Εγγύτητα Τελεστών και Εφαρμογές

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Σουσούνης Δημήτριος
Επιβλέπων Καθηγητής Γιαννακάκης Νικόλαος

Σεπτέμβριος 2022

Εισαγωγή

Πολύ συχνά στα μαθηματικά καλούμαστε να απαντήσουμε στο ερώτημα αν μια εξίσωση $Ax = b$ όπου x ανήκει σε έναν τυχόν χώρο X, b ανήκει σε έναν χώρο Banach $\mathcal{B}$ και A τελεστής από τον X στον $\mathcal{B}$, έχει μοναδική λύση. Συνήθεις τρόποι επίλυσης αυτού του προβλήματος είναι η απόδειξη της ύπαρξης μιας συσχέτισης του τελεστή A με έναν αντιστρέψιμο (invertible) τελεστή B ή εναλλακτικά η εκτίμηση της λύσης μέσω κάποιας ανισότητας και στην συνέχεια η απόδειξη της ύπαρξής της μέσω θεωρημάτων συνέχειας ή θεωρημάτων σταθερού σημείου. Η εύρεση τέτοιων εκτιμήσεων δεν αποτελεί απλή διαδικασία και ελλείψει θεωρίας και μεθοδολογιας συχνά απαιτείται επινοητικότητα.

Η συμβολή του S. Campanato στο παραπάνω πρόβλημα ήταν καταλυτική, καθώς η θεωρία εγγύτητας των τελεστών που ανέπτυξε, εξασφαλίζει οτι ένας τελεστής κατέχει τα 'χρήσιμα' χαρακτηριστικά που έχει ένας τελεστής στον οποίο είναι εγγύς, όπως το να είναι αντιστρέψιμος ([7],[6]). Έτσι, κατ' επέκταση, εγγυάται την ύπαρξη μοναδικής λυσης. Η θεωρία εγγύτητας έχει μεγάλη απήχηση στην επιστημονική κοινότητα, καθώς προσέλκυσε πληθώρα ερευνητών και αποτέλεσε αφορμή για την συγγραφή αντίστοιχης πληθώρας άρθρων ([3],[4],[11],[16],[20],[19],[22]).

Η εκπόνηση της παρούσας εργασίας αποσκοπεί στην παρουσίαση βασικών ιδεών και αποτελεσμάτων της θεωρίας του Campanato, καθώς και στην εφαρμογή της στην απόδειξη της επιλυσιμότητας μη γραμμικών ελλειπτικών συστημάτων.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον κύριο Γιαννακάκη Νικόλαο Αναπλ. Καθηγητή για την πολύτιμη βοήθεια του, χωρίς την οποία δεν θα ήταν δυνατή η ολοκλήρωση αυτής της εργασίας, τον κύριο Β. Καλπακίδη Καθηγητή, τον κύριο Γ. Σμυρλή Αναπλ. Καθηγητή, τον αδερφό μου Λεωνίδα για τη συνεισφορά του στην ορθογραφική και συντακτική διάρθρωση του κειμένου και τους γονείς μου, για την απύθμενη υπομονή και υποστήριξη τους.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Θεωρία Εγγύτητας Τελεστών

$$\sqrt{a} \tag{1.1}$$

Έστω ότι $\mathcal{B}$ είναι ένα τυχαίο σύνολο, $\mathcal{B}_1$ είναι ένας πραγματικός χώρος Banach με νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_1}$ και A,B είναι τελεστές απο το $\mathcal{B}$ στο $\mathcal{B}_1$.

Ορισμός 1.1 Ένας τελεστής A ειναι εγγύς στον B, αν και μόνο αν υπάρχουν δύο θετικές σταθερές K $\in (0,1)$ και α τέτοιες ώστε για κάθε $u, v \in \mathcal{B}$ ισχύει

$$\|B(u) - B(v) - \alpha(A(u) - A(v))\|_{\mathcal{B}_1} \leq K\|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} \tag{1.2}$$

Κεντρικό θεώρημα όσον αφορά τις ιδιότητες εγγύτητας τελεστών είναι το ακόλουθο

Θεώρημα 1.2 Ἑνας τελεστής A : $\mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$ είναι ένα προς ένα ή/και επί αν και μόνο αν είναι εγγύς σε έναν τελεστή B : $\mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$, ο οποίος είναι ένα προς ένα ή/και επί αντίστοιχα.

Για την απόδειξή του θα χρειαστούν τα ακόλουθα λήμματα

Λήμμα 1.3 Αν B : $\mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$ είναι ένας ένα προς ένα τελεστής, τότε ο χώρος $\{\mathcal{B}, d_{\mathcal{B}}\}$ με την εξής μετρική $d_{\mathcal{B}}(u,v) = \|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1}$, είναι ένας μετρικός χώρος. Πράγματι

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{B}}(u,v) &= \|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} \geq 0 \\
d_{\mathcal{B}}(u,v) &= \|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} = 0 \Rightarrow B(u) - B(v) = 0 \Rightarrow u = v \\
d_{\mathcal{B}}(u,v) &= \|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} = \|B(v) - B(u)\|_{\mathcal{B}_1} = d_{\mathcal{B}}(v,u) \\
d_{\mathcal{B}}(u,v) &= \|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} \leq \|B(u) - B(w)\|_{\mathcal{B}_1} + \|B(w) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} \\
&= d_{\mathcal{B}}(u,w) + d_{\mathcal{B}}(w,v)
\end{aligned}$$

Λήμμα 1.4 Αν ο τελεστής B : $\mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$ είναι ένα προς ένα και επί, τότε ο $\{\mathcal{B}, d_{\mathcal{B}}\}$ είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος.

Απόδειξη: Έστω ότι $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία Cauchy στον $\{\mathcal{B}, d_{\mathcal{B}}\}$, δηλαδή $d_{\mathcal{B}}(u_n, u_m) = \|B(u_n) - B(u_m)\|_{\mathcal{B}_1} \to 0$, άρα και η $\{B(u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ ειναι Cauchy στον $\mathcal{B}_1$.

Αφου ο $\mathcal{B}_1$ είναι χώρος Banach, η ακολουθία $\{B(u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει, δηλαδή υπάρχει $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_1$ τέτοιο ώστε $\|B(u_k) - \mathcal{U}\|_{\mathcal{B}_1} \to 0$ καθώς $k \to +\infty$. Επειδή ο B είναι ένα προς ένα και επί, υπάρχει $u = B^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{B}$. Συνεπώς, έχουμε $d_{\mathcal{B}}(u_k, u) = \|B(u_k) - \mathcal{U}\|_{\mathcal{B}_1} \to 0$ καθώς $k \to +\infty$, δηλαδή η ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει στον χώρο $\{\mathcal{B}, d_{\mathcal{B}}\}$, άρα ο $\{\mathcal{B}, d_{\mathcal{B}}\}$ ειναι πλήρης. $\square$

Απόδειξη θεωρήματος: Για το αναγκαίο μέρος αρκεί να δείξουμε ότι αν ένας τελεστής έχει τις επιθυμητές ιδιότητες τότε είναι εγγύς σε κάποιον άλλο με τις ίδιες ιδιότητες, προκειμένου στον εαυτό του. Πράγματι,

$$\|A(u) - A(v) - \alpha(A(u) - A(v))\|_{\mathcal{B}_1} = |1 - \alpha| \|A(u) - A(v)\|_{\mathcal{B}_1}$$

που ικανοποιεί την (1.2) για $\alpha \in (0, 2)$ και $K = |1 - \alpha|$. Για το ικανό μέρος θα χρειαστεί να εξετάσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Έστω πως ο τελεστής B είναι ένα προς ένα. Αφού $K \in (0, 1)$ τότε από την (1.2) θα συνεπάγεται

$$B(u) - B(v) = 0 \Rightarrow \| - \alpha(A(u) - A(v))\|_{\mathcal{B}_1} = 0 \Rightarrow \|A(u) - A(v)\|_{\mathcal{B}_1} = 0 \\ \Rightarrow A(u) - A(v) = 0$$

  για κάθε $u, v \in \mathcal{B}$. Άρα και ο τελεστής A είναι ένα προς ένα.

- Έστω πως ο τελεστής B είναι ένα προς ένα και επί. Για τυχόν $f \in \mathcal{B}_1$, συνεπάγεται ότι η εξίσωση $A(u) = f,\ u \in \mathcal{B}$ είναι ισοδύναμη με την

$$B(u) = B(u) - \alpha A(u) + \alpha f,\ u \in \mathcal{B}.$$

  Όμως $B(u) - \alpha A(u) + \alpha f \in \mathcal{B}_1$ για κάθε $u \in \mathcal{B}$. Άρα αφού ο B είναι ένα προς ένα και επί για κάθε $u \in \mathcal{B}$, θα υπάρχει ένα μοναδικό $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $B(\mathcal{U}) = B(u) - \alpha A(u) + \alpha f$. Κατασκευάσαμε έτσι έναν τελεστή $\mathcal{F} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{F}(u) = \mathcal{U}$. Έστω $u, v \in \mathcal{B}$ για τα οποία ισχύει $\mathcal{U} = \mathcal{F}(u), \mathcal{V} = \mathcal{F}(v)$. Τότε

$$d_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(u), \mathcal{F}(v)) = d_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \|B(\mathcal{U}) - B(\mathcal{V})\|_{\mathcal{B}_1} = \\ \|B(u) - B(v) - \alpha(A(u) - A(v))\|_{\mathcal{B}_1} \leq K\|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} = K d_{\mathcal{B}}(u, v)$$

  και εφόσον $K \in (0, 1)$, ο τελεστής $\mathcal{F}$ ειναι συστολή και όπως δείξαμε παραπάνω αφού ο $\{\mathcal{B}, d_{\mathcal{B}}\}$ ειναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach η εξίσωση $\mathcal{F}(u) = u$ εχει μοναδική λύση, το οποίο ισχύει και για την εξίσωση $B(u) = B(u) - \alpha A(u) + \alpha f$, άρα και για την $A(u) = f$. Άρα ο A, είναι ένα προς ένα και επί.

- Έστω ότι ο τελεστής B ειναι επί. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ στον $\mathcal{B}$ ως εξής

$$u \mathcal{R}_{\mathcal{B}} v \Leftrightarrow B(u) = B(v)$$

  καθώς και την κλάση ισοδυναμίας $\{u\}_{\mathcal{B}}$ και τον χώρο πηλίκο $X = \mathcal{B}/\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Αν θέσουμε τελεστές A^*, B^* τέτοιους ώστε $A^*, B^* : X \to \mathcal{B}_1$ με

$$A^*(\{u\}_{\mathcal{B}}) = A(u)\ ,\ B^*(\{u\}_{\mathcal{B}}) = B(u),$$

τότε παρατηρούμε ότι ο A^* είναι εγγύς του B^* με σταθερές α και K. Επιπλέον

$$B^*(\{u\}_{\mathcal{B}}) = B^*(\{v\}_{\mathcal{B}}) \Leftrightarrow B(u) = B(v) \Leftrightarrow u\mathcal{R}_{\mathcal{B}}v$$

δηλαδή ο B^* είναι ένα προς ένα. Επίσης αφού ο B είναι επί, ισχύει οτι για κάθε f στο $\mathcal{B}_1$ υπάρχει τουλάχιστον ένα u στο $\mathcal{B}$ τέτοιο ώστε

$$f = B(u) = B^*(\{u\}_{\mathcal{B}}).$$

Επομένως ο B^* είναι ένα προς ένα και επί και όπως αποδείξαμε παραπάνω τότε και ο A^* θα είναι ένα προς ένα και επί, δηλαδή για κάθε $f \in \mathcal{B}_1$ υπάρχει ένα μοναδικό u στο $\mathcal{B}$ τέτοιο ώστε

$$f = A^*(\{u\}_{\mathcal{B}}) = A(u).$$

Συνεπώς, ο A είναι επί. □

Πρόταση 1.5 Αν ο τελεστής $B : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$ είναι ένα προς ένα και επί και ο A ειναι εγγύς στον B, τότε για κάθε $f \in \mathcal{B}_1$ υπάρχει ένα μοναδικό $u \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $A(u) = f$. Επίσης ισχύει

$$\|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} \leq \frac{\alpha}{1-K}\|f - A(v)\|_{\mathcal{B}_1}. \tag{1.3}$$

Απόδειξη: Εφόσον ο A ειναι εγγύς του B και ο B είναι ένα προς ένα και επί, τότε από το θεώρημα 1.2 θα είναι και ο A ένα προς ένα και επί, δηλαδή για κάθε $f \in \mathcal{B}_1$ υπάρχει ένα μοναδικό $u \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $A(u) = f$. Κάνοντας χρήση της σχέσης (1.2) λαμβάνουμε

$$\|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} \leq \|B(u) - B(v) - \alpha(A(u) - A(v))\|_{\mathcal{B}_1} + \alpha\|A(u) - A(v)\|_{\mathcal{B}_1}$$

$$\leq K\|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} + \alpha\|A(u) - A(v)\|_{\mathcal{B}_1} \Leftrightarrow$$

$$\|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} - K\|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} \leq \alpha\|A(u) - A(v)\|_{\mathcal{B}_1} \Leftrightarrow$$

$$\|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}_1} \leq \frac{\alpha}{1-K}\|A(u) - A(v)\|_{\mathcal{B}_1}. \square$$

Πρόταση 1.6 Έστω A και B δύο τελεστές από το $\mathcal{B}$ στο $\mathcal{B}_1$ όπου ο A είναι εγγύς στον B και $KerA \cap KerB \neq \emptyset$. Τότε $KerA = KerB$.

Απόδειξη: Για ένα τυχόν $v \in KerA \cap KerB$ ισχύει $A(v) = B(v) = 0$, άρα από την (1.2) συνεπάγεται

$$\|B(u) - aA(u)\|_{\mathcal{B}_1} \leq K\|B(u)\|_{\mathcal{B}_1} \ \forall u \in \mathcal{B}$$

Από το παραπάνω, αν $u \in KerB \Leftrightarrow B(u) = 0$ τότε $0 \leq \| - aA(u)\|_{\mathcal{B}_1} \leq 0 \Leftrightarrow \|A(u)\|_{\mathcal{B}_1} = 0 \Leftrightarrow A(u) = 0 \Leftrightarrow u \in KerA$. Άρα $KerB \subset KerA$.
Αν $u \in KerA \Leftrightarrow A(u) = 0$, τότε

$$0 \leq \|B(u)\|_{\mathcal{B}_1} \leq K\|B(u)\|_{\mathcal{B}_1} \Leftrightarrow 0 \leq (1-K)\|B(u)\|_{\mathcal{B}_1} \leq 0 \Leftrightarrow \|B(u)\|_{\mathcal{B}_1} = 0$$
$$\Leftrightarrow B(u) = 0,$$

αφού $K \in (0, 1) \Leftrightarrow u \in KerB$. Άρα, $KerA \subset KerB$.
Συμπερασματικά, καθώς ισχύει $KerB \subset KerA$ και $KerA \subset KerB$, τότε $KerA = KerB$. □

1.1 Εγγύτητα Τελεστών σε χώρους Hilbert

Στην ειδική περίπτωση όπου ο χώρος $\mathcal{B}_1 = \mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert, ακολουθούν κάποιες συνθήκες που είναι ισοδύναμες με την εγγύτητα.

Ορισμός 1.7 Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert. Ο τελεστής A λέγεται μονότονος ως προς τον B αν

$$(A(u) - A(v)|B(u) - B(v))_{\mathcal{H}} \geq 0 \; \forall \, u, v \in \mathcal{B}$$

όπου $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{H}$. Αν υπάρχουν θετικές σταθερές M και μ τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} \|A(u) - A(v)\|_{\mathcal{H}} \leq M\|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{H}} \\ (A(u) - A(v)|B(u) - B(v))_{\mathcal{H}} \geq \mu\|B(u) - B(v)\|^2_{\mathcal{H}} \end{cases} \tag{1.4}$$

για κάθε $u, v \in \mathcal{B}$, τότε ο A είναι αυστηρά μονότονος ως προς τον B.

Σημείωση: Αν ο τελεστής B είναι ο ταυτοτικός τότε ο A είναι μονότονος και Lipschitz.

Πρόταση 1.8 Αν ο τελεστής $A : \mathcal{B} \to \mathcal{H}$ είναι εγγύς στον $B : \mathcal{B} \to \mathcal{H}$, τότε είναι και αυστηρά μονότονος ως προς αυτόν και αντιστρόφως.

Απόδειξη: Δεδομένου ότι ισχύουν οι (1.4), πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εκ των (1.4) με α και υψώνοντας τη στο τετράγωνο, προκύπτει

$$\alpha^2\|A(u) - A(v)\|^2_{\mathcal{H}} \leq \alpha^2 M^2\|B(u) - B(v)\|^2_{\mathcal{H}}$$

Πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη εκ των (1.4) με -2α και έπειτα προσθέτοντας σε κάθε μέλος $\|B(u) - B(v)\|^2_{\mathcal{H}}$, προκύπτει

$$-2\alpha(A(u) - A(v)|B(u) - B(v))_{\mathcal{H}} + \|B(u) - B(v)\|^2_{\mathcal{H}} \leq$$

$$-2\alpha\mu\|B(u) - B(v)\|^2_{\mathcal{H}} + \|B(u) - B(v)\|^2_{\mathcal{H}}$$

$$\Rightarrow -2\alpha(A(u) - A(v)|B(u) - B(v))_{\mathcal{H}} + \|B(u) - B(v)\|^2_{\mathcal{H}} \leq (1 - 2\alpha\mu)\|B(u) - B(v)\|^2_{\mathcal{H}}$$

Προσθέτοντας τις δύο προκύπτουσες ανισότητες κατά μέλη έχουμε

$$\alpha^2\|A(u) - A(v)\|^2_{\mathcal{H}} - 2\alpha(A(u) - A(v)|B(u) - B(v))_{\mathcal{H}} + \|B(u) - B(v)\|^2_{\mathcal{H}}$$

$$\leq (1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 M^2)\|B(u) - B(v)\|^2_{\mathcal{H}} \Rightarrow$$

$$\|B(u) - B(v) - \alpha(A(u) - A(v))\|^2_{\mathcal{H}} \leq (1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 M^2)\|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{H}}?^2$$

Αν $\alpha = \frac{\mu}{M^2} > 0$ τότε ο όρος $(1 - 2\alpha\mu + \alpha^2 M^2)$ παίρνει την μορφή $0 < 1 - \frac{\mu^2}{M^2} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{\mu^2}{M^2} < 1$, άρα για $M > \mu$ οι τελεστές A, B ειναι εγγείς.

Αντιστρόφως, αν οι τελεστές A, B είναι εγγείς

$$\begin{aligned}a\|A(u)-A(v)\|_{\mathcal{H}} =&\|B(u)-B(v)-a(A(u)-A(v))-B(u)+B(v)\|_{\mathcal{H}}\\ \leq&\|B(u)-B(v)-a(A(u)-A(v))\|_{\mathcal{H}}+\|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}\\ \leq&K\|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}+\|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}=(K+1)\|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|A(u)-A(v)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{K+1}{a}\|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}$$

όπου προφανώς για $a, K > 0$ ισχύει $\frac{K+1}{a} > 0$. Επομένως, επαληθεύτηκε η πρώτη ανισότητα εκ των (1.4).

$$\|B(u)-B(v)-a(A(u)-A(v))\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K^2\|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}^2 \Rightarrow$$

$$\|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}^2+a^2\|A(u)-A(v)\|_{\mathcal{H}}^2-2a(A(u)-A(v)|B(u)-B(v))_{\mathcal{H}}$$

$$\leq K^2\|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}^2$$

$$\Rightarrow \|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}^2-2a(A(u)-A(v)|B(u)-B(v))_{\mathcal{H}} \leq K^2\|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}^2$$

$$\Rightarrow \frac{1-K^2}{2a}\|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq (A(u)-A(v)|B(u)-B(v))_{\mathcal{H}}$$

και επειδή $0 < K < 1$ θα ισχύει $\frac{1-K^2}{2a} > 0$, άρα επαληθεύεται και η δεύτερη εκ των (1.4). □

Θεώρημα 1.9 Έστω A, B και C τελεστές από τον χώρο $\mathcal{B}$ στον χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Έστω πως ο A είναι εγγύς στον B με σταθερές α και K και ότι ο C είναι μονότονος σε σχέση με τον B. Τότε ο τελεστής $A+C$ είναι εγγύς στον $B+\alpha C$ με σταθερές α και K.

Απόδειξη: Για κάθε $u, v \in \mathcal{B}$, επειδή ο B είναι εγγύς στον A ισχύει

$$\|B(u)+\alpha C(u)-B(v)-\alpha C(v)-\alpha(A(u)+C(u)-A(v)-C(v))\|_{\mathcal{H}}=$$

$$\|B(u)-B(v)-\alpha(A(u)-A(v))\|_{\mathcal{H}} \leq K\|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}$$

Επίσης, λόγω της δεύτερης ανισότητας εκ των (1.4), το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικό άρα συνεπάγεται

$$\|B(u)+\alpha C(u)-B(v)-\alpha C(v)\|_{\mathcal{H}}^2=\|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}^2+\alpha^2\|C(u)-C(v)\|_{\mathcal{H}}^2+$$

$$2\alpha(B(u)-B(v)|C(u)-C(v))_{\mathcal{H}} \Rightarrow$$

$$\|B(u)+\alpha C(u)-B(v)-\alpha C(v)\|_{\mathcal{H}} \geq \|B(u)-B(v)\|_{\mathcal{H}}^2$$

τότε από τις δύο ανισότητες προκύπτει άμεσα

$$\|B(u)+\alpha C(u)-B(v)-\alpha C(v)-\alpha(A(u)+C(u)-A(v)-C(v))\|_{\mathcal{H}}$$

$$\leq K\|B(u)+\alpha C(u)-B(v)-\alpha C(v)\|_{\mathcal{H}}. \qquad \square$$

Πρόταση 1.10 Με την προυπόθεση ότι ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος 1.9, το πρόβλημα $A(u) + C(u) = f$ έχει μοναδική λύση για κάθε $f \in \mathcal{H}$ αν και μόνο αν το πρόβλημα $B(u) + \alpha C(u) = f$ έχει μοναδική λύση. Επιπλέον, αν τα σύνολα των λύσεων των δύο προβλημάτων έχουν ένα κοινό στοιχείο και $f = 0$, τότε οι λύσεις συμπίπτουν.

Απόδειξη: Αν το πρόβλημα $B(u)+\alpha C(u) = f$ έχει μοναδική λύση τότε ο τελεστής $B + \alpha C$ είναι ένα προς ένα και επί και αφού ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος 1.9, ο τελεστής $B + \alpha C$ ειναι εγγύς στον $A + C$. Άρα και ο $A + C$ θα είναι ένα προς ένα και επί, δηλαδή το πρόβλημα $A(u) + C(u) = f$ έχει μοναδική λύση.

Αν υπάρχει $v \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $A(v) + C(v) = 0$ και $B(v) + \alpha C(v) = 0$, τότε $Ker(A+C) \cap Ker(B+\alpha C) \neq \emptyset$. Άρα άπο την πρόταση 1.6 $Ker(A+C) = Ker(B+\alpha C)$, δηλαδή οι λύσεις συμπίπτουν. □

Ορισμός 1.11 Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ λέγεται ιδιοτιμή του A ως προς τον C αν

$$Ker(A - \lambda C) \neq \{0\}$$

Από το θεώρημα 1.9, παρατηρούμε ότι αν ο τελεστής A είναι εγγύς στον B με σταθερές a και K και αν ο τελεστής $-\lambda C$ είναι μονότονος ως προς τον τελεστή B, τότε ο τελεστής $A - \lambda C$ είναι εγγύς στον $B - a\lambda C$. Αν επιπλέον το πρόβλημα $B(u) - a\lambda C(u) = 0$ έχει μοναδική λύση, τότε και το $A(u) - \lambda C(u) = 0$ έχει μοναδική λύση και ισχύει $Ker(A - \lambda C) = Ker(B - a\lambda C)$, δηλαδή το λ είναι ιδιοτιμή του A ως προς τον C αν και μόνο αν λ είναι ιδιοτιμή του B ως προς τον C.

Κεφάλαιο 2

Η συνθήκη του Cordes

Ο Campanato εμπνεύστηκε την θεωρεία εγγύτητας μελετώντας την συνθήκη του Cordes. Πράγματι, οι αποδείξεις των ακόλουθων θεωρημάτων φέρουν κοινά στοιχεία με την απόδειξη του θεωρήματος 1.2.

Έστω τελεστής $\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)D_{ij}$ τέτοιος ώστε οι ιδιοτιμές $\lambda_i(x)$ του πίνακα $\{a^{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ ικανοποιούν $0 < essinf_{x\in\Omega} min_i \lambda_i(x)$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) = 1$ και

$$\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\frac{1}{n-1} < \lambda < \frac{1}{n}. \tag{2.1}$$

Παρατηρούμε ότι αφού $\lambda \leq \lambda_i(x)$ σχεδόν παντού στο Ω και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) = 1$ τότε

$$\lambda \leq \lambda_i(x) = 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j(x) \leq 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda = 1 - (n-1)\lambda$$

Επίσης ισχύει

$$esssup_{x\in\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(x) : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) = 1, \lambda_i \geq \lambda, i = 1, ..., n\Big\} = (n-1)\lambda^2 + (1-(n-1)\lambda)^2 \tag{2.2}$$

Πράγματι το παραπάνω supremum συμπίπτει με

$$\begin{aligned} & max\Big\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 : \sum_{i=1}^{n} x_i, x_i \geq \lambda, i = 1, ..., n\Big\} \\ = & max\Big\{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)^2 : \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq 1 - \lambda, x_i \geq \lambda, i = 1, ..., n-1\Big\} \\ & = (n-1)\lambda^2 + (1-(n-1)\lambda)^2 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση $f(x) = (n-1)x^2 + (1-(n-1)x)^2$ παρατηρείται ότι

$f'(x) = 2(n-1)x + 2(1-(n-1)x(-(n-1)) = 2nx - 2x + 2(1 - nx + x)(1-n) = 2nx - 2x + 2 - 2n - 2nx + 2n^2x + 2x - 2nx = 2(1-n) - 2nx(1-n) = 2(1-nx)(1-n) < 0$

για κάθε $\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n-1} < x < \frac{1}{n}$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα και το μέγιστο της είναι στο $\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n-1}$, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(x) \le (n-1)\lambda^2 + (1-(n-1)\lambda)^2 < (n-1)\Big((1-\frac{2}{n})\frac{1}{n-1}\Big)^2 +$$
$$\bigg(1-(n-1)\Big((1-\frac{2}{n})\frac{1}{n-1}\Big)\bigg)^2 = \Big(\frac{n-2}{n}\Big)^2\frac{1}{n-1} + \frac{4}{n^2} = \frac{n^2-4n+4+4n-4}{n^2(n-1)} = \frac{1}{n-1}$$

Άρα υπάρχει θετικός αριθμός $\varepsilon < 1$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(x) \le \frac{1}{n-1+\varepsilon} \tag{2.3}$$

Αν η παραπάνω ανισότητα ισχύει

$$0 < c = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(x) \le \frac{1}{n-1+\varepsilon} \Leftrightarrow 0 < nc-c+\varepsilon c \le 1 \Leftrightarrow 1-n < \varepsilon \le 1+\frac{1}{c}-n < 1+\frac{1}{c}$$

Όμως, ισχύει $1-n<0$ και $1<1+\frac{1}{c}$ άρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να επιλεχθεί $\varepsilon\in(0,1)$.

Η ανισότητα (2.3) είναι μια ειδική μορφή της Cordes condition ([9],[10]). Η γενική της μορφή για έναν τυχόν τελεστή $\mathcal{L}\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)D_{ij}$ που ικανοποιεί την συνθήκη

$$a^{ij}\in L^\infty(\Omega),\ \sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2\ \sigma.\pi.\ x\in\Omega,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

είναι

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{n}\alpha^{ij}(x)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha^{ii}(x)\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2} \le \frac{1}{n-1+\varepsilon} \tag{2.5}$$

Παρατηρείται ότι αν ισχύει $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)=1$, η (2.5) μετατρέπεται στην (2.3).

Με την βοήθεια της συνθήκης του Cordes αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x)\in L^2(\Omega)\ \sigma.\pi.\ \Omega \\ u\in W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega), \end{cases} \tag{2.6}$$

έχει μοναδική λύση για κάθε $f\in L^2(\Omega)$ και όπου $W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)$ ορίζουμε τον χώρο

$$W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)\equiv W^{2,2}(\Omega)\cap W^{1,2}_0(\Omega)$$

με νόρμα

$$\|u\|_{W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)} = \left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}u|^2dx\right)^{1/2}.$$

Θεώρημα 2.1 Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο και κυρτό σύνολο κλάσης C^2 και έστω πως οι (2.4) και (2.5) ισχύουν. Τότε υπάρχει μοναδική λύση για το πρόβλημα (2.6) και ισχύει

$$\|u\|_{W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)} \leq \frac{esssup_{x\in\Omega}\alpha(x)}{1-\sqrt{1-\varepsilon}}\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.7}$$

όπου $\alpha(x) = \sum_{i=1}^n a^{ii}(x)/\sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x))^2$.

Απόδειξη: Η ύπαρξη μοναδικής λύσης του (2.6) ισοδυναμεί με την ύπαρξη $u \in W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)$ τέτοιου ώστε

$$\Delta u = \alpha f + \Delta u - \alpha \mathcal{L} u \tag{2.8}$$

Έστω τελεστής $T : W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega) \to W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)$ τέτοιος ώστε $U = Tw$, $w \in W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)$, όπου U είναι η μοναδική λύση του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Poisson

$$\Delta U = \alpha f + \Delta w - \alpha \mathcal{L} w \in L^2(\Omega)\ ,\ U \in W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega).$$

Το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική λύση όπως αναφέρεται και στην σχετική βιβλιογραφία ([13],[17]). Επειδή οι χώροι Sobolev είναι πλήρεις, τότε, αν ο τελεστής T είναι συστολή, από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach και από τον τρόπο που ορίσαμε τον T, το σταθερό σημείο θα είναι και μοναδική λύση του (2.8). Έστω $w_1, w_2 \in W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)$, τότε από το λήμμα Miranda-Talenti([2]) και την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει

$$\begin{aligned}
\|Tw_1 - Tw_2\|^2_{W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)} &= \|U_1 - U_2\|^2_{W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)} \leq \|\Delta(U_1 - U_2)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \|\Delta(w_1 - w_2) - \alpha\mathcal{L}(w_1 - w_2)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega \Big|\sum_{i,j=1}^n (\delta^{ij} - \alpha a^{ij}) D_{ij}(w_1 - w_2)\Big|^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n (\delta^{ij} - \alpha a^{ij})^2\Big) \Big(\sum_{i,j=1}^n (D_{ij}(w_1 - w_2))^2\Big) dx.
\end{aligned}$$

Δεδομένου όμως της Cordes condition, προκύπτει

$$\sum_{i,j=1}^n |\delta^{ij} - \alpha a^{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^n \big((\delta^{ij})^2 - 2\alpha\delta^{ij}a^{ij} + \alpha^2 (a^{ij})^2\big)$$

$$n - 2\alpha \sum_{i=1}^n a^{ii} + \alpha^2 \sum_{i,j=1}^n (a^{ij})^2 = n - 2\frac{\big(\sum_{i=1}^n a^{ii}(x)\big)^2}{\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)^2} + \frac{\big(\sum_{i=1}^n a^{ii}(x)\big)^2}{\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)^2}$$

$$n - \frac{\big(\sum_{i=1}^n a^{ii}(x)\big)^2}{\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)^2} \leq 1 - \varepsilon$$

άρα τελικά

$$\|Tw_1 - Tw_2\|^2_{W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)} \leq (1-\varepsilon)\|w_1 - w_2\|^2_{W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)}.$$

Εφόσον $1 - \varepsilon < 1$, ο τελεστής T είναι συστολή, άρα το (2.6) εχει μοναδική λύση. Η (2.7) προκύπτει εύκολα αν αντικατασταθεί στο δεξί μέλος της ανισότητας Miranda-

Talenti ο τελεστής Laplace με τον ισοδύναμο του από την (2.8)

$$\|u\|_{W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} = \|\alpha f + \Delta u - \alpha \mathcal{L} u\|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\alpha \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u - \alpha \mathcal{L} u\|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$esssup_{x\in\Omega}\alpha \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1-\varepsilon}\|u\|_{W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)} \Leftrightarrow$$

$$\|u\|_{W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)} \leq \frac{esssup_{x\in\Omega}\alpha(x)}{1-\sqrt{1-\varepsilon}}\|f\|_{L^2(\Omega)} \qquad \square$$

2.1 Γεωμετρική ερμηνία της συνθήκης του Cordes

Υποδηλώνοντας με α την γωνία μεταξύ του μοναδιαίου διανύσματος (1,...,1) παραγόμενο απο τις ιδιοτιμές του ταυτοτικού πίνακα και του διανύσματος $(\lambda_1(x), ..., \lambda_n(x))$ παραγόμενο απο τις ιδιοτιμές του πίνακα $\{a^{ij}\}$, η συνθήκη του Cordes (2.3) επιστρέφει

$$cos\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(x)}{\sqrt{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2(x)}} \geq \frac{\sqrt{n-1+\varepsilon}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1-\frac{1-\varepsilon}{n}}.$$

Άρα, αν θέσουμε

$$a_0 = arccos\sqrt{1-\frac{1-\varepsilon}{n}},\ a_0 \in [0, \pi/4]$$

η συνθήκη του Cordes (2.5) σημαίνει ότι $\alpha \leq \alpha_0$. Με άλλα λόγια, η συνθήκη του Cordes γεωμετρικά σημαίνει ότι το διάνυσμα n διάστασης παραγόμενο από τις ιδιοτιμές του πίνακα $\{a^{ij}\}$ βρίσκεται εντός του κώνου Γ_{α_0} με άξονα το διάνυσμα (1,..,1) και γωνία κορυφής α_0. Εφόσον $\varepsilon \in (0,1)$, τότε η γωνία α_0 θα πρέπει να είναι αυστηρά μικρότερη από

$$arccos\sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Επιπλέον, όσο αυξάνεται το ε ή η διάσταση n, μειώνεται η γωνία α_0. Έτσι ο ελλειπτικός τελεστής $\mathcal{L}$ περιορίζεται κοντά στον τελεστή Laplacian.

Στην περίπτωση των δυο διαστάσεων, έστω πως $\lambda_1(x)$ και $\lambda_2(x)$ οι ιδιοτιμές του πίνακα $\{\alpha^{ij}\}$. Τότε η συνθήκη του Cordes (2.5) ισοδυναμεί

$$\frac{\sum_{i=1}^{2}\lambda_i^2(x)}{\left(\sum_{i=1}^{2}\lambda_i(x)\right)^2} = \frac{\lambda_1^2(x)+\lambda_2^2(x)}{(\lambda_1(x)+\lambda_2(x))^2} \leq \frac{1}{1+\varepsilon} \Rightarrow -\varepsilon\frac{\lambda_1^2(x)}{\lambda_2^2(x)} + 2\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} - \varepsilon \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \leq \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \leq \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

Για $\varepsilon \in (0, 2\lambda\Lambda/(\lambda^2+\Lambda^2))$ ικανοποιείται η παραπάνω ανισότητα αλλά και η εναλλακτική συνθήκη ομοιόμορφης ελλειπτικότητας $\lambda/\Lambda \leq \lambda_1(x)/\lambda_2(x) \leq \Lambda/\lambda$ (ο πίνακας $\{a^{ij}\}$ έχει φραγμένες ιδιοτιμές $\lambda_i(x)$ στο Ω). Άρα στις δύο διαστάσεις η συνθήκη του Cordes ταυτίζεται με την συνθήκη ομοιόμορφης ελλειπτικότητας

$$\lambda(\xi_1^2+\xi_2^2) \le \sum_{i,j=1}^{2} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda(\xi_1^2+\xi_2^2),\ \Lambda \ge \lambda > 0$$

Πράγματι, για $n=2$ ο κώνος Γ_{α_0} αποτελεί το πρώτο τεταρτημόριο δηλαδή το σύνολο των διανυσμάτων $(\lambda_1(x),\lambda_2(x))$ όπου $\lambda_1(x)>0$ και $\lambda_2(x)>0$.

2.2 Επιλυσιμότητα σε χώρους $W^{2,p}(\Omega), p \in [2,p_0), p_0 > 2$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να βελτιωθεί καθώς η συνθήκη του Cordes μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πιο 'γενικούς' χώρους Sobolev. Έστω, όπως προηγουμένως $W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega) \equiv W^{2,p}(\Omega)\cap W^{1,p}_0(\Omega)$ με νόρμα

$$\|u\|_{W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}u|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p}$$

Ως γνωστόν ([13]) για κάθε $f\in L^p(\Omega)$, $p>1$, το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Poisson

$$\Delta u = f, \qquad u \in W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega) \tag{2.9}$$

έχει μοναδική λύση που ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|u\|_{W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)} \le C(p)\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

όπου η σταθερά $C(p)$ εξαρτάται και από τα n, Ω. Επιπλέον, εφόσον το Ω είναι κυρτό σύνολο, τότε από το λήμμα Miranda-Talenti προφανώς $C(2)=1$. Αφού το πρόβλημα (2.9) εχει μοναδική λύση, τότε ισοδύναμα ο τελεστής Laplace $\Delta : W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)\to L^p(\Omega)$ είναι ένα προς ένα και επί για κάθε $p>1$. Με την βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz προκύπτουν τα παρακάτω

$$\Delta(u+v) = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}(u+v) = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}u + \sum_{i=1}^{n} D_{ii}v = \Delta u + \Delta v$$

$$\|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\Delta u|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega \Big|\sum_{i=1}^{n} D_{ii}u\Big|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n}\Big|D_{ii}u\Big|\Big)^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\left(\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n}\Big|D_{ij}u\Big|\Big)^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n}\Big|D_{ij}u\Big|^2\Big)^{p/2}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}1^2\Big)^{p/2} dx\right)^{1/p} =$$

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n}1^2\Big)^{p/2p}\left(\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n}\Big|D_{ij}u\Big|^2\Big)^{p/2} dx\right)^{1/p} = n\left(\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n}\Big|D_{ij}u\Big|^2\Big)^{p/2} dx\right)^{1/p} =$$

$$n\|u\|_{W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)}$$

Άρα ο τελεστής Laplace $\Delta : W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ είναι γραμμικός, φραγμένος και ένα προς ένα και επί και αφού ισχύει

$$\frac{1}{C(p)}\|u\|_{W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} \leq n\|u\|_{W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)}$$

τότε είναι και ισομορφισμός για κάθε $p > 1$. Αν $\Delta^{-1}(p) : L^p(\Omega) \to W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)$ είναι ο αντίστροφός του, τότε από το λήμμα Miranda-Talenti για $u = \Delta^{-1}(2)$ έπεται ότι $\|\Delta^{-1}(2)\| \leq 1$. Για $r \in (1,\infty)\backslash\{2\}$ και $1/p = a/2 + (1-a)/r$, $a \in (0,1)$ ισχύει

$$\|\Delta^{-1}(p)\| = \|a\Delta^{-1}(2)+(1-a)\Delta^{-1}(r)\| \leq \|\Delta^{-1}(2)\|^a\|\Delta^{-1}(r)\|^{1-a} \leq \|\Delta^{-1}(r)\|^{\frac{r(p-2)}{p(r-2)}}. \tag{2.10}$$

Πράγματι, αν η (2.10) ισχύει, τότε επειδή οι νόρμες είναι κυρτές και η συνάρτηση lnx κοίλη, θα συνεπάγεται το εξής

$$ln\Big(\|\Delta^{-1}(p)\|\Big)= ln\Big(\|\Delta^{-1}(2)\|^a\|\Delta^{-1}(r)\|^{1-a}\Big)\Rightarrow$$

$$ln\|\Delta^{-1}(p)\| \leq aln\|\Delta^{-1}(2)\| + (1-a)ln\|\Delta^{-1}(r)\| \leq ln(a\|\Delta^{-1}(2)\| + (1-a)\|\Delta^{-1}(r)\|)$$

$$\|\Delta^{-1}(p)\| \leq a\|\Delta^{-1}(2)\| + (1-a)\|\Delta^{-1}(r)\|$$

Τότε, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα ([8])

Θεώρημα 2.2 Δεδομένου των συνθήκων του θεωρήματος 2.1, υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί p_0 και p_1 , $1 < p_0 < 2 < p_1$, τέτοιοι ώστε για κάθε $p \in (p_0, p_1)$, το πρόβλημα Dirichlet

$$\mathcal{L}u = f(x) \in L^p(\Omega)\ \sigma.\pi.\ \Omega, \qquad u \in W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)$$

έχει μοναδική λύση η οποία ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|u\|_{W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)} \leq \frac{esssup_{x\in\Omega}\alpha\|\Delta^{-1}(p)\|}{1-\sqrt{1-\varepsilon}\|\Delta^{-1}(p)\|}\|f\|_{L^p(\Omega)} \tag{2.11}$$

Απόδειξη: Έστω ένας τυχόν πραγματικός αριθμός $r \in (2,\infty)$. Από την ανισότητα (2.10), για κάθε $p \in [2,r]$ ισχύει

$$\|\Delta^{-1}(p)\| \leq \|\Delta^{-1}(r)\|^{\frac{r(p-2)}{p(r-2)}} = C(p)$$

Αν $\|\Delta^{-1}(r)\| \geq 1$ η συνάρτηση $C(p)$ είναι αύξουσα και συνεχής στο $[2,r]$ και $C(p) \to 1$ καθώς $p \to 2$. Άρα, υπάρχουν $p_1 \in (2,r]$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$\|\Delta^{-1}(p)\| \leq 1 < \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \leq C(p) \Rightarrow \|\Delta^{-1}(p)\|\sqrt{1-\varepsilon} < 1$$

για κάθε $p \in [2,p_1)$.

Αν $\|\Delta^{-1}(r)\| \leq 1$, τότε η συνάρτηση είναι φθίνουσα και εμφανίζει μέγιστο στο $p = 2$

$$\|\Delta^{-1}(p)\| \leq C(p) \leq 1 < \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \Rightarrow \|\Delta^{-1}(p)\|\sqrt{1-\varepsilon} < 1$$

για καθε $p \in [2, p_1)$.

Αντίστοιχα, η ανισότητα (2.10) ισχύει για κάθε $p \in [r, 2]$ για ενα σταθερό $r \in (1, 2)$. Αν $\|\Delta^{-1}(r)\| \geq 1$ η συνάρτηση $C(p)$ είναι φθίνουσα και συνεχής στο $[r, 2]$ και $C(p) \to 1$, καθώς $p \to 2$. Άρα υπάρχουν $p_0 \in (1, 2)$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$\|\Delta^{-1}(p)\| \leq 1 < \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \leq C(p) \Rightarrow \|\Delta^{-1}(p)\|\sqrt{1-\varepsilon} < 1$$

για κάθε $p \in (p_0, 2]$.

Αν $\|\Delta^{-1}(r)\| \leq 1$, τότε η συνάρτηση είναι αύξουσα και εμφανίζει μέγιστο στο $p = 2$

$$\|\Delta^{-1}(p)\| \leq C(p) \leq 1 < \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \Rightarrow \|\Delta^{-1}(p)\|\sqrt{1-\varepsilon} < 1$$

για κάθε $p \in [2, p_1)$.

Άρα ανεξαρτήτως της μονοτονίας της συνάρτησης $C(p)$ για κάθε $p \in (p_0, p_1)$ ισχύει $\|\Delta^{-1}(p)\|\sqrt{1-\varepsilon} < 1$

Έστω λοιπόν $f \in L^p(\Omega)$, $p \in (p_0, p_1)$ και ένας τελεστής $T : W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega) \to W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)$ ορισμένος όπως προηγουμένως ως $Tw = U, w \in W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)$ όπου U είναι η μοναδική λύση του προβλήματος

$$\Delta U = \alpha f + (\Delta - \alpha\mathcal{L})w,\ U \in W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega) \tag{2.12}$$

Προχωρώντας με παρόμοια λογική όπως στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, αν ο τελεστής T είναι συστολή, τότε από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach συνεπάγεται πως το w είναι η μοναδική λύση του προβλήματος. Πράγματι, με αντικατάσταση, την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την τροποποιημένη συνθήκη του

Cordes για δύο στοιχεία w_1, w_2 του $W^{2,p}_{\gamma 0}(\Omega)$, προκύπτει

$$\|Tw_1 - Tw_2\|^p_{W^{2,p}_{\gamma 0}(\Omega)} = \|U_1 - U_2\|^p_{W^{2,p}_{\gamma 0}(\Omega)} = \|\Delta^{-1}\Delta(U_1 - U_2)\|^p_{W^{2,p}_{\gamma 0}(\Omega)}$$

$$\leq \|\Delta^{-1}(p)\|^p \|\Delta(U_1 - U_2)\|^p_{L^p(\Omega)}$$

$$= \|\Delta^{-1}(p)\|^p \|(\Delta - \alpha\mathcal{L})(w_1 - w_2))\|^p_{L^p(\Omega)}$$

$$= \|\Delta^{-1}(p)\|^p \left\| \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - \alpha a^{ij}) D_{ij}(w_1 - w_2) \right\|^p_{L^p(\Omega)}$$

$$= \|\Delta^{-1}(p)\|^p \int_\Omega \left| \sum_{i,j=1}^{n} (\delta^{ij} - \alpha a^{ij}) D_{ij}(w_1 - w_2) \right|^p dx$$

$$\leq \|\Delta^{-1}(p)\|^p \int_\Omega \left| \Big(\sum_{i,j=1}^{n} (\delta^{ij} - \alpha a^{ij})^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij}(w_1 - w_2))^2 \Big)^{1/2} \right|^p dx$$

Αποδείχθηκε προηγουμένως ότι

$$\sum_{i,j=1}^{n} |\delta^{ij} - \alpha a^{ij}|^2 \leq 1 - \varepsilon \Rightarrow \left(\sum_{i,j=1}^{n} |\delta^{ij} - \alpha a^{ij}|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{1 - \varepsilon} \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |\delta^{ij} - \alpha a^{ij}|^2 \right)^{p/2} \leq (\sqrt{1 - \varepsilon})^p$$

Άρα καταλήγουμε

$$\|\Delta^{-1}(p)\|^p \int_\Omega \left| \Big(\sum_{i,j=1}^{n} (\delta^{ij} - \alpha a^{ij})^2 \Big)^{p/2} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij}(w_1 - w_2))^2 \Big)^{p/2} \right| dx \leq$$

$$\|\Delta^{-1}(p)\|^p (\sqrt{1 - \varepsilon})^p \int_\Omega \left| \Big(\sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij}(w_1 - w_2))^2 \Big)^{p/2} \right| dx \leq$$

$$\|\Delta^{-1}(p)\|^p (\sqrt{1 - \varepsilon})^p \|w_1 - w_2\|^p_{W^{2,p}_{\gamma 0}(\Omega)} \leq$$

$$\|w_1 - w_2\|^p_{W^{2,p}_{\gamma 0}(\Omega)}$$

Επομένως, πράγματι ο τελεστής T είναι συστολή που συνεπάγεται ότι το πρόβλημα Dirichlet έχει μοναδική λύση. Η ανισότητα επαληθεύεται εύκολα

$$\|u\|_{W^{2,p}_{\gamma 0}(\Omega)} \leq \|\Delta^{-1}(p)\| \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\Delta^{-1}(p)\| \|\alpha f + (\Delta - \alpha\mathcal{L})u)\|_{L^p(\Omega)} \leq$$

$$\|\Delta^{-1}(p)\| \big(\alpha \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|(\Delta - \alpha\mathcal{L})u\|_{L^p(\Omega)} \big) \leq \|\Delta^{-1}(p)\| \big(\alpha \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sqrt{1 - \varepsilon} \|u\|_{W^{2,p}_{\gamma 0}(\Omega)} \big) \Rightarrow$$

$$\|u\|_{W^{2,p}_{\gamma 0}(\Omega)} \leq \frac{esssup_{x \in \Omega} \alpha \|\Delta^{-1}(p)\|}{1 - \sqrt{1 - \varepsilon} \|\Delta^{-1}(p)\|} \|f\|_{L^p(\Omega)} \qquad \square$$

Κεφάλαιο 3

Η συνθήκη (A^2) του Campanato

Έστω $a(x, D^2u)$ ένας μη γραμμικός διαφορικός τελεστής, όπου το x ανήκει σε ένα φραγμένο σύνολο κλάσης C^2 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ και $D^2u \equiv \{D_{ij}u\}_{i,j=1}^n$ είναι ο εσσιανός πίνακας του u. Έστω επίσης ότι η συνάρτηση $a(x,\xi)$ ικανοποιεί την συνθήκη του Καραθεοδωρή, δηλαδή είναι μετρήσιμη στο $x \in \Omega$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^{n^2}$ και συνεχής ως προς το ξ για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$.

Βάσει του Campanato ([7],[6]), η συνθήκη του Cordes (2.5) για γραμμικούς τελεστές και το λήμμα Miranda-Talenti προκύπτει η μη γραμμική συνθήκη του Cordes

Συνθήκη (A) Υπάρχουν α, γ, δ θετικές σταθερές τέτοιες ώστε $\gamma + \delta < 1$ και

$$\begin{cases} |Tr\tau - \alpha(a(x, \xi + \tau) - a(x, \xi))| \leq \gamma \|\tau\|_{n^2} + \delta |Tr\tau|, \\ a(x, 0) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

για κάθε $\xi, \tau \in \mathbb{R}^{n^2}$ και σχεδόν κάθε $x \in \Omega$.

Σε συνδυασμό με την ανισότητα του Young για $p = q = 2$, $\alpha = \gamma\|\tau\|_{n^2}\sqrt{\varepsilon}$ και $\beta = \delta|Tr\tau|/\sqrt{\varepsilon}$, προκύπτει

$$|Tr\tau - \alpha(a(x, \xi + \tau) - a(x, \xi))|^2 \leq \big(\gamma\|\tau\|_{n^2} + \delta|Tr\tau|\big)^2 =$$

$$\gamma^2\|\tau\|_{n^2}^2 + \delta^2|Tr\tau|^2 + 2\gamma\|\tau\|_{n^2}\delta|Tr\tau| \leq$$

$$\gamma^2\|\tau\|_{n^2}^2 + \delta^2|Tr\tau|^2 + \varepsilon\gamma^2\|\tau\|_{n^2}^2 + \varepsilon^{-1}\delta^2|Tr\tau|^2 =$$

$$(1+\varepsilon)\gamma^2\|\tau\|_{n^2}^2 + (1+\varepsilon^{-1})\delta^2|Tr\tau|^2$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Θέτοντας $\varepsilon = \delta/\gamma$, προκύπτει η ακόλουθη τετραγωνική συνθήκη της (A)

$$|Tr\tau - \alpha(a(x, \xi + \tau) - a(x, \xi))|^2 \leq \frac{\gamma+\delta}{\gamma}\gamma^2\|\tau\|_{n^2}^2 + \frac{\gamma+\delta}{\delta}\delta^2|Tr\tau|^2 =$$
$$(\gamma+\delta)(\gamma\|\tau\|_{n^2}^2 + \delta|Tr\tau|^2) \leq \gamma\|\tau\|_{n^2}^2 + \delta|Tr\tau|^2$$

εφόσον $\gamma + \delta = 1$. Επακολουθεί έτσι η γενικευμένη τετραγωνική συνθήκη (A^2), η οποία εφαρμόζεται πιο εύκολα στην περίπτωση μερικών διαφορικών τελεστών, όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Συνθήκη ($\mathbf{A}^2$) Υπάρχουν α, γ, δ θετικές σταθερές τέτοιες ώστε $\gamma + \delta < 1$ και

$$\begin{cases} \left|Tr\tau - \alpha(a(x, \xi + \tau) - a(x, \xi))\right|^2 \leq \gamma\|\tau\|_{n^2}^2 + \delta|Tr\tau|^2, \\ a(x, 0) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

για κάθε $\xi, \tau \in \mathbb{R}^{n^2}$ και σχεδόν κάθε $x \in \Omega$.

Ο Campanato πρότεινε τον εξής χαρακτηρισμό ([6])

Λήμμα 3.1 Έστω πως υπάρχουν θετικές σταθερές M, μ και Κ με $\mu > K$ τέτοιες ώστε

$$|a(x, \xi + \tau) - a(x, \xi)| \leq M\|\tau\|_{n^2}, \tag{3.3}$$
$$(a(x, \xi + \tau) - a(x, \xi))Tr\tau \geq \mu|Tr\tau|^2 - K\|\tau\|_{n^2}^2 \tag{3.4}$$

για κάθε $\tau,\ \xi\ \in \mathbb{R}^{n^2}$ και για σχεδόν όλα τα $x\ \in \Omega$. Τότε η συνάρτηση $a(x, \xi)$ ικανοποιεί την (A^2) με σταθερές $\alpha \in \big(0, min\{1/(2\mu), 2(\mu - K)/M^2\}\big)$, $\delta = 1 - 2\alpha\mu$ και $\gamma = \alpha^2M^2 + 2\alpha K$.

Αντιστρόφως , αν η συνάρτηση $a(x, \xi)$ ικανοποιεί (A^2), τότε οι ανισότητες (3.3), (3.4) ισχύουν με σταθερές $\mu = (1 - \delta)/(2\alpha)$, $K = \gamma/(2\alpha)$ και $M = (\sqrt{\gamma} + \sqrt{n}(1 + \sqrt{\delta}))/\alpha$.

Απόδειξη: δεδομένου ότι ισχύουν οι ανισότητες (3.3), (3.4), πολλαπλασιάζοντας την (3.3) με α και υψώνοντας τη στο τετράγωνο, προκύπτει

$$\alpha^2|a(x, \xi + \tau) - a(x, \xi)|^2 \leq \alpha^2M^2\|\tau\|_{n^2}^2$$

ενώ πολλαπλασιάζοντας την (3.4) με -2α και προσθέτοντας $|Tr\tau|^2$

$$-2\alpha(a(x, \xi + \tau) - a(x, \xi))Tr\tau + |Tr\tau|^2 \leq (1 - 2\alpha\mu)|Tr\tau|^2 + 2\alpha K\|\tau\|_{n^2}^2.$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω προκύπτουσες ανισότητες, λαμβάνουμε

$$\left|Tr\tau - \alpha(a(x, \xi + \tau) - a(x, \xi))\right|^2 \leq (1 - 2\alpha\mu)|Tr\tau|^2 + (\alpha^2M^2 + 2\alpha K)\|\tau\|_{n^2}^2$$

Παρατηρείται ότι για $\alpha > 0$ ισχύει

$$1 - 2\alpha\mu + \alpha^2M^2 + 2\alpha K\ <\ 1 \Rightarrow -2\mu + \alpha M^2 + 2K\ <\ 0 \Rightarrow \alpha\ <\ \frac{2(\mu - K)}{M^2}$$

και

$$1 - 2\alpha\mu > 0 \Rightarrow \alpha < \frac{1}{2\mu}$$

Άρα αν $\alpha \in \big(0, min\{1/(2\mu), 2(\mu - K)/M^2\}\big)$, τότε ισχύει η (A^2) με $\delta = 1 - 2\alpha\mu$ και $\gamma = \alpha^2M^2 + 2\alpha K$.

Αντιστρόφως, αν ισχύει η (A^2), τότε

$$\alpha|a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi)| = |-\alpha(a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi))| =$$

$$|Tr\tau - Tr\tau - \alpha(a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi))| \leq$$

$$|Tr\tau - \alpha(a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi))| + |Tr\tau| \leq$$

$$\sqrt{\gamma}\|\tau\|_{n^2} + \sqrt{\delta}|Tr\tau| + |Tr\tau| = \sqrt{\gamma}\|\tau\|_{n^2} + (1+\sqrt{\delta})|Tr\tau| \leq$$

$$\sqrt{\gamma}\|\tau\|_{n^2} + \sqrt{n}(1+\sqrt{\delta})\|\tau\|_{n^2} = (\sqrt{\gamma}+\sqrt{n}(1+\sqrt{\delta}))\|\tau\|_{n^2}.$$

$$\left(|Tr\tau| = \Big|\sum_{i=1}^{n}\tau_{ii}\Big| \leq \sum_{i=1}^{n}|\tau_{ii}| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}\tau_{ii}^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n}1^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{i,j=1}^{n}\tau_{ii}^2\Big)^{1/2}\sqrt{n} = \|\tau\|_{n^2}\sqrt{n}\right)$$

Συνεπώς, η (3.3) επαληθευέται για $M = (\sqrt{\gamma}+\sqrt{n}(1+\sqrt{\delta}))/\alpha$. Από το αριστερό μέλος της (A^2), ανάγοντας την ταυτότητα, συνεπάγεται

$$|Tr\tau|^2 - 2\alpha(a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi))Tr\tau + \alpha^2|a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi)|^2 \leq \gamma\|\tau\|_{n^2}^2 + \delta|Tr\tau|^2 \Rightarrow$$

$$(a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi))Tr\tau - \frac{\alpha}{2}|a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi)|^2 \geq -\frac{\gamma}{2\alpha}\|\tau\|_{n^2}^2 + \frac{1-\delta}{2\alpha}|Tr\tau|^2 \Rightarrow$$

$$(a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi))Tr\tau \geq \frac{1-\delta}{2\alpha}|Tr\tau|^2 - \frac{\gamma}{2\alpha}\|\tau\|_{n^2}^2$$

άρα επαληθεύεται και η (3.4) για $\mu = (1-\delta)/(2\alpha)$ και $K = \gamma/(2\alpha)$. $\square$

Ο χαρακτηρισμός της συνθήκης (A^2) μέσω του λήμματος 3.1 είναι ιδιάζουσας σημασίας, διότι οι ανισότητες (3.3),(3.4), γνωστές και ως συνθήκες ισχυρής μονοτονίας, είναι οι κατάλληλες ελλειπτικές συνθήκες στην θεωρία μη γραμμικών εξισώσεων σε μορφή απόκλισης.

Λήμμα 3.2 Αν η συνάρτηση $a(x,\xi)$ ικανοποιεί την συνθήκη (A^2), τότε η συνάρτηση $\xi \to a(x,\xi)$ είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}^{n^2}$. Δηλώνοντας $a^{ij}(x,\xi) = \partial a/\partial\xi_{ij}(x,\xi),\ i,j = 1,...,n$, τότε $a^{ij} \in L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^{n^2})$ και

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,\xi)\zeta_i\zeta_j \geq \frac{1-(\gamma+\delta)}{2\alpha}|\zeta|^2 \tag{3.5}$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^{n^2}, \zeta \in \mathbb{R}^n$ και σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$ ([18]).

Απόδειξη: Εφόσον η συνάρτηση $a(x,\xi)$ ικανοποιεί την συνθήκη (A^2), θα ικανοποιεί και την (3.3) με $M = (\sqrt{\gamma}+\sqrt{n}(1+\sqrt{\delta}))/\alpha > 0$, άρα η συνάρτηση $\xi \to a(x,\xi)$ είναι Lipschitz συνεχής στο $\mathbb{R}^{n^2}$. Το σύνολο $\mathbb{R}^{n^2}$ είναι ανοικτό, συνεπώς συνεπάγεται από το θεώρημα Rademacher ότι η συνάρτηση $\xi \to a(x,\xi) : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη σχεδόν σε όλο το $\mathbb{R}^{n^2}$. Επομένως, οι μερικές παράγωγοι $a^{ij}(x,\xi) = \partial a/\partial\xi_{ij}(x,\xi)$ θα υπάρχουν σχεδόν για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^{n^2}$ και θα ισχύει

$$\frac{\partial a}{\partial\xi_{ij}}(x,\xi) = lim_{t\to 0}\frac{a(x,\xi+te)-a(x,\xi)}{t}$$

όπου $\{e\}_{k,l=1}^n$ πίνακας τέτοιος ώστε $e_{ij} = 1$ και κάθε άλλο στοιχείο είναι μηδενικό. Τότε ισχύει $\|e\|_{n^2} = t$ άρα

$$\left|\frac{\partial a}{\partial \xi_{ij}}(x,\xi)\right| \leq \left|\frac{a(x,\xi+te)-a(x,\xi)}{t}\right| \leq M$$

το οποίο ισχύει από την ανισότητα (3.3). Άρα οι μερικές παράγωγοι $a^{ij}(x,\xi)$ είναι φραγμένες δηλαδή $a^{ij}(x,\xi \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{n^2})$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θέτουμε $a^{ij} = \frac{1-(\gamma+\delta)}{2\alpha}\delta^{ij}$ στα σημεία του $\mathbb{R}^{n^2}$ στα οποία δεν υπάρχουν οι παραπάνω παράγωγοι. Αν στο τυχόν σημείο $\xi \in \mathbb{R}^{n^2}$ στο οποίο το διαφορικό $d_\xi a$ υπάρχει, λάβουμε ως πίνακα τ τον πίνακα $t\{\zeta_i\zeta_j\}_{i,j=1}^n, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \zeta \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, τότε εξ ορισμού της παραγώγου συνάρτησης πολλών μεταβλητών

$$lim_{\tau \to\ 0}\frac{a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi)-d_\xi a(x,\tau)}{\|\tau\|_{n^2}} = 0 \Rightarrow a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi) = d_\xi a(\tau)+o(\|\tau\|_{n^2})$$

$$\Rightarrow a(x,\xi+t\{\zeta_i\zeta_j\})-a(x,\xi) = d_\xi a(x,\xi)t\zeta_i\zeta_j + o(|t|) = \sum_{i,j=1}^n ta^{ij}(x,\xi)\zeta_i\zeta_j + o(|t|)$$

και η Ευκλείδια νόρμα του πίνακα $\tau = t\{\zeta_i\zeta_j\}_{i,j=1}^n$ είναι

$$\|\tau\|_{n^2}^2 = \sum_{i,j=1}^n t^2\zeta_i^2\zeta_j^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n t^2\zeta_i^2\zeta_j^2 = \sum_{i=1}^n t^2\zeta_i^2|\zeta|^2 = t^2|\zeta|^4 = (t|\zeta|^2)^2 =$$

$$\left(t\sum_{i=1}^n \zeta_i^2\right)^2 = (Tr\tau)^2$$

Σε συνδυασμό με την (3.4) και αντικαθιστώντας τις σταθερές των μ και K με αυτές του λήμματος 3.1, προκύπτει

$$\left(\sum_{i,j=1}^n ta^{ij}(x,\xi)\zeta_i\zeta_j + o(|t|)\right)Tr\tau \geq \frac{1-\delta}{2\alpha}|Tr\tau|^2 - \frac{\gamma}{2\alpha}\|\tau\|_{n^2}^2 = \frac{1-\delta}{2\alpha}|Tr\tau|^2 - \frac{\gamma}{2\alpha}|Tr\tau|^2 \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^n ta^{ij}(x,\xi)\zeta_i\zeta_j + o(|t|)\right)t|\zeta|^2 \geq \frac{1-\delta}{2\alpha}t^2|\zeta|^4 - \frac{\gamma}{2\alpha}t^2|\zeta|^4 = \frac{1-(\gamma+\delta)}{2\alpha}t^2|\zeta|^4 \Rightarrow$$

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,\xi)\zeta_i\zeta_j + \frac{o(|t|)}{t} \geq \frac{1-(\gamma+\delta)}{2\alpha}|\zeta|^2$$

Τότε καθώς το t τείνει στο άπειρο λαμβάνουμε την (3.5) η οποία ισχύει και για τα $\xi \in \mathbb{R}^{n^2}$ στα οποία το διαφορικό $d_\xi a$ δεν υπάρχει, αφού θέσαμε $a^{ij} = \frac{1-(\gamma+\delta)}{2\alpha}\delta^{ij}$. Πράγματι

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{1-(\gamma+\delta)}{2\alpha}\delta^{ij}\zeta_i\zeta_j = \sum_{i=1}^n \frac{1-(\gamma+\delta)}{2\alpha}\zeta_i\zeta_i = \frac{1-(\gamma+\delta)}{2\alpha}|\zeta|^2 \qquad \square$$

Με άλλα λόγια, το λήμμα 3.2 δηλώνει οτι η συνθήκη (A^2) συνεπάγεται την αυστηρή ελλειπτική συνθήκη και ο τελεστής $a(x,D^2u)$ που την ικανοποιεί, έχει φραγμένες συνιστώσες a^{ij}.

Όσον αφορά τον γραμμικό διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης, η συνθήκη του Cordes συνεπάγεται την (A^2). Αν ο τελεστής $\mathcal{L} = a^{ij}(x)D_{ij},\ x \in \Omega$ ικανοποιεί την συνθήκη του Cordes, τότε θέτοντας

$$\rho(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a^{ii}(x)}{\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ii}(x))^2}$$

και έχοντας υπόψη την τροποποιημένη Cordes condition $\sum_{i,j=1}^{n}|\delta^{ij} - \alpha a^{ij}|^2 \leq 1 - \varepsilon$, καταλήγουμε

$$\Big|Tr\tau - \rho\big(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\xi_{ij}+\tau_{ij}) - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\xi_{ij}\big)\Big|^2 = \Big|\sum_{i,j=1}^{n}\big(\delta^{ij}-\rho a^{ij}\big)\tau_{ij}\Big|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n}\big(\delta^{ij}-\rho a^{ij}\big)^2 \sum_{i,j=1}^{n}\tau_{ij}^2$$

$$\leq \left(n - \frac{\sum_{i=1}^{n} a^{ii}(x)}{\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ii}(x))^2}\right)\|\tau\|_{n^2}^2 \leq (1-\varepsilon)\|\tau\|_{n^2}^2 \leq (1-\varepsilon)\|\tau\|_{n^2}^2 + \varepsilon'\big|Tr\tau\big|^2$$

με $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Άρα, ο τελεστής $\mathcal{L}^* = \rho(x)\mathcal{L}$ ικανοποιεί την (A^2) με $\alpha = 1, \gamma = 1 - \varepsilon$ και $\delta = \varepsilon' < \varepsilon$.

Από την άλλη, η συνθήκη (A^2) είναι πιο γενική από την συνθήκη του Cordes. Θέτουμε για δύο $n \times n$ πίνακες $A = \{a^{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ και $\tau = \{\tau_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ το εσωτερικό γινόμενο $\big(A|\tau\big)_n = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\tau_{ij}$, $\|A\|_{n^2} = \big(A|A\big)_n^{1/2}$ και τον $n \times n$ ταυτοτικό πίνακα I. Τότε για τον γραμμικό τελεστή $\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)D_{ij}$, η (A^2) παίρνει την μορφή

$$\big|Tr\tau - \alpha\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}(\xi_{ij}+\tau_{ij}) - a^{ij}\xi_{ij})\big|^2 \leq \gamma\|\tau\|_{n^2}^2 + \delta\big|Tr\tau\big|^2 \Rightarrow$$

$$\big|Tr\tau - \alpha\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\tau_{ij}\big|^2 = \big|(I|\tau)_n - \alpha(A|\tau)_n\big|^2 \leq \gamma\|\tau\|_{n^2}^2 + \delta\big|Tr\tau\big|^2 \Rightarrow$$

$$\left(\Big|\sum_{i,j=1}^{n}(\delta^{ij} - \alpha a^{ij})\tau_{ij}\Big|^2\right)^{1/2} \leq \left(\gamma\|\tau\|_{n^2}^2 + \delta\big|Tr\tau\big|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{\gamma}\|\tau\|_{n^2} + \sqrt{\delta}\big|Tr\tau\big|$$

$$\Rightarrow \Big|\sum_{i,j=1}^{n}(\delta^{ij} - \alpha a^{ij})\tau_{ij}\Big| \leq (\sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta}\sqrt{n})\|\tau\|_{n^2}$$

$$\left(\big|Tr\tau\big|^2 = \big|\sum_{i=1}^{n}\tau_{ij}\big|^2 = \big|\sum_{i,j=1}^{n}\delta^{ij}\tau_{ij}\big|^2 = \big(I|\tau\big)_n^2\right)$$

Αλλά από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, προκύπτει

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n}(\delta^{ij} - \alpha a^{ij})\tau_{ij}\Big| \leq \Big(\sum_{i,j=1}^{n}|\delta^{ij} - \alpha a^{ij}|^2\Big)^{1/2}\|\tau\|_{n^2} = \|I - \alpha A\|_{n^2}\|\tau\|_{n^2}$$

Η νόρμα $\|I - \alpha A\|_{n^2}$ είναι η νόρμα του τελεστή $I - \alpha A$ άρα εξ' ορισμού

$$\|I - \alpha A\|_{n^2} \leq \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta}\sqrt{n}$$

Αν, πέραν των προυποθέσεων της συνθήκης (A^2), οι σταθερές γ και δ ειναι αρκετά μικρές έτσι ώστε $\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}\sqrt{n}<1$, τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε

$$\|I-\alpha A\|_{n^2}=\sum_{i,j=1}^{n}(\delta^{ij}-\alpha a^{ij})^2\leq 1-\varepsilon<1$$

που πρόκειται για την τροποποιημένη συνθήκη του Cordes. Δηλαδή, ο τελεστής $\mathcal{L}$ ικανοποιεί την Cordes condition.

Οι συνθήκες (A) και (A^2) μπορούν να διατυπωθούν και για συστήματα μερικών διαφορικών τελεστών. Έστω $N>1$ ένας ακέραιος αριθμός και $u(x)=(u^1,...u^N)$ μια διανυσματική συνάρτηση από το Ω στο $\mathbb{R}^N$, θέτουμε όπως προηγουμένως

$$D_i u=\frac{\partial u}{\partial x_i}\ i=1,...,n,\ Du=(D_1u,...,D_nu),\ D^2u=\{D_{ij}u\}_{i,j=1}^{n}$$

Τότε $Du\in\mathbb{R}^{nN}$ είναι ένα διάνυσμα διάστασης n και $D^2u\in\mathbb{R}^{n^2N}$ είναι ένας πίνακας διάστασης $n\times n$ με την διαφορά οτι κάθε στοιχείο του Du , D^2u είναι ένα διάνυσμα N διάστασης. Κάθε σύστημα

$$a^h(x,D^2)=f^h(x,u,Du),\quad h=1,...,N$$

N μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$a(x,D^2)=f(x,u,Du),\tag{3.6}$$

όπου οι διανυσματικές συναρτήσεις $a=(a^1,...,a^N),\ f=(f^1,...,f^N)\in\mathbb{R}^N$ είναι μετρήσιμες στο $x\in\Omega$ και συνεχείς ως προς τις μεταβλητές u,Du,D^2. Η διανυσματική εκδοχή της (A^2) είναι η εξής

Διανυσματική Συνθήκη (A^2). Υπάρχουν θετικές σταθερές α,γ,δ με $\gamma+\delta<1$ έτσι ώστε

$$\begin{cases}\big\|Tr\tau-\alpha(a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi))\big\|_N^2\leq\gamma\|\tau\|_{n^2N}^2+\delta\|Tr\tau\|_N^2,\\ a(x,0)=0\end{cases}\tag{3.7}$$

για κάθε $\xi,\tau\in\mathbb{R}^{n^2N}$ και σχεδόν κάθε $x\in\Omega$. (Κάθε στοιχείο του πίνακα $\tau\in\mathbb{R}^{n^2N}$ είναι διάνυσμα, άρα το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του, δηλαδή το ίχνος $Tr\tau$ είναι και αυτό διάνυσμα)

Αν το διάνυσμα τ_{ij} είναι της μορφής $\tau_{ij}=(\tau_{ij1},...,\tau_{ijN})$

$$\|Tr\tau\|_N=\Big(\sum_{k=1}^{N}\big(Tr\tau\big)_k^2\Big)^{1/2}=\Big(\sum_{k=1}^{N}\big(\sum_{i=1}^{n}\tau_{iik}\big)^2\Big)^{1/2}\leq\Big(\sum_{k=1}^{N}\big(\sum_{i=1}^{n}\tau_{iik}^2\sum_{i=1}^{n}1\big)\Big)^{1/2}\leq$$

$$\sqrt{n}\Big(\sum_{k=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n}\tau_{ijk}^2\Big)^{1/2}=\sqrt{n}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\tau_{ijk}^2\Big)^{1/2}=\sqrt{n}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\|\tau_{ij}\|_N^2\Big)^{1/2}=\sqrt{n}\|\tau\|_{n^2N}$$
$$\leq\sqrt{nN}\|\tau\|_{n^2N}$$

άρα για τον τελεστή $a(x,\xi)$ που ικανοποιεί την (3.7) ισχύει

$$\alpha\|a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi)\|_N \leq \big\|Tr\tau-\alpha(a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi))-Tr\tau\big\|_N \leq$$
$$\sqrt{\gamma}\|\tau\|_{n^2N}+\sqrt{\delta}\|Tr\tau\|_N+\|Tr\tau\|_N \leq \sqrt{\gamma}\|\tau\|_{n^2N}+(\sqrt{\delta}+1)\|Tr\tau\|_N \leq$$
$$(\sqrt{\gamma}+\sqrt{nN}(\sqrt{\delta}+1))\|\tau\|_{n^2N} \Rightarrow$$

$$\|a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi)\|_N \leq \frac{(\sqrt{\gamma}+\sqrt{nN}(\sqrt{\delta}+1))}{\alpha}\|\tau\|_{n^2N}$$

Ο χώρος $\mathbb{R}^N$ με το βαθμωτό γινόμενο $(\cdot|\cdot)_N$ είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο με νόρμα $\|\cdot\|_N$, συνεπώς

$$\big\|Tr\tau-\alpha(a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi))\big\|_N^2=$$
$$\|Tr\tau\|_N^2+\alpha^2\|a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi)\|_N^2-2\alpha\big(Tr\tau|a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi)\big)_N$$
$$\leq \gamma\|\tau\|_{n^2N}^2+\delta\|Tr\tau\|_N^2$$

$$\|Tr\tau\|_N^2-2\alpha\big(Tr\tau|a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi)\big)_N \leq \gamma\|\tau\|_{n^2N}^2+\delta\|Tr\tau\|_N^2$$

$$\big(Tr\tau|a(x,\xi+\tau)-a(x,\xi)\big)_N \geq \frac{1-\delta}{2\alpha}\|Tr\tau\|_N^2-\frac{\gamma}{2\alpha}\|\tau\|_{n^2N}^2$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την απόδειξη του πρώτου μέρους του λήμματος 3.1, συμπεραίνουμε ότι το λήμμα 3.1 ισχύει και στην περίπτωση που η συνάρτηση $a(x,\xi)$ ειναι διανυσματική. Όσον αφορά το λήμμα 3.2, αν το διαφορικό $d_\xi a$ ορίζεται στο σημείο $\xi\in\mathbb{R}^{n^2N}$, θέτοντας $\tau=t\{\zeta_i\zeta_j\eta\}_{i,j=1}^n, t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}, \zeta\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}, \eta\in\mathbb{R}^N$, λαμβάνουμε όπως προηγουμένως από το θεώρημα Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, το ανάπτυγμα πρώτου βαθμού

$$a(x,\xi+t\{\zeta_i\zeta_j\eta\})-a(x,\xi)=t\sum_{i,j=1}^n\sum_{k=1}^N\frac{\partial a(x,\xi)}{\partial\xi_{ij}^k}\eta_k\zeta_i\zeta_j+o(|t|)$$
$$=t\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial a(x,\xi)}{\partial\xi_{ij}}\eta\zeta_i\zeta_j+o(|t|).$$

Για την νόρμα $\|\cdot\|_{n^2N}$ και το ίχνος του πίνακα τ αποδεικνύεται το εξής

$$\|\tau\|_{n^2N}^2=\sum_{i,j=1}^n\|\tau_{ij}\|_N^2=\sum_{i,j=1}^n\sum_{k=1}^N\tau_{ijk}^2=\sum_{i,j=1}^n\sum_{k=1}^N t^2\zeta_i^2\zeta_j^2\eta_k^2=t^2\|\zeta\|_n^4\|\eta\|_N^2=$$
$$\Big(\sum_{k=1}^N\big(\sum_{i=1}^n t\zeta_i\zeta_i\eta_k\big)^2\Big)=\Big(\sum_{k=1}^N\big(\sum_{i=1}^n\tau_{iik}\big)^2\Big)=\|Tr\tau\|_N^2.$$

Καταλήγουμε λοιπόν μέσω της (3.4) για διανυσματικές συναρτήσεις ότι

$$\left(t\sum_{i=1}^n\zeta_i^2\eta\middle|t\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial a(x,\xi)}{\partial\xi_{ij}}\eta\zeta_i\zeta_j+o(|t|)\right)_N \geq \frac{1-(\gamma+\delta)}{2\alpha}t^2\|\zeta\|_n^4\|\eta\|_N^2$$

$$\left(\eta\middle|\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial a(x,\xi)}{\partial\xi_{ij}}\eta\zeta_i\zeta_j+\frac{o(|t|)}{t}\right)_N \geq \frac{1-(\gamma+\delta)}{2\alpha}\|\zeta\|_n^2\|\eta\|_N^2$$

άρα καθώς το t τείνει στο 0

$$\sum_{i,j=1}^{n}\zeta_i\zeta_j\left(\eta\middle|\frac{\partial a(x,\xi)}{\partial \xi_{ij}}\eta\right)_N \geq \frac{1-(\gamma+\delta)}{2\alpha}\|\zeta\|_n^2\|\eta\|_N^2 \tag{3.8}$$

όπου $\frac{\partial a(x,\xi)}{\partial \xi_{ij}}$ υποδηλώνει τον $N\times N$ πίνακα $\left\{\frac{\partial a^h(x,\xi)}{\partial \xi_{ij}^k}\right\}_{h,k=1}^N$. Άρα, η διανυσματική συνθήκη (A^2) ικανοποιεί την ασθενή ελλειπτική συνθήκη (3.8), αλλά όχι την αυστηρή

$$\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{h,k=1}^{N}\frac{\partial a^h(x,\xi)}{\partial \xi_{ij}^k}\eta_i^k\eta_j^h \geq \lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\left(\eta_i^k\right)^2, \qquad \lambda>0$$

Όσον αφορά τον γενικό διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης

$$a(x,u,Du,D^2u), \qquad a(x,z,p,\xi)\in\mathbb{R}^N,\ N\geq 1,$$

όπου $a=(a^1,...,a^N),\ f=(f^1,...,f^N)\in\mathbb{R}^N$ είναι μετρήσιμες στο $x\in\Omega$ και συνεχείς ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές, η συνθήκη (A^2) παίρνει την εξής μορφή

($\mathbf{A}^2$) Υπάρχουν θετικές σταθερές α,γ,δ με $\gamma+\delta<1$ έτσι ώστε

$$\begin{cases}\left\|Tr\tau-\alpha(a(x,z,p,\xi+\tau)-a(x,z,p,\xi))\right\|_N^2\leq \gamma\|\tau\|_{n^2N}^2+\delta\|Tr\tau\|_N^2,\\ a(x,z,p,0)=0\end{cases} \tag{3.9}$$

για κάθε $\xi,\tau\in\mathbb{R}^{n^2N}, z\in\mathbb{R}^N, p\in\mathbb{R}^{nN}$ και σχεδόν κάθε $x\in\Omega$.

Κεφάλαιο 4

Μη Γραμμικά Ελλειπτικά Συστήματα

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο πεδίο ορισμού κλάσης C^2 και $u : \Omega \to \mathbb{R}^N, N \geq 1$ μία διανυσματική συνάρτηση. Ο τελεστής $a(x, D^2)$ είναι μία Καραθεοδωρή διανυσματική συνάρτηση που ικανοποιεί την διανυσματική συνθήκη (A^2) (3.7), τότε

$$\|a(x, D^2(x)\|_N \leq \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{nN}(1 + \sqrt{\delta})}{a} \|D^2 u(x)\|_{n^2 N} =$$

$$\frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{nN}(1 + \sqrt{\delta})}{a} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} u\|_N^2 \Big)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \|a(x, D^2(x)\|_N^2 \leq \left(\frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{nN}(1 + \sqrt{\delta})}{a} \right)^2 \sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} u\|_N^2$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \|a(x, D^2(x)\|_N^2 \leq \left(\frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{nN}(1 + \sqrt{\delta})}{a} \right)^2 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} u\|_N^2$$

$$\Rightarrow \left(\int_\Omega \|a(x, D^2(x)\|_N^2 \right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{nN}(1 + \sqrt{\delta})}{a} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} u\|_N^2 \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \|a(x, D^2)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{nN}(1 + \sqrt{\delta})}{a} \|u\|_{W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)}$$

σύμφωνα με το λήμμα 3.1. Επομένως ο μη γραμμικός τελεστής $a(x, D^2)$ δρά από τον $W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)$ στον $L^2(\Omega)$. Για τον ίδιο τελεστή, αφού ικανοποιεί την διανυσματική συνθήκη (A^2) (3.7), για δύο τυχόν συναρτήσεις $u, v \in W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)$, θέτουμε

$$\xi = \{D^2 v\}, \tau = \{D^2(u - v)\}.$$

Εφόσον

$$Tr\tau = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ii} = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}(u - v) = \Delta(u - v),$$

λαμβάνουμε

$$\|\Delta(u-v)(x)-\alpha(a(x,D^2u(x))-a(x,D^2v(x)))\|_N^2 \\ \leq \gamma\|D^2(u-v)\|_{n^2N}^2+\delta\|\Delta(u-v)(x)\|_N^2$$

για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$ και ολοκληρώνοντας στο Ω

$$\int_\Omega \|\Delta(u-v)(x)-\alpha(a(x,D^2u(x))-a(x,D^2v(x)))\|_N^2 dx \\ \leq \gamma\int_\Omega \|D^2(u-v)\|_{n^2N}^2 dx+\delta\int_\Omega \|\Delta(u-v)(x)\|_N^2 dx$$

Αν το πεδίο ορισμού $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό, τότε από το λήμμα Miranda-Talenti το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας είναι μικρότερο από το δεύτερο και συνεπώς έχουμε

$$\|\Delta u-\Delta v-\alpha\big(a(x,D^2)-a(x,D^2)\big)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\gamma+\delta)\|\Delta u-\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Όμως, $\gamma+\delta<1$ εξ υποθέσεως της συνθήκης (A^2) (3.7), επομένως ο τελεστής $a(x,D^2u)$ είναι εγγύς του τελεστή Laplace.

Για το πρόβλημα Dirichlet για μη γραμμικά συστήματα

$$\begin{cases} a(x,D^2u)=f(x)\in L^2(\Omega)\ \sigma.\pi.\ x\in\Omega \\ u\in W_{\gamma_0}^{2,2}(\Omega) \end{cases} \tag{4.1}$$

όπου ο τελεστής $a(x,D^2)$ ικανοποιεί την συνθήκη (A^2) (3.7), η θεωρία εγγύτητας τελεστών εφαρμόζεται για την απόδειξη της επιλυσημότητας του. Για τον τελεστή

$$a(x,D^2): W_{\gamma_0}^{2,2}(\Omega)\to L^2(\Omega),$$

η ύπαρξη μοναδικής λύσης συνεπάγεται οτι ο τελεστής $a(x,D^2)$ ειναι αντιστρέψιμος. Αυτό όμως, είναι άμεσο επακόλουθο της θεωρίας προηγούμενων ενοτήτων.

Θεώρημα 4.1([2]) Έστω $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο και κυρτό πεδίο ορισμού κλάσης C^2. Έστω επίσης πως η διανυσματική συνάρτηση $a(x,\xi):\Omega\times\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}^N$ ικανοποιεί την διανυσματική συνθήκη (A^2) (3.7). Τότε το πρόβλημα Dirichlet (4.1) έχει μοναδική λύση $u\in W_{\gamma_0}^{2,2}(\Omega)$ για κάθε $f\in L^2(\Omega)$. Επιπλέον, ισχύει

$$\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}\leq\frac{\alpha}{1-\sqrt{\gamma+\delta}}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Απόδειξη: Έχει ήδη δειχθεί πως αν ο τελεστής $a(x,D^2)$ ικανοποιεί την διανυσματική συνθήκη (A^2) (3.7), τότε είναι εγγύς του τελεστή Laplace για $\alpha>0$ και $K=\sqrt{\gamma+\delta}<1$. Είναι γνωστό πως το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Poisson $\Delta u=f, u=(u^1,...u^N), f=(f^1,...,f^N)$ έχει μοναδική λύση στο $W_{\gamma_0}^{2,p}(\Omega)$ για κάθε $p>1$ ([13]), δηλαδή ο τελεστής Laplace είναι ένα προς ένα και επί. Τότε από την πρόταση 1.5, για κάθε $f\in L^2(\Omega)$ το πρόβλημα Dirichlet (4.1) έχει μοναδική λύση στο $W_{\gamma_0}^{2,2}(\Omega)$ και ισχύει

$$\|\Delta u-\Delta v\|_{L^2(\Omega)}\leq\frac{\alpha}{1-\sqrt{\gamma+\delta}}\|f-a(x,D^2v)\|_{L^2(\Omega)}$$

Για $v = 0 \Rightarrow D^2 0 = 0$ και λόγω της (A^2) (3.7) ισχύει $a(x,0) = 0$. Επίσης από την ανισότητα Miranda-Talenti ισχύει

$$\int_\Omega \|D^2u\|^2_{n^2N} dx \leq \int_\Omega \|\Delta u\|^2_N dx \Rightarrow \Big(\int_\Omega \|D^2u\|^2_{n^2N} dx\Big)^{1/2} \leq \Big(\int_\Omega \|\Delta u\|^2_N dx\Big)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\|D^2u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \ \square$$

Η εγγύτητα εξασφαλίζει την επιλυσημότητα του προβλήματος Dirichlet και για μη γραμμικά ελλειπτικά συστήματα σε χώρους $W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)$, όπου $p \in [2, p_0)$

Θεώρημα 4.2([2]) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο και κυρτό πεδίο ορισμού κλάσης C^2. Έστω επίσης πως η διανυσματική συνάρτηση $a(x,\xi) : \Omega \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^N$ ικανοποιεί την διανυσματική συνθήκη (A^2) (3.7). Τότε το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} a(x, D^2u) = f(x) \sigma.\pi.\ \Omega \\ u \in W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega) \end{cases} \tag{4.2}$$

έχει μοναδική λύση για κάθε $p \in [2, p_0)$, όπου $p_0 > 2$, η οποία ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|D^2u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Απόδειξη: Όπως στην αρχή του κεφαλαίου, εφόσον ο τελεστής $a(x, D^2u)$ ικανοποιεί την διανυσματική συνθήκη (A^2) 3.7, τότε από το λήμμα (3.1) ισχύει

$$\|a(x, D^2(x)\|_N \leq \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{nN}(1+\sqrt{\delta})}{a}\|D^2u(x)\|_{n^2N} \Rightarrow$$

$$\|a(x, D^2(x)\|_N \leq \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{nN}(1+\sqrt{\delta})}{a}\Big(\sum_{i,j=1}^n \|D_{ij}u\|^2_N\Big)^{1/2}$$

$$\|a(x, D^2(x)\|^p_N \leq \Big(\frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{nN}(1+\sqrt{\delta})}{a}\Big)^p\Big(\sum_{i,j=1}^n \|D_{ij}u\|^2_N\Big)^{p/2}$$

$$\int_\Omega \|a(x, D^2(x)\|^p_N dx \leq \Big(\frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{nN}(1+\sqrt{\delta})}{a}\Big)^p \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n \|D_{ij}u\|^2_N\Big)^{p/2} dx$$

$$\Big(\int_\Omega \|a(x, D^2(x)\|^p_N dx\Big)^{1/p} \leq \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{nN}(1+\sqrt{\delta})}{a}\Big(\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n \|D_{ij}u\|^2_N\Big)^{p/2} dx\Big)^{1/p}$$

$$\|a(x, D^2u)\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{nN}(1+\sqrt{\delta})}{a}\|u\|_{W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)}$$

άρα, ο τελεστής ο $a(x, D^2u)$ δρά από τον χώρο $W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)$ στον $L^p(\Omega)$.

Η συνάρτηση $h(x) = x^p$, $p > 1$ είναι κυρτή για θετικά x, άρα για $a, b > 0$, αποδεικνύεται η ανισότητα

$$\Big|\frac{1}{2}2a + \frac{1}{2}2b\Big|^{p/2} \leq \frac{1}{2}(2a)^{p/2} + \frac{1}{2}(2b)^{p/2} \Rightarrow |a+b|^{p/2} \leq 2^{(p-2)/2}\big(a^{p/2} + b^{p/2}\big)$$

Έχει ήδη αναφερθεί ([13]) πως το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Poisson

$$\Delta u = f, \qquad u \in W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)$$

έχει μοναδική λύση, η οποία ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|u\|_{W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)} \leq C(p)\|f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{4.3}$$

Οπότε με αντικατάσταση των νορμών, λαμβάνουμε

$$\|D^2u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \|D^2u\|^p_{n^2N}dx\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij}u\|^2_N\Big)^{p/2} dx\right)^{1/p} = \|u\|_{W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)}$$
$$\leq C(p)\|f\|_{L^p(\Omega)} = C(p)\|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}$$

Βάσει των παραπάνω αποτελεσμάτων, ξεκινώντας από την συνθήκη (A^2) (3.7) για διανυσματικές συναρτήσεις, αποδεικνύεται η εγγύτητα μεταξύ των τελεστών $a(x, D^2u)$ και Laplace

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|^2_N \leq$$
$$\gamma\|D^2(u-v)\|^2_{n^2N} + \delta\|\Delta(u-v)(x)\|^2_N \Rightarrow$$

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|^p_N \leq$$
$$\Big(\gamma\|D^2(u-v)\|^2_{n^2N} + \delta\|\Delta(u-v)(x)\|^2_N\Big)^{p/2} \Rightarrow$$

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|^p_N \leq$$
$$2^{\frac{p-2}{2}}\Big(\gamma^{\frac{p}{2}}\|D^2(u-v)\|^p_{n^2N} + \delta^{\frac{p}{2}}\|\Delta(u-v)\|^p_N\Big) \Rightarrow$$

$$\int_\Omega \|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|^p_N dx \leq$$
$$2^{\frac{p-2}{2}}\Big(\gamma^{\frac{p}{2}}\int_\Omega \|D^2(u-v)\|^p_{n^2N}dx + \delta^{\frac{p}{2}}\int_\Omega \|\Delta(u-v)\|^p_N dx\Big) \Rightarrow$$

$$\Big(\int_\Omega \|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|^p_N dx\Big)^{1/p} \leq$$
$$2^{\frac{p-2}{2p}}\Big(\gamma^{\frac{p}{2}}\|D^2(u-v)\|^p_{L^p(\Omega)} + \delta^{\frac{p}{2}}\|\Delta(u-v)\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p} \Rightarrow$$

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|_{L^p(\Omega)} \leq$$
$$2^{\frac{p-2}{2p}}\Big(\gamma^{\frac{p}{2}}C(p)^p\|\Delta(u-v)\|^p_{L^p(\Omega)} + \delta^{\frac{p}{2}}\|\Delta(u-v)\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p} \Rightarrow$$

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|_{L^p(\Omega)} \leq K(p)\|\Delta(u-v)\|_{L^p(\Omega)}$$

Όπου $K(p) = 2^{\frac{p-2}{2p}}\Big(\gamma^{\frac{p}{2}}C(p)^p + \delta^{\frac{p}{2}}\Big)^{1/p}$. Για την συνάρτηση $K(p)$ ισχύει

$$\lim_{p\to\ 2^+} K(p) = \sqrt{\gamma+\delta},$$

γιατί όπως έχει δειχθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο $\lim_{p\to\, 2^+} C(p) = 1$ και εφόσον οι σταθερές γ, δ είναι αυτές που ικανοποιούν την (A^2), δηλαδή $\gamma + \delta < 1$, τότε $\lim_{p\to\, 2^+} K(p) < 1$. Άρα, εφόσον η συνάρτηση $K(p)$ είναι συνεχής, υπάρχει $p_0 > 2$ τέτοιο ώστε για κάθε $p \in [2, p_0)$, να ισχύει $K(p) < 1$, που αποδεικνύει την εγγύτητα μεταξύ των τελεστών $a(x, D^2u)$ και Laplace.

Εφόσον λοιπόν, οι δυο τελεστές ειναι εγγείς και ο τελεστής Laplace είναι ένα προς ένα ([6]), τότε από την πρόταση 1.5, το πρόβλημα (4.2) έχει μοναδική λύση, για την οποία ισχύει

$$\|D^2u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

όπου $C = \frac{a}{1-K(p)}$. $\square$

Το πρόβλημα Dirichlet (4.2) μπορεί να μελετηθεί και για μη-κυρτούς χώρους. Σε αυτήν την περίπτωση όμως, η ανισότητα Miranda-Talenti δεν ισχύει και η (4.3) θα πρέπει να ισχύει πλέον για $C(2) \geq 1$, ενώ η (A^2) μετατρέπεται στην

Συνθήκη (A^{2*}) Υπάρχουν θετικές σταθερές α, γ, δ, τέτοιες ώστε $\gamma + \delta < 1$ και

$$\begin{cases} \|Tr\tau - \alpha(a(x, \xi + \tau) - a(x, \xi))\|_N^2 \leq \frac{\gamma}{C^2(2)}\|\tau\|_{n^2N}^2 + \delta\|Tr\tau\|_N^2 \\ a(x, 0) = 0 \end{cases}$$

για κάθε $\xi, \tau \in \mathbb{R}^{n^2N}$ και σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$.

Τότε, όπως προηγουμένως, για δύο τυχόν $u, v \in W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega)$ και θέτοντας $\xi = \{D^2v\}, \tau = \{D^2(u-v)\}$, λαμβάνουμε

$$\int_\Omega \|\Delta(u-v) - \alpha(a(x, D^2u) - a(x, D^2v))\|_N^2 dx \leq$$

$$\frac{\gamma}{C^2(2)} \int_\Omega \|D^2(u-v)\|_{n^2N}^2 dx + \delta \int_\Omega \|\Delta(u-v)\|_N^2 dx \Rightarrow$$

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x, D^2u) - a(x, D^2v))\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq$$

$$\frac{\gamma}{C^2(2)}\|D^2(u-v)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta\|\Delta(u-v)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Όμως, ισχύει

$$\begin{aligned} \|D^2u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p)\|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} \Rightarrow \|D^2u\|_{L^2(\Omega)} &\leq C(2)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|D^2u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C^2(2)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x, D^2u) - a(x, D^2v))\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\gamma + \delta)\|\Delta(u-v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \Rightarrow$$

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x, D^2u) - a(x, D^2v))\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\gamma + \delta}\|\Delta(u-v)\|_{L^2(\Omega)}$$

επομένως ο τελεστής Laplace είναι εγγύς του τελεστή $a(x, D^2u)$, αφού $\sqrt{\gamma + \delta} < 1$.

Παρομοίως, κάνοντας χρήση της (4.3) για $C(p) \geq 1$ για τυχόν $p > 1$, αποδεικνύεται η εγγύτητα του τελεστή Laplace στον τελεστή $a(x, D^2u)$, υποθέτοντας οτι ο τελεστής $a(x,\xi)$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη

Συνθήκη (A_p). Υπάρχουν θετικές σταθερές α, γ, δ, τέτοιες ώστε $\gamma + \delta < 1$ και

$$\begin{cases} \|Tr\tau - \alpha(a(x,\xi+\tau) - a(x,\xi))\|_N \leq \frac{\gamma}{C^{1/p}(p)}\|\tau\|_{n^2N} + \delta\|Tr\tau\|_N \\ a(x,0) = 0 \end{cases}$$

για κάθε $\xi, \tau \in \mathbb{R}^{n^2N}$ και σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$.

Έτσι, αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα ([5]).

Θεώρημα 4.3 Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο πεδίο ορισμού κλάσης C^2 και έστω πως η διανυσματική συνάρτηση $a(x,\xi)$ ικανοποιεί την (A_p). Τότε, ο τελεστής $a(x, D^2u)$ είναι εγγύς στον τελεστή Laplace και το πρόβλημα (4.2) έχει μοναδική λύση για κάθε $f \in L^p(\Omega)$.

Απόδειξη: Έχει ήδη δειχθεί στο προηγούμενο θεώρημα ότι και οι δύο τελεστές δρούν από τον $W^{2,p}_{\gamma_0}(\Omega)$ στον $L^p(\Omega)$.

Έστω η συνάρτηση $F(x,y) = (\gamma+\delta)^{p-1}(\gamma x^p + \delta y^p) - (\gamma x + \delta y)^p,\ x, y \geq 0,\ p > 1$

$$\begin{gathered} F_x(x,y) = p(\gamma+\delta)^{p-1}\gamma x^{p-1} - p(\gamma x + \delta y)^{p-1}\gamma \\ F_y(x,y) = p(\gamma+\delta)^{p-1}\delta y^{p-1} - p(\gamma x + \delta y)^{p-1}\delta \\ F_x(x,y) = F_y(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \end{gathered}$$

Άρα, τα σημεία της ευθείας $x = y$ είναι κρίσιμα σημεία της $F(x,y)$.

$$\begin{gathered} f_1(x) = F(x,0) = (\gamma+\delta)^{p-1}\gamma x^p - \gamma^p x^p = \gamma x^p\big((\gamma+\delta)^{p-1}\gamma x^p - \gamma^{p-1}\big) \\ f_1'(x) = p\gamma x^{p-1}\big((\gamma+\delta)^{p-1}\gamma x^p - \gamma^{p-1}\big) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_1''(x) = p(p-1)\gamma x^{p-2}\big((\gamma+\delta)^{p-1}\gamma x^p - \gamma^{p-1}\big) > 0 \end{gathered}$$

Συνεπώς, το 0 είναι ελάχιστο της $F(x,0)$. Αντίστοιχα,

$$\begin{gathered} f_2(y) = F(0,y) = (\gamma+\delta)^{p-1}\delta y^p - \delta^p y^p = \delta y^p\big((\gamma+\delta)^{p-1}\delta x^p - \delta^{p-1}\big) \Rightarrow \\ f_2'(y) = p\delta y^{p-1}\big((\gamma+\delta)^{p-1}\delta y^p - \delta^{p-1}\big) = 0 \Rightarrow y = 0 \\ f_2''(y) = p(p-1)\delta y^{p-2}\big((\gamma+\delta)^{p-1}\gamma x^p - \gamma^{p-1}\big) > 0 \end{gathered}$$

το 0 είναι ελάχιστο της $F(0,y)$. Συνεπάγεται τότε ότι $F(x,y) \geq F(0,0) = 0$, δηλαδή

$$(\gamma+\delta)^{p-1}(\gamma x^p + \delta y^p) \geq (\gamma x + \delta y)^p \tag{4.4}$$

Από την υπόθεση ότι η διανυσματική συνάρτηση $a(x,\xi)$ ικανοποιεί την (A_p) και την παραπάνω ανισότητα, θέτοντας $\xi = \{D^2 v\}, \tau = \{D^2(u-v)\}$

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|_N \leq \frac{\gamma}{C^{1/p}(p)}\|D^2(u-v)\|_{n^2N} + \delta\|\Delta(u-v)\|_N \Rightarrow$$

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|_N^p \leq \left(\frac{\gamma}{C^{1/p}(p)}\|D^2(u-v)\|_{n^2N} + \delta\|\Delta(u-v)\|_N\right)^p$$

$$\leq \left(\frac{\gamma}{C^{1/p}(p)} + \delta\right)^{p-1}\left(\frac{\gamma}{C^{1/p}(p)}\|D^2(u-v)\|_{n^2N}^p + \delta\|\Delta(u-v)\|_N^p\right) \Rightarrow$$

$$\int_\Omega \|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|_N^p dx \leq$$
$$\left(\frac{\gamma}{C^{1/p}(p)} + \delta\right)^{p-1}\left(\frac{\gamma}{C^{1/p}(p)}\int_\Omega \|D^2(u-v)\|_{n^2N}^p dx + \delta\int_\Omega \|\Delta(u-v)\|_N^p dx\right) \Rightarrow$$

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|_{L^p(\Omega)}^p \leq$$
$$\left(\frac{\gamma}{C^{1/p}(p)} + \delta\right)^{p-1}\left(\frac{\gamma}{C^{1/p}(p)}\|D^2(u-v)\|_{L^p(\Omega)}^p + \delta\|\Delta(u-v)\|_{L^p(\Omega)}^p\right) \Rightarrow$$

Ισχύει όμως, $\|D^2u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p)\|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} \Rightarrow \|D^2u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C^p(p)\|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}^p$ επομένως,

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|_{L^p(\Omega)}^p \leq$$
$$\left(\frac{\gamma}{C^{1/p}(p)} + \delta\right)^{p-1}\left(\gamma\|\Delta(u-v)\|_{L^p(\Omega)}^p + \delta\|\Delta(u-v)\|_{L^p(\Omega)}^p\right) \Rightarrow$$

$$\|\Delta(u-v) - \alpha(a(x,D^2u) - a(x,D^2v))\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{\gamma}{C^{1/p}(p)} + \delta\right)^{\frac{p-1}{p}}(\gamma+\delta)^{1/p}\|\Delta(u-v)\|_{L^p(\Omega)}$$

Εξ' υποθέσεως $\gamma + \delta < 1$ και $C(p) \geq 1$, άρα οι τελεστές είναι εγγείς μεταξύ τους και εφόσον ο Laplace είναι ένα προς ένα και επί από την πρόταση 1.5, το πρόβλημα (4.2) έχει μοναδική λύση για κάθε $f \in L^p(\Omega)$. $\square$

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να εφαρμοστούν σε συστήματα μη γραμμικών τελεστών $a(x,u,Du,D^2u)$, όπου η Καραθεοδωρή συνάρτηση $a(x,z,p,\xi)$ ικανοποιεί την κατάλληλη εκδοχή της συνθήκης (A^2).

Θεώρημα 4.4 Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο και κυρτό πεδίο ορισμού κλάσης C^2 και έστω πως η Καραθεοδωρή διανυσματική συνάρτηση $a(x,z,p,\xi) : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2N} \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, ικανοποιεί την ακόλουθη διανυσματική συνθήκη (A^2) υπάρχουν θετικές σταθερές α, γ, δ, τέτοιες ώστε $\gamma + \delta < 1$ και

$$\begin{cases} \|Tr\tau - \alpha(a(x,z,p,\xi+\tau) - a(x,z,p,\xi))\|_N^2 \leq \gamma\|\tau\|_{n^2N}^2 + \delta\|Tr\tau\|_N^2, \\ a(x,z,p,0) = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$ και όλα τα $z \in \mathbb{R}^N, p \in \mathbb{R}^{nN}, \xi \in \mathbb{R}^{n^2N}$. Τότε, ο τελεστής

$$a(x, u, Du, D^2u) : W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

είναι εγγύς στον Laplace, άρα για κάθε $f \in L^2(\Omega)$ το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} a(x, u, Du, D^2u) = f(x) \quad \sigma.\pi.\ \Omega \\ u \in W^{2,2}_{\gamma_0}(\Omega) \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση που ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|D^2u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

4.1 Θεώρημα Τοπικής Επιλυσιμότητας

Η θεωρία εγγύτητας τελεστών μπορεί να εφαρμοστεί και για την μελέτη μη γραμμικών συστημάτων της μορφής

$$a(x, u, Du, D^2u) = f(x, u, Du)\ \sigma.\pi.\ \Omega,$$

όπου, όπως προηγουμένως, οι διανυσματικές συναρτήσεις $a(x, z, p, \xi)$ και $f(x, z, p)$ ικανοποιούν την συνθήκη του Καραθεοδωρή. Το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύει την ύπαρξη μοναδικής λύσης του προβλήματος Dirichlet για το παραπάνω σύστημα σε ένα πεδίο ορισμού με αρκετά μικρό μέτρο ([5]).

Θεώρημα 4.5 Έστω η διανυσματική συναρτήση $a(x, z, p, \xi)$ που ικανοποιεί την (4.5) και έστω πως η διανυσματική συνάρτηση $f(x, z, p)$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|f(x, z, p)\|_N \leq C(f(x) + \|z\|_N + \|p\|_{nN}) \tag{4.6}$$

για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$ και για κάθε $(z, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$, $f \in L^2(\Omega)$. Τότε υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $r \leq r_0$, το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} a(x, u, Du, D^2u) = f(x, u, Du)\ \sigma.\pi.\ B(r) \\ u \in W^{2,2}(B(r)) \cap W^{1,2}_0(B(r)) \end{cases} \tag{4.7}$$

έχει τουλάχιστον μια λύση, όπου η μπάλα $B(r)$ με κέντρο ένα τυχόν σημείο του Ω και ακτίνα r είναι υποσύνολο του Ω.

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \Omega$ και η μπάλα $B(r)$ με κέντρο το x_0. Ορίζουμε το σύνολο

$$\Sigma = \left\{ u \in W^{1,2}_0(B(r)) : \int_{B(r)} \|Du\|^2_{nN} dx \leq M \right\},$$

όπου $M > 0$ τυχόν σταθερά. Τότε, για κάθε $u \in \Sigma$ θεωρούμε το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \bar{a}(x, D^2U) = \bar{f}(x)\ \sigma.\pi.\ B(r), \\ U \in W^{2,2}(B(r)) \cap W^{1,2}_0(B(r)), \end{cases} \tag{4.8}$$

όπου $\bar{a}(x, D^2U) = a(x, u(x), Du(x), D^2U)$ και $\bar{f}(x) = f(x, u(x), Du(x))$. Εφόσον η συνάρτηση $a(x, z, p, \xi)$ ικανοποιεί την (4.5)

$$\begin{aligned}\|Tr\tau - \alpha\big(\bar{a}(x, \xi + \tau) - \bar{a}(x, \xi)\big)\|_N^2 = \|Tr\tau - \alpha\big(\bar{a}(x, z, p, \xi + \tau) - \bar{a}(x, z, p, \xi)\big)\|_N^2 \\ \leq \gamma\|\tau\|_{n^2N}^2 + \delta\|Tr\tau\|_N^2\end{aligned}$$

η $\bar{a}(x, \xi)$ θα ικανοποιεί την (3.7). Επιπλέον, δεδομένω της (4.6) και της ανισότητας Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}\int_{B(r)} \|\bar{f}(x)\|_N^2 dx = \int_{B(r)} \|f(x, u, Du)\|_N^2 dx \leq C^2 \int_{B(r)} (f(x) + \|u\|_N + \|Du\|_{nN})^2 dx \leq \\ 3C^2 \int_{B(r)} (|f(x)|^2 + \|u\|_N^2 + \|Du\|_{nN}^2) dx\end{aligned}$$

όμως από τα δεδομένα του θεωρήματος και από τον τρόπο που ορίσαμε το σύνολο Σ, ισχύει $f(x) \in L^2(B(r))$ και $u \in W_0^{1,2}(B(r)) \subset L^2(B(r))$ άρα

$$\int_{B(r)} \|\bar{f}(x)\|_N^2 dx \leq M^*(f, u),$$

για καποιο $M^*(f, u) > 0$, δηλαδή $\bar{f}(x) \in L^2(B(r))$. Η μπάλα $B(r)$ είναι φραγμένο και κυρτό σύνολο κλάσης C^2 τότε, από το θεώρημα 4.1, το πρόβλημα (4.8) έχει μοναδική λύση για την οποία ισχύει

$$\begin{aligned}\|D^2U\|_{L^2(B(r))} \leq C^*\|\bar{f}(x)\|_{L^2(B(r))} \Rightarrow \int_{B(r)} \|D^2U\|_{n^2N}^2 dx \leq C^* \int_{B(r)} \|\bar{f}(x)\|_N^2 dx \\ \leq C^* M^*(f, u)\end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υπάρχει τελεστής

$$\mathcal{T} : \Sigma \to W^{2,2}(B(r)) \cap W_0^{1,2}(B(r))$$

τέτοιος ώστε $\mathcal{T}u = U$. Από την παραπάνω ανισότητα παρατηρείται

$$\|U\|_{W_{\gamma_0}^{2,2}(B(r))} = \|D^2U\|_{L^2(B(r))} \leq C^* M^*(f, u)$$

δηλαδή η εικόνα $\mathcal{T}\Sigma \subset W^{2,2}(B(r)) \cap W_0^{1,2}(B(r))$ του συνόλου Σ μέσω του τελεστή $\mathcal{T}$ είναι φραγμένη. Η κλειστότητα του συνόλου $\mathcal{T}\Sigma$ είναι προφανώς κλειστή και ο χώρος $W^{2,2}(B(r)) \cap W_0^{1,2}(B(r))$ συμπαγής άρα και η κλειστότητα του συνόλου $\mathcal{T}\Sigma$ είναι προφανώς συμπαγής. Από την ανισότητα Poincare (Α΄.3) για $DU \in W_0^{1,2}(B(r))$ και μέτρο Lebesgue $|\Omega| = |B(r)| = w_n r^n$ όπου w_n είναι ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας, λαμβάνουμε

$$\|Du\|_{L^2(B(r))} \leq \Big(\frac{1}{w_n}|B(r)|\Big)^{1/n} \|D^2u\|_{L^2(B(r))} \Rightarrow$$

$$\Big(\int_{B(r)} \|DU\|_{nN}^2 dx\Big)^{1/2} \leq \Big(\frac{1}{w_n}|B(r)|\Big)^{1/n} \Big(\int_{B(r)} \|D^2U\|_{n^2N}^2 dx\Big)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\int_{B(r)} \|DU\|_{nN}^2 dx \leq \Big(\frac{1}{w_n}|B(r)|\Big)^{2/n} \int_{B(r)} \|D^2U\|_{n^2N}^2 dx \leq r^2 C^* M^*(f, u)$$

Προφανώς, υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε $r^2 C^* M^*(f,u) \leq M$ για κάθε $r \leq r_0$, άρα τα στοιχεία της εικόνας $\mathcal{T}\Sigma$ ανήκουν στο Σ για $r \leq r_0$ και η κλειστότητα του $\mathcal{T}\Sigma$ είναι συμπαγής στο Σ αν $r \leq r_0$.

Έστω τώρα ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \in W_0^{1,2}(B(r))$ συγκλίνουσα στο $u_0 \in W_0^{1,2}(B(r))$ και ακολουθία

$$U_k = \mathcal{T} u_k \in W^{2,2}(B(r)) \cap W_0^{1,2}(B(r))$$

και

$$U_0 = \mathcal{T} u_0 \in W^{2,2}(B(r)) \cap W_0^{1,2}(B(r))$$

δηλαδή

$$a(x, u_k, Du_k, D^2U_k) = f(x, u_k, Du_k) \Rightarrow -\alpha a(x, u_k, Du_k, D^2U_k) + \alpha f(x, u_k, Du_k) = 0$$

και

$$a(x, u_0, Du_0, D^2U_0) = f(x, u_0, Du_0) \Rightarrow -\alpha a(x, u_0, Du_0, D^2U_0) + \alpha f(x, u_0, Du_0) = 0$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ισότητες κατά μέλη, προσθέτοντας $\Delta(U_k - U_0)$ $+ \alpha a(x, u_k, Du_k, D^2U_0)$ σε κάθε μέλος και αναδιατάσοντας τους όρους λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\Delta(U_k - U_0) =& \Delta(U_k - U_0) - \alpha\Big(a(x, u_k, Du_k, D^2U_k) - a(x, u_k, Du_k, D^2U_0)\Big) \\
&+ \alpha\Big(a(x, u_0, Du_0, D^2U_0) - a(x, u_k, Du_k, D^2U_0)\Big) \\
&+ \alpha\Big(f(x, u_k, Du_k) - f(x, u_0, Du_0)\Big) \Rightarrow \\
\|\Delta(U_k - U_0)\|_N =& \|\Delta(U_k - U_0) - \alpha\Big(a(x, u_k, Du_k, D^2U_k) - a(x, u_k, Du_k, D^2U_0)\Big) \\
&+ \alpha\Big(a(x, u_0, Du_0, D^2U_0) - a(x, u_k, Du_k, D^2U_0)\Big) \\
&+ \alpha\Big(f(x, u_k, Du_k) - f(x, u_0, Du_0)\Big)\|_N \leq \\
&\|\Delta(U_k - U_0) - \alpha\Big(a(x, u_k, Du_k, D^2U_k) - a(x, u_k, Du_k, D^2U_0)\Big)\|_N \\
&+ \alpha\|a(x, u_0, Du_0, D^2U_0) - a(x, u_k, Du_k, D^2U_0)\|_N \\
&+ \alpha\|f(x, u_k, Du_k) - f(x, u_0, Du_0)\|_N \Rightarrow \\
\|\Delta(U_k - U_0)\|_N^2 \leq& \Bigg(\|\Delta(U_k - U_0) - \alpha\Big(a(x, u_k, Du_k, D^2U_k) - a(x, u_k, Du_k, D^2U_0)\Big)\|_N \\
&+ \alpha\|a(x, u_0, Du_0, D^2U_0) - a(x, u_k, Du_k, D^2U_0)\|_N \\
&+ \alpha\|f(x, u_k, Du_k) - f(x, u_0, Du_0)\|_N\Bigg)^2
\end{aligned}$$

Για διευκόλυνση, θα αντικαταστήσουμε τον πρώτο όρο στο δεξί μέλος με a, τον δεύτερο με b και τον τρίτο με c. Τότε, μέσω της ανισότητας Young

$$(a + b + c)^2 = a^2 + (b + c)^2 + 2a(b + c) \leq a^2 + (b + c)^2 + \varepsilon a^2 + \frac{(b + c)^2}{\varepsilon} =$$
$$(1+\varepsilon)a^2 + (1+\frac{1}{\varepsilon})(b+c)^2 = (1+\varepsilon)a^2 + (1+\frac{1}{\varepsilon})(b^2+c^2+2bc) \leq (1+\varepsilon)a^2 + 2(1+\frac{1}{\varepsilon})(b^2+c^2)$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\|\Delta(U_k-U_0)\|_N^2 \leq &(1+\varepsilon)\|\Delta(U_k-U_0)-\alpha\Big(a(x,u_k,Du_k,D^2U_k)-a(x,u_k,Du_k,D^2U_0)\Big)\|_N^2\\ &+2\alpha(1+\frac{1}{\varepsilon})\Bigg(\|a(x,u_0,Du_0,D^2U_0)-a(x,u_k,Du_k,D^2U_0)\|_N^2\\ &+\|f(x,u_k,Du_k)-f(x,u_0,Du_0)\|_N^2\Bigg)\end{aligned}$$

Όμως $\Delta(U_k-U_0)=TrD^2(U_k-U_0)$, άρα απο την (4.5) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\|\Delta(U_k-U_0)\|_N^2 \leq &(1+\varepsilon)\big(\delta\|\Delta(U_k-U_0)\|_N^2+\gamma\|D^2(U_k-U_0)\|_{n^2N}^2\big)\\ &+C(\alpha,\varepsilon)\Bigg(\|a(x,u_0,Du_0,D^2U_0)-a(x,u_k,Du_k,D^2U_0)\|_N^2\\ &+\|f(x,u_k,Du_k)-f(x,u_0,Du_0)\|_N^2\Bigg)\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας στην μπαλα $B(r)$, η ανισότητα Miranda-Talenti επιστρέφει

$$\begin{aligned}\int_{B(r)}\|\Delta(U_k-U_0)\|_N^2dx \leq &(1+\varepsilon)(\gamma+\delta)\int_{B(r)}\|\Delta(U_k-U_0)\|_N^2dx\\ &+C(\alpha,\varepsilon)\Bigg(\|a(x,u_0,Du_0,D^2U_0)-a(x,u_k,Du_k,D^2U_0)\|_N^2\\ &+\|f(x,u_k,Du_k)-f(x,u_0,Du_0)\|_N^2\Bigg)\end{aligned}$$

και επιλέγοντας ε τέτοιο ώστε $(1+\varepsilon)(\gamma+\delta)<1$

$$\begin{gathered}\big[1-(1+\varepsilon)(\gamma+\delta)\big]\int_{B(r)}\|\Delta(U_k-U_0)\|_N^2dx \leq\\ C(\alpha,\varepsilon)\Bigg(\|a(x,u_0,Du_0,D^2U_0)-a(x,u_k,Du_k,D^2U_0)\|_N^2\\ +\|f(x,u_k,Du_k)-f(x,u_0,Du_0)\|_N^2\Bigg)\\ \Rightarrow \int_{B(r)}\|D^2(U_k-U_0)\|_N^2dx \leq \int_{B(r)}\|\Delta(U_k-U_0)\|_N^2dx\\ \leq C^*(\alpha,\varepsilon)\Bigg(\|a(x,u_0,Du_0,D^2U_0)-a(x,u_k,Du_k,D^2U_0)\|_N^2\\ +\|f(x,u_k,Du_k)-f(x,u_0,Du_0)\|_N^2\Bigg)\end{gathered}$$

Οι τελεστές $u\to a(x,u,Du,\xi)$ και $u\to f(x,u,Du)$ είναι συνεχείς τελεστές ([12, θεώρημα 16.11]) από το $W_0^{1,2}(B(r))$ στο $L^2(B(r))$. Τότε το δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας τείνει στο 0 καθώς το k τείνει στο 0. Άρα $U_k\to U_0$ καθώς το k τείνει στο 0 δηλαδή ο τελεστής $\mathcal{T}$ είναι συνεχής.

Άρα, από το θεώρημα των Birkhoff-Kellogg-Schauder ([13,Corollary 11.2]) ο τελεστής $\mathcal{T}$ έχει ένα σταθερό σημείο δηλαδή υπάρχει $u\in W_0^{1,2}(B(r))$ τέτοιο ώστε $u=\mathcal{T}u$ και κατ΄ επέκταση το πρόβλημα (4.7) έχει τουλάχιστον μια λύση. $\square$

Παράρτημα Α΄

Μαθηματικό Συμπλήρωμα

Α΄.1 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Ορισμός Α΄.1.1 Διανυσματικός χώρος ονομάζεται ένα μη κενό σύνολο X εφοδιασμένο με τις πράξεις $+ : (x, y) \to x+y : X \times X \to$ και $\cdot : (\lambda, x) \to \lambda x : \mathbb{C} \times X \to X$, έτσι ώστε για κάθε $x, y, z \in X, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ να ισχύουν

- $x + y = y + x$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $\forall\, x, y \in X \exists z \in X : x + y = z$
- $\kappa(\lambda x) = (\kappa\lambda)x$
- $(\kappa + \lambda)x = \kappa x + \lambda x$
- $\kappa(x + y) = \kappa x + \kappa y$
- $1x = x$
- $\exists 0 \in X : 0 + x = x + 0 = x$

Ορισμός Α΄.1.2 Έστω X διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα, αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $\lambda \in X$

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Παρατήρηση: Στον $\mathbb{R}^{n^2}$ ορίζεται η ευκλείδια νόρμα $\|A\|_{n^2} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$.

Πρόταση Α΄.1.3 Κάθε νόρμα είναι κυρτή συνάρτηση.

Απόδειξη:

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1-\alpha)y\| \leq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\|$$

Πρόταση Α΄.1.4 Το ίχνος ενός πίνακα $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ είναι το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του

$$TrA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Πρόταση Α΄.1.5 Το ίχνος του πίνακα ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του.

Απόδειξη: Έστω $A \in \Pi_n(K)$. Αν για τις ιδιοτιμές του πίνακα Α ισχύει $\lambda_i \in K$, τότε υπάρχουν πίνακες P, D, τέτοιοι ώστε $A = PDP^*$. Ο πίνακας D είναι τριγωνικός και όμοιος του Α, συνεπώς έχει το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και κατ΄ επέκταση τις ίδιες ιδιοτιμές.

$$TrA = Tr(PDP^*) = Tr(P^*PD) = TrD = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

Πρόταση Α΄.1.6 Για πίνακα $A = \{a_{ij}\} \in \Pi_n(K)$ με ιδιοτιμές $\lambda_i \in K$, ισχύει: $\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij})^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^2$

Απόδειξη: Ισχύει $A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$. Επομένως, οι ιδιοτιμές του πίνακα A^2 είναι τα τετράγωνα των ιδιοτιμών του πίνακα Α. Συνεπώς, σύμφωνα με το παραπάνω $TrA^2 = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^2$. Ως γνωστόν για το ίχνος γινομένου πινάκων ισχύει $Tr(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$. Αν Α=Β τότε $\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij})^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^2$.

Α΄.2 Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Ορισμός Α΄.2.1 Έστω ένα σύνολο X και $P(X)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του. Το υποσύνολο $\Sigma \subseteq P(X)$ καλείται σ-άλγεβρα αν ικανοποιεί τις ιδιότητες

- $\emptyset \in \Sigma$
- $Y \in \Sigma \Rightarrow Y^c \in \Sigma$
- $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma, \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} Y_n \in \Sigma$

Ορισμός Α΄.2.2 Έστω ένα σύνολο X και μια σ-άλγεβρα Σ στο X. Η συνάρτηση $\mu : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ λέγεται μέτρο αν ικανοποιεί τις ιδιότητες

- $Y \in \Sigma \Rightarrow \mu(Y) \geq 0$
- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma,\ Y_n \cap Y_m\ \forall\ n \neq m \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu\Big(\cup_{n=1}^{\infty} Y_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Y_n)$

Ορισμός A′.2.3 Έστω ένα σύνολο X και μια σ-άλγεβρα Σ στο X. Το ζεύγος (X, Σ) λέγεται μετρήσιμος χώρος.

Ορισμός A′.2.4 Έστω ένα σύνολο X, μια σ-άλγεβρα Σ στο X και ένα μέτρο μ στον $= (X, \Sigma)$. Η τριάδα (X, Σ, μ) λέγεται χώρος μέτρου.

Ορισμός A′.2.5 Έστω (X, Σ) και (Y, T) μετρήσιμοι χώροι. Η συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται μετρήσιμη αν για κάθε $E \in T$ ισχύει $\{x \in X | f(x) \in E\} \in \Sigma$.

Ορισμός A′.2.6 Έστω μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ και (X, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου. Το essential supremum είναι ο μικρότερος αριθμός α, τέτοιος ώστε το σύνολο $\{x : f(x) > \alpha\}$ να έχει μέτρο μηδέν. Συμβολικά

$$esssupf = sup\{\alpha : \mu(\{x : f(x) > \alpha\}) = 0\}$$

Ορισμός A′.2.7 Έστω μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ και (X, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου. Το essential infimum είναι ο μεγαλύτερος αριθμός β, τέτοιος ώστε το σύνολο $\{x : f(x) < \beta\}$ να έχει μέτρο μηδέν. Συμβολικά

$$essinff = sup\{\beta : \mu(\{x : f(x) > \beta\}) = 0\}$$

Ορισμός A′.2.8 Έστω ένας χώρος μέτρου (X, Σ, μ). Μια ιδιότητα A ισχύει σχεδόν παντού($a.e.$) στο X ή σχεδόν για όλα τα $x \in X(a.a.)$, αν υπάρχει ένα σύνολο $S \in \Sigma$ με $\mu(S) = 0$ και η ιδιότητα A ισχύει για κάθε $x \in X \backslash S$.

A′.3 Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης

Ορισμός A′.3.1 Έστω ένας χώρος $X \neq \emptyset$ και έστω η απεικόνιση $d : X \times X \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε για κάθε $x, y, z \in X$, να ισχύουν

- $d(x, y) \geq 0$ και $d(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Τότε η d είναι μια μετρική στο X και το ζευγάρι (X, d) ονομάζεται μετρικός χώρος.

Ορισμός A′.3.2 Έστω ένας μετρικός χώρος (X, d). Η ακολουθία στοιχείων $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ του X συγκλίνει σε ένα στοιχείο $x \in X$ αν $d(x_n, x) \to 0$ ή αλλιώς αν για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχει θετικός ακέραιος n_0, τέτοιος ώστε για κάθε θετικό ακέραιο $n > n_0$ ισχύει $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Ορισμός Α΄.3.3 Έστω ένας μετρικός χώρος (X, d). Η ακολουθία στοιχείων $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ του X είναι Cauchy αν $d(x_n, x_m) \to 0$ ή αλλιώς αν για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε για κάθε θετικούς ακέραιους $n, m > n_0$, ισχύει $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Ορισμός Α΄.3.4 Ο μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης αν κάθε Cauchy ακολουθία στο X συγκλίνει στο X.

Ορισμός Α΄.3.5 Ένας πλήρης χώρος με νόρμα λέγεται Banach.

Ορισμός Α΄.3.6 Ένας τελεστής $T : X \to X$ σε έναν μετρικό χώρο (X, d) λέγεται συστολή αν, για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει $k \in [0, 1)$, τέτοιο ώστε $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$

Θεώρημα Α΄.3.7[21] Έστω ένας μη κενός πλήρης μετρικός χώρος (X, d) και ένας τελεστής συστολή $T : X \to X$. Η εξίσωση $Tx = x$ έχει μοναδική λύση.

Ορισμός Α΄.3.8 Ο πυρήνας ενός τελεστή T είναι το σύνολο $KerT = \{x \in X | T(x) = 0\}$.

Ορισμός Α΄.3.9 Έστω δύο μετρικοί χώροι (X, d_X) και (Y, d_Y). Η συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται Lipschitz συνεχής αν υπάρχει πραγματική σταθερά $K \geq 0$, τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in X$ να ισχύει

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y).$$

Θεώρημα RademacherΑ΄.3.10([14]) Αν X είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και η $f : X \to \mathbb{R}^m$ είναι Lipschitz συνεχής, τότε η f είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο X.

Ορισμός Α΄.3.11: Έστω X ένας διανυσματικός χώρος. Εσωτερικό γινόμενο στον X είναι μια συνάρτηση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$$

με τις ιδιότητες

- $\langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in X$ και $\langle x, x \rangle = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \ \forall x, y \in X$
- $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \ \forall x, y, z \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Πρόταση Α΄.3.12 Ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ σε ένα διανυσματικό χώρο X, επάγει μια νόρμα στον X από την σχέση

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}, \ x \in X$$

Απόδειξη:

- $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} \geq 0$
- $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{1/2} = |\lambda|\langle x, x\rangle^{1/2} = |\lambda|\|x\|$
- $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$

Ορισμός Α΄.3.13 Ένας χώρος Banach $(H, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Hilbert, αν η νόρμα του ορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον H, δηλαδή υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στον H, ώστε $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ για κάθε $x \in X$.
Παρατήρηση: Ο $\mathbb{R}^n$ με το βαθμωτό γινόμενο είναι ένας χώρος Hilbert.

Ανισότητα Cauchy-Schwartz Για κάθε x, y στοιχεία ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο ισχύει

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Παρατήρηση: Στον $\mathbb{R}^{n^2}$ η ανισότητα παίρνει την μορφή
$\left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij}y_{ij}\right)^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2\right)\left(\sum_{i,j=1}^n y_{ij}^2\right)$

Ορισμός Α΄.3.14 Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ δύο γραμμικοί χώροι με νόρμα. Ο φραγμένος και γραμμικός τελεστής T είναι ισομορφισμός μεταξύ των X και Y, αν ο T είναι ένα προς ένα και επί και υπάρχουν σταθερές $\mu, M > 0$, τέτοιες ώστε $\mu\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_x$.

Ορισμός Α΄.3.15 Έστω ένας χώρος μέτρου (X, Σ, μ) και $p \in (0, +\infty)$. Αν η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ειναι μετρήσιμη, τότε ορίζονται οι νόρμες

$$\|f\|_{L^p(X)} \equiv \Big(\int_X |f|^p dx\Big)^{1/p} \qquad \|f\|_{L^\infty(X)} \equiv inf\{M \geq 0 | |f(x)| \leq M \ a.e.\}.$$

Ορισμός Α΄.3.16 Ο χώρος $L^p(X)$ είναι το σύνολο

$$L^p(X) = \{f : X \to \mathbb{R} | \|f\|_{L^p(X)} < \infty\}.$$

Ορισμός Α΄.3.17 Ο χώρος $L^\infty(X)$ είναι το σύνολο

$$L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} | \|f\|_{L^\infty(X)} < \infty\}.$$

Ορισμός Α΄.3.18 Ο χώρος $C^p(X),\ X \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο των p-παραγωγίσιμων συνεχών συναρτήσεων.

Ορισμός Α΄.3.19 Ο χώρος $C_0^p(X),\ X \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο των p-παραγωγίσιμων συνεχών συναρτήσεων για τις οποίες το σύνολο $\{x \in X | f(x) \neq 0\}$ είναι συμπαγές.

Ορισμός Α΄.3.20 Ο χώρος $L_{loc}^p(X),\ X \subset \mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο

$$L_{loc}^p(X) = \{f : X \to \mathbb{R}^n | f : K \to \mathbb{R}^n \in L^p(K)\ \forall K \subseteq X\ \sigma\upsilon\mu\pi\alpha\gamma\epsilon s\}.$$

Ορισμός Α΄.3.21 Ένα στοιχείο $\alpha \in \mathbb{Z}_{+}^{n}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ λέγεται πολυδείκτης, αν ισχύει $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_2$ και $D^a = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_{\alpha_1}} ... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_{\alpha_n}}$.

Ορισμός Α΄.3.22 Έστω $f \in L^1_{loc}$ και α πολυδείκτης. Η $D^a f$ λέγεται η α-η ασθενής παράγωγος της f, αν ισχύει:

$$\int_X f(x) D^\alpha g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_X D^\alpha f(x) g(x) dx$$

για κάθε $g \in C_0^\infty(X)$.

Ορισμός Α΄.3.23 Έστω X ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και k ακέραιος. Ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(X)$ είναι το σύνολο

$$W^{k,p}(X) = \{f \in L^p(X) | D^\alpha \in L^p(X),\ |\alpha| \leq k\}.$$

Θεώρημα Α΄.3.24 Ο χώρος $W^{k,p}(X)$ είναι χώρος Banach. [15]

Ορισμός Α΄.3.25 Ο χώρος $W_0^{k,p}(X)$ ορίζεται ως η κλειστότητα του χώρου $C_0^\infty(X)$ στον $W^{k,p}(X)$.

Λήμμα Miranda-Talenti([2]) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο και κυρτό πεδίο ορισμού κλάσης C^2. Τότε, για κάθε $u \in W_{\gamma_0}^{2,2}(\Omega)$, ισχύει:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left|D_{ij} u\right|^2 dx \leq \int_\Omega (\Delta u)^2 dx. \tag{Α΄.1}$$

Αν η $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ είναι διανυσματική συνάρτηση, τότε

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} u\|_N^2 dx \leq \int_\Omega \|\Delta u\|_N^2 dx. \tag{Α΄.2}$$

Ανισότητα Poincare Για κάθε $u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, ισχύει

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{w_n} |\Omega|\right)^{1/n} \|Du\|_{L^p(\Omega)}. \tag{Α΄.3}$$

Α΄.4 Λοιπά Γενικά Στοιχεία

Ορισμός Α΄.4.1 Μια συνάρτηση f λέγεται ένα προς ένα, αν για κάθε a, b του πεδίου ορίσμου της ισχύει $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

Ορισμός Α΄.4.2 Μια συνάρτηση f λέγεται επί αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο x του πεδίου ορισμού της, τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Ορισμός A′.4.3 Μια συνάρτηση f λέγεται ένα προς ένα και έπι, αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο x του πεδίου ορισμού της, τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Ορισμός A′.4.4 Μια σχέση $\mathcal{R}$ σε ένα σύνολο X ονομάζεται σχέση ισοδυναμίας, αν για κάθε $x, y, z \in X$ ισχύουν

- $x\mathcal{R}x$,
- $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$,
- $x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Το σύνολο $\{x\}_{\mathcal{R}} = \{u \in X : x\mathcal{R}u\}$ ορίζεται ως κλάση ισοδυναμίας του x και το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας στο X ως προς μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$, λέγεται χώρος πήλικο και συμβολίζεται $X/\mathcal{R}$.

Ανισότητα Young A′.4.5 Αν $a \geq 0$ και $b \geq 0$ είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και $p > 1$ και $q > 1$ πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{A′.4}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $a^p = b^q$.

Απόδειξη: Η ανισότητα προφανώς ισχύει για $a = b = 0$. Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι κοίλη, για $t = 1/p$ και $(1 - t) = 1/q$ λαμβάνουμε

$$ln(ta^p + (1 - t)b^q) \geq tln(a^p) - (1 - t)ln(b^q) = ln(a) + ln(b) = ln(ab)$$

Θεώρημα A′.4.6([1]) Έστω $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και α ένα εσωτερικό σημείο του X. Η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο α, αν και μόνο αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι και ισχύει

$$lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\alpha)}{\partial x_i} h_i}{\|h\|} = 0$$

Παράρτημα Β΄

Βιβλιογραφία

[1] Παναγιώτης Χ. Τσεκρέκος, Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ, Ε.Μ.Πολυτεχνείο, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2009

[2] Antonino Maugeri, Dian K.Palagachev, Lubomira G.Softova,Elliptic and Parabolic Equations with Discontinuous Coefficients, 2002

[3] Barbagallo, A., Ernst, O., Thera, M.: Orthogonality in locally convex spaces: two nonlinear generalizations of Neumann's Lemma. J. Math. Anal. Appl. 484, 123663 (2020)

[4] Buica, A., Domokos, A.: Nearness accretivity and the solvability of nonlinear equations. Numer. Funct. Anal. Optim. 23, 477–497 (2002)

[5] Campanato, S., $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ theory for nonlinear, nonvariational differential systems, Rend. Mat. Appl. 10 (1990), 531-549.

[6] Campanato, S., Non variational differential systems. A condition for local existence and uniqueness, Ric. Mat. 40 (1991), 129-140.

[7] Campanato, S., On the condition of nearness between operators, Ann. Mat. Pura Appl. 167 (1994), 243-256.

[8] Campanato, S., Un risultato relative ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 21 (1967), 701-707.

[9] Cordes, H.O., Uber die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen, Math. Ann. 131 (1956), 278-312.

[10] Cordes, H.O., Zero order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations, Proc. Sympos. Pure Math. 4 (1961), 157-166.

[11] Domokos, A.: Remarks on some equivalent conditions for nearness. Fixed Point Theory 4, 213–221 (2003)

[12] Fucik, S. and A. Kufner, Nonlinear Differential Equations, Elsevier Sci.

Publ. Co., New York 1980.

[13] Gilbarg, D. and N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin 1997

[14] James T. Murphy,An Elementary Proof of Rademacher's Theorem, 2015

[15] Juha Kinnunen, Sobolev Spaces, Department of Mathematics, Aalto University, 2021

[16] Katzourakis, N.: Existence and uniqueness of global strong solutions to fully nonlinear second order elliptic systems. NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. 23 Art. 33, 30 (2016)

[17] Ladyzhenskaya, O.A. and N.N. Ural'tseva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 46, Academic Press, New York, London 1968.

[18] Palagachev, D.K., Global strong solvability of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic equations in the plane, Le Matematiche 48 (1993), 311-321.

[19] Tarsia, A.: On Cordes and Campanato conditions. Archiv. Inequal. Appl. 2, 25–39 (2004)

[20] Tarsia, A.: Some topological properties preserved by nearness between operators and applications to PDE. Czech. Math. J. 46, 607–624 (1996)

[21] Vittorino Pata, Fixed Points Theorems and Applications, 2019

[22] Drivaliaris, D., Karagiorgos, Y., & Yannakakis, N. (2021). Nearness of nonlinear operators. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2, 70(2), 1051-1060.