ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Χρήση Laser στον μη καταστροφικό έλεγχο

Διπλωματική Εργασία

Βασίλειος Κοράκης - 02117110

Επιβλέπων

Δημήτριος Μανωλάκος - Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2022

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING

Laser-Ultrasonics in non-destructive testing

A Diploma Thesis

by

Vasileios Korakis - 02117110

Advisor:

Dimitrios Manolakos - Proffesor, NTUA

Athens, July 2022

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων

Κατάλογος πινάκων

Περίληψη

Ο μη καταστροφικός έλεγχος για την εύρεση ρωγμών είναι ένας σημαντικός τομέας στις βιομηχανίες. Η επέκταση των μεθόδων του σε τεχνικές όπου δεν απαιτείται η επαφή με το τεμάχιο είναι ένα βήμα που οδηγεί σε πιο ευέλικτες μετρήσεις. Από την άλλη, για τον πλήρη έλεγχο τεμαχίων απαιτείται γνώση της εσωτερικής κατάστασης του υλικού. Η χρήση laser και οι υπέρηχοι είναι δυο λύσεις στα δυο αυτά προβλήματα. Στην εργασία αυτή, μελετάται η γέννεση υπερήχων με laser. Χρησιμοποιείται η θερμοελαστικότητα για την αναλυτική αλλά και αριθμητική κατανόηση του φαινομένου. Εξηγείται η πορεία διαμόρφωσης του τελικού πεδίου κίνησης μέσω προσομοιώσεων και προκύπτουν συμπεράσματα που αφορούν την σχέση του με την γεωμετρία. Εκτελείτε πείραμα μέτρησης υπερήχων με πιεζοηλεκτρικό στοιχείο από όπου προκύπτουν ιδιόμορφα αποτελέσματα καθώς και ότι η χρήση πιεζοηλεκτρικών στοιχείων δεν ενδεικνύεται για μέτρηση υπερήχων σε αυτό το πρόβλημα.

Λέξεις-κλειδιά: Μη-καταστροφικός έλεγχος, ρωγμές, laser, υπέρηχοι, προσομοίωση

Abstract

Non-destructive testing for crack detection is unequivocally an important field of study. Expansion of its methods is required in order to maintain a resilient way of no-contact tests. As important, is estimating the inner state of a material's cracks and voids. Laser and ultrasounds are two methods that solve both difficulties. Therefore, in this thesis laser-ultrasounds are studied and their mechanisms of generation. For that, thermoelasticity is used and classical-analytical results are presented. A simulation is carried out to describe in detail the phenomenon. From that, an understanding of the formation of the discplacements transpires and its relations with the studied geometry. An experiment is also carried out in order to verify the applicability of piezoelectric elements in the measurment of the waves. From the results, a dissagrement with simulation is observed and also that piezoelectrics are not suitable for this specific problem.

Keywords: Non-destructive testing, cracks, laser, ultrasonics, simulation

Ευχαριστίες

Στα τέλη των σπουδών μου εκπονώ αυτή την διπλωματική εργασία με όση θέληση είχα στις αρχές της σχολής. Κατά τη διάρκεια της φοίτησης μου πολλά άτομα συνέβαλαν στις γνώσεις μου και στην καθημερινότητά μου και έτσι προκαταβολικά συνέβαλαν στην εργασία αυτή.

Για την εργασία αυτή, ευχαριστώ πρωτίστως τον καθηγητή και επιβλέποντα της διπλωματικής μου, Δημήτριο Μανωλάκο της ΣΜΜ που από το πρώτο έτος μέχρι το τελευταίο φρόντισε να παρέχει στους φοιτητές του τις απαραίτητες γνώσεις και την νοοτροπία που απαιτούν για να γίνουν κατανοητές στο βάθος τους. Ευχαριστώ, επίσης τον καθηγητή Ευάγγελο Χριστοφόρου της ΣΗΜΜΥ, που παρείχε σημαντικές πληροφορίες στο θέμα και αποτέλεσε σημείο καμπής στην πορεία της εργασίας μου καθώς και τους φοιτητές του στο εργαστήριο ηλεκτρικών αισθητήρων που παρείχαν βοήθεια για το υλικό του πειράματος.

Ευχαριστώ ακόμη, την καθηγήτρια Ιωάννα Ζεργιώτη της ΣΕΜΦΕ που μου παρείχε τα laser στα εργαστήρια του τομέα της και συγκεκριμένα ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα Κώστα Ανδρίτσο που ήταν υπεύθυνος των πειραμάτων και βοήθησε στην πολύωρη υλοποίησή τους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τον αδερφό μου που ήταν εκεί από πάντα καθώς και τους φίλους μου που κάνουν την καθημερινότητα ενδιαφέρουσα.

Εισαγωγή

Ο μη καταστροφικός έλεγχος είναι σημαντική έννοια σε βιομηχανίες που βελτιστοποιούν παραγωγές και μειώνουν τα κόστη. Προσφέρει αξιοπιστία και την απαραίτητη πληροφορία στον ελεγκτή και στον σχεδιαστή για την εσωτερική κατάσταση του υλικού. Είτε το προϊόν προέρχεται από μια ρουτίνα καταπόνησης είτε από μια γραμμή παραγωγής όπου μόλις έχει παραχθεί, είναι σημαντικό να αξιολογείται η εσωτερική του κατάσταση, για την ύπαρξη ρωγμών ή για την ύπαρξη τάσεων με τον λιγότερο επεμβατικό τρόπο. Έτσι μόνο θα μπορέσει το υλικό να συνεχίσει άθικτο την ασφαλή λειτουργία του. Οι τεχνικές που υπάρχουν στον τομέα αυτό ποικίλουν, από μεθόδους ακτίνων (είτε ακουστικών, είτε ηλεκτρομαγνητικών), μεθόδους ελέγχου επιφάνειας: οπτικές, μαγνητικές και περισσότερο έμμεσες μεθόδους που βασίζονται στην ανάλυση δεδομένων (όπως δυναμική ανάλυση αξόνων). Στα πλαίσια εύρεσης μιας πιο ευέλικτης και αυτόματης τεχνικής ελέγχου, η ιδανική μέθοδος δεν θα απαιτούσε την επαφή μετρητικού-υλικού μειώνοντας την ανάγκη ύπαρξης εργατικού δυναμικού και διευκολύνοντας την αξιολόγηση υλικών σε δυσμενέστερες συνθήκες (θερμά υλικά, εύθραυστες μεμβράνες, δυσπρόσιτα σημεία). Τέτοια μέθοδος χρησιμοποιεί το laser για να αντικαταστήσει την επαφή που απαιτείται στις άλλες μεθόδους.

Το laser λειτουργεί ως πηγή θερμότητας σε ένα υλικό. Ακτινοβολώντας ένα υλικό αυτό θερμαίνεται με αποτέλεσμα να διαστέλλεται και να παραμορφώνεται. Ο μηχανισμός αυτός προλέγει το πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια το laser: οι θερμικές παραμορφώσεις μεταδίδονται στο υλικό και ανακλώνται από τυχόν κενά ή ρωγμές. Έτσι η μέθοδος αυτή κατατάσσεται στις ακουστικές μεθόδους. Το παραγόμενο ακουστικό κύμα είναι αυτό που αξιοποιείται στον μη-καταστροφικό μη-επεμβατικό έλεγχο. Συνεπώς, στην εργασία αυτή μελετάται ο τρόπος με τον οποίο παράγονται τα κύματα αυτά και οι ιδιαιτερότητες στην διάδοσή τους.

Η θεωρία διέγερσης ελαστικών κυμάτων από μεταβολές της θερμοκρασίας έχει αναπτυχθεί ήδη και φέρει το όνομα της θερμοελαστικότητας. Εφαρμογή της θεωρίας έχει γίνει στο συγκεκριμένο πρόβλημα που δίνει τα πρώτα στοιχεία στην κατανόησή του. Περιληπτικά, η θεωρία προβλέπει ότι τα κύματα που προκύπτουν από θερμικές διεγέρσεις, μπορούν να φτάσουν συχνότητες MHz ενώ είναι αρκετά κατευθυντικά. Διαχωρίζονται επίσης σε διαμήκη και εγκάρσια, με τα εγκάρσια να κυριαρχούν. Το laser πρέπει να έχει ένταση τόση ώστε να μην δημιουργεί παραμορφώσεις άνω του όριου διαρροής και να παραμένει στο ελαστικό μέρος του υλικού.

Η θεωρία μπορεί να χρησιμοποιείται ως έχει για να προσομοιωθεί το φαινόμενο και να γίνει κατανοητό. Κατά την προσομοίωση, γίνεται επιλογή συμμετρικών συστημάτων συντεταγμένων για απλοποίηση και αμελούνται οι απώλειες. Προσομοιώνεται το φαινόμενο σε έναν κύλινδρο μικρών διαστάσεων από όπου επαληθεύεται η κατευθυντικότητα ενώ βγαίνει το συμπέρασμα ότι οι διαστάσεις οδηγούν στην δημιουργία στάσιμων κυμάτων, που μεταδίδονται όπως στους κυματοδηγούς.

Στην εργασία αυτή, γίνεται επίσης το αντίστοιχο πείραμα. Επιλέγεται ένα υψηλής ενέργειας, nanosecond παλμού laser και εκτελούνται μετρήσεις με πιεζοηλεκτρικό στοιχείο. Από αυτό προκύπτει το συμπέρασμα ότι χωρίς την ύπαρξη κατάλληλου ενισχυτή, οι απώλειες είναι υψηλές και έτσι το πείραμα τροποποιείται ώστε να γίνουν δυνατές οι μετρήσεις χωρίς ενισχυτή. Η αλλαγή αυτή οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα τα οποία παρουσιάζονται στην συνέχεια.

Για να κλείσει ο κύκλος του μη-επεμβατικού ελέγχου, απαιτείται η εύρεση τεχνικών μέτρη-

σης άνευ επαφής. Και πάλι μπορεί να χρησιμοποιηθεί laser όπου μετράει τις μετατοπίσεις των κυμάτων σε μια επιφάνεια οπτικά. Παρουσιάζεται η δυνατότητα μέτρησης κυμάτων μέσα στο υλικό από προσχεδιασμένες οπτικές ίνες και επίσης παρουσιάζονται και ηλεκτρομαγνητικές μέθοδοι. Στα αγώγιμα υλικά άνευ επαφής εφαρμόζεται η μέθοδος των EMATs όπου οι μετατοπίσεις παράγουν ηλεκτρικά πεδία σύμφωνα με το φαινόμενο Hall. Στα σιδηρομαγνητικά υλικά επιπλέον, όπου είναι μαγνητοσυστελόμενα, μετρήσεις λαμβάνονται από το μαγνητικό πεδίο που παράγουν οι παραμορφώσεις (μέθοδος MDL).

Η τεχνική παραγωγής υπερήχων με Laser κρίνεται μη επαρκής στο ελαστικό μέρος της για χρήση σε συνδυασμό με πιεζοηλεκτρικά στοιχεία λόγω της απόσβεσης. Επιπλέον, είναι μη επαρκής για την μέθοδο MDL/EMATs λόγω απόσβεσης αλλά και κατευθυντικότητας. Οπότε το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι για την εφαρμογή τους στον ποιοτικό έλεγχο απαιτούνται διατάξεις laser-laser που παράγουν και μετράνε με laser και έχουν αρκετή ευαισθησία.

Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης γίνεται στο κεφάλαιο 2, η θεωρία της οποίας παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 1. Το δε πείραμα παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 4.

Κεφάλαιο 1

Θερμοελαστικότητα

Το βασικό φαινόμενο που εξελίσσεται είναι αυτό της θερμοελαστικότητας. Το laser αποθέτει θερμότητα στο υλικό το οποίο διαστέλλεται ενώ ταυτόχρονα δέχεται αντιδράσεις από το υπόλοιπο υλικό με αποτέλεσμα να δημιουργούνται τάσεις. Η αρχική διαστολή είναι ανάλογη της θερμοκρασίας που είναι ανάλογη της ενέργειας του laser. Έτσι το πλάτος κύματος του ελαστικού παλμού καθορίζεται από την ενέργεια του laser σε πρώτη προσέγγιση και σε φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας σε δεύτερη. Για ολοκληρωμένη μοντελοποίηση συνυπολογίζεται η μεταφορά θερμότητας. Από φυσικής απόψεως, η ελαστικότητα συνδέεται με τη μεταφορά θερμότητας μέσω της παραγωγής θερμότητας ανάλογης της ταχύτητας παραμόρφωσης. Ωστόσο, ο μηχανισμός αυτός οδηγεί σε απώλειες ενέργειας και δεν επηρεάζει την φύση του φαινομένου. Τελικά οι τάσεις διαδίδονται μέσα στο υλικό ως κύματα με ταχύτητα που καθορίζεται από τον τύπο τους (διάτμηση ή εφελκυσμός) καθώς και από τη γεωμετρία (στάσιμα κύματα, επιφανειακά κύματα). Για παράδειγμα, σε πολύ λεπτές γεωμετρίες τα κύματα διαδίδονται πιο αργά και με διακριτές ταχύτητες (Lamb Waves) σε σχέση με ένα απέραντο υλικό. Επίσης είναι εμφανές ότι η μεταβολή του παλμού στο χρόνο καθορίζεται από την μεταβολή της έντασης του laser στο χρόνο καθώς και από τα χαρακτηριστικά του παλμού όπως η διάμετρος ή η κατανομή της ακτίνας στο χώρο.

Μια πλήρης παρουσίαση της θεωρίας καθώς και της τεχνολογίας παρουσιάζεται στην [1]

1.1 Ελαστικότητα

Η ανάλυση ξεκινάει με τις εξισώσεις ελαστικότητας. Με βάση αυτές θα φανεί η κυματική φύση του προβλήματος και θα γίνει καλύτερα κατανοητή μέσω της επίλυσης απλών προβλημάτων. Η ανάλυση παρουσιάζεται αναλυτικά στο βιβλίο [2]

Σε ένα ελαστικό μέσο, θεωρούμε την συνάρτηση $l(L,t)$ που απεικονίζει το σημείο L στο l. Η μετατόπιση που έχει υποστεί ένα σημείο είναι

$$u(L,t) = l(L,t) - L \tag{1.1}$$

οι εξισώσεις ισορροπίας του υλικού τότε θα εκφράζονται μέσω μιας εξίσωσης που περιέχει τις μετατοπίσεις αυτές καθώς και των δεύτερων παραγώγων στο χρόνο ως αναμενόμενο από τον

νόμο κίνησης του Νεύτωνα.

Οι αντιδράσεις που δέχεται ένα σημείο από το υλικό πρέπει να εκφράζονται συναρτήσει σχετικών μετατοπίσεων του σημείου με τα γειτονικά του. Η κλίση παραμόρφωσης ∇u για την οποία ισχύει $du = \nabla u dL$ είναι ένα μέγεθος το οποίο δεν εξαρτάται από την απόλυτη θέση μεταξύ δυο σημείων. Ωστόσο έχει αποδειχθεί ότι εξαρτάται από την απόλυτη γωνία μεταξύ δυο σημείων και έτσι είναι ακατάλληλο.

Το μέγεθος το οποίο δεν επηρεάζεται από απόλυτα μεγέθη και είναι κατάλληλο για να εκφράσει την σχετική κίνηση δυο σημείων του υλικού είναι η παραμόρφωση. Στον εφελκυσμό μιας ράβδου το μέγεθος γίνεται διαισθητικά κατανοητό ως η σχετική επιμήκυνσή της $\frac{dL}{L}$. Στην γενίκευση, η επιμήκυνση Δ μεταξύ δυο σημείων θα είναι

$$\Delta = dl^2(L,t) - dL^2 \tag{1.2}$$

όπου τα dl, dL εκφράζουν τα μήκη των «ράβδων» πριν και μετά την επιμήκυνση.

Έτσι, η παραμόρφωση ορίζεται ως η κλίση της επιμήκυνσης:

$$\Delta = 2S_{ij}\, dL_i dL_j \tag{1.3}$$

$$= 2\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial L_j} + \frac{\partial u_j}{\partial L_i} + \frac{\partial u_k}{\partial L_i}\frac{\partial u_k}{\partial L_j}\right) \tag{1.4}$$

με χρήση τανυστικής γραφής. Η επανάληψη του δείκτη k συμβολίζει άθροιση κατά σύμβαση.

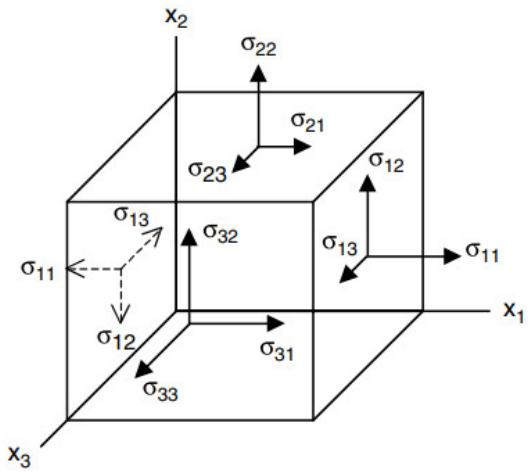
Τονίζεται ότι οι παραμορφώσεις μπορούν να οριστούν συναρτήσει της αρχικής κατάστασης L ή της τελικής κατάστασης l. Επίσης, ο ορισμός του Δ μπορεί να διαφέρει και να έχουμε ως αποτέλεσμα παραμορφώσεις τύπου «$\frac{dl}{L}$». Στις μικρές παραμορφώσεις οι ορισμοί αυτοί δεν οδηγούν σε διαφορετικό αποτέλεσμα [3].

Ο τανυστής παραμορφώσεων S_{ij} απλοποιείται στις περιπτώσεις όπου οι παραμορφώσεις είναι μικρές παραλείποντας τον μη γραμμικό όρο:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial L_j} + \frac{\partial u_j}{\partial L_i}\right) \tag{1.5}$$

που αποδεικνύεται ότι είναι το συμμετρικό μέρος της κλίσης παραμορφώσεων:

$$S = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T\right) \tag{1.6}$$

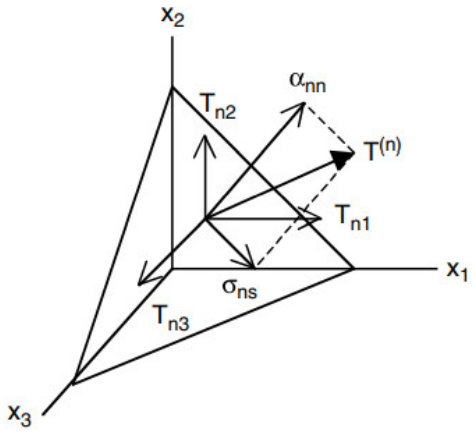


Σχήμα 1.1: Οπτικοποίηση όλων των κατευθύσεων του τανυστή τάσεων

Εξετάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται στις επιφάνειες ενός στοιχειώδους όγκου, οι συνιστώσες κάθε δύναμης αναλύονται σε κατευθύνσεις κάθετες και παράλληλες στην επιφάνεια. Οι δυνάμεις αυτές εκφράζονται ανά επιφάνεια ώστε να τηρείται ο «σχετικός» χαρακτήρας της ανάλυσης και να συσχετισθούν με τις σχετικές μετατοπίσεις. Σε καθεμία από τις 3 επιφάνειες ασκείται μια δύναμη τυχαίας διεύθυνσης που αναλύεται επίσης σε 3 συνιστώσες.

$$T_x = T_{xx}\hat{x} + T_{yx}\hat{y} + T_{zx}\hat{z} \tag{1.7}$$
$$T_y = T_{xy}\hat{x} + T_{yy}\hat{y} + T_{zy}\hat{z} \tag{1.8}$$
$$T_z = T_{xz}\hat{x} + T_{yz}\hat{y} + T_{zz}\hat{z} \tag{1.9}$$

Έτσι οι δυνάμεις σε κάθε επιφάνεια είναι γνωστές όταν είναι γνωστές οι 9 συνιστώσες τους. Το σύνολο των 9 συνιστωσών ορίζει τον τανυστή τάσεων T_{ij}. Ο δείκτης i δηλώνει την κατεύθυνση της δύναμης και ο δείκτης j δηλώνει την κατεύθυνση της επιφάνειας που ασκείται.



Σχήμα 1.2: Τάσεις σε τυχαία επιφάνεια $\hat{n}$

Ο προσδιορισμός των τάσεων σε επιφάνεια διαφορετικής κατεύθυνσης γίνεται λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο:

$$T_n = \begin{bmatrix} T_{xn} \\ T_{yn} \\ T_{zn} \end{bmatrix} = T \cdot \hat{n} \tag{1.10}$$

όπου T_n είναι το διάνυσμα δύναμης ανα επιφάνεια $\hat{n}$. Η σχέση εξάγεται λαμβάνοντας την ισορροπία δυνάμεων της T_n στην επιφάνεια δS_n με τις υπόλοιπες T_{ij} στις επιφάνειες $\hat{i}$.

Η εξίσωση ισορροπίας προκύπτει εφαρμόζοντας τον νόμο του Νεύτωνα σε έναν όγκο του ελαστικού μέσου:

$$\int_S T \cdot \hat{n}\ dS + \int_V F\ dV = \int_V \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ dV \tag{1.11}$$

που εκφράζει ότι οι τάσεις ισορροπούν τις αδράνειες και τις καταναμεμημένες δυνάμεις $F[\frac{N}{m^3}]$ σε ολοκληρωτική μορφή.

Επισημαίνεται ότι με βάση την επιλογή του ορισμού των παραμορφώσεων, λαμβάνεται διαφορετική έκφραση των τάσεων [3]. Ενεργειακά, η ελαστική ενέργεια θα ισούται με την ενέργεια του φορτίου και από αυτό προκύπτει ο ορισμός των τάσεων. Οι τάσεις όταν ολοκληρώνονται στην επιφάνεια του υλικού (πρώτος όρος της εξίσωσης (1.11)) δίνουν τις συνολικές αντιδράσεις του υλικού που περικλείεται από την επιφάνεια S.

Λαμβάνοντας την ισορροπία των ροπών ενός σημείου, προκύπτει ότι ο τανυστής τάσεων ικανοποιεί την εξίσωση:

$$T_{ij} = T_{ji} - G_k \tag{1.12}$$

Όπου G_k είναι η κατανεμημένη ροπή και οι δείκτες i, j, k περιορίζονται μόνο σε κυκλικές αλλαγές του $i, j, k\ =\ x, y, z$

Η εφαρμογή πεδίου ροπής σε ένα υλικό δεν είναι εύκολη και ούτε συναντάται συχνά. Αγνοώντας τις ροπές, προκύπτει ότι ο τανυστής τάσεων είναι συμμετρικός:

$$T_{ij} = T_{ji} \tag{1.13}$$

Η συνέπεια αυτού είναι ότι $\mathrm{T} \cdot \nabla = \nabla \cdot T$.Έτσι εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss στον πρώτο όρο της εξίσωσης ισορροπίας δυνάμεων:

$$\int_V \nabla \cdot T\ dV + \int_V F\ dV = \int_V \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ dV \tag{1.14}$$

που είναι μια εξίσωση που ισχύει σε κάθε όγκο V. Περιορίζοντας τον όγκο σε στοιχειώδη, η εξίσωση θα ισχύει σημειακά:

$$\nabla \cdot T = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F \tag{1.15}$$

Ο υπολογισμός της απόκλισης γίνεται με εφαρμογή του ορισμού:

$$\nabla \cdot T = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\int_S T \cdot \hat{n}\ dS}{\delta x \delta y \delta z} \tag{1.16}$$

Η απόκλιση είναι διάνυσμα και η i συνιστώσα της ισούται με:

$$\nabla \cdot T_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} \tag{1.17}$$

όπου γίνεται άθροιση ως προς j.

Για την ολοκλήρωση της θεωρίας της ελαστικότητας, απαιτείται μια εξίσωση που θα συνδέει τις τάσεις με τις μετατοπίσεις. Όπως προαναφέρθηκε, η σχέση που διαισθητικά στέκει είναι αυτή που χρησιμοποιεί τις μετατοπίσεις ως παραμορφώσεις. Η απλούστερη γραμμική σχέση γράφεται σε μορφή:

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \tag{1.18}$$

όπου οι συντελεστές c_{ijkl} αποτελούν τον τανυστή δυσκαμψίας c. Η σχέση ισχύει και αντίστροφα:

$$S_{ij} = s_{ijkl} T_{kl} \tag{1.19}$$

όπου οι συντελεστές s_{ijkl} αποτελούν τον τανυστή ενδοτικότητας s. Ο τανυστής ενδοτικότητας είναι ο αντίστροφος του τανυστή δυσκαμψίας:

$$c_{ijkl} \cdot s_{klmn} = \delta^{(ij)}_{(mn)} \tag{1.20}$$

όπου είναι ενα σύστημα εξισώσεων και υπονοείται άθροιση στους δείκτες k, l, m, n.

Η γραμμική σχέση ισχύει σε όλα τα γραμμικά ισότροπα υλικά όπως τα μέταλλα καθώς και σε υλικά που εμφανίζουν ανισοτροπίες όπως τα σύνθετα υλικά ή τα μονοκρυσταλλικά υλικά όπου οι ιδιότητες του υλικού αλλάζουν από κατεύθυνση σε κατεύθυνση.

Η δυσκαμψία περιλαμβάνει 81 συντελεστές. Λόγω συμμετριών, δεν είναι όλοι ανεξάρτητοι. Για παράδειγμα επειδή $T_{ij} = T_{ji}$ είναι $c_{ijkl} = c_{jikl}$. Ομοίως, λόγω της συμμετρίας των παραμορφώσεων ισχύει $c_{ijkl} = c_{ijlk}$. Άρα απομένουν μόνο δυο ελεύθεροι δείκτες I, J που ο καθένας τους εκφράζει:

1 = xx

2 = yy

3 = zz

4 = yz, zy

5 = xz, zx

6 = xy, yx

Συνολικά 36 ανεξάρτητες παράμετροι.

Ο νόμος του Hooke γράφεται σε αυτές τις συντεταγμένες ως:

$$T_I = c_{IJ} S_J, \quad I, J = 1, 2, ..., 6 \tag{1.21}$$

Οι τάσεις και παραμορφώσεις εκφράζονται επίσης με έναν δείκτη λόγω συμμετρίας. Κάθε μια από τις 6 συνιστώσες τους είναι:

$$T_I = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{yy} & T_{zz} & T_{yz} & T_{xz} & T_{xy} \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

$$S_I = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{yy} & S_{zz} & 2S_{yz} & 2S_{xz} & 2S_{xy} \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

Με τον υπολογισμό μεγεθών όπως η ελαστική ενέργεια αποδεικνύεται ότι επιπλέον συντελεστές είναι εξαρτημένοι: $dE = T_{\mathrm{I}} dS_I = c_{IJ} S_J dS_I$

Μέσω της ισότητας των δευτέρων παραγώγων ως προς τις παραμορφώσεις $\frac{\partial^2 E}{\partial S_I S_J}$ προκύπτει ότι:

$$c_{IJ} = c_{JI} \tag{1.24}$$

Έτσι, ο 6×6 πίνακας δυσκαμψίας είναι συμμετρικός που σημαίνει ότι μόνο 21 σταθερές είναι ανεξάρτητες. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για οποιοδήποτε υλικό και 21 είναι ο μέγιστος αριθμός σταθερών που απαιτούνται.

Στην παρούσα μελέτη η θεωρία εφαρμόζεται σε μέταλλα που είναι ισότροπα υλικά. Η μόνη διαφοροποίηση που εμφανίζουν στην ελαστική συμπεριφορά τους είναι ο διαχωρισμός διάτμησης από εφελκυσμό. Έτσι ένα μέταλλο περιγράφεται μόνο από 2 ελαστικές σταθερές. Αυτές μπορεί να είναι το μέτρο ελαστικότητας και το μέτρο διάτμησης, ένα από τα δυο μέτρα ελαστικότητας και ο συντελεστής Poisson, οι σταθερές λ, μ του Lame ή οποιοσδήποτε συνδυασμός τους.

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας δυσκαμψίας είναι:

$$c = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

Η σχέση των συντελεστών με τα συνήθη μέτρα ελαστικότητας είναι:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \tag{1.26}$$

$$G = \mu \tag{1.27}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{1.28}$$

Τελικά οι εξισώσεις ελαστικότητας είναι:

$$\nabla \cdot T = \rho \frac{\partial v}{\partial t} - F \tag{1.29}$$

$$c : \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^T) = \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.30}$$

Λόγω της χρήσης παραμορφώσεων, οι εξισώσεις δεν ικανοποιούνται από ένα μόνο πεδίο μετατοπίσεων επειδή οι παραμορφώσεις είναι σχετικό μέγεθος και αυτό αντιμετωπίζεται από τις οριακές συνθήκες.

Στα ισότροπα υλικά η εξίσωση γράφεται αντικαθιστώντας τον νόμο του Hooke στην εξίσωση ισορροπίας ως:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot u) - \mu \nabla \times \nabla \times u = \rho \ddot{u} \tag{1.31}$$

Περαιτέρω μοντελοποιήσεις μπορούν να εισαχθούν στο σημείο αυτό όπως απώλειες, πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο ή φαινόμενο μαγνητοσυστολής. Η εισαγωγή τους γίνεται με την αλλαγή του νόμου του Hooke. Για παράδειγμα οι απώλειες μπορούν να εισαχθούν ως:

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} + \eta_{ijkl} \frac{\partial}{\partial t} S_{kl} \tag{1.32}$$

όπου η ο τανυστής απόσβεσης.

1.1.1 Συνιστώσες Helmholtz

Η κυματική φύση του φαινομένου φαίνεται όταν οι μετατοπίσεις αναλύονται σε συνιστώσες Helmholtz. Η ανάλυση αυτή είναι πάντα δυνατή για κάθε συνάρτηση:

$$u = \nabla \varphi + \nabla \times \Psi \tag{1.33}$$

$$\nabla \cdot \Psi = 0 \tag{1.34}$$

Λαμβάνοντας την απόκλιση των μετατοπίσεων μηδενίζεται ο όρος με Ψ ταυτοτικά και απομένει ο όρος με φ. Λαμβάνοντας το στροβιλισμό μηδενίζεται ταυτοτικά ο όρος με το φ και απομένει ο όρος με το Ψ.

Σε αναλογία με την μηχανική ρευστών, τα πεδία που έχουν μηδενική απόκλιση είναι λύσεις ασυμπίεστης κίνησης. Έτσι, η συνιστώσα Ψ αποτελεί το ασυμπίεστο μέρος των μετατοπίσεων, δηλαδή τα εγκάρσια κύματα, και η συνιστώσα φ αποτελεί το συμπιεστό, δηλαδή τα διαμήκη κύματα.

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες στην εξίσωση ισορροπίας ισότροπων υλικών προκύπτει μετά από πράξεις:

$$\nabla[(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \varphi - \rho \ddot{\varphi}] + \nabla \times [\mu \nabla^2 \Psi - \rho \ddot{\Psi}] = 0 \tag{1.35}$$

Η εξίσωση ικανοποιείται όταν οι όροι εντός των ανάδελτα είναι μηδενικοί που οδηγεί σε δυο εξισώσεις:

$$\nabla^2\varphi - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\ddot{\varphi} = 0 \tag{1.36}$$

$$\nabla^2\Psi - \frac{\rho}{\mu}\ddot{\Psi} = 0 \tag{1.37}$$

Η μορφή των εξισώσεων δηλώνει ότι πρόκειται για μετάδοση κύματος. Έτσι προκύπτει ότι στο υλικό μεταδίδονται δυο κύματα ανεξάρτητα μεταξύ τους. Το διαμήκες με ταχύτητα $c_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ και το εγκάρσιο με ταχύτητα $c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, δηλαδή:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c_L^2}\ddot{\varphi} = 0 \tag{1.38}$$

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c_S^2}\ddot{\Psi} = 0 \tag{1.39}$$

Ανάλογη σχέση αποδεικνύεται και στην περίπτωση εφαρμογής κατανεμημένης δύναμης. Υπό την προυπόθεση ότι η δύναμη αναλύεται ως:

$$f = c_L^2\nabla F + c_S^2\nabla \times G \tag{1.40}$$

οι εξισώσεις είναι [4]:

$$\nabla^2\varphi + F - \frac{1}{c_L^2}\ddot{\varphi} = 0 \tag{1.41}$$

$$\nabla^2\Psi + G - \frac{1}{c_S^2}\ddot{\Psi} = 0 \tag{1.42}$$

Έτσι φαίνεται η κυματική φύση της ελαστικότητας. Η αλληλεπίδραση των κυμάτων εμφανίζεται μόνο στα όρια του υλικού όπου για να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες πρέπει να ικανοποιείται μια εξίσωση που συμπεριλαμβάνει και τα δυο πεδία. Στην γενική περίπτωση, η αλληλεπίδραση αυτή οδηγεί σε μετατροπές από το ένα κύμα στο άλλο καθώς και στην εμφάνιση ανακλάσεων.

1.1.2 Ανάκλαση

Για την καλύτερη κατανόηση της μετατροπής των κυμάτων από την μια μορφή στην άλλη, εφαρμόζεται η ανάλυση στην περίπτωση διάδοσης ενός επίπεδου κύματος στις 2 διαστάσεις όπου αγνοείται η κατεύθυνση z και η μετατόπιση u_z. Στην περίπτωση αυτή θέτοντας:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

παρατηρούμε να ισχύει ότι $u_x = u(x, y)$ και $u_y = u(x, y)$ ενώ το πρόβλημα έχει απλοποιηθεί στον προσδιορισμό δυο βαθμωτών πεδίων φ, ψ.

Οι μετατοπίσεις τότε υπολογίζονται ως:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{1.44}$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.45}$$

Θεωρούμε ένα διάμηκες επίπεδο κύμα που προσκρούει στην ελεύθερη επιφάνεια ενός υλικού υπό γωνία θ_L. Το κύμα αυτό θα περιγράφεται από το πεδίο φ το οποίο επιτρέπει συστολές-διαστολές και θα έχει την μορφή:

$$\varphi_L = e^{jk_L x \sin\theta_L - jk_L y \cos\theta_L - j\omega t} \tag{1.46}$$

όπου γίνεται χρήση της μιγαδικής συνάρτησης e^{jx} για διευκόλυνση των πράξεων. Το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος του φ συμπεριφέρεται ως τριγωνομετρική συνάρτηση κατά τα γνωστά.

Ο κυματαριθμός k_L προκύπτει με αντικατάσταση της συνάρτησης στην κυματική εξίσωση. Προκύπτει ότι:

$$k_L = \frac{\omega}{c_L} \tag{1.47}$$

Η επιφάνεια του υλικού είναι ελεύθερη από τάσεις όμως τα διαμήκη κύματα διαδίδονται δημιουργώντας τάσεις στην διεύθυνση κίνησής τους. Η παρατήρηση αυτή εξηγεί γιατί πρέπει να δημιουργούνται ανακλάσεις στην επιφάνεια ώστε να απαλείφονται οι τάσεις αυτές. Η διαμήκης ανάκλαση είναι αρκετή για την απαλοιφή των εφελκυστικών τάσεων. Για την απαλοιφή των διατμητικών τάσεων απαιτείται ακόμη ένα κύμα το οποίο είναι εγκάρσιο. Η παραγωγή εγκάρσιου κύματος από την πρόσκρουση διαμήκους κύματος είναι θεμελιώδης αρχή και ισχύει και σε περιπτώσεις όπως πρόσκρουση εγκάρσιου και μετατροπή διαμήκους.

Έτσι το τελικό πεδίο αποτελείται από το διάμηκες κύμα φ_L, την διαμήκη ανάκλαση φ_{LL} και την εγκάρσια ανάκλαση ψ_{LS}:

$$\varphi = \varphi_L + \varphi_{LL} = e^{jk_L x \sin\theta_L - jk_L y \cos\theta_L - j\omega t} + R_{LL} e^{jk_L x \sin\theta_{LL} + jk_L y \cos\theta_{LL} - j\omega t} \tag{1.48}$$

$$\psi = \psi_{LS} = R_{LS} e^{jk_S x \sin\theta_{LS} - jk_S y \cos\theta_{LS} - j\omega t} \tag{1.49}$$

Οι τάσεις υπολογίζονται με βάση τον νόμο του Hooke για ισότροπα υλικά:

$$T_{yy} = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{1.50}$$

$$T_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \tag{1.51}$$

Αντικαθιστώντας τα πεδία στις μετατοπίσεις βρίσκουμε στο επίπεδο πρόσκρουσης $y = 0$:

$$\begin{aligned} T_{yy} =& \mu\{(2k_L^2 sin^2(\theta_L) - k_S^2) exp(jk_L x sin(\theta_L) - j\omega t) \\ & (2k_L^2 sin^2(\theta_{LL}) - k_S^2) R_{LL} exp(jk_L x sin(\theta_{LL}) - j\omega t) \\ & k_L^2 sin(2\theta_{LS}) R_{LS} exp(jk_S x sin(\theta_{LS}) - j\omega t)\} = 0 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Η εξίσωση αυτή ικανοποιείται όταν οι συντελεστές των εκθετικών είναι μηδενικοί για κάθε χρόνο. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού για παράδειγμα $2k_L^2 sin^2(\theta_L) \neq k_S^2$ λόγω του ότι το ημίτονο είναι καθορισμένο από πριν. Έτσι τίθεται η συνθήκη ότι όλα τα εκθετικά είναι ίσα και καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$\theta_L = \theta_{LL} \tag{1.53}$$

$$\frac{sin(\theta_{LS})}{c_S} = \frac{sin(\theta_L)}{c_L} \tag{1.54}$$

η σχέση αυτή είναι γνωστή ως νόμος του Snell και ισχύει γενικότερα σε φαινόμενα τύπου διάθλασης.

Με ίσα εκθετικά και τον νόμο του Snell ο μηδενισμός των T_{yy}, T_{xy} είναι ισοδύναμος με το σύστημα[5]:

$$\begin{bmatrix} (2k_L^2 sin^2(\theta_L) - k_S^2) & 2k_L^2 sin^2(\theta_L) k_S^2 cos^2(\theta_L S) \\ -2k_L sin(\theta_L) k_L cos(\theta_L) & (2k_L^2 sin^2(\theta_L) - k_S^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{LL} \\ R_{LS} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2(2k_L^2 sin^2(\theta_L) - k_S^2) \\ -2k_L sin(\theta_L) k_L cos(\theta_L) \end{Bmatrix} \tag{1.55}$$

Από το οποίο υπολογίζονται τα πλάτη των ανακλώμενων κυμάτων. Παρόμοια ανάλυση μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που το κύμα μεταβαίνει από ένα υλικό σε άλλο. Οι συνθήκες τότε δεν είναι μηδενισμοί των τάσεων αλλά συνέχεια της κάθετης στην διεπιφάνεια τάση και συνέχεια των μετατοπίσεων. Το αποτέλεσμα είναι να υπάρχουν κύματα που περνάνε στο δεύτερο μέσο καθώς και ανακλάσεις. Ποιοτικά το πλάτος των ανακλάσεων αυξάνει όσο η διαφορά στις ιδιότητες των υλικών αυξάνει (π.χ. επαφή χάλυβα με αέρα, τα κύματα περιορίζονται στον χάλυβα) ενώ ο νόμος του Snell ισχύει ακόμη για την κατεύθυνση των κυμάτων στο δεύτερο υλικό.

Ο νόμος του Snell δεν ισχύει για όλες τις γωνίες. Όταν η γωνία πρόσκρουσης φτάσει την κρίσιμη γωνία τότε δεν δίνει λύση για την γωνία ανάκλασης. Στην περίπτωση αυτή, το κύμα ανακλάται και παραμένει στο υλικό από όπου προήλθε.

1.1.3 Κυματοδηγοί

Στην περίπτωση που το υλικό είναι περιορισμένων διαστάσεων, συγκρίσιμων του μήκους κύματος, οι λύσεις πρέπει να ικανοποιούν και τις οριακές συνθήκες. Έτσι, η συνηθισμένη μορφή $e^{jk \cdot r - j\omega t}$ αντικαθίσταται από λύσεις της μορφής:

$$e^{jkx - \eta ky - j\omega t} \tag{1.56}$$

δηλαδή, κύμα που μεταδίδεται μόνο στον x άξονα. Η μορφή της εξίσωσης υπονοεί εκθετική μείωση του πεδίου κατά τον y άξονα και έτσι η λύση αυτή είναι κατάλληλη για κύματα που περιορίζονται σε ένα στρώμα μιας ελεύθερης επιφάνειας.

Σε πλάκες η λύση είναι της μορφής:

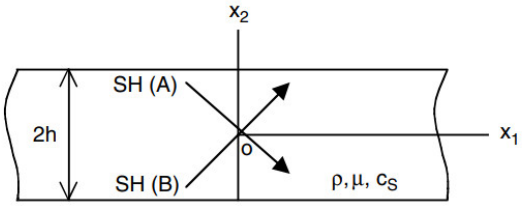
$$\left(Ae^{-j\beta y} + Be^{\beta y}\right) e^{jkx} \tag{1.57}$$

Ο όρος στην παρένθεση αποτελεί κύματα που διαδίδονται στην y κατεύθυνση και σε συνδυασμό με τον όρο εκτός παρένθεσης, που αποτελεί διάδοση στην x. Η έκφραση αυτή περιγράφει διαγώνια κίνηση όπως φαίνεται και στο σχήμα (1.3).

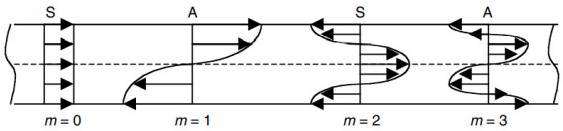
Η λύση αυτή εκφράζει τις πολλαπλές ανακλάσεις που δέχεται ένα κύμα. Ικανοποιώντας την κυματική εξίσωση, αλλά και τις οριακές συνθήκες ελεύθερων άκρων της πλάκας προκύπτουν κύματα διακριτής ταχύτητας μετάδοσης. Η δε ταχύτητα μετάδοσης εξαρτάται από την συχνότητα σύμφωνα με τη σχέση:

$$c_m = \frac{\omega}{k_m} = \frac{c_s}{\sqrt{1 - (\frac{m\pi}{2h})^2 (\frac{c_s}{\omega})^2}} \tag{1.58}$$

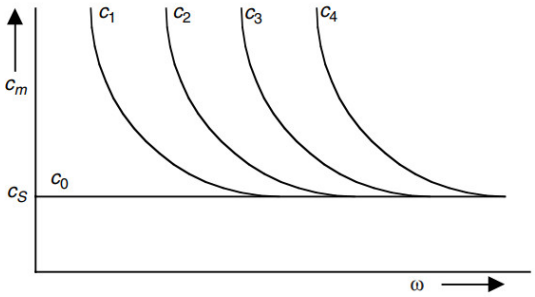
όπου m είναι η ιδιομορφή που λαμβάνει ακέραιες τιμές από 0.



Σχήμα 1.3: οπτικοποίηση της εξίσωσης (1.57)



Σχήμα 1.4: διάφορες ιδιομορφές της λύσης για πλάκες (1.57)



Σχήμα 1.5: γράφημα της εξίσωσης (1.58)

Η ανάλυση παρουσιάζεται στο βιβλίο [5]. Η ουσία της είναι ότι σε περιορισμένες γεωμετρίες εμφανίζονται στάσιμες ιδιομορφές που διαδίδονται κατά μήκος της (βλ. εικόνα (1.4)) και ότι η ταχύτητα μετάδοσης αλλάζει.

1.2 Επίδραση αρχικών παραμορφώσεων

Το πρόβλημα της θερμικής διέγερσης είναι ανάλογο της θεώρησης μιας απότομης διαστολής του υλικού. Η διέγερση τέτοιου είδους αντιμετωπίζεται όπως στην διάδοση ήχου σε αέρια με συναρτήσεις Green. Γίνεται η θεώρηση μιας σημειακής πηγής παραμόρφωσης (τύπου dirac) που εμφανίζεται βηματικά (τύπου step στο χρόνο) ως ασυνέχεια και μελετάται η επίδρασή της στο υλικό. Όπως και στα αέρια, αναμένουμε η ασυνέχεια να διαδίδεται στο υλικό σαν κύμα με τη διαφορά ότι οι ανακλάσεις οδηγούν στην μετατροπή είδους κυμάτων.

Η θεμελίωση βασίζεται στη σύνθεση του πεδίου παραμορφώσεων από άπειρες διαστολές στο υλικό όπου συμβαίνει η θέρμανση. Η εξίσωση που εκφράζει την συσχέτιση των σημειακών πηγών προκύπτει από το θεώρημα Betti. Η ανάλυση που ακολουθείται παρουσιάζεται πλήρως στο βιβλίο [3]

Θεωρώντας δυο προβλήματα ελαστικότητας στον ίδιο όγκο του υλικού V, ένα υπό κατανεμημένες δυνάμεις f και ένα υπό g:

$$\rho\ddot{u}_i - f_i = \tau_{ij,j} \tag{1.59}$$
$$\rho\ddot{v}_i - g_i = \tau_{ij,j} \tag{1.60}$$

αποδεικνύεται με πράξεις ότι:

$$\begin{aligned}&\iiint_V (f - \rho\ddot{u}) \cdot v \, dV + \iint_S T_{[u,n]} \cdot v \, dS \\ &\quad = \iiint_V (g - \rho\ddot{v}) \cdot u \, dV + \iint_S T_{[v,n]} \cdot u \, dS\end{aligned} \tag{1.61}$$

όπου $T_{[u,n]}$ συμβολίζει τις επιφανειακές δυνάμεις στην n λόγω τάσεων από το πρόβλημα ελαστικότητας u.

Η εξίσωση ισχύει σε χρόνο t_1 ως προς τις μετατοπίσεις u και t_2 ως προς τις μετατοπίσεις v και έτσι ολοκληρώνοντας στον χρόνο προκύπτει το θεώρημα Betti:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} dt \iiint_V u(x,t) \cdot g(x,\tau - t) - v(x,\tau - t) \cdot f(x,t) \, dV \\ &\quad = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \iint_S v(x,\tau - t) \cdot T_{[u(x,t),n]} - u(x,t) \cdot T_{[v(x,\tau - t),n]} \, dS\end{aligned} \tag{1.62}$$

όπου έγινε χρήση της θεώρησης ότι το υλικό βρίσκεται σε ηρεμία πριν από μια χρονική στιγμή, οπότε:

$$\int_0^\tau \ddot{u}(t)\cdot v(\tau-t)-u(t)\cdot\ddot{v}(\tau-t)\ dt = \dot{u}(\tau)v(0)-\dot{u}(0)v(\tau)-u(\tau)\dot{v}(0)+u(0)\dot{v}(\tau) = 0 \quad (1.63)$$

Έτσι, γίνεται συσχέτιση δυο πεδίων μετατοπίσεων και μπορεί να υπολογιστεί ένα πεδίο θέτοντας ως v τις σημειακές πηγές.

Οι απλούστερες σημειακές πηγές είναι δυνάμεις που ασκούνται στην n κατεύθυνση και οδηγούν σε μετατοπίσεις στην i διεύθυνση. Η συνήθης μορφή τους είναι:

$$f_i = \delta_{in}\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \quad (1.64)$$

δηλαδή ασκούνται στο σημείο ξ και στο χρόνο τ ως συναρτήσεις dirac.

Η λύση στο πρόβλημα ελαστικότητας είναι οι μετατοπίσεις G_{in} και συμβολικά εκφράζονται ως

$$G_{in}(\chi, t; \xi, \tau) \quad (1.65)$$

ώστε να είναι εμφανής η θέση της πηγής στα δεξιά και η θέση του παρατηρητή στα αριστερά. Η λύση αυτή ονομάζεται λύση Green.

Οι οριακές συνθήκες που ισχύουν στο σύνορο S επηρεάζουν την μορφή της συνάρτησης Green στην γενική περίπτωση. Συνήθεις επιλογές είναι ελεύθερα όρια ($T = 0$) ή απαραμόρφωτα όρια $u = 0$. Οι οριακές συνθήκες πρέπει να προσδιορισθούν ώστε να είναι μοναδική η λύση Green.

Επιπλέον, αν οι οριακές συνθήκες είναι ανεξάρτητες του χρόνου τότε η λύση Green δεν εξαρτάται από τον απόλυτο χρόνο αλλά από το σχετικό χρόνο από την στιγμή που εφαρμόζεται η διέγερση

$$G(x, t; \xi, \tau) \equiv G(x, t-\tau; \xi, 0) \quad (1.66)$$

σε συνδυασμό με ομογενείς οριακές συνθήκες (απαραμόρφωτα ή ελεύθερα όρια) το θεώρημα Betti αποδεικνύει ότι ισχύει:

$$G_{nm}(\xi_2, \tau_2; \xi_1, \tau_1) = G_{mn}(\xi_1, \tau_1; \xi_2, \tau_2) \quad (1.67)$$

που εκφράζει την σχέση που έχει η πηγή όταν ο ρόλος παρατηρητή-πηγής εναλλάσσεται.

Η σχέση γίνεται διαισθητικά κατανοητή επειδή η εναλλαγή δεικτών δηλώνει ότι η μετατόπιση σε ένα σημείο δρα και ως δύναμη για έναν παρατηρητή σε ένα άλλο σημείο. Η μετατόπιση κατά την n δημιουργεί μετατοπίσεις κατά την m και το αντίστροφο.

Θέτοντας $g_i = \delta_{in}\delta(x-\xi)\delta(t)$ και άρα $v_i = G_{in}(x, t; \xi, 0)$ στο θεώρημα Betti λαμβάνουμε:

$$u_n(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \iiint_V f_i(\xi,\tau) G_{in}(\xi, t-\tau; x, 0)\, dV(\xi)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \{G_{in}(\xi, t-\tau; x, 0) T_{i[u(\xi,\tau),n]}$$
$$- u_i(\xi,\tau) c_{ijkl} n_j G_{kn,l}(\xi, t-\tau; x, 0)\}\, dS(\xi) \tag{1.68}$$

Η εξίσωση δείχνει πως συντίθενται πολλές σημειακές πηγές Green ώστε να δημιουργηθεί το τελικό πεδίο u_n. Ο πρώτος όρος εκφράζει την εξάρτηση από τις κατανεμημένες δυνάμεις f_i, ο δεύτερος την εξάρτηση από τις επιφανειακές δυνάμεις στο σύνορο και ο τρίτος την εξάρτηση από τις μετατοπίσεις στο σύνορο. Οι τελευταίοι δυο όροι περιέχουν τις οριακές συνθήκες.

Με βάση αυτήν την ανάλυση, πρέπει να τονιστεί ότι το πεδίο u_n που προκύπτει εξαρτάται από την επιλογή της συνάρτησης Green. Οι τελικές μετατοπίσεις είναι το «άθροισμα» των σημειακών προβλημάτων Green και έτσι η τελική λύση βγάζει νόημα μόνο όταν οι σημειακές πηγές εκφράζουν το πρόβλημα.

Σε ομογενείς οριακές συνθήκες, η εξίσωση απλοποιείται περισσότερο λόγω της συμμετρίας του G_{ni}. Για παράδειγμα, σε ελεύθερη επιφάνεια η εναλλαγή επιτρέπει τον υπολογισμό των Green στην πηγή τους ξ αντί στον παρατηρητή x:

$$u_n(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \iiint_V f_i(\xi,\tau) G_{in}^{free}(x, t-\tau; \xi, 0)\, dV(\xi)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \{G_{ni}^{free}(x, t-\tau; \xi, 0) T_{i[u(\xi,\tau),n]}\}\, dS(\xi) \tag{1.69}$$

Στις περιπτώσεις απότομης διαστολής, υπάρχει μια εσωτερική επιφάνεια Σ ασυνέχειας των παραμορφώσεων στο υλικό. Η εξίσωση εξειδικεύεται στην περίπτωση αυτή:

$$u_n(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \iiint_V f_p(\eta,\tau) G_{np}(x, t-\tau; \eta, 0)\, dV(\eta)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, [u_i(\xi,\tau)] c_{ijpq} \nu_j G_{np,q}(x, t-\tau; \xi, 0)$$
$$- [T_{p[u(\xi,\tau),\nu]}] G_{np}(x, t-\tau; \xi, 0)\}\, d\Sigma(\xi) \tag{1.70}$$

Στην εξίσωση (1.70), ν είναι το κάθετο διάνυσμα στην Σ και με αγκύλες $[\quad]$ συμβολίζεται η ασυνέχεια του μεγέθους των τάσεων στην Σ. Για παράδειγμα, η ασυνέχεια των τάσεων τίθεται ίση με τις θερμικές τάσεις, $[\,T\,] = S^{th}$, στην μελέτη του προβλήματος.

Περαιτέρω, με την χρήση των ιδιοτήτων της συνάρτησης dirac μπορεί να τεθεί η ασυνέχεια δύναμης ή μετατόπισης σε χωρικό ολοκλήρωμα από επιφανειακό όπως είναι αυτό της κατανεμημένης δύναμης f. Αποτέλεσμα είναι εκφράσεις μετατροπείς των ασυνεχειών σε κατανεμημένες δυνάμεις:

$$f^{[T]}(\eta,\tau) = -\iint_{\Sigma} [\mathrm{T}_{[u(\xi,\tau),\nu]}]\delta(\eta,\xi)\ d\Sigma(\xi) \tag{1.71}$$

$$f^{[u]}(\eta,\tau) = -\iint_{\Sigma} [u_i(\xi,\tau)]c_{ijpq}\nu_j \frac{\partial}{\partial \eta_q}\delta(\eta-\xi)\ d\Sigma(\xi) \tag{1.72}$$

που είναι οι ισοδύναμες κατανεμημένες δυνάμεις λόγω ασυνεχειών.

Η θεωρία αυτή δείχνει ότι οι σημειακές διεγέρσεις στο υλικό μπορούν να συντεθούν στο τελικό πεδίο μετατόπισης καθώς και την εξάρτησή τους που είναι μια συνέλιξη της αρχικής διέγερσης. Η συνέλιξη είναι αναμενόμενο αποτέλεσμα σε κυματικά φαινόμενα. Οι υπολογισμοί έχουν εφαρμοστεί [6] στην παραγωγή υπερήχων με laser και τα αποτελέσματά της συμφωνούν με τα πειραματικά.

1.3 Σύζευξη με Θερμότητα

Η παραγωγή ελαστικών κυμάτων μέσω θέρμανσης απαιτεί σύζευξη της ελαστικότητας με τη μεταφορά θερμότητας. Η σύζευξη αυτή επιτυγχάνεται μέσω των θερμικών τάσεων που οφείλονται σε διαστολές λόγω θέρμανσης του υλικού. Ωστόσο, στη βιβλιογραφία η γενικότερη θεωρία προβλέπει και αντίστροφη σύζευξη που οφείλεται στην παραγωγή θερμότητας λόγω παραμορφώσεων. Η παραγωγή κυμάτων οφείλεται στην πρώτη σύζευξη και η μετάδοση στην δεύτερη. Έτσι για την μελέτη της παραγωγής κυμάτων με laser αμελούνται οι απώλειες.

Σύμφωνα με το βιβλίο [7], η εξίσωση θερμότητας όπως προκύπτει από την εξίσωση διατήρησης ενέργειας:

$$T_{ij}\dot{S}_{ij} + \rho\dot{s}T = \rho\dot{e} \tag{1.73}$$

$$-\nabla\cdot q = \rho T\dot{s} \tag{1.74}$$

Εισάγοντας στην πρώτη εξίσωση τον ορισμό της ελεύθερης ενέργειας:

$$\varphi(S_{ij},T) = e(S_{ij},T) - Ts(S_{ij},T) \tag{1.75}$$

προκύπτει:

$$\left(T_{ij} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial S_{ij}}\right)\dot{S}_{ij} - \rho\left(s + \frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)\dot{T} = 0 \tag{1.76}$$

Σε γραμμικές θεωρίες, γίνεται η υπόθεση ότι οι συντελεστές στις παρενθέσεις δεν εξαρτώνται από τα $\dot{S}_{ij}, \dot{T}$. Για να ισχύει η εξίσωση στην γενικότερη περίπτωση πρέπει να ισούνται με μηδέν:

$$T_{ij} = \rho\frac{\partial\varphi}{\partial S_{ij}} \tag{1.77}$$

$$s = -\frac{\partial\varphi}{\partial T} \tag{1.78}$$

Απομένει ο προσδιορισμός της συνάρτησης ελεύθερης ενέργειας ως συνάρτηση των παραμορφώσεων και της θερμοκρασίας. Η εξάρτηση από τις παραμορφώσεις πρέπει να οδηγεί στον γνωστό νόμο του Hooke:

$$T_{ij} = \lambda\delta_{ij}S_{kk} + 2\mu S_{ij} \tag{1.79}$$

Η εξάρτηση από την θερμοκρασία πρέπει να οδηγεί σε θερμικές τάσεις. Οι θερμικές τάσεις μοντελοποιούνται σύμφωνα με τον συντελεστή θερμικής διαστολής $\alpha[K^{-}1]$ που οδηγεί σε παραμορφώσεις:

$$S_{ij} = \alpha(T - T_0)\delta_{ij} \tag{1.80}$$

Οι παραμορφώσεις αυτές μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσω εικονικών τάσεων που όταν εφαρμόζονται σε ένα ελεύθερο υλικό το παραμορφώνουν όσο ο συντελεστής θερμικής διαστολής:

$$T_{ij} = T_{ij}^T + \lambda\delta_{ij}S_{kk} + 2\mu S_{ij} = 0 \tag{1.81}$$

Αντικαθιστώντας τις παραμορφώσεις:

$$T_{ij}^T = -(3\lambda + 2\mu)\alpha(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0)\delta_{ij} \tag{1.82}$$

όπου αποτυπώνεται η επίδραση της θερμοκρασίας στον νόμο του Hooke.

Ο ορισμός της συνάρτησης φ πρέπει να περιλαμβάνει όρους δεύτερης τάξης ως προς τις παραμορφώσεις σύμφωνα με την (1.77) και επειδή οι τάσεις είναι γραμμικές ως προς τις παραμορφώσεις. Συγκεκριμένα, αρκεί η εξάρτηση από τις παραμορφώσεις να γίνει μέσω των αναλοίωτων και η εξάρτηση από τη θερμοκρασία μέσω της απόκλισής της από την ισορροπία $T' = \frac{T-T_0}{T_0}$.

Οι αναλλοίωτες του τανυστή παραμορφώσεων είναι:

$$I_1 = S_{ii} \tag{1.83}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\delta_{lm}^{ij}S_{ij}S_{lm} \tag{1.84}$$

$$I_3 = \frac{1}{6}\delta_{lmn}^{ijk}S_{il}S_{jm}S_{kn} \tag{1.85}$$

Και η απλούστερη έκφραση δεύτερης τάξης για το φ είναι:

$$\varphi = \frac{1}{\rho}\left(a_1 I_1 + a_2 I_1^2 + a_3 T' I_1\right) \tag{1.86}$$

σε συνδυασμό με ότι:

$$T_{ij} = \lambda\delta_{ij}S_{kk} + 2\mu S_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0)\delta_{ij} = \rho\frac{\partial\varphi}{\partial S_{ij}} \tag{1.87}$$

Οι συντελεστές τελικά ισούνται με:

$$a_1 = -2\mu \tag{1.88}$$

$$a_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{2} \tag{1.89}$$

$$a_3 = -(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \tag{1.90}$$

οπότε με γνωστή την έκφραση της ελεύθερης ενέργειας μπορεί να υπολογιστεί η εντροπία σύμφωνα με την (1.78):

$$\rho \mathrm{T} \dot{s} = \rho \mathrm{T} \left(\frac{\partial s}{\partial S_{ij}} \dot{S}_{ij} + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} \right) \tag{1.91}$$

$$= -\rho T \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial S_{ij} \partial T} \dot{S}_{ij} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} \dot{T} \right) \tag{1.92}$$

$$= -\nabla \cdot q \tag{1.93}$$

Η θερμότητα μοντελοποιείται με βάση την θερμοχωρητικότητα:

$$-\nabla \cdot q = \rho C_V \dot{T} \tag{1.94}$$

συγκρίνοντας με την εξίσωση (1.92):

$$C_V = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} T \tag{1.95}$$

οπότε:

$$-\nabla \cdot q = \rho C_V \dot{T} - T \frac{\partial T_{ij}}{\partial T} \dot{S}_{ij} \tag{1.96}$$

που είναι η εξίσωση μεταφοράς θερμότητας. Η ροή θερμότητας μοντελοποιείται περαιτέρω μέσω του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας:

$$q = -k \nabla T \tag{1.97}$$

Η θερμοελαστικότητα περιγράφεται από την εξίσωση θερμότητας όταν λύνεται σε συνδυασμό με την εξίσωση ελαστικότητας. Το σύστημα περιλαμβάνει διπλή σύζευξη όπου η θερμοκρασία προκαλεί θερμικές τάσεις/παραμορφώσεις και οι παραμορφώσεις παράγουν θερμότητα σε μορφή απωλειών. Συνολικά το σύστημα περιγράφει:

1. Ελαστικότητα

2. Μεταφορά θερμότητας

3. Παραγωγή παραμορφώσεων από θερμοκρασία

4. Παραγωγή θερμότητας από παραμορφώσεις

Στο πρόβλημα της παραγωγής κυμάτων λόγω θέρμανσης, επαρκούν τα 3 πρώτα όπως προαναφέρθηκε. Έτσι ο όρος σύζευξης στην εξίσωση θερμότητας αμελείται και αγνοούνται οι αποσβέσεις.

1.4 Αναλυτική λύση

Ο Rose [6] εφάρμοσε τις θεωρίες αυτές στο πρόβλημα της διέγερσης κυμάτων από θερμότητα και προέκυψαν αναλυτικές λύσεις. Χρησιμοποίησε κυλινδρικές συντεταγμένες και σημειακή διέγερση για να υπολογίσει τις μετατοπίσεις.

Χρησιμοποιείται ο τρίτος όρος της εξίσωσης (1.68). Για τον υπολογισμό των τάσεων τίθεται η ασυνέχεια ίση με τις θερμικές τάσεις $[T_p] = -c_{pqrs} S^T_{rs} \nu_q$ και με την εφαρμογή του θεωρήματος Gauss:

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \int_{\infty}^{\infty} d\tau \iint_{\Sigma} c_{pqrs} S^T_{rs} \nu_q G_{np}(x, t-\tau; \xi, 0)\, d\Sigma(\xi) \\ &= \int_{\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V \frac{\partial}{\partial \xi_q} [c_{pqrs} S^T_{rs} G_{np}(x, t-\tau; \xi, 0)]\, dV(\xi) \\ &= \iiint_V c_{pqrs} S^T_{rs} * \frac{\partial G_{np}}{\partial \xi_q}\, dV \end{aligned} \tag{1.98}$$

όπου $*$ συμβολίζει την συνέλιξη.

Με βάση ότι το υλικό είναι ισότροπο και ότι οι θερμικές μετατοπίσεις είναι γνωστές:

$$S^T_{kl} = \alpha T(x,t) \delta_{kl} \tag{1.99}$$

$$c_{ijkl} = \mu \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \right] \tag{1.100}$$

όπου η θερμοκρασία υπολογίζεται ως η απόκλιση από την θέση ισορροπίας, δηλαδή $T = T - T_0$.

Η συνέλιξη με αντικάτασταση γράφεται:

$$u(x,t) = M(t) * g(x,t;0,0) \tag{1.101}$$

όπου:

$$M(t) = \frac{E\alpha}{1-2\nu} \iiint_V T(\xi,t) dV(\xi) \tag{1.102}$$

$$g_n(x,t;\xi,0) = \frac{\partial G_{ni}}{\partial \xi_i} \tag{1.103}$$

Η θερμοκρασία υπολογίζεται σύμφωνα με την εξίσωση θερμότητας:

$$\rho C_V \frac{\partial T}{\partial t} - k \nabla^2 T = h(x,t) \tag{1.104}$$

Η πηγή θερμότητας $h[\frac{W}{m^3}]$ προέρχεται από το laser. Η κατανομή της στο χώρο θεωρείται ανεξάρτητη από την κατανομή της στον χρόνο και έτσι:

$$h(x,t) = QN(x)q(t) \tag{1.105}$$

με $\int_V N(x)dV = \int_t q(t)dt = 1$ και Q η ένταση της πηγής σε J.

Με οριακές συνθήκες μόνωσης στην επιφάνεια S του υλικού αποδεικνύεται με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στην εξίσωση θερμότητας:

$$\dot{M}(t) = \frac{E\alpha Q}{(1-2\nu)\rho C_V} q(t) = \Gamma q(t) \tag{1.106}$$

που σημαίνει ότι δεν απαιτείται επίλυση της εξίσωσης θερμότητας.

Η κατανομή του παλμού laser στο χρόνο θεωρείτε τύπου dirac και έτσι η συνέλιξη τελικά γράφεται:

$$u(x,t) = \Gamma g(x,t;0,0) \tag{1.107}$$

Απομένει ο προσδιορισμός της συνάρτησης Green. Όπως προαναφέρθηκε, η συνέλιξη που προκύπτει από το θεώρημα betti ορίζει ένα πεδίο μετατοπίσεων ως «άθροισμα» στοιχειωδών μετατοπίσεων Green. Έτσι η επιλογή της συνάρτησης Green είναι κρίσιμη για τη σωστή μοντελοποίηση του προβλήματος. Στην έρευνά του ο Rose επιλέγει συνάρτηση Green σε απόκριση τύπου βήματος (Heaviside) για απλοποίηση των εξισώσεων. Η φυσική σημασία της επιλογής αυτής είναι ότι οι μετατοπίσεις της διέγερσης εμφανίζονται απότομα και παραμένουν για αρκετό χρονικό διάστημα. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι η μεταφορά θερμότητας και άρα οι θερμικές διαστολές γίνεται πιο αργά από την χρονική κλίμακα της ελαστικότητας και έτσι οι παραμορφώσεις εμφανίζονται σταθερές.

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες το πρόβλημα Green της ελαστικότητας για κάθε συνιστώσα Helmholtz γράφεται:

$$\varphi_{,zz} + \nabla_r^2\varphi - \frac{1}{c_L^2}\varphi_{,tt} = \frac{1}{2}\frac{c_T^2}{c_L^2\pi\mu}\frac{\delta(r)}{r}\delta(z-d)H(t) \tag{1.108}$$

$$\psi_{,zz} + \nabla_r^2\psi - \frac{1}{c_T^2}\psi_{,tt} = 0 \tag{1.109}$$

$$T_{zz} = T_{zr} = 0, \quad z = 0 \tag{1.110}$$

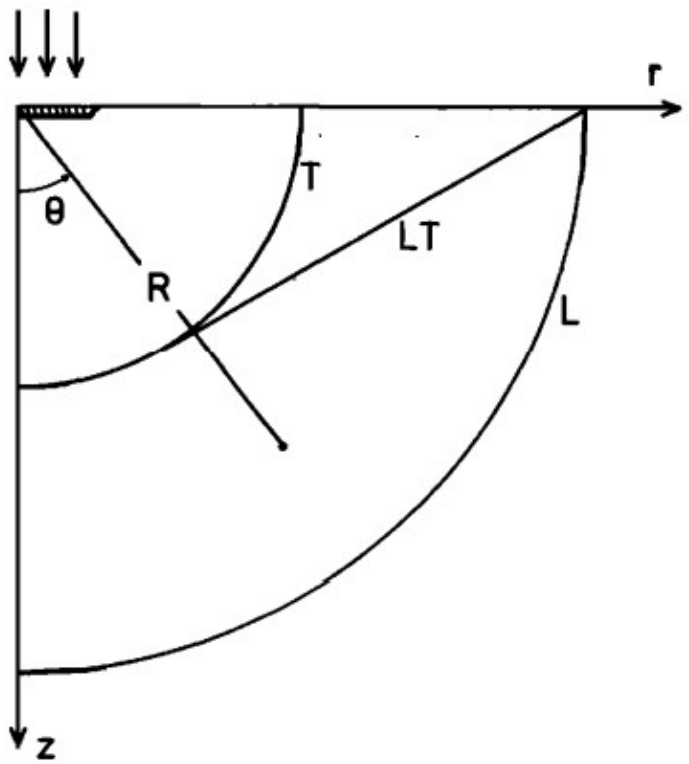
$$\varphi = \varphi_{,t} = \psi = \psi_{,t} = 0, \quad t = 0 \tag{1.111}$$

Επισημαίνεται ότι η πηγή βρίσκεται στο κέντρο του κυλίνδρου και σε βάθος d μέσα σε αυτόν. Η αναλυτική επίλυση γίνεται μέσω του διπλού μετασχηματισμού του συστήματος με μετασχηματισμό Hankel στο χώρο και Laplace στο χρόνο. Το αποτέλεσμα είναι τα πεδία να λαμβάνουν τη μορφή:

$$\varphi = \varphi_S + LL\varphi_S \tag{1.112}$$
$$\psi = LT\varphi_S \tag{1.113}$$

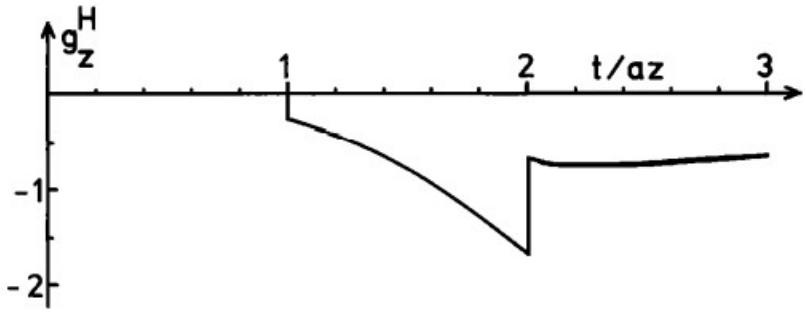
όπου φ_S είναι η λύση που αντιστοιχεί σε ένα σφαιρικό διαμήκες κύμα, LL είναι η ανάκλασή του στην ελεύθερη επιφάνεια και LT είναι η ανάκλασή του και μετατροπή του σε εγκάρσιο.

Στη συνέχεια λαμβάνεται το όριο $d \rightarrow 0$ και η εγκάρσια ανάκλαση βρίσκεται σε γωνίες πάνω από την κρίσιμη οπότε υπάρχουν διαμήκη, εγκάρσια και ολικής ανάκλασης-εγκάρσια. Στην παρακάτω εικόνα (1.6) φαίνονται πως διαδίδονται τα κύματα αυτά στο υλικό.



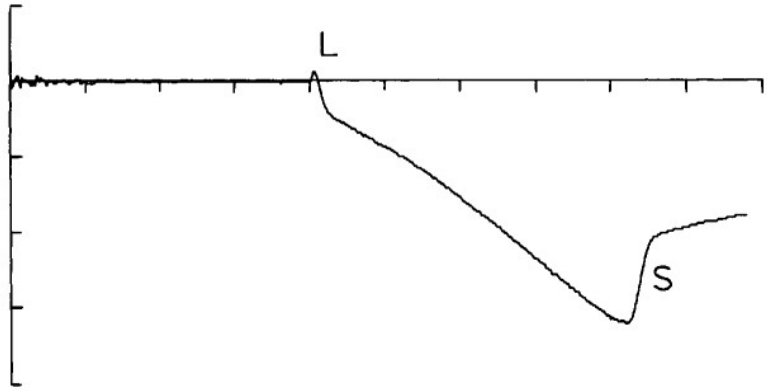
Σχήμα 1.6: μέτωπα κύματος της λύσης Rose

Η μετατόπιση στο κέντρο του κυλίνδρου στην επιφάνεια θέρμανσης υπολογίζεται από αντίστροφο μετασχηματισμό και απεικονίζεται στην εικόνα (1.7):



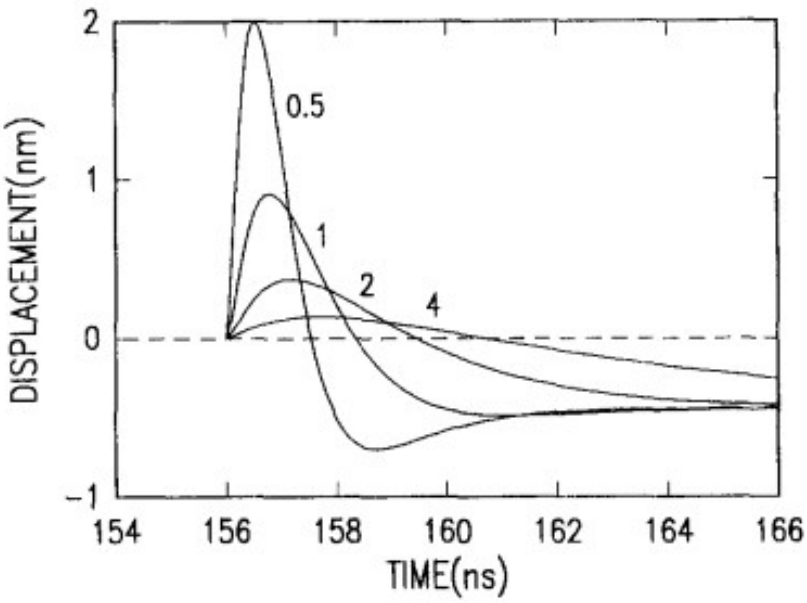
Σχήμα 1.7: Αναλυτική λύση Rose

Όπως φαίνεται στην εικόνα, αρχικά η επιφάνεια υποχωρεί λόγω του διαμήκους κύματος και συνεχίζει να υποχωρεί μέχρι να φτάσει το το εγκάρσιο κύμα που σταματάει την υποχώρηση. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τα πειραματικά [1] όπως φαίνεται στην εικόνα (1.8):



Σχήμα 1.8: πειραματικά δεδομένα της μετατόπισης του επίκεντρου

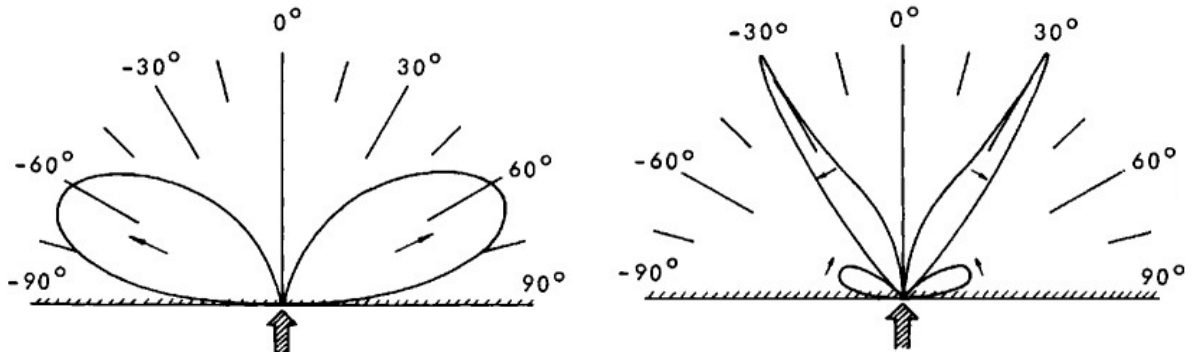
Ωστόσο, η μόνη διαφορά έγκειται στο ότι η αρχική υποχώρηση γίνεται μετά από έναν παλμό επέκτασης. Η διαφορά αυτή εξαλείφεται όταν στην αναλυτική αντιμετώπιση η πηγή έχει πραγματικές διαστάσεις και όχι τύπου dirac και διαρκεί για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και όχι απειροστό. Με την συμπερίληψη τους [8] εξηγείται η ύπαρξη της επέκτασης αυτής:



Σχήμα 1.9: αριθμητικά δεδομένα της μετατόπισης του επίκεντρου για διάφορες χρονικότητες παλμού

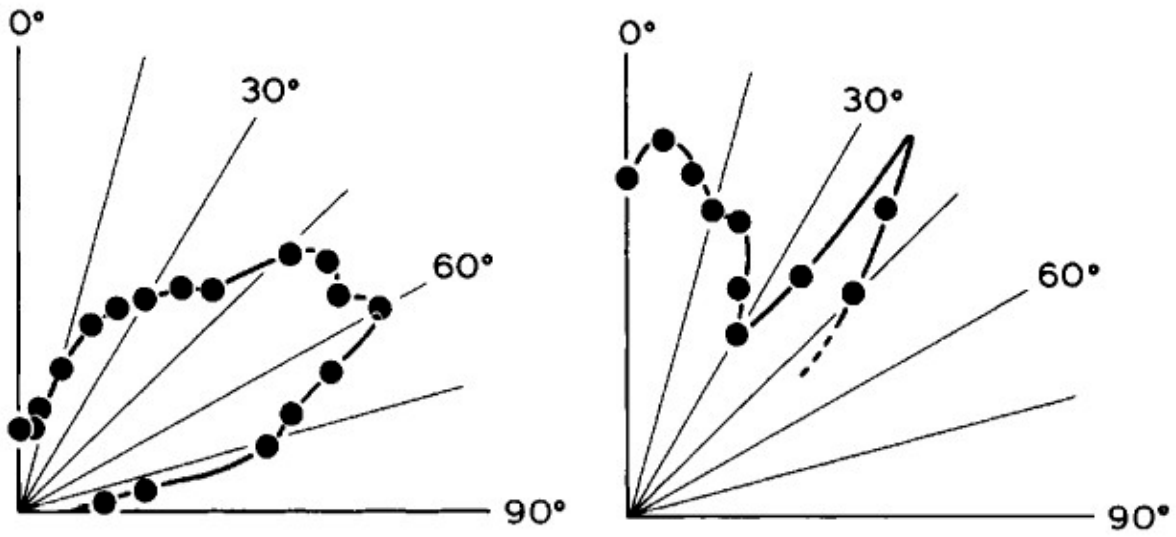
Επιπλέον, μέσω της αναλυτικής λύσης λαμβάνεται και η κατευθυντικότητα των κυμάτων λόγω θερμικής διέγερσης. Όπως φαίνεται στην εικόνα, τα κύματα διαδίδονται κυρίως σε δυο κατευθύνσεις με κατευθυντικότητα μορφής λοβών. Τα αποτελέσματα αυτά έχουν επιβεβαιωθεί και πειραματικά.

Το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιείται στην κατανόηση της επίδρασης της διαμέτρου του laser στην κατευθυντικότητα των κυμάτων. Με αύξηση της διαμέτρου αναμένεται υπάρχει μια σειρά των λοβών αυτών και έτσι η τελική κατευθυντικότητα μοιάζει με επίπεδο κύμα. Αντίστοιχες γεωμετρικές παράμετροι έχουν χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της κατευθυντικότητας μιας δέσμης στην [9].



(α′) Διαμήκης κατευθυντικότητα (β′) Εγκάρσια κατευθυντικότητα

Σχήμα 1.10: Κατευθυντικότητα κυμάτων όπως προκύπτει αναλυτικά



(α′) Διαμήκης κατευθυντικότητα (β′) Εγκάρσια κατευθυντικότητα

Σχήμα 1.11: Κατευθυντικότητα κυμάτων όπως προκύπτει πειραματικά

Κεφάλαιο 2

Αριθμητική προσομοίωση

Η αριθμητική αντιμετώπιση του προβλήματος είναι αναγκαία για την καλύτερη κατανόησή του. Επιλύοντας τις εξισώσεις με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων λαμβάνουμε πλήρη πληροφορία για το τι συμβαίνει και για το πώς επιδρούν οι παράμετροι στην τελική λύση. Έτσι θα γίνει μια σειρά παραμετρικών επιλύσεων για την μελέτη του προβλήματος.

Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε είναι το COMSOL®.

2.1 Πεπερασμένα στοιχεία

Στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων επιλύεται μια διαφορική εξίσωση στην ασθενή της μορφή. Αντί η λύση να ικανοποιεί την εξίσωση σε κάθε σημείο, η εξίσωση που ικανοποιείται είναι η εξής:

$$\int_{\Omega} W(x) L\{u(x)\}\, dV = 0 \tag{2.1}$$

όπου με L συμβολίζεται η διαφορική εξίσωση.

Η μορφή αυτή μπορεί πιο εύκολα να ικανοποιηθεί. Για να ισχύει όμως και η αρχική εξίσωση, η μορφή αυτή χρησιμοποιείται σε ένα μικρό χωρίο του συνολικού. Έτσι τα σφάλματα απόκλισης μικραίνουν και η αριθμητική λύση είναι ικανοποιητική.

Το μέγεθος που επιλύεται αντικαθίσταται επίσης από μια προσέγγιση της μορφής:

$$u(x) = \sum_i u_i N_i(x) \tag{2.2}$$

και οι συναρτήσεις N_i ονομάζονται συναρτήσεις μορφής και τα u_i βαθμοί ελευθερίας.

Αντικαθιστώντας στην ολοκληρωματική εξίσωση:

$$\sum_i u_i \int_{\Omega} W(x) L\{N_i(x)\}\, dV = 0 \tag{2.3}$$

Μέσω της εξίσωσης αυτής μπορούν να παραχθούν τόσες εξισώσεις όσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας επιλέγοντας διαφορετική συνάρτηση βαρύτητας W κάθε φορά. Η συνήθης μέθοδος για την επιλογή της W είναι να τίθεται ίση με το σύνολο των N_i. Η μέθοδος αυτή προτάθηκε πρώτα από τον Galerkin.

$$\sum_i u_i \int_\Omega N_j(x) L\{N_i(x)\}\, dV = 0 \tag{2.4}$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται και σε μητρωική μορφή όπου ο πίνακας $\mathrm{A}_{ij} = \int_\Omega N_j(x) L\{N_i(x)\}\, dV$ πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα βαθμών ελευθερίας u_i. Επιπλέον, η εξίσωση αυτή ισχύει σε κάθε υποχωρίο Ω του υλικού. Η σύζευξη ενός χωρίου με το άλλο γίνεται προσθέτοντας στον πίνακα A_{ij} όρους που προέρχονται από τα χωρία στα οποία βρίσκεται ο βαθμός ελευθερίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι το ολοκλήρωμα των συναρτήσεων μορφών μοιάζει με την αλληλοσυσχέτιση των βαθμών ελευθερίας.

Οι συναρτήσεις μορφής έχουν και άλλες ιδιότητες ώστε η επίλυση να οδηγεί σε λογικά αποτελέσματα. Η τιμή τους πάνω στο x_i είναι 1 ενώ στο x_j είναι 0 ώστε να μπορεί να ταυτοποιηθεί ένα βαθμός ελευθερίας με μια θέση στο χώρο. Έτσι καθορίζεται και το ότι κανένας βαθμός ελευθερίας δεν επιδρά στον άλλον που θα δυσκόλευε την ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Όσον αφορά τις συναρτήσεις μορφής πάνω στα χωρία που ισχύουν, η πιο απλή και συνήθης μορφή είναι τετράπλευρα (2D) ή εξάεδρα (3D) όπου οι συναρτήσεις είναι γινόμενο πολυωνύμων Lagrange. Το γινόμενο αυτό περιέχει τις απαιτήσεις $\mathrm{N}_i(x_j) = \delta_{ij}$ εκ κατασκευής και η αύξηση της τάξης του στοιχείου είναι απλή και γίνεται με την προσθήκη και άλλων σημείων μέσα στο χωρίο. Στην γενική περίπτωση το σχήμα και η μορφή της συνάρτησης δεν έχουν κάποια κανονική μορφή με την ακραία περίπτωση της ισογεωμετρικής ανάλυσης όπου όλο το χωρίο περιγράφεται από μια συνάρτηση που χρησιμοποιείται σαν συνάρτηση μορφής.

Μια πλήρης παρουσίαση και εισαγωγή υπάρχει στο [10]

2.2 Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Η μοντελοποίηση του προβλήματος γίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η επιλογή αυτή γίνεται ώστε οι εξισώσεις να απλοποιηθούν στις 2 διαστάσεις λόγω της αξονοσυμμετρίας του προβλήματος. Πάνω στα μέτωπα του κυλίνδρου μπορούν να οριστούν ελεύθερες επιφάνειες στις οποίες το laser ακτινοβολεί.

Η απλούστερη μοντελοποίηση που απλοποιεί το πρόβλημα στις 1 διαστάσεις είναι με την χρήση σφαιρικών συντεταγμένων. Έτσι μοντελοποιείται μόνο η ακτινική εξάρτηση των μετατοπίσεων που δεν εξαρτάται από τις γωνιακές συντεταγμένες. Στην περίπτωση αυτή, το laser μπορεί να τοποθετηθεί σαν πηγή στην θέση $r = 0$ του ημιεπίπεδου. Η περίπτωση αυτή όμως δεν δίνει στοιχεία για την κατευθυντικότητα της πηγής και εν τέλει θα οδηγήσει σε 2D μοντελοποίηση που περιέχει και γωνιακές μεταβολές. Επιπλέον, η κυλινδρική γεωμετρία έχει μέτωπα προς ανάκλαση στον άξονά της και έτσι μπορεί να μελετηθεί και ο ρόλος της ανάκλασης στη λύση. Για αυτό οι σφαιρικές συντεταγμένες δεν χρησιμοποιούνται στην εργασία αυτή αλλά αναφέρονται για λόγους πληρότητας.

Στις κυλινδρικές συντεταγμένες, οι μετατοπίσεις κατά την γωνιακή διεύθυνση είναι μηδενικές $u_\theta = 0$ και απομένει η εύρεση των μετατοπίσεων κατά την διεύθυνση του άξονα και την ακτινική διεύθυνση $u_z,\ u_r$. Οι παραμορφώσεις υπολογίζονται με την χρήση του τελεστή της κλίσης του διανύσματος μετατόπισης όπως στην εξίσωση (1.6) εκφραζόμενο σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$S_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{2.5}$$
$$S_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \tag{2.6}$$
$$S_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{2.7}$$
$$S_{r\theta} = 0 \tag{2.8}$$
$$S_{\theta z} = 0 \tag{2.9}$$
$$S_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{2.10}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας $\nabla \cdot T + f = \rho\ddot{u}$ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την απόκλιση σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + f_r = \rho\ddot{u}_r \tag{2.11}$$
$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} + f_z = \rho\ddot{u}_z \tag{2.12}$$

όπου ο νόμος του Hooke εφαρμόζεται ως:

$$T_{rr} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \tag{2.13}$$
$$T_{\theta\theta} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{u_r}{r} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \tag{2.14}$$
$$T_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \tag{2.15}$$
$$T_{r\theta} = 0 \tag{2.16}$$
$$\mathrm{T}_{\theta z} = 0 \tag{2.17}$$
$$T_{zr} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{2.18}$$

Συζευγμένο με την εξίσωση θερμότητας:

$$k\nabla^2 T = \rho C_V \dot{T} + h(r, z) \tag{2.19}$$

2.3 Δεδομένα

Για την προσομοίωση θεωρείται κύλινδρος ακτίνας $5mm$ και μήκους $20mm$ από χάλυβα. Τα χαρακτηριστικά του είναι:

- $E = 200GPa$
- $\nu = 0.33$
- $\rho = 7800\frac{kg}{m^3}$
- $k = 45\frac{W}{m^2}$
- $C_V = 490\frac{J}{kgK}$

σημειώνεται ότι με βάση αυτά προκύπτει ότι:

$$c_L = 6205\frac{m}{s}$$
$$c_S = 3105\frac{m}{s}$$

Ος οριακές συνθήκες θερμότητας τίθενται μόνωση παντού εκτός από την περιοχή όπου δρα το laser. Το laser θεωρείται ότι έχει ομοιόμορφη κατανομή καθόλη την διάμετρό του, το οποίο είναι μη ρεαλιστικό διότι η πραγματική κατανομή είναι μορφής Gauss και εξαρτάται από το σημείο εστίασης [11]. Αυτό επιλέγεται για να απλοποιηθεί η ερμηνεία των αποτελεσμάτων και να μην επιβαρύνεται το μοντέλο. Στον χρόνο λαμβάνεται κατανομή Gauss όπου σε αυτή την περίπτωση η ομαλή μορφή της διευκολύνει το μοντέλο. Συγκεκριμένα:

$$I = I_o t_p \frac{e^{-\frac{(t-0.5t_p)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tag{2.20}$$

όπου I_o είναι η μέση φωτεινότητα σε $\frac{W}{m^2}$ και σ επιλέγεται έτσι ώστε ο παλμός να περιέχεται εντός 6σ της κατανομής ή $\sigma = \frac{t_p}{6}$. Ο παλμός σε όλες τις περιπτώσεις είναι $4ns$.

Επειδή το ολοκλήρωμα $\int Idt = e_p$ τότε προκύπτει ότι $e_p = I_o t_p \ \frac{J}{m^2}$ όπως αναμενόταν. Η δε ενέργεια υπολογίζεται με πολλαπλασιασμό της με την επιφάνεια της δέσμης $E_p = e_p A \ J$

Οι οριακές συνθήκες της ελαστικότητας είναι ελεύθερες επιφάνειες χωρίς τάσεις. Λόγω της θερμοελαστικότητας, οι τάσεις που είναι μηδενικές είναι οι μηχανικές δηλαδή:

$$T_m = T - T_{thermal} = 0 \tag{2.21}$$

2.4 Αποτελέσματα

2.4.1 Διάμετρος 1mm

Αρχικά μελετάται η περίπτωση όπου το τεμάχιο ακτινοβολείται με laser ακτίνας $0.5mm$. Η μέση φωτεινότητα υπολογίζεται ώστε να οδηγεί σε αύξηση περίπου 50K. Θεωρείται ότι η θερμό-

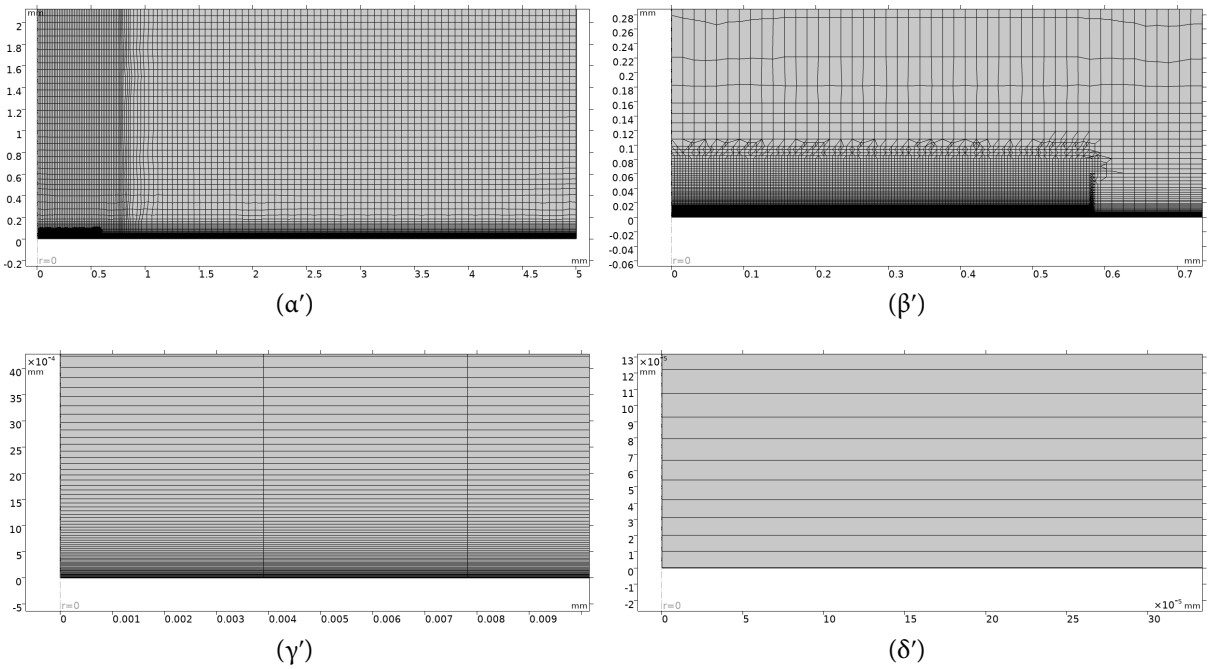
τητα στα $4ns$ έχει διεισδύσει όσο το μήκος διάχυσής της που ισούται με περίπου $L_{th} = \sqrt{at_p} = 0.216\ \mu m$, όπου a ο συντελεστής θερμικής διάχυσης. Η ενέργεια που απορροφάται στο υλικό αυτό γράφεται με τη μορφή της εξίσωσης:

$$I_o t_p = \rho L_{th} \pi \frac{d^2}{4} C_V \Delta T \tag{2.22}$$

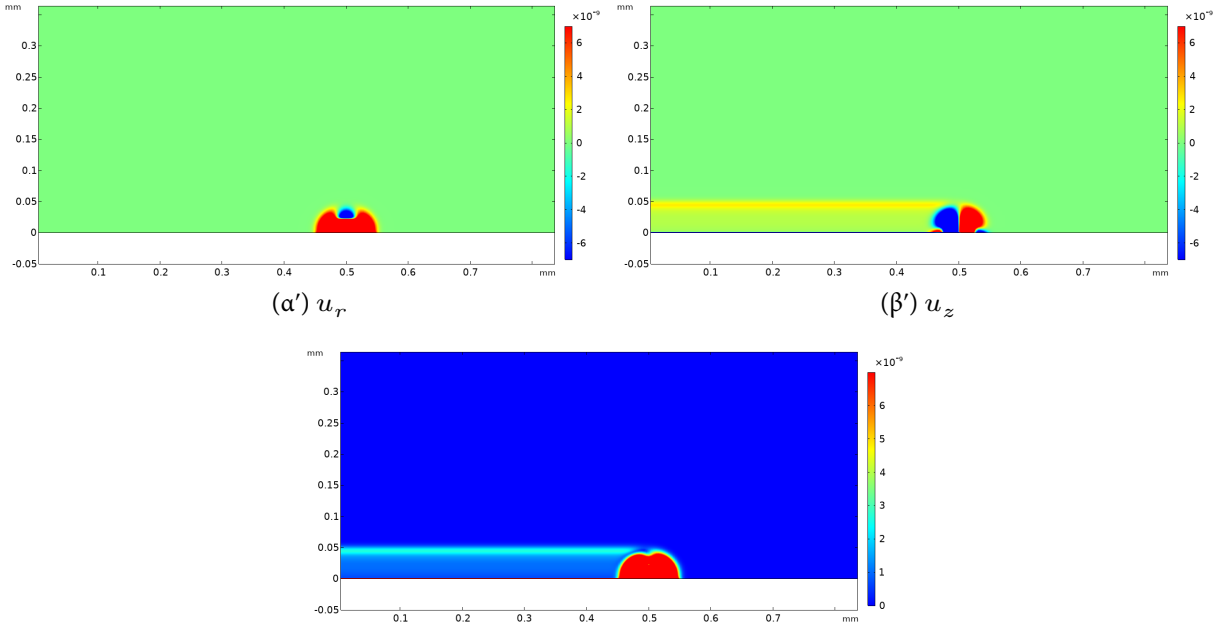
από όπου προκύπτει ότι $I_o \approx 10^{10}\ \frac{W}{m^2}$ και ενέργεια παλμού $E_p = 31.41\ \mu J$.

Η χρονική ανάλυση τίθεται ίση με $0.5ns$ για τα πρώτα $1000ns$ και $100ns$ για τα επόμενα $9000ns$. Γίνεται επίλυση για τα πρώτα $10\mu s$ του φαινομένου. Στο χρόνο αυτό το κύμα διανύει περίπου $31mm$ ως εγκάρσιο ή $62mm$ ως διάμηκες που είναι αρκετά για να διασχίσει τα $20mm$ του υλικού.

Λόγω του ότι αναμένουμε κύματα της τάξης των MHz το πλέγμα τίθεται μικρότερο από το $\frac{1}{10}$ του μήκους κύματος που είναι $\lambda = 3mm$. Έτσι το πλέγμα είναι αρχικά δομημένο με τετράγωνα $0.25mm \times 0.25mm$. Επειδή όμως το θερμικό φαινόμενο γίνεται σε διαστάσεις της τάξης των $200nm$ το πλέγμα εκλεπτύνεται στην πλευρά που δέχεται το laser. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το πλέγμα:



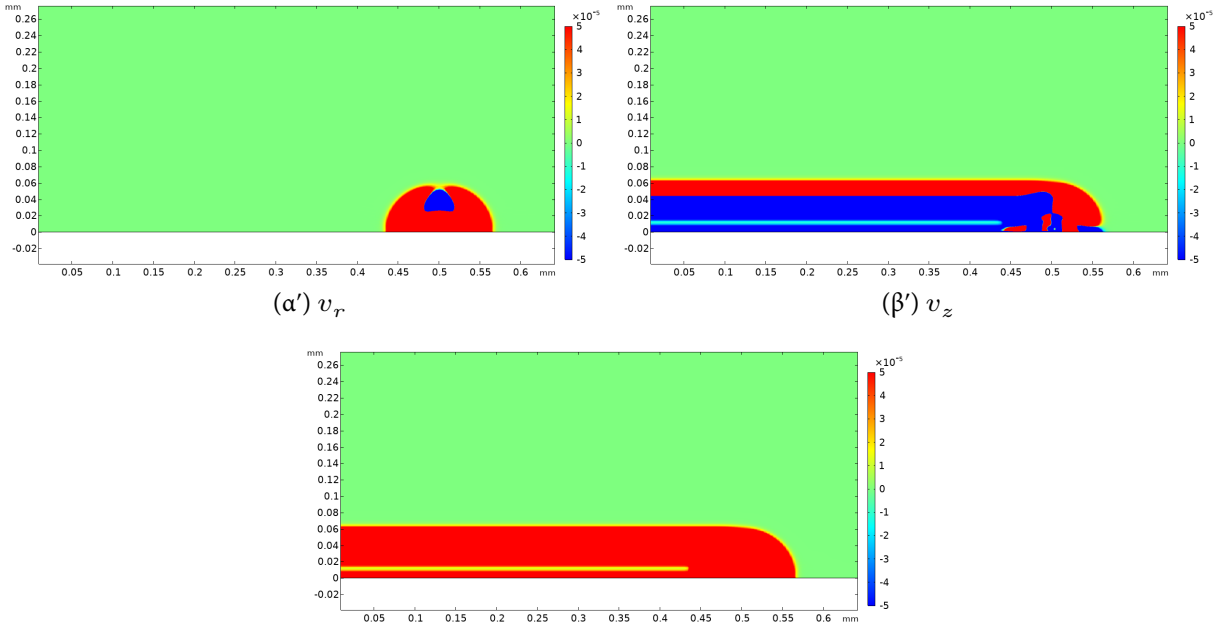
Σχήμα 2.1: Το υπολογιστικό πλέγμα. Παρουσιάζονται διαδοχικές μεγεθύνσεις της θερμαινόμενης επιφάνειας.



(α′) u_r (β′) u_z

(γ′) $|u|$

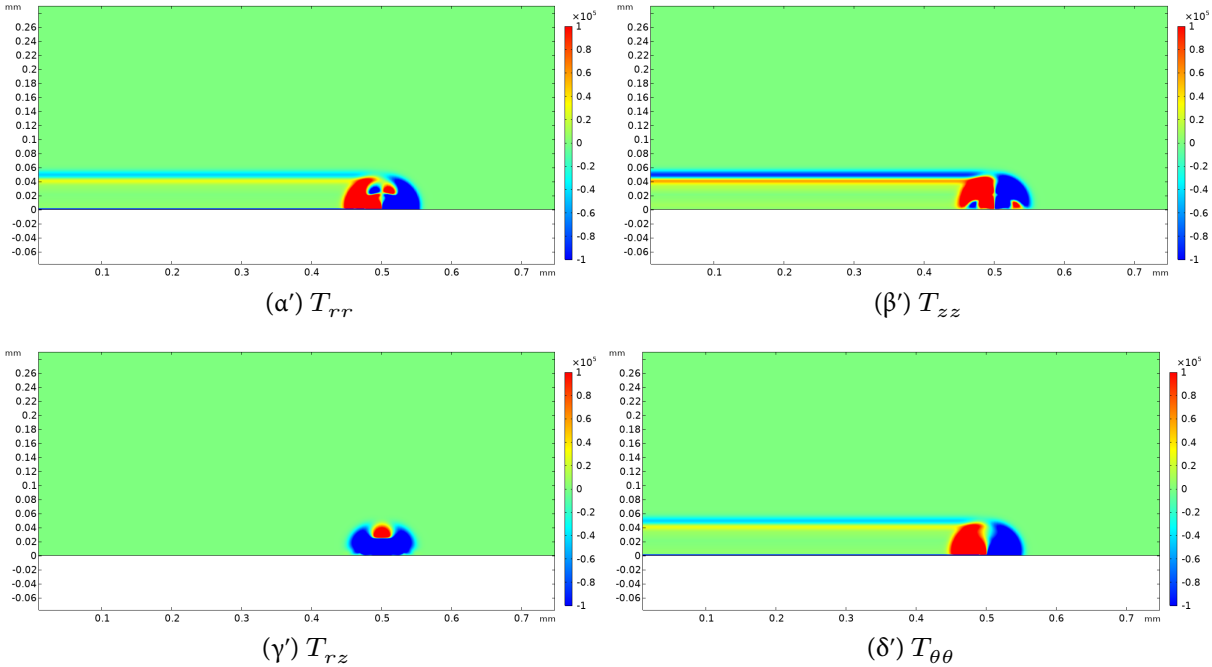
Σχήμα 2.2: Πεδία μετατοπίσεων για $t = 10ns$



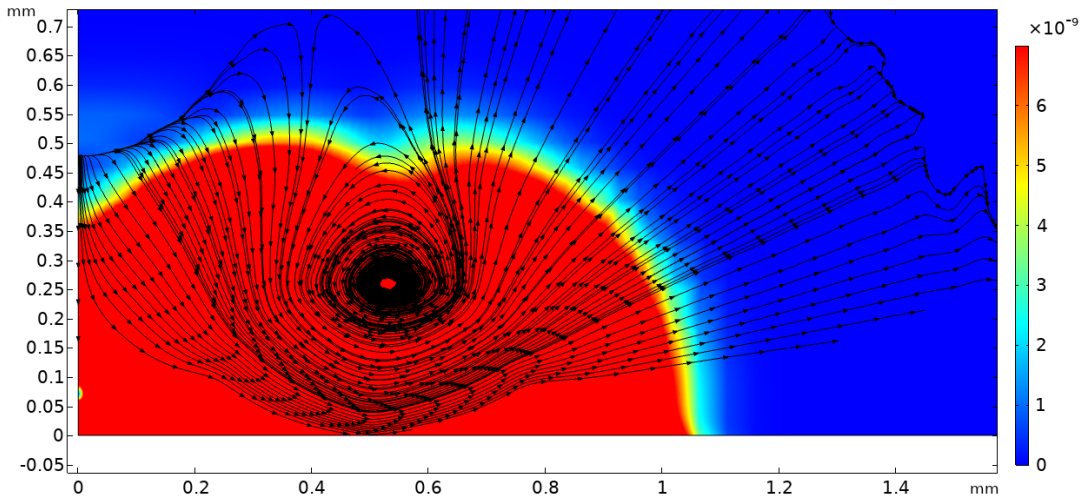
(α′) v_r (β′) v_z

(γ′) $|v|$

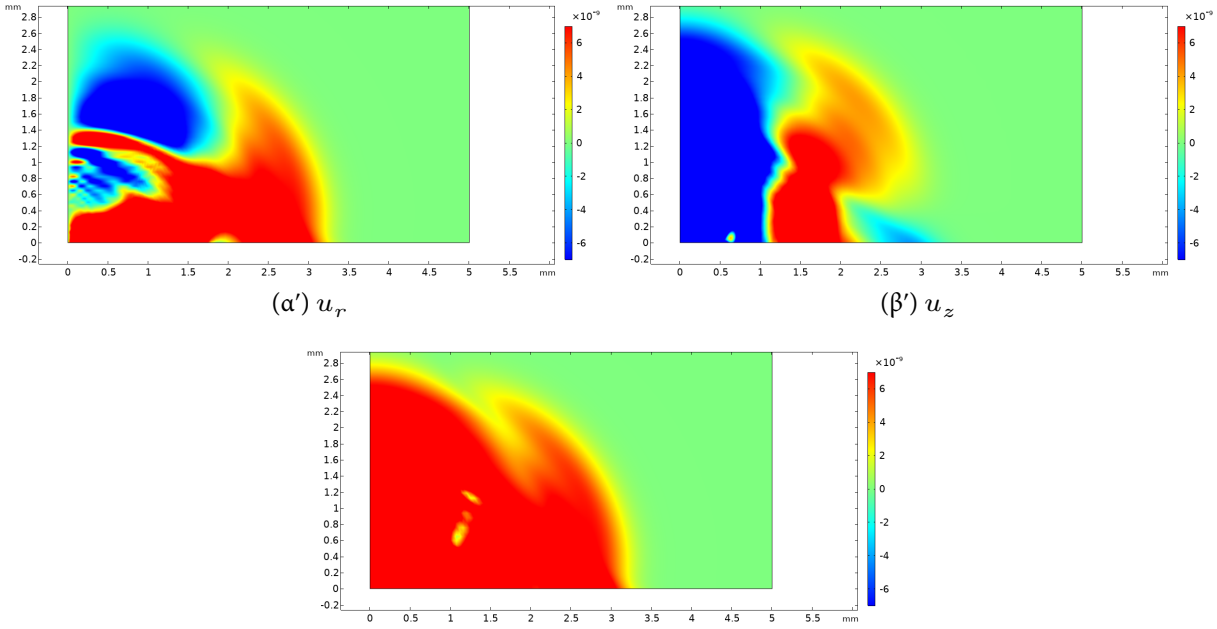
Σχήμα 2.3: Πεδία ταχυτήτων για $t = 10ns$



Σχήμα 2.4: Πεδία τάσεων για $t = 10ns$



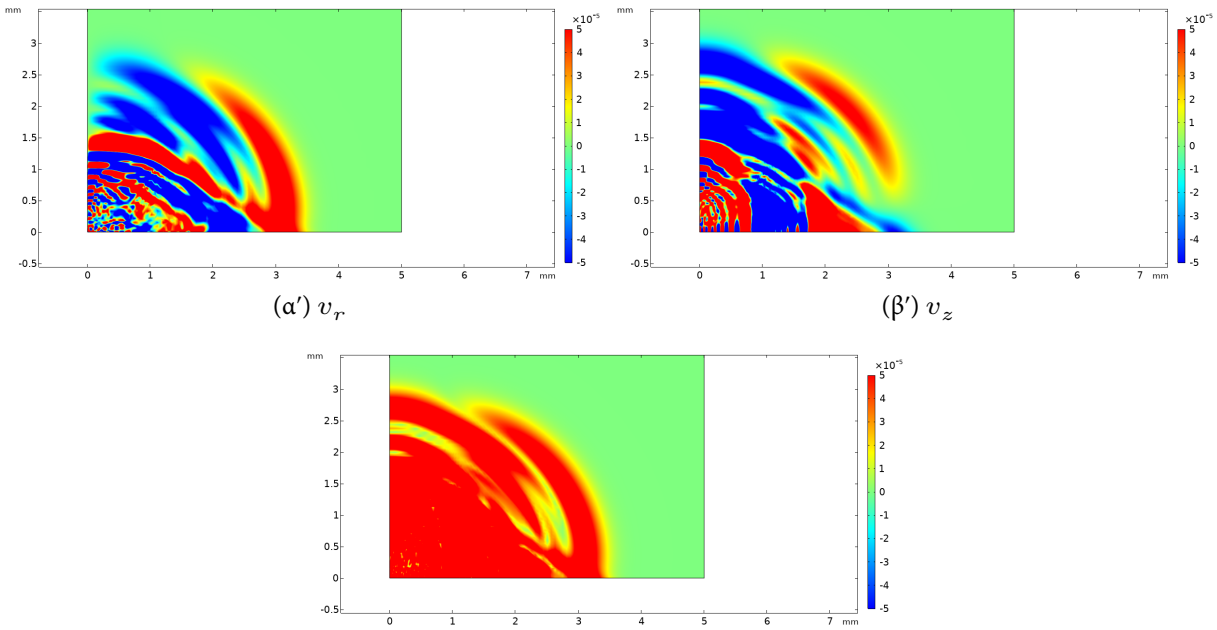
Σχήμα 2.5: Ροϊκές γραμμές για $t = 100ns$, χρωματισμός με βάση το μέτρο της μετατόπισης



(α′) u_r (β′) u_z

(γ′) $|u|$

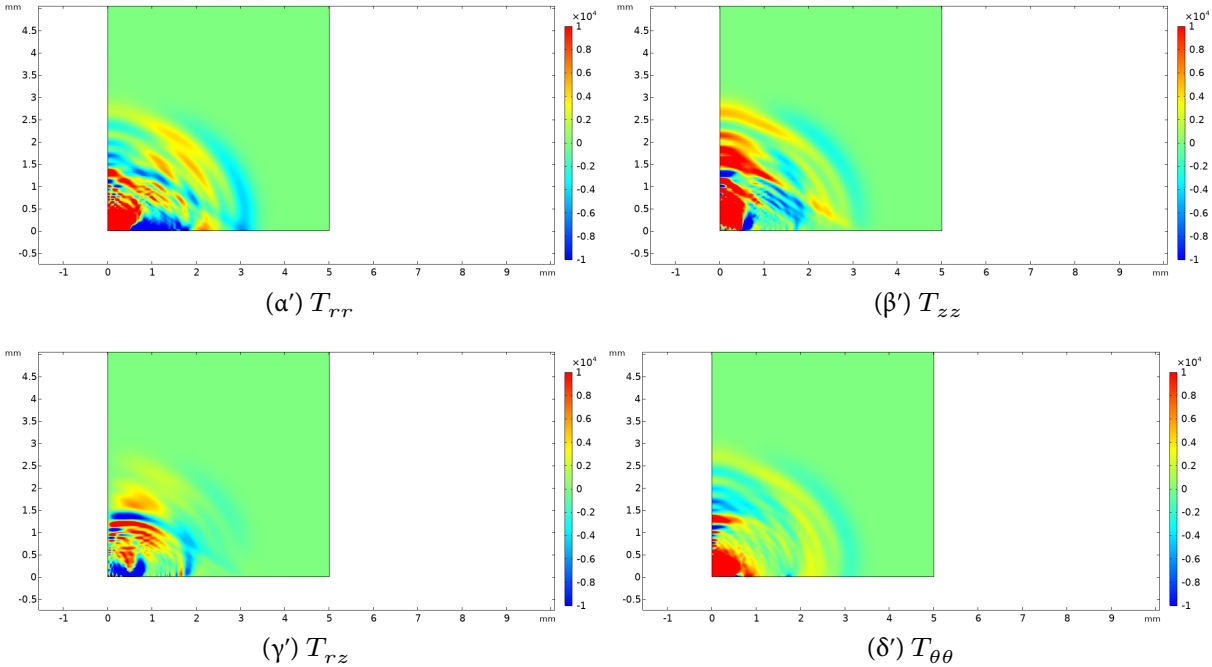
Σχήμα 2.6: Πεδία μετατοπίσεων για $t = 500ns$



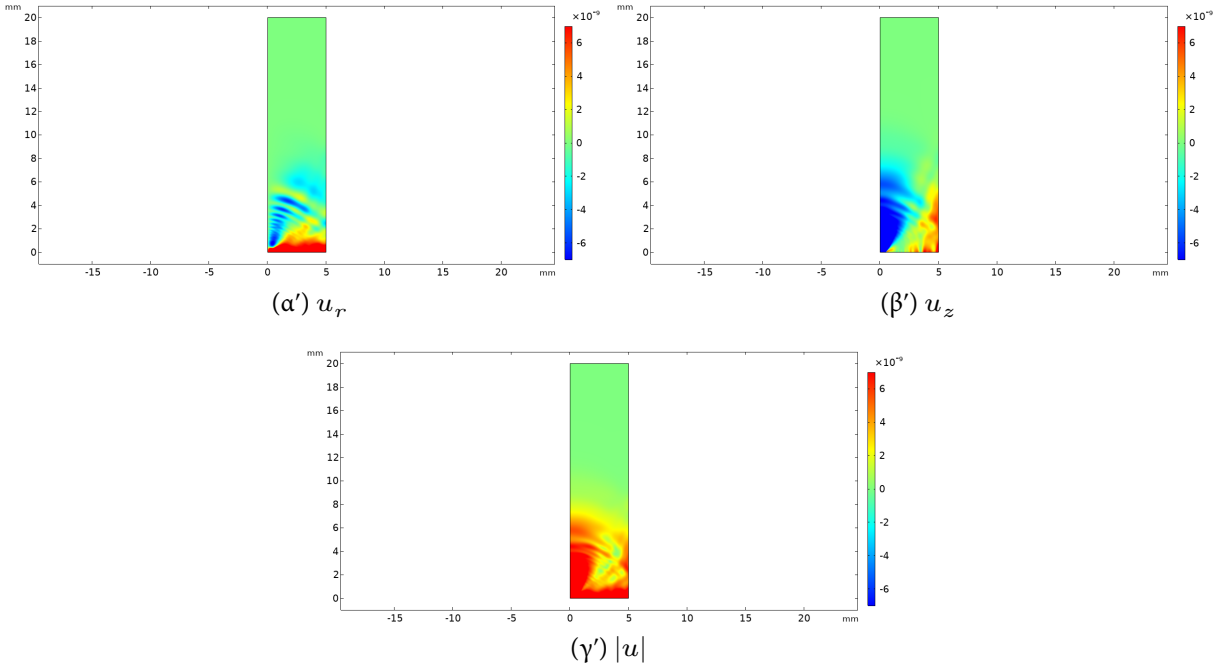
(α′) v_r (β′) v_z

(γ′) $|v|$

Σχήμα 2.7: Πεδία ταχυτήτων για $t = 500ns$

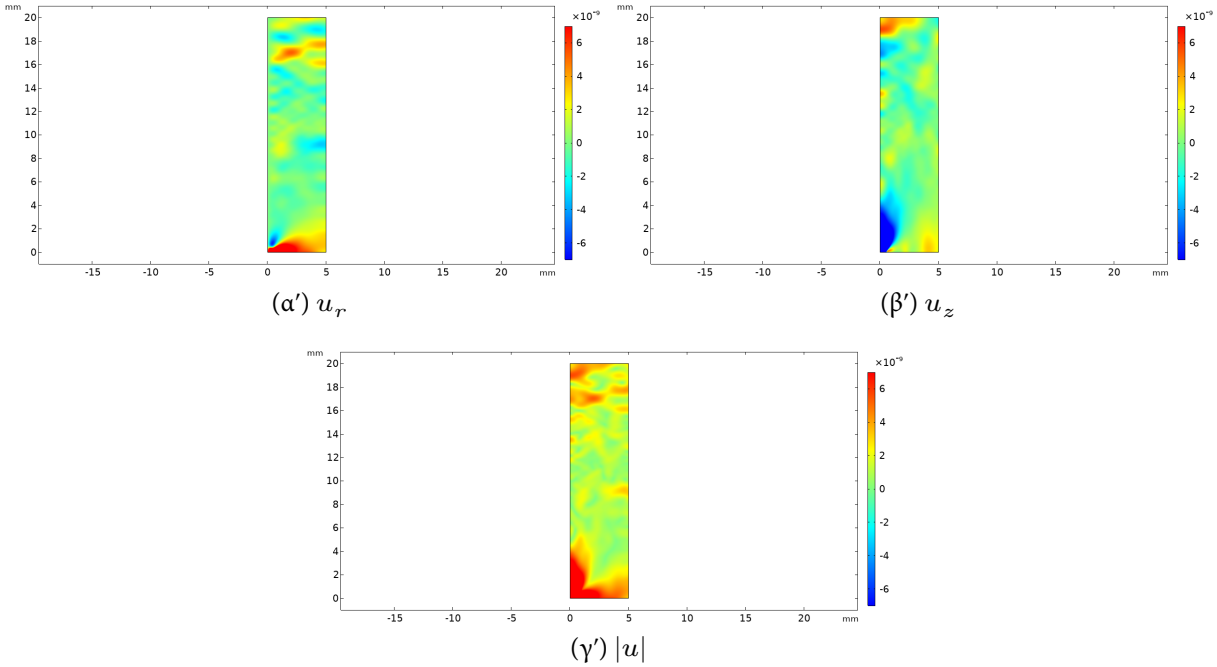


Σχήμα 2.8: Πεδία τάσεων για $t = 500ns$

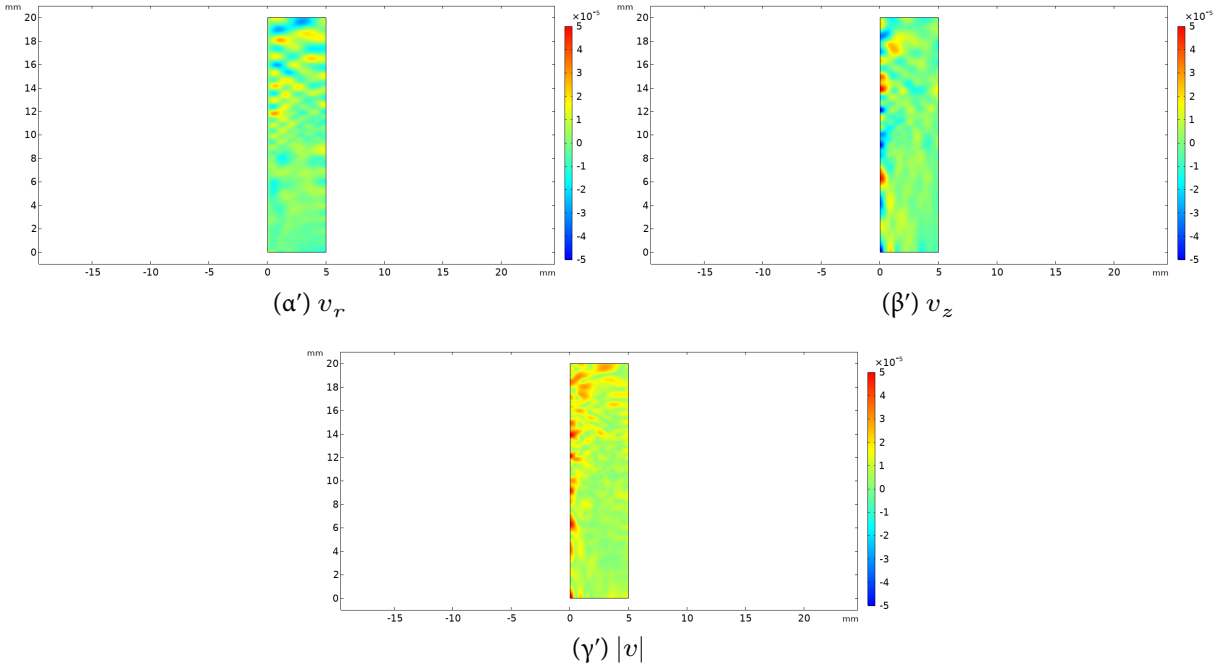


(α′) u_r (β′) u_z (γ′) $|u|$

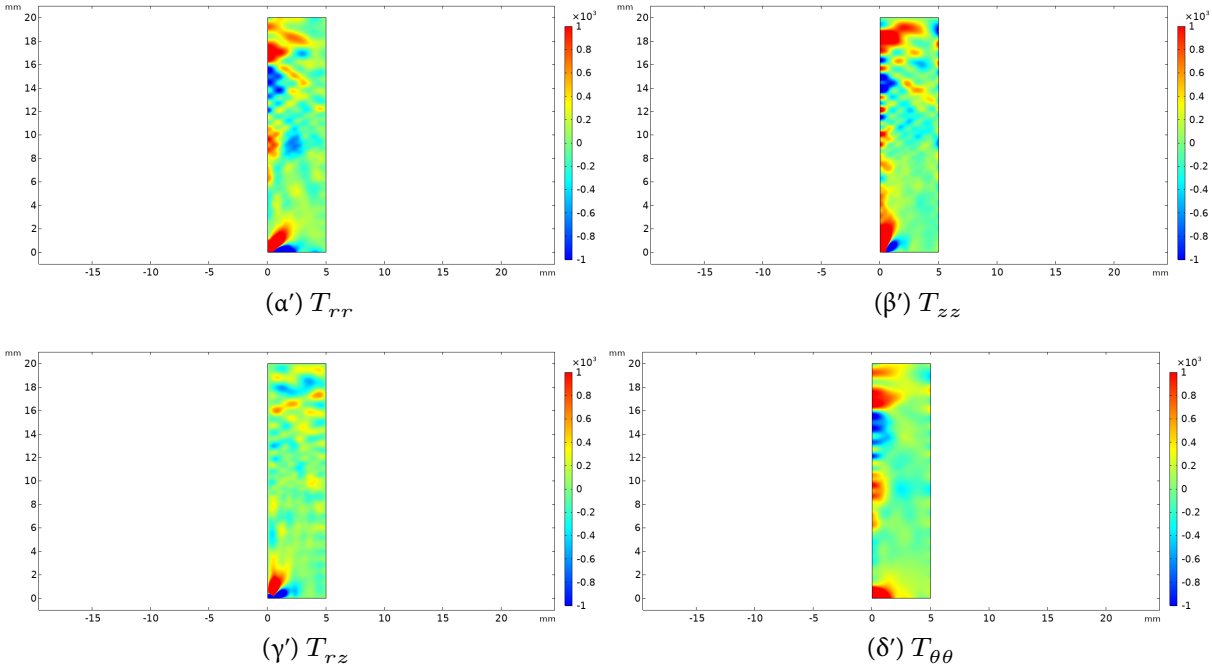
Σχήμα 2.9: Πεδία μετατοπίσεων για $t = 2\mu s$



Σχήμα 2.10: Πεδία μετατοπίσεων για $t = 10\mu s$



Σχήμα 2.11: Πεδία ταχυτήτων για $t = 10\mu s$



(α′) T_{rr} (β′) T_{zz}

(γ′) T_{rz} (δ′) $T_{\theta\theta}$

Σχήμα 2.12: Πεδία τάσεων για $t = 10\mu s$

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η γένεση των κυμάτων ξεκινάει στην άκρη της θερμαινόμενης περιοχής $r = 0.5mm$. Οι μετατοπίσεις επεκτείνονται σφαιρικά από το σημείο αυτό μέχρι τα κύματα να έχουν ανακλαστεί και να έχουν διαδοθεί σε όλο το δοκίμιο. Οι τάσεις που προκαλούν την κίνηση περιορίζονται στο διάστημα $r \in (0, 0.5)\ mm$. Χαρακτηριστική είναι η εμφάνιση λοβών στο πεδίο μετατόπισης στα $10\mu s$ που μοιάζουν με την κατευθυντικότητα που προβλέπει η θεωρία. Σημειώνεται ότι η διάτμηση και η κάθετη τάση στην επιφάνεια είναι μηδενική σε όλο το μήκος της όπως απαιτείται από τις οριακές συνθήκες.

Στα $10\mu s$ είναι εμφανές ότι τα κύματα έχουν γεμίσει όλο το δοκίμιο που είναι ένδειξη ότι η γεωμετρία λειτουργεί ως κυματοδηγός.

Η θερμότητα δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον καθώς ο χρόνος δράσης και το ποσό ενέργειας είναι αμελητέο. Από την χρονική εξέλιξη του σημείου $(0, 0)$ βλέπουμε ότι η συμπερίληψη της μεταφοράς θερμότητας μετατοπίζει το σημείο μέγιστης θερμοκρασίας στο χρόνο από το αναμενόμενο των $2ns$ στα $2.5ns$ (εικόνα (2.13)). Το προφίλ της θερμοκρασίας επίσης δεν είναι μορφής Gauss και έτσι οι παράγωγοι $\dot{T}$ επηρεάζονται. Επιπλέον, η θερμότητα προβλέπει το πάχος διείσδυσης στα $100nm$ για τα πρώτα $5ns$ (εικόνα (2.14)). Συνεπώς, η προσφορά της μεταφοράς θερμότητας οδηγεί στην αλλαγή των ρυθμών παραμόρφωσης και το μέγεθος του χωρίου εντός του οποίου συμβαίνουν αυτές.

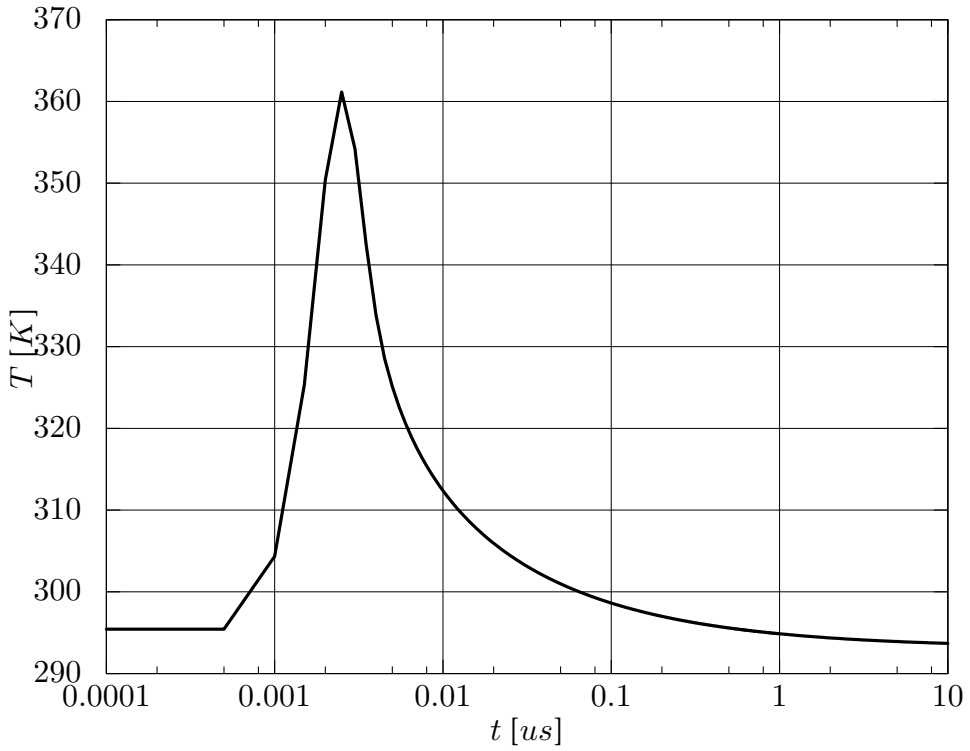
Το μοτίβο κίνησης του υλικού αποτελείται από μια αριστερόστροφη δίνη που διαδίδεται και διασπάται. Το αποτέλεσμα αυτό συνάδει με την θεώρηση ότι η θερμαινόμενη επιφάνεια διατέμνεται όπως αναφέρεται στην βιβλιογραφία.

Ο ακριβής μηχανισμός γίνεται αντιληπτός όταν παρατηρούμε τις παραμορφώσεις και τις τάσεις στην αρχή (εικόνα (2.15)). Η λωρίδα που θερμαίνεται $r \in (0, 0.5)\ mm$ εφελκύεται κατά τον z άξονα με αποτέλεσμα να δημιουργεί αντίδραση T_{zz} στο εσωτερικό του υλικού όπως φαίνεται για $z = 0.05mm$. Ταυτόχρονα, το άκρο της $r = 0.5\ mm$ εφελκύεται και τις τάσεις αυτές τις φέρει όλη η λωρίδα όπως φαίνεται από το διάγραμμα των T_{rr}. Παρατηρούμε μια επεκτεινόμενη λωρίδα λόγω θερμικών διαστολών. Η ελεύθερη επιφάνεια επιτρέπει την επέκτασή της μόνο στον z άξονα που προκαλεί το πρώτο τασικό κύμα T_{zz} ως αντίδραση. Αντίστοιχα, ο περιορισμός στα δεξιά της λωρίδας από το υλικό οδηγεί στην εμφάνιση S_{rr} παραμορφώσεων που αμέσως παραλαμβάνονται από το υλικό στα δεξιά της. Η αντίδραση στις S_{rr} οδηγεί επίσης στην θλίψη της λωρίδας καθ' όλο το μήκος της.

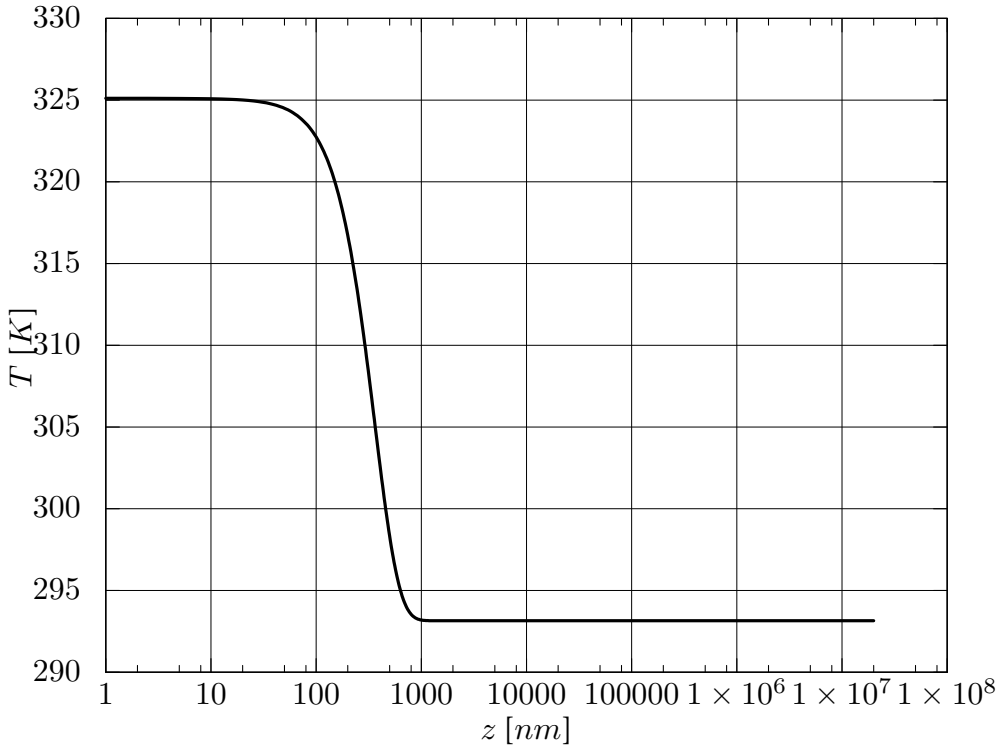
Εξετάζοντας την χρονική εξέλιξη (εικόνα (2.16)), παρατηρείται ότι το σημαντικότερο μέρος του παραγόμενου κύματος προέρχεται από το σημείο $r = 0.5mm, z = 0mm$. Είναι πλέον κατανοητό ότι το σημείο αυτό αντιστέκεται στην ακτινική διαστολή του θερμαινόμενου δίσκου. Για να ισορροπήσει το υλικό και να ικανοποιήσει τις οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας, παράγονται τάσεις όλων των ειδών. Ο τοπικός χαρακτήρας των αντιδράσεων εξηγείται από το λεπτό πάχος της διαστελλόμενης λωρίδας που οφείλεται στην χρονικότητα του φαινομένου ($4ns$ παλμός) καθώς και από το γεγονός ότι μόνο υλικό στα δεξιά του σημειού μπορεί να αντιδράσει. Η επέκταση της αντίδρασης αυτής φτάνει σε όλο το υλικό και έτσι η ζώνη αυτή είναι η σημαντικότερη. Η επέκταση της αντίδρασης στην αξονική διαστολή S_{zz} είναι αμελητέα σε σύγκριση με την ακτινική. Τέλος, επισημαίνεται ότι η ακτινική αντίδραση αναγκαστικά περιορίζεται στο πολύ μικρό πάχος της λωρίδας ενώ η αξονική αντίδραση στο συγκριτικά μεγάλο μήκος της, που εξηγεί εν μέρει την διαφορά στην ένταση των δυο φαινομένων.

Το φαινόμενο εξελίσσεται με τη διάδοση των κυμάτων και τη σταδιακή απόταση της λωρί-

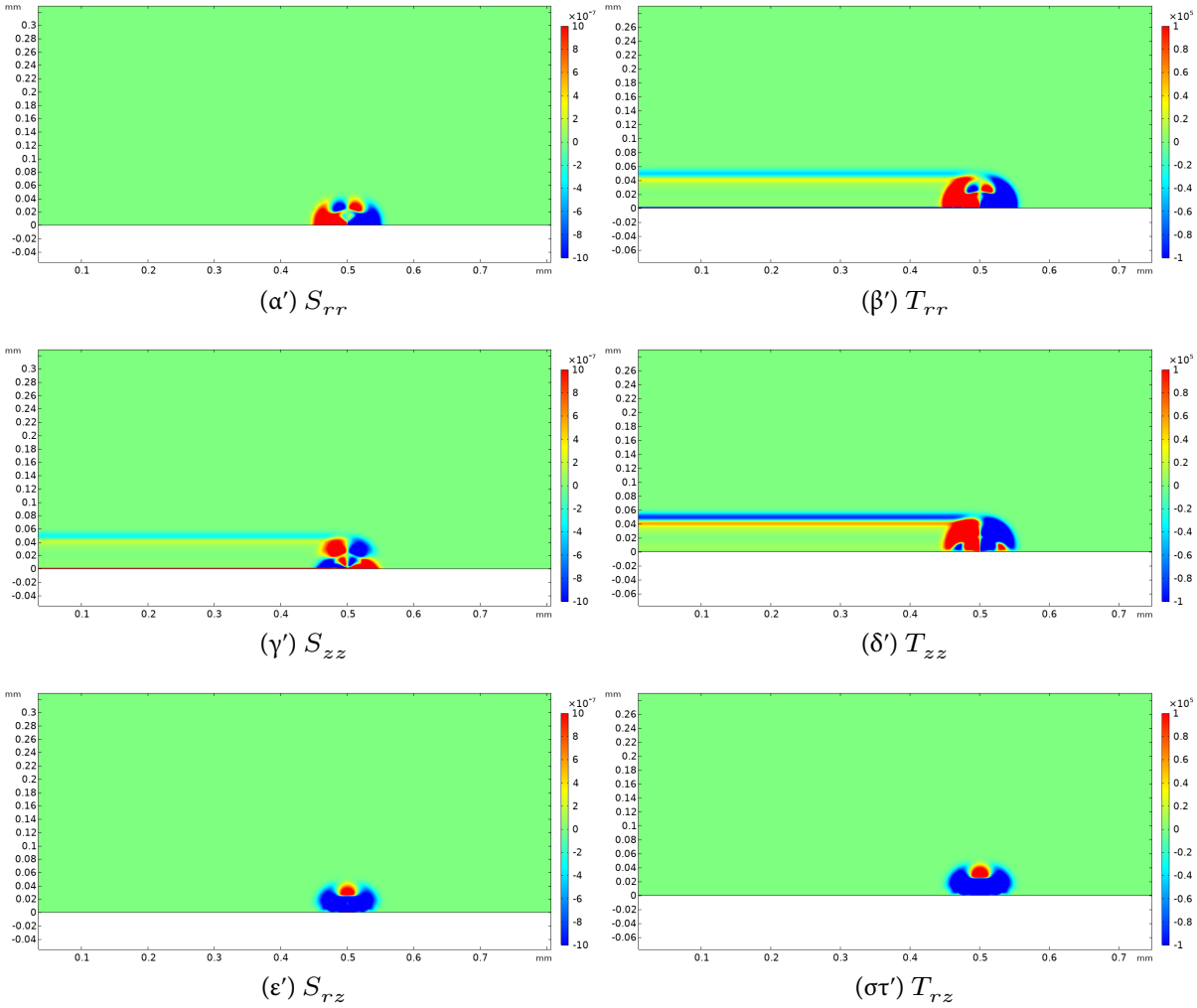
δας.



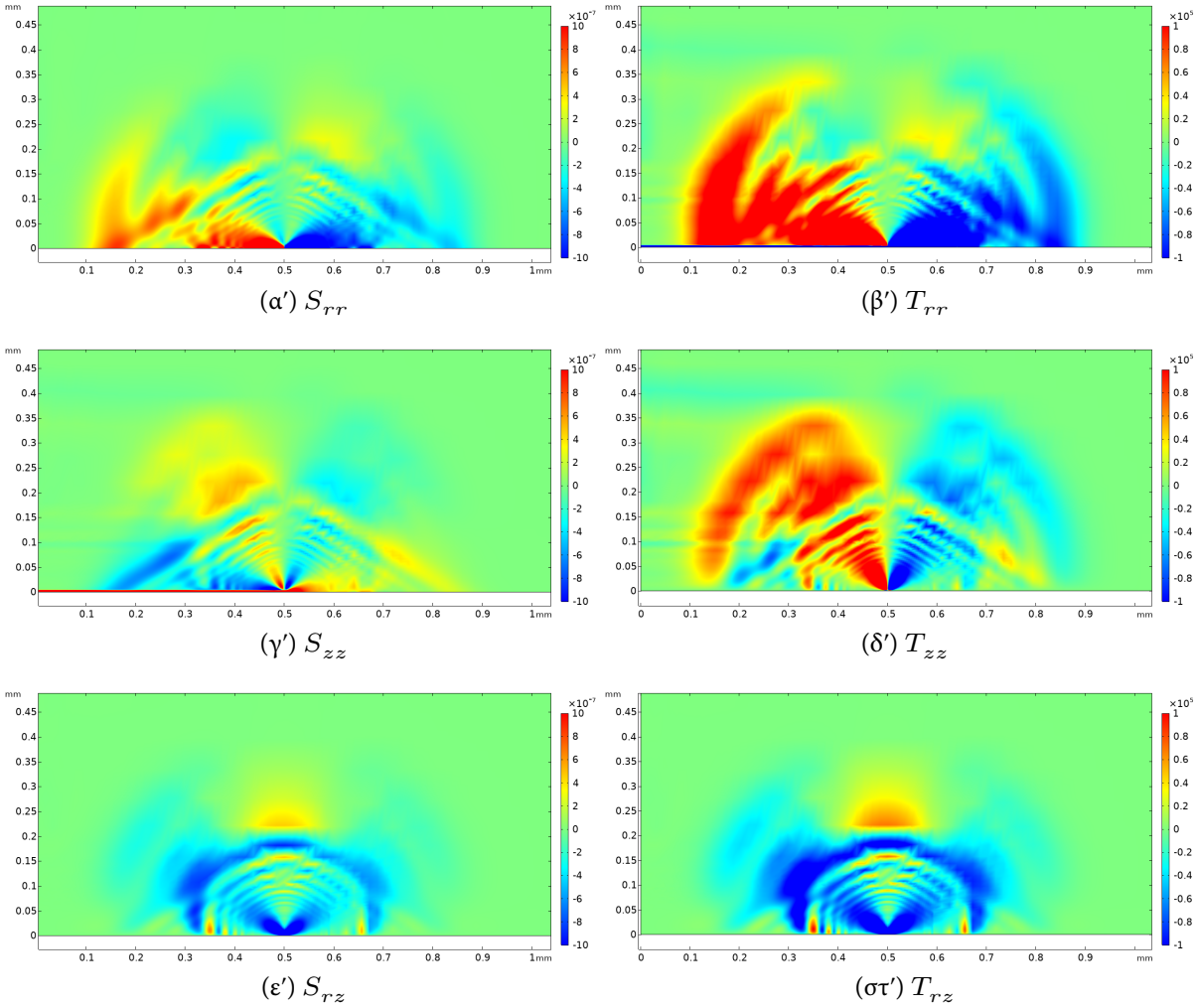
Σχήμα 2.13: Εξέλιξη της θερμοκρασίας του σημείου $(0, 0)$



Σχήμα 2.14: Κατανομή της θερμοκρασίας στον κεντρικό άξονα για $t = 10ns$

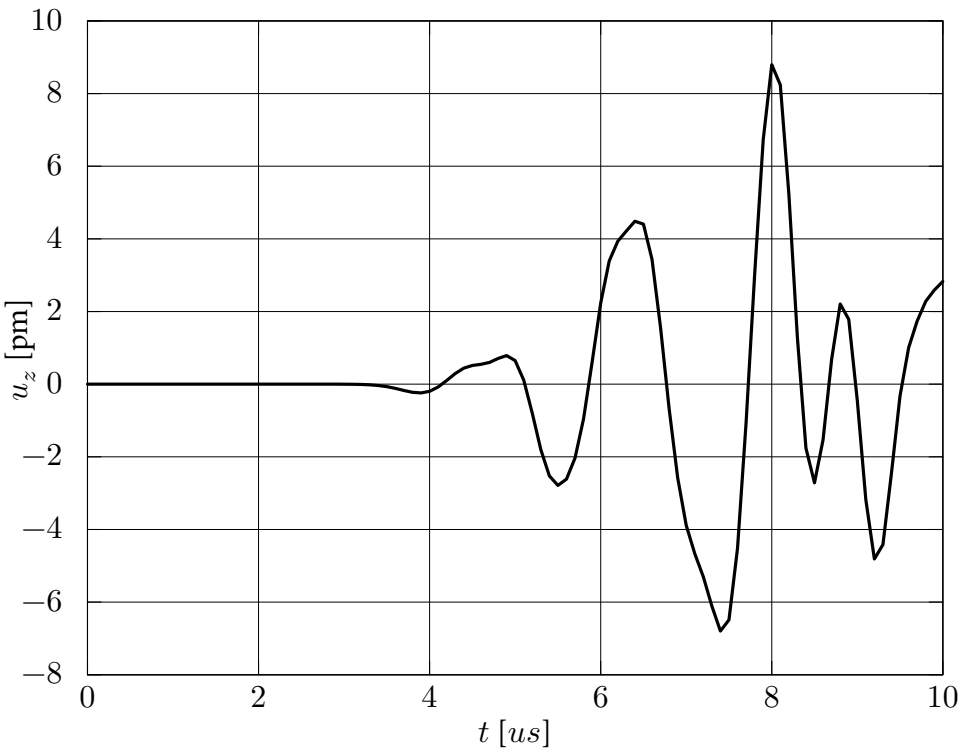


Σχήμα 2.15: Παραμορφώσεις και αντίστοιχες τάσεις για $t = 10ns$



Σχήμα 2.16: Παραμορφώσεις και αντίστοιχες τάσεις για $t = 70ns$

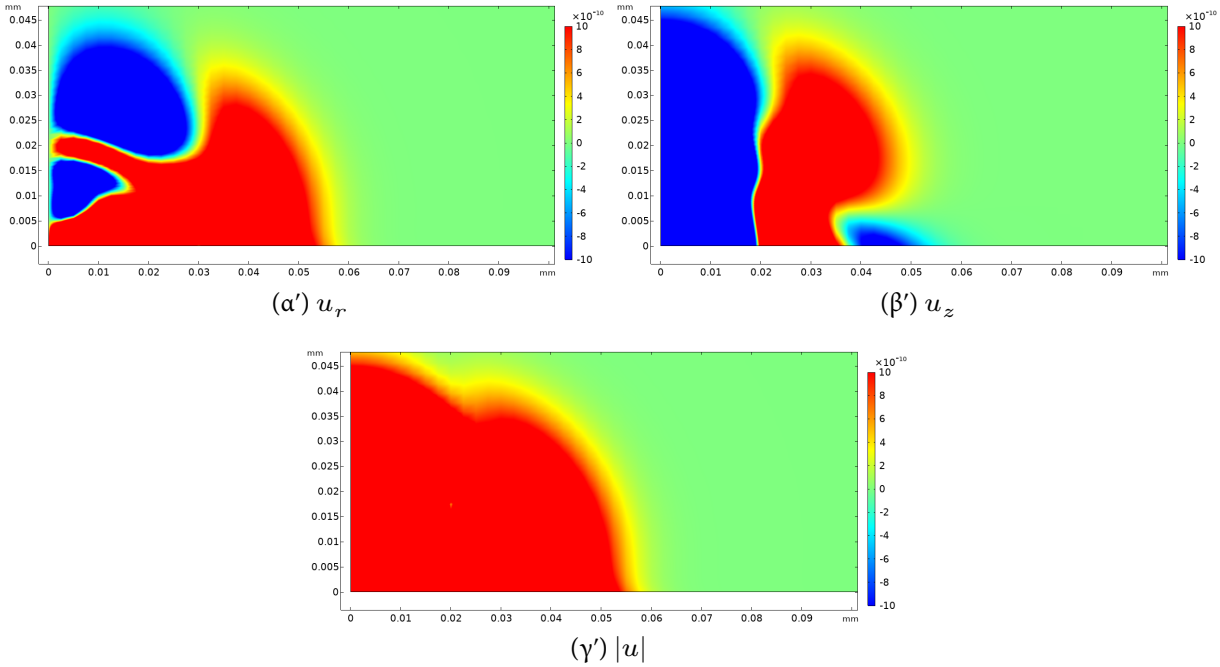
Η απόδοση (εικόνα (2.17)) φαίνεται να είναι πολύ μεγαλύτερη των $\frac{pm}{mJ}$ που μέτρησαν οι [12] που ίσως οφείλεται στην γεωμετρία που είναι κυματοδηγός αλλά και στο ότι αγνοούνται οι απώλειες. Επιπλέον, φαίνεται ότι οι ταλαντώσεις γίνονται με συχνότητα της τάξης των $1MHz$.



Σχήμα 2.17: Μετατόπιση του σημείου στην άλλη άκρη του υλικού, $(0, 20)mm$

2.4.2 Διάμετρος 10μm

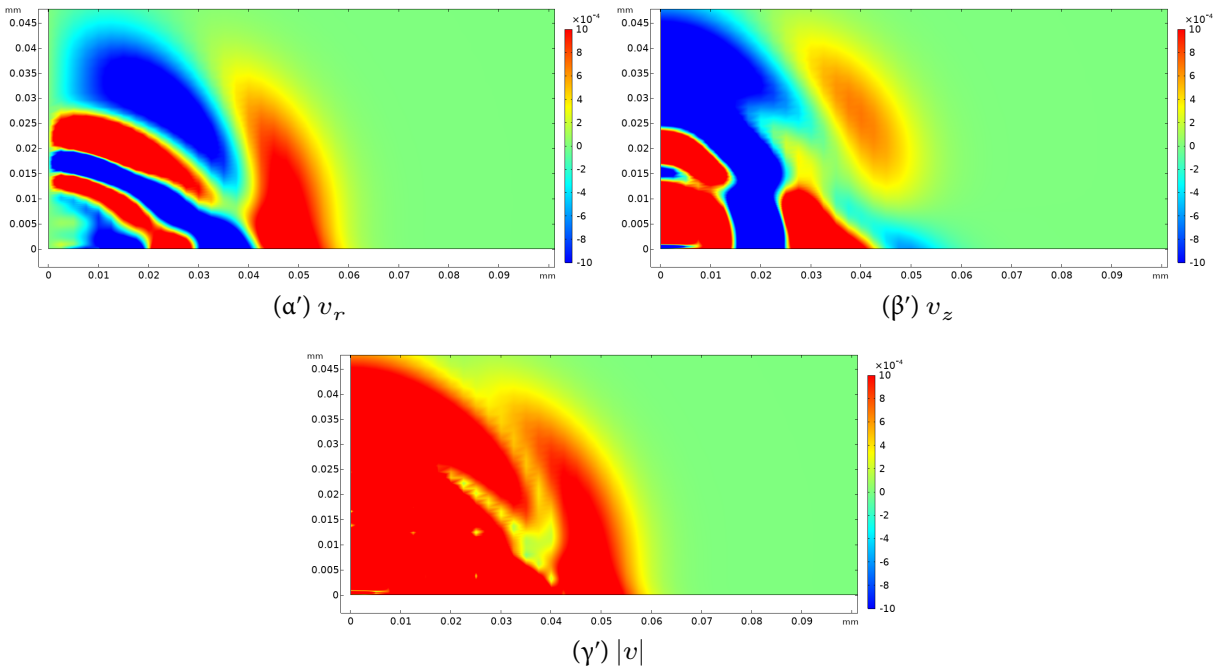
Προσομοιώνονται οι ίδιες συνθήκες με διάμετρο laser $10\mu m$. Η ενέργεια είναι 10^4 φορές μικρότερη και το πλέγμα παραμένει ίδιο. Στην περίπτωση αυτή το πάχος και το μήκος της θερμαινόμενης λωρίδας είναι συγκρίσιμο. Αναμένεται έτσι περιορισμός του κύματος, που ξεκινάει από την άκρη της λωρίδας, στην γωνία.



(α′) u_r (β′) u_z

(γ′) $|u|$

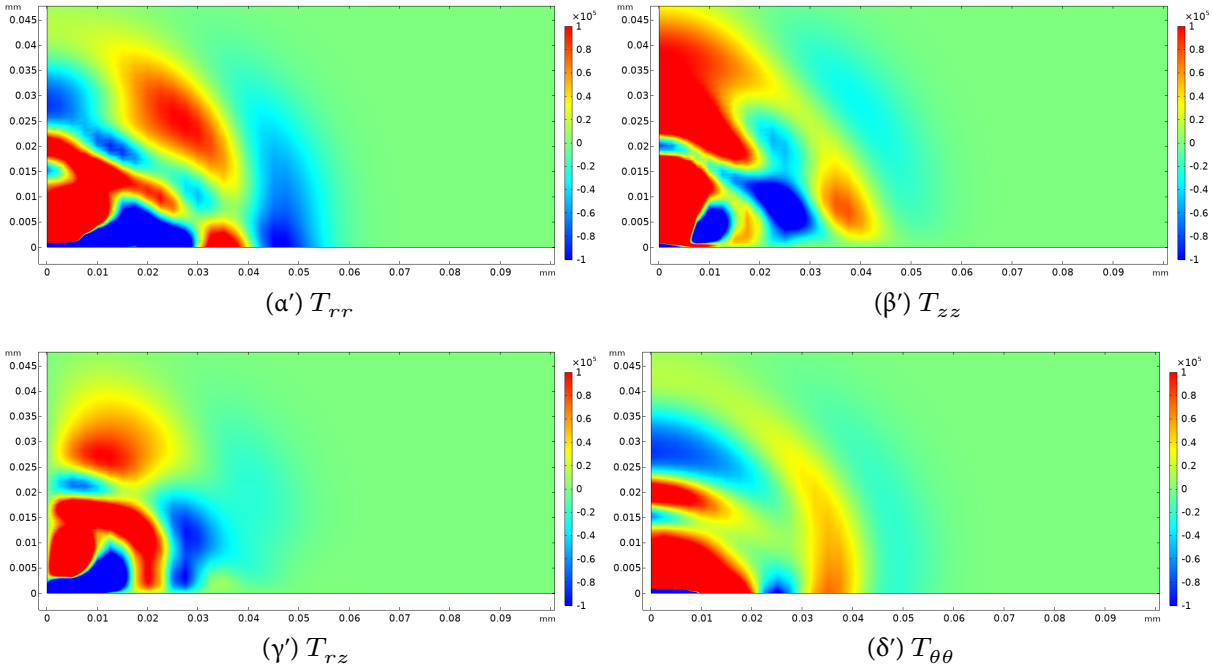
Σχήμα 2.18: Πεδία μετατοπίσεων για $t = 10ns$



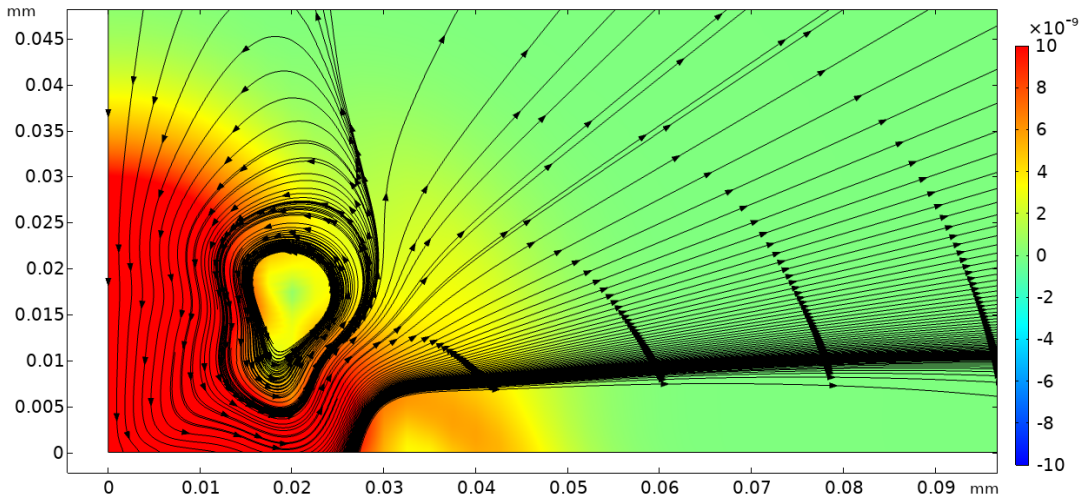
(α′) v_r (β′) v_z

(γ′) $|v|$

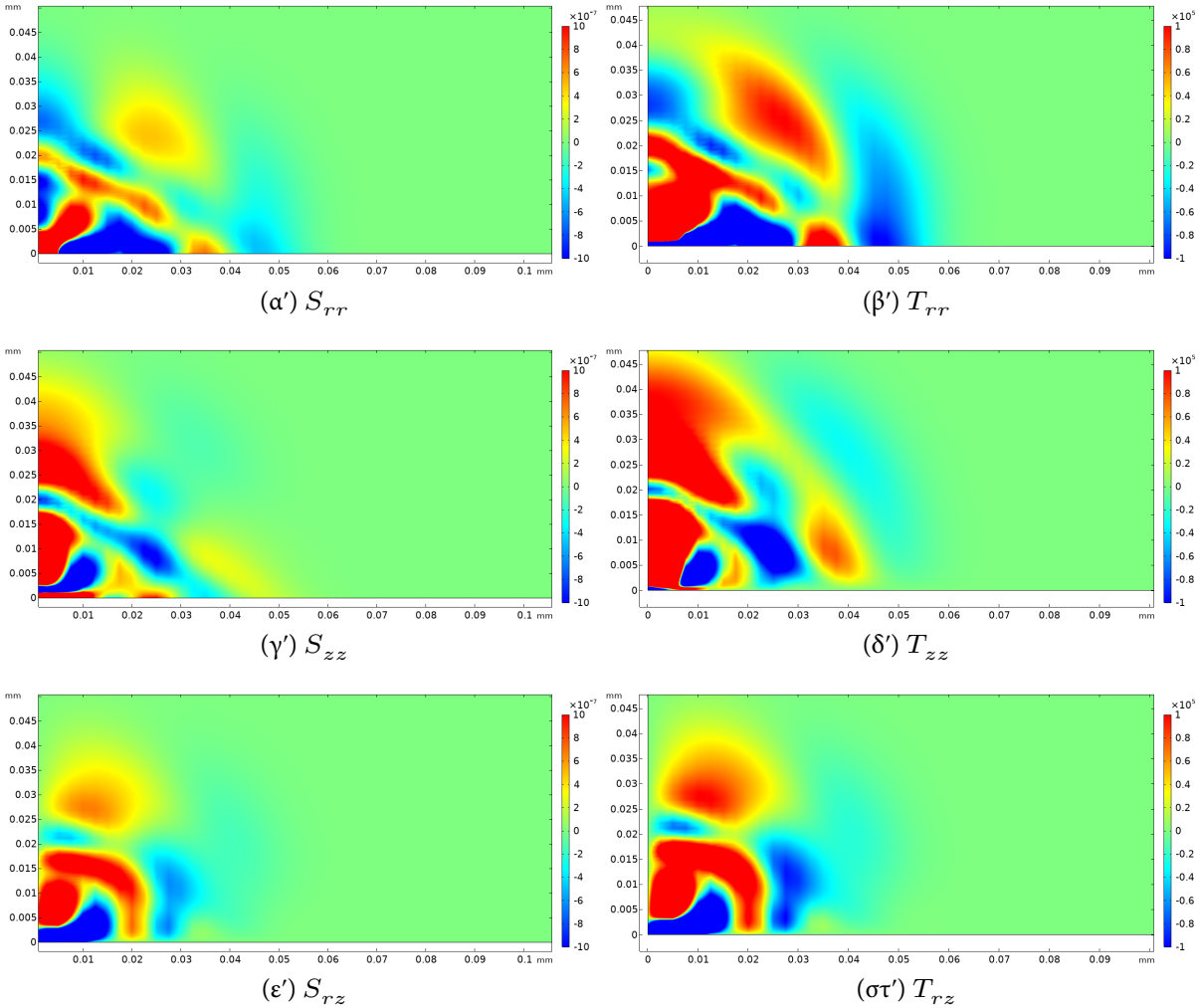
Σχήμα 2.19: Πεδία ταχυτήτων για $t = 10ns$



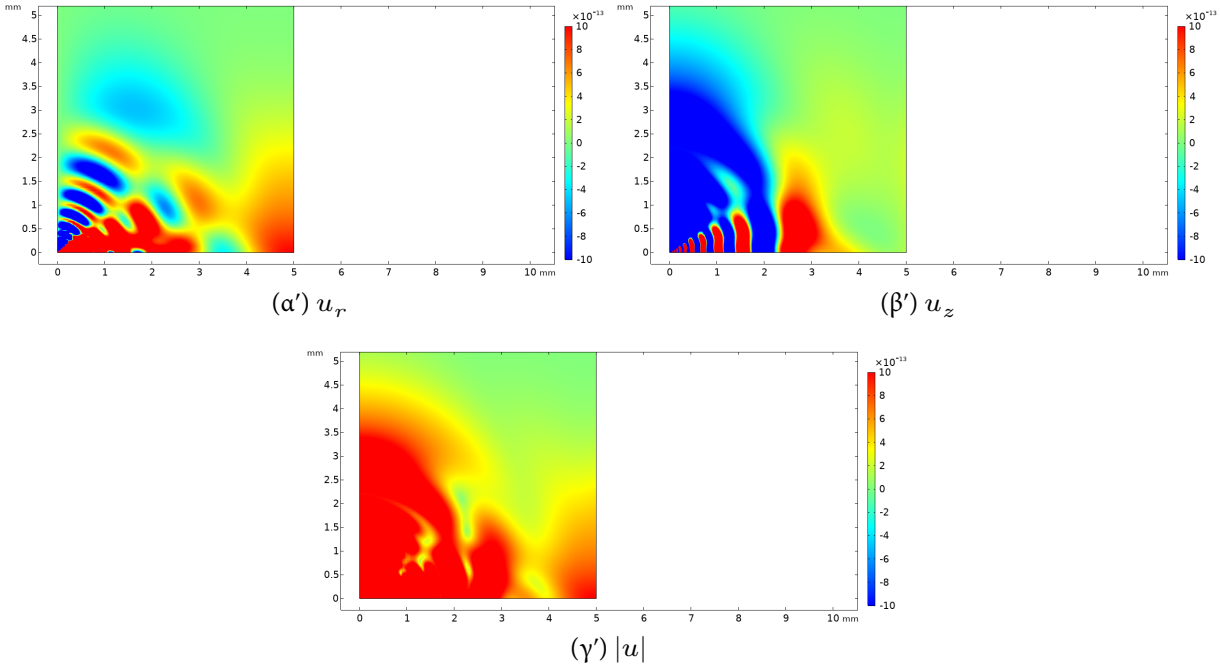
Σχήμα 2.20: Πεδία τάσεων για $t = 10ns$



Σχήμα 2.21: Ροϊκές γραμμές μετατόπισης στα $10ns$. Χρωματισμός με βάση το μέτρο της μετατόπισης.



Σχήμα 2.22: Παραμορφώσεις και αντίστοιχες τάσεις για $t = 10ns$



(α′) u_r (β′) u_z

(γ′) $|u|$

Σχήμα 2.23: Πεδία μετατοπίσεων για $t = 1\mu s$

Όπως φαίνεται από τις μετατοπίσεις και από τις ροϊκές γραμμές, η κίνηση του υλικού αποτελείται και πάλι από μια αριστερόστροφη δίνη. Οπότε η θεώρηση ότι οι μετατοπίσεις μοιάζουν με διάτμηση ισχύει ακόμη.

Από τις τάσεις T_{rr} βλέπουμε και πάλι την ίδια εικόνα της θλιβόμενης λωρίδας όμως το μήκος της δεν περιορίζεται στη διάμετρο του laser. Στις τάσεις T_{rr} παρατηρούμε ότι το υλικό πάνω από την λωρίδα δέχεται εφελκυστικές τάσεις ήδη από τα $10ns$ που διαφέρει από την προηγούμενη περίπτωση. Στην προηγούμενη περίπτωση οι εφελκυστικές T_{rr} τάσεις ξεκίνησαν από το όριο της λωρίδας και στη συνέχεια επεκτάθηκαν πάνω από αυτή όπως φαίνεται στην εικόνα (2.8). Η εξέλιξη του φαινομένου συνεχίζεται με έκλυση κυμάτων από την γωνία αυτή χωρίς την εμφάνιση περαιτέρω φαινομένων. Ο περιορισμένος χώρος δεν επιτρέπει την δημιουργία φαινομένων. Η επίδραση του περιορισμένου χώρου φαίνεται και στην σύγκριση (2.22) όπου η ακτινική παραμόρφωση S_{rr} δρα σε όλο το μήκος της λωρίδας και όχι μόνο στο άκρος της.

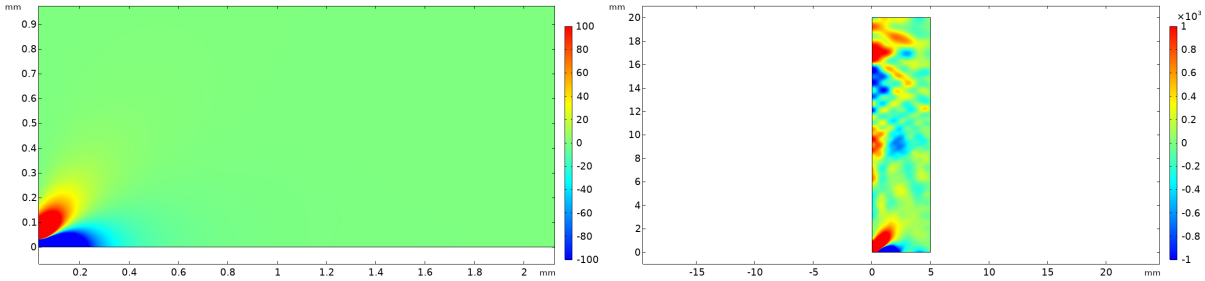
Ακόμη, επισημαίνεται ότι οι τάσεις T_{zz}, T_{rz} θα έπρεπε να είναι μηδενικές στην επιφάνεια. Ο λόγος που δεν είναι αποδίδεται σε αριθμητικά σφάλματα καθώς οι όροι που εμφανίζονται στις παραμορφώσεις είναι της μορφής $\frac{1}{r}$.

Στην εικόνα (2.24) παρουσιάζεται η μόνιμη κατάσταση των τάσεων στην γωνία $(0, 0)$. Η κατανομή τους στο χώρο παραμένει ως έχει και εξασθενεί με το πέρασμα του χώρου. Από την σύγκριση των λύσεων φαίνεται ότι με την αλλαγή του μήκους της λωρίδας (μέσω της διαμέτρου laser) δεν επηρεάζεται η μόνιμη κατάσταση του φαινόμενου. Οι αλλαγές παρατηρούνται μόνο στην μεταβατική κατάσταση που αφορά την μετάδοση της πληροφορίας από το ένα άκρο της λωρίδας στο άλλο. Έτσι, η μεταβατική κατάσταση του φαινομένου διαρκεί λιγότερο ή περισσότερο σε αντιστοιχία με το μήκος της.

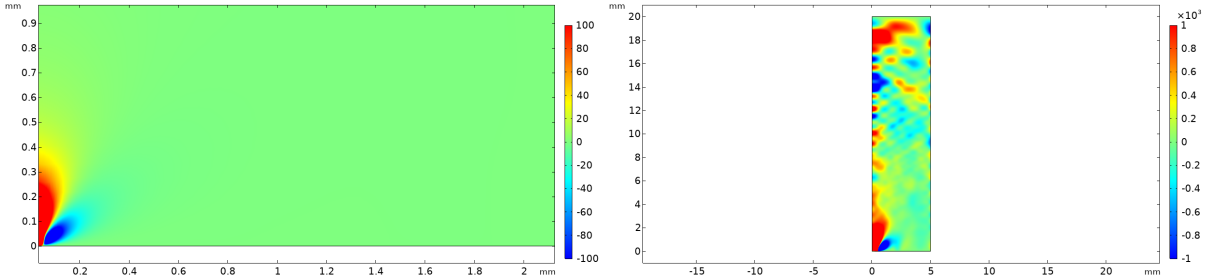
Οι παραμορφώσεις φαίνονται στην εικόνα (2.25). Όμοια κατάσταση εμφανίζεται και στην περίπτωση μικρότερης διαμέτρου ωστόσο επιλέγονται αυτά της μεγαλύτερης λόγω μικρότερων

σφαλμάτων. Είναι εμφανής η ύπαρξη λοβών.

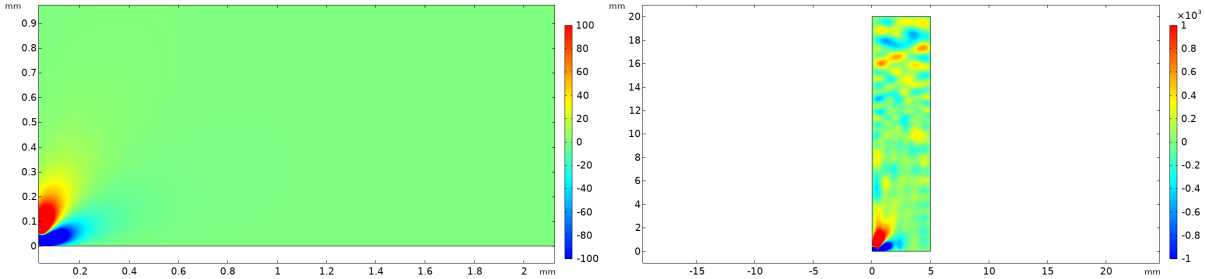
Τα πεδία αυτά αντιστοιχούν στις αντιδράσεις και παραμορφώσεις που δημιουργεί η ύπαρξη της δίνης. Έτσι όλο το φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά ως η αντίδραση του υλικού στον στροβιλισμό που δημιουργεί η θέρμανση και στην έκλυση κυμάτων μέχρι να φτάσει στην μόνιμη κατάσταση η δίνη αυτή. Ο σχηματισμός της δίνης ξεκινάει από το άκρο της λωρίδας.



(α′) T_{rr},$d = 10\mu m$ (β′) T_{rr},$d = 1mm$

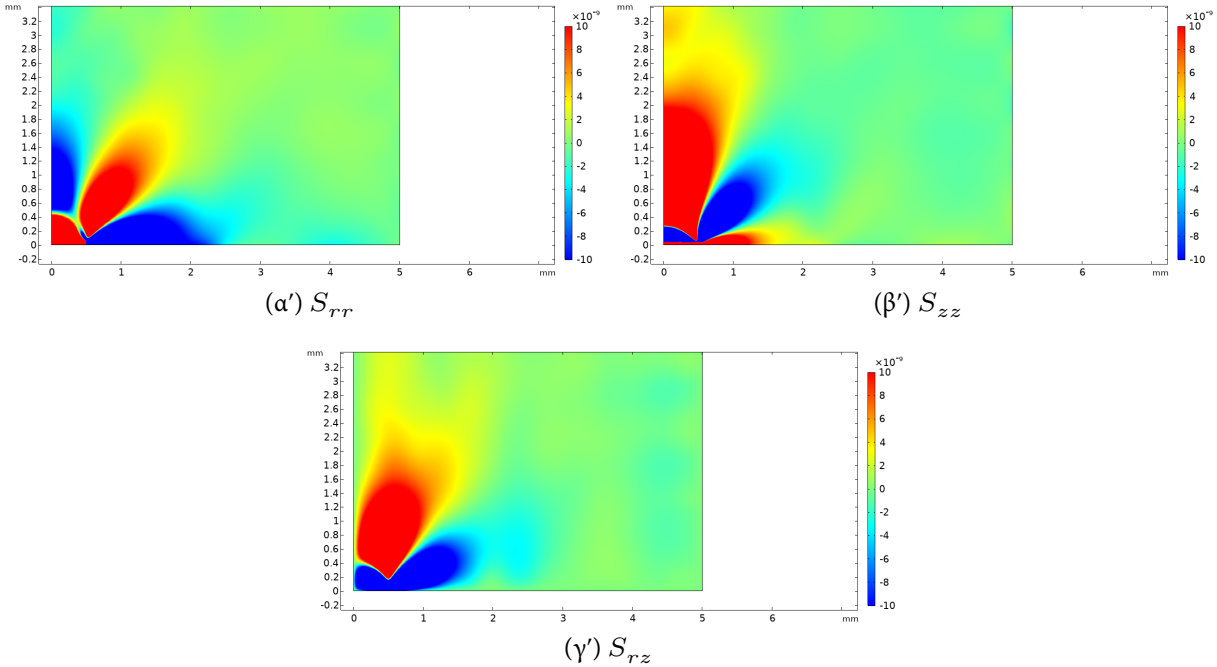


(γ′) T_{zz},$d = 10\mu m$ (δ′) T_{zz},$d = 1mm$

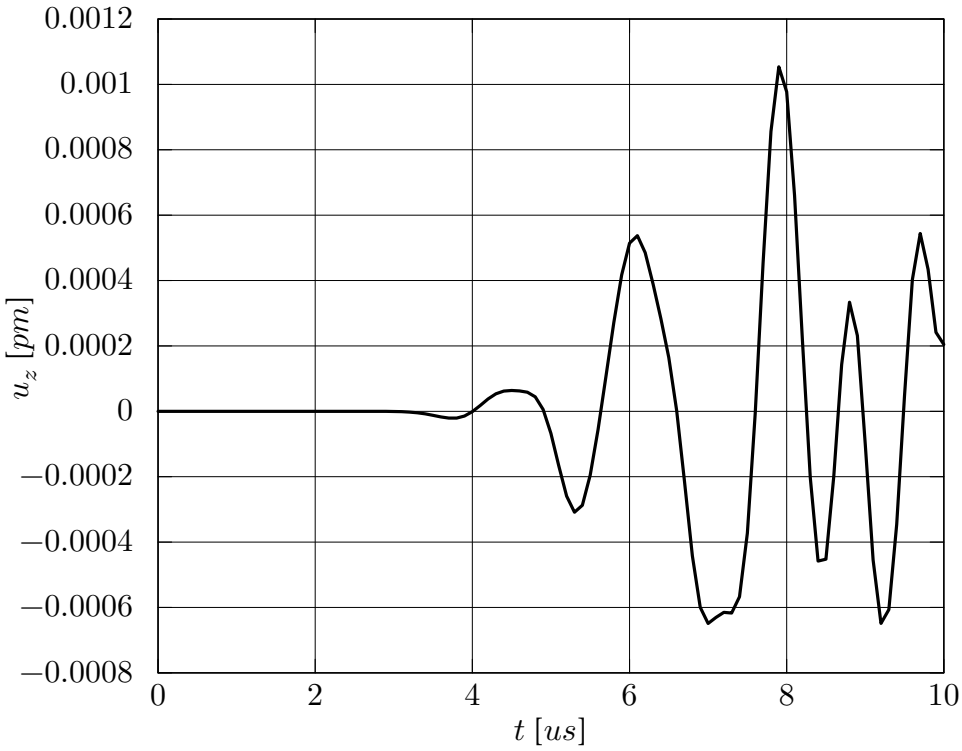


(ε′) T_{rz},$d = 10\mu m$ (στ′) T_{rz},$d = 1mm$

Σχήμα 2.24: Σύγκριση τασικών πεδίων των δυο περιπτώσεων στη μόνιμη κατάσταση, $t = 10\mu s$



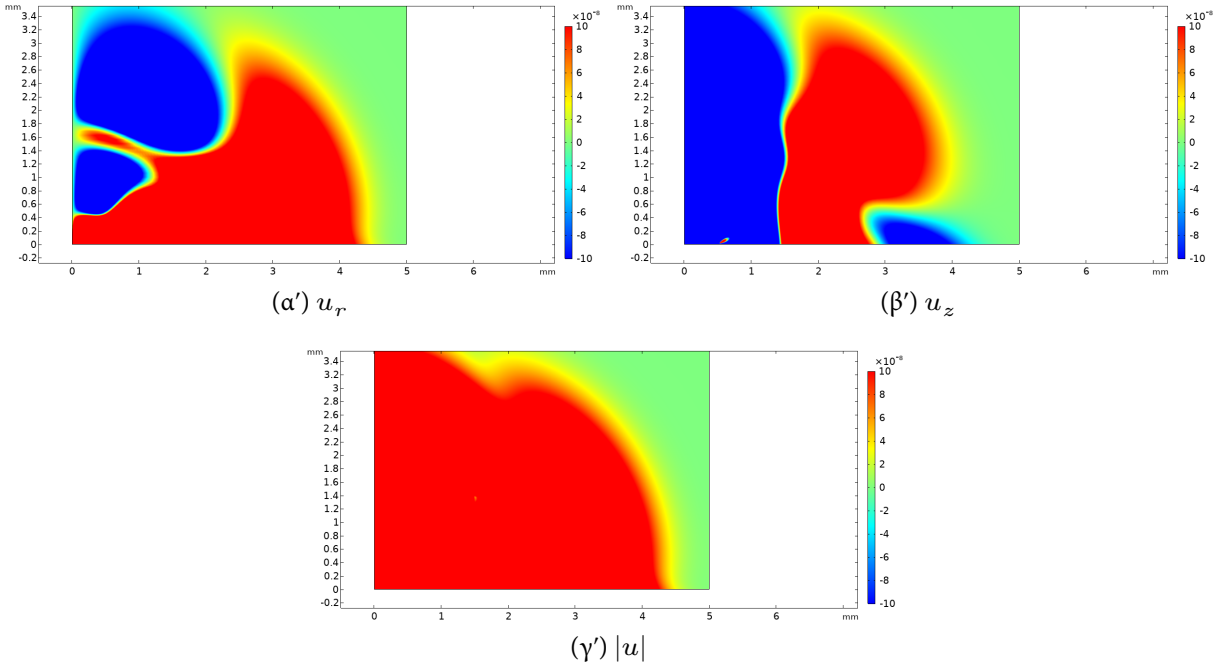
Σχήμα 2.25: Πεδία παραμορφώσεων για $t = 10\mu s$, $d = 1mm$



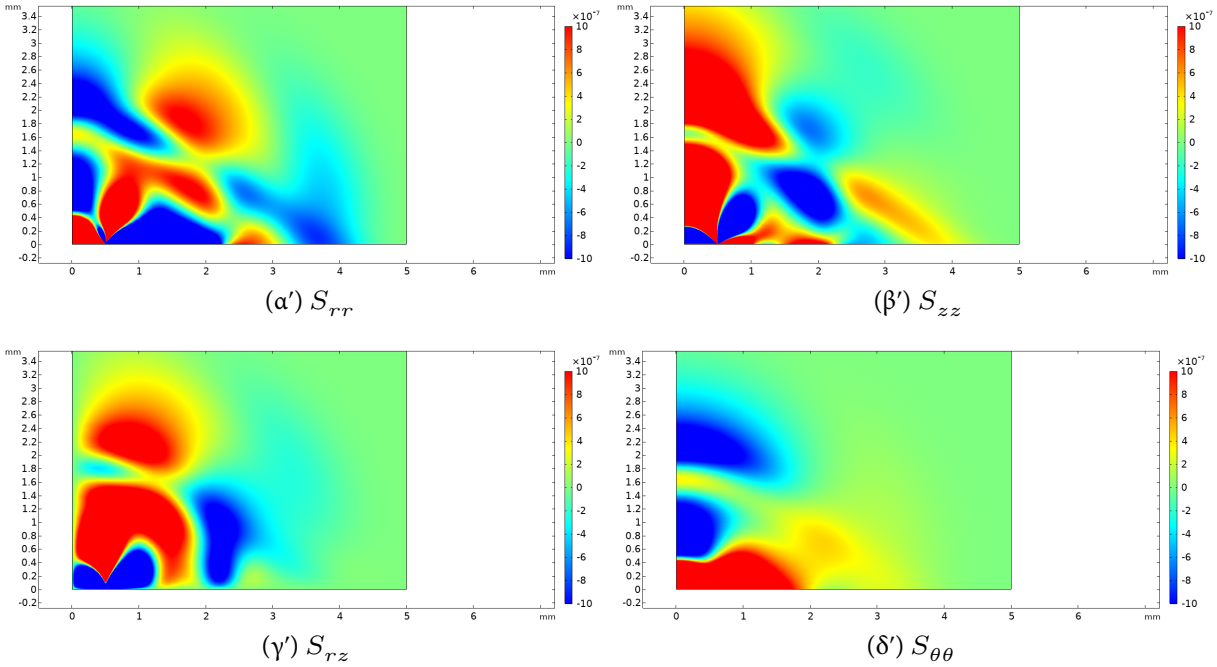
Σχήμα 2.26: Μετατόπιση του σημείου στην άλλη άκρη του υλικού, $(0, 20)mm$

2.4.3 Παλμός 400ns

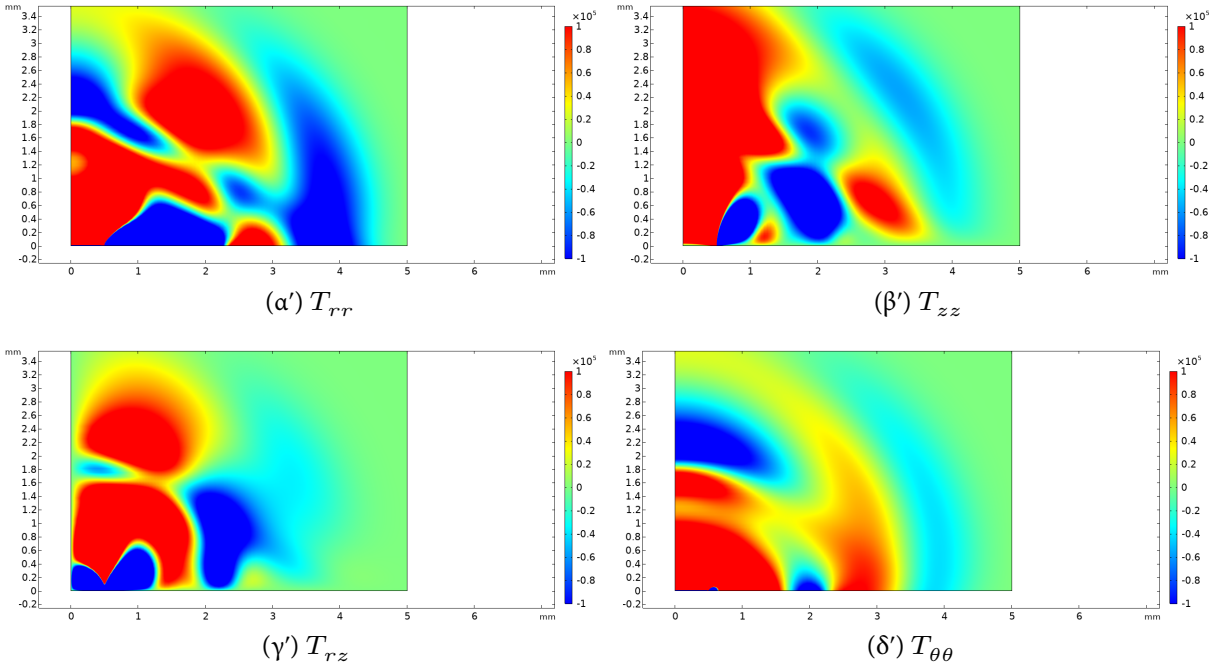
Στην συνέχεια εξετάζεται η επίδραση του χρόνου παλμού. Τίθεται $t_p = 400ns$ και διατηρούνται όλα τα υπόλοιπα μεγέθη σταθερά. Προσομοιώνεται η ακτίνα $1mm$ λόγω καλύτερης αριθμητικής συμπεριφοράς. Αναμένεται αύξηση της θερμοκρασίας επειδή εναποτίθεται περισσότερη ενέργεια και μείωση της συχνότητας των κυμάτων αφού η διέγερση είναι πιο αργή.



Σχήμα 2.27: Πεδία μετατοπίσεων για $t = 800ns$

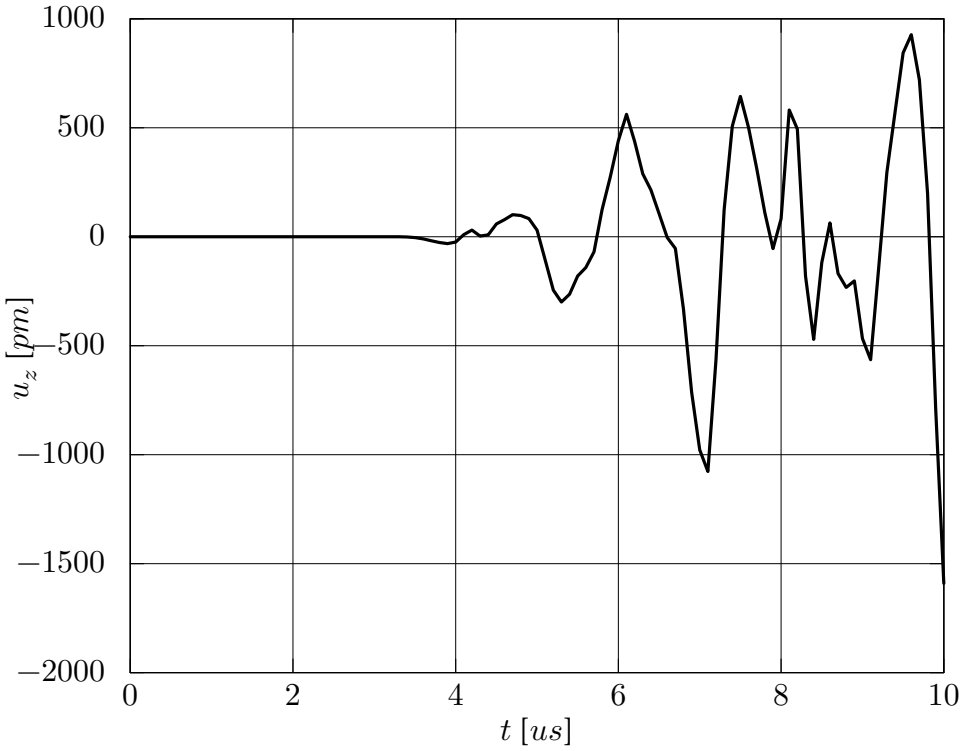


Σχήμα 2.28: Πεδία παραμορφώσεων για $t = 800ns$



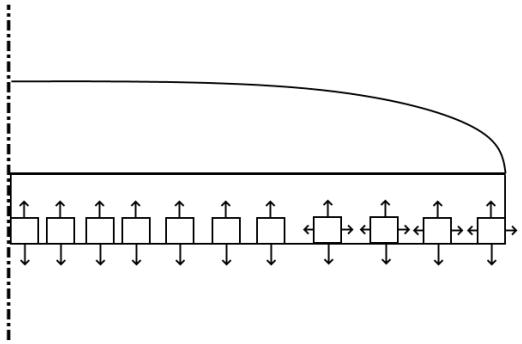
Σχήμα 2.29: Πεδία τάσεων για $t = 800ns$

Στα $800ns$ το κύμα βρίσκεται πριν την ανάκλασή του στο εξωτερικό τοίχωμα. Συγκριτικά με τις προηγούμενες περιπτώσεις (εικόνα (2.9), εικόνα (2.23)), παρατηρούμε ότι οι μετατοπίσεις παρουσιάζουν λιγότερες κυματώσεις. Αυτό σημαίνει ότι η συχνότητα των κυμάτων που παράγονται είναι χαμηλότερη όπως και αναμενόταν.

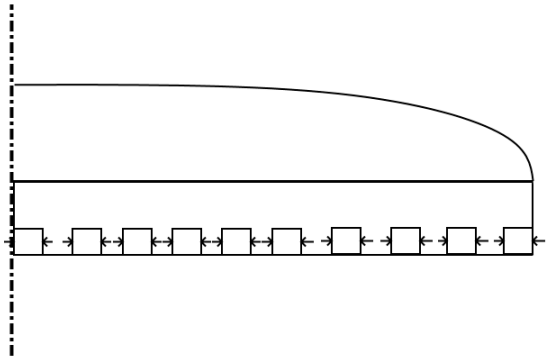


Σχήμα 2.30: Μετατόπιση του σημείου στην άλλη άκρη του υλικού, $(0, 20)mm$

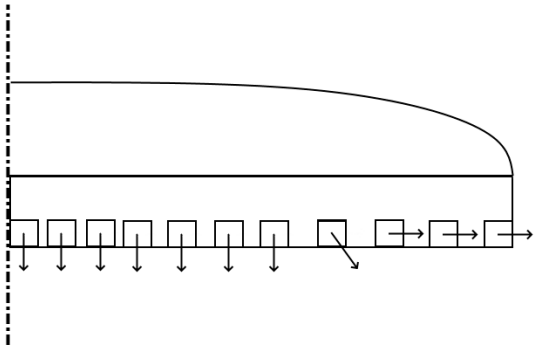
2.5 Συμπεράσματα



(α′) Αρχικές παραμορφώσεις



(β′) Αρχικές τάσεις



(γ′) Αρχικές μετατοπίσεις

Σχήμα 2.31: Αρχική κατάσταση του θερμαινόμενου δίσκου

Κατά την προσομοίωση του προβλήματος, έγινε σαφής η επίδραση της θερμότητας στην δημιουργία κίνησης του σωματιδίου. Παράγεται μια αριστερόστροφη δίνη που παραμένει ενεργή μέχρις ότου να εξασθενήσει. Σε κάθε περίπτωση η δίνη που απομένει μετά από τα μεταβατικά φαινόμενα είναι η ίδια, που σημαίνει ότι η δημιουργία της οφείλεται στην γεωμετρία του προβλήματος. Το συμπέρασμα αυτό στηρίζει η εικόνα (2.36) όπου η ποιοτική κατάσταση είναι ίδια και μεταβάλλεται ελάχιστα για την περίπτωση μικρής διαμέτρου.

Η μεταβατική κατάσταση χαρακτηρίζεται από την θλιβόμενη λωρίδα που αναφέρθηκε παραπάνω. Ο δίσκος αυτός δέχεται όλη τη θερμότητα και σε αυτόν περιορίζεται η γέννεση των μετατοπίσεων. Η λειτουργία του χωρίζεται στο μόνιμο και στο μεταβατικό μέρος. Στο μεταβατικό μέρος, η παραμορφωσιακή του κατάσταση είναι αρκετά απλή και μπορεί να αποτυπωθεί όπως στην εικόνα (2.34). Αρχικά, ο δίσκος διαστέλλεται κάθετα στην επιφάνεια, και χωρίς να εμποδίζεται, μετατοπίζεται κάθετα. Το άκρο του $(\frac{d}{2}, 0)$ όμως εμποδίζεται με αποτέλεσμα να μην επιτρέπεται η ακτινική του παραμόρφωση. Ως αποτέλεσμα, ο δίσκος συμπιέζεται με σταθερή ακτινική τάση (βλέπε και εικόνα (2.33)). Στη συνέχεια, το άκρο του αρχίζει να κινείται ακτινικά ανακουφίζοντας τις τάσεις στο σημείο και επιτρέποντας στο υλικό να διασταλεί. Η κίνηση του άκρου ακτινικά και του δίσκου αξονικά, είναι ο τρόπος με τον οποίο γεννάται η δίνη. Η έναρξη της κίνησης είναι απλή και παρουσιάζεται συνοπτικά στην εικόνα (2.31).

Αποτελέσματα που στηρίζουν την περιγραφή αυτή είναι η εικόνα (2.35) όπου φαίνεται ότι η ακτινική τάση ακολουθεί την θερμοκρασία στο άκρο του δίσκου χρονικά και επιβεβαιώνει ότι η ακτινική συμπίεση είναι αποτέλεσμα της θερμοκρασίας.

Σημειώνεται ότι, η κίνηση του υλικού ξεκινάει από την άκρη του δίσκου και ότι η χρονικότητα του παλμού καθώς και η διάμετρος είναι παράμετροι που φάνηκε ότι επηρεάζουν την συχνότητα των κυμάτων που παράγονται. Με μεγαλύτερη διάμετρο, η κίνηση απαιτεί χρόνο ώστε να μεταδοθεί σε όλο το δίσκο και έτσι δημιουργούνται μεγαλύτερα μέτωπα που διαδίδονται με μικρότερη συχνότητα. Με μικρότερη διάμετρο, η κίνηση μεταδίδεται στιγμιαία και έτσι η χρονικότητα του παλμού του laser μεταφέρεται αποδοτικά στην χρονικότητα της παλλόμενης μάζας και παράγονται ταλαντώσεις μικρότερων μετώπων και άρα μεγαλύτερης συχνότητας. Το συμπέρασμα αυτό στηρίζει και η εργασία [13] όπου παρουσιάζει αποτελέσματα συχνότητας με μεταβολή διαμέτρου σε ένα μεγάλο εύρος.

Επιπλέον παρατήρηση είναι ότι στο πρόβλημά μας η τελική συχνότητα που παράγεται είναι σχεδόν σταθερή (βλ. εικόνα (2.17),(2.26), (2.30)). Αυτό οφείλεται στο ότι η γεωμετρία είναι αρκετά μικρή και οι ανακλάσεις τελικά οδηγούν σε μεταφορά κυμάτων με τη μορφή κυματοδηγών. Οι ανακλάσεις οδηγούν στην δημιουργία στάσιμων κυμάτων που περιορίζει τη συχνότητα σε συγκεκριμένες τιμές. Το συμπέρασμα αυτό στηρίζεται από τα συμπληρωματικά βίντεο της προσομοίωσης όπου τα αρχικά μέτωπα αλληλεπιδρούν και απαλείφονται, αφήνοντας τις ίδιες ταλαντώσεις σε όλες τις περιπτώσεις. Ιδιαίτερα εμφανές είναι στο βίντεο της προσομοίωσης των ταχυτήτων v_z.

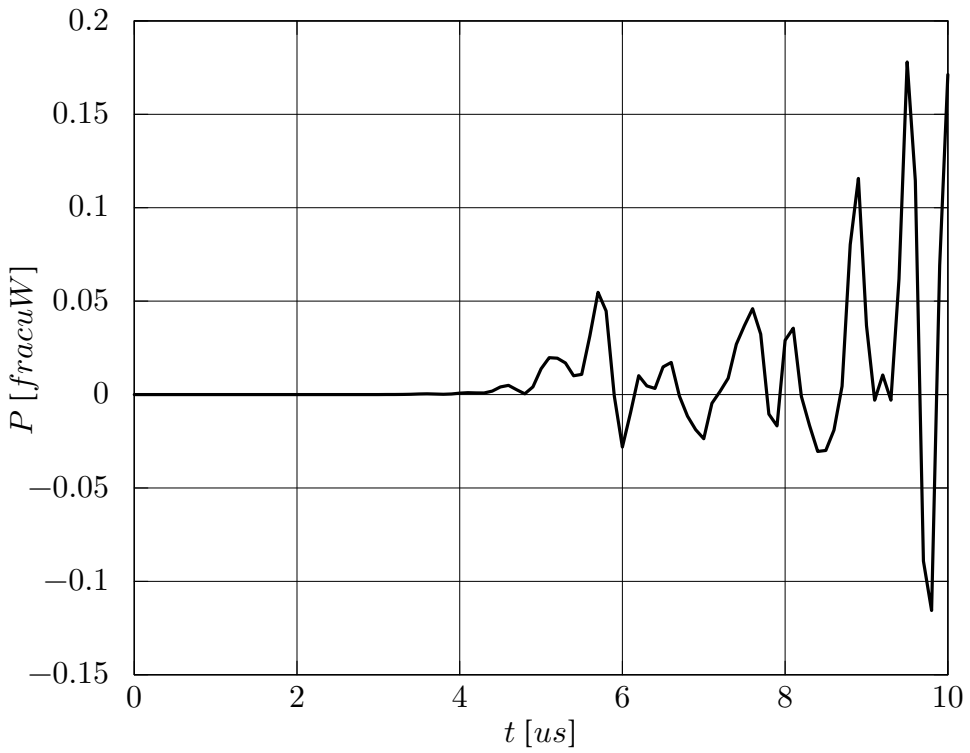
Στην γενικότερη περίπτωση, οι ποιοτικές παράμετροι που φαίνεται να επηρεάζουν το πρόβλημα είναι ο χρόνος, t_p, λόγος επιμήκους της λωρίδας/δίσκου:

$$L = \frac{\sqrt{\alpha t_p}}{d} \tag{2.23}$$

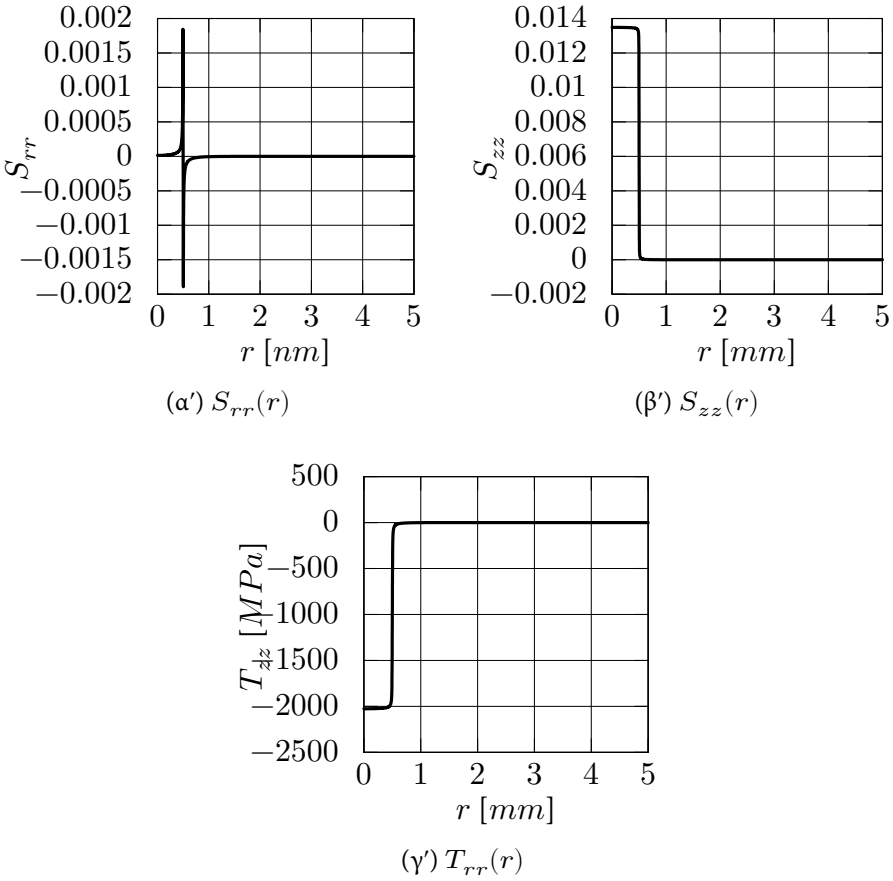
Όπως εξηγήθηκε, ο λόγος επιμήκους επηρεάζει την μεταβατική κατάσταση. Ακόμη, φάνηκε ότι η συμπερίληψη της θερμότητας ήταν σημαντική επειδή καθορίζει την μορφή της T_{rr} στην αρχή της διέγερσης και έδειξε εν γένει ότι το προφίλ θέρμανσης διαφέρει από το προφίλ ισχύος του laser.

Τέλος, αναφέρεται ότι η απόδοση και τελικά η μεταφερόμενη ενέργεια είναι πολύ μικρή όπως φαίνεται στην εικόνα (2.32) ακόμη και χωρίς απώλειες. Το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιήθηκε στο πείραμα όπου λήφθηκε υπόψιν στο ότι απαιτείται υψηλή ενέργεια παλμού. Ο υπολογισμός έγινε με επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανύσματος Poynting [2]:

$$p = -v_z \cdot T_{zz} \tag{2.24}$$



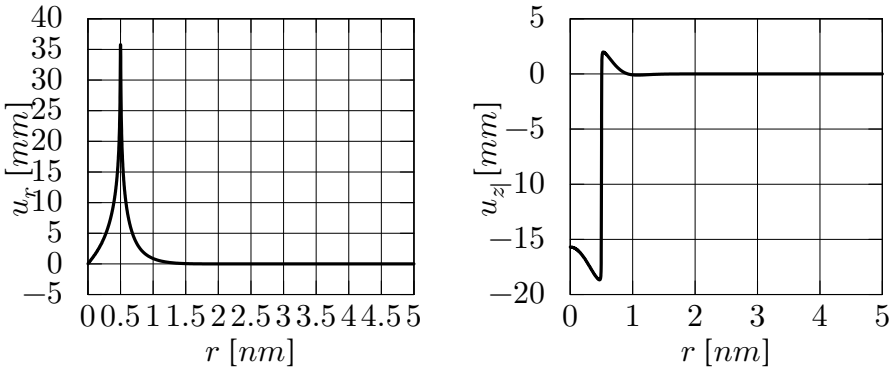
Σχήμα 2.32: Ισχύς που διαδίδεται από την επιφάνεια $z = 19mm$ στην περίπτωση $d = 1mm$, $t_p = 4ns$



(α′) $S_{rr}(r)$ (β′) $S_{zz}(r)$

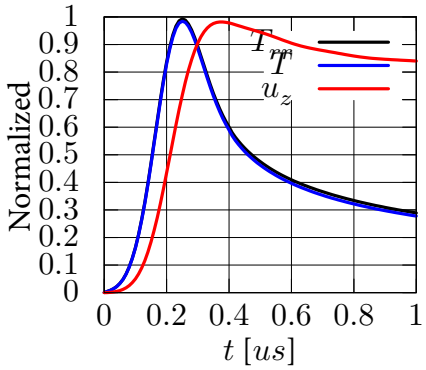
(γ′) $T_{rr}(r)$

Σχήμα 2.33: Τάσεις-παραμορφώσεις της θερμαινόμενης επιφάνειας για $d = 1mm$, $t_p = 400ns$, την χρονική στιγμή $t = 100ns$

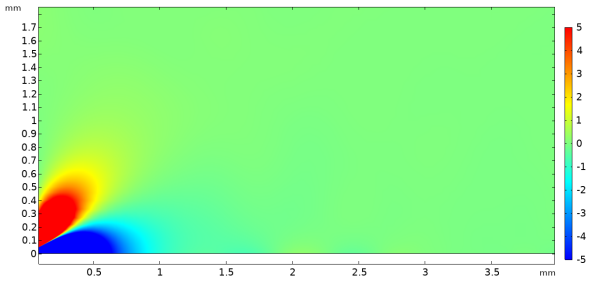


(α′) $u_r(r)$ (β′) $u_z(r)$

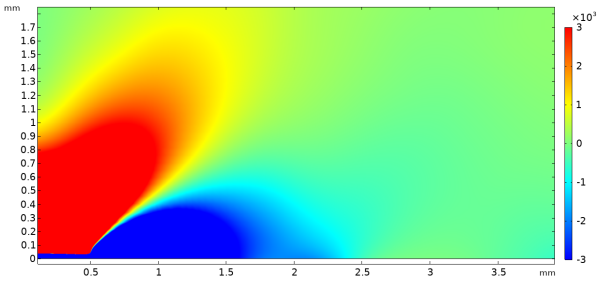
Σχήμα 2.34: Μετατοπίσεις θερμαινόμενης λωρίδας για $d = 1mm$, $t_p = 400ns$, την χρονική στιγμή $t = 100ns$



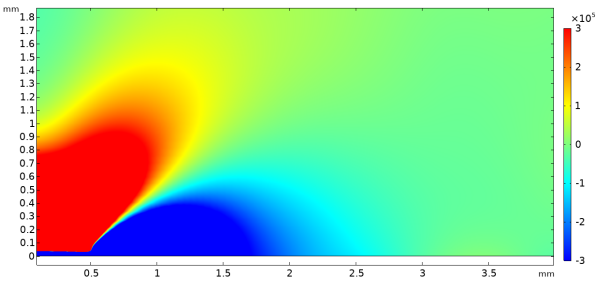
Σχήμα 2.35: Εξέλιξη (κανονικοποιημένων) πεδίων στην περίπτωση παλμού $400ns$, στο άκρο της λωρίδας



(α′) T_{rr}. για $d = 10\mu m,\ t_p = 4ns$



(β′) T_{rr}. για $d = 1mm,\ t_p = 4ns$



(γ′) T_{rr}, για $d = 1mm,\ t_p = 400ns$

Σχήμα 2.36: Σύγκριση πεδίου τάσεων για $t = 10\mu s$

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές σε ΜΚΕ

Τα laser έχουν χρησιμοποιηθεί για τον μη καταστροφικό έλεγχο υλικών [14]. Η εφαρμογή τους στην βιομηχανία είναι δυνατή στο στάδιο της παραγωγής προϊόντων που ήδη απαιτούν συγκολλήσεις με laser ή σε βιομηχανίες ημιαγωγών όπου χρησιμοποιείται λιθογραφία με laser. Έτσι, στις βιομηχανίες υπάρχει ήδη διαθέσιμη πηγή laser που θα μπορούσε να συνδυαστεί με μετρητικές τεχνικές για τον ποιοτικό έλεγχο προϊόντων.

Στις περιπτώσεις αυτές, το laser μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πηγή υπερήχων και με την χρήση μετρητικών οργάνων να γίνουν έλεγχοι όπως μέτρηση πάχους φίλμ/ελάσματος, εύρεση ρωγμών μέσω ανακλάσεων και υπολογισμός ιδιοτήτων υλικού όπως μέτρο ελαστικότητας. Οι οπτικές ίνες παρέχουν την απαραίτητη ευελιξία στις πηγές laser.

Οι μετρήσεις των υπερήχων μπορούν να γίνουν με όργανα πιεζοηλεκτρικών καψών όπου υπάρχει ήδη η τεχνογνωσία. Εναλλακτικές αποτελούν οι μετρήσεις με EMATS που χρησιμοποιούν την αγωγιμότητα των υλικών για την μετατροπή ηχητικής ενέργειας σε σήμα και η συμβολλομετρία όπου μετρούνται απευθείας οι μετατοπίσεις της επιφάνειας. Η συμβολλομετρία που ανήκει στις οπτικές μεθόδους εφαρμόζεται επίσης συχνά οπότε υπάρχει τεχνογνωσία και σε αυτή τη μέθοδο. Τα EMATS είναι σχετικά νέα μέθοδος όμως η απλότητα της διάταξης τα καθιστά ελκυστικά. Τέλος, ανίχνευση κυμάτων μπορεί να γίνει και με την μέθοδο MDL που εφαρμόζεται στα μαγνητικά υλικά. Με την μέθοδο αυτή μπορεί επιπλέον να γίνει προσδιορισμός των τάσεων (παραμενουσών και μη).

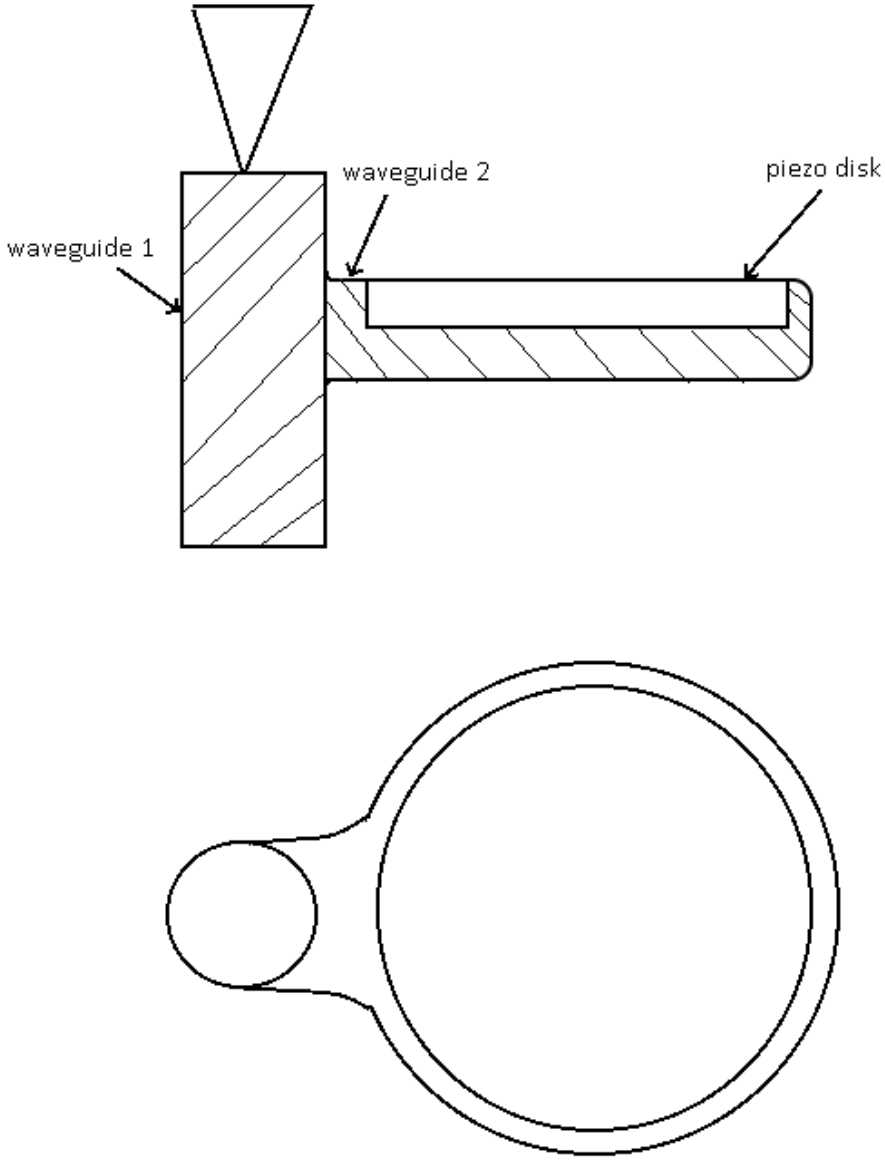
Στο κεφάλαιο αυτό θα προταθούν μετρητικές διατάξεις που χρησιμοποιούν το φαινόμενο αυτό για τον μη καταστροφικό έλεγχο υλικών. Θα εξηγηθεί ο σκοπός τους ώστε να γίνει κατανοητό πότε μπορεί να χρησιμοποιηθούν. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν ο βαθμός απόδοσης μετατροπής της ενέργειας του laser σε ηχητική ενέργεια και από ηχητική ενέργεια σε ηλεκτρική (σήμα) ώστε να επιλέγεται laser με επαρκή ενέργεια παλμού για να παραχθεί σήμα με πλάτος πάνω από αυτό του θορύβου. Σε συνδυασμό με τον υπολογισμό των απωλειών λόγω μετάδοσης του ηχητικού κύματος στο υλικό, η ενέργεια που φτάνει στην επιφάνεια μέτρησης είναι τελικά αυτή που θα μετατραπεί σε σήμα.

3.1 Πιεζοηλεκτρικές κάψες

Η μέθοδος αυτή είναι η πιο απλή. Οι κάψες αποτελούνται από κεραμικό υλικό με πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες που μέσω παραμόρφωσης εμφανίζουν ηλεκτρικό πεδίο. Σύνηθες υλικό είναι το κράμα PZT που σημαίνει μείγμα Pb, Zr, Ti, O. Το κεραμικό μέρος του υλικού αποτελείται από την ζιρκονία, τιτάνιο και οξυγόνο που είναι ένα κεραμικό ανισότροπο υλικό. Η ανισοτροπία συμβάλλει στην εμφάνιση του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου. Ο μόλυβδος χρησιμοποιείται ως συστατικό για να μειώνει την ευθραυστότητα του κεραμικού. Ο τρόπος που παράγονται αισθητήρες είναι με την εναπόθεση πάστας κονιάματος Pb-κεραμικού πάνω σε μια αγώγιμη επιφάνεια (όπως άργυρος) και στην συνέχεια θέρμανσής του ώστε να στερεοποιηθεί η πάστα. Ο μόλυβδος βοηθάει στην καλύτερη στερεοποίηση και αποτρέπει την δημιουργία ρωγμών κατά τη θέρμανση. Το αποτέλεσμα είναι ένας δίσκος με αγώγιμα μέτωπα που εμφανίζει τάση υπό παραμόρφωση.

Το πάχος του δίσκου είναι κρίσιμο μέγεθος στον προσδιορισμό της απόκρισής του στο πεδίο της συχνότητας. Τα εισερχόμενα κύματα ανακλώνται στο εσωτερικό του δίσκου. Με τις κατάλληλες διαστάσεις οι ανακλάσεις οδηγούν στην δημιουργία στάσιμου κύματος που ενισχύει το πλάτος του λαμβανόμενου σήματος. Ο συντονισμός αυτός εμφανίζεται σε ορισμένες συχνότητες και έτσι το πάχος του δισκίου καθορίζει την περιοχή συχνοτήτων για το οποίο οι μετρήσεις θα έχουν το μέγιστο πλάτος. Ο μέγιστος βαθμός απόδοσης των αισθητήρων είναι της τάξης του 50% και έτσι η ενέργεια που φτάνει στην επιφάνεια του πιεζοηλεκτρικού πρέπει να είναι αρκετή ώστε να διεγείρει το πιεζοηλεκτρικό. Μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι προσμετρά τις μεταβολές των τάσεων σε όλη την επιφάνεια του δισκίου και έτσι το σήμα έχει ολοκληρωτική μορφή χάνοντας σημειακή πληροφορία.

Για να έχουν οι μετρήσεις επαναληψιμότητα και να αυτοματοποιούνται προτείνεται η μέτρηση να γίνεται με τη χρήση ιδιοσυσκευής που θα στηρίζει το πιεζοηλεκτρικό στοιχείο πάνω στην επιφάνεια. Όπως φαίνεται στην εικόνα (3.1) η ιδιοσυκευή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως πηγή ακουστικών κυμάτων όπου θα δέχεται αντί του τεμαχίου το laser. Η μέθοδος αυτή βελτιώνει την επαναληψιμότητα επειδή το laser ακτινοβολεί συνεχώς την ίδια επιφάνεια. Επιπλέον, επιτρέπει την χρήση αυξημένης ενέργειας πέρα της ελαστικής περιοχής του υλικού για την δημιουργία ισχυρών παλμών χωρίς την καταστροφή της επιφάνειας του προϊόντος. Η συσκευή απαιτεί μια επιφάνεια ακτινοβόλησης με laser, 2 κυματοδηγούς για μετάδοση από το laser στο υλικό και από το υλικό στον αισθητήρα και 1 επιφάνεια σύζευξης του υλικού με την διάταξη.



Σχήμα 3.1: Απλουστευτικό σκαρίφημα της διάταξης

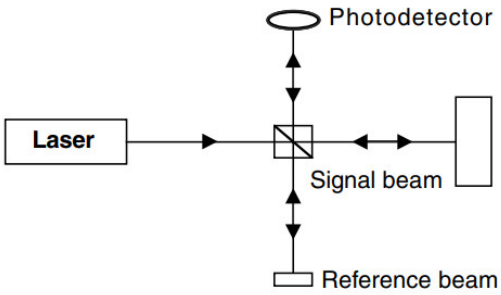
Οι βασικές αρχές λειτουργίας της συσκευής είναι:

1. Απορροφητική επιφάνεια (ή στρώση) στο μήκος κύματος του laser για μεγιστοποίηση της διέγερσης
2. (Προαιρετικά) Θυσιαζόμενη επιφάνεια ακτινοβόλησης laser που επιτρέπει την λειτουργία σε εξάχνωση, ακόμη μεγαλύτερη διέγερση
3. Διαστάσεις κυματαγωγού επιφάνειας ακτινοβόλησης σε υλικό που διευκολύνουν την μετάδοση υπερήχων συγκεκριμένης συχνότητας
4. Διαστάσεις κυματαγωγού επιφάνειας υλικού σε πιεζοηλεκτρικό αισθητήρα που διευκολύνουν επίσης την μετάδοση υπερήχων

5. Χρήση υλικού με παρεμφερείς ιδιότητες με το μετρούμενο υλικό για μείωση της διάθλασης και ενίσχυση της ακουστικής σύζευξης

6. Καλή επιφάνεια σύνδεσης διάταξης με το υλικό που επιτρέπει την ακουστική σύζευξη

3.2 Συμβολομετρία



Σχήμα 3.2: Διάταξη συμβολομετρίας Michelson

Η συμβολομετρία είναι οπτική μέθοδος προσδιορισμού των μετατοπίσεων ενός υλικού. Η ενέργεια του κύματος πρέπει να είναι αρκετή ώστε να παράγει μετατοπίσεις της τάξης των nm στην μετρούμενη επιφάνεια. Λόγω της φύσης της μεθόδου εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπου η επιφάνεια είναι σχετικά λεία και επίπεδη.

Η αρχή λειτουργίας της βασίζεται στην χρήση της μετατόπισης για την μεταβολή της ισχύος μιας οπτικής δέσμης. Η μετατόπιση μεταβάλλει άμεσα το μήκος που πρέπει να διανύσει μια ακτίνα. Αν η ακτίνα ήταν στάσιμο κύμα τότε η μετατόπιση αυτή θα οδηγούσε σε άμεση μεταβολή του πλάτους της φωτεινότητας. Για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα απαιτούνται δυο δέσμες που θα συμβάλλουν η μια στην άλλη. Συμβολόμετρα που ακολουθούν την αρχή αυτή δημιουργήθηκαν πρώτα από τον Michelson και φέρουν το όνομά του.

Όπως φαίνεται στην εικόνα (3.2), η συμβολή επιτυγχάνεται από τον επανασυνδυασμό των ακτίνων στον ημιπερατό καθρέφτη. Η διαδρομή που διανύει η μια ακτίνα είναι σταθερή ενώ στην δεύτερη η διαδρομή μεταβάλλεται λόγω της μετατόπισης. Αν L_1 είναι το μήκος της σταθερής διαδρομής και $L_2+2u(t)$ το μήκος της δεύτερης (u η μετατόπιση) τότε τα πλάτη του ηλεκτρικού πεδίου του φωτός θα είναι:

$$E_1 = a_1 \exp\{j[\omega_{opt}t - k_{opt}L_1]\} \tag{3.1}$$
$$E_2 = a_2 \exp\{j[\omega_{opt}t - k_{opt}(L_2 + 2u(t))]\} \tag{3.2}$$

και το τελικό πεδίο θα είναι το άθροισμα τους.

Η ισχύς που θα μετράει ο φωτοδέκτης θα είναι:

$$P = (E_1 + E_2)\overline{(E_1 + E_2)} = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2}\cos\big(k_{opt}(L_1 - L_2) - 2k_{opt}u(t)\big) \quad (3.3)$$

Η μετατόπιση εμφανίζεται στο συνημίτονο και επειδή οι μετατοπίσεις είναι μικρές ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\cos\left[k_{opt}(L_1 - L_2) - 2k_{opt}u(t)\right] &= cos\left[k_{opt}(L_1 - L_2)\right] \\ &+ cos'\left[k_{opt}(L_1 - L_2)\right]\left(k_{opt}(L_1 - L_2) - 2k_{opt}u(t)\right) + ...\end{aligned} \quad (3.4)$$

Επιλέγοντας $k_{opt}(L_1 - L_2) = \frac{\pi}{2}$ η έκφραση απλοποιείται και επιπλέον η ευαισθησία της έκφρασης ως προς το $u(t)$ αυξάνεται επειδή το συνημίτονο εμφανίζει μέγιστη παράγωγο στο σημείο αυτό. Η ισχύς τότε είναι της μορφής:

$$P = c_0 + c_1 u(t) \quad (3.5)$$

δηλαδή ανάλογη της μετατόπισης.

Ένας δεύτερος τρόπος μέτρησης βασίζεται στην καθυστέρηση της μια δέσμης σε σχέση με την άλλη. Η ανακλώμενη δέσμη διασπάται σε δυο σταθερές διαδρομές L_1 και L_2 όπου η L_1 είναι μεγαλύτερη της L_2. Όταν συντίθενται οι διαδρομές ξανά, η μεγαλύτερη διαδρομή φέρει φως από την μετατόπιση πριν από $\frac{L_1}{c}s$ ενώ η μικρότερη φέρει πληροφορία πριν από $\frac{L_2}{c}s$. Έτσι η διαφορά φάσης κατά την σύνθεση απέχει $\tau = \frac{L_1 - L_2}{c}s$.

Τα ηλεκτρικά πεδία που προστίθενται είναι τώρα:

$$E_1 = a_1 \exp\{j[\omega_{opt}t - k_{opt}(L_1 + 2u(t - \tau)]\} \quad (3.6)$$

$$E_2 = a_2 \exp\{j[\omega_{opt}t - k_{opt}(L_2 + 2u(t))]\} \quad (3.7)$$

και με παρόμοια ανάλυση η μετρούμενη ισχύς είναι ανάλογη της διαφοράς:

$$P \propto (u(t) - u(t - \tau)) \quad (3.8)$$

Έτσι, λαμβάνεται έμμεσα η παράγωγος της μετατόπισης και μπορεί να υπολογιστεί η μετατόπιση.

Στην βιβλιογραφία υπάρχουν και άλλες μέθοδοι που βελτιώνουν την ακρίβεια και εφαρμόζονται ακόμη και σε τραχειές επιφάνειες [15]. Επιπλέον, υπάρχουν προτάσεις για την απαλοιφή του θορύβου από μικρο μετατοπίσεις μέσω χρήσης δυο laser [15]. Σε κάθε περίπτωση, πρόκειται για μια μέθοδο που εφαρμόζεται κυρίως σε επίπεδες επιφάνειες που ανακλούν το φώς και είναι ακίνητες ή μετακινούνται με χαμηλές συχνότητες.

Ακόμη πιο ευέλικτες είναι οι μέθοδοι όπου εμφυτεύεται μια οπτική ίνα στο υλικό και μετράται η παραμόρφωση στην ίνα αυτή [16]. Το μετρητικό laser αντανακλάται διέρχεται σε αυτήν και ανακλάται στο ένα της άκρο. Στο διάστημα αυτό η ίνα παραμορφώνεται και έτσι εξέρχεται διαφορετικής φάσης φως από αυτήν. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετράει κύματα και μέσα στο υλικό.

3.3 EMATs

EMATs ή ElectroMagnetic Acoustic Transducers [17], είναι εναλλάκτες ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας σε ακουστική. Ο εξοπλισμός που απαιτούν είναι απλός και αποτελούνται από πηνία και μαγνήτες. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως πηγές και ως δέκτες ηχητικών κυμάτων. Λόγω του ότι βασίζονται στην αγωγιμότητα των υλικών, εφαρμόζονται στα μέταλλα.

Η αρχή λειτουργίας τους βασίζεται στην δύναμη Lorentz. Ως πηγή ακουστικών κυμάτων, ένα πηνίο δημιουργεί δινορρεύματα στο δοκίμιο τα οποία υπό την παρουσία μαγνητικού πεδίου ασκούν δυνάμεις Lorentz στα υλικά σημεία. Το προκύπτων πεδίο δυνάμεων διεγείρει την ελαστικότητα και οδηγεί στην παραγωγή κυμάτων. Ως δέκτες ακουστικών κυμάτων, οι ταχύτητες των υλικών σημείων όπου υπάρχουν υπέρηχοι μετατρέπονται σε ρεύματα υπό την παρουσία μαγνητικού πεδίου σύμφωνα με το φαινόμενο Hall. Τα ρεύματα αυτά με τη σειρά τους δημιουργούν μαγνητικό πεδίο το οποίο μετράται από το πηνίο.

Το σχήμα των πηνίων επηρεάζει άμεσα την απόδοση του συστήματος όπως και η τοποθέτηση των μαγνητών. Η κατεύθυνση του μαγνήτη καθορίζει το αν θα μετρηθεί η εγκάρσια ή η διαμήκης συνιστώσα δίνοντας ευελιξία στον διαχωρισμό τους. Επιπλέον το μέγεθος του μαγνήτη μεταβάλλει την ενεργή περιοχή από όπου θα μετατραπεί ο ήχος σε μαγνητικό πεδίο ενώ η διάταξη των πόλων (π.χ. εναλλασσόμενοι πόλοι) καθορίζει την ισχύ του μαγνητικού πεδίου.

Τα μειονεκτήματα της μεθόδου είναι ο χαμηλός βαθμός απόδοσης σε σχέση με τα πιεζοηλεκτρικά και ότι είναι δύσκολο να περιοριστεί το μέγεθος των πηνίων και των μαγνητών. Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι πρόκειται για μέθοδο μέτρησης μη επαφής, απλούστερης της συμβολομετρίας.

3.4 MDL

MDL ή magnetostrictive delay lines [18] είναι ένα σύνολο μεθόδων που βασίζονται στη μαγνητοσυστολή των υλικών. Η μέθοδος αυτή φέρει στοιχεία από τα EMATs και από τα πιεζοηλεκτρικά όσον αφορά τη μοντελοποίησή της.

Σε υλικά όπως οι χάλυβες που εμφανίζουν μαγνητοσυστολή, οι παραμορφώσεις οδηγούν σε μεταβολές του μαγνητικού πεδίου και το αντίστροφο. Έτσι όταν ένα κύμα διαδίδεται στο υλικό οι περιοδικές μεταβολές στις παραμορφώσεις οδηγούν σε περιοδικές μεταβολές του μαγνητικού πεδίου. Οι μεταβολές αυτές λαμβάνονται ως ηλεκτρικό σήμα από ένα πηνίο που περικλείει το μαγνητικό πεδίο, σύμφωνα με το νόμο του Faraday.

Η ισχύς της μεθόδου έγκειται στην δυνατότητά της να μετρά εσωτερικές τάσεις χωρίς να απαιτείται επαφή. Η μαγνητοσυστολή είναι ένα φαινόμενο που επηρεάζεται από την ύπαρξη τάσεων στο υλικό. Σε υψηλές μηχανικές τάσεις περιορίζεται και έτσι περιορίζεται το σήμα που λαμβάνεται από το πηνίο. Επιπλέον, η σχέση Σήματος-Τάσεων υλικού είναι μη γραμμική και ευνοεί των εντοπισμό ανωμαλιών.

3.5 Τεχνικές μικροσκοπίας

Οι υπέρηχοι εφαρμόζονται και στον προσδιορισμό του μεγέθους και του σχήματος των ατελειών των ελασμάτων. Λαμβάνοντας μετρήσεις σε πολλά σημεία και με επεξεργασία αυτών είναι δυνατός ο προσδιορισμός τους. Η βασική αρχή των μεθόδων αυτών είναι στον εντοπισμό των ανακλάσεων από τις ατέλειες και από αυτές τον προσδιορισμό της θέσης από την οποία προήλθαν. Λαμβάνοντας μετρήσεις σε πολλά σημεία του υλικού και συσχετίζοντας τις αλλαγές στις ανακλάσεις γίνεται ακριβής προσδιορισμός της θέσης του ελαττώματος.

Η μεγάλη ακρίβεια στην θέση διέγερσης που παρέχει το laser διευκολύνει τις υπολογιστικές μεθόδους επεξεργασίας των μετρήσεων αφού μειώνονται τα σφάλματα. Επιπλέον, η προβλέψιμη κατευθυντικότητα των υπέρηχων από laser μπορεί να προστεθεί στα υπολογιστικά εργαλεία για την περαιτέρω μείωση των σφαλμάτων.

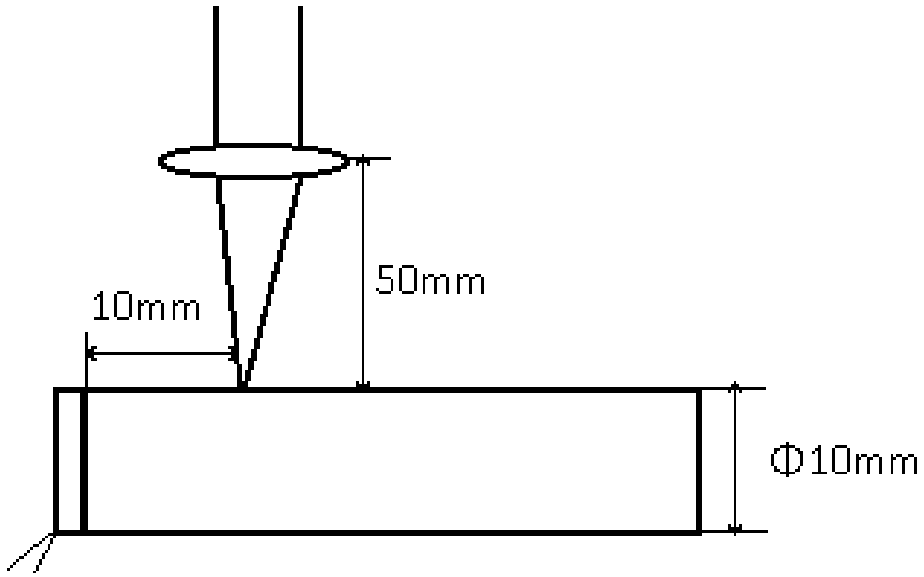
Η τεχνική αυτή έχει εφαρμοστεί [19]. Η μέθοδος αυτή ανακατασκευάζει το εσωτερικό του υλικού με βάση ένα πλέγμα μετρήσεων των ανακλάσεων. Είναι κυρίως υπολογιστική μέθοδος, μετα-επεξεργασίας και βασίζεται στην τριγωνοποίηση των συντεταγμένων των ανακλάσεων σε αναλογία με τα RADAR.

Κεφάλαιο 4

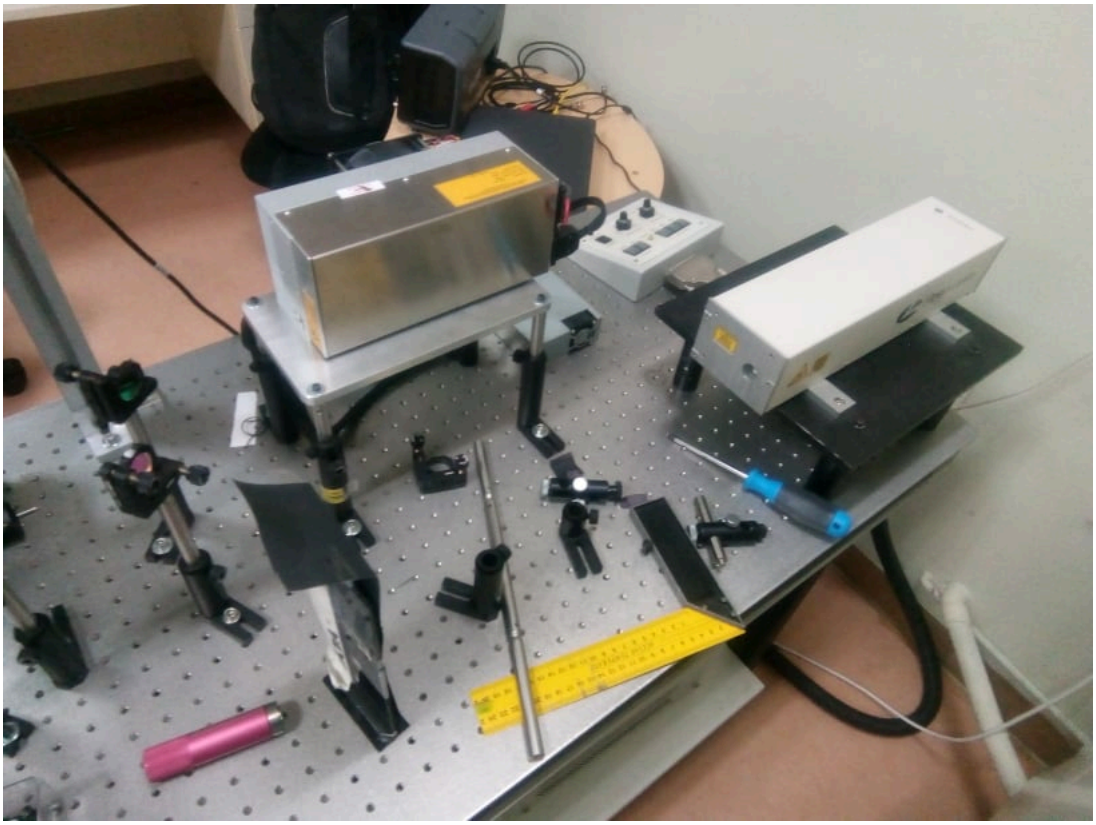
Πείραμα

Για την αξιολόγηση της πρακτικής φύσης του φαινομένου, διεξήχθη πείραμα. Από τις παρατηρήσεις που έγιναν για να στηθεί και να πραγματοποιηθεί επιτυχώς το πείραμα αποσαφηνίζεται η ευελιξία και η απόδοση της διάταξης. Οι παράμετροι που χρειάστηκε να μεταβληθούν επίσης οδήγησαν στην καλύτερη κατανόηση του φαινομένου.

4.1 Περιγραφή διάταξης



Σχήμα 4.1: Απλουστευτικό σκαρίφημα της πειραματικής διάταξης



Σχήμα 4.2: Εργαστηριακή διάταξη

Για τον χαρακτηρισμό των παραγόμενων κυμάτων, επιλέχθηκε η χρήση πιεζοηλεκτρικού αισθητήρα. Σε πρώτη προσέγγιση είναι απλής διάταξης και δεν επηρεάζεται από επιπλέον παραμέτρους όπως αγωγιμότητα ή τραχύτητα σαν τις άλλες μεθόδους. Επιπλέον, δεν απαιτεί μεγάλες ενέργειες παλμού που θα οδηγούσαν σε τήξη και αλλοίωση του υλικού λόγω της υψηλής απόδοσής του. Οι θεωρήσεις αυτές ωστόσο διαψεύσθηκαν από τα αποτελέσματα.

Για τον προσδιορισμό της απόδοσης του αισθητήρα έγιναν μετρήσεις στο πεδίο της συχνότητας. Η διάταξη που φαίνεται στην εικόνα αποτελείται από δυο ίδια πιεζοηλεκτρικά στοιχεία ενωμένα. Το ένα στοιχείο διεγείρεται με ημιτονοειδής τάση $10V$ και στο άλλο γίνονται οι μετρήσεις. Θεωρώντας ότι η απόδοση μετατροπής τάσης σε παραμόρφωση είναι ίση με την απόδοση μετατροπής παραμόρφωσης σε τάση το μετρούμενο κύμα θα έχει αποσβεστεί κατά:

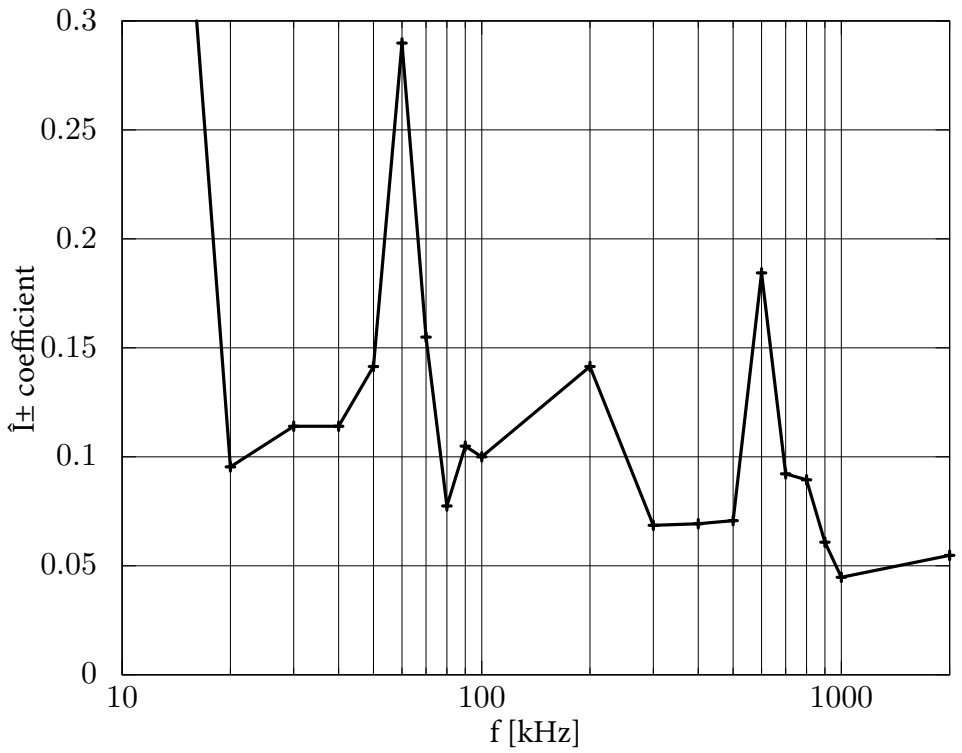
$$V_o = \frac{V_{in}}{\alpha^2} \tag{4.1}$$

όπου α ο συντελεστής απόσβεσης. Τα πιεζοηλεκτρικά στοιχεία λειτουργούν με χαρακτηριστική εξίσωση της μορφής $\varepsilon = \beta V$ (στην γενική περίπτωση β είναι τανυστής). Έτσι η τάση παράγει συγκεκριμένη παραμόρφωση στο δισκίο. Η απόδοση μεταφοράς της παραμόρφωσης από το δισκίο στο δοκίμιο είναι α και έτσι το ένα δισκίο μεταφέρει τελικά $\alpha\varepsilon$ παραμόρφωσης η οποία στη συνέχεια μετράται από το δεύτερο δισκίο. Η μεταφορά στο δεύτερο δισκίο θεωρείται ότι λαμβάνει επίσης την ίδια απώλεια κατά α. Έτσι τελικά στο δεύτερο δισκίο μετράται η παραμόρφωση $\alpha^2\varepsilon$. Επειδή οι τάσεις είναι ανάλογες των παραμορφώσεων, ο λόγος των τάσεων δίνει την παραπάνω εξίσωση.

Με αυτόν τον τρόπο προσδιορίζεται η απόκριση του στοιχείου στο πεδίο της συχνότητας, τα αποτελέσματα της οποίας φαίνονται παρακάτω:

Πίνακας 4.1: Απόδοση μεταφοράς παραμορφώσεων πιεζοηλεκτρικού

$f[kHz]$	$V_o\ mV$
10	5670
20	91
30	130
40	130
50	200
60	840
70	240
80	60
90	110
100	100
200	200
300	47
400	48
500	50
600	340
700	85
800	80
900	37
2000	20
1000	30



Σχήμα 4.3: απόδοση πιεζοηλεκτρικού. Σημειώνεται ότι για $10kHz$ η απόδοση είναι 0.75

Όπως φαίνεται, το πιεζοηλεκτρικό εμφανίζει μέγιστη απόδοση στα $10kHz$ όμως αυτή η συχνότητα ενδέχεται να είναι συχνότητα συντονισμού του κυκλικού δισκίου. Επιπλέον βλέπουμε ότι η απόδοση είναι σχεδόν σταθερή στις περισσότερες συχνότητες με δυο εξαιρέσεις σε συγκεκριμένες συχνότητες. Στα $60kHz$ και στα $200kHz$ παρουσιάζεται αύξηση της απόδοσης.

Για το υλικό επιλέχθηκε χαλύβδινη ράβδος διαμέτρου $10mm$ επειδή ήταν διαθέσιμη στο εργαστήριο. Από την βιβλιογραφία, αναμένουμε συχνότητες τις τάξης των MHz που δίνουν μήκος κύματος $6mm$ το οποίο είναι συγκρίσιμο με τις διαστάσεις του δοκιμίου. Έτσι το δοκίμιο λειτουργεί περισσότερο σαν κυματαγωγός παρά σαν ελεύθερο υλικό όπως αυτό της θεωρίας. Η διάμετρος επιλέχθηκε έτσι ώστε το πιεζοηλεκτρικό να μπορεί να τοποθετηθεί πάνω στο δοκίμιο πλήρως και το μήκος επιλέχθηκε όσο το δυνατόν μικρότερο για τη μείωση των απωλειών αλλά αρκετά μεγαλύτερο των $6mm$ για να μην περιορίζεται και σε αυτήν τη διάσταση. Το μήκος του δοκιμίου είναι $5cm$.

Η πηγή laser ήταν το NANO-L-200-10 της εταιρείας LITRO lasers. Παρέχει παλμούς διάρκειας $4ns$ και ενέργειας $100mJ$ στα $1064nm$. Το σχήμα της δέσμης είναι ελλειψοειδές $5mm \times 6mm$ το οποίο ιδανικοποιείται ως κύκλος ακτίνας $2.738mm$ (ισεμβαδικά).

Η ολική διάταξη αποτελείται από έναν φακό με εστία $50mm$ τοποθετημένο μπροστά από το laser και το δοκίμιο τοποθετημένο μπροστά από το σημείο εστίασης του φακού όπως φαίνεται στην εικόνα.

4.2 Διεξαγωγή πειράματος

Κατά την διεξαγωγή του πειράματος, το laser χτυπούσε το δοκίμιο και η απόκριση του πιεζοηλεκτρικού εμφανιζόταν στον παλμογράφο.

Ο παλμογράφος καταγράφει σήματα όταν η τάση τους είναι υψηλότερη από ένα όριο. Στην διεξαγωγή του πειράματος εμφανίστηκε ηλεκτρικός θόρυβος της τάξης των $1 - 2V$ που έθετε τον παλμογράφο σε λειτουργία καταγραφής σε τυχαία χρονικά διαστήματα που δεν συμπεριλαμβάνουν το σήμα του πιεζοηλεκτρικού. Το πιεζοηλεκτρικό σήμα όντας της τάξης των $0.1V$ δεν δύναται να διεγείρει την λειτουργία καταγραφής του παλμογράφου πριν το θόρυβο.

Ο θόρυβος ήταν περιοδικός με συγκεκριμένη συχνότητα και ίδιας μορφής που οδήγησε στο συμπέρασμα ότι οφείλεται σε κάποιο κύκλωμα και όχι σε μη επαρκή γείωση ή μόνωση. Έτσι βρέθηκε ότι το σύστημα κινητήρων που κινούν την τράπεζα παρήγαγε το σήμα αυτό το οποίο διέρρεε στην μεταλλική τράπεζα και μέσω του πιεζοηλεκτρικού (μεταλλικής κατασκευής) έφτανε στον παλμογράφο.

Στην συνέχεια διαπιστώθηκε ότι το πιεζοηλεκτρικό δεν παρήγαγε σήμα ακόμη και χωρίς θόρυβο. Μέσω προσομοιώσεων που έγιναν παράλληλα προέκυψε ότι για να παραχθούν αρκετά υψηλές τάσεις στο υλικό το laser πρέπει να έχει ενέργεια της τάξης των mJ. Το χρησιμοποιούμενο laser είχε ενέργεια της τάξης των μJ και έτσι αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθεί ισχυρότερο laser.

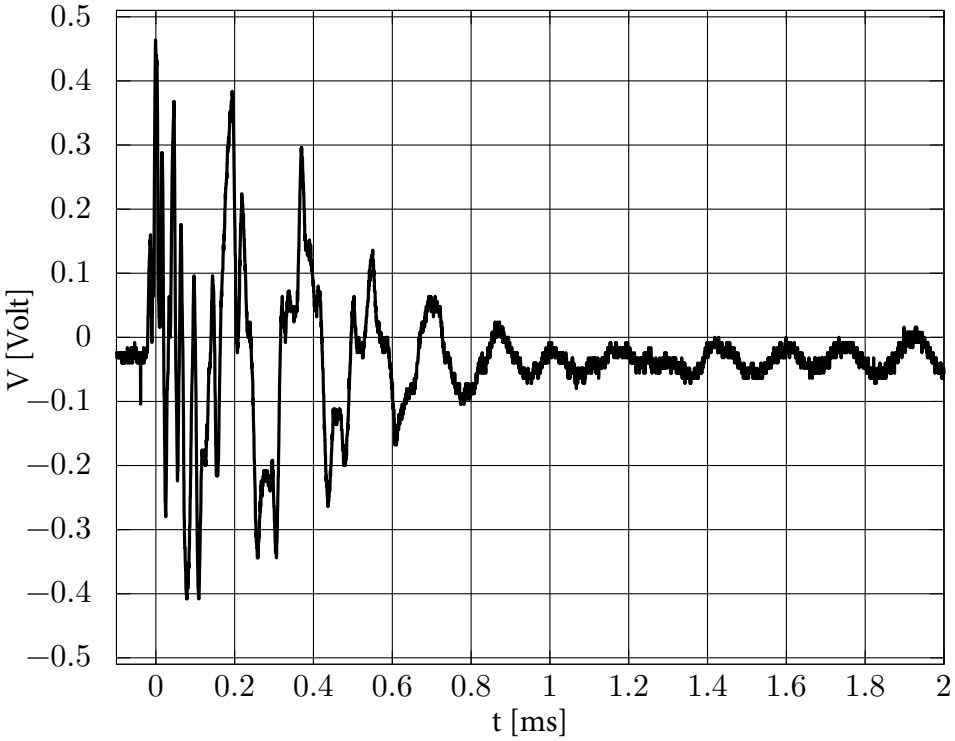
Στην νέα διάταξη εμφανίστηκε και πάλι θόρυβος, όμως τώρα ήταν συγχρονισμένος με τον παλμό laser. Ο θόρυβος αυτός οφειλόταν στις υψηλές τάσεις που απαιτεί το laser για την διέγερσή του οι οποίες διέρρεαν στο κοντινό ηλεκτρικό δίκτυο. Έτσι ο παλμογράφος συνδέθηκε σε άλλη πρίζα και ο θόρυβος εξαφανίστηκε.

Η απόσταση των $5cm$ που χωρίζει τα μέτωπα του δοκιμίου ήταν αρκετή για την απόσβεση του υπερήχου σε επίπεδα θορύβου και έτσι δεν ήταν δυνατή η λήψη μετρήσεων.

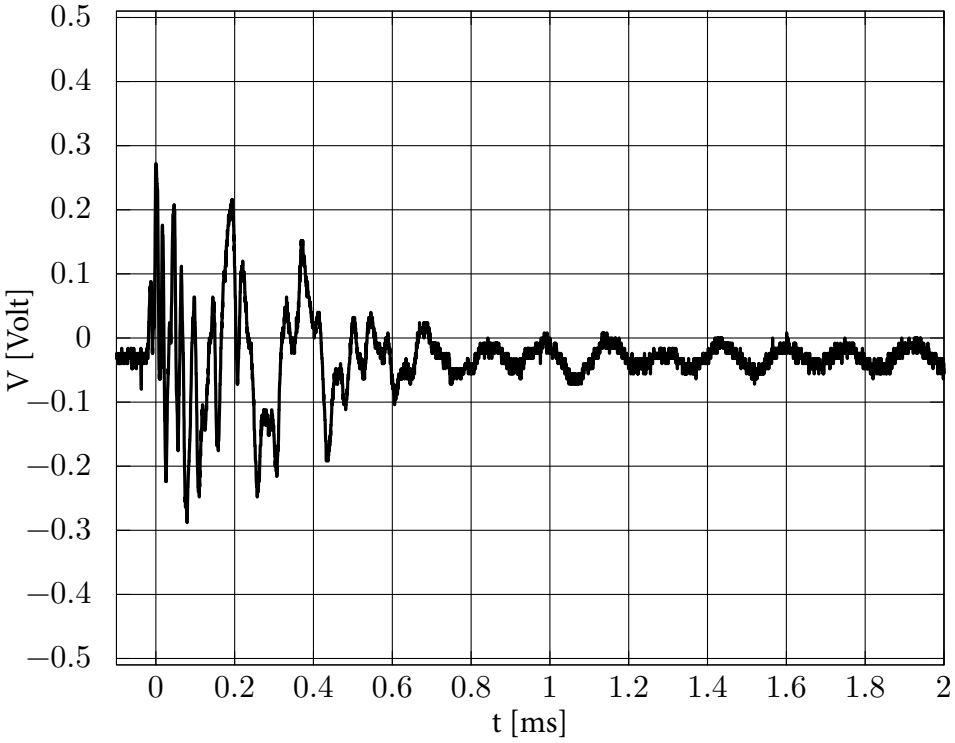
Για την λήψη μετρήσεων η δέσμη στοχεύει την περιφέρεια του κυλίνδρου όπως φαίνεται στο σχήμα σε απόσταση $10mm$. Έτσι, η απόσβεση περιορίστηκε και το σήμα ήταν αρκετά ισχυρότερο του θορύβου ώστε να καταγραφούν τα αποτελέσματα. Σημειώνεται ότι η μέθοδος αυτή είναι μη ιδανική για την μοντελοποίηση καθώς δεν εμφανίζει καμία συμμετρία και η ακτίνα θερμαίνει μια μη επίπεδη επιφάνεια, ωστόσο συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν ποιοτικά.

Επιπλέον, η χρήση ισχυρότερου laser $100mJ$ είναι υπερβολικά μεγαλύτερη από αυτήν που απαιτείται για την τήξη του δοκιμίου. Έτσι και πάλι παρατηρείται μη ιδανικότητα στην μοντελοποίηση η οποία είναι θερμοελαστική και όχι στο εύρος της εξάχνωσης.

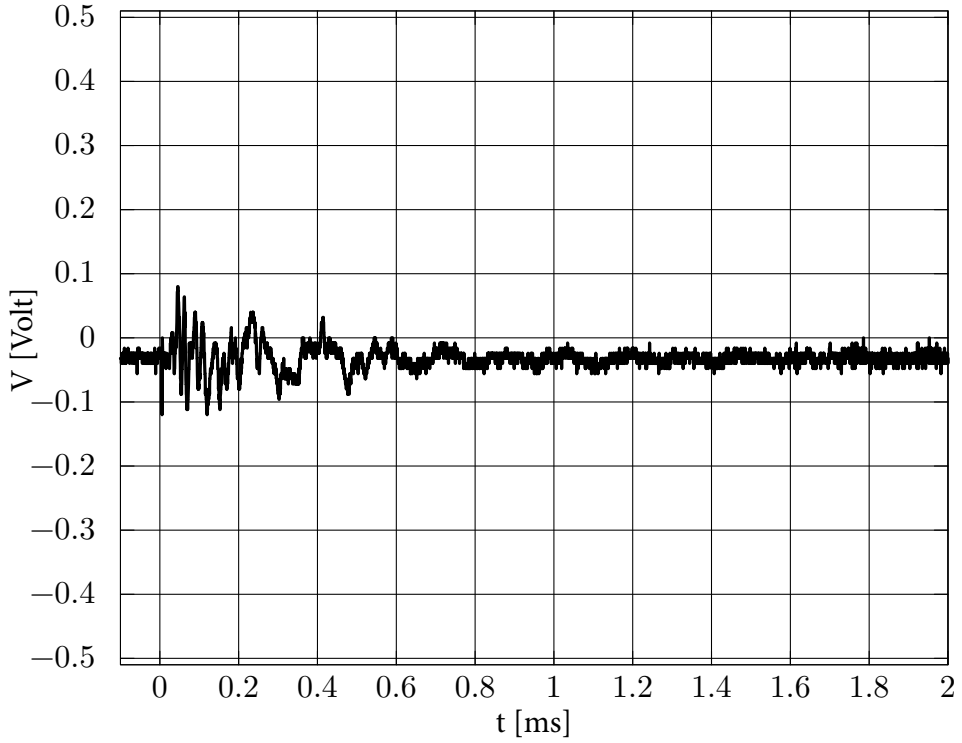
4.3 Αποτελέσματα



Σχήμα 4.4: Μέτρηση παλμογράφου για εστίαση στα $50mm$, $d = 12.9\mu m$



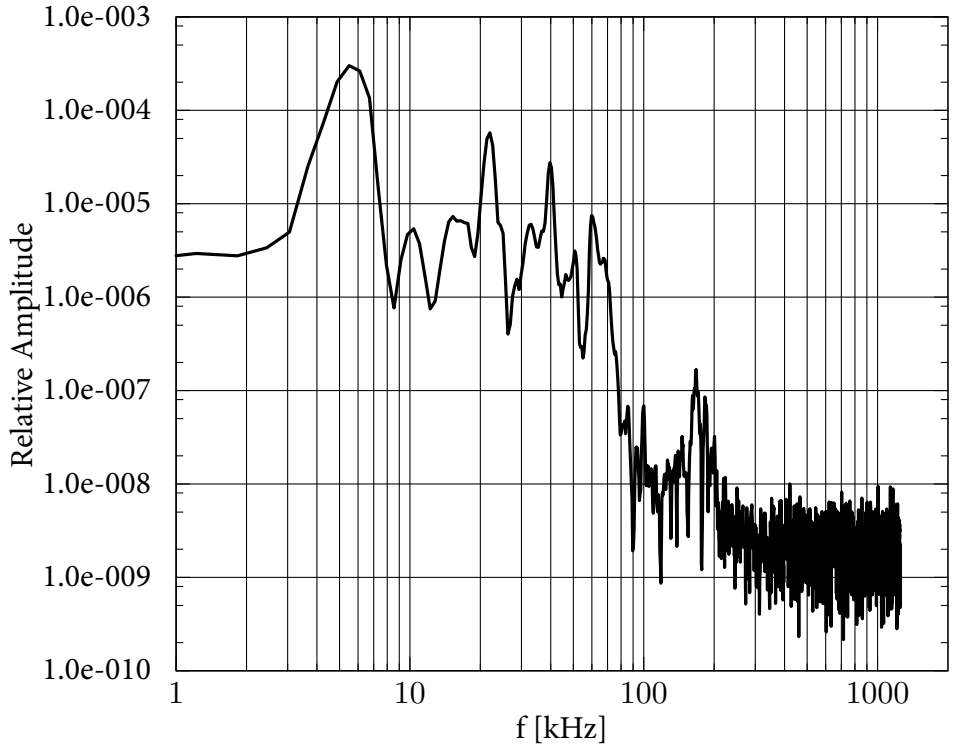
Σχήμα 4.5: Μέτρηση παλμογράφου για εστίαση στα $55mm$, $d = 0.557m$



Σχήμα 4.6: Μέτρηση παλμογράφου για εστίαση στα $60mm$, $d = 1.1mm$

Από τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι παράγονται μετρήσιμα ελαστικά κύματα. Η διάρκεια του φαινομένου είναι της τάξης των $3ms$ και η συχνότητα φαίνεται αρκετά μικρότερη από την αναμενόμενη των MHz. Επιπλέον, με μεταβολή της διαμέτρου παρατηρείται μείωση του πλάτους των κυμάτων.

Στην συνέχεια διεξάγεται ανάλυση Fourier του σήματος. Λόγω της ομοιότητας των σημάτων, επιλέγεται αυτό με το μεγαλύτερο πλάτος για να περιοριστεί ο θόρυβος. Επιλέγεται το πρώτο ms. Λόγω του ότι ο παλμογράφος καταγράφει ανά $0.4\mu s$, η ανάλυση που έχει το σήμα είναι στο μέγιστο στα $\frac{2.5}{2} = 1.25MHz$.



Σχήμα 4.7: Ανάλυση Fourier του σήματος

Το σήμα περιέχει 5 κορυφές. Αυτές είναι στα $5, 20, 40, 60, 200\ kHz$.

4.4 Σχόλια

Το πείραμα εν γένει διαφωνεί με τη προσομοίωση. Οι παρατηρούμενες συχνότητες είναι πολύ μικρότερες των αναμενόμενων MHz και η απόσβεση ήταν απαγορευτική για την μετρητική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε.

Κατά την αλλαγή διαμέτρου, παρατηρείται μείωση του σήματος με την αύξησή της. Παρόλο που η ενέργεια διατηρείται σταθερή, η καμπυλότητα της επιφάνειας αρχίζει να επιδρά στην κατανομή της απορρόφησής της λόγω κλίσης σε σχέση με το laser και λόγω του ότι η ανακλαστικότητα εξαρτάται από την γωνία [20], σύμφωνα με το μοντέλο του Frensel.

Η γεωμετρία των αρχικών παραμορφώσεων επίσης αλλάζει με αλλαγή της διαμέτρου λόγω της αλλαγής της έντασης I και της μετατροπής από επίπεδη, για $d = 11.9\mu m$, σε κυκλικού τόξου, για $d = 1.11mm$. Το πείραμα έδειξε ότι η αλλαγή αυτή δεν επηρέασε τις τελικές μετρήσεις. Όπως και στην προσομοίωση, αναμένεται το μόνιμο πεδίο να εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία και το υλικό να δρα ως κυματοδηγός που διευκολύνει την μεταφορά συγκεκριμένων κατανομών μετατοπίσεων. Η διαφορετική παρατηρούμενη συχνότητα, αποδίδεται εν μέρει σε αυτή την παρατήρηση, το μόνιμο πεδίο παραμορφώσεων είναι διαφορετικό από την περίπτωση της προσομοίωσης λόγω του διαφορετικού σημείου πρόσκρουσης. Ο δεύτερος λόγος έχει να κάνει με τις απώλειες, που αυξάνουν όσο αυξάνει η συχνότητα.

Οι συνθήκες του πειράματος ήταν μη ιδανικές, καθώς η ένταση ήταν πολύ μεγαλύτερη από αυτή που απαιτείται για εξάχνωση. Έτσι στην παραγωγή κυμάτων, δεν εφαρμόζεται η θερμοελαστική ανάλυση και δεν ισχύει η οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας. Η ταχύτητα εξάτμισης του υλικού και τα φαινόμενα ροής οδηγούν σε κάθετες στην επιφάνεια τάσεις που δεν έχουν μοντελοποιηθεί. Η δημιουργία πλάσματος οδηγεί στην ανάκλαση του laser που μειώνει το βαθμό απόδοσης της απορροφητικότητας περαιτέρω (plasma shielding [21]). Επιπλέον, το υλικό είναι εκτός της ελαστικής περιοχής σε μεγαλύτερη έκτασή του και δεν μεταδίδει κύματα μόνο με την παραμόρφωσή του αλλά και με την πλαστική ροή του.

Από τις συχνότητες που μετρήθηκαν, μπορούν να αγνοηθούν αυτές στα $200kHz$ και $60kHz$ καθώς οφείλονται στην αυξημένη απόδοση του πιεζοηλεκτρικού (βλέπε (4.3)). Έτσι το σήμα περιέχει 3 συχνότητες, στα $5, 20, 40$ kHz. Η μορφή του σήματος δείχνει ότι η συχνότητα των $5kHz$ βρίσκεται στην μόνιμη κατάσταση και άρα πρόκειται για ιδιομορφή κυματαγωγού. Οι υψηλότερες συχνότητες βρίσκονται στην μεταβατική κατάσταση και δεν μπορεί να εξηγηθεί ο αριθμός τους.

Πιθανά αίτια προς διερεύνηση, είναι ότι η μετάβαση από το θερμοελαστικό μέρος της διέγερσης σε αυτό της εξάχνωσης εισάγει μια περιοδική διέγερση στα $20kHz$ όπου η συχνότητα $40kHz$ είναι αρμονική της. Ακόμη, οι ανακλάσεις του κύματος θα μπορούσαν να έχουν τέτοια διαφορά φάσης που να συμβάλλουν έτσι ώστε να εμφανίζονται πολλαπλάσια της συχνότητας. Ο ισχυρισμός αυτός στέκει επειδή τα διαμήκη κύματα διαδίδονται δυο φορές ταχύτερα από τα εγκάρσια και έτσι μπορεί να δημιουργηθεί αρκετή διαφορά φάσης.

Συμπερασματικά, το πείραμα έδειξε ότι χωρίς την παρουσία ειδικού μετρητικού εξοπλισμού, το πιεζοηλεκτρικό δισκίο δεν μπορεί να λάβει μετρήσεις πάνω από $10mm$ και με ισχύς εντός του θερμοελαστικού ορίου. Συνεπώς, αυτό οδήγησε στην εκτέλεση του πειράματος υπό μη ιδανικές συνθήκες με πρόσκρουση της δέσμης πλαγίως και χρήση υψηλής ενέργειας παλμού. Το συμπέρασμα που επίσης προέκυψε είναι ότι οι διαστάσεις της γεωμετρίας είναι σημαντικές επειδή εύκολα οδηγούν στην μετάβαση από κύματα MHz σε κύματα κυματοδηγών των kHz. Οπότε η γεωμετρία ήταν επίσης μη ιδανική υπό αυτή την έννοια. Σε αυτό συμφωνεί και η προσομοίωση όπως και στο ότι στους κυματαγωγούς, η μεταβατική κατάσταση είναι μείζονος σημασίας.

4.5 Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή επιλέχθηκε να γίνει πιο κατανοητή η μέθοδος της γέννεσης υπερήχων με Laser με σκοπό την εφαρμογή τους στον ΜΚΕ. Μέσω του πειράματος και της προσομοίωσης έγινε εμφανής ο μηχανισμός παραγωγής και το πόσο εφικτή είναι η υλοποίηση της μεθόδου.

Από την προσομοίωση επαληθεύθηκαν τα βασικά αποτελέσματα της κατευθυντικότητας της θεωρίας. Το κύμα μεταδίδεται σε λοβούς και όχι σφαιρικά. Το θεωρητικό υπόβαθρο των συναρτήσεων Green, αποδείχθηκε επαρκές και η χρήση του αντί βαρύτερων προσομοιώσεων ενδείκνυται.

Έγινε εμφανές επίσης, ότι το πεδίο μετατοπίσεων που σχηματίζει η θερμική διαστολή είναι αυτό της δίνης. Το υλικό επεκτείνεται προς την κάθετη επιφάνεια και στη συνέχεια επεκτείνεται εφαπτομενικά σε αυτή. Διαλευκαίνεται το πού εμφανίζονται συστολές και πού διαστολές στο θερμαινόμενο δίσκο και ότι η έναρξη της κίνησης εμφανίζεται στην άκρη του. Η χρονικότητα των επεκτάσεων αυτών είτε ελεγχόμενη μέσω της χρονικότητας του παλμού είτε μέσω των διαστάσεων (διάμετρος δέσμης) και άρα των καθυστερήσεων, οδηγεί στην παραγωγή κυμάτων συγκεκριμένης συχνότητας.

Διαπιστώθηκε η σημαντική διαφορά της λύσης σε ένα ελεύθερο υλικό και σε ένα περιορισμένων διαστάσεων. Ένας κυματαγωγός, οδηγεί στη δημιουργία συγκεκριμένων συχνοτήτων και μετώπων κυμάτων σχεδόν ανεξάρτητα των παραμέτρων της διέγερσης.

Το πείραμα επιβεβαίωσε την διαφορά αυτή, δίνοντας χαμηλές συχνότητες που δεν ταιριάζουν στην διέγερση. Έδειξε ότι η ισχύς των κυμάτων είναι μικρή ώστε το πιεζοηλεκτρικό χωρίς ενίσχυση να είναι σχεδόν ακατάλληλο για την εφαρμογή αυτή. Επιπλέον, φάνηκε ότι η θέση της διέγερσης επίσης επηρεάζει την τελική ιδιομορφή πράγμα που πρέπει να γίνει καλύτερα κατανοητό.

Εν κατακλείδι, η εργασία αυτή αφήνει ανοιχτούς τους εξής τομείς κατανόησης για το μέλλον:

1. Ποσοτική κατανόηση της παραγόμενης συχνότητας σε σχέση με τις γεωμετρικές και υλικές παραμέτρους του προβλήματος
2. Μελέτη των παραγόμενων ιδιομορφών και των επιτρεπτών συχνοτήτων σε κυματαγωγούς
3. Καλύτερη ποσοτικοποίηση των απωλειών διάδοσης κυμάτων
4. Μελέτη εφαρμογής με μετρητική διάταξη συμβολόμετρων, λόγω ευαισθησίας
5. Ανάπτυξη περιφερειακών μετρητικής διάταξης με σκοπό την ενίσχυση και καταγραφή κυμάτων (π.χ. χρήση fpga)

Αναφορές

[1] DA Hutchins. "Ultrasonic generation by pulsed lasers". In: *Physical Acoustics*. Vol. 18. Elsevier, 1988, pp. 21–123.

[2] Bertram Alexander Auld. *Acoustic fields and waves in solids*. Рипол Классик, 1973.

[3] Keiiti Aki and Paul G Richards. *Quantitative seismology*. 2002.

[4] Jan Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. Elsevier, 2012.

[5] Tribikram Kundu. *Ultrasonic nondestructive evaluation: engineering and biological material characterization*. CRC press, 2003.

[6] LRF Rose. "Point-source representation for laser-generated ultrasound". In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 75.3 (1984), pp. 723–732.

[7] Bruno A Boley and Jerome H Weiner. *Theory of thermal stresses*. Courier Corporation, 2012.

[8] F Alan McDonald. "On the calculation of laser-generated ultrasound pulses". In: *Journal of nondestructive evaluation* 9.4 (1990), pp. 223–228.

[9] M-H Noroy, D Royer, and MA Fink. "Shear-wave focusing with a laser-ultrasound phased-array". In: *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* 42.6 (1995), pp. 981–988.

[10] Χ*ριστό*φο*ρ*ος Γ Π*ρο*β*ατίδης*. *πεπερασμένα στοιχεία στην ανάλυση κατασκευών*. 2015.

[11] Marcin Kubiak, Wiesława Piekarska, and Sebastian Stano. "Modelling of laser beam heat source based on experimental research of Yb: YAG laser power distribution". In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 83 (2015), pp. 679–689.

[12] CB Scruby et al. "Quantitative studies of thermally generated elastic waves in laser-irradiated metals". In: *Journal of Applied Physics* 51.12 (1980), pp. 6210–6216.

[13] Roberto Alva. "Frequency Control of Laser Generated Ultrasonic Waves". In: (2019).

[14] Jean-Pierre Monchalin. "Laser-ultrasonics: principles and industrial applications". In: *Ultrasonic and advanced methods for nondestructive testing and material characterization*. World Scientific, 2007, pp. 79–115.

[15] Philippe Delaye et al. "Heterodyne detection of ultrasound from rough surfaces using a double phase conjugate mirror". In: *Applied physics letters* 67.22 (1995), pp. 3251–3253.

[16] Anthony Dandridge. "Fiber optic sensors based on the Mach-Zehnder and Michelson interferometers". In: *Fiber optic sensors: an introduction for engineers and scientists* (1991), pp. 271–323.

[17] R Bruce Thompson et al. "Physical principles of measurements with EMAT transducers". In: *Physical acoustics* 19 (1990), pp. 157–200.

[18] E Hristoforou. "Magnetostrictive delay lines: engineering theory and sensing applications". In: *Measurement Science and Technology* 14.2 (2003), R15.

[19] Theodosia Stratoudaki, Matt Clark, and Paul D Wilcox. "Laser induced ultrasonic phased array using full matrix capture data acquisition and total focusing method". In: *Optics express* 24.19 (2016), pp. 21921–21938.

[20] P Karmiris-Obratański et al. "On the laser beam absorption efficiency in laser welding of aluminium thin sheet with copper pipe". In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Vol. 1235. 1. IOP Publishing. 2022, p. 012017.

[21] Dan Liu, Li Guan, Li Li, et al. "A new model of pulsed laser ablation and plasma shielding". In: *Physica B: Condensed Matter* 362.1-4 (2005), pp. 82–87.