Διπλωματική Εργασία

Ανάλυση και Αποτίμηση Τροχιοεξαρτώμενων Χρηματοοικονομικών Παραγώγων με μεθόδους Monte Carlo

Κάρλος Μαύρος

Επιβλέπων: Λουλάκης Μιχαήλ - Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

13 Ιουλίου 2022

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Μιχαήλ Λουλάκη για την υπομονή και την καθοδηγησή του κατά την διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας. Οφείλω να ευχαριστήσω επίσης τους υπόλοιπους καθηγητές της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών για τα όσα προσφέρουν καθημερινά και τα όσα μου προσέφεραν εμένα προσωπικά τα τελευταία πέντε χρόνια.

Περίληψη

Αυτή η εργασία πραγματεύεται την αποτίμηση τροχιοεξαρτώμενων χρηματοοικονομικών παραγώγων με αριθμητικές μεθόδους. Συγκεκριμένα, θα εστιάσουμε στην αποτίμηση Ασιατικών δικαιωμάτων με μεθόδους Monte Carlo και με την χρήση μεθόδων ελάττωσης διασποράς.

Λέξεις/φράσεις κλειδιά: Χρηματοοικονομικά μαθηματικά, δικαιώματα, τροχιοεξαρτώμενα παράγωγα, Black-Scholes, Monte Carlo, ελάττωση διασποράς, Python.

Abstract

This thesis deals with the pricing of path dependent financial derivatives using numerical methods. Specifically, we will be focusing in the pricing of Asian options via Monte Carlo methods in combination with variance reduction techniques.

Key words/phrases: Financial mathematics, options, path dependent derivatives, Black-Scholes, Monte Carlo, variance reduction, Python.

Περιεχόμενα

1 | Εισαγωγή

Αυτή η εργασία πραγματεύεται την αποτίμηση τροχιοεξαρτώμενων χρηματοοικονομικών παραγώγων με αριθμητικές μεθόδους. Συγκεκριμένα, θα εστιάσουμε στην αποτίμηση Ασιατικών δικαιωμάτων με μεθόδους Monte Carlo.

Η εργασία χωρίζεται σε δύο κύρια μέρη.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας θα επιχειρήσουμε να δώσουμε ένα κλειστό τύπο για την αποτίμηση Ασιατικών δικαιωμάτων, και όπως θα δούμε αυτό δεν είναι πάντοτε εφικτό.

Στο δεύτερο μέρος θα εστιάσουμε στην αποτίμηση αυτών των παραγώγων με την χρήση μεθόδων Monte Carlo. Επιπρόσθετα, θα παρουσιάσουμε διάφορες τεχνικές ελάττωσης διασποράς και θα υλοποιήσουμε κάποιες από αυτές. Στην συνέχεια θα συγκρίνουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα αυτών των τεχνικών μεταξύ τους και με την απλή μέθοδο Monte Carlo.

Οι δύο προαναφερθείσες ενότητες συνοδεύονται από ένα βοηθητικό κεφάλαιο στο οποίο παρουσιάζουμε όλο το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο της ανάλυση των παραγώγων και της αποτίμησης τους.

Τέλος, στο Παράρτημα Α παρουσιάζουμε όλους τους κώδικες σε Python που υλοποιήσαμε για την εκτέλεση των αριθμητικών πειραμάτων.

2 Ανάλυση Χρηματοοικονομικών Προϊόντων

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα είναι επενδυτικά εργαλεία που συνδέεονται με ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο. Αυτά τα στοιχεία, που ονομάζονται υποκείμενες αξίες, μπορεί να είναι δείκτες, εμπορεύματα, μετοχές, κ.ο.κ. Η αξία τους προέρχεται από την αξία των υποκειμένων, ή underlying instruments, και σε αντίθεση με τις υποκείμενες αξίες τα παράγωγα έχουν περιορισμένη διάρκεια ζωής και συγκεκριμένες ημερομηνίες λήξης, δηλαδή έχουν χρόνο ωρίμανσης (maturity).

2.1 Δικαιώματα - Options

Υπάρχουν πολλά διαφορετικά είδη χρηματοοικονομικών παραγώγων, και συνεχώς γεννιούνται καινούρια. Ωστόσο, εμείς θα εστιάσουμε στα λεγόμενα συμβόλαια δικαιωμάτων (options), τα οποία βασίζονται στην **προαιρετική άσκηση ενός δικαιώματος αγοράς ή πώλησης** κάποιου περιουσιακού στοιχείου, μέσα σε κάποιο χρονικό ορίζοντα και σε κάποια προκαθορισμένη τιμή. Συγκεκριμένα, τα εν λόγω περιουσιακά στοιχεία είναι χρεόγραφα, δηλαδή κάθε λογής διαπραγματεύσιμων προϊόντων σε μια χρηματοοικονομική αγορά.

2.1.1 Vanilla δικαιώματα

Κάποια από τα απλούστερα παράγωγα είναι τα λεγόμενα vanilla παράγωγα. Αυτά τα συμβόλαια είναι χρηματοοικονομικά εργαλεία τα οποία δίνουν στον κάτοχο τους το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει ή να πουλήσει ένα υποκείμενο στοιχείο σε μία προκαθορισμένη τιμή σε κάποιο χρονικό πλαίσιο. Αυτή η προκαθορισμένη τιμή καλείτε strike price και καθορίζεται την στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο.

Τα vanilla παράγωγα κατηγοριοποιούνται ως εξής:

1. **Calls**: Ο κάτοχος ενός call option έχει το δικαίωμα να **αγοράσει** το υποκείμενο στοιχείο μέσα στο προκαθορισμένο χρονικό πλαίσιο και στην προκαθορισμένη τιμή.

2. **Puts**: Ο κάτοχος ενός put option έχει το δικαίωμα να **πωλήσει** το υποκείμενο στοιχείο μέσα στο προκαθορισμένο χρονικό πλαίσιο και στην προκαθορισμένη τιμή.

Τα **Ευρωπαϊκά** δικαιώματα αγοράς/πώλησης επιτρέπουν την άσκηση του αντίστοιχου δικαιώματος στον χρόνο ωρίμανσης, ενώ τα **Αμερικάνικα** δικαιώματα την επιτρέπουν σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι και τον χρόνο ωρίμανσης. Πιο κάτω δίνουμε τον ορισμό τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1: Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς/πώλησης είναι ένα συμβόλαιο που υπογράφεται σε κάποιο χρόνο t, από το οποίο προκύπτει το δικαίωμα να αγοραστεί/πωληθεί ένα βασικό αγαθό S με τιμή S_t σε κάποιο μελλοντικό χρόνο $T > t$ (T: χρόνος ωρίμανσης) σε κάποια προκαθορισμένη τιμή K (strike price).

Για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, έχουμε την συνάρτηση αποπληρωμής

$$\max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+$$

ενώ για το αντίστοιχο δικαίωμα πώλησης

$$\max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2: Ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς/πώλησης είναι ένα συμβόλαιο που υπογράφεται σε κάποιο χρόνο t, από το οποίο προκύπτει το δικαίωμα να αγοραστεί/πωληθεί ένα βασικό αγαθό S με τιμή S_t σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι κάποιο μελλοντικό χρόνο $T > t$ (χρόνος ωρίμανσης) σε κάποια προκαθορισμένη τιμή K (strike price).

Για το Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς, έχουμε την συνάρτηση αποπληρωμής

$$\max\{S_t - K, 0\} = (S_t - K)^+, \quad 0 < t \leq T$$

ενώ για το αντίστοιχο δικαίωμα πώλησης

$$\max\{K - S_t, 0\} = (K - S_t)^+, \quad 0 < t \leq T$$

όπου θεωρούμε ότι το συμβόλαιο υπογράφεται στην στιγμή $t = 0$.
Γενικά, τα vanilla παράγωγα έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Βασίζονται σε μία υποκείμενη αξία.

2. Η αξία του παραγώγου εξαρτάται μόνο από την τιμή του υποκειμένου στον χρόνο ωρίμανσης.

2.1.2 Εξωτικά δικαιώματα

Τα εξωτικά παράγωγα (exotic options) είναι χρηματοοικονομικά παράγωγα τα οποία δεν εμπίπτουν στην πιο πάνω κατηγορία. Υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες τέτοιων δικαιωμάτων:

1. Δικαιώματα συσχέτισης (correlation options): η συνάρτηση αποπληρωμής εξαρτάται από περισσότερα από ένα υποκείμενα στοιχεία.

2. Τροχιοεξαρτώμενα δικαιώματα (path dependent options): η συνάρτηση αποπληρωμής εξαρτάται από τον τρόπο (διαδρομή/τροχιά) με τον οποίο το υποκείμενο στοιχείο φτάνει στην τιμή του στον χρόνο ωρίμανσης.

Όπως προαναφέραμε, σε αυτή την εργασία θα εστιάσουμε σε ένα ειδικό είδος τροχιοεξαρτώμενων δικαιωμάτων, τα λεγόμενα Ασιατικά δικαιώματα (Asian options).

2.1.3 Ασιατικά Δικαιώματα

Τα ασιατικά δικαιώματα είναι παράγωγα τα οποία εξαρτώνται από την μέση τιμή του υποκείμενου χρεογράφου κατά την περίοδο διάρκειας του συμβολαίου. Ο υπολογισμός αυτής της μέσης τιμής μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το γεωμετρικό ή τον αριθμητικό μέσο, τα οποία σε συνεχή χρόνο δίνονται από τις εξής συναρτήσεις:

$$A_{\text{geom}}[S] = \exp\Big(\frac{1}{T}\int_0^T \ln S(t)dt\Big) \qquad A_{\text{arith}}[S] = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt$$

Εμείς θα επικεντρωθούμε στα Ασιατικά δικαιώματα Ευρωπαϊκού στυλ, δηλαδή σε αυτά με αποπληρωμή της μορφής:

$$(K - A[S])^+ \quad \text{ή} \quad (A[S] - K)^+$$

Αν και σε αυτή την εργασία θεωρούμε ότι ο υπολογισμός του αριθμητικού/γεωμετρικού μέσου γίνεται σε συνεχή χρόνο, στην πραγματικότητα αυτό γίνεται σε συγκεκριμένες (προκαθορισμένες) διακριτές χρονικές στιγμές. Αυτό ονομάζεται discrete monitoring. Σε αυτή την περίπτωση:

$$A_{\text{geom}}[S] = \exp\Big(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln S(t_i)\Big) \qquad A_{\text{arith}}[S] = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} S(t_i)$$

όπου τα $t_1, t_2, \ldots, t_k$ αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές όπου γίνεται το monitoring/έλεγχος (για παράδειγμα, σε μια περίοτο $T = 1$ χρόνος τα t_i μπορεί να αντιστοιχούν στην Δευτέρα κάθε μιας από τις 52 βδομάδες της περιόδου).

2.2 Το μοντέλο Black-Scholes-Merton

Στην συνέχεια αυτής της εργασίας εργαζόμαστε βασιζόμενοι στο μοντέλο των Black-Scholes-Merton. Το μοντέλο αυτό έχει κάποιες βασικές υποθέσεις:

1. Εργαζόμαστε σε ένα χώρο πιθανότητας με διύληση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F})_{t\geq 0})$.
2. Η χρηματοοικονομική αγορά απαρτίζεται από τα χρεόγραφα $\bar{S} = (S_t^0, S_t)_{t\geq 0}$ όπου:
    - S_t^0 είναι το χρεόγραφο άνευ ρίσκου με σταθερό επιτόκιο r.
    - S_t είναι το χρεόγραφο με ρίσκο, το οποίο θεωρούμε ότι ακολουθεί μια τυπική κίνηση Brown.
3. Η χρηματοοικονομική αγορά είναι πλήρης.
4. Το μοντέλο ισχύει για ένα χρονικό διάστημα $[0, T]$.

Σε γενικές γραμμές η λογική πίσω από την αποτίμηση χρεογράφων στο μοντέλο αυτό έχει ως εξής:

1. Το θεώρημα Black-Scholes-Merton [1] μας δίνει ένα εργαλείο για να αποτιμήσουμε ένα οποιοδήποτε παράγωγο, υπολογίζοντας την τιμή ενός χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης για το εν λόγω παράγωγο.
2. Μοντελοποιούμε την τιμή του χρεογράφου με ρίσκο ως μια γεωμετρική κίνηση Brown, η λύση της οποίας είναι
$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma B_t}$$
3. Το θεώρημα Cameron-Martin (Girsanov) [3] μας δίνει την δυνατότητα να κατασκευάσουμε μια πυκνότητα Radon-Nikodym, συνεπώς και ένα ισοδύναμο μέτρο (martingale) $\mathbb{Q}$, κάτω από το οποίο η τιμή του χρεογράφου είναι μια τυπική κίνηση Brown.
4. Αυτό το αποτέλεσμα μας επιτρέπει να γνωρίζουμε την κατανομή αυτής της διαδικασίας υπό το $\mathbb{Q}$, το οποίο στην συνέχεια μας επιτρέπει τον υπολογισμό της μέσης τιμής
$$\mathbb{E}_Q[e^{-r(T-t)} f(S_t)]$$
που μας δίνει την τιμή του παραγώγου με συνάρτηση αποπληρωμής f.

2.3 Αποτίμηση Παραγώγων με την χρήση του Θ. Black-Scholes

Έχουμε υποθέσει ότι η δυναμική του χρεογράφου με ρίσκο είναι

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{2.1}$$

Η αποτοκισμένη διαδικασία $\tilde{S}_t$ πρέπει να είναι ένα $\mathbb{Q}$ – martingale, όπου το $\mathbb{Q}$ είναι ένα ισοδύναμο μέτρο martingale (EMM). Μπορούμε να δείξουμε, βλέπε 6.4, ότι κάτω από το $\mathbb{Q}$ η S_t έχει δυναμική

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{2.2}$$

όπου η W_t είναι μια τυπική κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$.
Η λύση της 2.2 δίνεται (εφαρμόζοντας το Λήμμα του Itô) από

$$S_T = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} \tag{2.3}$$

Από τώρα και στο εξής, εργαζόμαστε κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$ και παραλείπουμε το $\mathbb{Q}$ για συντομία.

Ως (τυπική) κίνηση Brown, ισχύει ότι $W_T - W_t \sim \mathcal{N}(0, T-t)$. Ορίζουμε $\tau = T - t$ και έτσι η $z = \frac{1}{\sqrt{\tau}}(W_T - W_t) \sim \mathcal{N}(0,1)$. Μπορούμε λοιπόν να ξαναγράψουμε την 2.3 ως

$$S_T = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{\tau}z} \tag{2.4}$$

2.3.1 Αποτίμηση Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς

Από το Θεώρημα Black-Scholes, βλέπε 6.7, έχουμε ότι η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με strike price , χρόνο ωρίμανσης T και συνάρτηση αποπληρωμής $f(S_T) = (S_T - K)^+$ δίνεται από

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau} \underbrace{(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma\sqrt{\tau}z} - K)^+}_{A}] \tag{2.5}$$

Για να υπολογίσουμε αυτή την αναμενόμενη τιμή αρχικά μας ενδιαφέρει να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης, με άλλα λόγια σε πιο χωρίο ισχύει $A \geq 0$.

$$\begin{aligned}
&S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma\sqrt{\tau}z} - K \geq 0 \\
&(r - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma\sqrt{\tau}z \geq \frac{K}{S_t} \\
&z \geq \frac{\log\frac{K}{S_t} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} := l
\end{aligned}$$

Έπεται λοιπόν από την 2.5 τώρα ότι:

$$\begin{aligned}
V_t &= e^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_l^\infty \Big(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}e^{\sigma\sqrt{\tau}z}-K\Big)e^{-z^2/2}dz \\
&= e^{-r\tau}S_t e^{r\tau}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_l^\infty e^{\sigma\sqrt{\tau}z-\frac{\sigma^2}{2}\tau}e^{-z^2/2}dz}_{I_1} - e^{-r\tau}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_l^\infty Ke^{-z^2/2}dz}_{I_2} \\
&= S_t I_1 - e^{-r\tau}I_2
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα δύο ολοκληρώματα ξεχωριστά. Υπενθυμίζουμε την συμμετρία της Κανονικής Κατανομής που μας επιτρέπει να κάνουμε της αλλαγές που ακολουθούν στα όρια ολοκλήρωσης:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_l^\infty e^{\sigma\sqrt{\tau}z-\frac{\sigma^2}{2}\tau}e^{-z^2/2}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-l} e^{-\sigma\sqrt{\tau}z-\frac{\sigma^2}{2}\tau}e^{-z^2/2}dz$$

Εκτελούμε την αντικατάσταση $u = z + \sigma\sqrt{\tau}$ παίρνοντας

$$z = u - \sigma\sqrt{\tau} \quad du = dz \quad z^2 = u^2 - 2u\sigma\sqrt{\tau} + \sigma^2\tau$$

και

$$-\sigma\sqrt{\tau}z - \frac{\sigma^2}{2}\tau - \frac{z^2}{2} = -\sigma\sqrt{\tau}(u-\sigma\sqrt{\tau}) - \frac{\sigma^2}{2}\tau - \frac{1}{2}(u^2 - \sigma\tau - 2u\sigma\sqrt{\tau}) = -\frac{u^2}{2}$$

και έτσι το I_1 γίνεται

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-l+\sigma\sqrt{\tau}} e^{-u^2/2}du \\
&= \Phi(-l+\sigma\sqrt{\tau})
\end{aligned}$$

και για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-l} Ke^{-z^2/2}dz = K\Phi(-l)$$

Συνεπώς καταλήγουμε ότι η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στον χρόνο t δίνεται από

$$V_t = S_t\Phi(-l-\sigma\sqrt{\tau}) - e^{-r\tau}K\Phi(-l)$$

Αν ορίσουμε (όπως συνηθίζεται) τις ποσότητες

$$d_1 = -l + \sigma\sqrt{\tau} \qquad d_2 = -l$$

τότε λαμβάνουμε την περίφημη φόρμουλα των Black-Scholes για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

$$C_t = F(t, S_t) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

2.3.2 Αποτίμηση γεωμετρικού Ασιατικού δικαιώματος

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, η αποτίμηση γεωμετρικών Ασιατικών παραγώγων είναι εφικτή μέσω ενός κλειστού αναλυτικού τύπου.

Έχουμε το γεωμετρικό μέσο $A^G(S_T) = \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log S_t dt\right)$ όπου χρεόγραφο S_t ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown. Από την 2.3 για $T = 0$ προκύπτει ότι

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} \Rightarrow \log S_t = \log S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$$

Υπολογίζουμε το γεωμετρικό μέσο χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, και έχουμε

$$\begin{aligned} A_T^G = \exp\Big(\frac{1}{T}\int_0^T \log S_t dt\Big) & \\ &= e^{\frac{1}{T}\int_0^T \log S_0 dt} e^{\frac{r-\sigma^2/2}{T}\int_0^T t dt} e^{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma\sigma W_t dt} \\ &= S_0 e^{\frac{T^2}{2}\frac{\mu-\sigma^2/2}{T}} e^{\frac{\sigma}{T}\int_0^T B_t dt} \\ &= S_0 e^{\frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{\sigma}{T}\int_0^T W_t dt} \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα του Itô εύκολα προκύπτει ότι

$$\int_0^T W_t dt = \int_0^T (T-t) dW_t$$

συνεπώς

$$A_T^G = S_0 e^{\frac{1}{2}(r-\sigma^2/2)T} e^{\frac{\sigma}{T}\int_0^T (T-t) dB_t} \tag{2.6}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι έχουμε την διαδικασία Itô $\int_0^T (T-t)dW_t$, η οποία ως martingale έχει μέση τιμή μηδέν και διασπορά

$$\mathbb{E}\Big[\Big((T-t)dB_t\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^T (T-t)^2 dt\Big] = \mathbb{E}[T^3/3] = \frac{T^3}{3}$$

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε την 2.6 ως

$$A_T^G = S_0 e^{\frac{1}{2}(r-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}z} \quad \text{όπου } z \sim \mathcal{N}\big(0, \frac{T^3}{3}\big) \tag{2.7}$$

Για την αποτίμηση του Ασιατικού δικαιώματος αγοράς, ακολουθώντας το θεώρημα Black-Scholes-Merton έχουμε

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-rT}(A_T^G - K)^+\Big] = e^{-rT}\mathbb{E}[A_T^G - K]^+$$

Αρχικά πρέπει να λύσουμε την ανισότητα $A_T^G \geq K$. Θέτουμε $\tau = \frac{T}{3}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
&A_T^G \geq K\\
&\Rightarrow S_0 e^{\frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})T} e^{\sigma\sqrt{\tau}z} \geq K\\
&\Rightarrow \frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{\tau}z \geq \log\frac{S_0}{K}\\
&\Rightarrow z \geq \frac{\log\frac{S_0}{K} - \frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{\tau}} := l
\end{aligned}$$

Είμαστε σε θέση να κάνουμε την αποτίμηση με βάση τον τύπο του Θεωρήματος Black-Scholes-Merton:

$$\begin{aligned}
V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-rT}(A_T^G - K)^+\Big] &= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_l^\infty \Big(S_0 e^{\frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})T} e^{\sigma\sqrt{\tau}z} - K\Big)e^{-\frac{z^2}{2}}dz\\
&= e^{-rT}\Big[S_0 e^{\frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_l^\infty e^{\sigma\sqrt{\tau}z}e^{-\frac{z^2}{2}}dz}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_l^\infty Ke^{-\frac{z^2}{2}}}_{I_2}
\end{aligned}$$

Προβαίνοντας σε αντικατάσταση ορίων όπως κάναμε για την αποτίμηση του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και στην αντικατάσταση $u = z + \sigma\sqrt{\tau}$ στο I_1, προκύπτει άμεσα ότι:

$$I_1 = e^{\frac{\sigma^2}{2}\tau}\Phi(-l+\sigma\sqrt{\tau}) \quad \text{και} \quad I_2 = K\Phi(-l)$$

Άρα

$$V_0 = e^{-rT}S_0 e^{\frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})T}e^{\frac{\sigma^2}{2}\tau}\Phi(-l+\sigma\sqrt{\tau}) - e^{-rT}K\Phi(-l) = S_0 e^{-\frac{rT}{2}-\frac{\sigma^2 T}{6}}\Phi(-l+\sigma\sqrt{(}\tau) - e^{-rT}K\Phi(-l)$$

Ορίζουμε τώρα τις ποσότητες:

$$\begin{aligned}
d_1 &= -l + \sigma\sqrt{\tau} = -l + \sigma\sqrt{\frac{T}{3}}\\
d_2 &= -l\\
b &= r - \frac{rT}{2} - \frac{\sigma^2 T}{6}
\end{aligned}$$

Και έτσι καταλήγουμε στον κλειστό τύπο για την αποτίμηση του γεωμετρικού Ασιατικού δικαιώματος αγοράς

$$V_0 = S_0 e^{(b-r)T}\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2) \tag{2.8}$$

2.4 Αναλυτική αποτίμηση αριθμητικών Ασιατικών δικαιωμάτων και προβλήματα

Οι τιμές Ασιατικών δικαιωμάτων αγοράς/πώλησης όπου χρησιμοποιείται ο αριθμητικός μέσος στην συνάρτηση αποπληρωμής δεν μπορούν να γραφτούν σε κλειστό τύπο, σε αντίθεση με τα δικαιώματα που αναλύσαμε παραπάνω.

Αυτό προκύπτει καθώς ο αριθμητικός μέσος δεν είναι έχει lognormal κατανομή, ακόμη και όταν οι τιμές ακολουθούν μια lognormal κατανομή. Αντιθέτως, για τα γεωμετρικά Ασιατικά δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου υπάρχει (όπως είδαμε πιο πάνω) κλειστός τύπος για την αποτίμηση, καθώς ο γεωμετρικός μέσος των lognormal τιμών ακολουθεί επίσης lognormal κατανομή. [7]

Στην συνέχεια αυτή της εργασίας θα εστιάσουμε στην αποτίμηση Ασιατικών δικαιωμάτων (αριθμητικού μέσου) με μεθόδους Monte Carlo.

3 | Μέθοδοι Monte Carlo

3.1 Γενικά περί μεθόδων Monte Carlo

Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ είναι μια συνάρτηση στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ η οποία για κάθε $A \in \mathcal{F}$ μας δίνει μια τιμή στο $[0, 1]$ την οποία ερμηνεύουμε ως η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A.

Καθώς ένα ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}$ είναι απλώς ένα σύνολο από διάφορα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, έχουμε μια ξεκάθαρη αναλογία όγκου-πιθανότητας. Η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A είναι ο σχετικός όγκος των αποτελεσμάτων του πειράματος που ανήκουν στο A προς τον όγκο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων.

Στις μεθόδους Monte Carlo αυτή η αναλογία χρησιμοποιείται για να υπολογίζουμε όγκους, ερμηνεύοντας τους ως πιθανότητες. Στην απλούστερη περίπτωση, αυτή την αναλογία μπορούμε να τη δούμε από το πιο κάτω παράδειγμα.

Όπως και στο υπόλοιπο αυτής της εργασίας, όλοι οι υπολογισμοί γίνονται με την χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Python.

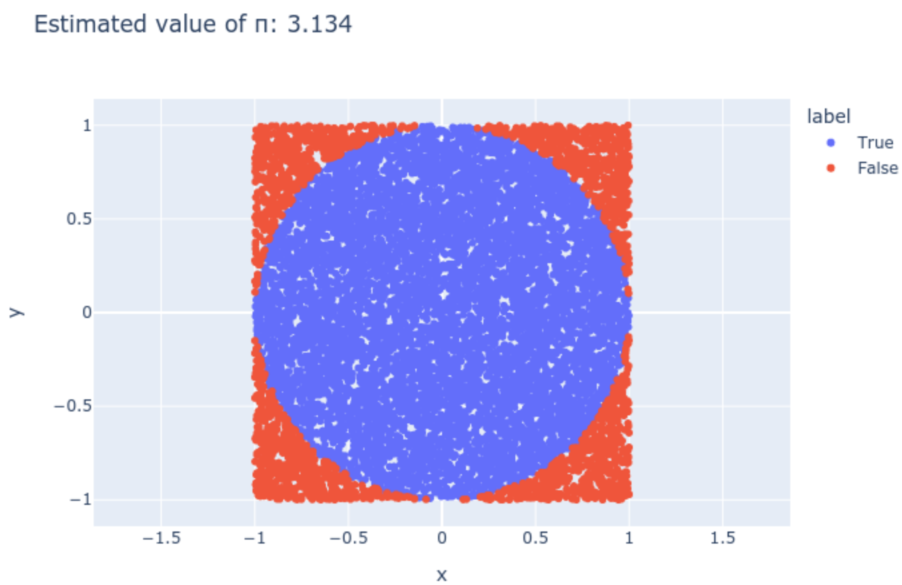
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1: Θεωρούμε n σημεία (x, y) ομοιόμορφα κατανεμημένα στο επίπεδο με $x \in [-1, 1]$ και $y \in [-1, 1]$. Στην συνέχεια μετράμε πόσα από αυτά είναι μέσα στον μοναδιαίο κύκλο, έστω m. Τότε το πηλίκο

$$p = \frac{m}{n}$$

μας δίνει μια προσέγγιση της πιθανότητας ένα τυχαίο σημείο στο τετράγωνο με κορυφές $(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)$ να είναι μέσα στον μοναδιαίο κύκλο. Ο όγκος (εμβαδόν) του τετραγώνου είναι $A_{sq} = 2 * |-1-1| = 4$ και συνεπώς μια εκτίμηση του εμβαδού του κύκλου $A = \pi r = \pi$ είναι

$$A_{sq} * p = 4 * \frac{m}{n}$$

Πιο κάτω τα αποτελέσματα από τον κώδικα Python Α΄.5



ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1: ((Ισχυρός) Νόμος των Μεγάλων Αριθμών - ΝΜΑ) Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μια τ.μ. τ.ω. $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ και $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim X$ για κάθε i.

Έστω επίσης $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Τότε η $\bar{X}_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στην $\mathbb{E}[X]$, δηλ.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]|) = 1$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2: (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα - ΚΟΘ) Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μια τ.μ. τ.ω $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ και $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Θέτουμε $\mu := \mathbb{E}[X] < \infty$ και $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X)$.

Από τον ΝΜΑ ο δειγματικός μέσος X_n συγκλίνει σ.β. στον πραγματικό μέσο μ καθώς $n \to \infty$ και καθώς $n \to \infty$ η τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$$

συγκλίνει κατά κατανομή στην τυπική Κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$.

Στο πιο πάνω παράδειγμα όπου υπολογίσαμε μια προσέγγιση της τιμή του π, χρησιμοποιούμε τον ΝΜΑ για να πάρουμε αυτή την εκτίμηση. Το ΚΟΘ μας λέει ότι καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος μας, η κατανομή της διαφοράς $\bar{X}_n - \mu$ όταν πολλαπλασιαστεί από έναν παράγοντα $\sqrt{n}$ προσεγγίζει την $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Αυτό είναι που μας επιτρέπει να δουλέψουμε με τα σφάλματα στις μεθόδους Monte Carlo.

3.1.1 Εκτιμήτριες Monte Carlo

Θέλουμε να υπολογίσουμε μια ποσότητα I, την οποία την γράφουμε σαν μια αναμενόμενη τιμή μιας τ.μ. X (θεωρούμε $\mathrm{Var}(X) < \infty$). Από τον NMA έχουμε

$$I = \mathbb{E}[X] = \lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots X_n}{n}$$

Η εκτιμήτρια Monte Carlo είναι η

$$\hat{I}_n^{\mathrm{MC}} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

και το τυπικό σφάλμα της μεθόδου Monte Carlo είναι $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, καθώς από ΚΟΘ έχουμε ότι

$$\hat{I}_n^{\mathrm{MC}} - \mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z, \quad \text{όπου } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι υπάρχουν δύο τρόποι να μειώσουμε το σφάλμα της εκτιμήτριας μας:

1. Να πάρουμε ένα μεγαλύτερο δείγμα (μεγαλύτερο n), ή/και
2. Να διαλέξουμε μια άλλη τ.μ. Y με $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] = I$ αλλά με $\mathrm{Var}(Y) < \mathrm{Var}(X)$.

Παρατήρηση 1: Προφανώς, οι τ.μ. X που χρησιμοποιούμε πρέπει να έχει πεπερασμένη διασπορά (η οποία από ανισότητα Cauchy-Schwatz συνεπάγεται και πεπερασμένη μέση τιμή) για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΚΟΘ και του NMA.

Παρατήρηση 2: Συχνά, δεν εργαζόμαστε κατευθείαν με μια τ.μ. X αλλά με μια συνάρτηση της, $f(X)$. Απαιτούμε η f να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη έτσι ώστε να μπορούμε να εργαστούμε με το σφάλμα της εκτιμήτριας, δηλαδή να έχει νόημα το ολοκλήρωμα

$$\sigma_f^2 = \mathbb{E}[(f(X) - \mathbb{E}[f(X)])^2]$$

3.1.2 Σφάλμα της μεθόδου Monte Carlo

Η μορφή $\sigma_f/\sqrt{n}$ του τυπικού σφάλματος είναι ένα από τα κεντρικά χαρακτηριστικά της μεθόδου Monte Carlo. Ο ρυθμός σύγκλισης $\sqrt{n}$ της μεθόδου πρακτικά μας λέει ότι να θέλουμε να βελτιώσουμε την εκτίμηση μας κατά ένα δεκαδικό ψηφίο, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα δείγμα 100 φορές μεγαλύτερο.

Για τον υπολογισμού μονοδιάστατων ολοκληρωμάτων, μέθοδοι όπως η μέθοδος του τραπεζίου, με σφάλμα της τάξης του $O(n^{-2})$, είναι πολύ πιο αποτελεσματικές από την μέθοδο Monte Carlo, η οποία έχει σφάλμα τάξης του $O(n^{-1/2})$. Ωστόσο η μέθοδος Monte Carlo υπερτερεί σε προβλήματα μεγαλύτερων διαστάσεων καθώς ο ρυθμός σύγκλισης της είναι πάντοτε $O(n^{-1/2})$, ενώ (για παράδειγμα) στην μέθοδο του τραπεζίου είναι $O(n^{-2/d})$.

3.1.3 Αποτίμηση Παραγώγων με Monte Carlo

Όπως είδαμε στην αποτίμηση παραγώγων, η τιμή δίνεται από μία αναμενόμενη τιμή

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}h|\mathcal{F}_T]$$

και συνεπώς η αποτίμηση παραγώγων είναι πρακτικά ο υπολογισμός αυτής της μέσης τιμής.

Σε αντίθεση με το παράδειγμα που δώσαμε πιο πάνω, όπου η δειγματοληψία έγινε πάνω σε ένα σύνολο σημείων, για την αποτίμηση παραγώγων με μεθόδους Monte Carlo, συνήθως δειγματοληπτούμε από ένα χώρο τροχιών. Με άλλα λόγια, προσομοιώνουμε τροχιές μιας στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει την δυναμική των υποκείμενων χρεογράφων, επιτοκίων και γενικότερα όλων των παραμέτρων που περιγράφουν το πρόβλημα μας.

Σε αυτή την περίπτωση, η διάσταση εξαρτάται από τον αριθμό των βημάτων που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση και ο ρυθμός σύγκλισης $\sqrt{n}$ των μεθόδων Monte Carlo τις καθιστούν ανταγωνιστικές.
Αν και δεν μπορούμε να βελτιώσουμε τον ρυθμό σύγκλισης των μεθόδων Monte Carlo, μπορούμε ωστόσο να βρούμε καλύτερες μεθόδους δειγματοληψίας (δηλ. να βελτιώσουμε την σταθερά του $O(n^{-1/2})$.

3.1.4 Αποδοτικότητα Εκτιμητριών

Θέλουμε να καθορίσουμε κριτήρια επιλογής εκτιμητριών βάση της αποδοτικότητας τους. Σε αυτή την εργασία θα εργαστούμε με αμερόληπτες εκτιμήτριες και θα σταθμίζουμε τις διάφορες εκτιμήτριες βάση των πιο κάτω δύο κριτηρίων:

1. Διασπορά.
2. Υπολογιστικό κόστος (χρονική πολυπλοκότητα).

Έστω C η ποσότητα που θέλουμε να εκτιμήσουμε (π.χ. η τιμή ενός παραγώγου) και η εκτιμήτρια

$$\hat{C}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C_i$$

όπου C_i είναι i.i.d. τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}[C_i] = C$ και $\mathrm{Var}(C_i) = \sigma_C^2 < \infty$. Το ΚΟΘ εξασφαλίζει ότι καθώς το μέγεθος του δείγματος n αυξάνει, η τυποποιημένη εκτιμήτρια συγκλίνει κατά κατανομή στην τυποποιημένη Κανονική κατανομή, δηλαδή:

$$\frac{\hat{C}_n - C}{\sigma_C/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, το ΚΟΘ μας δίνει πληροφορίες για την κατανομή του σφάλματος της εκτιμήτριας μας, καθώς γνωρίζουμε ότι:

$$\hat{C}_n - C \approx \mathcal{N}(0, \sigma_C^2/n)$$

Από το παραπάνω είναι προφανές ότι, αν έχουμε να δύο εκτιμήτριες που διαφέρουν μόνο στην διασπορά (είναι και οι δύο αμερόληπτες και έχουν το ίδιο υπολογιστικό κόστος) θα πρέπει να επιλέγουμε αυτή με την μικρότερη διασπορά.

Επίσης προφανές είναι ότι αν έχουμε αμερόληπτες εκτιμήτριες $\hat{C}_{(1,n)}$ και $\hat{C}_{(2,n)}$ με την ίδια διασπορά αλλά ο υπολογιστικός χρόνος $\tau_{(k)}$ που απαιτείται για να παράξουμε τις $C_{(k,n)}$ με $k = 1, 2$ διαφέρει, θα πρέπει να επιλέξουμε την εκτιμήτρια με την μικρότερη χρονική πολυπλοκότητα.

Διασπορά και Χρονική Πολυπλοκότητα

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η επιλογή εκτιμητριών όταν έχουμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε εκτιμήτριες με διαφορετικές διασπορές και χρονικές πολυπλοκότητες παραγωγής του δείγματος. Σκοπός μας είναι να ορίσουμε το σχετικό υπολογιστικό κόστος μιας εκτιμήτριας και να βασιστούμε σε αυτό για την επιλογή της κατάλληλης εκτιμήτριας.

Έστω και πάλι $\hat{C}_n$ η αμερόληπτη εκτιμήτρια μας με διασπορά σ^2/n και τ ο χρόνος που απαιτείται για να παράξουμε ένα *σημείο* του δείγματος μας, ένα C_i. Έστω επίσης s ο υπολογιστικός μας προϋπολογισμός (μετριέται στις ίδιες μονάδες με το τ). Μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε ότι ο αριθμός των C_i που μπορούμε να αναπαράξουμε είναι

$$n = \left\lfloor \frac{s}{\tau} \right\rfloor$$

Για την εκτιμήτρια μας, τώρα η $\hat{C}_{\lfloor s/\tau \rfloor}$, ισχύει προφανώς

$$\sqrt{\lfloor s/\tau \rfloor}\big(\hat{C}_{\lfloor s/\tau \rfloor} - C\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_C^2) \tag{3.1}$$

καθώς $s \to \infty$.

Συνεπώς, μπορεί κανείς να συμπεράνει, δεδομένου ενός υπολογιστικού προϋπολογισμού s, ότι το σφάλμα της εκτιμήτριας μας είναι (προσεγγιστικά) Κανονικά κατανεμημένο με διασπορά $\sigma_C^2 \tau/s$.

Με βάση τα πιο πάνω, μπορούμε να αναπτύξουμε ένα κριτήριο σύγκρισης αμερόληπτων εκτιμητριών. Έστω δύο αμερόληπτες εκτιμήτριες $\hat{C}_{(1)}$ και $\hat{C}_{(2)}$ (με τους αντίστοιχους δείκτες $i = 1, 2$ αναφερόμαστε στις ποσότητες που αφορούν την αντίστοιχη εκτιμήτρια).

Το κριτήριο έχει ως εξής:

- Αν $\sigma^2_{(1)} > \sigma^2_{(2)}$ και $\tau_{(1)} > \tau_{(2)}$ προφανώς επιλέγουμε την εκτιμήτρια $\hat{C}_{(2)}$.
- Αν $\sigma^2_{(1)} > \sigma^2_{(2)}$ και $\tau_{(1)} < \tau_{(2)}$ δεν είναι ξεκάθαρο ποια εκτιμήτρια πρέπει να προτημήσουμε. Ωστόσο, αν λάβουμε υπόψιν μας την 3.1 τότε πρέπει να προτιμήσουμε την εκτιμήτρια με την μικρότερη τιμή της ποσότητας $\tau_{(i)}\sigma^2_{(i)}$.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα παραπάνω δείτε [5] (σελ. 1-9).

4 | Μέθοδοι ελάττωσης διασποράς

Όπως είδαμε πιο πάνω, για να πετύχουμε καλύτερα (μικρότερα) σφάλματα εκτίμησης, μπορούμε είτε να αυξήσουμε το μέγεθος του δείγματος μας είτε να επιλέξουμε εκτιμήτριες τ.ω. η διασπορά $\mathrm{Var}(C_i) = \sigma_C^2$ να είναι μικρότερη.

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με μεθόδους ελάττωσης διασποράς (variance reduction methods).

Σημείωση: Στα παρακάτω, εάν αναφερόμαστε σε μια συλλογή ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, έστω Y_i, όταν θα γράφουμε Y θα εννοούμε την τυχαία μεταβλητή με κατανομή αυτή των Y_i για κάθε i.

4.1 Μέθοδος μεταβλητών ελέγχου

Έστω $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ τα αποτελέσματα των n αναπαραγωγών μιας προσομοίωσης και έστω ότι τα Y_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με άγνωστη μέση τιμή $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y_i]$. Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής $\mathbb{E}[Y_i]$ είναι η

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

η οποία συγκλίνει με πιθανότητα 1 καθώς $n \to \infty$.

Θεωρούμε τώρα ότι με κάθε αναπαραγωγή της προσομοίωσης υπολογίζουμε ένα ακόμη αποτέλεσμα μαζί με το Y_i, έστω X_i και τώρα τα ζεύγη (X_i, Y_i) είναι επίσης ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ωστόσο τώρα, η μέση τιμή $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_i]$ είναι γνωστή.

Τότε, για ένα οποιοδήποτε (σταθερό) b μπορούμε να υπολογίσουμε την

$$Y_i(b) = Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X]), \quad \text{για κάθε } i$$

και συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε τον δειγματικό μέσο

$$\bar{Y}(b) = \bar{Y} - b(\bar{X} - \mathbb{E}[X]) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])) \tag{4.1}$$

Η $\bar{Y}(b)$ ονομάζεται *εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου*, καθώς το παρατηρούμενο σφάλμα $\bar{X} - \mathbb{E}[X]$ λειτουργεί ως ένα έλεγχος στην εκτίμηση της $\mathbb{E}[Y]$.

Ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[\bar{Y}(b)] = \mathbb{E}[\bar{Y} - b(\bar{X} - \mathbb{E}[X])] = \underbrace{\mathbb{E}[\bar{Y}]}_{=\mathbb{E}[Y]} - b\underbrace{\mathbb{E}[\bar{X} - \mathbb{E}[X]]}_{=\mathbb{E}[\bar{X}]-\mathbb{E}[X]=0} = \mathbb{E}[Y]$$

συνεπώς η 4.1 είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της $\mathbb{E}[Y]$. Επίσης, η 4.1 είναι συνεπής αφού με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i(b) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])) = \mathbb{E}[Y - b(X - \mathbb{E}[X])] = \mathbb{E}[Y]$$

Συμβολίζοντας με $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X), \sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y)$ και $\rho_{XY} = \frac{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]}{\sigma_X\sigma_Y}$, έχουμε ότι η $Y_i(b)$ έχει διασπορά

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(V_i(b)) &= \mathrm{Var}(Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])) \\ &= \sigma_Y^2 - 2b\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + b^2\sigma_X^2 := \sigma^2(b)\end{aligned}$$

Η εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου 4.1 έχει διασπορά

$$\mathrm{Var}(\bar{Y}(b)) = \frac{\sigma^2(b)}{n} \tag{4.2}$$

και για $b = 0$ (δηλ. για τον συνήθη δειγματικό μέσο $\bar{Y}$) η διασπορά είναι

$$\mathrm{Var}(\bar{Y}) = \frac{\sigma_Y^2}{n}$$

Για $b^2\sigma_X < 2b\sigma_Y\rho_{XY}$ έχουμε $\mathrm{Var}(\bar{Y}(b)) < \mathrm{Var}(\bar{Y})$ και η τιμή του συντελεστή b που ελαχιστοποιεί την διασπορά της 4.1 είναι

$$b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(X)} \tag{4.3}$$

Αν αντικαταστήσουμε την b^* στην έκφραση 4.2 (δηλαδή αν υπολογίσουμε την διασπορά της εκτιμήτριας μεταβλητής ελέγχου για την τιμή του b που ελαχιστοποιεί την διασπορά της) θα πάρουμε

$$\mathrm{Var}(Y_i(b^*)) = \sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)$$

και εξετάζοντας το πηλίκο $\frac{\mathrm{Var}(\bar{Y}(b^*))}{\mathrm{Var}(\bar{Y})}$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{\mathrm{Var}(\bar{Y}(b^*))}{\mathrm{Var}(\bar{Y})} = 1-\rho_{XY}^2 \tag{4.4}$$

Από το πιο πάνω πηλίκο, το λεγόμενο πηλίκο ελάττωσης διασποράς (variance reduction ratio) μπορεί κανείς να παρατηρήσει τα ακόλουθα:

- Με τον βέλτιστο συντελεστή b^*, η αποδοτικότητα μιας μεταβλητής ελέγχου X εξαρτάται από το πόσο ισχυρή είναι η συσχέτιση της με την ποσότητα Y που ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε.
- Επίσης παρατηρούμε ότι το πρόσημο της συσχέτισης ρ_{XY} δεν παίζει ρόλο.
- Αν το υπολογιστικό κόστος ανά αναπαραγωγή, τ, είναι παρόμοιο με ή χωρίς την χρήση της μεταβλητής ελέγχου, τότε ο αριθμός των αναπαραγωγών των Y_i που απαιτείται για να πετύχουμε την ίδια διασπορά με αυτή που θα παίρναμε κάνοντας n αναπαραγωγές με την χρήση της μεταβλητής ελέγχου είναι $n(1-\rho_{XY}^2)$
- Ο παράγοντας ελάττωσης διασποράς $1/(1-\rho_{XY}^2)$ αυξάνεται με πολύ γρήγορο ρυθμό καθώς το $|\rho_{XY}|$ τείνει στο 1 (και αντίστοιχα μειώνεται πολύ γρήγορα καθώς το $|\rho_{XY}|$ απομακρύνεται από το 1).

Στην πραγματικότητα, καθώς δεν γνωρίζουμε την $\mathbb{E}[Y]$ είναι ασυνήθιστο να γνωρίζουμε είτε την σ_Y ή την ρ_{XY}. Ωστόσο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια εκτίμηση της b^* αντικαθιστώντας τις παραμέτρους του πληθυσμού στην 4.3 με τις αντίστοιχες δειγματικές ποσότητες, παίρνοντας δηλαδή μια εκτίμηση της μορφής

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2} \tag{4.5}$$

Την έκφραση 4.5 μπορεί κανείς εύκολα να την αναγνωρίσει από την ανάλυση παλινδρόμησης.

Η εκτιμήτρια $\hat{b}_n$ είναι η κλίση που προκύπτει εφαρμόζοντας την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων στα σημεία $(X_i, Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ και η σύνδεση μεταξύ μεταβλητών ελέγχου και παλινδρόμησης είναι χρήσιμη για την στατιστική ανάλυση των εκτιμητριών μεταβλητών ελέγχου.

Η εκτιμήτρια $\bar{Y}(\hat{b_n})$ είναι η προσαρμοσμένη τιμή στην ευθεία παλινδρόμησης στο $x = \mathbb{E}[X]$. Για περισσότερες πληροφορίες δείτε [5] (σελ. 185-204).

4.2 Μέθοδος αντιθετικής δειγματοληψίας

Η μέθοδος αντιθετικής δειγματοληψίας αποσκοπεί και πάλι στην ελάττωση της διασποράς, τώρα όμως εισάγοντας αρνητικές εξαρτήσεις μεταξύ ζεύγη αναπαραγωγών των Y_i. Η μέθοδος βασίζεται στην παρατήρηση ότι αν η U είναι μια ομοιόμορφα κατανεμημένη τ.μ. στο $[0,1]$ τότε η $1-U$ είναι επίσης ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0,1]$. Συνεπώς αν παράξουμε ένα δείγμα/τροχιά $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ μπορούμε χωρίς να αλλάξουμε τον νόμο της προσομοίωσης μας να παράξουμε ένα άλλο δείγμα $\{1-U_1, 1-U_2, \ldots, 1-U_n\}$. Τα ζεύγη $(U_i, 1-U_i)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ αποτελούν *αντιθετικά ζεύγη* με την έννοια ότι αν έχουμε μια μεγάλη τιμή για το U_i θα έχουμε μια μικρή τιμή για το $1-U_i$ (και αντιστρόφως).

Διαισθητικά, αυτή η παρατήρηση χρησιμεύει καθώς ένας υπολογισμός που προκύπτει από μια τροχιά με ασυνήθιστα μεγάλες τιμές αντισταθμίζεται από τον αντίστοιχο υπολογισμό της αντιθετικής τροχιάς, μειώνοντας έτσι την διασπορά.

Τα παραπάνω μπορούν να επεκταθούν για άλλες κατανομές κάνοντας χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού. Οι $F^{-1}(U)$ και $F^{-1}(1-U)$ έχουν την ίδια κατανομή F αλλά είναι αντιθετικές καθώς η F^{-1} είναι μονότονη συνάρτηση.

Για κατανομές συμμετρικές γύρο από το 0, οι $F^{-1}(1-u)$ και $F^{-1}(u)$ έχουν το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο. Στην ειδική περίπτωση που εμείς θα μελετήσουμε αργότερα στα αριθμητικά αποτελέσματα, καθώς μοντελοποιούμε κινήσεις Brown και έχουμε να κάνουμε με τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την τυπική Κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0,1)$, η μέθοδος της αντιθετικής δειγματοληψίας μπορεί να εφαρμοστεί δημιουργώντας ζεύγη $(Z_i, -Z_i)$ όπου $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$.

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, σκοπός μας είναι η εκτίμηση της μέσης τιμής $\mathbb{E}[Y]$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της αντιθετικής δειγματοληψίας, καταλήγουμε σε δύο δείγματα, ή καλύτερα σε ένα δείγμα ζεύγων $(Y_i, \tilde{Y}_i)$ με τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Τα $(Y_i, \tilde{Y}_i)$ αποτελούν ζεύγη ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών.
2. Για κάθε i τα Y_i και $\tilde{Y}_i$ έχουν την ίδια κατανομή αλλά δεν είναι ανεξάρτητα.

Η εκτιμήτρια αντιθετικής δειγματοληψίας ορίζεται να είναι ο αριθμητικός μέσος των $2n$ παρατηρήσεων

$$\hat{Y}_A = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (Y_i + \tilde{Y}_i)$$

και αν γράψουμε την παραπάνω σχέση στην μορφή

$$\hat{Y}_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2} \right)$$

αντιλαμβανόμαστε ότι η εκτιμήτρια $\hat{Y}_A$ είναι ο δειγματικός μέσος n ανεξάρτητων παρατηρήσεων $\{(Y_i + \tilde{Y}_i)/2\}_{i=1,2,\ldots,n}$. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Κ.Ο.Θ. και έχουμε

$$\frac{\hat{Y}_A - \mathbb{E}[Y]}{\sigma_A/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

όπου

$$\sigma_A^2 = \mathrm{Var}\Big(\frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2}\Big)$$

Για να αποφανθούμε περί της αποδοτικότητας μιας εκτιμήτριας μεθόδου αντιθετικής δειγματοληψίας έναντι μιας συνήθης εκτιμήτριας Monte Carlo βασιζόμενης σε ανεξάρτητες αναπαραγωγές των Y_i αρχικά θεωρούμε ότι το υπολογιστικό κόστος αναπαραγωγής του ζεύγους $(Y_i, \tilde{Y}_i)$ είναι προσεγγιστικά διπλάσιο από αυτό της αναπαραγωγής μιας Y_i. Αν και όπως αναφέραμε προηγουμένως στην περίπτωση τυπικών Κανονικών τυχαίων μεταβλητών μπορούμε απλώς να αντιστρέψουμε τα πρόσημα των Z_i (κάτι που προφανώς υπολογιστικά είναι πολύ φθηνότερο από την παραγωγή μιας νέας τυπικής Κανονικής τυχαίας μεταβλητής), σε αυτό το σημείο αγνοούμε τέτοιες υπολογιστικές διευκολύνσεις.

Κάτω από αυτή την υπόθεση, το συνολικό κόστος υπολογισμού της εκτιμήτριας $\hat{Y}_A$ είναι (προσεγγιστικά) ίδιο με το κόστος υπολογισμού $2n$ ανεξάρτητων αναπαραγωγών της Y_i και συνεπώς έχει νόημα η σύγκριση των διασπορών της εκτιμήτριας αυτής με την εκτιμήτρια $\hat{Y}_{2n}$.

Ενδιαφερόμαστε λοιπόν να εξετάσουμε πότε $\mathrm{Var}(\hat{Y}_A) < V(\hat{Y}_{2n})$, δηλαδή πότε

$$\mathrm{Var}\Big(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i + \tilde{Y}_i)\Big) < \mathrm{Var}\Big(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} Y_i\Big)$$

Αυτό συμβαίνει όταν $\frac{1}{4n^2}\mathrm{Var}\big(\sum_{i=1}^{n} Y_i + \tilde{Y}_i\big) < \frac{1}{4n^2}\mathrm{Var}\big(\sum_{i=1}^{2n} Y_i\big)$, δηλαδή όταν

$$\mathrm{Var}(Y_i + \tilde{Y}_i) < 2\mathrm{Var}(Y_i)$$

όπου

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_i + \tilde{Y}_i) &= \mathrm{Var}(Y_i) + \mathrm{Var}(\tilde{Y}_i) + 2\mathrm{Cov}(Y_i, \tilde{Y}_i)\\ &= 2\mathrm{Var}(Y_i) + 2\mathrm{Cov}(Y_i, \tilde{Y}_i)\end{aligned}$$

Συνεπώς καταλήγουμε ότι η αντιθετική δειγματοληψία μειώνει την διασπορά αν ικανοποιείται η εξής συνθήκη:

$$\mathrm{Cov}(Y_i, \tilde{Y}_i) < 0 \tag{4.6}$$

Για περισσότερες πληροφορίες δείτε [5] (σελ. 205-208).

4.3 Στρωματοποιημένη δειγματοληψία

Και πάλι, σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε την $\mathbb{E}[Y]$ όπου η Y είναι μια τυχαία μεταβλητή $Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Έστω ότι έχουμε K στρώματα, δηλ. έχουμε $A_1, \ldots, A_k$ ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία περιέχονται πλήρως οι τιμές της Y (σ.β.), ή αλλιώς: $\mathbb{P}(Y \in \cup_i A_i) = 1$. Τότε

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{K} \underbrace{\mathbb{P}(Y \in A_i)}_{:=p_i} \mathbb{E}[Y|Y \in A_i] = \sum_{i=1}^{K} p_i \mathbb{E}[Y|Y \in A_i] \tag{4.7}$$

Στην απλή τυχαία δειγματοληψία όταν παίρνουμε ένα δείγμα n ανεξάρτητων Y_i και καθώς το $n \to \infty$ θα έχουμε ότι το ποσοστό των Y_i σε κάθε στρώμα θα τείνει στο p_i. Στην στρωματοποιημένη δειγματοληψία επιλέγουμε εκ των προτέρων το ποσοστό των δειγμάτων που πρέπει να πάρουμε από κάθε στρώμα και κάθε μονάδα που παίρνουμε από το A_i έχει την κατανομή της Y δεδομένου ότι $Y \in A_i$.

Έστω τώρα ότι παίρνουμε ένα δείγμα μεγέθους n όπου από κάθε στρώμα παίρνουμε n_i μονάδες, με τέτοιο τρόπο ώστε $n_i = np_i$ (θεωρούμε για απλότητα ότι $n_i = np_i$ είναι ακέραιος). Για κάθε $i = 1, \ldots, K$ έχουμε Y_{ij}, $j = 1, \ldots, n_i$ ανεξάρτητες μετρήσεις από την δεσμευμένη κατανομή $Y|Y \in A_i$. Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της $\mathbb{E}[Y|Y \in A_i]$ δίνεται από τον δειγματικό μέσο του $i-$οστού στρώματος, δηλαδή από την εκτιμήτρια

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$$

Έπεται από την 4.7 ότι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της $\mathbb{E}[Y]$ είναι η

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^{K} p_i \bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \tag{4.8}$$

Η εκτιμήτρια $\hat{Y}$ διαφέρει από την συνήθη εκτιμήτρια του δειγματικού μέσου $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ στο ότι εξαλείφει την μεταβλητότητα μεταξύ των στρωμάτων χωρίς να επηρεάζει την μεταβλητότητα του δείγματος εντός των στρωμάτων.

Μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω με δύο τρόπους.

Για την πρώτη επέκταση της μεθόδου, επιτρέπουμε τα στρώματα να ορίζονται βάση μιας δεύτερης μεταβλητής X, την λεγόμενη *μεταβλητή στρωματοποίησης* η οποία θεωρούμε ότι παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^d$ και έτσι τα στρώματα θεωρούμε ότι είναι ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ τ.ω. $\mathbb{P}(X \in \cup_i A_i) = 1$. Συνεπώς τώρα μπορούμε να γενικεύσουμε την 4.7 ως:

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{K} \underbrace{\mathbb{P}(X \in A_i)}_{:=p_i} \mathbb{E}[Y|X \in A_i] = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{E}[Y|X \in A_i] \tag{4.9}$$

Για να χρησιμοποιήσουμε την 4.9 πρέπει να παράξουμε ζεύγη (X_{ij}, Y_{ij}), $j = 1, \ldots, n_i$ με δεσμευμένη κατανομή του ζεύγους (X, Y) δεδομένου ότι $X \in A_i$.

Για την δεύτερη επέκταση της μεθόδου, επιτρέπουμε τα $n_1, \ldots, n_K$ να είναι τυχαία (ωστόσο πάλι $\sum_{i=1}^{K} n_i = n$) αντί να είναι ανάλογα των p_i. Θέτοντας $q_i = n_i/n$ να είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων από το $i-$οστό στρώμα, μπορούμε να γράψουμε

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{K} p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{n} \sum i = 1^K \frac{p_i}{q_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \tag{4.10}$$

Ελαχιστοποιώντας την διασπορά της πιο πάνω εκτιμήτριας ως προς τα q_i, μπορούμε να βρούμε ένα κανόνα για το πως να κατανέμουμε τα στρώματα με ένα τρόπο που να είναι τουλάχιστον τόσο αποδοτικός όσο και όταν τα κατανέμουμε σε αντιστοιχία με τα p_i (δηλ. όταν $n_i = p_i n$). Για περισσότερες πληροφορίες δείτε [5] (σελ. 209-235).

4.4 Δειγματοληψία σπουδαιότητας

Η δειγματοληψία σπουδαιότητας (importance sampling) επιχειρεί να μειώσει την διασπορά αλλάζοντας το μέτρο πιθανότητας από το οποίο παράγονται τα δείγματα/τροχιές. Ο σκοπός αυτής της αλλαγής μέτρου είναι να δώσουμε μεγαλύτερο βάρος σε *σπουδαιότερα/σημαντικότερα* αποτελέσματα βελτιώνοντας έτσι την αποδοτικότητα της δειγματοληψίας μας.
Θεωρούμε το πρόβλημα εκτίμησης της ποσότητας

$$\alpha = \mathbb{E}[h(X)] = \int h(x) f(x) dx$$

όπου X είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathbb{R}^d$ με πυκνότητα πιθανότητας f και $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η συνήθης εκτιμήτρια Monte Carlo είναι

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(X_i)$$

όπου τα $X_1, \ldots, X_n$ είναι n ανεξάρτητες δειγματικές μονάδες από την f. Έστω τώρα g μια άλλη πυκνότητα πιθανότητας τ.ω.

$$f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0 \tag{4.11}$$

Συνεπώς μπορούμε να εκφράσουμε την ποσότητα που θέλουμε να εκτιμήσουμε ως

$$\alpha = \int h(x)\frac{f(x)}{g(x)}g(x)dx = \underbrace{\mathbb{E}_g\Big[h(X)\frac{f(X)}{g(X)}\Big]}_{\mathbb{E}\text{ ως προς την } g} \tag{4.12}$$

Αν τώρα πάρουμε ένα δείγμα n ανεξάρτητων μετρήσεων $X_1, \ldots, X_n$ από την g, η εκτιμήτρια δειγματοληψίας σπουδαιότητας που σχετίζεται με την g είναι η

$$\hat{\alpha}_n^g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)\frac{f(X_i)}{g(X_i)} \tag{4.13}$$

όπου το πηλίκο $f(X_i)/g(X_i)$ είναι η τιμή της παραγώγου Radon-Nikodym στο X_i.

Έπεται από την 4.12 ότι $\mathbb{E}_g[\hat{a}_n^g] = \alpha$ και συνεπώς η $\hat{\alpha}_n^g$ αποτελεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της α. Για να συγκρίνουμε την εκτιμήτρια δειγματοληψίας σπουδαιότητας με την συνήθη εκτιμήτρια, αφού είναι και οι δύο αμερόληπτες, αρκεί να συγκρίνουμε τις δεύτερες ροπές.

Στην δειγματοληψία σπουδαιότητας έχουμε

$$\mathbb{E}_g\Big[\Big(h(X)\frac{f(X)}{g(X)}\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[h(X)^2\frac{f(X)}{g(X)}\Big]$$

το οποίο, ανάλογα με την επιλογή της g θα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από την δεύτερη ροπή $\mathbb{E}[h(X)^2]$ της συνήθους δειγματοληψίας. Συνεπώς το κλειδί για να έχει νόημα η δειγματοληψία σπουδαιότητας είναι η κατάλληλη επιλογή της g.

Παρατήρηση 3: Αν θεωρήσουμε την h να είναι μια μη-αρνητική συνάρτηση, τότε το γινόμενο $h(x)f(x)$ είναι επίσης μη-αρνητικό και μπορεί να κανονικοποιηθεί σε πυκνότητα πιθανότητας. Θεωρούμε την g να είναι αυτή η πυκνότητα και τότε

$$g(x) \propto h(x)f(x)$$

όπου η σταθερά αναλογίας στην πιο πάνω σχέση είναι η $h(X_i)f(X_i)/g(X_i)$ ανεξαρτήτως της τιμής της X_i. Σε αυτή την περίπτωση, η εκτιμήτρια δειγματοληψίας σπουδαιότητας $\hat{\alpha}_n^g$ που δίνεται στην 4.13 μας δίνει μια εκτιμήτρια *μηδενικής διασποράς*. Στην πράξη αυτό δεν έχει καμία χρησιμότητα καθώς για να κανονικοποιήσουμε το γινόμενο $h \cdot f$ πρέπει να διαιρέσουμε με ολοκλήρωμα του, το οποίο είναι ακριβώς η ποσότητα α που θέλουμε να εκτιμήσουμε.

Παρ'όλα αυτά, η παραπάνω παρατήρηση μας βοηθά να επιλέξουμε μια στρατηγική για να εκτελέσουμε δειγματοληψία σπουδαιότητας. Θα πρέπει λοιπόν, να δειγματοληπτούμε σε αναλογία με το γινόμενο $h \cdot f$. Σε εφαρμογές όπως αυτές που μας ενδιαφέρουν στην παρούσα εργασία, δηλαδή σε εφαρμογές αποτίμησης παραγώγων, η h είναι συνήθως η αποτοκισμένη συνάρτηση αποπληρωμής του παραγώγου και f είναι η αδιάφορη κινδύνου πυκνότητα μιας διακριτής τροχιάς υποκείμενων αγαθών. Σε αυτή την περίπτωση, η *σπουδαιότητα* μιας τροχιάς μετριέται από το γινόμενο της αποτοκισμένης αποπληρωμής και της πυκνότητας πιθανότητας της.

Αν τώρα η h είναι η δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου, τότε η βέλτιστη πυκνότητα δειγματοληψίας σημαντικότητας είναι η αρχική πυκνότητα ελεγχόμενη στο σύνολο. Με άλλα λόγια έστω $h(x) = \mathbf{1}\{x \in A\}$ για κάποιο $A \subset \mathbb{R}^d$. Τότε $\alpha = \mathbb{P}(X \in A)$ και η πυκνότητα δειγματοληψίας σπουδαιότητας μηδενικής διασποράς $h(x)f(x)/\alpha$ είναι ακριβώς η δεσμευμένη πυκνότητα της X δεδομένου ότι $X \in \alpha$ (υποθέτοντας ότι $\alpha > 0$). Συνεπώς, όταν χρησιμοποιούμε την δειγματοληψία σπουδαιότητας για να εκτιμήσουμε μια πιθανότητα, θα πρέπει να στοχεύουμε σε μια πυκνότητα δειγματοληψίας σπουδαιότητας που να προσεγγίζει την δεσμευμένη πυκνότητα, δηλαδή μια g η οποία θα κάνει το ενδεχόμενο $\{X \in A\}$ πιο πιθανοφανές.

4.4.1 Τροχιοεξαρτώμενα Παράγωγα

Στο μοντέλο μας, οι υποκείμενες αξίες θεωρούμε ότι ακολουθούν μια κίνηση Brown, ή αλλιώς (μετά από την διακριτοποίηση) ότι μοντελοποιούνται από Κανονικά τυχαία διανύσματα. Αλλάζοντας τον συντελεστή τάσης (drift coefficient) αυτής της κίνησης Brown έτσι ώστε αυτά να κινούνται προς τις *σημαντικές* περιοχές, όπου η *σημαντικότητα* καθορίζεται από την συνάρτηση αποπληρωμής του δικαιώματος, μπορούμε να εκτελέσουμε δειγματοληψία σπουδαιότητας.

Η εύρεση της βέλτιστης αλλαγής του συντελεστή τάσης γίνεται μέσω ενός προβλήματος βελτιστοποίησης [6].

Όπως πάντα, περιοριζόμαστε σε ένα διακριτό χρονικό άξονα $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ και υποθέτουμε ότι η μόνη πηγή στοχαστικότητας στο μοντέλο μας είναι η κίνηση Brown. Οι προσαυξήσεις της $d-$ διάστατης κίνησης Brown από το t_{i-1} στο t_i προσομοιώνεται από

$$\sqrt{t_i - t_{i-t}} Z_i$$

όπου οι Z_i είναι $d-$ διάστατα Τυπικά Κανονικά τυχαία διανύσματα. Συμβολικά από τώρα και στο εξής, η τ.μ. Z είναι το διάνυσμα $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$, δηλαδή μια ολόκληρη τροχιά, και κάθε αποτέλεσμα Z προσδιορίζει την αποτοκισμένη αξία του δικαιώματος. Θεωρώντας ότι G είναι η συνάρτηση αποπληρωμής (αποτικισμένη αξία), σκοπός μας είναι η εκτίμηση της $\mathbb{E}[G(Z)]$.

4.4.2 Αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα αγοράς

Διακριτοποιούμε την κίνηση $GBM(r, \sigma^2)$:

$$S(t_i) = S(t_{i-1}) \exp\Big(\big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\big)(t_i - t_{i-1}) + \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i\Big), \quad i = 1, \ldots m$$

και σημειώνουμε και την συνάρτηση αποπληρωμής

$$G(Z) = G(Z_1, \dots Z_m) = e^{-rT}\Big[\bar{S} - K\Big]^+$$

βάση της οποίας αποτίμηση του δικαιώματος σημαίνει υπολογισμός της $\mathbb{E}[G(Z)]$ για $Z \sim \mathcal{N}(0, I)$.

Αλλαγή όρου τάσης: Γραμμικοποίηση

Μέσω της δειγματοληψίας σπουδαιότητας μπορούμε να αλλάξουμε την κατανομή της Z (τροχιάς) παίρνοντας και πάλι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της $\mathbb{E}[G(Z)]$. Περιορίζοντας τον εαυτό μας σε αλλαγές κατανομής όπου η μέση τιμή της Z από 0 πλέον θα είναι κάποιο άλλο διάνυσμα μ συμβολίζουμε με $\mathbb{P}_\mu$ και $\mathbb{E}_\mu$ την πιθανότητα και την μέση τιμή όταν $Z \sim \mathcal{N}(\mu, I)$.

Έστω τώρα ότι η f είναι η πυκνότητα πιθανότητας μιας Τυπική Κανονικής τ.μ. και g η πυκνότητα πιθανότητας μιας Κανονικής τ.μ. με μέσο μ και διασπορά 1.
Εύκολα προκύπτει ότι

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{f(Z_i)}{g(Z_i)} = \exp\Big(-\mu \sum_{i=1}^{m} Z_i + \frac{m}{2}\mu^2\Big) \tag{4.14}$$

Αν προσομοιώσουμε μια κίνηση Brown στον χρονικό άξονα $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ θέτοντας

$$W(t_n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i$$

τότε η 4.14 είναι το πηλίκο πιθανοφάνειας για μια αλλαγή μέτρου που προσθέτει μέσο $\mu\sqrt{t_i - t_{i-1}}$ στην προσαύξηση της κίνησης Brown στο $[t_{i-1}, t_i]$.

Από τα παραπάνω, βρίσκουμε ότι

$$\mathbb{E}[G(Z)] = \mathbb{E}_\mu\Big[G(Z)e^{-\mu^T Z + \frac{1}{2}\mu^T\mu}\Big]$$

για κάθε $\mu \in \mathbb{R}^d$.

Η εκτιμήτρια $\bar{Y}$ όπου

$$Y_i = G(Z_i)\exp(-\mu^T Z_i + \frac{1}{2}\mu^T\mu)$$

είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια για κάθε επιλογή του μ. Συνεπώς, θέλουμε να επιλέξουμε μ τ.ω. να έχουμε μια εκτιμήτρια μικρής διασποράς.

Καθώς η G παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές, μπορούμε να γράψουμε $G(z) = \exp(F(z))$, θεωρώντας $F(z) = -\infty$ αν $G(z) = 0$. Επίσης, το να παίρνουμε μια μέση τιμή μιας συνάρτησης της Z υπό το $\mathbb{P}_\mu$ είναι ισοδύναμο με το να αντικαταστήσουμε την Z με $\mu + Z$ και να πάρουμε την μέση τιμή κάτω από το αρχικό μας μέτρο. Άρα:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G(z)] &= \mathbb{E}[e^F(Z)] \\ &= \mathbb{E}_\mu\left[e^F(Z)e^{-\mu^T Z+\frac{1}{2}\mu^T\mu}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{F(\mu+Z)}e^{-\mu^T(\mu+Z)+\frac{1}{2}\mu^T\mu}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{F(\mu+Z)}e^{-\mu^T Z+\frac{1}{2}\mu^T\mu}\right] \end{aligned} \tag{4.15}$$

Για κάθε μ, η έκφραση μέσα στην πιο πάνω μέση τιμή είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια όπου $Z \sim \mathcal{N}(0, I)$. Αναλύουμε την F έτσι ώστε να πάρουμε μια προσέγγιση πρώτης τάξης για την εκτιμήτρια:

$$e^{F(\mu+Z)}e^{-\mu^T Z=\frac{1}{2}\mu^T\mu} \approx e^{F(\mu)+\nabla F(\mu)Z}e^{-\mu^T Z=\frac{1}{2}\mu^T\mu} \tag{4.16}$$

Αν μπορούμε να επιλέξουμε μ τ.ω. να ικανοποιείται η συνθήκη σταθερού σημείου

$$\nabla F(\mu) = \mu^T \tag{4.17}$$

τότε η έκφραση στο δεξί μέλος της 4.16 απλοποιείται σε μια σταθερά χωρίς καμία εξάρτηση από την Z. Σε μια τέτοια περίπτωση προφανώς η εκτέλεση δειγματοληψίας σπουδαιότητας με αυτό το μ θα μας έδινε μια εκτιμήτρια μηδενικής διασποράς, ενώ θα μας έδινε μια εκτιμήτρια χαμηλής διασποράς αν η 4.17 ίσχυε προσεγγιστικά.

Αλλαγή όρου τάσης: Κανονική Προσέγγιση και Βέλτιστη Τροχιά

Όπως έχουμε προαναφέρει στην Παρατήρηση 3 , η βέλτιστη πυκνότητα δειγματοληψίας σπουδαιότητας είναι το (κανονικοποιημένο) γινόμενο της ολοκληρωτέας ποσότητας (συνάρτησης αποπληρωμής) και της αρχικής πυκνότητας.

Στην δική μας περίπτωση, έχουμε ότι η βέλτιστη πυκνότητα είναι ανάλογη της ποσότητας

$$e^{F(z)} - \frac{1}{2}z^T z$$

αφού $G(z) = e^{F(z)}$ είναι η συνάρτηση αποπληρωμής και $e^{-\frac{1}{2}z^T z}$ είναι ανάλογη της Τυπικής Κανονικής πυκνότητας.

Η κανονικοποίηση της πιο πάνω συνάρτησης παράγει μια πυκνότητα πιθανότητας, όχι απαραίτητα όμως Κανονική. Καθώς περιοριζόμαστε στην αλλαγή του μέσου, επιχειρούμε την επιλογή μιας

μ τ.ω. $\mathcal{N}(\mu, I)$ να προσεγγίζει την βέλτιστη κατανομή.
Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι να θεωρήσουμε το μ να είναι η επικρατούσα τιμή της βέλτιστης πυκνότητας, δηλαδή να διαλέξουμε ένα μ το οποίο θα είναι η λύση της

$$\max_z F(z) - \frac{1}{2} z^T z \tag{4.18}$$

Η συνθήκη πρώτης τάξης για το βέλτιστο είναι $\nabla F(z) = z^T$, που συμπίπτει με την συνθήκη σταθερού σημείο στο 4.17.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την λύση z^* της 4.18 ως μια βέλτιστη τροχιά. Αυτή η λύση είναι η πιο *σπουδαία* τροχιά αν μετρήσουμε την σπουδαιότητα ως το γινόμενο της αποπληρωμής και της πυκνότητας. Διαλέγοντας $\mu = z^*$ διαλέγουμε συνεπώς την νέα τάση που σπρώχνει την στοχαστική διαδικασία στην βέλτιστη τροχιά.

Υπολογισμός νέου όρου τάσης

Η επίλυση της 4.18 ισοδυναμεί στην μεγιστοποίηση της $G(z)e^{-\frac{1}{2}z^T z}$ όπου G είναι η αποτοκισμένη αποπληρωμή του δικαιώματος. Καθώς ο παράγοντας αποτοκισμού e^{-rT} είναι μια σταθερά, μπορούμε να την αγνοήσουμε στο πρόβλημα βελτιστοποίησης μας και να θέσουμε $G(z) = [\bar{S} - K]^+$. Επίσης, αρκεί να λάβουμε υπόψιν μας τα σημεία όπου $G(z) > 0 \rightarrow \bar{S} > K$ οπου και η G είναι παραγωγίσιμη.

Για τις συνθήκες πρώτης τάξης, παραγωγίζουμε την

$$[\bar{S} - K]e^{-\frac{1}{2}z^T z}$$

και θέτουμε ίσον με το μηδέν, παίρνοντας

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial z_j} - [\bar{S} - K]z_j = 0$$

και χρησιμοποιώντας τώρα το σύνηθες σχήμα διακριτοποίησης έχουμε

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial z_j} = \frac{1}{m}\sum_{i=j}^{m} \frac{\partial S(t_i}{\partial z_j} = \frac{1}{m}\sum_{i=j}^{m} \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}} S(t_i)$$

καταλήγοντας έτσι στις συνθήκες πρώτης τάξης

$$z_j = \frac{\sum_{i=j}^{m} \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1} S(t_i)}}{mG(z)}$$

και καθώς θεωρούμε ισαπέχοντα σημεία στον άξονα του χρόνου, με $h = t_i - t_{i-1}$, προκύπτει:

$$z_1 = \frac{\sigma\sqrt{h}(G(z)+K)}{G(z)}, \quad z_{j+1} = z_j - \frac{\sigma\sqrt{h}S(t_j)}{mG(z)}, \quad j = 1, \ldots, m-1 \tag{4.19}$$

Δοσμένης της τιμής της $G(z)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε την z. Πιο συγκεκριμένα, αν $y \equiv G(z)$ μπορούμε μέσω της 4.19 να υπολογίσουμε την z_1, μέσω του σχήματος διακριτοποίησης την $S(t_1)$ και ξανά από την 4.19 την z_2, κ.ο..κ.

Για κάθε τέτοια διαδικασία, η y ορίζει μια τροχιά $S(t_i, y)$, $i = 1, \ldots, m$. Η επίλυση των συνθηκών πρώτης τάξης ανάγεται στην εύρεση της y για την οποία η αποπληρωμή στο $S(t1, y), \ldots S(t_m, y)$ είναι πράγματι η y, δηλαδή ανάγεται στην εύρεση της λύσης της εξίσωσης

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} S(t_j, y) - K - y = 0$$

Στο [6] αναφέρεται ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα φαίνεται να δείχνουν ότι η παραπάνω εξίσωση έχει μια μοναδική λύση. Αυτή η λύση μπορεί να βρεθεί εύκολα μέσω μιας μονοδιάστατης αναζήτησης.

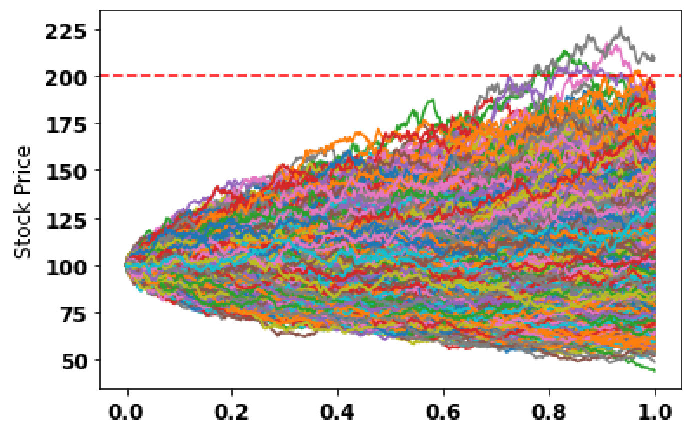
Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την δειγματοληψία σπουδαιότητας δείτε [5] (σελ. 255-275).

4.4.3 Παράδειγμα

Αν και στην επόμενη ενότητα, όπου θα αποτιμήσουμε αριθμητικά Ασιατικά δικαιώματα αγοράς χρησιμοποιώντας την κλασική μέθοδο Monte Carlo και τις μεθόδους της Μεταβλητής Ελέγχου και των Αντιθετικών Μεταβλητών με σκοπό να ελαττώσουμε την διασπορά των εκτιμήσεων, δεν θα εκτελέσουμε αποτίμηση χρησιμοποιώντας Δειγματοληψία Σπουδαιότητας. Ωστόσο, στην συνέχεια θα δώσουμε ένα παράδειγμα για το πως αυτή η μέθοδος μπορεί να υλοποιηθεί και για την αποδοτικότητα της.

Θεωρούμε $S_0 = 100, r = 0.05, \sigma = 0.2$, $K = 200$, $T = 1$ και ότι θέλουμε να αποτιμήσουμε ένα από Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς.

Στο πιο κάτω γράφημα αναπαρίστανται οι τροχιές $n = 10000$ προσομοιώσεων της κίνησης Brown που μοντελοποιεί το χρεόγραφο με τις προαναφερθείσες παραμέτρους.



Από το παραπάνω μπορεί κανείς εύκολα να δει ότι η τυπική τιμή του χρεογράφου δεν φτάνει το strike price στον χρόνο ωρίμανσης.

Αν επιχειρήσουμε να εκτελέσουμε την απλή μέθοδο Monte Carlo, καθώς σε αυτή την περίπτωση, οι πλείστες τιμές των αποπληρωμών (αν όχι όλες) θα είναι μηδέν και θα οδηγηθούμε σε λανθασμένη αποτίμηση. Καθώς το παράγωγο σπάνια θα καταλήγει in the money, θα έχει επίσης μεγάλη διασπορά η εκτιμήτρια μας.

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα εκτελούμε Δειγματοληψία Σπουδαιότητας, μέσω ενός μετασχηματισμού Girsanov (δηλαδή υπολογίζοντας το πηλίκο πιθανοφάνειας/παράγωγο Radon Nikodym). Αυτός ο μετασχηματισμός θα μας δώσει ένα νέο όρο τάσης που θα σπρώχνει το τυπικό μονοπάτι της διαδικασίας που μοντελοποιεί το χρεόγραφο σε μια σημαντική περιοχή (in the money).

Cameron-Martin-Girsanov

Έστω $\{W_t : t \in [0,T]\}$ κίνηση Brown στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$. Πραγματοποιώντας τον μετασχηματισμό (βλέπε 6.4)

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{\beta W_T - \frac{\beta^2}{2}T}$$

η $\{\tilde{W}_t : t \in [0,T]\}$ με $\tilde{W_T} = W_t - \beta t$ είναι κίνηση Brown στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.

Στην περίπτωση που θα δείξουμε και στο παράδειγμα στην συνέχεια, θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(S_T - K)^+] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(S_0 e^{\mu T + \sigma W_T} - K)^+]$$

ωστόσο έχουμε ένα way-out-of-the-money option, δηλαδή S_0 τ.ω.

$$\mathbb{P}[S_0 e^{\mu T + \sigma W_T} > K] \ll 1$$

Κάνουμε τον υπολογισμό ως εξής

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(S_T - K)^+] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(S_0 e^{(\mu+\sigma\beta)T+\sigma\tilde{W}_T} - K)^+] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\beta\tilde{W}_T - \frac{\beta^2}{2}T}(S_0 e^{(\mu+\sigma\beta)T+\sigma\tilde{W}_T} - K)^+]\end{aligned}$$

Δηλαδή αντί να προσομοιώσουμε μια γεωμετρική κίνηση Brown S_T με παράμετρο μ και να πάρουμε τον μέσο όρο των $(S_T - K)^+$ μπορούμε να προσομοιώσουμε μια γεωμετρική κίνηση Brown με παράμετρο $(\mu + \sigma\beta)$ και να πάρουμε τον μέσο όρο των $e^{-\beta\tilde{W}_T - \frac{\beta^2}{2}T}(\tilde{S}_T - K)^+$.

Αποτίμηση

Όπως μπορείτε να δείτε στο Α΄.6, υπολοποιούμε τον αλγόριθμο που περιγράφεται από τους Boyle, Broadie και Glasserman στο [2]. Αυτός ο αλγόριθμος περιγράφεται ως εξής:

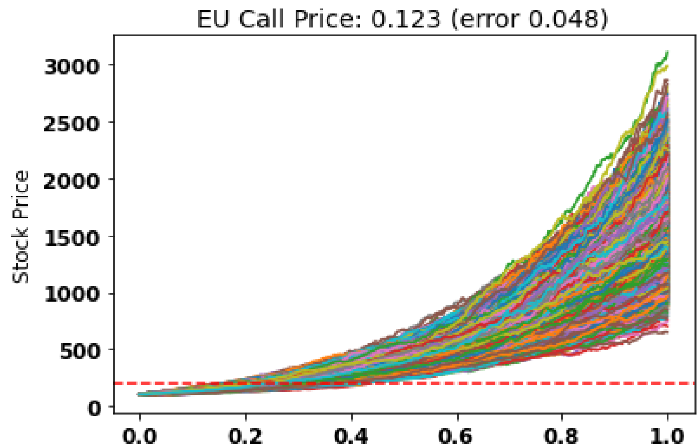
1. Η αύξηση του drift υλοποιείται δειγματοληπτώντας από μια μετατοπισμένη Κανονική κατανομή αντί από μια τυποποιημένη Κανονική κατανομή (εμείς θεωρήσαμε $\mu = 0.6$.

2. Στο τέλος της συνήθους διαδικασίας προσομοίωσης των τροχιών και του υπολογισμού των αποπληρωμών της κάθε τροχιάς, η αποπληρωμή σταθμίζεται για να δώσει τις σωστές απαντήσεις στο σωστό μας πρόβλημα.

3. Το παραπάνω επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας κάθε προσμοιωμένη αποπληρωμή με το πηλίκο πιθανοφάνειας

$$\text{ratio} = e^{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i'^2 - \sum_{i=1}^{n}(Z_i' - \mu\sqrt{dt})^2\right]}$$

Εκτελώντας την αποτίμηση παίρνουμε μια τιμή $C = 0.13$, όπως αναγράφεται και στο παρακάτω γράφημα όπου μπορεί κανείς να δει και τις τροχιές της νέας προσομοίωσης, όπου καταφέραμε να σπρώξουμε με την αλλαγή μας την τυπική τροχιά in the money.


EU Call Price: 0.123 (error 0.048)
Stock Price
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

5 | Αριθμητικά Αποτελέσματα

5.1 Σκοπός και σχεδιασμός των πειραμάτων

Σκοπός των αριθμητικών υπολογισμών που εκτελέσαμε ήταν η αποτίμηση Ασιατικών δικαιωμάτων αγοράς και η σύγκριση των διαφόρων μεθόδων ελάττωσης διασποράς. Δεν εκτελέσαμε πειράματα για την αποτίμηση Ασιατικών δικαιωμάτων πώλησης, καθώς τα αποτελέσματα είναι παρόμοια και μπορεί εύκολα κανείς με μια μικρή τροποποίηση των συναρτήσεων αποπληρωμής στους κώδικες που υλοποιήσαμε, να τα παράξει με ευκολία.
Για να πετύχουμε αυτό τον σκοπό θα αποτιμήσουμε τα διάφορα δικαιώματα, χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεθόδους, διατηρώντας ωστόσο κάποιες σταθερές:

1. Πάντα πραγματευόμαστε με ένα χρεόγραφο με ρίσκο με αρχική τιμή $S_0 = 100$.

2. Θεωρούμε ότι το επιτόκιο του χρεογράφου άνευ ρίσκου είναι $r = 0.15$.

Διατηρώντας τα παραπάνω σταθερά, εκτελούμε τις προσομοιώσεις και υπολογίζουμε τις τιμές των χρεογράφων για διαφορετικές τιμές των σ και K. Συγκεκριμένα παίρνουμε $\sigma \in \{0.15, 0.20, 0.25, 0.30\}$ και $K \in \{90, 100, 110\}$.

Για τον υπολογισμό των τιμών των πιο πάνω δικαιωμάτων, θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες από τις προαναφερθείσες μεθόδους, με σκοπό την σύγκριση τους. Έχουμε επιλέξει τις εξής:

1. Απλή μέθοδος Monte Carlo.

2. Μέθοδος Μεταβλητών Ελέγχου.

3. Μέθοδος Αντιθετικής Δειγματοληψίας.

5.2 Διακριτοποίηση

Η λύση της ΣΔΕ της τιμής του υποκείμενου χρεογράφου με ρίσκο (underlying asset) είναι:

$$S_T = S_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z\right)$$

Διακριτοποιούμε χρησιμοποιώντας το κλασικό σχήμα Euler, χωρίζοντας το χρονικό διάστημα $[0,T]$ σε m το πλήθος υποδιαστήματα με μήκος $\Delta t = T/m$. Πάνω σε κάθε υποδιάστημα $[t, t+\Delta t]$ προσομοιώνουμε το βήμα εφαρμόζοντας το διακριτό σχήμα Euler

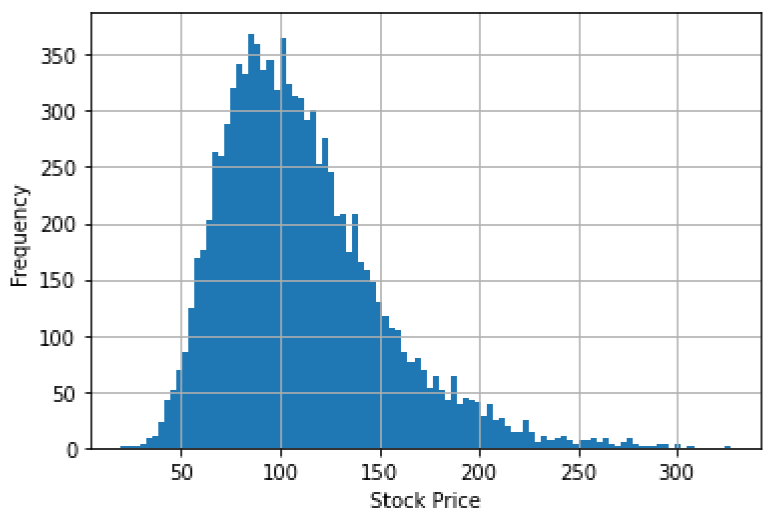
$$S(t_{j+1}) = S(t_j) \exp\left([r - \frac{1}{2}]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{j+1}\right) \tag{5.1}$$

όπου οι $Z_1, Z_2, \ldots Z_m$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. που ακολουθούν την τυπική Κανονική κατανομή.

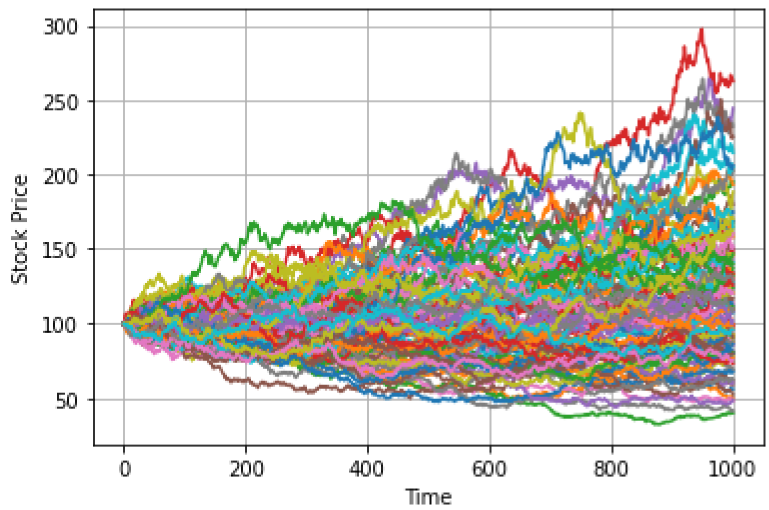
5.3 Προσομοίωση

Προσομοιώσαμε τροχιές του υποκείμενου αγαθού και στην συνέχεια δίνουμε κάποιες γραφικές παραστάσεις που επιβεβαιώνουν κάποια από τα γνωστά από την θεωρία μέχρι τώρα.

Πιο κάτω μπορούμε να δούμε το ιστόγραμμα των τιμών ενός χρεογράφου στο μοντέλο BSM με $S_0 = 100, r = 0.05, \sigma = 0.25$ και $T = 2$ το οποίο προσομοιώσαμε $n = 10000$ φορές και όπου η διακριτοποίηση έγινε χωρίζοντας τον άξονα του χρόνου $[0,T]$ σε $m = 1000$ ισομήκη τμήματα. Από το ιστόγραμμα μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι η τιμή αυτή ακολουθεί lognormal κατανομή: (βλέπε κώδικα Α΄.1)



Πιο κάτω δίνονται και κάποιες από τις $n = 10000$ τροχιές που χρησιμοποιήθηκαν πιο πάνω:



5.4 Απλό Monte Carlo

5.4.1 Κώδικας

Πιο κάτω παραθέτουμε τον κώδικα σε Python που υλοποιήσαμε και εκτελέσαμε έτσι ώστε να εκτελέσουμε τα πειράματα με τις παραμέτρους που αναφέραμε παραπάνω για την απλή μέθοδο Monte Carlo.

Listing 5.1: Κώδικες - Απλό Monte Carlo

```
def price_naive(gbm, r, T, K, n):
    disc_payoffs = [np.exp(-r*T) * max(np.mean(path) - K, 0) for path in gbm]
    results = {
        "price": np.mean(disc_payoffs),
        "se": np.std(disc_payoffs) / np.sqrt(n),
        "y": disc_payoffs
    }
    return results


def aa_mc_basic(params: dict):
    """Price arithmetic Asian Call options using basic Monte Carlo."""
    S0 = params.get('S0')
    T = params.get('T')
    M = params.get('M')
    n = params.get('n')
```

```
sigmas = params.get('sigmas')
r = params.get('r')
strikes = params.get('K')

workbook = Workbook(FileFormatType.XLSX)
worksheets = workbook.getWorksheets()
sheet = worksheets.get(0)
cells = sheet.getCells()

first_row = f"r= {r}, S(0) = {S0}, T = {T} and n = {n} (number of
    simulations)"
cell = cells.get(0, 0)
cell.putValue(first_row)

results_names = (
    ' ',
    'Strike Price',
    'Call Price',
    'Estimator Error',
    'Execution Time (secs)',
)

for i in range(len(results_names)):
    cell = cells.get(1, i)
    cell.putValue(results_names[i])

row = 2
for sigma in sigmas:
    cell = cells.get(row, 0)
    cell.putValue(sigma)
    for K in strikes:
        start_time = time.time()
        res = price_naive(generate_gbm(S0, r, sigma, T, M, n),
                          r, T, K, n)

        call = res['price']
        call_se = res['se']
        end_time = time.time()

        results = (
            str(K),
            str(round(call, 4)),
            str(round(call_se, 4)),
            end_time - start_time
        )
```

```
        # write to excel
        for i in range(1, len(results) + 1):
            cell = cells.get(row, i)
            cell.putValue(results[i-1])

        row += 1

workbook.save('aa_mc_basic.xlsx')
```

5.4.2 Αποτελέσματα

Πιο κάτω μπορείτε να δείτε τον πίνακα των αποτελεσμάτων που προέκυψε από την εκτέλεση του πιο πάνω κώδικα.

NAIVE MONTE CARLO				
r= 0.15, S(0) = 100, T = 1 and n = 10000 (number of simulations)				
σ	Strike Price	Call Price	Estimator Error	Execution Time (secs)
0.15	90	15.4085	0.0809	30.52
	100	7.5555	0.0702	30.33
	110	2.5666	0.0459	30.41
0.2	90	15.6486	0.105	30.38
	100	8.4471	0.0902	30.65
	110	3.5294	0.0636	30.32
0.25	90	16.1312	0.1289	30.43
	100	9.365	0.1094	30.81
	110	4.604	0.0827	30.34
0.3	90	16.4768	0.1488	30.35
	100	10.1275	0.1281	30.33
	110	5.7855	0.1046	30.08

5.5 Monte Carlo με μεταβλητές ελέγχου

5.5.1 Κώδικας

Πιο κάτω παραθέτουμε τον κώδικα σε Python που υλοποιήσαμε και εκτελέσαμε έτσι ώστε να εκτελέσουμε τα πειράματα με τις παραμέτρους που αναφέραμε παραπάνω για την μέθοδο Monte Carlo με χρήση μεταβλητών ελέγχου.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε ως μεταβλητή ελέγχου την τιμή ενός γεωμετρικού Ασιαστικού δικαιώματος αγοράς, που όπως έχουμε προαναφέρει μπορούμε να αποτιμήσουμε αναλυτικά.

Listing 5.2: Κώδικες - MC Μεταβλητές Ελέγχου

```python
def ga_analytic(S0, K, T, sigma, r):
    tau = T / 3
    l = ((np.log(S0) / K) - 0.5 * (r - (sigma ** 2 / 2)) * T / (sigma *
        np.sqrt(tau)))
    d1 = -l + sigma * np.sqrt(tau)
    d2 = -l
    b = r - 0.5*r*T - (1/6)*T*sigma**2
    val = S0 * np.exp(
        (b - r) * T
        ) * norm.cdf(d1) - np.exp(-r * T) * K * norm.cdf(d2)
    return val


def price_control_variate(gbm, S0, K, T, sigma, r, n):
    arithmetic = [np.exp(-r*T) * max(np.mean(path)-K, 0) for path in gbm]
    geometric = [np.exp(-r*T) * max(gmean(path)-K, 0) for path in gbm]

    analytic = ga_analytic(S0, K, T, sigma, r)
    control_variate_estimator = [
      aa + (analytic - ga) for aa, ga in zip(arithmetic, geometric)
    ]
    results = {
        'price': np.mean(control_variate_estimator),
        'se': np.std(control_variate_estimator) / np.sqrt(n)
    }

    return results


def aa_mc_control_variate(params: dict):
    """Price arithmetic Asian Call options using Monte Carlo with control
        variates."""
    S0 = params.get('S0')
    T = params.get('T')
    M = params.get('M')
    n = params.get('n')
    sigmas = params.get('sigmas')
    r = params.get('r')
    strikes = params.get('K')

    workbook = Workbook(FileFormatType.XLSX)
    worksheets = workbook.getWorksheets()
    sheet = worksheets.get(0)
    cells = sheet.getCells()
```

```
first_row = f"r= {r}, S(0) = {S0}, T = {T} and n = {n} (number of
    simulations)"
cell = cells.get(0, 0)
cell.putValue(first_row)

results_names = (
    ' ',
    'Strike Price',
    'Call Price',
    'Estimator Error',
    'Execution time (secs)',
)

for i in range(len(results_names)):
    cell = cells.get(1, i)
    cell.putValue(results_names[i])

row = 2
for sigma in sigmas:
    cell = cells.get(row, 0)
    cell.putValue(sigma)
    for K in strikes:
        start_time = time.time()
        res = price_control_variate(
            generate_gbm(S0, r, sigma, T, M, n), S0, K, T, sigma, r, n)

        call = res['price']
        call_se = res['se']
        end_time = time.time()

        results = (
            str(K),
            str(round(call, 4)),
            str(round(call_se, 4)),
            end_time - start_time,
        )

        # write to excel
        for i in range(1, len(results) + 1):
            cell = cells.get(row, i)
            cell.putValue(results[i-1])

        row += 1

workbook.save('aa_mc_control_variate_final.xlsx')
```

5.5.2 Αποτελέσματα

Πιο κάτω μπορείτε να δείτε τον πίνακα των αποτελεσμάτων που προέκυψε από την εκτέλεση του πιο πάνω κώδικα.

CONTROL VARIABLE MONTE CARLO				
r= 0.15, S(0) = 100, T = 1 and n = 10000 (number of simulations)				
σ	Strike Price	Call Price	Estimator Error	Execution time (secs)
0.15	90	14.1635	0.0028	30.99
	100	7.4809	0.0029	30.99
	110	0.7433	0.003	33.33
0.2	90	14.2041	0.0044	31.60
	100	8.1718	0.0045	31.33
	110	2.0862	0.0048	31.26
0.25	90	14.5222	0.0064	31.01
	100	8.9456	0.0067	31.25
	110	3.3211	0.0069	31.14
0.3	90	14.9769	0.0089	31.52
	100	9.7524	0.0093	30.70
	110	4.4503	0.0094	31.19

5.6 Monte Carlo με αντιθετικές μεταβλητές

5.6.1 Κώδικας

Πιο κάτω παραθέτουμε τον κώδικα σε Python που υλοποιήσαμε και εκτελέσαμε έτσι ώστε να εκτελέσουμε τα πειράματα με τις παραμέτρους που αναφέραμε παραπάνω για την μέθοδο Monte Carlo με χρήση αντιθετικών μεταβλητών.

Listing 5.3: Κώδικες - MC Αντιθετική Δειγματοληψία

```python
def generate_gbm_antithetic(S0, r, sigma, T, M, n):
    """Geometric Brownian Motion."""
    dt = T / M
    gbm1 = []
    gbm2 = []
    for i in range(n):
        S1, S2 = np.zeros(M), np.zeros(M)
        S1[0] = S0
        S2[0] = S0
        for j in range(1, M):
            z1 = np.random.standard_normal()
```

```
            z2 = - z1
            point1 = S1[j-1] * np.exp((r-0.5 * sigma ** 2) * dt +
                                      sigma * np.sqrt(dt) * z1)
            point2 = S2[j-1] * np.exp((r-0.5 * sigma ** 2) * dt +
                                      sigma * np.sqrt(dt) * z2)
            S1[j] = point1
            S2[j] = point2
        gbm1.append(S1)
        gbm2.append(S2)
    return [list(gbm1), list(gbm2)]


def price_naive(gbm, r, T, K, n):
    disc_payoffs = [np.exp(-r*T) * max(np.mean(path) - K, 0) for path in gbm]
    results = {
        "price": np.mean(disc_payoffs),
        "se": np.std(disc_payoffs) / np.sqrt(n),
        "y": disc_payoffs
    }
    return results

def price_antithetic(gbms, S0, K, T, sigma, r, n):
    res1 = price_naive(gbms[0], r, T, K, n)
    res2 = price_naive(gbms[1], r, T, K, n)
    sample = np.divide(np.add(res1['y'], res2['y']), 2)
    results = {
        "price": 0.5 * (res1['price'] + res2['price']),
        "se": np.std(sample)/np.sqrt(n)
    }
    return results

def aa_mc_antithetic(params: dict):
    """Price arithmetic Asian Call options using Monte Carlo with antithetic
        variates."""
    S0 = params.get('S0')
    T = params.get('T')
    M = params.get('M')
    n = params.get('n')
    sigmas = params.get('sigmas')
    r = params.get('r')
    strikes = params.get('K')
    dt = T / M
    c = []

    workbook = Workbook(FileFormatType.XLSX)
    worksheets = workbook.getWorksheets()
```

```python
sheet = worksheets.get(0)
cells = sheet.getCells()

first_row = f"r= {r}, S(0) = {S0}, T = {T} and n = {n} (number of
    simulations)"
cell = cells.get(0, 0)
cell.putValue(first_row)

results_names = (
    ' ',
    'Strike Price',
    'Call Price',
    'Estimator Error',
    'Execution time (secs)',
)

for i in range(len(results_names)):
    cell = cells.get(1, i)
    cell.putValue(results_names[i])

row = 2
for sigma in sigmas:
    cell = cells.get(row, 0)
    cell.putValue(sigma)
    for K in strikes:
        start_time = time.time()
        res = price_antithetic(
            generate_gbm_antithetic(S0, r, sigma, T, M, n), S0, K, T,
            sigma, r, n)

        call = res['price']
        call_se = res['se']
        end_time = time.time()

        results = (
            str(K),
            str(round(call, 4)),
            str(round(call_se, 4)),
            round(end_time - start_time, 2),
        )

        # write to excel
        for i in range(1, len(results) + 1):
            cell = cells.get(row, i)
            cell.putValue(results[i-1])
```

```
        row += 1

workbook.save('aa_mc_antithetic.xlsx')
```

5.6.2 Αποτελέσματα

Πιο κάτω μπορείτε να δείτε τον πίνακα των αποτελεσμάτων που προέκυψε από την εκτέλεση του πιο πάνω κώδικα.

ANTITHETIC VARIATES MONTE CARLO				
r= 0.15, S(0) = 100, T = 1 and n = 10000 (number of simulations)				
σ	Strike Price	Call Price	Estimator Error	Execution time (secs)
0.15	90	15.4279	0.0084	57.05
	100	7.6018	0.0204	61.46
	110	2.4698	0.0265	55.78
0.2	90	15.6327	0.0193	55.92
	100	8.3924	0.0324	55.80
	110	3.5771	0.0372	55.58
0.25	90	16.0055	0.0316	55.89
	100	9.2827	0.045	55.65
	110	4.6665	0.0482	55.90
0.3	90	16.4803	0.0447	55.77
	100	10.2429	0.0588	55.70
	110	5.6776	0.0597	68.66

5.7 Σύγκριση Αποτελεσμάτων

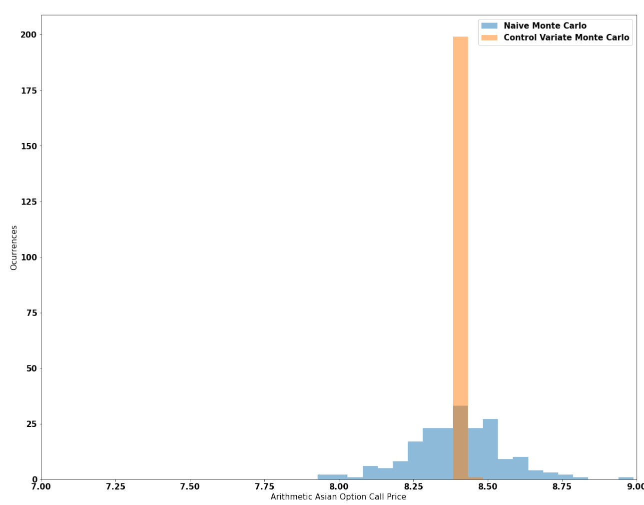
Από τα αποτελέσματα στον πίνακα 5.4.2 μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε τις αδυναμίες της απλής μεθόδου Monte Carlo, συγκριτικά με τα αποτελέσματα των πινάκων 5.5.2 και 5.6.2.

Πριν εξετάσουμε τον χρόνο εκτέλεσης των μεθόδων ελάττωσης διασποράς, αρχικά (αφού εναδιαφερόμαστε για την σύγκλιση των μεθόδων) πρέπει να τις συγκρίνουμε βάση των σφαλμάτων των εκτιμητριών.

Από τους πίνακες 5.5.2 και 5.6.2 μπορούμε άμεσα να αποφανθούμε ότι η χρήση της τιμής του γεωμετρικού Ασιατικού δικαιώματος ως μεταβλητή ελέγχου αποφέρει καλύτερα αποτελέσματα από την χρήση Αντιθετικής Δειγματοληψίας.

Όσον αφορά τους χρόνους εκτέλεσης (χρονική πολυπλοκότητα), οι δύο μέθοδοι (Μεταβλητών Ελέγχου και Αντιθετικής Δειγματοληψίας) έχουν παρόμοιο χρόνο εκτέλεσης.

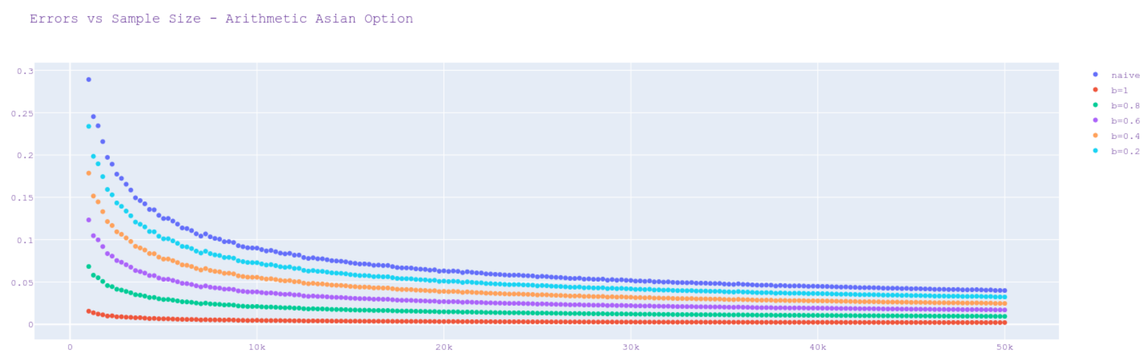
Έχοντας υπόψιν μας τα παραπάνω, μπορούμε να καταλήξουμε ότι η μέθοδος των Μεταβλητών Ελέγχου είναι καταλληλότερη σε σύγκριση με αυτή της Αντιθετικής Δειγματοληψίας.
Πιο κάτω παραθέτουμε ένα ιστόγραμμα των τιμών ενός ασιατικού δικαιώματος αγοράς, όπου $S_0 = 100, r = 0.15, \sigma = 0.2$ και $T = 1$, στο οποίο αναπαριστούμε τα αποτελέσματα 200 αποτιμήσεων με χρήση της απλής μεθόδου Monte Carlo σε αντιπαράθεση με τα αποτελέσματα 200 αποτιμήσεων με την χρήση της μεθόδου των Μεταβλητών Ελέγχου:

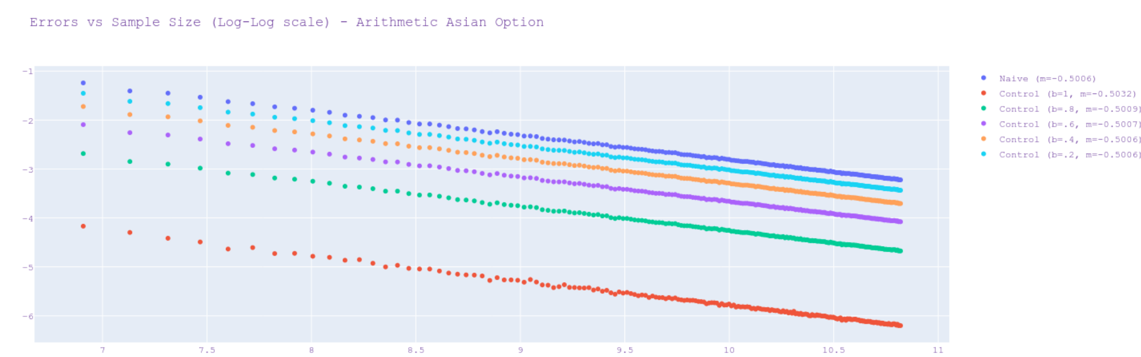


Επιβεβαιώνουμε λοιπόν και οπτικά ότι η διασπορά ελαττώνεται δραστικά με την χρήση της μεθόδου Μεταβλητών Ελέγχου. (κώδικας: Α΄.3)

5.7.1 Σύγκλιση

Στα επόμενα γράφημα αναπαριστούμε για διάφορα $n \in [1000, 50000]$ την δειγματική τυπική απόκλιση για την απλή μέθοδο Monte Carlo και για τη μέθοδο της μεταβλητής ελέγχου με διάφορες τιμές του συντελεστη b (στην φυσική κλίμακα και σε log-log κλίμακα για να εξετάσουμε καλύτερα τον ρυθμό σύγκλισης).





Παρατηρούμε τα εξής:

1. Όπως αναμένουμε γενικά για μεθόδους Monte Carlo, οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν με ρυθμό $O(n^{-1/2})$.

2. Υπενθυμίζοντας ότι η μορφή του τυπικού σφάλματος για μεθόδους Monte Carlo είναι $\sigma_f/\sqrt{n}$, από τα παραπλανω γραφήματα παρατηρούμε ότι η μέθοδος μεταβλητής ελέγχου μας δίνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με την την απλή μέθοδο Monte Carlo λόγω της πολύ μικρότερης διασποράς της εκτιμήτριας.

6 Θεωρία-Αποδείξεις

Όλα τα θεωρήματα και οι αποδείξεις που παρουσιάζονται στην συνέχεια έχουν γίνει βάση των σημειώσεων [4].

6.1 Το θεώρημα Radon-Nikodym

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1 (Ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας)**:** Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος. Δύο μέτρα πιθανότητας $\mathbb{P}$ και $\mathbb{Q}$ καλούνται ισοδύναμα (συμβ. $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$) αν για κάθε $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}[A] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}[A] = 0$$

δηλαδή, είναι ισοδύναμα όταν συμφωνούν στα σύνολα μέτρου 0.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1: Δύο μέτρα πιθανότητας $\mathbb{P}$ και $\mathbb{Q}$ είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν υπάρχει τυχαία μεταβλητή $Z > 0$ τ.ω. $\mathbb{E}[Z] = 1$ και

$$\mathbb{Q} = \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_A] = \int_A Z d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}$$

Όταν το μέτρο $\mathbb{Q}$ ορίζεται όπως παραπάνω, συμβολικά γράφουμε

$$d\mathbb{Q} = Zd\mathbb{P} \quad ή \quad Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$$

και η τ.μ. καλείται πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ ως προς το μέτρο $\mathbb{P}$ ή παράγωγος Radon-Nikodym.

6.2 Θεμελιώδη Θεωρήματα Αποτίμησης Χρηματοοικονομικών Παραγώγων

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.2 (Μέτρα αδιάφορα κινδύνου)**:** Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$ καλείται μέτρο αδιάφορο κινδύνου (ή μέτρο martingale) εάν για το χρεόγραφο με ρίσκο S η αποτοκισμένη αξία του στον χρόνο ωρίμανσης ισούται με την αρχική του αξία, δηλαδή:

$$S_0^1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} S_T]$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2 (FTAP I)**:** Αν μια χρηματοοικονομική αγορά χαρακτηρίζεται από ένα χρεόγραφο άνευ ρίσκου με επιτόκιο r και ένα μέτρο αδιάφορο κινδύνου $\mathbb{Q}$ ισοδύναμο στο φυσικό μέτρο της αγοράς $\mathbb{P}$, τότε δεν επιτρέπει ευκαιρίες για arbitrage.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο με διαδικασία αξίας $V_t, t \in [0,T]$ και χωρίς βλάβη γενικότητας ότι $V_0 = 0$. Από υπόθεση, η αγορά μας χαρακτηρίζεται από ένα μέτρο αδιάφορο κινδύνου $\mathbb{Q}$. Αν $\mathbb{Q}$ είναι ένα μέτρο αδιάφορο κινδύνου και $V_0 = 0$ τότε πρέπει, κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$ αναμενόμενη τιμή η αποτοκισμένης διαδικασίας αξίας V στον χρόνο ωρίμανσης να ισούται με 0, δηλαδή:

$$0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}V_T] = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T]$$

Τώρα θεωρούμε ότι κάτω από το $\mathbb{P}$ η πιθανότητα το χαρτοφυλάκιο να επιφέρει απώλειες στον χρόνο ωρίμανσης είναι 0, δηλαδή ότι $\mathbb{P}[V_T < 0] = 0$. Για το $\mathbb{Q}$ γνωρίζουμε ότι εκτός από το γεγονός ότι είναι μέτρο αδιάφορο κινδύνου, είναι και ισοδύναμο του $\mathbb{P}$, άρα συμφωνούν στα σύνολα μέτρου 0, και συνεπώς

$$\mathbb{P}[V_T < 0] = 0 = \mathbb{Q}[V_T < 0]$$

Καθώς όμως $e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T] = 0$ και $\mathbb{Q}[V_T < 0] = 0$ πρέπει αναγκαστικά να ισχύει

$$\mathbb{Q}[V_T > 0] = 0$$

γιατί αλλιώς θα μπορούσαμε να έχουμε $e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T] > 0 = V_0$ και τότε θα παραβιάζαμε την υπόθεση ότι το $\mathbb{Q}$ είναι μέτρο αδιάφορο κινδύνου.

Συνεπώς έπεται ότι, αφού $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ ισχύει $\mathbb{P}[V_T > 0] = 0$ και έπεται ότι η στρατηγική V δεν μπορεί να είναι arbitrage. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.3: Μια χρηματοοικονομική αγορά καλείται πλήρης αν κάθε παράγωγο μπορεί να αποτιμηθεί και κάθε ρίσκο μπορεί να αντισταθμιστεί.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3 (FTAP II)**:** Μια χρηματοοικονομική αγορά με ένα χρεόγραφο άνευ ρίσκου με επιτόκιο r και μέτρο αδιάφορο κινδύνου $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ είναι πλήρες αν και μόνο αν το $\mathbb{Q}$ είναι μοναδικό.

6.3 Το εκθετικό martingale

Έστω B_t μια τυπική κίνηση Brown. Τότε καλούμε την διαδικασία

$$Z_t^{\xi} = \exp(\xi B_t - \xi^2 t/2)$$

εκθετικό martingale (exponential martingale). Αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι ότι η Z_t^{ξ} είναι όντως martingale και ότι μπορεί να είναι μια παράγωγος Radon-Nikodym.

6.3.1 Radon-Nikodym παράγωγος

Για να μπορεί το εκθετικό martingale να είναι μια παράγωγος Radon-Nikodym, πρέπει (τουλάχιστον για κάποιο t)

1. $Z_t^\xi > 0$, και
2. $\mathbb{E}[Z_t^\xi] = 1$

Η πρώτη συνθήκη είναι προφανής. Τώρα υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}[Z_t^\xi]$ και θέλουμε να δείξουμε ότι ισούται με 1:

$$\mathbb{E}[Z_t^\xi] = \mathbb{E}[\exp(\xi B_t - \frac{\xi^2 t}{2})] = \mathbb{E}[\exp(\xi B_t)\exp(-\frac{\xi^2 t}{2})] = \exp(-\frac{\xi^2 t}{2})\mathbb{E}[\exp(\xi B_t)]$$

Για την τυπική κίνηση Brown B_t γνωρίζουμε ότι $B_0 = 0$ και ότι οι προσαυξήσεις $B_u - B_s$ είναι Κανονικά κατανεμημένες με μέση τιμή 0 και διασπορά $u-s$. Συνεπώς $B_t = B_t - B_0 \sim \mathcal{N}(0,t)$.

Έστω τώρα $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, τότε $e^X \sim \log\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ και $\mathbb{E}[e^X] = e^{\mu+\sigma^2/2}$

Συνεπώς αφού $\xi B_t \sim \mathcal{N}(0, \xi^2 t)$ έπεται ότι $\exp(\xi B_t) \sim \log\mathcal{N}(0,\xi^2 t)$ και άρα $\mathbb{E}[\exp(\xi B_t)] = \exp(0 + \xi^2 t/2)$ και καταλήγουμε ότι

$$\mathbb{E}[Z_t^\xi] = \exp(-\frac{\xi^2 t}{2})\exp(\frac{\xi^2 t}{2}) = 1$$

Συνεπώς, ικανοποιούνται οι δύο επιθυμητές ιδιότητες.

6.3.2 Martingale

Τώρα θα δείξουμε ότι το εκθετικό martingale έχει την ιδιότητα martingale για να επιβεβαιώσουμε ότι είναι όντως martingale.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1: Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ η διαδικασία $\{Z_t^\xi\}_{t\geq 0}$ είναι ένα θετικό martingale ως προς την διύληση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο χρονικές στιγμές $t, s > 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}[Z_{t+s}^\xi|\mathcal{F}_s] = Z_s^\xi$$

Έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z^{\xi}_{t+s}|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\exp(\xi B_{t+s} - \xi^2(t+s)/2)|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[\exp(\xi B_s - \xi^2 s/2)\exp(\xi(B_{t+s} - B_s)) - \xi^2 t/2|\mathcal{F}_s \\
&= \exp(\xi B_s - \xi^2 s/2)\mathbb{E}[\exp(\xi(B_{t+s} - B_s) - \xi^2 t/2)|\mathcal{F}_s] \\
&= Z^{\xi}_s \mathbb{E}[\exp(\xi(B_{t+s} - B_s))\exp(-xi^2 t/2)|\mathcal{F}_s] \\
&= Z^{\xi}_s \underbrace{\mathbb{E}[\exp(\xi(B_{t+s} - B_s))]}_{\text{Lognormal αναμενόμενη τιμή}} \exp(-\xi^2 t/2) \\
&= Z^{\xi}_s \underbrace{\exp(\xi^2 t/2)\exp(-\xi^2 t/2)}_{=1} \\
&= Z^{\xi}_s
\end{aligned}$$

□

6.4 Το θεώρημα Cameron-Martin

Το θεώρημα Carmeron-Martin μας επιτρέπει να κτίσουμε μια σύνδεση ανάμεσα στην γεωμετρική κίνηση Brown και στην τυπική κίνηση Brown. Με βάση αυτό το θεώρημα μπορούμε, βασιζόμενοι σε μία γεωμετρική κίνηση Brown κάτω από ένα μέτρο $\mathbb{P}$, να βρούμε ένα άλλο μέτρο $\mathbb{Q}$ κάτω από το οποίο αυτή η διαδικασία θα συμπεριφέρεται σαν τυπική κίνηση Brown.

Ανατρέχοντας στα όσα προαναφέραμε για το εκθετικό martingale, παρατηρούμε ότι για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ και κάθε $T > 0$, η Z^{ξ}_T είναι μια θετική τυχαία μεταβλητή με αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z^{\xi}_T] = 1$. Αυτό συνεπάγεται, όπως προαναφέραμε, ότι την Z^{ξ}_T μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια παράγωγος Radon-Nikodym.

Θέτοντας $\mathbb{P}_{\xi}$ και $\mathbb{E}_{\xi}$ να είναι το μέτρο πιθανότητας και ο τελεστής αναμενόμενης τιμής που ορίζεται από την πυκνότητα Z^{ξ}_T στον $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ έχουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{F}_T$ και κάθε μη-αρνητική $\mathcal{F}_T -$ μετρήσιμη τ.μ. Y ισχύει

$$\mathbb{P}_{\xi}(A) = \mathbb{E}[Z^{\xi}_T \mathbf{1}_A], \quad \mathbb{E}_{\xi}[Y] = [Z^{\xi}_T Y]$$

και

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}_{\xi}[(Z^{\xi}_T)^{-1}\mathbf{1}_A], \quad \mathbb{E}[Y] = [(Z^{\xi}_T)^{-1} Y]$$

Το θεώρημα Carmeron-Martin (που είναι μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Girsanov) χαρακτηρίζει την κατανομή της διαδικασίας $\{B_t\}_{t\geq 0}$ (τυπική κίνηση Brown) κάτω από το μέτρο $\mathbb{P}_{\xi}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.4 (Cameron-Martin)**:** Κάτω από το μέτρο $\mathbb{P}_\xi$, η διαδικασία $\{B_t\}_t$ (τυπική κίνηση Brown) έχει την ίδια κατανομή με αυτή μιας διαδικασίας $\{B_t + \xi t\}_{0\le t\le T}$ κάτω από το $\mathbb{P}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια τ.μ. $U = B_T$ κάτω από το $\mathbb{P}_\xi$, που είναι η προσαύξηση μιας τυπικής κίνησης Brown (αφού θεωρούμε $B_0 = 0$). Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $T = 1$. Για κάθε $y \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\xi(U \le y) &= \mathbb{E}[Z_1^\xi \mathbf{1}_{U\le y}] \\
&= \mathbb{E}[\exp(\xi U - \xi^2/2)\mathbf{1}_{U\le y}] \\
&= \int_{-\infty}^{y} \exp(\xi u - \xi^2/2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-u^2/2)du \\
&+ \int_{-\infty}^{y+\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-v^2/2)dv \\
&= \mathbb{P}(U - \xi \le y)
\end{aligned}$$

Το παραπάνω συνεπάγεται ότι, κάτω από το $\mathbb{P}_\xi$, η τ.μ. $U = B_1$ έχει την ίδια κατανομή με την $B_1 + \xi$ κάτω από το φυσικό μέτρο $\mathbb{P}$.

Για να έχουμε μια ολοκληρωμένη απόδειξη, πρέπει να δείξουμε ότι για $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ η από κοινού κατανομή των προσαυξήσεων $\Delta B_1, \Delta B_2, \ldots, \Delta B_n$ είναι η ίδια, κάτω από το $\mathbb{P}_\xi$, με αυτή των $\Delta B_1 + \xi\Delta t_1, \Delta B_2 + \xi\Delta t_2, \ldots, \Delta B_n + \xi\Delta t_n$ κάτω από το $\mathbb{P}$, όπου $\Delta B_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$.

Είναι γνωστό ότι αν έχουμε δύο κατανομές για τις οποίες οι ροπογεννήτριες υπάρχουν, οι δύο κατανομές ισούνται αν και μόνο αν οι δύο ροπογεννήτριες είναι οι ίδιες.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\xi\Big[\exp\Big(\sum_{k=1}^n \lambda\Delta B_k\Big)\Big] &= \mathbb{E}\Big[Z_T^\xi \exp\Big(\sum_{k=1}^n \lambda\Delta B_k\Big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\exp(\xi B_{t_n} - \xi^2 t_n/2)\exp\Big(\sum_{k=1}^n \lambda\Delta B_k\Big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(\sum_{k=1}^n (\lambda_k+\xi)\Delta B_k\Big)\exp(-\xi^2 t_n/2)\Big] \\
&= \exp(-\xi^2 t_n/2)\prod_{k=1}^n \underbrace{\mathbb{E}[\exp((\lambda_k+\xi)\Delta B_k)]}_{\log\mathcal{N}} \\
&= \exp(-\xi^2 t_n/2)\prod_{k=1}^n \exp((\lambda_k+\xi)^2\Delta t_k/2) \\
&= \prod_{k-1}^n \exp\Big(\underbrace{\lambda_k^2\Delta t_k}_{*} + \xi\lambda_k\Delta t_k\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(\sum_{k=1}^n (\lambda_k(\Delta B_k + \xi\Delta t_k))\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

όπου στην $*$ γράφουμε τους όρους της έκφρασης μας με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε να ξαναγυρίσουμε σε μια μέση τιμή, τώρα κάτω από το φυσικό μέτρο $\mathbb{P}$. □

6.5 Το μοντέλο Black-Scholes-Merton

Στο μοντέλο Black-Scholes-Merton (BSM), η συμπεριφορά των τιμών σε μια χρηματοοικονομική αγορά μοντελοποιείται σε συνεχή χρόνο. Το μοντέλο θεωρεί ότι στην αγορά υπάρχουν διαθέσιμα για έναν επενδυτή τα ακόλουθα χρηματοοικονομικά εργαλεία:

1. Ένα χρεόγραφο άνευ ρίσκου S_t^0 με επιτόκιο r (συνεχή ανατοκισμό), του οποίου η συμπεριφορά μοντελοποιείται ως
$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$
Εμείς θεωρούμε στο εξής ότι $S_0^0 = 1$ και συνεπώς $S_t^0 = e^{rt}$

2. Ένα χρεόγραφο με ρίσκο (π.χ. μετοχή) με τιμή S_t την χρονική στιγμή t του οποίου μοντελοποιούμε την συμπεριφορά ως μια γεωμετρική κίνηση Brown
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{6.1}$$
όπου $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ και B_t είναι μια τυπική κίνηση Brown.

Το μοντέλο ισχύει για ένα χρονικό διάστημα $[0,T]$ όπου $t = T$ καλείτε χρόνος ωρίμανσης. Επιπρόσθετα, θεωρούμε ότι όλη η πληροφορία για την κατάσταση της αγοράς περιέχεται στην φυσική διύληση που παράγεται από την γεωμετρική κίνηση Brown S_t (συνεπώς και από την φυσική διύληση της B_t), δηλαδή $\mathcal{F}_t := \sigma(S_u : u \leq t)$

Παρατήρηση 4: Από την εξίσωση 6.1 και εφαρμόζοντας το Λήμμα του Itô στην $\log S_t$ μπορούμε να πάρουμε την αναλυτική της λύση:

$$S_t = S_0 \exp\Big(\Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\Big)t + \sigma B_t\Big) \tag{6.2}$$

6.5.1 Θεωρήματα Αναπαράστασης

Στην συνέχεια δίνουμε δύο θεμελιώδη θεωρήματα τα οποία απαιτούνται για να φθάσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος Black-Scholes-Merton, το οποίο μας δίνει το εργαλείο για την αποτίμηση παραγώγων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.5 (Θεώρημα Αναπαράστασης Itô)**:** Έστω $F \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Τότε υπάρχει μια μοναδική προσαρμοσμένη διαδικασία $f_t(\omega)$ (προσαρμοσμένη: $f_t \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in [0,T]$) τ.ω. $\mathbb{E}\big[\int_0^T f_s^2 ds\big] < \infty$ και

$$F(\omega) = \mathbb{E}[F] + \int_0^T f_t(\omega) dB_t(\omega)$$

όπου B_t είναι μια τυπική κίνηση Brown.

Για εμάς, αυτή η τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τ.μ. F θα είναι το παράγωγο, ή καλύτερα, η συνάρτηση αποπληρωμής του παραγώγου που θέλουμε να αποτιμήσουμε.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι καίριας σημασίας για να εργαστούμε με Brownian martingales. Θα το χρησιμοποιήσουμε στο Θεώρημα BSM για να επιβεβαιώσουμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια στρατηγική αναπαραγωγής για το παράγωγο που θέλουμε να αποτιμήσουμε.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.6 (Θεώρημα Αναπαράστασης Martingale)**:** Έστω $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ ένα τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale ως προς την διύληση $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$. Τότε υπάρχει μια μοναδική προσαρμοσμένη διαδικασία $\{\theta_t\}_{t\in[0,T]}$ τ.ω. $\mathbb{E}\big[\int_0^T \theta_s ds\big] < \infty$, και

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \text{σ.β.} \quad \forall t \in [0,T]$$

όπου B_t είναι μια τυπική κίνηση Brown.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι αν $\{\theta_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι μια προσαρμοσμένη διαδικασία και $\mathbb{E}\big[\int_0^T \theta_s^2 ds\big] < \infty$ τότε η διαδικασία $\{\int_0^t \theta_s dB_s\}$ είναι ένα τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale, μηδενικό

στο $t = 0$.
Θέτουμε $t = T, F = M_t$ και από το Θεώρημα Αναπαράστασης Itô έχουμε ότι για κάθε t, υπάρχει μια μοναδική διαδικασία $h_s^{(t)}(\omega) \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ τ.ω.

$$M_t(\omega) = \mathbb{E}[M_t] + \int_0^t h_s^{(t)} dB_s = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t h_s^{(t)} dB_s$$

Έστω τώρα δύο χρόνοι t_1, t_2 με $0 \leq t_q \leq t_2$. Έχουμε ότι

$$M_{t_1} = \mathbb{E}[M_{t_2}|\mathcal{F}_{t_1}] = \mathbb{E}[M_0] + \mathbb{E}\Big[\int_0^{t_2} h_s^{(t_2)} dB_s|\mathcal{F}_{t_1}\Big] = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^{t_1} h_s^{(t_2)} dB_s$$

Ισχύει όμως και το ακόλουθο

$$M_{t_1} = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^{t_1} h_s^{(t_1)} dB_s$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι $h_s^{(t_1)} = h_s^{(t_2)}$ σ.β. για κάθε $(s, \omega) \in [0, t_1] \times \Omega$, συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε την διαδικασία $\theta_s(\omega)$ για $(s, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega$ θέτοντας

$$\theta_s = h_s^{(N)}, \quad s \in [0, N]$$

παίρνοντας έτσι

$$M_t = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t h_s^{(t)} dB_s = M_0 + \int_0^t \theta_s dB_s, \quad \forall t \geq 0$$

□

6.6 Το θεώρημα Black-Scholes-Merton

Μια στρατηγική στο μοντέλο BSM είναι μια $\mathcal{F}_t$ προσαρμοσμένη διαδικασία $\bar{\theta}_t = (\theta_t^0, \theta_t) \in \mathbb{R}^2$ όπου θ_t^0 και θ_t είναι οι ποσότητες των χρεογράφων άνευ ρίσκου και του χρεογράφου με ρίσκο, αντίστοιχα, στο χαρτοφυλάκιο την χρονική στιγμή t. Η διαδικασία αξίας του χαρτοφυλακίου είναι

$$V_t^{\bar{\theta}} = V_t = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t S_t$$

Σε συνεχή χρόνο, ένα χαρτοφυλάκιο καλείται *αυτοχρηματοδοτούμενο* αν

$$dV_t = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t dS_t$$

δηλαδή εάν οι αλλαγές στην αξία του χαρτοφυλακίου οφείλονται μόνο σε αλλαγές στις τιμές των χρεογράφων και όχι σε απόσυρση ή εισαγωγή κεφαλαίων.

Θεωρούμε επίσης ότι

$$\int_0^T |\theta_t^0 dt| + \int_0^T \theta_t^2 dt < \infty \quad \text{σ.β.} \tag{6.3}$$

το οποίο εξασφαλίζει ότι οι ποσότητες

$$\int_0^T \theta_t^0 dS_t^0 = \int_0^T \theta_t^0 r e^{rt} dt$$

και

$$\int_0^T \theta_t dS_t = \int_0^T \mu S_t \theta_t dt + \int_0^T r\theta_t S_t dB_t$$

είναι καλώς ορισμένες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.4: Μια στρατηγική $\bar{\theta}$ που ικανοποιεί την 6.3 και τ.ω.

$$\theta_t^0 S_t^0 + \theta_t S_t = \theta_0^0 S_0^0 + \theta_0 S_0 + \int_0^t \theta_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \theta_u dS_u \quad \text{σ.β. } \forall t \in [0,T]$$

ονομάζεται αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική.

Σημείωση 1: Από τώρα και στο εξής τοποθετούμε πάνω από διαδικασίες/ποσότητες το σύμβολο $\sim$ για να συμβολίσουμε τις αντίστοιχες αποτοκισμένες ποσότητες. Για παράδειγμα

$$\tilde{V}_t^{\bar{\theta}} = e^{-r(T-t)} V_t^{\bar{\theta}}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2: Έστω $\bar{\theta}_t$ μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία στον $\mathbb{R}^2$ που ικανοποιεί την 6.3. Τότε η θ_t ορίζει μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική αν και μόνο αν

$$\tilde{V}_t^{\bar{\theta}} = V_0^{\bar{\theta}} + \int_0^t \theta_u d\tilde{S}_u \quad \text{σ.β. } \forall t \in [0,T]$$

Έχουμε τα απαραίτητα εργαλεία για να δείξουμε ότι, δοσμένου ενός χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας ισοδύναμο του $\mathbb{P}$, κάτω από το οποίο η αποτοκισμένη διαδικασία της τιμής του χρεογράφου με ρίσκο, δηλαδή η $\tilde{S}_t$ είναι ένα martingale.

Στην συνέχεια θα δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος BSM το οποίο μας επιτρέπει την αποτίμηση παραγώγων μέσω ενός χαρτοφυλακίου αναπαραγωγής, ωστόσο προτού το κάνουμε αυτό θα δώσουμε κάποιους ορισμούς και εξηγήσεις.

Αποτοκίζοντας την εξίσωση

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

που περιγράφει την κίνηση της τιμής του χρεογράφου με ρίσκο λαμβάνει κανείς

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t)$$

Αν τώρα θέσουμε $W_t := B_t + \frac{(\mu-r)t}{\sigma}$, μπορούμε να γράψουμε

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t$$

Από το Θεώρημα Cameron-Martin-Girsanov, αν θέσουμε $\xi_t = \frac{(\mu-r)t}{\sigma}$, υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, κάτω από οποίο η W_t είναι μια τυπική κίνηση Brown. Τότε, κάτω από το ισοδύναμο μέτρο $\mathbb{Q}$, η διαδικασία

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)$$

είναι ένα (εκθετικό) martingale.
Κάτω από το $\mathbb{Q}$, η W_t ως κίνηση Brown είναι martingale, και συνεπώς και το εκθετικό $\exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)$ είναι επίσης martingale. Σε αυτή την περίπτωση η αποτοκισμένη διαδικασία $\tilde{S}_t$ είναι ένα (εκθετικό) martingale πολλαπλασιασμένο με μια σταθερά $\tilde{S}_0$ άρα έπεται ότι και η $\tilde{S}_t$ είναι martingale.

Αυτό συνεπάγεται επίσης ότι το $\mathbb{Q}$ είναι το μέτρο αδιάφορο κινδύνου (ισοδύναμο μέτρο martingale), καθώς αυτό είναι ακριβώς το μέτρο κάτω από το οποίο $\tilde{S}_t$ είναι martingale, με άλλα λόγια είναι το μέτρο κάτω από το οποίο η αποτοκισμένη αξία του χρεογράφου με ρίσκου είναι δίκαιο παιχνίδι.

Για να προχωρήσουμε στην αποτίμηση παραγώγων, πρέπει να ορίσουμε τι είναι αυτά από μια πιθανοκρατική σκοπιά.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.5 (Χρηματοοικονομικό Παράγωγο)**:** Ένα παράγωγο είναι μια μη-αρνητική τυχαία μετα βλητή μετρήσιμη ως προς την φυσική διύληση που παράγεται από την διαδικασία S_t, ή ισοδύναμα από την φυσική διύληση που παράγεται από την B_t. Αυτή την τ.μ. στην πράξη την ορίζουμε ως μια συνάρτηση του S_t, την συνάρτηση αποπληρωμής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.6 (Αποδεκτή στρατηγική)**:** Ένα χαρτοφυλάκιο (ή στρατηγική) $(\bar{\theta})_{t\in[0,T]}$ καλείται αποδεκτό (admissible) αν είναι αυτοχρηματοδοτούμενο, $\tilde{V}_t^{\bar{\theta}} \geq 0$ για κάθε $t \in [0,T]$ και

$$\sup_{t\in[0,t]} \tilde{V}_t^{\bar{\theta}}$$

είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο $\mathbb{Q}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.7: Ένα παράγωγο καλείται αναπαραγωγίσιμο αν η αποπληρωμή του στον χρόνο ωρίμανσης ισούται με την τελική τιμή μιας αποδεκτής στρατηγικής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.7 (Black-Scholes-Merton)**:** Στο μοντέλο Black-Scholes-Merton, ένα οποιοδήποτε παράγωγο h, το οποίο είναι μια μη-αρνητική, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$ και $\mathcal{F}_T$ μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή (μια συνάρτηση της τιμής του χρεογράφου με ρίσκο S), είναι αναπαραγωγίσημο από μια αποδεκτή στρατηγική. Επίσης, η τιμή ενός οποιουδήποτε χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης θ δίνεται από

$$V_t^{\theta} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t\Big]$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι το παράγωγο h είναι αναπαραγωγίσιμο, δηλαδή υπάρχει μια αποδεκτή στρατηγική $\bar{\theta} = (\theta_t^0, \theta_t)$ η οποία αναπαράγει το παράγωγο. Την χρονική στιγμή t, η διαδικασία αξίας του χαρτοφυλακίου είναι

$$V_t^{\bar{\theta}} = V_t = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t S_t$$

και από την υπόθεση έχουμε ότι $V_T = h$. Θεωρούμε τώρα την αποτοκισμένη διαδικασία αξίας $\tilde{V}_t = e^{-rt}V_t$, δηλαδή την

$$\tilde{V}_t = \theta_t^0 + \theta_t \tilde{S}_t$$

Καθώς το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο, ισχύει ότι

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \theta_u d\tilde{S}_u = V_0 + \int_0^t \sigma\theta_u \tilde{S}_u dW_u \tag{6.4}$$

Κάτω από το αδιάφορο κινδύνου μέτρο $\mathbb{Q}$, γνωρίζουμε ότι το $\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμο, δεδομένου ότι η στρατηγική μας είναι αποδεκτή.

Επιπρόσθετα, η έκφραση 6.4 συνεπάγεται ότι η αποτοκισμένη διαδικασία αξίας του χαρτοφυλακίου, $\tilde{V}_t$, είναι ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα της W_t, η οποία κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$ είναι μια τυπική κίνηση Brown.

Συνεπώς έπεται ότι η $\tilde{V}_t$ είναι ένα τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale κάτω από το $\mathbb{Q}$, και άρα

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T|\mathcal{F}_t] \Rightarrow V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}]$$

Συνεπώς, το χαρτοφυλάκιο (θ_t^0, θ_t) αναπαράγει το παράγωγο h.
Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο υπάρχει, δηλαδή να δείξουμε ότι η αποπληρωμή h είναι αναπαραγωγίσιμη. Αρκεί να βρούμε δύο διαδικασίες θ_t^0 και θ_t τ.ω.

$$\theta_t^0 S_t^0 + \theta_t S_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-r(T-t)h|\mathcal{F}_t}\Big]$$

Κάτω από το $\mathbb{Q}$ η διαδικασία $M_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}h|\mathcal{F}_t]$ είναι ένα τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale. Σημειώνουμε ότι η φυσική διύληση $\mathcal{F}_t$ της B_t είναι επίσης η φυσική διύληση της

W_t. Το θεώρημα αναπαράστασης martingale εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας προσαρμοσμένης στοχαστικής διαδικασίας $\{K_t\}_{t\in[0,t]}$ τ.ω. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\int_0^T K_s^2 ds\Big] < \infty$, και

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s \qquad \text{σ.β.}, \forall t \in [0,T]$$

Η στρατηγική $\bar{\theta} = (\theta_t^0, \theta_t)$ με $\theta_t^0 = M_t - \theta\tilde{S}_t$ και $\theta_t = \frac{K_t}{\sigma\tilde{S}_t}$ είναι τότε μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική και η διαδικασία αξίας της δίνεται από

$$V_t^{\bar{\theta}} = e^{rt}M_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t\Big]$$

Η προηγούμενη έκφραση μας λέει ότι η $V_t^{\bar{\theta}}$ είναι μια μη-αρνητική τ.μ. με $\sup_{t\in[O,T]} V_t^{\bar{\theta}}$ τετραγωνικά ολοκληρώσιμο κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$, και τ.ω. $V_T^{\bar{\theta}} = h$ $\square$

Α′ | Κώδικες

Πιο κάτω δίνονται οι κώδικες σε Python που χρησιμοποιήθηκαν για τις προσομοιώσεις και τους αριθμητικούς υπολογισμούς.

Κατά την διάρκεια της εργασίας, όπου έχουν παραχθεί αποτελέσματα με βάση τους πιο κάτω κώδικες, αναφέρεται το όνομα της συνάρτησης που εκτελέστηκε.

Α′.1 Προσομοίωση Τροχιών

Listing Α′.1: Προσομοίωση Τροχιών

```python
S0 = 100 # starting/current price
r = 0.05 # constant interest rate
sigma = 0.25 # volatility
T = 2 # maturity
n = 10000 # size of sample
M = 1000
dt = T / M # Euler method step
S = np.zeros((M + 1, n)) # initialization
S[0] = S0
for t in range(1, M + 1):
    S[t] = S[t - 1] * np.exp((r - 0.5 * sigma ** 2) * dt
    + sigma * np.sqrt(dt) * np.random.standard_normal(n))

plt.hist(S[-1], bins=100)
plt.xlabel('Stock Price')
plt.ylabel('Frequency')
plt.grid(True)
plt.plot(S[:, :100])
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Stock Price')
plt.grid(True)
```

Α′.2 Αποτίμηση Ασιατικών Δικαιωμάτων

Listing Α′.2: Κώδικες - Αριθμητικά Πειράματα

```
"""
Monte Carlo Simulations.

@author: Carlos Mavros
@email: carlosmavros@gmail.com

Thesis:
  Analysis and pricing of path dependent Financial derivatives
  using Monte Carlo methods.
"""
import numpy as np
import time
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm
from scipy.stats import gmean
import jpype
jpype.startJVM()
from asposecells.api import Workbook, FileFormatType


params = {
    'histogram_and_paths': {
        'S0': 100,
        'r': .15,
        'sigma': .25,
        'T': 1,
        'n': 10000,
        'M': 1000,
    },
    'aa_mc_basic': {
        'S0': 100,
        'r': .15,
        'sigmas': (.15, .2, .25, .3),
        'T': 1,
        'M': 1000,
        'n': 10000,
        'K': (90, 100, 110),
    },
}


def confidence_interval(value, se):
```

```
    """Return confidence interval tuple."""
    z = 1.960
    lower = value - z * se
    upper = value + z * se
    return (lower, upper)


def histogram_and_paths(params: dict):
    """Plot histogram and paths."""
    T = params.get('T')
    M = params.get('M')
    n = params.get('n')
    sigma = params.get('sigma')
    r = params.get('r')
    dt = T / M
    S = np.zeros((M + 1, n))
    S[0] = params.get('S0')

    for t in range(1, M + 1):
        z = np.random.standard_normal(n)
        S[t] = S[t-1] * np.exp((r - 0.05 * sigma ** 2) * dt
                               + sigma * np.sqrt(dt) * z)

    plt.hist(S[-1], bins=100)
    plt.xlabel('Asset Price')
    plt.ylabel('Frequency')
    plt.savefig('asset_price_hist.png')

    plt.clf()

    plt.plot(S[:, :100])
    plt.xlabel('Time')
    plt.ylabel('Asset Price')
    plt.grid(True)
    plt.savefig('asset_price_paths.png')


def aa_mc_basic(params: dict):
    """Price arithmetic Asian Call options using basic Monte Carlo."""
    S0 = params.get('S0')
    T = params.get('T')
    M = params.get('M')
    n = params.get('n')
    sigmas = params.get('sigmas')
    r = params.get('r')
    strikes = params.get('K')
```

```
dt = T / M
c = []

workbook = Workbook(FileFormatType.XLSX)
worksheets = workbook.getWorksheets()
sheet = worksheets.get(0)
cells = sheet.getCells()

first_row = f"r= {r}, S(0) = {S0}, T = {T} and n = {n} (number of
    simulations)"
cell = cells.get(0, 0)
cell.putValue(first_row)

results_names = (
    ' ',
    'Strike Price',
    'Call Price (Basic Monte Carlo)',
    'Estimator Error',
    'Execution Time (secs)',
)

for i in range(len(results_names)):
    cell = cells.get(1, i)
    cell.putValue(results_names[i])

row = 2
for sigma in sigmas:
    cell = cells.get(row, 0)
    cell.putValue(sigma)
    for K in strikes:
        start_time = time.time()
        for i in range(n):
            S = [S0]
            for j in range(M):
                z = np.random.standard_normal()
                S.append(S[-1] * np.exp((r - .5 * sigma ** 2) * dt +
                                     sigma * np.sqrt(dt) * z))
            avg = np.mean(S)
            c.append(max(avg - K, 0))

        call = np.mean(c) * np.exp(-r * T)
        call_se = np.std(c) / np.sqrt(n)
        end_time = time.time()

        results = (
            str(K),
```

```
            str(round(call, 4)),
            str(round(call_se, 4)),
            end_time - start_time
        )

        # write to excel
        for i in range(1, len(results) + 1):
            cell = cells.get(row, i)
            cell.putValue(results[i-1])

        row += 1

    workbook.save('aa_mc_basic.xlsx')

def ga_analytic(params: dict ):
    """Pricing Geometric Asian Call Options analytically."""
    S0 = params.get('S0')
    K = params.get('K')
    T = params.get('T')
    sigma = params.get('sigma')
    r = params.get('r')
    tau = T / 3
    l = ((np.log(S0) / K) - 0.5 * (r - (sigma ** 2 / 2)) * T / (sigma *
        np.sqrt(tau)))
    d1 = -l + sigma * np.sqrt(tau)
    d2 = -l
    b = r - 0.5*r*T - (1/6)*T*sigma**2
    val = S0 * np.exp(
        (b - r) * T
        ) * norm.cdf(d1) - np.exp(-r * T) * K * norm.cdf(d2)
    return val


def aa_mc_control_variate(params: dict):
    """Price arithmetic Asian Call options using Monte Carlo with control
        variates."""
    S0 = params.get('S0')
    T = params.get('T')
    M = params.get('M')
    n = params.get('n')
    sigmas = params.get('sigmas')
    r = params.get('r')
    strikes = params.get('K')
    dt = T / M
    arith_c = []
    geom_c = []
```

```
workbook = Workbook(FileFormatType.XLSX)
worksheets = workbook.getWorksheets()
sheet = worksheets.get(0)
cells = sheet.getCells()

first_row = f"r= {r}, S(0) = {S0}, T = {T} and n = {n} (number of
    simulations)"
cell = cells.get(0, 0)
cell.putValue(first_row)

results_names = (
    ' ',
    'Strike Price',
    'Call Price (Control Variate Monte Carlo)',
    'Estimator Error',
    'Execution time (secs)',
)

for i in range(len(results_names)):
    cell = cells.get(1, i)
    cell.putValue(results_names[i])

row = 2
for sigma in sigmas:
    cell = cells.get(row, 0)
    cell.putValue(sigma)
    for K in strikes:
        start_time = time.time()
        for i in range(n):
            S = [S0]
            for j in range(M):
                z = np.random.standard_normal()
                S.append(S[-1] * np.exp((r - .5 * sigma ** 2) * dt +
                                     sigma * np.sqrt(dt) * z))
            arith_avg = np.mean(S)
            geom_avg = gmean(S)
            arith_c.append(max(arith_avg - K, 0))
            geom_c.append(max(geom_avg - K, 0))

        zipped = zip(arith_c, geom_c)
        ga_params = params
        ga_params['K'] = K
        ga_params['sigma'] = sigma
        cv_estimator = [
            a + (ga_analytic(ga_params) - b) for a, b in zipped
```

```
        ]

        call = np.mean(cv_estimator) * np.exp(-r * T)
        call_se = np.std(cv_estimator) / np.sqrt(n)
        end_time = time.time()

        results = (
            str(K),
            str(round(call, 4)),
            str(round(call_se, 4)),
            end_time - start_time,
        )

        # write to excel
        for i in range(1, len(results) + 1):
            cell = cells.get(row, i)
            cell.putValue(results[i-1])

        row += 1

    workbook.save('aa_mc_control_variate_final2.xlsx')


def aa_mc_antithetic(params: dict):
    """Price arithmetic Asian Call options using Monte Carlo with antithetic
        variates."""
    S0 = params.get('S0')
    T = params.get('T')
    M = params.get('M')
    n = params.get('n')
    sigmas = params.get('sigmas')
    r = params.get('r')
    strikes = params.get('K')
    dt = T / M
    c = []

    workbook = Workbook(FileFormatType.XLSX)
    worksheets = workbook.getWorksheets()
    sheet = worksheets.get(0)
    cells = sheet.getCells()

    first_row = f"r= {r}, S(0) = {S0}, T = {T} and n = {n} (number of
        simulations)"
    cell = cells.get(0, 0)
    cell.putValue(first_row)
```

```
results_names = (
    ' ',
    'Strike Price',
    'Call Price (Antithetic Variates Monte Carlo)',
    'Estimator Error',
    'Execution time (secs)',
)

for i in range(len(results_names)):
    cell = cells.get(1, i)
    cell.putValue(results_names[i])

row = 2
for sigma in sigmas:
    cell = cells.get(row, 0)
    cell.putValue(sigma)
    for K in strikes:
        start_time = time.time()
        for i in range(n):
            S1 = [S0]
            S2 = [S0]
            S = [S0]
            for j in range(M):
                z1 = np.random.standard_normal()
                z2 = -z1
                S1.append(S[-1] * np.exp((r - .5 * sigma ** 2) * dt +
                                         sigma * np.sqrt(dt) * z1))

                S2.append(S[-1] * np.exp((r - .5 * sigma ** 2) * dt +
                                         sigma * np.sqrt(dt) * z2))
            avg1 = np.mean(S1)
            avg2 = np.mean(S2)
            avg = (avg1 + avg2) / 2
            c.append(max(avg - K, 0))

        call = np.mean(c) * np.exp(-r * T)
        call_se = np.std(c) / np.sqrt(n)
        end_time = time.time()

        results = (
            str(K),
            str(round(call, 4)),
            str(round(call_se, 4)),
            round(end_time - start_time, 2),
        )
```

```
        # write to excel
        for i in range(1, len(results) + 1):
            cell = cells.get(row, i)
            cell.putValue(results[i-1])

        row += 1

    workbook.save('aa_mc_antithetic.xlsx')


def main():
    """Run."""
    histogram_and_paths(params['histogram_and_paths'])
    aa_mc_basic(params['aa_mc_basic'])
    aa_mc_control_variate(params['aa_mc_basic'])
    aa_mc_antithetic(params['aa_mc_basic'])


if __name__ == "__main__":
    main()
    jpype.shutdownJVM()
```

Α΄.3 Σύγκριση Μεθόδων

Listing Α΄.3: Σύγκριση Μεθόδων

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm
from scipy.stats import gmean

S0, r, sigma, n, M, K, T = 100, .15, .2, 3000, 500, 100, 1

def generate_gbm():
    dt = T / M
    gbm = []
    for i in range(n):
        S = np.zeros(M)
        S[0] = S0
        for j in range(1, M):
            z = np.random.standard_normal()
            point = S[j-1] * np.exp((r - .5 * sigma ** 2) * dt +
                        sigma * np.sqrt(dt) * z)
            S[j] = point
```

```
        gbm.append(S)
    return gbm

def price_naive(gbm):
    disc_payoffs = [np.exp(-r*T) * max(np.mean(path)-K, 0) for path in gbm]
    price_naive_result = np.mean(disc_payoffs)
    return price_naive_result

def price_ga_analytic():
    tau = T / 3
    l = ((np.log(S0) / K) - 0.5 * (r - (sigma ** 2 / 2)) * T / (sigma *
        np.sqrt(tau)))
    d1 = -l + sigma * np.sqrt(tau)
    d2 = -l
    b = r - 0.5*r*T - (1/6)*T*sigma**2
    val = S0 * np.exp(
        (b - r) * T
        ) * norm.cdf(d1) - np.exp(-r * T) * K * norm.cdf(d2)
    return val

def control_variate_vs_naive(gbm):
    arithmetic = [np.exp(-r*T) * max(np.mean(path)-K, 0) for path in gbm]
    geometric = [np.exp(-r*T) * max(gmean(path)-K, 0) for path in gbm]

    ga_analytic = price_ga_analytic()
    control_variate_estimator = [
      aa + (ga_analytic - ga) for aa, ga in zip(arithmetic, geometric)
    ]
    price_naive = np.mean(arithmetic)
    price_control = np.mean(control_variate_estimator)

    return price_naive, price_control



gbms = [generate_gbm() for i in range(200)]
gbm = gbms[0]

naive_prices = [price_naive(path) for path in gbms]

bins = np.linspace(5, 10, 100)
plt.hist(naive_prices, bins, alpha=0.50, label='naive')

plt.legend(loc='upper right')
plt.ylabel('Ocurrences')
```

```
plt.xlabel('Arithmetic Asian Option Call Price')
plt.rcParams["figure.figsize"] = (20, 16)
plt.xlim([7, 10])
plt.show()
```

Listing Α΄.4: Σύγκλιση

```
S0, r, sigma, M, K, T = 100, .15, .2, 100, 100, 1

def generate_gbm(n):
    dt = T / M
    gbm = []
    for i in range(n):
        S = np.zeros(M)
        S[0] = S0
        for j in range(1, M):
            z = np.random.standard_normal()
            point = S[j-1] * np.exp((r - .5 * sigma ** 2) * dt +
                        sigma * np.sqrt(dt) * z)
            S[j] = point

        gbm.append(S)
    return gbm

def price_naive(gbm):
    disc_payoffs = [np.exp(-r*T) * max(np.mean(path)-K, 0) for path in gbm]
    price_naive_result = np.mean(disc_payoffs)
    return price_naive_result

def price_ga_analytic():
    sg = sigma/np.sqrt(3)
    b = 0.5 * (r - 0.5 * (sg**2))
    d1 = ( (np.log(S0/K) + (b + 0.5*(sg**2)) * T) / (sg * np.sqrt(T)))
    d2 = d1 - sg
    C = S0 * np.exp((b-r)*T) * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r*T) * norm.cdf(d2)
    return C

def price_control(gbm, beta):
    n = len(gbm)
    arithmetic = [np.exp(-r*T) * max(np.mean(path)-K, 0) for path in gbm]
    geometric = [np.exp(-r*T) * max(gmean(path)-K, 0) for path in gbm]

    ga_analytic = price_ga_analytic()
    control_variate_estimator = [
      aa - beta * (ga - ga_analytic) for aa, ga in zip(arithmetic, geometric)
    ]
```

```
    price_control = np.mean(control_variate_estimator)
    error_control = np.std(control_variate_estimator)/ np.sqrt(n)
    return (price_control, error_control)

def price_naive(gbm):
    n = len(gbm)
    arithmetic = [np.exp(-r*T) * max(np.mean(path)-K, 0) for path in gbm]

    price_naive = np.mean(arithmetic)
    error_naive = np.std(arithmetic) / np.sqrt(n)
    return (price_naive, error_naive)

def main():
  Ns = [i for i in range (1000, 50001, 250)]
  betas = [1, .8, .6, .4, .2]
  all_samples = [generate_gbm(n) for n in Ns]
  results = {
     'x': Ns,
     'naive': {'beta': None, 'errors': []},
     'control0': {'beta': 1.0, 'errors': []},
     'control1': {'beta': 0.8, 'errors': []},
     'control2': {'beta': 0.6, 'errors': []},
     'control3': {'beta': 0.4, 'errors': []},
     'control4': {'beta': 0.2, 'errors': []},
  }
  results['naive']['errors'] = [price_naive(gbm_sample)[1] for gbm_sample in
      all_samples]
  results['control0']['errors'] = [price_control(gbm_sample,
      results['control0']['beta'])[1] for gbm_sample in all_samples]
  results['control1']['errors'] = [price_control(gbm_sample,
      results['control1']['beta'])[1] for gbm_sample in all_samples]
  results['control2']['errors'] = [price_control(gbm_sample,
      results['control2']['beta'])[1] for gbm_sample in all_samples]
  results['control3']['errors'] = [price_control(gbm_sample,
      results['control3']['beta'])[1] for gbm_sample in all_samples]
  results['control4']['errors'] = [price_control(gbm_sample,
      results['control4']['beta'])[1] for gbm_sample in all_samples]
  return results

fig = go.Figure(
    data=go.Scatter(x=results['x'], y=results['naive']['errors'], mode="markers",
        name="naive"))
fig.add_trace(
    go.Scatter(x=results['x'], y=results['control0']['errors'], mode="markers",
        name="b=1")
)
```

```
fig.add_trace(
    go.Scatter(x=results['x'], y=results['control1']['errors'], mode="markers",
        name="b=0.8")
)
fig.add_trace(
    go.Scatter(x=results['x'], y=results['control2']['errors'], mode="markers",
        name="b=0.6")
)
fig.add_trace(
    go.Scatter(x=results['x'], y=results['control3']['errors'], mode="markers",
        name="b=0.4")
)
fig.add_trace(
    go.Scatter(x=results['x'], y=results['control4']['errors'], mode="markers",
        name="b=0.2")
)

fig.update_layout(
    title="Errors vs Sample Size - Arithmetic Asian Option",
    font=dict(
        family="Courier New",
        size=12,
        color="RebeccaPurple"
    )
)
fig.show()

x, y = np.log(results['x']), np.log(results['naive']['errors'])
slope = round(np.polyfit(x,y,1)[0], 4)
fig = go.Figure(
    data=go.Scatter(x=x, y=y, mode="markers", name=f"Naive (m={slope})")
)

y = np.log(results['control0']['errors'])
slope = round(np.polyfit(x,y,1)[0], 4)
fig.add_trace(
    go.Scatter(x=x, y=y, mode="markers", name=f"Control (b=1, m={slope})")
)

y = np.log(results['control1']['errors'])
slope = round(np.polyfit(x,y,1)[0], 4)
fig.add_trace(
    go.Scatter(x=x, y=y, mode="markers", name=f"Control (b=.8, m={slope})")
)

y = np.log(results['control2']['errors'])
```

```
slope = round(np.polyfit(x,y,1)[0], 4)
fig.add_trace(
    go.Scatter(x=x, y=y, mode="markers", name=f"Control (b=.6, m={slope})")
)

y = np.log(results['control3']['errors'])
slope = round(np.polyfit(x,y,1)[0], 4)
fig.add_trace(
    go.Scatter(x=x, y=y, mode="markers", name=f"Control (b=.4, m={slope})")
)

y = np.log(results['control4']['errors'])
slope = round(np.polyfit(x,y,1)[0], 4)
fig.add_trace(
    go.Scatter(x=x, y=y, mode="markers", name=f"Control (b=.2, m={slope})")
)
fig.update_layout(
    title="Errors vs Sample Size (Log-Log scale) - Arithmetic Asian Option",
    font=dict(
        family="Courier New",
        size=12,
        color="RebeccaPurple"
    )
)
fig.show()
```

Α′.4 Monte Carlo Παράδειγμα

Listing Α′.5: Monte Carlo Παράδειγμα

```
from math import sqrt
from random import uniform
import pandas as pd
import plotly.express as px

def inside(a,b):
    return sqrt(a**2 + b**2) <= 1

n = 10000 # sample size

# create points
sample_x = [uniform(-1,1) for i in range(n)]
sample_y = [uniform(-1,1) for i in range(n)]
points = [(a,b) for a,b in zip(sample_x, sample_y)]
```

```
# label points that belong in the circle
label = [inside(p[0], p[1]) for p in points]
data = {
    'x': sample_x,
    'y': sample_y,
    'label': label
}

# calculate estimate and plot
df = pd.DataFrame(data)
n_inside = len(df[df['label']])
estimate = 4 * (n_inside/n)
fig = px.scatter(df, x='x', y='y', color='label', title=f"Estimated value of  :
    {estimate}")
fig.update_yaxes(scaleanchor="x", scaleratio =1)
fig.write_image("fig1.png")
```

Α΄.5 Παράδειγμα Δειγματοληψίας Σπουδαιότητας - Way OTM Call Option

Listing Α΄.6: Δειγματοληψία Σπουδαιότητας - Παράδειγμα

```
 import numpy as np
import time
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm
from scipy.stats import gmean

S0 = 100
r = 0.05
sigma = 0.2
K = 200
T = 1
n = 10000
M = 500

def generate_gbm():
    dt = T / M
    gbm = []
    Z = np.random.standard_normal([n,M-1])
    for i in range(n):
        S = np.zeros(M)
        S[0] = S0
```

```
        for j in range(1, M):
            z = np.random.standard_normal()
            point = S[j-1] * np.exp((r - .5 * sigma ** 2) * dt +
                        sigma * np.sqrt(dt) * Z[i][j-1])
            S[j] = point

        gbm.append(S)
    return gbm

def price_option_naive(paths):
  disc_payoffs = [np.exp(-r*T)*max(np.mean(path)-K, 0) for path in paths]
  return np.mean(disc_payoffs), np.std(disc_payoffs)

paths = generate_gbm()
price, error = price_option_naive(paths)

x = np.linspace(0, 1, M)
for path in paths:
  plt.plot(x, path)
plt.axhline(y=K, color='r', linestyle='dashed')
plt.ylabel("Stock Price")
plt.title(f"EU Call Price: {round(price,3)} (error {round(error,3)}")
plt.show()

def generate_gbm2():
    dt = T / M
    gbm = []
    mu = 0.6
    sd = 1
    Zs = np.random.normal(mu, sd, [n,M-1])

    for i in range(n):
        S = np.zeros(M)
        S[0] = S0
        for j in range(1, M):
            point = S[j-1] * np.exp((r - .5 * sigma ** 2) * dt +
                        sigma * np.sqrt(dt) * Zs[i][j-1])
            S[j] = point

        gbm.append(S)

    return gbm, [Zs, mu, sd]

def calculate_ratios(data):
  Zs = data[0]
  mu = data[1]
```

```
  sigma = data[2]
  n = Zs.shape[0]
  M = Zs.shape[1]
  dt = T/M
  ratios = []
  for i in range(n):
    Z = Zs[i][:]
    sum1 = np.sum(np.square(Z))
    sum2 = np.sum(np.square(Z - mu*np.sqrt(dt)))
    ratio = np.exp(-0.5 * (sum1 - sum2))
    ratios.append(ratio)

  return ratios
```

```
def price_option_importance(paths, ratios):
  disc_payoffs = []
  for i in range(len(paths)):
    path = paths[i]
    ratio = ratios[i]
    c = np.exp(-r*T)*max(np.mean(path)-K, 0)
    disc_payoffs.append(ratio*c)

  final_prices = [path[-1] for path in paths]

  return np.mean(disc_payoffs), np.std(disc_payoffs)

paths, data = generate_gbm2()
ratios = calculate_ratios(data)
price, error = price_option_importance(paths, ratios)

x = np.linspace(0, 1, M)
for path in paths:
  plt.plot(x, path)
plt.axhline(y=K, color='r', linestyle='dashed')
plt.ylabel("Stock Price")
plt.title(f"EU Call Price: {round(price,3)} (error {round(error,3)}")
```

```
plt.show()
```

Α΄.6 Κώδικες παρουσίασης

Listing Α΄.7: Αποτίμηση με Απλό Monte Carlo

```
S0, r, sigma, n, M, K, T = 100, .15, .2, 3000, 500, 100, 1
def generate_gbm():
    dt = T / M
    gbm = []
    for i in range(n):
        S = np.zeros(M)
        S[0] = S0
        for j in range(1, M):
            z = np.random.standard_normal()
            point = S[j-1] * np.exp((r - .5 * sigma ** 2) * dt +
                        sigma * np.sqrt(dt) * z)
            S[j] = point
        gbm.append(S)
    return gbm

def price_naive(gbm):
    disc_payoffs = [np.exp(-r*T) * max(np.mean(path)-K, 0) for path in gbm]
    return np.mean(disc_payoffs)

gbms = [generate_gbm() for i in range(200)]
naive_prices = [price_naive(path) for path in gbms]
plt.hist(naive_prices, bins, alpha=0.50)
plt.show()
```

Listing Α΄.8: Αναλυτική Αποτίμηση Γεωμετρικού Ασιατικού Δικαιώματος

```
def price_ga_analytic():
    sg = sigma/np.sqrt(3)
    b = 0.5 * (r - 0.5 * (sg)**2 )
    d1 = ( (np.log(S0/K) + (b + 0.5*(sg)**2)) * T) / (sg * np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sg
    C = S0 * np.exp((b-r)*T) * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r*T) * norm.cdf(d2)
    return C
```

Listing Α΄.9: Μέθοδος Μεταβλητής Ελέγχου

```
def control_variate_vs_naive(gbm):
   arithmetic = [np.exp(-r*T) * max(np.mean(path)-K, 0) for path in gbm]
   geometric = [np.exp(-r*T) * max(gmean(path)-K, 0) for path in gbm]

   ga_analytic = price_ga_analytic()
   control_variate_estimator = [
     aa + (ga_analytic - ga) for aa, ga in zip(arithmetic, geometric)
   ]
   price_naive = np.mean(arithmetic)
   price_control = np.mean(control_variate_estimator)

   return price_naive, price_control
```

Listing Α΄.10: Εύρεση βέλτιστου b^*

```
S0, r, sigma, n, M, K, T = 100, .15, .2, 3000, 500, 100, 1
def generate_gbm():
    dt = T / M
    gbm = []
    for i in range(n):
        S = np.zeros(M)
        S[0] = S0
        for j in range(1, M):
            z = np.random.standard_normal()
            point = S[j-1] * np.exp((r - .5 * sigma ** 2) * dt +
                      sigma * np.sqrt(dt) * z)
            S[j] = point
        gbm.append(S)
    return gbm

def check_beta(gbm):
    arithmetic = [np.exp(-r*T) * max(np.mean(path)-K, 0) for path in gbm]
    geometric = [np.exp(-r*T) * max(gmean(path)-K, 0) for path in gbm]
    plt.scatter(x=arithmetic, y=geometric)
    plt.xlabel("Arithmetic Asian Option Prices")
    plt.ylabel("Geometric Asian Option Prices")
    plt.rcParams["figure.figsize"] = (16, 12)
    plt.xlim([0,10])
    plt.ylim([0,10])
    plt.show()
```

Listing Α΄.11: Σύγκριση Μεθόδων

```
results = [ control_variate_vs_naive(path) for path in gbms]
naive = [r[0] for r in results]
control = [r[1] for r in results]

bins = np.linspace(5, 10, 100)
plt.hist(naive, bins, alpha=0.50, label='Naive Monte Carlo')
plt.hist(control, bins, alpha=0.50, label='Control Variate Monte Carlo')
plt.legend(loc='upper right')
plt.ylabel('Ocurrences')
plt.xlabel('Arithmetic Asian Option Call Price')
plt.rcParams["figure.figsize"] = (20, 16)
plt.xlim([7, 9])
plt.show()
```

Βιβλιογραφία

[1] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. 2019.

[2] Phelim Boyle, Mark Broadie, and Paul Glasserman. Monte carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(8):1267–1321, 1997. Computational financial modelling.

[3] Robert H Cameron and William T Martin. Transformations of weiner integrals under translations. *Annals of Mathematics*, pages 386–396, 1944.

[4] P. Cirillo. Financial mathematics, lecture notes., 2019.

[5] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53. Springer, 2004.

[6] Paul Glasserman, Philip Heidelberger, and Perwez Shahabuddin. Asymptotically optimal importance sampling and stratification for pricing path-dependent options. *Mathematical finance*, 9(2):117–152, 1999.

[7] Peter G Zhang. A guide to second generation options, 1998.