



Διπλωματική Εργασία

Ψευδοκανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης
Μαύρων Τρυπών σε 2+1 Διαστάσεις

Νίκος Γιαννόπουλος

Επιβλέπων καθηγητής:

Γεώργιος Κουτσούμπας, (Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ)

Τριμελής επιτροπή:

Γεώργιος Κουτσούμπας (Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ)

Νικόλαος Μαυρόματος (Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ)

Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος (Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ)

ΑΘΗΝΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2022

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υπεύθυνο της διπλωματικής μου, κύριο Γιώργο Κουτσούμπα για την βοήθεια που μου προσέφερε και την υπομονή του.

Νίκος Γιαννόπουλος

© (2022) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Οι μαύρες τρύπες παίζουν κεντρικό ρόλο στη σύγχρονη φυσική. Έχουν χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης που ονομάζονται ψευδοκανονικοί τρόποι ταλάντωσης. Οι τρόποι αυτοί είναι σημαντικοί στην ανίχνευση και εξερεύνηση αστροφυσικών μαύρων τρυπών και φαινομένων που παράγουν βαρυτικά κύματα, όπως η βαρυτική κατάρρευση και η σύγκρουση μαύρων τρυπών.

Η μαύρη τρύπα Bañados, Teitelboim, Zanelli είναι ένα απλό μοντέλο σε χωρόχρονο $2+1$ διαστάσεων. Παρ' όλη την απλότητά του, διαθέτει μη τετριμμένες ιδιότητες παρόμοιες με αυτές των τετραδιάστατων ομολόγων του.

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία θα υπολογίσουμε τις ψευδοκανονικές συχνότητες βαθμωτού και ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε υπόβαθρο μη περιστρεφόμενης μαύρης τρύπας Bañados, Teitelboim, Zanelli. Για αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους. Απ' όσο γνωρίζουμε τα αποτελέσματα για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι πρωτότυπα.

Λέξεις κλειδιά: Μαύρες τρύπες, Ψευδοκανονικοί τρόποι ταλάντωσης, μαύρη τρύπα Bañados - Teitelboim - Zanelli, βαρύτητα σε $2+1$ διαστάσεις

Abstract

Black holes play a central role in modern physics. They have characteristic oscillation modes called quasinormal modes. These modes are important in the detection of astronomical black holes and of processes that produce gravitational waves such as gravitational collapse and black hole collisions.

The Bañados, Teitelboim, Zanelli black hole is a simple 2+1 dimensional model. It's simplicity aside, it possesses non trivial properties resembling those of its 4 dimensional counterparts.

In this thesis we will calculate the quasinormal frequencies of scalar and electromagnetic fields in a Bañados, Teitelboim, Zanelli black hole background. To this end, we will use analytical as well as numerical tools. As far as we are aware, the results from the treatment of the electromagnetic field are novel.

Keywords: Black holes; Quasinormal modes; Bañados - Teitelboim - Zanelli Black hole, 2+1 dimensional gravity

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Τροχιά σωματιδίου που πέφτει στην BTZ μαύρη τρύπα χωρίς περιστροφή, με $m = 1, L = 2$ και $E = 2$. . .	21
2.2	Τροχιά σωματιδίου που πέφτει σε περιστρεφόμενη BTZ μαύρη τρύπα με $J = 0.5$, με $m = 1, L = 2$ και $E = 2$	22
4.1	Θέση ελαχίστου και τιμή της δυναμοσειράς συναρτήσεως πλήθους όρων αποκοπής. $M = 100, m = 1$. . .	43
6.1	Φάσμα Ψ_{TT} για H/M πεδίο σε γεωμετρία BTZ, $M = 1, m = 0$	52
6.2	Φάσμα Ψ_{TT} για H/M πεδίο σε γεωμετρία BTZ, $M = 100, m = 0$	52

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Ακτινικά όρια κινήσεων σωματιδίων με ($m = 1$) ή χωρίς ($m = 0$) μάζα σε διάφορες περιπτώσεις	21
4.1	Ψευδοκανονικές συχνότητες βαθμωτού για $M = 1, m = 0$	42
4.2	Ψευδοκανονικές συχνότητες βαθμωτού για $M = 1, m = 1$	42
6.1	Πρώτες ψευδοκανονικές συχνότητες για $M = 1, m = 0$. Έχει σημειωθεί οι θεμελιώδης συχνότητα	53
6.2	Πρώτες ψευδοκανονικές συχνότητες για $M = 100, m = 0$. Έχει σημειωθεί οι θεμελιώδης συχνότητα	54

Περιεχόμενα

I	Θεωρητικό μέρος	6
1	Ψευδοκανονικοί τρόποι ταλάντωσης	7
1.1	Εισαγωγή	7
1.2	Κανονικοί και ψευδοκανονικοί τρόποι ταλάντωσης	8
1.2.1	Εξίσωση Schrödinger και κυματική εξίσωση	12
1.3	Εφαρμογή στην μαύρη τρύπα Schwarzschild	13
1.3.1	Μέθοδοι υπολογισμού Ψ_{TT}	14
1.4	Διέγερση και Παρατήρηση Ψ_{TT}	15
2	Η μαύρη τρύπα BTZ	16
2.1	Ορισμός και ιδιότητες	16
2.2	Μελέτη γεωδαιτικών	18
2.2.1	Εξισώσεις	18
2.2.2	Λύσεις	19
II	Υπολογισμός συχνοτήτων	23
3	Βαθμωτό πεδίο	24
3.1	Εισαγωγή	24
3.2	Βαθμωτές διαταραχές σε BTZ μαύρη τρύπα	24
3.3	Υπολογισμός ψευδοκανονικών συχνοτήτων	26
3.4	Αριθμητικός υπολογισμός	26
3.4.1	Εξερχόμενα κύματα στον ορίζοντα	29
3.4.2	Αριθμητικό σχήμα	29
3.5	Αναλυτικός υπολογισμός	30
3.5.1	Εξερχόμενα κύματα στον ορίζοντα	34

3.5.2	Λύση της υπεργεωμετρικής	35
4	Αποτελέσματα για βαθμωτό πεδίο	36
4.1	Κώδικας	36
4.2	Μέθοδος και Αποτελέσματα	41
5	Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο	44
5.1	Εισαγωγή	44
5.2	Η/Μ διαταραχές σε BTZ μαύρη τρύπα	44
5.2.1	Εξισώσεις	45
5.2.2	Επίλυση και αριθμητικό σχήμα	46
6	Αποτελέσματα για ηλεκτρομαγνητικό πεδίο	49
6.1	Κώδικας	49
6.2	Μέθοδος και Αποτελέσματα	50
6.3	Συζήτηση αποτελεσμάτων και Συμπεράσματα	51
7	Συμπεράσματα	55

Πρόλογος

Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μελετάμε θεωρητικά τους ψευδοκανονικούς τρόπους ταλάντωσης εν γένει και την μαύρη τρύπα Bañados, Teitelboim, Zanelli, στα δύο πρώτα κεφάλαια αντίστοιχα.

Το δεύτερο μέρος ξεκινάει με τον υπολογισμό των συχνοτήτων βαθμωτού πεδίου αναλυτικά και την κατασκευή του αριθμητικού σχήματος για το υπολογιστικό μέρος, στο τρίτο κεφάλαιο. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται η υλοποίηση, η μέθοδος και τα αποτελέσματα. Εν συνεχεία, στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το σχήμα για τον υπολογισμό των συχνοτήτων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Και στο έκτο, παρατίθεται η υλοποίηση, η μέθοδος και τα αποτελέσματα για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Το έβδομο κεφάλαιο περιέχει μία σύνοψη των αποτελεσμάτων.

Μέρος Ι

Θεωρητικό μέρος

Κεφάλαιο 1

Ψευδοκανονικοί τρόποι ταλάντωσης

1.1 Εισαγωγή

Τα άστρα και τα συμπαγή αστρικά αντικείμενα ταλαντώνονται παράγοντας βαρυτικά κύματα. Στην περίπτωση των άστρων αυτές οι ταλαντώσεις είναι μεγάλης συχνότητας και εξαιρετικά ασθενείς. Αντιθέτως, ισχυρά βαρυτικά κύματα προέρχονται από αστέρες νετρονίων και μαύρες τρύπες (κυρίως από το σχηματισμό ή την σύγκρουση τέτοιων αντικείμενων).

Στο πλαίσιο της γενικής σχετικότητας, οι ψευδοκανονικοί τρόποι ταλάντωσης (ΨΤΤ) προκύπτουν ως διαταραχές (βαρυτικές, ηλεκτρομαγνητικές ή άλλων πεδίων) της γεωμετρίας ενός άστρου ή μίας μαύρης τρύπας. Λόγω της παραγωγής βαρυτικής ακτινοβολίας οι τρόποι δεν είναι κανονικοί αλλά μιγαδικοί, με το πραγματικό μέρος να χαρακτηρίζει τη συχνότητα και το φανταστικό την απόσβεση.

Η μελέτη των διαταραχών μαύρων τρυπών ξεκίνησε στο τέλος της δεκαετίας του '50 με την πρωτοπόρο εργασία των Regge και Wheeler [19], όπου μελέτησαν τη σταθερότητα της Schwarzschild μαύρης τρύπας σε διαταραχές. Δεν προσπάθησαν βέβαια να σχετίσουν τα αποτελέσματα τους με την αστροφυσική. Η συσχέτιση έγινε στα τέλη του '60 από τον Kip Thorne και τους συνεργάτες του [22], με στόχο τη μελέτη των αστρικών ταλαντώσεων στο πλαίσιο της γενικής σχετικότητας και τον υπολογισμό της ενέργειας που εκπέμπεται σαν ακτινοβολία.

Οι ΨΤΤ εμφανίστηκαν πρώτη φορά στη βιβλιογραφία σε μία δημοσίευση του Vishveshwara (1970) [25] για την σκέδαση βαρυτικών κυμάτων από Schwarzschild μαύρη τρύπα. ΨΤΤ έχουν εμφανιστεί επίσης στη μελέτη πτώσης σωματιδίου σε μαύρη τρύπα, σύγκρουση μαύρων τρυπών και βαρυτική κατάρρευση. Αριθμητικά αποτελέσματα για τις δύο τελευταίες περιπτώσεις [1] έχουν δείξει σημαντική συμφωνία με τον διαταραχτικό υπολογισμό, πράγμα που δείχνει τη χρησιμότητά τους ακόμα και σε εντόνως μη γραμμικά προβλήματα.

Στο τελικό σχόλιο της πρωτοπόρου δημοσίευσης [22] τους οι Thorne και Campollataro γράφουν: '[είναι] η ταπεινή αρχή μίας ιστορίας που φαίνεται να είναι μεγάλη, περίπλοκη και εκπληκτική'. Τα λόγια αυτά έχουν αποδειχθεί προφητικά καθώς πληθώρα εργασιών έχει δημοσιευτεί, με συνεισφορές από πολλούς ερευνητές.

1.2 Κανονικοί και ψευδοκανονικοί τρόποι ταλάντωσης

Θα αρχίσουμε με μία παρουσίαση των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

Κλειστά κλασσικά συστήματα όπως χορδές, μεμβράνες και κοιλότητες με ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν αρμονικές καταστάσεις (με ω πραγματικό):

$$\chi_n(t, x) = e^{i\omega_n t} \chi_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1)$$

Με μία απειρία τέτοιων καταστάσεων, συναρτήσει των οποίων μπορεί να γραφτεί η γενική λύση:

$$\chi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\omega_n t} \chi_n(x) \quad (1.2)$$

Το απλούστερο παράδειγμα είναι μία χορδή μήκους L με πακτωμένα άκρα. Κάθε τέτοιο σύστημα μπορεί να περιγραφεί από διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \mathbf{A} \chi \quad (1.3)$$

όπου (το χ μπορεί να είναι διάνυσμα και) ο \mathbf{A} είναι τελεστής που δρα στις χωρικές μεταβλητές. η χρονική εξέλιξη ενός πεπερασμένου προβλήματος καθορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες. Αναζητώντας αρμονικές λύσεις οδηγούμαστε σε ένα πρόβλημα συνοριακών συνθηκών στις χωρικές μεταβλητές, που στην απλούστερη περίπτωση είναι τύπου Sturm-Liouville. Αριθμητικές μέθοδοι για τέτοια προβλήματα οδήγησαν σε τεχνικές χώρων Hilbert.

Ο χώρος Hilbert προκύπτει από την επιλογή συμμετρικού διαφορικού τελεστή, με τις χωρικές συνοριακές συνθήκες να επιβάλλουν ερμητιανότητα. Ο τελεστής αποκτά πλήρες φάσμα ιδιοτιμών και ιδιοκαταστάσεων, που είναι οι περιοδικές καταστάσεις (1.1).

Η ερμητιανότητα στα φυσικά προβλήματα είναι ένα λεπτό ζήτημα (βλέπε [4] για μία μαθηματική προσέγγιση). Οι λύσεις μίας κυματικής εξίσωσης μπορούν να έχουν διαφορετικούς βαθμούς διαφορισιμότητας. Περιμένουμε ότι το σύνολο C^∞ αρκεί για την περιγραφή ρεαλιστικών καταστάσεων. Όμως, ακολουθίες λείων συναρτήσεων μπορεί να συγκλίνουν σε μη λεία συνάρτηση. Οπότε για την απόδειξη ισχυρών προτάσεων όπως η (1.2) χρειάζεται πιο εκλεπτυσμένη ανάλυση σε υποσύνολα του L^2 γενικότερα από το C^∞ . Για 'καλές' εξισώσεις, οι ιδιοσυναρτήσεις συνήθως προκύπτουν αναλυτικές και η (1.2) αποδεικνύεται με σημειακή σύγκλιση.

Αυτή η εικόνα αλλάζει όταν θεωρήσουμε ανοιχτά συστήματα, που χάνουν ενέργεια στο άπειρο. Το απλούστερο παράδειγμα είναι η άπειρη χορδή. Η γενική λύση στο πρόβλημα είναι

$$\chi(t, x) = A(x - t) - B(x + t) \quad (1.4)$$

με A και B αυθαίρετες συναρτήσεις. Ποιες λύσεις χρειάζεται να μελετήσουμε; Σε αυτή την περίπτωση η ερώτηση δεν έχει νόημα γιατί ξέρουμε τη γενική λύση. Σε άλλα προβλήματα όμως, που δεν έχουμε ρητά τη λύση, θα περιοριστούμε σε κάποιο υποσύνολο λύσεων που έχουν φυσική σημασία.

Ας εξετάσουμε την μονοδιάστατη κυματική εξίσωση με δυναμικό

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \chi = 0 \quad (1.5)$$

Με αρχικές συνθήκες δύο φορές παραγωγίσιμες $\chi(0, x), \partial_t \chi(0, x)$, που προσδιορίζουν μία C^2 λύση. Δεν χρειάζεται συνοριακή συνθήκη για να προσδιοριστεί η εξέλιξη του συστήματος. Υπάρχουν λύσεις πεπερασμένου φορέα, αλλά και μη πεπερασμένου, με άπειρη ενέργεια και απρόβλεπτη συμπεριφορά στο άπειρο!

Από πλευράς φυσικής μοιάζουν να μας ενδιαφέρουν μόνο οι λύσεις πεπερασμένου φορέα. Από μαθηματικής άποψης όμως χρειάζεται να θεωρήσουμε όλες τις λύσεις πεπερασμένης ενέργειας. Τότε ο τελεστής είναι ερμητιανός, με συνεχές φάσμα. Δεν υπάρχουν τετραγωνικά ολοκληρώσιμες ιδιοσυναρτήσεις, αλλά μόνο μη κανονικές ιδιοσυναρτήσεις όπως τα επίπεδα κύματα. Αυτό σημαίνει ότι η (1.1) έχει λύσεις για κάθε πραγματικό ω , και κατάλληλες υπερθέσεις τέτοιων αρμονικών δίνουν ολοκληρώσιμες 'σχεδόν ιδιοκαταστάσεις'. Στην περίπτωση $V(x) \equiv 0$ αυτά είναι κυματοπακέτα που είναι υπερθέσεις επίπεδων κυμάτων. Αυτές οι καταστάσεις είναι το ανάλογο των κανονικών τρόπων για μη πεπερασμένα συστήματα.

Ας επιστρέψουμε τώρα στη συζήτηση των ΨΤΤ, που διαφέρουν σαν έννοια από τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Για να ορίσουμε τους ΨΤΤ επιστρέφουμε στη (1.5), με $V \geq 0$ που μηδενίζεται για $|x| > x_0$. Σε αυτή την περίπτωση αρχικές συνθήκες πεπερασμένου φορέα παραμένουν φραγμένες $|\chi(t, x)| < C$. Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό Laplace για μία τέτοια λύση. Και συμβολίζουμε $\hat{\chi}(s, x)$, ($s > 0$ πραγματικό) το μετασχηματισμό της αρχικής $\chi(t, x)$

$$\hat{\chi}(s, x) = \int_0^\infty e^{-st} \chi(t, x) dt \quad (1.6)$$

που ικανοποιεί τη συνήθη διαφορική

$$s^2 \hat{\chi} - \hat{\chi}'' + V \hat{\chi} = s\chi(0, x) + \partial_t \chi(0, x) \quad (1.7)$$

με την αντίστοιχη ομοιογενή να είναι

$$s^2 \hat{\chi} - \hat{\chi}'' + V \hat{\chi} = 0 \quad (1.8)$$

χ φραγμένη σημαίνει ότι η $\hat{\chi}$ είναι αναλυτική για $s > 0$ και μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά στο ημιεπίπεδο $Re(s) > 0$.

Θα λύσουμε τη μετασχηματισμένη εξίσωση με συναρτήσεις Green, που κατασκευάζονται ως εξής. Διαλέγουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (1.8) $f_-(s, x), f_+(s, x)$ και ορίζουμε

$$G(s, x, x') = \frac{1}{W(s)} \begin{cases} f_-(s, x') f_+(s, x) & (x' < x) \\ f_-(s, x) f_+(s, x') & (x < x') \end{cases} \quad (1.9)$$

όπου W η Wronskian των f_- και f_+ . Αν συμβολίσουμε την ανομοιογένεια της (1.7) με j , η λύση είναι

$$\hat{\chi}(s, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s, x, x') j(s, x') dx' \quad (1.10)$$

Μας μένει να διαλέξουμε τις f_- και f_+ . Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το ότι η χ είναι φραγμένη στο χωροχρόνο. Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace η $\hat{\chi}$ είναι φραγμένη συνάρτηση του x . Επειδή το δυναμικό V μηδενίζεται για $|x| > x_0$, οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (1.8) σε αυτή την περιοχή είναι:

$$f_{\pm} = e^{\pm sx} \quad (1.11)$$

Το εξής ζευγάρι λύσεων:

$$f_+ = e^{-sx} \text{ για } x > x_0, \quad f_- = e^{+sx} \text{ για } x < -x_0 \quad (1.12)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες για $Re(s) > 0$ και δίνουν την συνάρτηση Green (1.9) (η οποία θα δώσει φραγμένη λύση $\hat{\chi}$ για j πεπερασμένου φορέα). Παρατηρούμε ότι για $Re(s) > 0$ η f_- φθίνει εκθετικά για μεγάλα x και η f_+ φθίνει εκθετικά για μικρά x . Όμως για μικρά x , η f_+ πάει σαν $a(s)e^{sx} + b(s)e^{-sx}$, δηλαδή εν γένει αυξάνεται εκθετικά (και ομοίως και η f_-). Για αυτό χρειάζεται η j να είναι πεπερασμένου φορέα.

Οι συχνότητες ψευδοκανονικών τρόπων ταλάντωσης ορίζονται ως τα s_n για τα οποία:

$$f_+(s_n, x) = c(s_n) f_-(s_n, x) \quad (1.13)$$

δηλαδή οι f_- και f_+ είναι γραμμικά εξαρτημένες και η W μηδενίζεται και η συνάρτηση Green απειρίζεται. Οι αντίστοιχες $f_{\pm}(s_n, x)$ λέγονται ψευδο-ιδιοκαταστάσεις.

Υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί s_n ; Για $Re(s) > 0$ δεν υπάρχουν, διότι η λύση της (1.7) είναι φραγμένη και η συνάρτηση Green δεν απειρίζεται. Όμως οι f_- και f_+ σαν λύσεις της (1.8) έχουν μοναδικές επεκτάσεις στο ημιεπίπεδο $Re(s) < 0$. Μπορεί να αποδειχθεί [2] ότι υπάρχει αριθμήσιμα άπειρο σύνολο ριζών της W με $Re(s) < 0$.

Ποια είναι η φυσική σημασία των συχνοτήτων s_n και των των συναρτήσεων $f_{\pm}(s_n, x)$; Επειδή $Re(s) < 0$ η f_+ απειρίζεται για μεγάλα και για μικρά x . Ομοίως και ο χωροχρονικός μετασχηματισμός της $e^{-s_n t} f_+(s_n, x)$. Οπότε δεν έχει φυσική σημασία, σε αντίθεση με τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Θα εξετάσουμε τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του χ σαν μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ($a > 0$)

$$\chi(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+is)t} \hat{\chi}(a+is, x) ds \quad (1.14)$$

Παραμορφώνουμε την καμπύλη ολοκλήρωσης και την προσεγγίζουμε διακριτά ώστε να πάρουμε την εξής προσέγγιση

για μεγάλους χρόνους

$$\chi(t, x) \sim \sum_{n=1}^N a_n e^{(\alpha_n + i\beta_n)t} f_+(s_n, x) \quad (1.15)$$

Όπου $s_n = \alpha_n + i\beta_n$ και $Re(s_{n+1}) < Re(s_n) < 0$. Η προσέγγιση \sim σημαίνει ότι αν διαλέξουμε x_0, x_1, t_0 και ϵ , υπάρχει σταθερά $C(x_0, x_1, t_0, \epsilon)$ ώστε

$$\left| \chi(t, x) - \sum_{n=1}^N a_n e^{(\alpha_n + i\beta_n)t} f_+(s_n, x) \right| < C e^{-(|a_{N+1}| + \epsilon)t} \quad (1.16)$$

να ισχύει για $t > t_0$, $x_0 < x < x_1$ και $C(x_0, x_1, t_0, \epsilon)$ ανεξάρτητο του t . Οι σταθερές a_n εξαρτώνται μόνο από τις αρχικές συνθήκες [2]. Αυτό σημαίνει ότι, για αρχικές συνθήκες πεπερασμένου φορέα, η λύση σε μία πεπερασμένη περιοχή για μεγάλους χρόνους φθίνει εκθετικά. Ο σημαντικότερος όρος είναι ο s_1 που έχει τη συχνότητα με το μεγαλύτερο θετικό μέρος και συνεπώς την πιο αργή απόσβεση.

Δεν είναι σαφές αν η (1.15) μπορεί να γενικευτεί σε μία σχέση όπως η (1.2), δηλαδή σε ένα ανάπτυγμα σε ΨTT . Έχει αποδειχθεί όμως στην περίπτωση του δυναμικού Pöschl-Teller [3].

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση (παντού θετικών) δυναμικών που εκτείνονται μέχρι το άπειρο, όπως το δυναμικό της κυματικής εξίσωσης στη γεωμετρία Schwarzschild. Αρχικές συνθήκες πεπερασμένου φορέα συνεχίζουν να δίνουν φραγμένες λύσεις [9]. Συνεχίζουμε στα βήματα της παραπάνω ανάλυσης. Η πρώτη διαφορά προκύπτει από τον ορισμό των f_{\pm} . Μπορεί να δειχθεί ότι για $Re(s) > 0$ υπάρχει λύση f_+ της ομογενούς (1.8), με $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} f_+(s, x) = 1$, και αντίστοιχα για την f_- . Αυτές είναι καλά ορισμένες συναρτήσεις που προσδιορίζουν την συνάρτηση Green και έχουν αναλυτικές επεκτάσεις στο ημιεπίπεδο $Re(s) > 0$. Δεν είναι εύκολο βέβαια να γράψουμε ρητά αυτές τις συναρτήσεις. Αν το άπειρο δεν είναι κανονικό ιδιάζον σημείο δεν έχουμε καν συγκλίνον ανάπτυγμα των f_{\pm} .

Η δεύτερη σημαντική διαφορά είναι ότι οι αναλυτικές ιδιότητες των f_{\pm} εξαρτώνται από το πως φθίνει το δυναμικό. Μπορεί οι συναρτήσεις να έχουν πολλούς κλάδους, αλλά συνήθως υπάρχει απειρία από ΨTT .

Το γεγονός ότι το δυναμικό δεν μηδενίζεται, μπορεί να σημαίνει ότι δεν υπάρχει εκθετική πτώση των λύσεων με το χρόνο, που είναι η θεμελιώδης ιδιότητα των ΨTT . Αυτό συμβαίνει για δυναμικά που φθίνουν πιο αργά από εκθετικά. Υπάρχει όμως η εξής ανταλλακτική. Έστω ότι μελετάμε την εξέλιξη αρχικών συνθηκών πεπερασμένου φορέα από χρόνο $t = 0$ έως κάποιο μεγάλο χρόνο $t = T$. Μέχρι αυτό το χρόνο οι λύσεις - λόγω ιδιοτήτων αιτιότητας των εξισώσεων - είναι τελείως ανεξάρτητες από το δυναμικό για επαρκώς μεγάλα x . Οπότε μπορεί να δούμε στο διάστημα $0 < t < T$ εκθετική πτώση των λύσεων της μορφής (1.15). Τέτοια συμπεριφορά παίρνουμε στις αριθμητικές προσομοιώσεις. Η ανάλυση είναι πολύ παρόμοια με την διάσπαση α στην χβαντομηχανική, την οποία θα συζητήσουμε σύντομα στην επόμενη ενότητα.

Για πλήρεις παρουσιάσεις της βιβλιογραφίας πάνω στους ΨTT βλέπε [10, 6].

1.2.1 Εξίσωση Schrödinger και κυματική εξίσωση

Θα συγκρίνουμε συνοπτικά την εξίσωση Schrödinger

$$i\dot{\Psi} = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \Psi \quad (1.17)$$

με την κυματική

$$-\ddot{\Phi} = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \Phi \quad (1.18)$$

για το ίδιο δυναμικό $V(x)$.

Η δοκιμαστική λύση των επίπεδων κυμάτων

$$\Psi = e^{-iEt}\psi(x) \quad (1.19)$$

οδηγεί στην χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger

$$-\psi'' + V(x)\psi = E\psi \quad (1.20)$$

Και η αντίστοιχη δοκιμαστική λύση της κυματικής (αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό Laplace)

$$\Phi = e^{st}\phi(x) \quad (1.21)$$

οδηγεί στην

$$\phi'' + V(x)\phi = -s^2\phi \quad (1.22)$$

Που είναι ίδιες αν θέσουμε $E = -s^2$. Συνεπώς η χρονοανεξάρτητη θεωρία σκέδασης -ο τελεστής $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ - δεν 'γνωρίζει' αν πρόκειται να αναλύσουμε την κυματική ή την εξίσωση Schrödinger .

Θεωρούμε θετικό δυναμικό πεπερασμένου φορέα. Από την κβαντομηχανική ξέρουμε ότι δεν υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις. Αυτό είναι εύκολα κατανοητό, γιατί διαφορετικά εκτός του φορέα του δυναμικού η λύση θα πήγαινε σαν $\exp(\pm x\sqrt{-E})$, δηλαδή επιτρέπονται μόνο αρνητικές ενέργειες. Όμως, η θεμελιώδης ενέργεια είναι πάντα μεγαλύτερη από το ελάχιστο του δυναμικού ($V \geq 0$), άρα σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις. Ο τελεστής $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ δεν έχει ιδιοκαταστάσεις και υπάρχει ένα συνεχές φάσμα καταστάσεων σκέδασης. Επίσης ο τελεστής είναι ερμητιανός στις τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Η συνάρτηση Green όπως την κατασκευάσαμε στην (1.9), σαν συνάρτηση του s ορίζεται στο ημιεπίπεδο $Re(s) > 0$, ενώ σαν συνάρτηση του E είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο πλην του αρνητικού άξονα $E < 0$.

Συντονισμοί κβαντομηχανικών τελεστών ορίζονται σαν πόλοι της αναλυτικής επέκτασης της συνάρτησης Green. Στην κβαντομηχανική, είναι δύσκολο να οριστούν οι κανονικοί τρόποι τέτοιων τελεστών, ακριβώς όπως και στην ανάλυση που μας οδήγησε στους ΨΤΤ.

Ιστορικά, οι ΨΤΤ πρωτοεμφανίστηκαν στην ανάλυση του Gamow για την διάσπαση α . Το μοντέλο αποτελείται από δύο τετραγωνικά πηγάδια δυναμικού. Στο πείραμα η διάσπαση συμπεριφέρεται σαν εκθετικό του χρόνου. Παρόλα αυτά η εξίσωση ακόμα και του ελεύθερου σωματιδίου φθίνει σαν δύναμη του χρόνου ($1/t$ στη μονοδιάστατη περίπτωση) και το ίδιο ισχύει για δυναμικά πεπερασμένου φορέα. Η δυσκολία έγκειται στην εύρεση της χρονικής κλίμακας όπου η πτώση είναι εκθετική.

1.3 Εφαρμογή στην μαύρη τρύπα Schwarzschild

Θα μελετήσουμε μικρές διαταραχές ($h_{\mu\nu}$) της μετρικής

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu = -e^{v(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.23)$$

Με τη διαταραγμένη μετρική να είναι

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu} \quad (1.24)$$

που οδηγεί στη διαταραχή των εξισώσεων Einstein

$$\delta G_{\mu\nu} = 4\pi\delta T_{\mu\nu} \quad (1.25)$$

Αναπτύσσουμε κάθε συνιστώσα της $h_{\mu\nu}$ σε τανυστικές σφαιρικές αρμονικές της μορφής

$$\chi(r, \theta, \phi, t) = \sum_{lm} \frac{\chi_{lm}(r, t)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.26)$$

και το διαταρακτικό πρόβλημα ανάγεται σε μία εξίσωση της $\chi_{lm}(r, t)$, που είναι συνάρτηση διαφόρων συνιστωσών της $h_{\mu\nu}$. Η ακτινική συνιστώσα, λοιπόν, μας δίνει την εξίσωση (όπου αγνοούμε το δείκτη m λόγω σφαιρικής συμμετρίας)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi_l(r, t) + \left(\frac{-\partial^2}{\partial r_*^2} \chi_l(r, t) + V(x) \right) = 0 \quad (1.27)$$

όπου η r_* είναι η ακτινική συνιστώσα 'χελώνας'

$$dr_* = \frac{dr}{g_{rr}^0} \quad (1.28)$$

και το V είναι γνωστό ως δυναμικό Regge-Wheeler [19]. Εξαρτάται από τις παραμέτρους M τη μάζα της μαύρης τρύπας, l τον κβαντικό αριθμό και s το σπιν του πεδίου με $s = 0, 1, 2$ για βαθμωτό, ηλεκτρομαγνητικό και βαρυτικό αντίστοιχα. Δηλαδή η (1.27) ισχύει και για βαθμωτά και ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Το δυναμικό φθίνει εκθετικά στον ορίζοντα $r_* \rightarrow -\infty$ και σαν r_*^{-2} στο άπειρο $r_* \rightarrow \infty$.

Θα δούμε, τώρα, πώς εφαρμόζεται η θεωρητική ανάλυση της προηγούμενης ενότητας. Έχει αποδειχθεί [9] ότι αρχικές συνθήκες πεπερασμένου φορέα παραμένουν φραγμένες. Άρα η συνάρτησή Green είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο

$Re(s) > 0$. Το απαιτητικό βήμα είναι η εύρεση των f_{\pm} (βλέπε 1.11), λύσεων της εξίσωσης

$$s^2 \hat{\chi} - \hat{\chi}'' + V \hat{\chi} = 0 \quad (1.29)$$

(με τους τόνους να συμβολίζουν παραγωγή ως προς r_*). Για τις f_{\pm} ισχύει

$$f_+ \sim e^{-sr_*} \text{ για } r_* \rightarrow \infty, \quad f_- \sim e^{+sr_*} \text{ για } r_* \rightarrow -\infty \quad (1.30)$$

Ο ορίζοντας είναι κανονικό ιδιάζον σημείο, οπότε η $f_-(r_*, s)$ μπορεί να γραφτεί ρητά σαν δυναμοσειρά [14]. Δεν ισχύει το ίδιο για την $f_+(r_*, s)$ γιατί το άπειρο είναι μη κανονικό ιδιάζον σημείο. Προκύπτει ότι η f_+ έχει διακλάδωση (δηλαδή είναι πολυκλαδική) στο ημιεπίπεδο $Re(s) < 0$, λόγω της πτώσης σαν r_*^{-2} του δυναμικού στο άπειρο. Εν τέλει αποδεικνύεται ότι υπάρχει απειρία ΨΤΤ και αγνοώντας την ουρά του δυναμικού προκύπτει η προσέγγιση (1.15). Για μία εκτενή παρουσίαση του θέματος βλέπε [2].

Για μεγάλους χρόνους τα πεδία δεν φθίνουν εκθετικά, αλλά σαν κάποια δύναμη του t . Αυτή η ουρά ακτινοβολίας είναι ενδιαφέρουσα γιατί προκαλείται από τον ίδιο το χωρόχρονο [15]. Έχει παρατηρηθεί σε προσομοιώσεις δυναμικής εξέλιξης πεδίων (βαρυτικού, ηλεκτρομαγνητικού και βαθμωτών) σε διάφορες γεωμετρίες, αλλά και σε προσομοιώσεις βαρυτικής κατάρρευσης [15].

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λύσεων (1.30), το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα συνοριακών συνθηκών με $s = -i\omega$. Θυμόμαστε επίσης τον ορισμό των ΨΤΤ (1.13), οπότε καταλήγουμε στην αναζήτηση μίας συνάρτησης ψ , με

$$\psi(r_*) \rightarrow \begin{cases} e^{+i\omega_n r_*} & (r_* \rightarrow -\infty) \\ e^{-i\omega_n r_*} & (r_* \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (1.31)$$

και χρονικής εξάρτησης $e^{-i\omega_n t}$. Δηλαδή η ψ αντιστοιχεί σε εισερχόμενα κύματα στον ορίζοντα και εξερχόμενα στο άπειρο. Στην δική μας ανάλυση που θα ακολουθήσει (στην ενότητα 3.3), θα αρχίσουμε την αναζήτηση των ΨΤΤ από αυτό το σημείο, παραλείποντας τη μαθηματική ανάλυση της συνάρτησης Green.

1.3.1 Μέθοδοι υπολογισμού ΨΤΤ

Θα συζητήσουμε συνοπτικά τις πιο γνωστές μεθόδους επίλυσης του προβλήματος. Οι αρχικές αναζητήσεις από τους Vishveshwara [25], Chandrasekhar και Detweiler [20] έγιναν με αριθμητική εξερεύνηση του μιγαδικού επιπέδου για την εύρεση των ω_n . Αυτή η μέθοδος είναι χρονοβόρα και δεν ενδείκνυται για πολυπαραμετρικούς χώρους. Μία ήμιαναλυτική μέθοδος είναι η προσαρμογή του δυναμικού Regge-Wheeler σε ένα δυναμικό με αναλυτικά γνωστές λύσεις [24]. Οι τιμές συμφωνούν με ακρίβεια $\sim 1\%$ με αυτές του Chandrasekhar. Αυτή η μέθοδος είναι πολύ ειδική και δεν μπορεί να τροποποιηθεί για να δώσει ακριβέστερα αποτελέσματα. Μία διαχρονικά χρήσιμη μέθοδος είναι η προσέγγιση WKB, η οποία σε κάθε αυξανόμενη τάξη δίνει ολοένα και καλύτερες εκτιμήσεις των ω_n . Έχει επεκταθεί μέχρι 6η τάξη [17]. Η πιο

αποτελεσματική μέθοδος είναι αυτή του Leaver [7], με την οποία έχουν υπολογιστεί πάνω από 100.000 συχνότητες της μαύρης τρύπας Schwarzschild [13]. Η λύση εκφράζεται σαν δυναμοσειρά Frobenius και τα αριθμητικά αποτελέσματα προκύπτουν με τη χρήση συνεχών κλασμάτων. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Horowitz, Hubeny [8] που αναπτύχθηκε για AdS χώρους και βασίζεται σε λύση δυναμοσειράς.

1.4 Διέγερση και Παρατήρηση ΨΤΤ

Ένα σημαντικό ζήτημα στην ανάλυση των ΨΤΤ είναι η διέγερση τους. Οι διαταρακτικές εξισώσεις προβλέπουν την ύπαρξή τους, αλλά δεν είναι προφανές ποιοι τρόποι θα διεγερθούν από ποιες αρχικές συνθήκες. Όπως αναφέραμε τα αποτελέσματα της διαταρακτικής μεθόδου συμφωνούν εξαιρετικά καλά με τα αποτελέσματα πλήρως μη γραμμικών εξισώσεων Einstein σε προβλήματα μετωπικής σύγκρουσης μαύρων τρυπών. Παρόλα αυτά στη μελέτη διαταραχών μαύρων τρυπών υπάρχει πάντα η αυθαιρεσία της επιλογής αρχικών συνθηκών.

Η επιλογή αρχικών συνθηκών που να έχουν αστροφυσικό ενδιαφέρον δεν είναι απλή διαδικασία. Η επιτυχία της διαταρακτικής προσέγγισης στη σύγκρουση μαύρων τρυπών, έγκειται στο γεγονός ότι σχεδόν όλη η ακτινοβολία παράγεται από το πολύ ισχυρό πεδίο, στη χρονική διάρκεια της δημιουργίας ορίζοντα. Όποτε, αφενός η ακτινοβολία κατά τα αρχικά στάδια της σύγκρουσης μπορεί να αγνοηθεί [16]. Αφετέρου, το δυναμικό παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην διέγερση των ΨΤΤ. Συγκεκριμένα, στο δυναμικό Regge-Wheeler, με μέγιστο κοντά στο $r = 3M$, οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες στην περιοχή $r < 3M$ φιλτράρονται και οι εξωτερικοί παρατηρητές ανιχνεύουν μόνο το κουδούνισμα των ΨΤΤ.

Κεφάλαιο 2

Η μαύρη τρύπα BTZ

2.1 Ορισμός και ιδιότητες

Οι Bañados, Teitelboim και Zanelli (2001) [12] παρουσίασαν για πρώτη φορά την ομώνυμη (BTZ) 2+1 μαύρη τρύπα. Η γεωμετρία της παρουσιάζει ενδιαφέρον και ομοιότητες με την 3+1 συγγενή της, παρ' όλη την απλή φύση της βαρύτητας στις 2+1 διαστάσεις. Η BTZ έχει αποδειχθεί ένα καλό και απλό μοντέλο για την μελέτη των βαρυτικών και κβαντικών ιδιοτήτων των μαύρων τρυπών γενικά.

Αγνοώντας ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα, η δράση είναι

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g}[R + 2l^{-2}]d^2x dt + B \quad (2.1)$$

όπου ο B είναι επιφανειακός όρος (σημαντικός για την εξαγωγή θερμοδυναμικών ιδιοτήτων του συστήματος) και η ακτίνα καμπυλότητας l σχετίζεται με την κοσμολογική σταθερά $\Lambda = -l^2$.

Οι εξισώσεις κίνησης που εξάγονται από την (2.1), λύνονται από τη μετρική

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2(N^\phi dt + d\phi)^2 \quad (2.2)$$

όπου οι συναρτήσεις $N^2(r)$, $N^\phi(r)$ είναι

$$N^2(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \quad (2.3)$$

$$N^\phi(r) = -\frac{J}{2r^2} \quad (2.4)$$

με $-\infty < t < \infty$ και $0 < \phi < 2\pi$

Οι δύο σταθερές M και J που εμφανίζονται στην (2.2) είναι διατηρούμενες ποσότητες που σχετίζονται με το (ασυμπτωτικά) αναλλοίωτο κάτω από χρονικές μετατοπίσεις (μάζα) και το αναλλοίωτο κάτω από περιστροφές (στροφορμή),

αντίστοιχα. Αυτές οι ποσότητες δίνονται από ολοκληρώματα ροής μέσα από μεγάλους κύκλους στο χωροειδές άπειρο.

Η συνάρτηση $N(r)$ έχει τις δύο εξής ρίζες

$$r_{\pm} = l \left[\frac{M}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

Από αυτές, το r_+ είναι ο ορίζοντας της μαύρης τρύπας. Και για να υπάρχει, πρέπει να έχουμε

$$M > 0, \quad |J| \leq Ml \quad (2.6)$$

Στην ακραία περίπτωση $|J| = Ml$, οι δύο ρίζες της $N^2 = 0$ συμπίπτουν. Επίσης, η ακτίνα άπειρης μετατόπισης προς το ερυθρό $g_{tt}(r = r_{erg}) = 0$ είναι $r_{erg} = Ml$. Και ισχύει $r_- \leq r_+ \leq r_{erg}$.

Η ακτίνα καμπυλότητας $l = \sqrt{-\Lambda}$ είναι το φυσικό μήκος του προβλήματος που χρειάζεται για την ύπαρξη του ορίζοντα σε μία θεωρία με αδιάστατη μάζα. Αν αφήσουμε το l να αυξηθεί, ο ορίζοντας μετακινείται προς το άπειρο και όλος ο χώρος γίνεται το εσωτερικό της μαύρης τρύπας.

Η κατάσταση κενού, δηλαδή ο κενός χωρόχρονος, προκύπτει όταν εξαφανιστεί η μαύρη τρύπα. Που σημαίνει $M \rightarrow 0$ και συνεπώς $J \rightarrow 0$ λόγω της (2.6). Οπότε προκύπτει η μετρική

$$ds_{vac}^2 = -\left(\frac{r}{l}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{r}{l}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.7)$$

Για αρνητικά M προκύπτει κωνική μοναδικότητα χωρίς ορίζοντα, όπως συμβαίνει και στην 3+1 περίπτωση [21]. Τέτοιες γυμνές μοναδικότητες απορρίπτονται στην παρούσα κατανόηση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Υπάρχει όμως μία σημαντική εξαίρεσή. Για $M = -1$ και $J = 0$ η μοναδικότητα εξαφανίζεται. Δεν υπάρχει ορίζοντας, αλλά ούτε και κάποια μοναδικότητα για να αποκρύψει. Η λύση

$$ds^2 = -\left[1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2\right] dt^2 + \left[1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.8)$$

(χώρος anti-de Sitter) είναι και πάλι επιτρεπτός.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι ο χώρος anti-de Sitter προκύπτει σαν 'δέσμια κατάσταση', που απέχει από την από το υπόλοιπο φάσμα κατά μία μονάδα. Αυτή δεν μπορεί να παραμορφωθεί συνεχώς στην κατάσταση κενού (2.7), διότι οι ενδιάμεσες καταστάσεις περιέχουν γυμνές μοναδικότητες. Σημειώνουμε ότι η μάζα μηδενίζεται όταν ο ορίζοντας τείνει στο μηδέν, όπως συμβαίνει στην 3+1 περίπτωση.

Αναφέρουμε συνοπτικά κάποιες ενδιαφέρουσες θερμοδυναμικές ιδιότητες της BTZ. Η εντροπία και η θερμοκρασία

της μάρης τρύπας δίνονται από τους τύπους

$$S = 2L = 4\pi r_+ \quad (2.9)$$

$$T = \left[\frac{\partial S}{\partial M} \right]_J^{-1} = \frac{r_+^2 - r_-^2}{2\pi r_+} \quad (2.10)$$

Καθώς ο ορίζοντας συρρικνώνεται, η θερμοκρασία τείνει στο μηδέν, σε αντίθεση με την 3+1 περίπτωση. Στην ακραία περιστρεφόμενη περίπτωση ($|J| = Ml$) η θερμοκρασία μηδενίζεται, αλλά όχι η εντροπία, όπως στις 3+1 διαστάσεις.

2.2 Μελέτη γεωδαιτικών

2.2.1 Εξισώσεις

Εδώ θα μελετήσουμε τη μορφή των γεωδαιτικών καμπυλών της γεωμετρίας BTZ. Οι χρονοειδείς και φωτοειδείς γεωδαιτικές δίνουν μία καλή κατανόηση του χωροχρόνου. Οι γεωδαιτικές καμπύλες είναι σημαντικές για φαινόμενα όπως η τροχιές πλανητών, η βαρυτική καθυστέρηση σημάτων και το φαινόμενο του βαρυτικού φακού.

Τα διανύσματα Killing είναι $\partial/\partial t$ και $\partial/\partial \phi$. Οι σταθερές τις κίνησης είναι

$$E = -g_{\mu\nu} \xi^\mu u^\nu = \left[-M + \frac{r^2}{l^2} \right] \frac{dt}{d\lambda} + \frac{J}{2} \frac{d\phi}{d\lambda} \quad (2.11)$$

όπου συμβολίζουμε $\xi^\mu = (\partial/\partial t)^\mu = \delta_0^\mu$ το στατικό διάνυσμα Killing και

$$L = g_{\mu\nu} \Phi^\mu u^\nu = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} - \frac{J}{2} \frac{dt}{d\lambda} \quad (2.12)$$

και με $\Phi^\mu = (\partial/\partial \phi)^\mu = \delta_2^\mu$ συμβολίζουμε το περιστροφικό διάνυσμα Killing και το $u^\nu = dx^\nu/d\lambda$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα σε μία καμπύλη με παράμετρο λ και κανονικοποίηση

$$u_\mu u^\mu = -m^2 \quad (2.13)$$

με το m να είναι 1 για χρονοειδείς και 0 για φωτοειδείς. Δεν μπορούμε να θεωρήσουμε τη σταθερά E ως την ενέργεια του σωματιδίου στο άπειρο, διότι ο χώρος δεν είναι ασυμπτωτικά επίπεδος.

Θα κάνουμε τις ακόλουθες αλλαγές κλίμακας

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{r}{l\sqrt{M}}, \quad \hat{\phi} = \phi\sqrt{M}, \quad \hat{t} = \frac{\sqrt{M}}{l} t \\ \hat{\lambda} &= \frac{\lambda}{l}, \quad \hat{E} = \frac{E}{l}, \quad \hat{L} = \frac{L}{l\sqrt{M}} \\ \hat{J} &= \frac{J}{l\sqrt{M}} \end{aligned}$$

και επιστρέφουμε στον συμβολισμό χωρίς καπελάκια. Χρησιμοποιώντας τις (2.11),(2.12),(2.13) παίρνουμε τις γεωδαιτικές εξισώσεις

$$\dot{\phi} = \frac{L(r^2 - 1) + \frac{1}{2}JE}{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)} \quad (2.14)$$

$$\dot{t} = \frac{Er^2 - \frac{1}{2}LJ}{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)} \quad (2.15)$$

$$r^2\dot{r}^2 = -m^2 \left(r^4 - r^2 + \frac{J^2}{4} \right) - ELJ + L^2 + r^2(E^2 - L^2) \quad (2.16)$$

όπου η τελεία σημαίνει $d/d\lambda$. Οι εξισώσεις (2.15) και (2.16) περιγράφουν την κίνηση δοκιμαστικών σωματιδίων με ή χωρίς μάζα και δίνουν το ενεργό δυναμικό.

2.2.2 Λύσεις

Η ακτινική εξίσωση ολοκληρώνεται άμεσα. Η λύση για χρονοειδείς γεωδαιτικές ($m = 1$) είναι

$$r^2(\lambda) = \frac{1}{2}[\alpha + \gamma \sin 2(\lambda - \lambda_0)] \quad (2.17)$$

και για φωτοειδείς ($m = 0$)

$$r^2(\lambda) = \begin{cases} \alpha(\lambda - \lambda_0)^2 - \frac{\beta}{\alpha} & \text{αν } \alpha \neq 0 \\ 2\sqrt{\beta}(\lambda - \lambda_0) & \text{αν } \alpha = 0 \text{ και } \beta \neq 0 \\ \text{σταθ.} & \text{αν } \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

όπου $\alpha = E^2 - L^2 + m^2$, $\beta = L^2 - JEL - \frac{m^2 J^2}{4}$ και $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}$.

Είναι προφανές από την (2.17) ότι το r είναι άνω φραγμένο. Δηλαδή σωματίδια με μάζα δεν μπορούν να διαφύγουν στο άπειρο. Θα δείξουμε ότι αυτό το άνω φράγμα είναι μεγαλύτερο του r_+ , αντικαθιστώντας το r^2 με $u + r_+^2$ στην (2.16).

$$\frac{\dot{u}^2}{4} = -m^2 u^2 + (\alpha - 2m^2 r_+^2)u + \beta - m^2 r_+^4 + \alpha r_+^2$$

χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $r_+^2 + r_-^2 = 1/2$, $2r_+ r_- = J$ και $m = 1$

$$\frac{\dot{u}^2}{4} = -u^2 + B_+ u + C_+^2 \quad (2.19)$$

όπου

$$B_{\pm} = \alpha - 2m^2 r_{\pm}^2 \text{ και } C_{\pm} = r_{\pm} \left(E - \frac{2LJ}{r_{\pm}} \right) \quad (2.20)$$

Είναι φανερό ότι το δεξί μέλος της (2.19) έχει δύο ρίζες μία θετική u_1 και μία αρνητική $-u_2$. Άρα η \dot{u} είναι πραγματική για $-u_2 \leq u \leq u_1$ που έπεται $r_{max}^2 = u_1 + r_+^2 > r_+^2$ γιατί το u_1 είναι θετικό.

Από την (2.16) βλέπουμε ότι υπάρχει ένα κάτω φράγμα (r_{min}) μεγαλύτερο του μηδενός όταν

$$\alpha > 0 \text{ και } \beta < 0 \quad (2.21)$$

Θα δείξουμε ότι $r_{min} < r_-$ αντικαθιστώντας το r^2 με $u + r_-^2$ και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία. Παίρνουμε

$$\frac{\dot{u}^2}{4} = -u^2 + B_- u + C_-^2 \quad (2.22)$$

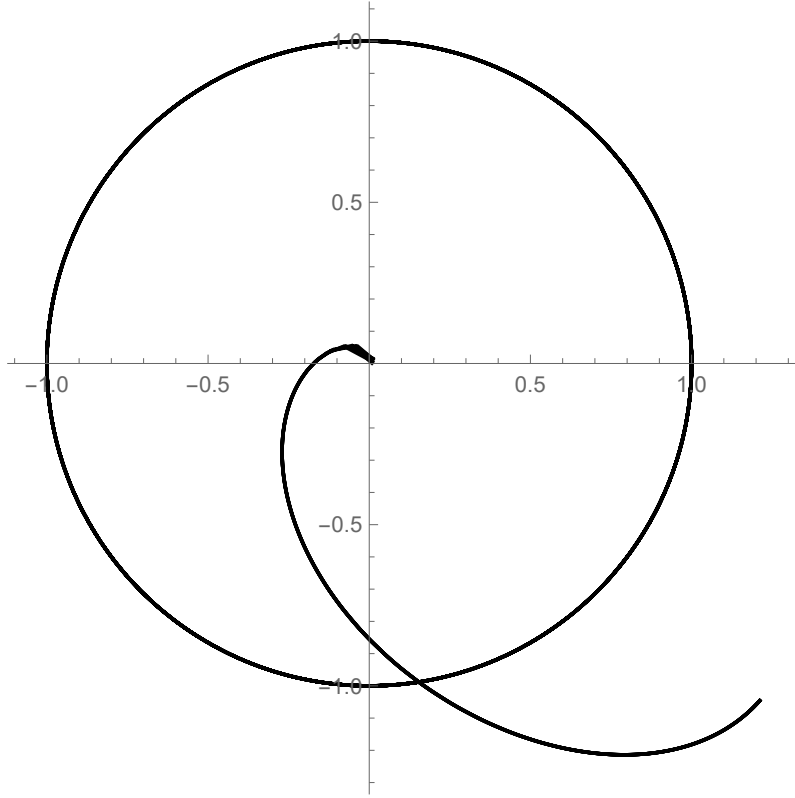
όπου οι συντελεστές B_-, C_- δίνονται από την (2.20). Το u φράσσεται πάλι από τη αρνητική ρίζα του δεξιού μέλους και παίρνουμε $r_{min}^2 = u_{min} + r_-^2 < r_-^2$.

Αν η (2.21) δεν ισχύει τότε η γεωδαιτική καταλήγει στο $r = 0$. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε περίπτωση δεν υπάρχουν σταθερές τροχιές για τα σωματίδια με μάζα, καθώς οι γεωδαιτικές τους διασχίζουν τον ορίζοντα. Ο χώρος χαρακτηρίζεται γεωδαιτικά πλήρης (για χρονοειδείς γεωδαιτικές), διότι όσες γεωδαιτικές δεν καταλήγουν στη μοναδικότητα εκτείνονται απείρως στο παρελθόν και στο μέλλον. Η ερμηνεία της άπειρης έκτασης γίνεται σαφής μόνο αν επεκτείνουμε το χωρόχρονο και επιτρέψουμε στο σωματίδιο να εξέλθει από τον ορίζοντα σε ένα άλλο σύμπαν. Η πλήρης ανάλυση γίνεται με διαγράμματα Penrose στο [5]. Σημειώνουμε ότι αναγκαία συνθήκη για να ισχύει $\beta < 0$ είναι $J \neq 0$, συνεπώς όλες οι τροχιές σωματιδίων με μάζα στην μη περιστρεφόμενη μαύρη τρύπα καταλήγουν στο $r = 0$.

Ομοίως, ο χώρος είναι γεωδαιτικά πλήρης και για τις φωτοειδείς καμπύλες για την περιστρεφόμενη μαύρη τρύπα. Συνεπώς, η περιστρεφόμενη BTZ είναι γεωδαιτικά πλήρης. Παρατηρούμε εδώ ότι για άμαζα σωματίδια υπάρχουν μη φραγμένες τροχιές, όταν $\alpha > 0$ δηλαδή $E^2 > L^2$. Άρα, αυτά τα σωματίδια μπορούν να διαφύγουν. Εξίσου ενδιαφέρουσα είναι η ύπαρξη κυκλικών τροχιών κάθε ακτίνας, όταν $E = JL$ και $|J| = 1$ (ακραία μαύρη τρύπα). Αυτή η περίπτωση μάλιστα επιτρέπει μία κλειστή χρονοειδή καμπύλη με ακτίνα ίση με τον ορίζοντα!

Τα σχήματα 2.1 και 2.2 αναπαριστούν τροχιές σωματιδίου με μάζα που πέφτει στη μη περιστρεφόμενη και περιστρεφόμενη με $J = 0.5$ BTZ μαύρη τρύπα, αντίστοιχα. Έχει σταθερές της κίνησης $E = 2, L = 2$ και χβαντικό αριθμό $m = 1$. Οι άξονες είναι σε κανονικοποιημένες μονάδες $\hat{r} = r/l\sqrt{M}$.

Στον πίνακα 2.1 συνοψίζονται τα ακτινικά όρια της κίνησης σε διάφορες περιπτώσεις. Οι ρητές λύσεις των (2.15), (2.14) για τα ϕ, t μπορούν να βρεθούν στο πίνακα I του [5].

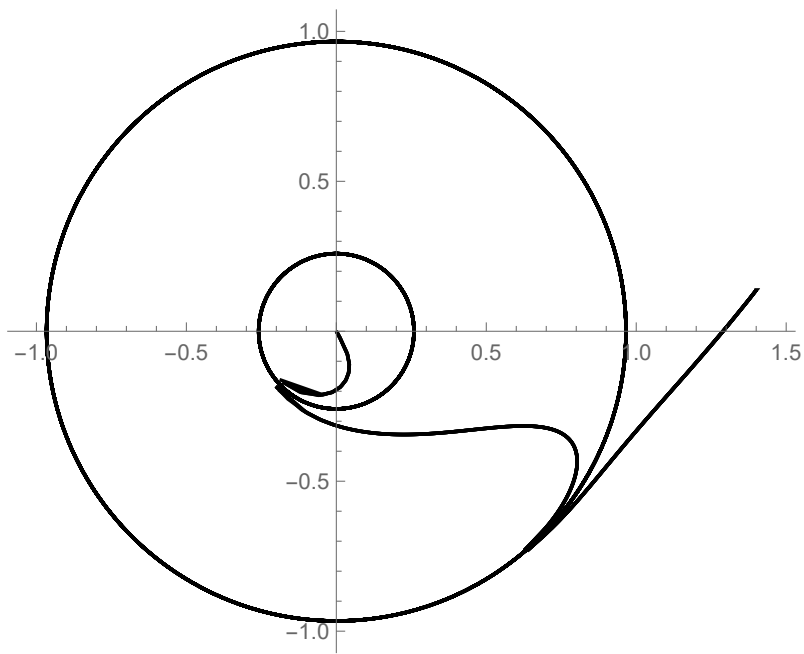


Σχήμα 2.1: Τροχιά σωματιδίου που πέφτει στην BTZ μαύρη τρύπα χωρίς περιστροφή, με $m = 1, L = 2$ και $E = 2$

Πίνακας 2.1: Ακτινικά όρια κινήσεων σωματιδίων με ($m = 1$) ή χωρίς ($m = 0$) μάζα σε διάφορες περιπτώσεις

περιπτώσεις	ακτινικά όρια
$m = 1$	$J = 0 \quad 0 < r^2 < \frac{1}{2}[\sqrt{[(E+L)^2+1][(E-L)^2+1]} + E^2 - L^2 + 1]$ $0 < J \leq 1 \quad \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \geq r^2 \geq \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) & \text{αν } \alpha > 0 \text{ και } \beta < 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$
$m = 0$	$J = 0 \quad 0 < r^2 < \begin{cases} \infty & \text{αν } E^2 \geq L^2 \\ \frac{L^2}{L^2 - E^2} & \text{αν } E^2 > L^2 \end{cases}$ $0 < J \leq 1 \quad \begin{matrix} 0 < r^2 < \infty & \text{αν } E^2 > L^2 \text{ και } L^2 \geq JEL \\ \frac{JEL - L^2}{E^2 - L^2} < r^2 < \infty & \text{αν } E^2 > L^2 \text{ και } L^2 < JEL \\ 0 < r^2 < \frac{JEL - L^2}{E^2 - L^2} & \text{αν } E^2 < L^2 \text{ και } L^2 > JEL \end{matrix}$

$$\alpha = E^2 - L^2 + m^2, \quad \gamma = \sqrt{[(E+L)^2+1+J][(E-L)^2+1-J]}$$



Σχήμα 2.2: Τροχιά σωματιδίου που πέφτει σε περιστρεφόμενη BTZ μαύρη τρύπα με $J = 0.5$, με $m = 1, L = 2$ και $E = 2$

Μέρος II

Υπολογισμός συχνοτήτων

Κεφάλαιο 3

Βαθμωτό πεδίο

3.1 Εισαγωγή

Εδώ θα ασχοληθούμε με την μη περιστρεφόμενη BTZ γεωμετρία με μετρική

$$ds^2 = - \left(-M + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \left(-M + \frac{r^2}{l^2} \right)^{-1} dt^2 + \frac{r^2}{l^2} d\phi^2 \quad (3.1)$$

Όπου M η μάζα της μαύρης τρύπας. Η ακτίνα του ορίζοντα είναι $r_+ = M^{1/2}l$. Στα ακόλουθα θεωρούμε τα βαθμωτά πεδία σαν διαταραχές, δηλαδή πεδία που διαδίδονται σε χώρο με BTZ μετρική. Ακολουθούμε σε γενικές γραμμές τους Cardoso και Lemos [23]. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση διάδοσης θα πάρουμε μία αναλυτική έκφραση για τους ψευδοκανονικούς τρόπους ταλάντωσης και ένα αριθμητικό σχήμα για τον υπολογισμό τους. Στο επόμενο κεφάλαιο (4) θα προχωρήσουμε στον αριθμητικό υπολογισμό και τα αποτελέσματα.

3.2 Βαθμωτές διαταραχές σε BTZ μαύρη τρύπα

Ορίζουμε:

$$f(r) \equiv -M + \frac{r^2}{l^2}$$

Στο εξής θα μετράμε σε μονάδες l δηλαδή του AdS χαρακτηριστικού μήκους. Οπότε επαναορίζουμε $\hat{r} = \frac{r}{l}$ και $\hat{\omega} = \omega l$, που ισοδυναμεί με το να πάρουμε $l = 1$.

Αρχικά, για τις βαθμωτές διαταραχές, μας ενδιαφέρουν λύσεις της ελάχιστα συζευγμένης κυματικής εξίσωσης για βαθμωτά πεδία:

$$\Phi^{;\mu}{}_{;\mu} \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)\Psi = 0 \quad (3.3)$$

όπου $\sqrt{|g|}$ η ορίζουσα της μετρικής:

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{-g^{00}g^{11}g^{22}} = r \quad (3.4)$$

και η αντίστροφη μετρική:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{f} & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Και η (3.3) γίνεται:

$$g^{00}\partial_0^2\Phi + g^{22}\partial_2^2\Phi + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_1(\sqrt{-g}g^{11}\partial_1)\Phi = 0 \quad (3.6)$$

Θεωρούμε την ακόλουθη μορφή για το πεδίο Φ :

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{r}}R(r)e^{-i\omega t}e^{im\phi} \quad (3.7)$$

όπου m ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός.

Η (3.6) γίνεται:

$$\left(\frac{1}{f}\omega^2 - \frac{1}{r^2}m^2\right)\frac{1}{\sqrt{r}}R + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_1\left(\sqrt{-g}g^{11}\partial_1\left(\frac{1}{\sqrt{r}}R\right)\right) = 0 \quad (3.8)$$

Ορίζουμε τη βοηθητική ποσότητα:

$$A \equiv \frac{1}{r}\partial_r(\sqrt{-g}g^{11}\partial_r(\sqrt{r}R)) \quad (3.9)$$

$$rA = \partial_r(rf\partial_r(\sqrt{r}R)) = \partial_r\left(-\frac{r^{-\frac{1}{2}}}{2}fR + r^{\frac{1}{2}}fR'\right) \quad (3.10)$$

$$rA = \frac{r^{-\frac{3}{2}}}{4}fR - \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{2}f'R - \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{2}fR' + \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{2}fR' + r^{\frac{1}{2}}\partial_r(f\partial_rR) \quad (3.11)$$

$$f\sqrt{r}A = f\left(\frac{f}{4r^2} - \frac{f'}{2r}\right)R + f\partial_r(f\partial_rR) \quad (3.12)$$

Η (3.8) γράφεται:

$$f\left(\frac{1}{f}\omega^2 - \frac{1}{r^2}m^2\right)R + \sqrt{r}fA = 0 \quad (3.13)$$

και χρησιμοποιώντας την (3.12) γίνεται

$$f\partial_r(f\partial_r R) - f\left(-\frac{f}{4r^2} + \frac{f'}{2r} + \frac{m^2}{r^2}\right)R + \omega^2 R = 0 \quad (3.14)$$

Αλλάζουμε συντεταγμένες στις λεγόμενες συντεταγμένες χελώνας

$$dr_* \equiv \frac{dr}{f} \Rightarrow f\partial_r = \partial_{r_*} \quad (3.15)$$

$$f\partial_r(f\partial_r R) = \partial_{r_*}^2 R \quad (3.16)$$

Όπου το $r = r_+$ αντιστοιχεί σε $r_* = -\infty$ και το $r = \infty$ αντιστοιχεί σε $r_* = 0$.

Και ορίζουμε το δυναμικό:

$$V \equiv -\frac{f}{4r^2} + \frac{f'}{2r} + \frac{m^2}{r^2} \quad (3.17)$$

Οπότε η (3.14) έρχεται στη μορφή:

$$\partial_{r_*}^2 R + (\omega^2 - fV)R = 0 \quad (3.18)$$

Με το V να είναι θετική συνάρτηση για $r > r_+$, όπως και η f

3.3 Υπολογισμός ψευδοκανονικών συχνοτήτων

Όπως συζητήσαμε στη θεωρία (στην ενότητα 1.3) οι ΨΤΤ μπορούν να οριστούν ως πόλοι μίας συνάρτησης Green, αλλά εδώ θα παραβλέψουμε την πλήρη θεωρητική ανάλυση. Υποθέτοντας ότι η γεωμετρία BTZ έχει κάποιες καλές ιδιότητες, θα ξεκινήσουμε από τα συμπεράσματα της θεωρίας. Οι ΨΚΚ περιγράφουν την αποδιέγερση του πεδίου, δηλαδή συσχετίζονται με λύσεις της (3.18) που (i) έχουν μόνο εισερχόμενη συνιστώσα e^{-imr_*} στον ορίζοντα και (ii) έχουν μόνο εξερχόμενη συνιστώσα e^{imr_*} στο άπειρο. Παρατηρούμε επίσης ότι το δυναμικό αποκλίνει στο άπειρο, οπότε το πεδίο πρέπει να μηδενίζεται εκεί. Το διακριτό φάσμα των μιγαδικών ω , που προκύπτουν από αυτή τη συνθήκη είναι οι ψευδοκανονικές συχνότητες.

3.4 Αριθμητικός υπολογισμός

Για να δουλέψουμε αριθμητικά θα μετασχηματίσουμε την άγνωστη συνάρτηση και θα αλλάξουμε μεταβλητή. Θέλουμε να απαλείψουμε το ω^2 , καθώς το ω είναι μιγαδική ποσότητα και δεν μπορεί να προσδιοριστεί απλά αν γνωρίζουμε το

τετράγωνό του.

ορίζουμε

$$R \equiv e^{-i\omega r_*} \Theta \quad (3.19)$$

$$\partial_{r_*}^2 R = (-\omega^2 \Theta - 2i\omega \partial_{r_*} \Theta + \partial_{r_*}^2 \Theta) e^{-i\omega r_*} \quad (3.20)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.18) έχουμε:

$$f \partial_r (f \partial_r \Theta) - 2i\omega f \partial_r \Theta - fV\Theta = 0 \quad (3.21)$$

$$f^2 \Theta'' + (-2i\omega f + f f') \Theta' - fV\Theta = 0 \quad (3.22)$$

$$-f(r) \frac{d^2}{dr^2} \Theta(r) + [2i\omega - f'(r)] \frac{d}{dr} \Theta(r) + V(r) \Theta(r) = 0 \quad (3.23)$$

Για να μετασχηματίσουμε το διάστημα $r_+ < r < \infty$, σε πεπερασμένο, χρησιμοποιούμε την αλλαγή συντεταγμένων $z = \frac{1}{r}$. Γενικά, μία λύση σε μορφή μιγαδικής δυναμοσειράς θα συγκλίνει σε περιοχή με ακτίνα σύγκλισης όση η απόσταση από τον κοντινότερο πόλο. Εξετάζοντας τους πόλους της (3.23), βρίσκουμε κανονικά ιδιάζοντα σημεία δεύτερης τάξης στα $r = 0$ και $r = \infty$. Για τη μιγαδική μεταβλητή $z = \frac{1}{r}$ και για ανάπτυγμα γύρω από το $z_+ = \frac{1}{r_+} = \frac{1}{\sqrt{M}}$, η ακτίνα σύγκλισης θα φτάσει το $z = 0$ που μας ενδιαφέρει για να επιβάλλουμε τη συνοριακή συνθήκη καθώς $r \rightarrow \infty$.

$$z = \frac{1}{r} \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dr} = -z^2 \frac{d}{dz} \quad (3.25)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = 2z^3 \frac{d}{dz} + z^4 \frac{d^2}{dz^2} \quad (3.26)$$

και συμβολίζουμε:

$$\Theta' = \frac{d\Theta}{dr}, \dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dz} \quad (3.27)$$

Άρα η (3.23) γίνεται

$$-f (z^4 \ddot{\Theta} + 2z^3 \dot{\Theta}) - z^2 (2i\omega - f') \dot{\Theta} + V\Theta = 0 \quad (3.28)$$

$$S(z) \frac{d^2}{dz^2} \Theta + T(z) \frac{d}{dz} \Theta + U(z) \Theta = 0 \quad (3.29)$$

όπου

$$S(z) = -z^4 f = Mz^4 - z^2 \quad (3.30)$$

$$T(z) = -2i\omega z^2 + z^2 f' - 2z^3 f = -2i\omega z^2 + 2Mz^3 \quad (3.31)$$

$$U(z) = V = \left(m^2 + \frac{M}{4}\right) z^2 + \frac{3}{4} \quad (3.32)$$

Στην εξίσωση (3.29) οι Cardoso και Lemos [23] δίνουν λάθος το πρόσημο του S .

$$\frac{S}{M(z-z_+)}\ddot{\Theta} + \frac{T}{M(z-z_+)}\dot{\Theta} + \frac{(z-z_+)U}{M(z-z_+)^2}\Theta = 0 \quad (3.33)$$

Και φτάνουμε στη μορφή:

$$s(z)\frac{d^2}{dz^2}\Theta(z) + \frac{t(z)}{z-z_+}\frac{d}{dz}\Theta(z) + \frac{u(z)}{(z-z_+)^2}\Theta(z) = 0 \quad (3.34)$$

όπου

$$s(z) = \frac{S(z)}{M(z-z_+)} = (z+z_+)z^2 \quad (3.35)$$

$$t(z) = \frac{T(z)}{M} = -2i\frac{\omega}{M}z^2 + 2z^3 \quad (3.36)$$

$$u(z) = \frac{(z-z_+)}{M}U(z) = (z-z_+)\left[\left(\frac{m^2}{M} + \frac{1}{4}\right)z^2 + \frac{3}{4M}\right] \quad (3.37)$$

Τα πολυώνυμά s , t και u είναι 3ου βαθμού και τα αναπτύσσουμε γύρω από τον ορίζοντα $z = z_+$: $s(z) = \sum_{n=0}^3 s_n(z-z_+)^n$ και ομοίως για τα t και u . Παρατηρούμε ότι $s_0 = 2z_+^3$, $t_0 = 2z_+^2(z_+ - i\omega/M)$ και $u_0 = 0$. Και καθώς $s_0 \neq 0$ το $z = z_+$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της (3.34). Από την το θεώρημα Fuchs υπάρχει λύση σε μορφή δυναμοσειράς. Με τη μέθοδο Frobenius ψάχνουμε για λύσεις της μορφής $\Theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(\omega)(z-z_+)^n(z-z_+)^{\alpha}$.

Για να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων κοντά στον ορίζοντα, πρώτα θέτουμε $\Theta(z) = (z-z_+)^{\alpha}$ και αντικαθιστούμε στην (3.34). Ο όρος μηδενικής τάξης δίνει:

$$\alpha(\alpha-1)s_0 + \alpha t_0 = 2z_+^2\alpha(\alpha z_+ - i\frac{\omega}{M}) = 0 \quad (3.38)$$

που έχει λύσεις

$$\alpha = 0, \quad \alpha = i\frac{\omega}{Mz_+} = \frac{i\omega}{\sqrt{M}} \quad (3.39)$$

3.4.1 Εξερχόμενα κύματα στον ορίζοντα

Θα εξετάσουμε τη μορφή των εξερχόμενων κυμάτων στον ορίζοντα, για να τα απορρίψουμε στην τελική λύση. Ακολουθούμε την ανάλυση των Horowitz, Hubeny [8].

Εκφράζουμε τα εξερχόμενα κύματα κοντά στο ορίζοντα σε εισερχόμενες μεταβλητές Έντιγκτον: $v = t + r_*$ και r . Παρατηρούμε ότι

$$r_* = \int \frac{dr}{f(r)} \approx \frac{1}{f'(r_+)} \ln(r - r_+) \quad (3.40)$$

κοντά στον ορίζοντα. Οπότε τα παίρνουν τη μορφή:

$$\Phi \sim e^{-i\omega(t-r_*)} = e^{-i\omega v} e^{-2i\omega r_*} \approx e^{-i\omega v} (r - r_+)^{2i\omega/f'(r_+)} \quad (3.41)$$

Και από τις (3.7), (3.19) έχουμε $\Theta \sim \Phi e^{i\omega v}$

$$\Theta \sim e^{-i\omega(t-r_*)} = e^{-2i\omega r_*} \approx (r - r_+)^{2i\omega/f'(r_+)} \quad (3.42)$$

Στη *BTZ* γεωμετρία $f(r) = -M + r^2$ και $f'(r_+) = 2r_+ = 2\sqrt{M}$ άρα ο εκθέτης που χαρακτηρίζει τα εξερχόμενα είναι

$$\gamma \equiv \frac{2i\omega}{f'(r_+)} = \frac{i\omega}{\sqrt{M}} \quad (3.43)$$

Σε z συντεταγμένες $(r - r_+)^{2i\omega/f'(r_+)} = \left(-\frac{z-z_+}{z+z_+}\right)^{2i\omega/f'(r_+)} \sim (z - z_+)^{i\omega/\sqrt{M}}$

3.4.2 Αριθμητικό σχήμα

Οι δύο λύσεις (3.39) αντιστοιχούν σε εισερχόμενα και εξερχόμενα κύματα στον ορίζοντα. Στις συνοριακές μας συνθήκες δεν υπάρχουν εξερχόμενα κύματα στον ορίζοντα οπότε παίρνουμε $\alpha = 0$. Αυτό αντιστοιχεί σε λύσεις της μορφής:

$$\Theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(\omega) (z - z_+)^n \quad (3.44)$$

Αντικαθιστώντας την (3.44) στην (3.34) παίρνουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^3 [s_m n(n-1)a_n + t_m n a_n + u_m a_n] (z - z_+)^{m-n-2} = 0 \quad (3.45)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l (z - z_+)^l = 0 \quad (3.46)$$

όπου

$$b_l = \sum_{j=0}^l [(l-j)(l-j-1)s_j + (l-j)t_j + u_j] a_{l-j} \quad (3.47)$$

Από την (3.46) έπεται ότι $b_l = 0$ άρα αλλάζοντας το δείκτη σε $k = l - j$:

$$\sum_{k=0}^l [k(k-1)s_{l-k} + kt_{l-k} + u_{l-k}]a_k = 0 \quad (3.48)$$

$$a_l = -\frac{1}{P_l} \sum_{k=0}^{l-1} [k(k-1)s_{l-k} + kt_{l-k} + u_{l-k}]a_k \quad (3.49)$$

Όπου

$$P_l = l(l-1)s_0 + lt_0 \quad (3.50)$$

Το a_0 παραμένει απροσδιόριστο και είναι ο βαθμός ελευθερίας της οικογένειας λύσεων της (3.34) που αποδεχτήκαμε, όπως είναι αναμενόμενο από μία γραμμική εξίσωση. Για να βρούμε τις ρίζες της οικογένειας λύσεων έχουμε την ελευθερία να πάρουμε $a_0 = 1$.

Επειδή τα s, t και u είναι 3ου βαθμού, το άθροισμα στην (3.49) αρχίζει από $k = l - 3$ και ο αριθμητικός υπολογισμός των a_n καθίσταται απλός.

3.5 Αναλυτικός υπολογισμός

Ξεκινάμε από την (3.18) (έχοντας ονομάσει V το fV της (3.18) και προχωράμε σε μία σειρά αλλαγών μεταβλητής με στόχο (α) η νέα μεταβλητή να ορίζεται στο διάστημα $(0, 1)$ και (β) η νέα άγνωστη συνάρτηση να έχει ενσωματωμένη την συμπεριφορά της R στα όρια $r \rightarrow r_+, r \rightarrow \infty$.

$$\frac{d^2}{dr_*^2} R(r) + [\omega^2 - V(r)] R(r) = 0 \quad (3.51)$$

$$dr_* = \frac{dr}{f(r)} \quad (3.52)$$

$$r = -\sqrt{M} \coth(\sqrt{M}r_*) \quad (3.53)$$

$$V(r) = \frac{3}{4}r^2 - \frac{M}{2} - \frac{M^2}{4r^2} + m^2 - \frac{Mm^2}{r^2} \quad (3.54)$$

$$w \equiv \sqrt{M}r_* \quad (3.55)$$

$$V = \frac{3}{4}M \frac{\cosh^2(w)}{\sinh^2(w)} - \frac{M}{2} - \frac{M}{4} \frac{\sinh^2(w)}{\cosh^2(w)} + m^2 - m^2 \frac{\sinh^2(w)}{\cosh^2(w)} \quad (3.56)$$

$$V = \frac{M}{4} \frac{3\cosh^4(w) - 2\cosh^2(w)\sinh^2(w) - \sinh^4(w)}{\sinh^2(w)\cosh^2(w)} + m^2 \frac{1}{\cosh^2(w)} \quad (3.57)$$

$$A \equiv 3\cosh^4(w) - 2\cosh^2(w)\sinh^2(w) - \sinh^4(w) \quad (3.58)$$

$$A = \cosh^4(w) - \sinh^4(w) + 2(1 + \sinh^4(w) + 2\sinh^2(w)) - 2\cosh^2(w)\sinh^2(w) \quad (3.59)$$

$$A = (\cosh^2(w) - \sinh^2(w))(\cosh^2(w) + \sinh^2(w)) + 2[\cosh^2(w) + \sinh^2(w) - \sinh^2(w)(\cosh^2(w) - \sinh^2(w))] \quad (3.60)$$

$$A = 3\cosh^2(w) + \sinh^2(w) \quad (3.61)$$

$$V = \frac{M}{4\cosh^2(w)} + \frac{3M}{4\sinh^2(w)} + \frac{m^2}{\cosh^2(w)} \quad (3.62)$$

αλλάζουμε μεταβλητή:

$$x \equiv \frac{1}{\cosh^2(w)} = \frac{1}{\cosh^2(\sqrt{Mr_*})} \quad (3.63)$$

$$\frac{dx}{dr_*} = -\frac{2}{\cosh^3(w)} \sinh(w)\sqrt{M} \quad (3.64)$$

$$\frac{d^2x}{dr_*^2} = 2M \frac{2\cosh^2(w) - 3}{\cosh^4(w)} \quad (3.65)$$

Οπότε η (3.62) γίνεται

$$V = \frac{M}{4}x + \frac{3M}{4} \frac{x}{1-x} + m^2x \quad (3.66)$$

$$\frac{V}{Mx} = \frac{3}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} + \frac{m^2}{M} \quad (3.67)$$

Τώρα από τις σχέσεις:

$$\frac{d}{dr_*} = \frac{dx}{dr_*} \frac{d}{dx} \quad (3.68)$$

$$\frac{d^2}{dr_*^2} = \frac{d^2x}{dr_*^2} \frac{d}{dx} + \left(\frac{dx}{dr_*} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \quad (3.69)$$

και αντικαθιστώντας μαζί με τις (3.64), (3.65) στην (3.51)

$$\frac{4M \sinh^2(w)}{\cosh^6(w)} \partial_x^2 R + 2M \frac{2\cosh^2(w) - 3}{\cosh^4(w)} \partial_x R + [\omega^2 - V] R = 0 \quad (3.70)$$

$$4(1-x)x^2 M \partial_x^2 R + 2Mx(2-3x) \partial_x R + [\omega^2 - V] R = 0 \quad (3.71)$$

Και καταλήγουμε στην

$$(1-x)x \partial_x^2 R + \frac{1}{2}(2-3x) \partial_x R + \bar{V} R = 0 \quad (3.72)$$

$$\bar{V} \equiv \frac{\omega^2}{4Mx} - \frac{V}{4Mx} \quad (3.73)$$

Από την (3.67)

$$\bar{V} = \frac{\omega^2}{4Mx} - \frac{3}{4^2} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{4^2} - \frac{m^2}{4M} \quad (3.74)$$

Αλλάζουμε άγνωστη συνάρτηση

$$R \rightarrow \frac{(1-x)^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{i\omega}{2\sqrt{M}}}} y \equiv hy \quad (3.75)$$

$$\partial_x R = h'y + hy' \quad (3.76)$$

$$\partial_x^2 R = h''y + 2h'y' + hy'' \quad (3.77)$$

Η (3.72) γράφεται

$$AR'' + BR' + \bar{V}R \equiv (1-x)x \partial_x^2 R + \frac{1}{2}(2-3x) \partial_x R + \bar{V}R = 0 \quad (3.78)$$

και γίνεται

$$Ahy'' + (2h'A + hB)y' + (h''A + h'B + \bar{V}h)y = 0 \quad (3.79)$$

$$\hat{A}y'' + \hat{B}y' + \hat{V}y \equiv Ay'' + \left(2\frac{h'}{h}A + B\right)y' + \left(\frac{h''}{h}A + \frac{h'}{h}B + \bar{V}\right)y = 0 \quad (3.80)$$

Θα υπολογίσουμε τα $\hat{A}, \hat{B}, \hat{V}$.

$$\hat{A} \equiv A = (1-x)x \quad (3.81)$$

ορίζουμε $g \equiv (1-x)^{\frac{3}{4}}$, $f \equiv x^{-\alpha}$, $\alpha \equiv \frac{i\omega}{2\sqrt{M}}$ ώστε $h = gf$

$$\frac{h'}{h} = \frac{g'}{g} + \frac{f'}{f} \quad (3.82)$$

$$= \frac{3}{4}(x-1)^{-1} - \alpha x^{-1} \quad (3.83)$$

$$\frac{h''}{h} = \frac{g''}{g} + 2\frac{f'g'}{fg} + \frac{f''}{f} \quad (3.84)$$

$$= -\frac{13}{44}(x-1)^{-2} - 2\frac{3}{4}\alpha(x(x-1))^{-1} - \alpha(-\alpha-1)x^{-2} \quad (3.85)$$

$$\hat{B} \equiv 2\frac{h'}{h}A + B \quad (3.86)$$

$$\hat{B} = 2\left(\frac{3}{4}(x-1)^{-1} - \alpha x^{-1}\right)x(1-x) + \frac{1}{2}(2-3x) \quad (3.87)$$

$$= -\frac{3}{2}x - \alpha(1-x) + 1 - \frac{3}{2}x \quad (3.88)$$

Οπότε

$$\hat{B} = 1 - \alpha - (3-\alpha)x \quad (3.89)$$

$$\hat{V} \equiv \frac{h''}{h}A + \frac{h'}{h}B + \bar{V} \quad (3.90)$$

$$\frac{h''}{h}A = \left[-\frac{3}{4^2}(x-1)^{-2} - \frac{3}{4}\alpha(x(x-1))^{-1} + \alpha(\alpha+1)x^{-2}\right]x(1-x) \quad (3.91)$$

$$= -\frac{3}{4^2}\frac{x}{1-x} - \frac{3}{4}\alpha + (\alpha+\alpha^2)\frac{1-x}{x} \quad (3.92)$$

$$\frac{h'}{h}B = \left(\frac{3}{4}(x-1)^{-1} - \alpha x^{-1}\right)\frac{1}{2}(2-3x) \quad (3.93)$$

$$= -\frac{3}{4^2}\frac{4-6x}{1-x} - \alpha\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\right) \quad (3.94)$$

βάζοντας τις (3.92), (3.94), (3.74) στην (3.90)

$$\hat{V} = -\frac{3}{4^2} \frac{4-5x}{1-x} + \frac{\alpha^2}{x} - \alpha^2 + 2\alpha + \frac{\omega^2}{4Mx} - \frac{3}{4^2} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{4^2} - \frac{m^2}{4M} \quad (3.95)$$

$$= -1 + 2\alpha - \alpha^2 - \frac{m^2}{4M} \quad (3.96)$$

Βάζοντας τις (3.81), (3.89), (3.96) στην εξίσωση (3.80) έχουμε

$$(1-x)xy'' + [c + (1+a+b)x]y' - aby = 0 \quad (3.97)$$

όπου $a = 1 + \frac{im}{2\sqrt{M}} - \frac{i\omega}{2\sqrt{M}}$, $b = 1 - \frac{im}{2\sqrt{M}} - \frac{i\omega}{2\sqrt{M}}$ και $c = 1 - \frac{i\omega}{\sqrt{M}}$. Αυτή είναι η κανονική μορφή της υπεργεωμετρικής εξίσωσης. Από τους ορισμούς των x, r_* (3.63) και (3.53) έχουμε

$$x = \frac{r^2 - r_+^2}{r^2} \quad (3.98)$$

Άρα το $x = 0$ αντιστοιχεί στον ορίζοντα και το $x = 1$ στο $r = \infty$.

3.5.1 Εξερχόμενα κύματα στον ορίζοντα

Θα εξετάσουμε τη μορφή των εξερχόμενων κυμάτων στον ορίζοντα, για να τα απορρίψουμε στην τελική λύση. Ακολουθούμε ξανά την ανάλυση των Horowitz, Hubeny [8]. Παρατηρούμε ότι

$$r_* = \int \frac{dr}{f(r)} \approx \frac{1}{f'(r_+)} \ln(r - r_+) \quad (3.99)$$

κοντά στον ορίζοντα. Οπότε έχουν τη συμπεριφορά:

$$e^{-i\omega(t-r_*)} \approx (r - r_+)^{i\omega/f'(r_+)} \quad (3.100)$$

Στη *BTZ* γεωμετρία $f(r) = -M + r^2$ και $f'(r_+) = 2r_+ = 2\sqrt{M}$ άρα ο εκθέτης που τα χαρακτηρίζει είναι

$$\frac{i\omega}{f'(r_+)} = \frac{i\omega}{2\sqrt{M}} = \alpha \quad (3.101)$$

Αντίστοιχα, τα εισερχόμενα είναι της μορφής $e^{-i\omega(t+r_*)} \approx (r - r_+)^{-i\omega/f'(r_+)} = (r - r_+)^{-\alpha}$

3.5.2 Λύση της υπεργεωμετρικής

Μας ενδιαφέρουν λύσεις της (3.97) γύρω από το $x = 0$ που αντιστοιχεί στον ορίζοντα. Αυτές είναι $F(a, b, c, x)$ και $x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x)$, όπου $1-c = i\omega/\sqrt{M} \equiv 2\alpha$. Και από την (3.75) οι λύσεις με φυσική σημασία είναι

$$R_1 = (1-x)^{3/4}x^{-\alpha}F(a, b, c, x) \quad (3.102)$$

$$R_2 = (1-x)^{3/4}x^{+\alpha}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x) \quad (3.103)$$

Εδώ παρατηρούμε ότι $x = \frac{r+r_{\pm}}{r^2}(r-r_{\pm}) \rightarrow x^{\pm\alpha} \approx (r-r_{\pm})^{\pm\alpha}$ κοντά στον ορίζοντα. Η R_2 αντιστοιχεί σε εξερχόμενα κύματα και απορρίπτεται. Οπότε [11] η R_1 γίνεται

$$R_1 = (1-x)^{3/4}x^{-\alpha}(1-x)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-z) \\ + (1-x)^{3/4}x^{-\alpha}\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a, b, c-a-b+1, 1-z) \quad (3.104)$$

Θα επιβάλλουμε τον μηδενισμό¹ της R_1 στο άπειρο $r = \infty$, $x = 1$. Ο πρώτος όρος πάει σαν $(1-x)^{c-a-b+3/4} = (1-x)^{-1/4} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \infty$, ενώ ο δεύτερος πάει σαν $(1-x)^{3/4} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$. Ο μηδενισμός του πρώτου όρου δίνει:

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 0$$

$$a = -n \quad \text{ή} \quad b = -n \quad (3.105)$$

Με n φυσικό. Άρα

$$\omega = \pm m - 2i\sqrt{M}(1+n) \quad (3.106)$$

¹Το βαθμωτό πεδίο πάει σαν $\frac{1}{\sqrt{r}}R = (1-x)^{1/4}R$, αλλά αυτό δεν αλλάζει την ανάλυση

Κεφάλαιο 4

Αποτελέσματα για βαθμωτό πεδίο

4.1 Κώδικας

Ο κώδικας 4.1, γραμμένος σε Fortran 90, υλοποιεί την αριθμητική μέθοδο που περιγράψαμε στην ενότητα 3.4.2. Εκτελεί τον υπολογισμό σε ένα πλέγμα σημείων του μιγαδικού επιπέδου ω . Οι διαστάσεις και το κέντρο του πλέγματος, καθώς και η πυκνότητα των σημείων στο πλέγμα, καθορίζονται από τον χρήστη. Το πρόγραμμα δίνει στην έξοδο ένα αρχείο του οποίου οι στήλες είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ω και της συνάρτησης ψ και τον όρο στον οποίο αποκόπηκε το άπειρο άθροισμα $N_{truncation}$. Ο χρήστης καθορίζει το μέγιστο πλήθος όρων της δυναμοσειράς n_{terms} . Αν προκύψει υπερχείλιση ο αλγόριθμος αποκόπτει το άθροισμά στο προηγούμενο βήμα και το αποθηκεύσει ως $N_{truncation}$. Διαφορετικά $N_{truncation} = n_{terms}$. Εν γένει το $N_{truncation}$ είναι συνάρτηση του ω .

Κώδικας 4.1: Πρόγραμμα για υπολογισμό δυναμοσειράς ψ

```
1 program root_find
2     ! file: my_root_finder.f90
3     ! calculates the value of  $\psi$  (power series of at most nterm terms) on the points of a grid
4     ! in case of imminent overflow ( $|a| > 10^{303}$ ) or underflow ( $|a| > 10^{-300}$ ) the series is
5     ! terminated at n_truncation (which might differ for different points on the grid)
6     ! the grid has dimensions (grid_R x grid_I)
7     ! and lies on the parallelogram ( $\omega_{0,R} - \delta_R, \omega_{0,R} + \delta_R$ )x( $\omega_{0,I} - \delta_I,$ 
8     !  $\omega_{0,I} + \delta_I$ )
9     ! input: m1 , Mass      [physical      parameters]
10    !          omega0_R , omega0_I , grid_R (int), grid_I (int), delta_R , delta_I      [grid
11    !          parameters]
12    !          nterms (int) [numerical      parameter ]
13    ! output file: results.dat
14    !first three line (hashed out) contain initial conditions
15    ! data from fifth line onward, in columns of:
16    !Im( $\omega$ ) , Re( $\omega$ ) , Im( $\psi$ ) , Re( $\psi$ ) , n_truncation
```



```

14
15 implicit none
16 COMPLEX*16 :: s(0:3),t(0:3),u(0:3),a(0:3)
17 COMPLEX*16 :: omega,unit,zp,den,psi0,P,a_n
18 REAL*8      :: m_sq,Mass,zplus,delta_R , delta_I ,omega0_R , omega0_I
19 REAL*8      :: cr,ci,cr_min,cr_inc,ci_inc,ci_max,ml,c
20 INTEGER     :: n,k,nterms,ir,ii,grid_R , grid_I
21 !=====
22 !input
23 print *, '# enter m , M      , omega0_R , omega0_I , grid_R , grid_I , delta_R , delta_I ,
nterms:'
24 read  *,  ml , Mass , omega0_R , omega0_I , grid_R , grid_I , delta_R , delta_I , nterms
25
26 m_sq = DBLE(ml*ml)
27 zplus=1.d0/sqrt(Mass)
28 unit=CMPLX(0.d0,1.d0)
29 zp=CMPLX(zplus,0.d0)
30
31 open(unit=11,file='results.dat',form='formatted')
32 write(11,*) '# M = ', Mass , ' m = ', ml , ' nterms = ', nterms
33 write(11,60) '# ', 'omega0_R','omega0_I','grid_R', 'grid_I','delta_R','delta_I'
34 write(11,40) '# ',      omega0_R , omega0_I , grid_R , grid_I , delta_R , delta_I
35 write(11,50) '# ', 'Re(omega)','Im(omega)','Re(psi)','Im(psi)','n_truncation'
36 !=====
37 !iterations
38
39 cr_min = omega0_R-delta_R
40 cr_inc = 2.d0 * delta_R /grid_R
41 ci_max = omega0_I+delta_I      !ci_min = omega0_I-delta_I
42 ci_inc = 2.d0 * delta_I / grid_I
43
44 do ir=1,grid_R
45     cr = cr_min + cr_inc*ir
46     do ii=1,grid_I
47         ci = ci_max - ci_inc*ii
48         omega = CMPLX(cr,ci)
49         !=====
50         ! coefficients
51
52         ! s = (z + z_+) * z^2
53         s(0) = 2.d0*zp**3
54         s(1) = 5.d0*zp**2
55         s(2) = 4.d0*zp

```

```

56     s(3) = 1.d0
57     ! t = 2(z^3 - i*omega/M * z^2 )
58     t(0) = 2.d0*(      zp**3 -      unit*omega/Mass*zp**2)
59     t(1) = 2.d0*(3.d0*zp**2 - 2.d0*unit*omega/Mass*zp)
60     t(2) =      6.d0*zp      - 2.d0*unit*omega/Mass
61     t(3) = 2.d0
62     ! u = ( (m^2 / M + 1/4) * z^2 + 3/4M ) * (z - z_+)
63     ! c = m^2 / M + 1/4
64     c      = m_sq / Mass + 1.d0/4.d0
65     u(0) = (0.d0,0.d0)
66     u(1) =      c * zp ** 2 + 3.d0/( 4.d0*Mass )
67     u(2) = 2.d0 * c * zp
68     u(3) =      c
69
70     a(0) =(1.d0,0.d0)
71     den = -t(0)
72     a(1) = u(1)*a(0)/den
73     den = -2.d0*s(0)-2.d0*t(0)
74     a(2) = u(2)*a(0)/den+(t(1)+u(1))*a(1)/den
75     den = -6.d0*s(0)-3.d0*t(0)
76     a(3) = ( u(3)*a(0)  + ( t(2)+u(2) )*a(1)  &
77             + ( 2.d0*s(1)+2.d0*t(1)+u(1) ) * a(2) )/den
78     !=====
79     !calculate a(n) and ψ for n > 3
80     psi0=(1.d0,0.d0)
81     do n=1,3
82         psi0=psi0+a(n)*(-zp)**n
83     enddo
84
85     do n=4,nterms
86         a_n=0.d0      ! a_n is the coeff of (-z_+)^n
87         den = -n*(n-1)*s(0)-n*t(0)-u(0)
88         do k = 1,3
89             P= (n-k)*(n-k-1)*s(k)+(n-k)*t(k)+u(k)
90             ! a(n) stores the previous 3 coeff:
91             !a_(n-1) to a_(n-3)
92             a_n=a_n+P*a(4-k)/den      !formula (3.49)
93         enddo
94
95         if ( abs(a_n) .ge. 1.d303  &
96             .or. abs(a_n) .le. 1.d-300 ) EXIT
97         !checks imminent overflow or underflow
98

```

```

99     psi0=psi0+a_n*(-zp)**n
100     !update
101     do k = 0,2
102         a(k) = a(k+1)
103     enddo
104     a(3)=a_n
105     enddo
106
107     if(abs(psi0).ge.20) psi0=20.d0*psi0/abs(psi0)
108     write(11,30) cr,ci,DBLE(psi0),DIMAG(psi0) , n-1
109     !n-1 = n_truncation
110
111     enddo !ii
112 enddo !ir
113
114 close(11)
115 30 format(4f18.8,I14)
116 50 format(A3,A15,4A18)
117 40 format(A2,2f14.3,2I18,2f18.3)
118 60 format(A2,A14,5A18)
119 end program root_find
120 !=====

```

Κώδικας 4.2: Πρόγραμμα φλοιού για υπολογισμό του Πίνακα 4.1

```

1 #!/bin/bash
2 # This bash script helps generate the data for Table 4.1
3 # It will check convergence of Re( $\omega$ ) -> 0 as m->0
4 touch trash
5 for sqM in 0.5 1 5 10 50 100 1000; do
6     M=$(awk -v m=$sqM 'BEGIN{print m*m}' trash)
7     omega_Im=$(awk -v m=$sqM 'BEGIN{print -2*m}' trash)
8     for m in 0.1 0.05 0.001; do
9         # run root_finder near (0, -2isqrt(M) )
10        echo $m $M 0 $omega_i 400 200 0.2 .1 500 | ./mrf>trash ;
11        # symmetry makes the value of  $|\psi|^2$ 
12        # at +/- m + 2i*\sqrt(M) almost the same
13        # find this value and store it in dp
14        dp=$(d=1;grep -v '#' results.dat| awk '$3!="NaN"' | awk -v d=$d '$4*$4+$3*$3<d {x=$0;d=$4*
15        $4+$3*$3};END{print d}');)
16        # allow small asymmetry: look for  $|\psi|^2 < 2*dp$ 
17        # check if the result is two values of  $\omega$ 
18        grep -v '#' results.dat|awk '$3!="NaN"'|awk -v d=$dp -v m=$m -v M=$M 'BEGIN{d=2*d;n=0} $4*
19        $4+$3*$3<=d {print $0,"      ",m, $4*$4+$3*$3;n+=1} END{if (n>2) print "# Warning: more than 2

```

```

    minima for M=" ,M," ,m=" ,m}';
18 done > M$M.dat
19 echo -----
20 echo "M= " $M
21 # the resulting function is of the form of an absolute value.
22 # we cannot fit to an absolute value
23 # so we'll invert the negative branch
24 # and fit to a straight line
25 # we fit  $\omega_r(m)=m$  to take account of the errors in  $\omega_r$ 
26 echo "# $\omega_r$            $\omega_i$           ..          ..          n_terms m           $\delta\omega_r$ " > temp
27 grep -v '#' M$M.dat |awk 'NR>1{if ($1<0) {x=-$6;print $1,$2,$3,$4,$5,x,2*0.2/400,$7} else
print $1,$2,$3,$4,$5,$6,2*0.2/400,$7}' >> temp
28 column -t temp > M$M.dat
29 gnuplot -d -e "f(x) = a*x+b;a=1.1;b=0.1;fit f(x) 'M$M.dat' u 6:1:7 yerrors via a,b"
30 # in case of a perfect fit the gnuplot fit will crash
31 # we can check if the crash is actually due to a perfect fit
32 # by tweaking the data by a small amount
33 echo "perturbation of the data gives: "
34 awk '{NR==2 ? x= 1.00001*$1 : x= $1;print x,$2,$3,$4,$5,$6,$7}' M$M.dat > temp; mv temp M$M.
dat
35 gnuplot -d -e "f(x) = a*x+b;a=1.1;b=0.1;fit f(x) 'M$M.dat' u 6:1:7 yerrors via a,b"
36 done

```

Κώδικας 4.3: Κώδικας για υπολογισμό του Πίνακα 4.2

```

1 #!/bin/bash
2 # makes various plots to test the convergence of  $\psi$  at the theoretical value
3 echo 'Give sqrt(M) '
4 read sqM
5 touch trash
6 M=$(awk -v m=$sqM 'BEGIN{print m*m}' trash)
7 omega_Im=$(awk -v m=$sqM 'BEGIN{print -2*m}' trash)
8 # make and run executable
9 gfortran my_root_finder.f90 -o mrf
10 echo 1 $M 1 $omega_Im 200 200 0.1 0.1 500 | ./mrf>trash ;
11 # find minimum and N_truncation at the minimum
12 echo 'minimum of  $|\psi|$ :'
13 d=1;grep -v '#' results.dat |awk -v d=$d \
14 '$4*$4+$3*$3<d {x=$0;d=$4*$4+$3*$3};END{print x,"          ",d}';
15 N_min=$(d=1;grep -v '#' results.dat |awk -v d=$d '$4*$4+$3*$3<d {x=$0;d=$4*$4+$3*$3};END{print x,"
          ",d}'|awk '{print $5}');)
16 # we will run root_finder for some values of N_terms near the estimate we got
17 echo 'N = ' $N_min
18 N1=$((N_min-43))

```

```

19 N2=$((N_min+2))
20 echo '# M= ' $M > M${M}.dat
21 for N in $(seq ${N1} 4 ${N2}); do
22 echo 1 $M 1 $omega_Im 200 200 .1 .1 $N | ./mrf >trash;
23 d=1;grep -v '#' results.dat |awk -v d=$d '$4*$4+$3*$3<d {x=$0;d=$4*$4+$3*$3};END{print x,"",d
    }';
24 done >> M${M}.dat
25 # plots a figure like Figure 4.1
26 gnuplot -d -p -e 'set multiplot layout 2,2 columnsfirst' \
27 -e "set title '|ψ_{min}|^2(N)' " -e "plot 'M${M}.dat' u 5:6 not" \
28 -e "set title 'Re(ω_{min})(N_{truncation})' " \
29 -e "plot 'M${M}.dat' u 5:1 not" \
30 -e "set title 'ω_{min}(N_{truncation})' " \
31 -e "splot 'M${M}.dat' u 1:2:5 not" \
32 -e "set title 'Im(ω_{min})(N_{truncation})' " \
33 -e "plot 'M${M}.dat' u 5:2 not"

```

4.2 Μέθοδος και Αποτελέσματα

m=1

Για κάθε τιμή της μάζας M , τρέχουμε τον κώδικα και βρίσκουμε το ελάχιστο στη γειτονιά της θεωρητικής τιμής. Επίσης αποθηκεύουμε το $N_{truncation}$, για να τρέξουμε τον κώδικα ξανά και να δούμε την σύγκλιση. Στο σχήμα 4.1 φαίνεται (από πάνω αριστερά και όπως πάνε οι δείκτες του ρολογιού) το μέτρο της ψ στο ελάχιστο, η θέση του ελαχίστου και οι συντεταγμένες του ελαχίστου σαν συναρτήσεις του $N_{truncation}$ για $M = 100$. Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση έχει ολοκληρωθεί καθώς η θέση του ελαχίστου είναι σταθερή συνάρτηση του $N_{truncation}$. Ο κώδικας 4.3 κατασκευάζει αυτά τα γραφήματα.

Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον πίνακα 4.2 και συμφωνούν με ακρίβεια τουλάχιστον 10^{-4} με τις θεωρητικές τιμές. Αποκλίσεις από τη θεωρητική τιμή, της τάξης του 10^{-5} , παρατηρούνται για μεγάλα M . Αυτές σχετίζονται με μικρά $N_{truncation}$. Καθώς μεγαλώνει το M ή δυναμοσειρά συγκλίνει όλο και γρηγορότερα προκαλώντας υπερχειλίση ή υπορροή για $N_{truncation} \sim 150$. Για να αυξηθεί η ακρίβεια χρειάζονται αριθμοί κινητής υποδιαστολής με περισσότερα από 16 bits.

m=0

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένα πρόβλημα τόσο στην θεωρητική ανάλυση, όσο και στην αριθμητική μέθοδο. Παρόλα αυτά η θεωρητική πρόβλεψη (3.106) ισχύει για $m = 0$, δηλαδή $\omega = -2i\sqrt{M}$. Για να καταλάβουμε το πρόβλημα παρατηρούμε ότι οι ρίζες της (3.39) είναι $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_2 = -2$. Συνεπώς, δεν μπορούμε θεωρητικά να αποκλείσουμε τη

μία ρίζα (εφόσον καμία δεν είναι μιγαδική). Όσον αφορά στην αριθμητική μέθοδο η α_2 προκαλεί το μηδενισμό του P_2 (3.50) και τον απειρισμό όλων των ποσοτήτων που ακολουθούν στο αριθμητικό σχήμα.

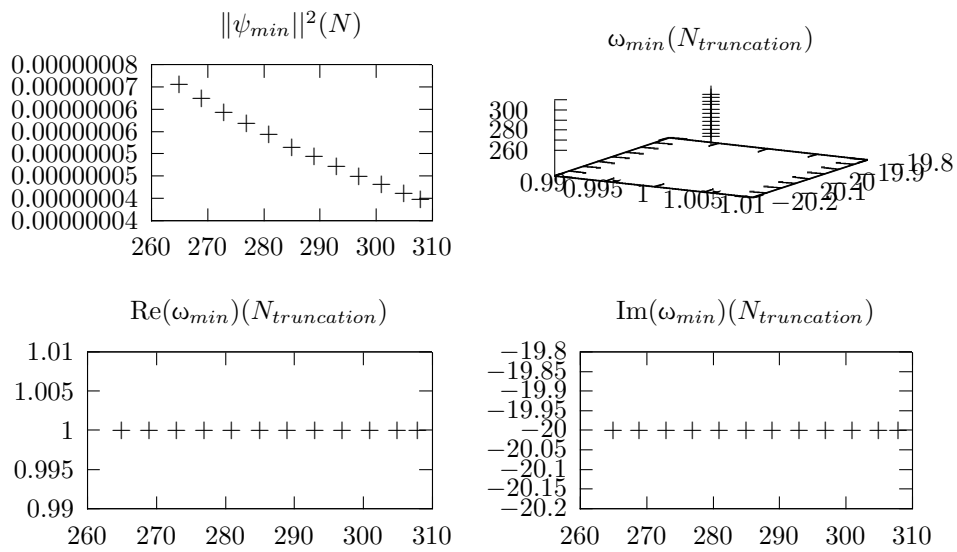
Θα λύσουμε το πρόβλημα επιτρέποντας στο m να πάρει τιμές στο διάστημα $(0, 1)$ και αφήνοντας το να τείνει στο μηδέν θα βρούμε ότι η ρίζα τείνει στη θεωρητική τιμή. Βρίσκοντας τις θέσεις του ελαχίστου για $m = 0.1, 0.05, 0.001$, προκύπτει ότι οι τιμές του $Re(\omega_{min})$ πέφτουν σε μία ευθεία που (με την ακρίβεια της μεθόδου) διέρχεται από το σημείο ($m = 0, Re(\omega_{min}) = 0$). Ο κώδικας 4.2 χρησιμεύει για αυτή τη διαδικασία. Οι τιμές του φανταστικού μέρους της ω είναι όπως προβλέπει η θεωρία. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον πίνακα 4.1.

\sqrt{M}	Re(ω)	-Im(ω)
1/2	0.000	1.000
1	0.000	2.000
5	0.000	10.000
10	0.000	20.000
50	0.000	100.001
100	0.000	200.002
1000	0.000	2000.051

Πίνακας 4.1: Ψευδοκανονικές συχνότητες βαθμωτού για $M = 1, m = 0$

\sqrt{M}	Re(ω)	-Im(ω)
1/2	1.000	1.000
1	1.000	2.000
5	1.000	10.000
10	1.000	20.000
50	1.000	100.001
100	1.000	200.002
1000	0.999	2000.051

Πίνακας 4.2: Ψευδοκανονικές συχνότητες βαθμωτού για $M = 1, m = 1$



Σχήμα 4.1: Θέση ελαχίστου και τιμή της δυναμοσειράς συναρτήσεως πλήθους όρων αποκοπής. $M = 100, m = 1$

Κεφάλαιο 5

Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

5.1 Εισαγωγή

Συνεχίζουμε την ανάλυσή $\Psi\Psi T$ σε χωρόχρονο με μη περιστρεφόμενη BTZ μετρική.

$$ds^2 = - \left(-M + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \left(-M + \frac{r^2}{l^2} \right)^{-1} dt^2 + \frac{r^2}{l^2} d\phi^2 \quad (5.1)$$

Εδώ ασχολούμαστε με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σαν διαταραχή.

Η ακόλουθη ανάλυση είναι απ' όσο γνωρίζουμε καινούρια. Οι Cardoso και Lemos [23] ισχυρίζονται ότι οι συχνότητες ενός βαθμωτού πεδίου και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι ίδιες. Στα ακόλουθα θα επιχειρήσουμε να δείξουμε ότι αυτό δεν ισχύει.

5.2 Η/M διαταραχές σε BTZ μαύρη τρύπα

Ακολουθούμε σε γενικές γραμμές την ανάλυση των Ruffini et al (1971) [18]

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{f} & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{-g^{00}g^{11}g^{22}} = r \quad (5.4)$$

Σε πολικές συντεταγμένες το H/M δυναμικό είναι

$$A_\mu(t, r, \phi) = \begin{bmatrix} g^m(t, r) \\ h^m(t, r) \\ k^m(t, r) \end{bmatrix} e^{im\phi} \quad (5.5)$$

Στα παρακάτω αγνοούμε την εξάρτηση των g, h, k από το m

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad (5.6)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & h_{,0} - g_{,r} & k_{,0} - img \\ \dots & 0 & k_{,r} - imh \\ \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} e^{im\phi} \quad (5.7)$$

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \quad (5.8)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -(h_{,0} - g_{,r}) & -\frac{1}{r^2 f} (k_{,0} - img) \\ \dots & 0 & \frac{f}{r^2} (k_{,r} - imh) \\ \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} e^{im\phi} \quad (5.9)$$

5.2.1 Εξισώσεις

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (5.10)$$

$$(\sqrt{|g|} F^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \quad (5.11)$$

$$0 = (r F^{0\nu})_{;\nu} = [-r(h_{,0} - g_{,r})]_{,r} - \frac{im}{rf} (k_{,0} - img) \quad (5.12)$$

$$0 = (r F^{r\nu})_{;\nu} = r(h_{,0} - g_{,r})_{,0} + \frac{f}{r} im(k_{,r} - imh) \quad (5.13)$$

$$0 = (r F^{\phi\nu})_{;\nu} = [-\frac{f}{r} (k_{,r} - imh)]_{,r} + \frac{1}{rf} (k_{,0} - img)_{,0} \quad (5.14)$$

$$b^m \equiv \frac{r}{im} (h_{,0}^m - g_{,r}^m) \quad (5.15)$$

Και οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται

$$b_{,r} = -\frac{1}{rf}(k_{,0} - img) \quad (5.16)$$

$$b_{,0} = -\frac{f}{r}(k_{,r} - imh) \quad (5.17)$$

$$\left[\frac{f}{r}(k_{,r} - imh)\right]_{,r} = \frac{1}{rf}(k_{,0} - img)_{,0} \quad (5.18)$$

Οι πρώτες δύο δίνουν την τρίτη

$$b_{,r0} = b_{,0r} \Rightarrow \frac{1}{rf}(k_{,0} - img)_{,0} = \left[\frac{f}{r}(k_{,r} - imh)\right]_{,r} \quad (5.19)$$

Οι πρώτες δύο θα γίνουν μία δευτεροβάθμια

$$k_{,r0} = k_{,0r} \Rightarrow (-rfb_{,r} + img)_{,r} = -\frac{r}{f}b_{,00} + imh_{,0} \quad (5.20)$$

Και από τον ορισμό του b (5.15)

$$-(rfb_{,r})_{,r} + \frac{r}{f}b_{,00} - \frac{(im)^2}{r}b = 0 \quad (5.21)$$

Υποθέτουμε αρμονική εξάρτηση του b^m από το χρόνο: $b^m(t, r) = b^m(r)e^{i\omega t}$

$$rf(rfb_{,r})_{,r} + r^2\omega^2b - m^2fb = 0 \quad (5.22)$$

Αλλάζουμε μεταβλητή ώστε: $rfb_{,r} = b_{,x}$

$$dx = \frac{dr}{rf} \quad (5.23)$$

Και καταλήγουμε στην

$$b_{,xx}(r) + [r^2\omega^2 - m^2f(r)]b(r) = 0 \quad (5.24)$$

Αυτή η εξίσωση διαφέρει από την (3.18) οπότε περιμένουμε διαφορετικές συχνότητες για τον H/M

5.2.2 Επίλυση και αριθμητικό σχήμα

Αλλάζουμε την άγνωστη συνάρτηση σε

$$b = e^{-i\omega r^*} \Theta \quad (5.25)$$

όπου $dr_* = \frac{dr}{f}$

$$\partial_x b = i\omega \frac{dr_*}{dx} e^{i\omega r_*} \Theta + e^{i\omega r_*} \partial_x \Theta \quad (5.26)$$

και $\frac{dr_*}{dx} = \frac{dr_*}{dr} \frac{dr}{dx} = r$

$$\partial_x^2 b = \left[-i\omega \frac{dr}{dx} \Theta - r^2 \omega^2 \Theta - 2i\omega r \partial_x \Theta + \partial_x^2 \Theta \right] e^{i\omega r_*} \quad (5.27)$$

Αντικαθιστώντας στην (5.24)

$$\partial_x^2 \Theta - 2i\omega r \partial_x \Theta + (-i\omega f r - m^2 f) \Theta = 0 \quad (5.28)$$

Επιστρέφουμε στην έκφραση ως προς r . Χρησιμοποιώντας $\partial_x = r f \partial_r$

$$f r^2 \Theta'' + (r(fr)' - 2i\omega r) \Theta' + (-i\omega r - m^2) \Theta = 0 \quad (5.29)$$

Αλλάζουμε μεταβλητή σε $z = 1/r$ ως γνωστόν

$$z = \frac{1}{r} \quad (5.30)$$

$$\frac{d}{dr} = -z^2 \frac{d}{dz} \quad (5.31)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = 2z^3 \frac{d}{dz} + z^4 \frac{d^2}{dz^2} \quad (5.32)$$

και συμβολίζουμε:

$$\Theta' = \frac{d\Theta}{dr}, \dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dz} \quad (5.33)$$

$$f z^2 \ddot{\Theta} + (-f' - fz + 2fz + 2i\omega) \dot{\Theta} + \left(-\frac{i\omega}{z} - m^2 \right) \Theta = 0 \quad (5.34)$$

$$\frac{f z^3}{z - z_+} \ddot{\Theta} + \frac{(fz - f' + 2i\omega) z}{z - z_+} \dot{\Theta} + \frac{(z - z_+) (-i\omega - m^2 z)}{(z - z_+)^2} \Theta = 0 \quad (5.35)$$

Συγκρίνοντας με την κανονική μορφή $s\psi'' + \frac{t}{z-z_+}\psi' + \frac{u}{(z-z_+)^2}\psi = 0$ έχουμε

$$s(z) = -Mz(z + z_+) \quad (5.36)$$

$$t(z) = -Mz^2 + 2i\omega z - 1 \quad (5.37)$$

$$u(z) = (z - z_+)(-i\omega - m^2z) \quad (5.38)$$

Το αριθμητικό σχήμα είναι ακριβώς ίδιο με της ενότητα 3.4.2.

Κεφάλαιο 6

Αποτελέσματα για ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

6.1 Κώδικας

Τα αριθμητικά σχήματα 3.4.2 και 5.2.2 είναι ίδια πέρα από τη μορφή των συντελεστών. Οπότε και ο κώδικας που υλοποιεί το αριθμητικό σχήμα για τους ηλεκτρομαγνητικούς ΨΤΤ είναι ίδιος με τον 4.1. Διαφέρουν μόνο στη μορφή των συντελεστών και η διαφορά παρατίθεται παρακάτω (Κώδικας 6.1).

Κώδικας 6.1: Τμήμα του κώδικα για υπολογισμό δυναμοσειράς b

```
1      ! from file EM_root_finder.f90
2      ! for calculating EM QNMs of the BTZ black hole
3      !=====
4      ! coefficients
5      ! s = -M * (z + z_+) * z
6      s(0) = -2.d0
7      s(1) = -3.d0/zp
8      s(2) = -2.d0/zp**2
9      s(3) = (0.d0,0.d0)
10     ! t = - M z^2 + 2iωz -1
11     t(0) = -2.d0          + 2.d0*unit * omega *zp
12     t(1) = -2.d0/ zp     + 2.d0*unit * omega
13     t(2) = -2.d0*Mass
14     t(3) = (0.d0,0.d0)
15     ! u = (-i ω - m^2 z) * (z - z_+)
16     u(0) = (0.d0,0.d0)
17     u(1) =          - m_sq * zp - unit * omega
18     u(2) =          - m_sq
```

```
19 u(3) = (0.d0,0.d0)
```

Κώδικας 6.2: Χαρτογράφηση ελαχίστων της $|\psi|^2$

```
1 #!/bin/bash
2 # this script helps find the first dozen QNM frequencies of the EM field
3 # by exploring the level sets of the solution ( $|b|^2$ )
4 # for M=1 and N_truncation = 200 held constant
5 m=0;M=1
6 omega_r0=0
7 domega_r=140
8 omega_Im0=-5
9 domega_Im=10
10 N=200
11 gfortran EM_root_finder.f90 -o erf
12 echo $m $M $omega_r0 $omega_Im0 560 200 $domega_r $domega_Im $N | ./erf > trash
13 for d in 1e-4 1e-3 1e-2 1e-1; do
14     # stores the points that satisfy  $|b|^2 < d$ 
15     # these are the 'level sets'
16     grep -v '#' results.dat | awk ' $3!="NaN" ' | \
17     awk -v d=$d ' $4*$4+$3*$3<=d ' > d${d}.dat
18     # plots the 'level set' in the omega complex plane
19     # the size of the dots is proportional to the uncertainty of the measurement
20     gnuplot -d -p -e "set title 'M = $M, m=$m, N=$N, psi^2<$d'; \
21     set grid " -e "plot [-140:140][-20:10] 'd${d}.dat' u 1:2 not"
22 done
```

Η ακόλουθη εντολή χρησιμεύει στην κατασκευή των πινάκων αποτελεσμάτων 6.1 και 6.2. Εκμεταλλεύεται τη μορφή των γραφημάτων που παράγει ο παραπάνω κώδικας 6.2. Συγκεκριμένα, το ότι το σχετικό σφάλμα στην φανταστική συνιστώσα είναι μεγάλο ενώ στην πραγματική μικρό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.1 και στα δεδομένα του πίνακα ??

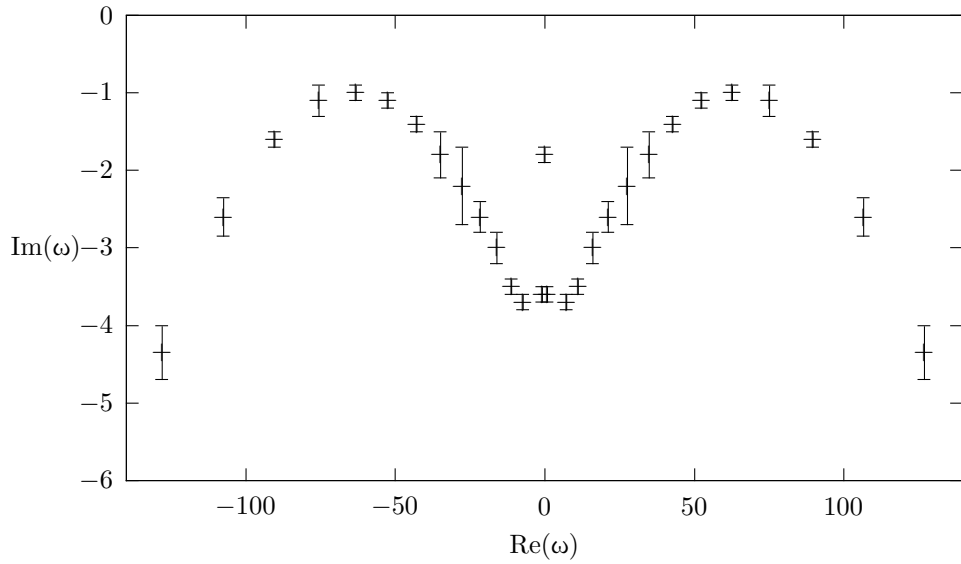
```
1 awk 'BEGIN{y=0;dy1=0;dy2=0;k=0;x=-1e9}; {if($1-x<10) \
2 {y+=$2;k+=1;dy2=$2} else {if(k>0){y=y/k};dy=(dy1-dy2)/2; \
3 print x,y,dy;k=1;y=$2;x=$1;dy1=$2}}; \
4 END{if(k>0){y=y/k};dy=(dy1-dy2)/2;print x,y,dy}' d1e-4.dat
```

6.2 Μέθοδος και Αποτελέσματα

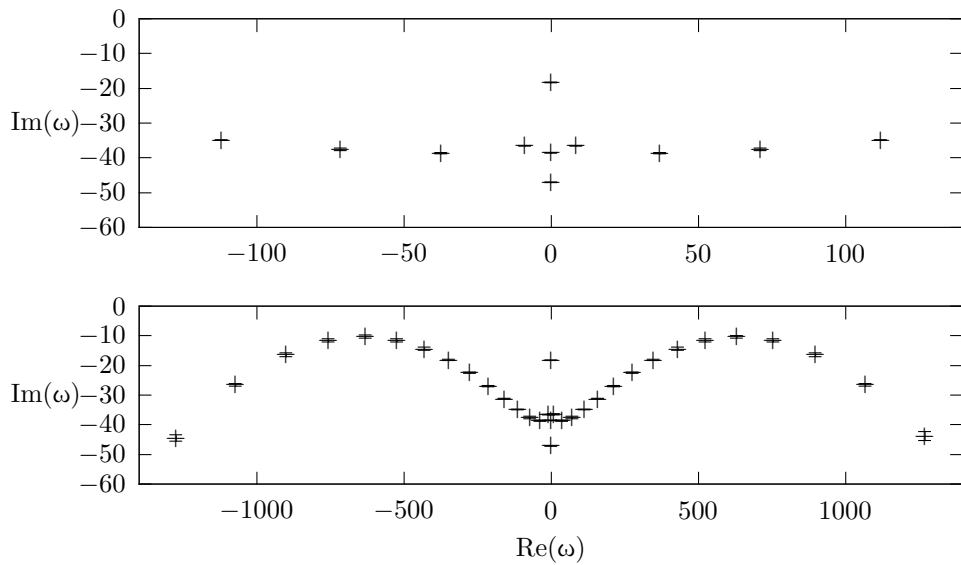
Τρέχουμε τον κώδικα 6.1 και παίρνουμε μία εικόνα για τις θέσεις των ψευδοκανονικών συχνοτήτων. Με μία τροποποίηση του κώδικα φτιάχνουμε το διάγραμμα της δυναμοσειράς συναρτήσεως του $N_{truncation}$ για κάποια ενδεικτικά σημεία. Βρίσκουμε ότι η τιμή $N = 200$ είναι ικανοποιητική για τις περιπτώσεις $M = 1$ και $M = 100$ που θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Βρίσκουμε τα ελάχιστα με το σενάριο φλοιού 6.2, το οποίο χαρτογραφεί τις περιοχές του επιπέδου όπου η συνάρτηση έχει μέτρο μικρότερο από μία συγκεκριμένη τιμή.

6.3 Συζήτηση αποτελεσμάτων και Συμπεράσματα

Παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα 6.1 και 6.2 είναι όμοια. Διαφέρουν στην κλίμακα κατά μία τάξη μεγέθους. Αυτό υποδεικνύει ότι (για $m = 0$) $\omega \sim \sqrt{M}$, όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση των βαθμωτών ΨΤΤ. Υπάρχουν πολλαπλές συχνότητες με μηδενικό πραγματικό μέρος. Και με εξαίρεση αυτές, οι υπόλοιπες βρίσκονται σε μία καμπύλη της μορφής $Im(\omega) = f(Re(\omega))$. Όπου $f(x) = -ax^4 + bx^2 - c$, όπου $a = 8 * 10^{-11}$, $b = 1 * 10^{-4}$ με σφάλμα 10% και $c = 35$ με σφάλμα 1%. Η θεμελιώδης συχνότητες είναι $\omega_0/\sqrt{M} = \pm 63.1 - i * 1.03$ με σφάλμα 1% και από κάθε μία ξεκινούν δύο κλάδοι. Σε αυτό διαφέρουν από τους βαθμωτούς ΨΤΤ της BTZ και τους ΨΤΤ της Schwarzschild που βρίσκονται σε μονούς κλάδους που ξεκινούν από τις θεμελιώδεις συχνότητες.



Σχήμα 6.1: Φάσμα ΨΤΤ για H/M πεδίο σε γεωμετρία BTZ, $M = 1, m = 0$



Σχήμα 6.2: Φάσμα ΨΤΤ για H/M πεδίο σε γεωμετρία BTZ, $M = 100, m = 0$

$\text{Re}(\omega) \pm 1\%$	$\text{Im}(\omega)$	$\delta \text{Im}(\omega)$
-128	-4.35	0.35
-107.5	-2.6	0.25
-90.4	-1.6	0.1
-75.6	-1.1	0.2
-63.2	-1	0.1
-52.4	-1.1	0.1
-42.8	-1.4	0.1
-34.8	-1.8	0.3
-27.6	-2.2	0.5
-21.6	-2.6	0.2
-16	-3	0.2
-11.2	-3.5	0.1
-7.2	-3.7	0.1
-0.8	-3.6	0.1
0	-1.8	0.1
0.8	-3.6	0.1
7.2	-3.7	0.1
11.2	-3.5	0.1
16	-3	0.2
21.2	-2.6	0.2
27.6	-2.2	-0.5
34.8	-1.8	-0.3
42.8	-1.4	-0.1
52.4	-1.1	0.1
62.8	-1	0.1
75.2	-1.1	0.2
89.6	-1.6	0.1
106.5	-2.6	0.25
127	-4.35	0.35

Πίνακας 6.1: Πρώτες ψευδοκανονικές συχνότητες για $M = 1, m = 0$. Έχει σημειωθεί οι θεμελιώδης συχνότητα

$\text{Re}(\omega) \pm 1\%$	$\text{Im}(\omega)$	$\delta \text{Im}(\omega)$
-1274.5	-44.4644	1.05
-1071.5	-26.4659	0.45
-901	-16.3533	0.65
-756	-11.5396	0.55
-631.5	-10.3339	0.55
-524	-11.5615	0.55
-430	-14.3739	0.55
-348.5	-18.15	0.2
-276.5	-22.53	0.2
-214	-26.9778	0.2
-159	-31.2	0.15
-112	-34.95	0.1
-71.5	-37.5765	0.4
-37.5	-38.6667	0.2
-9.0	-36.5286	0.15
0.0	-18.3000	0.15
0.0	-38.5000	0.1
0.0	-47.1000	0.1
8.5	-36.5143	0.15
37	-38.6778	0.2
71	-37.5706	0.4
112	-34.95	0.1
159	-31.2	0.15
213.5	-26.9667	0.2
276	-22.5	0.25
347.5	-18.1444	0.15
429.5	-14.3739	0.55
523	-11.5667	0.55
630	-10.3271	0.5
754	-11.5385	0.6
898.5	-16.3563	0.65
1068	-26.4668	0.45
1268.5	-43.7985	1.55

Πίνακας 6.2: Πρώτες ψευδοκανονικές συχνότητες για $M = 100, m = 0$. Έχει σημειωθεί οι θεμελιώδης συχνότητα

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα μας για το βαθμωτό πεδίο συμφωνούν με τη τη θεωρητική πρόβλεψη και την υπάρχουσα βιβλιογραφία [23].

Τα αποτελέσματα για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Αν η διαδικασία είναι σωστή, έχουμε ένα νέο αποτέλεσμα που έρχεται σε ρήξη με την υπάρχουσα βιβλιογραφία [23].

Προς επέκταση αυτής της εργασίας θα είχε ενδιαφέρον ο αριθμητικός υπολογισμός ΨTT για μικρές μαύρες τρύπες, που καθιστούν τον αλγόριθμο ασταθή, ΨTT για $m > 0$ και η ασυμπτωτική συμπεριφορά για μεγάλες αρμονικές.

Βιβλιογραφία

- [1] Anninos, P., Hobill, D., Seidel, E., Smarr, L., and Suen, W.-M. 'The Collision of two black holes'. *Phys. Rev. Lett.*, **71**:2851–2854, (1993).
- [2] A. Bachelot and A. Motet-Bachelot. 'Les resonances d'un trou noir de Schwarzschild'. *Ann. Inst. Henri Poincare*, **59**:3, (1993).
- [3] H.R. Beyer. 'On the Completeness of the Quasinormal Modes of the Pöschl-Teller Potential'. *Commun. Math. Phys.*, **204**:397–423, (1999).
- [4] H.R. Beyer and B.G. Schmidt. 'Newtonian stellar oscillations'. *Astron. Astrophys.*, **296**:722–726, (1995).
- [5] Norman Cruz, Cristián Martínez, and Leda Peña. Geodesic structure of the $(2 + 1)$ -dimensional btz black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 11:2731, 01 1999.
- [6] V. Cardoso E. Berti and A. O. Starinets. 'Quasinormal modes of black holes and black branes'. *Classical and Quantum Gravity*, **26**:163001, (2009).
- [7] E. W. Leaver. 'An analytic representation for the quasinormal modes of Kerr black holes'. *Proceedings of the Royal Society. London A*, **402**:285–298, (1985).
- [8] G. T. Horowitz and V. Hubeny. 'Quasinormal Modes of AdS Black Holes and the Approach to Thermal Equilibrium'. *Phys. Rev. D*, **62**:024027, (2000).
- [9] B.S. Kay and R.M. Wald. 'Linear stability of Schwarzschild under perturbations which are non-vanishing on the bifurcation 2-sphere'. *Class. Quantum Grav.*, **4**:893–898, (1987).
- [10] B.G. Schmidt K.D. Kokkotas. 'Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes'. *Living Rev. Relativ.*, **2**:Article number: 2, (1999).
- [11] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1970.
- [12] C. Teitelboim M. Banados and J. Zanelli. 'The Black Hole in Three Dimensional Spacetime'. *Phys. Rev. Lett.*, **69**:1849, (1992).

- [13] Nollert H.-P. 'Quasinormal modes of Schwarzschild black holes: The determination of quasinormal frequencies with very large imaginary parts'. *Phys. Rev. D*, **47**:5253–5258, (1993).
- [14] S Persides. 'On the radial wave equation in Schwarzschild space-time'. *J. Math. Phys.*, **14**:1017–1021, (1973).
- [15] R.H. Price. 'Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. I. , II'. *Phys. Rev. D*, **5**:2419–2454, (1972).
- [16] R.H. Price and J. Pullin. 'Colliding black holes: The Close limit'. *Phys. Rev. Lett.*, **72**:3297–3300, (1994).
- [17] R. A. Konoplya. 'Quasinormal behavior of the D-dimensional Schwarzschild black hole and the higher order WKB approach'. *Physical Review D*, **68**, (2003).
- [18] R. Ruffini. in '*Black Holes: les Astres Occlus*'. Gordon and Breach Science Publishers, 1973.
- [19] T. Regge and J.A. Wheeler. 'Stability of a Schwarzschild singularity'. *Phys. Rev.*, **108**:1063–1069, (1957).
- [20] S. Chandrasekhar and S. L. Detweiler. 'The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole'. *Proceedings of the Royal Society A*, **344**:441–452, (1975).
- [21] R. Jackiw S. Deser and G. 't Hooft. 'Three-dimensional Einstein gravity: Dynamics of flat space'. *Ann. Phy.*, **152**:220–235, (1984).
- [22] K.S. Thorne and A. Campolattaro. 'Non-radial pulsation of general relativistic stellar models'. *Astrophys. J.*, **149**:591–611, (1967).
- [23] V. Cardoso and J. P. S. Lemos. 'Scalar, electromagnetic, and Weyl perturbations of BTZ black holes: Quasinormal modes'. *V. Cardoso and J. P. S. Lemos*, **63**:124015, (2001).
- [24] V. Ferrari and B. Mashhoon. 'New approach to the quasinormal modes of a black hole'. *Physical Review D*, **30**:295–304, (1984).
- [25] C.V. Vishveshwara. 'Scattering of gravitationa radiation by a Schwarzschild black-hole'. *Nature*, **227**:936–938, (1970).