ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΗΤΣΙΟΥ ΑΡΣΕΝΗ

Αθήνα 2011

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΗΤΣΙΟΥ ΑΡΣΕΝΟΗ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

- Σ.ΚΑΡΑΝΑΣΙΟΣ, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (επιβλέπων)
- Π. ΨΑΡΡΑΚΟΣ, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- Α. ΠΑΠΑΙΩΑΝΝΟΥ, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Στην οικογένειά μου και στους φίλους μου…

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας αυτής, η οποία εκπονήθηκε στα πλαίσια της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών με σκοπό την απόκτηση του Διπλώματος, είναι κυρίως η παρουσίαση του λογιστικού μέρους της Γραμμικής Άλγεβρας με τη μελέτη των πινάκων και των εφαρμογών τους.

Ο ρόλος της Γραμμικής Άλγεβρας στις Εφαρμοσμένες Επιστήμες είναι εξαιρετικά σημαντικός. Η Γραμμική Άλγεβρα είναι το υπόβαθρο για τη μελέτη προβλημάτων Μαθηματικών, Φυσικής αλλά και Μηχανικής.

Η παρούσα Διπλωματική εργασία αποτελείται από τρία κεφάλαια.Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια αναφορά στην άλγεβρα πινάκων, στις ορίζουσες, στην επίλυση των γραμμικών συστημάτων, στη θεωρία των χαρακτηριστικών ποσών και της διαγωνοποίησης πινάκων καθώς και την εύρεση του ελαχίστου πολυωνύμου, βασικά εργαλεία τα οποία χρειαζόμαστε για την εργασία αυτή.

Το δεύτερο κεφάλαιο, όπου παρουσιάζονται συγκεκριμένες εφαρμογές της διαγωνοποίησης πινάκων, χωρίζεται σε τρία μέρη: Στο πρώτο μέρος αναλύεται η θεωρία των τετραγωνικών μορφών και παρουσιάζονται οι εφαρμογές τους στη Γεωμετρία όπου γίνεται η ταξινόμηση καμπυλών και επιφανειών $2^{ου}$ βαθμού. Στο δεύτερο μέρος γίνεται εφαρμογή των μεθόδων της Γραμμικής Άλγεβρας στη Μηχανική με αναφορές στο τανυστικό γινόμενο, την πολική ανάλυση και τη μαθηματική περιγραφή της Κινηματικής ενός στερεού σώματος και των συνεχών μέσων. Το τρίτο μέρος αναφέρεται στα Διακριτά Δυναμικά Συστήματα και τις εξισώσεις διαφορών.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζουμε τους πίνακες που δεν είναι διαγωνοποιήσιμοι και προσπαθούμε να βρούμε μια απλούστερη μορφή τους. Αναζητούμε δηλαδή κανονικές μορφές είτε ως προς τη σχέση ισοδυναμίας είτε ως προς τη σχέση ομοιότητας.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κύριο Σ. Καρανάσιο για την άριστη συνεργασία που είχαμε κατά την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής. Για το υλικό που μου παραχώρησε και για την απεριόριστη βοήθεια που μου παρείχε. Ευχαριστώ επίσης τα άλλα δύο μέλη της επιτροπής τους Αναπληρωτές Καθηγητές Α. Παπαιωάννου και Π. Ψαρρράκο για τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσαν για να μελετήσουν και να αξιολογήσουν την παρούσα εργασία.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, για την υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια και δικούς μου ανθρώπους που μου συμπαραστάθηκαν σε όποια δυσκολία αντιμετώπισα.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές Έννοιες

1.1 Γενικά

Από τη Γραμμική Άλγεβρα θεωρούμε γνωστές μερικές από τις βασικότερες έννοιές της. Ιδιαίτερα θεωρούνται γνωστά τα περί ′′διανυσματικών χώρων′′ και ′′γραμμικών διανυσματικών χώρων με εσωτερικό γινόμενο′′. Έτσι λοιπόν:

Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω σε ένα σώμα K. Το σώμα K λέγεται **πεδίο συντελεστών** του διανυσματικού χώρου V και τα στοιχεία του V λέγονται **διανύσματα.**
Ο διανυσματικός χώρος V λέγεται **πραγματικός** ή **μιγαδικός** αν $K=\mathbb{R}$ ή $K=\mathbb{C}$ αντίστοιχα.
Ο **πίνακας Α τύπου (μ ,ν)** με στοιχεία από ένα σώμα K είναι μια διάταξη μν αριθμών α_{ij} ($i=1,2,\ldots,\mu$, $j=1,2,\ldots,\nu$), στοιχείων του συνόλου K σε μ-γραμμές και ν-στήλες ,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix},$$

έτσι ώστε ο αριθμός α_{ij} να βρίσκεται συγχρόνως στην i-γραμμή και στην j-στήλη. Ο πίνακας A συμβολίζεται ακόμη με $A=\left(\alpha_{ij}\right)$. Οι αριθμοί α_{ij} λέγονται **στοιχεία** του πίνακα. Ένας πίνακας λέγεται **πραγματικός , μιγαδικός** ή **φανταστικός** αν τα στοιχεία του είναι πραγματικοί, μιγαδικοί ή καθαρά φανταστικοί, αντίστοιχα.

Το σύνολο όλων των πινάκων τύπου $\mu\times\nu$ με στοιχεία από το σώμα K το συμβολίζουμε με $\prod_{\mu\times\nu}(K)$.

Ειδικότερα όταν $\mu=\nu$ το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με $\prod_{n}(K)$.

Ένας πίνακας $1\times\nu$ ονομάζεται **πίνακας-γραμμή** ενώ ένας πίνακας τύπου $\mu\times 1$ **πίνακας-στήλη.** Ένας πίνακας τύπου 1×1 έχει τη μορφή $A=[a]$, $a\in K$ και ταυτίζεται με το στοιχείο $a\in K$.

Ειδικές κατηγορίες πινάκων

- **Τετραγωνικοί πίνακες :** Είναι οι πίνακες που έχουν ίσο αριθμό γραμμών και στηλών. Ένας τετραγωνικός πίνακας τύπου (ν,ν) θα λέγεται **τετραγωνικός πίνακας ν-τάξης** με γενική μορφή την

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{\nu\nu}$, λέγονται στοιχεία της **κύριας διαγωνίου** του πίνακα ενώ τα $a_{1\nu}, a_{2(\nu-1)}, \ldots, a_{\nu 1}$ λέγονται στοιχεία της **δευτερεύουσας διαγωνίου** του πίνακα. Το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου λέγεται **ίχνος** του A και συμβολίζεται με $i\chi\nu(A)$ ή trA . Είναι δηλαδή

$$i\chi\nu A = trA = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{\nu\nu}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A=(a_{ij})$ λέγεται **κάτω τριγωνικός** αν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλαδή $a_{ik}=0, i<k$. Αντίστοιχα, όταν όλα τα στοιχεία του A που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλαδή $a_{ik}=0, i>k$, ο πίνακας λέγεται **άνω τριγωνικός**. Αν τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία του A βρίσκονται πάνω στην κύρια διαγώνιο, δηλαδή $a_{ik}=0, i\neq k$, τότε ο A λέγεται **διαγώνιος**. Ο διαγώνιος πίνακας $I=\Pi_\nu$, που όλα τα στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα με τη μονάδα, λέγεται **μοναδιαίος ν-τάξης**. Έναν διαγώνιο πίνακα Δ με στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ στη διαγώνιο, τον συμβολίζουμε με

$$\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu)$$

- **Ανάστροφοι πίνακες :** Από κάθε πίνακα $A\in\Pi_{\mu\times\nu}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν άλλο πίνακα B του οποίου οι γραμμές θα είναι οι στήλες του A με την ίδια σειρά. Ο πίνακας B ονομάζεται **ανάστροφος** του A και τον συμβολίζουμε με A^{T}. Έτσι αν $A^{\mathrm{T}}=(\beta_{ij})$ και $A=(a_{ij})$ τότε $\beta_{ij}=a_{ij}$ για κάθε $i=1,2,\ldots,\nu$, $j=1,2,\ldots,\mu$.

- **Συμμετρικοί - αντισυμμετρικοί πίνακες :** Ένας τετραγωνικός πίνακα A λέγεται **συμμετρικός** αν $A^{\mathrm{T}}=A$ και **αντισυμμετρικός** αν $A^{\mathrm{T}}=-A$.

Για κάθε πίνακα $A\in\Pi_{\mu\times\nu}(\mathbb{C})$ ο πίνακας με στοιχεία τα συζυγή των στοιχείων του A λέγεται **συζυγής** του A και συμβολίζεται με $\bar{A}$. Αν $A=\left(\alpha_{ij}\right)$ θα είναι $\bar{A}=\left(\bar{\alpha}_{ij}\right)$.

Προφανώς ένας πίνακας A είναι **πραγματικός** αν και μόνο αν $\bar{A}=A$ και καθαρά **φαντα-**

στικός αν και μόνο αν $\overline{A}=-A$. Για κάθε πίνακα $A\in\Pi_{\mu\times\nu}(\mathbb{C})$ τον πίνακα $A^*\in\Pi_{\mu\times\nu}(\mathbb{C})$ που ορίζεται από τη σχέση $A^*=\left(\overline{A}\right)^{\mathrm{T}}=\overline{A^{\mathrm{T}}}$ θα τον λέμε **αναστροφο συζυγή** του A.

- **Ερμιτιανοί – αντιερμιτιανοί πίνακες :** Ένας τετραγωνικός πίνακας θα λέγεται **ερμιτιανός** αν $A^*=A$ και **αντιερμιτιανός** αν $A^*=-A$.

1.2 Πράξεις στο $\prod_{\mu\times\nu}(K)$

Έστω $A=\left(\alpha_{ij}\right)$ και $B=\left(\beta_{ij}\right)$ δύο, ίδιου τύπου , $\mu\times\nu$ πίνακες με στοιχεία από το ίδιο σώμα K. Ως **άθροισμα** $A+B$ των πινάκων A και B ορίζουμε έναν πίνακα $A+B=\left(\gamma_{ij}\right)$ τύπου $\mu\times\nu$ που έχει ως στοιχεία τα αθροίσματα των αντίστοιχων στοιχείων των πινάκων A και B, δηλαδή

$$\gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}$$

Αν $\lambda\in K$ τότε ορίζουμε ως **γινόμενο** του πίνακα A επί το λ έναν πίνακα $\lambda A=\left(\delta_{ij}\right)$, ίδιου τύπου $\mu\times\nu$ με τον A, του οποίου τα στοιχεία προκύπτουν από τα αντίστοιχα στοιχεία του A με πολλαπλασιασμό επί λ, δηλαδή

$$\left(\delta_{ij}\right)=\lambda\alpha_{ij}$$

Ο **αντίθετος** ενός πίνακα καθώς και η **διαφορά** δύο πινάκων ορίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$-A=(-1)A \quad \text{και} \quad A-B=A+(-B)$$

Ο $\mu\times\nu$ πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν λέγεται **μηδενικός** $\mu\times\nu$ πίνακας και συμβολίζεται με $\mathbb{O}_{\mu\times\nu}$ ή απλά με $\mathbb{O}$.

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτουν κάποιες βασικές ιδιότητες, οι οποίες είναι:

i. $(A+B)+C=A+(B+C)$
ii. $A+\mathbb{O}=A$
iii. $A+(-A)=\mathbb{O}$
iv. $A+B=B+A$
v. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
vi. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
vii. $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$
viii. $1A=A,\quad 0A=\mathbb{O}$

Επιπλέον ισχύουν :

i. $(A+B)^T = A^T + B^T$

ii. $(A+B)^* = A^* + B^*$

iii. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

iv. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$

v. $tr(A+B) = trA + trB$

vi. $tr(\lambda A) = \lambda trA$

Βασική συνέπεια: Κάθε πίνακας $A \in \prod_{\mu\times\nu}$ γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα ίδιου τύπου.

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^{\mathrm{T}}\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^{\mathrm{T}}\right)$$

1.3 Γινόμενο πινάκων

Το γινόμενο AB δύο πινάκων είναι μια πράξη μεταξύ πινάκων, που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός των στηλών του A να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του B. Δηλαδή αν $A \in \prod_{\mu\times\nu}(K)$ τότε πρέπει $B \in \prod_{\nu\times\rho}(K)$. Το **γινόμενο** AB θα είναι τότε ένας πίνακας $AB = (\gamma_{ij})$ τύπου $\mu \times \rho$ που το τυχαίο στοιχείο του δίνεται από τη σχέση

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{i\nu}\beta_{\nu j}$$

Προφανώς ισχύει $AB \neq BA$ γιατί ακόμα κι όταν ορίζεται το ένα γινόμενο δεν ορίζεται πάντα και το άλλο. Όμως ακόμα κι αν ορίζονται και τα δύο γινόμενα AB και BA αυτά είναι γενικά διαφορετικού τύπου πίνακες.

Αν ισχύει η ισότητα $AB = BA$ οι πίνακες ονομάζονται **αντιμεταθετικοί**.

<u>Ειδικές περιπτώσεις πινάκων :</u> Έστω A είναι ένας $1\times\nu$ πίνακας γραμμή και B ένας $\nu\times 1$ πίνακας στήλη. Τότε έχουμε

- $AB \in \prod_1$, δηλαδή είναι ένας αριθμός .

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_\nu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\nu \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_\nu y_\nu$$

- $BA \in \prod_\nu$, δηλαδή είναι ένας τετραγωνικός πίνακας ν-τάξης.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & \cdots & y_1x_\nu \\ y_2x_1 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_\nu x_1 & y_\nu x_2 & \cdots & y_\nu x_\nu \end{bmatrix}$$

Συγκρίνοντας λοιπόν τα γινόμενα AB και BA παρατηρούμε την επαλήθευση του ισχυρισμού μας πως $AB \neq BA$.

Ιδιότητες :

i. $A(BC) = (AB)C$
ii. $(AB)^T = B^T A^T$
iii. $(AB)^* = B^* A^*$
iv. $A(B+C) = AB + AC$
v. $(A+B)C = AC + BC$
vi. $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$

Ορισμός 1.3.1. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \prod_\nu$ λέγεται **αντιστρέψιμος** ή **ομαλός**, αν υπάρχει πίνακας B με την ιδιότητα $AB = BA = I$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας. Ο B αν υπάρχει είναι και μοναδικός. Πράγματι, αν υπήρχε και άλλος πίνακας B' με $AB' = B'A = I$ τότε

$$B' = B'I = B'(AB) = (B'A)B = IB = B$$

Τον μοναδικό αυτόν πίνακα B τον λέμε **αντίστροφο** του A και τον συμβολίζουμε με A^{-1}.

Βασικοί πίνακες :

- Αν $A^{-1} = A^T$ ο πίνακας ονομάζεται **ορθογώνιος.** Ισοδύναμα γράφεται και $A^T A = AA^T = I$.
- Αν $A^{-1} = A^*$ ο πίνακας ονομάζεται **ορθομοναδιαίος.** Ισοδύναμα γράφεται και $A^* A = AA^* = I$.

1.4 Σύνθετοι πίνακες

Ένας πίνακας A λέγεται **σύνθετος** αν τα στοιχεία του είναι επίσης πίνακες. Πρέπει όμως να επιβεβαιώνουν την εξής ιδιότητα: Τα στοιχεία-πίνακες που βρίσκονται στην ίδια γραμμή να έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια στήλη να έχουν τον ίδιο αριθμό στηλών. Κάθε τμήμα του πίνακα A ονομάζεται **υποπίνακας.**

Ένα παράδειγμα είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} d_{11} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

με $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} d_{11} \end{bmatrix}.$

Οι σύνθετοι πίνακες

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & \mathbb{O} \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & A_{\nu\nu} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\nu} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2\nu} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & & & A_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

όπου με $\mathbb{O}$ παριστάνουμε τους μηδενικούς πίνακες, ονομάζονται **σύνθετος διαγώνιος** και **σύνθετος** (**άνω**) **τριγωνικός** αντίστοιχα και η παρουσία τους μας διευκολύνει, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

1.5 Ορίζουσα

Ορισμός 1.5.1. Ορίζουσα είναι μια απεικόνιση $D : \prod_{\nu} \to K$ η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1. $D(A_1, \ldots, cA_i, \ldots, A_\nu) = cD(A_1, A_2, \ldots, A_\nu)$ για κάθε $c \in K$.
2. $D(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_\nu) = D(A_1, \ldots, A_i + cA_j, \ldots, A_j, \ldots, A_\nu)$, για κάθε $c \in K$ και για κάθε $i \neq j$.
3. $D(I) = 1$, όπου I ο μοναδιαίος $\nu \times \nu$ πίνακας.

Ο αριθμός $D(A) \in K$ που αντιστοιχεί στον πίνακα A λέγεται **ορίζουσα** του πίνακα A. Την ορίζουσα ενός πίνακα A θα συμβολίζουμε ακόμη και ως $\det A$ ή $|A|$. Όταν ο πίνακας $A = (a_{ij})$ δίνεται αναλυτικά με τα στοιχεία του τότε την ορίζουσα του A θα την συμβολίζουμε και ως

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Θεώρημα 1.5.1. Αν D είναι μια απεικόνιση με τις ιδιότητες 1 και 2 του ορισμού 1.5.1 τότε για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, \nu$ με $i \neq j$ ισχύουν:

1. $D(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_\nu) = -D(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_\nu)$.
2. Αν οι στήλες του A είναι γραμμικώς εξαρτημένες τότε $D(A) = 0$.
3. Αν οι στήλες ενός πίνακα B αποτελούν μετάθεση των στηλών του A τότε $D(B) = \pm D(A)$, όπου το «+» αντιστοιχεί σε άρτια μετάθεση και το «-» σε περιττή μετάθεση.
4. $D(A_1, \ldots, B_i + C_i, \ldots, A_\nu) = D(A_1, \ldots, B_i, \ldots, A_\nu) + D(A_1, \ldots, C_i, \ldots, A_\nu)$.

Απόδειξη:(1)

$$\begin{aligned} & D(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_\nu) \\ & \overset{\iota\delta.2, c=1}{=} D(A_1, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_\nu) \\ & \overset{\iota\delta.2, c=-1}{=} D(A_1, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_j - A_i - A_j, \ldots, A_\nu) \\ & \overset{\iota\delta.2, c=1}{=} D(A_1, \ldots, A_j, \ldots, -A_i, \ldots, A_\nu) \\ & \overset{\iota\delta.1}{=} -D(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_\nu) \end{aligned}$$

(2) Αν οι στήλες του A είναι γραμμικώς εξαρτημένες τότε κάποια από αυτές θα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, οπότε εφαρμόζοντας κατάλληλα την ιδιότητα 2 την αντικαθιστούμε με την μηδενική στήλη. Έτσι από την ιδιότητα 1 προκύπτει $D(A) = 0$.

(3) Είναι άμεση συνέπεια της (1).

(4) Έχοντας υπόψη την περίπτωση (1), αρκεί να δείξουμε την (4) για $i = 1$.

Θεωρούμε την $D(B_1 + C_1, A_2, \ldots, A_\nu)$. Αν οι στήλες $A_2, \ldots, A_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες τότε $D(X, A_2, \ldots, A_n) = 0$ για κάθε στήλη X και άρα η (4) ισχύει.

Έστω επομένως ότι οι $A_2, \ldots, A_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Εκλέγουμε ένα διάνυσμα A_1 έτσι ώστε τα $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ να είναι βάση του χώρου $\Pi_{n\times 1}$, δηλαδή κάθε στοιχείο του $\Pi_{n\times 1}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Τότε θα έχουμε: $B_1 = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i A_i$ και $C_1 = \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i A_i$

Οπότε

$$
\begin{aligned}
D(B_1 + C_1, A_2, ..., A_n) &= D(\sum_{i=1}^{\nu} (\beta_i + \gamma_i) A_i, A_2, ..., A_\nu) \\
&\overset{\iota\delta.2}{=} D((\beta_1 + \gamma_1) A_1, A_2, ..., A_\nu) \\
&\overset{\iota\delta.1}{=} ((\beta_1 + \gamma_1) D(A_1, A_2, ..., A_\nu) \\
&= \beta_1 D(A_1, A_2, ..., A_\nu) + \gamma_1 D(A_1, A_2, ..., A_\nu) \\
&\overset{\iota\delta.2}{=} D(\sum \beta_i A_i, A_2, ..., A_\nu) + (\sum \gamma_i A_i, A_2, ..., A_\nu) \\
&= D(B_1, A_2, ..., A_\nu) + D(C_1, A_2, ..., A_\nu)
\end{aligned}
$$

<u>Ορίζουσες βασικών πινάκων</u>

- Εάν έχουμε πίνακα A 2×2, με $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ τα διανύσματα στήλες του A τότε ισχύει $|D(\boldsymbol{\alpha}_1 , \boldsymbol{\alpha}_2)| = |\boldsymbol{\alpha}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_2|$ και άρα η ζητούμενη ορίζουσα θα είναι

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- Εάν έχουμε πίνακα A 3×3, με $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ τα διανύσματα στήλες του A τότε ισχύει $D\ (\boldsymbol{\alpha}_1 , \boldsymbol{\alpha}_2 , \boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot (\boldsymbol{\alpha}_2 \times \boldsymbol{\alpha}_3)$ και άρα η ζητούμενη ορίζουσα είναι:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} \\ - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{matrix}$$

- Εάν έχουμε πίνακα $A = (a_{ij})$ τριγωνικό τότε ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.5.2 Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας τριγωνικός (άνω ή κάτω) πίνακας τότε $D(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{\nu\nu}$, δηλαδή η ορίζουσα του ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του.

i. Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίση με μηδέν αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι μηδέν.
ii. Η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με τη μονάδα.

Από την έκφραση της ορίζουσας , τις ιδιότητες του μικτού γινομένου αλλά και τη γεωμετρική θεώρηση της σχέσης έχουμε:

1. $D(\boldsymbol{\alpha}_1\ ,\ c\boldsymbol{\alpha}_2\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_3) = cD(\boldsymbol{\alpha}_1\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_2\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$
2. $D(\boldsymbol{\alpha}_1\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_2 + c\boldsymbol{\alpha}_1\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_3) = D(\boldsymbol{\alpha}_1\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_2\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$
3. $D(I) = D(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = 1$
4. $D(\boldsymbol{\alpha}_1\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_2\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_3) = -D(\boldsymbol{\alpha}_2\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_1\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$
5. $D(\boldsymbol{\alpha}_1\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_2\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_3) \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_2\ ,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή μη συνεπίπεδα.

Θεώρημα 1.5.3 Αν έχουμε A, B δύο $\nu \times \nu$ πίνακες τότε $D(AB) = D(A) \cdot D(B)$.

Θεώρημα 1.5.4 Αν ένας τετραγωνικός $\nu \times \nu$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε $D(A) \neq 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ο A^{-1} και είναι $AA^{-1} = I$, οπότε $D(AA^{-1}) = D(I) = 1$. Επομένως, από το θεώρημα 1.5.3. θα είναι $D(AA^{-1}) = D(A)D(A^{-1}) = 1$ και άρα $D(A) \neq 0$.

Ορισμός 1.5.2. Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **κανονικός** αν $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}}$.

Θεώρημα 1.5.5 Αν A^T είναι ο ανάστροφος του τετραγωνικού πίνακα A τότε $D(A^T) = D(A)$.

Ορισμός 1.5.3 Ο πίνακας $(A_{ji}) = (A_{ij})^T$ λέγεται **συμπληρωματικός** του πίνακα A και συμβολίζεται $adjA$.

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{\nu 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & \cdots & A_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

<u>Συνέπειες</u>

- Ένας πίνακας A με ορίζουσα $D(A) \neq 0$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του δίνεται από τη σχέση $A^{-1} = \dfrac{1}{D(A)}(adjA)$.
- Ο αντίστροφος ενός πίνακα υπάρχει αν και μόνο αν $D(A) \neq 0$.

Ένας αντιστρέψιμος πίνακας λέγεται **ομαλός**. Επομένως ένας πίνακας A είναι ομαλός αν και μόνο αν $D(A) \neq 0$.

Ορισμός 1.5.4 Δύο τετραγωνικοί πίνακες A και B ίδιου τύπου $n \times n$ λέγονται **όμοιοι**, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε:

$$B = P^{-1}AP$$

Παράδειγμα 1.5.1 Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας του

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Αρχικά πρέπει να βρεθεί ο συμπληρωματικός πίνακας $adjA$ και στη συνέχεια θα βρεθεί ο αντίστροφος από τον τύπο $A^{-1} = \dfrac{1}{D(A)}(adjA)$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Άρα ο συμπληρωματικός πίνακας $adjA$ είναι ο $adjA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -3 & 7 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$D(A) = 3A_{11} + 0A_{21} + (-1)A_{31} = 3\cdot 2 + 0\cdot 4 + (-1)\cdot(-7) = 6 + 7 = 13$$

Άρα ο αντίστροφος πίνακας θα είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}(adjA) = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -3 & 7 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Για επαλήθευση μπορούμε να ελέγξουμε αν ισχύει: $A^{-1}A = I$

$$A^{-1}A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -3 & 7 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 6+6+1 & 12-14+2 & -21+18+3 \\ -3+3 & 7+6 & -9+9 \\ -2+2 & -4+4 & 7+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

1.6 Χαρακτηριστικά ποσά πινάκων

Έστω $\prod_{\nu}(K)$ το σύνολο των $\nu \times \nu$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K. Ένας πίνακας $A \in \prod_{\nu}(K)$ ορίζει ένα γραμμικό μετασχηματισμό $T : K^n \to K^n$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{x} \to T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ με $Y = AX$, $\boldsymbol{x} \in K^n$, $X \in \prod_{n\times 1}$.

Ονομάζουμε **ιδιοτιμές** του πίνακα A τις ιδιοτιμές του γραμμικού μετασχηματισμού T και **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα A τα διανύσματα στήλες που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα του T. Άρα ο αριθμός $\lambda \in K$ είναι μια ιδιοτιμή του A αν υπάρχει διάνυσμα $X \in \prod_{n\times 1}$ με $X \neq \mathbb{O}$ τέτοιο ώστε

$$AX = \lambda X \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad (A - \lambda I)X = \mathbb{O} \tag{1.1}$$

όπου $I \in \prod_{\nu}(K)$ ο μοναδιαίος πίνακας.

Αν $A = \left(a_{i,j}\right)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ και $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$ τότε η (1.1) γράφεται

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ &a_{11}x_1 + \left(a_{12} - \lambda\right)x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + (a_{1n} - \lambda)x_n = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Τώρα θα ορίσουμε τη **χαρακτηριστική εξίσωση** και το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A.

Ορισμός 1.6.1. **Χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A ονομάζεται η εξίσωση

$\det(A - \lambda I) = 0$ ή πιο αναλυτικά $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} - \lambda \end{vmatrix} = 0$.

Ορισμός 1.6.2. **Χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A είναι η εξίσωση

$$X_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A)$$

Από τους δύο τελευταίους ορισμούς προκύπτουν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα αντίστοιχα. Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A λέγονται **χαρακτηριστικά ποσά** του A.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n

$$X_A(\lambda) = (-1)^n[\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0]$$

όπου έχει n στο σύνολο πραγματικές και μιγαδικές ρίζες και n στο σύνολο πραγματικές ή μιγαδικές ιδιοτιμές.
Οπότε ισχύει

$$X_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_i)^{m_i} = 0$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ οι i διακεκριμένες ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, ιδιοτιμές του πίνακα, με πολλαπλότητα $m_1, m_2, \ldots, m_i$ αντίστοιχα, όπου ισχύει $m_1 + m_2 + \ldots + m_i = n$.

Ορισμός 1.6.3. Ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται μια ιδιοτιμή στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής. Δηλαδή αν $X_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$ τότε η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_i είναι m_i.

Ορισμός 1.6.4. Το σύνολο των ιδιοτιμών ενός πίνακα λέγεται **φάσμα** του πίνακα και συμβολίζεται συνήθως με $\sigma(A)$.

Ορισμός 1.6.5. Ιδιοχώρος ενός πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ καλείται το σύνολο

$$E_\lambda = \{x : Ax = \lambda x\}$$

το οποίο είναι υπόχωρος του $\prod_{n\times 1}$.

Ορισμός 1.6.6. Η διάσταση $\dim E_\lambda$ του ιδιοχώρου μίας ιδιοτιμής καλείται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής και ισούται με την μηδενικότητα του πίνακα $A - \lambda I$. Η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι μικρότερη ή ίση από την αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.

Παράδειγμα 1.6.1 Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Βήμα 1. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα *A*.

$$X_A(\lambda) = \det\left[A - \lambda I\right] = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2$$

Βήμα 2. Υπολογίζουμε τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$X_A(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$$

Επομένως $\lambda_1 = 2$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A με αλγεβρική πολλαπλότητα 2.

Βήμα 3. Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα λύνουμε για $\lambda = 2$, το ομογενές σύστημα

$$(A-\lambda I)x = 0 \Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 - x_2 = 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 = 2x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 = -x_2$$

Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2 είναι $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2, x_2 \right\}$

Άρα για $\lambda_1 = 2$ επιλέγουμε το ιδιοδιάνυσμα $X_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ με $\dim E_2 = 1$

Η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 2$ που είναι 1, δεν ταυτίζεται με την αλγεβρική της πολλαπλότητα που είναι 2.

Πρόταση 1.6.1 Δύο **όμοιοι** πίνακες A και $B = P^{-1}AP$ έχουν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Αν X και Y είναι ιδιοδιανύσμτα των A και B αντίστοιχα, που προκύπτουν από την ίδια ιδιοτιμή, τότε $X = PY$.

Πόρισμα 1.6.2. Ο αριθμός των γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A αντιστοιχων της ιδιοτιμής λ_0 είναι ίσος με τη διάσταση του E_{λ_0} και επομένως ισχύει η σχέση $\dim E_{\lambda_0} = n - rank(A - \lambda_0 I)$.

Παράδειγμα 1.6.2 Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 1. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A.

$$X_A(\lambda) = \det\left[A - \lambda I\right] = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Βήμα 2. Υπολογίζουμε τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$X_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$$

Βήμα 3. Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα λύνουμε για $\lambda = 4$, το ομογενές σύστημα

$$(A-\lambda I)x = 0 \Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 4x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x_1 = 2x_2$$

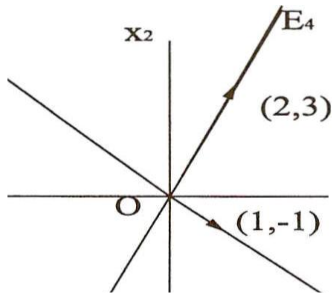
Άρα για $\lambda_1 = 4$ έχουμε τη γενική λύση $X = k\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}^T$, $k \in \mathbb{R}$. Τα διανύσματα αυτά (εκτός από το μηδενικό που προκύπτει με $k = 0$) είναι ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα της ιδιοτιμής $\lambda = 4$. Ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι ο $E_4 = \left\{k\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}^T, k \in \mathbb{R}\right\}$ και έχει ως βάση το διάνυσμα π.χ. $X_1 = \begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}^T$.

Για $\lambda = -1$ προκύπτει το σύστημα

$$(A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix}2x_1 + 2x_2 = 0\\ 3x_1 + 3x_2 = 0\end{Bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2$$

που έχει γενική λύση $X = k\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T, k \in \mathbb{R}$.

Άρα τα διανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ είναι τα $X = k\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι ο $E_1 = \left\{k\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T, k \in \mathbb{R}\right\}$. Μια βάση θα είναι το διάνυσμα π.χ. $X_2 = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$.



Σχήμα 1.1

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι μια n βαθμού αλγεβρική εξισωση ως προς λ με συντελεστές από το σώμα K.
Το K μπορεί να είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$.

Διακρίνουμε λοιπόν δύο περιπτώσεις:

- Αν $K = \mathbb{R}$, τότε ο $A \in \Pi_n(\mathbb{R})$ θεωρείται ως γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ και επομένως μόνο οι πραγματικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι ιδιοτιμές του A.

- Αν $K = \mathbb{C}$ τότε ο $A \in \Pi_n(\mathbb{C})$ θεωρείται ως γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{C}^n$ και επομένως όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι ιδιοτιμές του A. Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει στο $\mathbb{C}$ n ακριβώς ρίζες. Αυτό ισχύει και στην ειδική περίπτωση που τα στοιχεία του A είναι πραγματικοί αριθμοί αλλά ο A θεωρείται ως στοιχείο του $\Pi_n(\mathbb{C})$.

1.7 Διαγωνοποίηση πινάκων

Ορισμός 1.7.1. Ένας πίνακας $A \in \prod_n(K)$ είναι **διαγωνοποιήσιμος** αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα. Ισοδύναμα, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \prod_n(K)$ και διαγώνιος πίνακας Δ τέτοιοι ώστε να είναι

$$(i)\ A = P\Delta P^{-1} \text{ ή ισοδύναμα } (ii)\ \Delta = P^{-1}AP \qquad (1.3)$$

Τότε λέμε ότι έχουμε μια **διαγωνοποίηση** του A.
Είναι φανερό ότι, η ισότητα (ii) είναι ακριβώς ο ορισμός ομοιότητας των πινάκων A, Δ, γι΄ αυτό συχνά χρησιμοποιούμε αυτόν ως ισοδύναμο ορισμό διαγωνοποίησης πίνακα, ο δε πίνακας P ονομάζεται **πίνακας ομοιότητας**.
Θεώρημα 1.7.1. Ένας πίνακας $A \in \prod_n(K)$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μονο αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Θεώρημα 1.7.2. Αν $A = P\Delta P^{-1}$ είναι μια διαγωνοποίηση του A τότε ο διαγώνιος πίνακας Δ έχει ως διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A, ενώ ο πινακας P έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, αντίστοιχα των ιδιοτιμών του με την ίδια σειρά που αυτές παρουσιάζονται στον Δ.

Απόδειξη: Έστω $A = P\Delta P^{-1}$ μια διαγωνοποίηση του A. Τα στοιχεία της διαγωνίου Δ είναι οι ιδιοτιμές του και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του είναι τα

$$F_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T \qquad \text{(η μονάδα στην k-θέση).}$$

Άρα από την πρόταση 1.6.1 ο A έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον Δ και τα ιδιοδιανύσματα του $X_k, k = 1, 2, \ldots, n$ συνδέονται με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του Δ με τη σχέση $PF_k = X_k$. Επομένως το ιδιοδιάνυσμα X_k του A είναι το διάνυσμα της k-στήλης του P.
Άρα ο πίνακας P έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A με την ίδια σειρά που είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές στον Δ.

Πόρισμα 1.7.1. Αν ένας πίνακας $A \in \prod_n(K)$ έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές τότε είναι διαγωνοποιήσιμος.

<u>Διαδικασία διαγωνοποίησης</u>

Έστω A ένας διαγωνοποιήσιμος πίνακας. Για να βρούμε μια διαγωνοποίηση του A ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα :

1. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A,όπου οι ρίζες του είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

2. Για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ υπολογίζουμε μια βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου και σχηματίζουμε τον $n \times n$ διαγώνιο πίνακα $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ (λαμβάνοντας υπόψη την πολλαπλότητα των ιδιοτιμών).
3. Υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή και σχηματίζουμε ένα σύνολο από r ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, \ldots, X_r$.
   - Αν $r \neq n$, ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται.
   - Αν $r = n$, ο πίνακας A διαγωνοποιείται.
4. Σχηματίζουμε τον πίνακα P με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A , δηλαδή $P = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$ (με σειρά αντίστοιχη με αυτή των ιδιοτιμών στον Δ),οπότε

   έχουμε διαγωνοποίηση του $A : \Delta = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbb{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Παραδειγμα 1.7.1 Εξετάστε εάν διαγωνοποιείται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ και εκτελέστε τη διαγωνοποίησή του.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$X_A(\lambda) = \det\left[\lambda I - A\right] = \det\left[\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda-2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} =$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις

  του συστήματος $(A - \lambda_1 I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Οπότε,

$$\begin{Bmatrix} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5(x_1 + x_2) = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = -x_1 \\ x_3 = -x_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, x_1 \neq 0.$$

Άρα για $\lambda_1 = -2$ επιλέγουμε το ιδιοδιάνυσμα $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$ με $\dim E_{-2} = 1$

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις

του συστήματος $(A - \lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Οπότε,

$$\left.\begin{cases} -x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} x_2 = 4x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 4x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 \neq 0.$$

Άρα για $\lambda_2 = 1$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $X_2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T$ με $\dim E_1 = 1$

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 3$, αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις

του συστήματος $(A - \lambda_3 I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Οπότε,

$$\left.\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1 \neq 0$$

Άρα για $\lambda_3 = 3$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ με $\dim E_3 = 1$.

Τα ιδιοδιανύσματα X_1, X_2, X_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί σε διακεκριμένες ιδιοτιμές αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Για να βρούμε την διαγωνοποίηση του A κατασκευάζουμε τον πίνακα P

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και τελικά έχουμε

$$P^{-1}AP = \Delta = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση 1.7.1. α) Αν ένας πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, τότε

$$A^k = P\Delta^k P^{-1} \tag{1.4}$$

για κάθε φυσικό αριθμό k.

Επειδή όμως $\Delta^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$, ο υπολογισμός του A^k ανάγεται τελικά στην εύρεση ενός αντίστροφου πίνακα, του P^{-1} και τον πολλαπλασιασμό τριών πινάκων, των P, Δ^k, P^{-1}.

β) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε από την $A = P\Delta P^{-1}$ έπεται η $A^{-1} = P\Delta^{-1}P^{-1}$, όπου $\Delta^{-1} = diag(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$. Αποδεικνύεται τότε επαγωγικά ότι

$$A^{-k} = P\Delta^{-k}P$$

για κάθε φυσικό αριθμό k.

Επομένως όταν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος η σχέση $A^k = P\Delta^k P^{-1}$ ισχύει για κάθε ακέραιο αριθμό k.

Παραδειγμα 1.7.2 Ο πίνακας A^{10} του προηγούμενου παραδείγματος θα είναι

Αφού $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $\Delta = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

θα έχουμε

$$A^{10} = P\Delta^{10}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

1.8 Ελάχιστο πολυώνυμο

Ορισμός 1.8.1. Έστω $A \in \prod_n(K)$. Το μοναδικό πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ για το οποίο

- $m_A(\lambda) = \mathbb{O}$.
- Το $m_A(\lambda)$ έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα.
- Το $m_A(\lambda)$ έχει το μικρότερο βαθμό από όλα τα πολυώνυμα με τις δύο προηγούμενες ιδιότητες,

ονομάζεται **ελάχιστο πολυώνυμο** του πίνακα A.

Πρόταση 1.8.1. Το ελάχιστο πολυώνυμο του $A \in \prod_n(K)$ διαιρεί κάθε άλλο πολυώνυμο $f(\lambda)$ τέτοιο ώστε $f(A) = \mathbb{O}$.

Απόδειξη: Έστω $\pi(\lambda)$ το πηλίκο και $\upsilon(\lambda)$ το υπόλοιπο από τη διαίρεση του $f(\lambda)$ με το $m_A(\lambda)$. Τότε

$$f(\lambda) = \pi(\lambda) m_A(\lambda) + \upsilon(\lambda)$$

Προφανώς, επειδή $m_A(A) = \mathbb{O}$ και $f(A) = \mathbb{O}$ έπεται ότι $\upsilon(A) = \mathbb{O}$. Αλλά ο βαθμός του $\upsilon(\lambda)$ είναι μικρότερος του βαθμού του $m_A(\lambda)$. Επειδή όμως το $m_A(\lambda)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A, αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν $\upsilon(\lambda) = 0$, οπότε το $m_A(\lambda)$ διαιρεί το $f(\lambda)$.

Πρόταση 1.8.2. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ ενός πίνακα $A \in \prod_n(K)$ έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$, αλλά με πολλαπλότητες μικρότερες ή ίσες από εκείνες των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Απόδειξη: Επειδή $X_A(\lambda) / m_A(\lambda)$ συνεπώς και κάθε ρίζα του $m_A(\lambda)$ είναι ρίζα του $X_A(\lambda)$.

Αντίστροφα, αν λ είναι μια ρίζα του $X_A(\lambda)$ δηλ. είναι ιδιοτιμή του πίνακα A τότε

υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα x τέτοιο ώστε $Ax = \lambda x \Rightarrow A^k x = \lambda^k x$.

Αν λοιπόν

$$m_A(\lambda) = m_0\lambda + m_1\lambda + ... + m_k\lambda^k$$

τότε θα έχουμε

$$0 = m_A(A)x = (m_0 I_n + m_1 A + ... + m_k A^k)x = (m_0\lambda + m_1\lambda + ... + m_k\lambda^k)x = m_A(\lambda)x$$

Επειδή όμως $x \neq 0$, θα έχουμε ότι $m_A(\lambda) = 0$ και το λ είναι ρίζα του ελάχιστου πολυωνύμου.

Πόρισμα 1.8.1. Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ του $A \in \prod_n(K)$, έχει n διακεκριμένες ρίζες, τότε συμπίπτει με το ελάχιστο πολυώνυμο.

Πρόταση 1.8.3. Ένας πίνακας $A \in \prod_n(K)$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, δηλαδή

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_k) \qquad (1.5)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ οι ιδιοτιμές είναι ανά δύο διαφορετικές.

Αν το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι της μορφής (1.5), σύμφωνα με τον ορισμό του ελαχίστου πολυωνύμου έχουμε

$$m_A(A) = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)\ldots(A - \lambda_k I) = \mathbb{O}$$

Επομένως, για να ελέγξουμε αν ο πίνακας Α είναι διαγωνοποιήσιμος, αρκεί να εξετάσουμε αν επαληθεύεται η ισότητα

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)\ldots(A - \lambda_k I) = \mathbb{O} \tag{1.6}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A.

Κεφάλαιο 2

Εφαρμογές της Διαγωνοποίησης

Ι) Τετραγωνικές μορφές & Εφαρμογές Πινάκων στη Γεωμετρία

2.1 Τετραγωνικές μορφές

Πριν ασχοληθούμε με τις εφαρμογές των πινάκων στη Γεωμετρία θα πρέπει να ορίσουμε τι είναι τετραγωνική μορφή και πως αυτή αναγεται στην κανονική μορφή.

Η **τετραγωνική μορφή** δύο μεταβλητών x και y, ορίζεται ως ένα πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού της μορφής

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

Το πολυώνυμο αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε ως

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^T A X$$

όπου ο πίνακας A είναι συμμετρικός και $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο του πίνακα A είναι οι συντελεστές των τετραγωνισμένων όρων του πολυωνύμου, ενώ τα υπόλοιπα είναι το μισό του συντελεστή του γινομένου xy.

Παράδειγμα 2.1.1 Οι παρακάτω περιπτώσεις είναι τετραγωνικές μορφές δύο μεταβλητών.

$$2x^2+6xy-7y^2=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \; 6x^2-3y^2=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Οι τετραγωνικές μορφές δεν περιορίζονται μόνο σε δύο μεταβλητές. Η γενική μορφή τετραγωνικών μορφών ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 2.1.1 Μία **τετραγωνική μορφή** με n μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ έχει την μορφή

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

όπου ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

Εάν $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ και $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$ τότε η (2.1) μπορεί να γραφτεί ως

$$x^T A x = \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \cdots + \alpha_{nn}x_n^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j \, .$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός $(A = A^T)$, τότε η σχέση $x^T Ax$ μπορεί να εκφραστεί ως εσωτερικό γινόμενο. Δηλαδή,

$$x^T Ax = x^T (Ax) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$$

Ορισμός 2.1.2 Η τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ θα ονομάζεται θετικά ορισμένη εάν $x^T Ax > 0$ για κάθε $x \neq 0$, και ο συμμετρικός πίνακας A θα ονομάζεται θετικά ορισμένος πίνακας εάν η $x^T Ax$ είναι θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή.

Θεώρημα 2.1.1 Έστω A πραγματικός συμμετρικός πίνακας, τάξεως ν. Τότε η τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ είναι:

- Θετικά ορισμένη ακριβώς όταν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές.
- Θετικά ημιορισμένη ακριβώς όταν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη αρνητικές.
- Αόριστη ακριβώς όταν ο πίνακας A έχει θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές.

Παράδειγμα 2.1.2 Θα δείξουμε ότι ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος.Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$X_A(\lambda) = \det\left[A - \lambda I\right] = 0 \Rightarrow \det\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0.$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ (διπλή) και $\lambda_2 = 4$. Εφόσον όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές, ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος και για κάθε $x \neq 0$.

$$x^T Ax = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 == (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2 > 0$$

Ορισμός 2.1.2 Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε θα ονομάζουμε ως κύριους **υπο-πίνακες** του A όλους εκείνους τους υπο-πίνακες που μπορούν να κατασκευαστούν από τις πρώτες r γραμμές και r στήλες του πίνακα A για $r = 1, 2, ..., n$. Οι υπο-πίνακες αυτοί ορίζονται ως :

$$A_1 = \left[\alpha_{11}\right], A_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, ..., A_n = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα 2.1.2 Ένας συμμετρικός πίνακας A ονομάζεται θετικά ορισμένος εάν όλοι οι κύριοι υπο-πίνακες του έχουν θετική ορίζουσα δηλαδή $|A_1| > 0, |A_2| > 0, ..., |A_n| > 0.$ Ένας συμμετρικός πίνακας A ονομάζεται αρνητικά ορισμένος εάν και μόνο εάν $|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0, ..., (-1)^n |A_n| > 0.$

Παράδειγμα 2.1.3 Θα δείξουμε ότι ο συμμετρικός πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{είναι θετικά ορισμένος.}$$

Ελέγχουμε τις ορίζουσες των υπο-πινάκων του A

$$|2|=2, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3, \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

Όλες οι ορίζουσες είναι θετικές άρα ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.

2.2 Διαγωνοποίηση Τετραγωνικών Μορφών

Έστω η τετραγωνική μορφή

$$x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

Ξέρουμε ότι αν ένας πίνακας A είναι συμμετρικός τότε διαγωνοποιείται από ορθογώνιο πίνακα Q ($Q^{-1}=Q^T$). Δηλαδή $A=Q\Delta Q^T$.

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $x=Qy$, όπου $y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$

και $y_1, y_2, \dots, y_n$ είναι οι νέες μεταβλητές. Εάν αντικαταστήσουμε με $x=Qy$ στην παραπάνω τετραγωνική μορφή $x^T Ax$, τότε θα πάρουμε

$$F(x)=x^T Ax=(Qy^T)A(Qy)=y^T Q^T AQy=y^T \Delta y$$

Επομένως,

$$F(x)=y^T\Delta y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$$

Δημιουργούμε δηλαδή, μία νέα τετραγωνική μορφή στην οποία δεν υπάρχουν γινόμενα μεταξύ μεταβλητών.

Θεώρημα 2.2.1 Έστω η τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ με μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_n$, όπου ο πίνακας A είναι ένας συμμετρικός πίνακας. Εάν ο πίνακας Q έχει ως στήλες του τα ορθομοναδιαία ιδιοδιανύσματα του πίνακα A και αν οι νέες μεταβλητές $y_1, y_2, ..., y_n$ ορίζονται από την σχέση $x = Qy$, τότε αντικαθιστώντας για x στην τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ θα πάρουμε

$$F(x)=y^T\Delta y=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A και $\Delta = Q^T AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

Η νέα αυτή μορφή ονομάζεται **κανονική** ή **διαγώνια** μορφή.

Παράδειγμα 2.2.1. Να βρεθεί η διαγώνια μορφή της τετραγωνικής μορφής

$$F(x)=5x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2$$

Έχουμε

$$x^T Ax=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι

$$\det\left[A-\lambda I\right]=0 \Rightarrow \det\left[\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=0 \Rightarrow$$
$$\det\begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix}=0 \Rightarrow (5-\lambda)^2-3^2=0 \Rightarrow (2-\lambda)(8-\lambda)=0$$

Οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα A θα είναι $\lambda = 2$ και $\lambda = 8$.

Άρα η κανονική μορφή του θα είναι

$$F(x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2y_1^2 + 8y_2^2$$

<u>Εύρεση ορθοκανονικής βάσης</u>

Ορισμός 2.2.1. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μία βάση του V λέγεται **ορθοκανονική** αν αποτελείται από μοναδιαία διανύσματα, ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους, δηλαδή είναι ένα ορθοκανονικοποιημένο σύνολο διανυσμάτων του V.

Θεώρημα 2.2.2 (Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt). Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Έστω ακόμη $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ μία βάση του V. Τότε από την β κατασκευάζεται μία ορθογώνια βάση $\beta' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ του V τέτοια ώστε να έχει τις ιδιότητες $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$, $i \neq j$ και $\mathbf{u}_i \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Απόδειξη: Είναι $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$. Θέτουμε $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ και ζητούμε να κατασκευάσουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \lambda \mathbf{u}_1 ,$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, προσδιοριστέος συντελεστής, τέτοιος ώστε $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$. Είναι

$$0 = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_2 - \lambda \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle - \lambda \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle ,$$

από όπου παίρνουμε

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \quad \text{και επομένως} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 .$$

Είναι $\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0}$ γιατί αλλιώς τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2$ θα ήταν γραμμικώς εξαρτημένα (άτοπο).

Επίσης $\mathbf{u}_2 \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$.

Όμοια κατασκευάζουμε ένα διάνυσμα

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \lambda_1 \mathbf{u}_1 - \lambda_2 \mathbf{u}_2 ,$$

όπου λ_1, λ_2 είναι προσδιοριστέοι συντελεστές τέτοιοι ώστε $\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$. Από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε ότι

$$\lambda_1=\frac{\langle \mathbf{v}_3,\mathbf{u}_1\rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2},\ \lambda_2=\frac{\langle \mathbf{v}_3,\mathbf{u}_2\rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2},\ \text{οπότε } \mathbf{u}_3=\mathbf{v}_3-\frac{\langle \mathbf{v}_3,\mathbf{u}_1\rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1-\frac{\langle \mathbf{v}_3,\mathbf{u}_2\rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2$$

και $\mathbf{u}_3\neq\mathbf{0}$ γιατί αλλιώς το $\mathbf{v}_3$ θα ήταν γραμμικός συνδιασμός των $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ και άρα των $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ (άτοπο). Επιπλέον είναι $\mathbf{u}_3\in[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]$.

Επαγωγικά, με τον ίδιο τρόπο, κατασκευάζουμετα μη μηδενικά διανύσματα $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k\}$, όπου

$$\mathbf{u}_k=\mathbf{v}_k-\frac{\langle \mathbf{v}_k,\mathbf{u}_1\rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1-\frac{\langle \mathbf{v}_k,\mathbf{u}_2\rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2-\cdots-\frac{\langle \mathbf{v}_k,\mathbf{u}_{k-1}\rangle}{\|\mathbf{u}_{k-1}\|^2}\mathbf{u}_{k-1}.$$

Τα διανύσματα αυτά από τον τρόπο κατασκευής τους, είναι μη μηδενικά και ικανοποιούν τις ιδιότητες του θεωρήματος 2.2.2. Έστω τώρα ότι ισχύει η τελευταία σχέση. Αν

$$\mathbf{u}_{k+1}=\mathbf{v}_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{u}_i,\ \lambda_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\ldots,k$$

τότε

$$\langle \mathbf{u}_{k+1},\mathbf{u}_j\rangle=\langle \mathbf{v}_{k+1},\mathbf{u}_j\rangle-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j\rangle=\langle \mathbf{v}_{k+1},\mathbf{u}_j\rangle-\lambda_j\langle \mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j\rangle,$$

οπότε είναι $\langle \mathbf{u}_{k+1},\mathbf{u}_j\rangle=0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u}_{k+1}=\mathbf{v}_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle \mathbf{v}_{k+1},\mathbf{u}_i\rangle}{\|\mathbf{u}_i\|^2}\mathbf{u}_i$.

Επομένως το $\mathbf{u}_{k+1}$ είναι ορθογώνιο με κάθε $\mathbf{u}_j$, $j=1,2,\ldots,k$. Επίσης $\mathbf{u}_{k+1}\neq\mathbf{0}$ και $\mathbf{u}_{k+1}\in[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_{k+1}]$.

Κατασκευάζεται επομένως ένα ορθογώνιο σύνολο $\beta'=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ διανυσμάτων που είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και ικανοποιεί τη σχέση

$$[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n]=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n].$$

Άρα το σύνολο $\beta'=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ είναι μια ορθογώνια βάση του V. Τέλος κανονικο-ποιώντας τα διανύσματα της βάσης αυτής παίρνουμε την ορθοκανονική βάση

$$\beta_0=\left\{\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|},\frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|},\ldots,\frac{\mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}_n\|}\right\}.$$

Πόρισμα 2.2.1. Κάθε πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο έχει μία ορθοκανονική βάση.

2.3 Καμπύλες και επιφάνειες 2ου βαθμού

Η γενική εξίσωση μιας καμπύλης 2ου βαθμού και μιας επιφάνειας 2ου βαθμού είναι

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2\beta_1 x + 2\beta_2 y + \gamma = 0 \quad \text{και} \tag{2.2}$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2\beta_1 x + 2\beta_2 y + 2\beta_3 z + \gamma = 0 \tag{2.3}$$

αντίστοιχα , όπου $a_{ij}, \beta_i, \gamma \in \mathbb{R}$.

Οι δύο αυτές εξισώσεις είναι ειδικές μορφές για $\nu = 2$ και $\nu = 3$ της,

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} + 2\beta^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \gamma = 0 \tag{2.4}$$

όπου:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η εύρεση ενός συστήματος συντεταγμένων τέτοιο ώστε οι εξισώσεις (2.2), (2.3) να έχουν απλούστερη μορφή . Στην μορφή λοιπόν που μας εξυπηρετεί είναι να απουσιάζουν τα γινόμενα xy, xz, yz των συντεταγμένων και όσο το δυνατό περισσότεροι πρωτοβάθμιοι όροι. Τα γινόμενα των συντεταγμένων οφείλονται στα μη διαγώνια στοιχεία του A της τετραγωνικής μορφής $X^T AX$. Η απαλοιφή λοιπόν θα γίνει με αναγωγή στην κανονική μορφή.

Στην απαλοιφή των πρωτοβάθμιων όρων διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

1. Των καμπυλών και επιφανειών που έχουν κάποιο κέντρο συμμετρίας.
2. Των καμπυλών και επιφανειών που δεν έχουν κέντρο συμμετρίας.

Ορισμός 2.3.1. Ένα σημείο $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ λέγεται **κέντρο συμμετρίας** της καμπύλης (αντίστοιχα της επιφάνειας) που δίνεται από την εξίσωση (2.4) αν για κάθε $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ τέτοιο ώστε το $\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$ να ανήκει στην καμπύλη (αντίστοιχα την επιφάνεια), δηλαδή να επαληθεύει την εξίσωση (2.4), έπεται ότι και το $\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}$ ανήκει σε αυτή.

Πρόταση 2.3.1. Ένα σημείο $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^\nu$ είναι κέντρο συμμετρίας της (2.4) αν και μόνο αν ο αντίστοιχος πίνακας στήλη Ξ είναι λύση του συστήματος $A\Xi + \beta = \mathbb{O}$.

Απόδειξη. Το σημείο $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^\nu$ είναι κέντρο συμμετρίας της (2.4) αν και μόνο αν για κάθε

$\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^\nu$ με

$$(\Xi + \mathrm{H})^{\mathrm{T}} \mathrm{A}(\Xi + \mathrm{H}) + 2\beta^{\mathrm{T}}(\Xi + \mathrm{H}) + \gamma = 0$$

έπεται και

$$(\Xi - \mathrm{H})^{\mathrm{T}} \mathrm{A}(\Xi - \mathrm{H}) + 2\beta^{\mathrm{T}}(\Xi - \mathrm{H}) + \gamma = 0$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις προκύπτει η εξίσωση

$$2\Xi^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{H} + 2\mathrm{H}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\Xi + 4\beta^{\mathrm{T}}\mathrm{H} = 0 \qquad (2.5)$$

Όμως $\quad \mathrm{H}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\Xi = \Xi^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{H}$, $\beta^{\mathrm{T}}\mathrm{H} = \mathrm{H}^{\mathrm{T}}\beta$

Άρα η (2.5) γράφεται

$$4\mathrm{H}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\Xi + \beta) = 0 \qquad (2.6)$$

Επειδή η (2.6) ισχύει για κάθε $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^\nu$ για το οποίο το $\Xi + \mathrm{H}$ επαληθεύει την (2.4) έπεται ότι

$$\mathrm{A}\Xi + \beta = \mathbb{O} \qquad (2.7)$$

Αντιστρόφως:

Αν για ένα $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^\nu$ το Ξ είναι λύση της $\mathrm{A}\Xi + \beta = \mathbb{O}$, τότε θα ισχύει και η $4\mathrm{H}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\Xi + \beta) = 0$ για κάθε $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^\nu$.

Αν το $\boldsymbol{\eta}$ είναι τέτοιο ώστε το $\Xi + \mathrm{H}$ να επαληθεύει την

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} + 2\beta^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \gamma = 0,$$

οπότε θα ισχύει και η $(\Xi + \mathrm{H})^{\mathrm{T}} \mathrm{A}(\Xi + \mathrm{H}) + 2\beta^{\mathrm{T}}(\Xi + \mathrm{H}) + \gamma = 0$.

Τότε, αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις

$$(\Xi + \mathrm{H})^{\mathrm{T}} \mathrm{A}(\Xi + \mathrm{H}) + 2\beta^{\mathrm{T}}(\Xi + \mathrm{H}) + \gamma = 0$$

και $\quad 4\mathrm{H}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\Xi + \beta) = 0$

θα προκύψει η εξίσωση

$$(\Xi - \mathrm{H})^{\mathrm{T}} \mathrm{A}(\Xi - \mathrm{H}) + 2\beta^{\mathrm{T}}(\Xi - \mathrm{H}) + \gamma = 0$$

Άρα το $\boldsymbol{\xi}$ είναι κέντρο συμμετρίας.

Πόρισμα 2.3.1. Η $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} + 2\beta^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \gamma = 0$ έχει κέντρο συμμετρίας αν και μόνο αν $rankA = rank(A|\beta)$.

Παραδειγμα 2.3.1 Η καμπύλη $x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 6x_2 + 9 = 0$ γράφεται

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 & +3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 9 = 0$$

Είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad \beta = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα $A\Xi + \beta = 0$ γράφεται αναλυτικά

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 - 2 = 0 \\ 3\xi_2 + 3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \xi_1 = 2 \\ \xi_2 = -1 \end{Bmatrix}$$

και έχει μοναδική λύση το $\Xi = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Επομένως το $\boldsymbol{\xi} = (2, -1)$ είναι το μοναδικό κέντρο συμμετρίας της καμπύλης.

2.4 Καμπύλες και επιφάνειες με κέντρο

Έστω ότι ένα σημείο $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{\nu}$ είναι κέντρο συμμετρίας της

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{X} + 2\beta^{\mathrm{T}}\mathrm{X} + \gamma = 0. \tag{2.8}$$

Θέτω $\mathrm{X} = \mathrm{Y} + \Xi$. Τότε η εξίσωση θα γράφεται

$$(\mathrm{Y} + \Xi)^{\mathrm{T}}\mathrm{A}(\mathrm{Y} + \Xi) + 2\beta^{\mathrm{T}}(\mathrm{Y} + \Xi) + \gamma) = 0,$$

$$\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Y} + 2\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\Xi + 2\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\beta + (\Xi^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\Xi + 2\beta^{\mathrm{T}}\Xi + \gamma) = 0$$

Και τελικά

$$\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Y} + 2\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\Xi + \beta) + \delta = 0, \tag{2.9}$$

όπου $\delta = \Xi^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\Xi + 2\beta^{\mathrm{T}}\Xi + \gamma.$

Επειδή όμως το $\boldsymbol{\xi}$ είναι κέντρο συμμετρίας, θα ισχύει $\mathrm{A}\Xi + \beta = 0$ και άρα η (2.9) γίνεται

$$\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Y} + \delta = 0. \tag{2.10}$$

Θα πρέπει τώρα να μετασχηματιστεί η $\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Y} + \delta = 0$ ετσι ώστε στην εξίσωση που θα προκύψει να απουσιάζουν οι όροι με τα γινόμενα συντεταγμένων. Για να γίνει αυτό, αρκεί η τετραγωνική μορφή $\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Y}$ να αναχθεί στην κανονική μορφή.

Έστω ο ορθογώνιος πίνακας Q που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A. Με το μετασχηματισμό

$$Y = QZ$$

η (2.10) γίνεται $(QZ)^T A(QZ) + \delta = 0$ ή $Z^T(Q^{\mathrm{T}}AQ)Z + \delta = 0$

Όμως $Q^{\mathrm{T}}AQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \Delta$ όπου λ_i οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

Επομένως,

$$Z^T \Delta Z + \delta = 0 \tag{2.11}$$

ή ισοδύναμα ,

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2 + \delta = 0. \qquad (2.12)$$

Η (2.11), ισοδύναμα η (2.12), λέγεται **κανονική εξίσωση** μίας καμπύλης ή επιφάνειας με κέντρο. Αν $rankA = \rho < \nu$, τότε $\lambda_{\rho+1} = \ldots = \lambda_\nu = 0$ και άρα δεν θα εμφανίζονται μερικές από τις συντεταγμένες στην εξίσωση (2.12). Ο μετασχηματισμός $Y = QZ$ περιγράφει μια αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων Σ' ώστε το νέο σύστημα Σ'' να έχει την ίδια αρχή O' με το Σ' και διανύσματα βάσης τις στήλες του πίνακα Q (ιδιοδιανύσματα του A). Η σύνθεση των μετασχηματισμών $\mathrm{X} = \mathrm{Y} + \Xi$ και $Y = QZ$ δίνει το μετασχηματισμό.

$$\mathrm{X} = QZ + \Xi.$$

Παράδειγμα 2.4.1 Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή περιέχει τον όρο του γινομένου των δύο μεταβλητών x_1x_2.
Θέτουμε

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα $A\Xi + \beta = \mathbb{O}$ θα είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} 5\xi_1 - 3\xi_2 = 0 \\ -3\xi_1 + 5\xi_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Άρα θα έχει λύση το $\boldsymbol{\xi} = 0$. Από το παραδειγμα 2.2.1 έχουμε $\det A \neq 0$ και οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda = 2$ και $\lambda = 8$. Επειδή $\det A \neq 0$, η λύση αυτή είναι μοναδική και άρα η αρχή Ο θα είναι το μόνο κέντρο συμμετρίας της καμπύλης.

Τα αντίστοιχα ορθομοναδιαία διανύσματα θα είναι $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας Q θα είναι

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

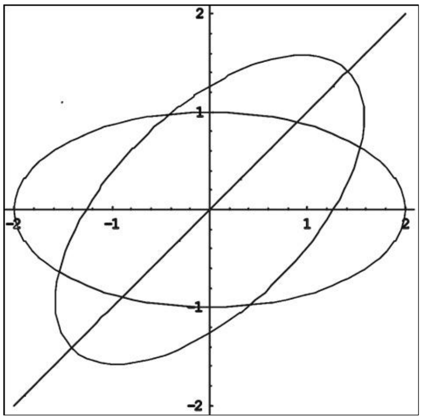
Άρα η κανονική μορφή θα είναι

$$F(x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2y_1^2 + 8y_2^2$$

Επομένως, $2y_1^2+8y_2^2-8=0 \Rightarrow 2y_1^2+8y_2^2=8 \Rightarrow \frac{y_1^2}{2^2}+y_2^2=1$ δηλαδή έχουμε μια έλλειψη.

Άρα η ζητούμενη γωνία είναι $\theta=45^\circ$. Δηλαδή η έλλειψη περιστρέφεται κατά γωνία $\theta=45^\circ$.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$



Παράδειγμα 2.4.2 Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$x_1^2-4x_2^2+6x_1+16x_2-23=0.$$

Η εξίσωση αυτή δεν περιέχει τον όρο του γινομένου των δύο μεταβλητών x_1x_2 αλλά περιέχει τα ζεύγη x_1, x_1^2 και x_2, x_2^2.

Θέτουμε

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \text{και } \beta=\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα $A\Xi+\beta=\mathbb{O}$ θα είναι

$$\begin{Bmatrix} \xi_1=-3 \\ -4\xi_2=-8 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \xi_1=-3 \\ \xi_2=+2 \end{Bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $\mathrm{X}=\mathrm{Y}+\Xi$ ή αναλυτικά,

$$x_1=y_1-3 \text{ και } x_2=y_2+2$$

προκύπτει $y_1^2-4y_2^2-16=0$ δηλαδή η $\frac{y_1^2}{16}-\frac{y_2^2}{4}=1$

Σε αντίθεση λοιπόν με την αρχική εξίσωση της οποίας η γραφική παράσταση δοσμένη στο xOy έχει μετατοπιστεί κατά το διάνυσμα (−3,2), η γραφική παράσταση της τελικής εξίσωσης είναι μία υπερβολή όπου βρίσκεται πάνω σε νέους καρτεσιανούς άξονες με αρχή το σημείο (-3,2) ως προς το xOy .

2.5 Καμπύλες και επιφάνειες χωρίς κέντρο

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε καμπύλες και επιφάνειες με γενική εξίσωση την

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}+2\beta^{\mathrm{T}}\mathbf{X}+\gamma=0$$

για τις οποίες το σύστημα $A\Xi+\beta=\mathbb{O}$ δεν έχει λύση ως προς Ξ .

Δηλαδή $\quad rankA\neq rank(A|\beta)$

Είναι προφανές ότι και σ' αυτήν την περίπτωση μπορεί να εφαρμοσθεί ο μετασχηματισμός $X=QY$, όπου Q ο πίνακας των ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων του A.

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $X=QY$, προκύπτει η εξίσωση

$$Y^{\mathrm{T}}\Delta Y+2\beta^{\mathrm{T}}QY+\gamma=0 \tag{2.13}$$

Είναι $rankA=\rho<\nu$, $(\nu=2,3)$, διότι αν ήταν $rankA=\nu$ θα είχαμε και $rank(A|\beta)=\nu$, οπότε η καμπύλη (ή η επιφάνεια) θα είχε κέντρο. Επομένως τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του A είναι μηδέν. Έτσι η εξίσωση (2.13) γράφεται:

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_\rho y_\rho^2+2m_1y_1+\ldots+2m_\rho y_\rho+\ldots+2m_\nu y_\nu+\gamma=0 \tag{2.14}$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε χωριστά τις καμπύλες από τις επιφάνειες.

Καμπύλες 2ου βαθμού χωρίς κέντρο

Αφού $rankA=\rho<2$, έπεται ότι $rankA=1$. Άρα μία μόνο ιδιοτιμή είναι μηδέν, και επομένως η εξίσωση (2.14) θα έχει τη μορφή:

$$\lambda y_1^2+2m_1y_1+2m_2y_2+\gamma=0 \tag{2.15}$$

Η εξίσωση (2.15), με τη σειρά της, ενώνοντας τους όρους λy_1^2 και $2m_1y_1$ γράφεται:

$$\lambda_1\left(y_1+\frac{m_1}{\lambda_1}\right)^2+2m_2\left(y_2+\frac{1}{2m_2}\left(\gamma-\frac{m_1^2}{\lambda_1}\right)\right)=0 \qquad (2.16)$$

Με το μετασχηματισμό (παράλληλη μετατόπιση του προηγουμένου συστήματος)

$$z_1=y_1+\frac{m_1}{\lambda_1},\ z_2=y_2+\frac{1}{2m_2}\left(\gamma-\frac{m_1^2}{\lambda_1}\right)$$

η (2.16) γίνεται:

$$\lambda_1 z_1^2+2m_2 z_2^2=0$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει παραβολή. Επομένως η μόνη καμπύλη 2ου βαθμού χωρίς κέντρο είναι η παραβολή.

Επιφάνειες 2ου βαθμού χωρίς κέντρο

Επειδή είναι $\nu=3$ ο βαθμός του πίνακα A μπορεί να είναι 1 ή 2. Διακρίνουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις:

- $rankA=2$. Τότε μια ιδιοτιμή είναι 0, έστω η $\lambda_3=0$. Η (2.14) γράφεται

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+2m_1 y_1+2m_2 y_2+2m_3 y_3+\gamma=0$$

Αν ομαδοποιήσουμε κατάλληλα τους όρους και χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό

$$z_1=y_1+\frac{m_1}{\lambda_1},\ z_2=y_2+\frac{m_2}{\lambda_2},\ z_3=y_3+\frac{1}{2m_3}\left(\gamma-\frac{m_1^2}{\lambda_1}-\frac{m_2^2}{\lambda_2}\right)$$

καταλήγουμε στην

$$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+2m_3 z_3=0$$

- $rankA=1$. Τότε δύο ιδιοτιμές είναι 0, έστω $\lambda_2=\lambda_3=0$. Η (2.14) γράφεται

$$\lambda_1 z_1^2+2m_2 z_2+2m_3 z_3=0$$

Η εξίσωση αυτή με τον ορθογώνιο μετασχηματισμό

$$w_1=z_1,\ w_2=-\frac{m_2 z_2+m_3 z_3}{\sqrt{m_2^2+m_3^2}},\ w_3=\frac{-m_3 z_2+m_2 z_3}{\sqrt{m_2^2+m_3^2}}, \qquad (2.17)$$

καταλήγει στην $\lambda_1 w_1^2-2w_2\sqrt{m_2^2+m_3^2}=0$

Παράδειγμα 2.5.1 Να βρεθεί η κανονική μορφή της καμπύλης

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 6x_2 + 25 = 0$$

Θέτουμε $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ και $\beta = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι

$$\det\left[\lambda I - A\right] = \det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 1) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda = 0$ και $\lambda = 2$. Παρατηρούμε ότι $rankA = 1, rank(A|\beta) = 2$, άρα η καμπύλη δεν έχει κέντρο. Ο πίνακας των ορθοκανονοικοποιημένων διανυσμάτων Q και ο $\beta^{\mathrm{T}}Q$ είναι: $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\beta^{\mathrm{T}}Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -8 & -2 \end{bmatrix}$

Εκτελώντας τον μετασχηματισμό $X = QY$ η αρχική γράφεται διαδοχικά:

$$2y_2^2 - 8\sqrt{2}y_1 - 2\sqrt{2}y_2 + 25 = 0 \text{ ή } \left(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\sqrt{2}\left(y_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

Θέτοντας $z_1 = y_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, z_2 = y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$z_2^2 - 4\sqrt{2}z_1 = 0,$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι η αρχική εξίσωση παριστάνει μια παραβολή.

Παράδειγμα 2.5.2. Να μετασχηματισθεί στην κανονική της μορφή η εξίσωση

$$9x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 10x_1 - 8x_2 - 5 = 0$$

και να βρεθεί το είδος της επιφανείας που παριστάνει.

Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \beta = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 11$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, οπότε $rankA = 1,\ rank(A|\beta) = 2$. Επομένως η επιφάνεια δεν έχει κέντρο. Ο πίνακας Q των αντιστοίχων ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων του A είναι

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{22}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{22}} \end{bmatrix}$$

Ο μετασχηματισμός $X = QY$ ανάγει την αρχική εξίσωση στην

$$11y_1^2 + 2\sqrt{11}y_1 + 4\sqrt{2}y_2 + 2\sqrt{22}y_3 - 5 = 0$$

ή
$$11\left(y_1 + \frac{\sqrt{11}}{11}\right)^2 + 4\sqrt{2}y_2 + 2\sqrt{22}y_3 - 6 = 0.$$

Στη συνέχεια με τον μετασχηματισμό (παράλληλη μετατόπιση)

$$z_1 = y_1 + \frac{\sqrt{11}}{11},\ z_2 = y_2 - \frac{6}{4\sqrt{2}},\ z_3 = y_3$$

και κατόπιν με τον ορθογώνιο μετασχηματισμό, (της μορφής (2.17))

$$w_1 = z_1, \quad w_2 = \frac{-2\sqrt{2}z_2 - \sqrt{22}z_3}{\sqrt{30}}, \quad w_3 = \frac{-\sqrt{22}z_2 + 2\sqrt{2}z_3}{\sqrt{30}}$$

προκύπτει η

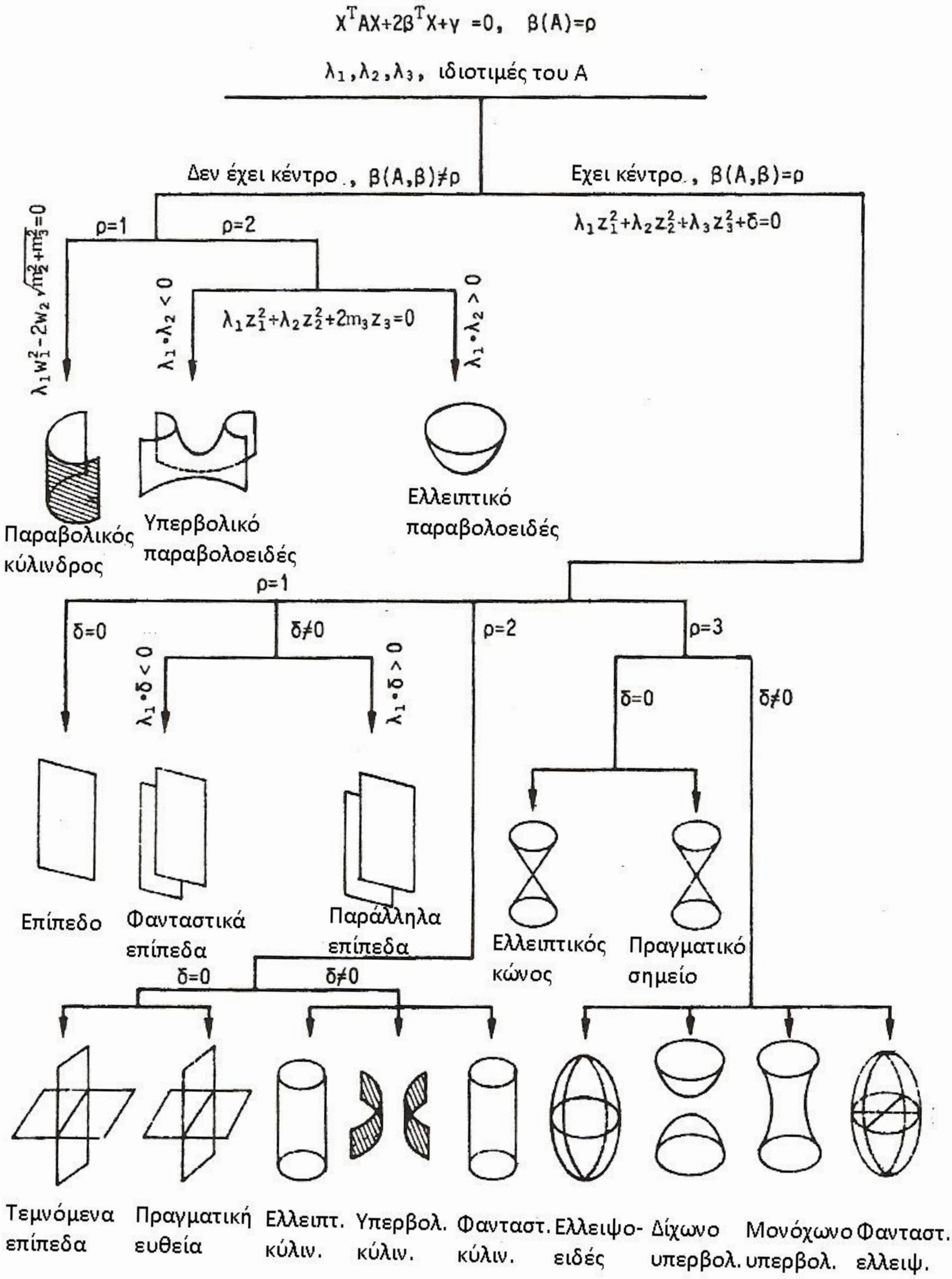
$$11w_1^2 - 2\sqrt{30}w_2 = 0$$

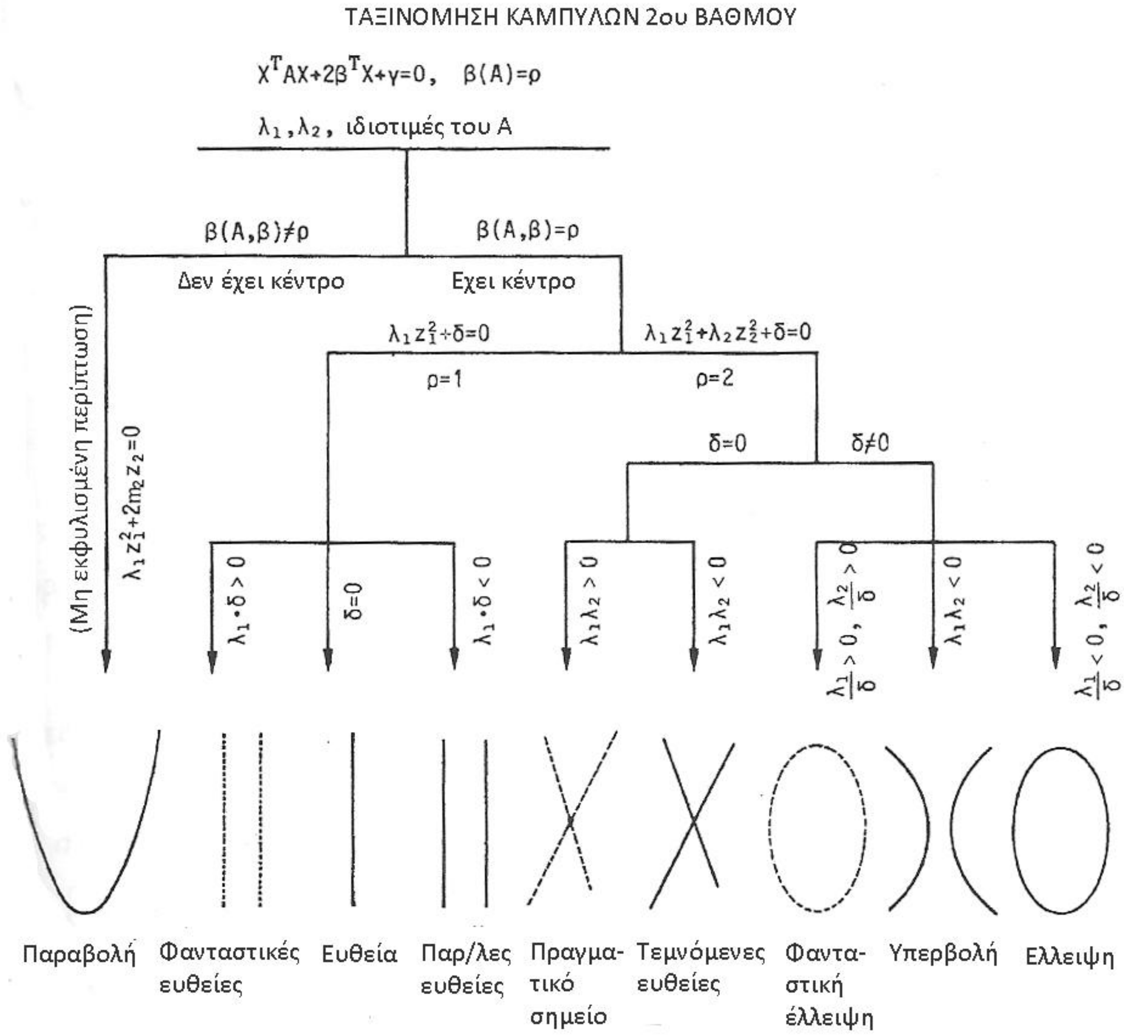
που είναι η κανονική εξίσωση παραβολικού κυλίνδρου.

2.6 Ταξινόμηση καμπυλών και επιφανειών

Η πλήρης διερεύνηση και ταξινόμηση των καμπυλών και των επιφανειών 2ου βαθμού παρουσιαζονται εδώ με τη μορφή πινάκων.

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ 2ου ΒΑΘΜΟΥ





Ένας εναλλακτικός τρόπος ταξινόμησης των επιφανειών μπορεί να γίνει με την έννοια της αδράνειας (inertia) ενός 3×3 συμμετρικού πίνακα.

Ορισμός 2.6.1 Έστω ο συμμετρικός πίνακας A μεγέθους 2×2 ή 3×3. Θα ονομάζουμε inertia (αδράνεια) του πίνακα A, $In(A)$, την διατεταγμένη τριάδα των αριθμών σχετικά με το πλήθος των ιδιοτιμών του πίνακα A που είναι : (θετικές, αρνητικές, μηδενικές).

Παραδειγμα 2.6.1 Να βρεθεί το $In(A)$ για κάθε έναν από τους παρακάτω πίνακες.

α) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$ β) $B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ γ) $C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές των πινάκων και έχουμε α) $\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 4) = 0$

Δηλαδή $\lambda = 1$ και $\lambda = -4$. Άρα $In(A) = (1,1,0)$

β) $\det(\lambda I - B) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 4) = 0$

Δηλαδή $\lambda = 0$ και $\lambda = 4$. Άρα $In(B) = (1,0,1)$

γ) $\det\left[\lambda I - C\right] = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 4) = 0.$

Δηλαδή $\lambda_1 = 1$ (διπλή) και $\lambda_2 = 4$. Άρα $In(C) = (3,0,0)$

Η αναγνώριση των επιφανειών στον χώρο δίνεται στον παρακάτω πίνακα

$In(A) = (3,0,0)$	Ελλειψοειδές
$In(A) = (2,0,1)$	Ελλειπτικό παραβολοειδές
$In(A) = (2,1,0)$	Μονόχωνο υπερβολοειδές
$In(A) = (1,2,0)$	Δίχωνο υπερβολοειδές
$In(A) = (1,1,1)$	Υπερβολικό παραβολοειδές
$In(A) = (1,0,2)$	Παραβολικός κύλινδρος

II) Εφαρμογές Πινάκων στη Μηχανική

2.7 Τανυστικό γινόμενο διανυσμάτων

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σε έννοιες και προτάσεις σχετικές με τους τανυστές 2ης τάξης που είναι κεντρικής σημασίας στην Μηχανική των συνεχών μέσων. Στη Μηχανική των συνεχών μέσων, χρησιμοποιείται ευρύτατα η έννοια του **τανυστή 2ης τάξης** που είναι ταυτόσιμη με την έννοια του γραμμικού μετασχηματισμού $T \in \mathfrak{L}(V)$ σε ένα Ευκλείδειο χώρο V.

Στη συνέχεια οι διανυσματικοί χώροι που θα αναφερόμαστε θα είναι Ευκλείδειοι και το εσωτερικό τους γινόμενο θα συμβολίζεται με $\langle , \rangle$.

Ορισμός 2.7.1. Θεωρούμε ένα Ευκλείδειο χώρο V (με εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$)και δύο διανύσματα $u, v \in V$. Ονομάζουμε **τανυστικό γινόμενο** των διανυσμάτων u, v έναν γραμμικό μετασχηματισμό που τον συμβολίζουμε με $u \otimes v$ και ορίζεται, για κάθε $x \in V$, από τη σχέση:

$$\left(u \otimes v\right) x = \langle x, v \rangle u.$$

Επειδή στον παραπάνω ορισμό του τανυστικού γινομένου υπεισέρχονται δύο διανύσματα, το γινόμενο αυτό καλείται και **δυαδικό γινόμενο.**

Πρόταση 2.7.1. Για κάθε $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $T \in \mathfrak{L}(V)$ ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) $(\lambda u + \mu v) \otimes w = \lambda(u \otimes v) + \mu(v \otimes w)$

(ii) $u \otimes (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \otimes v) + \mu(u \otimes w)$

(iii) $(u \otimes v)^* = v \otimes u$

(iv) $\dim \mathfrak{R}(u \otimes v) = 1$

(v) $T(u \otimes v) = Tu \otimes v$

(vi) $(u \otimes v)T = u \otimes (T^* v)$

(vii) $(u \otimes v)(w \otimes r) = \langle v, w \rangle u \otimes r$

(viii) $tr(u \otimes v) = \langle u, v \rangle$

(ix) $\det(u \otimes v) = 0$

Από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει η διατύπωση του τανυστικού γινομένου συναρτήσει των συνιστωσών των διανυσμάτων ***u*** και ***v.***

$$u \otimes v = u_i e_i \otimes v_k = u_i v_k e_i \otimes e_k \tag{2.18}$$

Πρόταση 2.7.2. Αν $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του V, τα n^2 τανυστικά γινόμενα $e_i \otimes e_j$, $i, j = 1, 2, ..., n$ είναι μία βάση του $\mathfrak{L}(V)$ και μάλιστα αν $T \in \mathfrak{L}(V)$ τότε (σύμβαση άθροισης)

$$T = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \otimes e_j \right) = \alpha_{ij} e_i \otimes e_j , \tag{2.19}$$

όπου $[T] = (\alpha_{ij})$ είναι ο πίνακας του T ως προς τη βάση $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Απόδειξη. Έχουμε $Te_k = \alpha_{ik} e_i$ και άρα, αν $x = x_k e_k \in V$, τότε

$$(T - \alpha_{ij} e_i \otimes e_j)x = (T - \alpha_{ij} e_i \otimes e_j) x_k e_k = x_k (Te_k - \alpha_{ij} \langle e_k, e_j \rangle e_i) = x_k (\alpha_{ik} - \alpha_{ij} \delta_{kj}) e_i = 0$$

Επομένως $Tx = \alpha_{ij}(e_i \otimes e_j)x$ για κάθε $x \in V$.

Άρα ισχύει η (2.19). Επομένως τα $e_i \otimes e_j$, $i, j = 1, 2, ..., n$ παράγουν το χώρο $\mathfrak{L}(V)$.

Θα δείξουμε ότι είναι και γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, έστω $\lambda_{ij} e_i \otimes e_j = 0$, $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$. Τότε θα έχουμε :

$$(\lambda_{ij} e_i \otimes e_j) e_k = \lambda_{ij}(e_i \otimes e_j) e_k = \lambda_{ij} \left\langle e_k, e_j \right\rangle e_i = \lambda_{ij} \delta_{kj} e_i = \lambda_{ik} e_i = 0.$$

Άρα $\lambda_{ik} = 0$.

Ορισμός 2.7.2. Τα στοιχεία α_{ij} του πίνακα $[T]$ λέγονται **συνιστώσες του τανυστή** T ως προς τη βάση e και στη Μηχανική των συνεχών μέσων συνήθως συμβολίζονται με T_{ij}. Επομένως θα είναι $Te_j = T_{ij} e_i$, οπότε $\langle Te_j, e_k \rangle = T_{ij} \langle e_i, e_k \rangle = T_{ij} \delta_{ik} = T_{kj}$.

Άρα $T_{ij} = \langle e_i, Te_j \rangle$.

Ορισμός 2.7.3. Ένας γραμμικός συνδυασμός δυαδικών γινομένων συνιστά ένα **καρτεσιανό τανυστή 2ας τάξεως.** Το δυαδικό γινόμενο, ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων δυαδικών γινομένων είναι ένας καρτεσιανός τανυστής 2ας τάξεως, συμβολικά παριστάνεται ως εξής,

$$A = A_{ij} e_i \otimes e_j$$

Ορισμός 2.7.4. Ο τανυστής $I = \delta_{ij} e_i \otimes e_j$ ονομάζεται **μοναδιαίος τανυστής**.

Ορισμός 2.7.5. Ένας τανυστής 2ας τάξεως ο οποίος έχει την ιδιότητα οι συνιστώσες του σε κάθε σύστημα συνταγμένων να ταυτίζονται με τις συνιστώσες του μοναδιαίου τανυστή καλείται **ισότροπος.** Τυπικό παράδειγμα ισότροπου τανυστή 2ας τάξεως είναι ο τανυστής των τάσεων σε ένα ιδεατό ρευστό.

Παράδειγμα 2.7.1. Οι συνιστώσες του $u \otimes v$ είναι $(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j$

Απόδειξη: Έχουμε λοιπόν $(u \otimes v)_{ij} = \langle e_i, (u \otimes v) e_j \rangle = \langle e_i, \langle e_j, v \rangle u \rangle = v_j \langle e_i, u \rangle = u_i v_j$.

Παράδειγμα 2.7.2. Αν $T = u \otimes u$, τότε $Tx = \langle x, u \rangle u$. Επομένως το Tx είναι η προβολή του x κατά τη διεύθυνση του διανύσματος u.

Παρατήρηση 2.7.1. Γενικά, αν W είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής του D τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\omega \in D$ με $Wv = \omega \times v$ (δηλαδή η δράση του W ισοδυναμεί με «εξωτερικό» πολλαπλασιασμό επί το ω).

Πράγματι, αν

$$[W]=\begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας του W ως προς μία δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση του D, τότε το διάνυσμα ω έχει συνιστώσες (α,β,γ) και αν $v=(x,y,z)$, οι συνιστώσες του $\omega\times v$ δίνονται από τον πίνακα στήλη $[W][x \quad y \quad z]^{\mathrm{T}}$.

Είναι $\omega\times v=(\beta z-\gamma y,\gamma x-\alpha z,ay-\beta x)$.

Το ω λέγεται **αξονικό** (axial) διάνυσμα του W και είναι $W\omega=0$.

Επομένως το ω ανήκει στον ιδιόχωρο E_0 της ιδιοτιμής $\lambda=0$ του W που έχει διάσταση ένα (αφού οι άλλες δύο ιδιοτιμές του είναι φανταστικές συζυγείς οπότε δίνουν διαφορετικά ιδιοδιανύσματα). Επομένως το ω παράγει τον ιδιόχωρο E_0 που θα είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή και λέγεται άξονας του W.

Στον διανυσματικό χώρο των τανυστών 2ης τάξης (ισοδύναμα στον $\mathfrak{L}(V)$) ορίζεται η απεικόνιση

$$\mathfrak{L}(V)\times\mathfrak{L}(V)\to\mathbb{R},(S,T)\to S\cdot T=tr(S^*T)$$

Αποδεικνύεται ότι είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathfrak{L}(V)$. Α ν T_{ij},S_{ij} είναι οι συνιστώσες των S,T ως προς μία ορθοκανονική βάση τότε είναι

$$S\cdot T=\sum_{i,j=1}^{n} S_{ij}T_{ij}$$

και ισχύουν οι ιδιότητες

- **i.** $IS=trS$
- **ii.** $R\cdot(ST)=(S^*R)\cdot T=(RT^*)\cdot S$
- **iii.** $\langle u,Sv\rangle=S(u\otimes v)$
- **iv.** $(u\otimes v)\cdot(w\otimes x)=\langle u,w\rangle\langle v,x\rangle$

Πρόταση 2.7.3. Έστω $S\in\mathfrak{L}(V)$ συμμετρικός και $\{e_1,e_2,e_3\}$ μία ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα στις ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Τότε

$$S=\lambda_1 e_1\otimes e_1+\lambda_2 e_2\otimes e_2+\lambda_3 e_3\otimes e_3 \tag{2.20}$$

Αντιστρόφως, αν ο S γράφεται με τη μορφή (2.20), όπου $\{e_i\}$ ορθοκανονική βάση του D τότε τα λ_i είναι ιδιοτιμές του S και τα e_i τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

2.8 Τετραγωνική ρίζα πίνακα Πολική ανάλυση

Έστω V ένας Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος και $S \in \mathfrak{L}(V)$ ένας συμμετρικός γραμμικός μετασχηματισμός . Ο S θα λέγεται **θετικά ημιορισμένος** αν $\langle Sx, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in V$. Σημειώνουμε ότι η συνθήκη $\langle Sx, x\rangle \geq 0$ συνεπάγεται ότι ο S είναι συμμετρικός.

Πράγματι είναι $\langle S^* x, x\rangle = \langle x, Sx\rangle = \overline{\langle x, Sx\rangle} = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in V$.

Πρόταση 2.8.1. Αν ένας συμμετρικός μετασχηματισμός $S \in \mathfrak{L}(V)$ είναι θετικά ημιορισμένος, τότε όλες του οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές, και υπάρχει ένας (μοναδικός) θετικός συμμετρικός μετασχηματισμός T τέτοιος ώστε $S = T^2$. Ο μετασχηματισμός T ονομάζεται **τετραγωνική ρίζα** του S και θα γράφουμε $T = S^{1/2}$.

Απόδειξη: Έστω λ μία ιδιοτιμή του S με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x.

Τότε $$\langle Sx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda |x|^2 \geq 0.$$

Άρα $\lambda \geq 0$. Επειδή ο S είναι συμμετρικός θα υπάρχει μία ορθοκανονική βάση u από ιδιοδιανύσματα του S ως προς την οποία ο S έχει πίνακα τον διαγώνιο $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu)$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές του S. Ο διαγώνιος πίνακας $B = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_\nu})$ ορίζει ως προς την προηγούμενη βάση ένα συμμετρικό μετασχηματισμό $T \in \mathfrak{L}(V)$.

Έστω τώρα δύο διανύσματα $x, y \in V$ με $y = Sx$. Τότε για τους αντίστοιχους πίνακες στήλες X, Y των συνιστωσών ισχύει $Y = \Delta X$ και επειδή $B^2 = \Delta$ θα έχουμε

$$B^2 X = \Delta X = Y.$$

Όμως ο B είναι ο πίνακας του T ως προς τη βάση u και άρα $T^2 x = y$ και επειδή $y = Sx$, έπεται ότι $S = T^2$.

Τέλος, ο T είναι θετικός. Πράγματι, ως προς την ορθοκανονική βάση u είναι

$$\langle Tx, x\rangle = \sqrt{\lambda_1} x_1^2 + \ldots + \sqrt{\lambda_\nu} x_\nu^2 \geq 0, \quad \text{για κάθε } x = x_1 u_1 + \ldots + x_\nu u_\nu \in V.$$

Παρατήρηση 2.8.1. Έχουμε δείξει ότι ένας πίνακας $A \in \Pi_\nu(K)$ μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμικός μετασχηματισμός του K^ν και άρα, αν αυτός είναι θετικά ημιορισμένος, μπορούμε να βρούμε την (θετική) τετραγωνική του ρίζα $B = A^{1/2}$. Από την προηγούμενη απόδειξη προκύπτει ότι αν $A = Pdiag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\nu)P^{\mathrm{T}}$, τότε

$$B = A^{1/2} = Pdiag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_\nu})P^{\mathrm{T}}$$

όπου P ένας ορθογώνιος πίνακας που διαγωνοποιεί τον A και λ_i οι ιδιοτιμές του A.

Θεώρημα 2.8.1 (πολική ανάλυση). Έστω V ένας Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος και $F \in \mathfrak{L}(V)$ με F «1-1». Τότε υπάρχουν συμμετρικοί μετασχηματισμοί $S, U \in \mathfrak{L}(V)$ και ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός $Q \in \mathfrak{L}(V)$ μονοσήμαντα ορισμένοι τέτοιοι ώστε

$$F = QS = UQ.$$

Η ανάλυση αυτή του F είναι μοναδική και μάλιστα είναι $S = \sqrt{F^{\mathrm{T}}F}$, $U = \sqrt{FF^{\mathrm{T}}}$.

Ο πίνακας S αντιστοιχεί στη λεγόμενη **δεξιά πολική ανάλυση** του F, ενώ ο πίνακας U αντιστοιχεί στην **αριστερή πολική ανάλυση** του F.

Όταν ο πίνακας F είναι συμμετρικός τότε οι πίνακες U και S ταυτίζονται.

Απόδειξη. Προφανώς ο $F^{\mathrm{T}}F$ είναι συμμετρικός $\langle F^{\mathrm{T}}Fx, x\rangle = \langle Fx, Fx\rangle = |Fx|^2 \geq 0$. Άρα ο $F^{\mathrm{T}}F$ είναι θετικά ημιορισμένος. Σύμφωνα με την πρόταση 2.8.1. υπάρχει η (θετική) τετραγωνική του ρίζα $S = (F^{\mathrm{T}}F)^{1/2}$ με S να είναι θετικά ημιορισμένος και $F^T F = S^2$.

Από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$F = \left(F^T\right)^{-1} S^2$$

Θέτουμε $Q = \left(F^T\right)^{-1} S$ οπότε $F = QS$. Αρκεί να δείξουμε ότι ο Q είναι ορθογώνιος.
Είναι $Q^T = S^T F^{-1}$ και $\left(F^T F\right)^{-1} = S^{-2}$.

Άρα

$$Q^T Q = S^T F^{-1} \left(F^T\right)^{-1} S = S^T \left(F^T F\right)^{-1} S = S^T S^{-2} S = I$$

Επομένως ο Q είναι ορθογώνιος.

Όμοια αποδεικνύεται και η $F = UQ$. Για την μοναδικότητα έστω $F = Q_1 S_1 = Q_2 S_2$ οπότε είναι και $S_1 Q_1^T = S_2 Q_2^T$. Άρα

$$S_1^T = F^T F = S_1 Q_1^T Q_1 S_1 = S_2 Q_2^T Q_2 S_2 = S_2^T$$

Όμως ο θετικά ημιορισμένος γραμμικός μετασχηματισμός $S_1^T = S_2^T$ έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα, οπότε είναι $S_1 = S_2$. Πολλαπλασιάζοντας την $Q_1 S_1 = Q_2 S_2$ από δεξιά με $S_1^{-1} = S_2^{-2}$ έχουμε και $Q_1 = Q_2$.

Παράδειγμα 2.8.1. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $f \in \mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ με $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(\sqrt{3}x_1 + x_2, 2x_2, x_3\right)$.

Ως προς την κανονική βάση ο πίνακας του f είναι ο

$$F = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως από την παρατήρηση 2.8.1 έχουμε

$$S = \sqrt{F^T F} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 0 \\ 3-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ και } Q = \left(F^T\right)^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 0 \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

2.9 Κίνηση στερεού σώματος με ένα σταθερό σημείο

Η μαθηματική περιγραφή της κίνησης ενός στερεού σώματος, με ένα σταθερό σημείο, είναι ένα παράδειγμα άμεσης εφαρμογής της θεωρίας των ορθογωνίων και αντισυμμετρικών μετασχηματισμών.

(α) Μετατόπιση. Θεωρούμε ένα στερεό σώμα που μετακινείται από μία θέση A σε μια θέση B διατηρώντας ένα σταθερό σημείο Ο. Ένα σημείο $P(x)$ του σώματος θα μετακινηθεί στη νέα θέση $P'(y)$.Θεωρούμε την απεικόνιση

$$M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \to y = Mx$$

που αντιστοιχεί το διάνυσμα θέσης ενός σημείου P του σώματος στη θέση A με το αντίστοιχο του P' στη θέση B .

Θεώρημα 2.9.1. (Θεώρημα Euler) Οποιαδήποτε μετατόπιση ενός στερεού που διατηρεί ένα σημείο του σταθερό, είναι ισοδύναμη με μία στροφή του στερεού γύρω από έναν άξονα που περνά από το σταθερό σημείο.

Αν $Q=[M]$ είναι ο ορθογώνιος πίνακας του M ως προς τη βάση $\beta=\{e_1,e_2,e_3\}$, τότε η

$$y = Mx \tag{2.20}$$

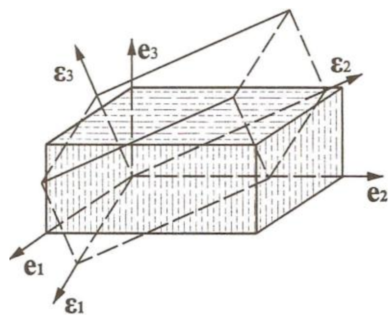
είναι ισοδύναμη με την

$$Y = QX \tag{2.21}$$

όπου X,Y οι πίνακες στήλες των συνιστωσών των x,y αντίστοιχα, ως προς τη βάση β. Η μετατόπιση του στερεού μπορεί επομένως να περιγραφεί με τη βοήθεια του ορθογωνίου πίνακα Q από την εξίσωση (2.21).

Αν $\varepsilon_i = Me_i$, $i=1,2,3$ ο πίνακας Q μπορεί τότε να θεωρηθεί ως ο πίνακας αλλαγής βάσης από την β στην $\beta'=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$. Στην περίπτωση αυτή η σχέση (2.21) συνδέει τις συντεταγμένες του ίδιου σημείου ως προς τις δύο διαφορετικές βάσεις (το Y έχει τις συντεταγμένες του σημείου ως προς την β' και το X ως προς την β).

Θεωρούμε τώρα τα δύο συστήματα συντεταγμένων $\Sigma=\{O,e_1,e_2,e_3\}$ και $\Sigma'=\{\mathrm{O},\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ Η θέση του Σ' ως προς το Σ μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια τριών ανεξάρτητων μεταβλητών, όπως είναι π.χ. οι γωνίες Euler. Επομένως ο Q είναι ο πίνακας του μετασχηματισμού



Σχήμα 2.1

$$X' = QX \quad \text{όταν} \quad \begin{array}{l} X_1 = Q_3(\varphi)X \\ X_2 = Q_1(\theta)X_1 \\ X' = Q_3(\psi)X_2 \end{array} \quad \text{με} \quad X_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad \text{θα είναι :}$$

$$Q = Q_3(\psi)Q_1(\theta)Q_3(\phi)$$

(β) Συνεχής κίνηση. Η συνεχής κίνηση ενός στερεού στη διάρκεια της οποίας ένα σημείο του παραμένει σταθερό, μπορεί να θεωρηθεί σαν μία διαδικασία συνεχών μετατοπίσεων του, μία για κάθε χρονική στιγμή $t\in\mathbb{R}$. Μπορεί επομένως να περιγραφεί από μία μονο-παραμετρική οικογένεια ισομετριών $\{M(t), t\in\mathbb{R}$ με $M(0)=I\}$ του $\mathbb{R}^3$.

Η **θέση** $x(t)$ ενός σημείου του σώματος κατά τη χρονική στιγμή t συνδέεται με την αρχική του θέση, x με την σχέση

$$x(t) = Mx, \text{ ισοδύναμα } X(t) = Q(t)X, \tag{2.22}$$

όπου $Q(t) = [M(t)]$ ο πίνακας του $M(t)$ ως προς μία δεδομένη ορθοκανονική βαση του $\mathbb{R}^3$.
Η **ταχύτητα** του σημείου που βρίσκεται τη χρονική στιγμή t στη θέση $x(t)$ ορίζεται από την $v(t) = x'(t)$, όπου η παράγωγος $x'(t)$ της διανυσματικής συνάρτησης $x(t)$, είναι η διανυσματική συνάρτηση με συνιστώσες τις παραγώγους των συνιστωσών της.

Τότε από τη (2.22) έχουμε,

$$V(t) = X'(t) = Q'(t)X = Q'(t)Q^T(t)X(t).$$

Θέτοντας $R = Q'(t)Q^T(t)$, έχουμε

$$V(t) = R(t)X(t). \tag{2.23}$$

Ο πίνακας $R(t)$ είναι αντισυμμετρικός.

Πράγματι παραγωγίζοντας τη σχέση $Q(t)Q^T(t) = I$ προκύπτει

$$Q'(t)Q^T(t) + Q(t)Q'^T(t) = 0 \text{ ή ισοδύναμα, } R(t) + R^T(t) = 0.$$

Όμως για κάθε αντισυμμετρικό πίνακα R υπάρχει, ένα διάνυσμα ω (βλέπε παρατήρηση 2.7.1) τέτοιο ώστε για κάθε διάνυσμα x με αντίστοιχο πίνακα στήλη των συνιστωσών του τον X να ισχύει:

Αν $Y(t) = R(t)X(t)$ τότε είναι $y(t) = \omega(t) \times x(t)$. Αν $\omega(t)$ το αξονικό διάνυσμα του $R(t)$ τότε η (2.23) γράφεται ισοδύναμα:

$$v(t) = \omega(t) \times x(t)$$

Το διάνυσμα $\omega(t)$ λέγεται **γωνιακή ταχύτητα** του στερεού τη χρονική στιγμή t.
Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι τα σημεία του στερεού που βρίσκονται, κατά τη χρονική στιγμή t, επάνω στην ευθεία $\varepsilon(t)$ που περνά το O και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\omega(t)$ (ικανοποιούν δηλαδή την $x(t) = \lambda\omega(t)$), έχουν ταχύτητα $v(t) = x'(t) = 0$.
Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στη χρονική στιγμή t το στερεό περιστρέφεται γύρω από την ευθεία $\varepsilon(t)$ (στιγμιαίος άξονας περιστροφής), η οποία όμως με την πάροδο του χρόνου αλλάζει θέση στο χώρο, όπως συμβαίνει στην περίπτωση του στρόβου.

2.10 Κινηματική των συνεχών μέσων (Ελαστικότητα)

Με τον όρο «συνεχή μέσα» εννοούμε φυσικά σώματα που υπόκεινται σε παραμορφώσεις (ελαστικά, ρευστά κ.λ.π.). Ο όρος «κινηματική» αναφέρεται στη μαθηματική περιγραφή της γενικής κίνησης - παραμόρφωσής τους. Η κινηματική που θα αναπτύξουμε αποτελεί ένα σημαντικό παράδειγμα εφαρμογής των μεθόδων της Γραμμικής Άλγεβρας και ιδιαίτερα της θεωρίας των χαρακτηριστικών ποσών. Βασικό ρόλο παίζει το θεώρημα της πολικής ανάλυσης.

Θεωρούμε ένα συνεχές μέσο που κατέχει ένα χωρίο B_0 του εποπτικού χώρου. Υποθέτουμε ότι το συνεχές υπόκειται σε μία γενική κίνηση - παραμόρφωση, κάτω από ορισμένες δυνάμεις και στην τελική του θέση κατέχει ένα χωρίο B. Η κίνηση αυτή θα περιγράφεται από μία απεικόνιση $f : B_0 \to B$ που απεικονίζει σημεία του B_0 σε σημεία του B. Οι ιδιότητες που πρέπει να υποθέσουμε για τη συνάρτηση f πηγάζουν από τη φυσική κατάσταση που θέλουμε να περιγράψουμε. Έτσι υποθέτουμε ότι:

1. Δεν υπάρχει «σύγκρουση» σημείων του συνεχούς με την έννοια ότι διαφορετικά σημεία του συνεχούς που κατέχουν διαφορετικές θέσεις στο χωρίο B_0, κατέχουν διαφορετικές θέσεις και στη θέση B. Επίσης κάθε σημείο στο χωρίο B προέρχεται από ένα σημείο του χωρίου B_0. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η f είναι «1-1» και «επί».

2. Η παραμόρφωση είναι αρκετά «ομαλή». Υποθέτουμε επομένως ότι η f, ως απεικόνιση μεταξύ σημειακών χώρων, είναι διαφορίσιμη τάξης C^k, (δηλαδή υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f μέχρι και τάξης k και είναι συνεχείς) για αρκετά μεγάλο k. Η υπόθεση αυτή εξασφαλίζει την ύπαρξη σε κατάλληλη περιοχή κάθε σημείου $P \in B_0$ μίας αμφιμονοσήμαντης γραμμικής απεικόνισης $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που απεικονίζει εφαρμοστά διανύσματα v στο Px σε εφαρμοστά διανύσματα Fv στο $P' = f(P) \in B$.

Η F λέγεται **εφαπτόμενη** ή **παράγωγος απεικόνιση** της f στο σημείο P. Είναι $\det F \neq 0$ και λόγοι όπως αυτοί της προηγούμενης παραγράφου μας οδηγούν να υποθέσουμε ότι η f είναι τέτοια ώστε $\det F > 0$. Αν από την αρχή θεωρηθεί ένα σύστημα συντεταγμένων στον εποπτικό χώρο τότε η f θεωρείται ως $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Αν συμβεί η f να είναι γραμμική (περίπτωση γραμμικής ελαστικότητας), τότε η F συμπίπτει με την f.

Σύμφωνα με το Θεώρημα της πολικής ανάλυσης υπάρχει θετικά ημιορισμένος (συμμετρικός) μετασχηματισμός S και ορθογώνιος μετασχηματισμός Q τέτοιοι ώστε $F = QS$.

Επειδή $\det S > 0$, $\det F > 0$, έπεται ότι $\det Q = 1$. Η κινηματική διαδικασία σε μία περιοχή του P μπορεί να περιγραφεί από το αποτέλεσμα που επιφέρει F στα εφαρμοστά διανύσματα στο P. Αν v είναι ένα τέτοιο διάνυσμα τότε εικόνα του Fv είναι

$$u = Fv = QSv.$$

Ο λόγος των μηκών των δύο διανυσμάτων

$$s = \frac{|u|}{|v|}, \tag{2.24}$$

χαρακτηρίζει το πόσο μεταβάλλονται τα μήκη, κατά τη παραμόρφωση, σε μία περιοχή του $P(x)$.

Παρατηρούμε ότι,

$$|u|^2 = u \cdot u = Fv \cdot Fv = v \cdot F^{\mathrm{T}} Fv = v \cdot Cv, \tag{2.25}$$

όπου $C = F^{\mathrm{T}} Fv = S^2$.

Αν $v_0 = \dfrac{v}{|v|}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο v, τότε η (2.24) γράφεται

$$s = (v_0 \cdot Cv_0)^{1/2}. \tag{2.26}$$

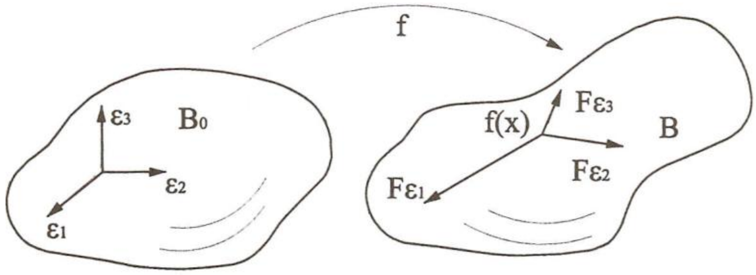
Επομένως ο τανυστής C χαρακτηρίζει πλήρως τη μεταβολή των μηκών κατά διεύθυνση του v. Ο αριθμός s λέγεται **παραμόρφωση κατά τη κατεύθυνση του** v και ο C **δεξιός τανυστής του Cauchy - Green**. Από την σχέση (2.26) προκύπτει ότι η κίνηση σε μία περιοχή του σημείου P είναι κίνηση στερεού σώματος, αν και μόνο αν $C = I$, δηλαδή ο C είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός. Ο C από τον ορισμό του είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος. Άρα έχει τρεις μη αρνητικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, με αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$C\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i,\ \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2, 3.$$

Τότε οι παραμορφώσεις κατά την κατεύθυνση των ιδιοδιανυσμάτων είναι:

$$s_i = (\varepsilon_i \cdot C\varepsilon_i)^{1/2} = \sqrt{\lambda_i}(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i)^{1/2} = \sqrt{\lambda_i}.$$

οι παραμορφώσεις s_i λέγονται **κύριες παραμορφώσεις**, ενώ οι διευθύνσεις των ε_i **κύριοι άξονες παραμόρφωσης** τα οποία παρουσιάζονται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.2

Πρόταση 2.10.1. Οι κύριοι άξονες παραμόρφωσης παραμένουν ορθογώνιοι και μετά την παραμόρφωση.

Ισοδύναμα: $F\varepsilon_i \cdot F\varepsilon_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3.$

Απόδειξη: Ισχύει

$$F\varepsilon_i \cdot F\varepsilon_j = \varepsilon_i \cdot F^T F\varepsilon_j = \varepsilon_i \cdot C\varepsilon_j = \varepsilon_i \cdot \lambda_j \varepsilon_j = \lambda_j (\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = \lambda_j \delta_{ij}$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Ο $S = C^{1/2}$ έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον C ενώ οι ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $s_i = \sqrt{\lambda_i}$, δηλαδή οι κύριες παραμορφώσεις κατά τις διευθύνσεις των κυρίων αξόνων παραμόρφωσης. Άρα

$$S\varepsilon_i = s_i \varepsilon_i = \sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i \tag{2.27}$$

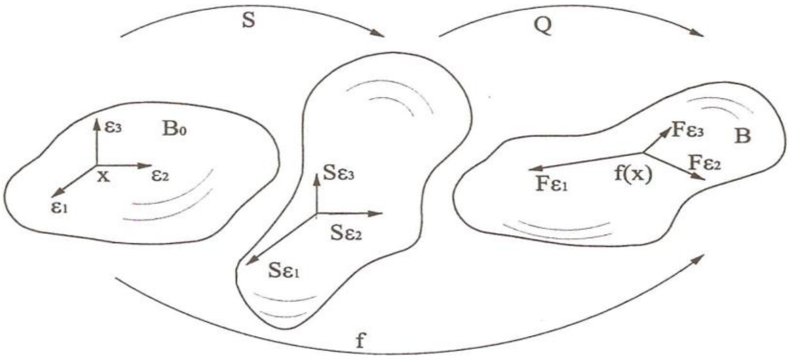
Τότε, αν $i \neq j$,

$$S\varepsilon_i \cdot S\varepsilon_j = s_i s_j (\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) \tag{2.28}$$

και άρα

$$F\varepsilon_i = QS\varepsilon_j = Q\lambda_i \varepsilon_i = \lambda_i Q\varepsilon_i \tag{2.29}$$

Από τις σχέσεις (2.28) και (2.29) προκύπτει ο τρόπος επίδρασης της παραμόρφωσης,



Σχήμα 2.3

δηλαδή του P, στις κύριες διευθύνσεις παραμόρφωσης: Αρχικά δρα ο συμμετρικός μετασχηματισμός S δίνοντας τα $S\varepsilon_i$ που σύμφωνα με την (2.27) είναι συγγραμμικά με τα ε_i και $|S\varepsilon_i| = s_i|\varepsilon_i|$. Επομένως με τη δράση του S τα μήκη των ε_i διαστέλλονται αν $s_i > 1$ ή συστέλλονται αν $s_i < 1$. Στη συνέχεια ο ορθογώνιος μετασχηματισμός Q δρα στα $S\varepsilon_i$ αφήνοντας τα μήκη τους και την μεταξύ τους καθετότητα αναλλοίωτα. Το τελικό αποτέλεσμα είναι μία τριάδα ορθογωνίων διανυσμάτων $F\varepsilon_1, F\varepsilon_2, F\varepsilon_3$, που έχει προκύψει από μία στροφή περί άξονα από την τριάδα $S\varepsilon_1, S\varepsilon_2, S\varepsilon_3$.

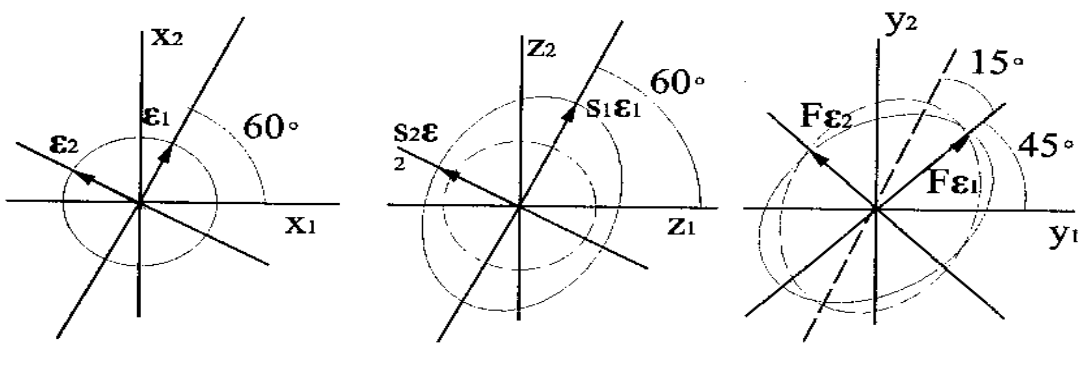
Μπορούμε επομένως να πούμε ότι η κινηματική διαδικασία σε μία περιοχή ενός σημείου P του συνεχούς μέσου αναλύεται σε μία σύνθεση κινήσεων : Μία «γνήσια» παραμόρφωση η οποία περιγράφεται από τον S και στη συνέχεια μία στροφή η οποία περιγράφεται από τον Q.

Παράδειγμα 2.10.1. (διαξονική έλξη στο επίπεδο x_1x_2). Θεωρούμε τον κύλινδρο $B = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ που υπόκειται στην παραμόρφωση που περιγράφεται από τη γραμμική απεικόνιση f του παραδείγματος 2.8.1.

Θα υπολογίσουμε τα κινηματικά μεγέθη της παραμόρφωσης και θα την αναλύσουμε σε μία «γνήσια» παραμόρφωση που ακολουθείται από μία στροφή. Οι κύριες παραμορφώσεις είναι οι ιδιοτιμές του $S : s_1 = \sqrt{6}, s_2 = \sqrt{2}, s_3 = 1$. Οι κύριοι άξονες παραμόρφωσης προκύπτουν από τα αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του S :

$$\varepsilon_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), \varepsilon_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1).$$

Από τις κύριες παραμορφώσεις προκύπτει ότι κατά τις διευθύνσεις των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τα μήκη διαστέλλονται (περισσότερο κατά τη διεύθυνση του ε_1) ενώ κατά τη διεύθυνση του ε_3 δεν σημειώνεται καμία μεταβολή μήκους.



Σχήμα 2.4 (α) *Σχήμα 2.4 (β)* *Σχήμα 2.4 (γ)*

Ο μετασχηματισμός του S αναλυτικά είναι

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3+\sqrt{3}\right)x_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3-\sqrt{3}\right)x_2, \\
z_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3-\sqrt{3}\right)x_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3+\sqrt{3}\right)x_2, \\
z_3 &= x_3.
\end{aligned}
$$

και περιγράφει μία «γνήσια» παραμόρφωση του κυκλικού κυλίνδρου B (σχήμα 2.4 (α)) σε ένα ομοαξονικό ελλειπτικό κύλινδρο (σχήμα 2.4 (β)). Ο μέγιστος άξονας της έλλειψης - τομής με το επίπεδο z_1Oz_2 σχηματίζει γωνία $\phi = 60^\circ$ με τον άξονα Oz_1. Στη συνέχεια ο μετασχηματισμός Q στρέφει τον προηγούμενο ελλειπτικό κύλινδρο κατά γωνία $\theta = 150^\circ$ κατά την αρνητική φορά (σχήμα 2.4 (γ)). Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και με απ' ευθείας εφαρμογή του μετασχηματισμού F.

Πράγματι η εξίσωση $x_1^2 + x_2^2 = 1$ του κυκλικού κυλίνδρου μετασχηματίζεται με τον μετασχηματισμό $x = F(y)$ στην εξίσωση $y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 = 3$, που περιγράφει τον ελλειπτικό κύλινδρο (σχήμα 2.4(γ)).

III) Διακριτά δυναμικά συστήματα και εξισώσεις διαφορών

2.11 Διακριτά δυναμικά συστήματα

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με εφαρμογές των χαρακτηριστικών ποσών πινάκων στα διακριτά δυναμικά συστήματα και τις εξισώσεις διαφορών. Τέτοια συστήματα και εξισώσεις χρησιμοποιούνται ως μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή οικολογικών, οικονομικών, μηχανολογικών, φυσικών κ.ά. συστημάτων. Η κατάσταση των συστημάτων αυτών περιγράφεται από ορισμένες μεταβλητές που οι τιμές τους προκύπτουν από μετρήσεις σε τακτές χρονικές στιγμές.

Παράδειγμα 2.11.1 Έστω x_t το μέγεθος ενός πληθυσμού (π.χ. αριθμός εντόμων, βακτηρίων, κ.λ.π.) τη χρονική στιγμή (ή γενιά) t. Κάθε άτομο στη γενιά t συνεισφέρει, πριν πεθάνει, r άτομα στην επόμενη γενιά (r : κατά κεφαλή αναπαραγωγή). Πως ο πληθυσμός μεταβάλλεται με το χρόνο;

Δεδομένου ότι ο πληθυσμός αρχικά είναι x_0, μπορούμε να υπολογίσουμε τον πληθυσμό στις επόμενες γενιές ως εξής :

- στο τέλος του 1ου έτους γίνεται: $x_1 = rx_0$,
- στο τέλος του 2ου έτους γίνεται: $x_2 = rx_1$,
- στο τέλος του $(k+1)$ έτους γίνεται: $x_{k+1} = rx_k$.

Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής

$$x_{k+1} = \lambda x_k \tag{2.30}$$

όπου $(x_k), k = 0,1,2\ldots$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών και $\lambda \in \mathbb{R}$, και λέγεται **γραμμικό διακριτό δυναμικό σύστημα** μίας διάστασης με σταθερούς συντελεστές. Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα γενικό πρότυπο **λύσεων** σε κάθε βήμα της μορφής

$$x_k = \lambda^k x_0 \tag{2.31}$$

Ένα γραμμικό διακριτό δυναμικό σύστημα δύο διαστάσεων έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a_{11}x_k + a_{12}y_k \\ y_{k+1} &= a_{21}x_k + a_{22}y_k \end{aligned} \tag{2.32}$$

όπου $\{x_k\}, \{y_k\}$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών και $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Αν $X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, το σύστημα (2.32) γράφεται:

$$X_{k+1} = AX_k \tag{2.33}$$

Την ίδια μορφή έχει και ένα σύστημα n - διαστάσεων με $A \in \Pi_n$ και

$$x_k = x(k) = \left[x_1(k)x_2(k)\ldots x_n(k)\right]^{\mathrm{T}}.$$

Είναι φανερό ότι αν είναι γνωστό το x_0 τότε είναι γνωστοί όλοι οι όροι της ακολουθίας $\{x_k\}$. Κάθε ακολουθία $\{x_k\}$ που επαληθεύει την (2.33) λέγεται **λύση** του συστήματος. Η λύση του συστήματος (2.33) με $X(0) = x_0$ προκύπτει άμεσα από την επαναληπτική διαδικασία:

$$X_k = A^k X_0 \tag{2.34}$$

και εξαρτάται μόνο από την τιμή του $X(0)$.

Επειδή η μορφή (2.34) περιέχει τη δύναμη A^k η οποία δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστη προτιμούμε να βρούμε μια πιο απλή έκφρασή της η οποία προκύπτει όταν ο πίνακας A

είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή όταν υπάρχει μία βάση $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ από ιδιοδιανύσματα του A στον χώρο $\Pi_{n\times 1}$. Τότε το X_0 γράφεται

$$X_0 = c_1V_1 + c_2V_2 + \ldots + c_nV_n.$$

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές τότε από την $Ax_i = \lambda_i X_i$ έπεται ότι $A^kV_i = A^{k-1}\lambda_iV_i = \ldots = \lambda_i^kV_i$ και άρα η λύση (2.34) παίρνει την μορφή

$$X_k = A^kX_0 = c_1\lambda_1^kV_1 + c_2\lambda_2^kV_2 + \ldots + c_n\lambda_n^kV_n.$$

Συνήθως γράφουμε τη σχέση αυτή διατάσσοντας τις ιδιοτιμές από αυτήν με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή προς αυτή με την μικρότερη.

Αν $\{X_k\} : X_k = A^kX_0$ είναι μία λύση του συστήματος τότε τα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ του $\mathbb{R}^n$ με πίνακες στήλες τους $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ λέμε ότι ορίζουν την **τροχιά** του δυναμικού συστήματος που περιλαμβάνει το X_0.

Συστήματα με δύο ή περισσότερες διαστάσεις χρησιμοποιούνται για τη κατασκευή μαθηματικών προτύπων για συστήματα όπου απαιτούνται περισσότερες από μία μεταβλητές για την περιγραφή τους.

2.12 Εξισώσεις διαφορών

Ορισμός 2.12.1. Μια **εξίσωση διαφορών** είναι μια εξίσωση που συσχετίζει τους διάφορους όρους μιας ακολουθίας αριθμών $\{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$. Οι όροι της ακολουθίας $\{y_n\}$ θεωρούνται άγνωστοι και ο σκοπός μας είναι να τους βρούμε.

Παραδείγματα εξισώσεων διαφορών είναι:

(α) $y_{1+n} - 8y_n = 1$ (β) $y_{1+n} - 5y_n^2 = 1$ (γ) $y_{2+n} - y_{1+n} + y_n = 2n+1$

Ορισμός 2.12.2. Η **τάξη** ή το **βήμα** μιας εξίσωσης διαφορών ορίζεται από την διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου δείκτη των όρων της ακολουθίας που εμφανίζονται στην εξίσωση.

Στο προηγούμενο παράδειγμα δηλαδή οι εξισώσεις (α) και (β) είναι 1ης τάξης, ενώ η (γ) είναι 2ης τάξης.

Ορισμός 2.12.3. Λύση μιας εξίσωσης διαφορών ονομάζεται η ακολουθία $\{y_n\}$ που ικανοποιεί την εξίσωση $\forall n \in \mathbb{N}$.

Θεωρούμε τους αριθμούς $a_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,\ldots,n,\ a_0,\ a_n \neq 0$ και μια ακολουθία $\{z_k\}, k \in \mathbb{Z}$ πραγματικών αριθμών. Μια εξίσωση της μορφής

$$a_0 y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = z_k \ \forall k \in \mathbb{Z} \tag{2.35}$$

λέγεται **γραμμική εξίσωση διαφορών τάξης** n.

Η ακολουθία $\{z_k\}$ αποτελεί την **μη-ομογενή ακολουθία** ή την **εξαναγκασμένη ακολουθία** της εξίσωσης. Εάν όλοι οι όροι της $\{z_k\}$ είναι μηδέν, τότε η γραμμική εξίσωση διαφορών ονομάζεται **ομογενής εξίσωση.**

Οι $a_i, i=1,2,\ldots,n$ αποτελούν τους **συντελεστές** της εξίσωσης. Όταν οι ακολουθίες αυτές είναι σταθερές, τότε η εξίσωση διαφορών είναι με **σταθερούς συντελεστές**, διαφορετικά είναι με **μεταβλητούς συντελεστές**.

Έστω $\mathbb{S}$ το σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών $\{x_k\}, k \in \mathbb{Z}$ και η εξίσωση (2.35). Ορίζουμε την απεικόνιση

$$T : \mathbb{S} \to \mathbb{S} \quad \text{τέτοια ώστε} \quad T\{y_k\} = \{z_k\},$$

όπου η $\{z_k\}$ δίνεται από την εξίσωση(2.35). Η T είναι γραμμική, οπότε το σύνολο των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης διαφορών είναι ο πυρήνας της T και επομένως είναι υπόχωρος του $\mathbb{S}$.

Ισχύουν:

1) Η εξίσωση (2.35) έχει μοναδική λύση, αν είναι γνωστά τα $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$. Πράγματι από την (2.35) έχουμε τις σχέσεις:
   a) Αν $y_{n+k} = z_k - [a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_n y_k]$
   b) $y_k = \dfrac{1}{a_n}\left[z_k - \left(y_{n+k} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_{n-1} y_{k+1}\right)\right]$ από τις ορίζεται η μοναδική λύση $\{y_k\}$.

   (Από τις (a) ορίζονται τα y_{n+k} για $k \geq 0$ και από τις (b) τα y_k για $k < 0$).
2) Αν L_0 είναι ο υπόχωρος των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης της (2.35) τότε $\dim L_0 = n$. Πράγματι, από την 1, η απεικόνιση $S : L_0 \to \mathbb{R}^n$ με $S\{y_k\} = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ είναι ένας ισομορφισμός και επομένως $\dim L_0 = \dim \mathbb{R}^n = n.$
3) Όπως και στα γραμμικά συστήματα, το σύνολο L των λύσεων της (2.35) είναι ένας σημειακός χώρος με αντίστοιχο διανυσματικό τον L_0, δηλαδή είναι $L = x_\mu + L_0$, όπου x_μ μια τυχούσα λύση της (2.35).

Παρατήρηση 2.12.1 Στις εξισώσεις διαφορών υπάρχει μια ορίζουσα, **η ορίζουσα του Casorati**, η οποία ορίζεται ως εξής: Έστω στην εξίσωση διαφορών 2ης τάξης θεωρούμε δυο ακολουθίες $\{u_k\}$ και $\{v_k\}$. Η ακολουθία, που ορίζεται από την ορίζουσα:

$$C(u_k, v_k) = \begin{vmatrix} u_k & v_k \\ u_{k+1} & v_{k+1} \end{vmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

ονομάζεται **ορίζουσα του Casorati** .

Θεώρημα 2.12.1. Εάν οι ακολουθίες $\{u_k\}$ και $\{v_k\}$ είναι λύσεις της γραμμικής ομογενούς εξίσωσης διαφορών , τότε

α) εάν η ορίζουσα του Casorati $C(u_k, v_k) \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, τότε οι λύσεις $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και

β) εάν η ορίζουσα του Casorati $C(u_k, v_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, τότε οι λύσεις $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Παρατήρηση 2.12.2 Έστω η ομογενής εξίσωση διαφορών

$$a_0 y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \qquad (2.36)$$

η (2.36) μπορεί πάντα να γραφεί στη μορφή

$$X_{k+1} = AX_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

(δηλαδή να αντικατασταθεί από ένα δυναμικό σύστημα), όπου X_k είναι διανύσματα του $\Pi_{n\times 1}$ και A ένας $n \times n$ πίνακας. Πράγματι αρκεί να θεωρήσουμε ως:

$$X_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+n-1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2.12.1 Να γραφεί ως ένα δυναμικό σύστημα η εξίσωση

$$y_{k+3} + 5y_{k+2} - 3y_{k+1} - 2y_k = 0, \ k \in \mathbb{Z}$$

Από την εξίσωση έχουμε $y_{k+3} = 2y_k + 3y_{k+1} - 5y_{k+2}$.

Έστω $X_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix}$.

Τότε $X_{k+1} = \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ y_{k+3} \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 0 + y_{k+1} + 0 \\ 0 + 0 + y_{k+2} \\ 2y_k + 3y_{k+1} - 5y_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix} = AX_k$.

Εξισώσεις της μορφής (2.36) χρησιμοποιούνται και στα Ψηφιακά συστήματα όπου η ακολουθία $\{y_k\}$ περιγράφει γνωστό σήμα εισόδου (input) και η $\{z_k\}$ το σήμα εξόδου (output). Μια τέτοια εξίσωση ονομάζεται **γραμμικό φίλτρο** και οι αριθμοί $a_0, a_1, \ldots, a_n$ **συντελεστές** του φίλτρου (συνήθως το $a_0 = 1$).

Παράδειγμα 2.12.2 Θεωρούμε το γραμμικό φίλτρο

$$0.35y_{k+2} + 0.5y_{k+1} + 0.35y_k = z_k,\ k \in \mathbb{Z} \tag{2.37}$$

- Αν το σήμα εισόδου είναι το $y_k = \cos(k\pi/4),\ k \in \mathbb{Z}$, το οποίο προέρχεται από τη **δειγματοληψία** του συνεχούς σήματος $y = \cos(\pi t/4)$, θα υπολογίσουμε το «φιλτραρισμένο» σήμα εξόδου $\{z_k\}$.

  Είναι

  $$\{y_k\} = \{\ldots, \cos(\pi/4), \cos(2\pi/4), \cos(3\pi/4), \ldots\} = \Big\{\ldots, \underset{k=o}{1}, 0.7, 0, -0.7, -1, -0.7, 0, \ldots\Big\} \tag{2.38}$$

  και από την (2.37) ως σήμα εξόδου παίρνουμε το

  $$\{z_k\} = \Big\{\ldots, \underset{k=o}{0.7}, 0, -0.7, -1, -0.7, 0, \ldots\Big\},$$

  που όπως βλέπουμε από την (2.38), είναι το $\{y_k\}$ μετατοπισμένο προς τα αριστερά κατά μία θέση. Το σήμα $\{z_k\}$ δηλαδή, είναι απλά μία μετατεθημένη εκδοχή του αρχικού σήματος $\{y_k\}$, παρουσιάζοντας μία χρονική προπόρευση.

- Αν το σήμα εισόδου είναι το $y_k = \cos(3k\pi/4),\ k \in \mathbb{Z}$,το οποίο προέρχεται από τη **δειγματοληψία** του υψηλότερης συχνότητας συνεχούς σήματος $y = \cos(3\pi t/4)$, δηλαδή αν

$$\{y_k\} = \left\{\ldots, \underset{k=o}{1}, -0.7, 0, -0.7, 1, -0.7, 0, \ldots\right\}$$

ως σήμα εξόδου παίρνουμε το μηδενικό σήμα $\{z_k\} = \{0\}$.

Δηλαδή το φίλτρο επιτρέπει να περνά το χαμηλής συχνότητας σήμα ενώ κόβει το υψηλής συχνότητας σήμα. Το φίλτρο αυτό ονομάζεται **«low pass filter».**

Κεφάλαιο 3

Κανονικές Μορφές Πινάκων

3.1 Κανονική Μορφή Πινάκων ως προς τη Σχέση Ισοδυναμίας

Στο σύνολο $\prod_{\mu\times\nu}(K)$ των $\mu\times\nu$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα K ($K=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) η έννοια της ισοδυναμίας πινάκων $(B \sim A \Leftrightarrow B = Q^{-1}AP)$ ορίζει στο $\prod_{\mu\times\nu}(K)$ μία σχέση ισοδυναμίας, η οποία χωρίζει το $\prod_{\mu\times\nu}(K)$ σε κλάσεις ισοδυναμίας.

Σ' έναν πίνακα η εναλλαγή δύο γραμμών (ή στηλών), το γινόμενο γραμμής (ή στήλης) επί αριθμό $\lambda \neq 0$ και το άθροισμα μιας γραμμής με μια άλλη πολλαπλασιασμένη με έναν αριθμό λ (ή στηλών) ονομάζονται **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών** (στηλών).

Με τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς σκοπός μας είναι να μετασχηματίσουμε τον $\mu\times\nu$ πίνακα A σε απλούστερη μορφή. Έτσι, με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ο σύνθετος πίνακας

$$\boxed{I_\mu \mid A}$$

μετασχηματίζεται στον

$$\boxed{R \mid B}$$

όπου

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & & \cdots & b_{1\nu} \\ & b_{22} & \cdots & & \cdots & b_{1\nu} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & \mathbb{O} & & b_{\mu\mu} & \cdots & b_{\mu\nu} \end{bmatrix}, \qquad \text{όταν } \mu < \nu$$

και

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\nu} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2\nu} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{\nu\nu} \\ & \mathbb{O} & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{όταν } \mu \geq \nu$$

χωρίς κατ' ανάγκη όλα τα «διαγώνια στοιχεία» να είναι διάφορα του μηδενός. Στη συνέχεια θεωρούμε τον σύνθετο πίνακα

$$\begin{array}{|c|}\hline I_\nu \\ \hline B \\ \hline \end{array}$$

και με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών μετασχηματίζουμε αυτό στον πίνακα

$$\begin{array}{|c|}\hline S \\ \hline C_r \\ \hline \end{array}$$

όπου ο πίνακας C_r γενικά έχει μία από τις ακόλουθες μορφές:

$$\begin{bmatrix} D_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} D_\mu & \mathbb{O} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} D_\nu \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \qquad D_\nu \tag{3.1}$$

ο δε διαγώνιος πίνακας D δεν έχει μηδενικά διαγώνια στοιχεία. Αντίστοιχα των πινάκων στην (3.1) έχουμε

$$r < \mu, \nu \qquad r = \mu < \nu \qquad \mu > \nu = r \qquad r = \mu = \nu$$

και προφανώς με επιπλέον στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στον πίνακα $\begin{array}{|c|}\hline S \\ \hline C_r \\ \hline \end{array}$ μπορούμε να καταλήξουμε ώστε $D_r = I_r$.

Ο πίνακας C_r ονομάζεται **κανονική μορφή** του πίνακα A και είναι μοναδικός. Είναι της μορφής

$$C_r = \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}$$

όπου I_r είναι ο μοναδιαίος $r \times r$ πίνακας και $\mathbb{O}$ μηδενικοί πίνακες κατάλληλων διαστάσεων, που είναι ισοδύναμοι με τον A. Οι πίνακες R, S είναι αντιστρέψιμοι και αποδεικνύεται η αξιοσημείωτη σχέση

$$C_r = RAS \tag{3.2}$$

Η τάξη του διαγώνιου πίνακα D ή ισοδύναμα, το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του πίνακα B ονομάζεται **βαθμός** του A και συμβολίζεται $rank\ A$.

Από την (3.1) είναι φανερό ότι για κάθε $\mu \times \nu$ πίνακα A έχουμε

$$rank\ A \le \mu \qquad \text{και} \qquad rank\ A \le \nu$$

Επιπλέον, όταν $\mu = \nu = r$ και ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος,

$$rank\ A = r$$

Επειδή ο βαθμός $rank(A)$ του πίνακα A ισούται με r και οι ισοδύναμοι πίνακες έχουν τον ίδιο βαθμό, έπεται ότι όλοι οι ισοδύναμοι πίνακες θα έχουν την ίδια κανονική μορφή.

Άρα κάθε κλάση ισοδυναμίας θα έχει ακριβώς έναν πίνακα κανονικής μορφής ως αντιπρόσωπό της. Επίπλέον επειδή $rank(A) \le k = \min\{\mu, \nu\}$ έχουμε ότι το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας, στις οποίες χωρίζεται το $\prod_{\mu\times\nu}(K)$ από τη σχέση ισοδυναμίας πινάκων, είναι ίσο με $k+1$, όσοι δηλαδή οι πίνακες κανονικής μορφής C_r, $r = 1, 2, \ldots, k$ και ο μηδενικός $\mu \times \nu$ πίνακας (μηδενική κλάση).

Το σύνολο για παράδειγμα $\prod_{3\times4}$ χωρίζεται σε τέσσερις κλάσεις: τη μηδενική και σε τρείς ακόμη κλάσεις

($k = 3 = \min\{3, 4\}$) με αντιπροσώπους τους πίνακες:

$$C_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],\ C_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],\ C_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Έτσι κάθε μη μηδενικός 3×4 πίνακας A είναι ισοδύναμος με C_1, αν $rank(A) = 1$, με C_2, αν $rank(A) = 2$ και με C_3, αν $rank(A) = 3$.

Παράδειγμα 3.1.1 Να βρεθεί η κανονική μορφή C_r του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ και οι αντιστρέψιμοι πίνακες R, S, ώστε $RAS = C_r$.

Έχουμε

$$\left[I_3 \middle| A\right] = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\Gamma_2 \to 2\Gamma_3 - \Gamma_2}{\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[R \middle| B\right]$$

$$\left[\frac{I_4}{B}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\Sigma_4 \to \Sigma_4 + \Sigma_1}{\overset{\substack{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - 3\Sigma_1 \\ \Sigma_3 \to \Sigma_3 + 2\Sigma_1}}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3}{\overset{\Sigma_3 \to \Sigma_4 - 2\Sigma_3}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\frac{S}{C_2}\right]$$

Επομένως είναι $C_2 = RAS$, με $rank\ A = 2$ όπου

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ C_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Όταν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός και στο σύνθετο πίνακα $\left[R \middle| B\right]$όλα τα διαγώνια στοιχεία του άνω τριγωνικού πίνακα B είναι μη μηδενικά, με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον πίνακα $\left[R \middle| B\right]$ μπορούμε να μηδενίσουμε τα στοιχεία $b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{i-1,i}$ και μετά να μετασχηματίσουμε με τα στοιχεία b_{ii} σε 1. Έτσι, θα καταλήξουμε στο σύνθετο πίνακα

$$\left[R \middle| I_\nu\right]$$

Επειδή $RA = I$ συμπεραίνουμε ότι $R = A^{-1}$.

3.2 Κανονικές Μορφές Πινάκων ως προς τη Σχέση Ομοιότητας

Στην παραγραφο αυτή θα αναζητήσουμε κανονικές μορφές για γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ του ίδιου χώρου και κατά συνέπεια για τετραγωνικούς πίνακες με μια ειδικότερη σχέση ισοδυναμίας, τη γνωστή σχέση ομοιότητας πινάκων. Το γεγονός ότι δεν είναι διαγωνοποιήσιμοι όλοι οι γραμμικοί μετασχηματισμοί $T \in \mathfrak{L}(U_\nu)$, όπως και όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες καθιστά την περίπτωση αυτή πιο δύσκολη.

Για να είναι μία γραμμική απεικόνιση $T \in \mathfrak{L}(U,V)$ διαγωνοποιήσιμη θα πρέπει να υπάρχει μία βάση στον U_ν από ιδιοδιανύσματα της T. Τότε ο πίνακας που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση T ως προς τη βάση αυτή είναι διαγώνιος.

Για να είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \prod_\nu(K)$ διαγωνοποιήσιμος θα πρέπει να υπάρχει μία βάση στον K^ν από ιδιοδιανύσματα του A. Τότε ο πίνακας A είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα Δ. Υπάρχει δηλαδή αντιστρέψιμος πίνακας P, που λέγεται πίνακας ομοιότητας τέτοιος ώστε $A = P\Delta P^{-1}$.

Στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του $\prod_\nu$, οι οποίες ορίζονται από τη σχέση ομοιότητας υπάρχουν κλάσεις που δεν περιέχουν κανένα διαγώνιο πίνακα. Είναι αυτές που αντιστοιχούν σε μη διαγωνοποιήσιμους πίνακες. Επομένως, αν ένας πίνακας (ή ένας γραμμικός μετασχηματισμός) δεν ειναι διαγωνοποιήσιμος, μπορεί να πάρει μια απλούστερη μορφή, η οποία λέγεται **κανονική μορφή ως προς τη σχέση ομοιότητας.**

Οι πιο συνηθισμένες **κανονικές μορφές ως προς τη σχέση ομοιότητας** είναι:

α) Η **τριγωνική μορφή** και **η κανονική μορφή Jordan.** Αφορούν γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες που οι ιδιοτιμές τους ανήκουν όλες μέσα στο σώμα K. Το χαρακτηριστικό τους πολυώνυμο $X(\lambda)$ παραγοντοποιείται πάνω στο K σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων, δηλαδή έχει τη μορφή

$$X(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_\nu),$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in K$ (όχι κατ' ανάγκη διάφορες μεταξύ τους).

β) Η **ρητή κανονική μορφή.** Αναφέρεται σε όλες τις γραμμικές απεικονίσεις επί ενός διανυσματικού χώρου U και τους τετραγωνικούς πίνακες χωρίς καμιά δέσμευση για τις ιδιοτιμές τους (οι οποίες μπορεί και να μην υπάρχουν στο σώμα K, όπως π.χ. πραγματικοί πίνακες με μιγαδικές ιδιοτιμές). Βασίζεται μόνο στο γεγονός ότι το χαρακτηριστικό τους πολυώνυμο $X(t)$ παραγοντοποιείται πάντα κατά μοναδικό τρόπο με παράγοντες ανάγωγα πολυώνυμα διαφορετικά μεταξύ τους και με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα, δηλαδή έχει τη μορφή

$$X(t) = (\phi_1(t))^{n_1} (\phi_2(t))^{n_2} \cdots (\phi_k(t))^{n_k} ,$$

όπου $\phi_i(t)$, $1 \le i \le k$ διάφορα ανά δύο, ανάγωγα πολυώνυμα με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα και n_i , $1 \le i \le k$ φυσικοί αριθμοί.

3.2.1 Τριγωνική Μορφή – Θεώρημα Schur

Θεώρημα 3.2.1.1. (Θεώρημα Schur) . Έστω U ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο ορισμένος πάνω σε ένα σώμα K. Αν ο γραμμικός μετασχηματισμός $T \in \mathfrak{L}(U_\nu)$ έχει όλες τις ιδιοτιμές) του στο σώμα K τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση B του U_ν ως προς την οποία ο πίνακας της T είναι τριγωνικός (μπορεί να επιλεγεί άνω ή κάτω τριγωνικός).

Αν θέλαμε ο T να αντιστοιχεί σε κάτω τριγωνικό πίνακα, τότε βρίσκουμε τον άνω τριγωνικό πίνακα A για τον T^*, οπότε ο A^* θα είναι ο κάτω τριγωνικός πίνακας που αντιστοιχεί στον T.

Ορισμός 3.2.1.1 Ένας πίνακας $A \in \mathcal{M}_\nu(K)$ είναι **τριγωνοποιήσιμος** στο K αν είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $B \in \mathcal{M}_\nu(K)$ τέτοιος ώστε ο πίνακας

$$B^{-1}AB = D \tag{3.3}$$

να είναι άνω τριγωνικός.

Θεώρημα 3.2.1.2. Αν ο $\nu \times \nu$ πίνακας $A \in \mathcal{M}_\nu(K)$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο σώμα K, τότε:

1. Αν $K = \mathbb{C}$ ο πίνακας A είναι όμοιος με ένα τριγωνικό πίνακα D μέσω ενός ορθομοναδιαίου πίνακα Q δηλαδή $A = QDQ^{-1}$.
2. Αν $K = \mathbb{R}$ υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P και άνω τριγωνικός πίνακας D τέτοιος ώστε $A = PDP^{-1}$.

Γενικά λοιπόν ισχύει:

Πρόταση 3.2.1.1. Κάθε τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathcal{M}_\nu(K)$ με ιδιοτιμές στο σώμα K είναι όμοιος προς ένα άνω τριγωνικό πίνακα (και επίσης προς ένα κάτω τριγωνικό πίνακα) .

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε επαγωγή ως προς την τάξη ν του πίνακα A. Η Πρόταση 3.2.1.1 ισχύει τετριμένα για $\nu = 1$.

Έστω ότι ισχύει για τους πίνακες μέχρι και $(\nu-1)\times(\nu-1)$, $\nu \geq 2$. Αν λ_1 είναι μία ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα X_1, με την μέθοδο Gram-Schmidt, κατασκευάζουμε μία ορθοκανονική βάση $\{X_1, X_2, \ldots, X_\nu\}$ του K^ν και σχηματίζουμε τον πίνακα Q_1, που έχει ως στήλες τα διανύσματα $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$. Ο πίνακας Q_1 είναι ορθομοναδιαίος και η πρώτη στήλη του πίνακα $Q_1^* A Q_1$ είναι το διάνυσμα

$$Q_1^* A X_1 = \lambda_1 Q_1^* X_1 = \lambda_1 e_1^{\mathrm{T}},$$

(παρατηρείστε ότι $Q_1^* X_1 = \begin{bmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_1 & \ldots & X_\nu \cdot X_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$),

οπότε

$$Q_1^* A Q_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & ** \quad \cdots \quad * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right] \quad \text{με} \quad A \in \prod\nolimits_{\nu-1}(K)$$

Άρα ισχύει η υπόθεση της επαγωγής για τον πίνακα A_1 και επομένως υπάρχει ορθομοναδιαίος $(\nu-1)\times(\nu-1)$ πίνακας Q_2 και άνω τριγωνικός πίνακας $D_1 \in \prod_{\nu-1}$ τέτοιοι ώστε $D_1 = Q_2^* A_1 Q_2$.

Αν θέσουμε $Q_3 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & D_1 \\ 0 & \end{array}\right]$ τότε ο Q_3 είναι ορθομοναδιαίος $\nu \times \nu$ πίνακας και

έχουμε:

$$Q_3^* Q_1^* A Q_1 Q_3 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & ** \quad \cdots \quad * \\ \hline 0 & \\ \vdots & Q_2^* A_1 Q_2 \\ 0 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & ** \quad \cdots \quad * \\ \hline 0 & \\ \vdots & D_1 \\ 0 & \end{array}\right] = D \tag{3.4}$$

Θέτουμε $Q = Q_1 Q_3$.

Τότε από τις σχέσεις (3.4) έχουμε $Q^* A Q = D$, όπου Q ορθομοναδιαίος και D άνω τριγωνικός πίνακας.

Παρατήρηση 3.2.1.1. Για τον A^* υπάρχουν ορθομοναδιαίος πίνακας Q και άνω τριγωνικός πίνακας D τέτοιοι ώστε $D = Q^* A^* Q$, οπότε $D^* = Q^* A Q$ και ο πίνακας D^* είναι κάτω τριγωνικός. Τότε ο A είναι ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμος.

Παράδειγμα 3.2.1.1. Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

να βρεθεί άνω τριγωνικός πίνακας D και ορθογώνιος πίνακας Q τέτοιοι ώστε $D = Q^* A Q$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι το $X_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$ με μοναδική ιδιοτιμή την $\lambda_1 = 2$ (τριπλή ρίζα).
Από $(A - 2I)X = 0$ προκύπτει ομογενές σύστημα, του οποίου η λύση είναι ο ιδιόχωρος

$$E_2 = \{x_1(1 \quad 2 \quad 0)^T + x_3(0 \quad 0 \quad 1)^T : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής π.χ. $\lambda_1 = 2$ είναι το $X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Θεωρώ τα διανύσματα $X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, τα οποία μαζί με το X_1 (ως πρώτο διάνυσμα) αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άρα ο ορθομοναδιαίος πίνακας $Q_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$,θα είναι $Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Τότε είναι $Q_1^* A Q_1 = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right]$ και έστω $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_1 θα είναι το $X_{A_1}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$, (διπλή ρίζα). Αν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία όπως προηγούμενα για τον πίνακα A_1 έχουμε ότι, η λύση του συστήματος που προκύπτει από $(A - 2I)X = 0$ είναι ο ιδιόχωρος

$$E_2 = \{x_1 \ (1 \quad 2)^T : x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της ιδιοτιμής είναι το $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ με πρώτο διάνυσμα το Y_1 είναι η

$\left\{Y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, Y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right\}$ και έστω $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

Τότε $Q_2^* A_1 Q_2 = \begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{bmatrix} = D_1$.

Αν $Q_3 = \left[\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Q_2}}\\ 0 & & \end{array}\right] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$ και $Q = Q_1 Q_3 = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

έχουμε $Q^* A Q = \left[\begin{array}{c|cc}2 & 4/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5}\\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{D_1}}\\ 0 & & \end{array}\right] = \begin{bmatrix}2 & 4/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5}\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = D$.

Πόρισμα 3.2.1.1. Ένας πίνακας $A \in \prod_\nu(K)$ τριγωνοποιείται αν και μόνο αν το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο K .

Πόρισμα 3.2.1.2. Κάθε πίνακας $A \in \prod_\nu(\mathbb{C})$ τριγωνοποιείται.

Αξιοποιώντας το θεώρημα Schur μπορούμε να αποδείξουμε μία σημαντική ιδιότητα που σχετίζεται με τις ιδιοτιμές και το ίχνος ενός πίνακα

Πρόταση 3.2.1.2. Σε κάθε $A \in \prod_\nu(K)$ ισχύει

$$trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in K$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

Διαγωνοποίηση πινάκων ειδικής μορφής

- Κάθε ερμιτιανός πίνακας $A \in \prod_\nu(\mathbb{C})$ διαγωνοποιείται και μάλιστα από ένα ορθομοναδιαίο πίνακα Q.

  Απόδειξη. Έστω D ένας άνω τριγωνικός πίνακας με τον οποίο ο A είναι όμοιος με πίνακα ομοιότητας τον Q. Τότε $D = Q*AQ$ και $D* = Q*A*Q = Q*AQ = D$. Άρα ο D είναι ερμιτιανός και επειδή είναι και άνω τριγωνικός, θα είναι διαγώνιος.

- Κάθε συμμετρικός πίνακας $A \in \prod_{\nu}(\mathbb{R})$ είναι διαγωνοποιήσιμος και μάλιστα από ένα ορθογώνιο πίνακα P.

Κάθε άνω τριγωνικός (ή κάτω τριγωνικός) πίνακας που είναι όμοιος με τον πίνακα A έχει ως διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A.

Παρατήρηση 3.2.1.2. Δυο όμοιοι, άνω τριγωνικοί πίνακες, μπορεί να διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους.

Για παράδειγμα οι πίνακες $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ και $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

είναι όμοιοι με πίνακα ομοιότητας τον ορθομοναδιαίο πίνακα $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Οι πίνακες A_1, A_2 δεν είναι διαφορετικοί μόνο ως προς τα μη διαγώνια στοιχεία, αλλά και τα διαγώνια στοιχεία τους είναι με διαφορετική σειρά.

3.2.2 Κανονική Μορφή Jordan

Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν πίνακες $A \in \prod_{\nu}(K)$ οι οποίοι δε διαγωνοποιούνται.

Ένας πίνακας είναι μη διαγωνοποιήσιμος όταν τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματά του δεν είναι αρκετά, ώστε να κατασκευαστεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας , μέσω του οποίου επιτυγχάνεται η διαγώνια μορφή.
Σε αυτές τις περιπτώσεις χρειάζεται να επεκτείνουμε το σύνολο των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του αντίστοιχου ιδιοχώρου σε μία βάση, η οποία πρέπει να έχει διάσταση ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής. Η επέκταση κατορθώνεται με τη βοήθεια των «γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων».
Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζεται η θεωρία που αφορά την ύπαρξη και την κατάσκευή ενός πίνακα, που είναι αντίστοιχος του πίνακα της διαγωνοποίησης του A. Η νέα μορφή παραγοντοποίησης του πίνακα A δεν είναι διαγώνια, αλλά «πολύ κοντά» στη διαγώνια μορφή, είναι μία μορφή απλή και εξίσου χρήσιμη και ονομάζεται κανονική μορφή Jordan.

Η Jordan κανονική μορφή ενός $n \times n$ πίνακα A είναι ένας κατάλληλος διαγώνιος κατά μπλοκ πίνακας. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ $(1 \le k \le n)$ είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του πίνακα A και $n_1, n_2, \ldots, n_k$ είναι οι αλγεβρικές τους πολλαπλότητες.

Αν συμβολίσουμε με J_i το **Jordan block** που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i τότε αυτό είναι ένας $n_i \times n_i$ πίνακας ο οποίος ορίζεται ως εξής.

Διακρίνω τις περιπτώσεις

1) $A \in R^{n\times n}$ τότε υπάρχουν οι εξής υποπεριπτώσεις

Α) Αν η ιδιοτιμή λ_i είναι πραγματικός αριθμός και έχει την ίδια αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα $n_i = m_i$ τότε είναι

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Β) Αν η ιδιοτιμή λ_i είναι πραγματική και έχει διαφορετική αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα $n_i \neq m_i$ τότε το J_i έχει την μορφή

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & \delta_{i1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \delta_{i2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & \delta_{i,n_i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \qquad \text{όπου } \delta_{ij} = 0 \text{ ή } 1.$$

Το **Jordan block** J_i σχηματίζεται από m_i υπό-block τα οποία έχουν την μορφή

διάσταση >1	διάσταση =1
$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$ όπου η διάστασή τους καθορίζεται από την πτώση των τάξεων των πινάκων $(A-\lambda_i I_n)^S$ όπου $s = 1,2,3\dots,$	$[\lambda_i]$

Γ) Αν η ιδιοτιμή λ_i είναι μιγαδικός αριθμός τότε και ο $\overline{\lambda_i}$ είναι επίσης ιδιοτιμή του πίνακα και αν $\lambda_i = a + bi$ τότε οι δύο συζυγείς ιδιοτιμές $\lambda_i, \overline{\lambda_i}$ μας δίνουν το **Jordan block** $J_i = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

2) $A \in C^{n\times n}$ τότε ισχύουν μόνο οι περιπτώσεις όπου ο πίνακας έχει πραγματικά στοιχεία (δηλαδή οι περιπτώσεις A και B).

Θεώρημα 3.2.2.1 (Jordan παραγοντοποίηση) Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $X^{-1}AX = J$.

Αν ο πίνακας A διαγωνοποιείται τότε $X = P$, όπου P ο πίνακας ομοιότητας.

Αν ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται, τότε $X = P$, όπου P ο πίνακας μετάβασης.

Η μη διαγωνοποίηση του A οφείλεται, όπως προείπαμε ,στο ότι τα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του δεν είναι αρκετά ώστε να δώσουν μία βάση β.

Ισοδύναμα, υπάρχουν ιδιόχωροι (τουλάχιστον ένας) που αντιστοιχούν σε πολλαπλές ιδιοτιμές και οι οποίοι έχουν διάσταση μικρότερη από την αλγεβρική πολλαπλότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής. Οι ιδιόχωροι αυτοί επεκτείνονται με τα "γενικευμένα ιδιοδιανύσματα", ώστε η διάστασή τους να γίνει ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής.

Ορισμός 3.2.2.1. Έστω $A \in \prod_v(K)$. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in K^{n\times 1}$ λέγεται **γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα** του A αν για την ιδιοτιμή $\lambda_i \in K$ ισχύει

$$(A - \lambda_i I)^p x = 0 \ ,$$

για κάποιο $p \in \mathbb{N}^*$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $x \in K^{n\times 1}$ αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Το σύνολο

$$K_{\lambda_i} = \left\{ x \in K^{n\times 1} : (A - \lambda_i I)^p x = 0, \quad p \in \mathbb{N}^* \right\}$$

ονομάζεται **γενικευμένος ιδιόχωρος** της ιδιοτιμής λ_i.

Αν p είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός με την παραπάνω ιδιότητα, τότε το σύνολο

$$\left\{ (A - \lambda_i I)^{p-1}x, (A - \lambda_i I)^{p-2}x, \ldots, (A - \lambda_i I)x, x \right\}$$

ονομάζεται **αλυσίδα** από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα και ο αριθμός p ονομάζεται **μήκος** της αλυσίδας.

Ορισμός 3.2.2.2 Ο πίνακας P, που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα της κανονικής βάσης Jordan β , με την ίδια σειρά, λέγεται **πίνακας ομοιότητας** και ικανοποιεί τη σχέση

$$J = P^{-1}AP$$

Ορισμός 3.2.2.3 Για έναν τετραγωνικό πίνακα A χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned}
&(A-\lambda_i I)X_1 = \mathbb{O}\\
&(A-\lambda_i I)X_2 = X_1\\
&(A-\lambda_i I)X_3 = X_2\\
&\vdots\\
&(A-\lambda_i I)X_p = X_{p-1}
\end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα X_i που μας βοηθούν στην δημιουργία του πίνακα ομοιότητας P. Τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Σε όλες τις περιπτώσεις η **Jordan μορφή** του πίνακα A είναι $J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J_{i2} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & J_{in_i} \end{bmatrix}$.

Για να κατασκευάσουμε τους πίνακες J_{ij} πρέπει να γνωρίζουμε

- Τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ με τις αντίστοιχες αλγεβρικές τους πολλαπλότητες $m_1, m_2, ..., m_k$.
- Τις γεωμετρικές τους πολλαπλότητες $n_1, n_2, ..., n_k$.
- Τα μήκη των ξένων μεταξύ των περιόδων που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή.

Παράδειγμα 3.2.2.2 Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν διαγωνοποιείται, να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan και ο πίνακας P.

Το χαρακτηρηστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$X_A(\lambda) = \det\left[\lambda I - A\right] = \det \begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -3 & \lambda-1 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ (διπλή).

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $Ax = \lambda_1 x \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Οπότε,

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + x_2 = -x_1 \\ -x_1 + x_3 = -x_2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = -3x_1 \\ x_3 = 4x_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -3x_1 \\ 4x_1 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, x_1 \neq 0$$

Άρα για $\lambda_1 = -1$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}^T$ με $\dim E_{-1} = 1$.
Η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_1 ισουται με $n_1 = 1$, ταυτίζεται δηλαδή με την αλγεβρική της πολλαπλότητα $m_1 = 1$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $Ax = \lambda_2 x \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Οπότε,

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + x_2 = 2x_1 \\ -x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1 \neq 0.$$

Άρα για $\lambda_2 = 2$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ με $\dim E_2 = 1$.
Η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_2 ισούται με $n_2 = 1$, δεν ταυτίζεται δηλαδή με την αλγεβρική της πολλαπλότητα η οποία είναι $m_2 = 2$.
Άρα ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται οπότε για να βρώ την Jordan κανονική μορφή θα πρέπει να υπολογίσω τα Jordan Block.
Είναι $J_1 = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$ και $J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, οπότε η Jordan κανονική μορφή του πίνακα A θα είναι

$$J(A) = \begin{bmatrix} J_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Βάση Jordan: Έχουμε $m_2 = 2$ και $n_2 = 1$ άρα χρειαζόμαστε για τη βάση β_2, $m_2 - n_2 = 1$ ακόμη ιδιοδιάνυσμα. Το ιδιοδιάνυσμα αυτό θα προκύψει από τη σχέση $(A-2I)X_3 = X_2$. Άρα

$$(A-2I)X_3 = X_2 \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} x_2 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_3 = 2 + x_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 1 \\ 2+c \end{bmatrix}$$

Οπότε για $c = 0$ παίρνουμε $X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ άρα ο πίνακας P θα είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Εύρεση κανονικής Μορφής Jordan με διαγράμματα.

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με $\dim V = n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ οι διάφορες μεταξύ τους ιδιοτιμές του T, όλες στο σώμα K. Έστω ακόμη $\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$ μία βάση Jordan για τον T, όπου β_i μία διατεταγμένη βάση του γενικευμένου ιδιόχωρου $K_{\lambda_i}(T)$ του T που είναι ένωση των ξένων μεταξύ των περιόδων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i.
Αν T_i, είναι ο περιορισμός του T στον υπόχωρο $K_{\lambda_i}(T)$ και $A_i = [T_i]_{\beta_i}$ είναι ο πίνακας του T_i, ως προς τη βάση β_i, η κανονική μορφή Jordan είναι ο πίνακας $J = [T]_\beta$ που δίνεται στη σχέση

$$A_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J_{i2} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & J_{in_i} \end{bmatrix}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι περίοδοι είναι διατεταγμένες με τέτοιο τρόπο ώστε τα μήκη τους p_j να φθίνουν : $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_{n_i}$.

Για παράδειγμα αν η $\beta_i = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ είναι ένωση τεσσάρων περιόδων $\gamma_i, i = 1,2,3,4$

με μήκη $p_1 = 3, p_2 = 2, p_2 = 2, p_4 = 1$ αντίστοιχα, τότε ο A_i θα είναι ο πίνακας

$$A_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J_{i2} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & J_{i3} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & J_{i4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Αν τοποθετήσουμε τα στοιχεία κάθε περιόδου σε μία στήλη και σε κάθε στοιχείο της περιόδου αντιστοιχίσουμε έναν αστερίσκο, θα προκύψει ο παρακάτω πίνακας.

γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
$*\ (T-\lambda_i I)^2 x_1$ $*\ (T-\lambda_i I)x_1$ $*\ x_1$	$*\ (T-\lambda_i I)x_2$ $*\ x_2$	$*\ (T-\lambda_i I)x_2$ $*\ x_3$	$*\ x_4$
$J_{i1} : (3\times 3)$	$J_{i2} : (2\times 2)$	$J_{i3} : (2\times 2)$	$J_{i4} : (1\times 1)$

ή διατηρώντας μόνο τους αστερίσκους, χωρίς την αναγραφή των στοιχείων των περιόδων, έχουμε το παρακάτω διάγραμμα της ιδιοτιμής λ_i

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ * & * & * & \\ * & & & \end{matrix}$$

Κάθε στήλη του διαγράμματος αντιστοιχεί και σε ένα στοιχειώδη πίνακα Jordan με ιδιοτιμή λ_i, του Jordan μπλόκ A_i. Το πλήθος των αστερίσκων σε κάθε στήλη, που ισούται με το μήκος της αντίστοιχης περιόδου, καθορίζει τη διάσταση του αντίστοιχου στοιχειώδη πίνακα Jordan.

Συγκεκριμένα, στην 1η στήλη του διαγράμματος αντιστοιχεί ο πρώτος στοιχειώδης πίνακας Jordan J_{i1} που είναι τύπου 3×3, γιατί τρεις αστερίσκοι υπάρχουν στη 1η στήλη. Ο J_{i2}, που αντιστοιχεί στη 2η στήλη, είναι τύπου 2×2, αφού δύο αστερίσκοι υπάρχουν στη 2η στήλη κ.ο.κ.

Παράδειγμα 3.2.2.3 Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan ενός γραμμικού μετασχηματισμού με $\dim(V) = 7$ και

$$\lambda_1 = 2,\ m_1 = 4,\ n_1 = 2,\ p_{11} = 2\ , p_{12} = 2$$
$$\lambda_2 = -3,\ m_2 = 3,\ n_2 = 1,\ p_{21} = 3$$

Από τα δεδομένα προκύπτουν τα διαγράμματα

$$\begin{array}{cc} \lambda_1 = 2 & \lambda_2 = -3 \\ ** & * \\ ** & * \\ & * \end{array}$$

Έχουμε δύο διαφορετικές ιδιοτιμές άρα η μορφή Jordan J θα έχει 2 Jordan μπλοκ A_1, A_2.
Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ θα έχει:

α) Τόσους αστερίσκους, όση η αλγεβρική της πολλαπλότητα m_i, δηλαδή 4.

β) Τόσες στήλες, όση η γεωμετρική της πολλαπλότητα n_i, δηλαδή 2 (όσοι είναι και οι αντίστοιχοι στοιχειώδεις πίνακες Jordan).

γ) Οι δύο στήλες θα έχουν 2 αστερίσκους, όσες είναι και οι τάξεις των στοιχειωδών πινάκων Jordan J_{11} , J_{12} (είναι 2×2).

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -3$ θα έχει:

α) Τόσους αστερίσκους, όση η αλγεβρική της πολλαπλότητα m_i, δηλαδή 3.

β) Τόσες στήλες, όση η γεωμετρική της πολλαπλότητα n_i, δηλαδή 1. (Δηλαδή ένας πίνακας Jordan J_{21})

γ) Η στήλη θα έχει 3 αστερίσκους, όση είναι και η τάξη του στοιχειώδη πίνακα Jordan J_{21} (είναι 3×3).

Επομένως θα έχουμε $$J = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A_2 \end{bmatrix}$$

Άρα $$J = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

3.2.3 Ρητή Μορφή

Η ρητή κανονική μορφή ενός γραμμικού μετασχηματισμού ή ενός τετραγωνικού πίνακα είναι ανεξάρτητη από την ύπαρξη ή μη ιδιοτιμών και από το αν οι ιδιοτιμές (όταν υπάρχουν) ανήκουν ή όχι στο σώμα K. Βασίζεται μόνο στο γεγονός ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X(\lambda)$ αναλύεται πάντα, κατά μοναδικό τρόπο, σε γινόμενο παραγώντων της μορφής $X(\lambda)=(\phi_1(\lambda))^{m_1}(\phi_2(\lambda))^{m_2}\cdots(\phi_k(\lambda))^{m_k}$, όπου τα $\phi_i(\lambda)$ είναι **ανάγωγα πολυώνυμα**, διάφορα μεταξύ τους με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα.

Η θεωρητική δομή μιας ρητής κανονικής μορφής είναι ανάλογη με αυτήν της κανονικής μορφής Jordan. Έτσι λοιπόν αναλογικά έχουμε:

- Στη θέση των διωνύμων $\lambda-\lambda_i$ χρησιμοποιούνται τα ανάγωγα πολυώνυμα $\phi_i(\lambda)$ που είναι παράγοντες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
- Στη θέση των γενικευμένων ιδιοχώρων $K_{\lambda_i}(T)$, χρησιμοποιούνται οι υπόχωροι $K_{\phi_i}(T)$, που είναι γενίκευση των $K_{\lambda_i}(T)$.
- Στη θέση των περιόδων, που απαρτίζουν την κανονική βάση Jordan, χρησιμοποιούνται T-κυκλικές βάσεις που σχηματίζουν τη ρητή κανονική βάση.
- Σε κάθε $\phi_i(\lambda)$ αντιστοιχεί ένα διάγραμμα που έχει ως στήλες τις αντίστοιχες T-κυκλικές βάσεις, όπως οι περίοδοι στα διαγράμματα των ιδιοτιμών στην κανονική μορφή Jordan.

Για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό $T\in\mathfrak{L}(V)$ υπάρχει διατεταγμένη βάση β του V τέτοια ώστε ο πίνακας $C=\left[T\right]_\beta$ του T να είναι της μορφής

$$C=\begin{bmatrix} C_1 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C_2 & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & C_v \end{bmatrix},$$

όπου τα διαγώνια στοιχεία C_i είναι πίνακες (άρα ο C είναι μπλοκ – διαγώνιος). Ο πίνακας C λέγεται **ρητή κανονική μορφή** του T και η αντίστοιχη βάση β **ρητή κανονική βάση** του T. Το χαρακτηρηστικό πολυώνυμο του T είναι το

$$X_T(\lambda)=\det(\lambda I-C).$$

Ορισμός 3.2.3.1. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος, $T\in\mathfrak{L}(V)$, $x\in V$, $x\neq 0$, $U=C_x(T)=[x,Tx,T^2x,\ldots]$ και, τότε το σύνολο $B_x(T)=\{x,Tx,T^2x,\ldots,T^{k-1}x\}$ είναι μια βάση του $C_x(T)$ η οποία λέγεται **T-κυκλική βάση του $C_x(T)$ που παράγεται από το x.**

Ορισμός 3.2.3.2. Έστω $T \in \mathfrak{L}(V)$ με χαρακτηρηστικό πολυώνυμο

$$X_T(\lambda) = (\phi_1(\lambda))^{m_1}(\phi_2(\lambda))^{m_2}\dots(\phi_k(\lambda))^{m_k}, \qquad \text{όπου } \phi_i(t), 1 \le i \le k$$

είναι ανάγωγα πολυώνυμα , διάφορα μεταξύ τους, με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα και $m_i \in \mathbb{N}^*$. Για κάθε $i:(1 \le i \le k)$ ορίζουμε το σύνολο $K_{\phi_i}(T)$ ως:

$$K_{\phi_i}(T) = \{x \in V \ : \ (\phi_i(T))^p x = 0 \ \text{για κάποιο} \ p \in \mathbb{N}^*\}.$$

Πρόταση 3.2.3.1. Αν $T \in \mathfrak{L}(V)$ με $x \in V,\ x \neq 0$ και ο T-μηδενιστής του x είναι της μορφής $(\phi(t))^p$, όπου $\phi(t)$ ένα ανάγωγο πολυώνυμο με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα, τότε το $\phi(t)$ διαιρεί το ελάχιστο πολυώνυμο του T και $x \in K_\phi(T)$.

Θεώρημα 3.2.3.1. . Έστω $T \in \mathfrak{L}(V)$ με χαρακτηρηστικό πολυώνυμο

$$X_T(\lambda) = (\phi_1(\lambda))^{m_1}(\phi_2(\lambda))^{m_2}\dots(\phi_k(\lambda))^{m_k}, \qquad \text{όπου } \phi_i(t), 1 \le i \le k$$

είναι ανάγωγα πολυώνυμα , διάφορα μεταξύ τους, με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα και $m_i \in \mathbb{N}^*$. Τότε:

- Το ελάχιστο πολυώνυμο του T έχει τους ίδιους παράγοντες $\phi_i(t), 1 \le i \le k$ με το $X_T(\lambda)$, ως ανάγωγα, διάφορα μεταξύ τους, πολυώνυμα με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα.
- $\dim K_{\phi_i}(T) = d_i m_i$, όπου $d_i = rank(\phi_i(t))$, $1 \le i \le k$.
- Αν β είναι μια ρητή βάση του V τότε το σύνολο $\beta_i = \beta \cap K_{\phi_i}(T)$ είναι μια βάση του $K_{\phi_i}(T), \forall\ i = 1,2,\dots,k$.

  <u>Αντιστρόφως</u> Αν β_i είναι μια βάση του $K_{\phi_i}(T)$, τότε η $\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$ είναι μια βάση του V.
  Ειδικότερα, αν κάθε β_i είναι ένωση ξένων μεταξύ των T-κυκλικών βάσεων , τότε η β είναι μια ρητή κανονική βάση του T.

Θεώρημα 3.2.3.2 Έστω $\phi(t)$ ένα ανάγωγο πολυώνυμο με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα, παράγοντας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $X_T(\lambda)$ του $T \in \mathfrak{L}(V)$. Αν d είναι ο βαθμός του $\phi(t)$, l_i ο αριθμός των αστερίσκων στην $i-$γραμμή του διαγράμματος, που αντιστοιχεί στο $\phi(t)$ ως προς μια ρητή κανονική βάση του T και $r(\phi(T)) = \dim R(\phi(T))$, τότε:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{d}[\dim V - r(\phi(T))] \\ l_j &= \frac{1}{d}[r(\phi(T)^{j-1}) - r(\phi(T)^j)] \ , \ \ j>1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Ορισμός 3.2.3.3 Σε κάθε πολυώνυμο $\phi(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ αντιστοιχεί ένας πίνακας της μορφής $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας αυτός ονομάζεται **συνοδός** ή **συνοδεύων πίνακας**.

Εύρεση Ρητής Κανονικής Μορφής με διαγράμματα

Έστω $T \in \mathfrak{L}(V)$ και $X_T(\lambda) = (\phi_1(\lambda))^{m_1}(\phi_2(\lambda))^{m_2}\cdots(\phi_k(\lambda))^{m_k}$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T , όπου $\phi_i(t)$, $1 \le i \le k$ είναι ανάγωγα πολυώνυμα, διάφορα μεταξύ τους, με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα και $m_i \in \mathbb{N}^*$. Τότε :

α) Στον T αντιστοιχούν k το πλήθος διαγράμματα, όσοι και οι παράγοντες $\phi_i(t)$, $1 \le i \le k$ του $X_T(t)$. Επομένως σε κάθε παράγοντα $\phi_i(t)$ ακριβώς ένα διάγραμμα. Στο διάγραμμα αυτό:

i) Ο αριθμός των αστερίσκων είναι ίσος με m_i και ο αριθμός των στηλών ισούται με τον αριθμό των συνοδών πινάκων που σχετίζονται με το $\phi_i(t)$. Άρα κάθε στήλη καθορίζει και τον αντίστοιχο συνοδό πίνακα. Πιο συγκεκριμένα:

ii) Αν p_j είναι ο αριθμός των αστερίσκων στην j - στήλη τότε ο αντίστοιχος συνοδός πίνακας είναι τύπου $(d_i p_j) \times (d_i p_j)$ και είναι ο συνοδός πίνακας του πολυωνύμου $(\phi_i(t))^{p_j}$.

iii) Σ' ένα διάγραμμα οι αριθμοί p_j, που δίνουν τον αριθμό των αστερίσκων στην j - στήλη, είναι κατά φθίνουσα τάξη.

Σημειώνεται ότι σε κάθε j - στήλη αντιστοιχεί μία T - κυκλική βάση γ_j από $d_i p_j$ το πλήθος στοιχεία (όπου $d_i = rank\phi_i(t)$). Το στοιχείο u_j, που παράγει τη βάση γ_j, είναι τέτοιο ώστε $(\phi_i(T))^{p_j} u_j = 0$, δηλαδή το $(\phi_i(t))^{p_j}$ είναι ο T - μηδενιστής του u_j. Το σύνολο $\beta_i = \bigcup_j \gamma_j$ είναι βάση του $K_{\phi_i}(T)$ και αποτελεί το τμήμα, μίας ρητής κανονικής βάσης β , που αντιστοιχεί στον παράγοντα $\phi_i(t)$. Έτσι με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε τη βάση β, που είναι η $\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$.

β) Η διάταξη των αστερίσκων στα διάγραμματα και επομένως και ο αριθμός και η μορφή των στηλών, καθορίζονται από τους τύπους (3.5).

Παράδειγμα 3.2.3.1. Να βρεθεί η ρητή κανονική μορφή ενός γραμμικού μετασχηματισμού $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^9)$ που έχει διαιρέτες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου τα ανάγωγα πολυώνυμα $\phi_1(t) = t^2 + 3$, $\phi_2(t) = t + 1$, $\phi_3(t) = t^2 - 2t + 3$ με αντίστοιχα διαγράμματα:

$$\begin{array}{ccc} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \phi_3(t) \\ * \quad * & * \quad * & * \\ & * & \end{array}$$

Έχουμε $X_T(\lambda) = (\phi_1(\lambda))^{m_1}(\phi_2(\lambda))^{m_2}(\phi_3(\lambda))^{m_3}$ και $d_1 = 2$ αφού $\phi_1(t) = t^2 + 3$.

Το διάγραμμα του $\phi_1(t)$ έχει δύο αστερίσκους ($m_1 = 2$) και δύο στήλες(p_1, p_2), άρα θα αντιστοιχούν δύο συνοδοί πίνακες τύπου

$(d_1 p_1) \times (d_1 p_1) = (2 \cdot 1) \times (2 \cdot 1) = 2 \times 2$ και $(d_1 p_2) \times (d_1 p_2) = (2 \cdot 1) \times (2 \cdot 1) = 2 \times 2$

Άρα θα έχουμε τον ίδιο πίνακα δύο φορές τύπου, που είναι ο συνοδός πίνακας του $\phi_1(t)^1 = \phi_1(t)$.

Άρα $C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Έχουμε $d_2 = 1$ αφού $\phi_2(t) = t + 1$.

Το διάγραμμα του $\phi_2(t)$ έχει τρεις αστερίσκους ($m_2 = 3$)και δύο στήλες (p_1, p_2), άρα δύο συνοδούς πίνακες C_3, C_4.

Η 1η στήλη έχει δύο αστερίσκους, $p_1 = 2$ άρα ο C_3 θα είναι ο συνοδός πίνακας τύπου

$(d_2 p_1) \times (d_2 p_1) = (1 \cdot 2) \times (1 \cdot 2) = 2 \times 2$ του $(\phi_2(t))^{p_1} = (\phi_2(t))^2 = t^2 + 2t + 1$,

οπότε $C_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Η 2η στήλη έχει ένα αστερίσκο $p_2 = 1$, άρα ο C_4 θα είναι ο συνοδός πίνακας τύπου

$(d_2 p_2) \times (d_2 p_2) = (1 \cdot 1) \times (1 \cdot 1) = 1 \times 1$ του $(\phi_2(t))^{p_2} = \phi_2(t)^1 = \phi_2(t) = t + 1$, οπότε $C_4 = \left[-1\right]$.

Τέλος έχουμε $d_3 = 2$ αφού $\phi_3(t) = t^2 - 2t + 3$ και το διάγραμμα του $\phi_3(t)$ έχει έναν αστερίσκο ($m_3 = 1$)και μια στήλη (p_1), άρα ο C_5 θα είναι ο συνοδός πίνακας τύπου

$(d_3 p_1)\times(d_3 p_1) = (1\cdot 2)\times(1\cdot 2) = 2\times 2$ του $(\phi_3(t))^{p_1} = \phi_3(t)^1 = t^2 - 2t + 3$,

οπότε $C_5 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Επομένως η ρητή κανονική μορφή του T θα είναι ο 9×9 πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C_2 & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & C_3 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & C_4 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \left[-1\right] & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3.2.3.2 Να βρεθεί η ρητή κανονική μορφή C του πίνακα A και αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $C = P^{-1}AP$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(t) = (\phi_1(\lambda))^{m_1}(\phi_2(\lambda))^{m_2} = (t-4)^3(t-3)$ του A έχει δύο διαιρέτες, τα ανάγωγα πολυώνυμα $\phi_1(t) = t-4$ με $m_1 = 3$ και $\phi_2(t) = t-3$ με $m_2 = 1$.

Το διάγραμμα του $\phi_1(t)$ έχει τρεις αστερίσκους αφού $m_1 = 3$.

Για να βρούμε πόσοι είναι οι αστερίσκοι της πρώτης γραμμής χρησιμοποιούμε τον τύπο $l_1 = \frac{1}{d}[\dim V - r(\phi(T))]$ με $\dim V = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, $d = 1$ και $r(\phi(T)) = \dim \phi(T) = \dim(A - \lambda I)$.

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} 4-4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ Άρα $\dim(\lambda I - A) = 3$.

Άρα $1^{η}$ γραμμή έχει $l_1(t) = \frac{1}{1}[4-3] = 1$ αστερίσκο.

Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τους αστερίσκους στις άλλες γραμμές αφού σε ένα διάγραμμα οι αριθμοί p_j, που δίνουν τον αριθμό των αστερίσκων στην j - στήλη, είναι κατά φθίνουσα τάξη. Έτσι λοιπόν έχουμε μία στήλη με τρεις αστερίσκους και ο συνοδός πίνακας θα είναι ο C_1 τύπου

$(d \cdot p_1) \times (d \cdot p_1) = (3 \cdot 1) \times (3 \cdot 1) = 3 \times 3$ του $(\phi_1(t))^3 = t^3 - 12t^2 + 48t - 64$,

οπότε $C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 64 \\ 1 & 0 & -48 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$

Το διάγραμμα του $\phi_2(t)$ έχει έναν αστερίσκο αφού $m_2 = 1$, $d = 1$ αφού $\phi_2(t) = t - 3$ και άρα ένα συνοδό πίνακα, τον C_2, τύπου

$(d \cdot p_1) \times (d \cdot p_1) = (1 \cdot 1) \times (1 \cdot 1) = 1 \times 1$ του $(\phi_2(t))^1 = t - 3$, οπότε $C_2 = [3]$.

Επομένως τα διαγράμματα $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ θα είναι

$\phi_1(t)$	$\phi_2(t)$
*	*
*	
*	

και η ρητή κανονική μορφή C του πίνακα A θα είναι

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 64 & 0 \\ 1 & 0 & -48 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Για τον προσδιορισμό του πίνακα P αρκεί να κατασκευάσουμε μια ρητή κανονική βάση β. Η διαδικασία είναι παρόμοια με την εύρεση κανονικής Jordan βάσης.

Από τα διαγράμματα των $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ φαίνεται ότι πρέπει να βρούμε δύο διανύσματα u_1 και u_2, με μηδενιστές αντίστοιχα τα πολυώνυμα $(\phi_1(t))^3$ και $\phi_2(t)$, τέτοια ώστε $\beta=\left\{u_1, Au_1, A^2u_1, u_2\right\}$.

Πράγματι, επειδή το διάγραμμα του $\phi_1(t)$ έχει μια στήλη με τρεις αστερίσκους και ο βαθμός του $\phi_1(t)$ είναι $d=1$, αφού $\phi_1(t)=t-4$, το τμήμα β_1 της βάσης β που αντιστοιχεί στο $\phi_1(t)$ θα είναι μία A- κυκλική βάση με $3\cdot 1=3$ στοιχεία. Επομένως θα έχει τη μορφή $\beta_1=\left\{u_1, Au_1, A^2u_1\right\}$ με $\phi_1(A)^3u_1=0$ και $\phi_1(A)^2u_1\neq 0$, δηλαδή το $\phi_1(A)^3$ είναι ο μηδενιστής του u_1.

Ισοδύναμα $u_1\in N(\phi_1(A)^3)=N((A-4I)^3)$ και $u_1\notin N(\phi_1(A)^2)=N((A-4I)^2)$.

Είναι $N((A-4I)^2)=\left[e_1,e_2\right]$ και $N((A-4I)^3)=\left[e_1,e_2,e_3\right]$.

Άρα, ως u_1, μπορούμε να πάρουμε το $u_1=e_3$, οπότε η $\beta_1=\left\{u_1, Au_1, A^2u_1\right\}=\left\{(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,1,4,0)^{\mathrm{T}},(1,8,16,0)^{\mathrm{T}}\right\}$.

Το διάγραμμα του $\phi_2(t)$ έχει ένα αστερίσκο (σε μία στήλη) και ο βαθμός του $\phi_2(t)$ είναι $d=1$, οπότε χρειαζόμαστε ένα διάνυσμα u_2 τέτοιο ώστε $\phi_2(A)u_2=0$ δηλαδή $(A-3I)u_2=0$

Αυτό σημαίνει ότι το u_2 είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A. Είναι $N(A-3I)=\left[(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}\right]$, οπότε $u_2=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ (αν είχαμε περισσότερα ιδιοδιανύσματα, θα πέρναμε εκείνο που ήταν γραμμικώς ανεξάρτητο με το $\left\{u_1, Au_1, A^2u_1\right\}$).

Άρα μία ρητή κανονική βάση είναι η $\beta=\left\{(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,1,4,0)^{\mathrm{T}},(1,8,16,0)^{\mathrm{T}},(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}\right\}$

και ο ζητούμενος πίνακας $P=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&8&0\\1&4&16&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

Ρητή Κανονική Μορφή και Ελάχιστο Πολυώνυμο

Από το Θεώρημα 3.2.3.1 και τη διαδικασία εύρεσης της ρητής κανονικής μορφής ενός γραμμικού μετασχηματισμού T, προκύπτει ότι η μορφή αυτή έχει άμεση σχέση και με το ελάχιστο πολυώνυμο του T.

Έστω $T \in \mathfrak{L}(V)$, $X_T(\lambda) = (\phi_1(\lambda))^{m_1}(\phi_2(\lambda))^{m_2}\cdots(\phi_k(\lambda))^{m_k}$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και $m_T(\lambda) = (\phi_1(\lambda))^{p_1}(\phi_2(\lambda))^{p_2}\cdots(\phi_k(\lambda))^{p_k}$ το ελάχιστο πολυώνυμο του T, όπου $\phi_i(t)$, $1 \le i \le k$ είναι ανάγωγα πολυώνυμα, διάφορα μεταξύ τους, με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα. Ο διανυσματικός χώρος $K_{\phi_i}(T)$ έχει μία βάση που είναι ένωση, $\cup\beta_{u_j}(T)$, $j = 1,2,\ldots,n_i$, T - κυκλικών βάσεων β_{u_j}. Έστω $(\phi_i(t))^{p_{ij}}$, $j = 1,2,\ldots,n_i$ με $p_i = p_{i1} \ge p_{i2} \ge \ldots \ge p_{in_i}$ οι αντίστοιχοι μηδενιστές των διανυσμάτων u_i (τα οποία παράγουν τις βάσεις αυτές). Για κάθε $i = 1,2,\ldots,k$ τα πολυώνυμα $(\phi_i(t))^{p_{ij}}$ είναι τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των συνοδών πινάκων της ρητής κανονικής μορφής, που αντιστοιχούν στον παράγοντα $\phi_i(t)$ και λέγονται **στοιχειώδεις διαιρέτες** του T. Ο αριθμός των φορών που παρουσιάζεται ένας στοιχειώδης διαιρέτης στην ανάλυση του $X_T(\lambda)$ λέγεται **πολλαπλότητα** του στοιχειώδη διαιρέτη. Η ρητή κανονική μορφή καθορίζεται πλήρως μόνο όταν είναι γνωστοί όλοι οι στοιχειώδεις διαιρέτες και οι πολλαπλότητές τους.

Ο περιορισμός του T στον υπόχωρο $C_{u_j}(T) = [\beta_{u_j}(T)]$ έχει ελάχιστο πολυώνυμο το $(\phi_i(t))^{p_{ij}}$, το οποίο ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του περιορισμού του T στον υπόχωρο $K_{\phi_i}(T)$ είναι το $(\phi_i(t))^{m_i}$. Επομένως από τον Ορισμό 3.2.3.1. θα έχουμε:

$$(\phi_i(t))^{m_i} = (\phi_i(t))^{p_{i1}}\phi_i(t))^{p_{i2}}\cdots(\phi_i(t))^{p_{in_i}} \tag{3.6}$$

Παράδειγμα 3.2.3.3. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$, $\dim V = 6$, και $T \in \mathfrak{L}(V)$ με ελάχιστο πολυώνυμο το $m(\lambda) = (\lambda^2+2)(\lambda+5)^2$. Να βρεθούν όλες οι πιθανές ρητές κανονικές μορφές του T.

Έχουμε δύο παράγοντες (ανάγωγα πολυώνυμα) τους $\phi_1(t) = \lambda^2 + 2$ και $\phi_2(t) = \lambda + 5$. Πρέπει το άθροισμα των βαθμών όλων των στοιχειωδών διαιρετών του T να ισούται με $\dim V = 6$. Άρα οι στοιχειώδεις διαιρέτες του T μπορεί να είναι οι

$\lambda^2+2, \lambda^2+2, (\lambda+5)^2$ ή $\lambda^2+2, (\lambda+5)^2, (\lambda+5)^2$ ή $\lambda^2+2, (\lambda+5)^2, \lambda+5, \lambda+5$.

Επομένως οι αντίστοιχες ρητές κανονικές μορφές είναι:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3.2.3.4. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί η κανονική ρήτη μορφή του.

Ο A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $X_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$ και ελάχιστο πολυώνυμο το $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$ άρα οι στοιχειώδεις διαιρέτες του A είναι οι $(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$, έχουμε δηλαδή μια μόνο περίπτωση και επομένως η ρητή μορφή θα είναι η

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] *Σημειώσεις Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας*, Β.Δουγάλης, Δ.Νούτσος, Α. Χατζηδήμος, Βόλος 2007.

[2] *Γραμμική Άλγεβρα*, Σ. Καρανάσιος,Ν.Καδιανάκης, Αθήνα 2011.

[3] *Schaum's Outline of Linear Algebra*, S.Lipschutz, M.Lipson, Schaum Series, 2001.

[4] *Introduction to Spectral Analysis*, P.Stoica, R.L.Moses, Prentice Hall, 1997.

[5] *Γραμμική ʽΆλγεβρα*, Χ.Κουντουριώτης, Κρήτη 2010.

[6] *Μηχανική του Συνεχούς Μέσου*, Ι. Βαρδουλάκης, 2008.

[7] *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Ν. Σταυρακάκης, 1997.

[8] *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Δ. Σούρλας, Εκδόσεις Συμμετρία ,2010.

[9] *Γραμμική Άλγεβρα*, Ι.Μαρουλάς, Εκδόσεις ΕΜΠ ,2005