Σχήμα Β.2. Μετατροπή χωρίου πολλαπλής συνοχής σε απλής.

Οι ανωτέρω σχέσεις (B.7) και (B.8) εκφράζουν την παραγοντική ολοκλήρωση στις δύο διαστάσεις και είναι γνωστές ως θεώρημα του Gauss-Green.

B.3 Θεώρημα Απόκλισης του Gauss

Το θεώρημα απόκλισης του Gauss προκύπτει ως εφαρμογή του θεωρήματος Gauss-Green. Έστω διανυσματικό πεδίο η ένταση του οποίου περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{u} = u_x(x, y)\mathbf{i} + u_y(x, y)\mathbf{j} \tag{B.9}$$

όπου $u_x(x, y), u_y(x, y)$ οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου και \mathbf{i}, \mathbf{j} τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x, y αντίστοιχα. Με τη βοήθεια των εξισώσεων (B.5) και (B.6) προκύπτει

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (u_x n_x + u_y n_y) ds \quad (\text{B.10})$$

ή αναφερόμενοι σε σύστημα συντεταγμένων $O(x_1, x_2)$ και χρησιμοποιώντας γραφή με χρήση δεικτών

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (u_i n_i) ds \quad (i = 1, 2) \quad (\text{B.11})$$

Ονομάζεται απόκλιση $\text{div} \mathbf{u}$ της διανυσματικής συνάρτησης \mathbf{u} σε εσωτερικό σημείο του χωρίου τη βαθμωτή συνάρτηση που ορίζεται από το παρακάτω εσωτερικό γινόμενο

$$\text{div} \mathbf{u} = \nabla \bullet \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (\text{B.12})$$

όπου

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 \quad (\text{B.13})$$

είναι ο τελεστής ανάδελτα ή Hamilton. Σημειώνεται ότι, το ∇ είναι διαφορικός και διανυσματικός τελεστής και επομένως οι ιδιότητες του ακολουθούν τους κανόνες του διαφορικού και διανυσματικού λογισμού. Το εσωτερικό γινόμενο $(\mathbf{u} \bullet \mathbf{n})$ της διανυσματικής συνάρτησης \mathbf{u} επί του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} ονομάζεται ροή της διανυσματικής συνάρτησης σε σημείο του συνόρου. Έτσι, οι σχέσεις (B.10) και (B.11) γράφονται ως

$$\iint_{\Omega} \text{div} \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} ds \quad (\text{B.14})$$

Η σχέση (B.14) που συνδέει τη συνολική απόκλιση με τη συνολική ροή αποτελεί το θεώρημα απόκλισης του Gauss.

B.4 Δεύτερη Ταυτότητα Green για τον Αρμονικό Τελεστή

Έστω οι συναρτήσεις $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$, οι οποίες είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του χωρίου Ω και μία φορά στο σύνορο του Γ . Εφαρμόζοντας τη σχέση (B.7) για $g = v$ και $f = \frac{\partial u}{\partial x}$, τη σχέση (B.8) για $g = v$ και $f = \frac{\partial u}{\partial y}$ και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\iint_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\Omega = - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} v \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) ds \quad (\text{B.15})$$

Ο διαφορικός τελεστής Laplace ή αρμονικός τελεστής ορίζεται ως

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{B.16})$$

ενώ ο τελεστής που παράγει την παράγωγο συνάρτησης κατά την κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} ως

$$\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla = (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right) = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{B.17})$$

Έτσι, με τη βοήθεια των σχέσεων (B.16) και (B.17) η σχέση (B.15) γράφεται

$$\iint_{\Omega} v \nabla^2 u d\Omega = - \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (\text{B.18})$$

Ομοίως, εφαρμόζοντας τη σχέση (B.7) για $g = u, f = \frac{\partial v}{\partial x}$, τη σχέση (B.8) για $g = u, f = \frac{\partial v}{\partial y}$ και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\iint_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) d\Omega = - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} u \left(\frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) ds \quad (\text{B.19})$$

ή με τη βοήθεια των τελεστών Hamilton και Laplace προκύπτει

$$\iint_{\Omega} u \nabla^2 v d\Omega = - \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} ds \quad (\text{B.20})$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (B.18) και (B.20) κατά μέλη σχηματίζεται η

$$\iint_{\Omega} (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (\text{B.12})$$

Η σχέση (B.21) είναι γνωστή ως δεύτερη ταυτότητα του Green για τον αρμονικό τελεστή ή ως ταυτότητα αμοιβαιότητας του Green.

Βιβλιογραφία

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Ι, R. 1999, *Τεχνική Μηχανική Γ*, Εκδόσεις ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, Αθήνα.
- Γκαζέτας .Γ. 2007, *Εδαφοδυναμική*, Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα.
- Γκαζέτας .Γ. 2006, *Εδαφομηχαμική*, Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα.
- Κατσιακαδέλης, Ι.Θ., 1999. *Συνοριακά Στοιχεία στην Επιστήμη του Μηχανικού: Θεωρία και Εφαρμογές*, Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα.
- Κατσιακαδέλης, Ι. Θ. 2002, *Δυναμική των Κατασκευών, Τόμος Ι ΕΜΠ Εκδόσεις ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ*, Αθήνα.
- Κατσιακαδέλης, Ι. Θ. 2002, *Δυναμική των Κατασκευών, Τόμος ΙΙ ΕΜΠ Εκδόσεις ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ*, Αθήνα.
- Κουνάδης, Α. Ν. 1989, *Δυναμική των Συνεχών Ελαστικών Συστημάτων, Τόμος Ι (Γραμμικοί φορείς)*, Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα.
- Κουνάδης, Α. Ν. 1997, *Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας, Β έκδοση, Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα.*
- Κουνάδης, Α. Ν. 2004, *Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας – Με Στοιχεία από την Θεωρία Καταστροφών*, Β' Έκδοση, Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα.
- Παπαδρακάκης Μ. 2001, *Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- Ansari, M. Esmailzadeh, E. Younesian, D. 2010. Internal-External Resonance of Beams on Non-Linear Viscoelastic Foundation Traversed by Moving Load, *Nonlinear Dyn.*, 61, 163–182.
- Armenakas, A., 2003. *Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*, NTUA, Athens.
- Bodhu M., 2007 *Soil Mechanics and Foundation, 2nd Edition*, Wiley
- Chang, S. Y. 2004. Studies of Newmark Method for Solving Nonlinear Systems: (I) Basic Analysis. *Journal of the Chinese Institute of Engineer*, 27(5): 651-662.
- Chang, T.P. Liu, Y.N. 1996. Dynamic Finite Element Analysis of a Nonlinear Beam Subjected to a Moving Load, *International Journal of Solids and Structures*, 33(12), 1673-1688.

- Chen J.S., Chen, Y.K. 2011. Steady State and Stability of a Beam on a Damped Tensionless Foundation Under a Moving Load, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46, 180-185.
- Chen, W. Q., Lu, C. F. & Bian, Z. G. 2004. A Mixed Method for Bending and Free Vibration of Beams Resting on a Pasternak Elastic Foundation. *Applied Mathematical Modeling* 28: 877–890.
- Chen, Y.H. Huang, Y.H. Shih, C.T. 2001. Response of an Infinite Timoshenko Beam on a Viscoelastic Foundation to a Harmonic Moving Load, *Journal of Sound and Vibration*, 241(5), 809-824.
- Choros, J., Adams, GG. 1979. A Steadily Moving Load on an Elastic Beam Resting on a Tensionless Winkler Subgrade, *J. Appl. Mech, ASME*, 46(1), 175-80.
- Chou, S.I., 1993. Determination of Centers of Flexure Using the Boundary Element Method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12, 321–324.
- Cowper, G.R. 1966. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *Journal of Applied Mechanics ASME* 33(2): 335-340.
- Dahlberg, T. 2002, *Dynamic Interaction Between Train and Nonlinear Railway Model, Proc. of Fifth Int. Conf. on Structural Dynamics*, Munich.
- De Rosa, M.A. 1995. Free Vibrations of Timoshenko Beams on Two-Parameter Elastic Foundation. *Computers & Structure*, 57(1): 151-156.
- Dimitrovová, Z. 2010. A General Procedure for the Dynamic Analysis of Finite and Infinite Beams on Piece-Wise Homogeneous Foundation under Moving Loads, *Journal of Sound and Vibration*, 329, 2635-2653.
- El-Mously M. 1999. Fundamental Frequencies of Timoshenko Beams Mounted on Pasternak Foundation. *Journal of Sound and Vibration* 228(2): 452-457.
- Friedman, Z. and Kosmatka, J.B., 2000. Torsion and Flexure of a Prismatic Isotropic Beam Using the Boundary Element Method, *Computers and Structures* 74, 479–494.
- Friswell, M.I., Adhikari, S. & Lei, Y. 2007. Vibration analysis of beams with non-local foundation using the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 71(11): 1365–1386.
- Frýba, L. 1999. *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads*, Thomas Telford, Londo.
- Fung, Y.C., 1965. *Foundations of Solid Mechanics*, Englewood Cliff, Prentice-Hall, New Jersey
- Goodier, J.N., 1944. A Theorem on the Shearing Stress in Beams with Applications to Multicellular Sections, *Journal of Aeronautical Sciences*, 11, 272–280.
- Gruttmann, F. and Wagner, W., 2001. Shear Correction Factors in Timoshenko's Beam Theory for Arbitrary Shaped Cross-Sections, *Computational Mechanics*, 27, 199–207.
- Gruttmann, F., Sauer, R. and Wagner, W., 1999. Shear Stresses in Prismatic Beams with Arbitrary Cross-Sections, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, 865–889.

- Haberl, G. and Och, F. (1974). “A Finite–Element Solution for the Torsional Rigidity and the Shear Center of Arbitrary Cross Section”, *Z. Flugwiss* 22(4), 115-119.
- Hartmann, F. and Katz, C., 2004. *Structural Analysis with Finite Elements*, Springer–Verlag, Berlin.
- Hetenyi, M. 1946. *Beams on Elastic Foundation*, The University of Michigan Press, Ann Arbor
- Hetenyi, M. 1966. Beams and Plates on Elastic Foundations and Related Problems. *Applied Mechanics Reviews* 19: 95-102.
- Hutchinson, J.R. 2001. Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory. *ASME Journal of Applied Mechanics* 68: 87–92.
- Inglis, C.E. 1934. *A Mathematical Treatise on Vibration in Railway Bridges*, The Cambridge University Press, Cambridge.
- Isaacson, E. & Keller, H.B. 1966. *Analysis of Numerical Methods*. New York: John Wiley and Sons.
- Kaneko, T., 1975. On Timoshenko’s correction for shear in vibrating beams, *Journal of Physics*, D 8, 1927–1936.
- Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S., 2003. Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi–layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of Solids and Structures*, 40 (6), 1525–1546.
- Karamanlidis, D. & Prakash, V. 1988. Buckling and Vibration Analysis of Flexible Beams Resting on an Elastic Half-Space. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16: 1103-1114.
- Kargarnovin M.H. and Younesian, D. 2004. Dynamics of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation Under Moving Load, *Mechanics Research Communications*, 31, 713–723.
- Kargarnovin, M.H., Younesian, D., Thompson, D.J, Jones, C.J.C. 2005. Response of Beams on Nonlinear Viscoelastic Foundations to Harmonic Moving Loads *Computers & Structures*, 83, 1865-1877.
- Katsikadelis, J.T. 2002. The Analog Equation Method. A Boundary-Only Integral Equation Method for Nonlinear Static and Dynamic Problems in General Bodies. *Theoretical and Applied Mechanics* 27: 13-38.
- Kim, S.-M. & Cho, Y.-H. 2006. Vibration and Dynamic Buckling of Shear Beam-Columns on Elastic Foundation Under Moving Harmonic Loads. *International Journal of Solids and Structures* 43: 393–412.
- Kim, S.M. Cho, Y.H. 2006. Vibration and Dynamic Buckling of Shear Beam-Columns on Elastic Foundation Under Moving Harmonic Loads, *International Journal of Solids and Structures*, 43, 393-412.
- Koloušek, V. 1967, 1956, 1961. *Dynamics of Civil Engineering Structures-partI: General Problems*, second ed.-partII: *Continuous Beams and Frame Systems*, second ed.-partIII: *Selected Topics*, SNTL, Prague, (inCzech). *Dynamics in Engineering Structures*, Academia, Prague, Butterworth, London, (1973).

- Kramer.S.L. *Geotechnical Earthquake Engineering*, Prentice Hall.
- Krylov, A.N. 1905. Über die Erzwungenen Schwingungen von Gleichformigen Elastischen Stäben (About Forced Vibrations of Prismatic Elastic Beams), *Mathematische Annalen*, 61, 211–234, (in German)
- Ladevéze, P., Simmonds, J.G., 1998. New Concepts for Linear Beam Theory with Arbitrary Geometry and Loading, *European Journal of Mechanics*, A/Solids 17(3), 377–402.
- Lai, Y.C., Ting, B.Y., Lee, W.S.& Becker, W.R. 1992. Dynamic response of beams on elastic foundation. *International Journal for Structural Engineering* 118: 853-858.
- Lewandowski, R. 1989. Nonlinear Free Vibrations of Multispan Beams on Elastic Supports. *Computers & Structures* 32(2): 305-312.
- Love, A.E.H., 1952. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New York.
- Lowan, A.N. 1935. On Transverse Oscillations of Beams Under The Action of Moving Variable Loads, *Philosophical Magazine*, Series7, 19 (127),708–715.
- Mason, W.E. and Herrmann, L.R., 1968. Elastic Shear Analysis of General Prismatic Beams, *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 94(EM4), 965–983.
- Matsunaga, H. 1999. Vibration and Buckling of Deep Beam-Columns on Two-Parameters Elastic Foundation. *Journal of Sound and Vibration* 228(2): 359-376.
- Mokos V.G. and Sapountzakis E.J., 2005. A BEM Solution to Transverse Shear Loading of Composite Beams, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.42, pp. 3261–3287.
- Mokos V.G. and Sapountzakis E.J., 2005. A BEM Solution to Transverse Shear Stresses in Composite Steel – Concrete Beams, *Proc. of the Eurosteel Conference on Steel and Composite Structures*, Maastricht, The Netherlands, June 8-10, 4.3, pp.67-74.
- Mokos V.G. and Sapountzakis E.J., 2005. Shear Deformation Coefficients in Composite Beams by BEM, *Proc. of the 5th GRACM International Congress on Computational Mechanics*, Limassol, Cyprus, 29 June – 1 July, pp.135-142.
- Muscolino, G. and Palmeri, A. 2007. Response of Beams Resting on Viscoelastically Damped Foundation to Moving Oscillators, *International Journal of Solids and Structures*, 44, 1317–1336.
- Muskhelishvili, N.I., 1963. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, P. Noordhoff Ltd.
- Nouri T. and Gay D., 1994. Shear stresses in orthotropic composite beams, *International Journal of Engineering Science*, 32, 1647–1667.
- Osgood, W.R., 1943. The Centre of Shear again, *Journal of Applied Mechanics*, 10(2), A–62–A–64.
- Pai, P.F. and Schulz, M.J., 1999. Shear correction factors and an energy–consistent beam theory, *International Journal of Solids and Structures*, 36, 1523–1540.

- Pasternak, P.L. 1954. Fundamentals of a New Method of Analyzing Structures on an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Moduli, *Gosudarstvennoe Izdatelstro Liberaturi po Stroitelstvui Arkhitekture, Moscow*, (in Russian)
- Pilkey, W.D., 2002. *Analysis and Design of Elastic Beams – Computational Methods*, Wiley, New York.
- Puchegger, S., Bauer, S., Loidl, D., Kromp, K. and Peterlik, H., 2003. Experimental validation of the shear correction factor, *Journal of Sound and Vibration*, 261, 177–184.
- Rades, M. 1972. Dynamic Analysis of an Inertial Foundation Model. *Int. J. Solids Structures* 8: 1353-1372.
- Ramm E., Hofmann T.J. 1995. *Stabtragwerke*, Berlin: Der Ingenieurbau, Ed.G. Mehlhorn, Band Baustatik/Baudynamik, Ernst & Sohn.
- Reddy, J.N., 1989. On refined computational models of composite laminates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27, 361–382.
- Reissner, E. and Tsai, W.T., 1972. On the Determination of the Centers of Twist and of Shear for Cylindrical Shell Beams, *Journal of Applied Mechanics*, 39, 1098–1102.
- Renton, J.D., 1991. Generalized Beam Theory Applied to Shear Stiffness, *International Journal of Solids and Structures*, 27, 1955–1967.
- Renton, J.D., 1997. A Note on the Form of the Shear Coefficient, *International Journal of Solids and Structures*, 34, 1681–1685.
- Rothert H., Gensichen V. 1987. *Nichtlineare Stabstatik*. Berlin: Springer-Verlag.
- Sapountzakis E.J. & Katsikadelis J.T. 2000. Analysis of Plates Reinforced with Beams. *Computational Mechanics* 26: 66-74.
- Sapountzakis E.J. and Kampitsis A.E. 2009. Nonlinear Dynamic Analysis of Timoshenko Beam-Columns Partially Supported on Elastic Foundation, *Proc. of the CMAS Computational Modeling and Advanced Simulations*, June 30 July 3, Slovak University of Technology, Slovakia
- Sapountzakis E.J. and Kampitsis A.E. 2009. Nonlinear Dynamic Analysis of Timoshenko Beam-Columns Partially Supported on Nonlinear Elastic Foundation Including Shear Deformation Effect, *Proc. of the 3rd Greece – Japan Workshop on Seismic Design, Observation and Retrofit of Foundations September 22-23, Santorin, Greece*.
- Sapountzakis, E.J. & Dourakopoulos, J.A. 2009. Nonlinear Dynamic Analysis of Timoshenko Beams by BEM. Part I. *Nonlinear Dyn.* DOI 10.1007/s11071-009-9481-4
- Sapountzakis, E.J. & Dourakopoulos, J.A. 2009. Nonlinear Dynamic Analysis of Timoshenko Beams by BEM. Part II. *Nonlinear Dyn.* DOI 10.1007/s11071-009-9479-y
- Sapountzakis, E.J. & Mokos, V.G. 2005. A BEM Solution to Transverse Shear Loading of Beams. *Computational Mechanics* 36: 384-397.

- Schramm, U., Kitis, L., Kang, W. & Pilkey, W. D. 1994. On the Shear Deformation Coefficient in Beam Theory. *Finite Elements in Analysis and Design* 16: 141–162.
- Schramm, U., Rubenchik, V. & Pilkey, W. D. 1997. Beam Stiffness Matrix Based on the Elasticity Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40: 211–232.
- SectionBuilder, 2002. *Section Builder and Designer for Concrete, Steel and Composite Sections*, User's Manual and Technical Reference, Version 8.1, Computer and Structures, Inc., Berkeley, California, USA.
- Sokolnikoff, I.S., 1956. *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw–Hill, New York.
- Stephen, N.G. 1980. Timoshenko's Shear Coefficient from a Beam Subjected to Gravity Loading. *ASME Journal of Applied Mechanics* 47: 121–127.
- Sun, L. 2001. A Closed-Form Solution of a Bernoulli-Euler Beam on a Viscoelastic Foundation Under Harmonic Line Loads, *Journal of Sound and Vibration*, 242 (4), 619-627.
- Sun, L. 2001. Dynamic Displacement Response of Beam Type Structures to Moving Line Loads, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 8869-8878.
- Sun, L. 2002. A Closed-Form Solution of Beam on Viscoelastic Subgrade Subjected to Moving Loads, *Computers and Structures*, 80, 1–8.
- Thambiratnam, D. & Zhuge, Y. 1996. Free vibration analysis of beams on elastic foundation. *Computer & Structures* 60(6): 971-980.
- Thambiratnam, D. and Zhuge, Y. 1996. Dynamic Analysis of Beams on an Elastic Foundation Subjected to Moving Loads, *Journal of Sound and Vibration*, 198(2), 149-169
- Thomson, W. T. 1981. *Theory of Vibration with Applications*. EnglewoodCliffs Prentice Hall.
- Timoshenko, S., Young, D.H. & Weaver, W. 1974. *Vibration problems in Engineering*. New York: fourth ed Wiley.
- Timoshenko, S.P. & Goodier, J.N. 1984. *Theory of Elasticity*. New York. 3rd edn: McGraw-Hill.
- Timoshenko, S.P. 1911. Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe (Forced Vibrations of Prismatic Beams), *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 59 (2) 163–203 (in German).
- Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., 1984. *Theory of Elasticity*, 3rd edn, McGraw–Hill, New York.
- Timoshenko, S.P., 1921. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 41, 744–746.
- Timoshenko, S.P., 1922. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section, *Philosophical Magazine*. 43, 125–131.

- Tolf, G. (1985). St. Venant Bending of an Orthotropic Beam, *Composite Structures*, 4, 1-14.
- Touratier, M., 1992. A generalization of shear deformation theories for axisymmetric multi-layered shells. *International Journal of Solids and Structures*, 29 (11), 1379–1399.
- Touratier, M., 1992. A refined theory of laminated shallow shells. *International Journal of Solids and Structures*, 29 (11), 1401–1415.
- Trefftz, E., 1935. Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken, *ZAMM*, 15, 220–225.
- Wang, T.M. & Stephens, J. E. 1977. Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation. *Journal of Sound and Vibration* 51(2): 149-155.
- Weinstein, A., 1947. The Centre of Shear and the Centre of Twist, *Quarterly of Applied Mathematics*, 5(1), 97–99.
- Weitsman, Y. 1971. Onset of Separation Between a Beam and a Tensionless Elastic Foundation Under a Moving Load, *Int. J. mech. Sci.* 13, 707-711.
- Wunderlich, W. and Pilkey, W.D., 2003. *Mechanics of Structures: Variational and Computational Methods*, 2nd ed., CRC Press LLC, Washington D.C.
- Yokoyama, T. 1988. Parametric Instability of Timoshenko Beams Resting on an Elastic Foundation. *Computers & Structures* 28(2): 207-216.
- Younesianand, D. and Kargarnovin, M.H. 2009. Response of the Beams on Random Pasternak Foundations Subjected to Harmonic Moving Loads, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 23, 3013-3023.
- Zehsaz, M. Sadeghi, M.H. Ziaei Asl, A. 2009. Dynamic Response of Railway Under a Moving Load, *Journal of Applied Sciences*, 9(8), 1474-1481.
- Zhang, Y. Q., Lu, Y., Wanga, S. L. & Liu, X. 2008. Vibration and buckling of a double-beam system under compressive axial loading. *Journal of Sound and Vibration* 318: 341–352.