ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Αλγόριθμοι και Παίγνια Χρωματισμού Δικτύων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Φρυγανιώτης Νικόλαος

Επιβλέπων: Συμεών Παπαβασιλείου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2022

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής και Συστημάτων Πληροφορικής

Αλγόριθμοι και Παίγνια Χρωματισμού Δικτύων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Φρυγανιώτης Νικόλαος

Επιβλέπων: Συμεών Παπαβασιλείου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 14$^{\eta}$ Σεπτεμβρίου 2022.

....	....	....
Συμεών Παπαβασιλείου	Θεοδώρα Βαρβαρίγου	Ιωάννα Ρουσσάκη
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.	Επίκουρη Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2022

Νικόλαος Φρυγανιώτης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π

Περίληψη

Ο χρωματισμός γραφημάτων αποτελεί ένα θεμελιώδες πρόβλημα στην θεωρητική πληροφορική. Πρόκειται για ένα πρόβλημα που εμφανίζεται πολύ συχνά σε διάφορες εφαρμογές, όπως για παράδειγμα σε εφαρμογές που σχετίζονται με την ανάθεση ενός συνόλου αντικειμένων σε ένα δίκτυο. Επίσης εμφανίζει ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον, καθώς η εύρεση ενός χρωματισμού για ένα γράφημα, με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό χρωμάτων, αποτελεί **NP**-πλήρες πρόβλημα.

Έχουν προταθεί διάφοροι αλγόριθμοι εύρεσης χρωματισμού ενός γραφήματος στην βιβλιογραφία, κεντρικοί και κατανεμημένοι, κάποιοι από τους οποίους αναφέρονται στην παρούσα διπλωματική. Μελετάται το πρόβλημα χρωματισμού ενός δικτύου. Σε αυτή την εργασία ένα δίκτυο αναπαρίσταται υπό τη μορφή ενός πεπερασμένου γραφήματος G, του οποίου οι κόμβοι και οι ακμές είναι οι κόμβοι του δικτύου και οι μεταξύ τους συνδέσεις, αντίστοιχα, και το οποίο θα αναφέρεται ως το υποκείμενο γράφημα του δικτύου. Δίνουμε έμφαση κυρίως σε πιθανοτικούς κατανεμημένους αλγορίθμους που υπολογίζουν έναν $(\Delta+1)$-χρωματισμό με μεγάλη πιθανότητα, για ένα γράφημα G με μέγιστο βαθμό Δ.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν περιπτώσεις που ο χρωματισμός ενός δικτύου έχει μοντελοποιηθεί ως παίγνιο, όπου οι παίκτες είναι οι κόμβοι του δικτύου. Το παίγνιο παίζεται σε γύρους, και σε κάθε γύρο οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα ένα χρώμα από ένα σύνολο διαθέσιμων χρωμάτων, ακολουθώντας μια συμμετρική στρατηγική. Όταν όλοι οι παίκτες χρωματιστούν κατάλληλα, αυτό αποτελεί μια ισορροπία Nash για το παίγνιο. Αναλύουμε ένα παίγνιο χρωματισμού δικτύου, που αρχικά προτάθηκε από τον Michael Kearns και άλλους. Για ένα γράφημα G, με n κόμβους και μέγιστο βαθμό Δ, έχει αποδειχθεί πως όταν οι παίκτες ακολουθούν μια συγκεκριμένη άπληστη πιθανοτική στρατηγική, το παίγνιο αυτό καταλήγει σε ένα κατάλληλο χρωματισμό για το γράφημα σε $O(\log n)$ γύρους, με μεγάλη πιθανότητα, δεδομένου ότι ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων σε κάθε παίκτη είναι τουλάχιστον $\Delta+2$. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής, προτείνεται μία τροποποίηση της προαναφερθείσας άπληστης στρατηγικής, και αποδεικνύεται ότι πετυχαίνει έναν κατάλληλο χρωματισμό, δεδομένου ότι ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων σε κάθε παίκτη είναι τουλάχιστον $\Delta+1$, και έτσι προκύπτει ένας απλός πιθανοτικός κατανεμημένος αλγόριθμος για το πρόβλημα του $(\Delta+1)$-χρωματισμού.

Ένα επίσης σημαντικό πρόβλημα αποτελεί το πρόβλημα ανάθεσης ελαχίστων συγκρούσεων, που πρόκειται για παραλλαγή του προβλήματος χρωματισμού ενός γραφήματος. Αναλύουμε ένα παιγνιοθεωρητικό μοντέλο του παραπάνω προβλήματος, το οποίο περιγράφεται μέσω ενός παιγνίου δυναμικού. Έχει αποδειχθεί πως όταν ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων είναι μεγαλύτερος από Δ, όπου Δ ο μέγιστος βαθμός του υποκείμενου γραφήματος, μια ισορροπία Nash του παίγνιου δυναμικού αποτελεί μια βέλτιστη λύση του προβλήματος ανάθεσης ελαχίστων συγκρούσεων. Εξετάζουμε έναν αλγόριθμο που συγκλίνει σε μια ισορροπία Nash αμιγούς στρατηγικής.

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας διερευνούμε επίσης την περίπτωση του προβλήματος ελαχίστων συγκρούσεων που το σύνολο των διαθέσιμων χρωμάτων είναι περιορισμένο, δηλαδή ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων είναι λιγότερος ή ίσος με το μέγιστο βαθμό του υποκείμενου γραφήματος. Ορίζουμε ένα παίγνιο ελαττωματικού χρωματισμού, και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένας πιθανοτικός κατανεμημένος αλγόριθμος που συγκλίνει σε λογαριθμικό αριθμό γύρων σε μία ανάθεση χρωμάτων, κατά την οποία κάθε κόμβος έχει το πολύ ένα δεδομένο αριθμό συγκρούσεων. Η ανάθεση αυτή αποτελεί ισορ-

ροπία Nash για το παίγνιο.

Λέξεις κλειδιά

Χρωματισμός Γραφημάτων, Κατανεμημένοι Αλγόριθμοι, Παίγνια σε Γραφήματα, Συμμετρικές Στρατηγικές, Πιθανοτικοί Αλγόριθμοι

Abstract

Graph coloring is a fundamental problem in computer science. It is about a problem that enjoys many applications, such as applications concerned to the assignment of a finite set in a network. It is also of particular theoretical interest, as it is an **NP**-complete problem, to find a graph coloring with the minimum possible number of colors.

Several graph coloring algorithms have been proposed in literature, centralized and distributed. Some of them are reported in the current thesis. Network coloring problem is being examined. In this work a network is represented in the form of a finite graph G, whose vertices and edges correspond to the networked nodes and their in-between links, respectively, and which will be referred to as the underlying graph of the network. We emphasize on randomized distributed algorithms that compute a $(\Delta + 1)$-coloring with high probability, for a graph G with maximum degree Δ.

On some occasions graph coloring has been formulated as a game in literature, where the players of the game are the nodes of the network. The game is played in rounds, and in each round the players choose simultaneously a color from a set of available colors, following a symmetric strategy. When all the players are properly colored, this is a Nash equilibrium for the game. We analyze a network coloring game, which was first proposed by Michael Kearns and others. For a graph G, with n vertices and maximum degree Δ, it has been shown that when the players adopt a particular greedy randomized strategy, the game reaches a proper coloring of the graph within $O(\log n)$ rounds, with high probability, provided the number of colors available to each player is at least $\Delta + 2$. In this thesis, a modification of the aforementioned greedy strategy is proposed, and it is shown that it yields a proper coloring, provided the number of colors available to each player is at least $\Delta + 1$, and results in a simple randomized distributed algorithm for the $(\Delta + 1)$-coloring problem.

Another major problem is minimum-collision assignment problem, which is a variation of the graph coloring problem. We analyze a game-theoretic model of the above problem, which is described by a potential game. It has been proven that when the number of available colors is bigger than Δ, where Δ is the maximum degree of the underlying graph, a Nash equilibrium of the potential game is an optimal solution of the minimum-collision assignment problem. We examine an algorithm that converges to a pure strategy Nash equilibrium in finite time.

In this work, we also investigate the case of the minimum-collision assignment problem where the set of the available colors is constrained, i.e. the number of colors is less than or equal to the maximum degree of the underlying graph. We define a defective-coloring game, and we prove that there exists a randomized distributed algorithm which converges in a logarithmic number of rounds to an assignment of colors over the network for which every node has at most a certain number of collisions. This assignment is a Nash equilibrium of the game.

Keywords

Graph Coloring, Distributed Algorithms, Games on Graphs, Symmetric Strategies, Randomized Algorithms

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ. Συμεών Παπαβασιλείου για την επίβλεψη αυτής της διπλωματικής εργασίας και για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί του. Η προσφορά του σε διάφορους επιστημονικούς τομείς αποτελεί έμπνευση για κάθε νέο επιστήμονα. Επίσης σε στιγμές δικής μου προσωπικής συγχύσης, σε ό,τι αφορά την επιλογή θέματος για την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας, εκείνος, μετά από ουσιαστικές συζητήσεις, εντόπισε το τι πραγματικά με ενδιαφέρει, και έτσι καταλήξαμε στο συγκεκριμένο θέμα.

Στην συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον μεταδιδάκτορα κ. Χρήστο Πελέκη για την εξαιρετική συνεργασία που είχαμε, και ελπίζω να συνεχίσουμε να έχουμε στο μέλλον. Ήταν πάντα διαθέσιμος για να καλύψει οποιαδήποτε απορία μου κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου. Επίσης τον ευχαριστώ θερμά για τα μαθηματικά εργαλεία, ιδιαίτερα χρήσιμα στην ανάλυση πιθανοτικών αλγορίθμων, με τα οποία με έφερε σε επαφή.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τους κοντινούς μου ανθρώπους που με στηρίζουν με την αγάπη τους και την εμπιστοσύνη τους όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Αλγορίθμων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στη σημερινή εποχή, τα δίκτυα, και κατά κύριο λόγο τα δίκτυα υπολογιστών, τα τηλεπικοινωνιακά δίκτυα, το διαδίκτυο, αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητας των ανθρώπων. Η παραπάνω κατάσταση έχει προκύψει από την μεγάλη ανάγκη των ανθρώπων για επικοινωνία, διαμοιρασμό απόψεων και αντιλήψεων, όπως και για εύκολη πρόσβαση σε πληροφορία. Όμως καμία από τις παραπάνω ανάγκες δεν θα μπορούσε να καλυφθεί σε τέτοιο βαθμό χωρίς την τεράστια ανάπτυξη που έχει επέλθει τα τελευταία εξήντα (περίπου) χρόνια στην επιστημονική περιοχή των δικτύων.

Λόγω της φυσικής δομής που έχει ένα δίκτυο ή του τρόπου που το αντιλαμβανόμαστε, σε ένα πιο αφαιρετικό επίπεδο, συνήθως είναι εύκολο να μοντελοποιηθεί σαν ένα γράφημα. Έτσι, σε αυτή την εργασία ένα δίκτυο αναπαρίσταται υπό τη μορφή ενός πεπερασμένου γραφήματος G, του οποίου οι κόμβοι και οι ακμές είναι οι κόμβοι του δικτύου και οι μεταξύ τους συνδέσεις, αντίστοιχα, και το οποίο θα αναφέρεται ως το υποκείμενο γράφημα του δικτύου. Επίσης, πολλές φορές επιζητάται η δρομολόγηση πακέτων σε ένα δίκτυο, ή ο διαμοιρασμός ενός συνόλου αντικειμένων. Έτσι προκύπτουν διάφορα προβλήματα βελτιστοποίησης όταν γίνεται προσπάθεια να επιτευχθούν οι παραπάνω διαδικασίες. Και μάλιστα προβλήματα βελτιστοποίησης σε γραφήματα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, αποτελεί ο χρωματισμός γραφημάτων, τον οποίο μελετάμε εκτενώς σε αυτή τη διπλωματική. Το πρόβλημα του χρωματισμού γραφημάτων έχει μελετηθεί ανεξαρτήτως των προβλημάτων χρωματισμού που προκύπτουν σε ένα δίκτυο, και έχουν προταθεί διάφοροι κεντρικοί αλγόριθμοι (δες π.χ. [Lew15], που αφιερώνει ολόκληρα κεφάλαια στο θέμα). Βέβαια οι κεντρικοί αλγόριθμοι μπορεί να μην είναι εφαρμόσιμοι σε ένα κατανεμημένο σύστημα, π.χ. σε ένα δίκτυο, γιατί ένας κόμβος πρέπει να έχει επίγνωση όλου του δικτύου. Ο χρωματισμός γίνεται από τους κόμβους ακολουθιακά, και όχι παράλληλα. Όταν ένα χρώμα ανατίθεται σε έναν κόμβο, πρέπει να ενημερώνονται και οι υπόλοιποι κόμβοι του δικτύου για αυτή την ανάθεση. Αυτομάτως δημιουργείται η ανάγκη για μεγάλο αριθμό ανταλλαγής μηνυμάτων μεταξύ των κόμβων του δικτύου, κάτι που μπορεί να μην είναι εφικτό. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα μπορεί να δωθεί από μία άλλη κατηγορία αλγορίθμων, αυτή των κατανεμημένων αλγορίθμων χρωματισμού ενός γραφήματος, τους οποίους εισήγαγε στη βιβλιογραφία ο Linial. Μπορεί κανείς να ανατρέξει στο [BE13], για ενδελεχή μελέτη πάνω σε κατανεμημένους αλγορίθμους χρωματισμού. Στο Κεφάλαιο 2 θα δούμε κάποιους από τους πιο αντιπροσωπευτικούς αλγορίθμους χρωματισμού, κεντρικούς και κατανεμημένους, αφού πρώτα κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε ιστορικά σημεία του προβλήματος χρωματισμού, και δώσουμε κάποιους ορισμούς σχετικούς με αυτό, έχοντας πάντα στο μυαλό μας ότι πρόκειται για ένα **NP**-πλήρες πρόβλημα.

Υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες **NP**-πλήρη προβλήματα μοντελοποιούνται ως παίγνια, με τους κόμβους ενός δικτύου να είναι οι παίκτες του παιγνίου, και η βέλτιστη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης να δίνεται από τη βέλτιστη λύση της αντίστοιχης συνάρτησης συνολικού κόστους που ορίζεται για το παίγνιο. Μπορεί η βέλτιστη λύση, λόγω της **NP**-πληρότητας, να μην μπορεί να υπολογιστεί, αλλά αν πρόκειται για παίγνιο που διαθέτει (τουλάχιστον) μία ισορροπία Nash που μπορεί να υπολογιστεί εύκολα (σε πολυωνυμικό χρόνο), τότε αυτή μπορεί να θεωρηθεί λύση στο αντίστοιχο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Η ισορροπία Nash αποτελεί έναν ευρέως αποδεκτό τρόπο να εκφράζει κανείς λύσεις στα παίγνια, και την εισήγαγε ο Αμερικάνος μαθηματικός John Forbes Nash. Μια ισορροπία Nash μπορεί να αποτελεί μια προσεγγιστική λύση, άρα ο αλγόριθμος που την υπολογίζει να είναι προσεγγιστικός. Ο λόγος προσέγγισης του αλγορίθμου δίνεται από το τίμημα της αναρχίας (όταν αυτό μπορεί να υπολογιστεί). Στο Κεφάλαιο 3 κάνουμε ένα πέρασμα από πολύ βασικές έννοιες της θεωρίας παιγνίων. Κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε ιστορικά σημεία της, ορίζουμε μια τυπική μορφή των παιγνίων, την κανονική μορφή, και στην συνέχεια ορίζουμε πολύ βασικά εργαλεία της θεωρίας παιγνίων, που θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα στη συνέχεια, όπως είναι η ισορροπία Nash, αλλά και μεγέθη που μετρούν την αναποδοτικότητα μιας ισορροπίας Nash, όπως το τίμημα της αναρχίας. Τέλος κάνουμε μια πολύ σύντομη αναφορά σε παίγνια ατομικής εγωιστικής δρομολόγησης και σε παίγνια δυναμικού.

Στο Κεφάλαιο 4, έχοντας ορίσει βασικές έννοιες σχετικές με το χρωματισμό γραφημάτων και την θεωρία παιγνίων στα προηγούμενα κεφάλαια, αναλύουμε ένα παίγνιο χρωματισμού γραφήματων που προτάθηκε για πρώτη φορά από τους Kearns et al [KSM06]. Το παίγνιο αυτό αναλύεται θεωρητικά για πρώτη φορά, από τους Chaudhuri et al [CGJ08], οι οποίοι αποδεικνύουν πως, για ένα γράφημα με n κόμβους και μέγιστο βαθμό Δ, αν όλοι οι παίκτες υιοθετούν μια συγκεκριμένη άπληστη πιθανοτική στρατηγική, το παίγνιο φτάνει σε ένα κατάλληλο χρωματισμό για το γράφημα, σε $O(\log n)$ βήματα, με μεγάλη πιθανότητα, δεδομένου ότι ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων σε κάθε παίκτη είναι τουλάχιστον $\Delta + 2$. Αυτή η ανάθεση χρωμάτων αποτελεί ισορροπία Nash για το παίγνιο. Στο κεφάλαιο αυτό προτείνουμε μια τροποποίηση της παραπάνω άπληστης στρατηγικής, και αποδεικνύουμε ότι πετυχαίνει έναν κατάλληλο χρωματισμό σε λογαριθμικό αριθμό βημάτων, με μεγάλη πιθανότητα, δεδομένου ότι ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων σε κάθε παίκτη είναι τουλάχιστον $\Delta + 1$. Πρόκειται δηλαδή για έναν απλό πιθανοτικό κατανεμημένο αλγόριθμο για το πρόβλημα του $(\Delta + 1)$-χρωματισμού. Σε αυτό που διαφέρει από τους υπόλοιπους αλγορίθμους που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία για το πρόβλημα του $(\Delta + 1)$-χρωματισμού είναι ότι, δεν απαιτεί επικοινωνία ή συνεργασία μεταξύ των κόμβων του δικτύου. Είναι καθαρά παιγνιοθεωρητικός. Αναπτύχθηκε στα πλαίσια αυτής της εργασίας και έχει παρουσιαστεί μαζί με την ανάλυση του στο άρθρο [FPP21].

Στο Κεφάλαιο 5 εξετάζουμε το πρόβλημα ανάθεσης ελαχίστων συγκρούσεων, που αποτελεί παραλλαγή του προβλήματος χρωματισμού ενός γραφήματος και είναι και αυτό **NP**-πλήρες. Επικεντρωνόμαστε στην ανάθεση PCI σε ετερογενή αυτοργανούμενα δίκτυα. Αρχικά ορίζουμε κάποιες βασικές έννοιες σχετικές με τα κυψελωτά δίκτυα. Ορίζουμε τι είναι η φυσική ταυτότητα κυψέλης (physical cell identity), τι είναι η PCI διαμόρφωση και εξετάζουμε πως η αυτοοργάνωση στα ετερογενή αυτοοργανούμενα δίκτυα εξυπηρετεί σε αυτό. Στην συνέχεια αναλύουμε τον αλγόριθμο που προτάθηκε στο [Goo+14]. Οι συγγραφείς μοντελοποιούν το πρόβλημα ανάθεσης ελαχίστων συγκρούσεων μέσω ενός παίγνιου δυναμικού και υπολογίζουν το τίμημα της σταθερότητας και το τίμημα της αναρχίας για το παίγνιο αυτό. Στη συνέχεια αποδεικνύουν ότι ο ταυτόχρονος σύγρονος αλγόριθμος ενημέρωσης που προτείνουν πετυχαίνει μια ισορροπία Nash σε πεπερασμένο χρόνο, για την περίπτωση που ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων είναι μεγαλύτερος από το μέγιστο βαθμό Δ του υποκείμενου γραφήματος που ορίζεται για το εκάστοτε στιγμιότυπο του προβλήματος. Όλοι οι κόμβοι τρέχουν τον ίδιο αλγόριθμο ταυτόχρονα, και η ισορροπία Nash στην οποία καταλήγουν είναι ένας κατάλληλος k-χρωματισμός για το γράφημα, για $k > \Delta$, άρα πετυχαίνεται ο έλαχιστος δυνατός αριθμός συγκρούσεων. Τέλος, μελετάται η ευρωστία του αλγορίθμου.

Ασχολούμαστε και πάλι με το πρόβλημα ελαχίστων συγκρούσεων στο Κεφάλαιο 6. Αλλά από μια διαφορετική σκοπιά από αυτή που το εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 5. Στην περίπτωση που ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων σε κάθε παίκτη είναι μεγαλύτερος από το μέγιστο βαθμό του υποκείμενου γραφήματος που ορίζεται για το εκάστοτε στιγμιότυπο του προβλήματος, φτάνουμε σε μηδενικές συγκρούσεις, που αποτελεί βέλτιστη λύση. Σε αυτό το κεφάλαιο διερευνούμε την περίπτωση μιας περιορισμένης σε χρώματα παλέτας, που ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων είναι μικρότερος ή ίσος με τον μέγιστο βαθμό του υποκείμενου γραφήματος. Επειδή πρόκειται για **NP**-πλήρες πρόβλημα, είναι δύσκολο να πετύχουμε μια βέλτιστη λύση στη συγκεκριμένη περίπτωση. Για την μοντελοποιήση του προβλήματος εισάγουμε ένα νέο παίγνιο, το παίγνιο ελαττωματικού χρωματισμού, στο οποίο επιτρέπεται γειτονικοί κόμβοι να έχουν το ίδιο χρώμα και προτείνουμε έναν πιθανοτικό κατανεμημένο αλγόριθμο. Αποδεικνύεται ότι σε λογαριθμικό αριθμό γύρων ο αλγόριθμος αυτός συγκλίνει σε μια ανάθεση χρωμάτων κατά την οποία κάθε κόμβος του δικτύου έχει το πολύ ένα δεδομένο αριθμό συγκρούσεων. Η συγκεκριμένη ανάθεση αποτελεί ισορροπία Nash για το παίγνιο ελαττωματικού χρωματισμού. Ο αλγόριθμος αυτός, που αναπτύχθηκε στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής, και η ανάλυση του, έχουν παρουσιαστεί στο άρθρο "On the Minimum Collisions Assignment Problem in Interdependent Networked Systems" που έγινε δεκτό στο IEEE ISCC 2022.

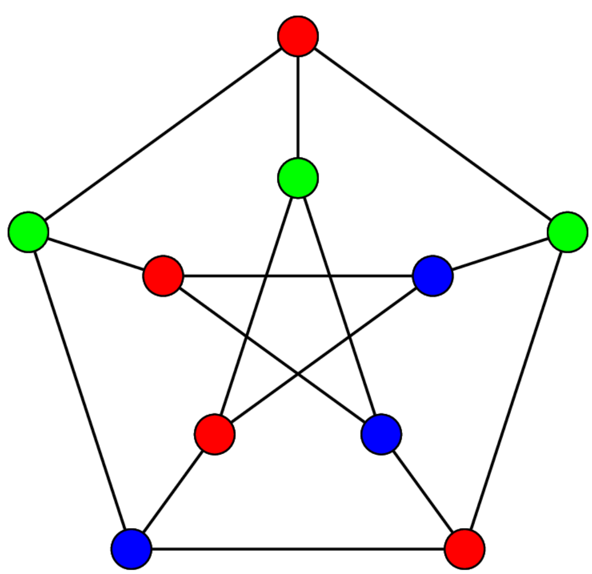
Στο Κεφάλαιο 7 συνοψίζονται τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την παρούσα διπλωματική εργασία, και γίνεται λόγος για μελλοντική εργασία.

Τέλος, στο Παράρτημα A παρουσιάζονται βασικές έννοιες σχετικά με την θεωρία υπολογισμού. Γίνεται λόγος για τη μηχανή Turing, για το τι είναι υπολογίσιμο από μια υπολογιστική μηχανή, για το πρόβλημα τερματισμού, αλλά και για βασικές έννοιες σχετικές με την έννοια της πολυπλοκότητας. Ορίζονται οι κλάσεις πολυπλοκότητας **P** και **NP**, ποια προβλήματα θεωρούνται **NP**-πλήρη, και αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα του k-χρωματίσιμου γραφήματος είναι **NP**-πλήρες.

Κεφάλαιο 2

Το Πρόβλημα Χρωματισμού Γραφημάτων

Στη θεωρία γράφων, το πρόβλημα του χρωματισμού ενός γραφήματος αποτελεί μια περίπτωση ανάθεσης ετικετών σε αντικείμενα του γραφήματος. Στην πιο απλή του μορφή ο χρωματισμός γραφημάτων αφορά την ανάθεση χρωμάτων στους κόμβους ενός γραφήματος, με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν γειτονικοί κόμβοι με το ίδιο χρώμα. Αυτή η μορφή του προβλήματος του χρωματισμού γραφημάτων εμφανίζεται στην βιβλιογραφία ως χρωματισμός κόμβων (vertex coloring). Στην συγκεκριμένη διπλωματική μελετάμε αποκλειστικά την συγκεκριμένη μορφή του προβλήματος. Αντίστοιχα ορίζεται και ο χρωματισμός ακμών (edge coloring). Σε αυτή τη μορφή του προβλήματος ο χρωματισμός γίνεται στις ακμές, με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν γειτονικές ακμές (δηλαδή, ακμές με κοινή κορυφή) με το ίδιο χρώμα. Υπάρχουν και άλλες παραλλαγές του προβλήματος, οι οποίες δεν θα μας απασχολήσουν. Γενικά, είναι ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα στην θεωρία γραφημάτων, με πολύ μεγάλη θεωρητική και πρακτική αξία. Μια πολύ ωραία εφαρμογή μπορεί να βρει κανείς στο δημοφιλές puzzle με αριθμούς sudoku. Παρακάτω φαίνεται ένα κατάλληλο vertex coloring για το γράφημα του Petersen με 3 χρώματα.



Σχήμα 2.1: Ένας κατάλληλος χρωματισμός για το γράφημα του Petersen. Χρήση 3 χρωμάτων, που είναι και ο μικρότερος δυνατός αριθμός

2.1 Ιστορική Αναδρομή

Το πρόβλημα του χρωματισμού γραφημάτων πρωτοεμφανίστηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1850 και αφορούσε την προσπάθεια χρωματισμού ενός επίπεδου γραφήματος και ειδικότερα ενός χάρτη. Σύμφωνα με το [Bón06] ένα επίπεδο γράφημα είναι ένα γράφημα που μπορεί να σχεδιαστεί σε μια επίπεδη επιφάνεια, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο τεμνόμενες ακμές. Ο Francis Guthrie, κατά την προσπάθεια του να χρωματίσει ένα χάρτη με τις χώρες τις Αγγλίας, παρατήρησε ότι μόνο τέσσερα χρώματα αρκούσαν για να χρωματίσει τον χάρτη έτσι ώστε δύο γειτονικές περιοχές να μην χρωματίζονται με το ίδιο χρώμα, γεγονός που τον οδήγησε στην διατύπωση μιας εικασίας. Η εικασία αυτή είναι γνωστή ως Εικασία των 4 Χρωμάτων και ουσιαστικά ισχυρίζεται ότι κάθε χάρτης μπορεί να χρωματιστεί με το πολύ τέσσερα χρώματα. Ο πρώτος που ισχυρίστηκε ότι απέδειξε την παραπάνω εικασία ήταν ο Alfred Kempe, το 1879. Για δέκα χρόνια, το πρόβλημα θεωρούταν λυμένο. Όμως, ο Heawood, το 1890, παρατήρησε ότι το επιχείρημα του Kempe ήταν λάθος. Παρόλα αυτά χρησιμοποιήσε την τεχνική του Kempe, για να αποδείξει το Θεώρημα των 5 Χρωμάτων[1]. Τα επόμενα χρόνια έγινε τεράστια προσπάθεια και αναπτύχθηκαν πολλές θεωρίες έτσι ώστε να αποδειχθεί η εικασία των 4 χρωμάτων. Πέρασαν αρκετά χρόνια μέχρι να συμβεί αυτό. Το 1976 οι Kenneth Appel και Wolfgang Haken, μετά από πολλές λανθασμένες προσπάθειες από πολλούς επιστήμονες, κατόρθωσαν να αποδείξουν την εικασία των 4 χρωμάτων. Για την απόδειξη χρησιμοποιήθηκαν ιδέες των Kempe, Heawood, αγνοώντας τις θεωρίες που με τόσο κόπο είχαν παραχθεί μετά την απόδειξη του θεωρήματος των 5 χρωμάτων. Η συγκεκριμένη απόδειξη ήταν αρκετά αξιοσημείωτη για δύο λόγους. Πρώτον, γιατί απέδειξε μια εικασία που για πάρα πολλά χρόνια πολλοί μαθηματικοί και επιστημόνες της θεωρητικής πληροφορικής προσπαθούσαν να αποδείξουν. Και δεύτερον, γιατί ήταν η πρώτη σημαντική απόδειξη που επιτεύχθηκε με τη χρήση ηλεκτονικού υπολογιστή.

Καθώς το πρόβλημα του χρωματισμού ενός γραφήματος κέντριζε το ενδιαφέρον όλο και περισσότερων επιστημόνων, ξέφυγε από τον χρωματισμό απλά των επίπεδων γραφημάτων. Γενικεύτηκε στο πρόβλημα εύρεσης χρωματισμού ενός οποιουδήποτε γραφήματος, και μελετήθηκε αλγοριθμικά. Έτσι αναπτύχθηκαν πολλοί αλγόριθμοι χρωματισμού ενός γραφήματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός απλού αλγορίθμου χρωματισμού αποτελεί ο άπληστος αλγόριθμος χρωματισμού (δες παρακάτω). Από αλγοριθμικής σκοπιάς, ιδιαίτερη σημασία εμφάνιζε το πρόβλημα της εύρεσης ενός χρωματισμού με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό χρωμάτων. Στην δεκατία του 1970 αναπτύχθηκαν διάφοροι εκθετικοί αλγόριθμοι που λύνουν το παραπάνω πρόβλημα. Κατά την ίδια χρονική περίοδο αποδείχθηκε πως το πρόβλημα αυτό είναι δισεπίλυτο (δες [GJ79]).

2.2 Μοντελοποίηση του Προβλήματος Χρωματισμού Γραφήματος

Στην συγκεκριμένη υποενότητα, θα δωθούν κάποιοι ορισμοί σχετικοί με τα γραφήματα, και τον χρωματισμό αυτών, οι οποίοι μας είναι απαραίτητοι για τα επόμενα κεφάλαια.

Ορισμός 2.1. Ένα γράφημα G είναι ένα διατεταγμένος ζεύγος $G = (V, E)$, που V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων που ονομάζονται κόμβοι, ενώ E είναι ένα σύνολο μη διατεταγμένων ζευγών[2] στοιχείων που ονομάζονται ακμές. Η πληθικότητα του συνόλου V, δίνεται από το σύμβολο $n = |V|$, και ονομάζεται τάξη του γραφήματος. Αντίστοιχα, η πληθικότητα του συνόλου E, δίνεται από το σύμβολο $m = |E|$, και ονομάζεται μέγεθος του γραφήματος G.

[1] Απέδειξε δηλαδή ότι κάθε επίπεδο γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με το πολύ 5 χρώματα

[2] Από δω και πέρα οποιαδήποτε αναφορά σε γράφημα θα υποδηλώνει ένα απλό (χωρίς πολλαπλές ακμές και ανακυκώσεις), μη κατευθυνόμενα γράφημα, και οποιαδήποτε διαφοροποίηση θα δηλώνεται ρητά

Μια πολύ βασική έννοια, η οποία θα μας φανεί πολύ χρήσιμη και στη συνέχεια, είναι η γειτονιά του κόμβου.

Ορισμός 2.2 (Γειτονιά κόμβου)**.** Δύο κόμβοι $v, u \in V$ καλούνται γειτονικοί, όταν η ακμή $\{v, u\} \in E$. Έτσι η γειτονιά του κόμβου v, ορίζεται ως $N_G(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}$. Δηλαδή είναι το σύνολο των γειτόνων του κόμβου v. Η πληθικότητα του συνόλου $N_G(v)$ δίνει το βαθμό του κόμβου, δηλαδή $d(v) = |N_G(v)|$.

Πολλές φορές στη θεωρία γραφημάτων, γίνεται αναφορά στον μέγιστο βαθμό ενός γράφου. Ο μέγιστος βαθμός γράφου δεν είναι τίποτα άλλο, από το βαθμό του κόμβου με τους περισσότερους γείτονες, σε ένα γράφημα. Συνήθως συμβολίζεται ως $\Delta(G)$ ή απλά Δ.

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα στα γραφήματα, είναι ότι το άθροισμα των βαθμών των κόμβων ισούται με το διπλάσιο της πληθικότητας των ακμών.

Πρόταση 2.1 (Φόρμουλα Αθροίσματος Βαθμών)**.** *Αν το G είναι ένας γράφος, τότε*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Απόδειξη. Αθροίζοντας τους βαθμούς των κόμβων μετράμε κάθε ακμή δύο φορές, από την στιγμή που κάθε ακμή έχει δύο άκρα και συμβάλλει στον βαθμό κάθε άκρου. □

Το παραπάνω ισχύει για οποιοδήποτε γράφημα, είτε είναι απλό, είτε έχει ανακυκλύσωσεις, είτε είναι συνεκτικό είτε όχι.

Ορισμός 2.3 (Συνεκτικότητα Γραφήματος)**.** Ένα μονοπάτι που συνδέει τους κόμβους v_1 και v_p στο γράφημα G, είναι μια διατεταγμένη ακολουθία κόμβων $v_1, v_2, \ldots, v_p$, στην οποία κάθε κόμβος εμφανίζεται το πολύ μία φορά, και για όλες τις τιμές του i ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Ένα γράφημα G με τουλάχιστον 2 κόμβους είναι συνεκτικό, όταν κάθε ζευγάρι κόμβων συνδέεται με ένα μονοπάτι.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι τα γραφήματα που καλούμαστε να χρωματίσουμε είναι συνεκτικά. Κι΄ αυτό γιατί οι αλγόριθμοι που θα μελετήσουμε μπορούν να εφαρμοστούν ανεξάρτητα σε κάθε συνεκτική συνιστώσα, και ο μέγιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτούνται για να χρωματιστεί μια συνιστώσα, είναι στην ουσία ο αριθμός χρωμάτων που απαιτούνται για να χρωματιστεί το γράφημα κατάλληλα. Στην συνέχεια ορίζουμε κάποιους πολύ βασικούς τύπους γραφημάτων.

Ορισμός 2.4 (Κλίκα)**.** Μια κλίκα σε ένα γράφο G είναι ένα υποσύνολο V' του V, για το οποίο η ακόλουθη συνθήκη ικανοποιείται: $v, u \in V' \Rightarrow \{v, u\} \in E$. Ως αριθμό κλίκας $\omega(G)$ ορίζουμε το μέγεθος της μεγαλύτερης κλίκας στο γράφημα G. Όταν η ιδιότητα της κλίκας δεν ισχύει μόνο σε έναν υπόγραφο του G, αλλά σε όλο το γράφο, τότε ο γράφος ονομάζεται πλήρης.

Ορισμός 2.5 (Κύκλος)**.** Ένα γράφημα G που προκύπτει από μια διατεταγμένη ακολουθία κόμβων $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, τέτοια ώστε κάθε κόμβος να συνδέεται με ακμή με τον προηγούμενο του στην ακολουθία, και με τον επόμενο του, ονομάζεται κύκλος. Ο πρώτος κόμβος συνδέεται με ακμή με τον τελευταίο, ώστε να σχηματιστεί κύκλος. Όταν το n είναι περιττός αριθμός, τότε έχουμε κύκλο περιττού μήκους, διαφορετικά έχουμε κύκλο άρτιου μήκους.

Ορισμός 2.6 (Δέντρο)**.** Ένας γράφος χωρίς κύκλους ονομάζεται ακυκλικός ή δάσος. Ένα δάσος είναι δέντρο όταν πρόκειται για συνδεδεμένο γράφημα.

Ορισμός 2.7 (Διμερές γράφημα)**.** Ένα γράφημα είναι διμερές όταν το σύνολο των κόμβων του μπορεί να διαμεριστεί σε δύο ξένα υποσύνολα V_1, V_2, τέτοια ώστε κάθε ακμή να συνδέει ένα κόμβο από το V_1 με ένα κόμβο από το V_2.

Μια έννοια ιδιαίτερα σημαντική στην θεωρία γραφημάτων, που πολλές φορές συνδέεται και με τον χρωματισμό ενός γράφου, είναι ένα η ανεξαρτησία ενός υποσυνόλου του συνόλου V των κόμβων.

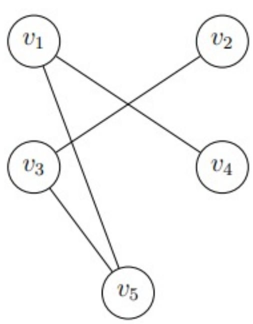
Ορισμός 2.8 (Ανεξάρτητο Σύνολο)**.** Ένα ανεξάρτητο σύνολο στο γράφημα G ειναι οποιοδήποτε υποσύνολο $V' \subseteq V$, τέτοιο ώστε $v, u \in V' \rightarrow \{v, u\} \notin E$. Το ανεξάρτητο σύνολο V' στο γράφημα G καλείται μεγιστικό αν δεν είναι υποσύνολο οποιουδήποτε άλλου ανεξάρτητου συνόλου στο G. Ως αριθμός ανεξαρτησίας $\alpha(G)$, ορίζεται το μέγεθος του μεγαλύτερου ανεξάρτητου συνόλου στο G.

Έχοντας ορίσει τις παραπάνω βασικές έννοιες, περνάμε σε ορισμούς που αφορούν αποκλειστικά τον χρωματισμό ενός γραφήματος.

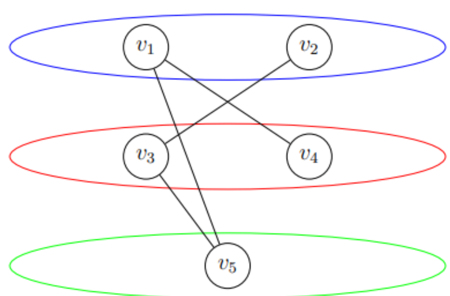
Ορισμός 2.9 (Κατάλληλοι Χρωματισμοί Γραφήματος)**.** Ένας κατάλλλος χρωματισμός ενός γραφήματος $G = (V, E)$, είναι μια συνάρτηση $c : V \rightarrow \mathbb{N}$, που αναθέτει διαφορετικά χρώματα σε δύο οποιουσδήποτε γειτονικούς κόμβους $u, v \in V$, δηλαδή $\{u, v\} \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$. Η συνάρτηση c ονομάζεται συνάρτηση χρωματισμού.

Ο παραπάνω ορισμός αφορά τον χρωματισμό κόμβων, και μόνο. Στη συγκεκριμένη διπλωματική θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τον χρωματισμό κόμβων, και οποιαδήποτε αναφορά σε χρωματισμό θα έχει να κάνει με χρωματισμό κόμβων.

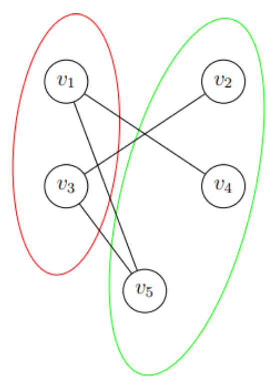
Ένας κατάλληλος χρωματισμός σε ένα γράφημα, ισοδυναμεί με την διαμέριση των κόμβων σε μεγιστικά ανεξάρτητα υποσύνολα του V. Στο Σχήμα 2.2 βλέπουμε δύο διαφορετικές διαμερίσεις για το γράφημα G, με σύνολο κόμβων $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Μία σε 3 ανεξάρτητα υποσύνολα (Σχήμα 2.2β′), και μία σε 2 (Σχήμα 2.2γ′), Κάθε στοιχείο ενός ανεξάρτητο υποσύνολο υποσύνολο μπορεί να χρωματιστεί με το ίδιο χρώμα, άρα στην πρώτη περίπτωση έχουμε χρήση 3 χρωμάτων, ενώ στη δεύτερη 2 χρωμάτων.



(α′) Ένας γράφος G



(β′) Χρωματισμός του G με τρία χρώματα



(γ′) Χρωματισμός του G με δύο χρώματα

Σχήμα 2.2: Δύο διαφορετικοί χρωματισμοί του γράφου G

Πολλές φορές έχουμε στη διάθεση μας ένα περιορισμένο αριθμό χρωμάτων, και θέλουμε να διερευνήσουμε αν ένα γράφημα μπορεί να χρωματιστεί κατάλληλα χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα χρώματα.

Ορισμός 2.10 (k-χρωματισμός)**.** Ένα γράφημα G, για το οποίο υπάρχει ένας (κατάλληλος) χρωματισμός που χρησιμοποιεί (το πολύ) k χρώματα, ονομάζεται k-χρωματίσιμο, ενώ ένας τέτοιος χρωματισμός ονομάζεται k-χρωματισμός.

Ιδιαίτερη σημασία, στο χρωματισμό γραφημάτων, έχει η αναζήτηση ενός χρωματισμού που χρησιμοποιεί τα λιγότερα δυνατά χρώματα.

Ορισμός 2.11 (Χρωματικός αριθμός)**.** Ο μικρότερος αριθμός k, για τον οποίο υπάρχει ένας k-χρωματισμός του γραφήματος G ονομάζεται χρωματικός αριθμός του γραφήματος G, και συμβολίζεται με $\chi(G)$. Ένα τέτοιο γράφημα ονομάζεται k-χρωματικό, ενώ οποιοσδήποτε χρωματισμός του G που χρειάζεται $k = \chi(G)$ χρώματα ονομάζεται χρωματικός ή βέλτιστος.

Έχοντας κανείς στο μυαλό του τον αριθμό κλίκας και τον αριθμό ανεξαρτησίας, μπορεί να παρατηρήσει ότι ισχύει:

$$\chi(G) \geq \max\{\omega(G), \lceil n/\alpha(G) \rceil\}$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε και κάποια άνω φράγματα για τον χρωματικό αριθμό.

2.3 Θεώρημα Brooks

Το θεώρημα Brooks είναι ένα από τα θεμελιώδη θεωρήματα της θεωρίας γραφημάτων και της μελέτης χρωματισμού αυτών. Έστω G ένα γράφημα με μέγιστο βαθμό $\Delta(G)$. Τότε το γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με (το πολύ) $\Delta(G) + 1$ χρώματα. Μάλιστα ο παραπάνω κατάλληλος χρωματισμός μπορεί να επιτευχθεί με πολύ απλό τρόπο, απλά δημιουργώντας μια αυθαίρετη απαρίθμηση των κόμβων, και δίνοντας ένα χρώμα στον κάθε κόμβο με την σειρά της απαρίθμησης, που δεν χρησιμοποιείται από κάποιον γειτονικό κόμβο[3]. Υπάρχει πάντα ένα διαθέσιμο χρώμα για κάθε κόμβο, γιατί ο μέγιστος βαθμός του γραφήματος είναι $\Delta(G)$, ενώ τα διαθέσιμα χρώματα είναι $\Delta(G) + 1$. Άρα ακόμα κι αν όλοι οι γείτονες ενός κόμβου έχουν λάβει ήδη κάποιο χρώμα, πάντα υπάρχει και γι΄ αυτόν τουλάχιστον ένα διαθέσιμο χρώμα για να παραμείνει κατάλληλος ο χρωματισμός. Έτσι προκύπτει ότι το $\Delta(G) + 1$ είναι ένα προφανές άνω φράγμα για τον χρωματικό αριθμό του γραφήματος G. Για την απλοποίηση της σημειογραφίας, θέτουμε $\Delta := \Delta(G)$.

Προφανώς το συγκεκριμένο άνω φράγμα ισχύει με ισότητα για πλήρεις γράφους, και για κύκλους περιττού μήκους. Το θεώρημα του Brooks λέει πως για ένα συνεκτικό γράφημα που δεν είναι ούτε κύκλος περιττού μήκους, ούτε πλήρης, το άνω φράγμα για τον χρωματικό αριθμό είναι μικρότερο, όπως προκύπτει και από το [Lov75].

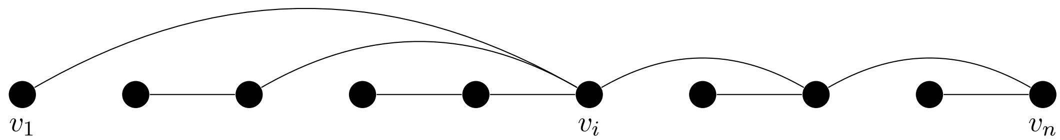
Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα Brooks). *Αν ένα γράφημα G είναι συνεκτικό, δεν είναι πλήρες, ούτε είναι κύκλος περιττού μήκους, τότε ισχύει ότι $\chi(G) \leq \Delta$.*

Απόδειξη. Έστω ότι G ένα συνεκτικό γράφημα. Μπορούμε να υποθέσουμε πως $\Delta \geq 3$, καθώς για $\Delta \leq 1$ το γράφημα είναι πλήρες, ενώ για $\Delta = 2$ το γράφημα είναι είτε κύκλος περιττού μήκους είτε είναι διμερές[4]. Στόχος μας είναι να ταξινομήσουμε τους κόμβους έτσι ώστε κάθε ένας να έχει το πολύ $\Delta - 1$ γείτονες, που εμφανίζονται νωρίτερα στην ταξινόμηση, και στην συνέχεια να χρωματίσουμε κάθε κόμβο, με τη σειρά της ταξινόμησης, έτσι ώστε κάθε κόμβος να παίρνει το πρώτο διαθέσιμο χρώμα που δεν χρησιμοποιείται από κάποιο γείτονα του.

Έστω ότι το γράφημα δεν είναι Δ-κανονικό. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος, έστω v_n, με βαθμό μικρότερο από Δ. Κατασκευάζουμε ένα επικαλύπτον δέντρο του G, δηλαδή ένα υπογράφημα που περιέχει όλους τους κόμβους του G, και είναι δέντρο . Ξεκινάμε από το v_n, και αναθέτουμε ένα δείκτη σε φθίνουσα σειρά, καθώς φτάνουμε σε κάθε κόμβο, όπως αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 2.3. Κάθε κόμβος στην ταξινόμηση $v_1, v_2, \ldots, v_n$ που προκύπτει, εκτός από τον v_n, έχει

[3]Στην ουσία αυτός είναι ο άπληστος αλγόριθμος χρωματισμού, που θα μελετήσουμε και στην συνέχεια

[4]Ένα διμερές γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με 2 χρώματα, έστω c_1 και c_2, χρωματίζοντας όλους τους κόμβους του συνόλου V_1 με το c_1, και χρωματίζοντας όλους τους κόμβους του συνόλου V_2 με το c_2



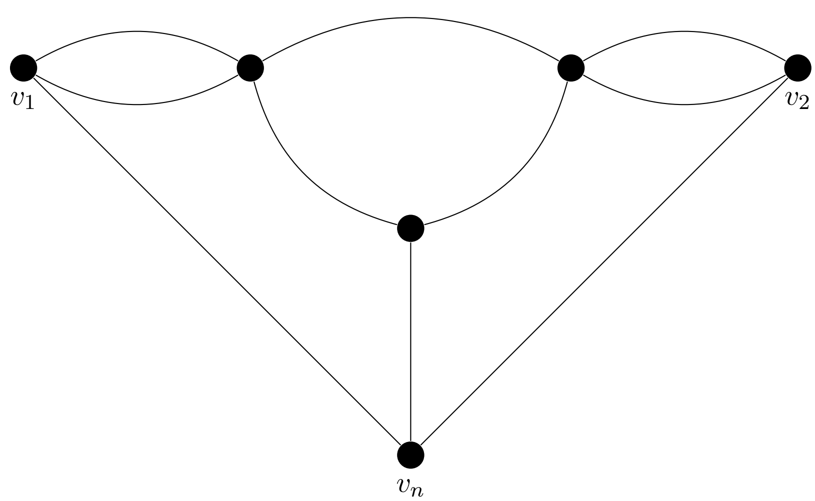
Σχήμα 2.3: Επικαλύπτον δέντρο για το γράφημα G, ξεκινώντας από τον κόμβο v_n. Αντιστρέφοντας την σειρά προσπέλασης των κόμβων, έχουμε την ταξινόμηση των κόμβων

ένα γείτονα κατά μήκος του μονοπατιού προς το v_n, που έπεται. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κόμβος έχει το πολύ $\Delta - 1$ κόμβους που προηγούνται. Εφαρμόζοντας και πάλι την διαδικασία χρωματισμού που αναφέραμε παραπάνω, δηλαδή χρωματίζοντας τους κόμβους με την σειρά της ταξινόμησης, και δίνοντας τους το πρώτο διαθέσιμο χρώμα που δεν χρησιμοποιείται από κάποιον γείτονα, κάνουμε χρήση το πολύ Δ χρωμάτων.

Έστω τώρα ότι το G είναι Δ-κανονικό. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Το G έχει σημείο κοπής, δηλαδή ένα κόμβο, που η αφαίρεση του οδηγεί σε μη συνεκτικό γράφημα. Αν το γράφημα είναι Δ-κανονικό και έχει ένα σημείο κοπής, έστω x, τότε το $G - x$ έχει παραπάνω από μία συνιστώσες. Έστω G' μια συνιστώσα του $G - x$ επαυξημένη με τον κόμβο x και τις ακμές μεταξύ του x και της συνιστώσας. Το G' δεν είναι Δ-κανονικό, καθώς ο βαθμός του x στο G' είναι λιγότερο από Δ. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρωματίσουμε κατάλληλα το G', με Δ χρώματα, χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο. Στ΄ αλήθεια μπορούμε να χρωματίσουμε κάθε (επαυξημένη) συνιστώσα του $G - x$ με αυτόν τον τρόπο, θέτοντας τον περιορισμό ότι ο x χρωματίζεται με το ίδιο χρώμα (π.χ. 1). Έτσι παίρνουμε ένα κατάλληλο χρωματισμό χρησιμοποιώντας μόνο Δ χρώματα.

2. Το γράφημα G δεν έχει σημείο κοπής (2-συνεκτικό γράφημα). Αυτό σημαίνει ότι για κάθε κόμβο x το $G - x$ είναι συνεκτικό. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν κόμβοι v_1, v_2 και v_n, τέτοιοι ώστε ο v_1 και ο v_2, να είναι γείτονες με τον v_n, αλλά να μην συνδέονται με ακμή μεταξύ τους, και το $G - \{v_1, v_2\}$ να είναι συνδεδεμένο, δηλαδή έχει τη μορφή που βλέπουμε στο Σχήμα 2.4. Μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα επικαλύπτον δέντρο του $G - \{v_1, v_2\}$, ξεκινώντας από το v_n



Σχήμα 2.4: Τοπολογία γραφήματος G, ώστε η αφαίρεση των κόμβων v_1 και v_2, να διατηρεί το γράφημα συνεκτικό

και αναθέτοντας δείκτες σε αύξουσα σειρά καθώς φτάνουμε σε κάθε κόμβο. Χρησιμοποιούμε και πάλι την ίδια διαδικασία χρωματισμού που αναφέρθηκε παραπάνω, με τον περιορισμό ότι οι κόμβοι v_1, v_2 πρέπει να πάρουν το ίδιο χρώμα. Και πάλι γίνεται χρήση το πολύ Δ χρωμάτων.

Μένει να αποδείξουμε ότι ένα Δ-κανονικό, με $\Delta \geq 3$, και χωρίς σημείο κοπής, έχει 3 κόμβους που ικανοποιούν τις παραπάνω υποθέσεις. Επιλέγουμε ένα κόμβο x, και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν είναι απαραίτητη η αφαίρεση τουλάχιστον δύο κόμβων από το γράφημα $G - x$, για να γίνει μη συνεκτικο, τότε έστω ότι ο v_2 είναι ο x, και ο v_1 είναι ένας κόμβος με απόσταση 2 από τον x. Ένας τέτοιος κόμβος υπάρχει, καθώς το G είναι Δ-κανονικό, αλλά δεν είνα πλήρες. Τέλος θέτουμε ως v_1 ένα κοινό γείτονα των v_1, v_2.
- Αν αρκεί η αφαίρεση ενός κόμβου από το $G - x$, για να γίνει μη συνεκτικό, τότε το $G - x$ έχει τουλάχιστον δύο 2-συνεκτικές συνιστώσες με την εξής ιδιότητα. Κάθε 2-συνεκτική συνιστώσα, έστω B_i, έχει ένα κόμβο z_i τέτοιο ώστε, με οποιαδήποτε άλλη 2-συνεκτική συνιστώσα είτε να είναι ξένες είτε το z_i να είναι ο μόνος κοινός τους κόμβος. Έστω δύο 2-συνεκτικές συνιστώσες με την παραπάνω ιδιότητα B_1, B_2. Εφόσον το G δεν περιέχει σημείο τομής, τότε υπάρχει $v_1 \in B_1 - z_1$, $v_2 \in B_2 - z_2$, γείτονες στο x. Θέτουμε $v_n = x$. Τώρα το $G - \{v_1, v_2\}$ είναι συνδεδεμενο, εφόσον $\Delta \geq 3$.

□

2.4 Αλγόριθμοι εύρεσης χρωματισμού σε γραφήματα

Πέραν της θεωρητικής του αξίας, ο χρωματισμός γραφημάτων είναι ένα πρόβλημα που βρίσκει εφαρμογή σε διάφορα πρακτικά προβλήματα. Παρακάτω, παρατίθενται κάποιες από τις εφαρμογές του.

- Πρωτόκολλα ασύρματων δικτύων για την επιλογή καναλιών επικοινωνίας: Τα κανάλια που χρησιμοποιούν ένα μικρό φάσμα συχνοτήτων πρέπει να ανατεθούν σε πομπούς έτσι ώστε να μπορούν να επικοινωνούν χωρις παρεμβολή το ένα με το άλλο [PL96].

- Καταμερισμός καταχωρητών μεταβλητών σε προγράμματα υπολογιστών: Οι μεταβλητές σε ένα πρόγραμμα πρέπει να ανατίθενται σε ένα περιορισμένο αριθμό καταχωρητών (από ένα μεταγλωττιστή), έτσι ώστε δύο μεταβλητές που χρησιμοποιούνται σε επικαλυπτόμενα διαστήματα χρόνου να έχουν διαφορετικούς καταχωρητές [CH90].

- Χρονοπρογραμματισμός εξετάσεων πανεπιστημίου: Οι εξετάσεις πρέπει να δρομολογηθούν με τρόπο που να μην υπάρχει συμμετέχων που χρειάζεται να συμμετέχει σε δύο διαγωνίσματα ταυτόχρονα, και οι διαθέσιμες χρονικές περίοδοι να είναι οι ελάχιστες δυνατές [Lei79].

Έτσι δημιουργείται αυτόματα η ανάγκη εύρεσης τεχνικών, αλγορίθμων, που υπολογίζουν χρωματισμούς σε γραφήματα. Εύκολα συμπαιρένει κανείς ότι μια μέθοδος χρωματισμού χρησιμοποεί στην χειρώτερη περίπτωση (το πολύ) n χρώματα, ένα για κάθε διαφορετικό κόμβο. Στην υποενότητα αυτή θα μελετήσουμε διάφορους αλγορίθμους που έχουν προταθεί για την εύρεση κατάλληλων χρωματισμών σε γραφήματα.

2.4.1 Κεντρικοί αλγόριθμοι και NP-πληρότητα

Ένας από τους κλασικούς και εύκολους αλγορίθμους να χρωματίσεις ένα γράφημα είναι, ο Άπληστος Αλγόριθμος Χρωματισμού. Για ένα γράφημα G, και μια ακολουθία κόμβων $K = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ έχουμε:

Αλγόριθμος 2.1 Άπλστος Χρωματισμός

```
Greedy-Color(G, K)
  for v ← v1 to vn do
     Give vertex v the smallest possible color
  end for
```

Ο Αλγόριθμος 2.1 είναι ιδιαίτερα σημαντικός γιατί μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως περίγραμμα, και θέτοντας συγκεκριμένη απαρίθμηση για τους κόμβους παίρνουμε διάφορους αλγορίθμους που είναι γνωστοί ως ακολουθιακοί αλγόριθμοι. Για μια τυχαία απαρίθμηση των κόμβων παίρνουμε τον αλγόριθμο RS (Random Sequential). Η μέθοδος RS είναι η μέθοδος χρωματισμού που χρησιμοποιήσαμε στο Θεώρημα 2.1 παραπάνω. Άρα γνωρίζουμε ότι υπολογίζει έναν κατάλληλο χρωματισμό χρησιμοποιώντας το πολύ $\Delta(G) + 1$ χρώματα.

Αλγόριθμος 2.2 Ακολουθιακή Μέθοδος Τυχαίας Απαρίθμησης

```
RS(G)
  K ← a random sequence of vertices of graph G
  Greedy-Color(G, K)
```

Ο Αλγόριθμος 2.2 είναι αρκετά γρήγορος. Στ΄ αλήθεια είναι ένας γραμμικός αλγόριθμος, καθώς για κάθε κόμβο αρκεί να κοιτάξει τα χρώματα που έχουν επιλέξει οι γείτονες του τη στιγμή που έρχεται η σειρά του να επιλέξει χρώμα, και να επιλέξει το μικρότερο διαθέσιμο χρώμα για αυτόν τον κόμβο. Από την Πρόταση 2.2 έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$. Επίσης για την ανάθεση χρώματος σε κάθε κόμβο γίνεται μία πράξη σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου. Άρα η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(n + m)$. Το πρόβλημα με τη μέθοδο αυτή είναι ότι δεν χρωματίζει ένα γράφημα πάντα με τον ίδιο αριθμό χρωμάτων. Στο γράφημα του Σχήματος 2.2α΄ για τη διάταξη $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ παράγει ένα κατάλληλο χρωματισμό με χρήση τριών χρωμάτων (Σχήμα 2.2β΄). Ενώ για τη διάταξη $\{v_5, v_4, v_3, v_2, v_1\}$ παράγει ένα κατάλληλο χρωματισμό με χρήση δύο χρωμάτων(Σχήμα 2.2γ΄). Επίσης υπάρχουν κατηγορίες γραφημάτων που μπορεί να παράγει λύσεις που απέχουν αρκετά από τη βέλτιστη. Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα διμερές γράφημα $G = (V_1, V_2, E)$ που το n είναι άρτιος αριθμός και που τα σύνολα κόμβων και ακμών ορίζονται ως $V_1 = \{v_1, v_3 \ldots, v_{n-1}\}$, $V_2 = \{v_2, v_4, \ldots, v_n\}$ και $E = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i \in V_1 \wedge v_j \in V_2 \wedge i + 1 \neq j\}$. Για $n \geq 4$ το συγκεκριμένο γράφημα έχει χρωματικό αριθμό $\chi(G) = 2$. Όμως για $K = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ο αλγόριθμος παράγει ένα χρωματισμό που χρησιμοποιεί $n/2$ χρώματα. Αντίθετα για $K = \{v_1, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_2, v_4, \ldots, v_n\}$ ο αλγόριθμος υπολογίζει μια βέλτιστη λύση. Άρα κατανοούμε πόσο σημαντικό ρόλο παίζει η απαρίθμηση των κόμβων στην εκτέλεση του συγκεκριμένου αλγορίθμου.

Ένας άλλος ακολουθιακός αλγόριθμος που θα εξετάσουμε είναι, ο αλγόριθμος των Welsh-Powell [WP67]. Στον αλγόριθμο αυτό οι κόμβοι διατάσσονται σε φθίνουσα σειρά βαθμού κόμβου, δηλαδή ισχύει

$$d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n).$$

Έχοντας ορίσει την συγκεκριμένη απαρίθμηση για τους κόμβους χρωματίζουμε το γράφημα με τη χρήση του άπληστου αλγορίθμου χρωματισμού. Ο αλγόριθμος αυτός είναι γνωστός ως LF (Largest First).

Αλγόριθμος 2.3 Ακολουθιακή Μέθοδος Απαρίθμησης σε Φθίνουσα Σειρά Βαθμού Κόμβου

LF(G)

$K \leftarrow$ vertices of G arranged in non-increasing order of degree
Greedy-Color(G, K)

Είναι μία από τις παλιότερες και απλούστερες ακολουθιακές μεθόδους. Βασίζεται στην απλή παρατήρηση ότι οι κόμβοι με μικρό βαθμό έχουν μεγαλύτερη ευελιξία στην επιλογή χρώματος. Κι αυτός ο αλγόριθμος μπορεί να υλοποιηθεί έτσι ώστε να τρέχει σε χρόνο $O(n + m)$.

Οι Welsh και Powell στο [WP67], διατύπωσαν τον αλγόριθμο LF σε μία ελαφρώς διαφορετική, αλλά ισοδύναμη μορφή. Για ένα γράφημα $G = (V, E)$, θεωρούμε και πάλι πως έχουμε μια απαρίθμηση των κόμβων $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, έτσι ώστε να ισχύει $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n)$. Έστω $T_1 \subseteq V$, το οποίο ορίζεται αναδρομικά με τον εξής τρόπο:

$$v_1 \in T_1.$$

Αν $\{v_{i_k}\}_{k=1}^{f} \in T_1$, που $i_1 = 1$ και

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_f$$

τότε το $v_j \in T_1$ αν και μόνο αν

$$j > i_f$$

και επίσης ο v_j δεν είναι γείτονας σε κανένα από τα μέλη του $\{v_{i_k}\}_{k=1}^{f}$. Προφανώς το T_1 είναι ένα πεπερασμένο, μη κενό υποσύνολο του V. Όμοια ορίζουμε και το T_2, να είναι ένα υποσύνολο του $V \setminus T_1$ το οποίο κατασκευάζεται αναδρομικά με τον εξής τρόπο:
Αν i είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο $v_i \notin T_1$, τότε $v_i \in T_2$. Αν $\{v_{j_k}\}_{k=1}^{F} \in T_2$, που $j_1 = i$ και $j_1 < j_2 < \cdots < j_F$ τότε $v_l \in T_2$ αν και μόνο αν

$$l > j_F$$

και επίσης ο v_l δεν είναι γείτονας σε κανένα από τα μέλη του $\{v_{j_k}\}_{k=1}^{F}$. Εδώ να σημειώσουμε ότι το T_2 μπορεί να είναι κενό (όταν το G είναι πλήρως μη-συνεκτικό). Παρόμοια ορίζουμε το T_3 να είναι ένα υποσύνολο του $V \setminus (T_1 \cup T_2)$ έτσι ώστε αν i είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίον $v_i \notin T_1 \cup T_2$, τότε το $v_i \in T_3$, και συνεχίζουμε όπως στα προηγούμενα βήματα.

Με αυτό τον τρόπο ορίζουμε μία ακολουθία ξένων, ανεξάρτητων υποσυνόλων του V, τέτοια ώστε $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ και υπάρχει ένας πεπερασμένος ακέραιος $k(G)$ τέτοιος ώστε

$$T_r = \emptyset, \quad r > k(G).$$

Εκ κατασκευής, δεν μπορούν δύο γείτονες να βρίσκονται στο ίδιο σύνολο T_i, άρα χρωματίζοντας κάθε κόμβο σε ένα σύνολο T_i με το ίδιο χρώμα c_i πετυχαίνουμε ένα κατάλληλο χρωματισμό με χρήση $k(G)$ χρωμάτων.

Ο αλγόριθμος των Welsh-Powell ο LF είναι ισοδύναμοι. Και οι δύο έχουν μια απαρίθμηση των κόμβων σε μη-αύξουσα σειρά βαθμού κόμβου, και δίνουν στον κάθε κόμβο, όταν έρθει η σειρά του να χρωματιστεί, το ελάχιστο δυνατο χρώμα, δηλαδή χρησιμοποιούν τον άπληστο αλγόριθμο χρωματισμού. Απλώς ο αλγόριθμος των Welsh-Powell κοιτάζει να δώσει τα χρώματα με τη σειρά, και όχι να δώσει χρώματα σε κάθε κόμβο με τη σειρά της απαρίθμησης. Δηλαδή κάθε κόμβος που στον αλγόριθμο LF θα έπαιρνε το χρώμα 1, εισάγεται σε ένα σύνολο T_1. Αντίστοιχα καθε κόμβος που στον αλγόριθμο LF θα έπαιρνε το χρώμα 2, εισάγεται σε ένα σύνολο T_2 κ.ο.κ. Η συγκεκριμένη υλοποίηση μπορεί να φαίνεται πιο πολύπλοκη. Είναι και χρονικά πιο πολύπλοκη καθώς μπορεί να υλοποιηθεί σε $O(n^2)$.

Παραμένει όμως πολυωνυμικού χρόνου. Επίσης είναι αρκετά βοηθητική στο να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για το $k(G)$ (άρα και για το $\chi(G)$). Σύμφωνα με το [WP67] ισχύει ότι

$$v_i \in \bigcup_{j=1}^{\phi(i)} T_j$$

που

$$\phi(i) = \min\{i, d(v_i) + 1\}.$$

Άρα ένα γράφημα G μπορεί πάντα να χρωματιστεί με το πολύ $k(G)$ χρώματα που

$$\chi(G) \leq k(G) \leq \max_i \min\{i, d(v_i) + 1\}.$$

Το παραπάνω αποτελεί ένα βελτιωμένο άνω φράγμα για τον χρωματικό αριθμό. Βέβαια υπάρχουν γραφήματα για τα οποία αυτό το άνω φράγμα απέχει αρκετά από τον χρωματικό αριθμό. Επίσης στη χειρώτερη περίπτωση παίρνουμε και πάλι $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

Ο επόμενος αλγόριθμος που θα μελετήσουμε είναι ο DSatur (Degree Saturation) του Brélaz [Bré79]. Ο αλγόριθμος DSatur, σε αντίθεση με τους αλγορίθμους που εξετάσαμε παραπάνω, ορίζει μια δυναμική απαρίθμηση των κόμβων με κριτήριο τον βαθμό κορεσμού κάθε κόμβου. Ορίζεται ως βαθμός κορεσμού ενός κόμβου, ο αριθμός των διαφορετικών χρωμάτων στα οποία είναι γείτονας (χρωματισμένοι κόμβοι).

Αλγόριθμος 2.4 Μέθοδος Δυναμικής Απαρίθμησης Μεγιστικού Βαθμού Κορεσμού

DSatur(G)
  $K \leftarrow$ vertices of G arranged in non-increasing order of degree
  while $K \neq \emptyset$ **do**
    Choose the first vertex $v \in K$ with a maximal saturation degree
    Give vertex v the smallest possible color
    $K \leftarrow K \setminus \{v\}$
  end while

Παρατηρούμε ότι ο Αλγόριθμος 2.4 θυμίζει αρκετά μια τυπική μέθοδο που χρησιμοποιεί τον άπληστο χρωματισμό. Κι αυτός ο αλγόριθμος ταξινομεί τους κόμβους σε μη-αύξουσα σειρά βαθμού κόμβου και βασιζόμενος σε κάποια απαρίθμηση επιλέγει να χρωματίσει ένα κόμβο σε κάθε επανάληψη. Από εκεί έγκυται και η ορθότητα του, ότι δηλαδή αποτελεί κι αυτός ένα παράδειγμα ακολουθιακού αλγορίθμου. Με την μόνη διαφορά ότι η απαρίθμηση των κόμβων δεν είναι προκαθορισμένη πριν την εκτέλεση. Καθορίζεται δυναμικά. Σε κάθε επανάληψη επιλέγεται να χρωματιστεί ο κόμβος με τον μεγιστικό βαθμό κορεσμού. Σε περίπτωση ισοπαλίας επιλέγεται ένας κόμβος με μεγιστικό βαθμό. Επίσης κάθε κόμβος που χρωματίζεται, αφαιρείται από σύνολο κόμβων, άρα εδώ το K ορίζεται ως το σύνολο των κόμβων που δεν έχουν χρωματιστεί ακόμα. Η ιδέα πίσω από την χρήση του μεγιστικού βαθμού κορεσμού είναι ότι θέτει ως προτεραιότητα τον χρωματισμό των κόμβων που φαίνονται να είναι οι πιο περιορισμένοι. Που διαθέτουν δηλαδή τις λιγότερες διαθέσιμες χρωματικές επιλογές τη δεδομένη στιγμή. Ο DSatur μπορεί να υλοποιηθεί σε $O(n^2)$. Σύμφωνα με το [Bré79] είναι ακριβης για διμερή γραφήματα. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι ο DSatur είναι ακριβείς και για κύκλους. Αν πρόκειται για κύκλο άρτιου μήκους τον χρωματίζει με χρήση δύο χρωμάτων, ενώ αν πρόκειται για κύκλο περιττού μήκους τον χρωματίζει με χρήση τριών χρωμάτων.

Οι αλγόριθμοι που εξετάσαμε παραπάνω ανήκουν στην κατηγορία των ακολουθιακών αλγορίθμων χρωματισμού. Είναι ιδιαίτερα σημαντικοί, γιατί είναι απλοί και γρήγοροι. Επίσης υπάρχει τουλάχιστον μία διάταξη των κόμβων που όταν δοθεί σαν είσοδος στον άπληστο αλγόριθμο χρωματισμού, τότε παράγει μία βέλτιστη λύση. Η αναζήτηση της διάταξης που δίνει ένα βέλτιστο χρωματισμό αποτέλεσε έμπνευση για την κατασκευή πολλών ακολουθιακών αλγορίθμων, αλλά και αλγορίθμων που χρησιμοποιούν επαναλαμβανόμενα τον άπληστο χρωματισμό κατασκευάζοντας σε κάθε επανάληψη μία διάταξη που ενδεχομένως να βελτιώνει τον αριθμό των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο Επαναλαμβανόμενος Άπληστος Αλγόριθμος [Cul94]. Ο αλγόριθμος αυτός χρησιμοποιεί τον άπληστο αλγόριθμο επαναλαμβανόμενα άλλαζοντας την διάταξη των κόμβων, με τέτοιο τρόπο, που τα χρώματα που χρησιμοποιούνται σε κάθε επανάληψη να μην αυξάνονται. Ο αλγόριθμος ξεκινάει με έναν κατάλληλο χρωματισμό. Σε κάθε επανάληψη, η διάταξη των κόμβων είναι τέτοια που οι κόμβοι κάθε ανεξάρτητου συνόλου που προσδιορίστηκαν στον προηγούμενο χρωματισμό είναι συνεχόμενοι, δηλαδή πρώτα εμφανίζονται οι κόμβοι που χρωματίστηκαν με το χρώμα c_i, μετά οι κόμβοι που χρωματίστηκαν με το χρώμα c_j, κ.ο.κ. Αυτό εξασφαλίζει πως ο νέος χρωματισμός δεν θα χρησιμοποιεί επιπλέον χρώματα. Υποθέτουμε πως ένας χρωματισμός έχει παραχθεί χρησιμοποιώντας τον άπληστο χρωματισμό. Για τα χρώματα $c_2 > c_1$, κάθε κόμβος με χρώμα c_2 συνδέεται με ακμή με τουλάχιστον ένα κόμβο με το χρώμα c_1. Το αντίθετο δεν ισχύει απαραίτητα. Αν οι κόμβοι αναδιαταχθούν, ώστε οι κόμβοι του χρώματος c_2 να προηγούνται των κόμβων του χρώματος c_1 και γίνει επανεκτέλεση του άπληστου χρωματισμού, τότε είναι δυνατό κόμβοι από το σύνολο c_1 να λάβουν το ίδιο χρώμα με αυτούς του c_2. Αυτό συνολικά μπορεί να οδηγήσει σε μειωμένο χρωματισμό.

Φυσικά έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία πολλοί κεντρικοί αλγόριθμοι που δεν χρησιμοποιούν τον άπληστο αλγόριθμο χρωματισμού, και ακολουθούν μια διαφορετική στρατηγική χρωματισμού. Ένα χαρακτηρηστικό παράδειγμα είναι ο αλγόριθμος RLF (Recursive Largest First) του Leighton [Lei79]. Η μέθοδος αυτή δουλεύει με το να χρωματίζει ένα υποσύνολο κόμβων με το ίδιο χρώμα τη φορά, και όχι με το να χρωματίζει ένα κόμβο. Ορίζει δηλαδή ένα ανεξάρτητο σύνολο κόμβων που θα χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα. Στη συνέχεια αυτό το ανεξάρτητο σύνολο αφαιρείται από το γράφο, και η διαδικασία συνεχίζεται για στο υπολειπόμενο γράφημα. Σταματάει όταν δεν ύπαρχει κάποιος υπολειπόμενος υπόγραφος, όταν δηλαδή όλοι οι κόμβοι έχουν χρωματιστεί. Η λογική πίσω και από αυτόν τον αλγόριθμο, είναι να χρωματίσει πρώτα τους κόμβους που τη δεδομένη στιγμή της εκτέλεσης φαίνονται να είναι πιο περιορισμένοι ως προς τις διαθέσιμες χρωματικές επιλογές.

Αλγόριθμος 2.5 Αναδρομική Μέθοδος Απαρίθμησης Μεγιστικού Βαθμού Κόμβου

RLF(G, K, i)
  if $K == \emptyset$ **then**
    return
  end if
  $v \leftarrow$ the first vertex in K that has the maximum number of adjacent vertices in K
  $C \leftarrow \{v\}$
  $U \leftarrow \{u \mid u \in K \cap N_G(v)\}$
  $K \leftarrow K \setminus (U \cup \{v\})$
  while $K \neq \emptyset$ **do**
    $v \leftarrow$ the first vertex in K that has the maximum number of adjacent vertices in U
    $C \leftarrow C \cup \{v\}$
    $U \leftarrow U \cup \{u \mid u \in K \cap N_G(v)\}$
    $K \leftarrow K \setminus (U \cup \{v\})$
  end while
  RLF(G, U, $i+1$)

Ο RLF είναι αναδρομικός αλγόριθμος. Η πρώτη κλήση του πρέπει να γίνει με K μια αυθαίρετη απαρίθμηση των κόμβων ενός γραφήματος G, και i ίσο με 1. Σε κάθε αναδρομική κλήση αυτό που στην ουσία γίνεται είναι, να επιλέγεται ο πρώτος κόμβος στο $v \in K$ που έχει τους περισσότερους γείτονες στο K. Στην συνέχεια ο κόμβος αυτός μεταφέρεται στο ανεξάρτητο σύνολο C, που αποτελεί μια χρωματική ομάδα, ενώ οι γείτονες του v στο K μεταφέρονται στο σύνολο U. Το σύνολο U παίζει τον ρόλο των κόμβων που δεν μπορούν να συμπεριληφθούν στην χρωματική ομάδα C. Όσο το K δεν είναι κενό επιλέγεται ο κόμβος $v \in K$ που έχει τους περισσότερους γείτονες στο U. Στην συνέχεια μεταφέρεται κι αυτός στο C, ενώ οι γείτονες του στο K μεταφέρονται στο U. Στν επόμενη αναδρομική κλήση ο αλγόριθμος καλείται να δημιουργήσει μια καινούρια χρωματική κλάση, με κόμβους από το σύνολο U. Και ο RLF είναι ακριβής για διμερείς γράφους και κύκλους. Επίσης στο [Lei79] αποδεικνύεται ότι η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(n^3)$, δηλαδή έχει υψηλότερο υπολογιστικό κόστος από τους ακολουθιακούς αλγορίθμους που είδαμε παραπάνω, αλλά παραμένει πολυωνυμικός.

Οι παραπάνω μέθοδοι ανήκουν στην ευρύτερη κατηγορία των ακολουθιακών αλγορίθμων χρωματισμού. Χρωματίζουν ακολουθιακά τους κόμβους ενός γραφήματος ακολουθόντας κάποιους κανόνες για την επιλογή του επόμενου κόμβου που θα χρωματιστεί, και του χρώματος που θα χρησιμοποιηθεί. Είναι σχετικά απλοί και γενικά γρήγοροι αλγόριθμοι, όμως τα αποτελέσματα που παράγουν μπορεί να έχουν μεγάλη εξάρτηση από κάποια παράμετρο της εισόδου, όπως η διάταξη των κόμβων. Φυσικά υπάρχουν κι άλλοι ακολουθιακοί αλγόριθμοι χρωματισμού που δεν παρουσιάστηκαν παραπάνω, π.χ. ακολουθιακοί αλγόριθμοι με ανταλλαγή (δες [MMI72]). Επίσης έχουν αναπτυχθεί πιο σύνθετες μέθοδοι χρωματισμού που ξεκινούν είτε από ένα μερικό χρωματισμό είτε από ένα πλήρη και επιχειρούν να βελτιστοποιήσουν μια λύση με τη χρήση τοπικής αναζήτησης. Όπως επίσης και μέθοδοι που βασίζονται στον ακέραιο προγραμματισμό, στην χαλάρωση ενός ακέραιου προγράμματος σε γραμμικό πρόγραμμα, και την εύρεση μιας ακέραιας λύσης (δηλαδή ενός κατάλληλου χρωματισμού) που προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα μια βέλτιστη λύση. Πολλές από αυτές τις μεθόδους αναφέρονται στο [MT09].

Η πληθώρα αλγορίθμων και τεχνικών χρωματισμού ενός γραφήματος γεννά αυτόματα ερωτήματα σχετικά με τον λόγο ύπαρξης τόσο πολλών μεθόδων χρωματισμού. Είδαμε παραπάνω μεθόδους που πετυχαίνουν έναν κατάλληλο χρωματισμό σε πολυωνυμικό χρόνο. Στόχος του κάθε αλγορίθμου χρωματισμού είναι να πετύχει έναν κατάλληλο χρωματισμό με τα λιγότερα δυνατά χρώματα. Κάποιες από τις προαναφερθείσες μεθόδους πετυχαίνουν βέλτιστους (ελάχιστους) χρωματισμούς για συγκεκριμένες κατηγορίες γραφημάτων. Όχι όμως για οποιοδήποτε γράφημα. Από την άλλη αλγόριθμοι που πετυχαίνουν βέλτιστους χρωματισμούς, π.χ. στηριζόμενοι στον ακέραιο προγραμματισμό (δες [MT09]), ή αλγόριθμοι που απαντάνε στο ερώτημα αν υπάρχει k-χρωματισμός για ένα γράφημα G (δες [Law76], [BHK09]), απαιτούν εκθετικό χρόνο για την εκτέλεση τους, πράγμα που τους κάνει αναποτελεσματικούς ακόμα και για σχετικά μικρά γραφήματα (της τάξης των 100 κόμβων). Αυτόματα δημιουργείται ένα καινούριο ερώτημα σχετικά με το αν υπάρχει αποδοτικός αλγόριθμος (δηλαδή πολυωνυμικού χρόνου) που μπορεί να εντοπίσει εαν ένα γράφημα διαθέτει έναν k-χρωματισμό. Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα ήρθε να δώσει ένας κλάδος της θεωρητικής πληροφορικής που ονομάζεται θεωρία υπολογισμού, και συγκεκριμένα η θεωρία πολυπλοκότητας. Σύμφωνα με το Θεώρημα Α΄.6 το πρόβλημα του k-χρωματίσιμου γραφήματος, δηλαδή αν ένα γράφημα μπορεί να χρωματιστεί κατάλληλα με χρήση το πολύ k χρωμάτων είναι **NP**-πλήρες. Το πρόβλημα του k-χρωματίσιμου γραφήματος είναι πρόβλημα απόφασης, δηλαδή η απάντηση σε ένα στιγμιότυπο εισόδου αυτού του προβλήματος είναι ναι/όχι. Η κλάση **NP** είναι το σύνολο των προβλημάτων απόφασης που για κάθε ναι-στιγμιότυπο υπάρχει συνοπτικό πιστοποιητικό (πολυωνυμικού μήκους) αληθείας που ελέγχεται εύκολα (πολυωνυμικά). Για παράδειγμα στην περίπτωση του k-χρωματίσιμου γραφήματος ένας χρωματισμός του γραφήματος αποτελεί ένα πιστοποιητικό πολυωνυμικού μήκους και μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο αν αποτελεί κατάλληλος χρωματισμός για το γράφημα με χρήση το πολύ k χρωμάτων. Η κλάση **P** αποτελεί υποσύνολο της κλάσης **NP** και είναι το σύνολο των προβλημάτων απόφασης για τα οποία υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού μήκους. Τα **NP**-πλήρη προβλήματα είναι αυτά που συνοψίζουν την υπολογιστική δυσκολία της κλάσης, είναι δηλαδή τα πιο δύσκολα προβλήματα που περιέχονται στην κλάση **NP**. Σύμφωνα με την

Εικασία Α′.1, $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, δηλαδή η κλάση $\mathbf{P}$ είναι γνήσιο υποσύνολο της τάξης $\mathbf{NP}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που τα λύνει. Μέχρι στιγμής δεν έχει βρεθεί πολυωνυμικός αλγόριθμος που να λύνει το πρόβλημα του k-χρωματίσιμου γραφήματος. Και παρόλο που πρόκειται για μια εικασία, υπάρχουν αρκετές ενδείξεις πως ισχύει, και είναι έντονη η πεποίθηση στην επιστημονική κοινότητα πως για τα $\mathbf{NP}$-πλήρη προβλήματα δεν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που τα λύνει. Το ίδιο ισχύει και για τα αντίστοιχα προβλήματα βελτιστοποίησης. Κι αυτό γιατί, αν για παράδειγμα υπήρχε πολυωνυμικός αλγόριθμος που υπολογίζει τον χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος, τότε υπολογίζοντας τον θα μπορούσαμε άμεσα να απαντήσουμε στο αν ένα γράφημα είναι k-χρωματίσιμο. Στην περίπτωση του χρωματικού αριθμού ακόμα και η προσέγγιση του με ένα παράγοντα $n^{1-\epsilon}$, για $\epsilon > 0$, είναι δύσκολη [Kho01]. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη θεωρία υπολογισμού και τη θεωρία της πολυπλοκότητας ο αναγνώστης μπορεί να απευθυνθεί στο Παράστημα Α′ και στο [Sip06].

Έχοντας αναλύσει όλα τα παραπάνω, μπορούμε να απαντήσουμε και στο πρώτο ερώτημα που τέθηκε. Η εύρεση του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος είναι ένα δύσκολο πρόβλημα. Όμως λόγω της τεράστιας σημασίας του σε πρακτικές εφαρμογές πρέπει να λυθεί, έστω και αν αυτό δεν γίνεται με τον βέλτιστο τρόπο. Κάποιες από τις τεχνικές που αναφέρθηκαν παραπάνω είναι μεταγενέστερες της ανακάλυψης ότι το πρόβλημα είναι $\mathbf{NP}$-πλήρες. Αυτό που είναι ιδιαίτερα σημαντικό και απαραίτητο για τη συνέχεια είναι ότι, κάθε γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με το πολύ $\Delta + 1$ χρώματα και μάλιστα υπάρχει ντετερμινιστικός κεντρικός αλγόριθμος που το πετυχαίνει αυτό.

2.4.2 Κατανεμημένοι Αλγόριθμοι

Στη συνέχεια μελετάμε κατανεμημένους αλγορίθμους που υπολογίζουν ένα χρωματισμό ενός γραφήματος. Η τεράστια ανάπτυξη των δικτύων επικοινωνιών φέρνει στο προσκήνιο ένα νέο μοντέλο υπολογισμού, αυτό που ο υπολογισμός γίνεται κατανεμημένα στους κόμβους του δικτύου. Στην περίπτωση μας υιοθετούμε ένα μοντέλο δικτύου επικοινωνιών που αναπαρίσταται από ένα μη-κατευθυνόμενο αβαρές γράφημα $G = (V, E)$. Οι κόμβοι έχουν διακριτούς αριθμούς ταυτότητας από το σύνολο $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Αρχικά κάθε κόμβος v γνωρίζει μόνο τον αριθμό ταυτότητας του $Id(v)$. Οι κόμβοι επικοινωνούν μέσω των ακμών του G σύγχρονα, σε διακριτούς γύρους. Σε κάθε γύρο κάθε κόμβος μπορεί να στέλνει μηνύματα σε όλους τους γείτονες του στο G. Επιτρέπεται να στέλνει διαφορετικά μηνύματα σε διαφορετικούς γείτονες. Το επονομαζόμενο τοπικό μοντέλο (LOCAL), που είναι και το μοντέλο που υιοθετούμε, επιτρέπει στους γειτονικούς κόμβους να ανταλλάσουν μηνύματα αυθαίρετα μεγάλου μεγέθους, ενώ το μοντέλο συμφόρησης (CONGEST) επιτρέπου στους γειτονικούς κόμβους να ανταλλάσουν μηνύματα των $O(\log n)$ δυαδικών ψηφιών σε κάθε γύρο. Όλα τα μηνύματα που αποστέλλονται σε ένα δεδομένο γύρο φτάνουν στους προορισμούς τους πριν ξεκινήσει ο επόμενο γύρος. Ο χρόνος εκτέλεσης ενός αλγορίθμου σε αυτό το μοντέλο είναι (στη χειρότερη περίπτωση) ο αριθμός των γύρων της κατανεμημένης επικοινωνίας που ο αλγόριθμος απαιτεί. Αυτό σημαίνει ότι αγνοούμε τη χρονική επιβάρυνση των τοπικών υπολογισμών που μπορεί να γίνονται σε κάθε κόμβο.

Το πρόβλημα του k-χρωματίσιμου γραφήματος είναι $\mathbf{NP}$-πλήρες. Αλλά όπως είδαμε και παραπάνω ένα γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με το πολύ $\Delta+1$ χρώματα σε γραμμικό χρόνο, μέσω ενός κεντρικού αλγορίθμου. Το πρόβλημα γίνεται πιο πολύπλοκο όταν ο αλγόριθμος πρέπει να είναι κατανεμημένος. Έτσι γεννάται ένα καινούριο πρόβλημα, το πρόβλημα του κατανεμημένου k-χρωματίσιμου γραφήματος, το οποίο αφορά τον κατάλληλο χρωματισμό ενός γραφήματος G, μέσω ενός κατανεμημένου αλγορίθμου, με τη χρήση ενός δεδομένου συνόλου k διαθέσιμων χρωμάτων. Το πρόβλημα το εισήγαγε ο Linial [Lin92]. Στη συνέχεια θα δούμε τον αλγόριθμο που πρότεινε. Είναι το κύριο πρόβλημα με το οποίο καταπιανόμαστε σε αυτή τη διπλωματική. Εφόσον σε ένα γράφημα μπορεί να επιτευχθεί ένας $(\Delta + 1)$-χρωματισμός μέσω ενός κεντρικού αλγορίθμου, θα εξετάσουμε διάφορους τρόπους με τους οποίους αυτό μπορεί να συμβεί όταν ο υπολογισμός είναι κατανεμημένος. Οι αλγόριθμοι που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τους ντετερμινιστικούς κατανεμημένους αλγορίθμους και τους πιθανοτικούς κατανεμημένους αλγορίθμους. Θα γίνει κάποια αναφορά και σε κάποιες ντετερμινιστικές μεθόδους, αλλά κυριώς θα μελετήσουμε πιθανοτικούς κατανεμημένους αλγορίθμους χρωματισμού ενός γραφήματος.

Έστω ένα γράφημα G με μέγιστο βαθμό Δ, που έχει χρωματιστεί κατάλληλα με χρήση ενός k-χρωματισμού, για κάποιο $k \geq \Delta + 1$. Η ακόλουθη διαδικασία μειώνει τον αριθμό των χρωμάτων σε $\Delta + 1$, μέσα σε $k - (\Delta + 1)$ γύρους. Σε κάθε γύρο κάθε κόμβος στέλνει το τρέχον χρώμα του σε όλους τους γείτονες του. Στον πρώτο γύρο κάθε κόμβος v με χρώμα k επαναχρωματίζεται παράλληλα με ένα διαθέσιμο χρώμα από την παλέτα $[\Delta + 1]$. Το σύνολο των γειτόνων του v, $N_G(v)$, χρωματίζεται με το πολύ Δ χρώματα. Οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα διαθέσιμο χρώμα για τον κόμβο v. Το σύνολο των κόμβων που είναι χρωματισμένοι με k σχηματίζουν ένα ανεξάρτητο σύνολο. Άρα και ο καινούριος χρωματισμός είναι κατάλληλος και χρησιμοποιεί $k - 1$ χρώματα. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία για τα χρώματα $k - 2, k - 1, \ldots, \Delta + 2$ πετυχαίνουμε έναν $(\Delta + 1)$-χρωματισμό, μέσα σε $k - \Delta + 1$ γύρους για το γράφημα G. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο για να παράγουμε καλύτερους χρωματισμούς από αυτούς που παράγουν κάποιοι αλγόριθμοι.

Ο πρώτος αλγόριθμος που θα μελετήσουμε είναι ο αλγόριθμος των Cole και Vishkin. Έστω $G = (V, E)$ ένα προσανατολισμένο δέντρο, δηλαδή ένα δέντρο που διαθέτει ένα κόμβο $r \in V$, που παίζει τον ρόλο της ρίζας, και κάθε κόμβος $v \in V$, $v \neq r$ γνωρίζει την ταυτότητα του πατέρα του $\pi(v)$ στο δέντρο. Ο αλγόριθμος των Cole και Vishkin παράγει έναν 3-χρωματισμό για ένα προσανατολισμένο δέντρο σε χρόνο $\log^* n + O(1)$, και είναι ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα από τους Cole και Vishkin [CV86], και Goldberg, Plotking και Shannon [GPS87]. Η δύναμη αυτής της τεχνικής έγκυται στην ταχύτητα με την οποία χρωματίζει το δέντρο, γιατί όσον αφορά τη βελτιστότητα της λύσης εύκολα παρατηρεί κανείς ότι ένα δέντρο είναι ένα διμερές γράφημα, άρα μπορεί να χρωματιστεί με δύο χρώματα. Αλλά για να γίνει το παραπάνω αντιληπτό πρέπει πρώτα να ορίσουμε την συμπεριφορά της συνάρτησης $\log^* n$. Για μία παράμετρο n, η συνάρτηση $\log^* n$ ισούται με τον αριθμό των φορών που κάποιος πρέπει να εφαρμόσει τον δυαδικό λογάριθμο, ώστε το n να καταλήξει σε έναν αριθμό μικρότερο ή ίσο του 2, δηλαδή $\log^* n = \{i \mid \log^{(i)} n \leq 2\}$. Εδώ $\log^{(0)} n = n$, και $\log^{(i+1)} n = \log_2 \log^{(i)} n$. Πρόκειται για μια πολύ αργά αυξανόμενη συνάρτηση. Για παράδειγμα $\log^* 2^{16} = 1 + \log^* 16 = 2 + \log^* 4 = 3$. Περιγράφουμε πρώτα πως μπορεί να επιτευχθεί ένας 6-χρωματισμός και στη συνέχεια μειώνουμε τον αριθμό των χρωμάτων σε 3 με τη χρήση μιας τεχνικής που ονομάζεται ολίσθηση προς τα κάτω (shift-down). Αρχικά κάθε κόμβος v χρωματίζεται με τον αριθμό της ταυτότητας του, δηλαδή $c_v = Id(v)$. Συμβολίζουμε με $|c_v|$ τον αριθμό των δυαδικών συμβολοσειρών που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν το c_v, δηλαδή $|c_v| = \lceil \log_2 c_v \rceil$. Επίσης, για κάθε δείκτη i, $1 \leq i \leq |c_v|$, το $c_v[i]$ δηλώνει το i-οστό πιο αριστερό δυαδικό ψηφίο της δυαδικής συμβολοσειράς c_v. Ο αλγόριθμος λειτουργεί επαναληπτικά. Σε κάθε επανάληψη κάθε κόμβος $v \neq r$ συγκρίνει την δυαδική συμβολοσειρά c_v που αναπαριστά το τρέχων χρώμα του με τη δυαδική συμβολοσειρά $c_{\pi(v)}$ που αναπαριστά το χρώμα του πατέρα του. Βρίσκει ένα δείκτη i τέτοιο ώστε $c_v[i] \neq c_{\pi(v)}[i]$, και θέτει $c'_v = \langle i, c_v[i] \rangle$. Το c'_v είναι το νέο χρώμα του v και αποτελείται από δύο πεδία. Το πρώτο πεδίο περιέχει τη δυαδική αναπαράσταση της δυαδικής συμβολοσειράς i, ενώ το δεύτερο περιέχει ένα δυαδικό ψηφίο, το $c_v[i]$. Στην ουσία το χρώμα c'_v είναι η συνένωση αυτών των δύο πεδίων. Η ρίζα r του δέντρου επιλέγει έναν αυθαίρετο δείκτη i και θέτει $c'_r = \langle i, c_r[i] \rangle$. Ο αλγόριθμος εκτελείται για $\log^* n$ φορές. Χάριν απλότητας θεωρούμε ότι όλοι οι κόμβοι γνωρίζουν την τιμή του n. Η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε, αν σε κάθε επανάληψη ξεκινάει με ένα κατάλληλο χρωματισμό, τότε παράγει και ένα κατάλληλο χρωματισμό. Έστω μια ακμή $\{u, v\} \in E$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\pi(v) = u$. Δεν μπορούν οι δύο κόμβοι να έχουν το ίδιο χρώμα. Αν το πρώτο πεδίο είναι διαφορετικό, τότε οι δύο συμβολοσειρές είναι διαφορετικές. Αν είναι ίδιο, τότε το δεύτερο πεδίο είναι διαφορετικό. Φυσικά θα μπορούσαν τα δύο πεδία των δυαδικών συμβολοσειρών να είναι διαφορετικά, αλλά η συνένωση τους να δίνει την ίδια συμβολοσειρά. Όμως κάτι τέτοιο εδώ δεν μπορεί να συμβεί, καθώς το δεύτερο πεδίο είναι δυαδική συμβολοσειρά μήκους ένα. Εφόσον από ένα κατάλληλο χρωματισμό με αυτή την επαναληπτική μέθοδο πάμε σε νέο κατάλληλο χρωματισμό, και εφόσον ξεκινάμε με έναν κατάλληλο χρωματισμό που κάνει χρήση n χρωμάτων, θα δούμε πως μπορούμε αρχικά να μειώσουμε τον αριθμό των χρωμάτων σε 6. Έστω N_j, για κάθε $j = 1, 2, \ldots,$ ο μέγιστος αριθμός δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται από ένα χρώμα c_v, για κάποιο $v \in V$, μετά την επανάληψη j. Χάριν ευκολίας, έστω ότι $N_0 = \lceil \log n \rceil$ συμβολίζουν τον αριθμό των δυαδικών ψηφιών που χρησιμοποιούνται για τον αρχικό χρωματισμό του αλγορίθμου. Τότε $N_{j+1} \leq \lceil \log N_j \rceil + 1 \leq \log N_j + 2$. Έτσι $N_1 \leq \log N_0 + 2$, και $N_2 \leq \log(\log N_0 + 2) \leq \log\log N_0 + 3$, υποθέτωντας ότι $\log N_0 \geq 2$. Επίσης $N_3 \leq \log N_2 + 2 \leq \log(\log\log N_0 + 3) + 2 \leq \log^{(3)} N_0 + 3$, υποθέτωντας ότι $\log\log N_0 \geq 3$. Γενικά, για $j = 1, 2, \ldots,$ έτσι ώστε $\log^{(j)} N_0 \geq 3$, ισχύει ότι $N_j \leq \log^{(j)} N_0 + 3$. Έτσι για $j = \log^* N_0$ παίρνουμε $N_j \leq 5$. Σε αυτό το σημείο δύο ακόμα επαναλήψεις του αλγορίθμου μειώνουν τον μέγιστο αριθμό των δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται σε 3. Άρα τα διαθέσιμα χρώματα είναι 8. Ακόμα μία επανάληψη του αλγορίθμου μειώνει το μέγεθος της παλέτας σε 6, καθώς το πρώτο πεδίο του χρώματος έχει μόνο τρεις δυνατές τιμές. Στη συνέχεια ο αριθμός των χρωμάτων μειώνεται σε 3, με χρήση της τεχνικής shift-down. Αυτή η φάση του αλγορίθμου απαιτεί 3 επιπρόσθετες επαναλήψεις, με $O(1)$ γύρους η καθεμία. Σε κάθε επανάληψη ο αριθμός των χρωμάτων μειώνεται κατά 1 σε δύο βήματα. Αν c είναι ο αρχικός 6-χρωματισμός, τότε στο πρώτο βήμα της πρώτης επανάληψης κάθε κόμβος $v \neq r$ υιοθετεί το χρώμα $c(\pi(u))$ του πατέρα του, $\pi(v)$, δηλαδή $c'(v) = c(\pi(v))$. Η ρίζα αλλάζει το χρώμα της σε έναν αυθαίρετο κόμβο από το $\{1, 2, 3\}$, διαφορετικό από το χρώμα που είχε προηγουμένως. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι ο c' είναι ένας κατάλληλος 6-χρωματισμός. Επίσης ικανοποιεί μια πολύ βοηθητική ιδιότητα. Για κάθε κόμβο v όλα τα παιδιά του είναι χρωματισμένα με το ίδιο χρώμα. Έτσι ο αριθμός των μη διαθέσιμων χρωμάτων για τον v είναι το πολύ 2. Στο δεύτερο βήμα της πρώτης επανάληψης κάθε κόμβος v με $c'(v) = 6$ βρίσκει παράλληλα ένα διαθέσιμο χρώμα από το $\{1, 2, 3\}$ και χρωματίζεται με αυτό. Έτσι λαμβάνουμε έναν 5-χρωματισμό. Δύο επαναλήψεις (καθεμία με δύο βήματα) μειώνουν τον αριθμό των χρωμάτων σε 3. Μπορούμε να γενικεύσουμε τον αλγόριθμο των Cole-Vishkin για γραφήματα $G = (V, E)$, με μέγιστο βαθμό το πολύ Δ. Θεωρούμε ότι κάθε κόμβος $v \in V$, βλέπει καθένα από τους $d = deg(v) \leq \Delta$ γείτονες του $v_1, v_2, \ldots, v_d$ ως γονείς του. Υποθέτουμε ότι μας δίδεται ένας κατάλληλος χρωματισμός c. Ο νέος χρωματισμός c' σχηματίζεται με τον εξής τρόπο. Το νέο χρώμα $c'(v)$ του V θα αποτελείται από d πεδία, $c'(v) = \langle c'_1(v), c'_2(v), \ldots, c'_d(v) \rangle$. Για κάθε $j \in [d]$, το πεδίο $c'_j(v)$ είναι το νέο χρώμα που ο κόμβος v θα έπαιρνε στον αλγόριθμο των Cole-Vishkin αν ο v_j ήταν ο πατέρας του v. Με άλλα λόγια, $c'_j(v) = \langle i, c_v[i] \rangle$, δηλαδή το c'_j αποτελείται από δύο υποπεδία. Το πρώτο υποπεδίο είναι ένας δείκτης $i = i(j)$ ενός δυαδικού ψηφίου, τέτοιο ώστε $c(v)[i] \neq c(v_j)[i]$, και το δεύτερο υποπεδίο είναι το δυαδικό ψηφίο $c(v)[i]$. Πολύ εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι, μεταξύ των χρωμάτων γειτονικών κόμβων υπάρχει τουλάχιστον ένα πεδίο που είναι διαφορετικό. Θεωρούμε μια ακμή $(v, w) \in E$. Έστω ότι $w = u_j$ είναι ο j-οστός γείτονας του v. Θεωρούμε τα j-οστά πεδία $c'_j(v)$ και $c'_j(w)$ στα δύο νέα χρώματα $c'(v)$ και $c'(w)$, αντίστοιχα (κάτι τέτοιο δεν έχει νόημα αν το $c'(w)$ έχει λιγότερα από j πεδία, αλλά τότε σίγουρα $c'(v) \neq c'(w)$). Έστω i_v (αντίστοιχα i_w), ο δείκτης που επιλέγεται από τον v (αντίστοιχα από τον w) για το j-οστό του πεδίο. Αν $i_v \neq i_w$ τότε το πρώτο υποπεδίο του $c'_j(v)$ είναι διαφορετικό από το πρώτο υποπεδίο του $c'_j(w)$. Αλλιώς τα δεύτερα υποπεδία τους είναι διαφορετικά. Για την ώρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτό αρκεί για να είναι ο c' ένας κατάλληλος χρωματισμός. Θα δούμε στην συνέχεια ότι με την προσθήκη κάποιων διαχωριστικών, κάτι τέτοιο όντως επιτυγχάνεται. Έστω N_i, $i = 1, 2, \ldots,$ ο μέγιστος αριθμός των δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται από ένα χρώμα την i-οστή φάση αναχρωματισμού του αλγορίθμου. Συμβολίζουμε με N_0 τον αριθμό των δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται για τα χρώματα πριν ο αλγόριθμος ξεκινήσει. Εφόσον τα αρχικά χρώματα είναι ο αριθμός των ταυτοτήτων, ισχύει ότι $N_0 = \lceil \log n \rceil$. Ισχύει ότι $N_{i+1} \leq \Delta \cdot (\lceil \log n \rceil + 1)$. Μπορούμε πολύ εύκολα να αποδείξουμε ότι για $i = \log^* n + O(1)$, $N_i \leq \Delta \cdot (\log \Delta + O(\log\log \Delta)$. Σε αυτό το σημείο το μέγιστο χρώμα που χρησιμοποιείται είναι από ένα κόμβο είναι το πολύ $2^{\Delta \cdot (\log \Delta + O(\log\log \Delta))}$, δηλαδή $\Delta^{O(\Delta)}$. Μένει να δούμε, πως θα εξασφαλίσουμε ότι η συνένωση των πεδίων του χρώματος κάθε κόμβου, δίνει κατάλληλο χρωματισμό. Επειδή τα πεδία ίσως και να έχουν διαφορετικό μήκος, μπορεί για ένα ζευγάρι κόμβων, η συνένωση των πεδίων τους να δώσει το ίδιο χρώμα. Για να χειριστούμε αυτή την κατάσταση κωδικοποιούμε κάθε δυαδική συμβολοσειρά στο $c'(x)$, για κάθε κόμβο $x \in V$, με δύο δυαδικά ψηφία. Το 0 κωδικοποιείται ως 00, και το 1 ως 01. Από την άλλη ως διαχωριστικά μεταξύ των διαφορετικών πεδίων χρησιμοποιούμαι το 10, και στο τέλος της δυαδικής συμβολοσειράς γράφουμε 11. Με αυτά τα διαχωριστικά, αν $c'_j(v) \neq c'_j(u)$, για κάποιο δείκτη j και ένα ζευγάρι κόμβων v και u τότε $c'(v) \neq c'(v)$, που είναι και το επιθυμητό. Με αυτό τον τρόπο ο αριθμός των ψηφιών στις δυαδικές συμβολοσειρές αυξάνεται κατά ένα παράγοντα 2, δηλαδή ο αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται θα αυξηθεί τετραγωνικά. Κάτι το οποίο χάνεται μπροστά στον τεράστιο υπολογισμό του $\Delta^{O(\Delta)}$ για τον αριθμό των χρωμάτων. Χρησιμοποιώντας την τετριμμένη τεχνική μείωσης των χρωμάτων που αναφέρθηκε παραπάνω παίρνουμε έναν $(\Delta+1)$-χρωματισμό για το γράφημα, που είναι και το ζητούμενο, σε $\Delta^{O(\Delta)} + \log^* n$ χρόνο. Είναι προφανές ότι ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι αρκετά χρονοβόρος. Υπάρχουν πολύ πιο αποδοτικοί κατανεμημένοι ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι, που υπολογίζουν ένα κατάλληλο $(\Delta+1)$-χρωματισμό σε ένα γράφημα (δες [GPS87], [BE13]).

Στη συνέχεια εξετάζουμε έναν ακόμη κατανεμημένο ντετερμινιστικό αλγόριθμο χρωματισμού, αυτόν του Linial. Σύμφωνα με το [Lin92] ένας $O(\Delta^2)$-χρωματισμός μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $\log^* n + O(1)$. Η απόδειξη βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα των Erdös et al [EFF82] (δες επίσης [Lin92]).

Λήμμα 2.1. *Για δύο ακεραίους n, Δ, $n > \Delta \geq 4$, υπάρχει μια οικογένεια $\mathcal{J}$ n υποσυνόλων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, m\}$, $m = 5 \cdot \lceil \Delta^2 \cdot \ln n \rceil$, τέτοια ώστε αν $F_0, F_1, \ldots, F_\Delta \in \mathcal{J}$, τότε*

$$F_0 \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{\Delta} F_i.$$

Απόδειξη. Χτίζουμε μια τυχαία συλλογή υποσυνόλων του $\mathcal{J}$ με τον ακόλουθο τρόπο. Για κάθε αντικείμενο $x \in [m]$, και για κάθε δείκτη $i \in [n]$, εισάγουμε το x στο σύνολο S_i με πιθανότητα $1/\Delta$, ανεξάρτητα από τα άλλα ζευγάρια $(x', i') \neq (x, i)$. Για ένα δεδομένο στοιχείο $x \in [m]$ και δεδομένους διακριτούς δείκτες $i_0, i_1, \ldots i_\Delta \in [n]$, ισχύει ότι

$$\mathbb{P}\left(x \in S_{i_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{\Delta} S_{i_j}\right) = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(1 - \frac{1}{\Delta}\right)^{\Delta} \geq \frac{1}{4\Delta}$$

που εφόσον $\Delta \geq 4$, $(1 - \frac{1}{\Delta})^{\Delta} \geq \frac{1}{4}$. Άρα

$$\mathbb{P}\left(x \notin (S_{i_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{\Delta} S_{i_j})\right) \leq 1 - \frac{1}{4\Delta}.$$

Η πιθανότητα πως για για κάθε x, $x \in [m]$, $x \notin S_{i_0} \setminus \cup_{i=1}^{\Delta} S_{i_j}$, είναι

$$\mathbb{P}\left(\forall x, x \notin (S_{i_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{\Delta} S_{i_j})\right) \leq \left(1 - \frac{1}{4\Delta}\right)^{m} \leq e^{-(5/4)\Delta \ln n} = n^{-(5/4)\Delta}.$$

Για να καταλήξουμε στο παραπάνω αποτέλεσμα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $1 + x \leq e^x$. Έτσι καταλήγουμε στο ότι

$$\mathbb{P}\left(S_{i_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\Delta} S_{i_j}\right) \leq n^{-(5/4)\Delta}.$$

Η πιθανότητα πως υπάρχουν $(\Delta+1)$ δείκτες $i_0, i_1, \ldots i_\Delta$, τέτοιοι ώστε $S_{i_0} \subseteq \cup_{j=1}^{\Delta} S_{i_j}$ είναι, από union-bound, το πολύ ο αριθμός των τρόπων να διαλέξει κανείς αυτούς τους δείκτες πολλαπλασιασμένος με

$n^{-(5/4)\Delta}$. Υπάρχουν $\binom{n}{\Delta+1}$ τρόποι να διαλέξει κανείς τους $(\Delta+1)$ διακριτούς τρόπους, και $(\Delta+1)$ τρόποι να διαλέξει κανείς το i_0 από την επιλεγμένη $(\Delta+1)$-πλειάδα των δεικτών. Έτσι,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\exists i_0, i_1, \ldots, i_\Delta \text{ τ.ω. } S_{i_0} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\Delta} S_{i_j}\right) &\leq (\Delta+1)\cdot\binom{n}{\Delta+1}\cdot n^{-(5/4)\Delta} \\ &\leq \left(\frac{e}{\Delta+1}\right)^{\Delta}\cdot e\cdot n^{-(1/4)\Delta+1}\end{aligned}$$

το οποίο προκύπτει από το ότι $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{e\cdot n}{k}\right)^k$. Η δεξί μέλος της ανισότητας είναι μικρότερο από 1 για $\Delta \geq 4$. Σημειώνουμε ότι για τις περιπτώσεις που $\Delta \in \{1,2,3\}$ πρέπει να αυξήσουμε την πολλαπλασιαστική σταθερά που αφορά το m από 5 σε 8, δηλαδή να θέσουμε $m = 8\cdot\lceil\Delta^2\cdot\ln n\rceil$. Έτσι,

$$\mathbb{P}\left(\forall \text{ διακριτούς } i_0, i_1, \ldots, i_\Delta,\ S_{i_0} \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{\Delta} S_{i_j}\right) \geq 1 - \left(\frac{e}{\Delta+1}\right)^{\Delta}\cdot e\cdot n^{-(\Delta/4)+1} > 0.$$

Άρα υπάρχει μια επιλογή συνόλων $S_1, S_2, \ldots, S_n$, για τα οποία κανένα από αυτά δεν καλύπτεται από την ένωση Δ άλλων συνόλων. □

Θα χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω λήμμα για χρωματισμό. Σε κάθε κόμβο $v \in V$ ανατίθεται το δικό του υποσύνολο $F_{Id(v)}$ από μία συλλογή J υποσυνόλων του m, $m = 5\cdot\lceil\Delta^2\cdot\ln n\rceil$, του οποίου η ύπαρξη εγκυάται από το Λήμμα 2.1. Τότε κάθε κόμβος v στέλνει το σύνολο του $F_{Id(v)}$ σε όλους τους γείτονες του. Δεδομένου του συνόλου του $F_{Id(v)}$, και των συνόλων $F_{Id(v_1)}, F_{Id(v_2)}, \ldots, F_{Id(v_h)}$ για όλους τους $h \leq \Delta$ γείτονες $v_1, v_2, \ldots, v_h$ του v, ο κόμβος v βρίσκει ένα αντικείμενο

$$c \in F_{Id(v)} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{h} F_{Id(v_i)}\right).$$

Ένα τέτοιο αντικείμενο υπάρχει επειδή $F_{Id(v)} \not\subseteq \cup_{i=1}^{h} F_{Id(v_i)}$. Ο κόμβος v επιλέγει το c να είναι το χρώμα του. Προφανώς, αυτός ο χρωματισμός είναι κατάλληλος, καθώς για κάθε ακμή $\{v,u\} \in E$, ισχύει ότι $c(v) \in F_{Id(v)} \setminus F_{Id(u)}$, και $c(u) \in F_{Id(u)}$, άρα $c(v) \neq c(u)$. Άρα μέσα σε ένα γύρο, έχουμε έναν m-χρωματισμό με $m = O(\Delta^2 \log n)$. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι οποιοσδήποτε κατάλληλος χρωματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί των αριθμών ταυτοτήτων ως χρωματισμός εισόδου σε αυτή τη διαδικασία. Γενικά αν ο αρχικός αριθμός των χρωμάτων είναι n', τότε καταλήγουμε μέσω της παραπάνω διαδικασίας σε ένα χρωματισμό με $m = O(\Delta^2\cdot\log n')$ χρώματα. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να εκτελεστεί επαναληπτικά. Εύκολα επαληθεύει κανείς ότι μέσα σε $\log^* n$ γύρους ο αλγόριθμος καταλήγει σε έναν $O(\Delta^2\cdot\log\Delta)$-χρωματισμό. Χρησιμοποιώντας ένα άλλο σύνολο συστημάτων των Erdös et al. [EFF82], μπορεί κανείς να μειώσει τον αριθμό των χρωμάτων σε $O(\Delta^2)$ μέσα σε έναν επιπλέον γύρο. Σημειώνουμε πως ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό συστημάτων συνόλων που περιγράφηκε παραπάνω, είναι πιθανοτικός. Στην ουσία αυτό που κάναμε είναι, ότι αποδείξαμε με χρήση της πιθανοτικής μεθόδου (δες [AS00], [MR13]), πως ένα σύστημα συνόλων με τις ζητούμενες ιδιότητες υπάρχει. Άρα υπάρχει δυνατότητα να κατασκευαστεί $O(\Delta^2)$-χρωματισμός, κατανεμημένα, σε $O(\log^* n) + O(1)$ χρόνο. Ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να μετατραπεί σε ντετερμινιστικό (δες [Lin92], [EFF82]), δηλαδή σε έναν αλγόριθμο που κατασκευάζει αυτό το σύνολο συστημάτων. Αυτό που πρέπει να κρατήσουμε είναι το πόσο χρήσιμη μπορεί να φανεί η τυχαιότητα για την κατασκευή χρωματισμών σε ένα γράφημα. Θα το διαπιστώσουμε ακόμα περισσότερο στη συνέχεια.

Από δω και στο εξής μελετάμε μόνο πιθανοτικούς κατανεμημένους αλγόριθμους. Πολλοί πιθανοτικοί αλγόριθμοι ακολουθούν την ακόλουθη προσέγγιση. Ο αλγόριθμος εξελίσσεται σε γύρους. Σε κάθε γύρο κάθε κόμβος επιλέγει τυχαία μια τιμή από ένα κατάλληλο σύνολο. Ανάλογα με την επιλεγμένη τιμή και τις τιμές των γειτόνων του, κάθε κόμβος παίρνει μια τελική απόφαση (π.χ. ένα χρώμα), ή συνεχίζει στον επόμενο γύρο. Όλοι οι κόμβοι που παίρνουν την τελική τους απόφαση σχηματίζουν ένα υποσύνολο μιας σωστής λύσης. Μετά αυτοί οι κόμβοι μετακινούνται από το γράφημα, και ο αλγόριθμος συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο στο υπολειμματικό γράφημα. Μια σημαντική απαίτηση σε αυτή την προσέγγιση είναι πως οι μερικές λύσεις πρέπει να είναι σωστές όχι μόνο μέσα σε κάθε υποσύνολο, αλλά επίσης και στην ένωση όλων των υποσυνόλων που μετακινήθηκαν από το γράφημα, μετά από κάθε γύρο. Αφού ο αλγόριθμος τερματίσει, η ένωση όλων των υποσυνόλων σχηματίζει τον γράφο εισόδου με την απαιτούμενη λύση. Ο Luby ήταν αυτός που εισήγαγε αυτή την προσέγγιση [Lub85], για το πρόβλημα της εύρεσης μεγιστικού ανεξάρτητου υποσυνόλου. Ο πρώτος αλγόριθμος που θα εξετάσουμε, που ακολουθεί αυτή την προσέγγιση, υπολογίζει έναν 2Δ-χρωματισμό. Ως είσοδο δέχεται ένα γράφημα G. Σε κάθε γύρο, κάθε κόμβος v επιλέγει ομοιόμορφα και τυχαία ένα χρώμα c_v από το σύνολο $[2\Delta] = \{1, 2, \ldots, 2\Delta\}$. Αν ένας κόμβος επιλέξει επιλέξει ένα χρώμα που είναι διαφορετικό από τις επιλογές όλων των γειτόνων του, και από τις τελικές αποφάσεις όλων των γειτόνων του, τότε το χρώμα c_v γίνεται η τελική απόφαση του v. Σε αυτή την περίπτωση ο v τερματίζει. Διαφορετικά, απορρίπτει το χρώμα c_v, και προχωρά στον επόμενο γύρο. Αποδεικνύεται ότι αν όλοι οι κόβμοι τερματίζουν, τότε η παραπάνω διαδικασία υπολογίζει έναν 2Δ-χρωματισμό για το γράφημα, όπως επίσης και ότι κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου όλοι οι κόμβοι τερματίζουν σε $O(\log n)$ γύρους με πιθανότητα $1 - 1/n^c$, για αυθαίρετα μεγάλη σταθερά c (δες [BE13]). Μια μικρή τροποποίηση της παραπάνω διαδικασίας επιτρέπει τον υπολογισμό ενός $(\Delta{+}1)$-χρωματισμού μέσα σε $O(\log n)$ χρόνο. Κάθε κόμβος σε κάθε γύρο επιλέγει ένα χρώμα από το σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, \Delta{+}1\}$. Το 0 είναι ένα ειδικό χρώμα, με πιθανότητα επιλογής $1/2$. Για οποιοδήποτε άλλο χρώμα $c \in \{1, 2, \ldots, \Delta + 1\} \setminus F_v$, όπου F_v το σύνολο των γειτόνων του v που έχουν λάβει τελική απόφαση, το χρώμα c επιλέγεται με πιθανότητα $\frac{1}{2(\Delta+1-|F_v|)}$. Σημειώνουμε πως τα χρώματα στο F_v είναι μόνιμα επιλεγμένα από τους γείτονες του v, οπότε δεν λαμβάνονται υπόψιν στην επιλογή χρώματος από τον v (η πιθανότητα επιλογής τους είναι 0). Τα υπόλοιπα βήματα της διαδικασίας παραμένουν τα ίδια, εκτός από το ότι το χρώμα 0 δεν τίθεται ποτέ ως τελικό χρώμα. Ο κόμβος που επιλέγει το 0 θα συνεχίσει στον επόμενο γύρο. Ακολουθεί ο ψευδοκώδικας για την διαδικασία που μόλις περιγράφηκε[5].

Στη συνέχεια περνάμε στην ανάλυση του αλγορίθμου. Θα αποδείξουμε ότι κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου, όλοι οι κόμβοι τερματίζουν μέσα σε $O(\log n)$ γύρους με πιθανότητα $1 - 1/n^c$, για μια αυθαίρετα μεγάλη σταθερά c. Θεωρούμε ένα κόμβο $v \in V$. Αναλύουμε την πιθανότητα ο v να τερματίζει στον γύρο i, δεδομένου ότι δεν έχει τερματίσει πριν τον γύρο i, για κάποιο $i > 0$. Αυτή είναι στην ουσία η πιθανότητα, ο κόμβος v να επιλέξει ένα χρώμα $c_v > 0$, που είναι διαφορετικό από τις επιλογές όλων των γειτόνων του. Η πιθανότητα πως ένας δεδομένος γείτονας u του v επιλέξει το ίδιο χρώμα $c_u = c_v$ σε αυτό το γύρο είναι το πολύ $\frac{1}{2(\Delta+1-|F_v|)}$ (η πιθανότητα ο u να επιλέξει ένα χρώμα μεγαλύτερο από το 0 είναι $1/2$, και ο v έχει να διαλέξει από $\Delta + 1 - |F_v|$ διαφορετικά χρώματα). Από union-bound, η πιθανότητα ο v να επιλέξει ένα χρώμα που είναι ίσο με το χρώμα κάποιου γείτονα του είναι το πολύ $(\Delta + 1 - |F_v|) \cdot \frac{1}{2(\Delta+1-|F_v|)} = 1/2$. Έτσι αν ο v επιλέξει ένα χρώμα $c_v > 0$, αυτό είναι διαφορετικό από τα χρώματα των γειτόνων του με πιθανότητα τουλάχιστον $1/2$. Ισχύει ότι $c_v > 0$ με πιθανότητα $1/2$. Άρα ο v τερματίζει με πιθανότητα τουλάχιστον $1/4$. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα κάποιος κόμβος v να μην έχει τερματίσει μέχρι τον γύρο i είναι το πολύ $(1 - 1/4)^i \leq e^{-i/4}$. Από union-bound , η πιθανότητα να υπάρχει κόμβος $v \in V$ που δεν έχει τερματίσει μέχρι τον γύρο i είναι το πολύ $n \cdot (3/4)^i$. Έτσι, μετά από $(c + 1) \cdot 4 \log n$ γύρους, με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - n \cdot (3/4)^i \geq 1 - 1/n^c$, όλοι οι κόμβοι τερματίζουν. Είναι προφανές ότι αν τερματίζουν όλοι οι κόμβοι τότε το γράφημα χρωματίζεται κατάλληλα με $(\Delta{+}1)$ χρώματα. Ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να μετατραπεί σε ντετερμινιστικό, όπως πρότεινε ο Luby [Lub93], χωρίς επιβάρυνση σε ό,τι

[5] Ο αλγόριθμος αυτός παρουσιάστηκε πρώτη φορά στην βιβλιογραφία από τον Luby [Lub93]

Αλγόριθμος 2.6 Πιθανοτική Διαδικασία $(\Delta+1)$-χρωματισμού

An algorithm for each vertex $v \in V$.
Initially $T_v = \emptyset$, $F_v = \emptyset$, for each $v \in V$. $\triangleright$ T_v είναι το σύνολο των προσωρινών χρωμάτων που επιλέγονται από τους γείτονες του v, ενώ F_v το σύνολο των τελικών χρωμάτων
for each round **do**
    $T_v \leftarrow \emptyset$
    $c_v \leftarrow$ draw uniformly at random a bit from $\{0, 1\}$
    if $c_v == 0$ **then**
        discard c_v and continue to the next round
    else
        $c_v \leftarrow$ draw uniformly at random a color from $[\Delta + 1] \setminus F_v$
        Independently of other vertices send the color c_v to all neighbors
        for each received color c_u from a neighbor u **do**
            $T_v \leftarrow T_v \cup \{c_u\}$
        end for
        if $c_v \notin T_v \cup F_v$ **then**
            Send the message "final c_v" to all neighbors
            select c_v as the final color of v and terminate
        else
            for each received message "final c_u" from a neighbor u **do**
                $F_v \leftarrow F_v \cup \{c_u\}$
            end for
            discard c_v and continue to the next round
        end if
    end if
end for

αφορά τους επεξεργαστές που χρησιμοποιούνται ή στους γύρους που χρειάζεται ο αλγόριθμος για να τερματίσει. Η μόνη επιβάρυνση που λαμβάνει χώρα είναι χρονική, και αφορά τους υπολογισμούς που κάνει κάθε κόμβος σε ένα γύρο (τους οποίους δεν λαμβάνουμε υπόψιν). Παρόλα αυτά η απλότητα σε συνδυασμό με την ταχύτητα που τερματίζει ο αλγόριθμος (με μεγάλη πιθανότητα) κάνει την πιθανοτική μέθοδο του Luby πάρα πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό ενός $(\Delta+1)$-χρωματισμού ενός γραφήματος. Ο επόμενος αλγόριθμος που θα μελετήσουμε, που ακολουθεί την προσέγγιση που αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου, είναι ο αλγόριθμος του Johansson [Joh99]. Όσο δεν έχει χρωματιστεί ένας κόμβος $v \in V$ στον γράφο κρατάει μια παλέτα, ένα σύνολο χρωμάτων που δεν έχουν ανατεθεί ακόμα σε γείτονες του. Αυτό το σύνολο αρχικοποείται στα πρώτα $deg(v) + 1$ χρώματα της C, που C μια προκαθορισμένη χρωματική ακολουθία (π.χ. οι αριθμοί ταυτότητας των κόμβων). Ο αλγόριθμος εξελίσσεται σε γύρους. Σε κάθε γύρο κάθε μη χρωματισμένος κόμβος v επιλέγει ομοιόμορφα και τυχαία ένα προσωρινό χρώμα από την παλέτα του. Ενημερώνει τους γείτονες του και ελέγχει αν κάποιος από αυτούς επέλεξε το ίδιο χρώμα. Αν όχι, κρατάει αυτό το χρώμα, χρωματίζεται με αυτό, και ξαναενημερώνει τους γείτονες του. Αν από την άλλη κάποιος γείτονας του v επέλεξε το ίδιο χρώμα, ο v το απορρίπτει (και ο γείτονας προφανώς). Στην αρχή του επόμενου γύρου, ο v ανανεώνει την παλέτα του μετακινόντας χρώματα τα οποία γείτονες του πήραν μόνιμα. Αποδεικνύεται ότι και αυτός ο αλγόριθμος τερματίζει σε $O(\log n)$ χρόνο (με μεγάλη πιθανότητα), και ότι παράγει έναν κατάλληλο $(\Delta + 1)$-χρωματισμό (δες [Joh99]). Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος του Johansson είναι αρκετά πανομοιότυπος με τον αλγόριθμο του Luby , με τη μόνη διαφορά ότι στον δεύτερο γίνεται χρήση ρίψης ενός νομίσματος από έναν μη χρωματισμένο κόμβο για να δει αν θα προσπαθήσει να χρωματιστεί κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου γύρου. Ο αλγόριθμος του Johansson δουλεύει κάτω από μια πιο ισχυρή ιδιότητα, αυτή της αμοιβαίας ανεξαρτησίας των τυχαίων επιλογών (σε αντίθεση με τον αλγόριθμο του Luby, που αρκεί η ανεξαρτησία ανά ζεύγη). Στο [FPS02] παρουσιάζεται μια εκτενής πειραματική ανάλυση των δύο αυτών αλγορίθμων. Ένας άλλος αλγόριθμος που ακολουθεί την ίδια προσέγγιση προτείνεται στο [CFP18]. Φυσικά αυτή δεν είναι η μοναδική προσέγγιση που δουλεύει για πιθανοτικούς κατανεμημένους αλγορίθμους. Μια άλλη γραμμή έρευνας αφορά τις αλυσίδες Markov για την τυχαία δειγματοληψία χρωματισμών σε ένα γράφο. Σε αυτή την διπλωματική δεν θα ασχοληθούμε με τις συγκεκριμένες μεθόδους, αλλά για τη μελέτη τους ο αναγνώστης μπορεί να απευθυνθεί στα [Jer95, Vig99, HV06, HVV07].

Αυτό που πρέπει οπωσδήποτε να κρατήσουμε από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα που έχουν οι αλγόριθμοι του Luby, και του Johhansson, και η οποία γίνεται εμφανής στην ανάλυση τους [Lub93, Joh99]. Και στους δύο αλγορίθμους, η παλέτα κάθε μη χρωματισμένου κόμβου έχει μήκος τουλάχιστον 2. Στην συνέχεια θα μελετήσουμε έναν αλγόριθμο, ο οποίος έχει την παραπάνω ιδιότητα, ακολουθεί την προσέγγιση που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, αλλά η ανανέωση των συνόλων γίνεται με διαφορετικό τρόπο από τον προαναφερθέντα. Το σημαντικό που πετυχαίνει αυτός ο αλγόριθμος είναι, ότι για να παράξει έναν $(\Delta+1)$ χρωματισμό ενός γραφήματος δεν απαιτεί ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των κόμβων. Είναι αμιγώς παιγνιοθεωρητικός. Πριν όμως περάσουμε στην μελέτη και στην ανάλυση του αλγορίθμου, θα πρέπει να ορίσουμε πρώτα κάποιες βασικές έννοιες σχετικά με την θεωρία παιγνίων και την ισορροπία Nash .

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Παιγνίων και Ισορροπία Nash

Η θεωρία παιγνίων είναι κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών που μελετά μαθηματικά μοντέλα στρατηγικής αλληλεπίδρασης μεταξύ ορθολογικών παικτών[6] που λαμβάνουν αποφάσεις. Συγκεκριμένα, στοχεύει στη μαθηματική καταγραφή της συμπεριφοράς ατόμων σε στρατηγικές καταστάσεις, στις οποίες η επιτυχία ενός να λαμβάνει αποφάσεις εξαρτάται από τις επιλογές των υπολοίπων. Έχει εφαρμογές στην κοινωνική επιστήμη, στην λογική, όπως επίσης και στην επιστήμη των συστημάτων και την επιστήμη των υπολογιστών. Αρχικά μελετήθηκαν από τον Von Neumann τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος στα οποία το κέρδος ή η απώλεια για έναν συμμετέχοντα ισορροπούν επακριβώς από αυτά των υπολοίπων συμμετεχόντων [Neu28]. Μετά το άρθρο του ακολούθησε η έκδοση του θεμελιώδους βιβλίου του με τον Oskar Morgensten [NM44], το οποίο μελετά συνεργατικά παίγνια πολλών παικτών. Βέβαια η θεωρία αναπτύχθηκε εκτενώς στη δεκαετία του 1950 όταν ο John Nash εισήγαγε την έννοια της ισορροπίας κατά Nash [Nas51]. Από τότε, πολλοι ερευνητές συνέβαλαν στην ανάπτυξη της θεωρίας και της εφαρμογής της σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους.

3.1 Ιστορικά Σημεία της Θεωρίας Παιγνίων

Η συζήτηση για τα μαθηματικά των παιγνίων ξεκίνησε πολύ πριν την άνοδο της μοντέρνας μαθηματικής θεωρίας παιγνίων. Η δουλειά του Cardano στο [CGW15] μοντελοποίησε κάποιες από της βασικές ιδέες του πεδίου. Πολύ σημαντική ήταν και η συνεισφορά του Counot [CBF97], του Zermelo [Zer12], και του Borel [Bor53]. Όμως μέχρι πρίν την δημοσίευση του άρθρου του Von Neumann [Neu28], η θεωρία παιγνίων δεν αποτελούσε αυτόνομος επιστημονικός κλάδος. Η μεγάλη ανάπτυξη έγινε την δεκαετία του 1950, όταν έγινε η πρώτη προσπάθεια μαθηματικής θεμελίωσης του προβλήματος του φυλακισμένου. Και φυσικά το σημαντικότερο επίτευγμα της εποχής, σε ό,τι αφορά τον κλάδο της θεωρίας παιγνίων, είναι η θεμελίωση της ισορροπίας Nash. Ο Nash [Nas51] όρισε μια μορφή ισορροπίας για πεπερασμένα μη συνεργατικά παίγνια[7] μη μηδενικού αθροίσματος, n παικτών, όταν οι παίκτες είναι ορθολογικοί, η οποία είναι εφαρμόσιμη σε ένα μεγαλύτερο εύρος παιγνίων από την ισορροπία που είχαν ορίσει προηγούμενως οι Von Neumann και Morgensten (παίγνια μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών) [Neu28, NM44]. Με αυτόν τον τρόπο ο Nash έθεσε τα θεμέλια για την ανάπτυξη της θεωρίας παιγνίων και την εφαρμογή της σε πληθώρα επιστημονικών κλάδων.

Η θεωρία παιγνίων ξεκίνησε ως ένα εργαλείο που εφαρμόστηκε στις οικονομικές και τις κοινωνικές επιστήμες. Και όντως ακόμα και σήμερα χρησιμοποιείται ευρέως από ερευνητές για τη μελέτη συστημάτων και των δύο κλάδων επιστημών. Παρόλα αυτά, με τη θεμελίωση της ισορροπίας Nash

[6] Παικτών που λαμβάνουν αποφάσεις με μοναδικό κριτήριο την επίτευξη των δικών τους στόχων, που συνήθως είναι η μεγιστοποίηση κάποιας αμοιβής του

[7] Παίγνια στα οποία απουσιάζει η συνεργασία, και κάθε παίκτης δρα ανεξάρτητα

βρήκε εφαρμογή και σε άλλα επιστημονικά πεδία. Πολλά φυσικά και τεχνητά συστήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν ως παίγνια. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η εξελικτική βιολογία. Το 1973 οι John Maynard Smith και George Robert Price [SP73] έθεσαν τα θεμέλια της εξελικτικής θεωρίας παιγνίων, της εφαρμογής δηλαδή της θεωρίας παιγνίων στην θεωρία των εξελικτικών πληθυσμών στην βιολογία. Η εξελικτική θεωρία παιγνίων ορίζει ένα πλαίσιο στρατηγικών με σκοπό την μοντελοποίηση του δαρβινικού ανταγωνισμού. Ένας άλλος επιστημονικός κλάδος στον οποίο η θεωρία παιγνίων βρίσκει τεράστια εφαρμογή είναι αυτός των ασύρματων δικτύων. Μία από τις κύριες εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων στα ασύρματα δίκτυα, είναι η μοντελοποίηση και η ανάλυση προβλημάτων δρομολόγησης και κατανομής πόρων. Σε περιπτώσεις πολλαπλής πρόσβασης σε ένα ασύρματο δίκτυο μπορεί να γίνει χρήση της θεωρίας παιγνίων για τη μοντελοποίηση και την ανάλυση της ατομικής ή ομαδικής συμπεριφοράς των κόμβων [Akk+11].

Η εδραίωση του διαδικτύου δημιούργησε μια νέα οικονομία. Η υπολογιστική φύση του διαδικτύου επέτρεψε τη χρήση υπολογιστικών εργαλειών σε αυτή την αναδυόμενη οικονομία. Έτσι οι αλγόριθμοι έγιναν με το μέσο με το οποίο λαμβάνονται οι στρατηγικές αποφάσεις. Από την άλλη, το διαδίκτυο ήταν το πρώτο υπολογιστικό κατασκεύασμα που δεν δημιουργήθηκε από μία μοναδική οντότητα (μηχανικό, ομάδα σχεδίασμού, ή εταιρεία), αλλά προέκυψε από τη στρατηγική αλληλεπίδραση πολλών. Οι επιστήμονες της πληροφορικής ήταν για πρώτη φορά αντιμέτωποι με ένα αντικείμενο το οποίο θα έπρεπε να προσεγγίσουν ακριβώς όπως προσεγγίζονταν οι αγορές. Έτσι, ένας συνδυασμός ιδεών από τα δύο πεδία, την θεωρία παιγνίων και τους αλγόριθμους, γέννησε αυτό που αποκαλούμε αλγοριθμική θεωρία παιγνίων. Η αλγοριθμική θεωρία παιγνίων καταπιάνεται με την κατανόηση και τη σχεδίαση αλγορίθμων σε στρατηγικά περιβάλλοντα. Μπορούμε να δούμε την αλγοριθμική θεωρία παιγνίων από δύο οπτικές:

1. Ανάλυση: δεδομένων των επί του παρόντος υλοποιημένων αλγορίθμων, τους αναλύουμε χρησιμοποιώντας παιγνιοθεωρητικά εργαλεία, π.χ. υπολογισμός και απόδειξη ιδιοτήτων για ισορροπία Nash, τίμημα της αναρχίας και δυναμική βέλτιστης απόκρισης (θα ορίσουμε αυτές τις έννοεις παρακάτω).

2. Σχεδίαση: σχεδιασμός παιγνίων που έχουν και καλές παιγνιοθεωρητικές, αλλά και αλγοριθμικές ιδιότητες. Αυτή η περιοχή ονομάζεται αλγοριθμικός σχεδιασμός μηχανισμών.

Στην συγκεκριμένη διπλωματική ασχολούμαστε αποκλειστικά με την πρώτη περίπτωση. Εφόσον οι αλγόριθμοι είναι βασικό εργαλείο στη μελέτη του συγκεκριμένου πεδίου ήταν αναμενόμενο να αναζητούν οι επιστήμονες αν ο υπολογισμός της ισορροπίας Nash είναι πάντα υπολογιστικά εφικτός, αν υπάρχει δηλαδή πολυωνυμικός αλγόριθμος που υπολογίζει ισορροπίες Nash. Όπως απέδειξαν οι Daskalakis et al. [DGP09], το πρόβλημα εύρεσης μιας ισορροπίας Nash είναι **PPAD**-πλήρες, δηλαδή απέδειξαν πως είναι ένα δισεπίλυτο πρόβλημα. Κάτι το οποίο δεν θα μας απασχολήσει, καθώς οι αλγόριθμοι που θα μελετήσουμε στη συνέχεια εντοπίζουν μια ισορροπία Nash σε (το πολύ) πολυωνυμικό χρόνο.

3.2 Παίνια σε Κανονική Μορφή Αναπαράστασης

Για την περιγραφή ενός παιγνίου σε κανονική (ή στρατηγική) μορφή χρειάζεται να ορίσουμε τρεις βασικές συνιστώσες. Ένα παίγνιο αποτελείται από ένα σύνολο παικτών, $N = \{1, 2, \ldots, N\}$. Κάθε παίκτης $i \in N$ διαθέτει ένα σύνολο πιθανών στρατηγικών S^i. Τέλος ορίζεται και η συνάρτηση χρησιμότητας $u_i : S^1 \times S^2 \times \cdots \times S^n \to \mathbb{R}$ για κάθε παίκτη $i \in N$. Ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \in S^i$, ορίζει ένα προφίλ (σχηματισμό) στρατηγικής. Ένα προφίλ στρατηγικής αντιστοιχεί σε ένα αποτέλεσμα (έκβαση) του παιχνιδιού. Η συνάρτηση χρησιμότητας εκφράζει την ωφέλεια/ευχαρίστηση που λαμβάνει ένας παίκτης από το αποτέλεσμα του παιγνίου.

Ένα παίγνιο σε κανονική μορφή συνήθως εκφράζεται ως ένας πίνακας που απαρτίζεται από τους παίκτες, όλες τις πιθανές στρατηγικές τους και τις συναρτήσεις χρησιμότητας τους. Είναι πολύ βολικό να ορίζεις παίγνια με αυτόν τον τρόπο, όταν υπάρχουν μόνο 2 παίκτες που διαθέτουν λίγες στρατηγικές. Έστω ένα παίγνιο 2 παικτών σε κανονική μορφή, με πεπερασμένο πλήθος στρατηγικών για τον κάθε παίκτη. Τότε, έχουμε $N = \{1, 2\}$, $S^1 = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, $S^2 = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, και $u_1 : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}$, $u_2 : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}$. Ο παίκτης 1 αναφέρεται ως παίκτης γραμμών, ενώ ο παίκτης 2 ως παίκτης στηλών. Η συνάρτηση χρησιμότητας κάθε παίκτη μπορεί να περιγραφεί από έναν πίνακα μεγέθους $n \times m$. Κάθε γραμμή και κάθε στήλη εκφράζει μία στρατηγική, ενώ κάθε κουτί εκφράζει την ωφέλεια του παίκτη για τον συγκεκριμένο συνδυασμό στρατηγικών. Έτσι, ένα παίγνιο με 2 παίκτες σε κανονική μορφή μπορεί να περιγραφεί από ένα ζευγάρι πινάκων (A, B) μεγέθους $n \times m$, όπου $A_{ij} = u_1(s_i, t_j)$, $B_{ij} = u_2(s_i, t_j)$, με $s_i \in S^1$, $t_j \in S^2$. Από τον συνδυασμό των δύο πινάκων προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

$u_1(s_1, t_1), u_2(s_1, t_1)$	..., ...	..., ...	..., ...	$u_1(s_1, t_m), u_2(s_1, t_m)$
$u_1(s_2, t_1), u_2(s_2, t_1)$	..., ...	..., ...	..., ...	..., ...
		$u_1(s_i, t_j), u_2(s_i, t_j)$	..., ...	..., ...
		..., ...	..., ...	..., ...
..., ...	..., ...	..., ...	..., ...	$u_1(s_n, t_m), u_2(s_n, t_m)$

Σχήμα 3.1: Πίνακας συναρτήσεων χρησιμότητας για παίγνιο 2 παικτών σε κανονική μορφή

Παρακάτω παρατίθεται ένα από τα πιο γνωστά παραδείγματα παιγνίου, σε κανονική μορφή, το δίλλημα του φυλακισμένου.

Παράδειγμα 3.1 (Το δίλλημα του φυλακισμένου)**.** Δύο κρατούμενοι είναι σε δίκη για ένα έγκλημα και καθένας έρχεται αντιμετώπος με την επιλογή του να ομολογήσει ή να μην ομολογήσει. Αν και οι δύο δεν ομολογήσουν, δεν θα μπορέσουν να τους αποδωθούν κατηγορίες, και θα εκτίσουν μια μικρή ποινή, ας πούμε 2 χρόνια, για μικρής σημασίας αδικήματα. Αν μόνο ένας από αυτούς ομολογήσει, η ποινή του θα μειωθεί σε 1 χρόνο και θα χρησιμοποιηθεί ως μάρτυρας ενάντια στον άλλον, που με τη σειρά του θα καταδικαστεί σε ποινή 5 χρόνων. Τέλος αν και οι δύο ομολογήσουν θα δεχτούν μια μικρή χάρη που συνεργάστηκαν με τις αρχές και θα πρέπει να εκτίσουν μια ποινή 4 χρόνων (αντί για 5). Δεν υπάρχει δυνατότητα συνεργασίας μεταξύ των παικτών (μη-συνεργατικό παίγνιο).

Ακολουθώντας τον παραπάνω φορμαλισμό, έχουμε $N = \{A, B\}$, $S^A = \{$Ομολογεί A, Δεν ομολογεί $A\}$, $S^B = \{$Ομολογεί B , Δεν ομολογεί $B\}$, και συναρτήσεις ωφέλειας $u_A, u_B : S^A \times S^B \to \mathbb{R}$. Αν κανένας από τους δύο παίκτες δεν ομολογήσει έχουν ωφέλεια -2, ενώ αν ομολογήσουν και οι δύο θα έχουν ωφέλεια -4. Εαν ο ένας ομολογήσει, και ο άλλος δεν ομολογήσει θα έχουν ωφέλεια -1 και -5 αντίστοιχα. Η τιμή της συνάρτησης ωφέλειας για κάθε παίκτη, είναι σε κάθε περίπτωση η ποινή που θα εκτίσει σε χρόνια, πολλαπλασιασμένη με -1. Μπορούμε να συμβολίσουμε το παίγνιο αυτό σε κανονική μορφή με τον παρακάτω πίνακα ωφέλειας.

		Παίκτης B	
		Ομολογεί B	Δεν ομολογεί B
Παίκτης A	Ομολογεί A	$(-4,-4)$	$(-1,-5)$
	Δεν ομολογεί A	$(-5,-1)$	$(-2,-2)$

Πίνακας 3.1: Πίνακας ωφέλειας του παίγνιου ”Το δίλημμα του φυλακισμένου”

3.3 Κυρίαρχες Στρατηγικές

Ιδανικά κάθε παίκτης θα ήθελε μια στρατηγική που θα του πρόσφερε το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, ανεξάρτητα από το τι επιλέγουν οι υπόλοιποι πάικτες. Θα ήθελε δηλαδή να διαθέτει μια κυρίαρχη στρατηγική.

Για να ορίσουμε πιο τυπικά τι είναι μια κυρίαρχη στρατηγική, έστω s_i η στρατηγική ενός παίκτη i. Συμβολίζουμε με s_{-i} το $(n-1)$-διάστατο διάνυσμα στρατηγικών που επιλέγονται από τους άλλους παίκτες (εκτός του i).

Ορισμός 3.1 (Κυριάρχη Στρατηγική)**.** Μια στρατηγική s_i του παίκτη i είναι κυρίαρχη αν για κάθε στρατηγική $s'_i \in S^i$ και κάθε διάνυσμα στρατηγικών s_{-i} ισχύει ότι

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}).$$

Όταν το παραπάνω ισχύει για κάθε παίκτη, δηλαδή κάθε παίκτης έχει μία κυρίαρχη στρατηγική, τότε λέμε ότι το παίγνιο διαθέτει μια λύση κυρίαρχης στρατηγικής.

Ορισμός 3.2 (Λύση Κυριάρχης Στρατηγικής)**.** Ένα προφίλ στρατηγικών $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \in S^i$, είναι λύση κυρίαρχης στρατηγικής, αν για κάθε παίκτη i και κάθε εναλλακτικό προφίλ στρατηγικής $(s'_1, s'_2, \ldots, s'_n)$, $s'_i \in S^i$, έχουμε ότι

$$u_i(s_i, s'_{-i}) \geq u_i(s'_i, s'_{-i}).$$

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι στο δίλημμα του φυλακισμένου είναι προτιμότερο για κάθε παίκτη να ομολογήσει, ανεξάρτητα με το τι επιλέγει να κάνει ο άλλος παίκτης.

Παρατήρηση 3.1. Στο δίλημμα του φυλακισμένου υπάρχει μια λύση κυρίαρχης στρατηγικής, στην οποία κάθε παίκτης ομολογεί.

Επίσης είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι μια λύση κυρίαρχης στρατηγικής μπορεί να μη δίνει τη βέλτιστη ωφέλεια σε κανέναν από τους παίκτες. Στην περίπτωση του προβλήματος του φυλακισμένου υπάρχει η δυνατότητα η ωφέλεια όλων των παικτών ταυτόχρονα.

Η αλήθεια είναι πως λίγα παίγνια εμφανίζουν κυρίαρχες στρατηγικές (πόσο μάλλον μία λύση κυρίαρχης στρατηγικής). Γενικά είναι μια ιδιότητα δύσκολο να επιτευχθεί, καθώς απαιτεί από ένα παίκτη να διαθέτει μια στρατηγική που κατευθύνει το αποτέλεσμα του παιγνίου, εφόσον είναι η καλύτερη για εκείνον ανεξάρτητα από τι στρατηγική επιλέγουν οι υπόλοιποι παίκτες. Στο παρακάτω παράδειγμα δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική.

Παράδειγμα 3.2 (Το φανάρι)**.** Στο συγκεκριμένο παίγνιο εξετάζουμε την περίπτωση που δύο παίκτες οδηγούν στην ίδια διασταύρωση την ίδια στιγμή. Αν και οι δύο επιχειρήσουν να την διασχίσουν, το αποτέλεσμα θα είναι ένα τροχαίο ατύχημα. Το παίγνιο μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα πίνακα ωφέλειας που η επιτυχής διάσχιση προσφέρει ωφέλεια 1, αν κάποιος παίκτης δεν διασχίσει τον δρόμο η ωφέλεια του είναι 0, ενώ το ατύχημα προσφέρει ωφέλεια -100.

		Παίκτης B	
		Διασχίζει B	Σταματάει B
Παίκτης A	Διασχίζει A	$(-100,-100)$	$(1,0)$
	Σταματάει A	$(0,1)$	$(0,0)$

Πίνακας 3.2: Πίνακας ωφέλειας του παίγνιου "Το φανάρι"

Το συγκεκριμένο παίγνιο δεν διαθέτει κυρίαρχη στρατηγική για κανένα παίκτη. Για τον A, το να διασχίσει την διασταύρωση δεν είναι κυρίαρχη στρατηγική, γιατί αν ο B επιλέξει να τη διασχίσει, είναι προτιμότερο να σταματήσει. Επίσης ούτε το να σταματήσει είναι κυρίαρχη στρατηγική, γιατί αν ο B επιλέξει να σταματήσει, τότε ο A είναι προτιμότερο να διασχίσει τη διασταύρωση. Αντίστοιχα ούτε ο B διαθέτει κυρίαρχη στρατηγική.

3.4 Διατύπωση Ισορροπίας Nash

Η έννοια της ισορροπίας είναι πολύ σημαντική στα παίγνια. Στην ουσία υποδεικνύει τη λύση σε ένα παίγνιο. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι οι κυρίαρχες στρατηγικές παίζουν τον ρόλο της ισορροπίας. Παρόλα αυτά λίγα παίγνια διαθέτουν λύσεις κυρίαρχης στρατηγικής, οπότε χρειάζεται να αναζητήσουμε μια λιγότερο αυστηρή και ευρύτερα εφαρμόσιμη έννοια λύσης. Μια επιθυμητή παιγνιοθεωρητική λύση είναι μία κατά την οποία οι μεμονωμένοι παίκτες δρουν σύμφωνα με τα κίνητρα τους, μεγιστοποιώντας την ωφέλεια τους. Αυτή η ιδέα αποτυπώνεται καλύτερα από την έννοια της ισορροπίας Nash.

Ορισμός 3.3 (Ισορροπία Nash)**.** Έστω ένα παίγνιο n παικτών σε κανονική μορφή. Ένα προφίλ στρατηγικής $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \in S^i$, είναι ισορροπία Nash, αν για κάθε παίκτη i και κάθε εναλλακτικη στρατηγική $s_i' \in S^i$, έχουμε ότι

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$$

Με άλλα λόγια, κανένας παίκτης δεν έχει κάποιο μονομερές κίνητρο να παρεκκλίνει από αυτό το προφίλ στρατηγικής, καθώς δεν θα μπορέσει να αυξήσει την ωφέλεια του, υποθέτοντας ότι οι υπόλοιποι επιμένουν στις στρατηγικές τους. Εύκολα παρατηρεί κανείς πως μια τέτοια λύση είναι αυτοενισχυόμενη, υπό την έννοια ότι εφόσον οι παίκτες παίζουν μία τέτοια λύση είναι προς το συμφέρον του παίκτη να παραμείνει στην στρατηγική του. Στο δίλημμα του φυλακισμένου, το να ομολογήσουν και οι δύο παίκτες είναι μία ισορροπία Nash (η μοναδική).

Ξεκάθαρα, μια λύση κυρίαρχης στρατηγικής είναι μία ισορροπία Nash. Επίσης, αν η λύση είναι αυστηρά κυρίαρχη (δηλαδή η αλλαγή σε αυτή πάντα βελτιώνει αυστηρά το αποτέλεσμα), τότε είναι η μοναδική ισορροπία Nash. Παρόλα αυτά, μια ισορροπία Nash μπορεί να μην είναι μοναδική. Επίσης γνωρίζουμε πως οι ισορροπίες Nash μπορεί να μην είναι βέλτιστες για τους παίκτες, εφόσον οι λύσεις κυρίαρχης στρατηγικής είναι ισορροπίες Nash. Για παίγνια με πολλαπλές ισορροπίες Nash, διαφορετικές ισορροπίες μπορούν να έχουν (αρκετά) διαφορετικές ωφέλειες για τους παίκτες.

Μέχρι στιγμής έχουμε αναφερθεί μόνο σε αμιγείς στρατηγικές και στην ισορροπία Nash αμιγών στρατηγικών, στρατηγικών δηλαδή που κάθε παίκτης παίζει ντετερμινιστικά την επιλεγμένη στρατηγική. Υπάρχουν παίγνια που δεν διαθέτουν προφίλ αμιγών στρατηγικών που είναι ισορροπίες Nash. Οι παίκτες βέβαια, θα μπορούσαν να επιλέγουν κάποια στρατηγική τυχαία, με κάποια πιθανότητα. Αυτό που κάνουν είναι, να επιλέγουν μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο σύνολο των πιθανών στρατηγικών του. Μια τέτοια επιλογή ονομάζεται μικτή στρατηγική. Θεωρούμε ότι οι παίκτες ανεξάρτητα επιλέγουν τις στρατηγικές τους χρησιμοποιώντας την κατανομή πιθανότητας. Οι ανεξάρτητες τυχαίες επιλογές των παικτών οδηγούν σε μία κατανομή πιθανότητας ενός στρατηγικού προφίλ. Βέβαια όταν οι παίκτες επιλέγουν στρατηγικές τυχαία, χρειάζεται να καταλάβουμε πως αξιολογούν το τυχαίο αποτέλεσμα. Όσον αφορά την έννοια της ισορροπίας Nash μικτών στρατηγικών, θα θεωρήσουμε ότι οι παίκτες συμπεριφέρονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη ωφέλεια. Ο Nash [Nas51] απέδειξε ότι στα πλαίσια αυτής της επέκτασης, κάθε παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό παικτών, όπου ο καθένας διαθέτει ένα πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών, έχει μια ισορροπία Nash.

Θεώρημα 3.1. *Κάθε παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό παικτών και πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών διαθέτει μια ισορροπία Nash μικτών στρατηγικών.*

3.5 Βέλτιστη Απόκριση

Μία ακόμα βασική έννοια στην θεωρία των παιγνίων είναι η Βέλτιστη Απόκριση ή Best Response (BR). Η βέλτιστη απόκριση ενός παίκτη είναι η στρατηγική εκείνη η οποία του δίνει την μέγιστη δυνατή ωφέλεια δεδομένων των στρατηγικών των υπολοίπων. Θεωρούμε ένα προφίλ στρατηγικής $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \in S^i$, και ένα παίκτη i. Χρησιμοποιώντας αυτή τη στρατηγική, ο παίκτης i εχει ωφέλεια $u_i(s_i, s_{-i})$. Αλλάζοντας την στρατηγική s_i σε κάποια άλλη $s_i' \in S^i$, ο παίκτης i μπορεί να αλλάξει την ωφέλεια του σε $u_i(s_i', s_{-i})$, υποθέτοντας ότι όλοι οι υπόλοιποι παίκτες επιμένουν στις στρατηγικές τους στο s_{-i}. Λέμε πως μια αλλαγή από τη στρατηγική s_i στην s_i' είναι μια βελτιωμένη απόκριση για τον παίκτη i αν $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ και βέλτιστη απόκριση αν μεγιστοποιεί την ωφέλεια του παίκτη i.

Ορισμός 3.4 (Βέλτιστη Απόκριση)**.** Μια στρατηγική $s_i \in S^i$ του παίκτη i, για ένα δεδομένο σύνολο στρατηγικών s_{-i} των υπόλοιπων παικτών, είναι βέλτιστη απόκριση για τον παίκτη i, αν για κάθε στρατηγική $s_i' \in S^i$ ισχύει ότι

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}).$$

Η βέλτιστη απόκριση, περιγράφει μια πολύ απλή και διαισθητική διαδικασία η οποία βασίζεται στην εγωιστική συμπεριφορά των παικτών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να χρησιμοποιείται κατά κόρον στην αλγοριθμική θεωρία παιγνίων. Ένας από τους πιο φυσικούς τρόπους να παικτεί ένα παίγνιο είναι, επαναλαμβανόμενα να επιτρέπεται σε ένα παίκτη να κάνει μια βελτιωτική ή μία κίνηση βέλτιστης απόκρισης. Συνεπώς, κατά την σχεδίαση ενός παιγνιοθεωριτικού μοντέλου, είναι σημαντικό να ελεγχθεί που οδηγεί το σύστημα αν όλοι κάθε φορά που καλούνται να λάβουν μία απόφαση, επιλέγουν την βέλτιστη απόκριση τους. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται δυναμική βέλτιστης απόκρισης.

Ορισμός 3.5 (Δυναμική Βέλτιστης Απόκρισης)**.** Η δυναμική κατά την οποία κάθε παίκτης σε κάθε απόφαση επιλέγει τη βέλτιστη απόκριση του ονομάζεται δυναμική βέλτιστης απόκρισης (best response dynamics).

Σε κάποια παίγνια,όπως το δίλλημα του φυλακισμένου, αυτή η δυναμική οδηγεί τους παίκτες σε μια ισορροπία Nash σε λίγα βήματα. Σε κάποια άλλα, οι παίκτες δεν φτάνουν σε ισορροπία σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, αλλά συγκλίνουν προς αυτή. Βέβαια σε άλλα παίγνια, η δυναμική αυτή μπορεί να κάνει κύκλους, και να μη συγκλίνει (κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί σε ένα παίγνιο που δεν διαθέτει ισορροπία Nash αμιγών στρατηγικών).

3.6 Το Τίμημα της Αναρχίας

Το τίμημα της αναρχίας, είναι μία έννοια στα οικονομικά και στην θεωρία παιγνίων που μετράει το πως η αποδοτικότητα ενός συστήματος υποβαθμίζεται λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς των παικτών. Είναι το πιο δημοφιλές μέτρο αναποδοτικότητας των ισορροπιών, και επιλύει το θέμα των πολλαπλών ισορροπιών υιοθετώντας μια προσέγγιση χειρότερης περίπτωσης. Ορίζεται ως ο λόγος ανάμεσα στη στην χειρότερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε μιά ισορροπία του παίγνιου και στη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Ο όρος πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον Ηλία Κουτσουπιά και τον Χρήστο Παπαδημητρίου [KP09], αν και η ιδέα της μέτρησης της αναποδοτικότητα μιας ισορροπίας είναι παλιότερη.

Για να ορίσουμε πιο τυπικά την έννοια του τιμήματος της αναρχίας, θεωρούμε ένα παίγνιο n παικτών σε κανονική μορφή. Μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο αποδοτικότητας για κάθε προφίλ στρατηγικής χρησιμοποιώντας μια αντικειμενική συνάρτηση ευημερίας $Welf : S^1 \times S^2 \times \cdots \times S^n \to \mathbb{R}$. Υποψήφιες αντικειμενικές συναρτήσεις ευημερίας είναι το άθροισμα των ωφελειών των παικτών $Welf(s) = \sum_{i \in N} u_i(s)$, η ελάχιστη ωφέλεια $Welf(s) = \min_{i \in N} u_i(s)$, ή οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση έχει νόημα για το συγκεκριμένο παίγνιο που αναλύεται και είναι επιθυμητό να μεγιστοποιηθεί. Ορίζουμε ένα υποσύνολο στρατηγικών $Equil \subseteq S^1 \times S^2 \times \cdots \times S^n$ που είναι το σύνολο στρατηγικών που είναι ισορροπίες (για παράδειγμα ισορροπίες Nash).

Ορισμός 3.6 (Τίμημα της Αναρχίας)**.** Το τίμημα της αναρχίας ορίζεται ως ο λόγος ανάμεσα στην τιμή της χειρότερης ισορροπίας και την τιμή της βέλτιστης λύσης μιας αντικειμενικής συνάρτησης ευημερίας, δηλαδή

$$PoA = \frac{\max_{s \in S^1 \times S^2 \times \cdots \times S^n} Welf(s)}{\min_{s \in Equil} Welf(s)}.$$

Αν αντί της αντικειμενικής συνάρτησης ευημερίας που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε, χρησιμοποιήσουμε μια αντικειμενική συνάρτηση κόστους $Cost : S^1 \times S^2 \times \cdots \times S^n \to \mathbb{R}$ για την μέτρηση της αποδοτικότητας (π.χ. καθυστέρηση σε ένα δίκτυο), τότε

$$PoA = \frac{\max_{s \in Equil} Cost(s)}{\min_{s \in S^1 \times S^2 \times \cdots \times S^n} Cost(s)}.$$

Ορισμός 3.7 (Τίμημα της Σταθερότητας)**.** Μια σχετική έννοια, είναι αυτή του τιμήματος της σταθερότητας που μετρά τον λόγο ανάμεσα στην τιμή της βέλτιστης ισορροπίας και την τιμή της βέλτιστης συγκεντωτικής λύσης, δηλαδή

$$PoS = \frac{\max_{s \in S^1 \times S^2 \times \cdots \times S^n} Welf(s)}{\max_{s \in Equil} Welf(s)},$$

ή

$$PoS = \frac{\min_{s \in Equil} Cost(s)}{\min_{s \in S^1 \times S^2 \times \cdots \times S^n} Cost(s)}.$$

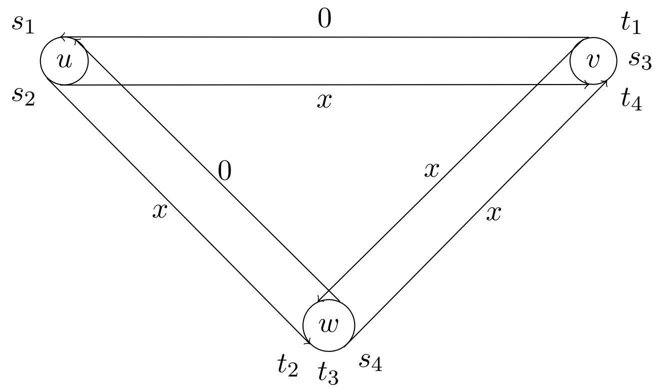
Παρατήρηση 3.2. Εξ' ορισμού φαίνεται πως $1 \leq PoS \leq PoA$. Είναι αναμενόμενο η απώλεια στην αποδοτικότητα, λόγω παιγνιοθεωρητικών περιορισμών, να είναι κάπου ανάμεσα στο PoS και στο PoA.

3.7 Ατομική Εγωιστική Δρομολόγηση και Παίγνια Δυναμικού

Ένα πολύ μεγάλο κομμάτι της σύγχρονης βιβλιογραφίας στην αναποδοτικότητα των ισορροπιών αφορά τα παίγνια δρομολόγησης. Ένας βασικός λόγος για αυτή τη δημοφιλία είναι πως τα παίγνια δρομολόγησης έριξαν φως σε ένα σημαντικό πρακτικό πρόβλημα, πως θα δρομολογηθεί η κίνηση σε ένα μεγάλο επικοινωνιακό δίκτυο, όπως το διαδίκτυο, που δεν έχει κεντρική αρχή.

Υπάρχουν διάφορα μοντέλα παιγνίων δρομολόγησης. Θα κάνουμε μια πολύ σύντομη αναφορά στα ατομικα εγωιστικά παίγνια δρομολόγησης. Ένα ατομικό εγωιστικό παίγνιο δρομολόγησης ορίζεται από ένα κατευθυνόμενο γράφο $G = (V, E)$, το οποίο μπορεί να περιέχει παράλληλες ακμές, k ζευγάρια κόμβων πηγής-καταβόθρας $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$, ένα θετικό αριθμό r_i κίνησης για κάθε ζευγάρι (s_i, t_i), και μια μη αρνητική, συνεχής, μη φθίνουσα συνάρτηση κόστους $c_e : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, για κάθε ακμή $e \in E$. Κάθε ζευγάρι κόμβων πηγής-καταβόθρας αντιπροσωπεύει ένα παίκτη που πρέπει να δρομολογήσει μια συγκεκριμένη ποσότητα κίνησης σε ένα μονοπάτι. Διαφορετικοί παίκτες μπορούν να έχουν το ίδιο ζευγάρι πηγής-καταβόθρας. Το σύνολο στρατηγικών ενός παίκτη $i \in [k]$, S^i, είναι το σύνολο των μονοπατιών $s_i - t_i$, και αν ο παίκτης i επιλέξει ένα μονοπάτι p, τότε δρομολογεί τις r_i μονάδες του στο p (αποκλειστικά αμιγείς στρατηγικές).

Παράδειγμα 3.3. Θεωρούμε το ατομικό εγωιστικό παίγνιο που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.2. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τέσσερις παίκτες, που καθένας από αυτούς χρειάζεται να δρομολογήσει μία μονάδα κίνησης. Οι πρώτοι δύο έχουν πηγή τον u, και καταβόθρα τον v και τον w αντίστοιχα. Ο τρίτος παίκτης έχει πηγή τον v και καταβόθρα τον w, ενώ ο τέταρτος έχει πηγή τον w και καταβόθρα τον v. Κάθε παίκτης έχει δύο στρατηγικές, ένα μονοπάτι μήκους 1, και ένα μονοπάτι μήκους 2.



Σχήμα 3.2: Ένα παράδειγμα ατομικού εγωιστικού παιγνίου

Μια κλασική μέθοδος απόδειξης ύπαρξης μιας (τουλάχιστον) ισορροπίας Nash αμιγών στρατηγικών είναι η μέθοδος συνάρτησης δυναμικού.

Ορισμός 3.8 (Ακριβής Συνάρτηση Δυναμικού)**.** Για ένα πεπερασμένο παίγνιο, μια ακριβής συνάρτηση δυναμικού Φ είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει κάθε προφίλ στρατηγικής σε κάποια πραγματική τιμή, και ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα. Αν $s = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$, $s'_i \neq s_i$, μια διαφορετική στρατηγική για κάποιον παίκτη i, και $s' = (s'_i, s_{-i})$, τότε

$$\Phi(s) - \Phi(s') = u_i(s') - u_i(s).$$

Με άλλα λόγια, αν η τρέχουσα κατάσταση του παίγνιου είναι s, και ο παίκτης i μεταβει από τη στρατηγική s_i στην s'_i, η αύξηση της χρησιμότητας του i, ισούται με τη μείωση στη συνάρτηση δυναμικού.

Ορισμός 3.9 (Ακριβές Παίγνιο Δυναμικού)**.** Ένα παίγνιο που διαθέτει μια ακριβής συνάρτηση δυναμικού ονομάζεται ακριβές παίγνιο δυναμικού.

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των ακριβών παιγνίων δυναμικού είναι η ύπαρξη (τουλάχιστον) μιας ισορροπία Nash αμιγών στρατηγικών (δες [Nis+07]).

Θεώρημα 3.2. *Κάθε ακριβές παίγνιο δυναμικού έχει τουλάχιστον μια ισορροπία Nash αμιγών στρατηγικών, συγκεκριμένα το προφίλ στρατηγικής που ελαχιστοποεί την Φ.*

Στα ατομικά παίγνια δρομολόγησης, η ύπαρξη ισορροπίας δεν είναι δεδομένη, καθώς οι παίκτες επιλέγουν μόνο αμιγείς στρατηγικές. Ένας τρόπος να εξασφαλιστεί η ύπαρξη ισορροπίας είναι η τεχνική συνάρτησης δυναμικού. Στο Κεφάλαιο 5 μελετάμε ένα πρόβλημα, που είναι παραλλαγή του χρωματισμού γραφημάτων, και μοντελοποείται ως παίγνο δρομολόγησης που διαθέτει μια συνάρτηση δυναμικού, και έτσι εξασφαλίζεται η ύπαρξη ισορροπίας του. Για περισσότερη μελέτη σχετικά με τα παίγνια δρομολόγησης και τα παίγνια δυναμικού ο αναγνώστης μπορεί να απευθυνθεί στο [Nis+07].

Κεφάλαιο 4

Ένα Παίγνιο Χρωματισμού Δικτύου

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο μελετάμε ένα παίγνιο χρωματισμού δικτύου που προέρχεται από την πειραματική μελέτη των Kearns et al. της δυναμικής και της συμπεριφοράς στα κοινωνικά δίκτυα [KSM06]. Προτάθηκε στη βιβλιογραφία των κοινωνικών επιστημών ως ένα μοντέλο για συνθήκες επίλυσης συγκρούσεων. Οι παίκτες του παιγνίου είναι οι κόμβοι ενός γραφήματος με n κόμβους, και μέγιστο βαθμό Δ. Το παίγνιο παίζεται σε γύρους, και σε κάθε γύρο όλοι οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα ένα χρώμα από το διαθέσιμο σύνολο χρωμάτων. Οι παίκτες έχουν μόνο τοπικές πληροφορίες για το γράφημα. Παρατηρούν μόνο τα χρώματα που επιλέγονται από τους γείτονες τους και ούτε επικοινωνούν ούτε συνεργάζονται ο ένας με τον άλλον. Ένας παίκτης είναι χαρούμενος όταν έχει επιλέξει ένα χρώμα διαφορετικό από αυτά που επέλεξαν οι γείτονες του, και μία ανάθεση χρωμάτων, κατά την οποία είναι όλοι οι παίκτες χαρούμενοι, είναι ένας κατάλληλος χρωματισμός για το γράφημα. Σύμφωνα με τους Chaudhuri et al. [CGJ08], όταν οι παίκτες ακολουθούν μία συγκεκριμένη άπληστη πιθανοτική στρατηγική, το παίγνιο καταλήγει σε ένα χρωματισμό του γραφήματος σε $O(\log n)$ γύρους, με μεγάλη πιθανότητα, δεδομένου ότι ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων σε κάθε παίκτη είναι τουλάχιστον $\Delta + 2$. Πρόκειται για τον πρώτο αμιγώς παιγνιοθεωρητικό κατανεμημένο πιθανοτικό αλγόριθμο που χρωματίζει ένα γράφημα και δεν απαιτεί επικοινωνία ή συνεργασία μεταξύ των κόμβων. Η κύρια ιδέα πίσω από το [CGJ08] είναι πως όταν τα διαθέσιμα χρώματα είναι τουλάχιστον $\Delta + 2$, κάθε παίκτης που δεν είναι χαρούμενος (έχει επιλέξει ίδιο χρώμα με τουλάχιστον ένα γείτονα του) έχει τουλάχιστον δύο διαθέσιμα χρώματα από τα οποία θα κληθεί να επιλέξει χρώμα στον επόμενο γύρο. Ένας χαρούμενος παίκτης επιμένει στην επιλογή του στους γύρους που ακολουθούν. Σε αυτό το κεφάλαιο επεκτείνουμε την ιδέα από το [CGJ08]. Προτείνουμε μια τροποποίηση της άπληστης στρατηγικής, η οποία επίσης παράγει ένα κατάλληλο χρωματισμό για ένα γράφημα, δεδομένου όμως τώρα πως τα διαθέσιμα χρώματα είναι τουλάχιστον $\Delta + 1$ [FPP21]. Έτσι, μέσω αυτής της τροποποίησης, λαμβάνουμε έναν απλό κατανεμημένο πιθανοτικό αλγόριθμο για το πρόβλημα του κατανεμημένου $(\Delta + 1)$-χρωματίσιμου γραφήματος.

4.1 Μια Πειραματική Μελέτη του Προβλήματος Χρωματισμού σε Δίκτυα μεταξύ Ανρθώπων

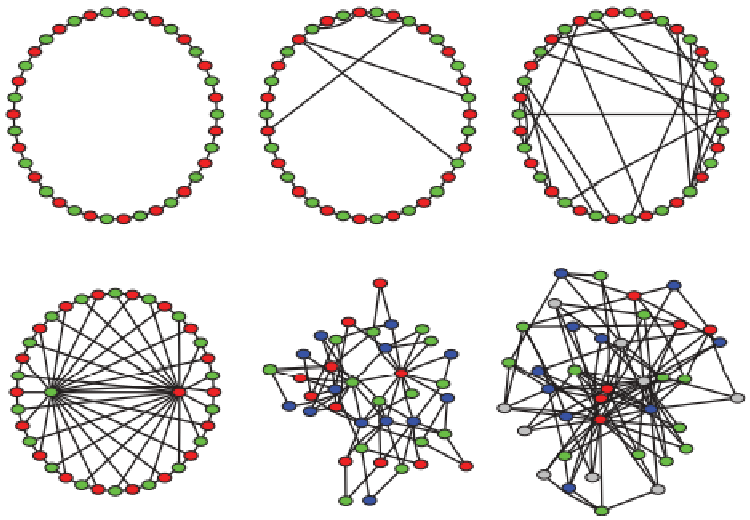
Μια γενική ιδέα που επικρατεί είναι ότι οι δομικές ιδιότητες των δικτύων που προκύπτουν φυσιολογικά, επηρεάζουν την διαμόρφωση της ατομικής και της συλλογικής συμπεριφοράς. Βέβαια, οι σχέσεις μεταξύ δομής και συμπεριφοράς είναι δύσκολο να ορισθούν στο εμπειρικό πεδίο μελετών υπάρχοντων δικτύων. Σε τέτοιες μελέτες, η δομή του δικτύου θεωρείται δεδομένη, και έτσι εμποδίζει τη διερεύνηση εναλλακτικών.

Μια διαφορετική προσέγγιση είναι η διεξαγωγή ελεγχόμενων εργαστηριακών μελετών στις οποίες η δομή του δικτύου μεταβάλλεται σκόπιμα. Αυτή ακριβώς την προσέγγιση ακολουθούν και οι Kearns et al. στο [KSM06], και σε αυτή την ενότητα παραθέτουμε κάποια από τα αποτελέσματα της έρευνας του. Εκτελούν πειράματα σε ανθρώπους, που αφορούν την κατανεμημένη επίλυση προβλημάτων από τοπικές πληροφορίες, σε μια ποικιλία απλών και πολύπλοκων δικτύων. Κάθε άνθρωπος ελέγχει ταυτόχρονα με τους υπολοίπους ένα κόμβο σε ένα δίκτυο 38 κόμβων, και προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα του χρωματισμού γραφήματος. Σε αυτό το πρόβλημα, ο κοινός στόχος είναι για κάθε παίκτη να επιλέξει ένα χρώμα για τον κόμβο του, διαφορετικό από τα χρώματα όλων των γειτόνων του στο δίκτυο. Ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων είναι ο ελάχιστος δυνατός για να χρωματιστεί το γράφημα χωρίς συγκρούσεις (ακμές που συνδέουν δύο κόμβους με το ίδιο χρώμα), δηλαδή ο χρωματικός αριθμός του δικτύου.

Το πρόβλημα χρωματισμού γραφημάτων αποτελεί μια φυσιολογική αφαίρεση πολλών ανθρωπίνων και οργανωτικών προβλημάτων, στα οποία είναι επιθυμητό ή και απαραίτητο να διαχωρίσουμε τη συμπεριφορά μιας μονάδας από αυτή των γειτονικών της. Ως παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν τα μέλη του εκπαιδευτικού προσωπικού ενός πανεπιστημίου στην οργάνωση των διατμητατικών εκδηλώσεων, όπως το ωρολόγιο πρόγραμμα μαθημάτων, διάφορα σεμινάρια, διαγωνίσματα κ.ο.κ., σε ένα περιορισμένο αριθμό διαθέσιμων αιθουσών. Μπορούμε να δούμε τα γεγονότα που πρέπει να προγραμματιστούν, σαν τους κόμβους του γραφήματος, με μία ακμή να ενώνει οποιαδήποτε γεγονότα που προσωρινά επικαλύπτονται, έστω και μερικώς. Ξεκάθαρα, σε δύο τέτοια γεγονότα πρέπει να δοθούν διαφορετικά δωμάτια ή χρώματα. Έτσι προκύπτει ένα πρόβλημα χρωματισμού ενός γραφήματος. Σε τέτοιες καταστάσεις, συνήθως δεν υπάρχει κάποια κεντρική αρχή που να αναθέτει αίθουσες σε εκδηλώσεις, οπότε οι παίκτες θα πρέπει να συντονιστούν μεταξύ τους για να καταλήξουν σε μία μη αντικρουόμενη ανάθεση. Επίσης είναι παράλογο να καθοριστεί ένα κατανεμημένο πρωτόκολλο και να αναμένεται οι παίκτες να τηρούν τους κανόνες αυτού του πρωτοκόλλου.

Επιλέγεται το πρόβλημα του χρωματισμού και για την απλότητα της περιγραφής του, αλλά και γιατί σε αντίθεση με άλλα κατανεμημένα προβλήματα βελτιστοποίησης σε δίκτυα, ο βέλτιστος χρωματισμός είναι δισεπίλυτος ακόμα και από την άποψη του κεντρικού υπολογισμού, όπως είδαμε και παραπάνω. Στην πραγματικότητα, ακόμη και αδύναμες προσεγγίσεις (στις οποίες επιτρέπονται πολλά περισσότερα χρώματα από τον χρωματικό αριθμό) είναι γνωστό ότι είναι εξίσου δύσκολες. Αυτά σε συνδυασμό με τα παραπάνω προκαλούν αρκετό ενδιαφέρον για την διεξαγωγή πειραματικής μελέτης.

Τα πειράματα που διεξάγονται αφορούν γραφήματα 38 κόμβων σε έξι διαφορετικές τοπολογίες δικτύων. Οι έξι τοπολογίες που επιλέγονται είναι οι αυτές που φαίνονται στο Σχήμα 4.1. Παρατηρούμε ότι οι πρώτες τρεις τοπολογίες ξεκινάνε με έναν απλό κύκλο, και μετά προσθέτουν ένα διαφορετικό αριθμό τυχαία επιλεγμένων χορδών, ενώ διατηρούν τον χρωματικό αριθμό ενός απλού κύκλου, δηλαδή 2. Η τέταρτη βασισμένη σε κύκλο τοπολογία υιοθετεί μια πιο ιεραρχική δομή, με δύο διακεκριμένα άτομα να έχουν σημαντικά υψηλή συνδεσιμότητα. Το πέμπτο και το έκτο δίκτυο αποτελούν στιγμιότυπα αυτού που αποκαλούμε μοντέλο προνομιακής επιλογής (preferential attachment), κατά το οποίο κόμβοι με υψηλή συνδεσιμότητα είναι πιο πιθανό να λάβουν περαιτέρω συνδέσεις όσο το δίκτυο διαμορφώνεται σταδιακά.



Σχήμα 4.1: Τοπολογίες δικτύων τις οποίες κλήθηκαν οι συμμετέχοντες στο πείραμα να χρωματίσουν. Από αριστερά προς τα δεξία και από πάνω προς τα κάτω: απλός κύκλος, κύκλος με 5 χορδές, κύκλος με 20 χορδές, κύκλος με κόμβους ηγέτες, και προνομιακή επιλογή με δύο και τρεις συνδέσεις αρχικά προστιθέμενες σε κάθε νέο κόμβο.

Για κάθε μία από τις τοπολογίες έγιναν έξι ή εφτά δοκιμές. Στις περισσότερες δοκιμές οι παίκτες είχαν τοπική όψη (συμπεριλαμβανομένου του δικού τους χρώματος και αυτά των γειτόνων του) της υπάρχουσας κατάστασης, ενώ σε λίγες δοκιμής είχαν καθολική όψη της κατάστασης στο δίκτυο. Οι παίκτες ήταν εξικοιωμένα με το πρόβλημα του χρωματισμού, αλλά δεν υπήρχε καθοδήγηση για το πως θα παίξουν. Μπορούσαν να ανανεώσουν το χρώμα τους οποιαδήποτε στιγμή από μία δεδομένη παλέτα χρωμάτων που παρείχε τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που απαιτούνταν για να χρωματιστεί κατάλληλα το κάθε δίκτυο. Δυνατότητα επικοινωνίας μεταξύ των παικτών δεν υπήρχε. Επίσης κάθε παίκτης λάμβανε ένα ποσό για κάθε επιτυχές πείραμα. Στην ουσία δοκιμάστηκαν δύο σχήματα κινήτρων, τα συλλογικά και τα ατομικά. Όσον αφορά τα συλλογικά, λάμβαναν όλοι οι παίκτες το ίδιο ποσό για κάθε πείραμα που πετύχαινε ένα κατάλληλο χρωματισμό σε χρόνο μικρότερο από ένα χρονικό όριο. Ενώ στην περίπτωση των ατομικών, ένας παίκτης λάμβανε ένα ποσό αν ένα πείραμα τελείωνε (είτε λόγω ενός κατάλληλου χρωματισμού είτε λόγω τερματισμού του χρονικού ορίου) με το χρώμα του να είναι διαφορετικό από αυτό των γειτόνων του[8].

Όπως αποδείχτηκε από τα πειράματα που διεξάχθηκαν, οι παίκτες κατάφεραν να λύσουν το πρόβλημα χρωματισμού στην πλειοψηφία των περιπτώσεων πριν το πέρας του χρονικού ορίου. Βέβαια, η δομή του δικτύου φάνηκε να επηρεάζει άμεσα τη συλλογική επίδοση. Τα δίκτυα που ακολουθούν το μοντέλο της προνομιακής επιλογής αποδείχτηκαν σημαντικά πιο δύσκολα στο να χρωματιστούν με τον βέλτιστο τρόπο σε σχέση με τα κυκλικά. Επίσης για την οικογένεια των δικτύων, βασισμένα σε κύκλους, παρατηρήθηκε μια μονοτονική σχέση μεταξύ χρόνου επίλυσης και μέσης απόστασης δικτύου (μέσης ελάχιστης απόστασης, μετρημένη σε αριθμό συνδέσεων που χρησιμοποιήθηκαν, για όλα τα ζεύγη κόμβων), με τη μικρότερη απόσταση να οδηγεί σε μικρότερους χρόνους επίλυσης. Έτσι το κυκλικό γράφημα με τους δύο κόμβους ηγέτες χρωματίστηκε βέλτιστα πιο γρήγορα από όλα τα γραφήματα βασισμένα σε κύκλο, ενώ ο απλός κύκλος πιο αργά. Η προσθήκη τυχαίων χορδών στον απλό κύκλο, συστηματικά μείωσε τον χρόνο επίλυσης. Παρόλο που η προσθήκη χορδών κάνει το πρόβλημα πιο δύσκολο από την πλευρά του κάθε παίκτη που συμμετέχει (γιατί τώρα πρέπει να συντονιστούν με δυνητικά περισσότερους γείτονες, αλλά ακόμα επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουν μόνο δύο χρώματα), προφανώς κάνει το συλλογικό

[8]Δεν υπήρξαν αξιοσημείωτες διαφορές στα αποτελέσματα για τα δύο διαφορετικά σχήματα κινήτρων

πρόβλημα πιο εύκολο, μειώνοντας τον αριθμό των συνδέσεων που πρέπει να διανύσουν οι συγκρούσεις χρωμάτων για να επιλυθούν.

Ιδιαίτερη σημασία έχει η σύγκριση της επιρροής της δομής του δικτύου στην συλλογική ανθρώπινη συμπεριφορά με την επιρροή της σε μία κατανεμημένη ευρετική. Μια πολύ απλή ευρετική είναι αυτή, κατά την οποία επιλέγεται τυχαία ένας κόμβος από αυτούς που βρίσκονται σε σύγκρουση. Αν υπάρχει ένα ή περισσότερα μη χρησιμοποιημένα χρώματα στη γειτονιά του v, επιλέγεται ένα στην τύχη για τον v, και έτσι εξαλείφεται η σύγκρουση. Διαφορετικά επιλέγεται τυχαία ένα χρώμα για τον v ανάμεσα σε όλα τα πιθανά χρώματα. Οι διαφορές με τη συλλογική ανθρώπινη συμπεριφορά είναι εντυπωσιακές, με το βαθμό δυσκολίας μέσα στην οικογένεια των κυκλικών δικτύων τελείως αντεστραμμένο (χαμηλότερη μέση απόσταση αυξάνει τη δυσκολία για την ευρετική), και τα δίκτυα προνομιακής επιλογής να είναι σχετικά εύκολα για την ευρετική.

Στο [KSM06] εξετάζονται επίσης οι επιπτώσεις της διαφοροποίησης της τοποικότητας των πληροφοριών που παρέχονται στους παίκτες. Κατά τη διάρκεια των πειραμάτων δινόταν στους συμμετέχοντες ένας από τους εξής τρεις τύπους πληροφοριών. Οι δύο από αυτούς ήταν ιδιαίτερα τοπικοί, επιτρέποντας στους συμμετέχοντες να δουν μόνο το δικό τους και τα γειτονικά χρώματα, με τον ένα από αυτούς να παρέχει προσθετικά πληροφορίες στατικής συνδεσιμότητας (βαθμός κόμβου) για τους γείτονες. Ενώ σε κάποια πειράματα (σχετικά λίγα) επιτρεπόταν στους συμμετέχοντες να βλέπουν την συνολική κατάσταση χρωματισμού του δικτύου κάθε χρονική στιγμή. Και πάλι παρατηρούνται σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις δύο κύριες κατηγορίες που εξετάζονται. Η υπερπληροφόρηση φαίνεται να είναι αρκετά βοηθητική στην περίπτωση των βασισμένων σε κύκλο γραφημάτων. Κι αυτό γιατί σε αυτές τις περιπτώσης υπάρχουν μόνο δύο πιθανοί κατάλληλοι χρωματισμοί (ο καθένας μια κυκλική ολίσθηση του άλλου), και οι παίκτες φαίνεται να καταλαβαίνουν πολύ καλά τη συλλογική προσπάθεια που απαιτείται για την ταχεία σύγκλιση σε ένα από αυτούς τους χρωματισμούς όταν τους παρέχεται καθολική όψη. Κάτι τέτοιο φαίνεται να μην ισχύει στην περίπτωση των στιγμιοτύπων της προνομιακής επιλογής. Η καθολική όψη, πιθανώς λόγω της πολυπλοκότητας του δικτύου, φαίνεται να δυσκολεύει τους παίκτες να χρωματίσουν το γράφημα κατάλληλα.

Μέχρι στιγμής έχει μονοπωλήσει το ενδιαφέρον η συλλογική συμπεριφορά και επίδοση, όμως ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει και η κατανόηση των μεμονωμένων στρατηγικών που χρησιμοποιούνται από τους παίκτες. Στα πειράματα που έκαναν οι Kearns et al. φάνηκε οι παίκτες υιοθετούν συχνά πολύ φυσιολογικές στρατηγικές. Αυτές περιλαμβάνουν την επιλογή χρωμάτων που θα οδηγήσουν στις λιγότερες τοπικές συγκρούσεις, όπως επίσης και την προσπάθεια αποφυγής συγκρούσεων με γείτονες με υψηλή συνδεσιμότητα. Σε κάποιες περιπτώσεις (σχετικά λίγες) κάποιοι παίκτες προσπαθούσαν να προειδοποιήσουν τους υπόλοιπους για κάποιες καταστάσεις. Έκαναν εναλλαγές ανάμεσα σε δύο χρώματα που δεν χρησιμοποιούνταν στην γειτονιά τους σε μια προσπάθεια να ενημερώσουν τους γείτονες τους για αυτό το γεγονός. Άλλοι έκαναν εναλλαγές μεταξύ χρωμάτων για να εφιστήσουν την προσοχή για συγκρούσεις. Παρόλη την ύπαρξη αυτών των ενημερωτικών στρατηγικών από τους παίκτες, δεν είναι ξεκάθαρο αν ποτέ είχαν τα επιθυμητά αποτελέσματα. Πολλοί παίκτες ανέφεραν επίσης, πως εισήγαγαν συγκρούσεις στη γειτονιά τους ακόμα και αν είχαν ένα διαθέσιμο χρώμα, ώστε να εμποδίσουν την ολική κατάσταση να κολλήσει σε κάποιο τοπικό ελάχιστο. Στη συνέχεια θα δούμε δύο στρατηγικές που αν ακολουθούνται από όλους τους παίκτες, και αν ισχύουν κάποιες προϋποθέσεις για τα διαθέσιμα χρώματα, χρωματίζουν (σχετικά) γρήγορα ένα γράφημα, με μεγάλη πιθανότητα.

4.2 Μοντελοποίση Προβλήματος και Κύριο Αποτέλεσμα

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, θα ασχοληθούμε με ένα συγκεκριμένο παίγνιο που σχετίζεται με τον χρωματισμό γραφημάτων, το παίγνιο χρωματισμού δικτύου, το οποίο είσηγαγαν οι Kearns et al.

στο [KSM06]. Η πειραματική μελέτη των Kearns et al. πάνω στην διαμόρφωση συλλογικής και ατομικής συμπεριφορά σε δίκτυα έφερε στο προσκήνιο μια διαφορετική προσέγγιση για το πρόβλημα του κατανεμημένου χρωματισμού ενός γραφήματος από αυτή του Linial , και γενικά όσων έχουμε δει μέχρι τώρα. Οι παίκτες, οι οποίοι αντιστοιχούν στους κόμβους του δικτύου, δεν έχουν κοινό στόχο, αλλά δικά τους κίνητρα, και εκτελούν εγωιστικά βήματα ώστε να τα πετύχουν. Επίσης σε αντίθεση με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, δεν υπάρχει απευθείας επικοινωνία μεταξύ των παικτών, αλλά μόνο η δυνατότητα παρατήρησης της συμπεριφοράς των γειτονικών παικτών.

Αυτή η κατάσταση μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω ενός παιγνίου. Το παίγνιο παίζεται σε ένα γράφο $G = (V, E)$ με $|V| = n$ κόμβους και μέγιστο βαθμό Δ. Κάθε κόμβος του G είναι ένας παίκτης, ο οποίος διαθέτει ένα σύνολο k διαθέσιμων χρωμάτων, και συμμετέχει σε ένα παίγνιο που παίζεται σε έναν αριθμό γύρων. Σε κάθε γύρο όλοι οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα ένα χρώμα από το σύνολο των διαθέσιμων χρωμάτων τους, το οποίο θεωρείται ότι είναι το σύνολο $[k]$. Οι παίκτες διαθέτουν μόνο τοπικές πληροφορίες για το γράφημα, δηλαδή μπορούν μόνο να παρατηρούν τα χρώματα των γειτόνων τους, και δεν μπορούν να επικοινωνήσουν ή να συνεργαστούν ο ένας με τον άλλον. Ένας παίκτης είναι χαρούμενος αν έχει επιλέξει ένα χρώμα που είναι διαφορετικό από αυτό που επέλεξαν οι γείτονες του. Διαφορετικά ο παίκτης δεν είναι χαρούμενος. Από την παιγνιοθεωρητική σκοπιά, η ωφέλεια ενός παίκτη είναι 1, αν είναι χαρούμενος, και είναι 0, αν δεν είναι, ενώ μια ανάθεση χρωμάτων κατά την οποία η ωφέλεια κάθε παίκτη είναι 1, είναι μία ισορροπία Nash του παιγνίου, υπό την έννοια ότι κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική (χρώμα) σε μία τέτοια ανάθεση.

Το πρόβλημα σχετίζεται με την εύρεση μιας συμμετρικής στρατηγικής για τους παίκτες (δηλαδή μιας στρατηγικής που είναι ίδια για όλους τους παίκτες) που συγκλίνει σε μία ισορροπία Nash σε πεπερασμένο αριθμό γύρων, χρησιμοποιώντας τη μικρότερη δυνατή τιμή για το k. Το να αποδείξει κανείς ότι μια συγκεκριμένη συμμετρική στρατηγική είναι βέλτιστη (δηλαδή ελαχιστοποιεί τον (αναμενόμενο) χρόνο κατά τον οποίο φτάνει σε ισορροπία) είναι πιθανώς ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα, και μια πιο ρεαλιστική γραμμή έρευνας είναι να προταθούν φυσιολογικές συμμετρικές στρατηγικές και να υπολογιστεί ο χρόνος που χρειάζονται για να φτάσουν σε ισορροπία Nash.

Μια τέτοια στρατηγική έχει προταθεί στο [CGJ08], και θα την αναφέρουμε ως άπληστη στρατηγική. Για να ορίσουμε τυπικά την άπληστη στρατηγική πρέπει να εισάγουμε πρώτα κάποια σύμβολα. Έστω $c_t(v)$ το χρώμα που έχει επιλεγεί από τον παίκτη v μετά τον γύρο t. Ένας παίκτης δεν είναι χαρούμενος, αν μετά τον γύρο t υπάρχει $u \in N_G(v)$ τέτοιος ώστε $c_t(u) = c_t(v)$. Επίσης, έστω ότι $C_t(v)$ είναι το σύνολο που περιέχει τα χρώματα που έχουν επιλεγεί από τους γείτονες του v μετά τον γύρο t, δηλαδή $C_t(v) = \bigcup_{u \in N_G(v)} \{c_t(u)\}$.

Ορισμός 4.1 (Άπληστη Στρατηγική)**.** Υποθέτουμε ότι $k \geq \Delta + 2$ και πως όλοι οι παίκτες ακολουθούν την άπληστη στρατηγική, κατά την οποία αν ένας παίκτης, ας πούμε v, είναι χαρούμενος μετά από κάποιον γύρο, ας πούμε t, τότε επιμένει στο χρώμα του για όλους τους γύρους που ακολουθούν, δηλαδή $c_s(v) = c_t(v)$ για όλα τα $s > t$. Αν δεν είναι χαρούμενος μετά τον γύρο t, τότε στον επόμενο γύρο αλλάζει χρώμα, και επιλέγει το χρώμα $c_{t+1}(v)$ ομοιόμορφα και τυχαία από το σύνολο $[k] \setminus C_t(v)$, δηλαδή από το σύνολο που περιέχει που δεν έχουν επιλεγεί από κανέναν από τους γείτονες του μετά τον γύρο t.

Ο αντίστοιχος αλγόριθμος δίνεται από τον Αλγόριθμο 4.1, και κάθε παίκτης $v \in V$ τρέχει ένα στιγμιότυπο του.

Παρατήρηση 4.1. *Όταν όλοι οι παίκτες στο παίγνιο χρωματισμού δικτύου υιοθετούν την άπληστη στρατηγική, ένας χαρούμενος παίκτης παραμένει χαρούμενος σε όλους τους γύρους που ακολουθούν. Επίσης, εφόσον $k \geq \Delta + 2$, ισχύει ότι $|[k] \setminus C_t(v)| \geq 2$ για όλους τους παίκτες $v \in V$, και όλους τους γύρους $t \geq 1$. Πιο συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι για κάθε μη χαρούμενο παίκτη, υπάρχουν τουλάχιστον δύο χρώματα που δεν έχουν επιλεγεί από τους γείτονες του.*

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η υπόθεση $k \geq \Delta + 2$ είναι ζωτικής σημασίας για την άπληστη στρατηγική. Πράγματι, αν $k = \Delta + 1$ τότε η άπληστη στρατηγική μπορεί να οδηγήσει σε ένα παίγνιο που ποτέ δεν φτάνει σε μια ισορροπία Nash.

Θεώρημα 4.1 ([CGJ08, Θεώρημα 2]). *Υπάρχει ένα γράφημα G και μια αρχική ανάθεση έτσι ώστε αν ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων είναι $\Delta + 1$, και αν κάθε παίκτης παίζει την άπληστη στρατηγική, το παίγνιο χρωματισμού στο G δεν συγκλίνει ποτέ.*

Απόδειξη. Έστω G ενας κύκλος μήκους 5, και έστω $V = \{v_1, \dots, v_5\}$. Θεωρούμε ότι $k = 3$ και ότι η αρχική ανάθεση χρωμάτων είναι $((v_1), c(v_2), c(v_3), c(v_4), c(v_5)) = (2, 1, 3, 3, 1)$. Τότε μόνο οι παίκτες v_3, v_4 δεν είναι χαρούμενοι. Ακολουθώντας την άπληστη στρατηγική οι παίκτες v_3 και v_4, στον επόμενο γύρο θα ισχύει $c(v_3) = c(v_4) = 2$. Άρα και πάλι δεν είναι χαρούμενοι, οπότε στον επόμενο γύρο θα ισχύει $c(v_3) = c(v_4) = 3$, και έτσι δημιουργείται ένας κύκλος στην δυναμική του παιγνίου. □

Αλγόριθμος 4.1 Αλγόριθμος Άπληστης Στρατηγικής

```
Choose c_1(v) randomly from the set A_0(v) := [k]
t ← 1
while ∃u ∈ N_G(v), c_t(u) = c_t(v) do
    A_t(v) ← [k] \ C_t(v)
    t ← t + 1
    Choose a color c_t(v) uniformly at random from the set A_{t−1}(v)
end while
Return c_t(v)
```

Αποδεικνύεται στο [CGJ08] ότι, όταν όλοι οι παίκτες υιοθετούν την άπληστη στρατηγική, ο αναμενόμενος αριθμός των μη χαρούμενων παικτών φθίνει εκθετικά σε κάθε γύρο. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε παίκτη $v \in V$, έστω τ_v ο πρώτος γύρος μετά από τον οποίο ο παίκτης v γίνεται χαρούμενος. Τότε $\tau = \max_v \tau_v$ είναι ο πρώτος γύρος μετά από τον οποίο όλοι οι παίκτες είναι χαρούμενοι. Να σημειώσουμε πως στον γύρο τ το γράφημα είναι κατάλληλα k-χρωματισμένο και η ωφέλεια κάθε παίκτη είναι ίση με 1. Με άλλα λόγια, μετά το χρόνο τ το παίγνιο φτάνει σε μια ισορροπία Nash. Ακολουθεί το κύριο αποτέλεσμα του [CGJ08].

Θεώρημα 4.2 (Chaudhuri, Chung-Graham, Jamall [CGJ08]). *Έστω G ένα γράφημα με n κόμβους και μέγιστο βαθμό Δ. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων κάθε παίκτη είναι $k \geq \Delta+2$ και πως κάθε παίκτης στο παίγνιο χρωματισμού υιοθετεί την άπληστη στρατηγική. Έστω τ ο πρώτος γύρος μετά από τον οποίο όλοι οι παίκτες είναι χαρούμενοι. Τότε για οποιαδήποτε αρχική ανάθεση χρωμάτων στους κόμβους, ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\tau \leq C \cdot \log\left(\frac{n}{\delta}\right)\right) \geq 1 - \delta,$$

όπου $C = 1050e^9$ και δ αυθαίρετα μικρό.

Με άλλα λόγια, όταν οι παίκτες υιοθετούν την άπληστη στρατηγική, το παίγνιο συγκλίνει σε μία ισορροπία Nash σε $O(\log(\frac{n}{\delta}))$ γύρους με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - \delta$. Βελτιωμένες εκτιμήσεις στην αναμενόμενη τιμή του τ μπορούν να βρεθούν στο [PS13, Θεώρημα 3]. Συνδυάζουμε ιδέες από το [CGJ08]και [PS13] και καταλήγουμε σε μία βελτίωση του Θεωρήματος 4.2. Πιο συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι μια τροποποίηση της άπληστης στρατηγικής μας επιτρέπει να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα με αυτό του Θεωρήματος 4.2, υπό την προϋπόθεση ότι ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων σε κάθε παίκτη είναι τουλάχιστον $\Delta + 1$. Αναφερόμαστε σε αυτή την τροποποιημένη στρατηγική ως ολιγαρκής στρατηγική, η οποία ορίζεται τυπικά ως εξής.

Ορισμός 4.2 (Ολιγαρκής Στρατηγική). Υποθέτουμε ότι $k \geq \Delta+1$ και πως κάθε παίκτης στο παίγνιο χρωματισμού δικτύου πρώτα επιλέγει, ανεξάρτητα από όλες τις άλλες επιλογές, ένα χρώμα ομοιόμορφα και τυχαία από το σύνολο $[k]$, και μετά υιοθετεί την ακόλουθη στρατηγική. Αν ένας παίκτης, έστω v είναι χαρούμενος μετά τον γύρο $t \geq 1$, τότε επιμένει στο χρώμα του για όλους τους γύρους που ακολουθούν, δηλαδή $c_s(v) = c_t(v)$ για όλα τα $s > t$. Αν δεν είναι χαρούμενος μετά τον γύρο t, τότε στον επόμενο γύρο επιλέγει ομοιόμορφα και τυχαία ένα χρώμα από το σύνολο $\{c_t(v)\} \cup ([k] \setminus C_t(v))$.

Με άλλα λόγια, στα πλαίσια της ολιγαρκούς στρατηγικής, ένας παίκτης που δεν είναι χαρούμενος μετά τον γύρο $t \geq 1$ επιλέγει στον επόμενο γύρο ένα χρώμα ομοιόμορφα και τυχαία από το σύνολο που περιέχει το χρώμα επιλογής του μετά τον γύρο t και το σύνολο των χρωμάτων που δεν έχουν επιλεχθεί από τους γείτονες του μετά τον γύρο t.

Ο αντίστοιχος αλγόριθμος δίνεται από τον Αλγόριθμο 4.2, και κάθε παίκτης $v \in V$ τρέχει ένα στιγμιότυπο του.

Παρατήρηση 4.2. Εφόσον $k \geq \Delta + 1$, ισχύει ότι $|\{c_t(v)\} \cup ([k] \setminus C_t(v))| \geq 2$ για όλους τους κόμβους $v \in V$ και όλους τους γύρους $t \geq 1$. Συγκεκριμένα, κάθε παίκτης που δεν είναι χαρούμενος έχει από τουλάχιστον δύο χρώματα να επιλέξει στον επόμενο γύρο. Επίσης, σε αντίθεση με την άπληστη στρατηγική, στα πλαίσια της ολιγαρκούς στρατηγικής, ένας παίκτης που δεν είναι χαρούμενος μπορεί να μην αλλάξει χρώμα στον επόμενο γύρο.

Αλγόριθμος 4.2 Αλγόριθμος Ολιγαρκούς Στρατηγικής

Choose $c_1(v)$ randomly from the set $A_0(v) := [k]$
$t \leftarrow 1$
while $\exists u \in N_G(v)$, $c_t(u) = c_t(v)$ **do**
  $A_t(v) \leftarrow \{c_t(v)\} \cup ([k] \setminus C_t(v))$
  $t \leftarrow t + 1$
  Choose a color $c_t(v)$ uniformly at random from the set $A_{t-1}(v)$
end while
Return $c_t(v)$

Μιμούμαστε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2, από το [CGJ08], και αποδεικνύουμε ότι η ολιγαρκής στρατηγική συγκλίνει σε μια ισορροπία Nash σε πεπερασμένο αριθμό γύρων. Ακριβέστερα, λαμβάνουμε την ακόλουθη βελτίωση του Θεωρήματος 4.2. Θυμίζουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X είναι στοχαστικά μικρότερη από μία μεταβλητή Y, $X \leq_{st} Y$, αν ισχύει $\mathbb{P}(X > t) \leq \mathbb{P}(Y > t)$, για όλα τα t (δες [SS07]).

Θεώρημα 4.3. *Έστω G ενα γράφημα με n κόμβους και μέγιστο βαθμό Δ. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων είναι σε κάθε παίκτη είναι $k \geq \Delta + 1$ και πως κάθε παίκτης στο παίγνιο χρωματισμού δικτύου υιοθετεί την ολιγαρκή στρατηγική. Έστω τ ο πρώτος γύρος μετά από τον οποίο όλοι οι παίκτες είναι χαρούμενοι. Τότε το τ είναι στοχαστικά μικρότερο από μια τυχαία μεταβλητή T έτσι ώστε*

$$\mathbb{E}(T) \leq \frac{2}{\mu}(1 + \log(n)) \quad \textit{και} \quad Var(T) \leq \frac{4n}{\mu^2},$$

που $\mu = -\log\left(1 - \frac{1}{2^6 e^5}\right) \approx 0.000105$.

Αποδεικνύουμε το Θεώρημα 4.3 στην επόμενη ενότητα. Η απόδειξη μιμείται την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2, από το [CGJ08], και εξελίσσεται σε δύο βήματα. Το πρώτο αφορά την εκτίμηση ενός κάτω φράγματος στην πιθανότητα πως ένας παίκτης, ο οποίος δεν είναι είναι χαρούμενος μετά από ένα δεδομένο γύρο t, έχει αρκετά διαθέσιμα χρώματα μετά τον γύρο $t + 1$. Το δεύτερο βήμα αφορά την εκτίμηση ενός κάτω φράγματος στην πιθανότητα πως ένας παίκτης γίνεται χαρούμενος μετά τον γύρο $t+2$, δεδομένου ότι έχει αρκετά διαθέσιμα χρώματα μετά τον γύρο $t+1$. Και οι δύο εκτιμήσεις είναι ανεξάρτητες του Δ και, όταν συνδυάζονται, παράγουν ένα κάτω φράγμα για την πιθανότητα ένας παίκτης που δεν είναι χαρούμενος, να γίνει μετά από δύο γύρους. Σημειώνουμε ότι η ανάλυση σε δύο γύρους είναι ζωτικής σημασίας. Σε ένα γύρο ένας παίκτης γίνεται χαρούμενος στον επόμενο γύρο με πιθανότητα $\frac{1}{2^{\Delta}}$, μία εκτίμηση που ξεκάθαρα εξαρτάται από το Δ. Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.3 ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας ιδέες από την θεωρία των μεγιστικά εξαρτημένων μεταβλητών.

4.3 Απόδειξη του Κύριου Αποτελέσματος

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε το Θεώρημα 4.3. Θεωρούμε ότι κάθε παίκτης στο παίγνιο χρωματισμού δικτύου υιοθετεί την ολιγαρκή στρατηγική. Ξεκινάμε με την εκτίμηση ενός κάτω φράγματος στην πιθανότητα πως ένας παίκτης, που είναι δυσαρεστημένος μετά από ένα δεδομένο γύρο, διαθέτει αρκετά χρώματα στον επόμενο γύρο. Για να γίνουμε ακόμα πιο ακριβείς, θα χρειαστεί να ορίσουμε κάποια παραπάνω σύμβολα.

Θυμίζουμε ότι $c_t(v)$ είναι το χρώμα που έχει επιλέξει ο παίκτης v μετά τον γύρο t, και πως $C_t(v)$ είναι το σύνολο των χρωμάτων που επιλέγονται από τους γείτονες του. Για κάθε $t \geq 1$, έστω H_t το σύνολο των χαρούμενων παικτών μετά τον γύρο t, και έστω $U_t = V \setminus H_t$ το σύνολο των παικτών που δεν είναι χαρούμενοι μετά τον γύρο t. Δεδομένου ότι $v \in U_t$, έστω

$$A_t(v) = \{c_t(v)\} \cup ([k] \setminus C_t(v))$$

το σύνολο των διαθέσιμων χρωμάτων του v μετά τον γύρο t. Έτσι στον επόμενο γύρο ο παίκτης v επιλέγει το χρώμα $c_{t+1}(v)$ ομοιόμορφα και τυχαία από το σύνολο $A_t(v)$. Έστω επίσης $p_t(v) = \frac{1}{|A_t(v)|}$ η πιθανότητα με την οποία ο παίκτης v, που δεν είναι χαρούμενος, επιλέγει το χρώμα του στον επόμενο γύρο. Για $v \in H_t$, θέτουμε $A_t(v) = \{c_t(v)\}$ και $p_t(v) = 1$. Παρομοίως, για ένα παίκτη $v \in V$, έστω $H_t(v)$ το σύνολο των χαρούμενων γειτόνων του μετά τον γύρο t, και έστω

$$F_t(v) = \bigcup_{u \in H_t(v)} \{c_t(u)\}$$

το σύνολο των χρωμάτων που έχουν επιλεχθεί από τους χαρούμενους γείτονες του v μετά τον γύρο t, και $U_t(v) = N_G(v) \setminus H_t(v)$ το σύνολο των γειτόνων του v που δεν είναι χαρούμενοι μετά τον γύρο t. Κάθε χρώμα στο σύνολο $[k] \setminus F_t(v)$ έχει μη μηδενική πιθανότητα να μην επιλεχθεί από κανένα γείτονα του v που δεν είναι χαρούμενος, άρα έχει μια μη μηδενική πιθανότητα να ανήκει στο σύνολο $A_{t+1}(v)$. Τέλος, έστω $f_t(v) = |F_t(v)|$. Παρατηρούμε ότι, εφόσον οι χαρούμενοι παίκτες επιμένουν στην επιλογή τους, η ακολουθία $\{f_t(v)\}_{t \geq 1}$ είναι μη φθίνουσα. Έτσι ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων του v μετά τον γύρο $t+1$ όπως επίσης και μετά τον γύρο $t+2$ είναι το πολύ $k - f_t(v)$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε ένα κάτω φράγμα για την πιθανότητα πως ο διαθέσιμος αριθμός χρωμάτων στον παίκτη $v \in U_t$, μετά τον γύρο $t+1$ είναι τουλάχιστον $\frac{k - f_t(v)}{5}$.

Λήμμα 4.1. *Για κάθε $t \geq 1$ και κάθε $v \in U_t$, ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(|A_{t+1}(v)| \geq \frac{k - f_t(v)}{5}\right) \geq \frac{1}{2^4}.$$

Απόδειξη. Για περισσότερη απλότητα στη χρήση των συμβόλων, έστω $f := f_t(v)$. Αρχικά εκτιμούμε ένα κάτω φράγμα για το $\mathbb{E}(|A_{t+1(v)}|)$. Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει από την ανισότητα Markov. Θυμίζουμε ότι κάθε χρώμα από το σύνολο $[k] \setminus F_t(v)$ έχει μη μηδενική πιθανότητα να ανήκει στο

$A_{t+1}(v)$. Η πιθανότητα πως ένα δεδομένο χρώμα $i \in [k] \setminus F_t(v)$ δεν επιλέγεται από κανένα $u \in U_t(v)$ στον επόμενο γύρο είναι

$$\prod_{\{u \in U_t(v) : i \in A_t(u)\}} (1 - p_t(u)).$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|A_{t+1}(v)|) &\geq \sum_{i \in [k] \setminus F_t(v)} \prod_{\{u \in U_t(v) | i \in A_t(u)\}} (1 - p_t(u)) \\
&\geq (k - f) \cdot \left(\prod_{i \in [k] \setminus F_t(v)} \prod_{\{u \in U_t(v) | i \in A_t(u)\}} (1 - p_t(u)) \right)^{\frac{1}{k-f}} \\
&\geq (k - f) \cdot \left(\prod_{u \in U_t(v)} \prod_{i \in A_t(u)} (1 - p_t(u)) \right)^{\frac{1}{k-f}} \\
&= (k - f) \cdot \left(\prod_{u \in U_t(v)} \left(1 - \frac{1}{|A_t(u)|}\right)^{|A_t(u)|} \right)^{\frac{1}{k-f}}.
\end{aligned}$$

Για κάθε $u \in U_t(v)$ ισχύει ότι $|A_t(u)| \geq 2$, έτσι $1 - \frac{1}{|A_t(u)|} > 0$. Εφόσον η ακολουθία $\{1 - 1/m\}_{m \geq 2}$ ειναι μη φθίνουσα και $|A_t(u)| \geq 2$, ισχύει ότι $\left(1 - \frac{1}{|A_t(u)|}\right)^{|A_t(u)|} \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, συμπαιρένουμε ότι

$$\mathbb{E}(|A_{t+1}(v)|) \geq (k - f) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{|U_t(v)|}{k-f}}.$$

Τώρα, εφόσον $k \geq \Delta + 1$, ισχύει ότι $|U_t(v)| \leq \Delta - f \leq k - 1 - f$, και έτσι $\frac{|U_t(v)|}{k-f} \leq 1$. Από αυτό προκύπτει ότι $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{|U_t(v)|}{k-f}} \geq \frac{1}{4}$, επομένως

$$\mathbb{E}(|A_{t+1}(v)|) \geq \frac{k - f}{4}.$$

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης, έστω $X = k - f - |A_{t+1}(v)|$ και χρησιμοποιούμε το κάτω φράγμα στο $\mathbb{E}(|A_{t+1}(v)|)$, μαζί με την ανισότητα Markov, για να πάρουμε $\mathbb{P}\left(|A_{t+1}(v)| < \frac{k-f}{5}\right) = \mathbb{P}\left(X > \frac{4(k-f)}{5}\right) \leq \frac{5 \cdot \mathbb{E}(X)}{4(k-f)} \leq \frac{15}{16}$, που είναι και το επιθυμητό. □

Στο επόμενο λήμμα εκτιμούμε ένα κάτω φράγμα για την πιθανότητα πως ένας παίκτης, που δεν είναι χαρούμενος μετά τον γύρο t, γίνεται χαρούμενος μετά από δύο γύρους. Θα χρειαστεί να εισάγουμε ακόμα κάποια σύμβολα.

Θεωρούμε ένα παίκτη $v \in U_{t+1}$. Εφόσον ο παίκτης v δεν είναι χαρούμενος, υπάρχει $u \in N_G(v)$ τέτοιος ώστε $c_{t+1}(u) = c_{t+1}(v)$. Υπάρχουν δύο είδη γειτόνων του v που συμμετέχουν στο παίγνιο και δεν είναι χαρούμενοι. Αυτοί που έχουν το ίδιο χρώμα με τον v, και αυτοί που έχουν διαφορετικό χρώμα. Έτσι το σύνολο $U_{t+1}(v)$ διαμερίζεται στα σύνολα

$$S_{t+1}(v) = \{u \in U_{t+1}(v) \mid c_{t+1}(u) = c_{t+1}(v)\} \quad \text{και} \quad D_{t+1}(v) = \{u \in U_{t+1}(v) \mid c_{t+1}(u) \neq c_{t+1}(v)\}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $u \in S_{t+1}(v)$ ισχύει ότι $c_{t+1}(v) \in A_{t+1}(v)$, ενώ για κάθε $u \in D_{t+1}(v)$ ισχύει ότι $c_{t+1}(v) \notin A_{t+1}(v)$. Επίσης, εφόσον $c_{t+1}(u) \in A_{t+1}(u)$, ισχύει πως για κάθε $u \in D_{t+1}(v)$ το σύνολο $A_{t+1}(u)$ περιέχει ένα χρώμα, το χρώμα $c_{t+1}(u)$, που δεν περιέχεται στο $A_{t+1}(v)$.

Λήμμα 4.2. *Ισχύει ότι*

$$\mathbb{P}\left(v \in H_{t+2} \mid v \in U_t\right) \geq \frac{1}{2^6 e^5}$$

Απόδειξη. Έστω $v \in U_t$. Τότε δεδομένου του $A_{t+1}(v)$ και ότι $v \in U_{t+1}$, η πιθανότητα ο παίκτης v να είναι χαρούμενος μετά τον γύρο $t+2$ είναι ο μέσος όρος των πιθανοτήτων πως ένα συγκεκριμένο χρώμα από το A_{t+1} δεν επιλέγεται από κανένα παίκτη $u \in U_{t+1}(v)$ που δεν είναι χαρούμενος. Για την απλοποίηση των συμβόλων, για κάθε χρώμα $i \in [k]$, ορίζουμε τα σύνολα

$$S_{t+1}^{(i)} := \{u \in S_{t+1}(v) \mid i \in A_{t+1}(u)\} \quad \text{και} \quad D_{t+1}^{(i)} := \{u \in D_{t+1}(v) \mid i \in A_{t+1}(u)\}.$$

Για $i \in A_{t+1}(v)$ και $u \in U_{t+1}(v)$, έστω $q(i;u) := \mathbb{P}(c_{t+2}(u) \neq i)$ η πιθανότητα ο παίκτης u να μην επιλέξει το χρώμα i στον γύρο $t+2$. Τότε η πιθανότητα, ένα συγκεκριμένο χρώμα $i \in A_{t+1}(v)$ να μην επιλεχθεί από κανένα παίκτη $u \in U_{t+1}(v)$ στον επόμενο γύρο είναι

$$\prod_{u \in S_{t+1}^{(i)}} q(i;u) \prod_{u \in D^{(}i)_{t+1}} q(i;u).$$

Έτσι, δεδομένου του $\mathcal{A}_{t+1}(v)$ και ότι $v \in U_{t+1}$, η πιθανότητα ο παίκτης v να είναι χαρούμενος μετά τον γύρο $t+2$ ισούται με

$$\begin{aligned}
\pi_{t+2} &:= \frac{1}{|A_{t+1}(v)|} \sum_{i \in A_{t+1}(v)} \prod_{u \in S_{t+1}^{(i)}} q(i;u) \prod_{u \in D_{t+1}^{(i)}} q(i;u) \\
&\geq \left(\prod_{i \in A_{t+1}(v)} \prod_{u \in S_{t+1}^{(i)}} q(i;u) \prod_{u \in D_{t+1}^{(i)}} q(i;u) \right)^{1/|A_{t+1}(v)|} \\
&= \left(\prod_{i \in A_{t+1}(v)} \prod_{u \in S_{t+1}^{(i)}} q(i;u) \right)^{1/|A_{t+1}(v)|} \left(\prod_{i \in A_{t+1}(v)} \prod_{u \in D_{t+1}^{(i)}} q(i;u) \right)^{1/|A_{t+1}(v)|},
\end{aligned}$$

που η πρώτη ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου. Τώρα, παρατηρούμε ότι $c_{t+1}(v) \in A_{t+1}(v)$, και επομένως ισχύει $q(c_{t+1}(v);u) = 1$, για $u \in D_{t+1}(v)$. Επίσης, για κάθε $u \in D_{t+1}(v)$, το σύνολο $A_{t+1}(u)$ περιέχει τουλάχιστον ένα χρώμα (συγκεκριμένα, το $c_{t+1}(u)$) το οποίο δεν ανήκει στο $A_{t+1}(v)$. Από τις δύο τελευταίες παρατηρήσεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\prod_{i \in A_{t+1}(v)} \prod_{u \in D_{t+1}^{(i)}} q(i;u) &= \prod_{i \in A_{t+1}(v) \setminus \{c_{t+1}(v)\}} \prod_{u \in D_{t+1}^{(i)}} q(i;u) \\
&\geq \prod_{u \in D_{t+1}(v)} \prod_{i \in A_{t+1}(u) \setminus \{c_{t+1}(u)\}} \left(1 - \frac{1}{|A_{t+1}(u)|}\right) \\
&= \prod_{u \in D_{t+1}(v)} \left(1 - \frac{1}{|A_{t+1}(u)|}\right)^{|A_{t+1}(u)|-1} \\
&\geq \left(\frac{1}{e}\right)^{|D_{t+1}(v)|},
\end{aligned}$$

που ο τελευταίος υπολογισμός προκύπτει από το γεγονός ότι $(1-\frac{1}{m})^{m-1} \geq \frac{1}{e}$, όταν $m \geq 2$. Παρομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned}
\prod_{i \in A_{t+1}(v)} \prod_{u \in S_{t+1}^{(i)}} q(i;u) &\geq \prod_{u \in S_{t+1}(v)} \prod_{i \in A_{t+1}(u)} \left(1 - \frac{1}{|A_{t+1}(u)|}\right) \\
&= \prod_{u \in S_{t+1}(v)} \left(1 - \frac{1}{|A_{t+1}(u)|}\right)^{|A_{t+1}(u)|} \\
&\geq \left(\frac{1}{4}\right)^{|S_{t+1}(v)|}.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας και τα δύο, καταλήγουμε στο ότι

$$\pi_{t+2} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{|S_{t+1}(v)|}{|A_{t+1}(v)|}} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{|D_{t+1}(v)|}{|A_{t+1}(v)|}}.$$

Από το Λήμμα 4.1 γνωρίζουμε ότι με πιθανότητα τουλάχιστον $1/2^4$ ισχύει ότι $|A_{t+1}(v)| \geq \frac{k-f_t(v)}{5} \geq \frac{k-|H_t(v)|}{5} \geq \frac{k-|H_{t+1}(v)|}{5}$. Επίσης παρατηρούμε ότι $|D_{t+1}(v)| \geq k - |H_{t+1}(v)| - |A_{t+1}(v)|$. Εφόσον

$$|S_{t+1}(v)| + |D_{t+1}(v)| = |U_{t+1}(v)| \leq \Delta - |H_{t+1}(v)| \leq k - 1 - |H_{t+1}(v)| \leq k - |H_{t+1}(v)|,$$

ισχύει ότι $|S_{t+1}(v)| \leq |A_{t+1}(v)|$. Έτσι $\pi_{t+2} \geq \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{e})^{\frac{|D_{t+1}(v)|}{|A_{t+1}(v)|}}$. Εφόσον ξεκάθαρα ισχύει $|D_{t+1}(v)| \leq k - |H_{t+1}(v)|$, συμπεραίνουμε ότι δεδομένου ότι $|A_{t+1}(v)| \geq \frac{k-|H_{t+1}(v)|}{5}$, ισχύει ότι $\pi_{t+2} \geq \frac{1}{4e^5}$. Έτσι προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. $\square$

Τώρα στρέφουμε την προσοχή μας στην απόδειξη του κύριου αποτελέσματος. Δεδομένου ενός $v \in V$, έστω τ_v, ο πρώτος γύρος μετά από τον οποίο ο παίκτης v είναι χαρούμενος, και θέτουμε $\tau = \max_v \tau_v$. Θέλουμε ένα άνω φράγμα για την αναμενόμενη τιμή του τ. Παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές τ_v, $v \in V$, δεν είναι αμοιβαίως αποκλειώμενες και το φράγμα μας στο τ θα είναι μια εκτίμηση χειρότερης περίπτωσης. Για την ολοκλήρωση της απόδειξης ακολουθούμε την προσέγγιση του [PS13] και χρησιμοποιούμε ιδέες από τη θεωρία των μεγιστικά εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών. Για έναν αριθμό $\mu > 0$, έστω E_μ η εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο μ.

Λήμμα 4.3. *Για κάθε $v \in V$, ισχύει $\tau_v \leq_{st} 2 \cdot E_\mu$, που $\mu = -\log(1 - \frac{1}{2^6e^5})$.*

Απόδειξη. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\mathbb{P}(\tau_v > t) \leq \mathbb{P}(E_\mu > \frac{t}{2})$, για κάθε t. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{P}(\tau_v > 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{deg(v)} \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \leq 1 - \frac{1}{e} \leq 1 - \frac{1}{2^6e^5}.$$

Από το Λήμμα 4.2 γνωρίζουμε ότι $\mathbb{P}(\tau_v > t+2 \mid \tau_v > t) = \mathbb{P}(v \in U_{t+2} \mid v \in U_t) \leq 1 - \frac{1}{2^6e^5}$ ισχύει για κάθε $t \geq 1$. Τώρα, όταν το t είναι περιττός αριθμός, ας πούμε $t = 2m+1$, ισχύει

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_v > t) &= \mathbb{P}(\tau_v > 1) \cdot \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(\tau_v > 2i+1 \mid \tau_v > 2i-1) \\
&\leq \left(1 - \frac{1}{2^6e^5}\right)^{m+1} \\
&\leq \left(1 - \frac{1}{2^6e^5}\right)^{t/2} \\
&= \mathbb{P}(E_\mu > t/2).
\end{aligned}$$

Αν το t είναι άρτιος, η απόδειξη είναι παρόμοια. Άρα έχουμε αποδείξει το ζητούμενο. $\square$

Τώρα, έστω τ ο πρώτος γύρος μετά από τον οποίο όλοι οι παίκτες είναι χαρούμενοι. Τότε $\tau = \max_v \tau_v$. Η απόδειξη του κύριου αποτελέσματος έχει σχεδόν ολοκληρωθεί. Για δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, έστω ότι $X \sim Y$ δηλώνει το γεγονός ότι έχουν την ίδια κατανομή.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3. Από το Λήμμα 4.3 συνεπάγεται ότι, για κάθε κόμβο $v \in V$, ισχύει $\tau_v \leq_{st} Y_v$, που $Y_v \sim 2 \cdot E_\mu$. Εφόσον $\tau_v \leq_{st} Y_v$ ισχύει (δες [SS07, Θεώρημα 1.A.1]) ότι υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές $\hat{\tau}_v$, $\hat{Y}_v$, τέτοιες ώστε $\hat{\tau}_v \sim \tau_v$, $\hat{Y}_v \sim Y_v$ και $\hat{\tau}_v \leq \hat{Y}_v$ με πιθανότητα 1. Επομένως $\max_v \hat{\tau}_v \leq_{st} \max_v \hat{Y}_v$ με πιθανότητα 1. Εφόσον $\tau \sim \max_v \hat{\tau}_v$, συμπεραίνουμε ότι $\tau \leq_{st} 2 \cdot M$, που M η μέγιστη τιμή n εκθετικών τυχαίων μεταβλητών, ας πούμε $\{X_v\}_{v \in V}$, με παράμετρο μ. Επομένως $\mathbb{E}(\tau) \leq 2 \cdot \mathbb{E}(M)$ και επομένως αρκεί να ορίσουμε ένα άνω φράγμα στο $\mathbb{E}(M)$. Για την εκτίμηση του άνω φράγματος, δανειζόμαστε ιδέες από το [LR76]. Ισχύει πως για κάθε πραγματικό αριθμό a, $M \leq a + \sum_v \max\{X_v - a, 0\}$. Έτσι

$$\mathbb{E}(M) \leq a + \sum_v \mathbb{E}(\max\{X_v - a, 0\}) = a + n \int_a^\infty (1 - F(x))\, dx,$$

που $F(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $X_v \sim E_\mu$. Έστω $h(a) = a + n \int_a^\infty (1 - F(x))\, dx$, ορισμένη για πραγματικά a. Παρατηρούμε ότι η $h(\cdot)$ πετυχαίνει το ελάχιστο της στο $a_n := F^{-1}(1 - \frac{1}{n})$. Εφόσον $F(x) = 1 - e^{-\mu x}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E}(M) \leq a_n + n \int_{a_n}^\infty e^{-\mu x}\, dx = \frac{1}{\mu}(1 + \log(n))$$

που είναι και το επιθυμητό. Τέλος, από το κύριο αποτέλεσμα στο [Ryc08] συνεπάγεται ότι $Var\,(M) \leq n \cdot Var\,(E_\mu) = \frac{n}{\mu^2}$. Το αποτέλεσμα έπεται θεωρώντας ότι $T \sim 2 \cdot M$. $\square$

Κεφάλαιο 5

Το Πρόβλημα Ανάθεσης σε Ετερογενή Αυτοοργανούμενα Δίκτυα

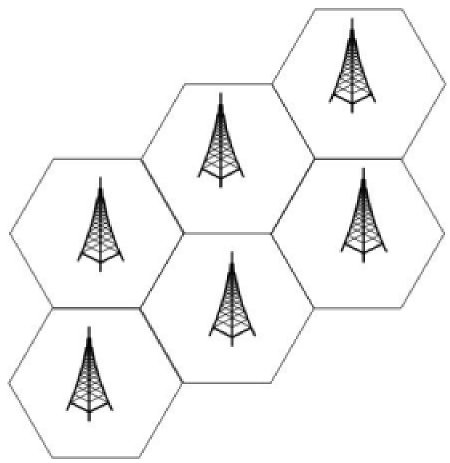
Ο χρωματισμος γραφημάτων βρίσκει άμεση εφαρμογή σε ασύρματα δίκτυα, σε προβλήματα που σχετίζονται με την κατανομή ενός πεπερασμένου συνόλου πόρων, ώστε οι γειτονικές κυψέλες να μην λαμβάνουν τα ίδια στοιχεία. Στην συγκεκριμένη ενότητα μελετάμε ένα άλλο πρόβλημα βελτιστοποίησης, το πρόβλημα ανάθεσης ελαχίστων συγκρούσεν, που αποτελεί παραλλαγή του χρωματισμού γραφημάτων. Για ένα δεδομένο σύνολο πόρων, επιζητούμε μια ανάθεση που ελαχιστοποιεί τις συγκρούσεις μεταξύ των γειτονικών κυψελών. Στα κλασικά ομογενή δίκτυα, που οι κυψέλες είναι του ίδιου τύπου, η ανάθεση των πόρων γίνεται κεντρικά. Τα ετερογενή δίκτυα διαθέτουν κυψέλες που εγκαθίστανται από τους χρήστες του δικτύου, επομένως η κεντρική ανάθεση είναι προβληματική. Μελετάμε το πρόβλημα ανάθεσης ελάχιστον συγκρούσεων στο πλαίσιο της ανάθεσης PCI. Το πρόβλημα ανάθεσης ελαχίστων συγκρούσεων είναι **NP**-πλήρες. Για την επίλυση του εξετάζουμε έναν κατανεμημένο αλγόριθμο που προτάθηκε στο [Goo+14], που ανάγει το πρόβλημα στην εύρεση ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο δυναμικού. Οι παίκτες του παιγνίου είναι οι κυψέλες, οι διαθέσιμες στρατηγικές είναι το σύνολο PCI, και η συνάρτηση χρησιμότητας μιας κυψέλης είναι ο αριθμός των γειτονικών κυψελών σε σύγκρουση. Εξετάζουμε το τίμημα της αναρχίας, και το τίμημα της σταθερότητας και παρουσιάζουμε ένα κατανεμημένο τυχαίο αλγόριθμο σύγχρονης ενημέρωσης για την περίπτωση που ο αριθμός των PCI είναι μεγαλύτερος από τον μέγιστο βαθμό του γράφου συσχετίσεων. Αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει σε μία βέλτιστη αμιγής στρατηγική, που είναι ισορροπία Nash, σε πεπερασμένο χρόνο και είναι ευρωστος στην προσθήκη κόμβων.

5.1 Ετερογενή Αυτοοργανούμενα Δίκτυα

Οι τεράστιες εξελίξεις τα τελευταία χρόνια στις ασύρματες τεχνολογίες, έχουν οδηγήσει σε εφευρέσεις εξαιρετικά σημαντικές για τον άνθρωπο, που κάποιες από αυτές αποτελούν πλέον αναπόσπαστο κομμάτι της ζωής του, όπως είναι το ραδιόφωνο, η τηλεόραση, οι δορυφόροι επικονωνιών, τα κινητά τηλέφωνα. Πληροφορίες και δεδομένα κάθε τύπου μπορούν πλέον να σταλούν σε κάθε γωνία του κόσμου. Η μεταφορά των δεδομένων πραγματοποιείται μέσω ενός ασύρματου δικτύου επικοινωνιών, στο οποίο δεδομένα μεταφέρονται ύπο τη μορφή ραδιοκυμάτων. Στην ενότητα αυτή επικεντρωνόμαστε στα κυψελωτά δίκτυα ή δίκτυα κινητής τηλεφωνίας.

5.1.1 Κυψελωτά Δίκτυα

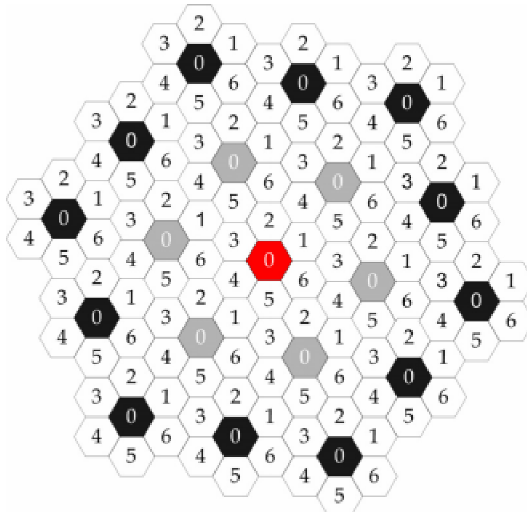
Ένα κυψελωτό δίκτυο βασίζεται στη χρήση πομπών χαμηλής ισχύος($\approx$ 100W). Το εύρος ενός τέτοιου πομπού περιορίζεται σε μία περιορισμένη γεωγραφική περιοχή διαιρεμένη σε μικρότερες περιοχές που ονομάζονται κυψέλες. Κάθε κυψέλη έχει τον δικό της πομποδέκτη (αντένα) κάτω από τον έλεγχο ενός σταθμού βάσης, και διαθέτει ένα δεδομένο εύρος συχνοτήτων. Για να αποφύγουν την παρεμβολή, οι γειτονικές κυψέλες δεν θα πρέπει να χρησιμοποιούν τις ίδιες συχνότητες, ενώ κυψέλες, αρκετά μακριά η μία από την άλλη μπορούν να χρησιμοποιούν τις ίδιες συχνότητες. Οι κυψέλες σχεδιάζονται σε εξαγωνική μορφή, καθώς μπορούν να τοποθετηθούν η μία δίπλα στην άλλη χωρίς να επικαλύπτονται, και έτσι να καλύψουν μια ολόκληρη γεωγραφική περιοχή.



Σχήμα 5.1: Σχεδιασμός κυψελών

Ένας χρήστης, όταν κάνει μία κλήση, συνδέεται στην κυψέλη που εμφανίζεται να διαθέτει το καλύτερο μονοπάτι επικοινωνίας (συχνά, αλλά όχι πάντα, είναι η κοντινότερη κυψέλη).

Μια άλλη σημαντική επιλογή στην κατασκευή ενός κυψελωτού δικτύου είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο κυψελών που λειτουργούν στην ίδια ζώνη συχνοτήτων για την αποφυγή παρεμβολής. Γι΄ αυτό, η οργάνωση των κυψελών θα μπορούσε να ακολουθεί διαφορετικά μοτίβα. Αν ένα μοτίβο περιέχει N κυψέλες, κάθε μία θα μπορούσε να χρησιμοποιεί F/N συχνότητες, που F είναι ο αριθμός των συχνοτήτων που παρέχονται στο σύστημα. Το Σχήμα 5.2 δείχνει μια τυπική εξαγωνική διάταξη κυψελών με επαναχρησιμοποίηση συχνοτήτων βαθμού εφτά. Οι κυψέλες αριθμούνται με βάση την ζώνη συχνοτήτων που χρησιμοποιούν. Επίσης απεικονίζει την επιθυμητή κυψέλη (χρωματισμένη με κόκκινο), τις 6 κοντινότερες παρεμβαλλόμενες κυψέλες σε ίση απόσταση, δηλαδή τον πρώτο δακτύλιο κυψελών που χρησιμοποιούν το ίδιο φάσμα πηγών (χρωματισμένες με γκρι), και το δεύτερο επίπεδο παρεμβολέων (χρωματισμένοι με μαύρο).



Σχήμα 5.2: Εξαγονική διάταξη κυψελών

Χάρη στην επαναχρησιμοποίηση συχνοτήτων, μπορούμε μπορούμε να αυξήσουμε τον αριθμό των χρηστών στο σύστημα, που χρησιμοποιούν την ίδια ζώνη συχνοτήτων. Η γενική αρχή είναι να χρησιμοποιούνται μικρο, πικο-κυψέλες σε περιοχές πολύ υψηλής πυκνότητας, ώστε να επιτρέπεται μεγαλύτερη επαναχρησιμοποίηση συχνοτήτων σε μια γεωγραφική περιοχή με μεγάλο πληθυσμό.

Ένας άλλος τρόπος να οριοθετήσουμε μια κυψέλη, είναι μέσω του σταθμού βάσης της. Η περιοχή που καλύπτεται από ένα σταθμό βάσης, δηλαδή η περιοχή από την οποία εισερχόμενες κλήσεις φτάνουν σε αυτό το σταθμό βάσης ονομάζεται κυψέλη. Αυτή η περιοχή είναι ένα εξάγωνο (όπως ορίσαμε παραπάνω). Ο σταθμός βάσης (base station) αποτελεί ένα πολύ βασικό στοιχείο ενός κυψελωτού δικτύου. Βρίσκεται στο κέντρο της κυψέλης, και περιλαμβάνει μια αντένα, έναν ελεγκτή και έναν αριθμό πομποδεκτών. Ο σταθμός βάσης είναι αυτός που επιτρέπει την επικοινωνία στα κανάλια που ανατίθενται στην κυψέλη. Ανάμεσα στον σταθμό βάσης και σε ένα κινητό τηλέφωνο γίνεται εγκατάσταση δύο τύπων καναλιών, των καναλιών ελέγχου και των καναλιών κίνησης. Τα κανάλια ελέγχου συνδέουν το κινητό τηλέφωνο με τον σταθμό βάσης και ανταλλάσουν πληροφορίες για τη δημιουργία της σύνδεσης και της διατήρησης της. Τα κανάλια κίνησης χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά της κίνησης (φωνής, δεδομένων, και τα λοιπά).

5.1.2 Τεχνολογίες LTE

Η εξέλιξη στις τεχνολογίες ραδιοπρόσβασης και η ζήτηση για αυξημένη χωρητικότητα οδήγησε στην μεγάλη ανάπτυξη στον τομέα των κυψελωτών δικτύων, η οποία έλαβε χώρα κυρίως με τις τεχνολογίες LTE (Long-Term Evolution) και LTE-A (LTE Advanced), οι οποίες πρόσφεραν στους χρήστες ενός δικτύου την δυνατότητα πρόσβασης στο Διαδίκτυο, πέραν από τις τηλεφωνικές κλήσεις, και φυσικά αυξημένες ταχύτητες μεταφοράς των δεδομένων. Ένα LTE δίκτυο αποτελείται από το κεντρικό δίκτυο (core network), το οποίο παρέχει πρόσβαση στο Διαδίκτυο και υπηρεσίες πολυμέσων, όπως τηλεφωνικές κλήσεις, το δίκτυο ραδιοπρόσβασης (radio access network), δηλαδή τις κυψέλες και τους σταθμούς βάσης τους που παρέχουν ασύρματη κάλυψη για τις συσκευές, τις συνδέσεις μεταξύ των δύο δικτύων, και φυσικά τους χρήστες του δικτύου.

Στην περίπτωση της LTE-A HetNet αρχιτεκτονικής (ετερογενή δίκτυα), έχουμε διαφορετικούς τύπους δικτύων ραδιοπρόσβασης ή κυψελών. Υπάρχουν οι μακροκυψέλες (macrocells), με σταθμούς βάσης στη μορφή που αναπτύξαμε παραπάνω, οι οποίες εγκαθίστανται από τον πάροχο του δικτύου. Η δεύτερη κατηγορία κυψελών είναι οι μικρές κυψέλες (small cells), οι οποίες παρέχουν μικρότερη κάλυψη από τις μακροκυψέλες και διαθέτουν σταθμούς βάσης χαμηλής ισχύος. Ένα παράδειγμα αποτελούν οι φεμτοκυψέλες (femtocells), που πρόκειται για σταθμούς βάσεις που τυπικά εγκαθίστανται από τερματικούς χρήστες σε εσωτερικούς χώρους και αποτελούν ένα πολύ σημαντικό κομμάτι των HetNets. Προσφέρουν στους παρόχους των δικτύων ένα μέσο παροχής καλής κάλυψης σε εσωτερικούς χώρους για την κίνηση φωνής, βίντεο, και γενικά μεγάλων δεδομένων. Σύμφωνα με το [YF16] μπορούμε να θεωρήσουμε σε κάποιες καταστάσεις ότι η κατανομή των μακροκυψελών γίνεται σε εξαγωνικές περιοχές, όπως αναλύσαμε προηγουμένως, ενώ η κατανομή των μικρών κυψελών είναι τυχαία. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση των ετερογενών δικτύων, που χρησιμοποιούνται μακροκυψέλες, και φεμτοκυψέλες, υπάρχουν δύο είδη παρεμβολών:

1. Παρεμβολή ανάμεσα σε μακροκυψέλες ή φεμτοκυψέλες.

2. Παρεμβολή ανάμεσα σε μία μακροκυψέλη και μία φεμτοκυψέλη και αντίστροφα.

Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να δωθεί ιδιαίτερη προσοχή στον σχεδιασμό επαναχρησιμοποίησης συχνοτήτων.

5.1.3 Φυσική Ταυτότητα Κυψέλης

Για την ταυτοποίηση μεταξύ των κυψελών, σε ένα ετερογενές δίκτυο γίνεται χρήση της φυσικής ταυτότητας κυψέλης (physical cell identity). Η φυσική ταυτότητα μιας κυψέλης (PCI) δεν χρειάζεται να είναι μοναδική κατα μήκος όλου του δικτύου. Υπάρχει δηλαδή η δυνατότητα επαναχρησιμοποιήσης των PCI. Όμως η μοναδικότητα καθίσταται αναγκαία σε τοπικό επίπεδο.

(α΄) Σύγκρουση PCI

(β΄) Σύγχυση PCI

Σχήμα 5.3: Προσδιορισμός της σύγκρουσης και σύγχησης PCI, οι οποίες πρέπει να αποφεύγονται

Η ανάθεση PCI, όπως αποτυπώνεται και στο Σχήμα 5.3 πρέπει να ικανοποιεί δύο προϋποθέσεις:

1. Πρέπει να είναι ελεύθερη από συγκρούσεις (conflict-free), δηλαδή δεν πρέπει δύο γειτονικές κυψέλες να λαμβάνουν το ίδιο PCI.

2. Πρέπει να είναι ελέυθερη από συγχύσεις (confusion-free), δηλαδη μια κυψέλη δεν πρέπει να έχει δύο γείτονες με το ίδιο PCI.

Ο λόγος που πρέπει να αποφεύγονται και οι συγχύσεις είναι γιατί, αν μία κυψέλη έχει δύο γείτονες με το ίδιο PCI, δεν υπάρχει ξεκάθαρος τρόπος με τον οποίο η κυψέλη, σε περίπτωση ανάγκης επικοινωνίας με κάποια από αυτές, να μπορεί να την ταυτοποιήσει.

Υπάρχουν 504 πιθανές τιμές PCI στο εύρος 0-503. Παρόλο που για ομογενή LTE-A δίκτυα (π.χ. δίκτυα που διαθέτουν μόνο μακροκυψέλες) ο αριθμός των PCI μπορεί να είναι αρκετός, στην περίπτωση των ετερογενών δικτύων είναι αρκετά περιορισμένος, με αποτέλεσμα να μην εγγυάται απουσία συγκρούσεων και συγχύσεων. Το γεγονός αυτό αυτόματα δημιουργεί την ανάγκη εύρεσης μεθόδων ανάθεσης PCI, με τέτοιο τρόπο που να ικανοποιούνται οι παραπάνω δύο προϋποθέσεις, αλλά και οι περιορισμοί σε ό,τι αφορά τον αριθμό των διαθέσιμων PCI. Εκ πρώτης όψεως κάτι τέτοιο φαίνεται αρκετά δύσκολο.

5.1.4 Αυτοοργάνωση και PCI Διαμόρφωση

Η τεχνολογία των αυτοοργανούμενων δικτύων (self-organizing networks) μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα LTE-A κυψελωτά δίκτυα, ώστε να ελαχιστοποιήσει την ανθρώπινη παρέμβαση στην διαδικασία δικτύωσης. Αποτελεί ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για τους παρόχους των δικτύων, για παράδειγμα στη διαχείρηση της παρεμβολής μεταξύ των καναλιών επικοινωνίας στα HetNets. Η γενική ιδέα πίσω από την χρήση αυτοοργανούμενων δικτύων (SON) στα HetNets βασίζεται στην υλοποίηση του σχεδιασμού των δικτύων, την βελτιστοποίηση τους, και την διαμόρφωση βασικών παραμέτρων των κυψελών, μέσω αυτοματοποιημένων διαδικασιών που απαιτούν ελάχιστη ανθρώπινη παρέμβαση.

Η αυτοδιαμόρφωση (self-configuration) είναι μια διεργασία, κατά την οποία νέοι κόμβοι που προστίθενται στο δίκτυο ακολουθούν κάποιες αυτοματοποιημένες διαδικασίες εγκατάστασης για την επίτευξη της διαμόρφωσης διάφορων παραμέτρων που επιτρέπουν την σωστή λειτουργία του κόμβου στο δίκτυο. Η διαδικασία της αυτοδιαμόρφωσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην ανάθεση PCI. Η δυσκολία αποφυγής συγκρούσεων και συγχύσεων, αλλά και το γεγονός ότι η εισαγωγή μικρών κυψελών, όπως φεμτοκυψελών, είναι τυχαία και ασυντόνιστη, υποδεικνύει ότι ο παραδοσιακός κεντρικός σχεδιασμός δεν λειτουργεί αποδοτικά. Μια υποσχόμενη λύση είναι η χρήση διαδικασιών αυτοδιαμόρφωσης οι οποίες επιτρέπουν στις φεμτοκυψέλες να μαθαίνουν για το περιβάλλον τους (γειτονικές κυψέλες) και να ρυθμίζουν τις παραμέτρους τους αναλόγως. Στην περίπτωση της ανάθεσης PCI η αυτοδιαμόρφωση PCI στοχεύει στην ανάθεση PCI από ένα πεπερασμένο σύνολο πόρων στις κυψέλες του δικτύου με τέτοιο τρόπο ώστε να αποφεύγει την ασάφεια, δηλαδή τις συγκρούσεις και τις συγχύσεις.

5.2 Ελαχιστοποίηση συγκρούσεων σε Ετερογενή Αυτοοργανούμενα Δίκτυα

Σε ένα ετερογενές ασύρματο δίκτυο με μικροκυψέλες (HetSNet), οι μικροκυψέλες που εγκαθίστανται από τους χρήστες, γνωστές και ως φεμτοκυψέλες, πρέπει να συνυπάρχουν με τις με τις μεγαλύτερες κυψέλες που διαχειρίζεται ο πάροχος του δικτύου. Όπως κάθε κυψέλη, έτσι και οι φεμτοκυψέλες απαιτούν την διαμόρφωση βασικών λειτουργικών παραμέτρων για την ορθή λειτουργία τους στο δίκτυο. Η ανάγκη αυτοματοποίησης της διαμόρφωσης αυτών των παραμέτρων έχει στρέψει το ερευνητικό ενδιαφέρον προς την κατεύθυνση των αυτοοργανούμενων δικτύων [Pen+13]. Μελετάμε το πρόβλημα την ανάθεσης ελαχίστων συγκρούσεων σε ετερογενή αυτοοργανούμενα δίκτυα, για την περίπτωση της ανάθεσης φυσικών ταυτοτήτων κυψέλης (PCI).

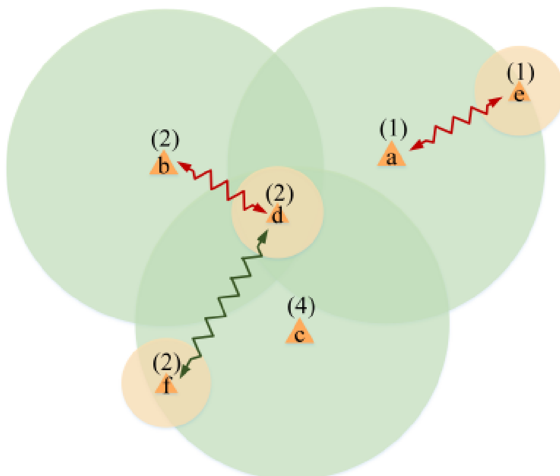
5.2.1 Μοντελοποίηση με Γραφήματα και Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Θεωρούμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, με μέγιστο βαθμό Δ. Η ανάθεση ελαχίστων συγκρούσεων είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, κατά το οποίο ο στόχος είναι να ανατεθεί ένα πεπερασμένο σύνολο πόρων K (στη δική μας περίπτωση σύνολο από PCI) από στους κόμβους του γραφήματος G, έτσι ώστε το άθροισμα των συγκρούσεων να ελαχιστοποιηθεί. Μια σύγκρουση είναι μια κατάσταση κατά την οποία, δύο κόμβοι που μοιράζονται μια ακμή, λαμβάνουν το ίδιο στοιχείο από το K.

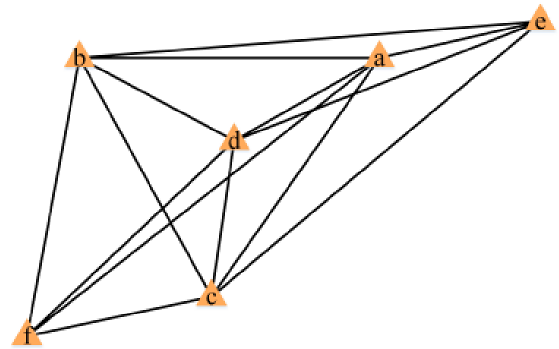
Η ανάθεση ελαχίστων συγκρούσεων είναι **NP**-πλήρες πρόβλημα, το οποίο προκύπτει εύκολα μέσω μιας αναγωγής από το πρόβλημα χρωματισμού γραφημάτων στο πρόβλημα ανάθεσης ελαχίστων συγκρούσεων. Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$, και k ένας θετικός ακέραιος. Είναι το γράφημα k-χρωματίσιμο; Συμβολίζουμε αυτό το πρόβλημα με $P_1(G, k)$. Από την άλλη, η εκδοχή του προβλήματος απόφασης του προβλήματος ελαχίστων συγκρούσεων μπορεί να διατυπωθεί ως εξής. Θεωρούμε και πάλι ένα γράφημα $G = (V, E)$, και δύο θετικούς ακεραίους k, τ. Υπάρχει ανάθεση k χρωμάτων στους κόμβους έτσι ώστε ο αριθμός των συγκρούσεων να είναι το πολύ τ; Συμβολίζουμε αυτό το πρόβλημα με $P_2(G, k, \tau)$. Είναι ξεκάθαρο πως το P_2 ανήκει στην κλάση **NP**. Αν δοθεί ένα πιστοποιητικό μπορεί να επιβεβαιωθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, ελέγχοντας τη γειτονιά κάθε κόμβου, αν οι το άθροισμα των συγκρούσεων είναι το πολύ τ. Το πιστοποιητικό είναι πολυωνυμικού μήκους (ένα χρώμα για κάθε κόμβο). Το $P_1(G, k)$ ανάγεται πολυωνυμικά στο $P_2(G, k, 0)$. Εφόσον το P_1 είναι **NP**-πλήρες, τότε και το P_2 είναι **NP**-πλήρες. Αυτό αυτόματα δημιουργεί την ανάγκη αναζήτησης ευρετικών λύσεων. Έχουν προταθεί αρκετοί ευρετικοί αλγόριθμοι για την ανάθεση PCI (π.χ. δες [OB13, Ami+08, Zha+13, WEI+13]). Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε μια κατανεμημένη ευρετική που βασίζεται στη θεωρία παιγνίων.

5.2.2 Παίγνιο Ανάθεσης PCI

Έστω ένα HetSnet που αποτελείται από ένα σύνολο $V := \{1, 2, \ldots, n\}$ από σταθμούς βάσης. Για την αποφυγή τετριμμένων στιγμιοτύπων θεωρούμε πως $n \geq 2$. Το σύνολο των PCI είναι $K := \{1, 2, \ldots, k\}$. Το PCI του σταθμού βάσης $v \in V$ συμβολίζεται με s_v. Η κατασκευή του γραφήματος $G = (V, E)$ πρέπει να να αντικατοπτρίζει τις απαιτήσεις του προβλήματος. Όσον αφορά την ανάθεση PCI, το σύνολο των ακμών E, πρέπει να περιέχει τις κυψέλες με επικαλυπτόμενες περιοχές κάλυψης, για να υποδηλώνει πιθανές συγκρούσεις. Επίσηςς το σύνολο ακμών πρέπει να περιέχει τις πιθανές PCI συγχύσεις, εισάγοντας μια ακμή μεταξύ δύο κυψελών που έχουν ένα κοινό γείτονα, ακόμα κι αν οι δύο κυψέλες δεν έχουν κοινή περιοχή κάλυψης. Όπως φαίνεται και στο παράδειγμα που δίνεται στο Σχήμα 5.4α΄, η ακμή (d, f) πρέπει να είναι στο G, ωστε να υποδηλώνει πως αν οι σταθμοί βάσης d και f έχουν το ίδιο PCI, τότε ο σταθμός βάσης c έχει μία σύγχυση. Από δω και περά προσδιορίζουμε και τις συγκρούσεις και τις συγχύσεις ως συγκρούσεις. Επομένως για να κατασκευάσει κανείς το σύνολο ακμών του G, ενώνει με ακμή όποιους σταθμούς βάσης βρίσκονται (δυνητικά) σε σύγκρουση. Το Σχήμα 5.4β′ αντιπροσωπεύει το ισοδύναμο γράφημα σχέσων γειτόνων G, για το δίκτυο του Σχήματος 5.4α′.



(α′) Για τη συγκεκριμένη ανάθεση PCI τα κόκκινα και τα πράσινα βέλη συμβολίζουν συγκρούσεις και συγχύσεις αντίστοιχα. Ο αριθμός PCI απεικονίζεται πάνω από το σταθμό βάσης σε παρένθεση



(β′) Η μόνη ακμή που δεν εμφανίζεται στο γράφημα σχέσεων γειτόνων G είναι η (e, f). Η ανάθεση του ίδιου PCI στους κόμβους e και f δεν δημιουργεί συγκρούσεις

Σχήμα 5.4: Ένα HetSnet και το αντίστοιχο γράφημα σχέσεων γειτόνων G

Έστω $N_G(v)$ το σύνολο των γειτόνων του σταθμού βάσης $v \in V$, δηλαδή όλοι οι σταθμοί βάσης που έχουν μια ακμή με το v, ενώ $deg(v) = |N_G(v)|$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει κεντρική ανάθεση. Αντίθετα, κάθε σταθμός βάσης επιλέγει εγωιστικά. Αυτή η κατάσταση μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα μη συνεργατικό παίγνιο, που οι παίκτες είναι οι σταθμοί βάσης. Ορίζεται μια αφινική συνάρτηση κόστους[9], όσον αφορά τον αριθμό των συγκρούσεων. Το κόστος του σταθμού βάσης $v \in V$ για την επιλογή του PCI $s_v \in K$ είναι

$$c_v(s_v, s_{-v}) := a|\{u \mid s_u = s_v, u \in N_G(v)\}| + d,$$

που a, d θετικές σταθερές, ενώ το σύνολο $\{u \mid s_u = s_v, u \in N_G(v)\}$ είναι οι γείτονες του v που έχουν το ίδιο PCI , s_v.

Έστω ένα προφίλ στρατηγικών $s := (s_v, s_{-v})$. Το συνολικό κόστος (ή κοινωνικό κόστος) του συστήματος είναι το άθροισμα του κόστους του συνόλου των σταθμών βάσης,

$$C(s) := \sum_{v \in V} c_v(s_v, s_{-v}).$$

Συμβολίζουμε το πεπερασμένο παίγνιο ανάθεσης PCI σε κανονική μορφή, με G_V. Για την απόδειξη ύπαρξης ισορροπιών Nash αμιγών στρατηγικών του G_V, γίνεται χρήση της μεθόδου συνάρτησης δυναμικού.

Ορισμός 5.1 (Βεβαρημένη Συνάρτηση Δυναμικού)**.** Μια συνάρτηση $\Phi : K^n \to \mathbb{R}$ είναι μια βεβαρημένη συνάρτηση δυναμικού για το G_V με βάρος $w > 0$, αν $\forall v \in V$, $\forall i, j \in K$ ισχύει

$$\Phi(i, s_{-v}) - \Phi(j, s_{-v}) = w(c_v(i, s_{-v}) - c_v(j, s_{-v})).$$

[9]Στο συγκεκριμένο παίγνιο ορίζεται συνάρτηση κόστους, και όχι χρησιμότητας. Ισχύει ότι το κόστος είναι ίσο με τη χρησιμότητα επί -1, και οι παίκτες προσπαθούν να το ελαχιστοποιήσουν

Στο Θεώρημα 3.2 θεωρήσαμε την περίπτωση μιας ακριβούς συνάρτησης δυναμικού ($w = 1$). Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι κάθε παίγνιο που διαθέτει μια συνάρτηση δυναμικού όπως όριστηκε παραπάνω έχει (τουλάχιστον) μια ισορροπία Nash αμιγών στρατηγικών που είναι το τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης δυναμικού. Εύκολα συμπαιρέναι κανείς πως ένα προφίλ στρατηγικής, κατά το οποίο η συνάρτηση δυναμικού δεν μπορεί να μειωθεί από την αλλαγή στρατηγικής ενός παίκτη (οποιουδήποτε) είναι μια ισορροπία Nash . Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική βέλτιστης απόκρισης οδηγεί σε ισορροπία Nash (δες [Nis+07]).

Λήμμα 5.1. *Το G_v έχει μια ισορροπία Nash αμιγών στρατηγικών.*

Απόδειξη. Η αλλαγή στο κόστος του παίκτη v καθώς αλλάζει την επιλογή του, από $s_v = i$ σε $s_v = j$, $i, j \in K$, ενώ όλοι οι άλλοι παίκτες διατηρούν τα PCI τους είναι

$$\begin{aligned}\Delta c_v(i,j,s_{-v}) &= c_v(j,s_{-v}) - c_v(i,s_{-v}) \\ &= a|\{u \mid s_u = j, u \in N_G(v)\}| - a|\{u \mid s_u = i, u \in N_G(v)\}.\end{aligned}$$

Η αντίστοιχη αλλαγή στο συνολικό κόστος είναι

$$\begin{aligned}\Delta C(i,j,s_{-v}) &= \Delta c_v(i,j,s_{-v}) + \sum_{u \in N_G(v)\,:\,s_u=j} a - \sum_{u \in N_G(v)\,:\,s_u=i} a \\ &= 2\Delta c_v(i,j,s_{-v}).\end{aligned}$$

Έτσι καταλήγουμε στο ότι η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι βεβαρημένη συνάρτηση δυναμικού για το G_v, με βάρος $w = 2$. □

Τώρα που η ύπαρξη της ισορροπίας Nash έχει εξασφαλιστεί, το επόμενο βήμα είναι να συγκρίνουμε την επίδοση των ισορροπιών Nash με την επίδοση της βέλτιστης λύσης. Η βέλτιστη λύση λύνει το πρόβλημα

$$\min_{s \in K^n} C(s).$$

5.2.3 Αποδοτικότητα των Ισορροπιών Nash

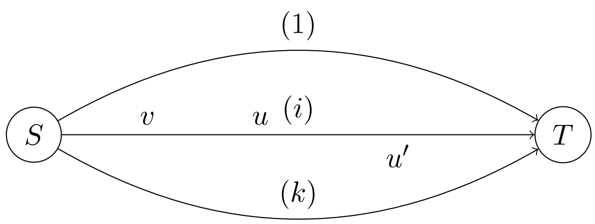
Για τη μέτρηση της αποδοτικότητας των Ισορροπιών Nash θα υπολογίσουμε το τίμημα της αναρχίας και το τίμημα της σταθερότητας.

Το ακόλουθο λήμμα αποδεικνύει ότι υπάρχουν ισορροπίες Nash για το G_V, τόσο καλές, όσο η βέλτιστη λύση.

Λήμμα 5.2. *Το τίμημα της σταθερότητας του G_V είναι 1.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με χρήση απαγωγής σε άτοπο. Έστω s^* μια βέλτιστη ανάθεση στρατηγικών η οποία ελαχιστοποεί το κοινωνικό κόστος C. Τότε έστω ότι οι σταθμοί βάσης εκτελούν δυναμική βέλτιστης απόκρισης με αφετηρία την s^*. Αν μια βέλτιστη απόκριση υπάρχει για τουλάχιστον ένα $v \in V$ τότε το συνολικό κόστος μειώνεται και η s^* δεν είναι βέλτιστη. Άρα δεν πρέπει να υπάρχει βέλτιστη απόκριση για κανένα παίκτη στη βέλτιστη ανάθεση s^*. Έτσι, από τον ορισμό της ισορροπίας Nash η βέλτιστη ανάθεση είναι μια ισορροπία Nash αμιγών στρατηγικών και το τίμημα της σταθερότητας είναι 1. □

Προφανώς ένα τέτοιο αποτέλεσμα δεν μπορεί να είναι καθησυχαστικό. Χρειάζεται και ο υπολογισμός του τιμήματος της αναρχίας, για να σιγουρευτούμε πως η επίδοση της χειρότερης ισορροπίας Nash δεν απέχει πολύ από τη βέλτιστη επίδοση. Για τον υπολογισμό του τιμήματος της αναρχίας, είναι αρκετά βοηθητικό να σκεφτούμε το παίγνιο, σαν ένα παίγνιο δρομολόγησης σε ένα κατευθυνόμενο γράφο G_R δύο κόμβων $\{S, T\}$ με k παράλλλες ακμές. Όλοι οι σταθμοί βάσης που μοιράζονται το ίδιο PCI είναι στην ίδια ακμή. Βέβαια αυτά δεν σημαίνει ότι το τίμημα της αναρχίας ενός ατομικού εγωιστικού παιγνίου έχει έχει εφαρμογή στο G_V. Η θεμελιώδης διαφορά ανάμεσα σε ένα παίγνιο δρομολόγησης και στην ανάθεση PCI είναι ότι σε ένα παίγνιο δρομολόγησης το κόστος της επιλογής ενός μονοπατιού $i \in K$ για ένα παίκτη $v \in V$ είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από όλους τους παίκτες που επιλέγουν το i. Ενώ στην ανάθεση PCI το κόστος είναι c_v , δηλαδή είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από τους γείτονες του v που επιλέγουν την διαδρομή i. Εξαιτίας αυτής της διαφοράς τα φράγματα που δίνονται στο [Nis+07] για ατομικά εγωιστικά παίγνια με αφινικές συναρτήσεις δεν μπορούν να εφαρμοστούν στο G_V. Στο Σχήμα 5.5 βλέπουμε ένα παράδειγμα γραφήματος δρομολόγησης G_R που $u \in N_G(v)$, ενώ $u' \notin N_G(v)$.



Σχήμα 5.5: Το γράφημα δρομολόγησης G_R, του G_V. Το κόστος του σταθμού βάσης v στην ακμή i εξαρτάται μόνο από τον αριθμό γειτόνων του v που χρησιμοποιούν την ακμή i

Λήμμα 5.3. *Το τίμημα της αναρχίας του G_V φράσσεται άνω από το* $\frac{\sum_{v\in V} a\cdot deg(v)}{d\cdot n} + 1$, $d > 0$.

Απόδειξη. Έστω s^* μια βέλτιστη ανάθεση, ενώ $\bar{s}$ μια ισορροπία Nash του G_V. Για μια δεδομένη ανάθεση s ο αριθμός των γειτόνων του $v \in V$ στην ακμή $s_v \in K$ γραφήματος δρομολόγησης G_R του Σχήματος 5.5, δίνεται από το $x_{vs_v}(s)$. Από τον ορισμό της ισορροπίας Νασh ισχύει ότι

$$\begin{aligned} ax_{vs_v}(\bar{s}) &\leq ax_{vs_v^*}(\bar{s}) \\ &\leq ax_{vs_v^*}(\bar{s}) + ax_{vs_v^*}(s^*). \end{aligned}$$

Αθροίζοντας για όλα τα v παίρνουμε

$$\begin{aligned} C(\bar{s}) &\leq \sum_{v\in V} ax_{vs_v^*}(\bar{s}) + C(s^*) \\ \frac{C(\bar{s})}{C(s^*)} &\leq \frac{\sum_{v\in V} ax_{vs_v^*}(\bar{s})}{C(s^*)} + 1. \end{aligned}$$

Ο αριθμητής φράσσεται άνω από το $\sum_{v\in V} a \cdot deg(v)$, ενώ ο παρανομαστής φράσσεται κάτω από το $d \cdot n$. Άρα

$$\frac{C(\bar{s})}{C(s^*)} \leq \frac{\sum_{v\in V} a \cdot deg(v)}{d \cdot n} + 1.$$

□

Η ανελαστικότητα του παραπάνω άνω φράγματος δεν έχει επαληθευτεί σύμφωνα με το [Goo+14]. Το τίμημα της αναρχίας δεν ορίζεται για $C(s^*) = 0$, άρα δεν μπορεί να γίνει συζήτηση για το τίμημα της αναρχίας όταν $d = 0$. Το παραπάνω φράγμα αναθεωρείται, αν κάνουμε ακόμα μια υπόθεση για τον αριθμό των διαθέσιμων PCI. Αν ισχύει ότι $k > \Delta$ τότε όλες οι ισορροπίες Nash γίνονται κοινωνικά αποδοτικές με μηδενικές συγκρούσεις. Αυτό ακριβώς αποδεικνύει το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 5.4. *Δεδομένου ότι $k > \Delta(G)$ όλες οι ισορροπίες κατά Nash είναι κοινωνικά αποδοτικές με μηδενικές συγκρούσεις.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με χρήση απαγωγής σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει ένα στρατηγικό προφίλ s που είναι ισορροπία Nash, και υπάρχει ένας σταθμός βάσης $v \in V$ που έχει συγκρούσεις. Από υπόθεση $deg(v) < k$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in K$, που δεν έχει επιλεχθεί από κάποιο $u \in N_G(v)$. Αυτό σημαίνει ότι ο παίκτης v δεν ακολουθεί μια στρατηγική βέλτιστης απόκρισης, και άρα η s δεν είναι ισορροπία Nash. Ετσι καταλήγουμε στο ότι όλες οι ισορροπίες Nash έχουν μηδενικές συγκρούσεις. Μέσω των μηδενικών συγκρούσεων ελαχιστοποιείται και το κόστος κάθε παίκτη, άρα και το συνολικό κόστος, δηλαδή οι ισορροπίες είναι βέλτιστες λύσεις για το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κοινωνικού κόστους, και το τίμημα της αναρχίας είναι 1. □

5.2.4 Ταυτόχρονος Αλγόριθμος Σύγχρονης Ενημέρωσης

Όπως ειπώθηκε και παραπάνω, η ακολουθιακή δυναμική βέλτιστης απόκρισης συγκλίνει σε μία ισορροπία Nash σε όλα τα παίγνια δυναμικού. Βέβαια, η ακολουθιακή δυναμική δεν φαίνεται να είναι η καλύτερη επιλογή, καθώς μόνο ένας παίκτης εκτελεί μία ενέργεια τη φορά και επίσης απαιτείται ένας μηχανισμός για την επιλογή του επόμενου παίκτη που θα εκτελέσει τη βέλτιστη απόκριση.

Στην συγκεκριμένη υποενότητα προτείνεται ένας τυχαίος ταυτόχρονος αλγόριθμος σύχρονης ενημέρωσης που συγκλίνει σε ισορροπία Nash του παιγνίου G_V, για $k > \Delta$. Εδώ να σημειώσουμε ότι το παίγνιο G_V δεν θέτει κάποιον περιορισμό σχετικά με την πληθικότητα του K. Αυτός ο αλγόριθμος υποθέτει ότι οι κόμβοι διαθέτουν την γνώση του Δ. Το Λήμμα 5.4 επιβάλλει για $k > \Delta$, όλες οι ισορροπίες Nash να είναι βέλτιστες και να έχουν μηδενικές συγκρούσεις. Αντίστροφα, οποιοδήποτε στρατηγικό προφίλ με μηδενικές συγκρούσεις είναι ισορροπία Nash. Επομένως ο στόχος του αλγορίθμου είναι να αναθέσει το σύνολο K στους σταθμούς βάσης, έτσι ώστε οι γείτονες να λαμβάνουν διαφορετικά PCI και ως αποτέλεσμα όλοι οι σταθμοί να έχουν μηδενικές συγκρούσεις. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος δίνεται από τον Αλγόριθμο 5.1, και εκτελείται τοπικά σε κάθε σταθμό βάσης, δηλαδή κάθε σταθμός τρέχει ένα στιγμιότυπο του. Το σύμβολο $c_v(t)$ δηλώνει τον αριθμό των συγκρούσεων του σταθμού βάσης $v \in V$ τη χρονική στιγμή t και $C(t) = \sum_{v \in V} c_v(t)$ δηλώνει το συνολικό άθροισμα των συγκρούσεων τη χρονική στιγμή $t \in \mathbb{N}_0$. Η τυχαία μεταβλητή στο σύνολο K των PCI, του παίκτη $v \in V$, την χρονική στιγμή t, συμβολίζεται με $p_v(t, i)$. Το επιλεγμένο PCI από τον παίκτη v τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $s_v(t)$.

Αρχικά τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο σταθμός βάσης $v \in V$, επιλέγει ισοπίθανα ένα PCI από το K, έστω $s_v(0)$. Μετά ο v ανακοινώνει στους γείτονες του $u \in N_G(v)$ την επιλογή του, μέσω του μηνύματος $[s_v(0)]$, και ταυτόχρονα ακούει τα μηνύματα από τους γείτονες του. Ένα μήνυμα από ένα γείτονα μπορεί να είναι δύο τύπων. Μπορεί να είναι ένα PCI $[s_u(t)]$, η μπορεί να είναι ένα μήνυμα ενός μοναδικού δυαδικού ψηφίου που έχει τεθεί στο [1]. Τα μηνύματα $[s_u(t)]$ είναι από τους γείτονες $u \in N_G(v)$ που δεν έχουν ακόμα αποκτήσει ένα PCI, και το μήνυμα ενός μοναδικού δυαδικού ψηφίου [1] είναι από τους γείτονες $v \in N_G(v)$, που έχουν ήδη αποκτήσει ένα PCI, που είναι ίδιο με αυτό που ανακοινώθηκε από τον v, δηλαδή $s_v(0) = s_u(0)$. Από την σύγκριση με τα γειτονικά μηνύματα ο σταθμός βάσης v μπορεί να υπολογίσει τον αριθμό των συγκρούσεων $c_v(0)$, την χρονική στιγμή $t = 0$ και να επιβεβαιώσει αν η αρχική επιλογή $s_v(0)$ συγκρούεται με τις επιλογές των PCI των γειτόνων του. Αν δεν υπάρχουν συγκρούσεις για τον παίκτη v, δηλαδή $c_v(0) = 0$, ο σταθμός βάσης v αποκτά το $s_v(0)$, και το διατηρεί για όλο τον υπόλοιπο χρόνο, ενώ λέμε πως το v είναι σε κεκτημένη κατάσταση. Αν το αρχικό PCI $s_v(0)$ προκαλεί συγκρούσεις στον $v \in V$, δηλαδή $c_v(0)$, τότε επιλέγει και πάλι τυχαία και ομοιόμορφα από το K και αναμεταδίδει το PCI $s_v(t)$ στους γείτονες του, στέλνοντας το μήνυμα $[s_v(t)]$, και ταυτόχρονα ακούει τα μηνύματα των γειτόνων του, ώστε να επιβεβαιώσει συγκρούσεις για το

$s_v(t)$ υπολογίζοντας το $c_v(t)$. Ο σταθμός βάσης v επαναλαμβάνει αυτή τη διαδικασία μέχρι τη χρονική στιγμή t_v που όλα τα μηνύματα που έχει λάβει από τους γείτονες του επιβεβαιώνουν πως δεν υπάρχει σύγκρουση με το $s_v(t_v)$ και τότε ο v πηγαίνει σε κεκτημένη κατάσταση με το $s_v(t_v)$. Εφόσον φτάσει σε αυτή την κατάσταση ο v συνεχίζει να ακούει και να στέλνει ένα μήνυμα ενός δυαδικού ψηφίου [1] στους γείτονες $N'_G(v) \subseteq N_G(v)$, που είναι αυτοί που δεν έχουν αποκτήσει κάποιο PCI, και βρίσκονται σε σύκρουση με το $s_v(t_v)$.

Στην ουσία η παραπάνω διαδικασία είναι άλλος ένας κατανεμημένος πιθανοτικός αλγόριθμος για το πρόβλημα του $(\Delta+1)$-χρωματίσιμου γραφήματος, όπως αυτός που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 4. Σε αντίθεση με τον αλγόριθμο του Κεφαλαίου 4, ο αλγόριθμος αυτός απαιτεί επικοινωνία μεταξύ των παικτών, αλλά δεν χρειάζεται να διατειρεί μία λίστα των επιλογών των γειτόνων του. Επίσης όσον αφορά τον αριθμό των χρωμάτων που χρησιμοποεί αποτελεί βελτίωση σε σχέση με τους αλγόριθμους των [CGJ08, BS11], οι οποίοι είναι κι αυτοί αμιγώς παιγνιοθεωρητικοί, και δεν απαιτούν επικοινωνία μεταξύ των παικτών, αλλά υπάρχουν στιγμιότυπα για τα οποία απαιτούν $\Delta+2$ χρώματα για να πετύχουν ένα κατάλληλο χρωματισμό.

Αλγόριθμος 5.1 Ταυτόχρονος σύγχρονος αλγόριθμος ενημέρωσης

```
initialize
t ← 0                                         ▷ θέσε τον μετρητή χρόνου στο μηδέν
p_v(0,i) ~ U_v(K), v ∈ V                      ▷ αρχικές ομοιόμορφες κατανομές
s_v(0) ← p_v(0,i)                             ▷ πάρε δείγμα της τυχαίας μεταβλητής
send [s_v(0)] to all u ∈ N_G(v)
receive [s_u(0)] from u ∈ N_G(v)
compute c_v(0)                                ▷ αριθμός των συγκρούσεων
t ← t + 1                                     ▷ αύξησε το t κατά 1
while c_v(t − 1) ≠ 0 do                       ▷ σταμάτα όταν οι συγκρούσεις είναι μηδενικές
    s_v(t) ← p_v(t,i)                         ▷ πάρε δείγμα της τυχαίας μεταβλητής
    send [s_v(t)] to all u ∈ N_G(v)
    receive [s_u(t)] from u ∈ N_G(v)
    compute c_v(t)                            ▷ αριθμός των συγκρούσεων
    t ← t + 1
end while
p_v(t,i) ~ δ(s_v(t − 1))                      ▷ όρισε κατανομή με P[s_v(t − 1)] = 1
                         ▷ σε αυτή τη φάση το v ∈ V βρίσκεται σε κεκτημένη κατάσταση
                                              ▷ συνέχισε να ακούς
while true do
    receive [s_u(t)] from u ∈ N_G(v)
    compute c_v(t)                            ▷ αριθμός των συγκρούσεων
    if c_v(t) > 0 then
        send [1] to v ∈ N'_G(v,t)             ▷ μόνο σε γείτονες σύγκρουσης
    end if
    t ← t + 1
end while
```

Λήμμα 5.5. *Για $k > \Delta$, ο Αλγόριθμος 5.1 συγκλίνει σε μία κατάσταση μηδενικών συγκρούσεων σε πεπερασμένο χρόνο με πιθανότητα 1.*

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στο πρώτο λήμμα των Borel-Cantelli. Αρκεί να αποδειχτεί ότι $\sum_{t\in\mathbb{N}_0} \mathbb{P}(C(t)) < \infty$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ένας σταθμός βάσης $v \in V$, που δεν έχει αποκτήσει ένα PCI ακόμα. Θεωρούμε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t \geq 0$, $d' \leq deg(v)$ από τους $deg(v)$ γείτονες του v έχουν αποκτήσει ένα PCI. Τότε, η πιθανότητα ο v να αποκτήσει ένα PCI στον επόμενο γύρο δίνεται από την πιθανότητα να επιλέξει ένα από τα χρώματα που δεν έχει αποκτήσει κάποιος γείτονας του, και που δεν θα το επιλέξει και κάποιος από τους γείτονες του που δεν έχουν αποκτήσει ακόμα χρώμα. Είναι δηλαδή ίση με

$$\frac{k-d'}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{deg(v)-d'}.$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\frac{k-d'}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{deg(v)-d'} &\geq \frac{k-\Delta}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{deg(v)} \\
&\geq \frac{1}{\Delta+1}\left(1-\frac{1}{\Delta+1}\right)^{deg(v)} \\
&\geq \frac{1}{\Delta+1}\left(1-\frac{1}{\Delta+1}\right)^{\Delta+1}.
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω ανισότητες προκύπτουν από υπόθεση, καθώς γνωρίζουμε ότι $k \geq \Delta+1$, $0 \leq d' \leq \Delta$ και $deg(v) \leq \Delta(G)$. Επίσης η ακολουθία $\{\frac{n-\Delta}{n}\}_{n\geq\Delta+1}$ είναι μη φθίνουσα, οπότε έχουμε ότι $\frac{k-\Delta}{k} \geq \frac{1}{\Delta+1}$. Μη φθίνουσα είναι και η ακολουθία $\{(1-\frac{1}{n})^n\}_{n\geq 2}$, και ισχύει ότι $\Delta \geq 1 \Rightarrow \Delta+1 \geq 2$. Αυτό σημαίνει ότι $\left(1-\frac{1}{\Delta+1}\right)^{\Delta+1} \geq \frac{1}{4}$. Οπότε

$$\begin{aligned}
\frac{k-d'}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{deg(v)-d'} &\geq \frac{1}{\Delta+1}\cdot\frac{1}{4} \\
&\geq \frac{1}{8\Delta},
\end{aligned}$$

καθώς για $\Delta \geq 1$, $4\Delta+4 \leq 8\Delta$.

Έστω ότι $U(t)$ δηλώνει τους κόμβους που δεν έχουν αποκτήσει PCI στην αρχή του γύρου t. Από τα παραπάνω κατ΄ αναμενόμενη τιμή, τουλάχιστον $\frac{1}{8\Delta}U(t)$ κόμβοι αποκτούν ένα PCI κατά τη διάρκεια του γύρου t. Για την αναμενόμενη τιμή των κόμβων που δεν έχουν αποκτήσει PCI στην αρχή του γύρου t μπορούμε να διατυπώσουμε την παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$\mathbb{E}\left(U(t)\right) \leq \mathbb{E}\left(U(t-1)\right)\left(1-\frac{1}{8\Delta}\right),$$

και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία αναδρομικά προς τα πίσω, μέχρι $t=0$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(U(t)\right) &\leq \mathbb{E}\left(U(0)\right)\left(1-\frac{1}{8\Delta}\right)^t \\
&= n\left(1-\frac{1}{8\Delta}\right)^t
\end{aligned}$$

Έτσι από την ανισότητα Markov

$$\mathbb{P}\left(U(t) \geq 1\right) \leq \mathbb{E}\left(U(t)\right) \leq n\left(1-\frac{1}{8\Delta}\right)^t.$$

Για να υπάρχει σύγκρουση τη χρονική στιγμή $t > 0$, πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος που δεν έχει αποκτήσει PCI τη χρονική στιγμή $t-1 \geq 0$. Επομένως $\mathbb{P}\left(C(t) > 0\right) \leq \mathbb{P}\left(U(t) \geq 1\right)$ και

$$\begin{aligned}
\sum_{t\in\mathbb{N}_0} \mathbb{P}\left(C(t)\right) &\leq 1 + \sum_{t\in\mathbf{N}^+} \mathbb{P}\left(U(t-1) \geq 1\right) \\
&\leq 1 + \sum_{t\in\mathbb{N}_+} n\left(1 - \frac{1}{8\Delta}\right)^{t-1} \\
&\leq 1 + 8n\Delta.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το πρώτο λήμμα των Borel-Cantelli (δες [Wil91]), εφόσον $\sum_{t\in\mathbb{N}_0} \mathbb{P}(C(t) > 0) < \infty$, οι συγκρούσεις παύουν μετά από πεπερασμένο χρόνο με πιθανότητα 1. Από το Λήμμα 5.4, η μη ύπαρξη συγκρούσεων ισοδυναμεί με την απόκτηση ενός PCI για κάθε σταθμό βάσης. Επίσης

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U(t) = 0) &\geq 1 - n\left(1 - \frac{1}{8\Delta}\right)^{t} \\
&\geq 1 - ne^{\frac{-t}{8\Delta}}
\end{aligned}$$

Θέτοντας $t = 8(\delta+1)\Delta \log n$ για κάποια σταθερά $\delta \geq 0$, $\mathbb{P}\left(U(t) \geq 0\right) \geq 1 - \frac{1}{n^\delta}$. Έτσι σε $O(\Delta \log n)$ γύρους, ο Αλγόριθμος 5.1 συγκλίνει με πιθανότητα $1 - \frac{1}{n^\delta}$. □

Παρατήρηση 5.1 (Ευρωστία του Αλγορίθμου 5.1)**.** Η αφαίρεση μιας ακμής ή ενός κόμβου δεν επηρεάζει το Λήμμα 5.4. Θεωρούμε την προσθήκη μιας ακμής στο γράφημα G, η οποιά σχηματίζει το G', έτσι ώστε ακόμα να ισχύει $k > \Delta(G')$. Η προσθήκη μιας ακμής στον κόμβο $v \in V$, δεν τον επηρεάζει, αν ο v είναι σε κεκτημένη κατάσταση. Αν ο v δεν έχει αποκτήσει ακόμα κάποιο PCI, το Λήμμα 5.5 ισχύει ακόμα, και ο κόμβος v τελικά φτάνει σε κεκτημένη κατάσταση. Επομένως ο Αλγόριθμος 5.1 είναι εύρωστος στην προσθήκη ή την αφαίρεση σταθμών βάσης ή γειτονικών σχέσεων (ακμών). Για να αποδείξουμε την μη ευρωστία του Αλγορίθμου 5.1 όταν $k < \Delta + 1$, θεωρούμε έναν γράφο αστέρι, που ο κεντρικός κόμβος έχει d' γείτονες, δηλαδή $\Delta = d'$. Αν αρχικά ο κεντρικός κόμβος χαθεί και ο Αλγόριθμος 5.1 έχει $k < \Delta + 1$, υπάρχει μια μη μηδενική πιθανότητα όλα τα χρώματα να χρησιμοποιηθούν από τους εξωτερικούς κόμβους. Όταν ο κεντρικός κόμβος επανέλθει, σε κάποιους από τους κόμβους θα πρέπει να ανατεθεί PCI ξανά.

Κεφάλαιο 6

Παίγνιο Ελαττωματικού Χρωματισμού

Μέχρι στιγμής έχουμε ασχοληθεί αποκλειστικά με το πρόβλημα του κατάλληλου χρωματισμού ενός γραφήματος. Όπως ειπώθηκε και παραπάνω η εύρεση του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος G είναι **NP**-πλήρες πρόβλημα. Παρόλα στη βιβλιογραφία υπάρχουν πάρα πολλοί αλγόριθμοι, οι οποίοι κάτω από κάποιες προϋποθέσεις που αφορούν την διαθεσιμότητα των χρωμάτων, καταφέρνουν πάντα να χρωματίσουν κατάλληλα ένα γράφημα G. Κάποιους από αυτούς τους μελετήσαμε παραπάνω. Στ' αλήθεια, όταν ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον χρωματικό αριθμό $\chi(G)$, πάντα υπάρχει ένας κατάλληλος χρωματισμός για το γράφημα. Όμως η εύρεση ενός χρωματισμού που χρησιμοποιεί τόσα χρώματα όσα και ο χρωματικός αριθμός είναι δισεπίλυτο πρόβλημα, γιατί αν υπήρχε αλγόριθμος που υπολογίζει ένα $\chi(G)$-χρωματισμό για το G, τότε θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και το $\chi(G)$. Είναι γνωστό πως όταν τα διαθέσιμα χρώματα είναι τουλάχιστον $\Delta(G) + 1$, ένας κατάλληλος χρωματισμός μπορεί να βρεθεί για το G σε γραμμικό χρόνο, μέσω ενός κεντρικού αλγορίθμου. Υπό αυτή την προϋπόθεση για τον αριθμό των διαθέσιμων χρωμάτων, υπάρχει και πληθώρα κατανεμημένων αλγορίθμων που χρωματίζει ένα γράφημα κατάλληλα, όπως είδαμε και παραπάνω.

Ιδιαίτερη σημασία φαίνεται να εμφανίζει και το πρόβλημα του ελαττωματικού χρωματισμού ενός γραφήματος G, δηλαδή ενός χρωματισμού κατά τον οποίο υπάρχουν μονοχρωματικές ακμές, δηλαδή υπάρχουν συγκρούσεις μεταξύ των κόμβων του G. Σε αυτό το κεφάλαιο δεν μελετάμε το πρόβλημα του ελαττωματικού χρωματισμού γραφημάτων, αλλά μια παραλλαγή του που συναντήσαμε και παραπάνω, το πρόβλημα της ανάθεσης ελαχίστων συγκρούσεων. Στο πρόβλημα ελαχίστων συγκρούσεων ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων θεωρείται δεδομένος, και σκοπός είναι η εύρεση ενός χρωματισμού με τις λιγότερες δυνατές συγκρούσεις, δηλαδή με τους λιγότερους γειτονικούς κόμβους που έχουν λάβει το ίδιο χρώμα. Όπως αποδείξαμε παραπάνω και αυτό το πρόβλημα είναι **NP**-πλήρες. Στην ειδική περίπτωση που ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων είναι τουλάχιστον $\Delta(G) + 1$, ο Αλγόριθμος 5.1 υπολογίζει ένα χρωματισμό μηδενικών συγκρούσεων σε (το πολύ) πολυωνυμικό χρόνο. Το ίδιο πετυχαίνουν και όλοι οι υπόλοιποι αλγόριθμοι που μελετήσαμε παραπάνω για το πρόβλημα του $(\Delta + 1)$-χρωματίσιμου γραφήματος. Η περίπτωση που ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων είναι ίσος ή μικρότερος από τον μέγιστο βαθμό του G δεν έχει μελετηθεί τόσο πολύ. Δανειζόμενοι ιδέες από το [CGJ08], και έχοντας υπόψιν τις ανάγκες για μη κεντρική ανάθεση στα διάφορα πρακτικά προβλήματα που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 4 και στο Κεφάλαιο 5, σε αυτό το κεφάλαιο προτείνουμε ένα κατανεμημένο πιθανοτικό αλγόριθμο που συγκλίνει σε λογαριθμικό αριθμό γύρων σε μία ανάθεση χρωμάτων στο G, κατά την οποία κάθε κόμβος έχει το πολύ ένα δεδομένο αριθμό συγκρούσεων.

6.1 Βασικοί ορισμοί και Διατύπωση του Προβλήματος

Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ με μέγιστο βαθμό $\Delta(G) := \Delta$. Ένας k-χρωματισμός του G είναι μια συνάρτηση $\phi : V \to [k]$. Δεδομένου ενός k-χρωματισμού ϕ ενός γραφήματος $G = (V, E)$, και ενός υποσυνόλου $V' \subset V$, συμβολίζουμε με $\phi(V') := \bigcup_{v \in V'} \phi(v)$ το σύνολο των χρωμάτων των κόμβων στο V'. Επίσης, ο αριθμός σύγκρουσης του ϕ ορίζεται ως

$$C_G(\phi) = |e = (u, v) \in E \mid \phi(u) = \phi(v)|,$$

και ο αριθμός συγκρούσεων ενός κόμβου $v \in V$, στα πλαίσια ενός k-χρωματισμού ϕ του G ορίζεται ως

$$C_G(v; \phi) = |u \in N_G(v) \mid \phi(u) = \phi(v)|.$$

Με άλλα λόγια, το $C_G(\phi)$ ισούται με την πληθικότητα των μονοχρωματικών ακμών στα πλαίσια ενός χρωματισμού ϕ, και το $C_G(v; \phi)$ είναι ο αριθμός των γειτόνων του v που λαμβάνουν το ίδιο χρώμα με τον v.

Ένας k-χρωματισμός ϕ λέγεται s-συγκρουόμενος αν $C_G(\phi) \le s$. Επίσης ένας k-χρωματισμός λέγεται d-ελαττωματικός αν $C_G(v; \phi) \le d$ ισχύει για όλα τα $v \in V$. Ένας 0-συγκρουόμενος χρωματισμός είναι αυτό που ονομάζουμε κατάλληλος χρωματισμός. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που καλούμαστε να λύσουμε είναι το εξής.

Πρόβλημα 6.1 (Πρόβλημα Ανάθεσης Ελαχίστων Συγκρούσεων)**.** *Δεδομένου ενός γραφήματος $G = (V, E)$ και ενός θετικού αριθμού k, προσδιόρισε το*

$$C_G(k) := \min_{\phi} C_G(\phi),$$

που το ελάχιστο είναι από όλους τους k-χρωματισμούς του G.

Σε αυτό το κεφάλαιο καταπιανόμαστε με το Πρόβλημα 6.1, για περιπτώσεις που ισχύει ότι $k \le \Delta$. Μια προσέγγιση σε αυτό το πρόβλημα είναι να υπάρχει η δυνατότητα, κάποιοι παίκτες να μην χρωματιστούν, και έτσι να προκύψει ένας μη πλήρης 0-συγκρουόμενος χρωματισμός (δες [WHS22]). Μια άλλη προσέγγιση βασίζεται στα παίγνια διασκορπισμού (δες [AR02] και [GPS02]), η οποία όμως έχει εφαρμογή μόνο στην περίπτωση που το αντίστοιχο γράφημα είναι πλήρες. Η προσέγγιση μας βασίζεται στους ελαττωματικούς χρωματισμούς (δες [Arc+15]) και σε ιδέες που προέρχονται από το [CGJ08]. Όπως ειπώθηκε και παραπάνω, στο [CGJ08] οι παίκτες ακολουθούν την άπληστη στρατηγική (δες Ορισμό 4.1) για το παίγνιο χρωματισμού δικτύου, η δυναμική του παιγνίου καταλήγει σε μία ισορροπία Nash, η οποία δίνει έναν 0-συγκρουόμενο k-χρωματισμό του G, δεδομένου ότι $k \ge \Delta + 2$. Ακολουθούμε μια παρόμοια προσέγγιση. Εισάγουμε το παίγνιο ελαττωματικού χρωματισμού και μελετάμε τη δυναμική του όταν μια συγκεκριμένη, άπληστη, πιθανοτική στρατηγική υιοθετείται από τους παίκτες. Αποδεικνύουμε ότι η δυναμική του παιγνίου στα πλαίσια της άπληστης στρατηγικής συγκλίνει σε μια ισορροπία Nash που παράγει έναν ελαττωματικό χρωματισμό για το αντίστοιχο γράφημα, ο οποίος, με τη σειρά του, παρέχει ένα άνω φράγμα για τον αριθμό των συγκρούσεων.

6.2 Παίγνιο Ελαττωματικού Χρωματισμού και Κύριο Αποτέλεσμα

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε το παίγνιο ελαττωματικού χρωματισμού, το οποίο μπορεί να δει κανείς σαν παραλλαγή του παιγνίου χρωματισμού δικτύου. Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ με $n = |V|$ κόμβους και μέγιστο βαθμό Δ, όπως επίσης και δύο ακέραιοι k, d τέτοιοι ώστε $k \in \{2, \dots, \Delta\}$ και $d \in [\Delta - 1]$. Το παίγνιο ελαττωματικού χρωματισμού σε ένα γράφο G, το οποίο συμβολίζεται με $DCG(G; k, d)$ ορίζεται ως εξής.

Οι παίκτες του $DCG(G; k, d)$ είναι οι κόμβοι του G, και συμμετέχουν σε ένα παίγνιο που παίζεται σε έναν αριθμό γύρων. Σε κάθε γύρο όλοι οι παίκτες ταυτόχρονα και ατομικά επιλέγουν ένα χρώμα από το σύνολο των διαθέσιμων χρωμάτων τους, που θεωρείται πως είναι το σύνολο $[k]$. Έτσι μετά τον γύρο t, οι επιλογές των παικτών παράγουν έναν k-χρωματισμό του G, ο οποίος συμβολίζεται με ϕ_t. Οι παίκτες του $DCG(G; k, d)$ έχουν μόνο τοπικές πληροφορίες για το γράφημα. Μπορούν μόνο να παρατηρήσουν τα χρώματα που επιλέγονται από τους γείτονες τους, και δεν επιτρέπεται να επικοινωνήσουν ή να συνεργαστούν ο ένας με τον άλλον. Λέμε πως ένας παίκτης $v \in V$ είναι χαρούμενος μετά τον γύρο t, αν ο αριθμός σύγκρουσης του στα πλαίσια του ϕ_t είναι το πολύ d, δηλαδή $C_G(v; \phi_t) \leq d$. Διαφορετικά ο παίκτης δεν είναι χαρούμενος. Η ωφέλεια ενός παίκτη στο $DCG(G; k, d)$ είναι 1 όταν είναι χαρούμενος, ενώ 0 όταν δεν είναι, και μια ανάθεση χρωμάτων κατά την οποία κάθε παίκτης αποκτάει ωφέλεια ίση με 1, είναι μία ισορροπία Nash του $DCG(G; k, d)$, υπό την έννοια ότι κανένας παίκτης δεν έχει το κίνητρο μονομερώς να αλλάξει να αλλάξει στρατηγική, στα πλαίσια μιας τέτοιας ανάθεσης. Παρατηρούμε ότι σε μια ισορροπία Nash του $DCG(G; k, d)$, ο αντίστοιχος k-χρωματισμός είναι d-ελαττωματικός.

Ορίζουμε και πάλι μια συμμετρική στρατηγική, δηλαδή μια στρατηγική που είναι ίδια για όλους τους παίκτες του $DCG(G; k, d)$, και δείχνουμε ότι πετυχαίνει σε ισορροπία Nash μετά από πεπερασμένο αριθμό γύρων. Για να ορίσουμε τυπικά αυτή τη στρατηγική πρέπει να εισάγουμε κάποια σύμβολα. Έστω $\phi_t(v)$, το χρώμα που επιλέγεται από τον $v \in V$ μετά τον γύρο t, και $\phi_t(N_G(v))$ το σύνολο των χρωμάτων που επιλέγονται από τους γείτονες του v μετά τον γύρο t.

Ορισμός 6.1 (DCG-Άπληστη Στρατηγική)**.** Υποθέτουμε ότι $k = \Delta - s$ και $d = s + 2$, για κάποιο δεδομένο $s \in \{0, 1, \dots, \Delta - 3\}$. Υποθέτουμε επίσης πως κάθε παίκτης στο $DCG(G; k, d)$ υιοθετεί την ακόλουθη στρατηγική. Αν ένας παίκτης, έστω v, είναι χαρούμενος μετά από ένα δεδομένο γύρο, έστω t, τότε επιμένει στην επιλογή του σε όλους τους γύρους που ακολουθούν, δηλαδή $\phi_s(v) = \phi_t(v)$, για όλα τα $s > t$. Αν δεν είναι χαρούμενος, τότε αλλάζει το χρώμα του, και επιλέγει ομοιόμορφα και τυχαία ένα χρώμα από το σύνολο $[k] \setminus \phi_t(N_G(v))$.

Με άλλα λόγια, στα πλαίσια της DCG-άπληστης στρατηγικής, ένας παίκτης που δεν είναι χαρούμενος μετά από ένα δεδομένο γύρο, έστω t, επιλέγει στον επόμενο γύρο ένα χρώμα ομοιόμορφα και τυχαία από το σύνολο που περιέχει τα χρώματα που δεν επιλέχθηκαν από τους γείτονες του μετά τον γύρο t.

Ο αντίστοιχος αλγόριθμος δίνεται από τον Αλγόριθμο 6.1, και κάθε παίκτης $v \in V$ τρέχει ένα στιγμιότυπο του.

Παρατήρηση 6.1. Όταν οι παίκτες του $DCG(G; k, d)$, με $k = \Delta - s$ και $d = s + 2$, υιοθετούν την DCG-άπληστη στρατηγική, ένας παίκτης που είναι χαρούμενος μετά από ένα δεδομένο γύρο, παραμένει χαρούμενος για όλους τους γύρους που ακολουθούν. Επίσης, αν ένας παίκτης v δεν είναι χαρούμενος μετά τον γύρο t, τότε ισχύει ότι $|[k] \setminus \phi_t(N_G(v))| \geq 2$. Συγκεκριμένα, ένας μη χαρούμενος παίκτης έχει πάντα από τουλάχιστον δύο διαθέσιμα χρώματα να διαλέξει στον επόμενο γύρο.

Αλγόριθμος 6.1 Αλγόριθμος *DCG*-Άπληστης Στρατηγικής

```
Assume that s ∈ {0, 1, ..., Δ − 3} and that is the same for all the nodes v ∈ V
d ← s + 2
k ← Δ − s
Choose c_1(v) randomly from the set A_0(v) := [k]
t ← 1
while C_G(v; φ_t) ≥ d + 1 do
    A_t(v) ← [k] \ φ_t(N_G(v))
    t ← t + 1
    Choose a color c_t(v) uniformly at random from the set A_{t−1}(v)
end while
Return c_t(v)
```

Τώρα υποθέτουμε ότι όλοι οι παίκτες στο $DCG(G; k, d)$ υιοθετούν την DCG-άπληστη στρατηγική. Για κάθε $v \in V$, έστω τ_v ο πρώτος γύρος μετά από τον οποίο ο παίκτης v είναι χαρούμενος. Σημειώνουμε πως η τ_v είναι μια τυχαία μεταβλητή και πως $\tau = \max_v \tau_v$ είναι ο πρώτος γύρος μετά από τον οποίο όλοι οι παίκτες το παίγνιο φτάνει σε μία ισορροπία Nash. Θα αποδείξουμε ότι η αναμενόμενη τιμή του τ είναι λογαριθμικής τάξης. Θυμίζουμε ότι για δύο μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές X, Y, λέμε πως η τυχαία μεταβλητή X είναι στοχαστικά μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y, $X \leq_{st} Y$, όταν ισχύει $\mathbb{P}(X > t) \leq \mathbb{P}(Y > t)$, για όλα τα t. Συγκεκριμένα, το $X \leq_{st} Y$ υπονοεί ότι $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Θεώρημα 6.1. *Έστω G ένα γράφημα με n κόμβους και μέγιστο βαθμό $\Delta \geq 3$. Έστω k, d κάποιοι σταθεροί θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $k = \Delta - s$ και $d = s + 2$, για κάποιο $s \in \{0, 1, \ldots, \Delta - 3\}$. Υποθέτουμε ότι όλοι οι παίκτες στο $DCG(G; k, d)$ υιοθετούν την DCG-άπληστη στρατηγική. Έστω τ ο πρώτος γύρος μετά από τον οποίο όλοι οι παίκτες είναι χαρούμενοι. Τότε, για οποιαδήποτε αρχική ανάθεση χρωμάτων στους κόμβους ισχύει ότι το τ είναι στοχαστικά μικρότερο από μία τυχαία μεταβλητή T έτσι ώστε*

$$\mathbb{E}(T) \leq \frac{2}{\mu}(1 + \log(n)) \quad \text{και} \quad Var(T) \leq \frac{4n}{\mu^2},$$

που $\mu = -\log\left(1 - \frac{1-1/4^{d-1}}{1-1/5^{d-1}}\right)$.

Με άλλα λόγια, όταν το s δεν εξαρτάται από το n, και οι παίκτες στο παίνιο ελαττωματικού χρωματισμού υιοθετούν την άπληστη στρατηγική, το παίγνιο φτάνει σε ένα d-ελαττωματικό k-χρωματισμό του γραφήματος σε $O(\log(n))$ αναμενόμενο αριθμό γύρων. Τώρα, ο αριθμός των μονοχρωματικών ακμών σε ένα τέτοιο χρωματισμό παρέχει ένα άνω όριο για το $C_G(k)$, στο Πρόβλημα 6.1. Συγκεκριμένα το Θεώρημα 6.1 παράγει το ακόλουθο.

Πόρισμα 6.1. *Έστω G ένα γράφημα με $n = |V|$ κόμβους και μέγιστο βαθμό $\Delta \geq 3$. Υποθέτουμε ότι $k = \Delta - s$, για κάποιο $s \in \{0, 1, \ldots, \Delta - 3\}$. Τότε ισχύει ότι $C_G(k) \leq \frac{n(s+2)}{2}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το παίγνιο ελαττωματικού χρωματισμού $DCG(G; k, d)$, που $d = s + 2$. Από το Θεώρημα 6.1 γνωρίζουμε ότι όταν οι παίκτες στο $DCG(G; k, d)$ υιοθετούν την DCG-άπληστη στρατηγική, το παίγνιο φτάνει σε μια ισορροπία Nash σε $O(\log(n))$ αναμενόμενο αριθμό γύρων. Έστω ϕ ο k-χρωματισμός που αντιστοιχεί σε μια ισορροπία Nash. Σε ένα τέτοιο σημείο ισορροπίας, όλοι οι κόμβοι είναι χαρούμενοι και ο αριθμός σύγκρουσης κάθε κόμβου $v \in v$ είναι το πολύ d. Έστω G_ϕ το γράφημα που επάγεται από τις μονοχρωματικές ακμές του G στα πλαίσια του ϕ. Τότε το $C_G(\phi)$ ισούται με τον αριθμό των ακμών στο G_ϕ, και το αποτέλεσμα προκύπτει από τη φόρμουλα αθροίσματος βαθμών (δες Πρόταση 2.1) στο G_ϕ. □

6.3 Απόδειξη Του Θεωρήματος 6.1

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε το Θεώρημα 6.1. Καθορίζουμε μια αρχική ανάθεση χρωμάτων στους κόμβους, και υποθέτουμε ότι κάθε παίκτης στο $DCG(G; k, d)$ υιοθετεί την DCG-απληστη στρατηγική. Θυμίζουμε ότι έχουμε υποθέσει ότι $k = \Delta - s$ και $d = s + 2$, για κάποιο $s \in \{0, 1, \ldots, \Delta - 3\}$. Ξεκινάμε με τον υπολογισμό ενός κάτω φράγματος για την πιθανότητα πως ένας παίκτης, που δεν είναι χαρούμενος μετά τον γύρο t, διαθέτει αρκετά χρώματα στον επόμενο γύρο. Θα χρειαστεί να εισάγουμε κάποια ακόμα σύμβολα.

Θυμίζουμε ότι $\phi_t(v)$ είναι το χρώμα που έχει επιλέξει ο κόμβος v μετά τον γύρο t, και $\phi_t(N_G(v))$ το σύνολο των χρωμάτων που έχουν επιλέξει οι γείτονες του v μετά τον γύρο t. Για κάθε $t \geq 1$, έστω H_t το σύνολο των χαρούμενων παικτών μετά τον γύρο t, και έστω $U_t = V \setminus H_t$ το σύνολο των παικτών που δεν είναι χαρούμενοι μετά τον γύρο t. Έτσι αν $v \in H_t$, αυτό σημαίνει ότι $C_G(v; \phi_t) \geq d + 1$. Δεδομένου ότι $v \in U_t$, έστω $A_t(v) = [k] \setminus \phi_t(v)$ το σύνολο των διαθέσιμων χρωμάτων του v μετά τον γύρο t. Έτσι, κατά την DCG-άπληστη στρατηγική, ο παίκτης v στον επόμενο γύρο ένα χρώμα ομοιόμορφο και τυχαία από το σύνολο $A_t(v)$. Έστω $p_t(v) = \frac{1}{|A_t(v)|}$ η πιθανότητα με την οποία ο παίκτης v, που δεν είναι χαρούμενος, επιλέγει ένα χρώμα στον επόμενο γύρο. Για $v \in H_t$, θέτουμε $A_t(v) = \{\phi_t(v)\}$ και $p_t(v) = 1$. Παρομοίως, για ένα παίκτη $v \in V$, έστω $H_t(v) = H_t \cap N_G(v)$ το σύνολο των χαρούμενων γειτόνων του v μετά τον γύρο t, και έστω $F_t(v) = \phi_t(H_t(v))$ το σύνολο των χρωμάτων που έχουν επιλεχθεί από τους χαρούμενους γείτονες του v μετά τον γύρο t. Έστω επίσης, $U_t(v) = N_G(v) \setminus H_t(v)$ το σύνολο των γειτόνων του v που δεν είναι χαρούμενοι μετά τον γύρο t. Κάθε χρώμα στο σύνολο $[k] \setminus F_t(v)$ έχει μη μηδενική πιθανότητα να μην επιλεχθεί από κανένα γείτονα του v που δεν είναι χαρούμενος, άρα έχει μια μη μηδενική πιθανότητα να ανήκει στο σύνολο $A_{t+1}(v)$. Τέλος, έστω $f_t(v) = |F_t(v)|$. Παρατηρούμε ότι, εφόσον οι χαρούμενοι παίκτες δεν αλλάζουν το χρώμα τους, η ακολουθία $\{f_t(v)\}_{t \geq 1}$ είναι μη φθίνουσα. Ειδικότερα, από αυτό συμπαιρένουμε ότι ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων του v μετά τον γύρο $t+1$ όπως επίσης και μετά τον γύρο $t+2$ είναι λιγότερος ή ίσος με $k - f_t(v)$. Στο λήμμα που ακολουθεί υπολογίζουμε ένα κάτω φράγμα για την πιθανότητα πως ο διαθέσιμος αριθμός χρωμάτων στον παίκτη $v \in U_t$, μετά τον γύρο $t+1$ είναι τουλάχιστον $\frac{k - f_t(v)}{5^{d-1}}$.

Λήμμα 6.1. *Για κάθε* $t \geq 1$ *και κάθε* $v \in U_t$, *ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(|A_{t+1}(v)| \geq \frac{k - f_t(v)}{5^{d-1}}\right) \geq 1 - \frac{1 - 1/4^{d-1}}{1 - 1/5^{d-1}}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα παίκτη $v \in U_t$ και, για περισσότερη απλότητα στη χρήση των συμβόλων, θέτουμε $f := f_t(v)$. Εφόσον ο v δεν είναι χαρούμενος, υπάρχουν τουλάχιστον $d+1$ κόμβοι $u \in N_G(v)$ τέτοιοι ώστε $\phi_t(u) = \phi_t(v)$. Προχωράμε στην εκτίμηση του κάτω φράγματος για το $\mathbb{E}(|A_{t+1}(v)|)$ και ολοκληρώνουμε την απόδειξη εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οποιοδήποτε χρώμα από το σύνολο $[k] \setminus F_t(v)$ έχει μη μηδενική πιθανότητα να ανήκει στο $A_{t+1}(v)$. Συγκεκριμένα, το χρώμα $i \in [k] \setminus F_t(v)$ ανήκει στο $A_{t+1}(v)$, αν δεν επιλέγεται από κανένα γείτονα $u \in U_t(v)$ για τον οποίο $i \in A_t(u)$. Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα

$$\prod_{\{u \in U_t(v) : i \in A_t(u)\}} (1 - p_t(u)).$$

Επομένως, θέτοντας $E := \mathbb{E}(|A_{t+1}(v)|)$, από την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου συμπαιρένουμε ότι

$$
\begin{aligned}
E &\geq \sum_{i\in[k]\setminus F_t(v)} \prod_{\{u\in U_t(v)|i\in A_t(u)\}} (1-p_t(u)) \\
&\geq (k-f)\cdot\left(\prod_{i\in[k]\setminus F_t(v)} \prod_{\{u\in U_t(v)|i\in A_t(u)\}} (1-p_t(u))\right)^{\frac{1}{k-f}} \\
&\geq (k-f)\cdot\left(\prod_{u\in U_t(v)} \prod_{i\in A_t(u)} (1-p_t(u))\right)^{\frac{1}{k-f}} \\
&= (k-f)\cdot\left(\prod_{u\in U_t(v)} \left(1-\frac{1}{|A_t(u)|}\right)^{|A_t(u)|}\right)^{\frac{1}{k-f}}.
\end{aligned}
$$

Θυμίζουμε ότι $|A_t(u)| \geq 2$, για κάθε $u \in U_t(v)$. Εφόσον η ακολουθία $\{1-1/m\}_{m\geq 2}$ ειναι μη φθίνουσα, ισχύει ότι $\left(1-\frac{1}{|A_t(u)|}\right)^{|A_t(u)|} \geq \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε αποδείξει ότι $\mathbb{E}(|A_{t+1}(v)|) \geq (k-f)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{|U_t(v)|}{k-f}}$.

Τώρα, εφόσον $k = \Delta - d + 2$, ισχύει ότι $U_t(v) \leq \Delta - f = k + d - 2 - f$, και έτσι έχουμε $\frac{|U_t(v)|}{k-f} \leq d-1$. Από αυτό προκύπτει ότι $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{|U_t(v)|}{k-f}} \geq (\frac{1}{4})^{d-1}$, και επομένως ισχύει $\mathbb{E}(|A_{t+1}(v)|) \geq \frac{k-f}{4^{d-1}}$. Για την ολοκλήρωση της απόδειξης, έστω $X = k - f - |A_{t+1}(v)|$ και χρησιμοποιούμε το κάτω φράγμα στο $\mathbb{E}(|A_{t+1}(v)|)$, μαζί με την ανισότητα Markov, για να πάρουμε $\mathbb{P}\left(|A_{t+1}(v)| < \frac{k-f}{5^{d-1}}\right) < \mathbb{P}\left(X > (k-f)\cdot(1-\frac{1}{5^{d-1}})\right) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{(k-f)\cdot(1-\frac{1}{5^{d-1}})} \leq \frac{1-\frac{1}{4^{d-1}}}{1-\frac{1}{5^{d-1}}}$, που είναι το επιθυμητό. □

Το επόμενο λήμμα σχετίζεται με τον υπολογισμό ενός κάτω φράγματος, της πιθανότητας πως ένας παίκτης, που δεν είναι χαρούμενος μετά τον γύρο t, να γίνει χαρούμενος μετά από δύο γύρους.

Λήμμα 6.2. *Ισχύει ότι*

$$
\mathbb{P}\left(v \in H_{t+2} \mid v \in U_t\right) \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{5^{d-1}\cdot(d-1)} \cdot \left(1 - \frac{1-1/4^{d-1}}{1-1/5^{d-1}}\right).
$$

Απόδειξη. Έστω ότι $v \in U_t$. Τότε δεδομένου του $A_{t+1}(v)$ και ότι $v \in U_{t+1}$, η πιθανότητα ο παίκτης v να είναι χαρούμενος μετά τον γύρο $t+2$ είναι ο μέσος όρος των πιθανοτήτων πως ένα συγκεκριμένο χρώμα από το $A_{t+1}(v)$ επιλέγεται από το πολύ d γείτονες του v που δεν είναι χαρούμενοι. Τώρα η πιθανότητα πως ένα συγκεκριμένο χρώμα $i \in A_{t+1}(v)$ επιλέγεται από το πολύ d παίκτες $u \in U_{t+1}(v)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από την πιθανότητα από την πιθανότητα πως το χρώμα i δεν επιλέγεται από κανένα παίκτη από το $U_{t+1}(v)$. Η τελευταία πιθανότητα είναι ίση με

$$
\prod_{\{u\in U_{t+1}(v)|i\in A_{t+1}(u)\}} (1-p_{t+1}(u)).
$$

Επομένως, δεδομένου του $A_{t+1}(v)$ και ότι $v \in U_{t+1}$, η πιθανότητα πως ο παίκτης v είναι χαρούμενος μετά τον γύρο $t+2$ είναι τουλάχιστον

$$\begin{aligned} P &:= \frac{1}{|A_{t+1}(v)|}\sum_{i\in A_{t+1}(v)}\prod_{\{u\in U_{t+1}(v)|i\in A_{t+1}(u)\}}(1-p_{t+1}(u)) \\ &\geq \left(\prod_{i\in A_{t+1}(v)}\prod_{\{u\in U_{t+1}(v)|i\in A_{t+1}(u)\}}(1-p_{t+1}(u))\right)^{\frac{1}{|A_{t+1}(v)|}} \\ &\geq \left(\prod_{u\in U_{t+1}(v)}\prod_{i\in A_{t+1}(u)}(1-p_{t+1}(u))\right)^{\frac{1}{|A_{t+1}(v)|}} \\ &= \left(\prod_{u\in U_{t+1}(v)}\left(1-\frac{1}{|A_{t+1}(u)|}\right)^{|A_{t+1}(u)|}\right)^{\frac{1}{|A_{t+1}(v)|}}, \end{aligned}$$

που η πρώτη ανισότητα προκύπτει και πάλι από την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου. Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 6.1, ισχύει ότι $\left(1-\frac{1}{|A_{t+1}(u)|}\right)^{|A_{t+1}(u)|} \geq \frac{1}{4}$, επομένως $P \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{|U_{t+1}(v)|}{|A_{t+1}(v)|}}$. Τώρα, παρατηρούμε ότι $|U_{t+1}(v)| \leq \Delta - |H_{t+1}(v)| = k+d-2-|H_{t+1}(v)| \leq k+d-2-f_t(v)$, από το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, δεδομένου ότι $|A_{t+1}(v)| \geq \frac{k-f_t(v)}{5^{d-1}}$, ισχύει ότι $\frac{|U_{t+1}(v)|}{|A_{t+1}(v)|} \leq 5^{d-1} \cdot \frac{k+d-2-f_t(v)}{k-f_t(v)} \leq 5^{d-1}\cdot(d-1)$. Έτσι δεδομένου ότι $|A_{t+1}(v)| \geq \frac{k-f_t(v)}{5^{d-1}}$, έχουμε ότι $P \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{5^{d-1}\cdot(d-1)}$, και το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει από το Λήμμα 6.1. □

Τώρα προχωράμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1. Δεδομένου ενός $v \in V$, έστω τ_v, ο πρώτος γύρος μετά από τον οποίο ο παίκτης v είναι χαρούμενος, και θέτουμε $\tau = \max_v \tau_v$, να είναι ο πρώτος γύρος μετά από τον οποίο όλοι οι παίκτες είναι χαρούμενοι. Θέλουμε να ορίσουμε ένα κάτω φράγμα για το $\mathbb{E}(\tau)$. Παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές τ_v, $v \in V$, δεν είναι αμοιβαίως αποκλειώμενες και το φράγμα μας στο τ θα είναι μια εκτίμηση χειρότερης περίπτωσης. Για την ολοκλήρωση της απόδειξης ακολουθούμε την προσέγγιση του [PS13] και χρησιμοποιούμε ιδέες από τη θεωρία των μεγιστικά εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών. Για έναν αριθμό $\mu > 0$, έστω X_μ η εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο μ, και έστω $c_d := \left(\frac{1}{4}\right)^{5^{d-1}\cdot(d-1)} \cdot \left(1-\frac{1-1/4^{d-1}}{1-1/5^{d-1}}\right)$, για $d \geq 2$.

Λήμμα 6.3. *Για κάθε $v \in V$, ισχύει $\tau_v \leq_{st} 4 \cdot X_\mu$, που $\mu = -\log(1-c_d)$.*

Απόδειξη. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\mathbb{P}(\tau_v > t) \leq \mathbb{P}(X_\mu > \frac{t}{4})$, για κάθε t. Από το Λήμμα 6.2 γνωρίζουμε ότι $\mathbb{P}(\tau_v > t+2 \mid \tau_v > t) = \mathbb{P}(v \in U_{t+2} \mid v \in U_t) \leq 1-c_d$ ισχύει για κάθε $t \geq 1$. Τώρα, σημειώνουμε πως όταν το t είναι περιττός αριθμός, ας πούμε $t = 2m+1$, ισχύει

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_v > t) &\leq \prod_{i=1}^{m}\mathbb{P}(\tau_v > 2i+1 \mid \tau_v > 2i-1) \\ &\leq (1-c_d)^m \leq (1-c_d)^{t/4} \leq \mathbb{P}(X_\mu > t/4). \end{aligned}$$

που είναι το επιθυμητό. Για t ζυγό, η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Η απόδειξη του κύριου αποτελέσματος έχει σχεδόν ολοκληρωθεί. Για δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, έστω ότι $X \sim Y$ δηλώνει το γεγονός ότι έχουν την ίδια κατανομή.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1. Από το Λήμμα 6.3 γνωρίζουμε ότι, για κάθε κόμβο $v \in V$, ισχύει $\tau_v \leq_{st} Z_v$, που $Z_v \sim 4 \cdot X_\mu$. Τώρα από το γεγονός ότι $\tau_v \leq_{st} Z_v$ συνεπάγεται (δες [SS07, Θεώρημα 1.A.1]) ότι υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές $\hat{\tau}_v$, $\hat{Z}_v$, τέτοιες ώστε $\hat{\tau}_v \sim \tau_v$, $\hat{Z}_v \sim Z_v$ και $\hat{\tau}_v \leq \hat{Z}_v$ με πιθανότητα 1. Έτσι $\max_v \hat{\tau}_v \leq_{st} \max_v \hat{Z}_v$ με πιθανότητα 1. Εφόσον $\tau \sim \max_v \hat{\tau}_v$, προκύπτει ότι $\tau \leq_{st} 4 \cdot M$, που M η μέγιστη τιμή n εκθετικών τυχαίων μεταβλητών, ας πούμε $\{X_\mu^v\}_{v \in V}$, με παράμετρο μ, και ότι $E(\tau) \leq 4 \cdot E(M)$. Αρκεί να ορίσουμε ένα άνω φράγμα στο $\mathbb{E}(M)$. Για την εκτίμηση του άνω φράγματος, δανειζόμαστε ιδέες από το [LR76]. Ισχύει πως για κάθε πραγματικό αριθμό a, $M \leq a + \sum_v \max\{X_v - a, 0\}$. Έτσι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M) &\leq a + \sum_v \mathbb{E}(\max\{X_v - a, 0\}) \\ &= a + n \int_a^\infty (1 - F(x))\, dx, \end{aligned}$$

που $F(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της X_μ^v.Τώρα, θεωρούμε τη συνάρτηση $h(a) = a + n \int_a^\infty (1 - F(x))\, dx$, ορισμένη για πραγματικά a, και παρατηρούμε ότι η $h(\cdot)$ πετυχαίνει το ελάχιστο της στο $a_n := F^{-1}(1 - \frac{1}{n})$. Εφόσον $F(x) = 1 - e^{-\mu x}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E}(M) \leq a_n + n \int_{a_n}^\infty e^{-\mu x}\, dx = \frac{1}{\mu}(1 + \log(n))$$

που είναι και το επιθυμητό. Τέλος, από το κύριο αποτέλεσμα στο [Ryc08] συνεπάγεται ότι $Var\,(M) \leq n \cdot Var\,(E_\mu) = \frac{n}{\mu^2}$. Το αποτέλεσμα έπεται θεωρώντας ότι $T = 4 \cdot M$. □

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας μελετήθηκαν διάφοροι αλγόριθμοι χρωματισμού ενός δικτύου. Δόθηκε έμφαση σε παίγνια χρωματισμού ενός δικτύου, και σε πιθανοτικούς κατανεμημένους αλγορίθμους που πετυχαίνουν, με μεγάλη πιθανότητα, σε (το πολύ) πολυωνυμικό χρόνο μια ισορροπία Nash για το αντίστοιχο παίγνιο. Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα μας:

- Στο Κεφάλαιο 4 μελετάμε ένα παίγνιο χρωματισμού δικτύου που προτάθηκε για πρώτη φορά από τους Kearns et al. Ορίζουμε την ολιγαρκή στρατηγική και αποδεικνύουμε ότι, για ένα γράφημα G με n κόμβους και μέγιστο βαθμό Δ, αν όλοι οι κόμβοι υιοθετούν αυτή την πιθανοτική κατανεμημένη στρατηγική, τότε το γράφημα χρωματίζεται κατάλληλα σε $O(\log n)$ γύρους, με μεγάλη πιθανότητα, δεδομένου ότι ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων σε κάθε παίκτη είναι τουλάχιστον $(\Delta+1)$. Έτσι προκύπτει ένας απλός πιθανοτικός κατανεμημένος αλγόριθμος για το πρόβλημα του $(\Delta+1)$-χρωματισμού. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος διαφοροποιείται από τους ήδη υπάρχοντες αλγορίθμους για το πρόβλημα του $(\Delta+1)$-χρωματισμού, γιατί δεν απαιτεί επικοινωνία ή συνεργασία μεταξύ των κόμβων του δικτύου. Είναι αμιγώς παιγνιοθεωρητικός. Οι κόμβοι συμπεριφέρονται ως παίκτες σε ένα μη συνεργατικό παίγνιο, δεν έχουν κοινό στόχο, αλλά δικά τους κίνητρα, και εκτελούν εγωιστικά βήματα για να τους πετύχουν. Όταν συμβεί αυτό, όλοι οι παίκτες έχουν χρωματιστεί κατάλληλα, και προκύπτει μια ισορροπία Nash για το παίγνιο.

- Στο Κεφάλαιο 6 διερευνούμε το πρόβλημα ανάθεσης μίας πεπερασμένης παλέτας χρωμάτων στους κόμβους ενός δικτύου, ώστε να ελαχιστοποιήσουμε τον αριθμό των γειτονικών κόμβων που λαμβάνουν το ίδιο χρώμα. Προτείνουμε μια παιγνιοθεωρητική μοντελοποίηση η οποία έχει ως αποτέλεσμα έναν πιθανοτικό κατανεμημένο αλγόριθμο που συγκλίνει σε λογαριθμικό αριθμό γύρων σε μία ισορροπία Nash, η οποία με τη σειρά της οδηγεί σε έναν ελαττωματικό χρωματισμό για το υποκείμενο γράφημα.

Τώρα όσον αφορά τη μελλοντική εργασία, αρκετά ερωτήματα παραμένουν προς περαιτέρω διερεύνηση. Ενδεικτικά επισημαίνουμε ότι η διερεύνηση της στεγανότητας του κάτω φράγματος, που παρέχεται από το Πόρισμα 6.1, για τον αριθμό των συγκρούσεων σε μια ισορροπία Nash, είναι υψηλής ερευνητικής και πρακτικής σημασίας. Κάτι που επίσης εμφανίζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και δεν έχει μελετηθεί μέχρι στιγμής αφορά και πάλι το παίγνιο ελαττωματικού χρωματισμού, και είναι η περίπτωση κατά την οποία τα διαθέσιμα χρώματα σε κάθε παίκτη είναι μόνο 2, και κάθε παίκτης μπορεί να έχει το πολύ $\Delta-1$ συγκρούσεις με τους γείτονες του. Θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε έναν πολύ απλό αλγόριθμο, κατά τον οποίο κάθε παίκτης επιλέγει ομοιόμορφα και κατανεμημένα, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ένα από τα δύο διαθέσιμα χρώματα. Στην περίπτωση αυτή, η πιθανότητα μια ακμή να μην είναι μονοχρωματική είναι

$\frac{1}{2}$. Άρα η μέση τιμή των διχρωματικών ακμών είναι $\frac{m}{2}$, και η μέση τιμή του αριθμού των συγκρούσεων πάλι $\frac{m}{2}$. Μένει να διερευνήσουμε αν μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο από αυτό.

Παράρτημα Α΄

Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

Η θεωρία υπολογισμού προσπαθεί να απαντήσει σε ένα από τα θεμελιώδη ερωτήματα της πληροφορικής:

Ποιες είναι οι θεμελιώδεις ικανότητες και οι περιορισμοί ενός υπολογιστή?

Προσπαθεί να απαντήσει δηλαδή, στο τι είναι υπολογίσιμο από μία υπολογιστική μηχανή. Δύο βασικά της εργαλεία είναι η υπολογισιμότητα και η πολυπλοκότητα. Στο συγκεκριμένο παράρτημα θα εισάγουμε το βασικό υπολογιστικό μοντέλο που χρησιμοποείται στην θεωρία υπολογισημότητας και της πολυπλοκότητας, την μηχανή Turing, και θα μελετήσουμε επιγραμματικά κάποιες έννοιες που σχετίζονται με τη θεωρία υπολογισμού, και πως αυτή συνδέεται με την θεωρία της πολυπλοκότητας και τα **NP**-πλήρη προβλήματα.

Α΄.1 Μηχανή Turing

Η *Μηχανή Turing* είναι ένα υπολογιστικό μοντέλο, που προτάθηκε από τον Alan Turing, το 1936 [Tur37]. Είναι ένα υπολογιστικό μοντέλο γενικού σκοπού, και μπορεί να κάνει ότι και ένας πραγματικός υπολογιστής. Χρησιμοποιεί μια άπειρη ταινία που παίζει τον ρόλο της απεριόριστης μνήμης της. Επίσης διαθέτει μια κεφαλή ταινίας που μπορεί να διαβάζει και να γράφει σύμβολα, και να κινείται κατά μήκος της ταινίας, είτε προς τα αριστερά, είτε προς τα δεξιά. Αρχικά η ταινία περιέχει μόνο μια συμβολοσειρά που δείνεται ως είσοδος, και είναι κενή οπουδήποτε αλλού. Αν η μηχανή χρειάζεται να αποθηκεύσει πληροφορίες, μπορεί να γράψει αυτές τις πληροφορίες στην ταινία. Για να διαβάσει τις πληροφορίες που έχει γράψει, η μηχανή μπορεί να μετακίνει την κεφαλή της και να τις ανακτά. Ως υπολογιστικό μοντέλο, η μηχανή Turing, αυτό που επιδιώκει να πετύχει είναι, να λύσει υπολογιστικά προβλήματα, δηλαδή προβλήματα που λύνονται από έναν υπολογιστή, δοσμένα σε μία τυπική γλώσσα. Προσπαθεί να υπολογίσει μια λύση, που ικανοποιεί τους περιουρισμούς του προβλήματος, που ανήκει δηλαδή στην γλώσσα του προβλήματος. Συνεχίζει τους υπολογισμούς της, μέχρι να αποφασίσει να παράγει μία έξοδο. Οι έξοδοι *αποδοχή* και *απόρριψη* μπορούν να αποκτηθούν εισάγοντας καταστάσεις αποδοχής και απόρριψης στη μηχανή. Αν δεν φτάσει σε μία κατάσταση αποδοχής ή απόρριψης , συνεχίζει τους υπολογισμούς αενάως, και δεν σταματάει ποτέ.

Για τη μελέτη της θεωρίας της πολυπλοκότητας θα χρειαστεί να ορίσουμε δύο παραλλαγές της μηχανής Turing, την *Ντετερμινιστική Μηχανή Turing* (NMT), και την *Μη Ντετερμινιστική Μηχανή Turing* (MMT). Μια NMT αποτελείται από ένα σύνολο καταστάσεων Q, ένα αλφάβητο εισόδου Σ και $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}$, ένα αλφάβητο ταινίας. Επίσης υπάρχει μια αρχική κατάσταση $q_0 \in Q$, και δύο τελικές καταστάσεις, q_{accept} και q_{reject}. Ιδιαίτερη σημασία για την NMT έχει η συνάρτηση μετάβασης της $\delta : (Q \setminus \{q_{accept}, q_{reject}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, μέσω της οποίας μεταβαίνει από μία κατάσταση σε μία άλλη. Αν η μηχανή βρίσκεται σε μία δεδομένη κατάσταση q, και η κεφαλή βρίσκεται πάνω από ένα σημείο της ταινίας που περιέχει το σύμβολο a, και αν $\delta(q, a) = (r, b, L)$, η μηχανή πανωγράφει το σύμβολο b, αντικαθιστώντας το a, και πηγαίνει στην κατάσταση r. Η τρίτη συνιστώσα είναι είτε L είτε R και υποδηλώνει αν η κεφαλή μετακινείται προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά αφού γράψει. Στην συγκεκριμένη περίπτωση κάνει μία κίνηση προς τα αριστερά. Ακολουθεί ένας τυπικός ορισμός της NMT.

Ορισμός Α′.1 (Ντετερμινιστική Μηχανή Turing)**.** Μια ντετερμινιστική μηχανή Turing είναι μία πλειάδα 7 συνιστωσών, $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$, που Q, Σ, Γ είναι όλα πεπερασμένα σύνολα, και:

1. Q είναι το σύνολο των καταστάσεων,
2. Σ είναι το αλφάβητο εισόδου και δεν περιέχει το κενό σύμβολο $\sqcup$
3. Γ είναι το αλφάβητο ταινίας, που $\sqcup$ και $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\delta : (Q \setminus \{q_{accept}, q_{reject}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ είναι η συνάρτηση μετάβασης,
5. q_0 είναι η αρχική κατάσταση,
6. $q_{accept} \in Q$ είναι η κατάσταση αποδοχής, και
7. $q_{reject} \in Q$ είναι η κατάσταση απόρριψης, που $q_{accept} \neq q_{reject}$.

Μια NMT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ υπολογίζει με τον εξής τρόπο. Αρχικά η M δέχεται μια συμβολοσειρά, μήκους έστω n, που περιέχει σύμβολα μόνο από το αλφάβητο εισόδου Σ, στα n πιο αριστερά σημεία της ταινίας, ενώ η υπόλοιπη ταινία είναι γεμάτη κενά σύμβολα. Η κεφαλή ξεκινάει ξεκινάει από το πιο αριστερό σημείο της ταινίας. Εφόσον το κενό σύμβολο δεν ανήκει στο Σ, το πρώτο κενό σύμβολο που εμφανίζεται στην ταινία υποδηλώνει το τέλος της εισόδου. Αφού ξεκινήσει η M, ο υπολογισμός εξελίσσεται σύμφωνα με την συνάρτηση μετάβασης. Ο υπολογισμός συνεχίζεται μέχρι να φτάσει η μηχανή είτε σε κατάσταση αποδοχής είτε κατάσταση απόρριψης, και τότε σταματάει. Αν δεν συμβεί τίποτα από τα δύο, συνεχίζει επ′ άπειρον.

Το σύνολο των συμβολοσειρών που η M αποδέχεται, είναι *η γλώσσα της M*, ή *η γλώσσα που αναγνωρίζεται από την M*, και συμβολίζεται με $L(M)$.

Ορισμός Α′.2. Μια γλώσσα είναι *Turing-αναγνωρίσιμη* αν κάποια ντετερμινιστική μηχανή Turing την αναγνωρίζει.

Φυσικα μια NMT μπορεί να αποτυγχάνει να αποδεχτεί μία είσοδο, είτε φτάνοντας στην κατάσταση απόρριψης, είτε λόγω του ότι δεν τερματίζει ποτέ. Αν μία NTM φτάνει σε τελική κατάσταση για κάθε συμβολοσειρά που ανήκει σε μία γλώσσα, δηλαδή είτε την αποδέχεται είτε την απορρίπτει, αλλά ο υπολογισμός πάντα σταματάει, τότε η μηχανή αποκρίνεται σε αυτή τη γλώσσα.

Ορισμός Α′.3. Μία γλώσσα είναι *Turing-αποκρίσιμη* ή απλά *αποκρίσιμη* αν κάποια ντετερμινιστική μηχανή Turing αποκρίνεται σε αυτή.

Τώρα, Έχοντας ορίσει την NMT, και έχοντας αναφέρει βασικές έννοιες που σχετίζονται με αυτή, περνάμε στον ορισμό της MMT. Μια MMT ορίζεται με τον εξής τρόπο. Σε κάθε σημείο υπολογισμού προχωρά σε ένα σύνολο πιθανών καταστάσεων. Αυτό που στην ουσία αλλάζει είναι η έξοδος της συνάρτησης μετάβασης, που πλέον δεν είναι μία μόνο κατάσταση, αλλά ένα σύνολο πιθανών καταστάσεων. Ο υπολογισμός μιας ΜΜΤ είναι ένα δέντρο του οποίου τα κλαδιά αντιστοιχούν σε διαφορετικές πιθανές καταστάσεις για την μηχανή. Αν κάποιο κλαδί υπολογισμού οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής, η μηχανή αποδέχεται την είσοδο της. Ακολουθεί ένα θεώρημα εξαιρετικό για την θεωρία υπολογισμού.

Θεώρημα Α′.1. *Κάθε μη ντετερμινιστική μηχανή Turing έχει μια ισοδύναμη ντετερμινιστική Turing.*

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να προσομοιώσουμε μια ΜΜΤ, με μία ΝΜΤ. Από το Θεώρημα Α′.1 προκύπτουν δύο πορίσματα.

Πόρισμα Α′.1. *Μια γλώσσα είναι Turing-αναγνωρίσιμη, αν και μόνο αν μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing, την αναγνωρίζει.*

Πόρισμα Α′.2. *Μια γλώσσα είναι αποκρίσιμη αν και μόνο αν κάποια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing αποκρίνεται σε αυτή.*

Η μηχανή Turing, όπως ειπώθηκε και παραπάνω, αποτελεί ένα υπολογιστικό μοντέλο. Όμως, για την επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων, προτείνονται διάφοροι αλγόριθμοι, και όχι μηχανές Turing. Ένας αλγόριθμος είναι μια σαφώς ορισμένη διαδικασία για την επίλυση προβλημάτων σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Μέχρι το 1936 ο αλγόριθμος υπήρχε σαν έννοια μόνο σε διαισθητικό επίπεδο. Ο Turing στο [Tur37] όρισε τι είναι αλγόριθμος, χρησιμοποιώντας τις μηχανές Turing . Έτσι προκύπτει μια ισοδυναμία μεταξύ μηχανής Turing και αλγορίθμου. Θα δούμε στην επόμενη υποενότητα πως κάτι τέτοιο δεν είναι απολύτως ορθό, και μερικώς θα το διαψεύσουμε.

Α′.2 Υπολογισιμότητα

Η υπολογισιμότητα μελετάει το ερώτημα που θέσαμε στην αρχή. Δηλαδή τι είναι υπολογίσιμο από έναν υπολογιστή. Στην υποενότητα αυτή θα απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα. Θα διαπιστώσουμε πως υπάρχουν προβλήματα για τα οποία ο υπολογιστής δεν μπορεί να εντοπίσει μία λύση. Δεν υπάρχει δηλαδή μια αυτοματοποιημένη διαδικασία, ένας αλγόριθμος, που υπολογίζει λύσεις για αυτά τα προβλήματα. Αυτό, σαν πρώτη σκέψη, θα μπορούσε να πει κανείς πως είναι αναμενόμενο, καθώς ο υπολογιστής είναι μία μηχανή, οπότε έχει και περιορισμούς. Παρόλα αυτά, όταν το συγκεκριμένο ερώτημα πρωτοεμφανίστηκε η συντριπτική πλειοψηφία στην επιστημονική κοινότητα πίστευε το ακριβώς αντίθετο. Προήλθε από την προσπάθεια να αυτοματοποιηθούν τα μαθηματικά. Η επικρατέστερη άποψη ήταν πως κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί, δηλαδή οι λύσεις σε κάθε υπολογιστικό πρόβλημα μπορούν να προέρχονται από μία αυτοματοποιημένη διαδικασία, έναν αλγόριθμο. Μέχρι να έρθει ο Turing [Tur37] , και να το διαψεύσει.

Ο Turing, για να αποδείξει ότι θα μαθηματικά δεν αυτοματοποιούνται, απέδειξε ότι υπάρχει ένα πρόβλημα που δεν είναι υπολογίσιμο. Το πρόβλημα αυτό είναι το πρόβλημα τερματισμού (*halting problem*). Στο πρόβλημα τερματισμού αναζητείται μία μηχανή Turing, που για είσοδο μια μηχανή Turing και μία συμβολοσειρά, θα αποφαίνεται αν η μηχανή εισόδου φτάνει σε τερματική κατάσταση. Ορίζουμε την τυπική γλώσσα που περιγράφει το πρόβλημα με τον εξής τρόπο:

$$L_{TM} = \{(M, w) \mid M \,\text{μια NTM και η}\, M \,\text{σταματάει με είσοδο την}\, w\}$$

Θεώρημα Α′.2. *Η γλώσσα L_{TM} είναι μη-αποκρίσιμη.*

Ο Turing για να αποδείξει το παραπάνω θεώρημα, ότι δηλαδή το πρόβλημα τερματισμού δεν είναι υπολογίσιμο, όρισε την καθολική μηχανή Turing, η οποία μπορεί και προσομοιώνει οποιαδήποτε άλλη μηχανή Turing από την περιγραφή της. Επίσης χρησιμοποίησε μια μέθοδο που είχε εισάγει πρώτος ο Georg Cantor το 1891, την μέθοδο της διαγωνιοποίησης.

Το Θεώρημα Α΄.2 είναι θεμελιώδες στην μελέτη της υπολογισιμότητας, και κατ΄ επέκταση στη θεωρία υπολογισμού. Αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει μηχανή Turing που να αποκρίνεται στη γλώσσα L_{TM}. Άρα υπάρχουν προβλήματα που δεν είναι υπολογίσιμα. Δεν υπάρχει μια αυτοματοποιημένη διαδικασία που να μπορεί να λύσει τα συγκεκριμένα προβλήματα, άρα τα μαθηματικά δεν αυτοματοποιούνται.

Ολοκληρώνουμε αυτή την υποενότητα ορίζοντας την θέση Church-Turing.

Ορισμός Α΄.4 (Θέση Church-Turing)**.** Ένα υπολογιστικό πρόβλημα είναι υπολογίσιμο αν και μόνο αν είναι Turing-αποκρίσιμο.

Αυτό που στην ουσία μας λέει η θέση των Church και Turing, είναι ότι ένας αλγόριθμος είναι μια NMT που τερματίζει πάντα με σωστό αποτέλεσμα.

Α΄.3 Χρονική Πολυπλοκότητα

Σε αυτή την υποενότητα θα ασχοληθούμε μόνο με προβλήματα που είναι υπολογίσιμα, δηλαδή με προβλήματα που υπάρχει αλγόριθμος που τα επιλύει. Θα δούμε πως υπάρχουν προβλήματα, που παρόλο που είναι υπολογίσημα, είναι πρακτικά μη εφικτό να υπολογίσουμε μια λύση τους, γιατί απαιτούν υπερβολική ποσότητα χρόνου. Πρώτα όμως θα πρέπει να ορίσουμε τι σημαίνει χρόνος για μια υπολογιστική μηχανή (έναν αλγόριθμο), τι είναι δηλαδή η χρονική πολυπλοκότητα.

Ορισμός Α΄.5 (Χρονική Πολυπλοκότητα)**.** Έστω M μια ντετερμινιστική μηχανή Turing που σταματάει σε όλες τις εισόδους. Ο χρόνος εκτέλεσης ή η χρονική πολυπλοκότητα της M είναι η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, που $f(n)$ είναι ο μέγιστος αριθμός βημάτων που η M χρησιμοποιεί σε κάθε είσοδο μεγέθους n.

Επειδή ο ακριβής χρόνος εκτέλεσης ενός αλγορίθμου είναι πολλές φορές μία σύνθετη έκφραση, τον προσεγγίζουμε ασυμπτωτικά, δηλαδή προσπαθούμε να καταλάβουμε ποιος είναι ο χρόνος εκτέλεσης στις μεγάλες εισόδους, κρατώντας τον όρο που επιβαρύνει περισσότερο, και αγοώντας τις πολλαπλασιαστικές σταθερέ.

Ορισμός Α΄.6 (big-O Συμβολισμός)**.** Έστω f και g συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Λέμε ότι $f(n) = O(g(n))$ αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί c και n_0 τέτοιοι ώστε για κάθε ακέραιο $n \geq n_0$

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Όταν $f(n) = O(g(n))$ λέμε ότι η $g(n)$ αποτελεί ένα ασυμπτωτικό άνω φράγμα για την f, δηλαδή ότι η f είναι μικρότερη ή ίση από την g, αν αγνοήσουμε τις πολλαπλασιαστικές σταθερές. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f(n) = 6n^3 + 2n^2 + 20n + 45$, ισχύει ότι $f(n) = O(n^3)$. Αυτό που πρέπει οπωσδήποτε να σημειώσουμε, είναι η συμπεριφορά των λογαριθμών, σε ότι αφορά τον big-O συμβολισμό. Συνήθως όταν χρησιμοποιούμε λογαρίθμους, πρέπει να προσδιορίσουμε τη βάση τους. Αν έχουμε ένα λογάριθμό με βάση b ($\log_b n$), και θέλουμε να αλλάξουμε τη βάση του σε ένα λογάριθμο με βάση το 2, η τιμή του $\log_b n$ αλλάζει κατά ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα, κι αυτό γιατί ισχύει $\log_b n = \frac{\log_2 n}{\log_b 2}$. Έτσι, όταν γράφουμε $f(n) = O(\log n)$, ο προσδιορισμός της βάσης δεν είναι πλέον απαραίτητος, γιατί η αλλαγή της βάσης επηρεάζει τον λογάριθμο κατά μία πολλαπλασιαστική σταθερά, άρα δεν επηρεάζει την ασυμπτωτική εκτίμηση που ακολουθούμε για την πολυπλοκότητα της f.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ασυμπτωτικό συμβολισμό, μπορούμε να ταξινομήσουμε τις τυπικές γλώσσες διάφορων υπολογιστικών προβλημάτων ανάλογα με τις χρονικές απαιτήσεις τους.

Ορισμός Α′.7. Έστω $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ μια συνάρτηση. Ορίζουμε ως *κλάση χρονικής πολυπλοκότητας*, $\mathbf{TIME}(\mathrm{t(n)})$, την συλλογή που είναι αποκρίσιμες από μία ντετερμινιστική μηχανή Turing χρόνου $O(t(n))$.

Για μια NMT ο υπολογισμός της χρονικής πολυπλοκότητας είναι μάλλον κάτι προφανές. Είναι ο μέγιστος αριθμό βημάτων της μέχρι να φτάσει σε τελική κατάσταση. Για να ορίσουμε τι είναι χρονική πολυπλοκότητα για την ΜΜΤ, αρκεί να θυμηθούμε ότι ο υπολογισμός είναι δενδρικός, σπάει σε κλαδιά, και δεν είναι απλά μία σειρά βημάτων.

Ορισμός Α′.8. Έστω N μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing , που κάθε κλάδος υπολογισμού σταματάει για κάθε είσοδο. Ο χρόνος εκτέλεσης της N είναι η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, που $f(n)$ είναι ο μέγιστος αριθμός βημάτων που η N χρησιμοποιεί σε κάθε κλάδο υπολογισμού σε κάθε είσοδο μεγέθους n.

Τώρα θα ορίσουμε δύο από τις σημαντικότερες κλάσεις στην θεωρία της πολυπλοκότητας. Αυτές είναι η κλάση **P**, και η κλάση **NP**.

Ορισμός Α′.9. **P** ειναι η κλάση των γλωσσών που είναι αποκρίσιμες σε πολυωνυμικό χρόνο, από μία ντετερμινιστική μηχανή Turing. Με άλλα λόγια

$$\mathbf{P} = \bigcup_k \mathbf{TIME}(n^k)$$

Η κλάση **P** είναι η κλάση των προβλημάτων, που είναι ρεαλιστικά επιλύσιμα από έναν υπολογιστή. Δηλαδή τα προβλήματα που έχουν ένα πολυωνυμικό αλγόριθμο, είναι αυτά που ρεαλιστικά μπορούμε να υπολογίσουμε μία λύση τους μέσω ενός υπολογιστή. Ο έλεγος του αν ένα γράφημα είναι διμερές ή όχι είναι ένα πρόβλημα που ανήκει στην κλάση **P**. Υπάρχουν αρκετοί πολυωνυμικοί αλγόριθμοι που απαντάνε στο παραπάνω ερώτημα. Ένας από αυτούς είναι ο DSATUR του Brélaz [Bré79].

Υπάρχουν προβλήματα για τα οποία δεν έχει βρεθεί (ακόμα) πολυωνυμικός αλγόριθμος που τα λύνει. Παρόλα αυτά, αν κάποιος μας δώσει μια λύση, μπορούμε να την επαληθεύσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ορισμός Α′.10. Ένας επαληθευτής για μία γλώσσα L είναι ένας αλγόριθμος A, που

$$L = \{w \mid A \text{ αποδέχεται το } (w, c) \text{ για κάποια συμβολοσειρά } c\}$$

Μετράμε τον χρόνο του επαληθευτή μόνο σε όρους του μήκους του w, έτσι ένας πολυωνυμικός επαληθευτής τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο στο μήκος του w. Μια γλώσσα L είναι πολυωνυμικά επαληθεύσιμη αν έχει επαληθευτή πολυωνυμικού χρόνου.

Ένας επαληθευτής χρησιμοποιεί επιπρόσθετη πληροφορία, που αντιπροσωπεύεται από το σύμβολο c στον ορισμό Α′.10, για να επαληθεύσει ότι η συμβολοσειρά w είναι μέρος της L. Η πληροφορία αυτή ονομάζεται πιστοποιητικό. Για πολυωνυμικούς επαληθευτές το πιστοποιητικό είναι πολυωνυμικού μήκους (στο μήκος του w). Η μορφή του πιστοποιητικού εξαρτάται από το πρόβλημα που εξετάζουμε. Στην ουσία το w πρόκειται για ένα στιγμιότυπο του προβλήματος, και ο αλγόριθμος A, χρησιμοποιώντας το c πιστοποιεί σε πολυωνυμικό χρόνο ότι έχουμε λύση για το στιγμιότυπο w.

Ορισμός Α′.11. **NP** είναι η κλάση των γλωσσών που έχουν πολυωνυμικό επαληθευτή.

Σκεπτόμενοι τον δενδρικό υπολογισμό που εκτελεί η ΜΜΤ, καταλήγουμε διασθητικά στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα Α′.3. *Μια γλώσσα ανήκει στην κλάση* ***NP*** *αν και μόνο αν είναι αποκρίσιμη από μία μη ντετερμινιστική μηχανή πολυωνυμικού χρόνου.*

Στην ουσία η εκτέλεση του επαληθευτή παίζει τον ρόλο ενός κλάδου υπολογισμού μιας ΜΜΤ πολυωνυμικού χρόνου. Στη συνέχεια ορίζουμε την μη ντετερμινιστική κλάση χρονικής πολυπλοκότητας, ανάλογα με αυτή της ντετερμινιστικής.

Ορισμός Α′.12.

$$\mathbf{NTIME}(t(n)) = \{L \mid L \,\text{μια γλώσσα αποκρίσιμη από μία}\, O(t(n)) \\ \text{χρόνου ντετερμινιστική μηχανή Turing}\}$$

Πόρισμα Α′.3.

$$\boldsymbol{NP} = \bigcup_k \boldsymbol{NTIME}(n^k)$$

Υπάρχουν πάρα πολλά προβλήματα που ανήκουν στην κλάση **NP**. Ένα από αυτά είναι αν υπάρχει κατάλληλος χρωματισμός γραφημάτων για ένα γράφημα G, που χρησιμοποιεί το πολύ k-χρώματα (k-χρωματίσιμο).

Θεώρημα Α′.4. *Το πρόβλημα του k-χρωματίσιμου γραφήματος ανήκει στην κλάση* $\boldsymbol{NP}$.

Απόδειξη. Έστω G ενα γράφημα, για το οποίο θέλουμε να διαπιστώσουμε αν υπάρχει χρωματισμός που χρησιμοποιεί το πολύ k χρώματα, και κάποιος μας δώσει ένα πιστοποιητικό, δηλαδή μια ανάθεση χρωμάτων στους κόβμους του γραφήματος με χρήση το πολύ k χρωμάτων, μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να το επαληθεύσουμε, απλά ελέγχοντας αν τα άκρα κάθε ακμής στο G έχουν διαφορετικό χρώμα. □

Εύκολα κανείς μπορεί να συμπεράνει ότι $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$. Όμως υπάρχουν προβλήματα για τα οποία δεν έχει βρεθεί μέχρι στιγμής αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που τα λύνει, παρόλη την τεράστια προσπάθεια που έχει καταβάλει η επιστημονική κοινότητα εδώ και πολλά χρόνια. Παρακάτω παρατίθεται ίσως το σημαντικότερο πρόβλημα στον κλάδο της θεωρητικής πληροφορικής και της επιστήμης των υπολογιστών, υπό τη μορφή εικασίας.

Εικασία Α′.1 (**P** vs **NP**).

$$\boldsymbol{P} \neq \boldsymbol{NP}$$

Το παραπάνω πρόκειται για εικασία, δηλαδή δεν έχει βρεθεί απόδειξη που το αποδεικνύει.

Στις κλάσεις πολυπλοκότητας υπάρχουν προβλήματα που συνοψίζουν την υπολογιστική δυσκολία τους. Τα προβλήματα αυτά ονομάζονται πλήρη. Πριν όμως εξηγήσουμε τι είναι τα πλήρη προβλήματα, πρέπει να ορίσουμε τι είναι πολυωνυμική αναγωγή.

Ορισμός Α′.13. Μια συνάρτηση f με είσοδο μια συμβολοσειρά w, με στοιχεία από το αλφάβητο της γλώσσας εισόδου, και έξοδο μια συμβολοσειρά $f(w)$, με στοιχεία από το αλφάβητο της γλώσσας εξόδου, είναι υπολογίσιμη συνάρτηση πολυωνυμικού χρόνου αν υπάρχει κάποια ντετερμινιστική μηχανή Turing M πολυωνυμικού χρόνου που σταματάει με μόλις $f(w)$ στην ταινία της, όταν ξεκινάει με οποιαδήποτε συμβολοσειρά w.

Ορισμός Α′.14. Μια γλώσσα L_A ανάγεται πολυωνυμικά σε μία γλώσσα L_B ($L_A \leq_P L_B$), αν υπάρχει μια υπολογίσιμη συνάρτηση πολυωνυμικού χρόνου f, που για κάθε w,

$$w \in L_A \Leftrightarrow f(w) \in L_B$$

Η συνάρτηση f καλείται πολυωνυμική αναγωγή από τη L_A στη L_B.

Θεώρημα Α′.5. *Το πρόβλημα του 3-χρωματισμού ανάγεται πολυωνυμικά στο πρόβλημα του k-χρωματισμού.*

Απόδειξη. Έστω ένα γράφημα G, για το οποίο θέλουμε να διαπιστώσουμε αν είναι 3-χρωματίσιμο. Σχηματίζουμε το γράφημα G' έτσι ώστε, να περιέχει όλους τους κόμβους και τις ακμές του G, και επιπροσθέτως $k-3$ κόμβους που καθένας συνδέεται με όλους τους κόμβους του G με μία ακμή. Υπάρχει χρωματισμός με χρήση το πολύ 3 χρωμάτων στο G αν και μόνο αν υπάρχει χρωματισμός με χρήση το πολύ k χρωμάωτων στο G'. □

Μια πολυωνυμική αναγωγή, από ένα πρόβλημα A σε ένα πρόβλημα B, αποδεικνύει ότι το A δεν είναι πιο δύσκολο από το δεύτερο (σε ότι αφορά τη χρονική πολυπλοκότητα).

Ορισμός Α′.15. Μια γλώσσα L_B είναι **NP**-πλήρης, αν ικανοποιεί δύο συνθήκες:

1. Η L_B ανήκει στην κλάση **NP**, και
2. Κάθε γλώσσα L_A που ανήκει στην κλάση **NP** ανάγεται πολυωνυμικά στην L_B.

Όπως είπαμε και παραπάνω τα πλήρη προβλήματα είναι αυτά που συγκεντρώνουν την υπολογιστική δυσκολία μιας κλάσης, άρα τα **NP**-πλήρη, είναι τα πιο δύσκολα στην κλάση **NP**. Για να αποδείξουμε ότι ένα πρόβλημα A είναι **NP**-πλήρες αρκεί να ανάγουμε πολυωνυμικά ένα ήδη γνωστό **NP**-πλήρες πρόβλημα B, στο A.

Θεώρημα Α′.6. *Το πρόβλημα του k-χρωματίσιμου γραφήματος είναι **NP**-πλήρες*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Α′.4 το πρόβλημα του 3-χρωματισμού και του k-χρωματισμού ανήκουν στην κλάση **NP**. Σύμφωνα με τους Garey και Johnson [GJ79], το 3-χρωματίσιμο είναι **NP**-πλήρες πρόβλημα. Και επειδή από το Θεώρημα Α′.5 το 3-χρωματίσιμο ανάγεται στο k-χρωματίσιμο, το k-χρωματίσιμο είναι **NP**-πλήρες πρόβλημα. □

Φυσικά υπάρχουν κι άλλες κλάσεις πολυπλοκότητας εκτός από την **P** και την **NP**. Μάλιστα υπάρχουν γνωστά προβλήματα που είναι τουλάχιστον όσο δύσκολα είναι τα **NP**-πλήρη προβλήματα (**NP**-δύσκολα). Όμως πολλά **NP**-πλήρη προβλήματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά και θα θέλαμε να μπορούμε να τα λύσουμε. Για να συμβεί αυτό πρέπει να διαψευστεί η Εικασία Α′.1. Για να συμβεί αυτό αρκεί κάποιος να βρει έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για ένα **NP**-πλήρες πρόβλημα. Η συντριπτική πλειοψηφία στην επιστημονική κοινότητα βέβαια, θεωρεί πως κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό.

Βιβλιογραφία

[CBF97] A.A. Cournot, T. Bacon, and I. Fisher. *Researches Into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. Economic classics. Macmillan, 1897.

[Zer12] Ernst Zermelo. «Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels». In: *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians* II (Jan. 1912).

[Neu28] J. von Neumann. «Zur Theorie der Gesellschaftsspiele». In: *Mathematische Annalen* 100 (1928), pp. 295–320.

[Tur37] A. M. Turing. «On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem». In: *Proceedings of the London Mathematical Society* s2-42.1 (Jan. 1937), pp. 230–265.

[NM44] John Von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1944.

[Nas51] John Nash. «Non-Cooperative Games». In: *Annals of Mathematics* 54.2 (1951), pp. 286–295.

[Bor53] Emile Borel. «The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels». In: *Econometrica* 21 (Jan. 1953).

[WP67] D. J. A. Welsh and M. B. Powell. «An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems». In: *The Computer Journal* 10.1 (Jan. 1967), pp. 85–86.

[MMI72] David W. Matula, G. Marble, and J D Isaacson. «GRAPH COLORING ALGORITHMS». In: 1972.

[SP73] J. Maynard Smith and GEORGE R. Price. «The Logic of Animal Conflict». In: *Nature* 246 (1973), pp. 15–18.

[Lov75] L Lovász. «Three short proofs in graph theory». In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 19.3 (1975), pp. 269–271.

[LR76] T. L. Lai and Herbert Robbins. «Maximally dependent random variables». In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 73.2 (1976), pp. 286–288.

[Law76] E.L. Lawler. «A note on the complexity of the chromatic number problem». In: *Information Processing Letters* 5.3 (1976), pp. 66–67.

[Mit76] John Mitchem. «On Various Algorithms for Estimating the Chromatic Number of a Graph». In: *The Computer Journal* 19.2 (May 1976), pp. 182–183.

[Bré79] Daniel Brélaz. «New methods to color the vertices of a graph». In: *Commun. ACM* 22 (1979), pp. 251–256.

[GJ79] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. USA: W. H. Freeman & Co., 1979.

[Lei79] F.T. Leighton. ≪A graph coloring algorithm for large scheduling problems≫. In: *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 84.6 (Nov. 1979), p. 489.

[EFF82] P Erdös, P Frankl, and Z Füredi. ≪Families of finite sets in which no set is covered by the union of two others≫. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 33.2 (1982), pp. 158–166.

[Lub85] M Luby. ≪A Simple Parallel Algorithm for the Maximal Independent Set Problem≫. In: *Proceedings of the Seventeenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '85. Providence, Rhode Island, USA: Association for Computing Machinery, 1985, pp. 1–10.

[CV86] Richard Cole and Uzi Vishkin. ≪Deterministic coin tossing with applications to optimal parallel list ranking≫. In: *Information and Control* 70.1 (1986), pp. 32–53.

[GPS87] A. Goldberg, S. Plotkin, and G. Shannon. ≪Parallel Symmetry-Breaking in Sparse Graphs≫. In: *Proceedings of the Nineteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '87. New York, New York, USA: Association for Computing Machinery, 1987, pp. 315–324.

[CH90] Fred C. Chow and John L. Hennessy. ≪The Priority-Based Coloring Approach to Register Allocation≫. In: *ACM Trans. Program. Lang. Syst.* 12.4 (Oct. 1990), pp. 501–536.

[MP91] R.B. Myerson and Harvard University Press. *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press, 1991.

[Wil91] D. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge mathematical textbooks. Cambridge University Press, 1991.

[Lin92] Nathan Linial. ≪Locality in Distributed Graph Algorithms≫. In: *SIAM J. Comput.* 21 (1992), pp. 193–201.

[Lub93] Michael Luby. ≪Removing randomness in parallel computation without a processor penalty≫. In: *Journal of Computer and System Sciences* 47.2 (1993), pp. 250–286.

[Cul94] J Culberson. ≪Iterated greedy graph coloring and the coloring landscape≫. In: (Dec. 1994).

[Jer95] Mark Jerrum. ≪A Very Simple Algorithm for Estimating the Number of k-Colorings of a Low-Degree Graph≫. In: *Random Struct. Algorithms* 7.2 (Sept. 1995), pp. 157–165.

[PL96] Taehoon Park and Chae Y. Lee. ≪Application of the Graph Coloring Algorithm to the Frequency Assignment Problem≫. In: *Journal of the Operations Research Society of Japan* 39 (1996).

[Joh99] Öjvind Johansson. ≪Simple distributed $\Delta+1$-coloring of graphs≫. In: *Information Processing Letters* 70.5 (1999), pp. 229–232.

[Vig99] E. Vigoda. ≪Improved bounds for sampling colorings≫. In: *40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Cat. No.99CB37039)*. 1999, pp. 51–59.

[AS00] Noga Alon and Joel H. Spencer. *The Probabilistic Method, Second Edition*. John Wiley, 2000.

[Kho01] Subhash Khot. ≪Improved inapproximability results for MaxClique, chromatic number and approximate graph coloring≫. In: *Proceedings 2001 IEEE International Conference on Cluster Computing* (2001), pp. 600–609.

[Wes+01] Douglas Brent West et al. *Introduction to graph theory*. Vol. 2. Prentice hall Upper Saddle River, 2001.

[AR02] Steve Alpern and Diane Reyniers. ≪Spatial Dispersion as a Dynamic Coordination Problem≫. In: *Theory and Decision* 53 (Feb. 2002).

[FPS02] Irene Finocchi, Alessandro Panconesi, and Riccardo Silvestri. ≪Experimental Analysis of Simple, Distributed Vertex Coloring Algorithms≫. In: SODA '02. San Francisco, California: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002, pp. 606–615. ISBN: 089871513X.

[GPS02] Trond Grenager, Rob Powers, and Yoav Shoham. ≪Dispersion Games: General Definitions and Some Specific Learning Results≫. In: *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence* (May 2002).

[Kub04] Marek Kubale. *Graph colorings*. Vol. 352. American Mathematical Soc., 2004.

[TV05] David Tse and Pramod Viswanath. *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge University Press, 2005.

[Bón06] Miklós Bóna. *A walk through combinatorics: An introduction to enumeration and graph theory, second edition*. Oct. 2006, pp. 1–470.

[HV06] Thomas P. Hayes and Eric Vigoda. ≪Coupling with the stationary distribution and improved sampling for colorings and independent sets≫. In: *The Annals of Applied Probability* 16.3 (2006), pp. 1297–1318.

[KSM06] Michael Kearns, Siddharth Suri, and Nick Montfort. ≪An Experimental Study of the Color Problem on Human Subject Networks≫. In: *Science (New York, N.Y.)* 313 (Sept. 2006), pp. 824–7.

[Sip06] Michael Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. Second. Course Technology, 2006.

[HVV07] Thomas P. Hayes, Juan C. Vera, and Eric Vigoda. ≪Randomly Coloring Planar Graphs with Fewer Colors than the Maximum Degree≫. In: *Proceedings of the Thirty-Ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '07. San Diego, California, USA: Association for Computing Machinery, 2007, pp. 450–458.

[Nis+07] N. Nisan et al. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, 2007.

[SS07] Moshe Shaked and J George Shanthikumar. *Stochastic orders*. Springer, 2007.

[Ami+08] M. Amirijoo et al. ≪Neighbor Cell Relation List and Physical Cell Identity Self-Organization in LTE≫. In: *ICC Workshops - 2008 IEEE International Conference on Communications Workshops*. 2008, pp. 37–41.

[CGJ08] Kamalika Chaudhuri, Fan Graham, and Mohammad Jamall. ≪A Network Coloring Game≫. In: Dec. 2008, pp. 522–530.

[Ryc08] Tomasz Rychlik. ≪Extreme variances of order statistics in dependent samples≫. In: *Statistics & Probability Letters* 78.12 (2008), pp. 1577–1582.

[BHK09] Andreas Björklund, Thore Husfeldt, and Mikko Koivisto. ≪Set Partitioning via Inclusion-Exclusion≫. In: *SIAM Journal on Computing* 39.2 (2009), pp. 546–563.

[DGP09] Constantinos Daskalakis, Paul Goldberg, and Christos Papadimitriou. ≪The Complexity of Computing a Nash Equilibrium≫. In: *SIAM J. Comput.* 39 (Feb. 2009), pp. 195–259.

[KP09] Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou. ≪Worst-case equilibria≫. In: *Computer Science Review* 3.2 (2009), pp. 65–69.

[MT09] Enrico Malaguti and Paolo Toth. ≪A survey on vertex coloring problems≫. In: *International Transactions in Operational Research* 17 (Apr. 2009), pp. 1–34.

[Akk+11] Khajonpong Akkarajitsakul et al. ≪Game Theoretic Approaches for Multiple Access in Wireless Networks: A Survey≫. In: *IEEE Communications Surveys & Tutorials* 13.3 (2011), pp. 372–395.

[Bal11] Konstantinos Baltzis. ≪Hexagonal vs Circular Cell Shape: A Comparative Analysis and Evaluation of the Two Popular Modeling Approximations≫. In: Apr. 2011.

[BS11] Thomas Boehme and Jens Schreyer. ≪Local Computation of Vertex Colorings.≫ In: Jan. 2011, pp. 76–79.

[BE13] Leonid Barenboim and Michael Elkin. ≪Distributed Graph Coloring: Fundamentals and Recent Developments≫. In: *Synthesis Lectures on Distributed Computing Theory* 4 (July 2013).

[MR13] M. Molloy and B. Reed. *Graph Colouring and the Probabilistic Method*. Algorithms and Combinatorics. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[OB13] Jan Oppolzer and Robert Bestak. ≪Cell Identifier Assignment in Two-Tier Femtocell Networks≫. In: *2013 IEEE 77th Vehicular Technology Conference (VTC Spring)*. 2013, pp. 1–5.

[PS13] C. Pelekis and M. Schauer. ≪Network coloring and colored coin games≫. In: *Search Theory: A Game Theoretic Perspective* (2013), pp. 59–73.

[Pen+13] Mugen Peng et al. ≪Self-configuration and self-optimization in LTE-advanced heterogeneous networks≫. In: *IEEE Communications Magazine* 51.5 (2013), pp. 36–45.

[SBS13] Péter Szilágyi, Tobias Bandh, and Henning Sanneck. ≪Physical Cell ID Allocation in Multi-layer, Multi-vendor LTE Networks≫. In: vol. 58. Jan. 2013, pp. 156–168.

[WEI+13] Yao WEI et al. ≪Graph theory based physical cell identity self-configuration for LTE-A network≫. In: *The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications* 20.1 (2013), pp. 101–107.

[Zha+13] xu Zhang et al. ≪Dynamic PCI assignment in two-tier networks based on cell activity prediction≫. In: *Electronics Letters* 49 (Nov. 2013), pp. 1570–1572.

[Goo+14] Mathew Goonewardena et al. ≪On minimum-collisions assignment in heterogeneous self-organizing networks≫. In: *2014 IEEE Global Communications Conference*. 2014, pp. 4665–4670.

[Arc+15] Claudia Archetti et al. ≪Directed weighted improper coloring for cellular channel allocation≫. In: *Discrete Applied Mathematics* 182 (2015). Eighth International Colloquium on Graphs and Optimization (GO VIII), 2012, pp. 46–60.

[CGW15] G. Cardano, S.H. Gould, and S.S. Wilks. *The Book on Games of Chance: The 16th-Century Treatise on Probability*. Dover Recreational Math. Dover Publications, 2015.

[Lew15] R.M. R. Lewis. *A Guide to Graph Colouring: Algorithms and Applications*. 1st. Springer Publishing Company, Incorporated, 2015.

[APY16] K.A. Agha, G. Pujolle, and T.A. Yahiya. *Mobile and Wireless Networks*. Wiley, 2016.

[YF16] Xiaobin Yang and Abraham O. Fapojuwo. ≪Analysis of heterogeneous cellular network with hexagonal tessellated macrocells and randomly positioned small cells≫. In: *2016 IEEE Wireless Communications and Networking Conference*. 2016, pp. 1–6.

[CFP18] Simon Collet, Pierre Fraigniaud, and Paolo Penna. ≪Equilibria of Games in Networks for Local Tasks≫. In: *22nd International Conference on Principles of Distributed Systems (OPODIS 2018)*. Ed. by Jiannong Cao et al. Vol. 125. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2018, 6:1–6:16.

[Mir+20] Mohammadhasan Miri et al. ≪A distributed algorithm for vertex coloring problems in wireless networks≫. In: *Array* 6 (2020), p. 100023.

[FPP21] Nikolaos Fryganiotis, Symeon Papavassiliou, and Christos Pelekis. ≪A note on the network coloring game: A randomized distributed $(\Delta + 1)$-coloring algorithm≫. In: *arXiv e-prints*, arXiv:2106.00402 (June 2021), arXiv:2106.00402. arXiv: `2106.00402 [cs.DM]`.

[WHS22] Kai-Ju Wu, Y.-W. Peter Hong, and Jang-Ping Sheu. ≪Coloring-Based Channel Allocation for Multiple Coexisting Wireless Body Area Networks: A Game-Theoretic Approach≫. In: *IEEE Transactions on Mobile Computing* 21.1 (2022), pp. 63–75.