

Πτυχιακή εργασία: Τυχαίοι πίνακες

Αχιλλέας Δεληγιάννης

Επιβλέπων καθηγητής: Παναγιώτης Ψαρράκος

Αθήνα 2022



Πτυχιακή εργασία: Τυχαίοι πίνακες

Αχιλλέας Δεληγιάννης

Εξεταστική επιτροπή:
Βασίλειος Κανελλόπουλος
Παναγιώτης Ψαρράκος
Πέτρος Στεφανέας

Αθήνα 2022

Εισαγωγή

Οι τυχαίοι πίνακες είναι ένα κομμάτι της επιστήμης με στοιχεία από θεωρητικά μαθηματικά, φυσική, μαθηματική ανάλυση και πιθανότητες. Ο κύριος στόχος των τυχαίων πινάκων είναι να κατανοήσουμε διάφορες ιδιότητες, κυρίως στατιστικές ιδιότητες των ιδιοτιμών του τυχαίου πίνακα που με τον όρο τυχαίο πίνακα εννοούμε έναν πίνακα που τα στοιχεία του προκύπτουν από κάποια συνάρτηση πυκνότητας.

Οι τυχαίοι πίνακες μπορούν να εντοπιστούν σε αναφορά του Wishart (1920) και του James (1954-1964) στο πεδίο της στατιστικής, ωστόσο στο επιστημονικό κομμάτι αναπτύχθηκε και αναφέρθηκε από τον Wigner την δεκαετία του 50', με πολλές αναφορές στην πυρηνική φυσική, προσπαθώντας να συνδυάσει την στατιστική συμπεριφορά των ενεργειακών επιπέδων με τις ιδιοτιμές ενός τυχαίου πίνακα. Λόγω των διαφόρων αναφορών σε επιστημονικά πεδία για τους τυχαίους πίνακες, υπήρξε μεγάλο ενδιαφέρον για αυτούς στο επιστημονικό πεδίο και έτσι αναπτύχθηκαν πολλά "εργαλεία" ώστε να βρεθούν νέες ιδιότητες των τυχαίων πινάκων.

Κάποιες από αυτές τις ιδιότητες παρουσιάζονται σε αυτήν την εργασία. Αρχικά ξεκινάμε με την εισαγωγική θεωρία ώστε να παρουσιάσουμε τα διάφορα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε στη συνέχεια. Ακολούθως, θα συνεχίσουμε υπολογίζοντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των spacing των ιδιοτιμών, όπου με τον όρο του spacing αναφερόμαστε στην μεταξύ απόσταση των ιδιοτιμών, καθώς και θα συγκρίνουμε την γραφική παράστασή της με αυτή της σ.π.π. των spacing των στοιχείων ενός μεγάλου τυχαίου δείγματος. Στην συνέχεια, θα προχωρήσουμε βλέποντας τη σημαντικότητα των ιδιοτιμών στους στροφικά αναλλοίωτους πίνακες, καθώς και θα εισάγουμε τη συνάρτηση $\rho_N(\lambda)$ που μας λέει πόσο πιθανό είναι να βρούμε μια ιδιοτιμή κοντά στο λ . Θα δούμε, επίσης, πώς μπορούμε να μετατρέψουμε την σ.π.π. των στοιχείων του τυχαίου πίνακα σε σ.π.π. των ιδιοτιμών και ύστερα θα δούμε διάφορες εφαρμογές. Έπειτα, θα ασχοληθούμε και με τον τρόπο που συνδέονται οι τυχαίοι πίνακες με

την κβαντομηχανική και με τη χρήση του MATLAB θα δούμε γραφικά τον νόμο του ημικυκλίου και τον νόμο Marchenko-Pastur. Κλείνουμε, τέλος, με εφαρμογές των τυχαίων πινάκων και στον κλάδο της βιολογίας.

Περίληψη

In this thesis we introduce the theory of random matrices, and we show examples of this theory being applied. Random matrix theory has been an upcoming scientific field the past few decades with many different applications. We will introduce in the following thesis some statistical properties of the eigenvalues of random matrices and we will further see some properties of the probability density function of the entries, as well as we will see different applications of this theory to many scientific fields, such as quantum mechanics and biology.

Περίληψη

Σε αυτήν τη διπλωματική θα γνωρίσουμε τη θεωρία των τυχαίων πινάκων και θα δείξουμε παραδείγματα εφαρμογών αυτής της θεωρίας. Οι τυχαίοι πίνακες είναι ένα ανερχόμενος επιστημονικός κλάδος τις τελευταίες δεκαετίες με πολλές εφαρμογές. Θα εισάγουμε στην ακόλουθη εργασία ορισμένες στατιστικές ιδιότητες των ιδιοτιμών τυχαίων πινάκων και θα δούμε επιπλέον ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των στοιχείων των πινάκων, καθώς επίσης και διάφορες εφαρμογές της θεωρίας σε πολλά επιστημονικά πεδία, όπως η κβαντομηχανική και η βιολογία.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγική Θεωρία	3
1.1	Εισαγωγικές έννοιες πιθανοτήτων	3
1.2	Συνάρτηση δέλτα:	8
1.3	Cauchy Principal Value	8
2	Σύγκριση spacing ιδιοτιμών και spacing μεγάλου τυχαίου δείγματος	10
2.1	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του spacing	10
2.2	Spacing ιδιοτιμών και spacing μεγάλου τυχαίου δείγματος ανεξαρτήτων μεταβλητών	14
3	Ιδιοτιμές και τυχαίοι πίνακες	18
3.1	Η σημαντικότητα των ιδιοτιμών στους στροφικά αναλλοίωτους πίνακες	18
3.2	Η συνάρτηση $P_N(\lambda)$ και οι ιδιότητες της συνάρτησης Green	20
3.3	Ιδιοτιμές και σωματίδια	23
3.4	Μετατροπή σ.π.π. στοιχείων σε σ.π.π. ιδιοτιμών	24
3.5	Μια άλλη μορφή της $\rho_N(\lambda)$	26
3.6	Η φόρμουλα Edwards-Jones	31
4	Τυχαίοι πίνακες στην κβαντομηχανική	38
4.1	Τυχαίοι πίνακες και κβαντομηχανική	38
4.2	Η εξίσωση Fokker-Planck	39
4.3	Η εξίσωση Hamilton-Jacobi	40

5	Τυχαίοι πίνακες και Matlab	43
5.1	Νόμος ημικυκλίου	43
5.2	Νόμοι Marchenko-Pastur και παρατηρήσεις:	45
6	Τυχαίοι πίνακες στη βιολογία και περαιτέρω παραδείγματα	47
6.1	Εφαρμογές των τυχαίων πινάκων στη Βιολογία	47
6.2	Μερικές ακόμη εφαρμογές	49

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγική Θεωρία

1.1 Εισαγωγικές έννοιες πιθανοτήτων

Ορισμός πιθανότητας: Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας εξυπηρετεί την περιγραφή "απλών" τυχαίων πειραμάτων πεπερασμένων δειγματικών χώρων, που τα ενδεχόμενα αυτού του δειγματόχωρου είναι ισοπίθανα να συμβούν.

Έστω ότι έχουμε ένα δειγματικό χώρο N στοιχείων και ένα ενδεχόμενο A που αποτελείται από m απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου. Τότε $P[A] = \frac{m}{N}$. Σε περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου δεν είναι ισοπίθανα να συμβούν, δεν ισχύει αυτός ο τύπος, ωστόσο στην συγκεκριμένη εργασία δεν μας ενδιαφέρει αυτός ο τύπος.

Τα τρία αξιώματα της πιθανότητας:

1. $0 \leq P[A] \leq 1$ για κάθε ενδεχόμενο A ,
2. $P[\cup_{n=1}^{\infty} A_n] = \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n]$ όπου A_n είναι διάφορα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου S ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$,
3. $P[S] = 1$.

Τα αξιώματα αυτά αποτελούν τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας. Η ποσότητα $P[A]$ για να είναι η πιθανότητα του A θα πρέπει να ικανοποιεί αυτά τα 3 αξιώματα.

Μερικές ιδιότητες της πιθανότητας:

1. Αν $A \subset B$ τότε $P[B - A] = P[B] - P[A]$.
2. Αν $A \subset B$ τότε $P[A] \subset P[B]$.
3. $P[\emptyset] = 0$.

Νόμος του αθροίσματος:

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$ (Προφανώς αν τα A, B είναι ξένα τότε $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$).

$$P[A \cup B \cup \Gamma] = P[A] + P[B] + P[\Gamma] - P[A \cap B] - P[A \cap \Gamma] - P[B \cap \Gamma] + P[A \cap B \cap \Gamma]$$

.

Δεσμευμένη πιθανότητα και ανεξαρτησία:

Έστω ότι έχουμε δυο ενδεχόμενα A, B του δειγματικού χώρου S και μας δίνεται η πληροφορία ότι κατά την εκτέλεση του τυχαίου πειράματος έχει συμβεί το B . Τότε η πιθανότητα του A θα αλλάζει λόγω της δέσμευσης ότι συνέβη το B . Συμβολίζουμε με $P[A|B]$ αυτήν την πιθανότητα, δηλαδή πόσο πιθανό είναι να συμβεί το A δεδομένου ότι συνέβη το B και είναι:

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}.$$

Δυο ενδεχόμενα A, B λέγονται ανεξάρτητα αν $P[A|B] = P[A]$ ή $P[A \cap B] = P[A]P[B]$.

Παρατήρηση: Αν σε ένα πείραμα έχουμε ένα δοχείο με μπάλες και κάθε φορά που βγάζουμε μια μπάλα την βάζουμε πίσω τότε έχουμε ανεξαρτησία, ενώ αν δεν την βάζουμε πίσω τότε οι επιλογές δεν είναι ανεξάρτητες.

Νόμος Ολικής Πιθανότητας:

Στη θεωρία πιθανοτήτων ο νόμος ολικής πιθανότητας είναι ένας κανόνας που συσχετίζει περιθώριες πιθανότητες με δεσμευμένες πιθανότητες. Εκφράζει την ολική πιθανότητα ενός αποτελέσματος που μπορεί να πραγ-

ματοποιηθεί από μια σειρά διαφορετικών γεγονότων.

Έστω ο δειγματικός χώρος $\{\beta_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ πεπερασμένος ή αριθμησιμος. Τότε για κάθε ενδεχόμενο A του δειγματικού χώρου ισχύει:

$$\begin{aligned} \bullet P[A] &= \sum_n P[A \cap \beta_n] = \sum_n P[A|\beta_n]P[\beta_n], \\ \bullet P[A|C] &= \underbrace{\sum_n P[A|C \cap \beta_n]P[\beta_n|C]}_n. \\ &= \sum_n P[A|C \cap \beta_n]P[\beta_n], \text{ αν } C \text{ ανεξάρτητο του } \beta_n \end{aligned}$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και στοιχεία πιθανότητας:

Μια τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής, εάν το σύνολο τιμών S που λαμβάνει είναι άπειρο και αν υπάρχει συνάρτηση f με τις ιδιότητες:

- $f(x) \geq 0, \forall x \in S,$
- $\int_S f(x)dx = 1,$

$P[X \in A] = \int_A f(x)dx, \forall A \subset S$ και αν το $A = \{a\}$ (μονοσύνολο) τότε $P[A] = P[X \in A] = \int_a^a f(x)dx = 0.$

Άρα, όταν έχουμε συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, η πιθανότητα να παίρνουν συγκεκριμένα μια τιμή a είναι 0. Άρα, στην συνεχή περίπτωση δεν ορίζουμε πιθανότητα σημείων αλλά διαστημάτων. Η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να παίρνει τιμές στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ορίζεται ως το εμβαδό μεταξύ της καμπύλης f , από τα α, β και των άξονα των x :

$$P[\alpha < X < \beta] = P[\alpha < X \leq \beta] = P[\alpha \leq X < \beta] = P[\alpha \leq X \leq \beta].$$

Τη συνάρτηση f θα την ονομάζουμε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Συνάρτηση κατανομής: Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X ορισμένης στο διάστημα $S = (\alpha, \beta)$ ορίζεται ως $P[X \leq x] = F(x) = \int_\alpha^x f(w)dw, \alpha \leq x \leq \beta,$ ενώ $F(x) = \int_\alpha^\beta f(w)dw = 1, x \geq \beta$ και $F(x) = 0$ αν $x < \alpha.$

Συγκαταναεμημένες τυχαίες μεταβλητές: Σε μερικές περιπτώσεις μπορεί

να θέλουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τυχαίων μεταβλητών περισσότερων από μια. Έστω S το σύνολο των τιμών (X, Y) . Τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$$(a) f(x, y) > 0, \forall (x, y) \in S,$$

(b) $\sum_{(x,y) \in S} f(x, y) = \sum_{(x,y) \in S} P[X = x, Y = y] = 1$ (για X, Y διακριτές) ή $\int_S f(x, y) dx dy = 1$ (για (X, Y) συνεχείς). Τότε για $A \subset S$ έχουμε:

$$P[A] = \sum_{(x,y) \in A} f(x, y) \text{ στην διακριτή ή } \int_A f(x, y) dx dy \text{ στην συνεχή περίπτωση.}$$

Έστω (X, Y) τυχαίες μεταβλητές. Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των X, Y ορίζεται ως

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y], \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

και αν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι $f(x, y)$ τότε:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Μέση τιμή:

Ορισμός: Έστω X συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ η οποία παίρνει τιμές στον χώρο S . Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή της ορίζεται ως

$$E[X] = \int_S x f(x) dx,$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα.

Ιδιότητες:

- Έστω $Y = g(X)$. Τότε $E[Y] = \int_S g(x) f(x) dx$.
- $E[c] = c$ για c σταθερά.

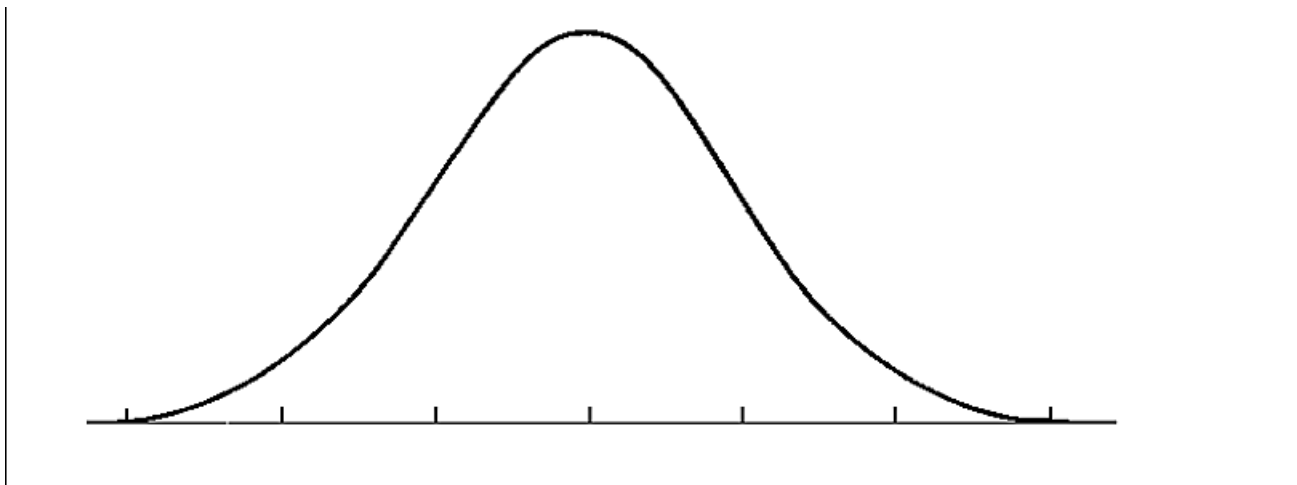
- $E[cX] = cE[X]$ για c σταθερά.
- $E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$, για α, β σταθερές και X, Y συγκατανεμημένες τ.μ.

Κανονική κατανομή:

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία υποθέτουμε ότι τα στοιχεία των πινάκων ακολουθούν την κανονική κατανομή. Η κανονική κατανομή είναι πολύ γνωστή διότι χρησιμοποιείται ευρέως. Παραδείγματα που μας φανερώνουν την ευρεία χρήση της κανονικής κατανομής:

- Χαρακτηριστικά όπως το βάρος, το ύψος και άλλα περιγράφονται από την κανονική κατανομή.
- Στην περίπτωση πολλών παρατηρήσεων (από οποιαδήποτε κατανομή) έχει αποδειχθεί ότι προσεγγιστικά ο μέσος όρος και το άθροισμα των παρατηρήσεων ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Η κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 συμβολίζεται $N(\mu, \sigma^2)$ και έχει ανάλογα με τη διασπορά την κάτωθι καμπανοειδή μορφή με μ οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό και $\sigma \in \mathbb{R}_+$.



Σχήμα 1.1: Μορφή του γραφήματος της σ.π.π. της κανονικής κατανομής

Η συνάρτηση $f(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση αποτελεί αυτό το γράφημα είναι

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

1.2 Συνάρτηση δέλτα:

Η κρουστική συνάρτηση είναι μαθηματική περιγραφή κάποιας ποσότητας που μεταβάλλεται σαν να μετέχει σε φαινόμενο κρούσης. Μαθηματικά, περιγράφεται από ένα συναρτησιοειδές το οποίο οριακά έχει παντού την τιμή 0 εκτός από το σημείο αναφοράς στο οποίο η τιμή γίνεται άπειρη.

Ιδιότητες κρουστικής συνάρτησης δ :

$$\bullet \delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}.$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \delta(x - z) dx = F(z).$$

• Cauchy ή Lorentzian αναπαράσταση της κρουστικής συνάρτησης δ :

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + t^2}.$$

1.3 Cauchy Principal Value

Στα μαθηματικά, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Cauchy Principal Value (C.P.V.) για να αποδώσουμε τιμή σε γενικευμένα ολοκληρώματα, που χωρίς αυτήν η τιμή τους θα παρέμενε απροσδιόριστη.

Η C.P.V. αναλόγως την ανωμαλία ορίζεται ως εξής:

• Για μια ανωμαλία στον πεπερασμένο αριθμό b :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{b-\varepsilon} F(x) dx + \int_{b+\varepsilon}^c F(x) dx \right], \quad a < b < c,$$

$$\int_a^b F(x) dx = \pm\infty, \quad \forall a < b \quad \text{και} \quad \int_b^c F(x) dx = \mp\infty, \quad \forall b < c.$$

• Για μια ανωμαλία στο (∞) :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} F(x) dx,$$

όπου $\int_{-\infty}^0 F(x) dx = \pm\infty$ και $\int_0^{\infty} F(x) dx = \mp\infty$.

Κεφάλαιο 2

Σύγκριση spacing ιδιοτιμών και spacing μεγάλου τυχαίου δείγματος

2.1 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του spacing

Πολλά χρόνια οι μαθηματικοί αντιμετώπιζαν το πρόβλημα εύρεσης ριζών για πολυώνυμα μεγάλου βαθμού, μέχρι που δυο μαθηματικοί, ο Abel και ο Ruffini απέδειξαν ότι είναι αδύνατο να βρούμε λύση μέσω μιας γενικής μεθόδου που να περιλαμβάνει μόνο αριθμητικές πράξεις και να υπολογίζει τις ρίζες μιας εξίσωσης 5ου ή και μεγαλύτερου βαθμού.

Ειδικότερα για τους πίνακες, αυτό δημιουργεί πρόβλημα στην εύρεση των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων όταν οι διαστάσεις του πίνακα είναι αρκετά μεγάλες. Εδώ έρχεται μια προσπάθεια να αντικαταστήσουμε την έννοια του "γενικού πίνακα" με μια νέα, που θα μας εισάγει σε νέες θεωρίες οι οποίες ενδεχομένως να αντιμετωπίζουν το πρόβλημα που προαναφέραμε.

Μια λύση, λοιπόν, που θα μπορούσαμε να προτείνουμε είναι να θεωρήσουμε έναν τυχαίο πίνακα, τα στοιχεία του οποίου θα ακολουθούν κάποια κατανομή. Οπότε, κύριο μέλημά μας είναι πλέον το "πάντρεμα" του πίνακα με την στατιστική και πλέον πέραν των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε και την πιθανοθεωρητική δομή του πίνακα, εντοπίζοντας μια αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας/κάποια κατανομή, και κάποιες αναμενόμενες τιμές που τελικά

ίσως μας βοηθήσουν να λύσουμε το αρχικό μας πρόβλημα.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε ότι τα $x_1, x_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, ακολουθούν δηλαδή την τυποποιημένη κανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ και έστω ότι $x_3 \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ (ο λόγος για τον οποίο επιλέγουμε σε αυτό το παράδειγμα ως τυπική απόκλιση $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ θα φανεί στην συνέχεια) με αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας $p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$. Θεωρούμε λ_1, λ_2 την μικρότερη και την μεγαλύτερη, αντίστοιχα, ιδιοτιμή του πίνακα X και συμβολίζουμε $s = \lambda_2 - \lambda_1$ (απ' το spacing). Σαφώς, επειδή τα στοιχεία του πίνακα είναι τυχαίες μεταβλητές, αντίστοιχα τυχαίες θα είναι και οι ιδιοτιμές και, κατ'επέκταση, και το s .

Θα μας ενδιέφερε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την κατανομή που ακολουθεί το s . Αρχικά, οι ιδιοτιμές προκύπτουν ως ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - \lambda & x_3 \\ x_3 & x_2 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (x_1 - \lambda)(x_2 - \lambda) - x_3^2 = \lambda^2 - (x_1 + x_2)\lambda + x_1x_2 - x_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι :

$$\lambda_{1,2} = \frac{x_1 + x_2 \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4(x_1x_2 - x_3^2)}}{2}$$

και άρα:

$$s = \lambda_2 - \lambda_1 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4(x_1x_2 - x_3^2)} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4x_3^2}.$$

Επομένως, η s είναι συνάρτηση των $x_1, x_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και $x_3 \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$,
 οπότε θεωρώντας την πυκνότητα πιθανότητας:

$$p(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)} e^{-x_3^2} \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{dx_2}{\sqrt{2\pi}} \frac{dx_3}{\sqrt{\pi}}$$

και εισάγοντας και τη συνάρτηση δ (κρουστική συνάρτηση) για να λάβουμε υπόψη την σχέση μεταξύ του s και των x_1, x_2, x_3 παίρνουμε:

$$p(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)} e^{-x_3^2} \delta\left(s - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4x_3^2}\right) \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{dx_2}{\sqrt{2\pi}} \frac{dx_3}{\sqrt{\pi}}.$$

Η παραπάνω αποτελεί την έκφραση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μέσω των x_1, x_2, x_3 . Μετατρέποντας τις τελευταίες σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = r \cos\theta \\ x_1 + x_2 = \psi \\ 2x_3 = r \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{r \cos\theta + \psi}{2} \\ x_2 = \frac{\psi - r \cos\theta}{2} \\ x_3 = \frac{r \sin\theta}{2} \end{cases}.$$

Με αυτήν την αλλαγή, υπολογίζουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα για να αντικαταστήσουμε το $dx_1 dx_2 dx_3$:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \psi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{2} & \frac{-r \sin\theta}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-\cos\theta}{2} & \frac{r \sin\theta}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sin\theta}{2} & \frac{r \cos\theta}{2} & 0 \end{pmatrix} = \dots = -\frac{r}{4}.$$

Επομένως, η πυκνότητα πιθανότητας γράφεται τελικά:

$$p(s) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi r \delta(s-r) e^{-\frac{1}{2}[(\frac{r \cos\theta + \psi}{2})^2 + (\frac{\psi - r \cos\theta}{2})^2 + 2\frac{r^2}{4} \sin^2\theta]}.$$

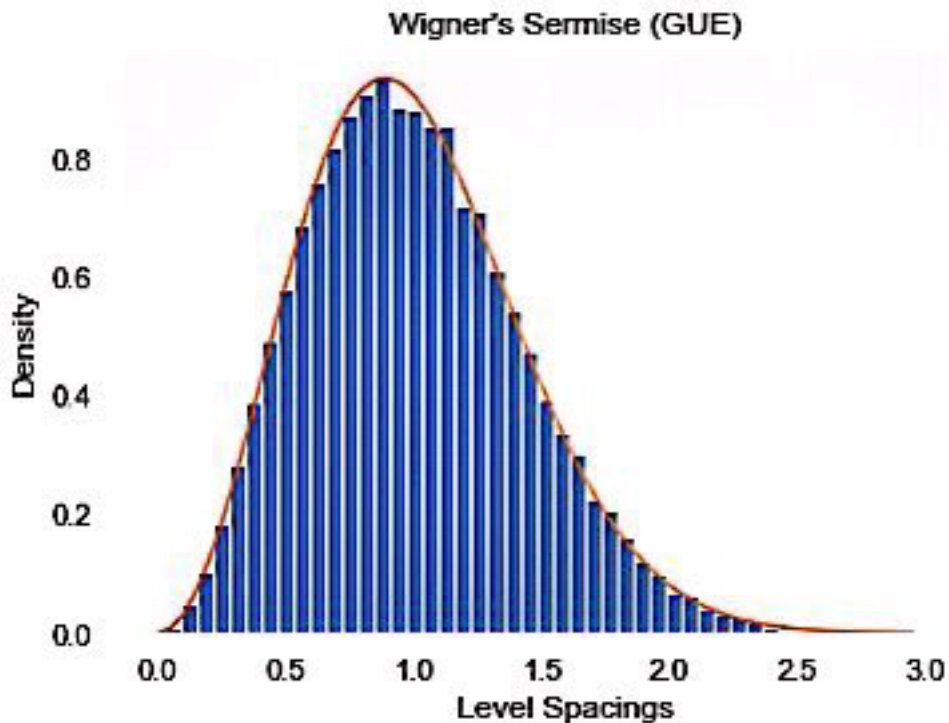
Υστερα από πράξεις και εκμεταλλευόμενοι την βασική ιδιότητα της δ για να απαλείψουμε το r μέσα στο ολοκλήρωμα, παίρνουμε:

$$p(s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{1}{4} \theta(s) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{s^2 \cos^2 \theta + \psi^2 + 2s\psi \cos \theta}{4} + \frac{\psi^2 + s^2 \cos^2 \theta - 2\psi s \cos \theta}{4} + \frac{s^2}{2} \sin^2 \theta \right]}.$$

Απλοποιώντας περαιτέρω, έχουμε:

$$p(s) = \theta(s) \frac{s}{2} e^{-\frac{s^2}{4}}.$$

Αν κάνουμε την γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης σε κάποιο πρόγραμμα π.χ. R/Matlab τότε λαμβάνουμε την ακόλουθη εικόνα:



Ας κάνουμε μια σκέψη του τι ακριβώς κάναμε ως εδώ: Ξεκινήσαμε από έναν τυχαίο πίνακα με ανεξάρτητα στοιχεία που ακολουθούσαν κάποιες κατανομές, βρήκαμε τις ιδιοτιμές και θεωρήσαμε ως s την διαφορά της μέγιστης με την ελάχιστη ιδιοτιμή και με κατάλληλες πράξεις βρήκαμε την κατανομή της s . Μετατρέψαμε, λοιπόν, το αρχικό μας πρόβλημα σε ένα κάπως πιο στατιστικό, και έτσι κάνοντας την γραφική παράσταση της σ.π.π. για την s διαπιστώνουμε κάτι ενδιαφέρον: οι ιδιοτιμές έχουν

την τάση να απέχουν σημαντική απόσταση μεταξύ τους, αφού από την γραφική παράσταση φαίνεται ότι όσο πλησιάζουμε στο 0 η ρ γίνεται πολύ μικρή. Ομοίως, όσο πλησιάζουμε στο 1 η ρ γίνεται πολύ μεγάλη. Αυτό γίνεται ακόμη πιο ενδιαφέρον, αν θυμηθούμε ότι τα στοιχεία του πίνακα τονίσαμε ότι είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και σκεφτούμε ότι η απόσταση των ιδιοτιμών δεν συμπεριφέρεται ανεξάρτητα τελικώς, αλλά δείχνει την τάση να παίρνει συγκεκριμένες τιμές (ένα ανάλογο στην καθημερινή ζωή που θα μπορούσαμε να πούμε: ότι κυκλοφορούμε με το αυτοκίνητο στην κίνηση δεν θέλουμε να "κολλάμε" στον μπροστινό μας, αλλά ούτε και να μας κορνάρει ο από πίσω επειδή έχουμε αφήσει 20μ απόσταση από τον μπροστινό!). Έτσι, η σ.π.π. για την απόσταση των ιδιοτιμών θα συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο όπως η σ.π.π των ιδιοτιμών.

2.2 Spacing ιδιοτιμών και spacing μεγάλου τυχαίου δείγματος ανεξαρτήτων μεταβλητών

Τι γίνεται, τώρα, εάν προχωρήσουμε την αναλογία που προαναφέραμε με τα αυτοκίνητα στην κίνηση, αλλά τώρα λαμβάνοντας υπόψη ένα μεγάλο πλήθος οχημάτων. Χάριν απλότητας, σε αυτό το νοητό πείραμα τα οχήματα θα είναι σταθμευμένα. Αν βγαίναμε μια μέρα να μετρήσουμε τις αποστάσεις μεταξύ των σταθμευμένων αυτών οχημάτων και μετρούσαμε N το πλήθος αποστάσεις μεταξύ τους, θα είχαμε ουσιαστικά ένα τυχαίο δείγμα ανεξαρτήτων μεταβλητών x_1, \dots, x_N . Μας ενδιαφέρει, πάλι, να βρούμε την $p_N(s|x_j = x)$ ("την πιθανότητα το προπορευόμενο όχημα του x_j να απέχει απόσταση s "). Συγκεκριμένα ισχύει:

$$p_N(s|\text{οποιοδήποτε } x_i = x) = \sum_{j=1}^N p_N(s|x_j = x)P[x_j = x],$$

όπου $P[x_j = x] = P_x(x)$ η τιμή της αντίστοιχης συνάρτησης πιθανότητας για την τιμή $x_j = x$, οπότε:

$$p_N(s|\text{οποιοδήποτε } x_i = x) = Np_N(s|x_j = x)P_x(x).$$

Η παραπάνω σχέση αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο x . Για να πάρουμε την αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας υπολογίζουμε:

$$P_N(s) = \int_{\mathcal{S}} p_N(s|\text{οποιοδήποτε } x_i = x)dx,$$

όπου \mathcal{S} το στήριγμα της $P_x(x)$, διότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $P_N(s)$ για ένα αρχικό σημείο το οποίο μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε πάνω στο στήριγμα \mathcal{S} . Έχουμε, λοιπόν, ότι:

$$P_N(s) = N \int_{\mathcal{S}} p_N(s|x_j = x)P_x(x)dx. \quad (2.1)$$

Ας αλλάξουμε τη μονάδα μέτρησης του spacing και ας το βρούμε σε σχέση με το πλήθος των παρατηρήσεων και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Δηλαδή, θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση δυο τυχαίων μεταβλητών σε μονάδες πλήθους επί σ.π.π. σε αυτήν την περιοχή του x , οπότε $s = \frac{\tilde{s}}{NP_x(x)}$, άρα βλέπουμε ότι το s μικραίνει όχι μόνο όταν το N γίνεται μεγάλο, αλλά και όταν η σ.π.π. αντίστοιχα γίνεται μεγάλη στην περιοχή του x .

Θα θεωρήσουμε γνωστό τον τύπο $p_N(s|x_j = x) = P_x(x+s)[1 + F(x) - F(x+s)]^{N-2}$ και θα αντικαταστήσουμε όπου s το $s = \frac{\tilde{s}}{NP_x(x)}$ άρα:

$$p_N(s|x_j = x) = P_x\left(x + \frac{\tilde{s}}{NP_x(x)}\right) \left[1 + F(x) - F\left(x + \frac{\tilde{s}}{NP_x(x)}\right)\right]^{N-2}.$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor παίρνουμε ότι:

$$F\left(x + \frac{\tilde{s}}{NP_x(x)}\right) = F(x) + \frac{\tilde{s}}{NP_x(x)} \cancel{F'(x)} \overset{P_x(x)}{+ \dots}$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}
p_N(s|x_j = x) &= P_x \left(x + \frac{\tilde{s}}{NP_x(x)} \right) \left[1 - \frac{\tilde{s}}{NP_x(x)} P_x(x) + \dots \right]^{N-2} = \\
&= P_x \left(x + \frac{\tilde{s}}{NP_x(x)} \right) \left[1 - \frac{\tilde{s}}{N} + \dots \right]^{N-2}.
\end{aligned}$$

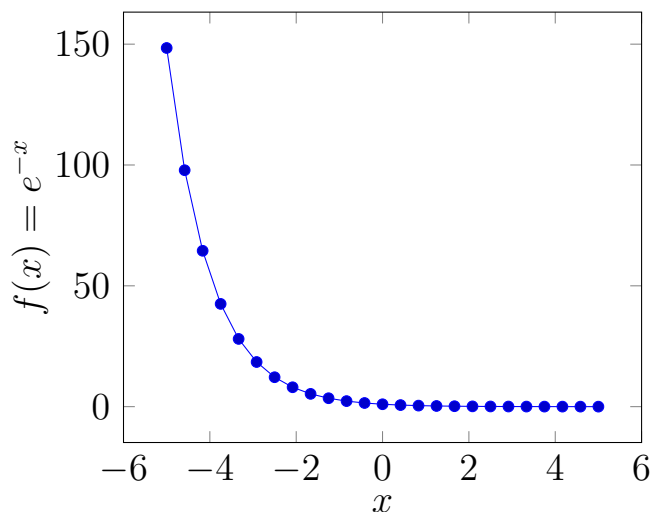
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι για $N \rightarrow \infty$ παίρνουμε:

$$p_N(s = \frac{\tilde{s}}{NP_x(x)} | x_j = x) \sim P_x(x) e^{-\tilde{s}}.$$

Αν αντικαταστήσουμε την τελευταία στην (1), δηλαδή στην συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τυχαία x_j πάνω στο στήριγμα, θα πάρουμε ένα πολύ ενδιαφέρον γράφημα. Πρώτα απ'όλα, αν πρόκειται να κάνουμε αυτήν την αντικατάσταση στην (1) λόγω της αλλαγής μεταβλητών που κάναμε, θα πρέπει να βρούμε την $\hat{p}_N(\tilde{s})$. Έχουμε ότι $\hat{p}_N(\tilde{s} = p_N(s = \frac{\tilde{s}}{NP_x(x)}) \frac{ds}{d\tilde{s}}$ οπότε αντικαθιστώντας στην 2.1 καταλήγουμε στο ότι:

$$\hat{p}_N(\tilde{s}) = N \cdot \frac{1}{N} \int P_x(x) \frac{1}{P_x(x)} P_x(x) e^{-\tilde{s}} dx = e^{-\tilde{s}} \int P_x(x) dx = e^{-\tilde{s}}.$$

Το γράφημα της συνάρτησης αυτής είναι το ακόλουθο:



Ενδιαφέρον παρουσιάζεται όταν συγκρίνουμε το γράφημα των spacing

των ιδιοτιμών με το παραπάνω γράφημα της απόστασης των παρατηρήσεων, από τυχαίο δείγμα ανεξάρτητων μεταβλητών που ακολουθούν ίδια κατανομή. Η διαφορά που παρατηρείται αφορά στο ότι οι ιδιοτιμές, σύμφωνα με το γράφημα των spacing, δεν συμπυκνώνονται ούτε αραιώνουν πολύ, ενώ αντιθέτως στο τελευταίο γράφημα της απόστασης μεταξύ των τυχαίων παρατηρήσεων είναι φανερό ότι όσο περισσότερες είναι οι παρατηρήσεις, τόσο μειώνεται η μεταξύ τους απόσταση.

Κεφάλαιο 3

Ιδιοτιμές και τυχαίοι πίνακες

3.1 Η σημαντικότητα των ιδιοτιμών στους στροφικά αναλλοίωτους πίνακες

Έστω ένας πίνακας

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

και έστω $P[X]$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των στοιχείων του πίνακα. Θα θεωρούμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα θα είναι πραγματικές, ωστόσο ο πίνακας μπορεί να είναι είτε πραγματικός συμμετρικός ($\beta=1$) ή μιγαδικός ερμιτιανός ($\beta=2$). Θα ασχοληθούμε με δύο κατηγορίες πινάκων: η πρώτη είναι οι πίνακες που τα στοιχεία τους είναι ανεξάρτητα, οπότε και ισχύει $P[X] = P(x_{11}, \dots, x_{nn}) = p(x_{11}) \cdot \dots \cdot p(x_{nn})$ και η δεύτερη αποτελείται από τους πίνακες που παραμένουν αμετάβλητοι στροφικά από οποιονδήποτε μετασχηματισμό, δηλαδή αν U ο πίνακας περιστροφής ισχύει ότι $X' = UXU^{-1}$ και οι X, X' έχουν το ίδιο στατιστικό βάρος, που σημαίνει ότι η πυκνότητα πιθανότητας για τους δυο πίνακες παραμένει η ίδια, και αυτό για τον οποιοδήποτε τέτοιο πίνακα U . Τι σημαίνει, όμως, αυτό για το πόσο απαραίτητη είναι η γνώση των ιδιοδιανυσμάτων στην περίπτωση των στροφικά αναλλοίωτων τυχαίων πινάκων; Το γεγονός ότι μπορούμε να τους περιστρέφουμε και να μην αλλάξει η

συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μηδενίζει την χρησιμότητα της γνώσης των ιδιοδιανυσμάτων. Προφανώς η ιδιοσυνάρτηση στην πρώτη περίπτωση των τυχαίων πινάκων με ανεξάρτητα στοιχεία παίζει μεγάλο ρόλο το πώς θα περιστρέψουμε τον πίνακα X , μιας και μετά την περιστροφή δεν θα ισχύει πλέον ότι $P(X) = p(x_{11}) \dots p(x_{nn})$.

Γίνεται, όμως, ένας πίνακας να έχει ανεξάρτητα στοιχεία και παράλληλα να έχει τις ιδιότητες των στροφικά αναλλοίωτων πινάκων; Για την απάντηση σε αυτό, θα επιστρέψουμε στο αρχικό μας παράδειγμα με τον 2×2 πίνακα:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix},$$

όπου η από κοινού σ.π.π. που βρήκαμε για τα στοιχεία του πίνακα ήταν $p(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2}[x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2]}$, όπου ισχύει ότι $Tr(X^2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2$, αφού

$$\begin{aligned} Tr(X) &= Tr \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= Tr \left(\begin{pmatrix} x_1^2 + x_3^2 & x_1x_3 + x_2x_3 \\ x_1x_3 + x_2x_3 & x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix} \right) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2. \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε $p(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2}Tr(X^2)}$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι αν ο U είναι ένας πίνακας στροφής, τότε εφόσον $Tr(UXU^{-1}) = Tr(XUU^{-1}) = Tr(X)$ η πυκνότητα πιθανότητας παραμένει αναλλοίωτη. Επομένως, υπάρχει παράδειγμα πίνακα που να συνδυάζει τις δυο ιδιότητες που είδαμε παραπάνω. Κάθε πίνακας που η πυκνότητά του είναι ανάλογη του $e^{-\frac{1}{2}Tr(X^2)}$ θα μπορεί να έχει ανεξάρτητα στοιχεία και συγχρόνως να είναι στροφικά αναλλοίωτος. Από την άλλη, αν η πυκνότητα δεν ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα, οι δυο αυτές ιδιότητες δεν μπορούν να συνδυαστούν.

3.2 Η συνάρτηση $P_N(\lambda)$ και οι ιδιότητες της συνάρτησης Green

Έστω ότι έχουμε έναν $N \times N$ συμμετρικό πίνακα και λ_N οι ιδιοτιμές του, ενώ για έναν άλλο $N \times N$ πίνακα έχουμε τις ιδιοτιμές $(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_N^{(2)})$. Αντίστοιχα, αν έχουμε συλλέξει M πίνακες τότε στο σύνολό τους οι ιδιοτιμές είναι οι ακόλουθες $(\lambda^{(1)}_1, \dots, \lambda^{(1)}_N, \lambda^{(2)}_1, \dots, \lambda^{(2)}_N, \dots, \lambda^{(M)}_N)$. Ας ορίσουμε $P_N(\lambda)$ την πιθανότητα να βρούμε ιδιοτιμή γύρω από την τιμή λ . Γίνεται, άραγε, γνωρίζοντας την πυκνότητα πιθανότητας των στοιχείων ενός $N \times N$ πίνακα να βρούμε αυτήν την $P_N(\lambda)$; Ποιος είναι, γενικά, ο μαθηματικός ορισμός της $P_N(\lambda)$;

Η απάντηση στο τελευταίο ερώτημα είναι η ακόλουθη:

$$P_N(\lambda) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \right\rangle, \quad (3.1)$$

όπου δ η κρουστική συνάρτηση. Αν θέλαμε να παραστήσουμε γραφικά την $P_N(\lambda)$, η εικόνα που θα παίρναμε θα είχε κάποια "καρφιά" τα οποία θα εκτείνονταν στο άπειρο στις ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα, ενώ παντού η συνάρτηση αυτή είναι 0.

Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτήν την συνάρτηση πιθανότητας για $N \rightarrow \infty$; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι θετική, αν και η μέθοδος που ακολουθείται για αυτό είναι πολύπλοκη.

Ορίζουμε, αρχικά, την συνάρτηση:

$$G_N(z) = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{1}{zI - X} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{z - \lambda_i},$$

όπου X ένας οποιοσδήποτε $N \times N$ πίνακας, $z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_i\}$. Αν λάβουμε την μέση τιμή της παραπάνω συνάρτησης και ύστερα αφήσουμε $N \rightarrow \infty$, τότε έχουμε την ποσότητα:

$$\mathcal{G}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle G_N(z) \rangle.$$

Η \mathcal{G} είναι η λεγόμενη συνάρτηση Green, και θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι:

$$\mathcal{G}(z) = \int \frac{P(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda. \quad (3.2)$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι από την σχέση 3.2 υπάρχει σχέση μεταξύ της συνάρτησης Green και της $P(\lambda)$, που την ορίσαμε ως την πιθανότητα να βρούμε μια ιδιοτιμή γύρω από το λ . Αυτό είναι θετικό, μιας και είναι πιο εύκολο σε πολλά προβλήματα να βρούμε την συνάρτηση Green, παρά την ίδια την $P(\lambda)$. Αυτό, φυσικά, αφού καταφέρουμε να δείξουμε την 3.2. Έχουμε, αρχικά, ότι:

$$\int d\lambda \frac{P_N(\lambda)}{z - \lambda} = \int \frac{d\lambda}{z - \lambda} \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \right\rangle$$

λόγω γραμμικότητας $\left\langle \int \frac{1}{N} \frac{1}{z - \lambda} \sum_{i=1}^n \delta(\lambda - \lambda_i) d\lambda \right\rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{z - \lambda_i} \right\rangle = \langle G_N(z) \rangle$.

Άρα:

$$\int d\lambda \frac{P(\lambda)}{z - \lambda} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\lambda \frac{P_N(\lambda)}{z - \lambda} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle G_N(z) \rangle = \mathcal{G}(z).$$

Οι ιδιότητες της συνάρτησης Green είναι οι ακόλουθες:

1. Για $|z| \rightarrow \infty$ το $- \lambda$ είναι αδιάφορο πρακτικά, οπότε:

$$\mathcal{G}(z) = \int d\lambda \frac{P(\lambda)}{z - \lambda} = \frac{1}{z} + \dots$$

2. Μπορούμε να την εκφράσουμε ως γεωμετρική σειρά με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\mathcal{G}(z) = \int d\lambda \frac{P(\lambda)}{z - \lambda} = \frac{1}{z} \int d\lambda \frac{P(\lambda)}{1 - \frac{\lambda}{z}} = \int d\lambda \sum_{k=0}^{\infty} P(\lambda) \left(\frac{\lambda}{z}\right)^k$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{G}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{z^{k+1}}}, \text{ όπου } \mu_k = \int d\lambda P(\lambda) \lambda^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr}(X^k) \right\rangle.$$

3. Ισχύει ότι:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{y + i\varepsilon} = \text{Pr} \left(\frac{1}{\mathcal{G}} \right) \mp i\pi\delta(y)$$

που μας βοηθάει, διότι έχοντας μια ρητή συνάρτηση με μιγαδικό όρο και παίρνοντας όριο του φανταστικού μέρους να τείνει στο 0 μπορούμε να δούμε ότι το μιγαδικό μέρος της συνάρτησης από την ισότητα εκφράζεται μέσω μιας κρουστικής συνάρτησης δ , άρα αν πρέπει να εμφανίσουμε για κάποια υπολογιστική διευκόλυνση σε κάποιον υπολογισμό μια συνάρτηση δ , μπορούμε να το κάνουμε με την βοήθεια αυτής της ιδιότητας

Απόδειξη της ιδιότητας 3: Για μια συνάρτηση Φ ισχύει:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\Phi(y)dy}{y + i\varepsilon} &= \int_a^b dy \frac{\Phi(y)}{y + i\varepsilon} \frac{y - i\varepsilon}{y - i\varepsilon} = \int_a^b \frac{\Phi(y)(y - i\varepsilon)}{y^2 + \varepsilon^2} dy \\ &= \int_a^b \frac{\Phi(y)y}{y^2 + \varepsilon^2} dy - i\varepsilon \int_a^b \frac{\Phi(y)}{y^2 + \varepsilon^2} dy. \end{aligned}$$

Αφήνοντας $\varepsilon \rightarrow 0^+$ η παραπάνω έκφραση ισούται με:

$$\text{Pr} \left(\int \frac{\Phi(y)}{y} \right) - i\pi\delta(y) \quad (\text{Pr} = \text{Cauchy Principal Value}). \quad \square$$

Αν, τώρα, εφαρμόσουμε τα παραπάνω στην συνάρτηση $\mathcal{G}(x - i\varepsilon)$ ⁽⁴⁾
 $\int d\lambda \frac{P(\lambda)}{x - i\varepsilon - \lambda}$ παίρνουμε ότι:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im}(\mathcal{G}(x - i\varepsilon)) \stackrel{\text{ιδιότητα(3)}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int d\lambda P(\lambda) \pi \delta(x - \lambda) = \pi P(x).$$

3.3 Ιδιοτιμές και σωματίδια

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, θα εστιάσουμε κατά κύριο λόγο είτε σε πραγματικούς συμμετρικούς ή σε μιγαδικούς ερμιτιανούς πίνακες. Υποθέτουμε, επίσης, ότι τα στοιχεία των πινάκων που εξετάζουμε ακολουθούν την κανονική (Gaussian) κατανομή. Θα αναφερόμαστε στην πρώτη κατηγορία πινάκων ως GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) ενώ στην δεύτερη θα αναφερόμαστε ως GUE (Gaussian Unitary Ensemble)

Θα θεωρήσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ιδιοτιμών ενός πίνακα που ανήκει σε μια από τις παραπάνω δυο κατηγορίες ως

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Z_N(\beta)^N} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^\beta,$$

όπου $Z_n(\beta)$ είναι μια σταθερά κανονικοποίησης (δηλαδή σταθερά επιλεγμένη έτσι ώστε η σ.π.π. να ολοκληρώνεται στην μονάδα). Η περίπτωση που $\beta=1$ αναφέρεται σε πίνακα του GOE και η $\beta=2$ για πίνακα του GUE και:

$$Z_N(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^\beta d\lambda_1 \dots d\lambda_N$$

Εφαρμόζοντας στο παραπάνω ολοκλήρωμα την αλλαγή μεταβλητής $\lambda_i \rightarrow \sqrt{\beta N} \lambda_i$ θα πάρουμε ότι:

$$Z_N(\beta) = C_N(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta N H(\lambda_1, \dots, \lambda_N)} d\lambda_1 \dots d\lambda_N,$$

όπου $C_N(\beta)$ είναι η σταθερά που προκύπτει μετά την αλλαγή μεταβλητής και

$$H(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 - \frac{1}{2N} \sum_{i \neq j} \log(\lambda_i - \lambda_j).$$

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μια παρένθεση για να πραγματοποιήσουμε την σύνδεση των παραπάνω με την Θερμοδυναμική. Η $Z_N(\beta)$ στην φυσική καλείται συνάρτηση επιμερισμού και περιγράφει τις ιδιότητες ενός συστήματος σε θερμοδυναμική ισορροπία (δηλαδή οι ιδιότητες του συστήματος παραμένουν σταθερές στον χρόνο). Τα περισσότερα ενδιαφέροντα μεγέθη εκφράζονται μέσω μια συνάρτησης επιμερισμού. Στην περίπτωση που το σύστημα επιτρέπεται να ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον σε σταθερή θερμοκρασία, μιλάμε για κανονική συνάρτηση επιμερισμού.

Ας δούμε ένα παράδειγμα στην κβαντική μηχανική: η θέση και η ορμή αλλάζουν συνεχώς, άρα η συνάρτηση επιμερισμού της θέσης και της ορμής θα εκφράζονται υπό μορφή ολοκληρώματος ως:

$$Z = \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta H(p,q)} d^3q d^3p,$$

με h την σταθερά Planck και $H(p, q)$ την Χαμιλτονιανή του συστήματος, ενώ τα q, p αναφέρονται στην θέση και την ορμή αντίστοιχα. Αν συγκρίνουμε, λοιπόν, την έκφραση αυτή με τον προηγούμενο υπολογισμό που κάναμε για την σταθερά κανονικοποίησης, βλέπουμε ότι υπάρχει μεγάλη ομοιότητα ανάμεσα στα δυο. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, στην ουσία, τις ιδιοτιμές ενός τυχαίου πίνακα σαν σωματίδια κάποιου θερμοδυναμικού συστήματος.

3.4 Μετατροπή σ.π.π. στοιχείων σε σ.π.π. ιδιοτιμών

Έστω ένας πίνακας H με διαστάσεις $N \times N$, με πραγματικές τιμές και συμμετρικός. Έχοντας αυτές τις ιδιότητες, γνωρίζουμε ότι ο H μπορεί να διαγωνιοποιηθεί, συγκεκριμένα υπάρχει ορθογώνιος μετασχηματισμός O ώστε $H = U\Lambda U^T$ όπου $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ο πίνακας με τις ιδιοτιμές

του H και $UU^T = U^T U = I$.

Ας δούμε πώς επηρεάζει αυτός ο πίνακας U την από κοινού κατανομή των ανεξαρτήτων στοιχείων του H . Ξεκινάμε με την από κοινού σ.π.π. του άνω τριγωνικού κομματιού του H , $P(H_{11}, \dots, H_{NN})$, οπότε ο αριθμός των ανεξαρτήτων στοιχείων θα είναι $\frac{N(N+1)}{2}$. Λόγω της σχέσης της διαγωνιοποίησης, θα έχουμε:

$$P(H_{11}, \dots, H_{NN})dH_{11} \dots dH_{NN} = \hat{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N, \{o\})d\lambda_1 \dots d\lambda_N d\{o\}.$$

όπου με το $\{o\}$ συμβολίζουμε το σύνολο των παραμέτρων που σχετίζονται με τα ιδιοδιανύσματα. Αυτό είναι απαραίτητο, μιας και εφόσον έχουμε N ιδιοτιμές, θα χρειαστούν για την παραμετροποίηση των διανυσμάτων $\frac{N(N-1)}{2}$ πραγματικές παράμετροι, ώστε στην παραπάνω σχέση το πλήθος των μεταβλητών και στα δυο μέρη της εξίσωσης να είναι το ίδιο. Επομένως:

$$\hat{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N, \{u\}) = P(H_{11}(\vec{\lambda}, \{u\}), \dots, H_{NN}(\vec{\lambda}, \{u\}))|J(H \rightarrow (\vec{\lambda}, \{u\}))|.$$

Η τελευταία σχέση μας λέει, λοιπόν, ότι η από κοινού σ.π.π. των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων γράφεται συναρτήσει της από κοινού σ.π.π. των στοιχείων του άνω τριγωνικού μέρους του πίνακα και του απολύτου της ιακωβιανής ορίζουσας του μετασχηματισμού από τα τελευταία στα πρώτα. Ισχύει ότι $J(H \rightarrow (\vec{\lambda}, \{u\})) = [\prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)]^\beta$ που, όπως βλέπουμε, εξαρτάται μόνο από τις ιδιοτιμές. Επομένως, καταλήγουμε στο ότι:

$$\hat{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N, \{u\}) = P(H_{11}(\vec{\lambda}, \{u\}), \dots, H_{NN}(\vec{\lambda}, \{u\})) \prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^\beta.$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει την από κοινού σ.π.π. των ιδιοτιμών μαζί με τις παραμέτρους που αναπαριστούν τα ιδιοδιανύσματα. Εφόσον μας

ενδιαφέρουν μόνο οι ιδιοτιμές, θα πρέπει να υπολογίσουμε την σχετική περιθώρια κατανομή, η οποία είναι:

$$\begin{aligned}\hat{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= \int \hat{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N, \{u\}) d\{u\} = \\ &= \int P(H_{11}(\vec{\lambda}, \{u\}), \dots, H_{NN}(\vec{\lambda}, \{u\})) \prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^\beta d\{u\}.\end{aligned}$$

Αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί εάν ο πίνακάς μας ανήκει στην κατηγορία των στροφικά αναλλοίωτων πινάκων. Αυτό ισχύει διότι υπάρχει ένα θεώρημα, το λήμμα του Weyl, το οποίο μας λέει ότι σε αυτήν την περίπτωση η από κοινού σ.π.π. μπορεί να γραφεί ως $P(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \Phi(\text{tr}H, \text{tr}H^2, \dots, \text{tr}H^N)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα στο παραπάνω ολοκλήρωμα παίρνουμε:

$$\hat{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \int \Phi(\sum \lambda_i, \sum \lambda_i^2, \dots, \sum \lambda_i^N) \left(\prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k| \right)^\beta d\lambda.$$

Επομένως, στην περίπτωση που ο πίνακάς μας είναι στροφικά αναλλοίωτος, μπορούμε να κάνουμε εύκολα αυτήν την ολοκλήρωση και να βρούμε ακριβώς ποια είναι η από κοινού σ.π.π. των ιδιοτιμών του τυχαίου πίνακα.

3.5 Μια άλλη μορφή της $\rho_N(\lambda)$

Ας στρέψουμε, τώρα, την προσοχή μας στους στροφικά αναλλοίωτους πίνακες για $\beta = 2$, δηλαδή σε εκείνους που ανήκουν στην GUE κατηγορία πινάκων και ας θεωρήσουμε ότι η σ.π.π. των ιδιοτιμών είναι η ακόλουθη:

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z_N} \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^2 e^{-\sum_{i=1}^N V(\lambda_i)}$$

και ας θυμηθούμε την συνάρτηση $\varrho(\lambda_1)$ που μας δίνει την πιθανότητα να βρεθεί μια ιδιοτιμή κοντά στην ιδιοτιμή λ_1 . Ισχύει ότι:

$$\varrho(\lambda_1) = \int d\lambda_2 \dots d\lambda_N \frac{1}{Z_N} \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^2 e^{-\sum_{i=1}^N V(\lambda_i)}$$

και θα προσπαθήσουμε, στην συνέχεια, να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα.

Αρχικά ο όρος $\prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k) = \Delta_N(\vec{\lambda})$ γράφεται ως:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_N^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^N & \lambda_2^N & \dots & \lambda_N^N \end{pmatrix}.$$

Αυτό είναι γνωστό από τις ιδιότητες του λεγόμενου πίνακα Vandermonde:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^N \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^N \end{pmatrix}, \quad \text{όπου ισχύει } \det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_j - x_i).$$

Ωστόσο, εμείς δεν έχουμε στην έκφραση για την σ.π.π. το γινόμενο που συσχετίσαμε με την ορίζουσα Vandermonde, αλλά το τετράγωνό του. Πρέπει, λοιπόν, να δούμε πώς θα χειριστούμε αυτήν την κατάσταση.

Αν είχαμε ένα πολυώνυμο της μορφής $\Pi_k(x) = a_k x^k + \dots$ τότε η αντίστοιχη του ορίζουσα Vandermonde θα ήταν:

$$\Delta_N(\lambda) = \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_N} \det \begin{pmatrix} \Pi_0(\lambda_1) & \dots & \Pi_0(\lambda_N) \\ \Pi_1(\lambda_1) & \dots & \Pi_1(\lambda_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{N-1}(\lambda_1) & \dots & \Pi_{N-1}(\lambda_N) \end{pmatrix}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι στο προηγούμενο ολοκλήρωμα είχαμε $\prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^2$ και το ότι για τον οποιονδήποτε $N \times N$ πίνακα ισχύει $(\det A)^2 =$

$\det(A^T A) = \det(\sum_{i,j=1}^N A_{ji}A_{ik})$, έχουμε τελικά ότι:

$$\Delta_N^2(\lambda) = \frac{1}{(\prod_{j=0}^{N-1} a_j)^2} \det\left(\sum_{j=1}^N \Pi_{j-1}(\lambda_i)\Pi_{j-1}(\lambda_k)\right)$$

και έτσι, με αυτόν τον τρόπο έχουμε καλύψει τον συγκεκριμένο όρο του ολοκληρώματος. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τον εκθετικό όρο. Μπορούμε, αρχικά, να γράψουμε ότι:

$$\prod_{j<k} (\lambda_j - \lambda_k)^2 e^{-\sum_{i=1}^N V(\lambda_i)} = \frac{1}{\prod_{j=0}^{N-1} a_j^2} \det\left(\sum_{j=1}^N \Pi_{j-1}(\lambda_i)\Pi_{j-1}(\lambda_k)\right) e^{-\sum_{i=1}^N V(\lambda_i)}$$

$$= \frac{1}{(\prod_{j=0}^{N-1} a_j)^2} \det\left(\sum_{j=1}^N \Phi_j(\lambda_i)\Phi_j(\lambda_k)\right), \quad \text{όπου } \Phi_i(x) = e^{-\frac{1}{2}V(x)}\Pi_{i-1}(x).$$

Μπορούμε, λοιπόν, να γράψουμε την σ.π.π. ως εξής:

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z_N (\prod_{j=0}^{N-1} a_j)^2} \det(K_N(\lambda_i, \lambda_k)),$$

$$\text{όπου } K_n(x, x') = e^{-\frac{1}{2}(V(x)+V(x'))} \sum_{j=0}^{N-1} \Pi_j(x)\Pi_j(x').$$

Σε αυτό το σημείο φαίνεται ότι μπορούμε να κάνουμε κατάλληλη επιλογή στα πολυώνυμα έτσι ώστε να απλοποιηθούν σημαντικά οι υπολογισμοί μας. Ο βέλτιστος τρόπος για να γίνει αυτή η επιλογή είναι να ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση ορθογωνιότητας:

$$\int dx e^{-V(x)} \Pi_i(x)\Pi_j(x) = \delta_{ij}$$

και αυτό συμβαίνει για

$$\Pi_j(x) = \frac{H_j\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\sqrt{2\pi}2^j j!}}.$$

Έτσι, με αυτήν την επιλογή παίρνουμε τελικά την εξής ενδιαφέρουσα συνθήκη:

$$\int dy K_N(x, y) K_N(y, z) = K_N(x, z)$$

και αυτή η ιδιότητα επηρεάζει σημαντικά τον υπολογισμό της ορίζουσας του K_N . Πράγματι, θεωρούμε τον 3×3 πίνακα:

$$J_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F(x_1, x_1) & F(x_1, x_2) & F(x_1, x_3) \\ F(x_2, x_1) & F(x_2, x_2) & F(x_2, x_3) \\ F(x_3, x_1) & F(x_3, x_2) & F(x_3, x_3) \end{pmatrix},$$

έτσι ώστε να ισχύει $\int F(x, y)F(y, z)dy = F(x, z)$. Τότε:

$$\begin{aligned} \int \det J_3(\vec{x}) dx_3 &= \int dx_3 [F(x_1, x_1)[F(x_2, x_2)F(x_3, x_3) - F(x_2, x_3)F(x_3, x_2)] - \\ &\quad - F(x_1, x_2)[F(x_2, x_1)F(x_3, x_3) - F(x_3, x_1)F(x_2, x_3)] + \\ &\quad + F(x_1, x_3)[F(x_2, x_1)F(x_3, x_2) - F(x_3, x_1)F(x_2, x_2)]] \\ &= F(x_1, x_1)F(x_2, x_2) \int (F(x_3, x_3)) dx_3 - F(x_1, x_1)F(x_2, x_2) - \\ &\quad - F(x_1, x_2)F(x_2, x_1) \int F(x_3, x_3) dx_3 + \\ &\quad + F(x_1, x_2)F(x_2, x_1) + F(x_2, x_1)F(x_1, x_2) - F(x_2, x_2)F(x_1, x_1). \end{aligned}$$

Θέτοντας $q = \int F(x_3, x_3) dx_3$ παίρνουμε ότι:

$$\int \det J_3(\vec{x}) dx_3 = [F(x_1, x_1)F(x_2, x_2) - F(x_1, x_2)F(x_2, x_1)](q - 2).$$

Όμως, αν $J_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F(x_1, x_1) & F(x_1, x_2) \\ F(x_2, x_1) & F(x_2, x_2) \end{pmatrix}$ τότε:

$$\det J_2(\vec{x}) = F(x_1, x_1)F(x_2, x_2) - F(x_1, x_2)F(x_2, x_1)$$

και άρα:

$$\int \det J_3(\vec{x}) dx_3 = \det J_2(\vec{x})(q - 2).$$

Γενικότερα, μπορεί να δειχθεί με παρόμοιο τρόπο ότι ισχύει για οποιοδήποτε $N \in \mathbb{N}$:

$$\int \det J_N(\vec{x}) dx_N = [q - (N - 1)] \det J_{N-1}(\vec{x}).$$

Άρα, βλέπουμε ότι επιλέγοντας τα πολυώνυμα $\Pi_i(x)$ όπως παραπάνω, ικανοποιείται η συνθήκη $\int dy K_N(x, y) K_N(y, z) = K_N(x, z)$ όπου $K_N(x, x') = e^{-\frac{1}{2}(V(x)+V(x'))} \sum_{j=0}^{N-1} \Pi_j(x) \Pi_j(x')$ που με τη σειρά της μας οδηγεί στην επίσης ενδιαφέρουσα συνθήκη

$$\int \det J_N(\vec{x}) dx_N = [q - (N - 1)] \det J_{N-1}(\vec{x}).$$

Επειδή, όμως, ισχύει ότι $q = \int dx K_N(x, x) = N$ συνεπάγεται ότι:

$$\int \det(K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{i,j=1,\dots,N} d\lambda_N = \det(K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{i,j=1,\dots,N-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \dots \int \det(K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{i,j=1,\dots,N} d\lambda_{k+1} \dots d\lambda_N = (N - k)! \det(K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{i,j=1,\dots,k} \cdot}$$

Ειδικότερα, για $k = 0$ παίρνουμε:

$$\int \dots \int \det(K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{i,j=1,\dots,N} d\lambda_1 \dots d\lambda_N = N!.$$

Επειδή, τώρα, η $P(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, θα πρέπει:

$$\int d\lambda_1 \dots d\lambda_N P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = 1 \Leftrightarrow \int \frac{1}{Z_N (\prod_{j=0}^{N-1} a_j)^2} \det(K_N(\lambda_i, \lambda_j)) =$$

$$= \frac{1}{Z_N (\prod_{j=0}^{N-1} a_j)^2} N! = 1 \Rightarrow \boxed{Z_N = \frac{N!}{(\prod_{j=0}^{N-1} a_j)^2}}.$$

Γνωρίζοντας, τώρα, την έκφραση για την σταθερά κανονικοποίησης (συνάρτηση επιμερισμού) μπορούμε να υπολογίσουμε λ.χ. την $\rho(\lambda_1)$, αφού είδαμε ότι:

$$\rho(\lambda_1) = \frac{1}{Z_N} \int d\lambda_2 \dots d\lambda_N e^{-\sum V(\lambda_i) \prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^2}$$

και αυτό τελικά ισούται με:

$$\rho_N(\lambda) = \frac{1}{N} K_N(\lambda, \lambda)$$

Λόγω της μορφής του K_N και των πολυωνύμων $\Pi(x_i)$ όπως τα περιγράψαμε παραπάνω, προκύπτει ότι:

$$\boxed{\rho_N(\lambda) = \frac{1}{N\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{H_j^2(\frac{\lambda}{\sqrt{2}})}{2^j j!}}.$$

3.6 Η φόρμουλα Edwards-Jones

Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε να κάνουμε μια προσπάθεια να συσχετίσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των στοιχείων του πίνακα, είτε αυτός ανήκει στην κατηγορία GOE ή στην GUE, με την συνάρτηση $\rho_N(\lambda)$. Θέλουμε, δηλαδή, με κάποιον τρόπο να μεταβούμε από την πυκνότητα πιθανότητας $P(x_{11}, \dots, x_{NN})$ που έχει N^2 στοιχεία στην από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των ιδιοτιμών $P(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, δουλεύοντας πλέον με N στοιχεία και έχοντας μειώσει τελικά τα στοιχεία που δουλεύουμε, ώστε να καταλήξουμε ύστερα στην $\rho_N(\lambda)$. Η δυσκολία που παρουσιάζεται κατά αυτήν την μετάβαση είναι ότι η ολοκλήρωση ως προς τις ιδιοτιμές δεν υπολογίζεται πάντα. Αυτό, λοιπόν, το πρόβλημα θα ξε-

περαστεί με την φόρμουλα Edwards-Jones.

Η μέθοδος E-J: Θα αποδείξουμε ότι

$$\rho_N(\lambda) = -\frac{2}{\pi N} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \frac{d}{d\lambda} \langle \log Z(\lambda_\varepsilon) \rangle,$$

$$\text{όπου } Z(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} dy \exp\{-\frac{1}{2}y^T(\lambda_i \mathbb{1} - x)y\}, \quad \lambda_\varepsilon = \lambda - i\varepsilon, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$\langle (\cdot) \rangle = \int (\cdot) dx_{11} \dots dx_{NN} P(x_{11}, \dots, x_{NN})(\dots).$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι $\rho_N(\lambda) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \right\rangle$ και γνωρίζουμε από την 3η ιδιότητα της συναρτήσεων Green ότι $\frac{1}{\lambda \pm i\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} Pr\left(\frac{1}{\lambda}\right) \mp i\pi\delta(x)$. Μπορούμε, επομένως, να αντικαταστήσουμε την παραπάνω μέση τιμή με:

$$\rho_N(\lambda) = \frac{1}{\pi N} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Im} \left(\left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda - i\varepsilon - \lambda_i} \right\rangle \right) = -\frac{1}{\pi N} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Im} \left(\left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda + i\varepsilon - \lambda_i} \right\rangle \right).$$

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να υπενθυμίσουμε ότι οι κλασικές ιδιότητες που γνωρίζουμε για τον λογάριθμο δεν ισχύουν αυτούσιες και στον μιγαδικό λογάριθμο. Έτσι, για παράδειγμα, δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι το $\log e^z$ θα ισούται με z , όπως επίσης και το ότι $\log(z_1 z_2)$ θα είναι $\log(z_1) + \log(z_2)$. Εντούτοις, ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda + i\varepsilon - \lambda_i} = -\sum_{i=1}^N \frac{d}{d\lambda} \log(\lambda_i + i\varepsilon - \lambda).$$

Επιπλέον:

$$Z(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} dy \exp\{-\frac{i}{2}y^T(\lambda_\varepsilon \mathbb{1} - x)y\} = (2\pi)^{Ni} \exp\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log(\lambda_i + i\varepsilon - \lambda) + iN \frac{\pi}{4}\}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \log(\lambda_i + i\varepsilon - \lambda) = -2\log(Z(\lambda)) +$$

+όροι που εξαφανίζονται με την παραγωγή ως προς λ .

Παίρνουμε, λοιπόν, ότι:

$$\rho_N(\lambda) = -\frac{2}{\pi N} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \left(\frac{d}{d\lambda} \langle \log(Z(\lambda)) \rangle \right).$$

Τώρα, είναι

$$\langle \log(Z(\lambda)) \rangle = \int dx_{11} \dots dx_{NN} P(x_{11}, \dots, x_{NN}) \log \left(\int_{\mathbb{R}^N} dy \exp[-\frac{i}{2} y^T (\lambda_\varepsilon \mathbb{1} - x) y] \right).$$

Το πρόβλημά μας είναι να παραγωγίσουμε πρώτα τα x και ύστερα τα y , και θα δούμε δυο στρατηγικές για αυτό.

Πρώτη: $\int dx_{11} \dots dx_{NN} P(x_{11}, \dots, x_{NN}) \log(Z(\lambda))$ όπου θέτουμε $Z(\lambda) = \int dy(\dots)$, στο ολοκλήρωμα dy έχουμε ένα πολλαπλό ολοκλήρωμα ενός εκθετικού και ολοκληρώνουμε για όλους τους βαθμούς ελευθερίας. Αυτό που μας εμπνέει να ακολουθήσουμε αυτή την στρατηγική είναι η ομοιότητα αυτού που θέσαμε με μια συνάρτηση επιμερισμού και ως εκ τούτου τείνουμε να την ερμηνεύσουμε ως τέτοια, με τρόπο αντίστοιχο όπως περιγράψαμε νωρίτερα.

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε την ομοιότητα με την Gibbs- Boltzmann κατανομή για τη θέση n βαθμών ελευθερίας (y_1, \dots, y_N) ενός θερμοδυναμικού συστήματος

$$p(y_1, \dots, y_N) = \frac{1}{Z(\lambda)} \exp\{-H(y, X, \lambda)\}.$$

όπου H είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος συναρτήσει των βαθμών ελευθερίας y_i , του πίνακα X και των ιδιοτιμών λ , δηλαδή είναι προκλητικό να ερμηνεύσουμε την εκθετική συνάρτηση στο ολοκλήρωμα ως ένα ολοκλήρωμα όλων των n θέσεων όλων των βαθμών ελευθερίας ενός

αντικειμένου που είναι κατανομημένο με βάση αυτό το εκθετικό και ύστερα η ποσότητα $\log(Z(\lambda))$ θα εκφράζει την ελεύθερη ενέργεια του συστήματος. Συνεπώς, η ποσότητα $\int dx_{11} \dots dx_{NN} P(x_{11}, \dots, x_{NN}) \log(Z(\lambda))$ εκφράζει την μέση ελεύθερη ενέργεια.

Επομένως, ο ζητούμενος υπολογισμός αναλύεται στο να βρούμε αρχικά την ελεύθερη ενέργεια και έπειτα να υπολογίσουμε τη μέση της τιμή. Αυτή η μέθοδος είναι κάπως πολύπλοκη και για αυτό αναφέρεται σε αυτή την εργασία ως μια μικρή εφαρμογή για το πώς τελικά μπορούν οι τυχαίοι πίνακες να μελετηθούν και σαν ένα θερμοδυναμικό σύστημα και με αυτόν τον τρόπο να ξεπεράσουμε κάποια εμπόδια, καταλήγοντας στο ότι ενώ μπορεί αυτή η προσέγγιση να μοιάζει πιο πολύπλοκη, καταλήγει να έχει την ακριβώς αντίθετη επίδραση στο πρόβλημά μας διευκολύνοντάς μας.

Ας δούμε, τώρα, μια άλλη στρατηγική αντί της προηγούμενης. Ενώ με την προηγούμενη στρατηγική ο υπολογισμός μας γινόταν σε δύο χρόνους (πρώτα εύρεση της "ελεύθερης ενέργειας" και μετά του μέσου της), εδώ θα κάνουμε τον υπολογισμό σε έναν χρόνο, έχοντας περιγράψει την από κοινού των μεταβλητών (X, y) . Ορίζουμε την ποσότητα $Z^{ann}(\lambda) = \int dX dy(\dots)$. Αυτό που θα κάνουμε είναι το εξής: αντί να ασχοληθούμε με το ολοκλήρωμα του λογαρίθμου, υπολογίζουμε πρώτα το αντίστοιχο ολοκλήρωμα με τα λ_y, λ_x χωρίς τον λογάριθμο και αφού το κάνουμε αυτό θα υπολογίσουμε την σχετική έκφραση μαζί με τον λογάριθμο εν τέλει. Παρ' ότι δεν μοιάζει μαθηματικά σωστό, θα δούμε ότι παίρνουμε το σωστό αποτέλεσμα με αυτόν τον τρόπο. Αρχικά θα εστιάσουμε στην περίπτωση ενός GOE πίνακα:

$$P(x_{11}, \dots, x_{NN}) = \prod_{i=1}^N \frac{e^{-\frac{N}{2}x_{ii}^2}}{\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} \prod_{i < j} \frac{e^{-Nx_{ij}^2}}{\sqrt{\frac{\pi}{N}}}$$

$$\Rightarrow Z^{ann}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} dy \int \prod_{i \leq j} dx_{ij} P(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}y^T(\lambda_\varepsilon \mathbb{1} - x)y\right\}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} dy e^{-\frac{i}{2}\lambda_\varepsilon \sum_{i=1}^N y_i^2} \left\langle e^{\frac{i}{2} \sum_{k=1}^N x_{kk} y_k^2} \right\rangle \left\langle e^{\frac{i}{2} \sum_{k<j} x_{kj} y_k y_j} \right\rangle$$

Έχουμε, τώρα, ότι:

$$\left\langle e^{\frac{i}{2} \sum_{k=1}^N x_{kk} y_k^2} \right\rangle = \left\langle \prod_{k=1}^N e^{\frac{i}{2} x_{kk} y_k^2} \right\rangle \stackrel{\text{Taylor}}{=} \prod_{k=1}^N \left\langle 1 + \frac{i x_{kk} y_k^2}{2} + \left(\frac{i x_{kk} y_k^2}{2}\right)^2 + \dots \right\rangle.$$

Επίσης, εφόσον $\langle x_{ij} \rangle = 0$, $\langle x_{ij}^2 \rangle = \frac{1}{N(2-\delta_{ij})}$:

$$\prod_{i=1}^N \left\langle 1 + \frac{i x_{kk} y_k^2}{2} - \frac{x_{kk}^2 y_k^4}{8} + \dots \right\rangle \simeq \prod_{k=1}^N e^{-\frac{y_k^4}{2N}}.$$

Ομοίως για τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου παίρνουμε:

$$\left\langle e^{i \sum_{k<j} x_{kj} y_k y_j} \right\rangle = \prod_{k<j} e^{-\frac{1}{4N} y_k^2 y_j^2}.$$

Έτσι, καταφέραμε τελικά να εκφράσουμε τα πάντα συναρτήσει των y , και άρα παίρνουμε:

$$Z^{\text{ann}}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} dy e^{-\frac{i}{2}\lambda_\varepsilon \sum_{k=1}^N y_k^2} e^{-\frac{1}{8N} (\sum_{k=1}^N y_k^2)^2}.$$

Θα εφαρμόσουμε, σε αυτό το σημείο, την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp\{-aq^2 + i\gamma q\} = e^{-\frac{\gamma^2}{4a}}$ για $\gamma = \sum_{k=1}^N y_k^2$ και $a = 2N$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} dy \exp\left\{-\frac{i}{2}\lambda_\varepsilon \sum_{k=1}^N y_k^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{8N} \left(\sum_{k=1}^N y_k^2\right)^2\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp\{-2Nq^2\} \int dy \exp\left[-\frac{i}{2}\lambda_\varepsilon \sum_{k=1}^N y_k^2 + iq \sum_{k=1}^N y_k^2\right] \end{aligned}$$

και τότε:

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \exp\left[-\frac{i}{2}\lambda_\varepsilon \sum_{k=1}^N y_k^2 + iq \sum_{k=1}^N y_k^2\right] = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp\left\{-\frac{i}{2}\lambda_\varepsilon y^2 + iqy^2\right\}\right)^N = e^{N \log(\dots)},$$

οπότε:

$$Z^{ann}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp\left\{-N \underbrace{\left(2q^2 - \frac{1}{2} \log\left(\frac{2\pi}{\varepsilon + i(\lambda - 2q)}\right)\right)}_{=: \Phi_\lambda(q)}\right\}.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα μεγιστοποιείται όταν η $\Phi_\lambda(q)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της, έστω $\Phi_\lambda(q^*)$.

Είδαμε ότι από την E-J μέθοδο:

$$\rho_N(\lambda) = -\frac{2}{\pi N} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \left[\frac{d}{d\lambda} \log(Z^{ann}(\lambda)) \right],$$

που γνωρίζουμε ότι για μεγάλο N η ποσότητα $\log(Z^{ann}(\lambda))$ θα προσεγγίζεται από την $e^{-N\Phi_\lambda(q^*)}$ άρα:

$$\rho_N(\lambda) = -\frac{2}{\pi N} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \left[\frac{d}{d\lambda} \log(\exp\{-N\Phi_\lambda(q^*)\}) \right] = \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \left[\frac{d}{d\lambda} \Phi_\lambda(q^*) \right].$$

Ισχύει, τώρα, ότι:

$$\frac{d}{d\lambda} \Phi_\lambda(q^*) = (q^*)' \frac{d}{dq} \Phi_\lambda(q^*) + \frac{d}{d\lambda} [\Phi_\lambda(q)]_{q=q^*},$$

$$\text{όπου } \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{2} \log(\varepsilon + i(\lambda - 2q)) \right]_{q=q^*} = \frac{i}{2[\varepsilon + i(\lambda - 2q)]} \Big|_{q=q^*}.$$

Άρα:

$$\rho_{N \rightarrow \infty}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \left(\frac{1}{\lambda_\varepsilon - \mp \sqrt{\lambda_\varepsilon^2 - 2}} \right), \quad \mu\epsilon \lambda_\varepsilon = \lambda - i\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_{N \rightarrow \infty}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im}(\lambda_\varepsilon \pm \sqrt{\lambda_\varepsilon^2 - 2})$$

και από την ιδιότητα $\sqrt{a+ib} = p+iq$, $p = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}$, $q = \frac{\sin b}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}$ έχουμε τελικά ότι:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\lambda_\varepsilon \pm \sqrt{\lambda_\varepsilon^2 - 2}] = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{2 - \lambda^2} & \text{αν } |\lambda| < \sqrt{2} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

οπότε για να δούμε αν το αποτέλεσμα είναι σωστό, μπορούμε να το κάνουμε γνωρίζοντας την κατανομή σωματιδίου Winger.

Η κατανομή σωματιδίου Winger πήρε το όνομά της από τον φυσικό Eugene Winger, και είναι η κατανομή που στο $[-R, R]$ είναι ένα ημικύκλιο στο 0 και εκτός του διαστήματος αυτού η πυκνότητα είναι μηδέν, δηλαδή:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2} & \text{αν } |x| < R \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

και είναι η οριακή κατανομή των ιδιοτιμών συμμετρικών τυχαίων πινάκων, όταν το μέγεθος του πίνακα είναι $N \gg 1$. Παρότι, λοιπόν, η μέθοδος που ακολουθήσαμε φαινόταν μαθηματικά λανθασμένη, κάνοντας τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int \dots dx dy$ χωρίς τον λογάριθμο και εισάγοντάς τον μόνο στο τέλος, καταλήξαμε στο ότι το $\rho_{N \rightarrow \infty}(\lambda)$ είναι της μορφής του σωματιδίου Winger, οπότε πήραμε το σωστό αποτέλεσμα. Έτσι, βλέπουμε ότι με την μέθοδο E-J μπορέσαμε να ξεπεράσουμε το πρόβλημα της μετάβασης $P(x_{11}, \dots, x_{NN}) \rightarrow P(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ και κατευθείαν γνωρίζοντας την $P(x_{11}, \dots, x_{NN})$ να υπολογίσουμε την $\rho_N(\lambda)$.

Κεφάλαιο 4

Τυχαίοι πίνακες στην κβαντομηχανική

4.1 Τυχαίοι πίνακες και κβαντομηχανική

Στους τυχαίους ερμιτιανούς πίνακες η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των στοιχείων του πίνακα δίνεται από την ισότητα

$$P(x_1, \dots, x_N) dx = c_N e^{-\sum_{i=1}^N \beta V(x_i)} \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta dx,$$

το οποίο με κατάλληλες πράξεις γράφεται ως:

$$P(x_1, \dots, x_N) = c_N \prod_{i=1}^N W^{\frac{1}{\beta}}(\lambda) \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta,$$

όπου W είναι μια συνάρτηση βάρους για τα ορθογώνια πολυώνυμα για την οποία ισχύει ότι: αν έχουμε πολυώνυμα με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} είναι $W(x) = e^{-x^2}$, αν έχουν το $[0, \infty)$ είναι $W(x) = x^\beta e^{-x^2}$ και είναι τα πολυώνυμα Laguerre, ενώ για πεδίο ορισμού το $(-1, 1)$ έχουν συνάρτηση βάρους $W(x) = (1+x)^a (1-x)^b$ και είναι τα πολυώνυμα Jacobi.

Η σ.π.π. των (x_1, \dots, x_N) μπορεί να γραφεί και ως:

$$P(x_1, \dots, x_N) dx = c_N e^{-\beta W(x)} dx, \text{ όπου } W(x) = -\sum_{i=1}^N V(x_i) - \sum_{i < j} \ln(|x_i - x_j|)$$

και θα αποδείξουμε ότι αποτελεί λύση της εξίσωσης Fokker-Planck.

4.2 Η εξίσωση Fokker-Planck

Στην στατιστική μηχανική, η εξίσωση Fokker-Planck είναι μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει την χρονική εξέλιξη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της ταχύτητας σωματιδίων που τους ασκείται τριβή από τον αέρα και τυχαίες δυνάμεις, που στην ουσία εκτελούν μια κίνηση Brown (= η τυχαία κίνηση που εκτελούν τα σωματίδια εντός του αέρα ή μέσα σε κάποιο υγρό). Εμείς θα αποδείξουμε ότι η πυκνότητα πιθανότητας των στοιχείων ενός ερμιτιανού τυχαίου πίνακα αποτελεί λύση -και μάλιστα σταθερή- της εξίσωσης αυτής. Έχοντας, λοιπόν, την $P(x_1, \dots, x_N)dx = c_N e^{-\beta W(x)} dx$ και παραγωγίζοντας ως προς x_j παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} P(x_1, \dots, x_N) = -\beta P(x_1, \dots, x_N) \frac{\partial W}{\partial x_j}.$$

Θέτοντας $U(x_j) = -\frac{\partial W}{\partial x_j}$ προσθέτοντας πάνω στα j στο τελευταίο έχουμε:

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\partial P}{\partial x_j} - \beta [U(x_j)P] \right\} = 0.$$

Παραγωγίζοντας την προσθετέα έκφραση ξανά ως προς x_j παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial P}{\partial x_j} - \beta [U(x_j)P] \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 P}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} [U(x_j)P] \right] &= 0. \end{aligned}$$

Η εξίσωση Fokker-Planck είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 P}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (U(x_j)P)},$$

οπότε βλέπουμε ότι πράγματι η σ.π.π. που γράψαμε παραπάνω αποτελεί λύση της εξίσωσης αυτής και μάλιστα σταθερή.

4.3 Η εξίσωση Hamilton-Jacobi

Στη φυσική, η εξίσωση Hamilton-Jacobi είναι ένας εναλλακτικός τρόπος μοντελοποίησης συστημάτων. Επίσης, είναι ο μόνος τρόπος μοντελοποίησης του συστήματος στον οποίο μπορούμε να το αναπαραστήσουμε ως κύμα.

Θεωρούμε μια συνάρτηση S ανάλογη της χαρακτηριστικής εξίσωσης που σχετίζεται με την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x, y, z)$ και έχουμε

$$\Psi(x, y, z) = e^{\frac{iS}{\hbar}}$$

και θα την εισάγουμε στην εξίσωση Schrodinger. Η εξίσωση Schrodinger είναι μια διαφορική εξίσωση που προτάθηκε από τον φυσικό Erwin Schrodinger και περιγράφει την χρονική και χωρική εξάρτηση κβαντομηχανικών συστημάτων και παίζει σημαντικό ρόλο στην κβαντομηχανική θεωρία. Η εν λόγω εξίσωση είναι η ακόλουθη:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, y, z) + V(x, y, z) \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z).$$

Αντικαθιστώντας την Ψ παίρνουμε:

$$(\nabla S)^2 - i\hbar \nabla \cdot (\nabla S) = 2m(E - V(x, y, z)) (*).$$

Στην κβαντομηχανική, η κβαντική συνάρτηση της ορμής ορίζεται ως $\vec{p} = \vec{\nabla} S$, οπότε η (*) μπορεί να γραφεί ως:

$$|\vec{p}|^2 - i\hbar \nabla \cdot \vec{p} = 2m(E - V(x, y, z)),$$

όπου μπορούμε να γράψουμε $\vec{p} = -i\hbar \nabla (\ln \Psi(x, y, z))$. Ειδικότερα, στην μια διάσταση είναι $p = -i\hbar \frac{d}{dx} \ln(\Psi(x))$ και $p^2 - i\hbar \frac{dp}{dx} = 2m(E - V(x))$ που είναι μια εξίσωση τύπου Riccati (η γενική μορφή μιας τέτοιας διαφορικής εξίσωσης είναι $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^2(x) + c(x)$).

Παίρνοντας την (*) στην μια διάσταση έχουμε:

$$i \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - i \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - 2m(E - V(x)),$$

ενώ παραγωγίζοντας μετά ως προς x παίρνουμε την:

$$i S_{xt} = -i \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial x}$$

και επειδή $p = \frac{\partial S}{\partial x}$ παίρνουμε:

$$i \frac{\partial}{\partial t} p = -i \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2p \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x},$$

που αυτή η τελευταία εξίσωση είναι η λεγόμενη εξίσωση Burger-Hopf, μια εξίσωση που γενικότερα εμφανίζεται σε πολλούς τομείς των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως στην μηχανική των ρευστών, στην ροή της κίνησης κλπ.

Τώρα θα συσχετίσουμε τα παραπάνω με τους τυχαίους πίνακες. Έχουμε δείξει ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών ενός τυχαίου πίνακα X είναι μια σταθερή λύση της εξίσωσης Fokker-Planck, δηλ. ικανοποιεί:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 P}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (U(x_j) P) \right), \text{ όπου } U(x_j) = -\frac{dW}{dx_j} = \sum_{1 \leq j < k} \frac{1}{x_k - x_j} + \frac{dV(x_j)}{dx_j}.$$

Θεωρούμε γνωστό ότι $P(x_j, t) = N(t) e^{-\beta S(x_j, t) + \frac{\beta}{2} W(x_j)}$, οπότε:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{N'}{N} - \beta \frac{\partial S}{\partial t} \right) P,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_j} = -\beta P \frac{\partial S}{\partial x_j} + \frac{\beta}{2} P \frac{\partial W}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_j^2} = -\beta P \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2} + \frac{\beta}{2} P \frac{\partial^2 W}{\partial x_j^2} + \beta^2 P \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\beta^2}{4} P \left(\frac{\partial W}{\partial x_j} \right)^2 - \beta^2 P \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x_j} \right).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Fokker-Planck παίρνουμε ότι:

$$\left(\frac{N'}{N} - \beta \frac{\partial S}{\partial t}\right) P = \sum_{j=1}^N \left(-P \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} P \frac{\partial^2 W}{\partial x_j^2} + \beta P \left(\frac{\partial S}{\partial x_j}\right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\beta}{4} P \left(\frac{\partial W}{\partial x_j}\right)^2 - \beta P \left(\frac{\partial S}{\partial x_j}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial x_j}\right) + -\beta \frac{\partial U}{\partial x_j} P + \beta P \frac{\partial S}{\partial x_j} U - \frac{\beta}{2} P U \frac{\partial W}{\partial x_j} \right).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $U = -\frac{\partial W}{\partial x_j}$ και για N σταθερό, καταλήγουμε στο ότι:

$$\frac{\partial S}{\partial t} P = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_j^2} - \beta \left(\frac{\partial S}{\partial x_j}\right)^2 - \frac{\beta}{4} \left(\frac{\partial W}{\partial x_j}\right)^2 \right) P,$$

η οποία, αν λάβουμε υπόψη ότι $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, βλέπουμε ότι συμπίπτει με την εξίσωση Burger-Hopf, οπότε πετύχαμε την σύνδεση των τυχαίων πινάκων με αυτή την εξίσωση.

Κεφάλαιο 5

Τυχαίοι πίνακες και Matlab

5.1 Νόμος ημικυκλίου

Σε αυτό το σημείο θα δείξουμε με την χρήση του Matlab ότι η κατανομή των ιδιοτιμών ενός πίνακα με $n \gg 1$ γραφικά θυμίζει ένα ημίκυκλιο Winger, με άλλα λόγια θα φτιάξουμε με χρήση του Matlab έναν $n \times n$ πίνακα, θα τον κάνουμε συμμετρικό τυχαίο πίνακα, θα βρούμε τις ιδιοτιμές και αφού τις κανονικοποιήσουμε θα κάνουμε το σχετικό διάγραμμα. Ακολουθεί ο σχετικός κώδικας στο Matlab:

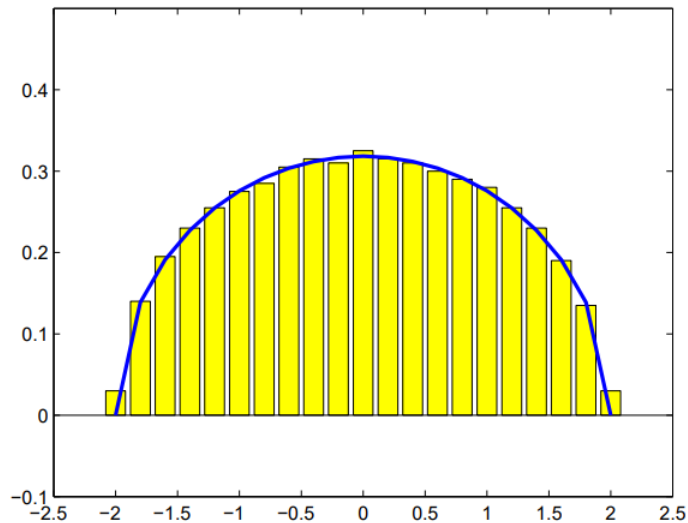
```
%Experiment:Gaussian Random Symmetric Eigenvalues
%Plot:Histogram of the eigenvalues
%Theory: Semicircle as n->infinity
%% Parameters
n = 1000; %matrix size
t = 1; %trials
v = [ ] ; %eigenvalue samples
dx = . 2 ; %bin size
%% Experiment
for i = 1: t ,
a=randn ( n ) ; % random nxn matrix
s = ( a+a ' ) / 2 ; % symmetrized matrix
v = [ v ; eig ( s ) ] ; %eigenvalues
end
```

```

v=v / sqrt ( n / 2 ) ; % normalized eigenvalues
%% Plot
[ count , x ]= hist ( v , -2: dx : 2 ) ;
cla reset
bar( x , count / ( t *n*dx ) , ' y ' ) ;
hold on ;
%% Theory
p l o t ( x , s q r t ( 4-x . ^ 2 ) / ( 2 * pi ) ,

```

Έτσι παίρνουμε το εξής γράφημα:



απ'το επιβεβαιώνεται η ισχύς του νόμου του ημικυκλίου. Στην ουσία, αυτό το αποτέλεσμα μας αποτελεί κάτι σαν το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για συμμετρικούς τυχαίους πίνακες απείρως μεγάλης διάστασης.

Αν πάρουμε τον μέσο ενός μεγάλου αριθμού πινάκων, με ανεξάρτητα στοιχεία που ακολουθούν την ίδια κατανομή, το κλασικό οριακό θεώρημα θα μας έλεγε ότι η κατανομή του μέσου αυτού είναι Gaussian.

5.2 Νόμοι Marchenko-Pastur και παρατηρήσεις:

Έστω X_n ακολουθία τυχαίων πινάκων $p \times n$ με:

- Τις μεταβλητές $X_{ij}, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n$ να ακολουθούν την ίδια κατανομή και να είναι ανεξάρτητες ,

- $\mathbb{E}[X_{ij}] = 0$ και $\mathbb{E}[X_{ij}^2] = 1$,

- $p = p(n)$.

Ορίζουμε $Y_n = \frac{1}{n}X_nX_n^T$ με ιδιοτιμές $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$ και το μέτρο πιθανότητας της εμπειρικής κατανομής το οποίο θα είναι $\mu_n = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i}$.

Διατύπωση νόμου Marchenko-Pastur: Έστω ο πίνακας Y_n και το μέτρο πιθανότητας μ_n όπως παραπάνω και έστω ότι $\frac{p}{n} \rightarrow y \in [0, 1]$, τότε θα έχουμε ότι $\mu_n \rightarrow \mu$ όπου το μ είναι ντετερμινιστικό και η πυκνότητά του δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{2\pi xy} \sqrt{(b-x)(x-a)},$$

όπου $a = a(y) = (1 - \sqrt{y})^2$ και $b = b(y) = (1 + \sqrt{y})^2$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου $y = 1$, οπότε $a = 0$ και $b = 4$, οπότε $\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4-x}{x}}$. Παιρνάμε τον παρακάτω κώδικα στο Matlab:

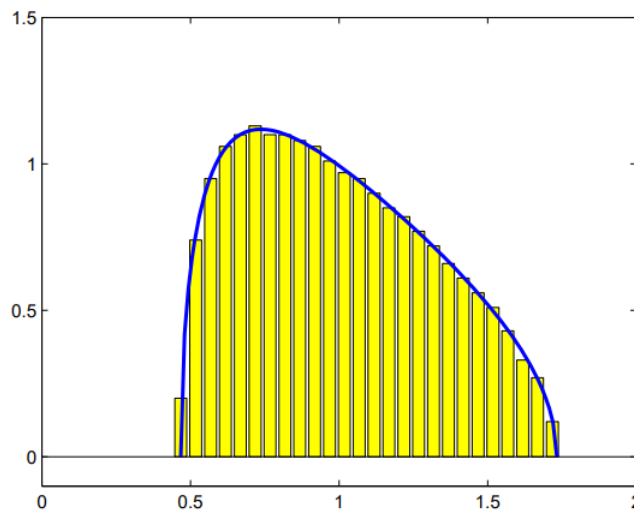
```
%Experiment:Gaussian Random
%Plot:Histogram of the eigenvalues of X'X/m
%Theory: Marcenko-Pastur as n->infinity
%% Parameters
t = 1; %trials
r = 0 . 1 ; %aspect ratio
n = 2 0 0 0; %matrix column size
m=round ( n / r ) ;
v = [ ] ; %eigenvalue samples
dx = . 0 5 ; %bin size
%% Experiment
for i = 1: t ,
```

```

X=randn (m, n ) ; % random mxn matrix
s =X'*X; %sym pos def matrix
v = [ v ; eig ( s ) ] ; % eigenvalues
end
v=v /m; % normalized eigenvalues
a =(1- sqrt ( r ) ) ^ 2 ; b = (1+ sqrt ( r ) ) ^ 2 ;
%% Plot
[ count , x ]= hist ( v , a : dx : b ) ;
cla reset
bar ( x , count / ( t *n*dx ) , ' y ' ) ;
hold on ;
%% Theory
x= linspace ( a , b ) ;
plot( x , sqrt( ( x-a ).*( b-x ) )./( 2* pi *x* r ),'
LineWidth '2,)
axis( [ 0 c e i l ( b ) -.1 1 . 5 ] ) ;

```

Έτσι παίρνουμε το γράφημα:



Σχήμα 5.1: Ιστόγραμμα 2000 ιδιοτιμών του πίνακα $XX^T/2000$

Κεφάλαιο 6

Τυχαίοι πίνακες στη βιολογία και περαιτέρω παραδείγματα

6.1 Εφαρμογές των τυχαίων πινάκων στη Βιολογία

Το εντυπωσιακό με τους τυχαίους πίνακες είναι ότι μπορούν να εφαρμοστούν σε πολλές επιστήμες. Ανάμεσα σε αυτές είναι και η επιστήμη της βιολογίας.

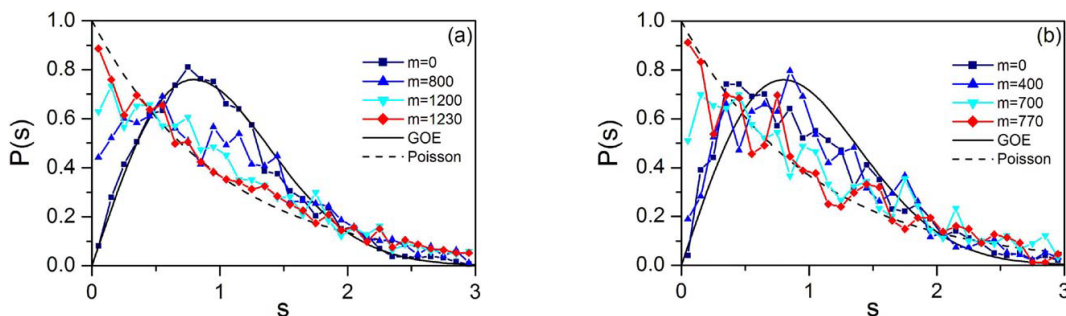
Το κύτταρο είναι ένα πολύπλοκο σύστημα που εμπεριέχει πολλά στοιχεία, π.χ. πρωτεΐνες, DNA, RNA και μικρά μόρια. Όλα αυτά λειτουργούν ως σύστημα και για να κατανοήσουμε το πώς λειτουργεί κατά αυτό τον τρόπο το κύτταρο μας βοηθάει σημαντικά για την κατανόησή του. Έρευνες για τα συστατικά στοιχεία των κυττάρων έχουν δείξει ότι τα κύτταρα διαθέτουν τοπολογικές ιδιότητες παρόμοιες με αυτές άλλων πολύπλοκων συστημάτων. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο, μιας και επειδή τα συστατικά στοιχεία των κυττάρων και η σχέση αλληλεπίδρασής τους είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα, είναι δύσκολο να μοντελοποιηθούν μαθηματικά, κυρίως όταν μιλάμε για βιολογικά δίκτυα. Ως βιολογικά δίκτυα εννοούμε τις διάφορες επιδράσεις μεταξύ των μορίων ενός κυττάρου που δημιουργούν δίκτυα, τα οποία καθορίζουν την συμπεριφορά των κυττάρων.

Θα εξηγήσουμε κυρίως θεωρητικά πώς οι τυχαίοι πίνακες μπορούν να περιγράψουν την δομή και την αλληλεπίδραση βιολογικών δικτύων. Οι τυχαίοι πίνακες έχουν υπάρξει σημαντικοί για την ανάλυση πολύπλοκων

συστημάτων. Μια σημαντική στατιστική ιδιότητά τους είναι η διακύμανση των ιδιοτιμών.

Με τα ακόλουθα γραφήματα μπορούμε να δούμε ότι η διακύμανση ενός δικτύου αλληλεπίδρασης πρωτεϊνών και ένα δίκτυο περιγραφής μεταβολισμού, περιγράφεται μέσω της στατιστικής για GOE πίνακες. Πιο συγκεκριμένα, δείξαμε στο πρώτο κεφάλαιο ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των spacings των ιδιοτιμών ενός τυχαίου πίνακα είναι η $P(s) = \frac{1}{2}\pi s e^{-\frac{\pi s^2}{4}}$ και ότι τα spacings τυχαίων παρατηρήσεων και ανεξαρτήτων δίνονται από τον τύπο $p(s) = \exp(-s)$.

Θα εφαρμόσουμε την θεωρία των τυχαίων πινάκων σε δυο βιολογικά δίκτυα, τα οποία θα τα περιγράψουμε ως τυχαίους πίνακες με δυο συμμετρικούς πίνακες. Τα στοιχεία του πίνακα είναι 1 αν υπάρχει αλληλεπίδραση των i και j στοιχείων και 0 αλλιώς. Ας βρούμε την NNSD (nearest neighbour spacing distribution) των δυο πινάκων, δηλαδή το πόσο απέχουν τα στοιχεία που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και κάνουμε τη γραφική τους παράσταση. Θα δούμε ότι ακολουθεί την γραφική παράσταση των spacings των ιδιοτιμών ενός τυχαίου πίνακα GOE.

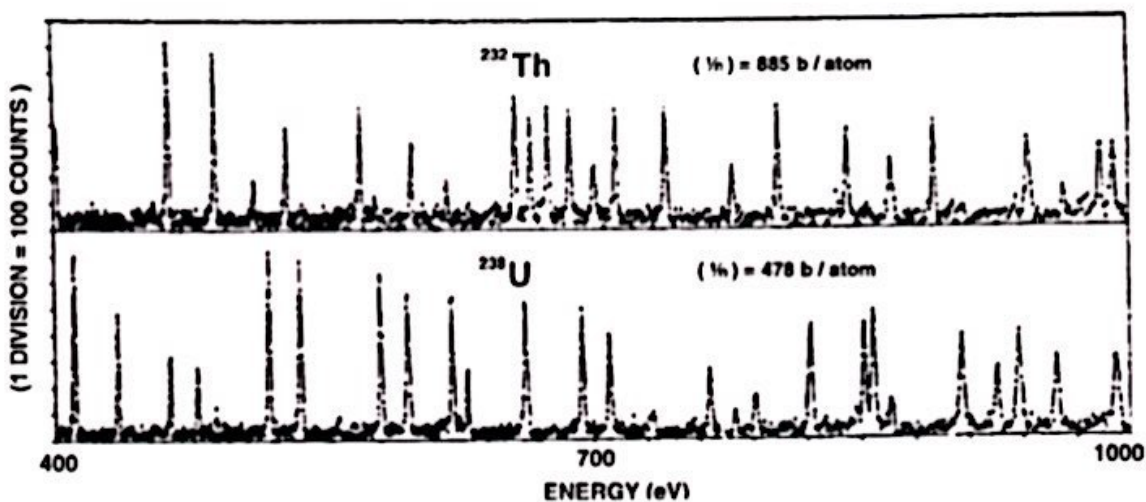


Βλέπουμε ότι όσο μειώνουμε τις σχέσεις αλληλεπίδρασης, η NNSD προσεγγίζει την $p(s) = e^{-s}$.

6.2 Μερικές ακόμη εφαρμογές

Όπως έχουμε ήδη δει, οι τυχαίοι πίνακες είναι πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν κάποια κατανομή. Μέχρι τώρα, έχουμε ασχοληθεί κυρίως με το να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα να θεωρούμε έναν πίνακα μεγάλης διάστασης με στοιχεία τυχαίες μεταβλητές, που ακολουθούν κάποια κατανομή, και να προσπαθήσουμε να βρούμε ποια είναι η κατανομή των ιδιοτιμών του.

Το πρόβλημα αυτό προέκυψε από την ανάγκη να κατανοήσουμε την στατιστική συμπεριφορά του αργού συντονισμού νετρονίων στην πυρηνική φυσική, στη συνέχεια όμως διαπιστώθηκε ότι η εύρεση της κατανομής των ιδιοτιμών βοηθάει στην κατανόηση φαινομένων και σε άλλους τομείς της φυσικής και των μαθηματικών λ.χ. περιγραφή χαστικών συστημάτων.



Το γράφημα παριστάνει το φαινόμενο του αργού συντονισμού νετρονίων δυο στοιχείων. Παρατηρούμε σε αυτό κορυφές με διάφορα πλάτοι και ύψοι κατανεμημένες σε διαφορετικές ενεργειακές περιοχές (πυρηνικής ενέργειας). Κατά την διέγερση των πυρήνων εκτοξεύονται νουκλεόνια από το σώμα του πυρήνα. Η εξήγηση αυτής της φυσικής κατάστασης

είναι δύσκολη, για αυτό το λόγο αντί να προσπαθήσει να μελετήσει κάποιος ξεχωριστά το κάθε επίπεδο ενέργειας, είναι ευκολότερο να μελετήσει τον μέσο όρο αυτών των κορυφών. Τα διάφορα ενεργειακά επίπεδα περιγράφονται από τις ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού τελεστή H , ο οποίος ονομάζεται Χαμιλτονιανή. Καθώς τα ενεργειακά επίπεδα είναι διάφορα και διάσπαρτα, περιμένουμε και απ' τις ιδιοτιμές να είναι έτσι.

Οι Χαμιλτονιανές είναι πίνακες πεπερασμένης διάστασης. Αν μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $H\Psi_i = E_i\Psi_i$, θα καταφέρουμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του Χαμιλτονιανού πίνακα και να εξήγουμε τις πληροφορίες που θα θέλαμε για τα διάφορα ενεργειακά επίπεδα. Κάτι τέτοιο, όμως, πρακτικά σχεδόν δεν γίνεται διότι όχι μόνο δεν γνωρίζουμε τον Χαμιλτονιανό πίνακα, αλλά ακόμη και να τον γνωρίζαμε η επίλυση αυτής της εξίσωσης είναι πολύ δύσκολη.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα θα μπορούσαμε να το ξεπεράσουμε, αν κάναμε κάποιες στατιστικές υποθέσεις για τον H , βασισμένοι σε υποθέσεις συμμετρίας. Έτσι, στη συνέχεια η Χαμιλτονιανή θα θεωρείται ένας πίνακας με στοιχεία τυχαίες μεταβλητές. Το νέο πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι να πάρουμε πληροφορίες για τις ιδιοτιμές, και έτσι θα μπορούμε να έχουμε μια επεξήγηση για την συνολική εικόνα των επιπέδων του κάθε πυρήνα.

Η πρώτη προσπάθεια συσχέτισης των ιδιοτιμών ενός τυχαίου πίνακα με την στατιστική συμπεριφορά των ενεργειακών επιπέδων έγινε από τον Winger. Το 1960, με την εξέλιξη των υπολογιστών μπόρεσε να γίνει διαγωνιοποίηση πολύπλοκων τυχαίων πινάκων και να επιβεβαιωθεί τελικά η ορθότητα του Winger. Παρατηρήθηκε ότι η πυκνότητα και η κατανομή των ιδιοτιμών πραγματικών συμμετρικών τυχαίων πινάκων είναι ανεξάρτητη από την κατανομή των στοιχείων. Πήραμε ήδη μια εικόνα από τη σύγκριση που κάναμε στο πρώτο κεφάλαιο, όπου συγκρίναμε την κατανομή των ιδιοτιμών με αυτή των τυχαίων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την ίδια κατανομή. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την

ανάλυση θεωρίας ομάδων, που μας λέει ότι μια συλλογή πινάκων θα ανήκει σε μια εκ των τριών κατηγοριών πινάκων, από τις οποίες μελετήσαμε τις δυο:

- GOE (Gaussian orthogonal ensemble)
- GUE (Gaussian unitary ensemble)
- GSE (Gaussian symplectic ensemble)

Τυχαίοι πίνακες και ιδιότητες μετάλλων

Οι φυσικές ιδιότητες μετάλλων είναι συσχετισμένες με τα επίπεδια διεγερσής τους. Όταν ένα μέταλλο χαρακτηρίζεται συμπαγές, αυτή την ιδιότητα του τη δίνει το γεγονός ότι σε μεγάλη θερμοκρασία οι στάθμες ηλεκτρονικής ενέργειας είναι κοντά μεταξύ τους και έχουν τέτοιο πλάτος ώστε να δημιουργούν ένα συνεχές φάσμα. Αν τα μεταλλικά σώματα είναι λεπτά, σε χαμηλές θερμοκρασίες οι αποστάσεις των στάθμων ηλεκτρονικής ενέργειας μπορούν να υπερβούν τις αποστάσεις άλλων ενεργειών. Κάτω από αυτές τις συνθήκες οι θερμικές και ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες μεταλλικών σωματιδίων μπορούν να αποκλίνουν από αυτές των συμπαγών μετάλλων.

Όπως είναι φυσικό, είναι δύσκολο κάποιος να επεξεργαστεί τα σχήματα αυτών των τόσο μικρών σωματιδίων, για αυτό, και με σκοπό να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα, θεωρούμε τις στάθμες ηλεκτρονικής ενέργειας τυχαίες και οι ιδιοτιμές των τυχαίων πινάκων αποδεικνύονται χρήσιμες για τη μελέτη αυτών των φαινομένων.

Συνάρτηση Ζήτα του Riemann και τυχαίοι πίνακες

Η συνάρτηση Ζήτα του Riemann ακολουθεί την ακόλουθη εικασία: όλα τα μη πραγματικά μηδενικά της συνάρτησης Ζήτα βρίσκονται πάνω σε έναν άξονα παράλληλο στον άξονα των φανταστικών αριθμών. Θεωρείται ότι οι τοπικές διακύμανσεις των μηδενικών αυτών που βρίσκονται σε αυτήν την ευθεία είναι ίδιες με αυτές των ιδιοτιμών ενός τυχαίου πίνακα GUE.

Επιπλέον εφαρμογές των τυχαίων πινάκων

Το γυαλί μπορεί να θεωρηθεί ως μια τυχαία συλλογή από ιστούς, που με τη σειρά τους μπορούν να θεωρηθούν ως μια τυχαία συλλογή από σωματίδια, με τυχαίες μάζες που ασκούν τυχαίες δυνάμεις το ένα στο άλλο. Ενδιαφέρον θα είχε η μελέτη της κατανομής συχνοτήτων τέτοιων ιστών. Το πιο συχνά μελετημένο μοντέλο γυαλιού είναι αυτό του Ising. Σύμφωνα με αυτό, σε κάθε πλευρά ενός δικτυωτού πλέγματος τοποθετείται μια μεταβλητή σπιν $\sigma_i = 1$ ή -1 με $P[\sigma_i = 1] = P[\sigma_i = -1] = \frac{1}{2}$. η αλληλεπίδραση μεταξύ δυο γειτονικών σπιν σ_i, σ_j είναι ίση με $J_{ij}\sigma_i\sigma_j$, ενώ για οποιοδήποτε άλλο ζευγάρι σ_i, σ_j είναι 0. Αν ο J είναι σταθερός πίνακας, τότε έχουμε το μοντέλο Ising. Αν, όμως, τα J_{ij} είναι τυχαίες μεταβλητές και ο J είναι τυχαίος πίνακας, τότε ο υπολογισμός των διαφόρων τμημάτων του γυαλιού γίνεται με εφαρμογή τυχαίων πινάκων.

Μια ακόμη απλή εφαρμογή τυχαίων πινάκων στη φυσική είναι οι συχνότητες συντονισμού υπερήχων των δομικών υλικών, όπου και ανακαλύφθηκε ότι συμπεριφέρονται σαν τις ιδιοτιμές ενός τυχαίου πίνακα GOE.

Ακόμα δεν θα έπρεπε να παραβλέψουμε μια αναφορά των τυχαίων πινάκων στη θεωρία χαοτικών συστημάτων. Ένα σύστημα είναι χαοτικό όταν για μικρές αλλαγές στα δεδομένα έχουμε ραγδαίες μεταβολές στα αποτελέσματα του συστήματος. Αν κάνουμε μια προσπάθεια να μελετήσουμε την ενέργεια ενός από τα σωματίδια ενός τέτοιου συστήματος, θα

είναι οι ιδιοτιμές ενός τελεστή Laplace σε έναν πεπερασμένο χώρο. Μεγάλες ποσότητες από αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι οι ενέργειες συμπεριφέρονται σαν ιδιοτιμές ενός τυχαίου πίνακα GOE.

Βιβλιογραφία

- [1] Alan Edelman and Yuyang Wang. Random matrix theory and its innovative applications. In *Advances in Applied Mathematics, Modeling, and Computational Science*, pages 91–116. Springer, 2013.
- [2] Giacomo Livan, Marcel Novaes, and Pierpaolo Vivo. Introduction to random matrices. *SpringerBriefs in Mathematical Physics*, 2018.
- [3] Giacomo Livan, Marcel Novaes, and Pierpaolo Vivo. Introduction to random matrices theory and practice. *Monograph Award*, page 63, 2018.
- [4] Feng Luo, Jianxin Zhong, Yunfeng Yang, Richard H Scheuermann, and Jizhong Zhou. Application of random matrix theory to biological networks. *Physics Letters A*, 357(6):420–423, 2006.