ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Πολλαπλότητες
&
Γεωμετρία των τριών διαστάσεων

Οι οκτώ γεωμετρίες του 3-διάστατου χώρου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Φωτεινός Μεργούπης-Ανάγνου

Επιβλέπων: ΑΡΓΥΡΗΣ ΦΕΛΟΥΡΗΣ, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

&

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΟΙ ΟΚΤΩ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ 3-ΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Πρόλογος

Η απλή συνεκτικότητα της n-διάστατης σφαίρας, $n \geq 2$, έπεται από την απλή συνεκτικότητα του $\mathbb{R}^n$: με στοιχειώδη τοπολογικά επιχειρήματα, αποδεικνύεται ότι κάθε βρόγχος της $\mathbb{S}^{n\geq 2}$ είναι ομοτοπικός με βρόγχο του $\mathbb{S}^n \{x\}$ για κάποιο $x \in \mathbb{S}^n$. Επειδή το $\mathbb{S}^n \{x\}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^n$, έπεται ότι ο τυχαίος βρόγχος της $\mathbb{S}^n$ είναι μηδενομοτοπικός επίσης.

Η *εικασία του Poincaré*, ένα από τα απλούστερα και πλέον πρώιμα ερωτήματα της τοπολογίας, είναι ο ισχυρισμός ότι η απλή συνεκτικότητα χαρακτηρίζει την 3-διάστατη σφαίρα ανάμεσα στις συμπαγείς 3-διάστατες πολλαπλότητες:

Κάθε απλά συνεκτική, συμπαγής, 3-διάστατη πολλαπλότητα είναι ομοιομορφική με την 3-διάστατη σφαίρα.

Ο έλεγχος αυτού του ισχυρισμού στάθηκε ένα από τα δυσκολότερα μαθηματικά προβλήματα του 20ού αιώνα. Στην διάψευση ή την επικύρωσή του είναι αφιερωμένος μεγάλος όγκος αποτυχημένων αν και όχι άκαρπων προσπαθειών, από τις οποίες ξεπήδησαν εξεζητημένες μαθηματικές τεχνικές και γεωμετρικά αντιπαραδείγματα που βρίσκουν εφαρμογή σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και της θεωρητικής φυσικής. Ο Poincaré επιχείρησε αρχικά να δώσει καταφατική απάντηση στην εικασία του χρησιμοποιώντας αλγεβρικές αναλλοίωτες τοπολογικών χώρων όπως οι ομάδες *Betti* (θεωρία ομολογίας). Αυτή η θεώρηση τον οδήγησε στην ανακάλυψη του 12-εδρικού χώρου *Poincaré*, ενός τροχιακού χώρου της $\mathbb{S}^3$ κάτω από διακριτή ομάδα ισομετριών ο οποίος έχει τις ίδιες ομάδες ομολογίας με την $\mathbb{S}^3$ αλλά δεν είναι ομοιομορφικός με αυτήν. Την δεκαετία του 1930, ο J. H. C. Whitehead επιχείρησε ομοίως να απαντήσει στην εικασία κάνοντας χρήση των νεότερων εργαλείων της αλγεβρικής τοπολογίας. Ανακάλυψε έτσι μια οικογένεια απλά συνεκτικών, μή συμπαγών 3-διάστατων πολλαπλοτήτων που δεν είναι ομοιομορφικές με τον $\mathbb{R}^3$, η απλούστερη από τις οποίες είναι η γνωστή πολλαπλότητα *Whitehead*. Η αποτυχία του ενίσχυσε την άποψη ότι η άλγεβρα και η τοπολογία από μόνες τους δεν ήταν αρκετές για την απάντηση ενός ερωτήματος που παρ' όλ' αυτά διατυπωνόταν με όρους αλγεβρικής τοπολογίας και μόνο.

Οι επανειλημμένες αποτυχίες της δεκαετίας του '50 (Bing, Moise, Haken, Παπακυριακόπουλος) σήμαναν την επαναδιατύπωση του ερωτήματος υπό ειδικές συνθήκες, σχετικές με την κατηγορία της πολλαπλότητας, και την γενίκευσή της σε οποιαδήποτε διάσταση. Η *γενικευμένη εικασία του Poincaré* ερωτά εάν κάθε συμπαγής απλά συνεκτική n-διάστατη πολλαπλότητα, $n \geq 2$, είναι ομοιομορφική με την n-διάστατη σφαίρα. Για $n = 2$ η καταφατική απάντηση είναι άμεσο πόρισμα της ταξινόμησης των συμπαγών 2-διάστατων πολλαπλοτήτων[1] που επετεύχθη στις αρχές του 20ού αιώνα μέσω μιάς ξεκάθαρα αλγοριθμικής διαδικασίας (κινήσεις *Dehn-Heegaard*). Το 1960 ο S. Smale απέδειξε την γενικευμένη εικασία για $n \geq 7$, αποτέλεσμα το οποίο βελτίωσε αργότερα για $n \geq 5$[2]. Το 1982, η γενικευμένη εικασία αποδείχθηκε αληθής από τον Michael

1. Κάθε συμπαγής 2-διάστατη πολλαπλότητα ανήκει αποκλειστικά σε μια από τις εξής κλάσσεις ομοιομορφισμού: (α) $\mathbb{S}^2$ εάν η θεμελιώδης ομάδα της είναι η τετριμμένη· (β) συνδετικό άθροισμα r το πλήθος 2-τόρων, $r = 1,2, \ldots$· (γ) συνδετικό άθροισμα r το πλήθος προβολικών επιπέδων, $r = 1,2, \ldots$

2. Οι τεχνικές αυτές χρησιμοποιήθηκαν από τον ίδιον για την απόδειξη ενός θεμελιώδους θεωρήματος περί *cobordism*.

Freedman για $n = 4$[3]. Η ευκολία αυτών των περιπτώσεων εν συγκρίσει προς την $n = 3$, που έμεινε αναπόδεικτη μέχρι τον 21ο αιώνα, έγκειται στην ύπαρξη αρκετών διαστάσεων που αφήνουν χώρο για την εκτέλεση πολύπλοκων, αλλά ωστόσο επιτεύξιμων, συνδυαστικών κατασκευών (τμήση και συγκόλληση πολλαπλοτήτων).

Η μή εφαρμοσιμότητα των παραπάνω τεχνικών στην διάσταση 3 οδήγησε από τα τέλη της δεκαετίας του '70 στην σκέψη ότι η εικασία του Poincaré θα μπορούσε να απαντηθεί εξετάζοντας τις καμπυλότητες που μπορεί να έχει μια 3-διάστατη πολλαπλότητα, δηλαδή κάνοντας γεωμετρικές θεωρήσεις από την σκοπιά της ρημάννειας γεωμετρίας. Αυτή η σκέψη έχει προηγούμενο στην εκτεταμένη μελέτη των 2-διάστατων πολλαπλοτήτων που έγινε τον 19ο αιώνα: το θέωρημα *Gauss-Bonnet* της διαφορικής γεωμετρίας συσχετίζει την καμπυλότητα μιας επιφάνειας με την τοπολογία της (αριθμός *Euler*), ενώ η εργασία των Klein, Poincaré και Koebe δίνει μια ταξινόμηση των συνεκτικών μετρικοποιήσιμων συμπαγών επιφανειών ως τροχιακών χώρων κάτω από την ελεύθερη δράση διακριτής ομάδας ισομετριών της 2-σφαίρας, του επιπέδου ή της 2-διάστατης υπερβολικής γεωμετρίας, αναλόγως εάν η καμπυλότητα της επιφάνειας είναι θετική, μηδενική ή αρνητική αντιστοίχως (*uniformization theorem*). Στα μέσα του 20ού αιώνα, μετά την αυστηρή θεμελίωση των τανυστών από τον Levi-Civitá και των διαφορικών μορφών από τον E. Cartan, ενισχυμένη επιπλέον από τις απαιτήσεις και τα αποτελέσματα της θεωρητικής φυσικής, η ρημάννεια γεωμετρία ήταν επαρκώς ανεπτυγμένος κλάδος ώστε οι θεωρήσεις του 19ου αιώνα περί επιφανειών να γενικευτούν σε ρημάννειες πολλαπλότητες οποιασδήποτε διάστασης. Το 1982, μετά από εκτεταμένη έρευνα των 3-διάστατων πολλαπλοτήτων, ο W. P. Thurston είχε λόγους να διατυπώσει την *εικασία της γεωμετροποίησης*[4], που συσχετίζει την τοπολογία των 3-διάστατων πολλαπλοτήτων με την καμπυλότητα και διατυπώνεται σε αδρές γραμμές ως εξής:

Κάθε συμπαγής, προσανατολίσιμη 3-διάστατη πολλαπλότητα διασπάται σε συνδετικό άθροισμα 3-διάστατων τόρων, το εσωτερικό καθενός από τους οποίους επιδέχεται γεωμετρικής δομής (ρημάννειας μετρικής) τέτοιας ώστε να έχει πεπερασμένο όγκο.

Η εικασία της γεωμετροποίησης, που επαληθευόταν σε πολλές ειδικές περιπτώσεις, φαινόταν να βάζει τάξη στο χάος των δυνατοτήτων του 3-διάστατου χώρου. Η εικασία του Poincaré είναι μεταξύ των πορισμάτων της:

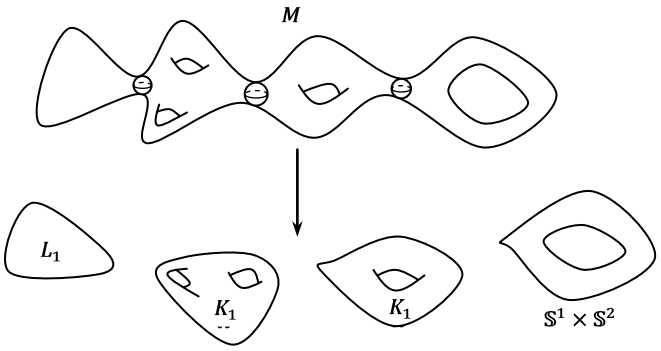
Ισχυρισμός. Η εικασία της γεωμετροποίησης συνεπάγεται την εικασία του Poincaré.

Αποδ. Ισχύει για 3-διάστατες πολλαπλότητες το εξής *σφαιρικό θεώρημα διάσπασης* :

Κάθε προσανατολίσιμη, συμπαγής 3-διάστατη πολλαπλότητα M γράφεται ως συνδετικό άθροισμα

$$M = (K_1\# \dots \#K_p)\#(L_1\# \dots \#L_q)\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)\# \dots \#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$$

όπου τα K_i, L_j είναι συμπαγείς και ανάγωγες[5] *3-διάστατες πολλαπλότητες. Τα K_i έχουν άπειρες θεμελιώδεις ομάδες ενώ τα L_j πεπερασμένες και η καθολική επικάλυψή τους είναι ομοτοπική της $\mathbb{S}^3$.*



3. Οι λόγοι για τους οποίους η γενικευμένη εικασία ισχύει για $n = 4$ και $n \geq 5$ είναι διαφορετικοί.

4. Αποδείχθηκε αληθής από τον ίδιον τον Thurston για διάφορες ειδικές περιπτώσεις που σχετίζονται με την 3-διάστατη υπερβολική γεωμετρία, όπως οι πολλαπλότητες *Haken*.

5. Εννοώντας ότι δεν γράφονται ως συνδετικό άθροισμα απλούστερων πολλαπλοτήτων.

Εάν M απλά συνεκτική, τότε από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι $M = L_1$ για κάποια συμπαγή και ανάγωγη 3-διάστατη πολλαπλότητα L_1 με πεπερασμένη θεμελιώδη ομάδα και καθολική επικάλυψη την $\mathbb{S}^3$. Από την εικασία της γεωμετροποίησης, $M = \mathbb{S}^3/\Gamma$, όπου Γ διακριτή ομάδα ισομετριών της $\mathbb{S}^3$. Λόγω απλής συνεκτικότας, $M = \mathbb{S}^3$. ■

Ο Thurston ανακάλυψε ότι οι γεωμετρικές δομές για τις οποίες κάνει λόγο η εικασία του ανήκουν σε οκτώ συγκεκριμένους τύπους (πρότυπες γεωμετρίες του 3-διάστατου χώρου), τρεις από τους οποίους είναι ομογενείς και ισότροπες (σφαιρική, ευκλείδεια, υπερβολική γεωμετρία), ενώ οι υπόλοιπες πέντε είναι μόνον ομογενείς και εμφανίζονται ως εξαιρέσεις. Η εμπλοκή της ρημάννειας δομής στο πρόβλημα έκανε δυνατή την χρήση ισχυρών αναλυτικών μεθόδων από την μιγαδική ανάλυση και τις διαφορικές εξισώσεις. Εφ' εξής, το ζητούμενο όσον αφορά την εικασία του Poincaré ήταν η απόδειξη ότι, εκκινώντας από οποιαδήποτε ρημάννεια μετρική, αυτή μπορεί να παραμορφωθεί εντός πεπερασμένου χρόνου σε μια μετρική σταθερής καμπυλότητας η οποία συγκαταλλέγεται στις γεωμετρίες του Thurston. Η ιδέα ανήκει στον R. Hamilton (δεκαετία του '80), που συνέλαβε και διετύπωσε το πρόβλημα με όρους διάχυσης θερμότητας (ροή *Ricci*) λύνοντάς το σε πολλές ειδικές περιπτώσεις, και η τελική απόδειξη στον G. Perelman (2006), που με τις καινοτόμες τεχνικές του υπερπήδησε τα εμπόδια που συνάντησε ο Hamilton στα ιδιάζοντα σημεία της πολλαπλότητας.

Σε αυτήν την εργασία μελετώνται στοιχειωδώς οι πολλαπλότητες, ειδικότερα οι 3-διάστατες, από την άποψη της τοπολογίας και της ρημάννειας γεωμετρίας, με εκτεταμένη χρήση εργαλείων από την άλγεβρα (ομάδες) και την θεωρία των τανυστικών πεδίων (διαφορικές μορφές). Τελικός σκοπός είναι ο εντοπισμός και η ταξινόμηση των οκτώ ομογενών γεωμετριών του 3-διάστατου χώρου, όπως έγινε από τον Thurston σε σχέση με την εικασία της γεωμετροποίησης. Παραβιάζοντας ελαφρώς την λογική σειρά χάριν της ενότητας του περιεχομένου, ένας ορισμός είναι δυνατόν να εμφανίζεται πριν την διατύπωσή του, εάν χρησιμοποιείται από μόνος του και όχι μέσω κάποιας πρότασης που τον εμπλέκει.

Περιεχόμενα

Πρόλογος . . . . . III-V

I. Στοιχεία και τοπολογία πολλαπλοτήτων

1. Γενική τοπολογία 1
2. Πηλίκο και ξένη ένωση 4
3. Ψευδοομάδες δομής 6

II. Διαφορικές πολλαπλότητες

1. Βασικές κατασκευές 13
2. Μιγαδικές πολλαπλότητες 19
3. Προβολικοί χώροι 21
4. Απεικονίσεις σταθερού βαθμού 26

III. Νηματικές δέσμες

1. Φυλλώσεις 32
2. Νηματικές δέσμες 34
3. Διανυσματικές δέσμες 37

IV. Τανυστικά πεδία

1. Τανυστική άλγεβρα 42
2. $(0,2)$-Τανυστές (Διγραμμικές απεικονίσεις) 44
3. Τανυστικά και διανυσματικά πεδία 53
4. Παράγωγος *Lie* 59
5. Ρημάννειες μετρικές 65

V. Διαφορικές μορφές

1. Αντισυμμετρικοί τανυστές 68
2. Διαφορικές μορφές 72
3. Προσανατολισισμότητα 82
4. Ολοκλήρωση 84
5. Όγκος 92
6. Κατανομές σε πολλαπλότητες 95

VI. Ομάδες και χώροι επικάλυψης

1. Τοπολογικές επικαλύψεις 103
2. Δράση σε σύνολα 111
3. Τοπολογικές ομάδες 113
4. Μονοδρομία 115
5. Δράση τοπολογικών ομάδων σε πολλαπλότητες 120
6. Λείες και ισομετρικές επικαλύψεις 126
7. Ομάδες *Lie* - Γενικότητες 128
8. Δράση ομάδων *Lie* 132
9. Η ορθογώνια ομάδα 135
10. Ρημάννεια δομή σε ομογενείς χώρους 137

VII. Ρημάννεια γεωμετρία

Εισαγωγή 141
1. Συναλλοίωτη παράγωγος σε διανυσματικές δέσμες 142
2. Συνοχές σε νηματικές δέσμες 143
3. Συνοχές σε διανυσματικές δέσμες 146
4. Παράλληλη μεταφορά και γεωδαισιακές σε πολλαπλότητα με συνοχή 151
5. Συνοχή *Levi-Civitá* 156
6. Γεωδαισιακές σε ρημάννειες πολλαπλότητες 161
7. Καμπυλότητα 169
8. Γεωμετρία των πεδίων *Jacobi* 182

VIII. Γεωμετρικές δομές

1. Οι μορφές του χώρου 186
2. (G, X)-Πολλαπλότητες 195
3. Η 3-διαστατη σφαίρα 203
4. Γεωμετρία σε 3-διάστατες δομές επαφής 215
5. Μηδενογεωμετρία 224
6. $\widetilde{SL}_2$ και Sol-Γεωμετρία 228
7. Οι 8 πρότυπες γεωμετρίες 230

Βιβλιογραφία 237
Ευρετήριο 239

Στοιχεία και τοπολογία πολλαπλοτήτων

§1. ΓΕΝΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Θεωρείται γνωστό από την γενική τοπολογία το ακόλουθο στοιχειώδες:

Ι.§1.0. (Λήμμα συγκόλλησης).

Εάν (U_i) ανοικτό κάλυμμα του τοπολογικού χώρου X και $f_i : U_i \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, τότε η συνάρτηση $f : X \to Y$, $f(x) = f_i(x)$ εάν $x \in f_i$, είναι συνεχής. Ένας τοπολογικός χώρος ονομάζεται **τοπικά συμπαγής** όταν κάθε σημείο του έχει ανοικτή περιοχή που περιέχεται συμπαγές υποσύνολο του χώρου. Η ιδιότητα της τοπικής συμπάγειας γίνεται ισχυρή εάν συνδυαστεί με την *Hausdorff*.

Ι.§1.2. Εάν X χώρος *Hausdorff*, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) ο X είναι τοπικά συμπαγής·

(ii) κάθε σημείο του X έχει σχετικά συμπαγή περιοχή·

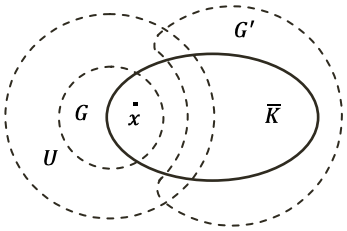
(iii) ο X έχει βάση από σχετικά συμπαγή ανοικτά σύνολα.

Αποδ. Προφανώς (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i). Για να δειχθεί ότι (i) $\Longrightarrow$ (ii), αρκεί να βρεθεί τοπική βάση από σχετικά συμπαγή ανοικτά σύνολα γύρω από κάθε $x \in X$. Λόγω τοπικής συμπάγειας, υπάρχει $U \subset X$ ανοικτό και $K \subset X$ συμπαγές τέτοιο ώστε $x \in U \subset K$. Η συλλογή $\mathfrak{B}$ των ανοικτών περιοχών του x που περιέχονται στο U είναι τοπική βάση του x. Μένει να δειχθεί ότι συγκροτείται από σχετικά συμπαγή σύνολα. Εάν $B \in \mathfrak{B}$, τότε $\overline{B} \subset K$ (το K είναι κλειστό ως συμπαγές σε *Hausdorff*), άρα $\overline{B}$ συμπαγές στο K (ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς), και επομένως $\overline{B}$ συμπαγές στο X. ■

Ι.§1.3. (Λήμμα συρρίκνωσης).

Κάθε ανοικτή περιοχή ενός σημείου σε τοπικά συμπαγή *Hausdorff* χώρο περιέχει σχετικά συμπαγή περιοχή του σημείου, της οποίας η κλειστότητα περιέχεται στην αρχική περιοχή.

Αποδ. Έστω U ανοικτή περιοχή του x· ζητείται V σχετικά συμπαγής περιοχή του x τέτοια ώστε $\overline{V} \subset U$. Έστω K σχετικά συμπαγής περιοχή του X (Ι.§1.1.ii), τότε $\overline{K} \setminus U$ κλειστό στο $\overline{K}$ και επομένως συμπαγές, άρα συμπαγές στο X.



Επειδή σε χώρο *Hausdorff* τα ξένα συμπαγή διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα ξένα μεταξύ τους, υπάρχουν G, G' ξένα ανοικτά τέτοια ώστε $x \in G$ και $\overline{K} \setminus U \subset G'$. Επιλέγουμε $V = G \cap K$. Επειδή $\overline{V} \subset \overline{K}$, το $\overline{V}$ είναι συμπαγές. Θα δειχθεί ότι $\overline{V} \subset U$. Επειδή $\overline{V} \subset \overline{K}$ και $\overline{G} \cap G' = \emptyset$, έπεται ότι $\overline{V} \subset \overline{K} \setminus G'$. Όμως $\forall \setminus U \subset G'$, άρα $\overline{F} \setminus G' \subset U$, και επομένως $\overline{V} \subset U$. ■

Ι.§1.4. Η *Hausdorff* τοπική συμπάγεια κληροδοτείται στα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολα του χώρου.

Αποδ. Επειδή η ιδιότητα *Hausdorff* κληροδοτείται στους υποχώρους, αρκεί να δειχθεί ότι κάθε ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο είναι τοπικά συμπαγές. Εάν $U \subset X$ ανοικτό, από λήμμα συρρίκνωσης και πρόταση Ι.§1.2.ii έπεται το ζητούμενο. Εάν $F \subset X$ κλειστό, κάθε $x \in F$ έχει σχετικά συμπαγή περιοχή V (πρόταση Ι.§1.1.ii). Επειδή $\overline{V \cap F} = \bar{V} \cap F$ κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $\bar{F}$, έπεται ότι $V \cap F$ συμπαγές, άρα $V \cap F$ σχετικά συμπαγής περιοχή του x στο F. ■

Ι.§1.5. (Θεώρημα Baire για τοπικά συμπαγείς *Hausdorff* χώρους).

Σε τοπικά συμπαγή *Hausdorff* χώρο, αριθμήσιμη τομή ανοικτών πυκνών είναι πυκνό (επομένως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων με κενό εσωτερικό έχει κενό εσωτερικό).

Αποδ. Έστω X τοπικά συμπαγής *Hausdorff*, $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πυκνών υποσυνόλων και $U \subset X$ ανοικτό. Πρέπει να δειχθεί ότι $U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$. Ισχύει $U \cap D_1 \neq \emptyset$ λόγω πυκνότητας, και επειδή $U \cap D_1$ ανοικτό, από λήμμα συρρίκνωσης έπεται ότι υπάρχει σχετικά συμπαγές ανοικτό V_1 τέτοιο ώστε $\overline{V_1} \subset U \cap D_1$. Ομοίως υπάρχει σχετικά συμπαγές ανοικτό $\overline{V}_{n+1} \subset V_n \cap D_{n+1}$. Συγκροτείται έτσι φθίνουσα ακολουθία συμπαγών $(\overline{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\overline{V_n} \subset U \cap D_1 \cap \ldots \cap D_n$. Από τα γνωστά για φθίνουσα ακολουθία συμπαγών, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V}_n \neq \emptyset$, και επομένως $U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$. ■

Το επόμενο είναι παραλλαγή του λήμματος κλειστής απεικόνισης, όπου η συμπάγεια του πεδίου ορισμού και η *Hausdorff* ιδιότητα του πεδίου τιμών αντικαθίστανται από *Hausdorff* ιδιότητα και *Hausdorff* τοπική συμπάγεια αντιστοίχως.

Ι.§1.6. Συνεχής απεικόνιση από *Hausdorff* σε τοπικά συμπαγή *Hausdorff* που αντιστρέφει συμπαγή σε συμπαγή είναι κλειστή.

Αποδ. Έστω $F \subset X$ κλειστό, όπου $f : X \to Y$ συνάρτηση όπως στην υπόθεση. Θα δειχθεί ότι εάν y οριακό του $f[F]$, τότε $y \in f[F]$. Από Ι.§1.1.ii, υπάρχει $V \subset Y$ ανοικτή σχετικά συμπαγής περιοχή του y. Προφανώς y οριακό του $f[F] \cap \bar{V}$. Εξ υποθέσεως, $f^{-1}[\bar{V}]$ συμπαγές, άρα $f^{-1}[\bar{V}]$ κλειστό ως συμπαγές σε *Hausdorff*. Επειδή F κλειστό, $f^{-1}[\bar{V}] \cap F$ κλειστό στον συμπαγή $f^{-1}[\bar{V}]$, άρα $f^{-1}[\bar{V}] \cap F$ συμπαγές στο $f^{-1}[\bar{V}]$, δηλαδή $f^{-1}[\bar{V}] \cap F$ συμπαγές στο X. Λόγω συνέχειας της f, $f[f^{-1}[\bar{V}] \cap F] = f[F] \cap \bar{V}$ συμπαγές στο Y, και επομένως κλειστό (εφ' όσον Y *Hausdorff*). Τότε $y \in f[F] \cap \bar{V}$ εφ' όσον y οριακό του $f[F] \cap \bar{V}$, άρα $y \in f[F]$. ■

Ι.§1.6. Συνεχής και αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση ανάμεσα σε *Hausdorff* τοπικά συμπαγείς χώρους που αντιστρέφει συμπαγή σε συμπαγή είναι ομοιομορφισμός.

Αποδ. Άμεσα από Ι.§1.6. ■

Συμπαγοποίηση ενός τοπολογικού χώρου X ονομάζεται ένας συμπαγής *Hausdorff* τοπολογικός χώρος $\tilde{X}$ τέτοιος ώστε $\tilde{X} = \bar{X}$ και η τοπολογία του X συμπίπτει με την επαγόμενη σε αυτόν από τον $\tilde{X}$. Δύο συμπαγοποιήσεις $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2$ του X ονομάζονται **ισοδύναμες** όταν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : \tilde{X}^1 \to \tilde{X}^2$ τέτοιος ώστε $h\big|_X = id_X$.

Ι.§1.7. (Συμπαγοποίηση *Alexandrov*).

Ένας τοπολογικός χώρος X είναι *Hausdorff* τοπικά συμπαγής εάν και μόνον εάν εμφυτεύεται τοπολογικά σε συμπαγή *Hausdorff* χώρο Y ώστε $Y \setminus X$ να είναι μονοσύνολο. Αυτή η συμπαγοποίηση είναι μοναδική πάνω από ισοδυναμία.

Αποδ. Για την μοναδικότητα, έστω Y, Y' χώροι όπως στην υπόθεση με $Y' \setminus X = \{P\}$, $Y \setminus X = \{Q\}$. Ορίζουμε την αμφιμονοσήμαντη $h : Y \to Y'$, $h(x) = x$ εάν $x \in X$ και $h(Q) = P$. Θα δειχθεί ότι μεταφέρει ανοικτά σε ανοικτά (με συμμετρικό επιχείρημα, αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά, οπότε είναι ομοιομορφισμός). Έστω $U \subset Y$ ανοικτό. Εάν $U \subset Y$, τότε $h[U] = U$ που είναι ανοικτό στον X και άρα στον Y' (η τοπολογία του X είναι η επαγόμενη από τον Y' εξ υποθέσεως). Εάν $P \in U$, τότε $Y \setminus U$ κλειστό στο Y, άρα συμπαγές και επομένως $Y \setminus U$ συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε $Y \setminus U$ συμπαγές υποσύνολο του Y', άρα $Y \setminus U$ κλειστό στον Y', εφ' όσον Y' *Hausdorff*. Όμως $Y' \setminus U = Y \setminus U$, δηλαδή $Y' \setminus U$ κλειστό στον Y', και άρα $h[U]$ ανοικτό στον Y' ως συμπληρωματικό του $Y' \setminus U$.

"$\Longrightarrow$,, Ορίζουμε $Y = X \cup \{\infty\}$ και εφοδιάζουμε το Y με την τοπολογία που συγκροτείται από τα ανοικτά του X και τα $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$, όπου K συμπαγές υποσύνολο του X. Αποδεικνύεται εύκολα λαμβάνοντας

περιπτώσεις ότι αυτή η συλλογή είναι όντως τοπολογία και ότι επάγει στο X την τοπολογία που αυτό ήδη έχει. Μένει να δειχθεί ότι Y είναι *Hausdorff* και συμπαγής.

Συμπάγεια: Έστω $\mathfrak{U}$ ανοικτό κάλυμμα του Y, τότε αυτή έχει τουλάχιστον ένα μέλος της μορφής $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$, όπου K συμπαγές του X. Τα υπόλοιπα μέλη του καλύμματος συγκροτούν κάλυμμα του K, που λόγω συμπάγειας έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Η επισύναψη του $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ σε αυτό δίνει το ζητούμενο πεπερασμένο υποκάλυμμα του Y.

Hausdorff: Έστω $x, y \in Y$. Εάν και τα δύο βρίσκονται στο X, τα ζητούμενα ανοικτά διαχωριστικά υπάρχουν επειδή ο X είναι *Hausdorff* και η τοπολογία του περιέχεται στην τοπολογία του Y. Εάν $x \in X$ και $y = \infty$, επειδή X είναι *Hausdorff* τοπικά συμπαγής, υπάρχει συμπαγής περιοχή K του x στο X που περιέχει ανοικτή περιοχή U του x στο X και άρα στο Y. Τότε $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$, η ζητούμενη ανοικτή περιοχή του y στο Y.

,,$\Longleftarrow$" Ο X είναι *Hausdorff* ως υπόχωρος του Y. Για να δειχθεί η τοπική συμπάγεια του X, αρκεί να βρεθεί συμπαγής περιοχή K του τυχαίου $x \in X$ στο X που περιέχει ανοικτή περιοχή U του x. Επειδή Y είναι *Hausdorff*, x και ∞ διαχωρίζονται από ανοικτά U και $Y \setminus U$. Τότε K και U είναι οι ζητούμενες περιοχές του x (από τον ορισμό της τοπολογίας του Y).■

Από την κατασκευή της τοπολογίας Y στην παραπάνω απόδειξη, φαίνεται ότι το ∞ είναι μεμονωμένο σημείο της τοπολογίας του ακριβώς όταν ο X είναι συμπαγής, αλλιώς $\bar{X} = Y$. Επειδή η συμπάγεια είναι ειδική περίπτωση τοπικής συμπάγειας, η πρόταση Ι.§1.7 επαναδιατυπώνεται ως εξής:

Ι.§1.8. Ένας χώρος είναι *Hausdorff* τοπικά συμπαγής εάν και μόνον εάν υπάρχει *Hausdorff* συμπαγής χώρος με ένα σημείο επιπλέον, στον οποίον εμφυτεύεται ως πυκνός τοπολογικός υπόχωρος. Ο τρόπος εμφύτευσης είναι τότε μοναδικός και όλες οι συμπαγοποιήσεις ενός σημείου είναι ισοδύναμες.

Ι.§1.9. Η *Hausdorff* τοπική συμπάγεια συνεπάγεται την $T_{3/2}$ ιδιότητα.

Αποδ. Κάθε *Hausdorff* τοπικά συμπαγής επιδέχεται συμπαγοποίησης *Alexandrov*. Κάθε *Hausdorff* συμπαγής είναι T_4 (*normal*), επομένως $T_{3/2}$, και επειδή η $T_{3/2}$-ιδιότητα κληροδοτείται στους υποχώρους, έπεται το ζητούμενο. ■

Τοπικά συνεκτικός καλείται ένας τοπολογικός χώρος X όταν για κάθε $x \in X$ και κάθε U ανοικτή περιοχή του x υπάρχει συνεκτική ανοικτή περιοχή C του x τέτοια ώστε $C \subset U$· ισοδύναμα, εάν επιδέχεται βάσης από ανοικτά συνεκτικά σύνολα. Ο X ονομάζεται **τοπικά δρομοσυνεκτικός** όταν ισχύει η παραπάνω συνθήκη, με το C να είναι δρομοσυνεκτικό αντί για συνεκτικό.

Ι.§1.10. Κάθε συνεκτική συνιστώσα τοπικά συνεκτικού χώρου είναι ανοικτό σύνολο.

Αποδ. Από τοπική συνεκτικότητα, για κάθε σημείο μιας συνεκτικής συνιστώσας υπάρχει συνεκτική ανοικτή περιοχή αυτού που, επειδή η συνεκτική συνιστώσα είναι μεγιστικό συνεκτικό, περιέχεται στην πρώτη. Άρα η συνιστώσα γράφεται ως ένωση ανοικτών. ■

Ι.§1.11. Σε έναν τοπικά δρομοσυνεκτικό χώρο ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) κάθε δρομοσυνεκτική συνιστώσα είναι ανοικτό σύνολο·
(ii) οι δρομοσυνεκτικές και οι συνεκτικές συνιστώσες ταυτίζονται·
(iii) είναι συνεκτικός εάν και μόνον εάν είναι δρομοσυνεκτικός.

Αποδ. (i) Όμοια απόδειξη με αυτήν της πρότασης Ι.§1.10. (ii) Έστω x στοιχείο του χώρου και $C(x)$, $D(x)$ η συνεκτική και η δρομοσυνεκτική συνιστώσα του αντιστοίχως. Ισχύει $C(x) \subset D(x)$ και η $C(x)$ γράφεται ως ξένη ένωση δρομοσυνεκτικών συνιστωσών, που από πρόταση Ι.§1.11.i είναι ανοικτά σύνολα. Εάν το $D(x)$ δεν είναι η μοναδική τέτοια συνιστώσα, τότε το $C(x)$ γράφεται ως ξένη ένωση των μη κενών, ανοικτών συνόλων $D(x)$, $C(x) \setminus D(x)$, άτοπο, λόγω συνεκτικότητας του $C(x)$. (iii) Άμεσα, από Ι.§1.11.ii. ■

Έπεται άμεσα ότι η δρομοσυνεκτικότητα ισοδυναμεί με τοπική δρομοσυνεκτικότητα+συνεκτικότητα.

Ι.§1.12. Σε έναν T_3, 2ο-αριθμήσιμο χώρο, κάθε σημείο έχει τοπολογική βάση περιοχών της μορφής $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\overline{W}_{n+1} \subset W_n$.

Αποδ. Ο χώρος έχει αριθμήσιμη βάση (ως 2ος-αριθμήσιμος) και έστω $(U_n)_{\mathbb{N}}$ τα μέλη αυτής που περιέχουν το σημείο x. Ελέγχεται ότι η $(V_n)_{\mathbb{N}}$, $V_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, είναι τοπολογική βάση περιοχών γύρω από το x. Κατασκευάζουμε την ζητούμενη ακολουθία ως υπακολουθία αυτής επαγωγικά. Επιλέγουμε $W_1 = V_1$ και υποθέ-

τουμε ότι έχει επιλεγεί το $W_i = V_{n_i}$. Λόγω της T_3-ιδιότητας, υπάρχει $k \geq 1$ ώστε $\bar{V}_{n_i+k} \subset V_{n_i}$, οπότε επιλέγουμε $W_{i+1} = V_{n_i+k}$. ■

Η Ι.§1.12 επιτρέπει την ακολουθιακή περιγραφή της κλειστότητας σε T_3, 2ους-αριθμήσιμους χώρους:

Ι.§1.13. Σε T_3, 2ο-αριθμήσιμο χώρο, ένα σημείο ανήκει στην κλειστότητα ενός συνόλου εάν και μόνον εάν προσεγγίζεται από ακολουθία εντός του συνόλου αυτού.

Αποδ. Έστω X T_3, 2ος-αριθμήσιμος, $Y \subset X$ και $a \subset X$. Εάν $(a_n)_{\mathbb{N}} \subset Y$ με $a_n \to a$, τότε κάθε ανοικτή περιοχή του a τέμνεται με το Y και επομένως $a \in \bar{Y}$. Αντιστρόφως, εάν $a \in \bar{Y}$, επιλέγουμε τοπολογική βάση (W_n) γύρω από το a τέτοια ώστε $\bar{W}_{n+1} \subset W_n$. Εφ' όσον τα W_n τέμνονται με το Y, συγκροτείται η ζητούμενη ακολουθία. ■

Ι.§1.14. Συμπαγές υποσύνολο T_3, 2ου-αριθμήσιμου χώρου είναι κλειστό.

Αποδ. Έστω Y συμπαγές στον T_3, 2ο-αριθμήσιμο χώρο X που δεν είναι κλειστό, οπότε $\exists a \in \bar{Y} \setminus Y$. Από πρόταση Ι.§1.13, υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $a_n \to a$, που εφ' όσον $a \notin Y$ περιέχει άπειρους το πλήθος διακεκριμένους όρους. Άρα το $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άπειρο, και εφ' όσον Y συμπαγές, έχει οριακό σημείο στο Y, άτοπο, διότι το a είναι το μόνο οριακό σημείο του $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και δεν ανήκει στο Y. ■

Ι.§1.15. Σε T_3, 2ο-αριθμήσιμο χώρο, η τομή φθίνουσας ακολουθίας μη κενών συμπαγών συνόλων είναι μη κενό συμπαγές σύνολο.

Αποδ. Έστω $(F_n)_{\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία μη κενών, συμπαγών και $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Εάν η $(F_n)_{\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή, το ζητούμενο ισχύει άμεσα. Εάν όχι, επιλέγουμε υπακολουθία $(F'_n)_{\mathbb{N}}$ της $(F_n)_{\mathbb{N}}$ ώστε $F'_{n+1} \subsetneq F'_n$, και κατ' επέκταση ακολουθία σημείων $(a_n)_{\mathbb{N}}$ με $a_n \in F'_n \setminus F'_{n+1}$, που προφανώς είναι διακεκριμένα. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $Y_n = \{a_k \mid k \geq n\}$ είναι άπειρο και επίσης $\bar{Y}_i = \bar{Y}_j$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$, εφ' όσον τα Y_i, Y_j διαφέρουν κατά πεπερασμένα το πλήθος σημεία. Εάν Y η κοινή τους κλειστότητα, τότε $Y \subset F$ εφ' όσον $Y \subset F'_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Επειδή $Y \neq \emptyset$, έπεται ότι F μη κενό (διότι $Y_n \subset F'_n$). Το F είναι συμπαγές ως τομή κλειστών συνόλων που περιέχεται στο συμπαγές F_1. ■

Ι.§1.16. Σε T_3, 2ο-αριθμήσιμο χώρο, εάν ένα ανοικτό σύνολο τέμνεται με την τομή φθίνουσας ακολουθίας μη κενών συμπαγών, τότε η ακολουθία περιέχεται τελικά σε αυτό.

Αποδ. Έστω U ανοικτό και $(F_n)_{\mathbb{N}}$ ακολουθία όπως στην υπόθεση. Θέτουμε $E_n = F_n \setminus U$, που είναι συμπαγές: κλειστό ως τομή των κλειστών U^C, F_n και συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς F_n. Ισχύει $E_{n+1} \subset E_n$. Εάν $E_n = \emptyset$ τελικά, τότε το ζητούμενο ισχύει. Αλλιώς, από πρόταση Ι.§1.15, το $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ είναι μη κενό, άτοπο διότι $E = F \setminus U$, όπου $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset U$ εξ υποθέσεως. Άρα $E_n = \emptyset$ τελικά. ■

§2. ΠΗΛΙΚΟ ΚΑΙ ΞΕΝΗ ΕΝΩΣΗ

Εάν $q : (X, \tau_X) \to Y$ επιμορφισμός από τοπολογικό χώρο σε σύνολο, καλείται q-**ίνα** η αντίστροφη εικόνα στοιχείου του Y κάτω από την q. **Τοπολογία πηλίκο** για την q ονομάζεται η ελάχιστη τοπολογία επί του συνόλου των q-ινών που καθιστά την q συνεχή, δηλαδή η $\{V \subset Y \mid q^{-1}V \in \tau_X\}$. **Απεικόνιση πηλίκο** ονομάζεται ένας συνεχής επιμορφισμός $q : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ όταν η τ_Y συμπίπτει με την τοπολογία πηλίκο για την απεικόνιση q (το Y ταυτίζεται συνολοθεωρητικά με το σύνολο των q-ινών εφ' όσον η q είναι επιμορφισμός). Ένα $U \subset X$ ονομάζεται q-**εμποτισμένο** όταν γράφεται ως ένωση q-ινών του X. Κάθε σχέση ισοδυναμίας επάγει με προφανή τρόπο μια τοπολογία πηλίκο πάνω στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας της (την ελαχιστική τοπολογία που καθιστά συνεχή την κανονική προβολή στην διαμέριση της σχέσης ισοδυναμίας).

Η τοπολογία πηλίκο είναι η τοπολογία με την οποία εφοδιάζεται ένα σύνολο που προκύπτει από ταυτίσεις στοιχείων ενός άλλου. Κάθε υποσύνολο Y ενός τοπολογικού χώρου X επάγει μια σχέση ισοδυναμίας στο X: $x_1 \sim x_2$ εάν και μόνον εάν $x_1 = x_2$ ή $x_1, x_2 \in Y$ («χώρος ταύτισης»). Συμβολίζοεται X/Y το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας αυτής της σχέσης, δηλαδή το σύνολο των q-ινών, όπου q η κανονική προβολή.

Επειδή κάθε επιμορφισμός με πεδίο ορισμού τον X επάγει μια σχέση ισοδυναμίας σε αυτόν και αντιστρόφως, και εφ' όσον η τοπολογία πηλίκο εξαρτάται από την αντίστοιχη διαμέριση X και μόνον, έπεται ότι εάν οι ίνες δύο επιμορφισμών $q_1 : X \to Y_1$, $q_2 : X \to Y_2$ συμπίπτουν, τότε επάγουν την ίδια τοπολογία πηλίκο στα Y_1, Y_2.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d] \arrow[dr, "q_2"] & \\ Y_2 & X/Y \arrow[l] \arrow[r] & Y_1 \end{tikzcd}$$

Αποδεικνύεται με χρήση των ορισμών το ακόλουθο:

Ι.§2.0. Ένας συνεχής επιμορφισμός είναι απεικόνιση πηλίκο εάν και μόνον εάν απεικονίζει ανοικτά εμποτισμένα σε ανοικτά. Επομένως σύνθεση απεικονίσεων πηλίκων είναι πηλίκο.

Ι.§2.1. (Χαρακτηριστική ιδιότητα τοπολογίας πηλίκο).

Εάν $q : X \to Y$ συνεχής επιμορφισμός, τότε

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f \circ q"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} \text{ο } X \text{ είναι εφοδιασμένος με} \\ \text{την τοπολογία πηλίκο της } q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall f : Y \to Z, \\ f \text{ συνεχής εάν και μόνο εάν } f \circ q \text{ συνεχής} \end{pmatrix}$$

Ι.§2.2. Συνεχής επιμορφισμός από συμπαγή χώρο σε χώρο *Hausdorff* είναι απεικόνιση πηλίκο.

Αποδ. Από λήμμα κλειστής απεικόνισης, μια τέτοια συνάρτηση διατηρεί την κλειστότητα, άρα απεικονίζει ανοικτά εμποτισμένα σε ανοικτά. Από Ι.§2.0 έπεται το ζητούμενο. ■

Ι.§2.3. (Πέρασμα στο πηλίκο).

Έστω $q : X \to Y$ απεικόνιση πηλίκο και $f : X \to Z$ συνεχής που σέβεται τις q-ίνες. Υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $\hat{f} : Y \to Z$ που καθιστά το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, "\hat{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

Αποδ. Εφ' όσον f σέβεται τις q-ίνες, ορίζεται καλά η $\hat{f}$ ως $\hat{f}\big(q(x)\big) = f(x)$, που προφανώς καθιστά το διάγραμμα αντιμεταθετικό. Η συνέχεια έπεται από την χαρακτηριστική ιδιότητα του πηλίκου. ■

Το επόμενο είναι χρήσιμο κατά τον έλεγχο ότι το πηλίκο πολλαπλότητας είναι πολλαπλότητα (βλ. επόμενη παράγραφο)· συγκεκριμένα, εγγυάται ότι αρκεί να ελεγχθεί το τοπικό ευκλείδειο και η *Hausdorff* ιδιότητα του πηλίκου για να αποφανθούμε.

Ι.§2.4. Εάν $q : X \to Y$ απεικόνιση πηλίκο από 2ο-αριθμήσιμο σε τοπικά ευκλείδειο χώρο, τότε ο Y είναι 2ος-αριθμήσιμος.

Αποδ. Εφ' όσον Y τοπικά ευκλείδιος, έχει κάλυμμα $(E_i)_{i\in I}$ από ευκλείδειες περιοχές. Τότε $(q^{-1}[E_i])_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του X, και εφ' όσον X είναι 2ος-αριθμήσιμος, υπάρχει $(q^{-1}[E_{i_m}])_{m\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμο υποκάλυμμα αυτού, οπότε $(E_{i_m})_{m\in\mathbb{N}}$ κάλυμμα του Y. Επειδή είναι ομοιομορφική με τον $\mathbb{R}^n$, κάθε μια από τις E_{i_m} έχει αριθμήσιμη βάση $\mathfrak{B}_m$. Τότε $\mathfrak{B} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}_m$ είναι η ζητούμενη βάση του Y, που είναι αριθμήσιμη ως αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων. ■

Ι.§2.5. Πηλίκο συμπαγούς χώρου είναι συμπαγές.

Αποδ. Το πηλίκο είναι εικόνα συμπαγούς χώρου μέσω συνεχούς απεικόνισης. ■

Έστω τώρα $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}\{(x,i) \,|\, x \in X_i\}$ η συνολοθεωρητική ξένη ένωση αυτών. Θεωρούμε τις κανονικές εμφυτεύσεις $\varphi_i : X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$, $\varphi_i(x) = (x,i)$, οπότε $(\varphi_i[X_i])_{i\in I}$ διαμέριση του $\coprod_{i\in I} X_i$. Εφοδιάζουμε το $\coprod_{i\in I} X_i$ με την μεγιστική τοπολογία που καθιστά συνεχείς τις φ_i, $i \in I$ (**τοπολογία ξένης ένωσης**): ένα $U \subset \coprod_{i\in I} X_i$ είναι ανοικτό εάν και μόνον εάν $\varphi_i^{-1}[U]$ ανοικτό στο X_i, για όλα τα i.

Ι.§2.6. (Χαρακτηριστική ιδιότητα ξένης ένωσης).

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, "f\circ\varphi_i"'] \arrow[d, "\varphi_i"] \\ Y & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Εάν τ τοπολογία επί του $\coprod_{i\in I} X_i$ και τ_i η τοπολογία του X_i, τότε

$$\left(\begin{matrix}\text{η } \tau \text{ είναι η τοπολογία} \\ \text{ξένης ένωσης}\end{matrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{matrix}\forall f : \coprod_{i\in I} X_i \to Y, \\ f \text{ συνεχής εάν και μόνο εάν } f\circ\varphi_i \text{ συνεχής, } \forall i \in I\end{matrix}\right)$$

§3. ΨΕΥΔΟΟΜΑΔΕΣ ΔΟΜΗΣ

Ψευδοομάδα επί ενός τοπολογικού χώρου X ονομάζεται μια συλλογή $\mathcal{G}$ από ομοιομορφισμούς ανάμεσα σε ανοικτά σύνολα του X, τα πεδία ορισμού των οποίων καλύπτουν τον X, η οποία είναι κλειστή ως προς την σύνθεση, την αντιστροφή, τον περιορισμό σε ανοικτά σύνολα και την συγκόλληση (δηλαδή εάν $q : U \to V$ ομοιομορφισμός μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του X και U_a, $a \in A$ ανοικτό κάλυμμα του U τέτοιο ώστε $g\big|_{U_a} \in \mathcal{G}$, τότε $g \in \mathcal{G}$ επίσης).

n-**χάρτης** επί ενός τοπολογικού χώρου M ονομάζεται ένα ζεύγος (U, φ), όπου $U \subset M$ ανοικτό υποσύνολο και $\varphi : U \to \varphi[U] \subset \mathbb{R}^n$ ομοιομορφισμός του U με συνεκτικό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Εάν $x \in U$, τότε το (U, φ) ονομάζεται **τοπικός** n-**χάρτης γύρω από** το x.

Δεδομένης ψευδοομάδας $\mathcal{G}$ επί του $\mathbb{R}^n$, δύο χάρτες (U, φ), (V, ψ) επί του M με $U \cap V \neq \emptyset$ ονομάζονται $\mathcal{G}$-**συμβατοί** όταν η **συνάρτηση μετάβασης** $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi[U \cap V] \to \psi[U \cap V]$ ανήκει στην $\mathcal{G}$. Μια συλλογή $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ από n-χάρτες επί του M ονομάζεται $\mathcal{G}$-**άτλας** όταν τα (U_i, φ_i) είναι $\mathcal{G}$-συμβατά ανά δύο και $(U_i)_{i\in I}$ κάλυμμα του M.

Προφανώς κάθε τοπολογικός χώρος M εφοδιασμένος με έναν $\mathcal{G}$-άτλαντα διάστασης n είναι **τοπικά** n-**ευκλείδειος** (δηλαδή κάθε σημείο του έχει ανοικτή περιοχή ομοιομορφική με ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$, και κατ' επέκταση με τον ίδιο τον $\mathbb{R}^n$). Επιπλέον, επειδή ένας άτλας είναι ανοικτό κάλυμμα, η τοπολογία του M προσδιορίζεται από αυτόν· συγκεκριμένα, δεδομένου $\mathcal{G}$-άτλαντα $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ επί του M, ένα $V \subset M$ είναι ανοικτό εάν και μόνον εάν $V \cap U_i$ είναι ανοικτό, $\forall i \in I$. Ομοίως, μια συνάρτηση f πάνω στο M είναι συνεχής εάν και μόνον εάν $f\big|_{U_i}$ είναι συνεχής για κάθε $i \in I$.

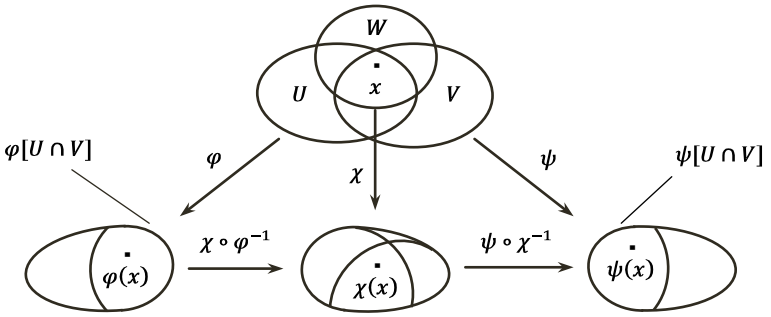
Δύο $\mathcal{G}$-άτλαντες $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ διάστασης n επί του τοπολογικού χώρου M ονομάζονται $\mathcal{G}$-**συμβατοί** όταν κάθε χάρτης του ενός είναι $\mathcal{G}$-συμβατός με κάθε χάρτη του άλλου. Η $\mathcal{G}$-συμβατότητα είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $\mathcal{G}$-ατλάντων επί του M, και για κάθε τέτοια κλάση υπάρχει μεγιστικός $\mathcal{G}$-άτλας που την αντιπροσωπεύει:

Ι.§3.0. Εάν $\mathcal{G}$ ψευδοομάδα επί του τοπολογικού χώρου X, τότε η $\mathcal{G}$-συμβατότητα είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $\mathcal{G}$-ατλάντων ενός τοπολογικού χώρου M.

Αποδ. Έστω $\mathcal{A}$ ένας $\mathcal{G}$-άτλας επί του M και $\bar{\mathcal{A}}$ το σύνολο των $\mathcal{G}$-χαρτών επί του M που είναι συμβατοί με κάθε χάρτη στον $\mathcal{A}$. Θα δειχθεί ότι ο $\bar{\mathcal{A}}$ είναι $\mathcal{G}$-άτλας, δηλαδή ότι δύο οποιαδήποτε (U, φ), $(V, \psi) \in \bar{\mathcal{A}}$ είναι $\mathcal{G}$-συμβατά. Εάν $x \in U \cap V$, τότε εφ' όσον $\mathcal{A}$ είναι $\mathcal{G}$-άτλας υπάρχει $(W, \chi) \in \bar{\mathcal{A}}$ με $\chi \in W$, και επειδή (U, φ), (V, ψ) είναι $\mathcal{G}$-συμβατοί, έπεται ότι οι απεικονίσεις

$$\chi \circ \varphi^{-1} : \varphi[U \cap W] \to \chi[U \cap W, \qquad \psi \circ \chi^{-1} : \chi[U \cap W] \to \psi[U \cap W]$$

ανήκουν στην $\mathcal{G}$, απ' όπου έπεται ότι η $\chi \circ \varphi^{-1} : \varphi[U \cap V \cap W] \to \psi[U \cap V \cap W]$ ανήκει στην $\mathcal{G}$ επίσης. Εφ' όσον για κάθε $x \in U \cap V$ υπάρχει ανοικτή περιοχή αυτού στο $U \cap V$ ώστε ο περιορισμός της $\psi \circ \chi^{-1}$ να ανήκει στην $\mathcal{G}$, έπεται ότι $\psi \circ \chi^{-1} : \varphi[U \cap V] \to \psi[U \cap V]$ ανήκει στην $\mathcal{G}$.



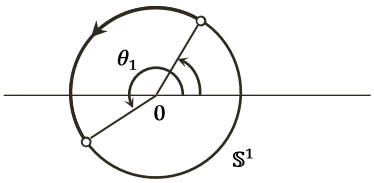
■

Δεδομένης συλλογής $\mathcal{G}_o$ από ομοιομορφισμούς ανάμεσα σε ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί τις τέσσερις πρώτες συνθήκες του ορισμού της ψευδοομάδας (κάλυψη του $\mathbb{R}^n$, κλειστότητα ως προς σύνθεση, αντιστροφή και περιορισμό σε ανοικτά σύνολα) κατασκευάζεται εύκολα με κατάλληλες συγκολλήσεις ελαχιστική ψευδοομάδα $\mathcal{G}$ που περιέχει την $\mathcal{G}_o$. Η τελευταία συνθήκη του ορισμού των ψευδοομάδων χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη ότι η $\mathcal{G}$-συμβατότητα είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $\mathcal{G}$-ατλάντων, επομένως είναι ουσιώδης για την καλώς ορισμένη διάκριση των $\mathcal{G}$-δομών πάνω σε μια πολλαπλότητα, οι οποίες εννοούνται ως κλάσεις συμβατότητας στο σύνολο των $\mathcal{G}$-ατλάντων.

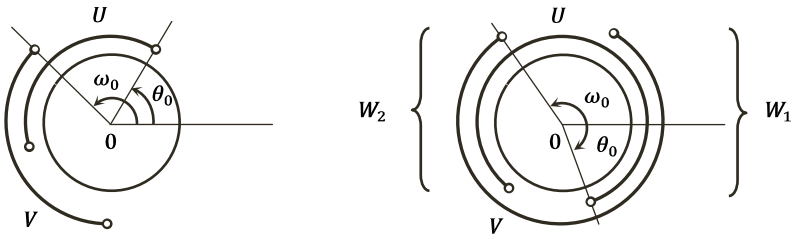
Συλλογές από ομοιομορφισμούς μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων που δεν ικανοποιούν την τελευταία συνθήκη του ορισμού των ψευδοομάδων, μπορούν να δώσουν σύνολο ατλάντων όπου η $\mathcal{G}$-συμβατότητα δεν είναι σχέση ισοδυναμίας. Επιλέγουμε $\mathcal{G}_o$ την συλλογή από μεταφορές ανοικτών συνόλων του $\mathbb{R}$, $\mathcal{G}_o = \{(U, x) \big| U \subset \mathbb{R}$ ανοικτό, $x \in \mathbb{R}\}$, οπότε η τελευταία συνθήκη δεν ικανοποιείται από την $\mathcal{G}_o$: εάν $(U, x), (V, y) \in \mathcal{G}_o$ με $U \cap V = \emptyset$, τότε ο ομοιομορφισμός

$$g : U \cap V \to g[U \cap V], \qquad g(z) = x + z \text{ εάν } x \in U, \quad y + z \text{ εάν } y \in V$$

δεν είναι μεταφορά του ανοικτού συνόλου $U \cap V$. Θα διαπιστωθεί ότι η $\mathcal{G}_o$-συμβατότητα δεν είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $\mathcal{G}_o$-ατλάντων της $\mathbb{S}^1$: χαρτογραφούμε κάθε ανοικτό συνεκτικό τόξο της $\mathbb{S}^1$ με αρχική και τελική γωνία θ_0, θ_1 αντιστοίχως (δεξιόστροφη διαγραφή) ως $\varphi : (0, \theta_1 - \theta_0) \to \mathbb{S}^1$, $\varphi(\theta) = e^{i(\theta+\theta_0)}$.



Οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να τέμνονται δύο τέτοιοι χάρτες $\varphi : (0, \theta_1 - \theta_0) \to \mathbb{S}^1$, $\varphi(\theta) = e^{i(\theta+\theta_0)}$ και $\psi : (0, \omega_1 - \omega_0) \to \mathbb{S}^1$, $\psi(\omega) = e^{i(\omega+\omega_0)}$ είναι (1) και (2):



(1) (2)

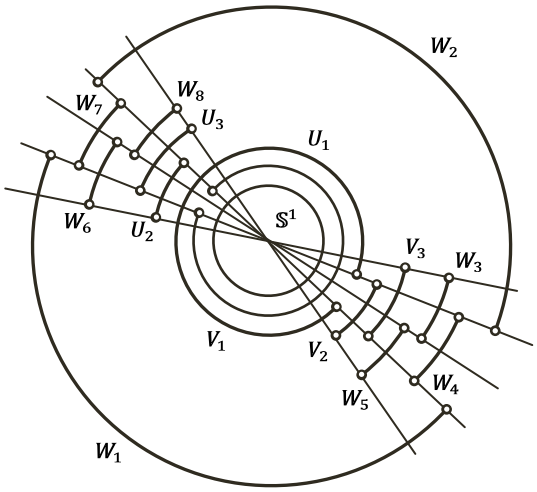
Στην *περίπτωση* (1) είναι $\varphi^{-1}(U \cap V) = (\omega_0 - \theta_0, \theta_1 - \theta_0)$, $\psi^{-1}(U \cap V) = (0, \theta_1 - \omega_0)$ και η συνάρτηση μετάβασης $\varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ είναι η μεταφορά κατά $\theta_0 - \omega_0$.

Στην *περίπτωση* (2) είναι

$$\varphi^{-1}(U \cap V) = \underbrace{(0, \omega_1 - \theta_0)}_{\varphi^{-1}[W_1]} \cup \underbrace{(\theta_1 - \omega_0, \theta_1)}_{\varphi^{-1}[W_2]}, \qquad \psi^{-1}(U \cap V) = \underbrace{(\omega_1 - \theta_0, \omega_1)}_{\psi^{-1}[W_1]} \cup \underbrace{(0, \theta_1 - \omega_0)}_{\psi^{-1}[W_2]}$$

και η συνάρτηση μετάβασης $\varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ δεν είναι μεταφορά.

Επομένως στην περίπτωση (1) υπάρχει $\mathcal{G}_o$-συμβατότητα μεταξύ των τεμνομένων χαρτών, ενώ στην (2) όχι. Βάσει αυτών των παρατηρήσεων, ελέγχεται ότι στο παρακάτω σχήμα οι συλλογές $(U_i)_{i=1}^3$, $(V_i)_{i=1}^3$, $(W_i)_{i=1}^8$ συγκροτούν $\mathcal{G}_o$-άτλαντες της $\mathbb{S}^1$, τέτοιους ώστε οι $(U_i)_{i=1}^3$, $(V_i)_{i=1}^3$ να είναι $\mathcal{G}_o$-συμβατοί με τον $(W_i)_{i=1}^8$ αλλά όχι μεταξύ τους. Άρα η $\mathcal{G}_o$-συμβατότητα δεν είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $\mathcal{G}_o$-ατλάντων της $\mathbb{S}^1$.



Θα οριστούν οι n-διάστατες πολλαπλότητες ώστε να μοντελοποιούν γεωμετρικά αντικείμενα που προκύπτουν από παραμόρφωση και συγκόλληση τμημάτων του n-διάστατου ευκλείδιου χώρου, δηλαδή αντικείμενα που αν και διαφέρουν από τον $\mathbb{R}^n$ ολικά, ωστόσο προσιδιάζουν σε αυτόν τοπικά, και η ψευδοομάδα δομής που χρησιμοποιείται για τον συσχετισμό των τμημάτων υποδεικνύει ποιες από τις ιδιότητες του $\mathbb{R}^n$ επιθυμούμε να διατηρηθούν τοπικά κατά την δόμηση του γεωμετρικού αντικειμένου. Εάν η απλή τοπολογική πολλαπλότητα οριζόταν ως ένας τοπικά n-ευκλείδιος χώρος, ισοδύναμα, ένας χώρος εφοδιασμένος με έναν Top-άτλαντα, όπου Top η ψευδοομάδα των ομοιομορφισμών μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, τότε θα επιτυγχάναμε το ζητούμενο. Επιθυμούμε επιπλέον οι πολλαπλότητες να έχουν ολικά την ιδιότητα της μετρικοποιησιμότητας, άρα ο κατάλληλος ορισμός είναι ο ακόλουθος.

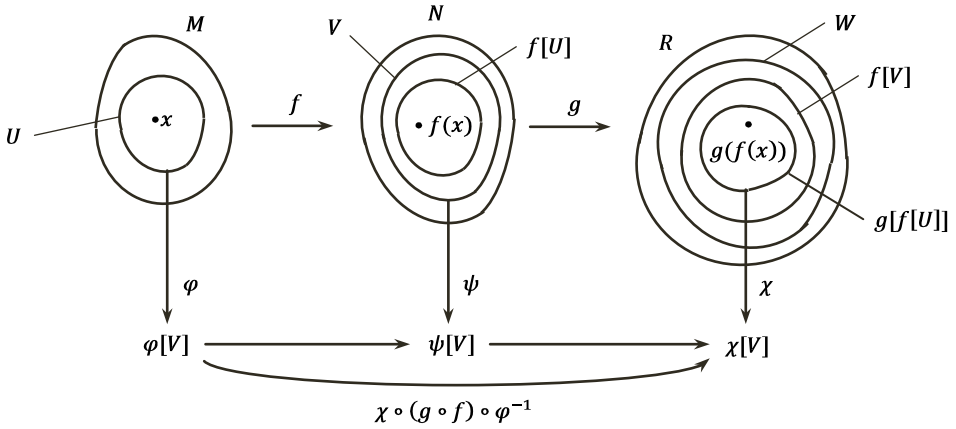
Δεδομένης ψευδοομάδας $\mathcal{G}$ επί του $\mathbb{R}^n$, καλείται $\mathcal{G}$-**πολλαπλότητα** ένα ζεύγος $(M, \mathcal{A})$, όπου M είναι *Hausdorff*, 2ος-αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $\mathcal{A}$ ένας αριθμήσιμος $\mathcal{G}$-άτλας επί του M. Θεωρούμε ότι δύο $\mathcal{G}$-πολλαπλότητες $(M, \mathcal{A}_1)$, $(M, \mathcal{A}_2)$ ταυτίζονται όταν οι άτλαντες $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ είναι $\mathcal{G}$-συμβατοί, οπότε ο $\mathcal{A}$ στον παραπάνω ορισμό μπορεί να θεωρηθεί μεγιστικός. Ορίζεται η διάσταση μιας $\mathcal{G}$-πολλαπλότητας να είναι η διάσταση του χώρου $\mathbb{R}^n$ επί του οποίου λαμβάνεται η ψευδοομάδα $\mathcal{G}$, δηλαδή $dimM = n$.

Μία συνεχής συνάρτηση $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ μεταξύ $\mathcal{G}$-πολλαπλοτήτων καλείται $\mathcal{G}$-**απεικόνιση** όταν για κάθε $x \in M$ και κάθε $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ γύρω από το $f(x)$, υπάρχει $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ γύρω από το x με $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{G}$.

Ι.§3.1. Σύνθεση $\mathcal{G}$-απεικονίσεων είναι $\mathcal{G}$-απεικόνιση.

Αποδ. Έστω $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$, $g : (N, \mathcal{B}) \to (R, \mathcal{C})$ $\mathcal{G}$-απεικονίσεις. Θα δειχθεί ότι η $g \circ f : (M, \mathcal{A}) \to$

$(R, \mathcal{C})$ είναι $\mathcal{G}$ βρίσκοντας για κάθε $x \in M$ και $(W, \chi) \in \mathcal{C}$ τοπικό χάρτη του $g(f(x))$ έναν τοπικό χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ του x ώστε $g \circ f[U] \subset W$ και $\chi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{G}$. Το ζητούμενο υπάρχει βάσει του παρακάτω σχήματος.



■

Τοπικός $\mathcal{G}$-ισομορφισμός καλείται ένας τοπικός ομοιομορφισμός $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ που είναι $\mathcal{G}$-απεικόνιση. Ονομάζεται $\mathcal{G}$-**ισομορφισμός** ένας τοπικός $\mathcal{G}$-ισομορφισμός που είναι ομοιομορφισμός και $\mathcal{G}$-**αυτομορφισμός** ένας $\mathcal{G}$-ισομορφισμός από μια $\mathcal{G}$-πολλαπλότητα στον εαυτό της.

Εξ ορισμού κάθε ψευδοομάδα $\mathcal{G}$ περιέχεται στην ψευδοομάδα Top. Συμβολίζουμε επιπλέον C^r, $r \geq 0$, την ψευδοομάδα των αμφιδιαφορίσεων μεταξύ ανοικτών συνόλων του $\mathbb{R}^n$ που έχουν συνεχή παράγωγο τάξεως r, $C^0 = Top$ κατά σύμβαση) και C^ω την υποομάδα των αμφιδιαφορίσεων μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που επιπλέον είναι πραγματικές αναλυτικές συναρτήσεις. Ισχύει $\mathcal{C}^\omega \subset \mathcal{C}^\infty \subset \mathcal{C}^{r+1} \subset \mathcal{C}^r \subset \mathcal{C}^0 = Top$.

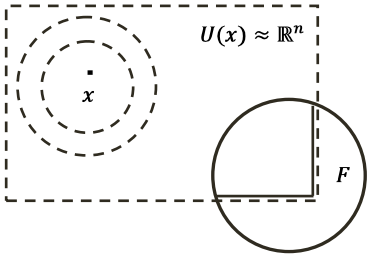
Εάν για δύο ψευδοομάδες $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ ισχύει $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, η $\mathcal{G}$ ονομάζεται **χαλάρωση** της $\mathcal{H}$ και η $\mathcal{H}$ ονομάζεται **σύσφιξη** της $\mathcal{G}$. Εάν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι $\mathcal{G}$-συμβατοί άτλαντες πάνω στην M και ο $\mathcal{B}$ είναι επιπλέον ένας $\mathcal{H}$-άτλας, όπου $\mathcal{H}$ είναι σύσφιξη της $\mathcal{G}$, τότε ο $\mathcal{B}$ ονομάζεται $\mathcal{H}$-σύσφιξη του $\mathcal{A}$. Η $\mathcal{G}$-δομή $(M, \mathcal{A})$ επάγει μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $\mathcal{H}$-συσφίξεων του $\mathcal{A}$: $\mathcal{B} = (V, \psi_j)_{j \in J} \sim (V', \psi'_j)_{j \in J} = \mathcal{B}'$ όταν υπάρχει $\mathcal{G}$-αυτομορφισμός f της $(M, \mathcal{A})$ τέτοιος ώστε $(V', \psi'_j) = (f[V], \psi_j \circ f^{-1})_{j \in J}$. Καλείται $\mathcal{H}$-**σύσφιξη της πολλαπλότητας** $(M, \mathcal{A})$ κάθε μια από αυτές τις κλάσεις ισοδυναμίας (δηλαδή δύο $\mathcal{H}$-πολλαπλότητες $(M, \mathcal{B}_1)$, $(M, \mathcal{B}_2)$, όπου $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ $\mathcal{H}$-συσφίξεις του $\mathcal{G}$-άτλαντα $\mathcal{A}$, μπορεί να μην έχουν $\mathcal{H}$-συμβατούς άτλαντες αλλά να ισούνται ως $\mathcal{H}$-συσφίξεις της $(M, \mathcal{A})$)

Ένα θεώρημα του Whitney εγγυάται ότι κάθε C^r-πολλαπλότητα, $r \geq 1$, έχει μοναδική C^∞-σύσφιξη· συγκεκριμένα, ότι για κάθε C^r-πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$ υπάρχει μοναδικός πάνω από C^r-αυτομορφισμό μεγιστικός C^∞-άτλας $\mathcal{B}$ ώστε $(M, \mathcal{A}) = (M, \mathcal{B})$ (ως C^r-πολλαπλότητες). Αυτό σημαίνει ότι ο άτλας μιας C^r-πολλαπλότητας, $r \geq 1$, μπορεί να θεωρείται C^∞-άτλας, δηλαδή η μελέτη των C^r-πολλαπλοτήτων, $r \geq 1$ (**διαφορικές πολλαπλότητες** τάξεως r), ανάγεται στη μελέτη των C^∞-πολλαπλοτήτων (**λείες πολλαπλότητες**). Αυτό δεν ισχύει όταν $r = 0$, δηλαδή για τοπολογικές πολλαπλότητες· συγκεκριμένα μπορεί μια τοπολογική πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$ να έχει πολλές C^∞-συσφίξεις που διαφέρουν μεταξύ τους, δηλαδή να υπάρχουν C_0-άτλαντες $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$, $p \geq 2$, που είναι C_0-συμβατοί με τον $\mathcal{A}$ αλλά όχι C^∞-συμβατοί μεταξύ τους (οπότε $(M, \mathcal{B}_1) \neq \cdots \neq (M, \mathcal{B}_p)$). Το πρώτο παράδειγμα είναι οι *εξωτικές σφαίρες* του Milnor: υπάρχουν 28 λείες πολλαπλότητες της μορφής $(S^7, \mathcal{B})$ που είναι ομοιομορφικές (ταυτίζονται ως τοπολογικές πολλαπλότητες) αλλά διαφέρουν αν ιδωθούν ως C^∞-πολλαπλότητες.

Τοπολογική n-πολλαπλότητα ονομάζεται κάθε Top-πολλαπλότητα, όπου Top είναι η ψευδοομάδα των ομοιομορφισμών μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Εφ' όσον κάθε ψευδοομάδα $\mathcal{G}$ επί του M περιέχεται εξ ορισμού στην Top, έπεται ότι κάθε $\mathcal{G}$-πολλαπλότητα είναι τοπολογική, επομένως θεωρήματα για τοπολογικές πολλαπλότητες ισχύουν αυτόματα για όλες.

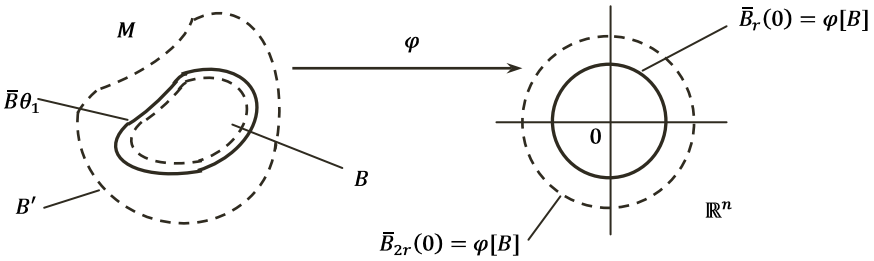
I.§3.2. Κάθε τοπολογική πολλαπλότητα είναι μετρικοποιήσιμη.

Αποδ. Το τοπικό ευκλείδιο συνεπάγεται την T_3-ιδιότητα:



Επομένως κάθε τοπολογική πολλαπλότητα είναι μετρικοποιήσιμη ως *Hausdorff* 2ος-αριθμήσιμος, T_3-χώρος (θεώρημα μετρικοποιησιμότητας του Urysohn). ■

Ένα ανοικτό υποσύνολο B n-διάστατης $\mathcal{G}$-πολλαπλότητας M ονομάζεται **κανονική ευκλείδια μπάλα** όταν υπάρχει ανοικτό $B' \subset M$ με $B \subset B'$ και $\varphi : B' \to B_{2r}(0)$ ομοιομορφισμός τέτοιος ώστε $\varphi[B'] = B_{2r}(0)$ και $\varphi[B'] = B_{2r}(0)\varphi[\bar{B}] = \bar{B}_r(0)$ για κάποιο $r > 0$.



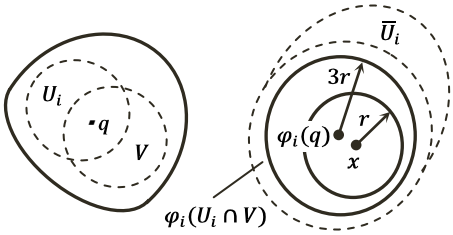
Κάθε κανονική ευκλείδια μπάλα είναι σχετικά συμπαγές σύνολο. Το παρακάτω δηλώνει ότι κάθε άτλας μπορεί να θεωρηθεί ότι συγκροτείται από αριθμήσιμες το πλήθος κανονικές ευκλείδεις μπάλες, που επιπλέον παράγουν την τοπολογία της πολλαπλότητας.

Ι.§3.3. Κάθε $\mathcal{G}$-πολλαπλότητα επιδέχεται αριθμήσιμου $\mathcal{G}$-άτλαντα από κανονικές ευκλείδιες μπάλες που επιπλέον είναι τοπολογική βάση αυτής.

Αποδ. Έστω M μια $\mathcal{G}$-πολλαπλότητα διάστασης n και $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ ένας $\mathcal{G}$-άτλας αυτής. Τότε λόγω 2ης-αριθμησιμότητας, το ανοικτό κάλυμμα $(U_i)_{i\in I}$ έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Συμβολίζουμε $\widetilde{U}_i = \varphi_i[U_i] \subset \mathbb{R}^n$. Θα δειχθεί ότι $\mathfrak{B} := \{\varphi_i^{-1}B(x,r) \,\big|\, x \in \widetilde{U}_i \cap \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q}^+$ τέτοιο ώστε $B_{2r}(x) \in \bar{U}_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, είναι η ζητούμενη τοπολογική βάση (προφανώς είναι $\mathcal{G}$-άτλας).

Έστω $B = \varphi_i^{-1}B(x,r) \in \mathfrak{B}$, θα δειχθεί ότι η B είναι κανονική ευκλείδια μπάλα. Επιλέγουμε $B' = \varphi_i^{-1}B(x,r) \in \mathfrak{B}$· πρέπει να δειχθεί ότι $\bar{B} \subset B'$ και $\varphi_i\bar{B} = \bar{B}(x,r)$, ισοδύναμα, ότι $\varphi_i^{-1}\bar{B}(x,r) = \overline{q \in B \subset VB}$. Το $\varphi_i^{-1}\bar{B}(x,r)$ είναι συμπαγές στο U_i (ως ομοιομορφική εικόνα συμπαγούς), άρα συμπαγές στο M και επομένως κλειστό (εφ' όσον M είναι *Hausdorff*), άρα $\bar{B} \subset \varphi_i^{-1}\bar{B}(x,r) \subset B'$. Τότε η κλειστότητα του B' στο M ισούται με την κλειστότητά του στο B', δηλαδή με $\varphi_i^{-1}\bar{B}(x,r)$.

Για να δειχθεί ότι $\mathfrak{B}$ είναι βάση, έστω $V \subset M$ ανοικτό και $q \in V$· ζητείται $B \subset \mathfrak{B}$ ώστε $q \in B \subset V$. Έστω U_i ανοικτή περιοχή του q, τότε $\varphi_i(q) \in \varphi_i(V \cap U_i)$ που είναι ανοικτό στο $\widetilde{U}_\iota$. Επιλέγουμε $r \in \mathbb{Q}^+$ ώστε $B = (\varphi_i(q), 3r) \subset \varphi_i(V \cap U_i)$ και $x \in U_i$ με ρητές συντεταγμένες ώστε $\left\|x - \varphi_i(q)\right\| < r$. Τότε $\varphi_i^{-1}\bar{B}(x,r)$, και από τριγωνική ανισότητα, $B(x, 2r) \subset \varphi_i(U_i \cap V)$. Άρα $B = (\varphi_i^{-1}(q), 3r)$ ανήκει στο $\mathfrak{B}$, περιέχεται στο V και περιέχει το q.



■

Από Ι.§3.2 έπεται άμεσα ότι κάθε πολλαπλότητα είναι τοπικά συμπαγής. Από τα γνωστά για τους τοπικά συμπαγείς *Hausdorff* χώρους (Ι.§1), ισχύουν για τις τοπολογικές πολλαπλότητες τα ακόλουθα:

Ι.§3.4. (Baire για πολλαπλότητες).

Σε κάθε $\mathcal{G}$-πολλαπλότητα, αριθμήσιμη τομή ανοικτών πυκνών υποσυνόλων είναι πυκνό (επομένως ένωση κλειστών υποσυνόλων με κενό εσωτερικό έχει κενό εσωτερικό).

Ι.§3.5. Συνεχής συνάρτηση ανάμεσα σε πολλαπλότητες που αντιστρέφει συμπαγή σε συμπαγή είναι κλειστή.

Ι.§3.6. (Λήμμα συρρίκνωσης για πολλαπλότητες).

Κάθε ανοικτό υποσύνολο $\mathcal{G}$-πολλαπλότητας περιέχει σχετικά συμπαγές του οποίου η κλειστότητα περιέχεται στο αρχικό.

Αν και πολλές πολλαπλότητες προκύπτουν ως πηλίκα πολλαπλοτήτων, ωστόσο πηλίκα πολλαπλοτήτων δεν είναι εν γένει πολλαπλότητες. Π.χ. εάν $M = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}$ και $(x, 0) \sim (x, 1)$ όταν $x \neq 0$, τότε το M/N δεν είναι τοπολογική πολλαπλότητα, συγκεκριμένα δεν είναι *Hausdorff*: Έστω $U_0, U_1 \subset M/N$ ανοικτές περιοχές των $(0,0)$, $(0,1)$ αντιστοίχως. Εάν $q : M \to M/N$ είναι η a-απεικόνιση πηλίκο, $q^{-1}[U_0]$, $q^{-1}[U_1]$ ανοικτές περιοχές των $(0,0)$, $(0,1)$ αντιστοίχως. Τότε τα $q^{-1}[U_0]$, $q^{-1}[U_1]$ περιέχουν ανοικτές περιοχές $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\}$, $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{1\}$ αντιστοίχως, άρα $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$ εφ' όσον $q[(-\varepsilon, \varepsilon) \times 0] = q[(-\varepsilon, \varepsilon) \times 1]$.

Επομένως για να δειχθεί ότι το πηλίκο μιας πολλαπλότητας είναι πολλαπλότητα, πρέπει να ελεγχθεί τουλάχιστον ότι είναι *Hausdorff*. Εάν το πηλίκο είναι *Hausdorff*, αρκεί να ελεγχθεί το τοπικό ευκλείδειο, που δίνει αυτόματα την 2η-αριθμησιμότητα (Ι.§2.4), οπότε το πηλίκο είναι τουλάχιστον τοπολογική πολλαπλότητα. Επίσης, οι πολλαπλότητες κληρονομούν από τον $\mathbb{R}^n$ την τοπική δρομοσυνεκτικότητα, άρα στις πολλαπλότητες δεν υφίσταται διάκριση μεταξύ συνεκτικότητας και δρομοσυνεκτικότητας (Ι.§1.11).

Ι.§3.7. Κάθε τοπολογική πολλαπλότητα έχει κάλυμμα $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ από συμπαγή ώστε $K_m \subset int\, K_{m+1}$.

Αποδ. Επιλέγουμε άτλαντα $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ από ευκλείδιες μπάλες που συγκροτούν τοπολογική βάση. Θέτουμε $K_1 = \overline{U_1}$ και προσθέτουμε στο U_1 τα $U_2, U_3, \dots, U_{a(2)}$ έως ότου $U_1, U_2, \dots, U_{a(2)}$ καλύψει το K_1. Θέτουμε $K_2 = \overline{U_1 \cup \dots \cup U_{\alpha(2)}}$ που είναι συμπαγές και το εσωτερικό του οποίου περιέχει το K_1. Συνεχίζουμε επαγωγικά. ■

Ι.§3.8. Ανοικτό υποσύνολο $\mathcal{G}$-πολλαπλότητας είναι $\mathcal{G}$-πολλαπλότητα.

Αποδ. Ανοικτό υποσύνολο *Hausdorff* 2ου-αριθμήσιμου χώρου είναι *Hausdorff* 2ος-αριθμήσιμος. Επιπλέον ο περιορισμός $\mathcal{G}$-άτλαντα σε ανοικτό υποσύνολο είναι $\mathcal{G}$-άτλας. ■

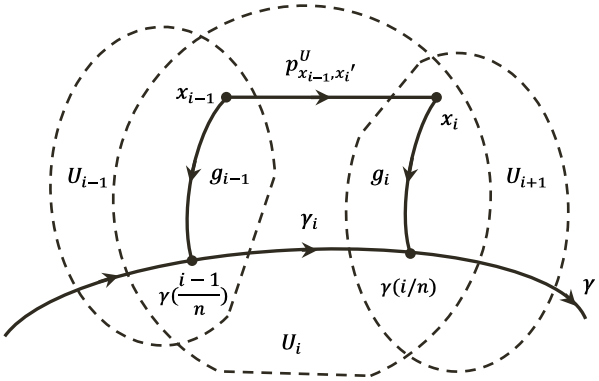
Ι.§3.9. Θεμελιώδης ομάδα πολλαπλότητας είναι το πολύ αριθμήσιμη

Αποδ. Από τοπική συνεκτικότητα και 2η-αριθμησιμότητα, η πολλαπλότητα M επιδέχεται αριθμήσιμης βάσης από ανοικτά συνεκτικά σύνολα. Έστω $\mathfrak{U}$ αριθμήσιμο κάλυμμα της M από ευκλείδιες μπάλες. Τότε για κάθε $U, U' \in \mathfrak{U}$ το $U \cap U'$ έχει το πολύ αριθμήσιμες το πλήθος συνεκτικές συνιστώσες, εφ' όσον $U \cap U'$ ανοικτό και η βάση από ανοικτά συνεκτικά είναι αριθμήσιμη. Επιλέγουμε από κάθε συνεκτική συνιστώσα του $U \cap U'$ ένα σημείο και ονομάζουμε X το σύνολο των σημείων που επιλέχθησαν από κάθε συνιστώσα του $U \cap U'$, καθώς U, U' διατρέχουν το $\mathfrak{U}$. Τότε το X είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων (τα ζεύγη $U, U' \in \mathfrak{U}$ είναι αριθμήσιμα το πλήθος εφ' όσον $\mathfrak{U}$ αριθμήσιμη). Για κάθε $x, x' \in U \in$ με $x, x' \in X$, επιλέγουμε $p^U_{x,x'}$ ένα μονοπάτι από το x στο x' που περιέχεται στο U. Επειδή το X είναι αριθμήσιμο, έπεται ότι το σύνολο των μονοπατιών $p^U_{x,x'}$, $x, x' \in U$, $U \in \mathfrak{U}$, είναι αριθμήσιμο.

Επιλέγουμε $x_o \in X$ και ονομάζουμε *ειδικούς* όλους τους βρόγχους με στήριγμα το x_o που γράφονται ως γινόμενο από $p^U_{x,x'}$. Το σύνολο των ειδικών βρόγχων είναι αριθμήσιμο, επομένως οι κλάσεις ομοτοπίας στην ομάδα $\pi_1(M, x_o)$ που αντιστοιχούν σε αυτούς είναι το πολύ αριθμήσιμες το πλήθος. Θα δειχθεί ότι αυτές οι κλάσεις παράγουν την $\pi_1(M, x_o)$, οπότε προκύπτει άμεσα το ζητούμενο (οι πεπερασμένες ακολουθίες πάνω σε αριθμήσιμο σύνολο είναι αριθμήσιμες το πλήθος).

Έστω βρόγχος $\gamma : [0,1] \to M$ που στηρίζεται στο x_o. Επειδή $\{\gamma^{-1}[U] \mid U \in \mathfrak{U}\}$ ανοικτό κάλυμμα του I, από λήμμα του Lebesgue, υπάρχει διαμέριση $[i - 1/n, i/n]_{i=1}^n$ του $[0,1]$ τέτοια ώστε $\gamma[i - 1/n, i/n] \subset U_i$ για κάποιο $U_i \in \mathfrak{U}$. Ονομάζουμε γ_i τον περιορισμό του γ στο $[i - 1/n, i/n]$ αναπαραμετρημένο στο $[0,1]$. Τότε ισχύει $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_r$, και άρα $[\gamma] = [\gamma_1] \dots [\gamma_r]$. Για κάθε $i = 1, \dots, n-1$, $\gamma(i/n) \in U_i \cap U_{i+1}$.

Έστω x_i το στοιχείο που έχει επιλεγεί από την συνεκτική συνιστώσα του $U_i \cap U_{i+1}$ στην οποία ανήκει το $\gamma(i/n)$ και δ_i μονοπάτι από το x_i στο $\gamma(i/n)$ (υπάρχει εφ' όσον τα x βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα). Ορίζουμε $\bar{\gamma}_i = \delta_{i-1}\gamma_i\delta_i$ (επιλέγουμε δ_i τον σταθερό βρόγχο και $x_i = x_o$ εάν $i = 0$ ή $i = n$). Επειδή στο γινόμενο τα δ_i αλληλοεξουδετερώνονται έπεται ότι $[\gamma] = [\bar{\gamma}_1] \dots [\bar{\gamma}_r]$. Όμως επειδή το U_i είναι απλά συνεκτικό (ως ευκλείδια μπάλα), το $\bar{\gamma}_i$ είναι *δρομομοτοπικό* με το $p^U_{x_{i-1},x_i'}$ απ' όπου έπεται το ζητούμενο.



■

Διαφορικές πολλαπλότητες

§1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Καλείται **λεία** κάθε C^∞-απεικόνιση μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων και **αμφιδιαφόριση** κάθε C^∞-ισομορφισμός[1]. Συμβολίζονται $C^r(M;N)$ ο χώρος των C^r-απεικονίσεων από την διαφορική πολλαπλότητα M στην διαφορική πολλαπλότητα N και $C^r(M)$ ο χώρος των C^r-απεικονίσεων από την M στον $\mathbb{R}$ (θεωρείται εφοδιασμένος με την τετριμμένη διαφορική δομή που επάγεται σε αυτόν από την ταυτοτική του απεικόνιση). Συμβολίζεται επίσης $diff(M)$ η ομάδα των αμφιδιαφορίσεων από την M στον εαυτό της (C^∞-αυτομορφισμοί).

Διαμέριση της μονάδας υποκείμενη στον άτλαντα $\mathcal{A}=(U_P\varphi_P)_{P\in\mathbb{N}}$ της διαφορικής πολλαπλότητας M, ονομάζεται μια οικογένεια $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ πραγματικών C^∞-απεικονίσεων πάνω στην M τέτοια ώστε $suppf_P\subset U_P$ για κάθε $p\in\mathbb{N}$, $0\le f_P(x)\le 1$ για κάθε $x\in M$, $\sum_{p\in\mathbb{N}} f_p(x)=1$ και $(suppf_p)_{p\in\mathbb{N}}$ να είναι τοπικά πεπερασμένη οικογένεια υποσυνόλων της M. Η τελευταία συνθήκη εγγυάται ότι για κάθε $x\in M$ το άθροισμα $\sum_{p\in\mathbb{N}} f_p(x)$ είναι πεπερασμένο.

Η διαμέριση της μονάδας είναι εργαλείο κατασκευής ολικών αντικειμένων πάνω σε μια πολλαπλότητα συγκολλώντας αντικείμενα που ορίζονται τοπικά (η άθροιση εξαναγκάσει αυτά τα τοπικά αντικείμενα να συμφωνούν στις τομές των χαρτών).

ΙΙ.§1.0. Έστω $A,B\subset\mathbb{R}^n$ κλειστά με το A να είναι επίσης φραγμένο. Υπάρχει C^∞-απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)=1$ στο A, $f(x)=0$ στο B και $0\le f(x)\le 1$ παντού.

Αποδ. Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $0<a<b$. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} exp\left(\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-a}\right), & a<x<b \\ 0 & , \quad x\in(-\infty,a)\cup(b,+\infty)\end{cases}$$

είναι C^∞. Ορίζουμε $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ να είναι η

$$F(x)=\int_x^b f(t)dt\Big/\int_a^b f(t)dt$$

που επίσης είναι C^∞. Ελέγχεται εύκολα ότι

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\ge b \\ 1 & , \quad x\le b \\ \text{φθίνουσα από το } 1 \text{ στο } 0 & , \quad a\le x\le b\end{cases}$$

1. Κάθε C^r-πολλαπλότητα, $r\ge 1$, επιδέχεται μοναδικής C^∞-σύσφιξης (βλ. Θεωρήματα 2.9 και 2.10, σελ. 51, 52 από [**Hir**]) και κάθε C^r-απεικόνιση προσεγγίζεται με κάποια τοπολογική έννοια από ακολουθία C^∞-απεικονίσεων (βλ. Κεφ. 10 από [**Lee1**]). Επομένως το ενδιαφέρον για το ποιες απεικονίσεις διατηρούν την διαφορική δομή μιας πολλαπλότητας επικεντρώνεται στις C^∞-απεικονίσεις (δεν χρειάζεται να μελετηθούν, τουλάχιστον από την αρχή, οι C^r-ισομορφισμοί).

Ορίζεται η C^∞-απεικόνιση $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\psi(\underbrace{x^1, \dots, x^n}_{x}) = F\left(\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2\right)$$

για την οποία ισχύει

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad |x|^2 \geq b \\ 1 & , \quad |x|^2 \leq a \\ \text{φθίνουσα από το } 1 \text{ στο } 0 & , \quad a \leq |x|^2 \leq b \end{cases}$$

Επομένως δεδομένων δύο οποιωνδήποτε ομόκεντρων n-μπαλών D, D' μεκέντρο το 0 και $D' \subset D$, υπάρχει λεία συνάρτηση που μηδενίζεται παντού εκτός του D και δίνει 1 πάνω στον D'.

Έστω τώρα $A, B \subset \mathbb{R}^n$ όπως στην υπόθεση. Εφ' όσον A συμπαγές και B κλειστό με $A \cap B = \emptyset$, υπάρχει πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών n-μπαλών $D_1, \dots, D_m$ που καλύπτουν το A ώστε $B \cap \overline{D_i} = \emptyset$. Για κάθε D_i, υπάρχει ομόκεντρη N-μπάλα $D_i{}'$ με $D_i' \subset D_i$ ώστε $A \subset \bigcup_{i=1}^m D_i{}'$. Για κάθε i, επιλέγουμε $\psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία C^r -απεικόνιση ώστε $\psi_i(x) = 0$ εκτός της D_i και $\psi_i(x) = 1$ στην $D_i{}'$. Τότε η $\varphi(x) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - \psi_i(x))$ είναι η ζητούμενη. ■

ΙΙ.§1.1. Για κάθε ανοικτό υποσύνολο U μιας διαφορικής πολλαπλότητας $(M, \mathcal{A})$, $\mathcal{A} = (U_p, \varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$, και κάθε $K \subset U$ συμπαγές, υπάρχει $f \in C^\infty(M)$ τέτοια ώστε $f(x) = 1$ στο K, $f(x) = 0$ εκτός του U και $0 \leq f(x) \leq 1$ παντού.

Αποδ. Εάν $M = \mathbb{R}^n$, τότε ισχύει από ΙΙ.§1.0. Διαφορετικά, έστω $K_p \subset U_p$ συμπαγές· από ΙΙ.§1.0 υπάρχει $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $f(x) = 1$ στο $\varphi_p[K_p]$ και $supp f_p \subset \varphi_p[U_p]$. Ορίζεται $F_p : M \to \mathbb{R}$, $F_p(x) = f_p(\varphi_p(x))$ εάν $x \in U_p$ ή 0 εάν $x \notin U_p$, που είναι C^∞-απεικόνιση με $F_p(x) = 1$ στο K_p και $F_p(x) = 0$ στο U_p. Λόγω συμπάγειας του K, υπάρχουν χάρτες $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_m, \varphi_m) \in \mathcal{A}$ και αντίστοιχα συμπαγή υποσύνολα $K_1, \dots, K_m$ τέτοια ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^m K_i$, $\bigcup_{i=1}^m U_i \subset U$. Τότε $F = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - F_i)$ η ζητούμενη. ■

Σε κάθε ανοικτή περιοχή U μιας διαφορικής πολλαπλότητας διαγράφεται τοπικός χάρτης U_p ώστε $\overline{U_p} \subset U$ και U_p συμπαγές (επιλέγουμε άτλαντα από κανονικές ευκλείδειες μπάλες που είναι επιπλέον τοπολογική βάση). Η ΙΙ.§1.1 λαμβάνει τότε την ακόλουθη χρηστική μορφή: για κάθε ανοικτό σύνολο U διαφορικής πολλαπλότητας $(M, \mathcal{A})$, $\mathcal{A} = (U_p, \varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$, υπάρχει χάρτης U_p τέτοιος ώστε $\overline{U_p} \subset U$ συμπαγές και $f_p \in C^r(M)$ με $f_p(x) = 1$ στο U_p, $supp f_p \subset U$ και $0 \leq f_p(x) \leq 1$.

ΙΙ.§1.2. (Υπαρξη διαμέρισης της μονάδας).

Κάθε διαφορική πολλαπλότητα έχει διαμέριση της μονάδας υποκείμενη σε κάποιον άτλαντα.

Αποδ. Επιλέγουμε οικογένεια συμπαγών υποσυνόλων $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ της $(M, \mathcal{A})$, $\mathcal{A} = (U_p, \varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $K_m \subset int K_{m+1}$ (Ι.§1.6). Θέτοντας $K_0 = K_{-1} = \infty$, λαμβάνουμε την ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων $B_m = K_m - int K_{m-1}$. Δοθέντος $x \in B_m$, υπάρχει τοπικός χάρτης U γύρω από το x που περιέχεται στο συμπλήρωμα του K_{m-2}. Τότε υπάρχει U_p σχετικά συμπαγής χάρτης γύρω από το x με $\overline{U_p} \subset U$ και $f_p \in C^r(M)$ με $f_p(x) = 1$ στο U_p, $supp f_p \subset U$ και $0 \leq f_p(x) \leq 1$. Κάθε B_m καλύπτεται από τέτοια U_p, και εφ' όσον τα B_m καλύπτουν την M, η M καλύπτεται από τέτοια U_p. Ο άτλας $(U_p, \varphi_p)_{p\in\mathbb{M}\subset\mathbb{N}}$ που συγκροτείται με αυτόν τον τρόπο είναι τοπικά πεπερασμένος: τα $\overline{U_j}$ που προκύπτουν από το B_m βρίσκονται στο $M \setminus K_{m-2}$ και άρα δεν τέμνονται με κανένα K_l, $m - 2 \geq l$. Ορίζεται για κάθε $p \in \mathbb{M}$ η C^∞-απεικόνιση

$$x \longmapsto \psi_p(x) = f_p(x) \Big/ \sum_{p\in\mathbb{M}} f_p(x)$$

Ελέγχεται ότι η $(\psi_p)_{p\in\mathbb{M}}$ είναι η ζητούμενη διαμέριση της μονάδας. ■

Εφ' όσον το στήριγμα συνεχούς συνάρτησης είναι ανοικτό σύνολο και κάθε σημείο της πολλαπλότητας ανήκει στο στήριγμα κάποιας f_p (αφού $\sum_{p\in\mathbb{N}} f_p(x) = 1 \neq 0$ παντού), συνάγεται ότι το $(supp f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ είναι ανοικτό κάλυμμα της πολλαπλότητας. Επειδή επιπλέον $supp f_p \subset U_p$, λαμβάνοντας τους περιορισμούς $\psi_p = \varphi_p|_{supp f_p}$, η συλλογή $(supp f_p, \psi_p)_p$ είναι άτλαντας της πολλαπλότητας. Επομένως η πρόταση ΙΙ.§1.3 ισχυροποιείται ως εξής:

II.§1.3. Κάθε διαφορετική πολλαπλότητα έχει διαμέριση της μονάδας υποκείμενη σε τοπικά πεπερασμένο άτλαντα $(U_p, \varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Συγκεκριμένα, υπάρχει διαμέριση της μονάδας $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ για την πολλαπλότητα M ώστε $suppf_p = U_p$.

II.§1.5. (Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων).

Έστω C^1 -απεικόνιση $f : \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}^r$ και $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{n+r}) \in \mathbb{R}^{n+r}$ με $f(x_0) = c$ τέτοιο ώστε $det\,(\partial f_i/\partial x^j\,|_{x_0})_{i=1\ \ j=n+1}^{r} \neq 0$. Τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \subset \mathbb{R}^n$ του x_0 και μοναδικές C^1-απεικονίσεις $g_j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, r$, τέτοιες ώστε $g_j(x_0^1, \dots, x_0^n) = x_o^{n+j}$ και $f(x^1, \dots, x^n, g_1(x^1, \dots, x^n), \dots, g_r(x^1, \dots, x^n) = c$ για κάθε $(x^1, \dots, x^n) \in U$ (δηλαδή επί της c-ισοσταθμιστικής της f, οι r-τελευταίες συντεταγμένες είναι λείες συναρτήσεις των n-πρώτων).

II.§1.6. (Θεώρημα Αντιστροφής Απεικόνισης).

Έστω C^1-απεικόνιση $f : U \to \mathbb{R}^n$ από ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$ και $x_0 \in U$ τέτοιο ώστε $det(\partial f_i/\partial x^j\,|_{x_0})_{i,j} \neq 0$. Υπάρχει ανοικτή περιοχή $W \subset U$ του x_0 πάνω στην οποία η f είναι αμφιδιαφόριση, με $df^{-1}\big(f(x)\big) = (df(x))^{-1}$ για κάθε $x \in W$.

Θέλουμε να οριστεί η έννοια της n-διάστατης επιφάνειας στον $\mathbb{R}^m$, $n \leq m$, ώστε να αναφέρεται σε εκείνα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$ που μπορούν να καλυφθούν από λείες παραμορφώσεις δρομοσυνεκτικών τμημάτων του $\mathbb{R}^n$. Η απαίτηση της λειότητας ισοδυναμεί με την ύπαρξη εφαπτόμενου χώρου διάστασης n σε κάθε σημείο της επιφάνειας (σημεία στα οποία ο εφαπτόμενος χώρος έχει χαμηλότερη διάσταση αντιστοιχούν σε τσακίσεις ή γωνίες της επιφάνειας).

n-διάσταση **συντεταγμενική περιοχή** εντός του $\mathbb{R}^m$, $m \geq n$, ονομάζεται ένα ζεύγος (D, x), όπου $D \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $x : D \to x[D] \subset \mathbb{R}^m$ αμφιμονοσήμαντη C^1-απεικόνιση. Συμβολίζουμε $z = x^{-1}$ την αντίστροφη απεικόνιση $z : x[D] \to D$. Ένα $P = x(z_0)$ ονομάζεται **μη ιδιάζον** σημείο της συντεταγμένης περιοχής (U, x) όταν το διαφορικό $dx(z_o) = (\partial x^i/\partial z^j\,|_{z_0})_{i=1,\ j=1}^{m,\ n}$ έχει βαθμό n, όπου $z^1, \dots, z^n$ το σύστημα συντεταγμένων του D.

II.§1.7. Για κάθε μή ιδιάζον σημείο x_0 της n-διάστατης συντεταγμενικής περιοχής (D, x) εντός του $\mathbb{R}^m$, υπάρχει περιοχή $V \subset x[D]$ και C^1-απεικονίσεις $f^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = n+1, \dots, m$ τέτοιες ώστε η V να αναπαρίσταται ως σύνολο του μή ιδάζοντος συστήματος $m-n$ εξισώσεων $f^i(x^1, \dots x^m) = 0$, $i = n+1, \dots, m$ (μή ιδιάζον σημαίνει ότι ο πίνακας $(\partial f^i/\partial x^j\,|_{x_0})_{i=1,\ j=1}^{m}$ έχει παντού βαθμό $m-n$).

Αποδ. Εφ' όσον $x_0 = x(z_0)$ μη ιδιάζον, ο $m \times n$ πίνακας $(\partial x^i/\partial z^j\,|_{z_0})_{i=1,\ j=1}^{m,\ n}$ έχει βαθμό n, δηλαδή, με μετάθεση των δεικτών εν ενάγκη, ισχύει $det(\partial x^i/\partial z^j\,|_{z_0})_{i=1\ \ j=1}^{n\ \ n} \neq 0$. Από Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης, υπάρχει $W \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτή περιοχή του z_0 και $z : x[W] \to W$ τοπική C^1-αντιστροφή της x ώστε $\partial z^i/\partial x^k\,|_{x_0}\,\partial x^k/\partial z^j\,|_{z_0} = \delta_{ij}$. Τότε στο $x[W]$ ισχύει $x^i = x^i\big(z(x^1, \dots, x^n)\big)$, $i = n+1, \dots, m$, και οι ζητούμενες εξισώσεις είναι $f^i(x^1, \dots, x^m) = x^i - x^i\big(z(x^1, \dots, x^n)\big) = 0$, $i = n+1, \dots, m$. Επίσης

$$\partial f^i/\partial x^j\,|_{x_0} = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(x^i - x^i\big(z(x^1, \dots, x^n)\big)\Big)\,|_{x_0} = \delta_{ij} - \underbrace{\partial x^i/\partial z^\lambda\,|_{z_0}\,\partial z^\lambda/\partial x^j\,|_{x_0}}_{0} = \delta_{ij}$$

για κάθε $j = n+1, \dots, m$. Επομένως ο πίνακας $\big(\partial f^i/\partial x^j\,|_{x_0}\big)_{i,j}$ είναι της μορφής

$$\left.\begin{pmatrix} \underbrace{\quad * \quad}_{n} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix}}_{m-n} \end{pmatrix}\right\} m-n \qquad \blacksquare$$

n-**διάστατη επιφάνεια** εντός του $\mathbb{R}^m$, $n \leq m$, ονομάζεται κάθε σύνολο λύσεων ενός συστήματος $m-n$ εξισώσεων $f^i(x^1, \dots, x^m) = 0$, $i = 1, \dots, m-n$, όπου $f^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ C^1-απεικονίσεις. Το σημείο $x = (x^1, \dots, x^n)$ μιας n-διάστατης επιφάνειας ονομάζεται **μη ιδιάζον** όταν ο $(m-n) \times n$ πίνακας $\big(\partial f^i/\partial x^j\,|_{x_0}\big)_{i,j=1}^{m-n,\ n}$ έχει βαθμό $m-n$.

Η πρόταση II.§1.7 δηλώνει ότι γύρω από κάθε μη ιδιάζον σημείο της, μια συντεταγμένη περιοχή αναπαρίσταται ως επιφάνεια, κατά τρόπο ώστε το σημείο να είναι μη ιδιάζον σημείο της τελευταίας. Η επόμενη πρόταση δηλώνει επίσης το αντίστροφο, επομένως η έννοια της επιφάνειας χωρίς ιδιάζοντα σημεία ανταποκρίνεται στη γεωμετρική εποπτεία της λείας επιφάνειας σε ευκλείδιο χώρο.

ΙΙ.§1.8. Για κάθε μη ιδιάζον σημείο n-διάστατης επιφάνειας, υπάρχει πάνω στην επιφάνεια n-διάστατη συντεταγμενική περιοχή που το περιέχει. Επιπλέον το σημείο είναι μη ιδιάζον σημείο της τελευταίας.

Αποδ. Έστω $M \subset \mathbb{R}^m$ n-διάστατη επιφάνεια που προκύπτει ως λύση του συστήματος των C^1-απεικονίσεων $f^i(x^1, \dots, x^m) = 0$, $i = 1, \dots, m-n$, και $x \in M$ μη ιδιάζον σημείο. Μεταθέτοντας εν ανάγκη τους δείκτες των $x^1, \dots, x^m$, ισχύει $det(\partial f^i/\partial x^j\,|_{x_0})_{i=1,\ j=n+1}^{m-n,m} \neq 0$.

Θέτοντας $f(x) = \big(f^1(x), \dots, f^{m-n}(x)\big)$, από Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων υπάρχει ανοικτή περιοχή D του $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ στο $\mathbb{R}^n$ και μοναδικές C^1-απεικονίσεις $g_j : U \to \mathbb{R}$, $j = n+1, \dots, m$ τέτοιες ώστε $g_j(x_0^1, \dots, x_0^n) = x_0^j$ και $f\big(x^1, \dots, x^n, g_{n+1}(x^1, \dots, x^n), \dots, g_m(x^1, \dots, x^n)\big) = 0$ για κάθε $(x^1, \dots, x^n) \in D$. Τότε η ζητούμενη συντεταγμενική περιοχή είναι

$$x : D \to x[D], \quad x(z^1, \dots, z^n) = \big(z^1, \dots, z^n, g_{n+1}(z^1, \dots, z^n), \dots g_m(z^1, \dots, z^n)\big) \qquad \blacksquare$$

Από πρόταση ΙΙ.§1.8, συνάγεται άμεσα ότι οι n-διάστατες επιφάνειες εντός του $\mathbb{R}^m$ χωρίς ιδιάζοντα σημεία είναι n-διάστατες διαφορικές πολλαπλότητες.

Εφαπτόμενος χώρος της επιφάνειας $M \subset \mathbb{R}^m$ στο σημείο x_0 ονομάζεται ο διανυσματικός χώρος $T_{x_0}M$ των ταχυτήτων στην θέση x_o λείας καμπύλης που περιέχεται στην M.

ΙΙ.§1.9. Ένα σημείο επιφάνειας είναι μή ιδιάζον εάν και μόνον εάν ο εφαπτόμενος χώρος της επιφάνειας στο σημείο αυτό έχει διάσταση ίση με την διάσταση της επιφάνειας.

Αποδ. Έστω $z(t)$ διαφορίσιμη καμπύλη στο D, όπου $x : D \to M$ συντεταγμενική περιοχή του $x_0 \in M$, με $z(0) = z_0$, $x(z_0) = x_0$. Ισοδύναμα, η $x(z(t))$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη πάνω στην M με $x(0) = x_0$. Η ταχύτητά της $x(z(t))$ στο x_0 είναι τότε

$$\frac{dx\big(z(t)\big)}{dt}\Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\Big|_{z_0}\right)_{i=1,\ j=1}^{m,n} \begin{pmatrix} \dot{z}^1(0) \\ \vdots \\ \dot{z}^n(0) \end{pmatrix} = \dot{z}^1(0)\,\frac{\partial x}{\partial z^1}\Big|_{z_0} + \dots + \dot{z}^n(0)\frac{\partial x}{\partial z^n}\Big|_{z_0}$$

Άρα τα $\partial x/\partial z^i\,|_{x_0}$, $i = 1, \dots, m$ παράγουν τον $T_{x_0}M$. Εφ' όσον είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ακριβώς όταν x_0 είναι μη ιδιάζον, έπεται το ζητούμενο. ■

ΙΙ.§1.10. Εάν η επιφάνεια M είναι σύνολο λύσεων του συστήματος $f^i(x^1, \dots, x^m) = 0$, $i = n+1, \dots, m$, ένα $x_0 \in M$ είναι μή ιδιάζον εάν και μόνον εάν ο $T_{x_0}M$ είναι πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης $(\partial f^i/\partial x^j|_{x_0})_{i=n+1,j=1}^{m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$

Αποδ. Έστω $x(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ διαφορίσιμη καμπύλη στην M με $x(0) = x_0$. Ισχύει

$$f^i\big(x^1(t), \dots, x^m(t)\big) = 0$$

για κάθε i, επομένως

$$\frac{d}{dt}f^i\big(x^1(t), \dots, x^m(t)\big)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\Big|_{x_0}\frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^1}\Big|_{x_0} \ \dots \ \frac{\partial f^i}{\partial x^n}\Big|_{x_0}\right)\begin{pmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}^n(t) \end{pmatrix} = 0$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^1}\Big|_{x_0} & \cdots & \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^n}\Big|_{x_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}\Big|_{x_0} & \cdots & \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^n}\Big|_{x_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}^{-1}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}^{-n}(t) \end{pmatrix} = 0$$

Άρα ο $T_{x_0}M$ περιέχεται στον πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης $(\partial f^i/\partial x^j|_{x_0})_{i=n+1,j=1}^{m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$. Το x_0 είναι μη ιδιάζον εάν και μόνον εάν αυτή η απεικόνιση έχει βαθμό $m-n$, δηλαδή όταν ο πυρήνας της ταυτίζεται με τον $T_{x_0}M$. ■

Δεν είναι εξ αρχής γνωστό ότι κάθε διαφορική πολλαπλότητα υλοποιείται ως επιφάνεια σε κάποιον ευκλείδειο χώρο, επομένως ο εφαπτόμενος χώρος πολλαπλότητας πρέπει να οριστεί χωρίς προσφυγή σε καμπύλες του ευκλείδειου χώρου.

Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(M,\mathcal{A})$ και σημείο $P \in M$. Καλείται **ταχύτητα** της λείας καμπύλης $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ στο $P = \gamma(t_0)$ ο τελεστής $\dot{\gamma}(t_0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, $\dot{\gamma}(t_0)f = d/dt\,(f \circ \gamma)(t)\big|_{t=0}$. **Εφαπτόμενο διάνυσμα** της M στο P ονομάζεται η ταχύτητα στο P κάθε διερχόμενης από το σημείο αυτό λείας καμπύλης στην M. **Εφαπτόμενος χώρος** της M στο σημείο P ονομάζεται ο διανυσματικός χώρος T_PM των εφαπτόμενων διανυσμάτων της M στο P. Ελέγχεται εύκολα ότι εάν η M υλοποιείται ως επιφάνεια στον ευκλείδιο χώρο, ο εφαπτόμενος χώρος T_PM όπως ορίζεται εδώ είναι γραμμικά ισόμορφος με τον εφαπτόμενο χώρο της στο P ως επιφάνειας. Εάν $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ τοπικός χάρτης γύρω από το P με σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ και f συνάρτηση πάνω στην M, γράφουμε $f(x^1, \dots, x^n) = f(\varphi(x^1, \dots, x^n))$. Εάν $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ λεία καμπύλη με $\gamma(0) = P$ και $x(t) = \varphi(\gamma(t))$, τότε

$$\dot{\gamma}(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \dots, x^n(t)\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\big|_{z_0} \dot{x}^i(0) = \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} \dot{x}^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{z_0}\right) f$$

Επομένως

$$\dot{\gamma}(0) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \dot{x}^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_P$$

όπου $\partial/\partial x^i\big|_P$ το εφαπτόμενο στο σημείο P διάνυσμα της καμπύλης του M που στο σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ αναπαρίσταται ως

$$(0, \dots, 0, \overset{i}{\hat{t}}, 0, \dots, 0)$$

Επιπλέον τα $\partial/\partial x^1\big|_P, \dots, \partial/\partial x^n\big|_P$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, επομένως συγκροτούν βάση του T_PM, απ' όπου συνάγεται ότι $T_PM = dimM = n$: εάν $x_j : U \to \mathbb{R}$, $x_j(x^1, \dots, x^n) = x^j$, η συνάρτηση που επιστρέφει την j-οστή συντεταγμένη στο σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ του U, τότε

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_P = \frac{d}{dt} x_j(0, \dots, 0, \overset{i}{\hat{t}}, 0, \dots, 0)\big|_{t_0} = \begin{matrix} i = j \\ \\ i \neq j \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \frac{d}{dt} 0\big|_{t=0} = 0 \\ \\ \frac{d}{dt} t\big|_{t=0} = 1 \end{matrix} \right\} = \delta_{ij}$$

Επομένως εάν $\lambda_i\ \partial/\partial z^i = 0$, εφαρμόζοντας διαδοχικά σε αυτόν τον τελεστή τις απεικονίσεις $x_j, j = 1, \dots, n$, συνάγεται ότι $\lambda_i = 0$ για όλα τα i. Ορίζεται για κάθε $f \in C^\infty(M; N)$, $dimM = n$, $dimN = m$ και κάθε $P \in M$ το **διαφορικό** της f στο P ως η γραμμική απεικόνιση

$$df(P)\ : T_PM \to T_{f(P)}N, \qquad df(P)(\xi) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\big|_{t=0}$$

όπου γ οποιαδήποτε λεία καμπύλη στην M διερχόμενη από το P με ταχύτητα ξ (ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της γ που χρησιμοποιείται). Θα χρησιμοποιούνται επίσης οι συμβολισμοί $df(P; \xi)$, $df_P(\xi)$ για την δράση του διαφορικού $df(P)$ στο διάνυσμα ξ, καθώς και $f_*\xi$ όταν το σημείο στο οποίο λαμβάνεται είναι αυτονόητο ή αδιάφορο.

Θεωρώντας τοπικούς χάρτες (U,φ), (V,ψ) με αντίστοιχα συστήματα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$; $z^1, \dots, z^n$ γύρω από τα $P = \varphi^{-1}(x_0)$, $f(P) = \psi^{-1}(z_0)$ αντιστοίχως, ισχύει

$$df\left(P; \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_P\right) = \left(f \circ \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_P\right)'(0) = \frac{d}{dt} f(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0) = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{x_0}$$

Γράφοντας $f(x^1, \dots, x^n) = (z^1(x^1, \dots, x^n), \dots, z^m(x^1, \dots, x^n))$, και επειδή

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\big|_{x_0} = \left(\frac{\partial z^1}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n) \ \dots \ \frac{\partial z^m}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n) \right)^T$$

συνάγεται ότι στις βάσεις $\partial/\partial x_j\big|_P$, $j = 1, \dots, n$ και $\partial/\partial z_j\big|_{f(P)}$, $i = 1, \dots, m$ των διανυσματικών χώρων T_PM, $T_{f(P)}N$ αντιστοίχως, το $df(P)$ αναπαρίσταται ως

$$\left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\big|_{z_0}\right)_{i,j}^{m,n}$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας, ελέγχεται με απλές πράξεις ότι εάν $f : M \to N$ είναι αμφιδιαφόριση, τότε το $df(P) : T_P M \to T_{f(P)} N$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, για κάθε $P \in M$. Συνδυάζοτας το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης με τον ορισμό της διαφορισιμότητας συναρτήσεων μεταξύ πολλαπλοτήτων, έπεται άμεσα το επόμενο.

ΙΙ.§1.9. (Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης για πολλαπλότητες).
Εάν το διαφορικό $df(P) : T_P M \to T_{f(P)} N$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, υπάρχει περιοχή U του P ώστε η $f\big|_U : U \to f[U]$ να είναι αμφιδιαφόριση και $d(f^{-1})\big(f(Q)\big) = (df(P))^{-1}$ για κάθε $Q \in U$.

Έστω τώρα διαφορική n-διάστατη πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$, $P \in M$ και (U_p, φ_p), $(U_q, \varphi_q) \in \mathcal{A}$ τοπικοί χάρτες γύρω από το P με αντίστοιχα συστήματα συντεταγμένων $x_p^1, \dots, x_p^n$; $x_q^1, \dots, x_q^n$. Η συνάρτηση μετάβασης $\varphi_p \circ \varphi_q^{-1} : \varphi_q[U_p \cap U_q] \to \varphi_p[U_p \cap U_q]$ αναπαρίσταται ως

$$\varphi_p \circ \varphi_q^{-1}(x_q^1, \dots, x_q^n) = \left(x_p^1(x_q^1, \dots, x_q^n), \dots, x_p^n(x_q^1, \dots, x_q^n)\right)$$

Ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial x_p^i} f\left(x_q^1(x_q^1, \dots, x_q^n), \dots, x_p^n(x_q^1, \dots, x_q^n)\right) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_q^1}\frac{\partial x_q^1}{\partial x_p^i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_q^n}\frac{\partial x_q^n}{\partial x_p^i} = \left(\frac{\partial x_q^1}{\partial x_p^i}\frac{\partial}{\partial x_q^1} + \dots + \frac{\partial x_q^n}{\partial x_p^i}\frac{\partial}{\partial x_q^n}\right) f$$

επομένως

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_p^1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_p^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_q^1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_q^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_q^1}{\partial x_p^1} & \cdots & \frac{\partial x_q^1}{\partial x_p^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_q^n}{\partial x_p^1} & \cdots & \frac{\partial x_q^n}{\partial x_p^n} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Εάν $\xi = \xi_p^i\, \partial/\partial x_p^i = \xi_q^j\, \partial/\partial x_q^j \in T_P M$, τότε

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_p^1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_p^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_p^1 \\ \vdots \\ \xi_p^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_q^1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_q^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_q^1 \\ \vdots \\ \xi_q^n \end{pmatrix} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_q^1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_q^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_q^1}{\partial x_p^i} & \cdots & \frac{\partial x_q^1}{\partial x_p^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_q^n}{\partial x_p^i} & \cdots & \frac{\partial x_q^n}{\partial x_p^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_p^1 \\ \vdots \\ \xi_p^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_q^1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_q^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_q^1 \\ \vdots \\ \xi_q^n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \xi_p^1 \\ \vdots \\ \xi_p^n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial x_q^1}{\partial x_p^j}\right)_{i,j=1}^n \begin{pmatrix} \xi_q^1 \\ \vdots \\ \xi_q^n \end{pmatrix}, \quad \text{ισοδύναμα} \quad \xi_p^i = \frac{\partial x_q^i}{\partial x_p^j}\xi_q^j$$

ΙΙ.§1.10. Κάθε 1-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα είναι διφφεομορφική με το $\mathbb{R}$ ή την $\mathbb{S}^1$.

Αποδ. Λήμμα ([**Miln**], σελ.55) Εάν $\gamma : I \to M$, $\delta : J \to M$ φυσικά παραμετροποιημένες λείες καμπύλες εντός 1-διάστατης πολλαπλότητας, όπου I, J ανοικτά διαστήματα του $\mathbb{R}$, τότε το $\gamma[I] \cap \delta[J]$ έχει το πολύ δύο συνεκτικές συνιστώσες. Εάν έχει μια συνεκτική συνιστώσα, τότε η γ επεκτείνεται σε κατάλληλο διάστημα ώστε να είναι η φυσική παραμέτρηση του $\gamma[I] \cap \delta[J]$, αλλιώς η M είναι διφφεομορφική με την $\mathbb{S}^1$.

Έστω (U, γ^{-1}) τοπικός χάρτης της M, οπότε $\gamma : I \to \gamma[I] = U$ λεία καμπύλη επιλεγμένη ώστε να έχει μοναδιαία ταχύτητα (εφ' οσον η γ, ως τοπικός χάρτης, είναι αμφιδιαφόριση, έχει παντού μή μηδενική ταχύτητα, επομένως αυτό είναι εφικτό). Έστω (V, δ^{-1}) άλλος τοπικός χάρτης με $U \cap V \neq \emptyset$. Εάν το $\gamma[I] \cap \delta[J]$ έχει περισσότερες της μιας συνεκτικές συνιστώσες, τότε $M \cong \mathbb{S}^1$ από λήμμα. Αλλιώς επεκτείνουμε την γ σε φυσική παραμέτρηση του $\gamma[I] \cap \delta[J]$. Συνεχίζοντας την διαδικασία (τερματίζουμε στην περίπτωση που $M \cong \mathbb{S}^1$ όπως προηγουμένως), συγκροτείται μεγιστική επέκταση $\gamma : I' \to M$ της γ, όπου I' ανοικτό συνε-

κτικό διάστημα του $\mathbb{R}$. Θα δειχθεί ότι $\gamma[I'] = M$, οπότε $M \cong \mathbb{R}$: Έστω $x \in M \setminus \gamma[I']$ οριακό σημείο του $\gamma[I']$. Λαμβάνοντας τοπικό χάρτη (V, δ^{-1}) γύρω από το x και εφαρμόζοντας το λήμμα, συνάγεται ότι η καμπύλη $\gamma : I' \to M$ δεν είναι μεγιστική επέκταση της $\gamma : I \to M$, άτοπο. ■

§2. ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Θεωρούμε τον n-διάστατο μιγαδικό χώρο $\mathbb{C}^n$ εφοδιασμένο με σύστημα συντεταγμένων $z^1, \dots, z^n$, όπου $z^k = x^k + iy^k$. Τότε ο $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ εφοδιάζεται αυτόματα με σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$, $y^1, \dots, y^n$ για τις οποίες ισχύει $x^k = 1/2\,(z^k + \bar{z}^k)$, $y^k = 1/2^i\,(z^k + \bar{z}^k)$. Το $z^1, \dots, z^n$, $\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n$ ονομάζεται τότε το επαγόμενο στον $\mathbb{R}^{2n}$ **σύστημα μιγαδικών συντεταγμένων** από το σύστημα $z^1, \dots, z^n$ του $\mathbb{C}^n$.

Ορίζονται οι τελεστές μερικής παραγώγισης μιγαδικών συναρτήσεων πάνω στο $\mathbb{R}^{2n}$ για το σύστημα $z^1, \dots, z^n$, $\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n$ ως

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}\right)$$

Έπεται άμεσα ότι

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \qquad \frac{\partial}{\partial y^k} = i\left(\frac{\partial}{\partial z^k} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right)$$

και επιπλέον ελέγχεται ότι

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}(z^k) = \frac{\partial}{\partial z^k}(\bar{z}^k) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z^k}(z^k) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}(\bar{z}^k) = 1$$

Ελέγχονται επίσης οι κανόνες αλυσίδας,

$$\frac{\partial}{\partial z^k}(fg) = \frac{\partial f}{\partial z^k}g + f\frac{\partial g}{\partial z^k}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k}g + f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}^k}$$

Ορίζοντας τέλος $dz^k = dx^k + idy^k$, $d\bar{z}^k = dx^k + idy^k$ αποδεικνύεται εκτελώντας την πράξη ότι

ΙΙ.§2.0. Για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ισχύει

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k + \frac{\partial f}{\partial y^k}dy^k\right) = \frac{\partial f}{\partial z^k}dz^k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k}d\bar{z}^k$$

Θεωρούμε τώρα μιγαδική συνάρτηση $f : \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ που γράφεται ως δυναμοσειρά

$$P(x^1, \dots, x^n, \quad y^1, \dots, y^n \text{ ή } Q(z^1, \dots, z^n, \quad \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n)$$

στα συστήματα $x^1, \dots, x^n$, $y^1, \dots, y^n$ και $z^1, \dots, z^n$, $\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n$ αντιστοίχως (οι συντελεστές των δυναμοσειρών P, Q είναι μιγαδικοί αριθμοί, ενώ τα ορίσματα υποδηλώνουν τις πολυωνυμικές μεταβλητές της δυναμοσειράς). Μια δυναμοσειρά ονομάζεται **ανεξάρτητη ως προς κάποια μεταβλητή** εάν αυτή δεν εμφανίζεται πουθενά στη δυναμοσειρά.

ΙΙ.§2.1. Έστω μιγαδική συνάρτηση $f : \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ που γράφεται ως δυναμοσειρά

$$f(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = P(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n),\ f(z^1, \dots, z^n, \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n) = Q(z^1, \dots, z^n, \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n)$$

στα συστήματα $x^1, \dots, y^n$; $z^1, \dots, \bar{z}^n$ αντιστοίχως. Είναι γνωστό ότι η f είναι ανεξάρτητη ως προς κάποια πραγματική μεταβλητή x^k ή y^k εάν και μόνον εάν $\partial f/\partial x^k$ ή $\partial f/\partial y^k = 0$ αντιστοίχως. Το ίδιο ισχύει για τις μιγαδικές μεταβλητές : Η f είναι ανεξάρτητη ως προς την $\bar{z}^q$ εάν και μόνον εάν $\partial f/\partial\, \bar{z}^q = 0$.

Αποδ. "$\Longrightarrow$,, Από τον κανόνα της αλυσίδας, και εφ' όσον $\partial/\partial\, \bar{z}^k\,(z^k) = 0$, $\partial/\partial\, \bar{z}^k\,(\bar{z}^k) = 1$ έπεται ότι $\partial/\partial \bar{z}^k\,((z^k)^m) = 0$ και $\partial/\partial \bar{z}^k\,((\bar{z}^k)^m) = m(\bar{z}^k)^{m-1}$ για κάθε k. Από την γραμμικότητα των τελεστών παραγώγισης, εάν η $\bar{z}^q$ δεν εμφανίζεται στην δυναμοσειρά f, τότε $\partial f/\partial \bar{z}^q = 0$[(2).]

,,$\Longleftarrow$" Εάν η f δεν είναι ανεξάρτητη ως προς $\bar{z}^q$, θα δειχθεί ότι $\partial f/\partial \bar{z}^k \neq 0$. Η f γράφεται

---

2. Κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα εντός της ακτίνας σύγκλισης, επομένως κάθε δυναμοσειρά *Taylor* συγκλίνει ομοιόμορφα γύρω από το σημείο στο οποίο αναπτύσσεται. Επειδή η παραγώγιση $\partial/\partial \bar{z}^k = 1/2\,(\partial/\partial x^n + i\ \partial/\partial y^n)$ είναι τοπική διαδικασία, έπεται ότι αντιμετατίθενται με το άπειρο άθροισμα για να δώσει το ζητούμενο.

$$f(z^1, \dots, \bar{z}^n) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \, (\bar{z}^q)^m$$

όπου A_m δυναμοσειρά στην οποία δεν εμφανίζεται η μεταβλητή $\bar{z}^q$. Τότε $\partial A_m / \partial \bar{z}^q = 0$ από προηγούμενο σκέλος, άρα

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^q} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^q} \sum\nolimits_{m=0}^{\infty} \alpha_m \, (z^{-q})^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^q} (\alpha_m (\bar{z}^q)^m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^q} (z^{-q})^m = \sum_{m=0}^{\infty} m \alpha_m \, (\bar{z}^q)^m$$

που δεν είναι μηδέν. ■

Μία διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται **μιγαδική αναλυτική απεικόνιση** όταν $\partial f / \partial z^{-k} = 0, \;\; k = 1, \dots, n$. Εάν $n = 1$, οπότε $f(x, y) = u(x, y) + i \, v(x, y)$, η συνθήκη της αναλυτικότητας ισοδυναμεί εξ ορισμού του τελεστή $\partial / \partial \bar{z}$ με τις εξισώσεις *Canchy-Riemann,*

$$\partial u / \partial x = \partial v / \partial y \,, \;\; \partial u / \partial y = \partial v / \partial x.$$

Το θεώρημα *Loom-Menchoff* της μιγαδικής ανάλυσης δηλώνει ότι δεδομένης της συνέχειας της f, οι εξισώσεις *Cauchy-Riemann* ($\partial f / \partial \bar{z} = 0$) ισοδυναμούν με την διαφορισιμότητα της f σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, που για μιγαδικές συναρτήσεις σημαίνει αναλυτικότητα με την συνήθη έννοια (η συνάρτηση ταυτίζεται με την σειρά *Taylor* αυτής γύρω από κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της).

Μία αλλαγή συντεταγμένων $w^1(z^1, \dots, z^n), \dots, w^n(z^1, \dots, z^n)$ σε ένα ανοικτό $U \subset \mathbb{C}^n$ ονομάζεται **αναλυτική** όταν οι συναρτήσεις $w^1, \dots, w^n$ είναι αναλυτικές, δηλαδή $\partial w^k / \partial z^l = 0, \;\; k, l = 1, \dots, n$. Ονομάζεται **ιακωβιανός** πίνακας αυτής της αλλαγής ο πίνακας

$$\left(\frac{\partial w^k}{\partial z^l} \right)_{k,l=1}^{n} \in M_n \mathbb{C}$$

Εάν $z^k = x^k + i y^k, \;\; w^k = u^k + i v^k$, τότε υφίσταται επίσης αλλαγή συντεταγμένων $u^k(x^1, \dots, y^n)$, $v^n(x, \dots, y^n), \;\; k = 1, \dots, n$, της οποίας ο ιακωβιανός συμβολίζεται $\partial(u, v) / \partial(x, y)$.

ΙΙ.§2.2. Εάν $w^1(z^1, \dots, z^n), \dots, w^n(z^1, \dots, z^n)$, αναλυτική αλλαγή συντεταγμένων όπως η προηγούμενη, τότε

$$\left| det \left(\frac{\partial w^k}{\partial z^l} \right)_{k,l=1}^{n} \right|^2 = det \, \partial(u, v) / \partial(x, y)$$

Αποδ. Ελέγχεται εύκολα ότι εφ' όσον $\partial w^k / \partial \bar{z}^l = 0$, τότε $\partial \overline{w}^k / \partial z^l = 0$ επίσης, και επειδή $\partial \overline{w}^k / \partial \bar{z}^l = \overline{\partial w^k / \partial z^l}$, έπεται ότι ο ιακωβιανός της αλλαγής συντεταγμένων από $z^1, \dots, z^n, \;\; \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n$ σε $w^1, \dots, w^n, \;\; \overline{w}^1, \dots, \overline{w}^n$ στον $\mathbb{R}^{2n}$ είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial w^k}{\partial z^l} \right)_{k,l=1}^{n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\left(\frac{\partial w^k}{\partial z^l} \right)_{k,l=1}^{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathrm{A}} \end{pmatrix}, \qquad A \equiv \left(\frac{\partial w^k}{\partial z^l} \right)_{k,l=1}^{n}$$

Ο πίνακας της αλλαγής συντεταγμένων από $u^1, \dots, u^n, \;\; v^1, \dots, v^n$ σε $w^1, \dots, w^n, \;\; \overline{w}^1, \dots, \overline{w}^n$ ισούται με τον πίνακα της αλλαγής συντεταγμένων από $x^1, \dots, x^n, \;\; y^1, \dots, y^n$ σε $z^1, \dots, z^n, \;\; \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n$,

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & -i \, \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & -i \, \mathbf{1}_n \end{pmatrix}$$

Επομένως ο πίνακας της αλλαγής των $x^1, \dots, y^n$ σε $u^1, \dots, v^n$ είναι $B^{-1} \begin{pmatrix} A & \\ & \bar{A} \end{pmatrix} B$, που έχει ορίζουσα $detA \cdot \overline{detA} = |detA|^2 = \left| det \overline{\left(\partial w^k / \partial z^l \right)_{k,l=1}^{n}} \right|^2$. ■

II.§2.3. (Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης για αναλυτικές αλλαγές συντεταγμένων).

Εάν ο ιακωβιανός πίνακας αναλυτικής αλλαγής συντεταγμένων $w^1(z^1, \dots, z^n), \dots, w^n(z^1, \dots, z^n)$ έχει μια μηδενική ορίζουσα σε κάποιο σημείο, τότε σε περιοχή αυτού του σημείου ο μετασχηματισμός αντιστρέφεται ως $z^1(w^1, \dots, w^n), \dots, z^n(w^1, \dots, w^n)$, με τις z^k, $k = 1, \dots, n$ να είναι επίσης αναλυτικές συναρτήσεις.

Αποδ. Με τον συμβολισμό της προηγούμενης απόδειξης, εφ' όσον ο ιακωβιανός της αλλαγής των $x^1, \dots, y^n$ σε $u^1, \dots, v^n$ είναι ο $B^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \\ & \overline{\mathrm{A}} \end{pmatrix} B$ με μη μηδενική ορίζουσα $|detA|^2$, από Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης έπεται ότι αυτός ο μετασχηματισμός αντιστρέφεται τοπικά με ιακωβιανό πίνακα $B^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{A}^{-1} & \\ & \overline{\mathrm{A}}^{-1} \end{pmatrix} B$

Τότε η αλλαγή συντεταγμένων από $w^1, \dots, \overline{w}^n$ σε $z^1, \dots, \overline{z}^n$ υπάρχει τοπικά και έχει ιακωβιανό πίνακα

$\begin{pmatrix} \mathrm{A}^{-1} & \\ & \overline{\mathrm{A}}^{-1} \end{pmatrix}$, οπότε $\partial w^k / \partial \overline{z}^l = 0, \quad k, l = 1, \dots, n.$ ■

Από II.§2.3 συνάγεται άμεσα ότι κάθε $w : \mathbb{C} \supset U \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής, δηλαδή ένας αναλυτικός μετασχηματισμός του μιγαδικού επιπέδου, είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν $\partial w / \partial z \neq 0$. Γενικεύοντας, καλείται **μιγαδικός μετασχηματισμός του** $\mathbb{C}^n$ κάθε 1-1 αναλυτική απεικόνιση από ένα ανοιχτό σύνολο αυτού σε ένα άλλο. Ένας μιγαδικός μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος γύρω από κάθε σημείο στο οποίο η ιακωβιανή του είναι μη μηδενική. Καλείται **ολόμορφος** κάθε αντιστρέψιμος μιγαδικός μετασχηματισμός του οποίου η αντιστροφή είναι επίσης μιγαδικός μετασχηματισμός. Η II.§2.3 δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη υπό την οποία ένας μιγαδικός μετασχηματισμός είναι ολόμορφος.

μιγαδική n-πολλαπλότητα ονομάζεται κάθε Hol-πολλαπλότητα, όπου Hol η ψευδοομάδα των ολόμορφων μιγαδικών μετασχηματισμών μεταξύ ανοικτών συνόλων του $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Κάθε μιγαδική n-πολλαπλότητα είναι διαφορική $2n$-πολλαπλότητα, αφού $Hol \subset C^\infty$. Καλείται **ολομορφία** μεταξύ μιγαδικών πολλαπλοτήτων κάθε Hol-απεικόνιση και **αμφιολομορφία** κάθε Hol-ισομορφισμός.

Εάν (U_p, φ_p) τοπικός χάρτης με σύστημα συντεταγμένων $z_p^1, \dots, z_p^n$, τότε $x_p^1, \dots, x_p^n$, $y_p^1, \dots, y_p^n$ το αντίστοιχο τοπικό σύστημα της υποκείμενης διαφορικής $2n$-πολλαπλότητας, όπου $z_p^k = x_p^k + i y_p^k$. Από τα γνωστά για τις μιγαδικές συντεταγμένες, $z_p^1, \dots, z_p^n$, $\overline{z}_p^1, \dots, \overline{z}_p^n$ είναι ένα άλλο σύστημα για την τελευταία. Εξ ορισμού των μιγαδικών πολλαπλοτήτων, σε κάθε τομή $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ ισχύει $\partial z_p^k / \partial z_p^j = 0$, $\partial z_q^k / \partial z_q^j = 0$.

Λήμμα. (Αρχή *Maximum-Modulus* της μιγαδικής ανάλυσης).

Εάν $f : \mathbb{C}^n \supset U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $P_0 \in U$ τέτοιο ώστε $|f(P)| \leq |f(P_0)|$ για κάθε $P \in V \subset U$, όπου V ανοικτή περιοχή του P_0, τότε η f είναι σταθερή σε μια περιοχή του P_0.

II.§2.4. Κάθε ολόμορφη συνάρτηση με μιγαδικές τιμές πάνω σε συμπαγή, συνεκτική μιγαδική πολλαπλότητα είναι σταθερή.

Αποδ. Έστω $f : M \to \mathbb{C}$ όπως στην υπόθεση. Από θεώρημα μεγίστου τιμής, εφ' όσον $|f| : M \to \mathbb{R}$ συνεχής και M συμπαγής, η $|f|$ επιτυγχάνει μέγιστο στο σημείο $P_0 \in M$. Έστω $M' \subset M$ των σημείων στα οποία επιτυγχάνεται αυτό το μέγιστο. Από λήμμα, το M' είναι ανοικτό υποσύνολο της M. Το M' δεν έχει τοπολογικό σύνορο (διότι αν είχε, αυτό θα έπρεπε εξ ορισμού του M' να περιέχεται στο M', άτοπο, εφ' όσον M είναι ανοικτό), επομένως το $M \setminus M'$ είναι ανοικτό υποσύνολο της M επίσης. Λόγω συνεκτικότητας της M, και εφ' όσον $M' \neq \emptyset$, έπεται ότι $M = M'$. ■

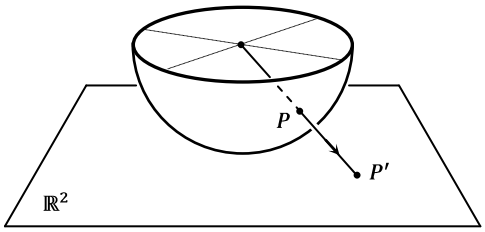
§3. ΠΡΟΒΟΛΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Εφαρμόζοντας στην $\mathbb{S}^2$ την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ που ταυτίζει τα αντιδιαμετρικά της σημεία, το πηλίκο $\mathbb{S}^2/\sim$ ικανοποιεί τα αξιώματα του προβολικού επιπέδου, με τα ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων να ερμηνεύονται ως *σημεία* και οι μέγιστοι κύκλοι να ερμηνεύονται ως *ευθείες* (κάθε ζεύγος ευθειών τέμνεται σε μοναδικό σημείο και από κάθε ζεύγος ευθειών διέρχεται μοναδική ευθεία). Ο τοπολογικός χώρος $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\sim$, όπου $\sim$ ταύτιση σημείων πάνω από πολλαπλασιαστικό παράγοντα (επομένως $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\sim$ είναι ο χώρος των μονοδιάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^3$), είναι τότε ομοιομορφικός του $\mathbb{S}^2/\sim$ μέσω της προβολής

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\sim \ \to \ \mathbb{S}^2/\sim \ , \quad [x] \longmapsto [x \,/\, |x|]$$

(είναι 1-1, επί, συνεχής και ανοικτή, άρα ομοιομορφισμός). Το $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\sim$ ικανοποιεί τα αξιώματα του προβολικού επιπέδου, με τις διερχόμενες από το 0 ευθείες να ερμηνεύονται ως σημεία και τα διερχόμενα από το 0 επίπεδα να ερμηνεύονται ως ευθείες· τότε η προηγούμενη αντιστοίχιση απεικονίζει σημεία σε σημεία και ευθείες σε ευθείες (δηλ. εκτός της τοπολογικής, σέβεται επίσης την προβολική δομή).

Καλείται **πραγματικό προβολικό επίπεδο** ο τοπολογικός χώρος $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\sim \cong \mathbb{S}^2/\sim$, ονοματολογία που δικαιολογείται επειδή η παραπάνω κατασκευή είναι ομοιομορφική με το κλασσικό επίπεδο της προβολικής γεωμετρίας πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$, και μάλιστα κατά τρόπον ώστε οι ευθείες αντιστοιχίζονται σε ευθείες και τα σημεία σε σημεία. Το επίπεδο της προβολικής γεωμετρίας είναι μια κατάλληλη συμπαγοποίηση του $\mathbb{R}^2$ που ικανοποιεί τα αξιώματα του προβολικού επιπέδου – συγκεκριμένα, προκύπτει με επισύναψη για κάθε κλάση παραλληλίας στο $\mathbb{R}^2$ ενός σημείου στο οποίου αξιώνεται να τέμνονται οι ευθείες που περιέχονται στην κλάση αυτή· αξιώνοντας επιπλέον το σύνολο αυτών των επ' άπειρον σημείων να είναι ευθεία (επ' άπειρον ευθεία), το σύνολο που προκύπτει ικανοποιεί τα προβολικά αξιώματα για την διάσταση 2. Ένα άλλο μοντέλο του επιπέδου της προβολικής που προσιδιάζει εποπτικά στο $\mathbb{R}P^2$ μπορεί να κατασκευαστεί πάνω σε ένα ημισφαίριο της $\mathbb{S}^2$:



Σε κάθε σημείο P' του $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχίζουμε ένα P επί του ημισφαιρίου όπως φαίνεται στο σχήμα. Τότε τα σημεία του ισημερινού, που δεν είναι εικόνα κανενός σημείου του $\mathbb{R}^2$ μέσω αυτής της προβολής, χρησιμεύουν ως επ' άπειρον σημεία. Συγκεκριμένα, κι επειδή αντιστοιχεί μοναδικό επ' άπειρον σημείο σε κάθε κλάση παραλληλίας του $\mathbb{R}^2$, τα επ' άπειρον σημεία είναι ακριβώς τα ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων πάνω στον ισημερινό - κάθε τέτοιο ζεύγος είναι το επ' άπειρον σημείο της συκγροτούμενης από τα μέγιστα ημικύκλια που διέρχονται από αυτό το ζεύγος κλάσης. Προβάλλοντας το ημισφαίριο στο επίπεδο, η παραπάνω θεώρηση δείχνει ότι το επίπεδο της προβολικής γεωμετρίας είναι ομοιομορφικό με το πηλίκο $\overline{\mathbb{B}^2}/\sim$ του κλειστού 2-διάστατου μοναδιαίου δίσκου, όπου $\sim$ η ταύτιση των αντιδιαμετρικών σημείων πάνω στο σύνορο. Θα δειχθεί ότι $\mathbb{R}P^2 \cong \overline{\mathbb{B}^2}/\sim$ ' οπότε η ονομασία «πραγματικό προβολικό επίπεδο» για την κατασκευή $\mathbb{R}P^2$ όντως δικαιολογείται: Ο δίσκος $\overline{\mathbb{B}^2}$ εμφυτεύτεται στην $\mathbb{S}^2$ ως το άνω ημισφαίριο αυτής μέσω της απεικόνισης

$$i : \overline{\mathbb{B}^2} \to \mathbb{S}^2, \quad (x^1, x^2) \longmapsto (x^1, x^2, 1 - \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}\,)$$

Εάν q, q' οι προβολές στα πηλίκα $\overline{\mathbb{B}^2}/\sim, \mathbb{S}^2/\sim$ αντιστοίχως, συμβολίζεται f η μοναδική απεικόνιση που καθιστά αντιμεταθετικό το παρακάτω διάγραμμα (πέρασμα της $q' \circ i$ στο πηλίκο μέσω της q)

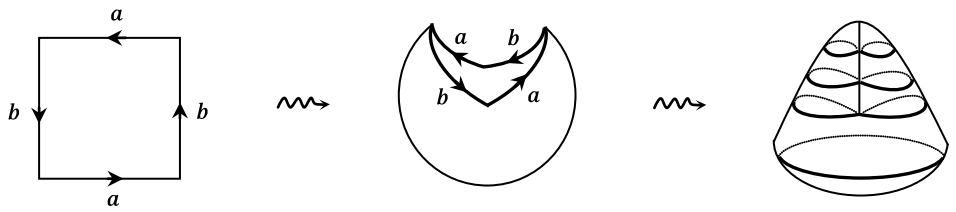
$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathbb{B}^2} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{S}^2 \arrow[d, "q'"] \\
\overline{\mathbb{B}^2}/\sim \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^2/\sim
\end{tikzcd}$$

Επειδή η $\overline{\mathbb{B}^2}/\sim$ είναι συμπαγής ως πηλίκο συμπαγούς και $\mathbb{S}^2/\sim$ είναι *Hausdorff*, για να είναι η f ο ζητούμενος ομοιομορφισμός αρκεί να δειχθεί ότι είναι $1-1$ και επί.

$1-1$: $f(q(P_1)) = f\big(q(P_2)\big) \Rightarrow q'\big(i(P_1)\big) = q'\big(i(P_2)\big) \Rightarrow q'(P_1) = q'(P_2) \Rightarrow P_1 = \pm P_2 \Rightarrow q(P_1) = q(P_2)$

επί: Έστω $y \in \mathbb{S}^2/\sim$, $y = q'(\pm P)$. Εφ' όσον $\overline{\mathbb{B}^2}$ το βόρειο ημισφαίριο της $\mathbb{S}^2$, $P \in \overline{\mathbb{B}^2}$ ή $-P \in \overline{\mathbb{B}^2}$, άρα $q(P) \in \overline{\mathbb{B}^2}/\sim$ ή $q(-P) \in \overline{\mathbb{B}^2}/\sim$, επομένως $f\big(q(P)\big) = q'(P) = y$ ή $f\big(q(-P)\big) = q'(-P) = y$. ■

Είναι γνωστό από την τοπολογία ότι το $\mathbb{R}P^2$ είναι συμπαγής και συνεκτική τοπολογική πολλαπλότητα, με θεμελιώδη ομάδα $\mathbb{Z}_2$, επιπλέον είναι η απλούστερη μή προσανατολίσιμη 2-διάστατη πολλαπλότητα (εννοώντας ότι κάθε μή προσανατολίσιμη 2-πολλαπλότητα αναλύεται σε συνδετικό άθροισμα απλούστερων πολλαπλοτήτων, τουλάχιστον μια από τις οποίες είναι η $\mathbb{R}P^2$) και δεν εμφυτεύεται στον $\mathbb{R}^3$. Η αναπαράσταση του προβολικού επιπέδου ως $\overline{\mathbb{B}^2}/\sim$ σημαίνει ότι έχει πολυγωνική παράσταση $abab$, επομένως μια τοπολογική εικόνα του προβολικού επιπέδου ως επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$ που τέμνεται με τον εαυτό της είναι



Γενικεύοντας σε οποιαδήποτε διάσταση, ορίζεται ο n-**διάστατος πραγματικός προβολικός χώρος** ως ο χώρος των 1-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ (δηλαδή $\sim$ είναι η ταύτιση πάνω από μή μηδενικό πολλαπλασιαστικό παράγοντα), που είναι επίσης ο χώρος των ζευγών αντιδιαμετρικών σημείων της $\mathbb{S}^n$, δηλαδή $\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$, με την $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ να δρά στην σφαίρα εναλλάσοντας αντιδιαμετρικά σημεία. Ειδικά για $n = 1$ ισχύει $\mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{S}^1$.

Για να κατασκευαστεί C^∞-άτλας του $\mathbb{R}P^n$ θεωρούμε αρχικά σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^{n+1}$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ και συμβολίζουμε $[x^1, \dots, x^{n+1}]$ την κλάση ισοδυναμίας του σημείου $(x^1, \dots, x^{n+1})$ για την διαμέριση $\sim$ που δίνει τον n-διάστατο προβολικό χώρο. Εάν $x^p \neq 0$ τότε

$$[x^1, \dots, x^{n+1}] = [x^1/x^p, \dots, \underbrace{1}_{p}, \dots, x^{n+1}/x^p]$$

επομένως κάθε 1-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n+1}$ που δεν περιέχεται στο επίπεδο $x^p = 0$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από μια n-άδα $(x^1, \dots, x^{p-1}, x^{p+1}, \dots, x^{n+1})$. Θεωρούμε το ανοικτό κάλυμμα $U_1, \dots, U_{n+1}$ του $\mathbb{R}P^n$, όπου

$$U_p = \{\, [x^1, \dots, x^{p-1}, 1, x^p, \dots, x^{n+1}] \;\big|\; x^p \neq 0\}, \;\; p = 1, \dots, n+1$$

το σύνολο των 1-διάστατων υποχώρων που δεν περιέχονται στο επίπεδο $x^p = 0$. Θα δειχθεί ότι οι χάρτες (U_p, φ_p), $p = 1, \dots, n+1$, όπου

$$\varphi_p : U_p \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi_p(\,[x^1, \dots, x^{p-1}, 1, x^p, \dots, x^{n+1}]\,) = (x^1, \dots, x^{p-1}, x^{p+1}, \dots, x^{n+1}) \;,$$

C^∞-συμβατοί, επομένως συγκροτούν C^∞-άτλαντα του προβολικού χώρου. Έστω

$$x_p^1, \dots, x_p^{p-1}, x_p^{p+1}, \dots, x_p^{n+1} \;\; ; \;\; x_q^1, \dots, x_q^{q-1}, x_q^{q+1}, \dots, x_q^{n+1}$$

τα συστήματα συντεταγμένων των χαρτών U_p, U_q αντιστοίχως, οπότε η συνάρτηση μετάβασης εκφράζεται ως

$$\varphi_p \circ \varphi_q^{-1}(x_q^1, \dots, x_q^{n+1}) = \left(x_p^1(x_q^1, \dots, x_q^{n+1}), \dots, x_p^{n+1}(x_q^1, \dots, x_q^{n+1})\right)$$

Ισχύει

$$\varphi_p \circ \varphi_q^{-1}(x_q^1, \dots, x_q^{n+1}) = \varphi_p(\,[x_q^1, \dots, x_q^1, 1, x_q^1, \dots, x_q^{n+1}]) =$$

$$\varphi_p(\,[x_q^1, \dots, x_q^{q-1}, 1, x_q^{q-1}, \dots, x_q^{n+1}]) = \varphi_p(\,[x_q^1/x_q^p, \dots, x_q^{q-1}/x_q^p, 1/x_q^p, x_q^{q+1}/x_q^p, \dots, x_q^{n+1}/x_q^p]) =$$

$$(x_q^1/x_q^p, \dots, x_q^{q-1}/x_q^p, 1/x_q^p, x_q^{q+1}/x_q^p, \dots, x_q^{n+1}/x_q^p)$$

που προφανώς είναι αμφιδιαφόριση. Από αυτές τις πράξεις συνάγεται επίσης ότι

$$x_p^i\left(x_q^1,\dots,x_q^{q-1},x_q^{q+1},\dots,x_q^{n+1}\right)=\begin{cases} x_q^i\big/x_q^p\ , & \text{εάν } i\neq q\\ 1\big/x_q^p\ , & \text{εάν } i\neq q\end{cases}$$

Επομένως για $i\neq q$

$$\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^j}=\frac{\partial}{\partial x_q^j}\left(\frac{x_q^i}{x_q^p}\right)\underset{j\neq p}{\overset{j=p}{=}}\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_q^p}\left(\dfrac{x_q^i}{x_q^p}\right)=-\dfrac{x_q^i}{\left(x_q^p\right)^2}\\ j=i\ \dfrac{\partial}{\partial x_q^i}\left(\dfrac{x_q^i}{x_q^p}\right)=-\dfrac{1}{x_q^p}\\ j\neq i\ \dfrac{\partial}{\partial x_q^j}\left(\dfrac{x_q^i}{x_q^p}\right)=0\end{cases}$$

και για $i=q$

$$\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^j}=\frac{\partial}{\partial x_q^j}\left(\frac{1}{x_q^p}\right)\underset{j=p}{\overset{j\neq p}{=}}\begin{cases}0\\ \dfrac{\partial}{\partial x_q^p}\left(\dfrac{1}{x_q^p}\right)=-\dfrac{1}{\left(x_q^p\right)^2}\end{cases}$$

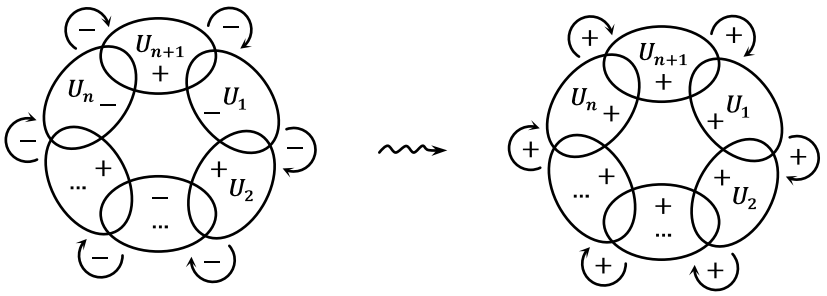
Υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $p>q$, από τις παραπάνω πράξεις συνάγεται ότι

$$\left(\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^j}\right)_{\substack{i,j=1\\ i\neq p\\ j\neq q}}^{n+1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{x_q^p} & \cdots & 0 & \dfrac{-x_q^1}{\left(x_q^p\right)^2} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \dfrac{1}{x_q^p} & \dfrac{-x_q^1}{\left(x_q^p\right)^2} & \cdots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \dfrac{-1}{\left(x_q^p\right)^2} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dfrac{-1}{\left(x_q^p\right)^2} & \cdots & \dfrac{1}{x_q^p}\end{pmatrix}$$

Επομένως $det\left(\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^j}\right)_{\substack{i,j=1\\ i\neq p\\ j\neq q}}^{n+1}=-\frac{1}{\left(x_q^p\right)^2}\left(\frac{1}{x_q^p}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{x_q^p}\right)^{n+1}$ (1)

ΙΙ.§3.0. Ένας προβολικός χώρος είναι προσανατολίσιμος εάν και μόνον εάν είναι περιττής διάστασης.

Αποδ. Εάν n άρτιος, τότε η απεικόνιση $a:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n,\ P\longmapsto -P$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Υποθέτοντας ότι η $\mathbb{R}P^n$ είναι προσανατολίσιμη, οπότε η προβολή $q:\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}P^n$ μπορεί να θεωρηθεί ότι διατηρεί τον προσανατολισμό, καταλήγουμε σε άτοπο, αφού η $q=q\circ r$ αντιστρέφει κατ' ανάγκην τον προσανατολισμό. Εάν n περιττός, από την σχέση (1) έπεται ότι οι συναρτήσεις μετάβασης αντιστρέφουν τον προσανατολισμό, άρα τα $U_1,\dots,U_{n+1}$ τέμνονται ανά δύο: εάν $U_p\cap U_q\cap U_r\neq\emptyset$, με p,q,r διακεκριμένα, τότε η $\varphi_r\circ\varphi_p^{-1}=(\varphi_r\circ\varphi_q^{-1})\circ(\varphi_q\circ\varphi_p^{-1})$ διατηρεί τον προσανατολισμό (αφού οι $\varphi_r\circ\varphi_q^{-1},\varphi_q\circ\varphi_p^{-1}$ τον αντιστρέφουν), άτοπο. Επομένως οι άρτιοι το πλήθος χάρτες U_i τέμνονται διαδοχικά ανά δύο. Αντιστρέφοντας τον προσανατολισμό των χαρτών με περιττό δείκτη (δηλαδή αντικαθιστώντας την απεικόνιση φ_p με την $r\circ\varphi_p$, όπου r ανάκλαση στον $\mathbb{R}^n$, για $p\neq 0\ mod 2$), λαμβάνουμε άτλαντα με συμβατά προσανατολισμένους χάρτες.



■

$(n+1,r)$-**γκρασμαννιανή**, $\boldsymbol{G}_r^{n+1}$, $n+1>r$, καλείται το σύνολο των r-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^{n+1}$, που καθίσταται $r(n-r)$-διάστατη πολλαπλότητα μέσω ενός C^∞-άτλαντα παρόμοιου με εκείνον που κατασκευάστηκε για τους προβολικούς χώρους. Ισχύουν οι αμφιδιαφορίσεις

$$\boldsymbol{G}_r^{n+1} \cong \boldsymbol{G}_{n+1-r}^{n+1} \quad \text{και} \quad \mathbb{R}P^n = \boldsymbol{G}_1^{n+1} \cong \boldsymbol{G}_n^{n+1}$$

Ορίζεται ο n-**διάστατος μιγαδικός προβολικός χώρος** ως ο χώρος των 1-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{C}^{n+1}$, $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ (δηλαδή $\sim$ είναι η ταύτιση πάνω από μή μηδενικό μιγαδικό πολλαπλασιαστικό παράγοντα). Ισχύει προφανώς η αμφιδιαφόριση

$$\mathbb{C}P^n \cong \boldsymbol{G}_2^{2n+2}$$

Επειδή οι μιγαδικές γραμμές (1-διάστατοι μιγαδικοί υπόχωροι) είναι ακριβώς οι 2-δισδιάστατοι πραγματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^{2n+2}$, κάθε μια από αυτές τέμνει την σφαίρα

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{\ (z^1, \dots, z^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (z^i)^2 = 1\ \}$$

σε έναν μέγιστο κύκλο και αντιστρόφως, κάθε μέγιστο κύκλος αυτής είναι η τομή μοναδικής μιγαδικής γραμμής με την σφαίρα. Επομένως ο $\mathbb{C}P^n$ είναι ο χώρος των μέγιστων κύκλων της $\mathbb{S}^{2n+1}$, που συγκροτούν διαμέριση αυτής: εφ' όσον μοναδικό κοινό σημείο των μιγαδικών γραμμών είναι το 0, έπεται ότι οι μέγιστοι κύκλοι της $\mathbb{S}^{2n+1}$ δεν έχουν κοινά σημεία.

Η γκρασμαννιανή $\mathbb{C}P^n$ αποκτά επίσης δομή n-διάστατης μιγαδικής πολλαπλότητας μέσω των χαρτών

$$\{\ [z^1, \dots, z^{n+1}] \mid z^p \neq 0\ \} = U_p \to \mathbb{C}^n,\ \ \varphi_p([z^1, \dots, z^{n+1}]) = (z^1, \dots, z^{p-1}, z^{p+1}, \dots, z^{n+1}),\ \ p = 1, \dots, n+1$$

Κάνοντας πράξεις όμοιες με εκείνες των πραγματικών προβολικών χώρων,

$$\varphi_p \circ \varphi_q^{-1}\left(z_q^1, \dots, z_q^{q-1}, z_q^{q+1}, \dots z_q^n\right) = \left(\frac{z_q^1}{z_q^p}, \dots, \frac{z_q^{q-1}}{z_q^p}, \frac{1}{z_q^p}, \frac{z_q^{q+1}}{z_q^p}, \dots, \frac{z_q^{p-1}}{z_q^p}, \frac{z_q^{p+1}}{z_q^p}, \dots, \frac{z_q^n}{z_q^p}\right)$$

οπότε κάθε μια από τις συνιστώσες των συναρτήσεων μετάβασης είναι αναλυτική (ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann), π.χ. για την πρώτη,

$$z_p^1 = \frac{z_q^1}{z_q^p} = \frac{x_q^k + i\, y_q^k}{x_q^p + i\, y_q^p} = \frac{\left(x_q^k + i\, y_q^k\right)\left(x_q^p - i\, y_q^p\right)}{\left(x_q^p + i\, y_q^p\right)^2} = \underbrace{\frac{x_q^k x_q^p + y_q^k y_q^p}{\left(x_q^p + i\, y_q^p\right)^2}}_{u(x_q^k,\, y_q^k)} + \underbrace{\frac{y_q^k x_q^p - x_q^k y_q^p}{\left(x_q^p + i\, y_q^p\right)^2}}_{v(x_q^k,\, y_q^k)}$$

επομένως

$$\frac{\partial u}{\partial x_q^k} = \frac{x_q^p}{(x_q^p + y_q^p)^2} = \frac{\partial v}{\partial y_q^k} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y_q^k} = \frac{y_q^p}{(x_q^p + y_q^p)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x_q^k}$$

Ο πολλαπλασιασμός μιγαδικού διανύσματος με μιγαδικό αριθμό της μορφής $e^{i\theta}$ διατηρεί το μέτρο και τις μιγαδικές ευθείες, επομένως η δράση της ομάδας Lie $U(1) \cong SO(2)$ επί της $\mathbb{S}^{2n+1}$,

$$U(1) \times \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}, \quad \left(e^{i\theta}, z\right) \longmapsto e^{i\theta} z$$

έχει τροχιακό χώρο το σύνολο των μέγιστων κύκλων,

$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{S}^{2n+1}/U(1)$$

§4. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΙΙ.§4.0. (Θεώρημα Βαθμού).

Εάν $f : \mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}^m$ απεικόνιση σταθερού βαθμού $k \leq min\,\{m, n\}$ (δηλαδή $rank\, df(x) = k$ για όλα τα $x \in U$) μεταξύ ανοικτών συνόλων, τότε για κάθε $x \in U$ υπάρχει τοπικός χάρτης (U_0, φ) με κέντρο το x και τοπικός χάρτης (V_0, ψ) με κέντρο το $f(x)$ και $f[U_0] \subset V_0$ ώστε

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-k})$$

και φ, ψ αμφιδιαφορίσεις μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ αντιστοίχως.

Μία $f \in C^\infty(M, N)$ καλείται **εμβύθιση** όταν είναι σταθερού βαθμού $dimM = n \leq m = dimV$, δηλαδή όταν για κάθε $x \in M$ το διαφορικό $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ εμψυτεύει γραμμικά τον T_xM στον $T_{f(x)}N$. Η γεωμετρική ερμηνεία της εμβύθισης είναι ότι θέτει την M εντός της N διατηρώντας την διάσταση των εφαπτόμενων χώρων, επομένως το $f[M]$ νοείται ως λείο n-διάστατο αντικείμενο εντός της N που ενδεχομένως τέμνεται με τον εαυτό του. Από Θεώρημα Βαθμού, μια $\mathbb{C}^\infty$-απεικόνιση είναι εμβύθιση ακριβώς όταν γύρω από κάθε $P \in M, f(P) \in N$ υπάρχουν τοπικά συστήματα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n;\ y^1, \dots, y^n$ αντιστοίχως ώστε

$$f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-k})$$

Μια διαφορική πολλαπλότητα $M \subset N$ καλείται **υποπολλαπλότητα** της N όταν η ταυτοτική $i : M \to N$ είναι εμφύτευση. Επειδή η συνέχεια της i δεν εγγυάται ότι η τοπολογία που έχει η N ως διαφορική πολλαπλότητα συμπίπτει με την επαγόμενη (αλλά μόνον ότι η δεύτερη περιέχεται στην πρώτη), απαιτείται επιπλέον η i να είναι τοπολογική εμφύτευση της διαφορικής πολλαπλότητας M εντός της N. Από τα γνωστά για τις εμβυθίσεις, ένα υποσύνολο $N \subset M$ της m-πολλαπλότητας M είναι n-υποπολλαπλοτητα ακριβώς όταν η M καλύπτεται από τοπικούς χάρτες U_p με αντίστοιχα συστήματα συντεταγμένων $x_p^1, \dots, x_p^m$ ώστε σε κάθε ένα από αυτά, το σύνολο $U_p \cap M$ να είναι το σύνολο των σημείων $x_p^{u+1} = \dots = x_p^m = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, $(U_p \cap M)_{p \in A}$ άτλας της N με αντίστοιχα συστήματα συντεταγμένων $x_p^1, \dots, x_p^m$.

Εμφύτευση καλείται μια εμβύθιση $f : M \to N$ που επιπλέον είναι ομοιομορφισμός επί του $f[M]$ με το $f[M]$ να είναι υποπολλαπλότητα της N. Σε αυτήν την περίπτωση, εφ' όσον $rankdf_x = n = dimT_{f(x)}N$ για κάθε $x \in M$, η f είναι αμφιδιαφόριση από το M στο $f[M]$ (Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης). Επομένως μια εμφύτευση $f : M \to N$ επιτρέπει να νοείται η M ως υποπολλαπλότητα της N. Θεωρώντας τοπικά συστήματα συντεταγμένων, συνάγεται άμεσα από τους ορισμούς ότι κάθε εμβύθιση $f : M \to N$ είναι τοπική εμφύτευση: γύρω από κάθε $P \in M$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \subset M$ ώστε $f\big|_u : U \to M$ να είναι εμφύτευση (δηλαδή η M μπορεί να θεωρείται τοπικά ως υποπολλαπλότητα της N).

Αποδεικνύεται ότι κάθε πολλαπλότητα είναι εικόνα εικόνα εμφύτευσης. Συγκεκριμένα, για κάθε τοπολογική υποπολλαπλότητα M μιας διαφορικής πολλαπλότητας M, υπάρχει μοναδική διαφορική δομή επί της N ώστε η ταυτοτική $i : M \to N$ να είναι εμφύτευση (μακροσκελής και στοιχειώδης απόδειξη, με τεχνικές λεπτομέρειες στον έλεγχο της συμβατότητας των οριζομένων χαρτών). Η γεωμετρική ερμηνεία της n-υποπολλαπλότητας M μιας m-πολλαπλότητας N είναι ότι σε κάθε τοπικό χάρτη (U, φ) της M, η $M \cap U$ αναπαρίσται ως n-διάστατη επιφάνεια εντός του $\mathbb{R}^m = \varphi[U]$ (συγκεκριμένα, ως n-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$). Άρα σε κάθε τοπικό χάρτη U_p της N, η M δίνεται ως σύνολο λύσεων ενός μη ιδιάζοντος συστήματος $m - n$ εξισώσεων

$$f_p^1(x_p^1, \dots, x_p^m) = \dots = f_p^{m-n}(x_p^1, \dots, x_p^m) = 0$$

όπου $f_p^i : U_p \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m-n$ διαφορίσιμες συναρτήσεις και τέτοιες ώστε οι f_p^i, f_q^i να συμφωνούν στις τομές $U_p \cap U_q$. Συγκολλώντας αυτές τις f_p^i, $p \in A$, συνάγεται ότι κάθε n-υποπολλαπλότητα M της N είναι 0-ισοσταθμική μιας διαφορίσιμης απεικόνισης $f : N \to \mathbb{R}^{m-n}$ σταθερού βαθμού $m-n$. Ο συλλογισμός αυτός αντιστρέφεται, επομένως οι n-υποπολλαπλότητες εντός της N είναι ακριβώς οι ισοσταθμικές λείων απεικονίσεων σταθερού βαθμού $m-n$ από την N στον $\mathbb{R}^{m-n}$. Γενικεύοντας,

II.§4.1. Ισοσταθμική διαφορίσιμης απεικόνισης $f : N \to X$ σταθερού βαθμού $k < m = dimN$ είναι $(m-k)$-υποπολλαπλότητα της N.

Αποδ. Έστω $x \in f^{-1}(y)$, $y \in X$. Από Θεώρημα Βαθμού, υπάρχει (U, φ) τοπικός χάρτης της N γύρω από το x και (V, ψ) τοπικός χάρτης με κέντρο P με κέντρο $f(x) = y$, με αντίστοιχα συστήματα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^m$; $y^1, \dots, y^l$, $l = dimX$, ώστε

$$f(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, \underbrace{0, \dots, 0}_{l-k})$$

Επομένως στο U η $f^{-1}(y)$ αναπαρίσταται ως ο $(m-k)$-διάστατος υπόχωρος $x^1 = \dots = x^k = 0$. ■

II.§4.2. Περιορισμός C^k-απεικόνισης σε υποπολλαπλότητα είναι $C^k, k = 0, \dots, \infty$.

Αποδ. Επειδή η σύνθεση C^k-απεικόνισης με λεία απεικόνιση διατηρεί την C^k-διαφορισιμότητα για κάθε $k = 0,1, \dots, \infty$, και για κάθε υποπολλαπλότητα M ο περιορισμός $f\big|_M$ μιας C^k-απεικόνισης $f : N \to P$ εκφράζεται ως $f\big|_M = f \circ i_M$ όπου $i_M : M \to N$ η ταυτοτική. ■

II.§4.3. Εάν $g : M \to N$ εμβύθιση και $f : N \to P$ είναι C^k, τότε η $f \circ g : M \to P$ είναι C^k.

Αποδ. Απόδειξη ίδια με εκείνη της προηγούμενης πρότασης, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον τοπικό χαρακτήρα της εμβύθισης ως εμφύτευσης. ■

II.§4.4. Εάν M υποπολλαπλότητα της N και $f : X \to N$ C^k-απεικόνιση με $f[P] \subset M$, τότε η $f : X \to M$ είναι C^k επίσης.

Αποδ. Έστω $x \in X$ και $y = f(x) \in M$. Επιλέγουμε (V, ψ) τοπικό χάρτη της N γύρω από το y, οπότε $V \cap M$ τοπικός χάρτης της M γύρω από αυτό. Επειδή η M εμφυτεύεται τοπολογικά στην N, η $f : X \to M$ είναι συνεχής και επομένως $f^{-1}[V \cap M]$ ανοιχτή περιοχή της X γύρω από το x. Επιλέγοντας (U, φ) τοπικό χάρτη της X γύρω από το x τέτοιον ώστε $f[U] \subset V \cap M$, η $(\pi \circ \psi) f \circ \varphi^{-1}$ είναι C^k, όπου $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ η προβολή στον υπόχωρο, $m = dimN$, $n = dimM$. ■

Μια λεία απεικόνιση $f : M \to N$, $n = dimM \geq m = dimN$ ονομάζεται **εμβάπτυση** όταν είναι σταθερού βαθμού m, δηλαδή όταν για κάθε $x \in M$ το διαφορικό $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ είναι επί. Το γεωμετρικό νόημα της εμβάπτυσης είναι ότι θέτει την M εντός της N με τον οικονομικότερο τρόπο, δηλαδή μειώνοντας ομοιόμορφα την διάσταση ακριβώς όσο χρειάζεται $(n-m)$. Από το Θεώρημα Βαθμού συνάγεται ότι σε τοπικά συστήματα συντεταγμένων, η f αναπαρίσταται ως προβολή, $f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^m)$.

II.§4.5. Εάν $f : M \to N$, $n = dimM$, $m = dimN$ εμβάπτυση *επί*, τότε για κάθε $y \in N$ υπάρχει περιοχή $V \subset N$ του y και $\sigma : V \to \sigma[V] \subset M$ αμφιδιαφόριση ώστε η $f \circ \sigma : U \to U$ να είναι η ταυτοτική.

Αποδ. Επειδή η f είναι σταθερού βαθμού m, υπάρχουν τοπικά συστήματα συντεταγμένων με κέντρα x, y ώστε η f να αναπαρίσταται σε αυτά ως $f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^m)$. Επιλέγοντας κύβους $C_\varepsilon = \{(x^1, \dots, x^n) \big| \, |x^i| < \varepsilon\}$, $C_\varepsilon\{(x^1, \dots, x^m) \big| \, |x^i| < \varepsilon\}$ γύρω από τα x, y αντιστοίχως, η ζητούμενη είναι

$$\sigma(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}) \qquad ■$$

Οι εμβαπτύσεις *επί* είναι οι απεικονίσεις πηλίκο στην κατηγορία των διαφορικών πολλαπλοτήτων:

II.§4.6. Δεδομένης *επί* εμβάπτυσης $f : M \to N$, η απεικόνιση $g : N \to X$ είναι λεία εάν και μόνον εάν η απεικόνιση $g \circ f : M \to N$ είναι λεία.

Αποδ. "$\Longrightarrow$,, Η σύνθεση διατηρεί την λειότητα.

,,$\Longleftarrow$" Έστω $y \in N$. Από II.§4.5, για κάθε $x \in f^{-1}(y)$ υπάρχει περιοχή $V \subset N$ του y και $\sigma : V \to \sigma[V]$

αμφιδιαφόριση με $f \circ \sigma = id$. Άρα η $g\big|_U = g\big|_U \circ id_U = g\big|_U \circ (f \circ \sigma) = (g \circ f) \circ \sigma$ είναι λεία ως σύνθεση λείων. Έπεται ότι η g είναι τοπικά λεία γύρω από κάθε σημείο, άρα είναι ολικά λεία. ■

ΙΙ.§4.7. (Πέρασμα στο πηλίκο).

Δεδομένης *επί* εμβάπτυσης $f : M \to N$, εάν η απεικόνιση $g : M \to X$ σέβεται τις f-ίνες τότε υπάρχει μοναδική $\tilde{g}$ που καθιστά αντιμεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ N \arrow[r, "\tilde{g}"'] & P \end{tikzcd}$$

Αποδ. Ορίζοντας $\tilde{g}\big(f(x)\big) = g(x)$, η λειότητα της $\tilde{g}$ έπεται από πρόταση ΙΙ.§4.6. ■

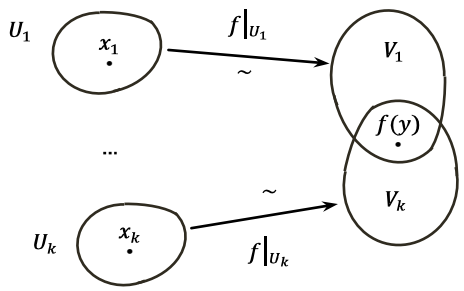
ΙΙ.§4.8. Εάν $f_1 : M \to N_1$, $f_2 : M \to N_2$ υπεμβαπτύσεις *επί* τέτοιες ώστε η μια σέβεται τις ίνες της άλλης, τότε υπάρχει μοναδική αμφιδιαφόριση $f : N_1 \to N_2$ που καθιστά αντιμεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ N_1 \arrow[rr, "f"'] & & N_2 \end{tikzcd}$$

Αποδ. Από ΙΙ.§4.7, υπάρχουν μοναδικές λείες $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ ώστε $f_1 = \tilde{f}_1 \circ f$, $f_2 = \tilde{f}_2 \circ f$, άρα $f_2 = \tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2 \circ f_2$, και επομένως $\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2 = id$, εφ' όσον η f_1 είναι *επί*. Άρα $\tilde{f}_2$ η ζητούμενη αμφιδιαφόριση. ■

Κρίσιμο σημείο μιας διαφορίσιμης $f : M \to N$, $n = dimM$, $m = dimN$, ονομάζεται ένα $x \in M$ όταν $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ έχει βαθμό μικρότερο από n, αλλιώς το x ονομάζεται **ομαλό**. Επομένως τα κρίσιμα σημεία μιας απεικόνισης είναι ακριβώς εκείνα στα οποία αποτυγχάνει να είναι εμβύθιση, ενώ μια συνάρτηση είναι εμβύθιση όταν όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της είναι ομαλά. Εάν $m = n$ τότε η f είναι τοπική εμφύτευση γύρω από τα ομαλά της σημεία, ενώ εάν $m < n$ τότε όλα τα σημεία είναι κρίσιμα. Το $f(x) \in N$ ονομάζεται **κρίσιμη τιμή** της f όταν το x είναι κρίσιμο σημείο. Ένα $y \in N$ καλείται **ομαλή τιμή** όταν δεν είναι κρίσιμη, δηλαδή όταν το σύνολο $f^{-1}(y)$ δεν περιέχει κρίσιμα σημεία.

Η υπόθεση της συμπάγειας για την M θέτει περιορισμούς στο πλήθος του $f^{-1}(y)$ όταν το y είναι κρίσιμη τιμή. Τα σημεία του $f^{-1}(y)$ διαχωρίζονται μεταξύ τους, εφ' όσον η f είναι εμφύτευση σε μια περιοχή του καθενός, και επειδή το $f^{-1}(y)$ είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς, έπεται ότι είναι τοπικά πεπερασμένο. Ορίζεται επίσης την συνάρτηση $\#f^{-1}$ πάνω στα κρίσιμα σημεία της f ώστε $\#f^{-1}(y)$ να είναι ο πληθάριθμος του $f^{-1}(y)$. Από προηγούμενη παρατήρηση, η συνάρτηση $\#f^{-1}$ λαμβάνει πεπερασμένες τιμές όταν η M είναι συμπαγής. Επιπλέον η συμπάγεια της M διασφαλίζει ότι η $\#f^{-1}$ είναι τοπικά σταθερή, δηλαδή για κάθε $y \in N$ ομαλή τιμή της f, υπάρχει $V \subset f[M]$ ανοικτή περιοχή του y ώστε για κάθε $y' \in V$ ομαλή να ισχύει $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y')$:



Έστω $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$, οπότε για κάθε x_i υπάρχει περιοχή U_i αυτού ώστε $U_i \cap U_{j\neq i} = \emptyset$ και $f : U_i \to f[U_i] = V_i$ να είναι αμφιδιαφόριση. Τότε η ζητούμενη περιοχή του y είναι $V = V_1 \cap \dots \cap V_k \setminus f[M \setminus U_1 \setminus \dots \setminus U_k]$. Εάν $m = n$, οπότε το V που κατασκευάστηκε είναι ανοικτή περιοχή της N, η f είναι *επί*, δηλαδή $f[M] = N$. Τότε η N είναι συμπαγής λόγω συνέχειας της f, απ' όπου συνάγεται ότι η $\#f^{-1}$ είναι σταθερή πάνω σε ολόκληρη την N (καλύπτουμε την N από V όπως αυτά που κατασκευάστηκαν και λαμβάνουμε ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα λόγω συμπάγειας). Υποθέτοντας επιπλέον ότι η f είναι σταθερού βαθμού $n = m$, οπότε όλες οι τιμές της είναι ομαλές, συνάγεται ότι η f ομαδοποιεί τα σημεία της M ισορροπημένα, δηλαδή σε ομάδες με πλήθος έναν κοινό ακέραιο.

Ένα υποσύνολο A διαφορικής m-πολλαπλότητας N καλείται m-**διάστατου μέτρου μηδέν** όταν για κάθε χάρτη (U, φ) της N, το $\varphi[A \cap U] \subset \mathbb{R}^m$ έχει μηδενικό m-διάστατο μέτρο *Lebesque*[3]. Ελέγχεται εύκολα ότι ο ορισμός είναι ανεξάρτητος του άτλαντα που χρησιμοποιείται.

II.§4.9. (Θεώρημα *Sard*).

Το σύνολο των κρίσιμων τιμών λείας απεικόνισης είναι μηδενικού μέτρου.

Αποδ. Βλ. [**Miln**], σελ. 16. ■

II.§4.10.Υποπολλαπλότητα με διάσταση μικρότερη από την διάσταση της πολλαπλότητας στην οποία περιέχεται, είναι μηδενικού μέτρου.

Αποδ. Άμεσα από Θεώρημα *Sard*, εφ' όσον όλα τα σημεία της υποπολλαπλότητας είναι κρίσιμα σημεία της σχετικής εμφύτευσης. ■

Έχει δειχθεί ότι ισοσταθμική συνάρτησης $f : M^n \to N^m$ σταθερού βαθμού k είναι $(n-k)$-διάστατη υποπολλαπλότητα της M. Άρα εάν $rankf = m \leq n$, δηλαδή εάν η f είναι εμβύθιση, η ισοσταθμική της f είναι $(n-m)$-διάστατη. Εδώ αναγκαία υπόθεση είναι ότι η f είναι σταθερού βαθμού, επομένως το επιχείρημα δεν ισχύει όταν η f έχει κρίσιμα σημεία. Το παρακάτω όμως δηλώνει ότι οι ισοσταθμικές ομαλών τιμών είναι σε κάθε περίπτωση $(n-m)$-διάστατες υποπολλαπλότητες της M.

II.§4.11. Εάν $f : M \to N$ λεία συνάρτηση, $n = dimM \geq m = dimN$, και $y \in N$ ομαλή τιμή, τότε $f^{-1}(y)$ είναι $(n-m)$-διάστατη υποπολλαπλότητα της M.

Αποδ. Έστω $x \in f^{-1}(y)$, οπότε εφ' όσον y είναι ομαλή τιμή, ο γραμμικός μετασχηματισμός $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ είναι *επί* και $dim\, ker\, df_x = n - m$. Επιλέγουμε γραμμικό μετασχηματισμό $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-m}$ με $rank\, L = n - m$ και ορίζουμε την διαφορίσιμη συνάρτηση

$$F : M^n \to N^m \times \mathbb{R}^{n-m}, \qquad F(x) = (f(x), L(x))$$

Τότε $dF_x(\xi) = (df_x(\xi), L(\xi))$ απ' όπου φαίνεται ότι η df_x έχει βαθμό n, εφ' όσον $\xi \in T_xM = \mathbb{R}^{n-m}$ και ο περιορισμός της L εκεί είναι $1-1$ ($rank\, L = n - m$). Άρα η F είναι τοπική αμφιδιαφόριση. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $x \in f^{-1}(y)$, έπεται το ζητούμενο. ■

II.§4.12. Κάθε συμπαγής διαφορική πολλαπλότητα εμφυτεύεται σε ευκλείδειο χώρο επαρκώς μεγάλης διάστασης.

Αποδ. Έστω M συμπαγής πολλαπλότητα διάστασης n και U_i, $i = 1, \dots, s$ άτλας αυτής από ανοικτά σύνολα διφφεομορφικά με τον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε για κάθε $i = 1, \dots, s$ την στερεογραφική προβολή $\varphi_i : U_i \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, που επεκτείνεται σε λεία απεικόνιση $\tilde{\varphi}_i : M \to S^n$ ώστε το $M \setminus U_i$ να στέλνεται από την $\tilde{\varphi}_i$ στο μοναδικό σημείο της S^n που δεν ανήκει στο $\varphi_i[U_i]$. Προφανώς η φ_i είναι εμφύτευση για κάθε i. Ορίζουμε $\varphi : M \to \mathbb{R}^{s(n+1)}$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_s(x)$. Η φ είναι εμβύθιση και 1-1, άρα εμφύτευση. ■

II.§4.13. (Ασθενές θεώρημα Whitney).

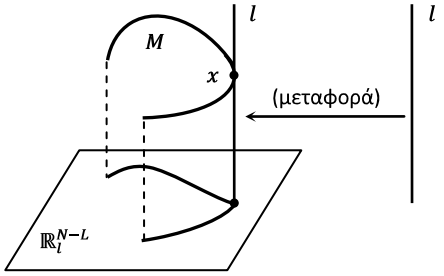
Κάθε συμπαγής διαφορική n-πολλαπλότητα εμφυτεύεται στον $\mathbb{R}^{2n+1}$ και εμβυθίζεται στον $\mathbb{R}^{2n}$.

Αποδ. Έστω M συμπαγής n-πολλαπλότητα, εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^N$ για επαρκώς μεγάλο N (II.§4.12). Για κάθε $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$ συμβολίζουμε π_l την προβολή του $\mathbb{R}^N$ στον υπόχωρο $\mathbb{R}_l^{N-1}$ που είναι κάθετος στην l.

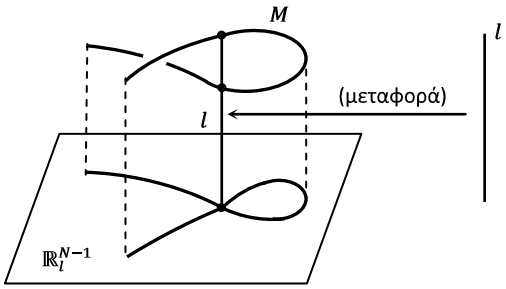
---

3. Εξ ορισμού, ένα $A \subset \mathbb{R}^m$ έχει μηδενικό m-διάστατο μέτρο *Lebesque* όταν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή κάλυψη αυτού από αριθμήσιμους το πλήθος m-διάστατους κύβους με συνολικό όγκο μικρότερο του ε.

Ενδιαφερόμαστε αρχικά για εμβυθίσεις της M, δηλαδή για $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$ ώστε η $d\pi_l(x) : T_xM \to \mathbb{R}_l^{N-1}$ να έχει μηδενικό πυρήνα για κάθε $x \in M$. Καλούνται *απαγορευμένες εμβυθίσεις α' είδους* τα $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$ για τα οποία υπάρχουν $x \in M$ ώστε η $d\pi_l(x) : T_xM \to \mathbb{R}_l^{N-1}$ να έχει μη μηδενικό πυρήνα. Είναι σαφές ότι οι απαγορευμένες κατευθύνσεις l περιέχονται στον εφαπτόμενο χώρο κάποιου $x \in M$ μετά από παράλληλη μεταφορά.

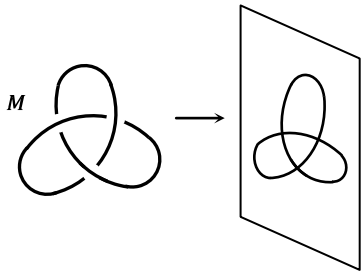


Επιλέγουμε την πολλαπλότητα Q να είναι το σύνολο των ζευγών $(x, l), x \in M$ και l ευθεία που περιέχεται στο T_xM. Η Q είναι $(2n-1)$-διάστατη, εφ' όσον απαιτούνται n μεταβλητές για τον προσδιορισμό του x και $n-1$ μεταβλητές για τον προσδιορισμό της ευθείας l (αφού $dimT_xM = n$). Ελέγχεται ότι η προβολή $a : Q \to \mathbb{R}P^{N-1}$, $a(x, l) = l$, είναι λεία απεικόνιση. Εξ ορισμού της Q, το $a[Q]$ είναι το σύνολο των απαγορευμένων κατευθύνσεων πρώτου είδους. Αλλά εφ' όσον $dim\, Q = 2n-1$ και $dim\, \mathbb{R}P^{N-1} = N-1$, το $a[Q]$ έχει μηδενικό μέτρο εντός του $\mathbb{R}P^{N-1}$ εάν $2n-1 < N-1 \Leftrightarrow 2n < N$ (Θεώρημα *Sard*). Άρα εάν $2n < N$, $a[Q] \subsetneq \mathbb{R}P^{N-1}$, που σημαίνει ότι υπάρχει μη απαγορευμένη κατεύθυνση $l_o \in \mathbb{R}P^{N-1}$. Εμβυθίζουμε $\pi_{l_o} : M \to \mathbb{R}_l^{N-1} \simeq \mathbb{R}P^{N-1}$. Η παραπάνω επιχειρηματολογία στέκει ακόμα και αν αρχικά υποθέσουμε ότι η M είναι εμβυθισμένη αντί για εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^N$. Άρα η προηγούμενη διαδικασία εμβύθισης μπορεί να επαναληφθεί διαδοχικά καθ' όσον η διάσταση N του χώρου στον οποίο περιέχεται αρχικά η M είναι γνησίως μεγαλύτερη του $2n$. Τελικά η M εμβυθίζεται στον $\mathbb{R}^{2n}$, οπότε η διαδικασία δεν μπορεί να επαναληφθεί περαιτέρω. Για την εμφύτευση, ζητείται $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$ ώστε η π_l όχι μόνο να σέβεται τη διάσταση του εφαπτόμενου χώρου σε κάθε $x \in M$, αλλά επιπλέον να είναι 1-1. Καλούνται *απαγορευμένες κατευθύνσεις β΄ είδους* τα $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$ ώστε $\pi_l : M \to \mathbb{R}_l^{N-1}$ να μην είναι 1-1. Οι *απαγορευμένες κατευθύνσεις β΄ είδους* είναι εκείνες που μετά από κάποια μεταφορά διέρχονται από δύο σημεία της M:



Το σύνολο των απαγορευμένων κατευθύνσεων β΄ είδους αναπαρίσταται ως το σύνολο των ζευγών $(x, y) \in M \times M$, $x \neq y$, ισοδύναμα, είναι η $2n$-διάστατη πολλαπλότητα $M \times M/\Delta \equiv X$, όπου $\Delta = \{(x, x) \big| x \in M\}$. Εύκολα ότι η απεικόνιση $\beta : P \to \mathbb{R}P^{N-1}$, όπου $\beta(x, y)$ είναι το παράλληλο στην ευθεία (x, y) στοιχείο του $\mathbb{R}P^{N-1}$, είναι λεία. Από Θεώρημα *Sard*, εάν $2n < N-1 \Leftrightarrow 2n+1 < N$, τότε η $\beta[X]$ έχει μηδενικό μέτρο εντός της $\mathbb{R}P^{N-1}$. Άρα το σύνολο $a[Q] \cup \beta[P]$ έχει μηδενικό μέτρο εάν $2n+1 < N$, που σημαίνει ότι καθ' όσον η διάσταση N του αρχικού χώρου υποδοχής της M είναι γνησίως μεγαλύτερη του $2n$, υπάρχει $l_0 \in \mathbb{R}P^{N-1}$ ώστε $\pi_{l_0} : M \to \mathbb{R}_{l_0}^{N-1}$ να είναι εμφύτευση. Με διαδοχική επανάληψη αυτής της διαδικασίας, η M εμφυτεύεται τελικά στον $\mathbb{R}^{2n+1}$. ■

Τα προβολικά επιχειρήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη απόδειξη δεν μπορούν να μειώσουν περαιτέρω τη διάσταση του χώρου υποδοχής· π.χ. εάν $M \simeq \mathbb{S}^1$ είναι ο κόμβος *τριφύλλι* εντός του $\mathbb{R}^3$, η προβολή αυτού σε οποιοδήποτε επίπεδο θα δώσει μια καμπύλη που τέμνεται με τον εαυτό της,



δηλαδή η M δεν εμφυτεύεται με προβολή στον $\mathbb{R}^2$.

Στην απόδειξη της II.§4.13 έγινε ουσιώδης χρήση της II.§4.12, δηλαδή υποτέθηκε αρχικά ότι η πολλαπλότητα βρίσκεται εμφυτευμένη σε κάποιον ευκλείδειο χώρο (ισχυρή υπόθεση συμπάγειας). Με ένα περιπολοκότερο επιχείρημα, που εμπλέκει μια έννοια λείας προσέγγισης εμβυθίσεων από εμφυτεύσεις, η II.§4.13 γενικεύεται ως εξής:

II.§4.14. (Ασθενές θεώρημα Whitney - 1936).

Κάθε n-πολλαπλότητα εμφυτεύεται στον $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Με ένα περίπλοκο επιχείρημα της διαφορικής τοπολογίας, το θεώρημα βελτιώνεται ως εξής:

II.§4.15. (Ισχυρό θεώρημα Whitney).

Κάθε $n > 0$-πολλαπλότητα εμφυτεύεται στον $\mathbb{R}^{2n}$ και κάθε $n > 1$-πολλαπλότητα εμβυθίζεται στον $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Αυτό το αποτέλεσμα δεν μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω, αφού είναι γνωστό ότι οι μη προσανατολίσιμες, συμπαγείς 2-πολλαπλότητες χωρίς σύνορο είναι μη εμφυτεύσιμες ομοιομορφικά στον $\mathbb{R}^3$.

II.§4.16. Καμία συμπαγής μιγαδική n-πολλαπλότητα δεν εμφυτεύεται ολομορφικά στον $\mathbb{C}^n$.

Αποδ. Έστω $f : M \to \mathbb{C}^n$ ολομορφική εμφύτευση συμπαγούς μιγαδικής n-πολλαπλότητας στον $\mathbb{C}^n$. Τότε κάθε συνιστώσα f^k, $k = 1, \dots, n$ της f είναι μια ολομορφία πάνω στην M. Από προηγούμενη πρόταση, η f^k είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα της M, δηλαδή η f απεικονίζει τις συνεκτικές συνιστώσες της M σε σημεία του $\mathbb{C}^n$, άτοπο, διότι θεωρήθηκε εμφύτευση. ■

Νηματικές δέσμες

§1. ΦΥΛΛΩΣΕΙΣ

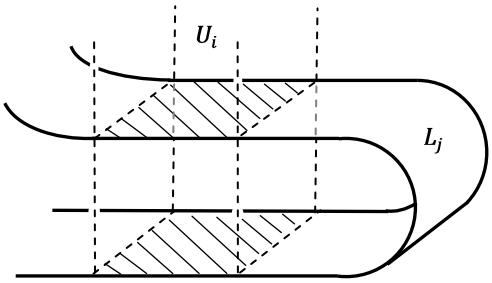
Συμβολίζεται $\mathcal{G}_r^n$ η ψευδοομάδα των αμφιδιαφορίσεων μεταξύ ανοικτών συνόλων του $\mathbb{R}^n$ που διατηρούν το σύνολο των r-διάστατων επιπέδων που είναι παράλληλα στον r-διάστατο υπόχωρο $x^{i>r} = 0$. Η $\mathcal{G}_r^n$ παράγεται πάνω στους περιορισμούς σε ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$ των αμφιδιαφορίσεων της μορφής

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(x^1, \dots, x^n) = (\underbrace{\varphi_1(x^1, \dots, x^n)}_{\substack{r \text{ πρώτες} \\ \text{συντεταγμένες}}}, \underbrace{\varphi_2(x^{r+1}, \dots, x^n)}_{\substack{n-r \text{ τελευταίες} \\ \text{συντεταγμένες}}})$$

δηλαδή εκείνες που το σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ έχουν διαφορικό $\begin{pmatrix} * & * \\ \mathbf{0}_{n-r,r} & * \end{pmatrix}$.

r-**πλάκα** του ανοικτού $U \subset R^n$ καλείται η τομή αυτού με ένα παράλληλο στον $x^{i>r}$ r-διάστατο επίπεδο. Με αυτήν την ορολογία, η $\mathcal{G}_r^n$ συγκροτείται από τις αμφιδιαφορίσεις μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που απεικονίζουν r-πλάκες σε r-πλάκες.

r-**φύλλωση** της n-διάστασης διαφορικής πολλαπλότητας M καλείται μια διαμέριση $\mathcal{F} = (L_j)_{j\in J}$ της M για την οποία υπάρχει $\mathcal{G}_r^n$-άτλαντας $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ της M τέτοιος ώστε για κάθε $i \in I, j \in J$, το $U_i \cap L_j$ είναι ένωση πλακών του U_i.

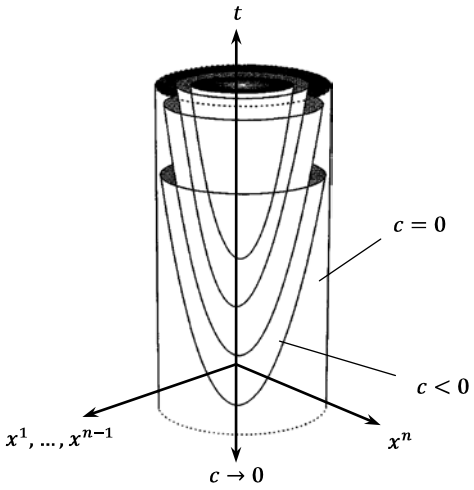


Από την απαίτηση της $\mathcal{G}_r^n$-συμβατότητας μεταξύ των χαρτών (U_i, φ_i) συνάγεται εύκολα ότι τα **φύλλα** L_j, $j \in J$ της $\mathcal{F}$ είναι r-διάστατες υποπολλαπλότητες της M, οργανωμένες κατά τρόπο ώστε να προσιδιάζουν τοπικά στην διαμέριση του $\mathbb{R}^n$ από τα παράλληλα στον $x^{i>r} = 0$ r-διάστατα επίπεδα. Επανορίζοντας την $\mathcal{G}_r^n$ ως ψευδοομάδα των αμφιδιαφορίσεων που διατηρούν τις r-πλάκες μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του ημίχωρου $x^n \geq 0$, επιτρέπουμε στην M και στα φύλλα της $\mathcal{F}$ να είναι πολλαπλότητες με σύνορο.

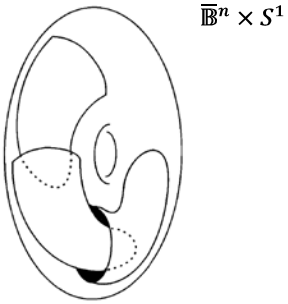
Εκλεπτύνοντας την διαμέριση $\mathcal{F}$ ώστε τα φύλλα L_j να είναι συνεκτικές πολλαπλότητες, η $\mathcal{F}$ επάγεται από την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας επί της M: $x \sim y \Leftrightarrow$ υπάρχει ακολουθία $\mathcal{G}_r^n$-χαρτών $U_1, \dots, U_m$ και r-πλάκες $P_1 \in U_1, \dots, P_m \in U_m$ τέτοιες ώστε $x \in P_1$, $y \in P_m$ και $P_i \in U_{i+1} \neq \emptyset$. Επομένως, υπό την απαίτηση της συνεκτικότητας των φύλλων, με κάθε $\mathcal{G}_r^n$-άτλαντα $\mathcal{A}$ της M σχετίζεται το πολύ μια φύλλωση $\mathcal{F}$, τα φύλλα της οποίας είναι συγκολλήσεις r-πλακών μέσω συναρτήσεων μετάβασης ανάμεσα σε πλάκες του $\mathcal{A}$.

Οι ισοσταθμικές κάθε εμβάπτυσης $f : M \to N$, $dimM = n$, $dimN = m$ συγκροτούν $(n-m)$-φύλλωση της M (λαμβάνουμε ως $\mathcal{G}_{n-m}^n$-χάρτες τις περιοχές στις οποίες η f αναπαρίσταται ως προβολή $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$).

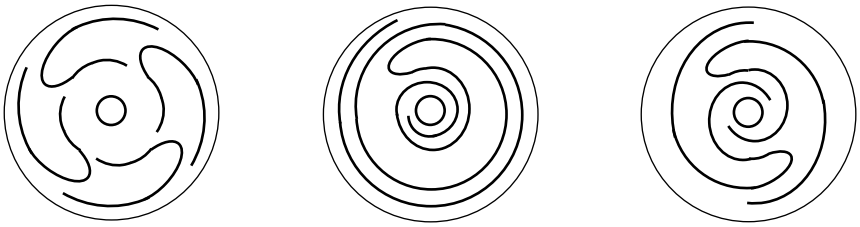
Το αντίστροφο δεν ισχύει: Έστω εμβάπτυση $f : \mathbb{B}^{-n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^1$, $f(\underbrace{x^1, \dots, x^{n+1}}_{r}, x^n, t) = (r^2 - 1)e^t$.



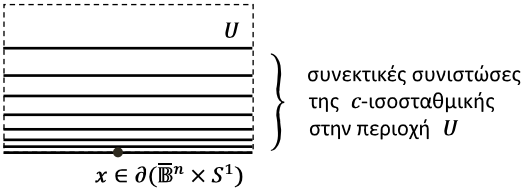
Η δράση $\mathbb{Z} \times (\overline{\mathbb{B}}^n \times \mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{B}}^n \times \mathbb{R}$, $(k, (r, x^2, t) \longmapsto (r, x^2, t + k)$ σέβεται το σύνολο των ισοσταθμικών της f, επομένως η f περνά στο πηλίκο $\overline{\mathbb{B}}^n \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{B}^n \times S^1$. Συγκεκριμένα, εφ' όσον η δράση του $\mathbb{Z}$ διατηρεί το σύνολο των ισοσταθμικών, αυτό το σύνολο περνά στο πηλίκο $\overline{\mathbb{B}}^n \times S^1$ δίνοντας την **φύλλωση *Reeb***:



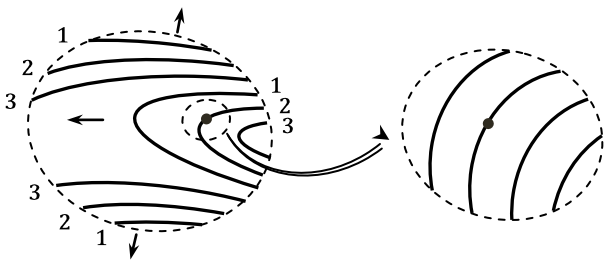
Τα εσωτερικά φύλλα της $\mathcal{F}$ είναι διφφεομορφικές (άπειρα «φίδια») εικόνες του $\mathbb{R}^n$ που «καταπίνουν» την ουρά τους καθώς και την ουρά κάθε άλλου φύλλου.



Η φύλλωση *Reeb* του $\overline{\mathbb{B}}^n \times \mathbb{R}$ δεν συγκροτείται από ισοσταθμικές εμβάπτυσης: εάν υπήρχε τέτοια ισοσταθμική, από Θεώρημα του Βαθμού η φύλλωση θα λάμβανε την μορφή n-διάστατων επιπέδων σε κάθε περιοχή. Όμως αυτό είναι αδύνατο για τα συνοριακά σημεία του στερεού τόρου, διότι η c-ισοσταθμική θα έτεινε ασυμπτωτικά στο σύνορο (τα εσωτερικά φύλλα της φύλλωσης *Reeb* τυλίγονται άπειρες φορές):



Αντιθέτως, κάθε σημείο στο εσωτερικό του στερεού τόρου έχει περιοχή ώστε κάθε διερχόμενο από αυτήν φύλλο *Reeb* να έχει μοναδική συνιστώσα εντός της. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σημείο στο εσωτερικό του τόρου έχει περιοχή όπου κάθε φύλλο *Reeb* θα μπορούσε να είναι ισοσταθμική μιας προβολής (δηλαδή τοπική ισοσταθμική μιας εμβάπτυσης).



Μπορεί πράγματι να κατασκευαστεί εμβάπτυση από το εσωτερικό του στερεού τόρου στην S^1 της οποίας οι ισοσταθμικές είναι τα εσωτερικά φύλλα Reeb του τόρου.

Μία r-φύλλωση $\mathfrak{F} = (L_i)_{i\in I}$ της διαφορικής n-πολλαπλότητας M καλείται **κανονική** όταν κάθε σημείο της M έχει $\mathcal{G}_r^n$-χάρτη U τέτοιον ώστε για κάθε $i \in I$ το $L_i \cap U$ να συγκροτείται από μόνο μία πλάκα (όταν κανένα φύλλο της δεν παρουσιάζει συσσώρευση σε οποιαδήποτε περιοχή της πολλαπλότητας).

III.§1.0. Μία r-φύλλωση $\mathfrak{F}$ της n-διάστατης διαφορικής πολλαπλότητας M είναι κανονική εάν και μόνον εάν επιδέχεται δομή $(n-r)$-διάστατης διαφορικής πολλαπλότητας με την προβολή στα φύλλα, $M \to \mathfrak{F}$ να είναι λεία εμβάπτυση.

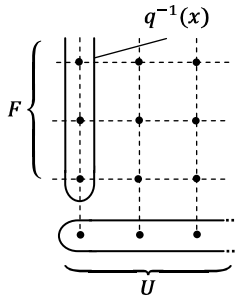
Αποδ. Βλ. [**Palais**] ■

§2. ΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΕΣΜΕΣ

Μια συνεχής απεικόνιση $q : E \to B$ μεταξύ *Hausdorff* χώρων καλείται **νηματική προβολή** με ίνα έναν χώρο *Hausdorff* F όταν κάθε $x \in B$ έχει ανοικτή περιοχή $U \subset B$ με ομοιομορφισμό $\varphi : q^{-1}[U] \to U \times F$ τέτοιον ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} q^{-1}[U] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

όπου $\pi : U \times F \to U$ η προβολή του καρτεσιανού γινόμενου στην πρώτη συνιστώσα. Η απεικόνιση φ καλείται **τοπική *trivialization*** γύρω από το x και το γεωμετρικό της νόημα είναι ότι οργανώνει την αντίστροφη εικόνα του U μέσω της q ως καρτεσιανό γινόμενο του U με την ίνα F, κατά τρόπο ώστε η επαγόμενη από τα E τοπολογία επί της $q^{-1}[U]$ να συμπίπτει με την τοπολογία γινόμενο $U \times F$ και η q να ισοδυναμεί με την προβολή π μέσω του ομοιομορφισμού φ.



(G, F)-**νηματική δέσμη** πάνω από τον χώρο B, όπου G τοπολογική ομάδα που δρά συνεχώς στον F (**δομική ομάδα** της δέσμης), καλείται μια νηματική προβολή $q : E \to B$ ίνας F, εφοδιασμένη με συλλογή $\varphi_i : q^{-1}[U_i] \to U_i \times F$, $i \in I$ από τοπικές *trivialization* που καλύπτουν τον B (εννοώντας ότι $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του B), τέτοιες ώστε για κάθε U_i, U_j με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ο ομοιομορφισμός

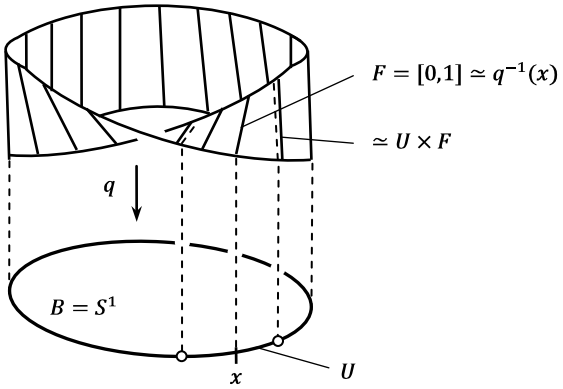
$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : U_i \cap U_j \times F \to U_i \cap U_j \times F$$

είναι της μορφής $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, y) = (x, \gamma_{ij}(x)y)$, όπου $\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ συνεχής απεικόνιση (δηλαδή σε κάθε ίνα $q(x)$ του κοινού τους πεδίου, οι τοπικές *trivialization* διαφέρουν κατά μια G-συμμετρία της $q(x) \simeq F$, και η εκλογή αυτής της συμμετρίας είναι συνεχής καθώς διατρέχουμε τις ίνες).

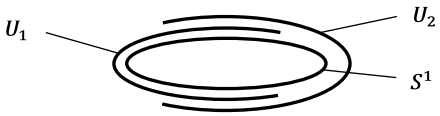
Εάν το κάλυμμα $U_{i_{i\in I}}$ είναι άτλαντας της n-πολλαπλότητας B και η ίνα F είναι m-πολλαπλότητα, τότε ο χώρος E αποκτά αυτόματα δομή $(n+m)$-πολλαπλότητας με άτλαντα $(q^{-1}[U_i], \varphi_i)_{i\in I}$. Εξ ορισμού της νηματικής δέσμης, οι συναρτήσεις μετάβασης αυτού του άτλαντα σέβονται τις q-ίνες. Εάν οι εμπλεκόμενες πολλαπλότητες είναι λείες, οπότε η E είναι λεία επίσης, τότε οι q-ίνες συγκροτούν m-φύλλωση της E με διφφεομορφικά φύλλα.

Τετριμμένη ονομάζεται μια νηματική δέσμη που περιέχει *trivialization* της μορφής $\varphi : E \to B \times F$, δηλαδή όταν ο E είναι ομοιομορφικός με τον $B \times F$ και η νηματική προβολή ισοδυναμεί με την προβολή $\pi : B \times F \to B$.

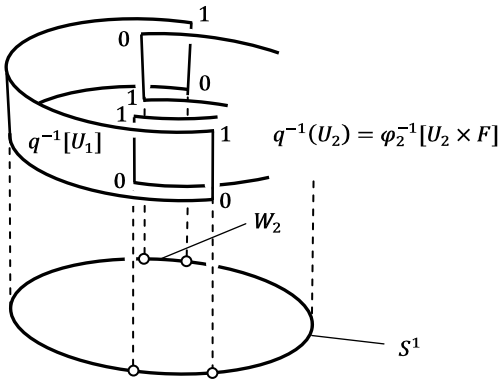
Η ταινία του Möbius πάνω από την $\mathbb{S}^1$, με δομική ομάδα $\mathbb{Z}_2$ που δρά στο $[0,1]$ αντιστρέφοντας τον προσανατολισμό, είναι μη τετριμμένη $(\mathbb{Z}_2, [0,1])$-νηματική δέσμη.



Συγκεκριμένα, θεωρούμε συλλογή *trivialization* συγκροτούμενη από τις $\varphi_1 : q^{-1}[U_1] \to U_1 \times F$, $\varphi_2 : q^{-1}[U_2] \to U_2 \times F$ όπου U_1, U_2 πάνω στην S^1 όπως τα εικονιζόμενα:



Τότε, οι αντίστροφες εικόνες των $U_1 \times F$, $U_2 \times F$ μέσω των φ_1, φ_2 αντιστοίχως πάνω στην $\boldsymbol{Möb}$, τέμνονται ως εξής:



Εδώ είναι $U_1 \cap U_2 = W_1 \cap W_2$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ και η $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : U_1 \cap U_2 \times [0,1] \to U_1 \cap U_2 \times [0,1]$ είναι η

$$(b, y) \to \begin{cases} (b, y) = (b, id(y), \quad y \in W_1 \\ \\ (b, 1-y) = (b, inv(y), \quad y \in W_2 \end{cases}$$

όπου $\mathbb{Z}_2 = \{id, inv\}$, δηλαδή

$$\gamma_{12}(y) \to \begin{cases} id, \text{ εάν } y \in W_1 \\ \\ inv, \text{ εάν } y \in W_2 \end{cases}$$

που είναι συνεχής ως σταθερή στις συνεκτικές συνιστώσες του $U_1 \cap U_2$.

Δεδομένης τοπολογικής δράσης της ομάδας G πάνω σε χώρο *Hausdorff* F, η μόνη πληροφορία που χρειάζεται για την κατασκευή (F, G)-νηματικής δέσμης πάνω από δεδομένο χώρο B είναι ένα ανοικτό κάλυμμα $(U_i)_{i \in I}$ του B και μια συλλογή συνεχών αντιστοιχίσεων $\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ για όλες τις τομές $U_i \cap U_j$ που να ικανοποιούν την κυκλική συνθήκη συμβατότητας $\gamma_{ij}\gamma_{jk} = \gamma_{ik}$ πάνω στα $U_i \cap U_j \cap U_k$. Ο χώρος E κατασκευάζεται συγκολλώντας τα καρτεσιανά γινόμενα $U_i \times F$ σύμφωνα με τον κανόνα που υποδεικνύεται από τις τομές $U_i \cap U_j$ και η νηματική προβολή $q : E \to B$ ορίζεται ως $q(y) = proj_1^1(y)$, όπου $proj_i^1 : U_i \times F \to U_i$ η προβολή στην πρώτη συνιστώσα, για όποια περιοχή $U_i \times F$ του E και αν περιέχει το y.

Επειδή στην πληροφορία που είναι αναγκαία για την κατασκευή της (F, G)-νηματικής δέσμης (κάλυμμα και κύκλοι) δεν περιλαμβάνεται η ίνα F, συνάγεται ότι για όλους τους χώρους F επί των οποίων δρά τοπολογικά η G, μπορεί να κατασκευαστεί ο χώρος E όπως προηγουμένως· οι χώροι E, καθώς F διατρέχει τους χώρους επί των οποίων δρά η G, είναι τότε όμοιοι, με την έννοια ότι διαφέρουν σε κάθε τοπική περιοχή $U_i \times F$ μόνο ως προς την δεύτερη συνιστώσα.

Η απεικόνιση $\varphi : E \to E'$ καλείται **ομομορφισμός** μεταξύ των (F, G)-νηματικών δεσμών $q : E \to B$ και $q' : E' \to B'$ όταν είναι συνεχής και σέβεται τις q-ίνες. Τότε το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"'] & E' \arrow[d, "q'"] \\ B \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] & B' \end{tikzcd}$$

όπου $\hat{\varphi}(b) = q'(\varphi(y))$, $y \in q^{-1}(b)$. Έπεται άμεσα ότι η $\hat{\varphi}$ είναι συνεχής ως πέρασμα της $q' \circ \varphi$ στο πηλίκο. Επιπλέον απαιτείται η απεικόνιση

$$\varphi_{(\cdot)} : B \to G, \qquad b \longmapsto \varphi_b = \varphi\big|_{q^{-1}(b)}$$

να είναι συνεχής εξάρτηση, δηλαδή οι ίνες των b, $\hat{\varphi}(b)$ που είναι ομοιομορφικές με την ίνα F να διαφέρουν κατά μία G-συμμετρία της F που εξαρτάται συνεχώς από τα $b \in B$.

Ένας ομομορφισμός νηματικών δεσμών ονομάζεται **ισομορφισμός** όταν η επαγόμενη $\hat{\varphi}$ είναι αμφιμονοσήμαντη, οπότε η φ είναι αμφιμονοσήμαντη επίσης, και η φ^{-1} είναι ομομορφισμός νηματικών δεσμών.

Μία (F, G)-νηματική δέσμη $q : E \to B$ ονομάζεται **λεία** όταν οι εμπλεκόμενοι χώροι είναι διαφορικές πολλαπλότητες, η q είναι λεία απεικόνιση, η G είναι ομάδα Lie που δρά λεία στην ίνα F και οι τοπικές *trivialization* είναι αμφιδιαφορίσεις.

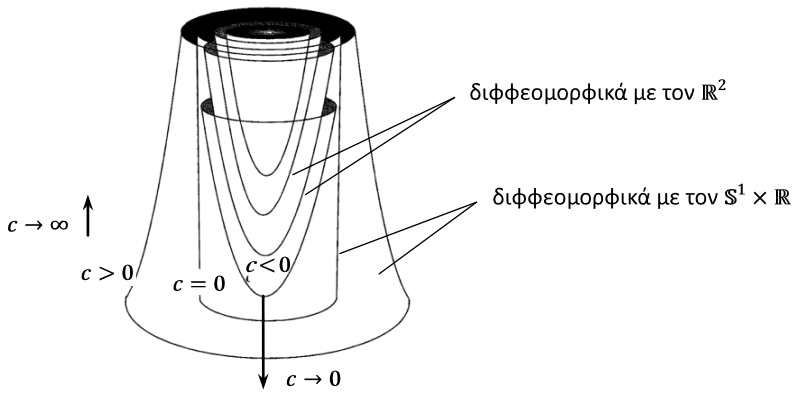
Θεωρούμε τοπική *trivialization* $\varphi : q^{-1}[U] \to U \times F$ λείας (F, G)-νηματικής δέσμης $q : M \to N$, $dimN = m$, $dimF = k$.

$$\begin{tikzcd} q^{-1}[U] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[dl, "q"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Το $U \times F$ είναι ανοικτό υποσύνολο της πολλαπλότητας $\mathbb{R}^m \times F$, επομένως $dimM = m + k$, εφ' όσον το $q^{-1}[U]$ (που είναι ανοικτό υποσύνολο της M) είναι διφφεομορφικό με το $U \times F$, (δηλαδή $dimM = dimN + dimF$). Επειδή η προβολή π είναι σταθερού βαθμού m και η φ είναι αμφιδιαφόριση, η $q : q^{-1}[U] \to U$ είναι σταθερού βαθμού m. Επειδή τα $q^{-1}[U]$ καλύπτουν την M καθώς διατρέχουμε τις *trivialization* της δέσμης, η νηματική προβολή $q : M \to N$ είναι σταθερού βαθμού $m = dimN$, δηλαδή εμβάπτυση. Έπεται άμεσα ότι

III.§2.0. Κάθε λεία (F, G)-νηματική δέσμη $q : M \to N$, $dimM = n \geq N = m$, είναι εμβάπτυση, οπότε οι q-ίνες είναι υποπολλαπλότητες συνδιάστασης $n - m$ στην M, διφφεομορφικές με την ίνα F μέσω των $\varphi(x,\cdot) : q^{-1}[x] \to F$, όπου $\varphi : U \times F \to q^{-1}[U]$ τοπική *trivialization* γύρω από το $x \in U$.

Η συλλογή των ισοσταθμικών μιας εμβάπτυσης δεν συγκροτεί πάντοτε νηματική δέσμη, π.χ. η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1)e^z$ είναι εμβάπτυση, όμως οι ισοσταθμικές της δεν είναι όλες διφφεομορφικές μεταξύ τους και άρα η f δεν είναι νηματική δέσμη.



Εφ' όσον είναι ισοσταθμικές της νηματικής προβολής, οι ίνες μιας λείας νηματικής δέσμης $q : M \to N$ συγκροτούν $(n - m)$-φύλλωση της M.

§3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΔΕΣΜΕΣ

r-**διανυσματική δέσμη** επί της πολλαπλότητας M ονομάζεται μια $(\mathbb{R}^r, GL_r\mathbb{R})$-νηματκή δέσμη $q : E \to M$ τέτοια ώστε οι τοπικές *trivialization* να είναι γραμμικοί ισομορφισμοί $\varphi : E_P = q^{-1}(P) \to \{P\} \times \mathbb{R}^r$ για κάθε $p \in M$. Ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι λείες διανυσματικές δέσμες.

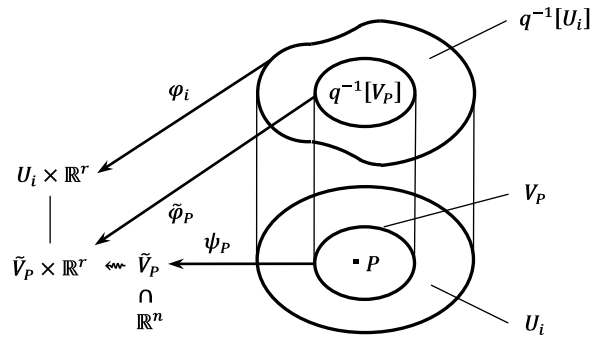
III.§3.0. Δίδεται για κάθε σημείο $P \in M$ r-διάστατος διανυσματικός χώρος E_P και $(U_i)_{i \in M}$ ανοικτό κάλυμμα της M τέτοιο ώστε

(i) για κάθε $i \in A$ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $\varphi_i : q^{-1}[U_i] \to U_i \times \mathbb{R}^r$, όπου $q : E = \coprod_{p \in M} E_P \to M$ η απεικόνιση $\xi \to q(\xi) = P$.

(ii) για κάθε $i, j \in A$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ υπάρχει λεία συνάρτηση $\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_r(\mathbb{R})$ ώστε η απεικόνιση $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^r \to U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^r$ να είναι της μορφής $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(P, \xi) = (P, \gamma_{ij}(P)\xi)$.

Τότε υπάρχει μοναδική διαφορική δομή επί του E ώστε η $q : E \to M$ να είναι λεία r-διανυσματική δέσμη με τοπικές *trivialization* της φ_i, $i \in A$.

Αποδ. Για κάθε $P \in M$ διαλέγουμε U_i που το περιέχει και (V_P, ψ_P) τοπικό χάρτη με $P \in V_P \subset U_i$. Εάν $\tilde{V}_P = \psi_P[V_P]$, ορίζουμε $q^{-1}[V_P]$, $\tilde{\varphi}_P = \varphi_i\big|_{q^{-1}[V_P]} \to \tilde{V}_P \times \mathbb{R}^r$.



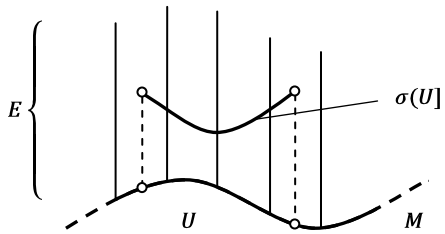
Με μακροσκελή έλεγχο των ορισμών διαπιστώνεται ότι η συλλογή $(q^{-1}[V_P], \varphi_P)_{p \in M}$ είναι άτλας επί του E και ότι η διαφορική δομή που επάγει καθιστά την $q : E \to M$ λεία διανυσματική δέσμη.

Για την μοναδικότητα, έστω E' μια άλλη τοπολογία και διαφορική δομή επί του $\bigcup_{P \in M} E_P$ ώστε η q να είναι λεία διανυσματική δέσμη. Επειδή η $id : E \to E'$ εκφράζεται τοπικά ως $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ (το E καλύπτεται από τα $q^{-1}[U_i]$, $i \in A$) και φ_i είναι αμφιδιαφορίσιμη, έπεται ότι η id είναι ολική αμφιδιαφόριση. ■

Τμήση της λείας διανυσματικής δέσμης $q : E \to M$ ονομάζεται μία $\sigma : M \to E$ τέτοια ώστε $\sigma(P) \in q^{-1}(P)$, $\forall P \in M$, δηλαδή μια επιλογή από τις q-ίνες του E. Ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι λείες τμήσεις μίας λείας διανυσματικής δέσμης $q : E \to M$, των οποίων το σύνολο συμβολίζεται $\Sigma(E)$ και είναι διανυσματικός χώρος (κληρονομεί σημειακά τις πράξεις του διανυσματικού χώρου από την αντίστοιχη q-ίνα). Επιπλέον το $\Sigma(E)$ είναι πρότυπο πάνω στον δακτύλιο $C^\infty(M)$ με την πράξη

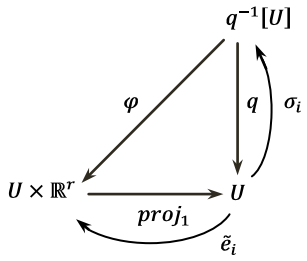
$$C^\infty(M) \times \Sigma(E) \to \Sigma(E)$$

$$(f, \sigma) \longmapsto f\sigma, \qquad (f\sigma)(p) = f(P)\sigma(P)$$



Η τιμή του $\sigma(P)$ προσδιορίζεται από r βαθμωτές ποσότητες (εφ' όσον $q^{-1}(P) \simeq \mathbb{R}^r$), οι οποίες δίνουν λείες βαθμωτές συναρτήσεις του $P \in M$. Από τα γνωστά για την επέκταση βαθμωτών συναρτήσεων, συνάγεται ότι δεδομένης λείας τμήσης σ πάνω σε κλειστό σύνολο $A \subset M$ και για κάθε U ανοικτό που περιέχει το A, υπάρχει επέκταση $\tilde{\sigma}$ της σ σε ολόκληρη την M τέτοια ώστε $supp\tilde{\sigma} \subset U$.

Έστω τώρα $\varphi : E \to U \times \mathbb{R}^r$ *trivialization* για την λεία διανυσματική δέσμη $q : E \to M$ και $e_1, \dots, e_r$ μία βάση του $\mathbb{R}^r$. Ορίζονται πάνω στο U οι τμήσεις $e_i : U \to E$, $\sigma_i(P, e_i)$, $i = 1, \dots, r$.



Οι σ_i είναι λείες, εφ' όσον φ είναι αμφιδιαφορίσιμη και ισχύει $\sigma_i = \varphi^{-1} \circ \tilde{e}_i$, όπου $\tilde{e}_i : U \to U \times \mathbb{R}^r$ η αμφιδιαφόριση (σταθερή συνάρτηση) $\tilde{e}_i(P) = e_i$. Επίσης

$$\varphi^{-1}(P, \xi^i e_i) = \xi^i \underbrace{\varphi^{-1}(P, e_i)}_{\sigma_i(P)} = \xi^i \sigma_i(P)$$

εφ' όσον φ είναι γραμμικός ισομορφισμός από το $\{P\} \times \mathbb{R}^r$ στο $q^{-1}[P]$, απ' όπου συνάγεται επίσης ότι η $\sigma_i(P) = \varphi^{-1}(P, e_i)$, $i = 1, \dots, r$ είναι βάση του $E_P \equiv q^{-1}[P]$. Επομένως με κάθε τοπική *trivialization* $\varphi : E \to U \times \mathbb{R}^r$ συσχετίστηκε ένα **τοπικό πλαίσιο** $\sigma_i(P)$, $i = 1, \dots, r$ επί του U για το οποίο ισχύει $\varphi^{-1}(P, \xi^1, \dots, \xi^n) = \xi^1 \sigma_i(P)$: για κάθε $P \in U$ τα $\sigma_1(P), \dots, \sigma_r(P)$ συγκροτούν βάση του E_P.

Ως τοπική *trivialization* της δέσμης μπορεί να συμπεριληφθεί οποιαδήποτε αμφιδιαφόριση της μορφής $\varphi^{-1} : q^{-1}[P] \to U \times \mathbb{R}^r$, όπου $U \subset M$ ανοικτή περιοχή τέτοια ώστε $q \circ \varphi^{-1} = proj_1$ και για κάθε $P \in U$ η $\varphi : q^{-1}[P] \to \{P\} \times \mathbb{R}^r$ να είναι γραμμικός ισομορφισμός. Συγκεκριμένα, έστω τοπική *trivialization* $\psi : q^{-1}[P] \to V \times \mathbb{R}^r$ με $U \cap V \neq \emptyset$· ζητείται λεία συνάρτηση $\gamma : U \cap V \to GL_r(\mathbb{R}^r)$ ώστε η απεικόνιση $\varphi \circ \psi|^{-1}_{q^{-1}[U \cap V]}$ να είναι της μορφής $\varphi \circ \psi|^{-1}_{U \cap V} = (P, \gamma(P)\xi)$.

$$\begin{tikzcd}
 & q^{-1}[U \cap V] \arrow[dl, "\varphi|_{q^{-1}[U\cap V]}"'] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "\psi|_{q^{-1}[U\cap V]}"] & \\
U \cap V \times \mathbb{R}^r \arrow[r, "proj_1"'] & U \cap V & U \cap V \times \mathbb{R}^r \arrow[l, "proj_1'"]
\end{tikzcd}$$

Το διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό, οπότε $proj_1 = (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ proj_1'$, δηλαδή $\varphi \circ \psi^{-1}(P, \xi) = (P, \sigma(P, \xi))$ για κάποια λεία συνάρτηση $\sigma : \mathbb{R}^r \to U \cap V \times \mathbb{R}^r$. Επιπλέον για κάθε $P \in U \cap V$, η απεικόνιση

$$\mathbb{R}^r \ni \xi \longmapsto \sigma(P, \xi) \in \mathbb{R}^r$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός. Επιλέγουμε $\gamma : U \cap V \to GL_r(\mathbb{R})$, $\gamma(P) = \sigma(P, \cdot)$. Μένει να δειχθεί ότι η $\gamma : U \cap V \to GL_r(\mathbb{R})$ είναι λεία. Εάν $(\gamma^i_j(P))_{i,j}$ ο πίνακας της $\gamma(P) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ στην βάση $e_1, \dots, e_r$, τότε $\gamma(P)\xi = \gamma^i_j(P)\xi^i e_i$, δηλαδή $\gamma^i_j(P) = \pi^i(\sigma(P, e_i))$, όπου $\pi^i : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ η προβολή στην i-οστή συντεταγμένη. Άρα $\gamma^i_j = \pi^i(\sigma(\cdot, e_i))$ είναι λεία ως σύνθεση λείων, επομένως η $\gamma = (\gamma^i_j)_{i,j}$ είναι λεία επίσης.

III.§3.1. (Αντιστοιχία μεταξύ τοπικών λείων πλαισίων και τοπικών *trivialization* για διανυσματικές δέσμες). Για κάθε τοπική *trivialization* $\varphi : q^{-1}[U] \to U \times \mathbb{R}^r$, οι τμήσεις $\sigma_i : U \to E$, $\sigma_i(P) = \varphi^{-1}(P, e_i)$, $i = 1, \dots, r$ συγκροτούν λείο τοπικό πλαίσιο πάνω στο U με $\varphi^{-1}(P, \xi^1, \dots, \xi^r) = \xi^i \sigma_i(P)$. Αντιστρόφως, για κάθε λείο τοπικό πλαίσιο $\sigma_i : U \to E$, $i = 1, \dots, r$ υπάρχει τοπική *trivialization* $\varphi : q^{-1}[U] \to U \times \mathbb{R}^r$ για την οποία $\varphi^{-1}(P, \xi^1, \dots, \xi^r) = \xi^i \sigma_i(P)$ (οπότε $\sigma_i(P) = \varphi^{-1}(P, e_i)$.

Αποδ. Το ευθύ διαπιστώθηκε με τις παραπάνω παρατηρήσεις. Για το αντίστροφο, ορίζεται η $\varphi : q^{-1}[U] \to U \times \mathbb{R}^r$ όπως στην υπόθεση, που είναι γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}^r \to q^{-1}[P]$ εάν περιοριστεί στο $\{P\} \times \mathbb{R}^r$. Επειδή τα $\sigma_i(P)$, $i = 1, \dots, r$ συγκροτούν βάση του $q^{-1}[P]$, η φ είναι γραμμικός ισομορφισμός· μένει να δειχθεί ότι είναι αμφιδιαφόριση. Επιλέγουμε τυχαίο $x \in U$ και $\psi : q^{-1}[V] \to V \times \mathbb{R}^r$ τοπική *trivialization* γύρω από το x τέτοια ώστε $V \subset U$. Εφ' όσον η ψ είναι αμφιδιαφορίσιμη, αρκεί να δειχθεί ότι $\psi \circ \varphi^{-1}$ είναι αμφιδιαφόριση.

$$\begin{tikzcd}
U \times \mathbb{R}^r \arrow[d, phantom, "\cup"] & q^{-1}[U] \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\
V \times \mathbb{R}^r \arrow[dr, "proj_1"'] & q^{-1}[V] \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q"] & V \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, "proj_1"] \\
 & V \arrow[d, phantom, "\cap"] & \\
 & U &
\end{tikzcd}$$

Για κάθε σ_i, η $\psi \circ \sigma_i\big|_v : V \to V \times \mathbb{R}^r$ είναι λεία, επομένως υπάρχουν λείες $\sigma_i^j : V \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, r$, (συντεταγμένες της απεικόνισης σ_i) τέτοιες ώστε $\psi \circ \sigma_i\big|_v(P, \xi^1, \dots, \xi^r) = (P, \sigma_i^1(P), \dots, \sigma_i^r(P))$. Τότε, η $\psi \circ \varphi^{-1}$ είναι λεία διότι στο $V \times \mathbb{R}^r$, $\psi \circ \varphi^{-1}(P, \xi^1, \dots, \xi^r) = (P, \sigma_i^1(P), \dots, \sigma_i^r(P))$ και η $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1}$ είναι λεία διότι $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1}(P, \eta^1, \dots, \eta^r) = (P, \eta^i T_i^1(P), \dots, \eta^i T_i^r(P))$, όπου $(T_i^j(P))_{j,i}$ ο αντίστροφος πίνακας του $(\sigma_i^j(P))_{j,i}$. ■

III.§3.2. Μια διανυσματική δέσμη είναι τετριμμένη εάν και μόνον εάν επιδέχεται ολικού πλαισίου.

Αποδ. Άμεσα από πρόταση III.§3.1. ■

III.§3.3. Εάν (U, ψ) τοπικός χάρτης μιας πολλαπλότητας M, $q : E \to M$ λεία διανυσματική δέσμη πάνω σ' αυτήν και $\sigma_i : U \to E$, $i = 1, \dots, r$ λείο τοπικό πλαίσιο, τότε $(q^{-1}[U], \tilde{\psi})$ τοπικός χάρτης της E, όπου $\tilde{\psi} : q^{-1}[U] \to U \times \mathbb{R}^r$ η τοπική *trivialization* που σχετίζεται με το πλαίσιο $\sigma_1, \dots, \sigma_r$: $\tilde{\psi}\left(\xi^i \sigma_i(P)\right) = (\underbrace{x^1(P), \dots, x^n(P)}_{\psi(P)}, \xi^1, \dots, \xi^r)$ (άρα η E είναι πολλαπλότητα διάστασης $n + r$).

Αποδ. Άμεσα από πρόταση III.§3.1. ■

III.§3.4. Μια τμήση $T : M \to E$ για την διανυσματική δέσμη $q : E \to M$ είναι λεία εάν και μόνον εάν για κάθε τοπικό πλαίσιο $\sigma_i : U \to E$, $i = 1, \dots, r$ οι συναρτήσεις T^i για τις οποίες $T\big|_U = T^i \sigma_i$, είναι λείες.

Αποδ. Έστω φ η τοπική *trivialization* που σχετίζεται με το πλαίσιο $\sigma_1, \dots, \sigma_r$. Επειδή φ είναι αμφιδιαφόριση, η T είναι λεία εάν και μόνον εάν η $\varphi \circ T$ είναι. Επειδή $\varphi \circ T(P) = (P, T^1(P), \dots, T^r(P)$, η $\varphi \circ T$ είναι λεία εάν και μόνον εάν οι T^i είναι, απ' όπου το ζητούμενο.

$$\begin{tikzcd} & q^{-1}[U] \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "T"] \\ U \times \mathbb{R}^r & U \end{tikzcd}$$

■

Δεδομένου υποσυνόλου $D \subset E$, όπου $q : E \to M$ λεία νηματική δέσμη, η $q\big|_D : D \to M$ καλείται **διανυσματική υποδέσμη** όταν $D \subset E$ υποπολλαπλότητα της E, $D_P = D \cap q^{-1}(P)$ διανυσματικός υποχώρος του $q^{-1}(P) = E_P$ και $q\big|_D : D \to M$ είναι λεία διανυσματική δέσμη πάνω από την M. Από την τρίτη συνθήκη συνάγεται ότι τα $D_P \in E_P$ έχουν όλα την ίδια διάσταση, δηλαδή η υποδέσμη είναι μία λεία επιλογή υποχώρων ίσης διάστασης από κάθε E_P καθώς το P διατρέχει την M.

III.§3.5. Έστω $q : E \to M$ λεία διανυσματική δέσμη και επιλογή ενός n-διάστατου υποχώρου $D_P \in E_P$ για κάθε $P \in M$. Η $D = \coprod_{P \in M} D_P \in E$ είναι λεία διανυσματική δέσμη εάν και μόνον εάν κάθε $P \in M$ έχει περιοχή U με τοπικό πλαίσιο $\sigma_i : U \to E$, $i = 1, \dots, m$ ώστε τα $\sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x)$ να συγκροτούν βάση του D_x για κάθε $x \in U$.

Αποδ. "$\Longrightarrow$,, Άμεσα από πρόταση III.§3.1.

,,$\Longleftarrow$" Έστω $P \in M$ και $\sigma_i : U \to E$, $i = 1, \dots, m$ οι τμήσεις που δίνονται από την υπόθεση. Επεκτείνουμε σε τοπικό πλαίσιο σ_i, $i = 1, \dots, r$ του U $(r = dimE - dimM)$ και λαμβάνουμε $\varphi : q^{-1}[U] \to U \times \mathbb{R}^r$ την τοπική *trivialization* που σχετίζεται με το πλαίσιο αυτό. Η φ απεικονίζει το $U \times \mathbb{R}^r = \{(x^1(t^1, \dots, t^m, \underbrace{0, \dots, 0}_{r-m}))\} \subset U \times \mathbb{R}^r$ στο $D \cap q^{-1}[U]$. Επομένως, επειδή φ είναι αμφιδιαφόριση, το $D \cap q^{-1}[U]$ είναι υποπολλαπλότητα της E. Επειδή ισχύει για κάθε U, έπεται ότι η D είναι υποπολλαπλότητα της E. Επίσης ο περιορισμός $\varphi : D \cap q^{-1}[U] \to U \times \mathbb{R}^r$ είναι τοπική *trivialization* για την D πάνω από το U, άρα η D είναι λεία διανυσματική δέσμη. ■

Εφαπτόμενη δέσμη της διαφορικής n-πολλαπλότητας M καλείται ο χώρος των ταχυτήτων που μπορεί να έχει ένα σωματίδιο κινούμενο σε αυτήν,

$$TM = \{(P, \xi) \big| \, P \in M, \xi \in T_P M\} = \coprod_{p \in M} T_P M$$

Εάν $\mathcal{A} = (U_p, \varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ άτλας της M, η TM καθίσταται $2n$-διάστατη πολλαπλότητα με τον άτλαντα $\mathcal{B} = (U_{p\times\mathbb{R}^n}, \psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $\psi_p^{-1} : (x_p^1, \dots, x_p^n, \xi_p^1, \dots, \xi_p^n) \to (\varphi_p^1(x_p^1, \dots, x_p^n), \xi_p^1\, \partial/\partial x_q^i)$. Αυτό σημαίνει ότι εάν η U_p χαρτογραφείται από τις συντεταγμένες $x_p^1, \dots, x_p^n$ και στο $\mathbb{R}^n$ θεωρήσουμε σύστημα συντεταγμένων $\xi_p^1, \dots, \xi_p^n$, τότε η $U_p \times \mathbb{R}^n$ χαρτογραφείται από τις συντεταγμένες $(y_p^1, \dots, y_p^{2n}) = (x_p^1, \dots, x_p^n, \xi_p^1, \dots, \xi_p^n)$.

Έστω $(U_p \times \mathbb{R}^n, \psi_p), (U_q \times \mathbb{R}^n, \psi_q) \in B$ με $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ και αντίστοιχα συστήματα συντεταγμένων $x_p^1, \dots, x_p^n, \xi_p^1, \dots, \xi_p^n$, και $x_q^1, \dots, x_q^n, \xi_q^1, \dots, \xi_q^n$, οπότε στο $(U_p \times \mathbb{R}^n) \cap (U_q \times \mathbb{R}^n)$ έχουμε την αμφιδιαφορίσιμη αλλαγή συντεταγμένων

$$(y_p^1(y_q^1, \dots, y_q^{2n}), \dots, y_p^{2n}(y_q^1, \dots, y_q^{2n}) =$$

$$(x_p^1(x_q^1, \dots, x_q^n, \xi_q^1, \dots, \xi_q^n), \dots, x_p^n(x_q^1, \dots, x_q^n, \xi_q^1, \dots, \xi_q^n),$$

$$\xi_p^1(x_q^1, \dots, x_q^n, \xi_q^1, \dots, \xi_q^n), \dots, \xi_p^n(x_q^1, \dots, x_q^n, \xi_q^1, \dots, \xi_q^n)) =$$

$$= (x_p^1(x_q^1, \dots, x_q^n), \dots, x_p^n(x_q^1, \dots, x_q^n), \underbrace{\xi_p^1(\xi_q^1, \dots, \xi_q^n)}_{\frac{\partial x_p^1}{\partial x_q^k}\xi_q^k}, \dots, \underbrace{\xi_p^n(\xi_q^1, \dots, \xi_q^n)}_{\frac{\partial x_p^n}{\partial x_q^k}\xi_q^k})$$

Τότε

$$\left(\frac{\partial y_p^i}{\partial y_q^j}\right)_{i,j}^{2n} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^j}\right)_{i,j}^{n} & \left(\frac{\partial x_p^i}{\partial \xi_q^i}\right)_{i,j}^{n} \\ \hline \left(\frac{\partial}{\partial x_q^j}\left(\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^k}\xi_q^k\right)\right)_{i,j}^{n} & \left(\frac{\partial}{\partial \xi_q^j}\left(\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^k}\xi_q^k\right)\right)_{i,j}^{n} \end{array}\right)$$

και επειδή

$$\frac{\partial x_p^i}{\partial \xi_q^j} = 0,\ \ \frac{\partial}{\partial x_q^j}\left(\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^k}\xi_q^k\right) = \frac{\partial^2 x_p^i}{\partial x_q^j \partial x_q^k}\xi_q^k,\ \ \frac{\partial}{\partial \xi_q^j}\left(\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^k}\xi_q^k\right) = \frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^j}\overbrace{\frac{\partial}{\partial \xi_q^j}}^{\delta_{jk}}\xi_q^k = \frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^j}$$

έπεται ότι

$$\left(\frac{\partial y_p^i}{\partial y_q^j}\right)_{i,j}^{2n} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^j}\right)_{i,j}^{n} & \mathbf{0} \\ \hline \left(\frac{\partial^2 x_p^i}{\partial x_q^j \partial x_q^k}\xi_q^k\right)_{i,j}^{n} & \left(\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^j}\right)_{i,j}^{2} \end{array}\right)$$

Άρα

$$det\left(\frac{\partial y_p^i}{\partial y_q^j}\right)_{i,j}^{2n} = \left(det\left(\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^j}\right)_{i,j}^{n}\right)^2 > 0$$

που σημαίνει ότι οι εφαπτόμενες δέσμες είναι προσανατολίσιμες πολλαπλότητες.

Μια πολλαπλότητα M καλείται **παραλληλοποιήσιμη** όταν η δέσμη TM επιδέχεται ολικού λείου πλαισίου, ισοδύναμα (III.§3.2), όταν η TM είναι τετριμμένη διανυσματική δέσμη, $TM \simeq M \times \mathbb{R}^n$ (υπάρχουν $e_1, \dots, e_r \in \mathfrak{X}(M)$ ώστε για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, υπάρχουν $\xi^i \in C^\infty(M)$ τέτοιες ώστε ώστε $\xi = \xi^i e_i$).

Εάν (M, g) είναι ρημάννεια πολλαπλότητα, τότε διαγράφεται εντός του TM μια υποπολλαπλότητα UM, η **μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη**, που συγκροτείται από τα εφαπτόμενα διανύσματα μέτρου 1. Η UM είναι διάστασης $2n-1$, εφ' όσον σε κάθε χάρτη $U_p \times \mathbb{R}^n$ της TM περιγράφεται από την εξίσωση

$$^{(p)}g_{ij}\xi_p^i\xi_p^j - 1 = 0$$

Τανυστικά πεδία

§1. ΤΑΝΥΣΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Δυϊκή βάση της βάσης $e_1, \dots, e_n$ ενός διανυσματικού χώρου V καλείται η μοναδική βάση $e^1, \dots, e^n$ του δυϊκού χώρου V^* που χαρακτηρίζεται από τις σχέσεις $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Επειδή ο V είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης n, $V = V^{**}$ με την δυϊκή βάση της $e^1, \dots, e^n$ να είναι η $e^1, \dots, e^n$. Κάνοντας πράξεις γραμμικής άλγεβρας, ελέγχεται ότι κάθε βάση σχετίζεται με την δυϊκή της ως εξής.

IV.§1.0. Εάν $v_1, \dots, v_n$; $w_1, \dots, w_n$ βάσεις του διανυσματικού χώρου V με $v_i = a^k_i w_k$, $w_i = b^k_i w_k$, τότε

$$v^i = b^i_k w^k, \qquad w^i = a^i_k v^k$$

IV.§0.1. Εάν $e_1, \dots, e_n$ βάση του διανυσματικού χώρου V, τότε $span\,\{e_1, \dots, e_r\} = \bigcap_{i=r+1}^{n} ker\, e^i$.

Συμβολίζεται $\mathcal{T}^r_s(V, W)$ ο διανυσματικός χώρος των πολυγραμμικών απεικονίσεων της μορφής

$$\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s} \to W$$

(r, s)-**τανυστής** επί του διανυσματικού χώρου $V \simeq \mathbb{R}^n$ καλείται μια πολυγραμμική απεικόνιση της μορφής

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s} \to \mathbb{R}^n$$

Συμβολίζεται $\mathcal{T}^r_s(V) \equiv \mathcal{T}^r_s(V; \mathbb{R})$ ο διανυσματικός χώρος των (r, s)-τανυστών επί του V. Ισχύει $\mathcal{T}^{r+1}_s(V) \simeq \mathcal{T}^r_s(V; V)$ μέσω του γραμμικού ισομορφισμού

$$\mathcal{T}^r_s(V; V) \ni \{\, \varphi : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s} \to V \,\} \longmapsto \{\, T_\varphi : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r+1} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s} \to \mathbb{R} \,\} \in \mathcal{T}^r_s(V),$$

$$T_\varphi(\xi^1, \dots, \xi^{r+1}, \xi_1, \dots, \xi_s) = \xi^{r+1}\big(\varphi(\xi^1, \dots, \xi^r, \xi_1, \dots, \xi_s)\big)$$

Επομένως $\mathcal{T}^1_1(V) = L(V)$ ο χώρος των γραμμικών ενδομορφισμών. Επίσης $\mathcal{T}^1_0(V) = V$, $\mathcal{T}^0_1(V) = V^*$, θεωρώντας ότι στα στοιχεία του δυϊκού V^* δρούν στον V ως συναρτησοειδή μέσω του εσωτερικού γινομένου, και ομοίως ο V δρά στον V^* ως $V \times V^* \to \mathbb{R}$, $(\xi, \xi^*) \longmapsto < \xi^*, \xi >$.

Εάν $e_1, \dots, e_n$ βάση του V και $e^1, \dots, e^n$ η δυϊκή βάση του V^*, οπότε $e^i(c_j) = \delta_{ij}$, τότε

$$T\left(\xi^1_{i_j} e^{i_j}, \dots, \xi^r_{i_r} e^{i_r}, \xi^1_{i_j} e^{j_j}, \dots, \xi^{j_1}_1 e_{j_1}, \dots, \xi^{j_s}_s e_{j_s}\right) = \xi^1_i \dots \xi^r_{j_r} \xi^{j_1}_1 \dots \xi^{j_s}_s \underbrace{T\left(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}\right)}_{T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}}$$

Επομένως ένας $T \in \mathcal{T}^r_s(V)$ προσδιορίζεται στη βάση αυτή από τις n^{r+s} ποσότητες

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}, \quad 1 \le i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r \le n$$

Εάν $f_1, \dots, f_n$ βάση του V με $f_i = a_i^j e_j$, $e_j = b_j^i f_i$ (οπότε για τις δυϊκές ισχύει $f_i = b_j^i e^j$, $e^j = a_i^j f^j$) και $\tilde{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ οι ποσότητες που χαρακτηρίζουν τον T στην βάση $f_1, \dots, f_n$, τότε

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T\left(f^{i_1}, \dots, f^{i_r}, f_{j_1}, \dots, f_{j_s}\right) = T\left(b_{k_1}^{i_1} e^{k_1}, \dots, b_{k_r}^{i_r} f_{j_1}, a_{j_1}^{\lambda_1} e_{\lambda_1}, \dots, a_{j_s}^{\lambda_s} e_{\lambda_s}\right) = \cdots b_{k_r}^{i_r} \cdot T_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{k_1 \dots k_r} a_{j_1}^{\lambda_1} a_{j_s}^{\lambda_s} \qquad (1)$$

Ορίζεται το **τανυστικό γινόμενο** $\otimes : \mathcal{T}_s^r(V) \times \mathcal{T}_q^p(V) \to \mathcal{T}_{s+q}^{r+p}(V)$ ώστε για δεδομένη βάση $e^1, \dots, e^n$ του V ο τανυστής $S \otimes T$ να είναι εκείνος που χαρακτηρίζεται από τις ποσότητες

$$S \otimes T\left(e^{i_1}, \dots, e_{j_{q+s}}\right) = S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \cdot T_{j_{s+1} \dots j_{s+r}}^{i_{1+1} \dots i_{r+p}}$$

Από την σχέση (1) έπεται ότι

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$$

επομένως τα $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$, $1 \le i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \le n$, παράγουν τον $\mathcal{T}_s^r(V)$. Θα δειχθεί η γραμμική τους ανεξαρτησία, οπότε αυτά συγκροτούν βάση του $\mathcal{T}_s^r(V)$ και επομένως $dim\mathcal{T}_s^r(V) = n^{r+s}$: ισχύει $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}\left(e^{k_1}, \dots, e_{\lambda_s}\right) = \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{\lambda_s}^{j_s}$, επομένως εάν

$$\lambda_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} = 0$$

τότε εφαρμόζοντας σε αυτόν τον τανυστή τα $(e^{k_1}, \dots, e^{k_r}, e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_s})$ συνάγεται ότι $\lambda_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = 0$.

Συμβολίζοντας $(i) \equiv i_1 \dots i_r$, οπότε $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} = T_{(j)}^{(i)} e_{(i)} \otimes e^{(j)}$, το τανυστικό γινόμενο γράφεται στην μορφή

$$\left(T_{(j)}^{(i)} e_{(i)} \otimes e^{(j)}\right) \otimes \left(S_{(\mu)}^{(l)} e_{(l)} \otimes e^{(\mu)}\right) = T_{(j)}^{(i)} S_{(\mu)}^{(l)} e_{(i)(l)} \otimes e^{(j)(\mu)}$$

Ονομάζονται **συναλλοίωτοι** και **ανταλλοίωτοι** οι $(0, r)$- και $(r, 0)$-τανυστές αντιστοίχως, $r = 1, 2, \dots$ Η μελέτη των ανταλλοίωτων τανυστών ανάγεται στους συναλλοίωτους μέσω του γραμμικού ισομορφισμού

$$(\cdot)^* : \mathcal{T}_0^r(V) \to \mathcal{T}_r^0(V), \qquad T^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} = T \longmapsto T^* = \underbrace{T^{i_1 \dots i_r}}_{(T^*)_{i_1 \dots i_r}} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s}$$

Συμβολίζεται $\mathcal{S}_r(V)$, $\mathcal{A}_r(V)$ το σύνολο των συμμετρικών και αντισυμμετρικών $(0, r)$-τανυστών επί του V αντιστοίχως. Ειδικά για $r = 2$, κάθε $T \in \mathcal{T}_2^0(V)$ γράφεται με μοναδικό τρόπο (εφ' όσον $S_r(V) \cap \mathcal{A}_r(V) = 0$) ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή,

$$T = T_{ij} e^i \otimes e^j = \underbrace{\frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} e^i \otimes e^j}_{T^{sym}} + \underbrace{\frac{T_{ij} - T_{ji}}{2} e^i \otimes e^j}_{T^{alt}}, \qquad \text{οπότε} \quad \mathcal{T}_2^0(V) = S_2(V) \oplus \mathcal{A}_2(V)$$

Εάν $e_1, \dots, e_n$ βάση του V, τότε

$$\frac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}, \quad i < j \quad \text{και} \quad \frac{e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i}{2} \equiv e^j \wedge e^j, i < j$$

βάσεις των $S_2(V), \mathcal{A}_2(V)$ αντιστοίχως.

Συστολή του τανυστή $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$ ως προς τις θέσεις $k \le r$, $l \le s$ ονομάζεται ο $(r-1, s-1)$-τανυστής

$$T_{j_1 \dots j_{2-1}\, i\, j_{2+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_{k-1}\, i\, i_{k+1} \dots i_{r-1}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$$

Η συστολή ενός τανυστή είναι τανυστής εξαρτώμενος από λιγότερους δείκτες, ο οποίος διατηρεί κάποια ενδιαφέρουσα πληροφορία για τον αρχικό, αφού οι βαθμωτές ποσότητες που τον χαρακτηρίζουν συγκαταλλέγονται στις ποσότητες που χαρακτηρίζουν τον αρχικό. Εκτελώντας επανειλημμένες συστολές καταλήγουμε σε έναν $(0,0)$-τανυστή (βαθμωτή ποσότητα) –άρα η συστολή είναι μια μέθοδος κατασκευής αλγεβρικών αναλλοίωτων για έναν τανυστή.

§2. $(0,2)$-ΤΑΝΥΣΤΕΣ (ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ)

Θεωρούμε βάση $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ του πραγματικού χώρου V και έναν T $(0,2)$-τανυστή στον χώρο αυτόν. Εάν $\xi = \xi^i e_i,\ \ \eta = \eta^j e_j \in V$, τότε

$$T(\xi,\eta) = T\big(\xi^i e_i, \eta^j e_j\big) = \xi^i \eta^j\, T\big(e_i, e_j\big) = \ (\xi^1 \dots \xi^n)\begin{pmatrix} T(e_1,e_1) & \cdots & T(e_1,e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ T(e_n,e_1) & \cdots & T(e_n,e_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n\end{pmatrix}$$

Ορίζεται για κάθε βάση $\mathcal{B}$ του χώρου V η αμφιμονοσήμαντη γραμμική απεικόνιση

$${}_{\mathcal{B}}(\cdot) : \mathcal{T}_2(V) \to M_n\mathbb{R}, \qquad {}_{\mathcal{B}}(T) = \big(T\big(e_i, e_j\big)\big)_{i,j}$$

Επίσης συμβολίζεται ${}_{\mathcal{B}}(Q)$ ο πίνακας που αναπαριστά τον γραμμικό μετασχηματισμό Q του διανυσματικού χώρου V στην βάση $\mathcal{B}$ και ${}_{\mathcal{B}}(\xi) = (\xi^1 \dots \xi^n)^T$ η αναπαράσταση του ξ στην βάση αυτή. Εάν $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ βάσεις του διανυσματικού χώρου V, συμβολίζεται ${}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ η αναπαράσταση της $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{C}$ (είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα που αναπαριστούν τα στοιχεία της $\mathcal{C}$ στην βάση $\mathcal{B}$). Σε αυτόν τον συμβολισμό,

$$T(\xi,\eta) = {}_{\mathcal{B}}(\xi)^T\, {}_{\mathcal{B}}(T)\, {}_{\mathcal{B}}(\eta)$$

Από αυτήν την σχέση συνάγεται άμεσα το εξής.

IV.§2.0. Ένας $(0,2)$-τανυστής είναι (αντι)συμμετρικός εάν και μόνον εάν αναπαρίσταται από (αντι)συμμετρικό πίνακα σε κάποια (και άρα σε κάθε) βάση.

IV.§2.1. Εάν $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ βάσεις του V και $T \in \mathcal{T}_2(V)$, τότε ${}_{\mathcal{B}}(T) = {}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})^T\, {}_{\mathcal{C}}(T)\, {}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$.

Αποδ. Από τον μετασχηματισμό των τανυστικών ποσοτήτων κάτω από αλλαγή βάσης. ■

Επειδή ο βαθμός πίνακα μένει αναλλοίωτος από την ομοιότητα, μπορεί να οριστεί ο **βαθμός** του $(0,2)$-τανυστή $T \in \mathcal{T}_2(V)$ ως $rank\, T = rank_{\mathcal{B}}(T)$, όπου $\mathcal{B}$ οποιαδήποτε βάση του V. Ο T καλείται **μή ιδιάζουσα διγραμμική απεικόνιση** όταν $rank\, T = dim V$.

Δεδομένου $T \in \mathcal{T}_2(V)$ και ενός $S \subset V$, ορίζεται ο T-**ορθογώνιος υπόχωρος** του S ως

$$S_T^\perp = \{\, \xi \in V \mid T(\xi, S) = 0\}$$

Συμβολίζουμε $\xi \perp \eta$ εάν $T(x,y) = 0$ (δηλ. το σύμβολο $\perp$ σημαίνει την T-ορθογωνιότητα) και ονομάζουμε τα ξ, η T-**ορθογώνια**. Ορίζεται επίσης ο **μηδενοχώρος** του T ως ο διανυσματικός χώρος των στοιχείων του V που είναι T-ορθογώνια με κάθε άλλο στοιχείο αυτού, $null\, T = V_T^\perp$.

Δεδομένου $(0,2)$-τανυστή $T \in \mathcal{T}_2(V)$, μια βάση $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ του V καλείται T-**ορθογώνια** όταν όλα τα ζεύγη $e_i, e_j,\ \ i \neq j$ είναι T-ορθογώνια· ισοδύναμα, όταν ο πίνακας ${}_{\mathcal{B}}(T)$ είναι διαγώνιος,

$${}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} T(e_1,e_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & T(e_n,e_n)\end{pmatrix}$$

Σε αυτή την περίπτωση, $rank\, T$ είναι το πλήθος των μή μηδενικών στοιχείων της διαγωνίου.

IV.§2.2. Εάν $T \in \mathcal{T}_2(V)$ και $\mathcal{B}$ βάση του V, τότε $null\, T$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων που στην βάση $\mathcal{B}$ αναπαρίστανται ως ο υπόχωρος $ker\, {}_{\mathcal{B}}(T)$.

Αποδ. Έλεγχος με πράξεις γραμμικής άλγεβρας. ■

IV.§2.3. Εάν $T \in L_2(V)$ και $W \subset V$ υποχώρος τέτοιος ώστε ο περιορισμός $T\big|_W$ να είναι μη ιδιάζουσα διγραμμική απεικόνιση, τότε $V = W \oplus W_T^{\perp}$.

Αποδ. Επειδή $W \cap W^{\perp} = \emptyset$, αρκεί να δειχθεί ότι $V = W + W^{\perp}$. Δεδομένου $\xi \in V$, ζητούνται $w_1 \in W, w_2 \in W^{\perp}$ τέτοια $v = \lambda w_1 + w_2$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε θα ισχύει $w_2 = v - \lambda w_1$. Επειδή θα ήταν $w_2 \perp w_1$, θα ίσχυε $T(v - \lambda w_1, w_2) = 0$, άρα $T(v, w_1) = \lambda\, T(w_1, w_1)$. Εφ' όσον T μή ιδιάζουσα στο W, έπεται ότι $T(w_1, w_1) \neq 0$. Επομένως υφίσταται το $\lambda = T(v, w_1)/T(w_1, w_1) \in \mathbb{R}$. Επιλέγοντας $w_2 = v - \lambda w_1$ έπεται το ζητούμενο. ■

Δομή διγραμμικής απεικόνισης καλείται ένα ζεύγος (V, T), όπου V πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{T}_2(V)$ ένας $(0,2)$-τανυστής επ' αυτού. **Ισομορφισμός δομών γραμμικής απεικόνισης** καλείται ένας γραμμικός ισομορφισμός $Q : (V, T) \to (V', T')$ τέτοιος ώστε για κάθε $\xi, \eta \in V$ να ισχύει $T'(Q\xi, Q\eta) = T(\xi, \eta)$.

Συμβολίζεται $O(V, T)$ η ομάδα των αυτομορφισμών της δομής (V, T), δηλαδή η ομάδα των γραμμικών αυτομορφισμών του V που διατηρούν την διγραμμική απεικόνιση T. Εάν οι δομές $(V, T), (V, S)$ είναι ισόμορφες μέσω της απεικόνισης $P : (V, T) \to (V, S)$, τότε $O(V, S) = P \cdot O(V, T) \cdot P^{-1}$: εάν $Q \in O(V, T)$ ο γραμμικός αυτόμορφισμός $S = PQP^{-1}$ του V ανήκει στο $O(V, S)$, διότι

$$S(R\xi, R\eta) = S(PQP^{-1}\xi, PQP^{-1}\eta) = T(QP^{-1}\xi, QP^{-1}\eta) = T(P^{-1}\xi, P^{-1}\eta) = S(\xi, \eta)$$

$$\begin{tikzcd}
(V,T) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "P"'] & (V,T) \arrow[d, "P"] \\
(V,S) \arrow[r, "R"'] & (V,S)
\end{tikzcd}$$

IV.§2.4. Δύο δομές διγραμμικής απεικόνισης (V, T), (V', T') είναι ισόμορφες εάν και μόνον εάν υπάρχουν βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ των χώρων V, V' αντιστοίχως τέτοιες ώστε ${}_{\mathcal{B}}(T) = {}_{\mathcal{B}'}(T')$.

Αποδ. "$\Longrightarrow$,, Εάν $Q : (V, T) \to (V', T')$ ισομορφισμός και $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ οποιαδήποτε βάση του V, τότε για την βάση $\mathcal{B}' = (Qe_i)_{i=1}^n$ του V' ισχύει $T'\big(Qe_i, Qe_j\big) = T(e_i, e_j)$.

,,$\Longleftarrow$" Έστω $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$, $\mathcal{B}' = (e_i')_{i=1}^n$ βάσεις όπως στην υπόθεση. Ο γραμμικός ισομορφισμός $Q : V \to V'$ που ορίζεται από τις σχέσεις $Qe_i = e_i'$ είναι ο ζητούμενος:

$$T'(Q\xi, Q\eta) = \underbrace{{}_{\mathcal{B}'}(Q\xi)}_{{}_{\mathcal{B}}(\xi)}{}^T \; \underbrace{{}_{\mathcal{B}'}(T')}_{{}_{\mathcal{B}}(T)} \; \underbrace{{}_{\mathcal{B}'}(Q\eta)}_{{}_{\mathcal{B}}(\eta)} = {}_{\mathcal{B}}(\xi)^T \, {}_{\mathcal{B}}(T) \, {}_{\mathcal{B}}(\eta) = T(\xi, \eta) \qquad ■$$

Θα μελετηθούν οι συμμετρικές διγραμμικές απεικονίσεις (συμμετρικοί $(0,2)$-τανυστές) με σκοπό τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου.

IV.§2.5. Για κάθε συμμετρική διγραμμική απεικόνιση $T \neq 0$ υπάρχει $\xi \in V$ ώστε $T(\xi, \xi) \neq 0$.

Αποδ. Εφ' όσον $T \neq 0$, $T(\xi, \eta) \neq 0$ για κάποια $\xi, \eta \in V$. Εάν $T(\xi, \xi) \neq 0$ ή $T(\eta, \eta) \neq 0$ τελειώσαμε, αλλιώς επιλέγουμε $w = \xi + \eta$: $T(w, w) = T(\xi, \xi) + T(\eta, \eta) + 2\,T(\xi, \eta) = 2\,T(\xi, \eta) \neq 0$. ■

IV.§2.6. Κάθε συμμετρική μορφή T επιδέχεται διαγώνιας αναπαράστασης (υπάρχει T-ορθογώνια βάση)

Αποδ. Εάν $T = 0$, τότε αναπαρίσταται σε κάθε βάση από τον μηδενικό πίνακα. Εάν $T \neq 0$, από IV.§2.5, υπάρχει $\xi \in V$ ώστε $T(\xi, \xi) \neq 0$, και από IV.§2.3, $V = span(\xi) \oplus span^{\perp}(\xi)$. Επιλέγουμε βάση $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$, όπου $e_1 = \xi$, οπότε $span^{\perp}(\xi) = span\{e_1, \dots, e_n\}$ και επιπλέον $T(e_1, e_i) = 0$ για κάθε $i = 2, \dots, n$. Άρα ο ${}_{\mathcal{B}}(T)$ είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & * & * \\ & * & * \end{pmatrix}$$

όπου $a_{11} = T(e_1, e_1)$. Από επαγωγική υπόθεση για τον υπόχωρο $span(e_i)_{i=2}^n$ προκύπτει η ζητούμενη βάση. ■

Εφ' όσον για δεδομένη βάση $\mathcal{B}$ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους $n \times n$-συμμετρικούς πίνακες και τις συμμετρικές μορφές, από I§V.2.6 συνάγεται ότι κάθε συμμετρικός πίνακας $A \in M_n\mathbb{R}$ διαγωνοποιείται ως $A = P^T DP$, $P \in GL_n\mathbb{R}$. Λύνοντας $c_i^{-2} = \pm T(e_i, e_i)$ για $i \leq p + m$ και αντικαθιστώντας $e_i \to c_i e_i$, λαμβάνουμε από την βάση της IV.§2.6 την T-**ορθοκανονική** βάση $\mathcal{B}$, όπου

$$_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & & \\ & -\mathbf{1}_m & \\ & & \mathbf{0}_z \end{pmatrix}, \quad z = dim\, null\, T = n - \underbrace{rank\, f}_{p+m}$$

IV.§2.7. (Νόμος του Sylvester).

Οι παράμετροι p, m, z (**παράμετροι *Sylvester***) είναι μονοσήμαντα ορισμένες για κάθε συμμετρική διγραμμική απεικόνιση.

Αποδ. Υποθέτουμε ότι η συμμετρική διγραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{T}_2(V)$ έχει δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & & \\ & -\mathbf{1}_m & \\ & & \mathbf{0}_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & & \\ & -\mathbf{1}_m & \\ & & \mathbf{0}_r \end{pmatrix}$$

στις βάσεις T-ορθοκανονικές βάσεις $(e_i)_{i=1}^n$, $(e_i')_{i=1}^n$ αντιστοίχως. Θα δειχθεί ότι $e_1, \dots, e_p; e_{p+1}', \dots, e_n'$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε $p + (n - p') \leq n \Longrightarrow p \leq p'$, και ομοίως $p' \leq p$, άρα $p = p'$ και $m = m'$. Έστω ότι

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = (-\lambda_{p+1})\, e_{p+1}' + \cdots + (-\lambda_n)\, e_n' = \xi$$

Το $T(\xi, \xi)$ υπολογίζεται με δύο τρόπους,

$$T(\xi, \xi) = T(\sum_{i=1}^p \lambda_i\, e_i\,, \sum_{i=1}^p \lambda_i\, e_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2\, \underbrace{T(e_i, e_i)}_{1} = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \geq 0$$

$$T(\xi, \xi) = T(\sum_{i=p+1}^n (-\lambda_i)\, e_i'\,, \sum_{i=p+1}^n (-\lambda_i)\, e_i') = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i^2\, \underbrace{T(e_i', e_i')}_{-1} = -\sum_{i=p+1}^n \lambda_i^2 \leq 0$$

Άρα

$$T(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 = -\sum_{i=p+1}^n \lambda_i^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0, \ \ \forall i = 1, \dots, n \qquad ■$$

Από το νόμο του Sylvester και τον τύπο για τον μετασχηματισμό πίνακα διγραμμικής απεικόνισης κάτω από βάση, έπεται ότι το σύνολο των συμμετρικών $n \times n$ πινάκων διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας (**κλάσεις *Sylvester***), κάθε μια από τις οποίες έχει αντιπρόσωπο

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & & \\ & -\mathbf{1}_m & \\ & & \mathbf{0}_z \end{pmatrix}$$

για όλες τις δυνατές επιλογές τριάδων p, m, z τέτοιων ώστε $p + m + z = n$. Η σχετική σχέση ισοδυναμίας είναι $A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in GL_n\mathbb{R}$ ώστε $A = P^T BP$.

Κάθε συμμετρικός $(0,2)$-τανυστής σχετίζεται ακριβώς με μια από τις κλάσεις *Sylvester*, την κλάση στην οποία ανήκουν όλες οι δυνατές αναπαραστάσεις του για τις διάφορες βάσεις του χώρου. Επομένως έχουν νόημα οι παράμετροι *Sylvester* ενός συμμετρικού $(0,2)$-τανυστή, ως οι παράμετροι *Sylvester* της κλάσης συμμετρικών πινάκων στην οποία βρίσκει τις αναπαραστάσεις του.

Ελέγχεται ότι οι συμμετρικοί $(0,2)$-τανυστές T που βρίσκουν την αναπαράστασή τους στην κλάση *Sylvester* $(n,0,0)$ είναι ακριβώς οι έχοντες την ιδιότητα

$$T(\xi,\xi) \geq 0 \text{ για κάθε } \xi \in V \text{ και } T(\xi,\xi) = 0 \Rightarrow \xi = 0$$

Καλείται **εσωτερικό γινόμενο** κάθε συμμετρικός $(0,2)$-τανυστής όπως ο παραπάνω.

Από την IV.§2.4 συνάγεται ότι δύο δομές συμμετρικής διγραμμικής απεικόνισης είναι ισόμορφες εάν και μόνον εάν ανήκουν στην ίδια κλάση *Sylvester* : οι κλάσεις ισομορφίας στο σύνολο των συμμετρικών διγραμμικών απεικονίσεων επί ενός n-διάστατου χώρου ταξινομούνται ως οι 3-άδες μη αρνητικών ακεραίων (p,m,z) για τις οποίες ισχύει $p+m+z=n$.

Καλείται **ψευδοευκλείδεια δομή** μια συμμετρική δομή διγραμμικής απεικόνισης $(V,<\cdot,\cdot>)$ όπου ο συμμετρικός $(0,2)$-τανυστής $<\cdot,\cdot>$ είναι μη ιδιάζουσα διγραμμική απεικόνιση (έχει παράμετρο *Sylvester* $z=0$). **Ευκλείδεια δομή** ονομάζεται μια ψευδοευκλείδεια δομή $(V,<\cdot,\cdot>)$ όπου ο τανυστής $<\cdot,\cdot>$ είναι εσωτερικό γινόμενο. Δύο ψευδοευκλείδειες δομές είναι ισόμορφες εάν και μόνον εάν έχουν τις ίδιες παραμέτρους *Sylvester*, επομένως όλες οι ευκλείδειες δομές είναι ισόμορφες.

Δεδομένης μή ιδιάζουσας συμμετρικής διγραμμικής απεικόνισης T επί του χώρου V, θα δειχθεί ότι, με κατάλληλη δράση αυτής πάνω στον χώρο των $L(V)$ των γραμμικών μετασχηματισμών του V, προκύπτουν από αυτήν μονοσήμαντα όλες οι διγραμμικές απεικονίσεις, δηλαδή ο χώρος $\mathcal{T}_2(V)$.

IV.§2.8. Εάν T μή ιδιάζουσα συμμετρική διγραμμική απεικόνιση, τότε για κάθε $\xi \in V \setminus 0$ υπάρχει $\eta \in V$ τέτοιο ώστε $T(\xi,\eta) \neq 0$.

Αποδ. Έστω $\xi \in V \setminus 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\eta \in V$ να ισχύει $T(\xi,\eta)=0$. Τότε για κάθε βάση $\mathcal{B}$ ισχύει ${}_{\mathcal{B}}(\xi)^T{}_{\mathcal{B}}(T){}_{\mathcal{B}}(\eta)=0$. Επιλέγοντας βάση $\mathcal{B}=(e_i)_{i=1}^n$ με $e_1=\xi$, ο πίνακας ${}_{\mathcal{B}}(T)$ έχει μηδενική την πρώτη γραμμή, άτοπο, διότι ο T είναι μή ιδιάζουσα, συμμετρική απεικόνιση. ■

I§V.2.9. Εάν Q γραμμικός μετασχηματισμός του V τέτοιος ώστε για κάποια μη ιδιάζουσα συμμετρική διγραμμική μορφή T να ισχύει $T(Q\xi,\eta)=0,\ \forall \xi,\eta \in V$, τότε $Q=0$.

Αποδ. Έστω $\xi \in V \setminus 0$ τέτοιο ώστε $Q\xi \neq 0$. Επειδή T μή ιδιάζουσα, από IV.2.8 έπεται ότι $T(Q\xi,\eta) \neq 0$ για κάποιο $\eta \in V$, άτοπο εξ υποθέσεως. ■

Από την συμμετρικότητα της διγραμμικής απεικόνισης T, συνάγεται η ύπαρξη T-ορθογώνιας βάσης $\mathcal{B}=(e_i)_{i=1}^n$, οπότε ${}_{\mathcal{B}}(T)=diag\ (\varepsilon_i)_{i=1}^n$, όπου $\varepsilon_i=T(e_i,e_i)$ για κάθε $i=1,\dots,n$. Η T δρά από αριστερά και από δεξιά σε έναν $Q \in L(V)$ ως

$$L(V) \ni Q \begin{cases} \rightsquigarrow T(Q(\cdot),\ \cdot) \equiv {}^{Q}T \\ \rightsquigarrow T\big(\cdot, Q(\cdot)\big) \equiv T^{Q} \end{cases}$$

Οι ${}^{Q}T,\ T^{Q}$ είναι $(0,2)$-τανυστές που ικανοποιούν τις σχέσεις

$${}_{\mathcal{B}}({}^{Q}T) = {}_{\mathcal{B}}(Q){}_{\mathcal{B}}(T), \qquad {}_{\mathcal{B}}(T^{Q}) = {}_{\mathcal{B}}(T){}_{\mathcal{B}}(Q)$$

διότι ${}_{B}(Q\xi) = {}_{B}(Q)\ {}_{B}(\xi)$. Πιο συγκεκριμένα,

$${}_{\mathcal{B}}({}^{Q}T) = diag\ (\varepsilon_i)_{i=1}^n \cdot {}_{\mathcal{B}}(Q)^T \qquad (1)$$

$${}_{\mathcal{B}}(T^{Q}) = diag\ (\varepsilon_i)_{i=1}^n \cdot {}_{\mathcal{B}}(Q) \qquad (2)$$

αφού $\mathcal{B}$ είναι T-ορθογώνια βάση.

IV.§2.10. Εάν T μη ιδιάζουσα, συμμετρική διγραμμική απεικόνιση στον διανυσματικό χώρο V, τότε ο τανυστικός χώρος $\mathcal{T}_2(V)$ προκύπτει μονοσήμαντα ως ${}^{Q}T,\ Q \in L(V)$ ή $T^{Q},\ Q \in L(V)$. Ειδικότερα ισχύει $rank\ {}^{Q}T = rank\ T^{Q} = rankQ$.

Αποδ. Δεδομένου $S \in \mathcal{T}_2(V)$, ζητείται $Q \in L(V)$ τέτοιο ώστε $S={}^{Q}T$ (αντιστοίχως $S=T^{Q}$). Επιλέγουμε Q τον γραμμικό μετασχηματισμό που στην βάση $\mathcal{B}$ αναπαρίσταται από τον πίνακα $diag(\varepsilon_i)_{i=1}^n \cdot {}_{\mathcal{B}}(S)^T =$

$(\varepsilon_i^{-1}S(e_j, e_i))_{i,j} = {}_{\mathcal{B}}(Q)$. Από την σχέση (1) φαίνεται ότι $S = {}^{Q}T$. (Αντιστοίχως, επιλέγεται Q ο γραμμικός μετασχηματισμός για τον οποίο ${}_{\mathcal{B}}(Q) = diag(\varepsilon_i)_{i=1}^{n} \cdot {}_{\mathcal{B}}(S)$, οπότε από την (2) συνάγεται ότι $S = T^{Q}$).

Για το μονοσήμαντο, έστω $S \in T_2(V)$ με $S = {}^{Q}T = {}^{R}T$ για κάποια $Q, R \in L(V)$. Τότε

$$ {}^{Q}T(\xi, \eta) = T(Q\xi, \eta) = T(S\xi, \eta) = {}^{R}T(\xi, \eta), \quad \forall \xi, \eta \in V \Longrightarrow $$

$$ T(Q\xi, \eta) - T(R\xi, \eta) = T\big((Q - R)\xi, \eta\big) = 0, \quad \forall \xi, \eta \in V \Longrightarrow Q - R = 0 \Longrightarrow Q = R $$

εφ' όσον T είναι μη ιδιάζουσα (I§V.2.9). Ο τελευταίος ισχυρισμός της εκφώνησης έπεται από τις σχέσεις (1) και (2), εφ' όσον ο πίνακας $diag\ (\varepsilon_i)_{i=1}^{n}$ είναι εν προκειμένω αντιστρέψιμος $(\varepsilon_i \neq 0, \forall i)$. ■

Σύμφωνα με την IV.§2.10, δεδομένης μή ιδιάζουσας, συμμετρικής διγραμμικής απεικόνισης $T \in T_2(V)$, για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό Q του V υπάρχει μοναδικός γραμμικός μετασχηματισμός $Q^{\dagger}$ του V τέτοιος ώστε $T(Q(\cdot), \cdot) = T(\cdot, Q^{\dagger}(\cdot))$ (**συζυγής μετασχηματισμός** του Q ως προς την T). Ο Q καλείται **αυτοσυζυγής** όταν $Q = Q^{\dagger}$.

IV.§2.11. Δεδομένης μή ιδιάζουσας, συμμετρικής διγραμμικής απεικόνισης $T \in \mathcal{T}_2(V)$ και μετασχηματισμού $Q \in L(V)$, εάν ο υπόχωρος $W \subset V$ είναι T-αναλλοίωτος, τότε ο $W_T^{\perp}$ είναι $Q^{\dagger}$-αναλλοίωτος.

Αποδ. Εάν $\xi \in W_T^{\perp}$, τότε $T(Q^{\dagger}\xi, W) = T(\xi, Q[W]) = 0$, εφ' όσον $Q[W] \subset W$. ■

Λαμβάνοντας υπ' όψην την μορφή που πρέπει να έχει η αναπαράσταση του Q σε κάποια βάση $\mathcal{B}$ του V, από την IV.§2.10 έπεται το εξής.

IV.§2.12. Δεδομένης ψευδοευκλείδειας δομής $(V, <\cdot, \cdot>)$, για κάθε $Q \in L(V)$ υπάρχει μοναδικός $Q^{\dagger} \in L(V)$ τέτοιος ώστε

$$ < Q(\cdot), \cdot > = < \cdot, Q^{\dagger}(\cdot) > $$

Επομένως σε κάθε βάση $\mathcal{B}$ του V ισχύει ${}_{\mathcal{B}}(Q)^{T}{}_{\mathcal{B}}(<\cdot, \cdot>) = {}_{\mathcal{B}}(<\cdot, \cdot>)\ {}_{\mathcal{B}}(Q^{\dagger})$. Ειδικότερα, εάν η $\mathcal{B}$ είναι $<\cdot, \cdot>$-ορθογώνια, τότε

$$ {}_{\mathcal{B}}(Q^{\dagger}) = diag\ (\varepsilon_1^{-1}, \dots, \varepsilon_n^{-1}) \cdot {}_{\mathcal{B}}(Q)^{T} \cdot diag\ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_i^{-1}\varepsilon_j\, q_{ij})_{i,j} $$

όπου $(q_{ij})_{i,j} = {}_{\mathcal{B}}(Q)$ και $\varepsilon_i = < e_i, e_i >$.

IV.§2.13. Για κάθε ψευδοευκλείδεια δομή $(V, <\cdot, \cdot>)$ ισχύει $O(V, <\cdot, \cdot>) = \{\, Q \in GL(V) \,\big|\, QQ^{\dagger} = \mathbf{1}\}$

Αποδ. Χρησιμοποιώντας την I§V.2.9, για κάθε $Q \in GL(V)$ ισχύει

$$ < \xi, \eta > = < Q\xi, Q\eta >, \quad \forall \xi, \eta \in V \iff < \xi, \eta > = < Q^{\dagger}Q\xi, \eta >, \quad \forall \xi, \eta \in V \iff $$

$$ < (\mathbf{1} - Q^{\dagger}Q)\xi, \eta > = 0, \quad \forall \xi, \eta \in V \iff \mathbf{1} = Q^{\dagger}Q \qquad ■ $$

IV.§2.14. Σε κάθε $<\cdot, \cdot>$-ορθοκανονική βάση, όπου $<\cdot, \cdot>$ μή ιδιάζουσα, συμμετρική διγραμμική μορφή, η $O(V, <\cdot, \cdot>)$ αναπαρίσταται ως η ομάδα των αντιστρέψιμων $n \times n$-πινάκων με $<\cdot, \cdot>$-ορθογώνιες στήλες (ή γραμμές). Συγκεκριμένα, εάν $e_1, \dots, e_n$ $<\cdot, \cdot>$-ορθογώνια βάση και $\varepsilon_i = < e_i, e_i >$, τότε η ομάδα $O(V, <\cdot, \cdot>)$ αναπαρίσταται ως

$$ \Big\{ \big(q_j^i\big)_{i,j} \in GL_n\mathbb{R} \,\Big|\, \sum_{k=1}^{n} (q_j^k)^2 \varepsilon_k = \varepsilon_j, \forall j \text{ και } \sum_{k=1}^{n} q_i^k q_j^k \varepsilon_k = 0 \text{ για } i \neq j \Big\} $$

Αποδ. Συμβολίζεται G η ομάδα του συμπεράσματος. Επειδή η $O(V, <\cdot, \cdot>)$ συγκροτείται ακριβώς από τους μετασχηματισμούς των οποίων ο αντίστροφος είναι ο $<\cdot, \cdot>$-συζυγής τους (IV.§2.13), και λαμβάνοντας υπ' όψιν την αναπαράσταση του $<\cdot, \cdot>$-συζυγούς μετασχηματισμού σε μία $<\cdot, \cdot>$-ορθογώνια βάση (IV.§2.12), έπεται ότι

$$ \big(q_j^i\big)_{i,j} \in G \iff (\varepsilon_i^{-1} q_j^i\, \varepsilon_j)_{i,j}\, \big(q_j^i\big)_{i,j} = (\delta_j^i)_{i,j} $$

Εκτελώντας την πράξη στο αριστερό μέλος της δεξιάς ισότητας, η ισοδυναμία γίνεται

$$\left(q^i_j\right)_{i,j} \in G \Leftrightarrow (\varepsilon_i^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} q^k_i q^k_j \, \varepsilon_k)_{i,j} = (\delta^i_j)_{i,j}$$

απ' όπου φαίνεται άμεσα το ζητούμενο. ■

Συμβολίζεται $O(p,m)$ η ομάδα των πινάκων που αναπαριστούν τους αυτομορφισμούς κάποιας (και άρα κάθε) ψευδοευκλείδειας δομής $(V, <\cdot,\cdot>)$ με παραμέτρους Sylvester $(p,m,0)$ σε κάποια $<\cdot,\cdot>$-ορθοκανονική βάση. Προφανώς η $O(p,m)$ είναι η ομάδα του συμπεράσματος της πρότασης IV.§2.13 όταν $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_p = 1,\ \varepsilon_{p+1} = \cdots = \varepsilon_n = -1$.

IV.§2.15. $O(p,m) = \{\, Q \in GL_n\mathbb{R} \,\big|\, Q^T \begin{pmatrix} \mathbf{1_p} & \\ & -\mathbf{1_m} \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \mathbf{1_p} & \\ & -\mathbf{1_m} \end{pmatrix} \}$

Αποδ. Άμεση εφαρμογή της IV.§2.12 με $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_p = 1,\ \varepsilon_{p+1} = \cdots = \varepsilon_n = -1$. ■

IV.§2.16. $O(n) \equiv O(p,m) = \{\, Q \in GL_n\mathbb{R} \,\big|\, Q^T Q = \mathbf{1} \,\}$

Αποδ. Άμεση εφαρμογή της IV.§2.15. ■

Θα μελετηθούν οι αυτοσυζυγείς γραμμικοί μετασχηματισμοί ενός ευκλείδειου χώρου $(V, <\cdot,\cdot>)$. Επιλέγοντας $<\cdot,\cdot>$-ορθοκανονική βάση του V, οι αυτοσυζυγείς μετασχηματισμοί είναι ακριβώς οι αναπαριστώμενοι από συμμετρικούς πίνακες (εφαρμογή της IV.§2.12). Αυτό φαίνεται επίσης άμεσα από το γεγονός ότι η αυτοσυζυγία ενός γραμμικού μετασχηματισμού Q ισοδυναμεί με την συμμετρικότητα της διγραμμικής απεικόνισης $<Q(\cdot),\cdot>$. Συγκεκριμένα, υφίσταται αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους αυτοσυζυγείς μετασχηματισμούς και τις συμμετρικές διγραμμικές απεικονίσεις, η οποία δηλώνεται χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο,

$$Q(\cdot,\cdot) = <Q(\cdot),\cdot> = <\cdot, Q(\cdot)>$$

Κάθε συμμετρική διγραμμική μορφή Q επάγει τετραγωνική μορφή $B : V \to \mathbb{R}$,

$$V \ni \xi \longmapsto B(\xi) = Q(\xi,\xi) \in \mathbb{R},$$

και κάθε τετραγωνική μορφή $B : V \to \mathbb{R}$ επάγεται με τον παραπάνω τρόπο από μοναδική συμμετρική, διγραμμική απεικόνιση Q,

$$Q(\xi,\eta) = (\, B(\xi+\eta) - B(\xi) - B(\eta)\,)/2$$

Επομένως υφίσταται αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στις τετραγωνικές μορφές και τις διγραμμικές συμμετρικές απεικονίσεις – κατ' επέκταση ανάμεσα στις τετραγωνικές μορφές και τους αυτοσυζυγείς μετασχηματισμούς – που δηλώνεται χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο,

$$Q(\xi) = Q(\xi,\xi) = <Q\xi,\xi> = <\xi, Q\xi>$$

Μία συμμετρική διγραμμική απεικόνιση είναι μή ιδιάζουσα εάν και μόνον εάν ο αντίστοιχος αυτοσυζυγής μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος (αφού αναπαρίστανται από τον ίδιο πίνακα). Από την γραμμική άλγεβρα σε χώρους εσωτερικού γινομένου είναι γνωστό το ακόλουθο.

IV.§2.17. Οι αντιστρέψιμοι αυτοσυζυγείς τελεστές ενός n-διάστατου ευκλείδειου χώρου $(V, <\cdot,\cdot>)$ είναι ακριβώς οι γραμμικοί αυτομορφισμοί του V με n το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες, $<\cdot,\cdot>$-ορθογώνιες ιδιοκατευθύνσεις (δρούν γεωμετρικά διαστέλλοντας κάποια ορθοκανονική βάση του χώρου). Ισοδύναμα, κάθε συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται από ορθογώνιο πίνακα κατά τρόπον ώστε τα διαγώνια στοιχεία του να είναι οι πραγματικές (μη μηδενικές) ιδιοτιμές του.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την IV.§2.23 και χρησιμοποιώντας τον ανωτέρω συμβολισμό, η IV.§2.6 επαναδιατυπώνεται λεπτομερέστερα σε ευκλείδειους χώρους ως εξής:

IV.§2.18. Για κάθε μή ιδιάζουσα συμμετρική, διγραμμική απεικόνιση Q σε ευκλείδεια δομή $(V, <\cdot,\cdot>)$ υπάρχει $<\cdot,\cdot>$ορθοκανονική βάση $e_1, \dots, e_n$ τέτοια ώστε

$$Q(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi^i \eta^i$$

όπου λ_i οι (πραγματικές, μή μηδενικές) ιδιοτιμές του αντιστρέψιμου αυτοσυζυγούς τελεστή Q και $\xi = \xi^i e_i, \eta = \eta^i e_i$. Δεδομένης οποιασδήποτε $<\cdot,\cdot>$-ορθοκανονικής βάσης του V, η παραπάνω βάση επιτυγχάνεται εκτελώντας έναν αυτομορφισμό της δομής $(V, <\cdot,\cdot>)$ (οι αυτομορφισμοί της δομής αναπαρίστανται στην βάση $e_1, \dots, e_n$ ως οι αντιστρέψιμοι ορθογώνιοι πίνακες, από πρόταση IV.§2.16)

Θα μελετηθούν τα ακρότατα τετραγωνικής μορφής Q της ευκλείδειας δομής $(V, <\cdot,\cdot>)$ πάνω στην μοναδιαία σφαίρα της. Θεωρώντας ορθοκανονική βάση $e_1, \dots, e_n$ του χώρου, η μοναδιαία σφαίρα γράφεται

$$\{\, \xi^i e_i \,|\, \sum_{i=1}^{n} (\xi^i)^2 = 1 \,\}$$

IV.§2.19. Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της τετραγωνικής μορφής Q πάνω στην μοναδιαία σφαίρα ισούνται αντιστοίχως με την μέγιστη και ελάχιστη ιδιοτιμή του αντίστοιχου αυτοσυζυγούς τελεστή Q και επιτυγχάνονται στα αντίστοιχα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα. Για κάθε κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα e_i του Q με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ_i ισχύει $Q(e_i, e_i) = \lambda_i$[1] και η βάση e_i, $i = 1, \dots, n$ συγκροτείται ακριβώς από τα υποψήφια ακρότατα της Q πάνω στη μοναδιαία σφαίρα που δίνονται από την μέθοδο του Lagrange.

Αποδ. Η διγραμμική απεικόνιση Q αναπαρίσταται στην βάση $e_1, \dots, e_n$ από τον συμμετρικό πίνακα $(q_{ij})_{i,j}$ που αναπαριστά στην βάση αυτή τον αυτοσυζυγή μετασχηματισμό Q. Τότε $Q(\xi, \xi) = \xi^i q_{ij} \xi^j$ και για να εφαρμόσουμε την μέθοδο του Lagrange, ορίζουμε τον περιορισμό

$$\varphi(\xi^1, \dots, \xi^n) = \sum_{i=1}^{n} (\xi^i)^2 - 1$$

Τότε

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi^k} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^k} = (q_{ik}\xi^i) - 2\lambda\xi^k = 2(q_{ik}\xi^i - \lambda\xi^i)$$

και μηδενίζοντας για κάθε $k = 1, \dots n$, λαμβάνουμε το γραμμικό σύστημα

$$(q_{11} - \lambda)\xi^1 + q_{12}\xi^1 + \cdots + q_{1n}\xi^n = 0$$

$$q_{21}\xi^1 + (q_{22} - \lambda)\xi^2 + \cdots + q_{2n}\xi^n = 0$$

$$\vdots$$

$$q_{n1}\xi^1 + q_{n2}\xi^2 + \cdots + (q_{nn} - \lambda)\xi^n = 0$$

Οι μη τετριμμένες λύσεις αυτού του συστήματος είναι προφανώς τα $e_1, \dots, e_n$, καθ' ένα από τα οποία προκύπτει αντικαθιστώντας στην παράμετρο λ τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ του Q αντιστοίχως. ■

Καλείται **συμπλεκτική μορφή** κάθε αντισυμμετρικός $(0,2)$-τανυστής και **συμπλεκτική δομή** κάθε δομή διγραμμικής απεικόνισης (V, Ω) όπου ο τανυστής Ω είναι συμπλεκτική μορφή.

IV.§2.20. Δεν υπάρχει μη ιδιάζουσα συμπλεκτική μορφή σε χώρο περιττής διάστασης. Για κάθε μη ιδιάζουσα συμπλεκτική μορφή σε χώρο άρτιας διάστασης n, υπάρχει βάση στην οποία να αναπαρίσταται από τον πίνακα

---

1. Αφού $Q(e_i, e_i) =< Qe_i, e_i >=< \lambda_i e_i, e_i >= \lambda_i < e_i, e_i >= \lambda_i$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Αποδ. Έστω Ω συμπλεκτική μορφή σε χώρο περιττής διάστασης n και ${}_{\mathcal{B}}(\Omega)$ αναπαράσταση αυτής. Από IV.§2.23, ${}_{\mathcal{B}}(\Omega) = -{}_{\mathcal{B}}(\Omega)^T$, άρα $det\ {}_{\mathcal{B}}(\Omega) = det\ (-{}_{\mathcal{B}}(\Omega)^T) = det\ (-{}_{\mathcal{B}}(\Omega)) = (-1)^n\ det\ {}_{\mathcal{B}}(\Omega) = -det\ {}_{\mathcal{B}}(\Omega)$ που σημαίνει ότι $det\ {}_{\mathcal{B}}(\Omega) = 0$. Άρα η Ω είναι ιδιάζουσα.

Έστω Ω μη ιδιάζουσα συμπλεκτική μορφή σε χώρο άρτιας διάστασης n. Λόγω αντισυμμετρικότητας, $\Omega(\xi,\eta) = -\Omega(\xi,\eta)$ και $\Omega(\xi,\xi) = 0,\ \forall\, \xi,\eta \in V$. Τότε, πιλέγοντας e_1, e_2 γραμμικώς ανεξάρτητα, ο περιορισμός της Ω στον υποχώρο $span\{e_1, e_2\}$ αναπαρίσταται στην βάση e_1, e_2 από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega(e_1,e_2) \\ -\Omega(e_1,e_2) & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή η Ω είναι μη ιδιάζουσα, τα e_1, e_2 επιλέγονται ώστε $\Omega(e_1,e_2) \neq 0$. Εκτελώντας τις αντικαταστάσεις $e_1 \to e_1/\sqrt{\Omega(e_1,e_2)}$, $e_2 \to e_2/\sqrt{\Omega(e_1,e_2)}$, η $\Omega\big|_{span\{e_1,e_2\}}$ αναπαρίσταται στην βάση e_1, e_2 από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα η $\Omega\big|_{span\{e_1,e_2\}}$ είναι μη ιδιάζουσα και από IV.§2.3 έπεται ότι $V = span\{e_1,e_2\} \oplus span^{\perp}\{e_1,e_2\}$. Συγκροτώντας βάση $\mathcal{B}$ του V από τα e_1, e_2 και μια βάση $(e_3, \dots, e_n)$ του $span^{\perp}\{e_1,e_2\}$, τότε επειδή $\Omega(e_i, e_j) = 0$ για $i = 1,2$ και $j = 3, \dots, n$, η Ω αναπαρίσταται στην βάση $\mathcal{B}$ από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & & * & * \\ \vdots & \vdots & & * & * \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Από επαγωγική υπόθεση έπεται το ζητούμενο. ■

Συνδυάζοντας τις προτάσεις IV.§2.20 και IV.§2.4, όλες οι μη ιδιάζουσες συμπλεκτικές δομές ίσης διάστασης είναι ισόμορφες. Μεταθέτοντας τα στοιχεία της βάσης που δίνεται από την πρόταση IV.§2.20, η βάση μπορεί να ληφθεί τέτοια ώστε η συμπλεκτική μορφή Ω να αναπαρίσταται από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n/2} \\ -\mathbf{1}_{n/2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Μία τέτοια βάση καλείται **συμπλεκτική βάση** για την συμπλεκτική μορφή Ω.

Η επόμενη πρόταση, όπως η αντίστοιχή της για συμμετρικές διγραμμικές απεικονίσεις (IV.§2.10), δηλώνει ότι όλες οι μή ιδιάζουσες διγραμμικές απεικονίσεις επί του διανυσματικού χώρο V προκύπτουν από την δεξιά ή αριστερή δράση οποιασδήποτε συμπλεκτικής μορφής Ω αυτού στο σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών του,

$$L(V) \ni Q \begin{array}{l} \rightsquigarrow \Omega(Q(\cdot),\ \cdot) \equiv {}^{Q}\Omega \\ \rightsquigarrow \Omega(\cdot, Q(\cdot)) \equiv \Omega^{Q} \end{array}$$

IV.§2.21. Εάν Ω μη ιδιάζουσα, συμπλεκτική διγραμμική απεικόνιση στον διανυσματικό χώρο V, τότε ο τανυστικός χώρος $\mathcal{T}_2(V)$ προκύπτει μονοσήμαντα ως ${}^{Q}\Omega,\ Q \in L(V)$ ή $\Omega^{Q},\ Q \in L(V)$. Ειδικότερα ισχύει $rank\ {}^{Q}\Omega = rank\ \Omega^{Q} = rank Q$.

Αποδ. Επιλέγοντας οποιαδήποτε μή ιδιάζουσα, συμμετρική διγραμμική απεικόνιση $<\cdot,\cdot>$ επί του V,

υπάρχει γραμμικός αυτομορφισμός Q του V τέτοιος ώστε $\Omega =< Q(\cdot), \cdot >$ (IV.§2.10). Τότε προφανώς ισχύει $< \cdot, \cdot >= \Omega(Q^{-1}(\cdot), \cdot)$, και από την ίδια πρόταση έπεται το ζητούμενο. ■

Η IV.§2.21 καθιστά εφικτό τον ορισμό της συζυγίας ως προς μή ιδιάζουσα, συμπλεκτική μορφή, ακριβώς όπως ο ορισμός της συζυγίας ως προς μή ιδιάζουσα, συμμετρική διγραμμική απεικόνιση είναι εφικτός χάρις την IV.§2.10. Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό και εκτελώντας πανομοιότυπες πράξεις, διατυπώνονται για μή ιδιάζουσες συμπλεκτικές μορφές οι ακόλουθες προτάσεις (αντίστοιχες των IV.§2.12, IV.§2.13)

IV.§2.22. Δεδομένης μη ιδιάζουσας, συμπλεκτικής δομής (V, Ω), για κάθε $Q \in L(V)$ υπάρχει μοναδικός $Q^\dagger \in L(V)$ τέτοιος ώστε

$$\Omega(Q(\cdot),\cdot) \;=\; \Omega(\cdot, Q^\dagger(\cdot))$$

Επομένως σε κάθε βάση $\mathcal{B}$ του V ισχύει ${}_{\mathcal{B}}(Q)^T{}_{\mathcal{B}}(\Omega) = {}_{\mathcal{B}}(\Omega)\,{}_{\mathcal{B}}(Q^\dagger)$. Ειδικότερα, εάν η $\mathcal{B}$ είναι συμπλεκτική βάση για την Ω, τότε

$${}_B(Q^\dagger) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n/2} \\ -\mathbf{1}_{n/2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} {}_B(Q)^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n/2} \\ -\mathbf{1}_{n/2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

IV.§2.23. Για κάθε συμπλεκτική δομή (V, Ω) ισχύει $O(V, \Omega) = \{\, Q \in GL(V) \,\big|\, QQ^\dagger = \mathbf{1}\}$

Καλείται **συμπλεκτική ομάδα** (άρτιας) **τάξεως** n, η ομάδα $Sp(n)$ των πινάκων που αναπαριστούν τους αυτομορφισμούς κάποιας (και άρα κάθε) n-διάστατης συμπλεκτικής δομής (V, Ω) σε μια συμπλεκτική βάση της Ω. Από IV.§2.0 συνάγεται ότι η $Sp(n)$ είναι η ομάδα των αντιστρέψιμων $n \times n$-αντισυμμετρικών πινάκων. Εφαρμόζοντας την IV.§2.22, συνάγεται επίσης ότι

IV.§2.24. $Sp(n) = \{\, Q \in GL_n\mathbb{R} \,\big|\, Q^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n/2} \\ -\mathbf{1}_{n/2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n/2} \\ -\mathbf{1}_{n/2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\}$

n το πλήθος συμπλεκτικές μορφές επί ενός n-διάστατου χώρου συγκροτούν διγραμμικό, αντισυμμετρικό γινόμενο στον χώρο αυτόν. Συγκεκριμένα, ***Lie* άλγεβρα** καλείται ένας διανυσματικός χώρος V εφοδιασμένος με διγραμμική, αντισυμμετρική πράξη $[\cdot, \cdot] : V \times V \to V$ που ικανοποιεί επιπλέον την **ταυτότητα *Jacobi***,

$$[x, [y, z]] + [y, [x, z]] + [z, [x, y]] = 0$$

Λόγω αντισυμμετρικότητας, δεδομένης βάσης $e_1, \dots, e_n$ του V, η πράξη $[\cdot, \cdot]$ προσδιορίζεται από τις βαθμωτές ποσότητες c_{ij}^k για τις οποίες $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ (**δομικές σταθερές της άλγεβρας**). Ισχύει τότε

$$[\xi, \eta] = [\xi^i e_i, \eta^j e_j] = \xi^i \eta^j [e_i, e_j] = \xi^i \eta^j c_{ij}^k e_k$$

δηλαδή $[\xi, \eta]^k = \xi^i \eta^j c_{ij}^k,\ k = 1, \dots, n$. Για κάθε k, η απεικόνιση $(\xi, \eta) \to [\xi, \eta]^k = \xi^i \eta^j c_{ij}^k$ είναι συμπλεκτική μορφή, επομένως κάτω από αλλαγή βάσης $f_i = a_i^j e_j$, οι δομικές σταθερές της άλγεβρας μετασχηματίζονται ως $\tilde{c}_{ij}^k = a_i^p a_j^q c_{pq}^k$. Από την ταυτότητα Jacobi, λαμβάνονται επιπλέον οι σχέσεις

$$[e_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_l, e_i]] + [e_l, [e_i, e_j] = 0 \Rightarrow$$

$$[e_i, c_{jl}^\mu e_\mu] + [e_j, c_{li}^\mu e_\mu] + [e_l, c_{ij}^\mu e_\mu] = 0 \Rightarrow$$

$$c_{jl}^\mu [e_i, e_\mu] + c_{li}^\mu [e_j, e_\mu] + c_{ij}^\mu [e_l, e_\mu] = 0 \Rightarrow$$

$$c_{jl}^\mu c_{i\mu}^k e_k + c_{li}^\mu c_{j\mu}^k e_k + c_{ij}^\mu c_{l\mu}^k e_k = 0 \Rightarrow$$

$$c_{jl}^\mu c_{i\mu}^k + c_{li}^\mu c_{j\mu}^k + c_{ij}^\mu c_{l\mu}^k = 0$$

Lie* ιδεώδες** καλείται ένας διανυσματικός υπόχωρος $\mathfrak{n} \subset V$ τέτοιος ώστε $[\mathfrak{n}, \xi] \subset \mathfrak{n}$ για κάθε $\xi \in V$. Λόγω αντισυμμετρικότητας, τα *Lie* ιδεώδη είναι αμφίπλευρα. Συμβολίζεται $\mathfrak{n} \lhd V$. **Υποάλγεβρα *Lie καλείται κάθε διανυσματικό υπόχωρος μιας άλγεβρας *Lie* που είναι άλγεβρα *Lie* επίσης (δηλαδή κλειστός ως προς το γινόμενο *Lie*). Προφανώς κάθε *Lie* ιδεώδες είναι υποάλγεβρα *Lie*.

§3. ΤΑΝΥΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

(r, s)-**τανυστικό πεδίο** επί της διαφορικής πολλαπλότητας M καλείται μια τμήση της διανυσματικής δέσμης που προκύπτει επισυνάπτοντας σε κάθε $P \in M$ τον τανυστικό χώρο $\mathcal{T}_s^r(T_P M)$, δηλαδή η επισύναψη ενός (r, s)-τανυστή επί του εφαπτόμενου χώρου σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας.

Εάν U τοπικός χάρτης της M με σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$, τότε τα

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right)^*}_{dx^{j_1}} \otimes \dots \otimes \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)^*}_{dx^{j_s}}, \quad 1 \le i, j \le n$$

συγκροτούν τοπικό πλαίσιο της δέσμης $\mathcal{T}_s^r(M)$ στο U. Επομένως ο περιορισμός κάθε (r, s)-τανυστικό πεδίου T στο U γράφεται

$$T\big|_U = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

για κάποιες βαθμωτές συναρτήσεις $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} : U \to \mathbb{R}$. Από III.§3.4, το πεδίο T είναι λείο ακριβώς όταν οι βαθμωτές ποσότητες $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ που το προσδιορίζουν σε κάθε τοπικό χάρτη είναι λείες.

Εάν $(U_p, \varphi_p), (U_q, \varphi_q)$ τοπικοί χάρτες, $U_p \cap U_q \neq \emptyset$, ώστε

$$\varphi_p \circ \varphi_q^{-1}(x_q^1, \dots, x_q^n) = (x_p^1(x_q^1, \dots, x_q^n), \dots, x_p^n(x_q^1, \dots, x_q^n))$$

και ${}^{(p)}T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$, ${}^{(q)}T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ οι βαθμωτές ποσότητες που χαρακτηρίζουν το πεδίο T σε αυτούς αντιστοίχως, τότε από τον μετασχηματισμό τανυστικών ποσοτήτων κάτω από αλλαγή βάσης, έπεται ότι

$${}^{(p)}T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \underbrace{\frac{\partial x_p^{i_1}}{\partial x_q^{k_1}} \dots \frac{\partial x_p^{i_1}}{\partial x_q^{k_r}}}_{\partial x_p^{(i)} / \partial x_q^{(k)}} \underbrace{{}^{(p)}T^{k_1 \dots k_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_s}}_{{}^{(p)}T^{(i)}_{(j)}} \underbrace{\frac{\partial x_q^{\lambda_1}}{\partial x_p^{j_1}} \dots \frac{\partial x_q^{\lambda_1}}{\partial x_p^{j_s}}}_{\partial x_p^{(\lambda)} / \partial x_q^{(j)}} \qquad (1)$$

που δείχνει το αναμενόμενο, ότι η λειότητα –εννούμενη ως τοπική λειότητα σε κάθε χάρτη της M– είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων.

Συμβολίζεται $\mathcal{T}_s^r(M)$ ο χώρος των λείων (r, s)-τανυστικών πεδίων επί τις πολλαπλότητας M. Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, το $\mathcal{T}_s^r(U)$, όπου U τοπικός χάρτης με σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$, είναι ελεύθερο πρότυπο πάνω στον δακτύλιο $C^\infty(M)$, με πεπερασμένη βάση

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_1}, \quad 1 \le i, j \le n$$

Η κατάσταση δεν είναι τόσο σαφής για τον χώρο $\mathcal{T}_s^r(M)$: αν και τα λεία (r, s)-τανυστικά πεδία επί της M είναι ακριβώς οι συγκολλήσεις τοπικών λείων (r, s)-τανυστικών πεδίων, ωστόσο το $C^\infty(M)$-πρότυπο $\mathcal{T}_s^r(M)$ είναι εν γένει αδύνατο να παραχθεί πάνω σε πεπερασμένη βάση.

IV.§3.0. Εάν T είναι λείο $(0, n)$-αντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο, που επομένως προσδιορίζεται σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων από μια βαθμωτή συνάρτηση $T_{1 \dots n}$, τότε

$$^{(q)}T_{1\dots n} = {}^{(q)}T_{1\dots n}\, det\left(\frac{\partial x_q^i}{\partial x_p^j}\right)_{i,j}$$

Αποδ. Εφαρμόζοντας τον τύπο (1),

$$^{(p)}T_{1\dots n} = {}^{(q)}T_{\lambda_1\dots\lambda_n}\frac{\partial x_q^{\lambda_1}}{\partial x_p^1}\cdots\frac{\partial x_q^{\lambda_n}}{\partial x_p^n} = \sum_{\sigma\in s_n} {}^{(q)}T_{1\sigma\dots n\sigma}\frac{\partial x_q^{1\sigma}}{\partial x_p^1}\cdots\frac{\partial x_q^{n\sigma}}{\partial x_p^n} = {}^{(p)}T_{1\dots n}\sum_{\sigma\in s_n} sgn(\sigma)\frac{\partial x_q^{1\sigma}}{\partial x_p^1}\cdots\frac{\partial x_q^{n\sigma}}{\partial x_p^n} \qquad \blacksquare$$

Ονομάζονται **συναλλοίωτα** και **ανταλλοίωτα** τα $(0,r)$ και $(r,0)$-τανυστικά πεδία (λεία) αντιστοίχως, με την μελέτη των δεύτερων να ανάγεται σε εκείνη των πρώτων κατά προφανή τρόπο. Συμβολίζουμε $\mathcal{T}_r(M) \equiv \mathcal{T}_r^0(M)$, $\mathcal{T}^r(M) \equiv \mathcal{T}_0^r(M)$ τους χώρους των συναλλοίωτων και ανταλλοίωτων τανυστικών πεδίων τάξεως r επί της M αντιστοίχως. Για κάθε $T \in \mathcal{T}_r(M)$ γράφουμε $T(x;\, \xi_1, \dots, \xi_r) \equiv T(x)(\xi_1, \dots, \xi_r)$.

Εάν $f : M \to N$ αμφιδιαφόριση, ορίζονται καλά οι απεικονίσεις **ώθηση** και **εφελκυσμός** κάτω από την f ως

$$f_* : \mathcal{T}_r(M) \to \mathcal{T}_r(N), \qquad (f_*T)(y;\, \xi_1, \dots, \xi_r) = T(f^{-1}(y);\, df_x^{-1}\xi_1, \dots, df_x^{-1}\xi_r)$$

$$f_* : \mathcal{T}_r(N) \to \mathcal{T}_r(M), \qquad (f^*T)(x;\, \xi_1, \dots, \xi_r) = T(f(yx);\, df_x\xi_1, \dots, df_x\xi_r)$$

αντιστοίχως, που είναι αμφιμονοσήμαντες αντιστοιχίες μεταξύ των τανυστικών χώρων $\mathcal{T}_r(M)$, $\mathcal{T}_r(N)$ και για τις οποίες ισχύει

$$f^* = (f_*)^{-1}, \quad (f_*)^{-1} = f^*$$

Ελέγχεται επίσης ότι οι f_*, f^* σέβονται την πρόσθεση και ότι για κάθε $\varphi \in C^\infty(M)$ ισχύει

$$f_*(\varphi\, S) = (\varphi \circ f)\, f_*S$$

απ' όπου συνάγεται ότι οι απεικονίσεις f_*, f^* είναι ισομορφισμοί προτύπων. Επιπλέον,

$$f_*(S \otimes T) = (f_*S) \otimes (f_*T), \qquad f^*(S \otimes T) = (f^*S) \otimes (f^*T)$$

δηλαδή σέβονται το τανυστικό γινόμενο. Τέλος, εάν $f : M \to N$, $g : N \to P$ αμφιδιαφορίσεις, ελέγχεται ότι

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \text{ και } (g \circ f)^* = g^* \circ f^*$$

Διανυσματικό πεδίο επί της πολλαπλότητας M ονομάζεται κάθε $(1,0)$-τανυστικό πεδίο, δηλαδή μια τμήση της εφαπτόμενης δέσμης TM. Εάν U τοπικός χάρτης της M με σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ οπότε $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$ είναι τοπικό πλαίσιο για την δέσμη TM, κάθε διανυσματικό πεδίο ξ γράφεται τοπικά

$$\xi\big|_U = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \xi^i : U \to \mathbb{R}$$

Το ξ είναι λείο ακριβώς όταν οι βαθμωτές συναρτήσεις ξ^i, $i = 1, \dots, n$ είναι λείες για κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Συμβολίζεται $\mathfrak{X}(M) \equiv \mathcal{T}_0^1(M)$ ο χώρος των λείων διανυσματικών πεδίων επί της M.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την αφηρημένη κατασκευή των εφαπτόμενων διανυσμάτων ως κατευθυνόμενων παραγώγων, ένα διανυσματικό πεδίο ξ μπορεί να νοείται ως τελεστής πάνω στον χώρο $D(M)$ των διαφορίσιμων πραγματικών συναρτήσεων επί της M,

$$\partial_\xi = \xi : D(M) \to F(M;\, \mathbb{R}), \qquad f \longmapsto \xi f = \partial_\xi f = \xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

δηλαδή $(\xi f)(P) = \partial_{\xi(p)} f$. Ενδιαφερει κυρίως η δράση του $\mathfrak{X}(M)$ στον δακτύλιο $C^\infty(M)$,

$$\mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M), \qquad (\xi, f) \longmapsto \xi f$$

διότι αυτή διατηρεί την τάξη διαφορισιμότητας.

IV.§3.1. Έστω $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$. Εάν $\partial_\xi f = \partial_\eta f$ για κάθε $f \in C^\infty(M)$, τότε $\xi = \eta$.

Αποδ. Αρκεί να δειχθεί ότι $\xi\big|_u = \xi^i\, \partial/\partial x^i = \eta^i\, \partial/\partial x^i$ για τον τυχαίο τοπικό χάρτη U με σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$. Θεωρούμε τις βαθμωτές συναρτήσεις $x^i(x^1, \dots, x^n) = x^i$ πάνω στο U. Τότε $\partial_\xi x^i = \xi^i\, \partial x^i/\partial x^j = \xi^j \delta_{ij} = \xi^i$, και ομοίως $\partial_\eta x^i = \eta^i$, οπότε $\eta^i = \xi^i$ εξ υποθέσεως. ■

IV.§3.2. Για κάθε $\xi_P \in T_P M$, $P \in M$, υπάρχει $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ τέτοιο ώστε $\xi(P) = \xi_P$.

Αποδ. Επιλέγουμε U περιοχή του P με σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ και $\psi \in C^\infty(M)$ με $supp\, \psi \subset U$. Ορίζουμε

$$\xi(x) = \begin{cases} \psi(x)\, \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}(x), & x \in U \\ 0 & , x \in M \setminus U \end{cases}$$

όπου $\xi_P = \xi^i\, \partial/\partial x^i\,\big|_P$. ■

IV.§3.3. Ένα διανυσματικό πεδίο ξ στην M είναι λείο εάν και μόνον εάν για κάθε ανοικτή περιοχή U και κάθε $f \in C^\infty(U)$, $\partial_\xi f \in C^\infty(U)$ επίσης.

Αποδ. "$\Longrightarrow$,, Θα δειχθεί ότι το ξ είναι λείο στην τυχαία ανοικτή περιοχή U. Επιλέγοντας σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ σ' αυτήν, οι συναρτήσεις $x^i : U \to \mathbb{R}$, $x^i(x^1, \dots, x^n) = x^i$, είναι λείες. Τότε εξ υποθέσεως, εάν $\xi = \xi^i\, \partial/\partial x^i$ στο U, η $\partial_\xi x^i = \xi^i\, \partial x^i/\partial x^j = \xi^i$ είναι λεία απεικόνιση, για κάθε $i = 1, \dots, n$.
,,$\Longleftarrow$" Έστω $W \subset U$ τοπικός χάρτης με σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$. Αρκεί να δειχθεί ότι η $\partial_\xi f$ είναι C^∞ πάνω στο W, οπότε η $\partial_\xi f$ θα είναι επίσης λεία στο U, επειδή αυτό καλύπτεται από τέτοια W. Στο W ισχύει $\partial_\xi f = \xi^i\, \partial f/\partial x^i$, που είναι λεία απεικόνιση εξ υποθέσεως. ■

Η παραπάνω πρόταση είναι τυπική διαπίστωση του αναμενόμενου, ότι για κάθε $\xi \in M$, η απεικόνιση

$$C^\infty(M) \ni f \longmapsto \partial_\xi f$$

διατηρεί το $C^\infty(M)$, δηλαδή $\partial_\xi[C^\infty(M)] \subset C^\infty(M)$.

IV.§3.4. Οι παραγωγίσεις[2] στο $C^\infty(M)$ συμπίπτουν με το $\mathfrak{X}(M)$.

Αποδ. Έστω $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ παραγώγιση. Ζητείται $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ τέτοιο ώστε $Df = \partial_\xi f$. Από τις ιδιότητες της παραγώγισης, για κάθε σημείο $P \in M$ η απεικόνιση $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, $f \longmapsto Df(P)$ είναι μια κατευθυνόμενη παραγώγιση, δηλαδή ένα στοιχείο του $T_P M$. Θα δειχθεί με χρήση της IV.§3.3 ότι το πεδίο $\xi(P) = D(\cdot)(P)$ είναι λείο. Έστω $U \subset M$ ανοικτό και $f \in C^\infty(U)$. Για κάποιο $P \in U$ επιλέγουμε $\psi \in C^\infty(M)$ με $P \in supp\psi \subset U$. Τότε η $\partial_\xi(\psi f)$ ισούται με Df σε μια περιοχή γύρω από το P εντός του U, και είναι λεία (εφ' όσον ισούται με $D(\psi f)$). ■

Έστω $\gamma : I \to M$ καμπύλη, $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Εάν το I περιέχει κάποιο από τα άκρα του, η γ ονομάζεται **λεία** όταν επεκτείνεται σε λεία καμπύλη με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το I[3]. Μπορεί να δειχθεί ότι εάν το πεδίο ορισμού της γ είναι κλειστό και φραγμένο (περιλαμβάνει τα άκρα του), η γ επεκτείνεται σε λεία καμπύλη ορισμένη επί ανοικτού διαστήματος που περιέχει το I και τέτοια ώστε οι συνεχείς εξαρτήσεις των παραγώγων αυτής περιορισμένες στο I να είναι ανεξάρτητες της επέκτασης.

Διανυσματικό (λείο) πεδίο κατά μήκος της καμπύλης $\gamma : I \to M$ καλείται μια λεία συνάρτηση $\xi : I \to TM$ τέτοια ώστε $\xi(t) \in T_{\gamma(t)} M$ για κάθε $t \in I$. Συμβολίζεται $\mathfrak{X}(\gamma)$ το σύνολο των λείων πεδίων κατά μήκος της γ. **Περιορισμός κατά μήκος** της γ ενός $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ καλείται το πεδίο

$$\xi\big|_\gamma : I \to TM, \qquad \xi\big|_\gamma(t) = \xi(\gamma(t))$$

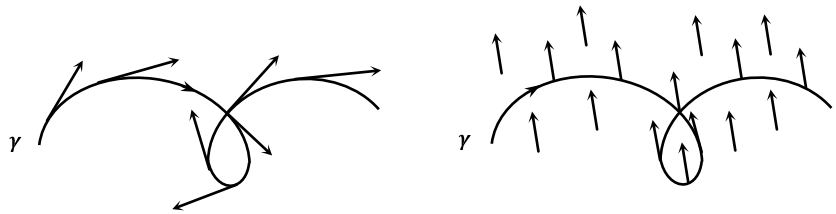
κατά μήκος της γ.

---

2. Μια απεικόνιση $D : R \to R$, όπου R δακτύλιος, καλείται **παραγώγιση** όταν $D(x + y) = Dx + Dy$ και $D(xy) = x\, D(y) + D(x)\, y$.

3. Η λειότητα ορίζεται αρχικά καλά για καμπύλες των οποίων το πεδίο ορισμού είναι ανοικτό διάστημα.

Ένα πεδίο κατά μήκος της γ ονομάζεται **επεκτάσιμο** όταν είναι περιορισμός κάποιου λείου πεδίου οριζόμενου σε ανοικτή περιοχή της M που περιέχει την γ. Δεν είναι κάθε πεδίο κατά μήκος μιας γ επεκτάσιμο· π.χ. το πεδίο ταχυτήτων $\dot{\gamma} : I \to TM$ δεν είναι επεκτάσιμο εάν υπάρχουν $t_0, t_1 \in I$ τέτοια ώστε $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ και $\dot{\gamma}(t_1) \neq \dot{\gamma}(t_2)$.



μή επεκτάσιμο πεδίο επεκτάσιμο πεδίο

Ισχύει το ακόλουθο από την θεωρία αυτόνομων συστημάτων στον $\mathbb{R}^n$.

IV.§3.5. Έστω ξ λείο διανυσματικό πεδίο επί του $\mathbb{R}^n$ και $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Υπάρχει περιοχή $W \in \mathbb{R}^n$ του x_0 και μοναδική λεία (C^∞) απεικόνιση $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \to \mathbb{R}^n$ ώστε η καμπύλη

$$\varphi(\cdot, y) = \big(\varphi^1(\cdot, y), \dots, \varphi^n(\cdot, y)\big), \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

να είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$x^i(t) = \xi^i\big(x(t)\big), \qquad i = 1, \dots, n, \qquad x(0) = y$$

για οποιαδήποτε επιλογή $y \in W$. Εάν $\xi(x_0) \neq 0$, το W μπορεί να ληφθεί τέτοιο ώστε οι απεικονίσεις

$$\varphi_t \equiv \varphi(t, \cdot) : W \to \varphi_t[W], \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

να είναι αμφιδιαφορίσεις μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την τοπική ισχύ του παραπάνω θεωρήματος στις πολλαπλότητες (αφού κάθε τοπικός χάρτης μπορεί να ληφθεί διφφεομορφικός του $\mathbb{R}^n$), από τον τοπικό χαρακτήρα της λειότητας διανυσματικών πεδίων συνάγεται άμεσα το ακόλουθο ολικό θεώρημα.

IV.§3.6. Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ και $x_0 \in M$ με $\xi(x_0) \neq 0$. Υπάρχει ανοικτή περιοχή W του x_0 με τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ και μοναδική C^∞-απεικόνιση $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \to M$ (**ροή** του πεδίου ξ στην περιοχή W) ώστε η καμπύλη

$$\varphi(\cdot, y), \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

να είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

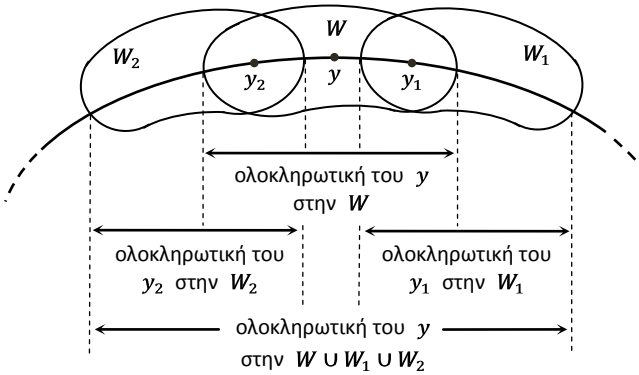
$$x^i(t) = \xi^i\big(x(t)\big), \qquad i = 1, \dots, n, \qquad x(0) = y$$

για κάθε επιλογή $y \in W$. Το W μπορεί να ληφθεί τέτοιο ώστε οι απεικονίσεις

$$\varphi_t \equiv \varphi(t, \cdot) : W \to \varphi_t[W], \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

να είναι αμφιδιαφορίσεις μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων της M.

Οι καμπύλες $\varphi(\cdot, y)$, $y \in W$ στο παραπάνω θεώρημα είναι προφανώς οι ολοκληρωτικές καμπύλες του πεδίου ξ στην περιοχή W, καλύπτουν το W χωρίς να τέμνονται και ερμηνεύονται ως η τροχιά του υποκείμενου στο πεδίο ξ σωματιδίου με αρχική θέση y $(t = 0)$. Η διερχόμενη από το y ολοκληρωτική καμπύλη στην περιοχή W επεκτείνεται μεγιστικά συγκολλώντας την διαδοχικά με την συνέχειά της σε κάθε γειτονική περιοχή σύμφωνα με το σχήμα



Λαμβάνουμε έτσι τις **ολικές ολοκληρωτικές καμπύλες** του πεδίου ξ στην πολλαπλότητα M.

Εφ' όσον ο περιορισμός του πεδίου ξ σε μια ολοκληρωτική καμπύλη αυτού είναι ακριβώς ένας προσδιορισμός του μέτρου και της φοράς της ταχύτητας με την οποία διαγράφεται, οι αναπαραμετρήσεις που προκύπτουν ξεκινώντας από διαφορετικά σημεία δεν διαφέρουν πάνω από μεταφορά της παραμέτρου: εάν γ_P, γ_Q, αναπαραμετρήσεις της ίδιας ολοκληρωτικής καμπύλης ώστε $\gamma_P(0) = P$, $\gamma_Q(0) = Q$, τότε $\gamma_Q(t) = \gamma_P(t + \delta)$ για κάποιο $\delta \in \mathbb{R}$.

Τοπική ημιομάδα στην περιοχή W της πολλαπλότητας M καλείται μια συλλογή αμφιδιαφορίσεων $\varphi_t : W \to \varphi_t[W]$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ τέτοια ώστε η απεικόνιση

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \to M, \qquad \varphi(t, y) = \varphi_t(y)$$

να είναι λεία (δηλαδή η συλλογή των καμπυλών $\varphi(\cdot, y)$, $y \in W$ να είναι λεία εξάρτηση του αρχικού σημείου y) και $\varphi_0 = id$, $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$ και $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s} = \varphi_{s-t} = \varphi_s \circ \varphi_t$. Σε αυτήν την ορολογία, η IV.§3.2 δηλώνει ότι κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ επάγει τοπική ημιομάδα γύρω από κάθε σημείο της M στο οποίο δεν μηδενίζεται. Αντιστρόφως, δεδομένης τοπικής ημιομάδας $\varphi_t : W \to \varphi_t[W]$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, υπάρχει μοναδικό (πάνω από συγγραμικότητα) $\xi \in \mathfrak{X}(W)$ το οποίο εφάπτεται των γραμμών ροής $\varphi(\cdot, y)$, $y \in W$, συγκεκριμένα το $\xi(x) = d\varphi_t(x)/dt\,\big|_{t=0}$.

Δεδομένου $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, το χρονικό διάστημα κίνησης ενός σωματιδίου που βρίσκεται αρχικά στο σημείο P κάτω από την τοπική ημιομάδα $(\varphi_t)_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ γύρω από το P, ενδεχομένως είναι πολύ μεγάλο για το σωματίδιο που βρίσκεται αρχικά στο σημείο Q και κινείται κάτω από την δράση της τοπικής ημιομάδας $(\psi_t)_{t\in(-\delta,\delta)}$: δεν είναι βέβαιο ότι για κάθε $t \in (\eta, \eta)$, $\eta = min\,\{\varepsilon, \delta\}$, υπάρχει $\chi_t \in diff\,(M)$ ώστε $\chi_t\big|_U = \varphi_t$ και $\chi_t\big|_V = \psi_t$. Προς υπερπήδηση αυτού του εμποδίου, θα εντοπίσουμε για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ εκείνες τις τοπικές ημιομάδες αυτού που είναι με κάποιον τρόπο μεγιστικές, ώστε να παίρνουμε από τις αντίστοιχες γραμμές ροής την καλύτερη πληροφορία για το ξ. Συμβολίζεται με $\gamma_P(t)$ την παραμετροποίηση της ξ-ολοκληρωτικής καμπύλης του P για την οποία $\gamma_P(0) = P$ και με a_P, b_P, $-\infty < a_P < b_P \leq +\infty$ τα άκρα του πεδίου ορισμού της γ_P. Επιλέγουμε

$$W = \{(t, P) \in \mathbb{R} \times M \,\big|\, a_P < t < b_P\} = \bigcup_{p\in M} (a_P, b_P) \times \{P\}$$

πάνω στο οποίο ορίζεται καλά η συνάρτηση $\varphi : W \to M$, $\varphi(t, P) = \gamma_P(t)$, που είναι λείτα εφ' όσον το ξ είναι λείο. Επιπλέον $\{0\} \times M \subset W$ και ελέγχεται άμεσα ότι $W \subset \mathbb{R} \times M$ ανοικτό υποσύνολο. Γύρω από κάθε $P \in M$, και για επαρκώς μικρά t, η φ είναι εξ ορισμού της η λεία απεικόνιση που δίνεται από πρόταση IV.§3.2, που είναι η τυπική διαπίστωση του αναμενόμενου, ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες ενός λείου πεδίου ξ, εκτός από το να είναι λείες, εξαρτώνται επίσης λεία από το αρχικό τους σημείο.

Ορίζοντας

$$M_t = \{\, P \in M \,\big|\, a_P \leq t \leq b_P \,\}$$

(τα σημεία για τα οποία έχει νόημα η κίνηση κατά μήκος του πεδίου ξ σε χρονικό διάστημα t) και

$$\varphi_t : M_t \to M, \qquad \varphi_t(P) = \varphi(t, P)$$

τα προηγούμενα σημαίνουν ότι η συλλογή $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ είναι οικογένεια αμφιδιαφορίσεων ανάμεσα σε ανοικτά σύνολα της M, που επιπλέον εξαρτάται λεία από την παράμετρο t. Ισχύουν προφανώς

$$\varphi_0 = id_M,\ \ (\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t},\ \ \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s} = \varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t,\ \ (\varphi_t \circ \varphi_s) \circ \varphi_r = \varphi_t \circ (\varphi_s \circ \varphi_r)$$

επομένως αναζητούνται συνθήκες ώστε η $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ να είναι ομάδα αμφιδιαφορίσεων της M, ισομορφική με την $\mathbb{R}$ και λεία εξαρτώμενη από την παράμετρο t. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει $M_t = M$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$· ισοδύναμα, το πεδίο ορισμού των ολικών ολοκληρωτικών καμπυλών του ξ να είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Ένα $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ καλείται **πλήρες** όταν οι ολικές ολοκληρωτικές καμπύλες του παραμετροποιούνται από ολόκληρη την πραγματική ευθεία. **Μονοπαραμετρική ομάδα** επί της M καλείται μια ομάδα αμφιδιαφορίσεων $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}} \subset diff(M)$ τέτοια ώστε η απεικόνιση

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \to M, \qquad \varphi(t, P) = \varphi_t(P)$$

να είναι λεία (C^∞). Ένα $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ επάγει την μονοπαραμετρική ομάδα $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ όταν οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ συμπίπτουν με τις γραμμές ροής αυτής, δηλαδή $\xi(x) = d\varphi_t(x)/dt\,\big|_{t=0}$ για κάθε $x \in M$.

IV.§3.7. Κάθε πλήρες $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ επάγει μοναδική μονοπαραμετρική ομάδα και αντιστρόφως, κάθε μονοπαραμετρική ομάδα επάγεται από μοναδικό (πάνω από συγγραμμικότητα) $\xi \in \mathfrak{X}(M)$.

Αποδ. "$\Longrightarrow$,, Από ό,τι έχει προηγηθεί.

,,$\Longleftarrow$" Έστω $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ μονοπαραμετρική ομάδα. Εάν κάθε $P \in M$ βρισκόταν πάνω σε μια μοναδική γραμμή ροής $\varphi_t(P)$, $t \in \mathbb{R}$, τότε το ζητούμενο πεδίο θα οριζόταν καλά ως $\xi(P) = d\varphi_t(x)/dt\,\big|_{t=0}$. Επομένως αρκεί να δειχθεί ότι εάν ότι εάν δύο γραμμές ροής τέμνονται, τότε ταυτίζονται.

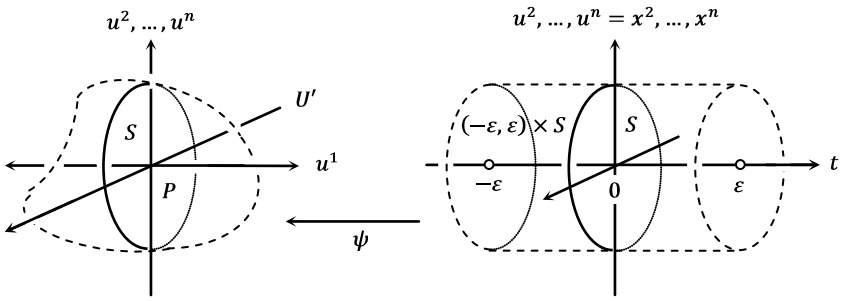
Εάν P το σημείο τομής των γραμμών ροής που διέρχονται από τα σημεία Q, R, τότε $P = \varphi_t(Q) = \varphi_s(R)$ για κάποια $t, s \in \mathbb{R}$. Άρα $R = \varphi_s^{-1} \circ \varphi_t(Q) = \varphi_{t-s}(Q)$ και το Q βρίσκεται στην γραμμή ροής του R. ■

IV.§3.8. Λείο διανυσματικό πεδίο πάνω σε συμπαγή πολλαπλότητα είναι πλήρες.

Αποδ. Επειδή $\{0\} \times M \subset W$ και λόγω συμπάγειας της M, $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M \subset W$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Επομένως κάθε $P \in M$ έχει νόημα να κινηθεί κατά μήκος του ξ για χρόνο $-\varepsilon/2 \le t \le \varepsilon/2$. Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα διαδοχικά για τα εκάστοτε ακραία σημεία του πεδίου ορισμού σε κάθε βήμα, το πεδίο ορισμού της καμπύλης γίνεται αυθαίρετα μεγάλο. ■

IV.§3.9. Εάν $P \in M$ μη ιδιάζον σημείο λείου διανυσματικού πεδίου ξ (δηλ. $\xi(P) \neq 0$), υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ γύρω από το P ώστε $\xi = \partial/\partial x^1$.

Αποδ. Ζητείται χάρτης (W, φ) γύρω από το P ώστε $\xi = (\varphi^{-1})_* \partial/\partial x^1$, όπου $x^1, \dots, x^n$ καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το $\varphi[W]$. Θα κατασκευαστεί η φ^{-1} κατά τρόπον ώστε να απεικονίζει τις ευθείες του $\mathbb{R}^n$ που είναι παράλληλες στον x^1-άξονα σε ολοκληρωτικές καμπύλες του πεδίου ξ. Θεωρούμε χάρτη U γύρω από το P με σύστημα συντεταγμένων $u^1, \dots, u^n$ και βλέπουμε το ξ εντός του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το U. Εφ' όσον P μη ιδιάζον, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\xi^1(P) \neq 0$, όπου $\xi = \xi^i\, \partial/\partial u^i$ η έκφραση του ξ στο συγκεκριμένο σύστημα. Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ και $U' \in U$ ανοικτό ώστε να ορίζεται το $\varphi(t, q)$ για κάθε $(t, q) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times U'$, όπου φ η ροή του ξ γύρω από το P. Έστω S η τομή του U' με τον $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο $u^1 = 0$, οπότε αγνοούμε την u^1-συντεταγμένη και θεωρούμε το S εμφυτευμένο σε έναν $\mathbb{R}^n$ με σύστημα συντεταγμένων $t, u^2, \dots, u^n$:



Ορίζεται λεία συνάρτηση $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times S \to U$, $(t, x^2, \dots x^n) \longmapsto \varphi_t(0, x^2, \dots, x^n)$. Για το τυχαίο $(t_0, x_0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times S$, την τυχαία $f \in C^\infty(M)$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι καμπύλες $t \longmapsto \varphi_t(0, x_0)$ ολοκληρωτικές καμπύλες του πεδίου ξ,

$$\left(\psi_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t_0,x_0)}\right) f = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t_0,x_0)} (f \circ \psi) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} f\big(\varphi_t(0, x^2, \dots, x^n)\big) = \partial_\xi\Big|_{\psi(t_0,x_0)} f$$

Επομένως $\xi = \psi_* \partial/\partial t$, οπότε θα μπορούσαμε να διαλέξουμε $\psi = \varphi^{-1}$ την ζητούμενη. Μένει να δειχθεί ότι η ψ είναι τοπική αμφιδιαφόριση γύρω από το $0 = (0,0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times S$. Στο σημείο αυτό, $\psi(0, x^2, \dots, x^n) = (0, x^2, \dots, x^n)$, οπότε

$$\psi_* \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P$$

Άρα η ψ_* απεικονίζει την βάση $\partial/\partial t\,\big|_{(0,0)}$, $\partial/\partial u^2\,\big|_{(0,0)}, \dots, \partial/\partial u^n\,\big|_{(0,0)}$ στην βάση $\xi(P)$, $\partial/\partial x^2\,\big|_P$, $\dots, \partial/\partial x^n\,\big|_P$ (το $\xi(\varphi)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα επειδή έχει μη μηδενική u^1-συνιστώσα). Από Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης έπεται το ζητούμενο. ■

§4. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ LIE

Ο ρυθμός μεταβολής ενός διαφορίσιμου διανυσματικού πεδίου ξ στον $\mathbb{R}^n$ μετράται ως προς ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων που τον διατρέχει διατρέχει ολικά, ένεκα της δομής διανυσματικού χώρου με την οποία ο $\mathbb{R}^n$ είναι εγγενώς εφοδιασμένος. Συγκεκριμένα, ως ρυθμός μεταβολής του πεδίου ξ ως προς την διεύθυνση η στο σημείο P εννοείται το διάνυσμα

$$\nabla_\eta \xi^1(P) e_1 + \cdots + \nabla_\eta \xi^n(P) e_n$$

όπου $\xi = \xi^i e_i$ και $e_1, \dots, e_n$ καρτεσιανή βάση του $\mathbb{R}^n$· επομένως ο ρυθμός μεταβολής του ξ είναι η διανυσματική κωδικοποίηση του ρυθμού μεταβολής των βαθμωτών συναρτήσεων (συντεταγμένες) που προσδιορίζουν το ξ στην βάση $e_1, \dots, e_n$. Το διάνυσμα αυτό είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο αναλλοίωτο από αλλαγή βάσης, δηλαδή αυτός ο ορισμός ρυθμού μεταβολής διανυσματικών πεδίων σε διανυσματικούς χώρους είναι ανεξάρτητος του συστήματος συντεταγμένων. Ωστόσο είναι ένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων που καθιστά εφικτό αυτόν τον ορισμό, ένα απόλυτο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο μετρώνται οι μεταβολές, χάρις το οποίο γίνεται η αναγκαία κατ' αρχάς σύγκριση διανυσμάτων εφαπτόμενων σε διακεκριμένα σημεία του χώρου: η σύγκριση επιτυγχάνεται με την στερεά μεταφορά του συστήματος των αξόνων από το ένα σημείο στο άλλο (δηλαδή θεωρώντας ότι $e_i(P) = e_i$ για όλα τα $P \in \mathbb{R}^n$).

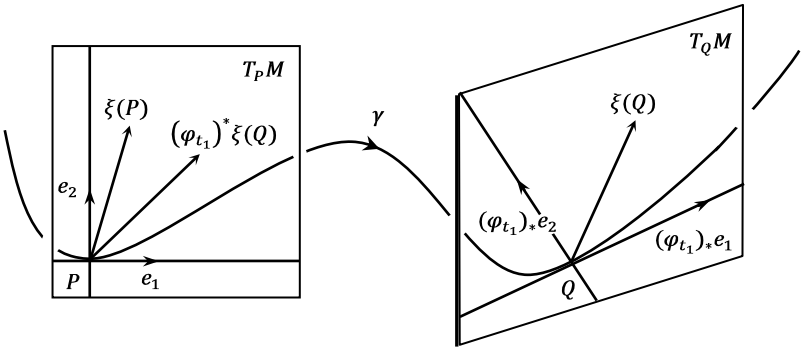
Στην γενική διαφορική πολλαπλότητα, όπου λείπει η δομή διανυσματικού χώρου και επομένως η έννοια της στερεάς μεταφοράς ενός απόλυτου συστήματος μέτρησης, δεν υπάρχει εγγενής τρόπος σύγκρισης διανυσμάτων που εφάπτονται σε διαφορετικά σημεία του χώρου. Κατ' επέκταση δεν υφίσταται εξ αρχής κάποια έννοια παραγώγισης διανυσματικών πεδίων ως προς κάποια κατεύθυνση, αφού αυτή προϋποθέτει μια διαδικασία σύγκρισης όπως η παραπάνω. Εάν για τους διανυσματικούς χώρους η στερεά μεταφορά είναι απλώς ένα σχήμα λόγου για να δηλώσουμε ότι ο χώρος διατρέχεται ολόκληρος από το ίδιο σύστημα συντεταγμένων, στην γενική πολλαπλότητα η ζητούμενη έννοια ρυθμού μεταβολής θα πρέπει να εξαρτάται ουσιωδώς από την αμφιδιαφόριση που θα συσχετίσει τους εφαπτόμενους χώρους διακεκριμένων σημείων.

Θεωρούμε $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ και αμφιδιαφόριση $\varphi \in diff(M)$ με $\varphi(P) = Q$, οπότε υφίσταται γραμμικός ισομορφισμός $\varphi_* : T_P M \to T_Q M$. Βλέποντας το $\xi(Q) \in T_P M$ ως $\varphi^* \xi(Q)$ εντός του $T_P M$, ως μέτρο σύγκρισης των $\xi(P)$, $\xi(Q)$ (που βρίσκονται σε διαφορετικούς χώρους) μπορεί να ληφθεί η καλώς ορισμένη διαφορά $\varphi_* \xi(Q) - \xi(Q)$. Προκειμένου να γίνει λόγος για ρυθμό μεταβολής, χρειαζόμαστε μια χρονική παράμετρο που να διατάσσει τα σημεία πάνω στα οποία αυτή λαμβάνει χώρα. Θεωρούμε ότι οι μεταβολές γίνονται πάνω σε μια λεία καμπύλη γ που συνδέει τα $P = \gamma(t_0)$, $Q = \gamma(t_1)$, ότι κάθε σημείο $\gamma(t)$ είναι εικόνα του P μέσω μιας αμφιδιαφόρισης $\varphi_t \in diff(M)$ (άρα $\varphi_{t_1} = \varphi$) και ότι τα φ_t εξαρτώνται λεία από το t. Τότε ο μέσος ρυθμός μεταβολής του πεδίου $\xi(\gamma(t))$ από το P στο Q μετράται ως

$$\frac{1}{t_1 - t_0}\Big(\big(\varphi_{t_1}\big)^*\xi(Q) - \xi(P)\Big)$$

οπότε ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του ξ ως προς την διεύθυνση $d\varphi_t(P)/dt\,\big|_{t=t_o}$ είναι

$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t - t_0}\Big((\varphi_t)^*\xi\big(\gamma(t)\big) - \xi(P)\Big) \qquad (1)$$



Το όριο αυτό, εάν υπάρχει, είναι ο ρυθμός με τον οποίον το πεδίο $\xi(\gamma(t))$ αποκλίνει από το να είναι η ώθηση του $\xi(\gamma(0))$ κάτω από την δράση της φ_t.

Το (1) είναι στοιχείο του T_PM, επομένως η ανωτέρω παραγώγιση διανυσματικών πεδίων επιστρέφει διανυσματικά πεδία. Για την κατασκευή της παραγώγου του ξ ως προς την κατεύθυνση $d\varphi_t(P)/dt\,\big|_{t=t_o}$ χρησιμοποιήθηκε η γραμμή ροής γ μίας ημιομάδας αμφιδιαφορίσεων. Αυτό υποδεικνύει ότι η παράγωγος του ξ μπορεί να κατασκευαστεί με χρήση ενός ολικού αντικειμένου το οποίο επάγει τοπικές ημιομάδες, συγκεκριμένα με χρήση ενός λείου διανυσματικού πεδίου. Επομένως η παράγωγος του ξ θα εξαρτάται ουσιωδώς από ένα διανυσματικό πεδίο η, θα είναι η παράγωγος του ξ ως προς το πεδίο η και θα μετρά τον ρυθμό με τον οποίο το ξ αποτυγχάνει να μένει αναλλοίωτο κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών αυτού (εννοώντας την αποτυχία του να μεταφέρεται κατά μήκος αυτών ως ώθηση κάτω από τις επαγόμενες από το η τοπικές αμφιδιαφορίσεις). Αυτό δεν εκπληρώνει την αρχική προσδοκία για μια έννοια παραγώγου που θα επέτρεπε μέτρηση του ρυθμού μεταβολής ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, ωστόσο μια τοπική μελέτη υποδεικνύει την χρησιμότητα του ορίου (1) όταν οι ολοκληρωτικές καμπύλες γ του η έχουν κάποια ιδιάζουσα σημασία για την γεωμετρία της πολλαπλότητας:

Έστω τοπικός χάρτης U με σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ γύρω από το $P \in M$ και $\varphi_t,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ η επαγόμενη από το η τοπική ημιομάδα στο U. Επιλέγουμε βάση $e_1, \dots, e_n$ του T_PM και συμβολίζουμε $e_i(t) = (\varphi_t)_*e_i,\ \ i = 1, \dots, n$ την βάση του $T_{\varphi_t(P)}M$ που συγκροτείται από τις ωθήσεις των $e_1, \dots, e_n$ κάτω από την φ_t. Συμβολίζοντας $\xi^1(t), \dots, \xi^n(t)$ τις λείες βαθμωτές ποσότητες που περιγράφουν το πεδίο ξ στο σημείο $\varphi_t(P)$ ως προς την βάση $e^1(t), \dots, e^n(t)$, δηλ. $\xi(t) = \xi^i(t)e_i(t)$, παρατηρούμε επιπλέον ότι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $(\varphi_t)_* : T_PM \to T_{\varphi_t(P)}M$ ως προς τις βάσεις $e_1, \dots, e_n$ και $e^1(t), \dots, e^n(t)$ είναι ο ταυτοτικός. Επομένως τα διανύσματα $\xi(0) = \xi(P), \xi(t) = (\varphi_t)_*\xi(P)$ αναπαρίστανται στις βάσεις $e_1, \dots, e_n$; $e_1(t), \dots, e_n(t)$ αντιστοίχως από τις ίδιες βαθμωτές ποσότητες $\xi^1(0), \dots, \xi^n(0)$. Τότε το όριο (1) υπολογίζεται ως

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((\varphi_t)^*\xi(t) - \xi(0)\big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\xi^i(t)e_i(0) - \xi^i(0)e_i(0)\Big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\xi^i(0) - \xi^1(t)\Big)e_i(0) = \frac{d}{dt}\xi^i\,\big|_{t=0}\,e_i$$

Εφ' όσον τα $\xi^i(t)$ είναι λείες συναρτήσεις, το όριο υπάρχει και η φυσική σημασία του είναι ότι οργανώνει διανυσματικά τους ρυθμούς μεταβολής των συναρτήσεων συντεταγμένων του ξ κατά μήκος της η-ολοκληρωτικής καμπύλης γ, υπό την προϋπόθεση ότι η μέτρηση γίνεται ως προς το σύστημα αναφοράς που μεταφέρεται αναλλοίωτο κατά μήκος της γ κάτω από την δράση της επαγόμενης από το η τοπικής ημιομάδας. Η ιδέα γενικεύεται για τανυστικά πεδία οποιασδήποτε τάξεως:

Παράγωγος *Lie* του λείου (r, s)-τανυστικού πεδίου T επί της πολλαπλότητας M **ως προς το λείο δια-**

νυσματικό πεδίο η καλείται το λείο (r,s)-τανυστικό πεδίο L_η που ορίζεται τοπικά ως εξής: εάν U τοπικός χάρτης της M γύρω από το P με σύστημα συντεταγμένων $x^1,\dots,x^n$ όπου, τότε

$$T = T^{(i)}_{(j)}\frac{\partial}{\partial x_{(i)}}\otimes dx^{(j)}, \qquad \text{τότε} \quad L_\eta T\big|_P = \frac{d}{dt}T^{(i)}_{(j)}(t,P)\big|_{t=0}\,\frac{\partial}{\partial x_{(i)}}\otimes dx^{(j)}$$

όπου $T^{(i)}_{(j)}(t,P) = \big(L_\eta T\big)^{(j)}_{(i)}(P) \equiv T^{(i)}_{(j)}(\varphi_t(P))$ και $(\varphi_t)_t$ η επαγόμενη από το η τοπική ημιομάδα γύρω από το P, δηλαδή

$$L_\eta T = \underbrace{\frac{d}{dt}T^{(i)}_{(j)}(\varphi_t(\cdot))\big|_{t=0}}_{\big(L_\eta T\big)^{(i)}_{(j)}}\,\frac{\partial}{\partial x_{(i)}}\otimes dx^{(j)}$$

IV.§4.0. $L_\eta T\big|_P = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((\varphi_t)^*T(P) - T(P)\big)$, δηλαδή $L_\eta T = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((\varphi_t)^*T - T\big) = \frac{d}{dt}\varphi_t^*T\,\big|_{t=0}$

Αποδ. $$\frac{d}{dt}T^{(i)}_{(j)}(t,P)\big|_{t=0}\,\frac{\partial}{\partial x_{(i)}}\otimes dx^{(j)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,\Big(\underbrace{T^{(i)}_{(j)}\big(\varphi_t(P)\big)\,\frac{\partial}{\partial x_{(i)}}\otimes dx^{(j)}}_{(\varphi_t)^*T(P)} - \underbrace{T^{(i)}_{(j)}(P)\,\frac{\partial}{\partial x_{(i)}}\otimes dx^{(j)}}_{(\varphi_t)^*T(P)}\Big)$$

όπου η πρώτη αγκύλη δικαιολογείται ως εξής: εφ' όσον ο πίνακας που αναπαριστά την γραμμική απεικόνιση $(\varphi_t)_* : T_PM \to T_{\varphi_t(P)}M$ είναι ο ταυτοτικός ως προς τις βάσεις $\partial/\partial x_1\,(P),\dots,\partial/\partial x_n\,(P)$ του T_PM και $(\varphi_t)_*\,\partial/\partial x_1\,(P),\dots,(\varphi_t)_*\,\partial/\partial x_n\,(P)$ του $T_{\varphi_t(P)}M$, οι τανυστές $(\varphi_t^*)T(P)$, $T(\varphi_t(P))$ προσδιορίζονται από τις ίδιες τανυστικές ποσότητες στις βάσεις αυτές αντιστοίχως. ■

Ο τύπος της IV.§4.0 γενικεύεται για οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης:

IV.§4.1. $\varphi_{t_0}^*L_\xi T = \frac{d}{dt}\big|_{t=t_0}\varphi_t^*T$

Αποδ. $\frac{d}{dt}\big|_{t=t_0}\varphi_t^*T = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\,\varphi_{t_0+s}^*T = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\,\varphi_{t_0}^*\varphi_s^*T = \varphi_{t_0}^*\,\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\,\varphi_s^*T = \varphi_{t_0}^*L_\xi T$ ■

Παράγωγος *Lie* επί της πολλαπλότητας M καλείται η απεικόνιση

$$L : \mathfrak{X}(M)\times\bigcup_{r,s\in\mathbb{N}}\mathcal{T}^r_s(M)\to\bigcup_{r,s\in\mathbb{N}}\mathcal{T}^r_s(M), \qquad \mathcal{T}^r_s(M)\ni(\eta,T)\longmapsto L(\eta,T) = L_\eta T\in\mathcal{T}^r_s(M)$$

Κάνοντας πράξεις με χρήση του τύπου της IV.§4.0, ελέγχονται οι ταυτότητες

$$L_\xi f = \partial_\xi f, \qquad L_\eta(\mu T+\lambda S) = \mu L_\eta T + \lambda L_\eta S, \qquad L_\eta(T\otimes S) = \big(L_\eta T\big)\otimes S + T\otimes L_\eta S$$

δηλαδή ο τελεστής $L_\eta : \mathcal{L}(M)\to\mathcal{L}(M)$ είναι γραμμικός και ακολουθεί κανόνα *Leibniz* ως προς το τανυστικό γινόμενο. Επίσης

$$L_\eta T(\xi_1,\dots,\xi_r) = \big(L_\eta T\big)(\xi_1,\dots,\xi_r) + T\big(L_\eta\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r\big) + \dots + T\big(\xi_1,\xi_2,\dots,L_\eta\xi_r\big)$$

για κάθε συναλλοίωτο πεδίο T (κανόνας της αλυσίδας). Από την παραπάνω συνάγεται η ταυτότητα

$$\big(L_\eta T\big)(\xi_1,\dots,\xi_r) = \partial_\eta\big(T(\xi_1,\dots,\xi_r)\big) - T(L_\eta\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r) - \dots - T\big(\xi_1,\xi_2,\dots,L_\eta\xi_r\big)$$

επομένως η δράση του πεδίου $L_\eta T$ σε συγκεκριμένα διανύσματα υπολογίζεται χωρίς προσφυγή στον υπολογισμό του ίδιου του $L_\eta T$.

Θα βρεθεί τύπος για την παράγωγο *Lie* ενός τανυστικού πεδίου T ως προς το διανυσματικό πεδίο η χω-

ρίς αναφορά στην χρονική παράμετρο t. Εάν οι επαγόμενες από το η αμφιδιαφορίσεις φ_t γύρω από το P εκφράζονται στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ ως

$$\varphi_t(x^1, \dots, x^n) = \left(x_t^1(x^1, \dots, x^n), \dots, x_t^n(x^1, \dots, x^n)\right) \qquad (2)$$

τότε

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}\left(\varphi_t(P)\right) = \frac{\partial x_t^{i_1}}{x^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x_t^{i_r}}{x^{\lambda_r}}\Big|_{t=0} T_{k_1 \dots k_s}^{\lambda_1 \dots \lambda_r}(P) \frac{\partial x^{k_1}}{x_t^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{k_s}}{x_t^{j_s}} \qquad (3)$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor, $x_t^i(x^1, \dots, x^n) = x^i + t\eta^i(x^1, \dots, x^n) + o(t)$, επομένως

$$\partial x_t^i / \partial x^j = \delta_{ij} + t\, \partial \eta^i / \partial x^j + o(t) \quad \text{και επειδή} \quad \partial x_t^i / \partial x^k \cdot \partial x^k / \delta x_t^j = \delta_{ij}$$

έπεται ότι $\partial x^i / \partial x_t^j = \delta_{ij} - t\, \partial \eta^i / \partial x_t^j$ επίσης. Αντικαθιστώντας στην (2), $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} =$

$$(\delta_{\lambda_1}^{i_1} + t\frac{\partial \eta^{i_1}}{\partial x^{\lambda_1}} + o(t)) \dots (\delta_{\lambda_r}^{i_r} + t\frac{\partial \eta^{i_r}}{\partial x^{\lambda_r}} + o(t))\, T_{k_1 \dots k_s}^{\lambda_1 \dots \lambda_r}(0)\, (\delta_{j_1}^{k_1} - t\frac{\partial \eta^{k_1}}{\partial x_t^{j_1}} + o(t)) \dots (\delta_{j_s}^{k_s} - t\frac{\partial \eta^{k_s}}{\partial x_t^{j_s}} + o(t))$$

$$= T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(0) + t(T_{kj_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(0)\frac{\partial \eta^k}{\partial x^{j_1}} + \dots + T_{j_1 \dots j_{s-1}k}^{i_1 \dots i_r}(0)\frac{\partial \eta^k}{\partial x^{j_s}} - T_{j_1 \dots j_s}^{\lambda i_2 \dots i_r}(0)\frac{\partial \eta^{i_1}}{\partial x_t^\lambda} - T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{r-1}\lambda}(0)\frac{\partial \eta^{i_r}}{\partial x_t^\lambda}) + o(t)$$

Επομένως, $$(L_\eta T)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(0) = \frac{d}{dt} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(t)\Big|_{t=0} =$$

$$= \eta^\lambda \frac{\partial T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(0)}{\partial x^\lambda} + T_{kj_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(0)\frac{\partial \eta^k}{\partial x^{j_1}} + \dots + T_{j_1 \dots j_{s-1}k}^{i_1 \dots i_r}(0)\frac{\partial \eta^k}{\partial x^{j_s}} - T_{j_1 \dots j_s}^{\lambda i_2 \dots i_r}(0)\frac{\partial \eta^{i_1}}{\partial x_t^\lambda} - T_{j_1 \dots j_s}^{i_2 \dots i_{r-1}\lambda}(0)\frac{\partial \eta^{i_r}}{\partial x_t^\lambda}$$

Εάν $T = \xi \in \mathfrak{X}(M)$ από τον προηγούμενο τύπο συνάγεται ότι εάν $\xi = \xi^i\, \partial/\partial x^i, \eta = \eta^i\, \partial/\partial x^i$ σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$, τότε

$$(L_\eta \xi)^i = \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}$$

Ορίζεται πράξη **γινόμενο *Lie* διανυσματικών πεδίων**,

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \qquad (\eta, \xi) \longmapsto [\eta, \xi] = L_\eta \xi, \quad \text{οπότε} \quad [\eta, \xi]^i = \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}$$

Ελέγχεται ότι η $[\cdot,\cdot]$ είναι διγραμμική, αντισυμμετρική και ικανοποιεί την ταυτότητα *Jacobi*, δηλαδή ο χώρος $(\mathfrak{X}(M), [\cdot,\cdot])$ είναι άλγεβρα *Lie*. Ελέγχεται επίσης η ταυτότητα

$$[f\xi, g\eta] = fg[\xi, \eta] + (f\xi g)\eta - (g\eta f)\xi$$

Θα μελετηθεί η αγκύλη *Lie* λαμβάνοντας υπ' όψιν την φύση των λείων διανυσματικών πεδίων ως τελεστών κατευθυνόμενης παραγώγισης. Έστω τοπικό πλαίσιο $\partial/\partial x^i$ της διανυσματικής δέσμης TM πάνω στον χάρτη U, οπότε $\xi = \xi^i\, \partial/\partial x^i, \eta = \eta^i\, \partial/\partial x^i$ τοπικά. Λαμβάνουμε την σύνθεση αυτών των διαφορικών τελεστών, που εν γένει δεν είναι διανυσματικό πεδίο αφού σε αυτόν εμπλέκονται παράγωγοι β' τάξεως:

$$\eta\xi f = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} f) = \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \eta^i \xi^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$$

επομένως

$$\partial_\eta \partial_\xi = \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^i \xi^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \quad \text{και ομοίως,} \quad \partial_\xi \partial_\eta = \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \xi^i \eta^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}$$

Αλλά αφαιρώντας κατά μέλη

$$\partial_\eta \partial_\xi - \partial_\xi \partial_\eta = \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = (\eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} - \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j} = [\eta, \xi]$$

Επομένως οι διαφορικοί τελεστές που αντιστοιχούν στα διανυσματικά πεδία ξ, η αντιμετατίθενται (η σειρά παραγώγισης είναι αδιάφορη) εάν και μόνο εάν το ένα μένει αναλλοίωτο κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών του άλλου. Εάν $\varphi : M \to N$ αμφιδιαφόριση, τότε για κάθε $f \in C^\infty(N)$ και κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\partial_\xi(f \circ \varphi) = \left(\partial_{\varphi_*\xi} f\right) \circ \varphi$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f \circ \varphi"'] & N \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\partial_\xi(f \circ \varphi)"'] & N \arrow[d, "\partial_{\varphi_*\xi} f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Η απεικόνιση $\varphi_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$, που είναι ισομορφισμός προτύπων, είναι επίσης ισομορφισμός μεταξύ των αλγεβρών *Lie* $(\mathfrak{X}(M), [\cdot,\cdot])$ και $(\mathfrak{X}(N), [\cdot,\cdot])$:

IV.§4.2. $\varphi_*[\xi, \eta] = [\varphi_*\xi, \varphi_*\eta]$.

Αποδ. Αρκεί να δειχθεί ότι $\partial_{\varphi_*[\xi,\eta]} f = \left[\partial_{\varphi_*\xi}, \partial_{\varphi_*\eta}\right] f$ για κάθε $f \in C^\infty(N)$. Ισοδύναμα, εφ' όσον η φ είναι αμφιδιαφόριση, ότι

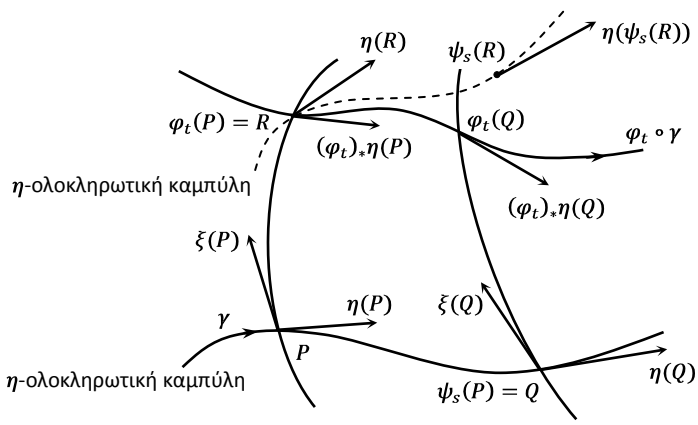
$$\left(\partial_{\varphi_*[\xi,\eta]} f\right) \circ \varphi = \left(\left[\partial_{\varphi_*\xi}, \partial_{\varphi_*\eta}\right] f\right) \circ \varphi \quad \text{για κάθε} \quad f \in C^\infty(N)$$

Επειδή $\left(\partial_{\varphi_*[\xi,\eta]} f\right) \circ \varphi = \partial_{[\xi,\eta]}(f \circ \varphi)$, το ζητούμενο προκύπτει κάνοντας πράξεις στο δεξύ μέλος της ζητούμενης σχέσης:

$$\left(\left[\partial_{\varphi_*\xi}, \partial_{\varphi_*\eta}\right] f\right) \circ \varphi = \left(\partial_{\varphi_*\xi}\partial_{\varphi_*\eta} f - \partial_{\varphi_*\eta}\partial_{\varphi_*\xi} f\right) \circ \varphi = \left(\partial_{\varphi_*\xi}\partial_{\varphi_*\eta} f\right) \circ \varphi - \left(\partial_{\varphi_*\eta}\partial_{\varphi_*\xi} f\right) \circ \varphi =$$

$$= \partial_\xi\left(\left(\partial_{\varphi_*\eta} f\right) \circ \varphi\right) - \partial_\eta\left(\left(\partial_{\varphi_*\xi} f\right) \circ \varphi\right) = \partial_\xi\partial_\eta(f \circ \varphi) - \partial_\eta\partial_\xi(f \circ \varphi) \qquad \blacksquare$$

Έστω $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ και $(\varphi_t)_t, (\psi_s)_s$ οι επαγόμενες από αυτά αντιστοίχως γύρω από το $P \in M$ τοπικές ημιομάδες. Εάν $[\xi, \eta] \neq 0$, τότε το P μπορεί να επιλεγεί ώστε $\eta\left(\varphi_t(P)\right) \neq (\varphi_t)_*\eta(P)$ για κάποιο t. Επομένως η διερχόμενη από το $\varphi_t(P)$ η-ολοκληρωτική καμπύλη δεν είναι η μεταφορά $\varphi_t \circ \gamma$ της διερχόμενης από το P η-ολοκληρωτικής καμπύλης γ κάτω από την αμφιδιαφόριση φ_t.



Αυτό σημαίνει ότι για κάποια t, s ισχύει $\varphi_t\left(\psi_s(P)\right) \neq \psi_s\left(\varphi_t(P)\right)$. Αντιθέτως εάν $[\xi, \eta] = 0$, τότε η φ_t απεικονίζει η-ολοκληρωτικές καμπύλες σε η-ολοκληρωτικές καμπύλες, οπότε αναμένεται ότι $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$. Η επόμενη πρόταση δηλώνει ακριβώς ότι ο μηδενισμός του $[\xi, \eta]$ ισοδυναμεί με την αντιμετάθεση των τοπικών αμφιδιαφορίσεων που επάγονται από τα πεδία ξ, η.

IV.§4.3. $[\xi,\eta]=0$ εάν και μόνο εάν, για κάθε ζέυγος τοπικών ημιομάδων $(\varphi_t)_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$, $(\psi_s)_{t\in(-\delta,\delta)}$ που επάγεται από τα ξ,η αντιστοίχως, ισχύει $\varphi_t\circ\psi_s=\psi_s\circ\varphi_t$ για κάθε $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $s\in(-\delta,\delta)$ για τα οποία η σύνθεση έχει νόημα.

Αποδ. Εάν $(\psi_s)_s$ η επαγόμενη από το η τοπική ημιομάδα σε ανοικτό σύνολο W και $\varphi: W\to\varphi[W]$ αμφιδιαφόριση, τότε $(\varphi\circ\psi_s\circ\varphi^{-1})_s$ η επαγόμενη από το $\varphi_*\eta$ τοπική ομάδα στο $\varphi[W]$.

"$\Longrightarrow$,, Εξ υποθέσεως, $(\varphi_t)_*\eta(P)=\eta((\varphi_t)_*(P))$. Άρα $\eta=(\varphi_t)_*\eta$ και $(\varphi_t\circ\psi_s\circ\varphi_t^{-1})_{s\in(-\delta,\delta)}$ οι ολοκληρωτικές καμπύλες του η, απ' όπου συνάγεται ότι $\psi_s=\varphi_t\circ\psi_s\circ\varphi_t^{-1}$.

,,$\Longleftarrow$" $\varphi_t\circ\psi_s\circ\varphi_t^{-1}=\psi_s\Longrightarrow\frac{d}{ds}\varphi_t\circ\psi_s\circ\varphi_t^{-1}(P)\big|_{s=0}$

Όμως $(\varphi_t\circ\psi_s\circ\varphi_t^{-1})_s$ είναι οι επαγόμενες από το πεδίο $(\varphi_t)_*\eta$ τοπικές αμφιδιαφορίσεις, επομένως

$$\frac{d}{ds}\varphi_t\circ\psi_s\circ\varphi_t^{-1}(P)\big|_{s=0}=(\varphi_t)_*\eta(P)$$

Άρα

$$[\xi,\eta](P)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}((\varphi_t)_*\eta(P)-\eta(P))\ =\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(\eta(P)-\eta(P)=0\qquad\blacksquare$$

IV.§4.4. Τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανυσματικά πεδία $\xi^1,\dots,\xi^r\in\mathfrak{X}(M)$ αντιμετατίθενται ανά δύο εάν και μόνο εάν γύρω από κάθε σημείο της πολλαπλότητας υπάρχει τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1,\dots,x^n$ για το οποίο $\partial/\partial x^i=\xi^i,\quad i=1,\dots,r\le n$.

Αποδ. Έστω $P\in M$ σημείο της πολλαπλότητας και $(\varphi_t^i)_t,\ \ i=1,\dots,n$, η επαγόμενη από το ξ^i τοπική ημιομάδα γύρω απ' αυτό. Εφ' όσον $[\xi_i,\xi_j]=0$, έπεται ότι $\varphi_t^i\circ\varphi_s^j=\varphi_s^j\circ\varphi_t^i,\ \ i,j=1,\dots,r$, για κάθε ζεύγος $t,s\in\mathbb{R}$ για τα οποία η σύνθεση έχει νόημα (IV.§4.3). Επιλέγουμε V επαρκώς μικρή ανοικτή περιοχή του $0\in V\subset\mathbb{R}^n$ ώστε να ορίζεται η απεικόνιση

$$\varphi: V\to U\subset M,\ \ \varphi(t_1,\dots,t_r)=\varphi_{t_1}^1\circ\dots\circ\varphi_{t_r}^r(x)$$

(ορίζεται καλά επειδή τα φ_i,φ_j αντιμετατίθενται). Ισχύει $\varphi_*(\partial/\partial t_i)=\xi_i(x)$, και επειδή τα $\xi_i,\ \ i=1,\dots,r$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, το διαφορικό $\varphi_*:T_0\mathbb{R}^r\to T_PM$ είναι *1-1*. Από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης, σμικρύνουμε το V ώστε η $\varphi:V\to N=\varphi[V]$ να είναι εμφύτευση, δηλαδή η N είναι r-διάσταση υποπολλαπλότητα της M, με τα $\xi_i(x),\ \ i=1,\dots,r$ να συγκροτούν βάση του $T_PN\subset T_PM$. Θα δειχθεί ότι για κάθε $Q\in N,\ \ T_QN=span\{\xi_1(Q),\dots,\xi_1(Q)\}$, οπότε το ζητούμενο σύστημα συντεταγμένων είναι $t_1,\dots,t_r$ του $\mathbb{R}^n$, με την N να αναπαρίσταται τοπικά ως $t_{r+1}=\dots=t_n=0$ και το ξ_i ως $\partial/\partial t_i$.

Εάν $\varphi^{-1}(Q)=(t_1,\dots,t_r)\in V$, τότε

$$Q=\varphi_{t_1}^1\circ\dots\circ\varphi_{t_r}^r(x)=\varphi_{t_i}^i\circ\varphi_{t_1}^1\circ\dots\circ\varphi_{t_{i-1}}^{i-1}\circ\varphi_{t_{i+1}}^{i+1}\circ\dots\varphi_{t_r}^r(x)$$

(αφού οι ροές αντιμετατίθενται). Σταθεροποιώντας τα $t_{j\neq i}$ και αφήνοντας το t_i να μεταβάλλεται επαρκώς λίγο ώστε το $\varphi_{t_i}^i\circ\varphi_{t_1}^1\circ\dots\circ\varphi_{t_r}^r(x)$ να παραμένει στην N, διαγράφεται ολοκληρωτική καμπύλη του ξ_i περιεχομένη στην N. Αυτό δείχνει ότι $\xi_i(Q)\in T_qN$. Επειδή τα $\xi_i(Q),\ \ i=1,\dots,r$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και αφού περιέχονται στον T_QN, έπεται άμεσα το ζητούμενο. ■

IV.§4.5. Εάν $(\varphi_t)_t,(\psi_s)_s$ οι επαγόμενες από τα $\xi,\eta\in\mathfrak{X}(M)$ αντιστοίχως τοπικές ημιομάδες γύρω από το $x\in M$, τότε για κάθε $f\in C^\infty(M)$ ισχύει

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\Big|_{s=t=0}\big(f\circ\varphi_t\circ\psi_s(x)-f\circ\psi_s\circ f_t(x)\big)=\big(L_\eta L_\xi-L_\xi L_\eta\big)f(x)$$

Αποδ. Ισχύει γενικά

$$\big(L_\xi f\big)(x)\frac{d}{dt}\big(f\circ\varphi_t(x)\big)\big|_{t=0}$$

(δηλαδή $(L_\xi f)(x)$ ο ρυθμός μεταβολής της βαθμωτής ποσότητας f όπως μετράται από ένα υποκείμενο στο πεδίο ξ σωματίδιο όταν αυτό διέρχεται από την θέση x). Επομένως

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big|_{s=t=0}(f \circ \varphi_t \circ \psi_s)(x) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f\big(\varphi_t(\psi_s)(x)\big) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\big(L_\xi f\big)\big(\psi_s(x)\big) = \big(L_\xi L_\eta f\big)(x)$$

Κάνοντας όμως όμοιες πράξεις για το $\partial^2/\partial s \partial t\,\big|_{s=t=0}(f \circ \psi_s \circ \varphi_t)(x)$, έπεται το ζητούμενο. ■

Από IV.§4.5 έπεται άμεσα ότι για αντιτιθέμενα πεδία ισχύει $f\big(\varphi_t \circ \psi_s(x)\big) - f\big(\psi_s \circ \varphi_t(x)\big) = \sigma(s^2 + t^2)$

IV.§4.6. Εάν $N \subset M$ υποπολλαπλότητα και $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ τέτοια ώστε $\xi(P), \eta(P) \in T_P N$ για κάθε $P \in N$, τότε $[\xi, \eta](P) \in T_P N$ επίσης[4].

Αποδ. Έστω $x^1, \dots, x^n$ σύστημα συντεταγμένων της M γύρω από το P, στο οποίο η N αναπαρίσταται ως $x^{r+1} = \cdots = x^n = 0$, οπότε $T_Q N = span\{\, \partial/\partial x^1\,\big|_Q, \dots, \partial/\partial x^n\,\big|_Q \,\}$ για κάθε Q στο σύστημα αυτό. Η τοπική έκφραση των ξ, η είναι $\xi = \xi^i\, \partial/\partial x^i$, $\eta = \eta^i\, \partial/\partial x^i$, με

$$\xi^i(x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) = \eta^i(x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) \text{ για } i > r$$

(εφ' όσον τα ξ, η εφάπτονται της N). Επομένως $\partial \xi^j/\partial x^i = \partial \eta^j/\partial x^i = 0$, απ' όπου συνάγεται ότι

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_P = \sum_{j=1}^{n}\left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_P \in T_P N \qquad ■$$

§5. ΡΗΜΑΝΝΕΙΕΣ ΜΕΤΡΙΚΕΣ

Ψευδορημάννεια μετρική πάνω σε μια διαφορική n-πολλαπλότητα M ονομάζεται ένα λείο συμμετρικό $(0,2)$-τανυστικό πεδίο g επί της M τέτοιο ώστε για κάθε $x \in M$, η $g(x)$ να είναι μή ιδιάζουσα διγραμμική απεικόνιση. Από την συνέχεια του g έπεται ότι οι συμμετρικές διγραμμικές απεικονίσεις $g(x), x \in M$ έχουν όλες τις ίδιες παραμέτρους *Sylvester*. Το g καλείται **ρημάννεια μετρική** όταν κάποια $g(x)$ (και επομένως όλες) είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή εσωτερικό γινόμενο.

(Ψευδορ)ρημάννεια πολλαπλότητα ονομάζεται ένα ζεύγος (M, g) όπου M διαφορική πολλαπλότητα και g (ψευδο)ρημάννεια μετρική επί της M. Σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots x^n$ η μετρική g αναπαρίσταται ως $n \times n$ συμμετρικός πίνακας $(g_{ij}(x^1, \dots x^n))_{i,j=1}^n$ ή $g_{ij} dx^i \otimes dx^j$.

IV.§5.0. Κάθε διαφορική πολλαπλότητα επιδέχεται ψευδορρημάννειας μετρικής για οποιαδήποτε επιλογή παραμέτρων *Sylvester* (άρα κάθε διαφορική πολλαπλότητα επιδέχεται ρημάννειας μετρικής).

Αποδ. Επιλέγουμε διαμέριση της μονάδας $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ υποκείμενη σε άτλαντα $\mathcal{A} = (U_p, \varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Πάνω σε κάθε U_p ορίζουμε σταθερή ψευδορημάννεια μετρική g_p με παραμέτρους Sylvester τις δεδομένες. Ελέγχεται εύκολα ότι η $g = \sum_{p\in\mathbb{N}} g_p$ είναι η ζητούμενη. ■

Έστω (M, g) ψευδορημάννεια πολλαπλότητα και $M' \subset M$ υποπολλαπλότητα. **Επαγόμενη ψευδορρημάννεια μετρική** επί της M' ονομάζεται το ψευδορρημάννεια μετρική $\bar{g}$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in M'$, $\bar{g}(x)$ είναι ο περιορισμός της διγραμμικής απεικόνισης $g(x)$ στον υπόχωρο $T_x M' \subset T_x M$.

Επαγόμενη από την g μέσω της εμβύθισης $f : N \to (M, g)$ ονομάζεται η ψευδορρημάννεια μετρική επί της N με τοπική έκφραση $f^*\bar{g}$ στον χάρτη U, όπου $f : U \to U' = f[U]$ αμφιδιαφόριση και $\bar{g}$ η επαγόμενη από την M μετρική επί του U'. Εάν η $f : N \to f[N] = N' \subset M$ είναι εμφύτευση, τότε η επαγόμενη από την g μέσω της f μετρική επί της N εκφράζεται ολικά ως $f^*\bar{g}$.

Μία εμβύθιση $f : (N, h) \to (M, g)$ μεταξύ ψευδορρημάννειων πολλαπλοτήτων καλείται **ισομετρική** όταν

---

4. Χωρίς προσφυγή σε πράξεις, το συμπέρασμα αυτής της πρότασης δικαιολογείται επίσης ως εξής. Ισχύει $[\xi, \eta](P) = lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((\varphi_t^*\eta)(P) - \eta(P)\big)$, όπου $(\varphi_t)_t$ η επαγόμενη από το ξ τοπική ημιομάδα γύρω από το P. Εφ' όσον ο περιορισμός του ξ στην N εφάπεται σε αυτήν, οι αμφιδιαφορίσεις φ_t διατηρούν την N και επομένως το σύνολο των εφαπτόμενων χώρων της. Άρα $(\varphi_t^*\eta)(P) \in T_P N$, και επειδή $\eta(P) \in T_P N$ επίσης, έπεται το ζητούμενο. ■

η h είναι η επαγόμενη από την g μέσω της f. Εάν η f είναι ισομετρική εμφύτευση, αυτό εκφράζεται ολικά ως $h = f^*\bar{g}$. Μια αμφιδιαφόριση $f : (N, h) \to (M, g)$ ονομάζεται **ισομετρία** όταν $h = f^*g$, ισοδύναμα, $g = f_*h$. Το γεωμετρικό νόημα της ισομετρικής εμβύθισης είναι ότι εμβυθίζει μια πολλαπλότητα κατά τρόπον ώστε στο νέο περιβάλλον της, η μέτρηση γωνιών και μήκους να μένει αναλλοίωτη. Ένα θεώρημα του John Nash δηλώνει ότι κάθε ρημάννεια πολλαπλότητα εμφυτεύεται ισομετρικά σε ευκλείδειο χώρο επαρκώς μεγάλης διάστασης.

Θεωρούμε $\mathbb{R}^n \cong U \subset M$ τοπικό χάρτη εφοδιασμένο με σύστημα συνετεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ και ψευδρορημάννεια μετρική $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$. **Κατέβασμα δείκτη** ονομάζεται η απεικόνιση που σε κάθε (r, s)-τανυστικό πεδίο $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ επί του U αντιστοιχίζει το $(r-1, s+1)$-τανυστικό πεδίο πεδίο

$$g_{i_1 k} T^{k i_2 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$$

Αντιστοίχως, **ανέβασμα δείκτη** ονομάζεται η αντιστοίχιση στο (r, s)-τανυστικό πεδίο $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ του $(r+1, s-1)$-πεδίου

$$g^{j_1 k} T^{i_1 \dots i_r}_{k j_1 \dots j_s}$$

όπου $g^{jk} g_{kj} = \delta^i_j$. Διαδοχική εφαρμογή ανεβάσματος και κατεβάσματος δείκτη, με αδιάφορη σειρά, επιστρέφει το αρχικό τανυστικό πεδίο:

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{κατ.}} \\ \xrightarrow[\text{αν.}]{} \end{array} \begin{array}{c} g_{i_1 k} T^{k i_2 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \xrightarrow{\text{αν.}} \overbrace{g^{i_1 l} g_{lk}}^{\delta^{i_1}_k} T^{k i_2 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \\ g^{j_1 k} T^{i_1 \dots i_r}_{k j_2 \dots j_s} \xrightarrow{\text{κατ.}} \underbrace{g_{j_1 l} g^{lk}}_{\delta^k_{j_1}} T^{i_1 \dots i_r}_{k j_2 \dots j_s} \end{array} \Bigg\} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$$

Ειδικά για διανυσματικά πεδία $\xi = \xi^i\, \partial/\partial x^i$, το κατέβασμα δείκτη αντιστοιχίζει σε καθ' ένα από αυτά ένα $(0,1)$-τανυστικό πεδίο $\hat{\xi} = g_{ik} \xi^k dx^i$ τέτοιο ώστε $\hat{\xi} = < \xi, \cdot >$ σε κάθε σημείο, όπου $<\cdot,\cdot>$ το εσωτερικό γινόμενο που επισυνάπτεται σε κάθε σημείο από την μετρική g :

$$< \xi, \eta > = g_{ik} \xi^k \eta^i = \hat{\xi}(\eta)$$

Ορίζοντας ένα επαγόμενο από την μετρική g δυϊκό εξωτερικό γινόμενο μεταξύ των $(0,1)$-τανυστικών πεδίων $\xi_i dx^i$, $\eta_j dx^j$ ως $< \xi_i\, dx^i,\ \eta_j\, dx^j > = g^{ij} \xi_i \eta_j$, τότε

$$< \hat{\xi}, \hat{\eta} > = < \xi_i dx^i, \eta_j dx^j > = g^{ij} \eta_j \xi_i = g^{ij} g_{jk} \eta_k\, g_{il} \xi_l = \delta^k_i \eta_k g_{il} \xi_l = \eta_i g^{il} \xi_l = < \xi, \eta >$$

Κάνοντας χρήση ανεβάσματος και κατεβάσματος δεικτών, θα συσχετιστεί μονοσήμαντα με κάθε $(1,1)$-τανυστικό πεδίο επί της M[5] ένα $(0,2)$-τανυστικό πεδίο. Υφίσταται μεταξύ των δύο τανυστικών χώρων η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία

$$T^i_j = g^{ik} T_{kj} \leftrightarrow T_{ij}$$

που σέβεται την λειότητα, και για την οποία ελέγχεται εύκολα ότι είναι ανεξάρτητη του τοπικού συστήματος συντεταγμένων στο οποίο εκφράζεται. Το T_{ij} καλείται g-**αντίστοιχο** $(0,2)$-**πεδίο** του T^i_j και το T^i_j καλείται g-**αντίστοιχο** $(1,1)$-**πεδίο** του T_{ij}. Εάν $T = T^i_j dx^j \otimes dx_i$, $\tilde{T} = T_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ το αντίστοιχο αυτού $(0,2)$-πεδίο και $< \cdot, \cdot >$ το εσωτερικό γινόμενο που επισυνάπτεται από την μετρική g σε κάθε εφαπτόμενο χώρο, τότε ισχύει

$$< \xi, T\eta > = \xi^i g_{ij} T^j_k \eta^k = \xi^i T_{ik} \eta^k = \tilde{T}(\xi, \eta) \qquad (1)$$

Ένα $(1,1)$-τανυστικό πεδίο T καλείται g-(**αντι**)**συμμετρικό** όταν το g-αντίστοιχο $(0,2)$-πεδίο αυτού είναι (αντι)συμμετρικό, δηλαδή όταν

---

5. Εφ' όσον $\mathcal{T}^1_1(T_P M) \cong L(T_P M)$, τα $(1,1)$-τανυστικά πεδία επισυνάπτουν σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας έναν γραμμικό μετασχηματισμό του αντίστοιχου εφαπτόμενου χώρου.

$$< T\xi, \eta >=< \xi, T\eta > \quad \text{ή} \quad < T\xi, \eta >= -< \xi, T\eta >$$

αντιστοίχως.

Ένα λείο διανυσματικό πεδίο ξ επί της ρημάννειας πολλαπλότητας (M, g) ονομάζεται ***Killing*** όταν η ημιομάδα αμφιδιαφορίσεων αυτού περιέχεται στην ομάδα των ισομετριών της M (η ροή κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών του είναι ισομετρική), ισοδύναμα, όταν $L_\xi g = 0$. Το γινόμενο *Lie* πεδίων *Killing* είναι πεδίο *Killing*,

$$L_{[\xi,\eta]}g = [L_\xi, L_\eta]g = L_\xi \underbrace{L_\eta g}_{0} - L_\eta \underbrace{L_\xi g}_{0} = 0$$

IV.§5.6. Εάν M n-διάστατη ρημάννεια πολλαπλότητα που είναι ομογενής χώρος κάτω από λεία δράση ομάδας *Lie* G, τότε οι ολοκληρωτικές καμπύλες κάθε G-αναλλοίωτου πεδίου *Killing* επί της M συγκροτούν κανονική φύλλωση αυτής.

Αποδ. Χωρίς απόδειξη. ■

IV.§5.7. Εάν M n-διάστατη ρημάννεια πολλαπλότητα που είναι ομογενής χώρος κάτω από λεία δράση ομάδας *Lie* G, τότε το σύνολο των ολοκληρωτικών καμπυλών κάθε G-αναλλοίωτου πεδίου *Killing* επιδέχεται $(n-1)$-διάστατης διαφορικής δομής, με την προβολή της M στα φύλλα να είναι λεία υπεμβάπτυση.

Αποδ. Άμεσα, συνδυάζοντας τις IV.§5.6 και III.§1.0. ■

Διαφορικές μορφές

§1. ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΑΝΥΣΤΕΣ

r-**μορφή** ή r-**αντισυμμετρικός τανυστής** επί του n-διάστατου διανυσματικού χώρου V καλείται ένας $(0,r)$-τανυστής T για τον οποίο ισχύει

$$T(\xi_1, \dots, \xi_r) = sgn(\sigma)\, T(\xi_{1\sigma}, \dots, \xi_{r\sigma})$$

για κάθε $\xi_1, \dots, \xi_r \in V$ και $\sigma \in S_n$. Από τις ιδιότητες της συμμετρικής ομάδας, ελέγχεται εύκολα ότι η παραπάνω ταυτότητα ισοδυναμεί με $T(\xi_1, \dots, \xi_r) = 0$ οποτεδήποτε $\xi_i = \xi_j$ για κάποια $i \neq j$, $i, j \leq r$.

Συμβολίζεται $\mathcal{A}_r(V)$ ο διανυσματικός χώρος των r-μορφών επί του V και $\mathcal{A}_{r,s}(V)$ ο χώρος των $(r+s)$-τανυστών που είναι αντισυμμετρικοί ως προς τα r πρώτα και s τελευταία ορίσματα. Προφανώς $\mathcal{A}_{r+s}(V) \subset \mathcal{A}_{r,s}(V)$. Ζητείται ο ορισμός γινομένου αντισυμμετρικών τανυστών ώστε το αποτέλεσμα να είναι αντισυμμετρικό· συγκεκριμένα, ένα γινόμενο της μορφής

$$\wedge : \mathcal{A}_r(V) \times \mathcal{A}_s(V) \to \mathcal{A}_{r+s}(V)$$

Για $\omega \in \mathcal{A}_r(V), \eta \in \mathcal{A}_s(V)$ ο τανυστής $\omega \otimes \eta$ περιέχεται στο $\mathcal{A}_{r,s}(V)$ αλλά δεν είναι εν γένει αντισυμμετρικός. Θα κατασκευαστεί μηχανισμός αντισυμμετρικής κανονικοποίησης $\varphi_{r,s} : \mathcal{A}_{r,s}(V) \to \mathcal{A}_{r+s}(V)$, οπότε το ζητούμενο γινόμενο ορίζεται ως $\omega \wedge \eta = \varphi_{r,s}(\omega \otimes \eta)$: Έστω $S_{r,s} \subset S_{r+s}$ το σύνολο των μεταθέσεων σ για τις οποίες $1\sigma < \cdots < rs$ και $(r+1)\sigma < \cdots < (r+s)\sigma$. Ορίζεται

$$\varphi_{r,s} : \mathcal{A}_{r,s}(V) \to \mathcal{A}_{r+s}(V), \qquad h \mapsto \varphi_{r,s}(h) = \sum_{\sigma \in S_{r,s}} sgn(\sigma)(\sigma h)$$

δηλαδή

$$\varphi_{r,s}(h)(\xi_1, \dots, \xi_{r+s}) = \sum_{\sigma \in S_{r,s}} sgn(\sigma) h(\xi_{1\sigma}, \dots, \xi_{(r+s)\sigma})$$

Θα δειχθεί ότι ο τανυστής $\varphi_{r,s}(h)$ είναι αντισυμμετρικός, επομένως $\varphi_{r,s}$ η ζητούμενη απεικόνιση: Εάν $\xi_1, \dots, \xi_{r+s} \in V$ τέτοια ώστε $\xi_i = \xi_{i+1}$ για κάποιο $i \leq r+s$, θα δειχθεί ότι σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει $\varphi_{r,s}(h)(\xi_1, \dots, \xi_{r+s}) = 0$.

1η περίπτωση: Εάν η σ στέλνει τα ξ_i, ξ_{i+1} στις r πρώτες (αντιστοίχως s τελευταίες) θέσεις, τότε $h(\xi_{1\sigma}, \dots, \xi_{(r+s)\sigma}) = 0$, εφ' όσον $h \in \mathcal{A}_{r,s}(V)$.

2η περίπτωση: Εάν η σ στέλνει το ξ_i (αντ. το ξ_{i+1}) στις r πρώτες θέσεις και το ξ_{i+1} (αντ. το ξ_i) στις s τελευταίες, τότε η $\sigma\tau$, όπου τ η αντιμετάθεση $\tau = (i, i+1)$, κάνει το αντίστροφο. Επομένως,

$$sgn(\sigma) h\big(\xi_{1\sigma}, \dots, \xi_{(r+s)\sigma}\big) + sgn(\sigma\tau) h\big(\xi_{1\sigma\tau}, \dots, \xi_{(r+s)\sigma\tau}\big) =$$

$$sgn(\sigma)\Big(h\big(\xi_{1\sigma}, \dots, \xi_{(r+s)\sigma}\big) - h\big(\xi_{1\sigma\tau}, \dots, \xi_{(r+s)\sigma\tau}\big)\Big)$$

Όμως $h\big(\xi_{1\sigma}, \dots, \xi_{(r+s)\sigma}\big) = h(\xi_{1\sigma\tau}, \dots, \xi_{(r+s)\sigma\tau})$ εφ' όσον $\xi_i = \xi_{i+1}$, επομένως η προηγούμενη ποσότητα ισούται με μηδέν. ■

Θέλουμε ο μηχανισμός αντισυμμετρικής κανονικοποίησης να σταθεροποιεί κατά σημείο τον $\mathcal{A}_{r+s}(V)$ και επιπλέον να ισχύει $\varphi_{r,s} \circ \varphi_{r,s} = \varphi_{r,s}$, επομένως επανορίζουμε[1]

$$\varphi_{r,s} : \mathcal{A}_{r,s}(V) \to \mathcal{A}_{r+s}(V), \qquad \varphi_{r,s}(h) = \frac{r!\,s!}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r,s}} sgn(\sigma) \cdot (\sigma h)$$

Το γινόμενο δύο αντισυμμετρικών τανυστών επανορίζεται ως

$$\wedge\ : \mathcal{A}_{r,s}(V) \to \mathcal{A}_{r+s}(V), \ \ \omega \wedge \eta = \frac{r!\,s!}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r,s}} sgn(\sigma) \cdot \sigma(\omega \otimes \eta)$$

που ικανοποιεί τα αξιώματα της εξωτερικής άλγεβρας:

(i) $(\lambda\omega + \mu\eta) \wedge \theta = \lambda\omega \wedge \theta + \mu\eta \wedge \theta$·

(ii) $\omega \wedge (\eta \wedge \theta) = (\omega \wedge \eta) \wedge \theta$.

Έστω $w(\xi_1, \dots, \xi_{r+s+t}) = \omega(\xi_1, \dots, \xi_r)\, \eta(\xi_{r+1}, \dots, \xi_{r+s})\, \theta(\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+t})$, οπότε $w \in \mathcal{A}_{r,s,t}(V)$ και $\varphi_{r,s+t}\left(\varphi_{s,t}(w)\right) = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$, $\varphi_{r+s,t}\left(\varphi_{r,s}(w)\right) = (\omega \wedge \eta) \wedge \theta$. Το ζητούμενο έπεται από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_{r,s,t}(V) \arrow[r, "\varphi_{r,s}"] \arrow[d, "\varphi_{s,t}"'] & \mathcal{A}_{r+s,t}(V) \arrow[d, "\varphi_{r+s,t}"] \\
\mathcal{A}_{r,s+t}(V) \arrow[r, "\varphi_{r,s+t}"'] & \mathcal{A}_{r+s+t}(V)
\end{tikzcd}$$

που αναδεικνύεται: Έστω $h \in \mathcal{A}_{r,s,t}(V)$, τότε τα $\tilde{h}^1 = \varphi_{r+s,t}\left(\varphi_{r,s}(w)\right)$, $\tilde{h}^2 = \varphi_{r,s+t}\left(\varphi_{s,t}(w)\right)$ ισούνται, εφ' όσον οι παρακάτω ποσότητες ισούνται.

$$\tilde{h}^1(\xi_1, \dots, \xi_{r+s+t}) = \frac{(r+s)!\,t!}{(r+s+t)!} \sum_{\tau \in S_{r+s,t}} \frac{r!\,s!}{(r+t)!} \sum_{\sigma \in S_{r,s}} sgn(\tau\sigma)\, h(\xi_{1\sigma\tau}, \dots, \xi_{(r+s+t)\sigma\tau})$$

$$\tilde{h}^2(\xi_1, \dots, \xi_{r+s+t}) = \frac{r!\,(r+s)!}{(r+s+t)!} \sum_{\tau \in S_{r,s+t}} \frac{s!\,t!}{(s+t)!} \sum_{\sigma \in S_{s,t}} sgn(\tau\sigma)\, h(\xi_{1\sigma\tau}, \dots, \xi_{(r+s+t)\sigma\tau}) \qquad \blacksquare$$

(iii) Εάν $\omega \in \mathcal{A}_r(V)$, $\eta \in \mathcal{A}_s(V)$, τότε $\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega$:

$$\omega \wedge \eta(\xi_1, \dots, \xi_{r+s}) = \frac{r!\,s!}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r,s}} sgn(\sigma)\, \omega(\xi_{1\sigma}, \dots, \xi_{r\sigma}) \eta(\xi_{(r+1)\sigma}, \dots, \xi_{(r+s)\sigma}) =$$

$$\frac{r!\,s!}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r,s}} sgn(\sigma)\, \eta\left(\xi_{(r+1)\sigma}, \dots, \xi_{(r+s)\sigma}\right) \omega(\xi_{1\sigma}, \dots, \xi_{r\sigma}) = \tau(\omega \wedge \eta)(\xi_1, \dots, \xi_{r+s})$$

όπου τ η μετάθεση στο $S_{r,s}$ που φέρνει τα s τελευταία στοιχεία πρώτα διατηρώντας την διάταξη. Επειδή $sgn(\tau) = rs$, έπεται το ζητούμενο. ■

Θα βρεθεί βάση του $\mathcal{A}_r(V)$ εκπεφρασμένη με την βοήθεια του εξωτερικού γινομένου. Έστω $\omega \in \mathcal{A}_r(V)$ και $\xi_i = \xi_i^j e_j \in V, i = 1, \dots, r$, όπου $e_1, \dots, e_n$ βάση του V. Τότε

---

1. $\#S_{r,s} = (r+s)!/(r!\,s!)$.

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_r) = \xi_i^{j_1} \dots \xi_i^{j_r} \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_r \le n} \left(\sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma)\, \xi_i^{j_{1\sigma}} \dots \xi_i^{j_{r\sigma}} \right) \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$$

εφ' όσον ο τανυστής είναι αντισυμμετρικός. Όμως

$$\sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma)\, \xi_i^{j_{1\sigma}} \dots \xi_i^{j_{r\sigma}} = \sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma) e^{j_1}(\xi_{1\sigma}) \dots e^{j_r}(\xi_{r\sigma}) = \sigma(e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r})(\xi_1, \dots, \xi_r), \qquad \text{επομένως}$$

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_r \le n} \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) \underbrace{\sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma) \cdot \sigma(e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r})}_{e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r}}$$

Τα $e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r}$, $1 \le j_1 < \dots < j_1 \le n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα: ισχύει

$$e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r}(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = 1$$

και εφαρμόζοντας κάθε μία από τις r-άδες $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$ στον γραμμικό συνδυασμό

$$\sum_{1 \le j_1 < \dots < j_r \le n} \lambda_{j_1 \dots j_r} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} = 0$$

έπεται ότι $\lambda_{j_1 \dots j_r} = 0$. Άρα τα

$$e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r}, \quad 1 \le j_1 < \dots < j_1 \le n$$

συγκροτούν βάση του $\mathcal{A}_r(V)$ και $dim\, \mathcal{A}_r(V) = \binom{n}{r}$. Επειδή για $r > n$ δεν υπάρχει ακολουθία $1 \le j_1 < \dots < j_r \le n$, έπεται ότι $\mathcal{A}_{r>n}(V) = 0$, δηλαδή δεν υπάρχουν μη τετριμμένοι αντισυμμετρικοί τανυστές με βαθμό μεγαλύτερο από την διάσταση του χώρου. Ισχύει $\mathcal{A}_1(V) = V^*$ και γράφουμε

$$\mathcal{A}_r(V) = \wedge^r V^*$$

εννοώντας ότι το $\mathcal{A}_r(V)$ είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τα εξωτερικά γινόμενα μέχρι r-παραγόντων προερχομένων από το V^*.

Θα μελετηθεί ο χώρος $\mathcal{A}_n(V)$ των $(0, n)$-αντισυμμετρικών τανυστών. Ισχύει $dim\, \mathcal{A}_n(V) = \binom{n}{n} = 1$, και εφ' όσον η ορίζουσα είναι μη τετριμμένη n-μορφή, έπεται ότι $\mathcal{A}_n(V) = span\{det\}$. Συγκεκριμένα, έστω $e_1, \dots, e_n$ βάση του V και $\xi_u = \xi_i^j e_i \in V$, $i = 1, \dots, n$, δηλαδή

$$(\xi_1 \dots \xi_n) = (e_1 \dots e_n)(\xi_i^j)_{i,j}$$

Τότε

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_i^{j_1} \dots \xi_n^{j_n} \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = \omega(e_1, \dots, e_n) \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, \xi_1^{1\sigma} \dots \xi_n^{n\sigma} = det\left(\xi_i^j\right)_{i,j} \omega(e_1, \dots, e_n)$$

Επίσης, εάν T γραμμικός μετασχηματισμός του V,

$$(T\xi_1 \dots T\xi_n) = T(\xi_1 \dots \xi_n) = T(e_1 \dots e_n)\, (\xi_i^j)_{i,j} = ([e_1 \dots e_n])\, \left((e_1 \dots e_n)^{-1}\, T\, (e_1 \dots e_n)\, (\xi_i^j)_{i,j} \right)$$

επομένως $\omega(T\xi_1, \dots, T\xi_n) = detT \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Η εξάρτηση του $(0, n)$-αντισυμμετρικού τανυστή ω από μόνο μία βαθμωτή ποσότητα $\omega_{1 \dots n} = \omega(e_1, \dots, e_n)$ εκφράζεται με τη βοήθεια των συμβόλων *Levi-Givita* ως $T_{i_1 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} T_{1 \dots n}$, όπου

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 0 & \text{εάν } i_j = i_k \text{ για κάποια } j, k \\ sgn \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} & \text{διαφορετικά} \end{cases}, \quad \text{με } 1 \le i_1, \dots, i_n \le n$$

Θα δοθεί τώρα γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου αντισυμμετρικών τανυστών θεωρώντας γινόμενα 1-μορφών. Επιλέγουμε βάση $e_1, \dots, e_n$ του V. Εάν η ω είναι 1-μορφή,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^i$$

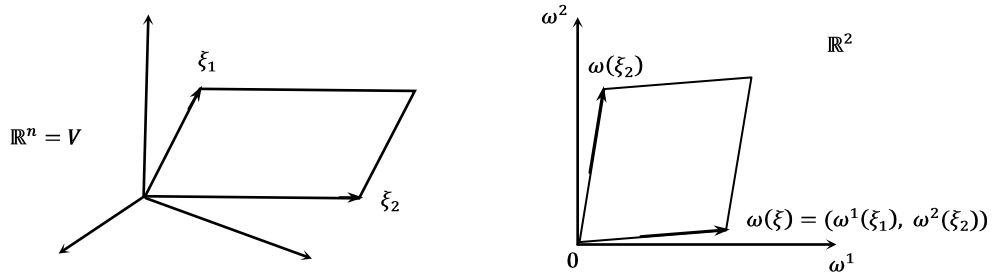
τότε η δράση της στο $\xi = \xi^j e_j$ είναι η δυϊκή έκφραση του εξωτερικού γινομένου που στην βάση e_i αναπαρίσταται από τον μοναδιαίο πίνακα,

$$\omega(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^i(\xi^i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \xi^j e^i(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \xi^j$$

Εάν οι ω^1, ω^2 είναι 1-μορφές, τότε

$$\omega^1 \wedge \omega^2(\xi_1, \xi_2) = det \begin{pmatrix} \omega^1(\xi_1) & \omega^2(\xi_1) \\ \omega^1(\xi_2) & \omega^2(\xi_2) \end{pmatrix}$$

είναι το προσανατολισμένο εμβαδόν του παραλληλογράμμου που συγκροτείται από τα διανύσματα $(\omega^1(\xi_1),\ \omega^2(\xi_1))$ και $(\omega^1(\xi_2), \omega^2(\xi_2))$ σε έναν $\mathbb{R}^2$ με καρτεσιανές συντεταγμένες ω^1, ω^2.



Γενικότερα, εάν $\omega^1, \dots, \omega^r$ 1-μορφές επί του $\mathbb{R}^n = V$, τότε $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r(\xi_1, \dots, \xi_r) = det(\omega^j(\xi_i))_{i,j}$ είναι ο προσανατολισμένος όγκος του παραλληλεπίπεδου που συγκροτείται από τα διανύσματα

$$\begin{aligned} \omega(\xi_1) &= \left(\omega^1(\xi_1), \dots, \omega^r(\xi_1)\right) \\ &\vdots \\ \omega(\xi_r) &= \left(\omega^1(\xi_r), \dots, \omega^r(\xi_r)\right) \end{aligned}$$

Εντός ενός $\mathbb{R}^r$ με καρτεσιανές συντεταγμένες $\omega^1, \dots, \omega^r$. Εάν $\omega^1 = e^1$, τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα, $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}(\xi_1, \dots, \xi_r)$ είναι ο όγκος της προβολής του παραλληλεπιπέδου $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ στον r-διάστατο υποχώρο $span\{e^{i_1}, \dots, e^{i_r}\}$, αφού

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}\ (\xi_1, \dots, \xi_r) = det \begin{pmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_1^{i_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_r^{i_1} & \dots & \xi_r^{i_r} \end{pmatrix} = det \left(\xi_i^{i_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,r}}$$

Εφ' όσον συγκροτούν τον δυικό χώρο του V, οι 1-μορφές μπορούν να νοούνται ως σταθερά διανυσματικά πεδία, και η δράση τους πάνω στο διάνυσμα ξ (εσωτερικό γινόμενο) ερμηνεύεται επομένως ως η κυκλοφοριακή ροή του σταθερού διανυσματικού πεδίου ξ κατά μήκος των δυναμικών γραμμών (ευθείες) του διανυσματικού πεδίου που αντιστοιχεί στην δρώσα 1-μορφή.

Μία $n-1$-μορφή επί του $\mathbb{R}^n$ μπορεί επίσης να νοείται ως σταθερό διανυσματικό πεδίο αφού εξαρτάται από $n = dim\, V$ βαθμωτές ποσότητες,

$$\omega = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \omega_i\ e^{i1} \wedge \dots \wedge \hat{e}^i \wedge \dots \wedge e^n$$

Συγκεκριμένα, εάν

$$\widetilde{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot e_i$$

το διανυσματικό πεδίο που αντιστοιχεί στην $(n-1)$-μορφή ω, θέλουμε να δούμε πώς ερμηνεύεται σε σχέση μ' αυτό η δράση της ω στο παραλληλεπίπεδο $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, όπου $\xi_i = \xi_i^j e_j$. Ισχύει

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \underbrace{det\begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_1^{i-1} & \xi_1^{i+1} & \dots & \xi_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{n-1}^1 & \dots & \xi_{n-1}^{i-1} & \xi_{n-1}^{i+1} & \dots & \xi_{n-1}^n \end{pmatrix}}_{e^1 \wedge \dots \wedge \hat{e}^i \wedge \dots \wedge e^n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})} \qquad (1)$$

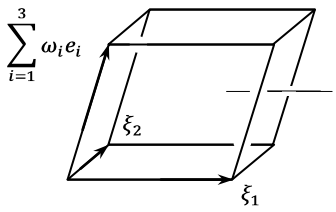
Σύμφωνα με τα προηγούμενα,

$$\omega_i \, det\begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_1^{i-1} & \xi_1^{i+1} & \dots & \xi_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{n-1}^1 & \dots & \xi_{n-1}^{i-1} & \xi_{n-1}^{i+1} & \dots & \xi_{n-1}^n \end{pmatrix}$$

είναι η ροή του σταθερού πεδίου $\omega_i e_i$ μέσα από την προβολή του παραλληλεπιπέδου $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ στον υποχώρο $span\{e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n\}$. Για $n = 3$ ο τύπος (1) γίνεται

$$\omega(\xi_1, \xi_2) = \omega_1 \, det\begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{pmatrix} + \omega_2 \, det\begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^3 \end{pmatrix} + \omega_3 \, det\begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{pmatrix}$$

Επομένως η δράση κάθε 2-μορφής $\omega = \omega_3 \, e^1 \wedge e^2 + \omega_2 \, e^1 \wedge e^3 + \omega_1 \, e^2 \wedge e^3$ στο παραλληλόγραμμο (ξ_1, ξ_2) ερμηνεύεται ως η ροή του σταθερού διανυσματικού πεδίου $\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3$ μέσα απ' αυτό.



$$\left\{ \rho\acute{\eta} \; \tau o\nu \sum_{i=1}^{3} \omega_i e_i \;\; \mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha \; \alpha\pi\acute{o} \; \tau o \;\; (\xi_1, \xi_2) \right\} =$$

$$vol\,(\xi_1, \xi_2, \sum_{i=1}^{3} \omega_i e_i) = < \sum_{i=1}^{3} \omega_i e_i \,, \xi_1 \times \xi_2 > \; = \; \omega(\xi_1, \xi_2)$$

§2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Διαφορική r-μορφή επί της πολλαπλότητας M καλείται μία τμήση της διανυσματικής δέσμης $\mathcal{A}_r(M)$ που προκύπτει επισυνάπτοντας σε κάθε $P \in M$ τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{A}_r(T_P M)$. Επομένως μία διαφορική r-μορφή πρέπει να νοείται ως κυμαινόμενη, από σημείο σε σημείο της M, δράση πάνω σε r-διάστατα παραλληλόγραμμα του αντίστοιχου εφαπτόμενου χώρου[2]. Η δράση των διαφορικών 1-μορφών και των διαφορικών 2-μορφών σε 3-πολλαπλότητες ερμηνεύεται ως ροή διανυσματικού πεδίου της πολλαπλότητας, σύμφωνα με τις γεωμετρικές θεωρήσεις τις προηγούμενης παραγράφου.

Συμβολίζεται $\Omega_r^k(M)$ ο χώρος των C^k διαφορικών r-μορφών επί της M. Για κάθε $k = 0,1, \dots, \infty$ συμβολίζεται $\Omega^k(M)$ το σύνολο των C^k τομών της διανυσματικής δέσμης

$$\mathcal{A}(M) = \coprod_{P \in M} \left(\bigoplus_{r=0}^{n} \mathcal{A}_r(T_P M) \right)$$

δηλαδή το σύνολο των C^k διαφορικών μορφών επί της M, οπότε

2. Αυτή η λειτουργία των διαφορικών μορφών επιτρέπει, μέσω της συνήθους οριακής διαδικασίας, τον καλό ορισμό μίας έννοιας ολοκλήρωσης σε διαφορικές πολλαπλότητες (βλ. §3).

$$\Omega^k(M) = \bigoplus_{r=0}^{m} \Omega_r^k(M)$$

Ορίζεται το γινόμενο διαφορικών μορφών

$$\wedge : \ \Omega_r^k(M) \times \Omega_s^k(M) \to \Omega_{r+s}^k(M), \qquad (\omega, \eta) \longmapsto \omega \wedge \eta$$

ώστε $\omega \wedge \eta(x) = \omega(x) \wedge \eta(x)$, που καθιστά τον χώρο $\Omega^k(M)$ διαβαθμισμένη άλγεβρα. Επειδή το γινόμενο διαφορικών μορφών κληρονομεί κατά σημείο τις ιδιότητες του γινομένου $\wedge$ αντισυμμετρικών τανυστών, έπεται άμεσα ότι ικανοποιεί τα αξιώματα τις εξωτερικής άλγεβρας.

Εάν U τοπικός χάρτης της M με σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$, τότε τα

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \ \ 1 \le i_1 < \dots < i_r \le n, \qquad dx^i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^*$$

συγκροτούν τοπικό πλαίσιο της δέσμης $\mathcal{A}_r(M)$, επομένως κάθε $\omega \in \Omega_r^k(M)$ γράφεται στο U ως

$$\omega\big|_U = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n} \omega_{i_1 \dots i_r} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

για κάποιες C^k βαθμωτές συναρτήσεις $\omega_{i_1 \dots i_r}$ πάνω στο U.

Έστω ανοικτά σύνολα $W, U \subset \mathbb{R}^n$ εφοδιασμένα με συστήματα συντεταγμένων $z^1, \dots, z^n$; $x^1, \dots, x^n$ αντιστοίχως και αμφιδιαφόριση

$$\varphi : W \to U, \qquad \varphi(z^1, \dots, z^n) = \big(x^1(z^1, \dots, z^n), \dots, x^n(z^1, \dots, z^n)\big)$$

Τότε για τον εφελκυσμό φ^* ισχύει $\varphi^*[\Omega_r^k(U)] = \Omega_r^k(W)$ και η αμφινομονοσήμαντη απεικόνιση

$$\varphi^* : \Omega_r^k(U) \to \Omega_r^k(W)$$

σέβεται το εξωτερικό γινόμενο: εάν $\omega_1 \in \Omega_r^k(U)$, $\omega_2 \in \Omega_s^k(U)$, τότε

$$\varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2(P; \xi_1, \dots, \xi_r) = \sum_{\sigma \in S_{r,s}} sgn(\sigma) \ \varphi^*\omega_1(P; \xi_{1\sigma}, \dots, \xi_{r\sigma}) \ \varphi^*\omega_2(P; \xi_{(r+1)\sigma}, \dots, \xi_{(r+s)\sigma})$$

$$\sum_{\sigma \in S_{r,s}} sgn(\sigma) \ \omega_1(\varphi(P); \varphi_*\xi_{1\sigma}, \dots, \varphi_*\xi_{r\sigma}) \ \omega_2\big(\varphi(P); \varphi_*\xi_{(r+1)\sigma}, \dots, \varphi_*\xi_{(r+s)\sigma}\big) = \varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2)(P; \xi_1, \dots, \xi_{r+s})$$

δηλαδή $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2$.

Επειδή επιπλέον σέβεται την τάξη των τανυστικών πεδίων, η γραμμική απεικόνιση

$$\varphi^* : \bigoplus_{r=0}^{m} \Omega_r^k(U) \to \bigoplus_{r=0}^{m} \Omega_r^k(W)$$

είναι ισομορφισμός διαβαθμισμένων αλγεβρών. Εάν

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n} \omega_{i_1 \dots i_r} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \Omega_r^k(U)$$

τότε ο εφελκυσμός της ω υπό την φ είναι

$$\varphi^*\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n} (\varphi^*\omega_{i_1 \dots i_r}) \, \varphi^*dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^*dx^{i_r}$$

V.§2.0. Έστω U, W τοπικοί χάρτες της M με αντίστοιχα συστήματα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$; $z^1, \dots, z^n$

αντιστοίχως και $U \cap W \neq \emptyset$. Εάν η έκφραση της r-μορφής ω στο $U \cap W$ ως προς το σύστημα $x^1, \dots, x^n$ είναι

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} {}^{(x)}\omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

τότε η έκφρασή της στο σύστημα $z^1, \dots, z^n$ είναι

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} {}^{(z)}\omega_{i_1 \dots i_r} dz^{j_1} \wedge \dots \wedge dz^{j_r}$$

όπου

$${}^{(z)}\omega_{i_1 \dots i_r} = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} {}^{(x)}\omega_{i_1 \dots i_r} \left(x^1(z^1, \dots, z^n), \dots, x^n(z^1, \dots, z^n)\right) det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{\substack{i = i_1 \dots i_r \\ j = j_1 \dots j_r}}$$

Αποδ. Εάν $\varphi(z^1, \dots, z^n) = \left(x^1(z^1, \dots, z^n), \dots, x^n(z^1, \dots, z^n)\right)$, ισχύουν[3]

$$\varphi^* \omega_{i_1 \dots i_r} = \omega_{i_1 \dots i_r} \circ \varphi \quad \text{και} \quad \varphi^* dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} dz^j, \quad \text{οπότε}$$

$$\varphi^* \omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \left(\omega_{i_1 \dots i_r} \circ \varphi\right) \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{j_1}} dz^{j_1}\right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial x^{i_r}}{\partial z^{j_r}} dz^{j_r}\right) =$$

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \left(\omega_{i_1 \dots i_r} \circ \varphi\right) \sum_{1 \le j_1, \dots, j_r \le n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial z^{j_r}} dz^{j_1} \wedge \dots \wedge dz^{j_r} =$$

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \left(\omega_{i_1 \dots i_r} \circ \varphi\right) \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} \left(\sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{j_1 \sigma}} \dots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial z^{j_r \sigma}}\right) dz^{j_1} \wedge \dots \wedge dz^{j_r} =$$

$$\sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} \underbrace{\left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \left(\omega_{i_1 \dots i_r} \circ \varphi\right) \sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{j_1 \sigma}} \dots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial z^{j_r \sigma}}\right)}_{\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} (\omega_{i_1 \dots i_r} \circ \varphi)\, det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{\substack{i = i_1 \dots i_r \\ j = j_1 \dots j_r}}} dz^{j_1} \wedge \dots \wedge dz^{j_r} \qquad \blacksquare$$

Εάν $N \subset M$ υποπολλαπλότητα της M με $r \le dimN = m < dimM = n$, ως **περιορισμός της διαφορικής μορφής** $\omega \in \Omega_r(M)$ στην N εννοείται η μορφή $\omega\big|_N \in \Omega_r(N)$,

$$\omega\big|_N(x; \xi_1, \dots, \xi_r) = \omega(x; \xi_1, \dots, \xi_r)$$

(δηλαδή η $\omega\big|_N$ δεν είναι μόνο ένας περιορισμός της ω στα σημεία της N, αλλά επίσης ένας περιορισμός του αντισυμμετρικού τανυστή $\omega(x)$ στον υποχώρο $T_x N \subset T_x M$, για κάθε $x \in M$).

V.§2.1. Έστω $\varphi : \mathbb{R}^m \supset W \to \mathbb{R}^{n > m}$ εμφύτευση της ανοικτής περιοχής $W \subset \mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{R}^n$ και $z^1, \dots, z^m$; $x^1, \dots, x^n$ συστήματα συντεταγμένων του $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$ αντιστοίχως ώστε η $\varphi[W] \simeq W$ να περιγράφεται από τις εξισώσεις $x^{m+1} = \cdots = x^n = 0$ και $\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \dfrac{\partial x^i}{\partial z^j} \dfrac{\partial}{\partial z^j}$, $i = 1, \dots, n$. Εάν ο περιορισμός $\omega\big|_W$ μίας

---

3. Εφ' όσον $dx^i = \left(\partial / \partial x^i\right)^*$ και ο εφελκυσμός του $\partial / \partial x^i$ υπό την φ είναι $\partial x^i / \partial z^j \, \partial / \partial z^j$, έπεται ότι

$$\varphi^* dx^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{\partial}{\partial z^j}\right)^* = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)^* = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} dz^j$$

$\omega \in \mathcal{A}_r(\mathbb{R}^n)$ εκφράζεται στο σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^m$ της W ως

$$\omega\big|_W = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le m} {}^{(x)}\omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

τότε η έκφραση της $\omega\big|_W$ στο σύστημα $z^1, \dots, z^m$ είναι

$$\omega\big|_W = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le m} {}^{(z)}\omega_{j_1 \dots j_r} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r}$$

όπου

$${}^{(z)}\omega_{j_1 \dots j_r} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m} \left({}^{(x)}\omega_{i_1 \dots i_r} \circ \varphi\right) det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{\substack{i = i_1 \dots i_r \\ j = j_1 \dots j_r}}$$

Αποδ. Τα $\partial/\partial x^i$, $i = 1, \dots, m$ συγκροτούν τοπικό πλαίσιο της εφαπτόμενης δέσμης $T\varphi[W]$, οπότε τα $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_r < m$ συγκροτούν πλαίσιο της $\mathcal{A}_r(\varphi[W])$. Ο περιορισμός $\omega\big|_{\varphi[W]}$ της διαφορικής r-μορφής

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \mathcal{A}_r(U)$$

εκφράζεται στο σύστημα $x^1, \dots, x^m$ του $\varphi[W]$ ως

$$\omega\big|_{\varphi[W]} = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le m} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

Θεωρώντας τον εφελκυσμό $\varphi^* : \Omega_r^k(\varphi[W]) \to \Omega_r^k(W)$ για την αμφιδιαφόριση

$$\varphi : W \to \varphi[W], \quad \varphi(z^1, \dots, z^m) = (x^1(z^1, \dots, z^m), \dots, x^m(z^1, \dots, z^m), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m})$$

από V.§2.0 έπεται το ζητούμενο. ■

Οι περιορισμοί που τίθεται από τις υποθέσεις της V.§2.1 για το σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ δεν είναι αναγκαίοι για το συμπέρασμά της:

V.§2.2. Έστω $\varphi : \mathbb{R}^n \supset W \to \mathbb{R}^n$ εμφύτευση ανοικτής περιοχής και $z^1, \dots, z^r$; $x^1, \dots, x^n$ συστήματα συντεταγμένων στους $\mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^n$ αντιστοίχως. Εάν

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \mathcal{A}_r(\mathbb{R}^n)$$

ο περιορισμός $\omega\big|_W$ στην r-διάστατη επιφάνεια $\varphi[W] = W$ εκφράζεται στο $z^1, \dots, z^n$ ως

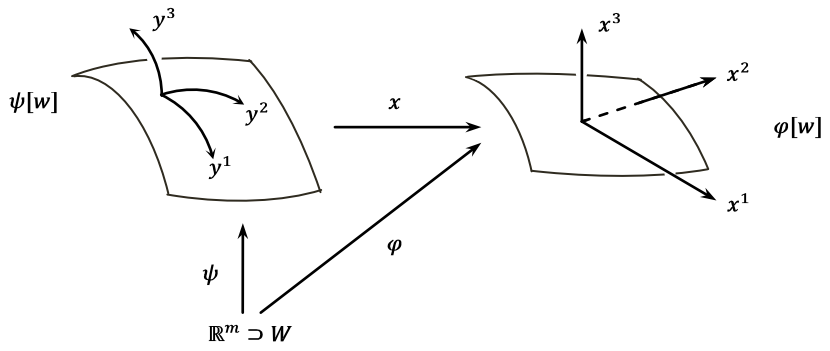
$$\omega\big|_W = \left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} {}^{(x)}\omega\big(x^1(z^1, \dots, z^r), \dots, x^n(z^1, \dots, z^r)\big) det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{\substack{i = i_1 \dots i_r \\ j = j_1 \dots j_r}} \right) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^r$$

Αποδ. Θεωρούμε αμφιδιαφόριση

$$x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x(y^1, \dots, y^n) = \big(x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)\big)$$

λαμβάνουμε σύστημα συντεταγμένων $y^1, \dots, y^n$ του $\mathbb{R}^n$ που να ικανοποιεί τις υποθέσεις της V.§2.1 σε σχέση με το $\psi[W]$, $\psi = x^{-1} \circ \varphi$: το $\psi[W]$ δίνεται από τις εξισώσεις $y^{m+1} = \cdots = y^n = 0$ και επιπλέον

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial y^i}{\partial z^j} \frac{\partial}{\partial z^j}$$



Τότε τα $\varphi[w]$, $\psi[w]$ είναι διφφεομορφικά μέσω της x. Από V.§2.0, εάν

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} {}^{(x)}\omega_{i_1\dots i_r}\, dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_r}$$

η έκφραση μίας $\omega \in \mathcal{A}_r(\mathbb{R}^n)$ στο σύστημα $x^1,\dots,x^n$, τότε η έκφραση αυτής στο $y^1,\dots,y^n$ είναι

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} \underbrace{\left(\sum\nolimits_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} ({}^{(x)}\omega_{i_1\dots i_r}\circ x)\, det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{\substack{i=i_1\dots i_r\\ j=j_1\dots j_r}}\right)}_{{}^{(y)}\omega_{j_1\dots j_r}} dy^{j_1}\wedge\dots\wedge dy^{j_r}$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες του συστήματος $y^1,\dots,y^n$ σε σχέση με το $\psi[W]$, ο περιορισμός $\omega\big|_{\varphi[W]}$ εφελκύεται υπό την x στην διαφορική r-μορφή

$$x^*(\omega\big|_{\varphi[W]}) = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_r\le m} \underbrace{\left(\sum\nolimits_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} ({}^{(x)}\omega_{i_1\dots i_r}\circ x)\, det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{\substack{i=i_1\dots i_r\\ j=j_1\dots j_r}}\right)}_{{}^{(y)}\omega_{j_1\dots j_r}} dy^{j_1}\wedge\dots\wedge dy^{j_r}$$

Κάνοντας πράξεις στο δεξύ μέλος προκύπτει το ζητούμενο. ■

Μια διαφορική μορφή ω πάνω σε ανοικτό υποσύνολο $U\subset\mathbb{R}^n$ μπορεί να νοείται ως απεικόνιση $\omega : U\to\mathcal{A}_r(\mathbb{R}^n)$, κάνοντας την παραδοχή ότι όλοι εφαπτόμενοι χώροι $T_P\mathbb{R}^n$, $P\in U$, ταυτίζονται με τον $\mathbb{R}^n$, πάνω από μεταφορά των αξόνων. Εάν η ω είναι λεία απεικόνιση, ορίζεται η παράγωγος αυτής,

$$\omega' : U\to L(\mathbb{R}^n;\ \mathcal{A}_r(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}_{1,r}(\mathbb{R}^n)$$

που σε κάθε $x\in U$ επισυνάπτει τον $(0,r+1)$-τανυστή $\omega(x)$, ο οποίος είναι αντισυμμετρικός ως προς τα r-τελευταία ορίσματα.

Ορίζεται η **εξωτερική παράγωγος** $d\omega$ της διαφορικής r-μορφής ω επί του U ως η διαφορική $(r+1)$-μορφή $d\omega$ επί του U που σε κάθε $x\in U$ επισυνάπτει την αντισυμμετρική κανονικοποίηση του $\omega(x)$,

$$d\omega(x) = \varphi_{1,r}\left(\omega'(x)\right)$$

Καλείται **εξωτερική παραγώγιση** στο $U\subset\mathbb{R}^n$ η απεικόνιση

$$d : \Omega_r(U)\to\Omega_{r+1}(U),\quad \omega\longmapsto d\omega$$

Ισχύει συγκεκριμένα,

$$d\omega(x;\xi_1,\dots,\xi_{r+1}) = \varphi_{1,r}\big(\omega'(x)\big)(\xi_1,\dots,\xi_{r+1}) = \sum_{j=1}^{r+1}(-1)^{j-1}(\omega';\xi_j)(\xi_1,\dots,\xi_{j+1},\xi_{j+1},\dots,\xi_{r+1})$$

Εάν

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} \omega_{i_1\ldots i_r} dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}$$

η έκφραση της r-μορφής ω επί του U στο σύστημα $x^1,\ldots,x^n$ του $\mathbb{R}^n$, ζητείται ο προσδιορισμός των ποσοτήτων $(d\omega)_{i_1\ldots i_{r+1}}$ που προσδιορίζουν την $(r+1)$-μορφή $d\omega$ στο σύστημα αυτό. Εάν $e_i = \partial/\partial x^i\big|_0$, $i=1,\ldots,n$, η βάση του $\mathbb{R}^n$ από την οποία προκύπτει το σύστημα $x^1,\ldots,x^n$, η r-μορφή $\omega'(x\,;\,e_{i_j})$ χαρακτηρίζεται από τις ποσότητες του διανύσματος στήλη

$$\left(\frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_r}(x)}{\partial x^{i_j}}\right)_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n\,\downarrow} = \left(\frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_r}(x)}{\partial x^{l}}\right)_{\substack{\le i_1<\cdots<i_r\le n\\ l=1,\ldots,n}} \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow i_j$$

Άρα

$$\omega'(x\,;\,e_{i_j})(e_{i_1},\ldots,e_{i_{j-1}},e_{i_{j+1}},\ldots,e_{i_{r+1}}) = \frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_{j-1}i_{j+1}\ldots i_{r+1}}}{\partial x^{i_j}}(x)$$

και επειδή

$$d\omega(x\,;\,e_{i_1},\ldots,e_{i_{r+1}}) = \sum_{j=1}^{r+1}(-1)^{j-1}\omega'\left(x\,;\,e_{i_j}\right)\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_{j-1}},e_{i_{j+1}},\ldots,e_{i_{r+1}}\right)$$

συνάγεται ότι

$$(d\omega)_{i_1\ldots i_{r+1}} = \sum_{j=1}^{r+1}(-1)^{j-1}\,\frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_{j-1}i_{j+1}\ldots i_{r+1}}}{\partial x^{i_j}}$$

Επομένως η έκφραση της $d\omega$ στο σύστημα $x^1,\ldots,x^n$ είναι[4]

$$d\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{r+1}(-1)^{j-1}\,\frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_{j-1}i_{j+1}\ldots i_{r+1}}}{\partial x^{i_j}}\right)}_{(d\omega)_{i_1\ldots i_{r+1}}} dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}$$

Παρατηρούμε ότι η εξωτερική παράγωγος 0-μορφής, δηλαδή βαθμωτής συνάρτησης, συμπίπτει με την βαθμίδα της. Το $dx^i = (\partial/\partial x^i)^*$ είναι η βαθμίδα της συνάρτησης x^i που επιλέγει την i-οστή συντεταγμένη στο σύστημα $x^1,\ldots,x^n$.

Στους υπολογισμούς που ακολουθούν θα χρησιμοποιηθεί το ακόλουθο στοιχειώδες από την θεωρία χώρων *Banach*. Η χρησιμότητά του έγκειται στην συνέχεια του γινομένου διαφορικών μορφών.

Λήμμα. Έστω E, E_1, E_2, F χώροι *Banach*, $U\subset E$ ανοικτό, $u: U\to E_i$, $i=1,2$ διαφορίσιμες και $f: E_1\times E_2\to F$ συνεχές διγραμμικό γινόμενο· τότε η $w: U\to F$, $w(x) = f(u_1(x), u_2(x;\,\cdot)$ είναι διαφορίσιμη με $w'(x) = f\big(u_1'(x;\,\cdot), u_2(x)\big) + f\big(u_1(x), u_2(x;\,\cdot)\big)$.

Αποδ. Βλ. [**Car1**], σελ. 33, πρόταση 2.5.2. ■

V.§2.3. $d(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^r) = 0$.

Αποδ. Θα δειχθεί ότι $d(dx^1\wedge\omega) = 0$, όπου $\omega = dx^2\wedge\ldots dx^r$. Εξ ορισμού της εξωτερικής παραγώγου, $d(dx^1\wedge\omega)(x;\,(\xi_1,\ldots,\xi_r))$ είναι γραμμικός συνδυασμός των

$$(dx^1\wedge\omega)\big(x;\,\xi_j\big)\big(\xi_1,\ldots,\hat{\xi}_j,\ldots,\xi_r\big),\;\; j=1,\ldots,r$$

Θα δειχθεί ότι καθένα από αυτά είναι μηδέν. Θα δειχθεί συγκεκριμένα για $j=1$ και ομοίως για τα υπόλοι-

4. Ο τύπος αυτός μπορεί να ληφθεί ως τοπικός ορισμός της εξωτερικής παραγώγου στο επιλεγμένο σύστημα αναφοράς, χωρίς αναφορά στην αντισυμμετρική κανονικοποίηση. Η ανεξαρτησία του οριζομένου μεγέθους από το σύστημα συντεταγμένων θα διασφαλιζόταν τότε αποδεικνύοντας ότι πρόκειται για την αντισυμμετρική κανονικοποίηση του τανυστικού πεδίου ω'.

πα. Από λήμμα, $(dx^1 \wedge \omega)(x\,;\,\xi_j) = (dx^1)(x\,;\,\xi_j) \wedge \omega(x) + dx^1(x) \wedge \omega'(x\,;\,\xi_j)$, άρα

$$(dx^1 \wedge \omega)(x\,;\,\xi_1)(\xi_2, \dots, \xi_r) = \sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma)\,(dx^1)'(\xi_1;\,\xi_{1\sigma}) \cdot \omega(x\,;\,\xi_{2\sigma}, \dots, \xi_{r\sigma}) +$$

$$\sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma)\;\, dx^1(x;\,\xi_{1\sigma}) \cdot \omega'(x\,;\,\xi_1)(\xi_{2\sigma}, \dots, \xi_{r\sigma})$$

Όμως $(dx^1)' = 0$ και ομοίως $\omega' = 0$, αφού $\omega = dx^2 \wedge \dots \wedge dx^r$ (οι ποσότητες που χαρακτηρίζουν τα τανυστικά πεδία dx^1, $dx^2 \wedge \dots \wedge dx^r$ είναι σταθερές), άρα $(dx^1 \wedge \omega)(x;\,\xi_1)(\xi_2, \dots, \xi_r) = 0$. ■

V.§2.4. Για κάθε $f \in C^1(U) = \Omega_0^1(U)$ και ω $C^{k\geq 1}$ διαφορική μορφή επί του U,

$$d(f \wedge \omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$$

Αποδ. Επειδή $f \wedge \omega = f\omega$, ισχύει $(f \wedge \omega)'(x) = f'(x)\,\omega(x) + f(x)\,\omega'(x)$, δηλαδή

$$(f \wedge \omega)'(x;\,\xi_2, \dots, \xi_r) + f(x) \cdot \omega'(x;\,\xi_1)(\xi_2, \dots, \xi_r)$$

Από τον ορισμό της εξωτερικής παραγώγου και την παραπάνω σχέση,

$$d(f \wedge \omega)(x\,;\,\xi_1, \dots, \xi_r) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} \Big(f'(x\,;\,\xi_j)\,\omega(x;\,\xi_2, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_r) + f(x) \cdot \omega'(x\,;\,\xi_1)(\xi_2, \dots, \xi_r) \Big) =$$

$$\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} f'(x;\,\xi_j)\,\omega(x;\,\xi_1, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_r) + \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} f(x)\,\omega'(x;\,\xi_1)(\xi_2, \dots, \xi_r) =$$

$$d(f \wedge \omega)(x;\,\xi_1, \dots, \xi_r) + (f \cdot d\omega)(x;\,\xi_1, \dots, \xi_r) \qquad ■$$

V.§2.5. $$d \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

Αποδ. Το δεξύ μέλος δίνει

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d(\omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \overset{\text{V.§2.4}}{=}$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \omega_{i_1 \dots i_r} d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r})$$

Ο δεύτερος προσθετέος είναι μηδέν (V.§2.3). ■

V.§2.6. Εάν $\omega \in \Omega_r(U)$, $\eta \in \Omega_s(U)$, τότε

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta$$

Αποδ. Αρκεί να δειχθεί για $\omega = f\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$, $\eta = g\, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}$. Ισχύει $\omega \wedge \eta = fg\;\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}$, επομένως

$$d(\omega \wedge \eta) = d(fg)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} =$$

$$df \cdot g\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} + f\, dg\;\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} =$$

$$(df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (g\, d \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}) +$$

$$(-1)^s (f\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (dg \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}) =$$

$$d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta$$

όπου ο παράγοντας $(-1)^r$ εμφανίζεται λόγω των ιδιοτήτων της εξωτερικής άλγεβρας. ■

V.§2.7. $d(d\omega) = 0$, δηλαδή $d^2 = 0$.

Αποδ. Έστω f λεία πραγματική συνάρτηση επί του U, οπότε $df = f' = \partial f/\partial x^i\, dx^i$. Από πρόταση V.§2.5, $d^2 f = d(\partial f/\partial x^i) \wedge dx^i$. Εφαρμόζοντας το ίδιο σκεπτικό, $d(\partial f/\partial x^i) = \partial/\partial x^j\, \partial f/\partial x^i\, dx^j$, επομένως $d^2 f = \partial^2 f/\partial x^i \partial x^j\, dx^j \wedge dx^i$. Παραγοντοποιώντας, και εφ' όσον $dx^i \wedge dx^j = dx^j \wedge dx^i$, το $d^2 f$ είναι άθροισμα από $(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j - \partial^2 f/\partial x^j \partial x^i) dx^i \wedge dx^j$, και εφ' όσον $\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j = \partial^2 f/\partial x^j \partial x^i$, έπεται ότι $d^2 f = 0$. Από αυτήν την παρατήρηση, και με διπλή εφαρμογή της V.§2.5, έπεται ζητούμενο. ■

Από την V.§2.7, συνάγεται ότι η εικόνα καθενός d του παρακάτω διαγράμματος περιέχεται στον πυρήνα του επομένου, $Im\, d \subset ker\, d$[5],

$$0\mathcal{A} \longrightarrow \Omega_0^\infty(U) \xrightarrow{d\varphi_{r,s}\varphi_{r,s}} \Omega_1^\infty(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_{n-1}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_n^\infty(M) \longrightarrow 0$$

Δεδομένης αμφιδιαφόρισης $\varphi : W \to U$, ο εφελκυσμός $\varphi^* : \Omega_r^\infty(U) \to \Omega_r^\infty(W)$ σέβεται την εξωτερική παράγωγο, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_r^\infty(U) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "d"'] & \Omega_r^\infty(W) \arrow[d, "d"] \\
\Omega_{r+1}^\infty(U) \arrow[r, "\varphi^*"'] & \Omega_{r+1}^\infty(W)
\end{tikzcd}$$

Αυτό αποδεικνύεται χάρις την πρόταση V.§2.5 και το γεγονός ότι η αντιμετάθεση $d(\varphi^* f) = \varphi^* df$ ισχύει τετριμμένα εάν f βαθμωτή συνάρτηση (κανόνας αλυσίδας):

$$\varphi^* d(\omega\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}) \overset{\text{V.§2.5}}{=} \varphi^*(d\omega \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}) =$$

$$\varphi^* d\omega \wedge \varphi^* dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi^* dx^{i_r} = d(\varphi^*\omega) \wedge d(\varphi^* x^{i_1}) \wedge \ldots \wedge d(\varphi^* x^{i_r}) =$$

$$d(\omega \circ \varphi) \wedge d(x^{i_1} \circ \varphi) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_r} \circ \varphi) = d\Big((\omega \circ \varphi) d(x^{i_1} \circ \varphi)\Big) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_r} \circ \varphi) =$$

$$d(\omega \circ \varphi) def \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{j=j_1 \ldots j_r}^{i=i_1 \ldots i_r} dz^{j_1} \wedge \ldots \wedge dz^{j_r} = d(\varphi^*\omega)$$

επομένως η φ^* είναι ισομορφισμός ανάμεσα στις διαβαθμισμένες άλγεβρες

$$\bigoplus_{r=0}^{m} \Omega_r^\infty(U), \qquad \bigoplus_{r=0}^{n} \Omega_r^\infty(W)$$

που επιπλέον διατηρεί την αντιδιαφόριση d με την οποία είναι εφοδιασμένες.

Η ανεξαρτησία της εξωτερικής παραγώγου διαφορικών μορφών πάνω σε ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ από το σύστημα συντεταγμένων επιτρέπει τον ορισμό της εξωτερικής παραγώγισου μορφών σε γενικές διαφορικές πολλαπλότητες. Η επόμενη πρόταση δηλώνει ότι αυτό όχι μόνον είναι εφικτό, αλλά επίσης μπορεί να γίνει με μοναδικό τρόπο ώστε η απεικόνιση d να ικανοποιεί ολικά τις ιδιότητες που της αποδίδουν οι προτάσεις V.§2.6 και V.§2.7, και μάλιστα κατά τρόπον ώστε σε τοπικά συστήματα συντεταγμένων να εκφράζεται από την σχέση (1).

---

5. Εάν το U είναι απλά συνεκτικό, η σειρά είναι *ακριβής*, δηλαδή $Im\, d \subset ker\, d$ για όλα τα d (λήμμα *Poincaré* για διαφορικές μορφές).

V.§2.8. (Η βαθμίδα $d : C^\infty(M) \to (TM)^*$ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο στον χώρο των λείων διαφορικών μορφών επί της M ως αντιδιαφόριση με μηδενικό τετράγωνο). Για κάθε διαφορική πολλαπλότητα M και κάθε $0 \le r \le n = dimM$ υπάρχουν μοναδικές γραμμικές απεικονίσεις $d : \Omega_r^\infty(M) \to \Omega_{r+1}^\infty(M)$ ώστε

(i) για κάθε $f \in C^\infty(M) = \Omega_0^\infty(M)$, df η βαθμίδα της f·

(ii) για κάθε $\omega \in \Omega_r^\infty(M)$, $\eta \in \Omega_s^\infty(M)$, ισχύει $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta$·

(iii) $d^2 = 0$.

Επιπλέον σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ ισχύει

$$d \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \left(\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{1r+1}}}{\partial x^{i_j}} \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{1+r}}$$

Αποδ. Βλ. [**Lee1**], σελ. 306, θεώρημα 12.14. ■

Δεδομένης αμφιδιαφόρισης $\varphi : N \to M$ μεταξύ πολλαπλοτήτων, ο εφελκυσμός φ^* σέβεται την εξωτερική παραγώγιση, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_r^\infty(M) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "d"'] & \Omega_r^\infty(N) \arrow[d, "d"] \\
\Omega_{r+1}^\infty(M) \arrow[r, "\varphi^*"'] & \Omega_{r+1}^\infty(N)
\end{tikzcd}$$

Επομένως ο φ^* δεν είναι μόνο ισομορφισμός διαβαθμισμένων αλγεβρών αλλά επίσης ισομορφισμός της δομής αντιδιαφόρισης με την οποία είναι εφοδιασμένες. Ειδικότερα το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό, $n = dim\, M = dim\, N$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_0^\infty(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^*"] & \Omega_1^\infty(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^*"] & \cdots \arrow[r, "d"] & \Omega_{n-1}^\infty(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^*"] & \Omega_n^\infty(M) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_0^\infty(N) \arrow[r, "d"'] & \Omega_1^\infty(N) \arrow[r, "d"'] & \cdots \arrow[r, "d"'] & \Omega_{n-1}^\infty(N) \arrow[r, "d"'] & \Omega_n^\infty(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

V.§2.9. Για κάθε λεία 1-μορφή ω επί της M και κάθε ζεύγος λείων διανυσματικών πεδίων ξ, η αυτής[(6)],

$$d\omega(\xi, \eta) = \partial_\xi \omega(\eta) - \partial_\eta \omega(\xi) - \omega([\xi, \eta])$$

Αποδ. Θα δειχθεί ότι για $\omega = udv$, $u, v \in C^\infty(M)$, εφ' όσον κάθε 1-μορφή γράφεται ως άθροισμα τέτοιων. Ισχύει $d(udv) = du \wedge dv + (-1)du \wedge d^2v = du \wedge dv$, άρα

$$d(udv)(\xi, \eta) = du \wedge dv(\xi, \eta) = du(\xi)dv(\eta) - dv(\xi)du(\eta) = \partial_\xi \eta\, \partial_\eta v - \partial_\xi v\, \partial_\eta u$$

Επίσης,

$$\partial_\xi\big(u\, dv(\eta)\big) - \partial_\eta\big(u\, dv(\xi)\big) - \eta\, dv([\xi, \eta]) = \partial_\xi\big(\eta\, \partial_\eta v\big) - \partial_\eta\big(u\, \partial_\xi v\big) - u\, \partial_{[\xi,\eta]} v =$$

$$\{\partial_\xi u\ \partial_\eta v + u\, \partial_\xi\, \partial_\eta v\} - \{\partial_\eta u\ \partial_\xi v + u\, \partial_\eta\, \partial_\xi v\} - \eta\big[\partial_\xi \partial_\eta v - \partial_\eta\, \partial_\xi v\big] = \partial_\xi u\ \partial_\eta v - \partial_\eta u\ \partial_\xi v \quad ■$$

---

6. Αποδυκνείεται με όμοιες αλλά πολυπλοκότερες πράξεις ότι για μορφή ω οποιασδήποτε τάξης r,

$$d\omega(\xi_1, \dots, \xi_{r+1}) = \sum_{1 \le i < j \le r+1} (-1)^{i-1} \partial_{\xi_i} \omega(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_{r+1}) + \sum_{1 \le i \le r+1} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_{r+1})$$

V.§2.10. (Η εξωτερική παράγωγος 1-μορφών έχει ιδιότητες δυικές εκείνων της παραγώγου *Lie* διανυσματικών πεδίων). Εάν $e_1, \dots, e_n$ τοπικό πλαίσιο λείων διανυσματικών πεδίων της M με $[e_j, e_k] = c_{jk}^i e_i$ και $\omega^1, \dots, \omega^n$ το δυϊκό πλαίσιο αυτού, τότε $d\omega = -c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$.

Αποδ. Πρέπει να δειχθεί ότι $d\omega^i(e_j, e_k) = -c_{jk}^i$. Από V.§2.9,

$$d\omega^i(e_j, e_k) = \partial_{e_j}\omega^i(e_k) - \partial_{e_k}\omega^i(e_j) - \omega^i([e_j, e_k]) =$$

$$\underbrace{\partial_{e_j}\delta_k^i}_{0} - \underbrace{\partial_{e_k}\delta_j^i}_{0} - \omega^i(c_{jk}^l e_l) = -c_{jk}^l \omega^i(e_l) = -c_{jk}^l \delta_l^i = -c_{jk}^i \qquad \blacksquare$$

Η επόμενη πρόταση είναι το πρώτο επαγωγικό βήμα στην απόδειξη της αντιμεταθετικότητας της εξωτερικής παραγώγου με την παράγωγο *Lie*.

V.§2.11. Για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ και $f \in C^\infty(M)$ ισχύει $L_\xi df = d(L_\xi f)$.

Αποδ. $(L_\xi df)(\eta) = \partial_\xi \underbrace{df(\eta)}_{\partial_\eta f} - \underbrace{df([\xi, \eta])}_{\partial_{[\xi,\eta]} f} = \partial_\xi \partial_\eta f - (\partial_\xi \partial_\eta - \partial_\eta \partial_\xi) f = \partial_\xi \partial_\eta f = d(\partial_\xi f)(\eta) \qquad \blacksquare$

Εάν $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, ορίζεται η **αντιπαράγωγος** της r-διαφορικής μορφής $\omega \in \Omega_r^\infty(M)$ ως προς το ξ ως η $(r-1)$-διαφορική μορφή

$$i_\xi \omega \in \Omega_{r-1}^\infty(M), \qquad i_\xi \omega(x\,;\, \xi_1, \dots, \xi_{r-1}) = \omega(x\,;\, \xi, \xi_1, \dots, \xi_{r-1})$$

Για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, η γραμμική απεικόνιση

$$i_\xi : \Omega_r^\infty(M) \to \Omega_{r-1}^\infty(M), \qquad \omega \longmapsto i_\xi \omega$$

έχει ιδιότητες ίδιες με εκείνες της εξωτερικής παραγώγου· συγκεκριμένα ${i_\xi}^2 = 0$ (εφ' όσον κάθε αντισυμμετρικός τανυστής μηδενίζεται από διπλό όρισμα) και $i_\xi(\omega \wedge \eta) = (i_\xi \omega) \wedge \eta + (-1)^r \wedge (i_\xi \eta)$, όπου r η τάξη της μορφής ω. Για να δειχθεί το τελευταίο, αρκεί να ελεγχθεί για μορφές που γράφονται ως γινόμενα 1-μορφών. Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά με τον συνήθη τρόπο· δίνεται εδώ μόνο το βασικό επαγωγικό βήμα: δεδομένων διαφορικών 1-μορφών ω, η, ισχύει $i_{\xi_1}(\omega \wedge \eta) = (i_{\xi_1}\omega)\eta - (i_{\xi_1}\eta)\omega$. Αυτό προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα

$$i_\xi(\omega^1, \dots, \omega^r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \omega^k(\xi_1)\, \omega^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}^k \wedge \dots \wedge \omega^r$$

που ισχύει διότι

$$\underbrace{\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r(\xi_1, \dots, \xi_r)}_{det\,(\xi_i^j)_{i,j}} = \underbrace{\sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \omega^k(\xi_1)\ \omega^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}^k \wedge \dots \wedge \omega^r(\xi_2, \dots, \xi_r)}_{\sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \xi_1^k\, det(\xi_i^j)_{i \neq 1, j \neq k}}$$

V.§2.12. (Τύπος του Cartan).

$$L_\xi \omega = i_\xi(d\omega) + d(i_\xi \omega)$$

Αποδ. Θα δειχθεί με επαγωγή στον βαθμό r της μορφής ω.

$r = 0$: $i_\xi(df) + \underbrace{d(i_\xi f)}_{0} = i_\xi(df) = df(\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi} = L_\xi f$·

$r = 1$: αρκεί να δειχθεί για $\omega = u\, dv$, $u, v \in C^\infty(M)$

$$L_\xi(u\, dv) = (L_\xi u)\, dv + u\, (L_\xi dv) = \partial_\xi u\, dv + u\, d(\partial_\xi v) \qquad (2)$$

$$i_\xi(d(u\, dv)) + d\left(i_\xi(u\, dv)\right) = i_\xi(du \wedge dv) + d(u\, i_\xi v) =$$

$$i_\xi(du) \wedge dv - du \wedge i_\xi(dv) + u\, d(\partial_\xi v) + \partial_\xi v\, du =$$

$$\partial_\xi u\, dv - \partial_\xi v\, du + u\, d(\partial_\xi v) + \partial_\xi v\, du$$

που ισούται με την (2). Υποθέτοντας ότι ισχύει για βαθμούς $\leq r$, θα δειχθεί ότι ισχύει για $r+1$: έστω

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{r+1}\leq n} \underbrace{\omega_{i_1\ldots i_r} dx^{i_1}}_{\alpha} \wedge \underbrace{\ldots \wedge dx^{i_r}}_{\beta}$$

Επειδή η $(r+1)$-μορφή ω γράφεται ως άθροισμα από $\alpha \wedge \beta$, όπου α 1-μορφή και β 1-μορφή, αρκεί να δειχθεί το ζητούμενο για μορφές αυτού του τύπου. Από επαγωγική υπόθεση,

$$L_\xi(\alpha \wedge \beta) = (L_\xi \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_\xi \beta) = \Big(i_\xi(d\alpha) + d\big(i_\xi \alpha\big)\Big) \wedge \beta + \alpha \wedge \Big(i_\xi(d\beta) + d\big(i_\xi \beta\big)\Big) \qquad (3)$$

Επίσης

$$i_\xi\big(d(\alpha \wedge \beta)\big) + d\big(i_\xi(\alpha \wedge \beta)\big) = i_\xi(d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta) + d\big((i_\xi \alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge (i_\xi \beta)\big) =$$

$$i_\xi(d\alpha) \wedge \beta + d\alpha \wedge i_\xi \beta - i_\xi a \wedge d\beta + \alpha \wedge i_\xi(d\beta) + d\big(i_\xi \alpha\big) \wedge \beta + i_\xi a \wedge d\beta - d\alpha \wedge i_\xi \beta + \alpha \wedge d(i_\xi \beta)$$

που ισούται με την ποσότητα (3). ■

V.§2.13. Για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ισχύει $d \circ L_\xi = L_\xi \circ d$.

Αποδ. $L_\xi d\omega = i_\xi d^2\omega + d\big(i_\xi(d\omega)\big) = d\big(i_\xi(d\omega)\big)$ και $dL_\xi \omega = d\big(i_\xi d\omega\big) + ddi_\xi \omega = d\big(i_\xi d\omega\big)$. ■

§3. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

Προσανατολισμός της διαφορικής πολλαπλότητας M ονομάζεται μια συνεχής συνάρτηση

$$or : M \to \{\pm 1\}$$

που σε κάθε $P \in M$ αντιστοιχίζει έναν προσανατολισμό του εφαπτόμενου χώρου $T_P M$. Η M καλείται **προσανατολίσιμη** όταν επιδέχεται προσανατολισμού· λόγω συνέχειας της or, αυτό ισοδυναμεί με την επιλογή ενός προσανατολισμού ± 1 για κάθε συνεκτική συνιστώσα της M. Προφανώς, μια πολλαπλότητα είναι προσανατολίσιμη εάν και μόνον εάν κάθε συνεκτική συνιστώσα αυτής είναι προσανατολίσιμη.

Δύο χάρτες $(U, \varphi), (V, \psi)$ μίας διαφορικής πολλαπλότητας ονομάζονται **συμβατά προσανατολισμένοι** όταν η αμφιδιαφόριση $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi[U \cap V] \to \psi[U \cap V]$ διατηρεί τον προσανατολισμό, δηλαδή όταν $det\ \psi \circ \varphi^{-1}(x)$ για κάποιο (και άρα για κάθε) $x \in \varphi[U \cap V]$.

Σε κάθε άτλαντα $\mathcal{A}$, η αντικατάσταση του χάρτη (U, φ) από τον $(U, r \circ \varphi)$, όπου r ανάκλαση ως προς ζεύγος συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$, δίνει έναν νέο άτλαντα στον οποίο οι συναρτήσεις μετάβασης που εμπίπτουν σε και ξεκινούν από το U συμπεριφέρονται ως προς τη διατήρηση του προσανατολισμού αντίθετα από τις αρχικές.

V.§3.0. Μια πολλαπλότητα είναι προσανατολίσιμη εάν και μόνον εάν επιδέχεται άτλαντα από συμβατά προσανατολισμένους χάρτες.

Αποδ. "$\Longrightarrow$,, Η προσανατολισιμότητα σημαίνει ότι γύρω από κάθε σημείο υπάρχει περιοχή τα σημεία της οποίας έχουν τον ίδιο προσανατολισμό με αυτό. Συλλέγοντας αυτές της περιοχές για κάθε σημείο της πολλαπλότητας, συγκροτείται ο ζητούμενος άτλας.

,,$\Longleftarrow$" Θεωρώντας ότι ο προσανατολισμός των χαρτών είναι ο ίδιος, ορίζεται καλά ο προσανατολισμός $or : M \to \{\pm 1\}$ ώστε $or(P)$ ο προσανατολισμός των χαρτών που περιέχουν το P (είναι συνεχής και σταθερός πάνω σε κάθε χάρτη). ■

Πλαίσιο κατά μήκος του βρόγχου γ μιας διαφορικής πολλαπλότητας M ονομάζεται μία επιλογή βάσης $e(t) = [e_1\big(\gamma(t)\big), \ldots, e_n\big(\gamma(t)\big)]$ του χώρου $T_{\gamma(t)}M$ που είναι συνεχής εξάρτηση του t (δηλαδή οι συναρτήσεις $e_i \circ \gamma$ είναι συνεχείς). Ένα πλαίσιο ονομάζεται **συμβατό** όταν $det\, T > 0$, όπου T ο γραμμικός αυτομορφισμός του $T_{\gamma(0)}M$ που ορίζεται από τις σχέσεις $Te_i(0) = e_i(1),\ i = 1, \ldots, n$.

Διατηρεί τον προσανατολισμό ο βρόγχος γ όταν κάποιο (κι επομένως κάθε) πλαίσιο κατά μήκος αυτού είναι συμβατό· **αντιστρέφει τον προσανατολισμό** όταν κάποιο (κι επομένως κάθε) πλαίσιο κατά μήκος αυτού είναι μη συμβατό. (Έστω $e(t),\ \sigma(t)$ πλαίσια επί του γ και $A(t) = \sigma(t)\, e(t)^{-1}$ ο γραμμικός αυτομορ-

φισμός του $T_{\gamma(t)}M$ που στέλνει τη μια βάση στην άλλη· το A είναι συνεχής εξάρτηση του t, επομένως οι βάσεις $e(t)$, $\sigma(t)$ έχουν μονίμως τον ίδιο ή αντίθετο προσανατολισμό. Άρα ο γ είτε διατηρεί είτε αντιστρέφει τον προσανατολισμό και των δύο).

V.§3.1. Μια διαφορική πολλαπλότητα είναι προσανατολίσιμη εάν και μόνον εάν κάθε βρόγχος σ' αυτήν διατηρεί τον προσανατολισμό.

Αποδ. "$\Longrightarrow$,, Έστω or προσανατολισμός της M, γ βρόγχος που στηρίζεται στο P αντιστρέφοντας τον προσανατολισμό και e πλαίσιο κατά μήκος του γ με $sgn\ det\ e(0) = or(P)$. Λόγω συνέχειας του or ισχύει $sgn\ det\ e(t) = or(\gamma(t)) = or(P)$ για κάθε t. Όμως $sgn\ det\ e(1) \neq sgn\ det\ e(0)$ εφ' όσον ο γ αντιστρέφει τον προσανατολισμό, δηλαδή $or(\gamma(1)) \neq or(P)$, άτοπο, διότι $\gamma(1) = P$.

,,$\Longleftarrow$" Θα δειχθεί ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα M' της M είναι προσανατολίσιμη. Επιλέγουμε $P_o \in M'$ για κάθε $p \in M'$ ορίζεται $or(P) = \pm or(P_o)$, αναλόγως εάν κάθε καμπύλη γ από το P_o στο P διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό (δύο καμπύλες γ_1, γ_2 από το P_o στο P συμπεριφέρονται το ίδιο ως προς την αλλαγή προσανατολισμού, αλλιώς ο βρόγχος γ θα άλλαζε τον προσανατολισμό, άτοπο, εξ υποθέσεως). Η or είναι συνεχής εφ' όσον ορίζεται μέσω συνεχούς μεταφοράς πλαισίων, άρα είναι προσανατολισμός. ■

V.§3.2. Εάν δύο λεία μονοπάτια με κοινό αρχικό και τελικό σημεία είναι ομοτοπικά μέσω τμηματικά λείας ομοτοπίας, τότε είτε και τα δύο διατηρούν είτε και τα δύο αντιστρέφουν τον προσανατολισμό.

Αποδ. Έστω γ_1, γ_2 όπως στην υπόθεση και F η ομοτοπία, $F(0,\cdot) = \gamma_1$, $F(1,\cdot) = \gamma_2$. Έστω e συνεχές πλαίσιο κατά μήκος του γ_1 και g ρημάννεια μετρική επί της πολλαπλότητας. Προκύπτει τότε πλαίσιο σ μήκος του γ_2, με $\sigma_i(t)$ να είναι η παράλληλη μεταφορά του $e_i(t)$ κατά μήκος της καμπύλης $F(s,t)$, $s \in [0,1]$ (βλ. VII.§.0). Τότε $e(0) = \sigma(0)$, $e(1) = \sigma(1)$, άρα η καμπύλη γ_2 επιδρά στον προσανατολισμό του σ όπως η καμπύλη γ_1 στον προσανατολισμό του e. ■

Εφ' όσον κάθε κλάσση ομοτοπίας σε μια διαφορική πολλαπλότητα περιέχει λείο βρόγχο ([**DNF2**], σελ. 77-78) και οποιοιδήποτε δύο ομοτοπικοί λείοι βρόγχοι συνδέονται μέσω λείας ομοτοπίας, έπεται το ακόλουθο.

V.§3.3. Θεμελιώδης ομάδα μη προσανατολίσιμης διαφορικής πολλαπλότητας είναι μη τετριμμένη· συγκεκριμένα, απεικονίζεται ομομορφικά επί της $\mathbb{Z}_2$.

Αποδ. Από πρόταση V.§3.2, ορίζεται καλά ο ομοιομορφισμός

$$\varphi : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2, \qquad \varphi[\gamma] = \begin{cases} +1, \text{ εάν ο } \gamma \text{ διατηρεί τον προσανατολισμό} \\ -1, \text{ εάν ο } \gamma \text{ αντιστρέφει τον προσανατολισμό} \end{cases} \qquad ■$$

V.§3.4. Κάθε απλά συνεκτική διαφορική πολλαπλότητα είναι προσανατολίσιμη.

Αποδ. Άμεσα, από V.§3.2. ■

Θα δοθεί τώρα χαρακτηρισμός της προσανατολισιμότητας με χρήση διαφορικών n-μορφών. Εάν ω είναι μη μηδενική n-μορφή επί του διανυσματικού χώρου V και $e_1, \dots, e_n$ είναι βάση αυτού, τότε για κάθε γραμμικό αυτομορφισμό T του V ισχύει

$$\omega(Te_1, \dots, Te_n) = det\ T\ \ \omega(e_1, \dots, e_n)$$

Επομένως το πρόσημο $sgn\ \omega$ είναι σταθερό πάνω στις δύο κλάσεις προσανατολισμού της συλλογή των βάσεων του V· συγκεκριμένα, για κάθε επιλογή βάσεων $e'_1, \dots, e'_n$; $e''_1, \dots, e''_n$ με προσανατολισμό ίδιο και αντίθετο με εκείνον της βάσης $e_1, \dots, e_n$ αντιστοίχως,

$$\text{εάν } \omega(e_1, \dots, e_n) > 0 \text{ τότε } \omega(e'_1, \dots, e'_n) > 0 \text{ και } \omega(e''_1, \dots, e''_n) < 0$$

$$\text{εάν } \omega(e_1, \dots, e_n) < 0 \text{ τότε } \omega(e'_1, \dots, e'_n) < 0 \text{ και } \omega(e''_1, \dots, e''_n) > 0$$

Επομένως, δεδομένου προσανατολισμού του διανυσματικού χώρου V, οι μη μηδενικές διαφορικές n-μορφές διαμερίζονται σε δύο κλάσσεις, με κριτήριο το πρόσημο που δίνουν στις βάσεις που συμφωνούν με τον επιλεγμένο προσανατολισμό. Προφανώς αυτή η σχέση ισοδυναμίας είναι η ισότητα πάνω από θετικό πολλαπλασιαστικό παράγοντα.

V.§3.5. Η προσανατολισιμότητα διαφορικής πολλαπλότητας διάστασης n ισοδυναμεί με την ύπαρξη διαφορικής n-μορφής που δεν μηδενίζεται πουθενά (**στοιχείο όγκου**).

Αποδ. Έστω ω διαφορική n-μορφή επί της πολλαπλότητας M που δεν μηδενίζεται πουθενά, καμπύλη γ στην M και πλαίσιο e κατά μήκος αυτής. Λόγω συνέχειας, το πρόσημο $sgn\ \omega(e(t))$ είναι ίδιο για όλα τα t, και επομένως η τυχαία καμπύλη γ διατηρεί τον προσανατολισμό. Αντιθέτως, εάν η M είναι μη προσανατολίσιμη, οπότε υπάρχει καμπύλη γ που αντιστρέφει τον προσανατολισμό, επιλέγοντας πλαίσιο e κατά μήκος αυτής, το πρόσημο της συνεχούς ποσότητας $\omega(e(t))$ μηδενίζεται για κάποιο t, για οποιαδήποτε διαφορική n-μορφή ω. ■

V.§3.6. Υποπολλαπλότητα προσανατολίσιμης πολλαπλότητας είναι προσανατολίσιμη.

Αποδ. Άμεσα από V.§3.5. ■

V.§3.7. Κάθε παραλληλοποιήσιμη πολλαπλότητα είναι προσανατολίσιμη.

Αποδ. Εάν $\omega_1, \dots, \omega_n$ ολικό πλαίσιο της συνεφαπτόμενης δέσμης, τότε $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ διαφορική n-μορφή που δεν μηδενίζεται πουθενά. ■

§4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι **μηδενικού n-διάστατου μέτρου *Lebesgue*** όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει κάλυψη $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ αυτού από n-διάστατους ανοικτούς κύβους ώστε

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} vol(C_i) < \varepsilon$$

Δεδομένης φραγμένης συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ φραγμένη, όπου $A \subset \mathbb{R}^n$ n-διάστατο κλειστό ορθογώνιο, ορίζονται για κάθε διαμέριση $P = (P_j)_j$ του A από κλειστούς n-διάστατους κύβους[7] οι ποσότητες

$$L(f,P) = \sum_j (\inf_{P_j} f)\ vol(P_j), \qquad U(f,P) = \sum_j (\sup_{P_j} f)\ vol(P_j)$$

και

$$\underline{\int_A} f dv = sup\ \{\ L(f,P) \mid P \text{ διαμέριση του } A \text{ από } n\text{-διάστατους κύβους}\}$$

$$\overline{\int_A} f dv = inf\ \{\ U(f,P) \mid P \text{ διαμέριση του } A \text{ από } n\text{-διάστατους κύβους}\}$$

Η f καλείται ***Riemann*-ολοκληρώσιμη** στο A όταν

$$\underline{\int_A} f dv = \overline{\int_A} f dv \in \mathbb{R}$$

Συμβολίζεται

$$\int_A f dv$$

αυτός ο αριθμός. Από την θεωρία ολοκλήρωσης είναι γνωστό το επόμενο.

V.§4.0. (Κριτήριο *Lebesgue*). Μια φραγμένη συνάρτηση πάνω σε n-διάστατο ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη εάν και μόνον εάν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας αυτής είναι μηδενικού n-διάστατου μετρου.

---

7. Η P δεν είναι διαμέριση με την αυστηρή έννοια, αφού οι γειτονικοί κύβοι τέμνονται στα σύνορά τους. Ωστόσο αυτές οι τομές είναι μηδενικού n-διάστατου μέτρου *Lebesgue*, επομένως δεν έχουν σημασία σε ό,τι ακολουθεί, και τα εσωτερικά διακεκριμένων κύβων είναι πάντοτε ξένα.

Ένα $D \subset \mathbb{R}^n$ καλείται **χωρίο ολοκλήρωσης** όταν είναι φραγμένο και το ∂D είναι μηδενικού n-διάστατου μέτρου. Από το Θεώρημα Sard συνάγεται ότι κάθε φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο μία r-διάστατη επιφάνεια, $r < n$, είναι χωρίο ολοκλήρωσης.

Δεδομένης φραγμένης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ πάνω σε φραγμένο σύνολο, συμβολίζεται

$$\int_D f dv \equiv \int_A \chi_D f \, dv$$

όπου A κλειστό n-διάστατο ορθογώνιο που περιέχει το D, και η f ονομάζεται ***Riemann*-ολοκληρώσιμη** επί του D όταν αυτός ο αριθμός υπάρχει. Εάν υπάρχει, τότε είναι προφανώς ανεξάρτητος της επιλογής του A. Εάν η f είναι συνεχής στο D, οπότε η $\chi_D f$ έχει όλα της τα σημεία ασυνέχειας στο ∂D, τότε συνδυάζοντας τον ορισμό του χωρίου ολοκλήρωσης με την V.§4.0, συνάγεται ότι

V.§4.1. Κάθε συνεχής φραγμένη συνάρτηση ορισμένη σε πεδίο ολοκλήρωσης είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη.

Επομένως μπορεί να γίνεται ελεύθερα λόγος για ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων πάνω σε χωρία φραγμένα, των οποίων το σύνορο είναι επιφάνεια διάστασης χαμηλότερης από την διάσταση του χώρου.

V.§4.2. Συνεχής συνάρτηση πάνω σε κλειστό (δηλ. συμπαγές) πεδίο ολοκλήρωσης είναι Riemann-ολοκληρώσιμη.

Αποδ. Άμεσα, από V.§4.1. ■

Ορίζεται ο n-**διάστατος όγκος** ενός πεδίου ολοκλήρωσης $D \subset \mathbb{R}^n$ ως

$$vol(D) = \int_D 1 \, dv$$

δηλαδή το n-διάστατο μέτρο *Lebesgue* του D. Είναι γνωστό το επόμενο από την θεωρία ολοκλήρωσης.

V.§4.3. Εάν $D, E \subset \mathbb{R}^n$ πεδία ολοκλήρωσης, $\varphi : D \to E$ λεία απεικόνιση ώστε η $\varphi|_{intD} : intD \to intE$ να είναι αμφιδιαφόριση και $f : E \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη, τότε

$$\int_E f dv = \int_D (f \circ \varphi) \left| det \, d\varphi \right| dv$$

V.§4.4. Εάν $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, όπου $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και K συμπαγές, υπάρχει συμπαγές χωρίο ολοκλήρωσης $D \subset \mathbb{R}^n$ με $K \subset D \subset U$.

Αποδ. Καλύπτουμε το K με πεπερασμένες το πλήθος μπάλες $\bar{B}_i \subset U$, $i = 1, \dots, n$ και λαμβάνουμε $D = B_1 \cup \dots \cup B_n$. Τότε $\partial D \subset \partial \bar{B}_1 \cup \dots \cup \partial \bar{B}_n$ είναι μηδενικού n-διάστατου μέτρου, εφ' όσον κάθε $\partial \bar{B}_i$ είναι μηδενικού μέτρου (Θεώρημα *Sard*). Άρα το συμπαγές D είναι το ζητούμενο. ■

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με το σύνηθες δεξιόστροφο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ και μία συνεχή διαφορική n-μορφή ω σε αυτόν. Εάν $A = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ ορθογώνιο εντός του $\mathbb{R}^n$, συμβολίζεται $P_N, N \in \mathbb{N}$, η διαμέριση αυτού σε ορθογώνια η οποία προκύπτει διαιρώντας σε N ισομήκη διαστήματα κάθε μία από τις πλευρές $[a^i, b^i]$ του A με βήμα $(b^i - a^i)/N$ για , $i = 1, \dots, n$ αντιστοίχως. Συμβολίζουμε $\mathcal{P}(P_N)$ μία επιλογή σημείων από κάθε ορθογώνιο της διαμέρισης P_N και $\xi_N^i = (0, \dots, 0, \Delta x_N^i, 0, \dots, 0)$. Ορίζεται το ολοκλήρωμα της $\omega = f \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ στο ορθογώνιο A ως

$$\int_A \omega = \lim_{N \to \infty} \sum_{x \in \mathcal{P}(P_n)} \omega(x \, ; \xi_1, \dots, \xi_n) = \lim_{N \to \infty} \sum_{x \in \mathcal{P}(P_n)} f(x) \underbrace{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r(x; \xi_1, \dots, \xi_n)}_{\left|(\xi_N^1, \dots, \xi_N^n)\right| \, = \, \Delta x_N^1 \dots \Delta x_N^n}$$

Το άθροισμα στο δεύτερο μέλος είναι το άθροισμα *Riemann* για την συνάρτηση f πάνω στο A, που είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας διαμερίσεων και συγκλίνει, επομένως

$$\int_A \omega = \int_A f \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_A f \, dx^1, \dots, dx^n$$

Ορίζεται γενικότερα το ολοκλήρωμα συνεχούς διαφορικής n-μορφής πάνω σε οποιοδήποτε χωρίο ολοκλήρωσης D ως

$$\int_D \omega = \int_A \omega$$

όπου A οποιοδήποτε ορθογώνιο που περιέχει το D (ορισμός ανεξάρτητος της επιλογής του A).

Για οποιοδήποτε ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$ και κάθε διαφορική n-μορφή ω με συμπαγές στήριγμα στο U, ορίζεται το ολοκλήρωμα της ω στο U ως

$$\int_U \omega = \int_D \omega$$

όπου D οποιοδήποτε συμπαγές πεδίο ολοκλήρωσης τέτοιο ώστε $supp\omega \subset D \subset U$ (V.§4.4). Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του D.

Έστω τώρα τμήμα r-διάστατης επιφάνειας $x : \mathbb{R}^n \supset U \to x[U] = S \subset \mathbb{R}^n$ και

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \omega_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$$

συνεχής διαφορική r-μορφή επί του $\mathbb{R}^n$ με συμπαγές στήριγμα. Ορίζεται το ολοκλήρωμα της ω στο επιφανειακό τμήμα S να είναι το ολοκλήρωμα του εφελκυσμού αυτής υπό την εμφύτευση x,

$$\int_S \omega = \int_U x^*(\omega|_S)$$

δηλαδή (V.§2.2),

$$\int_S \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \omega_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} = \int_U \left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} (\omega_{i_1 \ldots i_r} \circ x) \; det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right)_{\substack{i = i_1 \ldots i_r \\ j = j_1 \ldots j_r}} \right) dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^r$$

V.§4.5. Εάν $D, E \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγή πεδία ολοκλήρωσης, ω συνεχής διαφορική n-μορφή επί του E και $\varphi : D \to E$ λεία απεικόνιση ώστε ο περιορισμός $\varphi|_{intD}$ να είναι αμφιδιαφόριση μεταξύ των εσωτερικών, τότε

$$\int_E \omega = \begin{cases} +\int_D \varphi^*\omega, \text{ εάν η } \varphi|_{intD} \text{ διατηρεί τον προσανατολισμό} \\ -\int_D \varphi^*\omega, \text{ εάν η } \varphi|_{intD} \text{ αλλάζει τον προσανατολισμό} \end{cases}$$

Αποδ. Εάν $y^1, \ldots, y^n$; $x^1, \ldots, x^n$ συστήματα συντεταγμένων για τα E, D αντιστοίχως ώστε

$$\varphi(x^1, \ldots, x^n) = \left(y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n(x^1, \ldots, x^n)\right), \text{ τότε}$$

$$\int_E \omega = \int_E f \, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = \int_E f \, dy^1 \ldots dy^n = \int_D (f \circ \varphi) \left| det \, d\varphi \right| dx^1 \ldots dx^n =$$

$$\pm \int_D (f \circ \varphi) \, (det \, d\varphi) \, dx^1 \ldots dx^n = \pm \int_D \varphi^*\omega \qquad \blacksquare$$

V.§4.6. Εάν $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά, $\varphi : U \to V$ αμφιδιαφόριση και ω διαφορική n-μορφή με συμπαγές στήριγμα στο V, τότε

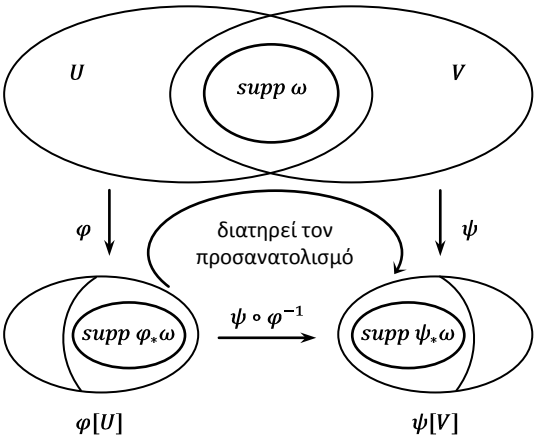
$$\int_V \omega = \begin{cases} +\int_U \varphi^*\omega, \text{ εάν η } \varphi \text{ διατηρεί τον προσανατολισμό} \\ -\int_U \varphi^*\omega, \text{ εάν η } \varphi \text{ αντιστρέφει τον προσανατολισμό} \end{cases}$$

Αποδ. Επιλέγουμε E συμπαγές ώστε $supp\varphi \subset E \subset V$. Επειδή οι αμφιδιαφορίσεις διατηρούν τα εσωτερικά, τα σύνορα και τα μηδενικά μέτρα, $\varphi^{-1}[E]$ συμπαγές πεδίο ολοκλήρωσης με $supp\ \varphi^*\omega \subset \varphi^{-1}[E] \subset U$. Το ζητούμενο έπεται εφαρμόζοντας την V.§4.5 για τα πεδία ολοκλήρωσης E, $\varphi^{-1}[E]$. ■

Έστω ω διαφορική n-μορφή επί της πολλαπλότητας M, με συμπαγές στήριγμα στον τοπικό χάρτη (U, φ). Ορίζεται το ολοκλήρωμα αυτής στο U ως

$$\int_U \omega = \int_{\varphi[U]} \varphi_*\omega$$

και η προσανατολισιμότητα της M εγγυάται ότι αυτό είναι ανεξάρτητο του τοπικού συστήματος συντεταγμένων: έστω (V, ψ) τοπικός χάρτης της M ώστε $supp\omega \subset U \cap V$. Λόγω προσανατολισιμότητας, η συνάρτηση μετάβασης $\psi \circ \varphi^{-1}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι διατηρεί τον προσανατολισμό.



Επομένως

$$\int_{\varphi[U]} \varphi_*\omega = \int_{\varphi[U\cap V]} \varphi_*\omega = \int_{(\psi\circ\varphi^{-1})\circ\varphi[U\cap V]} (\psi \circ \varphi^{-1})_*\varphi_*\omega =$$

$$\int_{\psi[U\cap V]} \psi_*\varphi^*\varphi_*\omega = \int_{\psi[U\cap V]} \psi_*\omega = \int_{\psi[V]} \psi_*\omega$$

Ορίζεται το ολοκλήρωμα της διαφορικής n-μορφής ω με συμπαγές στήριγμα επί της προσανατολίσιμης πολλαπλότητας M ως

$$\int_M \omega = \sum_{a\in\mathcal{A}} \int_{U_i} \varphi_a\omega \qquad (1)$$

όπου $(U_a)_{a\in\mathcal{A}}$ άτλας της M και $(\varphi_a)_{a\in\mathcal{A}}$ διαμέριση μονάδας υποκείμενη σε αυτόν (οπότε η μορφή $\varphi_a\omega$ έχει συμπαγές στήριγμα στο U_a). Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος του άτλαντα και της διαμέρισης μονάδας που χρησιμοποιούνται: εάν $(V_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ άλλος άτλας και $(\psi_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ υποκείμενη σε αυτόν διαμέριση της μονάδας, οπότε $(U_a \cap V_\beta)_{a,\beta}$ άτλας επίσης με υποκείμενη διαμέριση $(\varphi_a\psi_\beta)_{a,\beta}$, τότε

$$\sum_a\sum_\beta \int_{U_a\cap V_\beta} \varphi_a\psi_\beta\omega = \sum_a\sum_\beta \int_{U_a\cap V_\beta} \psi_\beta(\varphi_a\omega) = \sum_a \int_{U_a} \varphi_a\omega$$

και ομοίως

$$\sum_{a}\sum_{\beta}\int_{U_a\cap V_\beta}\varphi_a\psi_\beta\omega=\sum_{\beta}\int_{V_\beta}\psi_\beta\omega$$

Εάν ω διαφορική n-μορφή επί της M και $N\subset M$ r-διάστατη υποπολλαπλότητα ώστε η $\omega\big|_N$ να έχει συμπαγές στήριγμα εντός της N, ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_M\omega=\int_N\omega\big|_N=\int_N i^*\omega$$

όπου $i:N\to M$ η εμφύτευση.

Ελέγχονται εύκολα οι ταυτότητες

$$\int_{M^+}\omega=-\int_{M^-}\omega\,,\quad \int_M a\omega+\beta\eta=a\int_M\omega+\beta\int_M\eta$$

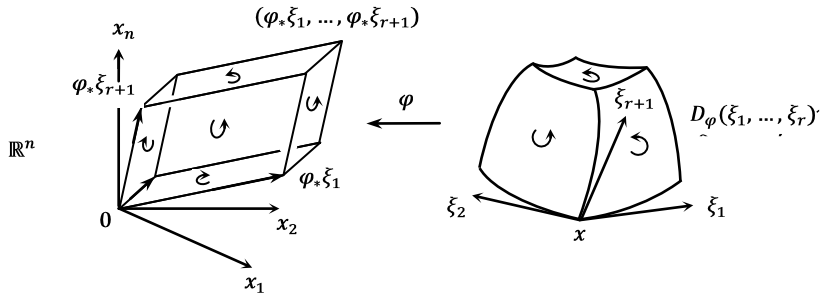
όπου M^+,M^- η πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με τους δύο προσανατολισμούς της. Επίσης, εάν $\varphi:N\to M$ αμφιδιαφόριση, τότε

$$\int_M\omega=\begin{cases}+\int_N\varphi^*\omega, & \text{εάν η } \varphi \text{ διατηρεί τον προσανατολισμό}\\ -\int_N\varphi^*\omega, & \text{εάν η } \varphi \text{ αντιστρέφει τον προσανατολισμό}\end{cases}$$

Έστω (U,φ) τοπικός χάρτης γύρω από το $x\in M$ με $\varphi(x)=0\in\mathbb{R}^n$. Εάν $\xi_1,\dots,\xi_{r+1}\in T_xM$, τότε τα $\varphi_*\xi_1,\dots,\varphi_*\xi_{r+1}$ συγκροτούν προσανατολισμένο παραλληλεπίπεδο $(\varphi_*\xi_1,\dots,\varphi_*\xi_{r+1})$ εντός του T_0M (εννοώντας ότι ο προσανατολισμός του $(\varphi_*\xi_1,\dots,\varphi_*\xi_{r+1})$ είναι ίδιος με τον προσανατολισμό του $T_0\mathbb{R}^n\simeq\mathbb{R}^n$ και συμπίπτει με εκείνον της M). Ο $\mathbb{R}^n$ ταυτίζεται φυσιολογικά με τον εφαπτόμενο χώρο του στο 0, επομένως το $(\varphi_*\xi_1,\dots,\varphi_*\xi_{r+1})$ μπορεί να θεωρηθεί ως $(r+1)$-διάστατο παραλληλεπίπεδο εντός του $\mathbb{R}^n$ με γωνία στο 0. Εάν τα διανύσματα $\varphi_*\xi_1,\dots,\varphi_*\xi_n$ είναι επαρκώς μικρά ώστε να περιέχονται στο $\varphi[U]$, συμβολίζουμε

$$D_\varphi(\xi_1,\dots,\xi_{r+1})=\varphi^{-1}(\varphi_*\xi_1,\dots,\varphi_*\xi_{r+1})$$

που είναι $(r+1)$-διάστατη υποπολλαπλότητα της M με σύνορο, το οποίο ενδεχομένως έχει γωνίες. Τότε η $\partial D_\varphi(\xi_1,\dots,\xi_{r+1})$ είναι r-διάστατη υποπολλαπλότητα της M, ενδεχομένως με γωνίες, διφφεομορφική με την επιφάνεια του $(r+1)$-διάστατου παραλληλεπιπέδου $(\varphi_*\xi_1,\dots,\varphi_*\xi_{r+1})$ και με τον προσανατολισμό που επάγεται σε αυτήν από αυτό μέσω της απεικόνισης φ (διατηρεί τον προσανατολισμό).



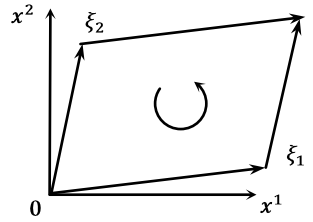
V.§4.7. Εάν ω είναι r-μορφή επί της πολλαπλότητας M και $\xi_1,\dots,\xi_{r+1}\in T_xM$, τότε για κάθε τοπικό χάρτη (U,φ) γύρω από το x τέτοιον ώστε $\varphi[U]=\mathbb{R}^n$ και $\varphi(x)=0$, και κάθε $\xi_1,\dots,\xi_{r+1}\in T_xM$, ισχύει

$$\int_{D_\varphi(\varepsilon\xi_1,\dots,\varepsilon\xi_{r+1})}\omega=\varepsilon^{r+1}\,d\omega(x\,;\,\xi_1,\dots,\xi_{r+1})+o(\varepsilon^{r+1})$$

Αποδ. Θα δειχθεί για $r = 1,\ \ n = 2,$ αφού οι πράξεις στην γενική περίπτωση είναι όμοιες αλλά μακροσκελέστερες (πρέπει να γίνει ολοκλήρωση σε επιφανειακά αντί σε ευθύγραμμα τμήματα). Εάν x^1, x^2 το σύστημα συντεταγμένων που σχετίζεται με τον χάρτη (U, φ), οι διαφορικές μορφές $\omega, d\omega$ εκφράζονται τοπικά ως

$$\omega = \omega_i dx^1 \text{ και } d\omega = -\frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2 = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1$$

(το σύστημα $x^1,\ \ x^2$ μπορεί να επιλεγεί ώστε το dx^2 να μην εμφανίζεται στην έκφραση του ω). Ο υπολογισμός θα γίνει στο επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή $0 = x,\ \ \varphi_* \xi_i = \xi_i$.



Το σύνορο του παραλληλογράμμου ξ_1, ξ_2 συγκροτείται από τις απεικονίσεις του διαστήματος $[0,1]$ εντός του $\mathbb{R}^n,\ \ t\xi_1,\ \ \xi_1 + t\xi_2,\ \ \xi_2 + t\xi_1,\ \ t\xi_2$. Το ολοκλήρωμα της μορφής ω στο προσανατολισμένο σύνορο ∂D του ξ_1, ξ_2 είναι τότε

$$\int_{\partial D} \omega = \int_0^1 \left\{ \big(\omega_1(t\xi_1) - \omega_1(\xi_2 + t\xi_1)\big) \underbrace{dx^1(\xi_1)}_{\xi_1^1} - \big(\omega_1(t\xi_2) - \omega_1(\xi_1 + t\xi_2)\big) \underbrace{dx^1(\xi_2)}_{\xi_2^1} \right\} dt \qquad (2)$$

Όμως από τον ορισμό της μερικής παραγώγου πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών,

$$\omega_1(\xi_2 + t\xi_1) - \omega_1(t\xi_1) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} \xi_2^1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} \xi_2^2 + o(|\xi|^2, |\eta|^2)$$

και

$$\omega_1(\xi_1 + t\xi_2) - \omega_1(t\xi_2) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} \xi_1^1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} \xi_1^2 + o(|\xi|^2, |\eta|^2)$$

Αντικαθιστώντας στην (2),

$$\int_{\partial D} \omega = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \underbrace{(\xi_1^2 \xi_2^1 - \xi_1^1 \xi_2^2)}_{dx^2 \wedge dx^1(0;\, \xi_1, \xi_2)} + o\big(|\xi|^2, |\eta|^2\big) = d\omega(0;\, \xi_1, \xi_2) + o\big(|\xi|^2, |\eta|^2\big) \qquad \blacksquare$$

Ο τύπος της V.§4.7 είναι η γεωμετρική ερμηνεία της εξωτερικής παραγώγου: λαμβάνοντας υπ' όψιν την πολυγραμμικότητα της απεικόνισης $d\omega(x)$, ο τύπος γίνεται

$$\int_{D_\varphi(\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{r+1})} \omega = d\omega(x\,;\, \varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{r+1}) + o(\varepsilon^{r+1}) \qquad (3)$$

Καθώς $\varepsilon \to 0$, δηλαδή καθώς ο «όγκος» του χωρίου $D_\varphi(\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{r+1})$ μικραίνει, η ποσότητα $d\omega(x\,;\, \varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{r+1})$ προσεγγίζει την ροή της διαφορικής μορφής ω μέσα από το χωρίο $D_\varphi(\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{r+1})$,

$$\int_{D_\varphi(\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{r+1})} \omega \simeq d\omega(x\,;\, \varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{r+1}) \text{ για } \varepsilon \ll 1$$

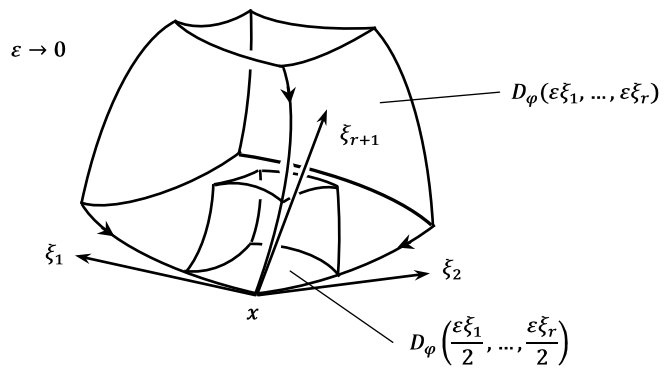
Από τον τύπο της V.§4.7 λαμβάνουμε επίσης

$$d\omega(x\,;\, \xi_1, \dots, \xi_{r+1}) = \frac{\int_{D_\varphi(\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{r+1})} \omega - o(\varepsilon^{r+1})}{\varepsilon^{r+1}}$$

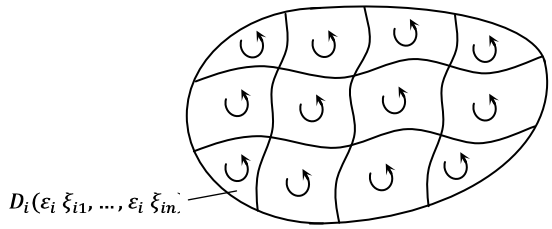
απ' όπου το όριο

$$d\omega(x\,;\,\xi_1,\dots,\xi_{r+1}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon^{r+1}}\right)^n \int\limits_{D_\varphi(\varepsilon\xi_1,\dots,\varepsilon\xi_r)} \omega$$

Επομένως η ποσότητα $d\omega(x;\,\xi_1,\dots,\xi_{r+1})$ είναι οριακά ο ρυθμός με τον οποίον η διαφορική μορφή ω ρέει μέσα από το χωρίο $D_\varphi(\varepsilon\xi_1,\dots,\varepsilon\xi_r)$ καθώς αυτό συρρικνώνεται σε σημείο,



Ο τύπος (3) δίνει μια εποπτική εξήγηση του θεωρήματος Stokes. Διαμερίζοντας την πολλαπλότητα M σε n-διάστατα χωρία της μορφής $D_\varphi(\varepsilon\xi_1,\dots,\varepsilon\xi_{r+1})$ και αθροίζοντας πάνω στην διαμέριση,



$$\sum_{i=1}^{m} d\omega(x_i;\,\varepsilon_i\,\xi_{i1},\dots,\varepsilon_i\,\xi_{in}) + \sum_{i=1}^{m}\sigma(\varepsilon_i^n) = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{D(\varepsilon_i\,\xi_{i1},\dots,\varepsilon_i\,\xi_{in})}\omega = \int_{\partial M}\omega$$

Λαμβάνοντας το όριο για $m\to\infty$ (δηλαδή καθώς $max_i\,\varepsilon_i \to 0$), προκύπτει ο τύπος του Stokes.

Λήμμα. Για κάθε $(n-1)$-μορφή ω με συμπαγές στήριγμα στο $H^n = \{(x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n \,|x^n \geq 0\}$, ισχύει

$$\int\limits_H d\omega = \int\limits_{\partial H^n}\omega$$

Αποδ. Λόγω συμπάγειας του $supp\,\omega$, υπάρχει $R>0$ τέτοιο ώστε $supp\omega \subset A = [-R,R]\times\dots\times[-R,R]\times[0,R]$ και $supp\omega \cap \partial A$. Εάν

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,dx^1\wedge\dots\wedge d\hat{x}^i\wedge\dots\wedge dx^n$$

τότε

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} d\omega_i\wedge dx^1\wedge\dots\wedge d\hat{x}^i\wedge\dots\wedge dx^n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^i}dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$$

Επομένως

$$\int_{\mathrm{H}^n} d\omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int_A \frac{\partial\omega_i}{\partial x^i}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int_0^R\int_{-R}^R\ldots\int_{-R}^{\mathrm{R}}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^i}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n \qquad (4)$$

Όμως

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int_0^R\int_{-R}^R\ldots\int_{-R}^{\mathrm{R}}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^i}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int_0^R\int_{-R}^R\ldots\int_{-R}^{\mathrm{R}}\underbrace{\omega_i\big|_{x^i=-R}^{x^i=R}}_{0}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^i\wedge\ldots\wedge dx^n = 0 \qquad (5)$$

Άρα

$$(4)\overset{(5)}{=}\int_{H^n} d\omega = (-1)^{n-1}\int_{-R}^R\ldots\int_{-R}^{\mathrm{R}}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^i}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n+1} =$$

$$(-1)^{n-1}\int_{-R}^R\ldots\int_{-R}^{\mathrm{R}}\omega_n\big|_{x^n=0}^{x^n=r}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n-1} = (-1)^{n-1}\int_{-R}^R\ldots\int_{-R}^{\mathrm{R}}\omega_n(x^1,\ldots x^{n-1},0)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n-1} \qquad (6)$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή $\omega_n\big|_{x^n=0} = 0$ $(supp\omega\cap\partial A=\emptyset)$.

Θα υπολογιστεί το δεξύ μέλος της ζητούμενης ισότητας,

$$\int_{\partial H^n}\omega = \sum_{i=1}^{n}\int_{A\cap\partial H^n}\omega_i\,(x^1,\ldots x^{n-1},0)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$$

Εφ' όσον $x^n\big|_{\partial H^n} = 0,\ dx^n\big|_{\partial H^n} = 0$ επίσης, επομένως

$$\int_{\partial H^n}\omega = (-1)^{n-1}\int_{-R}^R\ldots\int_{-R}^{\mathrm{R}}\omega_n(x^1,\ldots x^{n-1},0)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n-1}$$

που ισούται με την ποσότητα (6) (το $(-1)^n$ εμφανίζεται επειδή εάν το σύστημα $x^1,\ldots,x^n$ είναι θετικά προσανατολισμένο, το $x^1,\ldots,x^{n-1}$ είναι θετικά προσανατολισμένο ακριβώς όταν το n είναι άρτιος). ■

V.§4.8. (Stokes).

Εάν ω $C^{k\geq1}$ διαφορική $(n-1)$-μορφή με συμπαγές στήριγμα επί προσανατολίσιμης πολλαπλότητας M,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega$$

Αποδ. Εάν $supp\omega\subset U$ και (U,φ) χάρτης της M, επιλέγοντας την φ ώστε να διατηρεί τον προσανατολισμό, $\varphi[U]=\mathbb{R}^n$ και $\varphi[U\cap\partial M]=\partial H^n$,

$$\int_M d\omega = \int_{H^n}\varphi^*d\omega = \int_{H^n}d(\varphi^*\omega)\overset{(\textit{Λήμμα})}{=}\int_{\partial H^n}\varphi^*\omega = \int_{\partial M}\omega$$

Αλλιώς επιλέγουμε προσανατολισμένο άτλαντα $(U_a)_a$ της M και υποκείμενη σε αυτόν διαμέριση της μονάδας $(\varphi_a)_a$,

$$\int_{\partial M}\omega = \sum_a\int_{\partial M}\varphi_a\omega = \sum_a\int_U\varphi_a\omega = \sum_a\int_U d(\varphi_a\omega) = \sum_a\int_M d(\varphi_a\omega) =$$

$$\sum_a \int_M (d\varphi_a \wedge \omega + \varphi_a\, d\omega) = \int_M d\,\underbrace{(\Sigma_a \varphi_a)}_{0} \wedge \omega + \int_M \underbrace{(\Sigma_a \varphi_a)}_{1}\, d\omega = 0 + \int_M d\omega$$

Τα επόμενα είναι άμεσα πορίσματα του Θεωρήματος Stokes.

V.§4.9. Για κάθε $(n-1)$-μορφή ω επί συμπαγούς πολλαπλότητας M,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

V.§4.10. Εάν $\partial M \neq 0$, τότε

$$\int_{\partial M} d\omega = 0$$

για κάθε $(n-1)$-μορφή επί της M με συμπαγές στήριγμα.

V.§4.11. Σε κάθε κλειστή (δηλ. συμπαγή χωρίς σύνορο) πολλαπλότητα M, για κάθε $(n-1)$-μορφή ισχύει

$$\int_{\partial M} \omega = 0$$

V.§4.12. Για κάθε $(n-1)$-μορφή επί της πολλαπλότητας M,

$$d\omega = 0 \Rightarrow \int_{\partial M} \omega = 0$$

για κάθε ω $(n-1)$-μορφή με συμπαγές στήριγμα.

V.§4.13. Για κάθε ω $(n-1)$-μορφή επί συμπαγούς πολλαπλότητας M,

$$d\omega = 0 \Rightarrow \int_{\partial M} \omega = 0$$

§5. ΟΓΚΟΣ

Η ρημάννεια μετρική είναι ένας κανόνας με τον οποίον μεταβάλλεται η κλίμακα μέτρησης μήκους εφαπτόμενων διανυσμάτων πάνω σε μία διαφορική πολλαπλότητα. Επομένως, είναι επίσης ένας κανόνας με τον οποίον μεταβάλλεται η κλίμακα μέτρησης όγκου n-διάστατων παραλληλεπιπέδων σε κάθε εφαπτόμενο χώρο (συγκροτείται από εφαπτόμενα διανύσματα), δηλαδή ένας κανόνας μέτρησης απειροστών όγκων στις διάφορες θέσεις της πολλαπλότητας. Μελετώνται μόνο προσανατολίσιμες ρημάννειες πολλαπλότητες.

Έστω (M, g) ρημάννεια πολλαπλότητα, $P \in M$ και $x^1, \dots, x^n$ τοπικό σύστημα συντεταγμένων γύρω από το P, για τον τοπικό χάρτη (U, φ). Ως g-όγκος (ή όγκος) του n-διάστατου παραλληλεπιπέδου $\xi_1, \dots, \xi_n$ στον $T_P M$ που συγκροτείται από τα $\xi_1, \dots, \xi_n \in T_P M$ εννοείται ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που συγκροτείται από τον εφελκυσμό των $\xi_1, \dots, \xi_n$ στον $\mathbb{R}^n$ υπό την φ, διορθωμένος κατά τον παράγοντα με τον οποίον η φ παραμορφώνει γύρω από το P τον ευκλείδιο χώρο,

$$vol(\xi_1, \dots, \xi_n) = \left|det\ \varphi^{-1}\right|_{\varphi(P)} \cdot \left|(\varphi^* \xi_1, \dots, \varphi^* \xi_n)\right|$$

ισοδύναμα, ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που προκύπτει από δράση του γραμμικού μετασχηματισμού $d\varphi^{-1}\big|_{\varphi(P)}$ στο παραλληλεπίπεδο $(\varphi_* \xi_1, \dots, \varphi_* \xi_n) \subset \mathbb{R}^n$. Όμως ο όγκος του $(\varphi_* \xi_1, \dots, \varphi_* \xi_n)$ δίνεται από την δράση της διαφορικής μορφής $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ και $\left|det\ \varphi^{-1}\big(\varphi(P)\big)\right| = \sqrt{det\ {}^{(x)}g_{ij}(P)}$, όπου $g = {}^{(x)}g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ η τοπική έκφραση της μετρικής. Επομένως,

$$vol(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sqrt{det\ {}^{(x)}g_{ij}(P)_{i,j}}\ dx^i \wedge \dots \wedge dx^n (P\,;\, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

Ο όγκος του $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ είναι ανεξάρτητος του συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό του, διότι η ποσότητα $\sqrt{det\left({}^{(x)}g_{ij}\right)_{i,j}}\ dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ έχει την ίδια έκφραση στο τυχαίο σύστημα συντεταγμένων $z^1, \dots, z^n$ γύρω από το P:

$$\sqrt{det\left({}^{(x)}g_{ij}\right)_{i,j}}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sqrt{det\left({}^{(x)}g_{ij}\right)_{i,j}}\, det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{i,j} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n =$$

$$\sqrt{det\left({}^{(x)}g_{ij}\right)_{i,j}\left(det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{i,j}\right)^2} dz^1 \wedge \dots dz^n = \sqrt{det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{i,j} det\left({}^{(x)}g_{ij}\right)_{i,j} det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{i,j}} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n =$$

$$\sqrt{det\left(\frac{\partial x^j}{\partial z^i}\right)_{i,j}\left({}^{(x)}g_{ij}\right)_{i,j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{i,j}} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n = \sqrt{det(\underbrace{{}^{(x)}g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^l}{\partial z^i}}_{{}^{(z)}g_{ij}})_{i,j}}\ dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$$

Ονομάζεται **ρημάννειο στοιχείο όγκου** της ρημάννειας πολλαπλότητας (M, g) η διαφορική n-μορφή dv που σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ εκφράζεται ως

$$dv = \sqrt{det\left({}^{(x)}g_{ij}\right)_{i,j}}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

V.§5.0. Το ρημάννειο στοιχείο όγκου της (M, g) είναι το μοναδικό στοιχείο όγκου που δρά σε κάθε g-ορθοκανονική βάση επιστρέφοντας την μονάδα.

Αποδ. Έστω $e_1, \dots, e_n$ ορθοκανονική βάση του T_PM και $x^1, \dots, x^n$ σύστημα συντεταγμένων γύρω από το P τέτοιο ώστε $e_i = \partial/\partial x^i\big|_P$, $i = 1, \dots, n$. Τότε ${}^{(x)}g_{ij}(P) = \delta_{ij}$, επομένως

$$dv(P; e_1, \dots, e_n) = 1 \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(P; e_1, \dots, e_n) = 1$$

δηλαδή το στοιχείο όγκου δρά σε κάθε ορθοκανονική βάση επιστρέφοντας την μονάδα. Για την μοναδικότητα, έστω $\omega = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ διαφορική n-μορφή με αυτήν την ιδιότητα και $x^1, \dots, x^n$ τοπικό σύστημα ώστε $\partial/\partial x^i\,(P), i = 1, \dots, n$ η ορθοκανονική βάση του T_PM. Τότε

$$f(P)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(P)\right) = \sqrt{det\big(g_{ij}(P)\big)_{i,j}}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(P)\right)$$

άρα $f(P) = \sqrt{det\big(g_{ij}(P)\big)_{i,j}}$. ■

Επειδή μια γεωμετρική έννοια ολοκλήρωσης πρέπει να λαμβάνει υπ' όψιν τους όγκους στοιχειωδών παραλληλεπιπέδων στις διάφορες θέσεις του πεδίου ολοκλήρωσης, ορίζεται το ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : M \to \mathbb{R}$ επί της ρημάννειας πολλαπλότητας (M, g) ως το ολοκλήρωμα της διαφορικής μορφής $f\, dv$,

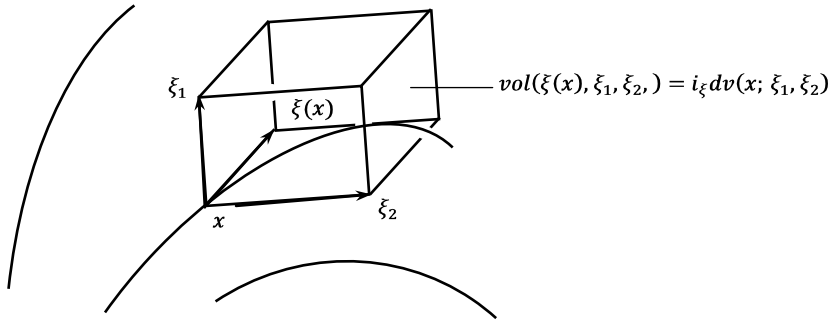
$$\int_{(M,g)} f = \int_M f dv$$

όπου dv το στοιχείο όγκου της (M, g). Ως **όγκος** της συμπαγούς ρημάννειας πολλαπλότητας (M, g) εννοείται ο αριθμός

$$vol(M, g) = \int_M 1\, dv$$

Εάν $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, τότε $i_\xi dv$ είναι η διαφορική n-μορφή που δρά σε κάθε $(n-1)$-άδα εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο P επιστρέφοντας τον προσανατολισμένο όγκο του n-διάστατου εφαπτόμενου παραλληλεπιπέδου που συγκροτείται από αυτά και το διάνυσμα $\xi(P)$,

$$i_\xi dv\,(P; \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = dv(P; \xi(P), \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = vol(\xi(P), \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$



V.§5.1. Εάν S $(n-1)$-διάστατη πολλαπλότητα της n-διάστατης, προσανατολισμένης ρημάννειας πολλαπλότητας (M, g) και η το μοναδιαίο g-κάθετο στην S διανυσματικό πεδίο που συμφωνεί με τον επιλεγμένο προσανατολισμό της M, τότε για το στοιχείο όγκου $d\tilde{v}$ της επαγόμενης από την M ρημάννειας μετρικής επί της S ισχύει

$$d\tilde{v} = (i_\eta dv)\big|_s$$

Αποδ. Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ γύρω από το τυχαίο σημείο $P \in M$ για τον χάρτη (U, φ) ώστε $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$. Τότε

$$d\tilde{v}(P; \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \left|(\varphi_*\xi, \varphi_*\xi_1, \dots, \varphi_*\xi_{n-1})\right| =< \varphi_*\xi, \varphi_*\eta > \left|(\varphi_*\xi_1, \dots, \varphi_*\xi_{n-1})\right| \qquad \text{και}$$

$$d\tilde{v}(P; \eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \left|(\varphi_*\eta, \varphi_*\xi_1, \dots, \varphi_*\xi_{n-1})\right|$$

που ισούνται, εφ' όσον $\varphi_*\eta \perp \varphi_*\xi_i$, $\forall i = 1, \dots, n-1$ και $\left|\varphi_*\eta\right| = 1$. ■

V.§5.2. Έστω S $(n-1)$-διάστατη υποπολλαπλότητα της προσανατολισμένης ρημάννειας πολλαπλότητας (M, g) και $\xi \in \mathfrak{X}(M)$. Εάν η το μοναδιαίο κάθετο στην S διανυσματικό πεδίο που συμφωνεί με τον επιλεγμένο προσανατολισμό και $d\tilde{v}$ το στοιχείο όγκου της επαγόμενης από την g ρημάννειας μετρικής επί της S, τότε

$$\left(i_\xi dv\right)\big|_s =< \xi, \eta > d\tilde{v}$$

Αποδ. Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ γύρω από τυχαίο σημείο $P \in M$ για τον χάρτη (U, f) ώστε $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$. Τότε

$$i_\xi dv(P; \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = dv(P; \xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \left|(\varphi^*\xi, \varphi^*\xi_1, \dots, \varphi^*\xi_n)\right| =$$

$$< \varphi^*\xi, \varphi^*\eta > \left|(\varphi^*\xi_1, \dots, \varphi^*\xi_{n-1})\right| = \xi^i\eta^i\left|(\varphi^*\xi_1, \dots, \varphi^*\xi_{n-1})\right| =< \xi, \eta >_g d\tilde{v}(P; \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$

εφ' όσον $\varphi^*\eta \perp \varphi^*\xi_i$ και $\left|\varphi^*\eta\right| = 1$. ■

Ορίζεται μέσω της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας

$$* : C^\infty(M) = \mathcal{A}_0(M) \to \mathcal{A}_n(M), \qquad f \longmapsto * f = f\, dv$$

ο **τελεστής απόκλισης** ως

$$div : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M), \qquad \xi \longmapsto div\xi = *^{-1} d\left(i_\xi(dv)\right)$$

Επομένως η απόκλιση του πεδίου ξ είναι η μοναδική λεία βαθμωτή συνάρτηση $div\, \xi$ τέτοια ώστε

$$(div\xi)dv = d(i_\xi dv)$$

V.§5.3. (Θεώρημα Απόκλισης).

Σε κάθε προσανατολισμένη ρημάννεια πολλαπλότητα (M, g) με σύνορο, εάν η το μοναδιαίο κάθετο δι-

ανυσματικό πεδίο στην ∂M που συμφωνεί με τον επιλεγμένο προσανατολισμό και $d\tilde{v}$ το στοιχείο όγκου της επαγόμενης από την g στο σύνορο μετρικής, για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ με συμπαγές στήριγμα ισχύει

$$\int_M div\xi \, dv = \int_{\partial M} < \xi, \eta >_g \, d\tilde{v}$$

Αποδ. Εξ ορισμού της απόκλισης,

$$\int_M div\xi \, dv = \int_M d\big(i_\xi dv\big)$$

Εφ' όσον το ξ έχει συμπαγή φορέα, η $i_\xi dv$ έχει συμπαγή φορέα επίσης, επομένως εφαρμόζοντας το θεώρημα Stokes,

$$\int_M div\xi \, dv = \int_{\partial M} i_\xi dv \overset{\text{V.§5.2}}{=} \int_{\partial M} < \xi, \eta > d\tilde{v} \qquad \blacksquare$$

Ένα $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ λείο διανυσματικό πεδίο στην προσανατολίσιμη ρημάννεια πολλαπλότητα (M, g) **διατηρεί**, **αυξάνει**, **μειώνει**, **δεν μειώνει**, **δεν αυξάνει τον όγκο** όταν για κάθε συμπαγές χωρίο ολοκλήρωσης $D \subset M$ και κάθε t για το οποίο ορίζεται το $\varphi_t[D]$, όπου φ η ροή πεδίου ξ,

$$vol(\varphi_t[D]) \;\; =, \; >, \; <, \; \geq, \; \leq \;\; vol(D) \text{ αντιστοίχως}$$

Ισχύει

$$vol(\varphi_t[D]) = \int_{\varphi_t[D]} dv = \int_D \varphi_t^* dv$$

που είναι λεία εξάρτηση του t, επομένως

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} vol(\varphi_t[D]) = \int_D \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^* dv) = \int_D \varphi_{t_0}^* L_\xi dv \qquad (1)$$

Όμως

$$L_\xi dv = \underbrace{i_\xi d(dv)}_{0} + d\big(i_\xi dv\big) = (div\,\xi) dv$$

επομένως η (1) δίνει (εφ' όσον $ddv = 0$ ως $(n+1)$-αντισυμμετρικός τανυστής)

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} vol(\varphi_t[D]) = \int_D \varphi_{t_0}^*(div\xi \, dv) = \int_{\varphi_{t_0}[D]} div\xi \, dv$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την συνέχεια της συνάρτησης $div\xi$, συνάγεται ότι

V.§5.4. Για κάθε λείο πεδίο ξ επί της προσανατολίσιμης ρημάννειας πολλαπλότητας (M, g) με ροή φ και κάθε $D \subset M$ συμπαγές χωρίο ολοκλήρωσης, ισχύει

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} vol(\varphi_t[D]) = \int_{\varphi_{t_0}[D]} div\xi \, dv \text{ και } L_\xi dv = div\xi \, dv$$

Το πεδίο διατηρεί, δεν μειώνει, δεν αυξάνει τον όγκο εάν και μόνον εάν $div\xi = 0, div\xi \geq 0, div\xi \leq 0$ παντού αντιστοίχως. Εάν $div\xi > 0, div\xi < 0$ παντού, τότε το πεδίο αυξάνει, μειώνει τον όγκο αντιστοίχως.

§6. ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΕ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Καλείται **μηδενοχώρος** των 1-μορφών $\omega^1, \dots, \omega^r$ επί του διανυσματικού χώρου V ο υπόχωρος

$$ann(\omega^1, \dots, \omega^r) \equiv \bigcap_{i=r+1}^{n} ker\omega^i$$

που έχει διάσταση $n-r$ εάν και μόνον εάν οι μορφές ω^i είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Για κάθε γραμμικό υπόχωρο σ με $dim\sigma = n-r$ υπάρχουν 1-μορφές $\omega^1, \dots, \omega^r$ ώστε $\sigma = ann(\omega^1, \dots, \omega^r)$: επεκτείνοντας μια βάση $\omega_{n-r}, \dots, \omega_n$ του σ σε βάση $\omega_1, \dots, \omega_n$ ολόκληρου του χώρου, οι δυϊκές μορφές των βασικών διανυσμάτων που επισυνάφθηκαν δίνουν τις ζητούμενες. Όλες οι r-άδες γραμμικώς ανεξάρτητων 1-μορφών που μηδενίζουν τον υπόχωρο σ προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο:

V.§6.0. Εάν $ann(\omega^1, \dots, \omega^r) = ann(\eta^1, \dots, \eta^r)$, οι $\omega^1, \dots, \omega^r$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες εάν και μόνον εάν οι $\eta^1, \dots, \eta^r$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, και σε αυτήν την περίπτωση $\omega^i = c^i_j w^j$, όπου $(c^i_j)_{i,j}$ αντιστρέψιμος πίνακας.

Αποδ. "$\Longrightarrow$" Έστω $\omega_1, \dots, \omega_r$; $\eta_1, \dots, \eta_r$ τα αντίστοιχα συστήματα δυϊκών διανυσμάτων και $\omega_1, \dots, \omega_n$; $\eta_1, \dots, \eta_n$ οι αντίστοιχες επεκτάσεις αυτών σε βάσεις του χώρου. Εξ υποθέσεως, $span\,\{\omega^{r+1}, \dots, \omega^n\} = span\,\{\eta^{r+1}, \dots, \eta^n\}$, οπότε $span\,\{\omega^1, \dots, \omega^r\} = span\,\{\eta^1, \dots, \eta^r\}$ επίσης. Τότε ο πίνακας αλλαγής βάσης από $\omega_1, \dots, \omega_n$ σε $\eta_1, \dots, \eta_n$ είναι της μορφής

$$n-r\left\{\begin{pmatrix} & & & 0 & \cdots & 0 \\ & * & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & * & \\ 0 & \cdots & 0 & & & \end{pmatrix}\right. = (a^i_j)_{i,j}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{r}$$

δηλαδή $\eta_i = a^i_j \omega_i$. Από IV.§1.0 έπεται ότι $\omega^i = a^i_j \eta^j$ και από την μορφή του $(a^i_j)_{i,j}$ έπεται το ζητούμενο.
"$\Longleftarrow$" Άμεσο. ■

Η **συνεφαπτόμενη δέσμη**, T^*M, της διαφορικής πολλαπλότητας M είναι η διανυσματική δέσμη που προκύπτουν επισυνάπτοντας σε κάθε $P \in M$ τον δυϊκό του αντίστοιχου εφαπτόμενου χώρου, $(T_P M)^*$,

$$T^*M = \coprod_{P \in M} (T_P M)^*$$

Επειδή οι χώροι $T_P M, (T_P M)^*$ είναι αλγεβρικά ισόμορφοι, συνάγεται ότι η συνεφαπτόμενη δέσμη είναι διφφεομορφική της εφαπτόμενης, με την δράση των 1-μορφών να ερμηνεύονται κατά τα γνωστά ως ροή των δυϊκών διανυσματικών πεδίων.

V.§6.1. Σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ μιας πολλαπλότητας M και σε κάθε σημείο P που καλύπτεται από αυτό ισχύει

$$\bigcap_{i=i_1,\dots,i_r} ker\, dx^i(p) = span\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right\}_{i \neq i_1 \dots i_r}$$

Αποδ. Άμεσα, από IV.§1.1. ■

Γράφουμε συμβολικά

$$\bigcap_{i=i_1,\dots,i_r} ker\, dx^i = span\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i \neq i_1 \dots i_r}$$

και ονομάζουμε την οικογένεια $\{dx^i\}_{i=i_1,\dots,i_r}$ **εκμηδενιστή** της συλλογής πεδίων $\{\partial/\partial x^i\}_{i \neq i_1,\dots,i_r}$.

Κάθε τοπικό πλαίσιο της TM αντιστοιχεί από τα γνωστά σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων, επομένως η προηγούμενη πρόταση διατυπώνεται γενικότερα ως εξής.

V.§6.2. Για κάθε τοπικό πλαίσιο $\omega_1, \dots, \omega_n$ της εφαπτόμενης δέσμης με δυϊκό πλαίσιο $\omega^1, \dots, \omega^n$, και για κάθε r-άδα $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, ισχύει

$$\bigcap_{i=i_1,\dots,i_r} ker\omega^i = span\,(\omega_1)_{i \neq i_1,\dots,i_r}$$

όπου $\omega^i = \omega_i^*$ η δυϊκή 1-μορφή του πεδίου ω_i.

r-**διάστατη κατανομή** επί της πολλαπλότητας M, $r \leq n = dimM$, καλείται μια r-διάστατη διανυσματική υποδέσμη $D \subset TM$ (δηλαδή μια λεία επισύναψη r-διάστατων γραμμικών υποχώρων του αντίστοιχου εφαπτόμενου χώρου σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας). Επειδή το τοπικό πεδίο ξ στην M είναι λείο εάν και μόνον εάν η δυϊκή 1-μορφή είναι λεία, από την περιγραφή των λείων υποδεσμών με τοπικά πλαίσια συνάγεται άμεσα το ακόλουθο.

V.§6.3. Η r-διάστατη διανυσματική υποδέσμη $D \subset TM$ είναι κατανομή εάν και μόνον εάν γύρω από κάθε σημείο της M υπάρχει τοπικό πλαίσιο $\omega^1, \dots, \omega^n$ της συνεφαπτόμενης δέσμης TM^* ώστε για κάθε σημείο P στην περιοχή αυτή να ισχύει $D_P = ann\big(\omega^1(P), \dots, \omega^{n-r}(P)\big)$.

Γράφουμε συμβολικά

$$D = ann(\omega^1, \dots, \omega^{n-r})$$

στην περιοχή αυτή. Η πρόταση V.§6.3 δηλώνει ότι η υποδέσμη D της εφαπτόμενης δέσμης είναι r-διάστατη κατανομή εάν και μόνον εάν γύρω από κάθε σημείο, υπάρχει τοπικό πλαίσιο της συνεφαπτόμενης δέσμης ώστε $n-r$ από τις μορφές αυτού να συγκροτούν εκμηδενιστή της D.

Μια $(n-r)$-άδα τοπικών διαφορικών 1-μορφών $\omega^1, \dots, \omega^{n-r}$ καλείται **σύστημα τοπικά οριζουσών** της r-διάστατης κατανομής $D \subset TM$ στην περιοχή U όταν επεκτείνεται τοπικά σε πλαίσιο $\omega^1, \dots, \omega^{n-r}, \dots, \omega^n$ της TM^* στο U τέτοιο ώστε $D = ann(\omega^1, \dots, \omega^{n-r})$ στην περιοχή αυτή.

V.§6.4. Εάν $\omega^1, \dots, \omega^{n-r}$ σύστημα τοπικά οριζουσών την r-υποδέσμη D στην περιοχή U, τότε τα συστήματα τοπικά οριζουσών την D στην U είναι ακριβώς οι $(n-r)$-άδες της μορφής $f^i_j\, \omega^j$, $i = 1, \dots, n-r$, όπου $f^i_j \in C^\infty(U)$ με $det\big(f^i_j\big)_{i,j} \neq 0$ παντού στο U.

Αποδ. Συνδυάζοντας την πρόταση V.§6.0 με την απαίτηση της λειότητας. ■

Μια διαφορική s-μορφή ω επί της M καλείται **μηδενίζουσα** της κατανομής $D \subset TM$ όταν $\omega(P; \xi_1, \dots, \xi_s) = 0$ για κάθε $\xi_1, \dots, \xi_s \in D_P$ και κάθε $P \in M$. Ελέγχεται εύκολα το ακόλουθο:

V.§6.5. Μια 1-μορφή είναι μηδενίζουσα της D όταν σε κάθε τοπικό πλαίσιο γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός συστήματος τοπικά οριζουσών την D.

V.§6.6. Η διαφορική s-μορφή η επί της M είναι μηδενίζουσα της r-διάστατης κατανομής $D \subset TM$ εάν και μόνον εάν για κάθε σύστημα τοπικά οριζουσών 1-μορφών $\omega^1, \dots, \omega^{n-r}$ της D, εκφράζεται τοπικά ως

$$\eta = \sum_{i=1}^{n-r} \omega^i \wedge \beta^i$$

για κάποιες $(s-1)$-μορφές $\beta^1, \dots, \beta^{n-r}$ στην περιοχή αυτή.

Αποδ. "$\Longrightarrow$" Άμεσο.

"$\Longleftarrow$" Επεκτείνουμε το δυϊκό πλαίσιο $\omega_1, \dots, \omega_{n-r}$ σε τοπικό πλαίσιο $\omega_1, \dots, \omega_n$ της εφαπτόμενης δέσμης, οπότε $D_P = ann\big(\omega^1(P), \dots, \omega^{n-r}(P)\big)$ για κάθε P στην περιοχή αυτή. Η η εκφράζεται τοπικά ως

$$\eta = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq n}^{n-r} \eta_{i_1 \dots i_s} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_s}$$

όπου

$$\eta_{i_1 \dots i_s}(P) = \eta\left(\omega_{i_1}(P), \dots, \omega_{i_s}(P)\right)$$

Άρα η η είναι μηδενίζουσα εάν και μόνον εάν οι $\eta_{i_1 \dots i_s}$, $n-r+1 \leq i_1, \dots, i_s$ είναι ταυτοτικά μηδενικές συναρτήσεις. Σε αυτήν την περίπτωση,

$$\eta = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq n \\ i_1 \leq n-r}}^{n-r} \eta_{i_1 \dots i_s} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_s} = \sum_{i=1}^{n-r} \omega^i \wedge \underbrace{\sum_{2 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq n} \eta_{i\, i_1 \dots i_s}\, \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_s}}_{\beta^i}$$

Ορίζεται η **κάθετη διανυσματική δέσμη** της κατανομής D στην πολλαπλότητα M ως

$$N(D) = \coprod_{P\in M} T_pM/D_p$$

που είναι $(n-r)$-διάστατη διανυσματική δέσμη επί της M [8]. Για κάθε $P \in M$ συμβολίζεται

$$(\cdot)/D_p : T_pM \to T_pM/D_p\,, \qquad \xi_p \to \xi_p/D_p$$

η προβολή στον συμπληρωματικό υπόχωρο του D_p, οπότε ορίζεται η προβολή στην κάθετη δέσμη ως

$$(\cdot)/D_p : \mathfrak{X}(M) \to \Sigma\big(N(D)\big), \qquad \xi \to \xi/D$$

Ορίζεται με βάση τα παραπάνω η απεικόνιση **συστροφή** για την κατανομή $D = \coprod_{P\in M} D_p$ ως

$$\tau : \coprod_{P\in M} D_p \times D_p \to N(D)\,, \qquad \tau\big(\xi_p, \eta_p\big) = ([\xi,\eta]/D)(P)$$

όπου ξ, η λείες επεκτάσεις των ξ_p, η_p τέτοιες ώστε $\xi(P), \eta(P) \in D_p$ για κάθε $P \in M$. Το $\tau\big(\xi_p, \eta_p\big)$ είναι ανεξάρτητο των επεκτάσεων ξ, η: Αρχικά θα δειχθεί ότι η ποσότητα $[\xi,\eta]/D$ είναι $C^\infty(U)$ γραμμική. Ισχύει $[f\xi, g\eta] = fg[\xi,\eta] + f\,\partial_\xi g\,\eta - g\,\partial_\eta f\xi$, επομένως $[f\xi, g\eta]/D = fg[\xi,\eta]/D$. Εάν $e_1, \dots, e_n$ τοπικό πλαίσιο της D στην περιοχή U του P, οπότε η επέκταση ξ γράφεται ως $\xi = \xi^i e_i$, από την προηγούμενη παρατήρηση έπεται ότι $[\xi,\eta]/D = \xi^i\,[e_i,\eta]/D$, άρα $([\xi,\eta]/D)(P) = 0$ όταν $\xi(P) = \xi_p$ ή $\eta(P) = \eta_p$. Επομένως εάν $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ και ξ, η πεδία γύρω από το P που είναι στην D και συμφωνούν στο P, τότε

$$([\tilde{\xi},\tilde{\eta}]/D)(P) = ([\tilde{\xi}-\xi,\tilde{\eta}]/D)(P) + ([\xi,\tilde{\eta}]/D)(P) = ([\xi,\tilde{\eta}]/D)(P) = ([\xi,\eta]/D)(P)$$

Έστω D κατανομή συνδυάστασης 1, οπότε σε κάθε επαρκώς μικρή περιοχή U η D είναι ο μηδενοχώρος κάποιας διαφορικής 1-μορφής ω. Από V.§6.4, η D είναι στην περιοχή U ο μηδενοχώρος των διαφορικών 1-μορφών του τύπου $f\omega$, $f \in C^\infty(U)$ με $f \neq 0$ παντού. Εάν η δέσμη $N(D)$ είναι προσανατολίσιμη, τότε με κατάλληλες συγκολλήσεις κατασκευάζεται ολική 1-μορφή ω επί της M ώστε $D_P = ker\,\omega(P)$ για κάθε $P \in M$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $D = ker\,\omega$.

Ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της r-διάστατης κατανομής

$$D = \coprod_{P\in M} D_P$$

καλείται μια r-δάστατη υποπολλαπλότητα $N \subset M$ τέτοια ώστε $T_PN = D_P$ για κάθε $P \in N$. **Ολικά ολοκληρώσιμη** καλείται η r-διάστατη κατανομή D όταν από κάθε $P \in M$ διέρχεται ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα αυτής. **Τοπικά ολοκληρώσιμη** γύρω από το P καλείται η κατανομή D όταν το P έχει ανοικτή περιοχή $U \subset M$ ώστε ο περιορισμός $D\big|_U = \coprod_{Q\in U} D_P$ να είναι ολοκληρώσιμη κατανομή.

Οι 1-διάστατες κατανομές επί της πολλαπλότητας M είναι τα διανυσματικά πεδία επ' αυτής που δεν μηδενίζονται πουθενά. Συγκεκριμένα, κάθε 1-διάστατη κατανομή είναι μια κλάση ισοδυναμίας στο σύνολο των πουθενά μηδενιζομένων λείων διανυσματικών πεδίων, με την σχετική σχέση ισοδυναμίας να είναι

$$\xi \sim \eta \text{ όταν } \xi = f\eta \text{ για κάποια } f \in C^\infty(M) \text{ με } f \neq 0 \text{ παντού.}$$

Σε αυτήν την ορολογία, ένα μέρος της IV.§3.6 επαναδιατυπώνεται ως εξής.

V.§6.7. Κάθε 1-διάστατη κατανομή είναι ολοκληρώσιμη, με μεγιστικές συνεκτικές ολοκηρωτικές υποπολλα-

---

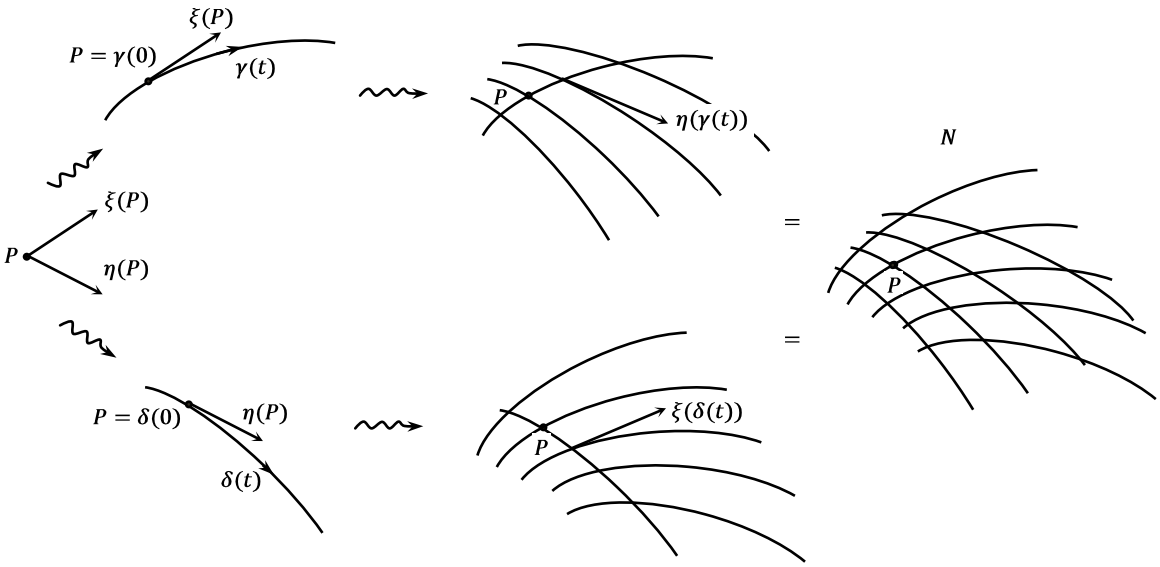
8. Κάνοντας λόγο για καθετότητα, δεν προϋποτίθεται η επιλογή κάποιας ρημάννειας μετρικής· η επισύναψη του αφηρημένου διανυσματικού χώρου T_pM/D_p σε κάθε σημείο P της πολλαπλότητας επιτρέπει ακριβώς να μιλάμε για κάθετες στην κατανομή D προβολές των εφαπτόμενων διανυσμάτων χωρίς να τα προβάλλουμε πραγματικά σε κάποιον υπόχωρο του T_pM που έχει επιλεγεί ως ορθογώνιο συμπλήρωμα του D_p.

πλότητες τις ολοκληρωτικές καμπύλες κάποιου (και άρα κάθε) λείου διανυσματικού πεδίου που την αντιπροσωπεύει.

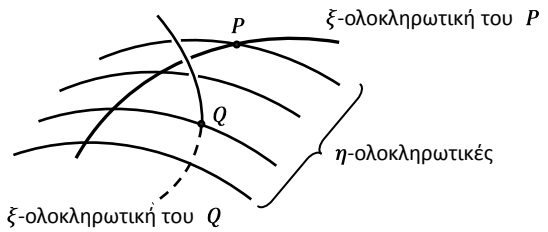
Εξ ορισμού των φυλλώσεων έπεται επίσης άμεσα το ακόλουθο:

V.§6.8. Εάν $\mathfrak{F}$ μια r-διάστατη φύλλωση της διαφορικής πολλαπλότητας M, τότε η συλλογή των εφαπτόμενων στα φύλλα της υποχώρων συγκροτούν r-διάστατη κατανομή της M, με μεγιστικές συνεκτικές ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητες τα φύλλα της $\mathfrak{F}$.

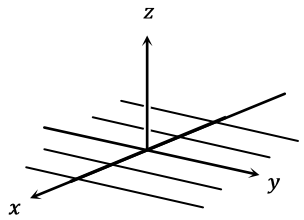
Η ενδεχόμενη μή ολοκληρωσιμότητα κατανομών με διάσταση μεγαλύτερη του 1 προκύπτει από την γεωμετρική ασυμβατότητα που μπορεί να υπάρχει μεταξύ δύο και πλέον διανυσματικών πεδίων. Έστω ξ, η λεία γραμμικώς ανεξάρτητα τοπικά διανυσματικά πεδία ώστε η 2-διάστατη κατανομή D που παράγεται από αυτά γύρω από το σημείο P να είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και N η ολοκληρωτική επιφάνεια της D γύρω από το P. Εφ' όσον οι περιορισμοί των πεδίων ξ, η στην N εφάπτονται σε αυτήν, έπεται ότι οι ολοκληρωτικές τους καμπύλες που διέρχονται από σημείο της N περιέχονται για κάποιο διάστημα σε αυτήν. Αυτό υποδεικνύει μια φυσική κατασκευή της επιφάνειας N με χρήση των ολοκληρωτικών καμπυλών των πεδίων ξ, η γύρω από το σημείο P: ακολουθώντας την ξ-ολοκληρωτική καμπύλη του P για κάθε σημείο ενός τμήματος της, σε κάθε σημείο αυτής γύρω από το P διαγράφουμε την διερχόμενη από αυτό η-ολοκληρωτική καμπύλη· η επιφάνεια που συγκροτείται είναι τότε η N, και θα λαμβάναμε το ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο εάν εάν εναλλάσαμε τους ρόλους των ξ, η (εφ' όσον η N περιέχει τις ολοκληρωτικές καμπύλες και των δύο πεδίων για κάποιο διάστημα γύρω από το P):



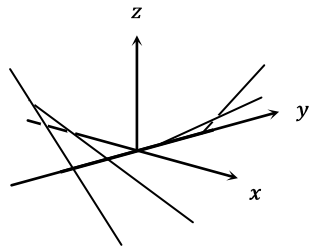
Εάν δεν είναι εξ αρχής γνωστό βέβαιο ότι υπάρχει η από κοινού ολοκληρωτική επιφάνεια των πεδίων ξ, η γύρω από το P, τότε δεν είναι *a priori* γνωστό ότι με εναλλαγή των πεδίων ξ, η στην παραπάνω κατασκευή λαμβάνουμε το ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο. Συγκεκριμένα, είναι δυνατόν η επιφάνεια που συγκροτείται διαγράφοντας τις διερχόμενες από τα σημεία της ξ-ολοκληρωτικής καμπύλης του P η-ολοκληρωτικές καμπύλες, να περιέχει ένα σημείο χωρίς να περιέχει την διερχόμενη από αυτό ξ-ολοκληρωτική καμπύλη.



Επομένως η μή ολοκληρωσιμότητα της 2-διάστατης κατανομής που συγκροτείται από τα πεδία ξ, η γύρω από το P διατυπώνεται γεωμετρικά ως εξής: σε οσοδήποτε μικρό διάστημα της ξ-ολοκληρωτικής καμπύλης του P γύρω απ' αυτό και αν εκτελέσουμε την παραπάνω κατασκευή, υπάρχει σημείο Q του οποίο η ξ-ολοκληρωτική καμπύλη δεν περιέχεται στην προκύπτουσα επιφάνεια. Αυτή είναι η περίπτωση της 2-διάστατης κατανομής D του $\mathbb{R}^3$ που συγκροτείται από τα πεδία $\xi = \partial/\partial x + y\,\partial/\partial z$, $\eta = \partial/\partial y$. Διαγράφοντας η-ολοκληρωτικές καμπύλες στα σημεία της ξ-ολοκληρωτικής καμπύλης του σημείου 0, λαμβάνουμε αντιστοίχως τις δύο διαφορετικές επιφάνειες (1) και (2).



(1)



(2)

Ένα πεδίο $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ λέγεται ότι κείται στην κατανομή $D = \coprod_{P\in M} D_P$ όταν για κέθε $P \in M$ ισχύει $\xi(P) \in D_P$. **Ενελλειικτική** καλείται η κατανομή D όταν για κάθε ζεύγος διανυσματικών πεδίων που κείνται στην D το γινόμενο *Lie* κείται στην D επίσης.

V.§6.9. Κάθε ολοκληρώσιμη κατανομή είναι ενελλειικτική.

Αποδ. Άμεσα, από πρόταση IV.§4.6. ■

V.§6.10. Εάν η M καλύπτεται από τοπικά πλαίσια της κατανομής D, για καθένα από τα οποία, $e_1, \dots, e_r$, ισχύει $[e_i, e_j] = 0$, τότε η D είναι ενελλειικτική.

Αποδ. Έστω ξ, η λεία πεδία που κείνται στην D και $U \subset M$ ανοικτή περιοχή με τοπικό πλαίσιο $e_1, \dots, e_r$ της D οπότε $\xi = \xi^i e_i$, $\eta = \eta^i e_i$ στο U. Τότε στο U ισχύει

$$[\xi, \eta] = [\xi^i e_i, \eta^j e_j] = \xi^i \eta^j \underbrace{[e_i, e_j]}_{0} + \xi^i (\partial_{e_i} \eta^j) e_j - \eta^j \left(\partial_{e_j} \xi^i\right) e_i \qquad ■$$

Η πρόταση V.§6.10 σημαίνει ότι η αποτυχία του γινομένου *Lie* πεδίων που κείνται στην D να κείται στην D επίσης, μετρά την μή ολοκληρωσιμότητα της κατανομής –δηλαδή μια κατανομή θεωρείται τόσο λιγότερο ολοκληρώσιμη όσο «μεγαλύτερα» είναι τα διανύσματα που επιστρέφονται από την απεικόνιση συστροφή της κατανομής.

V.§6.11. (**Frobenius** –μια κατανομή είναι ολοκληρώσιμη εάν και μόνον εάν η συστροφή της είναι ταυτοτικά η μηδενική απεικόνιση). Μια κατανομή είναι ολοκληρώσιμη εάν και μόνον εάν είναι ενελλειτική.

Αποδ. Το ευθύ είναι η πρόταση V.§6.9. Για το αντίστροφο, έστω σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ ενός τοπικού χάρτη U γύρω από το σημείο $P \in M$ και $e_1, \dots, e_r$ τοπικό πλαίσιο της ενελλειτικής κατανομής D στον χάρτη αυτόν, οπότε

$$e_i = e_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad e_i^j \in C^\infty(U)$$

Εφ' όσον τα e_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αλλάζοντας την σειρά των x^i εν ανάγκη, ισχύει $det(e_i^j)_{i,j} \neq 0$ παντού στο U. Ορίζουμε τα πεδία

$$v_i = a_i^j e_j, \qquad i = 1, \dots, r$$

Όπου $(a_i^j)_{i,j} = (e_i^j)_{i,j}^{-1}$. Τα v_i εκφράζονται στο πλαίσιο $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$ ως

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=r+1}^{n} c_j^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad i = 1, \dots, r \qquad (3)$$

για κάποιες $c_j^i \in C^\infty(U)$. Τότε λόγω κλιμακωτής μορφής, τα v_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επειδή κείνται στην κατανομή D (ως γραμμικοί συνδυασμοί των e_i) συγκροτούν τοπικό πλαίσιο αυτής στην περιοχή U. Λόγω ενελλειικτικότητας της D, το γινόμενο *Lie* οποιωνδήποτε δύο από τα v_i κείται στην D, επομένως για κάθε $i, j \leq r$ υπάρχουν $f_{i,j}^k \in C^\infty(U)$, $k = 1, \dots, r$ ώστε

$$[v_i, v_j] = f_{i,j}^k v_k \qquad (4)$$

Από (1) και εφ' όσον $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$, $i \neq j$, έπεται ότι το $[v_i, v_j]$ είναι επίσης γραμμικός συνδυασμός των $\frac{\partial}{\partial x^{r+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$. Όμως αντικαθιστώντας στην (3) από (4),

$$[v_i, v_j] = f_{i,j}^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{l=r+1}^{n} c_l^k \frac{\partial}{\partial x^l} \right) = f_{i,j}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{l=r+1}^{n} f_{i,j}^k c_l^k \frac{\partial}{\partial x^l}$$

Επομένως $f_{i,j}^k = 0$ από προηγούμενη παρατήρηση - ισοδύναμα, $[v_i, v_j] = 0$. Από πρόταση IV.§4.4, υπάρχει τοπικό σύστημα συντεταγμένων $z^1, \dots, z^n$ γύρω από το P ώστε $z^i = \partial/\partial x^i$. Τότε η ζητούμενη ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της D γύρω από το P είναι η $z^{r+1} = \cdots = z^n = 0$. ■

V.§6.12. (Τοπική δομή ολοκληρωτικής υποπολλαπλότητας). Έστω (U, φ) τοπικός χάρτης της διαφορικής n-πολλαπλότητας M τέτοιος ώστε τα r-διάστατα εφαπτόμενα στην M επίπεδα που συγκροτούν την ολοκληρώσιμη κατανομή D να απεικονίζονται μέσω της φ σε εφαπτόμενα στον $\mathbb{R}^n$ r-διάστατα επίπεδα παράλληλα στον υπόχωρο $\mathbb{R}^r = \{(x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)\}$, δηλαδή $\varphi_* D_P = span\{ \partial/\partial x^1 |_{\varphi(P)}, \dots, \partial/\partial x^r |_{\varphi(P)}\}$. Τότε οι τομές ολοκληρωτικών υποπολλαπλοτήτων της D με το U απεικονίζονται μέσω της φ στις τομές των παράλληλων στον υπόχωρο $\mathbb{R}^n$ r-διάστατων επιπέδων με το $\varphi[U]$ (δηλαδή είναι στο $\varphi[U]$ οι ισοσταθμικές της μορφής $x^{r+1} = c^{r+1}, \dots, x^n = c^n$)· συγκεκριμένα, η εικόνα κάθε μιας από αυτές είναι αριθμήσιμη ένωση τέτοιων τομών.

Αποδ. Έστω N ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της D που διέρχεται από την περιοχή U. Λόγω 2ης-αριθμησιμότητας (κληροδοτείται στους υποχώρους), το $N \cap U$ έχει αριθμήσιμες το πληθος συνεκτικές συνιστώσες. Θα δειχθεί ότι κάθε τέτοια συνιστώσα απεικονίζεται μέσω της φ σε ισοσταθμική του $\varphi[U]$ της ζητούμενης μορφής. Εξ υποθέσεως, το $dx^{r+1}, \dots, dx^n$ είναι σύστημα τοπικά οριζουσών της κατανομής

$$\varphi_* D = \coprod_{P \in U} \varphi_* D_P$$

Άρα οι μορφές αυτές μηδενίζουν το σύνολο $\varphi[V]$, και επειδή αυτό είναι συνεκτικό, έπεται ότι όλα τα σημεία του έχουν τις ίδιες $x^1, \dots, x^r$-συντεταγμένες. Άρα το $\varphi[V]$ περιέχεται ολόκληρο σε μια ισοσταθμική της ζητούμενης μορφής, και επομένως συμπίπτει μ' αυτήν. ■

V.§6.13. (Αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στις r-διάστατες κατανομές και τις r-διάστατες φυλλώσεις μιας πολλαπλότητας). Οι εφαπτόμενοι στα φύλλα μιας r-διάστατης κατανομής υπόχωροι συγκροτούν r-διάστατη κατανομή με ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητες τα φύλλα της κατανομής. Αντιστρόφως, οι μεγιστικές συνεκτικές ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητες μιας r-διάστατης κατανομής συγκροτούν r-διάστατη φύλλωση της πολλα-πλότητας.

Αποδ. Έστω D r-διάστατη ολοκληρώσιμη κατανομή της πολλαπλότητας M. Ορίζεται για κάθε $P \in M$ το σύνολο L_P ως η ένωση των συνεκτικών ολοκληρωτικών υποπολλαπλοτήτων της D που περιέχουν το P, η οποία είναι προφανώς μεγιστική ολοκληρωτική. Εάν ήταν γνωστό ότι τα $L_P, P \in M$ είναι διαφορικές υποπολλαπλότητες της M, τότε από πρόταση V.§6.13 έπεται άμεσα το ζητούμενο. Η κατασκευή αυτής της διαφορικής δομής γίνεται με φυσικό τρόπο και ο μακροσκελής έλεγχος των λεπτομερειών είναι ζήτημα ρουτίνας· βλ. [**Lee1**], λήμμα 19.22, σελ. 512. ■

V.§6.14. Η μη ιδιάζουσα 1-μορφή ω επί της πολλαπλότητας M ορίζει μια φύλλωση συνδιάστασης 1 εάν και μόνον εάν $\omega \wedge d\omega = 0$ παντού.

Αποδ. "$\Longrightarrow$" Έστω σημείο P και τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ γύρω απ' αυτό, στο οποίο τα φύλλα της πολλαπλότητας αναπαρίστανται ως ισοσταθμικές $x^n = c$. Τότε το $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^{n-1}$ είναι

τοπικό πλαίσιο για την κατανομή D, δηλαδή $\omega(\partial/\partial x^i) = 0,\ i = 1, \dots, n-1$. Θα δειχθεί το ζητούμενο εφαρμόζοντας την μορφή $\omega \wedge d\omega$ σε κάθε τριάδα διανυσμάτων αυτού του πλαισίου. Ισχύει

$$\omega \wedge d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) =$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\frac{1}{2}\left(\partial_{\partial/\partial x^j}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) - \partial_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - \omega[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}]\right) = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\left(\partial_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) - \partial_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)$$

Εάν οποιαδήποτε από τα i, j, k ισούνται, τότε η ποσότητα μηδενίζεται λόγω αντισυμμετρικότητας. Εάν $i \leq n-1$, τότε $\omega(\partial/\partial x^i) = 0$ και η ποσότητα μηδενίζεται. Εάν $i = n$, οπότε $\omega(\partial/\partial x^i) \neq 0$, τότε $k, j \leq n-1$ (αφού i, j, k διακεκριμένα) οπότε $\omega(\partial/\partial x^j) = \omega(\partial/\partial x^k) = 0$ και η ποσότητα μηδενίζεται.

„$\Longleftarrow$" Έστω ξ, η διανυσματικά πεδία που κείνται στην D. Από θεώρημα *Frobenius*, αρκεί να δειχθεί ότι το πεδίο $[\xi, \eta]$ κείται στην D επίσης, δηλαδή ότι $\omega[\xi, \eta] = 0$. Επιλέγουμε διανυσματικό πεδίο ζ ώστε $\zeta(P) \notin D_P$ για κάθε $P \in M$. Τότε

$$0 = \omega \wedge d\omega(\zeta, \xi, \eta) = \omega(\zeta)\, d\omega(\xi, \eta) = \omega(\zeta)\, \frac{1}{2}\big(\partial_\xi \omega(\eta) - \partial_\eta \omega(\xi) - \omega[\xi, \eta]\big)$$

Επομένως $\omega[\xi, \eta] = 0$. ■

Ομάδες και χώροι επικάλυψης

§1. ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΠΙΚΑΛΥΨΕΙΣ

Δεδομένου συνεχούς επιμορφισμού $q : Y \to X$, ένα $U \subset X$ καλείται q-**επικαλυμμένο** όταν οι συνεκτικές συνιστώσες του $q^{-1}[U]$ είναι ανοικτά σύνολα ομοιομορφικά με το U μέσω του περιορισμού της q σε κάθε μία από αυτές. **Επικάλυψη** του τοπολογικού χώρου X από τον δρομοσυνεκτικό χώρο $\tilde{X}$ ονομάζεται ένας συνεχής επιμορφισμός $q : \tilde{X} \to X$ όταν κάθε $x \in X$ έχει q-επικαλυμμένη περιοχή. Το γεωμετρικό νόημα της επικάλυψης είναι η αναδίπλωση του $\tilde{X}$ επί του X ώστε κάθε σημείο του X να βρίσκεται σε περιοχή που προκύπτει ως προβολή ξένων, ομοιομορφικών, συνεκτικών περιοχών του $\tilde{X}$. Κάθε επικάλυψη είναι εξ ορισμού τοπικός ομοιομορφισμός και απεικόνιση πηλίκο.

VI.§1.0. Περιορισμός επικάλυψης είναι επικάλυψη.

Αποδ. Έστω $q : \tilde{X} \to X$ επικάλυψη και $Z \subset \tilde{X}$, θα δειχθεί ότι $q\big|_Z : Z \to q[Z]$ είναι επικάλυψη. Για κάθε $x \in q[Z_0]$ επιλέγουμε $U = W \cap q[Z]$, όπου W q-επικαλυμμένη περιοχή του X. Τότε U είναι ζητουμένη $q\big|_Z$-επικαλυμμένη περιοχή του X. ■

Λαμβάνοντας γινόμενα, όπως προηγουμένως λάβαμε περιορισμούς, ελέγχεται ότι

VI.§1.1. (Καρτεσιανό γινόμενο επικαλύψεων είναι επικάλυψη).

Εάν $q_1 : \tilde{X}_1 \to X_1$, $q_2 : \tilde{X}_2 \to X_2$ επικαλύψεις, η $q_1 \times q_2 : \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ είναι επικάλυψη.

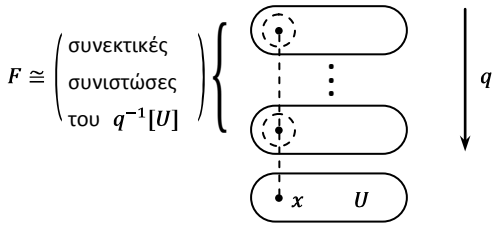
VI.§1.2. Για κάθε $U \subset X$ q-επικαλυμμένο, κάθε $x \in U$ και κάθε $y \in q^{-1}(x)$, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $\sigma : U \to \tilde{X}$ με $\sigma(x) = y$ και $q \circ \sigma = id_U$.

Αποδ. Εάν W η συνιστώσα του $q^{-1}(x)$ που περιέχει το y, επιλέγουμε $\sigma = (q\,\big|_w)^{-1} : U \to W$. ■

VI.§1.3. Οι ίνες της επικάλυψης συνεκτικού χώρου είναι ισοπληθικές (**πλήθος στρώσεων** της επικάλυψης).

Αποδ. Έστω $q : \tilde{X} \to X$ όπως στην υπόθεσ, $x \in X$ και $\mathcal{X} = \{x' \in X \,\big|\, \#q^{-1}(x') \neq \#q^{-1}(x)\}$. Αρκεί να δειχθεί ότι X, $X \setminus \mathcal{X}$ ανοικτά, οπότε $X \setminus \mathcal{X} = \emptyset$ λόγω συνεκτικότητας του X. Έστω $U \subset X$ επικαλυμμένη περιοχή του $u \in U$. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του $q^{-1}[U]$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από το $q^{-1}(u)$, άρα το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $q^{-1}(U)$ ισούται με $\#q^{-1}(u)$ για κάθε $u \in U$. Επειδή για κάθε $x' \in \mathcal{X}$ υπάρχει επικαλυμμένη περιοχή αυτού και, από προηγούμενη παρατήρηση, αυτή περιέχεται στο $\mathcal{X}$, το $\mathcal{X}$ είναι ένωση επικαλυμμένων περιοχών, άρα ανοικτό. Επίσης, $X \setminus \mathcal{X}$ ανοικτό ως ένωση συνόλων που απαρτίζονται από στοιχεία των οποίων οι αντίστροφες εικόνες έχουν κοινή πληθικότητα. ■

Κάθε ίνα $q^{-1}(x)$ είναι διακριτό υποσύνολο του $\tilde{X}$, εφόσον τα $y \in q^{-1}(x)$ διαχωρίζονται από ανοικτά υποσύνολα του $\tilde{X}$:



Επομένως κάθε επικάλυψη συνεκτικού χώρου είναι νηματική δέσμη με ίνα F ένα απλό σύνολο και δομική ομάδα την ομάδα μεταθέσεων αυτού. Δεδομένης επικάλυψης $q : \tilde{X} \to X$ και συνεχούς απεικόνισης $f : Z \to X$, μία συνεχής $\bar{f} : Z \to \tilde{X}$ καλείται q-**ανύψωση** της f όταν καθιστά αντιμεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "q"] \\ Z \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Επομένως η ανύψωση είναι μία συνεχής επιλογή στοιχείων από τις ίνες $q^{-1}(x)$, $x \in f[Z]$.

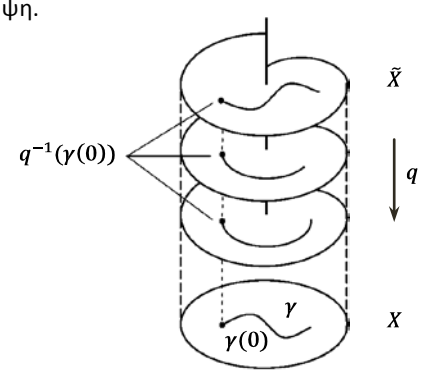
VI.§1.4. (Μοναδικότητα της ανύψωσης).

Εάν $q : \tilde{X} \to X$ επικάλυψη, $f : Z \to X$ συνεχής από συνεκτικό χώρο Z και $\bar{f}_1 : Z \to X$, $\bar{f}_2 : Z \to X$ ανυψώσεις της f ώστε $\bar{f}_1(z) = \bar{f}_2(z)$ για κάποιο $z \in Z$, τότε $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$ (δηλαδή εάν δύο ανυψώσεις κάνουν την ίδια επιλογή από κάποια ίνα, τότε κάνουν την ίδια επιλογή παντού)

Αποδ. Βλ. [**Lee3**], σελ 238, πρόταση 11.9. ■

VI.§1.5. (Ύπαρξη ανύψωσης μονοπατιών).

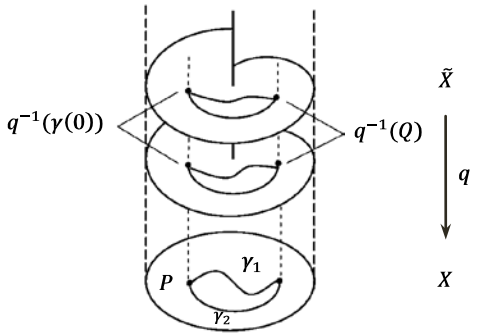
Έστω $q : \tilde{X} \to X$ επικάλυψη και $\gamma : I \to X$ μονοπάτι· για κάθε $z \in q^{-1}(\gamma(0))$ υπάρχει μοναδική q-ανύψωση $\bar{\gamma} : I \to \tilde{X}$ του γ ώστε $\bar{\gamma}(0) = z$ (**ιδιότητα της ανύψωσης μονοπατιών**). Αντιστρόφως, κάθε τοπικός ομοιομορφισμός $q : \tilde{X} \to X$ από δρομοσυνεκτικό σε τοπικά απλά συνεκτικό χώρο με την ιδιότητα της ανύψωσης, είναι επικάλυψη.



Αποδ. Βλ. [**Munk**] σελ. 392, λήμμα 54.1 και [**DoC1**], σελ. 383, πρόταση 6. ■

VI.§1.6. (Η ανύψωση διατηρεί την δρομομοτοπία).

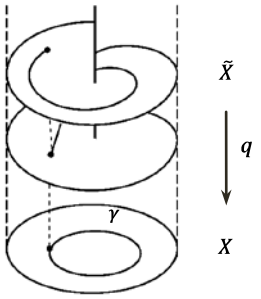
Εάν $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ δρομομοτοπικά μονοπάτια και $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2 : I \to \tilde{X}$ q-ανυψώσεις αυτών για την επικάλυψη $q : \tilde{X} \to X$ με $\bar{\gamma}_1(0) = \bar{\gamma}_2(0)$, τότε τα $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ είναι δρομομοτοπικά επίσης. (Δηλαδή εάν οι ανυψώσεις δρομομοτοπικών μονοπατιών κάνουν την ίδια επιλογή αρχικού σημείου, τότε κάνουν επίσης την ίδια επιλογή τελικού, και υπάρχει συνεχής παραμόρφωση της μιας στην άλλη που σταθεροποιεί τα ακραία σημεία).



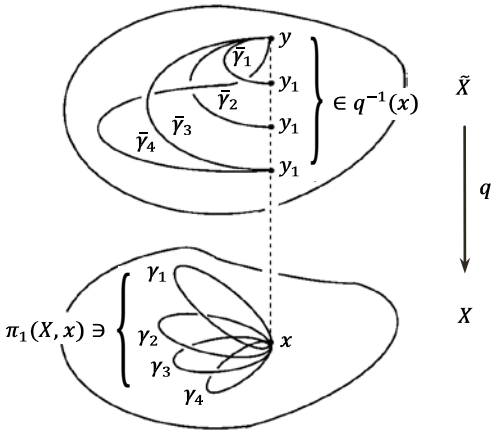
Αποδ. Βλ. [**Munk**], σελ. 344, πρόταση 54.23. ■

Κάθε μονοπάτι δ στον $\tilde{X}$ με $q \circ \delta = \gamma$ είναι q-ανύψωση του γ, επομένως από VI.§1.5 και VI.§1.4, τα μονοπάτια που προβάλλονται στο γ μέσω της q προσδιορίζονται ως οι q-ανυψώσεις του τελευταίου.

Επειδή μια επικάλυψη ταυτίζει σημεία ως απεικόνιση πηλίκο, αναμένεται ότι οι βρόγχοι του X δεν ανυψώνονται εν γένει σε βρόγχους (η ανύψωση διαλύει εν γένει τους βρόγχους).



Ωστόσο από VI.§1.6, η διάλυση των βρόγχων γίνεται ομαλά, με την έννοια ότι η ανύψωση διατηρεί τουλάχιστον τις κλάσεις δρομομοτοπίας των μονοπατιών. Επομένως, σταθεροποιώντας ένα $y \in q^{-1}(x)$ που λαμβάνεται ως αρχικό σημείο των ανυψώσεων, η ομάδα $\pi_1(X, x)$ ανυψώνεται σε κλάσεις δρομομοτοπίας στον $\tilde{X}$, με κοινό αρχικό σημείο y αλλά εν γένει διαφορετικά τελικά σημεία $y_1, \ldots \in q^{-1}(x)$.



Θα δοθεί τώρα γενική λύση στο πρόβλημα ύπαρξης ανύψωσης συνεχούς συνάρτησης. Έστω $q : \tilde{X} \to X$ επικάλυψη και $f : Z \to X$ συνεχής· ρωτάμε: δεδομένων $z \in X$ και $y \in q^{-1}(f(z))$, υπάρχει q-ανύψωση $\bar{f}$ της f με $\bar{f}(x) = y$; Η VI.§1.5 δίνει καταφατική απάντηση στην περίπτωση που η f είναι μονοπάτι $\gamma : I \to X$. Η συμπάγεια του $I = [0, 1]$ επιτρέπει την κάλυψή του από πεπερασμένα το πλήθος ισομήκη διαδοχικά διαστήματα, στα οποία η ανύψωση μπορεί να οριστεί, ενώ το μονοδιάστατο του I επιτρέπει τον ολικό ορισμό της ανύψωσης με συγκόλληση των τοπικών ανυψώσεων (αφού τα διαστήματα είναι διαδοχικά). Στην γενική περίπτωση, το ερώτημα θα απαντηθεί μελετώντας τις εμπλεκόμενες θεμελιώδεις ομάδες.

Εάν η ανύψωση $\bar{f} : Z \to \tilde{X}$ με $\bar{f}(z) = y \in q^{-1}(f(z))$ υπάρχει, τότε $f_*\pi_1(Z, z) \subset q_*(\tilde{X}, y)$:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "q"] \\ Z \arrow[ur, "\bar{f}_*"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} & \pi_1(\tilde{X}, y) \arrow[d] \\ \pi_1(Z, z) \arrow[ur, "\bar{f}_*"] \arrow[r, "f"'] & \pi_1(X, f(z)) \end{tikzcd}$$

Έστω $\gamma \in f_*\pi_1(Z, z)$, οπότε $\gamma = f \circ \eta$ για κάποιον βρόγχο στο η με στήριγμα το z. Τότε $\bar{f} \circ \eta$ είναι q-ανύψωση αυτού, άρα $\gamma = f \circ \eta = q \circ \bar{f} \circ \eta$. Όμως $\bar{f} \circ \eta$ είναι βρόγχος που στηρίζεται στο $y = \bar{f}(z)$, οπότε

η προηγούμενη ισότητα ισοδυναμεί με $\gamma = q_*[\bar{f} \circ \eta]$, άρα $\gamma \in \pi_1(X, f(z))$. Επομένως αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ανύψωσης είναι η $f_*\pi_1(Z, z) \subset q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$. Ζητούνται επιπλέον συνθήκες για τον Z που να καθιστούν αυτή τη συνθήκη ικανή, δηλαδή από την σχέση $f_*\pi_1(Z, Z) \subset q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$ να κατασκευάζεται καλά η ζητούμενη ανύψωση. Εάν ο Z είναι δρομοσυνεκτικός, οπότε κάθε $w \in Z$ είναι τελικό σημείο ενός μονοπατιού η_w με αρχικό σημείο z. Ορίζοντας $\bar{f}(w) = \overline{f \circ \eta_w}(1)$, ισχύει

$$q \circ \bar{f}(w) = q \circ \overline{f \circ \eta_w}(1) = f \circ \eta_w(1) = f(w)$$

δηλαδή $q \circ \bar{f} = f$. Μένει να δειχθεί ότι η $\bar{f}$ είναι καλώς ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη του μονοπατιού η_w που συνδέει το z με το w, και συνεχής. Η δρομοσυνεκτικότητα του Z, που ισοδυναμεί με συνεκτικότητα $+$ τοπική δρομοσυνεκτικότητα (I.§1.11), είναι ικανή συνθήκη και για τα δύο:

Καλός ορισμός: Έστω η_1, η_2 μονοπάτια στο Z από το z στο w, τότε $\eta_2\eta_1^{-1}$ βρόγχος που στηρίζεται στο z. Υποθέτοντας ότι $f_*\pi_1(Z, z) \subset q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$, έπεται ότι $f_*[\eta_2 \cdot \eta_1^{-1}] = q_*[\gamma]$ για κάποιον βρόγχο γ του $\tilde{X}$ που στηρίζεται στο y. Επομένως υφίσταται στον X μια δρομομοτοπία $q \circ \gamma \sim f \circ \eta_2 \cdot \eta_1^{-1}$, από την οποία συμπεραίνουμε ότι $(q \circ \gamma) \cdot (f \circ \eta_1) \sim (f \circ \eta_2)$. Επειδή το γ είναι ανύψωση, και λαμβάνοντας υπ' όψιν την διατήρηση της ομοτοπίας, έπεται ότι $\overline{f \circ \eta_1}(1) = \gamma \cdot \overline{f \circ \eta_2}(1) = \overline{f \circ \eta_2}(1)$.

Διαπιστώνεται ότι η $\bar{f}$ διατηρεί την δρομοσυνεκτικότητα (θα χρησιμοποιηθεί για να δειχθεί η συνέχειά της): Έστω $V \subset Z$ δρομοσυνεκτικό, $z_1, z_2 \in V$ το μονοπάτι στο V από το z_1 στο z_2. Λόγω δρομοσυνεκτικότητας του Z, υπάρχει μονοπάτι δ στον Z από το z στο z_1. Εξ ορισμού της $\bar{f}$, $\bar{f} \circ (\delta \cdot \eta) = (\bar{f} \circ \delta) \cdot (f \circ \eta)$, τότε $\bar{f} \circ \eta$ μονοπάτι στο $\bar{f}[V]$ από το $\bar{f}(z_1)$ στο $\bar{f}(z_2)$.

Συνέχεια: Θα δειχθεί ότι κάθε $z \in Z$ έχει ανοικτή περιοχή επί της οποίας η $\bar{f}$ είναι συνεχής. Έστω U q-επικαλυμμένη περιοχή του $\bar{f}(z)$ και U' η συνεκτική συνιστώσα του $q^{-1}[U]$ που περιέχει το $\bar{f}(z)$. Εάν V η συνεκτική συνιστώσα του $q^{-1}[U]$ που περιέχει το z, τότε $\bar{f}[V]$ δρομοσυνεκτικό, άρα $\bar{f}[V] \subset U'$. Λόγω της τοπικής δρομοσυνεκτικότητας του Z, το V είναι ανοικτό· θα δειχθεί ότι η $\bar{f}$ είναι συνεχής πάνω σ' αυτό. Εάν $\sigma : U \to U'$ η τοπική αντιστροφή της q για την οποία $\sigma(f(z)) = \bar{f}(z)$ (VI.§1.2) με $q \circ \sigma = id$, τότε $q \circ \bar{f} = f = q \circ \sigma \circ f$ πάνω στο V. Επειδή οι $\bar{f}, \sigma \circ f$ απεικονίζουν τον V στο $\overline{U}$, έπεται ότι $\bar{f} = \sigma \circ f$ πάνω στο V, και άρα $\bar{f}\big|_V$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών. ■

Διατυπώνεται επομένως η γενική αλγεβρική συνθήκη για την ύπαρξη ανυψώσεων, που καλύπτει τις ενδιαφέρουσες γεωμετρικά περιπτώσεις, ως εξής.

VI.§1.7. Έστω $q : \tilde{X} \to X$ επικάλυψη και $f : Z \to X$ συνεχής απεικόνιση. Για κάθε επιλογή $z \in Z$ και $y \in q^{-1}(f(z))$, εάν υπάρχει ανύψωση $\bar{f} : Z \to \tilde{X}$ της f ώστε $\bar{f}(z) = y$, τότε $f_*\pi_1(Z, z) \subset q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$· εάν ο Z είναι δρομοσυνεκτικός, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Τα ακόλουθα είναι άμεσα πορίσματα της VI.§1.7.

VI.§1.8. Κάθε συνεχής συνάρτηση από απλά δρομοσυνεκτικό χώρο προς επικαλυμμένο χώρο έχει μοναδική ανύψωση για κάθε επιλογή αρχικής τιμής.

VI.§1.9. Μια συνεχής συνάρτηση $f : Z \to X$ από δρομοσυνεκτικό χώρο προς χώρο που επικαλύπτεται από απλά συνεκτικό χώρο έχει ανύψωση εάν και μόνον εάν για κάθε $z \in Z$, $f^* : \pi_1(Z, z) \to \pi_1(X, f(z))$ είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός. Σε αυτή την περίπτωση οι ανυψώσεις είναι όσες και οι δυνατές αρχικές τιμές (δηλαδή όσες οι στρώσεις της επικάλυψης).

Ομομορφισμός από την επικάλυψη $q_1 : \tilde{X}_1 \to X$ στην επικάλυψη $q_2 : \tilde{X}_2 \to X$ ονομάζεται μια συνεχής απεικόνιση φ που καθιστά αντιμεταθετικό το παρακάτω διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "q_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Ισομορφισμός επικαλύψεων ονομάζεται ένας ομομορφισμός επικαλύψεων που επιπλέον είναι ομοιομορφισμός. Ο ισομορφία είναι (ως συνήθως) σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των επικαλύψεων ενός τοπολογικού χώρου. Πρέπει να νοείται ως εξής: ο φ παραμορφώνει συνεχώς τον $\tilde{X}_1$ σε $\tilde{X}_2$ κατά τρόπον ώστε για κάθε $x \in X$, το $q_1^{-1}(x)$ να απεικονίζεται στο $q_2^{-1}(x)$ (δηλαδή οι προβολές q_1 και q_2 ταυτίζονται πάνω από τον ομοιομορφισμό φ). Ένας ομομορφισμός από την επικάλυψη $q_1 : \tilde{X}_1 \to X$ στην επικάλυψη $q_2 : \tilde{X}_2 \to X$ είναι ακριβώς μια q_2-ανύψωση της q_1· η επόμενη πρόταση δηλώνει πως είναι κάτι παραπάνω.

VI.§1.10. Ομομορφισμός επικαλύψεων είναι επικάλυψη.

Αποδ. Έστω φ ομομορφισμός από την επικάλυψη $q_1 : \tilde{X}_1 \to X$ στην επικάλυψη $q_2 : \tilde{X}_2 \to X$. Θα δειχθεί ότι ο φ είναι *επί*. Έστω $y_2 \in \tilde{X}_2$ και $y_1 \in \tilde{X}_1$. Ζητείται $y_1' \in \tilde{X}_1$ ώστε $\varphi = q_1(y_1) = y_2$. Έστω γ_1 μονοπάτι στον $\tilde{X}_2$ από το $\varphi(y_1)$ στο y_2 , $x = q_1(y_1) = q_2(\varphi(y_2)$, $\gamma = q_2 \circ \gamma_2$ και γ^1 η ανύψωση του γ μέσω της q στον $\tilde{X}_1$ που ξεκινά από το y. Τότε το $\varphi \circ \gamma_1$ είναι η ανύψωση του γ στον $\tilde{X}_2$ που ξενικά από το $\varphi(y_1)$. Από μοναδικότητα της ανύψωσης, $\gamma_2 = \varphi \circ \gamma$, και επομένως $y_1' = \gamma_2(1)$ το ζητούμενο.

Θα δειχθεί λοιπόν ότι κάθε $y \in \tilde{X}_2$ έχει φ-επικαλυμμένη περιοχή. Εάν $x = q_2(y)$ και U_1, U_2 q_1- και q_2-επικαλυμμένες περιοχές αυτού αντιστοίχως, τότε η συνεκτική συνιστώσα V του $U_1 \cap U_2$ που περιέχει το x είναι επικαλυμμένη από τις q_1, q_2. Θα δειχθεί ότι η συνιστώσα U του $q_2^{-1}[V]$ που περιέχει το y είναι ομοιομορφική με κάθε μια από τις συνεκτικές συνιστώσες του $\varphi^1[U]$ μέσω της φ. Εφ' όσον U ανοικτό και κλειστό στο $q_2^{-1}[V]$, $\varphi^{-1}[U]$, είναι ανοικτό και κλειστό στο $q_1^{-1}[V]$ επίσης, και άρα $\varphi^{-1}[U]$ ένωση συνιστωσών U_a, $a \in A$. Για κάθε $a \in A$ το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} U_a \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q_1"'] & & U \arrow[dl, "q_2"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

και επειδή σε αυτό τα q_1, q_2 είναι ομοιομορφισμοί (από την επιλογή του V), έπεται ότι η φ είναι ομοιομορφισμός επίσης. ■

VI.§1.11. Έστω $q_1 : \tilde{X}_1 \to X$, $q_2 : \tilde{X}_2 \to X$ επικαλύψεις και $y_1 \in q_1^{-1}(x)$, $y_2 \in q_2^{-1}(x)$ για κάποιο $x \in X$. Υπάρχει ομομορφισμός επικαλύψεων $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ με $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$ εάν και μόνον εάν $q_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, y_1) \subset q_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, y_1)$.

Αποδ. Άμεσα από πρόταση VI.§1.7, εφ' όσον ο φ είναι q_2-ανύψωση της q_1. ■

VI.§1.12. Εάν $q : \tilde{X} \to X$ επικάλυψη, για κάθε $x \in X$ οι ομάδες $q_{1*}\pi_1(\tilde{X}, y)$, $y \in q^{-1}(x)$ συγκροτούν κλάση συζυγίας στο πλέγμα των υποομάδων της $\pi_1(X, x)$.

Αποδ. Εάν $y_1, y_2 \in q^{-1}(x)$ και $\bar{\gamma}$ μονοπάτι στον $\tilde{X}$ από το y_1 στο y_2, τότε $\gamma = q \circ \bar{\gamma}$ βρόγχος που στηρίζεται στο x και $\bar{\gamma}$ η ανύψωση του γ στο y_1. Το παρακάτω διάγραμμα είναι τότε είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\tilde{X}, y) \arrow[r, "\varphi_{\bar{\gamma}}"] \arrow[d, "q_*"'] & \pi_1(\tilde{X}, y') \arrow[d, "q_*"] \\ q_*\pi_1(\tilde{X}, y) \arrow[r, "\varphi_\gamma"'] & q_*\pi_1(\tilde{X}, y') \end{tikzcd}$$

$$q_*\varphi_{\bar{\gamma}}[\eta] = q[\bar{\gamma}^{-1}\eta\bar{\gamma}] = [q \circ (\bar{\gamma}^{-1}\eta\bar{\gamma}) = [(q \circ \bar{\gamma})^{-1} \cdot (q \circ \eta) \cdot (q \circ \bar{\gamma})] = [\gamma^{-1}] \cdot q_*[\eta] \cdot [\gamma] = \varphi_\gamma q_*[\eta]$$

Επομένως η φ_γ ενρίπτει την $q_*\pi_1(\tilde{X}, y_1$ στην $q_*\pi_1(\tilde{X}, y_2)$ και από το προηγούμενο διάγραμμα εξάγεται το επίσης αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\tilde{X}, y) \arrow[r, "\varphi_{\bar{\gamma}}"] \arrow[d, "q_*"'] & \pi_1(\tilde{X}, y') \arrow[d, "q_*"] \\
q_*\pi_1(\tilde{X}, y) \arrow[r, "\varphi_\gamma"'] & q_*\pi_1(\tilde{X}, y')
\end{tikzcd}$$

Επειδή τα κάθετα βέλη και ο $\varphi_{\bar{\gamma}}$ είναι ισομορφισμοί, ο φ_γ είναι ισομορφισμός επίσης και οι ομάδες $q_*\pi_1(\tilde{X}, y_1)$, $\pi_1(\tilde{X}, y_2)$ είναι συζυγείς.

Έστω τώρα $y \in q^{-1}(x)$ και G υποομάδα της $\pi_1(X, x)$ συζυγής της $q_*\pi_1(\tilde{X}, y_1)$, δηλαδή $G = (\varphi_\gamma)_* q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$ για κάποιο $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$. Έστω $\bar{\gamma}$ η ανύψωση του γ στο y και $y' = \bar{\gamma}(1)$. Τότε ισχύει το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα και επομένως $(\varphi_\gamma)_* q_*\pi_1(\tilde{X}, y) = q_*\pi_1(\tilde{X}, y) = G$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\tilde{X}, y_1) \arrow[r, "\varphi_{\bar{\gamma}}"] \arrow[d, "q_*"'] & \pi_1(\tilde{X}, y_2) \arrow[d, "q_*"] \\
q_*\pi_1(\tilde{X}, y_1) \arrow[r, "\varphi_\gamma"'] & q_*\pi_1(\tilde{X}, y_2)
\end{tikzcd}$$

■

VI.§1.13. (Θεώρημα ισομορφισμού επικαλύψεων).

Δύο επικαλύψεις $q_1 : \tilde{X}_1 \to X$, $q_2 : \tilde{X}_2 \to X$ είναι ισομορφικές εάν και μόνον εάν υπάρχει $x \in X$ και $y_1 \in q_1^{-1}(x)$, $y_2 \in q_2^{-1}(x)$ ώστε οι $q_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, y_1)$, $q_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, y_2)$ να είναι συζυγείς υποομάδες της $\pi_1(X, x)$. Εάν αυτό συμβαίνει, η συνθήκη της VI.§1.11 ισχύει για κάθε $x \in X$ και $y_1 \in q_1^{-1}(x)$, $y_2 \in q_2^{-1}(x)$.

Αποδ. "$\Longrightarrow$,, Έστω $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ ο ισομορφισμός. Εφαρμόζοντας την VI.§1.11 για τους φ, φ^{-1}, συνάγεται ότι $q_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, y_1) = q_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, y_2)$. Από VI.§1.12, οι ομάδες $q_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, y_1)$, $q_{1*}\pi_1(\tilde{X}_2, y_2)$ είναι συζυγείς, για κάθε y στην q_2-ίνα που περιέχει το y_2.

,,$\Longleftarrow$" Έστω x, y_1, y_2 όπως στην υπόθεση. Από VI.§1.12, υπάρχει ισομορφισμός $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, $\varphi(y_1) = y_2$. ■

VI.§1.14. Υπάρχει ομομορφισμός από απλά συνεκτική επικάλυψη ενός χώρου προς οποιαδήποτε επικάλυψη αυτού (δηλαδή μία απλά συνεκτική επικάλυψη επικαλύπτει κάθε άλλη επικάλυψη). Επιπλέον, η απλά συνεκτική επικάλυψη είναι (εάν υπάρχει) μοναδική πάνω από ισομορφισμό.

Αποδ. Έστω $q : \tilde{X} \to X$ επικάλυψη από απλά συνεκτικό χώρο και $q' : \tilde{X}' \to X$ επικάλυψη επίσης. Η $q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$ είναι τετριμμένη και περιέχεται σε κάθε υποομάδα της $\pi_1(X, q(y))$. Διαλέγοντας $y_1 \in q'^{-1}[q(y)]$, υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ που είναι η ζητούμενη επικάλυψη (VI.§1.11). Η μοναδικότητα συνάγεται από την VI.§1.13 : εάν $q_1 : \tilde{X}_1 \to X$, $q_2 : \tilde{X}_2 \to X$ απλά συνεκτικές επικαλύψεις, $x \in X$ και $y_1 \in q_1^{-1}(x)$, $y_2 \in q_2^{-1}(x)$, τότε οι $q_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, y_1)$, $q_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, y_2)$ ταυτίζονται, ως τετριμμένες. ■

Καθολική επικάλυψη ενός τοπολογικού χώρου καλείται η μοναδική πάνω από ισομορφισμό επικαλύψεων απλά συνεκτική επικάλυψη αυτού. Θα βρεθούν ικανές συνθήκες για την ύπαρξη καθολικής επικάλυψης.

Υποθέτουμε ότι ο X έχει καθολική επικάλυψη $q : \tilde{X} \to X$ και επιλέγουμε $x_o \in X$, $y_o \in q^{-1}(x_o)$. Τότε για κάθε $x \in X$, η ίνα $q^{-1}(x)$ βρίσκεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο $\mathfrak{P}(x_o, x)$ των κλάσεων δρομομοτοπίας από το x_o στο x : Ορίζουμε

$$\mathfrak{P}(x_o, x) \to q^{-1}(x), \qquad [\gamma] \to \bar{\gamma}(1)$$

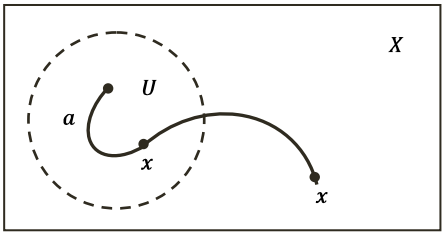
όπου $\bar{\gamma}$ η q-ανύψωση του γ στο y_o, που είναι *επί* λόγω δρομοσυνεκτικότητας το X και *1-1* λόγω απλής συνεκτικότητας (μονοπάτια με ίδια ακραία σημεία είναι δρομομοτοπικά σε απλά συνεκτικούς χώρους). Επομένως μία απλά συνεκτική επικάλυψη του X θα μπορούσε να είναι το σύνολο $\mathfrak{P}(x_o)$ των κλάσεων δρομομοτοπίας με αρχικό σημείο x_o εφοδιασμένο με κάποια απλά συνεκτική τοπολογία και με σχετική απεικό-

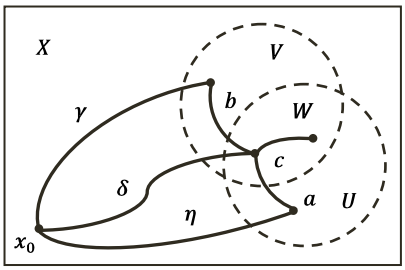
νιση πηλίκο την $q : \tilde{X} = \mathfrak{P}(x_o) \to X,\ \ [\gamma] \to \gamma(1)$. Αναζητούνται συνθήκες για τον X που να επιτρέπουν τον ορισμό απλά συνεκτικής τοπολογίας επί του $\tilde{X}$ κατά τρόπον ώστε η q να είναι επικάλυψη.

Επιλέγουμε $\mathfrak{U}$ τοπολογική βάση του X και λαμβάνουμε την συλλογή $\tilde{\mathfrak{U}}$ υποσυνόλων του $\tilde{X}$ που απαρτίζεται από τα σύνολα της μορφής $\overline{U}^{\gamma}$: για κάθε $U \in \mathfrak{U}$ και κάθε $[\gamma] \in \tilde{X}$ με $\gamma(1) \in U$, ορίζεται $\overline{U}^{\gamma} = \{[\gamma.a] \big|\, a$ μονομάτι στο $U\}$. Θα δειχθεί ότι το $\tilde{\mathfrak{U}}$ είναι όντως τοπολογική βάση, οπότε το $\tilde{X}$ εφοδιάζεται με την τοπολογία που παράγεται από αυτήν:

(i) $\cap\, \tilde{\mathfrak{U}} = \tilde{X}$: Έστω $[\gamma] \in \tilde{X}$. Επειδή υπάρχει U βασική περιοχή του $\gamma(1)$, ισχύει $[\gamma] \in \tilde{U}^{\gamma}$.

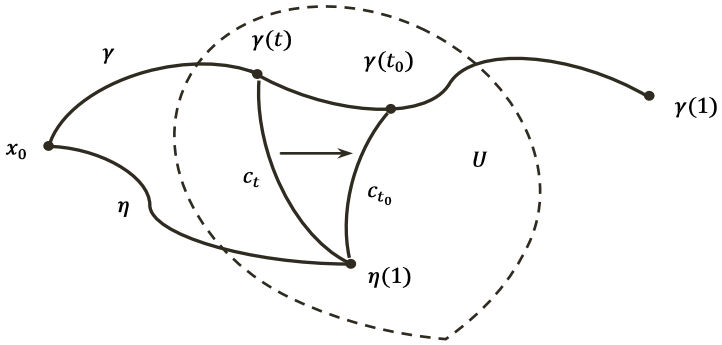
(ii) Έστω $\tilde{U}^{\gamma}, \tilde{V}^{\eta} \in \tilde{\mathfrak{U}}$, ζητείται στοιχείο της $\tilde{\mathfrak{U}}$ που να περιέχεται στο $\tilde{U}^{\gamma} \cap \tilde{\gamma}^{\eta}$. Έστω $[\delta] \in \tilde{U}^{\gamma} \cap \tilde{V}^{\gamma}$, τότε $\delta \sim \gamma.a \sim \eta.b$ για κάποια μονοπάτια a, b στο U, V αντιστοίχως. Επειδή $\mathfrak{U}$ βάση, υπάρχει $W \in \mathfrak{U}$ ώστε $\delta(1) \in W \subset U \cap V$, οπότε ισχύει $\tilde{W}^{\delta} \subset \tilde{U}^{\gamma} \cap \tilde{V}^{\eta}$: για κάθε μονοπάτι c στο W που ξεκινά στο $\delta(1)$, $\delta.c \sim \gamma.a \sim \eta.b.c \Longrightarrow [\delta.c] = [\gamma.a.c] = [\eta.b.c] \in \tilde{U}^{\gamma} \cap \tilde{V}^{\eta}$.





Θα δειχθεί ότι με την τοπολογία που ορίσθηκε επί της $\tilde{X}$, η $q : \tilde{X} \to X$ καθίσταται όντως επικάλυψη υπό μια επιπλέον προϋπόθεση.

Δρομοσυνεκτικότητα του $\tilde{X}$: Έστω $[\gamma] \in \tilde{X}$, ζητείται μονοπάτι από το $y_\circ = [c_{x_o}]$ στο $[\gamma]$. Επιλέγουμε $g : I \to \tilde{X}$, $g(t) = (\gamma_t)$, όπου $\gamma_t(s) = \gamma(ts)$, για το οποίο ισχύει $g(0) = y_0$ και $g(1) = [\gamma]$. Θα δειχθεί ότι η g αντιστρέφει βασικά του $\tilde{X}$ σε ανοικτά, επομένως είναι το ζητούμενο μονοπάτι, ως συνεχής. Έστω $\tilde{U}^{\eta}$ βασικό του $\tilde{X}$. Εάν $g^{-1}[\tilde{U}^{\eta}] = \varphi$, τότε είναι ανοικτό, αλλιώς έστω $t_0 \in g^{-1}[\tilde{U}^{\eta}]$. Ζητείται $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset g^{-1}[\tilde{U}^{\eta}]$.



Ισχύει $g^{t_0} = [\gamma_{t_0}] \in [\tilde{U}^{\eta}]$. Λόγω συνέχειας της γ, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\gamma[t_0 - \delta, t_0 + \delta$. Εάν ίσχυε ότι το U είναι δρομοσυνεκτικό, τότε για κάθε $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ υπάρχει μονοπάτι c_t στο U από το $\eta(1)$ στο $\gamma(t)$, και ισχύει ότι $g(t) = [\gamma_t] = [\eta \cdot c_t] \in U$, επομένως $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \in g^{-1}[\tilde{U}^{\eta}]$. Άρα μια ικανή συνθήκη για την δρομοσυνεκτικότητα του $\tilde{X}$ είναι ότι η τοπολογική βάση U του X (από την οποία κατασκευάστηκε η τοπολογία του $\tilde{X}$) συγκροτείται από δρομοσυνεκτικά σύνολα.

Κάνουμε την ειδικότερη υπόθεση ότι τα σύνολα που απαρτίζουν την U είναι τοπικά απλά συνεκτικά· θα δειχθεί ότι αυτό αρκεί ώστε η $q : \tilde{X} \to X$ να είναι επικάλυψη. Υποθέτοντας ότι ο επικαλυπτόμενος X είναι συνεκτικός, η τοπική δρομοσυνεκτικότητά του (έπεται από την τοπική απλή συνεκτικότητα) εγγυάται ότι είναι δρομοσυνεκτικός, και αυτό είναι αρκετό για να γίνει η q *επί*: για κάθε $x \in X$ υπάρχει μονοπάτι γ από το x_0 στο x με $x = q[\overline{\gamma}]$.

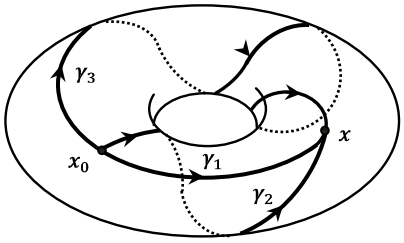
Για την συνέχεια της q, θα δειχθεί ότι $q^{-1}[U] = \bigcup_{[\gamma]} \tilde{U}^{\gamma}$ για κάθε $U \in \mathfrak{U}$ (όπου η ένωση λαμβάνεται πάνω στις δρομομοτοπικές κλάσεις από το x_o προς σημείο εντός του U), οπότε q συνεχής (αντιστρέφει

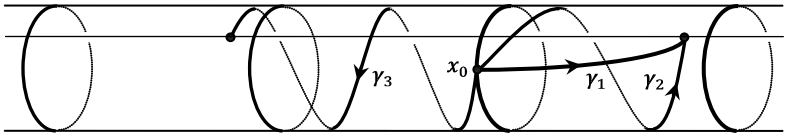
ανοικτά σε ανοικτά): εξ ορισμού της q, $q[\widetilde{U}^{\gamma}] \subset U$ για κάθε $[\gamma]$. Αντιστρόφως, $[\eta] \in q^{-1}[U] \Longrightarrow \eta(1) = q[\gamma] \in U$, επομένως υπάρχει μονοπάτι c στο U από το $\eta(1)$ στο x και $[\eta] = [\eta \cdot c \cdot c^{-1}] \in \widetilde{U}^{\gamma.c}$.

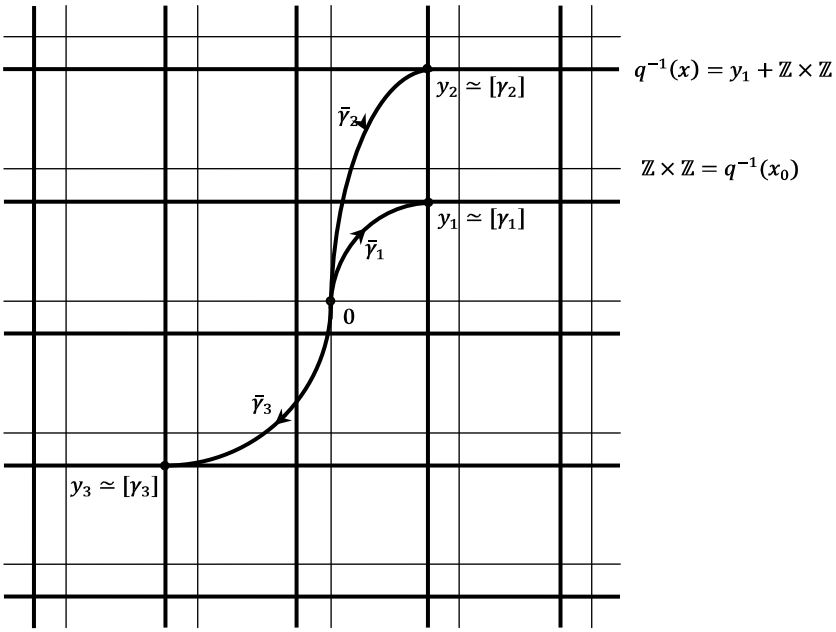
Μένει να δειχθεί ότι $\bigcup_{[\gamma]} \widetilde{U}^{\gamma}$ η γραφή του $q^{-1}[U]$ σε συνεκτικές συνιστώσες και ότι $q : \widetilde{U}^{\gamma} \to U$ ομοιομορφισμός για κάθε $[\gamma]$. Η q είναι επί του U επειδή για κάθε $x \in U$ υπάρχει μονοπάτι c στο U από το $\gamma(1)$ στο x. Είναι επίσης *1-1* : έστω $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \widetilde{U}^{\gamma}$ με $q[\gamma_1] = \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = q[\gamma_2]$, δηλαδή $\gamma_1 \sim \gamma \cdot a_1$ και $\gamma_2 \sim \gamma \cdot a_2$ για κάποια μονοπάτια a_1, a_2 στο U από το $\gamma(1)$ στο $\gamma_2(1)$. Λόγω απλής συνεκτικότητας του U, $[\gamma_1] = [\gamma_2]$. Τέλος, η q είναι ανοικτή (απεικονίζει βασικά σε ανοικτά), άρα είναι όντως ομοιομορφισμός από το $\widetilde{U}^{\gamma}$ στο U. Τώρα κάθε $\widetilde{U}^{\gamma}$ είναι ανοικτό και δρομοσυνεκτικό ως ομοιομορφικό του U. Μένει επομένως να δειχθεί ότι για κάποια μονοπάτια γ_1, γ_2 από το x_0 στο x, ισχύει $\widetilde{U}^{\gamma_1} = \widetilde{U}^{\gamma_2}$ ή $\widetilde{U}^{\gamma_1} \cap \widetilde{U}^{\gamma_2} = \emptyset$. Εάν δεν είναι ξένα, υπάρχει $[\eta] \in \widetilde{U}^{\gamma_1} \cap \widetilde{U}^{\gamma_2}$, οπότε $\eta \sim \gamma_1 \cdot a_1 \sim \gamma_2 \cdot a_2$ για κάποια μονοπάτια a_1, a_2 εντός του U από το x στο $\eta(1)$. Λόγω απλής συνεκτικότητας του U, $a_1 \sim a_2$, επομένως $\gamma_1 \sim \gamma_2$, δηλαδή $\widetilde{U}^{\gamma_1} = \widetilde{U}^{\gamma_2}$.

Απλή συνεκτικότητα του $\widetilde{X}$: Εάν $g : I \to \widetilde{X}$ βρόγχος που στηρίζεται στο y_0, τότε $\gamma = q \circ g$ βρόγχος που στηρίζεται στο x με $g = \bar{\gamma}$. Εάν $g' : I \to \widetilde{X}$ με $g'(t) = [\gamma_t]$, όπου $\gamma_t(s) = \gamma(ts)$, τότε g' είναι επίσης q-ανύψωση του γ στο y_0, οπότε $g = g'$ (VI.§1.4). Ισχύει όμως $y_0 = g(1) = g'(1) = [\gamma_1] = [\gamma]$, δηλαδή το γ είναι μηδενομοτοπικό, άρα g μηδενομοτοπικό (VI.§1.6). Διατυπώνεται επομένως το εξής.

VI.§1.15. Κάθε συνεκτικός και τοπικά απλά συνεκτικός χώρος έχει καθολική επικάλυψη (επομένως κάθε τοπολογική πολλαπλότητα έχει καθολική επικάλυψη).







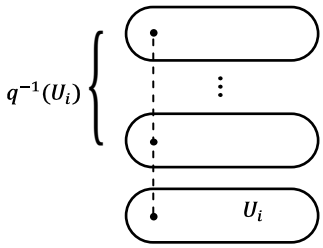
Από την αφηρημένη κατασκευή της καθολικής επικάλυψης, σταθεροποιώντας ένα $x_o \in X$ και ένα $y_o \in q^{-1}(x_o)$, κάθε σημείο της καθολικής επικάλυψης είναι τελικό σημείο της ανύψωσης στο y_o κάποιας κλάσης δρομομοτοπίας του X που ξεκινά από το x_o. Η απλή συνεκτικότητα του $\tilde{X}$ σημαίνει ακριβώς ότι αυτή η αντιστοιχία είναι αμφιμονοσήμαντη.

VI.§1.16. Επικάλυψη τοπολογικής πολλαπλότητας είναι τοπολογική πολλαπλότητα ίσης διάστασης.

Αποδ. Έστω $q : \widetilde{M} \to M$ επικάλυψη όπως στην υπόθεση. Επειδή η q είναι τοπικός ομοιομορφισμός, η M καλύπτεται από ευκλείδειες περιοχές.

Hausdorff: Έστω $y_1, y_2 \in \widetilde{M}$ διακεκριμένα. Εάν $q(y_1) = q(y_2) = x$ τότε τα y, y_2 βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $q^{-1}(x)$, άρα διαχωρίζονται. Εάν $q(y_1) \neq q(y_2)$, τα $q(y_1), q(y_2)$ διαχωρίζονται από ανοικτά U, V αντιστοίχως εφ' όσον M είναι *Hausdorff*, άρα τα y_1, y_2 διαχωρίζονται από τα $q^{-1}(U), q^{-1}(V)$.

2η αριθμησιμότητα: Θα δειχθεί αρχικά ότι κάθε q-ίνα είναι αριθμήσιμη. Έστω $x \in M$ και $y \in q^{-1}(x)$. Λόγω δρομοσυνεκτικότητας, η απεικόνιση $\pi_1(M, x) \to q^{-1}(x)$, $[\gamma] \longmapsto \bar{\gamma}(1)$ είναι *επί* (η ανύψωση λαμβάνεται με αρχικό σημείο y· η απεικόνιση ορίζεται καλά πάνω στις κλάσεις επειδή η ανύψωση διατηρεί την δρομοτοπία). Επειδή η θεμελιώδης ομάδα πολλαπλότητας είναι το πολύ αριθμήσιμη, έπεται το ζητούμενο. Η συλλογή των q-επικαλυμμένων υποσυνόλων της M είναι ανοικτό κάλυμμα, άρα έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Για κάθε $x \in U_i$, κάθε συνεκτική συνιστώσα του $q^{-1}(U_i)$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από την ίνα $q^{-1}(x)$. Άρα το $q^{-1}(U_i)$ έχει το πολύ αριθμησίμου πλήθους συνεκτικές συνιστώσες. Κάθε μία από αυτές έχει αριθμήσιμη βάση (ως ομοιομορφική με το U_i). Η ένωση όλων αυτών είναι η ζητούμενη αριθμήσιμη βάση της $\widetilde{M}$.



■

§2. ΔΡΑΣΗ ΣΕ ΣΥΝΟΛΑ

Δράση (από αριστερά) ομάδας G πάνω σε σύνολο X ονομάζεται μια πράξη

$$l : G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto l\,(g, x) = g \cdot x$$

τέτοια ώστε $1 \cdot x = x$, $(g_1 g_2) \cdot x = g_1(g_2 \cdot x)$. Από τα αξιώματα της ομάδας, κάθε $g \in G$ επάγει μία μετάθεση:

$$l_g : X \to X, \qquad l_g(x) = l(g, x) = gx$$

Επομένως κάθε δράση της G επί του X μπορεί να νοείται ως ομομορφισμός $G \to Perm(X)$ που ενρίπτει την G στην ομάδα μεταθέσεων του X. Αντιστρόφως, κάθε ομομορφισμός $\varphi : G \to Perm(X)$ επάγει μία δράση $G \times X \to X$, $g \cdot x = \varphi(g)(x)$, δηλαδή το σύνολο των δράσεων της G επί του X είναι η ομάδα ομομορφισμών $Hom(G; Perm(X))$. Έστω $l : G \times X \to X$, $l(g, x) = g \cdot x$, δράση από αριστερά. Ορίζονται για κάθε $g \in G$, $x \in X$ αντιστοίχως οι απεικονίσεις

$$l_g : X \to X, \qquad l_g(x) = gx$$

$$l^x : G \to X, \qquad l^x(g) = gx$$

Ορίζονται για κάθε $x \in X$, $stab(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ ο **σταθεροποιητής** του x και $orb(x) = \{y \in X \mid \exists\, g \in G, g \cdot x = y\}$ η **τροχιά** του x κάτω από την δράση της G. Προφανώς $orb(x) = l^x[G]$ και

$stab(x) = (l^x)^{-1}(x)$ η l^x-ισοσταθμική του x εντός της G. Ελέγχεται επίσης ότι για κάθε $x \in X$, η αντιστοιχία

$$a_x : G/stab(x) \to orb(x), \qquad gstab(x) \mapsto a_x\big(gstab(x)\big) = g \cdot x$$

είναι αμφιμονοσήμαντη, επομένως $\#G = \#orb(x) \cdot \#stab(x)$. Εάν $q_x : G \to G/stab(x)$ η σχετική απεικόνιση πηλίκο, τότε το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "q_x"'] \arrow[dr, "l^x"] & \\
G/stab(x) \arrow[r, "\alpha_x"'] & orb(x)
\end{tikzcd}$$

Το σύνολο των τροχιών του X κάτω από την δράση της G είναι διαμέριση του X και συμβολίζεται με X/G. Οι σταθεροποιητές ομότροχων στοιχείων είναι συζυγείς υποομάδες της G:

$$stab(gx) = \{h \in G \big| hgx = gx\} = \{h \in G \big| g^{-1}hgx = x\} = g^{-1}stab(x)g$$

Εάν η $stab(x)$ είναι κανονική υποομάδα της G, τότε όλα τα ομότροχα του x έχουν τον ίδιο σταθεροποιητή· σε αυτήν την περίπτωση το $G/stab(x)$ είναι ομάδα και η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $a_x : G/stab(x) \to orb(x)$ επάγει δομή ομάδας στην τροχιά $orb(x)$.

Δεδομένων δράσεων $l : G \times X \to X$ και $m : G \times Y \to Y$, η απεικόνιση $f : X \to Y$ ονομάζεται **ισομεταβαλλόμενη** ως προς τις δράσεις αυτές όταν για κάθε $g \in G$ το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l_g"'] & Y \arrow[d, "m_g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

ισοδύναμα, όταν $f(gx) = gf(x)$ (η f αντιμετατίθεται με την δράση της G).

Η δράση $l : G \times X \to X$ ονομάζεται **πιστή** όταν για κάθε $g \in G$ ισχύει $l_g \neq id$ (τότε $l_g \neq l_h$ για κάθε ζεύγος διακεκριμένων $g, h \in G$), δηλαδή όταν η G εμφυτεύεται στην ομάδα μεταθέσεων του X. Η δράση ονομάζεται **ελεύθερη** όταν κάθε στοιχείο του X σταθεροποιείται μόνο από το ταυτοτικό στοιχείο της X, δηλαδή $stab(x) = 1, \forall x \in X$· ισοδύναμα όταν για κάθε $x \in G$ η απεικόνιση $l_x : G \to X$ είναι $1-1$. Σε αυτήν την περίπτωση τα $gx, g \in G$ είναι διακεκριμένα και συγκροτούν ομάδα ισομορφική με την $G \cong G/1 = G/stab(x)$ μέσω της αντιστοίχισης $g \mapsto gx$. Επομένως κάτω από ελεύθερη δράση της G, το X διαμερίζεται σε τροχιές ισοπληθικές της G (νοούνται ως εικόνες της G εντός του X), και κάθε $g \in G$ δρά σε κάθε μία από αυτές αναδιατάσσοντας τα στοιχεία της.

Η δράση $l : G \times X \to X$ καλείται **μεταβατική** όταν επάγει μοναδική τροχιά επί του X, δηλαδή όταν για κάποιο (και άρα για κάθε) $x \in X$ ισχύει $orb(x) = X$. Κατά τα προηγούμενα, κάτω από ελεύθερη και μεταβατική δράση της G, το X καθίσταται ομάδα ισομορφική με αυτήν.

Ως (αριστερή) δράση της ομάδας G επί του εαυτού της εννοείται η απλή μεταφορά από αριστερά. Αυτή η δράση είναι μεταβατική και ελεύθερη, επιπλέον είναι πιστή, που σημαίνει ότι η G εμφυτεύεται στην ομάδα μεταθέσεων του συνόλου G. Δεδομένης δράσης $l : G \times X \to X$, η απεικόνιση $l_x : G \to X$ είναι για κάθε $x \in X$ ισομεταβαλλόμενη ως προς την δράση της G επί του εαυτού της,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g(\cdot)"'] & X \arrow[d, "l_g"] \\ G \arrow[r, "l_x"'] & X \end{tikzcd}$$

$$l^x(gh) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = gl^x(h)$$

Ως δράση της υποομάδας $H \subset G$ επί της G εννοείται η απλή μεταφορά από αριστερά,

$$H \times G \to G, \qquad (h, g) \mapsto hg$$

Αυτή η δράση είναι πιστή, επίσης είναι ελεύθερη και άρα μή μεταβατική, εκτός εάν η H δεν είναι γνήσια υποομάδα της G.

Ως δράση της ομάδας G επί του συνόλου των αριστερών συμπλόκων της $H \subset G$ εννοείται η

$$G \times G/H \to G/H, \qquad (g, kH) \mapsto (gk)H$$

Αυτή η δράση καθιστά ισομεταβαλλόμενη την απεικόνιση πηλίκο $G \to G/H$. Είναι μεταβατική, άρα μή ελεύθερη, εκτός εάν η H είναι η τετριμμένη υποομάδα.

Η δράση **συζυγία** της G επί του εαυτού της

$$G \times G \to G, \qquad (g, k) \mapsto g^{-1}kg$$

επάγει ως τροχιές τις κλάσεις συζυγίας της G, άρα δεν είναι μεταβατική, εκτός εάν η G είναι η τετριμμένη.

§3. ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

Τοπολογική ομάδα ονομάζεται μια ομάδα G εφοδιασμένη με *Hausdorff* τοπολογία, τέτοια ώστε η πράξη $mult : G \times G \to G$ και η αντιστροφή $inv : G \to G$ να είναι συνεχείς συναρτήσεις. Ελέγχεται εύκολα ότι η συνέχεια των δύο ισοδυναμεί με την απαίτηση ότι για κάθε ανοικτή περιοχή U του g_1g_2, $g_i \in G$, υπάρχουν ανοικτές περιοχές U_1, U_2 των g_1, g_2, αντιστοίχως ώστε $U_1U_2^{-1} \subset U$.

Διακριτή ονομάζεται μια τοπολογική ομάδα εφοδιασμένη με την διακριτή τοπολογία. Εφ' όσον η μόνη *Hausdorff* τοπολογία επί πεπερασμένου συνόλου είναι η διακριτή, έπεται ότι κάθε πεπερασμένη τοπολογική ομάδα είναι διακριτή. Φαίνεται άμεσα ότι η $inv : G \to G$ και οι μεταφορές

$$g(\cdot) : G \to G, \qquad (\cdot)g : G \to G, \qquad g \in G$$

είναι ομοιομορφισμοί· ιδιαίτερα οι δύο τελευταίες δείχνουν ότι κάθε τοπολογική ομάδα είναι ομογενής τοπολογικός χώρος: για κάθε $g_1g_2 \in G$, υπάρχει ομοιομορφισμός $h : G \to G$ ώστε $h(g_1) = g_2$. Επομένως ο έλεγχος τοπικών τοπολογικών ιδιοτήτων αρκεί να γίνεται γύρω από κάποιο βολικό στοιχείο (συνήθως το ταυτοτικό).

VI.§3.0. Κάθε τοπολογική ομάδα είναι T_3 (*regular*).

Αποδ. Θα ελεγχθεί η T_3-ιδιότητα γύρω από το 1. Έστω $U \subset G$ ανοικτή περιοχή του 1, τότε $\exists V \subset G$ ανοικτή περιοχή του 1 ώστε $V \cdot \overline{V}^{-1} \subset U$. Θα δειχθεί ότι $\overline{V} \subset U$. Εάν $a \in \overline{V}$, τότε $aV \cap V \neq \emptyset$ (εφ' όσον aV ανοικτή περιοχή του a), άρα $ab = c$ για κάποια $b, c \in V$, δηλαδή $a = cb^{-1} \subset VV^{-1} \subset U$. ■

Από VI.§3.0 και το Θεώρημα Μετρικοποιησιμότητας του Urysohn, η 2η-αριθμησιμότητα είναι ικανή συνθήκη ώστε μια τοπολογική ομάδα να μετρικοποιείται. Επειδή οι ενδιαφέρουσες γεωμετρικά τοπολογικές ομά-

δες είναι μετρικοποιήσιμες, εφ' εξής εξετάζονται τοπολογικές ομάδες που φέρουν την 2η-αριθμησιμότητα, η οποία δίνει μαζί με την T_3-ιδιότητα έναν ισχυρό συνδυασμό.

Τοπολογική υποομάδα ονομάζεται μια υποομάδα που επιπλέον είναι κλειστό υποσύνολο. Κάθε υποομάδα δεν είναι τοπολογική, ωστόσο ελέγχεται εύκολα ότι κάθε υποομάδα καθίσταται τοπολογική ομάδα με την επαγόμενη τοπολογία. Επίσης, εάν N κανονική (αλγεβρική) υποομάδα της G, τότε η $\overline{N}$ είναι κανονική τοπολογική υποομάδα.

VI.§3.1. Η συμπάγεια και η τοπική συμπάγεια κληροδοτούνται στις τοπολογικές υποομάδες.

Αποδ. Για την συμπάγεια είναι άμεσο, λόγω κλειστότητας εντός συμπαγούς χώρου. Για την τοπική συμπάγεια, έστω $g \in H$, όπου H τοπολογική υποομάδα της G· ζητείται ανοικτή περιοχή $U \subset G$ του g ώστε $\overline{U \cap H}^H$ να είναι συμπαγές. Από τοπική συμπάγεια της G, υπάρχει U ώστε $\overline{U}^G$ συμπαγές. Ισχύει $\overline{U}^G \cap H = \overline{U \cap H}^G = \overline{U \cap H}^H$ και επίσης $\overline{U}^G \cap H$ συμπαγές στο G ως τομή συμπαγούς με κλειστό. Άρα το $\overline{U}^G \cap H$ είναι συμπαγές στο H. ■

Εάν N κανονική τοπολογική υποομάδα της G, μπορεί τότε να δειχθεί από τους ορισμούς ότι η G/N είναι τοπολογική ομάδα με την τοπολογία πηλίκο, και επιπλέον η κανονική προβολή $q : G \to G/N$ είναι ανοικτή. Αποδεικνύεται επίσης το ακόλουθο [**Pont**]:

VI.§3.2. Εάν G είναι 2ος-αριθμήσιμος χώρος, $N \lhd G$ συμπαγής τοπολογική υποομάδα και G/N συμπαγής, τότε η G είναι συμπαγής.

Από τις ιδιότητες της κλειστότητας, τομή (κανονικών) τοπολογικών υποομάδων είναι (κανονική) τοπολογική υποομάδα.

Ισομορφισμός τοπολογικών ομάδων ονομάζεται ένας (αλγεβρικός) ισομορφισμός που είναι ομοιομορφισμός. **Ομομορφισμός** τοπολογικών ομάδων ονομάζεται κάθε συνεχής ομομορφισμός που επιπλέον είναι ανοικτή απεικόνιση. Η διάκριση των ανοικτών ομομορφισμών από τους υπόλοιπους είναι ουσιώδης, π.χ. η κανονική απεικόνιση στο πηλίκο είναι ανοικτή. Είναι οι τοπολογικοί ομομορφισμοί που δίνουν τη φυσική γενίκευση των συνήθων εργαλείων της άλγεβρας στις τοπολογικές ομάδες, όπως φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα (βλ. [**Pont**]).

VI.§3.3. Εάν $\varphi : G \to H$ ομομορφισμός τοπολογικών ομάδων, τότε $ker\varphi$ κανονική τοπολογική υποομάδα της G και H, $G/ker\varphi$ ισόμορφες ως τοπολογικές ομάδες. Αντιστρόφως, για κάθε $N \lhd G$ τοπολογική υποομάδα υπάρχει τοπολογικόςομομορφισμός από την G τέτοιος ώστε οι G/N, $Im\,\varphi$ να είναι ισόμορφες.

Η διάκριση μεταξύ ομομορφισμών τοπλογικών ομάδων και συνεχών ομομορφισμών αίρεται στις ενδιαφέρουσες γεωμετρικά περιπτώσεις (βλ. [**Pont**]):

VI.§3.4. Κάθε συνεχής αλγεβρικός ομομορφισμός μεταξύ 2ων-αριθμήσιμων, τοπικά συμπαγών ομάδων είναι ανοικτός (δηλαδή ομομορφισμός τοπολογικών ομάδων).

Ακολουθούν διαπιστώσεις που δεν έχουν ανάλογο στην αλγεβρική θεωρία των ομάδων και δείχνουν ότι η εμπλοκή της αλγεβρικής πράξης με την τοπολογία θέτει ισχυρούς περιορισμούς στην δεύτερη, και κατ' επέκταση στην γεωμετρία της ομάδας.

VI.§3.5. Η συνεκτική συνιστώσα τοπολογικής ομάδας που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο είναι κανονική τοπολογική υποομάδα.

Αποδ. Αρκεί να δειχθεί ότι η συνεκτική συνιστώσα N του 1 είναι κανονική (αλγεβρική) υποομάδα. Έστω $g_1, g_2 \in N$, τότε $g_1 N^{-1}$ είναι συνεκτικό (η αντιστροφή και η μεταφορά από αριστερά είναι ομοιομορφισμοί), και εφ' όσον το $g_1 N^{-1}$ περιέχει το 1, έπεται ότι $g_1 N^{-1} \subset N$. Άρα $g, g^{-1} \in N$ και η N είναι κλειστό ως προς την πράξη. Επίσης $x^{-1}Nx$ είναι συνεκτικό για κάθε $x \in G$ (η συζυγία είναι ομοιομορφισμός), και εφ' όσον περιέχει το 1, ισχύει $x^{-1}Nx \subset N$. ■

Μηδενοδιάστατη καλείται μια τοπολογική ομάδα της οποίας οι συνεκτικές συνιστώσες είναι μονοσύνολα. Προφανώς κάθε διακριτή ομάδα είναι μηδενοδιάστατη, όμως το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει: η $\mathbb{Q}$ είναι μηδενοδιάστατη αλλά όχι διακριτή.

VI.§3.6. Το πηλίκο τοπολογικής ομάδας με την συνεκτική συνιστώσα του ταυτοτικού στοιχείου είναι μηδενοδιάστατη ομάδα.

Αποδ. Έστω $q : G \to G/N$ η κανονική προβολή, για την οποία είναι γνωστό ότι είναι συνεχής και ανοικτή. Πρέπει να δειχθεί ότι η συνεκτική συνιστώσα C του ταυτοτικού της G/N είναι μονοσύνολο. Ελέγχεται εύκολα από τις ιδιότητες της q ότι ο περιορισμός $q : q^{-1}[C] \to C$ είναι ανοικτός. Εάν το C δεν είναι μονοσύνολο, τότε το $q^{-1}[C]$ περιέχει στοιχεία που δεν ανήκουν στην συνεκτική συνιστώσα N του $1 \in G$, άρα δεν είναι συνεκτικό. Τότε $q^{-1}[C] = N \cup A$, όπου $A \subset G$ ανοικτό με $N \cap A = \emptyset$, άρα $q[N] \cap q[A] = \emptyset$ και επομένως το C γράφεται ως ένωση ξένων ανοικτών, άτοπο, λόγω συνεκτικότητας. ■

VI.§3.7. Μια συνεκτική τοπολογική ομάδα παράγεται αλγεβρικά πάνω σε οποιαδήποτε ανοικτή περιοχή του ουδέτερου στοιχείου.

Αποδ. Έστω U ανοικτή περιοχή του $1 \in G$ και $V = \bigcup_{n \in N} U^n$, που προφανώς είναι ανοικτό. Λόγω συνεκτικότητας της G, αρκεί να δειχθεί ότι V είναι κλειστό. Εάν $g \in \bar{V}$ τότε, εφ' όσον gU^{-1} ανοικτή περιοχή του g, υπάρχει $g' \in V$ ώστε $g' \in gU^{-1}$. Τότε $g' = g_1 \dots g_m$, $g_i \in U$, και επειδή $g' \in gU^{-1}$, $g_1 \dots g_m = g\, g_{m+1}^{-1}$, όπου $g_{m+1} \in U$. Άρα $g = g_1 \dots g_m\, g_{m+1} \in U^{m+1} \subset V$. ■

Μη συνεκτικές ομάδες έχουν επίσης την ιδιότητα της προηγούμενη πρότασης, π.χ. η $\mathbb{Q}$.

VI.§3.8. Το κέντρο τοπολογικής ομάδας είναι κανονική τοπολογική υποομάδα.

Αποδ. Αρκεί να δειχθεί ότι το $Z(G)$ είναι κλειστό υποσύνολο. Έστω $g \in \overline{Z(G)} \setminus Z(G)$, ισοδύναμα, $x^{-1}gx \neq g$ για κάποιο $x \in G$. Εφ' όσον η G είναι T_3, υπάρχουν ανοικτές περιοχές U, W των $g, x^{-1}gx$ αντιστοίχως ώστε $\bar{U} \cap \bar{W} \neq \emptyset$. Ορίζουμε $V = Z(G) \cap U$, οπότε $g \in \bar{V} = \overline{Z(G)} \cap \bar{U}$. Όμως τότε $x^{-1}gx \in x^{-1}\bar{V}x$ το οποίο ισούται με $\bar{V}$ (εφ' όσον $\bar{V} \subset Z(G)$), άρα $\bar{U} \cap \bar{W} \neq \emptyset$, άτοπο. ■

Οι διακριτές κανονικές υποομάδες εντοπίζονται ως σύνολα στοιχείων που αντιμετατίθενται με ολόκληρη την ομάδα:

VI.§3.9. Κάθε διακριτή κανονική τοπολογική υποομάδα περιέχεται στο κέντρο.

Αποδ. Έστω G τοπολογική ομάδα και $N \lhd G$ τοπολογική υποομάδα που είναι διακριτή με την επαγόμενη τοπολογία. Εφ' όσον η G παράγεται αλγεβρικά πάνω σε αυθαίρετα μικρή ανοικτή περιοχή του 1, αρκεί για τυχαίο $g \in N$ να βρεθεί ανοικτή περιοχή U του 1 ώστε $u^{-1}gu = g$, για κάθε $u \in U$. Λόγω διακριτότητας, υπάρχει ανοικτή περιοχή $V \subset G$ του g τέτοια ώστε $V \cap N = \{g\}$. Επειδή $1^{-1}g1 = g$, από την συνέχεια των πράξεων έπεται η ύπαρξη ανοικτής περιοχής $U \subset G$ του 1 ώστε $U^{-1}gU \subset V$. Επειδή N κανονική, $U^{-1}gU \subset V$, επομένως $U^{-1}gU \subset V \cap N = \{g\}$, ισοδύναμα, $u^{-1}gu = g, \forall u \in V$. ■

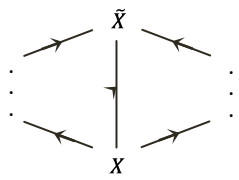
VI.§3.10. Εάν κάθε ανοικτή περιοχή του ουδέτερου στοιχείου περιέχει ανοικτή τοπολογική υποομάδα, τότε η ομάδα είναι μηδενοδιάστατη.

Αποδ. Έστω G τοπολογική ομάδα όπως στην υπόθεση και U ανοικτή περιοχή του 1 με H ανοικτή τοπολογική υποομάδα περιεχόμενη σε αυτό. Τότε $G = H \cup (G \setminus H)$, και επειδή τα $H, G \setminus H$ είναι ανοικτά σύνολα ξένα μεταξύ τους, η συνεκτική συνιστώσα του 1 περιέχεται στην H, δηλαδή στο U. Εφ' όσον αυτό ισχύει για αυθαίρετο U, η συνεκτική συνιστώσα του 1 είναι μονοσύνολο. ■

§4. ΜΟΝΟΔΡΟΜΙΑ

Θεωρούμε επικάλυψη $q : \tilde{X} \to X$. Επειδή η ανύψωση διατηρεί την δρομομοτοπία, για κάθε $x \in X$ και κάθε $y \in q^{-1}(x)$ η απεικόνιση $q_* : \pi_1(\tilde{X}, y) \to \pi_1(X, x)$ είναι μονομορφισμός. Επομένως καθώς το y διατρέχει την ίνα $q^{-1}(x)$, οι υποομάδες $q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$ όχι μόνο συγκροτούν κλάση συζυγίας στο πλέγμα των υποομάδων της $\pi_1(X, x)$, αλλά επίσης είναι ισομορφικές εμφυτεύσεις της $\pi_1(\tilde{X}, y)$ στην $\pi_1(X, x)$. Αυτό είναι η αλγεβρική διατύπωση του ζητούμενου από έναν χώρο επικάλυψης: τυλίγει τον X έχοντας κάποιες από τις οπές του, αλλά εν γένει λιγότερες. Οι τοπικά απλά συνεκτικοί χώροι τυλίγονται από απλά συνεκτικούς χώρους (VI.§1.14) και αυτός τυλίγει όλες τις άλλες επικαλύψεις (VI.§1.14). Αναμένεται ότι η καθολική επικάλυψη δεν τυλίγεται από κανέναν άλλο χώρο, εφ' όσον δεν έχει οπές.

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η ταξινόμηση των γεωμετρικά ενδιαφερόντων χώρων επικάλυψης ενός τοπολογικού χώρου εξετάζοντας την ιεραρχία των οπών, δηλαδή τις θεμελιώδεις ομάδες τους. Από τα έως τώρα γνωστά, το πλέγμα των επικαλύψεων ενός χώρου X είναι



(καθολική επικάλυψη, καλύπτει όλες τις επικαλύψεις)

(βασικός χώρος, καλύπτεται από όλες τις επικαλύψεις)

όπου το βέλος δείχνει τον χώρο επικάλυψης. Θα προκύψει τελικά ένα πλέγμα που προσδιορίζεται πλήρως από το πλέγμα των κανονικών υποομάδων της $\pi_1(X)$. Το τελικό θεώρημα (VI.§5.13) είναι δομικά μία επαναδιατύπωση του θεμελιώδους θεωρήματος της θεωρίας *Galois* στη γλώσσα της αλγεβρικής τοπολογίας.

Δεδομένου $x \in X$ και επικάλυψης $q : \tilde{X} \to X$, ορίζεται καλά, εφ' όσον η δρομομοτοπία διατηρείται από την ανύψωση, η δράση **σημειακή μονοδρομία στο x,**

$$\pi_1(X, x) \times q^{-1}(x) \to q^{-1}(x), \qquad ([\gamma], y) \longmapsto \bar{\gamma}^y(1)$$

όπου $\bar{\gamma}^y$ η ανύψωση του βρόγχου γ στο y. Η σημειακή μονοδρομία στο x είναι αναπαράσταση της $\pi_1(X, x)$ εντός της ομάδας μεταθέσεων της ίνας $q^{-1}(x)$,

$$\sigma_x : \pi_1(X, x) \to Perm\big(q^{-1}(x)\big), \qquad \gamma \longmapsto \sigma_x(\gamma) = \bar{\gamma}^{(\cdot)}(1)$$

Από την ισοδυναμία $\bar{\gamma}^y(1) = y \Leftrightarrow \bar{\gamma}^y \in \pi_1\big(\tilde{X}, y\big) \Leftrightarrow \gamma = q \circ \bar{\gamma}^y = q_*\bar{\gamma}^y \in q_*\pi_1\big(\tilde{X}, y\big)$ έπεται ότι $stab(y) = q_*\pi_1\big(\tilde{X}, y\big)$, απ' όπου συνάγεται ότι

$$ker\sigma_x = \bigcap_{y \in q^{-1}(x)} q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$$

Καλείται **ομάδα μονοδρομίας στο σημείο** x η εικόνα της $\pi_1(X, x)$ μέσω της σ_x εντός της ομάδας μεταθέσεων της μελετώμενης ίνας,

$$\sigma_x[\pi_1(X, x)] \;\cong\; \pi_1(X, x) \Big/ \bigcap_{y \in q^{-1}(x)} q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$$

που είναι η ομαδοποίηση των βρόγχων της $\pi_1(X, x)$ ως προς την μετάθεση που επάγουν στην q-ίνα του x.

VI.§4.0. Κάθε σημειακή μονοδρομία είναι μεταβατική δράση. Εάν ο χώρος επικάλυψης είναι απλά συνεκτικός, τότε κάθε σημειακή μονοδρομία είναι επίσης ελεύθερη (επομένως το πλήθος των στρώσεων της καθολικής επικάλυψης ισούται με τον πληθάριθμο της θεμελιώδους ομάδας του επικαλυπτόμενου χώρου).

Αποδ. Εξ αιτίας της δρομοσυνεκτικότητας του $\tilde{X}$, κάθε ζεύγος y_1, y_2 στο $q^{-1}(x)$ συνδέται με μονοπάτι γ. Τότε το $\gamma = q \circ \bar{\gamma}$ είναι βρόγχος της $\pi_1(X, x)$ που μεταφέρει το y_1 στο y_1. Μονοπάτια με κοινά άκρα σε απλά συνεκτικό χώρο είναι δρομοτοπικά, άρα εάν $\tilde{X}$ απλά συνεκτικός, για κάθε $y \in q^{-1}(x)$ η απεικόνιση $\pi_1(X, x) \to q^{-1}(x)$, $\gamma \longmapsto \bar{\gamma}^y(1)$ είναι $1-1$, ισοδύναμα, η σημειακή μονοδρομία στο x είναι ελεύθερη. ■

VI.§4.1. Επικάλυψη απλά συνεκτικού χώρου είναι ομοιομορφισμός (επομένως κάθε απλά συνεκτικός καλύπτεται μόνο από τον εαυτό του).

Αποδ. Έστω $q : \tilde{X} \to X$ επικάλυψη απλά συνεκτικού. Η $q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$ είναι εμφύτευση της $\pi_1\big(\tilde{X}, y\big)$ στην $\pi_1(X, x)$, επομένως $\pi_1\big(\tilde{X}, y\big) = 1$. Από δεύτερο σκέλος της πρότασης VI.§2.0, $\#q^{-1}(x) = \#\pi_1(X) = 1$. Επειδή η q είναι απεικόνιση πηλίκο με ίνες μονοσύνολα, είναι ομοιομορφισμός. ■

Μονοδρομία ονομάζεται η απεικόνιση

$$\sigma : \pi_1(X) \times \tilde{X} \to \tilde{X}, \qquad (\gamma, y) \longmapsto \sigma(\gamma, y) = \sigma_x(\gamma)(y) = \bar{\gamma}^{(y)}(1)$$

όπου $\bar{\gamma}^y$ η ανύψωση στο y του στοιχείου γ ως απτού βρόγχου της ομάδας $\pi_1(X, x)$, $x = q(y)$. Για κάθε $\gamma \in \pi_1(X)$, η απεικόνιση $\sigma(\gamma, \cdot) : \tilde{X} \to \tilde{X}$ σέβεται τις q–ίνες του $\tilde{X}$ και ο περιορισμός της σε κάθε μία από αυτές είναι η σημειακή μονοδρομία στο αντίστοιχο σημείο του X. Επειδή οι q–ίνες συγκροτούν διαμέριση

του $\tilde{X}$ και κάθε $\sigma_x(\gamma) = \sigma(\gamma,\cdot)\big|_{q^{-1}(x)}$ είναι μία μετάθεση της $q^{-1}(x)$, έπεται ότι η $\sigma(\gamma,\cdot)$ είναι μια μετάθεση του $\tilde{X}$.

Άρα η μονοδρομία είναι δράση της ομάδας $\pi_1(X)$ επί του συνόλου $\tilde{X}$ (ενρίπτει την $\pi_1(X)$ στην ομάδα των μεταθέσεων του $\tilde{X}$ που σέβονται τις q-ίνες). Δεν είναι *a priori* γνωστό ότι η μονοδρομία είναι σημειακά ομοιόμορφη, δηλαδή ότι για διακεκριμένα $x_1, x_2 \in X$, η δράση της $\pi_1(X, x_1)$ επί της $q^{-1}(x_1)$ είναι ίδια με την δράση της $\pi_1(X, x_2)$ επί της $q^{-1}(x_2)$: μπορεί η εικόνα κάποιου $\gamma \in \pi_1(X)$ ως απτού βρόγχου στην $\pi_1(X, x_1)$ να ανυψώνεται ως βρόγχος σε κάποιο $y \in q^{-1}(x_1)$, ενώ η εικόνα του γ ως απτού βρόγχου στην $\pi_1(X, x_2)$ όχι· τότε η ολική δράση της $\pi_1(X)$ επί του $\tilde{X}$ δεν μπορεί να προσδιορισθεί από την σημειακή μονοδρομία στο τυχαίο x_1.

Εάν η μονοδρομία δεν είναι σημειακά ομοιόμορφη, τότε η ομάδα μετασχηματισμών $\{\sigma(\gamma,\cdot)\big|\, \gamma \in \pi_1(X)\}$ του $\tilde{X}$ δεν έχει καλή γεωμετρική δράση: εάν η $\sigma_{x_1}(\gamma)$ είναι η ταυτοτική μετάθεση της ίνας $q^{-1}(x_1)$ για κάποιο $x_1 \in X$ ενώ η $\sigma_{x_2}(\gamma)$ δεν δρά τετριμμένα στην ίνα $q^{-1}(x_2)$ για κάποιο άλλο $x_2 \in X$, τότε δεν αναμένεται ότι ο μετασχηματισμός $\sigma(\gamma) : \tilde{X} \to \tilde{X}$ είναι συνεχής. Αντιθέτως, εάν η μονοδρομία είναι σημειακά ομοιόμορφη, τότε για κάθε $\gamma \in \pi_1(X)$, ο μετασχηματισμός $\sigma(\gamma)$ είτε είναι ο ταυτοτικός είτε μεταφέρει τον $\tilde{X}$ κατά μήκος των ομοειδών σημειακών ανυψώσεων του γ: αυτό είναι πολύ καλύτερο από την απλή συνέχεια, υποδηλώνει ότι οι ανυψώσεις του γ συγκροτούν κάποιο είδος ροής εντός του $\tilde{X}$ και ότι ο μετασχηματισμός $\sigma(\gamma)$ πρέπει να νοείται ως μεταφορά κατά μήκος της ροής αυτής. Θα προσδιορισθούν οι επικαλύψεις με σημειακά ομοιόμορφη μονοδρομία.

Έστω επικάλυψη $q : \tilde{X} \to X$ και $x \in X$ τέτοιο ώστε για κάποιο $y \in q^{-1}(x)$ να ισχύει $q_*\pi_1(\tilde{X}, y) \lhd \pi_1(X, x)$. Επειδή οι ομάδες $q_*\pi_1(\tilde{X}, z)$, $z \in q^{-1}(x)$, συγκροτούν κλάση συζυγίας στο πλέγμα των υποομάδων της $\pi_1(X, x)$, και εφ' όσον οι κανονικές υποομάδες μένουν αναλλοίωτες από την συζυγία, έπεται ότι για κάθε $z \in q^{-1}(x)$ ισχύει $q_*\pi_1(\tilde{X}, z) = q_*\pi_1(\tilde{X}, y) \lhd \pi_1(X, x)$. Η δρομοσυνεκτικότητα του $\tilde{X}$ επιτρέπει την μεταφορά αυτής της κατάστασης σε κάθε σημείο του X: εάν $y \in \tilde{X}$ τυχαίο, θα δειχθεί ότι $q_*\pi_1(\tilde{X}, y) \lhd \pi_1(X, q(y))$. Επιλέγουμε μονοπάτι γ στον $\tilde{X}$ από το y_o στο y, όπου y_o σημείο στην q-ίνα του x. Τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\tilde{X}, y) \arrow[r, "\varphi_{\bar{\gamma}}"] \arrow[d, "q_*"'] & \pi_1(\tilde{X}, y) \arrow[d, "q_*"] \\
q_*\pi_1(\tilde{X}, y_0) \arrow[r, "\varphi_{q\circ\gamma}"'] & q_*\pi_1(\tilde{X}, y)
\end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό. Επειδή τα οριζόντια βέλη είναι ισομορφισμοί, και επειδή είναι γνωστό ότι ο κάτω ισομορφισμός επεκτείνεται σε ισομορφισμό $\pi_1(X, x) \to \pi_1(X, q(y))$, έπεται το ζητούμενο.

Μια επικάλυψη $q : \tilde{X} \to X$ ονομάζεται **κανονική** όταν για κάθε $x \in X$, οι κλάση συζυγίας $q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$, $y \in q^{-1}(x)$ (VI.§1.12) είναι μονοσύνολο, δηλαδή απαρτίζεται από μία κανονική υποομάδα της $\pi_1(X, x)$. Από την προηγούμενη παρατήρηση, αυτό αρκεί να συμβαίνει σε κάποιο σημείο του X ώστε να συμβαίνει παντού. Η ταυτοτική και η καθολική επικάλυψη είναι κανονικές, με της αντίστοιχες κανονικές υποομάδες (τετριμμένες) να περιέχονται η μια στην άλλη σε σχέση αντίστροφη της ιεραρχίας των επικαλύψεων.

$$\begin{tikzcd}
\text{(καθολική επικάλυψη)}\ \tilde{X} \arrow[r, leftrightarrow] & 1 = \pi_1(\tilde{X}) \arrow[d, "\text{(κανονική εμφύτευση)}"] \\
\text{(βασικός χώρος)}\ X \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\rightsquigarrow"] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

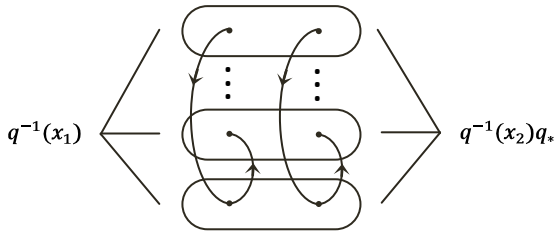
Εξ ορισμού τους, οι κανονικές επικαλύψεις είναι ακριβώς εκείνες για τις οποίες σε κάθε $x \in X$, η ομάδα μονοδρομίας λαμβάνει την μορφή $\pi_1(X, x)/N$, όπου $N = q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$ για όλα τα $y \in q^{-1}(x)$. Δηλαδή καθώς το y διατρέχει την $q^{-1}(x)$, η ανύψωση των βρόγχων της $\pi_1(X, x)$ στο y γίνεται με τον ίδιο τρόπο:

ένα $\gamma \in \pi_1(X, x)$ είτε ανυψώνεται ως βρόγχος σε όλα τα $y \in q^{-1}(x)$ είτε σε κανένα από αυτά. Η παρατήρηση πριν από τον τον ορισμό της κανονικότητας δηλώνει ότι αυτή η ομοιομορφία ως προς το ποιοί βρόγχοι ανυψώνονται σε βρόγχους, μπορεί να επιτευχθεί σε ολόκληρο τον X: θεωρούμε την υλοποίηση του στοιχείου $\gamma \in \pi_1(X)$ ως απτού βρόγχου στην ομάδα $\pi_1(X, x)$ καθώς το x διατρέχει τον X· τότε ο γ είτε ανυψώνεται ως βρόγχος σε κάθε $x \in X$ και για κάθε $y \in q^{-1}(x)$ είτε πουθενά. Επομένως οι κανονικές επικαλύψεις είναι ακριβώς εκείνες των οποίων η μονοδρομία είναι σημειακά ομοιόμορφη.

***Deck*-μετασχηματισμός** της επικάλυψης $q : \tilde{X} \to X$ καλείται ένας ομοιομορφισμός h του $\tilde{X}$ που σέβεται τις q-ίνες · ισοδύναμα, μία ανύψωση της q που είναι ομοιομορφισμός.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "q"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "q"'] & X \end{tikzcd}$$

Καλύπτουσα ομάδα, Γ, της επικάλυψης $q : \tilde{X} \to X$ ονομάζεται η ομάδα των *deck*-μετασχηματισμών της. Θεωρώντας την Γ εφοδιασμένη με την επαγόμενη από την ομάδα των ομοιομορφισμών του $\tilde{X}$ *compact-open* τοπολογία, η δράση $\Gamma \times \tilde{X} \to \tilde{X}$, $(h, y) \longmapsto h(y)$ είναι συνεχής. Επιπλέον είναι ελεύθερη, εφ' όσον δύο *deck*-μετασχηματισμοί που συμφωνούν σε κάποιο σημείο ταυτίζονται (VI.§1.4). Θα δειχθεί ότι για κανονικές ομάδες, η καλύπτουσα ομάδα είναι η εικόνα της θεμελιώδους ομάδας του επικαλυπτόμενου χώρου εντός της ομάδας των ομοιομορφισμών του επικαλύπτοντος μέσω της μονοδρομίας - δηλαδή οι ομοιομορφισμοί του $\tilde{X}$ που σέβονται τις q-ίνες συμπίπτουν με τις μεταφορές κατά μήκος των τοπικών ανυψώσεων της $\pi_1(X)$. Κάθε *deck*-μετασχηματισμός επάγει μια μετάθεση των συνεκτικών συνιστωσών αντίστροφης εικόνας q-επικαλυμμένου συνόλου, και η ελευθερία της δράσης σημαίνει ότι κάθε τέτοια μετάθεση είναι αναδιάταξη: έστω $\tilde{U}$ μια συνεκτική συνιστώσα του $q^{-1}[U]$, όπου $U \subset X$ q-επικαλυμμένο· τότε λόγω συνέχειας, το $h[\tilde{U}]$ είναι συνεκτικό, και επειδή ο h είναι ομοιομορφισμός, έπεται ότι το $h[\tilde{U}]$ είναι συνεκτική συνιστώσα. Αφού οι *deck*-μετασχηματισμοί διατηρούν τις q-ίνες, έπεται ότι επάγουν μια μετάθεση σε κάθε μια από αυτές. Η προηγούμενη παρατήρηση σημαίνει ότι η μετάθεση που επάγεται από έναν *deck*-μετασχηματισμό είναι ομοιόμορφη σε όλες τις q-ίνες.



Ρωτάμε, πότε συμπίπτει η δράση της Γ με την μονοδρομία; Για να συσχετίσουμε την $\pi_1(X)$ με την Γ, ορίζεται ομομορφισμός

$$\varphi : \pi_1(X) \to \Gamma, \qquad \gamma \longmapsto \varphi(\gamma)$$

όπου $\varphi(\gamma)$ ο *deck*-μετασχηματισμός που προσδιορίζεται από την σχέση $\varphi(\gamma)(y) = \bar{\gamma}^y(1)$. Για καλύτερο αλγεβρικό χειρισμό, σταθεροποιούμε ένα $y \in \tilde{X}$ και επανορίζουμε τον φ ως

$$\varphi : \pi_1(X, q(y)) \to \Gamma, \qquad \gamma \longmapsto \varphi(\gamma) = \bar{\gamma}^y(1)$$

(η μοναδικότητα της ανύψωσης επιτρέπει αυτό τον τοπικό ορισμό, που είναι ισοδύναμος με τον προηγούμενο). Ωστόσο, δεν είναι *a priori* γνωστό ότι ο $\varphi(\gamma)$ υπάρχει για κάθε γ. Η επόμενη πρόταση δηλώνει για ποιά $\gamma \in \pi_1(X, q(y))$ υπάρχει.

VI.§4.2. Δεδομένων y_1, y_2 στην ίδια q-ίνα της επικάλυψης $q : \tilde{X} \to X$, υπάρχει *deck*-μετασχηματισμός h ώστε $h(y_1) = y_2$ εάν και μόνον εάν $q_*\pi_1(\tilde{X}, y_2) = q_*\pi_1(\tilde{X}, y_1)$.

Αποδ. "$\Longrightarrow$,, Ο h επάγει ισομορφισμό $h_* : \pi_1(\tilde{X}, y_1) \to \pi_1(\tilde{X}, y_2)$, οπότε $q_*\pi_1(\tilde{X}, y_2) = q_* \circ h_*\, \pi_1(\tilde{X}, y_2) = q_*\pi_1(\tilde{X}, y_1)$ (εφ' όσον $h \circ q = q$, που δίνει $q_* = q_* \circ h_*$).

,,$\Longleftarrow$" Από VI.§1.7, υπάρχει ανύψωση $\bar{q}$ της q ώστε $\bar{q}(y_1) = y_2$· ομοίως, υπάρχει ανύψωση $\bar{q}'$ της q ώστε $\bar{q}'(y_2) = y_1$. Τότε $\bar{q} \circ \bar{q}' = id$ (εφ' όσον η $\bar{q} \circ \bar{q}'$ συμφωνεί με την ταυτοτική στο y_2), και $\bar{q}$ είναι ο ζητούμενος ομοιομορφισμός. ■

VI.§4.3. Η καλύπτουσα ομάδα δρά μεταβατικά στις ίνες εάν και μόνον εάν η επικάλυψη είναι κανονική.

Αποδ. Άμεσα, από VI.§4.2. ■

Από VI.§4.2 συνάγεται ότι ικανή συνθήκη για να ορίζεται ο $\varphi(\gamma)$ είναι η $\gamma \in \mathcal{N}\left(q_*\pi_1(\tilde{X}, y)\right)$. Ισχύει το το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα (εφ' όσον $\gamma \in \mathcal{N}\left(q_*\pi_1\left(\tilde{X}, \bar{\gamma}^y(1)\right)\right)$ έπεται ότι $\varphi_\gamma q_*\pi_1(\tilde{X}, y) = q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$, που δίνει την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος).

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\tilde{X}, y) \arrow[r, "\varphi_{\bar{\gamma}}"] \arrow[d, "q_*"'] & \pi_1(\tilde{X}, \bar{\gamma}^y(1)) \arrow[d, "q_*"] \\
q_*\pi_1(\tilde{X}, y) \arrow[r, "\varphi_\gamma"'] & q_*\pi_1(\tilde{X}, q(\bar{\gamma}^y(1)))
\end{tikzcd}$$

απ' όπου έπεται ότι $q_*\pi_1\left(\tilde{X}, \bar{\gamma}^y(1)\right) = q_*\varphi_{\bar{\gamma}}\pi_1(\tilde{X}, y) = \varphi_\gamma q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$. Επομένως ορίζεται καλά ο ομομορφισμός

$$\varphi : \mathcal{N}\left(q_*\pi_1(\tilde{X}, y)\right) \to \Gamma, \qquad \gamma \longmapsto \varphi(\gamma) = \bar{\gamma}^y(1)$$

VI.§4.4. Για κάθε επικάλυψη $q : \tilde{X} \to X$ και $y \in \tilde{X}$,

$$\Gamma \cong \mathcal{N}\left(q_*\pi_1(\tilde{X}, y)\right)/q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$$

Αποδ. *Ο φ είναι επί :* εάν $h \in \Gamma$ και $\bar{\gamma}$ μονοπάτι στον $\tilde{X}$ από το y στο $h(y)$, τότε $\gamma = q \circ \bar{\gamma}$ βρόγχος στο X. Επειδή τα $y, h(y)$ βρίσκονται στην ίδια τροχιά κάτω από την δράση της Γ, από VI.§4.2 έπεται ότι $q_*\pi_1(\tilde{X}, y) = q_*\pi_1\left(\tilde{X}, h(y)\right)$. Επειδή $q_*\pi_1(\tilde{X}, h(y)) = \varphi_\gamma q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$, $\varphi_\gamma q_*\pi_1(\tilde{X}, h(y)) = q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$. Τότε $\gamma \in \mathcal{N}(q_*\pi_1(\tilde{X}, y))$ και $h = \varphi(\gamma)$.

$ker\varphi = q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$: Δεδομένου $\gamma \in \mathcal{N}\left(q_*\pi_1(\tilde{X}, y)\right)$, ο ομοιομορφισμός $h = \varphi(\gamma)$ είναι ταυτικός ακριβώς όταν $h(y) = y$, δηλαδή όταν το $\bar{\gamma}^y$ είναι βρόγχος. Αυτό ισχύει εάν και μόνον εάν $\bar{\gamma}^y \in \pi_1(\tilde{X}, y)$, δηλαδή όταν $\gamma \in q_*\pi_1(\tilde{X}, y)$. ■

Οι επόμενες προτάσεις είναι άμεσα πορίσματα της VI.§4.4.

VI.§4.5. Για κάθε κανονική επικάλυψη $q : \tilde{X} \to X$ και $y \in \tilde{X}$,

$$\Gamma \cong \pi_1(X, q(y))/q_*\pi_1(\tilde{X}, y) \cong \pi_1(X)/\pi_1(\tilde{X})$$

Σε αυτή την περίπτωση, η δράση της Γ πάνω σε κάθε q-ίνα ερμηνεύεται γεωμετρικά ως μονοδρομία. (Ο παρονομαστής συγκροτείται από τους βρόγχους που ανυψώνονται σε βρόγχους, και επομένως επάγουν τον ταυτοτικό μετασχηματισμό).

VI.§4.6. Για την καθολική επικάλυψη $q : \tilde{X} \to X$,

$$\Gamma \cong \pi_1(X)$$

Επειδή η καλύπτουσα ομάδα Γ δρά ελεύθερα, και από VI.§4.5, έπεται ότι η μονοδρομία δρά ελεύθερα όταν η επικάλυψη είναι κανονική. Εφ' όσον η ελεύθερη δράση της Γ πάνω σε κάθε q-ίνα είναι μεταβατική και κάθε $h \in \Gamma$ διατηρεί την q-ίνα, έπεται ότι οι τροχίες της $\tilde{X}$ κάτω από την δράση της $\tilde{X}$ είναι ακριβώς οι q-ίνες, που εν προκειμένω είναι ισοπληθικές της Γ. Επομένως για μια κανονική επικάλυψη $q : \tilde{X} \to X$, ο χώρος X ταυτίζεται συνολοθεωρητικά με τον χώρο των τροχιών κάτω από την δράση της Γ,

$$X \cong \tilde{X}/\Gamma \quad (\text{ως σύνολα})$$

§5. ΔΡΑΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΟΜΑΔΩΝ ΣΕ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Θεωρούμε εφ' εξής μόνο μετρικοποιήσιμες τοπολογικές ομάδες, οπότε η συμπάγεια ισοδυναμεί με ακολουθιακή συμπάγεια.

Συνεχής δράση τοπολογικής ομάδας G πάνω σε τοπολογικό χώρο X ονομάζεται μία αλγεβρική δράση $G \times X \to X$ όταν είναι συνεχής απεικόνιση. Σε αυτή την περίπτωση κάθε $g \in G$ δρά επί του X ως ομοιομορφισμός $g(\cdot) : X \to X$, δηλαδή μια συνεχής δράση μπορεί να νοείται ως ένριψη της τοπολογικής ομάδας G στην ομάδα των ομοιομορφισμών του X. Εφοδιάζουμε τον χώρο των τροχιών X/G με την τοπολογία πηλίκο. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{C}(x)$ των συνεχών συναρτήσεων από τον X στον X εφοδιασμένο με την *compact-open* τοπολογία, που είναι η μικρότερη τοπολογία ώστε η απεικόνιση $\mathcal{C}(X) \times X \to X$, $(f, x) \longmapsto f(x)$ να είναι συνεχής (μια βάση αυτής της τοπολογίας είναι οι πεπερασμένες τομές από σύνολα της μορφής $\{f' \in \mathcal{C}(X) \big| f'K \subset U\}$, όπου $K \subset U$ συμπαγές και $U \subset X$ ανοικτό ώστε $fK \subset X$ για κάποιο $f \in \mathcal{C}(X)$).

Θεωρούμε την ομάδα $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{C}(X)$ των ομοιομορφισμών του X εφοδιασμένη με την επαγόμενη από την *compact-open* τοπολογία· τότε η $\mathcal{H}(X)$ καθίσταται τοπολογική ομάδα που δρα συνεχώς επί του X ως $\mathcal{H}(X) \times X \to X$, $(h, x) \longmapsto h(x)$. Μία πιστή συνεχής δράση $G \times X \to X$, που εξ ορισμού εμφυτεύει αλγεβρικά την G στην ομάδα $\mathcal{H}(X)$, ονομάζεται **διακριτή** όταν η εμφύτευση αυτή είναι διακριτό υποσύνολο της $\mathcal{H}(X)$ με την *compact-open* τοπολογία[1].

VI.§5.0. Ο σταθεροποιητής κλειστού συνόλου κάτω από συνεχή δράση τοπολογικής ομάδας είναι κλειστό υποσύνολο της ομάδας, επομένως κανονική τοπολογική υποομάδα.

Αποδ. Έστω $F \subset X$ κλειστό, θα δειχθεί ότι $G \setminus stab(F)$ ανοικτό στην G. Εάν $g \in G \setminus stab(F)$, τότε υπάρχει $x \in F$ τέτοιο ώστε $gx \notin F$, άρα $gx \in X \setminus F$. Τότε $(g, x) \in \mu^{-1}[X \setminus F]$, όπου $\mu : G \times X \to X$ η μελετώμενη δράση, που είναι ανοικτό υποσύνολο του $G \times X$ λόγω συνέχειας της μ. Ισχύει $\mu^{-1}(X \setminus F) = U \times V$, όπου U, V ανοικτές περιοχές των g, x αντιστοίχως. Ελέγχεται ότι $U \subset G \setminus stab(F)$. ■

Μία συνεχής δράση $G \times X \to X$ ονομάζεται **γνήσια** όταν η συνάρτηση

$$\Theta : G \times X \to X \times X, \qquad (g, x) \to \Theta(g, x) = (gx, x)$$

είναι γνήσια (αντιστρέφει συμπαγή σε συμπαγή). Ισχύει

$$G_K = \{g \in G \big| \exists x \in K, gx \in K\} = \{g \in G \big| \exists x \in K, \Theta(g, x) \in K \times K\} = \pi_G(\Theta^{-1}(K \times K))$$

όπου $\pi_G : G \times X \to G$ η προβολή στην πρώτη συνιστώσα.

VI.§5.1. Η συνεχής δράση $G \times X \to X$ πάνω σε χώρο *Hausdorff* είναι γνήσια εάν και μόνον εάν για κάθε $K \subset X$ συμπαγές, το $G_K = \{g \in G \,\big|\, (gK) \cap K \neq \emptyset\}$ είναι συμπαγές.

Αποδ. "$\Longrightarrow$,, Η Θ είναι γνήσια, άρα $\Theta^{-1}(K \times K)$ συμπαγές, άρα $\pi_G(\Theta^{-1}(K \times K))$ συμπαγές.

,,$\Longleftarrow$" Έστω $L \subset X \times X$ συμπαγές, επιλέγουμε $K = \pi_1(L) \cup \pi_2(L) \subset X$, όπου $\pi_i : X \times X \to X$, $i = 1,2$ οι προβολές. Το K είναι συμπαγές ως ένωση συμπαγών. Το $\Theta^{-1}(L) \subset \Theta^{-1}(K \times K) \subset \{(g, x) \big| gx \in$

1. Εφ' όσον η *compact-open* τοπολογία προσδιορίζεται από την τοπολογία του X, έπεται ότι οι διακριτές υποομάδες της $\mathcal{H}(X)$ προσδιορίζονται από την τοπολογία του X επίσης. Θα διαπιστωθεί ότι αυτός ο συσχετισμός των διακριτών υποομάδων με την τοπολογία του χώρου επί του οποίου δρούν, εμπεριέχει το γεωμετρικό νόημα που υποδηλώνεται από την ονομασία τους.

K, $x \in K\} \subset G_K \times K$ είναι τότε συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς (L είναι κλειστό ως συμπαγές σε *Hausdorff*, G_K είναι συμπαγές εξ υποθέσεως). ■

VI.§5.2. Η συνήθης δράση $G \times X \to X$ πάνω σε μετρικοποιήσιμο χώρο είναι γνήσια εάν και μόνον εάν, για κάθε $(x_i) \subset X$ συγκλίνουσα ακολουθία και κάθε ακολουθία $(g_i) \subset G$ ώστε $(g_i x_i) \subset X$ συγκλίνουσα ακολουθία, η (g_i) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Αποδ. "⟹,, Έστω $U, V \subset X$ σχετικά συμπαγείς περιοχές των $x = lim\, x_i$, $y = lim\ g_i x_i$ αντιστοίχως. Λόγω γνησιότητας και σύγκλισης της $(g_i x_i)$, τα $\Theta(g_i x_i)$ περιέχονται στο συμπαγές $\overline{U} \times \overline{V}$ για επαρκώς μεγάλα i. Από τα γνωστά για τη συμπάγεια σε μετρικούς χώρους, η $(g_i x_i) \subset M \times M$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, που σημαίνει ότι η (g_i) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

,,⟸" Έστω $L \subset X \times X$ συμπαγές, θα δειχθεί ότι κάθε ακολουθία στο $\Theta^{-1}(L)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $\Theta^{-1}(L)$. Εάν $(g_i, x_i) \subset \Theta^{-1}(L)$, οπότε $(\Theta(g_i, x_i))_i = (g_i x_i, x_i)_i \subset L$, λόγω συμπάγειας του L αυτή έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλαδή οι $(g_i x_i)_i$, $(x_i)_i$ έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες. Εξ υποθέσεως, η (g_i) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα η $(g_i x_i)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Λόγω κλειστότητας του $\Theta^{-1}(L)$ (το $L \subset X \times X$ είναι κλειστό ως συμπαγές σε *Hausdorff*), το όριο της $(g_i x_i)$ περιέχεται στο $\Theta^{-1}(L)$. ■

VI.§5.3. Συνεχής δράση συμπαγούς ομάδας πάνω σε μετρικοποιήσιμο χώρο είναι γνήσια.

Αποδ. Άμεσα από VI.§3.2, αφού ακολουθία συμπαγούς ομάδας έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. ■

Μια συνεχής δράση $G \times X \to X$ λέγεται ότι έχει **διακριτές τροχιές** όταν κάθε $x \in X$ έχει ανοικτή περιοχή $U \subset X$ ώστε το $\{g \in G \mid gx \in U\}$ να είναι πεπερασμένο. Μια συνεχής δράση ονομάζεται **περιπλανώμενη** όταν κάθε $x \in X$ έχει ανοικτή περιοχή $U \subset X$ ώστε το $\{g \in G \mid (gU) \cap U \neq \emptyset\}$ πεπερασμένο. Προφανώς περιπλανώμενη ⟹ διακριτές τροχιές.

Μια συνεχής δράση $G \times X \to X$ πάνω σε τοπικά συμπαγή χώρο *Hausdorff* ονομάζεται **γνησίως ασύνδετη** όταν για κάθε $K \subset X$ συμπαγές, το $\{g \in G \mid (gK) \cap K \neq \emptyset\}$ είναι πεπερασμένο. Από το λήμμα της συρρίκνωσης για τοπικά συμπαγείς *Hausdorff* χώρους, έπεται ότι γνησίως ασύνδετη ⟹ περιπλανώμενη. Επειδή πεπερασμένο υποσύνολο τοπολογικής ομάδας είναι συμπαγές, από πρόταση VI.§5.1, έπεται ότι κάθε γνησίως ασύνδετη δράση είναι γνήσια.

Εάν η G είναι διακριτή ομάδα, οπότε τα συμπαγή της υποσύνολα είναι ακριβώς τα πεπερασμένα, η πρόταση VI.§5.1 εγγυάται και το αντίστροφο.

γνησίως ασύνδετη ⟶ περιπλανώμενη ⟶ διακριτές τροχές

(για διακριτές ομάδες) ↻↓

γνήσια

VI.§5.4. Η δράση $\Gamma \times X \to X$ διακριτής ομάδας πάνω σε τοπικά συμπαγή *Hausdorff* χώρο είναι γνήσια, δηλαδή γνησίως ασύνδετη, εάν και μόνον εάν κάθε $x_1, x_2 \in X$ περιέχονται αντιστοίχως σε ανοικτά U_1, U_2 ώστε το σύνολο $\{g \in \Gamma \mid (gU_1) \cap U_2 \neq \emptyset\}$ να είναι πεπερασμένο.

Αποδ. "⟹,, Τα $x_1, x_2 \in X$ έχουν σχετικά συμπαγείς περιοχές U_1, U_2 ξένες μεταξύ τους. Επιλέγουμε συμπαγές $K = \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2$. Εξ υποθέσεως υπάρχουν μόνο πεπερασμένα το πλήθος $g \in \Gamma$ ώστε $g(\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2) \cap (\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2) \neq \emptyset$. Επειδή

$$(gU_1) \cap (U_2) \subset \overline{(gU_1) \cap (U_2)} \subset g\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = g\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \text{ και } g\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \subset g(\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2) \cap \overline{U}_1 \cap \overline{U}_2$$

έπεται το ζητούμενο.

,,⟸" Έστω $L \subset X \times X$ συμπαγές και $x_1, x_2 \in L^{\cdot}$ επιλέγουμε U_1, U_2 όπως στην υπόθεση. Καθώς (x_1, x_2) διατρέχει το L, τα $U_1 \times U_2$ συγκροτούν ανοικτό κάλυμμα του $L^{\cdot}$ τότε λόγω συμπάγειας, το L καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος $U_1^{'} \times U_2^{'}, \dots, U_1^m \times U_2^m$. Εξ υποθέσεως, $S_i = \{g \in G \mid (gU_1^i) \cap U_2^i \neq \emptyset\}$ πεπερασμένο. Θέτουμε $S \equiv S_1 \cup \dots \cup S_m$, $K \equiv \pi_1 L \subset X$, όπου $\pi_1 : X \times X \to X$ η προβολή στην πρώτη συνιστώσα. Ελέγχεται εύκολα ότι $\Theta^{-1}(L) \subset S \times K$. Όμως L κλειστό ως συμπαγές εντός χώρου *Hausdorff*, άρα

$\Theta^{-1}(L)$ κλειστό λόγω συμπάγειας, δηλαδή συμπαγές (ως κλειστό εντός συμπαγούς). ■

VI.§5.5. Έστω $\Gamma \times X \to X$ ελεύθερη και γνησίως ασύνδετη δράση διακριτής ομάδας πάνω σε τοπικά συμπαγή *Hausdorff* χώρο· τότε κάθε $x \in X$ έχει ανοικτή περιοχή U με $(gU) \cap U = \emptyset$, για κάθε $g \neq id$.

Αποδ. Επιλέγουμε U_1, U_2 για $x = x_1 = x_2$ από πρόταση VI.§5.4, οπότε υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $g_i \in G$, $i = 1, \dots, m$, ώστε $(g_i U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Επειδή η δράση είναι ελεύθερη, τα $x, g_1 x, \dots, g_m x$ είναι διακεκριμένα, επομένως διαχωρίζονται από ξένες ανά δύο περιοχές $W_o, W_1, \dots, W_m$ αντιστοίχως. Ελέγχεται ότι $U = U_1 \cap U_2 \cap \bigcap_{i=1}^{m} (W_0 \cap g_i^{-1} W_i)$ το ζητούμενο. ■

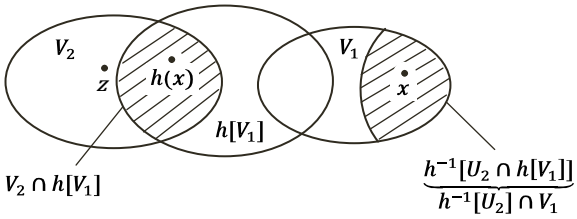
VI.§5.6. Εάν $G \times M \to M$ περιπλανώμενη και ελεύθερη δράση επί της συνεκτικής πολλαπλότητας, τότε ο χώρος πηλίκο M/G είναι τοπικά ευκλείδειος και η απεικόνιση πηλίκο $q : M \to M/G$ επικάλυψη.

Αποδ. Θα δειχθεί ότι κάθε τροχιά $y \in M/G$ έχει q-επικαλυμμένη ανοικτή περιοχή V ώστε οι συνεκτικές συνιστώσες του $g^{-1}[V]$ να είναι ευκλείδειες περιοχές της M. Επειδή η V είναι ομοιομορφική μέσω της q με κάθε μία από αυτές, έπεται ότι είναι ευκλείδεια.

Έστω $x \in q^{-1}(y)$, αρκεί να βρεθεί ευκλείδεια περιοχή U του x ώστε τα gU, $g \in G$ να είναι ξένα μεταξύ τους· τότε $q[U] = \bigcup_{g \in G} gU$ είναι το ζητούμενο V. Επιλέγουμε W μια ευκλείδεια περιοχή του x, και επειδή η δράση είναι ελεύθερη, την επιλέγουμε τέτοια ώστε να τέμνεται με πεπερασμένα το πλήθος $g_1 W, \dots, g_m W$. Επειδή η δράση στοιχείου της G είναι ομοιομορφισμός της M, έπεται ότι για κάθε $h \in G$ το hW τέμνεται ακριβώς με τα $hg_i W$, $i = L, \dots, m$. Επομένως αρκεί να σμικρύνουμε το W σε $U \subset W$ ώστε το U να μην τέμνεται με τα $g_1 U, \dots, g_m U$, οπότε τα gU, $g \in G$ είναι ξένα μεταξύ τους, και άρα U το ζητούμενο.

Τοπολογικό λήμμα: Έστω $h : X \to X$ ομοιομορφισμός χώρου *Hausdorff* με $h(x) \neq x$ για κάποιο $x \in X$· τότε τα x, $h(x)$ διαχωρίζονται από ξένα ανοικτά της μορφής U, $h[U]$.

Απόδειξη λήμματος: Έστω V_1, V_2 ξένες μεταξύ τους περιοχές των x, $h(x)$ αντιστοίχως,



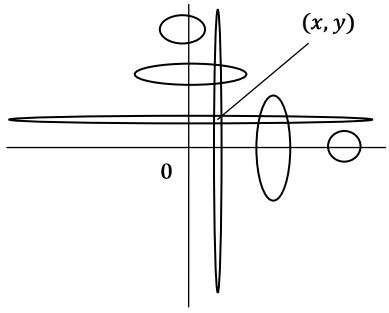
τότε $U = h^{-1}[U_2] \cap V_1$ η ζητούμενη περιοχή. ■

Από λήμμα, επιλέγουμε ευκλείδια περιοχή $U_1 \subset W$ του x ώστε $(g_1 U_1) \cap U_1 = \emptyset$. Ομοίως, επιλέγουμε ευκλείδια περιοχή $U_2 \subset U_1$ του x ώστε $(g_2 U_2) \cap U_2 = \emptyset$. Συνεχίζοντας για $i = 1, \dots, m$, $U = U_m$ η ζητούμενη περιοχή. ■

Η VI.§5.6 αποτυγχάνει να δώσει πολλαπλότητα διότι ο χώρος M/G κάτω από τη δράση περιπλανώμενης και ελεύθερης δράσης δεν είναι εν γένει *Hausdorff*. Π.χ. εάν $M = \mathbb{R}^2 \setminus 0$ και

$$\mathbb{Z} \times M \to M, \qquad (k, (x, y)) \mapsto (2^k x, 2^{-k} x)$$

αυτή η δράση είναι ελεύθερη και περιπλανώμενη, όμως ο χώρος $M/\mathbb{Z}$ δεν είναι *Hausdorff*:



Έστω U_1, U_2 ανοικτές περιοχές των τροχιών $q(0,1)$, $q(1,0)$ αντιστοίχως. Τότε $q^{-1}[U_1], q^{-1}[U_2]$ ενώσεις ανοικτών περιοχών των $(2^k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ και $(0, 2^k)$, $k \in \mathbb{Z}$ αντιστοίχως (όπως στο σχήμα), που τέμνονται κατ' ανάγκην. Άρα $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Ωστόσο, η *Hausdorff* ιδιότητα για το M/G επιτυγχάνεται από διακριτές ομάδες των οποίων η δράση είναι γνησίως ασύνδετη αντί απλώς περιπλανώμενη.

VI.§5.7. Εάν $\Gamma \times M \to M$ ελεύθερη δράση διακριτής ομάδας πάνω σε συνεκτική τοπολογική πολλαπλότητα, ο χώρος M/Γ είναι πολλαπλότητα με επικάλυψη την απεικόνιση πηλίκο $q : M \to M/\Gamma$ εάν και μόνον εάν η δράση είναι γνησίως ασύνδετη (δηλαδή γνήσια).

Αποδ. "$\Longrightarrow$,, Επειδή η δράση είναι περιπλανώμενη ως γνησίως ασύνδετη, από VI.§5.6 αρκεί να δειχθεί ότι ο χώρος M/Γ είναι *Hausdorff*. Έστω $x, y \in M$ σε διακεκριμένες τροχιές. Από VI.§5.4, υπάρχουν ανοικτές περιοχές U_1, U_2 των x, y αντιστοίχως ώστε μόνο πεπερασμένα gy, $g \in \Gamma$ να περιέχονται στην U_1. Επειδή κανένα από αυτά δεν είναι x, αφού x, y μη ομότροχα, το U_1 σμικρύνεται ώστε να μην περιέχει καμία μεταφορά του y. Ομοίως για την περιοχή U_2 του y (αφού μπορεί να ληφθεί τέτοια ώστε μόνο πεπερασμένες μεταφορές του x να βρίσκονται σε αυτή). Από λήμμα συρρίκνωσης, τα U_1, U_2 λαμβάνονται επίσης σχετικά συμπαγή. Θέτουμε $K = \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2$, οπότε $K \setminus \bigcup_{g \neq 1} gK$ ένωση περιοχής του x με περιοχή του y, εφ' όσον η δράση $\Gamma \times M \to M$ είναι γνήσια, με τις περιοχές αυτές να προβάλλονται μέσω της q σε διαφορετικές ανοικτές περιοχές του πηλίκου.

,,$\Longleftarrow$" Αρχικά θα βρεθούν για κάθε x_1, x_2 ανοικτές περιοχές U_1, U_2 αντιστοίχως ώστε $(gU_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ το πολύ για ένα $g \in \Gamma$. Εάν x_2 δεν είναι ομότροχο του x_1, αυτό έπεται από την *Hausdorff* ιδιότητα του M/Γ. Εάν $x_2 = gx_1$, επειδή q επικάλυψη επιλέγουμε U_1 περιοχή του x_1 που προβάλλεται ομοιομορφικά στο πηλίκο και $U_2 = gU_1$. Έστω $K \subset X$ συμπαγές· από προηγούμενη παρατήρηση, καθώς (x_1, x_2) διατρέχει το $K \times K$, συγκροτείται κάλυμμα από $U_1 \times U_2$ ώστε $(gU_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ το πολύ για ένα $g \in \Gamma$. Λόγω συμπάγειας του K, θεωρούμε αυτό το κάλυμμα πεπερασμένο. Άρα τα $g \in \Gamma$ για τα οποία $(gU_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ είναι πεπερασμένα το πλήθος. ■

VI.§5.8. Έστω $\Gamma \times X \to X$, $\Gamma \times Y \to Y$ συνεχείς δράσεις διακριτής ομάδας πάνω σε τοπολογικούς χώρους και απεικόνιση $f : X \to Y$ γνήσια, συνεχής επί και ισομεταβαλλόμενη ως προς τις δράσεις αυτές. Η δράση της Γ επί του X είναι γνησίως ασύνδετη εάν και μόνον εάν η δράση της Γ επί του Y είναι.

Αποδ. Λόγω συνέχειας και γνησιότητας της f, εικόνες και αντιστροφές συμπαγών υπό την f είναι συμπαγή, και επειδή η f είναι επί, κάθε συμπαγές στο X περιέχεται σε συμπαγές της μορφής $f^{-1}[K]$, $K \subset Y$ συμπαγές. Άρα για να ελεγχθεί η γνησιότητα της δράσης πάνω στον X, αρκεί να ελεγχθούν τα συμπαγή της μορφής $f^{-1}[K]$, $K \subset Y$ συμπαγές. Αλλά

$$(gK) \cap K \neq \emptyset \Leftrightarrow gf^{-1}[K] \cap f^{-1}[K] \neq \emptyset \text{ για κάθε } g \in \Gamma$$

διότι η f είναι ισομεταβαλλόμενη. Άρα

$$(gK) \cap K \neq \emptyset \Leftrightarrow f^{-1}[(gK) \cap K] = f^{-1}[gK] \cap f^{-1}[K] = gf^{-1}[K] \cap f^{-1}[K] \neq \emptyset$$

και από ορισμό γνησιότητας έπεται το ζητούμενο. ■

Όσον αφορά την δράση διακριτής υποομάδας σε τοπολογική ομάδα, η διάκριση μεταξύ γνησίως ασύνδετης, περιπλανώμενης δράσης και δράσης με διακριτές τροχιές αίρεται:

VI.§5.9. Η δράση $\Gamma \times G \to G$ διακριτής υποομάδας μίας τοπολογικής ομάδας έχει διακριτές τροχιές, είναι περιπλανώμενη και γνησίως ασύνδετη.

Αποδ. Αρκεί να δειχθεί ότι η δράση είναι γνησίως ασύνδετη, οπότε τα υπόλοιπα έπονται. Έστω $x, y \in G$· από πρόταση VI.§5.8, αρκεί να βρεθούν U, V περιοχές των x, y αντιστοίχως ώστε $(gV) \cap U$ για πεπερασμένα το πλήθος $g \in \Gamma$. Εφόσον $xy^{-1}yx^{-1} = 1$, υπάρχουν U, V περιοχές των x, y αντιστοίχως ώστε $UV^{-1}VU^{-1} \subset W$,όπου W περιοχή του 1 ώστε $W \cap \Gamma = 1$. Θα δειχθεί ότι υπάρχει το πολύ ένα $g \in \Gamma$ ώστε $(gV) \cap U \neq \emptyset$. Εάν

$$(g_i V) \cap U \neq \emptyset \Longrightarrow g_i v_i = u_i, \qquad v_i \in V,\ u_i \in U, \qquad i = 1, 2$$

τότε $g_1 g_2^{-1} = u_1 v_2^{-1} v_2 u_2^{-1} \in UV^{-1}VU^{-1} \subset W \Longrightarrow g_1 = g_2$, από επιλογή του W. ■

Με κάθε επικάλυψη $q : \tilde{X} \to X$ ενός τοπολογικού χώρου έχει συσχετιστεί (πάνω από ισομορφία επικαλύψεων) κλάση συζυγίας στο πλέγμα των υποομάδων της $\pi_1(X)$ (VI.§1.12). Εάν η επικάλυψη είναι κανονική, η αντίστοιχη κλάση συζυγίας ανάγεται σε μία κανονική υποομάδα, το γεωμετρικό νόημα της οποίας δίνεται από την VI.§4.5. Σκοπός είναι να δειχθεί ότι η αντιστοιχία ανάμεσα στις κλάσεις συζυγίας στο πλέγμα των υποομάδων της $\pi_1(X)$ και τις επικαλύψεις είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή ότι κάθε κλάση συζυγίας στο πλέγμα των υποομάδων της $\pi_1(X)$ επάγει μοναδική (πάνω από ισομορφισμό) επικάλυψη.

VI.§5.10. Έστω M τοπολογική πολλαπλότητα και συνεχής δράση $\Gamma \times M \to M$ διακριτής ομάδας που δρά ελεύθερα και γνήσια (δηλαδή γνησίως ασύνδετα), οπότε ο χώρος M/Γ είναι τοπολογική πολλαπλότητα με επικάλυψη $q : M \to M/\Gamma$ την απεικόνιση πηλίκο. Τότε επιπλέον η q είναι κανονική επικάλυψη με $\Gamma_q(M) = \Gamma$.

Αποδ. Για κάθε $g \in \Gamma$, ο ομοιομορφισμός $M \to M,\ y \longmapsto g \cdot y$ είναι *deck*-μετασχηματισμός της q (οι τροχιές της δράσης είναι q-ίνες), επομένως $\Gamma \subset \Gamma_q(M)$. Επειδή εκ κατασκευής των q-ινών η Γ δρά μεταβατικά σε κάθε ίνα, και άρα η $\Gamma_q(M)$ δρά μεταβατικά σε κάθε ίνα, VI.§4.3 η επικάλυψη είναι κανονική (VI.§4.3).. Έστω τώρα $h \in \Gamma_q(M)$, επιλέγουμε $y \in \tilde{X}$ και $y' = h(y)$. Τα y, y' ανήκουν στην ίδια q-ίνα, επομένως υπάρχει $g \in \Gamma$ ώστε $y' = gh$. Από την μοναδικότητα της ανύψωσης, εφ' όσον ο h συμφωνεί με την δράση του g στο y, έπεται ότι $h = g(\cdot)$, άρα $\Gamma_q(M) \subset \Gamma$. ■

VI.§5.11. Εάν Γ διακριτή υποομάδα τοπολογικής ομάδας G που είναι επίσης πολλαπλότητα, τότε η (ελεύθερη) δράση $\Gamma \times G \to G$ είναι γνήσια (δηλαδή γνησίως ασύνδετη), οπότε η Γ/G είναι τοπολογική ομάδα με δομή τοπολογικής πολλαπλότητας και το πηλίκο $G \to G/\Gamma$ είναι κανονική επικάλυψη με $\Gamma_q(G) = \Gamma$.

Αποδ. Για να δειχθεί η γνησιότητα, επιλέγουμε τυχαίο $K \subset G$ συμπαγές· θα δειχθεί ότι $\{g \in \Gamma \mid (gK) \cap K \neq \emptyset\}$ είναι πεπερασμένο. Έστω $g \in G$ ώστε $(gK) \cap K$, δηλαδή $gk_1 = gk_2$ για κάποια $k_1,\ k_1 \in K$. Τότε $g \in KK^{-1}$ και KK^{-1} είναι συμπαγές υποσύνολο της G ως εικόνα του $K \times K$ μέσω της συνεχούς απεικόνισης $G \times G \to G,\ (x, y) \longmapsto xy^{-1}$. Επειδή η Γ είναι διακριτή, μόνο πεπερασμένα το πλήθος $g \in \Gamma$ μπορούν να περιέχονται στο KK^{-1}. ■

VI.§5.12. Εάν $\varphi : G \to H$ συνεχής ομομορφισμός *επί* που επιπλέον είναι απεικόνιση πηλίκο και έχει διακριτό πυρήνα, τότε η φ είναι κανονική επικάλυψη της H από την G με $\Gamma_\varphi(G) = ker\varphi$.

Αποδ. Από VI.§5.11, η απεικόνιση πηλίκο q είναι κανονική επικάλυψη με $\Gamma_\varphi(G) = ker\varphi$. Επειδή οι ίνες του φ συμπίπτουν με τις q-ίνες, η τοπολογία της H συμπίπτει με την τοπολογία του $G/ker\varphi$, απ' όπου το ζητούμενο.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & & H \\ & G/ker\varphi \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

■

VI.§5.13. Οι επικαλύψεις συνεκτικής τοπολογικής πολλαπλότητας M με διακριτή καθολική καλύπτουσα ομάδα, βρίσκονται (πάνω από ισομορφισμό) σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις κλάσεις συζυγίας στο πλέγμα των υποομάδων της $\pi_1(M)$. Σε αυτήν την ταξινόμηση, οι κανονικές επικαλύψεις αντιστοιχούν ακριβώς στις κανονικές υποομάδες της $\pi_1(M)$· συγκεκριμένα, εάν $q : \widetilde{M} \to M$ κανονική επικάλυψη και $N \lhd \pi_1(M)$ η αντίστοιχη κανονική υποομάδα, τότε $\Gamma_q(\widetilde{M}) \cong \pi_1(M)/N$.

Αποδ. Από θεώρημα ισομορφισμού των επικαλύψεων, σε κάθε κλάση συζυγίας αντιστοιχεί το πολύ μία επικάλυψη· μένει να δειχθεί ότι αντιστοιχεί τουλάχιστον μία. Έστω $q : \widetilde{M} \to M$ η καθολική επικάλυψη και $H \subset \pi_1(M)$ υποομάδα. Κάθε επικάλυψη της M καλύπτεται από την καθολική, επομένως αναζητείται η επικάλυψη που αντιστοιχεί στην κλάση συζυγίας της H ανάμεσα στους χώρους που καλύπτονται από την $\widetilde{M}$. Θεωρούμε $\varphi : \pi_1(M) \to \Gamma_q(\widetilde{M})$ τον ομομορφισμό $\varphi(\gamma) = h$, όπου $h(y) = \bar{\gamma}^y(1)$ και $\bar{\gamma}^y$ η q-ανύψωση του γ στο y. Συμβολίζεται $\widetilde{H} = \varphi[H] \subset \Gamma_q(M)$.

Εφ' όσον η δράση $\Gamma_q(\widetilde{M}) \times \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ είναι ελεύθερη και γνήσια, το ίδιο ισχύει και για την δράση $\widetilde{H} \times \widetilde{M} \to \widetilde{M}$. Θεωρούμε τον χώρο $M' = \widetilde{M}/H$, που από πρόταση VI.§5.10 είναι τοπολογική πολλαπλότητα με κανονική επικάλυψη το πηλίκο $\pi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}/\widetilde{H}$ και $\Gamma_\pi(\widetilde{M}) = \widetilde{H}$. Επειδή η q σέβεται τις π-ίνες (αφού αυτές περιέχονται σε q-ίνες), λαμβάνουμε στο πηλίκο την συνεχή απεικόνιση q' που καθιστά αντιμεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[dd, "q"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ & M' \arrow[dl, "q'"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Θα δειχθεί ότι η q' είναι επικάλυψη. Έστω $x \in M$, U μια q-επικαλυμμένη περιοχή του x και U' η συνεκτική συνιστώσα του $q'^{-1}[U]$· αρκεί να δειχθεί ότι U' απεικονίζεται ομοιομορφικά στο U μέσω της q'. Από τοπική δρομοσυνεκτικότητα της M', το U' είναι ανοικτό και κλειστό στο $q'^{-1}[U]$. Επομένως το $\pi^{-1}[U']$ είναι ανοικτό και κλειστό στο $q^{-1}[U] = \pi^{-1}[q'^{-1}[U]]$, δηλαδή ένωση συνεκτικών συνιστωσών του $q^{-1}[U]$. Εάν $\widetilde{U}$ μια τέτοια συνιστώσα, το ακόλουθο είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U} \arrow[dd, "q"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ & U' \arrow[dl, "q'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Επειδή σε αυτό το διάγραμμα η q είναι ομοιομορφισμός (ως επικάλυψη), έπεται ότι π είναι *1-1* στο $\widetilde{U}$. Εάν $\pi[\widetilde{U}] \neq U'$, τότε

$$\pi[\pi^{-1}[U']] = \bigcup_{h \in \widetilde{H}} \pi\left[h[\widetilde{U}]\right] = \pi[\widetilde{U}] \neq U$$

που αντικρούει το γεγονός ότι η $\pi : \widetilde{M} \to M'$ είναι *επί*. Άρα η $\pi : \widetilde{U} \to U'$ είναι $1-1$, και επειδή είναι ανοικτή απεικόνιση, ως πηλίκο, είναι ομοιομορφισμός. Επειδή στο διάγραμμα οι q, π είναι ομοιομορφισμοί, το ίδιο ισχύει για την q'.

Αφού δείχθηκε ότι η $q : M' \to M$ είναι επικάλυψη, μένει να δειχθεί ότι αντιστοιχεί στην κλάση συζυγίας της H. Θα βρεθεί $y' \in M'$ ώστε $q_*\pi_1(M', y') = H$. Επιλέγουμε $y' = \pi(y)$ και θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \pi_1(M', y') \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "q'_*"'] & \Gamma_\pi(\widetilde{M}) \arrow[d, "i"] \\ \pi_1(M, x) \arrow[r, "\varphi"'] & \Gamma_q(\widetilde{M}) \end{tikzcd}$$

όπου i η συνολοθεωρητική εμφύτευση και φ, φ' οι ομομορφισμοί που συσχετίζουν γεωμετρικά την καλύπτουσα ομάδα με την μονοδρομία (VI.§4.5). Αρκεί να δειχθεί ότι το διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό, διότι τότε

$$q_*\pi_1(M', y') = \varphi^{-1} \circ i \circ \varphi'[\pi_1(M', y')] = \alpha^{-1} \circ i\left[\Gamma_\pi(\widetilde{M})\right] = \alpha^{-1}\widetilde{H} = H$$

Έστω $\gamma \in \pi_1(M', y')$ και $\delta = \varphi'(\gamma)$, οπότε το δ απεικονίζει το y στο $\bar{\delta}^y(1)$. Τότε $i \circ \varphi'(\gamma) = \delta$. Από την άλλη πλευρά, $\varphi \circ q'_*(\gamma) = \varphi(q' \circ \gamma)$ είναι ο *deck*-μετασχηματισμός $h \in \Gamma_q(\widetilde{M})$ που απεικονίζει το y στο $\overline{q' \circ \gamma}(1)$. Όμως $q' \circ \bar{\gamma} = q' \circ \pi \circ \bar{\gamma}$, επομένως $\bar{\gamma}$ είναι η ανύψωση του $q' \circ \gamma$ στο y, που σημαίνει ότι $\overline{q' \circ \gamma}(1) = \bar{\gamma}(1)$. Άρα $\delta = h$ και το διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό. ■

§6. ΛΕΙΕΣ ΚΑΙ ΙΣΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΠΙΚΑΛΥΨΕΙΣ

Λεία επικάλυψη της πολλαπλότητας M από την πολλαπλότητα $\widetilde{M}$ ονομάζεται μια επικάλυψη $q : \widetilde{M} \to M$ που επιπλέον είναι C^∞ (λεία) και τέτοια ώστε ο περιορισμός της στις συνεκτικές συνιστώσες των αντίστροφων εικόνων επικαλυμμένων υποσυνόλων του M να είναι αμφιδιαφόριση. Από την δεύτερη συνθήκη του ορισμού, κάθε λεία επικάλυψη είναι τοπική αμφιδιαφόριση, επομένως εάν είναι *1-1* είναι αμφιδιαφόριση. Ελέγχεται εύκολα ότι μία τοπολογική επικάλυψη είναι λεία εάν και μόνον εάν είναι τοπική αμφιδιαφόριση.

VI.§6.0. Για κάθε $U \subset M$ q-επικαλυμμένο μιας λείας επικάλυψης $q : \widetilde{M} \to M$, κάθε $x \in U$ και κάθε $y \in q^{-1}(x)$, υπάρχει αμφιδιαφόριση $\sigma : U \to \widetilde{M}$ με $\sigma(x) = y$, $q \circ \sigma = id$.

Αποδ. Αναδιατύπωση της πρότασης VI.§1.2. ■

VI.§6.1. Κάθε υπεμβάπτιση *επί* μεταξύ συμπαγών πολλαπλοτήτων ίσης διάστασης είναι λεία επικάλυψη· το πλήθος στρώσεων της επικάλυψης είναι τότε πεπερασμένο, αφού (λόγω συμπάγειας) η αντίστροφη εικόνα στοιχείου είναι πεπερασμένο σύνολο.

Αποδ. Έστω $q : \widetilde{M} \to M$, όπως στην υπόθεση. Επειδή $rankq = dimM = dimN$, η q είναι εμφύτευση και επομένως τοπική αμφιδιαφόριση από το N στο $q[N] = M$. Έστω $y \in M$ και $q^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$, επιλέγουμε $V_1, \dots, V_k$ περιοχές των $x_1, \dots, x_k$ αντιστοίχως ξένες μεταξύ τους και *διφφεομορφικές* με συνεκτική περιοχή $U \subset M$ του y. Τότε $q^{-1}[U] = \bigcup_{i=1}^k V_i$ γραφή σε συνεκτικές συνιστώσες, επομένως το U είναι q-επικαλυμμένο. ■

Από τα γνωστά για τις υπεμβαπτίσεις, συνάγεται άμεσα το επόμενο.

VI.§6.2. Έστω $q : \widetilde{M} \to M$ λεία επικάλυψη· μία $f : M \to N$ είναι λεία εάν και μόνον εάν η $f \circ q$ είναι.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f \circ q"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

VI.§6.3. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και $q : \widetilde{M} \to M$ τοπολογική επικάλυψη, οπότε $\widetilde{M}$ τοπολογική πολλαπλότητα με $dim\widetilde{M} = dimM$ (VI.§1.16). Υπάρχει μοναδική διαφορική δομή επί της $\widetilde{M}$ ώστε η επικάλυψη q να είναι λεία.

Αποδ. Η μοναδικότητα ελέγχεται εύκολα, θα δειχθεί η ύπαρξη. Εάν $\mathcal{A}$ άτλας της M από q-επικαλυμμένες περιοχές, ορίζεται το $\tilde{\mathcal{A}}$ ως το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών των αντιστρόφων εικόνων των στοιχείων του $\mathcal{A}$. Εάν $U \in \mathcal{A}$ και $\widetilde{U}$ μια συνεκτική συνιστώσα του $q^{-1}[U]$, ορίζουμε σύστημα συντεταγμένων επί της $\widetilde{U}$ ως $\tilde{\varphi} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\varphi} = \varphi \circ q$. Τότε δύο τυχαίοι χάρτες $(\widetilde{U}, \tilde{\varphi}), (\widetilde{V}, \tilde{\psi}) \in \tilde{\mathcal{A}}$ είναι συμβατοί:

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \left(\psi \circ q\big|_{\widetilde{U} \cap \widetilde{V}}\right) \circ \left(\tilde{\varphi} \circ q\big|_{\widetilde{U} \cap \widetilde{V}}\right)^{-1} = \psi \circ q\big|_{\widetilde{U} \cap \widetilde{V}} \circ q\big|_{\widetilde{U} \cap \widetilde{V}}{}^{-1} \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} \qquad ■$$

VI.§6.4. (Ύπαρξη και μοναδικότητα λείας καθολικής επικάλυψης). Κάθε διαφορική πολλαπλότητα έχει μοναδική απλά συνεκτική λεία επικάλυψη.

Αποδ. Άμεσα, συνδυάζοντας τις VI.§1.16 και VI.§6.3. ■

VI.§6.5. Η ανύψωση σε λεία επικάλυψη διατηρεί την λειότητα.

Αποδ. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις που δίνονται από πρόταση VI.§6.0. ■

VI.§6.6. Εάν $f : M \to N$ τοπική αμφιδιαφόριση μεταξύ διαφορικών πολλαπλοτήτων και g ρημάννεια μετρική επί της N, τότε η f^*g είναι η μοναδική ρημάννεια μετρική επί της M για την οποία η f καθίσταται τοπική ισομετρία.

Αποδ. Απλός έλεγχος. ■

VI.§6.7. Έστω $q : M \to N$ τοπολογική επικάλυψη, όπου M είναι διαφορική πολλαπλότητα. Εάν η επικάλυψη είναι κανονική και η καλύπτουσα ομάδα περιέχεται στην ομάδα των αμφιδιαφορίσεων την M, τότε υπάρχει μοναδική διαφορική δομή επί της N που καθιστά την q τοπική αμφιδιαφόριση (δηλαδή λεία επικάλυψη).

Αποδ. Εάν U επαρκώς μικρή q-επικαλυμμένη περιοχή της N ώστε οι συνεκτικές συνιστώσες της $q^{-1}[U]$ να είναι τοπικοί χάρτες της M και (V, ψ) ένας από αυτούς, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi = \psi \circ q\big|_V^{-1}$$

Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του χάρτη (V, ψ) : εφ' όσον η δράση της καλύπτουσας ομάδας είναι μεταβατική στις q-ίνες (αφού η επικάλυψη είναι κανονική) και κάθε deck-μετασχηματισμός της M είναι αμφιδιαφόριση, εάν (W, χ) μία άλλη συνεκτική συνιστώσα του $q^{-1}[U]$ και h *deck*-μετασχηματισμός τέτοιος ώστε $h[V] = W$, οπότε $q\big|_V = q\big|_W \circ h$, τότε

$$\psi \circ q\big|_V^{-1} = \psi \circ (q\big|_V \circ h)^{-1} = \psi \circ h^{-1} \circ q\big|_W^{-1} = \chi \circ q\big|_W^{-1}$$

όπου στην τελευταία ισότητα θεωρήσαμε ότι $\chi[W] = \psi[V]$ (επιτρέπεται, εφ' όσον τα W, V είναι διφφεομορφικά). Ελέγχεται ότι οι χάρτες (U, φ) που κατασκευάζονται με αυτόν τον τρόπο είναι C^∞-συμβατοί, επομένως συγκροτούν C^∞-άτλαντα της N. Η μοναδικότητα προκύπτει άμεσα λόγω της VI.§6.6. ■

Η VI.§6.7 επαναδιατυπώνεται στην ακόλουθη χρηστική μορφή.

VI.§6.8. Εάν Γ διακριτή υποομάδα της ομάδας των αμφιδιαφορίσεων της διαφορικής πολλαπλότητας M που δρά ελεύθερα και γνήσια, τότε ο τροχιακός χώρος M/Γ επιδέχεται μοναδικής διαφορικής δομής ώστε η σχετική απεικόνιση πηλίκο να είναι λεία επικάλυψη.

Αποδ. Από VI.§5.10, το πηλίκο $q : M \to M/\Gamma$ είναι κανονική επικάλυψη. Από VI.§6.7 το ζητούμενο. ■

VI.§6.9. Κάθε διαφορική πολλαπλότητα είναι ο τροχιακός χώρος μοναδικής (πάνω από αμφιδιαφορίσεις) απλά συνεκτικής διαφορικής πολλαπλότητας ίσης διάστασης, κάτω από ελεύθερη και γνήσια δράση διακριτης υποομάδας αμφιδιαφορίσεων αυτής, εφοδιασμένος με την διαφορική δομή της πρότασης VI.§6.8.

Αποδ. Λαμβάνουμε την λεία καθολική επικαλυψη $\widetilde{M}$ της διαφορικής πολλαπλότητας M. Εάν Γ η καλύπτουσα ομάδα της καθολικής επικάλυψης, οπότε $\Gamma \subset diff\, \widetilde{M}$, τότε η M είναι διφφεομορφική με την $\widetilde{M}/\Gamma$ (VI.§3.7). Όμως η Γ είναι διακριτή ομάδα που δρά ελεύθερα και από VI.§5.7, δρά επίσης γνησίως ασύνδετα. ■

Καλύπτουσα μετρική για την λεία επικάλυψη $q : M \to N$ της ρημάννειας πολλαπλότητας (N, g) καλείται η ρημάννεια μετρική q^*g, που σύμφωνα με την VI.§6.6 είναι η μοναδική για την οποία η q γίνεται τοπική ισομετρία. Η επικάλυψη $q : (M, h) \to (N, g)$ καλείται **ισομετρική** όταν η h είναι η καλύπτουσα μετρική –ισοδύναμα, όταν είναι τοπική ισομετρία.

Στην κατηγορία των πλήρων ρημάννειων πολλαπλοτήτων, οι τοπικές ισομετρίες μεταξύ πολλαπλοτήτων ίσης διάστασης συμπίπτουν με τις ισομετρικές επικαλύψεις:

VI.§6.10. Κάθε τοπική ισομετρία μεταξύ πλήρων ρημάννειων πολλαπλοτήτων ίσης διάστασης είναι επικάλυψη (και επομένως ισομετρική επικάλυψη)

Αποδ. Βλ. [**Post**], θεώρημα 19.1, σελ. 249. ■

Εάν $h : M \to M$ *deck*-μετασηματισμός της ισομετρικής επικάλυψης $q : M \to N$, τότε εφ' όσον q είναι τοπική ισομετρία, έπεται από την σχέση $q \circ h = q$ ότι ο h είναι τοπική ισομετρία επίσης, και άρα ισομετρία. Επομένως η ομάδα των deck-μετασχηματισμών της ισομετρικής επικάλυψης περιέχεται στην ομάδα των ισομετριών της επικαλύπτουσας πολλαπλότητας.

VI.§6.11. Έστω $q : M \to N$ λεία επικάλυψη, όπου (M, g) ρημάννεια πολλαπλότητα. Εάν η επικάλυψη είναι

κανονική και η καλύπτουσα ομάδα περιέχεται στην ομάδα των ισομετριών της M, τότε υπάρχει μοναδική ρημάννεια μετρική g' επί της N που καθιστά την q ισομετρική επικάλυψη.

Αποδ. Εάν U q-επικαλλυμένη περιοχή της N και V συνεκτική συνιστώσα του $q^{-1}[U]$, εφοδιάζουμε το U με την ρημάννεια μετρική $(q|_V)_* g$. Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του V: εφ' όσον η δράση της καλύπτουσας ομάδας είναι μεταβατική στις ίνες (αφού η επικάλυψη είναι κανονική) και κάθε deck-μετασχηματισμός της M είναι ισομετρία, εάν W μία άλλη συνεκτική συνιστώσα του $q^{-1}[U]$ και h deck-μετασχηματισμός τέτοιος ώστε $h[V] = W$, οπότε $q|_V = q|_W \circ h$, τότε

$$(q|_V)_* g = (q|_W)_* h_* g = (q|_W)_* g \qquad \blacksquare$$

VI.§6.12. Έστω Γ διακριτή υποομάδα της ομάδας των ισομετριών της μιας ρημάννειας πολλαπλότητας M που δρά ελεύθερα και γνήσια. Τότε υπάρχει μοναδική ρημάννεια δομή επί του τροχιακού χώρου M/Γ ώστε η σχετική απεικόνιση πηλίκο $q : M \to M/\Gamma$ να είναι ισομετρική επικάλυψη.

Αποδ. Από VI.§5.10, η $q : M \to M/\Gamma$ είναι κανονική επικάλυψη της τοπολογικής πολλαπλότητας M/Γ και από VI.§6.8 η M/Γ επιδέχεται μοναδικής διαφορικής δομής ώστε η q να είναι λεία επικάλυψη. Από VI.§6.11 έπεται το ζητούμενο. ■

VI.§6.13. Κάθε ρημάννεια πολλαπλότητα είναι ο τροχιακός χώρος μοναδικής (πάνω από ισομετρίες) απλά συνεκτικής ρημάννειας πολλαπλότητας ίσης διάστασης κάτω από ελεύθερη και γνήσια δράση διακριτής υποομάδας της ομάδας των ισομετριών της (υποτίθεται εδώ ότι η ομάδα των ισομετριών έχει δομή ομάδας *Lie*, όπως συμβαίνει στις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις)

Αποδ. Λαμβάνουμε την καθολική ισομετρική επικάλυψη $\widetilde{M}$ της ρημάννειας πολλαπλότητας M. Εάν Γ η καλύπτουσα ομάδα της καθολικής επικάλυψης, οπότε Γ διακριτή υποομάδα της ομάδας των ισομετριών της $\widetilde{M}$, τότε η M είναι ισομετρική της $\widetilde{M}/\Gamma$ (VI.§6.12). Όμως η Γ δρά ελεύθερα και από VI.§5.7, δρά επίσης γνήσια. ■

§7. ΟΜΑΔΕΣ LIE - ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

Ομάδα *Lie* διάστασης n καλείται μία n-διάσταση διαφορική πολλαπλότητα G εφοδιασμένη με δομή ομάδας, κατά τρόπον ώστε το γινόμενο $mult : G \times G \to G$ και η αντιστροφή $inv : G \to G$ να είναι λείες απεικονίσεις· ισοδύναμα, η απεικόνιση $G \times G \ni (x, y) \longmapsto xy^{-1} \in G$ να είναι λεία (C^∞).

Υποομάδα *Lie* καλείται κάθε τοπολογική υποομάδα της G που επιπλέον είναι υποπολλαπλότητα· έπεται άμεσα ότι ο περιορισμός του γινομένου και της αντιστροφής σε αυτήν είναι λείες απεικονίσεις, άρα κάθε υποομάδα *Lie* είναι ομάδα *Lie*.

Για κάθε $g \in G$, οι απεικονίσεις $l_g : G \to G$, $r_g : G \to G$ και $\chi_g : G \to G$, $\chi_g(h) = ghg^{-1}$, είναι αμφιδιαφορίσεις της G, με αντίστοιχες αντίστροφες τις $l_{g^{-1}}$, $l_{g^{-1}}$, $\chi_{g^{-1}}$. Τα διαφορικά

$$(l_g)_* = dl_g(1),\ (r_g)_* = dr_g(1) : T_1G \to T_gG$$

είναι επομένως γραμμικοί ισομορφισμοί. Εφ' όσον η χ_g σταθεροποιεί το 1 για κάθε $g \in G$, το διαφορικό $(\chi_g)_* = d\chi_g(1)$ είναι γραμμικός αυτομορφισμός του T_1G. Η απεικόνιση

$$Ad : G \to GL(T_1G), \quad Ad(g) = (\chi_g)_*$$

είναι λεία αναπαράσταση της ομάδας G εντός της γραμμικής ομάδας του εφαπτόμενου χώρου στο 1 (**συζυγής αναπαράσταση της ομάδας** *Lie* G). Εάν η G είναι αβελιανή, οπότε $\chi_g = id$ για κάθε $g \in G$, η Ad είναι τετριμμένη αναπαράσταση που δεν δίνει καμμία πληροφορία για την αλγεβρική δομή της G.

Ένα $\xi \in \mathfrak{X}(G)$ καλείται **αριστερά αναλλοίωτο** όταν για κάθε

$$x, z \in G, \qquad (l_x)_* \xi(z) = \xi(xz)$$

Ισχύει $(l_x)_*\xi(z) = dl_x\left(l_x^{-1}(xz);\, \xi\left(l_x^{-1}(xz)\right)\right) = ((l_x)_*\xi)(xz)$, επομένως, τα αριστερά αναλλοίωτα πεδία είναι ακριβώς εκείνα για τα οποία

$$\xi = (l_x)_*\xi \quad \text{για κάθε} \quad x \in G$$

Από IV.§4.2,

$$[\xi, \eta] = [(l_x)_*\xi, (l_x)_*\eta] = (l_x)_*[\xi, \eta]$$

για κάθε ζεύγος ξ, η αριστερά αναλλοίωτων πεδίων. Επομένως, ο διανυσματικός χώρος των αριστερά αναλλοίωτων πεδίων επί της G συγκροτεί υποάλγεβρα *Lie* της άλγεβρας *Lie* των λείων διανυσματικών πεδίων $\mathfrak{X}(G)$, που συμβολίζεται με $\mathfrak{g} = Lie(G)$ και καλείται **άλγεβρα *Lie* της ομάδας *Lie*** G. Επειδή η ιδιότητα του αριστερά αναλλοίωτου εμπεριέχει πληροφορία για την πράξη της ομάδας, η άλγεβρα *Lie* συσχετίζει ισχυρά την αλγεβρική δομή της G με την ολική δομή της ως πολλαπλότητας.

Εάν $\xi \in \mathfrak{g}$, τότε $\xi(x) = (l_x)_*\xi(1)$ για κάθε $\xi \in G$. Αντιστρόφως, κάθε $\xi_1 \in T_1G$ επάγει μοναδικό αριστερά αναλλοίωτο πεδίο ξ, $\xi(x) = (l_x)_*\xi_1$. Επομένως υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στον εφαπτόμενο χώρο T_1G και την άλγερβρα $\mathfrak{g}$ που επιπλέον είναι γραμμικός ισομορφισμός. Αυτό επιτρέπει τον εφοδιασμό του T_1G με την πράξη $[\cdot,\cdot]$, που τον καθιστά άλγεβρα *Lie* ισομορφική της $\mathfrak{g}$,

$$[\cdot,\cdot] : T_1G \times T_1G \to T_1G, \qquad (\xi_1, \eta_1) \longmapsto [\xi_1, \eta_1] = [\xi, \eta](1)$$

όπου ξ, η τα αριστερά ανλλοίωτα πεδία επί της G που προσδιορίχονται από τις σχέσεις $\xi(1) = \xi_1$, $\eta(1) = \eta_1$ αντιστοίχως. Γράφουμε $\mathfrak{g} = T_1G$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν την φύση των εφαπτόμενων διανυσμάτων ως τελεστών παραγώγισης, ισχύει

$$[\xi_1, \eta_1] = (\partial_\xi\partial_\eta - \partial_\eta\partial_\xi)\big|_1$$

Η τοπική διαφορική δομή της G γύρω από το 1 προσδιορίζει την τοπική διαφορική δομή γύρω από οποιοδήποτε σημείο (αφού το 1 μεταφέρεται οπουδήποτε με μία αμφιδιαφόριση), και εφ' όσον η $\mathfrak{g}$ είναι γραμμική προσέγγιση αυτής της διαφορικής δομής γύρω από το 1, αναμένεται ότι κάθε δήλωση για την G θα έχει ένα αλγεβρικό ανάλογο ή ισοδύναμο στην $\mathfrak{g}$.

Εάν $\rho : G \to GL(V)$ λεία αναπαράσταση της ομάδας *Lie* G, τότε το διαφορικό

$$\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

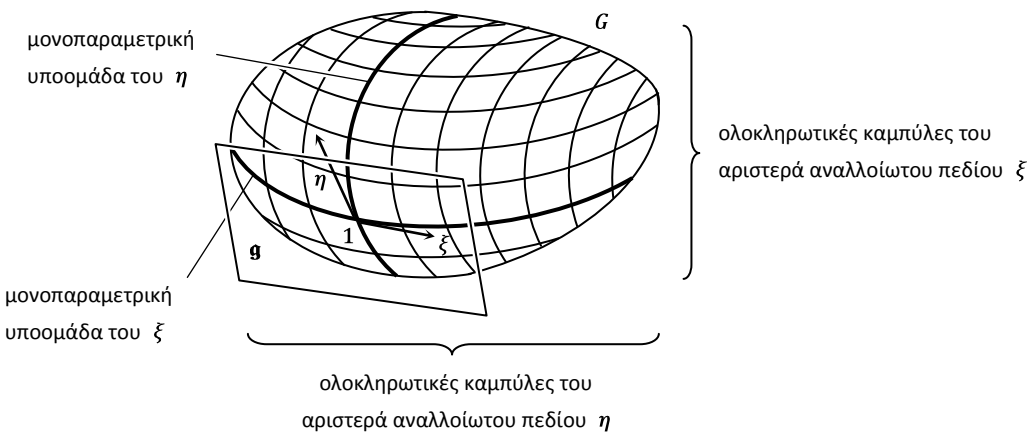
είναι αναπαράσταση της άλγεβρας $\mathfrak{g}$ επίσης. Εάν η ρ είναι εμφύτευση πολλαπλότητας, η ρ_* εμφυτεύει την $\mathfrak{g}$ στην άλγεβρα $\mathfrak{gl}(V)$.

***Lie* ομομορφισμός** καλείται ένας τοπολογικός ομομορφισμός μεταξύ ομάδων *Lie* που επιπλέον είναι λεία απεικόνιση. Ισχύει σχετικά το ακόλουθο:

VI.§7.0. Εάν $\varphi : G \to H$ ομομορφισμός *Lie* μεταξύ συνεκτικών ομάδων *Lie*, τότε

$$\begin{array}{ccc} \varphi \text{ επιμορφισμός με διακριτό πυρήνα} & \leftrightarrow & \varphi \text{ είναι επικάλυψη} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \varphi \text{ είναι τοπική αμφιδιαφόριση} & \leftrightarrow & \varphi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \text{ ισομορφισμός αλγεβρών } Lie \end{array}$$

Μονοπαραμετρική υποομάδα της G καλείται ένας *Lie* ομομορφισμός $\gamma : \mathbb{R} \to G$. Οι μονοπαραμετρικές υποομάδες της G είναι 1-διάστατες υποομάδες *Lie* (καμπύλες) που εξαρτώνται γραμμικά από την χρονική παράμετρο. Αποδεικνύεται ότι οι μονοπαραμετρικές υποομάδες βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία την άλγεβρα $\mathfrak{g}$: για κάθε $\xi \in T_1G$ υπάρχει μοναδική μονοπαραμετρική υποομάδα γ ώστε $\dot{\gamma}(0) = \xi$, επομένως οι μονοπαραμετρικές υποομάδες είναι ακριβώς οι διερχόμενες από το 1 ολοκληρωτικές καμπύλες των αριστερά αναλοίωτων πεδίων.



Αποδεικνύεται επίσης ότι οι μονοπαραμετρικές υποομάδες μιας υποομάδας *Lie* $H \subset G$ συμπίπτουν με την υποάλγεβρα $\mathfrak{h} = T_1 H \subset \mathfrak{g}$ και το πλέγμα των υποομάδων *Lie* της G βρίσκεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το πλέγμα των υποαλγεβρών της $\mathfrak{g}$: για κάθε υποάλγεβρα $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ υπάρχει μοναδική υποομάδα *Lie* $H \subset G$ με $T_1 H = \mathfrak{h}$. Εάν η G είναι συνεκτική, τα *Lie*-ιδεώδη της $\mathfrak{g}$ αντιστοιχούν ακριβώς στις συνεκτικές κανονικές υποομάδες της.

Συζυγής αναπαράσταση της άλγεβρας $\mathfrak{g}$ καλείται το διαφορικό της απεικόνισης Ad στο 1,

$$ad : \mathfrak{g} \to GL(\mathfrak{g}), \qquad \xi \longmapsto ad\,\xi = d\,Ad(1;\xi)$$

Ισχύει $(ad\,\xi)(\eta) = [\xi, \eta]$. Συμβολίζοντας $(exp\,t\xi)_t$ την μονοπαραμετρική ημιομάδα της G που επάγεται από το $\xi \in \mathfrak{g}$, ισχύει επίσης $Ad\,exp\,\xi = exp\,ad\,\xi$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "exp"] \arrow[d, "ad"'] & G \arrow[d, "Ad"] \\
GL(\mathfrak{g}) \arrow[r, "exp"'] & GL(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

Εάν $\varphi : T_1 G = \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} = T_1 H$ ομομορφισμός αλγεβρών *Lie* και G συνεκτική, τότε υπάρχει μοναδικός *Lie* ομομορφισμός $f : G \to H$ με $\varphi = df(1)$. Πόρισμα αυτού είναι ότι απλά συνεκτικές ομάδες *Lie* με ισομορφικές άλγεβρες *Lie* είναι ισομορφικές. Το κεντρικό θεώρημα της θεωρίας αντιστρέφει αυτήν την σχέση.

VI.§7.1. Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στις κλάσεις ισομορφίας των πεπερασμένης διάστασης αλγέβρων *Lie* και τις κλάσεις (αλγεβρικής) ισομορφίας των απλά συνεκτικών ομάδων *Lie*.

VI.§7.2. Για κάθε πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα *Lie* $\mathfrak{g}$, οι συνεκτικές ομάδες *Lie* με άλγεβρα *Lie* ισομορφική της $\mathfrak{g}$ είναι (πάνω από ισομορφισμό) της μορφής G/Γ, όπου G απλά συνεκτική ομάδα *Lie* με άλγεβρα $\mathfrak{g}$ και $\Gamma \lhd G$ διακριτή (περιέχεται $Z(G)$ ως διακριτή κανονική).

VI.§7.3. Η (μοναδική πάνω από ισομορφισμό επικαλύψεων) λεία καθολική επικάλυψη $q : \tilde{G} \to G$ μίας συνεκτικής ομάδας *Lie* G εφοδιάζεται με πράξη που την καθιστά ομάδα *Lie* κατά τρόπον ώστε η q να είναι ομομορφισμός *Lie*.

Αποδ. Εφ' όσον $q : \tilde{G} \to G$ είναι λεία επικάλυψη, η $q \times q : \tilde{G} \times \tilde{G} \to G \times G$ είναι λεία επικάλυψη επίσης. Επειδή $\tilde{G}$ απλά συνεκτικό, $\tilde{G} \times \tilde{G}$ απλά συνεκτικό επίσης, άρα η $q \times q$ είναι η λεία καθολική επικάλυψη. Ζητούνται λείες πράξεις $\widetilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$, $\widetilde{inv} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ που να προσδίδουν στην $\tilde{G}$ δομή ομάδας.

$$\begin{tikzcd} \tilde{G}\times\tilde{G} \arrow[r, "\tilde{m}"] \arrow[d, "q\times q"'] & \tilde{G} \arrow[d, "q"] \\ G\times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} & \tilde{G} \arrow[d, "q"] \\ \tilde{G}\times\tilde{G} \arrow[ur, "\tilde{m}"] \arrow[r, "m\circ(q\times q)"'] & G\pi_1(X,f(z)) \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Επιλέγουμε $\tilde{1}\in q^{-1}(1)$. Επειδή $\tilde{G}\times\tilde{G}$ απλά συνεκτικό, η συνάρτηση $m\circ(q\times q)$, όπου m η πράξη της G, ανυψώνεται ως $\tilde{m}$ με αρχικό σημείο $\tilde{1}$ που καθιστά το διάγραμμα (1) αντιμεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "\widetilde{inv}"] \arrow[d, "q"'] & \tilde{G} \arrow[d, "q"] \\ G \arrow[r, "inv"'] & G \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} & \tilde{G} \arrow[d, "q"] \\ \tilde{G} \arrow[ur, "\tilde{m}"] \arrow[r, "inv\circ q"'] & G \end{tikzcd} \qquad (2)$$

Ομοίως, η συνάρτηση $inv\circ q$, όπου inv η αντιστροφή στην ομάδα G, ανυψώνεται ως $\widetilde{inv}$ με αρχικό σημείο $\tilde{1}$ που καθιστά το διάγραμμα (2) αντιμεταθετικό. Ορίζουμε πράξεις στην G, $\tilde{G}\times\tilde{G}\to\tilde{G}$, $(x,y)\longmapsto x\cdot y\equiv\tilde{m}(x,c)$ και $\tilde{G}\to\tilde{G}$, $x\longmapsto x^{-1}\equiv\widetilde{inv}(x)$. Από την αντιμεταθετικότητα των διαγραμμάτων φαίνεται ότι η $q(xy)=q(x)q(y)$ και $q(x^{-1})=(q(x))^{-1}$. Μένει να δειχθεί ότι η G είναι ομάδα.

Ουδετερότητα του $\tilde{1}$: Ορίζουμε $f:\tilde{G}\to\tilde{G}$, $f(x)=x\cdot\tilde{1}$. Τότε $q\circ f(x)=q(\tilde{1})q(x)=1q(x)=q(x)$, άρα η f είναι ανύψωση της $f:\tilde{G}\to\tilde{G}$. Αλλά $id_{\tilde{G}}$ είναι επίσης ανύψωση της q, και επειδή f, $id_{\tilde{G}}$ συμφωνούν στο $\tilde{1}$, έπεται ότι $f=id_{\tilde{G}}$.

Προσεταιριστικότητα: Ορίζουμε $a_L, a_R:\tilde{G}\times\tilde{G}\times\tilde{G}\to\tilde{G}$, $a_L(x,y,z)=(xy)z$, $a_R(x,y,z)x(yz)$. Ισχύει $q\circ a_L=q\circ a_R$, δηλαδή a_L, a_R ανυψώσεις της $a:\tilde{G}\times\tilde{G}\times\tilde{G}\to\tilde{G}$, $a(x,y,z)=q(x)\cdot q(y)q(z)$, και επειδή συμφωνούν στο $(\tilde{1},\tilde{1},\tilde{1})$ έπεται ότι $a_L=a_R$. Με όμοιο επιχείρημα αποδεικνύεται ότι $x^{-1}x=xx^1$. ■

Εάν $q:\tilde{G}\to G$ η καθολική επικάλυψη της G και η $\tilde{G}$ είναι εφοδιασμένη, από προηγούμενη πρόταση, με δομή ομάδας ώστε η q να είναι *Lie* ομομορφισμός, τότε $kerq=q^{-1}(1)$ είναι διακριτή υποομάδα της G ως ίνα της επικάλυψης q και $kerq$ περιέχεται στο κέντρο της G (VI.§3.9). Έπεται άμεσα ότι

VI.§7.4. Κάθε συνεκτική ομάδα *Lie* G είναι ισομορφική με ομάδα $\tilde{G}/N$, όπου $\tilde{G}$ απλά συνεκτική ομάδα *Lie* (η καθολική επικάλυψη της G) και $N\lhd G$ διακριτή υποομάδα της G (άρα κεντρική).

VI.§7.5. Δύο συνεκτικές ομάδες *Lie* έχουν ισομορφικές ομάδες *Lie* εάν και μόνον εάν οι καθολικές επικαλύψεις τους είναι αλγεβρικά ισόμορφες.

Αποδ. Από VI.§7.2, κάθε συνεκτική ομάδα *Lie* έχει άλγεβρα *Lie* ισομορφική με την άλγεβρα *Lie* της καθολικής της επικάλυψης. Συνδυάζοντάς αυτό με την πρόταση VI.§7.0 έπεται το ζητούμενο. ■

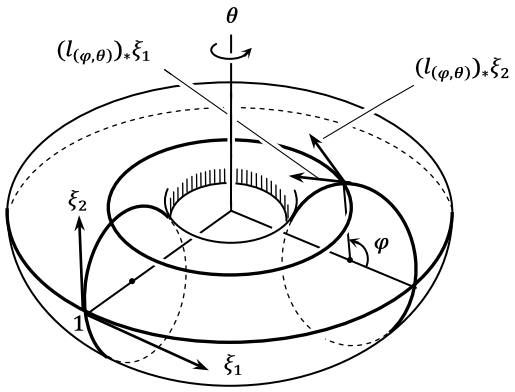
VI.§7.6. Θεμελιώδης ομάδα ομάδας *Lie* είναι αβελιανή.

Αποδ. Εφ' όσον $kerq$ είναι διακριτή, από VI.§4.8 συνάγεται ότι η καλύπτουσα ομάδα Γ της q είναι ισόμορφη της $kerq$. Επειδή η $q:\tilde{G}\to G$ είναι καθολική επικάλυψη, $\pi_1(G)\simeq\Gamma$, επομένως $\pi_1(G)\simeq kerq$. Από VI.§3.9 έπεται το ζητούμενο. ■

VII.§7.7. Κάθε ομάδα *Lie* είναι παραλληλοποιήσιμη.

Αποδ. Έστω G ομάδα *Lie*, $\xi_1,\dots,\xi_r$ βάση του T_1G και $\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_r\in\mathfrak{g}$ τα αντίστοιχα αριστερά αναλλοίωτα πεδία. Για κάθε $x\in G$, τα $\tilde{\xi}_i(x)=(l_x)_*\xi_i$, $i=1,\dots,n$ συγκροτούν βάση του T_xM, εφ' όσον το διαφορικό της l_x είναι γραμμικός ισομορφισμός), άρα τα $\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_r$ συγκροτούν ολικό πλαίσιο για την εφαπτόμενη δέσμη της G. ■

Επομένως οι τόροι, $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1}_{n}$, είναι παραλληλοποιήσιμες πολλαπλότητες, ως ομάδες *Lie*[2].



VII.§7.8. Κάθε ομάδα *Lie* είναι προσανατολίσιμη.

Αποδ. Συνδυάζοντας τις VII.§7.7 και V.§3.7. ■

§8. ΔΡΑΣΗ ΟΜΑΔΩΝ LIE

Λεία καλείται μία δράση $l : G \times M \to M$ της ομάδας *Lie* G επί της πολλαπλότητας M όταν είναι λεία απεικόνιση· τότε κάθε $g \in G$ επάγει μία αμφιδιαφόριση $l_g = g(\cdot) : M \to M$ της M επί του εαυτού της. Επομένως εάν η δράση είναι πιστή, η G εμφυτεύεται (αλγεβρικά) στην ομάδα των αμφιδιαφορίσεων της M. Για να δρά λεία μία διακριτή ομάδα *Lie*, αρκεί να είναι λείες οι μεταθέσεις που επάγει στην M.

Από τα γνωστά για τις συνήθεις δράσεις ομάδων, κάθε ομάδα *Lie* δρά λεία, ελεύθερα και μεταβατικά στον εαυτό της (μεταφορά), δρά επίσης λεία στον εαυτό της με την συζυγία, και κάθε υποομάδα *Lie* δρά λεία και ελεύθερα στην ομάδα *Lie* που την περιέχει με μεταφορά.

VI.§8.0. Έστω $l : G \times M \to M$ λεία μεταβατική δράση, $m : G \times N \to N$ λεία δράση και $f : M \to N$ λεία ισομεταβαλλόμενη ως προς τις δράσεις αυτές· τότε η f είναι σταθερού βαθμού, επομένως οι ισοσταθμικές της f είναι υποπολλαπλότητες της M με συνδιάσταση τον βαθμό της f.

Αποδ. Έστω $x_0 \in M$, τότε λόγω μεταβατικότητας κάθε $x \in M$ είναι της μορφής $x = gx_0$ για κάποιο $g \in G$. Επειδή $f \circ l_g = m_g \circ f$ λόγω ισομεταβολής, λαμβάνουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
T_{x_0}M \arrow[r, "df_{x_0}"] \arrow[d, "d(l_g)_x"'] & T_{f(x_0)}N \arrow[d, "d(m_g)_{f(x_0)}"] \\
T_xM \arrow[r, "df_x"'] & T_{f(x)}N
\end{tikzcd}$$

Εφ' όσον οι l_g, m_g είναι αμφιδιαφορίσεις, τα κάθετα βέλη είναι ισομορφισμοί, άρα τα οριζόντια είναι γραμμμικές απεικονίσεις ιδίου βαθμού. ■

VI.§8.1. Έστω $\varphi : G \to H$ ομομορφισμός *Lie*· τότε $ker\varphi$ υποομάδα *Lie* της G με $dimker\varphi = dimG - rank\varphi$.

---

2. Η $\mathbb{S}^3$ δεν είναι παραλληλοποιήσιμη (*hairy ball theorem*). Οι $\mathbb{S}^1 \simeq U(1)$, $\mathbb{S}^3 \simeq SU(2)$, $\mathbb{S}^7$ είναι οι μόνες παραλληλοποιήσιμες σφαίρες (Bott, Milnor, 1958, με μεθόδους αλγεβρικής τοπολογίας). Έχει δειχθεί (*Wolf*) ότι κάθε συμπαγής απλά συνεκτική πολλαπλότητα που είναι παραλληλοποιήσιμη, είναι γινόμενο *Lie* ομάδων και 7-σφαιρών.

Αποδ. Η φ είναι λεία ισομεταβαλλόμενη απεικόνιση ως προς τις δράσεις $G \times G \to G$, $(g,k) \to gk$ και $G \times H \to H$, $(g,h) \mapsto gh$. Από αυτές η πρώτη είναι μεταβατική, και επειδή $ker\varphi \subset M$ είναι η φ-ισοσταθμική του $1 \in H$, το ζητούμενο έπεται από πρόταση VI.§8.0. ■

VI.§8.2. Έστω $G \times M \to M$ μία λεία, ελεύθερη, γνήσια δράση της ομάδας *Lie* G επί της πολλαπλότητας M· τότε ο χώρος των τροχιών M/G με την τοπολογία πηλίκο είναι τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης $dim\, M/G = dimM - dimG$ και υπάρχει μοναδική διαφορική δομή επ' αυτής ώστε η απεικόνιση πηλίκο $M \to M/G$ να είναι λεία υπεμβάπτυση.

Αποδ. [**Lee1**], σελ. 218. ■

VI.§8.3. Έστω $H \subset G$ υποομάδα *Lie*· υπάρχει μοναδική διαφορική δομή πάνω στον χώρο των συμπλόκων G/H ώστε η απεικόνιση πηλίκο $q : G \to G/H$ να είναι λεία υπεμβάπτυση και η δράση $G \times G/H \to G/H$ να είναι λεία.

ΑΠΟΔ. Ο G/H είναι ο χώρος τροχιών της G κάτω από την ελεύθερη δράση $H \times G \to G$, $(h,g) \longmapsto h \cdot g$. Επειδή η H είναι υποομάδα *Lie*, αυτή η δράση είναι λεία, επιπλέον είναι γνήσια: Έστω $(g_i) \subset G$ συγκλίνουσα και $(h_i) \subset H$ ακολουθία ώστε $(g_i h_i) \subset G$ συγκλίνουσα· τότε λόγω συνέχειας των πράξεων, η $(h_i) \subset H$ είναι συγκλίνουσα επίσης, αφού $h_i = g_i^{-1} g_i h_i$. Αυτό το όριο ανήκει στην H, αφού αυτή είναι κλειστό υποσύνολο ως τοπολογική υποομάδα. Από πρόταση VI.§8.2, ο τοπολογικός χώρος G/H καθίσταται με μοναδικό τρόπο διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $dimG - dimH$ ώστε η προβολή $q : G \to G/H$ να είναι λεία υπεμβάπτυση. Μένει να δειχθεί ότι η δράση $\Theta : G \times G/H \to G/H$, $\Theta(g, kH) = (gk)H$ είναι λεία. Εξ ορισμού της Θ, το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "mult"] \arrow[d, "mult \times q"'] & G \arrow[d, "mult \times q"] \\
G \times G/H \arrow[r, "\Theta"'] & G/H
\end{tikzcd}$$

Οι $mult \times q$, $q \circ mult$ είναι υπεμβαπτύσεις ως καρτεσιανό γινόμενο και σύνθεση υπεμβαπτύσεων αντιστοίχως. Από το πέρασμα στο πηλίκο, η Θ είναι λεία. ■

VI.§8.4. Εάν $l : G \times M \to M$ λεία δράση, τότε για κάθε $x \in M$ η ομάδα ισοτροπίας $stab(x)$ είναι υποομάδα *Lie* της G.

Αποδ. Η $l^x : G \to M$ είναι ισομεταβαλλόμενη και λεία. Από πρόταση VI.§8.0, η l^x είναι σταθερού βαθμού και η $stab(x)$ είναι υποπολλαπλότητα της G ως l^x-ισοσταθμική του x. Άρα είναι υποομάδα *Lie*. ■

VI.§8.5. Έστω M ομογενής χώρος κάτω από λεία δράση της ομάδας G. Για κάθε $x \in M$, η απεικόνιση $G/stab(x) \to M$, $gstab(x) \longmapsto gx$ είναι ισομεταβαλλόμενη αμφιδιαφόριση (όπου η $G/stab(x)$ θεωρείται εφοδιασμένη με την διαφορική δομή που δίνεται από την VI.§8.5).

Αποδ. Το ισομεταβαλλόμενο είναι γνωστό από την δράση ομάδων σε σύνολα. Επίσης η $a_x : G/stab(x) \to M$ είναι λεία διότι προκύπτει από την l^x περνώντας στο πηλίκο.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "l^x"] & \\
G/stab(x) \arrow[r, "a_x"'] & M
\end{tikzcd}$$

Εφ' όσον είναι λεία και ισομεταβαλλόμενη, από πρόταση VI.§8.0, είναι σταθερού βαθμού, και επειδή είναι αμφιμονοσήμαντη, αυτός ο βαθμός είναι $dimM = dim\, G/stab(x)$. Άρα είναι αμφιδιαφόριση. ■

Η VI.§8.5 υποδεικνύει ότι η μελέτη των ομογενών χώρων ανάγεται στη μελέτη των *Lie* υποομάδων της ομάδας *Lie* που δρά επ' αυτών. Κάνοντας απλές γεωμετρικές θεωρήσεις, λαμβάνουμε χάρις την VI.§8.5 τους παρακάτω διφφερομορφισμούς.

$$\mathbb{S}^n = O(n+1)/\underbrace{O(n) = SO(n)/SO(n)}_{\text{σταθεροποιητές του } (1,\ 0,\dots,0)}$$

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{n} = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to \text{ σταθεροποιητής του } (1,\dots,1)$$

$$\mathbb{S}^{2n-1} = O(\underbrace{(2n-1)+1}_{2n})/O(2n-1) = U(n)/\underbrace{U(n-1) \quad = \quad SU(n)/SU(n-1)}_{\text{σταθεροποιητές του } (1,\ 0,\dots,0)}$$

$$\mathbb{R}P^n = \underbrace{O(n+1)/\underbrace{\mathbb{Z}_2 \times O(n)}_{\left\{\begin{pmatrix}\pm 1 & \\ & A\end{pmatrix} : A \in SO(n)\right\}}}_{\text{σταθεροποιητές της ευθείας που διέρχεται από το } (1,0,\dots,0)} = \underbrace{SO(n+1)/\underbrace{\mathbb{Z}_2 \times SO(n)}_{\left\{\begin{pmatrix}\pm 1 & \\ & A\end{pmatrix} : A \in SO(n)\right\}}}$$

$$\mathbb{R}P^{2n-1} = U(n)/\underbrace{\mathbb{Z}_2 \times U(n-1) = SU(n)/\mathbb{Z}_2 \times SU(n-1)}_{\text{σταθεροποιητές της ευθείας που διέρχεται από το } (1,0,\dots,0)}$$

$$\mathrm{G}_k^n = O(n)/\underbrace{(O(k) \times O(n-k))}_{\substack{\text{σταθεροποιητής του } k\text{-χώρου που είναι κάθετος} \\ \text{στα } n-k \text{ τελευταία διανύσματα βάσης}}} = O(n)/(O(n-k) \times O(k)) = G_{n-k}^n \to \left\{\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix} : A \in O(k),\ B \in O(n-k)\right\}$$

$$\mathbb{C}P^{n-1} = U(n)/\underbrace{U(1) \times U(n-1)}_{\text{σταθεροποιητής της μιγαδικής ευθείας που διέρχεται από το } (1,0,\dots,0)}$$

$$\| $$

$$G_2^{2n} = O(2n)/O(2) \times O(2n-2)$$

Στις ενδιαφέρουσες γεωμετρικά περιπτώσεις, οι διακριτές ομάδες δρούν με τρόπο που δικαιολογεί την ονομασία τους:

VI.§8.6. Έστω M ομογενής χώρος κάτω από την λεία δράση $G \times M \to M$ της ομάδας *Lie* G με συμπαγείς σταθεροποιητές· τότε για κάθε $\Gamma \subset G$ διακριτή υποομάδα, η δράση $\Gamma \times M \to M$ είναι γνησίως ασύνδετη.

Αποδ. Από προηγούμενη πρόταση, η M είναι διφφεομορφική με την $G/stab(x)$ για οποιοδήποτε $x \in M$, και η δράση $G \times M \to M$ μπορεί να νοείται ως η δράση $G \times G/stab(x) \to G/stab(x)$. Επειδή $stab(x) \subset G$ συμπαγές, η απεικόνιση πηλίκο $q : G \to G/stab(x)$ είναι γνήσια· επιπλέον, από τα στοιχειώδη της δράσης ομάδων, είναι ισομεταβαλλόμενη ως προς τις δράσεις $G \times G \to G$ και $G \times G/stab(x) \to G/stab(x)$. Άρα είναι ισομεταβαλλόμενη ως προς τις δράσεις $\Gamma \times G \to G$ και $\Gamma \times G/stab(x) \to G/stab(x)$ επίσης (εφ' όσον $\Gamma \subset G$). Άρα η $\Gamma \times G \to G$ είναι διακριτή, επομένως, η $\Gamma \times G/stab(x) \to G/stab(x)$ είναι διακριτή επίσης. ■

VI.§8.7. Έστω M ομογενής χώρος κάτω από την λεία δράση $G \times M \to M$ της ομάδας *Lie* G με συμπαγείς σταθεροποιητές· εάν $\Gamma \subset G$ διακριτή υποομάδα ώστε η δράση $\Gamma \times M \to M$ να είναι ελεύθερη, τότε ο χώρος M/Γ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $dim\, M/\Gamma = dimM$ και η απεικόνιση πηλίκο $q : M \to M/\Gamma$ είναι λεία επικάλυψη και υπεμβάπτυση.

Αποδ. Από VI.§8.6 και VI.§5.10, έπεται ότι η M/Γ είναι τοπολογική πολλαπλότητα και η απεικόνιση πηλίκο

$q : M \to M/\Gamma$ είναι επικάλυψη. Από VI.§8.2, η M/Γ εφοδιάζεται μοναδικά με διαφορική δομή ώστε η q να είναι υπεμβάπτυση· επίσης $dim\, M/\Gamma = dimM - dim\Gamma$, αλλά $dim\Gamma = 0$, εφ' όσον η Γ είναι διακριτή ομάδα. ■

VI.§8.8. Εάν M είναι συνεκτική διαφορική πολλαπλότητα που είναι ομογενής χώρος κάτω από την λεία δράση της ομάδας *Lie* G, τότε η συνεκτική συνιστώσα G_1 του 1 δρά επίσης μεταβατικά επί της M.

Αποδ. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι εάν η απεικόνιση $G/stab(x) \to M$, $gstab(x) \longmapsto gx$ είναι ομοιομορφισμός, όπως ισχύει εν προκειμένω, τότε ισχύει το ζητούμενο · βλ. [**Helg**], πρόταση 4.3.b, σελ 124. ■

§9. Η ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΟΜΑΔΑ

Μεταξύ άλλων, η σημασία της ορθογώνιας ομάδας $O(n)$ για την γεωμετρία έγκειται στο εξής: εάν η ομάδα *Lie* G δρά στην n-διάστατη ρημάννεια πολλαπλότητα M με ισομετρίες, τότε για κάθε $x \in M$ ο σταθεροποιητής $stab(x)$ αναπαρίσταται εντός της ομάδας των ορθογώνιων μετασχηματισμών του σχετικού εφαπτόμενου χώρου, $O(T_xM) \cong O(n)$, μέσω του ομομορφισμού

$$\rho : stab(x) \to O(n), \quad a \longmapsto d(a)_x$$

Η $GL_n\mathbb{R}$ είναι πολλαπλότητα ως ανοικτό υποσύνολο του $M_n\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (αντίστροφη εικόνα του $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ μέσω της det) εφοδιασμένη με ολικό σύστημα συντεταγμένων (τα ορίσματα των πινάκων που ανήκουν σ' αυτήν). Επειδή το γινόμενο πινάκων είναι λεία απεικόνιση (ως λεία κατά συντεταγμένες) έπεται ότι η $GL_n\mathbb{R}$ είναι ομάδα *Lie*.

Εξ ορισμού της, η $O(n)$ είναι η ομάδα των $X \in GL_n\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση $XX^\top = \mathbf{1}$, η οποία ισοδυναμεί με το σύστημα των $\binom{n}{2}$ εξισώσεων $x^i_k x^k_j = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le n$. Ελέγχοντας ότι οι λείες απεικονίσεις $f_{ij} : GL_n\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{ij}(X) = x^i_k x^k_j - \delta_{ij}$ είναι σταθερού βαθμού 1, συνάγεται ότι η $O(n)$ είναι $n(n+1)/2$ -διάστατη υποπολλαπλότητα της $GL_n\mathbb{R}$. Αντί αυτού του ελέγχου, το συμπέρασμα προκύπτει επίσης από την εξής πρόταση.

VI.§9.0. Σε κάθε $P \in O(n)$, ο εφαπτόμενος χώρος $T_PO(n)$ είναι γραμμικά ισόμορφος με τον $n(n+1)/2$-διάστατο υπόχωρο των $n \times n$ - αντισυμμετρικών πινάκων.

Αποδ. Αρκεί να δειχθεί το ζητούμενο για $P = 1$, οπότε μεταφέρεται σε οποιδήποτε σημείο της $O(n)$ μέσω της αριστερής δράσης. Έστω λεία καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to O(n)$ με $\gamma(0) = \mathbf{1}$. Εάν $\gamma^i_j(t)$ οι συναρτήσεις συντεταγμένων του πίνακα $\gamma(t)$, η ορθογωνιότητα σημαίνει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma^i_j \gamma^i_k = 1$$

Παραγωγίζοντας ως προς t, $\sum_{i=1}^{n} (\dot\gamma^i_j \gamma^i_k + \gamma^i_j \dot\gamma^i_k) = 0$. Αντικαθιστώντας $t = 0$, και επειδή $\gamma(0) = \mathbf{1}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\dot\gamma^i_j(0)\delta_{ik} + \delta_{ij}\dot\gamma^i_k(0) \right) = 0\,, \qquad \text{άρα} \quad \dot\gamma^k_j(0) + \dot\gamma^j_k(0) = 0$$

Αυτή η ισότητα δείχνει ότι ο $\dot\gamma(0)$ είναι αντισυμμετρικός πίνακας, επομένως ο $T_{\mathbf{1}}O(n)$ περιέχεται στον χώρο των αντισυμμετρικών πινάκων. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω $X \in M_n\mathbb{R}$ αντισυμμετρικός. Ορίζεται η καμπύλη

$$\gamma : \mathbb{R} \to M_n\mathbb{R}\,, \qquad \gamma(t) = \mathbf{1} + tX$$

Ισχύει

$$\gamma(t)\,\gamma(t)^\top = (\mathbf{1} + tX)(\mathbf{1} + tX) = \mathbf{1} + t(X + X^\top) + o(t) = \mathbf{1} + o(t)$$

λόγω αντισυμμετρικότητας, άρα η ταχύτητα της γ στο σημείο $\mathbf{1}$ περιέχεται στον $T_{\mathbf{1}}O(n)$. ■

Επειδή $Lie(GL_n\mathbb{R}) = M_n\mathbb{R}$ έπεται άμεσα ότι

VI.§9.1. Η άλγεβρα $\mathfrak{o}(n) = T_{\mathbf{1}}O(n)$ είναι ισόμορφη με την άλγεβρα *Lie* των αντισυμμετρικών $n \times n$-πινάκων.

Από την γραμμική άλγεβρα είναι γνωστό ότι οι κανονικοί μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^n$ είναι ακριβώς οι γραμμικοί μετασχηματισμοί για τους οποίους υπάρχει βάση στην οποία αναπαρίστανται από πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & A_m & & & \\ & & & \lambda_{m+1} & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad A_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & -\tau_i \\ -\tau_i & \sigma_i \end{pmatrix}$$

όπου $\lambda_j = \sigma_j + i\,\tau_j,\ j = 1, \dots, m,\ \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του μετασχηματισμού (βλ. [**Shil**], σελ. 265).
Εάν ο μετασχηματισμός είναι ορθογώνιος, οπότε οι ιδιοτιμές έχουν μέτρο 1, ο πίνακας λαμβάνει την μορφή

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & A_m & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & \pm 1 \end{pmatrix} \Bigg\} n-m, \qquad A_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$$

VI.§9.2. Οι συνεκτικές συνιστώσες της $O(n)$ είναι η ομάδα των στροφών $SO(n)$ και το σύνολο των ανακλάσεων $O^-(n)$.

Αποδ. Θα δειχθεί ότι κάθε $A \in SO(n)$ συνδέεται με το $\mathbf{1}$ μέσω συνεχούς καμπύλης $\gamma : [0,1] \to O(n)$. Επιλέγοντας βάση στην οποία ο A αναπαρίσταται από πίνακα της προηγούμενης μορφής, ορίζεται η ζητούμενη καμπύλη γ ως

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & A_m(t) & \\ & \mathbf{0} & & f(t)\mathbf{1}_{n-m} \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} A_i(t) = \begin{pmatrix} \cos t\varphi_i & -\sin t\varphi_i \\ -\sin t\varphi_i & \cos t\varphi_i \end{pmatrix} \\ f(t) = \cos\pi(1-t) \end{matrix} \qquad \blacksquare$$

VI.§9.3. Η άλγεβρα *Lie* της $O(n)$ ισούται με την άλγεβρα *Lie* της $SO(n)$.

Αποδ. Άμεσα από VI.§9.2. ■

VI.§9.4. Η $O(n)$ είναι συμπαγής.

Αποδ. Η $O(n)$ είναι κλειστό υποσύνολο της $M_n\mathbb{R}$ ως σύνολο λύσεων της εξίσωσης $XX^{\top} = \mathbf{1}$. Επειδή το μέτρο όλων των ορισμάτων ενός ορθογώνιου πίνακα είναι μικρότερο ή ίσο του 1, έπεται επίσης ότι η $O(n)$ είναι φραγμένο υποσύνολο. ■

Η άλγεβρα *Lie* $\mathfrak{o}(3) = \mathfrak{so}(3)$ είναι ο χώρος των αντισυμμετρικών 3×3 –πινάκων (VI.§9.1), με βάση

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} & & +1 \\ & 0 & \\ -1 & & \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} & -1 & \\ +1 & & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Ελέγχεται εύκολα ότι $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2$, επομένως η $\mathfrak{so}(3)$ είναι ισομορφική με την δομή άλγεβρας *Lie* που έχει ο εφοδιασμένος με το σύνηθες εξωτερικό γινόμενο 3-διάστατος χώρος.

VI.§9.5. Οι μόνες γνήσιες, μή τετριμμένες συνεκτικές υποομάδες *Lie* της $SO(3)$ είναι οι

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 0 \end{pmatrix}_{\theta\in[0,2\pi)}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}_{\theta\in[0,2\pi)}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & & -\sin\theta \\ & 0 & \\ \sin\theta & & \cos\theta \end{pmatrix}_{\theta\in[0,2\pi)}$$

δηλαδή οι μονοπαραμετρικές υποομάδες που αντιστοιχούν στις υποάλγεβρες $span(X_1)$, $span(X_2)$, $span(X_3)$ αντιστοίχως.

Αποδ. Εφ' όσον οι υποάλγεβρες *Lie* βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις συνεκτικές υποομάδες *Lie*, το ζητούμενο έπεται επειδή οι $span(X_1)$, $span(X_2)$, $span(X_3)$ είναι οι μόνες γνήσιες, μή τετριμμένες υποάλγεβρες *Lie* της 3-διάστατης άλγεβρας $\mathfrak{so}(3)$. ■

§10. ΡΗΜΑΝΝΕΙΑ ΔΟΜΗ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΧΩΡΟΥΣ

Δεδομένης δράσης της ομάδας G στην ρημάννεια πολλαπλότητα (M, g), η g καλείται G-**αναλλοίωτη** όταν για κάθε $a \in G$, $a_* g = g$ (δηλαδή όταν η G περιέχεται στην ομάδα των ισομετριών της M).

VI.§10.0. Για κάθε πεπερασμένη ομάδα αμφιδιαφορίσεων G μίας διαφορικής πολλαπλότητας M, υπάρχει G-αναλλοίωτη ρημάννεια μετρική επί της M.

Αποδ. Επιλέγοντας οποιαδήποτε ρημάννεια μετρική g επί της M, η μετρική

$$\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G} a_* g$$

είναι η ζητούμενη. ■

VI.§10.1. Κάθε ομάδα *Lie* έχει μοναδικό - πάνω από θετικό πολλαπλασιαστικό παράγοντα - αριστερά αναλλοίωτο στοιχείο όγκου το οποίο συμφωνεί με τον επιλεγμένο προσανατολισμό.

Αποδ. Έστω $e_1, \dots, e_n$ αριστερά αναλλοίωτο ολικό πλαίσιο της συνεφαπτόμενης δέσμης της ομάδας *Lie* G (VII.§7.8), οπότε $\alpha_* e_i = e_i$ για κάθε $\alpha \in G$. Τότε το δυϊκό πλαίσιο $\omega^1, \dots, \omega^n$ είναι επίσης αριστερά αναλλοίωτο, εφ' όσον

$$(a_*\omega^i)(e_j) = \omega^i(g_* e_j) = \omega^i(e_j), \quad \text{δηλαδή } \alpha_*\omega^i = \omega^i$$

Επιλέγουμε $\Omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$, που είναι επίσης αριστερά αναλλοίωτη μορφή και επιπλέον είναι στοιχείο όγκου, αφού $\Omega(e_1, \dots, e_n) = 1 > 0$. Μένει να δειχθεί ότι τα αριστερά αναλλοίωτα στοιχεία όγκου της G που συμφωνούν με τον προσανατολισμό του πλαισίου $e_1, \dots, e_n$ συμπίπτουν με τα θετικά πολλαπλάσια του Ω. Κάθε τέτοιο πολλαπλάσιο προφανώς είναι· για το αντίστροφο, έστω $\tilde{\Omega}$ αριστερά αναλλοίωτο στοιχείο όγκου που συμφωνεί με τον επιλεγμένο προσανατολισμό. Επειδή ο χώρος των αντισυμετρικών n-τανυστών του εφαπτόμενου χώρου $T_1 G$ είναι 1-διάστατος, $\tilde{\Omega}(1) = \lambda\, \Omega(1)$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Τότε λόγω αριστερής αναλλοιότητας,

$$\tilde{\Omega}(g) = g_* \tilde{\Omega}(1) = g_* \lambda\, \Omega(1) = \lambda\, g_* \Omega(1) = \lambda\, \Omega(g), \text{ δηλαδή } \tilde{\Omega} = \lambda\, \Omega \qquad ■$$

VI.§1.2. (μέτρο Haar). Κάθε συμπαγής ομάδα *Lie* έχει μοναδικό - για κάθε έναν από τους προσανατολισμούς της - αριστερά αναλλοίωτο στοιχείο όγκου Ω τέτοιο ώστε

$$\int_G \Omega = 1$$

Αποδ. Επιλέγουμε $\tilde{\Omega}$ αριστερά αναλλοίωτο στοιχείο όγκου της G με $\int_G \tilde{\Omega} > 0$ (VI.§10.1). Λόγω συμπάγειας, ορίζεται καλά η ζητούμενη μορφή ως

$$\Omega = \tilde{\Omega} \Big/ \int_G \tilde{\Omega} \qquad ■$$

VI.§10.3. Για κάθε συμπαγή συνεκτική ομάδα *Lie* που δρά λεία σε διαφορική πολλαπλότητα M, υπάρχει G-αναλλοίωτη ρημάννεια μετρική επί της M.

Αποδ. Επιλέγουμε μετρική $\tilde{g}$ επί της M και συμβολίζουμε Ω το μέτρο Haar της G. Η ρημάννεια μετρική

$$g = \int_G a_* \tilde{g}\, \Omega(a)$$

είναι G-αναλλοίωτη: εάν $b \in G$, τότε

$$g(bx\,;\,b_*\xi, b_*\eta) = \int_G a_*\tilde{g}(bx\,;\,b_*\xi, b_*\eta)\,\Omega(ab) = \int_G \tilde{g}(abx\,;\,(ab)_*\xi, (ab)_*\eta)\,\Omega(ab) =$$

$$\int_G \tilde{g}\,(abx\,;\,(ab)_*\xi, (ab)_*\eta)\Omega(a\,b) = \int_G \underbrace{\tilde{g}\,(ax\,;\,a_*\xi, a_*\eta)}_{a_*\tilde{g}(x\,;\,\xi,\eta)}\,\Omega(a) = g(x\,;\,\xi,\eta) \qquad \blacksquare$$

VI.§10.4. (Υπαρξη αναλλοίωτης μετρικής κάτω από μεταβατική δράση σημαίνει δράση με συμπαγείς σταθεροποιητές). Δεδομένης λείας μεταβατικής δράσης της ομάδας *Lie* G επί της διαφορικής πολλαπλότητας M, η M επιδέχεται G-αναλλοίωτης ρημάννειας μετρικής εάν και μόνον εάν για κάποιο (και τότε για κάθε) $x \in M$, η ομάδα $\rho\big(stab(x)\big) \subset GL(T_xM)$ έχει συμπαγή κλειστότητα, όπου ρ η αναπαράσταση

$$\rho : stab(x) \to GL(T_xM), \qquad \rho(a) = d(a)_x = a_*$$

Αποδ."$\Rightarrow$" Εφ' όσον η μετρική της M είναι G-αναλλοίωτη, για κάθε $a \in stab(x)$, η απεικόνιση $a_* : T_xM \to T_xM$ είναι ευκλείδια ισομετρία. Επομένως $\rho\big(stab(x)\big) \subset O(T_xM) \cong O(n)$. Λόγω συμπάγειας της $O(n)$ (VI.§9.4), το $\overline{\rho\big(stab(x)\big)}$ είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς.

"$\Leftarrow$" Έστω x όπως στην υπόθεση και $H = \overline{\rho\big(stab(x)\big)} \subset GL(T_xM)$. Εάν Q εσωτερικό γινόμενο του T_xM, εφοδιάζουμε τον T_xM με το H-αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο

$$\tilde{Q} = \int_H a_*Q\,\Omega(\alpha)$$

όπου Ω το μέτρο *Haar* της H (ο έλεγχος ότι το $\tilde{Q}$ είναι G-αναλλοίωτο είναι όμοιος με εκείνον στην απόδειξη της VI.§10.3). Ορίζεται η ρημάννεια μετρική g επί της M ως

$$g(y\,;\,\xi,\eta) = \tilde{Q}(a^*\xi,\ a^*\eta)$$

όπου $a \in G$ τέτοιο ώστε $a\,x = y$. Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του a: εάν $a, b \in G$ τέτοια ώστε $a\,x = b\,x = y$, οπότε $a\,b^{-1} \in stab(x)$, τότε $\tilde{Q}((a\,b^{-1})^*\xi, (a\,b^{-1})^*\eta) = \tilde{Q}(\xi,\eta)$ (εφ' όσον $(a\,b^{-1})^* \in \rho\big(stab(x)\big) \subset H$ και $\tilde{Q}$ είναι H-αναλλοίωτο), ισοδύναμα, $\tilde{Q}((b^{-1})^*a^*\xi,\ (b^{-1})^*a^*\eta) = \tilde{Q}(\xi,\eta)$, απ' όπου έπεται ότι $\tilde{Q}(a^*\xi,\ a^*\eta) = \tilde{Q}(b^*\xi,\ b^*\eta)$. Ελέγχεται ότι η g είναι G-αναλλοίωτη. $\blacksquare$

VI.§10.5. Εάν η ομάδα *Lie* G δρά λεία και μεταβατικά επί της προσανατολίσιμης ρημάννειας πολλαπλότητας M και το στοιχείο όγκου μένει αναλλοίωτο κάτω από την δράση αυτή (δηλαδή $dv = g_*dv,\ \ \forall g \in G$), τότε η απόκλιση κάθε λείου διανυσματικού πεδίου που μένει αναλλοίωτο από την G είναι σταθερή.

Αποδ. Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ αναλλοίωτο από την δράση της G και $g \in G$. Από πρόταση V.§5.4, $div\xi\ dv = L_\xi dv$, επομένως

$$\underbrace{g_*(div\xi\ dv)}_{(div\xi \circ g)\cdot g_*dv} = g_*L_\xi dv = L_{g_*\xi}g_*dv$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή το dv είναι n-μορφή (δυϊκώς βαθμωτή συνάρτηση). Εφ' όσον $g_*dv = dv,\ \ g_*\xi = \xi$,

$$(div\xi \circ g)dv = L_\xi dv$$

Άρα $(div\xi \circ g)\ dv = L_\xi dv \Rightarrow div\xi \circ g = div\xi$. Επειδή η δράση είναι μεταβατική, έπεται το ζητούμενο. $\blacksquare$

Εφ' όσον κάθε ομάδα δρά στον εαυτό της από αριστερά αναδιατάσσοντας τα στοιχεία της, επομένως με τετριμμένους σταθεροποιητές, από VI.§10.4 έπεται ότι κάθε ομάδα *Lie* G επιδέχεται G-αναλλοίωτης ρημάννειας μετρικής. Το στοιχείο όγκου αυτής της μετρικής είναι αριστερά αναλλοίωτο, όμως από VI.§10.1, η αριστερά αναλλοίωτη μέτρηση όγκου σε μία ομάδα *Lie* είναι ανεξάρτητη (πάνω από θετικό πολλαπλασιαστικό παράγοντα) κάθε συγκεκριμένης G-αναλλοίωτης μετρικής.

Οι αριστερά αναλλοίωτες μετρικές μίας ομάδας *Lie* G βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιχτοιχία με τα ευκλείδια εσωτερικά γινόμενα της άλγεβρας $\mathfrak{g}$: με κάθε αριστερά αναλλοίωτη μετρική g σχετίζεται μοναδικό ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο $<\cdot,\cdot>$ τέτοιο ώστε

$$g(x\,;\,\xi,\eta) = <x^*\xi, x^*\eta> \quad \text{για κάθε } x \in G, \quad \xi,\eta \in T_xG$$

και αντιστρόφως. Εάν ω, ω' τα στοιχεία όγκου για τις αριστερά αναλλοίωτες μετρικές g, g' αντιστοίχως, $<\cdot,\cdot>$, $<\cdot,\cdot>'$ τα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα και λ ο πραγματικός μή μηδενικός αριθμός για τον οποίον $\omega' = \lambda\,\omega$, τότε ο λ είναι η ορίζουσα του γραμμικού αυτομορφισμού του διανυσματικού χώρου $\mathfrak{g}$ που απεικονίζει την ευκλείδια δομή $(\mathfrak{g}, <\cdot,\cdot>)$ στην ευκλείδια δομή $(\mathfrak{g}, <\cdot,\cdot>')$.

Η ομάδα *Lie* G καλείται ***unimodular*** όταν κάποιο (και τότε κάθε) αριστερά αναλλοίωτο στοιχείο όγκου αυτής είναι επίσης δεξιά αναλλοίωτο. Εάν η G έχει μέτρο Haar Ω, η *unimodularity* ισοδυναμεί με την συνθήκη $(\chi_g)_*\,\Omega(x) = \Omega(\chi_g(x))$ για κάθε $x, g \in G$.

VI.§10.6. Η ομάδα *Lie* G είναι *unimodular* εάν και μόνον εάν για κάθε $g \in G$ ισχύει $det\ Ad\ g = 1$.

Αποδ. Επειδή $\chi_g = l_g \circ r_g^{-1}$, τα l_g, r_g αντιμετατίθενται και το μέτρο Haar είναι αριστερά αναλλοίωτο,, ισχύει η ισοδυναμία

$$\omega(x) = \chi_g^*\,\omega(g\,x\,g^{-1}) \Leftrightarrow \omega(x) = r_{g^{-1}}^* l_g^*\,\omega(g\,x\,g^{-1}) \Leftrightarrow \omega(x) = r_{g^{-1}}^*\,\omega(x\,g^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$(l_x)_*\,\omega(1) = r_{g^{-1}}^* l_x^*\,\omega(g^{-1}) \Leftrightarrow \omega(1) = r_{g^{-1}}^*\omega(g^{-1}) \Leftrightarrow \omega(1) = r_{g^{-1}}^* l_g^*\,\omega(1) = \chi_g^*\,\omega(1)$$

Επομένως αρκεί να δειχθεί ότι

$$det\ Ad\ g = 1 \Leftrightarrow \omega(1) = \chi_g^*\,\omega(1), \quad \forall g \in G$$

Εάν $e_1, \dots, e_n$ βάση της άλγεβρας $\mathfrak{g}$, ισχύει

$$\chi_g^*\,\omega(1;\,e_1,\dots,e_n) = \omega\left(1;\,(\chi_g)_*e_1,\dots,(\chi_g)_*e_n\right) = \omega(1;\,Ad\ g\ e_1,\dots,Ad\ g\ e_n) = det\ Ad\ g\ \omega(1;\,e_1,\dots,e_n)$$

Επειδή $\chi_g^*\,\omega(1) = \omega(1)$, από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$\omega(1;\,e_1,\dots,e_n) = (det\ Ad\ g)\,\omega(1;\,e_1,\dots,e_n)$$

που δίνει το ζητούμενο. ■

VI.§10.7. Η εφοδιασμένη με μέτρο *Haar* ομάδα *Lie* G είναι *unimodular* εάν και μόνον εάν για κάθε $\xi \in \mathfrak{g}$ το ίχνος της γραμμικής απεικόνισης $ad\ \xi$ είναι μηδενικό.

Αποδ. Από τα γνωστά για την εκθετοποίηση γραμμικών μετασχηματισμών, για κάθε $T \in GL(\mathfrak{g})$ ισχύει $det\ exp\ T = exp\ tr\ T$. Επομένως για κάθε $\xi \in \mathfrak{g}$ ισχύει $det\ exp\ ad\ \xi = exp\ tr\ ad\ \xi$. Από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος της σελίδας 130, η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με

$$det\ Ad\ exp\ \xi = exp\ tr\ ad\ \xi$$

Τότε από VI.§10.6, η G είναι unimodular εάν και μόνον εάν $1 = exp\ tr\ ad\ \xi$, ισοδύναμα, $tr\ ad\ \xi = 0$, για όλα τα $\xi \in \mathfrak{g}$. ■

Έστω 3-διάστατη ομάδα *Lie* G, οπότε $dim\,\mathfrak{g} = 3$ και από τα γνωστά για το εξωτερικό γινόμενο 1-μορφών στον 3-διάστατο χώρο (οι οποίες είναι δυϊκώς διανύσματα), υφίσταται ισομορφισμός

$$\beta : \Lambda^2\,\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

Εφοδιάζοντας επιπλέον την G με προσανατολισμό και αριστερά αναλλοίωτη ρημάννεια μετρική – ισοδύναμα, προσανατολίζοντας την $\mathfrak{g}$ και εφοδιάζοντάς την με ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο $<\cdot,\cdot>$ - κατασκευάζεται στην $\mathfrak{g}$ το εξωτερικό γινόμενο

$$\times : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},\ (\xi,\eta) \to \xi \times \eta$$

ώστε $\xi \times \eta$ να είναι το διάνυσμα μέτρου $<\xi,\xi>^{1/2}<\eta,\eta>^{1/2} \sin(\widehat{\xi,\eta})$ που προκύπτει εφαρμόζοντας κανόνα δεξιόστροφου κοχλία στο διατεταγμένο ζεύγος (ξ,η). Ορίζεται επίσης ο γραμμικός ισομορφισμός

$$a : \Lambda^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \quad \xi \wedge \eta \longmapsto a(\xi \wedge \eta) = (\xi,\eta)$$

και L ο γραμμικός αυτομορφισμός του διανυσματικού χώρου $\mathfrak{g}$ που καθιστά αντιμεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^2 \mathfrak{g} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "a"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "L"] \\
\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \arrow[r, "{[\cdot,\cdot]}"'] & \mathfrak{g}
\end{tikzcd}$$

Αγνοώντας τα βέλη a, β, ο ισομορφισμός L εκφράζεται $L(\xi \times \eta) = [\xi,\eta]$.

VI.§10.8. Η 3-διάστατη ομάδα *Lie* G είναι *unimodular* εάν και μόνον εάν η L είναι αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής.

Αποδ. Έστω e_1, e_2, e_3 θετικά προσανατολισμένο ορθοκανονικό σύστημα της $\mathfrak{g}$, οπότε $e_i \times e_{i+1} = e_{i+2}$, όπου οι δείκτες λαμβάνονται $mod\ 3$. Ισχύει

$$\begin{aligned}
tr\ ad\ e_i &= <(ad\ e_i)e_1, e_1> + <(ad\ e_i)e_2, e_2> + <(ad\ e_i)e_3, e_3> \\
&= <[e_i, e_1], e_1> + <[e_i, e_2], e_2> + <[e_i, e_3], e_3> \\
&= <L(e_i \times e_1), e_1> + <L(e_i \times e_2), e_2> + <L(e_i \times e_3), e_3> \\
&= \begin{cases} L(e_3, e_2) - L(e_2, e_3), & i = 1 \\ -L(e_3, e_1) + L(e_1, e_3), & i = 2 \\ L(e_2, e_1) - L(e_1, e_2), & i = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Από (VI.§10.8), η *unimodularity* σημαίνει $tr\ ad\ e_i = 0,\ i = 1,2,3,$ επομένως η G είναι *unimodular* εάν και μόνον εάν

$$<Le_i, e_j> = <Le_j, e_i>, \qquad i,j = 1,2,3, \qquad i \neq j \qquad \blacksquare$$

VI.§10.9. Εάν ο τροχιακός χώρος ομάδας *Lie* κάτω από την δράση διακριτής υποομάδας αυτής είναι συμπαγής, τότε η ομάδα είναι unimodular.

Αποδ. (*Σχέδιο*) Έστω G ομάδα *Lie* και $\Gamma \subset G$ διακριτή υποομάδα όπως στην υπόθεση. Επιλέγουμε D θεμελιώδες χωρίο της G, δηλ. $D \subset G$ με

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma D = G \quad \text{και} \quad vol(\gamma D \cap \gamma D) = 0, \text{εάν } \gamma \neq \gamma$$

όπου ο όγκος μετράται με το μέτρο *Haar* της G. Τότε όλα τα θεμελιώδη χωρία της Γ έχουν τον ίδιο όγκο: εάν E θεμελιώδες χωρίο,

$$vol(E) = \sum_{\gamma \in \Gamma} vol(\gamma D \cap E) = \sum_{\gamma \in \Gamma} vol(D \cap \gamma^{-1} E) = vol(D)$$

Επειδή για κάθε $g \in G$ το Dg είναι θεμελιώδες χωρίο της Γ, από την προηγούμενη διαπίστωση συνάγεται ότι $vol(D) = vol(Dg)$ για όλα τα $g \in G$. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ιδιότητα, αποδεικνύεται ότι το μέτρο Haar που χρησιμοποιείται στην μέτρηση όγκου είναι αριστερά αναλλοίωτο. $\blacksquare$

Ρημάννεια γεωμετρία

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γενικεύοντας τις ιδιότητες της ευθείας του ευκλείδειου χώρου, η απαίτηση από την καμπύλη μιας ρημάννειας πολλαπλότητας να είναι όσο το δυνατόν λιγότερο κυρτωμένη εννοείται είτε ως ελαχιστοποίηση μήκους είτε ως μηδενισμός της επιτάχυνσης. Πράγματι, αυτές οι ιδιότητες αποδεικνύονται ισοδύναμες, επομένως ένα σωματίδιο κινούμενο εντός ρημάννειας πολλαπλότητας με μοναδιαία ταχύτητα ελαχιστοποιεί αποστάσεις διαγράφοντας διαδρομές μηδενικής επιτάχυνσης (γεωδαισιακές)[1].

Αυτές οι θεωρήσεις προϋποθέτουν έναν μηχανισμό σύγκρισης διανυσμάτων που εφάπτονται σε διακεκριμένα σημεία της πολλαπλότητας, ώστε να μπορεί να γίνει λόγος για επιτάχυνση καμπύλης. Ο μηχανισμός αυτός στον ευκλείδειο χώρο είναι η στερεά μεταφορά των εφαπτόμενων χώρων στην θέση 0 –τότε το πεδίο ταχυτήτων μιας διαγραφόμενης με μοναδιαία ταχύτητα καμπύλης δίνει ένα μοναδιαίο διάνυσμα που βαίνει στο 0 και του οποίου η κίνηση εμπεριέχει πληροφορία για την ένταση και την φορά κύρτωσης της καμπύλης. Στην γενική διαφορική πολλαπλότητα ωστόσο, δεν υπάρχει εγγενής μέθοδος συσχετισμού των εφαπτόμενων σε διακεκριμένα σημεία της πολλαπλότητας χώρων (βλ. VI.§0). Είναι ως εκ τούτου κατ' αρχάς αδύνατος ο ορισμός της επιτάχυνσης με την συνήθη οριακή διαδικασία, αφού δεν είναι προφανές πώς να αφαιρούμε τις ταχύτητες της καμπύλης σε διακεκριμένα σημεία αυτής (δηλαδή πώς να απεικονίσουμε την μια εντός του χώρου που περιέχει την άλλη) για να λάβουμε την παράγωγο του πεδίου ταχυτήτων.

Με άλλα λόγια, ζητείται ένας μηχανισμός παραγώγισης διανυσματικών (γενικότερα τανυστικών) πεδίων κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης ο οποίος είναι ανεξάρτητος του τοπικού συστήματος συντεταγμένων στο οποίο γίνεται ο υπολογισμός. Η παράγωγος *Lie* δεν είναι λύση σε αυτό το πρόβλημα διότι η *Lie* παραγώγιση είναι εφικτή μόνο κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών κάποιου διανυσματικού πεδίου. Στην πραγματικότητα το πρόβλημα είναι πολύ δυσκολότερο: ο ζητούμενος μηχανισμός παραγώγισης πρέπει να εξαρτάται ουσιωδώς από την ρημάννεια δομή της πολλαπλότητας, ώστε το συμπέρασμα για την μεταβολή ενός διανυσματικού πεδίου κατά μήκος καμπύλης να συνάδει προς τον τρόπο με τον οποίον η κλίμακα μέτρησης κυμαίνεται κατά μήκος της πολλαπλότητας (ρημάννεια μετρική). Η απλούστερη έκφανση αυτού του συσχετισμού της ρημάννειας δομής με τον ζητούμενο μηχανισμό παραγώγισης είναι ότι οι καμπύλες ελαχίστου μήκους πρέπει να είναι οι ακριβώς οι καμπύλες μηδενικής επιτάχυνσης, δηλαδή οι καμπύλες των οποίων το διανυσματικό πεδίο είναι αμετάβλητο κατά μήκος αυτών[2]. Αποδεικνύεται ότι υπό κάποιες αλγε-

1. Ή διαδρομές των οποίων την επιτάχυνση εκλαμβάνει ως μηδενική. Ένα όν κινούμενο σε επιφάνεια εντός του ευκλείδειου χώρου έχει μή μηδενική επιτάχυνση ακόμη και όταν διαγράφει γεωδαισιακές της επιφάνειας, οι οποίες δεν είναι εν γένει ευθείες. Ωστόσο η εφαπτομενική στην επιφάνεια συνιστώσα της επιτάχυνσής του –δηλαδή η επιτάχυνση την οποία δύναται να αντιληφθεί– είναι σε αυτήν την περίπτωση μηδενική.

2. Χωρίς τον ζητούμενο μηχανισμό παραγώγισης είναι εν γένει αδύνατον να γίνει λόγος για *αμετάβλητα* πεδία σε μια πολλαπλότητα.

βρικές συνθήκες γεωμετρικού περιεχομένου που διασφαλίζουν την προηγούμενη ισοδυναμία, με κάθε ρημάννεια μετρική σχετίζεται μοναδικός μηχανισμός παραγώγισης ο οποίος αντικατοπτρίζει την γεωμετρία της (συνοχή *Levi-Civitá*)[3].

§1. ΣΥΝΑΛΛΟΙΩΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΔΕΣΜΕΣ

Καλείται **συναλλοίωτη παραγώγιση** στην διανυσματική δέσμη $q : E = \coprod_{P\in M} E_P \to M$ μια απεικόνιση

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Sigma(E) \to \Sigma(E), \qquad (\eta, \sigma) \longmapsto \nabla_\eta \sigma$$

τέτοια ώστε για κάθε $\sigma \in \Sigma(E)$, $f, g \in C^\infty(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$, να ισχύουν

$$\nabla_{f\eta_1 + g\eta_2}\sigma = f\nabla_{\eta_1}\sigma + g\nabla_{\eta_2}\sigma$$

$$\nabla_\eta(a\sigma + b\tau) = a\nabla_\eta\sigma + b\nabla_\eta\sigma$$

$$\nabla_\eta(f\sigma) = f\nabla_\eta\sigma + (\partial_\eta f)\sigma$$

Καλείται **συναλλοίωτη παράγωγος** της $\sigma \in \Sigma(E)$ κατά μήκος του πεδίου $\eta \in \mathfrak{X}(M)$ η τμήση $\nabla_\eta\sigma$.

VII.§1.0. Εάν $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{X}(M)$ και $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma(E)$ ώστε $\eta_1\big|_U = \eta_2\big|_U$, $\sigma_1\big|_U = \sigma_2\big|_U$ σε μια περιοχή U του P· τότε $\nabla_{\eta_1}\sigma_1(P) = \nabla_{\eta_2}\sigma_2(P)$.

Αποδ. Θα δειχθεί ότι $\nabla_{\eta_1}\sigma_1(P) = \nabla_{\eta_2}\sigma_2(P)$, και με όμοιες πράξεις αποδεικνύεται ότι $\nabla_{\eta_1}\sigma_1(P) = \nabla_{\eta_2}\sigma_1(P)$ επίσης, οπότε προκύπτει το ζητούμενο. Από την γραμμικότητα της συναλλοίωτης παραγώγισης ως προς το δεύτερο όρισμα, αρκεί να δειχθεί ότι $\nabla_{\eta_1}\sigma(P) = 0$ εάν $\sigma\big|_U$. Έστω $\varphi \in C^\infty(M)$ τέτοια ώστε $supp\ \varphi \subset U$ και $K \subset supp\ \varphi$ συμπαγές στο οποίο φ ισούται με την μονάδα. Τότε $\varphi\sigma = 0$, επομένως

$$\nabla_{\eta_1}(\varphi\sigma) = \nabla_{\eta_1}(0 \cdot \varphi\sigma) = 0\ \nabla_{\eta_1}\varphi\sigma = 0, \qquad \text{άρα} \quad 0 = \nabla_{\eta_1}(\varphi\sigma) = \underbrace{(\partial_{\eta_1}\varphi)\sigma}_{\substack{0 \\ (\sigma=0\ \text{στο}\ supp\varphi)}} + \varphi\nabla_{\eta_1}\sigma \qquad \blacksquare$$

VII.§1.1. (**Τοπικότητα της συνοχής**) Το $\nabla_\eta\sigma(P) \in E_P$ εξαρτάται μόνον από την τιμή των η, σ στο P· δηλαδή εάν $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma(E)$ με $\eta_1(P) = \eta_2(P)$, $\sigma_1(P) = \sigma_2(P)$, τότε $\nabla_{\eta_1}\sigma_1(P) = \nabla_{\eta_2}\sigma_2(P)$.

Αποδ. Θα δειχθεί ότι $\nabla_{\eta_1}\sigma_1(P) = \nabla_{\eta_2}\sigma_1(P)$, και με όμοιες πράξεις ελέγχεται ότι $\nabla_{\eta_2}\sigma_1(P) = \nabla_{\eta_2}\sigma_2(P)$, απ' όπου το ζητούμενο. Από την γραμμικότητα της συναλλοίωτης παραγώγισης ως προς το πρώτο όρισμα, αρκεί να δειχθεί ότι $\nabla_\eta\sigma(P) = 0$ εάν $\eta(P) = 0$. Επιλέγουμε περιοχή U γύρω από το P με τοπικό πλαίσιο $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$ για την εφαπτομένη δέσμη, οπότε $\eta\big|_U = \eta^i\,\partial/\partial x^i$. Τότε

$$\nabla_\eta\sigma(P) \overset{\text{VII.§1.0}}{=} \nabla_{\eta^i\,\partial/\partial x^i}\,\sigma(P) = \underbrace{\eta^i(P)}_{0}\ \nabla_{\partial/\partial x^i}\,\sigma(P) = 0 \qquad \blacksquare$$

VII.§1.2. Έστω τοπικό πλαίσιο $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ της διανυσματικής δέσμης E για το τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ στην περιοχή U της M και Γ^i_{jk} οι λείες βαθμωτές συναρτήσεις επί του U για τις οποίες

$$\nabla_{\partial/\partial x^j}\,\sigma_k = \Gamma^i_{jk}\sigma_i$$

Τότε για κάθε $\eta \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma \in \Sigma(E)$ με $\eta\big|_U = \eta^i\,\partial/\partial x^i$ ισχύει

$$\nabla_\eta\sigma = \left(\frac{\partial\sigma^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk}\sigma^k\right)\eta^j\sigma_i$$

3. Σύμφωνα με ένα θεώρημα του Nash, κάθε ρημάννεια πολλαπλότητα εμφυτεύεται ισομετρικά ως επιφάνεια σε ευκλείδειο χώρο επαρκώς μεγάλης διάστασης. Ο επαγόμενος από την συνοχή *Levi-Civitá* μηχανισμός παραγώγισης είναι τέτοιος ώστε η επιτάχυνση μίας καμπύλης της πολλαπλότητας να είναι η εφαπτομενική στην πολλαπλότητα συνιστώσα της επιτάχυνσης της καμπύλης εντός του ευκλείδειου χώρου.

(δηλαδή οι ποσότητες Γ^i_{jk} προσδιορίζουν την συναλλοίωτη παραγώγιση τοπικά).

Αποδ. $\nabla_\eta \sigma = \nabla_\eta(\sigma^k\sigma_k) = (\partial_\eta \sigma^k)\sigma_k + \sigma^k \nabla_{\eta^j \partial/\partial x^j}\sigma_k = (\partial_\eta \sigma^k)\sigma_k + \eta^j \sigma^k \underbrace{\nabla_{\partial/\partial x^j}\sigma_k}_{\Gamma^i_{jk}\sigma_i} =$

$$\eta^j \frac{\partial \sigma^k}{\partial x^j}\sigma_k + \eta^j \sigma^k \Gamma^i_{jk}\sigma_i = \left(\frac{\partial \sigma^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk}\sigma^k\right)\eta^j \sigma_i \qquad \blacksquare$$

Θεωρούμε αφφινικές συνοχές στην εφαπτόμενη δέσμη.

VII.§1.3. Κάθε πολλαπλότητα επιδέχεται συναλλοίωτης παραγώγισης στην εφαπτόμενη δέσμη της.

Αποδ. Επιλέγουμε άτλαντα $(U_a)_a$ της διαφορικής πολλαπλότητας M και διαμέριση της μονάδας $(\varphi_a)_a$ υποκείμενη σε αυτόν. Κάθε U_a, ως διφφεομορφικό με τον ευκλείδιο χώρο, επιδέχεται συναλλοίωτης παραγώγισης ∇^a. Ελέγχεται ότι η

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \qquad \nabla_\eta \xi = \sum_a \varphi_a \nabla^a_\eta \xi$$

είναι η ζητούμενη. ■

Κάτω από εύλογες γεωμετρικές συνθήκες, κάθε συναλλοίωτη παραγώγιση στην νηματική δέσμη επάγει με μοναδικό τρόπο συναλλοίωτη παραγώγιση σε κάθε τανυστική δέσμη της πολλαπλότητας:

VII.§1.4. Δεδομένης συναλλοίωτης παραγώγισης ∇ στην εφαπτόμενη δέσμη TM, υπάρχει μοναδική συναλλοίωτη παραγώγιση ∇ σε κάθε τανυστική δέσμη $\mathcal{T}^r_s(M)$ τέτοια ώστε

(i) στην TM συμφωνεί με την δεδομένη·
(ii) $\partial_\eta f = \nabla_\eta f$, $\forall f \in C^\infty(M)$·
(iii) $\nabla_\eta(T \otimes S) = \nabla_\eta T \otimes S + T \otimes \nabla_\eta S$·
(iv) να αντιμετατίθεται με την συστολή δεικτών.

Αποδ. Χωρίς απόδειξη. ■

Δεδομένης μιας συναλλοίωτης παραγώγισης ∇ σε κάθε τανυστική δέσμη όπως η παραπάνω, ορίζεται **ολική συναλλοίωτη παράγωγος** του τανυστικού πεδίου T ως

$$\nabla T(\omega^1, \dots, \omega^r, \eta_1, \dots, \eta_s, \xi) = \nabla_\xi T(\omega^1, \dots, \omega^r, \eta_1, \dots, \eta_s)$$

§2. ΣΥΝΟΧΕΣ ΣΕ ΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΕΣΜΕΣ

Θεωρούμε λεία (G, F)-νηματική δέσμη $q : N \to M$, $dimN = m \geq dimM = n$.

VII.§2.0. Για κάθε $y \in N$,

$$ker\ dq(y) = T_y F_{q(y)}$$

όπου $dq(y) : T_y N \to T_{q(y)} M$ το διαφορικό της νηματικής προβολής q στο y.

Αποδ. Έστω U τοπικός χάρτης του $q(y)$ με σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$. Επειδή το U μπορεί να ληφθεί τέτοιο ώστε $q^{-1}[U] \cong U \times F$, θεωρούμε περιοχή $V = U \times W$ του y, όπου W τοπικός χάρτης της ίνας F με σύστημα συντεταγμένων $z^1, \dots, z^{m-n}$. Τότε η V χαρτογραφείται από το σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n, z^1, \dots, z^{m-n}$, οπότε η q εκφράζεται ως

$$q(x^1, \dots, x^n, z^1, \dots, z^{m-n}) = (x^1, \dots, x^n)$$

Ο γραμμικός μετασχηματισμός $dg(y)$ αναπαρίσταται από τον πίνακα $(\mathbf{1}_n \quad \mathbf{0}_{m-n})$ στις βάσεις $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n, \partial/\partial z^1, \dots, \partial/\partial z^{m-n}$ και $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$ των $T_y N$, $T_{q(y)} M$ αντιστοίχως, άρα

$$ker\ dg(y) = span\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^{m-n}}\right\} = T_y F_{q(y)} \qquad \blacksquare$$

Ένας υποχώρος $D_y \subset T_yN$ καλείται **οριζόντιος** (για την μελετώμενη νηματική δέσμη) όταν

$$D_y \cap T_yF_{q(y)} = 0$$

Εάν $dim\, D_y = n$ η οριζοντιότητα σημαίνει ότι

$$T_yN = D_y \oplus T_yF_{q(y)}$$

που από VII.§2.0 ισοδυναμεί με $ker\, dg(y)\big|_{D_y} = 0$. Επομένως ένας $(m-n)$-διάστατος υποχώρος του T_yN είναι οριζόντιος εάν και μόνον εάν ο περιορισμός του διαφορικού της νηματικής προβολής σε αυτόν είναι ισομορφισμός με τον εφαπτόμενο χώρο της M στο $q(y)$. Καλείται **οριζόντια** μια καμπύλη στην D της οποίας η ταχύτητα σε κάθε σημείο περιέχεται στον αντίστοιχο οριζόντιο υποχώρο.

Συνοχή για την λεία (G,F)-νηματική δέσμη $q : N \to M$, $dimN = m \geq n + dimM$, ονομάζεται μία n-διάστατη κατανομή D στην N τέτοια ώστε D_y οριζόντιος υποχώρος του T_yN για κάθε $y \in N$.

VII.§2.1. Κάθε λεία νηματική δέσμη εφοδιάζεται με συνοχή.

Αποδ. Εφοδιάζουμε την N με ρημάννεια μετρική και επιλέγουμε για κάθε $y \in N$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $T_yF_{q(y)}$. ■

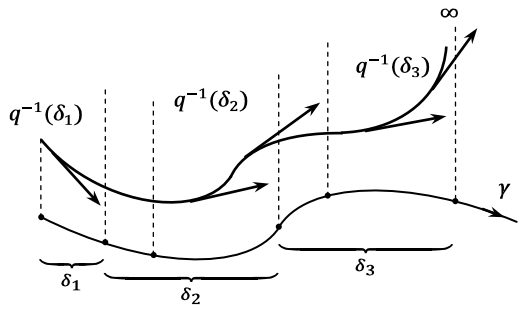
Δεδομένης της συνοχής D, **οριζόντια ανύψωση** στο $y_0 \in q^{-1}(\gamma(0))$ της λείας καμπύλης $\gamma : [0,1] \to M$ καλείται μια λεία οριζόντια καμπύλη $\bar{\gamma} : [0,1] \to N$ τέτοια ώστε $q \circ \bar{\gamma} = \gamma$ και $\bar{\gamma}(0) = y_0$.

VII.§2.2. Εάν υπάρχει οριζόντια ανύψωση καμπύλης σε κάποιο σημείο, τότε είναι μοναδική.

Αποδ. Θα δειχθεί για ένα αρχικό τμήμα δ της γ που δεν τέμνεται με τον εαυτό του, οπότε το ζητούμενο προκύπτει συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο για διαδοχικά τέτοια τμήματα. Λαμβάνοντας το δ επαρκώς μικρό ώστε να περιέχεται ολόκληρο σε μια *trivialization*, το $q^{-1}(\delta)$ είναι τετριμμένη νηματική δέσμη διάστασης $m-n+1$ (εφ' όσον $dimF = m-n$ και δ είναι 1-διάστατη πολλαπλότητα). Άρα η τομή $D_y \cap T_yq^{-1}(\delta)$ είναι 1-διάστατος υποχώρος, δηλαδή η D προσδιορίζει μονοσήμαντα ένα οριζόντιο διανυσματικό πεδίο στην $q^{-1}(\delta)$. Από IV.§3.6 έπεται το ζητούμενο. ■

VII.§2.3. Εάν η ίνα F είναι συμπαγής, τότε κάθε λεία καμπύλη της M έχει οριζόντια ανύψωση για κάθε επιλογή αρχικού σημείου.

Αποδ. Αρκεί να δειχθεί ότι κάθε συμπαγές τόξο έχει πεπερασμένη ανύψωση (δηλαδή τόξο)· τότε διασπώντας την καμπύλη σε πεπερασμένα τόξα, παίρνουμε την ζητούμενη ανύψωση συγκολλώντας τις ανυψώσεις αυτών των τμημάτων. Το ζητούμενο ισχύει λόγω συμπάγειας της ίνας, που δεν επιτρέπει στην ανύψωση πεπερασμένου τόξου να διαφύγει στο άπειρο, όπως στο σχήμα.



■

Από την παραπάνω απόδειξη συνάγεται ότι ακόμη και όταν η ίνα δεν είναι συμπαγής, η ανύψωση υπάρχει κοντά στο αρχικό σημείο.

Εάν υπάρχει οριζόντια ανύψωση της καμπύλης $\gamma : [0,1] \to M$, ονομάζεται **παράλληλη μεταφορά** από την ίνα $F_{x_0} = q^{-1}(x_0)$ στην ίνα $F_{x_1} = q^{-1}(x_1)$, $x_0 = \gamma(0)$, $x_1 = \gamma(1)$, **κατά μήκος της** γ η απεικόνιση

$$H_\gamma : F_{x_0} \to F_{x_1}, \qquad H_\gamma(y) = \bar{\gamma}^y(1)$$

όπου $\bar{\gamma}^y$ η οριζόντια ανύψωση της γ στο y. Εκ κατασκευής της οριζόντιας ανύψωσης ως ολοκληρωτικής καμπύλης λείου διανυσματικού πεδίου (βλ. απόδειξη πρότασης VII.§2.3), η παράλληλη μεταφορά είναι λεία απεικόνιση από την F_{x_0} στην F_{x_1}. Ισχύουν οι σχέσεις

$$H_{\gamma_1\gamma_2} = H_{\gamma_2} \circ H_{\gamma_1} \qquad (1)$$

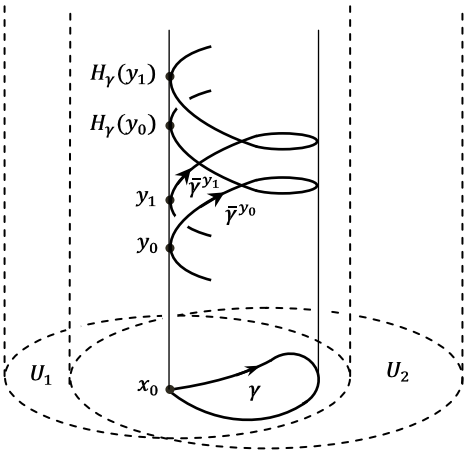
$$H_{\gamma^{-1}} = (H_\gamma)^{-1} \qquad (2)$$

Η (2) σημαίνει ότι η παράλληλη μεταφορά είναι αμφιδιαφόριση μεταξύ των ινών και η (1) ότι η απεικόνιση **ολονομία**,

$$H : \pi_1(x_0, M) \to diffF = diffF_{x_0}, \qquad \gamma \longmapsto H(\gamma) = H_\gamma$$

είναι ομομορφισμός[4].

Εάν $G = diffF$ η δομική ομάδα της δέσμης, δηλαδή εάν για την συμβατότητα μεταξύ των τοπικών *trivialization* δεν απαιτείται αρχικά κάτι περισσότερο από το να είναι λεία, τότε η **ομάδα ολονομίας** στο x_0, $H[\pi_1(x_0, M)] \subset G$, είναι ο φυσικός τρόπος να συσφίξουμε την συμβατότητα μεταξύ των τοπικών *trivialization* της δέσμης λαμβάνοντας υπ' όψιν την τοπολογία της βασικής πολλαπλότητας M : επιλέγοντας ως δομική ομάδα την $H[\pi_1(x_0, M)]$, απαιτούμε οι *trivialization* να διαφέρουν σε κάθε q-ίνα του κοινού τους πεδίου κατά μια παράλληλη μεταφορά (κατά μήκος βρόγχου που στηρίζεται στο x_0).



Οι ταυτίσεις $D_y \cong T_{q(y)}M$ μέσω του γραμμικού ισομορφισμού q_* και $T_yF_y \cong T_yE/D_y = N_yD$ δίνουν για κάθε $y \in q^{-1}(x) = F_x$ μία αντισυμμετρική διγραμμική απεικόνιση τ'_y που καθιστά το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
D_y \times D_y \arrow[r, "\tau_y"] & X \\
T_xM \times T_xM \arrow[u, "q_* \circ q_*"] \arrow[ur, "\tau_y \circ (q^* \times q^*) \equiv \tau'_y"'] &
\end{tikzcd}$$

όπου τ_y η συστροφή της συνοχής στο σημείο y. Συγκεκριμένα, η απεικόνιση τ'_y δρά ως

$$T_xM \times T_xM \ni (\xi, \eta) \longmapsto \tau'_y(\xi, \eta) = [q^*\xi, q^*\eta]/D_y$$

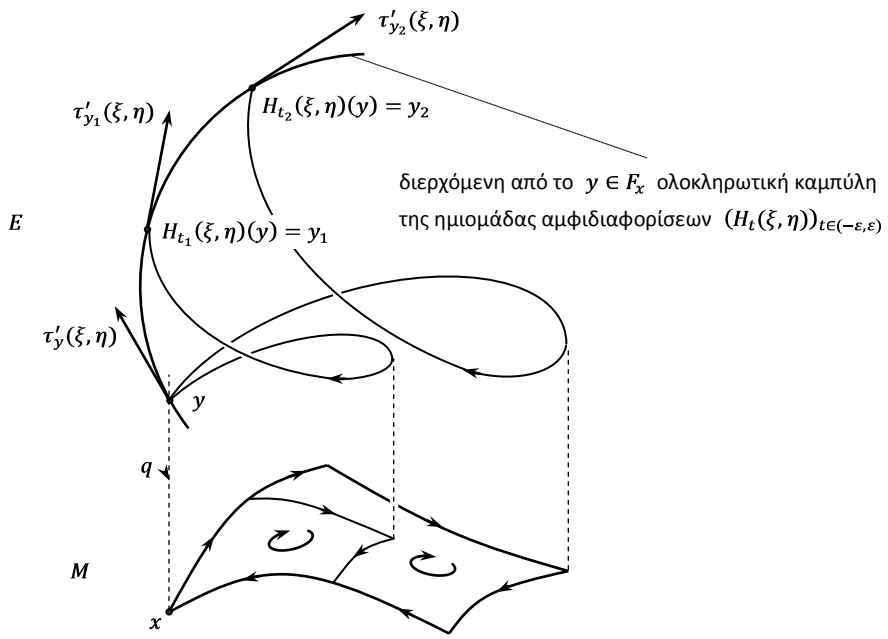
Σταθεροποιούμε $x \in M$ και ζεύγος $(\xi, \eta) \in T_xM \times T_xM$, οπότε καθώς το y διατρέχει την ίνα $q^{-1}(x) = F_x$, τα $\tau'_y(\xi, \eta)$ συγκροτούν λείο διανυσματικό πεδίο στην ίνα αυτή. Ταυτίζοντας τον T_xM

4. Αποδεικνύεται ότι η οριζόντια ανύψωση σέβεται την δρομομοτοπία, επομένως η συνάρτηση ολονομία ορίζεται καλά πάνω στην θεμελιώδη ομάδα).

με τον $\mathbb{R}^n$, θεωρούμε τοπικό χάρτη (U, φ) γύρω από το x τέτοιον ώστε $\varphi(x) = 0 \in T_xM$. Για t επαρκώς κοντά στο 0, το προσανατολισμένο παραλληλόγραμμο $(t\xi, t\eta)$ περιέχεται στο $\varphi[U]$, επομένως υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ να ορίζεται η ολονομία $H_t(\xi, \eta)$ κατά μήκος του βρόγχου $\varphi^*(t\xi, t\eta)$. Η καμπύλη $(H_t(\xi, \eta))_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ είναι τότε μονοπαραμετρική ημιομάδα της ομάδας Lie G. Υπολογίζεται ότι είναι ανεξάρτητη του χάρτη που χρησιμοποιήθηκε και

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H_t(\xi, \eta)(y) = \tau'_y(\xi, \eta)$$

δηλαδή το πεδίο $\left(\tau'_y(\xi, \eta)\right)_{y\in F_x}$ είναι το σχετιζόμενο με την ημιομάδα $(H_t(\xi, \eta))_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ διανυσματικό πεδίο.



Επειδή οι μονοπαραμετρικές ημιομάδες της G βρίσκονται ως γνωστόν σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα στοιχεία της άλγεβρας $\mathfrak{g} = Lie(G)$, το πεδίο $\left(\tau'_y(\xi, \eta)\right)_{y\in F_x}$ μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο $\Omega(x\,;\,\xi, \eta) \in \mathfrak{g}$. Καλείται **καμπυλότητα** για την συνοχή D στο x η απεικόνιση

$$\Omega : \coprod_{x\in M} T_xM \times T_xM \to \mathfrak{g}, \qquad (\xi, \eta) \to \Omega(x\,;\,\xi, \eta)$$

§3. ΣΥΝΟΧΕΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΔΕΣΜΕΣ

Έστω $q : E \to M$ λεία διανυσματική δέσμη, $n = dim\, M$, $n + m = dim\, E$, $x^1, \dots, x^n$ τοπικό σύστημα συντεταγμένων της M και $x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n$ το αντίστοιχο τοπικό σύστημα συντεταγμένων της E. Ως διανυσματική υποδέσμη που είναι, μια συνοχή D περιγράφεται στο σύστημα αυτό ως ο μηδενοχώρος m διαφορικών 1-μορφών

$$\eta^i = f^i_j dx^j + g^i_k d\xi^k, \;\; i = 1, \dots, n$$

όπου f^i_j, g^i_k λείες βαθμωτές. Αυτές οι διαφορικές μορφές κανονικοποιούνται με τρόπο που χαρακτηρίζει τοπικά την D:

VII.§3.0. Έστω D συνοχή της λείας διανυσματικής δέσμης $q : E \to M$, $dim\, M = n$, $dimE = n + m$. Για κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ της N με αντίστοιχο τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n$ της E, υπάρχει μοναδικό σύστημα τοπικά μηδενιζουσών 1-μορφών για την D της μορφής

$$\omega^i = \omega^i_j dx^j + d\xi^i, \quad i = 1, \dots m$$

Αποδ. Επιλέγουμε τοπικό σύστημα μηδενιζουσών 1-μορφών για την D,

$$\eta^i = f^i_j dx^j + g^i_k d\xi^k, \; i = 1, \dots, m$$

Συμβολίζοντας $F = (f^i_j)_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$, $G = (g^i_k)_{\substack{i=1\dots m \\ k=1\dots m}}$, $d\vec{x} = (dx^1 \dots dx^n)$, $d\vec{\xi} = (d\xi^1 \dots d\xi^m)$ και $\vec{\eta} = (\eta^1 \dots \eta^m)$, αυτό το σύστημα γράφεται στην μορφή

$$\left(d\vec{x}\; d\vec{\xi}\right)\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \vec{\eta}$$

Επειδή $rank\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = m$ (αφού η D είναι υποδέσμη συνδιάστασης m), ο πίνακας G είναι παντού αντιστρέψιμος. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με G^{-1} από δεξιά,

$$\left(d\vec{x}\; d\vec{\xi}\right)\begin{pmatrix} F \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \vec{\eta} G^{-1}$$

οπότε $(\omega^1 \dots \omega^m) = (\eta^1 \dots \eta^m) = G^{-1}$ το ζητούμενο σύστημα διαφορικών μορφών (εφ' όσον G αντιστρέψιμος, τα συστήματα $\omega^1 \dots \omega^m$ και $\eta^1 \dots \eta^m$ περιγράφουν την ίδια υποδέσμη). Για την μοναδικότητα, έστω $\left(d\vec{x}\; d\vec{\xi}\right)\begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix}$ άλλο σύστημα μηδενιζουσών 1-μορφών για την D. Ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό,

$$\left(d\vec{x}\; d\vec{\xi}\right)\begin{pmatrix} \bar{F}\bar{G}^{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

είναι σύστημα μηδενιζουσών 1-μορφών για την D επίσης. Τότε υπάρχει $m \times m$ πίνακας με ορίσματα λείες βαθμωτές συναρτήσεις που είναι παντού αντιστρέψιμος και τέτοιος ώστε

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix}, \qquad \text{ισοδύναμα,} \qquad \begin{pmatrix} FC \\ GC \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix}$$

Επομένως $\bar{F}\bar{G}^{-1} = FC(GC)^{-1} = FCC^{-1} = FG^{-1}$. ■

Έστω $\gamma : I \to E$ λεία καμπύλη, που στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^m$ αναπαρίσταται ως $x^1(t), \dots, x^n(t), \xi^1(t), \dots, \xi^m(t)$. Τότε η απαίτηση της οριζοντιότητας εκφράζεται ως

$$\omega^i(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^m) = 0, \qquad i = 1, \dots, m$$

ισοδύναμα,

$$\dot{\xi}^i + \omega^i_j\,(\underbrace{x^1(t), \dots, x^n(t), \xi^1(t), \dots, \xi^m(t)}_{\gamma(t)})\,\dot{x}^j = 0, \qquad i = 1, \dots, m \qquad (1)$$

Δηλαδή οι οριζόντιες καμπύλες είναι ακριβώς εκείνες που σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων από το οποίο διέρχονται ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (1) (η απαίτηση της οριζοντιότητας εκφράζεται ολικά ως $\dot{\gamma}(t) \in D_{\gamma(t)}$ για κάθε t).

Ορίζεται η **κατευθυνόμενη παράγωγος της τμήσης** $\sigma \in \Sigma(E)$ **ως προς το διάνυσμα** $\eta \in T_P M$ (για την δεδομένη συνοχή D) ως το όριο

$$\nabla_\eta \sigma = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big(\sigma\big(\gamma(t)\big) - \bar{\gamma}(t)\Big)$$

όπου $\gamma : I \to M$ οποιαδήποτε λεία καμπύλη διερχόμενη από το $P = \gamma(0)$ με ταχύτητα $\dot{\gamma}(0) = \eta$ και $\bar{\gamma}$ η οριζόντια ανύψωση αυτής στο σημείο $\sigma\big(\gamma(0)\big) = \sigma(P) \in E$ (υπάρχει για επαρκώς μικρά t γύρω από το 0, οπότε το όριο έχει νόημα).

VII.§3.1. Έστω $x^1, \dots, x^n$ τοπικό σύστημα συντεταγμένων γύρω από το $x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^m$ το αντίστοιχο τοπικό σύστημα συντεταγμένων της E, $\omega^i = \omega^i_j dx^j + d\xi^i$ οι τοπικές μηδενίζουσες 1-μορφές για την συνοχή D και $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ τοπικό πλαίσιο για την δέσμη E στο σύστημα αυτό. Εάν $\sigma \in \Sigma(E)$, οπότε $\sigma = \xi^i \sigma_i$ τοπικά για κάποιες λείες βαθμωτές συναρτήσεις ξ^i και $\eta = \eta^j \, \partial/\partial x^j \big|_P \in T_P M$, τότε

$$\nabla_\eta \sigma = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \omega^i_j \right) \eta^j \sigma_i \qquad (2)$$

(επομένως η κατευθυνόμενη παράγωγος $\nabla_\eta \sigma$ είναι ανεξάρτητη της καμπύλης γ που χρησιμοποιήθηκε στον ορισμό της).

Αποδ. Έστω $\gamma : I \to M$ καμπύλη διερχόμενη από το $P = \gamma(0)$ με ταχύτητα $\dot\gamma(0) = \eta$, που αναπαρίσταται τοπικά ως $x^1(t), \dots, x^n(t)$, και $\bar\gamma(t)$ η οριζόντια ανύψωσή της στο $\sigma(P) = \sigma(\gamma(0))$, οπότε $\bar\gamma(t) = \bar\xi^i(t)\sigma_i(\gamma(t))$ με τις βαθμωτές λείες συναρτήσεις ξ^i να ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot\xi^i + \omega^i_j \, (\underbrace{x^1(t), \dots, x^n(t), \bar\xi^1(t), \dots, \bar\xi^m(t)}_{\bar\gamma(t)}) \, \dot x^j = 0, \qquad i = 1, \dots, m \qquad (3)$$

Επειδή $\bar\gamma(0) = \sigma(\gamma(0))$, ισχύει επίσης $\xi^i(\gamma(0)) = \xi^i(0)$. Τότε

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big(\sigma(\gamma(t)) - \bar\gamma(t) \Big) = \lim_{t\to 0} \Big(\xi^i(\gamma(t)) \, \sigma_i(\gamma(t)) - \xi^i(t) \, \sigma_i(\gamma(t)) \Big) =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big(\xi^i(\gamma(t)) - \xi^i(t) \Big) \sigma_i(\gamma(0)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big(\Big(\xi^i(\gamma(t)) - \xi^i(\gamma(0)) \Big) - \Big(\bar\xi^i(t) - \bar\xi^i(0) \Big) \Big) \sigma_i(\gamma(t)) =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(\gamma(t)) - \sigma_i(\gamma(0))}{t} \, \sigma_i(\gamma(t)) - \lim_{t\to 0} \frac{\bar\xi^i(t) - \bar\xi^i(0)}{t} \, \sigma_i(\gamma(t)) =$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \xi^i(\gamma(t)) \cdot \sigma_i(\gamma(0)) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \bar\xi^i(\gamma(t)) \cdot \sigma_i(\gamma(0)) \overset{(3)}{=}$$

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \dot x^j(0) \cdot \sigma_i(P) + \omega^i_j(\bar\gamma(0)) \, \dot x^j(0) \, \sigma_i(P) = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \omega^i_j \right) \underbrace{\dot x^j(0)}_{\eta^j} \, \sigma_i(0) \qquad \blacksquare$$

Καλείται **κατευθυνόμενη παράγωγος μιας** τμήσης $\sigma \in \Sigma(E)$ **ως προς το πεδίο** $\eta \in \mathfrak{X}(M)$ η τμήση $\nabla_\eta \sigma$,

$$M \ni P \longmapsto (\nabla_\eta \sigma)(P) = \nabla_{\eta(P)} \sigma \in E_P$$

Η τοπική έκφραση που δίνεται από την VII.§3.1 δείχνει ότι η κατευθυνόμενη παράγωγος λείας τμήσης είναι επίσης λεία. Επομένως κάθε $\eta \in \mathfrak{X}(M)$ επάγει έναν τελεστή

$$\nabla_\eta : \Sigma(E) \to \Sigma(E)$$

Από τον τύπο (2) φαίνεται άμεσα ότι $\nabla_{\eta+\theta} = \nabla_\eta + \nabla_\theta$, ωστόσο δεν ισχύει εν γένει $\nabla_\eta(\sigma + \tau) = \nabla_\eta \sigma + \nabla_\eta \tau$. Ο τύπος (2) γράφεται αναλυτικά

$$\nabla_\eta \sigma(x^1, \dots, x^n) = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(x^1, \dots, x^n) + \omega^i_j (\underbrace{x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^m}_{\xi^i \sigma_i(x^1, \dots, x^n)}) \right) \eta^j(x^1, \dots, x^n) \, \sigma_i(x^1, \dots, x^n)$$

Από αυτή την έκφραση συνάγεται άμεσα ο τύπος

$$\nabla_\eta \sigma_k(x^1, \dots, x^n) = \omega^i_j (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, \underset{k}{1}, \dots 0) \, \eta^j(x^1, \dots, x^n) \, \xi_i(x^1, \dots, x^n) \qquad (4)$$

Ορίζοντας επί της M την τοπική διαφορική 1-μορφή

$$\widetilde{\omega}_k^i(x^1, \dots, x^n) = \omega_j^i(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, \underbrace{1}_{k}, \dots 0)dx^j$$

ο τύπος (4) γράφεται

$$\nabla_\eta \sigma_k = \widetilde{\omega}_k^i(\eta)\, \sigma_i \qquad (5)$$

Υπολογίζεται ότι στην περίπτωση των διανυσματικών δεσμών, η καμπυλότητα της συνοχής εκφράζεται

$$\Omega(P;\, \xi, \eta) = \Omega(\xi, \eta) = \nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]}, \qquad \xi, \eta \in T_P M, \qquad P \in M^{(5)}$$

Θεωρούμε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ της M και $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ το αντίστοιχο πλαίσιο της διανυσματικής δέσμης. Εφ' όσον η καμπυλότητα Ω είναι διγραμμική αντισυμμετρική απεικόνιση, οι βαθμωτές ποσότητες

$$\Omega(\xi, \eta)\sigma_j = \Omega_j^i(\xi, \eta)\sigma_i$$

είναι διγραμμικές αντισυμμετρικές εξαρτήσεις των ξ, η. Επομένως η καμπυλότητα Ω προσδιορίζεται τοπικά από τις διαφορικές 2-μορφές

$$\Omega_j^i = \sum_{i \le k < l \le n} \Omega_{j,kl}^i\, dx^k \wedge dx^l$$

ισοδύναμα, από τις βαθμωτές ποσότητες $\Omega_{j,kl}^i$.

VII.§3.2. (Εξίσωση Cartan).

$$d\widetilde{\omega}_j^i = -\widetilde{\omega}_\mu^i \wedge \widetilde{\omega}_j^\mu + \Omega_j^i$$

Αποδ. $\left(\nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]}\right)\sigma_j = \nabla_\xi \widetilde{\omega}_j^i(\eta)\sigma_i - \nabla_\eta \widetilde{\omega}_j^i(\xi)\sigma_i - \widetilde{\omega}_j^i([\xi, \eta])\sigma_i =$

$$\left(\nabla_\xi \widetilde{\omega}_j^i(\eta)\right)\sigma_i + \widetilde{\omega}_j^i(\eta)\left(\nabla_\xi \sigma_i\right) - \left(\nabla_\eta \widetilde{\omega}_j^i(\xi)\right)\sigma_i - \widetilde{\omega}_j^i(\xi)\left(\nabla_\eta \sigma_i\right) - \widetilde{\omega}_j^i([\xi, \eta])\sigma_i =$$

$$\left(\partial_\xi \widetilde{\omega}_j^i(\eta)\right)\sigma_i + \widetilde{\omega}_j^i(\eta)\widetilde{\omega}_i^\mu(\xi)\sigma_k - \left(\partial_\xi \widetilde{\omega}_j^i(\xi)\right)\sigma_i - \widetilde{\omega}_j^i(\xi)\widetilde{\omega}_i^\mu(\eta)\sigma_\mu - \widetilde{\omega}_j^i([\xi, \eta])\sigma_i =$$

$$\left(\partial_\xi \widetilde{\omega}_j^i(\eta) - \partial_\eta \widetilde{\omega}_j^i(\xi) - \widetilde{\omega}_j^i([\xi, \eta])\right)\sigma_i + \left(\widetilde{\omega}_j^i(\eta)\widetilde{\omega}_i^\mu(\xi) - \widetilde{\omega}_j^i(\xi)\widetilde{\omega}_i^\mu(\eta)\right)\sigma_\mu =$$

$$\left(\partial_\xi \widetilde{\omega}_j^i(\eta) - \partial_\eta \widetilde{\omega}_j^i(\xi) - \widetilde{\omega}_j^i([\xi, \eta])\right)\sigma_i + \left(\widetilde{\omega}_j^\mu(\eta)\widetilde{\omega}_\mu^j(\xi) - \widetilde{\omega}_j^\mu(\xi)\widetilde{\omega}_\mu^i(\eta)\right)\sigma_i =$$

$$d\widetilde{\omega}_j^i(\xi, \eta) + \widetilde{\omega}_j^\mu \wedge \widetilde{\omega}_\mu^i(\eta, \xi)\, \sigma_i = d\widetilde{\omega}_j^i(\xi, \eta) + \widetilde{\omega}_\mu^i \wedge \widetilde{\omega}_j^\mu(\xi, \eta)\sigma_i$$

Επομένως

$$\underbrace{\Omega(\xi, \eta)\sigma_j}_{\Omega_j^i(\xi, \eta)\sigma_i} = \left(d\widetilde{\omega}_j^i(\xi, \eta) + \widetilde{\omega}_\mu^i \wedge \widetilde{\omega}_j^\mu(\xi, \eta)\right)\sigma_i$$

δηλαδή

$$\Omega_j^i(\xi, \eta) = d\widetilde{\omega}_j^i(\xi, \eta) + \widetilde{\omega}_\mu^i \wedge \widetilde{\omega}_j^\mu(\xi, \eta) \qquad \blacksquare$$

---

5. Υπολογίζεται ότι $H_\gamma id - \varepsilon^2 \Omega(\xi, \eta) + o(\varepsilon^2)$ όπου γ ένας τεθλασμένος βρόγχος που συγκροτείται από την αντίστροφη εικόνα του παραλληλόγραμμου $(\varepsilon\xi, \varepsilon\eta) \subset T_P M$ μέσω του οποιουδήποτε χάρτη φ γύρω από το P, για επαρκώς μικρά ε. Επομένως ο περιορισμός της καμπυλότητας Ω σε κάποιον εφαπτόμενο χώρο,

$$\Omega(P) : T_P M \times T_P M \to \mathfrak{g}, \qquad (\xi, \eta) \longmapsto \Omega(P;\, \xi, \eta) = \Omega(\xi, \eta)$$

έχει πεδίο τιμών την άλγεβρα *Lie* της ελάχιστης ομάδας Lie στην οποία περιέχεται η ομάδα ολονομίας $H[\pi_1(P, M)]$ (περιέχεται πάντοτε σε κάποια ομάδα *Lie*, π.χ. στην $GL_m\mathbb{R}$, που είναι δομική ομάδα της δέσμης).

Μια συνοχή καλείται **αφφινική** όταν οι ποσότητες $\omega_j^i = \omega_j^i(x^1, \dots, x^n;\ \xi^1, \dots, \xi^m)$ που την προσδιορίζουν τοπικά είναι γραμμικές εξαρτήσεις των ξ^i, δηλαδή

$$\omega_j^i = \omega_j^i(x^1, \dots, x^n;\ \xi^1, \dots, \xi^m) = \Gamma_{jk}^i(x^1, \dots, x^n)\xi^k$$

Οι λείες βαθμωτές συναρτήσεις Γ_{jk}^i καλούνται (τοπικά) **σύμβολα *Christoffel*** της συνοχής. Εάν $x^1, \dots, x^n$; $z^1, \dots, z^n$ τοπικά συστήματα συντεταγμένων με αντίστοιχα σύμβολα *Christoffel* ${}^{(x)}\Gamma_{jk}^i$, ${}^{(z)}\Gamma_{jk}^i$, υπολογίζεται ότι

$${}^{(z)}\Gamma_{j'k'}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^i}\left({}^{(x)}\Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\right)$$

Η σχέση (4) γράφεται για αφφινικές συνοχές

$$\nabla_\eta \sigma(x^1, \dots, x^n) = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(x^1, \dots, x^n) + \Gamma_{jk}^i(x^1, \dots, x^n)\,\xi^k\right)\eta^j(x^1, \dots, x^n)\,\sigma_i(x^1, \dots, x^n)$$

δηλαδή

$$\nabla_\eta \sigma = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i \xi^k\right)\eta^j \sigma_i$$

Η σχέση (5) γράφεται για αφφινικές συνοχές ως

$$\nabla_\eta \sigma_k(x^1, \dots, x^n) = \Gamma_{jk}^i(x^1, \dots, x^n)\,\eta^j(x^1, \dots, x^n)\,\sigma_i(x^1, \dots, x^n)$$

δηλαδή

$$\nabla_\eta \sigma_k = \Gamma_{jk}^i \eta^j \sigma_i$$

και ειδικότερα,

$$\nabla_{\partial/\partial x^j}\,\sigma_k = \Gamma_{jk}^i \sigma_i$$

Ισχύει $\tilde{\omega}_j^i = \Gamma_{kj}^i dx^k$, οπότε $\nabla_\eta \sigma_j = \tilde{\omega}_j^i(\eta)\sigma_i$. Επίσης

$$d\tilde{\omega}_j^i = d\left(\Gamma_{kj}^i dx^k\right) = \sum_{i \le k < l \le n}\left(\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l}\right) dx^k \wedge dx^l$$

και

$$\omega_\mu^i \wedge \omega_j^\mu = \left(\Gamma_{k\mu}^i dx^k\right) \wedge \left(\Gamma_{lj}^\mu dx^l\right) = \sum_{i \le k < l \le n}\left(\Gamma_{k\mu}^i \Gamma_{lj}^\mu - \Gamma_{l\mu}^i \Gamma_{kj}^\mu\right) dx^k \wedge dx^l$$

επομένως εξίσωση *Cartan* γράφεται

$$\sum_{i \le k < l \le n}\left(\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{k\mu}^i \Gamma_{kj}^\mu - \Gamma_{l\mu}^i \Gamma_{kj}^\mu\right) dx^k \wedge dx^l = \sum_{i \le k < l \le n} \Omega_{j,kl}^i\, dx^k \wedge dx^l$$

απ' όπου συνάγεται ότι

VII.§3.3. $\Omega_{j,kl}^i = \dfrac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \dfrac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{k\mu}^i \Gamma_{lj}^\mu - \Gamma_{l\mu}^i \Gamma_{kj}^\mu$

Θα μελετηθούν εφ' εξής αφφινικές συνοχές στην εφαπτόμενη δέσμη διαφορικής πολλαπλότητας. Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που εκφράζει την οριζοντιότητα μιας καμπύλης στην διανυσματική δέσμη, γράφεται για αφφινικές συνοχές

$$\xi^i + \xi^k \dot{x}^j \Gamma_{jk}^i = 0, \qquad i = 1, \dots m$$

Επομένως, από τα γνωστά για συστήματα διαφορικών εξισώσεων, στις αφφινικές συνοχές υπάρχει πάντοτε η

οριζόντια ανύψωση λείας καμπύλης στην M σε οποιοδήποτε σημείο της ίνας του αρχικού της σημείου.

Από τον τύπο (2) συνάγεται άμεσα ότι για κάθε $\eta \in \mathfrak{X}(M)$ ισχύει $\nabla_\eta(\sigma+\tau)$, δηλαδή ο τελεστής ∇ είναι γραμμικός ως προς το δεύτερο όρισμα. Ελέγχονται επίσης εύκολα οι υπόλοιπες απαιτήσεις του ορισμού της συναλλοίωτης παραγώγισης, οπότε κάθε αφφινική συνοχή επάγει μια συναλλοίωτη παραγώγιση, την κατευθυνόμενη παράγωγο. Από VII.§1.2 συνάγεται αντιστρόφως ότι κάθε συναλλοίωτη παραγώγιση είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος κατάλληλης αφφινικής συνοχής πάνω στη διανυσματική δέσμη. Επομένως υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στις συναλλοίωτες παραγωγίσεις της εφαπτόμενης δέσμης και τις αφφινικές συνοχές σε αυτήν. Εφ' εξής αυτή η αντιστοιχία θα δηλώνεται χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο ∇ για την συναλλοίωτη παράγωγο και την αφφινική συνοχή από την οποία επάγεται.

Ορίζεται σε κάθε σημείο $P \in M$ η **στρέψη** της συνοχής ∇ ως η απεικόνιση

$$T(P) : T_PM \times T_PM \ni (\xi,\eta) \longmapsto T(P;\xi,\eta) = \nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi - [\xi,\eta]$$

Ισχύει $T(\xi,\eta) = T(\eta,\xi)$ και $T(f\xi,\eta) = T(f\eta,\xi)$ (από την ταυτότητα $[f\xi,\eta] = f[\xi,\eta] - \partial_\eta f \cdot \xi$). Επειδή η T είναι διγραμμική, προσδιορίζεται σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων από τις βαθμωτές ποσότητες T^i για τις οποίες

$$T(\xi,\eta) = T^i(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial x^i} - \xi^j\eta^k \underbrace{T^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right)}_{T^i_{jk}}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Επειδή

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \left(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} - \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right]}_{0}$$

έπεται εξ ορισμού ότι των ποσοτήτων T^i_{jk} ότι $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$. Η συνοχή καλείται **συμμετρική** (ή **άστροφη**) όταν έχει μηδενική στρέψη, $\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi = [\xi,\eta]$, ισοδύναμα, όταν για κάθε σύστημα τοπικών συμβόλων *Christoffel* ισχύει

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$$

§4. ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΚΑΙ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ ΣΕ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ ΜΕ ΣΥΝΟΧΗ

Έστω $\gamma : I \to M$ λεία καμπύλη σε πολλαπλότητα με συνοχή ∇, περιεχόμενη εξ ολοκλήρου σε τοπικό χάρτη U με σύστημα συντεταγμένων $x^1,\dots,x^n$, οπότε η γ αναπαρίσταται ως $x^1(t),\dots,x^n(t)$, και $\xi = \xi^i(t)\,\partial/\partial x^i\big|_{\gamma(t)} \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Εάν Γ^i_{jk} τα τοπικά σύμβολα *Christoffel* της συνοχής στο U, ορίζεται ο τελεστής

$$D_\gamma : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma), \qquad \left(D_\gamma\xi\right)(t) = \left(\dot\xi^i(t) + \xi^k(t)\,\dot x^j(t)\,\Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)}$$

Ελέγχεται εύκολα ότι για κάθε $a,b \in \mathbb{R}$, $\xi,\eta \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $f \in C^\infty(M)$,

$$D_\gamma(a\xi + b\eta) = aD_\gamma\xi + bD_\gamma\eta, \qquad D_\gamma(f\xi) = \dot f\xi + fD_\gamma\xi \qquad (1)$$

Ο ορισμός είναι τέτοιος ώστε για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, το διάνυσμα $\left(D_\gamma\xi\right)(t) \equiv D_\gamma\left(\xi\big|_\gamma\right)(t)$ να ισούται με $\nabla_{\dot\gamma}\xi(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)}\xi$:

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi = \frac{dx^k}{dt}\nabla_{\partial/\partial x^k}\xi = \frac{dx^k}{dt}\left(\xi^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \left(\frac{dx^k}{dt}\xi^i_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{dx^k}{dt}\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\xi^j\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$= \Big(\underbrace{\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}}_{d\xi^i/dt} + \xi^j\frac{dx^k}{dt}\Gamma^i_{jk}\Big)\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\dot\xi^i + \xi^k\dot x^j\Gamma^i_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = D_\gamma\xi$$

Η D_γ είναι ο μοναδικός τελεστής $\mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ με αυτές τις τρεις ιδιότητες (1): εάν D ένας άλλος τέτοιος τελεστής, τότε

$$(D\xi)(t) = D\left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)(t) = \dot{\xi}^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)} + \xi^i(t)\ \underbrace{D\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(t)}_{\nabla_{\dot\gamma(t)}(\partial/\partial x^i)} = \left(\dot{\xi}^i(t) + \xi^i(t)\,\Gamma^i_{jk}\,\gamma(t)\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = D_\gamma\xi(t)$$

Επομένως εάν η καμπύλη $\gamma : I \to M$ περιέχεται σε περισσότερους του ενός χάρτη, ο τελεστής D_t μπορεί να οριστεί καλά ως εξής.

Συναλλοίωτη παραγώγιση (για την συνοχή της πολλαπλότητας M) **κατά μήκος της λείας καμπύλης** $\gamma : I \to M$ ονομάζεται ο μοναδικός τελεστής

$$D_\gamma : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma), \qquad \xi \longmapsto D_\gamma\xi$$

που σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ εκφράζεται ως

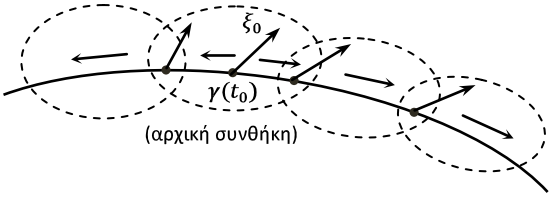
$$\left(D_\gamma\xi\right)(t) = \left(\xi^i(t) + \xi^k(t)\,\dot{x}^j(t)\,\Gamma^i_{jk}\big(\gamma(t)\big)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)}$$

όπου $\xi(t) = \xi^i(t)\,\partial/\partial x^i\,\big|_{\gamma(t)}$.

Παράλληλο (ή **συναλλοίωτα σταθερό**) **κατά μήκος** της λείας καμπύλης $\gamma : I \to M$ ονομάζεται ένα $\xi \in \mathfrak{X}(\gamma)$ όταν $D_\gamma\xi = 0$. Ένα $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ονομάζεται παράλληλο κατά μήκος της γ όταν ο περιορισμός του σ' αυτήν είναι τέτοιος, δηλαδή όταν $\nabla_{\dot\gamma}\xi = 0$. Εάν $\xi = \xi^i(t)\,\partial/\partial x^i\,(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ με σύμβολα *Chrostoffel* Γ^i_{jk} και $x^1(t), \dots, x^n(t)$ η έκφραση της $\gamma(t)$ σε αυτό, το ξ είναι παράλληλο κατά μήκος της γ ακριβώς όταν ικανοποιεί το α'-βάθμιο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{\xi}^i + \dot{x}^i\,\xi^j\,\Gamma^i_{jk} = 0\,, \qquad i = 1, \dots, n \qquad (2)$$

Από την θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση για κάθε επιλογή αρχικών συνθηκών σε ολόκληρη την τομή του πεδίου ορισμού της γ με τον χάρτη στον οποίο ικανοποιούνται οι εξισώσεις (2). Καλύπτοντας την γ με διαδοχικούς τοπικούς χάρτες και συγκολλώντας τις διαδοχικές λύσεις που προκύπτουν σε κάθε έναν από αυτούς (εφ' όσον, από μοναδικότητα της λύσης, οι λύσεις συμφωνούν σε ολόκληρη την τομή δύο χαρτών εάν συμφωνούν σε ένα σημείο),



συνάγεται το ακόλουθο.

VII.§4.0. (Παράλληλη μεταφορά διανύσματος κατά μήκος καμπύλης). Δεδομένης λείας καμπύλης $\gamma : I \to M$ εντός πολλαπλότητας με συνοχή και ενός $\xi_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, υπάρχει μοναδικό παράλληλο κατά μήκος της γ διανυσματικό πεδίο ξ τέτοιο ώστε $\xi(t_0) = \xi_0$.

Ένα $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ καλείται **παράλληλο** όταν είναι παράλληλο κατά μήκος κάθε λείας καμπύλης. Εξ ορισμού της ολικής συναλλοίωτης παραγώγου, έπεται ότι

VII.§4.1. Ένα $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ είναι παράλληλο εάν και μόνον εάν $\nabla\xi = 0$.

Δεδομένης λείας καμπύλης $\gamma : I \to M$ που συνδέει τα σημεία P, Q μιας πολλαπλότητας M με συνοχή, καλείται **ολονομία κατά μήκος** της γ από το $P = \gamma(t_0)$ στο $Q = \gamma(t_1)$ η γραμμική απεικόνιση

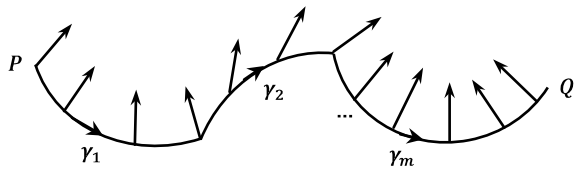
$$H_\gamma : T_PM \to T_QM, \qquad H_\gamma(\xi_P) = \xi(t_1)$$

όπου ξ το μοναδικό παράλληλο πεδίο επί της γ για το οποίο $\xi(t_0) = \xi_P$. (Η γραμμικότητα της H οφεί-

λεται στην γραμμικότητα του συστήματος διαφορικών εξισώσεων που πρέπει να ικανοποιούνται τοπικά από το πεδίο ξ). Ορίζεται επίσης η ολονομία κατά μήκος τμηματικά λείας καμπύλης γ που συνδέει τα P, Q ως

$$H_\gamma : T_P M \to T_Q M, \qquad H_\gamma = H_{\gamma_m} \circ \dots \circ H_{\gamma_1}$$

όπου $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ τα διαδοχικά μεγιστικά λείο τμήματα της γ.



Ελέγχεται εύκολα ότι $H_{\gamma\cdot\delta} = H_\delta \circ H_\gamma$, $H_{\gamma^{-1}} = (H_\gamma)^{-1}$.

Η παράλληλη μεταφορά του ξ κατά μήκος της γ είναι η οριζόντια ανύψωση της γ στο σημείο $(\gamma(0), \xi) \in TM$.

$$D_\gamma \xi(t) = \left(\xi^i + \xi^k \dot{x}^j \Gamma^i_{jk}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \xi^k \Gamma^i_{jk}\right) \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$D_\gamma \xi(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(0)} \xi = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\xi\big(\gamma(t)\big) - \bar{\xi}(t)\right)$$

όπου $\xi(t)$ η παράλληλη μεταφορά του $\xi\big(\gamma(0)\big)$ κατά μήκος της γ.

Επιτάχυνση μιας λείας καμπύλης $\gamma : I \to M$ εντός πολλαπλότητας με συνοχή καλείται η συναλλοίωτη παράγωγος του διανυσματικού πεδίου ταχυτήτων της γ κατά μήκος αυτής, $D_\gamma \dot{\gamma}$.

Γεωδαισιακή της εφοδιασμένης με συνοχή πολλαπλότητας M καλείται μια καμπύλη γ, το πεδίο ταχυτήτων της οποίας είναι παράλληλο κατά μήκος αυτής· ισοδύναμα, μια καμπύλη γ με μηδενική επιτάχυνση, $D_\gamma \dot{\gamma} = 0$. Σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$, η καμπύλη $\gamma(t) : x^1(t), \dots, x^n(t)$ είναι γεωδαισιακή ακριβώς όταν ικανοποιεί το β'-βάθμιο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\ddot{x}^i + \dot{x}^k \dot{x}^j \Gamma^i_{jk} = 0, \qquad i = 1, \dots, n \qquad (3)$$

Με ένα επιχείρημα συγκόλλησης όμοιο εκείνου που προηγήθηκε της πρότασης VII.§4.0, συνάγεται ότι

VII.§4.2. Για κάθε σημείο πολλαπλότητας με συνοχή και κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο αυτό, υπάρχει μοναδική μεγιστική (δηλαδή μή επεκτάσιμη) γεωδαισιακή που διέρχεται από το δεδομένο σημείο με ταχύτητα το δεδομένο διάνυσμα.

Εφ' όσον η έκφραση της συναλλοίωτης παραγώγου κατά μήκος καμπύλης είναι ίδια σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων, έπεται ότι οι γεωδαισιακές καμπύλες μιας πολλαπλότητας με συνοχή είναι ακριβώς εκείνες που σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (3). Η αναλλοιότητα αυτής της έκφρασης κάτω από αλλαγή συντεταγμένων διαπιστώνεται επίσης ως εξής: Έστω τοπικά συστήματα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$; $z^1, \dots, z^n$ με αντίστοιχα σύμβολα *Christoffel* ${}^{(x)}\Gamma^i_{jk}$, ${}^{(z)}\Gamma^i_{jk}$ και καμπύλη $x(t) = z(t)$ στην τομή των χαρτών τους που ικανοποιεί το σύστημα

$$\ddot{x}^i + \dot{x}^j \dot{x}^k \, {}^{(x)}\Gamma^i_{jk} = 0, \qquad i = 1, \dots, n$$

Θα δειχθεί ότι ικανοποιεί επίσης το σύστημα

$$\ddot{z}^i + \dot{z}^j \dot{z}^k \, {}^{(z)}\Gamma^i_{jk} = 0, \qquad i = 1, \dots, n$$

Ισχύουν $\dot{x}^i = \partial x^i / \partial z^{j'} \, z^{i'}$ και $\ddot{x}^i = \left(\partial^2 x^i / \partial z^{i'} \partial z^{j'}\right) z^{i'} z^{j'} + \partial x^i / \partial z^{i'} \, \ddot{z}^{i'}$. Αντικαθιστώντας,

$$\ddot{x}^i + \dot{x}^k \dot{x}^j \, {}^{(x)}\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{i'} \partial z^{j'}} \dot{z}^{i'} \dot{z}^{j'} + \frac{\partial x^i}{\partial z^{i'}} \ddot{z}^{i'} + \frac{\partial x^k}{\partial z^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial z^{j'}} \dot{z}^{k'} \dot{z}^{j'} \, {}^{(x)}\Gamma^i_{jk} =$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial z^{i'}}\ddot{z}^{i'} + \dot{z}^{i'}\dot{z}^{j'}\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{i'}\partial z^{j'}} + \frac{\partial x^k}{\partial z^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial z^{j'}}\,{}^{(x)}\Gamma^i_{jk}\right)$$

Εφ' όσον $\left(\partial x^i/\partial z^{i'}\right)_{i,i'} = \left(\partial z^{i'}/\partial x^i\right)^{-1}_{i',i}$, από τον κανόνα μετασχηματισμού των συμβόλων *Christoffel* κάτω από αλλαγή βάσης, έπεται ότι $\left(\partial^2 x^i/\partial z^{i'}\partial z^{j'}\right) + \left(\partial x^k/\partial z^{k'}\right)\left(\partial x^j/\partial z^{j'}\right){}^{(x)}\Gamma^i_{jk} = \partial x^i/\partial z^{i'}\ {}^{(z)}\Gamma^{i'}_{j'k'}$
Αντικαθιστώντας,

$$\ddot{x}^i + \dot{x}^k\dot{x}^j\,{}^{(x)}\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial z^{i'}}\left(\ddot{z}^{i'} + \dot{z}^{k'}\dot{z}^{j'}\,{}^{(z)}\Gamma^{i'}_{j'k'}\right)$$

Επειδή ο πίνακας $\left(\partial x^i/\partial z^{i'}\right)_{i,i'}$ είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $\ddot{x}^i + \dot{x}^k\dot{x}^j\,{}^{(x)}\Gamma^i_{jk} = 0,\ i = 1, \dots, n$ ικανοποιείται εάν και μόνον εάν το σύστημα $\ddot{z}^i + \dot{z}^k\dot{z}^j\,{}^{(z)}\Gamma^i_{jk} = 0,\ i = 1, \dots, n$ ικανοποιείται.

Δεδομένου σημείου $P \in M$ και αρχικής ταχύτητας $\xi \in T_P M$, συμβολίζουμε γ_ξ την μεγιστική γεωδαισιακή που διέρχεται από το P με αρχική ταχύτητα ξ στο σημείο αυτό, θεωρώντας επιπλέον ότι είναι παραμετροποιημένη ώστε $\gamma_\xi(0) = P$. Με την παρακάτω πρόταση διαπιστώνεται τυπικά ότι η γεωδαισιακή είναι γνήσιο γεωμετρικό αντικείμενο εντός της πολλαπλότητας, ανεξάρτητο παραμετροποίησης.

VII.§4.3. $\gamma_{\lambda\xi}(t) = \gamma_\xi(\lambda t)$ για όλα τα t για τα οποία κάποιο από τα δύο μέλη της ισότητας έχει νόημα.

Αποδ. Λόγω συμμετρίας, αρκεί να δειχθεί ότι το αριστερό μέλος ορίζεται οποτεδήποτε ορίζεται το δεξύ, και ότι τότε ισούνται. Έστω I το πεδίο ορισμού της γ_ξ και $\bar{\gamma}$ η καμπύλη

$$\bar{\gamma} : \lambda^{-1}I \to M, \qquad \bar{\gamma}(t) = \gamma_\xi(\lambda t)$$

Θα δειχθεί ότι η $\bar{\gamma}$ είναι η γεωδαισιακή διερχόμενη από το P με ταχύτητα $\lambda\xi$, οπότε $\bar{\gamma} = \gamma_{\lambda\xi}$ (VII.§4.2). Έστω τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ γύρω από το P, οπότε

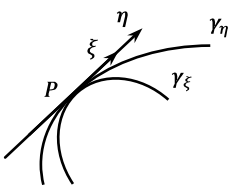
$$\gamma_\xi(t) = \left(\gamma^1_\xi(t), \dots, \gamma^n_\xi(t)\right), \qquad \bar{\gamma}_\xi(t) = \left(\bar{\gamma}^1_\xi(t), \dots, \bar{\gamma}^n_\xi(t)\right)$$

τοπικά. Ισχύει $\dot{\bar{\gamma}}^i_\xi(t) = \dot{\gamma}^i_\xi(\lambda t) = \lambda\dot{\gamma}^i(\lambda t)$, επομένως $\dot{\bar{\gamma}}(0) = \lambda\dot{\gamma}_\xi(0) = \lambda\xi$. Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$D_{\bar{\gamma}}\dot{\bar{\gamma}}(t) = \left(\frac{d}{dt}\dot{\bar{\gamma}}^i(t) + \dot{\bar{\gamma}}^j(t)\dot{\bar{\gamma}}^k(t)\Gamma^i_{jk}\left(\bar{\gamma}(t)\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_t =$$

$$\left(\lambda^2\ddot{\gamma}_\xi(\lambda t) + \lambda^2\dot{\gamma}^j_\xi(\lambda t)\,\dot{\gamma}^k_\xi(\lambda t)\,\Gamma^i_{jk}\left(\gamma_\xi(\lambda t)\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_t = \lambda^2 D_\gamma\dot{\gamma}_\xi(\lambda t) = 0 \qquad \blacksquare$$

Η πρόταση VII.§4.3 δηλώνει συγκεκριμένα ότι οι διερχόμενες από το P γεωδαισιακές βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις διερχόμενες από το 0 κατευθύνσεις του αντίστοιχου εφαπτόμενου χώρου. Επομένως δύο διερχόμενες από το P γεωδαισιακές δεν μπορούν ποτέ να έχουν την παρακάτω εικόνα:



Καλείται **γεωδαισιακό πεδίο** επί της εφαπτόμενης δέσμης TM μίας εφοδιασμένης με συνοχή διαφορικής πολλαπλότητας M το πεδίο $G \in \mathfrak{X}(TM)$ που σε τοπικές συντεταγμένες $x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n$ γράφεται

$$G(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n) = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \xi^k\,\xi^j\,\Gamma^i_{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Ο ολικός ορισμός του πεδίου G μέσω τοπικών συστημάτων είναι εφικτός χάρις στην αναλλοιότητα της έκφρασής του κάτω από αλλαγή συντεταγμένων. Εάν $\left(x(t), \xi(t)\right)$ ολοκληρωτική καμπύλη του G, οπότε $G\left(x(t), \xi(t)\right) = \left(\dot{x}(t), \dot{\xi}(t)\right) = \dot{x}^i\,\partial/\partial x^i + \dot{\xi}^i\,\partial/\partial\xi^i$, έπεται ότι

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}^i = \dot{\xi}^i \\ \dot{\xi}^i = -\xi^k \xi^j \Gamma^i_{ik}\end{array}\right\}$$

απ' όπου συνάγεται άμεσα ότι $\ddot{x}^i + \dot{x}^k \dot{x}^j \Gamma^i_{ik} = 0,\ i = 1, \dots, n$. Άρα οι ολοκληρωτικές καμπύλες του γεωδαισιακού πεδίου είναι ακριβώς οι γεωδαισιακές της πολλαπλότητας M ανυψωμένες στην εφαπτόμενη δέσμη μέσω εφοδιασμού τους με το πεδίο ταχυτήτων τους. Η δράση του γεωδαισιακού πεδίου σε λείες βαθμωτές συναρτήσεις επί της εφαπτόμενης δέσμης είναι παραγώγιση κατά μήκος των γεωδαισιακών:

VII.§4.4. Για κάθε $\xi \in T_P M,\ P \in M$ και $f \in C^\infty(TM)$,

$$\partial_G f(P, \xi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\left(\gamma_\xi(t), \dot{\gamma}_\xi(t)\right)$$

Αποδ. Εάν $\gamma_\xi(t) : x^1(t), \dots, x^n(t)$ σε τοπικό σύστημα $x^1, \dots, x^n,\ \xi^1, \dots, \xi^n$ γύρω από το $(P, \xi) \in TM$,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\left(\gamma_\xi(t), \dot{\gamma}_\xi(t)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\, \dot{x}^i(t) + \frac{\partial f}{\partial \xi^i}\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\, \ddot{x}(t)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(P, \xi)\, \xi^i - \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(P, \xi)\, \xi^j \xi^k \Gamma^i_{ik}(P) = \partial_G f(P, \xi) \qquad \blacksquare$$

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{O} = \{\, \xi \in TM \,\big|\, \gamma_\xi$ ορίζεται στο $[0,1]\}$ των αρχικών ταχυτήτων επί της M για τις οποίες η κίνηση στην αντίστοιχη γεωδαισιακή με την αντίστοιχη παραμετροποίηση έχει νόημα για χρόνο 1, και $\mathcal{O}_P = \mathcal{O} \cap T_P M$. Από πρόταση VII.§2.3, το $\mathcal{O}_P$ είναι αστροειδές υποσύνολο του $T_P M$. Ορίζεται η απεικόνιση $exp : \mathcal{O} \to N,\ exp\xi = \gamma_\xi(1)$ και ο περιορισμός αυτής σε κάθε $\mathcal{O}_P,\ P \in M$,

$$exp_P : \mathcal{O}_P \to M, \qquad exp_P \xi = \gamma_\xi(1)$$

Από VII.§4.3, $exp(t\xi) = \gamma_{t\xi}(1) = \gamma_\xi(1)$ (επομένως $exp_P(t\xi)$ είναι η θέση την χρονική στιγμή t του σωματιδίου που αφήνεται την στιγμή 0 να κινηθεί με ταχύτητα ξ χωρίς την επίδραση μη βαρυτικών δυνάμεων[6]). Εφ' όσον οι γεωδαισιακές της M είναι οι προβολές των ολοκληρωτικών καμπυλών του γεωδαισιακού πεδίου από την λεία διανυσματική δέσμη $q : TM \to M$,

$$exp_P \xi = \gamma_\xi(1) = q\left(\gamma_\xi(1), \dot{\gamma}_\xi(1)\right)$$

απ' όπου έπεται ότι η $exp_P : \mathcal{O}_P \to M$ είναι λεία, για κάθε $P \in M$.

Μια ανοικτή περιοχή U του P ονομάζεται **κανονική** γύρω από το P όταν υπάρχει $W \subset \mathcal{O}_P$ για το οποίο η $exp_P : W \to U$ είναι αμφιδιαφόριση. Καλείται επιπλέον **ολικά κανονική** όταν είναι κανονική γύρω από κάθε σημείο της. Το παρακάτω δηλώνει ότι η exp_P ορίζεται πάντοτε σε μια περιοχή του 0:

VII.§4.5. Για κάθε U τοπικό χάρτη εφοδιασμένης με συνοχή πολλαπλότητας M, υπάρχει $U' \subset U$ ανοικτό και $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $P \in U$ και κάθε $\xi \in T_P M$ με $|\xi| < \varepsilon$, η γ_ξ να ορίζεται στο $(-2,2)$.

Αποδ. Επειδή, από την μορφή του συστήματος διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι γεωδαισιακές, το γ_ξ εξαρτάται λεία από τις αρχικές συνθήκες P, ξ, άρα συνεχώς, υπάρχουν $U' \subset U$ ανοικτό και $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $P \in U'$ και κάθε $\xi \in T_P M$ με $|\xi| < \varepsilon_1$, η γ_ξ να ορίζεται στο $(-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2)$. Επιλέγουμε $0 < \varepsilon < \varepsilon_1 \varepsilon_2$. Για $|\xi| < \varepsilon$ ισχύει $|\varepsilon_2^{-1}\xi| < \varepsilon$, επομένως η γεωδαισιακή $\gamma_{\varepsilon_2^{-1}\xi}$ ορίζεται στο $(-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2)$. Όμως $\gamma_\xi(\varepsilon_2 t) = \gamma_{\varepsilon_2 \xi}(t)$, άρα η γεωδαισιακή $\gamma_\xi(\varepsilon_2 t)$ ορίζεται για $|t| < 2\varepsilon_2$, ισοδύναμα, η γ_ξ ορίζεται για $|t| < 2$. $\blacksquare$

VII.§4.6. Κάθε σημείο σε πολλαπλότητα με συνοχή έχει κανονική περιοχή.

Αποδ. Έστω $P \in M$. Εφόσον η $exp_P : \mathcal{O}_P \to M$ ορίζεται σε μια περιοχή του 0 (VII.§2.6) και είναι λεία, αρκεί να δειχθεί ότι το διαφορικό $d(exp_P)_0 : T_0(T_P M) \cong T_P M \to T_P M$ είναι αντιστρέψιμο. Αυτό ισχύει επειδή

---

6. Στην γενική σχετικότητα, ένα σωματίδιο υπό την επίδραση βαρυτικών δυνάμεων και μόνο, κινείται κατά μήκος γεωδαισιακών καμπυλών.

είναι η ταυτοτική απεικόνιση: εάν $\xi \in T_P M$ και a καμπύλη στο $T_P M$ με $a(0) = 0,\ \dot{a}(0)\xi$, τότε

$$d(exp_P)_0(\xi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(exp_P \circ a)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} exp_P(t\xi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma_\xi(t) = \xi \qquad \blacksquare$$

Ελέγχεται εύκολα ότι για κάθε κανονική περιοχή $U \subset M$ και $f : M \to N$ αμφιδιαφόριση μεταξύ πολλαπλοτήτων με συνοχή, το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \\
T_P M \arrow[u, "exp_P"] \arrow[r, "f_*"'] & T_{f(P)} N \arrow[u, "exp_{f(P)}"']
\end{tikzcd}$$

Ειδικότερα, για κάθε κανονική περιοχή $U \subset M$, εφόσον $d(exp_P)_0 : T_P M \to T_P M$ η ταυτοτική απεικόνιση (βλ. απόδειξη πρότασης VII.§2.6), το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό, όπου $f : U \to U$ αμφιδιαφόριση:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"] & & U \\
& exp_P^{-1}[U] \arrow[ul, "exp_P"] \arrow[ur, "exp_P"'] &
\end{tikzcd}$$

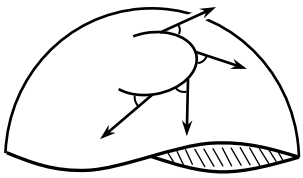
Η παρακάτω βελτίωση VII.§2.6 επιτυγχάνεται με μακροσκελή διαδικασία τεχνικής χρήσεως των ορισμών.

VII.§2.7. Κάθε σημείο σε πολλαπλότητα με συνοχή έχει ολικά κανονική περιοχή.

Αποδ. [**DoC1**], σελ. 72. ■

§5. ΣΥΝΟΧΗ LEVI-CIVITÁ

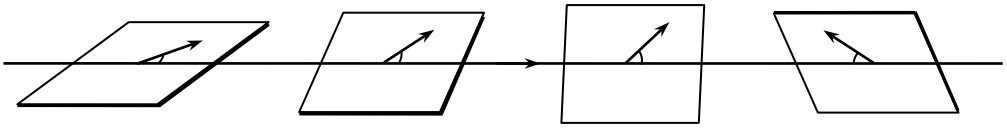
Η παράλληλη μεταφορά διανύσματος εφαπτόμενου σε ρημάννεια πολλαπλότητα, δηλαδή έναν καμπυλωμένο χώρο, εννοείται ως η μεταφορά αυτού κατά μήκος καμπύλης κατά τρόπο ώστε το μέτρο και η γωνία του με την καμπύλη να μένουν αμετάβλητα κατά την διάρκεια της κίνησης.



Δεδομένης ρημάννειας πολλαπλότητας, ζητείται αφφινική συνοχή ώστε η παράλληλη μεταφορά (VII.§4.0) να αποκτά αυτό το γεωμετρικό περιεχόμενο.

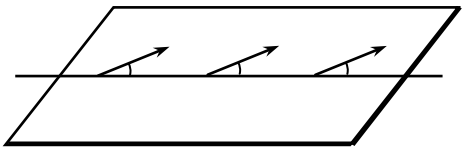
Η παράλληλη μεταφορά, όπως εννοείται γεωμετρικά, είναι εφικτή με μοναδικό τρόπο σε μία 2-διάστατη πολλαπλότητα ένεκα της διάστασης του εφαπτόμενου χώρου: η γωνία που απαιτείται να παραμένει σταθερή σε κάθε σημείο της καμπύλης αρκεί για τον προσδιορισμό της παράλληλης μεταφοράς σε οποιαδήποτε θέση. Αυτό σημαίνει ειδικότερα ότι η παράλληλη μεταφορά είναι καλώς ορισμένη σε 2-διάστατες επιφάνειες εντός του ευκλείδιου χώρου, χωρίς να χρειάζεται εκεί ως έννοια περαιτέρω επεξεργασία.

Σε ρημάννειες πολλαπλότητες με διάσταση μεγαλύτερη του δύο, όπου οι βαθμοί ελευθερίας της κίνησης είναι περισσότεροι του ενός, δεν είναι σαφές ποια κίνηση του διανύσματος κατά μήκος της καμπύλης πρέπει να εννοείται ως παράλληλη, αφού αυτό μπορεί να διατηρεί το μήκος και την γωνία του με την καμπύλη περιστρεφόμενο με οποιονδήποτε τρόπο γύρω απ' αυτήν.

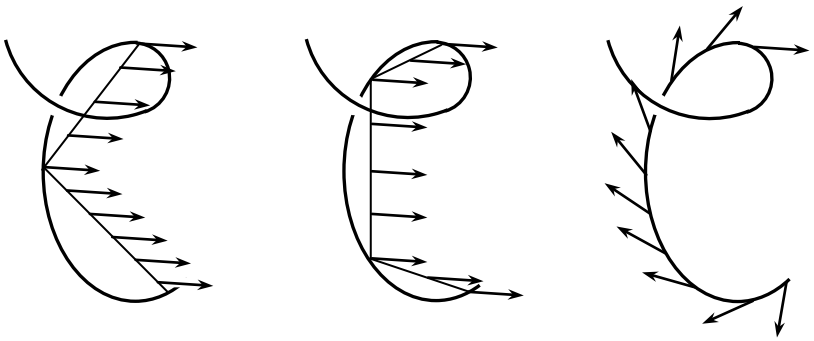


Συγκεκριμένα, η έλλειψη ολικής δομής διανυσματικού χώρου για την πολλαπλότητα, απαγορεύει να διακρίνουμε από όλες τις δυνατές κινήσεις σταθερού μέτρου και γωνίας εκείνη που υποδεικνύεται ως παράλληλη μεταφορά από την γεωμετρία της μετρικής –η διανυσματική δομή των τοπικών χαρτών επιτρέπει κατά τόπους την επιλογή κάποιας κίνησης ως παράλληλης μεταφοράς, όμως αυτές οι επιλογές δεν είναι ανεξάρτητες των αντίστοιχων συστημάτων συντεταγμένων, επομένως δεν μπορούμε να τις συγκολλήσουμε για να λάβουμε τη ζητούμενη.

Εάν η ρημάννεια πολλαπλότητα είναι ευκλείδιος χώρος, το πρόβλημα είναι λυμένο εξ αρχής με φυσικό τρόπο. Εάν η καμπύλη είναι ευθεία (γεωδαισιακή του ευκλείδιου χώρου), τότε ως παράλληλη μεταφορά, δηλαδή σταθερή κίνηση, εννοείται εκείνη που γίνεται μονίμως πάνω στο επίπεδο που σχηματίζει αρχικά το διάνυσμα με την ευθεία.



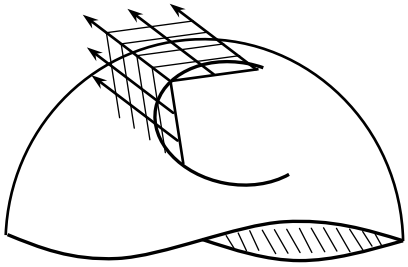
Η αλγεβρική έκφραση αυτού είναι ο μηδενισμός των (ολικών εν προκειμένω) συμβόλων *Christoffel* της συνοχής –η συναλλοίωτη παράγωγος συμπίπτει με την απλή ευκλείδεια παράγωγο κατά κατεύθυνση, και ένα πεδίο εννοείται ως σταθερό (παράλληλο) ακριβώς όταν είναι σταθερό με την εποπτική σημασία του όρου (έχει σταθερές ευκλείδιες συντεταγμένες). Η παράλληλη μεταφορά κατά μήκος οποιασδήποτε λείας καμπύλης στον ευκλείδιο χώρο επιτυγχάνεται με την προσέγγιση αυτής από ευθύγραμμα τόξα (τεθλασμένη γεωδαισιακή) κατά μήκος των οποίων γίνεται η παράλληλη μεταφορά: καθώς το μήκος των προσεγγιστικών τόξων τείνει στο μηδέν, λαμβάνουμε οριακά την παράλληλη μεταφορά κατά μήκος της καμπύλης[7].



$N = 2$ $N = 3$ $N = \infty$

Θεωρούμε τώρα επιφάνεια εντός ευκλείδιου χώρου εφοδιασμένη με την επαγόμενη από αυτόν ρημάννεια μετρική. Μεταφέρουμε εφαπτόμενο σε αυτήν διάνυσμα παράλληλα, κατά μήκος καμπύλης περιεχόμενης στην επιφάνεια με την παραπάνω οριακή διαδικασία.

7. Υπολογίζεται ότι το όριο αυτό υπάρχει και είναι ανεξάρτητο της προσεγγιστικής διαδικασίας.



Καθώς η προσέγγιση εκλεπτύνεται, το πρώτο στην διαδοχική επίπεδο γίνεται εφαπτόμενο στην πολλαπλότητα, αφού η αντίστοιχη χορδή γίνεται εφαπτόμενη της καμπύλης και το αρχικό διάνυσμα είναι εφαπτόμενο στην πολλαπλότητα. Οριακά, όλα τα επίπεδα των προσεγγίσεων γίνονται εφαπτόμενα στην πολλαπλότητα, και εφ' όσον η παράλληλη μεταφορά γίνεται σε κάθε στάδιο της προσέγγισης πάνω στα επίπεδα αυτά, συνάγεται ότι, η παράλληλη μεταφορά διανύσματος αρχικά εφαπτόμενου στην πολλαπλότητα γίνεται εξ ολοκλήρου στην εφαπτόμενη δέσμη της πολλαπλότητας –*δηλαδή η παράλληλη μεταφορά εντός του ευκλείδιου χώρου διανύσματος αρχικά εφαπτόμενου σε επιφάνεια, παραμένει εφαπτόμενη στην επιφάνεια καθ' όλη την διάρκεια της κίνησης*. Αυτή η διαπίστωση καθιστά σαφές ότι η παράλληλη μεταφορά εφαπτόμενου σε επιφάνεια διανύσματος είναι η παράλληλη μεταφορά εντός του ευκλείδειου χώρου που την περιέχει – αυτή η επιλογή είναι φυσική, αφού η γεωμετρία μιας επιφάνειας (ρημάννεια μετρική) καθορίζεται από τον τρόπο που αυτή συστρέφεται εντός του ευκλείδειου χώρου. Ρωτάμε, ποια συνοχή στην μελετώμενη επιφάνεια επάγει ως παράλληλη μεταφορά την παραπάνω;

Εάν η ζητούμενη συνοχή εξαρτάται από την γεωμετρία της επιφάνειας, δηλαδή από την συστροφή εντός του ευκλείδιου χώρου, τότε η φυσική επιλογή συνοχής για την επιφάνεια $M \subset \mathbb{E}^n$ είναι

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \qquad \nabla^M_\xi \eta = (\bar{\nabla}_{\bar{\xi}} \bar{\eta})^T$$

όπου $\bar{\xi}, \bar{\eta}$, λείες επεκτάσεις των πεδίων ξ, η, αντιστοίχως στον $\mathbb{E}^n$, ∇ η ευκλείδεια συνοχή του $\mathbb{E}^n$ και $(\cdot)^T$ η προβολή στην εφαπτόμενη δέσμη της M[8]. Η ευκλείδια συνοχή ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\bar{\nabla}_\xi < \eta, \theta > = < \bar{\nabla}_\xi \eta, \theta > + < \eta, \bar{\nabla}_\xi \theta >$$

που κληροδοτείται στην ∇^M : εάν g η επαγόμενη στην M μετρική,

$$\nabla^M_\xi < \eta, \theta >_g = < \nabla^M_\xi \eta, \theta >_g + < \eta, \nabla^M_\xi \theta >_g \qquad (1)$$

Επιπλέον για την ευκλείδεια συνοχή ισχύει

$$\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = \xi^i \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} e_i - \eta^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} e_i = \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \right) e_i = [\xi, \eta]$$

που κληροδοτείται επίσης στην ∇^M :

$$\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = [\xi, \eta] \Longrightarrow \underbrace{\left(\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi\right)^T}_{(\nabla_\xi \eta)^T - (\nabla_\eta \xi)^T} = [\xi, \eta]^T = [\xi, \eta]$$

άρα

$$\nabla^M_\xi \eta - \nabla^M_\eta = [\xi, \eta] \qquad (2)$$

Θα διαπιστωθεί ότι οι (1) και (2) είναι οι ζητούμενες αλγεβρικές συνθήκες που προσδιορίζουν για μια ρημάννεια πολλαπλότητα εκείνη ακριβώς την συνοχή που συμφωνεί με την γεωμετρία της.

Μια αφφινική συνοχή ∇ στην ρημάννεια πολλαπλότητα (M, g) καλείται **συμβατή με την μετρική** όταν

8. Από τα γνωστά για τις συνοχές, ο ορισμός είναι ανεξάρτητος των επεκτάσεων $\bar{\xi}, \bar{\eta}$.

$$\nabla_\xi < \eta, \theta >_g = < \nabla_\xi \eta, \theta >_g + < \eta, \nabla_\xi \theta >_g$$

VII.§5.0. Η συμβατότητα της συνοχής ∇ είναι ισοδύναμη με καθένα από τα παρακάτω:

(i) $\nabla g = 0$·

(ii) για κάθε λεία καμπύλη γ και κάθε $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\gamma)$,

$$\frac{d}{dt} < \xi, \eta >_g = < D_\gamma \xi, \eta > + < \xi, D_\gamma \eta >$$

Αποδ. (i) Εξ ορισμού της ολικής συναλλοίωτης παραγώγου. (ii) Πράξεις. ■

VII.§5.1. Η συναλλοίωτη παράγωγος συμβατής συνοχής αντιμετατίθεται με το κατέβασμα και το ανέβασμα δείκτη

Αποδ. $\nabla_k \left(g_{lm} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \right) = \underbrace{(\nabla_k g_{lm}) T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}}_{0} + g_{lm}\, \nabla_k T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$, άρα $\nabla_k \left(g_{i_1 m} T^{m i_2 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \right) = g_{i_1 m}\, T^{m i_2 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$. ■

VII.§5.2. (Η παράλληλη μεταφορά διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο). Το εσωτερικό γινόμενο πεδίων παράλληλων κατά μήκος λείας καμπύλης σε ρημάννειας πολλαπλότητα με συμβατή συνοχή, είναι σταθερό κατά μήκος της καμπύλης. Άρα η ολονομία είναι ισομετρία μεταξύ εφαπτόμενων χώρων.

Αποδ. $\frac{d}{dt} < \xi, \eta > \frac{d}{dt} g_{ij} \xi^i \eta^j = \nabla_k \left(g_{ij} \xi^i \eta^j \right) \dot{x}^k \overset{(1)}{=} \dot{x}^k g_{ij} \nabla_k (\xi^i \eta^j) = g_{ij} \underbrace{\dot{x}^k \nabla_k \xi^i}_{\nabla_k \xi = 0} \eta^j + g_{ij} \nabla_k \xi^i \underbrace{\dot{x}^k \nabla_k \eta^j}_{\nabla_k \eta = 0} = 0.$ ■

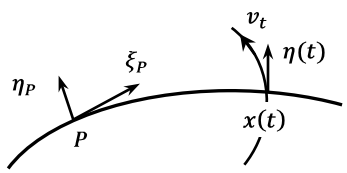
Η συνθήκη (1) διασφαλίζει επομένως ότι η παράλληλη μεταφορά διανύσματος κατά μήκος καμπύλης διατηρεί το μέτρο του διανύσματος και την γωνία του με την καμπύλη. Έχει διαπιστωθεί ότι αυτός ο περιορισμός δεν είναι αρκετός για τον προσδιορισμό της παράλληλης μεταφοράς. Η συνθήκη (2) σημαίνει ότι η συνοχή είναι συμμετρική. Θα διαπιστωθεί ότι η συμμετρία της συνοχής (μηδενισμός της στρέψης) επάγει μια μια συνεχή επιλογή 2-διάστατων επιπέδων από τους εφαπτόμενους στα σημεία της καμπύλης χώρους, επί των οποίων γίνεται η παράλληλη μεταφορά: έστω $x^1, \dots, x^n$ τοπικό σύστημα συντεταγμένων στην περιοχή U γύρω από το $P \in M$, $\xi_P, \eta_P \in T_P M$ και $\xi \in \mathfrak{X}(U)$ τέτοιο ώστε $\xi(P) = \xi_P$, $\xi = \xi^i_P\, \partial/\partial x^i$ (σταθερό πεδίο). Η διερχόμενη από το P ολοκληρωτική καμπύλη $x(t)$ του ξ αναπαρίσταται στο σύστημα $x^1, \dots, x^n$ ως

$$x^i(t) = x^i_P + \xi^i_P\,, \qquad i = 1, \dots n \qquad (3)$$

Συμβολίζεται $\eta(t) \eta^i(t)\, \partial/\partial x^i \big|_{x(t)}$ η παράλληλη μεταφορά του η_P κατά μήκος της $x(t)$, τότε

$$\eta^i(t) = \eta^i_P - \int_0 \eta^k(s)\, \dot{x}^j(s) \Gamma^i_{jk}\big(x(s)\big) ds = \eta^i_P - \eta^k_P\, \eta^j_P\, \Gamma^i_{jk}(P)\, t + o(t^2) \qquad (4)$$

Σταθεροποιούμε ένα t και επιλέγουμε πεδίο $\zeta_t = \eta^i(t)\, \partial/\partial x^i$ (σταθερό).



Η διερχόμενη από το $x(t)$ ολοκληρωτική καμπύλη $v_t(s)$ του ζ_t γράφεται στο σύστημα $x^1, \dots, x^n$ ως

$$x^i(t) + \eta^i(t) s\,, \qquad i = 1, \dots, n \qquad (5)$$

Από (4) και (5), η θέση $v_t(t)$ γράφεται στο σύστημα $x^1, \dots, x^n$ ως

$$x^i(t) + \left(\eta^i_P - \Gamma^i_{jk}(P)\, \eta^k_P\, \xi^j_P\, t + o(t^2) \right) t \overset{(3)}{=} x^i_P + \left(\xi^i_P + \eta^i_P \right) t - \Gamma^i_{jk}(P)\, \eta^i_P\, \xi^j_P\, t^2 + o(t^3), \qquad i = 1, \dots, n$$

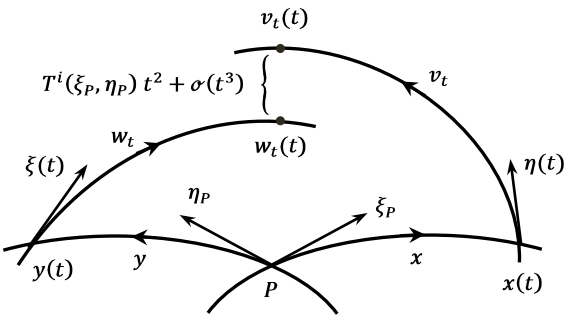
Εάν $w_t(s)$ η διερχόμενη από το $y(t)$ ολοκληρωτική καμπύλη του σταθερού πεδίου $\xi^i(t)\, \partial/\partial x^i$, όπου

$y(t)$ η διερχόμενη από το P ολοκληρωτική του σταθερού πεδίου $\eta = \eta_P^i\, \partial/\partial x^i \in \mathfrak{X}(U)$ και $\xi(t)$ η παράλληλη μεταφορά του ξ_P κατά μήκος αυτής, τότε με ίδιο συλλογισμό συνάγεται ότι η θέση $w_t(t)$ έχει συντεταγμένες

$$x_P^i + \left(\eta_P^i + \xi_P^i\right)t - \Gamma_{jk}^i(P)\, \xi_P^i\, \eta_P^j\, t^2 \; + o(t^3)$$

Επομένως η διαφορά των θέσεων $v_t(t), w_t(t)$ μετράται στο σύστημα $x^1, \dots, x^n$ ως

$$\underbrace{\left(\Gamma_{jk}^i(P) - \Gamma_{kj}^i(P)\right)\, \xi_P^k\, \eta_P^j\, t^2}_{T^i(\xi_P, \eta_P)t^2} \; + \; o(t^3)$$



Καθώς $t \to 0$, δηλαδή όσο «μικρότερη» είναι η παραπάνω γεωμετρική κατασκευή, η ποσότητα $T(\xi_P, \eta_P)t^2$, προσεγγίζει την διαφορά των θέσεων $v_t(t)$, $w_t(t)$. Επομένως το $T(\xi_P, \eta_P)$ μετρά την αποτυχία ενός απειροστού τετραγώνου με κορυφή στο P και πλευρές παράλληλες στα η_P, ξ_P να κλείνει εντελώς. Η μηδενική στρέψη (συμμετρία της συνοχής) σημαίνει ακριβώς ότι η παραπάνω κατασκευή μπορεί να γίνει έτσι ώστε καθώς $t \to 0$ τα $v_t(t)$, $w_t(t)$ τείνουν να συμπέσουν. Η μη μηδενική στρέψη εκφράζεται γεωμετρικά λέγοντας ότι η ολονομία της συνοχής *περιστρέφει* το αρχικό διάνυσμα καθώς αυτό μεταφέρεται παράλληλα κατά μήκος κάποιας καμπύλης, με αποτέλεσμα τα $v_t(t)$, $w_t(t)$ να μένουν πάντοτε απομακρυσμένα, οσοδήποτε μικρό και αν γίνει το t (το απειροστό τετράγωνο δεν κλείνει).

VII.§5.3. (Συνοχή *Levi-Civitá*).

Σε κάθε ρημάννεια πολλαπλότητα υπάρχει μοναδική συμβατή με την μετρική και συμμετρική συνοχή. Εάν $x^1, \dots, x^n$ τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η μετρική γράφεται $g = g_{ij}\, dx^1 \otimes \dots \otimes dx^n$, τότε τα σύμβολα *Christoffel* της συνοχής *Levi-Civitá* σε αυτό είναι

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kl}}{2}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

Αποδ. Έστω ∇ τυχαία συμβατή και συμμετρική συνοχή. Ισχύει $\nabla_k g_{ij} = \partial g_{ij}/\partial x^k - \Gamma_{ik}^l g_{lk} - \Gamma_{jk}^l g_{il}$. Επειδή $g_{lj} = g_{jl}$ και $\nabla_k g_{ij} = 0$, από αυτήν την σχέση σχέση λαμβάνονται οι εξισώσεις

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \underbrace{g_{lj}\Gamma_{ik}^l}_{\Gamma_{j;ik}} - \underbrace{g_{il}\Gamma_{jk}^l}_{\Gamma_{i;jk}} = 0 \Longrightarrow \Gamma_{j;ik} + \Gamma_{i;jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \qquad (6)$$

Σκοπός είναι να λυθούν αυτές οι εξισώσεις μονοσήμαντα ως προς Γ_{jk}^i. Μεταθέτοντας τα i, j, k, από την (6) λαμβάνουμε τις ακόλουθες τρεις εξισώσεις, όπου οι ακμές υποδηλώνουν ισότητα μεταξύ των συνδεδεμένων ποσοτήτων.

$$\Gamma_{i;jk} + \Gamma_{j;ik} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$
$$/$$
$$\Gamma_{j;ki} + \Gamma_{k;ji} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}$$
$$|$$
$$\Gamma_{i;kj} + \Gamma_{k;ij} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$$

Αφαιρώντας τις δύο πρώτες από την τελευταία,

$$2\Gamma_{k;\,ij} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

δηλαδή

$$g_{kl}\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \Longrightarrow \underbrace{g^{rk}g_{kl}\Gamma^l_{ij}}_{\Gamma^r_{ij}} = \frac{g^{rk}}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \qquad \blacksquare$$

VII.§5.4. (Οι ισομετρίες διατηρούν την συνοχή *Levi-Civitá*). Έστω $f : (N, h) \to (M, g)$ τοπική ισομετρία και $\nabla, \tilde{\nabla}$, οι συναλλοίωτες ολικές παράγωγοι που επάγονται από τις *Levi-Civitá* συνοχές των h, g, αντιστοίχως. Για κάθε λείο τανυστικό πεδίο T επί της N,

$$f_*\nabla T = \tilde{\nabla} f_* T \quad \text{και επομένως} \quad f_*\nabla_\xi T = \nabla_{f_*\xi} f_* T$$

Αποδ. Ορίζουμε συνοχή $f^*\tilde{\nabla}$ επί της N, $\left(f^*\tilde{\nabla}\right)T = f^*\tilde{\nabla} f_* T$. Εάν σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων είναι $f(x^1, \dots, x^n) = \left(y^1(x^i), \dots, y^n(x^i)\right)$ αμφιδιαφόριση και Γ^i_{jk}, $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$, τα σύμβολα *Christoffel* των συνοχών $f^*\tilde{\nabla}, \tilde{\nabla}$ στα συστήματα $x^1, \dots, x^n$; $y^1, \dots, y^n$ αντιστοίχως, τότε ισχύει

$$\tilde{\Gamma}^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial y^i}\Gamma^i_{jk}\frac{\partial y^j}{\partial x^{j'}} - \frac{\partial y^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}$$

Από αυτό φαίνεται ότι η $f^*\tilde{\nabla}$ είναι συμμετρική. Επίσης,

$$\left(f^*\tilde{\nabla}\right)h = f^*\left(\tilde{\nabla} f_* h\right) = f^*\left(\tilde{\nabla} g\right) = f^* 0 = 0$$

δηλαδή η $f^*\tilde{\nabla}$ είναι συμβατή με την h επίσης, άρα είναι η συνοχή *Levi-Civitá* αυτής. Άρα $\nabla T = \left(f^*\tilde{\nabla}\right)T = f^*\tilde{\nabla} f_* T$, επομένως $f^*\nabla T = \tilde{\nabla} f_* T$. ■

VII.§5.5. Οι ισομετρικές εμβυθίσεις διατηρούν την παράλληλη μεταφορά.

Αποδ. $D_\gamma \xi = \nabla_{\dot\gamma}\xi = 0 \Longrightarrow f_*\left(\nabla_{\dot\gamma}\xi\right) = \nabla_{f_*\dot\gamma} f_*\xi = \nabla_{f\circ\gamma} f_*\xi = 0$. ■

VII.§5.6. (Οι ισομετρίες διατηρούν τις γεωδαισιακές). Εάν $f : N \to M$ ισομετρία και γ διερχόμενη από το P γεωδαισιακή της N, τότε $f \circ \gamma$ είναι η διερχόμενη από το $f(P)$ γεωδαισιακή της M με ταχύτητα στο σημείο αυτό το διάνυσμα $(f_*\dot\gamma)(0) = df_P\left(\dot\gamma(0)\right)$.

Αποδ. Άμεσα από VII.§5.4, εφ' όσον οι γεωδαισιακές μετέφεραν παράλληλα το πεδίο ταχυτήτων τους. ■

§6. ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ ΣΕ ΡΗΜΑΝΝΕΙΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Εφ' εξής κάθε ρημάννεια πολλαπλότητα θεωρείται εφοδιασμένη με την αντίστοιχη συνοχή Levi-Civitá.

VII.§6.0. Οι γεωδαισιακές ρημάννειων πολλαπλοτήτων είναι καμπύλες σταθερής ταχύτητας (εννοώντας ότι οι παραμετροποιήσεις που ικανοποιούν τοπικά το σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις γεωδαισιακές, έχουν ταχύτητα σταθερού μέτρου).

Αποδ. Εάν γ γεωδαισιακή, τότε $\left|\dot\gamma\right| = <\dot\gamma, \dot\gamma>^{1/2}$ σταθερό, εφ' όσον το $\dot\gamma$ είναι παράλληλο κατά μήκος της γ και η συνοχή *Levi-Civitá* είναι συμβατή. ■

Ορίζεται το μήκος ενός λείου τόξου $\gamma : [a, b] \to M$ εντός ρημάννειας πολλαπλότητας (M, g) ως

$$L(\gamma) = \int_a^b \left|\dot\gamma\right| = \int_a^b <\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)>_g^{1/2} dt$$

που ελέγχεται ότι είναι ανεξάρτητο των παραμετροποίησης. Εάν το τόξο περιέχεται εξ ολοκλήρου σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ όπου $\gamma(t) : x^1(t), \dots, x^n(t)$ και $g = g_{ij}\, dx^1 \otimes \dots \otimes dx^n$, τότε

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^i(t) g_{ij}\big(\gamma(t)\big)\dot{x}^j(t)}\ dt$$

Ομαλή καλείται μια λεία καμπύλη $\gamma : I \to M$ όταν $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$, δηλαδή όταν είναι εμβύθιση του διαστήματος I στην πολλαπλότητα M. Επομένως η γ είναι υποπολλαπλότητα της M, ενδεχομένως με σύνορο, εάν το διάστημα I περιέχει τουλάχιστον ένα από τα άκρα του. Από VII.§6.0, όλες οι γεωδαισιακές είναι ομαλές καμπύλες.

Τμηματικά ομαλό ονομάζεται ένα λείο τόξο $\gamma : [a, b] \to M$ όταν υπάρχει διαμέριση $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ του πεδίου ορισμού του τέτοια ώστε για κάθε $i = 0, \dots, n-1$ ο περιορισμός $\gamma\big|_{[a_i, a_{i+1}]}$ να είναι ομαλή καμπύλη. Ορίζεται το μήκος ενός τμηματικά λείου τόξου όπως το παραπάνω ως

$$L(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} L(\gamma\big|_{[a_i, a_{i+1}]}) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \big|\dot{\gamma}_i\big|$$

Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της παραμετροποίησης, θεωρώντας ότι η αλλαγή παραμέτρου γίνεται μέσω ενός ομοιομορφισμού διαστημάτων του οποίου ο περιορισμός σε κάθε υποδιάστημα $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$ είναι αμφιδιαφόριση.

Ονομάζεται **συνάρτηση μήκους** για ένα τμηματικά ομαλό τόξο $\gamma : I \to M$ η βαθμωτή συνάρτηση

$$s : [a, b] \to R, \qquad s(t) = \int_a^t \big|\dot{\gamma}\big|$$

Εφ' όσον $\dot{s}(t) = \big|\dot{\gamma}(t)\big| \neq 0$ για κάθε $t \in [a, b]$, η s είναι αμφιδιαφόριση. Αποδεικνύεται όπως στην διαφορική γεωμετρία σε ευκλείδειους χώρους ότι η $\gamma \circ s^{-1} = \tilde{\gamma}$ είναι η μοναδική παραμετροποίηση της γ με μοναδιαία ταχύτητα (πάνω από μεταφορά του διαστήματος $[0, L(\gamma)]$ εντός της πραγματικής ευθείας).

$$\begin{tikzcd}
{[0, L(\gamma)]} \arrow[r, "s^{-1}"] \arrow[dr, "\tilde{\gamma}"'] & {[a, b]} \arrow[d, "\gamma"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

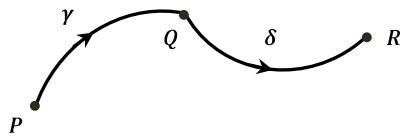
Εάν P, Q σημεία συνεκτικής ρημάννειας πολλαπλότητας (M, g), τότε λόγω δρομοσυνεκτικότητας υπάρχει καμπύλη που τα συνδέει. Λόγω συμπάγειας, η καμπύλη καλύπτεται από πεπερασμένους το πλήθος χάρτες διφφεομορφικούς με τον $\mathbb{R}^n$, το περιεχόμενο εντός των οποίων τμήμα της καμπύλης μπορεί να αντικατασταθεί από λείο ομαλό τόξο. Άρα τα P, Q συνδέονται με τμηματικά ομαλή καμπύλη, και ορίζεται καλά η ποσότητα

$$d(P, Q) = inf\left\{ L(\gamma) \,\middle|\, \begin{array}{l} \gamma \text{ τμηματικά λεία καμπύλη} \\ \text{που συνδέει τα } P, Q \end{array} \right\}$$

Καλείται **ρημάννεια απόσταση** επαγόμενη από την ρημάννεια μετρική της πολλαπλότητας η συνάρτηση

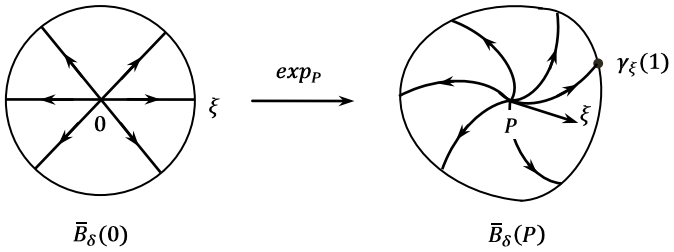
$$d : M \times M \to \mathbb{R}, \qquad (P, Q) \to d(P, Q)$$

Προφανώς $d(P, Q) \geq 0$ για κάθε $P, Q \in M$. Επίσης η τριγωνική ανισότητα ικανοποιείται, διότι εάν γ, δ τμηματικά λεία τόξα που συνδέουν τα P, Q και Q, R αντιστοίχως, τότε $L(\delta \cdot \gamma) \leq L(\gamma) + L(\delta)$, και επειδή η ανισότητα ικανοποιείται για κάθε επιλογή γ, δ, έπεται ότι $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$.



Για να δειχθεί ότι η ρημάννεια απόσταση είναι μετρική με την τοπολογική σημασία του όρου, μένει να ελεγχθεί ότι $d(P,Q)=0$ ακριβώς όταν $P=Q$.

Καλείται **κανονική μπάλα ακτίνας** $\delta>0$ γύρω από το P η ανοικτή περιοχή $B_\delta(P)=exp_P[B_\delta(0)]$, όπου $\bar{B}_\delta(0)$ περιοχή του $0\in T_PM$ εντός ανοικτού συνόλου $0\in U\subset \mathcal{O}_P$ στο οποίο η exp_P είναι αμφιδιαφόριση (VII.§4.6). Εξ ορισμού της απεικόνισης exp, για κάθε $\xi\in\bar{B}(0,\delta)$ ισχύει $exp_P\xi=\gamma_\xi(1)$, δηλαδή η exp_P παραμορφώνει αμφιμονοσήμαντα τις ακτίνες της $\bar{B}_\delta(0)$ στα διερχόμενα από το P γεωδαισιακά τόξα της $B_\delta(P)$.

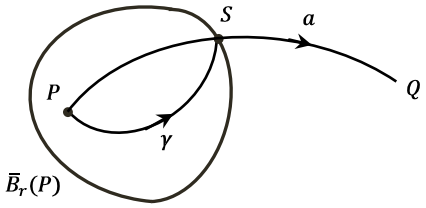


Το μήκος κάθε τέτοιου γεωδαισιακού τόξου είναι τότε $|\xi|(1-0)=\delta$. Αποδεικνύεται ([**DoC2**], σελ. 71) ότι αυτά τα γεωδαισιακά τόξα είναι ελαχίστου μήκους από το P σε κάθε σημείο του συνόρου, δηλαδή

$$d\left(P,\gamma_\xi(1)\right)=\int_0^1|\dot{\gamma}_\xi|=\delta$$

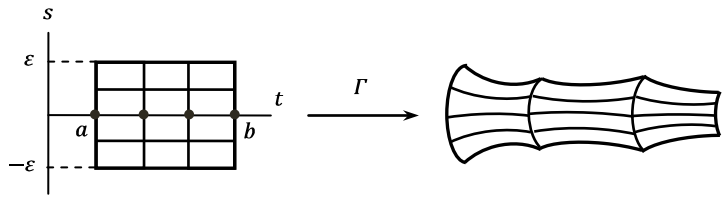
VII.§6.1. Η ρημάννεια απόσταση είναι μετρική, η τοπολογία της οποίας παράγεται από τις κανονικές μπάλες και επιπλέον συμπίπτει με την πρότερη τοπολογία της πολλαπλότητας.

Αποδ. Θα δειχθεί αρχικά ότι εάν $d(P,Q)=0$, τότε $P=Q$, οπότε η d είναι όντως μετρική. Από *Hausdorff* ιδιότητα, υπάρχει κανονική μπάλα $B_r(P)$ που δεν περιέχει το Q, και επειδή $d(P,Q)=0$, υπάρχει τμηματικά ομαλό τόξο a από το P στο Q με μήκος μικρότερο από r. Έστω S το πρώτο σημείο τομής του τόξου a με το σύνορο της $B_r(P)$, οπότε $S=\gamma(1)$ για κάποιο γεωδαισιακό τόξο από το P στο S.



Όμως η καμπύλη γ είναι ελαχίστου μήκους στην $\bar{B}_r(P)$ και ισούται με r, άτοπο, διότι το μήκος του a από το P στο Q ελήφθη $<r$. Η επαγόμενη από την ρημάννεια απόσταση τοπολογία και η τοπολογία της πολλαπλότητας παράγονται αντιστοίχως από κανονικές και ευκλείδιες μπάλες· επειδή σε κάθε ευκλείδια μπάλα διαγράφεται κανονική μπάλα και αντιστρόφως, έπεται ότι οι τοπολογίες συμπίπτουν. ■

Αποδεκτή οικογένεια καμπυλών στην ρημάννεια πολλαπλότητα (M,g) ονομάζεται μια συνεχής απεικόνιση $\Gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ που είναι λεία σε κάθε ορθογώνιο της μορφής $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_i,a_{i+1}]$, όπου $a=a_0<a_1<\cdots<a_k=b$ διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$, και τέτοια ώστε η $\Gamma_s=\Gamma(s,\cdot):[a,b]\to M$ να είναι τμηματικά ομαλή καμπύλη για κάθε $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ (**κύριες καμπύλες της αποδεκτής οικογένειας**).



Δηλαδή μια αποδεκτή οικογένεια καμπυλών συγκροτείται από τμηματικά ομαλές καμπύλες $\Gamma_s = \Gamma(s,\cdot)$ που εξαρτώνται λεία από την παράμετρο $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ σε κάθε διάστημα του κοινού πεδίου ορισμού τους όπου είναι λείες. Ονομάζονται **εγκάρσιες καμπύλες** της αποδεκτής οικογένειας Γ οι $\Gamma^t = \Gamma(\cdot, t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $t \in [a, b]$, που εξ ορισμού της Γ είναι λείες.

Διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της αποδεκτής οικογένειας Γ ονομάζεται μια συνεχής απεικόνιση $\xi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to TM$ τέτοια ώστε $\xi(s, t) \in T_{\Gamma(s,t)}$ η οποία είναι επιπλέον σε κάθε ορθογώνιο $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k-1$. Συμβολίζουμε $\partial_t\Gamma$, $\partial_s\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to TM$ τα πεδία

$$\partial_t\Gamma(s, t) = \frac{d}{dt}\Gamma_s(t) \quad \text{και} \quad \partial_s\Gamma(s, t) = \frac{d}{ds}\Gamma_t(s)$$

δηλαδή τα πεδία που επισυνάπτουν ταχύτητες στις κύριες και εγκάρσιες καμπύλες της Γ αντιστοίχως. Οι τιμές του πεδίου $\partial_s\Gamma$ στα ευθύγραμμα τμήματα $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{a_i\}$ εξαρτώνται μόνο από τις τιμές της Γ στο τμήμα αυτό, και εφ' όσον το $\partial_s\Gamma$ είναι λείο σε κάθε ορθογώνιο $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_i, a_{i+1}]$, συνάγεται ότι είναι πεδίο κατά μήκος της Γ. Αντιθέτως, το $\partial_t\Gamma$ μπορεί να μην είναι ούτε συνεχές στις θέσεις $t = a_i$, επομένως δεν είναι εν γένει πεδίο κατά μήκος της Γ. Εάν ξ πεδίο κατά μήκος της Γ συμβολίζουμε $D_s\xi$, $D_t\xi$ τις συναλλοίωτες παραγώγους αυτού κατά μήκος των καμπυλών Γ_s, Γ_t αντιστοίχως, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $t \in [a, b]$.

Η συμμετρία της συνοχής *Levi-Civitá* παρεισφρύει σε ό,τι ακολουθεί μέσω της επόμενης πρότασης.

VII.§6.2. Σε κάθε ορθογώνιο $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k-1$ της αποδεκτής οικογένειας $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ ισχύει $D_s\partial_t\Gamma = D_t\partial_s\Gamma$.

Αποδ. Θεωρούμε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ γύρω από το $\Gamma(s_0, t_o)$, οπότε το σημείο $\Gamma(s, t)$ γράφεται $x^1(s, t), \dots, x^n(s, t)$. Ισχύει $\partial_t\Gamma = \partial x^i/\partial t\, \partial/\partial x^i$ και $\partial_s\Gamma = \partial x^i/\partial s\, \partial/\partial x^i$ τοπικά, άρα

$$D_s\partial_t\Gamma = \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial s \partial t} + \frac{\partial x^k}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial s}\Gamma^i_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

και

$$D_t\partial_s\Gamma = \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial s} + \frac{\partial x^k}{\partial s}\frac{\partial x^j}{\partial t}\Gamma^i_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

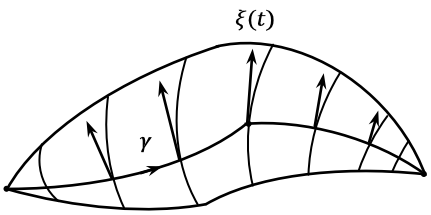
που ισούνται, εφ' όσον $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ (συμμετρία συνοχής *Levi-Civitá*). ■

Μεταβολή της τμηματικά ομαλής καμπύλης $\gamma : [a, b] \to M$ ονομάζεται μια αποδεκτή οικογένεια $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ τέτοια ώστε $\Gamma(0,\cdot) = \gamma$. Η μεταβολή καλείται **γνήσια** όταν $\Gamma(s, a) = \gamma(a)$ και $\Gamma(s, b) = \gamma(b)$ για κάθε $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, δηλαδή όταν οι κύριες καμπύλες έχουν κοινά άκρα. **Μεταβολικό πεδίο** της μεταβολής Γ ονομάζεται το

$$\xi : [a, b] \to TM, \qquad \xi(t) = \partial_s\Gamma(0, t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Gamma(s, t) = \frac{d}{ds}\Gamma_t(s)\Big|_{s=0}$$

δηλαδή το πεδίο που σε κάθε σημείο της γ επισυνάπτει την ταχύτητα της διερχόμενης από αυτό εγκάρσιας καμπύλης της μεταβολής.

Με κάθε διανυσματικό πεδίο ξ κατά μήκος τμηματικά ομαλής καμπύλης $\gamma: [a, b] \to M$ σχετίζεται μεταβολή της οποίας είναι το μεταβολικό πεδίο· επιπλέον, η μεταβολή μπορεί να ληφθεί γνήσια εάν το πεδίο μηδενίζεται στα άκρα της γ : Θέτουμε $\Gamma(s, t) = exp\big(s\xi(t)\big)$, που λόγω συμπάγειας του $[a, b]$ ορίζεται πάντοτε σε κάποιο $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$, $\varepsilon > 0$.



Ο έλεγχος ότι η Γ είναι όντως μεταβολή γίνεται χάρη στις ιδιότητες της εκθετικής απεικόνισης. Είναι προφανές ότι οι εγκάρσιες καμπύλες αυτής της μεταβολής είναι γεωδαισιακές.

VII.§6.3. Εάν $\gamma : [a, b] \to (M, g)$ τμηματικά ομαλή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, Γ γνήσια μεταβολή της γ και ξ το μεταβολικό πεδίο αυτής, τότε

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\Gamma_s) = -\int_a^b < \xi(t), D_\gamma \dot\gamma(t) >_g \, dt - \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{< \xi(a_i^+), \dot\gamma(a_i^-) >_g}_{\equiv \Delta_i \dot\gamma}$$

Αποδ. Λόγω λειότητας του ορίσματος της ολοκληρωτικής ποσότητας $L(\Gamma_s)$ σε κάθε διάστημα $[a_i, a_{i+1}]$, και από συμπάγεια του τελευταίου,

$$\frac{d}{ds}\left(L\left(\Gamma_s\big|_{[a_i,a_{i+1}]}\right)\right) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\partial}{\partial s} < \partial_t \Gamma(s,t), \partial_t \Gamma(s,t) >_g^{1/2} \, dt =$$

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{2} < \partial_t \Gamma(s,t), \partial_t \Gamma(s,t) >_g^{-1/2} \, 2 < D_s \partial_t \Gamma(s,t), \partial_t \Gamma(s,t) >_g^{1/2} \, dt =$$

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{\left|\partial_t \Gamma(s,t)\right|} < D_t \partial_s \Gamma(s,t), \partial_t \Gamma(s,t) > dt$$

από πρόταση VII.§6.2. Επομένως στην θέση $s = 0$, όπου $\partial_s \Gamma(0,t) = \xi(t)$ και $\partial_t \Gamma(0,t) = \dot\gamma(t)$, και εφ' όσον $\left|\dot\gamma(\mathrm{t})\right| = 1$,

$$\frac{d}{ds}\left(L\left(\Gamma_s\big|_{[a_i,a_{i+1}]}\right)\right) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} < D_t \xi(t), \dot\gamma(t) >_g \, dt = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\frac{d}{dt} < \xi(t), \dot\gamma(t) >_g - \frac{d}{dt} < \xi(t), \dot\gamma(t) >_g\right) dt =$$

$$< \gamma(a_{i+1}), \dot\gamma(a_{i+1}^-) >_g - < \xi(a_i), \dot\gamma(a_i^+) >_g - \int_{a_i}^{a_{i+1}} < \xi(t), D_t \dot\gamma(t) >_g \, dt$$

Αθροίζοντας ως προς i, και εφ' όσον $\xi(a_0) = \xi(a_k) = 0$, λαμβάνεται το ζητούμενο. ■

VII.§6.4. Κάθε τμηματικά ομαλό τόξο ελαχίστου μήκους είναι γεωδαισιακή (επομένως είναι ολικά ομαλό).

Αποδ. Έστω $\gamma : [a, b] \to M$ τμηματικά ομαλό τόξο ελαχίστου μήκους, που λαμβάνεται παραμετροποιημένο με φυσική παράμετρο ώστε να έχει μοναδιαία ταχύτητα και να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος της VII.§6.3. Έστω $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ διαμέριση του $[a, b]$ σε διαστήματα όπου η γ είναι λεία. Εφ' όσον η γ είναι ελαχίστου μήκους, για κάθε μεταβολή Γ της γ ισχύει $dL(\Gamma_s)/ds\,\big|_{s=0} = 0$. Εφ' όσον κάθε διανυσματικό πεδίο που μηδενίζεται στα άκρα της γ είναι το μεταβολικό πεδίο της γνήσιας μεταβολής, από VII.§6.3 έπεται ότι για κάθε τέτοιο πεδίο ισχύει

$$\int_a^b < \xi(t), D_{\dot\gamma} \dot\gamma >_g \, dt + \sum_{i=1}^{k-1} < \xi(a_i), \Delta_i \dot\gamma > = 0 \qquad (1)$$

Επιλέγουμε $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ με $supp\, \varphi \subset (a_i, a_{i+1})$, $\varphi \geq 0$, $i = 0, \dots, n-1$. Τότε εφαρμόζοντας την (1)για το πεδίο $\xi = \varphi\, D_{\dot\gamma} \dot\gamma$,

$$0 = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \varphi_i \left|D_{\dot\gamma} \dot\gamma\right|^2 dt$$

άρα $D_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$ σε κάθε διάστημα $[a_i, a_{i+1}]$. Επομένως η γ είναι γεωδαισιακή σε κάθε διάστημα $[a_i, a_{i+1}]$. Για να είναι η γ ολικά γεωδαισιακή, μένει να δειχθεί ότι δεν έχει γωνίες, δηλαδή ότι $\Delta_i \gamma$, $i = 1, \dots, n-1$. Για κάθε $i = 1, \dots, k-1$, επιλέγουμε πεδίο ξ_i κατά μήκος της γ ώστε $\xi_i(a_j) = \delta_{ij} \Delta_i \gamma$. Εφαρμόζοντας καθ' ένα από αυτά τα πεδία στην (1), έπεται ότι $-\left|\Delta_i \dot\gamma\right|^2 = 0$, άρα $\Delta_i \dot\gamma = 0$, $i = 1, \dots, k-1$. ■

Έστω η βαθμωτή λεία συνάρτηση $\mathcal{L} : TM \to \mathbb{R}$ που σε τοπικά συστήματα συντεταγμένων εκφράζεται ως

$$\mathcal{L}(x^1, \dots, x^n; \xi^1, \dots, \xi^n) = \frac{1}{2} g_{ij}\xi^i\xi^j$$

(ο ορισμός είναι εφικτός μέσω τοπικών χαρτών επειδή η παραπάνω έκφραση είναι αναλλοίωτη από μετασχηματισμό συντεταγμένων). Εάν μια καμπύλη γ ελαχιστοποιεί αυτή την λαγκρανζιανή –εννοώντας ότι η μετά από εφοδιασμό με το πεδίο ταχυτήτων ανύψωση της γ στην εφαπτόμενη δέσμη την ελαχιστοποιεί– τότε αυτή η γ ικανοποιεί σε κάθε τοπικό σύστημα τις αντίστοιχες εξισώσεις *Euler-Lagrange* για την $\mathcal{L}$ (αφού είναι τοπικά ελαχιστική ως ολικά ελαχιστική). Εάν η γ γράφεται τοπικά $x^1(t), \dots, x^n(t)$, ισχύουν

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = g_{jk}\dot{x}^j \quad \text{και} \quad \frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} x^i x^j$$

και εφ' όσον

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) = \left(\frac{d}{dt} g_{jk}\right)\dot{x}^j = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j + g_{jk}\ddot{x}^j$$

οι εξισώσεις *Euler-Lagrange* διατυπώνονται ως

$$\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j + g_{jk}\ddot{x}^j\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \qquad k = 1, \dots, n$$

Πολλαπλασιάζοντας με g^{km},

$$g^{km}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j + \underbrace{g^{km}g_{ik}}_{\delta_j^m}\ddot{x}^j - \frac{g^{km}}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \Longrightarrow$$

$$\ddot{x}^m + g^{km}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \qquad m = 1, \dots, n$$

Όμως $(\partial g_{ik}/\partial x^i)\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}\dot{x}^i\dot{x}^j(\partial g_{ik}/\partial x^j + \partial g_{ik}/\partial x^i)$, οπότε αντικαθιστώντας,

$$\ddot{x}^m + \underbrace{\frac{g^{km}}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)}_{\Gamma_{ij}^m}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \qquad m = 1, \dots, n$$

Επομένως τα τόξα που ελαχιστοποιούν την ποσότητα $\mathcal{L}$ ανιχνεύονται ανάμεσα στα γεωδαισιακά τόξα της πολλαπλότητας.

Οι εξισώσεις *Euler-Lagrange* για την λαγκρανζιανή $\mathcal{L}$ συμπίπτουν με εκείνες της $\sqrt{\xi^i g_{ij}\xi^j}$: έστω $x^1(t), \dots, x^n(t)$ τόξο που ελαχιστοποιεί την $\sqrt{\xi^i g_{ij}\xi^j}$ αναπαραμετρημένο με παράμετρο $t = const \times l$, όπου l η φυσική παράμετρος της καμπύλης (εκείνη για την οποία έχει μοναδιαία ταχύτητα). Τότε $\sqrt{\dot{x}^i g_{ij}\dot{x}^j} = |\dot{x}| = const$, και οι εξισώσεις *Euler-Lagrange* της $\sqrt{\xi^i g_{ij}\xi^j}$ διατυπώνονται ως

$$\frac{d}{dt}(g_{kj}\dot{x}^k) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

που συμπίπτουν με εκείνες $\mathcal{L}$[9]. Επειδή η λαγκρανζιανή $\sqrt{\xi^i g_{ij}\xi^j}$ είναι ακριβώς το όρισμα του ολοκληρώματος του μήκους, συνάγεται η εξής βελτιωμένη επαναδιατύπωση της πρότασης VII.§6.4.

VII.§6.5. Έστω P, Q σημεία εντός της ρημάννειας πολλαπλότητας (M, g) και το συναρτησοειδές

---

9. Χωρίς την υπόθεση της παραμέτρου $t = const \times l$, οι εξισώσεις *Euler-Lagrauge* της $\sqrt{\xi^i g_{ij}\xi^j}$ είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{kj}\dot{x}^k}{\sqrt{\dot{x}^i g_{ij}\dot{x}^j}}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j \Big/ 2\sqrt{\dot{x}^i g_{ij}\dot{x}^j}\,, \qquad k = 1, \dots, n$$

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}|$$

επί του συνόλου των αναπαραμετρημένων στο διάστημα $[a, b]$ τμηματικά ομαλών καμπυλών από το P στο Q. Τα κρίσιμα σημεία του L είναι τα γεωδαισιακά τόξα από το P στο Q, αναπαραμετρημένα στο διάστημα $[a, b]$ με σταθερή ταχύτητα.

Δεν ισχύει εν γένει ότι τα γεωδαισιακά τόξα επιτυγχάνουν το ελάχιστο μήκος· λόγου χάρη τόξο μεγίστου κύκλου δεν επιτυγχάνει ελάχιστο μήκος πάνω στην σφαίρα εάν το τέλος του βρίσκεται μετά τον αντίποδα της αρχής του. Η απάντηση ωστόσο είναι καταφατική για τοπικές θεωρήσεις.

VII.§6.6. (Οι γεωδαισιακές επιτυγχάνουν τοπικά ελάχιστο μήκος). Γύρω από κάθε σημείο γεωδαισιακής καμπύλης διαγράφεται ανοικτή περιοχή εντός της οποίας η καμπύλη επιτυγχάνει ελάχιστο μήκος μεταξύ των σημείων της.

Αποδ. Θεωρείται γνωστό ότι τα γεωδαισιακά τόξα επιτυγχάνουν ελάχιστο μήκος από το κέντρο κανονικής μπάλας σε σημείο του συνόρου της, και ότι μάλιστα υπάρχει μοναδικό τέτοιο τόξο ([**DoC2**], σελ. 70-71· αυτός ο ισχυρισμός έχει χρησιμοποιηθεί ήδη για να δειχθεί ότι η ρημάννεια απόσταση είναι μετρική). Θεωρούμε ολικά κανονική περιοχή W γύρω από σημείο P της γεωδαισιακής γ και επιλέγουμε P_1, P_2 σημεία επί της γ μέσα στην W. Η W είναι κανονική περιοχή του P_1, επομένως επιλέγουμε κανονική μπάλα γύρω από το P_1 που περιέχει το P_2. Εφ' όσον η γ είναι γεωδαισιακή, είναι η μοναδική γεωδαισιακή που συνδέει τα P_1 και P_2 επιτυγχάνοντας ελάχιστο μήκος. ■

Ανάμεσα σε άλλες υποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται από μια ρημάννεια πολλαπλότητα για να γίνεται λόγος περί γεωμετρίας με φυσικό νόημα πάνω σ' αυτήν, είναι ότι οι γεωδαισιακές –που ερμηνεύονται ως ευθείες της γεωμετρίας– είναι απεριόριστες (εννοώντας ότι δεν έχουν άκρα) και ότι η πολλαπλότητα καθίσταται πλήρης μετρικός χώρος από την ρημάννεια μετρική της, ώστε η μέτρηση αποστάσεων να προσιδιάζει, όσον αφορά ζητήματα σύγκλισης, στην μέτρηση αποστάσεων εντός του φυσικού κόσμου. Επιπλέον είναι επιθυμητό ότι δύο τυχαία σημεία της πολλαπλότητας να συνδέονται με κάποιο γεωδαισιακό τόξο[10]. Δεν συνάγεται από τους ορισμούς των εμπλεκόμενων εννοιών ότι όλες αυτές οι απαιτήσεις ικανοποιούνται και υπάρχουν παραδείγματα ρημάννειων πολλαπλοτήτων όπου αυτό δεν συμβαίνει. Ωστόσο η VII.§6.8 (πατακάτω) συσχετίζει πολύ ικανοποιητικά το τοπολογικό ζητούμενο (πληρότητα μετρικής) με τις γεωμετρικές απαιτήσεις (απεριόριστες γεωδαισιακές και διασύνδεση όλων των ζευγών με γεωδαισιακά τόξα).

Μια ρημάννεια πολλαπλότητα καλείται **γεωδαισιακά πλήρης** όταν για κάθε $P \in M$, η απεικόνιση exp_P ορίζεται σε ολόκληρο το $T_P M$· ισοδύναμα, όταν οι γεωδαισιακές της παραμετροποιούνται από ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών αριθμών. **Επεκτάσιμη** καλείται μια ρημάννεια πολλαπλότητα που εμφυτεύεται ισομετρικά ως γνήσιο ανοικτό υποσύνολο σε ρημάννεια πολλαπλότητα.

VII.§6.7. Γεωδαισιακά πλήρης ρημάννεια πολλαπλότητα είναι μή επεκτάσιμη.

Αποδ. Έστω M γεωδαισιακά πλήρης που εμφυτεύεται ως γνήσιο υποσύνολο σε ρημάννεια πολλαπλότητα M'. Επιλέγουμε $P \in \partial M$, οπότε $P \notin M$, $U' \subset M'$ κανονική περιοχή του $P, Q \in U' \cap M$ και γ γεωδαισιακή της M' με $\gamma(0) = P, \gamma(1) = Q$. Τότε η καμπύλη $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$, $|t| < \delta$ για κάποιο $\delta > 0$, είναι γεωδαισιακή της M με $\tilde{\gamma}(0) = Q$, που επιπλέον δεν ορίζεται για κάποιο $t \leq 1$ (εφ' όσον $\tilde{\gamma}(1) = P \notin M$), άτοπο, λόγω γεωδαισιακής πληρότητας της M. ■

VII.§6.8. (*Hopf-Rinow*). Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για μια ρημάννεια πολλαπλότητα M.

(α) η exp_P ορίζεται σε όλο το $T_P M$, για κάθε $P \in M$·

(β) τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα της M είναι συμπαγή·

(γ) η M είναι πλήρης μετρικός χώρος με την ρημάννεια απόσταση d·

(δ) η M είναι γεωδαισιακά πλήρης·

---

10. Με όρους Φυσικής, μεταξύ δύο σημείων υπάρχει διαδρομή που ελαχιστοποιεί ορισμένες φυσικές ποσότητες (αρχή ελαχίστου δράσεως, αρχή του Fermat κτλ.).

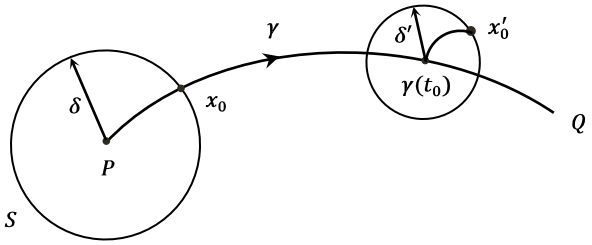
(ε) υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συμπαγών υποσυνόλων της M με $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = M$ τέτοια ώστε εάν $Q_n \notin K_n, \forall n$ να ισχύει $lim_{n\to\infty}\, d(P, Q_n) = \infty$.

Εάν τουλάχιστον ένα (και επομένως όλα) από τα παραπάνω ισχύει, τότε για κάθε ζεύγος σημείων της M υπάρχει γεωδαισιακό τόξο που τα συνδέει.

Αποδ. Θα δειχθεί αρχικά ο τελευταίος ισχυρισμός. Έστω $P, Q \in M$ με $d(P, Q) = r$ και $B_\delta(P)$ κανονική μπάλα ακτίνας $\delta > 0$ γύρω από το P, $S = \partial B_\delta(P)$. Επιλέγουμε $x_0 \in S$ ώστε η ποσότητα $d(Q, x)$, $x \in S$ να ελαχιστοποιείται. Από τα γνωστά για τις κανονικές μπάλες, $x_0 = exp_P \delta\xi$ για κάποιο $\xi \in T_P M$ με $|\xi| = 1$ και έστω γ η γεωδαισιακή $\gamma(t) = \gamma_\xi(t) = exp_P t\xi$. Θα δειχθεί ότι $\gamma(r) = Q$. Ορίζουμε

$$A = \{t \in [0, r] \mid d(\gamma(t), Q) = r - t\}$$

που είναι μή κενό, εφ' όσον $P \in A$. Επιπλέον το A είναι κλειστό, άρα $supA \in A$. Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $t_0 < r$ ισχύει $t_0 + \delta' \in A$ για κάποιο $\delta' > 0$· τότε θα είναι $supA = r \in A$, ισοδύναμα, θα ισχύει το ζητούμενο, $Q = \gamma(r)$. Έστω $t_0 < r$, $B_\delta(\gamma(t_0))$ κανονική μπάλα γύρω από το $\gamma(t_0)$, $S' = \partial B_\delta(\gamma(t_0))$ και x'_o σημείο που ελαχιστοποιεί την ποσότητα $d(Q, x)$, $x \in S'$.



Αρκεί να δειχθεί ότι $x'_0 = \gamma(t_0 + \delta')$, διότι τότε, εφ' όσον

$$d(\gamma(t_0), Q) = \delta' + min_{x\in S'} d(x, Q) = \delta' + \rho(x'_0, Q) \quad \text{και} \quad d(\gamma(t_0), Q) = r - t_0$$

έπεται ότι $r - t_0 = \delta' + \rho(x'_0, Q) = \delta' + \rho(\gamma(t_0 + \delta'), Q)$, ισοδύναμα, $d(\gamma(t_0 + \delta'), Q) = r - (t_0 + \delta')$, που σημαίνει ότι $t_0 + \delta' \in A$.

Από τριγωνική ανισότητα, $d(P, x'_0) \geq d(P, Q) - d(Q, x'_0) = r - (r - t_0 - \delta') = t_0 + \delta'$. Η τεθλασμένη γεωδαισιακή που συνδέει τα P, $\gamma(t_0)$, x'_0 έχει μήκος $t_0 + \delta'$, άρα $d(P, x'_0) = t_0 + \delta'$, και αυτή η καμπύλη είναι γεωδαισιακή. Άρα δεν είναι τεθλασμένη[11], επομένως $\gamma(t_0 + \delta') = x'_0$.

Θα δειχθούν τώρα οι ισοδυναμίες:

(α) $\Longrightarrow$ (β): Έστω $K \subset M$ κλειστό και φραγμένο, οπότε $K \subset B$ για κάποια μπάλα με κέντρο P. Επιλέγουμε μπάλα $B_r(0) \subset T_P M$ τέτοια ώστε $B \subset exp_P \bar{B}_r(0)$, οπότε το K συμπαγές ως κλειστό συμπαγούς.

(β) $\Longrightarrow$ (γ): Από τα γνωστά για τις ακολουθίες *Cauchy*.

(γ) $\Longrightarrow$ (δ): Έστω γ γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας που δεν ορίζεται για κάποιο $t_0 \in \mathbb{R}$ και $(t_n) \subset \mathbb{R}$ ακολουθία με $t_n \to t_0$, $t_n < t_0$. Δεδομένου $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $|t_n - t_m| < \varepsilon$· τότε $d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq |t_n - t_{nm}| < \varepsilon$ και η $(\gamma(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι *Cauchy*. Άρα $\gamma(t_n) \to P_0 \in M$ καθώς $t_n \to \infty$. Επιλέγουμε ολικά κανονική περιοχή W γύρω από το P_0 και $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε εάν $n, m \geq n_1$, να ισχύει $|t_m - t_n| < \delta$ και $\gamma(t_n), \gamma(t_m) \in W$ (εφ' όσον οι $(t_n)_\mathbb{N}$, $(\gamma(t_n))_\mathbb{N}$ είναι *Cauchy*). Υπάρχει τότε μοναδική γεωδαισιακή δ στην W που συμπίπτει με την γ. Εφ' όσον η $exp_{\gamma(t_n)}$ είναι αμφι-διαφόριση επί του $B_\delta(0)$ και $W \subset exp_{\gamma(t_n)}[B_\delta(0)]$, η δ επεκτείνει την γ πέραν του t_0, άτοπο, από την επιλογή της γ.

(δ) $\Longrightarrow$ (α): Προφανές. (β) $\Longleftrightarrow$ (ε): Γενική τοπολογία. ■

VII.§6.9. Κάθε συμπαγής πολλαπλότητα είναι γεωδαισιακά πλήρης.

Αποδ. Άμεσα, από το (ε) του θεωρήματος *Hopf-Rinow*. ■

---

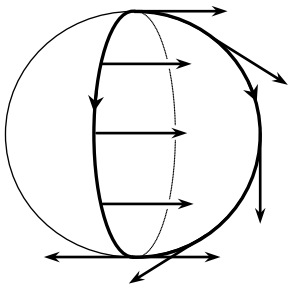
11. Μια γεωδαισιακή δεν μπορεί να είναι τεθλασμένη, διότι με το επιχείρημα στην απόδειξη της VII.§6.3, μπορούμε να στρογγυλέψουμε την ακμή λαμβάνοντας τόξο μικρότερου μήκους.

VII.§6.10. Κλειστή υποπολλαπλότητα γεωδαισιακά πλήρους ρημάννειας πολλαπλόττας είναι γεωδαισιακά πλήρης με την επαγόμενη ρημάννεια μετρική.

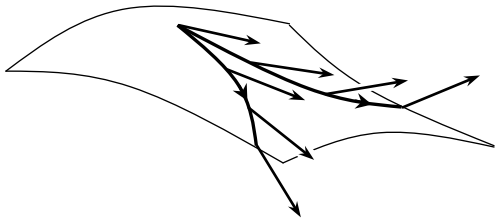
Αποδ. Άμεσα, από θεώρημα *Hopf-Rinow*. ■

§7. ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ

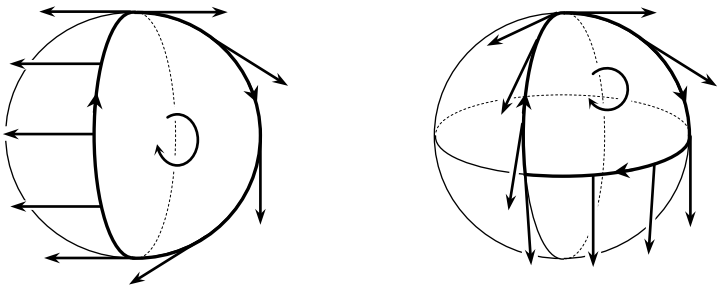
Εννοείται ως καμπυλότητα μιας επιφάνειας το μέτρο της έντασης και του τρόπου με τον οποίο αυτή συστρέφεται εντός του ευκλείδειου χώρου. Η πληροφορία περί της συστροφής κωδικοποιείται τανυστικά ως ρημάννεια μετρική της επιφάνειας, δηλαδή ως ο κανόνας με τον οποίο πρέπει να μετράμε μήκη και όγκους σε εσωτερικό στην επιφάνεια σύστημα συντεταγμένων για να λάβουμε τα μήκη και τους όγκους όπως μετρώνται στον ευκλείδειο χώρο που την περιέχει. Μια γεωμετρικά αμεσότερη έκφανση της συστροφής είναι ο τρόπος με τον οποίον οι διάφορες καμπύλες της επιφάνειας μεταφέρουν παράλληλα τα εφαπτόμενα διανύσματα. Με όρους παράλληλης μεταφοράς, το να είναι μια επιφάνεια καμπυλωμένη εκφράζεται από την αποτυχία των πιο ίσιων καμπυλών αυτής (γεωδαισιακών) να μεταφέρουν παράλληλα ένα διάνυσμα με τον ίδιο τρόπο. Λόγου χάρη η παράλληλη κατά μήκος μέγιστου ημικυκλίου μεταφορά εφαπτόμενου στο βόρειο πόλο της σφαίρας διανύσματος είναι άλλη από την παράλληλη μεταφορά κατά μήκος άλλου ημικυκλίου.



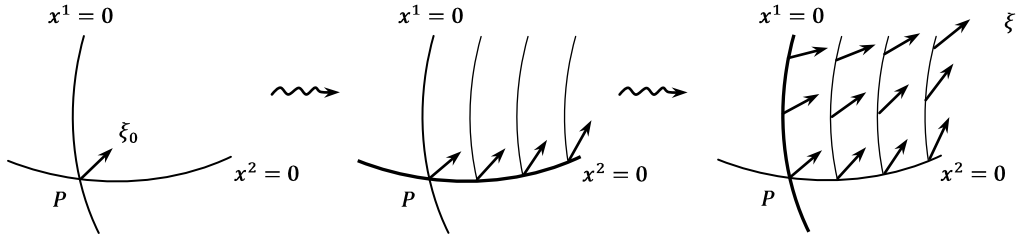
Ακόμη και σε επιφάνειες όπου οι γεωδαισιακές δεν συγκλίνουν ποτέ (υπερβολικές επιφάνειες) ώστε να μπορεί να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων της παράλληλης μεταφοράς, τα διανύσματα μεταφέρονται παράλληλα κατά μήκος διακεκριμένων γεωδαισιακών με τέτοια εποπτική απόκλιση ώστε οποιαδήποτε εσωτερική έννοια παραλληλίας καθίσταται αδύνατη.



Η ασυμφωνία στην παράλληλη μεταφορά κατά μήκος διαφορετικών γεωδαισιακών έχει επίπτωση στην κατεύθυνση του διανύσματος όταν αυτό επαναφέρεται στην αρχική θέση από παράλληλη μεταφορά κατά μήκος βρόγχου που συγκροτείται από γεωδαισιακά τόξα: όχι μόνο ένας βρόγχος επαναφέρει το διάνυσμα με κατεύθυνση άλλη από την αρχική, αλλά επίσης διαφορετικοί βρόγχοι επάγουν διαφορετικές κατευθύνσεις στο τελικό διάνυσμα.



Θεωρούμε τοπικό σύστημα $x^1, \dots, x^n$ γεωδαισιακών αξόνων γύρω από το σημείο $P \approx (0, \dots 0)$ μίας n-διάστασης ρημάννειας πολλαπλότητας M και $\xi_0 \in T_P M$. Κατασκευάζουμε διανυσματικό πεδίο ξ στην 2-διάστατη υποπολλαπλότητα $x^{k\geq 3} = 0$ ως εξής: μεταφέρουμε παράλληλα το ξ_0 κατά μήκος του x^1-άξονα έπειτα μεταφέρουμε το αποτέλεσμα παράλληλα κατά μήκος των x^1-ισοσταθμιστών.

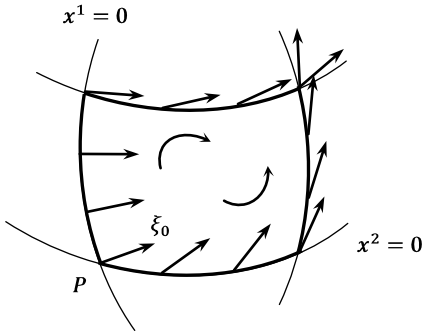


Εκ κατασκευής του ξ, $\quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}}\Big|_{x^2=0}\xi = 0 \quad$ (1) $\quad$ και $\quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}}\xi = 0 \quad$ (2)

Εφ' όσον η παράλληλη μεταφορά μηδενικού διανύσματος είναι μηδενικό πεδίο, από (2) έπεται ότι

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \xi = 0 \qquad (3)$$

Λόγω καμπυλότητας του χώρου (δηλαδή επειδή η ρημάννεια μετρική δεν είναι εν γένει σταθερή), δεν αναμένεται ότι $\nabla_{\partial/\partial x^1}\xi = 0$, δηλαδή το πεδίο ξ δεν μεταφέρεται παράλληλα κατά μήκος των x^2-ισοσταθμικών (εκτός της $x^2 = 0$), διότι τότε οι παράλληλες μεταφορές του ξ_0 κατά μήκος των παρακάτω διαδρομών θα έπρεπε να συμπίπτουν, που δεν ισχύει εν γένει.



Εάν αυτό ίσχυε, τότε επειδή η παράλληλη μεταφορά μηδενικού διανύσματος είναι μηδενικό πεδίο, θα έπρεπε να είναι $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \xi = 0$, ισοδύναμα, λόγω της (3),

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \xi = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \xi \qquad (4)$$

Επειδή ως ευκλείδιος εννοείται ο χώρος εκείνος στον οποίο η παράλληλη μεταφορά είναι ανεξάρτητη της τεθλασμένης γεωδαισιακής που χρησιμοποιείται στην παραπάνω διαδικασία – άρα εκείνος στον οποίο το ξ θα ικανοποιούσε εκ κατασκευής την (4) –υποδεικνύεται ότι η μή καμπυλότητα εκφράζεται αλγεβρικά με την αντιμετάθεση των τελεστών $\nabla_{\partial/\partial x^i}, \nabla_{\partial/\partial x^j}$, για κάθε ζεύγος i, j, όταν οι άξονες του συστήματος $x^1, \dots, x^n$ είναι γεωδαισιακοί.

Η ουσιώδης ιδιότητα της ευκλείδειας συνοχής, που στην περίπτωση των γεωδαισιακών αξόνων εμφανίζεται ως αντιμετάθεση των τελεστών $\nabla_{\partial/\partial x^i}, \nabla_{\partial/\partial x^j}$, αναδεικνύεται όταν θεωρήσουμε την συνναλοίωτη παράγωγο ως προς αυθαίρετα πεδία $\xi = \xi^i e_i, \eta = \eta^i e_i$, όπου $e_1, \dots, e_n$ το σύνηθες ορθοκανονικό σύστημα του ευκλείδειου χώρου. Εφ' όσον σύμβολα Christoffel της ευκλείδειας συνοχής είναι μηδενικά,

$$\nabla_\xi \nabla_\eta \zeta = \nabla_\xi (\nabla_\eta \zeta) = \nabla_\xi \left(\eta^k \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^k} e_i \right) = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\eta^k \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^k} \right) e_i =$$

$$\xi^j\left(\frac{\partial\eta^k}{\partial x^j}\frac{\partial\zeta^i}{\partial x^k}+\eta^k\frac{\partial^2\zeta^i}{\partial x^j\partial x^k}\right)e_i=\left(\xi^j\frac{\partial\eta^k}{\partial x^j}\frac{\partial\zeta^i}{\partial x^k}+\xi^j\eta^k\frac{\partial^2\zeta^i}{\partial x^j\partial x^k}\right)e_i$$

Επομένως,

$$\left(\nabla_\xi\nabla_\eta-\nabla_\eta\nabla_\xi\right)\zeta=\left(\xi^j\frac{\partial\eta^k}{\partial x^j}\frac{\partial\zeta^i}{\partial x^k}+\xi^j\eta^k-\eta^j\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}\frac{\partial\zeta^i}{\partial x^k}-\eta^j\xi^k\frac{\partial^2\zeta^i}{\partial x^j\partial x^k}\right)e_i=(\underbrace{\xi^j\frac{\partial\eta^k}{\partial x^j}-\eta^j\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}}_{[\xi,\eta]^k})\frac{\partial\zeta^i}{\partial x^k}e_i=\nabla_{[\xi,\eta]}\xi$$

άρα η *Levi-Civitá* συνοχή του ευκλείδειου χώρου ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\nabla_\xi\nabla_\eta-\nabla_\eta\nabla_\xi=\nabla_{[\xi,\eta]}$$

Από πρόταση VII.§5.4, η παραπάνω ταυτότητα πρέπει να ικανοποιείται σε κάθε τοπικά ισομετρική με τον ευκλείδειο χώρο ρημάννεια πολλαπλότητας. Επομένως, η αποτυχία του αντιμεταθέτη $\left[\nabla_\xi,\nabla_\eta\right]=\nabla_\xi\nabla_\eta-\nabla_\eta\nabla_\xi$ να ισούται με $\nabla_{[\xi,\eta]}$ μετρά την απόκλιση μιας πολλαπλότητας από το να είναι ευκλείδεια.

Ονομάζεται **καμπυλότητα *Riemann* της ρημάννειας πολλαπλότητας** (M,g) η απεικόνιση

$$R:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M),\qquad R(\xi,\eta,\zeta)=\Omega(\eta,\zeta)\xi$$

όπου Ω η καμπυλότητα της *Levi-Civitá* συνοχής της πολλαπλότητας. Από τα γνωστά για τις συνοχές σε διανυσματικές δέσμες,

$$R(\xi,\eta,\zeta)=(\nabla_\eta\nabla_\zeta-\nabla_\zeta\nabla_\eta-\nabla_{[\eta,\zeta]})\xi$$

Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν του ορισμού, μια τοπικά ισομετρική με τον ευκλείδειο χώρο πολλαπλότητα έχει μηδενική καμπυλότητα. Ισχύει προφανώς $R(\xi,\eta,\zeta)=-R(\xi,\zeta,\eta)$ και η απεικόνιση R είναι $C^\infty(M)$-πολυγραμμική: για κάθε $f\in C^\infty(M)$,

$$R(\xi,f\eta,\zeta)=\nabla_\eta\nabla_{f\zeta}\xi-\nabla_{f\zeta}\nabla_\eta\xi-\nabla_{[\eta,\zeta]}\xi=\nabla_\eta\left(f\nabla_\zeta\zeta\right)-f\nabla_\zeta\nabla_\eta\zeta-\nabla_{f[\eta,\zeta]+\frac{\partial f}{\partial\eta}\zeta}\,\xi=$$

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}\nabla_\zeta\xi+f\nabla_\eta\nabla_\zeta\xi-f\nabla_\zeta\nabla_\eta\xi-f\nabla_{[\eta,\zeta]}\xi-\frac{\partial f}{\partial\eta}\nabla_\zeta\xi=f\,R(\xi,\eta,\zeta)$$

(για το τρίτο όρισμα έπεται άμεσα από την αντισυμμετρικότητα στις δύο τελευταίες θέσεις, ενώ για το πρώτο κάνοντας παρόμοιες πράξεις). Επομένως σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1,\dots,x^n$ με $e_i\equiv\partial/\partial x^i$ η καμπυλότητα προσδιορίζεται από n^4 βαθμωτές ποσότητες R^i_{jkl},

$$R\left(e_j,e_k,e_l\right)=R^i_{jkl}e_i$$

Επειδή για την καμπυλότητα Ω της συνοχής ισχύει $\Omega(e_k,e_l)e_j=\underbrace{\Omega^i_j(e_k,e_l)}_{\Omega^i_{j,kl}}e_i$, έπεται ότι $R^i_{jkl}=\Omega^i_{j,kl}$.

Επίσης, εάν Γ^i_{jk} τα σύμβολα *Christoffel* της συνοχής στο σύστημα $x^1,\dots,x^n$, τότε κάνοντας πράξεις,

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}-\nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right]}\right)e_l=R\left(e_l,e_j,e_k\right)=(\underbrace{\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jl}-\Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jk}}_{R^i_{jkl}})\,e_i$$

Ελέγχεται εύκολα ότι οι ποσότητες R^i_{jkl} μετασχηματίζονται τανυστικά κάτω από αλλαγή συντεταγμένων, επομένως η πληροφορία που εμπεριέχεται στην απεικόνιση καμπυλότητα μπορεί να οργανωθεί ως $(1,3)$-λείο τανυστικό πεδίο επί της ρημάννειας πολλαπλότητας M, που σε τοπικές συντεταγμένες $x^1,\dots,x^n$ εκφράζεται ως

$$R^i_{jkl}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\otimes dx^k\otimes dx^l$$

όπου

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jk}$$

και Γ^i_{jk} τα σύμβολα της *Christoffel* της συνοχής. **Τανυστής *Riemann*** της ρημάννειας πολλαπλότητας (M, g) ονομάζεται το $(0,4)$-τανυστικό λείο πεδίο R επί της M που προκύπτει κατεβάζοντας τον δείκτη του προηγούμενου τανυστικού πεδίου· ισοδύναμα, το $(0,4)$-πεδίο που δρά σε κάθε τετράδα $\xi, \eta, \zeta, \theta \in \mathfrak{X}(M)$ ως

$$R(\xi, \eta, \zeta, \partial) = < R(\xi, \eta, \zeta), \theta >_g$$

Η έκφραση του τανυστή *Riemann* σε τοπικό σύστημα $x^1, \dots, x^n$ είναι

$$R = \underbrace{g_{iq} R^q_{jkl}}_{R_{ijkl}} \, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$$

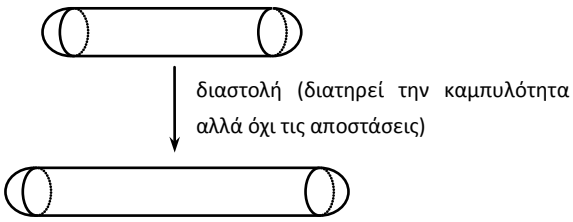
δηλαδή ο τανυστής *Riemann* κωδικοποιεί ακριβώς την ίδια πληροφορία με την απεικόνιση καμπυλότητα.

Εφ' όσον η ισομετρία σέβεται την συναλλοίωτη παραγώγιση πυ επάγεται από την *Levi-Civitá* συνοχή, και εφ' όσον η τιμή του $\nabla_\xi \eta$ σε κάποιο σημείο εξαρτάται μόνον από τις τιμές των πεδίων ξ, η στο σημείο αυτό, εξ ορισμού της καμπυλότητας συνάγεται άμεσα το ακόλουθο:

VII.§7.0. (Ο τανυστής *Riemann* είναι τοπική ισομετρική αναλλοίωτος). Εάν $f : (M, g) \to (\widetilde{M}, \tilde{g})$ τοπική ισομετρία, τότε $f^*\tilde{R} = R$ και $\tilde{R}(f_*\xi, f_*\eta, f_*\zeta) = f_* R(\xi, \eta, \zeta)$.

Αποδ. Άμεσα, συνδυάζοντας τις VII.§1.1, VII.§5.4 και τον ορισμό της καμπυλότητας *Riemann*. ■

Ανακύπτει το ερώτημα εάν μια αμφιδιαφόριση $f : (M, g) \to (\widetilde{M}, \tilde{g})$ που διατηρεί την καμπυλότητα, εννοώντας ότι $R(\xi, \eta, u, v) = \tilde{R}(f_*\xi, f_*\eta, f_*u, f_*v)$, είναι ισομετρία. Στις δύο διαστάσεις αυτό δεν ισχύει σύμφωνα με το συμπαγές αντιπαράδειγμα της εικόνας[12].



VII.§7.1. (Συμμετρίες του τανυστή *Riemann*). Ο τανυστής *Riemann* είναι αντισυμμετρικός ως προς το πρώτο και το δεύτερο ζεύγος, αναλλοίωτος από την εναλλαγή του πρώτου με το δεύτερο ζεύγος και ικανοποιεί ταυτότητα κυκλικής εναλλαγής ως προς τα τρία τελευταία ορίσματα,

$$R(\xi, \eta, \zeta, \theta) = -R(\eta, \xi, \zeta, \theta) = -R(\xi, \eta, \theta, \zeta), \qquad R(\xi, \eta, \zeta, \theta) = R(\zeta, \theta, \xi, \eta) \text{ και } R(\xi, [\eta, \zeta, \theta]) = 0$$

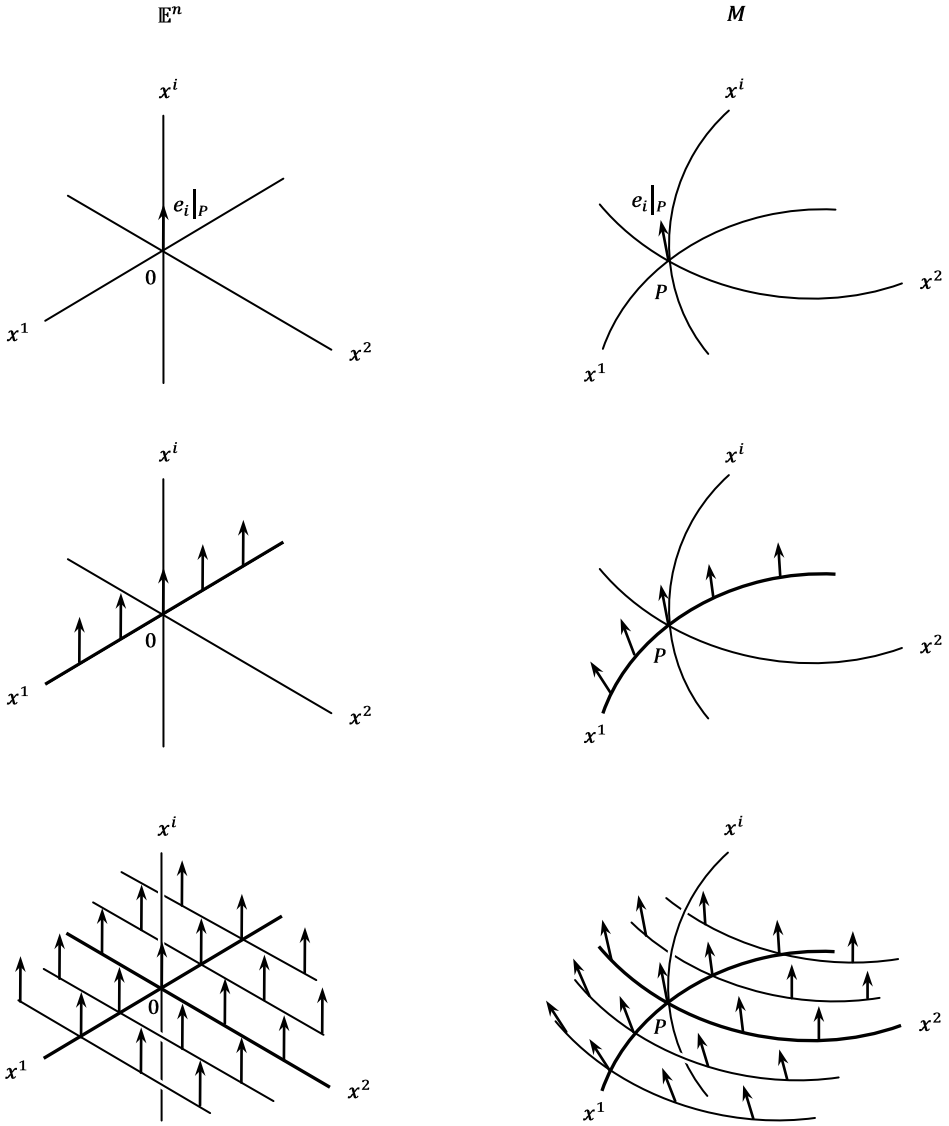
$$\text{(i) } R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad \text{(ii) } R_{ijkl} = -R_{ijkl}, \quad \text{(iii) } R_{ijkl} = R_{klij} \text{ και } \quad \text{(iv) } R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} \equiv R_{i[jkl]} = 0$$

Αποδ. [**DNF**1], σελ. 304. ■

VII.§7.2. Γύρω από κάθε σημείο ρημάννειας πολλαπλότητας με μηδενικό τανυστή *Riemann* υπάρχει παράλληλο ορθοκανονικό τοπικό πλαίσιο της εφαπτόμενης δέσμης.

Αποδ. Έστω P σημείο της $(M, g), dim\, M = n,$ και $e_1\big|_P, \dots, e_n\big|_P$ g-ορθοκανονική βάση του χώρου $T_P M$. Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ γύρω από το P τέτοιο ώστε $e_i\big|_P = \partial/\partial x^i\,(P)$, $P \approx 0$ και η εικόνα του χάρτη να είναι n-διάστατος ανοικτός κύβος στο $\mathbb{E}^n$ με κέντρο 0. Για κάθε $i = 1, \dots n$, κατασκευάζουμε το διανυσματικό πεδίο e_i ως εξής: μεταφέρουμε το $e_1\big|_P$ παράλληλα κατά μήκος του x^1-άξονα, έπειτα μεταφέρουμε το αποτέλεσμα παράλληλα κατά μήκος του x^2-άξονα και ούτω καθ' εξής.

12. Το ερώτημα έχει καταφατική απάντηση για διαστάσεις μεγαλύτερες ή ίσες του 4.



Το τοπικό πλαίσιο $e_1, \dots, e_n$ είναι ορθοκανονικό, εφ' όσον η παράλληλη μεταφορά διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, και λείο, εφ' όσον οι λύσεις του συστήματος διαφορικών εξισώσεων για παράλληλα πεδία εξαρτώνται λεία από τις αρχικές συνθήκες. Μένει να δειχθεί ότι το πλαίσιο $e_1, \dots, e_n$ είναι παράλληλο, δηλαδή ότι κάθε πεδίο e_i, $i = 1, \dots, n$ είναι παράλληλο[13]. Πρέπει να δειχθεί ότι $\nabla_\xi e_i = 0$ για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(M)$. Από την $C^\infty(M)$-γραμμικότητα της συνοχής ως προς το πρώτο όρισμα, αρκεί να δειχθεί ότι $\nabla_j e_i = 0$, $j = 1, \dots n$.

Συμβολίζουμε U_k την $(n-k)$-διάστατη επιφάνεια γύρω από το P που προσδιορίζεται από τις εξισώσεις $x^{r \geq k+1} = 0$, οπότε U_1 ο x^1-άξονας, U_2 το x^1, x^2-επίπεδο και ούτω καθ' εξής. Εκ κατασκευής του e_i,

$$\nabla_k e_i = 0 \text{ στο } U_k$$

Θα δειχθεί ότι $\nabla_1 e_i = \dots = \nabla_k e_i = 0$ στο U_k για κάθε k, οπότε το ζητούμενο προκύπτει λαμβάνοντας $k = n$. Για $k = 1$ ισχύει· έστω ότι ισχύει για k, θα δειχθεί για $k+1$. Ισχύει $\nabla_{k+1} e_i = 0$ στο U_{k+1}, και επειδή $\nabla_1 e_i = \dots = \nabla_k e_i$ στο $U_k \subset U_{k+1}$ από επαγωγική υπόθεση, αρκεί να δειχθεί ότι

$$\nabla_1 e_i = \dots = \nabla_k e_i = 0 \text{ στο } U_{k+1}.$$

13. Εδώ χρειάζεται ο μηδενισμός του τανυστή *Riemann*: αν και οι εικόνες των πεδίων e_i εντός του ευκλείδιου χώρου είναι εκ κατασκευής παράλληλα πεδία, ωστόσο η τοπική παραμετροποίηση της πολλαπλότητας δεν είναι κατ' ανάγκην ισομετρία, οπότε δεν είναι εξ αρχής γνωστό ότι τα e_i είναι επίσης παράλληλα.

Επειδή η παράλληλη μεταφορά μηδενικού διανύσματος είναι μηδενικό πεδίο, εφ' όσον $\nabla_j e_i = 0$ στο U_κ αρκεί να δειχθεί ότι $\nabla_{k+1}(\nabla_j e_i) = 0,\ \forall j = 1, \dots, n$. Από τον μηδενισμό του τανυστή *Riemann* (δηλαδή της καμπυλότητας *Riemann*) έπεται ότι

$$\nabla_{k+1}\nabla_j - \nabla_j\nabla_{k+1} = \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]}$$

Εφ' όσον $[\partial/\partial x^{k+1}, \partial/\partial x^j] = 0$, έπεται $\nabla_{k+1}\nabla_j = \nabla_j\nabla_{k+1}$, άρα $\nabla_{k+1}(\nabla_j e_i) = \nabla_j \underbrace{(\nabla_{k+1} e_i)}_{0} = 0$. ■

VII.§7.3. Ο τανυστής *Riemann* ρημάννειας πολλαπλότητας είναι μηδενικός εάν και μόνον εάν αυτή είναι τοπικά ισομετρική με ευκλείδιο χώρο.

Αποδ. Επειδή ο τανυστής *Riemann* είναι τοπική ισομετρική αναλλοίωτος, αρκεί να δειχθεί το ευθύ. Έστω σημείο P της πολλαπλότητας και $e_1, \dots, e_n$ παράλληλο ορθοκανονικό πλαίσιο γύρω απ' αυτό (VII.§7.2). Από την συμμετρία της συνοχής *Levi-Civitá*,

$$[e_i, e_j] = \nabla_{e_i} e_i - \nabla_{e_j} e_i = \underbrace{\left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right)}_{0} e_k = 0$$

για κάθε ζεύγος i, j. Επομένως υπάρχει τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ γύρω από το P τέτοιο ώστε $e_i = \partial/\partial x^i$ (IV.§4.4). Εάν g η μετρική της πολλαπλότητας, τότε $g(\partial/\partial x^i,\ \partial/\partial x^j) = \delta_{ij}$, επομένως ο τοπικός χάρτης $x^1, \dots, x^n$ είναι ισομετρία από περιοχή του P σε περιοχή του $\mathbb{E}^n$. ■

Εάν M ρημάννεια πολλαπλότητα ισομετρικά εμβυθισμένης στην ρημάννεια πολλαπλότητα $\widetilde{M}$, γράφουμε

$$T\widetilde{M}\big|_M = \coprod_{P \in M} T_P\widetilde{M}$$

οπότε $TM \subset T\widetilde{M}\big|_M$. Κάθε λεία τμήση της $T\widetilde{M}\big|_M$, δηλαδή κάθε λείο διανυσματικό πεδίο επί της M, επεκτείνεται σε λεία τμήση της εφαπτόμενης δέσμης $T\widetilde{M}$. Για κάθε $P \in M$, συμβολίζεται $N_P M = (T_P M)^\perp$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $T_P M \subset T_P\widetilde{M}$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $g(P)$, οπότε $T_P\widetilde{M} = T_P M \oplus N_P M$. **Κάθετη δέσμη** της ρημάννειας υποπολλαπλότητας (M, g) εντός της $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ ονομάζεται η

$$NM = \coprod_{P \in M} N_P M$$

Ορίζονται οι απεικονίσεις **εφαπτομενική** και **κάθετη προβολή** αντιστοίχως ως

$$\pi^T : T\widetilde{M}\big|_M \to TM, \qquad (\pi^T\xi)(P) = \big(\xi(P)\big)^T \quad (\text{η προβολή του } \xi(P) \text{ στο } T_P M)$$

$$\pi^\perp : T\widetilde{M}\big|_M \to NM, \qquad (\pi^\perp\xi)(P) = \big(\xi(P)\big)^\perp \quad (\text{η προβολή του } \xi(P) \text{ στο } N_P M)$$

Προφανώς για κάθε λεία τμήση ξ της $T\widetilde{M}\big|_M$, $\xi = \pi^\perp\xi + \pi^T\xi$, και η γραφή αυτή είναι μοναδική. Συμβολίζοντας $\nabla, \widetilde{\nabla}$ τις συνοχές *Levi-Civitá* των πολλαπλοτήτων (M, g), $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ αντιστοίχως και επεκτείνοντας τα $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ σε $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$, λαμβάνουμε την γραφή

$$\widetilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta} = \left(\widetilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}\right)^T + \left(\widetilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}\right)^\perp$$

Αναμένεται ότι $\left(\widetilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}\right)^T = \nabla_\xi\eta$.

Ορίζεται η **δεύτερη θεμελιώδης μορφή** για την ρημάννεια υποπολλαπλότητα (M, g) ως

$$II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \aleph(M) \ (\text{σύνολο λείων τμήσεων της } NM)$$

$$II(\xi, \eta) = \left(\widetilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}\right)^T = \pi^\perp\left(\widetilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}\right)$$

που είναι ανεξάρτητη των επεκτάσεων $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ (VII.§1.1). Η II είναι συμμετρική και C^∞-διγραμμική:

$$II(\xi,\eta) - II(\eta,\xi) = (\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta} - \tilde{\nabla}_{\tilde{\eta}}\tilde{\xi})^{\perp} = [\xi,\eta]^{\perp} = 0$$

εφ' όσον γινόμενο *Lie* εφαπτόμενων στην M πεδίων είναι εφαπτόμενο από την συμμετρία της συνοχής *Levi-Civitá* σε αυτήν.

VII.§7.4. (Τύπος του *Gauss*). Για κάθε $\xi,\eta \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta} = \nabla_{\xi}\eta + II(\xi,\eta)$$

επομένως $\nabla_{\xi}\eta = \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}\right)^{T}$.

Αποδ. Αρκεί να δειχθεί ότι $\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta}\right)^{T} = \nabla_{\xi}\eta$. Ορίζεται

$$\nabla^{T}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \qquad \nabla_{\xi}^{T}\eta = (\nabla_{\xi}\eta)^{T}$$

που ελέγχεται εύκολα ότι είναι συνοχή επί της M. Θα δειχθεί ότι η ∇_{ξ}^{T} είναι συμμετρική και συμβατή με την ρημάννεια μετρική g της M, οπότε είναι η συνοχή *Levi-Civitá* αυτής. Για την συμμετρία,

$$\nabla_{\xi}^{T}\eta = \nabla_{\eta}^{T}\xi = (\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta} - \tilde{\nabla}_{\tilde{\eta}}\tilde{\xi})^{T} = [\xi,\eta]^{\perp} = [\xi,\eta]$$

Για την συμβατότητα, έστω $\xi,\eta,\zeta \in \mathfrak{X}(M)$ και $\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{\zeta}$ επεκτάσεις αυτών επί της $\tilde{M}$· τότε

$$\partial_{\xi}(\eta,\zeta) = <\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta},\tilde{\zeta}> + <\tilde{\eta},\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\zeta}> = \underbrace{<(\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta})^{T},\tilde{\zeta}>}_{<\nabla_{\xi}^{T}\eta,\zeta>} + \underbrace{<\tilde{\eta},(\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\zeta})^{T}>}_{<\eta,\nabla_{\xi}^{T}\zeta>}$$

όπου η πρώτη ισότητα εκφράζει την συμβατότητα της $\tilde{\nabla}$. ■

VII.§7.5. (**Εξίσωση *Weingarten***) Εάν $\xi,\zeta \in \mathfrak{X}(M)$, $\eta \in \aleph(M)$, τότε

$$<\tilde{\nabla}_{\xi}\eta,\zeta> = <\eta, II(\xi,\zeta)>$$

Αποδ. Εφ' όσον η ποσότητα $<\eta,\zeta>$ μηδενίζεται επί της M και $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, ισχύει επί της M η ισότητα

$$0 = \partial_{\xi} <\eta,\zeta> = <\tilde{\nabla}_{\xi}\eta,\zeta> + <\eta,\tilde{\nabla}_{\xi}\zeta> = <\tilde{\nabla}_{\xi}\eta,\zeta> + <\eta,\tilde{\nabla}_{\xi}\eta + II(\xi,\eta)> =$$

$$<\tilde{\nabla}_{\xi}\eta,\zeta> + <\eta, II\,(\xi,\eta)> \qquad ■$$

VII.§7.6. (**Εξίσωση *Gauss***).

Για κάθε τετράδα $\xi,\eta,u,v \in T_{P}M$, ισχύει

$$\tilde{R}(\xi,\eta,u,v) = R(\xi,\eta,u,v) - <II(\xi,v), II(\eta,v)> + <II(\xi,\eta), II(\eta,v)>$$

Αποδ. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του *Gauss* και την εξίσωση *Weingarten*, βλ. [**Lee**2], σελ 136. ■

Εάν $\gamma : I \to M$ λεία καμπύλη της ισομετρικά εμφυτευμένης ρημάννειας πολλαπλότητας $(M,g) \hookrightarrow (\tilde{M},\tilde{g})$ αναπαραμετρημένη με μοναδιαία ταχύτητα, ονομάζεται **εσωτερική καμπυλότητα** αυτής η συνάρτηση

$$k : I \to \mathbb{R}, \qquad k(t) = \left|(D_{\gamma}\dot{\gamma})(t)\right|$$

όπου D_{γ} η επαγόμενη από την συνοχή *Levi-Civitá* ∇ της (M,g) συναλλοίωτη παραγώγιση κατά μήκος της γ. Εξ ορισμού, μια καμπύλη γ στην M είναι γεωδαισιακή αυτής εάν και μόνον εάν η εσωτερική της καμπυλότητα είναι μηδενική συνάρτηση. Ορίζεται επίσης η **εξωτερική καμπυλότητα** της καμπύλης γ

$$\tilde{k} : I \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{k}(t) = \left|(\tilde{D}_{\gamma}\dot{\gamma})(t)\right|$$

όπου $\tilde{D}_{\gamma}$ η επαγόμενη από την συνοχή *Levi-Civitá* $\tilde{\nabla}$ της $(\tilde{M},\tilde{g})$ συναλλοίωτη παραγώγιση κατά μήκος της γ[14].

---

14. Αποδεικνύεται με μέθοδο όμοια με εκείνη της διαφορικής γεωμετρίας σε ευκλείδειους χώρους, ότι οι δύο συναρτήσεις καμπυλότητας έχουν την ίδια μορφή σε όλες τις σταθερής ταχύτητας αναπαραμετρήσεις της γ.

VII.§7.7. (Τύπος του *Gauss* κατά μήκος καμπυλών).

Έστω λεία καμπύλη $\gamma : I \to M$, όπου $(M, g) \hookrightarrow (\widetilde{M}, \tilde{g})$ ρημάννεια υποπολλαπλότητα. Για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(\gamma)$ τέτοιο ώστε $\xi(t) \in T_{\gamma(t)}M, \forall t$, ισχύει

$$\widetilde{D}_\gamma \xi = D_\gamma \xi + II(\dot{\gamma}, \xi).$$

Αποδ. Θεωρώντας τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^m$ τέτοιο ώστε τοπικά η M να περιγράφεται από τις εξισώσεις $x^{n+1} = \dots = x^m = 0$, και εάν $\xi = \xi^i \, \partial/\partial x^i$, $i \leq n$, τότε

$$\widetilde{D}_\gamma \xi = \dot{\xi}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^i \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \dot{\xi}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^i \nabla_{\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^i II(\dot{\gamma}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = D_\gamma \xi + II(\dot{\gamma}, \xi)$$

όπου έγινε εφαρμογή του τύπου του *Gauss* και της διγραμμικότητας της II. ■

Εφαρμόζοντας τον τύπο της VII.§7.7 για το πεδίο ταχυτήτων $\xi = \dot{\gamma}$ της καμπύλης $\gamma : I \to M$, λαμβάνουμε την σχέση

$$\widetilde{D}_\gamma \dot{\gamma} = D_\gamma \dot{\gamma} + II(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$$

Εάν η γ είναι γεωδαισιακή, η σχέση γίνεται

$$\widetilde{D}_\gamma \dot{\gamma} = II(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$$

απ' όπου συνάγεται η γεωμετρική ερμηνεία της θεμελιώδους μορφής: για κάθε $\xi \in T_P M$, $II(\xi, \xi)$ είναι η εξωτερική καμπυλότητα της διερχόμενης από το P γεωδαισιακής της M με ταχύτητα ξ στο σημείο αυτό.

Η ρημάννεια υποπολλαπλότητα $(M, g) \hookrightarrow (\widetilde{M}, \tilde{g})$ καλείται **ολικά γεωδαισιακή** όταν για κάθε $\xi \in T_P M$, $P \in M$, η διερχόμενη από το P γεωδαισιακή της $\widetilde{M}$ με ταχύτητα ξ στο σημείο αυτό περιέχεται ολόκληρη στην M. Από το συσχετισμό των συνοχών $\nabla, \widetilde{\nabla}$ συνάγεται εύκολα ότι κάθε τέτοια γεωδαισιακή είναι επίσης γεωδαισιακή της M. Αντιστρόφως, από την μοναδικότητα των γεωδαισιακών, κάθε γεωδαισιακή ολικά γεωδαισιακής υποπολλαπλότητας είναι αυτής της μορφής. Επομένως, μια υποπολλαπλότητα είναι ολικά γεωδαισιακή ακριβώς όταν οι γεωδαισιακές της είναι επίσης γεωδαισιακές της πολλαπλότητας στην οποία περιέχεται. Ισχύει επίσης ο ακόλουθος χαρακτηρισμός.

VII.§7.8. Μια ρημάννεια υποπολλαπλότητα είναι ολικά γεωδαισιακή εάν και μόνον εάν η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της είναι ταυτοτικά μηδενική.

Αποδ. Άμεσα, από τον τύπο $\widetilde{D}_\gamma \dot{\gamma} = II(\gamma, \gamma)$ για τις γεωδαισιακές καμπύλες της υποπολλαπλότητας και εφ' όσον αυτές είναι επίσης γεωδαισιακές της $\widetilde{M}$. ■

Θεωρούμε τώρα ρημάννεια πολλαπλότητα (M, g), $dim\, M = n$, ισομετρικά εμφυτευμένη στον ευκλείδιο χώρο $\mathbb{E}^{n+1}$. Κάνοντας τοπικές θεωρήσεις, οπότε η M μπορεί να θεωρηθεί προσανατολίσιμη, ορίζουμε σε αυτήν προσανατολισμό επιλέγοντας ένα από τα δύο μοναδιαίου μέτρου κάθετα σε αυτήν διανυσματικά πεδία, $\eta \in \aleph(M)$. Ορίζεται το συμμετρικό $(0,2)$-τανυστικό πεδίο επί της M,

$$\beta(P; \xi_P, \zeta_P) = < II(\xi, \zeta)(P), \eta(P) >$$

όπου $\xi, \zeta \in \mathfrak{X}(M)$ τέτοια ώστε $\xi(P) = \xi_P$, $\zeta(P) = P$ (ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής των ξ, ζ). Επομένως $b(P; \xi_P, \zeta_P)$ είναι ο συντελεστής του διανύσματος $II(\xi, \zeta)(P)$ στην βάση $\eta(P)$ του $N_P M$, δηλαδή $II(\xi, \zeta)(P) = \beta(P; \xi_P, \zeta_P)\, \eta(P)$. Το πρόσημο του β εξαρτάται από την επιλογή του προσανατολισμού η για την επιφάνεια, όμως το γεωμετρικό νόημά του είναι ανεξάρτητο από αυτόν: σε κάθε περίπτωση $|\beta(P; \xi_P, \zeta_P)|$ είναι το μέτρο του διανύσματος $II(\xi, \zeta)(P)$.

Καλείται **τελεστής σχήματος** της υπερεπιφάνειας M το $(1,1)$-τανυστικό πεδίο S επί της M που σε κάθε $P \in M$ επισυνάπτει τον αυτοσυζυγή τελεστή $S(P) : T_P M \to T_P M$ που αντιστοιχεί στην συμμετρική διγραμμική απεικόνιση $b(P)$,

$$< S(P; \xi_P), \zeta_P > = < \xi_P, S(P; \zeta_P) > = b(P; \xi_P, \zeta_P)$$

Εάν $x^1(z^1, \dots, z^n), \dots, x^{n+1}(z^1, \dots, z^n)$ τοπική παραμετροποίηση της M, οπότε $\partial x/\partial x^1, \dots, \partial x/\partial x^n$ τοπικό πλαίσιο της εφαπτομένης δέσμης της,

$$< \eta, \frac{\partial x}{\partial z^i} > = 0 \implies \nabla_{\frac{\partial x}{\partial z^j}} < \eta, \frac{\partial x}{\partial z^i} > = < \nabla_{\frac{\partial x}{\partial z^j}} \eta, \frac{\partial x}{\partial x^i} > \; + < \eta, \nabla_{\frac{\partial x}{\partial z^j}} \left(\frac{\partial x}{\partial x^i} \right) = 0 \implies$$

$$< -\nabla_{\frac{\partial x}{\partial z^i}} \eta, \frac{\partial x}{\partial x^i} > = \underbrace{< \eta, \nabla_{\frac{\partial x}{\partial z^j}} \left(\frac{\partial x}{\partial x^i} \right) >}_{b(\partial x/\partial z^j, \partial x/\partial z^i)} \implies < -\nabla_{\frac{\partial x}{\partial x^i}} \eta, \frac{\partial x}{\partial x^i} > = < S\left(\frac{\partial x}{\partial z^j} \right), \frac{\partial x}{\partial z^i} >$$

εξ ορισμού του S. Επειδή η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε i, j, από την διγραμμικότητα του εσωτερικού γινόμενου και γραμμικότητα του τελεστή σχήματος, έπεται ότι

$$S(\xi) = -\nabla_\xi \eta, \text{ για κάθε } \xi \in \mathfrak{X}(M) \qquad (5)^{(15)}$$

Καλείται **απεικόνιση *Gauss*** για την προσανατολίσιμη υπερεπιφάνεια M η λεία συνάρτηση

$$G : M \to \mathbb{S}^n, \qquad G(P) = \eta(P)$$

όπου $\eta(P)$ το μοναδιαίο κάθετο στην M διάνυσμα στο σημείο P (που συμφωνεί με τον επιλεγμένο προσανατολισμό) μεταφερμένο στην αρχή των αξόνων. Εφ' όσον η απεικόνιση *Gauss* κωδικοποιεί την μεταβολή της κατεύθυνσης του $\eta(P)$ καθώς το P διατρέχει την M, από την γεωμετρική ερμηνεία του τελεστή σχήματος αναμένεται το ακόλουθο:

VII.§7.9. (Ο τελεστής σχήματος είναι το διαφορικό της απεικόνισης *Gauss*). Εάν $G : M \to \mathbb{S}^n$ η απεικόνιση *Gauss* προσανατολίσιμης υπερεπιφάνειας $M \subset \mathbb{E}^{n+1}$ και S ο τελεστής σχήματος αυτής, τότε για κάθε $P \in M$,

$$S(P) = -dG(P)$$

Αποδ. Έστω γ λεία καμπύλη στην M με $\gamma(0) = P$ και $x^1(z^1, \dots, z^n), \dots, x^{n+1}(z^1, \dots, z^n)$ παραμετροποίηση αυτής M γύρω από το P, οπότε $\gamma(t) = x(z(t))$ και $\dot\gamma(0) = \dot z^i(0)\, \partial x/\partial z^i \big|_P$. Τότε

$$dG_P(\dot\gamma(0)) = dG_P\left(\dot z^i(0) \frac{\partial x}{\partial z^i}\Big|_P \right) = \frac{d}{dt} G(\underbrace{x(z(t))}_{\gamma(t)}) = \nabla_{\frac{\partial x}{\partial z^i}\big|_P} \dot z^i(0)$$

επομένως

$$dG_P\left(\frac{\partial x}{\partial z^i}\Big|_P \right) = \nabla_{\frac{\partial x}{\partial z^i}} G = \nabla_{\frac{\partial x}{\partial z^i}} \eta = -S\left(\frac{\partial x}{\partial z^i} \right) \qquad \blacksquare$$

VII.§7.10. Για κάθε σημείο P της υπερεπιφάνειας M, υπάρχει ορθοκανονικό σύστημα $e_1, \dots, e_n$ του $T_P M$ συγκροτούμενο από ιδιοδιανύσματα του τελεστή σχήματος $S(P)$ με αντίστοιχες μή μηδενικές, πραγματικές ιδιοτιμές $k_1 \le \dots \le k_n$. Η διγραμμική απεικόνιση $\beta(P) = < S(P), \cdot >$ εκφράζεται σε αυτή την βάση ως $\beta(P; \xi^i e_i, \eta^j e_j) = \xi^i \eta^j k_i$, και η σχετική τετραγωνική μορφή $\beta(P; \xi, \xi)$, $\xi \in T_P M$ επιτυγχάνει την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της επί της μοναδιαίας σφαίρας του $T_P M$ στις θέσεις e_1, e_n αντιστοίχως.

Αποδ. Άμεσα, εφαρμόζοντας την IV.§2.19 για τον τελεστή $S(P)$. ■

Ονομάζονται **κύριες διευθύνσεις** και **κύριες καμπυλότητες** της υπερεπιφάνειας M στο σημείο P τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές του τελεστή $S(P)$ αντιστοίχως, που προσδιορίζονται από την πρόταση VII.§7.10.

Εάν γ γεωδαισιακή της M διερχόμενη από το P με $\gamma(0) = P$, ισχύει (VII.§7.7),

$$\ddot\gamma(0) = II(\dot\gamma, \dot\gamma)\,(\gamma(0))$$

---

15. Αυτή η σχέση δικαιολογεί την ονομασία του S ως τελεστή σχήματος της M: ο S δίνει τον ρυθμό μεταβολής του μοναδιαίου κάθετου πεδίου ως προς τις εφαπτόμενες κατευθύνσεις της υπερεπιφάνειας, δηλαδή είναι μέτρο της έντασης και του τρόπου με τον οποίο η επιφάνεια συστρέφεται τοπικά.

όπου το $\ddot{\gamma} = \widetilde{D}_\gamma \dot{\gamma}$ η επιτάχυνση της γ ($\widetilde{D}$ η συναλλοίωτη παραγώγιση που επάγεται από την ευκλείδεια συνοχή *Levi-Civitá*). Εξ ορισμού της β,

$$\ddot{\gamma}(0) = \pm\beta\big(P; \dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)\big)\,\eta(P)$$

όπου το $"+"$ ισχύει όταν το $\ddot{\gamma}(0)$ είναι ομόρροπο του $\eta(P)$, ενώ το $"-"$ στην αντίθετη περίπτωση. Εάν $\dot{\gamma}(0) = e_i$ ιδιοδιάνυσμα του $S(P)$ με ιδιοτιμή k_i, τότε

$$\ddot{\gamma}(0) = \pm k_i\,\eta(P)$$

από όπου συνάγεται η ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία των κύριων διευθύνσεων και καμπυλοτήτων.

VII.§7.11. Έστω $e_1, \dots, e_n$; $k_1, \dots, k_n$ οι κύριες διευθύνσεις και οι αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες της M στο σημείο P. Εάν $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ οι διερχόμενες από το $P = \gamma_i(0)$ γεωδαισιακές της M με αντίστοιχες ταχύτητες $e_1, \dots, e_n$ και $k^1_{\varepsilon\xi}, \dots, k^n_{\varepsilon\xi}$ οι αντίστοιχες εξωτερικές καμπυλότητες στο σημείο αυτό, τότε

$$k^i_{\varepsilon\xi} = \begin{cases} +k_i, \text{ εάν } \ddot{\gamma}_i(0) \text{ ομόρροπο του } \eta(P) \\ \\ -k_i, \text{ εάν } \ddot{\gamma}_i(0) \text{ αντίρροπο του } \eta(P) \end{cases}$$

Η γνώση των κύριων καμπυλοτήτων στο σημείο P μίας υπερεπιφάνειας M προσδιορίζει ικανοποιητικά το σχήμα της M γύρω από το σημείο αυτό, αφού, από VII.§7.11, οι κύριες καμπυλότητες εμπεριέχουν όλη την πληροφορία για την ένταση και την φορά κύρτωσης των διερχόμενων από το P γεωδαισιακών με ταχύτητα τις κύριες διευθύνσεις (μέτρο και πρόσημο της κύριας καμπυλότητας αντιστοίχως). Αλλάζοντας τον προσανατολισμό της επιφάνειας, τα πρόσημα αντιστρέφονται, όμως η γεωμετρική πληροφορία για το σχήμα της επιφάνειας γύρω από το P μένει αναλλοίωτη[16].

Καμπυλότητα *Gauss* της υπερεπιφάνειας M στο σημείο P ονομάζεται η αντίθετη ορίζουσα του διαφορικού της απεικόνισης *Gauss* στο σημείο αυτό,

$$K(P) = -det\ G(P) = det\ S(P) = k_1 \dots k_n,$$

όπου $k_1, \dots, k_n$ οι κύριες καμπυλότητες της M στο P. Εφ' όσον ο τελεστής απόκλισης είναι συνεχές τανυστικό πεδίο, και επομένως οι κύριες καμπυλότητες μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο κατά μήκος της M, έπεται ότι η καμπυλότητα *Gauss* είναι συνεχής συνάρτηση πάνω στην M.

Η τοπική απόκλιση μιας υπερεπιφάνειας από το να είναι επίπεδη (δηλαδή ευκλείδειος χώρος) εννοείται, μεταξύ άλλων, ως η ένταση με την οποία συστρέφεται το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο καθώς κινείται με μοναδιαία ταχύτητα γύρω από το υπό μελέτη σημείο – ισοδύναμα, από το λόγο του όγκου που σαρώνεται από το κάθετο στην υπερεπιφάνεια διάνυσμα προς τον όγκο της $\mathbb{S}^n$ που αντιστοιχεί στην κίνηση αυτή μέσω της απεικόνισης Gauss:

VII.§7.12. Έστω P σημείο της υπερεπιφάνειας M με $K(P) \neq 0$ και U συνεκτική περιοχή του P επί της M στην οποία η καμπυλότητα *Gauss* δεν αλλάζει πρόσημο. Τότε

$$K(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{vol(G[U_n])}{vol(U_n)}$$

όπου το $vol(G[U_n])$ είναι προσημασμένο ως προς το $vol(U_n)$ (η αλλαγή προσανατολισμού από την G λαμβάνεται υπ' όψην), για κάθε ακολουθία περιοχών $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του P που περιέχεται τελικά σε κάθε σφαίρα με κέντρο P).

---

16. Ακόμη πιο συγκεκριμένα, υπολογίζεται ότι μεταφέροντας την αρχή των αξόνων στην θέση P και λαμβάνοντας ως $x^1, \dots, x^{n+1}$-ορθοκανονικούς άξονες τις κύριες διευθύνσεις $e_1, \dots, e_n$ και το κάθετο διάνυσμα $\eta(P)$, η M περιγράφεται τοπικά ως γράφημα μιας λείας πραγματικής συνάρτησης

$$x^{n+1} = f(x^1, \dots, x^n) = \frac{1}{2}(k_1(x^1)^2 + \dots + k_n(x^n)^2 + o(|x|^3)$$

Αποδ. Έστω $x^1(z^1, \dots, z^n), \dots, x^{n+1}(z^1, \dots, z^n)$ παραμετροποίηση της M γύρω από το P. Η $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχεται τελικά στην περιοχή που χαρτογραφείται από τα $z^1, \dots, z^n$, επομένως

$$vol(U_n) = \int_{x^{-1}[U_n]} \left| det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right)_{i,j} \right| dz^1 \dots dz^n$$

και

$$vol(G[U_n]) = \int_{x^{-1}[U_n]} \underbrace{dG}_{K} \left| det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right)_{i,j} \right| dz^1 \dots dz^n$$

Από θεώρημα μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού[17],

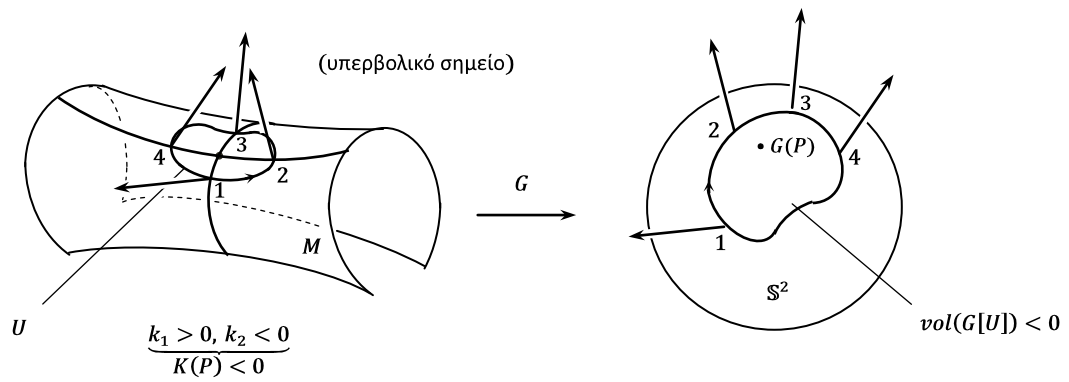
$$vol(G[U_n]) = K(P_n) \int_{x^{-1}[U_n]} \left| det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right)_{i,j} \right| dz^1 \dots dz^n$$

για κάποιο $P_n \in U_n$. Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{vol(G[U_n])}{vol(U_n)} = \lim_{n\to\infty} K(P_n) \frac{\int_{x^{-1}[U_n]} \left| det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right)_{i,j} \right| dz^1 \dots dz^n}{\int_{x^{-1}[U_n]} \left| det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right)_{i,j} \right| dz^1 \dots dz^n} = \lim_{n\to\infty} K(P_n)$$

Εφ' όσον οι περιοχές U_n του P περιέχονται τελικά σε κάθε σφαίρα με κέντρο το P, έπεται ότι $P_n \to P$. Από την συνέχεια της καμπυλότητας *Gauss* έπεται το ζητούμενο. ■

Η καμπυλότητα *Gauss* δεν προσδιορίζει εν γένει το τοπικό σχήμα της υπερεπιφάνειας, αφού διαφορετικοί συνδυασμοί προσήμων για τις κύριες καμπυλότητες μπορούν να δώσουν την ίδια καμπυλότητα *Gauss*. Για 2-διάστατες επιφάνειες εντός του 3-διάστατου ευκλείδειου χώρου ωστόσο, η καμπυλότητα *Gauss* προσδιορίζει το τοπικό σχήμα της επιφάνειας, με τις περιπτώσεις $K(P) < 0$, $K(P) = 0$, $K(P) > 0$ να αντιστοιχούν στους τρεις τύπους με τους οποίους μπορεί να συστρέφεται τοπικά μια επιφάνεια εντός αυτού (υπερβολικό, παραβολικό και ελλειπτικό σημείο).



VII.§7.13. (Η καμπυλότητα *Gauss* είναι τοπική ισομετρική αναλλοίωτος των 2-διάστατων επιφανειών εντός του 3-διάστατου ευκλείδιου χώρου). Εάν (M, g) επιφάνεια στον $\mathbb{E}^3$ με την επαγόμενη από το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο ρημάννεια μετρική και K η καμπυλότητα *Gauss* αυτής, τότε,

---

17. Εάν $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ συνεχής πάνω σε πεδίο ολοκλήρωσης Ω και $k : \Omega \to \mathbb{R}$ *Riemann*-ολοκληρώσιμη που δεν αλλάζει πρόσημο στο Ω, τότε υπάρχει $x_o \in \Omega$ τέτοιο ώστε

$$\int_\Omega Kf\, dv = K(x_o) \int_\Omega f\, dv$$

$$K(P) = \frac{R(\xi,\eta,\eta,\xi)}{|\xi|^2|\eta|^2 - <\xi,\eta>^2}$$

για κάθε βάση ξ,η του T_PM, όπου R ο τανυστής *Riemann* της (M,g).

Αποδ. Εάν $\xi = e_1, \eta = e_2$ ορθοκανονική βάση του T_PM, οπότε ο παρονομαστής στο δεξύ μέρος της ζητούμενης σχέσης είναι μονάδα, από τον εξίσωση *Gauss* έπεται ότι

$$R(e_1,e_2,e_2,e_1) = <II(e_1,e_1), II(e_2,e_2)> - <II(e_1,e_2), II(e_2,e_1)>$$

$$= \underbrace{\beta(e_1,e_1)\,\beta(e_2,e_2)}_{k_1k_2} - \underbrace{\beta(e_1,e_2)\,\beta(e_2,e_1)}_{0} = K(P)$$

Εάν ξ,η οποιαδήποτε βάση του T_PM, οπότε ορθοκανονικοποιώντας κατά *Gram-Schmidt* λαμβάνουμε την ορθοκανονική βάση

$$e_1 = \frac{\xi}{|\xi|}, \qquad e_2 = \frac{\eta - <\eta,\xi>\xi/|\xi|^2}{|\eta - <\eta,\xi>\xi/|\xi|^2|^2}$$

ισχύει

$$K(P) = R(e_1,e_2,e_2,e_1) = \frac{R(\xi,\eta - <\eta,\xi>\xi/|\xi|^2, \eta - <\eta,\xi>\xi/|\xi|^2, \xi)}{|\xi|^2\,|\eta - <\eta,\xi>\xi/|\xi|^2|^2}$$

$$= \frac{R(\xi,\eta,\eta,\xi)}{|\xi|^2\,|\eta - 2<\eta,\xi>\xi/|\xi|^2 + <\eta,\xi>\xi/|\xi|^2|^2} = \frac{R(\xi,\eta,\eta,\xi)}{|\xi|^2|\eta|^2 - <\xi,\eta>^2}$$

όπου λήφθηκε υπ' όψιν η πολυγραμμικότητα της απεικόνισης R και η συμμετρία VII.§7.1.(iii). ■

Η VII.§7.13 υποδεικνύει ότι μια έννοια καμπυλότητας *Gauss* θα ήταν χρήσιμη στην μελέτη ρημάννειων 2-διάστατων πολλαπλοτήτων ακόμη και εάν δεν λαμβάνουμε υπ' όψιν τον ευκλείδειο χώρο στον οποίο περιέχονται. Υπάρχουν 2-διάστατες ρημάννειες πολλαπλότητες που δεν εμφυτεύονται ισομετρικά στον 3-διάστατο ευκλείδειο χώρο, οπότε δεν ορίζεται γι' αυτές τελεστής σχήματος και κατ' επέκταση η καμπυλότητα *Gauss*. Εάν M 2-διάστατη ρημάννεια πολλαπλότητα και $\xi,\eta \in T_PM$, ελέγχεται ότι η βαθμωτή ποσότητα

$$\frac{R(\xi,\eta,\eta,\xi)}{|\xi|^2|\eta|^2 - <\xi,\eta>^2}$$

όπου R ο τανυστής Riemann της M, μένει αναλλοίωτη από τους στοιχειώδεις γραμμικούς μετασχηματισμούς. Επομένως, είναι εφικτός ο εξής ορισμός.

Καμπυλότητα *Gauss* της 2-διάστατης ρημάννειας πολλαπλότητας (M,g) ονομάζεται η συνάρτηση

$$K : M \to \mathbb{R}, \qquad K(P) = \frac{R(\xi,\eta,\eta,\xi)}{|\xi|^2|\eta|^2 - <\xi,\eta>^2}$$

όπου ξ,η βάση και T_PM και R ο τανυστής *Riemann* της πολλαπλότητας. Προφανώς η καμπυλότητα *Gauss* προσδιορίζεται από τον τανυστή *Riemann*, επομένως είναι τοπική ισομετρική αναλλοίωτος των δισδιάστατων ρημάννειων πολλαπλοτήτων.

VII.§7.14. (Η καμπυλότητα *Gauss* προσδιορίζει τον τανυστή *Riemann*). Εάν R ο τανυστής *Riemann* 2-διάστατης ρημάννειας πολλαπλότητας (M,g) και K η καμπυλότητα *Gauss* αυτής, τότε για κάθε τετράδα ξ,η,u,v και $P \in M$ ισχύει

$$R(\xi,\eta,\eta,\xi) = K(P)(<\xi,v><\eta,u> - <\xi,\eta><\eta,v>)$$

Αποδ. Έστω x^1, x^2 τοπικό σύστημα συντεταγμένων γύρω από το P, στο οποίο ο R προσδιορίζεται από τις ποσότητες R_{ijkl}. Από τις συμμετρίες του R και την διάσταση της πολλαπλότητας, ελέγχεται εύκολα ότι όλες αυτές οι ποσότητες προσδιορίζονται από την $R_{1221} = R(\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^1)$. Εάν το σύστημα συντεταγμένων επιλεχθεί έτσι ώστε τα $\partial/\partial x^1\,(P), \partial/\partial x^2\,(P)$ να είναι ορθοκανονική βάση του T_PM, τότε εξ ορισμού της καμπυλότητας *Gauss* ισχύει

$$K(P)\underbrace{\left(<\frac{\partial}{\partial x^1}(P),\frac{\partial}{\partial x^1}(P)><\frac{\partial}{\partial x^2}(P),\frac{\partial}{\partial x^2}(P)> - <\frac{\partial}{\partial x^1}(P),\frac{\partial}{\partial x^2}(P)><\frac{\partial}{\partial x^2}(P),\frac{\partial}{\partial x^1}(P)>\right)}_{1} =$$

$$K(P) = R_{1221}(P) \qquad \blacksquare$$

Θα χρησιμοποιηθεί η έννοια της καμπυλότητας *Gauss* 2-διάστατων επιφανειών στην μελέτη της καμπυλότητας πολλαπλοτήτων οποιασδήποτε διάστασης. Εάν (M,g) n-διάστατη ρημάννεια πολλαπλότητα, $P \in M$ και W κανονική περιοχή του P, για κάθε 2-διάστατο υποχώρο σ του T_PM ορίζεται

$$S_\sigma = exp_P[\sigma \cap W]$$

που είναι 2-διάστατη υποπολλαπλότητα της M, συγκροτούμενη από τις διερχόμενες από το P γεωδαισιακές της M με ταχύτητα στο επίπεδο σ. Καλείται **καμπυλότητα τμήσης** του σ, $\mathfrak{K}(\sigma)$, η καμπυλότητα *Gauss* της 2-διάστατης ρημάννειας υποπολλαπλότητας S_σ στο σημείο P, που προφανώς είναι ανεξάρτητη της επιλογής του W. Εάν ξ,η γραμμικώς ανεξάρτητα, συμβολίζεται

$$\mathfrak{K}(\xi,\eta) = \mathfrak{K}(span\,\{\xi,\eta\})$$

επομένως για κάθε βάση ξ,η του 2-διάστατου υποχώρου $\sigma \subset T_PM$ ισχύει $\mathfrak{K}(\sigma) = \mathfrak{K}(\xi,\eta)$.

VII.§7.15. Εάν ξ,η η βάση του 2-διάστατου υποχώρου $\sigma \subset T_PM$,

$$\mathfrak{K}(\sigma) = \mathfrak{K}(\xi,\eta) = \frac{R(\xi,\eta,\eta,\xi)}{|\xi|^2|\eta|^2 - <\xi,\eta>^2}$$

Αποδ. Εάν $R, \bar{R}$ οι τανυστές *Riemann* της M και της S_σ αντιστοίχως, εξ ορισμού ισχύει

$$\mathfrak{K}(\xi,\eta) = \frac{\bar{R}(\xi,\eta,\eta,\xi)}{|\xi|^2|\eta|^2 - <\xi,\eta>^2}$$

Εφ' όσον οι διερχόμενες από το P γεωδαισιακές της M με ταχύτητα στο σ είναι οι διερχόμενες από το P γεωδαισιακές της S_σ (εκ κατασκευής της τελευταίας), έπεται ότι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της S_σ μηδενίζεται στο P. Από την εξίσωση *Gauss* έπεται ότι $R = \bar{R}$ στο σημείο P. ■

VII.§7.16. (Η καμπυλότητα τμήσης προσδιορίζει τον τανυστή Riemann, επομένως είναι τοπική ισομετρική αναλλοίωτος). Έστω $R, \bar{R}$ $(0,4)$-τανυστικά πεδία επί της πολλαπλότητας M που ικανοποιούν τις συμμετρίες του τανυστή *Riemann* (VII.§7.1), οπότε ορίζονται καλά για κάθε 2-διάστατο υποχώρο $\sigma \subset T_PM$ και κάθε $P \in M$ οι ποσότητες

$$\mathfrak{K}(\sigma) = \frac{R(\xi,\eta,\eta,\xi)}{|\xi|^2|\eta|^2 - <\xi,\eta>^2}, \qquad \bar{\mathfrak{K}}(\sigma) = \frac{\bar{R}(\xi,\eta,\eta,\xi)}{|\xi|^2|\eta|^2 - <\xi,\eta>^2}$$

όπου ξ,η βάση του σ. Εάν $\mathfrak{K} = \bar{\mathfrak{K}}$, τότε $R = \bar{R}$ επίσης.

Αποδ. Αλγεβρικές πράξεις· βλ. [**DoC2**], σελ. 94, λήμμα 3.3. ■

Μια ρημάννεια πολλαπλότητα (M, g) είναι **σταθερής καμπυλότητας** $K \in \mathbb{R}$ όταν για κάθε2-διάστατο υποχώρο $\sigma \subset T_P M$ και κάθε $P \in M$ ισχύει

$$\mathfrak{K}(\sigma) = K$$

VII.§7.17. Κάθε ομογενής και ισότροπη ρημάννεια πολλαπλότητα είναι σταθερής καμπυλότητας.

Αποδ. Άμεσα, από VII.§7.16. ■

§8. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ JACOBI

Γεωδαισιακή μεταβολή της γεωδαισιακής καμπύλης $\gamma : [a, b] \to M$ ονομάζεται μια λεία μεταβολή $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ τέτοια ώστε για κάθε $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, η $\Gamma(s, \cdot)$ είναι επίσης γεωδαισιακή της M.

VII.§8.0. Εάν $\Gamma : (-\varepsilon\varepsilon,) \times [a, b] \to M$ λεία αποδεκτή οικογένεια και ξ διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της Γ, τότε $(D_s D_t - D_t D_s)\xi = R(\partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma, \xi)$, όπου R ο τανυστής *Riemann* της M.

Αποδ. Πράξεις, βλ. [**Lee2**], lemma 10.1, σελ. 174. ■

VII.§8.1. (**Εξίσωση Jacobi**)

Έστω γ γεωδαισιακή της ρημάννειας πολλαπλότητας M με τανυστή *Riemann* R και $\xi \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Εάν το ξ είναι μεταβολικό πεδίο κάποιας γεωδαισιακής μεταβολής της γ, τότε

$$D_{\dot\gamma}^2 \xi + R(\xi, \dot\gamma, \dot\gamma) = 0$$

Αποδ. Εάν $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ όπως στην υπόθεση, οπότε $\xi(t) = \partial_s \Gamma(0 \cdot t)$, από VII.§8.0 έπεται ότι

$$D_s D_t \partial_t \Gamma = D_t D_s \partial_t \Gamma + R(\partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma)$$

(το $\partial_t \Gamma$ είναι πεδίο κατά μήκος Γ επειδή η Γ είναι λεία). Όμως $D_t \partial_t \Gamma = 0$ (εφ' όσον $\partial_t \Gamma(s, \cdot)$ πεδίο ταχυτήτων της γεωδαισιακής $\Gamma(s, \cdot)$, επομένως $0 = D_t D_s \partial_t \Gamma + R(\partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma)$.

Από VII.§6.2, $0 = D_t D_t \partial_S \Gamma + R(\partial_S \Gamma, \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma)$. Υπολογίζοντας τις παραγώγους στην θέση $s = 0$, έπεται το ζητούμενο. ■

VII.§8.2. Κάθε λείο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος γεωδαισιακής το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση *Jacobi*, είναι μεταβολικό πεδίο κάποιας γεωδαισιακής μεταβολής.

Αποδ. [**DoC2**], σελ. 113, πρόταση 2.4. ■

Ονομάζεται **πεδίο *Jacobi*** κατά μήκος μιας γεωδαισιακής γ κάθε λείο πεδίο ξ κατά μήκος της γ που ικανοποιεί την εξίσωση *Jacobi*. Συνδιάζοντας τις VII.§8.0 και VII.§8.1, τα πεδία *Jacobi* κατά μήκος μιας γεωδαισιακής είναι ακριβώς διανυσματικά πεδία που περιγράφουν την συμπεριφορά κάποιας οικογένειας γεωδαισιακών η οποία προκύπτει ως λεία μεταβολή της γ.

Έστω $\gamma : [a, b] \to M$ γεωδαισιακή, $x = \gamma(0)$ και $e_1, \dots, e_n$ ορθοκανονική βάση του $T_x M$. Μεταφέροντας το e_i παράλληλα κατά μήκος της γ ως $e_i(t)$, λαμβάνουμε το ορθοκανονικό πλαίσιο $e_1(t), \dots, e_n(t)$ κατά μήκος της γ. Εάν $R^i_{jkl}(t)$ οι βαθμωτές ποσότητες για τις οποίες $R\left(e_j(t), e_k(t), e_l(t)\right) = R^i_{jkl}(t) e_i(t)$ και $\xi(t) = \xi^i(t) e_i(t)$, η εξίσωση *Jacobi* κατά μήκος της γ λαμβάνει την μορφή

$$\frac{d^2}{dt^2}\xi^i + R^i_{jkl}(t)\xi^j(t)\dot\gamma^k(t)\dot\gamma^l(t) = 0, \qquad i = 1, \dots, n \qquad (1)$$

VII.§8.3. Έστω $\gamma : I \to M$ γεωδαισιακή, $t_0 \in I$. Για κάθε ζεύγος $\xi, \eta \in T_{\gamma(t_0)} M$ υπάρχει μοναδικό πεδίο *Jacobi* ζ κατά μήκος της γ τέτοιο ώστε

$$\zeta(t_0) = \xi, \qquad D_{\dot\gamma}\xi = \eta$$

Αποδ. Άμεσα, από την μορφή του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1). ■

Με κάθε γεωδαισιακή γ σχετίζονται δύο πεδία *Jacobi* που δεν εμπεριέχουν καμία πληροφορία για κάποια ουσιώδη γεωδαισιακή μεταβολή της γ, τα $\zeta_0(t) = \dot\gamma(t)$ (ικανοποιεί την εξίσωση *Jacobi* με αρχικές

συνθήκες $\zeta_0(0) = \dot{\gamma}(0)$, $D_{\dot{\gamma}}\xi(0) = 0$) και $\zeta_1(t) = t\dot{\gamma}(t)$ (ικανοποιεί την εξίσωση *Jacobi* με αρχικές συνθήκες $\zeta_1(0) = 0$, $D_{\dot{\gamma}}\zeta_1(0) = \dot{\gamma}(0)$). Ελέγχεται ότι τα ζ_0, ζ_1 είναι μεταβολικά πεδία των μεταβολών

$$\Gamma(s,t) = \gamma(s+t) \quad \text{και} \quad \Gamma(s,t) = \gamma(e^s t)$$

αντιστοίχως, που είναι απλώς αναπαραμετρήσεις της γ. Γι' αυτό τα ζ_0, ζ_1 καλούνται **τετριμμένα** πεδία *Jacobi* κατά μήκος της γ.

Ένα $\xi \in \mathfrak{X}(\gamma)$, όπου γ γεωδαισιακακή, καλείται **εφαπτομενικό** όταν το $\xi(t)$ είναι συγραμμικό του $\dot{\gamma}(t)$ και **κάθετο** όταν $< \xi(t), \dot{\gamma}(t) >= 0$ για κάθε t[18].

VII.§8.4. Ένα πεδίο *Jacobi* ζ κατά μήκος της γεωδαισιακής $\gamma : I \to M$ είναι κάθετο εάν και μόνον εάν $< \zeta(t_0), \dot{\gamma}(t_0) >= 0$ και $< D_{\dot{\gamma}}\zeta(t_0), \dot{\gamma}(t_0) >=$ για κάποιο (και άρα κάθε) $t_0 \in I$.

Αποδ. Από την συμβατότητα της μετρικής, επειδή το $\dot{\gamma}$ μεταφέρεται παράλληλα κατά μήκος της γ, και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συμμετρίες του τανυστή *Riemann*,

$$\frac{d^2}{dt^2} < \zeta, \dot{\gamma} > = < D_{\dot{\gamma}}^2\zeta, \dot{\gamma} > = -< R(\zeta, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}), \dot{\gamma} > = R(\zeta, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$$

δηλαδή η ποσότητα $< \zeta(t), \dot{\gamma}(t) >$ είναι γραμμική εξάρτηση του t. Επομένως, τα $\zeta(t_0)$, $D_{\dot{\gamma}}^2\zeta(t_0)$ είναι κάθετα στο $\dot{\gamma}(t_0)$ εάν και μόνον εάν η ποσότητα $< \zeta(t_0), \dot{\gamma}(t_0) >$ είναι ταυτοτικά μηδέν. ■

VII.§8.5. Εάν ένα πεδίο *Jacobi* είναι κάθετο σε δύο σημεία της γεωδαισιακής, τότε είναι κάθετο παντού.

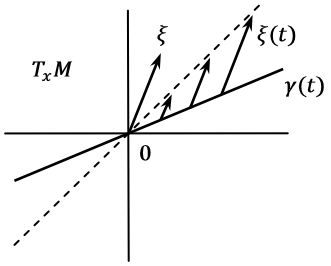
Αποδ. Επειδή η ποσότητα $< \zeta(t), \dot{\gamma}(t) >$ είναι γραμμική εξάρτηση του t (βλ. απόδειξη VIII.§8.4). ■

VII.§8.6. Έστω γεωδαισιακή γ διερχόμενη από το σημείο $x \in M$. Επιλέγουμε κανονική περιοχή του x που χαρτογραφείται μέσω της εκθετικής απεικόνισης από τις καρτεσιανές συντεταγμένες $x^1, \dots, x^n$ (οπότε οι διερχόμενες από το x γεωδαισιακές αναπαρίστανται τοπικά ως οι διερχόμενες από το 0 ευθείες). Τότε για κάθε $\xi = \xi^i\, \partial/\partial x^i$, το πεδίο *Jacobi* ζ κατά μήκος της γ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$\zeta(0) = x, \qquad D_{\dot{\gamma}}\zeta(0) = \xi$$

περιγράφεται από τις συντεταγμένες $x^1, \dots, x^n$ ως $\zeta(t) = t\, \xi^i\, \partial/\partial x^i$.

Αποδ. Είναι αναμενόμενο επειδή κάθε λεία γεωδαισιακή μεταβολή της γ με σταθερό αρχικό σημείο αναπαρίσταται στο σύστημα $x^1, \dots, x^n$ ως οικογένεια ευθειών διερχόμενων από το μηδέν η οποία διαγράφει συνεχή γωνία:



Για τις πράξεις, βλ. [**Lee2**], lemma 10.7, σελ. 178. ■

Το σύστημα (1) γράφεται σε διανυσματική μορφή

$$\frac{d^2}{dt^2}\xi + R(\xi, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$$

Όμως $R(\xi, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = grad\, U$, όπου

---

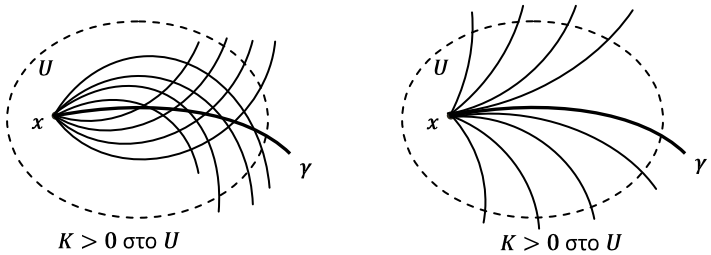
18. Η εφαπτομενική συνιστώσα ενός πεδίου *Jacobi* δεν συνεισφέρει ουσιωδώς στην σχετική γεωδαισιακή μεταβολή (εκφράζει μόνο αναπαραμέτρηση της γεωδαισιακής). Επομένως για την μελέτη των γεωδαισιακών μεταβολών χρησιμοποιείται η κάθετη συνιστώσα· ισοδύναμα, τα πεδία *Jacobi* κατά μήκος της γ μπορούν να θεωρούνται κάθετα σε αυτήν.

$$U = \frac{1}{2} < R(\xi, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}), \xi > = \frac{1}{2} R(\xi, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \xi) = K(\xi, \dot{\gamma}) \left(|\xi|^2 |\dot{\gamma}|^2 - < \xi, \dot{\gamma} >^2 \right)$$

Εάν το πεδίο *Jacobi* ξ είναι κάθετο στην γεωδαισιακή, οπότε $< \xi, \dot{\gamma} >^2 = 0$, η εξίσωση γίνεται

$$\frac{d^2}{dt^2} \xi + \frac{1}{2} grad\, K(\xi, \dot{\gamma}) \cdot |\xi|^2 |\dot{\gamma}|^2 = 0 \qquad (2)$$

Δηλαδή οι συντεταγμένες κάθετου στην γεωδαισιακή γ πεδίου *Jacobi* σε ορθοκανονικό σύστημα παράλληλα μεταφερμένο κατά μήκος αυτής, περιγράφουν την κίνηση μή αυτόνομου γραμμικού ταλαντωτή, το δυναμικό του οποίου ισούται με το γινόμενο της των $|\xi|$, $|\dot{\gamma}|$ και της καμπυλότητας τμήσης του $\xi, \dot{\gamma}$-επιπέδου. Από αυτές της παρατηρήσεις, εάν x σημείο γύρω από το οποίο η καμπυλότητα είναι θετική (αντ. αρνητική), οι γεωδαισιακές που προκύπτουν από σταθεροποιούσα το x γεωδαισιακή μεταβολή της γ συγκλίνουν (αντ. αποκλίνουν), όπως υπαγορεύεται από την ταλαντωτική κίνηση του αντίστοιχου πεδίου *Jacobi* κατά μήκος της γ[19].



$K > 0$ στο U $\qquad$ $K > 0$ στο U

Ειδικά σε χώρους σταθερής καμπυλότητας K, η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (2) δίνει το εξής.

VII.§8.7. Εάν $\gamma : [0, b^-] \to M$ γεωδαισιακή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας σε ρημάννεια πολλαπλότητα σταθερής καμπυλότητας K, τότε τα κάθετα στην γ πεδία *Jacobi* τα οποία μηδενίζονται στην θέση $t = 0$ είναι ακριβώς της μορφής

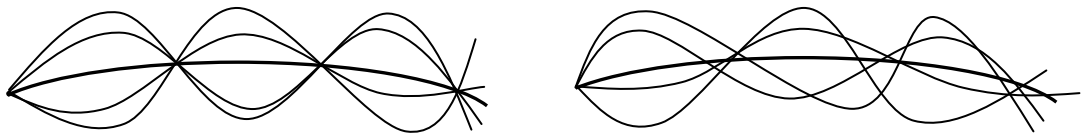
$$\zeta(t) = w(t)\theta(t)$$

όπου $\theta(t)$ οποιοδήποτε παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ που είναι κάθετο σε αυτήν και

$$w(t) = \begin{cases} t & , \quad K = 0 \\ R sin(t/R) & , \quad K = +1/R^2 > 0 \\ R sinh(t/R) & , \quad K = -1/R^2 < 0 \end{cases}$$

Αποδ. [**Lee2**], lemma 10.8, σελ. 179. ■

Από VII.§8.7 συνάγεται ότι οι γεωδαισιακές μιας γεωδαισιακής μεταβολής σε χώρους θετικής σταθερής καμπυλότητας R^{-2} με κοινό αρχικό σημείο τέμνονται από κοινού σε διαδοχικά σημεία της αρχικής γεωδαισιακής με περίοδο $1/R$. Αντιθέτως σε χώρους μη σταθερής θετικής καμπυλότητας, δεν ταλαντώνεται ομαλά και οι γεωδαισιακές δεν τέμνονται με τόσο κανονικό τρόπο.



σταθερή θετική καμπυλότητα $\qquad$ μή σταθερή θετική καμπυλότητα

Εάν η ρημάννεια πολλαπλότητα M είναι πλήρης, η exp_x ορίζεται σε ολόκληρον τον $T_x M$ και είναι τοπική αμφιδιαφόριση γύρω από το μηδέν. Ωστόσο αποτυγχάνει να είναι αμφιδιαφόριση γύρω από σημεία επαρκώς μακριά από το μηδέν. Από VII.§8.6, τα σημεία στα οποία μηδενίζεται ένα κάθετο πεδίο *Jacobi*

19. Στην περίπτωση της αρνητικής καμπυλότητας μάλιστα, η απόκλιση μίας οικογένειας γεωδαισιακών με κοινό αρχικό σημείο έχει με κάποια έννοια εκθετική τάξη, βλ. [**Arn**], σελ. 312-317.

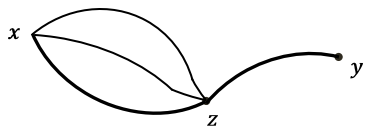
βρίσκονται οπωσδήποτε εκτός της περιοχής του 0 στην οποία η exp_X είναι αμφιδιαφόριση, όπως αναμενόταν: ο μηδενισμός ενός κάθετου πεδίου *Jacobi* εντός αυτής της περιοχής θα σήμαινε ότι υπάρχουν γεωδαισιακά τόξα που ξεκινούν από το x και τέμνονται σε αυτήν (αδύνατον, επειδή οι γεωδαισιακές που ξεκινούν από το $x \approx 0$ αναπαρίστανται ως ευθείες στην περιοχή αυτή). Πιο συγκεκριμένα ισχύει το εξής.

VII.§8.8. Έστω $x \in M$, $\xi \in T_xM$ και $y = exp_x\xi$. Η exp_x είναι τοπική αμφιδιαφόριση γύρω από το ξ εάν και μόνον εάν το y δεν είναι συζυγές σημείο του x κατά μήκος της γεωδαισιακής $\gamma(t) = exp_x t\xi$.

Εάν γ γεωδαισιακό τόξο από το x στο y, το y καλείται **συζυγές** του x κατά μήκος της γ εάν υπάρχει μή ταυτοτικά μηδενικό πεδίο *Jacobi* ζ κατά μήκος της γ τέτοιο ώστε $\zeta(x) = 0$, $\zeta(y) = 0$.

VII.§8.9. Εάν γ γεωδαισιακό τόξο από το x στο y που περιέχει σημείο συζυγές του x, τότε το γ δεν είναι τόξο ελαχίστου μήκους.

Αποδ. (*Εξήγηση*) Εάν υπάρχει συζυγές σημείο z, τότε έχουμε γεωδαισιακή μεταβολή της μορφής



Εάν ήταν ελαχίστου μήκους, τότε θα κατασκευάζαμε τεθλασμένη γεωδαισιακή ελαχίστου μήκους –άτοπο, αφού αυτή μπορεί πάντοτε να λειανθεί σε καμπύλη γνησίως μικρότερου μήκους (όπως στην απόδειξη της VII.§6.3). Βέβαια, δεν είναι γνωστό αν οι γεωδαισιακές διέρχονται όλες από το συζυγές σημείο, αλλά το επιχείρημα λειτουργεί τουλάχιστον σε χώρους σταθερής καμπυλότητας. ■

Γεωμετρικές δομές

§1. ΟΙ ΜΟΡΦΕΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

VIII.§1.0. Εάν $f_1, f_2 : M \to N$ τοπικές ισομετρίες τέτοιες ώστε $f_1(P) = f_2(P)$ και $df_1(P) = df_2(P)$ για κάποιο $P \in M$, τότε $f_1 = f_2$.

Αποδ. Έστω W κανονική περιοχή του P τέτοια ώστε $f_i\big|_W$ αμφιδιαφορίσεις (οι τοπικές ισομετρίες μεταξύ ρημάννειων πολλαπλοτήτων είναι τοπικές αμφιδιαφορίσεις από θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης). Τότε η $f_1^{-1} \circ f_2 = \varphi : W \to W$ είναι αμφιδιαφόριση με $\varphi(P) = P$ και $d\varphi(P) = id$. Λόγω αντιμεταθετικότητας του παρακάτω διαγράμματος, $\varphi = id$, επομένως $f_1 = f_2$ στο W.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "exp_P"'] & W \arrow[d, "exp_P"] \\
exp_P{}^{-1}W \arrow[r, "d\varphi(P) = id"'] & exp_P{}^{-1}W
\end{tikzcd}$$

Έστω τώρα $Q \in M$ τυχαίο και καμπύλη $\gamma : [0,1] \to M$ τέτοια ώστε $\gamma(0) = P, \gamma(1) = Q$. Ορίζουμε $t_0 = sup\ \{ t \in [0,1] \mid f_1(\gamma(t)) = f_2(\gamma(t))\}$. Από τα ποηγούμενα, $t_0 \gneqq 0$. Εάν $t_0 < 1$, επαναλαμβάνουμε επιχείρημα όμοιο του προηγουμένου για να καταλήξουμε σε άτομο. ■

VIII.§1.1. (Οι διαστολές από πλήρη πολλαπλότητα που είναι τοπικές αμφιδιαφορίσεις είναι επικαλύψεις). Εάν $f : (M, g) \to (N, \tilde{g})$ τοπική αμφιδιαφόριση πάνω σε γεωδαισιακά πλήρη πολλαπλότητα τέτοια ώστε $\left|df_P\xi\right|_N \geq \left|\xi\right|_M$ για κάθε $P \in M$, $\xi \in T_PM$, τότε η f είναι επικάλυψη.

Αποδ. Από πρόταση VI.§1.5, αρκεί για το τυχαίο μονοπάτι $\gamma : [0,1] \to M$ και τυχαίο $y \in f^{-1}(\gamma(0))$ να βρεθεί $\bar{\gamma} : [0,1] \to M$ τέτοιο ώστε $f \circ \bar{\gamma} = \gamma$ και $\bar{\gamma}(0) = y$. Εφ' όσον η f είναι αμφιδιαφόριση γύρω από το y, η γ ανυψώνεται τοπικά ως $\bar{\gamma} = f^{-1} \circ \gamma$. Λαμβάνουμε την μεγιστική επέκταση της $\bar{\gamma}$ σε $I \subset [0,1]$ συνεκτικό διάστημα που περιέχει το 0. Επειδή η επέκταση γίνεται διαδοχικά χάρις την τοπική αμφιδιαφορισιμότητα της f, το I είναι τελικά ανοικτό στο $[0,1]$. Θα δειχθεί ότι $t_0 = supI \in I$, οπότε το I είναι επίσης κλειστό στο $[0,1]$, άρα $I = [0,1]$ λόγω συνεκτικότητας και η γ ανυψώνεται ολόκληρη.

Εάν $(t_n) \subset I$ με $t_n \to t_0$, τότε η ακολουθία $\bar{\gamma}(t_n)$ περιέχεται σε συμπαγή περιοχή K της M: εάν όχι, τότε από το (ε) του Hopf-Rinow,

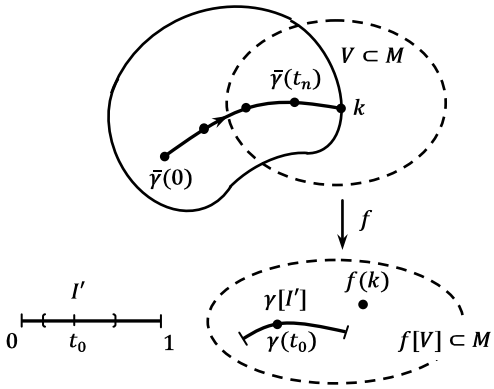
$$d\big(\bar{\gamma}(0), \bar{\gamma}(t_n)\big) \to \infty \qquad (1)$$

Συμβολίζοντας $L_{0,t}(\gamma)$ το μήκος της καμπύλης γ στο διάστημα $[0, t]$,

$$L_{0,t_n}(\gamma) = \int_0^{t_n} \left|\dot{\gamma}\right|_N dt = \int_0^{t_n} \left| df_{\bar{\gamma}(t)}\dot{\bar{\gamma}}(t)\right|_M dt \geq \int_0^{t_n} \left|\dot{\gamma}\right|_N dt = L_{0,t_n}(\bar{\gamma}) \geq d\big(\bar{\gamma}(0), \bar{\gamma}(t_n)\big)$$

που λόγω της (1) δίνει $L_{0,t_n}(\gamma) \to \infty$. Επομένως η καμπύλη γ είναι απείρου μήκους, άτοπο.

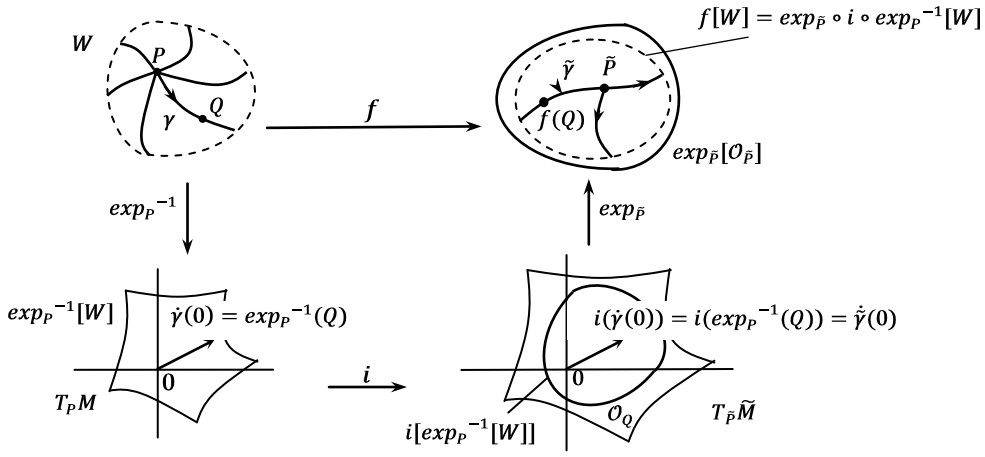
Επιλέγουμε $k \in K$ στο οποίο τείνουν τα $\bar{\gamma}(t_n)$, $n \in \mathbb{N}$ και V περιοχή του k τέτοια ώστε $f\big|_V$ να είναι αμφιδιαφόριση. Τότε $\gamma(t_0) \in f[V]$ και λόγω συνέχειας της γ, υπάρχει διάστημα I' γύρω από το t_0 τέτοιο ώστε $\gamma[I'] \subset f[V]$.



Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\bar{\gamma}(t_n) \in V$ και $\hat{\gamma}$ την ανύψωση $\gamma\big|_I$ που διέρχεται από το k. Τότε $\bar{\gamma}, \hat{\gamma}$ συμπίπτουν στο $[0, t_n] \cap I$ εφ' όσον $f\big|_V$ αμφιδιαφόριση. Άρα $\hat{\gamma}$ επέκταση του γ στο I', δηλαδή $\bar{\gamma}$ ορίζεται στο t_0. Άρα $t_0 \in I$, που είναι το ζητούμενο. ■

Έστω $P, \tilde{P}$ σημεία στις ρημάννειες πολλαπλότητες (M, g), $(\widetilde{M}, \tilde{g}$ αντιστοίχως και $i : T_P M \to T_{\tilde{P}}\widetilde{M}$ γραμμική ισομετρία. Επιλέγουμε κανονική περιοχή W του P τέτοια ώστε $i[exp_P{}^{-1}W] \subset \mathcal{O}_{\tilde{P}}$, δηλαδή η $exp_{\tilde{P}}$ να ορίζεται στο $i \circ exp_P{}^{-1}W$, και ορίζουμε

$$f : W \to \widetilde{M}, \quad f(Q) = exp_{\tilde{P}} \circ i \circ exp_P{}^{-1}(Q)$$



Συμβολίζεται $\tilde{\gamma}$ η μοναδική γεωδαισιακή στην $\widetilde{M}$ που προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες $\tilde{\gamma}(0) = f\big(\gamma(0)\big) = f(P) = \tilde{P}$ και $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = i(\dot{\gamma}(0))$, επομένως $\tilde{\gamma}(t) = f(Q)$ εάν $\gamma : [0, t] \to M$ το μοναδικό εντός της κανονικής περιοχής W γεωδαισιακό τόξο από το P στο Q. Συμβολίζεται H_γ^t η ολονομία κατά μήκος του γ από το $P = \gamma(0)$ στο $\gamma(t)$ και $H_{\tilde{\gamma}}^t$ η ολονομία κατά μήκος του $\tilde{\gamma}$ από το $\tilde{P} = \tilde{\gamma}(0)$ στο $\tilde{\gamma}(t)$. Ορίζεται για κάθε $Q \in W$ η απεικόνιση

$$\varphi_Q : T_Q M \to T_{f(Q)}\widetilde{M}, \qquad \varphi_Q(\xi) = H_{\tilde{\gamma}}^{t_Q} \circ i \circ H_\gamma^{t_Q}(\xi)$$

όπου $\gamma : [0, t_Q] \to M$ το μοναδικό γεωδαισιακό τόξο εντός της W με $\gamma(0) = P$, $\gamma(t_Q) = Q$.

$$\begin{tikzcd} T_Q M \arrow[r, "\varphi_Q"] \arrow[d, "H_\gamma^{t_Q}"'] & T_{f(Q)}\widetilde{M} \arrow[d, "H_{\tilde{\gamma}}^{t_Q}"] \\ T_P M \arrow[r, "i"'] & T_{f(P)}M \end{tikzcd}$$

VIII.§1.2. Με τον παραπάνω συμβολισμό, εάν για κάθε $Q \in W$ και κάθε $\xi, \eta, u, v \in T_Q M$ ισχύει

$$\underbrace{< R(\xi, \eta, u), v >_g}_{R(\xi, \eta, u, v)} = \underbrace{< \tilde{R}\left(\varphi_Q(\xi), \varphi_Q(\eta), \varphi_Q(u)\right), \varphi_Q(v) >_{\tilde{g}}}_{\tilde{R}\left(\varphi_Q(\xi),\ \varphi_Q(\eta),\ \varphi_Q(u),\ \varphi_Q(v)\right)}$$

τότε η $f : W \to f[W]$ είναι ισομετρία με $df(P) = id$.

Αποδ. Έστω $Q \in W$ και $\gamma : [0, l] \to W$ το μοναδικό γεωδαισιακό τόξο από το P στο Q εντός του W, παραμετρημένο ώστε να έχει μοναδιαία ταχύτητα, και $\xi \in T_Q M$. Επιλέγουμε J πεδίο *Jacobi* κατά μήκος της γ με $J(0) = 0, J(l) = \xi$. Έστω επίσης $e_1, \dots, e_n = \dot{\gamma}(0)$ ορθοκανονική βάση του $T_Q M$ και $e_1(t), \dots, e_n(t)$ η παράλληλη μεταφορά αυτής κατά μήκος του γ, οπότε $J(t) = J^i(t)\, e_i(t)$. Από την εξίσωση *Jacobi*, εφ' όσον $\dot{\gamma}(t) = e_n(t)$, συνάγεται ότι

$$\ddot{J}^{\,i}(t) + < R\big(e_j(t), e_n(t), e_n(t)\big), e_i(t) > \dot{J}^{\,i}(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n \qquad (1)$$

Ορίζεται πεδίο $\tilde{J}$ κατά μήκος της $\tilde{\gamma}$, $\tilde{J}(t) = \varphi_{\gamma(t)}(J(t))$. Συμβολίζοντας $\tilde{e}_i(t) = \varphi_{\gamma(t)}(e_i(t))$, από την γραμμικότητα της $\varphi_{\gamma(t)}$ έπεται ότι $\tilde{J}(t) = J^i(t)\, \tilde{e}_i(t)$. Εξ υποθέσεως,

$$< R\big(e_j(t), e_n(t), e_n(t)\big), e_i(t) > = < \tilde{R}\big(\tilde{e}_j(t), \tilde{e}_n(t), \tilde{e}_n(t)\big), \tilde{e}_i(t) >$$

επομένως το $\tilde{J}(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση *Jacobi*, άρα είναι πεδίο *Jacobi*. Εφ' όσον η ολονομία είναι ισομετρία και η i είναι ισομετρία, $\left|\tilde{J}(t)\right| = \left|J(t)\right|$ για κάθε t, και ειδικότερα, $\left|\tilde{J}(l)\right| = \left|J(l)\right|$. Εφ' όσον $J(l) = \xi$, για να προκύψει το ζητούμενο αρκεί να δειχθεί ότι $df_Q(\xi) = \tilde{J}(l)$. Εξ ορισμού του $\tilde{J}$,

$$\dot{\tilde{J}}(0) = i\, \dot{J}(0) \qquad (2)$$

Επειδή $J(0) = 0$ και $\tilde{J}(0) = 0$, από πόρισμα 2.5 του κεφαλαίου 5 στο [**DoC2**] έπεται ότι

$$J(t) = d\, exp_P\ \left(t\, \dot{\gamma}(0)\, ;\, t\, \dot{J}(0)\right) \quad \text{και} \quad \tilde{J}(t) = d\, exp_{\tilde{P}}\left(t\, \dot{\tilde{\gamma}}(0);\, t\, \dot{\tilde{J}}(0)\right)$$

Επομένως από (2) έπεται ότι

$$\tilde{J}(l) = d\, exp_{\tilde{P}}\ \left(l\, \dot{\tilde{\gamma}}(0)\, ;\, l\, i\, \dot{\tilde{J}}(0)\right) = \underbrace{d\, exp_{\tilde{P}}\big|_{l\, \dot{\tilde{\gamma}}(0)} \circ i \circ \left(d\, exp_P\big|_{l\, \dot{\gamma}(0)}\right)^{-1}}_{df_Q} (\, J(l)\,) \qquad \blacksquare$$

VIII.§1.3. Εάν $M, \widetilde{M}$ ρημάννειες πολλαπλότητες με ίση σταθερή βαθμωτή καμπυλότητα, τότε για κάθε $P \in M$, $\tilde{P} \in \widetilde{M}$ και κάθε ζεύγος ορθοκανονικών βάσεων $e_1, \dots, e_n$; $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ των εφαπτόμενων χώρων $T_P M$, $T_{\tilde{P}}\widetilde{M}$ αντιστοίχως, υπάρχουν περιοχές $W, \widetilde{W}$ των $P, \tilde{P}$ αντιστοίχως και ισομετρία $f : W \to \widetilde{W}$ για την οποία ισχύει $df_P(e_i) = \tilde{e}_i$.

Αποδ. Εφ' όσον $M, \widetilde{M}$ έχουν ίση σταθερή βαθμωτή καμπυλότητα, οι αντίστοιχες ποσότητες που χαρακτηρίζουν τον τανυστή *Riemann* κάθε μιας από αυτές είναι ίσες (και σταθερές). Επομένως οι υποθέσεις της VIII.§1.2 ικανοποιούνται, και επιλέγοντας την ισομετρία $i(e_i) = \tilde{e}_i$ λαμβάνουμε την ζητούμενη f. ■

VIII.§1.4. Για κάθε ζεύγος P, Q σημείων σε ρημάννεια πολλαπλότητα M με σταθερή βαθμωτή καμπυλότητα και κάθε ζεύγος ορθοκανονικών βάσεων $e_1, \dots, e_n$; $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ των εφαπτόμενων χώρων $T_P M$, $T_Q M$ αντιστοίχως, υπάρχουν περιοχές W, U των P, Q αντιστοίχως και ισομετρία $f : W \to U$ με $f(P) = Q$ και $df_P(e_i) = \tilde{e}_i$.

Αποδ. Άμεση εφαρμογή της VIII.§1.3 με $M = \widetilde{M}$. ■

VIII.§1.5. (*Hadamard*). Εάν (M, g) απλά συνεκτική και γεωδαισιακά πλήρης ρημάννεια πολλαπλότητα τέτοια ώστε $K(P, \sigma) \leq 0$ για κάθε $P \in M$ και σ 2-διάστατο υπόχωρο του $T_P M$, τότε η M είναι διφφεομορφική με τον $\mathbb{R}^n$· συγκεκριμένα, για κάθε $P \in M$ η $exp_P : T_P M \to M$ είναι αμφιδιαφόριση.

Αποδ. Εφ' όσον $K(P, \sigma) \leq 0$ παντού, από VII.§8.8, το P δεν έχει συζυγή σημεία και η απεικόνιση $exp_P : T_P M \to M$ είναι τοπική αμφιδιαφόριση. Επειδή M γεωδαισιακά πλήρης, από θεώρημα *Hopf-Rinow*, κάθε σημείο της M συνδέεται με το P μέσω γεωδαισιακού τόξου, επομένως η $exp_P : T_P M \to M$ είναι επίσης επί. Αφού η exp_P είναι επί και αμφιδιαφόριση, λαμβάνοντας τοπικούς εφελκυσμούς της g μέσω της exp_P, εφοδιάζουμε τον $T_P M$ με μετρική τέτοια ώστε η exp_P να είναι τοπικά ισομετρικός επιμορφισμός. Από τις ιδιότητες της εκθετικής απεικόνισης, οι γεωδαισιακές της M είναι οι διερχόμενες από το 0 ευθείες, άρα η $T_P M$ είναι γεωδαισιακά πλήρης. Από VIII.§1.1, η exp_P είναι επικάλυψη, και επειδή η M είναι απλά συνεκτική, έπεται ότι είναι αμφιδιαφόριση. ■

VIII.§1.6. Η καθολική επικάλυψη γεωδαισιακά πλήρους n-διάστατης ρημάννειας πολλαπλότητας σταθερής καμπυλότητας K, εάν εφοδιαστεί με την καλύπτουσα μετρική, καθίσταται ρημάννεια πολλαπλότητα ισομετρική με την $\mathbb{H}^n, \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$, εάν $K = -1, 0, +1$ αντιστοίχως.

Αποδ. Έστω (M, g) ρημάννεια πολλαπλότητα όπως στην υπόθεση με καθολική μετρική επικάλυψη $q : (\widetilde{M}, q_* g) \to (M, g)$. Τότε η q είναι τοπική ισομετρία, οπότε η $\widetilde{M}$ έχει σταθερή βαθμωτή καμπυλότητα K. Από το θεώρημα *Hopf-Rinow* συνάγεται επίσης εύκολα ότι η $\widetilde{M}$ είναι γεωδαισιακά πλήρης, ως μετρική επικάλυψη γεωδαισιακά πλήρους ρημάννειας πολλαπλότητας. Επομένως αρκεί να δειχθεί ότι κάθε απλά συνεκτική και γεωδαισιακά πλήρης n-διάστατη ρημάννεια πολλαπλότητα σταθερής βαθμωτής καμυλότητας K, είναι ισομετρική της $\mathbb{H}^n, \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ εάν $K = -1, 0, +1$ αντιστοίχως.

Εάν $K = -1, 0$, συμβολίζουμε $N = \mathbb{H}^n$, $\mathbb{E}^n$ αντιστοίχως, επιλέγουμε $P \in N$, $Q \in M$ και γραμμική ισομετρία $i : T_P N \to T_Q M$. Θεωρούμε τον επιμορφισμό $f : N \to M$, $f = exp_Q \circ i \circ {exp_P}^{-1}$, που ορίζεται καλά λόγω πληρότητας των N, M και εφ' όσον η καμπυλότητα είναι μη θετική (οπότε το P δεν έχει συζυγή σημεία). Από VIII.§1.2, εφ΄ όσον η N έχει ίση σταθερή καμπυλότητα με την M και άρα τοπικά ίδιους τανυστές *Riemann*, η f είναι τοπική ισομετρία. Από VIII.§1.1, η f είναι επικάλυψη, άρα αμφιδιαφόριση (εφ' όσον M απλά συνεκτική), επομένως η f είναι ισομετρία, ως τοπική ισομετρία και αμφιδιαφόριση.

Εάν $K = +1$, επιλέγουμε $P \in \mathbb{S}^n$, $Q \in M$ και γραμμική ισομετρία $i : T_P \mathbb{S}^n \to T_Q M$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{S}^n \setminus \{-P\} \to M$, $f = exp_Q \circ i \circ {exp_P}^{-1}$, που ορίζεται καλά επειδή το συζυγές σημείο σημείου της σφαίρας είναι ο αντίποδάς του. Από VIII.§1.2, η f είναι τοπική ισομετρία. Επιλέγουμε $P' \in \mathbb{S}^n \setminus \{\pm P\}$ και $Q' = f(P')$, $i' = df(P')$. Ορίζουμε $f' : \mathbb{S}^n \setminus \{-P'\} \to M$, που ορίζεται καλά για τον ίδιο λόγο όπως προηγουμένως, και από VIII.§1.2 είναι ισομετρία. Το $\mathbb{S}^n \setminus \{-P, -P'\}$ είναι συνεκτικό, και για το $P' \in \mathbb{S}^n \setminus \{-P, -P'\}$ ισχύει $f(P') = f'(P')$, $df(P') = i' = df'(P')$. Από πρόταση VIII.§1.0, $f = f'$ στο $\mathbb{S}^n \setminus \{-P, -P'\}$, επομένως ορίζεται καλά η απεικόνιση

$$h : \mathbb{S}^n \to M, \qquad h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{S}^n \setminus \{-P\} \\ f'(x), & x \in \mathbb{S}^n \setminus \{-P'\} \end{cases}$$

Η h είναι τοπική ισομετρία (εφ' όσον οι f, f' είναι τοπικές ισομετρίες) και άρα τοπική αμφιδιαφόριση. Από συμπάγεια της $\mathbb{S}^n$, η h είναι επικάλυψη, επομένως αμφιδιαφόριση, εφ' όσον M απλά συνεκτική. Άρα η f είναι ισομετρία, ως αμφιδιαφόριση και τοπική ισομετρία. ■

Ονομάζεται **μορφή του χώρου** μια γεωδαισιακά πλήρης ρημάννεια πολλαπλότητα σταθερής βαθμωτής καμπυλότητας. Πολλαπλασιάζοντας την μετρική της με κατάλληλο σταθερό παράγοντα, κάθε μορφή του χώρου μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει καμπυλότητα $-1, 0$ ή $+1$.

VIII.§1.7. Μια ρημάννεια πολλαπλότητα είναι μορφή του χώρου εάν και μόνον εάν κάποια (και τότε κάθε) μετρική επικάλυψη αυτής είναι μορφή του χώρου.

Αποδ. Χρησιμοποιώντας το θέωρημα *Hopf-Rinow*, η γεωδαισιακή πληρότητα κληροδοτείται μέσω της μετρικής επικάλυψης από την επικαλύπτουσα πολλαπλότητα στην επικαλυπτόμενη και αντιστρόφως. Επίσης, η μετρική επικάλυψη σέβεται την βαθμωτή καμπυλότητα ως τοπική ισομετρία. ■

VIII.§1.8. Κάθε n-διάστατη μορφή του χώρου είναι ο τροχιακός χώρος της $\mathbb{H}^n, \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$, αντιστοίχως εάν $K = -1, 0, +1$, κάτω από την ελεύθερη και γνήσια δράση διακριτής ομάδας ισομετριών.
Αποδ. Συνδυάζοντας τις προτάσεις VI.§6.13 και VIII.§1.7. ■

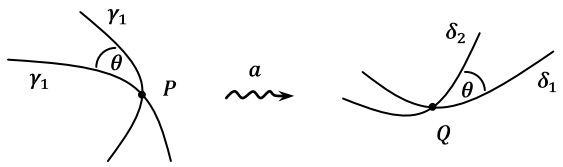
Επομένως το πρόβλημα της ταξινόμησης των μορφών του χώρου ανάγεται στον προσδιορισμό των δρώντων γνήσια και ελεύθερα διακριτών υποομάδων της ομάδας των ισομετριών των ρημάννειων πολλαπλοτήτων $\mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Η ισότητα δύο σχημάτων A, B στο $\mathbb{E}^2$ εκφράζεται –χωρίς αναφορά σε μεγέθη των σχημάτων αυτών[1]– λέγοντας ότι υπάρχει *στερεά κίνηση* φ του επιπέδου ($\varphi \in O(2)$) τέτοια ώστε $\varphi(A) = B$. Αυτή η διατύπωση είναι ουσιωδώς ελεύθερη από ευκλείδειους όρους· θεωρώντας διαφορική πολλαπλότητα M υποκείμενη στην δράση μιας ομάδας *Lie* G, η *ισότητα* στην δομή (G, M) εννοείται ως ταύτιση κάτω από την δράση της G: δύο υποσύνολα A, B λέγεται ότι ισούνται όταν υπάρχει μετασχηματισμός $\varphi \in G$ με $\varphi(A) = B$. Αυτή η έννοια ισότητας είναι σημαντική όταν η δράση της G διατηρεί την επιπλέον δομή με την οποία η M είναι ενδεχομένως εφοδιασμένη: εάν η G αφήνει αναλλοίωτες ακριβώς εκείνες τις ιδιότητες των σχημάτων της M[2] που εκλαμβάνονται ως ουσιώδεις, η ταύτιση κάτω από την δράση της G σημαίνει ισότητα μεταξύ σχημάτων που διαφέρουν κατά μη ενδιαφέροντα τρόπο. Εάν η M είναι ρημάννεια πολλαπλότητα, οπότε σε αυτήν ενυπάρχουν ουσιωδώς οι έννοιες του μεγέθους και της αναλογίας, και G η ομάδα των ισομετριών της, τότε η ισότητα στην δομή (G, M) έχει προφανές γεωμετρικό περιεχόμενο.

Καλείται **γεωμετρική δομή** ένα ζεύγος (G, M), όπου M ρημάννεια πολλαπλότητα και G η ομάδα των ισομετριών της. Ενδιαφέρουν οι γεωμετρικές δομές που χρησιμεύουν ως μοντέλα των διαφόρων γεωμετρικών αξιωματικών συστημάτων, με τα σημεία και τις γεωδαισιακές της πολλαπλότητας να ερμηνεύονται ως σημεία και ευθείες αντιστοίχως του εκάστοτε τυπικού συστήματος, δηλαδή οι δομές στις οποίες κάθε ζεύγος διακεκριμένων σημείων συνδέονται με γεωδαισιακό τόξο. Μια ικανή συνθήκη γι' αυτό είναι η γεωδαισιακή πληρότητα, που ισοδυναμεί με ακολουθιακή πληρότητα (θεώρημα *Hopf-Rinow*): η γεωδαισιακή πληρότητα, που διασφαλίζει ότι στην γεωμετρική δομή είναι εφικτές οι στοιχειώδεις κατασκευές που υποδεικνύονται από τα γεωμετρικά αξιωματικά συστήματα, σημαίνει επιπλέον ότι η μετρική δομή της πολλαπλότητας προσιδιάζει σε εκείνη του φυσικού χώρου (θεώρημα *Cantor* της πραγματικής ανάλυσης). Κατά την μελέτη ενός σχήματος στον φυσικό χώρο είναι συνήθως αδιάφορη η θέση του μέσα σ' αυτόν, επομένως γεωμετρικό ενδιαφέρον έχουν οι δομές στις οποίες η δράση της G είναι μεταβατική (ομογενείς γεωμετρικές δομές).

Η σύγκριση γεωμετρικών σχημάτων επιτυγχάνεται συχνά με την στερεά μετακίνηση γωνιών, επομένως μια επιπλέον φυσική απαίτηση από μια γεωμετρική δομή είναι το **αξίωμα της ελεύθερης μετακίνησης** (**ΑΕΜ**):

Εάν $P, Q \in M$ και γ_1, γ_2; δ_1, δ_2 ζεύγη γεωδαισιακών που διέρχονται από το P, Q αντιστοίχως σχηματίζοντας ίσες γωνίες, τότε υπάρχει $a \in G$ τέτοιο ώστε $a(P) = Q$ και $a \circ \gamma_i = \delta_i$, $i = 1,2$.



Επειδή οι ισομετρίες απεικονίζουν γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές, το ΑΕΜ επαναδιατυπώνετεαι ως εξής:

Εάν γ, δ γεωδαισιακές διερχόμενες από τα σημεία $P, Q \in M$ αντιστοίχως, τότε υπάρχει $a \in G$ τέτοιο ώστε $a(P) = Q$ και $a \circ \gamma = \delta$.

Το ΑΕΜ είναι μια ειδική μορφή ισοτροπίας που συνεπάγεται την ομογένεια (VII.§7.17), επομένως κάθε γεωμετρική δομή που το ικανοποιεί έχει σταθερή καμπυλότητα. Έπεται άμεσα ότι

---

1. Δηλαδή χωρίς αναφορά σε κάποιον συγκεκριμένο συνδυασμό ευκλείδειων αναλλοίωτων (μήκος, γωνία, καμπυλότητα, …) που αν έχουν την ίδια τιμή και στα δύο σχήματα, τότε αυτά ισούνται.

2. Ως *σχήμα* εντός της πολλαπλότητας M εννοείται συνήθως ένα υποσύνολο αυτής που είναι υποπολλαπλότητα ή συλλογή υποπολλαπλοτήτων, ώστε να μπορεί φέρει ιδιότητες αναλλοίωτες από την ομάδα *Lie* G.

VIII.§1.9. Κάθε γεωδαισιακά πλήρης γεωμετρική δομή που ικανοποιεί το ΑΕΜ είναι μορφή του χώρου.

n-**διάστατη ευκλείδεια γεωμετρία** ονομάζεται η γεωμετρική δομή $(O(n), \mathbb{E}^n)$, για την οποία είναι γνωστό ότι ικανοποιεί το ΑΕΜ. Η δομή $(O(2), \mathbb{E}^2)$ είναι το μοναδικό (πάνω από ισομορφισμό μοντέλων) μοντέλο του συνόλου των συνδυαστικών και αναλυτικών αξιωμάτων με τα οποία αξιωματικοποιείται από τον Hibert η ευκλείδεια γεωμετρία[3], με τα σημεία και τις 1-διάστατες γραμμικές υποπολλαπλότητες του $\mathbb{E}^n$ να ερμηνεύονται ως σημεία και ευθείες του αξιωματικού συστήματος αντιστοίχως. Η δομή $(O(n), \mathbb{E}^n)$ είναι απλώς ο n-διάστατος πραγματικός χώρος εφοδιασμένος με την ευκλείδεια μετρική

$$\delta_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

και έχει σταθερή καμπυλότητα $K = 0$.

n-**διάστατη σφαιρική γεωμετρία** ονομάζεται η γεωμετρική δομή $(O(n+1), \mathbb{S}^n)$. Επειδή η μετρική της σφαίρας είναι η επαγόμενη από τον ευκλείδειο χώρο που την περιέχει, ο περιορισμός κάθε ισομετρίας του $\mathbb{E}^{n+1}$ στην σφαίρα είναι ισομετρία αυτής, και αντιστρόφως, κάθε ισομετρία της σφαίρας επεκτείνεται ακτινικά σε ισομετρία του $\mathbb{E}^{n+1}$· επομένως η $O(n+1)$ είναι όντως η ομάδα των ισομετριών της n-διάστατης σφαίρας, απ' όπου έπεται άμεσα ότι η $\mathbb{S}^n$ είναι ομογενής και ισότροπη, και άρα σταθερής καμπυλότητας. Εφοδιάζοντας την $\mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ με το σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ του $\mathbb{E}^n$ μέσω της στερεογραφικής προβολής, η μετρική της σφαίρας εκφράζεται ως

$$\frac{4}{(1+|x|^2)^2}\delta_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

απ' όπου υπολογίζεται ότι η καμπυλότητα της σφαίρας είναι μια θετική σταθερά $K = +1$. Η επόμενη πρόταση δηλώνει ακριβώς ότι η σφαίρα είναι γεωδαισιακά πλήρης, επομένως είναι όντως μορφή του χώρου.

IX.§1.10. Οι γεωδαισιακές της $\mathbb{S}^n$ είναι οι μέγιστοι κύκλοι

Αποδ. Συμβολίζεται $x^1, \dots, x^n, x^{n+1}$ το σύνηθες ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του $\mathbb{E}^{n+1}$. Λόγω ομογένειας και ισοτροπίας, αρκεί να δειχθεί ότι η διερχόμενη από το $N = (0, \dots, 0, 1)$ γεωδαισιακή γ με ταχύτητα $\partial/\partial x^1\,(N)$ είναι η τομή της $\mathbb{S}^n$ με το επίπεδο $x^{i\geq 2} = 0$. Έστω ότι σημείο P της γ εκτός του επιπέδου $x^{i\geq 2} = 0$ και r η ανάκλαση ως προς το επίπεδο αυτό, που είναι ισομετρία της $\mathbb{S}^n$ ως ορθογώνιος μετασχηματισμός. Τότε η r σταθεροποιεί το P και το διάνυσμα $\partial/\partial x^1\,(N)$, επομένως σταθεροποιεί την γ επίσης, άτοπο, διότι $r(P) \neq P$. ■

Από VIII.§1.10 έπεται άμεσα ότι σφαιρική γεωμετρία ικανοποιεί το ΑΕΜ. Ωστόσο από ζεύγος διακεκριμένων σημείων διέρχονται άπειροι μέγιστοι κύκλοι, επομένως η σφαιρική γεωμετρία δεν ικανοποιεί το σύνηθες γεωμετρικό αξίωμα, ότι από ζεύγος διακεκριμένων σημείων διέρχεται μοναδική ευθεία (το ουσιώδες από τα αξιώματα προσπτώσεως), οπότε η έννοια του ευθύγραμμου τμήματος, και κατ' επέκταση κάθε γεωμετρική κατασκευή, είναι αδύνατη στην σφαιρική γεωμετρία. Αυτό διορθώνεται θεωρώντας τον n-διάστατο προβολικό χώρο που προκύπτει από την n-σφαίρα με ταύτιση των αντιδιαμετρικών της σημείων (**ελλειπτική γεωμετρία**). Αν και διαφέρουν ολικά, κατά τρόπον ώστε ο προβολικός χώρος να είναι μοντέλο των αξιωμάτων προσπτώσεως (βλ. σελ. 240, §.34, από [**H-C**]), ωστόσο ο προβολικός χώρος είναι τοπικά ισομετρικός με την σφαίρα, αφού είναι πηλίκο αυτής κάτω από την ελεύθερη και γνησίως ασύνδετη δράση μιας διακριτής ομάδας $\mathbb{Z}_2 \subset O(n+1)$ (εναλλαγή αντιδιαμετρικών σημείων).

n-**διάστατη υπερβολική γεωμετρία** ονομάζεται η γεωμετρική δομή $(\mathbb{H}^n, Isom\mathbb{H}^n)$, όπου $\mathbb{H}^n$ συμβολίζεται η ρημάννεια πολλαπλότητα που προκύπτει εφοδιάζοντας την ανοικτή μοναδιαία μπάλα $\mathbb{B}^n$ με την **μετρική *Poincaré***,

$$\frac{4}{\left(1-|x|^2\right)^2}\delta_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

---

3. Βλ. τις ακόλουθες ομάδες αξιωμάτων στο [**Hilb**] ή στην παράγραφο §.34 του [**H-C**]: (i) Αξιώματα προσπτώσεως (*Verknuepfung*)· (ii) αξιώματα διάταξης (*Anordnung*)· (iii) Αξιώματα ισότητας (*Kongruenz*)· (iv) Ευκλείδειο αξίωμα των παραλλήλων (*Playfair*)· (v) Αξιώματα συνέχειας (*Stetigkeit*).

($x^1, \dots, x^n$ το σύνηθες ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του n-διάστατου ευκλείδειου που περιέχει την $\mathbb{B}^n$). Σε ό,τι ακολουθεί σχετικά με την υπερβολική γεωμετρία, παραλείπονται οι πράξεις και οι λεπτομέρειες στην απόδειξη των περισσότερων ισχυρισμών (βλ. σχετικά κεφάλαια στα [**Berg2**], [**H-C**], [**Lee2**], [**PrTi**], [**Thu**]).

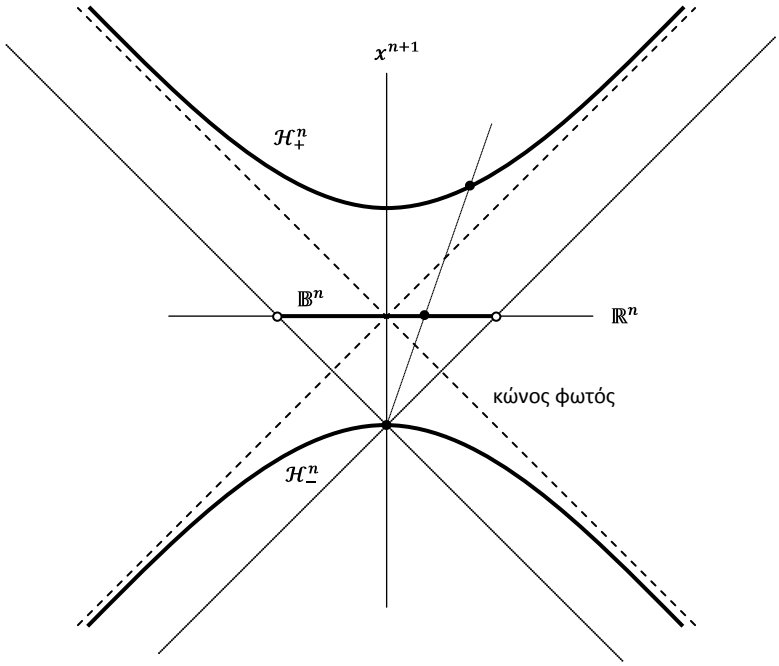
Η παραπάνω γεωμετρική δομή καλείται **μοντέλο *Poincaré*** της υπερβολικής γεωμετρίας και υπολογίζεται ότι έχει σταθερή καμπυλότητα $K = -1$. Απεικονίζοντας μέσω της υπερβολικής στερεογραφικής προβολής την $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ στην άνω χοάνη $\mathcal{H}^n_+$ του δίχωνου υπερβολοειδούς

$$\mathcal{H}^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^{n+1})^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2 = 1\}$$

η μετρική *Poincaré* ωθείται στην ρημάννεια μετρική

$$-dx^1 \otimes dx^1 - dx^2 \otimes dx^2 - \dots - dx^n \otimes dx^n + dx^{n+1} \otimes dx^{n+1}$$

δηλαδή στον περιορισμό της ψευδορημάννειας μετρικής *Minkowski* g_{Mink} στο $\mathcal{H}^n$ (ο περιορισμός αυτός είναι ρημάννεια μετρική εφ' όσον το $\mathcal{H}^n$ βρίσκεται εντός του κώνου φωτός $(x^{n+1})^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2 = 0$, όπου η μετρική *Minkowski* γίνεται θετικά ορισμένη).



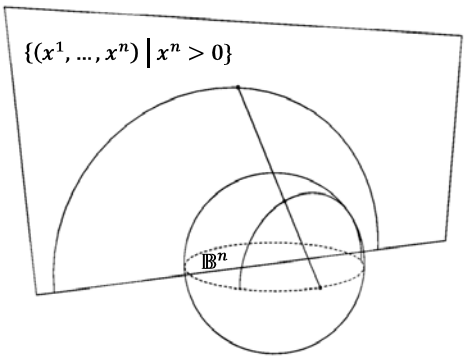
Η ρημάννεια πολλαπλότητα $(\mathcal{H}^n_+, g_{Mink})$ καλείται **μοντέλο του υπερβολοειδούς** της υπερβολικής γεωμετρίας. Το δίχωνο υπερβολοειδές $\mathcal{H}^n$ είναι η μοναδιαία σφαίρα του $(n+1)$-διάστατου χώρου *Minkowski* $\mathbb{E}^{n,1} = (\mathbb{R}^{n+1}, g_{Mink})$, επομένως η ομάδα ισομετριών της ρημάννειας πολλαπλότητας $(\mathcal{H}^n, g_{Mink})$ είναι οι περιορισμοί σε αυτή των γραμμικών απεικονίσεων που συγκροτούν την ομάδα $O(n,1)$, δηλαδή οι μετασχηματισμοί *Lorentz* του $(n+1)$-διάστατου χώρου. Αποδεικνύεται ότι η $(\mathcal{H}^n, g_{Mink})$ είναι ομογενής και ισότροπη κάτω από την δράση της $O(n,1)$. Έπεται άμεσα ότι η ομάδα των ισομετριών του μοντέλου του υπερβολοειδούς είναι η ομάδα $O^+(n,1)$ των ορθόχρονων μετασχηματισμών Lorentz, δηλαδή των μετασχηματισμών *Lorentz* που διατηρούν τις χοάνες του $\mathcal{H}^n$, για την οποία είναι γνωστό ότι συγκροτείται από δύο διφφεομορφικές όχι απλά συνεκτικές συνεκτικές συνιστώσες: την ομάδα $SO^+(n,1)$ των ορθόχρονων μετασχηματισμών *Lorentz* που διατηρούν τον προσανατολισμό και το σύμπλοκο αυτής από τους ορθόχρονους μετασχηματισμούς *Lorentz* που τον αντιστρέφουν. Προφανώς η ρημάννεια πολλαπλότητα $(\mathcal{H}^n_+, g_{Mink})$ είναι ομογενής και ισότροπη.

VIII.§1.11. Οι γεωδαισιακές στο μοντέλο του υπερβολοειδούς είναι οι τομές του $\mathcal{H}^n_+$ με τους 2-διάστατους υποχώρους του $\mathbb{E}^{n+1}$ που διέρχονται από αυτό.

Αποδ. Εφ' όσον οι μετασχηματισμοί *Lorentz* απεικονίζουν επίπεδα σε επίπεδα (ως γραμμικοί), και αφού η $(\mathcal{H}_+^n, g_{Mink})$ είναι ομογενής και ισότροπη, αρκεί να δειχθεί ότι η διερχόμενη από το $N = (0, \dots, 0, 1)$ γεωδαισιακή με ταχύτητα $\partial/\partial x^1\,(N)$ είναι η τομή του $\mathcal{H}_+^n$ με το x^1, x^{n+1}-επίπεδο. Αυτό ισχύει επειδή η ανάκλαση ως προς το x^1, x^{n+1}-επίπεδο είναι μετασχηματισμός *Lorentz* και επομένως απεικονίζει γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές ως ισομετρία. ■

Υπολογίζεται ότι οι αντίστροφες εικόνες των γεωδαισιακών του μοντέλου του υπερβολοειδούς μέσω της υπερβολικής προβολής ακριβώς είναι τα ορθογώνια τεμνόμενα με το $\partial\mathbb{B}^n$ τόξα γενικευμένων κύκλων (κύκλων και ευθειών) του $\mathbb{R}^n$. Εφ' όσον η υπερβολική προβολή είναι ισομετρία από το μοντέλο *Poincaré* στο μοντέλο του υπερβολοειδούς, έπεται ότι οι γεωδαισιακές στο μοντέλο *Poincaré* είναι τα παραπάνω τόξα, δηλαδή οι διάμετροι της μπάλας $\mathbb{B}^n$ και τα ορθογώνια τεμνόμενα με το $\partial\mathbb{B}^n$ τόξα κύκλων του $\mathbb{R}^n$.

Προβάλλοντας κατακόρυφα την $\mathbb{B}^n$ στο άνω ημισφαίριο της $\partial\mathbb{B}^n$ και έπειτα προβάλλοντας αυτό στο άνω ημιεπίπεδο $\{(x^1, \dots, x^n) \mid x^n > 0\}$ του $\mathbb{R}^n$ όπως στο σχήμα,

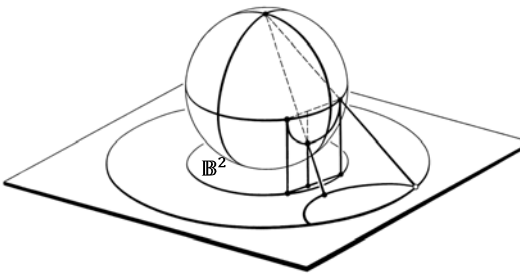


λαμβάνουμε το **μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου** της υπερβολικής γεωμετρίας. Η μετρική *Poincare* ωθείται μέσω της παραπάνω απεικόνισης στην μετρική

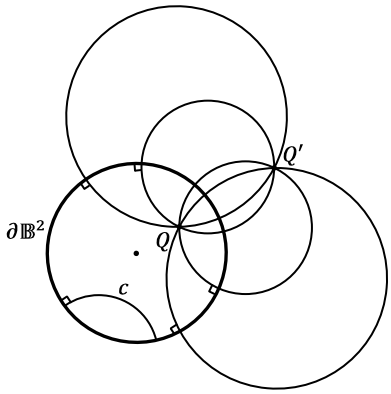
$$\frac{1}{(x^1)^2}\,\delta_{ij}\,dx^i \otimes dx^j$$

Επειδή η απεικόνιση με την οποία λαμβάνεται το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου από το μοντέλο *Poincaré* διατηρεί τους γενικευμένους κύκλους και τις γωνίες, έπεται ότι οι γεωδαισιακές στο μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου είναι τα ορθογώνια τεμνόμενα με το επίπεδο $\{(x^1, \dots, x^n) \mid x^n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ τόξα γενικευένων κύκλων του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή οι κάθετες στο $x^n = 0$ ευθείες και τα ημικύκλια που έχουν την διάμετρό τους στο $x^n = 0$.

Ελέγχεται (βλ. σελ. 26-29 από [**ΠαΚω**]) ότι το 2-διάστατο μοντέλο *Poincaré* (και κατ' επέκταση τα 2-διάστατα μοντέλα του υπερβολοειδούς και του άνω ημιεπιπέδου, αφού οι ισομετρίες που κατασκευάστηκαν από το μοντέλο *Poincaré* σε αυτά είναι ισομορφισμοί μοντέλων) είναι μοντέλο για τις ομάδες αξιωμάτων I, II, III, V της σημείωσης 3, σελ. 191. Ειδικά η κρίσιμη ιδιότητα, ότι από ζεύγος διακεκριμένων σημείων διέρχεται μοναδική ευθεία, αποδεικνύεται εφελκύοντας στερεογραφικά την $\mathbb{B}^2$ στο κάτω ημισφαίριο κατάλληλης σφαίρας και προβάλλοντας κατακόρυφα το ημισφαίριο αυτό στο αρχικό επίπεδο: τα ορθογώνια στο σύνορο τόξα γενικευμένων κύκλων απεικονίζονται αμφιμονοσήμαντα σε χορδές (ευθύγραμμα τόξα), και από αυτό έπεται το ζητούμενο.



Το ευκλείδειο αξίωμα της παραλληλίας δεν ικανοποιείται: έστω ευθεία $c \subset \mathbb{B}^2$, $Q \in \mathbb{B}^2 \setminus c$ και Q' το αντίστροφό του ως προς τον κύκλο $\partial\mathbb{B}^2$. Από την γεωμετρία των ορθογώνια τεμνόμενων κύκλων του επιπέδου είναι γνωστό ότι όλοι οι διερχόμενοι από το ζεύγος Q, Q' κύκλοι τέμνουν κάθετα τον $\partial\mathbb{B}^2$, επομένως υπάρχουν άπειρες το πλήθος ευθείες του $\mathbb{B}^2$ που δεν τέμνονται με την c.



Εφ' όσον οι δίσκοι που προκύπτουν ως τομές της $\mathbb{B}^n$ με τους 2-διάστατους υποχώρους του $\mathbb{R}^n$ είναι 2-διάστατα μοντέλα *Poincaré* με τις γεωδαισιακές τους να είναι γεωδαισιακές της $\mathbb{B}^n$, έπεται ότι τα αξιώματα προσπτώσεως και το ευκλείδειο αξίωμα παραλληλίας ικανοποιούνται και δεν ικανοποιείται αντιστοίχως σε οποιαδήποτε διάσταση. Αποδεικνύεται επιπλέον ότι το 2-διάστατο μοντέλο *Poincaré* είναι το μοναδικό (πάνω από ισομορφισμό μοντέλων) μοντέλο για τις ομάδες αξιωμάτων I, II, III, IV', V, (βλ. σημείωση 3, σελ. 191), όπου IV' το υπερβολικό αξίωμα παραλληλίας: δεδομένου σημείου Q εκτός ευθείας c, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ευθείες παράλληλες στην c που διέρχονται από το Q.

Η ομάδα των ισομετριών της n-διάστατης υπερβολικής γεωμετρίας, $Isom\mathbb{H}^n$, που στο μοντέλο του υπερβολειδούς υλοποιείται ως η ομάδα των ορθόχρονων μετασχηματισμών *Lorentz*, είναι οι περιορισμοί των μετασχηματισμών *Möbius* του $\mathbb{R}^n$ που διατηρούν την $\mathbb{B}^n$ σε αυτήν. Η ομάδα των μετασχηματισμών *Möbius* του $\mathbb{R}^n$ παράγεται πάνω στις αντιστροφές ως προς $(n-1)$-διάστατες σφαίρες του $\mathbb{R}^n$, με τα άρτια γινόμενα αυτών να διατηρούν τον προσανατολισμό και τα περιττά γινόμενα να τον αντιστρέφουν. Επομένως η $Isom\mathbb{H}^n$ παράγεται από τους περιορισμούς στην $\mathbb{B}^n$ των αντιστροφών ως προς $(n-1)$-διάστατες σφαίρες του $\mathbb{R}^n$ που τέμνουν κάθετα την $\partial\mathbb{B}^n$ (**υπερβολικές ανακλάσεις**). Τα άρτια γινόμενα αυτών διατηρούν των προσανατολισμό ενώ τα περιττά τον αντιστρέφουν.

Χρησιμοποιώντας το μοντέλο του n-διάστατου άνω ημιεπιπέδου, συνάγεται ότι η ομάδα $Isom\mathbb{H}^n$ είναι ισόμορφη με την ομάδα $M\ddot{o}b(n-1)$ των μετασχηματισμών *Möbius* του $\mathbb{R}^{n-1}$: μέσω του περιορισμού στο επίπεδο $x^n = 0$, υφίσταται αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο σύνολο των υπερβολικών ανακλάσεων του n-διάστατου άνω ημιεπιπέδου (αντιστροφές ως προς $(n-1)$-σφαίρες που τέμνουν κάθετα το σύνορο του ημιεπιπέδου) και το σύνολο των αντιστροφών ως προς $(n-2)$-διάστατες σφαίρες του $\mathbb{R}^{n-1} \cong (x^n = 0)$. Επειδή αυτά τα σύνολα παράγουν τις ομάδες $Isom\mathbb{H}^n$ και $M\ddot{o}b(n-1)$ αντιστοίχως, έπεται το ζητούμενο. Από αυτόν τον ισομορφισμό συνάγεται επίσης άμεσα ο ισομορφισμός ανάμεσα στις ομάδες $O^+(n,1)$ και $M\ddot{o}b(n-1)$.

Οι μετασχηματισμοί *Möbius* του 1-διάστατου χώρου που διατηρούν τον προσανατολισμό, είναι ακριβώς οι απεικονίσεις της μορφής

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \ \text{ με } det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

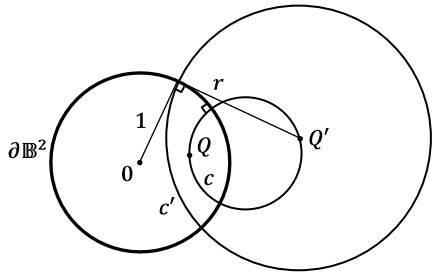
Συγκεκριμένα, αυτή η ομάδα είναι ισόμορφη με την $PSL_2\mathbb{R} = SL_2\mathbb{R}/\{\pm 1\}$ μέσω της αντιστοίχισης

$$PSL_2\mathbb{R} \ni \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \{\, x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d} \}$$

Αυτές οι παρατηρήσεις σημαίνουν ότι η ομάδα των ισομετριών του $\mathbb{H}^2$ που διατηρούν τον προσανατολισμό είναι η $PSL_2\mathbb{R}$. Ολόκληρη η ομάδα $Möb(1) = Isom\mathbb{H}^2$ λαμβάνεται αφήνοντας την απεικόνιση $x \to 1/x$ να δράσει στην $PSL_2\mathbb{R}$.

VIII.§1.12. Η υπερβολική γεωμετρία ικανοποιεί το ΑΕΜ.

Αποδ. Θα δειχθεί αρχικά για $n = 2$. Συγκεκριμένα, δεδομένου σημείου $Q \in \mathbb{B}^2$ πάνω σε υπερβολική ευθεία c και διάμετρο d του δίσκου $\mathbb{B}^2$, θα βρεθεί υπερβολική ισομετρία h τέτοια ώστε $h(Q) = 0$ και $h[c] = d$. Έστω Q' το αντίστροφο του Q ως προς τον μοναδιαίο κύκλο $\partial\mathbb{B}^2$, οπότε $0Q \cdot 0Q' = 1$. Επιλέγουμε c' τον κύκλο με κέντρο Q' και ακτίνα το ευθύγραμμο τμήμα με άκρο Q' που εφάπτεται στον $\partial\mathbb{B}^2$.



Επειδή ο c διέρχεται από το κέντρο του c', αντιστρέφεται ως προς αυτόν σε ευθεία. Εάν r η ακτίνα του c', εκ κατασκευής αυτού ισχύει $r^2 = (0Q')^2 - 1^2 = (0Q')^2 - 0Q' \cdot 0Q = 0Q'(0Q' - 0Q) = 0Q' \cdot QQ'$, επομένως το 0 είναι το αντίστροφο του Q ως προς τον κύκλο c'. Άρα η ανάκλαση ως προς την υπερβολική ευθεία c' απεικονίζει το Q στο 0 και την c σε κάποια διάμετρο. Συνθέτοντας με κατάλληλη στροφή γύρω από το 0 (που είναι υπερβολική ισομετρία ως σύνθεση ανακλάσεων ως προς διαμέτρους) λαμβάνουμε την ζητούμενη ισομετρία.

Στην γενική περίπτωση, το ζητούμενο έπεται άμεσα από την διάσταση 2, εφ' όσον οι 2-διάστατοι δίσκοι που προκύπτουν ως τομές της $\mathbb{B}^n$ με 2-διάστατους υποχώρους του $\mathbb{R}^n$ είναι 2-διάστατα μοντέλα Poincaré, με τις γεωδαισιακές τους να είναι γεωδαισιακές του μοντέλου $\mathbb{B}^n$. ■

§2. (G, X)-ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Γενικεύουμε την έννοια της $\mathcal{G}$-πολλαπλότητας (βλ. σελ. 8) επιτρέποντας στην $\mathcal{G}$ να είναι ψευδοομάδα πάνω σε οποιαδήποτε συνεκτική διαφορική πολλαπλότητα X αντί μόνο του $\mathbb{R}^n$. Ελέγχεται ότι εάν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο $U \subset X$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ να υπάρχει $\gamma \in \mathcal{G}$ με $\gamma x \in U$, τότε κάθε $\mathcal{G}$-πολλαπλότητα έχει μοναδική $\mathcal{G}_U$-σύσφιξη, όπου $\mathcal{G}_U$ η ψευδοομάδα των στοιχείων της $\mathcal{G}$ που πεδίου ορισμού και σύνολο τιμών εντός του U. Στην περίπτωση που το U είναι τοπικός χάρτης της X, οπότε $\mathcal{G}_U$ είναι απλώς η ψευδοομάδα των αμφιδιαφορίσεων του $\mathbb{R}^n$, $dimX = n$, η προηγούμενη διαπίστωση σημαίνει ότι κάθε $\mathcal{G}$-πολλαπλότητα είναι διαφορική n-πολλαπλότητα.

Δεδομένης ομάδας G από αμφιδιαφορίσεις της συνεκτικής διαφορικής πολλαπλότητας X, καλείται (G, X)-**πολλαπλότητα** κάθε $\mathcal{G}$-πολλαπλότητα, όπου $\mathcal{G}$ η ψευδοομάδα που παράγεται από τους περιορισμούς των στοιχείων της G σε ανοικτά υποσύνολα της X· συγκεκριμένα, για κάθε ζεύγος (G, X)-χαρτών (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) της (G, X)-πολλαπλότητας M, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης μετάβασης $\gamma = \varphi_2 \circ \varphi_1{}^{-1}$ καλύπτεται από ανοικτά σύνολα W_i ώστε για κάποια $\gamma_i \in G$ να ισχύει $\gamma|_{W_i} = \gamma_i|_{W_i}$. Θεωρείται ότι για κάθε ανοικτό $U \subset X$ και κάθε $x \in X$ υπάρχει $\gamma \in \mathcal{G}$ με $\gamma x \in U$ (4), οπότε σύμφωνα με τις διαπιστώσεις τις προηγούμενης παραγράφου, κάθε (G, X)-πολλαπλότητα είναι διαφορική n-πολλαπλότητα, $n = dimX$. Καλείται (τοπικός) (G, X)-ισομορφισμός μεταξύ (G, X)-πολλαπλοτήτων κάθε (τοπικός) $\mathcal{G}$-ισομορφισμός μεταξύ τους.

---

4. Όπως συμβαίνει στις γεωμετρικά ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, όπου X ομογενής ρημάννεια πολλαπλότητα και G η ομάδα των ισομετριών της.

VIII.§2.0. Εάν M είναι (G,X)-πολλαπλότητα, όπου G ομάδα από ισομετρίες για κάποια ρημάννεια μετρική g επί της X, τότε η M επιδέχεται ρημάννειας μετρικής που είναι αναλλοίωτη από τοπικούς (G,X)-ισομορφισμούς.

Αποδ. Εάν (U,φ) τοπικός (G,X)-χάρτης της M, εφοδιάζουμε την περιοχή U με την μετρική φ^*g. Η ζητούμενη μετρική προκύπτει τότε συγκολλώντας τα φ^*g καθώς διατρέχουμε τον (G,X)-άτλαντα της M. Για να είναι εφικτή η συγκόλληση, αρκεί να ελεγχθεί ότι οι μετρικές αυτές συμφωνούν στις τομές των χαρτών: εάν (U,φ), (V,ψ) είναι (G,X)-χάρτες της M, πρέπει να δειχθεί ότι $\varphi^*g=\psi^*g$, ισοδύναμα, ότι $(\psi\circ\varphi^{-1})^*g=g$. Αυτό ισχύει, διότι η συνάρτηση μετάβασης $\psi\circ\varphi^{-1}$ είναι συγκόλληση από περιορισμούς στοιχείων της G σε ανοικτά υποσύνολα της X και άρα διατηρεί την μετρική g. ■

Σκοπός όσων ακολουθούν είναι ο ορισμός μιας έννοιας πληρότητας (G,X)-πολλαπλοτήτων η οποία να είναι ισοδύναμη της γεωδαισιακής πληρότητας οποτεδήποτε αυτή έχει νόημα.

Θεωρούμε μεταβατική δράση της ομάδας *Lie* G από αναλυτικές αμφιδιαφορίσεις (C^ω) επί της συνεκτικής διαφορικής πολλαπλότητας X και (G,X)-πολλαπλότητα M με άτλαντα $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$, οπότε οι συναρτήσεις μετάβασης

$$\gamma_{ij}=\varphi_i\circ\varphi_j{}^{-1}:\varphi_j[U_j\cap U_i]\to\varphi_i[U_i\cap U_j]$$

περιέχονται στην ψευδοομάδα $\mathcal{G}$ που παράγεται από τους περιορισμούς των στοιχείων της G στα ανοικτά σύνολα της X. Επειδή η γ_{ij} είναι τοπικά ο περιορισμός στοιχείου της G, μπορεί να νοείται ως τοπικά σταθερή απεικόνιση από το $U_i\cap U_j$ στο G, και άρα σταθερή πάνω στις συνεκτικές συνιστώσες του $U_i\cap U_j$. Συμβολίζεται $\gamma_{ij}(x)$ ο περιορισμός της γ_{ij} στην συνεκτική συνιστώσα του $U_i\cap U_j$ που περιέχει το x, που σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση είναι ανεξάρτητος της επιλογής του x. Επειδή η δράση της G είναι μεταβατική, κάθε στοιχείο αυτής προσδιορίζεται, ως αναλυτική αμφιδιαφόριση που είναι, από τον περιορισμό του σε οποιοδήποτε ανοικτό υποσύνολο της X. Επομένως η συνάρτηση $\gamma_{ij}(x)$ επεκτείνεται μονοσήμαντα σε αμφιδιαφόριση της X που περιέχεται στην ομάδα G και συμβολίζεται επίσης $\gamma_{ij}(x)$.

Σταθεροποιούμε $x_o\in M$ και (U_o,φ_o) τοπικό χάρτη γύρω απ' αυτό. Δοθέντος μονοπατιού $\sigma:[0,1]\to M$ με $\sigma(0)=x_o$, το καλύπτουμε με πεπερασμένους το πλήθος διαδοχικούς χάρτες (U_o,φ_o), (U_1,φ_1), … , (U_r,φ_r) τέτοιους ώστε οι τομές $U_i\cap U_{i+1}$ να είναι συνεκτικά σύνολα και οι τομές $U_i\cap U_j$, $j>i+1$ να είναι κενές (κάλυψη του μονοπατιού). Διορθώνοντας την φ_r κατά $\gamma_{r-1,r}(x_r)$, $x_r\in U_{r-1}\cap U_r$, η φ_{r-1} επεκτείνεται σε ολόκληρο το $U_{r-1}\cap U_r$ ως

$$\tilde\varphi_{r-1}:U_{r-1}\cap U_r\to X,\quad \tilde\varphi_{r-1}(x)=\begin{cases}\varphi_{r-1}(x), & x\in U_{r-1}\\ \gamma_{r-1,r}(x_r)\circ\varphi_r(x), & x\in U_r\end{cases}$$

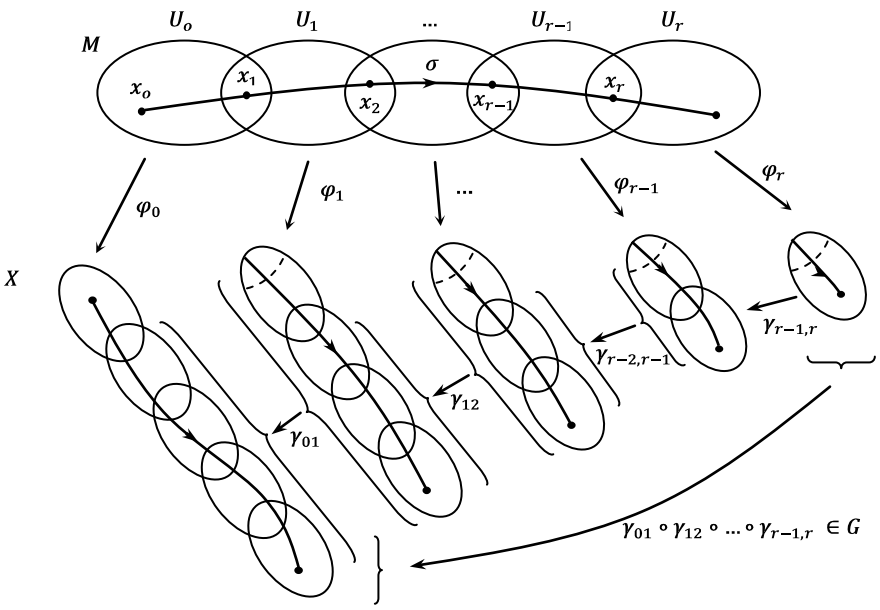
Διορθώνοντας την $\tilde\varphi_i$, $1\le i<r$, κατά $\gamma_{i-1,i}(x_i)$, $x_i\in U_{i-1}\cup U_i$, η φ_{i-1} επεκτείνεται σε ολόκληρο το $U_{i-1}\cup\ldots\cup U_r$ ως

$$\tilde\varphi_{i-1}:U_{i-1}\cup\ldots\cup U_r\to X,\quad \tilde\varphi_i(x)=\begin{cases}\varphi_{i-1}(x) & ,\quad x\in U_{i-1}\\ \gamma_{i-1,i}(x_i)\circ\tilde\varphi_i(x), & x\in U_i\end{cases}$$

Μετά την εκτέλεση του r-οστού βήματος $(i=1)$ συγκροτείται συνεχής απεικόνιση $\tilde\varphi_o$ από την ανοικτή περιοχή $U_o\cup\ldots\cup U_r$ του μονοπατιού σ επί ανοικτού υποσυνόλου της X, δηλαδή μια εικόνα του μονοπατιού σ εντός της X. Ονομάζεται **συνολική διόρθωση** της κατασκευής αυτής η απεικόνιση

$$\gamma_{01}(x_1)\circ\gamma_{12}(x_2)\circ\ldots\circ\gamma_{r-1,r}(x_r)\circ\varphi_r:U_r\to X$$

δηλαδή η τελική τροποποίηση του χάρτη φ_r με την οποία επιτυγχάνεται η επέκταση του φ_o σε ολόκληρο το $U_o\cup\ldots\cup U_r$.

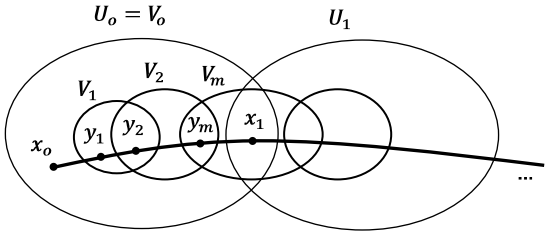


VIII.§2.1. Για κάθε τ στην κλάση δρομομοτοπίας σ και οποιαδήποτε κάλυψη αυτού από διαδοχικούς χάρτες $(V_o, \psi_o), (V_1, \psi_1), \ldots, (V_r, \psi_r)$ όπως προηγουμένως και $\delta_{01}(y_1) \circ \delta_{12}(y_2) \circ \ldots \circ \delta_{s-1,s}(y_s) \circ \psi_s$ μια συνολική διόρθωση της κάλυψης αυτής, τότε

$$\delta_{01}(y_1) \circ \delta_{12}(y_2) \circ \ldots \circ \delta_{s-1,s}(y_s) \circ \psi_s = \gamma_{01}(x_1) \circ \gamma_{12}(x_2) \circ \ldots \circ \gamma_{r-1,r}(x_r) \circ \varphi_r$$

σε κάποια περιοχή του $\sigma(1) = \tau(1)$.

Αποδ. Θα δειχθεί αρχικά για $\tau = \sigma$. Επιλέγουμε τα x_i, y_j ώστε $x_i \neq y_j$ για κάθε i, j. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε την ακολουθία διαδοχικών σημείων $x_o, y_o, \ldots y_m, x_1$ πάνω στο μονοπάτι σ χωρίς άλλα x_i, y_j να παρεμβάλλονται μεταξύ τους. Επειδή το y_{m+1} βρίσκεται μετά το x_1, ισχύει $x_1 \in V_m$, δηλαδή $V_m \cap U_1 \neq \emptyset$.



Εάν $\eta_{m,1} = \psi_m \circ \varphi_1^{-1}$ η συνάρτηση μετάβασης για την τομή αυτή, τότε

$$\delta_{01}(y_1) \circ \delta_{12}(y_2) \circ \ldots \circ \delta_{m-1,m}(y_m) \circ \eta_{m,1} = \gamma_{01}(x_1)$$

επομένως

$$\delta_{01}(y_1) \circ \delta_{12}(y_2) \circ \ldots \circ \delta_{m-1,m}(y_m) \circ \underbrace{\eta_{m,1} \circ \varphi_1}_{\psi_m} = \gamma_{01}(x_1) \circ \varphi_1$$

απ' όπου έπεται ότι το ζητούμενο ισχύει στην θέση x_1. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, διαπιστώνεται ότι το ζητούμενο ισχύει στο τέλος του μονοπατιού επίσης.

Θεωρούμε τώρα δρομομοτοπία $F : [0,1] \times M \to M$, $(s, t) \longmapsto F(s, t)$, με $F(0, \cdot) = \sigma$, $F(1, \cdot) = \tau$, όπου το τ είναι εν γένει διαφορετικό από το σ. Για μικρά s το μονοπάτι $F(s, \cdot)$ περιέχεται στην κάλυψη $U_o \cup \ldots \cup U_r$ και από τα προηγούμενα έπεται ότι το ζητούμενο ικανοποιείται για μικρά s (η επιπλέον υπόθεση $\tau = \sigma$ στην προηγούμενη επιχειρηματολογία ήταν προς διευκόλυνση λόγου και όχι

ουσιώδης). Επομένως το ζητούμενο ισχύει τοπικά στο $[0,1]$ και λόγω συνεκτικότητας του διαστήματος έπεται ότι ισχύει ολικά. ■

Συμβολίζεται $\varphi_o^{[\sigma]}$ το σύνολο των συνεχών απεικονίσεων πάνω σε ανοικτή περιοχή του $\sigma(1)$ που συμφωνούν με την $\gamma_{01}(x_1) \circ \gamma_{12}(x_2) \circ \dots \circ \gamma_{r-1,r}(x_r) \circ \varphi_r$ σε μια περιοχή γύρω απ' αυτό (*germ*). Η VIII.§2.1 δηλώνει ότι ή συνολική διόρθωση μιας πεπερασμένης ακολουθίας χαρτών πάνω σε μονοπάτι δρομομοτοπικό με το σ περιέχεται πάντοτε στο $\varphi_o^{[\sigma]}$. Συμβολίζουμε

$$\varphi_o^{[\sigma]}\big(\sigma(1)\big) \equiv \gamma_{01}(x_1) \circ \gamma_{12}(x_2) \circ \dots \circ \gamma_{r-1,r}(x_r) \circ \varphi_r\big(\sigma(1)\big) \in X$$

που σύμφωνα με ταπροηγούμενα είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σ από την κλάση δρομομοτοπίας $[\sigma]$ και της κάλυψης αυτού από διαδοχικούς χάρτες $(U_o, \varphi_o), (U_1, \varphi_1), \dots, (U_r, \varphi_r)$.

VIII.§2.2. Για κάθε $[\sigma] \in \pi_1(M, x_o)$ υπάρχει μοναδικό $\gamma_{[\sigma]} \in G$ τέτοιο ώστε για κάθε $\tau \in [\sigma]$ και κάθε κάλυψη αυτού από διαδοχικούς χάρτες $(V_o, \psi_o), (V_1, \psi_1), \dots, (V_r, \psi_r)$, η συνολική διόρθωση να είναι $\gamma_{[\sigma]} \circ \varphi_o$ (δηλαδή $\varphi_o^{[\sigma]}(x_o) = \gamma_{[\sigma]} \circ \varphi_o(x_o)$).

Αποδ. Έστω $[\sigma] \in \pi_1(M, x_o)$, δηλαδή σ βρόγχος στο x_o, και $(U_o, \varphi_o), (U_1, \varphi_1), \dots, (U_r, \varphi_r)$ κάλυψη αυτού από διαδοχικούς χάρτες με μια συνολική διόρθωση $\gamma_{01}(x_1) \circ \gamma_{12}(x_2) \circ \dots \circ \gamma_{r-1,r}(x_r) \circ \varphi_r$. Εάν $(U_o, \varphi_o) = (V_o, \psi_o), (V_1, \psi_1), \dots, (V_s, \psi_s)$ οποιαδήποτε άλλη κάλυψη του τ από διαδοχικούς χάρτες με συνολική διόρθωση $\delta_{01}(y_1) \circ \delta_{12}(y_2) \circ \dots \circ \delta_{s-1,s}(y_s) \circ \psi_s$, από VIII.§2.1 είναι γνωστό ότι

$$\delta_{01}(y_1) \circ \dots \circ \delta_{s-1,s}(y_s) \circ \psi_s = \gamma_{01}(x_1) \circ \dots \circ \gamma_{r-1,r}(x_r) \circ \varphi_r \qquad (1)$$

σε μια περιοχή του $x_o = \sigma(0) = \sigma(1)$. Επισυνάπτοντας στο τέλος της δεύτερης κάλυψης τον χάρτη (U_o, φ_o) και συμβολίζοντας $\eta_{os} = \varphi_o \circ \psi_s^{-1}$, από (1) έπεται η ισότητα

$$\delta_{01}(y_1) \circ \dots \circ \delta_{s-1,s}(y_s) \circ \eta_{so} \circ \varphi_o = \gamma_{01}(x_1) \circ \dots \circ \gamma_{r-1,r}(x_r) \circ \varphi_o$$

σε μια περιοχή του x_o, απ' όπου συνάγεται ότι

$$\delta_{01}(y_1) \circ \dots \circ \delta_{s-1,s}(y_s) \circ \eta_{so} = \gamma_{01}(x_1) \circ \dots \circ \gamma_{r-1,r}(x_r) \in G \qquad ■$$

Χάρις την XX.§1.1 ορίζεται –δεδομένου σημείου x_o και χάρτη (U_o, φ_o) γύρω απ' αυτό– η απεικόνιση (G, X)-**ολονομία** για την (G, X)-πολλαπλότητα M[5] ως

$$H : \pi_1(M, x_o) \to G, \qquad [\sigma] \longmapsto H([\sigma]) = \gamma_{[\sigma]}$$

Θεωρούμε την καθολική επικάλυψη $q : \widetilde{M} \to M$, που μπορεί να νοείται ως το σύνολο των κλάσσεων δρομομοτοπίας στην M που ξεκινούν από το x_o, οπότε $q([\sigma]) = \sigma(1)$ (βλ. αρχή σελ. 111). Ορίζεται τότε η **εκδίπλωση**[6] της M στην X ως

$$D : \widetilde{M} \to X, \qquad [\sigma] \longmapsto D([\sigma]) = \varphi_o^{[\sigma]}\big(\sigma(1)\big) = \varphi_o^{[\sigma]} \circ q\,([\sigma])$$

Εφελκύοντας την (G, X)-δομή από την M στην $\widetilde{M}$ μέσω του τοπικού ομοιομορφισμού q, η D καθίσταται τοπικός (G, X)-ισομορφισμός από την $\widetilde{M}$ στην X.

VIII.§2.3. Για κάθε $[\sigma] \in \pi_1(M, x_o)$,

$$D \circ h(\sigma) = H(\sigma) \circ D$$

όπου $h(\sigma)$ ο *deck*-μετασχηματισμός της $\widetilde{M}$ που επάγεται από τον βρόγχο σ.

Αποδ. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την φύση των στοιχείων της $\widetilde{M}$ ως κλάσεων δρομομοτοπίας στην M με αρ-

---

5. Για να είναι εφικτές οι κατασκευές που προηγήθηκαν και επιτρέπουν τον ορισμό αυτής της απεικόνισης, προϋποτίθεται ότι η G δρά μεταβατικά στην X με αναλυτικές αμφιδιαφορίσεις.

6. Αγγλικός όρος: *developing map.*

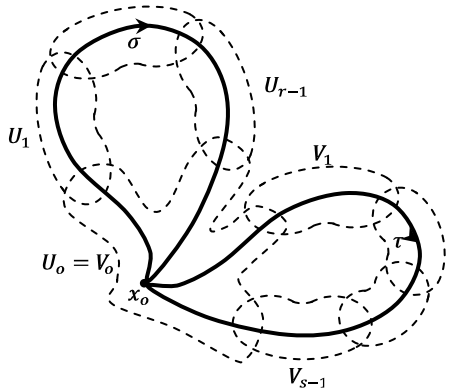
χικό σημείο x_o, η δράση του *deck*-μετασχηματισμού $h(\sigma)$ ερμηνεύεται ως

$$h(\sigma)([\tau]) = [\sigma.\tau]$$

Εάν τ βρόγχος στο x_o, επιλέγουμε κάλυψη από διαδοχικούς χάρτες (U_o, φ_o), (U_1, φ_1), …, (U_r, φ_r) και $(U_o, \varphi_o) = (V_o, \psi_o)$, (V_1, ψ_1), …, (V_r, ψ_r) των βρόγχων σ, τ αντιστοίχως. Τότε η

$$(U_o, \varphi_o), (U_1, \varphi_1), \dots, (U_r, \varphi_r), (U_o, \varphi_o) = (V_o, \psi_o), (V_1, \psi_1), \dots, (V_{s-1}, \psi_{s-1}), (V_o, \psi_o) = (U_o, \varphi_o)$$

είναι κάλυψη του βρόγχου $\sigma.\tau$ από διαδοχικούς χάρτες.



Ισχύει

$$\varphi_o^{[\sigma.\tau]}\big(\sigma.\tau\,(1)\big) = \underbrace{\gamma_{01}(x_1) \circ \dots \circ \gamma_{r-1,0}(x_r)}_{\gamma_{[\sigma]}} \circ \underbrace{\delta_{01}(y_1) \circ \delta_{12}(y_2) \circ \dots \circ \delta_{s-1,0}(y_s) \circ \varphi_0(x_o)}_{\varphi_o^{[\tau]}(x_o)} =$$

$$\gamma_{[\sigma]} \circ \varphi_o^{[\tau]}(x_o) = H(\sigma) \circ D([\tau])$$

Όμως $\varphi_o^{[\sigma.\tau]}\big(\sigma.\tau\,(1)\big) = D([\sigma.\tau]) = D(h(\sigma)([\tau]))$, επομένως $D\big(h(\sigma)([\tau])\big) = H(\sigma) \circ D\,([\tau])$. ■

Από τον τύπο της VIII.§2.3 συνάγεται ότι η (G, X)-ολονομία της M είναι ομομορφισμός ομάδων, οπότε ορίζεται η **ομάδα** (G, X)-**ολονομίας** της πολλαπλότητας M ως $H\big(\pi_1(M, x_o)\big) \subset G$. Ανακύπτει το ερώτημα εάν η ομάδα (G, X)-ολονομίας δίνει κάποια πληροφορία για την δομή της M όπως η καλύπτουσα ομάδα $\pi_1(M, x_o)$ προσδιορίζει την M ως τον τροχιακό χώρο $\widetilde{M}/\pi_1(M, x_o)$. Οι πολλαπλότητες $\widetilde{M}, X$ συσχετίζονται μέσω της εκδίπλωσης D. Εάν η X επικαλυπτόταν από την $\widetilde{M}$ μέσω της D, τότε η απλή συνεκτικότητα της X θα ήταν ικανή συνθήκη ώστε η D να είναι ομοιομορφισμός· σε αυτήν την περίπτωση, από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{M} \arrow[r, "h(\sigma)"] \arrow[d, "D"'] & \widetilde{M} \arrow[d, "D"] \\
X \arrow[r, "H(\sigma)"'] & X
\end{tikzcd}$$

(VIII.§2.3) θα συναγόταν ότι η δράση της $H\big(\pi_1(M, x_o)\big)$ επί της X ισοδυναμεί μέσω του ομοιομορφισμού D με την δράση της $\pi_1(M, x_o)$ επί της $\widetilde{M}$, οπότε η πολλαπλότητα M θα ανακατασκευαζόταν ως $M \cong X/H\big(\pi_1(M, x_o)\big)$.

Μία (G, X)-πολλαπλότητα M, όπου G ομάδα *Lie* από αναλυτικές αμφιδιαφορίσεις της X που δρά μεταβατικά, καλείται **πλήρης** όταν η εκδίπλωση της M είναι επικάλυψη της X από την $\widetilde{M}$. Από την προηγούμενη επιχειρηματολογία συνάγεται η εξής πρόταση, που δηλώνει ότι οι πλήρεις (G, X)-πολλαπλότητες συμπίπτουν με τις πολλαπλότητες που επικαλύπτονται κανονικά από την X και των οποίων η καλύπτουσα ομάδα περιέχεται στην G.

VIII.§2.4. Εάν η X είναι απλά συνεκτική και η ομάδα *Lie* G δρά μεταβατικά επί της X με αναλυτικές αμφιδιαφορίσεις, κάθε πλήρης (G,X)-πολλαπλότητα M είναι ο τροχιακός χώρος X/Γ κάτω από ελεύθερη και γνήσια δράση διακριτής υποομάδας $\Gamma \subset G$, και αντιστρόφως.

Λήμμα (από την ανάλυση σε μετρικούς χώρους). Εάν για έναν μετρικό χώρο (X,d) υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε κάθε συμπαγής ε-μπάλα να είναι συμπαγής, τότε ο χώρος είναι πλήρης.

Αποδ. Έστω (x_i) ακολουθία *Cauchy* και $k > 0$ τέτοιο ώστε $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ για κάθε $i,j \geq k$. Η μπάλα $B(x_k,\varepsilon)$ περιέχει εξ υποθέσεως τελικά την ακολουθία. Λόγω συμπάγειας της $\bar{B}(x_k,\varepsilon)$, έπεται ότι η (x_i) έχει όριο. ■

VIII.§2.5. Έστω G ομάδα *Lie* από αμφιδιαφορίσεις της X που δρά μεταβατικά με συμπαγείς σταθεροποιητές, οπότε υπάρχει G-αναλλοίωτη ρημάννεια μετρική επί της X (VI.§10.4), και M μια (G,X)-πολλαπλότητα, οπότε η μετρική αυτή εφελκύεται στην M μέσω (G,X)-χαρτών (VIII.§2.0). Τότε η M είναι πλήρης εάν και μόνον εάν είναι γεωδαισιακά πλήρης.

Αποδ. "$\Longrightarrow$„ Από θεώρημα *Hopf-Rinow* και προηγούμενο λήμμα, αρκεί να βρεθεί $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε όλες οι κλειστές ε-μπάλες της M να είναι συμπαγείς. Εφελκύοντας την μετρική στην $\widetilde{M}$, η εκδίπλωση $D : \widetilde{M} \to X$ – που εξ υποθέσεως είναι επικάλυψη –γίνεται τοπική ισομετρία. Επειδή η ρημάννεια απόσταση ορίζεται μέσω μονοπατιών και τα μονοπάτια ανυψώνονται, ισχύει $D(\bar{B}_\varepsilon(y)) = \bar{B}_\varepsilon(D(y))$, επομένως η συμπάγεια των ε-μπαλών στην $\widetilde{M}$ συνεπάγεται την συμπάγεια των ε-μπαλών στην X και αντιστρόφως. Έστω σημείο $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε η μπάλα $\bar{B}_\varepsilon(x)$ να είναι συμπαγείς. Επειδή η G δρά μεταβατικά με ισομετρίες, κάθε κλειστή ε-μπάλα στην X είναι συμπαγής. Από προηγούμενη παρατήρηση, το ίδιο ισχύει στην $\widetilde{M}$ και επομένως στην M (αφού η επικάλυψη $q : \widetilde{M} \to M$ είναι τοπική ισομετρία, και ισχύει $q(\bar{B}_\varepsilon(y)) = \bar{B}_\varepsilon(q(y))$ για τον ίδιο λόγο με προηγουμένως).

„$\Longleftarrow$" (Σχέδιο) Από VI.§1.5, αρκεί να δειχθεί ότι το τυχαίο μονοπάτι γ στην X έχει ανύψωση σε επιλεγμένο σημείο του $D^{-1}(\gamma(0))$. Εάν το γ ανυψώνεται για διάστημα $[0,t_o]$, τότε ανυψώνεται για διάστημα $[0,t_o+\varepsilon]$ για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$, ενώ εάν ανυψώνεται για διάστημα $[0,t_o)$, τότε λόγω ακολουθιακής πληρότητας της $\widetilde{M}$ (είναι γεωδαισιακά πλήρης ως μετρική επικάλυψη γεωδαισιακά πλήρους πολλαπλότητας), ανυψώνεται για διάστημα $[0,t_o]$ επίσης. ■

Ελέγχεται εύκολα ότι για κάθε διακριτή ομάδα $\Gamma \subset G$ που δρά στην X γνήσια και ελεύθερα, ο τροχιακός χώρος X/Γ είναι (G,X)-πολλαπλότητα. Εάν η X είναι απλά συνεκτική και G η ομάδα των ισομετριών της, που στις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις συγκροτείται από αναλυτικές αμφιδιαφορίσεις, τότε οι γεωδαισιακά πλήρεις (G,X)-πολλαπλότητες συμπίτουν με αυτούς τους τροχιακούς χώρους (η διαπίστωση αυτή συνάγεται άμεσα συνδυάζοντας τις προτάσεις VIII.§2.4, VIII.§2.5). Επομένως όλες οι πολλαπλότητες που ικανοποιούν τους ακόλουθους ορισμούς εντοπίζονται ως τροχιακοί χώροι κάτω από ελεύθερη και γνήσια δράση διακριτής υποομάδας της εκάστοτε ομάδας ισομετριών.

Ευκλείδεια n-πολλαπλότητα καλείται κάθε $(O(n),\mathbb{E}^n)$-πολλαπλότητα, δηλαδή κάθε μορφή του χώρου με καθολική επικάλυψη την n-διάστατη ευκλείδεια γεωμετρία. Είναι γνωστό ότι ο τόρος και η φυάλη του Klein είναι οι μόνες συμπαγείς $(O(2),\mathbb{E}^2)$-πολλαπλότητες (βλ. [**Thu**], §1.3). Ο 3-διάστατος τόρος $\mathbb{T}^3 = \mathbb{E}^3/\mathbb{Z}^3$ είναι το προφανές παράδειγμα συμπαγούς $(O(3),\mathbb{E}^3)$ –πολλαπλότητας.

Σφαιρική ή **ελλειπτική n-πολλαπλότητα** καλείται κάθε $(O(n+1),\mathbb{S}^n)$-πολλαπλότητα, δηλαδή κάθε μορφή του χώρου με καθολική επικάλυψη την n-διάστατη σφαιρική γεωμετρία. Η απλούστερη σφαιρική πολλαπλότητα είναι ο προβολικός χώρος. Όλες οι σφαιρικές πολλαπλότητες είναι συμπαγείς ως πηλίκα συμπαγούς πολλαπλότητας.

Υπερβολική n-πολλαπλότητα καλείται κάθε $(Isom\mathbb{H}^n,\mathbb{H}^n)$-πολλαπλότητα, δηλαδή κάθε μορφή του χώρου με καθολική επικάλυψη την n-διάστατη υπερβολική γεωμετρία.

VIII.§2.6. Κάθε 2-διάστατη προσανατολίσιμη συμπαγής πολλαπλότητα γένους ≥ 2 επιδέχεται ρημάννειας μετρικής με την οποία γίνεται υπερβολική 2-πολλαπλότητα.

Αποδ. (*Σχέδιο*) Από την ταξινόμηση των συμπαγών 2-πολλαπλοτήτων με την βοήθεια της θεμελιώδους ομάδας, είναι γνωστό ότι οι συμπαγείς προσανατολίσιμες 2-πολλαπλότητες είναι η 2-σφαίρα και τα πεπε-

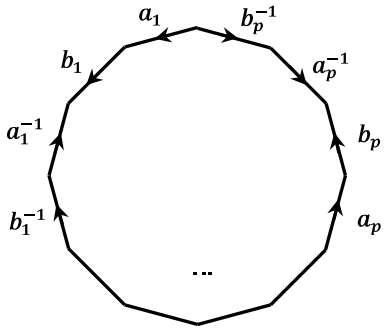
ρασμένα συνδετικά αθροίσματα 2-τόρων. Το συνδετικό άθροισμα $p \geq 1$ το πλήθος τόρων καλείται επιφάνεια γένους p.

γένους 2 γένους 3

Η επιφάνεια γένους p έχει θεμελιώδη ομάδα

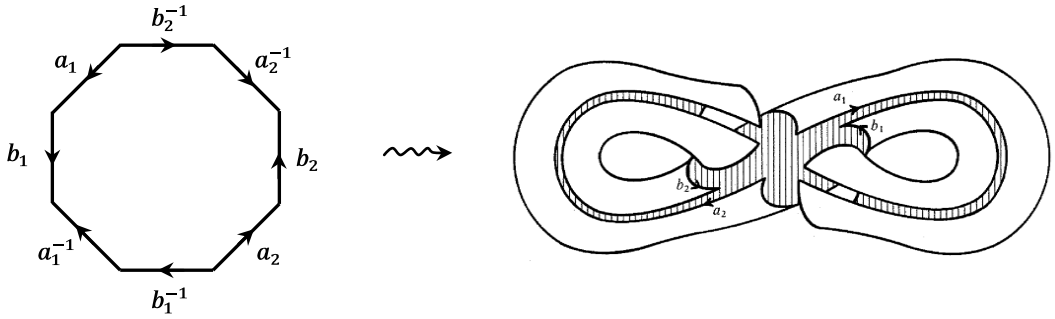
$$< \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_p, \beta_p \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \dots \alpha_p\beta_p\alpha_p^{-1}\beta_p^{-1} = 1 >$$

και θεμελιώδες πολύγωνο ένα $4p$-γωνο του οποίου οι πλευρές ταυτίζονται σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα.

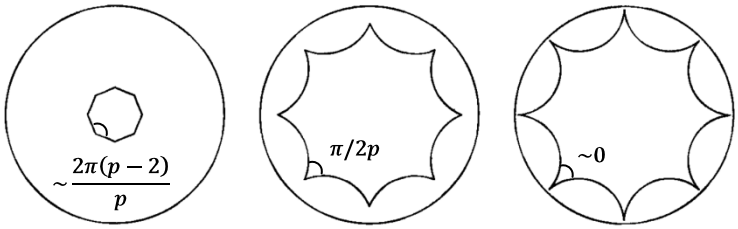


(1)

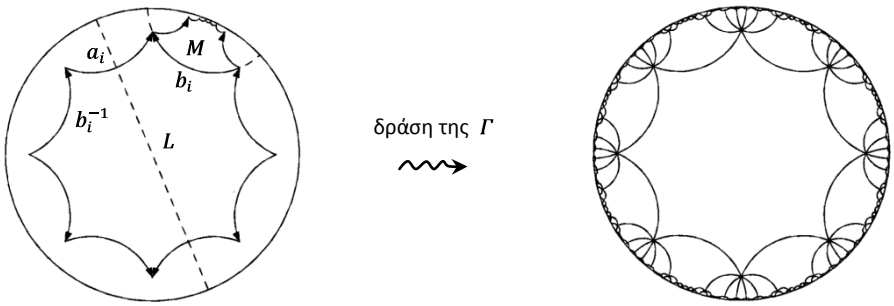
Λόγου χάρη για $p = 2$ γίνονται οι εξής ταυτίσεις που δίνουν την επιφάνεια γένους 2:



Για $p \geq 2$ δεν υπάρχει επίστρωση του ευκλείδειου επιπέδου από κανονικά και ισομεγέθη $4p$-γωνα, επομένως η επιφάνεια γένους $p \geq 2$ δεν μπορεί να προκύψει ως τροχιακός χώρος κάτω από ελεύθερη και γνήσια δράση διακριτής υποομάδας της $O(2)$ (όπως ο τόρος). Θα χρησιμοποιηθεί αντί του ευκλείδειου επιπέδου το 2-διάστατο μοντέλο *Poincaré* (που είναι άλλωστε ομοιομορφικό με το πρώτο). Σχεδιάζουμε εντός της $\mathbb{B}^2$ κανονικό υπερβολικό $2p$-γωνο (δηλαδή πολύγωνο του οποίου οι πλευρές είναι ευθείες του μοντέλου) με κέντρο 0 και κατάλληλου μεγέθους ώστε οι γωνίες μεταξύ των πλευρών του να είναι όλες $\pi/2p$. Αυτό το πολύγωνο υπάρχει λόγω του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών, διότι καθώς συρρικνώνεται γύρω από το 0 οι εσωτερικές του γωνίες τείνουν στο $2\pi(p-2)/p$, ενώ καθώς τα άκρα του προσεγγίζουν το σύνορο $\partial\mathbb{B}^2$ οι γωνίες του τείνουν στο μηδέν.

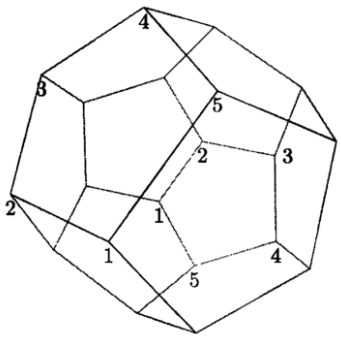


Ονομάζουμε τις πλευρές του πολυγώνου σύμφωνα με τον κανόνα του σχήματος (1). Συμβολίζεται β_i η υπερβολική ισομετρία που προκύπτει ως σύνθεση της υπερβολικής ανάκλασης ως προς το τόξο M με την υπερβολική ανάκλαση ως προς το τόξο L (βλ. επόμενο σχήμα), και απεικονίζει το b_i^{-1} στο b_i διατηρώντας την φορά των βελών. Συμβολίζεται επίσης α_i η αντίστοιχη υπερβολική ισομετρία για το ζεύγος a_i^{-1}, a_i και Γ η ομάδα των υπερβολικών ισομετριών που παράγεται πάνω στα α_i, β_i. Εφ΄ όσον οι εσωτερικές γωνίες του αρχικού $4p$-γώνου είναι $\pi/2p$ και οι υπερβολικές ισομετρίες διατηρούν τις ευκλείδειες γωνίες (ως περιορισμοί μετασχηματισμών Möbius), συνάγεται άμεσα ότι η τροχιά του κάτω από την δράση της Γ είναι επίστρωση του 2-διάστατου μοντέλου *Poincaré*.

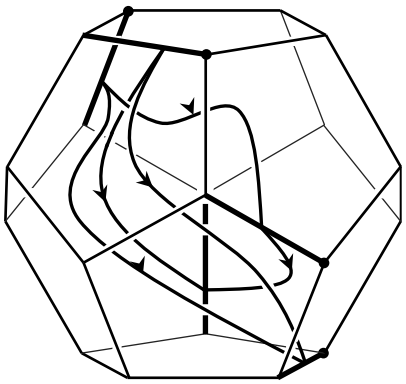


Αποδεικνύεται (βλ. σελ. 275-282 από [**Lee3**]) ότι η Γ είναι διακριτή υποομάδα της $Isom\mathbb{H}^2$ που δρά ελεύθερα και γνήσια και αναπαρίσταται ως $\Gamma = < \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_p, \beta_p \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \dots \alpha_p\beta_p\alpha_p^{-1}\beta_p^{-1} = 1 >$, που είναι η θεμελιώδης ομάδα της επιφάνειας γένους p. Επομένως η επιφάνεια έχει καθολική επικάλυψη το μοντέλο Poincaré με καλύπτουσα ομάδα Γ. Από VI.§6.11 έπεται το ζητούμενο. ■

Θεωρούμε τώρα τον 12-**εδρικό χώρο *Seifert-Weber***, που προκύπτει ταυτίζοντας ανά δύο τις απέναντι έδρες του 12-εκαέδρου μετά από στροφή $3\pi/5$.

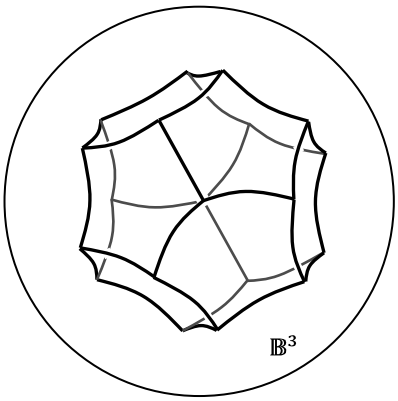


Με εξαντλητικό έλεγχο διαπιστώνεται ότι οι 60 πλευρές του 12-έδρου ταυτίζονται σε έξι 5-άδες και ότι όλες οι κορυφές του (20 το πλήθος) ταυτίζονται σε μια κοινή κορυφή.



Αυτή η κοινή κορυφή ταύτισης έχει 20-εδρική περιοχή (στο κέντρο του 20-έδρου βρίσκεται το εν λόγω σημείο) που είναι ομοιομορφική με 3-διάστατη ευκλείδεια μπάλα. Από αυτήν την παρατήρηση συνάγεται ότι ο χώρος *Seifert-Weber* είναι 3-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα. Επιπλέον είναι συμπαγής, ως πηλίκο συμπαγούς χώρου.

Θα εφοδιαστεί ο χώρος *Seifert-Weber* με υπερβολική δομή. Εγγράφουμε στο 3-διάστατο μοντέλο *Poincaré* $\mathbb{B}^3$ κανονικό υπερβολικό 12-εδρο (δηλαδή με έδρες τμήματα 2-διάστατων σφαιρών που τέμνουν κάθετα το $\partial\mathbb{B}^3$), με κέντρο το 0 και διεδρική γωνία 72° (υπάρχει, εφ'όσον καθώς το 12-εδρο συρρικνώνεται γύρω από το 0 η διεδρική του γωνία υπερβαίνει τις 72°, ενώ καθώς οι κορυφές του προσεγγίζουν το $\partial\mathbb{B}^3$ η διεδρική γωνία μηδενίζεται).



Με διαδικασία όμοια εκείνης στην απόδειξη της VIII.§2.6, προσαρμοσμένης εδώ ώστε να γίνονται οι ταυτίσεις που δίνουν τον χώρο *Seifert-Weber*, η τροχιά του 12-έδρου κάτω από ελεύθερη και γνήσια δράση κατάλληλης διακριτής ομάδας Γ υπερβολικών ισομετριών, συγκροτεί επίστρωση της $\mathbb{B}^3$ από υπερβολικά πολύγωνα, τα οποία συναντώνται στις πλευρές τους ανά πέντε και στις κορυφές τους ανά είκοσι. Τότε ο 12-εδρικός χώρος *Seifert-Weber* είναι ο τροχιακός χώρος $\mathbb{B}^3/\Gamma$, επομένως επιδέχεται υπερβολικής δομής.

§3. Η 3-ΔΙΑΣΤΑΤΗ ΣΦΑΙΡΑ

Συμβολίζεται $\boldsymbol{H}$ η άλγεβρα των κουατερνίων, που ταυτίζεται με τον 4-διάστατο χώρο εάν επιλέξουμε

$$1 = (1,0,0,0), \quad i = (0,1,0,0), \quad j = (0,0,1,0), \quad k = (0,0,0,1)$$

Γράφουμε $\boldsymbol{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k = \mathbb{R}^4$ και $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$, εννοώντας ότι λαμβάνουμε τα i, j, k ως το σύνηθες, θετικά προσανατολισμένο, ορθοκανονικό σύστημα του 3-διάστατου χώρου $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$. Αναγνωρίζουμε την 3-διάστατη σφαίρα ως το σύνολο των μοναδιαίων κουατερνίων,

$$\mathbb{S}^3 = \{x_o + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \boldsymbol{H} \mid x_o^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

και την 2-διάστατη σφαίρα ως

$$\mathbb{S}^2 = \{x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Ταυτίζοντας περεταίρω τον $\boldsymbol{H} = \mathbb{R}^4$ με τον $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, κάθε κουατέρνιο διασπάται ως

$$\boldsymbol{H} \ni x = x_o + x_1 i + x_2 j + x_3 k = \underbrace{(x_o + x_1 i)}_{z_1} + \underbrace{(x_2 + x_3 i)}_{z_2} j$$

και η άλγεβρα $\boldsymbol{H}$ εμφυτεύεται στην $M_2\mathbb{C}$ μέσω της απεικόνισης

$$\boldsymbol{H} \ni x = \underbrace{x_o + x_1 i}_{z_1} + \underbrace{x_2 j + x_3 k}_{z_2\, j} \longmapsto \begin{pmatrix} x_o + x_1 i & x_2 + x_3 i \\ -x_2 + x_3 i & x_o - x_1 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \hat{x} \in M_2\mathbb{C}$$

δηλαδή η ομάδα $\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H} \setminus \{0\}$ των αντιστρέψιμων κουατερνίων είναι ισομορφική με την $U(2)$. Ισχύει επίσης

$$det\, \hat{x} = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = x_o^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |x|^2$$

απ' όπου συνάγεται ότι $|x\, y| = |x||y|$, δηλαδή ο πολλαπλασιασμός των κουατερνίων σέβεται το ευκλείδειο μέτρο.

VIII.§3.0. Για κάθε $q \in \mathbb{S}^3$, η απεικόνιση $q(\cdot) : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ είναι ισομετρία.

Αποδ. Άμεσα, από την τελευταία παρατήρηση. ■

VIII.§3.1. Η $\mathbb{S}^3$ καθίσταται τοπολογική ομάδα με το γινόμενο κουατερνίων και δρά από αριστερά στον εαυτό της με ισομετρίες που διατηρούν τον προσανατολισμό (εφ' όσον είναι συνεκτική).

Αποδ. Άμεσα, από VIII.§3.0, εφ' όσον ο από αριστερά πολλαπλασιασμός με μοναδιαίο κουατέρνιο διατηρεί την $\mathbb{S}^3$. ■

VIII.§3.2. Η $\mathbb{S}^3$ είναι *Lie* ισόμορφη με την $SU(2)$ μέσω της απεικόνισης $\frown : \mathbb{S}^3 \to SU(2)$.

Αποδ. Επειδή η απεικόνιση $\frown : \boldsymbol{H}^3 \to U(2)$ είναι ισομορφισμός και ισχύει $det\, \hat{q} = |q|^2$. ■

Η ισομορφία της προηγούμενης πρότασης προκύπτει επίσης από την λεία δράση $SU(2) \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, κάτω από την οποία η πολλαπλότητα $\mathbb{S}^3$ είναι ομογενής χώρος: ο σταθεροποιητής του 1 είναι $stab(1) = SU(1) = 1$, επομένως $\mathbb{S}^3 \cong SU(2)/1 = SU(2)$.

VIII.§3.3. $Z(\mathbb{S}^3) = \{\pm 1\}$.

Αποδ. Από τα γνωστά για την $SU(1)$. ■

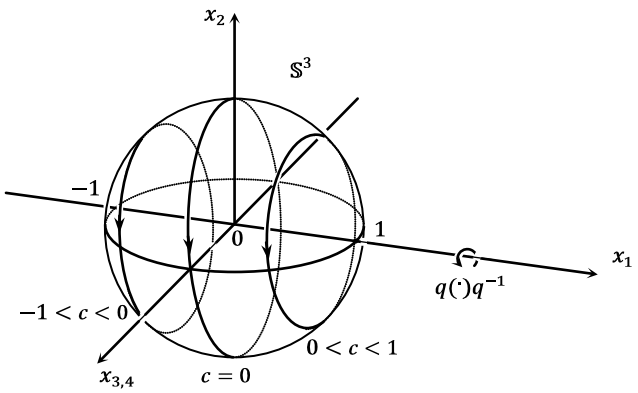
Εφ' όσον το γινόμενο κουατερνίων διατηρεί το ευκλείδειο μέτρου του 4-διάστατου χώρο, για κάθε $q \in \boldsymbol{H}$ η απεικόνιση

$$q(\cdot)q^{-1} : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3, \qquad x \longmapsto qxq^{-1}$$

είναι ισομετρία της $\mathbb{S}^3$ που επιπλέον σταθεροποιεί το 1. Επομένως κάθε τέτοια απεικόνιση διατηρεί τα σύνολο σταθερής απόστασης από την μονάδα (**πλάτη** της $\mathbb{S}^3$), δηλαδή τις 2-διάστατες σφαίρες επί της $\mathbb{S}^3$ που δίνονται από τους περιορισμούς

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - c^2, \qquad x_o = c, \qquad -1 \le c \le 1$$

Για $c = +1, -1$ λαμβάνουμε τα μονοσύνολοα $+1 = (+1,0,0,0), -1 = (-1,0,0,0)$ αντιστοίχως και για $c = 0$ την $\mathbb{S}^2$.



VIII.§3.4. Τα πλάτη της $\mathbb{S}^3$ είναι οι κλάσεις συζυγίας αυτής. Συγκεκριμένα, για κάθε $c \in (-1,1)$, το c-πλάτος είναι το σύνολο των $x \in \mathbb{S}^3$ για τα οποία $trace\, \hat{x} = 2c$.

Αποδ. Κάθε πλάτος περιέχεται σε μια κλάση συζυγίας, εφ' όσον μένει αναλλοίωτο από αυτήν. Έστω $x = x_o + x_1 i + x_2 j + x_3 k = z_1 + z_2\, j$ στο c-πλάτος, οπότε $x_o = c$, και

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o + x_1 i & x_2 + x_3 i \\ -x_2 + x_3 i & x_o - x_1 i \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\hat{x}$ είναι

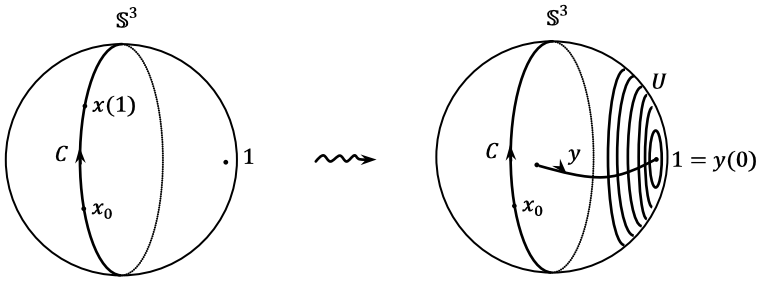
$$(t-z_1)(t-\bar{z}_1)+z_2\bar{z}_2=t^2-2(z_1+\bar{z}_1)t+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=t^2-2(z_1+\bar{z}_1)t+\underbrace{|z_1|^2+|z_2|^2}_{|x|^2}=$$

$$t^2-2(z_1+\bar{z}_1)t+1=t^2-2x_ot+1$$

που έχει ζεύγος μοναδιαίων μιγαδικών ριζών $\lambda,\bar{\lambda}$ εξαρτώμενων μόνον από το $trace\,\hat{x}=2x_o=2c$. Επειδή στοιχεία σε διαφορετικά πλάτη δίνουν πίνακες με διαφορετικά ζεύγη ιδιοτιμών, και αφού στην $SU(2)$ κάθε κλάση συζυγίας προσδιορίζεται από ένα ζεύγος $\lambda,\bar{\lambda}\in U(1)$, έπεται το ζητούμενο. ■

VIII.§3.5. Η μόνη γνήσια, μή τετριμμένη κανονική υποομάδα της $\mathbb{S}^3$ είναι η $\{\pm 1\}$.

Αποδ. Έστω N κανονική υποομάδα της $\mathbb{S}^3$ που δεν περιέχεται στο $\{\pm 1\}$· θα δειχθεί ότι η N περιέχει ανοικτή περιοχή του ουδέτερου στοιχείου, οπότε $N=\mathbb{S}^3$ κατ' ανάγκην. Επιλέγουμε $x_o\in N$, $x_o\neq\pm 1$, οπότε η N, ως κανονική υποομάδα, περιέχει το c-πλάτος του x_o, C. Επειδή $x_o\neq\pm 1$, το C είναι 2-διάστατη σφαίρα στην $\mathbb{S}^3$, επομένως υπάρχει μονοπάτι $x:[0,1]\to\mathbb{S}^3$ με $x(0)=x_o$, $x(t)\neq x_o$. Σχηματίζουμε το μονοπάτι $y:[0,1]\to\mathbb{S}^3$, $y(t)=x_o{}^{-1}x(t)$, που είναι επίσης μονοπάτι στην N, εφ' όσον $x(t)\in C\subset N$ για κάθε t. Επειδή $y(0)=1, y(1)\neq 1$, ισχύει $trace\,\hat{y}(1)=a<2$ και $trace\,\hat{y}(0)=2$. Λόγω συνέχειας, η ποσότητα $trace\,\hat{y}(t), t\in[0,1]$, λαμβάνει όλες τις τιμές στο $[0,a]$, δηλαδή το μονοπάτι $y(t)$ διέρχεται από όλα τα c-πλάτη, $c\in[0,a/2)$. Επειδή η N είναι κανονική υποομάδα, περιέχει το ανοικτό σύνολο U που προκύπτει ως ένωση αυτών των πλατών (κλάσεων συζυγίας) και είναι η ζητούμενη περιοχή του 1.



■

Εφ' όσον για κάθε $q\in\mathbb{S}^3$ η απεικόνιση $q(\cdot)q^{-1}$ είναι ισομετρία της $\mathbb{S}^2$ που διατηρεί τον προσανατολισμό, υφίσταται ομομορφισμός

$$\begin{aligned}\rho:\mathbb{S}^3&\to SO(3)\\ q&\mapsto\rho(q)\end{aligned}$$

η στροφή στον $\mathbb{R}^3$ της οποίας ο περιορισμός στην $\mathbb{S}^2$ είναι η απεικόνιση $q(\cdot)q^{-1}$

Επειδή $q(\cdot)q^{-1}=id\Leftrightarrow q\in Z(\mathbb{S}^3)$, έπεται ότι $ker\,\rho=\{\pm 1\}$, δηλαδή αντιδιαμετρικά σημεία της $\mathbb{S}^3$ επάγουν την ίδια στροφή στον $\mathbb{R}^3$.

VIII.§3.6. Η απεικόνιση $\rho:\mathbb{S}^3\to SO(3)$ είναι επιμορφισμός με πυρήνα $\{\pm 1\}$, επομένως ισχύει ο ισομορφισμός ομάδων

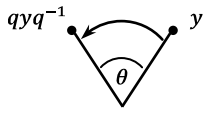
$$SO(3)\cong\mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$$

Για κάθε $q=x_o+x_1i+x_2j+x_3k\in\mathbb{S}^3$, $\rho(q)$ είναι η στροφή δεξιόστροφα του άξονα $x_1i+x_2j+x_3k$ κατά γωνία $cos\,\theta=2\,x_o^2-1$ (υπάρχουν δύο τέτοιες στροφές, που επάγονται από τα κουατέρνια $\pm x_o+x_1i+x_2j+x_3k$). Ειδικά η στροφή γωνίας π δεξιόστροφα του άξονα $x_1i+x_2j+x_3k$ (ισοδύναμα, στροφή γωνίας π δεξιόστροφα του άξονα $-x_1i-x_2j-x_3k$) επάγεται από το κουατέρνιο $x_1i+x_2j+x_3k$ και το αντίθετό του.

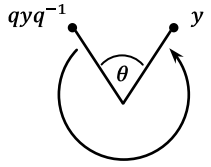
Αποδ. Εάν $q=x_o+x_1i+x_2j+x_3k\in\mathbb{S}^3$, ελέγχεται εύκολα ότι το $x_1i+x_2j+x_3k$ είναι ιδιοδιάνυσμα της στροφής $\rho(q)$, δηλαδή άξονάς της. Επιλέγουμε $y\in\mathbb{R}^3$ κάθετο στο $x_1i+x_2j+x_3k$, συγκεκριμένα, $y=x_2i-x_1j$ εάν x_1 ή $x_2\neq 0$ αλλιώς $y=i$. Σε κάθε περίπτωση, για την γωνία θ ανάμεσα στα διανύσματα y και qyq^{-1} ισχύει

$$cos\,\theta = < y, qyq^{-1} > / |y|^2 = x_o^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 2\,x_o^2 - 1 \qquad (1)$$

Θεωρώντας ότι οι στροφές γίνονται δεξιόστροφα, τα κουατέρνια $x_o + x_1 i + x_2 j + x_3 k, -x_o + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ που επάγουν στροφές γύρω από τον άξονα $x_1 i + x_2 j + x_3 k$ και τα πραγματικά μέρη των οποίων ικανοποιούν την ισότητα (1), επάγουν τις ακόλουθες στροφές.



$q = x_o + x_1 i + x_2 j + x_3 k$



$q = -x_o + x_1 i + x_2 j + x_3 k$

Επειδή για κάθε στροφή στο $SO(3)$ κατασκευάζεται μοναδικό κουατέρνιο που την επάγει με αυτόν τον τρόπο, έπεται το ζητούμενο. ■

VIII.§3.7. Η ομάδα $SO(3)$ είναι ομοιομορφική με τον προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^3$.

Αποδ. Η δράση της $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ στην $\mathbb{S}^3$ (εναλλαγή αντιδιαμετρικών σημείων) είναι ελεύθερη, επομένως η απεικόνιση πηλίκο $q : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}P^3 = \mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$ είναι επικάλυψη. Εφ' όσον $ker\,\rho = \{\pm 1\}$ διακριτή υποομάδα της $\mathbb{S}^3$, η $\rho : \mathbb{S}^3 \to SO(3)$ είναι επικάλυψη με καλύπτουσα ομάδα $\mathbb{Z}_2$ που δρά εναλλάσοντας αντιδιαμετρικά σημεία, και επίσης καθολική επικάλυψη, αφού η $\mathbb{S}^3$ είναι απλά συνεκτική. Τότε το ακόλουθο πέρασμα στο πηλίκο είναι ομομορφισμός, ως συνεχής, $1-1$ απεικόνιση πάνω σε συμπαγή χώρο.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^3 \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[d, "q"] \\ SO(3) & \mathbb{R}P^3 \arrow[l, "\tilde{\rho}"] \end{tikzcd}$$

■

VIII.§3.8. $\pi_1 SO(3) = \mathbb{Z}_2$.

Αποδ. Άμεσα, από VIII.§3.7. ■

Για να εντοπιστεί το μή τετριμμένο στοιχείο της $\pi_1 SO(3)$, θεωρούμε την καμπύλη $(e^{it})_{t\in[0,\pi]}$ στην $\mathbb{S}^3$, που επειδή έχει αντιδιαμετρικά άκρα, προβάλλεται σε μη τετριμμένο βρόγχο $r(t)$ της θεμελιώδους ομάδας του $\mathbb{R}P^3 \cong SO(3)$. Υπολογίζεται εύκολα ότι

$$e^{it}(yj + zk)e^{-it} = \begin{pmatrix} cos\,2t & -sin\,2t \\ sin\,2t & cos\,2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

επομένως η καμπύλη $r(t) = \tilde{\rho}\left(q(e^{it})\right) = \rho(e^{it}) = e^{it}(\cdot)e^{-it}$ είναι ο βρόγχος των στροφών με γωνία από 0 έως 2π γύρω από τον άξονα i. Τότε ο βρόγχος r^2 είναι η καμπύλη των στροφών γύρω από τον άξονα i με γωνία από 0 έως 4π, και είναι ομοτοπικός με το ταυτοτικό στοιχείο της $\pi_1 SO(3) = \mathbb{Z}_2$[7].

7. Αυτό το φαινόμενο έχει χρησιμοποιηθεί από τον Dirac ως εξήγηση του γιατί η στροφορμή ενός περιστρεφόμενου σώματος μπορεί να έχει τιμή μισού κβάντου αλλά όχι άλλου κλάσματος.

Από VIII.§3.1 συνάγεται άμεσα ότι η $\mathbb{S}^3$ εμφυτεύεται ως υποομάδα *Lie* στην ομάδα των ισομετριών της, $O(4)$. Η επόμενη πρόταση δίνει τον τρόπο κατασκευής της $SO(4)$ από την 3-διάστατη σφαίρα.

VIII.§3.9. Ισχύει ο ισομορφισμός ομάδων

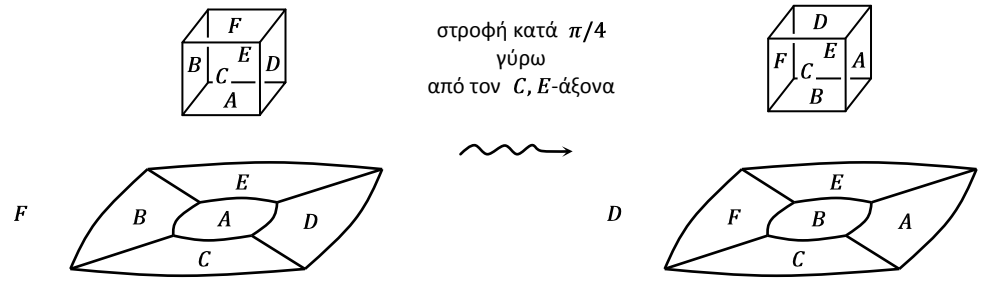
$$SO(4) = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$$

μέσω της $\tau : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to SO(4)$, $\tau(g,h) = g(\cdot)h^{-1}$, που έχει πυρήνα

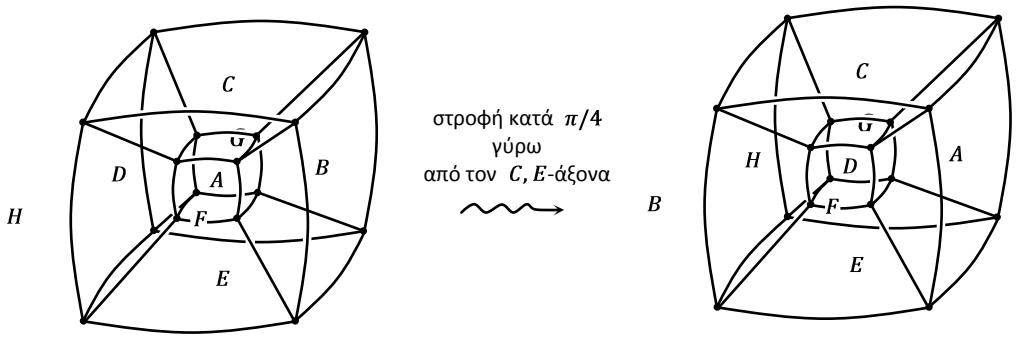
$$ker\,\tau = \{(g,g) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \,\big|\, g = \pm 1\} \cong \{\pm 1\}$$

Αποδ. Τα $\tau(h,h)$, $h \in \mathbb{S}^3$ σταθεροποιούν το 1 και οι περιορισμοί τους στο $\mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ δίνουν την $SO(3)$. Επομένως κάθε ορθοκανονικό πλαίσιο στον εφαπτόμενο χώρο $T_1\mathbb{S}^3$ απεικονίζεται μέσω κατάλληλου $\tau(h,h)$ σε οποιοδήποτε άλλο ορθοκανονικό πλαίσιο του ίδιου χώρου. Συνθέτοντας με κατάλληλο $\tau(gh^{-1},1)$, μεταφέρουμε το 1 σε οποιοδήποτε σημείο της $\mathbb{S}^3$. Αυτές οι παρατηρήσεις δείχνουν ότι η τ είναι όντως επιμορφισμός. Επίσης $\tau(g,h) = id \Leftrightarrow gxh^{-1} = x, \forall x \in \mathbb{R}^4$. Επιλέγοντας $x = g^{-1}$ έπεται ότι $g = h$, επομένως $gxg^{-1} = x, \forall x \in \mathbb{R}^4$· ισοδύναμα, $g \in Z(\mathbb{S}^3) = \{\pm 1\}$. Άρα $ker\,\tau = \{\pm 1\}$. ■

Προβάλλοντας στερεογραφικά την $\mathbb{S}^3$ στον $\mathbb{R}^3$, η ομάδα $SO(4)$ μπορεί να μελετηθεί περαιτέρω μέσω των οπτικοποιήσιμων παραμορφώσεων του 3-διάστατου χώρου που αντιστοιχούν στις μή οπτικοποιήσιμες στροφές της 3-διάστατης σφαίρας. Εγγράφοντας κύβο στην 2-διάστατη σφαίρα και προβάλλοντάς την στο πραγματικό επίπεδο, οι στροφές της $\mathbb{S}^2$ γύρω από άξονες διερχόμενο από τα κέντρα απέναντι εδρών του κύβου έχουν την επόμενη εικόνα στο επίπεδο.



Ομοίως, εγγράφοντας 4-διάστατο κύβο 16 κορυφών $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$ στην $\mathbb{S}^3$, οι στροφές αυτής γύρω από άξονες διερχόμενους από τα κέντρα απέναντι εδρών του κύβου έχουν την επόμενη εικόνα στον 3-διάστατο χώρο.



Ωστόσο, σε αντίθεση με την $SO(3)$, η $SO(4)$ περιέχει στροφές χωρίς άξονα (δηλαδή στροφές με περισσότερα του ενός ιδιοδιανύσματα). Ενδιαφέρει ιδιαίτερα η ομάδα των μετασχηματισμών

$$\begin{pmatrix} cos\,t & -sin\,t & & \\ sin\,t & cos\,t & & \\ & & cos\,t & -sin\,t \\ & & sin\,t & cos\,t \end{pmatrix}_{t \in [0,2\pi)}$$

που είναι με προφανή τρόπο ισομορφική ως ομάδα *Lie* με την $U(1) \cong SO(2)$. Ελέγχεται κάνοντας την πράξη ότι

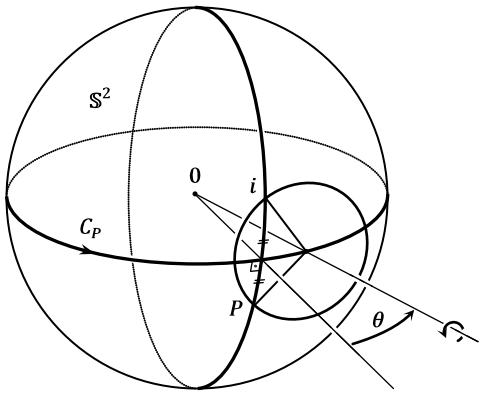
$$\begin{pmatrix} cos\ t & -sin\ t & & \\ sin\ t & cos\ t & & \\ & & cos\ t & -sin\ t \\ & & sin\ t & cos\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = e^{it}(x_o + x_1 i + x_2 j + x_3 k)$$

επομένως η εν λόγω ομάδα περιέχεται στην $\mathbb{S}^3$ ως $U(1) = (e^{it})_{t\in[0,2\pi)}$ και δρά σε αυτήν από αριστερά με τον πολλαπλασιασμό κουατερνίων. Από τα γνωστά για τους μιγαδικούς προβολικούς χώρους (βλ. αρχή σελ. 26), ο τροχιακός χώρος αυτής της δράσης είναι το σύνολο $\mathbb{C}P^1$ των μέγιστων κύκλων της $\mathbb{S}^3$ (**κύκλοι *Hopf***), σε καθ' έναν από τους οποίους η $U(1)$ δρά περιστρέφοντάς τον.

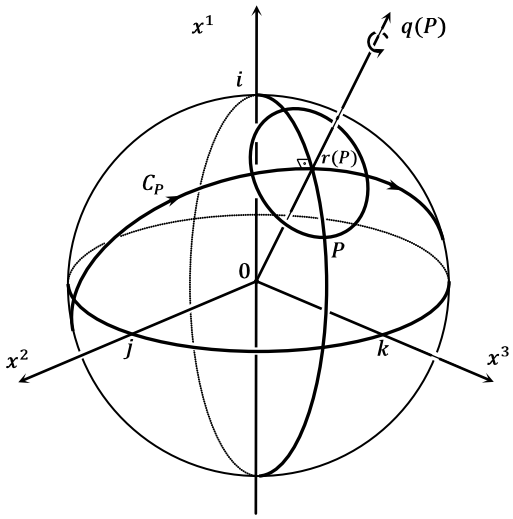
Ορίζεται η **απεικόνιση *Hopf***,

$$h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2, \qquad h(q) = qiq^{-1}$$

(δηλαδή $h(q)$ το σημείο της $\mathbb{S}^2$ στο οποίο απεικονίζεται το $i = (1,0,0)$ από την στροφή $q(\cdot)q^{-1}$). Θεωρώντας ότι οι περιστροφές γίνονται δεξιόστροφα, από την γεωμετρία της $\mathbb{S}^2$ συνάγεται εύκολα ότι οι στροφές που απεικονίζουν το i στο $P = (p_1, p_2, p_3) \neq -i$ είναι μια για κάθε προσανατολισμένο άξονα διερχόμενο από τον μέγιστο κύκλο C_P που διχοτομεί κάθετα το ελάσσον τόξο (i, P) του διερχόμενου από τα i, P μέγιστου κύκλου, $0 \leq \theta < \pi$.



Θα εντοπιστεί το μοναδιαίο κουατέρνιο $q(P)$ που επάγει την στροφή στην θέση $\theta = 0$ (στροφή κατά π). Έστω $r(P)$ η κανονικοποίηση του προσανατολισμένου άξονα ως προς τον οποίον γίνεται η επαγόμενη από το $q(P)$ περιστροφή, $r(P) = (r_1, r_2, r_3)$.



Εάν φ η γωνία του διανύσματος OP με τον άξονα x^1, τότε $\varphi/2$ η γωνία του $r(P)$ με αυτόν, οπότε

$$r_1 = cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\,\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}} \qquad (1)$$

Επειδή $r(P) \in \mathbb{S}^2$, $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$, που λόγω της (1) δίνει

$$r_2^2 + r_3^2 = \frac{1-p_1}{2} \qquad (2)$$

Επειδή οι προβολές των $r(P), P$ στο x^2, x^3-επίπεδο είναι συνευθειακές,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{p_2}{p_1} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας από (3) στην (2),

$$r_2^2\frac{p_2^2+p_3^2}{p_2^2} = \frac{1-p_1}{2} \Rightarrow r_2^2\frac{1-p_1^2}{p_2^2} = \frac{1-p_1}{2} \Rightarrow r_2^2 = \frac{p_2^2}{2(1+p_1)} \Rightarrow r_2 = \frac{p_2}{\sqrt{2(1+p_1)}} \quad (p_2, r_2 \text{ ομόσημα})$$

και ομοίως, $r_3 = p_3/\sqrt{2(1+p_1)}$. Επειδή επίσης $r_1 = \sqrt{1+p_1/2} = 1 + p_1/\sqrt{2(1+p_1)}$, βρέθηκε ότι

$$r(P) = \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}(1+p_1, p_2, p_3)$$

Εφ' όσον η στροφή που επάγεται από το $q(P)$ γύρω από τον άξονα $r(P)$ είναι κατά γωνία π, συνάγεται ότι

$$q(\underbrace{p_1, p_2, p_3}_{P}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}(0\cdot 1 + (1+p_1)i + p_2 j + p_3 k)$$

Κάνοντας την σύμβαση $q(\underbrace{-1,0,0}_{-i}) = k$ (επάγει στροφή κατά γωνία π γύρω από τον x^3-άξονα, απεικονίζοντας το i στο $-i$) και $q(\underbrace{1,0,0}_{i}) = 1$ (επάγει την ταυτοτική στροφή), ορίζεται η απεικόνιση

$$q : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^3,\ q(p_1, p_2, p_3) = \begin{cases} 1, & P = i \\ k, & P = -i \\ \big((1+p_1)i + p_2 j + p_3 k\big)/\sqrt{2(1+p_1)}, & P \neq \pm i \end{cases}$$

που είναι μια επιλογή από κάθε ίνα της απεικόνισης *Hopf*.

Εκτελώντας την πράξη, εάν $q = x_o + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{S}^3$,

$$h(q) = i(x_o^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + j(2x_o x_3 - 2x_1 x_2) + k(2x_1 x_3 - 2x_o x_2)$$

Λαμβάνοντας τότε υπ' όψιν την ταύτιση $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \boldsymbol{H}$, η απεικόνιση *Hopf* εκφράζεται

$$h : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \supset \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2,\ h(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z}_2)$$

VIII.§3.10. Οι ίνες της απεικόνισης *Hopf* είναι οι κύκλοι *Hopf*

Αποδ. Θα δειχθεί αρχικά ότι η απεικόνιση *Hopf* σέβεται τους μέγιστους κύκλους. Έστω $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ και $e^{it} \in U(1)$, οπότε

$$h(e^{it}z_1, e^{it}z_2) = \left(\left|e^{it}z_1\right|^2 - \left|e^{it}z_2\right|^2, 2e^{it}z_1\overline{e^{it}}z_2\right) = \left(\left|z_1\right|^2 - \left|z_2\right|^2, 2e^{it}z_1e^{-it}z_2\right) = \left(\left|z_1\right|^2 - \left|z_2\right|^2, 2z_1z_2\right)$$

Επειδή κάθε κύκλος *Hopf* είναι ομογενής κάτω από την δράση της $U(1)$, έπεται το ζητούμενο.

Μένει να δειχθεί ότι η απεικόνιση *Hopf* διαχωρίζει τους κύκλους *Hopf*.

$$h(z_1, z_2) = h(w_1, w_2) \Rightarrow z_1\bar{z}_2 = w_1\overline{w}_2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \left|z_1\right|^2 - \left|z_2\right|^2 = \left|w_1\right|^2 - \left|w_2\right|^2 \qquad (2)$$

Από (2), $2\left|z_1\right|^2 - 1 = 2\left|w_1\right|^2 - 1 \Rightarrow \left|z_1\right| = \left|w_1\right|$ και ομοίως $\left|z_2\right| = \left|w_2\right|$, επομένως $z_i = e^{it_i}w_i, i = 1,2$

Αντικαθιστώντας στην (1),

$$e^{it_1}w_1\overline{e^{it_2}w_2} = w_1\overline{w_2} \Rightarrow e^{i(t_1-t_2)}w_1\overline{w_2} = w_1\overline{w_2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} w_1\overline{w_2} = 0 \quad \begin{cases} w_1 = 0 \text{ , επομένως } z_2 = 0 \\ w_2 = 0 \text{ , επομένως } z_1 = 0 \end{cases} \\ e^{i(t_1-t_2)} = 1 \Rightarrow e^{it_1} = e^{it_2} = \lambda \in U(1) \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση, τα $(z_1, z_2), (w_1, w_2)$ ανήκουν στον ίδιο κύκλο *Hopf*. ■

VIII.§3.11. Ο κύκλος *Hopf* που συγκροτείται από τις αντίστροφες εικόνες του $P \in \mathbb{S}^2$ είναι ο

$$h^{-1}(P) = (q(P)e^{it})_{t\in[0,2\pi)}$$

Αποδ. Συνδυάζοντας την VI.§1.10 με την ομογένεια των κύκλων *Hopf* κάτω από την δράση της $U(1)$. ■

Εφ' όσον οι h-ίνες συμπίτουν με τους κύκλους *Hopf*, λαμβάνουμε περνώντας στο πηλίκο την απεικόνιση $\tilde{h}$ που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα αντιμεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^3 \arrow[d] \arrow[dr, "h"] & \\ \mathbb{C}P^1 \arrow[r, "\tilde{h}"'] & \mathbb{S}^2 \end{tikzcd}$$

Η $\tilde{h}$ είναι ομοιομορφισμός ως συνεχής και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση πάνω σε συμπαγή χώρο, δίνοντας τη γνωστή τοπολογική ισοδυναμία ανάμεσα στην $\mathbb{S}^2$ και την σφαίρα *Riemann* (το μιγαδικό προβολικό επίπεδο είναι η *Alexandrov* συμπαγοποίηση του μιγαδικού επιπέδου).

Η διαμέριση $\mathbb{C}P^1$ της $\mathbb{S}^3$ σε κύκλους *Hopf* προβάλλεται στερεογραφικά σε μια διαμέριση του $\mathbb{R}^3$. Επειδή η στερεογραφική προβολή απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους (κύκλους και ευθείες), το $\mathbb{C}P^1$ προβάλλεται σε ένα σύνολο κύκλων και μια ευθεία (την εικόνα του κύκλου *Hopf* που περιέχει το σημείο $(1,0,0,0)$ από το οποίο γίνεται η στερεογραφική προβολή). Για την μελέτη αυτής της διαμέρισης, θα μελετηθεί αρχικά η στερεογραφική προβολή

$$\sigma : \mathbb{S}^3 \setminus \{(1,0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3, \qquad \sigma(z_1, z_2, w_1, w_2) = \frac{1}{1 - z_1}(z_2, w_1, w_2)$$

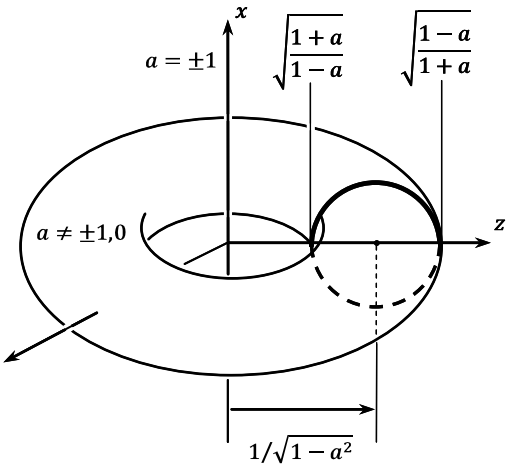
Συμβολίζοντας την πραγματική τετράδα (z_1, z_2, w_1, w_2) ως $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, όπου $z = z_1 + z_2 i$, $w = w_1 + w_2 i$, η 3-διάστατη σφαίρα γράφεται στη μορφή

$$\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \left|z\right|^2 + \left|w\right|^2 = 1\} = \left\{(ae^{it}, be^{is}) \mid t, s \in [0,2\pi), \qquad a^2 + b^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\left(ae^{it}, \sqrt{1 - a^2}e^{is}\right) \mid (t, s) \in [0,2\pi),\ 0 \le a \le 1\right\}$$

VIII.§3.12. Τα σύνολα των σημείων της $\mathbb{S}^3$ για τα οποία $a = 1, a = \pm 1$ προβάλλονται στερεογραφικά στον μοναδιαίο κύκλο του j, k-επιπέδου και στον i-άξονα αντιστοίχως. Για κάθε άλλο $a \in (0,1)$, το σύνολο $\left\{\left(ae^{it}, \sqrt{1 - a^2}e^{is}\right) \mid (t, s) \in [0,2\pi)\right\} \subset \mathbb{S}^3$ προβάλλεται στερεογραφικά στον τόρο με κατακόρυφο άξονα

τον i-άξονα, κυκλικό άξονα τον κύκλο ακτίνας $1/\sqrt{1-a^2}$ του j,k-επιπέδου και κέντρο το μηδέν και μικρή διάμετρο $\sqrt{1-a/_{1+a}} - \sqrt{1+a/_{1-a}}$.



Αποδ. Εφαρμόζοντας στερεογραφική προβολή,

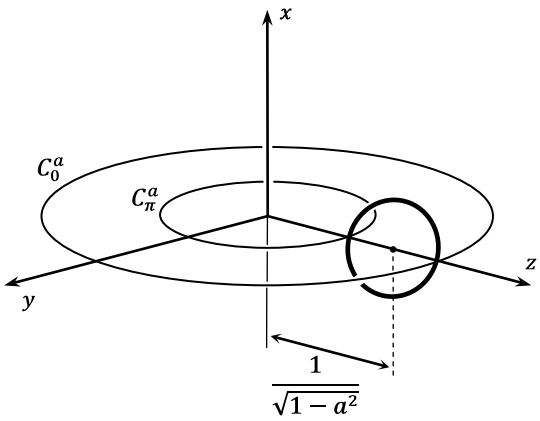
$$\left(ae^{it}, \sqrt{1-a^2}e^{is}\right) \to \frac{1}{1-a\cos t}\left(a\sin t, \sqrt{1-a^2}\cos s, \sqrt{1-a^2}\sin s\right)$$

Σταθεροποιούμε $a \neq 1,0$. Για $t=0$ και $t=\pi$, λαμβάνουμε αντιστοίχως τους ομόκεντρους κύκλους

$$C_0^a : \left(0, \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\cos s, \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\sin s\right), \qquad s \in [0,2\pi)$$

$$C_0^a : \left(0, \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\cos s, \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\sin s\right), \qquad s \in [0,2\pi)$$

Για $s=0$, λαμβάνουμε τον κύκλο $K_s^a : \frac{1}{1-a\cos t}\left(a\sin t, \sqrt{1-a^2}, 0\right), t \in [0,2\pi)$ στο i,k-επίπεδο, που έχει κέντρο το σημείο $(0, \sqrt{1-a^2}, 0)$ και διάμετρο πάνω στον k-άξονα.



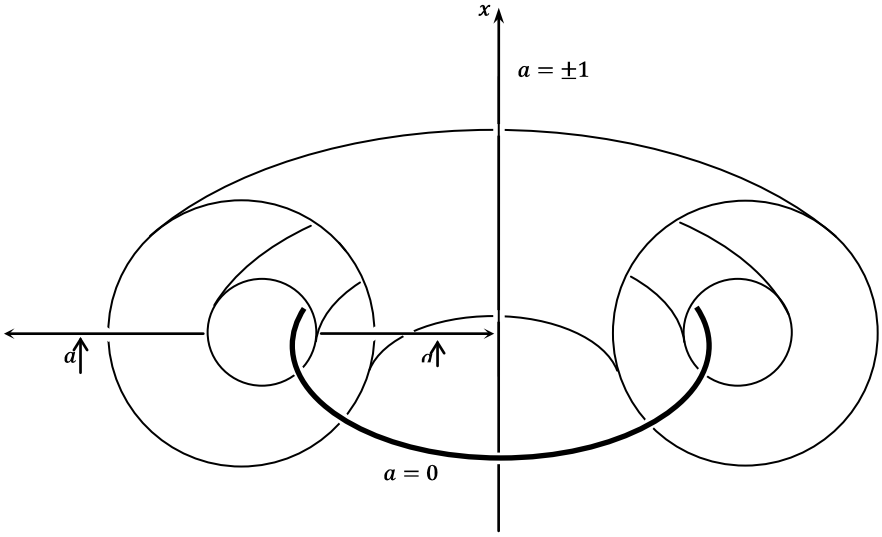
Αφήνοντας το s να κινηθεί ελεύθερα στο $[0,2\pi)$, ο κύκλος K_s^a περιστρέφεται έχοντας το κέντρο του στον κύκλο ακτίνας $1/\sqrt{1-a^2}$ και κέντρου 0 στο j,k-επίπεδο. Παράγεται έτσι η εικόνα του συνόλου $\{\left(ae^{it}, \sqrt{1-a^2}e^{is}\right) \mid (t,s) \in [0,2\pi)\} \subset \mathbb{S}^3$ που είναι ο ζητούμενος τόρος.

Εάν $a=0$ λαμβάνουμε τον μοναδιαίο κύκλο του j,k-επιπέδου.

Εάν $a = 1$ λαμβάνουμε το σύνολο $(sin\, t, 0,0)/(1 - cos\, t)$, που είναι ολόκληρος ο i-άξονας, εφ' όσον

$$lim_{t\to 0}\frac{sin\, t}{1 - cos\, t} = +\infty, \qquad lim_{t\to 2\pi}\frac{sin\, t}{1 - cos\, t} = -\infty \qquad \blacksquare$$

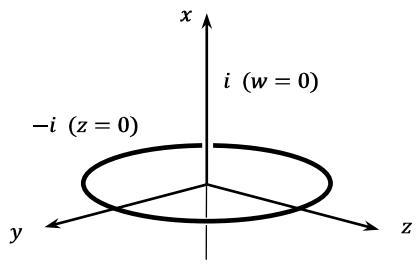
Επειδή $lim_{a\to 1}\sqrt{1 + a/_{1-a}} \to +\infty$, $lim_{a\to 1}\sqrt{1 - a/_{1+a}} \to 0$ οι ομόκεντροι κύκλοι στους οποίους διαμερίζεται ο $\mathbb{R}^3$ για τις διάφορες τιμές του $a \in [-1,1]$ έχουν την ακόλουθη εικόνα, με $a = 0$, $a = \pm 1$ να είναι οι ακραίες εκφυλισμένες περιπτώσεις του μοναδιαίου κύκλου στο j, k-επίπεδο και του i-άξονα αντιστοίχως.



Εφ' όσον το σύνολο των κύκλων *Hopf* είναι το μιγαδικό προβολικό επίπεδο, κάθε ένας από αυτούς μπορεί να νοείται ως ένα σύνολο της μορφής

$$\{\, (z, w) \in \mathbb{S}^3 \mid \frac{w}{z} = \lambda \,\} \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Για $\lambda = \infty$, οπότε $w = 0$, λαμβάνουμε τον κύκλο Hopf $(ke^{it})_{t\in[0,2\pi)}$ του $-i$, που προβάλλεται στερεογραφικά στον μοναδιαίο κύκλο του j, k-επιπέδου. Για $\lambda = 0$, οπότε $z = 0$, λαμβάνουμε τον κύκλο *Hopf* $(e^{it})_{t\in[0,2\pi)}$ του i, που προβάλλεται στερεογραφικά στον i-άξονα.



Για κάθε άλλο $\lambda \in \mathbb{C}$, ο κύκλος *Hopf* που αντιστοιχεί σε αυτό είναι το σύνολο των $(ae^{it}, \sqrt{1 - a^2}e^{is})$ για τα οποία

$$\frac{\sqrt{1 - a^2}e^{is}}{ae^{it}} = \frac{\sqrt{1 - a^2}e^{i(s-t)}}{a} = \lambda$$

Επειδή το a προσδιορίζεται μονοσήμαντα από το λ, έπεται το ακόλουθο.

VIII.§3.13. Κάθε κύκλος *Hopf* προβάλλεται στερεογραφικά σε έναν από τους τόρους στους οποίους διαμερίζεται ο $\mathbb{R}^3$ για τις διάφορες τιμές του $a \in [0,1]$.

VIII.§3.14. Για κάθε $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{S}^3$, $P \neq \pm i$, ο κύκλος *Hopf* $h^{-1}(P)$ προβάλλεται στερεογραφικά σε έναν κύκλο που τέμνει το j, k-επίπεδο σε δύο σημεία, ένα στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδυο και ένα στο εξωτερικό.

Αποδ. Εφ' όσον $P \neq \pm i$, ο κύκλος *Hopf* $h^{-1}(P)$ αντιπροσωπεύεται από το κουατέρνιο $q(P) = \big((1+p_1)i + p_2 j + p_3 k\big)/\sqrt{2(1+p_1)}$. Επομένως από VI.§1.11,

$$h^{-1}(P) = (-(1+p_1)\,sin\,t, (1+p_1)\,cos\,t, p_2\,cos\,t - p_3\,sin\,t, p_3\,cos\,t + p_2\,sin\,t),\ t \in [0,2\pi)$$

που προβάλλεται στερεογραφικά στον κύκλο

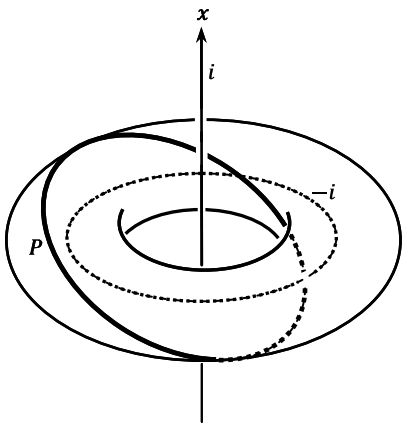
$$\frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}(1+(1+p_1)\,sin\,t)}\big((1+p_1)\,cos\,t, p_2\,cos\,t - p_3\,sin\,t, p_3\,cos\,t + p_2\,sin\,t\big), t \in [0,2\pi)$$

Τα σημεία A, B στα οποία ο κύκλος αυτός τέμνει το j, k-επίπεδο λαμβάνονται για $t = \pi/2, 3\pi/2$ αντιστοίχως. Θα ελεγχθεί ότι $|A| < 1$ (με όμοιο τρόπο ελέγχεται ότι $|B| > 1$). Ισχύει

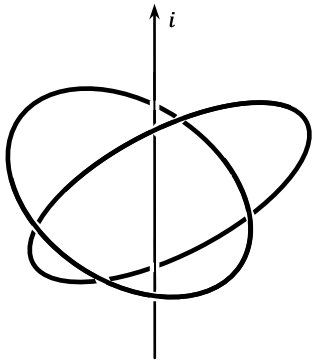
$$|A|^2 = \frac{1}{2(1+p_1)(2+p_1)^2}(p_2^2 + p_3^2) = \frac{1-p_1^2}{2(1+p_1)(2+p_1)^2} = \frac{1+p_1}{2(2+p_1)^2}$$

που είναι μικρότερο της μονάδας εφ' όσον $-1 < p_1 < 1$. ■

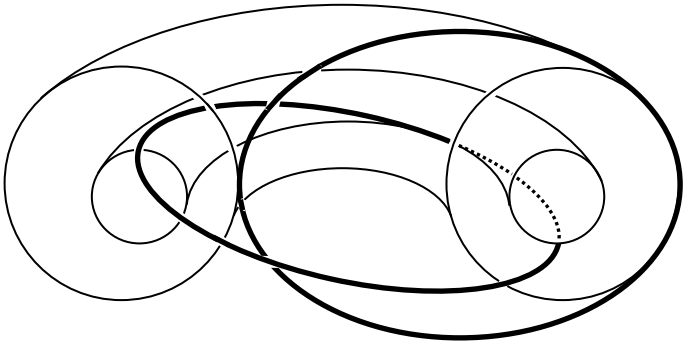
Συνδυάζοντας τις προτάσεις VIII.§3.13, VIII.§3.14, κάθε κύκλος *Hopf* $h^{-1}(P)$, $P \neq \pm i$, προβάλλεται στερεογραφικά σε έναν κύκλο του 3-διάστατου χώρου που έχει την παρακάτω εικόνα σε σχέση με τις προβολές των κύκλων $h^{-1}(\pm i)$,



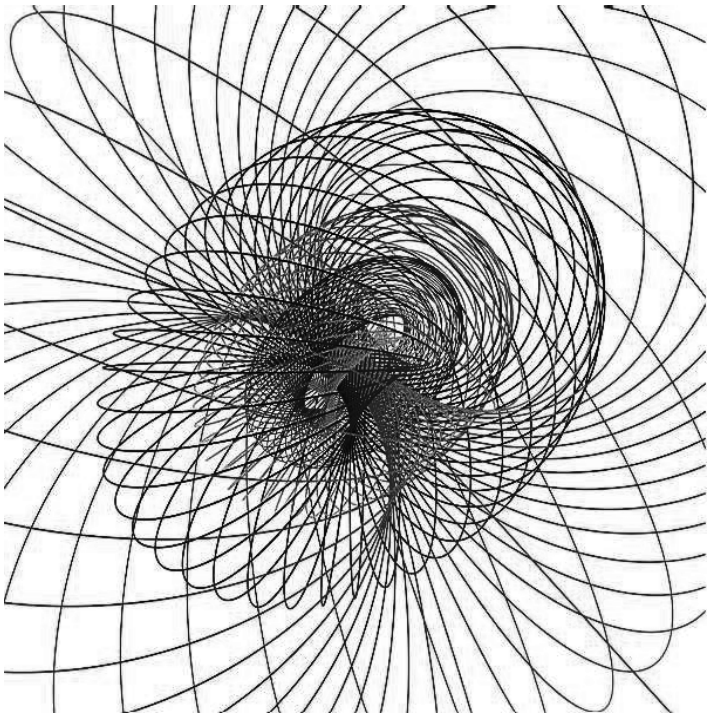
Δηλαδή είναι συνδεδεμένοι (linked) με τους γενικευμένους κύκλους $\pm i$, οι οποίοι είναι επίσης συνδεδεμένοι μεταξύ τους. Το σύνολο των κύκλων που προβάλλονται στερεογραφικά στον ίδιο τόρο συγκροτούν σύστημα κύκλων *Villarceau* για τον τόρο αυτό, επομένως είναι επίσης συνδεδεμένοι μεταξύ τους.



Επιπλέον δύο κύκλοι *Villarceau* πάνω σε αντίστοιχους τόρους, από τους οποίους ο ένας είναι στο εσωτερικό του άλλου, είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους,



απ' όπου συνάγεται ότι η 1-διάστατη φύλλωση του $\mathbb{R}^3$ στην οποία προβάλλεται στερεογραφικά η διαμερίση $\mathbb{C}P^1$ της $\mathbb{S}^3$ (**ίνωση *Hopf***) συγκροτείται από γενικευμένους κύκλους (κύκλοι και μια ευθεία), οποιοιδήποτε δύο από τους οποίους είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους**.**



Εφ' όσον οι κύκλοι *Hopf* είναι οι ολοκληρωτικές καμπύλες της ισομετρικής ομάδας αμφιδιαφορίσεων $(e^{it})_{t\in[0,2\pi)}$, το πεδίο ταχυτήτων τους είναι πεδίο *Killing*. Εάν κατά τον ορισμό της απεικόνισης *Hopf* είχε επιλεγεί το j ή k αντί του i, τότε θα προέκυπταν ινώσεις *Hopf* με τους άξονες j, k να παίζουν τον ρόλο του i-άξονα αντιστοίχως.

VIII.§3.15. Οι τρεις ινώσεις *Hopf* που αντιστοιχούν στις απεικονίσιες *Hopf*

$$q \longmapsto qiq^{-1}, \quad q \longmapsto qjq^{-1}, \quad q \longmapsto qkq^{-1}$$

είναι ανά δύο ορθογώνιες μεταξύ τους (με την ευκλείδια έννοια του $\mathbb{R}^3$).

Αποδ. Εφ' όσον η μετρική της σφαίρας είναι σύμμορφη της ευκλείδειας μέσω της στερεογραφικής προβολής, αρκεί να δειχθεί ότι κύκλοι *Hopf* επί της $\mathbb{S}^3$ που επάγονται από διαφορετικές απεικονίσεις *Hopf* τέμνονται κάθετα (ως προς την σφαιρική μετρική). Έστω $P \in \mathbb{S}^3 \setminus \{\pm i\}$ · θα δειχθεί ότι οι κύκλοι *Hopf*

$(e^{it}q(P))_{t\in[0,2\pi)}, (e^{jt}q(P))_{t\in[0,2\pi)}$ τέμνονται κάθετα στο σημείο P $(t=0)$. Έχει υπολογιστεί (βλ. απόδειξη VIII.§3.14) ότι

$$e^{it}q(P) = (-(1+p_1)\,sin\,t, (1+p_1)\,cos\,t, p_2\,cos\,t - p_3\,sin\,t, p_3\,cos\,t + p_2\,sin\,t)$$

Με παρόμοιο συλλογισμό υπολογίζεται ότι

$$e^{it}q(P) = (-p_2 sin\,t,\ p_3 sin\,t + (1+p_1)\,cos\,t,\ p_2 cos\,t,\ p_3 cos\,t - (1+p_1)\,sin\,t)$$

Επομένως

$$\frac{d}{dt}e^{it}q(P)\Big|_{t=0} = (-(1+p_1), 0, -p_3, p_2), \qquad \frac{d}{dt}e^{jt}q(P)\Big|_{t=0} = \big(-p_2, -p_3, 0, -(1+p_1)\big)$$

απ' όπου υπολογίζεται αμέσως ότι

$$< \frac{d}{dt}e^{it}q(P)\Big|_{t=0}, \frac{d}{dt}e^{jt}q(P)\Big|_{t=0} >= 0 \qquad \blacksquare$$

Η περιστροφή των τριών ινώσεων *Hopf* εντός του 3-διάστατου χώρου δίνουν μια εικόνα των ισομετρικών ροών $(e^{it})_{t\in[0,2\pi)}, (e^{jt})_{t\in[0,2\pi)}, (e^{kt})_{t\in[0,2\pi)}$ της $\mathbb{S}^3$. Το πεδίο ταχυτήτων κάθε μιας από αυτές τις ροές είναι παράδειγμα διανυσματικού πεδίου επί της $\mathbb{S}^3$ που δεν μηδενίζεται πουθενά (η ύπαρξη τέτοιων πεδίων είναι αδύνατη σε σφαίρες άρτιας διάστασης –*hairy ball theorem*).

§4. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΕ 3-ΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΔΟΜΕΣ ΕΠΑΦΗΣ

Η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας $\omega \wedge d\omega \neq 0$ παντού για μία $(n-1)$-διάστατη κατανομή $D = ker\,\omega$ σημαίνει ότι για κάθε $P \in M$ ο περιορισμός της συμπλεκτικής μορφής $d\omega(P)$ στον $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο $D_P \subset T_PM$ είναι η μηδενική διγραμμική απεικόνιση. Επομένως η ολοκληρωσιμότητα της κατανομής στο P είναι αδύνατη όταν $d\omega(P) \neq 0$, ισοδύναμα όταν υπάρχει βάση του D_P στην οποία η $d\omega(P)\big|_{D_P}$ να αναπαρίσταται από πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & \cdots & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

με τουλάχιστον ένα μπλόκ $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ στην διαγώνιο. Θεωρώντας την μή ολοκληρωσιμότητα είναι τόσο εντονότερη όσο περισσότερα είναι αυτά τα μπόκ της διαγωνίου, ο μέγιστος βαθμός μή ολοκληρωσιμότητας της D στην θέση P επιτυγχάνεται όταν η $d\omega(P)\big|_{D_P}$ είναι μή ιδιάζουσα. Αυτό είναι εφικτό μόνον εάν η διάσταση n της πολλαπλότητα M είναι περιττός αριθμός (IV.§2.20).

Δομή επαφής ονομάζεται μια $(n-1)$-διάστατη κατανομή D στην n-πολλαπλότητα M τέτοια ώστε για κάθε τοπικά ορίζουσα την D 1-μορφη ω στην περιοχή $U \subset M$, η $d\omega(P)\big|_{D_P}$ να είναι μή ιδιάζουσα συμπλεκτική μορφή. Εάν αυτο ισχύει για κάποια τοπική ορίζουσα την D 1-μορφή ω, τότε ισχύει επίσης για κάθε άλλη τοπικά ορίζουσα 1-μορφή $f\omega$, $f \in C^\infty(U)$, $f \neq 0$ παντού:

$$d(f\omega) = f\,d\omega + df \wedge \omega, \text{ άρα}$$

$$d(f\omega)\big|_D = (fd\omega)\big|_D + \underbrace{(df \wedge \omega)}_{0}\big|_D = (fd\omega)\big|_D$$

Οπότε η $d(f\omega)(P) = f(P)\, d\omega\big|_{D_P}$ είναι μή ιδιάζουσα συμπλεκτική μορφή, ως μή μηδενικό πολλαπλάσιο μή ιδιάζουσας. Από όσα προηγήθηκαν του ορισμού, η δομή επαφής εννοείται ως ο ακραίος τύπος μή ολοκληρώσιμης κατανομής με συνδιάσταση 1, και είναι εφικτή μόνο σε πολλαπλότητες περιττής διάστασης: η απεικόνιση συστροφή δεν είναι απλώς μή μηδενική, αλλά παντού μή μηδενική (οπότε η κατανομή είναι παντού μή ολοκληρώσιμη), και σε κάθε θέση $P \in M$, για κάθε $\xi \in T_P M$ υπάρχει $\eta \in T_P M$ ώστε το ζεύγος (ξ, η) να έχει μή μηδενική συστροφή.

Συμβολίζοντας $x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m, z$ το σύνηθες ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του $\mathbb{R}^{2m+1}$, η διαφορική μορφή

$$\omega = -x^1 dy^1 - \cdots - x^m dy^m + dz \qquad (1)$$

ορίζει μια δομή επαφής:

$$d\omega = -dx^1 \wedge dy^1 - \underbrace{x^1 d^2 y^1}_{0} - \cdots - dx^m \wedge dy^m - x^m \underbrace{d^2 y^m}_{0} + \underbrace{d^2 z}_{0} = -dx^1 \wedge dy^1 - \cdots - dx^m \wedge dy^m$$

οπότε $rank\, d\omega(P)\big|_{D_P} = 2m$ για κάθε $P \in M$. Αυτή η κατασκευή δείχνει ότι κάθε πολλαπλότητα περιττής διάστασης επιδέχεται τοπικά δομής επαφής. Μια παραλλαγή του θεωρήματος *Darboux*[8] για μορφές σε χώρους περιττής διάστασης δηλώνει ότι κάθε δομή επαφής λαμβάνει τοπικά σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων την μορφή (1):

VIII.§4.0. Για κάθε δομή επαφής σε $(2m+1)$-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα που αναπαρίσταται τοπικά ως $ker\, \omega$, υπάρχει τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m, z$ στο οποίο η ω λαμβάνει την μορφή (1).

Αποδ. Βλ. [**Arn**] σελ. 362. ■

Στοιχείο επαφής μιας n-διάστατης πολλαπλότητας καλείται ο $(n-1)$-διάστατος υπόχωρος του εφαπτόμενου χώρου σε κάποιο σημείο αυτής. Στο σύνολο των στοιχείων επαφής επάγεται με φυσικό τρόπο διαφορική δομή διάστασης $2n-1$ (**πολλαπλότητα επαφής**): χρειάζονται n αριθμοί για τον προσδιορισμό του σημείου της M στο οποίο εφάπτεται το στοιχείο $(n = dimM)$ και $n-1$ αριθμοί για τον προσδιορισμό του $(n-1)$-διάστατου υπόχωρου.

Το σύνολο των στοιχείων επαφής στο σημείο P είναι εξ ορισμού η γκρασμανιανή $G^n_{n-1}(T_P M) \cong \mathbb{R}P^{n-1}$. Επομένως η πολλαπλότητα των στοιχείων επαφής της M είναι νηματική δέσμη πάνω στην M με ίνα τον $(n-1)$-διάστατο πραγματικό προβολικό χώρο –ισοδύναμα, η πολλπλότητα των στοιχείων επαφής είναι η προβολικοποίηση της συνεφαπτομένης δέσμης,

$$PT^*M = \coprod_{P \in M} \mathcal{A}_1(T_P M) \setminus \{0\}/\sim$$

όπου $\mathcal{A}_1(T_P M)$ ο χώρος των 1-μορφών του $T_P M$ και

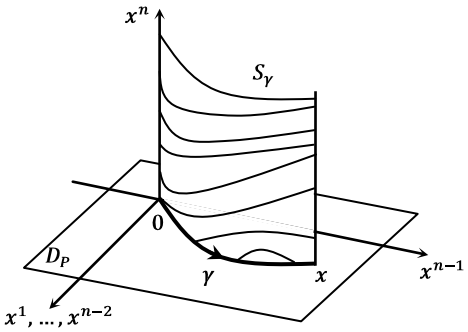
$$\mathcal{A}_1(T_P M) \setminus \{0\}/\sim \;\cong\; G^n_{n-1}\big(\mathcal{A}_1(T_P M)\big) \;\cong\; \mathbb{R}P^{n-1}$$

η ταύτιση πάνω από μή μηδενικό πολλαπλασιαστικό παράγοντα: κάθε $(n-1)$-διάστατος υπόχωρος του $T_P M$ προσδιορίζεται ως μηδενοχώρος κάποιας μή μηδενικής 1-μορφής καθώς και κάθε μή μηδενικού πολλαπλάσιου αυτής.

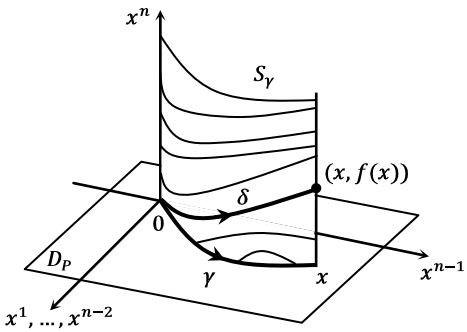
Έστω $x^1, \dots, x^n$ τοπικό σύστημα συντεταγμένων γύρω από το σημείο $P \in M$ τέτοιο ώστε το P να βρίσκεται στην άκρη των αξόνων και το στοιχείο επαφής D_P να αναπαρίσταται ως το υπερεπίπεδο $x^n = 0$, όπου D είναι $(n-1)$-διάστατη κατανομή στην M. Δεδομένου λείου τόξου καμπύλης που συνδέει τα σημεία $0, x$ και βρίσκεται στο υπερεπίπεδο $x^n = 0$, κατασκευάζεται η κυλινδρική επιφάνεια S_γ ως η

8. Για κάθε μη ιδιάζουσα συμπλεκτική μορφή ω υπάρχει τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m$ στο οποίο λαμβάνει την μορφή $\omega = dx^1 \wedge dy^1 + \cdots + dx^m \wedge dy^m$ (βλ. [**Arn**], σελ. 230).

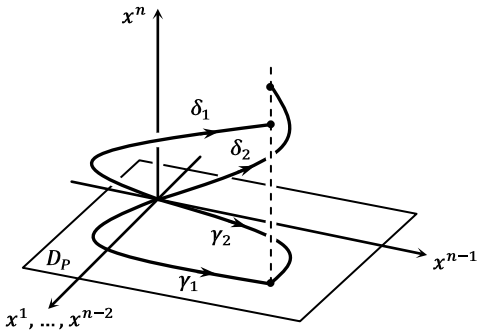
συγκροτούμενη από τις παράλληλες στον x^n-άξονα ευθείες που τέμνουν το $x^n = 0$ στην καμπύλη γ. Οι τομές της S_γ με τα υπερεπίπεδα της κατανομής συγκροτούν λείο πεδίο ευθειών πάνω στην πρώτη, το οποίο έχει ολοκληρωτικές καμπύλες (ως 1-διάστατη κατανομή επί της επιφάνειας).



Εάν υπάρχει η ολοκληρωτική υποπολλπλότητα της D στην θέση P, που στο δεδομένο σύστημα συντεταγμένων αναπαρίσταται τοπικά ως γράφημα λείας πραγματικής συνάρτησης f εφαπτόμενο του υπερεπιπέδου $x^n = 0$ στην θέση 0, τότε αυτή τέμνει την S_γ στο ολοκληρωτικό τόξο δ με αρχή το 0 και τέλος το $f(x)$: εάν δ η καμπύλη στην ποία τέμνεται ο κύλινδρος με την ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα και Q σημείο σ' αυτήν, τότε η ταχύτητα της δ στο Q ανήκει στην ευθεία $D_Q \cap T_Q S_\gamma$, που είναι τομή της επιφάνειας S_γ με στοιχείο επαφής στην D.



Το προκύπτον σημείο $(x, f(x))$ είναι ανεξάρτητο του τόξου γ που επιλέχθηκε για να συνδέει τα $0, x$ και κατ' επέκταση των S, δ. Επομένως η μή ολοκληρωσιμότητα της κατανομής γύρω από το P μετράται από την αποτυχία λείων τόξων πάνω στο D_P με αρχή το P και κοινό τέλος να δώσουν ολοκληρωτικά τόξα δ με το ίδιο τέλος: εάν οσοδήποτε κοντά στο P υπάρχει $x \in D_P$ και λεία τόξα γ_1, γ_2 που συνδέουν το 0 με το x ώστε οι ανυψώσεις δ_1, δ_2 να μην έχουν κοινό άκρο, τότε η κατανομή D είναι μή ολοκληρώσιμη στο P.



Η παραπάνω κατασκευή με την βοήθεια της κυλινδρικής επιφάνειας S_γ δείχνει ότι για κάθε λεία καμπύλη

γ στο $\mathbb{R}^{n-1}$ με αρχικό σημείο 0 υπάρχει μοναδική λεία καμπύλη δ στο $\mathbb{R}^n$ με αρχικό σημείο 0 που προβάλλεται στην γ μέσω της $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $q(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{n-1})$ και η ταχύτητά της σε κάθε σημείο να ανήκει στην κατανομή D. Το επιχείρημα επαναλαμβάνεται αυτούσιο σε οποιοδήποτε αρχικό σημείο $Q \in \mathbb{R}^{n-1} \cong D_P$ για την γ και οποιαδήποτε επιλογή αρχικού σημείου $R \in q^{-1}(Q)$ για το δ, επομένως διατυπώνεται η εξής πρόταση:

VIII.§4.1. Έστω D $(n-1)$-διάστατη κατανομή στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $D_0 = \{(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)\}$ και γ τμηματικά λεία καμπύλη στο D_0. Για κάθε Q σημείο της γ και κάθε $R \in q^{-1}(Q)$ υπάρχει μοναδική λεία καμπύλη $\bar{\gamma}^R$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $q \circ \bar{\gamma}^R = \gamma$ και $\dot{\gamma}(t) \in D_{\gamma(t)}$ για κάθε t.

VIII.§4.2. (Γεωμετρικό κριτήριο τοπικής μή ολοκληρωσιμότητας κατανομών με συνδιάσταση 1).

Έστω D $(n-1)$-διάστατη κατανομή στον $\mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^n$ και ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ του $\mathbb{R}^n$ ώστε P να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και $D_P = \{(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)\}$. Εάν οσοδήποτε κοντά στο P υπάρχει σημείο $Q \in D_P$ και τμηματικά λείες καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D_P$ με $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$ και $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = Q$ τέτοιες ώστε $\overline{\gamma_1}^R(1) \neq \overline{\gamma_1}^R(1)$, τότε η κατανομή είναι μή ολοκληρώσιμη στο P.

Δεδομένων δύο πολλαπλοτήτων (M, D), (M', D') εφοδιασμένων με δομή επαφής, μια αμφιδιαφόριση $\varphi : (M, D) \to (M', D')$ καλείται **αμφιδιαφόριση επαφής** όταν για κάθε $P \in M$ ισχύει $D'_{\varphi(P)} = \varphi_* D_P$. Δεδομένης αμφιδιαφόρισης $\varphi : M \to M'$ και δομής επαφής D στην M, η κατανομή $\varphi_* D = \coprod_{P \in M} \varphi_* D_P$ είναι δομή επαφής στην M', αφού εάν η D περιγράφεται τοπικά από την μορφή ω, η μορφή

$$\varphi_*(\omega \wedge d\omega) = \varphi_*\omega \wedge \varphi_* d\omega = \varphi_*\omega \wedge d\varphi_*\omega$$

είναι παντού μή μηδενική. Επομένως η $\varphi : (M, D) \to (M', \varphi_* D)$ γίνεται αμφιδιαφόριση επαφής. Με αυτήν την ορολογία, η VIII.§4.0 επαναδιατυπώνεται ως εξής: οποιεσδήποτε δύο δομές επαφής ίσης διάστασης είναι τοπικά διφφεομορφικές (εννοώντας ότι υπάρχει τοπική αμφιδιαφόριση επαφής που εφελκύει την μια στην άλλη). **Αυτομορφισμός επαφής** ονομάζεται κάθε αμφιδιαφόριση επαφής της μορφής $\varphi : (M, D) \to (M, D)$.

Θα μελετηθούν εφ' εξής δομές επαφής σε 3-διάστατες πολλαπλότητες.

VIII.§4.3. Μια 2-διάστατη κατανομή D σε 3-πολλαπλότητα M είναι δομή επαφής εάν και μόνον εάν για κάθε τοπικά ορίζουσα την κατανομή διαφορική 1-μορφή ω σε μια περιοχή U, η 3-μορφή $\omega \wedge d\omega$ είναι παντού μή μηδενική στο U (δηλαδή $\omega \wedge d\omega\,(P) \neq 0$ για κάθε $P \in U$).

Αποδ. "$\Longrightarrow$" Έστω $P \in U$ και $\zeta, \xi, \eta \in T_P M$ τέτοια ώστε $D_P = span\{\xi, \eta\}$ και $\zeta \in T_P M / D_P$. Τότε

$$\omega \wedge d\omega(\zeta, \xi, \eta) = \omega(\zeta)\, d\omega(\xi, \eta) = \omega(\zeta)\left(\partial_\xi \omega(\eta) - \partial_\eta \omega(\xi) - \omega[\xi, \eta]\right) = -\,\omega(\zeta)\,\omega[\xi, \eta] \neq 0$$

όπου ξ, η λεία πεδία στην D ώστε $\xi(P) = \xi$, $\eta(P) = \eta$. Άρα $\omega \wedge d\omega(P) \neq 0$. ■

"$\Longleftarrow$" Εξ υποθέσεως, υπάρχουν $\zeta, \xi, \eta \in T_P M \setminus \{0\}$ τέτοια ώστε $D_P = span\{\xi, \eta\}$, $\zeta \in T_P M / D_P$ και $\omega \wedge d\omega(\zeta, \xi, \eta)$. Κάνοντας όμοιες πράξεις, $\omega \wedge d\omega(\zeta, \xi, \eta) \neq 0$, επομένως $-\omega[\xi, \eta] = d\omega(\xi, \eta) = \alpha \neq 0$. Άρα, στην βάση ξ, η του D_P, η συμπλεκτική μορφή $d\omega(P)\big|_{D_P}$ αναπαρίσταται από τον πίνακα

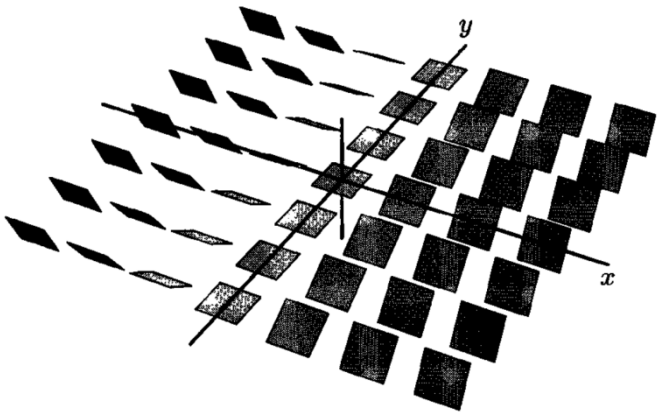
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως είναι μη ιδιάζουσα. ■

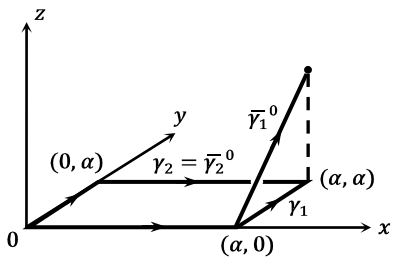
Πρότυπη δομή επαφής στον $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται η κατανομή τ που παράγεται από τα διανυσματικά πεδία

$$\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$$

δηλαδή $\tau_P = span\{\, \partial/\partial x\,\big|_P,\ \partial/\partial y\,\big|_P + x\,\partial/\partial z\,\big|_P \,\}$ για κάθε $P \in \mathbb{R}^3$. Επομένως στο σύστημα συντεταγμένων x, y, z η πρότυπη δομή επαφής είναι μηδενοχώρος της 1-μορφής $\omega = -x\,dy + dz$, απ' όπου ελέγχεται εύκολα ότι είναι όντως δομή επαφής βάσει της VIII.§4.3. Από VIII.§4.3 έπεται ότι όλες οι 2-διάστατες δομές επαφής αναπαρίστανται τοπικά ως η πρότυπη.



Η παντού μή ολοκληρωσιμότητα της πρότυπης δομής επαφής ελέγχεται επίσης γεωμετρικά στο μηδέν (και σε κάθε άλλο σημείο του 3-διάστατου χώρου) με την μέθοδο των ολοκληρωτικών καμπυλών της σελίδας 99. Με τους όρους της πρότασης VIII.§4.3, το επιχείρημα για την μή ολοκληρωσιμότητα γύρω από το μηδέν (καθώς και γύρω από κάθε άλλο σημείο, μετά από κατάλληλη στέρεα κίνηση των αξόνων) έχει ως εξής: οσοδήποτε μικρός και αν γίνει ο αριθμός a, οι ανυψώσεις $\overline{\gamma_1}^0, \overline{\gamma_2}^0$ δεν έχουν κοινό τελικό σημείο, όπου γ_1, γ_2 οι τμηματικά λείες καμπύλες στο x, y-επίπεδο που προκύπτουν ως συγκόλληση των διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων $(0,0) - (a, 0)$, $(a, 0) - (a, a)$ και $(0,0) - (0, a)$, $(0, a) - (a, a)$ αντιστοίχως.



Καμπλύλη *Legendre* καλείται μια τμηματικά λεία καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ της οποίας η ταχύτητα σε κάθε σημείο περιέχεται στο στοιχείο επαφής που επισυνάπτεται από την τ στο σημείο αυτό, δηλαδή μια καμπύλη που είναι κατά λεία τμήματα ολοκληρωτική καμπύλη της πρότυπης δομής επαφής. Με αυτήν την ορολογία, η Χ.§0.1 επαναδιατυπώνεται για την πρότυπη δομή επαφής ως εξής: για κάθε τμηματικά λεία καμπύλη γ στο x, y-επίπεδο και κάθε σημείο $R \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $q(R)$ σημείο της γ, όπου $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z) = (x, y)$, υπάρχει μοναδική καμπύλη Legendre $\bar{\gamma}^R$ (**ανύψωση *Legendre*** της γ στο R) διερχόμενη από το R και τέτοια ώστε $q \circ \bar{\gamma}^R = \gamma$. Προφανώς για κάθε καμπύλη *Legendre* γ υπάρχει μοναδική καμπύλη στο x, y-επίπεδο της οποίας η *Legendre* ανύψωση σε οποιαδήποτε από τα σημεία της γ είναι η γ.

Εάν $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ καμπύλη *Legendre*, τότε εξ ορισμού της πρότυπης δομής επαφής ισχύει $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \lambda(t)\,(1, 0, 0) + \mu(t)\,(0, 1, x(t))$, επομένως οι λείες καμπύλες *Legendre* προσδιορίζονται ως οι καμπύλες του 3-διάστατου χώρου που ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$\dot{z} = \dot{y}\, x$$

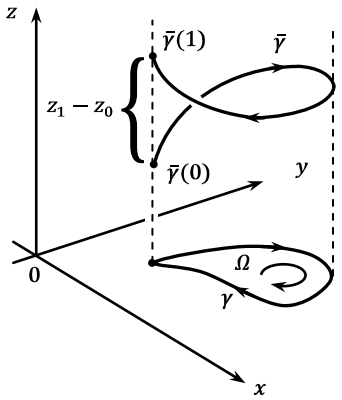
Δεδομένου ζεύγους σημείων στον $\mathbb{R}^3$ κατασκευάζεται εύκολα τμηματικά λεία καμπύλη *Legendre* (τεθλασμένη ευθεία) που τα συνδέει (εντελώς αντίθετα απ' ό,τι συμβαίνει σε μια φύλλωση, όπου η κίνηση κατά μήκος ολοκληρωτκών καμπυλών της κατανομής περιορίζεται σε ένα και μόνο φύλλο). Κάθε αυτομορφισμός της πρότυπης δομής επαφής διατηρεί προφανώς το σύνολο των καμπυλών *Legendre*.

Η τ είναι συνοχή της κύριας $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$-διανυσματικής δέσμης $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z) = (x, y)$, με τις ανυψώσεις *Legendre* να είναι οι οριζόντιες ανυψώσεις για την συνοχή αυτή. Όπως αναμένεται από την μή ολοκληρωσιμότητα της κατανομής, οι ανυψώσεις *Legendre* καμπυλών του x, y-επιπέδου στο ίδιο σημείο με κοινά άκρα δεν έχουν εν γένει κοινά άκρα· ισοδύναμα, η *Legendre* ανύψωση διαλύει εν γένει τους βρόγχους. Συγκεκριμένος τύπος που εμπλέκει τη μορφή ω μετρά το μέγεθος της καταστροφής.

VIII.§4.4. Η απόσταση μεταξύ των άκρων της *Legendre* ανύψωσης ενός βρόγχου του x, y-επιπέδου ισούται με το προσημασμένο εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον βρόγχο, με τον προσανατολισμό του χωρίου να είναι ο επαγόμενος από την φορά διαγραφής του βρόγχου. Συγκεκριμένα, εάν $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ βρόγψος στο x, y-επίπεδο, τότε

$$z_1 - z_0 = \int_{\Omega} dS$$

όπου z_1, z_0 οι z-συνιστώσες των σημείων $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ αντιστοίχως, dS το ευκλείδειο στοιχείο όγκου στον $\mathbb{R}^2$ και Ω το προσανατολισμένο χωρίο που περικλείεται από τον γ.



Αποδ. Η εξωτερική παράγωγος της $\omega = -x\, dy + dz$ είναι $d\omega = -dx \wedge dy$. Εάν

$$\xi = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x}\Big|_P + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y}\Big|_P + \xi^3 \frac{\partial}{\partial z}\Big|_P, \qquad \eta = \eta^1 \frac{\partial}{\partial x}\Big|_P + \eta^2 \frac{\partial}{\partial y}\Big|_P + \eta^3 \frac{\partial}{\partial z}\Big|_P$$

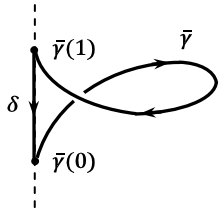
τότε

$$(q^* dS)(\xi, \eta) = dS(q_*\xi, q_*\eta) = dx \wedge dy \left(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x}\Big|_P + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y}\Big|_P, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x}\Big|_P + \eta^2 \frac{\partial}{\partial y}\Big|_P\right) =$$

$$dx \wedge dy \left(\xi^1 \frac{\partial}{\partial x}\Big|_P + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y}\Big|_P + \xi^3 \frac{\partial}{\partial z}\Big|_P, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x}\Big|_P + \eta^2 \frac{\partial}{\partial y}\Big|_P + \eta^3 \frac{\partial}{\partial z}\Big|_P\right) \left(\text{εφ' όσον } dx\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = dy\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) 0\right)$$

$$= dx \wedge dy\, (\xi, \eta), \text{ επομένως } d\omega = -\, q^* dS$$

Συνδέοντας τα $\bar{\gamma}(1), \bar{\gamma}(0)$ με κατακόρυφο τόξο $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, δηλαδή $\delta(0) = \bar{\gamma}(1)$, $\delta(1) = \bar{\gamma}(0)$, κατασκευάζουμε το βρόγχο $\bar{\gamma}' = \gamma . \delta$.



Εάν $\tilde{\Omega}$ προσανατολισμένη επιφάνεια με σύνορο τον βρόγχο $\bar{\gamma}'$, από θεώρημα *Stokes* ισχύει

$$\int_{\bar{\gamma}'} \omega = \int_{\tilde{\Omega}} d\omega \qquad (1)$$

Όμως

$$\int_{\overline{\gamma}'} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\delta} \omega = \int_{\delta} \omega$$

εφόσον η ω μηδενίζει την ταχύτητα της καμπύλης Legendre γ σε κάθε σημείο, άρα

$$\int_{\overline{\gamma}'} \omega = \int_{\delta} -x\,dy + dz = \underbrace{-\int_{\delta} x\,dy}_{0} + \int_{\delta} dz = z_0 - z_1 \qquad (2)$$

Επίσης

$$\int_{\widetilde{\Omega}} d\omega = -\int_{\widetilde{\Omega}} q^* dS = -\int_{q_*\widetilde{\Omega}} q_* q^* dS = -\int_{\Omega} dS \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας από (2) και (3) στην (1), λαμβάνεται η ζητούμενη ισότητα. ■

Συμβολίζεται Con η ψευδοομάδα των αμφιδιαφορίσεων μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^3$ που προκύπτουν ως περιορισμοί αυτομορφισμών επαφής της πρότυπης δομής $(\mathbb{R}^3, \tau)$. Κάθε Con-πολλαπλότητα θεωρείται εφοδιασμένη με την δομή επαφής που κληρονομείται τοπικά ως εφελκυσμός της πρότυπης δομής επαφής μέσω τοπικών χαρτών (η Con-συμβατότητα σημαίνει ακριβώς ότι οι εφελκυσμοί συμφωνούν στις τομές των χαρτών). Η VIII.§4.0 δηλώνει ότι κάθε 3-διάστατη πολλαπλότητα εφοδιασμένη με δομή επαφής είναι Con-πολλαπλότητα.

VIII.§4.5. Η ομάδα των αυτομορφισμών της πρότυπης δομής επαφής που αυξάνουν ομοιόμορφα την x-συνιστώσα και διατηρούν τα πεδία $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y + x\,\partial/\partial z$, συγκροτείται από τις αμφιδιαφορίσεις της μορφής

$$(x, y, z) \longmapsto (x + x_0, y + y_0,\ \ z + z_0 + y\,x_0),\ \ x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$$

Αποδ. Έστω f αυτομορφισμός επαφής όπως στην υπόθεση, που αυξάνει ομοιόμορφα την x-συνιστώσα κατά x_0. Εύκολα ελέγχεται ότι σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ το διαφορικό της f είναι ο πίνακας

$$df = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \nabla f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ολοκληρώνοντας κατά συντεταγμένες,

$$f(x, y, z) = (\ \underbrace{x + x_0}_{f_1(x,y,z)}\ ,\ \underbrace{y + y_0}_{f_2(x,y,z)}\ ,\ \underbrace{z + z_0 + y\,x_0}_{f_3(x,y,z)}\ ) \qquad ■$$

Υπολογίζεται εύκολα ότι η ομάδα της πρότασης VIII.§4.5 διατηρεί την φύλλωση των παράλληλων στον x-άξονα ευθειών και την φύλλωση των παράλληλων στον z-άξονα ευθειών (είναι καμπύλες *Legendre*).

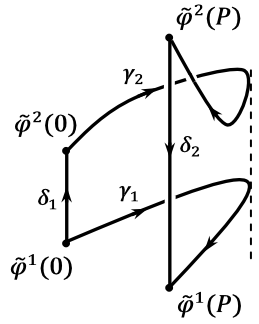
VIII.§4.6. Για κάθε αμφιδιαφόριση φ του x, y-επιπέδου που πολλαπλασιάζει τον όγκο με έναν σταθερό παράγοντα, υπάρχει αυτομορφισμός επαφής $\tilde{\varphi}$ του $(\mathbb{R}^3, \tau)$ που διατηρεί την φύλλωση των παράλληλων στον z-άξονα ευθειών και τέτοια ώστε $q \circ \tilde{\varphi} = \varphi$. Οποιεσδήποτε δύο τέτοιες απεικονίσεις διαφέρουν κατά μια μεταφορά παράλληλη στον z-άξονα.

Αποδ. Συνδέουμε κάθε $P \in \mathbb{R}^3$ μέσω τμηματικά λείας καμπύλη *Legendre* γ με ένα σταθερό σημείο Q στο $q^{-1}(0)$. Εάν ο ζητούμενος αυτομορφισμός $\tilde{\varphi}$ υπάρχει, τότε επειδή διατηρεί τη κατακόρυφη φύλλωση και απικονίζει καμπύλες *Legendre* σε καμπύλες *Legendre*, ισχύει

$$\tilde{\varphi}(P) = \overline{\varphi \circ q \circ \gamma}^{\,\tilde{\varphi}(Q)}(1) \qquad (1)$$

Άρα για κάθε επιλογή $\tilde{\varphi}(Q)$, ο τύπος (1) ορίζει τον ζητούμενο αυτομορφισμό $\tilde{\varphi}$. Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του γ: Εάν γ_1, γ_2 καμπύλες *Legendre* από το 0 στο P, η προβολή του βρόγχου $\gamma_1.\gamma_2$ στο x, y-επίπεδο περικλείει χωρίο μηδενικού εμβαδού (Χ.§0.4). Επειδή ο φ διατηρεί το μηδενικό εμβαδόν (αφού πολλαπλασιάζει το εμβαδόν με σταθερό παράγοντα), ο βρόγχος $\varphi \circ (q \circ \gamma_1.\gamma_2) = (\varphi \circ q \circ \gamma_1).(\varphi \circ q \circ \gamma_2)$ περικλείει επίσης μηδενικό εμβαδόν, άρα οι *Legendre* ανυψώσεις των $(\varphi \circ q \circ \gamma_1), (\varphi \circ q \circ \gamma_2)$ έχουν κοινό τελικό σημείο.

Εάν $\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2$ αυτομορφισμοί επαφής που διατηρούν την κατακόρυφη φύλλωση και προβάλλονται στον φ μέσω της q, επιλέγουμε καμπύλες *Legendre* γ_1, γ_2 που συνδέουν το $\tilde{\varphi}^1(0)$ με το $\tilde{\varphi}^1(P)$ και το $\tilde{\varphi}^2(0)$ με το $\tilde{\varphi}^2(1)$ αντιστοίχως, τέτοιες ώστε η γ_2 να είναι η Legendre ανύψωση της $q \circ \gamma_1$ στο $\tilde{\varphi}^2(0)$.



Το ολοκλήρωμα της μορφής ω στον βρόγχο $\delta_1\gamma_2\delta_2\gamma_1^{-1}$ ισούται με

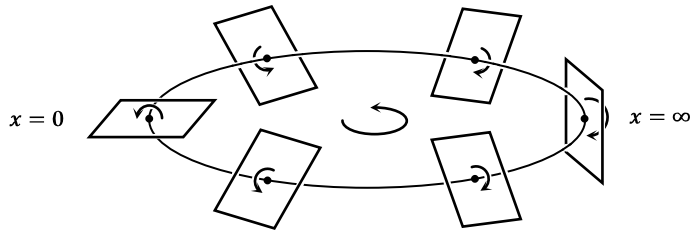
$$\int_{\delta_1} \omega + \int_{\delta_2} \omega = z_0^1 - z_0^2 + z_P^2 - z_P^1$$

όπου z_0^i, z_P^i η z-συνιστώσα του $\tilde{\varphi}^i(0), \tilde{\varphi}^i(P)$ αντιστοίχως, $i = 1,2$ ($\int_{\gamma_i} \omega = 0$ εφ' όσον οι γ_i είναι καμπύλες *Legendre*). Με επιχείρημα όμοιο εκείνου της πρότασης VIII.§4.4, η ποσότητα αυτή ισούται με το προσημασμένο εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον βρόγχο $q \circ (\delta_1\gamma_2\delta_2\gamma_1^{-1})$, δηλαδή με μηδέν. Άρα $z_0^1 - z_0^2 = z_P^1 - z_P^2$ και επειδή αυτό ισχύει για κάθε $P \in \mathbb{R}^3$, έπεται ότι ο $\tilde{\varphi}^2$ από τον $\tilde{\varphi}^1$ προκύπτει με κατακόρυφη μεταφορά κατά $z_0^2 - z_0^1$. ■

Θα κατασκευαστεί δομή επαφής στην 3-διάστατη πολλαπλότητα $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$. Θεωρούμε τον άτλαντα που συγκροτείται από τους εξής δύο χάρτες: τον $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ με ταυτοτική απεικόνιση και τον (U, φ), όπου

$$\varphi : U = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \qquad \varphi(x, y, z) = (-1/x, z, -y)$$

(θεωρείται ότι $1/\infty = 0$). Ελέγχεται ότι η συνάρτηση μετάβασης μεταξύ των δύο χαρτών είναι στοιχείο της ψευδοομάδας Con, επομένως η πολλαπλότητα $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ εφοδιάζεται με δομή επαφής που σε καθέναν από τους παραπάνω χάρτες είνια ισομορφική με την πρότυπη δομή επαφής. Συγκεκριμένα, η $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ πρέπει να νοείται ότι προκύπτει με επισύναψη στην θέση $x = \infty$ ενός επιπέδου παραλλήλου στο z, y-επίπεδο, ώστε η πρότυπη δομή επαφής να κάνει μια πλήρη περιστροφή καθώς διατρέχουμε τον x-άξονα.



Εφόσον κάθε καμπύλη *Legendre* $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\dot{z} = \dot{y}\, x$, δεδομένης λείας καμπύλης $a(t) = (y(t), z(t))$ στο y, z-επίπεδο της οποίας η ταχύτητα δε μηδενίζεται πουθενά, κατασκευάζεται μοναδική καμπύλη *Legendre* $\gamma(t) = (\dot{z}(t)/\dot{y}(t), y(t), z(t))$ ώστε $q_x \circ \gamma = a$, όπου $q_x(x, y, z) = (y, z)$ η παράλληλη στον x-άξονα προβολή. Η κατασκευή αυτή γίνεται στη πολλαπλότητα $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$, ώστε εάν $\dot{y}(t_0) = 0$ το σημείο $\gamma(t_0)$ να περιέχεται στο y, z-επίπεδο που έχει επισυναφθεί στην θέση $x = \infty$ –συγκεκριμένα, το $\gamma(t_0)$ είναι στη θέση $x = \infty$ όταν η ταχύτητα $dq_x \circ \gamma/dt\,\big|_{t_0}$ είναι παράλληλη στον z-άξονα ($\dot{y}(t_0) = 0$).

Ερμηνεύοντας την πολλαπλότητα $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ ως την προβολικοποίηση της εφαπτομένης δέσμης του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή την πολλαπλότητα επαφής του πραγματικού επιπέδου, κάθε στοιχείο της $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ είναι ζεύγος σημείου στο y, z-επίπεδο και ευθείας του y, z-επιπέδου διερχομένης από αυτό. Κάθε καμπύλη *Legendre* στην ερμηνεύεται τότε ως κίνηση αυτού του ζεύγους στο y, z-επίπεδο κατά τρόπον ώστε η ευθεία να είναι μονίμως εφαπτόμενη στην τροχιά του σωματιδίου: η x-συνιστώσα, που είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον y-άξονα, ισούται μονίμως με τον λόγο $\dot{z}/\dot{y}$, όπου $(y(t), z(t))$ η τροχιά του σωματιδίου.

VIII.§4.7. Για κάθε αμφιδιαφόριση του φ του y, z-επιπέδου υπάρχει μοναδικός αυτομορφισμός επαφής $\bar{\varphi}$ της $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ που διατηρεί την φύλλωση των παραλλήλων στο x-άξονα ευθειών και τέτοια ώστε $q_x \circ \bar{\varphi} = \varphi$. Προφανώς κάθε αυτομορφισμός επαφής της $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ που διατηρεί την παραπάνω φύλλωση είναι αυτής της μορφής.

Αποδ. Εάν $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, η προβολή του επιπέδου τ_P στο y, z-επίπεδο είναι η διερχόμενη από το σημείο (y, z) ευθεία με κλίση x. Η αμφιδιαφόριση φ απεικονίζει το διάνυσμα $(1, x)$ στο $\lambda\,(1, x')$. Τότε ο ζητούμενος $\bar{\varphi}$ ορίζεται μονοσήμαντα ως $\bar{\varphi}(P) = (x', \varphi(y, z))$, εφόσον διατηρεί την x-φύλλωση και η x-συνιστώσα κάθε σημείου στον χώρο ισούται με την κλίση της κατανομής τ στο σημείο αυτό. ■

Κυκλική δέσμη της 2-διάστατης ρημάννειας πολλαπλότητας M, καλείται η λεία νηματική δέσμη που σε κάθε σημείο $P \in M$ επισυνπάπτει την πολλαπλότητα $\mathbb{S}^1$ των μοναδιαίων διανυσμάτων του $T_P M$. Επειδή $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}P^1$, η κυκλική δέσμη της M είναι η προβολικοποίηση της νηματικής της δέσμης, PTM, δηλαδή η πολλαπλότητα επαφής της M. Η κυκλική δέσμη του πραγματικού επιπέδου είναι η $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ και κάθε κυκλική δέσμη είναι τοπικά η $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$.

VIII.§4.8. Κάθε κυκλική δέσμη επιδέχεται δομής επαφής.

Αποδ. Καλύπτοντας την 2-διάστατη πολλαπλότητα M με χάρτες διφφεομορφικούς του $\mathbb{R}^2$, η κυκλική δέσμη καλύπτεται από ανοικτά σύνολα διφφεομορφικά της $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$. Κάθε ένα από αυτά τα ανοικτά σύνολα επιδέχεται δομής επαφής. Από πρόταση VIII.§4.7 οι συναρτήσεις μετάβασης μεταξύ αυτών των ανοικτών συνόλων σέβονται την πρότυπη δομή επαφής, επομένως οι τοπικές δομές επαφής συμφωνούν στις τομές. Συγκολλώντας τες, λαμβάνουμε τη ζητούμενη. ■

Η κυκλική δέσμη της $\mathbb{S}^2$ είναι διφφεομορφική με την ομάδα $SO(3)$: κάθε στροφή στον τρισδιάστατο χώρο είναι στροφή κατά γωνία $0 \leq \theta < \pi$ δεξιόστροφα κάποιου προσανατολισμένου άξονα διερχομένου από το 0 (δηλαδή ενός στοιχείου της $\mathbb{S}^1$), επομένως αντιστοιχίζοντας στο στοιχείο $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ της $\mathbb{S}^1$ την στροφή κατά $\theta/2$ δεξιόστροφα του άξονα στον οποίον έχει επισυναφθεί η επιλεχθείσα $\mathbb{S}^1$, λαμβάνουμε την ζητούμενη αμφιδιαφόριση.

VIII.§4.9. Οι πολλαπλότητες $\mathbb{R}P^3$ και $\mathbb{S}^3$ επιδέχονται δομής επαφής.

Αποδ. Η $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ επιδέχεται δομής επαφής εφόσον είναι η κυκλική δέσμη της $\mathbb{S}^2$. Επειδή $SO(3) \cong \mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$ (η $\mathbb{S}^3$ είναι διπλό κάλλυμα του 3-διάστατου προβολικού χώρου κατασκευής του τελευταίου), η δομή επαφής του $\mathbb{R}P^3$ εφελκύεται στην $\mathbb{S}^3$. ■

VIII.§4.10. Μια 2-διάστατη κατανομή σε 3-διάστατη πολλαπλότητα είναι δομή επαφής εάν και μόνο εάν η συστροφή της είναι ταυτοτικά μηδενική (δηλαδή η συστροφή σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας είναι η μηδενική απεικόνιση)

Αποδ. "$\Longrightarrow$„ (*Εξήγηση*) Γύρω από οποιοδήποτε σημείο υπάρχει τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η μελετώμενη δομή επαφής αναπαρίσταται ως η πρότυπη (VIII.§4.0). Επειδή η συστροφή της πρότυπης δομής επαφής είναι παντού μηδενική, έπεται το ζητούμενο. Για ένα ομοτοπικό επιχείρημα που εμπλέκει την διατα-

ραχή καταλλήλων διανυσματικών πεδίων, βλέπε προτάσεις 3.7.9, 3.7.10, 3.7.11 και 3.7.15 από [**Thu**], σελ. 175 και 178.

„⟸" Πρόταση 3.7.15 από [**Thu**], σελ. 178. ■

VIII.§4.11. Η *Levi-Civitá* συνοχή της κυκλικής δέσμης μιας συνεκτικής 2-διάστατης ρημάννειας πολλαπλότητας M (δηλαδή η συνοχή που προκύπτει από την *Levi-Civitá* συνοχή της πολλαπλότητας μετά από προβολικοποίηση της εφαπτόμενης δέσμης της) είναι δομή επαφής εάν και μόνο εάν η καμπυλότητα *Gauss* της M είναι παντού γνησίως θετική ή γνησίως αρνητική.

Αποδ. Από VIII.§4.10 αρκεί να δειχθεί ότι ο πουθενά μηδενισμός της καμπυλότητας *Gauss* ισοδυναμεί με τον πουθενά μηδενισμό της συστροφής της συνοχής. Εάν $q : TM \to M$ η νηματική προβολή της εφαπτομένης δέσμης, ο πουθενά μηδενισμός της συστροφής τ σημαίνει ότι για κάθε $y \in TM$ υπάρχουν $\xi, \eta \in T_xM$, $x = q(y)$, τέτοια ώστε $\tau(q^*\xi, q^*\eta) \neq 0$. Από τον αφηρημένο ορισμό της καμπυλότητας για συνοχές σε νηματικές δέσμες, αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in M$ υπάρχουν $\xi, \eta \in T_xM$ τέτοια ώστε $\Omega(x\,;\,\xi, \eta) \neq 0$. Εξ ορισμού της καμπυλότητας *Gauss*, αυτό σημαίνει ότι η καμπυλότητα *Gauss* είναι παντού μή μηδενική. Επειδή λόγω συνέχειας αυτή δεν αλλάζει πουθενά πρόσημο, έπεται το ζητούμενο. ■

§5. ΜΗΔΕΝΟΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ορίζεται ο αντιμεταθέτης μιας ομάδας G ως προς την υποομάδα H ως η κανονική υποομάδα

$$[G, H] =< g^{-1}h^{-1}gh \,\big|\, g \in G,\, h \in H >$$

VIII.§5.0. Έστω N κανονική υποομάδα της G. Στην ομάδα G/N τα h-σύμπλοκα, $h \in H$, αντιμετατίθενται με όλα τα υπόλοιπα εάν και μόνον εάν $[G, H] \subset N$.

Αποδ. "⟹„ Έστω $q : G \to G/N$ η κανονική προβολή. Για κάθε $g^{-1}h^{-1}gh \in [G, H]$ ισχύει $q(g^{-1}h^{-1}gh) = q(g^{-1}) \dots q(h) = 1$ εξ υποθέσεως, άρα $[G, H] \subset kerq = N$.

„⟸" Έστω $\bar{g}, \bar{h} \in G/N$, $h \in H$. Τότε $(\bar{g})^{-1}(\bar{h})^{-1}\bar{g}\bar{h} = \bar{1}$ εξ υποθέσεως, άρα $\bar{g}\bar{h} = \bar{h}\bar{g}$. ■

VIII.§5.1. Εάν N, H κανονικές υποομάδες της G με $N \subset H$, οπότε $H/N \subset G/N$, τότε $[G, H] \subset N$ εάν και μόνον εάν $H/N \subset Z(G/N)$

Αποδ. Άμεσα από VIII.§5.0. ■

Εάν N κανονική υποομάδα της G και $q : G \to G/N$ η αντίστοιχη κανονική προβολή, τότε $q^{-1}Z(G/N) = \{k \in G \,\big|\, k^{-1}g^{-1}kg \in N, \forall k \in G\}$. Επειδή $H/N \subset Z(G/N)$ σημαίνει ακριβώς ότι $H \subset q^{-1}Z(G/N)$, η προηγούμενη πρόταση επαναδιατυπώνεται ως εξής.

VIII.§5.2. Εάν N, H κανονικές υποομάδες της G με $N \subset H$, τότε $[G, H] \subset N$ εάν και μόνον εάν οι αντιμεταθέτες της G με την H (δηλαδή τα στοιχεία $g^{-1}h^{-1}gh$, $g \in G, h \in H$) περιέχονται στην ομάδα N.

Η ομάδα G καλείται **μηδενοδύναμη** όταν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία κανονικών υποομάδων αυτής, $(H_i)_{i=0}^{r}$, τέτοια ώστε

$$1 = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{r-1} \subset H_r = G$$

και

$$[G, H_{i+1}] \subset H_i, \qquad i = r-1, \dots, 0$$

Χρησιμοποιώντας την VIII.§5.2, η ιδιότητα της μηδενοδυναμίας ερμηνεύεται ως εξής: Υπάρχει μια πεπερασμένη φθίνουσα ακολουθία κανονικών υποομάδων ώστε λαμβάνοντας διαδοχικά τους αντιμεταθέτες της αρχικής ομάδας με κάθε μια από αυτές, να καταλήγουμε στην τετριμμένη. **Δείκτης μηδενοδυναμίας** μιας μηδενοδύναμης ομάδας G καλείται το ελάχιστο μήκος r που μπορεί να έχει μια σειρά όπως η παραπάνω. Ο δείκτης μηδενοδυναμίας νοείται ως μέτρο της μη αντιμεταθετικότητας: όσο μεγαλύτερος είναι, δηλαδή όσο περισσότερες αντιμεταθέσεις πρέπει να ληφθούν για να καταλήξουμε στην τετριμμένη υποομάδα, τόσο

λιγότερο αβελιανή θεωρείται η G. Οι αβελιανές ομάδες είναι ακριβώς οι μηδενοδύναμες με δείκτη μηδενοδυναμίας 1, αφού σε αυτήν την περίπτωση $[G,G]=1$.

Για κάθε μηδενοδύναμη ομάδα G τάξεως r κατασκευάζεται η αύξουσα κεντρική σειρά $(H_i)_{i=0}^{r}$ (επιτυγχάνει το ελάχιστο μήκος r) ως εξής: Επιλέγουμε αρχικά $H_0=1$. Επειδή

$$H_1 \subset {q_0}^{-1}Z(G/H_0) = {q_0}^{-1}Z(G/1) = Z(G)$$

όπου $id = q_0 : G \to G/H_0 = G$ η κανονική προβολή, επιλέγουμε $H_1 = Z(G)$. Συνεχίζουμε επαγωγικά επιλέγοντας

$$H_{i+1} \subset {q_i}^{-1}Z(G/H_i)$$

όπου $q_i : G \to G/H_i$ η κανονική προβολή. Για να δειχθεί ότι η κατασκευή τερματίζει με $H_r = G$, αρκεί να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε σειρά $(\widetilde{H}_i)_{i=0}^{s\geq r}$ ισχύει $\widetilde{H}_i \subset H_i$: Για $i=0$ ισχύει $\widetilde{H}_0 = 1 = H_0$ και για $i=1$ ισχύει $\widetilde{H}_1 \subset Z(G) = H_1$· θα δειχθεί ότι $\widetilde{H}_2 \subset H_2$, και με εντελώς όμοιο επιχείρημα αποδεικνύεται επαγωγικά για κάθε i. Επειδή $\widetilde{H}_2 \subset {\tilde{q}_1}^{-1}Z\big(G/\widetilde{H}_1\big)$, όπου $\tilde{q}_1 : G \to G/\widetilde{H}_1$ η κανονική προβολή, το ζητούμενο προκύπτει από την σχέση ${\tilde{q}_1}^{-1}Z\big(G/\widetilde{H}_1\big) \subset {q_1}^{-1}Z(G/H_1) = H_2$, που ισχύει διότι $\widetilde{H}_1 \subset H_1$.

Ονομάζεται **μηδενογεωμετρία** το ζεύγος $Nil = (G, \mathbb{R}^3)$, όπου G η ομάδα *Lie* των αμφιδιαφορίσεων του $\mathbb{R}^3$ που προκύπτουν ως ανυψώσεις των ισομετριών του ευκλείδειου x,y-επιπέδου, $\mathbb{E}^2$, και διατηρούν την φύλλωση των παράλληλων στον z-άξονα ευθειών (βλ. πρόταση VIII.§4.5 –οι ισομετρίες του επιπέδου διατηρούν το εμβαδόν, επομένως έχουν μοναδική ανύψωση πάνω από κατακόρυφη μεταφορά).

VIII.§5.3. Η G δρά μεταβατικά στον $\mathbb{R}^3$ με σταθεροποιητή $O(2)$.

Αποδ. Ο σταθεροποιητής ενός στοιχείου του $\mathbb{R}^3$ προκύπτει από τις ανυψώσεις στο σημείο αυτό των στοιχείων του σταθεροποιητή της προβολής του στο x,y-επίπεδο κάτω από την δράση των ισομετριών του $\mathbb{E}^2$. Επειδή ο σταθεροποιητής αυτός είναι ισομορφικός με την $O(2)$ και η ανύψωση στο μελετώμενο σημείο είναι αμφιμονοσήμαντη διατηρώντας την δομή της ομάδας, έπεται το ζητούμενο. ■

VIII.§5.4. Έστω (x_0,y_0), (x,y) σημεία του x,y-επιπέδου και γ μια *Legendre* ανύψωση του ευθύγραμμου τμήματος που τα συνδέει. Εάν z_0, z οι z-συνιστώσες των σημείων $\gamma(0), \gamma(1)$ αντίστοιχα, τότε $z_1 - z_0 = \frac{1}{2}(x_1+x_0)(y_1-y_0)$.

Αποδ. Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση $\dot{z} = \dot{y}$ των καμπυλών *Legendre* την έκφραση $(x(t), y(t)) = (x_0,y_0) + t(x_1-x_0, y_1-y_0)$, $t \in [0,1]$ του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα (x_0,y_0), (x_1,y_1), λαμβάνουμε την διαφορική εξίσωση

$$\dot{z} = (y_1-y_0)(x_1-x_0) + (y_1-y_0)x_0$$

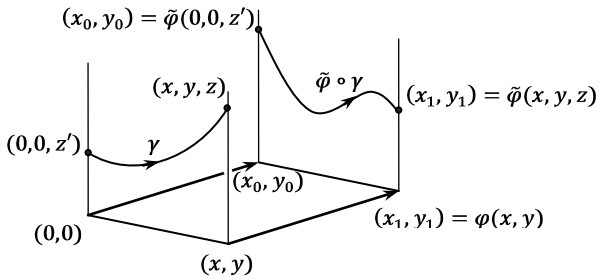
Ολοκληρώνοντας, $z(t) = \frac{1}{2}(x_1+x_0)(y_1-y_0)t^2 + (y_1-y_0)x_0t + z_0$, όπου z_0 η z-συνιστώσα του σημείου $\gamma(0) = (x_0,y_0,z_0)$. Τότε $z(1)-z(0)$ η ζητούμενη ποσότητα. ■

VIII.§5.5. Τα στοιχεία της G που προκύπτουν ως ανυψώσεις μεταφορών του $\mathbb{E}^2$ είναι ακριβώς οι αυτομορφισμοί της πρότυπης δομής επαφής που αυξάνουν ομοιόμορφα την x-συνιστώσα διατηρώντας τα πεδία $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y + x\,\partial/\partial z$ (η ομάδα της πρότασης VIII.§4.5).

Αποδ. Έστω φ η μεταφορά του x,y-επιπέδου κατά $(x_0,y_0) = \varphi(0,0)$, $\tilde{\varphi}$ η ανύψωση αυτής, (x,y,z) σημείο στον $\mathbb{R}^3$ και $(x_1,y_1,z_1) =?$, οπότε $(x_1,y_1) = \varphi(x,y)$. Συμβολίζεται z' η z-συνιστώσα του σημείου $(0,0,z') = \gamma(0)$ της *Legendre* ανύψωσης γ στο σημείο (x,y,z) του ευθύγραμμου τόξου που συνδέει τα σημεία $(0,0), (x,y)$ και z_0 την z-συνιστώσα του σημείου $(x_0,y_0,z_0) = \tilde{\varphi}(0,0,z') = \tilde{\varphi}\circ\gamma\,(0)$. Από VIII.§5.4,

$$z = z + \frac{xy}{2} \qquad (1)$$

Επειδή η $\tilde{\varphi}$, ως αυτομορφισμός της πρότυπης δομής επαφής, απεικονίζει καμπύλες *Legendre* σε καμπύλες *Legendre*, η $\tilde{\varphi}\circ\gamma$ είναι η ανύψωση *Legendre* του ευθύγραμμου τόξου που συνδέει τα (x_0,y_0), (x_1,y_1).



Από VIII.§5.4,

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}(x_1 + x_0)\underbrace{(y_1 - y_0)}_{y} = z_0 + \frac{1}{2}(\underbrace{x_1 - x_0}_{x} + 2x_0)\, y =$$

$$z_0 + \frac{xy}{2} + x_0 y = z_0 + z - z' + x_0 y = z + x_0 y + (z_0 - z')$$

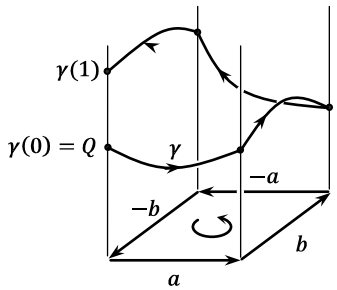
όπου η προτελευταία ισότητα συνάγεται εξαιτίας της σχέσης (1). Επομένως

$$\tilde{\varphi}(x, y, z) = \big(\varphi(x, y), z + x_0 y + (z_0 - z')\big) = (x + x_0, y + y_0, z + x_0 y + (z_0 - z')) \qquad \blacksquare$$

Συμβολίζεται εφ' εξής H η ομάδα της πρότασης VIII.§5.5.

VIII.§5.6. Το κέντρο της ομάδας H είναι η ομάδα των κατακόρυφων μεταφορών του $\mathbb{R}^3$ (ανυψώσεις της ταυτοτικής μεταφοράς του x, y-επιπέδου).

Αποδ. Επειδή το κέντρο ομάδας παράγεται πάνω στους αντιμεταθέτες της, αρκεί να δειχθεί ότι κάθε αντιμεταθέτης της H είναι κατακόρυφη μεταφορά. Έστω h_a, h_b ανυψώσεις των μεταφορών κατά a, b αντιστοίχως του x, y-επιπέδου και $P \in \mathbb{E}^2$ τυχαίο. Έστω γ η *Legendre* ανύψωση στο $Q \in q^{-1}(P)$ του βρόγχου που συγκροτείται στο x, y-επίπεδο από την διαδοχική μεταφορά του P κατά $a, b, -a, -b$. Τότε $\gamma(1) = h_a h_b {h_a}^{-1} {h_b}^{-1}(Q)$.



Από τα γνωστά για τις ανυψώσεις *Legendre*, η ποσότητα $z_1 - z_0$, όπου z_1, z_0 η z-συνιστώσα του $\gamma(1)$, $\gamma(0)$ αντιστοίχως, ισούται με το προσανατολισμένο εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον βρόγχο $ab(-a)(-b)$. Επομένως είναι ομοιόμορφη για όλα τα $Q \in q^{-1}(P)$, $P \in \mathbb{E}^2$. $\blacksquare$

Η ομάδα H, που βρίσκεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις πραγματικές τριάδες, δρά στον $\mathbb{R}^3$ ως

$$H \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x_0, y_0, z_0)(x, y, z) \to (x + x_0,\ y + y_0,\ z + x_0 y + z_0)$$

Η δράση είναι μεταβατική και ελεύθερη, επομένως ο 3-διάστατος χώρος εφοδιασμένος με το γινόμενο

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x_0, y_0, z_0)(x, y, z) \to (x + x_0,\ y + y_0,\ z + x_0 y + z_0)$$

καθίσταται ομάδα *Lie* διφφεομορφική με την H. Επειδή

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & z_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + x_0 & z + x_0 y + z_0 \\ 0 & 1 & y + y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

η ομάδα H είναι επίσης διφφεομορφική με την ομάδα *Heisenberg* των άνω τριγωνικών 3×3 πραγματικών

πινάκων με μονάδες στην διαγώνιό τους, μέσω της αμφιδιαφόρισης

$$(x, y, z) \to \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θα χρησιμοποιείται εφ' εξής το σύμβολο H για την ομάδα *Heisenberg* και θα καλείται επίσης ομάδα *Heisenberg* ο 3-διάστατος χώρος εφοδιασμένος με το γινόμενο που ορίστηκε σε αυτόν παραπάνω.

Προφανείς υποομάδες της ομάδας *Heisenberg* είναι οι

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{x\in\mathbb{R}}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{y\in\mathbb{R}}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{z\in\mathbb{R}}$$

Η VIII.§5.6 δηλώνει ότι η τελευταία είναι το κέντρο της ομάδας.

VIII.§5.7. Η ομάδα *Heisenberg* είναι μηδενοδύναμη με δείκτη μηδενοδυναμίας 2[9].

Αποδ.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως η ομάδα *Heisenberg* έχει αύξουσα κεντρική σειρά $1 \subsetneq Z(H) \subsetneq H$. ■

Ονομάζεται **ακέραια ομάδα *Heisenberg*** η διακριτή υποομάδα $\Gamma \subset H$ των πινάκων με ακέραια ορίσματα. Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \to \varphi(x, y, z) = (x + 1,\, y,\, z + y)$$

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \to \psi(x, y, z) = (x, y + 1, z)$$

των οποίων η αναπαράσταση σε μορφή πίνακα είναι

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Συμβολίζοντας επιπλέον $\chi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ελέγχεται ότι $\chi = \varphi\,\psi\,\varphi^{-1}\,\psi^{-1}$. Επίσης

$$\varphi^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \psi^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\chi^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

VIII.§5.8. Η Γ παράγεται πάνω στα στοιχεία φ, ψ.

Αποδ. Ελέγχονται εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό οι ταυτότητες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b+k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

9. Είναι θεώρημα της θεωρίας των ομάδων *Lie* ότι η ομάδα *Heisenberg* είναι η μόνη 3-διάστατη συνεκτική και απλά συνεκτική ομάδα *Lie*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+k & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & c+k \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λαμβάνοντάς τες υπ' όψιν, συνάγεται εύκολα ότι

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{c-ab} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^b = (\varphi\,\psi\,\varphi^{-1}\,\psi^{-1})^{\,c-ab}\varphi^a\,\psi^b \qquad \blacksquare$$

§6. $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$ ΚΑΙ Sol-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Σε ό,τι ακολουθεί, παραλείπονται οι αποδείξεις των ισχυρισμών. Οι λεπτομέρειες βρίσκονται στις σχετικές παραγράφους των [**BCM**], [**Scott**].

Εφοδιάζεται η εφαπτόμενη δέσμη $T\mathbb{H}^2$ με ρημάννεια μετρική ως εξής. Εάν $q : T\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ η κανονική προβολή, για κάθε $\xi \in T_x\mathbb{H}^2$ ο εφαπτόμενος χώρος $T_\xi(T\mathbb{H}^2)$ είναι το ευθύ άθροισμα ενός οριζοντίου υποχώρου $H = q^*T_x\mathbb{H}^2$ και του κάθετου υποχώρου $V = T_x\mathbb{H}$ (q-ίνα του x). Ορίζεται τότε το εσωτερικό γινόμενο $<\cdot,\cdot>$ στον $T_\xi(T\mathbb{H}^2)$ ως

$$<\xi,\eta> = <\xi_H+\eta_H, \xi_H+\eta_H> = <\xi_H,\eta_H>_H + <\xi_V,\eta_V>_V$$

όπου $<\cdot,\cdot>_H, <\cdot,\cdot>_V$ τα εσωτερικά γινόμενα που κληρονομούν οι υποχώροι H, V μέσω της ταύτισής τους με τον $T_x\mathbb{H}^2$ και ξ_H, η_H; ξ_V, η_V οι προβολές των ξ, η στους υποχώρους H, V αντιστοίχως. Ελέγχεται εύκολα ότι για κάθε ισομετρία $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$, η απεικόνιση $f^* : T\mathbb{H}^2 \to T\mathbb{H}^2$ είναι ισομετρία επίσης.

Θεωρούμε την μοναδιαία κυκλική δέσμη $U\mathbb{H}^2$ εφοδιασμένη με την μετρική που κληροδοτείται σε αυτήν από την μετρική της εφαπτόμενης δέσμης $T\mathbb{H}^2$. Η ομάδα $PSL_2\mathbb{R}$ των ισομετριών της $\mathbb{H}^2$ που διατηρούν τον προσανατολισμό δρά μεταβατικά και ελεύθερα στην $U\mathbb{H}^2$, επομένως υφίσταται μια ταύτιση

$$U\mathbb{H}^2 \cong PSL_2\mathbb{R}$$

Συμβολίζεται $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$ η καθολική επικάλυψη της ομάδας Lie $SL_2\mathbb{R}$, που είναι επίσης καθολική επικάλυψη της $PSL_2\mathbb{R}$. Από την προηγούμενη ταύτιση, η μετρική της $U\mathbb{H}^2$ εφελκύεται μέσω της επικάλυψης στην $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$ (VI.§6.6), που επιπλέον εφοδιάζεται με δομή ομάδας *Lie* (VI.§7.3). Μπορεί να δειχθεί ότι αυτή η μετρική είναι αριστερά αναλλοίωτη για την ομάδα *Lie* $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$. Εφ' όσον η $U\mathbb{H}^2$ είναι ομογενής χώρος κάτω από την δράση της ομάδας των ισομετριών της, το ίδιο ισχύει για την καθολική επικάλυψη $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$.

Η δέσμη $U\mathbb{H}^2$ είναι ομοτοπική με τον κύκλο, επομένως $\pi_1 U\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{Z}$. Από αυτό συνάγεται ότι $U\mathbb{H}^2 \cong \widetilde{SL}_2\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Επειδή διακριτή υποομάδα ομάδας *Lie* περιέχεται στο κέντρο αυτής και από την άλγεβρα είναι γνωστό ότι η $U\mathbb{H}^2 \cong PSL_2\mathbb{R}$ έχει τετριμμένο κέντρο, συνάγεται ότι η $\mathbb{Z}$ συμπίπτει με το κέντρο της $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$. Η $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$ είναι διφφεομορφική με την πολλαπλότητα $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, δηλαδή είναι τετριμμένη νηματική δέσμη πάνω από το 2-διάστατο πραγματικό επίπεδο, με ίνα την πραγματική ευθεία. Αποδεικνύεται ότι η κάθετη στην φύλλωση των ινών 2-διάστατη κατανομή (οριζόντια κατανομή) είναι δομή επαφής. Από αυτό συνάγεται ότι η $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$ δεν είναι ισομετρική της $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ μέσω οποιασδήποτε αμφιδιαφόρισης που διατηρεί τις ίνες, επομένως οι $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ δεν είναι ισομετρικές.

VIII.§6.0. Υπάρχει 3-διάστατη συμπαγής πολλαπλότητα με καθολική ισομετρική επικάλυψη την $SL_2\mathbb{R}$.

Αποδ. Η κυκλική δέσμη οποιασδήποτε συμπαγούς επιφάνειας γένους ≥ 2. ■

Ορίζεται η Sol-**γεωμετρία** ως η μοναδική *unimodular* ομάδα *Lie* με άλγεβρα *Lie* που προσδιορίζεται από τις σχέσεις $[e_1, e_2] = 0, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = -e_2$. Εξαιτίας της πρώτης σχέσης, η Sol περιέχει το $\mathbb{R}^2$ ως

κανονική υποομάδα. Ισχύει συγκεκριμένα $Sol = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$, επομένως η πράξη στην Sol προσδιορίζεται από την δράση της μονοπαραμετρικής ομάδας του e_3. Η παράγωγος αυτής της δράσης στο $\mathbf{1}$ είναι $\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$. Περιστρέφοντας την βάση e_1, e_2 κατά 45°, η παράγωγος αυτή αναπαρίσταται από τον πίνακα $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$, επομένως στην νέα βάση η δράση λαμβάνει την μορφή

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \big(t, (x, y)\big) \to \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την δομή ημιευθέος γινομένου της Sol, υπολογίζεται από αυτήν την δράση ότι η πράξη στην Sol είναι

$$(x_o, y_o, z_o)(x, y, z) = (x + e^{-z_o} x^o, y + e^z y_o, z + z_o)$$

Μεταφέροντας αναλλοίωτο το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο της $\mathfrak{sol} = Lie(Sol)$ μέσω αριστερής δράσης της Sol στον εαυτό της, υπολογίζεται εύκολα ότι μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική για την Sol-γεωμετρία είναι η

$$e^{2z} dx \otimes dx + e^{-2z} dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

VIII.§6.1. Υπάρχει 3-διάστατη συμπαγής πολλαπλότητα με καθολική ισομετρική επικάλυψη την Sol.

Αποδ. Έστω $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ η αμφιδιαφόριση του 2-τόρου που προκύπτει ως πηλίκο του γραμμικού αυτομορφισμού $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ της καθολικής επικάλυψης $\mathbb{R}^2$. Συμβολίζεται M η συμπαγής 3-πολλαπλότητα που προκύπτει ταυτίζοντας την κορυφή και την βάση του κυλίνδρου $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ σύμφωνα με την αμφιδιαφόριση φ. Διορθώνουμε την καθολική επικάλυψη κατάλληλα ώστε οι κάθετες ιδιοκατευθύνσεις του αυτομορφισμού να συμπίπτουν με τους x, y-άξονες. Επειδή οι ιδιοτιμές είναι αντίστροφες η μια της άλλης, υπάρχει t_o ώστε ο μετασχηματισμός $(x, y, t) \longmapsto \psi(x, y, t) = (e^{t_o} x, e^{-t_o} y, t + t_o)$ του $\mathbb{R}^3$ να επάγει την απεικόνιση φ από το $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ στο $\mathbb{R}^2 \times \{t_o\}$. Τότε η M είναι ο τροχιακός χώρος κάτω από την δράση της διακριτής ομάδας ισομετριών της Sol που παράγεται πάνω στην ψ και τις μοναδιαίες μεταφορές κατά μήκος των x, y-αξόνων. ■

§7. ΟΙ 8 ΠΡΟΤΥΠΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ

Πρότυπη γεωμετρία καλείται ένα ζεύγος (G, X), όπου X διαφορική πολλαπλότητα και G ομάδα *Lie* από αμφιδιαφορίσεις της X τέτοια ώστε

(i) η X είναι συνεκτική και απλά συνεκτική·
(ii) η G δρά μεταβατικά στην X με συμπαγείς σταθεροποιητές (με την έννοια της πρότασης VI.§10.4)·
(iii) η G είναι μεγιστική στο πλέγμα των υποομάδων από αμφιδιαφορίσεις της X με συμπαγείς σταθεροποιητές·
(iv) υπάρχει τουλάχιστον μια συμπαγής (G, X)-πολλαπλότητα.

Από VI.§10.4, η συνθήκη (ii) είναι ικανή ώστε η G να είναι ομάδα από ισομετρίες για κάποια ρημάννεια μετρική g επί της X. Η συνθήκη (iii) δηλώνει ότι η G είναι ολόκληρη η ομάδα των ισομετριών για οποιαδήποτε επιλογή G-αναλλοίωτης μετρικής, επομένως κάθε πρότυπη γεωμετρία μπορεί να νοείται ως γεωμετρική δομή με την έννοια της παραγράφου VIII.§1. Εφ' όσον οι ενδιαφέρουσες (G, X)-πολλαπλότητες προκύπτουν ως τροχιακοί χώροι της X κάτω από γνήσια και ελεύθερη διακριτή υποομάδα της G, οι γεωμετρίες που προκύπτουν ως πηλίκα της πρότυπης γεωμετρίας (G, X) είναι ανεξάρτητες κάθε συγκεκριμένης G-αναλλοίωτης μετρικής που επιλέγεται για την X. Εάν η G απαρτίζεται από αναλυτικές αμφιδιαφορίσεις, όπως συμβαίνει στις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, τότε συνδυάζοντας τις VIII.§2.4 και VIII.§2.5, έπεται ότι όλες οι γεωμετρίες που προκύπτουν ως πηλίκα πρότυπης γεωμετρίας (G, X) κάτω από την γνήσια και ελεύθερη δράση διακριτής ομάδας της G είναι γεωδαισιακά πλήρεις.

Λόγω μεταβατικότητας της δράσης της G, τα στοιχεία της X έχουν ισομορφικούς σταθεροποιητές· συγκεκριμένα, εάν $x, y \in X$ με $x = gy$ για κάποιο $g \in G$, τότε $stab(y) = g\,stab(x)\,g^{-1}$, και αυτό δείχνει επι-

πλέον ότι οι σταθεροποιητές είναι ισομορφικοί ως ομάδες *Lie*. Επομένως καθώς διατρέχουμε τα $x \in X$, οι ομάδες $H_x = \rho\big(stab(x)\big) \subset O(T_xX)$ είναι ισομορφικές ως ομάδες *Lie*. Συμβολίζεται εφ' εξής H η γενική ομάδα *Lie* που τις αντιπροσωπεύει.

VIII.§7.0. $H_{gx} = g_* H g^*$.

Αποδ. Εφ' όσον $stab(gx) = g stab(x) g^{-1}$, για κάθε $h \in stab(gx)$ υπάρχει $h' \in stab(x)$ τέτοιο ώστε $h = gh'g^{-1}$. Άρα $h_* = (gh'g^{-1})_* = g_* h'_* g^*$. ■

Οι επόμενες δύο προτάσεις είναι χρήσιμες κατά την αναγνώριση πρότυπων γεωμετριών.

VIII.§7.1. Έστω (X, g) ομογενής ρημάννεια πολλαπλότητα και G η ομάδα των ισομετριών της, που δρά με συμπαγείς σταθεροποιητές. Εάν $H_x = O(T_xX)$ (δηλαδή $H = O(n)$), τότε η G είναι μεγιστική στο πλέγμα των υποομάδων των ομάδων από αμφιδιαφορίσεις της X με συμπαγείς σταθεροποιητές.

Αποδ. Έστω G' ομάδα αμφιδιαφορίσεων της X που περιέχει την G και δρά με συμπαγείς σταθεροποιητές, οπότε υπάρχει G'-αναλλοίωτη μετρική g' επί της X. Εάν $Isom g'$ η ομάδα των ισομετριών της g', οπότε $G' \subset Isom g'$, αρκεί να δειχθεί ότι $G = Isom g'$. Συγκεκριμένα θα δειχθεί ότι $g' = \lambda g$ για κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό λ, οπότε οι ομάδες των ισομετριών για τις μετρικές g, g' συμπίπτουν. Επειδή οι g, g' είναι G-αναλλοίωτες και η G δρά μεταβατικά, αρκεί να δειχθεί ότι σε κάποιο συγκεκρικένο $x \in X$ ισχύει $g'(x) = \lambda g(x)$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Επιλέγουμε βάση του T_xX στην οποία το εσωτερικό γινόμενο $g(x)$ αναπαρίσταται από τον μοναδιαίο πίνακα, οπότε η $H_x = \rho(stab(x))$ είναι η ομάδα των ορθογωνίων $n \times n$ πινάκων, $n = dimX$. Από την γραμμική άλγεβρα είναι γνωστό ότι το εσωτερικό γινόμενο $g'(x)$ αναπαρίσταται σε αυτήν την βάση από πίνακα $UDU^\top$, όπου D διαγώνιος θετικά ορισμένος $n \times n$ πίνακας και U $n \times n$-ορθογώνιος. Επιπλέον, η ομάδα των γραμμικών αυτομορφισμών του T_xX που διατηρούν το $g'(x)$ αναπαρίσταται σε αυτήν την βάση ως η πινακοομάδα $(U\sqrt{D})O(n)(U\sqrt{D})^{-1}$. Εφ' όσον $G \subset G'$, η $H_x = O(n)$ διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο $g'(x)$, επομένως $O(n) \subset (U\sqrt{D})O(n)(U\sqrt{D})^{-1}$. Αυτό είναι δυνατόν μόνον εάν $\sqrt{D} \in \mathbb{R}^* O(n)$, οπότε $D = \lambda \mathbf{1}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}^+$ κατ' ανάγκην, εφ' όσον ο D είναι διαγώνιος θετικά ορισμένος. Τότε $UDU^\top = U\lambda\mathbf{1}U^\top = \lambda UU^\top = \lambda\mathbf{1}$, δηλαδή $g'(x) = \lambda g(x)$. ■

VIII.§7.2. Έστω (X, g) ομογενής 3-διάστατη ρημάννεια πολλαπλότητα και G η ομάδα των ισομετριών της, που δρά με συμπαγείς σταθεροποιητές. Εάν δηλαδή $H = O(2)$, τότε η G είναι μεγιστική στο πλέγμα των υποομάδων των ομάδων από αμφιδιαφορίσεις της X με συμπαγείς σταθεροποιητές.

Αποδ. Με επιχείρημα όμοιο εκείνου στην απόδειξη της VIII.§7.0, αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε G-αναλλοίωτη ρημάννεια μετρική g' επί της X, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ώστε $g'(x) = \lambda g(x)$, όπου g η G-αναλλοίωτη μετρική επί της X που έχει επιλεχθεί αρχικά. Επιλέγουμε βάση του T_xX με το πρώτο της διάνυσμα πάνω στον κοινό άξονα των στροφών της $H_x \cong O(2)$. Τροποποιούμε κατά *Gram-Schmidt* αυτήν την βάση ώστε το εσωτερικό γινόμενο $g(x)$ να αναπαρίσταται σε αυτήν από τον μοναδιαίο 3×3 πίνακα. Σε αυτήν την βάση, ο ομάδα H_x αναπαρίσταται ως η πινακοομάδα

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & U \end{pmatrix} \middle| \; U \text{ είναι } 2 \times 2 - \text{ορθογώνιος πίνακας} \right\} \cong O(2)$$

Εάν το εσωτερικό γινόμενο $g'(x)$ αναπαρίσταται σε αυτήν την βάση από τον πίνακα $A = (g_{ij})_{i,j=1}^3$, τότε εφ' όσον το $g'(x)$ είναι H_x-αναλλοίωτο, ισχύει

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & U \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & \\ & U^\top \end{pmatrix} = A$$

για κάθε 2×2-ορθογώνιο πίνακα $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$. Κάνοντας πράξεις, η προηγούμενη ισότητα γίνεται

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}u_{11} + g_{13}u_{12} & g_{12}u_{21} + g_{13}u_{22} \\ g_{12}u_{11} + g_{13}u_{12} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}^\top$}} \\ g_{12}u_{21} + g_{13}u_{22} & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$g_{12} = g_{12}u_{11} + g_{13}u_{12} \qquad (2)$$

$$g_{13} = g_{12}u_{21} + g_{13}u_{22} \qquad (3)$$

Από (2) και (3) , $\begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{13} \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{13} \end{pmatrix}$ (εφ' όσον $UU^{\mathsf{T}} = \mathbf{1}$),

απ' όπου εξάγονται οι σχέσεις

$$g_{12} = g_{12}u_{11} + g_{13}u_{21} \qquad (4)$$

$$g_{13} = g_{12}u_{12} + g_{13}u_{21} \qquad (5)$$

Από (1), (2) και (3), (4) αντιστοίχως, λαμβάνουμε $g_{13}(u_{12} - u_{21}) = 0$ και $g_{12}(u_{21} - u_{12}) = 0$. Επιλέγοντας ορθογώνιο πίνακα U τέτοιον ώστε $u_{12} \neq u_{21}$, από αυτές τις σχέσεις έπεται ότι $g_{13} = g_{12} = 0$. Επομένως

$$A = \begin{pmatrix} g_{11} & \\ & \tilde{A} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ & g_{22} & g_{23} \\ & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}$$

και από (1), $U\tilde{A}U^{\mathsf{T}} = \tilde{A}$ για κάθε 2×2-ορθογώνιο U. Επιλέγοντας $U = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$, από την τελευταία ισότητα έπεται ότι $g_{22} = g_{33} = \lambda$ και $g_{23} = 0$ αντιστοίχως, επομένως

$$A = \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ & \lambda & 0 \\ & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Οι γραμμικοί αυτομορφισμοί που διατηρούν αυτό το εσωτερικό γινόμενο αναπαρίστανται ως η πινακοομάδα

$$\{ \sqrt{A}V\sqrt{A^{-1}} \mid V \text{ είναι } 2 \times 2\text{-ορθογώνιος πίνακας} \}$$

που περιέχει την H_x εάν και μόνον εάν $g_{11} = \lambda$. Επομένως το εσωτερικό γινόμενο $g'(x)$ είναι G-αναλλοίωτο ακριβώς όταν $g'(x) = \lambda g(x)$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}^+$. ■

VIII.§7.3. Οι ρημάννειες πολλαπλότητες $\mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{E}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3$ (δηλαδή οι μορφές του 2-διάστατου και του 3-διάστατου χώρου) είναι πρότυπες γεωμετρίες.

Αποδ. Για κάθε μια από τις ομογενείς ρημάννειες πολλαπλότητες της υπόθεσης, η ομάδα των ισομετριών δρά με σταθεροποιητή $O(n)$, που είναι συμπαγής. Από VIII.§7.2 συνάγεται ότι η ομάδα των ισομετριών κάθε μιας από αυτές δεν περιέχεται γνήσια σε καμία ομάδα αμφιδιαφορίσεων που δρά με συμπαγείς σταθεροποιητές. Επιπλέον κάθε μια από αυτές είναι καθολική ισομετρική επικάλυψη κάποιας συμπαγούς πολλαπλότητας:

$$\mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n/\mathbb{Z}^n, \quad \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \qquad n = 2,3$$

$\mathbb{H}^2 \to$ οποιαδήποτε 2-διάστατη προσανατολίσιμη πολλαπλότητα γένους ≥ 2

$\mathbb{H}^3 \to$ 12-εδρικός χώρος *Seifert-Weber* ■

VIII.§7.4. Οι 2-διάστατες πρότυπες γεωμετρίες είναι οι $\mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2$ (δηλαδή οι μορφές του 2-διάστατου χώρου)

Αποδ. Εφ' όσον $dimX = 2$, η μεταβατικότητα της ομάδας ισομετριών G είναι ικανή συνθήκη ώστε η ρημάννεια πολλαπλότητα X να είναι σταθερής καμπυλότητας K (σε κάθε σημείο υπάρχει μοναδικό 2-διάστατο εφαπτόμενο επίπεδο –ο ίδιος ο εφαπτόμενος χώρος–, επομένως η ισοτροπία δεν χρειάζεται για να αποφανθούμε ότι η καμπυλότητα είναι σταθερή). Από VIII.§1.8, $X = \mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2$ εάν $K = 0, +1, -1$ αντιστοίχως. ■

VIII.§7.5. Οι γεωμετρικές δομές $(O(3) \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$ και $(Isom\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1)$ είναι 3-διάστατες πρότυπες γεωμετρίες.

Αποδ. Η ομάδα των ισομετριών κάθε μιας από τις δομές της υπόθεσης δρά με σταθεροποιητή $O(2)$, επομένως από VIII.§7.2, η συνθήκη (iii) του ορισμού της πρότυπης γεωμετρίας ικανοποιείται. Επιπλέον οι πολλαπλότητες $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ είναι απλά συνεκτικές ως γινόμενα απλά συνεκτικών χώρων (συνθήκη (i)). Η $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1/\mathbb{Z} = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)/\{id\} \times \mathbb{Z}$ είναι συμπαγής $(O(3) \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$ -πολλαπλότητα και για οποιαδήποτε 2-διάστατη προσανατολίσιμη πολλαπλότητα $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ γένους ≥ 2, κατασκευάζεται η $(Isom\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1)$-πολλαπλότητα $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1/\Gamma \times \mathbb{Z}$ (VIII.§2.6). ■

VIII.§7.6. Η Nil είναι πρότυπη γεωμετρία.

Αποδ. Η Nil είναι συνεκτική και απλά συνεκτική ως ομοιομορφική με τον $\mathbb{R}^3$. Από VIII.§4.3, είναι επίσης ομογενής χώρος κάτω από την δράση της ομάδας των ισομετριών της, που δρά με συμπαγή σταθεροποιητή $O(2)$. Από VIII.§7.2, η ομάδα των ισομετριών ικανοποιεί την συνθήκη (iii) του ορισμού της πρότυπης γεωμετρίας. Ο τροχιακός χώρος της μηδενογεωμετρίας κάτω από την δράση της ομάδας των ακέραιων πινάκων *Heisenberg* είναι συμπαγής Nil-πολλαπλότητα. ■

VIII.§7.7. Οι $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$, Sol είναι πρότυπες γεωμετρίες.

Αποδ. Οι προτάσεις VIII.§6.0, VIII.§6.1 σημαίνουν την ύπαρξη συμπαγούς $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$- και Sol-πολλαπλότητας αντιστοίχως. Οι ομάδες ισομετρίας κάθε μιας από αυτές της ρημάννειες πολλαπλότητες δρούν με συμπαγή σταθεροποιητή $O(2)$. Από VIII.§7.2, η συνήκη (iii) ικανοποιείται επίσης. ■

VIII.§7.8. Έστω $\varphi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ γραμμικός αυτομορφισμός που σταθεροποιεί το $x_o \in \mathbb{E}^n$. Εάν για κάθε $r \in SO(n)$ που σταθεροποιεί το x_o υπάρχει $r' \in SO(n)$ που σταθεροποιεί το x_o τέτοιος ώστε $\varphi \circ r = r' \circ \varphi$, τότε η φ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο $span\{x_o\}$ και σύνθεση ισομετρίας με διαστολή στο $x_o^\perp$.

Αποδ. Λόγω γραμμικότητας, εφ' όσον η φ σταθεροποιεί το x_o, σταθεροποιεί σημειακά ολόκληρο το $span\{x_o\}$ επίσης. Θα δειχθεί αρχικά ότι $\varphi(x_o^\perp) = x_o^\perp$: Έστω $y \in \mathbb{E}^n$ τέτοιο ώστε $< y, x_o >= 0$, πρέπει να δειχθεί ότι $< \varphi y, x_o >= 0$. Για κάθε στροφή r του $\mathbb{E}^n$ που σταθεροποιεί το x_o, ισχύει

$$< \varphi y, x_o >=< r'\varphi y, r'x_o >=< r'\varphi y, x_o >=< \varphi r y, x_o >$$

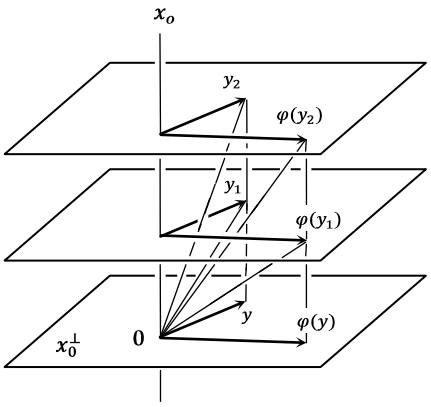
Επιλέγοντας r την στροφή με άξονα x_o και γωνία π, οπότε $ry = -y$, η προηγούμενη ισότητα δίνει $< \varphi y, x_o >= -< \varphi y, x_o >$, άρα $< \varphi y, x_o >= 0$.

Για κάθε ζεύγος y_1, y_2 στη μοναδιαία σφαίρα του $x_o^\perp$ υπάρχει στροφή r με άξονα x_o τέτοια ώστε $ry_1 = y_2$. Τότε

$$< \varphi y_2, \varphi y_2 >=< \varphi r y_1, \varphi r y_1 >=< r'\varphi y_1, r'\varphi y_1 >=< \varphi y_1, \varphi y_1 >$$

Από την γραμμικότητα του $\varphi|_{x_o^\perp}$, εφ' όσον $|\varphi y_1| = |\varphi y_2|$, για κάθε $y_1, y_2 \in x_o^\perp$ με $|y_1| = |y_2|$ σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση, έπεται το ζητούμενο. ■

Σύμφωνα με την VIII.§7.8, ο γραμμικός μετασχηματισμός φ σταθεροποιεί σημειακά τον άξονα x_o και διατηρεί τα παράλληλα στο $x_o^\perp$ υπερεπίπεδα δρώντας σε καθ' ένα από αυτά με σύνθεση ισομετρίας και διαστολής, κατά τρόπον ώστε όλες αυτές οι δράσεις να διατηρούν από κοινού την φύλλωση των παράλληλων στον x_o-άξονα ευθειών.



VIII.§7.9. Έστω M προσανατολίσιμη ρημάννεια πολλαπλότητα που είναι ομογενής χώρος κάτω από την λεία και ισομετρική δράση της ομάδας *Lie* G. Εάν η M είναι κανονική ισομετρική επικάλυψη κάποιας συμπαγούς πολλαπλότητας, τότε κάθε G-αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο επί της M διατηρεί τον όγκο.

Αποδ. Έστω M' η συμπαγής ρημάννεια πολλαπλότητα που δίνεται στην υπόθεση, οπότε η M' είναι ισομετρική με τον τροχιακό χώρο M/Γ, όπου Γ η καλύπτουσα ομάδα για την επικάλυψη $q : M \to M'$. Η Γ είναι διακριτή υποομάδα των ισομετριών της M που δρά γνήσια και ελεύθερα, επιπλέον δρά μεταβατικά στις q-ίνες αφού η επικάλυψη είναι κανονική. Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ G-αναλλοίωτο, οπότε $div\,\xi$ σταθερή βαθμωτή συνάρτηση πάνω στην M (VI.§10.5). Εάν U είναι q-επικαλλυμένη περιοχή της M', ορίζεται διανυσματικό πεδίο ξ' επί της U ως

$$\xi'_U = (q\big|_V)_*\xi\big|_V$$

όπου V συνεκτική συνιστώσα του $q^{-1}[U]$. Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του U: εφ' όσον η δράση της Γ είναι μεταβατική στις q-ίνες και κάθε *deck*-μετασχηματισμός της M είναι ισομετρία, εάν W μία άλλη συνεκτική συνιστώσα του $q^{-1}[U]$ και $h \in \Gamma$ τέτοιο ώστε $h[V] = W$, οπότε $q\big|_V = q\big|_W \circ h$, τότε

$$(q\big|_V)_*\xi\big|_V = (q\big|_W)_*h_*\xi\big|_V = (q\big|_W)_*\xi\big|_W$$

Τα ξ'_U συμφωνούν στις τομές q-επικαλλυμένων περιοχών της M', επομένως συγκολλώντας τα λαμβάνουμε λείο διανυσματικό πεδίο ξ' επί της M'. Επειδή η q είναι τοπική ισομετρία και $\xi' = q_*\xi$ τοπικά, έπεται ότι $div\xi'(x) = div\xi(y)$ για κάθε $x \in M', y \in q^{-1}(x)$, άρα η $div\,\xi'$ σταθερή βαθμωτή ποσότητα επί της M'. Επειδή λόγω συμπάγειας της M' ορίζεται ο όγκος $vol(M')$, ισχύει $div\,\xi' = 0$: εάν $div\xi' = \lambda \neq 0$ και φ η ροή του πεδίου ξ', τότε

$$\frac{d}{dt}vol(\varphi_t[M])\Big|_{t=t_o} = \int_{M'} div\xi' dv = \lambda \int_{M'} dv \neq 0,$$

άτοπο, αφού ο συνολικός όγκος μιας πολλαπλότητας δεν μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος οποιασδήποτε ροής. Επομένως $div\xi' = 0$ παντού, άρα $div\xi = 0$ παντού. ■

Με τον συμβολισμό της σελίδας 230, συμβολίζεται για κάθε $x \in X$ ως $stab_1(x)$ η συνεκτική συνιστώσα της $stab(x)$ που περιέχει το 1 και H_x^1 η συνεκτική συνιστώσα της H_x που περιέχει την ταυτοτική απεικόνιση, δηλαδή $H_x^1 = \rho(stab_1(x))$. Ισχύει $H_x^1 \subset SO(T_xX)$: εφ' όσον κάθε στοιχείο στην $stab_1(x)$ συνδέεται με το ταυτοτικό, η $stab_1(x)$ διατηρεί τον προσανατολισμό, επομένως τα διαφορικά των στοιχείων της στην θέση $x \in X$ είναι στροφές του εφαπτόμενου χώρου στο σημείο αυτό. Η υποομάδα H_x^1 είναι συμπαγής ως εικόνα συμπαγούς μέσω συνεχούς απεικόνισης και κλειστό υποσύνολο της $SO(3)$ ως συμπαγές υποσύνολο χώρου *Hausdorff*, επομένως επιδέχεται μοναδικής διαφορικής δομής που την καθιστά υποομάδα *Lie* της $SO(3)$. Συμβολίζοντας $H^1 \cong H_x^1$ την συνεκτική συνιστώσα της $H \cong H_x$ που περιέχει το 1, από VI.§9.5, υπάρχουν τρεις δυνατότητες:

$$H^1 = SO(3) \quad \text{εάν} \quad dimH^1 = 3$$

$$H^1 = SO(2) \quad \text{εάν} \quad dimH^1 = 1$$

$$H^1 = 1 \quad \text{εάν} \quad dimH^1 = 0$$

Η ταξινόμηση των 3-διάστατων πρότυπων γεωμετριών γίνεται μέσω αυτής της περιπτωσιολογίας. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι κατά το ήμισυ αναλυτική· συγκεκριμένα, η απόδειξη των σκελών (β_2) και (γ) είναι σχέδιο, αφού οι γεωμετρίες $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$ και Sol έχουν εξετασθεί σε αυτήν την εργασία επί τροχάδην.

VIII.§7.10. (Thurston). Υπάρχουν ακριβώς οκτώ πρότυπες 3-διάστατες γεωμετρίες (G, X):

(α) εάν $H^1 = SO(3)$, $X = \mathbb{S}^3, \mathbb{E}^3$ ή $\mathbb{H}^3$·

(β) εάν $H^1 = SO(2)$, η X είναι νηματική δέσμη πάνω σε μια από τις 2-διάστατες πρότυπες γεωμετρίες,

με τις ίνες να μένουν αναλλοίωτες από την δράση της G. Υπάρχει G-αναλλοίωτη μετρική επί της X ώστε η ορθογώνια στις ίνες συνοχή να έχει καμπυλότητα 0 ή 1·

(β_1) εάν η καμπυλότητα είναι 0, $X = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ ή $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$·

(β_2) εάν η καμπυλότητα είναι 1, $X = Nil$ (νηματική δέσμη πάνω από το $\mathbb{E}^2$ με ίνα $\mathbb{E}^1$) ή $X = \widetilde{SL}_2\mathbb{R}$ (νηματική δέσμη πάνω από το $\mathbb{H}^2$ με ίνα $\mathbb{E}^1$)·

(γ) εάν H^1 **είναι τετριμμένη**, $X = Sol$ (νηματική δέσμη πάνω από το $\mathbb{E}^1$).

Αποδ. (α) Για κάθε ζεύγος επιπέδων $\pi, \sigma \in T_xX$ υπάρχει $r \in H^1$ με $r\pi = \sigma$, επομένως η καμπυλότητα τμήσης είναι σταθερή στο σύνολο των 2-διάστατων υποχώρων του T_xX, και λόγω μεταβατικότητας έπεται ότι είναι ίδια για όλα τα $x \in X$. Άρα η X είναι πολλαπλότητα σταθερής καμπυλότητας, $X = \mathbb{S}^3, \mathbb{E}^3$ ή $\mathbb{H}^3$ (VIII.§1.8).

(β) Σε κάθε $x \in X$, η H_x^1 είναι η ομάδα των στροφών του T_xX γύρω από κάποιον 1-διάστατο υπόχωρο αυτού. Προσανατολίζουμε την X (V.§3.4) και για κάθε $x \in X$ επιλέγουμε $\xi(x) \in T_xX$ ως εξής:

$\xi(x)$ το μοναδιαίο διάνυσμα που σταθεροποιείται από όλες τις στροφές στην H_x^1 και τέτοιο ώστε η βάση $\{v, rv, \xi(x)\}$ του T_xX να είναι θετικά προσανατολισμένη για όλα τα $v \in \left(\xi(x)\right)^{\perp} \setminus \{0\}$, $r \in H_x^1 \setminus \{id\}$ (δηλαδή το $\xi(x)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα επί του άξονα της H_x^1 που συμφωνεί με τον προσανατολισμό αυτού).

Ισχυρισμός 1. Το ξ είναι G_1-αναλλοίωτο, όπου G_1 η συνεκτική συνιστώσα της G που περιέχει το 1.

Απόδειξη ισχυρισμού: Πρέπει να δειχθεί ότι $\xi(gx) = g_*\xi(x)$, $\forall x \in X$, $\forall g \in G_1$. Επειδή η g απεικονίζει μοναδιαία διανύσματα σε μοναδιαία (ως ισομετρία), αρκεί – εκ κατασκευής του ξ – να δειχθεί ότι

(1) $h_*g_*\xi(x) = (gh'g^{-1})_*g_*\xi(x) = g_*h'_*g^*g_*\xi(x) = g_*h'_*\xi(x) = g_*\xi(x)$·
(2) $\{v, rv, \xi(x)\}$ θετικά προσανατολισμένη βάση του $T_{gx}X$, για κάθε $v \in (g_*\xi(x))^{\perp} \setminus \{0\}$, $r \in H_{gx}^1$.

(1): Υπάρχει $h' \in stab(x)$ ώστε $gh'g^{-1} = h$, επομένως

$$h_*g_*\xi(x) = (gh'g^{-1})_*g_*\xi(x) = g_*h'_*g^*g_*\xi(x) = g_*h'_*\xi(x) = g_*\xi(x)$$

(2): Από VIII.§7.8, υπάρχει $r' \in H_x$ ώστε $r'g^* = g^*r$. Επομένως η βάση $\{v, rv, \xi(x)\}$ είναι εικόνα της βάσης $\{g^*v, r'g^*v, \xi(x)\}$ μέσω του διαφορικού g_*. Όμως εκ κατασκευής του ξ, αυτή η βάση είναι θετικά προσανατολισμένη. Επειδή η ισομετρία $g \in G_1$ διατηρεί τον προσανατολισμό, έπεται το ζητούμενο. □

Ισχυρισμός 2. Η ροή $(\varphi_t)_t$ του πεδίου ξ αντιμετατίθεται με την δράση της G_1 και σημεία στην ίδια ολοκληρωτική καμπύλη του ξ έχουν κοινό σταθεροποιητή.

Απόδειξη ισχυρισμού. Έστω $x \in X$ και $g \in G_1$. Εφ' όσον το πεδίο ξ μένει αναλλοίωτο από την g (ισχυρισμός 1), το πεδίο ταχυτήτων της καμπύλης $g \circ \gamma$ προκύπτει μέσω της g από το πεδίο ταχυτήτων της διερχόμενης από το x ολοκληρωτικής καμπύλης γ του ξ. Άρα η κίνηση σε χρόνο t κατά μήκος της $g \circ \gamma$ πάνω από την αμφιδιαφόριση g, ισοδύναμα, $g\varphi_t(x) = \varphi_t(gx)$. Από την τελευταία ισότητα, εάν $g \in stab(x)$, τότε $g\varphi_t(x) = \varphi_t(gx) = \varphi_t(x)$, δηλαδή $stab(x) \subset stab(\varphi_t(x))$. Με συμμετρικό επιχείρημα λαμβάνεται ο αντίστροφος εγκλεισμός επίσης. □

Για κάθε t, επιλέγουμε $g_t \in G_1$ τέτοιο ώστε $g_t\varphi_t(x) = x$.

Ισχυρισμός 3. Η απεικόνιση $(g_t \circ \varphi_t)_* : T_xX \to T_xX$ είναι γραμμικός αυτομορφισμός που σταθεροποιεί το $\xi(x)$ και τέτοιος ώστε $(g_thg_t^{-1})_* \circ (g_t \circ \varphi_t)_* = (g_t \circ \varphi_t)_* \circ h_*$ για κάθε $h \in stab(x) = stab(\varphi_t(x))$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Επειδή το ξ μένει αναλλοίωτο από την δράση από την δράση της G_1, ισχύει

$$(g_t \circ \varphi_t)_*\xi(x) = (g_t)_*(\varphi_t)_*\xi(x) = (g_t)_*\xi\big(\varphi_t(x)\big) = \xi\big(g_t\varphi_t(x)\big) = \xi(x)$$

Επίσης $(g_t \circ \varphi_t)_* \circ h_* = (g_t)_* \circ (\varphi_t)_* \circ h_* = (g_t)_* \circ h_* \circ (\varphi_t)_* =$
$(g_t)_* \circ h_* \circ (g_t^{-1})_* \circ (g_t)_* \circ (\varphi_t)_* = (g_thg_t^{-1})_* \circ (g_t \circ \varphi_t)_*$ □

Εφ' όσον τα h_* συγκροτούν την H_x^1 καθώς το h διατρέχει το $stab_1(x)$ και H_x είναι η ομάδα των στροφών του T_xX που σταθεροποιούν το $\xi(x)$, ο ισχυρισμός 3 σημαίνει ότι ο γραμμικός αυτομορφισμός $(g_t \circ \varphi_t)_* : T_xX \to T_xX$ ικανοποιεί τις υποθέσεις της VIII.§7.8. Επομένως το $(g_t \circ \varphi_t)_* = (g_t)_* \circ (\varphi_t)_*$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση πάνω στο $span(\xi(x))$ και σύνθεση ισομετρίας με διαστολή στο $\xi(x)^\perp$. Επειδή το διαφορικό $(g_t)_* : T_{\varphi_t(x)}X \to T_xX$ είναι ισομετρία, συνάγεται ότι το διαφορικό $(\varphi_t)_* : T_xX \to T_{\varphi_t(x)}X$ απεικονίζει το $\xi(x)$ στο $\xi(\varphi_t(x))$ διατηρώντας την διάταξη των παράλληλων στο $\xi(x)^\perp$ υπερεπιπέδων, δρώντας σε καθ' ένα από αυτά με συνθέσεις ισομετρίας και διαστολής ώστε το σύνολο των παραλλήλων στο $\xi(x)$ ευθειών να απεικονίζεται στο σύνολο των παράλληλων στο $\xi(\varphi_t(x))$ ευθειών. Από VII.§8.8, η G_1 δρά μεταβατικά στην X. Από VIII.§7.9, το πεδίο ξ, ως G_1-αναλλοίωτο, διατηρεί τον όγκο, επομένως ο περιορισμός της $(\varphi_t)_*$ στο $\xi(x)^\perp$ είναι ισομετρία και μόνο. Επομένως η ροή $(\varphi_t)_t$ συγκροτείται από ισομετρίες, ισοδύναμα, το ξ είναι πεδίο *Killing*. Από IV.§5.7, η φύλλωση $\mathfrak{F}$ των ολοκληρωτικών καμπυλών του ξ είναι διαφορική 2-πολλαπλότητα κατά τρόπον ώστε η προβολή στα φύλλα, $q : X \to \mathfrak{F}$, να είναι υπεμβάπτυση.

Επιλέγουμε g μία οποιαδήποτε G-αναλλοίωτη μετρική επί της X και κατασκευάζουμε την μετρική g' επί της $\mathfrak{F}$ ως εξής: Έστω x^1, x^2, x^3 τοπικό σύστημα συντεταγμένων της X στο οποίο οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ αναπαρίστανται ως οι παράλληλες στον x^1-άξονα ευθείες και

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}$$

η αναπαράσταση της g στο σύστημα αυτό ($g_{ij} = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$). Εκ κατασκευής της $\mathfrak{F}$, το x^2, x^3 είναι τοπικό σύστημα συντεταγμένων αυτής. Ορίζεται τότε η μετρική g' ως η τοπικά αναπαριστώμενη από τις ποσότητες $g'_{ij} = g_{ij} = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$, $i, j \geq 2$. Η προβολή q γίνεται τότε ρημάννεια υπεμβάπτυση: $q(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2)$ τοπικά, επομένως

$$g'\left(q_*\frac{\partial}{\partial x^i}, q_*\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g'\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

που σημαίνει ότι $g' = q_*g$. Εφ' όσον η δράση της G_1 αντιμετατίθεται με την ροή $(\varphi_t)_t$ και οι γραμμές ροής της τελευταίας είναι τα φύλλα της $\mathfrak{F}$, περνώντας στο πηλίκο λαμβάνουμε από την μεταβατική δράση της G_1 επί της X μία μεταβατική δράση της G_1 επί της $\mathfrak{F}$ Επειδή η q είναι ρημάννεια υπεμβάπτυση, η G_1 δρά στην $\mathfrak{F}$ ισομετρικά. Επίσης η $\mathfrak{F}$ είναι συνεκτική και απλά συνεκτική, ως ομοτοπική της X (προκύπτει από την X συρρικνώνοντας τις γραμμές ροής του πεδίου ξ σε σημεία). Αυτές οι παρατηρήσεις σημαίνουν ότι η $\mathfrak{F}$ είναι 2-διάστατη πρότυπη γεωμετρία, επομένως εφαρμόζοντας την VIII.§7.4,

$$\mathfrak{F} = \mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2 \text{ ή } \mathbb{H}^2$$

Εφ' όσον η δράση της G_1 επί της X είναι μεταβατική και απεικονίζει ξ-ολοκληρωτικές καμπύλες σε ξ-ολοκληρωτικές καμπύλες, τα φύλλα της $\mathfrak{F}$ είναι όλα διφφεομορφικά. Από II.§1.10, έπεται ότι η X είναι κύρια νηματική δέσμη πάνω από την $\mathfrak{F}$ με ίνα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{S}^1$ και νηματική προβολή την q (η δράση της G σε κάποιο φύλλο, δηλαδή ο περιορισμός της ροής $(\varphi_t)_t$ σε αυτό, ισοδυναμεί με την από αριστερά δράση της ίνας επί του εαυτού της).

Συμβολίζεται D η ορθογώνια στα φύλλα της $\mathfrak{F}$ συνοχή της νηματικής δέσμης X. Εφ' όσον η G δρά μεταβατικά στην X, η καμπυλότητα της συνοχής είναι σταθερή.

(β_1) Εφ' όσον έχει μηδενική καμπυλότητα, η D έχει ταυτοτικά μηδενική συστροφή (βλ. τον αφηρημένο ορισμό της καμπυλότητας συνοχής στην σελ. 146), επομένως είναι ολοκληρώσιμη (*Frobenius*). Επειδή η ρημάννεια πολλαπλότητα είναι απλά συνεκτική, η δέσμη είναι τετριμμένη (βλ. πρόταση 3.6.15 από [**Thu**] για δικαιολόγηση αυτού του βήματος), δηλαδή $X = \mathfrak{F} \times F$, όπου F η ίνα της δέσμης. Επειδή οι $X, \mathfrak{F}$ είναι απλά συνεκτικές, η ίνα F είναι απλά συνεκτική κατ' ανάγκην, επομένως $F = \mathbb{R}$. Από τις τρείς πολλαπλότητες με τις οποίες μπορεί να ισούται η $\mathfrak{F}$, η $\mathbb{E}^2$ αποκλείεται, διότι τότε $X = \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ και η G (δρά μεταφέροντας την συνιστώσα $\mathbb{R}$) περιέχεται γνησίως στην $O(3)$ (δεν είναι μεγιστική με την έννοια της συνθήκης (iii)).

(β_2) Εφ΄ όσον έχει μή μηδενική καμπυλότητα, και άρα παντού μή μηδενική συστροφή, η D είναι δομή επαφής. Πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο παράγοντα και προσανατολίζοντας κατάλληλα τις ίνες και την βάση της δέσμης, η καμπυλότητα της συνοχής γίνεται $+1$. Είναι γνωστό ότι οι μόνες δομές επαφής με αριστερά αναλλοίωτη μηδενίζουσα μορφή ω σε 3-διάστατη απλά συνεκτική πολλαπλότητα που νηματοποιείται πάνω από την $\mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2$ ή $\mathbb{H}^2$ με ίνα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{S}^1$, είναι

εάν $\mathfrak{F} = \mathbb{S}^2$, η ίνωση *Hopf*, οπότε $X = \mathbb{S}^3$, που απορρίπτεται, διότι G είναι η $U(1) \cong (e^{it})_{t\in[0,2\pi)}$, που διατηρεί τους κύκλους *Hopf* περιστρέφοντάς τους (βλ. σελ. 214) και περιέχεται γνησίως στην ομάδα $O(4)$ των ισομετριών της 3-σφαίρας (δεν είναι μεγιστική με την έννοια της συνθήκης (iii))·

εάν $\mathfrak{F} = \mathbb{E}^2$, η πρότυπη δομή επαφής, οπότε $X = Nil$·

εάν $\mathfrak{F} = \mathbb{H}^2$, η κυκλική δέσμη $U\mathbb{H}^2$, που έχει καθολική επικάλυψη την $X = \widetilde{SL}_2\mathbb{R}$.

(γ) Επειδή η X είναι ομογενής κάτω από την δράση της συνεκτικής ομάδας *Lie* G_1 (VII.§8.8) και οι σταθεροποιητές είναι τετριμμένοι, $X \cong G_1$. Συνδυάζοντας την συνθήκη (iv) του ορισμού των προτύπων γεωμετριών με την πρόταση VI.§10.9, η X είναι *unimodular* ομάδα *Lie*, που επιπλέον είναι απλά συνεκτική. Επειδή οι 3-διάστατες άλγεβρες *Lie* βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις κλάσεις (αλγεβρικής) ισομορφίας απλά συνεκτικών ομάδων Lie, για τον προσδιορισμό της X αρκεί η εύρεση των 3-διάστατων αλγεβρών *Lie* $\mathfrak{g} = Lie(X)$ που δίνουν *unimodular* ομάδα *Lie* διάφορη από τις γεωμετρίες των προηγούμενων περιπτώσεων.

Λόγω *unimodularity*, ο γραμμικός τελεστής L είναι αυτοσυζυγής (VI.§10.8). Επομένως η επιλεγμένη θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση e_1, e_2, e_3 της $\mathfrak{g}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι συγκροτείται από ιδιοδιανύσματα του L. Σε αυτήν την βάση ο L αναπαρίσταται από διαγώνιο πίνακα $diag(c_1, c_2, c_2)$, όπου $L(e_i) = c_i e_i$. Εξ ορισμού του L, αυτό σημαίνει ότι το γινόμενο *Lie* ικανοποιεί τις σχέσεις

$$[e_1, e_2] = c_3 e_3, \qquad [e_2, e_3] = c_1 e_1, \qquad [e_3, e_1] = c_2 e_2$$

Διαστέλλοντας ή συστέλλοντας τα e_i ώστε η βάση a_1e_1, a_2e_2, a_3e_3 να είναι ορθοκανονική $a_1, a_2, a_3 > 0$, το c_i αντικαθίσταται από $c_i(a_{i+1}a_{i+2}/a_i)$. Επομένως η βάση e_1, e_2, e_3 μπορεί να συσταλεί ώστε $c_i = 0, \pm 1$, $i = 1, 2, 3$. Μεταθέτοντας κατάλληλα τα e_i και αντικαθιστώντας τα εν ανάγκη από τα αντίθετά τους (οι περιττές μεταθέσεις αντιστρέφουν τον προσανατολισμό του χώρου, επομένως αυτή η αντικατάσταση διασφαλίζει ότι το πρόσημο των c_i διατηρείται), η βάση e_1, e_2, e_3 γίνεται τέτοια ώστε $c_1 \geq c_2 \geq c_3$ και τα θετικά c_i να είναι τουλάχιστον όσα τα αρνητικά. Οι δυνατές 3-άδες c_1, c_2, c_3 είναι τότε οι εξής :

$c_1 = c_2 = c_3 = 1$, που δίνει $X = G_1 = \mathbb{S}^3 = SU(2)$

$c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, που δίνει $X = G_1 = \widetilde{SL}_2\mathbb{R}$

$c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$, που δίνει $X = G_1 = Nil$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$, που δίνει $X = G_1 = \mathbb{R}^3$

$c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -1$, που δίνει την καθολική επικάλυψη $G_1 = \widetilde{Isom}\mathbb{E}^2 \subsetneq Isom\mathbb{E}^3$

$c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 0$, που δίνει $X = G_1 = Sol$

Από τις παραπάνω ομάδες *Lie*, η μόνη νέα πρότυπη γεωμετρία είναι η Sol. ■

Βιβλιογραφία

[**Arn**] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics,* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1984

[**Art**] Michael Artin, *ALGEBRA,* Prentice Hall, 1991

[**BaMu**] John Baez, Javier Munian, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, Series on Knots and Everything, Vol.4, World Scientific, 1994

[**BCM**] A. Borisenko, V. Cabezas-Rivas, E. Miquel, *An introduction to Hamilton and Perelman's work on the conjectures of Poincaré and Thurston*, Notes on the Talks given by Alexander Borisenko in Valencia, May-August, 2004

[**Berg1**] Marcel Berger, *Geometry I,* Springer-Verlag, 1987

[**Berg2**] Marcel Berger, *Geometry II,* Springer-Verlag, 1987

[**Bur**] R.P. Burn, *Groups - A Path to Geometry,* Cambridge University Press, 1985

[**CaCo**] Alberto Candel, Lawrence Conlon, *Foliations I*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 23, American Mathematical Society

[**Car1**] Henri Cartan, *Differential Calculus,* Kershaw Publishing Company LTD, 1971

[**Car2**] Henri Cartan, *Differential Forms,* Dover Publications, INC, 1971

[**Chern**] S.S. Chern, W.H. Chen, K.S. Lam, *Lectures on Differential Geometry* - Vol 1*,* Series on University Mathematics, World Scientific 2000

[**DNF1**] Dubrovin, Novikov, Fomenko, *Modern Geometry – Methods and Applications, Part1 (The Geometry of Surfaces and Transformation Groups)*, Springer, 1992

[**DNF2**] Dubrovin, Novikov, Fomenko, *Modern Geometry – Methods and Applications, Part2 (The Geometry and Topology of Manifolds)*, Springer, 1992

[**DoC1**] Manfredo do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces,* Prentice Hall, 1976

[**DoC2**] Manfredo do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1993

[**H-C**] Hilbert, Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Springer, 1932,1996

[**Hilb**] Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leibzig, 1903

[**Helg**] Sigudur Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, INC. 1978

[**Hir**] Morris W. Hirsh, *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1994

[**KoSha**] A. I. Kostrikin, I.R. Shafarevich, *Algebra I, Basic Notions of Algebra,* Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 11, Springer-Verlag

[**Lang**] Serge Lang, Undergraduate Algebra, Springer 2005

[**Lee1**] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds,* Springer, 2006

[**Lee2**] John M. Lee, *Riemannian Manifolds* - An *Introduction to Curvature,* Springer, 1997

[**Lee3**] John M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds,* Springer, 2000

[**Miln**] John Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, University Press of Virginia, 1965

[**Mor**] Shigeyuki Morita, *Geometry of Differential Forms,* 1998

[**Munk**] James Munkres, *Topology (Second Edition)*, Prentice Hall, 1975

[**Palais**] R. Palais, *A global formulation of the Lie theory of Transformation Groups,* Memoirs Amer. Math. Soc. n° 2, 1957

[**Pont**] Pontryagin, *Topological Groups*, Princeton University Press, 1946

[**Post**] M.M. Postnikov, *Geometry VI (Riemannian Geometry),* Volume 91, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Springer, 1998

[**PrTi**] V.V. Prasolov, V.M. Tikhomirov, *Geometry,* American Mathematical Society, 1997

[**Scott**] Peter Scott, *The Geometries of 3-Manifolds,* Bull. London Mathematical Society, 15 (1483), pg. 401-487

[**SeThr**] Seifert-Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, American Mathematical Society, Leipzig 1934, NY 1980

[**Shil**] Georgi E. Shilov, *Linear Algebra,* Dover Publications, 1977

[**Schu**] Bernard Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1980

[**Thu**] William P. Thurston, *Three-Dimensional Topology and Geometry*, Volume 1, Princeton University Press, 1997

[**ΠαΚω**] Παναγιωτόπουλος Αρ., Κωτσάνη Νατ., *Η Λογική της Γεωμετρίας* , εργασία για το μάθημα «Εφαρμογές της Λογικής στην Πληροφορική», Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ, 2011

Ευρετήριο

ΟΡΟΙ

deck-μετασχηματισμός *(σελ.) 118*
g-αντίστοιχο $(0,2)$-πεδίο *66*
g-αντίστοιχο $(1,1)$-πεδίο *66*
Killing πεδίο 67
Lie
    άλγεβρα *52*
    άλγεβρα μιας ομάδας *Lie* *129*
    ιδεώδες *53*
    ομάδα *128*
    παράγωγος *61*
    υποάλγεβρα *53*
    υποομάδα 1*28*
Seifert-Weber 12-εδρικός χώρος *202*
Sylvester
    νόμος *46*
    παράμετροι *46*
unimodular ομάδα *Lie* *139*
αμφιδιαφόριση *13*
    επαφής *218*
αμφιολομορφία *21*
ανέβασμα δείκτη *66*
ανεξάρτητη ως προς μεταβλητή δυναμοσειρά *19*
αντιπαράγωγος *81*
ανύψωση *104*
    Legendre *219*
αξίωμα ελεύθερης μετακίνησης *190*
απεικόνιση
    $\mathcal{G}$- *8*
    Gauss *177*
    Hopf *208*
    ισομεταβαλλόμενη *112*
    πηλίκο *4*
αποδεκτή οικογένεια καμπυλών *163*
απόκλιση *94*
αυτομορφισμός, επαφής *218*
αυτοσυζυγής μετασχηματισμός *48*
γεωδαισιακή *153*
γεωδαισιακό πεδίο *154*
γεωμετρία
    Sol- *228*
    ελλειπτική *191*
    ευκλείδεια *191*
    μηδενο- *225*
    πρότυπη *229*
    σφαιρική *191*
    υπερβολική *191*
γινόμενο
    Lie *61*
    αντισυμμετρικών τανυστών *69*
    εσωτερικό *47*
    τανυστικό *43*
γκρασμαννιανή *25*
δείκτης μηδενοδυναμίας *224*
δέσμη
    διανυσματική *37*
    εαφαπτόμενη *40*
    κάθετη διανυσματική *98*
    κυκλική *223*
    νηματική *35*
    συνεφαπτόμενη *96*
    τετριμμένη *35*
διακριτές τροχιές *121*
διαμέριση της μονάδας *13*
διανυσματική υποδέσμη *40*
διανυσματικό πεδίο *54*
    Jacobi *182*
    αριστερά αναλλοίωτο *128*
    επεκτάσιμο *56*

κατά μήκος αποδεκτής οικογένειας *164*
κατά μήκος καμπύλης *55*
μεταβολικό *164*
παράλληλο κατά μήκος καμπύλης *152*
παράλληλο *152*
πλήρες *58*
δομή
γεωμετρική *190*
διγραμμικής απεικόνισης *45*
επαφής *215*
πρότυπη επαφής *218*
συμπλεκτική *50*
(ψευδο)ευκλείδεια *47*
δομικές σταθερές άλγεβρας *Lie* *52*
δράση
γνήσια *120*
γνησίως ασύνδετη *121*
διακριτή *120*
ελεύθερη *112*
έχει διακριτές τροχιές *121*
λεία *132*
μεταβατική *112*
περιπλανώμενη *121*
πιστή *112*
συνεχής τοπολογικής ομάδας *120*
εγκάρσιες καμπύλες αποδεκτής οικογένειας *164*
εκδίπλωση *198*
εκμηδενιστής *96*
εμβάπτυση *27*
εμβύθιση *26*
ισομετρική *65*
εμποτισμένο υποσύνολο *4*
εμφύτευση *26*
εξίσωση
Cartan *149*
Gauss *175*
Jacobi *182*
Weingarten *175*
εξωτερική παράγωγος *76*
επικαλυμμένο υποσύνολο *103*
επικάλυψη *103*
ισομετρική *127*
καθολική *108*
κανονική *117*
λεία *126*
επιτάχυνση καμπύλης *153*
επιφάνεια *15*
εφαπτόμενο διάνυσμα *17*
εφαπτόμενος χώρος
επιφάνειας, σελ *16*
πολλαπλότητας *17*
εφελκυσμός *54*
θεώρημα
Baire για τοπικά συμπαγείς χώρους *2*
Frobenous *100*
Hadamard *189*
Hopf-Rinow *167*
Sard *29*
Stokes *91*
αντίστροφης απεικόνισης για αναλυτικές αλλαγές συντεταγμένων *21*
αντίστροφης απεικόνισης για πολλαπλότητες *18*
αντίστροφης απεικόνισης *15*
απόκλισης *94*
ασθενές *Whitney* *29*
ασθενές *Whitney*-1936 *31*
βαθμού *26*
για πολλαπλότητες *11*
ισομορφισμού επικαλύψεων *108*
ισχυρό *Whitney* *31*
πεπλεγμένων συναρτήσεων *15*
ίνωση *Hopf* *214*
ισομορφισμός
επικαλύψεων *107*
νηματικών δεσμών *36*
τοπικός $\mathcal{G}$- *9*
τοπολογικών ομάδων *114*
καλύπτουσα μετρική *127*
καμπύλη *Legendre* *219*
καμπυλότητα
Gauss 2-διάστατης πολλαπλότητας *180*
Gauss υπερεπιφάνειας *178*
Riemann *171*
συνοχής *146*
κανονική περιοχή *155*
κατανομή *97*
ενελλειικτική *100*
κατανομή (ολικά ή τοπικά) *98*
κατέβασμα δείκτη *66*
κατευθυνόμενη παράγωγος τμήσης
ως προς διάνυσμα *147*
ως προς διανυσματικό πεδίο *148*
κρίσιμη τιμή *28*
κρίσιμο σημείο *28*
κύκλοι *Hopf* *208*
κύριες διευθύνσεις *177*
κύριες καμπυλότητες *177*
λήμμα συγκόλλησης *1*

λήμμα συρρίκνωσης για πολλαπλότητες *11*
λήμμα συρρίκνωσης *1*
μεταβολή τμηματικά ομαλής καμπύλης *164*
γεωδαισική *182*
γνήσια *164*
μέτρο *Haar* *137*
μή ιδιάζον σημείο
συντεταγμενικής περιοχής *15*
επιφάνειας *15*
μή ιδιάζουσα διγραμμική απεικόνιση *44*
μηδενικού n-διάστατου μέτρου *Lebesgue* *84*
μηδενοχώρος 1-μορφών *95*
μιγαδική αναλυτική απεικόνιση *20*
μιγαδικός μετασχηματισμός *21*
μονοδρομία *116*
μονοπαραμετρική υποομάδα ομάδας *Lie* *129*
μοντέλο
Poincaré *192*
του άνω ημιεπιπέδου *193*
του υπερβολοειδούς *192*
μορφή του χώρου *189*
μορφή, βλ. αντισυμμετρικός τανυστής
διαφορική *72*
συμπλεκτική *50*
μπάλα
κανονική ακτίνας δ *163*
κανονική ευκλείδεια *10*
ολικά γεωδαισιακή υποπολλαπλότητα *176*
ολικά κανονική περιοχή *155*
ολοκληρώσιμη κατανομή (ολικά ή τοπικά) *98*
ολοκληρωτικές καμπύλες (ολικές) *57*
ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα *98*
ολόμορφος μεταχηματισμός *21*
ολονομία *145*
(G, X)- *198*
κατά μήκος καμπύλης *152*
ομάδα
(G, X)-ολονομίας *199*
Heisenberg *226*
ακέραια *Heisenberg* *227*
διακριτή *113*
δομική *35*
καλύπτουσα *118*
μηδενοδιάστατη *114*
μηδενοδύναμη *224*
μονοδρομίας *116*
μονοπαραμετρική *58*
ολονομίας *145*
τοπολογική *113*
ομαλή καμπύλη *162*
ομομορφισμός
Lie *129*
επικαλύψεων *106*
νηματικών δεσμών *36*
τοπολογικών ομάδων *114*
ορθογώνιος υπόχωρος *44*
οριζόντια ανύψωση *144*
οριζόντιος υπόχωρος *144*
παράλληλη μεταφορά *144*
πέρασμα στο πηλίκο *5*
περιορισμός διανυσματικού πεδίου κατά μήκος καμπύλης *55*
πλαίσιο κατά μήκος βρόγχου *82*
συμβατό *82*
πλάκα 32
πολλαπλότητα
$\mathcal{G}$- *8 και* *195* (γενίκευση)
(G, X)- *195*
διαφορική τάξεως r *9*
επαφής *216*
ευκλείδεια *200*
μιγαδική *21*
παραλληλοποιήσιμη *41*
προσανατολίσιμη *82*
σφαιρική (ελλειπτική) *200*
τοπολογική *9*
υπερβολική *200*
πραγματικό προβολικό επίπεδο *22*
προβολή
νηματική *34*
προβολικός χώρος
μιγαδικός *25*
πραγματικός *23*
προσανατολισμός *82*
ρημάννεια απόσταση *162*
σημειακή μονοδρομία *116*
στοιχείο επαφής *216*
στοιχείο όγκου *84*
ρημάννειο *93*
στρέψη συνοχής *151*
συζυγής αναπαράσταση άλγεβρας *Lie* *130*
συζυγής αναπαράσταση ομάδας *Lie* *128*
συζυγής μετασχηματισμός *48*
συμβατά προσανατολισμένοι χάρτες *82*
συμβατοί
άτλαντες *6*
χάρτες *6*
συμμετρίες τανυστή *Riemann* *172*

συμπαγοποίηση *Alexandrov* *2*
συμπαγοποίηση *2*
συμπλεκτική βάση *51*
συμπλεκτική ομάδα *52*
συναλλοίωτη παραγώγιση *142*
    κατά μήκος λείας καμπύλης *152*
συναλλοίωτη παράγωγος *142*
συνάρτηση μετάβασης *6*
συνάρτηση μήκους *162*
συνολική διόρθωση *196*
συνοχή *144*
    Levi-Civitá *160*
    αφφινική *150*
    συμβατή με την μετρική *159*
    συμμετρική (άστροφη) *151*
    τμήσης 181
συντεταγμενική περιοχή *15*
σύστημα μιγαδικών συντεταγμένων *19*
σύστημα τοπικά οριζουσών μορφών *97*
συστολή τανυστή *43*
συστροφή *98*
σύσφιξη *9*
τανυστής *42*
    Riemann *172*
    αντισυμμετρικός *68*
    συναλλοίωτος και ανταλλοίωτος *43*
τανυστικό πεδίο *53*
ταυτότητα *Jacobi* *52*
τελεστής σχήματος *176*
τμηματικά ομαλό τόξο *162*
τμήση *38*
τοπικά δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος *3*
τοπικά ευκλείδειος *6*
τοπικά συμπαγής *1*
τοπικά συνεκτικός τοπολογικός χώρος *3*
τοπική *trivialization* *34*
τοπική ημιομάδα *57*
τοπικό πλαίσιο *39*
τοπικός χάρτης *6*
τοπολογία ξένης ένωσης *6*
τοπολογία πηλίκο *4*
τοπολογική υποομάδα *114*
τύπος
    Gauss κατά μήκος καμπυλών *176*
    του *Cartan* *81*
    του *Gauss* *175*
υποπολλαπλότητα *26*
φύλλωση *32*
    Reeb *33*
    κανονική *34*
χαρακτηριστική ιδιότητα
    τοπολογίας πηλίκο *5*
    ξένης ένωσης *6*
χάρτης *6*
χωρίο ολοκλήρωσης *85*
(ψευδο)ρημάννεια μετρική *65*
    Poincaré *191*
    αναλλοίωτη *137*
    επαγόμενη *65*
(ψευδο)ρημάννεια πολλαπλότητα *65*
    γεωδαισιακά πλήρης *167*
    επεκτάσιμη *167*
ώθηση *54*

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

$\mathcal{A}_r(V)$ χώρος των αντισυμμετρικών $(0,r)$-τανυστών επί του V

$\mathcal{A}_{r,s}(V)$ χώρος των $(0,r+s)$-τανυστών του V που είναι αντισυμμετρικοί ως προς τα r πρώτα και s τελευταία ορίσματα

$\mathbb{B}^n$ n-διάστατη μπάλα

C^r ψευδοομάδα των r-διαφορίσιμων απεικονίσεων μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$

Con ψευδοομάδα των αμφιδιαφορίσεων μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που διατηρούν την πρότυπη δομή επαφής

$\mathbb{C}P^n$ n-διάστατος μιγαδικός προβολικός χώρος

$C^r(M,N)$ σύνολο των r-διαφορίσιμων απεικονίσεων από την M στην N

$D(M)$ χώρος των διαφορίσιμων πραγματικών συναρτήσεων επί της M

$diff(M)$ ομάδα των αμφιδιαφορίσεων της M

$F(M;\mathbb{R})$ χώρος των πραγματικών συναρτήσεων επί της M

G_r^n (n,r)-γκρασμαννιανή

Hol ψευδοομάδα των ολόμορφων απεικονίσεων μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$

Συμβολισμοί

$\mathbb{H}^n$	n-διάστατη υπερβολική γεωμετρία
$L_\eta T$	παράγωγος *Lie* του τανυστικού πεδίου T ως προς το διανυσματικό πεδίο η
$\mathcal{N}(S)$	ελαχιστική κανονική υποομάδα της G που περιέχει το σύνολο $S \subset G$
$N(D)$	κάθετη στην κατανομή D διανυσματική δέσμη
Nil	μηδενογεωμετρία
$\mathbb{R}P^n$	n-διάστατος πραγματικός προβολικός χώρος
$SL_2\mathbb{R}$	*σελ. 228*
$\mathbb{S}^n$	n-διάστατη σφαίρα
$\mathcal{S}_r(V)$	χώρος των συμμετρικών $(0,r)$-τανυστών επί του V
Top	ψευδοομάδα των ομοιομορφισμών μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$
UM	κυκλική δέσμη της ρημάννειας πολλαπλότητας M
$\Gamma_q(\tilde{X})$	καλύπτουσα ομάδα για την επικάλυψη $(q : \tilde{X} \to X)$
$\mathcal{T}_s^r(V)$	χώρος των (r,s)-τανυστών επί του V
$\mathcal{T}_s^r(M)$	χώρος των λείων (r,s)-τανυστικών πεδίων επί της M
$\mathfrak{X}(M)$	χώρος των λείων διανυσματικών πεδίων επί της M
ρ	δεδομένης δράσης της ομάδας *Lie* G επί της πολλαπλότητας M, η απεικόνιση $stab(x) \to T_xM,\ \alpha \longmapsto d(a)_x$
$\Sigma(E)$	σύνολο των λείων τμήσεων της διανυσματικής δέσμης E
$\varphi_{r,s}$	αντισυμμετροποίηση συναλλοίωτου τανυστή που είναι αντισυμμετρικός ως προς τα r πρώτα και s τελευταία ορίσματα
$\Omega_k^r(M)$	χώρος των r-διαφορίσιμων διαφορικών k-μορφών επί της M
$\Omega^r(M)$	χώρος των r-διαφορίσιμων διαφορικών μορφών επί της M
$\#A$	πληθάριθμος του συνόλου A
$[\cdot\,,\cdot]$	γινόμενο *Lie*