



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**  
**ΚΥΡΙΑΚΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΣ**

**Μη Γραμμικοί Ελεγκτές για Οχήματα**  
**Nonlinear Adaptive Cruise Controllers**

**Επιβλέπων Καθηγητής**

Ιάσων Καραφύλλης

Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2022



## **Ευχαριστίες**

Πρωτίστως θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κ. Ιάσωνα Καραφύλλη για την ανάθεση της παρούσας διπλωματικής καθώς επίσης και για την πολύτιμη καθοδήγηση του, αλλά και για την προσφορά του καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Η συνεργασία μας ήταν άψογη και η παρουσία του ενεργή όποτε τον είχα ανάγκη. Τέλος θα ήθελα να εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στην οικογένεια μου, για την υποστήριξη τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, και την αμέριστη συμπαράσταση που μου πρόσφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

## Περιεχόμενα

Περίληψη .....	6
Abstract .....	7
Μαθηματικό Υπόβαθρο .....	8
Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή.....	12
Συμβολισμοί .....	15
Κεφάλαιο 2. Κίνητρο .....	16
Α. Απαιτήσεις του Adaptive Cruise Control .....	17
Β. Ειδικά Σενάρια Προσομοίωσης .....	22
Κεφάλαιο 3. Ασφαλής Λειτουργία των Διμοιριών .....	29
Θεώρημα 1 (Ασφαλής λειτουργία σε ανοιχτό δρόμο).....	29
Θεώρημα 2 (Ασφαλής λειτουργία σε κυκλικό δρόμο).....	31
Κεφάλαιο 4. String Stability και Θεμελιώδες Διάγραμμα .....	33
Θεώρημα 3 (String Stability και Θεμελιώδες Διάγραμμα για ανοιχτό δρόμο).....	33
Θεώρημα 4 (String Stability και Θεμελιώδες Διάγραμμα για κυκλικό δρόμο).....	36
Κεφάλαιο 5. Ευστάθεια.....	37
Θεώρημα 5 (Ευστάθεια για ανοιχτό δρόμο).....	37
Θεώρημα 6 (Ευστάθεια για κυκλικό δρόμο).....	38
Κεφάλαιο 6. Ενδεικτικά Παραδείγματα .....	40
Κεφάλαιο 7. Απόδειξεις Κύριων Αποτελεσμάτων .....	51
Απόδειξη του Θεωρήματος 1 .....	51
Απόδειξη του Θεωρήματος 2 .....	54
Απόδειξη του Θεωρήματος 3 και του Θεωρήματος 4 .....	56
Απόδειξη του Θεωρήματος 5 .....	60
Απόδειξη του Θεωρήματος 6 .....	63
Κεφάλαιο 8. Τελικές Παρατηρήσεις.....	69
Βιβλιογραφία.....	70



## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με το σχεδιασμό μη γραμμικών adaptive cruise controllers για διμοιρίες οχημάτων που λειτουργούν σε ανοικτούς ή σε κυκλικούς δρόμους. Οι κατασκευασμένοι ελεγκτές είναι μη γραμμικές συναρτήσεις της απόστασης μεταξύ των διαδοχικών οχημάτων και των ταχυτήτων τους. Αποδεικνύεται ότι οι προτεινόμενοι ελεγκτές εγγυώνται ασφάλεια (αποφυγή σύγκρουσης), θετικές ταχύτητες, φραγμένη επιτάχυνση και αποφυγή παραβίασης των ορίων ταχύτητας. Επιπλέον, οι προτεινόμενοι ελεγκτές εγγυώνται την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια της διμοιρίας στη επιθυμητή διαμόρφωση, καθώς και το string stability. Οι κύριες προκλήσεις πηγάζουν από το γεγονός ότι όλοι οι προηγούμενοι στόχοι πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα και το γεγονός ότι τα συστήματα ελέγχου που μελετώνται δεν ορίζονται σε έναν γραμμικό χώρο αλλά σε συγκεκριμένα σύνολα. Η αποτελεσματικότητα των μη γραμμικών adaptive cruise controllers φαίνεται και από αριθμητικά παραδείγματα. Οδηγός για την εκπόνηση της ήταν η εργασία των I. Karafyllis, D. Theodosis, and M. Papageorgiou, “Nonlinear Adaptive Cruise Control of Vehicular Platoons”, arXiv:2007.07054 [eess.SY].

**Λέξεις Κλειδιά:** Adaptive Cruise Control, String Stability, Διμοιρίες Οχημάτων, Αυτόνομα Οχήματα.

## **Abstract**

The present diploma thesis deals with the design of nonlinear adaptive cruise controllers for vehicular platoons operating on an open road or a ring-road. The constructed feedback controllers are nonlinear functions of the distance between successive vehicles and their speeds. It is shown that the proposed novel controllers guarantee safety (collision avoidance), speed positivity, bounded acceleration and speed limits by explicitly characterizing the set of allowable inputs and by leveraging barrier function techniques. Moreover, we guarantee global asymptotic stability of the platoon to a desired configuration, as well as string stability. Certain macroscopic properties are also investigated. The main challenges stem from the fact that all previous objectives must be satisfied simultaneously and the fact that the control systems studied do not evolve in a finite-dimensional linear space but rather on specific sets. The efficiency of the nonlinear adaptive cruise controllers is demonstrated by means of numerical examples. The diploma thesis is based on the results of the paper I. Karafyllis, D. Theodosis, and M. Papageorgiou, “Nonlinear Adaptive Cruise Control of Vehicular Platoons”, arXiv:2007.07054 [eess.SY].

**Keywords:** Adaptive Cruise Control, String Stability, Vehicle Platoon, Autonomous Vehicles.

## Μαθηματικό Υπόβαθρο

Αρχικά θα ήταν χρήσιμο να εισάγουμε τους παρακάτω όρους οι οποίοι θα μας φανούν χρήσιμοι στη συνέχεια. Η διατύπωση των πιο κάτω όρων βασίστηκε στις σημειώσεις των Δυναμικών Συστημάτων του κύριου Καραφύλλη (βλέπε [50]).

**Ορισμός (Κλειστότητα Συνόλου):** Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος και  $A \subseteq X$  μη κενό σύνολο. Τότε το κλείσιμο του  $A$  συμβολίζεται με  $\bar{A}$  και είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο τέτοιο ώστε  $A \subseteq \bar{A}$ .

**Ορισμός (τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο):** Το διανυσματικό πεδίο  $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  είναι ένα τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο αν για κάθε φραγμένο μη κενό σύνολο  $S \subset \mathcal{R}^n$  υπάρχει  $L(S) > 0$  τέτοιο ώστε να ισχύει η ανισότητα:

$$|f(x) - f(y)| \leq L(S)|x - y| \text{ για κάθε } x, y \in S$$

**Θεώρημα (Υπαρξη):** Έστω  $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο. Τότε για κάθε  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  υπάρχει  $\delta > 0$  και παραγωγίσιμη συνάρτηση  $x: [0, \delta] \rightarrow \mathcal{R}^n$  τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(t) &= f(x(t)), \text{ για κάθε } t \in [0, \delta] \end{aligned}$$

**Θεώρημα (Μοναδικότητα):** Έστω  $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο. Τότε για κάθε  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  υπάρχει το πολύ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση  $x: [0, \delta] \rightarrow \mathcal{R}^n$  τέτοια ώστε να ισχύουν οι:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(t) &= f(x(t)), \text{ για κάθε } t \in [0, \delta] \end{aligned}$$

για κάποιο  $\delta > 0$ .

**Θεώρημα (Μέγιστος Χρόνος Ύπαρξης της Λύσης):** Έστω  $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο. Τότε για κάθε  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  υπάρχει  $t_{max} \in (0, +\infty]$  και μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση  $x: [0, t_{max}) \rightarrow \mathcal{R}^n$  τέτοια ώστε ισχύει:

$$x(0) = x_0$$



και

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \text{ για κάθε } t \in [0, t_{max})$$

Επιπλέον αν  $t_{max} < +\infty$  (πεπερασμένος χρόνος απόδρασης) τότε  $\limsup_{t \rightarrow t_{max}^-} (|x(t)|) = +\infty$ .

**Ορισμός (Σημείο Ισορροπίας):** Ένα σημείο  $x^* \in \mathcal{R}^n$  με  $f(x^*) = 0$  καλείται ένα σημείο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος  $\dot{x} = f(x), x \in \mathcal{R}^n$ , όπου δοσμένο  $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο.

Ένα σημείο ισορροπίας είναι ένα πολύ ειδικό σημείο, γιατί παρουσιάζει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Αν  $x_0 = x^*$  τότε  $x(t) \equiv x^*$  (αν ξεκινήσω από ένα σημείο ισορροπίας τότε παραμένω αιώνια στο σημείο ισορροπίας).
2. Αν  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t)) = \xi \in \mathcal{R}^n$  τότε το  $\xi \in \mathcal{R}^n$  είναι υποχρεωτικά ένα σημείο ισορροπίας. Αυτό συμβαίνει γιατί (λόγω συνέχειας)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\dot{x}(t)) = f(\xi) \in \mathcal{R}^n$ . Αν λοιπόν ισχυε ότι  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\dot{x}_i(t)) = a \neq 0$  για κάποιο  $i \in \{1, \dots, n\}$  τότε για κάθε  $\varepsilon > 0$  θα μπορούσαμε να βρούμε  $T = T(\varepsilon) > 0$  επαρκώς μεγάλο τέτοιο ώστε  $x_i(T) + (a - \varepsilon)(t - T) \leq x_i(t) \leq x_i(T) + (a + \varepsilon)(t - T)$  για  $t \geq T$ . Αυτό όμως δείχνει ότι  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_i(t)) = +\infty$  (αν  $a > 0$ ) και  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_i(t)) = -\infty$  (αν  $a < 0$ ), που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t)) = \xi \in \mathcal{R}^n$ .

**Ορισμός (Έννοιες Ευστάθειας):** Έστω το δυναμικό σύστημα  $\dot{x} = f(x), x \in \mathcal{R}^n$ , όπου  $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  είναι ένα τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο. Έστω  $x^* \in \mathcal{R}^n$  σημείο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος  $\dot{x} = f(x), x \in \mathcal{R}^n$ , δηλ. με  $f(x^*) = 0$ .

1. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  καλείται (Lyapunov) ευσταθές (Lyapunov stable), αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta(\varepsilon) > 0$  τέτοιο ώστε  $|\varphi(t, x_0) - x^*| < \varepsilon$  για κάθε  $t \geq 0$  και  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  με  $|x_0 - x^*| < \delta(\varepsilon)$ . Ερμηνεία: Αν ξεκινήσεις κοντά στο σημείο ισορροπίας θα παραμείνεις κοντά αιώνια.
2. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  καλείται ασταθές αν δεν είναι ευσταθές.
3. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  ικανοποιεί την ιδιότητα της έλξης αν υπάρχει  $\eta > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  με  $|x_0 - x^*| < \eta$  ισχύει ότι  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi(t, x_0)) = x^*$ . Ερμηνεία: Το σημείο ισορροπίας έλκει τις λύσεις που ξεκινούν επαρκώς κοντά στο σημείο ισορροπίας.

4. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  ικανοποιεί την ιδιότητα της ολικής έλξης αν για κάθε  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  ισχύει ότι  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi(t, x_0)) = x^*$ . Ερμηνεία: Το σημείο ισορροπίας έλκει όλες τις λύσεις.
5. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  ικανοποιεί την ιδιότητα της ομοιόμορφης έλξης αν υπάρχει  $\eta > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $T(\varepsilon) > 0$  τέτοιο ώστε  $|\varphi(t, x_0) - x^*| < \varepsilon$  για κάθε  $t > T(\varepsilon)$  και για κάθε  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  με  $|x_0 - x^*| < \eta$ . Ερμηνεία: Το σημείο ισορροπίας έλκει ομοιόμορφα τις λύσεις που ξεκινούν επαρκώς κοντά στο σημείο ισορροπίας.
6. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  ικανοποιεί την ιδιότητα της ομοιόμορφης ολικής έλξης αν για κάθε  $\varepsilon, r > 0$  υπάρχει  $T(\varepsilon, r) > 0$  τέτοιο ώστε  $|\varphi(t, x_0) - x^*| < \varepsilon$  για κάθε  $t > T(\varepsilon, r)$  και για κάθε  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  με  $|x_0 - x^*| < r$ . Ερμηνεία: Σε κάθε φραγμένο σύνολο, το σημείο ισορροπίας έλκει ομοιόμορφα τις λύσεις που ξεκινούν στο φραγμένο σύνολο.
7. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  καλείται (ομοιόμορφα) ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές και ικανοποιεί την ιδιότητα της (ομοιόμορφης) έλξης.
8. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  καλείται (ομοιόμορφα) ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές και ικανοποιεί την ιδιότητα της (ομοιόμορφης) ολικής έλξης.
9. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  καλείται εκθετικά ευσταθές αν υπάρχουν σταθερές  $\eta, M, \sigma > 0$  τέτοιες ώστε ισχύει η εκτίμηση  $|\varphi(t, x_0) - x^*| \leq M \exp(-\sigma t) |x_0 - x^*|$  για κάθε  $t \geq 0$  και για κάθε  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  και για κάθε  $x_0 \in \mathcal{R}^n$  με  $|x_0 - x^*| < \eta$ .
10. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  καλείται ολικά εκθετικά ευσταθές αν υπάρχουν σταθερές  $M, \sigma > 0$  τέτοιες ώστε ισχύει η εκτίμηση  $|\varphi(t, x_0) - x^*| \leq M \exp(-\sigma t) |x_0 - x^*|$  για κάθε  $t \geq 0$  και για κάθε  $x_0 \in \mathcal{R}^n$ .

**Ορισμός (ακτινικά μη φραγμένη συνάρτηση):** Μία συνάρτηση  $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  ονομάζεται ακτινικά μη φραγμένη αν για κάθε  $M > 0$  το σύνολο  $\{x \in \mathcal{R}^n : V(x) \leq M\}$  είναι φραγμένο.

**Θεώρημα (Ικανές Συνθήκες για Ολική Ασυμπτωτική Ευστάθεια):** Έστω  $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο με  $f(0) = 0$  και  $V \in C^1(\mathcal{R}^n; \mathcal{R}_+)$  μία θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\nabla V(x)f(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathcal{R}^n, x \neq 0$$

Τότε το  $0 \in \mathcal{R}^n$  είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές για το σύστημα  $\dot{x} = f(x)$ .

**Ορισμός (Θετικά Αναλλοίωτο σύνολο):** Ένα σύνολο  $M \subseteq \mathcal{R}^n$  είναι θετικά αναλλοίωτο για το σύστημα  $\dot{x} = f(x), x \in \mathcal{R}$  αν για κάθε  $x_0 \in M$  ισχύει ότι  $\varphi(t, x_0) \in M$  για κάθε  $t \in [0, t_{max})$ .

**Ορισμός (Αναλλοίωτο σύνολο):** Ένα σύνολο  $M \subseteq \mathcal{R}^n$  είναι θετικά αναλλοίωτο για το σύστημα  $\dot{x} = f(x), x \in \mathcal{R}$  αν για κάθε  $x_0 \in M$  ισχύει ότι  $\varphi(t, x_0) \in M$  για κάθε  $t \in (t_{min}, t_{max})$ .

**Πρόταση 1.4.5. στο [2]:** Η κλειστότητα ενός συνόλου το οποίο είναι θετικά αναλλοίωτο παραμένει θετικά αναλλοίωτη.

**Ορισμός 2.8 στο [8]:** Μια συνεχής βαθμωτή συνάρτηση  $\Phi(x)$  ορισμένη σε ένα σύνολο  $N \subset X$ , όπου  $X$  τοπικά συμπαγής χώρος, θα είναι ομοιόμορφα μη φραγμένη στο  $N$  αν δοσμένης οποιασδήποτε σταθεράς  $\alpha > 0$  υπάρχει συμπαγές σύνολο  $K \subset N, K \neq N$  τέτοιο ώστε  $\Phi(x) \geq \alpha$  για  $x \notin K$ .

**Θεώρημα 2.13 στο [8]:** Ένα συμπαγές σύνολο  $M \subset X$  είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής ομοιόμορφη μη φραγμένη συνάρτηση  $\Phi(x)$  ορισμένη στο  $X$  τέτοια ώστε :

$$(i) \Phi(x) = 0 \text{ για } x \in M, \Phi(x) > 0 \text{ για } x \notin M$$

$$(ii) \Phi(xt) < \Phi(x) \text{ για } x \notin M \text{ και } t > 0$$

**Ορισμός (Πίνακας Hurwitz):** Ένας πίνακας  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$  καλείται πίνακας Hurwitz αν όλες του οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, δηλ.  $Re(\lambda_i(A)) < 0$  για  $i = 1, \dots, n$ .

**Πόρισμα 4.3 στο [23]:** Έστω το διανυσματικό πεδίο  $f \in C^1(\mathcal{R}^n; \mathcal{R}^n)$  με  $f(x^*) = x^*$  και έστω ότι ο πίνακας  $A = Df(x^*) \in \mathcal{R}^{n \times n}$  είναι πίνακας Hurwitz. Τότε το  $x^* \in \mathcal{R}^n$  είναι εκθετικά ευσταθές για το σύστημα  $\dot{x} = f(x)$ .

## 1. Εισαγωγή

Η επέκταση του τυπικού συστήματος cruise control είναι το σύστημα adaptive cruise control (ACC), το οποίο έχει διπλή λειτουργία: Στη λειτουργία ελέγχου ταχύτητας, το ACC διατηρεί σταθερή την επιθυμητή ταχύτητα, όπως το συμβατικό, αλλά αν υπάρχει πιο αργό όχημα μπροστά, το ACC μεταβαίνει στον έλεγχο αποστάσεων και χρησιμοποιεί αισθητήρες επί του οχήματος για να φτάσει στην επιθυμητή απόσταση από το προηγούμενο όχημα. Αυτό μπορεί να οδηγήσει πολλά οχήματα εξοπλισμένα με το σύστημα ACC να σχηματίσουν μια διμοιρία με στενή απόσταση οχημάτων, γεγονός που μπορεί να αυξήσει την ασφάλεια, τη ροή της κυκλοφορίας και να μειώσει την κατανάλωση καυσίμου.

Η λογική ενός συστήματος ACC είναι μία πολιτική αποστάσεων, όπου ένα όχημα εξοπλισμένο με το ACC έχει μία επιθυμητή απόσταση που προσπαθεί να την διατηρήσει σε σχέση με το προηγούμενο όχημα. Μία μεγάλη ποικιλία από πολιτικές αποστάσεων και ελέγχους για οχήματα και διμοιρίες με ACC εμφανίστηκε στις εργασίες [5], [6], [7], [10], [19], [24], [25], [28], [31], [33], [34], [35], [36], [39], [41], [47]. Για την αξιολόγηση μιας πολιτικής αποστάσεων και του σχετικού ελεγκτή της, προτάθηκαν τα ακόλουθα κριτήρια (βλέπε [34]): (i) η ατομική ευστάθεια του οχήματος, η οποία χαρακτηρίζει τη σύγκλιση προς μια επιθυμητή ισορροπία, (ii) το string stability, το οποίο επικεντρώνεται στη διασπορά μικρών διαταραχών κατά μήκος μιας σειράς οχημάτων (βλέπε [7], [30], [38], [40]), (iii) η ευστάθεια ροής κυκλοφορίας που ασχολείται με την εξέλιξη της πυκνότητας όταν όλα τα οχήματα χρησιμοποιούν την ίδια πολιτική αποστάσεων (βλέπε [34], [35], [37]), και (iv) η προσπάθεια ελέγχου πρέπει να είναι εντός πρακτικών περιορισμών του οχήματος.

Η έννοια του string stability έχει μελετηθεί ευρέως και αρκετοί ορισμοί έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία (βλέπε [7], [13], [15], [30], [33], [38], [40], [45]). Μια λεπτομερής επισκόπηση των διαφόρων ορισμών του string stability και των ιδιοτήτων τους δίνεται στις εργασίες [11], [30]. Στην εργασία [30] προτάθηκε ένας νέος ορισμός που μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε γραμμικά όσο και σε μη γραμμικά συστήματα και βασίζεται στη  $L_p$  – ευστάθεια. Ο ορισμός αυτός περιλαμβάνει την εξασθένηση των έναντι στο ρεύμα διαταραχών, εξωτερική είσοδο στο όχημα οδηγό καθώς και διαταραχές στις αρχικές συνθήκες.

Ενώ το string stability είναι μια επιθυμητή ιδιότητα και πρωταρχικός στόχος στο σχεδιασμό συστημάτων ACC, καθώς διασφαλίζει ότι οι διαταραχές στη θέση, την ταχύτητα ή την επιτάχυνση

δεν μεγεθύνονται καθώς διαδίδονται προς τα πίσω κατά μήκος της διμοιρίας, δεν εγγυάται την ασφαλή λειτουργία της διμοιρίας (βλέπε [9]). Μια μεγάλη ποικιλία πολιτικών αποστάσεων και οι σχετικοί ελεγκτές τους επικεντρώνονται στις ιδιότητες ευστάθειας και του string stability (βλέπε [6], [7], [13], [10], [16], [19], [24], [25], [28], [29], [30], [33], [39], [40], [42], [45], [47], [48], [49], [44]), που ωστόσο, μπορεί να οδηγήσουν σε συγκρούσεις ή μη ρεαλιστικά και ανεπιθύμητα φαινόμενα όπως αρνητικές ταχύτητες ή ταχύτητες που υπερβαίνουν τα όρια ταχύτητας του δρόμου. Από την άλλη, προσεγγίσεις που λαμβάνουν υπόψη την ασφάλεια των συστημάτων ACC μπορούν να βρεθούν στις εργασίες [1], [5], [17] και [46], αλλά δεν μελετούν το string stability, τη λειτουργία σε έναν κυκλικό δρόμο ή ορισμένες μακροσκοπικές ιδιότητες που προκύπτουν στον έλεγχο της κυκλοφορίας, (βλέπε [26], [32]). Επίσης, στις εργασίες [15], [19] και [41], η αποφυγή σύγκρουσης επιτυγχάνεται εις βάρος του σφάλματος απόστασης με μη εξασφαλισμένη σύγκλιση στο μηδέν, ενώ δεν υπάρχουν περιορισμοί στην προσπάθεια ελέγχου και τη μέγιστη εφικτή ταχύτητα. Στην εργασία [27], προκύπτουν διαφορετικές διαμορφώσεις και συνθήκες ελέγχου που εγγυώνται το string stability και αποφυγή σύγκρουσης όταν η διμοιρία εκκινεί από μια θέση ισορροπίας με μηδενική ταχύτητα και αρκετά μεγάλο αρχικό διάστημα μεταξύ των οχημάτων. Ο ελεγκτής στην εργασία [27] βασίζεται σε μια σταθερή πολιτική χρονικής πορείας (βλέπε [19]), αλλά δεν λαμβάνει υπόψη τις περιορισμένες δυνατότητες επιτάχυνσης και φρεναρίσματος των οχημάτων, ούτε δρόμους με όρια ταχύτητας. Τέλος, τα κριτήρια ασφαλείας για τους ελιγμούς των διμοιριών έχουν επίσης ληφθεί στην εργασία [3], όπου αποφεύγονται οι συγκρούσεις, όποτε η διμοιρία δεν υπερβαίνει μια δεδομένη ταχύτητα. Η προσέγγιση στις εργασίες [3], [4] μπορεί να εγγυηθεί τη ευστάθεια και το string stability εάν η επιτάχυνση και η ταχύτητα του οδηγού οχήματος είναι γνωστά μεγέθη ή μπορούν να εκτιμηθούν από όλα τα ακόλουθα οχήματα.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που δίνονται στην εργασία [22]. Τα αποτελέσματα αφορούν τον σχεδιασμό ενός ελεγκτή που εξασφαλίζει ταυτόχρονα την αποφυγή σύγκρουσης μεταξύ οχημάτων εξοπλισμένων με το ACC, μη αρνητικές ταχύτητες οχημάτων, οι οποίες επίσης περιορίζονται από συγκεκριμένα όρια ταχύτητας, περιορισμένη επιτάχυνση, ευστάθεια και  $L_p$  string stability για  $p = 2$  και  $p = \infty$ , καθώς και ορισμένες χρήσιμες μακροσκοπικές ιδιότητες. Λόγω των διαφορετικών συνθηκών που ισχύουν για έναν ανοιχτό δρόμο και έναν κυκλικό, εξετάζονται και οι δύο περιπτώσεις ξεχωριστά και δείχνεται ότι ο προτεινόμενος μη γραμμικός ελεγκτής έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. Παρέχει ασφαλή λειτουργία μίας διμοιρίας χωρίς συγκρούσεις, αρνητικές ταχύτητες ή ταχύτητες που υπερβαίνουν ορισμένα όρια ταχύτητας.

2. Εγγυάται την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια της ισορροπίας για μια διμοιρία σε ανοιχτό δρόμο και ολική εκθετική ευστάθεια για την περίπτωση ενός κυκλικού δρόμου.
3. Εγγυάται  $L_p$  string stability για  $p = 2$  και  $p = \infty$ , για την διμοιρία.

Επιπλέον, παρουσιάζεται το σύνολο των εφικτών αρχικών καταστάσεων για ασφαλή λειτουργία όσον αφορά την αποφυγή σύγκρουσης και τις περιορισμένες ταχύτητες του οχήματος, καθώς και την κατηγορία εισόδων (ελιγμοί του οδηγού οχήματος) που μπορούν να επιτραπούν για την ασφαλή λειτουργία της διμοιρίας. Τέλος, μελετώνται ορισμένες μακροσκοπικές ιδιότητες που σχετίζονται με τη ευστάθεια της ροής της κυκλοφορίας, τον σχεδιασμό του θεμελιώδους διαγράμματος και την αναγωγή του μικροσκοπικού μοντέλου στο τυπικό μοντέλο Lighthill-Witham-Richards (LWR) (βλέπε [26], [32]). Οι αποδείξεις όλων των αποτελεσμάτων πραγματοποιούνται με τη ρητή κατασκευή μιας οικογένειας συναρτήσεων Lyapunov και συναρτήσεων Barrier (βλέπε [43]). Οι κύριες προκλήσεις πηγάζουν από το γεγονός ότι υπάρχουν πολλαπλοί στόχοι και προδιαγραφές που πρέπει να αντιμετωπιστούν ταυτόχρονα (ευστάθεια, string stability, μακροσκοπικές ιδιότητες), ενώ ταυτόχρονα πρέπει να πληρούνται διάφοροι περιορισμοί (περιορισμένη επιτάχυνση και ταχύτητες εντός ορίων ταχύτητας δρόμου). Τέλος, η μη γραμμική φύση του ελεγκτή και το γεγονός ότι τα συστήματα ελέγχου που μελετώνται στην διπλωματική εργασία δεν εξελίσσονται σε γραμμικούς χώρους προσθέτει στην πολυπλοκότητα του προβλήματος.

Η δομή της διπλωματικής εργασίας έχει ως εξής. Το 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο της εργασίας είναι αφιερωμένο στην παρουσίαση των ιδιοτήτων των adaptive cruise controllers, όπως κριτήρια ασφάλειας και κατάλληλες έννοιες ευστάθειας. Για να δώσουμε το κίνητρο της χρήσης μη γραμμικών ελεγκτών, ειδικά σενάρια προσομοίωσης παρουσιάζονται επίσης στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο χρησιμοποιώντας τον τυπικό ελεγκτή CTH (βλέπε [30]), τα οποία καταδεικνύουν ότι ορισμένα κριτήρια ασφάλειας μπορεί να αποτύχουν. Μια γενική μορφή μη γραμμικών adaptive cruise controllers παρέχεται στο Κεφάλαιο 3 μαζί με επαρκείς προϋποθέσεις για την ασφαλή λειτουργία μιας διμοιρίας οχημάτων τόσο σε ανοιχτό δρόμο όσο και σε κυκλικό δρόμο. Το 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο παρέχει αποτελέσματα για τη  $L_p$  string stability για  $p = 2$ , και  $p = \infty$ , του προτεινόμενου adaptive cruise controller. Στο Κεφάλαιο 5, φαίνεται ότι οι επαρκείς συνθήκες για το string stability και η ύπαρξη επίσης ενός θεμελιώδους διαγράμματος εγγυώνται την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του μοναδικού σημείου ισορροπίας μιας διμοιρίας που λειτουργεί σε ανοιχτό δρόμο και την ολική εκθετική ευστάθεια για την περίπτωση ενός κυκλικού δρόμου. Αριθμητικά παραδείγματα παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 6 για να καταδείξουν την αποτελεσματικότητα του προτεινόμενου μη γραμμικού adaptive cruise controller. Όλες οι αποδείξεις

των κύριων αποτελεσμάτων παρέχονται στο Κεφάλαιο 7. Τέλος, οι τελικές παρατηρήσεις δίνονται στο Κεφάλαιο 8.

**Συμβολισμοί.** Σε όλη αυτή την εργασία, υιοθετούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς.

- \*  $\mathcal{R}_+ := [0, +\infty)$  δηλώνει το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.
- \* Με το  $|x|$  συμβολίζουμε τόσο την Ευκλείδεια νόρμα ενός διανύσματος  $x \in \mathcal{R}^n$  όσο και την απόλυτη τιμή ενός μεγέθους  $x \in \mathcal{R}$ .
- \* Με το  $K$  συμβολίζουμε την τάξη των  $C^0$  συναρτήσεων  $a: \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$  που είναι γνησίως αύξουσες με  $a(0) = 0$ . Με το  $K_\infty$  συμβολίζουμε την τάξη των  $C^0$  συναρτήσεων  $a: \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$  που είναι γνησίως αύξουσες με  $a(0) = 0$  και  $\lim_{s \rightarrow +\infty} a(s) = +\infty$ . Με το  $KL$  συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων  $\sigma: \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$  με τις ιδιότητες: (i) για κάθε  $t \geq 0$  η απεικόνιση  $\sigma(\cdot, t)$  είναι τάξης  $K$ , (ii) για κάθε  $s \geq 0$  η απεικόνιση  $\sigma(s, \cdot)$  είναι φθίνουσα με  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma(s, t) = 0$ .
- \* Με το  $C^0(A, \Omega)$ , συμβολίζουμε την τάξη των συνεχών συναρτήσεων πάνω στο  $A \subseteq \mathcal{R}^n$ , οι οποίες λαμβάνουν τιμές στο  $\Omega \subseteq \mathcal{R}^m$ . Με το  $C^k(A; \Omega)$ , όπου  $k \geq 1$  είναι ακέραιος, συμβολίζουμε την τάξη των συναρτήσεων πάνω στο  $A \subseteq \mathcal{R}^n$  με συνεχείς παραγώγους τάξης  $k$ , όπου παίρνουν τιμές στο  $\Omega \subseteq \mathcal{R}^m$ . Όταν  $\Omega = \mathcal{R}^m$  τότε γράφουμε  $C^0(A)$  ή  $C^k(A)$ .
- \* Με το  $L^p$  με  $p \geq 1$  δηλώνουμε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των μετρήσιμων συναρτήσεων  $f: \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}^n$  για τις οποίες  $\|f\|_{[0,t],p} = \left( \int_0^t |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ .  $L^\infty$  δηλώνει το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των μετρήσιμων συναρτήσεων  $f: \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}^n$  για τις οποίες  $\|f\|_{[0,t],\infty} = \operatorname{esssup}_{x \in [0,t]} (|f(x)|) < +\infty$ .
- \* Για ένα σύνολο  $S \subseteq \mathcal{R}^n$ ,  $\bar{S}$  δηλώνει το κλείσιμο του  $S$ .

## 2. Κίνητρο

Ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται συχνά για την δυναμική οχημάτων στις διμοιρίες αποτελείται από τις ακόλουθες ΣΔΕ:

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= v_{i-1} - v_i \\ \dot{v}_i &= u_i \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

όπου θεωρούμε μια διμοιρία από  $n$  πανομοιότυπα οχήματα σε ένα δρόμο, το  $s_i$  για  $i=1, \dots, n$  είναι η απόσταση μεταξύ του  $i$ -οστού οχήματος από το  $(i-1)$ -οστό όχημα, το  $v_i$  για  $i=1, \dots, n$  είναι η ταχύτητα του  $i$ -οστού οχήματος και το  $u_i$  για  $i=1, \dots, n$  είναι η είσοδος ελέγχου (επιτάχυνση) του  $i$ -οστού οχήματος. Για το μοντέλο (2.1), έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- $v_0$  είναι η ταχύτητα του προπορευόμενου οχήματος και είναι μια εξωτερική είσοδος. Αυτό αντιστοιχεί στην περίπτωση ανοιχτού δρόμου,
- $v_0 = v_n$ , που αντιστοιχεί στην περίπτωση κυκλικού δρόμου. Σε αυτή την περίπτωση, ισχύει η εξίσωση  $\sum_{i=1}^n s_i = L$ , όπου  $L > 0$  είναι το μήκος του κυκλικού δρόμου.

Για αυτόνομα οχήματα χωρίς επικοινωνία, χρησιμοποιείται η λεγόμενη αρχιτεκτονική ελέγχου Predecessor-Following, όπου υπάρχει μία συνάρτηση  $F : \mathcal{R}_+^3 \rightarrow \mathcal{R}$  έτσι ώστε

$$u_i = F(s_i, v_{i-1}, v_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Η συνάρτηση  $F : \mathcal{R}_+^3 \rightarrow \mathcal{R}$  είναι ένας νόμος ανατροφοδότησης (feedback law) που συνιστά το Adaptive Cruise Controller. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο όρος “ adaptive cruise controller ” χρησιμοποιείται εκτενώς στη βιβλιογραφία (βλέπε [31]) για τους νόμους ανατροφοδότησης της συνάρτησης (2.2) και δεν σχετίζεται με τον όρο “ adaptive control ” όπου ο ελεγκτής προσαρμόζεται για να χειρίζεται τις αβεβαιότητες του μοντέλου.



Πρέπει να σημειωθεί ότι το σύστημα (2.1) υπόκειται σε διάφορους περιορισμούς όπως θετικές ταχύτητες, ταχύτητες εντός των ορίων ταχύτητας και θετικές αποστάσεις μεταξύ των οχημάτων. Αυτό υποδηλώνει ότι το μοντέλο (2.1) είναι μη γραμμικό, καθώς ο χώρος κατάστασής του δεν είναι ο γραμμικός χώρος  $\mathbb{R}^{2n}$  αλλά ένα συγκεκριμένο σύνολο που περιγράφεται στις ακόλουθες ενότητες. Τέλος, λόγω μερικών πρόσθετων τεχνικών περιορισμών, όπως η φραγμένη επιτάχυνση, η είσοδος ελέγχου (2.2) είναι κεκορεσμένη και λαμβάνει τιμές σε ένα φραγμένο σύνολο.

## A. Απαιτήσεις του Adaptive Cruise Control

Ο adaptive cruise controller (2.2) πρέπει να επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες απαιτήσεις.

1) Απαίτηση Ασφαλούς Λειτουργίας για τη περίπτωση ανοιχτού δρόμου: Υπάρχει μία σταθερά  $a > 0$ , ένα μη κενό σύνολο εισόδων  $J \subseteq \{v_0 \in C^1(\mathbb{R}_+): 0 < v_0 < v_{\max}\}$ , όπου  $v_{\max} > 0$  είναι το όριο ταχύτητας του δρόμου και μία καθορισμένη απεικόνιση  $(0, v_{\max}) \ni v_0 \rightarrow D(v_0) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  με

$$D(v_0) \subseteq \{(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{2n} : 0 < v_i < v_{\max}, s_i > a, i = 1, \dots, n\} \quad (2.3)$$

με την ακόλουθη ιδιότητα:

“Για κάθε  $v_0 \in J$ , αν  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) \in D(v_0(0))$ , τότε η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (2.1), (2.2) με αρχική συνθήκη  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0))$  υπάρχει για όλα τα  $t \geq 0$  και ικανοποιεί την σχέση  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D(v_0(t))$ .”

Παρατηρήστε ότι η απαίτηση ασφαλούς λειτουργίας είναι στην πραγματικότητα μια well-posedness απαίτηση, δηλαδή, απαιτούμε να υπάρχει η λύση και να λαμβάνει τιμές σε ένα σύνολο φυσικής σημασίας. Ωστόσο, η απαίτηση ασφαλούς λειτουργίας δεν είναι μόνο ένας χαρακτηρισμός της λύσης, απαιτούμε περαιτέρω ότι το  $s_i(t) > a$ , όπου η σταθερά  $a > 0$  είναι η ελάχιστη επιτρεπόμενη

απόσταση μεταξύ δύο οχημάτων. Αυτή είναι μια απαίτηση ασφάλειας που συνεπάγεται την αποφυγή συγκρούσεων.

Στην περίπτωση του κυκλικού δρόμου, η απαίτηση ασφαλούς λειτουργίας λαμβάνει την ακόλουθη μορφή όταν το  $L > na$  (ένας βασικός περιορισμός που εγγυάται ότι τα οχήματα μπορούν να τοποθετηθούν στο κυκλικό δρόμο).

1') Απαίτηση Ασφαλούς Λειτουργίας για τη περίπτωση κυκλικού δρόμου: Υπάρχουν σταθερές  $a > 0$ ,  $v_{\max} > 0$  και ένα σύνολο  $D \subseteq \mathcal{R}^{2n}$  με

$$D \subseteq \left\{ (s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{R}^{2n} : 0 < v_i < v_{\max}, s_i > a, i = 1, \dots, n \right\} \quad (2.4)$$

με την ακόλουθη ιδιότητα:

“Αν  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) \in D$  και  $\sum_{i=1}^n s_i(0) = L$ , τότε η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (2.1), (2.2) με  $v_0 = v_n$ , και αρχικές συνθήκες  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0))$  υπάρχει για όλα τα  $t \geq 0$  και ικανοποιεί  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D$ .”

2) Τεχνική Απαίτηση: Για μία δοσμένη σταθερά  $A > 0$ , έχουμε

$$|F(s, w, v)| \leq A, \text{ για όλα τα } s > a, v, w \in (0, v_{\max}). \quad (2.5)$$

Η σταθερά  $A > 0$  που εμφανίζεται στην τεχνική απαίτηση είναι η μέγιστη επιτάχυνση που μπορεί να φτάσει το όχημα και εξαρτάται από τα τεχνικά χαρακτηριστικά των οχημάτων και του δρόμου.

3) Απαίτηση Ευστάθειας για τον ανοιχτό δρόμο: Για κάθε  $v^* \in (0, v_{\max})$ , υπάρχει ένα  $s^* \in (a, +\infty)$  με  $F(s^*, v^*, v^*) = 0$  τέτοιο ώστε (i)  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*) \in D(v^*)$ , (ii) η σταθερή είσοδος  $v_0(t) \equiv v^*$  βρίσκεται στο επιτρεπόμενο σύνολο εισόδου  $J$ , και (iii) το σημείο ισορροπίας  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*) \in D(v^*)$  του συστήματος (2.1), (2.2) με  $v_0(t) \equiv v^*$  που ορίζεται στο  $\overline{D(v^*)}$  είναι Ολικά Ασυμπτωτικά Ευσταθές και Τοπικά Εκθετικά Ευσταθές, δηλαδή, υπάρχουν σταθερές  $M, \sigma, \delta > 0$  και μία συνάρτηση  $\omega \in KL$  έτσι ώστε για κάθε  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) \in \overline{D(v^*)}$  η λύση του Π.Α.Τ. (2.1), (2.2) με  $v_0(t) \equiv v^*$  ικανοποιεί την ανίσωση

$$\begin{aligned} & \left| (s_1(t) - s^*, \dots, s_n(t) - s^*, v_1(t) - v^*, \dots, v_n(t) - v^*) \right| \\ & \leq \omega \left( \left| (s_1(0) - s^*, \dots, s_n(0) - s^*, v_1(0) - v^*, \dots, v_n(0) - v^*) \right|, t \right) \end{aligned}$$

για όλα τα  $t \geq 0$ ; (2.6)

και αν επιπλέον  $\left| (s_1(0) - s^*, \dots, s_n(0) - s^*, v_1(0) - v^*, \dots, v_n(0) - v^*) \right| < \delta$  τότε

$$\begin{aligned} & \left| (s_1(t) - s^*, \dots, s_n(t) - s^*, v_1(t) - v^*, \dots, v_n(t) - v^*) \right| \\ & \leq M \exp(-\sigma t) \left| (s_1(0) - s^*, \dots, s_n(0) - s^*, v_1(0) - v^*, \dots, v_n(0) - v^*) \right| \end{aligned}$$

για όλα τα  $t \geq 0$ . (2.7)

Η απαίτηση ευστάθειας είναι μια κρίσιμη απαίτηση καθώς εγγυάται τη σύγκλιση των καταστάσεων του οχήματος στις επιθυμητές τιμές.

Για έναν κυκλικό δρόμο, η απαίτηση ευστάθειας λαμβάνει την ακόλουθη μορφή.

3') Απαίτηση Ευστάθειας για τον κυκλικό δρόμο: Υπάρχει ένα  $v^* \in (0, v_{\max})$  με  $F(s^*, v^*, v^*) = 0$ , όπου  $s^* = L/n$ , τέτοιο ώστε (i)  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*) \in D$ , και (ii) το σημείο ισορροπίας  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*) \in D$  του συστήματος (2.1), (2.2) με  $v_0 = v_n$  είναι Ολικά Εκθετικά Ευσταθές,

δηλαδή, υπάρχουν σταθερές  $M, \sigma > 0$  έτσι ώστε για κάθε  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) \in \bar{D}$  με  $\sum_{i=1}^n s_i(0) = L$ , η λύση του Π.Α.Τ. (2.1), (2.2) με  $v_0 = v_n$  ικανοποιεί την εκτίμηση (2.7).

Παρατηρήστε τη διαφορά στις απαιτήσεις ευστάθειας για έναν ανοιχτό δρόμο και έναν κυκλικό δρόμο. Σε ένα κυκλικό δρόμο όλες οι καταστάσεις στο σύνολο  $D$  είναι αυτόματα φραγμένες, ενώ αυτό δεν ισχύει για τις καταστάσεις του συνόλου  $\overline{D(v^*)}$ .

Καθώς η απαίτηση ευστάθειας εγγυάται την επιθυμητή ασυμπτωτική συμπεριφορά, δεν υπάρχει εγγύηση για την παροδική συμπεριφορά. Μια απαίτηση απόδοσης που εγγυάται καλή παροδική συμπεριφορά είναι η απαίτηση string stability. Εδώ δεν υιοθετούμε την κλασσική string stability αλλά υιοθετούμε μια ελαφρώς ισχυρότερη εκδοχή της έννοιας του  $L_p$  string stability που δίνεται στην εργασία [29]. Όπως σημειώθηκε στην εργασία [29], η έννοια του  $L_p$  string stability παρακινείται από την απαίτηση διασποράς ενέργειας κατά μήκος της σειράς των οχημάτων για  $p = 2$ , ενώ η περίπτωση όπου  $p = \infty$  σχετίζεται με τη μέγιστη υπέρβαση του τοπικού διανύσματος σφάλματος μεταξύ της τρέχουσας ταχύτητας και της επιθυμητής ταχύτητας.

4) Απαίτηση String Stability: Υπάρχει ένα  $p \in [1, +\infty]$  με την ακόλουθη ιδιότητα:

“Για κάθε  $q > 0$  υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση  $\beta_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  με  $\beta_q(0) = 0$ ,  $\beta_q(s) > 0$  για  $s \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , τέτοια ώστε κάθε λύση του συστήματος (2.1), (2.2) με  $v_0 \in J$  στην περίπτωση του ανοικτού δρόμου και  $v_0 = v_n$  στην περίπτωση του κυκλικού δρόμου, ικανοποιεί την εκτίμηση

$$\|v_i\|_{[0,t],p} \leq (1+q)\|v_{i-1}\|_{[0,t],p} + \beta_q(s_i(0) - s^*, v_i(0) - v^*)$$

για όλα τα  $t \geq 0$  και  $i = 1, \dots, n$ ” (2.8)

όπου  $\|v_i\|_{[0,t],p} = \left( \int_0^t |v_i(l) - v^*|^p dl \right)^{1/p}$ ,  $\|v_{i-1}\|_{[0,t],p} = \left( \int_0^t |v_{i-1}(l) - v^*|^p dl \right)^{1/p}$  για  $p \in [1, +\infty)$ ,  
 $\|v_i\|_{[0,t],\infty} = \sup_{0 \leq l \leq t} (|v_i(l) - v^*|)$ ,  $\|v_{i-1}\|_{[0,t],\infty} = \sup_{0 \leq l \leq t} (|v_{i-1}(l) - v^*|)$ ,  $v^* \in (0, v_{\max})$ ,  $s^* \in (a, +\infty)$  είναι σταθερές  
με  $F(s^*, v^*, v^*) = 0$  ( $s^* = L/n$  στην περίπτωση κυκλικού δρόμου).

Μία άλλη απαίτηση που μας εγγυάται ότι θα αποδώσει μπορεί να επιτευχθεί με την ύπαρξη ολικά εκθετικής πολλαπλότητας για τις καταστάσεις ταχύτητας. Αυτή η απαίτηση περιγράφεται παρακάτω.

5) Απαίτηση Θεμελιώδους Διαγράμματος: Υπάρχει μια συνάρτηση  $G \in C^1(\mathfrak{R}_+; \mathfrak{R}_+)$  και σταθερές  $\bar{M}, \bar{\sigma} > 0$  τέτοιες ώστε για κάθε λύση του (2.1), (2.2) με  $v_0 \in J$  στην περίπτωση ανοικτού δρόμου και  $v_0 = v_n$  στην περίπτωση κυκλικού δρόμου, που ικανοποιούν την εκτίμηση

$$\sum_{i=1}^n |v_i(t) - G(s_i(t))| \leq \bar{M} \exp(-\bar{\sigma}t) \sum_{i=1}^n |v_i(0) - G(s_i(0))|, \text{ για όλα τα } t \geq 0. \quad (2.9)$$

Η απαίτηση του θεμελιώδους διαγράμματος απαιτεί ουσιαστικά οι ταχύτητες των οχημάτων να εξαρτώνται τελικά μόνο από την τοπική πυκνότητα οχημάτων (local vehicle density). Η ανισότητα (2.9), δείχνει ότι το σύνολο όπου  $v_i = G(s_i)$  για  $i = 1, \dots, n$  είναι εκθετικά ευσταθές, ενώ η υπέρβασή του εξαρτάται μόνο από την απόσταση ( $|v_i(0) - G(s_i(0))|$ ). Πρέπει να σημειωθεί ότι η ανίσωση (2.6) υπονοεί πως το  $v_i - G(s_i) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ωστόσο, η σύγκλιση του μπορεί να μην είναι εκθετική, και δεν υπάρχει τίποτα που να μας εγγυάται ότι η υπέρβαση του εξαρτάται μόνο από το  $v_i(0) - G(s_i(0))$ . Δεδομένου ότι η πυκνότητα του οχήματος  $\rho(t, x)$  είναι προσεγγιστικά ίση με  $1/s_i(t)$  όταν το  $x$  είναι η θέση μεταξύ του  $i$ -οστού οχήματος από το  $(i-1)$ -οστό όχημα, είναι λογικό να πούμε ότι τελικά η ταχύτητα των οχημάτων της διμοιρίας υπακούει στην εξίσωση

$$v = G(\rho^{-1}), \text{ για } \rho \in (0, a^{-1}). \quad (2.10)$$

Ακόμη και στην περίπτωση που απουσιάζει μια ολικά εκθετική πολλαπλότητα για τις καταστάσεις ταχύτητας, είναι λογικό να αναμένεται ότι όλα τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (2.1), (2.2) θα ικανοποιούν μια σχέση της μορφής  $v_i = G(s_i)$  για  $i = 1, \dots, n$  και για μια κατάλληλη συνάρτηση  $G \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ . Το αντίστροφο αυτής της σχέσης, δηλαδή, η εξίσωση  $s_i = G^{-1}(v_i)$  όταν το  $G$  είναι αντιστρέψιμο, ονομάζεται spacing policy (πολιτική αποστάσεων) (βλέπε [37], [42]). Μια πολιτική αποστάσεων επιτρέπει την αναγωγή της μελέτης του συστήματος των  $n$  συνήθων διαφορικών εξισώσεων (2.1), (2.2) στο πρότυπο μοντέλο LWR με ταχύτητα που δίνεται από την (2.10) (αν και μια τέτοια αναγωγή είναι προβληματική αν δεν υπάρχει θεμελιώδες διάγραμμα για την διμοιρία). Σε αυτήν την περίπτωση, προκύπτει η ακόλουθη απαίτηση μακροσκοπικής ευστάθειας.

6) Απαίτηση Μακροσκοπικής Ευστάθειας: Υπάρχουν σταθερές  $0 < a < b$  τέτοιες ώστε

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho G(\rho^{-1})) > 0, \text{ για όλα τα } \rho \in (a, b) \quad (2.11)$$

Η ανισότητα (2.11) προτάθηκε στις εργασίες [37], [42] για τη λεγόμενη «άνευ όρων ευστάθεια ροής κυκλοφορίας», δηλαδή τη ευστάθεια του μοντέλου σε όλες τις πιθανές οριακές συνθήκες. Αργότερα χρησιμοποιήθηκε στην εργασία [34] για την κατασκευή πολιτικής αποστάσεων με μακροσκοπική ευστάθεια.

## B. Ειδικά Σενάρια Προσομοίωσης

Μια πολύ κοινή πολιτική αποστάσεων που χρησιμοποιείται στα συστήματα ACC είναι η constant time-headway policy (CTH) (σταθερή πολιτική προόδου χρόνου), (βλέπε [19], [31]) στο οποίο η επιθυμητή απόσταση  $s_d$  είναι ανάλογη της ταχύτητας:

$$s_d = r + hv \quad (2.12)$$

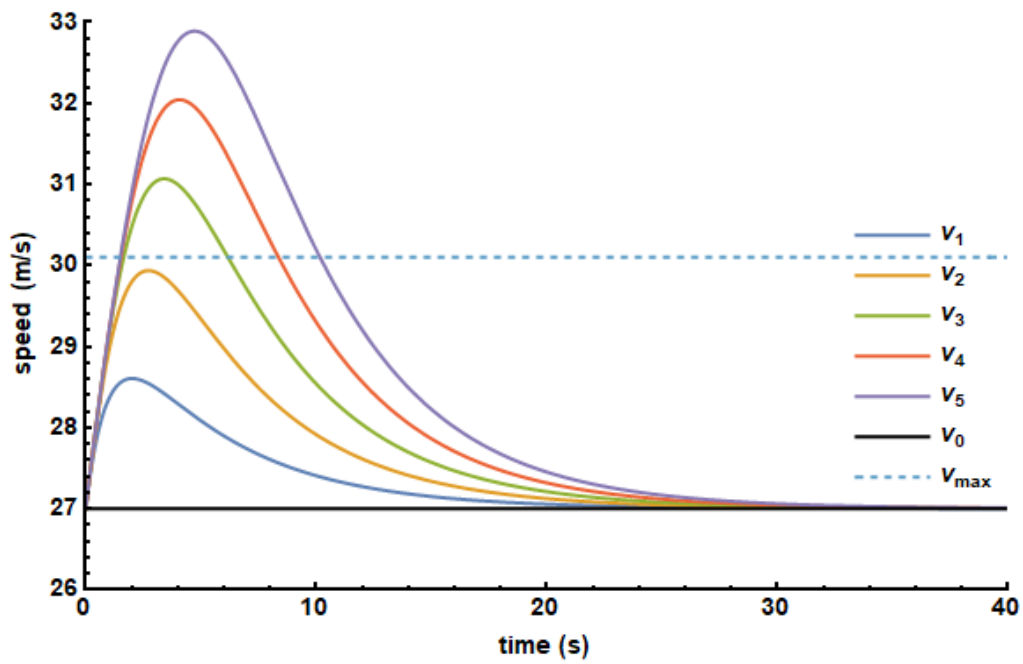
όπου  $r \geq a$  είναι μια ασφαλής ή επιθυμητή απόσταση μεταξύ των οχημάτων και η σταθερά αναλογίας  $h > 0$  αναφέρεται ως time-headway, δηλαδή η χρονική περίοδος κατά την οποία ο πίσω προφυλακτήρας του προηγούμενου οχήματος και ο πίσω προφυλακτήρας του αμέσως επόμενου

οχήματος περνούν μια καθορισμένη θέση στο δρόμο. Για την πολιτική αποστάσεων CTH (2.12), δίνεται ένας τυπικός γραμμικός νόμος ελέγχου (2.2) για τη ρύθμιση της απόστασης μεταξύ των οχημάτων

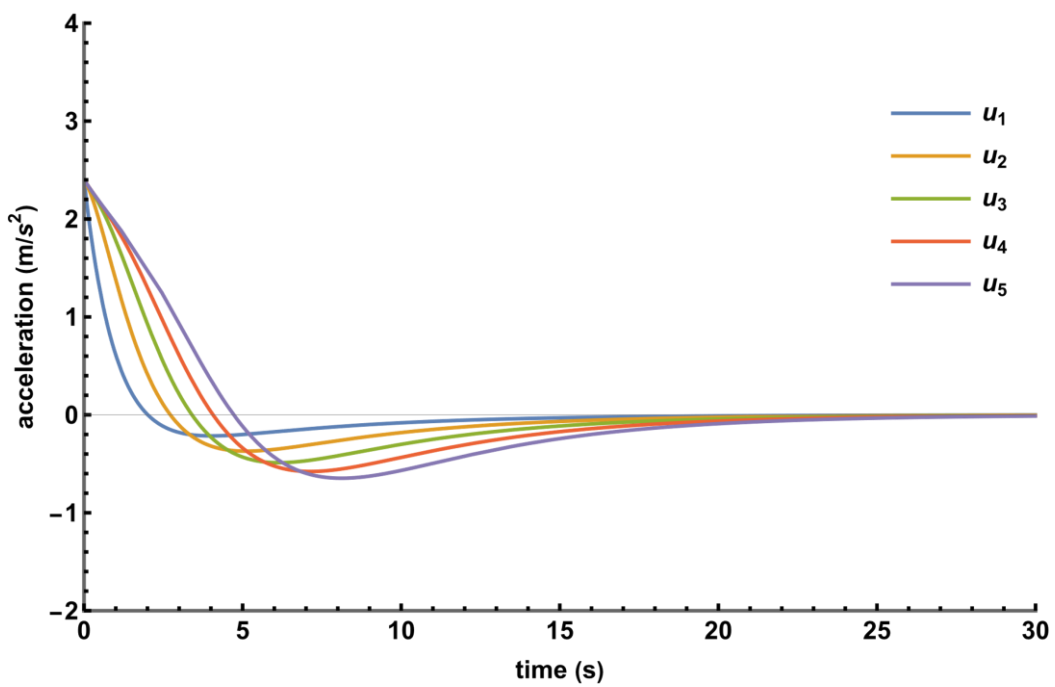
$$F(s, w, v) = (k - h^{-1})h^{-1}(s - r) + h^{-1}w - kv \quad (2.13)$$

όπου  $k > h^{-1} > 0$ , (βλέπε [30]). Η πολιτική CTH (2.12), με τον ελεγκτή (2.2) και (2.13) ικανοποιεί τόσο την Απαίτηση Ευστάθειας όσο και την απαίτηση String-Stability, (βλέπε [31]). Ωστόσο, η Τεχνική Απαίτηση δεν πληρείται από την  $F(s, w, v)$  στο (2.13) γιατί εξαρτάται γραμμικά από το  $s$  και, το πιο σημαντικό, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η Απαίτηση Ασφαλούς Λειτουργίας σε ανοιχτό δρόμο μπορεί να μην ισχύει. Από όσο γνωρίζουμε, κανένας ερευνητής δεν έχει δείξει ποτέ ποιο είναι το επιτρεπόμενο σύνολο εισόδων για έναν ανοιχτό δρόμο. Αυτό απεικονίζεται στα ακόλουθα σενάρια.

**1<sup>ο</sup> Σενάριο.** Εξετάζουμε την περίπτωση όπου  $n = 5$  οχήματα ίδιου μήκους  $a = 5m$  να κινούνται σε δρόμο με όριο ταχύτητας  $v_{\max} = 30.1m/s$  με όλα τα οχήματα να χρησιμοποιούν την ίδια CTH πολιτική αποστάσεων (2.12) με τον ελεγκτή (2.2), (2.13), αρχική ταχύτητα  $v_{i,0} = v_i(0) = 27m/s$  και αρχική απόσταση  $s_{i,0} = s_i(0) = 70m$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι το προπορευόμενο όχημα κινείται επίσης με σταθερή ταχύτητα  $v_0 = 27m/s$ , και έστω  $h = 1s$ , και  $k = 1.2s^{-1}$ ,  $r = 31m$ . Η Εικόνα 1 δείχνει ότι σε αυτή τη ρύθμιση, ορισμένα οχήματα δεν τηρούν το όριο ταχύτητας  $v_{\max} = 30.1m/s$  του δρόμου. Στην Εικόνα 2 φαίνονται οι επιταχύνσεις των οχημάτων.



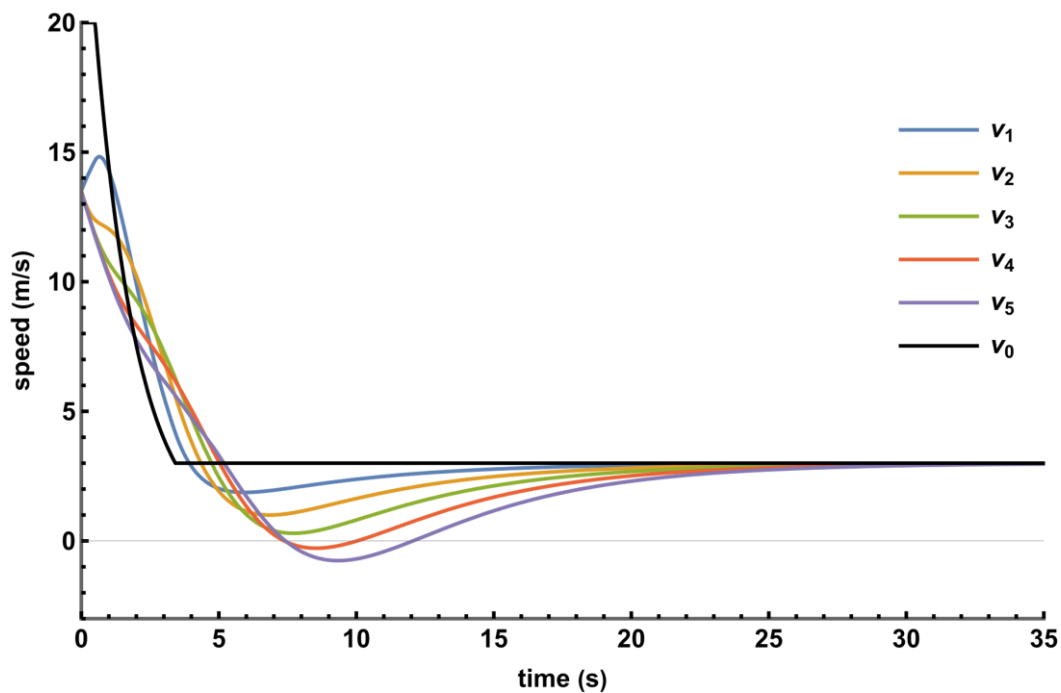
**Εικόνα 1:** CTH πολιτική (2.12) με τον ελεγκτή (2.2), (2.13) και ταχύτητες που υπερβαίνουν το όριο ταχύτητας δρόμου  $v_{max} = 30.1 \text{ m/s}$ .



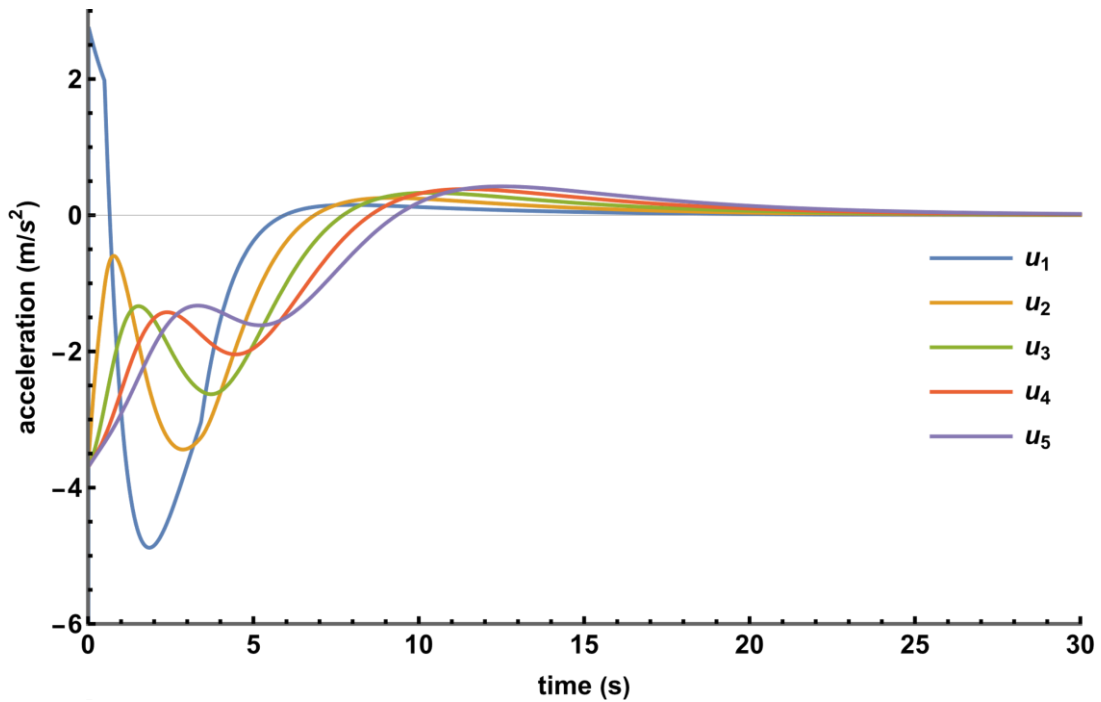
**Εικόνα 2:** Επιταχύνσεις οχημάτων με την πολιτική CTH (2.12) με τον ελεγκτή (2.2), (2.13) για το 1<sup>ο</sup> σενάριο.



**2<sup>ο</sup> Σενάριο.** Σε ένα δεύτερο σενάριο, εξετάζουμε τον ελεγκτή (2.13) με  $h = 1s$ , και  $k = 1.2s^{-1}$ ,  $r = 35m$  και  $n = 5$  οχήματα με αρχική ταχύτητα  $v_{i,0} = 13.5m/s$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , και με αρχική απόσταση  $s_{i,0} = 30m$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι το κορυφαίο όχημα έχει ταχύτητα  $v_0 = 20m/s$  και επιβραδύνει έντονα με ρυθμό  $-5.8m/s^2$  σε σημαντικά χαμηλότερη ταχύτητα  $v_0 = 3m/s$ . Η Εικόνα 3 απεικονίζει επίσης ότι σε αυτό το σενάριο, η Απαίτηση Ασφαλούς Λειτουργίας δεν ικανοποιείται, δεδομένου ότι ορισμένα οχήματα επιτυγχάνουν αρνητικές ταχύτητες. Στην Εικόνα 4 φαίνονται οι επιταχύνσεις των οχημάτων.

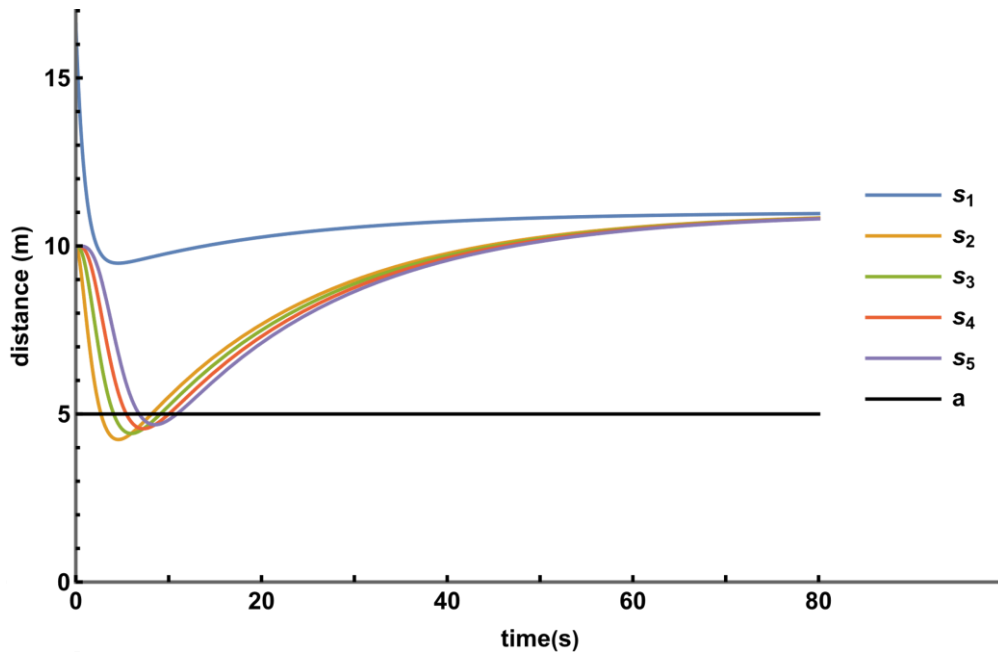


**Εικόνα 3:** Πολιτική CTH (2.12) με τον ελεγκτή (2.2), (2.13) με το κορυφαίο όχημα να επιβραδύνει έντονα στο 2<sup>ο</sup> σενάριο.

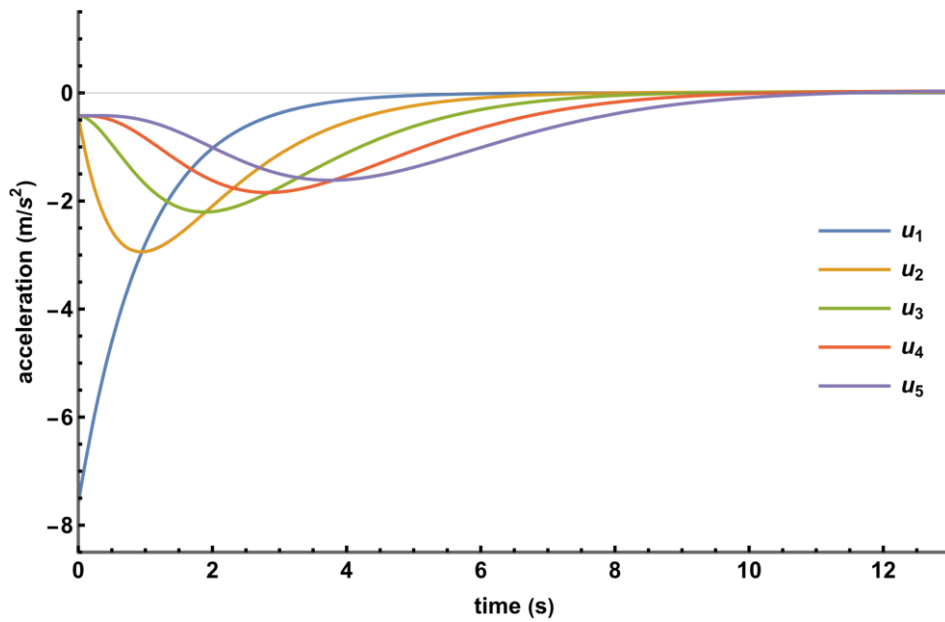


**Εικόνα 4:** Επιταχύνσεις οχημάτων με χρήση της CTH πολιτικής (2.12) με τον ελεγκτή (2.2), (2.13) με το κορυφαίο όχημα να επιβραδύνει έντονα στο 2<sup>ο</sup> σενάριο.

**3<sup>ο</sup> Σενάριο.** Ως τρίτο σενάριο, θεωρούμε ένα αργό κορυφαίο κινούμενο όχημα με  $v_0 = 3m/s$  σε δρόμο με όριο ταχύτητας  $v_{max} = 12.3m/s$  και  $n = 5$  οχήματα που κινούνται με ταχύτητα  $v_{i,0} = 10.5m/s$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . και αρχική απόσταση  $s_{1,0} = 16.6m$ ,  $s_{i,0} = 10m$ ,  $i = 2, \dots, 5$ . Αυτό το σενάριο μπορεί να προκύψει εύκολα λόγω άλλων αυτοκινήτων που κόβονται μπροστά από ένα αυτοκίνητο με ACC σε μικρή απόσταση και χαμηλότερη ταχύτητα, επίσης, όταν το μπροστινό αυτοκίνητο αλλάξει ξαφνικά λωρίδα για να αποφύγει ένα αργό ή ένα στάσιμο όχημα μπροστά - τότε η απόσταση και η σχετική ταχύτητα  $\Delta v$  για το ακόλουθο αυτοκίνητο με ACC αλλάζει ξαφνικά δραματικά. Έστω time-headway  $h = 1s$ ,  $k = 1.05$ , όπως και πριν, και θέτουμε  $r = 20m$ . Η Εικόνα 5 δείχνει τις αποστάσεις μεταξύ των οχημάτων για το συγκεκριμένο σενάριο. Μπορεί να φανεί ότι η απαίτηση ασφαλούς λειτουργίας με  $a = 5m$  (το μήκος των οχημάτων) πάλι δεν είναι ικανοποιητική, αφού υπάρχει χρόνος  $\tau > 0$  με  $s_i(\tau) < a$ ,  $i = 2, \dots, 5$  που συνεπάγεται σύγκρουση μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου οχήματος. Η Εικόνα 6 δείχνει τις επιταχύνσεις των οχημάτων.



**Εικόνα 5:** Συγκρούσεις οχημάτων με την πολιτική CTH (2.12) και τον ελεγκτή (2.2), (2.13).



**Εικόνα 6:** Επιταχύνσεις οχημάτων με CTH πολιτική (2.12) με τον ελεγκτή (2.2), (2.13) για το 3<sup>ο</sup> σενάριο.

Εκτός από τα παραπάνω σενάρια, υπάρχουν ορισμένες μακροσκοπικές ιδιότητες της CTH πολιτικής για μια σειρά οχημάτων σε αυτοκινητόδρομο μονής λωρίδας που παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Πιο συγκεκριμένα, για την πολιτική CTH (2.12), μπορούμε να λάβουμε από τη εξίσωση (2.10) με  $G(s) = h^{-1}(s - r)$ , ότι η ταχύτητα του δρόμου ως προς την πυκνότητα είναι

$$v = h^{-1} \frac{1 - r\rho}{\rho} \quad (2.14)$$

και η ροή κυκλοφορίας είναι

$$Q = \rho v = h^{-1}(1 - r\rho). \quad (2.15)$$

Παρατηρήστε τώρα ότι, καθώς μειώνεται η πυκνότητα, η ταχύτητα αυξάνεται απεριόριστα. Αντίστροφα, μεγαλύτερες τιμές του  $r$  έχουν ως αποτέλεσμα μικρότερη πυκνότητα κίνησης, με την ταχύτητα να είναι αρνητική εάν  $\rho \in (r^{-1}, a^{-1})$ . Μπορεί να φανεί ότι από τη σχέση (2.15) το θεμελιώδες διάγραμμα παραβιάζει τη μέγιστη ταχύτητα, αφού περνάει πάνω από τη γραμμή  $Q = \rho v_{\max}$ . Είναι επίσης σαφές από τη (2.15) ότι η απαίτηση μακροσκοπικής ευστάθειας δεν ισχύει (όπως παρατηρήθηκε επίσης στις εργασίες [37], [42]). Επιπλέον, δεδομένου ότι το θεμελιώδες διάγραμμα είναι πάντα μια ευθεία γραμμή, η πολιτική CTH (2.12) έχει περιορισμένους βαθμούς ελευθερίας για τη βέλτιστη επιλογή του επιθυμητού θεμελιώδους διαγράμματος.

Συνοψίζοντας, έχουμε δει τρία σενάρια όπου η πολιτική CTH (2.12) με τον ελεγκτή (2.13) δεν ικανοποιεί την απαίτηση ασφαλούς λειτουργίας που οδηγεί σε αρνητικές ταχύτητες, συγκρούσεις και ταχύτητες που υπερβαίνουν τα όρια ταχύτητας δρόμου. Στην εργασία [21], αποδείχθηκε ότι αρνητικές ταχύτητες και συγκρούσεις μπορούν επίσης να συμβούν σε διμοιρίες οχημάτων με την πολιτική Variable Time Gap στο πλαίσιο του ελεγκτή που προτάθηκε στην εργασία [42]. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι τα πρακτικά συστήματα ACC έχουν δύο τρόπους λειτουργίας: να διατηρούν την επιθυμητή ταχύτητα ως ένα συμβατικό cruise control, ή να μεταβαίνουν στη λειτουργία CTH παρακολούθησης αυτοκινήτου εάν το προηγούμενο όχημα είναι πιο αργό. Αυτές οι δύο λειτουργίες συνδυάζονται με μια μεταβατική λογική, η οποία καθορίζει πότε πρέπει να μεταβαίνουν από τη λειτουργία ελέγχου ταχύτητας στη λειτουργία ελέγχου απόστασης και αντίστροφα, (βλέπε [10]). Επομένως, στην πράξη, τα συστήματα ACC δεν θα αυξήσουν ποτέ την ταχύτητα του οχήματος πέρα από το όριο ταχύτητας ή δεν θα έχουν αρνητικές ταχύτητες.

### 3. Ασφαλής Λειτουργία των Διμοιριών

Σε αυτήν την ενότητα, παρέχουμε επαρκείς συνθήκες για την ασφαλή λειτουργία μιας διμοιρίας οχημάτων. Λόγω των τεχνικών διαφορών και της δομής μιας διμοιρίας που λειτουργεί σε ένα ανοικτό δρόμο έναντι ενός κυκλικού δρόμου, θα αντιμετωπίσουμε κάθε περίπτωση ξεχωριστά. Το πρώτο αποτέλεσμα μας παρέχει ικανές συνθήκες για έναν ανοικτό δρόμο και δίνεται παρακάτω.

**Θεώρημα 1 (Ασφαλής λειτουργία σε ανοικτό δρόμο):** Έστω  $f, g, \kappa: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$  να είναι τοπικά Lipschitz συναρτήσεις και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν σταθερές  $v_{\max} > 0$ ,  $\lambda > a > 0$ ,  $k > 0$  για τις οποίες οι συναρτήσεις  $f, g, \kappa: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$  ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$0 \leq g(s) < \kappa(s) \leq k, \text{ για κάθε } s \geq a \quad (3.1)$$

$$\frac{f(s)}{\kappa(s) - g(s)} \leq v_{\max} < k(\lambda - a), \text{ για κάθε } s \geq a \quad (3.2)$$

$$f(s) = g(s) = 0 \text{ και } \kappa(s) = k, \text{ για κάθε } s \in [a, \lambda] \quad (3.3)$$

Έστω  $v_0 \in (0, v_{\max})$ , ορίζουμε το σύνολο:

$$D(v_0) = \left\{ (s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{R}^{2n} : \begin{array}{l} 0 < v_i < v_{\max} \\ s_i > a + k^{-1} \max(0, v_i - v_{i-1}), i = 1, \dots, n \end{array} \right\}. \quad (3.4)$$

Τότε για κάθε είσοδο  $v_0 \in C^1(\mathfrak{R}_+)$  που ικανοποιεί την

$$\dot{v}_0(t) \geq -kv_0(t), \quad 0 < v_0(t) < v_{\max}, \text{ για κάθε } t \geq 0 \quad (3.5)$$

και για κάθε  $(s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0}) \in D(v_0(0))$ , το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.1), (2.2) με

$$F(s, w, v) = f(s) + g(s)w - \kappa(s)v, \text{ για κάθε } s, v, w \in \mathfrak{R} \quad (3.6)$$

και αρχικές συνθήκες  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) = (s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0})$  έχει μια μοναδική λύση  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t))$  που ορίζεται για κάθε  $t \geq 0$  που ικανοποιεί  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D(v_0(t))$  για κάθε  $t \geq 0$ .

Το Θεώρημα 1 χαρακτηρίζει σαφώς την κατηγορία εισόδων που μπορούν να επιτραπούν για την ασφαλή λειτουργία μιας διμοιρίας οχημάτων. Πράγματι, η ταχύτητα του αρχικού οχήματος  $v_0$  πρέπει να είναι συνάρτηση κλάσεως  $C^1(\mathfrak{R}_+)$ , που ικανοποιεί την σχέση (3.5). Όταν η ταχύτητα του αρχικού οχήματος ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση ασφάλειας, τότε όλα τα οχήματα παραμένουν σε απόσταση τουλάχιστον  $a > 0$  το ένα από το άλλο και οι ταχύτητες όλων των οχημάτων είναι μικρότερες από το όριο ταχύτητας  $v_{\max}$ . Έτσι, εάν το adaptive cruise controller έχει τη μορφή (3.6), όπου οι συναρτήσεις  $f, g, \kappa: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$  ικανοποιούν τις (3.1), (3.2) και (3.3), τότε ικανοποιείται η απαίτηση ασφαλούς λειτουργίας. Παρατηρήστε ότι οι ιδιότητες (3.1), (3.2) και (3.3) είναι ικανές συνθήκες, που εξαρτώνται από τα τεχνικά χαρακτηριστικά των οχημάτων και του δρόμου. Συγκεκριμένα, η σταθερά  $k$  στην ιδιότητα (3.1) αντιπροσωπεύει έναν όρο τριβής και η συνθήκη (3.5) μαζί με την ανισότητα  $\kappa(s) \leq k$ ,  $s \geq a$ , περιγράφουν το μέγιστο ρυθμό επιβράδυνσης των κορυφαίων και των επόμενων οχημάτων στην διμοιρία, αντίστοιχα. Η σταθερά  $\lambda$  μπορεί να θεωρηθεί ως η ελάχιστη απόσταση, στην οποία το ακόλουθο όχημα αρχίζει να επιβραδύνει. Όταν η απόσταση  $s_i$  μεταξύ του οχήματος  $i$  και του προηγούμενου οχήματος  $(i-1)$  ικανοποιεί την ανισότητα  $a \leq s_i \leq \lambda$  στην (3.3), τότε, το όχημα  $i$  αρχίζει να επιβραδύνει, αφού οι (2.1), (3.3) και (3.6) υπονοούν ότι  $\dot{v}_i = -k v_i$ . Αν η σταθερά  $\lambda$  είναι κοντά στην τιμή του  $a$ , τότε η απόσταση φρεναρίσματος θα είναι μικρότερη. Σε αυτή την περίπτωση, λόγω της ιδιότητας (3.2), η μέγιστη ταχύτητα  $v_{\max}$  θα πρέπει επίσης να είναι μικρή, αλλιώς ενδέχεται να μην αποφευχθούν οι συγκρούσεις. Στην πράξη, οι σταθερές  $k$  και  $\lambda$  θα πρέπει να επιλέγονται με βάση τις προδιαγραφές και τις δυνατότητες φρεναρίσματος του οχήματος. Τέλος, οι ιδιότητες (3.1) και (3.2) είναι τεχνικές ιδιότητες που απαιτούνται για την ασφαλή λειτουργία της διμοιρίας.

Εάν το adaptive cruise controller έχει τη μορφή (3.6), όπου οι συναρτήσεις  $f, g, \kappa: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$  ικανοποιούν τις ιδιότητες (3.1), (3.2) και (3.3), τότε οι ίδιες απαιτήσεις μας εγγυώνται ασφάλεια ακόμη και στην περίπτωση κυκλικού δρόμου. Αυτό φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 2 (Ασφαλής λειτουργία σε κυκλικό δρόμο):** Έστω  $f, g, \kappa: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$  να είναι τοπικά Lipschitz συναρτήσεις και υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερές  $v_{\max} > 0$ ,  $\lambda > a > 0$ ,  $k > 0$  για τις οποίες οι συναρτήσεις  $f, g, \kappa: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$  ικανοποιούν τις (3.1), (3.2) και (3.3). Ορίζουμε το σύνολο:

$$D = \left\{ (s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{R}^{2n} : \begin{array}{l} 0 < v_i < v_{\max} \\ s_i > a + k^{-1} \max(0, v_i - v_{i-1}) \end{array}, i = 1, \dots, n, v_0 = v_n \right\} \quad (3.7)$$

Τότε για κάθε  $(s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0}) \in D$  με  $\sum_{i=1}^n s_{i,0} = L$ , το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.1), (2.2) με την (3.6),  $v_0 \equiv v_n$  και αρχικές συνθήκες  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) = (s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0})$  έχει μοναδική λύση  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t))$  που ορίζεται για κάθε  $t \geq 0$  που ικανοποιεί  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D$  και  $\sum_{i=1}^n s_i(t) = L$  για κάθε  $t \geq 0$ .

**Παρατηρήσεις:** (i) Εάν το adaptive cruise controller έχει τη μορφή (3.6), όπου οι συναρτήσεις  $f, g, \kappa: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$  πληρούν τις (3.1), (3.2) και (3.3), τότε η Τεχνική Απαίτηση ισχύει για την συνάρτηση  $F$  που ορίζεται από την (3.6). Πράγματι, το γεγονός ότι οι συναρτήσεις  $f, g, \kappa: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$  είναι μη αρνητικές και η ανισότητα (3.2) δείχνει ότι

$$|F(s, w, v)| < kv_{\max}, \text{ για κάθε } s > a, v, w \in (0, v_{\max}) \quad (3.8)$$

Κατά συνέπεια, η ανισότητα (3.8) εγγυάται ότι ισχύει η ανισότητα (2.5) με  $A := kv_{\max}$ .

(ii) Το Θεώρημα 1 και το Θεώρημα 2 παρέχουν ικανές συνθήκες για την ασφαλή λειτουργία των διμοιριών οχημάτων και οι αποδείξεις τους εκτελούνται χρησιμοποιώντας μια κατάλληλα σχεδιασμένη συνάρτηση Barrier στο 7<sup>ο</sup> Κεφάλαιο. Οι συναρτήσεις Barrier είναι συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται επί ενός συμπαγούς συνόλου  $X$  και επιτρέπουν την απόδειξη ότι οι λύσεις παραμένουν στο  $X$  για όλες τις τιμές. Οι συναρτήσεις Barrier έχουν μακρύ ιστορικό στη θεωρία βελτιστοποίησης και στη θεωρία ελέγχου (δείτε για παράδειγμα τις εργασίες [5], [12], [43] και [45]).

(iii) Ο ελεγκτής CTH (2.13) δεν πληροί την απαίτηση ασφαλούς λειτουργίας, αφού οι (3.2) και (3.3) με  $f(s) = (k - h^{-1})h^{-1}(s - r)$ ,  $g(s) = h^{-1}$ , και  $\kappa(s) = k$ , δεν ισχύουν, και κατά συνέπεια μπορεί να συμβούν συγκρούσεις, όπως απεικονίζεται στο Κεφάλαιο 2B. Αντιθέτως, το adaptive cruise controller (3.6) παρέχει ασφάλεια στις διμοιρίες.



#### 4. String Stability και Θεμελιώδες Διάγραμμα

Εάν ο adaptive cruise controller έχει τη μορφή (3.6), όπου οι συναρτήσεις  $f, g, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  πληρούν τις ιδιότητες (3.1), (3.2) και (3.3), τότε είναι εγγυημένη η ασφαλής λειτουργία μιας διμοιρίας οχημάτων. Ωστόσο, δεν έχουμε καμία εγγύηση για το string stability ή για την ύπαρξη ενός θεμελιώδους διαγράμματος. Προκειμένου να επιτευχθούν αυτοί οι στόχοι, πρέπει να περιορίσουμε την επιτρεπόμενη μορφή του adaptive cruise controller, έτσι ώστε να ισχύουν αυτόματα οι συνθήκες (3.1), (3.2), (3.3), και να ισχύουν επίσης πρόσθετες ικανές συνθήκες που εγγυώνται το string stability και την ύπαρξη ενός θεμελιώδους διαγράμματος για τις διμοιρίες. Αυτό φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο αντιμετωπίζει την περίπτωση ανοικτού δρόμου.

**Θεώρημα 3 (String Stability και Θεμελιώδες Διάγραμμα για ανοικτό δρόμο):** Έστω  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  να είναι μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση και υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερές  $k > g_{\max} > 0$ ,  $\lambda > a > 0$  για τις οποίες ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$0 < g(s) \leq g_{\max}, \text{ για κάθε } s > \lambda \quad (4.1)$$

$$v_{\max} := \int_a^{+\infty} g(l)dl < k(\lambda - a) \quad (4.2)$$

$$g(s) = 0, \text{ για κάθε } s \in [a, \lambda] \quad (4.3)$$

Έστω  $v^* \in (0, v_{\max})$  να είναι δοσμένη σταθερά και ορίζουμε το  $s^* \in (\lambda, +\infty)$  μέσω της εξίσωσης

$$v^* = G(s^*) \quad (4.4)$$

όπου

$$G(s) := \int_a^s g(l)dl, \text{ για κάθε } s \in \mathbb{R} \quad (4.5)$$

Επίσης ορίζουμε

$$F(s, w, v) = (k - g(s))G(s) + g(s)w - kv, \text{ για κάθε } s, v, w \in \mathfrak{R}. \quad (4.6)$$

Έστω  $v_0 \in (0, v_{\max})$ , ορίζουμε το σύνολο  $D(v_0) \subset \mathfrak{R}^{2n}$  μέσω του (3.4). Στη συνέχεια, για κάθε είσοδο  $v_0 \in C^1(\mathfrak{R}_+)$  που ικανοποιεί την (3.5) και για κάθε  $(s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0}) \in D(v_0(0))$ , το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.1), (2.2) με την (4.6), και αρχική κατάσταση  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) = (s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0})$  έχει μοναδική λύση  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t))$  που ορίζεται για κάθε  $t \geq 0$  και ικανοποιεί  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D(v_0(t))$  για κάθε  $t \geq 0$ . Επιπλέον, οι ακόλουθες ανισότητες ισχύουν για κάθε  $t \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  και  $q > 0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^t (v_i(\tau) - v^*)^2 d\tau &\leq (1+q) \int_0^t (v_{i-1}(\tau) - v^*)^2 d\tau \\ &+ k^{-1} \left( W(s_i(0), v_i(0)) + \frac{1}{2q} (v_i(0) - G(s_i(0)))^2 \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t (G(s_i(\tau)) - v^*)^2 d\tau &\leq (1+2q) \frac{2qk + k - g_{\max}}{k - g_{\max}} \int_0^t (v_{i-1}(\tau) - v^*)^2 d\tau \\ &+ \frac{2qk + k - g_{\max}}{k(k - g_{\max})} \left( W(s_i(0), v_i(0)) + \frac{1}{2q} (v_i(0) - G(s_i(0)))^2 \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$|v_i(t) - v^*| \leq 2|v_i(0) - v^*| + |G(s_i(0)) - v^*| + \sup_{0 \leq \tau \leq t} (|v_{i-1}(\tau) - v^*|) \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^n |v_i(t) - G(s_i(t))| \leq \exp(-(k - g_{\max})t) \sum_{i=1}^n |v_i(0) - G(s_i(0))| \quad (4.10)$$

$$\text{όπου } W(s, v) := (v - v^*)^2 + 2 \int_{s^*}^s (k - g(z))(G(z) - v^*) dz.$$

Λόγω των (4.1), (4.2), (4.3), η συνάρτηση  $G$ , που ορίζεται από την (4.5), είναι γνησίως αύξουσα στο  $[\lambda, +\infty)$ . Αυτό το χαρακτηριστικό εγγυάται ότι για κάθε  $v^* \in (0, v_{\max})$ , η λύση  $s^* > \lambda$  της εξίσωσης (4.4) είναι μοναδική.

Πρέπει να σημειωθεί ότι εάν ο adaptive cruise controller έχει τη μορφή (4.6), όπου  $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_+$  είναι μια τοπικά συνάρτηση Lipschitz που ικανοποιεί τις (4.1), (4.2), (4.3), τότε ισχύουν οι προϋποθέσεις για την ασφαλή λειτουργία των διμοιριών οχημάτων. Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση έχουμε επίσης ορισμένες πρόσθετες ιδιότητες που εμφανίζονται με τις εκτιμήσεις (4.7), (4.8), (4.9) και (4.10). Η εκτίμηση (4.7) δείχνει ότι η έννοια του  $L_2$  string stability ισχύει, και η εκτίμηση (4.9) δείχνει ότι η έννοια του  $L_\infty$  string stability ισχύει. Το σημείο  $(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) = (s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*)$  είναι το επιθυμητό σημείο ισορροπίας για την διμοιρία οχημάτων. Επιπλέον, η εκτίμηση (4.10) εγγυάται ότι η διμοιρία οχημάτων κάτω από την επίδραση του adaptive cruise controller (4.6) έχει ένα θεμελιώδες διάγραμμα της μορφής (2.10), όπου η  $G$  ορίζεται από την (4.5).

Το Θεώρημα 3 μας επιτρέπει την επιλογή της συνάρτησης  $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_+$  που ικανοποιεί τις (4.1), (4.2), (4.3), ώστε να έχουμε ένα κατάλληλο θεμελιώδες διάγραμμα για τη διμοιρία. Με την αλλαγή της  $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_+$  είμαστε σε θέση να αλλάξουμε το σχήμα καθώς και την κρίσιμη πυκνότητα και την χωρητικότητα του θεμελιώδους διαγράμματος. Αυτή η δυνατότητα απεικονίζεται στο 6<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, η οποία περιλαμβάνει επίσης έναν συστηματικό και απλό σχεδιασμό για τη συνάρτηση  $g$ .

**Παρατηρήσεις:** (i) Δεδομένου ότι η  $G$  στη σχέση (4.5) είναι γνησίως αύξουσα, η πολιτική αποστάσεων του μη γραμμικού ελεγκτή (4.6) δίνεται από τη σχέση  $s_i = G^{-1}(v_i)$ . Σε σύγκριση με την CTH πολιτική (2.12), η παραπάνω πολιτική είναι μια μη γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας, η οποία, σε συνδυασμό με τον ελεγκτή (4.6), διασφαλίζει το string stability και την ασφάλεια μιας διμοιρίας οχημάτων. Οι μη γραμμικές πολιτικές αποστάσεων εξετάστηκαν επίσης στις εργασίες [34], [35], [42], [47] και [49], οι οποίες ωστόσο δεν λαμβάνουν υπόψη την ασφάλεια των διμοιριών και ικανοποιούν μόνο μια τοπική απαίτηση string stability.

(ii) Στις εργασίες [24] και [25], αποδείχθηκε ότι μια διμοιρία οχημάτων με πολιτική Σταθερού Διαστήματος (Constant Spacing), (βλέπε [39]), είναι string stable, χρησιμοποιώντας μη πανομοιότυπους ελεγκτές που χρησιμοποιούν μόνο την απόσταση από το προηγούμενο όχημα, χωρίς καμία μέτρηση της ταχύτητας. Το string stability μπορεί επίσης να διασφαλιστεί με πανομοιότυπα Adaptive Cruise Controllers που χρησιμοποιούν επίσης μετρήσεις ταχύτητας από προηγούμενα οχήματα, βλέπε για παράδειγμα τις εργασίες [7], [10], [19], [27], [35], [36]. Αυτό συμβαίνει και με τον ελεγκτή (4.6).

Το ακόλουθο θεώρημα εγγυάται ότι οι ίδιες απαιτήσεις απόδοσης με την περίπτωση ανοιχτού δρόμου ισχύουν και για την περίπτωση ενός κυκλικού δρόμου, όταν ο adaptive cruise controller έχει τη μορφή (4.6), όπου  $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_+$  είναι μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση που ικανοποιεί τις (4.1), (4.2), (4.3).

#### **Θεώρημα 4 (String Stability και Θεμελιώδες Διάγραμμα για κυκλικό δρόμο):**

Εστω  $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_+$  να είναι μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση και υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερές  $k > g_{\max} > 0$ ,  $\lambda > a > 0$  για τις οποίες ισχύουν οι (4.1), (4.2), (4.3). Έστω  $v^* \in (0, v_{\max})$  μια δοσμένη σταθερά και ορίζουμε το  $s^* \in (0, +\infty)$  μέσω της (4.4). Ορίζουμε το σύνολο  $D \subset \mathcal{R}^{2n}$  μέσω του (3.7).

Τότε για κάθε  $(s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0}) \in D$  με  $\sum_{i=1}^n s_{i,0} = L$ , το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.1), (2.2) με την (4.6),  $v_0 \equiv v_n$ , αρχικές συνθήκες  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) = (s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0})$  έχει μοναδική λύση  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t))$  που ορίζεται για κάθε  $t \geq 0$  και ικανοποιεί

$(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D$  και  $\sum_{i=1}^n s_i(t) = L$  για κάθε  $t \geq 0$ . Επιπλέον, οι ανισότητες (4.7),

(4.8), (4.9) και (4.10) ισχύουν για κάθε  $t \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  και  $q > 0$ , όπου

$$W(s, v) := (v - v^*)^2 + 2 \int_{s^*}^s (k - g(z))(G(z) - v^*) dz.$$

## 5. Ευστάθεια

Εάν ο adaptive cruise controller έχει τη μορφή (4.6), όπου η  $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_+$  είναι μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση που ικανοποιεί τις ιδιότητες (4.1), (4.2), (4.3), τότε το σημείο ισορροπίας  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*) \in D(v^*)$  για μια διμοιρία σε ανοικτό δρόμο είναι Ολικά Ασυμπτωτικά Ευσταθές. Με άλλα λόγια, οι ικανές συνθήκες για το string stability και για την ύπαρξη ενός θεμελιώδους διαγράμματος εγγυώνται επίσης την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας. Αυτό εγγυάται το ακόλουθο θεώρημα.

### Θεώρημα 5 (Ευστάθεια για ανοικτό δρόμο):

Εστω  $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_+$  να είναι μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση για την οποία υπάρχουν σταθερές  $k > g_{\max} > 0$ ,  $\lambda > a > 0$  έτσι ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες (4.1), (4.2), (4.3). Θεωρούμε μια διμοιρία  $n$  οχημάτων σε ανοικτό/ευθύ δρόμο που περιγράφεται από το μοντέλο (2.1), (2.2) με την (4.6),  $v_0 = v^* \in (0, v_{\max})$  να είναι η σταθερή ταχύτητα του κορυφαίου οχήματος. Το μοντέλο (2.1), (2.2), (4.6) ορίζεται στο σύνολο  $\overline{D(v^*)}$ , όπου το  $D(v^*)$  δίνεται από την (3.4) με  $v_0 = v^* \in (0, v_{\max})$ . Ορίζουμε επίσης το  $s^* \in (\lambda, +\infty)$  μέσω της εξίσωσης (4.4). Τότε, το σημείο ισορροπίας  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*)$  είναι Ολικά Ασυμπτωτικά Ευσταθές. Επιπλέον, αν η  $g$  είναι τάξης  $C^1$  σε μια γειτονιά του  $s^* > \lambda$ , τότε το σημείο ισορροπίας  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*)$  είναι Τοπικά Εκθετικά Ευσταθές.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 5 γίνεται με τον ορισμό μιας κατάλληλης οικογένειας συναρτήσεων Lyapunov. Η κύρια δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι η διμοιρία που περιγράφεται από το (2.1), (2.2) με την (4.6) ορίζεται σε ένα ορισμένο κλειστό σύνολο και όχι σε ένα γραμμικό χώρο πεπερασμένης διάστασης. Το Θεώρημα 5 δείχνει ότι η μόνη πρόσθετη απαίτηση για τοπική εκθετική ευστάθεια είναι μια υπόθεση κανονικότητας, δηλαδή, το  $g$  πρέπει να είναι κλάσης  $C^1$  σε μια γειτονιά του  $s^* > \lambda$ . Ωστόσο, όταν μελετάμε την διμοιρία οχημάτων σε έναν κυκλικό δρόμο, τότε πρέπει να ισχύουν πρόσθετες υποθέσεις. Ορίζουμε για  $n = 2, 3, \dots$

$$\mu_n = \min \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2 : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n, x_0 = x_n, |x| = 1, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\} \quad (5.1)$$

και προσέξτε ότι  $\mu_n > 0$  για κάθε  $n = 2, 3, \dots$  και ότι για κάθε  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  με  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ , ισχύει

$$(x_1 - x_n)^2 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^2 \geq \mu_n |x|^2. \quad (5.2)$$

Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει ικανές συνθήκες για την ολική εκθετική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*) \in D$  για διμοιρία οχημάτων σε κυκλικό δρόμο.

**Θεώρημα 6 (Ευστάθεια για κυκλικό δρόμο):**

Έστω  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  να είναι μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση για την οποία υπάρχουν σταθερές  $k > g_{\max} > 0$ ,  $\lambda > a > 0$  έτσι ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες (4.1), (4.2), (4.3) και θεωρούμε  $n$  οχήματα κατά μήκος ενός κυκλικού δρόμου μήκους  $L > n\lambda$  που περιγράφονται από το μοντέλο (2.1), (2.2), και την (4.6) με  $v_0 = v_n$ . Το μοντέλο (2.1), (2.2), (4.6) με  $v_0 = v_n$  ορίζεται επί του συνόλου

$$\Omega = \bar{D} \cap \left\{ (s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{2n} : \sum_{i=1}^n s_i = L \right\} \quad (5.3)$$

όπου το σύνολο  $D$  δίνεται από την (3.7). Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερές  $p > 0$ ,  $M \in (0, p\mu_n/4)$  τέτοιες ώστε

$$\left| G(s) - v^* - p(s - s^*) \right| \leq M |s - s^*|, \text{ για κάθε } s \in [a, L - (n-1)a] \quad (5.4)$$

όπου η  $G$  ορίζεται από την σχέση (4.5). Τότε, το σημείο ισορροπίας  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*)$  με  $s^* = L/n$ ,  $v^* = G(s^*)$  είναι Ολικά Εκθετικά Ευσταθές για το σύστημα (2.1), (2.2), (4.6) με  $v_0 = v_n$  ορισμένου επί του  $\Omega$ .

Είναι σαφές ότι για την ολική εκθετική ευστάθεια σε έναν κυκλικό δρόμο χρειαζόμαστε την πρόσθετη υπόθεση (5.4) για το adaptive cruise controller. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι εάν το

cruise control έχει τη μορφή (4.6), όπου  $g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$  είναι μια τοπικά συνάρτηση Lipschitz που ικανοποιεί τις (4.1), (4.2), (4.3) και (5.4), τότε ο adaptive cruise controller ικανοποιεί κάθε απαίτηση ευστάθειας, ασφάλειας και τεχνική απαίτηση τόσο σε ανοιχτό δρόμο όσο και σε κυκλικό δρόμο.

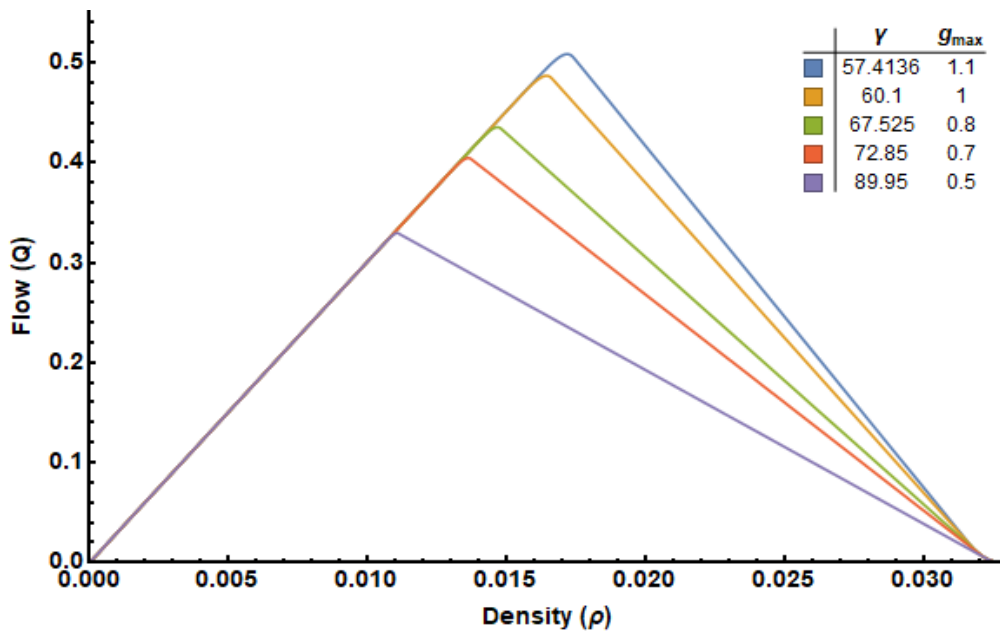
Η βιβλιογραφία για τον έλεγχο των οχημάτων δίνει έμφαση στις πολιτικές αποστάσεων και στους ελεγκτές που ικανοποιούν τις απαιτήσεις ευστάθειας και του string stability χωρίς να διασφαλίζεται η ασφάλεια των διμοιριών, βλέπε για παράδειγμα τις εργασίες [7], [9], [10], [11], [16], [19], [28], [29], [30], [33], [39], [40], [42], [44], [45], [47], [48], [49]. Αντίθετα, ο adaptive cruise controller (4.6) εγγυάται ταυτόχρονα τη ευστάθεια, το string stability και τις απαιτήσεις ασφαλούς λειτουργίας για διμοιρίες που λειτουργούν σε ανοιχτό δρόμο ή κυκλικό δρόμο με συγκεκριμένα όρια ταχύτητας.

## 6. Ενδεικτικά Παραδείγματα

Στα αποτελέσματα της προσομοίωσης παρακάτω, συγκρίνουμε τα τρία σενάρια της πολιτικής CTH που παρουσιάστηκαν στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο με τον προτεινόμενο ελεγκτή (2.2) με τη (4.6) και τη συνάρτηση  $g$  που ορίζεται παρακάτω

$$g(s) = \begin{cases} 0 & s \leq \lambda \\ (s - \lambda) & \lambda < s \leq g_{\max} + \lambda \\ g_{\max} & g_{\max} + \lambda < s \leq \gamma \\ g_{\max} \exp(\gamma - s) & s > \gamma \end{cases} \quad (6.1)$$

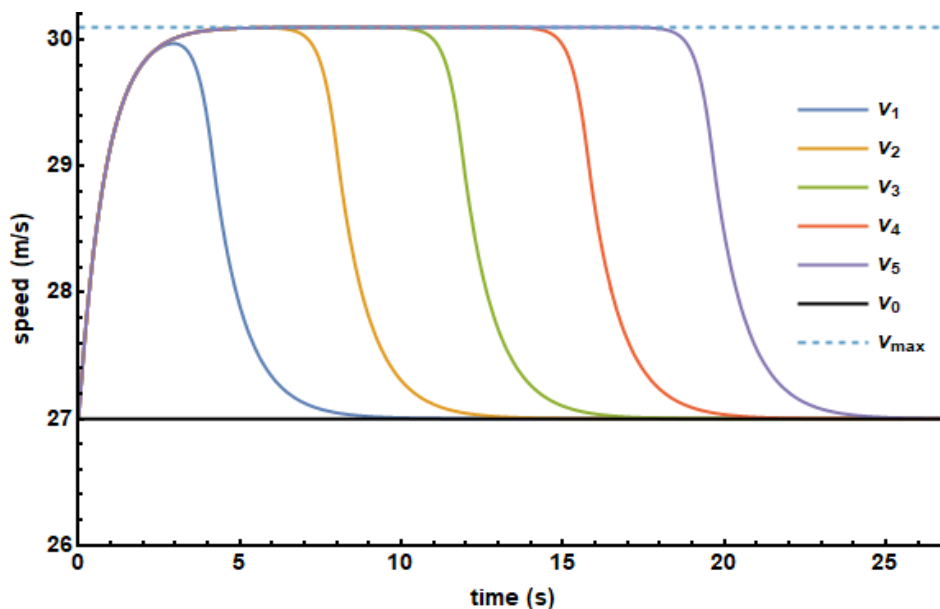
με  $\gamma, \lambda > 0$  και  $k > g_{\max} > 0$ . Από τις (6.1), (2.10), (4.5) και (4.2), λαμβάνουμε το θεμελιώδες διάγραμμα που φαίνεται στην Εικόνα 7 για σταθερές τιμές  $\lambda = 30.5m$ ,  $k = 1.2s^{-1}$  και διαφορετικές τιμές του  $\gamma, g_{\max}$ , που όλες ικανοποιούν  $v_{\max} = 30.1m/s$  (ανάκληση της (4.2)). Η Εικόνα 7 απεικονίζει την απαίτηση μακροσκοπικής ευστάθειας και την δυνατότητα ελέγχου της ροής χωρητικότητας και της κρίσιμης πυκνότητας μέσω αντίστοιχων ρυθμίσεων του ACC. Πρέπει να σημειωθεί ότι η (6.1) επιλέχθηκε για την απλότητά της και μπορεί γενικά να επιλεγεί έτσι ώστε το θεμελιώδες διάγραμμα μπορεί να είναι οποιαδήποτε επιθυμητή καμπύλη που ικανοποιεί τις απαραίτητες φυσικές και τεχνικές απαιτήσεις (για παράδειγμα θα πρέπει να ικανοποιεί  $Q \leq v_{\max}\rho$ ).



**Εικόνα 7:** Θεμελιώδες διάγραμμα για το μη γραμμικό adaptive cruise controller. (2.2), με (4.6) και (6.1).

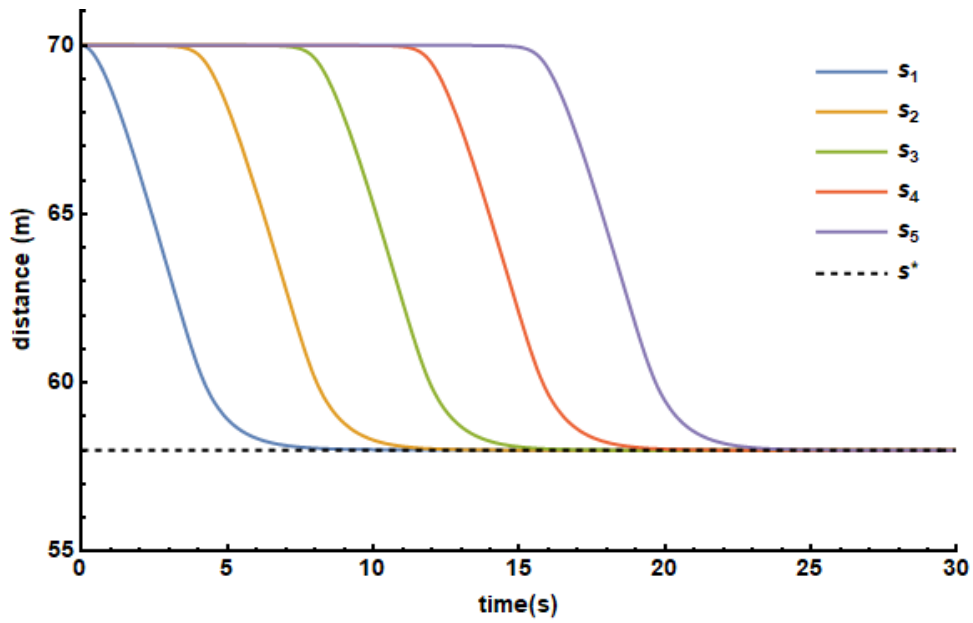


**1<sup>ο</sup> Σενάριο.** Για αυτό το σενάριο προσομοίωσης, εξετάζουμε τη συνάρτηση  $g(\cdot)$  στη (6.1) με  $\gamma = 62.1m$  και  $g_{\max} = 1s^{-1}$ . Για αυτήν την επιλογή, πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις (4.1), (4.2) και (4.3). Υπενθυμίζεται ότι στο σενάριο αυτό το κορυφαίο όχημα κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v_0 = 27m/s$ ,  $v_{\max} = 30.1m/s$  και  $v_{i,0} = 27m/s$  για  $i = 0, 1, \dots, 5$  και  $s_{i,0} = 70m$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Σημειώστε ότι αυτές οι αρχικές συνθήκες ανήκουν στο σύνολο  $D(v_0)$  που ορίζεται από το (3.4) με  $a = 5m$  με την απαίτηση Ασφαλούς Λειτουργίας. Η Εικόνα 8 δείχνει τις ταχύτητες όλων των οχημάτων που χρησιμοποιούν το adaptive cruise controller (2.2), (4.6) με την (6.1). Σε αντίθεση με την CTH πολιτική (2.12) με (2.2), (2.13) (βλέπε Εικόνα 1), οι ταχύτητες όλων των οχημάτων με το μη γραμμικό controller παραμένουν εντός των ορίων  $(0, v_{\max})$ . Η Εικόνα 9 απεικονίζει την απόσταση του οχήματος του adaptive cruise controller (2.2), (4.6) με την (6.1). Η Εικόνα 8 και η Εικόνα 9 παρουσιάζουν εκθετική σύγκλιση της κατάστασης στο σημείο ισορροπίας. Η Εικόνα 10 δείχνει τις επιταχύνσεις των οχημάτων.

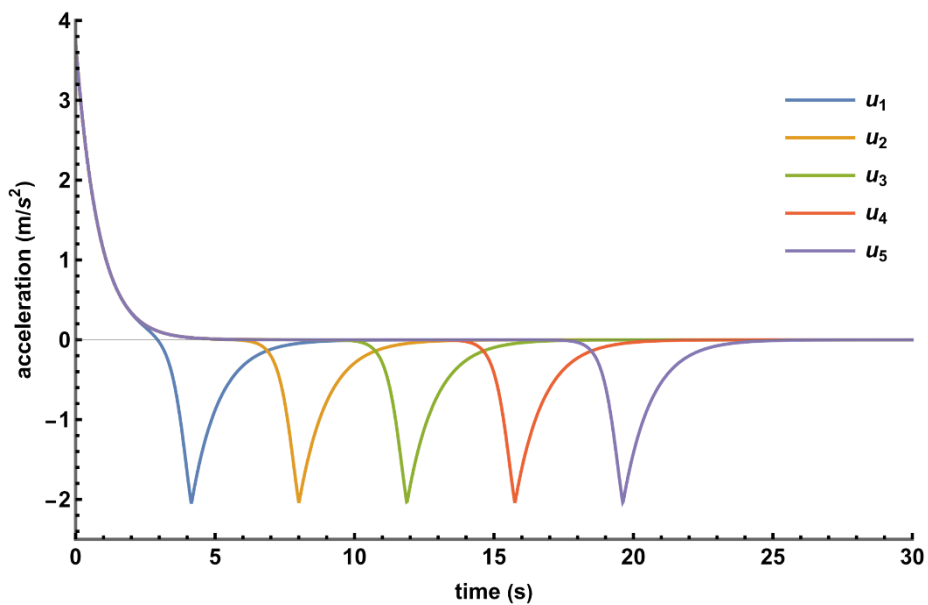


**Εικόνα 8:** Η ταχύτητα όλων των οχημάτων για το μη γραμμικό adaptive cruise controller (2.2), (4.6)

με την (6.1) παραμένουν εντός του ορίου ταχύτητας δρόμου.

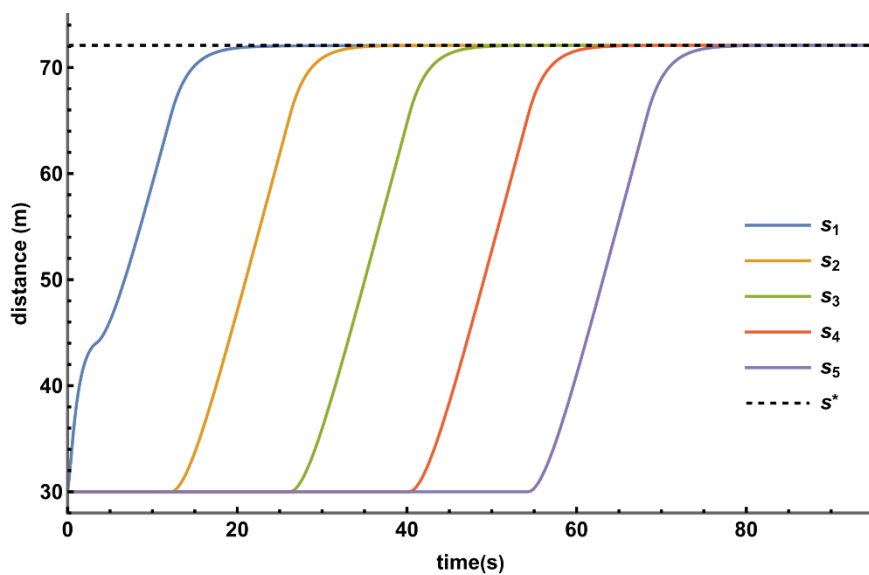


**Εικόνα 9:** Απόσταση οχήματος για το μη γραμμικό adaptive cruise controller (2.2), (4.6) με την (6.1) για το 1<sup>ο</sup> σενάριο.

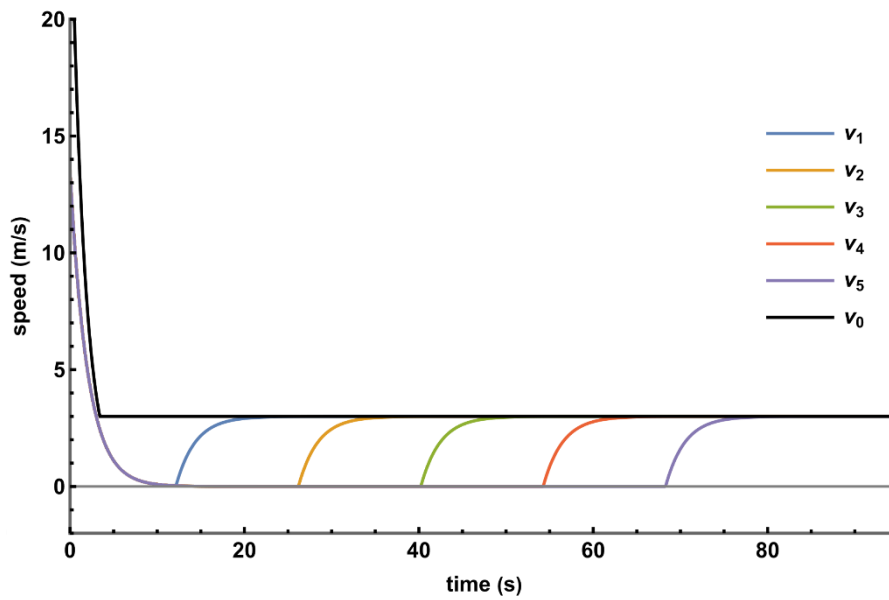


**Εικόνα 10:** Οι επιταχύνσεις όλων των οχημάτων για το μη γραμμικό adaptive cruise controller (2.2), (4.6) με την (6.1) για το 1<sup>ο</sup> σενάριο.

**2<sup>ο</sup> Σενάριο:** Εστιάζουμε τώρα στο δεύτερο σενάριο όπου όλα τα οχήματα έχουν αρχικά την ίδια ταχύτητα  $v_{i,0} = 13.5m/s$  και το προπορευόμενο όχημα επιβραδύνει από την αρχική ταχύτητα  $v_0(0) = 20m/s$  σε ταχύτητα  $3m/s$ . Θυμηθείτε ότι οι αρχικές αποστάσεις των οχημάτων για αυτό το σενάριο είναι  $s_{i,0} = 30m$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , το οποίο εγγυάται ότι η αρχική κατάσταση βρίσκεται στο σύνολο  $D(v_0(0))$  που ορίζεται από την (3.4) με  $a = 5m$ . Οι αποστάσεις των οχημάτων φαίνονται στην Εικόνα 11, όπου όλες οι αποστάσεις συγκλίνουν εκθετικά στις τιμές ισορροπίας τους. Η ταχύτητα όλων των οχημάτων φαίνεται στην Εικόνα 12. Τα οχήματα επιβραδύνουν και διατηρούν μια πολύ αργή ταχύτητα τέτοια ώστε  $v_i(t) \in (0, v_{\max})$ ,  $i = 1, \dots, 5$  και αρχίζουν να επιταχύνουν στην επιθυμητή ταχύτητα όταν αυξηθεί η απόσταση από το προηγούμενο όχημα. Η Εικόνα 13 δείχνει την επιτάχυνση των οχημάτων. Αντίθετα, χρησιμοποιώντας την πολιτική CTH με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, η ταχύτητα των οχημάτων μπορεί να γίνει αρνητική (συγκρίνετε με την Εικόνα 3). Οι ακόλουθες τιμές θεωρήθηκαν  $k = 0.5s^{-1}$ ,  $\lambda = 65.2m$ ,  $g_{\max} = 0.45s^{-1}$ ,  $\gamma = 131.1m$ .

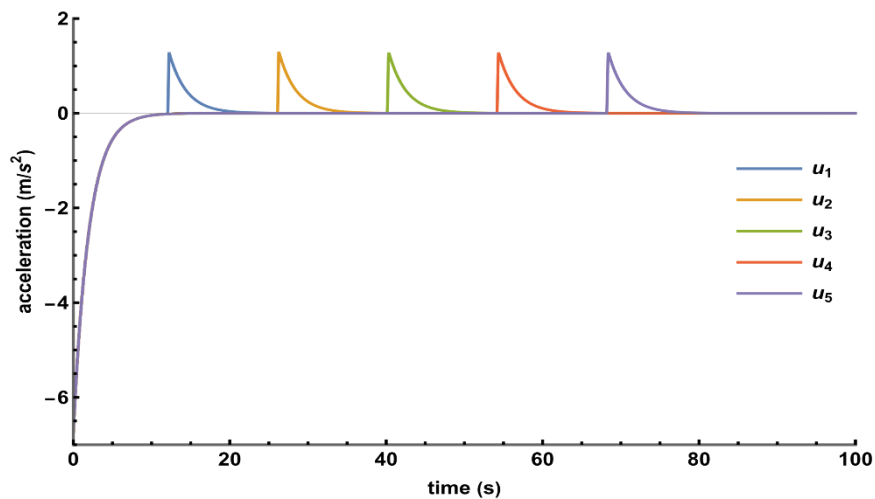


**Εικόνα 11:** Αποστάσεις οχημάτων με το μη γραμμικό adaptive cruise controller (2.2), (4.6) με την (6.1) για το 2<sup>ο</sup> σενάριο.



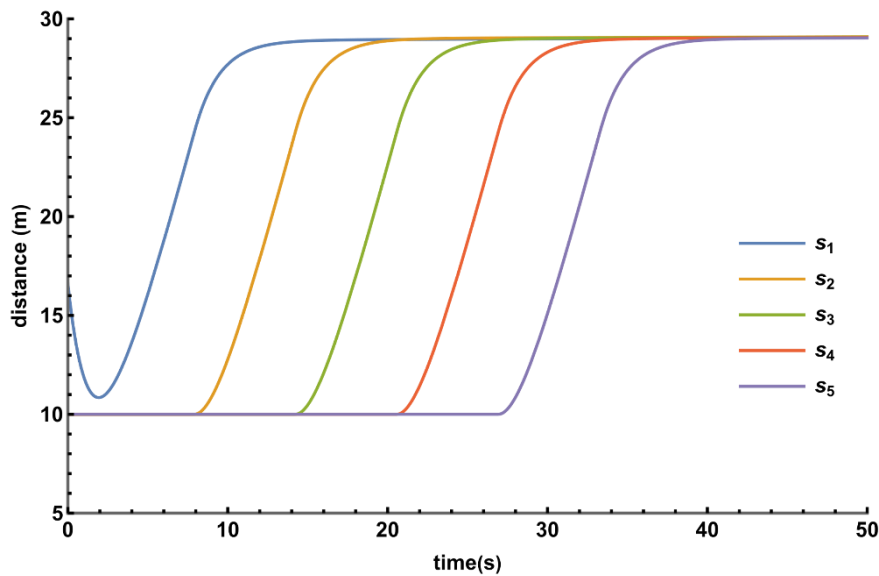
**Εικόνα 12:** Ταχύτητες οχημάτων για το μη γραμμικό adaptive cruise controller (2.2), (4.6) με την (6.1),

ακολουθώντας έναν οδηγό με ισχυρή επιβράδυνση για το 2<sup>ο</sup> σενάριο.

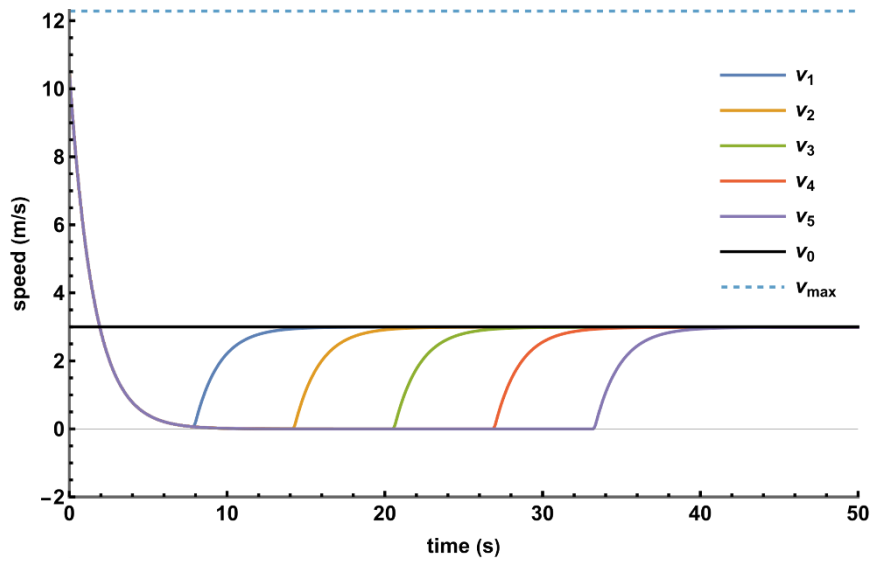


**Εικόνα 13:** Επιταχύνσεις οχημάτων για το μη γραμμικό adaptive cruise controller (2.2), (4.6) με την (6.1), ακολουθώντας έναν οδηγό με ισχυρή επιβράδυνση για το 2<sup>ο</sup> σενάριο.

**3<sup>ο</sup> Σενάριο:** Σε αυτό το σενάριο, το προπορευόμενο όχημα έχει αρχική ταχύτητα  $v_0(0) = 3m/s$  σε δρόμο με  $v_{\max} = 12.3m/s$ . Θυμηθείτε ότι η αρχική ταχύτητα και η αρχική απόσταση των  $n = 5$  οχημάτων είναι  $v_{i,0} = 10.5m/s$ ,  $i = 1, \dots, 5$  και  $s_{1,0} = 16.6m$ ,  $s_{i,0} = 10m$ ,  $i = 2, \dots, 5$ , αντίστοιχα. Επιλέγουμε στην (6.1) τις ακόλουθες τιμές,  $k = 0.65s^{-1}$ ,  $\lambda = 24m$ ,  $g_{\max} = 0.64$  και  $\gamma = 42.51m$ . Παρατηρήστε τώρα ότι αυτές οι αρχικές συνθήκες βρίσκονται στο σύνολο ασφαλούς λειτουργίας  $D(v_0(0))$  που δίνεται από την (3.4). Πράγματι,  $s_{1,0}(0) = 16.6 > a + k^{-1} \max(v_{1,0}(0) - v_0(0)) = 16.5m$  και  $s_{i,0}(0) > 5m$  για  $i = 2, \dots, 5$ . Υπό αυτές τις αρχικές συνθήκες, η απαίτηση Ασφαλούς Λειτουργίας δεν ικανοποιήθηκε για την πολιτική CTH (2.12) με το cruise controller (2.2), (2.13), όπως φαίνεται στην Εικόνα 5. Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο μη γραμμικό adaptive cruise controller (2.2), (4.6) με την (6.1), δεν υπάρχουν συγκρούσεις όπως φαίνεται στην Εικόνα 14. Η Εικόνα 15 δείχνει ότι οι ταχύτητες όλων των οχημάτων παραμένουν κάτω από τα όρια ταχύτητας, επαληθεύοντας την απαίτηση Ασφαλούς Λειτουργίας και την εκθετική σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας. Τέλος, η Εικόνα 16 δείχνει τις επιταχύνσεις των οχημάτων.

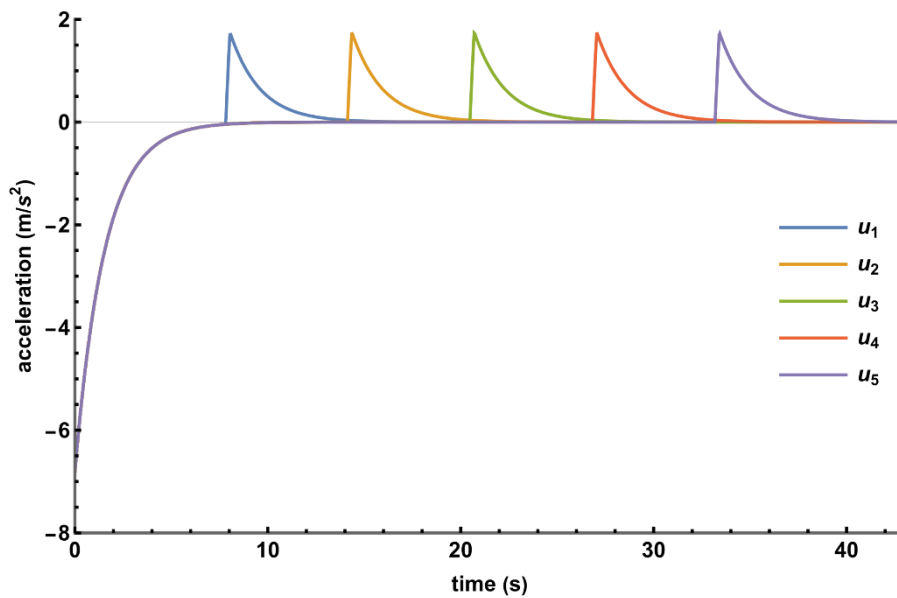


**Εικόνα 14:** Αποστάσεις οχημάτων για το 3<sup>ο</sup> σενάριο χρησιμοποιώντας το μη γραμμικό adaptive cruise controller (2.2), (4.6) με την (6.1).



**Εικόνα 15:** Ταχύτητες οχημάτων για το μη γραμμικό adaptive cruise controller

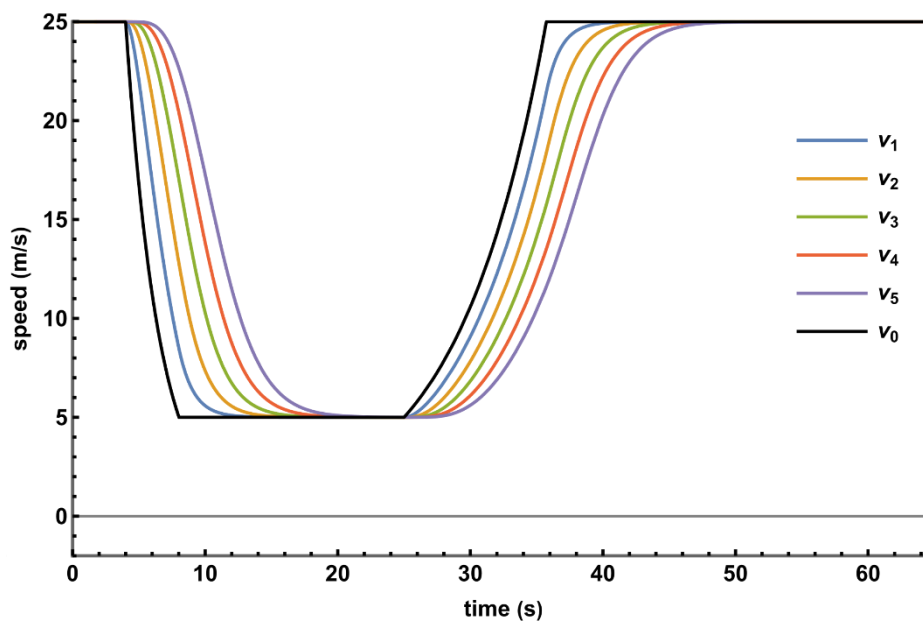
(2.2), (4.6) με την (6.1) για το 3<sup>ο</sup> σενάριο.



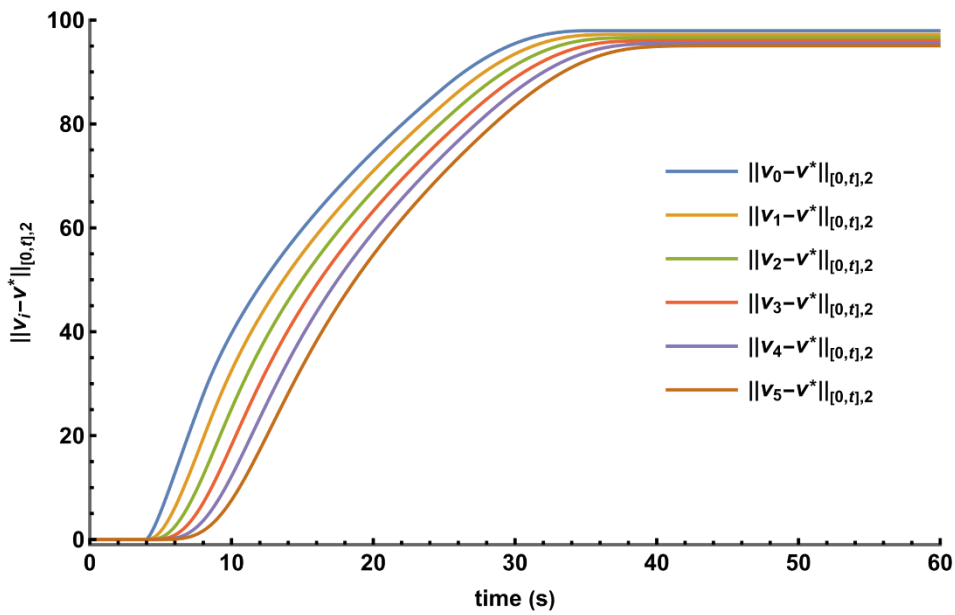
**Εικόνα 16:** Επιταχύνσεις οχημάτων για το μη γραμμικό adaptive cruise controller

(2.2), (4.6) με την (6.1) για το 3<sup>ο</sup> σενάριο.

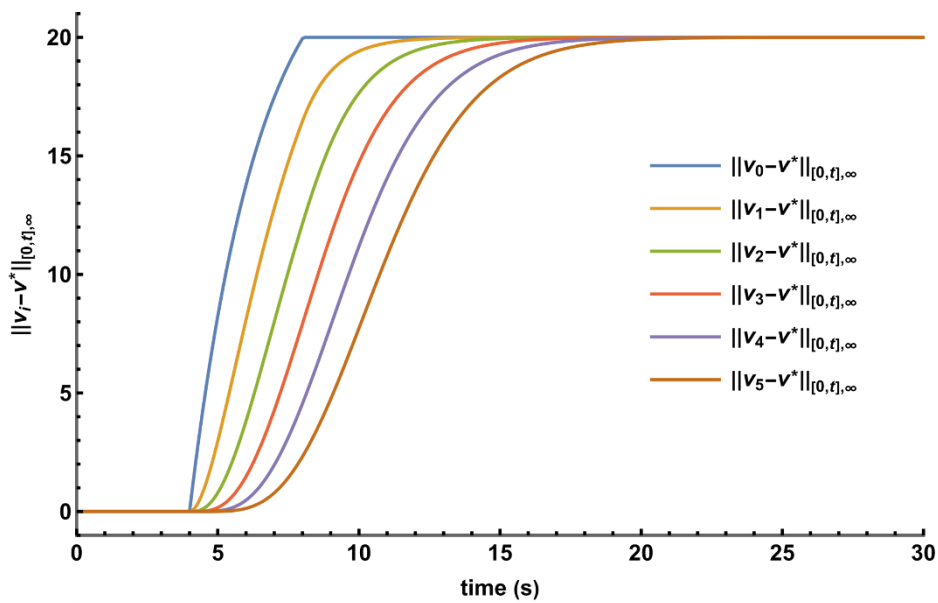
**4<sup>ο</sup> Σενάριο:** Για να τονίσουμε την  $L_p$  string stability για  $p=2$  και  $p=\infty$  για το ελεγκτή (2.2) με την (4.6), εξετάζουμε μια διμοιρία από  $n=5$  οχήματα και έναν οδηγό με αρχικές ταχύτητες  $v_i(0) = 25\text{m/s}$ ,  $i=0,1,\dots,5$ , και αρχική απόσταση  $s_i(0) = 66.23\text{m}$ ,  $i=1,\dots,5$ . Η διμοιρία εκκίνησε από μια θέση ισορροπίας με  $s^* = 66.23\text{m}$ ,  $v^* = 25\text{m/s}$  και αυτό επιτρέπει τον έλεγχο της  $L_p$  string stability για  $p=2$  και  $p=\infty$ . Σε αυτό το σενάριο, ο προπορευόμενος οδηγός εκτελεί έναν ελιγμό με τα φρένα με επιβράδυνση  $-5\text{m/s}^2$ , και στην συνέχεια επιταχύνει αργά για να επιστρέψει στην αρχική του ταχύτητα  $v_0 = 25\text{m/s}$ . Οι ταχύτητες όλων των οχημάτων, συμπεριλαμβανομένης της ταχύτητας του πρώτου, φαίνονται στην Εικόνα 17. Η Εικόνα 18 δείχνει τη  $L_2$  string stability (διάχυση ενέργειας κατά μήκος της σειράς των οχημάτων). Τέλος, η Εικόνα 19 απεικονίζει τη  $L_\infty$  string stability (τις υπερβάσεις της απόκλισης ταχύτητας κατά μήκος της σειράς των οχημάτων). Χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές  $k = 1\text{s}^{-1}$ ,  $\lambda = 38\text{m}$ ,  $g_{\max} = 0.9$  και  $\gamma = 72\text{m}$ .



**Εικόνα 17:** Ταχύτητες οχημάτων για το 4<sup>ο</sup> σενάριο. Το προπορευόμενο όχημα επιβραδύνει και επιταχύνει αργά στην αρχική του ταχύτητα.



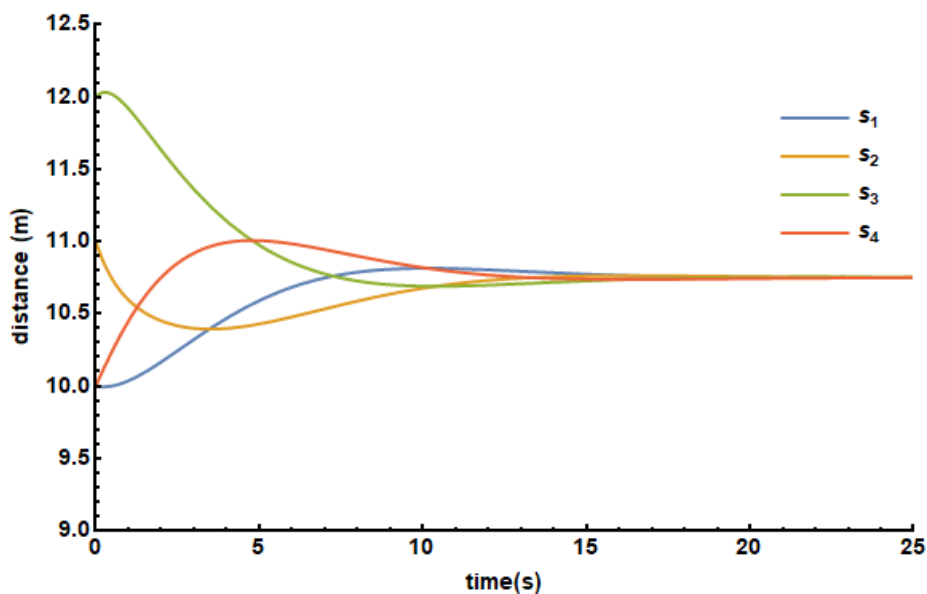
**Εικόνα 18:** Εξέλιξη της  $L_2$  νόρμας  $\|v_i - v^*\|_{[0,t],2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$  που απεικονίζει την  $L_2$  string stability απαίτηση.



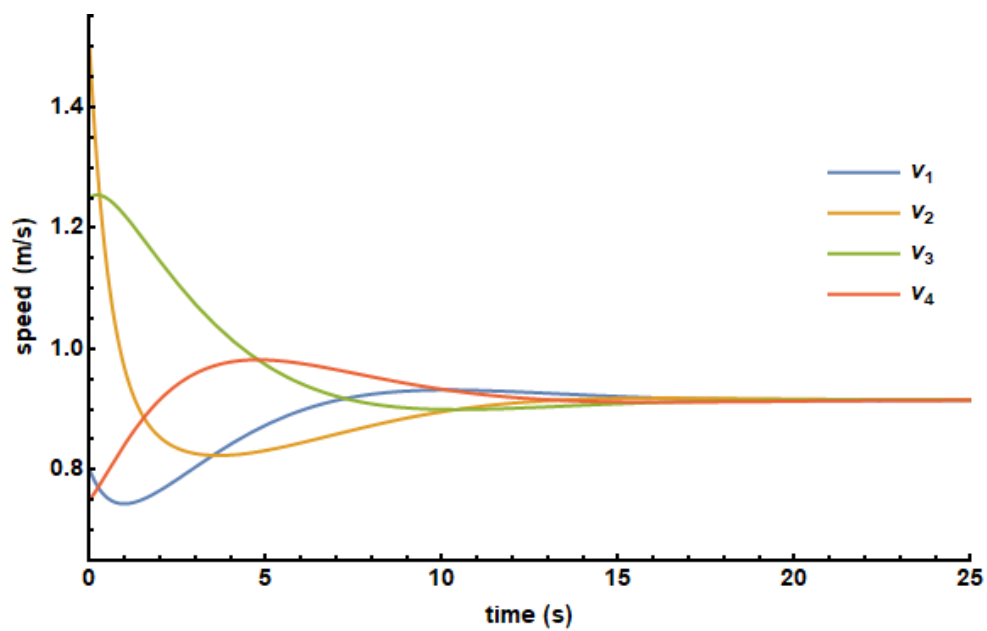
**Εικόνα 19:** Εξέλιξη της  $L_\infty$  νόρμας  $\|v_i - v^*\|_{[0,t],\infty}$ ,  $i = 1, \dots, 5$  που απεικονίζει την  $L_\infty$  string stability απαίτηση.



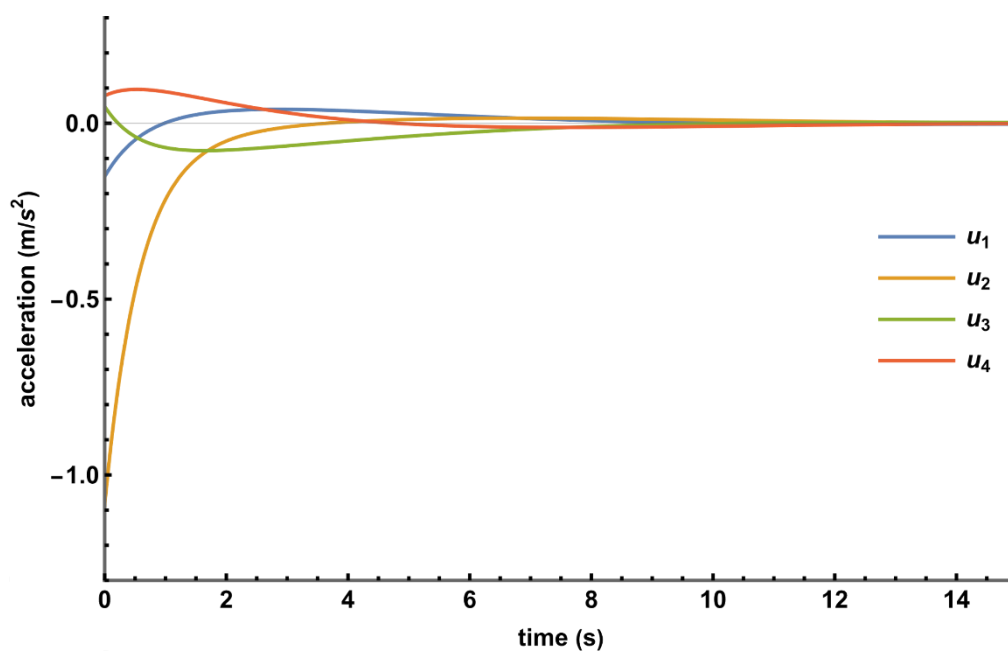
**Σενάριο για Κυκλικό Δρόμο:** Στη συνέχεια εξετάζουμε ένα σενάριο με  $n=4$  οχήματα που κινούνται σε κυκλικό δρόμο. Ο μη γραμμικός ελεγκτής σε αυτή την περίπτωση δίνεται από το (2.2), με την (4.6) και την (6.1) με  $a=5m$ ,  $k=2s^{-1}$ ,  $\lambda=7.1m$ ,  $\gamma=19m$ ,  $g_{\max}=0.26s^{-1}$ , και το μήκος του δρόμου ισούται με  $L=43m$ . Σε αυτό το σενάριο, λαμβάνουμε από τη (4.2) ότι  $v_{\max}=3.32m/s$  και το σημείο ισορροπίας είναι  $v^*=0.915m/s$ ,  $s^*=10.75m$ . Επιπλέον, παίρνουμε από τη (5.1) ότι  $\mu_4=2$ , και, ορίζοντας  $p=g_{\max}$  και  $M=0.96g_{\max}/2$ , εγγυόμαστε επίσης ότι η προϋπόθεση (5.4) ισχύει. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης απεικονίζονται στην Εικόνα 20 και στην Εικόνα 21 που δείχνουν την σύγκλιση στην απόσταση και την ταχύτητα ισορροπίας, αντίστοιχα. Τέλος, η Εικόνα 22 δείχνει την επιτάχυνση των οχημάτων. Οι αρχικές συνθήκες για αυτό το σενάριο είναι  $s_{1,0}=10m$ ,  $s_{2,0}=11m$ ,  $s_{3,0}=12m$ ,  $s_{4,0}=10m$  και  $v_{1,0}=0.8m/s$ ,  $v_{2,0}=1.5m/s$ ,  $v_{3,0}=1.25m/s$ ,  $v_{4,0}=0.75m/s$ .



**Εικόνα 20:** Αποστάσεις οχημάτων σε κυκλικό δρόμο για το cruise controller (2.2), (4.6) με την (6.1).



**Εικόνα 21:** Ταχύτητες οχημάτων σε κυκλικό δρόμο για το cruise controller (2.2), (4.6) με την (6.1).



**Εικόνα 22:** Επιταχύνσεις των οχημάτων σε κυκλικό δρόμο για το cruise controller (2.2), (4.6) με την (6.1).

## 7. Αποδείξεις Κύριων Αποτελεσμάτων

Οι αποδείξεις του Θεωρήματος 1 και του Θεωρήματος 2 είναι παρόμοιες και εκτελούνται χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση Barrier (βλέπε επίσης τις εργασίες [5], [42] για τη χρήση των συναρτήσεων Barrier στη Θεωρία Ελέγχου).

### Απόδειξη του Θεωρήματος 1:

Έστω μια (αυθαίρετη) είσοδος  $v_0 \in C^1(\mathbb{R}_+)$  που ικανοποιεί την ανισότητα (3.5) και ένα (αυθαίρετο) σημείο  $(s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0}) \in D(v_0(0))$ . Λόγω του γεγονότος ότι οι  $f, g, \kappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  είναι τοπικά Lipschitz συναρτήσεις, το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.1), (2.2) με την (3.6) και αρχική συνθήκη  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) = (s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0})$  έχει μια μοναδική λύση  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t))$  που ορίζεται για  $t \in [0, t_{\max})$ , όπου  $t_{\max} \in (0, +\infty]$  ο μέγιστος χρόνος ύπαρξης της λύσης. Επιπλέον, αν  $t_{\max} < +\infty$  τότε  $\limsup_{t \rightarrow t_{\max}^-} (|(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t))|) = +\infty$ , με βάση το Θεώρημα Μέγιστου Χρόνου

Ύπαρξης της Λύσης που βρίσκεται στο μαθηματικό υπόβαθρο.

Αν  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D(v_0(t))$  για όλα τα  $t \in [0, t_{\max})$  τότε δεν υπάρχει τίποτα που πρέπει να αποδειχθεί, αφού από τις (2.1), (2.2), (3.6) και (3.4) συνεπάγονται οι διαφορικές ανισότητες  $\dot{s}_i(t) \leq v_{\max}$  για όλα τα  $t \in [0, t_{\max})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Επομένως, λαμβάνουμε  $s_i(t) \leq s_i(0) + tv_{\max}$  για όλα τα  $t \in [0, t_{\max})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , και δεδομένου ότι  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D(v_0(t))$ , συμπεραίνουμε (δυνάμει του (3.4)) ότι  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t))$  είναι φραγμένο στο  $[0, t_{\max})$ . Αυτό συνεπάγεται ότι  $t_{\max} = +\infty$ .

Δείχνουμε στην συνέχεια με την εις άτοπο επαγωγή ότι  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D(v_0(t))$  για όλα τα  $t \in [0, t_{\max})$ . Επομένως, στη συνέχεια υποθέτουμε ότι υπάρχει  $t \in [0, t_{\max})$  τέτοιο ώστε  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \notin D(v_0(t))$ . Λόγω της συνέχειας του  $v_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, v_{\max})$  και του γεγονότος ότι  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) \in D(v_0(0))$ , υπάρχει μια γειτονιά γύρω από το 0 τέτοια ώστε  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D(v_0(t))$  για όλα τα  $t \in [0, t_{\max})$  σε αυτή τη γειτονιά (δες το σύνολο (3.4)).

Κατά συνέπεια, αν ορίσουμε

$$T := \inf \left\{ t \in [0, t_{\max}) : (s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \notin D(v_0(t)) \right\} \quad (7.1)$$

προκύπτει ότι  $T \in (0, t_{\max})$ . Σημειώστε ότι η περίπτωση  $(s_1(T), \dots, s_n(T), v_1(T), \dots, v_n(T)) \in D(v_0(T))$  αποκλείεται (καθώς θα υπήρχε μια γειτονιά του  $T$  με  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D(v_0(t))$  για όλα τα  $t \in [0, t_{\max})$  σε αυτήν τη γειτονιά και αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό (7.1)). Σημειώστε επίσης ότι ο ορισμός (7.1) υπονοεί ότι

$$(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D(v_0(t)) \text{ για όλα τα } t \in [0, T) \quad (7.2)$$

Και δεδομένου ότι  $(s_1(T), \dots, s_n(T), v_1(T), \dots, v_n(T)) \notin D(v_0(T))$ , συμπεραίνουμε από την (3.4) ότι

$$\prod_{i=1}^n \left( v_i(T) (v_{\max} - v_i(T)) (s_i(T) - a) (s_i(T) - a - k^{-1} (v_i(T) - v_{i-1}(T))) \right) = 0 \quad (7.3)$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε τη συνάρτηση  $\Phi : [0, T) \rightarrow \mathfrak{R}$  με τον τύπο:

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{s_i(t) - a} + \frac{1}{s_i(t) - a - k^{-1} (v_i(t) - v_{i-1}(t))} + \frac{1}{v_i(t)} + \frac{1}{v_{\max} - v_i(t)} \right) \quad (7.4)$$

Σημειώστε ότι η (7.3) και ο ορισμός (7.4) υπονοούν ότι  $\lim_{t \rightarrow T^-} (\Phi(t)) = +\infty$ . Χρησιμοποιώντας τις (2.1), (2.2), (3.6) και τον ορισμό (7.4) λαμβάνουμε για  $t \in [0, T)$ :

$$\dot{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{v_i(t) - v_{i-1}(t)}{(s_i(t) - a)^2} + \frac{v_i(t) - v_{i-1}(t) + k^{-1} (\dot{v}_i(t) - \dot{v}_{i-1}(t))}{(s_i(t) - a - k^{-1} (v_i(t) - v_{i-1}(t)))^2} - \frac{\dot{v}_i(t)}{v_i^2(t)} + \frac{\dot{v}_i(t)}{(v_{\max} - v_i(t))^2} \right) \quad (7.5)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.1), (2.2), (3.6), (3.4), (3.1), (3.2), (3.5), και το γεγονός ότι  $f, g, k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  είναι μη αρνητικές συναρτήσεις, λαμβάνουμε τις ακόλουθες ανισότητες:

$$-kv_i(t) \leq \dot{v}_i(t) \leq k(v_{\max} - v_i(t)), \text{ για όλα τα } t \in [0, T), i = 1, \dots, n \quad (7.6)$$

Επιπλέον, η (7.2) και ο ορισμός (3.4) υποδηλώνουν ότι:

$$v_i(t) - v_{i-1}(t) < k(s_i(t) - a), \text{ για όλα τα } t \in [0, T), i = 1, \dots, n \quad (7.7)$$

Δυνάμει της (3.2) υπάρχει  $r > 0$  έτσι ώστε  $v_{\max} = k(\lambda - a - r)$ . Χρησιμοποιώντας τις (3.5), (7.6), παίρνουμε για κάθε  $t \in [0, T), i = 1, \dots, n$ :

$$v_i(t) - v_{i-1}(t) + k^{-1}(\dot{v}_i(t) - \dot{v}_{i-1}(t)) \leq v_{\max} \quad (7.8)$$

Κατά συνέπεια, αν  $s_i(t) - a - k^{-1}(v_i(t) - v_{i-1}(t)) \geq r$  για  $i = 1, \dots, n$  τότε παίρνουμε από την (7.8) την

ανισότητα 
$$\frac{v_i(t) - v_{i-1}(t) + k^{-1}(\dot{v}_i(t) - \dot{v}_{i-1}(t))}{(s_i(t) - a - k^{-1}(v_i(t) - v_{i-1}(t)))^2} \leq \frac{v_{\max}}{r^2}. \quad \text{Από την άλλη μεριά, αν}$$

$s_i(t) - a - k^{-1}(v_i(t) - v_{i-1}(t)) < r$  τότε  $s_i(t) < a + r + k^{-1}(v_i(t) - v_{i-1}(t))$ , που σε συνδυασμό με τις (7.2), (3.4), (3.5) και το γεγονός ότι  $v_{\max} = k(\lambda - a - r)$  μας δίνει  $s(t) < a + r + k^{-1}v_{\max} = \lambda$ .

Επομένως, σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε από την (7.6) και τις (2.1), (2.2), (3.6), (3.3), (3.5):

$$\begin{aligned} v_i(t) - v_{i-1}(t) + k^{-1}(\dot{v}_i(t) - \dot{v}_{i-1}(t)) &\leq v_i(t) + k^{-1}\dot{v}_i(t) \\ &= k^{-1}f(s_i(t)) + k^{-1}g(s_i(t))v_{i-1}(t) = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, λαμβάνουμε για όλα τα  $t \in [0, T), i = 1, \dots, n$ :

$$\frac{v_i(t) - v_{i-1}(t) + k^{-1}(\dot{v}_i(t) - \dot{v}_{i-1}(t))}{(s_i(t) - a - k^{-1}(v_i(t) - v_{i-1}(t)))^2} \leq \frac{v_{\max}}{r^2} \quad (7.9)$$

Επομένως, λαμβάνουμε από τις (7.4), (7.5), (7.6), (7.7) και την (7.9) για κάθε  $t \in [0, T)$ :

$$\dot{\Phi}(t) \leq k \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{s_i(t) - a} + \frac{1}{v_i(t)} + \frac{1}{v_{\max} - v_i(t)} \right) + n \frac{v_{\max}}{r^2} \leq k\Phi(t) + n \frac{v_{\max}}{r^2} \quad (7.10)$$

Η διαφορική ανισότητα (7.10) υπονοεί ότι

$$\Phi(t) \leq \exp(kt)\Phi(0) + n \frac{v_{\max}}{kr^2} (\exp(kt) - 1), \text{ για κάθε } t \in [0, T) \quad (7.11)$$

Με βάση την εκτίμηση (7.11) ερχόμαστε σε αντίθεση με το ότι το όριο  $\lim_{t \rightarrow T^-} (\Phi(t)) = +\infty$ , γιατί όταν το  $t \rightarrow T^-$  το όριο είναι πεπερασμένο. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\triangleleft$

## Απόδειξη του Θεωρήματος 2:

Έστω ένα δοσμένο (αυθαίρετο) σημείο  $(s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0}) \in D$  με  $\sum_{i=1}^n s_{i,0} = L$ . Λόγω του γεγονότος ότι οι  $f, g, \kappa: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$  είναι τοπικά Lipschitz συναρτήσεις, το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.1), (2.2) με την (3.6),  $v_0 \equiv v_n$  και αρχική συνθήκη  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) = (s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0})$  έχει μοναδική λύση  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t))$  που ορίζεται για κάθε  $t \in [0, t_{\max})$ , όπου  $t_{\max} \in (0, +\infty]$  ο μέγιστος χρόνος ύπαρξης της λύσης. Επιπλέον, αν  $t_{\max} < +\infty$  τότε το  $\limsup_{t \rightarrow t_{\max}^-} (|(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t))|) = +\infty$ . Η λύση ικανοποιεί επίσης το άθροισμα  $\sum_{i=1}^n s_i(t) = L$  για  $t \in [0, t_{\max})$ .

Αν  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D$  για όλα τα  $t \in [0, t_{\max})$  τότε δεν υπάρχει τίποτα που πρέπει να αποδειχθεί, δεδομένου ότι η (3.7) και το γεγονός ότι το  $\sum_{i=1}^n s_i(t) = L$  δηλώνουν ότι το  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t))$  είναι φραγμένο στο  $[0, t_{\max})$ . Αυτό συνεπάγεται ότι  $t_{\max} = +\infty$ .

Δείχνουμε στη συνέχεια με την εις άτοπο επαγωγή ότι  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D$  για κάθε  $t \in [0, t_{\max})$ . Επομένως, στη συνέχεια υποθέτουμε ότι υπάρχει  $t \in [0, t_{\max})$  τέτοιο ώστε  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \notin D$ . Από το γεγονός ότι  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) \in D$ , υπάρχει μια γειτονιά του 0 τέτοια ώστε  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D$  για κάθε  $t \in [0, t_{\max})$  σε αυτήν τη γειτονιά (ανάκληση (3.7)). Κατά συνέπεια, αν ορίσουμε

$$T := \inf \{ t \in [0, t_{\max}) : (s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \notin D \} \quad (7.12)$$

προκύπτει ότι  $T \in (0, t_{\max})$ . Παρατηρήστε ότι η περίπτωση  $(s_1(T), \dots, s_n(T), v_1(T), \dots, v_n(T)) \in D$  αποκλείεται (καθώς θα υπήρχε μια γειτονιά του  $T$  με  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D$  για κάθε  $t \in [0, t_{\max})$  σε αυτήν τη γειτονιά και αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό (7.12)). Σημειώστε επίσης ότι ο ορισμός (7.12) υπονοεί ότι

$$(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D \text{ για κάθε } t \in [0, T) \quad (7.13)$$

και αφού  $(s_1(T), \dots, s_n(T), v_1(T), \dots, v_n(T)) \notin D$ , συμπεραίνουμε από την (3.7) ότι η (7.3) ισχύει. Στη συνέχεια, ορίζουμε την συνάρτηση  $\Phi : [0, T) \rightarrow \mathfrak{R}$  μέσω του τύπου (7.4). Σημειώστε ότι η (7.3) και ο ορισμός (7.4) υπονοούν ότι  $\lim_{t \rightarrow T^-} (\Phi(t)) = +\infty$ . Χρησιμοποιώντας τις (2.1), (2.2), (3.6) και τον ορισμό (7.4) λαμβάνουμε την (7.5) για  $t \in [0, T)$ .

Χρησιμοποιώντας τις (2.1), (2.2), (3.6), (3.7), (3.1), (3.2), και το γεγονός ότι οι  $f, g, \kappa : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$  είναι μη αρνητικές συναρτήσεις, λαμβάνουμε τις ανισώσεις (7.6). Επιπλέον, η (7.13) και ο ορισμός (3.7) υποδηλώνουν την ανισότητα (7.7). Δυνάμει της (3.2) υπάρχει  $r > 0$  έτσι ώστε  $v_{\max} = k(\lambda - a - r)$ . Χρησιμοποιώντας την (7.6) και το γεγονός ότι  $v_0 \equiv v_n$ , παίρνουμε την (7.8) για

κάθε  $t \in [0, T)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Κατά συνέπεια, αν  $s_i(t) - a - k^{-1}(v_i(t) - v_{i-1}(t)) \geq r$  για  $i = 1, \dots, n$  τότε παίρνουμε από την (7.8) την ανισότητα  $\frac{v_i(t) - v_{i-1}(t) + k^{-1}(\dot{v}_i(t) - \dot{v}_{i-1}(t))}{(s_i(t) - a - k^{-1}(v_i(t) - v_{i-1}(t)))^2} \leq \frac{v_{\max}}{r^2}$ . Από την άλλη μεριά, αν  $s_i(t) - a - k^{-1}(v_i(t) - v_{i-1}(t)) < r$  τότε  $s_i(t) < a + r + k^{-1}(v_i(t) - v_{i-1}(t))$ , που σε συνδυασμό με τις (7.13), (3.7) και το γεγονός ότι  $v_{\max} = k(\lambda - a - r)$  μας δίνει  $s(t) < a + r + k^{-1}v_{\max} = \lambda$ . Επομένως, σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε από την (7.6) και τις (2.1), (2.2), (3.6), (3.3):

$$\begin{aligned} v_i(t) - v_{i-1}(t) + k^{-1}(\dot{v}_i(t) - \dot{v}_{i-1}(t)) &\leq v_i(t) + k^{-1}\dot{v}_i(t) \\ &= k^{-1}f(s_i(t)) + k^{-1}g(s_i(t))v_{i-1}(t) = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, λαμβάνουμε την (7.9) για κάθε  $t \in [0, T)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Επομένως, λαμβάνουμε την (7.10) από τις (7.4), (7.5), (7.6), (7.7) και την (7.9) για κάθε  $t \in [0, T)$ . Από τη διαφορική ανισότητα (7.10) συνεπάγεται η εκτίμηση (7.11). Η εκτίμηση (7.11) έρχεται σε αντίθεση με το όριο  $\lim_{t \rightarrow T^-} (\Phi(t)) = +\infty$ . Η απόδειξη είναι πλήρης.  $\triangleleft$

Οι αποδείξεις του Θεωρήματος 3 και του Θεωρήματος 4 είναι ακριβώς οι ίδιες. Παρέχονται στη συνέχεια.

#### Απόδειξη του Θεωρήματος 3 και του Θεωρήματος 4:

Έστω μια (αυθαίρετη) είσοδος  $v_0 \in C^1(\mathcal{R}_+)$  που ικανοποιεί την (3.5) και ένα δοσμένο (αυθαίρετο) σημείο  $(s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0}) \in D(v_0(0))$ . Το γεγονός ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.1), (2.2) με την (4.6), αρχική συνθήκη  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) = (s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0})$  έχει μία μοναδική λύση  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t))$  που ορίζεται για κάθε  $t \geq 0$  που ικανοποιεί την συνθήκη  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in D(v_0(t))$  για κάθε  $t \geq 0$ , είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1, των ιδιοτήτων (4.1), (4.2), (4.3), του ορισμού (4.5) και το γεγονός ότι οι ιδιότητες (3.1), (3.2), (3.3) ισχύουν για τις συναρτήσεις  $f(s) = (k - g(s))G(s)$ ,  $\kappa(s) \equiv k$ .



Ορίζουμε τις ακόλουθες μη αρνητικές συναρτήσεις για  $i = 1, \dots, n$

$$V_i(s_i, v_i) = \frac{1}{2}(v_i - v^*)^2 + \frac{1}{4q}(v_i - G(s_i))^2 + \int_{s^*}^{s_i} (k - g(z))(G(z) - v^*) dz \quad (7.14)$$

όπου  $q > 0$  είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Λαμβάνοντας υπόψη τις (4.1), (2.1), (2.2), (4.6), και χρησιμοποιώντας τις ανισότητες

$$2(v_i - v^*)(v_{i-1} - v^*) \leq (v_i - v^*)^2 + (v_{i-1} - v^*)^2,$$

$$|v_i - G(s_i)| |v_{i-1} - v^*| \leq \frac{(v_i - G(s_i))^2}{2q} + q(v_{i-1} - v^*)^2,$$

λαμβάνουμε για κάθε  $q > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -k(v_i - v^*)^2 - \frac{1}{2q}(k - g(s_i))(v_i - G(s_i))^2 \\ &\quad + \left( k(v_i - v^*) - (k - g(s_i))(v_i - G(s_i)) \right) (v_{i-1} - v^*) \\ &\leq -\frac{k}{2}(v_i - v^*)^2 + \frac{1}{2}(k + q(k - g(s_i)))(v_{i-1} - v^*)^2 \end{aligned} \quad (7.15)$$

Η εκτίμηση (7.15) δίνει την ακόλουθη εκτίμηση για κάθε  $q > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$\dot{V}_i \leq -\frac{k}{2}(v_i - v^*)^2 + \frac{1}{2}(1+q)k(v_{i-1} - v^*)^2$$

που μετά την ολοκλήρωση συνεπάγεται ότι για κάθε  $t \geq 0$ ,  $q > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$\int_0^t (v_i(\tau) - v^*)^2 d\tau + \frac{2}{k}V_i(t) \leq \frac{2}{k}V_i(0) + (1+q) \int_0^t (v_{i-1}(\tau) - v^*)^2 d\tau \quad (7.16)$$

Η εκτίμηση (4.7) ) είναι άμεση συνέπεια της (7.16) και του ορισμού (7.14).

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε ξανά τις (4.1), (2.1), (2.2), (4.6), (7.14) και τις ανισότητες

$$2(v_i - v^*)(v_{i-1} - v^*) \leq (v_i - v^*)^2 + (v_{i-1} - v^*)^2,$$

$$|v_i - G(s_i)| |v_{i-1} - v^*| \leq \frac{1}{4q} (v_i - G(s_i))^2 + q (v_{i-1} - v^*)^2,$$

$$|G(s_i) - v^*| |v_i - v^*| \leq \frac{\varepsilon}{2} (G(s_i) - v^*)^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (v_i - v^*)^2, \text{ για κάθε } \varepsilon > 0$$

για να λάβουμε την ακόλουθη εκτίμηση για κάθε  $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} 2\dot{V}_i &\leq -k(v_i - v^*)^2 - \frac{1}{2q}(k - g_{\max})(v_i - v^*)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2q}(k - g_{\max})(G(s_i) - v^*)^2 + \frac{1}{2\varepsilon q}(k - g_{\max})(v_i - v^*)^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2q}(k - g_{\max})(G(s_i) - v^*)^2 + (1 + 2q)k(v_{i-1} - v^*)^2 \end{aligned} \quad (7.17)$$

Ορίζουμε  $\varepsilon = \frac{k - g_{\max}}{2qk + k - g_{\max}}$ , προκύπτει από την (7.17) ότι

$$\dot{V}_i \leq -\frac{k(k - g_{\max})}{4qk + 2(k - g_{\max})} (G(s_i) - v^*)^2 + \frac{k}{2}(1 + 2q)(v_{i-1} - v^*)^2 \quad (7.18)$$

Η ανισότητα (7.18) και το γεγονός ότι η  $V_i(t) \geq 0$  (ανάκληση της (7.14)) συνεπάγεται ότι η ακόλουθη εκτίμηση ισχύει για κάθε  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^t (G(s_i(\tau)) - v^*)^2 d\tau &\leq 2 \frac{(1 + 2q)k - g_{\max}}{k(k - g_{\max})} V_i(0) \\ &\quad + (1 + 2q) \frac{(1 + 2q)k - g_{\max}}{k - g_{\max}} \int_0^t (v_{i-1}(\tau) - v^*)^2 d\tau \end{aligned} \quad (7.19)$$

Η εκτίμηση (4.8) είναι άμεση συνέπεια της (7.19) και του ορισμού (7.14).

Στη συνέχεια ορίζουμε για  $i = 1, \dots, n$ :

$$w_i := v_i - G(s_i) \quad (7.20)$$

Λόγω των (2.1), (2.2), (4.6) και του (7.20) έχουμε για κάθε  $t \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$\dot{w}_i = -(k - g(s_i))w_i \quad (7.21)$$

Η λύση του (7.21) δίνεται από τον τύπο

$$w_i(t) = w_i(0) \exp\left(-kt + \int_0^t g(s_i(\tau))d\tau\right), \text{ για κάθε } t \geq 0, i = 1, \dots, n \quad (7.22)$$

Η εκτίμηση (4.10) είναι άμεση συνέπεια των (4.1), (7.22) και του ορισμού (7.20).

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι λόγω των (2.1), (2.2), (4.6) και του ορισμού (7.21), έχουμε ότι για κάθε  $t \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$\dot{v}_i = -(k - g(s_i))w + g(s_i)(v_{i-1} - v^*) - g(s_i)(v_i - v^*) \quad (7.23)$$

Από την (7.22) και την (7.23) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} v_i(t) - v^* &= (v_i(0) - v^*) \exp\left(-\int_0^t g(s_i(\tau))d\tau\right) \\ &+ \int_0^t g(s_i(l)) \exp\left(-\int_l^t g(s_i(\tau))d\tau\right) (v_{i-1}(l) - v^*) dl \\ &- w_i(0) \exp\left(-\int_0^t g(s_i(\tau))d\tau\right) \int_0^t (k - g(s_i(l))) \exp(-kl) dl \end{aligned} \quad (7.24)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις (7.20), (7.24), την τριγωνική ανισότητα και το γεγονός ότι η  $g$  είναι μη αρνητική συνάρτηση, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|v_i(t) - v^*| &\leq |v_i(0) - v^*| + k |w_i(0)| \int_0^t \exp(-kl) dl \\
&\quad + \int_0^t g(s_i(l)) \exp\left(-\int_l^t g(s_i(\tau)) d\tau\right) dl \sup_{0 \leq l \leq t} (|v_{i-1}(l) - v^*|) \\
&\leq |v_i(0) - v^*| + |w_i(0)| \\
&\quad + \exp\left(-\int_0^t g(s_i(\tau)) d\tau\right) \int_0^t \frac{d}{dl} \left( \exp\left(\int_0^l g(s_i(\tau)) d\tau\right) \right) dl \sup_{0 \leq l \leq t} (|v_{i-1}(l) - v^*|) \\
&\leq 2 |v_i(0) - v^*| + |G(s_i(0)) - v^*| + \sup_{0 \leq l \leq t} (|v_{i-1}(l) - v^*|)
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Η εκτίμηση (4.9) είναι άμεση συνέπεια της εκτίμησης (7.25). Η απόδειξη είναι πλήρης.  $\triangleleft$

Στη συνέχεια παρέχουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5. Η απόδειξη του Θεωρήματος 5 εκτελείται κατασκευάζοντας μια συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα (2.1), (2.2), (4.6) με  $v_0 = v^*$ .

### Απόδειξη του Θεωρήματος 5:

Λόγω του Θεωρήματος 3, το σύνολο  $D(v^*) \subset \mathfrak{R}^{2n}$  είναι θετικά αναλλοίωτο για το σύστημα (2.1), (2.2), (4.6) με  $v_0 = v^*$ . Επομένως, η πρόταση 1.4.5 στην σελίδα 20 στο βιβλίο [2] μας εγγυάται ότι το σύνολο  $\overline{D(v^*)} \subset \mathfrak{R}^{2n}$  είναι θετικά αναλλοίωτο για το σύστημα (2.1), (2.2), (4.6) με  $v_0 = v^*$ .

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το σημείο ισορροπίας  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*) \in \overline{D(v^*)}$  για το σύστημα (2.1), (2.2), (4.6) με  $v_0 = v^*$  ορισμένο στο  $\overline{D(v^*)}$  είναι Ολικά Ασυμπτωτικά Ευσταθές. Για αυθαίρετη σταθερά  $c > 0$ , ορίζουμε την οικογένεια των συναρτήσεων

$$V_i(s_i, v_i) = \frac{1}{2}(v_i - v^*)^2 + \frac{c}{2}(v_i - G(s_i))^2 + \int_{s^*}^{s_i} (k - g(z))(G(z) - v^*) dz, \quad i = 1, \dots, n \quad (7.26)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (7.26), το γεγονός ότι  $g$  είναι μη αρνητική και τις ανισότητες

$$\begin{aligned} |v_i - G(s_i)| |v_{i-1} - v^*| &\leq \frac{c}{2}(v_i - G(s_i))^2 + \frac{1}{2c}(v_{i-1} - v^*)^2 \\ 2(v_i - v^*)(v_{i-1} - v^*) &\leq (v_i - v^*)^2 + (v_{i-1} - v^*)^2 \end{aligned}$$

λαμβάνουμε για  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -k(v_i - v^*)^2 - c(k - g(s_i))(v_i - G(s_i))^2 \\ &\quad - (k - g(s_i))(v_i - G(s_i))(v_{i-1} - v^*) + k(v_i - v^*)(v_{i-1} - v^*) \\ &\leq -\frac{k}{2}(v_i - v^*)^2 - \frac{c}{2}(k - g(s_i))(v_i - G(s_i))^2 + \frac{k}{2}\left(\frac{1}{c} + 1\right)(v_{i-1} - v^*)^2 \end{aligned} \quad (7.27)$$

Ορίζουμε τους συντελεστές  $Q_i \geq 1$  για  $i = 1, \dots, n$  μέσω των εξισώσεων:

$$Q_i = 1 + Q_{i+1} \left( \frac{1}{c} + 1 \right) \quad \text{για } i = 1, \dots, n-1 \quad \text{και } Q_n = 1 \quad (7.28)$$

Επιπλέον, ορίζουμε την συνάρτηση Lyapunov :

$$V(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n Q_i V_i(s_i, v_i) \quad (7.29)$$

Λόγω των (4.1), (7.27), (7.28), (7.29) και το γεγονός  $v_0 = v^*$ , λαμβάνουμε :

$$\dot{V} \leq -\frac{k}{2} \sum_{i=1}^n (v_i - v^*)^2 - \frac{c}{2} (k - g_{\max}) \sum_{i=1}^n Q_i (v_i - G(s_i))^2 \quad (7.30)$$

Παρατηρήστε ότι λόγω του γεγονότος ότι η συνάρτηση  $G$  που ορίζεται από το (4.5) είναι γνησίως αύξουσα στο  $[\lambda, +\infty)$ , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η δεξιά πλευρά του (7.30) είναι αρνητική για κάθε  $(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \in \overline{D(v^*)}$  με  $(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \neq (s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*)$ . Και πάλι, λόγω του γεγονότος ότι η συνάρτηση  $G$  που ορίζεται από το (4.5) είναι γνησίως αύξουσα στο  $[\lambda, +\infty)$ , οι ορισμοί (7.26), (7.29) και η εξίσωση (4.4) εγγυώνται ότι η  $V$  είναι θετική για κάθε  $(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \in \overline{D(v^*)}$  με  $(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \neq (s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*)$ . Επομένως, από το Θεώρημα 2.13 στη σελίδα 73 στο βιβλίο [8] για να συμπεράνουμε την Ολική Ασυμπτωτική Ευστάθεια αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση  $V$  που ορίζεται από την (7.29) είναι ομοιόμορφα μη φραγμένη (βλέπε τον ορισμό 2.8 στην σελίδα 70 στο βιβλίο [8]). Με άλλα λόγια, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε  $M > 0$  το σύνολο  $\left\{ (s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \in \overline{D(v^*)} : V(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \leq M \right\}$  είναι φραγμένο. Το γεγονός ότι η συνάρτηση  $G$  που ορίζεται από τον ορισμό (4.5) είναι γνησίως αύξουσα στο  $[\lambda, +\infty)$  με  $G(s) \equiv 0$  για  $s < \lambda$  σε συνδυασμό με την (4.1) σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} \int_{s^*}^s (k - g(z))(G(z) - v^*) dz &\geq (k - g_{\max}) \int_{s^*}^s (G(z) - v^*) dz \\ &\geq (k - g_{\max}) \int_{s^*+1}^s (G(z) - v^*) dz \geq (k - g_{\max})(G(s^* + 1) - v^*)(s - s^* - 1) \end{aligned}$$

για όλα τα  $s \geq s^* + 1$ . Κατά συνέπεια, η ανισότητα  $V(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \leq M$  σε συνδυασμό με το

γεγονός ότι το  $Q_i \geq 1$  για  $i = 1, \dots, n$ , συνεπάγεται ότι  $s_i \leq s^* + 1 + \frac{M}{(k - g_{\max})(G(s^* + 1) - v^*)}$  για

$i = 1, \dots, n$ . Επομένως, προκύπτει ότι το σύνολο

$\left\{ (s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \in \overline{D(v^*)} : V(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \leq M \right\}$  είναι φραγμένο για κάθε  $M > 0$ .

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η  $g$  είναι κλάσης  $C^1$  σε μία γειτονιά του  $s^* > \lambda$ . Συνεπάγεται ότι υπάρχει μια γειτονιά του σημείου ισορροπίας  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*)$  για το οποίο η δεξιά πλευρά του συστήματος (2.1), (2.2), (4.6) με  $v_0 = v^*$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Επομένως, λόγω του Πορίσματος 4.3 στο βιβλίο [23] για να δείξουμε ότι το σημείο ισορροπίας  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*)$  είναι Τοπικά Εκθετικά Ευσταθές αρκεί να δείξουμε ότι ο Ιακωβιανός πίνακας στο  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*)$  είναι

έναν πίνακα Hurwitz. Ο Ιακωβιανός πίνακας στο  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*)$  έχει την ακόλουθη δομή κάτω διαγώνιου μπλοκ

$$\begin{pmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ * & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & B \end{pmatrix}$$

όπου

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ (k - g(s^*))g(s^*) & -k \end{pmatrix}$$

Επομένως ο Ιακωβιανός πίνακας στο  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*)$  έχει δύο ιδιοτιμές  $\lambda_1 = -g(s^*)$  και  $\lambda_2 = -(k - g(s^*))$ , καθεμία με αλγεβρική πολλαπλότητα  $n$ . Και οι δύο ιδιοτιμές είναι αρνητικές και κατά συνέπεια, ο Ιακωβιανός πίνακας στο  $(s^*, \dots, s^*, v^*, \dots, v^*)$  είναι ένας πίνακας Hurwitz.

Η απόδειξη είναι πλήρης.  $\triangleleft$

### Απόδειξη του Θεωρήματος 6:

Δυνάμει του Θεωρήματος 4, το σύνολο  $\tilde{D} = D \cap \left\{ (s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{R}^{2n} : \sum_{i=1}^n s_i = L \right\}$  είναι θετικά

αναλλοίωτο για το σύστημα (2.1), (2.2), (4.6) με  $v_0 = v_n$ . Επομένως, η Πρόταση 1.4.5 στην σελίδα 20 στο βιβλίο [2] εγγυάται ότι το σύνολο  $\Omega \subset \mathfrak{R}^{2n}$  που ορίζεται από το (5.3), είναι θετικά αναλλοίωτο για το σύστημα (2.1), (2.2), (4.6) με  $v_0 = v_n$ .

Παρατηρήστε ότι αφού  $s^* = L/n$ , έχουμε ότι  $\sum_{i=1}^n (s_i - s^*) = 0$  και χρησιμοποιώντας την συνθήκη

(5.2) με  $x_i = s_i - s^*$ ,  $i = 1, \dots, n$  ισχύει ότι

$$(s_1 - s_n)^2 + \sum_{i=2}^n (s_i - s_{i-1})^2 \geq \mu_n \sum_{i=1}^n (s_i - s^*)^2 \quad (7.31)$$

με  $\mu_n > 0$  όπως ορίζεται στην (5.1). Στη συνέχεια θεωρούμε μια σταθερά  $c > 0$  έτσι ώστε

$$\frac{p}{2} \mu_n > 2M + \frac{2}{c(k - g_{\max})} \quad (7.32)$$

που είναι εφικτό αφού το  $M$  ικανοποιεί την αυστηρή ανισότητα  $M < \frac{p\mu_n}{4}$ . Ορίζουμε μια συνάρτηση Lyapunov

$$V(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i - s^*)^2 + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^n (v_i - G(s_i))^2 \quad (7.33)$$

με  $s_0 = s_n$ . Χρησιμοποιώντας τα (7.33), (2.1), (2.2), (4.6) με  $v_0 = v_n$ , η χρονική παράγωγος της  $V$  μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n (s_i - s^*) (v_{i-1} - v_i) - c \sum_{i=1}^n (k - g(s_i)) (v_i - G(s_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (s_i - s^*) (G(s_{i-1}) - G(s_i)) + \sum_{i=1}^n (s_i - s^*) (v_{i-1} - G(s_{i-1})) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (s_i - s^*) (v_i - G(s_i)) - c \sum_{i=1}^n (k - g(s_i)) (v_i - G(s_i))^2 \end{aligned} \quad (7.34)$$

Παρατηρήστε ότι εφόσον  $(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \in \Omega$  προκύπτει από τις (5.3) και την (3.7) ότι  $s_i \in [a, L - (n-1)a]$  για  $i = 1, \dots, n$ . Χρησιμοποιώντας την (4.1), το γεγονός ότι  $v_0 = v_n$  και συμπληρώνοντας τα τετράγωνα στην (7.34), παίρνουμε



$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq \sum_{i=1}^n (s_i - s^*) (G(s_{i-1}) - G(s_i)) \\
&\quad + \frac{2}{c(k - g_{\max})} \sum_{i=1}^n (s_i - s^*)^2 + \frac{c(k - g_{\max})}{4} \sum_{i=1}^n (v_i - G(s_i))^2 \\
&\quad + \frac{c(k - g_{\max})}{4} \sum_{i=0}^{n-1} (v_i - G(s_i))^2 - c \sum_{i=1}^n (k - g(s_i)) (v_i - G(s_i))^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n (s_i - s^*) (G(s_{i-1}) - G(s_i)) \\
&\quad + \frac{2}{c(k - g_{\max})} \sum_{i=1}^n (s_i - s^*)^2 - \frac{c(k - g_{\max})}{2} \sum_{i=1}^n (v_i - G(s_i))^2
\end{aligned} \tag{7.35}$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας όρους στο (7.35) προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq p \sum_{i=1}^n (s_i - s^*) (s_{i-1} - s_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (s_i - s^*) (G(s_{i-1}) - p(s_{i-1} - s^*) - G(s_i) + p(s_i - s^*)) \\
&\quad + \frac{2}{c(k - g_{\max})} \sum_{i=1}^n (s_i - s^*)^2 - \frac{c(k - g_{\max})}{2} \sum_{i=1}^n (v_i - G(s_i))^2
\end{aligned} \tag{7.36}$$

Παρατηρούμε στη συνέχεια ότι χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\sum_{i=1}^n s_i = L$  και  $s_0 = s_n$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n (s_i - s^*) (s_{i-1} - s_i) = \sum_{i=1}^n s_i (s_{i-1} - s_i) - s^* \sum_{i=1}^n s_{i-1} + s^* \sum_{i=1}^n s_i \\
&= \sum_{i=1}^n s_i (s_{i-1} - s_i) - s^* L + s^* L = - \sum_{i=1}^n s_i (s_i - s_{i-1}) \\
&= - \sum_{i=1}^n (s_i - s_{i-1})^2 - \sum_{i=1}^n s_{i-1} (s_i - s_{i-1}) \\
&= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i - s_{i-1})^2 - \sum_{i=1}^n s_{i-1} (s_i - s_{i-1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i - s_{i-1})^2 \\
&= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i - s_{i-1})^2 - \sum_{i=1}^n s_{i-1} s_i + \sum_{i=1}^n s_{i-1}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_{i-1}^2 + \sum_{i=1}^n s_{i-1} s_i \\
&= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i - s_{i-1})^2
\end{aligned} \tag{7.37}$$

Ως εκ τούτου, από τις (7.36) και (7.37) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\frac{p}{2} \sum_{i=1}^n (s_i - s_{i-1})^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (s_i - s^*) \left( G(s_{i-1}) - p(s_{i-1} - s^*) - G(s_i) + p(s_i - s^*) \right) \\
&\quad + \frac{2}{c(k - g_{\max})} \sum_{i=1}^n (s_i - s^*)^2 - \frac{c(k - g_{\max})}{2} \sum_{i=1}^n (v_i - G(s_i))^2
\end{aligned} \tag{7.38}$$

Παρατηρήστε τώρα ότι λόγω της συνθήκης  $s_0 = s_n$  και την (7.31) ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\sum_{i=1}^n (s_i - s_{i-1})^2 \geq \mu_n \sum_{i=1}^n (s_i - s^*)^2 \tag{7.39}$$

Από τις (7.38), (7.39) και την ανισότητα (5.4) λαμβάνουμε την ακόλουθη εκτίμηση

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\frac{p}{2} \mu_n \sum_{i=1}^n (s_i - s^*)^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^n |s_i - s^*| \left| G(s_{i-1}) - v^* - p(s_{i-1} - s^*) \right| + \sum_{i=1}^n |s_i - s^*| \left| G(s_i) - v^* - p(s_i - s^*) \right| \\
&\quad + \frac{2}{c(k - g_{\max})} \sum_{i=1}^n (s_i - s^*)^2 - \frac{c(k - g_{\max})}{2} \sum_{i=1}^n (v_i - G(s_i))^2 \\
&\quad - \left( \frac{p}{2} \mu_n - M - \frac{2}{c(k - g_{\max})} \right) \sum_{i=1}^n (s_i - s^*)^2 \\
&\quad + M \sum_{i=1}^n |s_i - s^*| |s_{i-1} - s^*| - \frac{c(k - g_{\max})}{2} \sum_{i=1}^n (v_i - G(s_i))^2 \\
&\leq - \left( \frac{p}{2} \mu_n - 2M - \frac{2}{c(k - g_{\max})} \right) \sum_{i=1}^n (s_i - s^*)^2 - \frac{c(k - g_{\max})}{2} \sum_{i=1}^n (v_i - G(s_i))^2
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Δυνάμει των (7.40), (7.32) και (7.33) υπάρχει μια σταθερά  $\varphi > 0$  τέτοια ώστε

$$\dot{V} \leq -2\varphi V \quad (7.41)$$

Από την άλλη πλευρά, η ανισότητα (4.1) και οι ορισμοί (4.4), (4.5) υποδηλώνουν την ανισότητα  $|G(s) - v^*| \leq g_{\max} |s - s^*|$  για κάθε  $s \geq a$ . Κατά συνέπεια, παίρνουμε από τον ορισμό (7.33) ότι

$$V(s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n) \leq \left( \frac{1}{2} + c + c g_{\max}^2 \right) \left| (s_1 - s^*, \dots, s_n - s^*, v_1 - v^*, \dots, v_n - v^*) \right|^2 \quad (7.42)$$

Έστω ένα δοσμένο (αυθαίρετο) σημείο  $(s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0}) \in \Omega$ . Εφόσον το σύνολο  $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$  που ορίζεται από την (5.3), είναι θετικά αναλλοίωτο για το σύστημα (2.1), (2.2), (4.6) με  $v_0 = v_n$ , προκύπτει ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.1), (2.2), (4.6) με  $v_0 = v_n$ , αρχική συνθήκη  $(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) = (s_{1,0}, \dots, s_{n,0}, v_{1,0}, \dots, v_{n,0})$  έχει μία μοναδική λύση  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t))$  που ορίζεται για κάθε  $t \geq 0$  που ικανοποιεί ότι  $(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in \Omega$  για κάθε  $t \geq 0$ . Από τη σχέση (7.41), λαμβάνουμε ότι για κάθε  $t \geq 0$ :

$$V(s_1(t), \dots, s_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \leq \exp(-2\varphi t) V(s_1(0), \dots, s_n(0), v_1(0), \dots, v_n(0)) \quad (7.43)$$

Η ανισότητα (7.43) σε συνδυασμό με την ανισότητα (7.42) και τον ορισμό (7.33) δίνει την ακόλουθη εκτίμηση για κάθε  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (s_i(t) - s^*)^2 + c \sum_{i=1}^n (v_i(t) - G(s_i(t)))^2 \\ & \leq \exp(-2\varphi t) \left( 1 + 2c + 2c g_{\max}^2 \right) \left| (s_1(0) - s^*, \dots, s_n(0) - s^*, v_1(0) - v^*, \dots, v_n(0) - v^*) \right|^2 \end{aligned} \quad (7.44)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα  $|G(s) - v^*| \leq g_{\max} |s - s^*|$  για κάθε  $s \geq a$ , λαμβάνουμε από την (7.44) ότι για κάθε  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned}
& \left\| (s_1(t) - s^*, \dots, s_n(t) - s^*, v_1(t) - v^*, \dots, v_n(t) - v^*) \right\|^2 = \\
& = \sum_{i=1}^n (s_i(t) - s^*)^2 + \sum_{i=1}^n (v_i(t) - v^*)^2 \\
& \leq \sum_{i=1}^n (s_i(t) - s^*)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (v_i(t) - G(s_i(t)))^2 + 2 \sum_{i=1}^n (v^* - G(s_i(t)))^2 \\
& \leq 2 \sum_{i=1}^n (v_i(t) - G(s_i(t)))^2 + (1 + 2g_{\max}^2) \sum_{i=1}^n (s_i(t) - s^*)^2 \\
& \leq \left( \frac{2}{c} + 1 + 2g_{\max}^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n (s_i(t) - s^*)^2 + c \sum_{i=1}^n (v_i(t) - G(s_i(t)))^2 \right) \\
& \leq \exp(-2\varphi t) R^2 \left\| (s_1(0) - s^*, \dots, s_n(0) - s^*, v_1(0) - v^*, \dots, v_n(0) - v^*) \right\|^2
\end{aligned}$$

όπου  $R^2 := \left( \frac{2}{c} + 1 + 2g_{\max}^2 \right) (1 + 2c + 2cg_{\max}^2)$ . Η παραπάνω εκτίμηση συνεπάγεται την ακόλουθη ανισότητα για κάθε  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned}
& \left\| (s_1(t) - s^*, \dots, s_n(t) - s^*, v_1(t) - v^*, \dots, v_n(t) - v^*) \right\| \\
& \leq \exp(-\varphi t) R \left\| (s_1(0) - s^*, \dots, s_n(0) - s^*, v_1(0) - v^*, \dots, v_n(0) - v^*) \right\|
\end{aligned} \tag{7.45}$$

που αποδεικνύει άμεσα την ολική εκθετική ευστάθεια. Η απόδειξη είναι πλήρης.  $\triangleleft$

## 8. Τελικές Παρατηρήσεις

Η παρούσα εργασία πρότεινε έναν νέο μη γραμμικό adaptive cruise controller για διμοιρίες οχημάτων που λειτουργούν σε ανοιχτό δρόμο ή κυκλικό δρόμο. Ο προτεινόμενος ελεγκτής είναι μια μη γραμμική συνάρτηση της απόστασης μεταξύ των διαδοχικών οχημάτων και της ταχύτητάς τους. Προέκυψαν ορισμένες συνθήκες που εγγυώνται την ασφάλεια όσον αφορά την αποφυγή σύγκρουσης και τις περιορισμένες ταχύτητες του οχήματος, χαρακτηρίζοντας ρητά ένα σύνολο αποδεκτών αρχικών συνθηκών και το σύνολο των επιτρεπόμενων εισροών. Αποδεικνύεται ότι μια διμοιρία οχημάτων με αυτόν τον ελεγκτή είναι  $L_p$  string stable για  $p = 2$  και  $p = \infty$ , και όλα τα οχήματα θα συγκλίνουν στην επιθυμητή ταχύτητα/απόσταση από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση. Μελλοντικές εργασίες θα ασχοληθούν με την επίπτωση αισθητήρων και της καθυστερημένης ενεργοποίησής τους, καθώς και τις επιπτώσεις στην ευστάθεια, το string stability και την ασφάλεια των διμοιριών, βλέπε για παράδειγμα την εργασία [20]. Επίσης θα εξεταστούν οι επιπτώσεις της επικοινωνίας και της συνεργασίας μεταξύ των συστημάτων ACC, (βλέπε [6], [48]). Κλείνοντας την εργασία θα ήθελα να αναφέρω ότι οδηγός για την εκπόνηση της ήταν η εργασία των I. Karafyllis, D. Theodosis, and M. Papageorgiou, “Nonlinear Adaptive Cruise Control of Vehicular Platoons”, arXiv:2007.07054 [eess.SY].

## Βιβλιογραφία

- [1] A. Alam, A. Gattami, K. H. Johansson, C. J. Tomlin, “Guaranteeing Safety for Heavy Duty Vehicle Platooning: Safe Set Computations and Experimental Evaluations”, *Control Engineering Practice*, 24, 2014, 33-41.
- [2] J. M. Alongi and G. S. Nelson, *Recurrence and Topology*, American Mathematical Society, Providence, 2007.
- [3] L. Alvarez, R. Horowitz, “Safe Platooning in Automated Highway Systems Part I: Safety Regions Design”, *Vehicle System Dynamics*, 32, 1999, 23-55.
- [4] L. Alvarez, R. Horowitz, “Safe Platooning in Automated Highway Systems Part II: Velocity Tracking Controller”, *Vehicle System Dynamics*, 32, 1999, 57-84.
- [5] A. D. Ames, X. Xu, J. W. Grizzle, and P. Tabuada, “Control Barrier Function Based Quadratic Programs for Safety Critical Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62, 2017, 3861–3876.
- [6] S. Baldi, D. Liu, V. Jain and W. Yu, "Establishing Platoons of Bidirectional Cooperative Vehicles with Engine Limits and Uncertain Dynamics," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 22, 2021, 2679-2691.
- [7] B. Besselink and K. H. Johansson, “String Stability and a Delay-based Spacing Policy for Vehicle Platoons Subject to Disturbances”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62, 2017, 4376–4391.
- [8] N. P. Bhatia and G. P. Szegő, *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1970.
- [9] C. Canudas de Wit and B. Brogliato, “Stability Issues for Vehicle Platooning in Automated Highway Systems”, *Proceedings of IEEE International Conference on Control Applications*, 2, 1999, 1377-1382.
- [10] Fancher, P. and Bareket, Z., “Evaluating Headway Control Using Range Versus Range-Rate Relationships”, *Vehicle System Dynamics*, 23, 1994, 575-596.
- [11] S. Feng, Y. Zhang, S. E. Li, Z. Cao, H. X. Liu, and L. Li, “String Stability for Vehicular Platoon Control: Definitions and Analysis Methods”, *Annual Reviews in Control*, 47, 2019, 81–97.
- [12] A. Forsgren, P. E. Gill, and M. H. Wright, “Interior Methods for Nonlinear Optimization,” *SIAM Review*, 44, 2002, 525–597.
- [13] V. Giammarino, S. Baldi, P. Frasca and M. L. D. Monache, "Traffic Flow on a Ring with a Single Autonomous Vehicle: An Interconnected Stability Perspective," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 22, 2021, 4998-5008.
- [14] X. Guo, J. Wang, F. Liao and W. Xiao, "Adaptive Platoon Control for Nonlinear Vehicular Systems with Asymmetric Input Deadzone and Inter-Vehicular Spacing Constraints", *Proceedings of IEEE 56th Conference on Decision and Control (CDC)*, Melbourne, VIC, 2017, 393-398.
- [15] G. Gunter, D. Gloudemans, R. E. Stern, S. McQuade, R. Bhadani, M. Bunting, M. L. D. Monache, R. Lysecky, B. Seibold, J. Sprinkle, B. Piccoli, and D. B. Work, "Are Commercially Implemented Adaptive Cruise Control Systems String Stable?," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, doi: 10.1109/TITS.2020.3000682.

- [16] H. Hao and P. Barooah, "Stability and Robustness of Large Platoons of Vehicles with Double-Integrator Models and Nearest Neighbor Interaction", *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 23, 2013, 2097–2122.
- [17] C. R. He and G. Orosz, "Safety Guaranteed Connected Cruise Control", *21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, Maui, HI, 2018, 549-554.
- [18] J. Huang, Q. Huang, Y. Deng, and Y.-H. Chen, "Toward Robust Vehicle Platooning with Bounded Spacing Error," *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 36, 2017, 562–572.
- [19] P.A. Ioannou, and C.C. Chien, "Autonomous Intelligent Cruise Control", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 42, 1993, 657-672.
- [20] I. Karafyllis, D. Theodosis and M. Papageorgiou, "Analysis and Control of a Non-Local PDE Traffic Flow Model", *International Journal of Control*, 2020, DOI: 10.1080/00207179.2020.1808902
- [21] I. Karafyllis, D. Theodosis and M. Papageorgiou, "A Novel Nonlinear Adaptive Cruise Controller for Vehicular Platoons", *2021 European Control Conference (ECC)*, Rotterdam, The Netherlands, 2021, 1814-1821.
- [22] I. Karafyllis, D. Theodosis, and M. Papageorgiou, "Nonlinear Adaptive Cruise Control of Vehicular Platoons", arXiv:2007.07054 [eess.SY].
- [23] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, Prentice Hall, 2002.
- [24] M. E. Khatir and E. J. Davidson, "Decentralized Control of a Large Platoon of Vehicles Operating on a Plane with Steering Dynamics," *Proceedings of the 2005, American Control Conference*, 2005, 2159-2165,
- [25] M. E. Khatir and E. J. Davison, "Decentralized Control of a Large Platoon of Vehicles Using Non-Identical Controllers," *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, 2004, 2769-2776.
- [26] M.H. Lighthill, and G. B. Whitham, "On Kinematic Waves II: A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads", *Proceedings of the Royal Society A*, 229, 1955, 317–345.
- [27] J. Lunze, "Adaptive Cruise Control with Guaranteed Collision Avoidance", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 20, 2019, 1897-1907.
- [28] J. Monteil and G. Russo, "On the Design of Nonlinear Distributed Control Protocols for Platooning Systems", *IEEE Control Systems Letters*, 1, 2017, 140-145.
- [29] A. A. Peters, R. H. Middleton, O. Mason, "Cyclic Interconnection for Formation Control of 1-D Vehicle Strings", *European Journal of Control*, 27, 2016, 36-44.
- [30] J. Ploeg, N. van de Wouw, and H. Nijmeijer, " $L_p$  String Stability of Cascaded Systems: Application to Vehicle Platooning", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22, 2014, 786–793.
- [31] R. Rajamani, *Vehicle Dynamics and Control*. New York, NY, USA:Springer-Verlag, 2012.
- [32] P. I. Richards, "Shock Waves on the Highway", *Operations Research*, 4, 1956, 42–51.
- [33] J. A. Rogge and D. Aeyels, "Vehicle Platoons Through Ring Coupling", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53, 2008, 1370-1377.

- [34] K. Santhanakrishnan and R. Rajamani, "On Spacing Policies for Highway Vehicle Automation", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 4, 2003, 198–204.
- [35]. H. E. Sungu, M. Inoue and J. Imura, "Nonlinear Spacing Policy-based Vehicle Platoon Control for Local String Stability and Global Traffic Flow Stability", *Proceedings of 2015 European Control Conference (ECC)*, Linz, 2015, 3396-3401
- [36] D. Swaroop, J. Hedrick, C. C. Chien, and P. Ioannou, "A Comparison of Spacing and Headway Control Laws for Automatically Controlled Vehicles", *Vehicle System Dynamics*, 23, 1994, 597–625.
- [37] D. Swaroop, K.R. Rajagopal, "Intelligent Cruise Control Systems and Traffic Flow Stability", *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 7, 1999, 329-352.
- [38] D. Swaroop and J. K. Hedrick, "String Stability of Interconnected Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41, 1996, 349–357.
- [39] D. Swaroop and J. K. Hedrick, "Constant Spacing Strategies for Platooning in Automated Highway Systems", *Journal of Dynamical Systems, Measurement, and Control*, 121, 1999, 462–470.
- [40] P. Seiler, A. Pant, and K. Hedrick, "Disturbance Propagation in Vehicle Strings", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49, 2004, 1835–1842.
- [41] C. K. Verginis, C. P. Bechlioulis, D. V. Dimarogonas and K. J. Kyriakopoulos, "Robust Distributed Control Protocols for Large Vehicular Platoons with Prescribed Transient and Steady-State Performance", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26, 2018, 299-304.
- [42] J. Wang and R. Rajamani, "Should Adaptive Cruise-Control Systems be Designed to Maintain a Constant Time Gap Between Vehicles?", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 53, 2004, 1480-1490.
- [43] P. Wieland and F. Allgöwer, "Constructive Safety Using Control Barrier Functions", *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 2007, 462–467.
- [44] P. Wijnbergen, B. Besselink, "Existence of Decentralized Controllers for Vehicle Platoons: On the Role of Spacing Policies and Available Measurements", *Systems & Control Letters*, 145, 2020, 104796.
- [45] L. Xiao and F. Gao, "Practical String Stability of Platoon of Adaptive Cruise Control Vehicles", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 12, 2011, 1184–1194.
- [46] X. Xu, J. W. Grizzle, P. Tabuada and A. D. Ames, "Correctness Guarantees for the Composition of Lane Keeping and Adaptive Cruise Control", *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 15, 3, 2018, 1216-1229.
- [47] D. Yanakiev and I. Kanellakopoulos, "Nonlinear Spacing Policies for Automated Heavy-Duty Vehicles", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 47, 1998, 1365–1377.
- [48] Y. Zheng, S. E. Li, J. Wang, D. Cao, and K. Li, "Stability and Scalability of Homogeneous Vehicular Platoon: Study on the Influence of Information Flow Topologies", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 17, 2016, 14–26.
- [49] J. Zhou and H. Peng, "Range Policy of Adaptive Cruise Control Vehicles for Improved Flow Stability and String Stability", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 6, 2005, 229-237.
- [50] Ιάσων Καραφύλλης, Σημειώσεις για το μάθημα «Δυναμικά Συστήματα» ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2020.