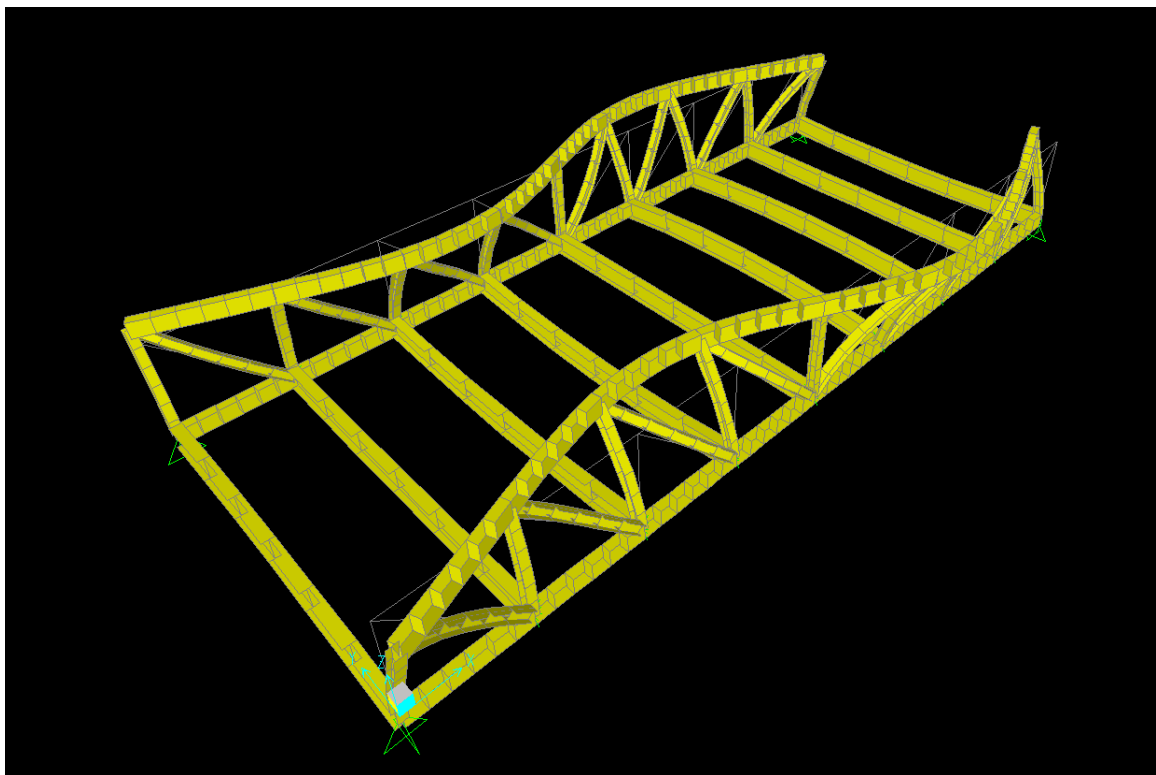


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Δ.Π.Μ.Σ. Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση Κατασκευών
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΘΛΙΒΟΜΕΝΟΥ ΠΕΛΜΑΤΟΣ
ΔΙΚΤΥΩΤΗΣ ΓΕΦΥΡΑΣ



ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΡΑΥΤΟΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΑΘΗΝΑ ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2011

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι γέφυρες θεωρούνται από τις πλέον εντυπωσιακές κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού αλλά ταυτόχρονα έχουν πολλές ιδιομορφίες και λεπτά σημεία στην ανάλυση, στη διαστασιολόγηση και στην ανέγερσή τους, γεγονός που καθιστά απαραίτητες κάποιες ιδιαίτερες γνώσεις. Η απαίτηση προσομοίωσης και ανάλυσης τέτοιων φορέων με όσο το δυνατόν ρεαλιστικότερο τρόπο είναι πρωτεύουσας σημασίας γιατί οι ίδιες οι κατασκευές είναι εξέχουσας σπουδαιότητας για την οικονομική και κοινωνική ζωή μιας χώρας. Σε πολλές γέφυρες ο φορέας τους αποτελείται από ραβδωτά στοιχεία που έχουν αυξημένη αντοχή αλλά λόγω των διαστάσεων τους καθοριστικό ρόλο στο δομοστατικό σχεδιασμό τους παίζουν κυρίως οι μετατοπίσεις-παραμορφώσεις και λιγότερο η ανελαστική συμπεριφορά των υλικών.

Το πρόβλημα προσδιορισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού για την περίπτωση του άνω θλιβόμενου πέλματος μια δικτυωτής ή ολόσωμης γέφυρας κάτω διάβασης, μελετήθηκε από πολλούς ερευνητές όπως ο Timoshenko και ο Bleich, εφαρμόζοντας τη θεωρία γραμμικής ευστάθειας, και τελικά κατέληξαν σε διάφορες προσεγγιστικές μεθόδους για τον υπολογισμό του. Ο αντίστοιχος έλεγχος ευστάθειας έχει αποδειχθεί αναγκαίος για γέφυρες κάτω διάβασης εξαιτίας της απουσίας άνω αντιανέμου συνδέσμου. Σε αυτού του είδους τις γέφυρες, όπου το θλιβόμενο άνω πέλμα δεν διαθέτει πλευρική στήριξη, ο πλευρικός λυγισμός αποτρέπεται μέσω της ελαστικής ακαμψίας που προσφέρουν τα ανοιχτά άνω ημιπλαίσια. Καθένα από αυτά αποτελείται από την διαδοκίδα και τους δύο ορθοστάτες εκατέρωθεν της διαδοκίδας.

Μια θεωρητική λύση αυτού του προβλήματος δόθηκε αρχικά από τον Timoshenko, στην προσέγγιση του οποίου βασίζονται και οι μετέπειτα διατάξεις του Ευρωκώδικα 3 - Μέρος 2. Η φιλοσοφία των δύο μεθόδων βασίζεται στη θεώρηση ότι το άνω πέλμα της κύριας δοκού (είτε δικτυωτής, είτε ολόσωμης), προσομοιάζεται με μια αμφιαρθρωτή δοκό, εδραζόμενη επί ελαστικού εδάφους, με πλήρως άκαμπτες τις ακραίες στηρίξεις και με την αξονική θλιπτική καταπόνηση να ακολουθεί μια παραβολική κατανομή.

Αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η παραμετρική διερεύνηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού άνω θλιβόμενου πέλματος για την περίπτωση μιας δικτυωτής γέφυρας κάτω διάβασης χωρίς άνω αντιανέμο σύνδεσμο.

Η πεζογέφυρα έχει μήκος (σταθερό) 24,00 μέτρα, άνοιγμα 10 μέτρων και θα εξεταστούν 4 περιπτώσεις στις οποίες η γεωμετρία της πεζογέφυρας είναι η εξής,

- ◆ υπάρχουν 4 φατνώματα, μήκους 6,0 m το καθένα και το ύψος της γέφυρας είναι $h=4,0$ m.
- ◆ υπάρχουν 6 φατνώματα, μήκους 4,0 m το καθένα και το ύψος της γέφυρας είναι $h=4,0$ m.
- ◆ υπάρχουν 8 φατνώματα, μήκους 3,0 m το καθένα και το ύψος της γέφυρας είναι $h=3,0$ m.
- ◆ υπάρχουν 10 φατνώματα, μήκους 2,40 m το καθένα και το ύψος της γέφυρας είναι $h=2,40$ m.

Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις θα προσδιορίσουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού βάσει,

- της μεθόδου του Timoshenko
- των διατάξεων του Ευρωκώδικα 3 - Μέρος 2
- της ανάλυσης του προγράμματος SAP2000 μέσω πεπερασμένων στοιχείων για,
 - ένα δυσδιάστατο μοντέλο και
 - ένα τρισδιάστατο μοντέλο της πεζογέφυρας

Τέλος θα συγκριθούν τα αποτελέσματα των αναλύσεων που θα προκύψουν από κάθε μεθοδολογία και θα διερευνηθούν οι μεταβολές λόγω αλλαγών στη γεωμετρία του μοντέλου καθώς και οι περιπτώσεις σύγκλισης ή απόκλισης μεταξύ των μεθόδων αλλά και με την πραγματικότητα (την οποία θεωρούμε ότι προσεγγίζει καλύτερα η ανάλυση του τρισδιάστατου μοντέλου μέσω του λογισμικού ανάλυσης).

ABSTRACT

The bridges are considered as the most impressive structures of Civil Engineers but simultaneously there are also many difficulties during their analysis, design and building. For this reason a specialized knowledge is being demanded. Moreover the demand for a more realistic modeling and analysis of these structures is very significant because the structures themselves are very important for the economical and social life of every country. In many bridges the framework consists of truss elements. Although they have high strength, due to their dimensions, it is more important during their structural design, their deflection rather than the inelastic behavior of the materials.

The problem of determining the critical load of the upper cord section in steel truss bridges was studied in general by numerous researchers, like Timoshenko and Bleich, by applying a linear stability theory and various approximate methods of calculation have been formulated. The corresponding stability check has been proven necessary for bottom-pass steel truss bridges due to the absence of lateral bracing systems on the upper cord. In this type of bridges, where the distressed upper cords do not allocate any lateral bracing, lateral buckling is prevented via the elastic stiffness of cross frames, each one of which consists from a cross girder and the vertical members of the left and the right main truss beams.

A theoretical solution for this problem has been first developed by Timoshenko and the relative provisions in Eurocode 3- Part 2 are based on this approach. In this approach, the upper-cord section of the main girder is considered as a simply supported beam resting on elastic foundation where the developed axial compression force follows a parabolic distribution.

The purpose of this Thesis is a parametric study of the critical buckling analysis of the upper cord section of a bottom-pass steel truss bridge without lateral bracing.

The pedestrian bridge has (constant) 24,0 m length, 10,0 m width and it will be examined four cases of the bridge with different geometry,

- ◆ there are 4 panels, 6,0 m length each one and the bridge is 4,0 m high.
- ◆ there are 6 panels, 4,0 m length each one and the bridge is 4,0 m high
- ◆ there are 8 panels, 3,0 m length each one and the bridge is 3,0 m high
- ◆ there are 10 panels, 2,40 m length each one and the bridge is 2,40 m high

For all the above cases we will determine the critical buckling load, according to,

- Timoshenko 's approach
- Eurocode 3 – Part 2 provisions
- the analysis of the software SAP2000 (FEM analysis) for,
 - a 2D model
 - a 3D model of the bridge

Finally we will compare the results of the above analysis from every approach and we will examine the variations due to the differences in geometry. We will examine also the cases where the different methods converge or incline to each other and to the reality (it is considered that the analysis of the 3D model via the analysis program is more close to the behaviour of the real structure).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΕΛΩΝ

1.1	Αντοχή μελών	7
1.2	Ευστάθεια μεμονωμένων μελών	7
1.3	Λυγισμός ράβδων κατά Euler	11
1.4	Καμπτικός λυγισμός λόγω αξονικής θλιπτικής δύναμης	14
1.5	Στρεπτικός λυγισμός	21
1.6	Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός	22
1.6.1	Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη	22
1.6.2	Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη και κάμψη	23
1.6.3	Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό κάμψη περί τον ισχυρό άξονα	23
1.7	Λυγισμός θλιβόμενου πέλματος	31
1.7.1	Μέθοδος Timoshenko	32
1.7.2	Ευρωκώδικας 3	37
1.7.2.1	Η θλιπτική δύναμη είναι σταθερή κατά μήκος του πέλματος	39
1.7.2.2	Η θλιπτική δύναμη δεν είναι σταθερή κατά μήκος του πέλματος	40
1.7.3	Αναλυτική μέθοδος	41
1.7.4	Πεπερασμένα στοιχεία	44

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΦΟΡΕΑ

2.1	Εισαγωγή	47
2.2	Υλικό	47
2.3	Φορέας	48
2.4	Διατομές	48
2.5	Συνδεσμολογία – Έδραση	55
2.6	Φορτία	57
2.7	Ακαμψία ημιπλαισίων	58
2.8	Γραμμική ανάλυση λυγισμού	60

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

3.1	Γενικά	65
3.2	4 Φατνώματα	67
3.3	6 Φατνώματα	80
3.4	8 Φατνώματα	91
3.5	10 Φατνώματα	102

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

4.1	Συμπεράσματα	117
-----	--------------	-----

<u>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ</u>	123
--------------------	-----

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>	125
---------------------	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΕΛΩΝ

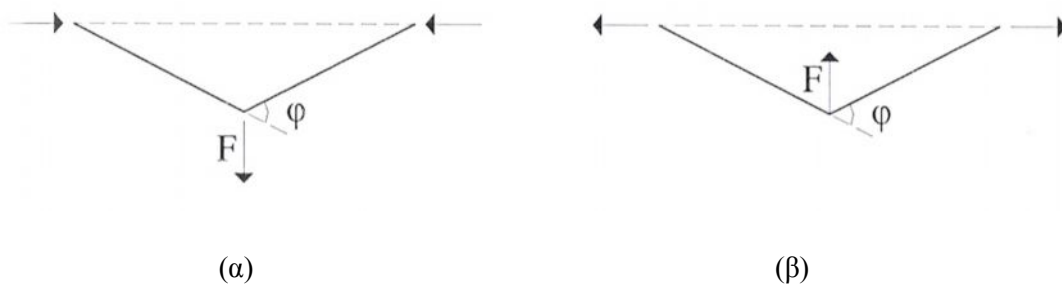
1.1 Αντοχή μελών

Όπως είναι γνωστό σε πολλές περιπτώσεις η αντοχή της διατομής καθορίζει και την αντοχή ολόκληρου του μέλους (π.χ. εφελκυσμός, κάμψη πλευρικά προστατευμένων δοκών κ.λ.π.). Σε πολλές άλλες όμως περιπτώσεις διαπιστώνεται ότι υπάρχει στάθμη της εξωτερικής φόρτισης, για την οποία το μέλος χάνει την ευστάθειά του, αποκτά δηλαδή να ισορροπήσει, πέραν της αρχικής και σε μία γειτονική θέση ισορροπίας (λυγισμός). Η στάθμη αυτή φόρτισης εκφράζει πρακτικά, την εξάντληση της αντοχής του μέλους και παρατηρείται γενικά, χαμηλότερα ή πολύ χαμηλότερα από τη στάθμη της φόρτισης, η οποία εξαντλεί την αντοχή της διατομής του.

Για τον αναλυτικό προσδιορισμό της στάθμης λυγισμού εξετάζεται η ισορροπία του μέλους στην παραμορφωμένη κατάσταση, αμέσως μετά το λυγισμό. Η μικρότερη στάθμη φόρτισης για την οποία η ισορροπία αυτή είναι εφικτή αποτελεί τη φόρτιση λυγισμού, η οποία, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, εκφράζει την αντοχή του μέλους. Το φορτίο λυγισμού μπορεί να προσδιοριστεί επίσης πειραματικά. Στις μεταλλικές κατασκευές ειδικότερα μια τέτοια ανάλυση είναι αυξημένης σημασίας δεδομένου ότι σε πολλές περιπτώσεις η αντοχή των μελών δεν προκύπτει από την αντοχή των διατομών τους, αλλά απαιτείται η θεώρηση ολόκληρου του μέλους ως στοιχείο αναφοράς.

1.2 Ευστάθεια μεμονωμένων μελών

Εξετάζοντας ένα σύστημα στην παραμορφωμένη κατάσταση, παρατηρούμε ότι δημιουργούνται δυνάμεις οι οποίες είτε δρουν κατά την φορά των παραμορφώσεων, συμβάλλοντας στην περαιτέρω αύξηση τους, είτε δρουν αντίθετα στην φορά των παραμορφώσεων, συμβάλλοντας στη μείωσή τους (Σχ.1.1). Οι πρώτες δυνάμεις ονομάζονται δυνάμεις εκτροπής ενώ οι δεύτερες δυνάμεις επαναφοράς.



Σχ. 1.1 Δυνάμεις εκτροπής (α) και δυνάμεις επαναφοράς (β)

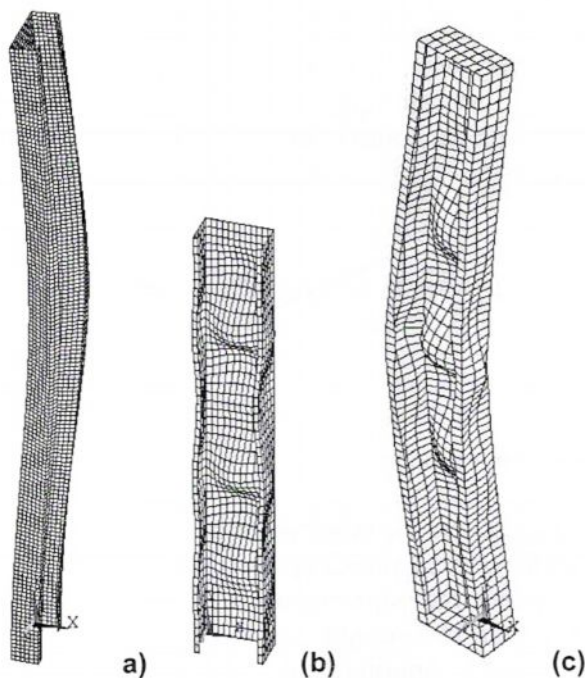
Ευστάθεια, ή απώλεια αυτής, είναι ένας γενικός όρος που αφορά την απώλεια ισορροπίας λόγω εμφάνισης κατά την παραμόρφωση δυνάμεων εκτροπής. Αυτό σημαίνει ότι ο φορέας, το μέλος κ.λ.π. μετά από μια τυχαία παραμόρφωση, δεν επανέρχονται από μόνα τους στην προηγούμενη θέση ισορροπίας. Παρατηρούμε ότι πρόβλημα ευστάθειας παρουσιάζεται στην περίπτωση που έχουμε θλιβόμενα μέλη.

Η συμπεριφορά των θλιβομένων ράβδων επηρεάζεται ως γνωστόν σημαντικά από φαινόμενα αστάθειας, τα οποία χαρακτηρίζονται από το γενικό όρο <<λυγισμός>>. Οι διατομές των ράβδων υπόκεινται κατά τη διάρκεια της φόρτισης σε παραμορφώσεις, ανάλογα με το είδος των οποίων διακρίνονται και τα διάφορα ήδη λυγισμού.

Κατ' αρχάς γίνεται διαχωρισμός μεταξύ των παρακάτω ειδών λυγισμού ανάλογα με την έκταση του φαινομένου του λυγισμού,

- Καθολικός λυγισμός

Στον καθολικό λυγισμό (Σχ. 1.2α) οι διατομές διατηρούν κατά την παραμόρφωση το σχήμα τους και παραμορφώνονται ως στερεό σώμα, σαν να ήταν άκαμπτα διαφράγματα. Καθολικός λυγισμός εμφανίζεται σε ράβδους μεγάλου μήκους, χωρίς ενδιάμεσες στηρίξεις.



Σχ. 1.2 Είδη λυγισμού και αντίστοιχες παραμορφώσεις

- Τοπικός λυγισμός

Στον τοπικό λυγισμό (Σχ. 1.2β) οι ίδιες οι διατομές παραμορφώνονται, μη διατηρώντας το σχήμα τους. Τοπικός λυγισμός εμφανίζεται στις λεπτότοιχες διατομές κατηγορίας 4, με μεγάλες τιμές του λόγου b/t των τοιχωμάτων τους.

- Καθολικός και τοπικός λυγισμός

Αποτελεί συνδυασμό των ανωτέρω ειδών λυγισμού (Σχ. 1.2γ) και εμφανίζεται σε ράβδους μεγάλου μήκους και λεπτότοιχες διατομές.

Στον καθολικό λυγισμό οι παραμορφώσεις των διατομών συντίθενται από μετατοπίσεις περί τους κύριους άξονες και στροφές. Συναρτήσεως της θέσης της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση, διακρίνονται τα ακόλουθα είδη καθολικού λυγισμού,

- ◆ Καμπτικός λυγισμός

Οι διατομές υπόκεινται σε μετατοπίσεις περί τους κύριους άξονες, χωρίς να εμφανίζονται στροφές.

- ◆ Στρεπτικός λυγισμός

Οι διατομές υπόκεινται μόνο σε στροφές, χωρίς να εμφανίζονται μετατοπίσεις. Ο τύπος αυτός λυγισμού είναι πολύ περιορισμένος.

- ◆ Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός

Αποτελεί συνδυασμό των ανωτέρω ειδών λυγισμού, όπου οι διατομές υπόκεινται τόσο σε μετατοπίσεις περί τους κύριους άξονες, όσο και σε στροφές. Οι κλειστές διατομές δεν αντιμετωπίζουν συνήθως κίνδυνο στρεπτικού ή στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, λόγω της μεγάλης τους δυστρεψίας.

Στον παρακάτω πίνακα (Πιν. 1.1) παρουσιάζονται τα διάφορα είδη και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις καθολικού λυγισμού, ως συνάρτηση της φόρτισης και του τύπου της διατομής.

Είδος καθολικού λυγισμού	Φόρτιση	Είδη διατομών	Παραμορφώσεις
Καμπτικός λυγισμός	N N + M _y N + M _z N + M _y + M _z	όλες	v w v v, w
Στρεπτικός λυγισμός	N	ανοικτές	ϕ
Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός	N M _y N + M _y N + M _y + M _z	ανοικτές	v, w, ϕ

Πίνακας 1.1 Είδη και παραμορφώσεις καθολικού λυγισμού

Στη συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά αλλά με τα απαραίτητα βασικά στοιχεία οι διάφορες περιπτώσεις λυγισμού.

1.3 Λυγισμός ράβδων κατά Euler

Το 1777 ο Ελβετός μαθηματικός Euler έλυσε το πρόβλημα του λυγισμού των ράβδων και παρουσίασε μια μεθοδολογία για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου. Το φορτίο αυτό καλύπτει τον καμπτικό λυγισμό, δεδομένου ότι οι παραμορφώσεις των διατομών της ράβδου θεωρήθηκαν από τον Euler ότι αποτελούνται μόνο από μετατοπίσεις και όχι από στροφές.

Η εξέταση του προβλήματος λυγισμού κατά Euler γίνεται λαμβανομένων υπόψη των εξής παραδοχών,

- απόλυτα κεντρικής θλίψης
- απόλυτα ευθείας ράβδου
- απεριόριστης ισχύος του νόμου του Hooke (ελαστική συμπεριφορά)

Η επίλυση του προβλήματος μπορεί να γίνει με τη στατική ή την ενεργειακή μέθοδο. Στη στατική μέθοδο εξετάζεται η ισορροπία ενός διαφορικού στοιχείου, ενώ στην ενεργειακή το δυναμικό του συστήματος. Και στις δύο περιπτώσεις εξετάζεται το σύστημα στην παραμορφωμένη κατάσταση, πράγμα που διαφοροποιεί τη θεωρία λυγισμού από τη θεωρία της πρώτης τάξης. Η θεωρία λυγισμού διακρίνεται σε γραμμική και μη γραμμική θεωρία, εξαρτώμενη από το εάν οι μετατοπίσεις θεωρούνται μικρές ή όχι. Στη γραμμική θεωρία λυγισμού οι μετατοπίσεις θεωρούνται μικρές αλλά η ισορροπία εξετάζεται στην παραμορφωμένη κατάσταση. Αυτό τη διαφοροποιεί και από την κλασική στατική 1^{ης} τάξης. Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η γραμμική θεωρία λυγισμού με τη στατική μέθοδο και με τη βοήθεια ενός παραδείγματος που είναι αντίστοιχο του αντικείμενου της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Σύμφωνα με τη στατική μέθοδο η εξέταση της ισορροπίας ενός διαφορικού στοιχείου στην παραμορφωμένη κατάσταση οδηγεί σε διαφορική εξίσωση. Έστω για μια αξονικώς θλιβόμενη ράβδο (Σχ. 1.3), όπως αυτές του άνω πέλματος του δικτυώματος των κύριων δοκών μιας πεζογέφυρας, η εξίσωση αυτή προκύπτει,

$$EIw'''' + Nw'' = 0 \quad (A)$$

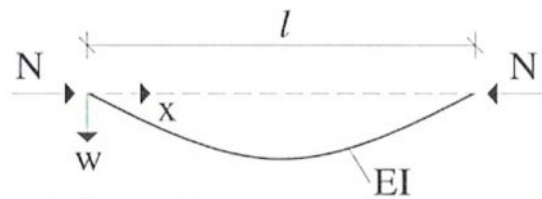
Η εξίσωση είναι ομογενής, η δε λύση της είναι,

$$w = \alpha_1 * \sin \rho \xi + \alpha_2 * \cos \rho \xi + \alpha_3 * \rho * \xi + \alpha_4 \quad (B)$$

όπου

$$\xi = \chi / \ell \quad \text{και} \quad \rho = \ell * \sqrt{N / EI}$$

Οι συντελεστές a_i προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες του κάθε προβλήματος, δηλαδή από τις συνθήκες στήριξης της ράβδου.



Σχ. 1.3 θλιβόμενη ράβδος

Για μια αμφιαρθρωτή δοκό όπως αυτή του παραπάνω σχήματος οι οριακές συνθήκες στήριξης είναι,

$$w(0)=w(l)=0 \text{ και}$$

$$M(0)=M(l)=0$$

$$\text{ή ισοδυνάμως } w'''(0) = w'''(l) = 0$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι από τις τρεις πρώτες συνθήκες προκύπτουν $a_2=a_3=a_4=0$, οπότε η τελευταία συνθήκη γράφεται,

$$w''(l) = -a_1 \cdot \rho^2 \cdot \sin \rho l = 0$$

Η τετριμμένη λύση είναι $a_1=0$, οπότε οι παραμορφώσεις είναι μηδενικές για κάθε στάθμη φόρτισης. Από τη μη τετριμμένη λύση, $a_1 \neq 0$, προκύπτει η εξίσωση λυγισμού,

$$\sin \rho l = 0$$

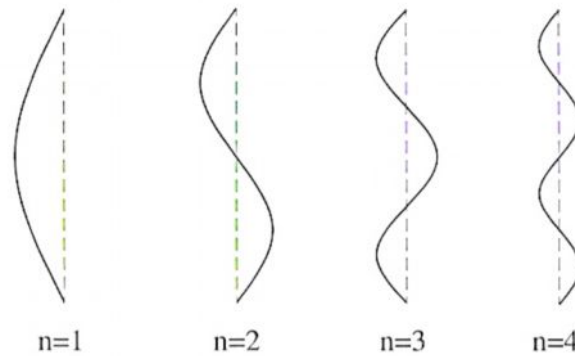
η οποία ισχύει όταν

$$\rho = n \cdot \pi \quad \text{με } n=1,2,3,\dots$$

Αντικαθιστώντας στην (B), οι παραμορφώσεις δίνονται από τη σχέση,

$$w = a_1 \cdot \sin(n\pi x) \quad n=1,2,3,\dots \quad (\Gamma)$$

Η γραφική παράσταση της (Γ) για τις διάφορες τιμές n δίνεται στο Σχήμα 1.4. Οι καμπύλες παριστάνουν τις λεγόμενες κανονικές μορφές λυγισμού. Λόγω του τυχαίου μεγέθους του συντελεστή a_1 , το μέγεθος του βέλους στην κρίσιμη κατάσταση είναι απροσδιόριστο, δηλαδή μόνο η μορφή του είναι γνωστή. Σημειώνεται επίσης ότι υπάρχει αναλογία μεταξύ κανονικών μορφών λυγισμού και ιδιομορφών ταλαντώσεων, οι οποίες προκύπτουν και αυτές από ιδιομορφική ανάλυση.



Σχ. 1.4 Κανονικές μορφές λυγισμού αμφιαρθρωτής ράβδου

Τα αντίστοιχα κάθε κανονικής μορφής φορτία είναι ίσα με,

$$\rho = \ell * \sqrt{N/EI} \quad n * \pi \Rightarrow N_{cr} = n^2 * \frac{\pi^2 * EI}{\ell^2}$$

Το μικρότερο κρίσιμο φορτίο (φορτίο Euler) ισχύει για την πρώτη κανονική μορφή n=1 και είναι ίσο με,

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 * EI}{\ell^2}.$$

Το κρίσιμο φορτίο προκύπτει για τις διάφορες συνθήκες στήριξης ως συνάρτηση ενός χαρακτηριστικού μήκους, του μήκους λυγισμού ℓ_{cr} , το οποίο συνδέεται με το πραγματικό μήκος της ράβδου μέσω του συντελεστού μήκους λυγισμού $\beta = \ell_{cr} / \ell$. Οι συντελεστές β έχουν τιμές ≤ 1 , όταν οι ακραίοι κόμβοι είναι αμετάθετοι ($\beta=1$ για άρθρωση-άρθρωση) και ≥ 1 , όταν οι ακραίοι κόμβοι είναι μεταθετοί ($\beta=1$ για πάκτωση-πάκτωση).

Η κρίσιμη τάση λυγισμού δίνεται από τη σχέση,

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 * E}{\lambda^2}$$

όπου

$$\lambda = \frac{\ell_{cr}}{i} = \text{λυγηρότητα υποστυλώματος}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \text{ακτίνα αδράνειας διατομής} \quad (\Delta)$$

Η εξ. (Δ) αποτελεί την υπερβολή Euler.

Κατά την επίλυση μέσω της μεθοδολογίας Euler παρατηρείται ότι η κρίσιμη τάση για μικρές λυγηρότητες μπορεί να είναι και μεγαλύτερη του ορίου διαρροής του υλικού, ως συνέπεια της παραδοχής απεριόριστης ελαστικής συμπεριφοράς.

1.4 Καμπτικός λυγισμός λόγω αξονικής θλιπτικής δύναμης

Οι παραδοχές της θεωρίας Euler αντιπροσωπεύουν μέλη χωρίς ατέλειες και για αυτό το λόγο δεν ισχύουν σε μέλη πραγματικών κατασκευών. Πράγματι,

- ◆ η φόρτιση δεν είναι απόλυτα κεντρική, εκτός αν προβλεφθούν ειδικά κατασκευαστικά μέτρα εισαγωγής της, π.χ. μέσω χαλύβδινων σφαιρών, που είναι πολύ σπάνια περίπτωση.
- ◆ τα μέλη δεν είναι απολύτως ευθύγραμμα, λόγω γεωμετρικών ατελειών.
- ◆ η συμπεριφορά δεν είναι ελαστική, δεδομένου ότι λόγω φορτίου και παραμενουσών τάσεων (δομικών ατελειών), μπορεί να ξεπεραστεί το όριο διαρροής του υλικού.

Οι διαπιστώσεις αυτές έγιναν αντιληπτές μετά από πραγματικές αστοχίες υποστυλωμάτων, ιδιαίτερα το 19^ο αιώνα, τα οποία είχαν διαστασιολογηθεί με βάση το φορτίο Euler. Έτσι, η τάση Euler δεν αντιπροσωπεύει τη μέγιστη παραλαμβανόμενη (οριακή) τάση του υποστυλώματος αλλά μια θεωρητική μόνο, την κρίσιμη τάση. Ο προσδιορισμός του οριακού φορτίου αποτέλεσε αντικείμενο θεωρητικών και πειραματικών ερευνών καθ' όλη τη διάρκεια του περασμένου αιώνα, οι οποίες κατέληξαν στις παρακάτω κυριότερες τροποποιήσεις της θεωρίας Euler.

- ◆ λόγω πλαστικοποίησης πρέπει να τεθεί ένα ανώτατο όριο στην τάση f_y , δεδομένου ότι η οριακή τάση δεν μπορεί να ξεπεράσει το όριο διαρροής.
- ◆ λόγω γεωμετρικών ατελειών, η οριακή τάση μειώνεται σε σχέση με την κρίσιμη τάση.
- ◆ λόγω παραμενουσών τάσεων λαμβάνει χώρα περαιτέρω μείωση της κρίσιμης τάσης.

Αναπτύχθηκε λοιπόν η ακόλουθη διαδικασία προσδιορισμού του οριακού φορτίου για την περίπτωση του καμπτικού λυγισμού που αποτελεί τη συνηθέστερη μορφή αστάθειας θλιβόμενων μελλών μεταλλικών κατασκευών.

Η απώλεια της ευστάθειας του αρχικώς ευθύγραμμου μέλους εκδηλώνεται με μετάπτωση του σε μία καμπυλωμένη μορφή, με κάμψη περί τον ισχυρό ή τον ασθενή άξονα της διατομής του μέλους, χωρίς ταυτόχρονη εμφάνιση σχετικής στροφής των διατομών. Όπως και στις άλλες μορφές λυγισμού, το φαινόμενο συμβαίνει πριν το μέλος αναπτύξει την πλαστική αντοχή της διατομής ου.

Η επάρκεια ενός θλιβόμενου μέλους με σταθερή διατομή έναντι καμπτικού λυγισμού ελέγχεται με βάση την ακόλουθη σχέση,

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1,0$$

όπου,

N_{Ed} η τιμή σχεδιασμού της θλιπτικής δύναμης

$N_{b,Rd}$ η αντοχή του θλιβόμενου μέλους σε λυγισμό

Σε μέλη με μη συμμετρικές διατομές κατηγορίας 4 πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και η πρόσθετη ροπή ΔM_{Ed} λόγω εκκεντρότητας του κεντροβαρικού άξονα της ενεργού διατομής.

Η αντοχή ενός θλιβόμενου μέλους σε λυγισμό λαμβάνεται από τις σχέσεις,

$$N_{b,Rd} = \frac{x^* A^* f_y}{\gamma_{M1}} \quad \text{για διατομές κατηγορίας 1,2 και 3}$$

$$N_{b,Rd} = \frac{x^* A_{eff}^* f_y}{\gamma_{M1}} \quad \text{για διατομές κατηγορίας 4}$$

όπου,

χ μειωτικός συντελεστής.

Στις πειραματικές εργασίες παρατηρήθηκε κατ' αρχήν μεγάλη διασπορά των αποτελεσμάτων με την έννοια ότι τα μέλη της ίδιας λυγηρότητας με διαφορετικές διατομές παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στις αντοχές τους. Μετά από εκτεταμένες έρευνες, διαπιστώθηκε ότι οι παρατηρούμενες διαφορές οφείλονται στις ατέλειες των μελών και κυρίως στις επ' αυτών παραμένουσες (αρχικέ) τάσεις εκ του τρόπου κατασκευής τους. Το μέγεθος και η κατανομή των τάσεων συνδέεται με τον τρόπο κατασκευής του μέλους και τη γεωμετρία των διατομών του. Προέκυψε μάλιστα ότι οι παραμένουσες τάσεις απομειώνουν πολύ περισσότερο την αντοχή έναντι λυγισμού περί τον ασθενή άξονα αδρανείας των διατομών πάρα περί τον ισχυρό.

Τελικά η αντοχή θλιβομένων μελών συναρτήσει της λυγρηρότητάς τους προσδιορίζεται μέσω πέντε διαφορετικών καμπύλων. Κάθε εξεταζόμενη περίπτωση εντάσσεται στην κατάλληλη καμπύλη.

Στα μέλη υπό αξονική θλίψη, η τιμή του μειωτικού συντελεστή χ υπολογίζεται σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις, ως συνάρτηση της ανηγμένης λυγρηρότητας λ και του συντελεστή ατελειών α , ο οποίος εξαρτάται από την αντίστοιχη καμπύλη λυγισμού.

$$x = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \tilde{\lambda}^2}} \quad \text{αλλά } \chi \leq 1,0$$

όπου

$$\Phi = 0,5 \left[1 + \alpha (\tilde{\lambda} - 0,2) + \tilde{\lambda}^2 \right]$$

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{A^* f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} * \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \quad \text{για διατομές κατηγορίας 1,2 και 3}$$

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff}^* f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} * \frac{\sqrt{\frac{A_{eff}}{A}}}{\lambda_1} \quad \text{για διατομές κατηγορίας 4}$$

α συντελεστής ατελειών, που αντιστοιχεί σε κάθε καμπύλη λυγισμού και λαμβάνεται από τον Πίνακα 1.2 σε σχέση με τον πίνακα 1.3.

$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2}$ το ελαστικό κρίσιμο φορτίο για την αντίστοιχη μορφή λυγισμού, βασιζόμενο στις ιδιότητες της πλήρους διατομής.

$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 * EI}{L_{cr}^2 * A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ η κρίσιμη τάση Euler.

L_{cr} το ισοδύναμο μήκος λυγισμού στο υπό θεώρηση επίπεδο λυγισμού.

$$i = \sqrt{I/A}$$

η ακτίνα αδρανείας περί τον αντίστοιχο άξονα, υπολογιζόμενη χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της πλήρους διατομής.

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$$

λυγηρότητα για την ανάλογη μορφή λυγισμού

$$\lambda_1 = \pi * \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93,9 * \varepsilon$$

η οριακή (χαρακτηριστική) λυγηρότητα, ως το

σημείο τομής P της οριζόντιας ευθείας $\sigma = f_y$, με την καμπύλη Euler (Σχήμα 1.6α). Το σημείο P αντιστοιχεί στη λυγηρότητα για την οποία η κρίσιμη τάση λυγισμού κατά Euler είναι ίση με το όριο διαρροής.

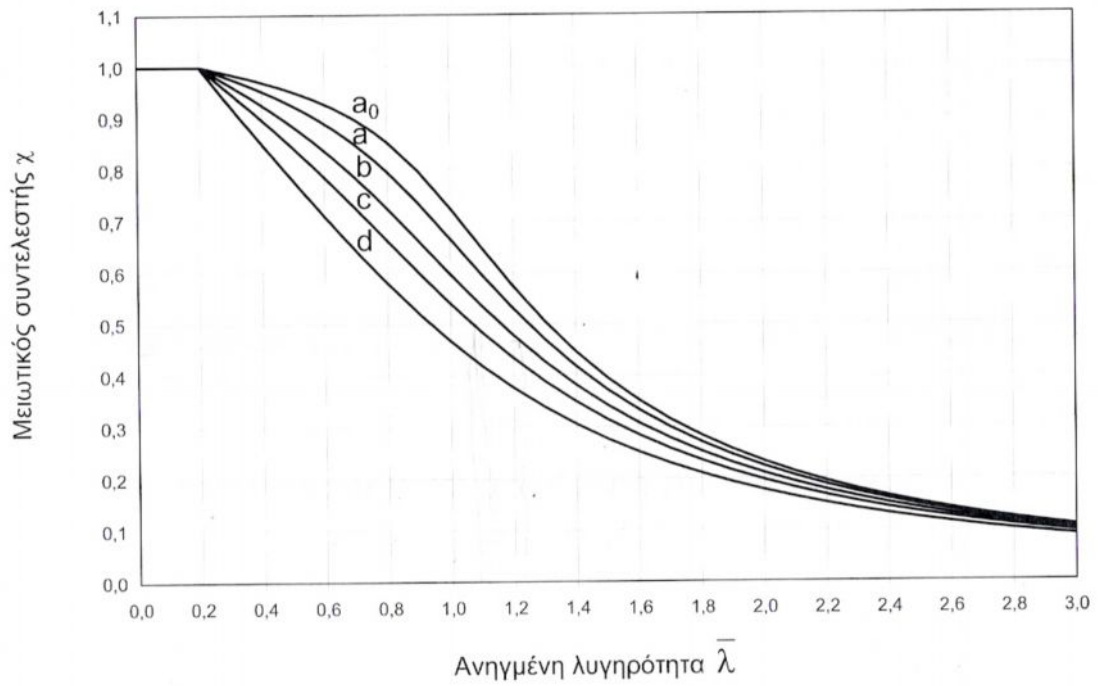
$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

f_y σε N/mm².

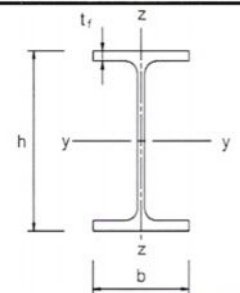
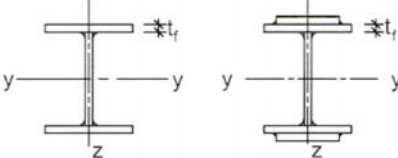

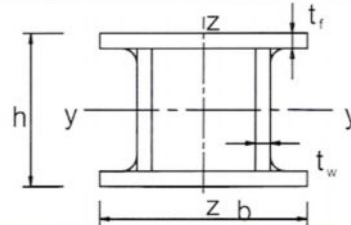
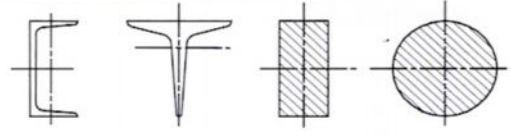
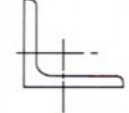
Καμπύλη λυγισμού	a_0	a	b	c	d
Συντελεστής ατελειών α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Πίνακας 1.2 Συντελεστές ατελειών για καμπύλες λυγισμού

Τιμές του μειωτικού συντελεστή χ για την κατάλληλη ανηγμένη λυγηρότητα $\bar{\lambda}$ μπορεί να λαμβάνονται πιο άμεσα από το σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5 Καμπύλες λυγισμού

Διατομή	Όρια	Λυγισμός περί τον άξονα	Καμπύλη λυγισμού	
			S 235 S 275 S 355 S 420	S 460
Ελατές διατομές 	$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$ $40 \text{ mm} < t_f \leq 100$	y - y z - z	a a ₀
			y - y z - z	b a
	$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100 \text{ mm}$ $t_f > 100 \text{ mm}$	y - y z - z	b a
			y - y z - z	d c
Συγκολλητές I-διατομές 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y - y z - z	b c	b c
	$t_f > 40 \text{ mm}$	y - y z - z	c d	c d
Κοίλες Διατομές 	Εν θερμώ έλαση	Οποιον- δήποτε	a	a ₀
	Ψυχρή έλαση	Οποιον- δήποτε	c	c
Συγκολλητές κίβωτιοειδείς διατομές 	Γενικά (εκτός των κατωτέρω)	Οποιον- δήποτε	b	b
	Μεγάλα πάχη ραφής: $\alpha > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	Οποιον- δήποτε	c	c
U-, T- και συμπαγείς διατομές 		Οποιον- δήποτε	c	c
L- διατομές 		Οποιον- δήποτε	b	b

Πίνακας 1.3 Επιλογή καμπύλης λυγισμού για δεδομένη διατομή

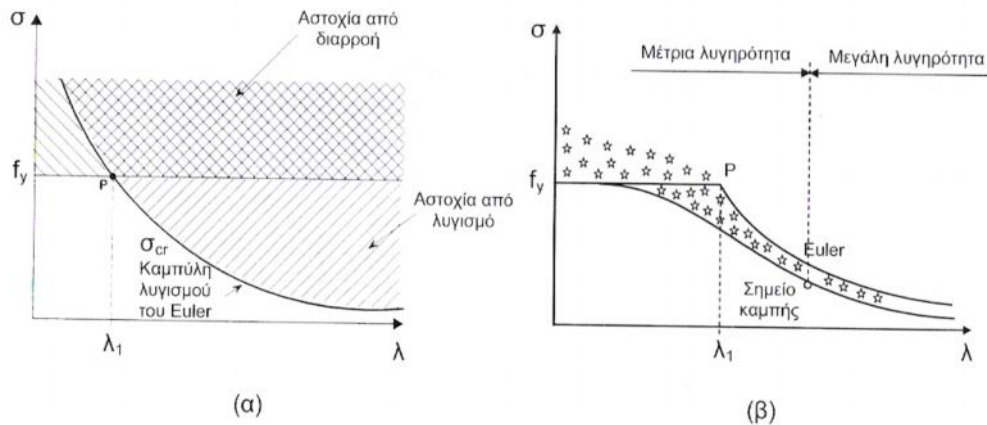
Για λυγηρότητα,

$$\lambda \leq 0,2 \quad \text{ή για } N_{Ed}/N_{cr} \leq 0,04$$

(μικρή λυγηρότητα), η αντοχή της διατομής εξαντλείται πριν εκδηλωθεί λυγισμός (ανελαστικός λυγισμός). Ο έλεγχος του μέλους επομένως ανάγεται στον έλεγχο της διατομής του.

Οι μεγαλύτερες διαφορές μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών αντοχών παρατηρούνται στην περιοχή των μέσων λυγηροτήτων.

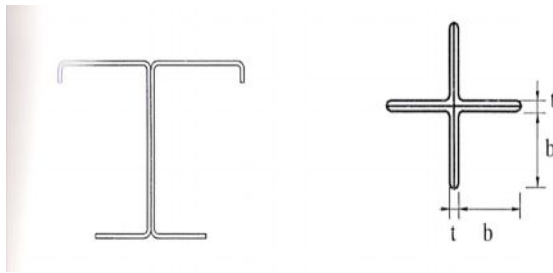
Τέλος, ένα μέλος μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μεγάλης λυγηρότητας, εάν η λυγηρότητα του είναι μεγαλύτερη από αυτή που αντιστοιχεί στο σημείο καμπής της καμπύλης λυγισμού (Σχ. 1.6β). Το οριακό φορτίο αστοχίας για μέλη με μεγάλη λυγηρότητα είναι κοντά στο κρίσιμο φορτίο Euler N_{cr} (ελαστική περιοχή αστοχίας).



Σχήμα 1.6 (α) καμπύλη λυγισμού Euler και μορφές αστοχίας, (β) περιοχές λυγηροτήτων

1.5 Στρεπτικός λυγισμός

Στρεπτικός λυγισμός (torsional buckling) είναι η μορφή αστάθειας ενός θλιβόμενου μέλους σταθερής διατομής με ευθύγραμμο διαμήκη άξονα, κατά την οποία, οι διατομές στρέφονται περί τον άξονα του μέλους, ο οποίος παραμένει ευθύγραμμος και μετά την παραμόρφωση. Ο κίνδυνος αστοχίας λόγω στρεπτικού λυγισμού απαντάται σε ανοιχτές διατομές, ενώ δεν υφίσταται σε κλειστές διατομές λόγω της μεγάλης δυστρεψίας που διαθέτουν. Η υπόψη αστάθεια εμφανίζεται μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Επειδή μια τέτοια μορφή λυγισμού συνδέεται με τη στρέψη, το κρίσιμο ελαστικό φορτίο λυγισμού εξαρτάται τόσο από τη δυστρεψία κατά Saint-Venant όσο και από τη δυσκαμψία στρέβλωσης. Επιπλέον σημαντικό ρόλο παίζουν οι συνθήκες δέσμευσης των άκρων του μέλους σε στρέψη και στρέβλωση. Τέλος επειδή ο καμπτικός λυγισμός είναι πιθανό να εκδηλωθεί πριν το στρεπτικό λυγισμό, πρέπει να εξετάζονται και οι δύο μορφές, ώστε να προσδιοριστεί εκείνη που δίνει το χαμηλότερο κρίσιμο φορτίο.



Παραδείγματα διατομών ευαίσθητων σε στρεπτικό λυγισμό.

Αντίθετα με τον καμπτικό λυγισμό, για τον οποίον οι διαθέσιμες πληροφορίες είναι πολλές, η οριακή αντοχή που συνδέεται με το στρεπτικό λυγισμό δεν μπορεί να εκτιμηθεί με μεγάλη ακρίβεια λόγω έλλειψης επαρκών πειραμάτων και αντίστοιχων αποτελεσμάτων ελέγχων. Για το λόγο αυτό, γίνεται γενικά αποδεκτό, ότι η διαδικασία που χρησιμοποιείται για τον καμπτικό λυγισμό μπορεί να επεκταθεί στον στρεπτικό λυγισμό, με την υπόθεση ότι η μείωση της αντοχής λόγω ατελειών και της πλαστικοποίησης, είναι παρόμοια και στις δύο περιπτώσεις.

Το ελαστικό κρίσιμο φορτίο στρεπτικού λυγισμού για μια θλιβόμενη ράβδο με διχαλωτές (απλές στρεπτικές) στηρίξεις στα άκρα της, δίνεται από τη σχέση,

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_M^2} * \left(GI_t + \frac{\pi^2 EI_w}{L_T^2} \right) \quad (1.1)$$

όπου

$i_M^2 = i_y^2 + i_z^2 + y_M^2$ η πολική ακτίνα αδρανείας της διατομής ως προς το κέντρο διάτμησης

y_M η απόσταση κέντρου βάρους και κέντρου διάτμησης της διατομής επί του άξονα y .

I_t, I_w οι σταθερές στρέψης και στρέβλωσης της διατομής

L_T το μήκος λυγισμού έναντι στρέψης,
 $L_T = L$ για διχαλωτές στηρίξεις
 $L_T = 0,5L$ για πακτώσεις στα άκρα.

1.6 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός

Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός είναι η μορφή αστάθειας ενός θλιβόμενου και/ή καμπτόμενου μέλους, κατά την οποία οι διατομές υπόκεινται, μετά το λυγισμό, σε στροφή περί το κέντρο διάτμησης και σε ταυτόχρονη μετατόπιση σε σχέση με τον αρχικώς ευθύγραμμο διαμήκη άξονα του μέλους, ο οποίος παύει πλέον να είναι ευθύγραμμος μετά την παραμόρφωση. Ο κίνδυνος αστοχίας λόγω στρεπτοκαμπτικού λυγισμού είναι μεγάλος για ανοιχτές διατομές, ενώ είναι περιορισμένος σε κλειστές διατομές, λόγω της μεγάλης δυστρεψίας που διαθέτουν. Ανάλογα με τα επιβαλλόμενα επί του μέλους φορτία, διακρίνονται οι παρακάτω βασικές περιπτώσεις, οι οποίες απαντώνται στην πράξη και αντιμετωπίζονται κατάλληλα από τις διατάξεις των κανονισμών.

- Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών υπό θλίψη (Torsional flexural buckling).
- Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών υπό θλίψη και κάμψη (Torsional flexural buckling).
- Στρεπτοκαμπτικός (ή πλευρικός) λυγισμός μη προστατευμένων πλευρικά δοκών υπό κάμψη περί τον ισχυρό άξονα (Lateral torsional buckling).

1.6.1 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη

Η περίπτωση αυτή αντιμετωπίζεται ουσιαστικά όπως ο στρεπτικός λυγισμός.

1.6.2 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη και κάμψη

Μέλη σταθερής διατομής, καταπονούμενα ταυτόχρονα από αξονική θλιπτική δύναμη και ροπές κάμψης περί τον ισχυρό και τον ασθενή άξονα της διατομής, αποτελούν τη γενική περίπτωση καταπόνησης, ιδιαίτερα σε ότι αφορά κατακόρυφα μέλη χωρικών πλαισιωτών φορέων. Η ανάλυση της φέρουσας συμπεριφοράς τους, κατά την οποία εκτός από τις μετατοπίσεις των διατομών ως προς τους κεντροβαρικούς άξονες είναι πιθανόν να αναπτυχθούν ταυτόχρονα και στροφές περί το διαμήκη άξονα του μέλους (στρεπτοκαμπτικός λυγισμός), είναι εξαιρετικά δύσκολη ακόμη και για την απλή ελαστική συμπεριφορά, καθιστώντας μη εφικτές κλειστές αναλυτικές λύσεις. Για το λόγο αυτό, οι κανονισμοί προβλέπουν τη χρήση απλοποιημένων εξισώσεων αλληλεπίδρασης, οι οποίες έχουν την ιδιότητα, σε περίπτωση επίδρασης ενός μόνο εντατικού μεγέθους, να ταυτίζονται με τις σχέσεις ελέγχου για το συγκεκριμένο εντατικό μέγεθος (αξονική δύναμη, ροπή).

1.6.3 Στρεπτοκαμπτικός (ή πλευρικός) λυγισμός μη προστατευμένων πλευρικά δοκών σταθερής διατομής υπό κάμψη περί τον ισχυρό άξονα.

Όταν μια δοκός μη προστατευμένη έναντι πλευρικής εκτροπής υποβάλλεται σε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα της διατομής της, είτε λόγω ακραίων ροπών είτε, συνηθέστερα, λόγω εγκάρσιων φορτίων, ένα από τα πέλματά της θλίβεται και καθίσταται επομένως επιρρεπές σε λυγισμό. Ο λυγισμός του θλιβόμενου πέλματος στο επίπεδο του κορμού παρεμποδίζεται λόγω της μεγάλης δυσκαμψίας του κορμού στο επίπεδό του, ενώ το άλλο ήμισυ της διατομής είναι, ως εφελκόμενο στοιχείο, ευσταθές. Ως συνέπεια, ο λυγισμός του θλιβόμενου πέλματος εκδηλώνεται εκτός του επιπέδου του κορμού (δηλαδή περί τον ισχυρό άξονα του θλιβόμενου πέλματος), με ταυτόχρονη στροφή των κύριων αξόνων της διατομής σε σχέση με την αρχική τους θέση. Η παραμόρφωση που προκύπτει, είναι επομένως, συνδυασμός στρέψης και πλευρικής κάμψης (πλευρικός-στρεπτικός λυγισμός ή απλώς πλευρικός λυγισμός). Να σημειωθεί, ότι εάν εφαρμοσθεί ταυτόχρονα και αξονική θλιπτική δύναμη στη δοκό, αυτή θα επιτείνει το φαινόμενο, αφού επαυξάνει την κάμψη (στη μετά το λυγισμό κατάσταση ισορροπίας) περί τον ασθενή άξονα της διατομής.

Σε μία τέλεια δοκό, που φορτίζεται κατά την ισχυρή διεύθυνση κάμψης, ο πλευρικός λυγισμός λαμβάνει χώρα για μια κρίσιμη τιμή της μέγιστης ροπής κάμψης. Η τιμή αυτή εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως,

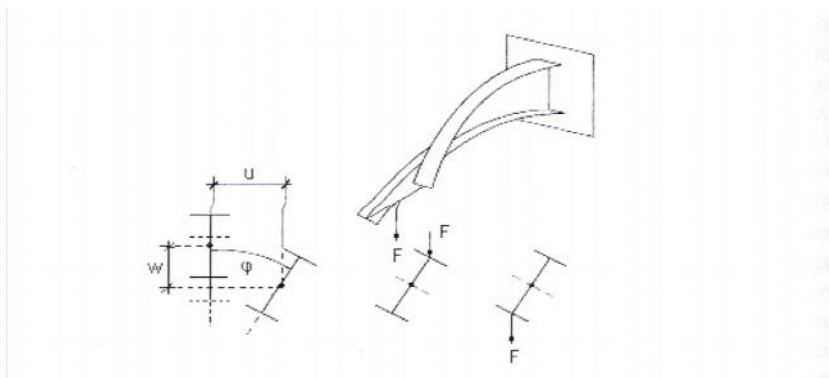
- ο το είδος και τη θέση των φορτίων, τα οποία επηρεάζουν την κατανομή της ροπής κατά μήκος της δοκού (δηλαδή τη μορφή του διαγράμματος καμπτικών ροπών).

- το σημείο εφαρμογής των φορτίων καθ' ύψος της διατομής (κέντρο βάρους, άνω πέλμα, κάτω πέλμα κλπ).
- τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού και σε ενδιάμεσες θέσεις της (περιορισμός κάμψης, στρέψης και στρέβλωσης).
- την ύπαρξη ή όχι συνέχειας στις στηρίξεις.
- τη μορφή της διατομής.
- τυχόν ασυνέχειες στη διατομή (π.χ. αλλαγή διατομής, ανοίγματα κλπ).
- τις ιδιότητες του υλικού.
- τις γεωμετρικές ατέλειες και τις παραμένουσες τάσεις.

Καθώς ο λυγισμός αυτός περιλαμβάνει στρέψη και κάμψη περί τον ασθενή άξονα, η κρίσιμη ροπή κάμψης, η οποία είναι και το καθοριστικό μέγεθος σε αυτή τη μορφή αστάθειας, εκφράζεται συναρτήσει,

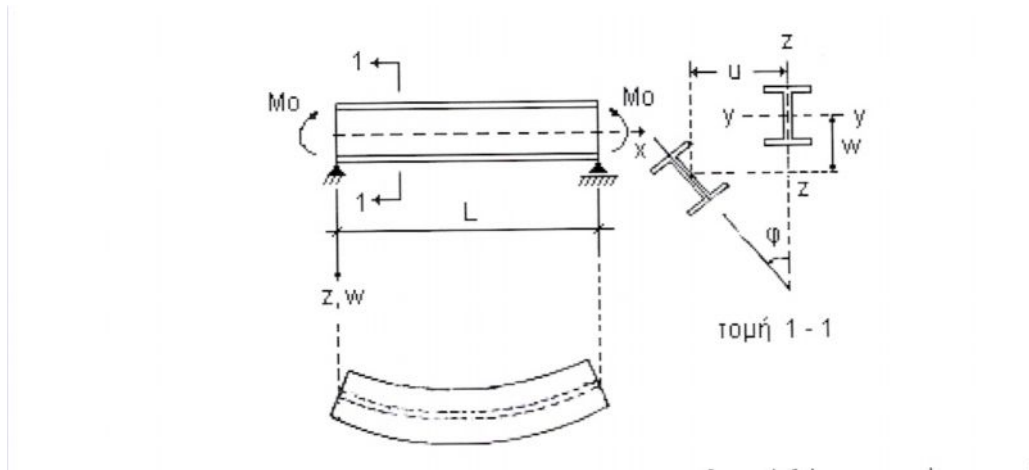
- του μήκους της δοκού L ,
- της δυστρεψιάς GI_t ,
- της δυσκαμψιάς στρέβλωσης EI_w ,
- και της καμπτικής αντίστασης περί τον ασθενή άξονα EI_z .

Στο Σχήμα 1.7 παρουσιάζεται ο τρόπος εκδήλωσης του φαινομένου αυτού σε έναν πρόβολο, λόγω συγκεντρωμένου φορτίου στο ελεύθερο άκρο του. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται επιπλέον η επιρροή της θέσης εφαρμογής του φορτίου. όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο άνω πέλμα, δημιουργεί μετά την έναρξη της πλευρικής εκτροπής μία πρόσθετη στρεπτική ροπή (ροπή εκτροπής), η οποία επιτείνει τη στροφή της διατομής. Αντιθέτως, όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο κάτω πέλμα, η δημιουργούμενη στρεπτική ροπή δρα ανακουφιστικά (ροπή επαναφοράς).



Σχήμα 1.7 Πλευρικός λυγισμός προβόλου λόγω συγκεντρωμένου φορτίου στο ελεύθερο άκρο.

Στο σχήμα 1.8 φαίνεται μια αμφιέρειστη, αρχικά ευθύγραμμη δοκός, που φορτίζεται με ίσες και αντίθετες ροπές στα άκρα. Η δοκός δεν είναι εξασφαλισμένη πλευρικά πλην των δύο άκρων, όπου δεν επιτρέπεται μεν στη διατομή στροφή περί τον διαμήκη άξονα της δοκού και εγκάρσια μετατόπιση, είναι όμως ελεύθερη η στροφή περί τους δύο κύριους άξονες της, δηλαδή περί τους άξονες $y-y$ και $z-z$ (απλές στρεπτικές ή διχαλωτές στηρίξεις). Στο σχήμα φαίνεται επίσης σε κάτοψη η πλευρική εκτροπή του άνω θλιβόμενου πέλματος, καθώς και η τομή σε μια ενδιάμεση θέση της δοκού, με τις μετατοπίσεις και τη στροφή της διατομής.



Σχήμα 1.8 Πλευρικός λυγισμός αμφιέρειστης δοκού λόγω ακραίων ροπών

Η κρίσιμη τιμή των εφαρμοζόμενων ελαστικών ροπών κάμψης στα άκρα της δοκού (M_{cr}), η οποία θα προκαλέσει πλευρικό λυγισμό στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνεται από τη σχέση,

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} * \left[\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 GI_t}{\pi^2 EI_z} \right]^{0,5} \quad (1.2)$$

όπου,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

I_t, I_w οι σταθερές στρέψης και στρέβλωσης

I_z η ροπή αδραειάς της διατομής περί τον ασθενή της άξονα

L το άνοιγμα της δοκού

Η παραπάνω σχέση αντιστοιχεί γενικώς στην περίπτωση μια δοκού με συμμετρική διατομή και ίσα πέλματα, υποκείμενη σε ομοιόμορφη ροπή κατά μήκος του κέντρου διάτμησης και συνθήκες στήριξης όπως η δοκός του σχήματος 1.8.

Σχετικά με την προστασία του θλιβόμενου πέλματος δοκών έναντι πλευρικής εκτροπής, σημειώνεται ότι η παρουσία πλάκας από σκυρόδεμα, σύμμικτης πλάκας ή ενίοτε και χαλύβδινης (εφόσον είναι επαρκώς συνδεδεμένη επί της δοκού και διαθέτει επαρκή δυσκαμψίας), μπορεί να θεωρείται ότι παρέχει συνεχή πλευρική στήριξη της δοκού, ενώ γενικώς σε μη προστατευμένες πλευρικός δοκούς πρέπει να γίνεται έλεγχος για τον προσδιορισμό των θέσεων όπου πρέπει να τοποθετηθούν κατάλληλες σημειακές δεσμεύσεις, προκειμένου να αποφεύγεται ο πλευρικός λυγισμός. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται κατά το στάδιο ανέγερσης, οπότε οι δεσμεύσεις αυτές δεν έχουν ακόμη τοποθετηθεί ή διαφέρουν από αυτές που προβλέπονται για το στάδιο λειτουργίας.

Σύμφωνα με τον κανονισμό, μία δοκός σταθερής διατομής μη προστατευμένη πλευρικά, που υπόκειται σε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα, πρέπει να ελέγχεται έναντι πλευρικού λυγισμού με βάση τη σχέση,

$$M_{Ed} / M_{b,Rd} \leq 1,0$$

M_{Ed} η ροπή κάμψης σχεδιασμού (περί τον ισχυρό άξονα)

$M_{b,Rd}$ η ροπή αντοχής έναντι πλευρικού λυγισμού.

Σε αντίθεση με τις άλλες περιπτώσεις λυγισμού, στον πλευρικό λυγισμό το καθοριστικό μέγεθος είναι η ροπή, οπότε η αναγωγή γίνεται ως προς την κρίσιμη τάση M_{cr} και όχι το κρίσιμο φορτίο N_{cr} .

Επίσης δεν υφίσταται κίνδυνος πλευρικού λυγισμού,

- × για κάμψη περί τον ασθενή άξονα
- × σε δοκούς με πλευρική στήριξη στα θλιβόμενα πέλματα
- × σε κλειστές διατομές (π.χ. τετραγωνικές, κυκλικές κοίλες διατομές, κυβωτιοειδείς διατομές κ.α.) συνήθων διαστάσεων λόγω μεγάλης δυστρεψίας.
- × εάν για το θλιβόμενο πέλμα της δοκού η ανηγμένη λυγηρότητα είναι $\lambda_{LT} \leq 0,4$ δεν απαιτείται έλεγχος πλευρικού λυγισμού και μπορεί να χρησιμοποιείται ο επιμέρους συντελεστής ασφαλείας $\gamma_{M0}=1,0$.

Στην περίπτωση που υφίσταται κίνδυνος πλευρικού λυγισμού, η ροπή αντοχής σε πλευρικό λυγισμό $M_{b,Rd}$ μιας δοκού (με τυχαία-ασύμμετρη διατομή) μπορεί να προσδιορίζεται από τη σχέση,

$$M_{b,Rd} = \frac{x_{LT} * \beta_w * W_{pl,y} * f_y}{\gamma_{M1}} \quad (1.3)$$

με,

$\beta_w=1$ για κατηγορία διατομής 1 ή 2

$\beta_w= W_{ml,y} / W_{pl,y}$ για κατηγορία διατομής 3

$\beta_w= W_{eff,y} / W_{pl,y}$ για κατηγορία διατομής 4

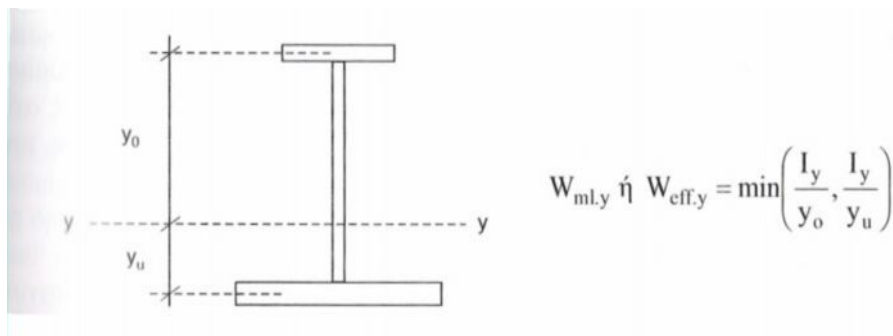
όπου,

$W_{pl,y}$ η πλαστική ροπή αντιστάσεως της διατομής ως προς τον ψ-ψ

$W_{ml,y}$ η μικρότερη ελαστική ροπή αντιστάσεως της διατομής ως προς τον ψ-ψ, σε σχέση με τη μέση απόσταση των πελμάτων από αυτόν (Σχ. 1.9)

$W_{eff,y}$ η μικρότερη ενεργός ροπή αντιστάσεως της διατομής ως προς τον ψ-ψ, σε σχέση με τη μέση απόσταση των πελμάτων από αυτόν (Σχ. 1.9)

χ_{LT} ο μειωτικός συντελεστής για πλευρικό λυγισμό εξαρτώμενος από την ανηγμένη λυγηρότητα λ_{LT} .



Σχήμα 1.9 Ροπές αντιστάσεως διατομής δοκού

Για μέλη με σταθερή διατομή, η τιμή χ_{LT} προκύπτει ως ακολούθως,

$$\chi_{LT} = 1 \quad \text{για } \tilde{\lambda}_{LT} \leq 0,4 \quad (1.4)$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + [\phi_{LT}^2 - \tilde{\lambda}_{LT}^2]^{0,5}} \leq 1 \quad \text{για } \tilde{\lambda}_{LT} > 0,4 \quad (1.5)$$

με

$$\phi_{LT} = 0,5 [1 + \alpha_{LT} (\tilde{\lambda}_{LT} - 0,2) + \tilde{\lambda}_{LT}^2] \quad (1.6)$$

$$\tilde{\lambda}_{LT} = \left[\frac{\beta_w * W_{pl,y} * f_y}{M_{cr}} \right]^{0,5} \quad (1.7)$$

Η ελαστική κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M_{cr} υπολογίζεται για την πλήρη διατομή με τη βοήθεια του παραρτήματος F του Μέρους 1.1 του Ευρωκώδικα 3 (παραπάνω έχουμε υπολογίσει την M_{cr} για την περίπτωση μιας δοκού με συμμετρική διατομή και ίσα πέλματα, υποκείμενη σε ομοιόμορφη ροπή κατά μήκος του κέντρου διάτμησης και συνθήκες στήριξης όπως η δοκός του σχήματος 1.8.)

Για μέλη με μεταβλητή διατομή, θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η μεταβλητότητα της διατομής κατά τον υπολογισμό της M_{cr} . Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιείται η ελάχιστη διατομή. Για τον υπολογισμό του μειωτικού συντελεστή χ_{LT} μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις (1.4) έως (1.7), οι οποίες όμως αναφέρονται σε σταθερή διατομή και για αυτό οι υπολογισμοί θα πρέπει να αναφέρονται στη διατομή με τη μέγιστη θλιπτική τάση.

Ο συντελεστής ατελειών α_{LT} επιλέγεται από τους παρακάτω πίνακες ανάλογα με τον τύπο της διατομής.

Καμπύλη λυγισμού	a	b	c	d
Συντελεστής ατελειών α_{LT}	0,21	0,34	0,49	0,76

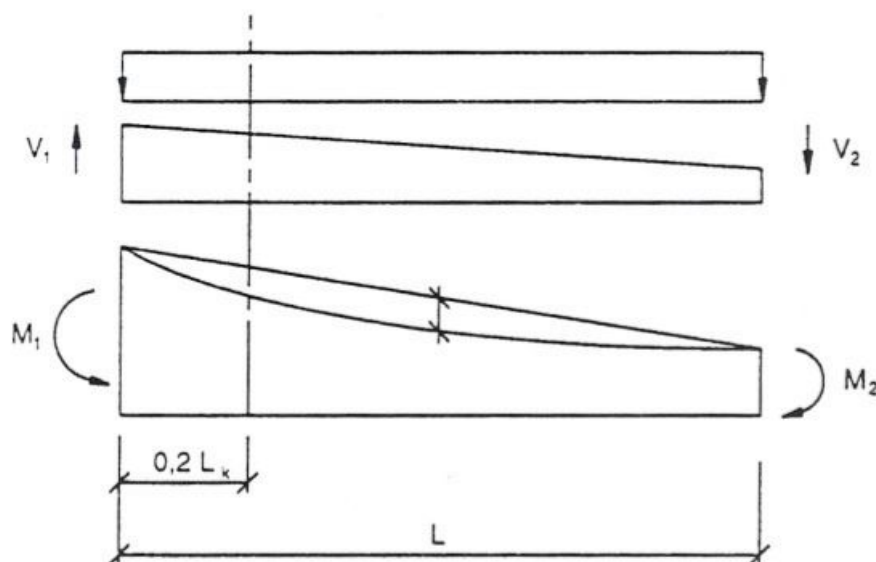
Πίνακας 1.4 Συντελεστές ατελειών για καμπύλες πλευρικού λυγισμού

Διατομή	Όρια	Καμπύλη λυγισμού
Ελατές διατομές I	$h/b \leq 2$	a
	$h/b > 2$	b
Συγκολλητές διατομές I	$h/b \leq 2$	c
	$h/b > 2$	d
Άλλες διατομές	–	d

Πίνακας 1.5 Καμπύλες πλευρικού λυγισμού

Οι συντελεστές χ_{LT} μπορούν να προσδιορίζονται και από το Σχήμα 1.5, συναρτήσει της αντίστοιχης ανηγμένης λυγηρότητας λ_{LT} .

Εάν η ροπή κάμψεως M_y έχει μέγιστη τιμή M_1 σε σημείο όπου υπάρχει πλευρική στήριξη, ο σχεδιασμός σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία (σχέσεις (1.4) έως (1.7)) μπορεί να γίνει για τη διατομή σε απόσταση $0,2L$ από το σημείο της μέγιστης ροπής, όπου L είναι η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών πλευρικών στηρίξεων, μικρότερη πάντως από την απόσταση μεταξύ του σημείου με τη μέγιστη ροπή και του πλησιέστερου σημείου με μηδενική ροπή, Σχήμα 1.10. Εάν η ροπή κάμψεως μειώνεται γραμμικά από M_1 σε M_2 μεταξύ δύο γειτονικών πλευρικών στηρίξεων, η ροπή κάμψεως στη διατομή σχεδιασμού θα είναι $0,8 M_1 + 0,2 M_2$, αλλά θα λαμβάνεται μεγαλύτερη του $0,8 M_1$.



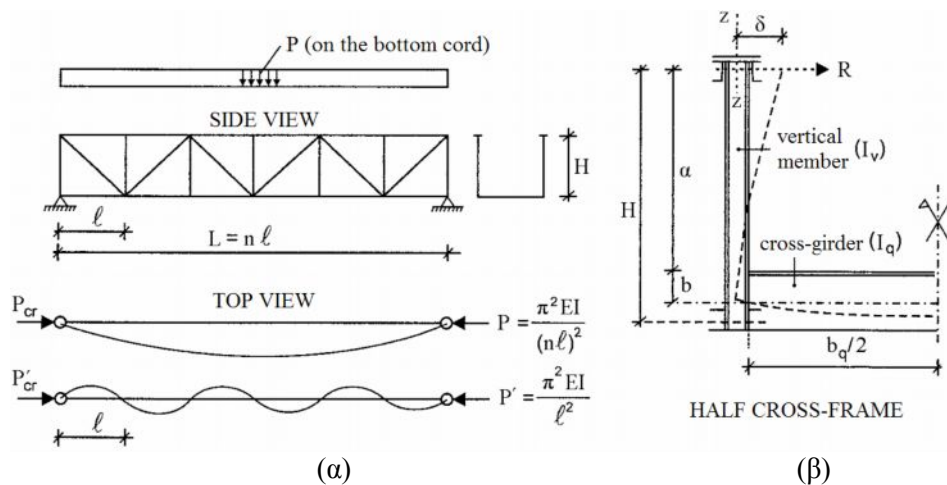
Σχήμα 1.10 Τμήμα δοκού με μεταβλητή ροπή κάμψεως, μεταξύ σημείων πλευρικά εξασφαλισμένων

1.7 Λυγισμός θλιβόμενου πέλματος

Σε δικτυωτές ή ολόσωμες γέφυρες κάτω διάβασης, όταν τα θλιβόμενα άνω πέλματα δεν διαθέτουν άνω αντανέμιο σύνδεσμο, εξασφαλίζονται έναντι πλευρικής εκτροπής (καθέτως προς το επίπεδο των κυρίων δοκών) μέσω των εγκάρσιων συνδέσμων. Οι εγκάρσιοι σύνδεσμοι είναι άνω ανοιχτά ημιπλαίσια, συντιθέμενα από τη διαδοκίδα και τους αντίστοιχους προς αυτήν ορθοστάτες (για δικτυωτές κύριες δοκούς), ή τα γωνιακά ακαμψίας (για ολόσωμες κύριες δοκούς). Οι σύνδεσμοι αυτοί, τοποθετημένοι ανά ίσες αποστάσεις κατά μήκος της γέφυρας (στις θέσεις των διαδοκίδων), εξασφαλίζουν λόγω της ακαμψίας τους μία πλευρική ελαστική υποστήριξη στα άνω πέλματα των κύριων δοκών, μειώνοντας έτσι τις ανεπιθύμητες πλευρικές εκτροπές.

Για να θεωρηθεί επαρκής η ασφάλεια του άνω θλιβόμενου πέλματος έναντι του κινδύνου καμπτικού λυγισμού, πρέπει η ακαμψία των ημιπλαίσιων να είναι μεγαλύτερη από κάποιο ελάχιστο όριο. Τα ημιπλαίσια αυτά κατασκευάζονται ίδια, εκτός των ακραίων, τα οποία κατασκευάζονται συνήθως ισχυρότερα, ώστε να μπορούν να θεωρηθούν τελείως άκαμπα.

Στο σχήμα 1.11 παρουσιάζεται μια δικτυωτή γέφυρα με τον αντίστοιχο εγκάρσιο σύνδεσμο.



Σχ. 1.11 (α) δικτυωτή γέφυρα κάτω διάβασης και (β) ο εγκάρσιος σύνδεσμος.

Όταν οι εγκάρσιοι σύνδεσμοι έχουν ελάχιστη ακαμψία, το άνω θλιβόμενο πέλμα λυγίζει κατά ένα ημικύμα μήκους L , αφού δεν υπάρχει ενδιάμεσα κάποια πλευρική ελαστική στήριξη. Όταν όμως οι σύνδεσμοι έχουν επαρκή ακαμψία, τότε το άνω πέλμα λυγίζει κατά ημικύματα μήκους ίσου προς την απόσταση των διαδοκίδων. Στις δύο ακραίες αυτές περιπτώσεις, τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία, για καμπτικό λυγισμό, έχουν λόγο $P'_{cr} / P_{cr} = n^2$ (σχ. 1.11 (α)).

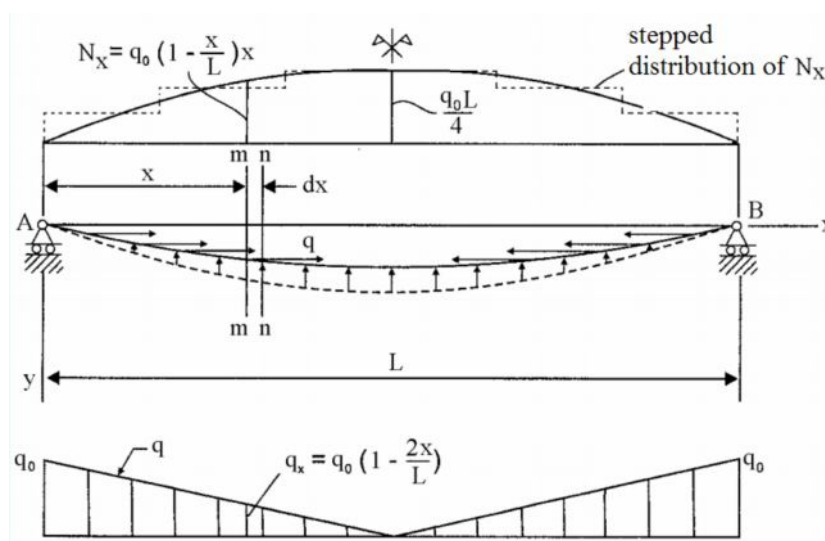
Για ενδιάμεσες τιμές ακαμψίας των ημιπλαισίων, ο λυγισμός γίνεται κατά ημικύματα ενδιάμεσου μήκους και το αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο βρίσκεται ανάμεσα στα δύο προηγούμενα όρια.

Τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση που το άνω θλιβόμενο πέλμα έχει σε όλο το μήκος του σταθερό εμβαδόν και σταθερή αξονική θλιπτική δύναμη, ενώ συγχρόνως τα ακραία ημιπλαίσια είναι τελείως άκαμπτα. Στην πραγματικότητα όμως, η μεν αξονική δύναμη είναι πάντα μεταβλητή από φάτνωμα σε φάτνωμα (ή και ανά δύο φατνώματα, ανάλογα με τη μορφή της δικτύωσης), ενώ το εμβαδόν είναι δυνατόν να μεταβάλλεται κατά μήκος του άνω πέλματος. Επίσης, τα ακραία ημιπλαίσια μπορεί να μην είναι τελείως άκαμπτα.

Το πρόβλημα του υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου του άνω θλιβομένου πέλματος στη γενική του μορφή μελετήθηκε από πολλούς ερευνητές όπως ο Timoshenko, ο Bleich κ.α., με εφαρμογή της γραμμικής θεωρίας ευστάθειας και έχουν διατυπώσει προσεγγιστικές μεθόδους υπολογισμού.

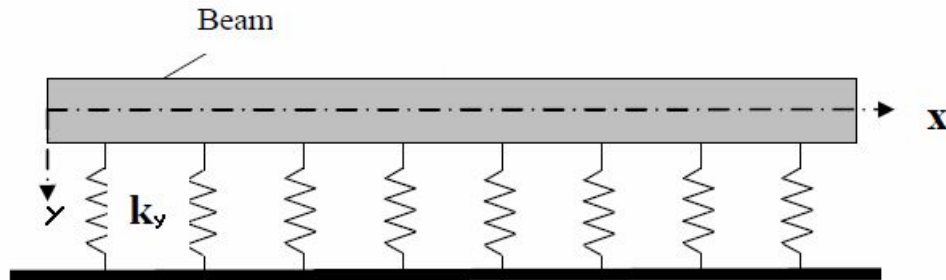
1.7.1 Μέθοδος Timoshenko

Θεωρούμε τη ράβδο του σχήματος 1.12, η οποία στηρίζεται στα σημεία A και B αρθρωτά και έχει σταθερό εμβαδόν κατά μήκος του άξονά της. Η ράβδος υπόκειται σε ένα αξονικό θλιπτικό φορτίο q , με τιμή στα μεν άκρα $q=q_0$, στη δε μέση $q=0$, (Σχ. 1.2β). Η μορφή της φόρτισης αυτής αντιστοιχεί, κατά προσέγγιση, με την αξονική καταπόνηση των ράβδων του άνω πέλματος ενός δικτύωματος. Στην πραγματικότητα, το διάγραμμα των αξονικών δυνάμεων των ράβδων είναι <<πριονωτής>> μορφής, αλλά όταν τα φατνώματα είναι πολλά, η γραμμικοποίηση του διαγράμματος δίνει καλή προσέγγιση. Σε απόσταση x από το αριστερό άκρο, η θλιπτική δύναμη της ράβδου είναι το εμβαδόν του διαγράμματος αυτού μέχρι τη θέση x .



Σχ. 1.12 Αμφιαρθρωτή θλιβόμενη ράβδος με πλευρική ελαστική στήριξη

Η πλευρική ελαστική στήριξη της ράβδου θεωρείται συνεχής, με μέτρο ελαστικής στήριξης $c=C_d / \ell$, όπου το C_d είναι η κοινή ακαμψία των ενδιάμεσων ημιπλαισίων και ℓ η μεταξύ τους απόσταση. Η παραδοχή αυτή είναι ακριβέστερη, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των ενδιάμεσων στηρίξεων (ή ημιπλαισίων) της ράβδου.



ελαστική έδραση τύπου Winkler

Η μελέτη της ράβδου αυτής και ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, μπορεί να γίνει είτε με τη βοήθεια της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση είτε χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο. Το κρίσιμο φορτίο της προκύπτει τότε από τη σχέση που έδωσε ο Timoshenko,

$$N_{cr} = \left(\frac{q_0 L}{4} \right)_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} * \frac{\pi^2 \left(1 + \frac{cL^4}{\pi^4 EI_z} \right)}{2 \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right)} \quad (1.8)$$

όπου το $q_0 L/4$ αντιστοιχεί στη θλιπτική δύναμη που εμφανίζεται στο μέσον της ράβδου. Για πρακτικούς λόγους, η σχέση (1.8) μπορεί να μετασχηματισθεί στην ισοδύναμη,

$$N_{cr} = \left(\frac{q_0 L}{4} \right)_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\beta L)^2} \quad (1.9)$$

όπου το β είναι ο συντελεστής ισοδύναμου μήκους λυγισμού και δίνεται από τον πίνακα 1.6 συναρτήσει του αδιάστατου δείκτη,

$$\Psi = \frac{cL^4}{16EI_z}, \text{ όπου } c = C_d / \ell.$$

Πίνακας 1.6

Τιμές του συντελεστή β για τη φόρτιση του Σχ. 1.12 και σταθερό εμβαδόν

Ψ	0	5	10	15	22.8	56.5	100	162.8	200	300	500	1000
β	0.696	0.524	0.443	0.396	0.363	0.324	0.290	0.259	0.246	0.225	0.204	0.174

Για μια ράβδο σταθερής διατομής, που υπόκειται σε σταθερή θλιπτική δύναμη σε όλο το μήκος της, ενώ στηρίζεται πλευρικά σε $n-1$ ενδιάμεσες ισαπέχουσες ελαστικές στηρίξεις με δείκτη C_d , αποδεικνύεται ότι η ράβδος αρχίζει να συμπεριφέρεται ως συνεχής επί ανυποχώρητων στηρίξεων, όταν ο δείκτης C_d αποκτήσει τιμές που δίνονται από τη σχέση,

$$C_d = \frac{n^3 \pi^2 EI_z}{\gamma L^3} \quad (1.10)$$

όπου

 n = ο αριθμός των επιμέρους φατνωμάτων (μεταξύ των ελαστικών στηρίξεων) γ = συντελεστής εξαρτώμενος από το n (βλ. Πιν. 1.7) L/n = το μήκος των επιμέρους φατνωμάτων

Πίνακας 1.7

Τιμές του συντελεστή γ για σταθερή θλιπτική δύναμη και σταθερό εμβαδόν

n	2	3	4	5	6	7	9	11	∞
γ	0.500	0.333	0.293	0.276	0.268	0.263	0.258	0.255	0.250

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι δεν είναι απαραίτητο να γίνουν οι πλευρικές στηρίξεις πλήρως ανυποχώρητες προκειμένου η ράβδος να συμπεριφερθεί ως συνεχής επί ανενδότων στηρίξεων και έτσι να επιτευχθεί και η μεγιστοποίηση του P_{cr} . Αυτό σημαίνει πρακτικά, ότι τα ημιπλαίσια των γεφυρών, τα οποία υλοποιούν τις πλευρικές στηρίξεις του άνω θλιβόμενου πέλματος, δεν είναι

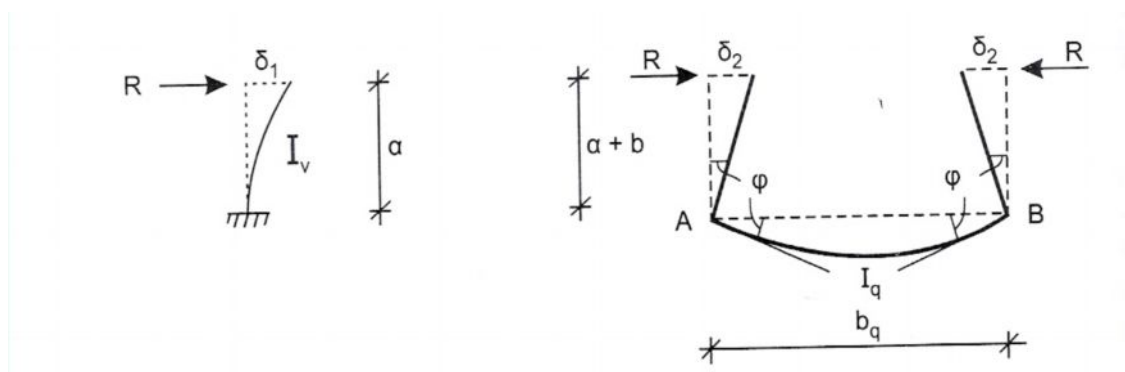
απαραίτητο να διαστασιολογούνται ώστε να γίνονται τελείως άκαμπτα, αφού από μία τιμή της ακαμψίας τους και πάνω, το θλιβόμενο πέλμα συμπεριφέρεται ως συνεχής ράβδος επί τελείως ανενδότην στηρίξεων.

Σχετικά με τον υπολογισμό του δείκτη ακαμψίας C_d άνω ανοικτών ημιπλαισίων, ισχύουν τα ακόλουθα (βλ. και Σχ. 1.11),

$$C_d = R/\delta \quad (\text{συνήθως σε kN/cm}) \quad (1.11)$$

όπου δ η μετατόπιση που προκαλείται από μία δύναμη R .

Η συνολική αυτή μετατόπιση δ είναι το άθροισμα δύο επιμέρους μετατοπίσεων δ_1 και δ_2 , που οφείλονται, η μὲν δ_1 στην παραμόρφωση του ορθοστάτη (με τη διαδοκίδα τελείως άκαμπτη), η δε δ_2 στην παραμόρφωση της διαδοκίδας, στη στροφή δηλαδή των κόμβων του ημιπλαισίου (με τον πρόβολο απαραμόρφωτο). Σχήμα 1.13.



Σχ. 1.13 Ακαμψία άνω ανοικτών ημιπλαισίων

Έτσι, η μετατόπιση δ_1 είναι το βέλος του προβόλου μήκους a ,

$$\delta_1 = \frac{Ra^3}{3EI_v}$$

ενώ για την δ_2 ισχύουν τα εξής,

$$M_A = M_B = \frac{2EI_q}{b_q} * \phi$$

$$\phi \cong \tan \phi = \frac{\delta_2}{(a+b)}$$

$$M_A = M_B = R * (a + b), \text{ και}$$

$$\delta_2 = \frac{R * (a + b)^2 * b_q}{2EI_q}$$

Επειδή $\delta = \delta_1 + \delta_2$ η εξίσωση (1.11) τελικά γίνεται,

$$C_d = \frac{E}{\frac{\alpha^3}{3I_v} + \frac{(a + b)^2 * b_q}{2I_q}} \quad (1.12)$$

όπου

I_v, I_q = οι ροπές αδρανείας των ορθοστατών και της διαδοκίδας στο επίπεδο του ημιπλαισίου.

Σημειώνεται, ότι η συμβολή των διαγωνίων ράβδων ενός δικτυώματος στη συνολική ακαμψία είναι μικρή σε σχέση με αυτή των ορθοστατών, για αυτό και μπορεί να αμελείται (όπως έγινε στα προηγούμενα και όπως θα γίνεται εφ' εξής).

Εάν το δικτύωμα έχει παράλληλα πέλματα και πολλά φατνώματα, η ακραία τιμή q_0 προκύπτει από την ισορροπία του δικτυώματος (με τομή Ritter) ίση προς,

$$q_0 = \frac{Q}{2H}$$

όπου,

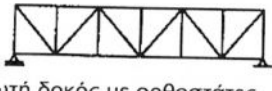
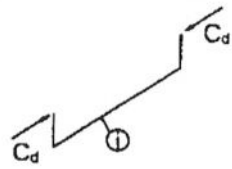
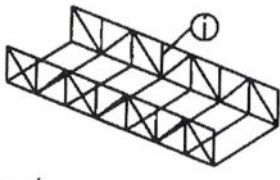
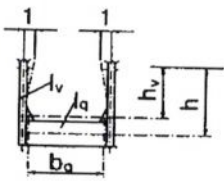
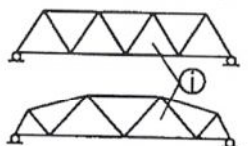
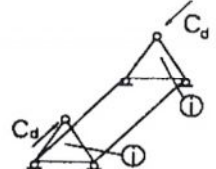
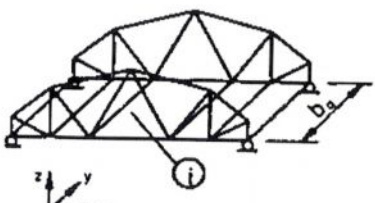
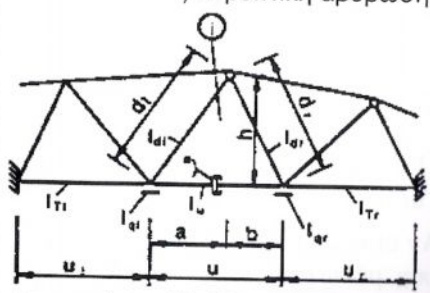
Q = συνολικό φορτίο του δικτυώματος

H = ύψος δικτυώματος.

1.7.2 Ευρωκώδικας 3

Ο Ευρωκώδικας 3, Μέρος 2, ορίζει ότι οι θλιβόμενες ράβδοι πελμάτων δικτυωτών δοκών και τα θλιβόμενα πέλματα ολόσωμων δοκών, όταν δεν προστατεύονται έναντι πλευρικής εκτροπής, θα πρέπει να ελέγχονται έναντι κινδύνου πλευρικού λυγισμού.

Τα θλιβόμενα αυτά πέλματα θα προσομοιάζονται με υποστυλώματα, τα οποία υπόκεινται σε θλιπτική δύναμη N_{sd} και στηρίζονται πλευρικά μέσω συνεχών ή διακεκριμένων (σημειακών) ελαστικών στηρίξεων. Ο υπολογισμός της ακαμψίας C_d των ελαστικών στηρίξεων για άνω ανοιχτά πλαίσια γίνεται σύμφωνα με τα προηγηθέντα (στην μέθοδο του Timoshenko) και με το Παράρτημα Η του Μέρους 2 του EC3.

Πίνακας 1 Πλευρικές ακαμψίες C_d εγκάρσιων συνδέσμων		
	1	2
1	 <p>Δικτυωτή δοκός με ορθοστάτες</p>	
1a	 <p>Προσομοίωση</p>	 $C_d = \frac{(E I_y)_d}{\frac{h_v^3}{3} + \frac{h_v^2 b_q l_v}{2}}$
2	 <p>Δικτυωτές δοκοί χωρίς ορθοστάτες</p>	 <p>Ημιπλάισιο σε δικτυωτή γέφυρα χωρίς ορθοστάτες</p>
2a	 <p>Προσομοίωση</p>	<p>*) Στρεπτική άρθρωση</p>  <p>Προσομοίωση: Η ράβδος του κάτω πέλματος έχει μόνο καμπτική αντίσταση I_e, οι γειτονικές ράβδοι με στρεπτική αντίσταση I_T</p>

Πίνακας 1 Πλευρικές ακαμψίες C_d εγκάρσιων συνδέσμων	
2b	Ακαμψία ελατηρίου $C_d = \frac{A - B - 2D}{AB - D^2} (E I_u)_d$
2c	$A = \frac{h^2 I_u}{n_l} + \frac{d_r^3 I_u}{3 I_{dr}} + \frac{a^2 u}{3} \qquad n_l = \frac{2}{b_q} I_{qr} + \frac{G I_{Tr}}{E u_r}$ $A = \frac{h^2 I_u}{n_r} + \frac{d_r^3 I_u}{3 I_{dr}} + \frac{b^2 u}{3} \qquad n_r = \frac{2}{b_q} I_{qr} + \frac{G I_{Tr}}{E u_r}$ <p>Τα μήκη d_l, d_r, a, b, u και b_q μπορεί να μειωθούν σε περίπτωση άκαμπτων άκρων u_l και u_r μπορεί να μειωθούν σε περίπτωση άστρεπτων άκρων</p> <p>EI_{dl}, EI_{dr}, EI_u = Καμπτικές αντιστάσεις διαγωνίων και κάτω πέλματος για κάμψη εκτός επιπέδου</p> <p>EI_{ql}, EI_{qr} = Καμπτική αντίσταση διαδοκίδας</p> <p>GI_{Tr}, GI_{Tr} = Στρεπτική αντίσταση κατά St. Venant των γειτονικών ράβδων</p>

Ο προσδιορισμός του μειωτικού συντελεστή λ_{LT} θα γίνεται με βάση την ακόλουθη ανοιγμένη λυγηρότητα,

$$\lambda_{LT} = \sqrt{\frac{\beta_A A_f f_y}{N_{crit}}}$$

όπου,
 A_f η πλήρης διατομή του πέλματος και

$$\beta_A = \frac{A_{ef}.f}{A_f}$$

Για θλιβόμενα πέλματα ολόσωμων δοκών, το A_f αντικαθίσταται με,

$$A_f + \frac{A_{wc}}{3}$$

όπου A_{wc} είναι η θλιβόμενη επιφάνεια του κορμού της δοκού.

Το κρίσιμο αξονικό φορτίο N_{crit} μπορεί να προσδιοριστεί ως ακολούθως:

1.7.2.1 Η θλιπτική δύναμη N_{sd} είναι σταθερή κατά μήκος του πέλματος

Είναι,

$$N_{crit} = m \cdot N_E$$

όπου N_E είναι το φορτίο Euler του άνω πέλματος για λυγισμό κατά ένα ημικύμα

$$N_E = \frac{\pi^2 EI_{z,f}}{L^2}$$

και m μία σταθερά

$$m = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\gamma}$$

όπου

$$\gamma = \frac{cL^4}{EI_{z,f}}$$

και

$$c = \frac{C_d}{\ell}$$

L το άνοιγμα μεταξύ των πλευρικά εξασφαλισμένων στηρίξεων

ℓ η απόσταση μεταξύ των ελαστικών στηρίξεων

$I_{z,f}$ η ροπή αδρανείας του θλιβόμενου πέλματος ως προς τον z-z (βλ. Σχ. 1.11)

C_d η ακαμψία των ημιπλαισίων.

Θα πρέπει να τονιστεί εδώ ότι, η συμπεριφορά σε λυγισμό μιας θλιβόμενης δοκού που εδράζεται σε ελαστικές στηρίξεις τύπου Winkler εξαρτάται εξόχως από την τιμή της ανηγμένης δυσκαμψίας (c) των ελατηρίων καθώς και από τις συνοριακές συνθήκες και διαφέρει εντελώς από την συμπεριφορά μιας απλά στηριζόμενης δοκού.

1.7.2.2 Η θλιπτική δύναμη N_{sd} δεν είναι σταθερή κατά μήκος του πέλματος

Στην περίπτωση αυτή, εφαρμόζεται αυτό που αναφέρθηκε στο τέλος της παραγράφου 1.6.3 (Εάν η ροπή κάμψεως...μεγαλύτερη του $0,8M_1$), όπου όμως αντί l τίθεται l_k ίσο με,

$$l_k = \pi \sqrt{\frac{EI_{z,f}}{N_{crit}}} \quad (1.13)$$

Σε συνεχείς δοκούς με πλευρικές στηρίξεις ανά αποστάσεις L , ο συντελεστής m για το κάτω πέλμα υπό θλίψη μπορεί επίσης να προσδιορίζεται από τη μικρότερη εκ των δύο τιμών,

$$m = 1 + 0.44 \cdot (1 + \mu) \cdot \Phi^{1.5} + (3 + 2\Phi) \cdot \gamma / (350 - 50\mu)$$

$$m = 1 + 0.44 \cdot (1 + \mu) \cdot \Phi^{1.5} + (0.195 + (0.05 + \mu/100) \cdot \Phi) \cdot \gamma^{0.5}$$

με,

$$\mu = V_2/V_1$$

$$\Phi = 2 \cdot (1 - M_2/M_1) / (1 + \mu) \quad \text{για } M_2 > 0$$

Η αντίστοιχη ανηγμένη λυγηρότητα εν προκειμένω μπορεί να προσδιορισθεί από τη σχέση,

$$\lambda_{LT} = 1,10 \frac{L}{b} \sqrt{\left(\frac{f_y}{mE}\right) \cdot \left(1 + \frac{A_{wc}}{3A_f}\right)} \quad (1.14)$$

όπου b είναι το πλάτος του κάτω πέλματος.

Ο μειωτικός συντελεστής υπολογίζεται από τις σχέσεις (1.4) έως (1.7).

Ο έλεγχος επάρκειας γίνεται, για μεν ολόσωμες δοκούς με βάση τη σχέση,

$$M_{sd} < M_{b,Rd}$$

ενώ για τα πέλματα δικτυωτών φορέων, με βάση τη σχέση,

$$N_{sd} < x_{LT} \cdot \beta_A \cdot A_f \cdot f_y / \gamma_{M1}$$

διότι

$$M_{sd} = N_{sd} \cdot h \leq M_{b,Rd} = x_{LT} \cdot \beta_W \cdot W_{pl,y} \cdot f_y / \gamma_{M1} = < x_{LT} \cdot \beta_A \cdot A_f \cdot h \cdot f_y / \gamma_{M1}$$

Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η επιρροή των αρχικών ατελειών επί των εγκάρσιων ημιπλαισίων, θα εφαρμόζεται μια πρόσθετη πλευρική δύναμη F_{sd} επί του εγκάρσιου ημιπλαισίου στη θέση σύνδεσης του με το θλιβόμενο πέλμα, ίση με,

$$F_{sd} = \frac{N_{sd}}{100} \quad \text{για } \ell_k \leq 1,2 \ell$$

$$F_{sd} = \frac{\ell}{\ell_k} * \frac{N_{sd}}{100} * \frac{1}{1 - \frac{N_{sd}}{N_{crit}}} \quad \text{για } \ell_k > 1,2 \ell$$

με ℓ_k από την εξίσωση (1.11) και ℓ η απόσταση μεταξύ των εγκάρσιων ημιπλαισίων.

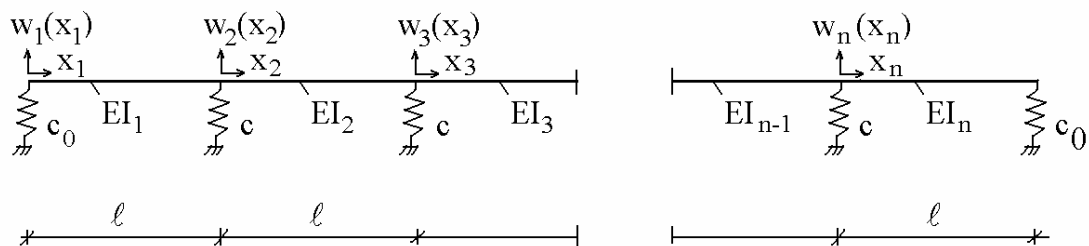
1.7.3 Αναλυτική Μέθοδος

Όπως ειπώθηκε και πιο πριν, η συμπεριφορά σε λυγισμό θλιβόμενης δοκού που εδράζεται σε ελαστική στήριξη τύπου Winkler εξαρτάται κυρίως από την τιμή της ανηγμένης δυσκαμψίας (c) των ελατηρίων καθώς και από τις συνοριακές συνθήκες και διαφέρει από την συμπεριφορά μιας απλά στηριζόμενης δοκού.

Σύμφωνα με τους Bazant & Cedolin, το κρίσιμο μήκος (ισοδύναμο μήκος λυγισμού) δεν σχετίζεται με το ολικό μήκος της δοκού αλλά με την καμπτική ακαμψία EI και τα εγκάρσια ελατήρια μεγέθους c . Έτσι, ο λυγισμός όλου του άνω πέλματος κατά ένα ημικύμα μήκους L , δεν είναι πιθανό να συμβεί όσο η καταπόνηση δεν ξεπερνά την τιμή του κρίσιμου φορτίου. Για αυτό το λόγο η αναλυτική διερεύνηση με παραμετρική λογική, της πλευρικής εκτροπής του άνω θλιβόμενου πέλματος είναι αναγκαία.

Παρακάτω παρουσιάζεται η αναλυτική μεθοδολογία που έχει προταθεί από τους κύριους Ραυτογιάννη και Αβράαμ.

Ας θεωρήσουμε την δοκό του σχήματος (1.14) η οποία έχει n ανοίγματα ίσου μήκους, καταπονείται από αξονικό θλιπτικό φορτίο $N(\chi)$ κλιμακωτής μορφής ('πριονωτό') και εδράζεται σε πλευρικά ελατήρια με σταθερές c_0 τα δύο ακραία και c τα ενδιάμεσα.



Σχ. 1.14 μοντέλο του άνω πέλματος με πλευρικά ελατήρια

Η λύση της εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα του λυγισμού, δίνει την έκφραση για τη μετατόπιση $w(x)$ του ανοίγματος i , η οποία είναι,

$$w_i(x_i) = A_i \sin k_i x_i + B_i \cos k_i x_i + C_i x_i + D_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1.15)$$

με

$$k_i^2 = \frac{N_i}{EI_i}$$

όπου N_i είναι η εσωτερική αξονική θλιπτική δύναμη και EI_i είναι η καμπτική ακαμψία για κάθε τμήμα (i) αντίστοιχα της δοκού.

Οι συντελεστές A_i , B_i , C_i και D_i ($i=1,2,\dots,n$) προσδιορίζονται εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες για το πρώτο και τελευταίο τμήμα, οι οποίες είναι,

$$\begin{aligned} M_1(0) &= 0 \\ V_1(0) - c_0 \cdot w_1(0) &= 0 \\ M_n(\ell) &= 0 \\ V_n(\ell) + c_0 \cdot w_n(\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

ενώ οι συνοριακές συνθήκες για κάθε ενδιάμεσο τμήμα i ($i=2,3,\dots,n-1$) της δοκού είναι,

$$\begin{aligned} w_{i-1}(\ell) &= w_i(0) \\ w'_{i-1}(\ell) &= w'_i(0) \\ M_{i-1}(\ell) + M_i(0) &= 0 \\ V_{i-1}(\ell) - V_i(0) + c \cdot w_i(0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

οι εκφράσεις για την ροπή και την τέμνουσα δίνονται από τους ακόλουθους τύπους,

$$\begin{aligned} M_i(x_i) &= -EI_i \cdot w''_i(x_i) \\ V_i(x_i) &= -EI_i \cdot w'''_i(x_i) - N_i w'_i(x_i) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για το βέλος $w(x)$ από την εξίσωση (1.15) και τις εκφράσεις για την ροπή και την τέμνουσα από τις εξισώσεις (1.18) στις εξισώσεις (1.16) και (1.17) παίρνουμε ένα γραμμικό ομογενές σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές A_i , B_i , C_i και D_i .

Προκειμένου αυτό το σύστημα να έχει μια μη τετριμμένη λύση, η ορίζουσα των άγνωστων συντελεστών πρέπει να είναι ίση με το μηδέν (εξίσωση λυγισμού), αντίστοιχα με ένα πρόβλημα ιδιοτιμών. Η πρώτη μηδενική τιμή της ορίζουσας αντιστοιχεί στο μικρότερο φορτίο λυγισμού, που αποτελεί και το κρίσιμο φορτίο. Σε αυτό το σημείο ορίζονται τα παρακάτω αδιάστατα μεγέθη,

$$\bar{A}_i = A_i / \ell, \quad \bar{B}_i = B_i / \ell, \quad \bar{C}_i = C_i, \quad \bar{D}_i = D_i / \ell$$

$$\bar{k}_i^2 = N_i \ell^2 / EI_i = k_i^2 \ell^2 \quad (i=1, \dots, n)$$

$$\bar{c}_0 = c_0 \ell^3 / EI_1, \quad \bar{c} = c \ell^3 / EI_1$$

καθώς επίσης και οι λόγοι δυσκαμψίας $r_i = EI_i / EI_1$ και οι λόγοι φορτίου $\lambda_i = N_i / N_1$, για $i=2, \dots, n$.

Στην περίπτωση που η δυσκαμψία EI και το αξονικό θλιπτικό φορτίο N είναι σταθερά (δηλαδή $r_i=1$ και $\lambda_i=1$ για κάθε τμήμα i , η εξίσωση λυγισμού απλοποιείται σε,

$$\begin{vmatrix} [D_0] & [0] & [0] \\ [0] & [D_{i-1,i}] & [0] \\ [0] & [0] & [D_n] \end{vmatrix} = 0 \quad (1.19)$$

όπου τα υπό-μητρώα D_0 , $D_{i-1,i}$ και D_n είναι,

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{k}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{c}_0 & -\bar{k}^2 & -\bar{c}_0 \end{bmatrix} \quad (1.20a)$$

$$D_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \sin \bar{k} & \cos \bar{k} & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \bar{k} \cos \bar{k} & -\bar{k} \sin \bar{k} & 1 & 0 & -\bar{k}^2 & 0 & -1 & 0 \\ \bar{k}^2 \sin \bar{k} & \bar{k}^2 \cos \bar{k} & 0 & 0 & 0 & -\bar{k}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{k}^2 & 0 & 0 & \bar{c} & -\bar{k}^2 & \bar{c} \end{bmatrix} \quad (1.20b)$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} -\bar{k}^2 \sin \bar{k} & -\bar{k}^2 \cos \bar{k} & 0 & 0 \\ \bar{c}_0 \sin \bar{k} & \bar{c}_0 \cos \bar{k} & \bar{c}_0 - \bar{k}^2 & \bar{c}_0 \end{bmatrix} \quad (1.20c)$$

και i είναι ο αριθμός του ενδιάμεσου ελατηρίου και $\bar{k}^2 = N/EI$.

1.7.4 Πεπερασμένα Στοιχεία

Σήμερα με την πρόοδο της τεχνολογίας των υπολογιστών έχει γίνει εύκολη η προσομοίωση και η ανάλυση κάθε έργου. Η διαθεσιμότητα πλέον σύγχρονων εργαλείων λογισμικού και η ευρεία χρήση τους από τους μηχανικούς δίνει τη δυνατότητα εκπόνησης μελετών με εφαρμογή προχωρημένων και ακριβέστερων μεθόδων στην πράξη.

Έτσι είναι δυνατή πλέον η γρήγορη εξεύρεση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μέσα από την δυνατότητα γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας (linear buckling analysis) που διαθέτουν πολλά από τα λογισμικά (π.χ. SAP2000, NASTRAN κ.α.) που ειδικεύονται στο επιστημονικό πεδίο του πολιτικού μηχανικού. Η επίλυση γίνεται μέσω της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων και συγκεκριμένα με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων δοκού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΦΟΡΕΑ

2.1 Εισαγωγή

Για την μελέτη του άνω θλιβόμενου πέλματος μιας δικτυωτής πεζογέφυρας κάτω διάβασης μήκους 24,0 μέτρων χωρίς άνω αντιανέμιο και για τον προσδιορισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του, πέρα από τις προτεινόμενες μεθοδολογίες κατά τον Timoshenko και τον Ευρωκώδικα 3, έγινε χρήση του λογισμικού ανάλυσης και διαστασιολόγησης SAP2000 version 14. Συγκεκριμένα δημιουργήθηκαν για κάθε παραλλαγή της γεωμετρίας της πεζογέφυρας, δύο μοντέλα της, ένα δυσδιάστατο και ένα τρισδιάστατο.

Για την προσομοίωση της κατασκευής το πρόγραμμα χρησιμοποιεί ευθύγραμμα στοιχεία δοκού με έξι βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο, δηλαδή μετατοπίσεις και περιστροφές κατά τους τρεις άξονες. Οι συνθήκες στήριξης δίνονται στο καθολικό σύστημα. Οι συνθήκες σύνδεσης των στοιχείων στα άκρα τους δίνονται στο τοπικό σύστημα του στοιχείου. Τα φορτία ορίζονται στο καθολικό, στο τοπικό ή στο προβαλλόμενο σύστημα συντεταγμένων. Οι διάφοροι τύποι φορτίων είναι επικόμβιο, γραμμικά κατανεμημένο, συγκεντρωμένο σε τυχούσα θέση του στοιχείου, θερμοκρασιακή μεταβολή, ίδιο βάρος, επιβεβλημένη μετακίνηση ή στροφή στήριξης. Η ανάλυση που χρησιμοποιείται για την εξεύρεση των μορφών λυγισμού και αντίστοιχα του κρίσιμου φορτίου λυγισμού είναι η γραμμική ανάλυση λυγισμού (linear buckling analysis).

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα κυριότερα σημεία της διαδικασίας προσομοίωσης της πεζογέφυρας. Χάριν οικονομίας θα χρησιμοποιηθεί σαν παράδειγμα η διαδικασία της μοντελοποίησης για την πεζογέφυρα με τα 6 φατνώματα.

2.2 Υλικό

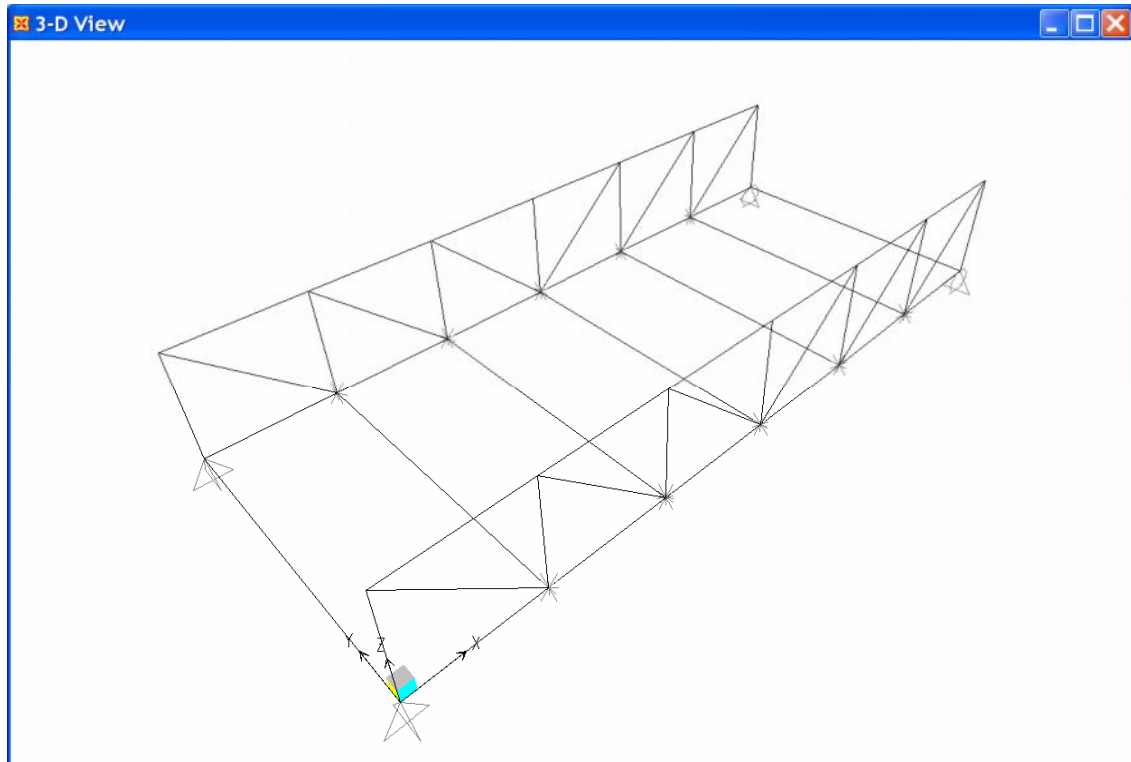
Το υλικό όλων των μελών του φορέα είναι χάλυβας ποιότητας S235.

The screenshot shows the 'Material Property Data' dialog box for material S235. The data is organized into several sections:

- General Data:**
 - Material Name and Display Color: S235
 - Material Type: Steel
 - Material Notes: Modify/Show Notes...
- Weight and Mass:**
 - Weight per Unit Volume: 76,982
 - Mass per Unit Volume: 7,85
 - Units: kN, m, C
- Isotropic Property Data:**
 - Modulus of Elasticity, E: 2,100E+08
 - Poisson's Ratio, U: 0,3
 - Coefficient of Thermal Expansion, A: 1,200E-05
 - Shear Modulus, G: 80769231
- Other Properties for Steel Materials:**
 - Minimum Yield Stress, Fy: 235000
 - Minimum Tensile Stress, Fu: 360000
 - Effective Yield Stress, Fye: 258500
 - Effective Tensile Stress, Fue: 396000

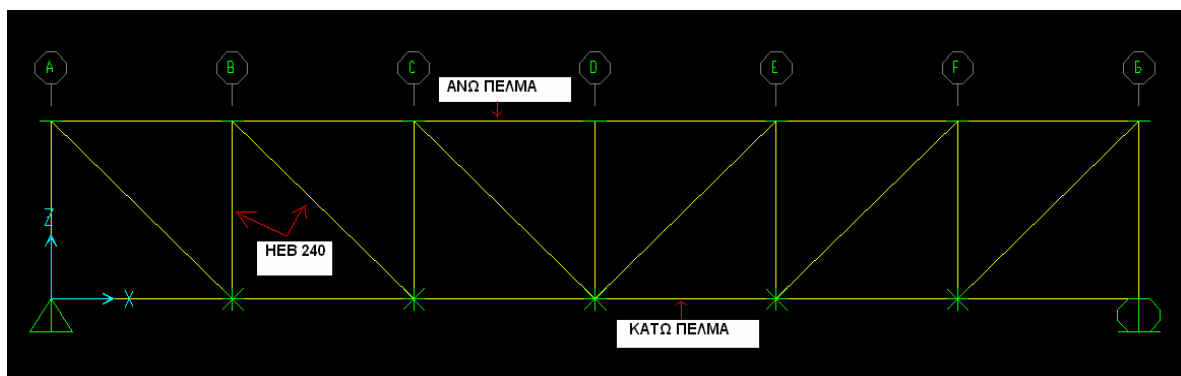
2.3 Φορέας

Παρουσιάζεται η διάταξη του φορέα για την περίπτωση των έξι φατνωμάτων (ανάλογη είναι και για τις άλλες 3 περιπτώσεις). Το μήκος της γέφυρας είναι 24,0 μέτρα και το άνοιγμά της 10,0 μέτρα. Ο φορέας αποτελείται από δύο δικτυωτές κύριες δοκού, κάθε μία σε κάθε άκρο της γέφυρας. Το δικτύωμα της δοκού αποτελείται από το άνω και κάτω πέλμα, τους ορθοστάτες και τις διαγώνιες δοκούς. Τέλος οι δύο δοκοί ενώνονται με διαδοκίδες στις θέσεις των ορθοστατών.

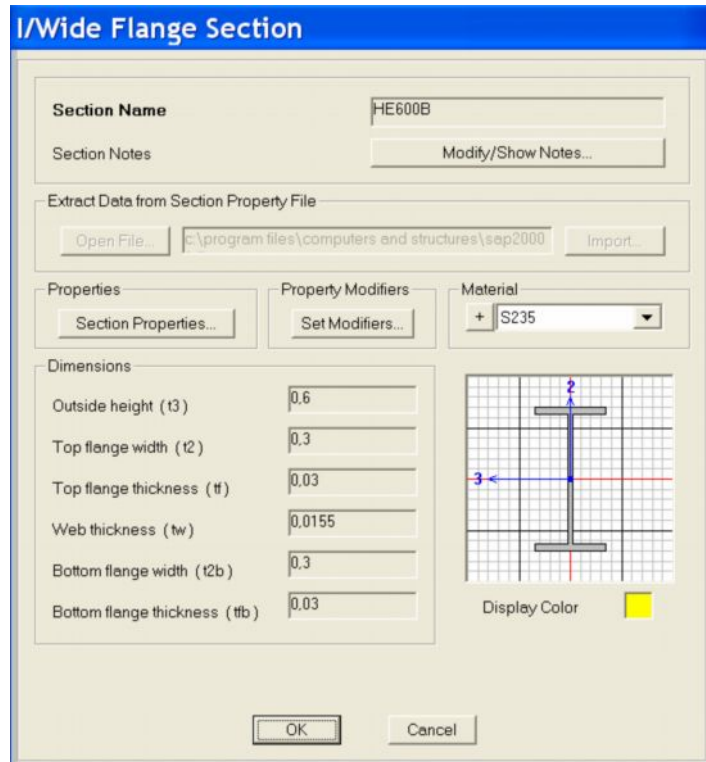


2.4 Διατομές

Το είδος και τα χαρακτηριστικά κάθε διατομής είναι τα εξής,

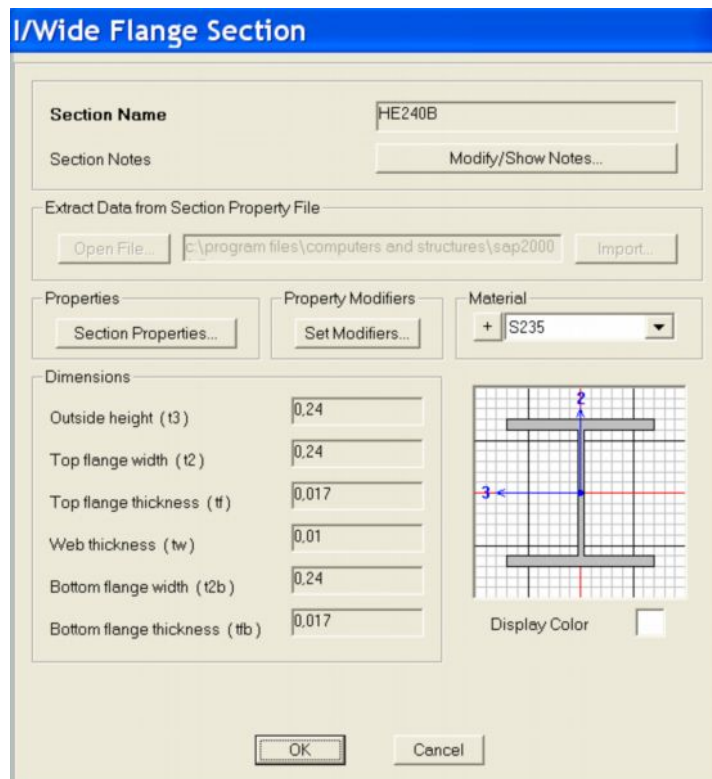


I. Οι διαδοκίδες είναι διατομής HEB 600.

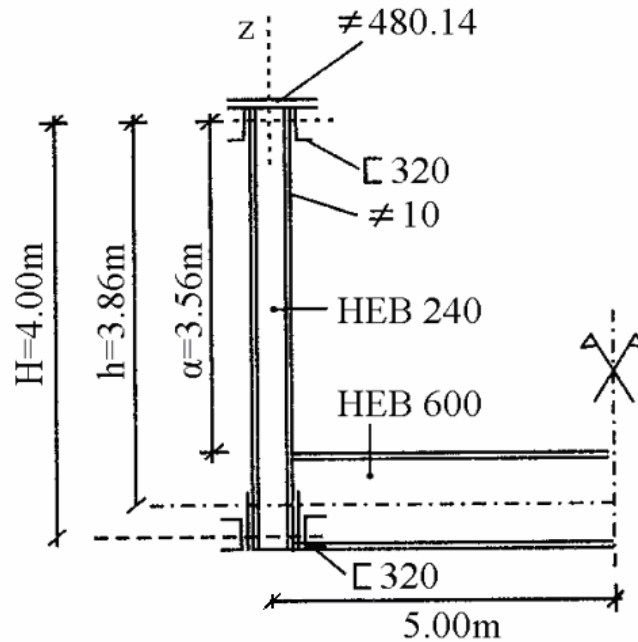


II. Οι ορθοστάτες είναι διατομής HEB 240

III. Οι διαγώνιοι είναι διατομής HEB 240



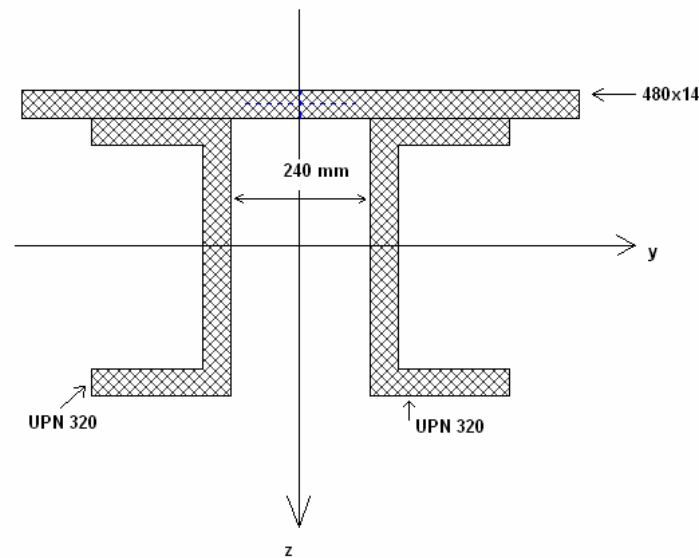
- IV. Το άνω και κάτω πέλμα έχουν σύνθετη διατομή και για αυτό η μορφή τους και ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών τους παρουσιάζονται παρακάτω αναλυτικά.



ΑΝΩ ΠΕΛΜΑ

Το άνω πέλμα του δικτυώματος της δοκού της γέφυρας έχει σύνθετη διατομή. Αποτελείται από δύο κατακόρυφα μέλη διατομής UPN 320, καθ' ένα εκατέρωθεν του κορμού του ορθοστάτη HEB 240, και από ένα οριζόντιο έλασμα διαστάσεων 480x14 mm (πλάτος x ύψος).

Βάσει της γεωμετρίας γίνεται ο υπολογισμός των απαιτούμενων χαρακτηριστικών της διατομής ώστε να εισάγουμε στη συνέχεια στο SAP2000 τα κατάλληλα στοιχεία.



Εμβαδόν,

$$A_f = 2 \cdot A_{\text{UPN320}} + A_{480 \times 14} = 2 \cdot 75,8 + 48 \cdot 1,4 = 218,8 \text{ cm}^2$$

Ροπή αδρανείας περί τον άξονα z-z

$$I_{z,f} = I_{z,480 \times 14} + 2 \cdot I_{z,\text{UPN320}} = (1,4 \cdot 48^3)/12 + 2 \cdot 597 + 2 \cdot 75,8 \cdot (12+1+2,6)^2 = 50989,776 \text{ cm}^4$$

Ακτίνα αδρανείας περί τον άξονα z-z

$$i_z = (I_{z,f} / A_f)^{0,5} = 15,265 \text{ cm}$$

Εύρεση κέντρου βάρους διατομής κατά τον άξονα z (έστω μέσα στον κορμό των UPN 320)

$$48 \cdot 1,4 + 2 \cdot 10 \cdot 1,75 + 2 \cdot 1,4 \cdot (z - 1,4 - 1,75) = 2 \cdot 1,4 \cdot (31,65 - z) + 2 \cdot 10 \cdot 1,75$$

$$z = 5,4 \text{ cm}$$

Ροπή αδρανείας περί τον άξονα y-y

$$I_{y,f} = I_{y,480 \times 14} + 2 \cdot I_{y,\text{UPN320}} = (48 \cdot 1,4^3)/12 + 48 \cdot 1,4 \cdot (5,4 - 0,7)^2 + 2 \cdot 10870 + 2 \cdot 75,8 \cdot (17,4 - 5,4)^2 = 45065,824 \text{ cm}^4$$

ακτίνα αδρανείας περί τον άξονα y-y

$$i_y = (I_{y,f} / A_f)^{0,5} = 14,352 \text{ cm}$$

Property Data

Section Name: ANW PELMA

Properties

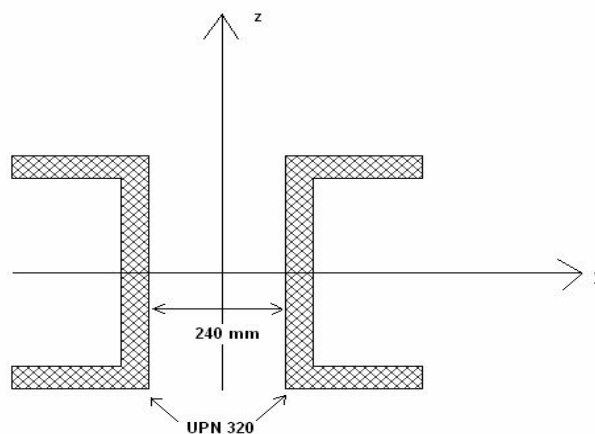
Cross-section (axial) area	0,0219	Section modulus about 3 axis	1.
Torsional constant	1,000E-06	Section modulus about 2 axis	1.
Moment of Inertia about 3 axis	4,507E-04	Plastic modulus about 3 axis	1.
Moment of Inertia about 2 axis	5,099E-04	Plastic modulus about 2 axis	1.
Shear area in 2 direction	1.	Radius of Gyration about 3 axis	0,1435
Shear area in 3 direction	1.	Radius of Gyration about 2 axis	0,1527

OK Cancel

ΚΑΤΩ ΠΕΛΜΑ

Το κάτω πέλμα του δικτυώματος της δοκού της γέφυρας έχει σύνθετη διατομή. Αποτελείται από δύο κατακόρυφα μέλη διατομής UPN 320, καθ' ένα εκατέρωθεν του κορμού του ορθοστάτη HEB 240.

Βάσει της γεωμετρίας γίνεται ο υπολογισμός των απαιτούμενων χαρακτηριστικών της διατομής ώστε να εισάγουμε στη συνέχεια στο SAP2000 τα κατάλληλα στοιχεία.



Εμβαδόν,

$$A_f = 2 \cdot A_{UPN320} = 2 \cdot 75,8 = 151,6 \text{ cm}^2$$

Ροπή αδρανείας περί τον άξονα z-z

$$I_{z,f} = 2 \cdot I_{z,UPN320} = 2 \cdot 597 + 2 \cdot 75,8 \cdot (12+1+2,6)^2 = 38087,376 \text{ cm}^4$$

Ακτίνα αδρανείας περί τον άξονα z-z

$$i_z = (I_{z,f} / A_f)^{0,5} = 15,85 \text{ cm}$$

Λόγω συμμετρίας σε αυτή την περίπτωση και ως προς τον άξονα y-y το κέντρο βάρους της διατομής κατά τον άξονα z είναι στο $z=16 \text{ cm}$.

Ροπή αδρανείας περί τον άξονα y-y

$$I_{y,f} = 2 \cdot I_{y,UPN320} = 2 \cdot 10870 = 21740 \text{ cm}^4$$

ακτίνα αδρανείας περί τον άξονα y-y

$$i_y = (I_{y,f} / A_f)^{0,5} = 11,975 \text{ cm}$$

Property Data

Section Name

Properties

Cross-section (axial) area	<input style="width: 80%;" type="text" value="0,0152"/>	Section modulus about 3 axis	<input style="width: 80%;" type="text" value="1."/>
Torsional constant	<input style="width: 80%;" type="text" value="8,000E-07"/>	Section modulus about 2 axis	<input style="width: 80%;" type="text" value="1."/>
Moment of Inertia about 3 axis	<input style="width: 80%;" type="text" value="2,174E-04"/>	Plastic modulus about 3 axis	<input style="width: 80%;" type="text" value="1."/>
Moment of Inertia about 2 axis	<input style="width: 80%;" type="text" value="3,809E-04"/>	Plastic modulus about 2 axis	<input style="width: 80%;" type="text" value="1."/>
Shear area in 2 direction	<input style="width: 80%;" type="text" value="1."/>	Radius of Gyration about 3 axis	<input style="width: 80%;" type="text" value="0,1198"/>
Shear area in 3 direction	<input style="width: 80%;" type="text" value="1."/>	Radius of Gyration about 2 axis	<input style="width: 80%;" type="text" value="0,1585"/>

Στην παραμετρική ανάλυση που θα γίνει αργότερα εξετάζονται και οι περιπτώσεις για τις οποίες τα δύο ακραία ημιπλαίσια έχουν διπλάσια δυσκαμψία. Σε αυτές τις περιπτώσεις διαμορφώνονται ανάλογα τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων ακραίων ορθοστατών και των δύο ακραίων διαδοκίδων ώστε να παρέχουν διπλάσια ακαμψία.

Ορθοστάτες διπλάσιας δυσκαμψίας

Property Data

Section Name: 2I HEB240

Properties

Cross-section (axial) area	0,0106	Section modulus about 3 axis	1,
Torsional constant	2,080E-06	Section modulus about 2 axis	1,
Moment of Inertia about 3 axis	2,252E-04	Plastic modulus about 3 axis	1,
Moment of Inertia about 2 axis	7,846E-05	Plastic modulus about 2 axis	1,
Shear area in 2 direction	1,	Radius of Gyration about 3 axis	0,1458
Shear area in 3 direction	1,	Radius of Gyration about 2 axis	0,086

OK Cancel

Διαδοκίδες διπλάσιας δυσκαμψίας

Property Data

Section Name: 2I HEB600

Properties

Cross-section (axial) area	0,027	Section modulus about 3 axis	1,
Torsional constant	1,354E-05	Section modulus about 2 axis	1,
Moment of Inertia about 3 axis	3,420E-03	Plastic modulus about 3 axis	1,
Moment of Inertia about 2 axis	2,706E-04	Plastic modulus about 2 axis	1,
Shear area in 2 direction	1,	Radius of Gyration about 3 axis	0,3559
Shear area in 3 direction	1,	Radius of Gyration about 2 axis	0,1001

OK Cancel

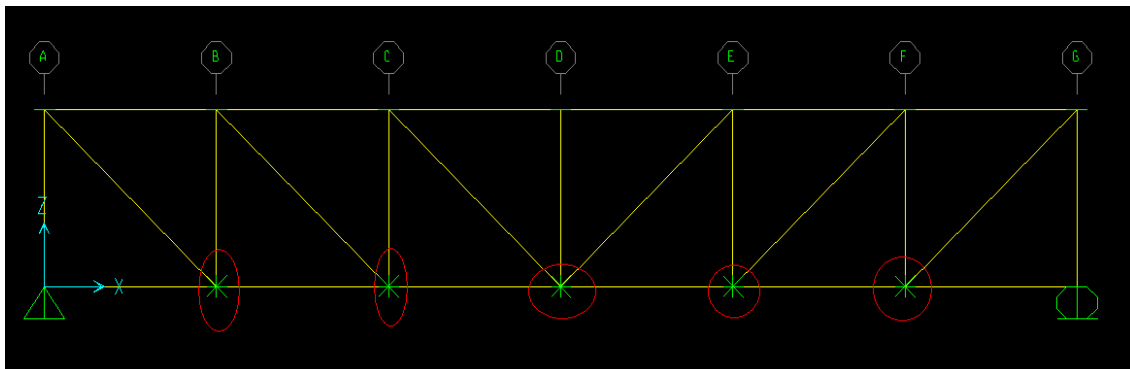
2.5 Συνδεσμολογία – Έδραση

Για την θεμελίωση του φορέα θεωρούμε ότι στο αρχικό άκρο είναι δεσμευμένοι όλοι οι μετακινησιακοί βαθμοί ελευθερίας (δηλαδή κατά τους τοπικούς άξονες 1-2-3, οι οποίοι ταυτίζονται με τους γενικούς άξονες (global axes) του φορέα x-y-z), ενώ στο άκρο του τέλους της γέφυρας, έχουμε δέσμευση μόνο κατά την κατακόρυφη και εγκάρσια μετακίνηση (ανεμπόδιστη παραμόρφωση κατά τον διαμήκη άξονα 1).



δεσμεύσεις του αρχικού κόμβου έδρασης

Στους ενδιάμεσους κόμβους του κάτω πέλματος δεσμεύουμε την δυνατότητα μετακίνησης κατά την (εγκάρσια) διεύθυνση του τοπικού άξονα 2 (δηλαδή κατά τον y-y). Αυτό γίνεται ώστε στην ανάλυση λυγισμού που θα ακολουθήσει να μην επηρεάζει καθόλου το κάτω πέλμα τις μορφές λυγισμού. Είχε παρατηρηθεί ότι άνευ πλευρικών παρεμποδίσεων το κάτω πέλμα, λόγω της πλευρικής ευκαμψίας που παρουσιάζει, συμμετείχε στον λυγισμό με αποτέλεσμα να μην έχουμε λυγισμό καθαρά μόνο του πάνω πέλματος αλλά ολόκληρης της δικτυωτής δοκού (κυρίως στην περίπτωση του δυσδιάστατου μοντέλου). Στην πραγματικότητα άλλωστε η ύπαρξη χιαστί συνδέσμων κάτω από το κατάστρωμα της γέφυρας, προσφέρει μια τέτοια πλευρική στήριξη.



δεσμεύσεις κάτω κόμβων για μετακίνηση

Οι δικτυωτές κατασκευές τις τελευταίες δεκαετίες τυγχάνουν ευρείας χρήσης γιατί επιτρέπουν την κατασκευή μεγάλων φορέων με μειωμένα νεκρά φορτία. Η ανάλυση τέτοιων φορέων βασίζεται στην ανάλυση του λεγόμενου ιδεατού δικτύωματος. Αναπτύχθηκε την περίοδο που δεν υπήρχαν οι υπολογιστές και οι υποθέσεις και οι απλοποιήσεις ήταν αναγκαίες για την επίλυση φορέων. Οι κύριες υποθέσεις-απλοποιήσεις της μεθόδου του ιδεατού δικτύωματος είναι δύο και αφορούν την επιβολή των φορτίων και την συνδεσμολογία.

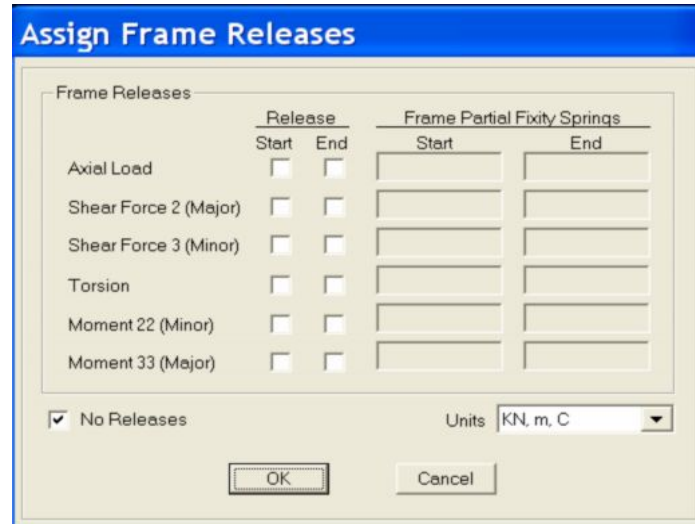
Όσον αφορά τα φορτία θεωρείται ότι δεν υπάρχουν εγκάρσια φορτία τα οποία ασκούνται κατανεμημένα κατά μήκος των πλευρών. Δηλαδή τα φορτία στο ιδεατό δίκτυωμα ασκούνται μόνο στους κόμβους. Ιδίο βάρος, κατανεμημένα φορτία είτε αγνοούνται είτε συγκεντρώνονται στους κόμβους. Οπότε αφού δεν έχουμε κατανεμημένα φορτία δεν έχουμε ανάπτυξη ροπών. Η παραδοχή αυτή όπως αποδείχθηκε και από μετέπειτα έρευνες είναι ορθή και το μοντέλο δεν αποκλίνει από την πραγματική κατασκευή. Στην παρούσα διπλωματική ακολουθήθηκε αυτή η παραδοχή και τόσο το ίδιο βάρος όσο και το κινητό φορτίο της γέφυρας συγκεντρώθηκαν στους κόμβους του κάτω πέλματος. (περισσότερα στην αντίστοιχη παράγραφο παρακάτω).

Για τη συνδεσμολογία θεωρείται ότι οι συνδέσεις όλων των μελών είναι τελείως αρθρωτές. Αυτή η απλοποίηση διευκολύνει την ανάλυση και το σχεδιασμό ενός δικτύωματος αλλά δεν αντιπροσωπεύει πλήρως την συμπεριφορά της κατασκευής. Η ανάλυση με αρθρωτές συνδέσεις είναι μια ιδεατή κατάσταση με κύριο χαρακτηριστικό της ότι τα μέλη καταπονούνται μόνο από αξονικά φορτία. Ωστόσο στην πραγματικότητα η σύνδεση των μελών ενός δικτύωματος γίνεται με κοχλιώσεις που δεν μπορούν να θεωρηθούν ως τέλειες αρθρώσεις καθώς εμποδίζουν εν μέρει την ανάπτυξη στροφών. Οι συνδέσεις των μελών ενός πραγματικού δικτύωματος εντάσσονται μεταξύ αρθρώσεων και πλήρως συνδέσεων. Επίσης συχνά τα πέλματα μιας δικτυωτής δοκού είναι συνεχή και όχι ξεχωριστά αμφιαρθρωτά μέλη. Όλα αυτά αυξάνουν τη δυσκαμψία των κόμβων, τείνοντας τις συνδέσεις προς τον τύπο της πάκτωσης, επιτρέποντας έτσι την μεταφορά ροπών. Τα μέλη του δικτύωματος και κυρίως το άνω πέλμα που μας ενδιαφέρει, υπόκεινται σε καμπτικές ροπές και τέμνουσες δυνάμεις, οι οποίες θεωρούνται ανύπαρκτες στο ιδεατό δίκτυωμα. Όλες αυτές οι δυνάμεις, πέραν των αξονικών, δημιουργούν δευτερεύουσες καταπονήσεις.

Οι δευτερεύουσες αυτές εντάσεις μπορεί να προκληθούν σε ένα πραγματικό φορέα και λόγω έκκεντρης σύνδεσης και εγκάρσιων φορτίων. Όταν υπάρχουν δευτερεύουσες καταπονήσεις είναι αναγκαίο να εξετάζονται τα μέλη σαν δοκοί-υποστυλώματα. Σε πολλές περιπτώσεις επειδή αυτές οι δευτερεύουσες δυνάμεις είναι μικρού μεγέθους, αγνοούνται και μελετάμε τα μέλη σαν ράβδους δικτύωματος.

Στην παρούσα διπλωματική στόχος είναι ο όσο το δυνατόν ακριβέστερος προσδιορισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Προκειμένου λοιπόν τα μοντέλα που θα εισάγουμε στο λογισμικό ανάλυσης να προσεγγίζουν περισσότερο την πραγματική κατασκευή θα λάβουμε υπόψη την ένωση των μελών που συμβαίνει στην πραγματικότητα. Θα θεωρήσουμε

λοιπόν όλες τις συνδέσεις των μελών ως συνεχείς (πακτώσεις) και όχι αρθρωτές. Έτσι δεν θα αγνοηθούν οι δευτερεύουσες δυνάμεις ούτε η επιρροή τους στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού (μέσα από την μεταβολή του πραγματικού αξονικού θλιπτικού φορτίου που ασκείται στα τμήματα του άνω πέλματος της γέφυρας σε σχέση με αυτό που προβλέπει η στατική του ιδεατού δικτύωματος).



δεσμεύσεις άκρων των μελών του φορέα

2.6 Φορτία

Στην πεζογέφυρα ασκούνται τα εξής φορτία,

- το ίδιο βάρος που ισούται με $q_G = 4 \text{ kN/m}^2$
- το κινητό φορτίο της πεζογέφυρας, η τιμή του οποίου βάσει των αντίστοιχων διατάξεων του Ευρωκώδικα είναι, για μεμονωμένο άνοιγμα γέφυρας με $10 \text{ m} \leq L \leq 210 \text{ m}$

$$2,5 \text{ Kn/m}^2 \leq q_{fk} = 2,0 + 120 / (L + 30) \leq 5,0 \text{ kN/m}^2$$

άρα

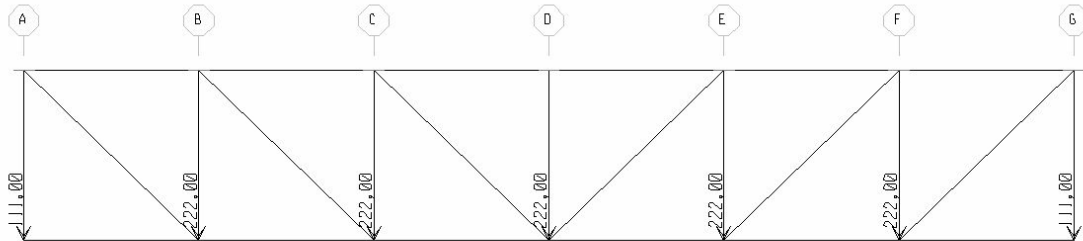
$$q_{fk} = 2,0 + \frac{120}{L + 30} = 2,0 + \frac{120}{24 + 30} = 4,22 \text{ kN / m}^2$$

το φορτίο σχεδιασμού ανά δικτύωμα είναι,

$$q_{sd} = \frac{b}{2} * [1,35q_G + 1,35q_{fk}] = \frac{10}{2} * [1,35 * 4 + 1,35 * 4,22] = 55,5 \text{ kN / m}$$

Το γραμμικό φορτίο στην συνέχεια μετατρέπεται σε συγκεντρωμένο και επιβάλλεται σε κάθε κόμβο του κάτω πέλματος ανάλογα με το πλάτος επιρροής του καθενός.

Για παράδειγμα στην γέφυρα με τα 6 φατώματα το πλάτος επιρροής των ενδιάμεσων κόμβων είναι 4,0 μέτρα και των ακραίων 2,0 μέτρα. Οπότε στους ενδιάμεσους κόμβους επιβάλλουμε ένα συγκεντρωμένο κατακόρυφο φορτίο μεγέθους $P=55,5 \cdot 4=222 \text{ kN}$ και στους ακραίου $P=111 \text{ kN}$.

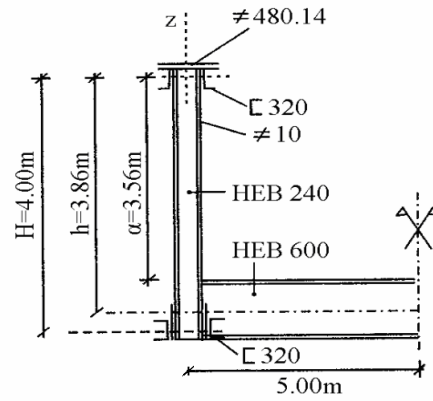


συγκεντρωμένα φορτία κόμβων κάτω πέλματος

2.7 Ακαμψία ημιπλαισίων

Όπως έχει αναφερθεί στο πρώτο κεφάλαιο, τα ανοιχτά άνω ημιπλαίσια της πεζογέφυρας, συντιθέμενα από τη διαδοκίδα και τους αντίστοιχους προς αυτήν ορθοστάτες, εξασφαλίζουν λόγω της ακαμψίας τους μία πλευρική ελαστική υποστήριξη στα άνω πέλματα των κύριων δοκών, μειώνοντας έτσι τις ανεπιθύμητες πλευρικές εκτροπές. Παρακάτω ακολουθεί ο αναλυτικός υπολογισμός της ακαμψίας των ημιπλαισίων.

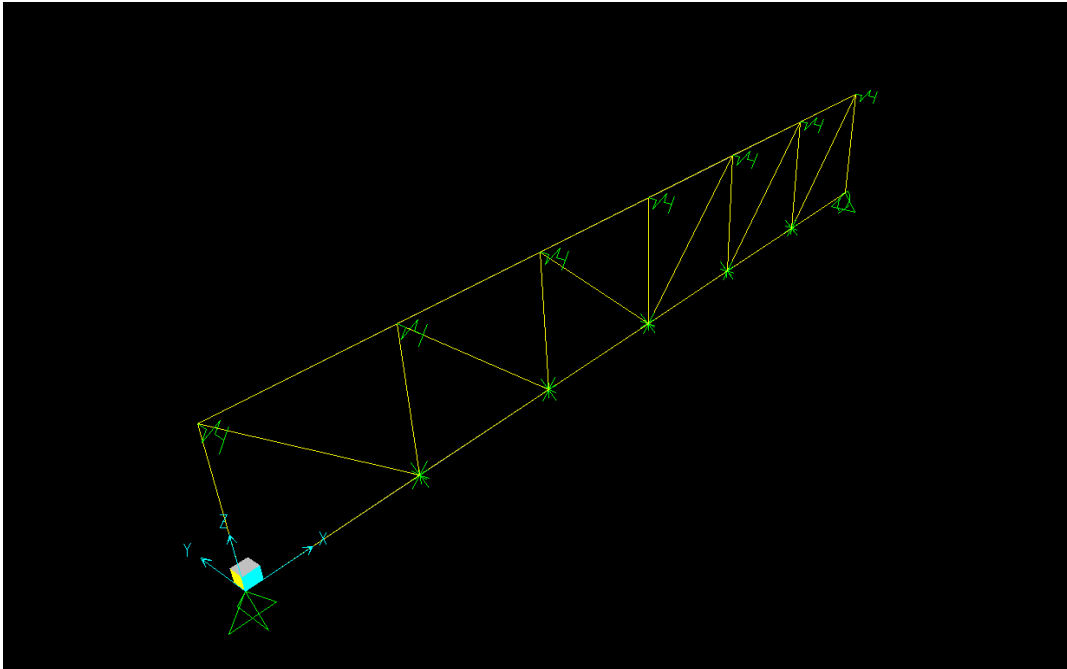
- Το ύψος του ορθοστάτη είναι $h_v=356 \text{ cm}$.
- Η απόσταση του κέντρο βάρους του άνω πέλματος από το κέντρο βάρους της διαδοκίδας είναι, $h=400-(60/2-16)=400-14=386 \text{ cm}$.
- Το πλάτος του ημιπλαισίου είναι, $b_q=1000-24/2-24/2=976 \text{ cm}$.



$$C_d = \frac{EI_v}{\frac{h_v^3}{3} + \frac{h^2 * b_q * I_v}{2 * I_q}} = \frac{2,1 * 10^4 * 11260}{\frac{356^3}{3} + \frac{386^2 * 976 * 11260}{2 * 171000}} = 11,93 \text{ kN/cm} = 1193 \text{ kN/m}$$

Στο πρόγραμμα ορίζουμε αντίστοιχα την ύπαρξη ελαστικών στηρίξεων με την παραπάνω δυσκαμψία, στους κόμβους του άνω πέλματος στην διεύθυνση του άξονα y-y (αντίστοιχος τοπικός 2).





ελαστικές στηρίξεις κόμβων άνω πέλματος

2.8 Γραμμική ανάλυση λυγισμού

Για την εξεύρεση των μορφών λυγισμού αλλά και του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, το λογισμικό ανάλυσης SAP2000 version 14 παρέχει τη δυνατότητα για γραμμική ανάλυση λυγισμού ενός φορέα.

Από το αντίστοιχο μενού δημιουργούμε την ζητούμενη περίπτωση καταπόνησης 'LYGISMOS', στην οποία δηλώνουμε ότι το μοναδικό φορτίο που συμμετέχει στην εμφάνιση του λυγισμού είναι το φορτίο 'FORTIO', το οποίο περιλαμβάνει το ίδιο βάρος του φορέα και το προβλεπόμενο κινητό επί της πεζογέφυρας, και εφαρμόζεται σαν συγκεντρωμένο φορτίο στους κόμβους του κάτω πέλματος, όπως παρουσιάστηκε πριν αναλυτικά.

Η επίλυση γίνεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (πεπερασμένα στοιχεία δοκού). Γίνεται ο υπολογισμός των μορφών λυγισμού (ο χρήστης ορίζει πόσες θα υπολογιστούν) και υπολογίζεται ο συντελεστής κρίσιμου φορτίου. Από αυτούς ο μικρότερος, δηλαδή ο πρώτος, πολλαπλασιαζόμενος με την μέγιστη αξονική δύναμη που καταπονεί το άνω πέλμα, δίνει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Load Case Data - Buckling

Load Case Name: Notes: Load Case Type:

Stiffness to Use

Zero Initial Conditions - Unstressed State

Stiffness at End of Nonlinear Case

Important Note: Loads from the Nonlinear Case are NOT included in the current case

Loads Applied

Load Type	Load Name	Scale Factor
<input type="text" value="Load Pattern"/>	<input type="text" value="FORTIO"/>	<input type="text" value="1."/>
<input type="text" value="Load Pattern"/>	<input type="text" value="FORTIO"/>	<input type="text" value="1."/>

Other Parameters

Number of Buckling Modes:

Eigenvalue Convergence Tolerance:

πίνακας διαμόρφωσης ελέγχου ευστάθειας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

3.1 Γενικά

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η παραμετρική διερεύνηση για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού πεζογέφυρας κάτω διάβασης με δικτυωτές κύριες δοκούς.

Θα εξεταστούν τέσσερα μοντέλα. Και στις τέσσερις περιπτώσεις το μήκος της γέφυρας παραμένει σταθερό, στα 24,0 μέτρα. Αυτό που μεταβάλλεται είναι ο αριθμός των φατνωμάτων, άρα και το μήκος του κάθε φατνώματος και το ύψος των κύριων δοκών.

- ◆ 4 φατνώματα, μήκους 6,0 m το καθένα και το ύψος της γέφυρας είναι $h=4,0$ m.
- ◆ 6 φατνώματα, μήκους 4,0 m το καθένα και το ύψος της γέφυρας είναι $h=4,0$ m.
- ◆ 8 φατνώματα, μήκους 3,0 m το καθένα και το ύψος της γέφυρας είναι $h=3,0$ m.
- ◆ 10 φατνώματα, μήκους 2,40 m το καθένα και το ύψος της γέφυρας είναι $h=2,40$ m.

Η μεταβολή του ύψους γίνεται προκειμένου να ισούται με το μήκος έκαστου φατνώματος και έτσι οι διαγώνιες ράβδοι του δικτυώματος των δοκών, να έχουν μια σταθερή γωνία ως προς την οριζόντια διεύθυνση, ίση με 45° . Μόνο για την περίπτωση των τεσσάρων φατνωμάτων δεν διατηρήθηκε αυτή η αναλογία αφού θα οδηγούμασταν σε πολύ μεγάλο ύψος δοκού ($H=6,0$ m), οπότε και για το συγκεκριμένο μοντέλο η γωνία των διαγώνιων είναι περίπου $33,7^{\circ}$.

Στόχος των παραπάνω μοντέλων είναι να προσδιοριστεί η επιρροή της γεωμετρίας του φορέα. Δηλαδή για ένα σταθερό μήκος φορέα πόσο μεταβάλλεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού ανάλογα με τις αλλαγές στη διαμόρφωσή του.

Για κάθε ένα από τα παραπάνω μοντέλα, θα βρεθεί το κρίσιμο φορτίο λυγισμού με τέσσερις τρόπους,

- σύμφωνα με τη θεωρία του Timoshenko.
- σύμφωνα με τις διατάξεις του Ευρωκώδικα 3 – Μέρος 2, οι οποίες ακολουθούν το πνεύμα της θεωρίας του Timoshenko αλλά με κάποιες διαφοροποιήσεις.
- βάση της ανάλυσης του προγράμματος SAP2000 για ένα δυσδιάστατο μοντέλο του φορέα και για ένα ακριβέστερο, ως προς την πραγματική κατασκευή, τρισδιάστατο μοντέλο.

Στόχος των παραπάνω διαφορετικών επιλύσεων είναι να συγκριθεί το μέγεθος του φορτίου που δίνει η κάθε μέθοδος, να εντοπιστούν τυχόν συγκλίσεις ή αποκλίσεις μεταξύ τους και τελικά να προσδιοριστεί πόσο κοντά είναι στην πραγματική κατάσταση που αντιπροσωπεύει το τρισδιάστατο μοντέλο.

Επισημαίνεται ότι η επίλυση κατά Timoshenko και κατά τον Ευρωκώδικα 3 θεωρεί ότι οι ακραίες στηρίξεις είναι τελείως άκαμπτες. Οπότε τα αποτελέσματα αυτών των επιλύσεων θα συγκριθούν με την περίπτωση επίλυσης μέσω υπολογιστή του δυσδιάστατου μοντέλου για δυσκαμψία ενδιάμεσων ελατηρίων C_d και των ακραίων $1000 * C_d$ (τελείως άκαμπτα).

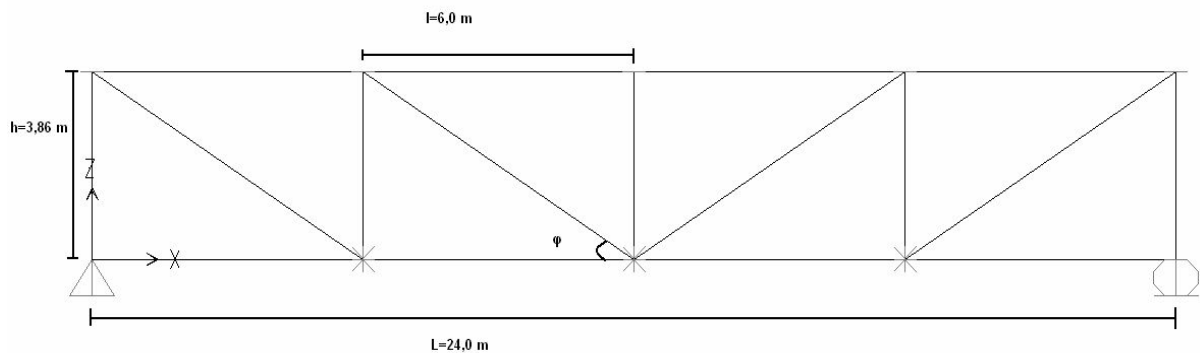
Επίσης ο Timoshenko και ο Ευρωκώδικας μελετούν τη συμπεριφορά μιας συνεχής ράβδου με ελαστικές στηρίξεις. Δηλαδή το μοντέλο των δύο αυτών μεθόδων περιορίζεται μονάχα στο άνω θλιβόμενο πέλμα της δοκού και τα χαρακτηριστικά του υπόλοιπου φορέα λαμβάνονται υπόψη μόνο μέσω της διαμόρφωσης της δυσκαμψίας των ελατηρίων. Αντίθετα στα 2Δ και 3Δ μοντέλα που δημιουργήσαμε, έχουν επιρροή όλα τα μέλη ακόμα και οι διαγώνιοι δοκοί που στις δύο προαναφερθείσες μεθόδους επίλυσης αγνοούνται παντελώς.

Τέλος για κάθε μοντέλο θα εξεταστούν δύο περιπτώσεις που απαντώνται στην πραγματικότητα. Θα εξεταστούν σε μοντέλα δύο και τριών διαστάσεων,

- η περίπτωση που η ακαμψία των ακραίων ημιπλαισίων είναι δύο φορές αυτής των ενδιάμεσων, $2 * C_d$
- και η περίπτωση που τα ακραία ημιπλαίσια έχουν την ίδια δυσκαμψία με τα ενδιάμεσα, $*C_d$.

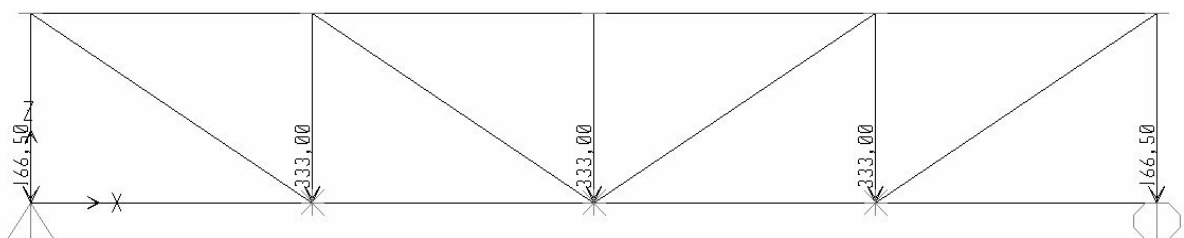
3.2 4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ

Ο φορέας μήκους 24,0 μέτρων αποτελείται από τέσσερα φατνώματα, μήκους 6,0 μέτρων το καθένα. Το ύψος του φορέα είναι $H=4,0$ μέτρα. Στο μοντέλο του Sap2000 αλλά και στις μεθοδολογίες Timoshenko, Ευρωκώδικα χρησιμοποιούμε κεντροβαρικές αποστάσεις. Για αυτό το λόγο στην επίλυση του φορέα μέσω της μεθόδου του ιδεατού δικτυώματος θα χρησιμοποιήσουμε κεντροβαρικές διαστάσεις ώστε να περιοριστούν οι αποκλίσεις των αποτελεσμάτων της αξονικής καταπόνησης. Έτσι θα θεωρήσουμε ύψος φορέα $h=3,86$ μέτρα και $\varphi=\tan(3,86/6)^{-1}=32,75$.



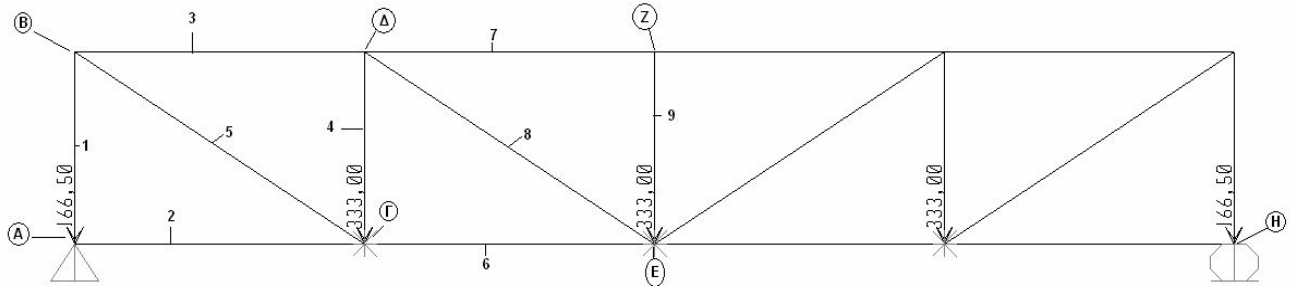
γεωμετρία φορέα 4 φατνωμάτων

Το φορτίο που καταπονεί τον φορέα μας (ιδίο βάρος και κινητό) συγκεντρώνεται στους κόμβους του κάτω πέλματος. Στους ενδιάμεσους επιβάλλεται φορτίο $P=333,0$ kN και στους ακραίους $P=166,5$ kN.



επικόμβια φορτία φορέα

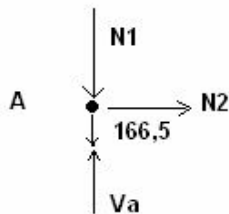
Από την ανάλυση βάσει της στατικής του ιδεατού δικτυώματος έχουμε,



$$V_A = V_H = 55,5 \cdot 24 / 2 = 666 \text{ kN}$$

$$H_A = 0 \text{ kN}$$

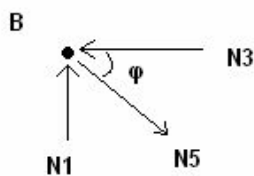
ΚΟΜΒΟΣ Α



$$N_1 + 166,5 = 666 \rightarrow N_1 = 499,5 \text{ kN}$$

$$N_2 = H_A = 0$$

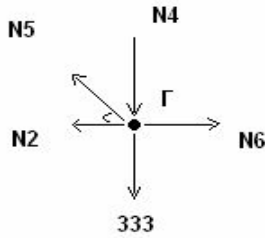
ΚΟΜΒΟΣ Β



$$N_5 \cdot \sin\varphi = N_1 \rightarrow N_5 = 923,29 \text{ kN}$$

$$N_5 \cdot \cos\varphi = N_3 \rightarrow N_3 = 776,49 \text{ kN}$$

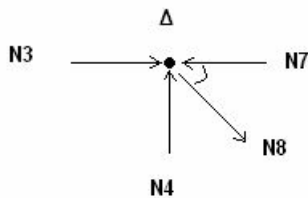
ΚΟΜΒΟΣ Γ



$$N_5 * \sin\varphi = N_4 + 333 \rightarrow N_4 = 166,5 \text{ kN}$$

$$N_6 = N_5 * \cos\varphi \rightarrow N_6 = 776,49 \text{ kN}$$

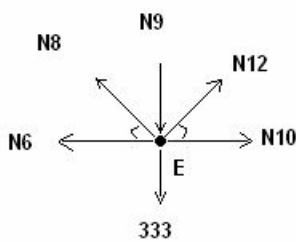
ΚΟΜΒΟΣ Δ



$$N_8 * \sin\varphi = N_4 \rightarrow N_8 = 307,76 \text{ kN}$$

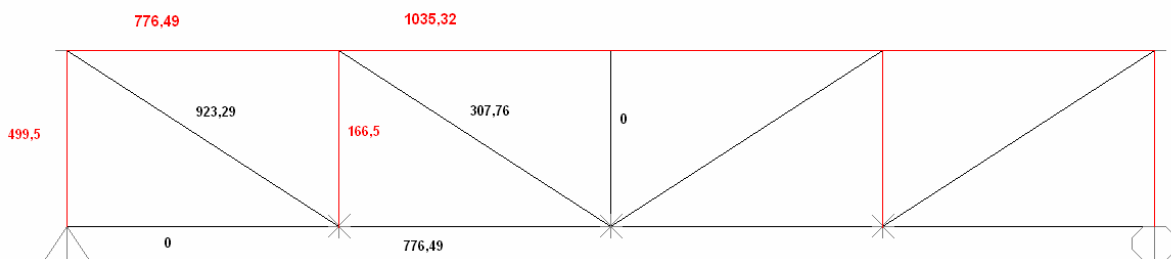
$$N_7 = N_8 * \cos\varphi + N_3 \rightarrow N_7 = 1035,32 \text{ kN}$$

ΚΟΜΒΟΣ Ε

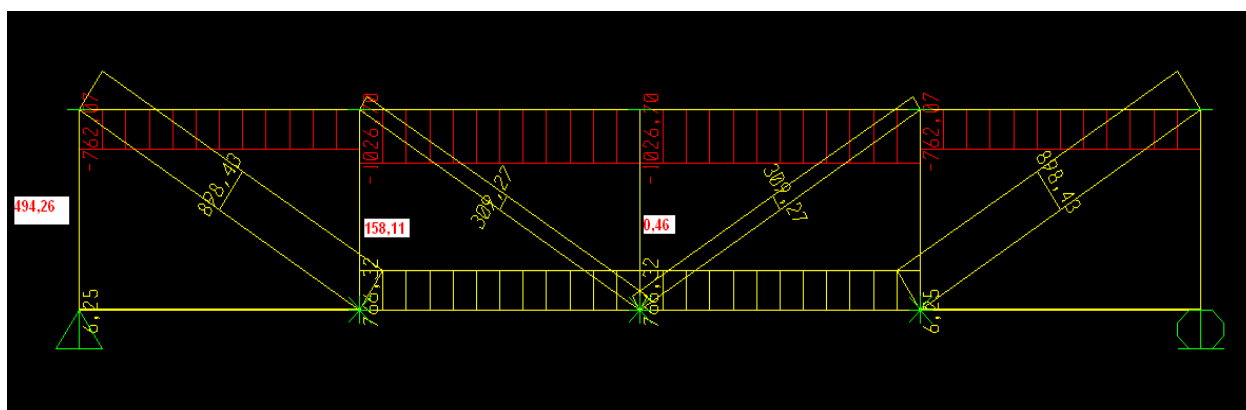


$$N_{12} * \sin\varphi + N_8 * \sin\varphi = 333 + N_9 \rightarrow N_9 = 0 \text{ kN}$$

Συνοπτικά λοιπόν το αντίστοιχο διάγραμμα για την αξονική ένταση του φορέα είναι (με κόκκινο η θλίψη),



Στην ανάλυση του φορέα μέσω του SAP2000 θεωρούμε ότι έχουμε συνεχείς συνδέσεις μεταξύ των μελών (για τους λόγους που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο) και το αντίστοιχο διάγραμμα αξονικών δυνάμεων του φορέα είναι,



Άρα με την ανάλυση μέσω του λογισμικού στην οποία δεν αγνοούνται οι δευτερεύουσες εντάσεις (ροπές και τέμνουσες) που αναπτύσσονται στα μέλη, για τα τμήματα του πάνω πέλματος που μας ενδιαφέρει προκύπτει αξονική θλιπτική ένταση,

$$N_3 = 762,07 \text{ kN} \quad \text{και} \quad N_5 = 1026,70 \text{ kN}$$

ενώ η κλασική στατική δίνει ελαφρώς μεγαλύτερα

$$N_3 = 776,49 \text{ kN} \quad \text{και} \quad N_5 = 1035,32 \text{ kN}$$

Timoshenko

Από τη θεωρία της μεθοδολογίας του Timoshenko έχουμε,

η ισοδύναμη δυσκαμψία κάθε ενδιάμεσου ημιπλαισίου είναι,

$$C_d = \frac{EI_v}{\frac{h_v^3}{3} + \frac{h^2 * b_q * I_v}{2 * I_q}} = \frac{2,1 * 10^4 * 11260}{\frac{356^3}{3} + \frac{386^2 * 976 * 11260}{2 * 171000}} = 11,93 \text{ kN/cm}$$

και η αντίστοιχη κατανεμημένη δυσκαμψία (ελαστικό έδαφος)

$$c = \frac{C_d}{\ell} = \frac{11,93}{600} = 0,02 \text{ kN/cm}^2$$

ο αδιάστατος συντελεστής Ψ είναι,

$$\Psi = \frac{cL^4}{16EI_z} = \frac{0,02 * 2400^4}{16 * 21000 * 50990} = 38,73$$

και από τον Πίνακα 1.6 με γραμμική παρεμβολή έχω,

Ψ	0	5	10	15	22.8	56.5	100	162.8	200	300	500	1000
β	0.696	0.524	0.443	0.396	0.363	0.324	0.290	0.259	0.246	0.225	0.204	0.174

$$\beta = 0,345$$

οπότε το κρίσιμο φορτίο είναι,

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\beta L)^2} = \frac{\pi^2 * 21000 * 50990}{(0.345 * 2400)^2} = 15399,37 \text{ kN} \approx 15400 \text{ kN}$$

Ευρωκώδικας

Έχοντας υπολογίσει την κατανεμημένη δυσκαμψία c , υπολογίζουμε τον παράγοντα γ ,

$$\gamma = \frac{cL^4}{EI_Z} = \frac{0,02 * 2400^4}{21000 * 50990} = 619,68 =$$

οπότε

$$m = \frac{2}{\pi^2} * \sqrt{\gamma} = \frac{2}{\pi^2} * \sqrt{619,68} = 5,05$$

το φορτίο Euler είναι,

$$N_E = \frac{\pi^2 EI_Z}{L^2} = \frac{\pi^2 * 21000 * 50990}{2400^2} = 1832,9 \approx 1833 \text{ kN}$$

τελικά το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,

$$N_{cr} = m * N_E = 9256,7 \text{ Kn}$$

SAP 2000 / 2D / 1000 * C_d

Επειδή οι μεθοδολογίες του Timoshenko και του Ευρωκώδικα θεωρούν ότι τα δύο ακραία ημιπλαίσια είναι τελείως άκαμπτα, στο δυσδιάστατο μοντέλο που εισάγουμε στο πρόγραμμα, επιβάλλουμε στους ενδιάμεσους κόμβους του άνω πέλματος κατά την διεύθυνση y-y, ελαστικές στηρίξεις δυσκαμψίας $C_d=1193 \text{ kN/m}$ και στους δύο ακραίους κόμβους ελατήρια δυσκαμψίας $1000 * C_d=1193000 \text{ kN/m}$.

Από την ανάλυση ευστάθειας του φορέα προκύπτουν οι εξής συντελεστές κρίσιμου φορτίου,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                                00:37:09

CASE: LYGISMOS

USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM = 52
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT = 5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED = 24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE = 1.00E-09

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 1  1.455262520E+01  1.838771507E+01  2.882019930E+01 -3.438319147E+01
 2  1.404212677E+01  1.820674938E+01  2.624174998E+01 -3.372462857E+01
 3  1.404063168E+01  1.820586046E+01  2.622241577E+01 -3.369661376E+01
 4  1.404063096E+01  1.820585703E+01  2.622239121E+01 -3.369621377E+01
 5  1.404063096E+01  1.820585703E+01  2.622239118E+01 -3.369621194E+01

Found mode 1 of 5, Eigenvalue = 1.404063096E+01
Found mode 2 of 5, Eigenvalue = 1.820585703E+01
Found mode 3 of 5, Eigenvalue = 2.622239118E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 5 -3.369621194E+01 -3.488045650E+01 -3.693033511E+01  4.101249937E+01
 6 -3.369621194E+01 -3.488045649E+01 -3.693033511E+01  4.101249922E+01

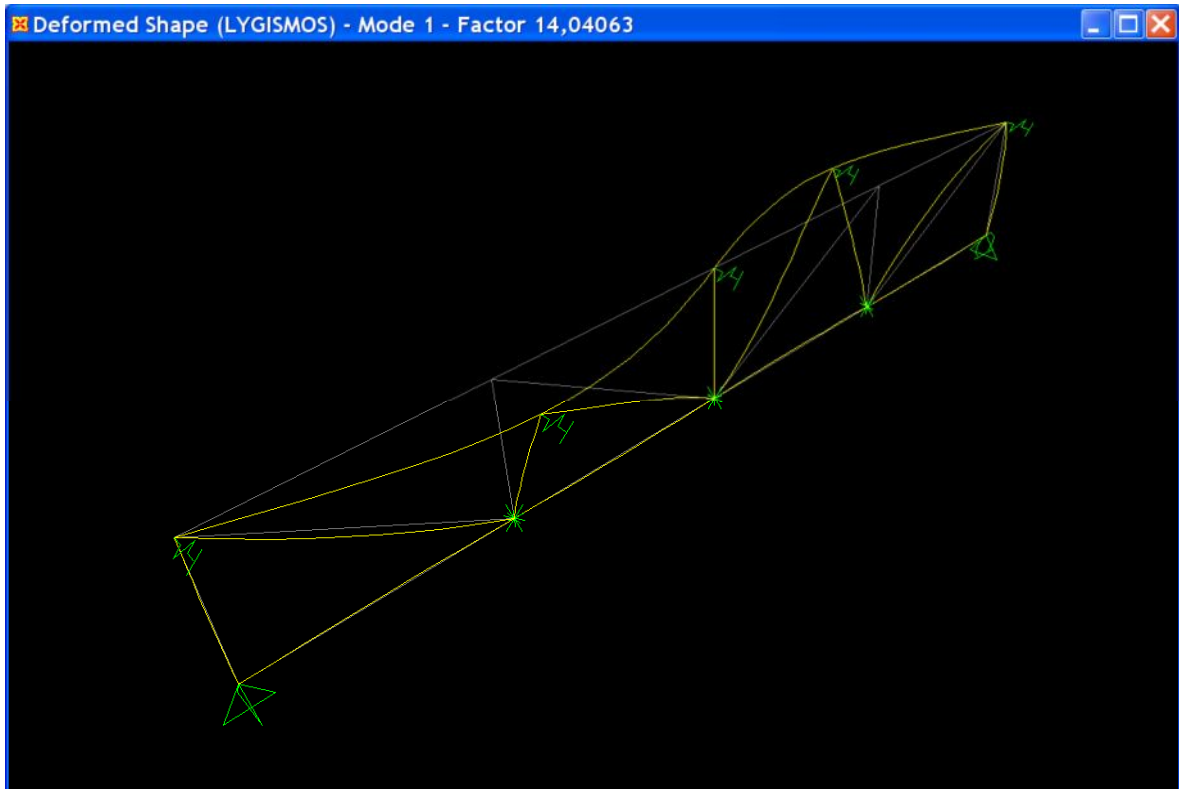
Found mode 4 of 5, Eigenvalue = -3.369621194E+01
Found mode 5 of 5, Eigenvalue = -3.488045649E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND = 5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED = 6
    
```

αποτελέσματα γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας 2Δ μοντέλου

Από αυτούς ο μικρότερος (άρα ο πρώτος) πολλαπλασιαζόμενος με την μέγιστη αξονική δύναμη που καταπονεί το άνω πέλμα (δηλαδή με αυτήν του κεντρικού τμήματος), δίνει το μικρότερο φορτίο λυγισμού άρα και το κρίσιμο. $N_{cr} = \alpha \cdot N_5 = 14,04 \cdot 1026,70 = 14.414,87 \text{ kN}$

Η μορφή του λυγισμού του άνω πέλματος είναι η ακόλουθη, (ένα πλήρες κύμα)



SAP2000 / 2D / 2*C_d

Στην πραγματικότητα είναι ανέφικτο τα ακριανά πλαίσια να είναι τελείως άκαμπτα. Πολλές φορές επιλέγεται να είναι απλά διπλάσιας δυσκαμψίας από ότι τα ενδιάμεσα. Για αυτή την περίπτωση στο μοντέλο μας, τα μετακινησιακά ελατήρια που δεσμεύουν τους ακραίους κόμβους έχουν δυσκαμψία, $C_d' = 2 * C_d = 2386 \text{ kN/m}$.

Η ανάλυση (linear buckling analysis) του μοντέλου δίνει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                               01:14:14
CASE: LYGISMOS
USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM =             52
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT       =              5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED        =              24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE        =             1.00E-09

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
 1  1.373435348E+01  1.463010462E+01  2.572055015E+01  -3.284766114E+01
 2  1.353434562E+01  1.403035372E+01  2.405665505E+01  -3.203747750E+01
 3  1.353305303E+01  1.402662642E+01  2.402613249E+01  -3.200153289E+01
 4  1.353304648E+01  1.402661049E+01  2.402586435E+01  -3.200021082E+01
 5  1.353304645E+01  1.402661042E+01  2.402586117E+01  -3.200017114E+01
 6  1.353304645E+01  1.402661041E+01  2.402586113E+01  -3.200017008E+01

Found mode  1 of 5, Eigenvalue = 1.353304645E+01
Found mode  2 of 5, Eigenvalue = 1.402661041E+01
Found mode  3 of 5, Eigenvalue = 2.402586113E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
 6  -3.200017008E+01 -3.488045650E+01 -3.585556429E+01  3.794117910E+01
 7  -3.200017005E+01 -3.488045649E+01 -3.585556429E+01  3.794117909E+01

Found mode  4 of 5, Eigenvalue = -3.200017005E+01
Found mode  5 of 5, Eigenvalue = -3.488045649E+01

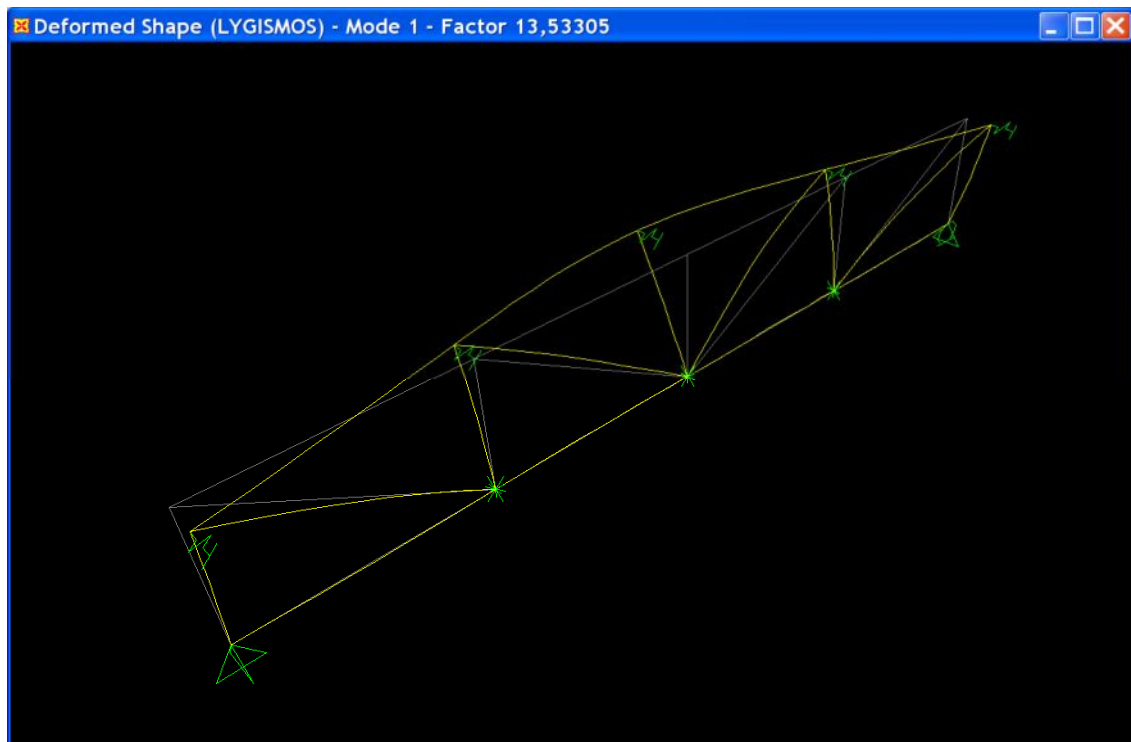
NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND =             5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED =             7

```

Από όπου το κρίσιμο φορτίο λυγισμού προκύπτει,

$$N_{cr} = \alpha * N_5 = 13,53 * 1026,70 = 13.891,25 \text{ kN}$$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού είναι,



SAP2000 / 3D / 2I

Για μια ακόμα καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής κατάστασης και της συμπεριφοράς του φορέα θα εξεταστεί ένα τρισδιάστατο μοντέλο του φορέα απαλλαγμένο από τις όποιες αμφιβολίες και παραδοχές έχουν τα προηγούμενα μοντέλα (δυσκαμψία ελατηρίου, ελαστικό έδαφος κλπ).

Για την περίπτωση που τα ακραία πλαίσια είναι διπλάσια δυσκαμψίας από τα ενδιάμεσα, διαμορφώνουμε κατάλληλα τις διατομές τους έτσι ώστε οι ορθοστάτες να έχουν διπλάσιο I ως προς τους δύο άξονες σε σχέση με την δυσκαμψία των ορθοστατών HEB240. Αντίστοιχα οι διαδοκίδες διαμορφώνονται ώστε να έχουν διπλάσια δυσκαμψία από αυτή των HEB600 (λεπτομερής παρουσίαση των χαρακτηριστικών στο κεφάλαιο 2).

Η ανάλυση ευστάθειας του φορέα δίνει,

```

L I N E A R   B U C K L I N G   A N A L Y S I S                               02:15:58

CASE: LYGISMOS

USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM   =      104
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT         =        5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED          =       24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE           =    1.00E-09

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  1  1.539976046E+01  1.553297972E+01  1.662064657E+01  1.908379411E+01
  2  1.259331760E+01  1.357577927E+01  1.375694199E+01  1.400759239E+01
  3  1.254031479E+01  1.353101820E+01  1.356146477E+01  1.393066311E+01
  4  1.253911730E+01  1.352983699E+01  1.355413197E+01  1.392866823E+01
  5  1.253908978E+01  1.352980747E+01  1.355392176E+01  1.392861605E+01
  6  1.253908916E+01  1.352980676E+01  1.355391622E+01  1.392861470E+01
  7  1.253908915E+01  1.352980674E+01  1.355391608E+01  1.392861466E+01

Found mode      1 of      5, Eigenvalue =  1.253908915E+01
Found mode      2 of      5, Eigenvalue =  1.352980674E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  7  1.355391608E+01  1.392861466E+01  2.564287122E+01  2.602910137E+01
  8  1.355391608E+01  1.392861466E+01  2.564283923E+01  2.602906658E+01

Found mode      3 of      5, Eigenvalue =  1.355391608E+01
Found mode      4 of      5, Eigenvalue =  1.392861466E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  8  2.564283923E+01  2.602906658E+01 -2.862457223E+01 -2.868816967E+01
  9  2.564283657E+01  2.602906343E+01 -2.862457117E+01 -2.868816901E+01
 10  2.564283637E+01  2.602906317E+01 -2.862457106E+01 -2.868816895E+01
 11  2.564283636E+01  2.602906314E+01 -2.862457104E+01 -2.868816895E+01

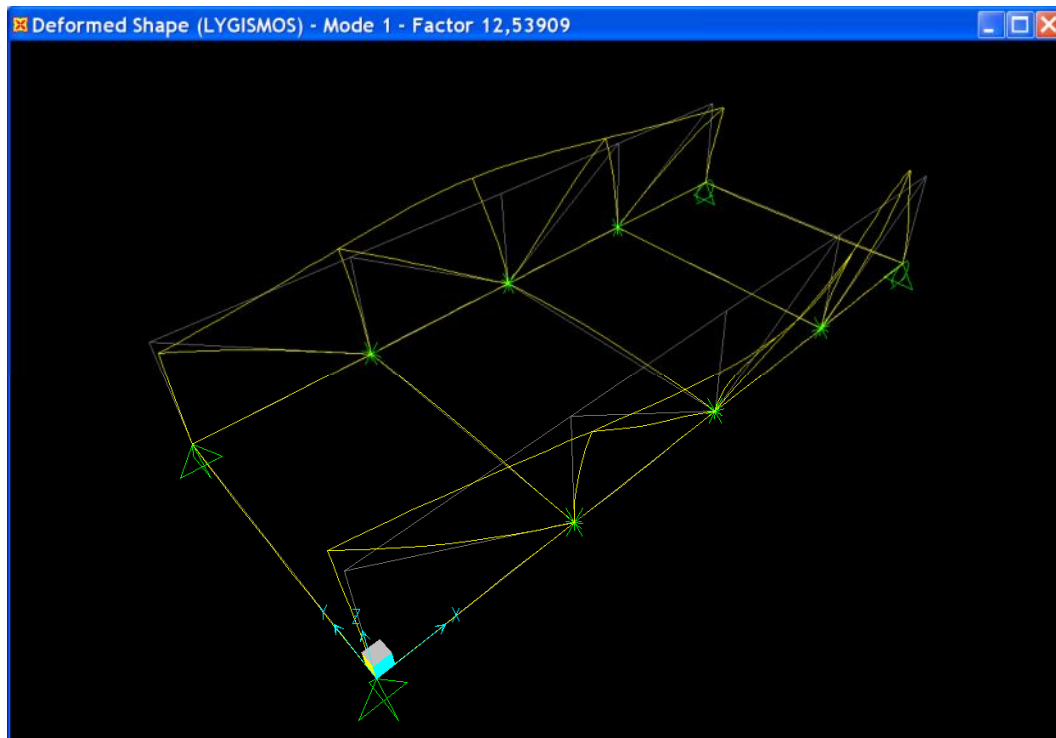
Found mode      5 of      5, Eigenvalue =  2.564283636E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND           =        5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED           =       11

```

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,
 $N_{cr} = \alpha * N_5 = 12,54 * 1026,70 = 12.874,82 \text{ kN}$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού,



SAP2000 / 2D / C_d

Μια ακόμα συνήθη περίπτωση είναι αυτή στην οποία όλα τα πλαίσια του φορέα έχουν την ίδια ακαμψία. Οπότε ενδιάμεσοι και ακραίοι κόμβοι δεσμεύονται από μετακινησιακά ελατήρια δυσκαμψίας $C_d=1193 \text{ kN/m}$.

Η ανάλυση του φορέα δίνει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                                01:59:29

CASE: LYGISMOS

USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM      =      52
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT             =       5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED              =      24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE               =    1.00E-09

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  1  1.126839761E+01  1.456118864E+01  2.493692519E+01  2.711604014E+01
  2  1.106768808E+01  1.400208066E+01  2.253956099E+01  2.363788779E+01
  3  1.106697143E+01  1.399808735E+01  2.251945805E+01  2.361193589E+01
  4  1.106696917E+01  1.399807023E+01  2.251930420E+01  2.361173182E+01
  5  1.106696917E+01  1.399807015E+01  2.251930252E+01  2.361172957E+01

Found mode      1 of      5, Eigenvalue =  1.106696917E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  5  1.399807015E+01  2.251930252E+01  2.361172957E+01 -3.137561609E+01
  6  1.399807015E+01  2.251930250E+01  2.361172954E+01 -3.137561501E+01

Found mode      2 of      5, Eigenvalue =  1.399807015E+01
Found mode      3 of      5, Eigenvalue =  2.251930250E+01
Found mode      4 of      5, Eigenvalue =  2.361172954E+01

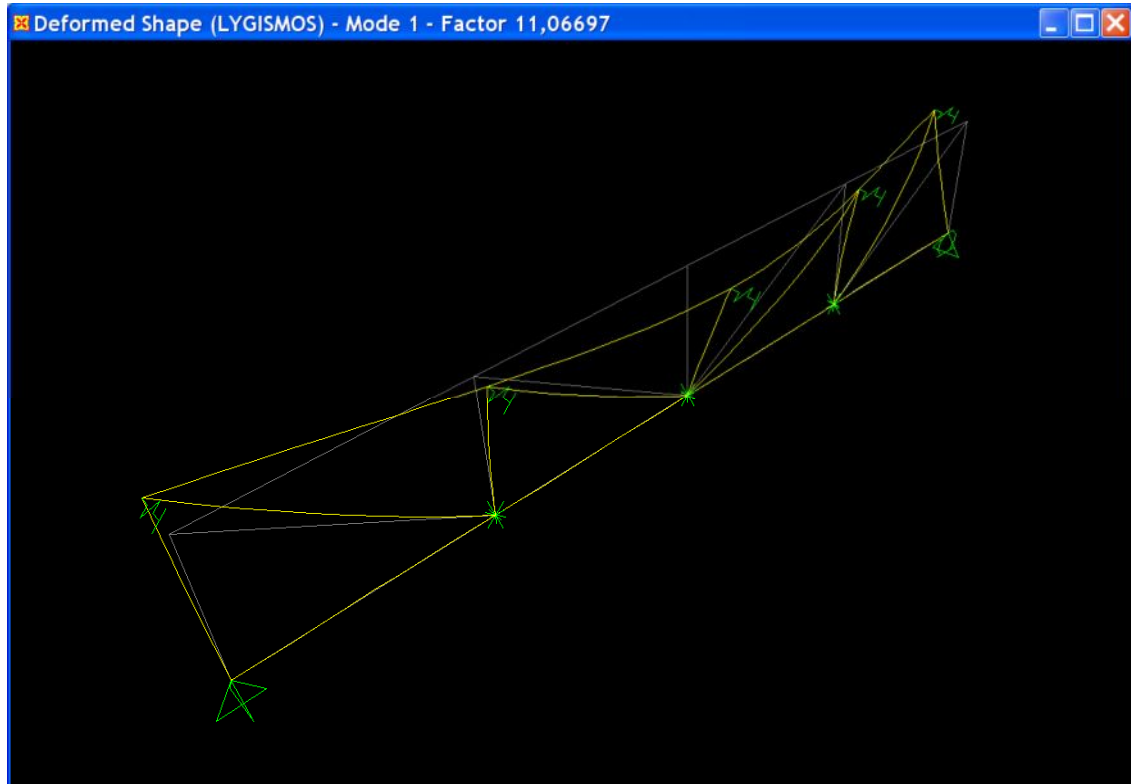
Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  6 -3.137561501E+01 -3.488045650E+01 -3.533417381E+01  4.111447297E+01
  7 -3.137561500E+01 -3.488045649E+01 -3.533417381E+01  4.111447278E+01

Found mode      5 of      5, Eigenvalue = -3.137561500E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND              =       5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED              =       7

```

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,
 $N_{cr} = \alpha \cdot N_5 = 11,07 \cdot 1026,70 = 11.365,7 \text{ kN}$
και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού είναι,



SAP2000 / 3D / I

Για την περίπτωση που όλα τα ίδια μέλη έχουν την ίδια δυσκαμψία I, η ανάλυση του πραγματικού, τρισδιάστατου μοντέλου δίνει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                                02:25:16

CASE: LYGISMOS

USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM = 104
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT = 5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED = 24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE = 1.00E-09

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
 1  1.367728746E+01  1.502208673E+01  1.630814826E+01  1.756607269E+01
 2  1.089947613E+01  1.18555781E+01  1.327708867E+01  1.373644212E+01
 3  1.084584193E+01  1.166784045E+01  1.320782274E+01  1.363699238E+01
 4  1.084466564E+01  1.166214820E+01  1.320580276E+01  1.363380037E+01
 5  1.084464171E+01  1.166200488E+01  1.320574451E+01  1.363371124E+01
 6  1.084464124E+01  1.166200145E+01  1.320574285E+01  1.363370873E+01
 7  1.084464124E+01  1.166200137E+01  1.320574280E+01  1.363370866E+01

Found mode 1 of 5, Eigenvalue = 1.084464124E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
 7  1.166200137E+01  1.320574280E+01  1.363370866E+01  2.332568623E+01
 8  1.166200136E+01  1.320574280E+01  1.363370866E+01  2.332567677E+01

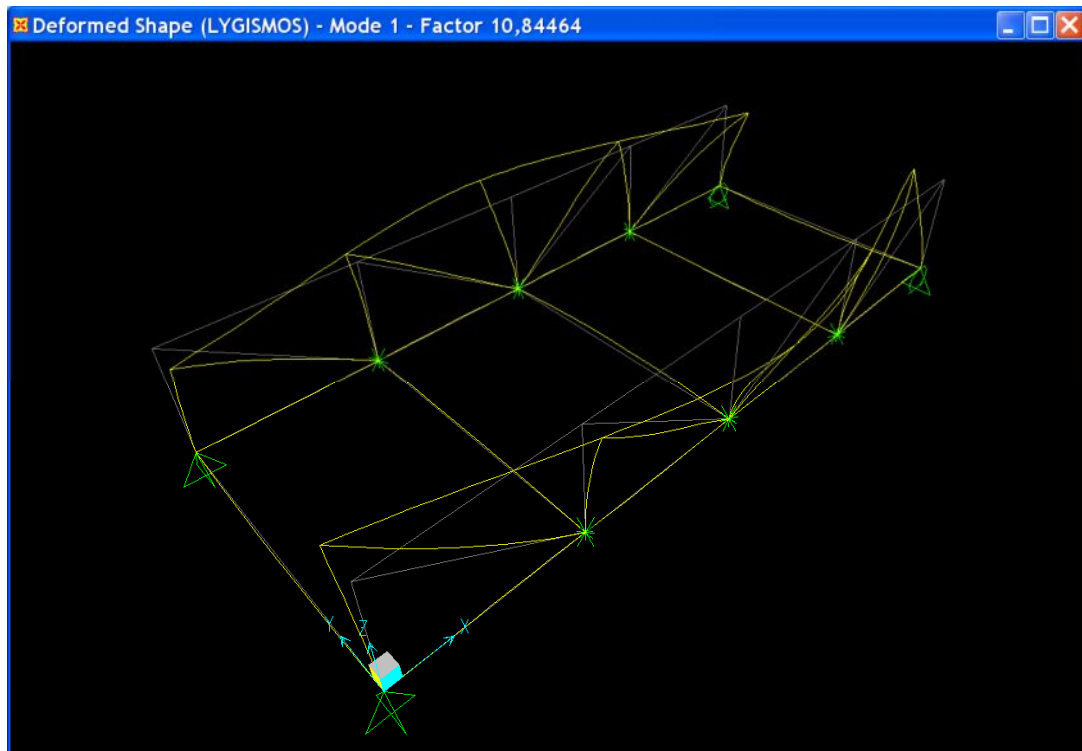
Found mode 2 of 5, Eigenvalue = 1.166200136E+01
Found mode 3 of 5, Eigenvalue = 1.320574280E+01
Found mode 4 of 5, Eigenvalue = 1.363370866E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
 8  2.332567677E+01  2.436720851E+01  2.465088963E+01  2.585825307E+01
 9  2.332567597E+01  2.436720458E+01  2.465088517E+01  2.585825134E+01
10  2.332567591E+01  2.436720430E+01  2.465088486E+01  2.585825120E+01
11  2.332567590E+01  2.436720428E+01  2.465088484E+01  2.585825119E+01

Found mode 5 of 5, Eigenvalue = 2.332567590E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND = 5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED = 11
    
```

Οπότε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,
 $N_{cr} = \alpha \cdot N_5 = 10,84 \cdot 1026,70 = 11.129,43 \text{ kN}$
 και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού είναι,

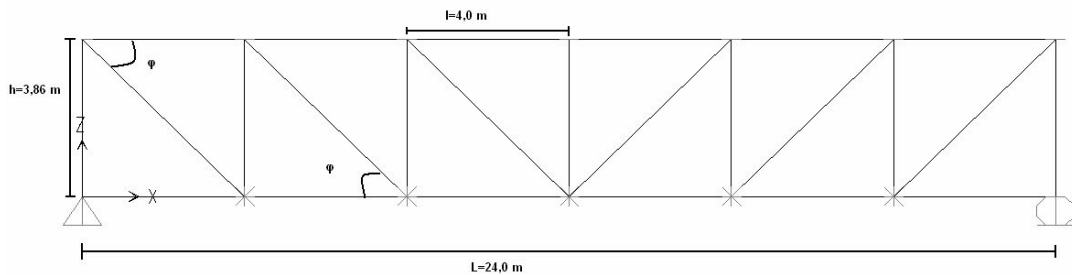


Συνοπτικά λοιπόν για την περίπτωση του φορέα με 4 φατνώματα προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα κρίσιμου φορτίου λυγισμού του άνω πέλματος (σε kN),

Timoshenko	15.400
Ευρωκώδικας	9.257
$2D / 1000C_d$	14.415
$2D / 2C_d$	13.891
$3D / 2I$	12.875
$2D / C_d$	11.366
$3D / I$	11.129

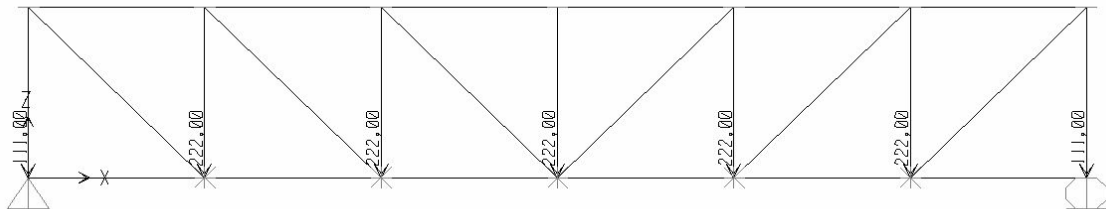
3.3 6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ

Ο φορέας μήκους 24,0 μέτρων αποτελείται από έξι φατνώματα, μήκους 4,0 μέτρων το καθένα. Το ύψος του φορέα είναι $H= 4,0$ μέτρα αλλά επειδή σε όλες τις μεθοδολογίες χρησιμοποιούμε κεντροβαρικές αποστάσεις και στην επίλυση του φορέα μέσω της μεθόδου του ιδεατού δικτύωματος θα χρησιμοποιήσουμε κεντροβαρικές διαστάσεις ώστε να περιοριστούν οι αποκλίσεις των αποτελεσμάτων της αξονικής καταπόνησης. Έτσι θα θεωρήσουμε ύψος φορέα $h=3,86$ μέτρα και $\varphi=\tan(3,86/4)^{-1}=43,98^{\circ}$.



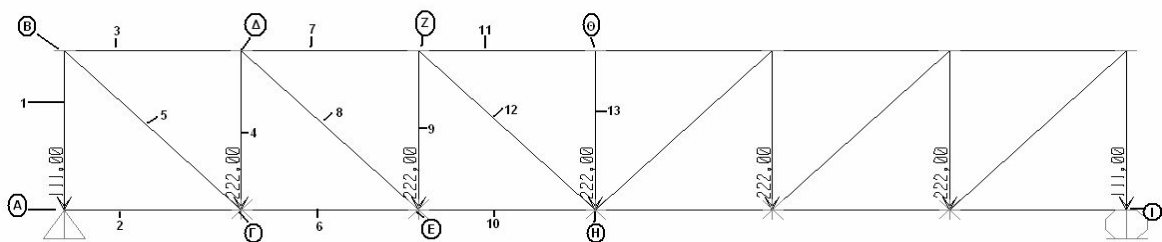
γεωμετρία φορέα 6 φατνωμάτων

Το φορτίο που καταπονεί τον φορέα (ιδίο βάρος και κινητό) συγκεντρώνεται στους κόμβους του κάτω πέλματος. Στους ενδιάμεσους επιβάλλεται φορτίο $P=55,5 \cdot 4=222$ kN και στους ακραίους $P=55,5 \cdot 2=111$ kN.



επικόμβια φορτία φορέα

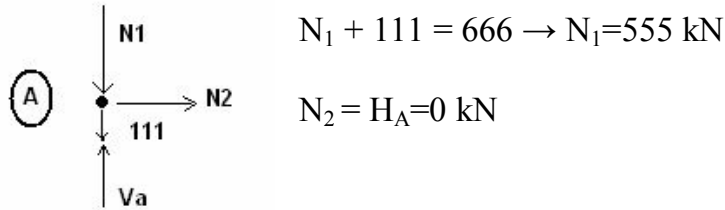
Ακολουθεί η ανάλυση του φορέα βάσει της θεωρίας του ιδεατού δικτύωματος,



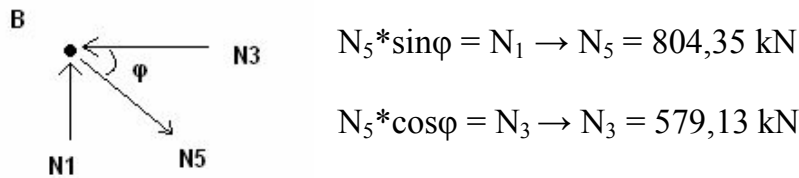
$$V_A = V_I = 55,5 \cdot 24 / 2 = 666 \text{ kN}$$

$$H_A = 0 \text{ kN}$$

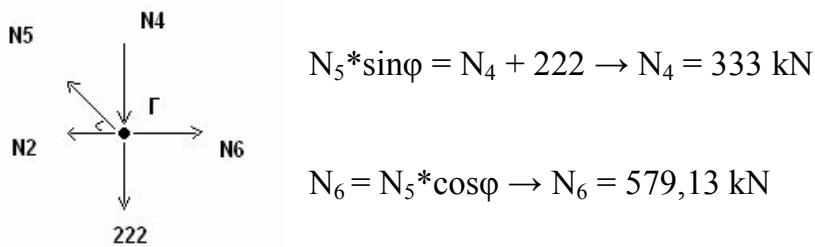
ΚΟΜΒΟΣ Α



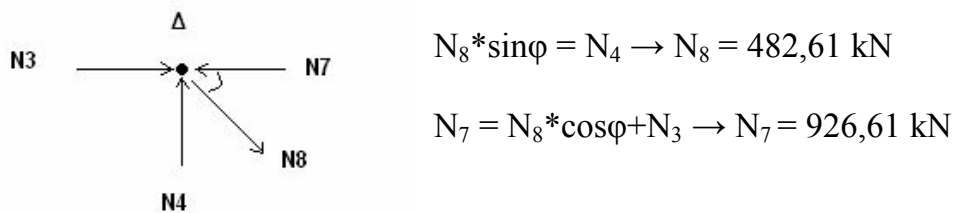
ΚΟΜΒΟΣ Β



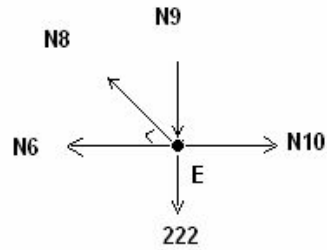
ΚΟΜΒΟΣ Γ



ΚΟΜΒΟΣ Δ



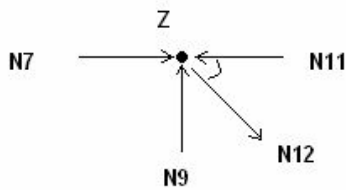
ΚΟΜΒΟΣ Ε



$$N_8 \cdot \sin\varphi = N_9 + 222 \rightarrow N_9 = 111 \text{ kN}$$

$$N_{10} = N_6 + N_8 \cdot \cos\varphi \rightarrow N_{10} = 926,61 \text{ kN}$$

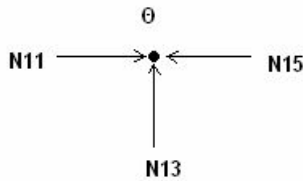
ΚΟΜΒΟΣ Ζ



$$N_{12} \cdot \sin\varphi = N_9 \rightarrow N_{12} = 160,87 \text{ kN}$$

$$N_{11} = N_{12} \cdot \cos\varphi + N_7 \rightarrow N_{11} = 1042,44 \text{ kN}$$

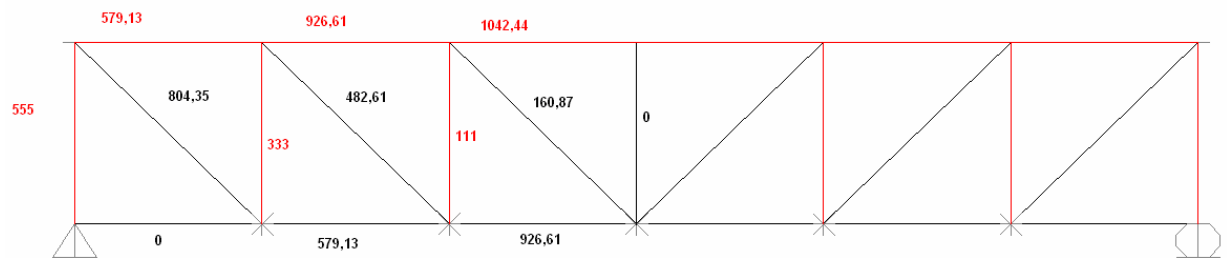
ΚΟΜΒΟΣ Θ



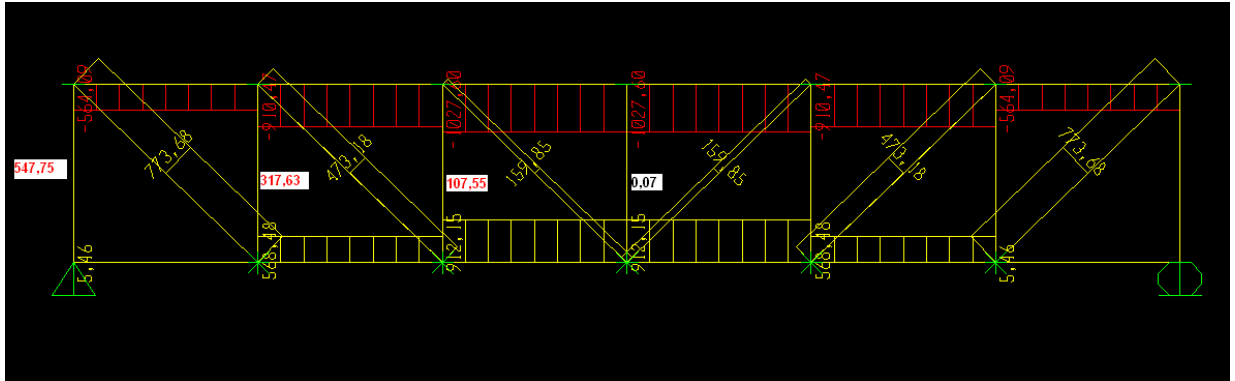
$$N_{15} = N_{11} = 1024,44 \text{ kN}$$

$$N_{13} = 0 \text{ kN}$$

Συνοπτικά λοιπόν το αντίστοιχο διάγραμμα για την αξονική ένταση του φορέα είναι (με κόκκινο η θλίψη),



Στην ανάλυση του φορέα μέσω του SAP2000 θεωρούμε ότι έχουμε συνεχείς συνδέσεις μεταξύ των μελών και το αντίστοιχο διάγραμμα αξονικών δυνάμεων του φορέα είναι,



Οπότε με την ανάλυση μέσω του λογισμικού στην οποία δεν αγνοούνται οι δευτερεύουσες εντάσεις (ροπές και τέμνουσες) που αναπτύσσονται στα μέλη, για τα τμήματα του πάνω πέλματος που μας ενδιαφέρει προκύπτει η εξής αξονική θλιπτική ένταση,

$$N_3 = 564,09 \text{ kN} \quad N_7 = 910,47 \text{ kN} \quad N_{11} = 1027,60 \text{ kN}$$

ενώ η στατική του ιδεατού δικτυώματος δίνει λίγο μεγαλύτερα,

$$N_3 = 579,13 \text{ kN} \quad N_7 = 926,61 \text{ kN} \quad N_{11} = 1042,44 \text{ kN}$$

Timoshenko

Από τη θεωρία της μεθοδολογίας του Timoshenko έχουμε,
η ισοδύναμη δυσκαμψία κάθε ενδιάμεσου ημιπλαισίου είναι,

$$C_d = \frac{EI_v}{\frac{h_v^3}{3} + \frac{h^2 * b_q * I_v}{2 * I_q}} = \frac{2,1 * 10^4 * 11260}{\frac{356^3}{3} + \frac{386^2 * 976 * 11260}{2 * 171000}} = 11,93 \text{ kN/cm}$$

και η αντίστοιχη κατανεμημένη δυσκαμψία (ελαστικό έδαφος)

$$c = \frac{C_d}{\ell} = \frac{11,93}{400} = 0,03 \text{ Kn/cm}^2$$

ο αδιάστατος συντελεστής Ψ είναι,

$$\Psi = \frac{cL^4}{16EI_z} = \frac{0,03 * 2400^4}{16 * 21000 * 50990} = 58,09 =$$

και από τον Πίνακα 1.6 με γραμμική παρεμβολή έχω

$$\beta = 0,323$$

οπότε το κρίσιμο φορτίο είναι,

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\beta L)^2} = \frac{\pi^2 * 21000 * 50990}{(0,323 * 2400)^2} = 17.568,56 \text{ kN}$$

Ευρωκώδικας

Με γνωστή την κατανεμημένη δυσκαμψία c , υπολογίζουμε το συντελεστή γ ,

$$\gamma = \frac{cL^4}{EI_z} = \frac{0,03 * 2400^4}{21000 * 50990} = 929,5 =$$

οπότε,

$$m = \frac{2}{\pi^2} * \sqrt{\gamma} = \frac{2}{\pi^2} * \sqrt{929,5} = 6,18$$

το φορτίο Euler παραμένει $N_E = 1833 \text{ kN}$

άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού προκύπτει,

$$N_{cr} = m * N_E = 11.327,9 \text{ kN}$$

SAP 2000 / 2D / 1000*C_d

Βάσει των μεθοδολογιών του Timoshenko και του Ευρωκώδικα που θεωρούν ότι τα δύο ακραία ημιπλαίσια είναι τελείως άκαμπτα, στο αντίστοιχο δυσδιάστατο μοντέλο, επιβάλλουμε στους ενδιάμεσους κόμβους του άνω πέλματος κατά την y-y, ελαστικές στηρίξεις δυσκαμψίας C_d=1193 kN/m και στους δύο ακραίους κόμβους ελατήρια δυσκαμψίας 1000* C_d=1193000 kN/m.

Από την ανάλυση ευστάθειας του φορέα προκύπτουν οι εξής συντελεστές κρίσιμου φορτίου,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                                20:14:49
CASE: LYGISMOS
USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS
NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM =                74
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT =                      5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED =                       24
RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE =                       1.00E-09

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 1 1.758149448E+01 2.757873053E+01 4.975870805E+01 5.207299910E+01
 2 1.649918739E+01 2.159000123E+01 3.468476340E+01 3.913262494E+01
 3 1.648872630E+01 2.145667118E+01 3.443519211E+01 3.862602070E+01
 4 1.648866930E+01 2.145515686E+01 3.442935834E+01 3.860877409E+01
 5 1.648866902E+01 2.145514203E+01 3.442919019E+01 3.860817956E+01
 6 1.648866902E+01 2.145514188E+01 3.442918504E+01 3.860815764E+01

Found mode 1 of 5, Eigenvalue = 1.648866902E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 6 2.145514188E+01 3.442918504E+01 3.860815764E+01 4.902954660E+01
 7 2.145514188E+01 3.442918488E+01 3.860815679E+01 4.902953995E+01

Found mode 2 of 5, Eigenvalue = 2.145514188E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 7 3.442918488E+01 3.860815679E+01 4.902953995E+01 5.522014215E+01
 8 3.442918488E+01 3.860815675E+01 4.902953964E+01 5.522014133E+01

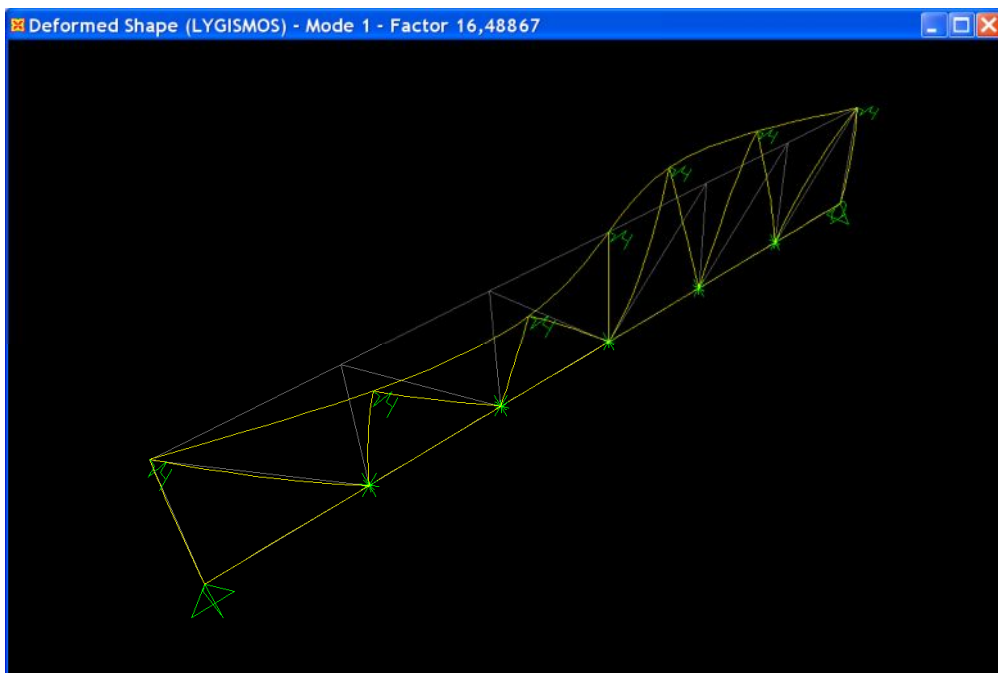
Found mode 3 of 5, Eigenvalue = 3.442918488E+01
Found mode 4 of 5, Eigenvalue = 3.860815675E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 8 4.902953964E+01 5.522014133E+01 -6.098083437E+01 -6.363229981E+01
 9 4.902953963E+01 5.522014129E+01 -6.098083422E+01 -6.363229916E+01

Found mode 5 of 5, Eigenvalue = 4.902953963E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND =                        5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED =                       9
    
```

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,
 $N_{cr} = \alpha * N_5 = 16,49 * 1027,60 = 16.945,12 \text{ kN}$
 και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού,



SAP2000 / 2D / 2*C_d

Για την πιο συνήθη στην πραγματικότητα περίπτωση, αυτή δηλαδή που τα ακραία πλαίσια είναι διπλάσιας δυσκαμψίας από τα ενδιάμεσα, στο αντίστοιχο μοντέλο, τα μετακινησιακά ελατήρια που δεσμεύουν τους ακραίους κόμβους έχουν δυσκαμψία, $C_d = 2 * C_d = 2386 \text{ kN/m}$.

Η ανάλυση του μοντέλου δίνει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                                20:29:37
CASE: LYGISMOS
USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM      =      74
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT            =       5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED              =      24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE              =    1.00E-09

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  1  1.718532942E+01  2.182445434E+01  3.432050066E+01  5.118560917E+01
  2  1.628669864E+01  1.641158205E+01  2.699087877E+01  3.915030355E+01
  3  1.627769805E+01  1.637087627E+01  2.681410523E+01  3.862365987E+01
  4  1.627764262E+01  1.637063411E+01  2.681004989E+01  3.860494690E+01
  5  1.627764233E+01  1.637063248E+01  2.680995701E+01  3.860428552E+01
  6  1.627764234E+01  1.637063246E+01  2.680995492E+01  3.860426124E+01

Found mode 1 of 5, Eigenvalue = 1.627764234E+01
Found mode 2 of 5, Eigenvalue = 1.637063246E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  6  2.680995492E+01  3.860426124E+01  4.355824616E+01  4.848983585E+01
  7  2.680995487E+01  3.860426031E+01  4.355824233E+01  4.848981799E+01

Found mode 3 of 5, Eigenvalue = 2.680995487E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  7  3.860426031E+01  4.355824233E+01  4.848981799E+01  -5.856475096E+01
  8  3.860426028E+01  4.355824215E+01  4.848981678E+01  -5.856474853E+01

Found mode 4 of 5, Eigenvalue = 3.860426028E+01

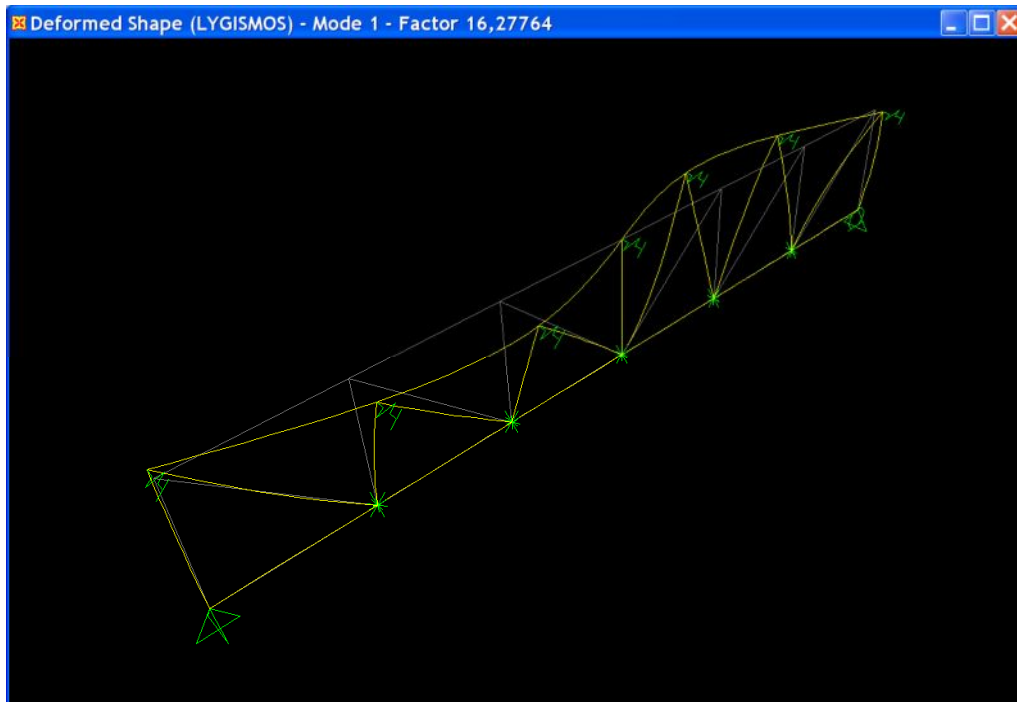
Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  8  4.355824215E+01  4.848981678E+01  -5.856474853E+01  5.883447832E+01
  9  4.355824214E+01  4.848981670E+01  -5.856474836E+01  5.883447816E+01

Found mode 5 of 5, Eigenvalue = 4.355824214E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND              =       5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED              =       9
    
```

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού προκύπτει,
 $N_{cr} = \alpha * N_5 = 16,28 * 1027,60 = 16.729,33 \text{ kN}$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού είναι,



SAP2000 / 3D / 2I

Για καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής κατάστασης και της συμπεριφοράς του φορέα, εξετάζεται ένα τρισδιάστατο μοντέλο του φορέα απαλλαγμένο από τις όποιες αμφιβολίες και παραδοχές έχουν τα προηγούμενα μοντέλα (δυσκαμψία ελατηρίου, ελαστικό έδαφος κλπ).

Για την περίπτωση που τα ακραία πλαίσια είναι διπλάσια δυσκαμψίας από τα ενδιάμεσα, διαμορφώνουμε κατάλληλα τις διατομές των μελών τους έτσι ώστε να έχουν διπλάσια δυσκαμψία από τα αντίστοιχα ενδιάμεσα μέλη.

Η ανάλυση ευστάθειας του φορέα δίνει,

```

L I N E A R   B U C K L I N G   A N A L Y S I S                               20:40:20

CASE: LYGISMOS

USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM   =          148
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT          =           5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED           =           24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE            =    1.00E-09

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  1  1.886977917E+01  2.033912678E+01  2.373836028E+01  2.835319956E+01
  2  1.458001465E+01  1.534968680E+01  1.583537275E+01  1.598803463E+01
  3  1.449770284E+01  1.516180030E+01  1.575718206E+01  1.576787650E+01
  4  1.449598172E+01  1.515769711E+01  1.575330170E+01  1.576605694E+01
  5  1.449595125E+01  1.515763167E+01  1.575323124E+01  1.576603286E+01
  6  1.449595075E+01  1.515763073E+01  1.575323015E+01  1.576603252E+01
  7  1.449595074E+01  1.515763071E+01  1.575323014E+01  1.576603252E+01

Found mode   1 of      5, Eigenvalue =  1.449595074E+01
Found mode   2 of      5, Eigenvalue =  1.515763071E+01
Found mode   3 of      5, Eigenvalue =  1.575323014E+01
Found mode   4 of      5, Eigenvalue =  1.576603252E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  7  2.809216457E+01  2.876338453E+01  3.779776746E+01  3.926032469E+01
  8  2.809216413E+01  2.876338311E+01  3.779770713E+01  3.926015435E+01
  9  2.809216411E+01  2.876338302E+01  3.779770176E+01  3.926013445E+01

Found mode   5 of      5, Eigenvalue =  2.809216411E+01

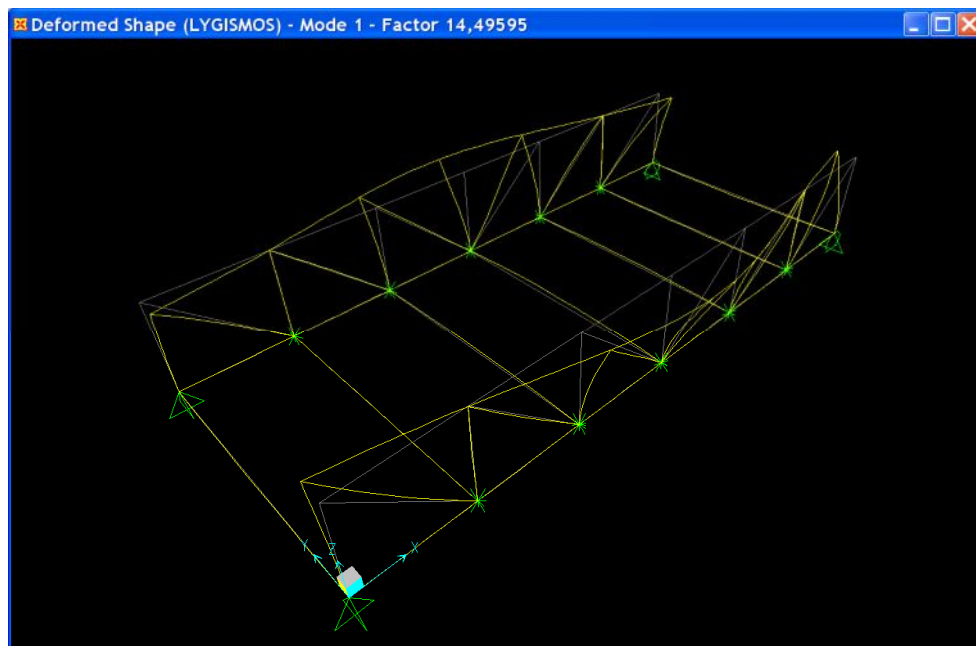
NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND           =           5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED            =           9

```

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,

$$N_{cr} = \alpha \cdot N_5 = 14,50 \cdot 1027,60 = 14.900,2 \text{ kN}$$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού,



SAP2000 / 2D / C_d

Μια ακόμα πιο συνήθη περίπτωση είναι αυτή στην οποία όλα τα πλαίσια του φορέα έχουν την ίδια ακαμψία. Οπότε ενδιάμεσοι και ακραίοι κόμβοι δεσμεύονται από μετακινησιακά ελατήρια δυσκαμψίας C_d=1193 kN/m.

Η ανάλυση του φορέα δίνει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                                20:51:35
CASE: LYGISMOS
USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM = 74
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT = 5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED = 24
RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE = 1.00E-09

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 1  1.596606459E+01  1.807871519E+01  3.229199710E+01  5.086890217E+01
 2  1.331076354E+01  1.597477417E+01  2.602449153E+01  2.879156746E+01
 3  1.329527999E+01  1.596447240E+01  2.584417064E+01  2.840232816E+01
 4  1.329522300E+01  1.596442170E+01  2.584020660E+01  2.839777099E+01
 5  1.329522277E+01  1.596442147E+01  2.584012251E+01  2.839770106E+01
 6  1.329522277E+01  1.596442147E+01  2.584012076E+01  2.839769977E+01

Found mode 1 of 5, Eigenvalue = 1.329522277E+01
Found mode 2 of 5, Eigenvalue = 1.596442147E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 6  2.584012076E+01  2.839769977E+01  3.861030101E+01  4.840559490E+01
 7  2.584012073E+01  2.839769975E+01  3.861030007E+01  4.840557781E+01

Found mode 3 of 5, Eigenvalue = 2.584012073E+01
Found mode 4 of 5, Eigenvalue = 2.839769975E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 7  3.861030007E+01  4.840557781E+01  5.683463298E+01  -5.767803679E+01
 8  3.861030004E+01  4.840557666E+01  5.683463161E+01  -5.767803484E+01

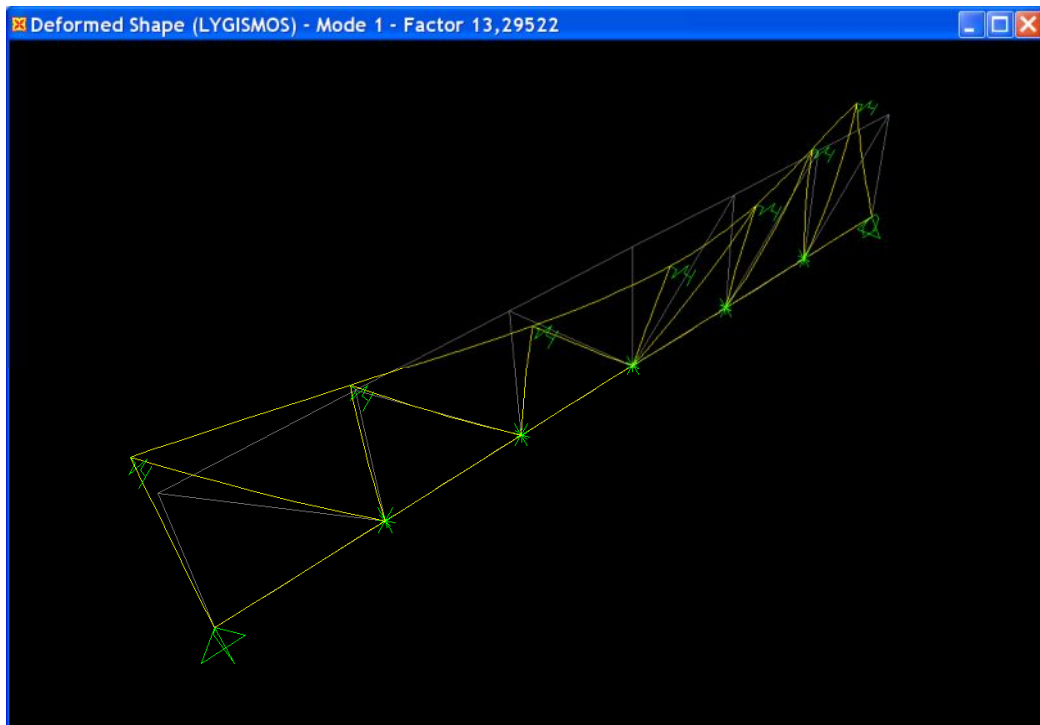
Found mode 5 of 5, Eigenvalue = 3.861030004E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND = 5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED = 8
    
```

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,

$$N_{cr} = \alpha * N_5 = 13,30 * 1027,60 = 13.667,1 \text{ kN}$$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού είναι,



SAP2000 / 3D / I

Για την περίπτωση που όλα τα πλαίσια έχουν την ίδια δυσκαμψία, η ανάλυση του πραγματικού, τρισδιάστατου μοντέλου δίνει,

```

L I N E A R   B U C K L I N G   A N A L Y S I S                               20:58:47

CASE: LYGISMOS

USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM   =          148
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT          =           5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED           =           24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE           =    1.00E-09

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  1  1.634692258E+01  1.999460366E+01  2.187322537E+01  2.549247467E+01
  2  1.230566665E+01  1.344693713E+01  1.516582330E+01  1.559041229E+01
  3  1.223317753E+01  1.331266645E+01  1.494766470E+01  1.549178271E+01
  4  1.223213771E+01  1.331083177E+01  1.494319066E+01  1.549000942E+01
  5  1.223212460E+01  1.331080737E+01  1.494311601E+01  1.548997848E+01
  6  1.223212442E+01  1.331080701E+01  1.494311468E+01  1.548997790E+01
  7  1.223212442E+01  1.331080700E+01  1.494311465E+01  1.548997789E+01

Found mode   1 of      5, Eigenvalue = 1.223212442E+01
Found mode   2 of      5, Eigenvalue = 1.331080700E+01
Found mode   3 of      5, Eigenvalue = 1.494311465E+01
Found mode   4 of      5, Eigenvalue = 1.548997789E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  7  2.649437080E+01  2.689189523E+01  2.853736862E+01  3.203111975E+01
  8  2.649437032E+01  2.689189374E+01  2.853736210E+01  3.203110816E+01
  9  2.649437029E+01  2.689189365E+01  2.853736167E+01  3.203110715E+01

Found mode   5 of      5, Eigenvalue = 2.649437029E+01

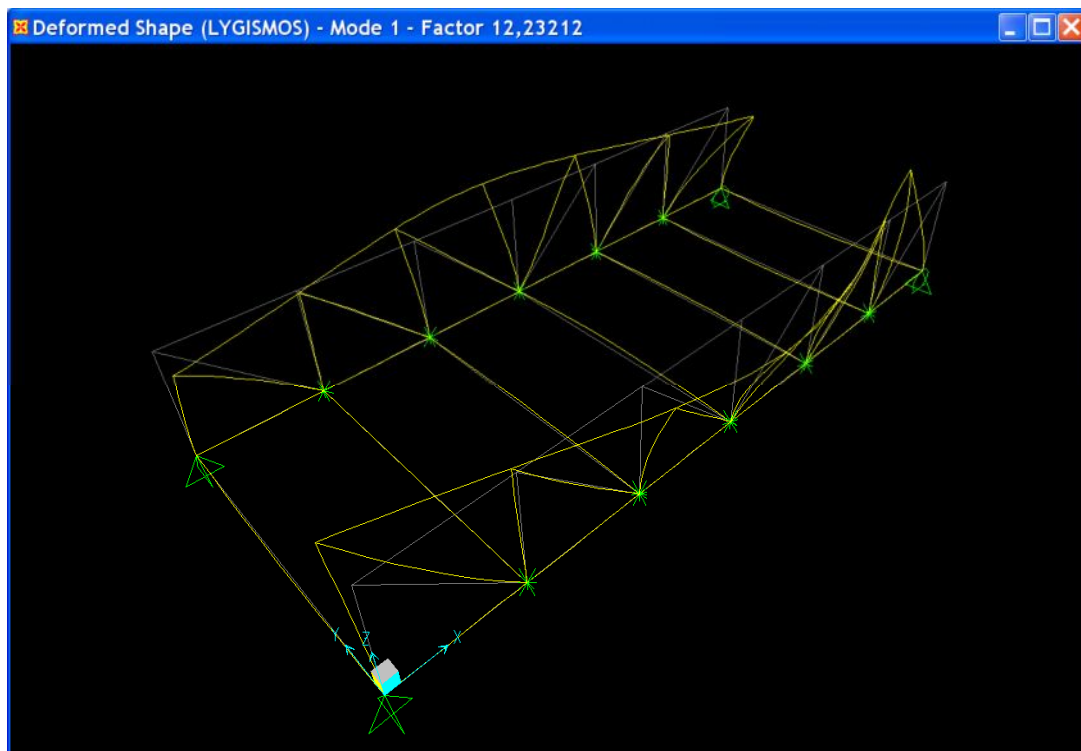
NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND           =           5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED           =           9

```

Οπότε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,

$$N_{cr} = \alpha \cdot N_5 = 12,23 \cdot 1027,60 = 12.567,5 \text{ kN}$$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού είναι,

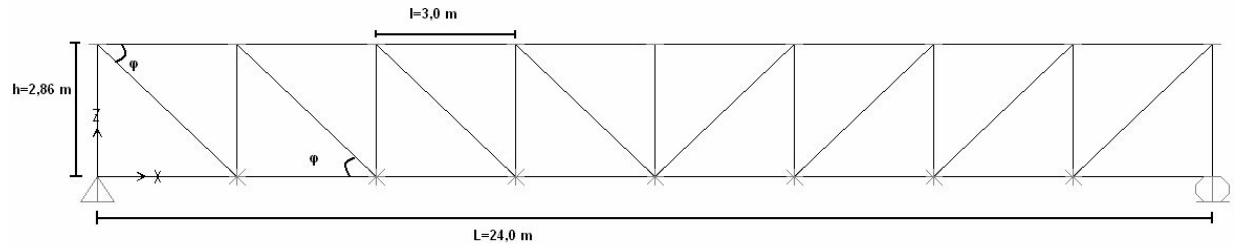


Συνοπτικά λοιπόν για την περίπτωση του φορέα με 6 φατνώματα προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα κρίσιμου φορτίου λυγισμού του άνω πέλματος (σε kN),

Timoshenko	17.569
Ευρωκώδικας	11.328
$2D / 1000C_d$	16.945
$2D / 2C_d$	16.729
$3D / 2I$	14.900
$2D / C_d$	13.667
$3D / I$	12.568

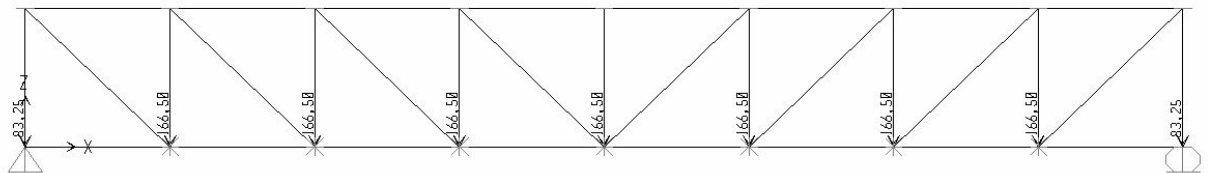
3.4 8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ

Ο φορέας μήκους 24,0 μέτρων αποτελείται από οχτώ φατνώματα, μήκους 3,0 μέτρων το καθένα. Το ύψος του φορέα είναι $H= 3,0$ μέτρα αλλά όπως σε όλες τις μεθοδολογίες χρησιμοποιούμε κεντροβαρικές αποστάσεις, το ίδιο θα κάνουμε και στην επίλυση μέσω της μεθόδου του ιδεατού δικτύωματος. Έτσι θα θεωρήσουμε ύψος φορέα $h=2,86$ μέτρα και $\varphi=\tan(2,86/3)^{-1}=43,63^\circ$.



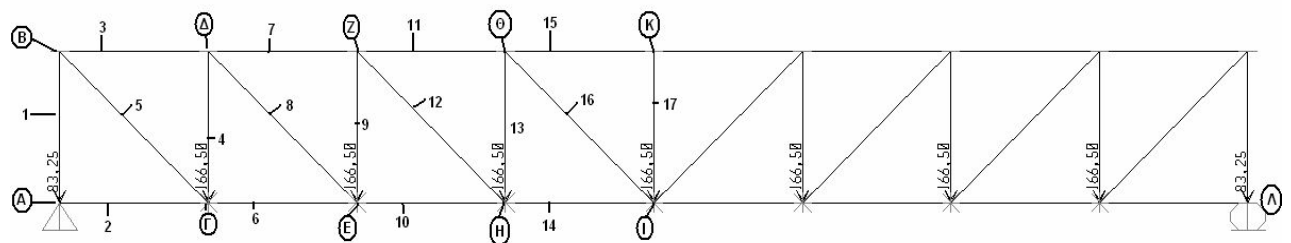
γεωμετρία φορέα 6 φατνωμάτων

Το φορτίο που καταπονεί τον φορέα (ιδίο βάρος και κινητό) συγκεντρώνεται στους κόμβους του κάτω πέλματος. Στους ενδιάμεσους ασκείται φορτίο $P=55,5 \cdot 3=166,5$ kN και στους ακραίους $P=55,5 \cdot 3=83,25$ kN.



επικόμβια φορτία φορέα

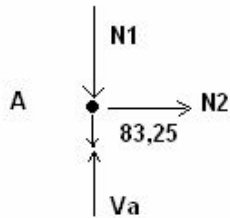
Ακολουθεί η ανάλυση του φορέα βάσει της θεωρίας του ιδεατού δικτύωματος,



$$V_A = V_{\Lambda} = 55,5 \cdot 24 / 2 = 666 \text{ kN}$$

$$H_A = 0 \text{ kN}$$

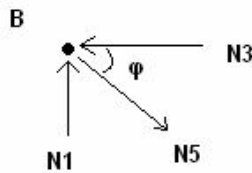
ΚΟΜΒΟΣ Α



$$N_1 + 83,23 = 666 \rightarrow N_1 = 582,75 \text{ kN}$$

$$N_2 = H_A = 0 \text{ kN}$$

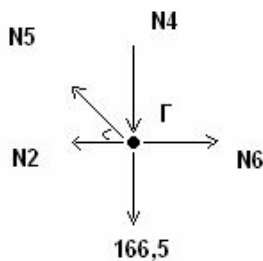
ΚΟΜΒΟΣ Β



$$N_5 \cdot \sin\varphi = N_1 \rightarrow N_5 = 844,57 \text{ kN}$$

$$N_3 = N_5 \cdot \cos\varphi \rightarrow N_3 = 608,09 \text{ kN}$$

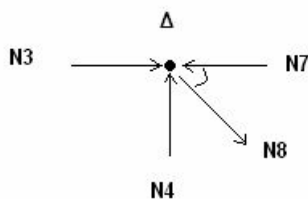
ΚΟΜΒΟΣ Γ



$$N_6 = N_5 \cdot \cos\varphi \rightarrow N_6 = 608,09 \text{ kN}$$

$$N_4 = N_5 \cdot \sin\varphi - 166,5 \rightarrow N_4 = 416,25 \text{ kN}$$

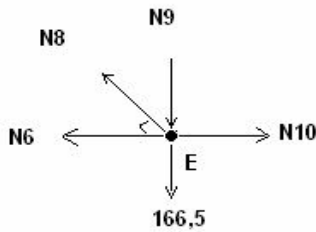
ΚΟΜΒΟΣ Δ



$$N_8 \cdot \sin\varphi = N_4 \rightarrow N_8 = 603,26 \text{ kN}$$

$$N_7 = N_8 \cdot \cos\varphi + N_3 \rightarrow N_7 = 1042,44 \text{ kN}$$

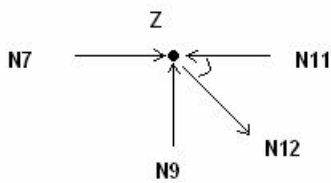
ΚΟΜΒΟΣ Ε



$$N_{10} = N_6 + N_8 \cdot \cos\varphi \rightarrow N_{10} = 1042,44 \text{ kN}$$

$$N_9 = N_8 \cdot \sin\varphi - 166,5 \rightarrow N_9 = 249,75 \text{ kN}$$

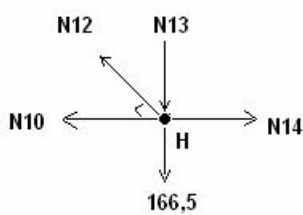
ΚΟΜΒΟΣ Ζ



$$N_{12} \cdot \sin\varphi = N_9 \rightarrow N_{12} = 361,96 \text{ kN}$$

$$N_{11} = N_7 + N_{12} \cdot \cos\varphi \rightarrow N_{11} = 1303,05 \text{ kN}$$

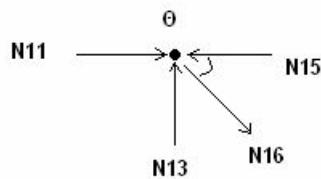
ΚΟΜΒΟΣ Η



$$N_{14} = N_{10} + N_{12} \cdot \cos\varphi \rightarrow N_{14} = 1303,05 \text{ kN}$$

$$N_{13} = N_{12} \cdot \sin\varphi - 166,5 \rightarrow N_{13} = 83,25 \text{ kN}$$

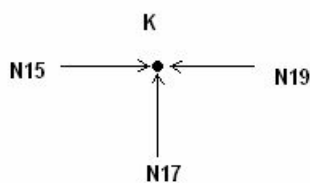
ΚΟΜΒΟΣ Θ



$$N_{16} \cdot \sin\varphi = N_{13} \rightarrow N_{16} = 120,65 \text{ kN}$$

$$N_{15} = N_{16} \cdot \cos\varphi + N_{11} \rightarrow N_{15} = 1389,92 \text{ kN}$$

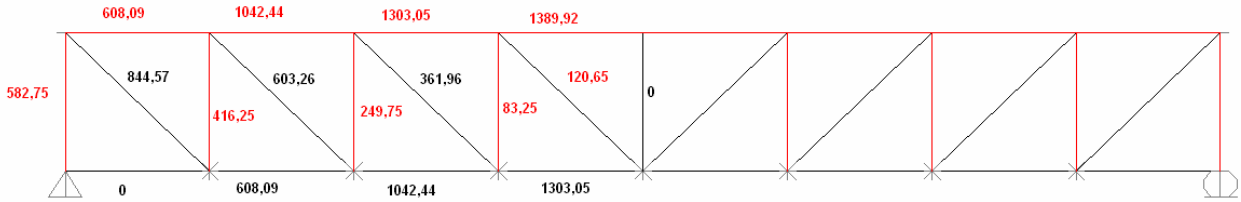
ΚΟΜΒΟΣ Κ



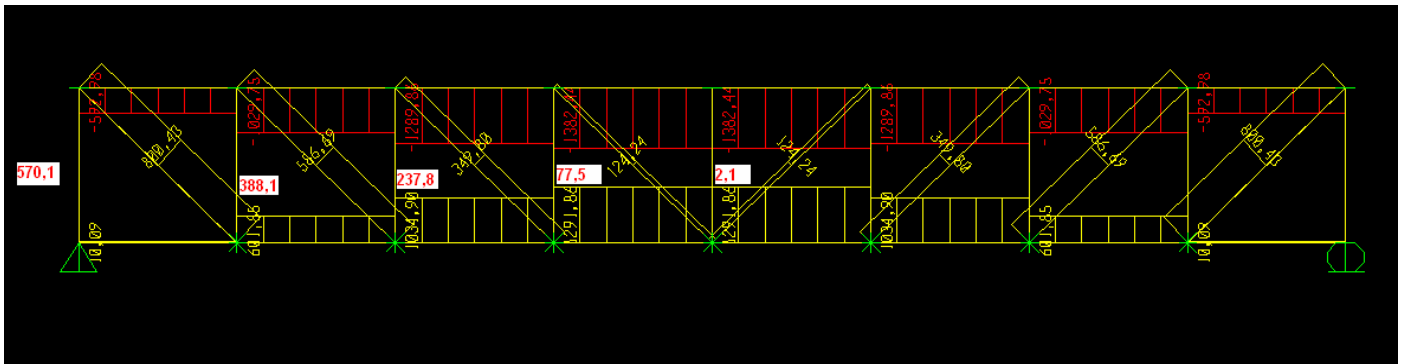
$$N_{15} = N_{19} = 1389,92 \text{ kN}$$

$$N_{17} = 0 \text{ kN}$$

Συνοπτικά λοιπόν το αντίστοιχο διάγραμμα για την αξονική ένταση του φορέα είναι (με κόκκινο η θλίψη),



Στην ανάλυση του φορέα μέσω του SAP2000 θεωρούμε όπου έχουμε συνεχείς συνδέσεις μεταξύ των μελών, το αντίστοιχο διάγραμμα αξονικών δυνάμεων του φορέα είναι,



Οπότε με την ανάλυση μέσω του λογισμικού στην οποία δεν αγνοούνται οι δευτερεύουσες εντάσεις (ροπές και τέμνουσες), για τα τμήματα του πάνω πέλματος που μας ενδιαφέρει προκύπτει η εξής αξονική θλιπτική ένταση,

$$N_3 = 592,98 \text{ kN} \quad N_7 = 1029,75 \text{ kN} \quad N_{11} = 1289,86 \text{ kN} \quad N_{15} = 1382,44 \text{ kN}$$

ενώ η στατική του ιδεατού δικτύωματος δίνει λίγο μεγαλύτερα,

$$N_3 = 608,09 \text{ kN} \quad N_7 = 1042,44 \text{ kN} \quad N_{11} = 1303,05 \text{ kN} \quad N_{15} = 1389,92 \text{ kN}$$

Timoshenko

Από τη θεωρία της μεθοδολογίας του Timoshenko έχουμε,
η ισοδύναμη δυσκαμψία κάθε ενδιάμεσου ημιπλαισίου είναι,

$$C_d = \frac{EI_v}{\frac{h_v^3}{3} + \frac{h^2 * b_q * I_v}{2 * I_q}} = \frac{2,1 * 10^4 * 11260}{\frac{256^3}{3} + \frac{286^2 * 976 * 11260}{2 * 171000}} = 28,76 \text{ kN} / \text{cm}$$

και η αντίστοιχη κατανεμημένη δυσκαμψία (ελαστικό έδαφος)

$$c = \frac{C_d}{\ell} = \frac{28,76}{300} = 0,096 \text{ Kn} / \text{cm}^2$$

ο αδιάστατος συντελεστής Ψ είναι,

$$\Psi = \frac{cL^4}{16EI_z} = \frac{0,096 * 2400^4}{16 * 21000 * 50990} = 185,91 =$$

και από τον Πίνακα 1.6 με γραμμική παρεμβολή έχω
 $\beta=0,251$

οπότε το κρίσιμο φορτίο είναι,

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\beta L)^2} = \frac{\pi^2 * 21000 * 50990}{(0,251 * 2400)^2} = 29.093,35 \text{ kN}$$

Ευρωκώδικας

Με γνωστή την κατανεμημένη δυσκαμψία c, υπολογίζουμε το συντελεστή γ,

$$\gamma = \frac{cL^4}{EI_z} = \frac{0,096 * 2400^4}{21000 * 50990} = 2974,49 =$$

οπότε,

$$m = \frac{2}{\pi^2} * \sqrt{\gamma} = \frac{2}{\pi^2} * \sqrt{2974,49} = 11,06 =$$

το φορτίο Euler παραμένει $N_E = 1833 \text{ kN}$

άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού προκύπτει,

$$N_{cr} = m * N_E = 20.272,98 \text{ kN}$$

SAP 2000 / 2D / 1000*C_d

Θεωρούμε ότι τα δύο ακραία ημιπλαίσια είναι τελείως άκαμπτα, οπότε στο δυσδιάστατο μοντέλο επιβάλλουμε στους ενδιάμεσους κόμβους του άνω πέλματος κατά την y-y, ελαστικές στηρίξεις δυσκαμψίας $C_d=2876$ kN/m και στους δύο ακραίους κόμβους ελατήρια δυσκαμψίας $1000 * C_d=2876000$ kN/m.

Από την ανάλυση ευστάθειας του φορέα προκύπτει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                               21:14:58
CASE: LYGISMOS
USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM      =      96
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT             =       5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED              =      24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE              =    1.00E-09

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
 1  2.528346595E+01  2.676208017E+01  4.658501472E+01  6.503150363E+01
 2  2.158531256E+01  2.254829139E+01  3.767720504E+01  4.877040729E+01
 3  2.155775451E+01  2.251087122E+01  3.743408592E+01  4.813778807E+01
 4  2.155757135E+01  2.251049669E+01  3.742968959E+01  4.812016699E+01
 5  2.155757004E+01  2.251049211E+01  3.742968082E+01  4.811938571E+01
 6  2.155757003E+01  2.251049205E+01  3.742960651E+01  4.811934276E+01

Found mode 1 of 5, Eigenvalue = 2.155757003E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
 6  2.251049205E+01  3.742960651E+01  4.811934276E+01  6.862105162E+01
 7  2.251049205E+01  3.742960648E+01  4.811934023E+01  6.862045910E+01

Found mode 2 of 5, Eigenvalue = 2.251049205E+01
Found mode 3 of 5, Eigenvalue = 3.742960648E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
 7  4.811934023E+01  6.862045910E+01  7.399511514E+01  -8.184564639E+01
 8  4.811934012E+01  6.862039217E+01  7.399508136E+01  -8.184548160E+01
 9  4.811934011E+01  6.862038641E+01  7.399507807E+01  -8.184546125E+01

Found mode 4 of 5, Eigenvalue = 4.811934011E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
 9  6.862038641E+01  7.399507807E+01  -8.184546125E+01  8.213214928E+01
10  6.862038603E+01  7.399507781E+01  -8.184545913E+01  8.213214819E+01
11  6.862038601E+01  7.399507779E+01  -8.184545895E+01  8.213214807E+01

Found mode 5 of 5, Eigenvalue = 6.862038601E+01

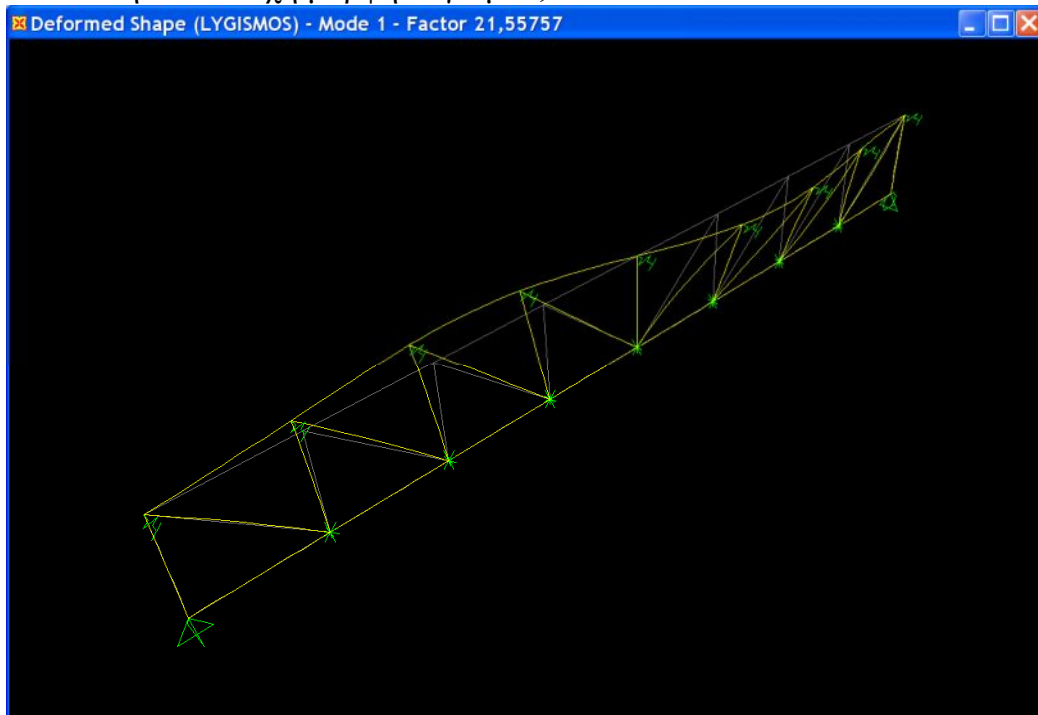
NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND              =       5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED              =      11

```

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,

$$N_{cr} = \alpha * N_5 = 21,56 * 1382,44 = 29.805,41 \text{ kN}$$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού,



SAP2000 / 2D / 2*C_d

Για την περίπτωση που τα ακραία πλαίσια είναι διπλάσιας δυσκαμψίας από τα ενδιάμεσα, τα μετακινησιακά ελατήρια που δεσμεύουν τους ακραίους κόμβους έχουν δυσκαμψία, $C_d' = 2 * C_d = 5752 \text{ kN/m}$.

Η ανάλυση του μοντέλου δίνει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                                21:27:25
CASE: LYGISMOS
USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM = 96
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT = 5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED = 24
RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE = 1.00E-09

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
1 2.505214527E+01 2.547801152E+01 4.510971933E+01 6.318113517E+01
2 2.033991543E+01 2.224434277E+01 3.626642092E+01 3.727164753E+01
3 2.031165695E+01 2.219350564E+01 3.564205537E+01 3.699745447E+01
4 2.031143459E+01 2.219303199E+01 3.563118031E+01 3.699114911E+01
5 2.031143301E+01 2.219302712E+01 3.563093652E+01 3.699102771E+01
6 2.031143300E+01 2.219302707E+01 3.563093088E+01 3.699102540E+01

Found mode 1 of 5, Eigenvalue = 2.031143300E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
6 2.219302707E+01 3.563093088E+01 3.699102540E+01 5.222372241E+01
7 2.219302707E+01 3.563093074E+01 3.699102535E+01 5.222371009E+01

Found mode 2 of 5, Eigenvalue = 2.219302707E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
7 3.563093074E+01 3.699102535E+01 5.222371009E+01 6.855773084E+01
8 3.563093074E+01 3.699102535E+01 5.222370929E+01 6.855766021E+01

Found mode 3 of 5, Eigenvalue = 3.563093074E+01
Found mode 4 of 5, Eigenvalue = 3.699102535E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
8 5.222370929E+01 6.855766021E+01 8.102511540E+01 -8.184548634E+01
9 5.222370925E+01 6.855765352E+01 8.102509986E+01 -8.184546082E+01

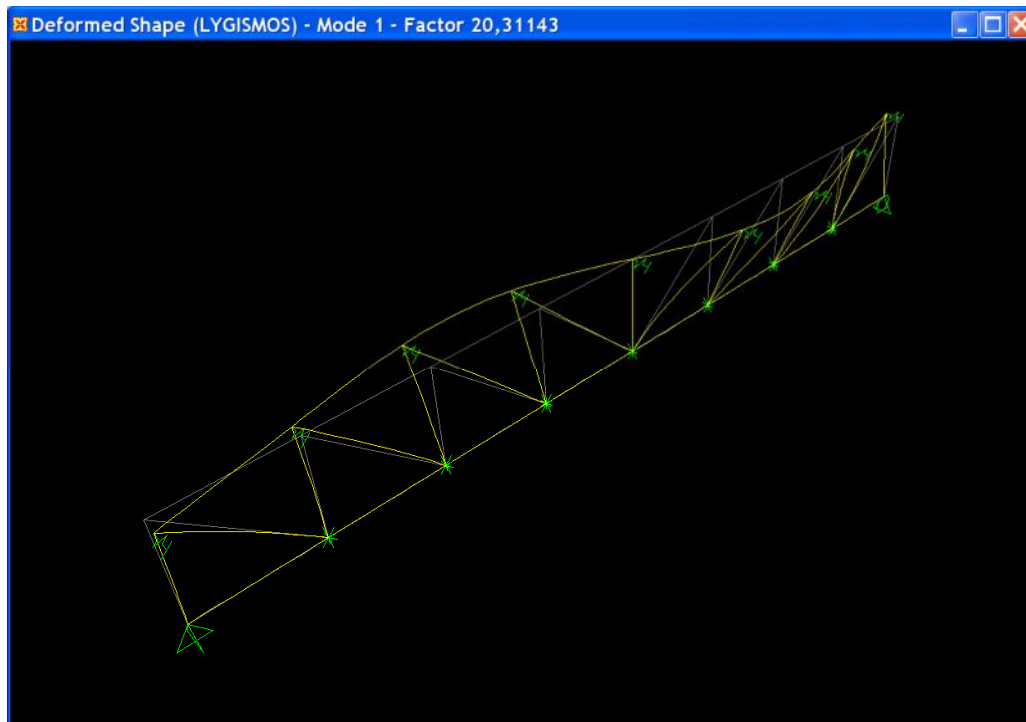
Found mode 5 of 5, Eigenvalue = 5.222370925E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND = 5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED = 9
    
```

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού προκύπτει,

$$N_{cr} = \alpha * N_5 = 20,31 * 1382,44 = 28.077,36 \text{ kN}$$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού είναι,



SAP2000 / 3D / 2I

Για καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής κατάστασης και της συμπεριφοράς του φορέα, εξετάζεται ένα τρισδιάστατο μοντέλο του φορέα.

Για την περίπτωση που τα ακραία πλαίσια είναι διπλάσιας δυσκαμψίας από τα ενδιάμεσα, διαμορφώνουμε κατάλληλα τις διατομές των μελών τους έτσι ώστε να έχουν διπλάσια δυσκαμψία από τα αντίστοιχα ενδιάμεσα μέλη.

Η ανάλυση ευστάθειας του φορέα δίνει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                               21:45:51

CASE: LYGISMOS

USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM =           192
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT       =             5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED        =            24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE        =           1.00E-09

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  1  2.714542200E+01  3.099445446E+01  3.166466085E+01  3.629223423E+01
  2  1.830589362E+01  1.985974714E+01  1.996162864E+01  2.138288091E+01
  3  1.797487071E+01  1.947523084E+01  1.971988134E+01  2.104129933E+01
  4  1.796840051E+01  1.946484991E+01  1.971477746E+01  2.103446203E+01
  5  1.796825907E+01  1.946460027E+01  1.971466385E+01  2.103428953E+01
  6  1.796825563E+01  1.946459403E+01  1.971466124E+01  2.103428448E+01
  7  1.796825555E+01  1.946459387E+01  1.971466118E+01  2.103428432E+01
  8  1.796825555E+01  1.946459387E+01  1.971466117E+01  2.103428432E+01

Found mode  1 of 5, Eigenvalue = 1.796825555E+01
Found mode  2 of 5, Eigenvalue = 1.946459387E+01
Found mode  3 of 5, Eigenvalue = 1.971466117E+01
Found mode  4 of 5, Eigenvalue = 2.103428432E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  8  3.237352988E+01  3.524827871E+01  3.591049363E+01  3.674995341E+01
  9  3.237352986E+01  3.524827827E+01  3.591049344E+01  3.674995128E+01

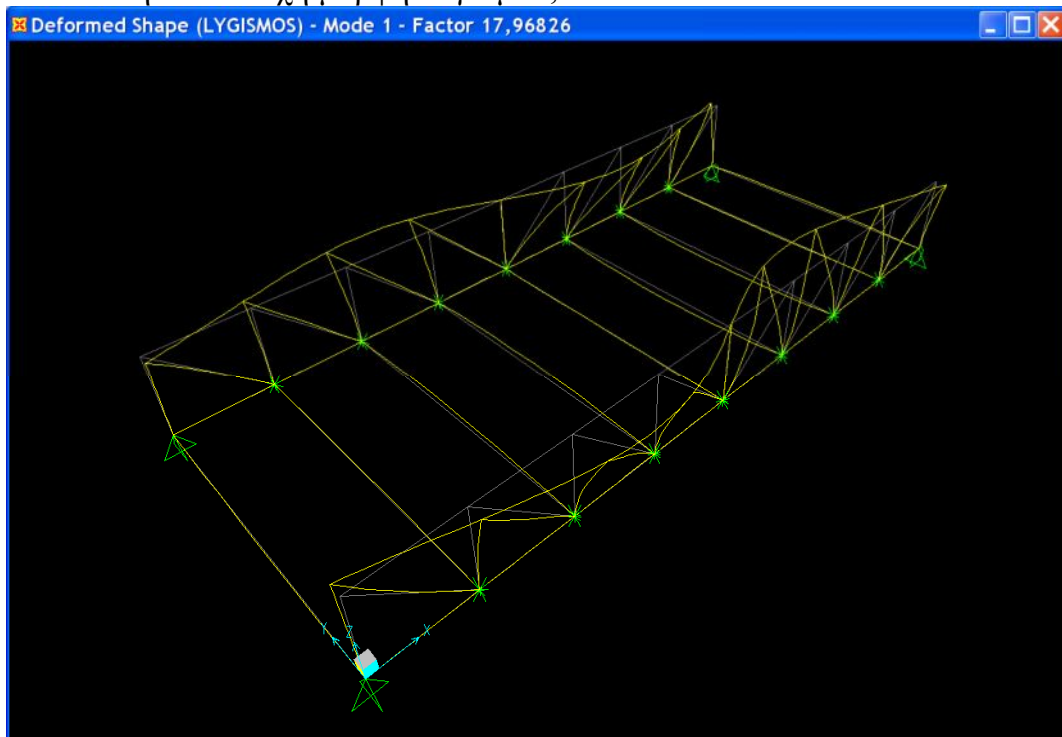
Found mode  5 of 5, Eigenvalue = 3.237352986E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND =           5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED =           9
    
```

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,

$$N_{cr} = \alpha \cdot N_5 = 17,97 \cdot 1382,44 = 24.842,45 \text{ kN}$$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού,



SAP2000 / 2D / C_d

Για την περίπτωση που όλα τα πλαίσια έχουν την ίδια ακαμψία, όλοι οι κόμβοι δεσμεύονται από μετακινησιακά ελατήρια δυσκαμψίας C_d=2876 kN/m. Η ανάλυση του φορέα δίνει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                                21:39:16
CASE: LYGISMOS
USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM = 96
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT = 5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED = 24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE = 1.00E-09

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 1  2.342420185E+01  2.553017612E+01  4.345686455E+01  5.453787435E+01
 2  1.920940319E+01  2.156555506E+01  2.802879630E+01  3.667949948E+01
 3  1.918730157E+01  2.149527703E+01  2.783871916E+01  3.646850200E+01
 4  1.918715489E+01  2.149477578E+01  2.783663572E+01  3.646446648E+01
 5  1.918715398E+01  2.149477164E+01  2.783660492E+01  3.646439370E+01
 6  1.918715398E+01  2.149477160E+01  2.783660441E+01  3.646439237E+01

Found mode      1 of      5, Eigenvalue = 1.918715398E+01
Found mode      2 of      5, Eigenvalue = 2.149477160E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 6  2.783660441E+01  3.646439237E+01  5.121238045E+01  6.133227471E+01
 7  2.783660440E+01  3.646439235E+01  5.121237144E+01  6.133205789E+01

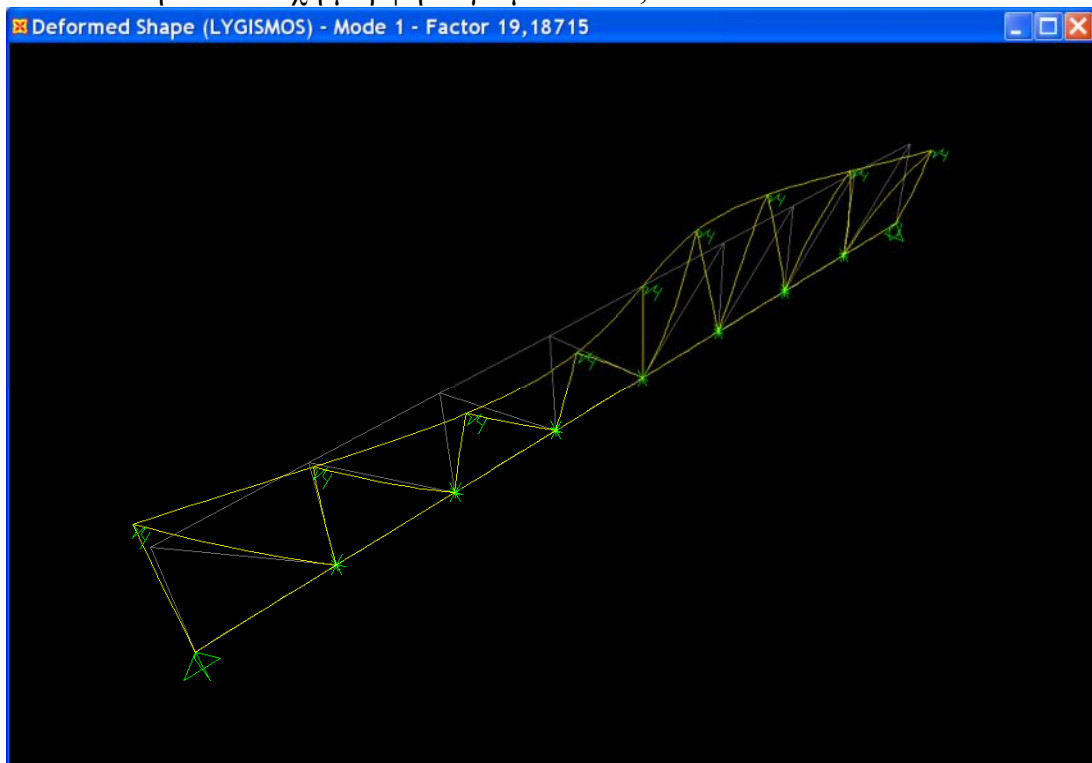
Found mode      3 of      5, Eigenvalue = 2.783660440E+01
Found mode      4 of      5, Eigenvalue = 3.646439235E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 7  5.121237144E+01  6.133205789E+01  6.880887312E+01  8.097418078E+01
 8  5.121237088E+01  6.133204439E+01  6.880880421E+01  8.097407255E+01
 9  5.121237086E+01  6.133204368E+01  6.880879867E+01  8.097406354E+01

Found mode      5 of      5, Eigenvalue = 5.121237086E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND = 5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED = 9
    
```

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,
 $N_{cr} = \alpha \cdot N_5 = 19,19 \cdot 1382,44 = 26.529,02 \text{ kN}$
 και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού είναι,



SAP2000 / 3D / I

Για την περίπτωση που όλα τα πλαίσια έχουν την ίδια δυσκαμψία, η ανάλυση του πραγματικού, τρισδιάστατου μοντέλου δίνει,

```

L I N E A R   B U C K L I N G   A N A L Y S I S                               21:52:57

CASE: LYGISMOS

USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM   =          192
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT          =           5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED           =           24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE            =    1.00E-09

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  1  2.608696432E+01  2.952483975E+01  3.130951517E+01  3.499865613E+01
  2  1.757651705E+01  1.884571457E+01  1.890399558E+01  2.080521997E+01
  3  1.722321183E+01  1.855690548E+01  1.862225408E+01  2.035212403E+01
  4  1.721550594E+01  1.854877673E+01  1.861788674E+01  2.034120980E+01
  5  1.721532794E+01  1.854859875E+01  1.861779764E+01  2.034090217E+01
  6  1.721532362E+01  1.854859456E+01  1.861779576E+01  2.034089289E+01
  7  1.721532352E+01  1.854859446E+01  1.861779572E+01  2.034089259E+01
  8  1.721532351E+01  1.854859445E+01  1.861779572E+01  2.034089258E+01

Found mode    1 of      5, Eigenvalue =  1.721532351E+01
Found mode    2 of      5, Eigenvalue =  1.854859445E+01
Found mode    3 of      5, Eigenvalue =  1.861779572E+01
Found mode    4 of      5, Eigenvalue =  2.034089258E+01
Found mode    5 of      5, Eigenvalue =  2.680563072E+01

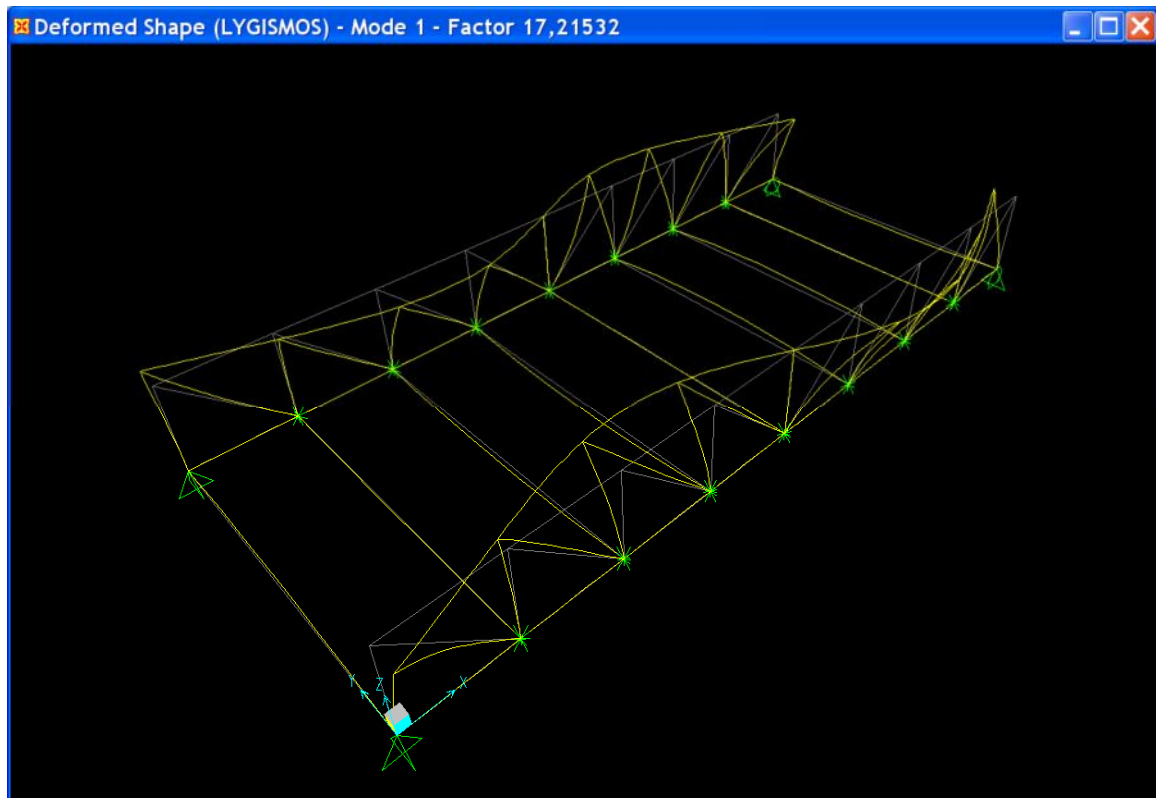
NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND           =           5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED           =           8

```

Οπότε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,

$$N_{cr} = \alpha \cdot N_5 = 17,22 \cdot 1382,44 = 23.805,62 \text{ kN}$$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού είναι,

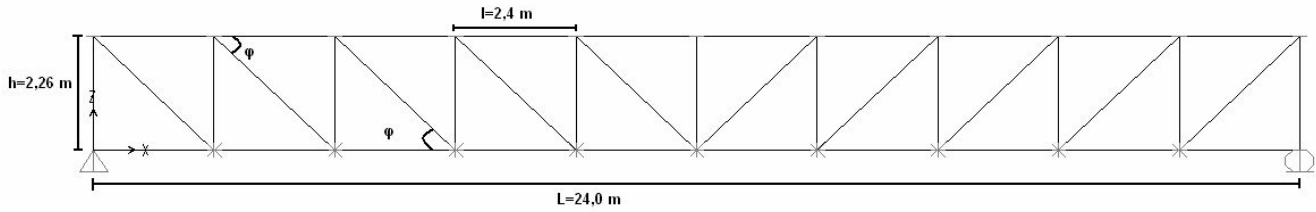


Συνοπτικά λοιπόν για την περίπτωση του φορέα με 8 φατνώματα προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα κρίσιμου φορτίου λυγισμού του άνω πέλματος (σε kN),

Timoshenko	29.093
Ευρωκώδικας	20.273
$2D / 1000C_d$	29.805
$2D / 2C_d$	28.077
$3D / 2I$	24.842
$2D / C_d$	26.529
$3D / I$	23.806

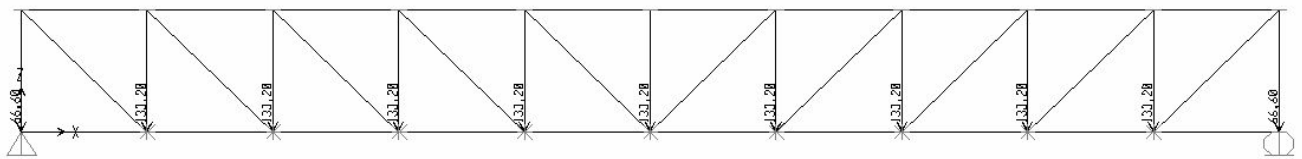
3.5 10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ

Ο φορέας μήκους 24,0 μέτρων αποτελείται από δέκα φατνώματα, μήκους 2,40 μέτρων το καθένα. Το ύψος του φορέα είναι $H= 2,40$ μέτρα αλλά όπως σε όλες τις μεθοδολογίες χρησιμοποιούμε κεντροβαρικές αποστάσεις, το ίδιο θα κάνουμε και στην επίλυση μέσω της μεθόδου του ιδεατού δικτυώματος. Έτσι θα θεωρήσουμε ύψος φορέα $h=2,26$ μέτρα και $\varphi=\tan(2,26/2,4)^{-1}=43,28^\circ$.



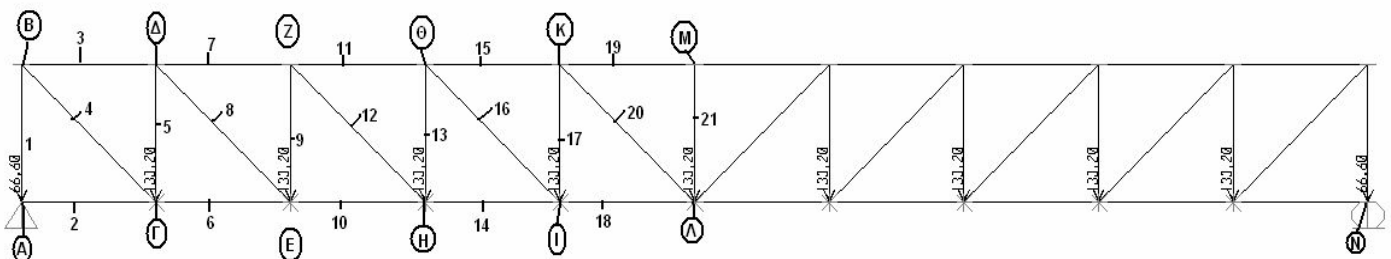
γεωμετρία φορέα 6 φατνωμάτων

Το φορτίο που καταπονεί τον φορέα (ίδιο βάρος και κινητό) συγκεντρώνεται στους κόμβους του κάτω πέλματος. Στους ενδιάμεσους ασκείται φορτίο $P=55,5 \cdot 1,2=66,6$ kN και στους ακραίους $P=55,5 \cdot 1,2=66,6$ kN.



επικόμβια φορτία φορέα

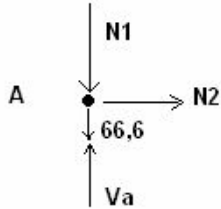
Ακολουθεί η ανάλυση του φορέα βάσει της θεωρίας του ιδεατού δικτυώματος,



$$V_A = V_N = 55,5 \cdot 24 / 2 = 666 \text{ kN}$$

$$H_A = 0 \text{ kN}$$

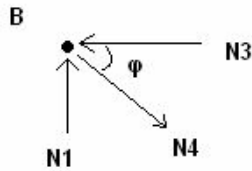
ΚΟΜΒΟΣ Α



$$N_1 = 666 - 66,6 = 599,4 \text{ kN}$$

$$N_2 = 0 \text{ kN}$$

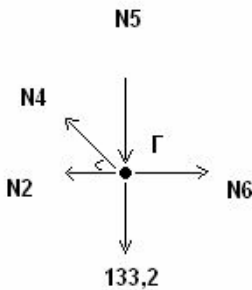
ΚΟΜΒΟΣ Β



$$N_4 \cdot \sin\phi = N_1 \rightarrow N_4 = 868,70 \text{ kN}$$

$$N_3 = N_4 \cdot \cos\phi \rightarrow N_3 = 634,15 \text{ kN}$$

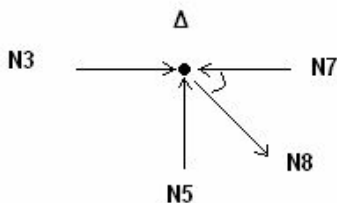
ΚΟΜΒΟΣ Γ



$$N_6 = N_4 \cdot \cos\phi \rightarrow N_6 = 634,15 \text{ kN}$$

$$N_5 = N_4 \cdot \sin\phi - 133,2 \rightarrow N_5 = 466,2 \text{ kN}$$

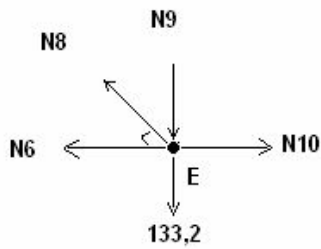
ΚΟΜΒΟΣ Δ



$$N_8 \cdot \sin\phi = N_5 \rightarrow N_8 = 675,65 \text{ kN}$$

$$N_7 = N_8 \cdot \cos\phi + N_3 \rightarrow N_7 = 1127,37 \text{ kN}$$

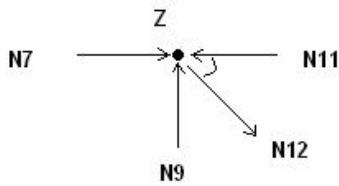
ΚΟΜΒΟΣ Ε



$$N_{10} = N_8 \cdot \cos\varphi + N_6 \rightarrow N_{10} = 1127,37 \text{ kN}$$

$$N_9 = N_8 \cdot \sin\varphi - 133,2 \rightarrow N_9 = 333 \text{ kN}$$

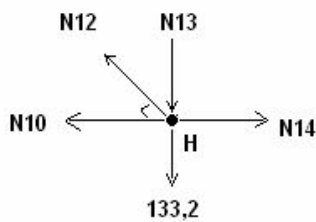
ΚΟΜΒΟΣ Ζ



$$N_{12} \cdot \sin\varphi = N_9 \rightarrow N_{12} = 482,61 \text{ kN}$$

$$N_{11} = N_{12} \cdot \cos\varphi + N_7 \rightarrow N_{11} = 1479,68 \text{ kN}$$

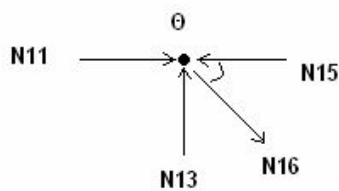
ΚΟΜΒΟΣ Η



$$N_{14} = N_{10} + N_{12} \cdot \cos\varphi \rightarrow N_{14} = 1479,68 \text{ kN}$$

$$N_{13} = N_{12} \cdot \sin\varphi - 133,2 \rightarrow N_{13} = 199,80 \text{ kN}$$

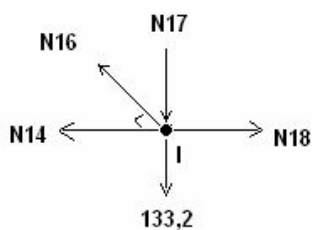
ΚΟΜΒΟΣ Θ



$$N_{16} \cdot \sin\varphi = N_{13} \rightarrow N_{16} = 289,57 \text{ kN}$$

$$N_{15} = N_{11} + N_{16} \cdot \cos\varphi \rightarrow N_{15} = 1691,07 \text{ kN}$$

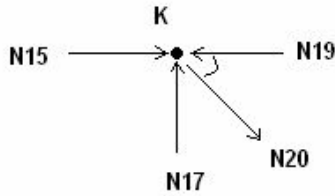
ΚΟΜΒΟΣ Ι



$$N_{18} = N_{14} + N_{16} \cdot \cos\varphi \rightarrow N_{18} = 1691,07 \text{ kN}$$

$$N_{17} = N_{16} \cdot \sin\varphi - 133,2 \rightarrow N_{17} = 66,6 \text{ kN}$$

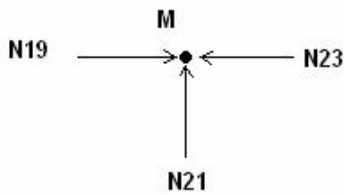
ΚΟΜΒΟΣ Κ



$$N_{20} \cdot \sin\varphi = N_{17} \rightarrow N_{20} = 96,52 \text{ kN}$$

$$N_{19} = N_{15} + N_{20} \cdot \cos\varphi \rightarrow N_{19} = 1761,53 \text{ kN}$$

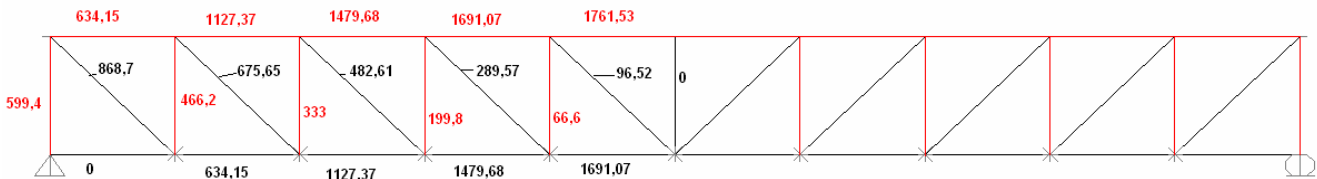
ΚΟΜΒΟΣ Μ



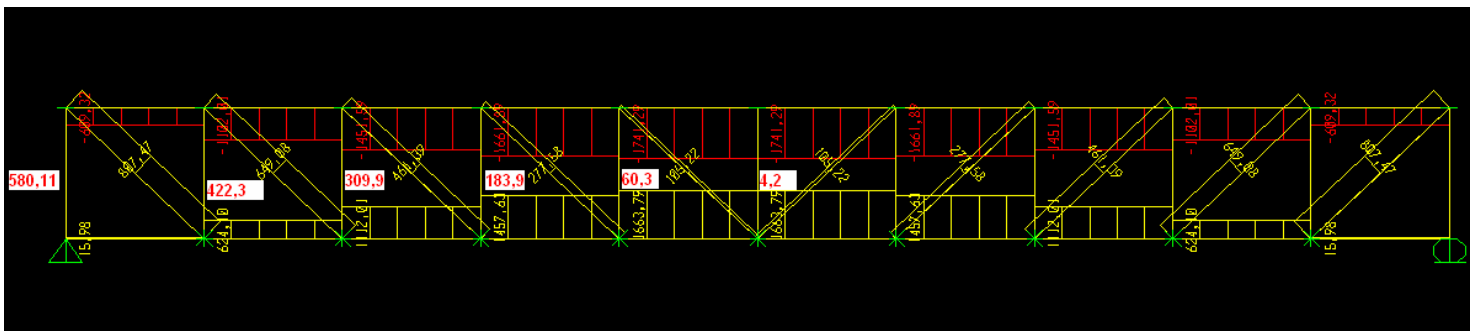
$$N_{19} = N_{23} = 1761,53 \text{ kN}$$

$$N_{21} = 0 \text{ kN}$$

Συνοπτικά λοιπόν το αντίστοιχο διάγραμμα για την αξονική ένταση του φορέα είναι (με κόκκινο η θλίψη),



Στην ανάλυση του φορέα μέσω του SAP2000 θεωρούμε όπου έχουμε συνεχείς συνδέσεις μεταξύ των μελών, το αντίστοιχο διάγραμμα αξονικών δυνάμεων του φορέα είναι,



Οπότε με την ανάλυση μέσω του λογισμικού στην οποία δεν αγνοούνται οι δευτερεύουσες εντάσεις (ροπές και τέμνουσες), για τα τμήματα του πάνω πέλματος προκύπτει η εξής αξονική θλιπτική ένταση,

$$N_3 = 609,32 \text{ kN} \quad N_7 = 1102 \text{ kN} \quad N_{11} = 1451,59 \text{ kN} \quad N_{15} = 1661,89 \text{ kN}$$
$$N_{17} = 1741,29 \text{ kN}$$

ενώ η στατική του ιδεατού δικτυώματος δίνει λίγο μεγαλύτερα,

$$N_3 = 634,15 \text{ kN} \quad N_7 = 1127,37 \text{ kN} \quad N_{11} = 1479,68 \text{ kN} \quad N_{15} = 1691,87 \text{ kN}$$
$$N_{17} = 1761,53 \text{ kN}$$

Timoshenko

Από τη θεωρία της μεθοδολογίας του Timoshenko έχουμε,
η ισοδύναμη δυσκαμψία κάθε ενδιάμεσου ημιπλασίου είναι,

$$C_d = \frac{EI_v}{\frac{h_v^3}{3} + \frac{h^2 * b_q * I_v}{2 * I_q}} = \frac{2,1 * 10^4 * 11260}{\frac{196^3}{3} + \frac{226^2 * 976 * 11260}{2 * 171000}} = 56,96 \text{ kN/cm}$$

και η αντίστοιχη κατανεμημένη δυσκαμψία (ελαστικό έδαφος)

$$c = \frac{C_d}{\ell} = \frac{56,96}{240} = 0,24 \text{ Kn/cm}^2$$

ο αδιάστατος συντελεστής Ψ είναι,

$$\Psi = \frac{cL^4}{16EI_z} = \frac{0,24 * 2400^4}{16 * 21000 * 50990} = 464,76 =$$

και από τον Πίνακα 1.6 με γραμμική παρεμβολή έχω

$$\beta = 0,208$$

οπότε το κρίσιμο φορτίο είναι,

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\beta L)^2} = \frac{\pi^2 * 21000 * 50990}{(0,208 * 2400)^2} = 42.365,71 \text{ kN}$$

Ευρωκώδικας

Με γνωστή την κατανεμημένη δυσκαμψία c , υπολογίζουμε το συντελεστή γ ,

$$\gamma = \frac{cL^4}{EI_z} = \frac{0,24 * 2400^4}{21000 * 50990} = 7436,21 =$$

οπότε,

$$m = \frac{2}{\pi^2} * \sqrt{\gamma} = \frac{2}{\pi^2} * \sqrt{7436,21} = 17,49$$

το φορτίο Euler παραμένει $N_E = 1833 \text{ kN}$

άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού προκύπτει,

$$N_{cr} = m * N_E = 32.059,17 \text{ kN}$$

SAP 2000 / 2D / 1000*C_d

Θεωρώντας τα δύο ακραία ημιπλαίσια τελείως άκαμπτα, επιβάλλουμε στους ενδιάμεσους κόμβους του άνω πέλματος κατά την y-y, ελαστικές στηρίξεις δυσκαμψίας C_d=5696 kN/m και στους δύο ακραίους κόμβους ελατήρια δυσκαμψίας 1000* C_d=5696000 kN/m.

Από την ανάλυση ευστάθειας του φορέα προκύπτει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                               19:21:04
CASE: LYGISMOS
USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM =             118
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT        =              5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED         =             24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE         =             1.00E-09

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  1  2.960901548E+01  3.273357894E+01  5.564180986E+01  5.717066078E+01
  2  2.534796218E+01  2.675882718E+01  4.371701313E+01  4.511631243E+01
  3  2.528516142E+01  2.671152506E+01  4.284842671E+01  4.485371352E+01
  4  2.528417748E+01  2.671104378E+01  4.281033970E+01  4.484475005E+01
  5  2.528416580E+01  2.671103854E+01  4.280878489E+01  4.484441258E+01
  6  2.528416567E+01  2.671103848E+01  4.280872521E+01  4.484440040E+01
  7  2.528416567E+01  2.671103848E+01  4.280872303E+01  4.484439997E+01

Found mode  1 of 5, Eigenvalue = 2.528416567E+01
Found mode  2 of 5, Eigenvalue = 2.671103848E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  7  4.280872303E+01  4.484439997E+01  6.461245367E+01  7.833535474E+01
  8  4.280872296E+01  4.484439996E+01  6.461243580E+01  7.833529122E+01

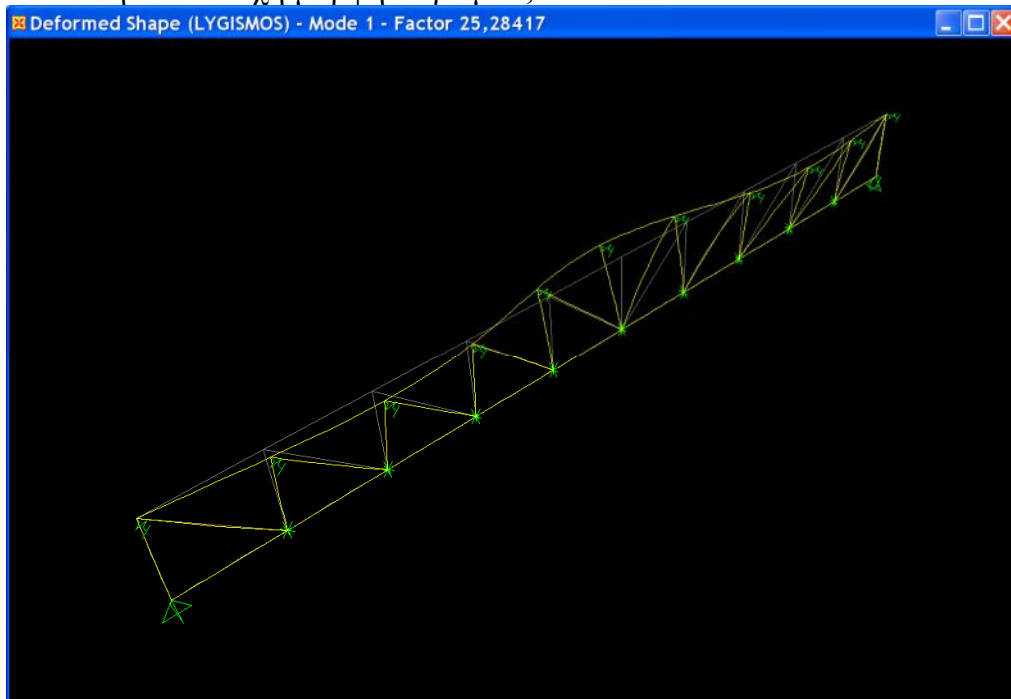
Found mode  3 of 5, Eigenvalue = 4.280872296E+01
Found mode  4 of 5, Eigenvalue = 4.484439996E+01

Iteration  Approximations to next lowest eigenvalues...
  8  6.461243580E+01  7.833529122E+01  -9.849164992E+01  1.041905736E+02
  9  6.461243441E+01  7.833528389E+01  -9.849157453E+01  1.041899349E+02
 10  6.461243431E+01  7.833528319E+01  -9.849156181E+01  1.041898443E+02

Found mode  5 of 5, Eigenvalue = 6.461243431E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND =             5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED =            10
    
```

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,
 $N_{cr} = \alpha * N_5 = 25,28 * 1741,29 = 44.019,81 \text{ kN}$
 και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού,



SAP2000 / 2D / 2*C_d

Για την περίπτωση που τα ακραία πλαίσια είναι διπλάσιας δυσκαμψίας από τα ενδιάμεσα, τα μετακινησιακά ελατήρια στους ακραίους κόμβους έχουν δυσκαμψία, $C_d' = 2 * C_d = 11392 \text{ kN/m}$.

Η ανάλυση του μοντέλου δίνει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                               19:27:16
CASE: LYGISMOS
USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM   =      118
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT         =        5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED          =        24
RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE           =    1.00E-09

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
  1  2.951582645E+01  3.202839026E+01  5.323406970E+01  5.646998198E+01
  2  2.528811421E+01  2.584819420E+01  3.996998219E+01  4.478838370E+01
  3  2.521838236E+01  2.576589236E+01  3.922884537E+01  4.429306111E+01
  4  2.521740790E+01  2.576507512E+01  3.920282435E+01  4.427743255E+01
  5  2.521739789E+01  2.576506686E+01  3.920206041E+01  4.427693241E+01
  6  2.521739780E+01  2.576506676E+01  3.920203838E+01  4.427691393E+01
  7  2.521739780E+01  2.576506676E+01  3.920203775E+01  4.427691312E+01

Found mode      1 of      5, Eigenvalue = 2.521739780E+01
Found mode      2 of      5, Eigenvalue = 2.576506676E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
  7  3.920203775E+01  4.427691312E+01  6.283358625E+01  6.346788723E+01
  8  3.920203774E+01  4.427691308E+01  6.283356242E+01  6.346788031E+01

Found mode      3 of      5, Eigenvalue = 3.920203774E+01
Found mode      4 of      5, Eigenvalue = 4.427691308E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
  8  6.283356242E+01  6.346788031E+01  8.220432819E+01 -9.849168785E+01
  9  6.283356022E+01  6.346787982E+01  8.220427362E+01 -9.849158774E+01
 10  6.283356002E+01  6.346787978E+01  8.220426675E+01 -9.849156499E+01
 11  6.283356000E+01  6.346787978E+01  8.220426587E+01 -9.849156055E+01

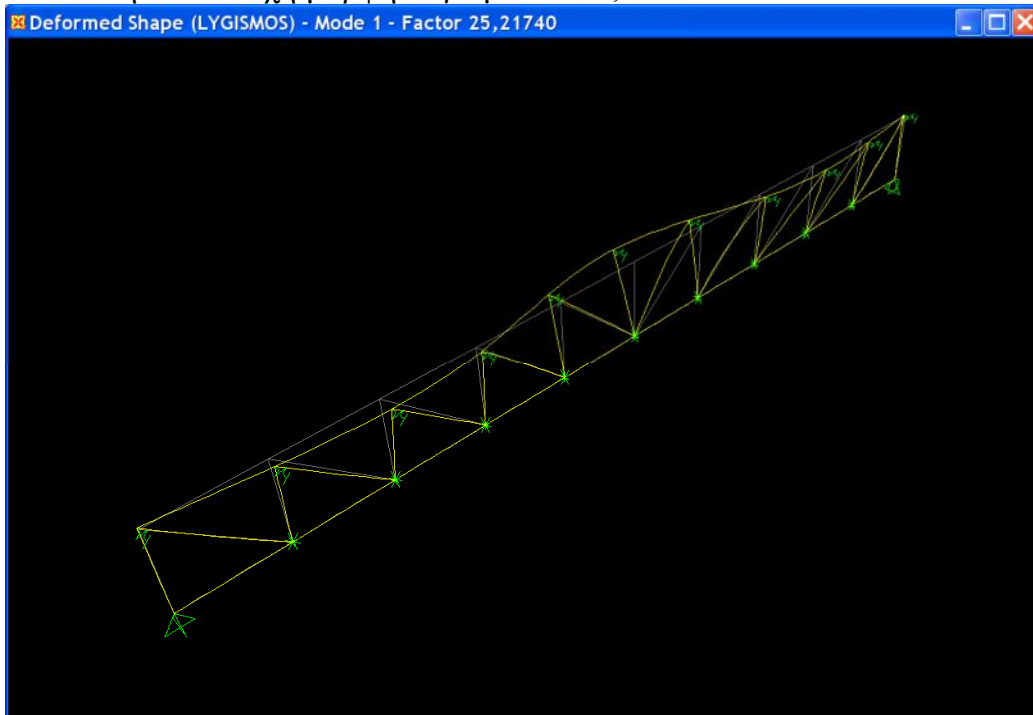
Found mode      5 of      5, Eigenvalue = 6.283356000E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND           =        5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED           =       11
    
```

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού προκύπτει,

$$N_{cr} = \alpha * N_5 = 25,22 * 1741,29 = 43.915,33 \text{ kN}$$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού είναι,



SAP2000 / 3D / 2I

Για καλύτερη προσέγγιση της συμπεριφοράς του φορέα, εξετάζεται ένα τρισδιάστατο μοντέλο του φορέα. Στην περίπτωση που τα ακραία πλαίσια είναι διπλάσια δυσκαμψίας από τα ενδιάμεσα, διαμορφώνουμε τις διατομές τους έτσι ώστε να έχουν διπλάσια δυσκαμψία από τα αντίστοιχα ενδιάμεσα μέλη.

Η ανάλυση ευστάθειας του φορέα δίνει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                               19:40:09
CASE: LYGISMOS
USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS
NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM = 236
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT = 5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED = 24
RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE = 1.00E-09

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 1  2.929023163E+01  3.106934103E+01  3.460087811E+01  4.169143903E+01
 2  2.218133791E+01  2.242429168E+01  2.419344245E+01  2.465421002E+01
 3  2.203208581E+01  2.216893250E+01  2.387265782E+01  2.445728924E+01
 4  2.202822791E+01  2.216387366E+01  2.386460200E+01  2.445214373E+01
 5  2.202813290E+01  2.216376763E+01  2.386442759E+01  2.445200534E+01
 6  2.202813046E+01  2.216376545E+01  2.386442384E+01  2.445200129E+01
 7  2.202813039E+01  2.216376541E+01  2.386442375E+01  2.445200116E+01
 8  2.202813039E+01  2.216376541E+01  2.386442375E+01  2.445200116E+01

Found mode 1 of 5, Eigenvalue = 2.202813039E+01
Found mode 2 of 5, Eigenvalue = 2.216376541E+01
Found mode 3 of 5, Eigenvalue = 2.386442375E+01
Found mode 4 of 5, Eigenvalue = 2.445200116E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 8  3.563083054E+01  3.798998050E+01  4.022707889E+01  4.231461292E+01
 9  3.563083041E+01  3.798998019E+01  4.022707819E+01  4.231461142E+01
10  3.563083040E+01  3.798998017E+01  4.022707813E+01  4.231461130E+01

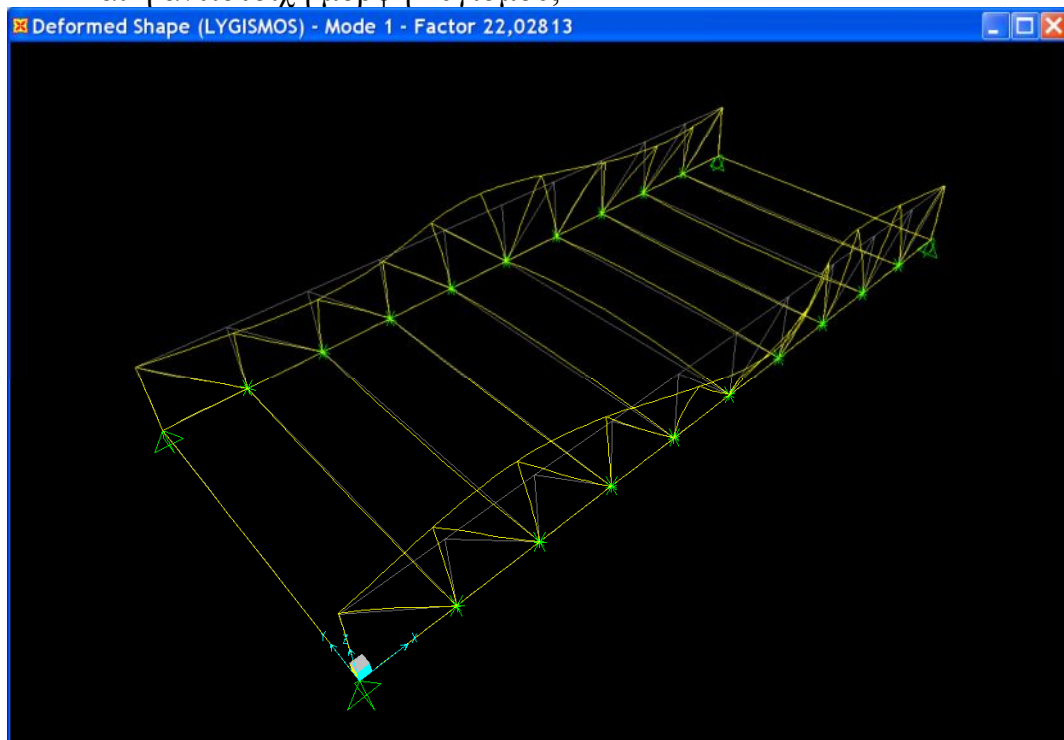
Found mode 5 of 5, Eigenvalue = 3.563083040E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND = 5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED = 10
    
```

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,

$$N_{cr} = \alpha \cdot N_5 = 22,03 \cdot 1741,29 = 38.360,62 \text{ kN}$$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού,



SAP2000 / 2D / C_d

Στην περίπτωση που όλα τα πλαίσια έχουν την ίδια δυσκαμψία, όλοι οι κόμβοι δεσμεύονται από μετακινησιακά ελατήρια δυσκαμψίας C_d=5696 kN/m.

Η ανάλυση του φορέα δίνει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                               19:36:31
CASE: LYGISMOS
USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS

NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM =           118
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT        =             5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED         =            24

RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE         =     1.00E-09

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
  1  2.919409409E+01  3.115428722E+01  4.920755743E+01  5.633161405E+01
  2  2.481568345E+01  2.520542962E+01  3.713560967E+01  4.299593043E+01
  3  2.472762497E+01  2.513277430E+01  3.661809681E+01  4.178844249E+01
  4  2.472659332E+01  2.513190041E+01  3.660232498E+01  4.174913437E+01
  5  2.472658008E+01  2.513189129E+01  3.660191401E+01  4.174747248E+01
  6  2.472657988E+01  2.513189120E+01  3.660190380E+01  4.174739302E+01
  7  2.472657987E+01  2.513189120E+01  3.660190356E+01  4.174738945E+01

Found mode      1 of      5, Eigenvalue =  2.472657987E+01
Found mode      2 of      5, Eigenvalue =  2.513189120E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
  7  3.660190356E+01  4.174738945E+01  4.900405130E+01  6.254436892E+01
  8  3.660190355E+01  4.174738931E+01  4.900405047E+01  6.254436528E+01

Found mode      3 of      5, Eigenvalue =  3.660190355E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
  8  4.174738931E+01  4.900405047E+01  6.254436528E+01  8.065089206E+01
  9  4.174738930E+01  4.900405044E+01  6.254436505E+01  8.065086920E+01

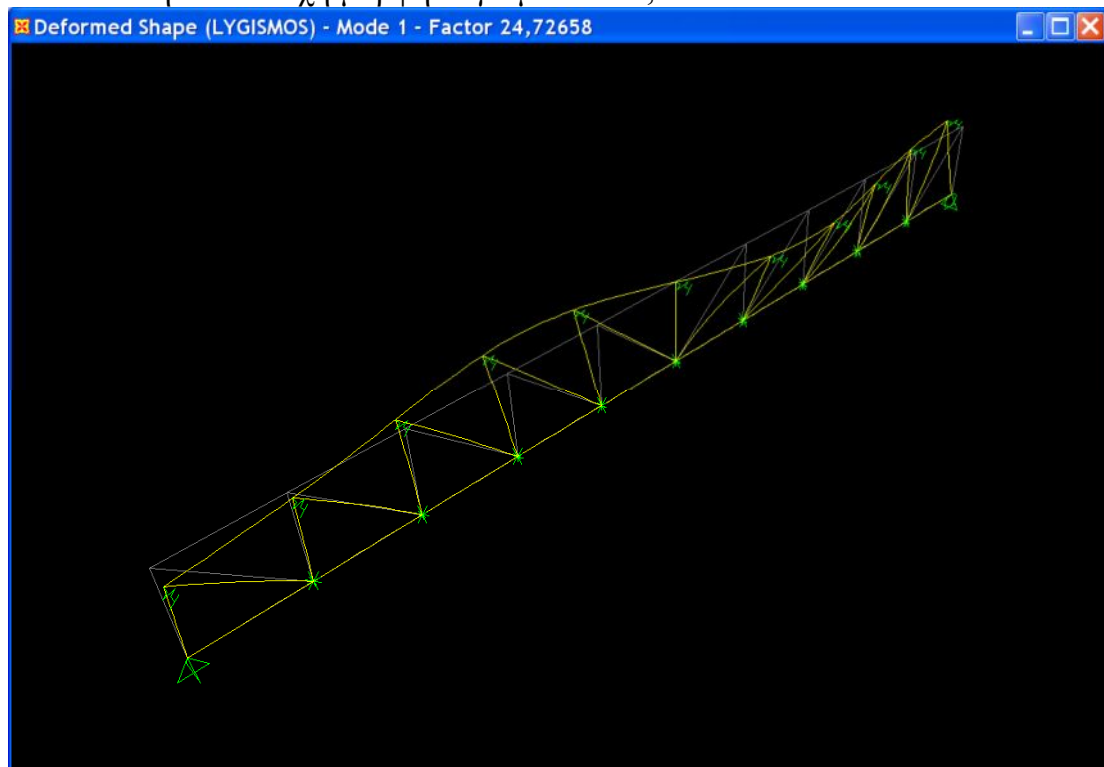
Found mode      4 of      5, Eigenvalue =  4.174738930E+01
Found mode      5 of      5, Eigenvalue =  4.900405044E+01

NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND          =           5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED          =           9
    
```

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,

$$N_{cr} = \alpha \cdot N_5 = 24,73 \cdot 1741,29 = 43,062,10 \text{ kN}$$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού είναι,



SAP2000 / 3D / I

Για την περίπτωση που όλα τα πλαίσια έχουν την ίδια δυσκαμψία, η ανάλυση του πραγματικού, τρισδιάστατου μοντέλου δίνει,

```

LINEAR BUCKLING ANALYSIS                                19:46:26
CASE: LYGISMOS
USING STIFFNESS AT ZERO (UNSTRESSED) INITIAL CONDITIONS
NUMBER OF STIFFNESS DEGREES OF FREEDOM =                236
NUMBER OF BUCKLING MODES SOUGHT =                      5
NUMBER OF SUBSPACE VECTORS USED =                       24
RELATIVE CONVERGENCE TOLERANCE =                       1.00E-09

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 1  2.906419358E+01  3.052741523E+01  3.322250646E+01  4.121885458E+01
 2  2.140938289E+01  2.215769263E+01  2.376006860E+01  2.411813880E+01
 3  2.117472731E+01  2.198622302E+01  2.353161272E+01  2.379151894E+01
 4  2.117041312E+01  2.198212098E+01  2.352512099E+01  2.378318353E+01
 5  2.117033182E+01  2.198202580E+01  2.352493217E+01  2.378299528E+01
 6  2.117033033E+01  2.198202342E+01  2.352492642E+01  2.378299110E+01
 7  2.117033031E+01  2.198202335E+01  2.352492625E+01  2.378299100E+01

Found mode      1 of      5, Eigenvalue = 2.117033031E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 7  2.198202335E+01  2.352492625E+01  2.378299100E+01  3.408588703E+01
 8  2.198202335E+01  2.352492625E+01  2.378299100E+01  3.408588570E+01

Found mode      2 of      5, Eigenvalue = 2.198202335E+01
Found mode      3 of      5, Eigenvalue = 2.352492625E+01
Found mode      4 of      5, Eigenvalue = 2.378299100E+01

Iteration Approximations to next lowest eigenvalues...
 8  3.408588570E+01  3.560142358E+01  3.579949549E+01  3.956555117E+01
 9  3.408588561E+01  3.560142342E+01  3.579949500E+01  3.956555041E+01
10  3.408588560E+01  3.560142341E+01  3.579949496E+01  3.956555035E+01

Found mode      5 of      5, Eigenvalue = 3.408588560E+01

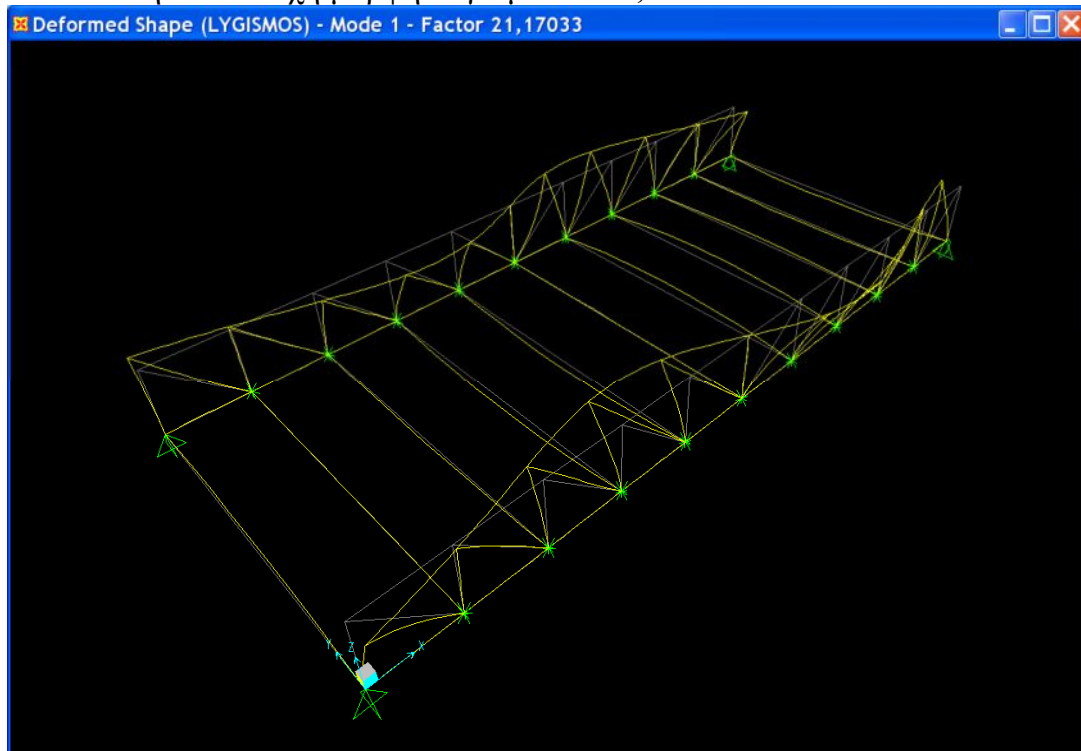
NUMBER OF BUCKLING MODES FOUND =                        5
NUMBER OF ITERATIONS PERFORMED =                       10

```

Οπότε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι,

$$N_{cr} = \alpha \cdot N_5 = 21,17 \cdot 1741,29 = 36.863,11 \text{ kN}$$

και η αντίστοιχη μορφή λυγισμού είναι,



Συνοπτικά λοιπόν για την περίπτωση του φορέα με 10 φατνώματα προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα κρίσιμου φορτίου λυγισμού του άνω πέλματος (σε kN),

Timoshenko	42.366
Ευρωκώδικας	32.059
$2D / 1000C_d$	44.020
$2D / 2C_d$	43.915
$3D / 2I$	38.361
$2D / C_d$	43.062
$3D / I$	38.863

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

4.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μετά την παραμετρική γραμμική ανάλυση ευστάθειας του φορέα για το θλιβόμενο άνω πέλμα μιας δικτυωτής γέφυρας εξάγονται τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Οι προσεγγιστικές μέθοδοι που προτείνονται από τον Timoshenko και τον Ευρωκώδικα δίνουν αποτελέσματα με αρκετή απόκλιση μεταξύ τους. Η απόκλιση αυτή κυμαίνεται από τα 6140 kN για την περίπτωση της γέφυρας με 4 φατνώματα και φτάνει τα 10300 kN για την περίπτωση των 10 φατνωμάτων. Αυξανόμενων δηλαδή των φατνωμάτων, αυξάνει και η απόκλιση.

κρίσιμο φορτίο λογισμού (kN)	4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ
Timoshenko	15.400	17.569	29.093	42.366
ΔΙΑΦΟΡΑ	6.143	6.241	8.820	10.307
EC	9.257	11.328	20.273	32.059

Ο Timoshenko δίνει πάντα μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο ενώ ο Ευρωκώδικας είναι πιο συντηρητικός καταλήγοντας σε μικρότερο φορτίο.

- Για την περίπτωση της ανάλυσης μέσω πεπερασμένων στοιχείων, τα δυσδιάστατα και τρισδιάστατα μοντέλα έχουν και αυτά απόκλιση στις τιμές τους (αλλά μικρότερη από αυτές μεταξύ Timoshenko και Ευρωκώδικα). Οι αποκλίσεις αυτές αυξάνουν όσο αυξάνει και ο αριθμός των φατνωμάτων.

Στην περίπτωση που τα ακραία πλαίσια έχουν διπλάσια δυσκαμψία από τα ενδιάμεσα, η απόκλιση είναι της τάξης των 1000 kN για 4 φατνώματα και φτάνει τα 5500 kN για τα 10 φατνώματα.

κρίσιμο φορτίο λογισμού (kN)	4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ
2D	13.891	16.729	28.077	43.915
ΔΙΑΦΟΡΑ	1.016	1.829	3.235	5.554
3D	12.875	14.900	24.842	38.361

Όταν όλα τα πλαίσια έχουν την ίδια δυσκαμψία, η διαφορά των δύο μοντέλων κυμαίνεται από 230 kN για τα 4 φατνώματα και καταλήγει στα 6.200 kN για τα 10 φατνώματα.

κρίσιμο φορτίο λογισμού (kN)	4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ
2D	11.366	13.667	26.529	43.062
ΔΙΑΦΟΡΑ	237	1.099	2.723	6.199
3D	11.129	12.568	23.806	36.863

Άρα δεδομένου ότι πάντα τα τρισδιάστατα μοντέλα δίνουν μικρότερο κρίσιμο φορτίο, είναι υπέρ της ασφαλείας να χρησιμοποιούνται αυτά. Ειδικότερα στις περιπτώσεις των πολλών φατνωμάτων η θεωρία των μετακινησιακών ελατηρίων δίνει υπερτιμημένα αποτελέσματα αφήνοντας ερωτηματικά για την ασφάλεια του έργου.

- Οι μεθοδολογίες του Timoshenko και του Ευρωκώδικα βασίζονται στην παραδοχή ότι τα ακραία πλαίσια είναι τελείως άκαμπτα. Η παραδοχή αυτή εισήχθη στα δυσδιάστατα μοντέλα με ακαμψία ακραίων ελατηρίων $1000 \cdot C_d$ (όπου C_d η δυσκαμψία των ενδιάμεσων ελατηρίων). Τα αποτελέσματα από την ανάλυση αυτών των μοντέλων είναι πολύ κοντά με αυτά του Timoshenko. Οι αποκλίσεις είναι πολύ μικρές από 620 kN για τα 6 φατνώματα μέχρι 1600 kN για τα 10 φατνώματα.

κρίσιμο φορτίο λογισμού (kN)	4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ
Timoshenko	15.400	17.569	29.093	42.366
ΔΙΑΦΟΡΑ	985	624	-712	-1.654
1000*C_d	14.415	16.945	29.805	44.020

Αποτέλεσμα της σύγκλισης του παραπάνω μοντέλου με τον Timoshenko, είναι η μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ Ευρωκώδικα και του δυσδιάστατου μοντέλου, από 5.000 kN για 4 φατνώματα μέχρι 12.000 kN για τα 10 φατνώματα.

κρίσιμο φορτίο λογισμού (kN)	4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ
EC	9.257	11.328	20.273	32.059
ΔΙΑΦΟΡΑ	-5.158	-5.617	-9.532	-11.961
1000*C_d	14.415	16.945	29.805	44.020

- Η μελέτη του τρισδιάστατου μοντέλου είναι αυτή που προσεγγίζει καλύτερα την πραγματική κατασκευή αλλά και την πραγματική συμπεριφορά της σε θλίψη, όντας απαλλαγμένη από τις παραδοχές των προσεγγιστικών μεθοδολογιών.

Επίσης η πλήρης ακαμψία των πλαισίων είναι κάτι ιδεατό. Αυτό που μπορεί να επιτευχθεί στην πράξη είναι να έχουν είτε διπλάσια δυσκαμψία (2*I) από τα ενδιάμεσα είτε την ίδια (I).

Δεδομένου των παραπάνω, το 3D μοντέλο θεωρείται η ορθότερη επίλυση, αντίστοιχα για περίπτωση ακραίων πλαισίων 2*I ή I.

Έστω ότι τα ακραία πλαίσια κατασκευάζονται με διπλάσια δυσκαμψία από τα ενδιάμεσα. Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης είναι προφανές ότι μεταξύ των μεθοδολογιών του Timoshenko και του Ευρωκώδικα, αυτή που προσεγγίζει την πραγματικότητα είναι ο Ευρωκώδικας. Η απόκλιση είναι της τάξης των 3.600 kN για τα 4 φατνώματα και φθάνει τα 6.300 kN για τα 10 φατνώματα.

κρίσιμο φορτίο λογισμού (kN)	4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ
EC	9.257	11.328	20.273	32.059
ΔΙΑΦΟΡΑ	-3.618	-3.572	-4.562	-6.302
2*I (3D)	12.875	14.900	24.842	38.361

Παρατηρούμε ότι ο Ευρωκώδικας δίνει πάντα αποτελέσματα μικρότερα από αυτά του 3D μοντέλου. Αποτελεί λοιπόν ένα κατώφλι ασφαλείας για τον μελετητή αφού δίνει συντηρητικά οπότε υπέρ της ασφάλειας αποτελέσματα.

Από την άλλη πλευρά ο Timoshenko δίνει συνεχώς μεγαλύτερα φορτία από αυτά του 3D μοντέλου. Δίνει από +2.500 kN για τα 4 φατνώματα μέχρι +4.250 kN για τα 8 φατνώματα.

κρίσιμο φορτίο λογισμού (kN)	4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ
Timoshenko	15.400	17.569	29.093	42.366
ΔΙΑΦΟΡΑ	2.525	2.669	4.251	4.005
2*I (3D)	12.875	14.900	24.842	38.361

Άρα προκειμένου να έχουμε μια ασφαλή και οικονομική κατασκευή προτείνεται η ακριβής προσομοίωση του φορέα (3D) και η ανάλυση μέσω πεπερασμένων (FEM).

Αν αυτό δεν είναι εφικτό ή επιθυμούμε μια γρήγορη εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου, τότε από τις διάφορες μεθοδολογίες προτιμάται αυτή του Ευρωκώδικα που παρότι πιο αντιοικονομικός (ως ο πιο συντηρητικός) δίνει την πιο ασφαλή εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λογισμού.

- Για την περίπτωση φορέα στον οποίο όλα τα πλαίσια έχουν την ίδια δυσκαμψία (I), απόκλιση μεταξύ Ευρωκώδικα και πεπερασμένων στοιχείων (3D μοντέλου) είναι ακόμα πιο μικρή. Ξεκινάει από 1.200 kN για τα 6 φατνώματα και φτάνει τα 4.800 kN για τα 10 φατνώματα.

κρίσιμο φορτίο λυγισμού (kN)	4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ
EC	9.257	11.328	20.273	32.059
ΔΙΑΦΟΡΑ	-1.872	-1.240	-3.533	-4.804
I (3D)	11.129	12.568	23.806	36.863

Καθίσταται λοιπόν ο Ευρωκώδικας μια γρήγορη, ασφαλή και πλέον οικονομική μεθοδολογία προσδιορισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού (αφού παύει να είναι υπερσυντηρητικός).

Στην περίπτωση αυτή η χρήση του Timoshenko λόγω της ακόμα μεγαλύτερης απόκλισης, δημιουργεί ερωτήματα ως προς την ασφάλεια, καθιστώντας τον μάλλον απαγορευτικό. Έχουμε απόκλιση από 4.200 kN στα 4 φατνώματα έως 5.500 kN στα 10 φατνώματα.

κρίσιμο φορτίο λυγισμού (kN)	4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ
Timoshenko	15.400	17.569	29.093	42.366
ΔΙΑΦΟΡΑ	4.271	5.000	5.287	5.503
I (3D)	11.129	12.568	23.806	36.863

Γενικά λοιπόν ο Timoshenko και ο Ευρωκώδικας σε σύγκριση με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων, δημιουργούν ένα άνω και ένα κάτω όριο αντίστοιχα για την τιμή του κρίσιμου φορτίου.

κρίσιμο φορτίο λυγισμού (kN)	4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ
Timoshenko	15.400	17.569	29.093	42.366
2*I (3D)	12.875	14.900	24.842	38.361
EC	9.257	11.328	20.273	32.059

ακραία πλαίσια διπλάσιας δυσκαμψίας από τα ενδιάμεσα

κρίσιμο φορτίο λυγισμού (kN)	4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ
Timoshenko	15.400	17.569	29.093	42.366
I (3D)	11.129	12.568	23.806	36.863
EC	9.257	11.328	20.273	32.059

ακραία πλαίσια ίδιας δυσκαμψίας με τα ενδιάμεσα

Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων ανάλυσης

κρίσιμο φορτίο λυγισμού (kN)	4 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	6 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	8 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ	10 ΦΑΤΝΩΜΑΤΑ
Timoshenko	15.400	17.569	29.093	42.366
Ευρωκώδικας	9.257	11.328	20.273	32.059
2D / 1000C _d	14.415	16.945	29.805	44.020
2D / 2C _d	13.891	16.729	28.077	43.915
3D / 2I	12.875	14.900	24.842	38.361
2D / C _d	11.366	13.667	26.529	43.062
3D / I	11.129	12.568	23.806	36.863

- α Όσων αφορά την πλευρική στήριξη της δοκού, από όλες τις μεθοδολογίες και από όλα τα μοντέλα προκύπτει ότι όσο αυξάνονται τα φατνώματα τόσο αυξάνεται και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του άνω θλιβόμενου πέλματος. Όσο αυξάνονται τα φατνώματα, αυξάνεται ο αριθμός των πλαισίων άρα αυξάνεται και ο αριθμός των πλευρικών στηρίξεων και ταυτόχρονα μειώνεται το ελεύθερο μήκος του άνω πέλματος του δικτυώματος της κύριας δοκού της γέφυρας.

Από όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν προκύπτει ότι για την γέφυρα μήκους 24 μέτρων, η αύξηση των φατνωμάτων από 4 φατνώματα σε 10, οδηγεί κατά μέσο όρο σε τριπλασιασμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Άρα για περιπτώσεις που μια δικτυωτή γέφυρα χωρίς άνω αντιανέμια καταπονείται από μεγάλα φορτία, η πύκνωση των πλαισίων αποτρέπει τον κίνδυνο λυγισμού του άνω πέλματος.

Για την περίπτωση που τα ακραία πλαίσια έχουν την ίδια δυσκαμψία με τα ενδιάμεσα, η ανάλυση μέσω SAP2000 έδωσε $N_{cr} = 11.129$ kN για τα 4 φατνώματα και $N_{cr} = 36.863$ kN για τα 10 φατνώματα, δηλαδή 3,3 φορές μεγαλύτερο φορτίο.

Για την περίπτωση που τα ακραία πλαίσια είναι διπλάσιας δυσκαμψίας, για τα 4 φατνώματα έχουμε $N_{cr} = 12.875$ kN ενώ για τα 10 φατνώματα $N_{cr} = 38.361$ kN, δηλαδή 2,98 φορές μεγαλύτερο.

Επίσης η μέθοδος του Timoshenko δίνει 2,75 φορές μεγαλύτερο φορτίο (από 15.400 kN αύξηση σε 42.366 kN) ενώ ο Ευρωκώδικας 3,46 φορές μεγαλύτερο φορτίο λυγισμού (από 9.257 kN αύξηση σε 32.059 kN).

- Τέλος για μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα προτείνεται η χρήση συνεχών συνδέσεων μεταξύ των μελών του φορέα αντί για χρήση αρθρώσεων που προβλέπει η στατική του ιδεατού δικτυώματος. Δεδομένου ότι στην πράξη η σύνδεση των μελών επιτρέπει την ανάπτυξη ροπών στα άκρα τους, έχουμε μικρότερη αξονική καταπόνηση από αυτή που θα αναπτυσσόταν στο ίδιο μέλος θεωρώντας το ως μέλος δικτυώματος. Στην στατική του ιδεατού δικτυώματος λοιπόν, οδηγούμαστε σε μεγαλύτερες αξονικές δυνάμεις που έχουν σαν αποτέλεσμα μικρότερο κρίσιμο φορτίο από αυτό που θα εμφάνιζε η πραγματική κατασκευή με τη συνδεσμολογία της να τείνει προς την πάκτωση και όχι την πλήρη άρθρωση.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Τελειώνοντας την παρούσα μεταπτυχιακή εργασία νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή της σχολής Πολιτικών Μηχανικών κύριο Ιωάννη Ραυτογιάννη για τις πολύτιμες συμβουλές και την αδιάλειπτη καθοδήγηση του στην εκπόνηση της μεταπτυχιακής μου εργασίας.

Τέλος θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου και την βαθύτατη ευγνωμοσύνη μου, στους γονείς μου και την αδελφή μου, οι οποίοι πάντοτε ήταν δίπλα μου, παρέχοντας μου οτιδήποτε χρειαζόμουν για την απρόσκοπτη ολοκλήρωση των σπουδών μου. Ελπίζω να τους τα ανταποδώσω κάποια μέρα, με το παραπάνω!

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ιωάννης Χ. Ερμόπουλος, Σιδηρές και σύμμικτες γέφυρες, εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα 2008
- Ιωάννης Κ. Βάγιας, Σιδηρές Κατασκευές, εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα 2003
- Ι. Βαγιας, Ι. Ερμόπουλος, Γ. Ιωαννίδης, Σχεδιασμός Δομικών Έργων από Χάλυβα, εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα 2005
- Timoshenko, SP, Gere, J, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, NY, 1961.
- Eurocode 3, *Design of Steel Structures, Part 2 - Steel Bridges*, European Committee for Standardization, Brussels, 2004.
- Bazant, ZP, Cedolin, L, *Stability of Structures*, Oxford University Press, New York, NY, 1991.
- Εγχειρίδιο προγράμματος ανάλυσης και σχεδιασμού SAP2000 version 14

