

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ



**Βελτιστοποίηση τοπολογίας δισδιάστατου φορέα από
διακριτά μέλη και η σύγκριση μαθηματικών
διατυπώσεων του προβλήματος**

Μεταπτυχιακή Εργασία

Παναγιωτόπουλος Βασίλειος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε κατά την θερινή περίοδο του Ακαδημαϊκού Έτους 2021 - 2022, στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών “Δομοστατικού Σχεδιασμού και Ανάλυσης των Κατασκευών” του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Νικόλαου Λαγαρού.

Πριν την παρουσίαση της εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Νικόλαο Λαγαρό για την πολύτιμη καθοδήγηση του και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον αντικείμενο. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Γεώργιο Καζάκη για τις απαραίτητες συμβουλές του κατά την εκπόνηση της εργασίας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την στήριξη τους καθ’ όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Acknowledgements

This research has been supported by the ADDOPTML project: “ADDitively Manufactured OPTi-mized Structures by means of Machine Learning” (No: 101007595) belonging to the Marie Skłodowska-Curie Actions (MSCA) Research and Innovation Staff Exchange (RISE) H2020-MSCA-RISE-2020. Their support is highly acknowledged

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός του μελετητή τόσο κατά τον σχεδιασμό ενός έργου, καθώς και κατά την κατασκευή αλλά και τη συντήρηση του, καθόλη τη σκοπούμενη διάρκεια ζωής του, είναι η ασφάλεια, η οικονομία, η λειτουργικότητα, η ανθεκτικότητα και η αισθητική. Επιπλέον, ο κλάδος της μηχανικής και των κατασκευών χαρακτηρίζεται από σημαντικές περιβαλλοντικές επιπτώσεις, ενώ αντιπροσωπεύει ένα μεγάλο μέρος της οικονομίας. Ως εκ τούτου, υπάρχουν αυξανόμενα ενδιαφέροντα για τη βελτίωση των κοινωνικών, οικονομικών και περιβαλλοντικών επιδόσεων των έργων πολιτικού μηχανικού.

Ως βέλτιστος σχεδιασμός κατασκευών, μπορεί να οριστεί η διαδικασία διερεύνησης ενός δομικού συστήματος το οποίο ικανοποιεί τις απαιτούμενες προδιαγραφές, όπου μπορεί να ταξινομηθεί στις παρακάτω τέσσερις (4) κατηγορίες:

- Βελτιστοποίηση μεγέθους των διατομών (Sizing optimization)
- Βελτιστοποίηση σχήματος (Shape optimization)
- Βελτιστοποίηση τοπολογίας (Topology optimization)
- Βελτιστοποίηση πολλαπλών στόχων (Multi-objective optimization)

Με την ανάπτυξη υπολογιστικών εργαλείων, η βελτιστοποίηση γίνεται πιο δημοφιλής ενώ εφαρμόζεται σε μεγαλύτερες και πιο σύνθετες κατασκευές πολιτικού μηχανικού. Από τον 20ο αιώνα, με την εμφάνιση και την ανάπτυξη υπολογιστικών μεθόδων σχεδιασμού και ανάλυσης κατασκευών, οι μέθοδοι βελτιστοποίησης που βασίζονται σε τεχνικές μαθηματικού προγραμματισμού, έχουν προταθεί και υιοθετηθεί στον τομέα του πολιτικού μηχανικού.

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, το βασικό αντικείμενο μελέτης εστιάζει στην βελτιστοποίηση τοπολογίας ενός δισδιάστατου φορέα από διακριτά μέλη και η σύγκριση ορισμένων μαθηματικών διατυπώσεων του προβλήματος. Κατά την διαδικασία βελτιστοποίησης τοπολογίας ενός φορέα από διακριτά μέλη, κατανέμεται ένας αριθμός από προκαθορισμένα στοιχεία, ορίζονται οι οριακές συνθήκες και τα εφαρμοζόμενα φορτία και η βελτιστοποίηση χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της κατανομής των διατομών. Ως μεταβλητές σχεδιασμού ορίζεται το εμβαδό διατομής των στοιχείων, όπου μέλη με περιοχές κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο θεωρούνται αναποτελεσματικά και αφαιρούνται από την αρχική δομή, αλλάζοντας έτσι τη συνδεσιμότητα του συστήματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο χρήστης καλείται να ορίσει το αρχικό χωρίο σχεδιασμού, τις συνθήκες στήριξης και τα εφαρμοζόμενα φορτία και στην συνέχεια

μέσω της μαθηματικής αποτύπωσης του προβλήματος πραγματοποιείται η ανάλυση σύμφωνα με ορισμένους περιορισμούς.

Στην παρούσα μελέτη γίνεται η σύγκριση της διαδικασίας βελτιστοποίησης τοπολογίας ανάλογα με το αρχικό χωρίο που ορίζει ο χρήστης καθώς και με την μαθηματική αποτύπωση που επιλέγεται. Πιο συγκεκριμένα η βελτιστοποίηση τοπολογίας γίνεται για τρία (3) διαφορετικά χωρία σχεδιασμού, ενώ η ανάλυση πραγματοποιείται μέσω δύο (2) διαφορετικών μαθηματικών αλγορίθμων, το κριτήριο βελτιστοποίησης (Optimality Criteria - OC) και τον αλγόριθμό εσωτερικού σημείου (Interior Point algorithm - IP). Η παραπάνω διαδικασία πραγματοποιείται για δύο (2) διαφορετικούς τύπους κατασκευών, δικτυωματικούς και πλαισιωτούς φορείς, για δύο διαφορετικές περιπτώσεις φόρτισης.

Έτσι, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση, ενώ στο δεύτερο κεφάλαιο πραγματοποιείται η βελτιστοποίηση τοπολογίας ενός δικτυωματικού φορέα για τις περιπτώσεις που περιγραφτήκαν παραπάνω. Η βελτιστοποίηση τοπολογίας πραγματοποιείται με μοναδικό περιορισμό, το επιθυμητό συνολικό όγκο του τελικού χωρίου, ενώ στη συνέχεια πραγματοποιείται μια βελτιστοποίηση μεγέθους των διατομών ώστε να ικανοποιούνται ορισμένοι πρόσθετοι περιορισμοί. Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας επαναλαμβάνεται ακριβώς η ίδια διαδικασία για έναν πλαισιωτό φορέα και τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο εξάγονται ορισμένα συμπεράσματα συγκριτικά με το αρχικό χωρίο σχεδιασμού και την μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

Για την υλοποίηση των παραπάνω συντάχτηκες υπολογιστικός κώδικας στην γλώσσα προγραμματισμού Python, όπου χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω βιβλιοθήκες ανοικτού κώδικα:

- Numpy (μαθηματικές πράξεις / πίνακες)
- Scipy (συναρτήσεις βελτιστοποίησης)
- Matplotlib (γραφήματα)
- OpenseesPy (στατική επίλυση)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ.....	1
1.1 Πεδία εφαρμογής	1
1.2 Κατηγορίες βελτιστοποίησης	2
1.3 Μαθηματική έκφραση βελτιστοποίησης	4
1.3.1 Τεχνικές αριθμητικής αναζήτησης.....	6
1.4 Εργαλεία βελτιστοποίησης	8
1.5 Βελτιστοποίησης τοπολογίας	9
1.5.1 Μέθοδος Στερεού Ισότροπου Υλικού με Ποινικοποίηση	10
1.5.2 Βελτιστοποίησης τοπολογίας με την μέθοδο SIMP	12
1.6 Βελτιστοποίησης τοπολογίας με προκατασκευασμένα στοιχεία.....	18
1.6.1 Δικτυωματικός φορέας	19
1.6.2 Καμπτόμενα πλαίσια	20
2. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΙΚΟΥ ΦΟΡΕΑ	23
2.1 Σχεδιασμός αρχικού χωρίου σχεδιασμού	23
2.2 Εξισώσεις ισορροπίας	27
2.3 Μαθηματική έκφραση	30
2.3.1 Optimality criteria	32
2.3.2 Αλγόριθμοι εσωτερικού σημείου (Interior-Point algorithms - IP)	39
2.4 Παραδείγματα εφαρμογής	44
2.4.1 Βελτιστοποίηση τοπολογίας προβόλου - Optimality Criteria.....	45
2.4.2 Βελτιστοποίηση τοπολογίας προβόλου - Interior-Point.....	52
2.4.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων Optimality Criteria & Interior-Point	57
2.4.4 Βελτιστοποίηση μεγέθους των διατομών (Sizing Optimization)	61
2.4.5 Παράδειγμα εφαρμογής προβόλου No2	66

3. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΑΙΣΙΑΚΟΥ ΦΟΡΕΑ	72
3.1 Εξισώσεις ισορροπίας	73
3.2 Παραδείγματα εφαρμογής	76
3.2.1 Οριζόντια φόρτιση στο ελεύθερο άκρο.....	78
3.2.2 Οριζόντια φόρτιση στο μέσο του ελεύθερου άκρου	84
4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	90
5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	92

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1: Αναλογία άρθρων για κάθε στόχο βελτιστοποίησης	2
Σχήμα 1.2: Γραφική αναπαράσταση βελτιστοποίησης τοπολογίας.....	10
Σχήμα 1.3: Αρχική περιοχή σχεδίασης, όρια και συνθήκες φόρτωσης.....	11
Σχήμα 1.4: Διακριτοποίηση αρχικού χωρίου	12
Σχήμα 1.5: Κατανομή υλικού κατά την διαδικασία βελτιστοποίησης.....	13
Σχήμα 1.6: Ομογενοποίηση στοιχείων	17
Σχήμα 1.7: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης χωρίς (a) και με ομογενοποίηση (b).....	17
Σχήμα 1.8: Ανομοιομορφία αποτελεσμάτων βελτιστοποίησης.....	18
Σχήμα 1.9: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτυωματικού φορέα	18
Σχήμα 1.10: Βελτιστοποιημένος σχεδιασμός προβόλου αποτελούμενο από στοιχεία δικτύματος.....	20
Σχήμα 1.11: Προσεγγιστική καμπύλη μετά από ανάλυση παλινδρόμησης για τη ροπή αδράνειας [5].....	21
Σχήμα 1.12: Βελτιστοποιημένος σχεδιασμός προβόλου αποτελούμενο από στοιχεία δοκού	22
Σχήμα 2.1: Πιθανή διάταξη κόμβων για ένα τετραγωνικό χωρίο πλευράς 3m	24
Σχήμα 2.2: Υπερκάλυψη στοιχείων ενός πλήρως συνδεδεμένου χωρίου.....	25
Σχήμα 2.3: Σύνδεση κόμβων για την αποφυγή υπερκάλυψης	26
Σχήμα 2.4: Αρχικό σχεδιαστικό χωρίο για δύο διαφορετικές διατάξεις κόμβων	26
Σχήμα 2.5: Αρχικό σχεδιαστικό χωρίο για τρεις διαφορετικές ακτίνες	27
Σχήμα 2.6: Στοιχείο ράβδου με τυχαίο προσανατολισμό στο επίπεδο x-y	28
Σχήμα 2.7: Διάγραμμα ροής βελτιστοποίησης τοπολογίας (Optimality Criteria).....	34
Σχήμα 2.8: Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου σε Optimality Criteria.....	34
Σχήμα 2.9: Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου σε Optimality Criteria.....	35
Σχήμα 2.10: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης (O-C).....	35
Σχήμα 2.11: Διάγραμμα μεταβολής πολλαπλασιαστή Lagrange	36
Σχήμα 2.12: Διάγραμμα μεταβολής συνολικού όγκου (εσωτερικές επαναλήψεις).....	36
Σχήμα 2.13: Φορέας σχεδιασμού κατά την χρήση των εξισώσεων ισορροπίας	37
Σχήμα 2.14: Συγκώνευση συνευθειακών στοιχείων	38
Σχήμα 2.15: Τελικό διάγραμμα ροής βελτιστοποίησης τοπολογίας (OC).....	39

Σχήμα 2.16: Φορέας σχεδιασμού κατά την χρήση των εξισώσεων ισορροπίας	42
Σχήμα 2.17: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης (I-P).....	43
Σχήμα 2.18: Διαδικασία εύρεσης τελικής τοπολογίας	43
Σχήμα 2.19: Χώρος σχεδίασης φορέα	44
Σχήμα 2.20: Αρχικό χωρίο σχεδιασμού για μέγιστο μήκος στοιχείων 2m (a), 3m (b) και 4m (c)	45
Σχήμα 2.21: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτυώματος για μέγιστο αρχικό μήκος στοιχείων 2m	46
Σχήμα 2.22: Τελική γεωμετρία δικτυωματικού φορέα (1η εφαρμογή)	46
Σχήμα 2.23: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης σχήματος 2.20a (O-C)	47
Σχήμα 2.24: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτυώματος για μέγιστο αρχικό μήκος στοιχείων 3m	47
Σχήμα 2.25: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης σχήματος 2.20b (O-C)	48
Σχήμα 2.26: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτυώματος για μέγιστο αρχικό μήκος στοιχείων 4m	48
Σχήμα 2.27: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης σχήματος 2.20c (O-C)	49
Σχήμα 2.28: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής για τις διαφορετικές περιπτώσεις σύνθεσης του αρχικού χωρίου σχεδιασμού (O-C)	49
Σχήμα 2.29: Διάγραμμα της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας του κώδικα για τις διαφορετικές περιπτώσεις σύνθεσης του αρχικού χωρίου σχεδιασμού (O-C)	50
Σχήμα 2.30: Απόκλιση κλάσματος όγκου σύμφωνα με τον εκάστοτε περιορισμό (O-C)	51
Σχήμα 2.31: Μη γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας (O-C).....	51
Σχήμα 2.32: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτυώματος για μέγιστο αρχικό μήκος στοιχείων 2m	52
Σχήμα 2.33: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης σχήματος 2.20a (I-P) ..	52
Σχήμα 2.34: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτυώματος για μέγιστο αρχικό μήκος στοιχείων 3m	53
Σχήμα 2.35: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης σχήματος 2.20b (I-P) ..	53
Σχήμα 2.36: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτυώματος για μέγιστο αρχικό μήκος στοιχείων 3m	54
Σχήμα 2.37: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης σχήματος 2.20c (I-P) ..	54
Σχήμα 2.38: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής για τις διαφορετικές περιπτώσεις σύνθεσης του αρχικού χωρίου σχεδιασμού (I-P)	55

Σχήμα 2.39: Διάγραμμα της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας για τις διαφορετικές περιπτώσεις σύνθεσης του αρχικού χωρίου σχεδιασμού (I-P)	55
Σχήμα 2.40: Μη γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας (I-P)	56
Σχήμα 2.41: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτύματος (O-C)	57
Σχήμα 2.42: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτύματος (I-P)	57
Σχήμα 2.43: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής	58
Σχήμα 2.44: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής	58
Σχήμα 2.45: Διάγραμμα της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας του κώδικα.....	59
Σχήμα 2.46: Διάγραμμα απόδοσης των δύο μεθόδων	59
Σχήμα 2.47: Γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας	60
Σχήμα 2.48: Μη γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας	61
Σχήμα 2.49: Γράφημα απαίτησης συνολικού βάρους υπό δεδομένους περιορισμούς ...	63
Σχήμα 2.50: Αποτελέσματα ανάλυσης για $r_0 = 2m$ (O-C & I-P)	63
Σχήμα 2.51: Αποτελέσματα ανάλυσης για $r_0 = 3m$ (O-C)	64
Σχήμα 2.52: Αποτελέσματα ανάλυσης για $r_0 = 3m$ (I-P)	64
Σχήμα 2.53: Αποτελέσματα ανάλυσης για $r_0 = 4m$ (O-C)	65
Σχήμα 2.54: Αποτελέσματα ανάλυσης για $r_0 = 4m$ (I-P)	65
Σχήμα 2.55: Αρχικό χωρίο σχεδιασμού για μέγιστο μήκος στοιχείων 2m (a), 3m (b) και 4m (c)	66
Σχήμα 2.56: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτύματος (O-C)	66
Σχήμα 2.57: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτύματος (I-P)	67
Σχήμα 2.58: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής	67
Σχήμα 2.59: Διάγραμμα της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας του κώδικα.....	68
Σχήμα 2.60: Διάγραμμα απόδοσης των δύο μεθόδων	68
Σχήμα 2.61: Γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας	69
Σχήμα 2.62: Γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας	69
Σχήμα 2.63: Γράφημα απαίτησης συνολικού βάρους υπό δεδομένους περιορισμούς ...	70
Σχήμα 2.64: Αποτελέσματα ανάλυσης O-C	71
Σχήμα 2.65: Αποτελέσματα ανάλυσης I-P	71
Σχήμα 3.1: Στοιχείο δοκού με τυχαίο προσανατολισμό στο επίπεδο x-y	73
Σχήμα 3.2: Μετασχηματισμός στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων.....	75

Σχήμα 3.3: Χώρος σχεδίασης, συνθήκες στήριξης και φόρτισης φορέα	76
Σχήμα 3.4: Αρχικό χωρίο σχεδιασμού για μέγιστο μήκος στοιχείων 2m (a), 3m (b) και 4m (c).....	77
Σχήμα 3.5: Βελτιστοποίησης τοπολογίας πλαισιωτού φορέα (O-C).....	78
Σχήμα 3.6: Βελτιστοποίησης τοπολογίας πλαισιωτού φορέα (I-P).....	78
Σχήμα 3.7: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής πλαισιωτού φορέα.....	79
Σχήμα 3.8: Διάγραμμα της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας κώδικα	79
Σχήμα 3.9: Διάγραμμα απόδοσης των δύο μεθόδων	80
Σχήμα 3.10: Γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας πλαισιωτού φορέα	80
Σχήμα 3.11: Γράφημα απαίτησης συνολικού βάρους υπό δεδομένους περιορισμούς ...	83
Σχήμα 3.12: Αποτελέσματα ανάλυσης πλαισιωτού φορέα (O-C)	83
Σχήμα 3.13: Αποτελέσματα ανάλυσης πλαισιωτού φορέα (I-P)	84
Σχήμα 3.14: Βελτιστοποίησης τοπολογίας πλαισιωτού φορέα (O-C).....	84
Σχήμα 3.15: Βελτιστοποίησης τοπολογίας πλαισιωτού φορέα (I-P).....	85
Σχήμα 3.16: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής πλαισιωτού φορέα.....	85
Σχήμα 3.17: Διάγραμμα της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας κώδικα	86
Σχήμα 3.18: Διάγραμμα απόδοσης των δύο μεθόδων	86
Σχήμα 3.19: Γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας πλαισιωτού φορέα	87
Σχήμα 3.20: Γράφημα απαίτησης συνολικού βάρους υπό δεδομένους περιορισμούς ...	88
Σχήμα 3.21: Αποτελέσματα ανάλυσης O-C.....	88
Σχήμα 3.22: Αποτελέσματα ανάλυσης I-P	89

1. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Σκοπός του μελετητή τόσο κατά τον σχεδιασμό ενός έργου, καθώς και κατά την κατασκευή αλλά και τη συντήρηση του, καθόλη τη σκοπούμενη διάρκεια ζωής του, είναι η ασφάλεια, η οικονομία, η λειτουργικότητα, η ανθεκτικότητα και η αισθητική. Συνεπώς, ως βέλτιστος σχεδιασμός κατασκευών, μπορεί να οριστεί η διαδικασία διερεύνησης ενός δομικού συστήματος το οποίο ικανοποιεί την αυστηρή τήρηση των παραπάνω περιορισμών.

Η χρήση τεχνικών βελτιστοποίησης για το σχεδιασμό κατασκευών είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς ο κατασκευαστικός κλάδος είναι υπεύθυνος για ένα μεγάλο μερίδιο της παγκόσμιας κατανάλωσης φυσικών πόρων. Έτσι, η βελτιστοποίηση μπορεί να συμβάλει στη μείωση της κατανάλωσης φυσικών πόρων, βελτιώνοντας τη βιωσιμότητα του τομέα, ενώ παράλληλα μπορεί να οδηγήσει σε καινοτόμες σχεδιαστικές λύσεις για συγκεκριμένα δομικά συστήματα.

1.1 Πεδία εφαρμογής

Στόχος της βελτιστοποίησης είναι ο προσδιορισμός του καλύτερου δυνατού αποτελέσματος υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Στον τομέα του πολιτικού μηχανικού, η χρήση τεχνικών βελτιστοποίησης μπορεί να εκτελεστεί σε κάθε στάδιο ενός έργου, όπως ο σχεδιασμός, η κατασκευή, η λειτουργία και η συντήρηση. Σύμφωνα με την βιβλιογραφία, το αντικείμενο εφαρμογής των παραπάνω διαδικασιών μπορεί να ταξινομηθεί στις παρακάτω τέσσερις (4) κατηγορίες [1]:

- Ελαχιστοποίηση κόστους

Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους, το οποίο συνήθως επιτυγχάνεται με τη μείωση του βάρους ή του όγκου της κατασκευής.

- Βελτίωση δομικής απόδοσης

Στόχος είναι η βελτίωση ορισμένων ιδιοτήτων της κατασκευής, όπως η μηχανική συμπεριφορά, η αεροδυναμική απόδοση, η δυναμική σεισμική απόδοση, ώστε να ικανοποιούν τις σχεδιαστικές απαιτήσεις.

- Ελαχιστοποίηση περιβαλλοντικών επιπτώσεων

Στόχος είναι η μείωση της κατανάλωσης ενέργειας για τη βελτίωση της περιβαλλοντικής απόδοσης της κατασκευής.

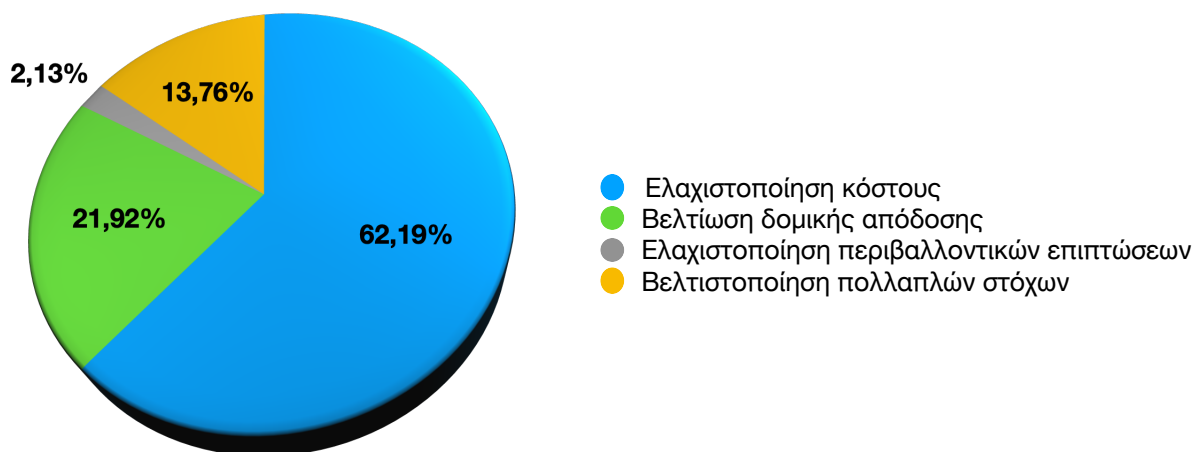
- Βελτιστοποίηση πολλαπλών στόχων

Ο στόχος της βελτιστοποίησης περιλαμβάνει περισσότερους από έναν από τους τρεις (3) παραπάνω στόχους.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται οι αναλογίες των επιλεγμένων άρθρων για κάθε αντικείμενο βελτιστοποίησης. Όπως παρατηρείται, οι περισσότερες έρευνες εστιάζουν στην ελαχιστοποίηση του κόστους, αντιπροσωπεύοντας το 62.19%, ενώ το 21.92% των άρθρων που συλλέχθηκαν προσανατολίζεται στην βελτίωση της δομικής απόδοσης. Λίγες μελέτες περιλαμβάνουν ταυτόχρονα περισσότερες από έναν από τους παραπάνω στόχους ταυτόχρονα, ενώ το ποσοστό που επικεντρώνονται στη μείωση των περιβαλλοντικών επιπτώσεων είναι αμελητέο.

Με την πάροδο των χρόνων, η συνολική τάση της έρευνας για τη βελτιστοποίηση δομικών έργων πολιτικού μηχανικού παρουσιάζει μια ανοδική πορεία, ενώ παράλληλα η παραπάνω αναλογία των άρθρων αλλάζει συνεχώς.

Αξίζει να σημειωθεί πως τα τελευταία χρόνια μια πιο κοινή προσέγγιση είναι η ταυτόχρονη εξέταση της ελαχιστοποίησης του κόστους και των περιβαλλοντικών επιπτώσεων, η οποία σύμφωνα με τα παραπάνω κατηγοριοποιείται ως βελτιστοποίηση πολλαπλών στόχων.



Σχήμα 1.1: Αναλογία άρθρων για κάθε στόχο βελτιστοποίησης

1.2 Κατηγορίες βελτιστοποίησης

Η χρήση τεχνικών βελτιστοποίησης στον τομέα του πολιτικού μηχανικού, στοχεύει στην εύρεση της καλύτερης δυνατής διάταξης των δομικών στοιχείων της κατασκευής για την επίτευξη ορισμένων στόχων υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Η βελτιστοποίηση κατασκευών διακρίνονται σε τέσσερις (4) κατηγορίες:

- Βελτιστοποίηση μεγέθους των διατομών (Sizing optimization)

Στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης του μεγέθους των διατομών ενός φορέα, ως παράμετροι σχεδιασμού χρησιμοποιούνται οι διαστάσεις των διατομών των δομικών στοιχείων. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του βάρους της κατασκευής συγκεκριμένης τοπολογίας και σχήματος υπό ορισμένους περιορισμούς, όπως τις αναπτυσσόμενες τάσεις στα μέλη, την μετακίνηση των κόμβων κ.α.

- Βελτιστοποίηση σχήματος (Shape optimization)

Στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης σχήματος, ως παράμετροι σχεδιασμού χρησιμοποιούνται κομβικές συντεταγμένες των δομικών στοιχείων. Στόχος είναι η εύρεση του του βέλτιστου σχήματος ώστε να ελαχιστοποιεί ένα συγκεκριμένο λειτουργικό κόστος ενώ ικανοποιεί δεδομένους περιορισμούς.

- Βελτιστοποίηση τοπολογίας (Topology optimization)

Η βελτιστοποίηση τοπολογίας προσφέρει μια συστηματική δυνατότητα αναζήτησης για βέλτιστη κατανομή υλικού, ενώ ικανοποιούνται οι περιορισμοί σχεδιασμού. Η βελτιστοποίηση τοπολογίας είναι πιο γενική από τις άλλες μεθόδους, όπως η βελτιστοποίηση μεγέθους και σχήματος, καθώς επιτρέπει την ταυτόχρονη σχεδίαση τόσο της σύνδεσης όσο και των μεγεθών μελών. Αρχικά ορίζεται ο χώρος σχεδιασμού ή αναφοράς (ground structure), ο τύπος υλικού, οι συνθήκες στήριξης και οι φορτίσεις και έπειτα γίνεται η ανάλυση του φορέα και η επαναληπτική διαδικασία που θα οδηγήσει στη βέλτιστη τοπολογία, δηλαδή στην καλύτερη δυνατή κατανομή υλικού στην κατασκευή.

- Βελτιστοποίηση πολλαπλών στόχων (Multi-objective optimization)

Κατά την βελτιστοποίηση πολλαπλών στόχων εξετάζονται δύο (2) ή περισσότεροι από τους παραπάνω στόχους για καλύτερα αποτελέσματα, περιλαμβάνοντας περισσότερους από έναν από τους τρεις (3) παραπάνω στόχους. Μία βελτιστοποίηση που περιλαμβάνει ταυτόχρονα το μέγεθος, το σχήμα και την τοπολογία είναι γνωστή ως βελτιστοποίηση διάταξης (layout optimization).

Με την ανάπτυξη υπολογιστικών εργαλείων, η βελτιστοποίηση γίνεται πιο δημοφιλής ενώ εφαρμόζεται σε μεγαλύτερες και πιο σύνθετες κατασκευές πολιτικού μηχανικού, ειδικά στη βελτιστοποίηση τοπολογίας. Ένας από τους κύριους στόχους της βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους της κατασκευής. Στα κατασκευαστικά έργα, το χαμηλότερο κόστος είναι κύριος στόχος, με την προϋπόθεση της ικανοποίησης των απαιτήσεων της δομικής απόδοσης. Πρόσφατα, με την

αυξανόμενη προσοχή στο περιβαλλοντικό ζήτημα και τη βιώσιμη ανάπτυξη, η μείωση των περιβαλλοντικών επιπτώσεων έχει γίνει ένας άλλος σημαντικός στόχος λόγω της σημαντικής ποσότητας εκπομπών CO₂ στη βιομηχανία πολιτικού μηχανικού [2].

1.3 Μαθηματική έκφραση βελτιστοποίησης

Κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, η στατική ανάλυση επαναλαμβάνεται πολλές φορές ώστε να αξιολογούνται τα αποτελέσματα του κάθε βήματος μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση, κάτι που είναι ένα τεράστιο υπολογιστικό κόστος. Ως εκ τούτου, είναι απαραίτητη η εφαρμογή μιας μεθόδου στατικής ανάλυσης που να είναι υπολογιστικά φθηνή, ειδικά για μεγάλες και πολύπλοκες κατασκευές. Για τον σκοπό αυτό, η ανάλυση διεξάγεται συνήθως με βάση τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Analysis).

Κατά την διατύπωση του προβλήματος είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός των τριών ακόλουθων ποσοτήτων, δηλαδή των αντικειμενικών συναρτήσεων, των μεταβλητών σχεδιασμού και των περιορισμών.

- Αντικειμενική συνάρτηση (Objective function)

Η αντικειμενική συνάρτηση αναφέρεται σε μια συνάρτηση ή ένα σύνολο συναρτήσεων που αντικατοπτρίζουν την ποιότητα του αποτελέσματος βελτιστοποίησης. Συνήθως η αντικειμενική συνάρτηση (f), είναι μια συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιηθεί, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις απαιτείται η μεγιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης.

- Μεταβλητές σχεδιασμού (Design variable)

Οι μεταβλητές σχεδιασμού (x), είναι ένα διάνυσμα αριθμητικών τιμών που αλλάζουν εντός ενός προκαθορισμένου εύρους κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης, προκειμένου να καθοριστεί ο σχεδιασμός της κατασκευής. Οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες ανάλογα με την τιμή τους, σε μεταβλητές συνεχούς σχεδίασης και σε μεταβλητές διακριτής σχεδίασης. Οι τιμές των μεταβλητών συνεχούς σχεδίασης κυμαίνονται εντός ενός συγκεκριμένου εύρους, ενώ οι διακριτές μεταβλητές σχεδίασης έχουν μεμονωμένες τιμές.

- Περιορισμοί (Constraints)

Οι περιορισμοί αναφέρονται στις απαιτήσεις ασφάλειας και συντήρησης που πρέπει να πληρούνται κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης. Σύμφωνα με τη μορφή

της έκφρασης, οι περιορισμοί μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες, σε περιορισμούς ισότητας και περιορισμούς ανισότητας. Σημειώνεται πως οι περιορισμοί θα μπορούσαν να συνδυαστούν με την αντικειμενική συνάρτηση ως συναρτήσεις ποινής για τη μετατροπή της περιορισμένης αντικειμενικής συνάρτησης σε μη περιορισμένη.

Επομένως, μια γενική διατύπωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης κατασκευών μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\text{Minimize/Maximize: } f(X) \quad (1.1a)$$

$$\text{Subject to: } g_i(X) \leq 0, i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (1.1b)$$

$$h(X) = 0, j = 1, 2, 3, \dots, p ; X \in S \quad (1.1c)$$

Όπου:

- X είναι συνήθως ένα διάνυσμα $X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ και αντιπροσωπεύει το σύνολο των μεταβλητών σχεδιασμού, όπου n είναι ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού.
- $f(X)$ είναι η αντικειμενική συνάρτηση.
- Τα $g_i(X)$ και $h_j(X)$ αναφέρονται σε περιορισμούς ανισότητας και ισότητας, όπου m και p είναι ο αριθμός των περιορισμών και S είναι ο χώρος αναζήτησης του προβλήματος βελτιστοποίησης.

Για παράδειγμα, η ελαχιστοποίηση κόστους, συνήθως ποσοτικοποιείται ως το συνολικό βάρος του συστήματος. Το σύστημα χωρίζεται σε πολλά δομικά στοιχεία και οι διατομές επιλέγονται ως μεταβλητές σχεδιασμού, καθώς το συνολικό βάρος της κατασκευής σχετίζεται άμεσα με γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δομικών στοιχείων. Ως εκ τούτου, η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται:

$$\text{Minimize: } W = \sum_{i=1}^n \gamma g A_i L_i \quad (1.2)$$

Όπου:

- W: το συνολικό βάρος της κατασκευής
- γ : η πυκνότητα του υλικού

-g: η επιτάχυνση της βαρύτητας

- $A_i = [A_1, A_2, A_3, \dots, A_n]$ το εμβαδό των διατομών των δομικών στοιχείων, όπου αντιπροσωπεύει το σύνολο των μεταβλητών σχεδιασμού και n είναι ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού.

- $L_i = [L_1, L_2, L_3, \dots, L_n]$ το μήκος κάθε δομικού στοιχείου

Ένας άλλος κοινώς αποδεκτός στόχος για τη βελτιστοποίηση των κατασκευών είναι η βελτίωση της δομικής απόδοσης. Για τον προσδιορισμό της αντικειμενικής συνάρτησης χρησιμοποιούνται δείκτες όπως η ακαμψία ή η ενέργεια παραμόρφωσης. Σε αυτόν τον τύπο βελτιστοποίησης, η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\text{Minimize: } C = F^T u(x) \quad (1.3)$$

Όπου:

-C: η ενέργεια παραμόρφωσης της κατασκευής

-F: το διάνυσμα των φορτίων που εφαρμόζεται στην κατασκευή.

-u: το διάνυσμα των μετατοπίσεων

Στον κλάδο των πολιτικών μηχανικών, υπάρχει πάντα ένα κοινό κριτήριο αξιολόγησης ενός έργου, το οποίο είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μεγιστοποιώντας την ασφάλεια και τη δυνατότητα συντήρησης. Ωστόσο, αυτοί οι στόχοι μπορεί να έρχονται σε σύγκρουση μεταξύ τους, με αποτέλεσμα η βελτίωση ενός στόχου να συνεπάγεται επιδείνωση ενός άλλου. Ως εκ τούτου, ορισμένες μελέτες έχουν επικεντρωθεί στην εξισορρόπηση των “ανταγωνιστικών” στόχων στον τομέα της δομικής βελτιστοποίησης. Αυτός ο τύπος δομικής βελτιστοποίησης συνήθως ονομάζεται βελτιστοποίηση πολλαπλών στόχων. Μία από τις κύριες διαφορές μεταξύ της βελτιστοποίησης πολλαπλών στόχων και της βελτιστοποίησης ενός στόχου είναι ότι στη βελτιστοποίηση πολλαπλών στόχων λαμβάνονται υπόψιν περισσότερες από μία αντικειμενικές συναρτήσεις.

1.3.1 Τεχνικές αριθμητικής αναζήτησης

Τα τελευταία χρόνια, ο μαθηματικός προγραμματισμός και οι τεχνικές αριθμητικής αναζήτησης έχουν γίνει μια από τις πιο συχνά εφαρμοσμένες προσεγγίσεις στον τομέα της δομικής βελτιστοποίησης, για την αναζήτηση της βέλτιστης λύσης με

αποτελεσματικό τρόπο. Σε αυτό το πεδίο, οι Kuhn και Tucker [3], παρουσίασαν ορισμένες θεμελιώδεις τεχνικές μαθηματικού προγραμματισμού, συμπεριλαμβανομένης της μεθόδου πολλαπλασιαστή Lagrange και του θεωρήματος ισοδυναμίας.

Η διαδικασία αναζήτησης βέλτιστης λύσης ξεκινά συνήθως από έναν αρχικό σχεδιασμό και σταδιακά βελτιώνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση. Οι τεχνικές βελτιστοποίησης που βασίζονται στις αρχές του μαθηματικού προγραμματισμού μπορούν γενικά να ταξινομηθούν σε δύο (2) κατηγορίες, στις προσεγγίσεις που βασίζονται στην παραγωγή (gradient-based approaches) και στις ευρετικές προσεγγίσεις (heuristic approaches).

Οι προσεγγίσεις που βασίζονται στην παράγωγο (gradient-based approaches) της συνάρτησης μπορεί χωριστεί περαιτέρω στις τέσσερις (4) παρακάτω κατηγορίες:

- Μέθοδος Γραμμικού Προγραμματισμού (Linear Programming - LP)

Οι μέθοδοι γραμμικού προγραμματισμού αναφέρονται σε μεθόδους βελτιστοποίησης με γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις και περιορισμούς. Σε αυτήν την περίπτωση η βέλτιστη λύση βρίσκεται επί του συνόρου μίας ή περισσότερων συναρτήσεων περιορισμού. Σε προβλήματα αυτού του είδους (κυρτά) ένα τοπικό ελάχιστο είναι οπωσδήποτε και το καθολικό ελάχιστο του προβλήματος.

- Μέθοδος Μη Γραμμικού Προγραμματισμού (Non Linear Programming - NLP)

Όταν τουλάχιστον μία από τις αντικειμενικές συναρτήσεις ή τις συναρτήσεις περιορισμών είναι μη γραμμική, οι μέθοδοι βελτιστοποίησης ονομάζονται μέθοδοι μη γραμμικού προγραμματισμού. Σε αυτή την περίπτωση (μη κυρτό πρόβλημα) η εύρεση ενός τοπικού ελαχίστου δεν πιστοποιεί την εύρεση ενός καθολικού ελαχίστου.

- Μέθοδος Κριτηρίων Βελτιστοποίησης (Optimality Criteria - OC)

Οι μέθοδοι κριτηρίων βελτιστοποίησης χρησιμοποιούνται συνήθως για τον υπολογισμό των πολλαπλασιαστών Lagrange, οι οποίοι χρησιμοποιούνται για την εύρεση τοπικών ελαχίστων/μέγιστων μιας συνάρτησης που υπόκειται σε περιορισμούς ισότητας, καθώς και για την ικανοποίηση του συγκεκριμένου κριτηρίου βελτιστοποίησης.

- Μέθοδος Εφικτής Κατεύθυνσης (Feasible Direction - FD)

Στις μεθόδους εφικτής κατεύθυνσης, η αναζήτηση του βέλτιστου ξεκινά από ένα σημείο που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς και στη συνέχεια, το σημείο μετακινείται σε καλύτερο σημείο με βάση την ακόλουθη επαναληπτική σχέση:

$$X_{i+1} = X_i + \lambda S_i \quad (1.4)$$

Όπου:

- X_i, X_{i+1} : το σημείο έναρξης και το τελικό σημείο της επανάληψης
- S_i : η κατεύθυνση της κίνησης, όπου προσδιορίζεται με βάση δύο αρχές, μια μικρή κίνηση ώστε να μην παραβιάζονται οι περιορισμοί και μια κατεύθυνση που μειώνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Επομένως, η βέλτιστη λύση μπορεί να επιτευχθεί μετά από πολλές επαναλήψεις.
- λ : η απόσταση κίνησης, της οποίας η τιμή είναι πάντα προκαθορισμένη ώστε το X_{i+1} να εμπίπτει στην εφικτή περιοχή

Οι ευρετικές μέθοδοι (heuristic approaches) αναφέρονται σε προσεγγίσεις επίλυσης προβλημάτων που επιτυγχάνουν τη λύση με δοκιμή και σφάλμα (trial and error). Αυτού του είδους οι μέθοδοι βελτιστοποίησης περιλαμβάνουν πολλές τεχνικές μηχανικής εκμάθησης, όπως τεχνητά νευρωνικά δίκτυα και μηχανές υποστήριξης διανυσμάτων, που στοχεύουν στη βελτίωση της ακρίβειας των λύσεων με επαναλήψεις. Αν και οι ευρετικές μέθοδοι είναι σχετικά εύκολο να προγραμματιστούν με υψηλή υπολογιστική ταχύτητα, μπορεί να παγιδευτούν σε κάποιο τοπικό βέλτιστο. Ως εκ τούτου, έχουν αναπτυχθεί μεταευρετικές μέθοδοι (metaheuristic methods), για καλύτερα αποτελέσματα βελτιστοποίησης. Οι μεταευρετικές μέθοδοι είναι ανεξάρτητες από το πρόβλημα και χρησιμοποιούν ορισμένη τυχαιοποίηση για τη μετάβαση από κάποιο τοπικό βέλτιστο στον αναζητησή του καθολικού βέλτιστου.

1.4 Εργαλεία βελτιστοποίησης

Για τα προβλήματα βελτιστοποίησης είναι σημαντικό να επιλέγονται κατάλληλα υπολογιστικά εργαλεία και πλατφόρμες σχεδιασμού για την εκτέλεση του κώδικα βελτιστοποίησης. Στο παρελθόν, ο σχεδιασμός και η ανάλυση πραγματοποιούνταν με χειροκίνητους υπολογισμούς μέσω δοκιμής και λάθους (trial and error), που χαρακτηριζόταν από μεγάλο φόρτο εργασίας και επιρρεπή σε σφάλματα. Με την

ανάπτυξη της τεχνολογίας, πολλά υπολογιστικά εργαλεία και πλατφόρμες σχεδιασμού έχουν αναπτυχθεί για να παρέχουν ένα περιβάλλον για δομική μοντελοποίηση, ανάλυση και σχεδιασμό. Ορισμένα πακέτα λογισμικών, όπως το ETABS και το SAP, βελτιώνουν σημαντικά την ταχύτητα υπολογισμού και οδηγούν σε καλύτερα αποτελέσματα. Ωστόσο, είναι λιγότερο αποτελεσματικά σε κατασκευές μεγάλης κλίμακας.

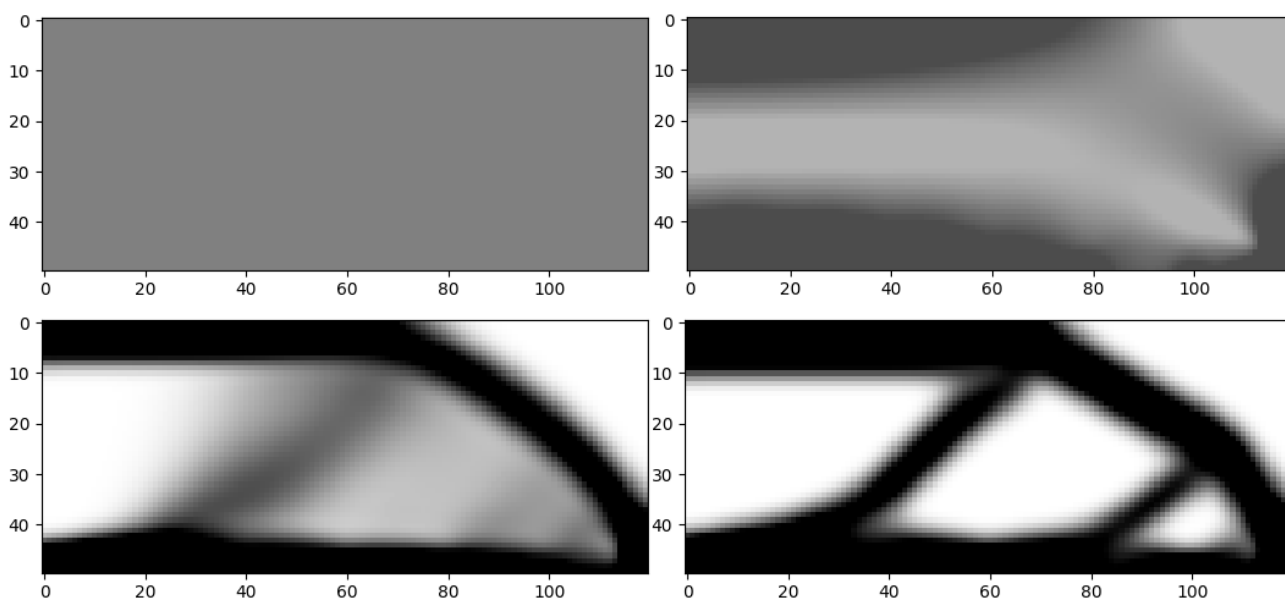
Εκτός από την χρήση των παραπάνω λογισμικών, το MATLAB είναι επίσης ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο εργαλείο, το οποίο πολύ συχνά συνδυάζεται με διάφορα λογισμικά για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης. Για παράδειγμα οι Σωτηρόπουλος και Λαγαρός πρότειναν μια πλατφόρμα για βελτιστοποίηση τοπολογίας πλαισιωτών κατασκευών συνδυάζοντας το λογισμικό SAP2000 και τη συνάρτηση `fmincon` στην εργαλειοθήκη του MATLAB [5].

Τα υπάρχοντα υπολογιστικά εργαλεία και οι πλατφόρμες σχεδιασμού μπορούν να ικανοποιήσουν τις απαιτούμενες απαιτήσεις. Ωστόσο, η ανάπτυξη νέων εργαλείων ή ολοκληρωμένων πλατφορμών εξακολουθεί να είναι απαραίτητη για την περαιτέρω βελτίωση της ικανότητας βελτιστοποίησης και της υπολογιστικής απόδοσης.

1.5 Βελτιστοποίησης τοπολογίας

Η βελτιστοποίηση τοπολογίας χρησιμοποιείται ευρέως από τον κλάδο του πολιτικού μηχανικού για την ελαχιστοποίηση της ποσότητας του χρησιμοποιούμενου υλικού και της ενέργειας παραμόρφωσης των κατασκευών, διατηρώντας παράλληλα τη μηχανική τους αντοχή. Η βελτιστοποίηση τοπολογίας είναι μια μαθηματική μέθοδος που βελτιστοποιεί χωρικά την κατανομή του υλικού εντός ενός καθορισμένου τομέα, ικανοποιώντας δεδομένους περιορισμούς. Οι παραδοσιακές λύσεις για τα προβλήματα δομικής βελτιστοποίησης σε κατασκευές προσδιορίστηκαν με τη χρήση μεθόδων άμεσης αναζήτησης σε μια τοπολογία ιστροπικού στερεού και κενού (Isotropic Solid and Empty - ISE). Σε αυτές τις μεθόδους, τα στοιχεία είτε γεμίζονται από ένα δεδομένο ισότροπο υλικό είτε δεν περιέχουν υλικό. Ωστόσο, λόγω του μεγάλου αριθμού των στοιχείων, η εφαρμογή αυτών των μεθόδων χαρακτηρίζεται υπολογιστικά ως εξαιρετικά δαπανηρή. Ως εκ τούτου, από τη δεκαετία του 1980, η κύρια εστίαση σε αυτόν τον τομέα ήταν η ανάπτυξη πιο αποτελεσματικών μεθόδων για την απόκτηση ταχύτερων λύσεων. Στην επιστημονική βιβλιογραφία, υπάρχουν πολλές τεχνικές για την εκτέλεση μιας βελτιστοποίησης τοπολογίας. Οι δύο (2) πιο δημοφιλείς μέθοδοι είναι η τεχνική Στερεού Ισότροπου Υλικού με Ποινικοποίηση (Simplified Isotropic Material with Penalization - SIMP) και η τεχνική Εξελικτικής Δομικής Βελτιστοποίησης (Bidirectional Evolutionary Structural Optimization - BESO).

Η τεχνική Στερεού Ισότροπου Υλικού με Ποινικοποίηση (SIMP) βασίζεται στον προσδιορισμό της βέλτιστης κατανομής του υλικού, μεταβάλλοντας την πυκνότητα του υλικού εντός του προκαθορισμένου χωρίου. Το προκαθορισμένο χωρίου διακρίνεται σε στοιχεία και εφαρμόζεται μια ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων για τον προσδιορισμό της απόδοσης της δομής, που ακολουθείται από μια βελτιστοποίηση της πυκνότητας κάθε στοιχείου του χωρίου. Στη συνέχεια, αναλύεται η διαμόρφωση με τις νέες πυκνότητες των στοιχείων και εκτελείται ξανά η βελτιστοποίηση. Η διαδικασία βελτιστοποίησης επαναλαμβάνεται μέχρι την επίτευξη της σύγκλισης.



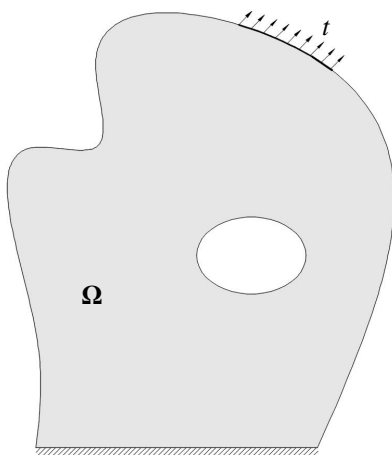
Σχήμα 1.2: Γραφική αναπαράσταση βελτιστοποίησης τοπολογίας

Η Εξελικτικής Δομικής Βελτιστοποίησης (ESO) βασίζεται στην ιδέα της προοδευτικής αφαίρεσης των μη αποδοτικών υλικών από μια κατασκευή. Το μη απαραίτητο υλικό αφαιρείται χρησιμοποιώντας ένα κριτήριο απόρριψης που προσδιορίζει το αναποτελεσματικό υλικό. Η μέθοδος αυτή, έχει το πλεονέκτημα ότι είναι εύκολη στην κατανόηση και στην εκμάθηση.

1.5.1 Μέθοδος Στερεού Ισότροπου Υλικού με Ποινικοποίηση

Ο στόχος σε ένα γενικό (δισδιάστατο) πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας, είναι η εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας μιας δομής ώστε να ελαχιστοποιείται μια δεδομένη αντικειμενική συνάρτηση, f , υπό ορισμένους περιορισμούς. Συγκεκριμένα, οι προϋποθέσεις για τη διατύπωση του προβλήματος είναι ο καθορισμός του αρχικού χωρίου σχεδιασμού Ω , όπου θα δημιουργηθεί η βελτιστοποιημένη κατασκευή, το κλάσμα όγκου της βελτιστοποιημένης κατασκευής, οι συνοριακές συνθήκες και οι

συνθήκες φόρτισης. Η μέθοδος Στερεού Ισότροπου Υλικού με Ποινικοποίηση (SIMP), είναι μια μέθοδος κατανομής υλικού για την εύρεση της βέλτιστης διάταξης ενός δομικού συστήματος, που αποτελείται από γραμμικά ελαστικό ισότροπο υλικό. Επομένως, το ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί, είναι πώς πρέπει να κατανεμηθεί ο όγκος του υλικού στον τομέα Ω , προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί ένα συγκεκριμένο κριτήριο.



Σχήμα 1.3: Αρχική περιοχή σχεδίασης, όρια και συνθήκες φόρτωσης

Η τυπική μαθηματική διατύπωση του προβλήματος, με αντικειμενική συνάρτηση την ενδοτικότητα της κατασκευής, εκφράζεται ως εξής:

$$\text{Minimize: } C = F^T u(x) \quad (1.5a)$$

$$\text{Subject to: } \frac{V(x)}{V_0} = v_{olfrac} \quad (1.5b)$$

$$0 < x_{min} < x_{ele} < 1, \quad ele = 1, 2, 3, \dots, N_{ele} \quad (1.5c)$$

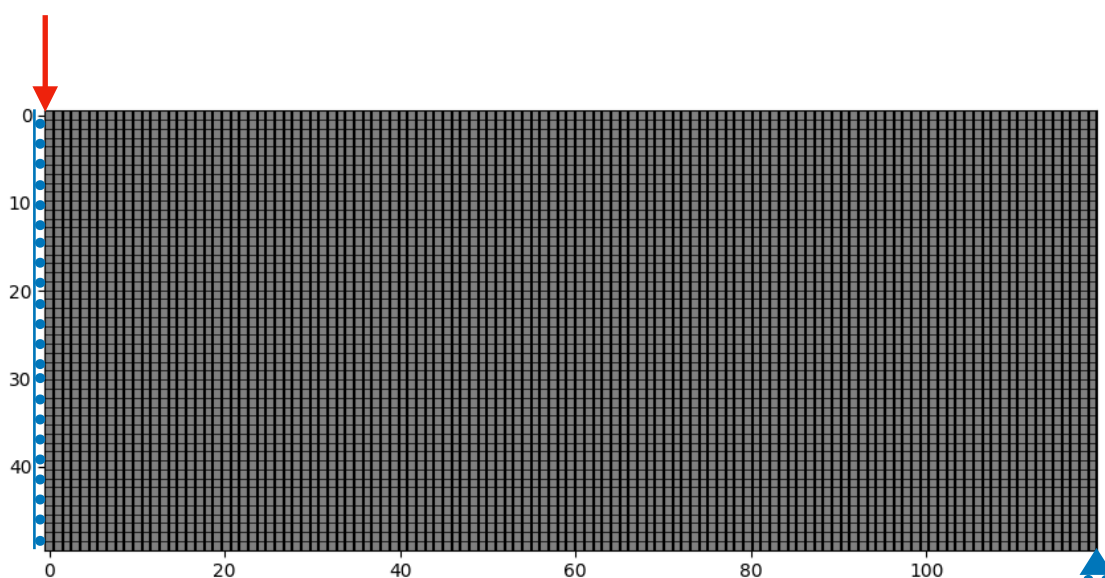
Όπου:

- C: η ενέργεια παραμόρφωσης της κατασκευής
- F: το διάνυσμα των φορτίων που εφαρμόζεται στην κατασκευή.
- u: το διάνυσμα των μετατοπίσεων
- V(x): ο συνολικός όγκος του εκάστοτε βήματος
- V_0 : ο αρχικός όγκος του χωρίου
- v_{olfrac} : το κλάσμα του τελικού όγκου που επιβάλλεται στο πρόβλημα
- x: το διάνυσμα της μεταβλητής σχεδιασμού
- x_{ele} : η πυκνότητα κάθε πεπερασμένου στοιχείου

- N_{ele} : ο συνολικός αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούνται για τη διακριτοποίηση του χωρίου

1.5.2 Βελτιστοποίησης τοπολογίας με την μέθοδο SIMP

Αρχικά, καθορίζεται το χωρίο σχεδιασμού, οι συνοριακές συνθήκες και οι συνθήκες φόρτισης και στη συνέχεια γίνεται η διακριτοποίηση του χωρίου. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα προσδιορίζεται το αρχικό χωρίο σχεδιασμού, όπου η διακριτοποίησή γίνεται αποτελείται από 120 ορθογωνικά στοιχεία στην οριζόντια διεύθυνση και 50 ορθογωνικά στοιχεία στην κατακόρυφη διεύθυνση.



Σχήμα 1.4: Διακριτοποίηση αρχικού χωρίου

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η βελτιστοποίηση τοπολογίας αναζητάει τη βέλτιστη κατανομή του υλικού σε ένα χωρίο υπό δεδομένες συνθήκες φόρτισης και στήριξης. Έτσι, η μεταβλητή σχεδιασμού είναι μία συνεχής συνάρτηση της μορφής:

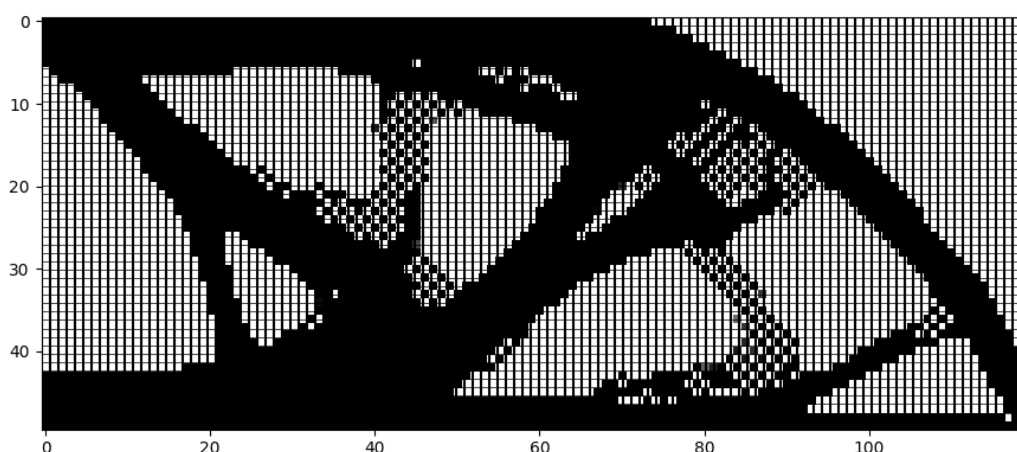
$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν χρειαζόμαστε υλικό} \\ 0, & \text{αν δεν χρειαζόμαστε υλικό} \end{cases} \quad (1.6)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω συνάρτηση του υλικού, είναι δυνατό να συσχετίσουμε όλες τις πιθανές παραμέτρους που μας ενδιαφέρουν για την ανάλυση μας. Για παράδειγμα, το μέτρο ελαστικότητας E περιγράφεται ως:

$$E(x, y) = E d(x, y) \quad (1.7)$$

Αντίστοιχα, αν θέλουμε να λύσουμε ένα δυναμικό πρόβλημα, μπορούμε να συσχετίσουμε και την πυκνότητα κατά αυτό τον μονοσήμαντο τρόπο. Δηλαδή όπου χρειαζόμαστε υλικό η πυκνότητα είναι ρ , ενώ αν δεν χρειαζόμαστε υλικό η πυκνότητα είναι ίση με το 0. Σύμφωνα με αυτούς τους ορισμούς, εφαρμόζονται αρκετές διαδικασίες τοπικής βελτιστοποίησης, μία από τις οποίες είναι η μέθοδος SIMP, η οποία περιγράφεται σε αυτή την ενότητα.

Λαμβάνοντας υπόψη την διακριτοποίηση του σχήματος 1.4, η διαδικασία τοπικής βελτιστοποίησης θα ξεκινήσει με την θεώρηση ότι υπάρχει παντού υλικό και σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης θα αφαιρείται υλικό. Επομένως, στο τέλος ενός κύκλου βελτιστοποίησης μπορεί να καταλήξει στο παρακάτω σχήμα, όπου τα στοιχεία με λευκό χρώμα έχουν $d = 0$, ενώ τα στοιχεία με μαύρο χρώμα αντιστοιχούν σε $d = 1$.



Σχήμα 1.5: Κατανομή υλικού κατά την διαδικασία βελτιστοποίησης

Ως εκ τούτου, από μία συνεχή συνάρτηση κατανομής υλικού, μέσω της διακριτοποίησης, καταλήγει να είναι μια διακριτή συνάρτηση, δηλαδή ένα διάνυσμα μεταβλητών κατανομής:

$$\{\bar{d}\} = \{^1d \ ^2d \ ^3d \ \dots \ ^nd\} \quad (1.8)$$

Επομένως, η διακριτοποίηση που εισάγεται στο χωρίο και επιλύεται με την αριθμητική μέθοδο (μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων) διακριτοποιεί και την παραπάνω συνάρτηση $d(x,y)$. Συνεπώς, το αρχικό απειροβάθμιο πρόβλημα γίνεται ένα πρόβλημα με “ n ” βαθμούς ελευθερίας.

Στόχος λοιπόν είναι η εύρεση της βέλτιστης τιμής του διανύσματος “ d ” που ελαχιστοποιούν μια συνάρτηση κόστους. Η προφανής συνάρτηση κόστους είναι η ελαχιστοποίηση του βάρους, όμως, όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα, σε

αυτά τα προβλήματα βέλτιστης τοπολογίας ως αντικειμενική συνάρτηση χρησιμοποιείται συνήθως η ενέργεια παραμόρφωσης (§ 1.3 Μαθηματική έκφραση βελτιστοποίησης).

$$C(\{\bar{d}\}) = F [u(\{d\})]^T \quad (1.9)$$

Η πρώτη εφαρμογή της μεθόδου SIMP πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με τον παρακάτω περιορισμό, όπου το v_{olfrac} (volume fraction ratio) το ορίζει ο χρήστης

$$\text{Subject to: } \frac{V(x)}{V_0} = v_{olfrac} \quad (1.10)$$

Για την υλοποίηση της παραπάνω διαδικασίας, ορίζεται η συνάρτηση κόστους:

$$J(\{d\}) = C(\{d\}) + \lambda G(\{d\}) \quad (1.11)$$

όπου λ , ο πολλαπλασιαστή Lagrange. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η βέλτιστη λύση προκύπτει σύμφωνα με την παρακάτω σχέση (Optimality Criteria - OC).

$$\frac{\partial J(\{d\})}{\partial d} = 0 \Rightarrow \frac{\partial C(\{d\})}{\partial d} + \lambda \frac{\partial G(\{d\})}{\partial d} = 0 \quad (1.12)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, για τον αριθμητικό αλγόριθμο θα χρειαστούμε τις παράγωγους της συνάρτησης κόστους C σε σχέση με τις μεταβλητές σχεδιασμού d . Αυτό επιτυγχάνεται με απλό τρόπο:

$$\frac{\partial C(\{d\})}{\partial d} = \frac{\partial [u(\{d\})]^T}{\partial d} F \quad (1.13)$$

Άρα η συνάρτηση κόστους προκύπτει:

$$\frac{\partial J(\{d\})}{\partial d} = \frac{\partial [u(\{d\})]^T}{\partial d} F + \lambda \frac{\partial G(\{d\})}{\partial d} = 0 \quad (1.14)$$

Δεδομένου ότι σε κάθε βήμα της ανάλυσης πρέπει να ισχύει η ισορροπία:

$$F = [K(\{d\})] u(\{d\}) \quad (1.15)$$

Η παραγωγή της παραπάνω σχέσης:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial d} &= \frac{\partial K(\{d\})}{\partial d} u(\{d\}) + \frac{\partial u(\{d\})}{\partial d} K(\{d\}) \Rightarrow \\
 \frac{\partial K(\{d\})}{\partial d} u(\{d\}) &= - \frac{\partial u(\{d\})}{\partial d} K(\{d\}) \Rightarrow \\
 \frac{\partial [K(\{d\})]^T}{\partial d} [u(\{d\})]^T &= - \frac{\partial [u(\{d\})]^T}{\partial d} [K(\{d\})]^T \Rightarrow \\
 \frac{\partial K(\{d\})}{\partial d} [u(\{d\})]^T &= - \frac{\partial [u(\{d\})]^T}{\partial d} K(\{d\}) \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω εξίσωση με την εξίσωση 1.15, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial [u(\{d\})]^T}{\partial d} F &= [K(\{d\})] \frac{\partial [u(\{d\})]^T}{\partial d} u(\{d\}) \Rightarrow \\
 \frac{\partial [u(\{d\})]^T}{\partial d} F &= - \frac{\partial K(\{d\})}{\partial d} [u(\{d\})]^T u(\{d\}) \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

Επιστρέφοντας λοιπόν στην εξίσωση 1.14, η συνάρτηση κόστους προκύπτει:

$$\frac{\partial J(\{d\})}{\partial d} = - \frac{\partial K(\{d\})}{\partial d} [u(\{d\})]^T u(\{d\}) + \lambda \frac{\partial G(\{d\})}{\partial d} = 0 \quad (1.18)$$

Στην παραπάνω εξίσωση κόστους, το μητρώο K είναι συνολική δυσκαμψία της κατασκευής, το οποίο προκύπτει από την υπέρθεση των στοιχείων της δομής

$$[K] = \sum_{i=1}^n K_i(\{d\}) \quad (1.19)$$

Επομένως, η παράγωγος του κάθε στοιχείου i , προκύπτει:

$$\frac{\partial K(\{d\})}{\partial d} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial {}^i K(\{d\})}{\partial {}^i d} \quad (1.20)$$

Όπου η δυσκαμψία του κάθε στοιχείου μπορεί να περιγραφεί:

$${}^i K = E [{}^i \hat{K}]_{E=1} \Rightarrow {}^i K = {}^i d E [{}^i \hat{K}]_{E=1} \quad (1.21)$$

Ως εκ τούτου, η μερική παράγωγος του κάθε στοιχείου είναι σταθερή, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατό να προσδιοριστεί η κατεύθυνση στην οποία πρέπει να κινηθεί ο αλγόριθμος ώστε να μειώσει η συνάρτηση τις τιμές της. Για να αντιμετωπιστεί λοιπόν το πρόβλημα της σταθερής παραγώγου εντάσσεται ο όρος της ποινικοποίησης (penalisation), με την θεώρηση ότι:

$${}^iK = ({}^id)^p E [\hat{K}]_{E=1} \quad (1.22)$$

όπου p η παράμετρος ποινικοποίησης (penalty parameter), το οποίο το ορίζει ο χρήστης, επιτυγχάνοντας έτσι οι παράγωγοι του κάθε στοιχείου να μην είναι σταθερές, μετατρέποντας παράλληλα το πρόβλημα σε ένα συνεχές πρόβλημα, καθώς το d πλέον μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ μηδέν και ένα ($0 \leq d \leq 1$).

$$\frac{\partial {}^iK(\{d\})}{\partial {}^id} = p ({}^id)^{p-1} E [\hat{K}]_{E=1} \quad (1.23)$$

Έτσι, η συνάρτηση κόστους για κάθε στοιχείο προκύπτει:

$$\frac{\partial J(\{d\})}{\partial {}^id} = -p ({}^id)^{p-1} E [\hat{K}]_{E=1} [u(\{d\})]^T u(\{d\}) + \lambda \frac{V}{V_0} = 0 \quad (1.24)$$

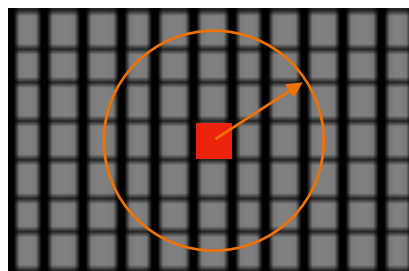
Η παραπάνω εξίσωση είναι μία μη γραμμική εξίσωση ως προς id . Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης, η παραπάνω σχέση μεταγράφεται σε μια εξίσωση της μορφής $x=g(x)$, υπολογίζοντας το x ευρεστικά. Συνεπώς, προκύπτει η ευρεστική σχέση:

$${}^id = \frac{p ({}^id)^p + E [\hat{K}]_{E=1} [u(\{d\})]^T u(\{d\})}{\lambda V/V_0} \quad (1.25)$$

Στην παραπάνω εξίσωση είναι άγνωστος και ο πολλαπλασιαστής Lagrange (λ). Συνεπώς, η αναζήτησή της λύσης ξεκινάει με μία υποθετική τιμή του λ , υπολογίζοντας το id και στη συνέχεια, για τις τιμές του λ και d που επιλέχθηκαν γίνεται ο έλεγχος ικανοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης 1.24, μέχρι να επιτευχθεί η σύγκλιση.

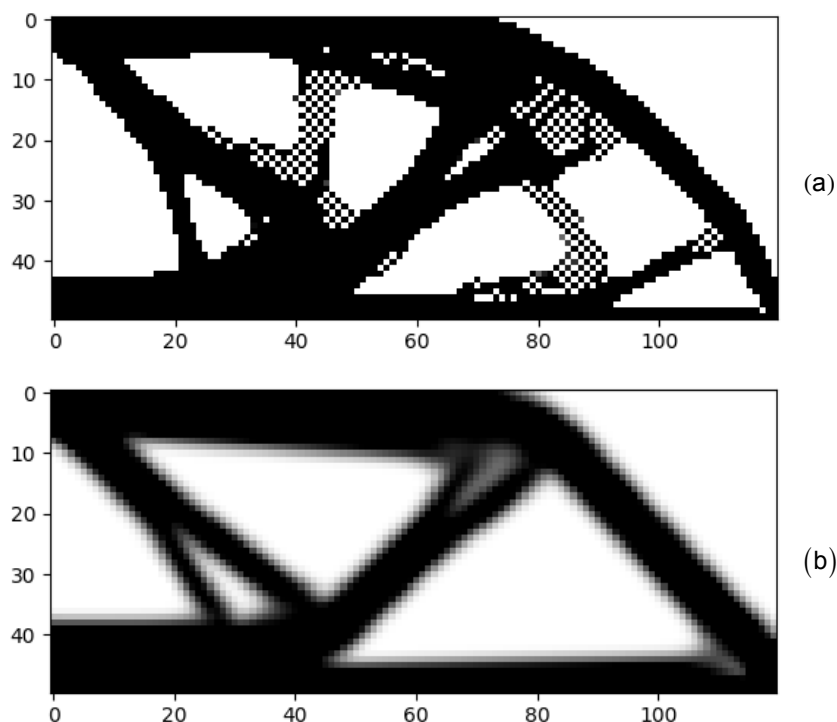
Συνοψίζοντας την παραπάνω διαδικασία, σε κάθε δοκιμή σχεδιασμού η οποία εκφράζεται από ένα διάνυσμα d , υπολογίζονται οι μετακινήσεις στους κόμβους μέσω της εξίσωσης ισορροπίας, υπολογίζεται το καινούργιο διάνυσμα d , μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση.

Σημειώνεται πως παρόλο που η συνάρτηση έχει μετατραπεί σε ένα συνεχές πρόβλημα, η διακριτοποίηση που οριστική στην αρχή, δηλαδή ότι το d , σε επίπεδο στοιχείου, μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν ή ένα, έχει ως αποτέλεσμα να λειτουργεί ως ένας διακόπτης για το κάθε στοιχείο. Ως εκ τούτου, κατά την διαδικασία της προκύπτει το φαινόμενο της σκακιέρας, δηλαδή γειτονικά στοιχεία να είναι 0 ή 1, δημιουργώντας σκαλοπάτια, τα οποία είναι σχεδιαστικά ανέφικτα. Επομένως, για να λειτουργήσει η μέθοδος, δίνοντας σχεδιαστικά αποτελέσματα, εμπεριέχει ένα βήμα ομογενοποίησης των i_d γειτονικών στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα για κάθε στοιχείο, ορίζεται μια ακτίνα γύρω του, και σύμφωνα με τα i_d που έχουν υπολογιστεί θεωρείται ότι όλα έχουν τον ίδιο μέσο όρο.



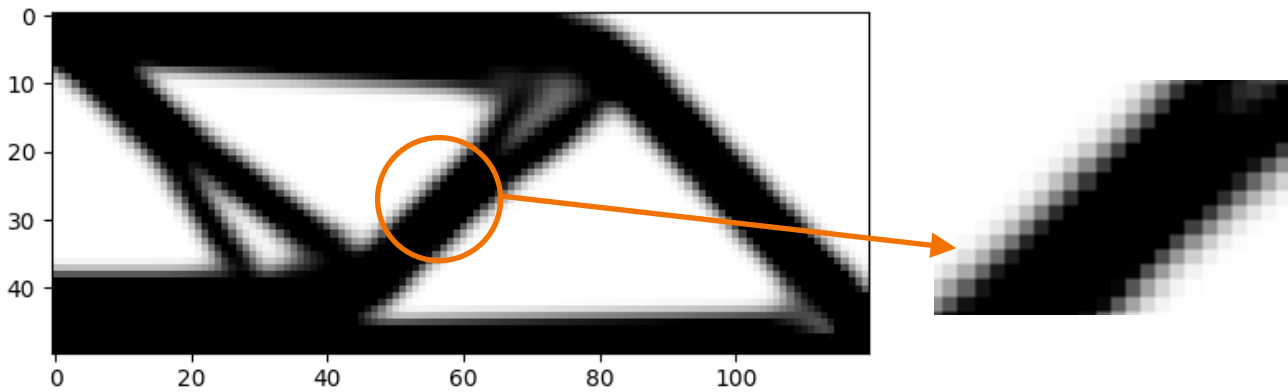
Σχήμα 1.6: Ομογενοποίηση στοιχείων

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης του χωρίου που προσδιορίστηκε παραπάνω (σχ. 1.4), χωρίς την ομογενοποίηση (σχ. 1.7a) που αναφέρθηκε παραπάνω, αλλά και με την ομογενοποίηση (σχ. 1.7b).



Σχήμα 1.7: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης χωρίς (a) και με ομογενοποίηση (b)

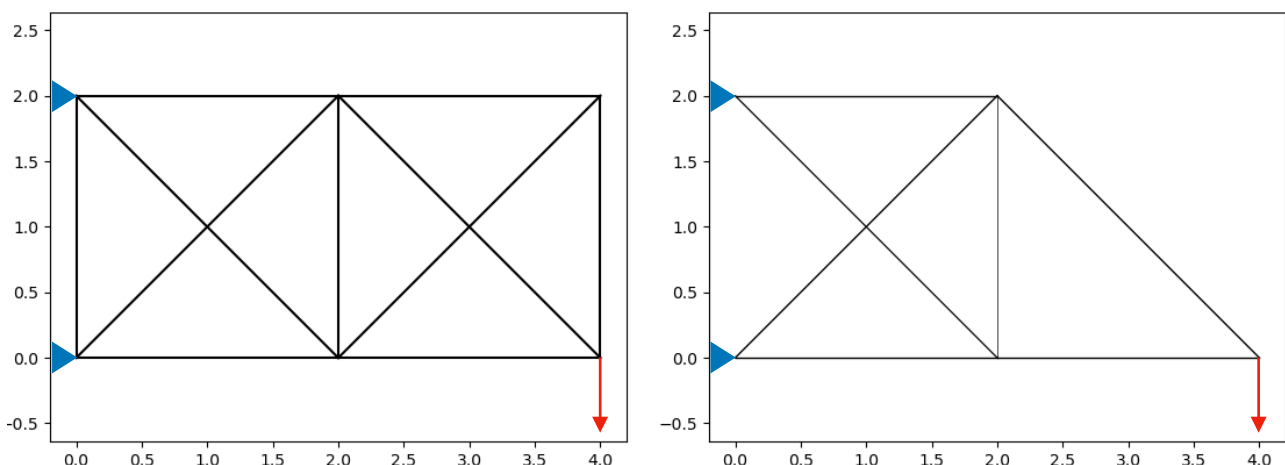
Όπως είναι φανερό, η ομογενοποίηση των στοιχείων έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία μιας πιο αποδεκτής σχεδιαστικά λύσης, όμως η αναφερόμενη σκακιέρα συνεχίζει να υπάρχει κοντά στο σύνορο (σχ. 1.8). Επομένως η συγκεκριμένη γεωμετρία χρειάζεται περεταίρω επεξεργασία ώστε να είναι δυνατό να κατασκευαστεί.



Σχήμα 1.8: Ανομοιομορφία αποτελεσμάτων βελτιστοποίησης

1.6 Βελτιστοποίησης τοπολογίας με προκατασκευασμένα στοιχεία

Στη βελτιστοποίησης τοπολογίας με την χρήση προκατασκευασμένων στοιχείων, στόχος είναι η σχεδίαση της βέλτιστης δομής μέσω ευθύγραμμων στοιχείων. Για παράδειγμα, κατά την βελτιστοποίηση ενός δικτυωματικού φορέα, ως μεταβλητές σχεδιασμού ορίζεται το εμβαδό διατομής των στοιχείων. Στη βιβλιογραφία αυτό το πρόβλημα ανάγεται σε προβλήματα βελτιστοποίησης μεγέθους, καθώς μεταβάλετε το μέγεθος των δομικών στοιχείων. Ωστόσο, εάν επιτρέψουμε σε αυτές τις περιοχές να λάβουν την τιμή μηδέν, τότε το πρόβλημα ανάγεται σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας, καθώς όταν συμβεί αυτό, οι ράβδοι αφαιρούνται από τη δομή, αλλάζοντας τη συνδεσιμότητα μεταξύ των κόμβων και κατά συνέπεια την τοπολογία της κατασκευής.



Σχήμα 1.9: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτυωματικού φορέα

1.6.1 Δικτυωματικός φορέας

Κατά την βελτιστοποίηση τοπολογίας δικτυωματικού φορέα, αντί να κατανέμεται το υλικό ανάλογα με την πυκνότητα του κάθε πεπερασμένου στοιχείου, κατανέμεται ένας αριθμός από προκαθορισμένα στοιχεία. Ο τομέας σχεδιασμού είναι διακριτικός με ένα κομβικό πλέγμα που συνδέεται με ένα πυκνό σύνολο δυνητικών δομικών μελών.

Οι συνοριακές συνθήκες και τα εφαρμοζόμενα φορτία θεωρούνται γνωστά και η βελτιστοποίηση χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της κατανομής των διατομών. Ως μεταβλητές σχεδιασμού ορίζεται το εμβαδό διατομής των στοιχείων, όπου μέλη με περιοχές κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο θεωρούνται αναποτελεσματικά και αφαιρούνται από την αρχική δομή, αλλάζοντας έτσι τη συνδεσιμότητα του συστήματος. Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος με αντικειμενική συνάρτηση την ελαχιστοποίηση της ενδοτικότητας περιγράφεται ως εξής:

$$\text{Minimize: } C(a) = F^T u(a) \quad (1.26a)$$

$$\text{Subject to: } F = K(a) u(a) \quad (1.26b)$$

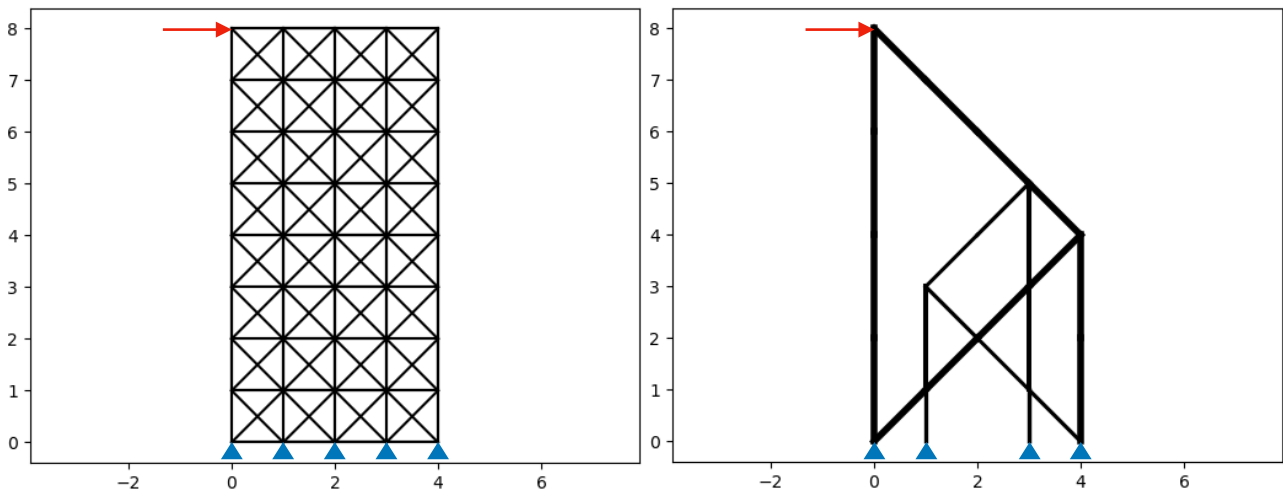
$$a^T L \leq V_{lim} \quad (1.26c)$$

$$a_{min} < a_{ele} < a_{max}, \quad ele = 1, 2, 3, \dots, N_{ele} \quad (1.26d)$$

Όπου:

- C: η ενέργεια παραμόρφωσης της κατασκευής
- F: το διάνυσμα των φορτίων που εφαρμόζεται στην κατασκευή.
- u: το διάνυσμα των μετατοπίσεων
- a: το διάνυσμα των εμβαδών των στοιχείων
- K: το καθολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής
- L: το διάνυσμα των μηκών των στοιχείων
- V_{lim} : ο όγκος της τελικής κατασκευής

Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται η βελτιστοποίηση τοπολογίας δικτυωματικού φορέα. Πρόκειται για έναν πρόβολο, όπου στο άκρο του ασκείται μια οριζόντια δύναμη. Το πάχος της γραμμής στην τελική σχεδίαση του χωρίου, αντιπροσωπεύει το εμβαδό της διατομής.



Σχήμα 1.10: Βελτιστοποιημένος σχεδιασμός προβόλου αποτελούμενο από στοιχεία δικτυώματος

1.6.2 Καμπτόμενα πλαίσια

Οι κατασκευές δικτυωματικών φορέων μεταφέρουν φορτία μόνο αξονικά, επομένως, εάν δεν ληφθεί υπόψη ο λυγισμός των στοιχείων, μια μεμονωμένη μεταβλητή σχεδιασμού (εμβαδόν διατομής των μελών) είναι επαρκής για να εκφράσει τη δομική απόδοση.

Οι πλαισιωτές κατασκευές είναι ικανές να μεταφέρουν φορτία με μηχανισμούς όπως αξονικά και διατμητικά φορτία αλλά και μέσω της καμπτικής ροπής. Ως εκ τούτου, η ροπή αδράνειας έχει σημαντικό ρόλο στον ποσοτικό προσδιορισμό της δομικής απόδοσης και πρέπει να ενσωματωθεί στη διαδικασία σχεδιασμού. Για απλά σχήματα διατομής, όπως κυκλικές ή ορθογώνιες τομές, μπορεί να προκύψει μια αναλυτική εξίσωση για τη συσχέτιση του εμβαδού της διατομής με τη ροπή αδράνειας.

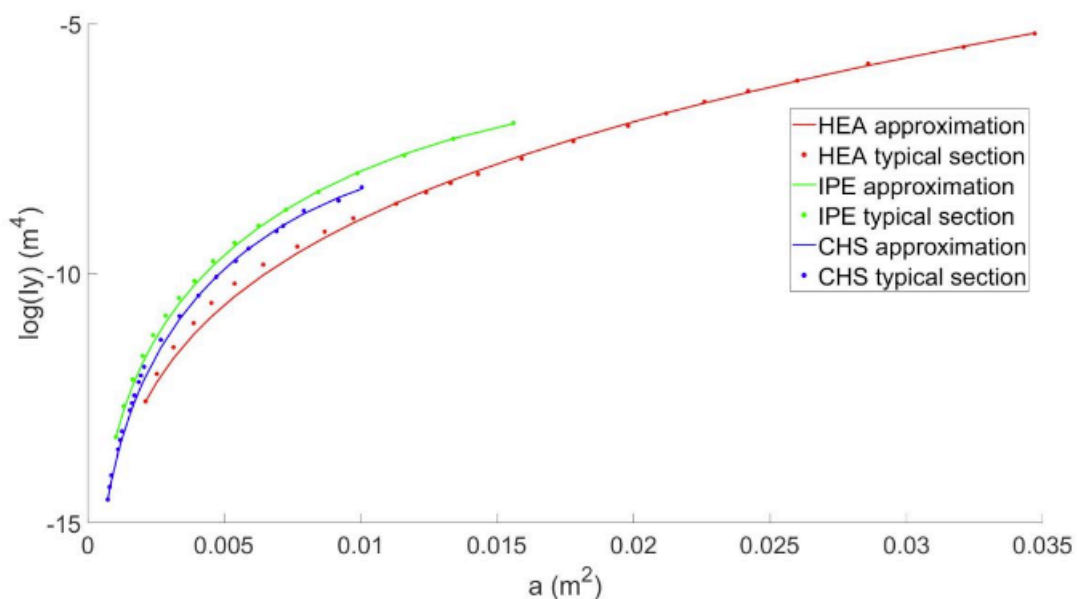
$$I = \begin{cases} \pi A^2/4, & \text{για κυκλικές διατομές} \\ A^2/12, & \text{για τετραγωνικές διατομές} \end{cases} \quad (1.27)$$

Ωστόσο, οι πραγματικές κατασκευές σχεδιάζονται συνήθως από μια διαθέσιμη βιβλιοθήκη τυπικών τμημάτων, όπως εργοστασιακά στοιχεία “I” ή “H”, καθιστώντας τη δημιουργία μιας σχέσης μεταξύ του εμβαδού διατομής και άλλων ιδιοτήτων διατομής απαραίτητη. Μια πρώτη επιλογή για τη δημιουργία αυτής της σχέσης είναι η χρήση μοντέλων γραμμικής παλινδρόμησης. Αυτά τα μοντέλα παρέχουν μια εξίσωση που συσχετίζει τον μέσο όρο της ροπής αδράνειας για δεδομένη επιφάνεια διατομής. Στην ανάλυση παλινδρόμησης, προτιμάται η χρήση ενός μοντέλου με ελάχιστο αριθμό παραμέτρων για τον έλεγχο του τυπικού σφάλματος των εκτιμώμενων παραμέτρων, διατηρώντας παράλληλα αποδεκτή ακρίβεια πρόβλεψης [6]. Επιπλέον, απαιτείται οι

προβλέψεις του μοντέλου να είναι πάντα θετικές και να είναι μηδενικές εάν το εμβαδόν διατομής είναι μηδέν. Επομένως, η σχέση μεταξύ του εμβαδού διατομής και της ροπής αδράνειας της διατομής προκύπτει [7]:

$$\sqrt{I} = a_1 a + a_2 a^2 + a_3 a^3 \quad (1.28)$$

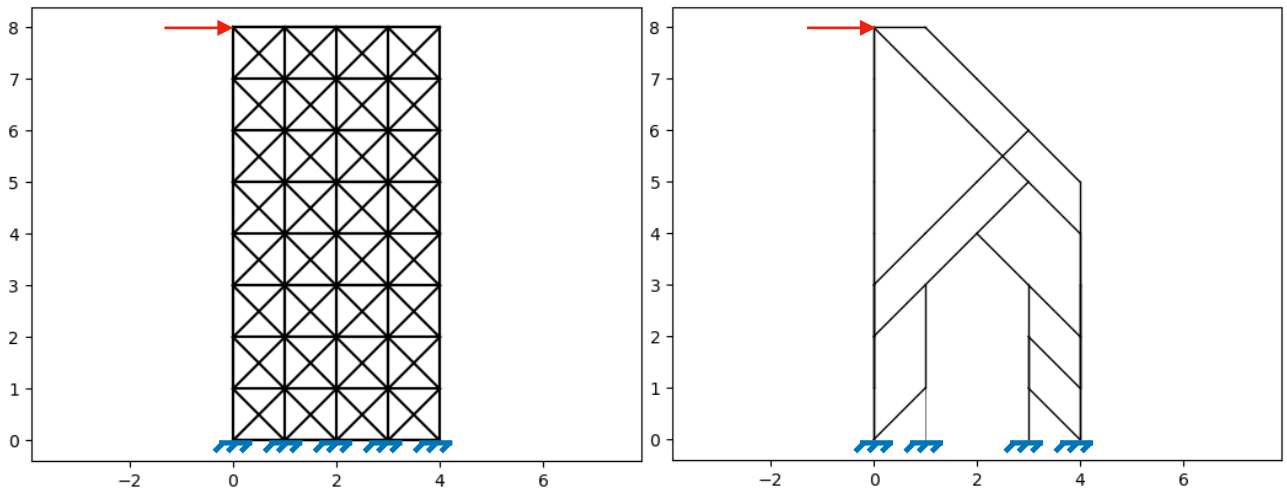
Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η προσεγγιστική καμπύλη που δίνει τη σχέση του εμβαδού της διατομής και της ροπής αδράνειας, μετά από την ανάλυση παλινδρόμησης, για τις διατομές HEA, IPE και CHS [5]. Παρατηρείται ότι επιτυγχάνεται πολύ ακριβής προσέγγιση και για τα τρία είδη διατομών.



Σχήμα 1.11: Προσεγγιστική καμπύλη μετά από ανάλυση παλινδρόμησης για τη ροπή αδράνειας [5]

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος της βελτιστοποίησης τοπολογίας περιγράφεται όπως και στους δικτυωματικούς φορείς, όπου οι οριακές συνθήκες και τα εφαρμοζόμενα φορτία θεωρούνται γνωστά και η βελτιστοποίηση χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της κατανομής των διατομών. Ως μεταβλητές σχεδιασμού ορίζεται το εμβαδό διατομής των στοιχείων, όπου μέλη με περιοχές κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο θεωρούνται αναποτελεσματικά και αφαιρούνται από την αρχική δομή, αλλάζοντας έτσι τη συνδεσιμότητα του συστήματος.

Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται η βελτιστοποίηση τοπολογίας ενός πλαισιωτού φορέα. Πρόκειται για έναν πρόβολο, όπου στο άκρο του ασκείται μια οριζόντια δύναμη. Το πάχος της γραμμής στην τελική σχεδίαση του χωρίου, αντιπροσωπεύει το εμβαδό της διατομής.



Σχήμα 1.12: Βελτιστοποιημένος σχεδιασμός προβόλου αποτελούμενο από στοιχεία δοκού

2. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΙΚΟΥ ΦΟΡΕΑ

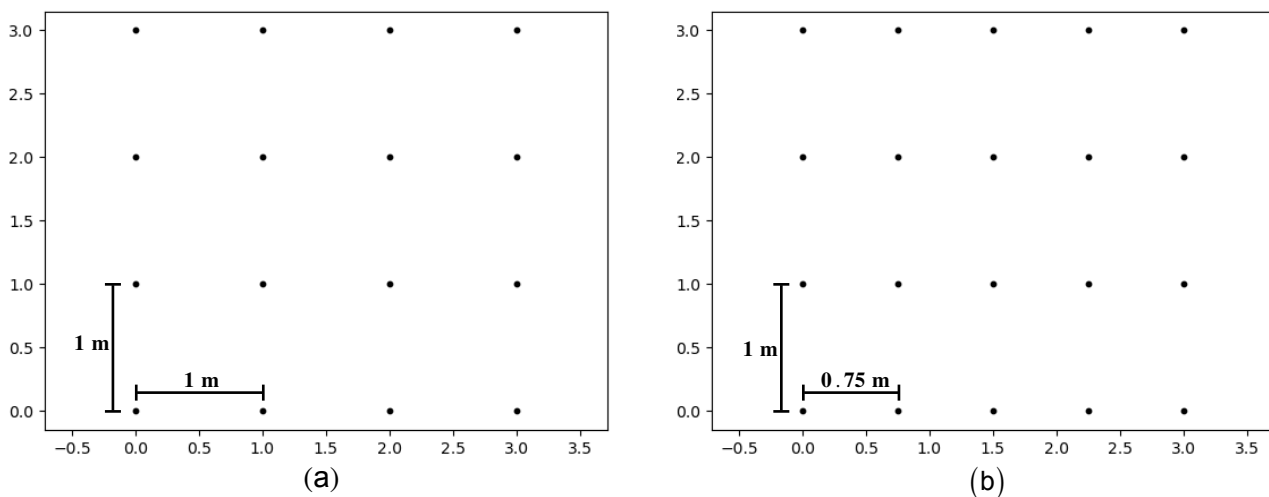
Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα, κατά την βελτιστοποίηση τοπολογίας ενός δικτυωματικού φορέα, αντί να κατανέμεται το υλικό ανάλογα με την πυκνότητα του κάθε πεπερασμένου στοιχείου, κατανέμεται ένας αριθμός από προκαθορισμένα στοιχεία. Οι οριακές συνθήκες και τα εφαρμοζόμενα φορτία θεωρούνται γνωστά και η βελτιστοποίηση χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της κατανομής των διατομών. Ως μεταβλητές σχεδιασμού ορίζεται το εμβαδό διατομής των στοιχείων, όπου μέλη με περιοχές κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο θεωρούνται αναποτελεσματικά και αφαιρούνται από την αρχική δομή, αλλάζοντας έτσι τη συνδεσιμότητα του συστήματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η διαδικασία βελτιστοποίησης τοπολογίας ενός δικτυωματικού φορέα ορίζεται ως εξής. Αρχικά, καθορίζεται το χωρίο σχεδιασμού, οι συνοριακές συνθήκες και οι συνθήκες φόρτισης. Στην συνέχεια υπολογίζονται οι μετακινήσεις στους κόμβους, μέσω των εξισώσεων ισορροπίας και προσδιορίζεται το καινούργιο διάνυσμα των εμβαδών του κάθε στοιχείου.

2.1 Σχεδιασμός αρχικού χωρίου σχεδιασμού

Η δημιουργία του αρχικού χωρίου σχεδιασμού σκοπεύει στην σύνθεση μιας αραιής βέλτιστης τοπολογία από έναν πεπερασμένο αριθμό κόμβων και μελών στο χωρίο σχεδιασμού. Σε ένα δισδιάστατο πρόβλημα, αρχικά ο χρήστης καλείται να ορίσει το χωρίο σχεδιασμού, το συνολικό μήκος και ύψος της διατομής και στη συνέχεια προσδιορίζει την πύκνωση του δικτύου, δηλαδή την απόσταση των κόμβων και στις δύο διευθύνσεις. Για παράδειγμα, για ένα τετραγωνικό χωρίο πλευράς τριών (3) μέτρων ο χρήστης θα μπορούσε να ορίσει τις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. Διάταξη κόμβων - 4x4, αποστάσεις κόμβων 1m και στις δύο διευθύνσεις (σχ. 2.1a)
- ii. Διάταξη κόμβων - 5x4, αποστάσεις κόμβων 0.75m στην οριζόντια διεύθυνση και 1m στην κατακόρυφη διεύθυνση (σχ. 2.1b)



Σχήμα 2.1: Πιθανή διάταξη κόμβων για ένα τετραγωνικό χωρίο πλευράς 3m

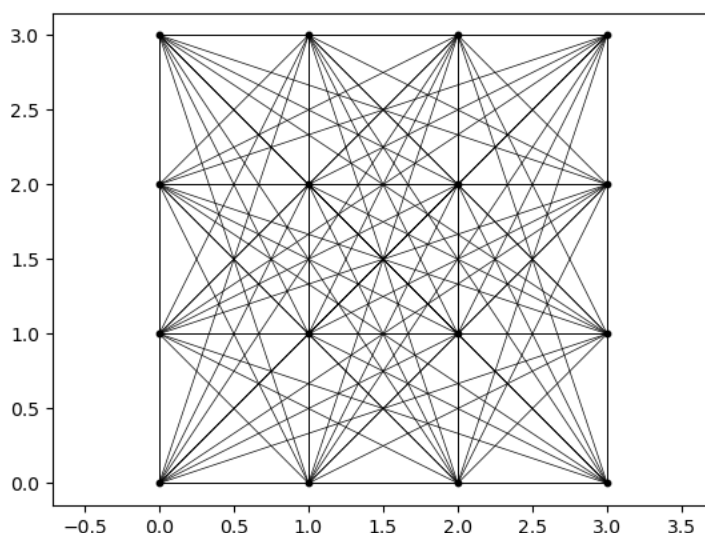
Ο καθορισμός των δομικών στοιχείων στο πρόβλημα μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο (2) τρόπους, το πλήρως συνδεδεμένο σύστημα και το σύστημα που καθορίζεται από τον χρήστη. Ένα πλήρως συνδεδεμένο χωρίο μπορεί εύκολα να δημιουργηθεί συνδέοντας όλα τα πιθανά μέλη. Από την άλλη πλευρά, μία δομή που καθορίζεται από τον χρήστη σχεδιάζεται σύμφωνα με τις προτιμήσεις του μελετητή. Ωστόσο, για ένα σύνολο με μεγάλο αριθμό κόμβων, η προετοιμασία της εργασίας που καθορίζεται από τον χρήστη είναι πολύ επίπονη και είναι δύσκολο να δημιουργηθεί ένα σύστημα που μπορεί να οδηγήσει στο καθολικό βέλτιστο. Μία εναλλακτική λύση είναι η δημιουργία των μελών σύμφωνα με την αρχή της κομβικής γεινίασης, όταν οι κόμβοι είναι ομοιόμορφα κατανομημένοι σε μία ορθογώνια δομή. Σημειώνεται πως το αρχικό χωρίο σχεδιασμού πρέπει να πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- i. Ο φορέας πρέπει να είναι σταθερός, με τις κατάλληλες συνθήκες στήριξης για τον περιορισμό των μετατοπίσεων και της περιστροφής της κατασκευής.
- ii. Ο αριθμός των στοιχείων δεν πρέπει είναι τόσο μεγάλος, όσο ένα πλήρως συνδεδεμένο συνδεδεμένο σύστημα, ενώ παράλληλα θα πρέπει να υπάρχουν και περιττά μέλη που πρέπει να εξαλειφθούν, δηλαδή, να είναι στατικά απροσδιόριστο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για ένα σύστημα με n κόμβους και n_c ($n_c \geq 3$) μεταφορικούς περιορισμούς, ο ελάχιστος αριθμός μελών m_{\min} είναι $2n - n_c$ και ο μέγιστος αριθμός μελών m_{\max} είναι $n(n-1)/2$. Επομένως, ο αριθμός των μελών m θα πρέπει να είναι εντός του εύρους (m_{\min}, m_{\max}) [8].

Όμως, ο πραγματικός δυνατός αριθμός των στοιχείων, δεν είναι απαραίτητο ότι θα ικανοποιείται από την παραπάνω συνθήκη. Αυτό συμβαίνει γιατί η σύνδεση όλων των κόμβων μεταξύ τους, πολλές φορές έχει ως αποτέλεσμα την υπερκάλυψη ενός

στοιχείου, καθώς μπορεί δύο (ή παραπάνω) στοιχεία να είναι συνευθειακά. Στο παράδειγμα του σχήματος 2.1a, ο μέγιστος αριθμός των στοιχείων είναι 120. Όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί, για την συγκεκριμένη διάταξη των κόμβων, η εφαρμογή του πλήρως συνδεδεμένου χωρίου δεν είναι δυνατή καθώς ορισμένα από τα στοιχεία υπερκαλύπτονται. Αυτό γίνεται αντιληπτό από το διαφορετικό πάχος των γραμμών που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.2: Υπερ κάλυψη στοιχείων ενός πλήρως συνδεδεμένου χωρίου

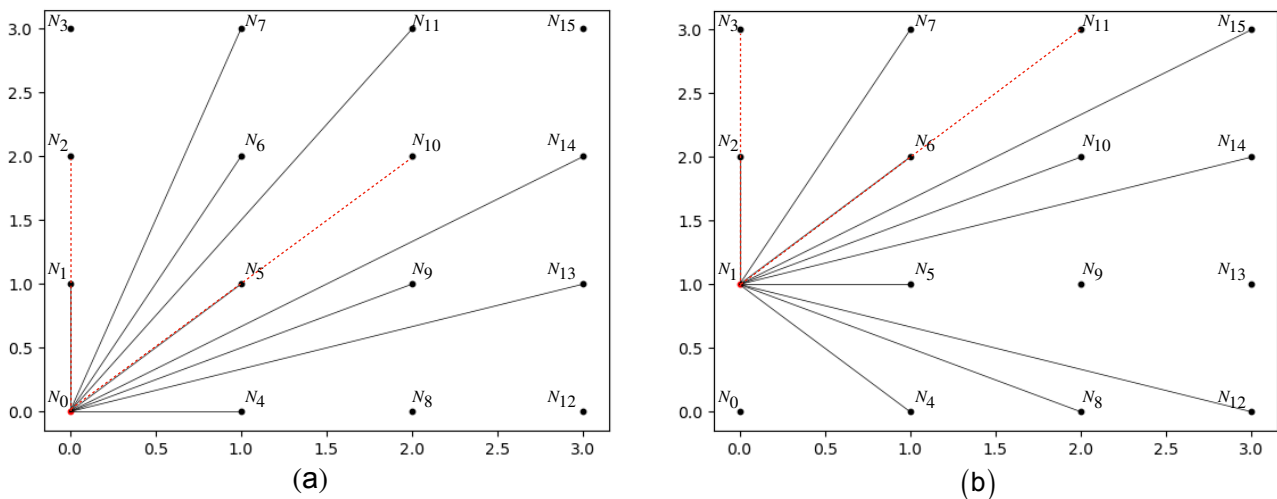
Όπως είναι προφανές, ο προσδιορισμός των στοιχείων του αρχικού χωρίου στοχεύει στην σχεδίαση όσο το δυνατό μικρότερων στοιχείων ώστε να δημιουργηθεί ένα σύστημα που μπορεί να οδηγήσει στο καθολικό βέλτιστο. Για τον σκοπό αυτό υιοθετήθηκε η παρακάτω διαδικασία. Αρχικά ορίζεται ο κόμβος αρχής ο οποίος θα συνδεθεί με όλους του υπόλοιπους κόμβους. Για κάθε στοιχείο που καλείται να σχεδιαστεί υπολογίζεται πρώτα η γωνία του μέλους στο καθολικό σύστημα, μην επιτρέποντας στο πρόγραμμα να δημιουργήσει ένα στοιχείο με την ίδια ακριβώς γωνία.

Έτσι, για την παραπάνω διάταξη, ενώ σε ένα πλήρως συνδεδεμένο χωρίο ο κόμβος μηδέν (N_0) θα συνδεότανε με όλους τους υπόλοιπους κόμβους, τώρα συνδέεται μόνο με τους παρακάτω, μη διαγραμμαμένους κόμβους (σχ. 2.3a):

$$[N_1 ; \cancel{N_2} ; \cancel{N_3} ; N_4 ; N_5 ; N_6 ; N_7 ; \cancel{N_8} ; N_9 ; \cancel{N_{10}} ; N_{11} ; \cancel{N_{12}} ; N_{13} ; N_{14} ; \cancel{N_{15}}]$$

Αντίστοιχα, ο κόμβος ένα (N_1) θα συνδεότανε με όλους τους υπόλοιπους κόμβους, τώρα συνδέεται μόνο με τους παρακάτω, μη διαγραμμαμένους κόμβους (σχ. 2.3b):

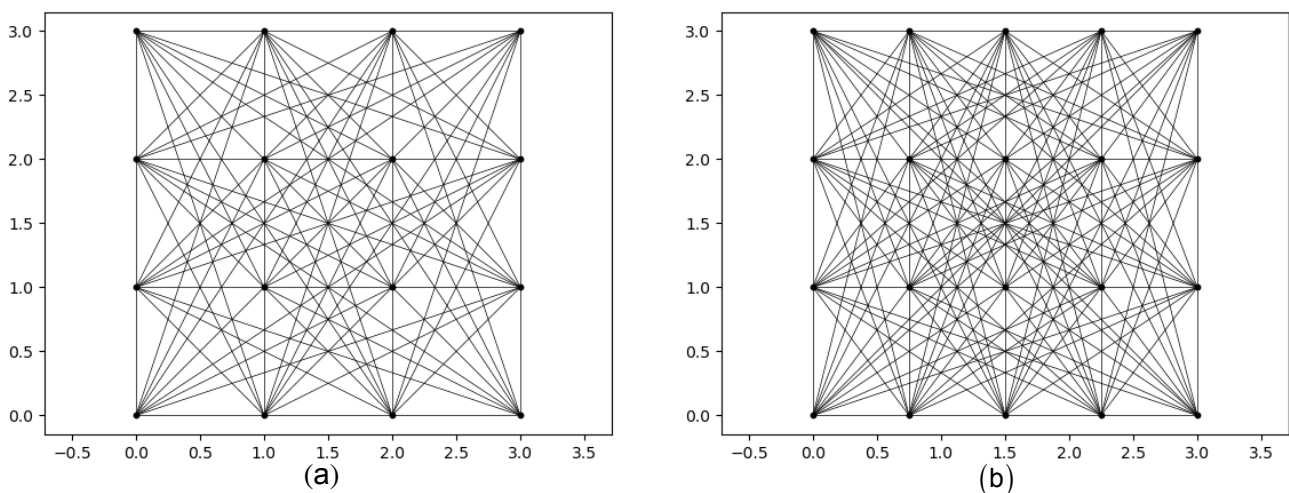
$$[N_2 ; \cancel{N_3} ; N_4 ; N_5 ; N_6 ; N_7 ; N_8 ; \cancel{N_9} ; N_{10} ; \cancel{N_{11}} ; N_{12} ; \cancel{N_{13}} ; N_{14} ; N_{15}]$$



Σχήμα 2.3: Σύνδεση κόμβων για την αποφυγή υπερκάλυψης

Σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, ο αριθμός των στοιχείων στο αρχικό σχεδιαστικό χωρίο δεν μπορεί να υπερβεί τα 86 στοιχεία, σε αντίθεση με τον αρχική προσέγγιση (120 στοιχεία). Αντίστοιχα για την διάταξη του σχήματος 2.2b (Διάταξη κόμβων - 5x4), ο μέγιστος αριθμός των στοιχείων που προκύπτει από την χρήση της εξίσωσης είναι 190 στοιχεία. Ωστόσο, μέσω της εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας ο αριθμός των στοιχείων δεν μπορεί να ξεπεράσει τα 131 μέλη.

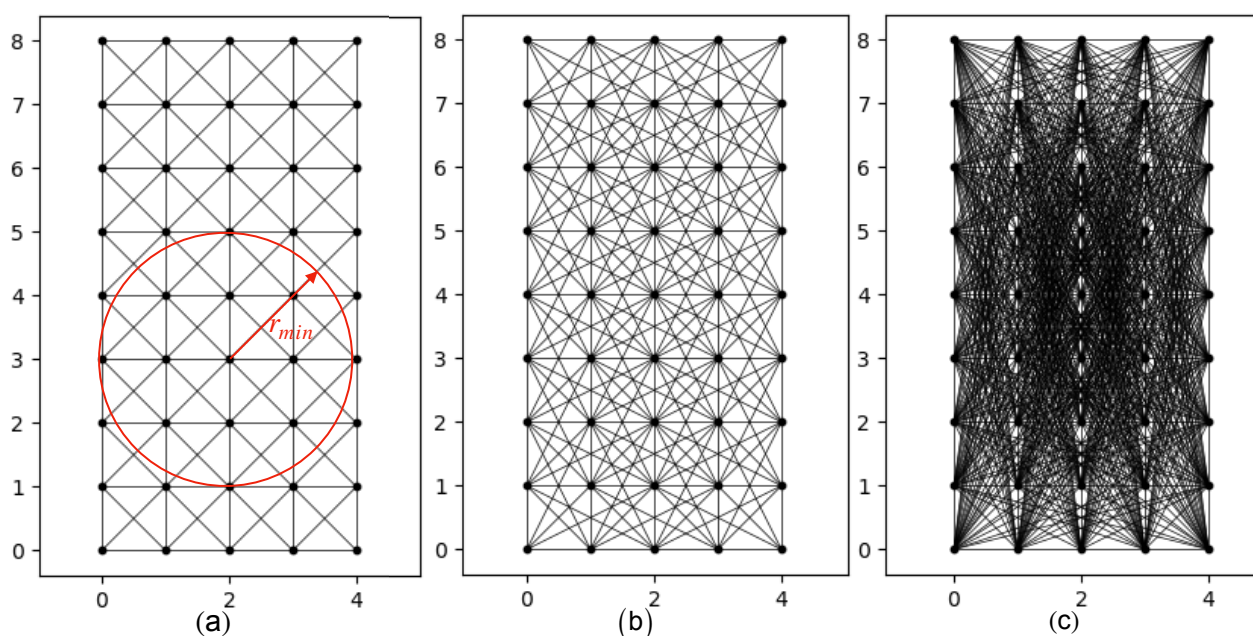
Ως εκ τούτου, γίνεται αντιληπτό, ότι δεν είναι δυνατό να οριστεί μια καθολική σχέση που να προσδιορίζει τον μέγιστο αριθμό των στοιχείων σύμφωνα με τον αριθμό των κόμβων στο χωρίο, καθώς εξαρτάται από την διάταξη των κόμβων. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται το αρχικό χωρίο σχεδιασμού, για τις διαφορετικές περιπτώσεις διάταξης των κόμβων του σχήματος 2.2, με τον μέγιστο δυνατό αριθμό στοιχείων.



Σχήμα 2.4: Αρχικό σχεδιαστικό χωρίο για δύο διαφορετικές διατάξεις κόμβων

Επιπλέον, για την παραγωγή του αρχικού χωρίου σχεδιασμού, δίνεται η δυνατότητα στον χρήστη να επιλέξει το μέγιστο επιτρεπτό μήκος ενός στοιχείου σύμφωνα με μια ακτίνα r . Με αυτό τον τρόπο δίνεται η δυνατότητα στον χρήστη να επέμβει στον σχεδιασμό του χωρίου με εύκολο τρόπο, τροποποιώντας την μέθοδο του πλήρως συνδεδεμένου συστήματος.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ένα αρχικό χωρίο διαστάσεων 4x8 με την απόσταση των κόμβων να είναι ένα (1) μέτρο και στις δύο διευθύνσεις. Στο αριστερά σχήμα (2.5a) ορίζεται ένα μέγιστο επιτρεπτό μήκος 2m, στο μεσαίο (2.5b) ένα μέγιστο μήκος 3m, ενώ στο τελευταίο σχήμα (2.5c) δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός, δηλαδή αρχικό χωρίο σχεδιάζεται με τον μέγιστο δυνατό αριθμό στοιχείων.



Σχήμα 2.5: Αρχικό σχεδιαστικό χωρίο για τρεις διαφορετικές ακτίνες

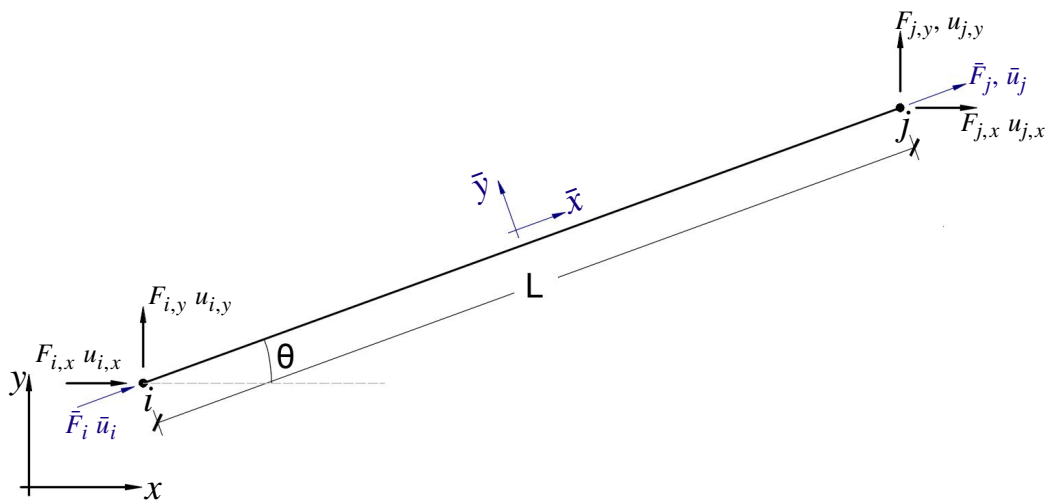
2.2 Εξισώσεις ισορροπίας

Στην συγκεκριμένη ενότητα περιγράφεται η ανάπτυξη της μεθόδου της μητρικής ανάλυσης η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό των αξονικών δυνάμεων που καταπονούν τα μέλη καθώς και τις μετατοπίσεις των κόμβων ενός δισδιάστατου δικτυώματος. Για τον προσδιορισμό των εξισώσεων ισορροπίας, η μέθοδος της μητρικής ανάλυσης βασίζεται στη ανάπτυξη ενός διακριτού συστήματος εξισώσεων ισορροπίας, το οποίο θα περιγράψει το δικτύωμα:

$$\{F\} = [K] \{u\} \quad (2.1)$$

Όπου F είναι το διάνυσμα των εξωτερικών δράσεων στους κόμβους, u το διάνυσμα των μετατοπίσεων των κόμβων, ενώ K είναι το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας που υπολογίζεται σύμφωνα με τη γεωμετρία του δικτυώματος, τις διαστάσεις της διατομής και του υλικού που έχει επιλεγεί για κάθε μέλος και προκύπτει έπειτα από συναρμολόγηση των εξισώσεων ισορροπίας του κάθε μέλους.

Για τον προσδιορισμό του συνολικού μητρώου δυσκαμψίας, γίνεται αρχικά η κατάστρωση του μητρώου δυσκαμψίας, του κάθε μέλους ξεχωριστά. Ας θεωρήσουμε μια ομοιόμορφη, πρισματική ράβδο μήκους L , μέτρου ελαστικότητας E και με εμβαδό της διατομής του A (σχ. 2.6).



Σχήμα 2.6: Στοιχείο ράβδου με τυχαίο προσανατολισμό στο επίπεδο x-y

Στο σχήμα 2.6 περιγράφεται ένα στοιχείο ράβδου δύο κόμβων με τυχαίο προσανατολισμό στο επίπεδο x, y . Η γωνία από τον καθολικό άξονα x με τον τοπικό άξονα \bar{x} , ονοματίζεται θ , όπου οι θετικές γωνίες είναι αριστερόστροφες, αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Το μητρώο δυσκαμψίας μιας ράβδου στον τοπικό άξονα δίνεται από την σχέση:

$$K_{loc.} = \frac{E A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Στην περίπτωση όπου το καθολικό σύστημα συντεταγμένων x, y είναι ίδιο με το τοπικό σύστημα \bar{x}, \bar{y} , η εξίσωση ισορροπίας περιγράφεται από την σχέση:

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \frac{E A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Στην περίπτωση όμως όπου χρειάζεται να πραγματοποιηθεί ανάλυση ενός δικτυώματος, όπου τα στοιχεία έχουν διαφορετικό προσανατολισμό, απαιτείται ο μετασχηματισμός των εξισώσεων ισορροπίας με βάση ένα γενικευμένο σύστημα ως προς το οποίο θα αναφέρονται όλοι οι κόμβοι και όλα τα στοιχεία. Στο γενικό μητρώο η ανάλυση των επικόμβιων δυνάμεων στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων δίνεται από την σχέση:

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

όπου ως T μπορεί να θεωρηθεί το μητρώο μετασχηματισμού:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Κάτα αντιστοιχία, ισχύουν οι σχέσεις μετασχηματισμού των μετατοπίσεων

$$\bar{u} = T u \quad (2.6)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση 2.3 τις σχέσεις 2.4 και 2.6 προκύπτει:

$$\bar{F} = K_{loc} \bar{u} \Rightarrow F T = K_{loc} T u \Rightarrow F = T^T K_{loc} T u \quad (2.7)$$

Συνεπώς, το γενικό μητρώο δυσκαμψίας μιας ράβδου προκύπτει από την σχέση:

$$K_{glob.} = T^T K_{loc} T \quad (2.8)$$

Όπου έπειτα από πράξεις προκύπτει:

$$K_{glob.} = \frac{E A}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Έτσι, η εξίσωση ισορροπίας στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων για κάθε στοιχείο, με τυχαίο προσανατολισμό προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Συνεπώς, για κάθε στοιχείο που επέρχεται στο μοντέλο, σύμφωνα με την προηγούμενη ενότητα (§2.1), υπολογίζεται το μητρώο δυσκαμψίας του στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Αφού προσδιοριστούν όλα τα στοιχεία του χωρίου, υπολογίζεται η συνολική δυσκαμψία της κατασκευής, μέσω της υπέρθεσης όλων των παραπάνω μητρώων.

Όπως περιγράφεται και σε επόμενη ενότητα, Οι συνοριακές συνθήκες και τα εφαρμοζόμενα φορτία θεωρούνται γνωστά και με γνωστό το διάνυσμα των των εμβαδών διατομής των στοιχείων υπολογίζονται οι μετακινήσεις των κόμβων. Σύμφωνα λοιπόν με τις μετακινήσεις των κόμβων, είναι πλέον εφικτός ο υπολογισμός όλων των κρίσιμων μεγεθών των στοιχείων όπως η ενέργεια παραμόρφωση, η αναπτυσσόμενη τάση, κ.α.

2.3 Μαθηματική έκφραση

Όπως παρουσιάστηκε και στην βιβλιογραφική ανασκόπηση, η γενική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης βασίζεται στην ελαχιστοποίηση της ενδοτικότητας της κατασκευής.

Υπενθυμίζεται πως οι συνοριακές συνθήκες και τα εφαρμοζόμενα φορτία θεωρούνται γνωστά και η βελτιστοποίηση χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της κατανομής των διατομών. Ως μεταβλητές σχεδιασμού ορίζεται το εμβαδό διατομής των στοιχείων, όπου μέλη με περιοχές κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο θεωρούνται αναποτελεσματικά και αφαιρούνται από την αρχική δομή, αλλάζοντας έτσι τη συνδεσιμότητα του συστήματος. Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος με αντικειμενική συνάρτηση την ελαχιστοποίηση της ενδοτικότητας περιγράφεται ως εξής:

$$\text{Minimize: } C(x) = F^T u(x) \quad (2.11a)$$

$$\text{Subject to: } x \text{ a } L = V \quad (2.11b)$$

$$0 < x_{ele} < 1, \quad ele = 1, 2, 3, \dots, N_{ele} \quad (2.11c)$$

Όπου:

- C: η ενέργεια παραμόρφωσης της κατασκευής
- F: το διάνυσμα των φορτίων που εφαρμόζεται στην κατασκευή.
- u: το διάνυσμα των μετατοπίσεων
- a: το διάνυσμα των εμβαδών των στοιχείων
- x: το διάνυσμα όπου καθορίζει το εμβαδό των στοιχείων
- K: το καθολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής
- L: το διάνυσμα των μηκών των στοιχείων
- V: ο επιθυμητός όγκος της τελικής κατασκευής

Για την επίλυση αυτού του προβλήματος βελτιστοποίησης, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, η παράμετρος που εισάγεται είναι η πυκνότητα κάθε πεπερασμένου στοιχείου. Ως μεταβλητές σχεδιασμού ορίζεται το εμβαδό διατομής κάθε στοιχείου:

$$x^e = \begin{cases} 1, & \text{αν χρειαζόμαστε το στοιχείο} \\ 0, & \text{αν δεν χρειαζόμαστε το στοιχείο} \end{cases} \quad (2.12)$$

Βέβαια, όπως περιγράφεται σε επόμενη ενότητα, το εύρος που κυμαίνεται η μεταβλητή σχεδιασμού a^e είναι $[x_{\min}; 1]$, όπου x_{\min} είναι μια μικρή τιμή κοντά στο μηδέν, προκειμένου να αποφευχθούν αριθμητικές αστάθειες.

Σύμφωνα με την μέθοδο SIMP, που περιγράφεται σε προηγούμενη ενότητα (§1.5.2), η ενδοτικότητα της κατασκευής προκύπτει από την σχέση:

$$C(x) = \sum_{e=1}^{N_{ele}} (x_e)^p [\hat{K}]_{a_e=1} u_e^T u_e \quad (2.13)$$

όπου p η παράμετρος ποινικοποίησης (penalty parameter), το οποίο το ορίζει ο χρήστης και η συνηθέστερη τιμή είναι $p=3$. Σύμφωνα την όσα αναφέρθηκαν στην βιβλιογραφική ανασκόπηση, η εισαγωγή της παραμέτρου ποινικοποίησης, εισάγεται στο πρόβλημα για να αποφευχθεί το πρόβλημα της σταθερής παραγωγού, μετατρέποντας παράλληλα το πρόβλημα σε ένα συνεχές πρόβλημα, καθώς το x πλέον μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ μηδέν και ένα ($0 \leq x \leq 1$).

Το πρόβλημα της μαθηματικής βελτιστοποίησης που διατυπώθηκε παραπάνω, μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας διάφορους μαθηματικούς αλγόριθμους που απαιτούν τον υπολογισμό της παραγώγου, όπως ο Optimality Criteria (OC) ή την χρήση ευτερικών μεθόδων όπου αναφέρονται σε προσεγγίσεις επίλυσης προβλημάτων που επιτυγχάνουν τη λύση με δοκιμή και σφάλμα (trial and error), όπως ο Interior Point algorithm.

2.3.1 Optimality criteria

Σύμφωνα με την μαθηματική διατύπωση του προβλήματος που προσδιορίστηκε παραπάνω (εξ. 2.11), ζητείται η ελαχιστοποίηση της ενδοτικότητας της κατασκευής σύμφωνα με έναν περιορισμό $G(x)$. Για την υλοποίηση της διαδικασίας αυτής αυτό το εφαρμόζεται η μέθοδος Lagrangian όπου η συνάρτηση εκφράζεται ως εξής:

$$L(x_e, \lambda) = \sum_{e=1}^{N_{ele}} (x_e)^p [\hat{K}]_{a_e=1} u_e^T u_e + \lambda G(x) \quad (2.14)$$

όπου λ , ο πολλαπλασιαστή Lagrange.

Η χρήση της μεθόδου Optimality Criteria (OC), απαιτεί τον υπολογισμό της παραγώγου.

$$\frac{\partial L}{\partial x_e} = \sum_{e=1}^{N_{ele}} \left(-p (x_e)^{p-1} [\hat{K}]_{a_e=1} u_e^T u_e \right) + \lambda \frac{\partial G(x_e)}{\partial x_e} \quad (2.15)$$

Έτσι, η βέλτιστη πιθανή λύση προκύπτει με την εύρεση της ελάχιστης τιμής του νέου διανύσματος x_e , σύμφωνα με την σχέση:

$$\frac{\partial L}{\partial x_e} = 0 \Rightarrow x_e^{new} = \frac{p (x_e^{new})^p [\hat{K}]_{a_e=1} u_e^T u_e}{\lambda} \quad (2.16)$$

Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης, πρέπει να υπολογιστεί και η τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange, λ . Ο υπολογισμός του λ επιτυγχάνεται επιλέγοντας επαναληπτικά το λ για κάθε x_e μέχρι την ικανοποίηση της ακόλουθης εξίσωσης:

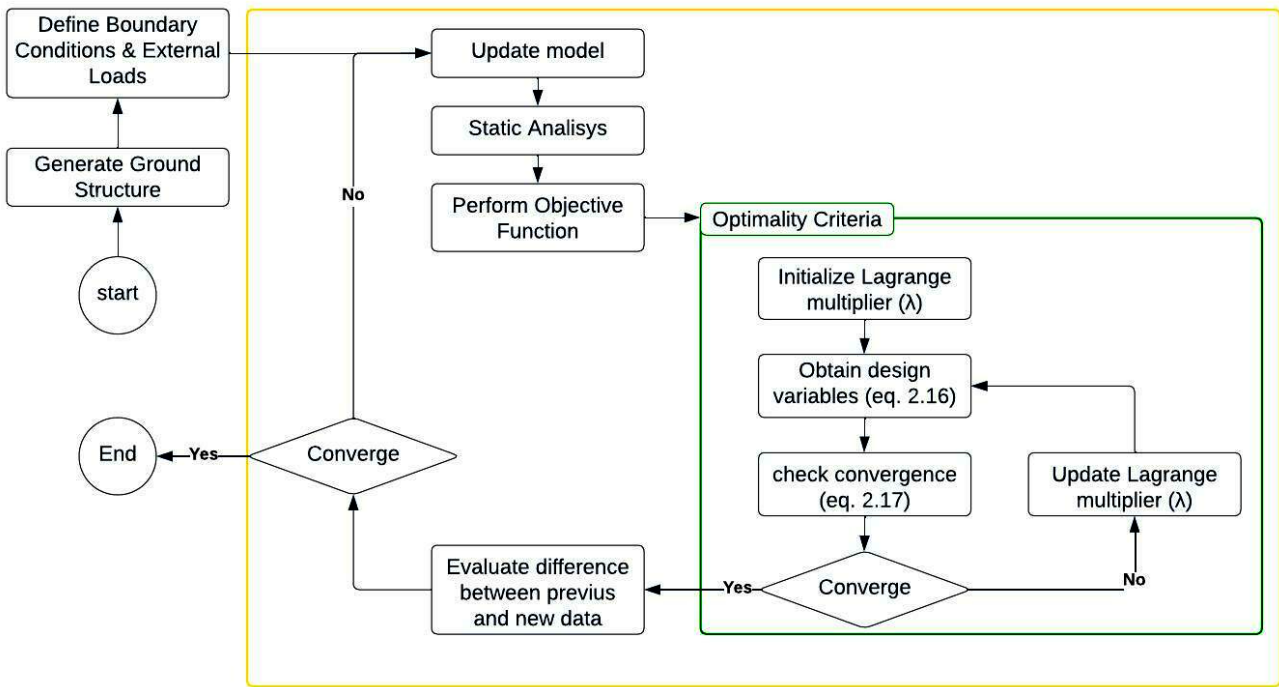
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \sum_{e=1}^{N_{ele}} (x_e a_e) - V = 0 \quad (2.17)$$

Επιπλέον, το x_e μπορεί να κυμαίνεται στο εύρος τιμών μεταξύ 0 και 1 ($0 \leq x_e \leq 1$), ενώ παράλληλα, αποτρέπονται οι έντονες μεταβολές του διανύσματος μέσω του συντελεστή m . Έτσι, οι καινούργιες τιμές του διανύσματος x_e , προκύπτουν από την σχέση:

$$x_e^{new} = \begin{cases} \max [0 ; x_e - m] & \frac{d_c}{\lambda} < \max [0 ; x_e - m] \\ \frac{d_c}{\lambda} & \text{if } \max [0 ; x_e - m] < \frac{d_c}{\lambda} < \min [1 ; x_e + m] \\ \min [1 ; x_e + m] & \frac{d_c}{\lambda} > \min [1 ; x_e + m] \end{cases} \quad (2.18)$$

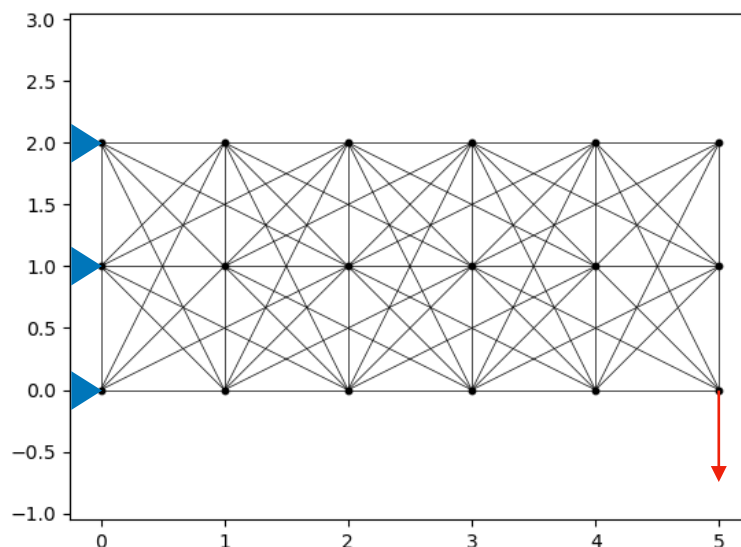
$$\text{όπου } d_c = p (x_e^{new})^p [\hat{K}]_{a_e=1} u_e^T u_e$$

Συνοψίζοντας την παραπάνω διαδικασία, αρχικά ορίζεται από τον χρήστη το αρχικό χωρίο σχεδιασμού και καθορίζονται οι συνοριακές συνθήκες και τα εφαρμοζόμενα εξωτερικά φορτία στους κόμβους. Με γνωστά πλέον τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των στοιχείων (μέτρο ελαστικότητας, εμβαδό διατομής), τις συνθήκες στήριξης και τα εφαρμοζόμενα φορτία, προσδιορίζονται οι μετατοπίσεις των κόμβων μέσω των εξισώσεων ισορροπίας και υπολογίζεται η αντικειμενική συνάρτηση (η ενδοτικότητα της κατασκευής). Στην συνέχεια, εφαρμόζεται μια επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό τόσο του πολλαπλασιαστή Lagrange (λ), όσο και των μεταβλητών σχεδιασμού (x_e). Κατά την διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας, ορίζεται αρχικά μια σχετικά μεγάλη τιμή για το λ για την οποία υπολογίζονται οι μεταβλητές σχεδιασμού μέσω της εξίσωσης 2.16. Με γνωστή λοιπόν την τιμή του λ αλλά και των μεταβλητών σχεδιασμού γίνεται ο έλεγχος ικανοποίησης των περιορισμών του προβλήματος σύμφωνα με την εξίσωση 2.17. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου ικανοποιείται η εξίσωση 2.17. Με τις καινούργιες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, επαναλαμβάνεται η παραπάνω διαδικασία μέχρι η αντικειμενική συνάρτηση να σταματήσει μεταβάλλεται ή έχει πραγματοποιηθεί ένα μεγάλος κύκλος επαναλήψεων. Στο σχήμα 2.7, παρουσιάζεται η παραπάνω διαδικασία σε ένα διάγραμμα ροής, όπου στο κίτρινο πλαίσιο περιγράφεται η επαναληπτική διαδικασία όπου υπολογίζεται η αντικειμενική συνάρτηση και στο πράσινο πλαίσιο περιγράφεται η εσωτερική επαναληπτική διαδικασία εύρεσης του πολλαπλασιαστή Lagrange (λ) και των καινούριων μεταβλητών σχεδιασμού (x_e).



Σχήμα 2.7: Διάγραμμα ροής βελτιστοποίησης τοπολογίας (Optimality Criteria)

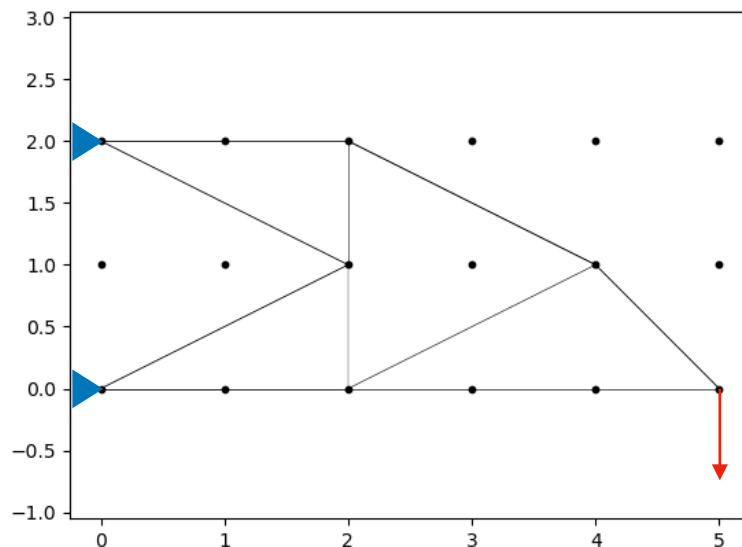
Προκειμένου να καταστεί πιο αντιληπτό, η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται σε ένα σχετικά μικρό χωρίο του σχήματος 2.8. Το αρχικό χωρίο έχει διαστάσεις (5 x 4)m, όπου οι κόμβοι τοποθετήθηκαν σε απόσταση 1m και στις δύο διεύθυνσης. Για διαμόρφωση του αρχικού φορέα, επιλέχθηκε η μέθοδος πλήρους σύνδεσης των κόμβων με μέγιστο επιτρεπόμενο μήκος στοιχείο τα 3m.



Σχήμα 2.8: Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου σε Optimality Criteria

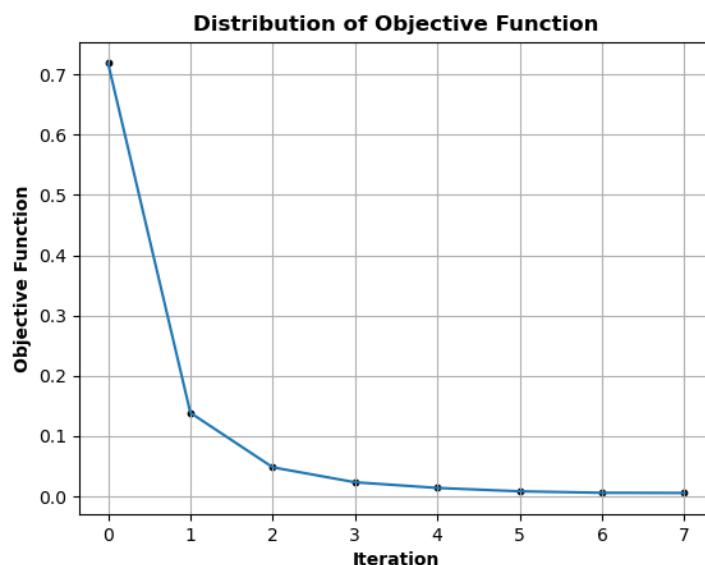
Με την θεώρηση πως το κάθε στοιχείο έχει αρχικό εμβαδό διατομής $a_e = 1 \text{ m}^2$, ο συνολικός όγκος της αρχικής κατασκευής ανέρχεται στα $V_0 = 113.42 \text{ m}^3$. Εφαρμόζοντας

λοιπόν την διαδικασία βελτιστοποίησης τοπολογίας, σύμφωνα με το διάγραμμα ροής του σχήματος 2.7, με σκοπό την μείωση του αρχικού όγκου V_0 στο 10% ($V = 10\% V_0$), προκύπτει η δομή του σχήματος 2.9.



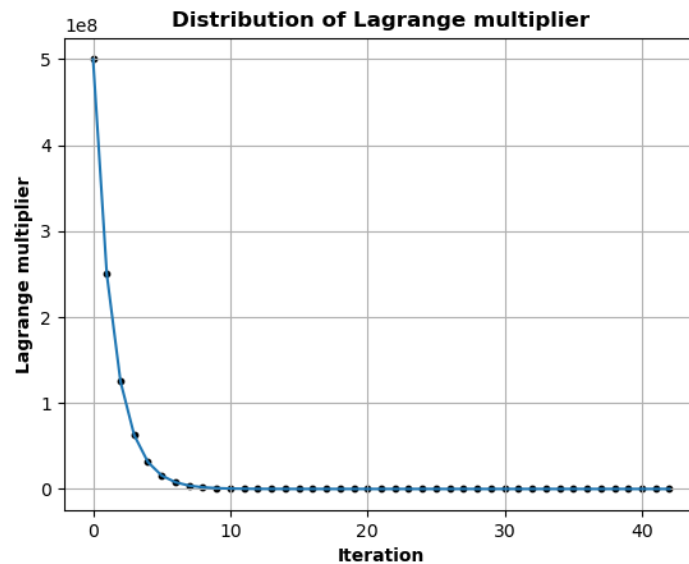
Σχήμα 2.9: Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου σε Optimality Criteria

Η δομή του σχήματος 2.9 προσδιορίστηκε σε επτά (8) επαναλήψεις. Σε κάθε επανάληψη της μεθόδου, υπολογίζεται η αντικειμενική συνάρτηση, μέχρι η τιμή της συνάρτησης να σταματήσει μεταβάλλεται ή έχει πραγματοποιηθεί ένα μεγάλος κύκλος επαναλήψεων. Όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώνεται αισθητά στις πρώτες επαναλήψεις, ενώ στην συνέχεια η μεταβολή της είναι μικρή, όπου στην 8η επανάληψη παρατηρείται υπερβολικά μικρή μεταβολή.



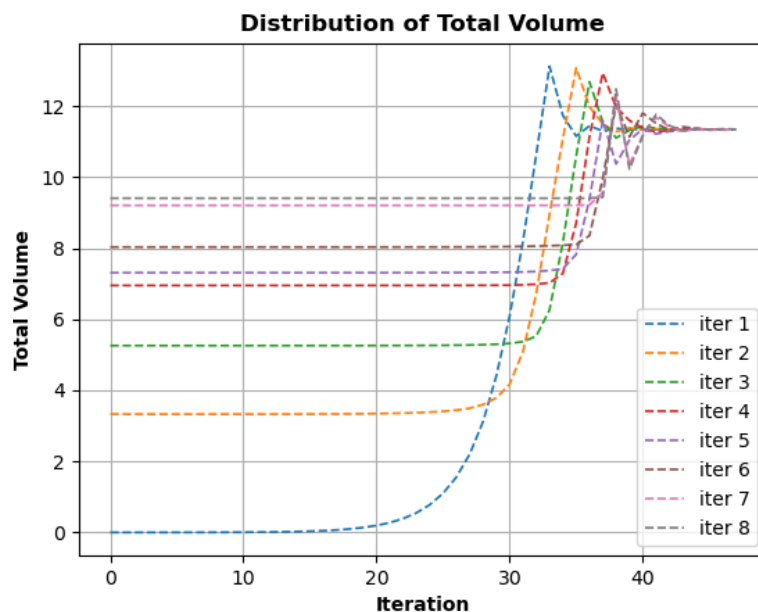
Σχήμα 2.10: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης (O-C)

Επιπλέον, σε κάθε βήμα της μεθόδου, πραγματοποιείται μια εσωτερική επαναληπτική διαδικασία για την εύρεση της τιμής του πολλαπλασιαστή Lagrange (λ) αλλά και των μεταβλητών σχεδιασμού, με την προϋπόθεση να πληροίτε ο περιορισμός $V = 10\% V_0$. Στο διάγραμμα 2.11, που ακολουθεί, παρουσιάζονται οι απαιτούμενες επαναλήψεις για την εύρεση του λ .



Σχήμα 2.11: Διάγραμμα μεταβολής πολλαπλασιαστή Lagrange

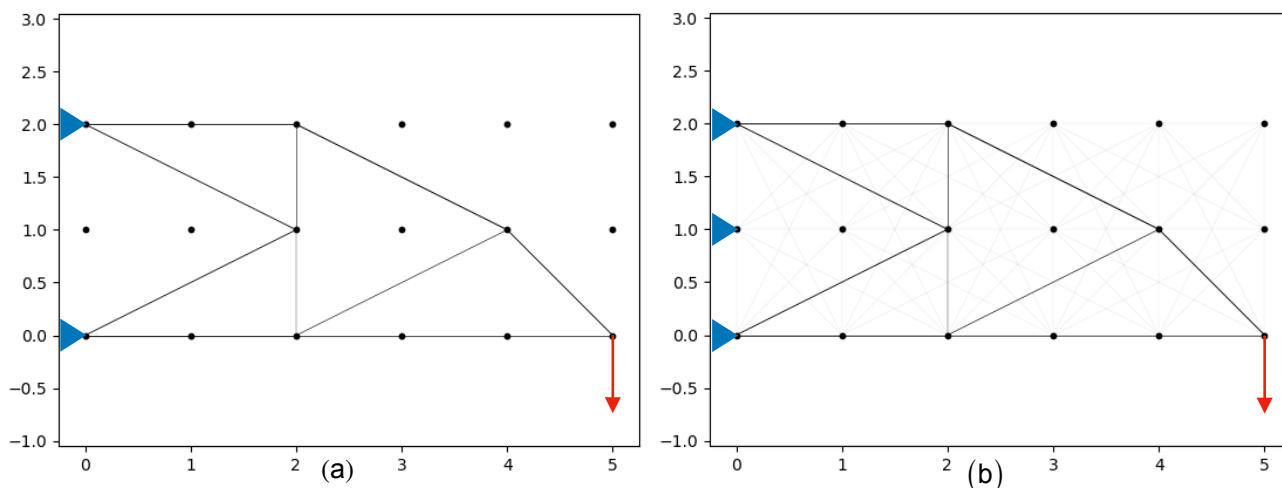
Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange, προσδιορίζεται ώστε κατά των υπολογισμών των μεταβλητών σχεδιασμού από την εξίσωση 2.17, να ικανοποιείται ο περιορισμός $V = 10\% V_0$. Έτσι, σε κάθε εσωτερική επανάληψη ο τελικός όγκος της κατασκευής είναι ίδιος με τιμή $V = 10\% V_0$ (Σχ. 2.12).



Σχήμα 2.12: Διάγραμμα μεταβολής συνολικού όγκου (εσωτερικές επαναλήψεις)

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο αλγόριθμος καλείται στην εύρεση της βέλτιστης κατανομής του υλικού, με την ελάχιστη δυνατή ενδοτικότητα της κατασκευής, ώστε να επιτευχθεί ο επιθυμητός όγκος. Κατά την διαδικασία της βελτιστοποίησης, είναι πιθανό το εμβαδόν ορισμένων στοιχείων, τα οποία θεωρούνται αναποτελεσματικά, να ορίζεται ίσο με το μηδέν (0). Ως εκ τούτου, η αφαίρεση ορισμένων στοιχείων από την δομή, είναι πιθανό να καταλήξει σε ένα στατικά αόριστο σύστημα, όπου δεν είναι η δυνατή η επίλυση του φορέα, με αποτέλεσμα την απενεργοποίηση του αλγόριθμου. Για τον σκοπό αυτό ορίζεται ένα ελάχιστο μέτρο για το εμβαδό του κάθε στοιχείου, της τάξεως του 10^{-9} , για την αποφυγή τέτοιων προβλημάτων.

Για παράδειγμα, σύμφωνα με το αρχικό χωρίο του σχήματος 2.8, θα προκύψει η βέλτιστη τοπολογία του σχήματος 2.9, σύμφωνα με το οποίο παρατηρούμε ότι τα μέλη που θεωρούνται αναποτελεσματικά αφαιρούνται από την αρχική δομή. Παρόλα αυτά, αν πραγματοποιηθεί η κατάλληλη μεγέθυνση (σχ. 2.13b), θα παρατηρήσουμε ότι κατά την διαδικασία την βελτιστοποίησης, τα μέλη που θεωρούνται αναποτελεσματικά λαμβάνονται υπόψιν με το ελάχιστο δυνατό εμβαδό. Σημειώνεται πως τα μέλη αυτά, λαμβάνονται υπόψιν μόνο για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων των κόμβων, δηλαδή κατά την χρήση των εξισώσεων ισορροπίας.



Σχήμα 2.13: Φορέας σχεδιασμού κατά την χρήση των εξισώσεων ισορροπίας

Σκοπός όμως της διαδικασίας της βελτιστοποίησης, είναι η δημιουργία μίας δομής η οποία είναι δυνατόν τόσο να κατασκευαστεί, όσο και να ελεγχθεί στα διαθέσιμα εμπορικά λειτουργικά προγράμματα. Συνεπώς σε κάθε επαναληπτική διαδικασία η βέλτιστη τοπολογία η οποία προκύπτει πρέπει να μπορεί να σχεδιαστεί χωρίς να λαμβάνονται υπόψιν τα μέλη με ένα κατώτατο όριο διατομής. Όπως αναφέρθηκε

παραπάνω, η αφαίρεση ορισμένων στοιχείων από την δομή, είναι πιθανό να καταλήξει σε ένα στατικά αόριστο σύστημα, όπου δεν είναι η δυνατή η επίλυση του φορέα,

Στην μορφολογία του σχήματος 2.13α, παρατηρούμε ότι για την βέλτιστη τοπολογία η οποία προκύπτει, δεν είναι δυνατό να γίνει η προσομοίωση σε κάποιο λειτουργικό πρόγραμμα, καθώς το τελικό μοντέλο είναι στατικά αόριστο. Η παρατήρηση αυτή μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτή από την παρακάτω σχέση, όπου για να είναι ένα σύστημα στατικά ορισμένο πρέπει:

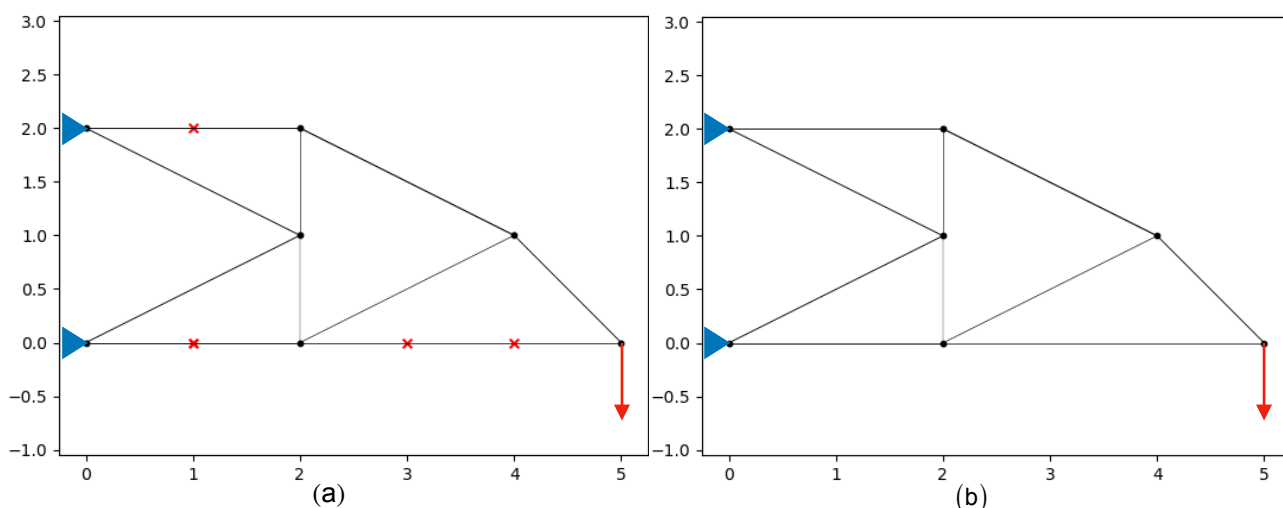
$$2 n - n_c \leq m \Rightarrow 18 > 14 \quad (2.19)$$

όπου n ο αριθμός των κόμβων, n_c οι μεταφορική περιορισμοί και m ο αριθμός των στοιχείων. Στο παράδειγμα του σχήματος 2.13α, η παράνω σχέση δεν ισχύει καθώς:

$$2 n - n_c (= 2 \cdot 11 - 4) \leq m (= 14) \Rightarrow 18 \not\leq 14 \quad (2.20)$$

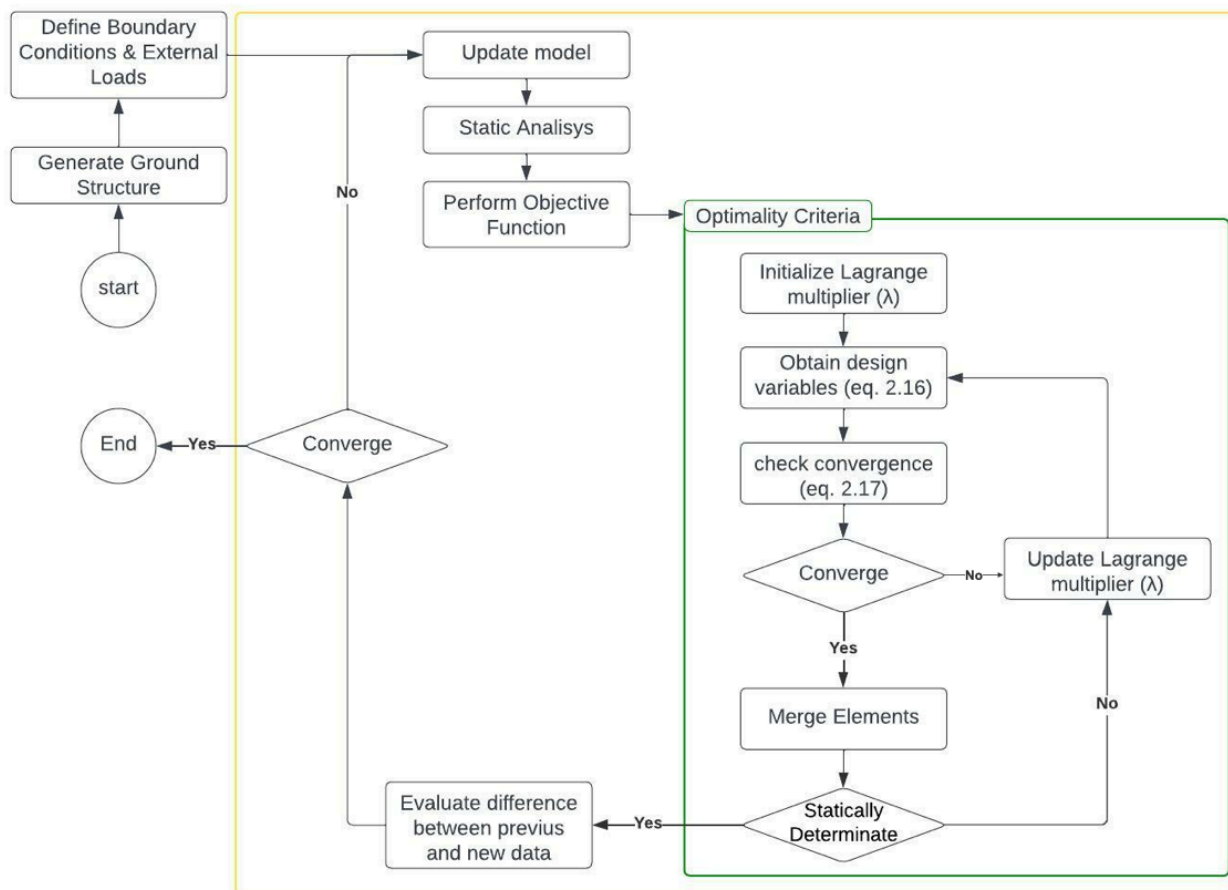
Συνεπώς, κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης πρέπει να γίνεται ο έλεγχος για το αν τελικός το σύστημα το οποίο προκύπτει είναι στατικά αόριστο.

Βέβαια, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, αν στην συγκεκριμένη τοπολογία, αφαιρεθούν οι κόμβοι στους οποίους συντρέχουν συνευθειακά μέλη και γίνει η συγχώνευση των στοιχείων, τότε το σύστημα είναι στατικά ορισμένο και η επίλυση του φορέα μπορεί να πραγματοποιηθεί κανονικά (σχ. 2.14).



Σχήμα 2.14: Συγχώνευση συνευθειακών στοιχείων

Έτσι, κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης, για τον προσδιορισμό των μεταβλητών σχεδιασμού που προκύπτουν, εντάσσεται ακόμα ένα βήμα, κατά το οποίο αρχικά γίνεται η συγχώνευση των συννευθιακών στοιχείων και ελέγχεται το σύστημα αν είναι στατικά απροσδιόριστο. Συνεπώς, για την εύρεση των μεταβλητών σχεδιασμού, προστίθεται ακόμα ένα βήμα στο οποίο γίνεται η συγχώνευση των στοιχείων και ελέγχεται η στατικότητα του φορέα (σχ. 2.15).



Σχήμα 2.15: Τελικό διάγραμμα ροής βελτιστοποίησης τοπολογίας (OC)

2.3.2 Αλγόριθμοι εσωτερικού σημείου (Interior-Point algorithms - IP)

Οι αλγόριθμοι εσωτερικού σημείου (Interior-Point algorithms) κυριάρχησαν στην έρευνα για τις μεθόδους κυρτής βελτιστοποίησης από τις αρχές της δεκαετίας του 1990 μέχρι πρόσφατα. Είναι δημοφιλείς επειδή επιτυγχάνουν υψηλή ακρίβεια σε μικρό αριθμό επαναλήψεων, σχεδόν ανεξάρτητα από το μέγεθος, τον τύπο και τα δεδομένα του προβλήματος. Κάθε επανάληψη απαιτεί τη λύση ενός συνόλου γραμμικών εξισώσεων με σταθερές διαστάσεις και γνωστή δομή. Ως αποτέλεσμα, ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση διαφορετικών περιπτώσεων μιας δεδομένης οικογένειας προβλημάτων μπορεί να εκτιμηθεί με μεγάλη ακρίβεια. Το κλειδί για την αποτελεσματικότητα της

επίλυσης με την μέθοδο εσωτερικού σημείου είναι το σύνολο των γραμμικών εξισώσεων που λύνονται σε κάθε επανάληψη. Αυτές οι εξισώσεις μερικές φορές ονομάζονται εξισώσεις Newton, επειδή μπορούν να ερμηνευθούν ως γραμμικοποίηση των μη γραμμικών εξισώσεων που χαρακτηρίζουν την κεντρική διαδρομή, ή εξισώσεις Karush-Kuhn-Tucker (KKT), επειδή μπορούν να ερμηνευθούν ως βέλτιστες συνθήκες ενός προβλήματος τετραγωνικής βελτιστοποίησης περιορισμένης ισότητας. Το κόστος επίλυσης των εξισώσεων του Newton καθορίζει το μέγεθος των προβλημάτων που μπορούν να λυθούν με μια μέθοδο εσωτερικού σημείου. Τα πακέτα βελτιστοποίησης γενικής χρήσης βασίζονται σε παραγοντοποιήσεις αραιής μήτρας για την αποτελεσματική επίλυση των εξισώσεων Newton. Αυτή η προσέγγιση είναι πολύ επιτυχημένη στον γραμμικό προγραμματισμό όπου προβλήματα με αρκετές χιλιάδες μεταβλητές και περιορισμούς επιλύονται τακτικά. Η επιτυχία αυτή μπορεί να αποδοθεί σε δύο γεγονότα. Πρώτον, οι εξισώσεις Newton ενός αραιού γραμμικού προβλήματος μπορούν συνήθως να αναχθούν σε αραιά θετικά καθορισμένα σύνολα εξισώσεων, τα οποία μπορούν να λυθούν πολύ αποτελεσματικά με αραιές μεθόδους παραγοντοποίησης. Δεύτερον, τα πυκνά γραμμικά προβλήματα, τα οποία φυσικά δεν είναι ασυνήθιστα στην πράξη, μπορούν συχνά να μετατραπούν σε αραιά προβλήματα με την εισαγωγή βοηθητικών μεταβλητών και περιορισμών. Αυτό αυξάνει τις διαστάσεις του προβλήματος, αλλά εάν το πρόβλημα που προκύπτει είναι αρκετά αραιό, το καθαρό κέρδος στην απόδοση είναι συχνά σημαντικό [9].

Στην παρούσα μελέτη, χρησιμοποιήθηκε μια δωρεάν και ανοιχτού κώδικα βιβλιοθήκη Python που χρησιμοποιείται για επιστημονικούς και τεχνικούς υπολογισμούς, το SciPy. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε η ενότητα για βελτιστοποίηση γραμμικού προγραμματισμού με σκοπό την ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης που υπόκειται σε περιορισμούς γραμμικής ισότητας και ανισότητας:

$$\min_x = C^T x \quad (2.21a)$$

$$\text{Subject to: } A_{ub} \leq b_{ub} \quad (2.21b)$$

$$A_{eq} = b_{eq} \quad (2.21c)$$

$$l_b \leq x \leq u_b \quad (2.21d)$$

Όπου:

-c: Οι συντελεστές της γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης.

-x: το διάνυσμα των των μεταβλητών σχεδιασμού.

- A_{ub} : ο πίνακας περιορισμών ανισότητας. Κάθε γραμμή του A_{ub} καθορίζει τους συντελεστές ενός περιορισμού γραμμικής ανισότητας στο x .
- b_{ub} : Το διάνυσμα περιορισμού ανισότητας. Κάθε στοιχείο αντιπροσωπεύει ένα άνω όριο στην αντίστοιχη τιμή του A_{ub} .
- A_{eq} : ο πίνακας περιορισμών ισότητας. Κάθε σειρά του A_{eq} καθορίζει τους συντελεστές ενός περιορισμού γραμμικής ισότητας στο x .
- b_{eq} : το διάνυσμα περιορισμού ισότητας. Κάθε στοιχείο του A_{eq} πρέπει να ισούται με το αντίστοιχο στοιχείο του b_{eq} .
- l_b, u_b : l_b (lower bound), u_b (upper bound) είναι μία ακολουθία (min, max) ζευγών για κάθε στοιχείο στο x .

Η μέθοδος αυτή ξεκινά με αρχικές κάποιες αρχικές “εικασίες” των μεταβλητών του προβλήματος και επαναληπτικά επιχειρεί να λύσει τις (μη γραμμικές) συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT) για το πρόβλημα με έναν σταδιακά μειωμένο όρο.

Στην παρούσα μελέτη, η γενική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης βασίζεται στην ελαχιστοποίηση της ενδοτικότητας της κατασκευής σύμφωνα με την σχέση:

$$\min_x C(x) = \sum_{e=1}^{N_{ele}} x_e [\hat{K}]_{a_e=1} u_e^T u_e \quad (2.22a)$$

$$\text{Subject to: } x \text{ a } L = V \quad (2.22b)$$

$$0 < x_{ele} < 1, \quad ele = 1, 2, 3, \dots, N_{ele} \quad (2.22c)$$

Η εισαγωγή του προβλήματος στην βιβλιοθήκη SciPy ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

i. Εισαγωγή της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$c = \{\bar{x}\} \sum_{e=1}^{N_{ele}} [\hat{K}]_{a_e=1} u_e^T u_e \quad (2.23)$$

ii. Εισαγωγή των επιθυμητών περιορισμών ισότητας και ανισότητας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, εφαρμόζεται μόνο ο παρακάτω περιορισμός ισότητας.

$$\sum_{e=1}^{N_{ele}} x_e a_e L_e = V \Rightarrow \sum_{e=1}^{N_{ele}} x_e a_e L_e = \frac{V}{V_0} \quad (2.24)$$

Με την θεώρηση πως το κάθε στοιχείο έχει αρχικό εμβαδό διατομής $a_e = 1 \text{ m}^2$, ο πίνακας περιορισμών ισότητας (A_{eq}) και το διάνυσμα περιορισμού ισότητας (b_{eq}) προκύπτει:

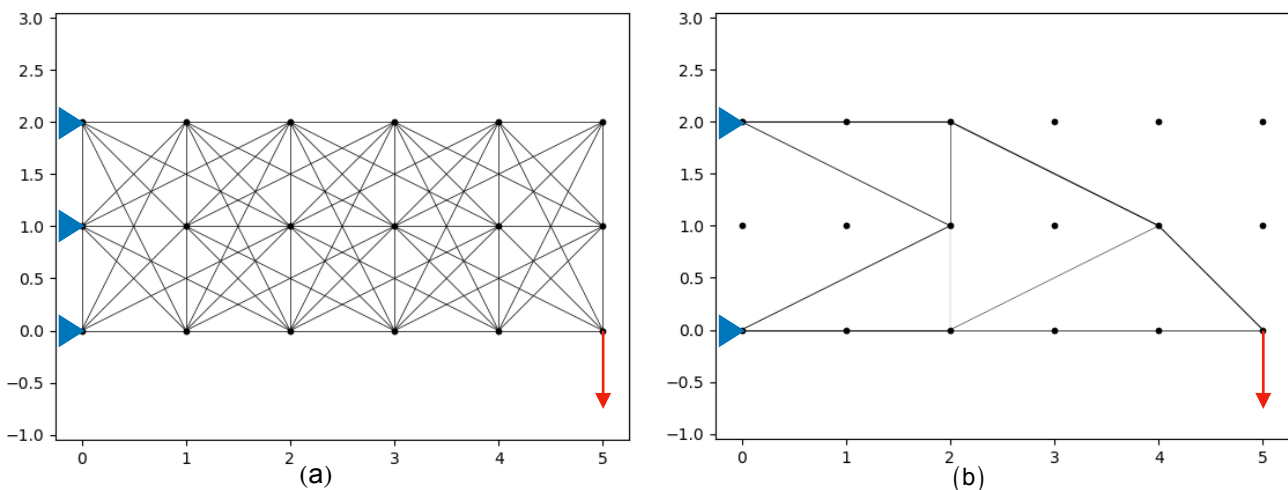
$$A_{eq} = \{\bar{L}\} \quad (2.25a)$$

$$b_{eq} = \frac{V}{V_0} \sum_{e=1}^{N_{ele}} L_e \quad (2.25b)$$

iii. Εισαγωγή ορίων στις μεταβλητές σχεδιασμού. Το x_e μπορεί να κυμαίνεται στο εύρος τιμών μεταξύ 0 και 1 ($0 \leq x_e \leq 1$), ενώ παράλληλα αποτρέπονται οι έντονες μεταβολές του διανύσματος μέσω του συντελεστή m . Έτσι, τα όρια των τιμών του διανύσματος x_e , προκύπτουν:

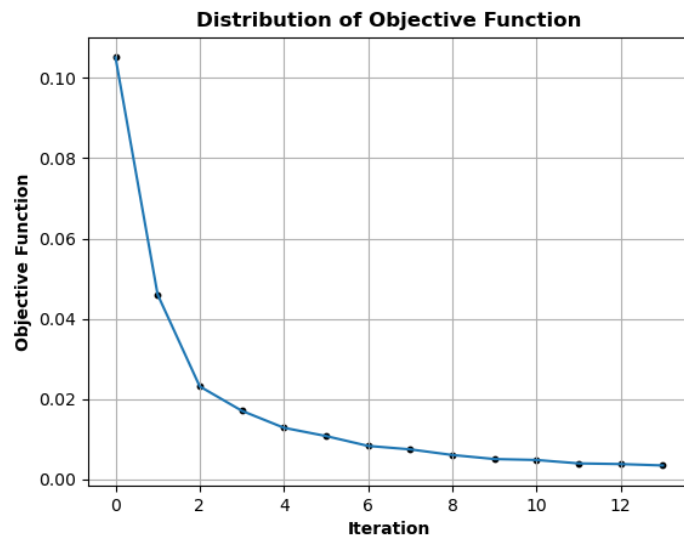
$$\text{bounds} = \begin{cases} \max [0 ; x_1 - m] & \min [1 ; x_1 + m] \\ \max [0 ; x_2 - m] & \min [1 ; x_2 + m] \\ \vdots & \vdots \\ \max [0 ; x_{N_{ele}} - m] & \min [1 ; x_{N_{ele}} + m] \end{cases} \quad (2.26)$$

Η χρήση της παραπάνω μεθοδολογία στο αρχικό χωρίο του σχήματος 2.8 (σχ. 2.16a) έχει ως αποτέλεσμα την βέλτιστη τοπολογία του σχήματος 2.16b.



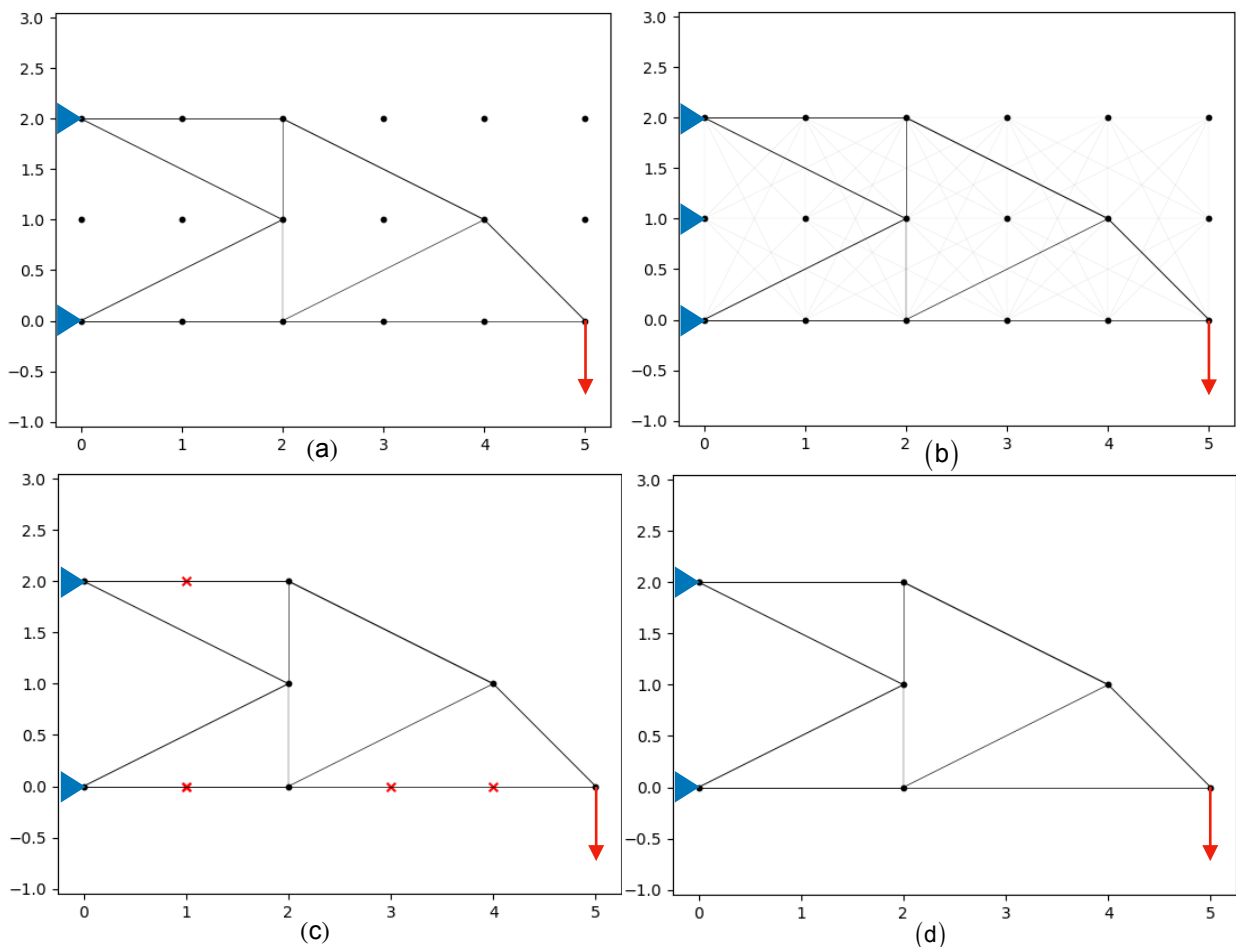
Σχήμα 2.16: Φορέας σχεδιασμού κατά την χρήση των εξισώσεων ισορροπίας

Η δομή του σχήματος 2.16b προσδιορίστηκε σε δώδεκα (12) επαναλήψεις. Στο σχήμα 2.17 που ακολουθεί, σε κάθε επανάληψη της μεθόδου, υπολογίζεται η αντικειμενική συνάρτηση, μέχρι η τιμή της συνάρτησης να σταματήσει μεταβάλλεται ή έχει πραγματοποιηθεί ένα μεγάλος κύκλος επαναλήψεων.



Σχήμα 2.17: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης (I-P)

Όπως και στην μεθοδολογία που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα (§ 2.3.1), για την αρμονική λειτουργία του αλγορίθμου, δηλαδή κατά την χρήση των εξισώσεων ισορροπίας, τα μέλη που θεωρούνται αναποτελεσματικά λαμβάνονται υπόψιν με το ελάχιστο δυνατό εμβαδό (σχ. 2.18b). Παράλληλα, υιοθετείται η διαδικασία συγχώνευσης συννευθιακών στοιχείων (2.18c) και ο έλεγχος για την στατικότητα του φορέα (2.18d).



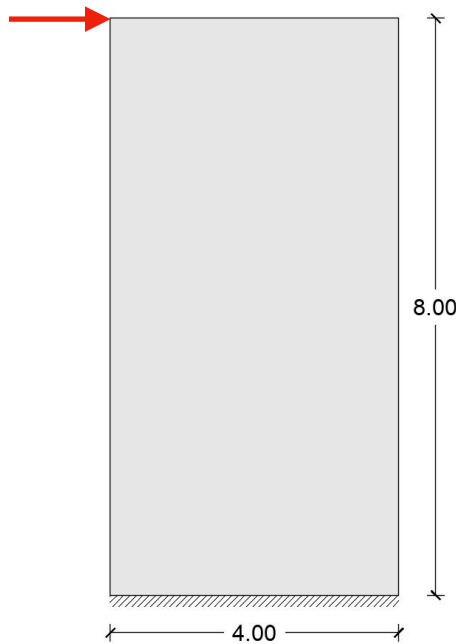
Σχήμα 2.18: Διαδικασία εύρεσης τελικής τοπολογίας

2.4 Παραδείγματα εφαρμογής

Ανακεφαλαιώνοντας, κατά την βελτιστοποίηση τοπολογίας ενός χωρίου με ευθύγραμμα ραβδωτά στοιχεία, ο χρήστης καλείται να ορίσει τις παρακάτω παραμέτρους:

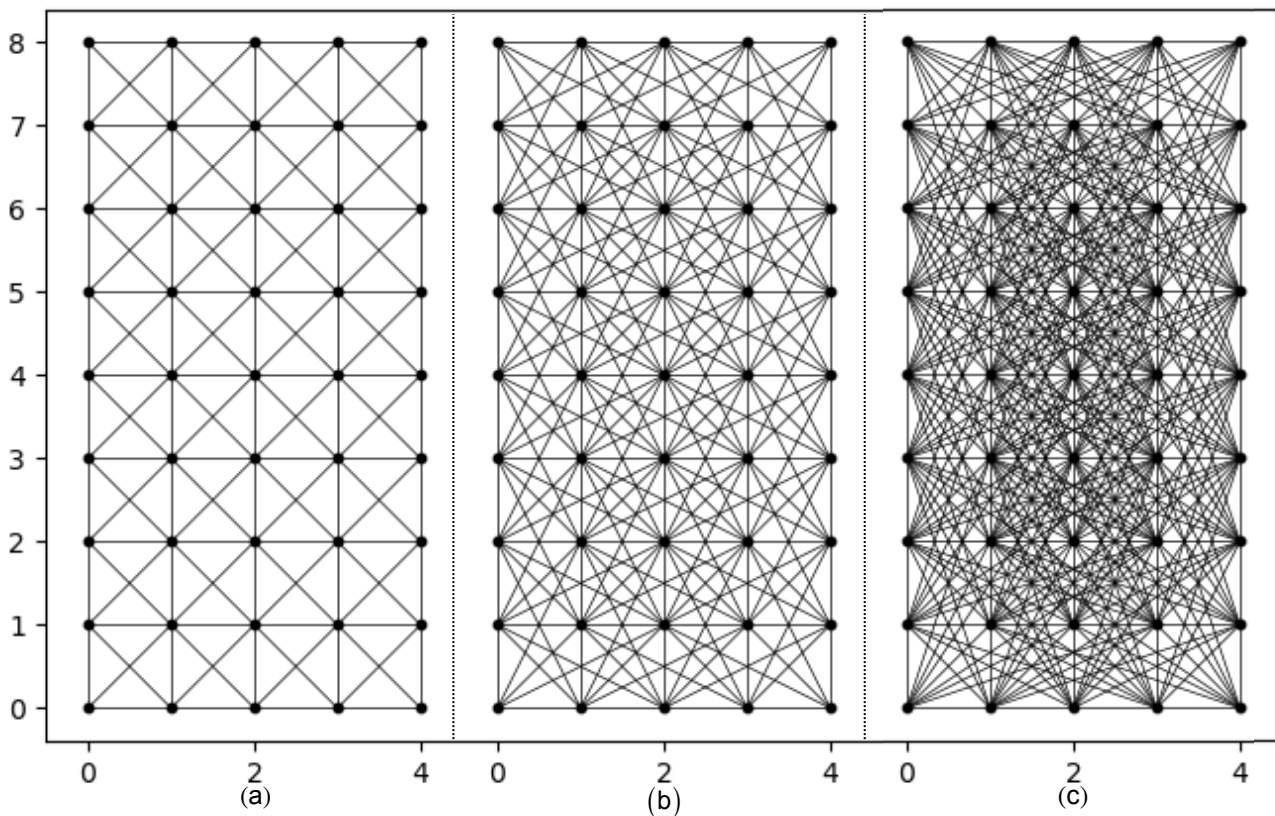
- i. Το δίκτυο των κόμβων στο χωρίο
- ii. Το μέγιστο επιτρεπτό μήκος του κάθε στοιχείου στο αρχικό χωρίο σχεδιασμού
- iii. Την μέθοδο σχεδιασμού

Στις παρακάτω ενότητες γίνεται η σύγκριση της τελικής βέλτιστης τοπολογίας που προκύπτει, καθώς και του υπολογιστικού κόστους, αναλόγως τις αρχικές επιλογές του χρήστη. Για αυτές τις ανάγκες, επιλέχθηκε η εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας για ένα χωρίο συνολικού μήκους τέσσερα μέτρα (4m) και ύψους οκτώ μέτρα (8m). Πρόκειται για έναν φορέα πρόβολο, με αρθρώσεις στη βάση του και μία οριζόντια φόρτιση στο ελεύθερο άκρο (σχ. 2.19).



Σχήμα 2.19: Χώρος σχεδίασης φορέα

Για το σκοπό αυτό δημιουργήθηκαν τρεις (3) διαφορετικές περιπτώσεις σύνθεσης του αρχικού χωρίου, με μέγιστο μήκος στοιχείων τα δύο μέτρα (σχ. 2.20a), τα τρία μέτρα (σχ. 2.20b) και τα τέσσερα μέτρα (σχ. 2.20c), στα οποία η γίνεται η εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας σύμφωνα με τις δύο (2) μεθόδους που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες (optimality criteria - OC & Interior-Point method - IP). Για όλες τις περιπτώσεις, η απόσταση των κόμβων και στις δύο διευθύνσεις είναι ένα μέτρο (1m), διάταξη κόμβων 5 x 9.



Σχήμα 2.20: Αρχικό χωρίο σχεδιασμού για μέγιστο μήκος στοιχείων 2m (a), 3m (b) και 4m (c)

2.4.1 Βελτιστοποίηση τοπολογίας προβόλου - Optimality Criteria

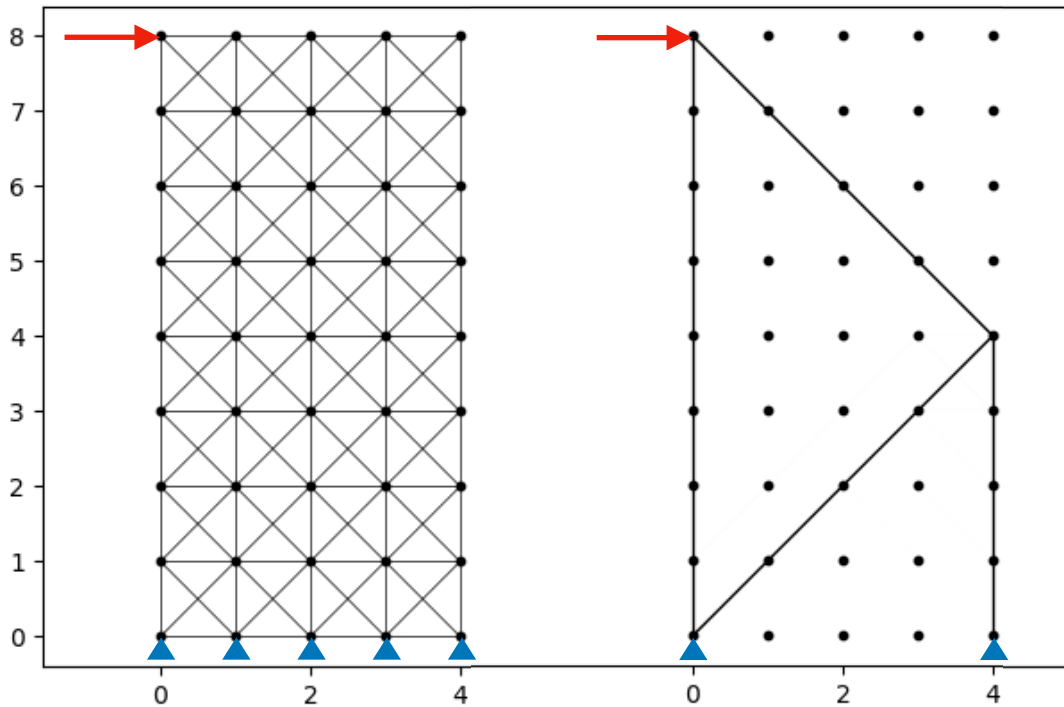
Για την σύγκριση των αποτελεσμάτων ανάλογα με τα τρία (3) διαφορετικά χωρία του σχήματος 2.20, γίνεται η υπόθεση εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας για την επίτευξη ενός τελικού χωρίου με ένα συγκεκριμένο όγκο. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι αρχικοί όγκοι των χωρίων (V_0), σύμφωνα με την υπόθεση ότι το εμβαδό διατομής του κάθε στοιχείου είναι $a_e = 1 \text{ m}^2$. Προκυμένον να μπορεί να γίνει η επιθυμητή σύγκριση, πρέπει ο τελικός όγκος της κατασκευής (V) να είναι ίδιος και για τις τρεις (3) περιπτώσεις, με αποτέλεσμα σε κάθε δοκιμή να έχουμε διαφορετικό λόγο όγκων (V_{frac}).

Πίνακας 2.1: Αρχικοί και τελικοί όγκοι των χωρίων σχεδιασμού

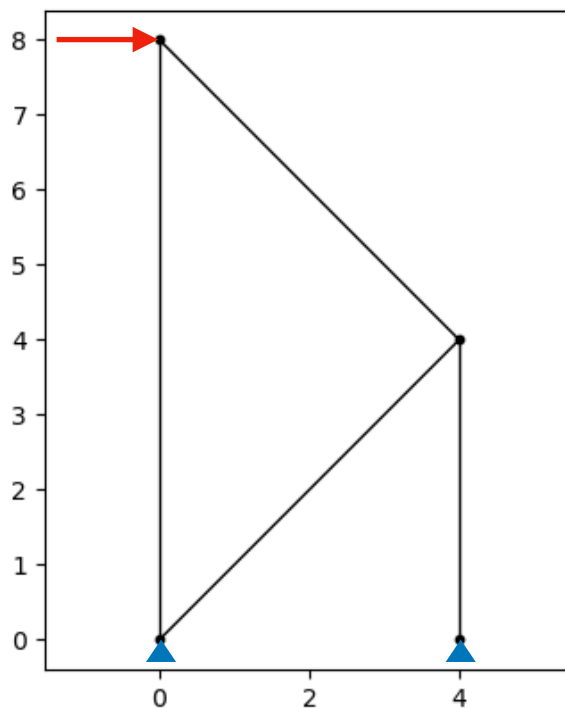
Χωρίο σχεδιασμού	Αρχικός όγκος χωρίου V_0	Λόγος τελικού προς αρχικού όγκου (V/V_0) V_{frac}	Τελικός όγκος κατασκευής V
σχ. 2.20a	166.51 m ³	0.14	23.31 m ³
σχ. 2.20b	399.06 m ³	0.058	23.14 m ³
σχ. 2.20c	882.80 m ³	0.027	23.83 m ³

Εφαρμογή σχήματος 2.20a (μέγιστο μήκος του εκάστοτε στοιχείου 2m)

Στο σχήμα 2.21 που ακολουθεί παρουσιάζεται η βέλτιστη τοπολογία που προκύπτει για το επιθυμητό λόγο όγκου του πίνακα 2.1, ενώ στο σχήμα 2.22 που ακολουθεί, φαίνεται η τελική γεωμετρία του φορέα μετά την συγχώνευση των στοιχείων.

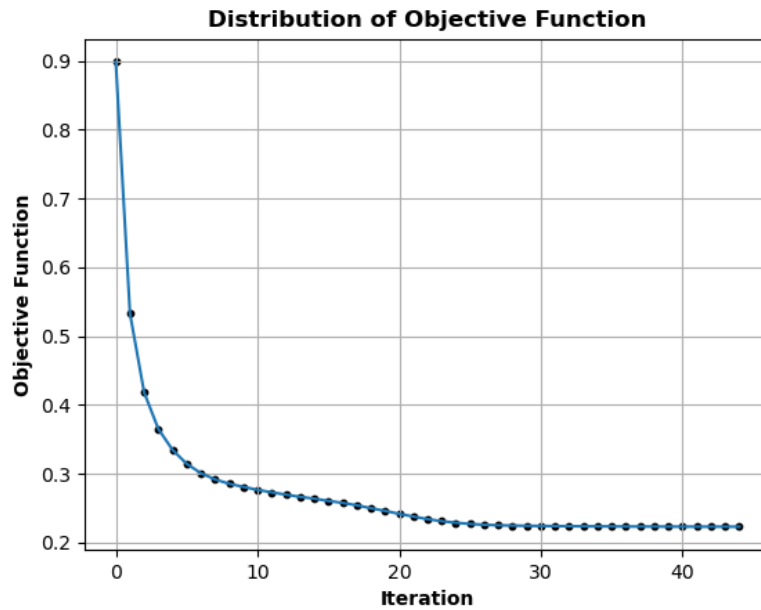


Σχήμα 2.21: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτύωματος για μέγιστο αρχικό μήκος στοιχείων 2m



Σχήμα 2.22: Τελική γεωμετρία δικτυωματικού φορέα (1η εφαρμογή)

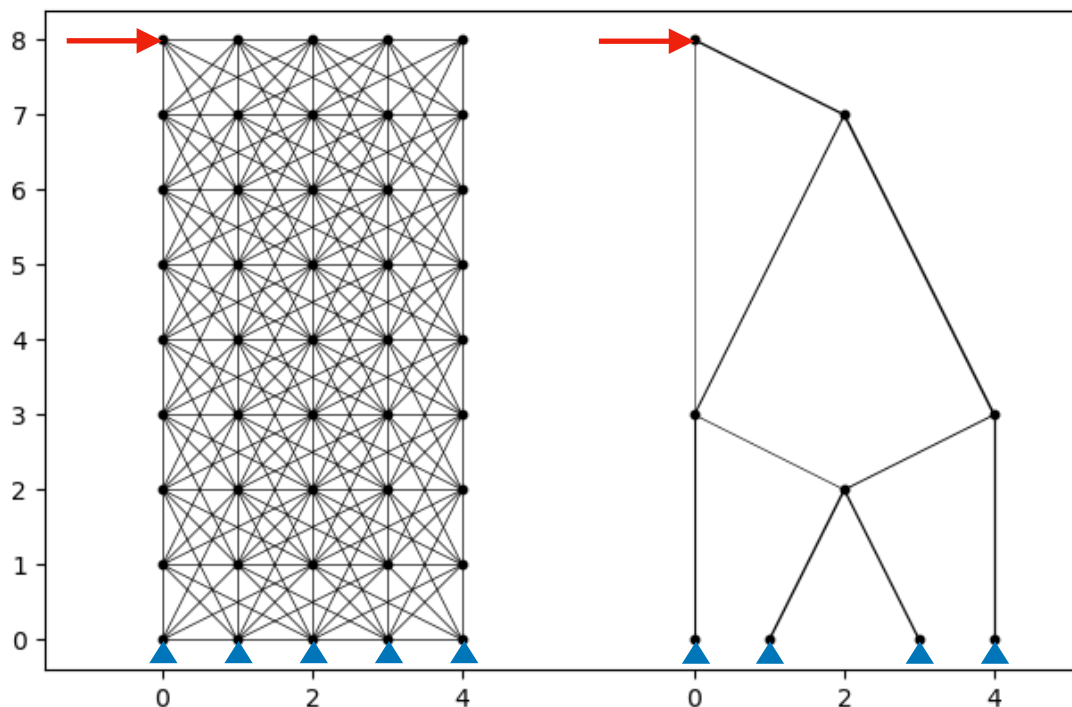
Παρακάτω, φαίνεται η τιμή τις αντικειμενικής συνάρτησης, για κάθε επανάληψη της μεθόδου, μέχρι η τιμή της συνάρτησης να σταματήσει μεταβάλλεται ή έως ότου έχει πραγματοποιηθεί ένα μεγάλος επαναλήψεων.



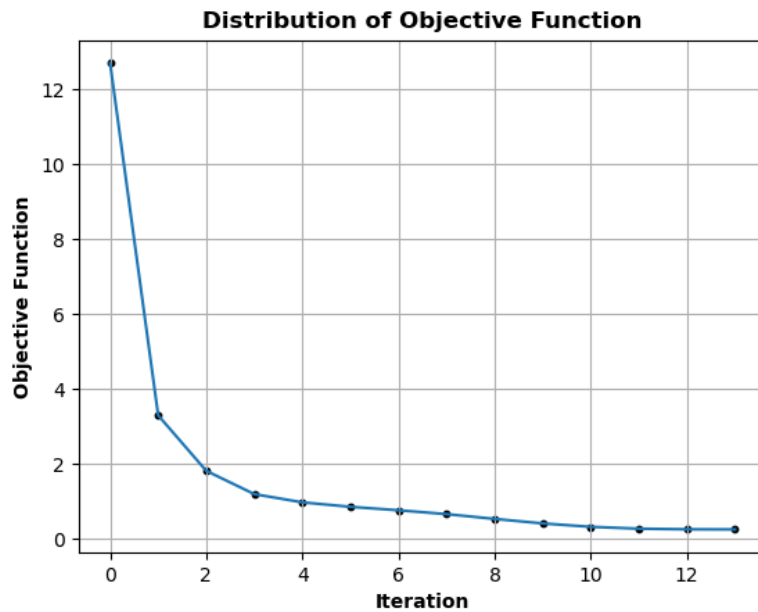
Σχήμα 2.23: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης σχήματος 2.20a (O-C)

Εφαρμογή σχήματος 2.21b (μέγιστο μήκος του εκάστοτε στοιχείου 3m)

Αντίστοιχα, παρουσιάζεται η βέλτιστη τοπολογία του σχήματος 2.21b και η τελική γεωμετρία του φορέα μετά την συγχώνευση των στοιχείων.



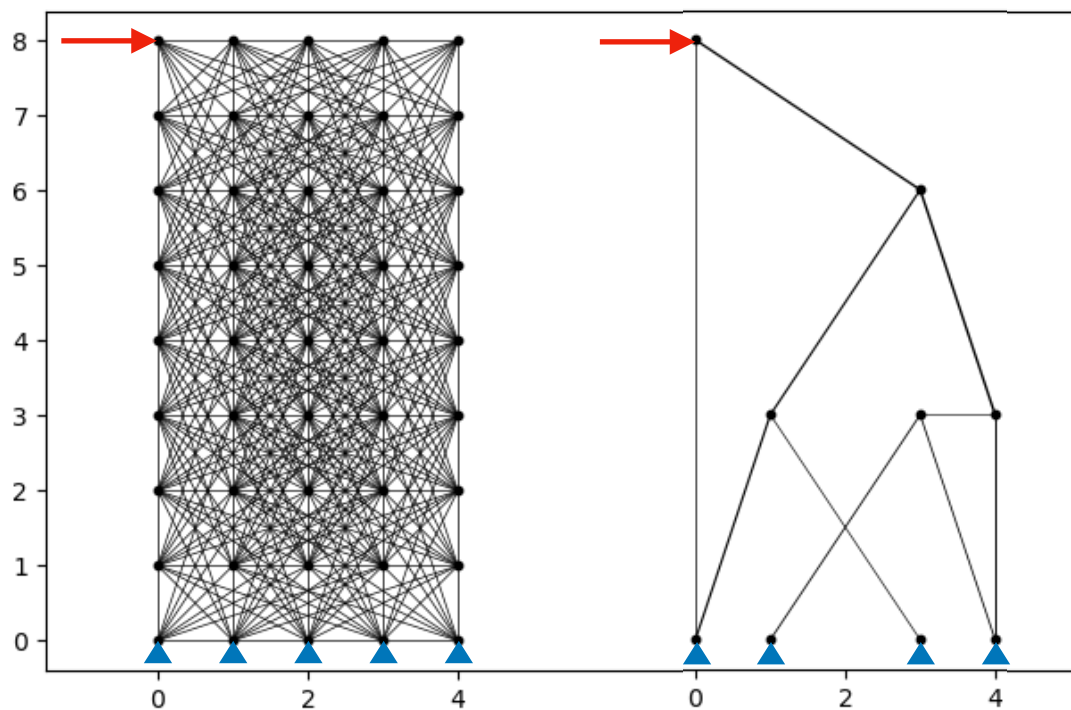
Σχήμα 2.24: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτυώματος για μέγιστο αρχικό μήκος στοιχείων 3m



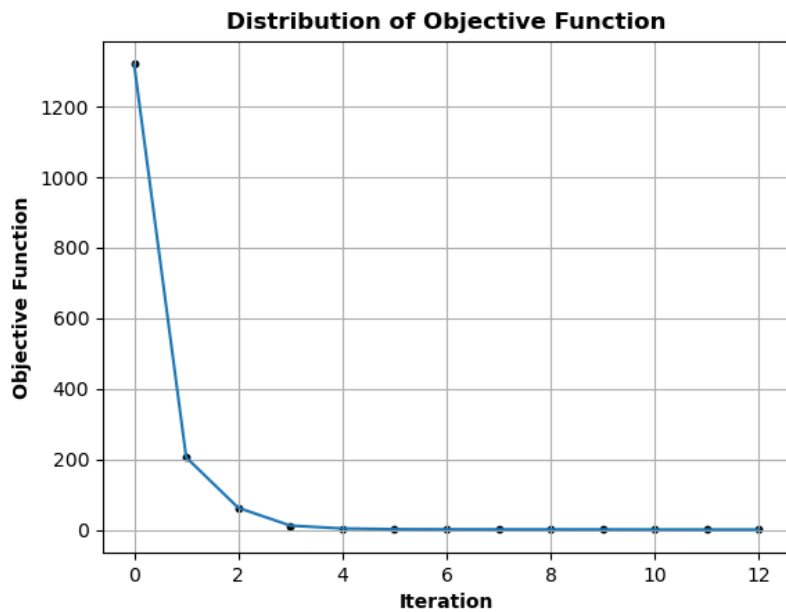
Σχήμα 2.25: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης σχήματος 2.20b (O-C)

Εφαρμογή σχήματος 2.21c (μέγιστο μήκος του εκάστοτε στοιχείου 4m)

Τέλος παρατίθενται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης τοπολογίας του σχήματος 2.21c, με μέγιστο μήκος του εκάστοτε στοιχείου στο αρχικό χωρίο σχεδιασμού τέσσερα μέτρα (4m).



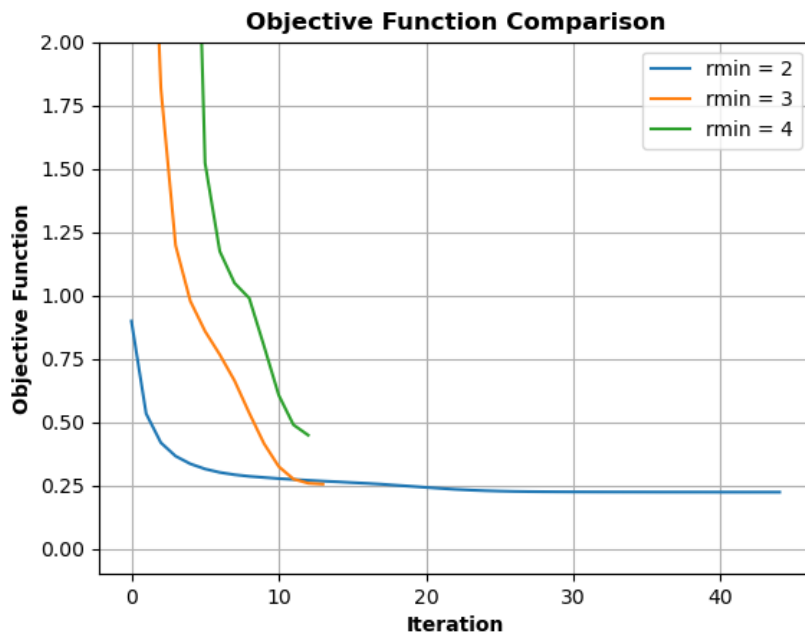
Σχήμα 2.26: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτύματος για μέγιστο αρχικό μήκος στοιχείων 4m



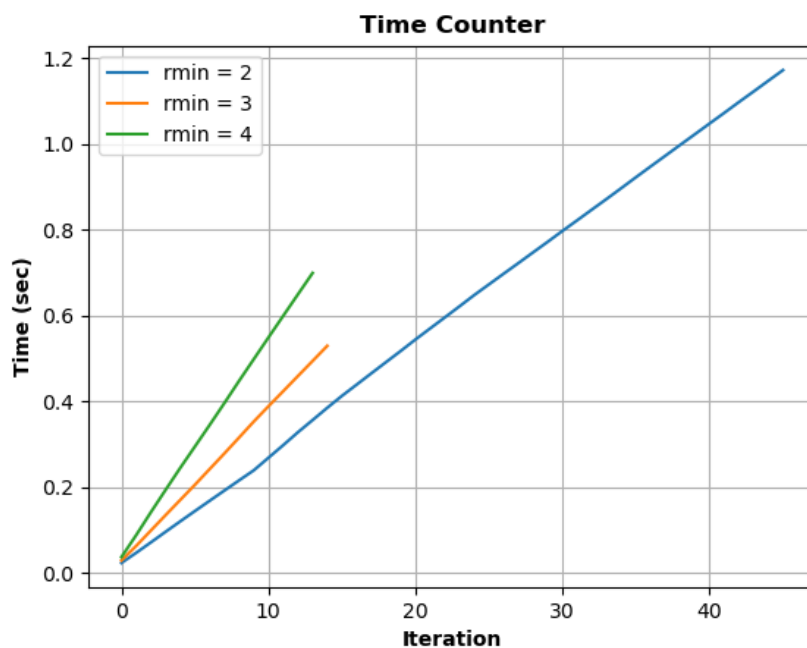
Σχήμα 2.27: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης σχήματος 2.20c (O-C)

Σύγκριση αποτελεσμάτων

Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζεται η πρόοδος της αντικειμενικής συνάρτησης για τις τρεις (3) διαφορετικές περιπτώσεις σύνθεσης του αρχικού χωρίου σχεδιασμού (σχ. 2.28), καθώς και ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης για την εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας (σχ. 2.29).



Σχήμα 2.28: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής για τις διαφορετικές περιπτώσεις σύνθεσης του αρχικού χωρίου σχεδιασμού (O-C)



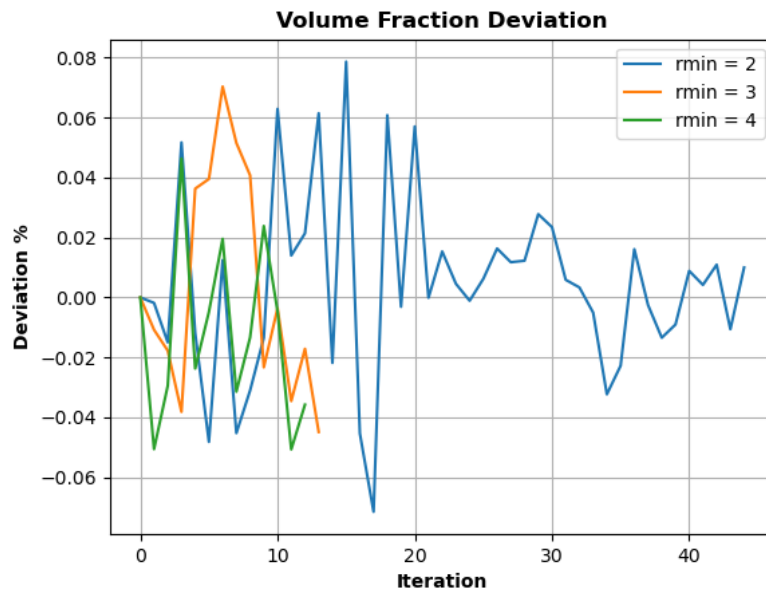
Σχήμα 2.29: Διάγραμμα της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας του κώδικα για τις διαφορετικές περιπτώσεις σύνθεσης του αρχικού χωρίου σχεδιασμού (O-C)

Η πρώτη ανάγνωση των παραπάνω αποτελεσμάτων, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, για έναν πολύ μικρό αριθμό στοιχείων στο αρχικό χωρίο σχεδιασμού, απαιτούνται περισσότερες επανάληψης για την εύρεση της τελικής γεωμετρίας με αποτέλεσμα την αύξηση του υπολογιστικού κόστους (αύξηση του χρόνου).

Βέβαια, η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης για το αρχικό χωρίο σχεδιασμού με τον μικρότερο αριθμό στοιχείων, είναι πολύ μικρή μετά την δωδέκατη επανάληψη. Ωστόσο, αυτή η μικρή μεταβολή έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση των επαναλήψεων και κατ' επέκταση την αύξηση του απαιτούμενου χρόνου υλοποίησης της ανάλυσης. Επιπλέον, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, για τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων, ο χρόνος ολοκλήρωσης της κάθε επανάληψης ελαττώνεται αισθητά, όσο μειώνεται ο αρχικός αριθμός των στοιχείων.

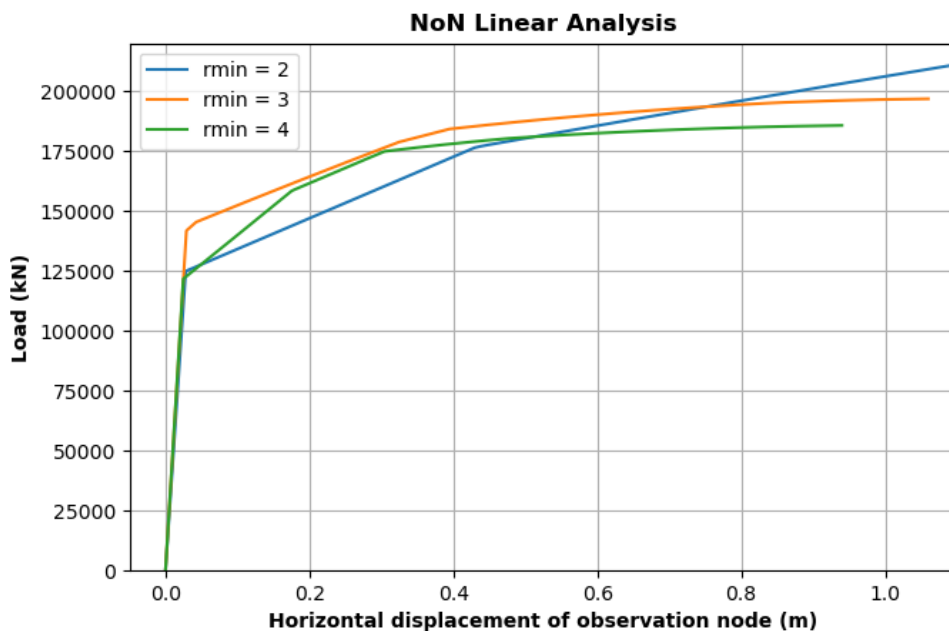
Ένα ακόμα στοιχείο σύγκρισης ήταν η επιτυχία υλοποίησης του αλγορίθμου σύμφωνα με τους περιορισμούς που προσδιορίστηκαν στο πρόβλημα. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η επί της εκατό απόκλιση του εκάστοτε χωρίου σε κάθε επανάληψη. Όπως ήταν αναμενόμενο, η απόκλιση είναι ιδιαίτερα μικρή, όπου η μέγιστη που παρατηρείται είναι της τάξεως του 0.08%, με την τιμή της μέγιστης απόκλισης της τελικής γεωμετρίας να είναι της τάξεως του 0.04%.

Τέλος, για την τελική βέλτιστη τοπολογία του εκάστοτε χωρίου, πραγματοποιείται μία μη γραμμική ανάλυση, με την χρήση της βιβλιοθήκης OpenSeesPy. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε λαμβάνοντας υπόψιν τόσο την μη γραμμικότητα γεωμετρίας, όσο και την μη γραμμικότητα του υλικού (σχ. 2.31)



Σχήμα 2.30: Απόκλιση κλάσματος όγκου σύμφωνα με τον εκάστοτε περιορισμό (O-C)

Προκειμένου να ληφθεί υπόψιν η μη γραμμικότητα του υλικού, ορίζεται ως υλικό χάλυβας με μέτρο ελαστικότητας $E = 210 \text{ GPa}$, τάση διαρροής $f_y = 250 \text{ MPa}$ και μέτρο κράτυνσης $b = 0.01$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα δύναμης μετατόπισης του κόμβου όπου εφαρμόζεται η οριζόντια δύναμη, για τις τελικές γεωμετρίες των τριών (3) διαφορετικών περιπτώσεων.



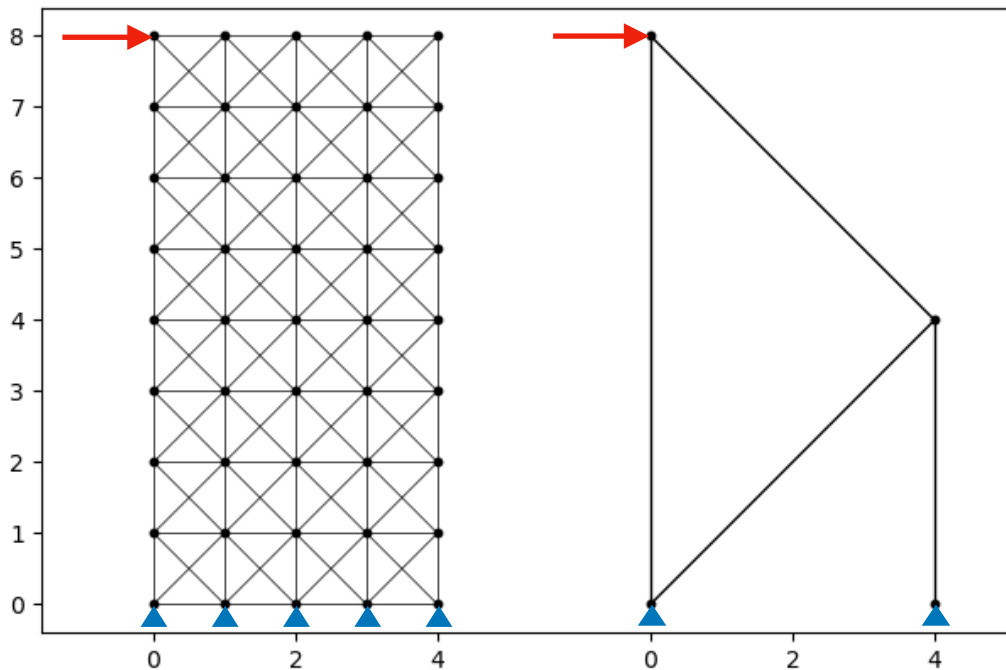
Σχήμα 2.31: Μη γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας (O-C)

2.4.2 Βελτιστοποίηση τοπολογίας προβόλου - Interior-Point

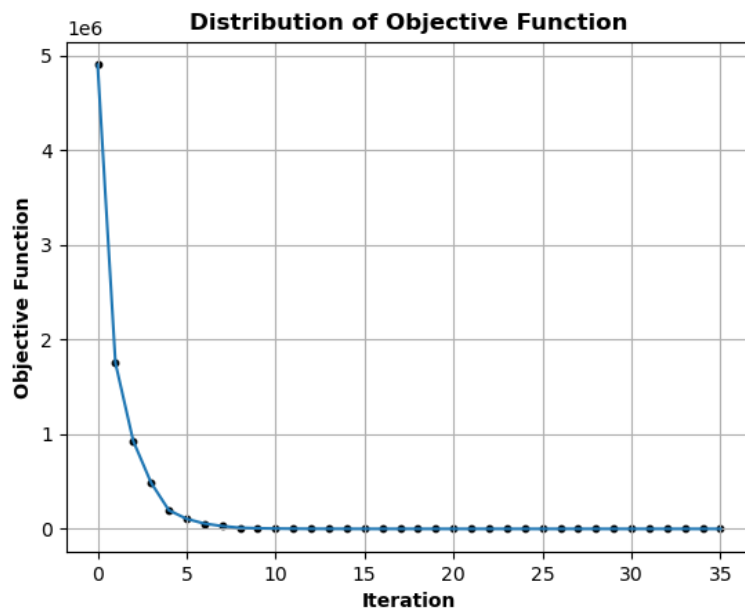
Για την σύγκριση των δύο μεθόδων, πραγματοποιήθηκε ακριβώς η ίδια ανάλυση για τα τρία (3) διαφορετικά χωρία του σχήματος 2.20.

Εφαρμογή σχήματος 2.20a (μέγιστο μήκος του εκάστοτε στοιχείου 2m)

Στο σχήμα 2.32 παρουσιάζεται η βέλτιστη τοπολογία που προκύπτει για το επιθυμητό λόγο όγκου του πίνακα 2.1, ενώ στο σχήμα 2.33 που ακολουθεί, φαίνεται η τιμή τις αντικειμενικής συνάρτησης, για κάθε επανάληψη της μεθόδου.



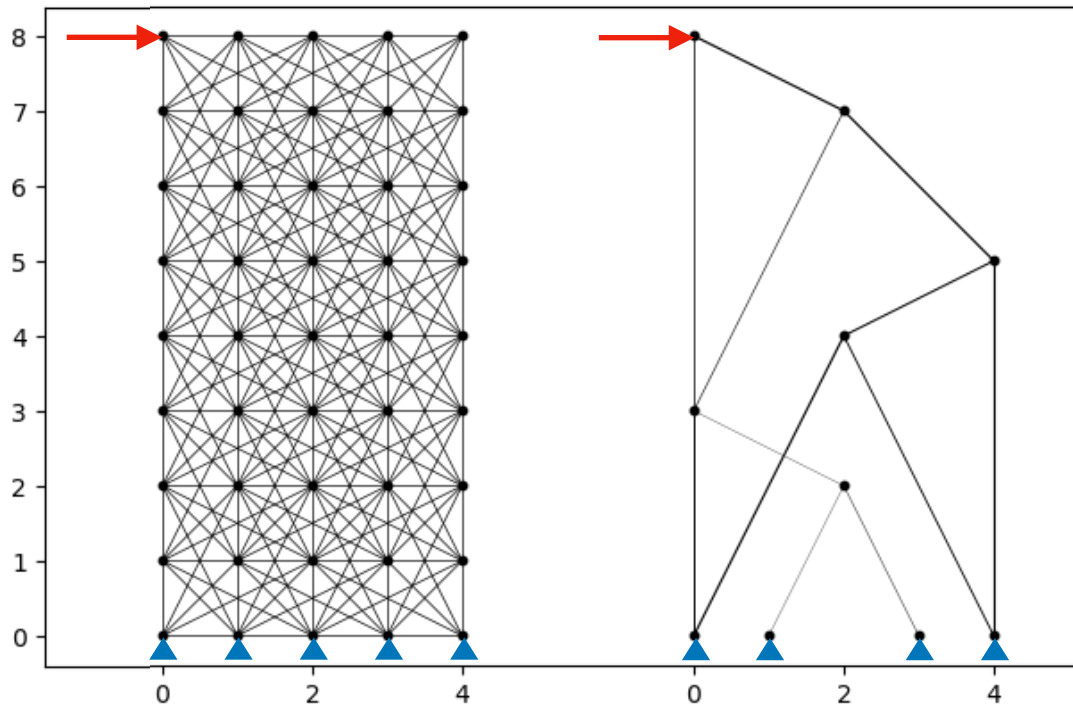
Σχήμα 2.32: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτυώματος για μέγιστο αρχικό μήκος στοιχείων 2m



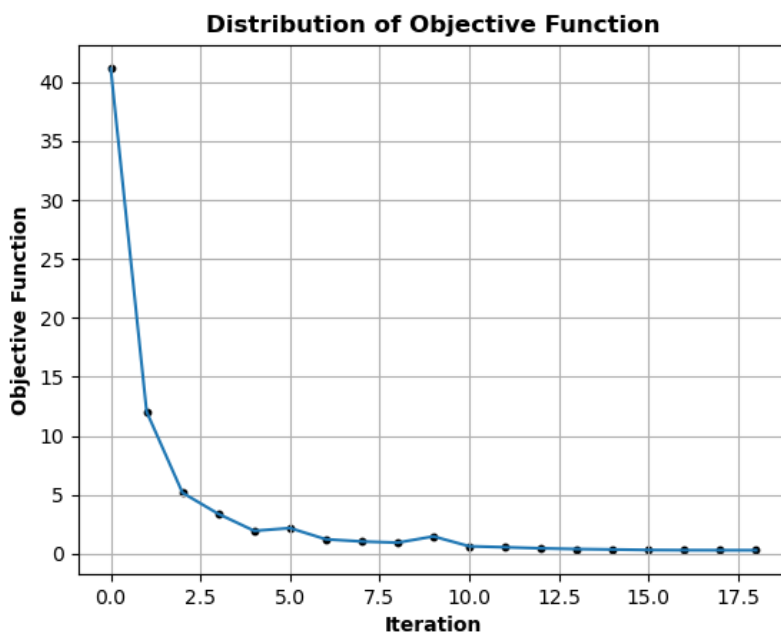
Σχήμα 2.33: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης σχήματος 2.20a (I-P)

Εφαρμογή σχήματος 2.20b (μέγιστο μήκος του εκάστοτε στοιχείου 3m)

Αντίστοιχα, παρουσιάζεται η βέλτιστη τοπολογία του σχήματος 2.21b και η τελική γεωμετρία του φορέα μετά την συγχώνευση των στοιχείων, καθώς και η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά της διαδικασία της βελτιστοποίησης (σχ. 2.35).



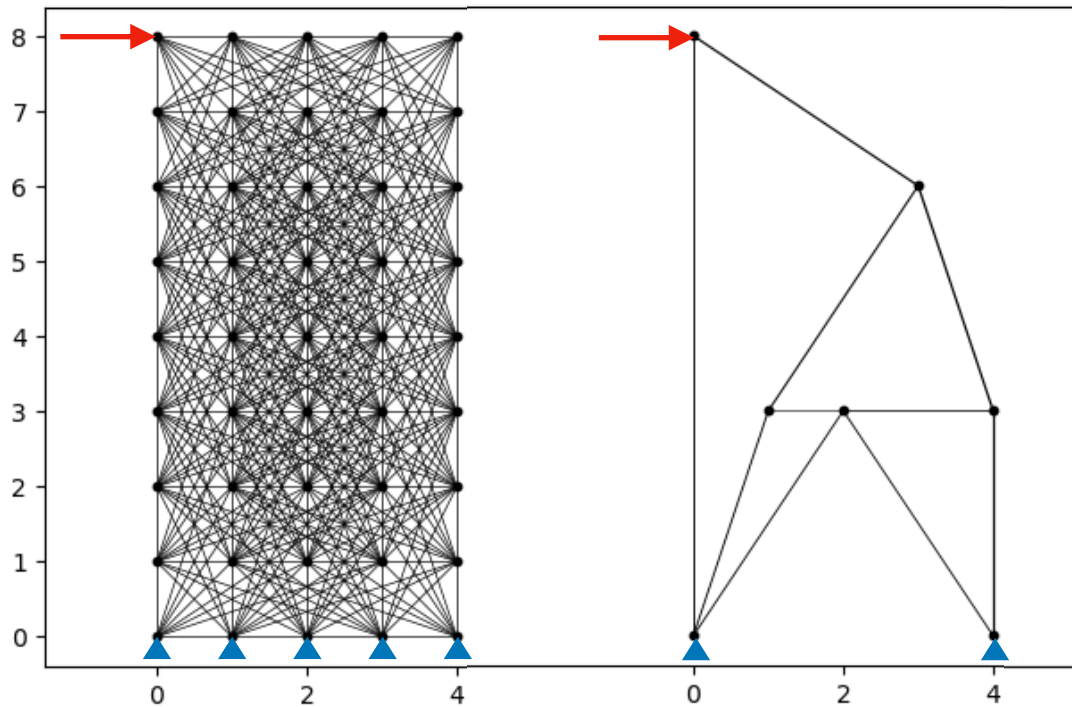
Σχήμα 2.34: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτυώματος για μέγιστο αρχικό μήκος στοιχείων 3m



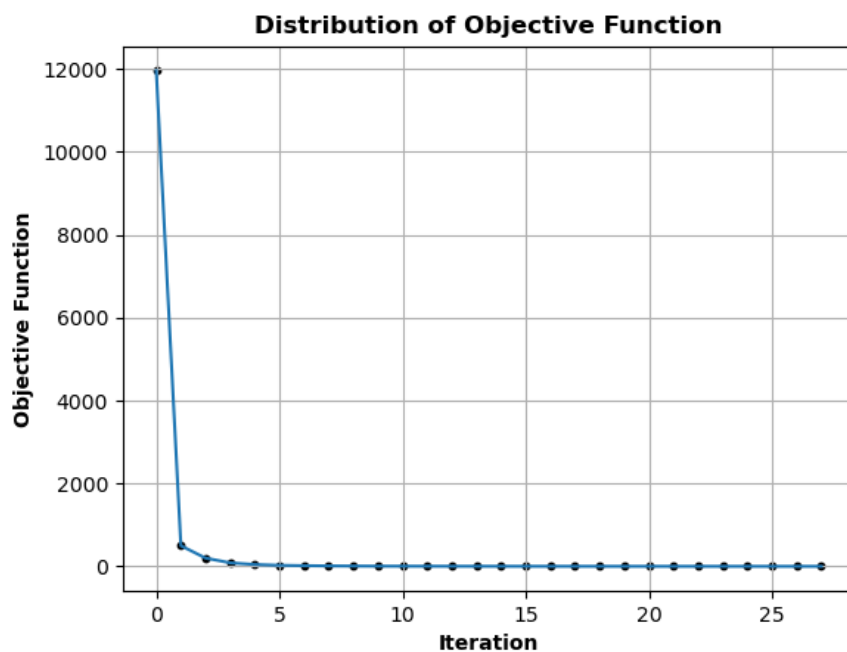
Σχήμα 2.35: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης σχήματος 2.20b (I-P)

Εφαρμογή σχήματος 2.20c (μέγιστο μήκος του εκάστοτε στοιχείου 4m)

Τέλος παρατίθενται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης τοπολογίας του σχήματος 2.21c, με μέγιστο μήκος του εκάστοτε στοιχείου στο αρχικό χωρίο σχεδιασμού τέσσερα μέτρα (4m)



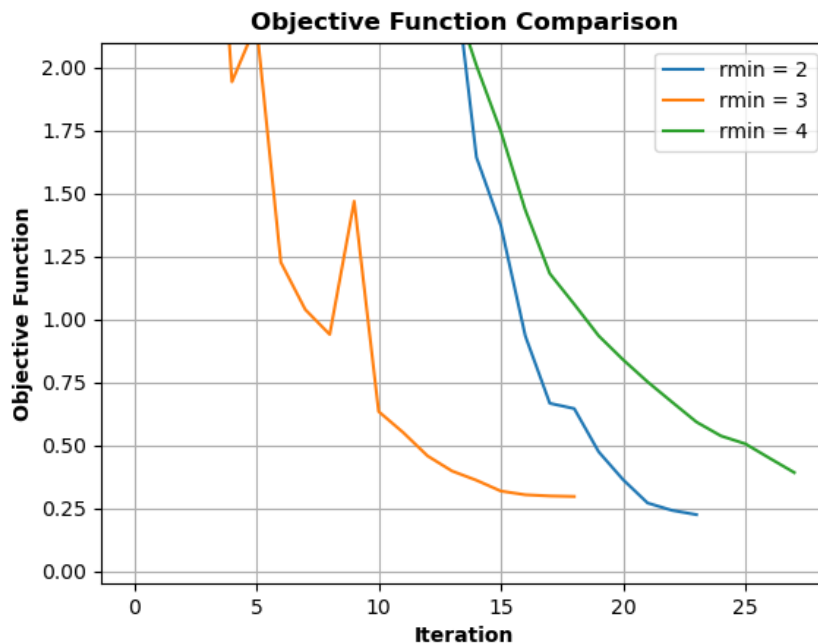
Σχήμα 2.36: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτυώματος για μέγιστο αρχικό μήκος στοιχείων 3m



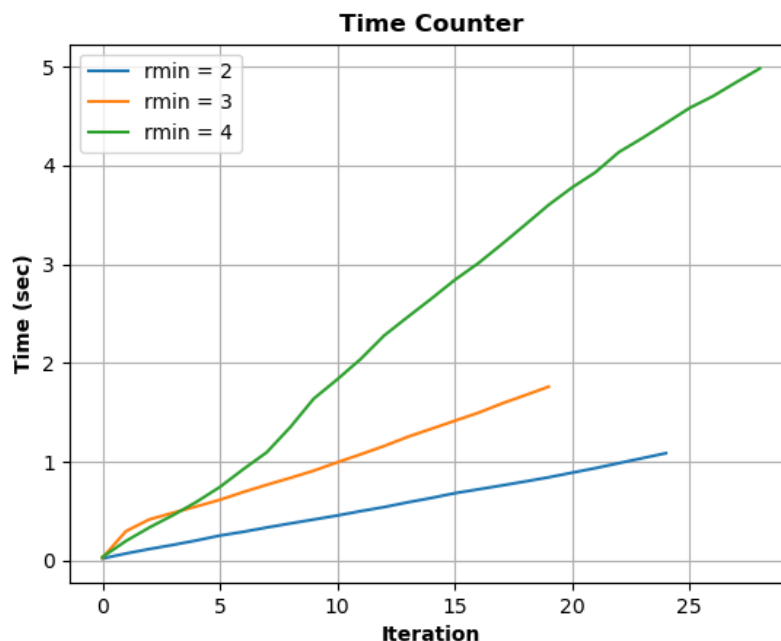
Σχήμα 2.37: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής συνάρτησης σχήματος 2.20c (I-P)

Σύγκριση αποτελεσμάτων

Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζεται η πρόοδος της αντικειμενικής συνάρτησης για τις τρεις (3) διαφορετικές περιπτώσεις σύνθεσης του αρχικού χωρίου σχεδιασμού (σχ. 2.38), καθώς και ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης για την εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας (σχ. 2.39).



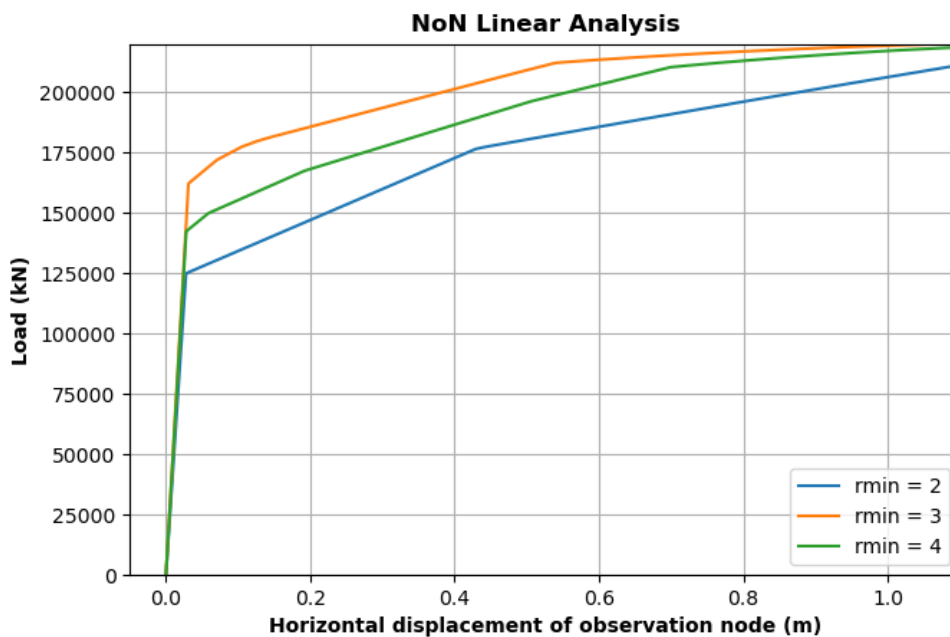
Σχήμα 2.38: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής για τις διαφορετικές περιπτώσεις σύνθεσης του αρχικού χωρίου σχεδιασμού (I-P)



Σχήμα 2.39: Διάγραμμα της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας για τις διαφορετικές περιπτώσεις σύνθεσης του αρχικού χωρίου σχεδιασμού (I-P)

Από τα παραπάνω διαγράμματα προκύπτει ότι ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης της διαδικασίας, εξαρτάται από τον αριθμό των στοιχείων που ορίζονται στο αρχικό χωρίο σχεδιασμού. Τόσο ο συνολικός χρόνος όσο και ο χρόνος ολοκλήρωσης της κάθε επανάληψης ελαττώνεται αισθητά, όσο μειώνεται ο αρχικός αριθμός των στοιχείων. Αυτό γίνεται ιδιαίτερα αντιληπτό κατά την σύγκριση των δύο πρώτων χωρίων, δηλαδή του χωρίου με μέγιστο μήκος στοιχείου τα δύο (2m) και τα τρία (3m) μέτρα, καθώς η πρώτη διάταξη χρειάζεται περισσότερες επαναλήψεις για την σύγκλιση των αποτελεσμάτων αλλά ο τελικός χρόνος υλοποίησης είναι αρκετά λιγότερος.

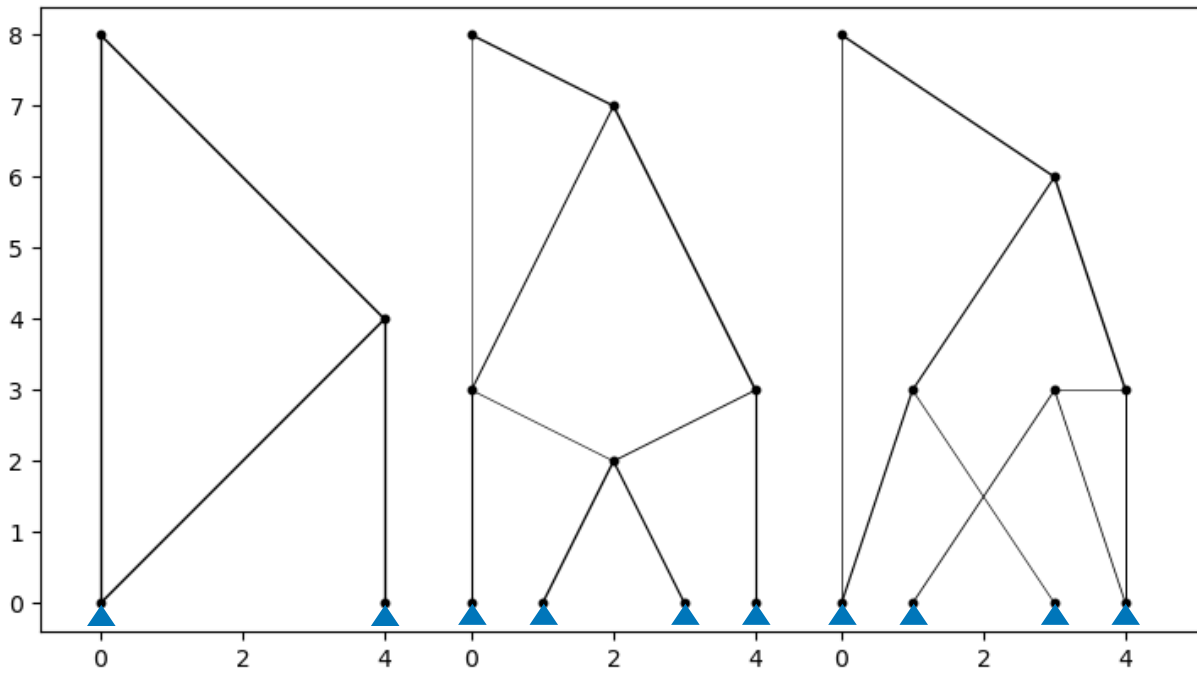
Τέλος, όπως και στην προηγούμενη μέθοδο, πραγματοποιείται μία μη γραμμική ανάλυση, με την χρήση της βιβλιοθήκης OpenSeesPy. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε λαμβάνοντας υπόψιν τόσο την μη γραμμικότητα γεωμετρίας, όσο και την μη γραμμικότητα του υλικού (σχ. 2.40). Τα δεδομένα τα οποία ορίζονται είναι ακριβώς τα ίδια όπως με την προηγούμενη μέθοδο, δηλαδή ως υλικό ορίστηκε χάλυβας με μέτρο ελαστικότητας $E = 210 \text{ GPa}$, τάση διαρροής $f_y = 250 \text{ MPa}$ και μέτρο κράτυνσης $b = 0.01$.



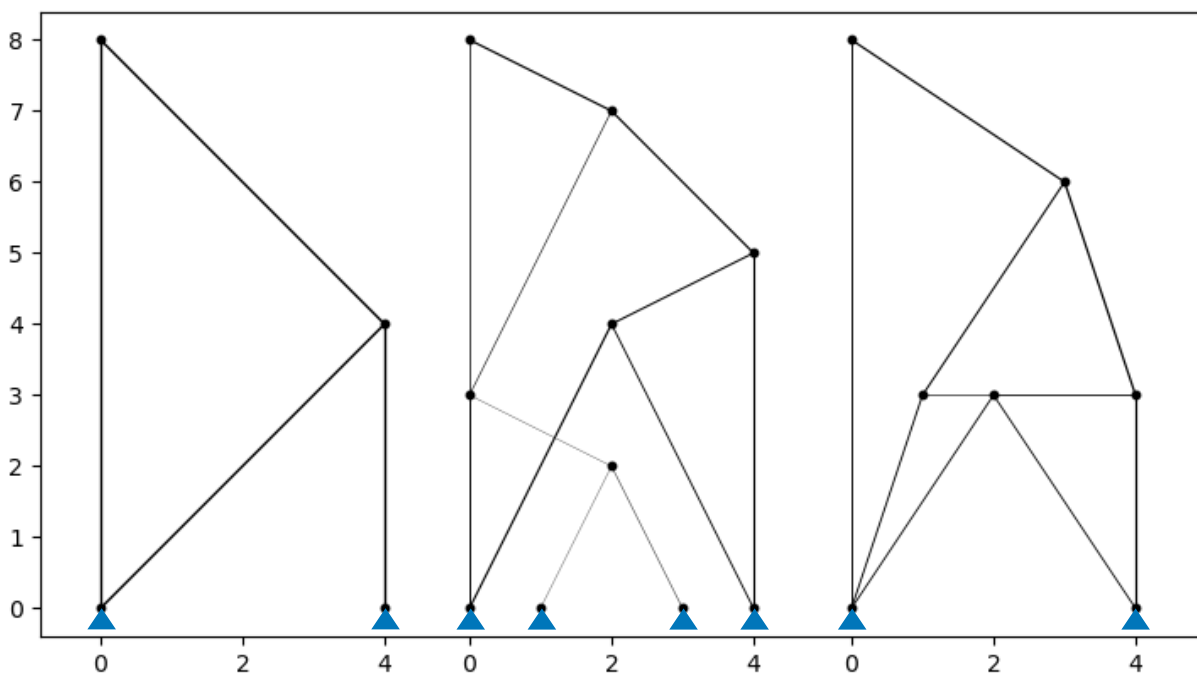
Σχήμα 2.40: Μη γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας (I-P)

2.4.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων Optimality Criteria & Interior-Point

Στην συγκεκριμένη ενότητα γίνεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων των αρχικών χωρίων σχεδιασμού του σχήματος 2.20 σύμφωνα με τις παραμέτρους που εισήχθησαν στις παραγράφους §2.4.1 και §2.4.2. Παρακάτω (σχ. 2.41-2.42), παρουσιάζονται τα τελικά αποτελέσματα βέλτιστης τοπολογίας σύμφωνα με τις δύο μεθόδους για τις διαφορετικές περιπτώσεις των αρχικών χωρίων σχεδιασμού.



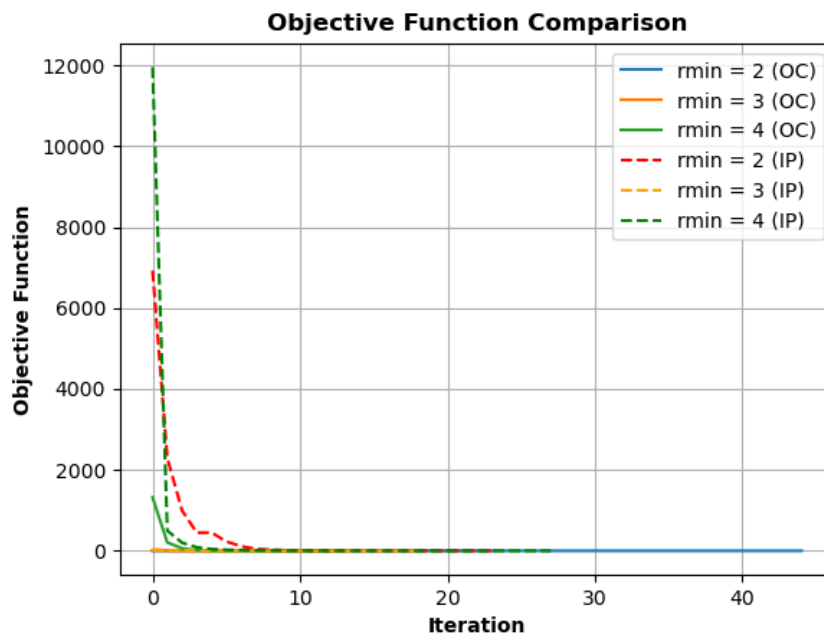
Σχήμα 2.41: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτύωματος (O-C)



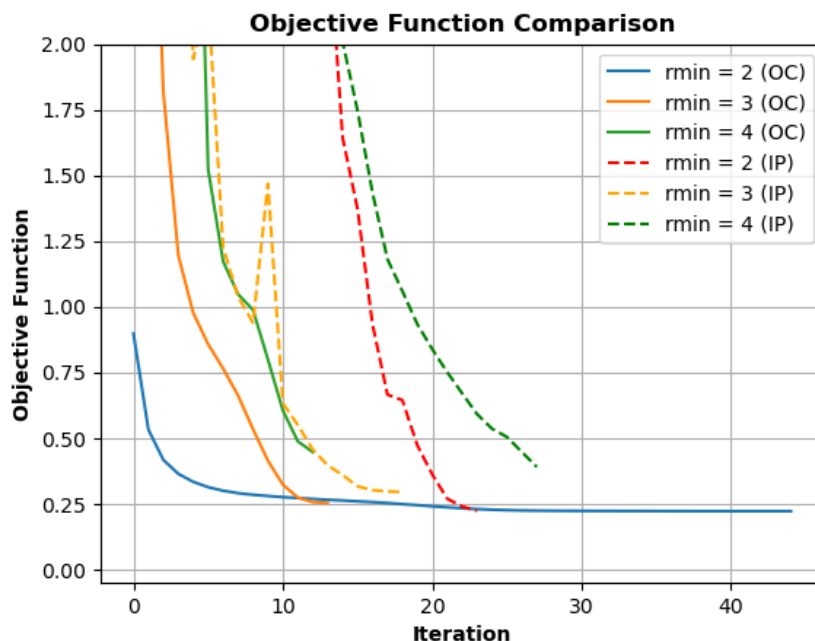
Σχήμα 2.42: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτύωματος (I-P)

Στα παρακάτω διαγράμματα με συνεχόμενη γραμμή εμφανίζονται τα αποτελέσματα που επιλύθηκαν μέσω του Optimality Criteria (OC) και με διακεκομμένη γραμμή τα αποτελέσματα που επιλύθηκαν μέσω του Interior Point algorithm (I-P).

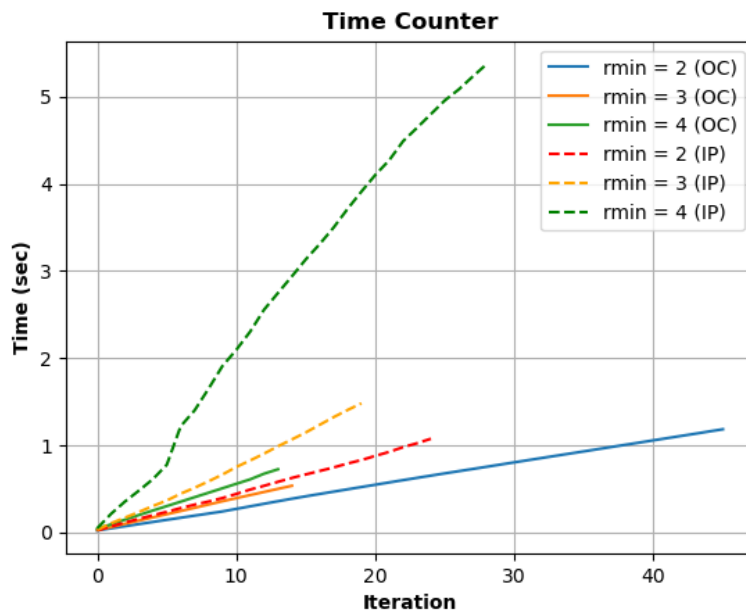
Στα σχήμα 2.43 που ακολουθεί, εμφανίζεται η πρόοδος των αντικειμενικών συναρτήσεων σε κάθε βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας, ενώ στο σχήμα 2.44, γίνεται μια μεγέθυνση για την καλύτερη εποπτεία της τελικής τιμής των συναρτήσεων αυτών. Τέλος, στο σχήμα 2.45 παρουσιάζεται ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης για την εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας για κάθε περίπτωση.



Σχήμα 2.43: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής



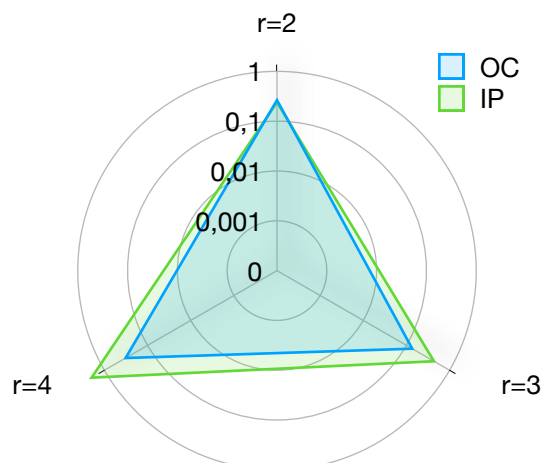
Σχήμα 2.44: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής



Σχήμα 2.45: Διάγραμμα της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας του κώδικα

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω διαγράμματα, η επίλυση της τοπολογίας με του αλγόριθμους εσωτερικού σημείου (I-P), έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του υπολογιστικού κόστους της ανάλυσης. Μάλιστα, η παραπάνω παρατήρηση ισχύει ακόμα και για την σύγκριση διαφορετικών χωρίων σχεδιασμού. Εξαιρέση αποτελεί το χωρίο σχεδιασμού για μέγιστο μήκος στοιχείων τα δύο μέτρα (2m), όπου βέβαια η τελική δομή προκύπτει για έναν αρκετά μεγάλο αριθμό επαναλήψεων.

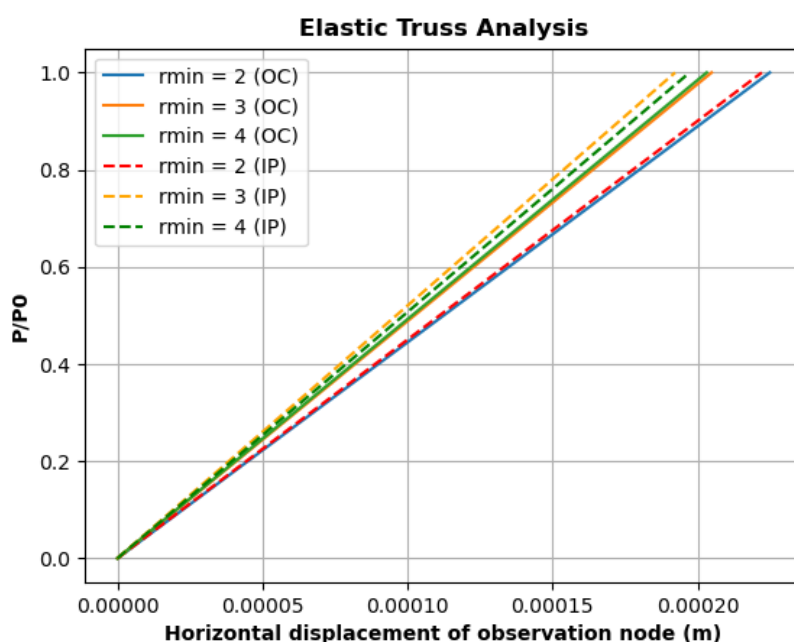
Επιπλέον, παρατηρείται ότι οι αλγόριθμοι εσωτερικού σημείου, ξεκινάνε από μία μεγάλη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις σε σύγκριση με την άλλη μέθοδο, καταλήγοντας όμως σε (περίπου) ίδια τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Στο παρακάτω γράφημα, παρατηρείται η απόδοση της κάθε μεθόδου σε σχέση με την τελικής τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης με τον απαιτούμενο χρόνο υλοποίησης της διαδικασίας.



Σχήμα 2.46: Διάγραμμα απόδοσης των δύο μεθόδων

Όπως γίνεται αντιληπτό, η αύξηση των στοιχείων στο αρχικό χωρίο σχεδιασμού, καθιστά την εφαρμογή της μεθόδου με την χρήση των αλγορίθμων εσωτερικού σημείο λιγότερο αποδοτική, σε σύγκριση με την χρήση της μεθόδου Optimality Criteria, καθώς ο χρόνος απαίτησης για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, σε συνδυασμό με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι λιγότερο αποδοτικός.

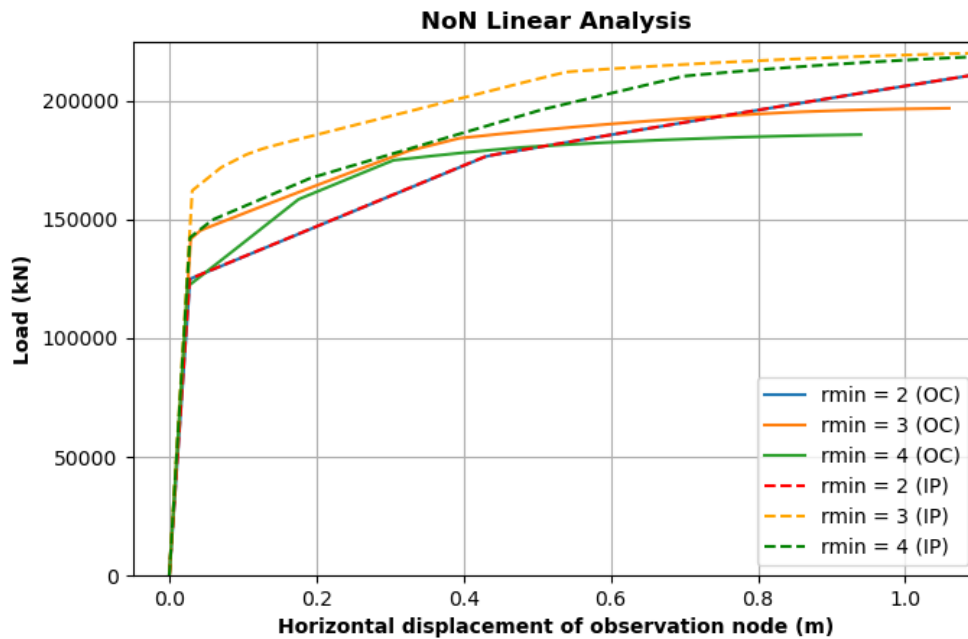
Στο παρακάτω γράφημα, γίνεται μια ελαστική ανάλυση, για την τελική βέλτιστη τοπολογία της κατασκευής, όπου μέλη με περιοχές κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο, που θεωρούνται αναποτελεσματικά, έχουν αφαιρεθεί από την δομή, ενώ παράλληλα έχει γίνει η συγχώνευση των στοιχείων.



Σχήμα 2.47: Γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας

Όπως γίνεται αντιληπτό από το παραπάνω διάγραμμα, η βέλτιστη τοπολογία με την χρήση αλγορίθμων εσωτερικού σημείου, έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία μιας δομής με μεγαλύτερη δυσκαμψία, για κάθε αρχικό χωρίο σχεδιασμού. Επιπλέον, παρατηρείται ότι για μικρό αριθμό στοιχείων η διαφορά στην συνολική δυσκαμψία είναι μικρή, ενώ για μεγαλύτερο αριθμό στοιχείων η διαφορά αυτή είναι μεγαλύτερη.

Τέλος, πραγματοποιήθηκε η σύγκριση των αποτελεσμάτων για μια μη γραμμική ανάλυση, λαμβάνοντας υπόψιν τόσο την μη γραμμικότητα γεωμετρίας, όσο και την μη γραμμικότητα του υλικού, όπως περιγράφηκε και στις προηγούμενες ενότητες. Τα δεδομένα τα οποία ορίζονται είναι ακριβώς τα ίδια όπως με την προηγούμενη μέθοδο, δηλαδή ως υλικό ορίστηκε χάλυβας με μέτρο ελαστικότητας $E = 210 \text{ GPa}$, τάση διαρροής $f_y = 250 \text{ MPa}$ και μέτρο κράτυνσης $b = 0.01$.



Σχήμα 2.48: Μη γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας

2.4.4 Βελτιστοποίηση μεγέθους των διατομών (Sizing Optimization)

Σε αυτή την παράγραφο, πραγματοποιείται μία βελτιστοποίηση του μεγέθους των διατομών για την τελική τοπολογία που δημιουργική στις παραπάνω ενότητες. Στόχος είναι η εύρεση των κατάλληλων διατομών, ώστε υπό την δεδομένη γεωμετρία να πληρούνται ορισμένοι περιορισμοί και η σύγκριση του απαιτούμενου βάρους του υλικού για κάθε περίπτωση. Σημειώνεται πως η τελική βέλτιστη τοπολογία τόσο με την χρήση της μεθόδου optimality criteria, όσο και με την χρήση των αλγορίθμων εσωτερικού σημείου, έχει ακριβώς την ίδια γεωμετρία στην περίπτωση όπου το μέγιστο μήκος των στοιχείων στο αρχικό χωρίο σχεδιασμού είναι δύο μέτρα ($r_{min} = 2m$). Συνεπώς, η βελτιστοποίηση του μεγέθους των διατομών πραγματοποιείται για τις παρακάτω περιπτώσεις γεωμετρίας:

- $r_{min} = 2m$
- $r_{min} = 3m$ - Optimality Criteria (O-C)
- $r_{min} = 3m$ - Interior Point algorithm (I-P)
- $r_{min} = 4m$ - Optimality Criteria (O-C)
- $r_{min} = 4m$ - Interior Point algorithm (I-P)

Επιπλέον, για την υλοποίηση της διαδικασίας είναι απαραίτητο να προσδιοριστούν τα απαραίτητα στοιχεία, καθώς και οι απαραίτητοι περιορισμοί. Για τις ανάγκες της συγκεκριμένης διαδικασίας, με δεδομένη την εκάστοτε γεωμετρία και τα υλικά που

πρόκειται να χρησιμοποιηθούν, στόχος είναι η εύρεση του ελάχιστου δυνατού βάρους της κατασκευής, ώστε να πληρούνται ορισμένοι περιορισμοί.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ως υλικό επιλέγεται χάλυβας με μέτρο ελαστικότητας $E = 210 \text{ GPa}$, τάση διαρροής $f_y = 250 \text{ MPa}$ και κράτυνσης $b = 0.01$, ενώ ως περιορισμοί ορίζονται οι εξής:

- Μέγιστη επιτρεπόμενη τάση σε κάθε στοιχείο: $\sigma_{\max} = f_y / 1.5 (= 166.6 \text{ MPa})$
- Μέγιστη οριζόντια μετατόπιση κόμβου ελέγχου: $u_{\max} = H / 400 (= 0.2 \text{ m})$

Επιπλέον, εισάγονται κάποια όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού, όπου το εμβαδό των διατομών μπορεί να κυμαίνεται στο εύρος τιμών μεταξύ μίας πολύ μικρής τιμής και την μονάδα (1). Η εφαρμογή μιας πολύ μικρής τιμής στα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού εισάγεται ώστε να μην προκύψει κατά την διαδικασία εύρεσης της λύσης ένα στατικά αόριστο σύστημα με αποτέλεσμα την απενεργοποίηση του αλγορίθμου. Έτσι, η μαθηματική αποτύπωση του προβλήματος προκύπτει:

$$\min_x C(a) = \sum_{e=1}^{N_{ele}} a_e L_e \quad (2.27a)$$

$$\text{Subject to: } \sigma_e \leq \sigma_{\max} = 166 \text{ MPa} \quad (2.27b)$$

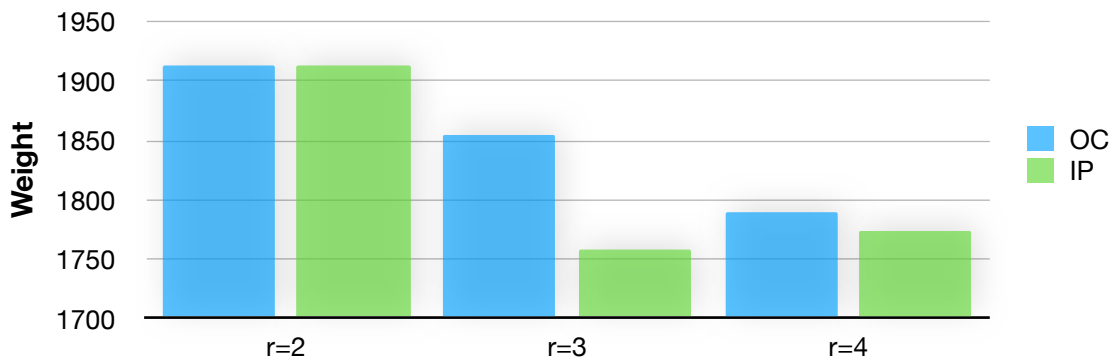
$$u_n \leq u_{\max} = 0.02 \text{ m} \quad (2.27c)$$

$$10^{-5} \leq a_e \leq 1 \quad (2.27d)$$

Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης, καθώς και τα αποτελέσματα της ελαστικής ανάλυσης του τελικού φορέα για μία οριζόντια δράση $P_x = 1000 \text{ kN}$, ενώ στο παρακάτω γράφημα γίνεται η σύγκριση του τελικού βάρους της κατασκευής για το εκάστοτε πρόβλημα.

Πίνακας 2.2: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης μεγέθους διατομών και ελαστικής ανάλυσης

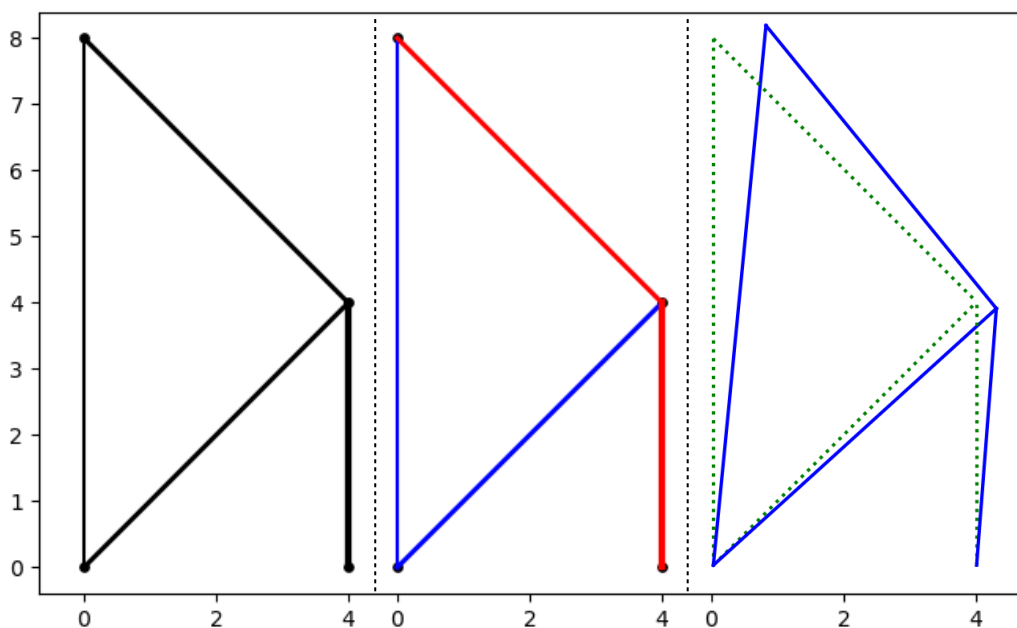
Χωριό σχεδιασμού	Optimality Criteria (O-C)			Interior Point algorithm (I-P)		
	W_{tot} (kg)	σ_{\min} (MPa)	σ_{\max} (MPa)	W_{tot} (kg)	σ_{\min} (MPa)	σ_{\max} (MPa)
$r_{\min} = 2\text{m}$	1913.9	-131.249	131.252	1913.9	-131.249	131.252
$r_{\min} = 3\text{m}$	1854.56	-133.367	133.338	1757.73	-137.099	137.071
$r_{\min} = 4\text{m}$	1789.00	-135.763	135.882	1774.76	-136.301	136.306



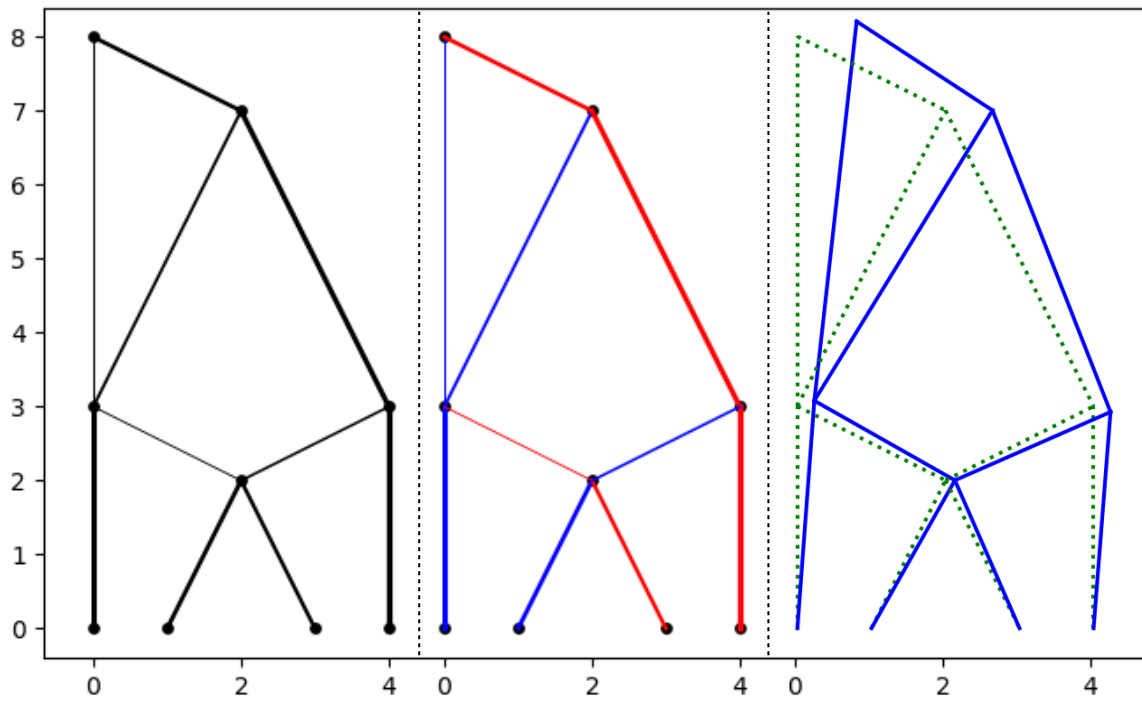
Σχήμα 2.49: Γράφημα απαίτησης συνολικού βάρους υπό δεδομένους περιορισμούς

Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι για έναν μικρό αριθμό στοιχείων στο αρχικό χωρίο σχεδιασμού, οι δύο μέθοδοι επιστρέφουν το ίδιο αποτέλεσμα, ενώ η σταδιακή αύξηση των στοιχείων στην χρήση του optimality criteria, έχει ως αποτέλεσμα την μείωση του απαιτούμενου βάρους για την ικανοποίηση των περιορισμών που ορίστηκαν στο πρόβλημα. Βέβαια, όπως παρατηρείται, δεν συμβαίνει το ίδιο και στην χρήση του αλγορίθμου εσωτερικού σημείου, όπου για μεγάλο αριθμό στοιχείων στο αρχικό χωρίο δεν επιστρέφει απαραίτητα μικρότερο βάρος. Βέβαια η τελική απόφαση που καλείται να πάρει ο μηχανικός εξαρτάται από πολλές παραμέτρους, όπως η δυσκολία κατασκευής, η συνολική απόκριση του φορέα, κ.α.

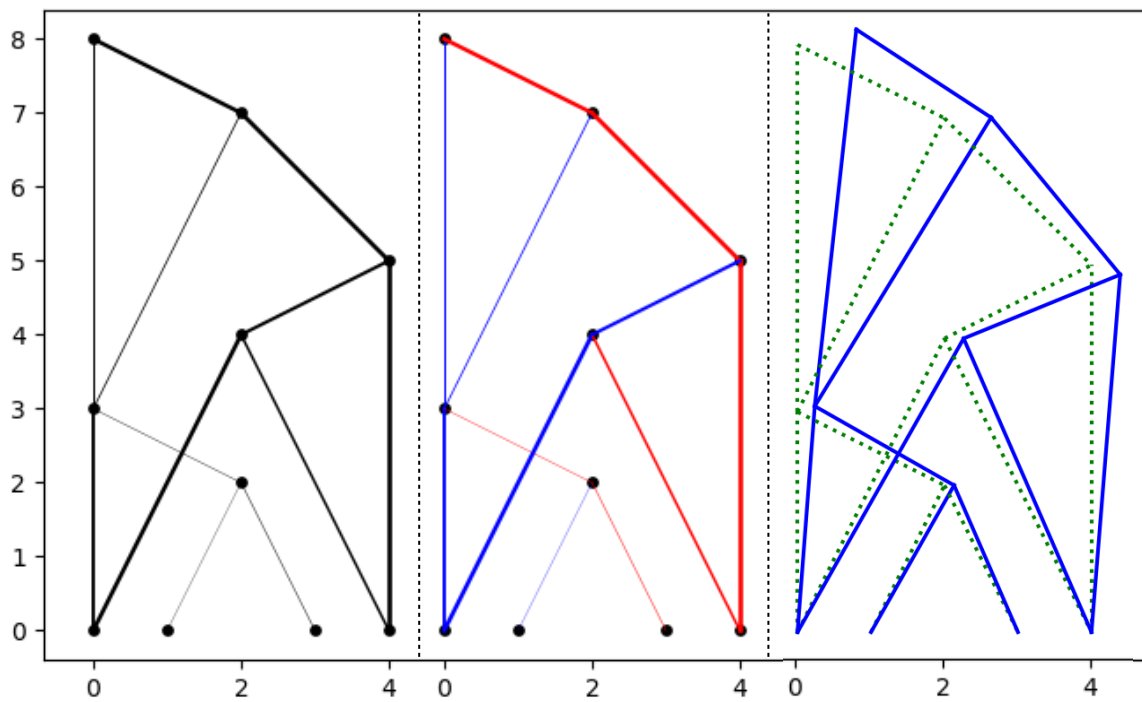
Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η τελική γεωμετρία που προκύπτει, όπου το πάχος της γραμμής συμβαδίζει με το απαιτούμενο εμβαδό της διατομής. Επίσης, παρουσιάζονται τα εφελκόμενα (μπλε χρώμα) και τα θλιβόμενα (κόκκινο χρώμα) μέλη της κατασκευής, καθώς και η παραμορφωμένη εικόνα.



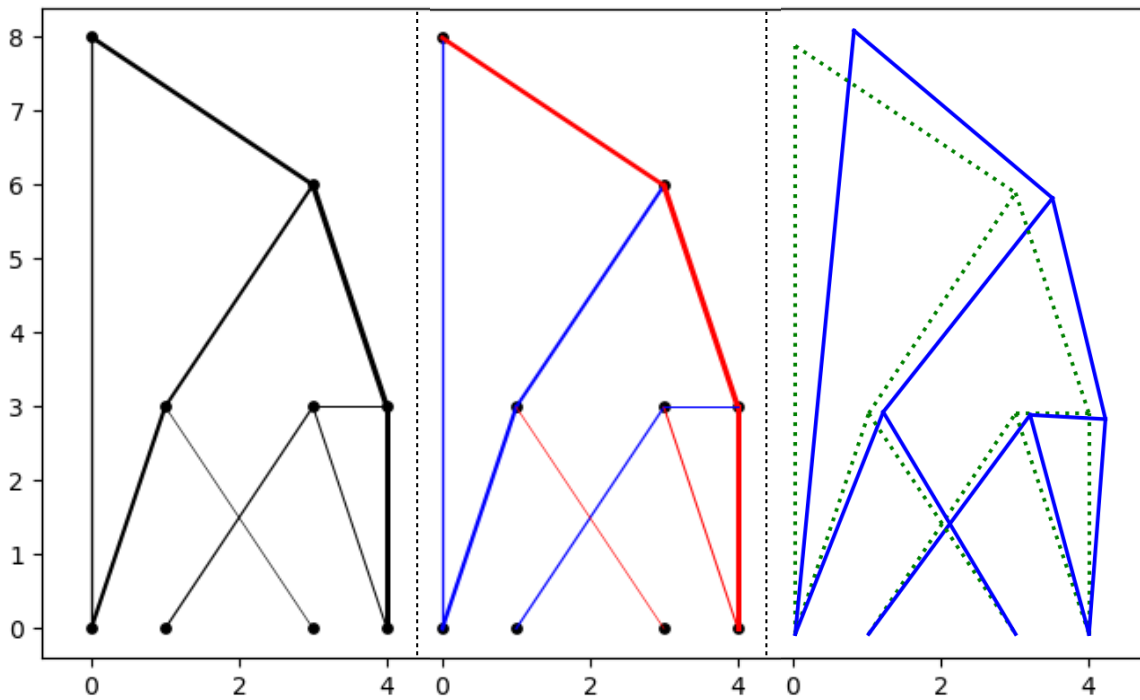
Σχήμα 2.50: Αποτελέσματα ανάλυσης για $r_0 = 2m$ (O-C & I-P)



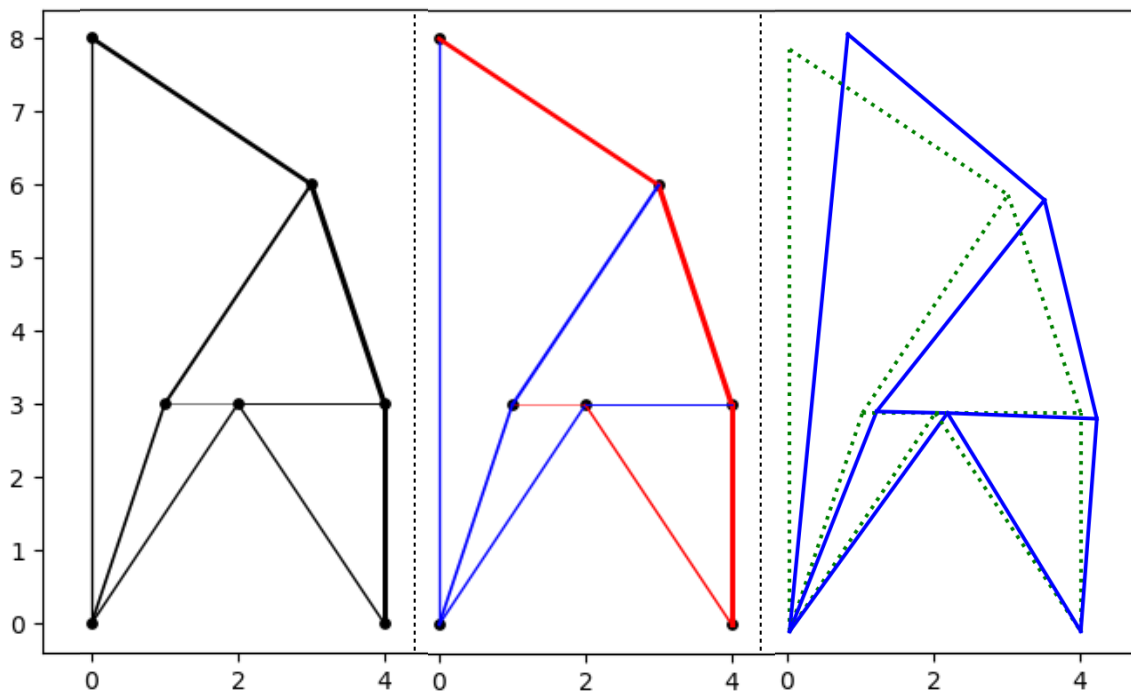
Σχήμα 2.51: Αποτελέσματα ανάλυσης για $r_0 = 3m$ (O-C)



Σχήμα 2.52: Αποτελέσματα ανάλυσης για $r_0 = 3m$ (I-P)



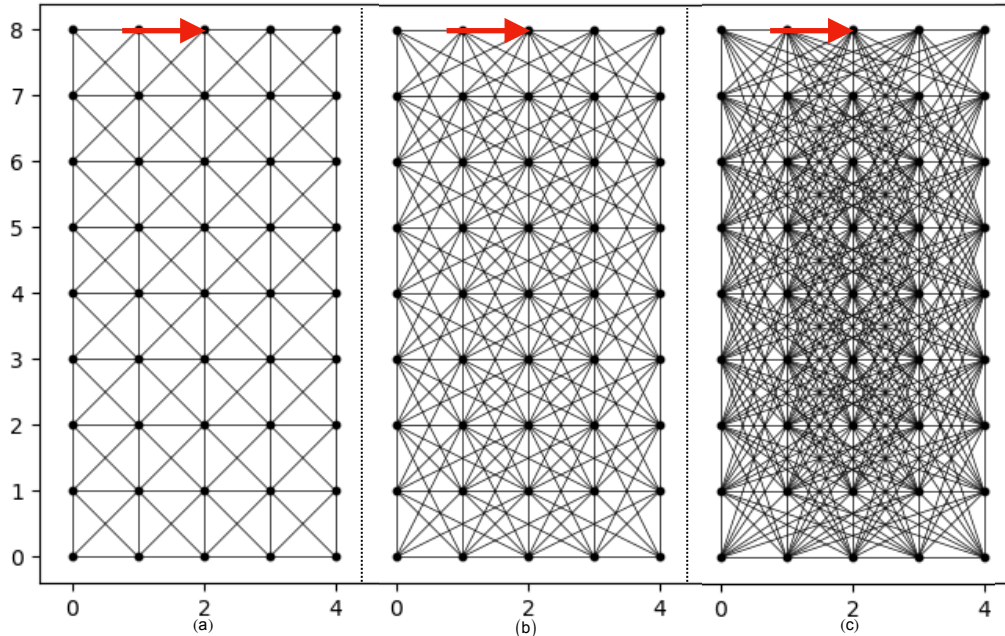
Σχήμα 2.53: Αποτελέσματα ανάλυσης για $r_0 = 4m$ (O-C)



Σχήμα 2.54: Αποτελέσματα ανάλυσης για $r_0 = 4m$ (I-P)

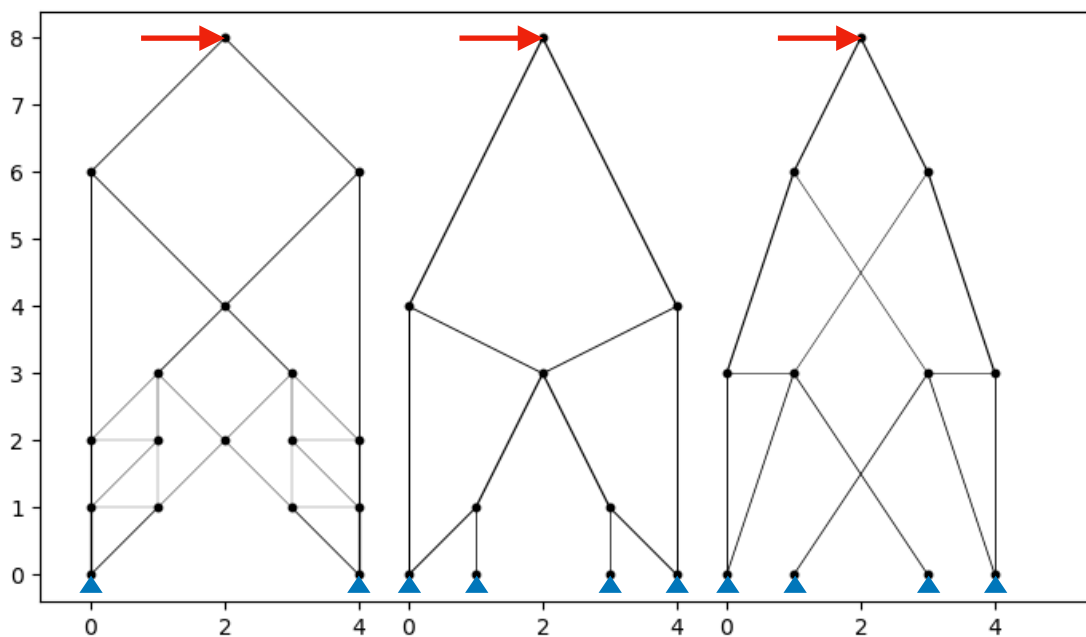
2.4.5 Παράδειγμα εφαρμογής προβόλου Νο2

Στην παρούσα ενότητα, επαναλαμβάνεται ακριβώς το ίδιο παράδειγμα με το προηγούμενο, αλλάζοντας την θέση εφαρμογής του φορτίου, στο κέντρο του προβόλου.

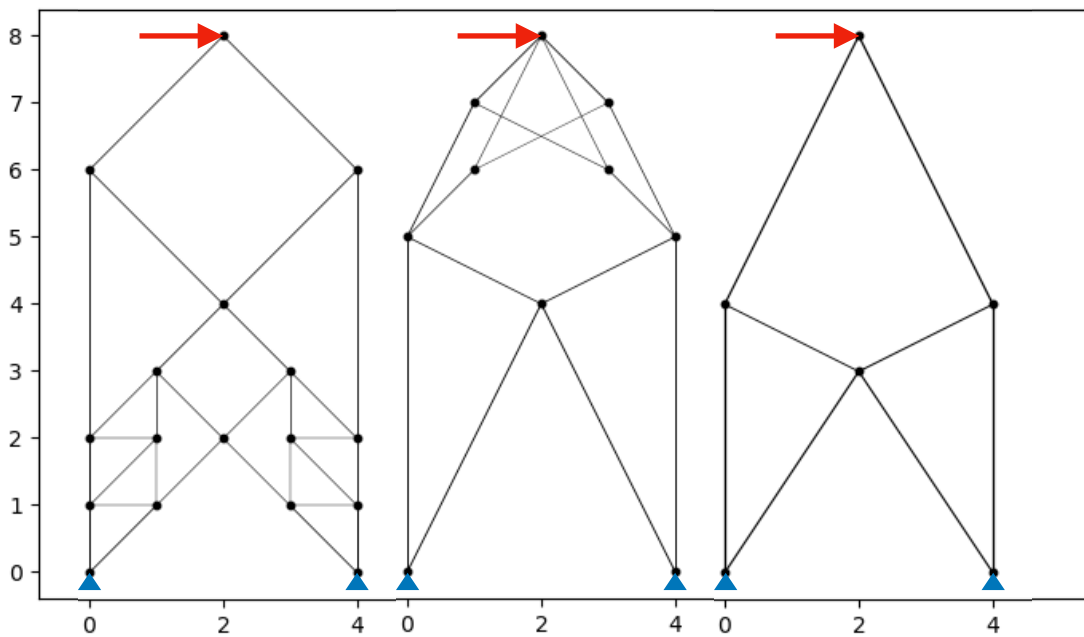


Σχήμα 2.55: Αρχικό χωρίο σχεδιασμού για μέγιστο μήκος στοιχείων 2m (a), 3m (b) και 4m (c)

Επαναλαμβάνοντας λοιπόν ακριβώς την ίδια διαδικασία, για ακριβώς τις ίδιες συνθήκες και παραδοχές, παρουσιάζονται αρχικά τα σχηματικά αποτελέσματα της βελτιστοποίησης τοπολογίας.



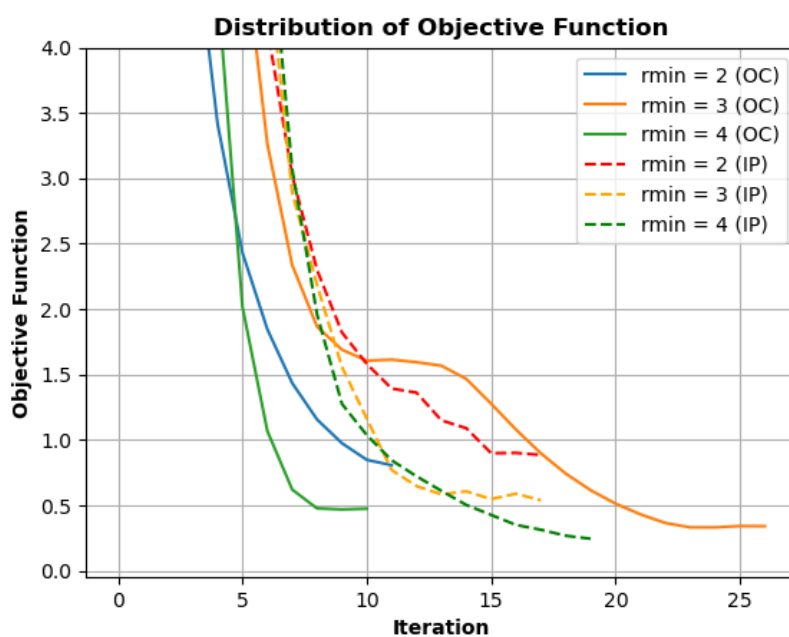
Σχήμα 2.56: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτύματος (O-C)



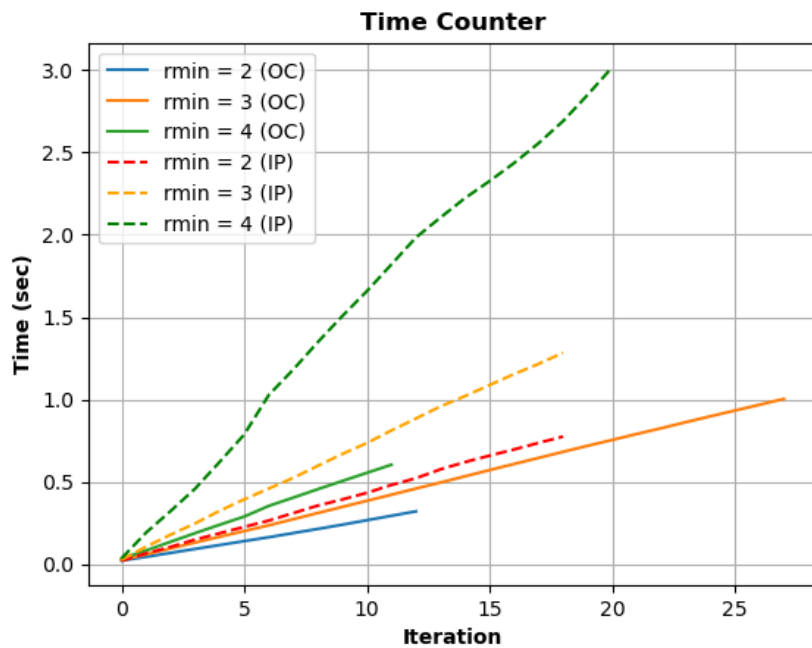
Σχήμα 2.57: Βελτιστοποίησης τοπολογίας δικτύωματος (I-P)

Στην συνέχεια παρατίθενται η πρόοδος των αντικειμενικών συναρτήσεων σε κάθε βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας καθώς και ο απαιτούμενος χρόνος υλοποίησης της εκάστοτε διαδικασίας.

Όπως προκύπτει από τα παρακάτω διαγράμματα, η επίλυση της τοπολογίας με τους αλγόριθμους εσωτερικού σημείου (I-P), έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του υπολογιστικού κόστους της ανάλυσης, καθώς αυξάνεται κατά πολύ ο χρόνος εκτέλεσης της διαδικασίας. Επιπλέον, δεν παρατηρείται αξιοσημείωτη διαφορά στην τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ανάμεσα μεταξύ των δύο μεθόδων.

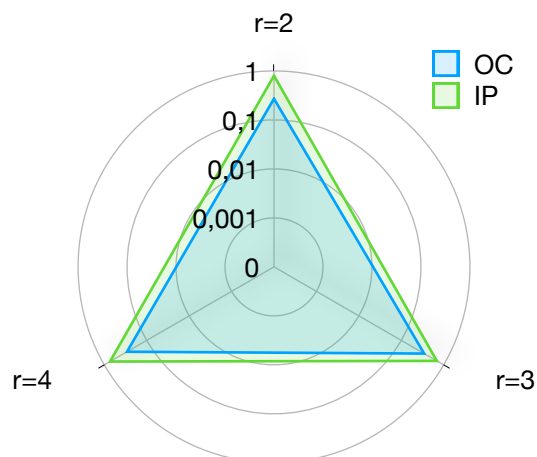


Σχήμα 2.58: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής



Σχήμα 2.59: Διάγραμμα της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας του κώδικα

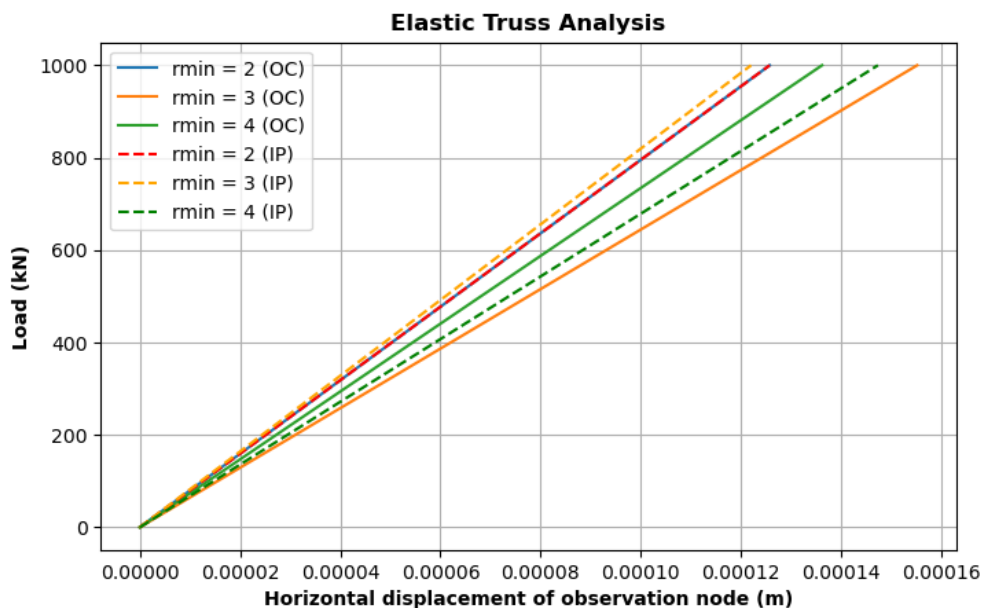
Στο παρακάτω γράφημα, παρατηρείται η απόδοση της κάθε μεθόδου σε σχέση με την τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με τον απαιτούμενο χρόνο υλοποίησης της διαδικασίας.



Σχήμα 2.60: Διάγραμμα απόδοσης των δύο μεθόδων

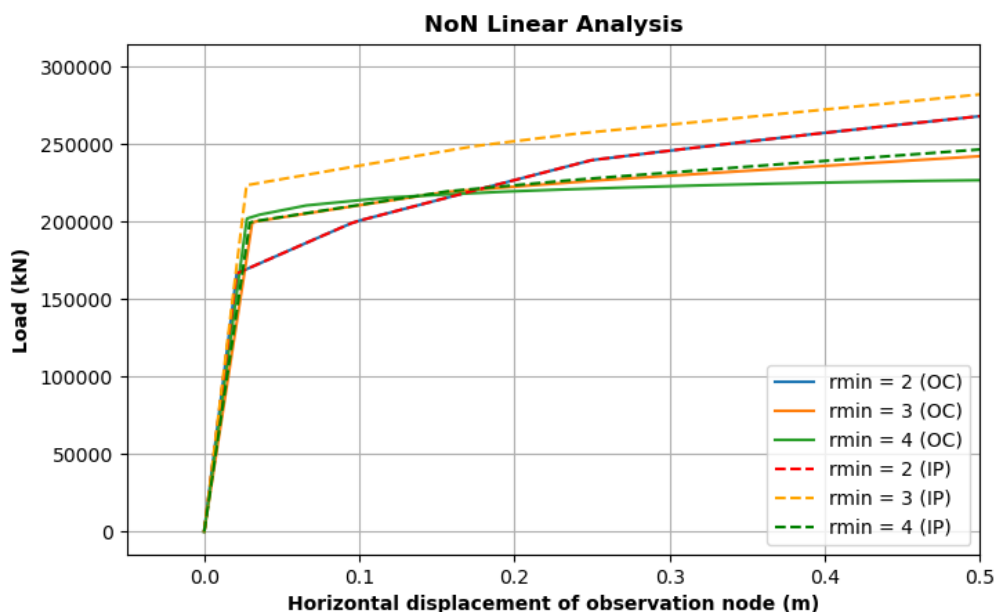
Επιπλέον, γίνεται μια ελαστική ανάλυση, για την τελική βέλτιστη τοπολογία της κατασκευής, όπου μέλη με περιοχές κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο, που θεωρούνται αναποτελεσματικά, έχουν αφαιρεθεί από την δομή, ενώ παράλληλα έχει γίνει η συγχώνευση των στοιχείων. Όπως γίνεται αντιληπτό από το παρακάτω διάγραμμα, η βέλτιστη τοπολογία με την χρήση αλγορίθμων εσωτερικού σημείου, έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία μιας δομής με μεγαλύτερη δυσκαμψία, για κάθε αρχικό χωρίο σχεδιασμού. Επιπλέον, παρατηρείται ότι για μικρό αριθμό στοιχείων η διαφορά στην συνολική δυσκαμψία είναι μικρή, ενώ για μεγαλύτερο αριθμό στοιχείων η διαφορά αυτή

είναι μεγαλύτερη. Εξαιρέση αποτελεί η περίπτωση για μέγιστο μήκος στοιχείου τα δύο μέτρα (2m), όπου με την χρήση του Optimality Criteria, η τελική γεωμετρία έχει την μεγαλύτερη δυσκαμψία, από όλες τις περιπτώσεις.



Σχήμα 2.61: Γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας

Παρακάτω, γίνεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων για μια μη γραμμική ανάλυση, λαμβάνοντας υπόψιν τόσο την μη γραμμικότητα γεωμετρίας, όσο και την μη γραμμικότητα του υλικού, όπως περιγράφηκε και στις προηγούμενες ενότητες. Τα δεδομένα τα οποία ορίζονται είναι ακριβώς τα ίδια όπως με την προηγούμενη μέθοδο, δηλαδή ως υλικό ορίστηκε χάλυβας με μέτρο ελαστικότητας $E = 210 \text{ GPa}$, τάση διαρροής $f_y = 250 \text{ MPa}$ και μέτρο κράτυνσης $b = 0.01$.



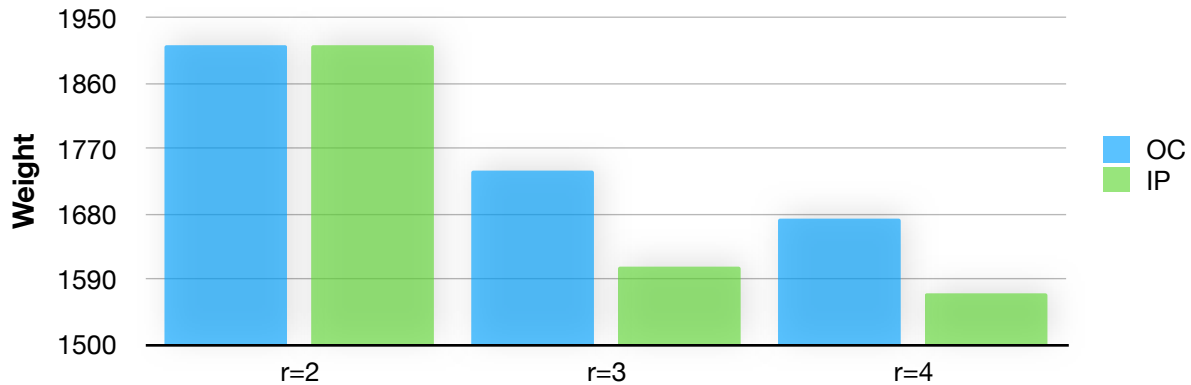
Σχήμα 2.62: Γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας

Τέλος, πραγματοποιείται μία βελτιστοποίηση του μεγέθους των διατομών για την τελική τοπολογία που δημιουργικέ παραπάνω, ακριβώς με τα ίδια δεδομένα με την ενότητα (§2.4.4).

Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποιήσεως, καθώς και τα αποτελέσματα της ελαστικής ανάλυσης του τελικού φορέα για μία οριζόντια δράση $P_x = 1000 \text{ kN}$, ενώ στο παρακάτω γράφημα γίνεται η σύγκριση του τελικού βάρους της κατασκευής για το εκάστοτε πρόβλημα.

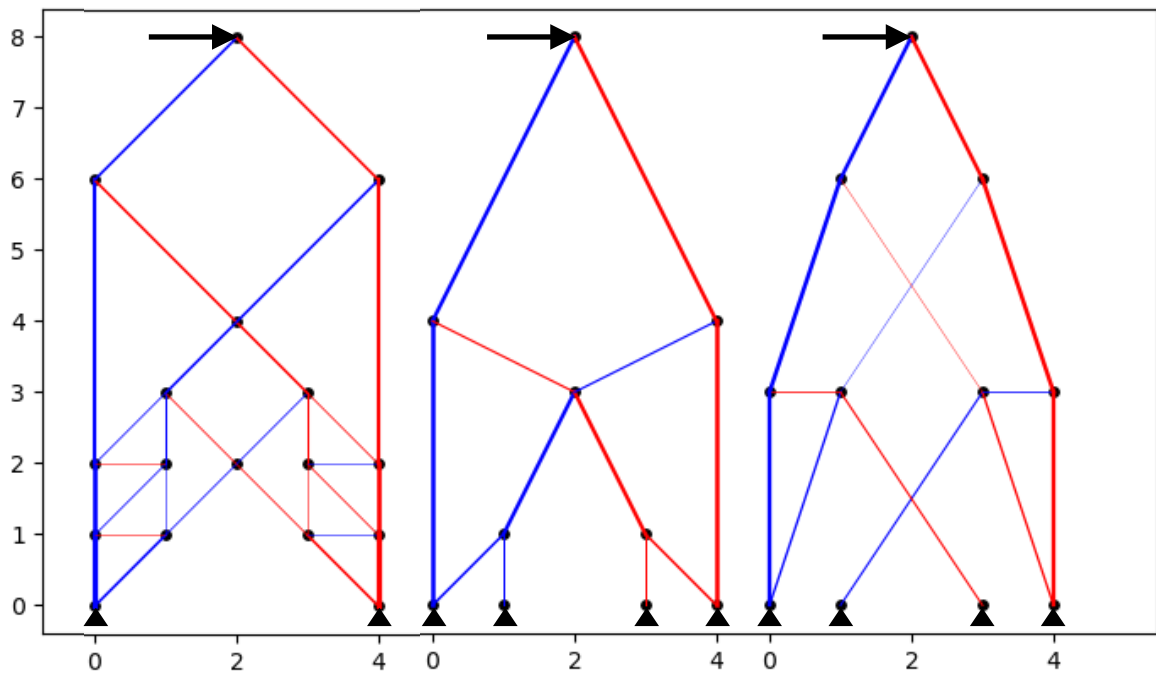
Πίνακας 2.3: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης μεγέθους διατομών και ελαστικής ανάλυσης Νο2

Χωριό σχεδιασμού	Optimality Criteria (O-C)			Interior Point algorithm (I-P)		
	$W_{tot} \text{ (kg)}$	$\sigma_{min} \text{ (MPa)}$	$\sigma_{max} \text{ (MPa)}$	$W_{tot} \text{ (kg)}$	$\sigma_{min} \text{ (MPa)}$	$\sigma_{max} \text{ (MPa)}$
$r_{min} = 2\text{m}$	1913.9	-131.277	131.280	1913.9	-131.249	131.252
$r_{min} = 3\text{m}$	1738.68	-137.710	137.707	1608.21	-143.260	143.195
$r_{min} = 4\text{m}$	1673.84	-140.385	140.374	1571.87	-144.828	144.828

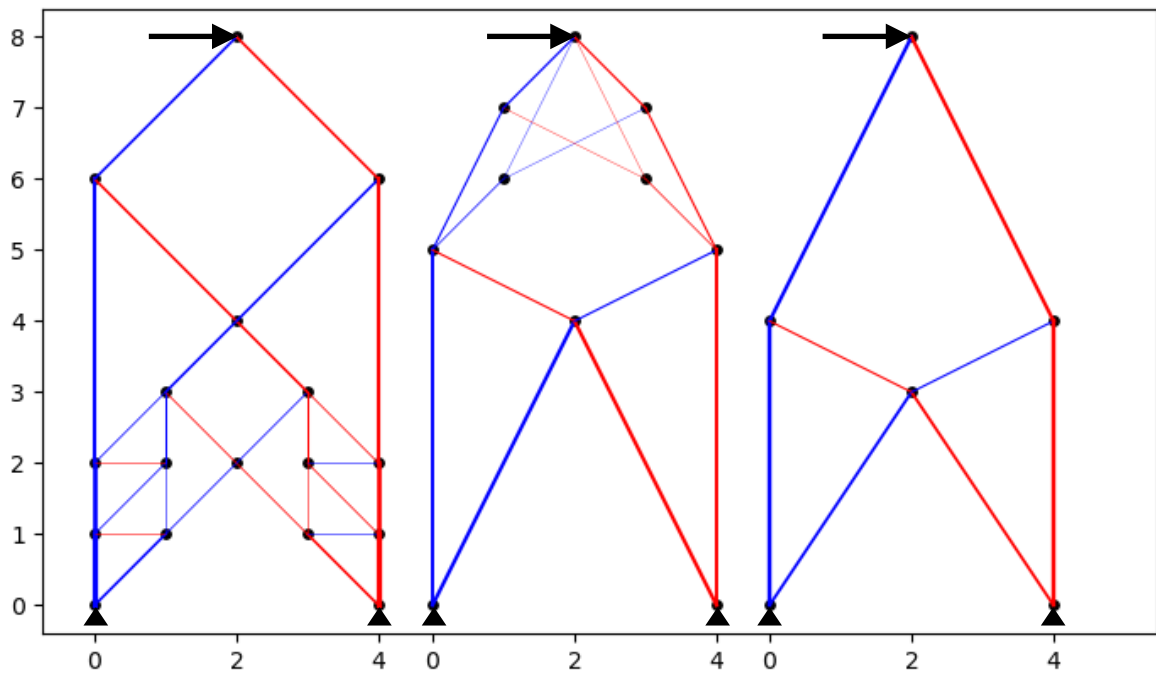


Σχήμα 2.63: Γράφημα απαίτησης συνολικού βάρους υπό δεδομένους περιορισμούς

Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η τελική γεωμετρία που προκύπτει, όπου το πάχος της γραμμής συμβαδίζει με το απαιτούμενο εμβαδό της διατομής, τα εφελκόμενα στοιχεία εμφανίζονται με μπλε χρώμα, ενώ τα θλιβόμενα μέλη της κατασκευής με κόκκινο χρώμα.



Σχήμα 2.64: Αποτελέσματα ανάλυσης O-C



Σχήμα 2.65: Αποτελέσματα ανάλυσης I-P

3. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΑΙΣΙΑΚΟΥ ΦΟΡΕΑ

Η διαδικασία βελτιστοποίησης τοπολογίας ενός πλαισιακού φορέα ορίζεται ακριβώς όπως πραγματοποιείται η ανάλυση ενός δικτυωματικού φορέα, καθώς αρχικά καθορίζεται το χωρίο σχεδιασμού, οι συνοριακές συνθήκες και οι συνθήκες φόρτισης. Στην συνέχεια υπολογίζονται οι μετακινήσεις στους κόμβους, μέσω των εξισώσεων ισορροπίας και προσδιορίζεται το καινούργιο διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού του κάθε στοιχείου.

Σε αντίθεση με τους δικτυωματικούς φορείς, όπου μεταφέρουν τα φορτία μόνο αξονικά, και επομένως εάν δεν ληφθεί υπόψη ο λυγισμός των στοιχείων, μια μεμονωμένη μεταβλητή σχεδιασμού (εμβαδόν διατομής των μελών) είναι επαρκής για να εκφράσει τη δομική απόδοση, οι πλαισιωτές κατασκευές είναι ικανές να μεταφέρουν φορτία με μηχανισμούς όπως αξονικά και διαμηθικά φορτία αλλά και μέσω της καμπτικής ροπής, με αποτέλεσμα η ροπή αδράνειας έχει σημαντικό ρόλο στον ποσοτικό προσδιορισμό της δομικής απόδοσης και πρέπει να ενσωματωθεί στη διαδικασία σχεδιασμού. Συνεπώς, η μεταβλητή σχεδιασμού δεν μπορεί να βγει κοινός παράγοντας από το μητρώο ακαμψίας έτσι ώστε να υπολογιστεί η παράγωγος. Προκειμένου το μητρώο ακαμψίας να γίνει διαφορίσιμο, πρέπει η ροπή αδράνειας να εκφραστεί συνάρτηση του εμβαδού.

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο ενότητα οι Σωτηρόπουλος και Λαγαρός πρότειναν μια η σχέση μεταξύ του εμβαδού διατομής και της ροπής αδράνειας. Στην παρούσα μελέτη όμως γίνεται η χρήση διατομών με απλή γεωμετρία (τετραγωνικές και κυκλικές διατομές).

$$I = \begin{cases} \pi A^2/4, & \text{για κυκλικές διατομές} \\ A^2/12, & \text{για τετραγωνικές διατομές} \end{cases} \quad (3.1)$$

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω εξίσωση που εκφράζει τη ροπή αδράνειας συναρτήσει του εμβαδού, το πρόβλημα λύνεται ακριβώς όπως η βελτιστοποίηση τοπολογίας ενός δικτυωματικού φορέα, με την μοναδική διαφορά να έγκειται στην κατάστρωση του μητρώου στιβαρότητας του εκάστοτε στοιχείου και κατ' επέκταση του συνολικού μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής.

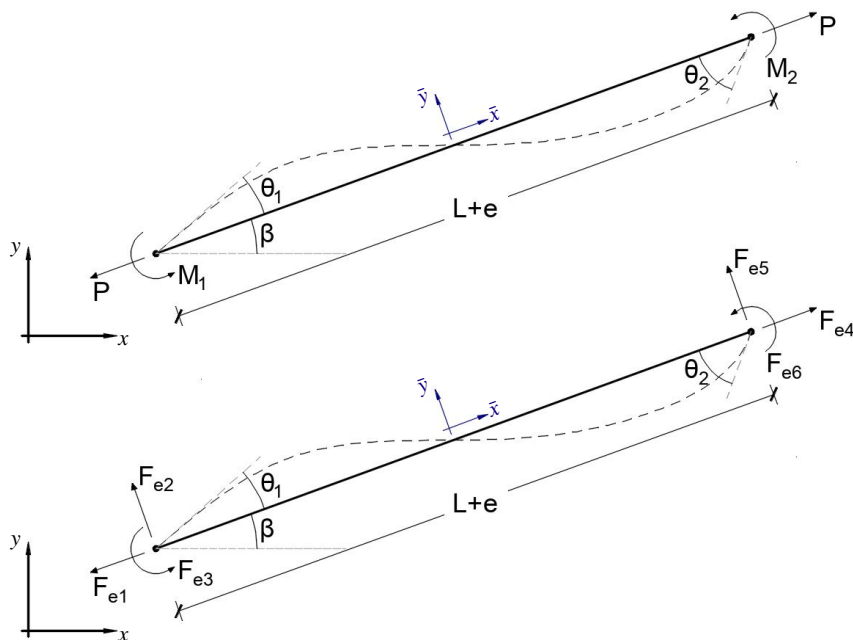
Στις παρακάτω ενότητες περιγράφονται οι εξισώσεις ισορροπίας για πλαισιωτούς φορείς και στην συνέχεια παρουσιάζονται ακριβώς οι ίδιες εφαρμογές που εφαρμόστηκαν στους δικτυωματικούς φορείς.

3.1 Εξισώσεις ισοροπίας

Οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου δοκού σταθερής διατομής, εκτός των μετατοπίσεων, περιλαμβάνουν επίσης και περιστροφές περί τους κόμβους στα άκρα. Οι πρόσθετοι αυτοί βαθμοί ελευθερίας επιτρέπουν την παρουσία καμπτικών ροπών, με αποτέλεσμα το διάνυσμα μετατόπισης στο βασικό σύστημα να αποτελείται από την αξονική επιμήκυνση e και τις δύο περιστροφές κάμψης θ_1, θ_2 και το διάνυσμα βασικής δύναμης, που συμβολίζεται με S , αποτελείται από την αξονική δύναμη P και δύο ροπές κάμψης M_1, M_2 .

$$S = [P \ M_1 \ M_2]^T \quad (3.2a)$$

$$v = [e \ \theta_1 \ \theta_2]^T \quad (3.2b)$$



Σχήμα 3.1: Στοιχείο δοκού με τυχαίο προσανατολισμό στο επίπεδο x-y

Προκειμένου να εκφραστούν οι διάφορες ποσότητες σε κάθε σύστημα, απαιτείται η εφαρμογή μίας σχέσης τόσο μεταξύ των δυνάμεων όσο και των μετατοπίσεων στο βασικό και το τοπικό καρτεσιανό σύστημα, ως εξής:

$$\begin{bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \\ F_{e3} \\ F_{e4} \\ F_{e5} \\ F_{e6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1/L \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & -1/L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \Rightarrow P_e = b_e S \quad (3.3a)$$

$$\begin{bmatrix} e \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & 1/L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \Rightarrow v = b_e^T u_e \quad (3.3b)$$

Σημειώστε ότι οι αντίθετοι μετασχηματισμοί, δηλαδή οι δυνάμεις από το P_e στο S και οι μετατοπίσεις από το v στο P_e δεν είναι διαθέσιμοι. Μόλις γίνουν γνωστές οι ακραίες περιστροφές θ_1, θ_2 , οι ροπές του στοιχείου λαμβάνονται ως:

$$\begin{bmatrix} P \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 4EI/L & 2EI/L \\ 0 & 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow S = K_N v \quad (3.4)$$

Έτσι, ο πίνακας ακαμψίας για το επίπεδο πρόβλημα λαμβάνεται ως:

$$K_e = b_e K_N b_e^T \quad (3.5)$$

Στην περίπτωση όμως όπου χρειάζεται να πραγματοποιηθεί η ανάλυση ενός πλαισιωτού φορέα, όπου τα στοιχεία έχουν διαφορετικό προσανατολισμό, απαιτείται ο μετασχηματισμός των εξισώσεων ισορροπίας με βάση ένα γενικευμένο σύστημα ως προς το οποίο θα αναφέρονται όλοι οι κόμβοι και όλα τα στοιχεία. Ο μετασχηματισμός μεταξύ του τοπικού και του παγκόσμιου συστήματος συντεταγμένων προκύπτει χρησιμοποιώντας τον πίνακα μετασχηματισμού, T .

$$T = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

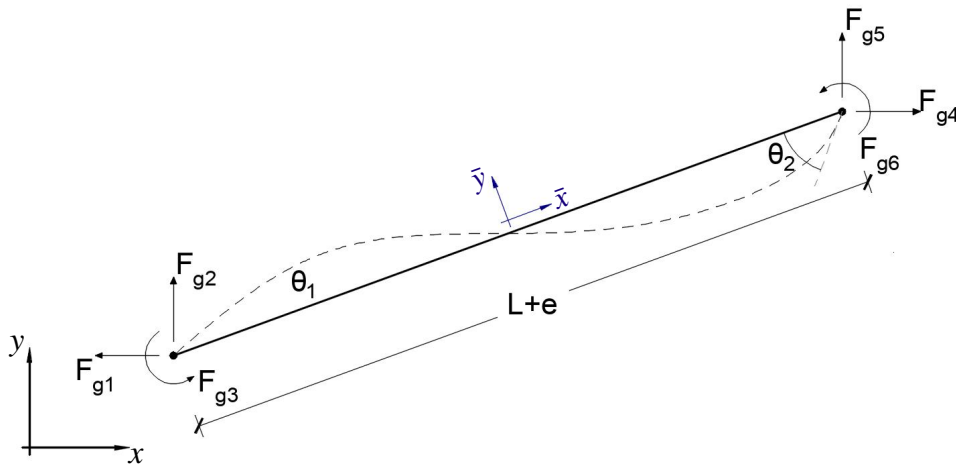
Για το δισδιάστατο πρόβλημα του σχήματος 3.2, η δύναμη και τα διανύσματα μετατόπισης στο τοπικό καρτεσιανό σύστημα (P_e, u_e) καθώς και στο καθολικό σύστημα (P_g, u_g), το οποίο είναι κοινό για όλα τα στοιχεία της δομής παράλληλα με τους καθολικούς άξονες x και y , ορίζονται ως εξής:

$$P_e = [F_{e1} F_{e2} F_{e3} F_{e4} F_{e5} F_{e6}]^T \quad (3.7a)$$

$$u_e = [u_{e1} u_{e2} u_{e3} u_{e4} u_{e5} u_{e6}]^T \quad (3.7b)$$

$$P_g = [F_{g1} F_{g2} F_{g3} F_{g4} F_{g5} F_{g6}]^T \quad (3.7c)$$

$$u_g = [u_{g1} u_{g2} u_{g3} u_{g4} u_{g5} u_{g6}]^T \quad (3.7d)$$



Σχήμα 3.2: Μετασχηματισμός στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων

Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα η εξαγωγή της σχέσης μεταξύ καρτεσιανού και βασικών δυνάμεων είναι:

$$\begin{bmatrix} F_{g1} \\ F_{g2} \\ F_{g3} \\ F_{g4} \\ F_{g5} \\ F_{g6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta/L & -\sin \theta/L \\ -\sin \theta & \cos \theta/L & \cos \theta/L \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta/L & \sin \theta/L \\ \sin \theta & \cos \theta/L & -\cos \theta/L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \Rightarrow P_g = b S \quad (3.8a)$$

Κατ' αντιστοιχία η σχέση των μετατοπίσεων είναι:

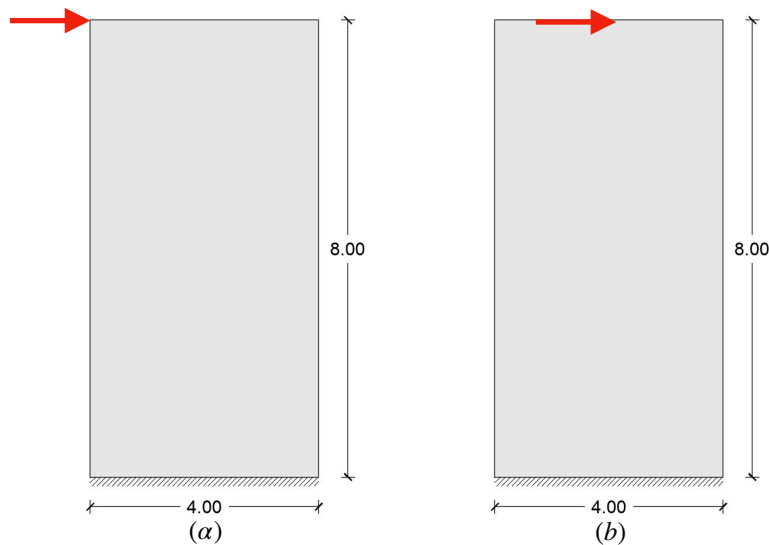
$$v = b^T u_e \quad (3.8b)$$

Έτσι, το μητρώο ακαμψίας ενός στοιχείου στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων προκύπτει:

$$K_{gl.}^{el.} = b K_N b^T \quad (3.9)$$

3.2 Παραδείγματα εφαρμογής

Στην παρούσα ενότητα διεξάγεται ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών προκειμένου να γίνει η σύγκριση των αποτελεσμάτων ανάλογα με τις παραμέτρους που ορίζει ο χρήστης στο πρόγραμμα. Πρόκειται για το ίδιο χωρίο σχεδιασμού που χρησιμοποιήθηκε στους δικτυωματικούς φορείς της προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή για έναν φορέα πρόβολο με πακτώσεις στη βάση του ο οποίος αναλύεται για δύο (2) περιπτώσεις φόρτισης, μία οριζόντια φόρτιση στο ελεύθερο άκρο (σχ. 3.3a) και μία οριζόντια φόρτιση στο μέσο (σχ. 3.3b).

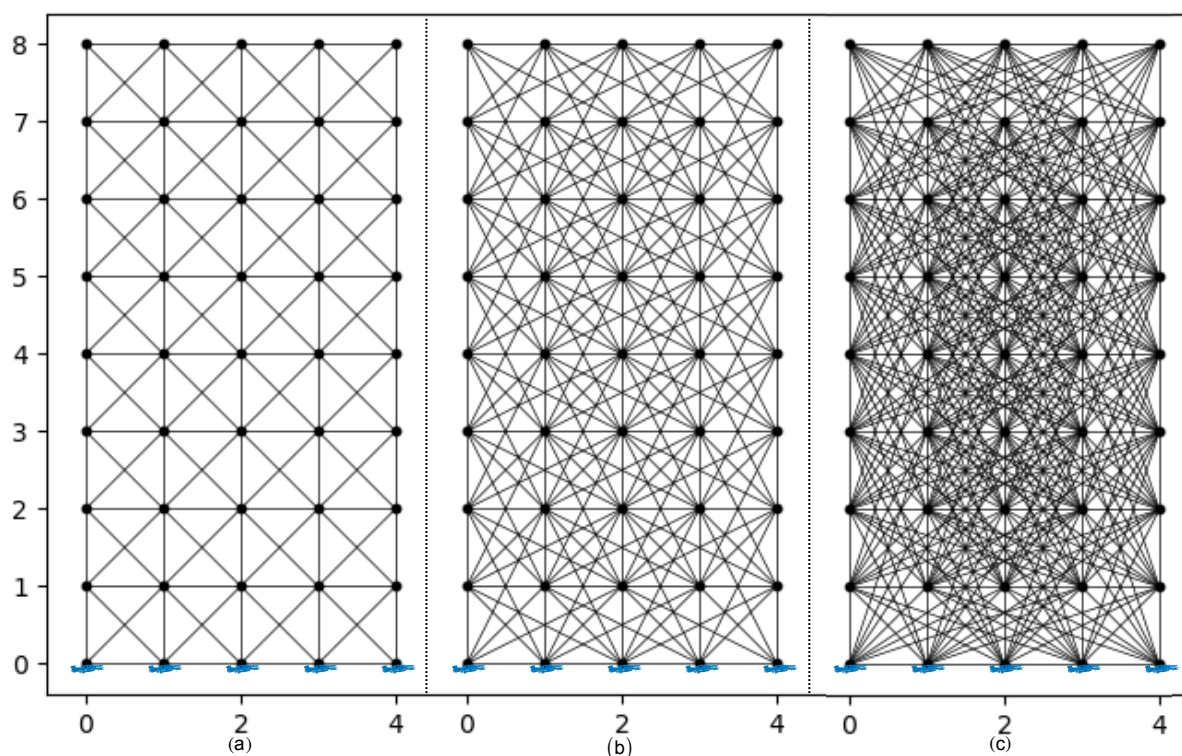


Σχήμα 3.3: Χώρος σχεδίασης, συνθήκες στήριξης και φόρτισης φορέα

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, εξετάζονται τρία (3) διαφορετικά χωρία με μέγιστο μήκος στοιχείων τα δύο μέτρα (σχ. 3.4a), τα τρία μέτρα (σχ. 3.4b) και τα τέσσερα μέτρα (σχ. 3.4c), στα οποία η γίνεται η εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας σύμφωνα με τις δύο (2) μεθόδους που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες (optimality criteria - OC & Interior-Point method - IP). Για όλες τις περιπτώσεις, η απόσταση των κόμβων και στις δύο διευθύνσεις είναι ένα μέτρο, διάταξη κόμβων 5 x 9.

Επιπλέον, όπως περιγράφεται παραπάνω, στους πλαισιωτούς η μεταβλητή σχεδιασμού δεν μπορεί να βγει κοινός παράγοντας από το μητρώο ακαμψίας έτσι ώστε να υπολογιστεί η παράγωγος, καθώς τα στοιχεία δοκού χαρακτηρίζονται από την ροπή αδράνειας και το εμβαδό. Προκειμένου το μητρώο ακαμψίας να γίνει διαφορίσιμο, πρέπει η ροπή αδράνειας να εκφραστεί συναρτήσει του εμβαδού. Για τον σκοπό αυτό επιλέχθηκε η χρήση τετραγωνικής διατομής όπου:

$$I = A^2/12 \quad (3.10)$$



Σχήμα 3.4: Αρχικό χωρίο σχεδιασμού για μέγιστο μήκος στοιχείων 2m (a), 3m (b) και 4m (c)

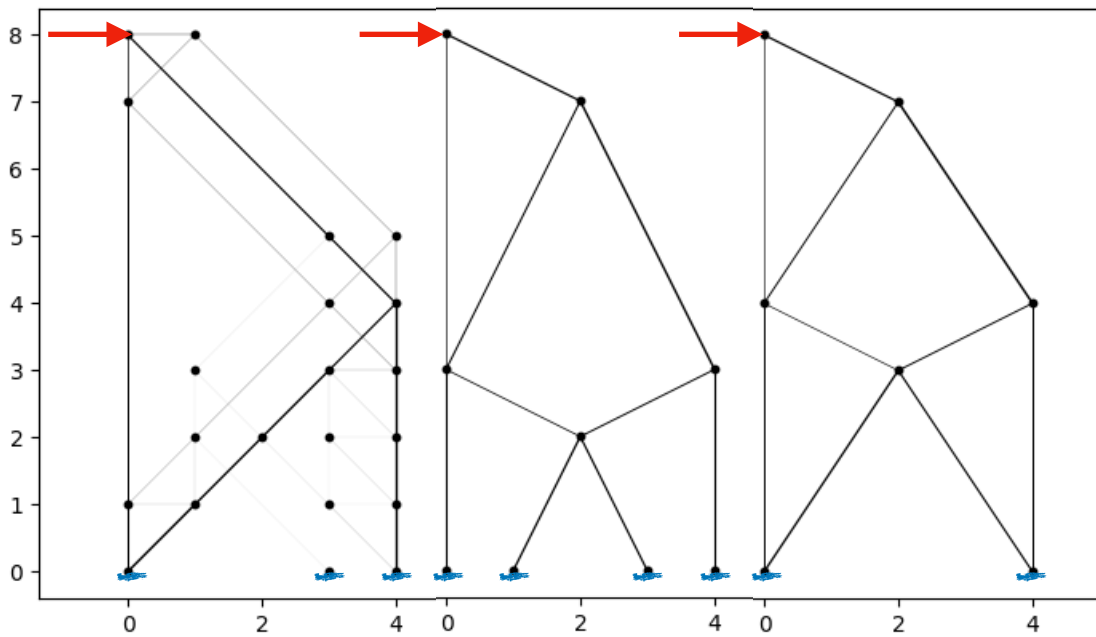
Για την σύγκριση των αποτελεσμάτων, γίνεται η υπόθεση εύρεσης της βέλτιστης τοπολογίας για την επίτευξη ενός τελικού χωρίου με ένα συγκεκριμένο όγκο. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι αρχικοί όγκοι των χωρίων (V_0), σύμφωνα με την υπόθεση ότι το εμβαδό διατομής του κάθε στοιχείου είναι $a_e = 1 \text{ m}^2$. Προκυμένου να μπορεί να γίνει η επιθυμητή σύγκριση, πρέπει ο τελικός όγκος της κατασκευής (V) να είναι ίδιος και για τις τρεις (3) περιπτώσεις, με αποτέλεσμα σε κάθε δοκιμή να έχουμε διαφορετικό λόγο όγκων (V_{frac}).

Πίνακας 3.1: Αρχικού και τελικοί όγκοι των χωρίων σχεδιασμού πλαισιακού φορέα

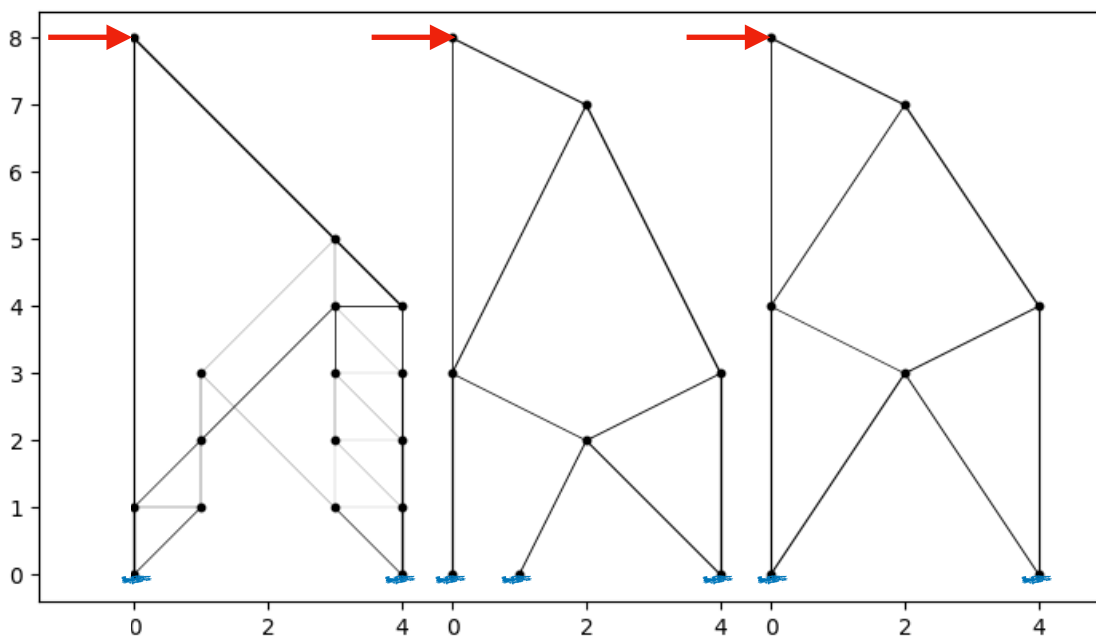
Χωρίο σχεδιασμού	Αρχικός όγκος χωρίου	Λόγος τελικού προς αρχικού όγκου (V/V_0)	Τελικός όγκος κατασκευής
	V_0	V_{frac}	V
σχ. 3.4a	166.51 m ³	0.14	23.31 m ³
σχ. 3.4b	399.06 m ³	0.058	23.14 m ³
σχ. 3.4c	882.80 m ³	0.027	23.83 m ³

3.2.1 Οριζόντια φόρτιση στο ελεύθερο άκρο

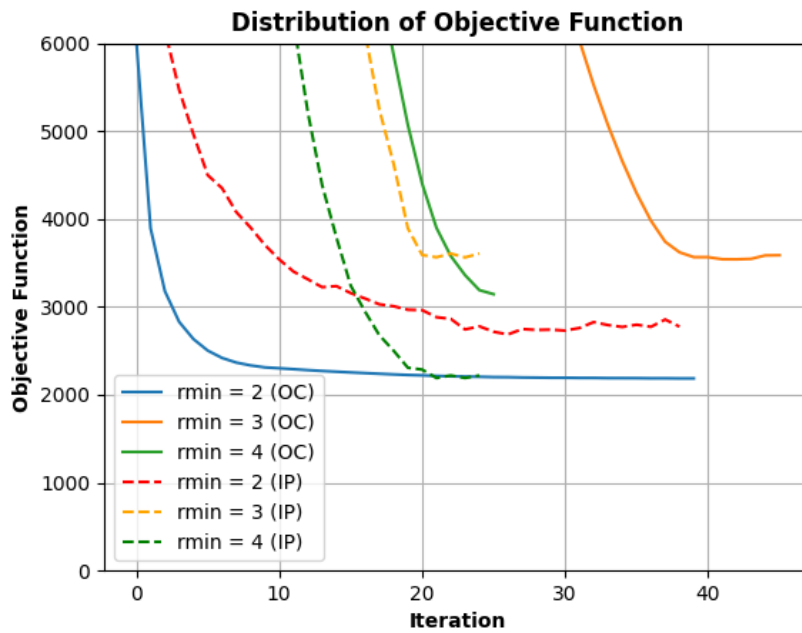
Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης τοπολογίας για μία οριζόντια φόρτιση στο ελεύθερο άκρο του προβόλου για τις τρεις (3) διαφορετικές δομές του αρχικού χωρίου σχεδιασμού, σύμφωνα με την χρήση του αλγόριθμου Optimality Criteria (O-C) και του Interior Point (I-P). Στην συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα μεταβολής της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς και ο απαιτούμενος χρόνος εκτέλεσης για την κάθε διαδικασία.



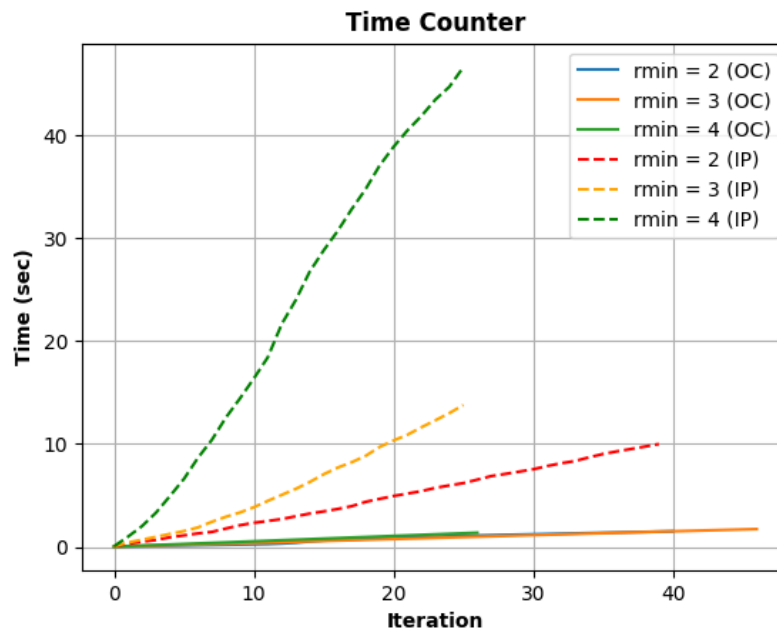
Σχήμα 3.5: Βελτιστοποίησης τοπολογίας πλαισιωτού φορέα (O-C)



Σχήμα 3.6: Βελτιστοποίησης τοπολογίας πλαισιωτού φορέα (I-P)



Σχήμα 3.7: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής πλαισιωτού φορέα

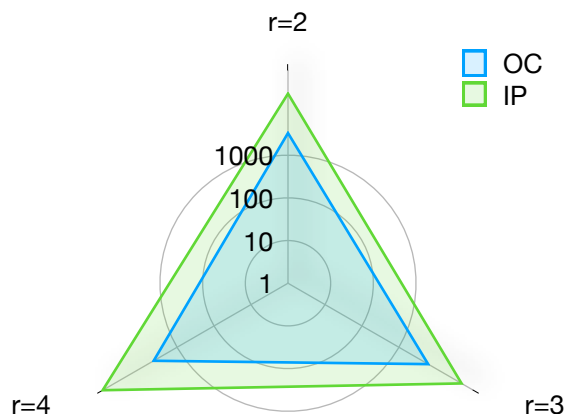


Σχήμα 3.8: Διάγραμμα της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας κώδικα

Όπως φαίνεται στα παραπάνω σχήματα, η τελική δομή στα αποτελέσματα της βελτιστοποιημένης κατασκευής είναι περίπου η ίδια και για τις δύο μεθόδους επίλυσης. Βέβαια, ο απαιτούμενος χρόνος εκτέλεσης για την επίλυση με την χρήση του αλγορίθμου εσωτερικού σημείου (I-P), είναι αισθητά μεγαλύτερος.

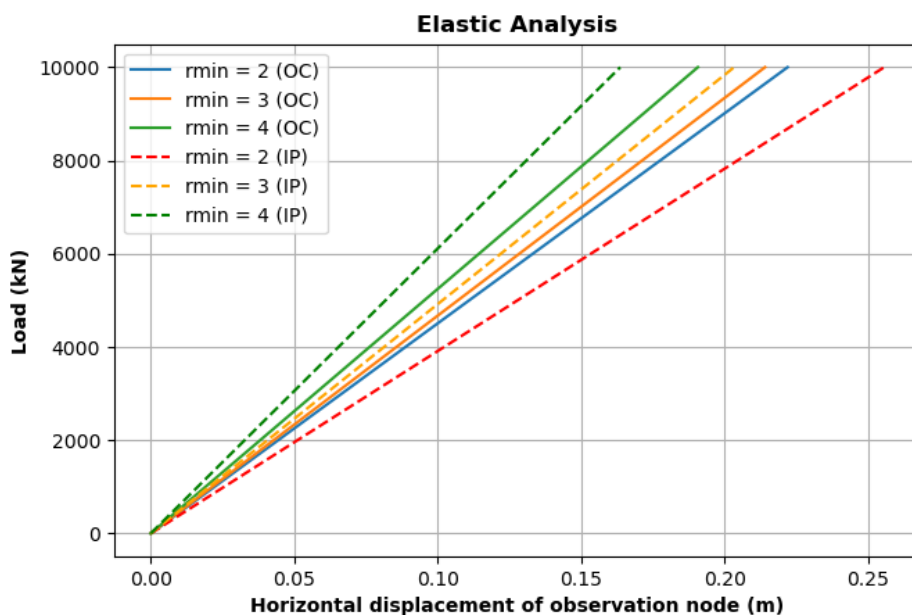
Ακόμα μία παρατήρηση έγκειται στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.7, για έναν μικρό αριθμό στοιχείων, η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης προκύπτει μέσω της χρήσης του optimality criteria και μάλιστα σε πολύ μικρότερο χρόνο. Η σταδιακή αύξηση των στοιχείων στην αρχική δομή έχει ως αποτέλεσμα η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι περίπου η ίδια και για τις

δύο μεθόδους, ενώ για έναν μεγάλο αριθμό στοιχείων, η τιμή της συνάρτησης έχει πολύ μικρότερη τιμή μέσω του αλγόριθμου εσωτερικού σημείου αλλά σε πολύ μεγαλύτερο χρόνο. Τέλος, στο παρακάτω γράφημα παρατηρείται η απόδοση της κάθε μεθόδου, όπου προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με τον απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης της διαδικασίας. Η κλίμακα του γραφήματος είναι λογαριθμική, όπου η βέλτιστη περίπτωση προκύπτει για την μικρότερη τιμή, καθώς παρέχει την μικρότερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, σε συνάρτηση με τον απαιτούμενο χρόνο.



Σχήμα 3.9: Διάγραμμα απόδοσης των δύο μεθόδων

Επιπρόσθετα, γίνεται μια ελαστική ανάλυση, για την τελική βέλτιστη τοπολογία της κατασκευής, όπου μέλη με περιοχές κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο, που θεωρούνται αναποτελεσματικά, έχουν αφαιρεθεί από την δομή, ενώ παράλληλα έχει γίνει η συγχώνευση των στοιχείων.



Σχήμα 3.10: Γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας πλαισιωτού φορέα

Τέλος, πραγματοποιείται μία βελτιστοποίηση του μεγέθους των διατομών για την τελική τοπολογία που δημιουργικέ παραπάνω. Για τις ανάγκες της συγκεκριμένης διαδικασίας, με δεδομένη την εκάστοτε γεωμετρία και τα υλικά που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν, στόχος είναι η εύρεση του ελάχιστου δυνατού βάρους της κατασκευής, ώστε να πληρούνται ορισμένοι περιορισμοί.

Στην παρούσα μελέτη, η ανάλυση για την βελτιστοποίηση του μεγέθους των διατομών πραγματοποιείται σύμφωνα με τις παρακάτω παραδοχές:

- Ως υλικό επιλέγεται χάλυβας με μέτρο ελαστικότητας $E = 210 \text{ GPa}$ και τάση διαρροής $f_y = 250 \text{ MPa}$
- Επιλέγονται τετραγωνικές διατομές
- Μέγιστη οριζόντια μετατόπιση κόμβου ελέγχου: $u_{\max} = H/400$ ($= 0.2 \text{ m}$)
- Ικανοποίηση του ελέγχου αλληλεπίδρασης διατομής (EN 1993-1-1:2005)

Σύμφωνα με το EN 1993-1-1:2005, για τον έλεγχο ελαστικού ή πλαστικού σχεδιασμού των μεταλλικών κατασκευών, η συντηρητική προσέγγιση της γραμμικής αλληλεπίδρασης σε ένα δισδιάστατο πρόβλημα θεωρείται σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$DC = \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} \leq 1 \quad (3.11)$$

Όπου:

- N_{Ed} , $M_{y,Ed}$: Τα αναπτυσσόμενα εντατικά μεγέθη, αξονική και καμπτική ροπή.
- N_{Rd} : η πλαστική αντίσταση της διατομής σε αξονική δύναμη.

$$N_{Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}} \quad (3.11a)$$

- $M_{y,Rd}$: η καμπτική ροπή αντίσταση της διατομής.

$$M_{y,Rd} = \frac{W_{pl,y} f_y}{\gamma_{M0}} \quad (3.11b)$$

Οι μεταβλητές σχεδιασμού για το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι το εμβαδό της διατομής των στοιχείων της κατασκευής. Κατ' επέκταση, η πλαστική ροπή αδράνειας

εκφράζεται ως συναρτήσει του εμβαδού. Έτσι, για μία τετραγωνική διατομή η πλαστική ροπή αδράνειας ορίζεται σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$W_{pl,y} = \frac{b h^2}{6} \Rightarrow W_{pl,y} = \frac{A^{3/2}}{6} \quad (3.12)$$

Επιπλέον, εισάγονται κάποια όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού, όπου το εμβαδό των διατομών μπορεί να κυμαίνεται στο εύρος τιμών μεταξύ μίας πολύ μικρής τιμής και την μονάδα (1). Η εφαρμογή μιας πολύ μικρής τιμής στα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού εισάγεται ώστε να μην προκύψει κατά την διαδικασία εύρεσης της λύσης ένα στατικά αόριστο σύστημα με αποτέλεσμα την απενεργοποίηση του αλγορίθμου. Έτσι, η μαθηματική αποτύπωση του προβλήματος προκύπτει:

$$\min_x = C(a) = \sum_{e=1}^{N_{ele}} a_e L_e \quad (3.13a)$$

$$\text{Subject to: } DC \leq 1 \quad (3.13b)$$

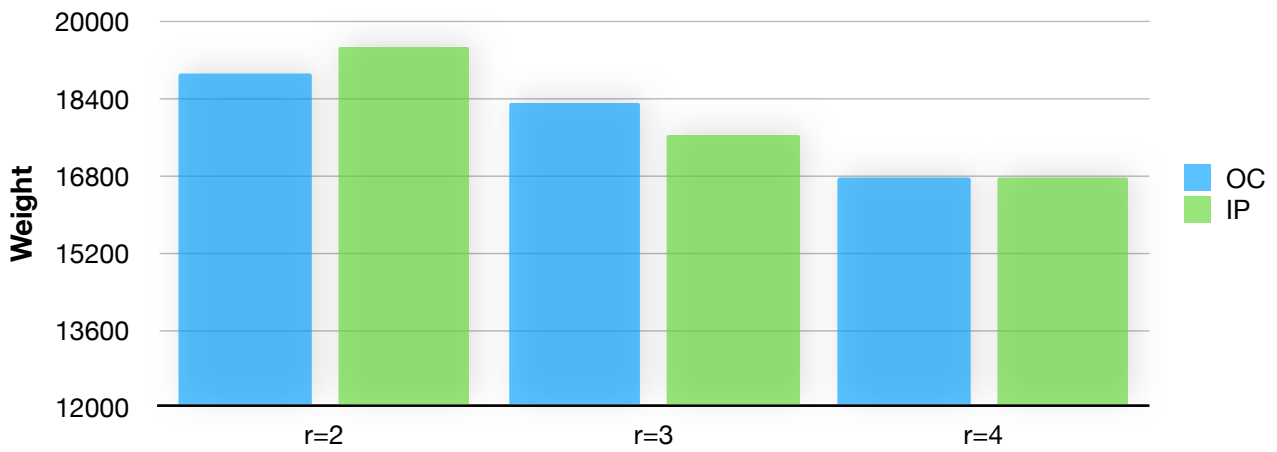
$$u_n \leq u_{\max} = 0.02 \text{ m} \quad (3.13c)$$

$$10^{-5} \leq a_e \leq 1 \quad (3.13d)$$

Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης, καθώς και τα αποτελέσματα της ελαστικής ανάλυσης του τελικού φορέα για μία οριζόντια δράση $P_x = 10000 \text{ kN}$, ενώ στο παρακάτω γράφημα γίνεται η σύγκριση του τελικού βάρους της κατασκευής για το εκάστοτε πρόβλημα.

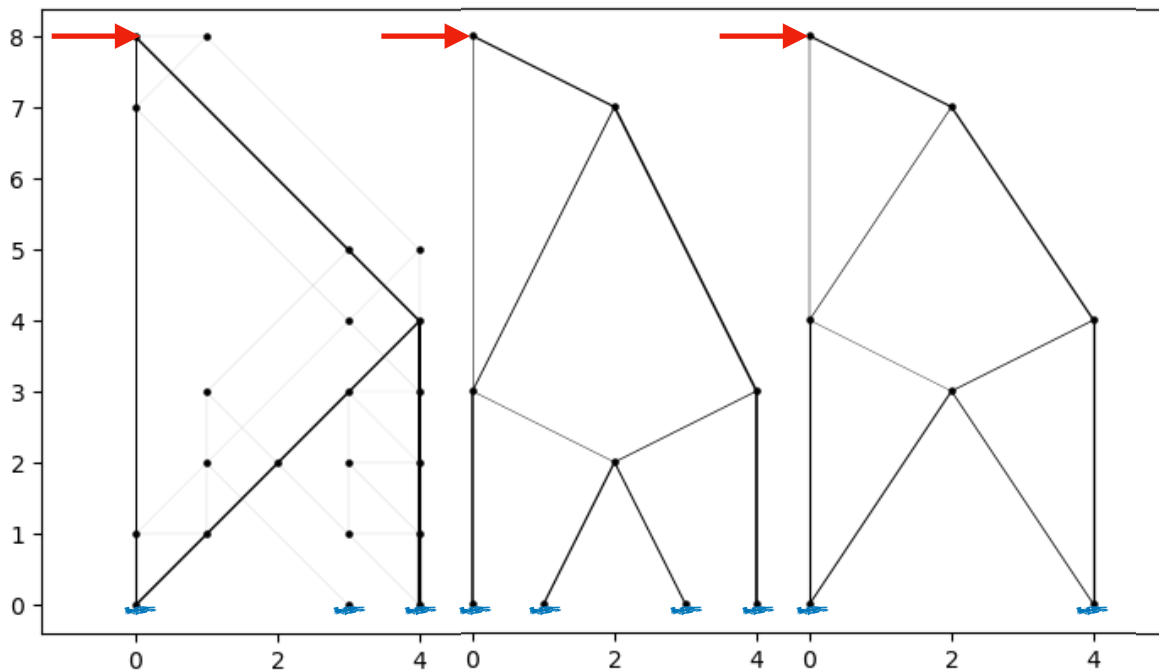
Πίνακας 3.2: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης μεγέθους διατομών και ελαστικής ανάλυσης

Χωρίο σχεδιασμού	Optimality Criteria (O-C)		Interior Point algorithm (I-P)	
	W_{tot} (kg)	Design Check	W_{tot} (kg)	Design Check
$r_{\min} = 2\text{m}$	18939	0.695	19482	0.935
$r_{\min} = 3\text{m}$	18313	0.756	17658	0.687
$r_{\min} = 4\text{m}$	16741	0.655	16741	0.655

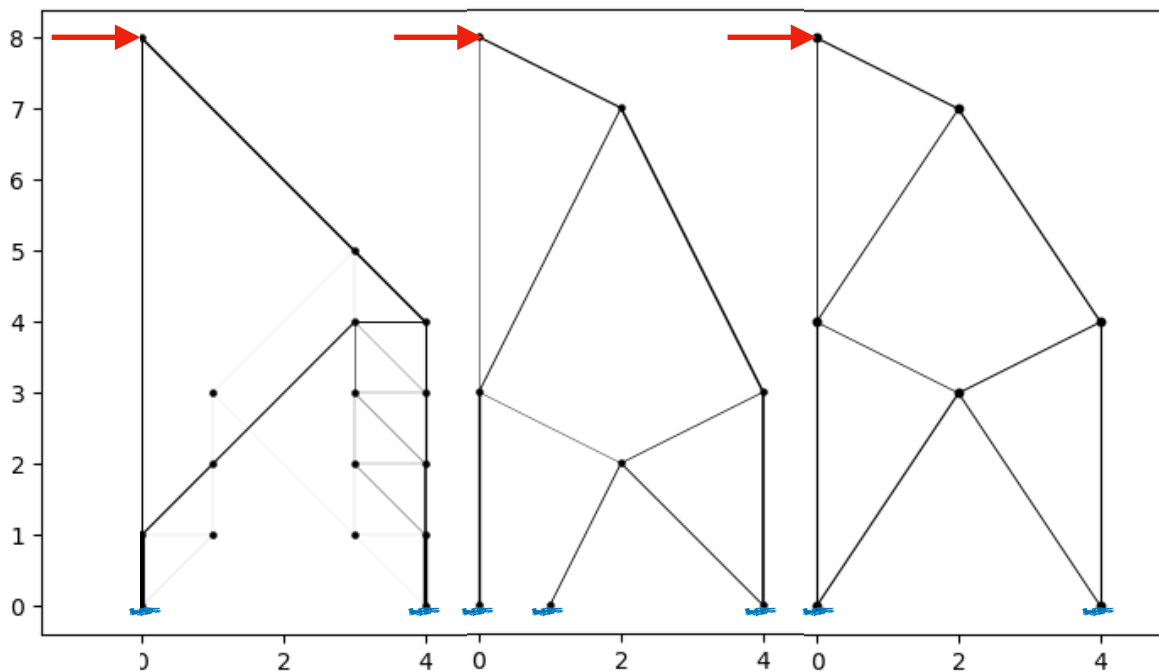


Σχήμα 3.11: Γράφημα απαίτησης συνολικού βάρους υπό δεδομένους περιορισμούς

Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η τελική γεωμετρία που προκύπτει, όπου το πάχος της γραμμής συμβαδίζει με το απαιτούμενο εμβαδό της διατομής.



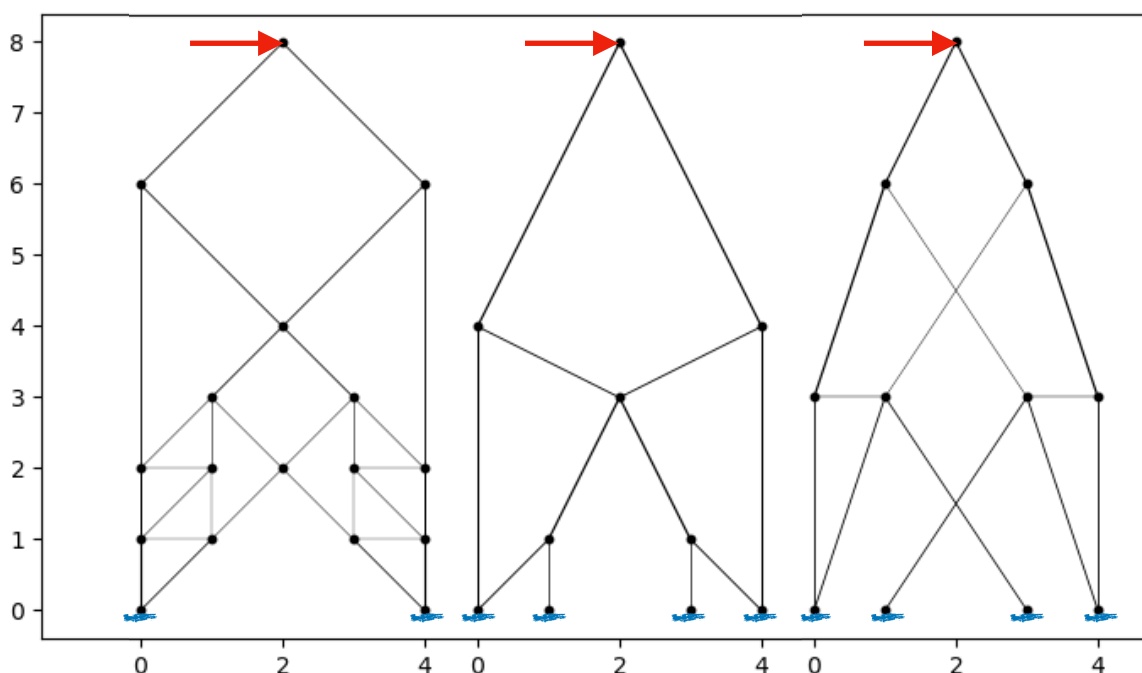
Σχήμα 3.12: Αποτελέσματα ανάλυσης πλαισιωτού φορέα (O-C)



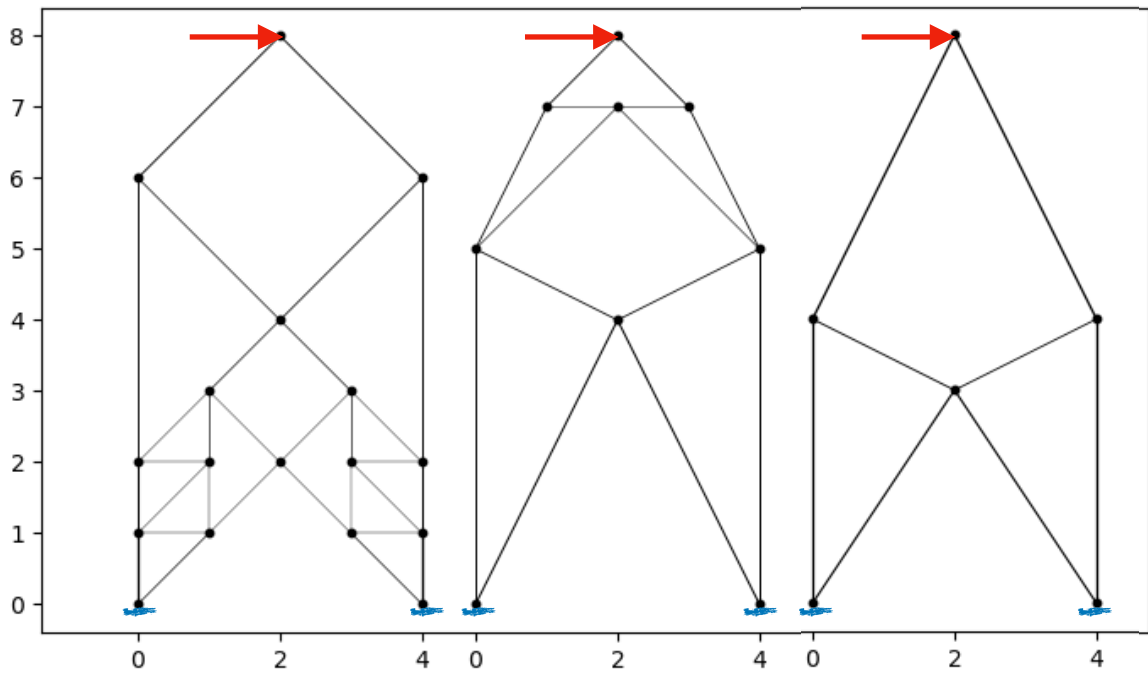
Σχήμα 3.13: Αποτελέσματα ανάλυσης πλαισιωτού φορέα (I-P)

3.2.2 Οριζόντια φόρτιση στο μέσο του ελεύθερου άκρου

Όπως και στους δικτυωματικούς φορείς, πραγματοποιείται ακριβώς το ίδιο παράδειγμα, αλλάζοντας την θέση εφαρμογής του φορτίου, στο κέντρο του προβόλου. Επαναλαμβάνοντας λοιπόν ακριβώς την ίδια διαδικασία, για ακριβώς τις ίδιες συνθήκες και παραδοχές, παρουσιάζονται αρχικά τα σχηματικά αποτελέσματα της βελτιστοποίησης τοπολογίας.

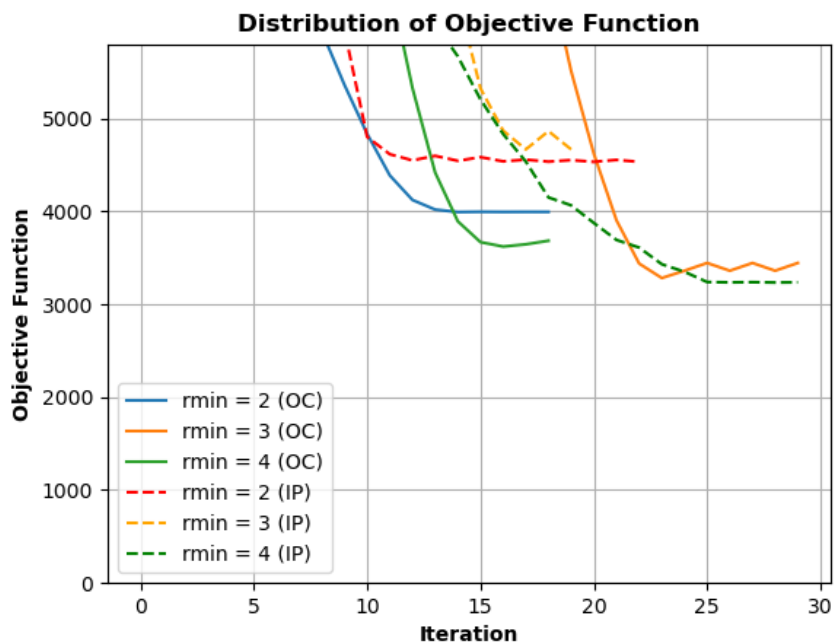


Σχήμα 3.14: Βελτιστοποίησης τοπολογίας πλαισιωτού φορέα (O-C)

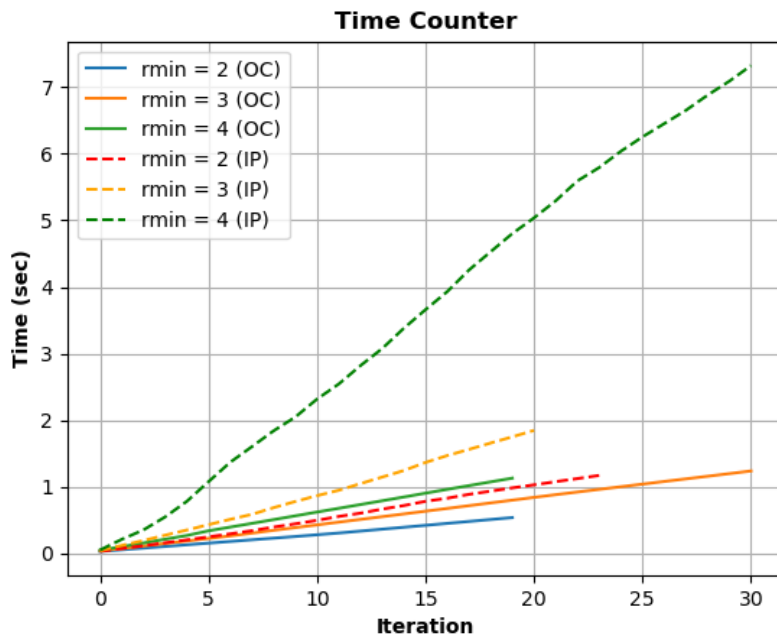


Σχήμα 3.15: Βελτιστοποίησης τοπολογίας πλαισιωτού φορέα (I-P)

Παρακάτω, παρατίθενται τα διαγράμματα μεταβολής της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς και ο απαιτούμενος χρόνος εκτέλεσης για την κάθε διαδικασία.



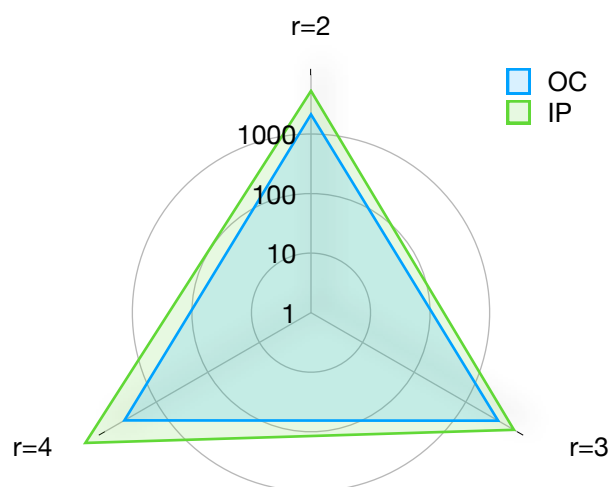
Σχήμα 3.16: Διάγραμμα μεταβολής αντικειμενικής πλαισιωτού φορέα



Σχήμα 3.17: Διάγραμμα της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας κώδικα

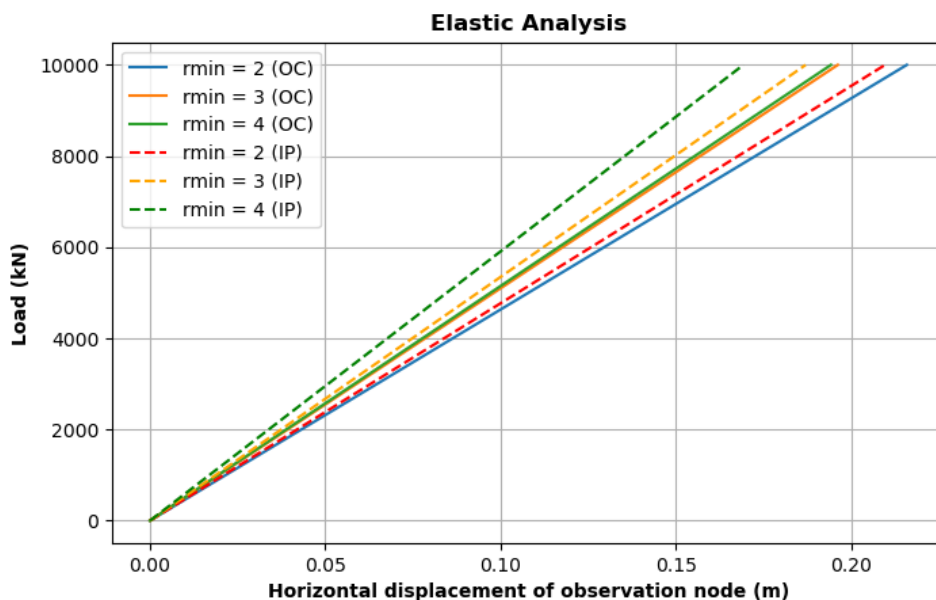
Όπως φαίνεται στα παραπάνω σχήματα, για έναν μικρό αριθμό στοιχείων στην αρχική δομή, η μικρότερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης προκύπτει μέσω της χρήσης του κριτηρίου βελτιστοποίησης (O-C) και μάλιστα σε πολύ μικρότερο χρόνο σε σύγκριση με την χρήση του αλγορίθμου εσωτερικού σημείου. Η αύξηση των στοιχείων στην αρχική δομή ($r_0 = 4m$), έχει ως αποτέλεσμα η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να είναι μικρότερη μέσω της χρήσης του αλγορίθμου εσωτερικού σημείου, όμως σε πολύ μεγαλύτερο χρόνο.

Στο παρακάτω γράφημα παρατηρείται η απόδοση της κάθε μεθόδου, όπου προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με τον απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης της διαδικασίας.



Σχήμα 3.18: Διάγραμμα απόδοσης των δύο μεθόδων

Επιπρόσθετα, γίνεται μια ελαστική ανάλυση, για την τελική βέλτιστη τοπολογία της κατασκευής, όπου μέλη με περιοχές κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο, που θεωρούνται αναποτελεσματικά, έχουν αφαιρεθεί από την δομή, ενώ παράλληλα έχει γίνει η συγχώνευση των στοιχείων.



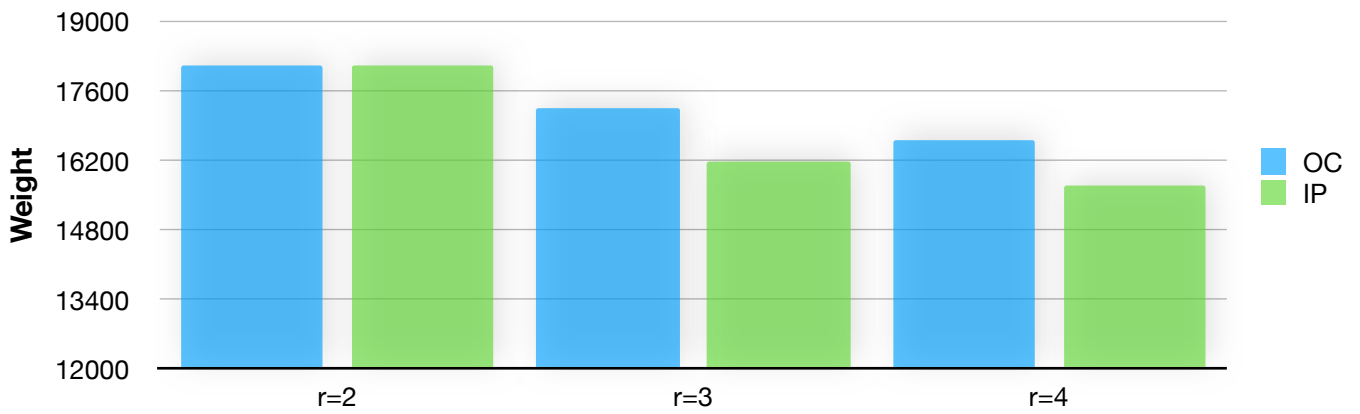
Σχήμα 3.19: Γραμμική ανάλυση βέλτιστης τοπολογίας πλαισιωτού φορέα

Τέλος, πραγματοποιείται μία βελτιστοποίηση του μεγέθους των διατομών για την τελική τοπολογία που δημιουργικέ παραπάνω, ακριβώς με τα ίδια δεδομένα με την ενότητα (§3.2.1).

Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποιήσεως, καθώς και τα αποτελέσματα της ελαστικής ανάλυσης του τελικού φορέα για μία οριζόντια δράση $P_x = 10000$ kN, ενώ στο παρακάτω γράφημα γίνεται η σύγκριση του τελικού βάρους της κατασκευής για το εκάστοτε πρόβλημα.

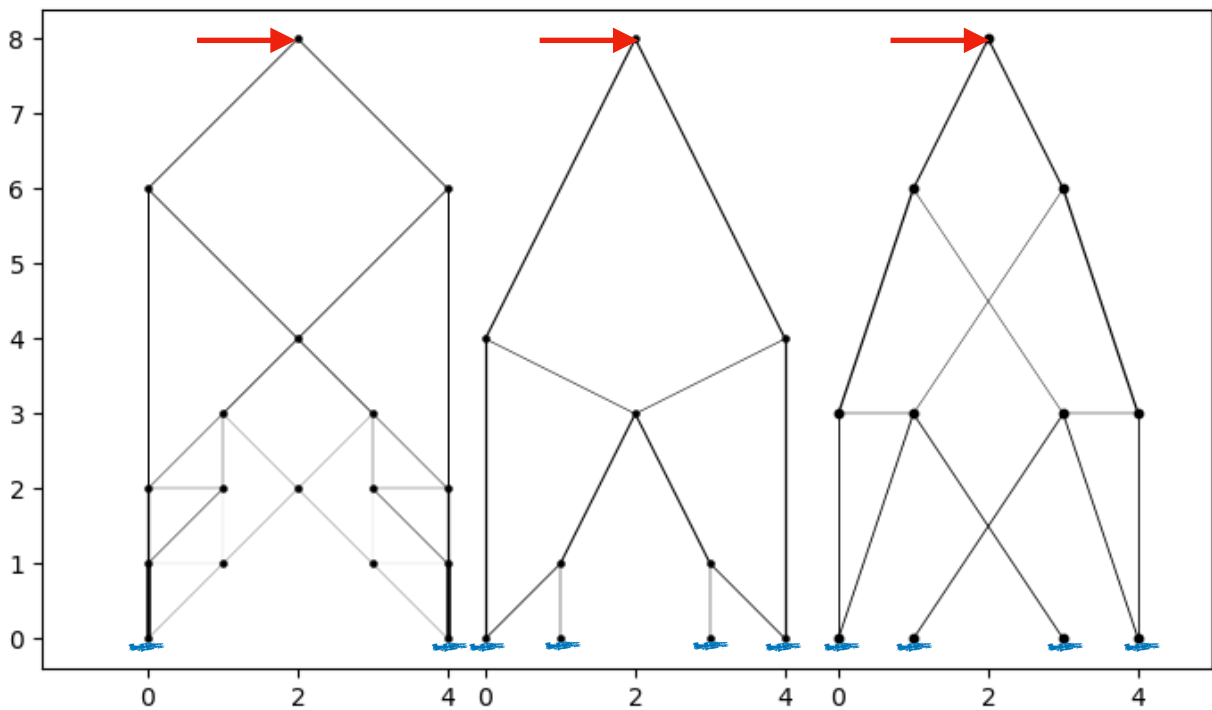
Πίνακας 3.3: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης μεγέθους διατομών και ελαστικής ανάλυσης-1

Χωριό σχεδιασμού	Optimality Criteria (O-C)		Interior Point algorithm (I-P)	
	W_{tot} (kg)	Design Check	W_{tot} (kg)	Design Check
$r_{min} = 2m$	18112	0.910	18112	0.910
$r_{min} = 3m$	17233	0.837	16197	0.745
$r_{min} = 4m$	16609	0.814	15707	0.634

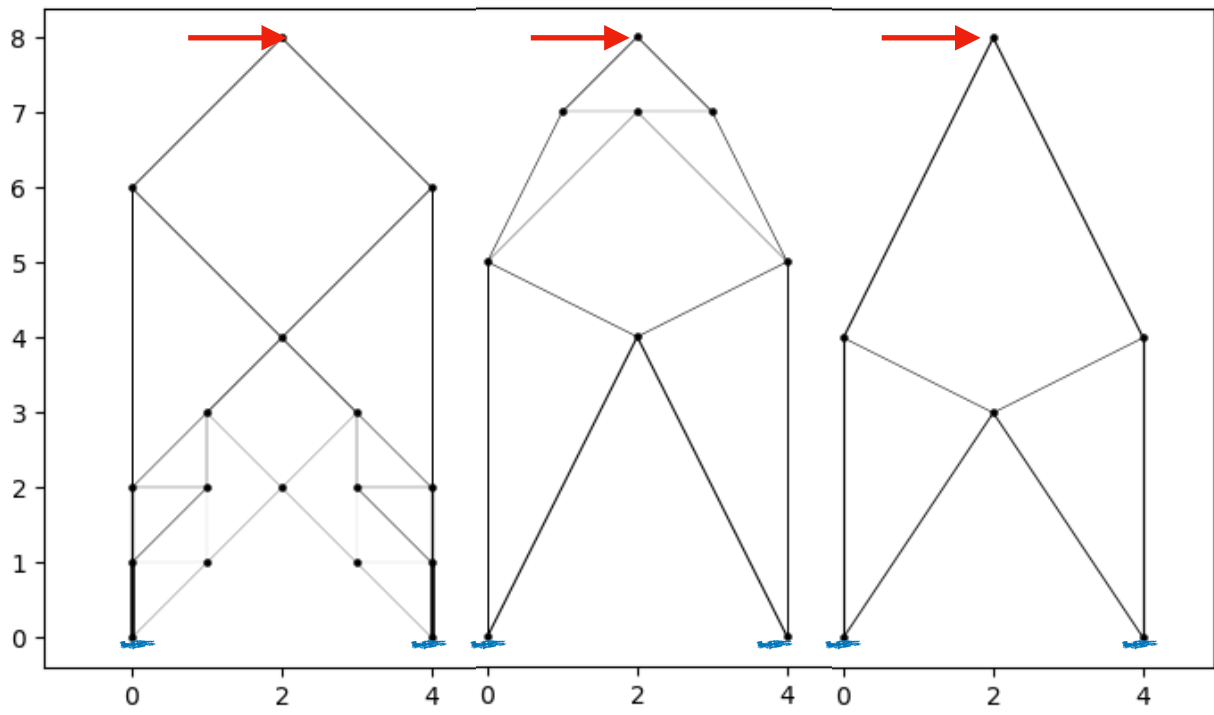


Σχήμα 3.20: Γράφημα απαίτησης συνολικού βάρους υπό δεδομένους περιορισμούς

Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η τελική γεωμετρία που προκύπτει, όπου το πάχος της γραμμής συμβαδίζει με το απαιτούμενο εμβαδό της διατομής.



Σχήμα 3.21: Αποτελέσματα ανάλυσης O-C



Σχήμα 3.22: Αποτελέσματα ανάλυσης I-P

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, το βασικό αντικείμενο μελέτης εστιάζει στην βελτιστοποίηση τοπολογίας ενός δισδιάστατου φορέα από διακριτά μέλη και η σύγκριση ορισμένων μαθηματικών διατυπώσεων του προβλήματος. Κατά την διαδικασία βελτιστοποίησης τοπολογίας ενός φορέα από διακριτά μέλη, ο χρήστης καλείται να ορίσει το αρχικό χωρίο σχεδιασμού, τις συνθήκες στήριξης και τα εφαρμοζόμενα φορτία και στην συνέχεια μέσω της μαθηματικής αποτύπωσης του προβλήματος πραγματοποιείται η ανάλυση σύμφωνα με ορισμένους περιορισμούς. Σκοπός της εργασίας ήταν η αξιολόγηση των στοιχείων που καλείται να ορίσει ο χρήστης κατά την διαδικασία της βελτιστοποίησης σύμφωνα με το αρχικό χωρίο σχεδιασμού, καθώς και την μαθηματική αποτύπωση του προβλήματος. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιήθηκε τόσο για δικτυωματικούς φορείς όσο και για πλαισιωτές κατασκευές, για δύο (2) διαφορετικές συνθήκες φόρτισης. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων εστιάζει στον συνολικό χρόνο εκτέλεσης της διαδικασίας, καθώς και την τελική δυσκαμψία του φορέα προς κατασκευή. Επιπλέον, γίνεται και μια βελτιστοποίηση μεγέθους των διατομών με δεδομένους περιορισμούς, ώστε να υπολογιστεί ο απαιτούμενος συνολικός όγκος της κατασκευής.

Αρχικά εξετάζεται ο αριθμός των στοιχείων που εισάγονται στο αρχικό χωρίο σχεδιασμού. Ο τρόπος σύνθεσης του αρχικού χωρίου έγινε μέσω της πλήρους συνδεσιμότητας των κόμβων, όπου ο χρήστης μπορεί να επέμβει στο σχεδιασμό ορίζοντας ένα μέγιστο επιτρεπόμενο μήκος των μελών. Ο απαιτούμενος χρόνος εκτέλεσης της εκάστοτε διαδικασίας, ανεξάρτητα από την μαθηματική διατύπωση του προβλήματος, αυξάνεται καθώς μεγαλώνει ο συνολικός αριθμός των στοιχείων στο αρχικό χωρίο σχεδιασμού. Βέβαια, η αύξηση των μελών στο αρχικό χωρίο έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία μίας δομής με μεγαλύτερη δυσκαμψία. Ωστόσο, η διαφορά της δυσκαμψίας σταδιακά ελαττώνεται με την αύξηση των στοιχείων στο αρχικό χωρίο σχεδιασμού, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι η άτακτη αύξηση των στοιχείων στο χωρίο δεν είναι απαραίτητα η βέλτιστη επιλογή, καθώς η αύξηση του χρόνου εκτέλεσης της διαδικασίας είναι δυσανάλογη της αύξησης της δυσκαμψίας.

Το ίδιο ακριβώς συμπέρασμα προκύπτει και από την βελτιστοποίηση μεγέθους των διατομών στην τελική δομή. Με εξαίρεση μία μόνο εφαρμογή, ο απαιτούμενος συνολικός όγκος των στοιχείων μειώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων στο αρχικό χωρίο. Ομοίως όμως, η μείωση του τελικού όγκου είναι δυσανάλογη με τον απαιτούμενο

χρόνο εκτέλεσης της διαδικασίας, καθιστώντας πάλι την άτακτη αύξηση των στοιχείων στο αρχικό χωρίο μη εποικοδομητική.

Στην συνέχεια γίνεται η σύγκριση της μαθηματικής διατύπωσης του προβλήματος που χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω, δηλαδή της μεθόδου κριτηρίου βελτιστοποίησης (Optimality Criteria - OC), και της ευρετικής μεθόδου μέσω του αλγορίθμου εσωτερικού σημείου (Interior Point - IP). Όπως προέκυψε, ο χρόνος εκτέλεσης με την χρήση του αλγορίθμου εσωτερικού σημείου, είναι αρκετά μεγαλύτερος, για όλες τις περιπτώσεις, σε σύγκριση με την μέθοδο κριτηρίου βελτιστοποίησης. Μάλιστα, η αύξηση των στοιχείων στην αρχική δομή έχει ως αποτέλεσμα ο χρόνος εκτέλεσης της διαδικασίας με τον αλγόριθμο εσωτερικού σημείου να αυξάνεται υπερβολικά, έως και έξι (6) φορές περισσότερο. Βέβαια, η τελική δομή που προκύπτει έχει μεγαλύτερη δυσκαμψία, όμως, πάλι ο χρόνος εκτέλεσης είναι δυσανάλογος με την αύξηση της δυσκαμψίας. Επιπλέον, ακόμα μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι για έναν μικρό αριθμό στοιχείων, η τελική δομή η οποία προκύπτει είναι η ίδια και για τις δύο (2) μεθόδους, καθιστώντας έτσι την χρήση του optimality criteria, πιο εποικοδομητική. Τέλος, κατά την διαδικασία βελτιστοποίησης του μεγέθους της τελικής δομής, παρατηρείται μικρότερος απαιτούμενος όγκος για την επίτευξη ορισμένων περιορισμών κατά την χρήση του αλγορίθμου εσωτερικού σημείου, όπου βέβαια αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος.

Ο σχεδιασμός μίας κατασκευής είναι ένα σύνθετο και πολύπλοκο πρόβλημα. Ο μηχανικός καλείται να σχεδιάσει μια κατασκευή με στόχο την ασφάλεια, την οικονομία, την λειτουργικότητα, την ανθεκτικότητα και την αισθητική, καθόλη τη διάρκεια ζωής του έργου. Η επίτευξη μίας δομής με μικρότερο απαιτούμενο όγκο στοιχείων, και κατ' επέκταση μικρότερο βάρος, είναι ένας βασικός στόχος του μηχανικού, χωρίς αυτό να σημαίνει απαραίτητα και μικρότερο κόστος (πχ. οικονομικό), καθώς η πολυπλοκότητα της κατασκευής της τελικής δομής είναι σημαντικός παράγοντας. Συνεπώς, η χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια του μηχανικού, χωρίς όμως να εκτοπίζει την κρίση του για την τελική απόφαση.

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Mei, L.; Wang, Q. Structural Optimization in Civil Engineering: A Literature Review. Buildings 2021
- [2] Kazaz, A.; Ulubeyli, S. Physical factors affecting productivity of Turkish construction workers. In Proceedings of the 22nd Annual ARCOM Conference, Birmingham, UK, 2006.
- [3] Kuhn, H.; Tucker, A. Nonlinear programming. In Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium, Berkeley, CA, USA, 31 July–12 August 1950; University of California Press: Berkeley, CA, USA, 1951.
- [4] Ευάγγελος Ε. Πλεύρης, Μεταπτυχιακή Εργασία: “Βέλτιστος Σχεδιασμός Κατασκευών με Πολλαπλά Κριτήρια με χρήση Στρατηγικών Εξέλιξης” Αθήνα, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2001.
- [5] Sotiropoulos, S.; Lagaros, N.D. “Topology Optimization of Framed Structures using SAP2000” Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2021.
- [6] Amini, K., Jalalpour, M., and Delatte, N. Advancing concrete strength prediction using non-destructive testing: Development and verification of a generalizable model, 2016.
- [7] Navid Changizi, S.M.ASCE and Mehdi Jalalpour, A.M.ASCE. Stress-Based Topology Optimization of Steel-Frame Structures Using Members with Standard Cross Sections: Gradient-Based Approach, 2017
- [8] Shaojun Zhu, Makoto Ohsaki, Kazuki Hayashi, Xiaonong Guo; Machine-specified ground structures for topology optimization of binary trusses using graph embedding policy network, Tongji University, China, 2021
- [9] Martin Andersen, Joachim Dahl, Zhang Liu, Lieven Vandenbergh. Interior-point methods for large-scale cone programming, Technical University of Denmark