



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Μελέτη Διασποράς Ρύπων σε Αστικές Χαράδρες

Γουσόπουλος Φώτιος

Μεταπτυχιακή Εργασία

Επιβλέπων καθηγητής : Ν. Μαρκάτος

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2022

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της μεταπτυχιακής εργασίας σηματοδοτεί και το πιθανό τέλος των σπουδών μου μετά απο αρκετά χρόνια. Εκτός απο όλους τους ανθρώπους που με βοήθησαν και με στήριξαν όλα αυτα τα χρόνια, και δεν αποτελούν άλλους απο την οικογένεια και τους στενούς μου φίλους, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον Ομότιμο Καθηγητή Μαρκάτο Ν., ο οποίος μου έδωσε την ευκαιρία να εκπονήσω τη διπλωματική μου εργασία και πραγματικά με βοήθησε τα μέγιστα σε μία δύσκολη και απαιτητική περίοδο για μένα.

Περιεχόμενα

| | |
|--|---------------|
| Ευχαριστίες..... | - 3 - |
| Abstract | - 6 - |
| Περίληψη..... | - 7 - |
| Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή..... | - 8 - |
| 1.1 Εισαγωγή..... | - 8 - |
| 1.2 Η αστική χαράδρα | - 9 - |
| 1.3 Οι πρώτες μελέτες | - 10 - |
| 1.4 Βασικά χαρακτηριστικά της ροής κανονικής οδικής χαράδρας | - 10 - |
| 1.5 Διασπορά ρύπων στην αστική χαράδρα..... | - 11 - |
| Κεφάλαιο 2: Το μαθηματικό πρόβλημα..... | - 13 - |
| 2.1 Οι Εξισώσεις Navier-Stokes | - 13 - |
| 2.2 Οι εξισώσεις RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) | - 14 - |
| 2.3 Το μοντέλο τύρβης k-ε..... | - 14 - |
| 2.4 Το μοντέλο τύρβης RNG k-ε | - 16 - |
| 2.5 Το μοντέλο τύρβης Murakami k-ε | - 18 - |
| 2.6 Το μοντέλο τύρβης realisable k-ε..... | - 18 - |
| 2.7 Το μοντέλο τύρβης k-ω..... | - 19 - |
| 2.8 Το μοντέλο τύρβης k-ω sst..... | - 20 - |
| 2.9 Η εξίσωση Διατήρησης της Μέσης Συγκέντρωσης..... | - 21 - |
| 2.10 Το οριακό στρώμα και οι συναρτήσεις Τοίχου..... | - 22 - |
| Κεφάλαιο 3: Αριθμητική Επίλυση | - 26 - |
| 3.1 Εισαγωγή – Η Έννοια της Διακριτοποίησης..... | - 26 - |
| 3.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων Ελέγχου – Η ολοκλήρωση της Εξίσωσης Μεταφοράς..... | - 27 - |
| 3.3 Πλέγμα – Όγκοι Ελέγχου | - 28 - |
| 3.4 Η Διακριτοποίηση της Εξίσωσης Μεταφοράς..... | - 30 - |
| 3.5 Αριθμητικά Σχήματα..... | - 31 - |
| 3.6 Οριακές συνθήκες | - 37 - |
| 3.7 Αλγόριθμος TDMA Επίλυσης Αλγεβρικών Συστημάτων | - 38 - |
| Κεφάλαιο 4: Υπολογιστικό μέρος..... | - 42 - |

| | |
|--|---------------|
| 4.1 Γεωμετρία..... | - 42 - |
| 4.2 Πλέγμα | - 43 - |
| 4.3 Οριακές Συνθήκες | - 45 - |
| 4.4 Πηγή Ρύπου..... | - 48 - |
| 4.5 Ανεξαρτησία Πλέγματος..... | - 48 - |
| 4.6 Αποτελέσματα περίπτωσης αναφοράς | - 49 - |
| 4.7 Δοκιμή διαφορετικών μοντέλων τύρβης..... | - 55 - |
| 4.8 Συμπεράσματα | - 60 - |
| Κεφάλαιο 5: Βιβλιογραφικές Αναφορές | - 62 - |

Abstract

An urban canyon is the area surrounded by two or more buildings in a city. Urban canyons are an important area of interest for researchers because they are areas where people living in cities are active. In this paper, a literature review of the phenomenon of car pollution dispersion in urban canyon is carried out. Subsequently, the flow inside the canyon is simulated with the help of the computational fluid dynamics program PHOENICS and finally, different turbulence models are tested in order to see how much the simulation results are affected.

Περίληψη

Αστική ή οδική χαράδρα ονομάζουμε την περιοχή που περιβάλλεται από δύο ή περισσότερα κτίρια σε μία πόλη. Οι αστικές χαράδρες αποτελούν σημαντικό αντικείμενο ενασχόλησης των ερευνητών διότι αποτελούν περιοχές στις οποίες δραστηριοποιούνται οι άνθρωποι που ζουν στις πόλεις. Στη συγκεκριμένη εργασία γίνεται μία βιβλιογραφική ανασκόπηση του φαινομένου της διασποράς ρύπων από τα αυτοκίνητα στις αστικές χαράδρες. Εν συνεχεία, προσομοιώνεται η ροή εσωτερικά με τη βοήθεια του προγράμματος της υπολογιστικής ρευστομηχανικής PHOENICS και τέλος, δοκιμάζονται διαφορετικά μοντέλα τύρβης προκειμένου να διαπιστωθεί κατά πόσο επηρεάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

Κεφάλαιο 1:Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια γίνονται όλο και περισσότερες αναφορές από τους ειδικούς σε θέματα που αφορούν το περιβάλλον όπως η μόλυνση του αέρα και των υδάτων, η αύξηση της μέσης θερμοκρασίας της Γης κλπ. Το ενδιαφέρον αυτό επικεντρώνεται μεταξύ των άλλων στις συνθήκες ζωής (ποιότητα αέρα, υδάτων κλπ.) των αστικών κέντρων, αφού το ποσοστό των ανθρώπων που ζουν σε αυτά έχει αυξηθεί ραγδαία τα τελευταία 70 χρόνια. Επιπλέον, ο αριθμός των αυτοκινήτων δεκαπλασιάστηκε την περίοδο 1950-2000 (Fenger, 1999), γεγονός που αυξάνει την εκπομπή ρύπων. Καθίσταται επιτακτική η ανάγκη λοιπόν να μελετηθούν και να ποσοτικοποιηθούν οι συγκεντρώσεις των επιβλαβών ουσιών στην ατμόσφαιρα των πόλεων.

Οι κύριοι αστικοί ρύποι που προέρχονται από ανθρωπογενείς παράγοντες είναι οι εξής:

Διοξείδιο του θείου (SO_2): Σε αυτόν οφείλεται το φαινόμενο της όξινης βροχής και προέρχεται κυρίως από το θείο που περιέχουν τα πιο βαριά καύσιμα των βιομηχανικών μονάδων.

Μονοξείδιο του άνθρακα (CO): Οφείλεται στην ατελή καύση και περιορίζεται με τη χρήση καταλυτικών μετατροπών.

Το διοξείδιο του άνθρακα (CO_2): Θεωρείται ρύπος διότι συμβάλλει στο φαινόμενο του θερμοκηπίου. Δεν μπορεί να περιοριστεί, παρά μόνο με χρήση πιο ελαφρών καυσίμων, όπως λόγω χάρη φυσικού αερίου αντί πετρελαίου.

Τα οξείδια του αζώτου ($NO_x=NO+NO_2$): Είναι υπεύθυνα για τη φωτοχημική ρύπανση. Περιορίζονται σήμερα με τη χρήση καταλυτικών μετατροπών.

Οι άκαυστοι υδρογονάνθρακες (unburnt HC ή VOC, Volatile Organic Compounds): Οι κύριοι ρύποι της κατηγορίας αυτής είναι το βενζένιο και άλλοι αρωματικοί υδρογονάνθρακες. Περιορίζονται επίσης με χρήση καταλυτικών μετατροπών.

Αιθάλη (C) και αιωρούμενα σωματίδια (Soot, PM - Particulate Matter): Αποτελεί προϊόν ατελούς καύσης πετρελαίου. Τα αιωρούμενα σωματίδια και ειδικά αυτά με διάμετρο μικρότερη από 10μm σχετίζονται με αυξημένη θνησιμότητα και συνδέονται με την εμφάνιση άσθματος.

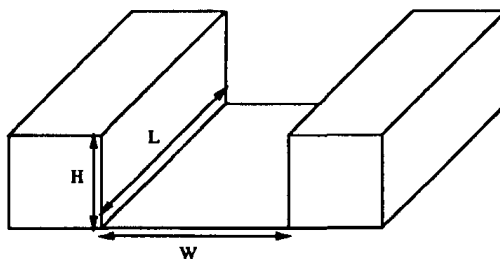
Μόλυβδος (Pb): Είναι ένα πρόσθετο του πετρελαίου , το οποίο όμως έχει περιοριστεί λόγω της χρήση αμόλυβδης βενζίνης.

Οι ρύποι που προέρχονται απο τα μέσα μεταφοράς είναι κυρίως το CO , τα NO_x και οι VOC . Παρά την προσπάθεια και την ανάπτυξη τεχνολογιών για τη μείωση των ρύπων αυτών, η αύξηση των αριθμού των αυτοκινήτων καθώς και της χρήσης τους κατατάσσει τα μέσα μεταφοράς ως την κύρια πηγή ρύπων στις πόλεις (Fenger, 1999, Kastner-Klein and Plate, 1999, Mayer, 1999, Colvile et al., 2001).

1.2 Η αστική χαράδρα

Αστική χαράδρα αποκαλείται ο αστικός δρόμος μαζί με τα κτίρα που τον περιβάλλουν (Nicholson, 1975). Η ροή και τα θερμοκρασιακά χαρακτηριστικά της αστικής χαράδρας αποτελούν σημαντικό παράγοντα ασφάλειας και άνεσης των κατοίκων μια πόλης, καθώς παρέχουν προστασία απο ανέμους, βροχές και έντονα καιρικά φαινόμενα (Oke, 1988, Nakamura et al., 1988). Όπως είναι αντιληπτό , στους αστικούς δρόμους υπάρχει αυξημένη κυκλοφορία οχημάτων με αποτέλεσμα να συγκεντρώνονται ρύποι, οι οποίοι είναι επικίνδυνοι για τους κατοίκους. Είναι σημαντικό λοιπόν να κατανοηθεί η ροή ανάμεσα στα κτίρια των πόλεων καθώς και ο τρόπος με τον οποίο διασπείρονται οι ρύποι αυτοί.

Τα κύρια γεωμετρικά χαρακτηριστικά μιας αστικής χαράδρας είναι το ύψος (H), το πλάτος (W) και το μήκος (L) (Εικόνα 1.1).



Εικόνα 1.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της οδικής χαράδρας (Hunter et al., 1992).

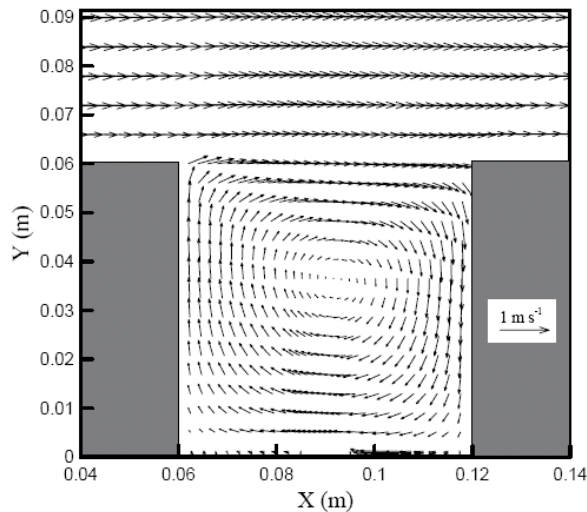
Στις περισσότερες μελέτες που έχουν διεξαχθεί, η ροή θεωρείται διδιάστατη, δηλαδή το μήκος L της χαράδρας θεωρείται άπειρο. Αυτό συμβαίνει αφ' ενός γιατί η διδιάστατη μελέτη είναι πολύ πιο οικονομική υπολογιστικά από τη τριδιάστατη, αφ' ετέρου διότι η κατεύθυνση του ανέμου στη διδιάστατη ροή (κάθετη στον άξονα του δρόμου) είναι η πιο σημαντική όσον αφορά την παγίδευση ρύπων. Το κύριο χαρακτηριστικό που παίζει ρόλο για τη μελέτη είναι ο λόγος επιμήκους H/W . Ακόμη, ανάλογα με το αν τα εκατέρωθεν κτίρια έχουν το ίδιο ύψος, οι αστικές χαράδρες χαρακτηρίζονται σε συμμετρικές ή μη συμμετρικές. Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε συμμετρικές χαράδρες με λόγο H/W ίσο με την τιμή 1.

1.3 Οι πρώτες μελέτες

Μία από τις πρώτες προσπάθειες μελέτης των αστικών χαράδρων έγινε από τους Georgii et al. (1967), οι οποίοι παρατήρησαν ότι εξαιτίας του βρόχου ανακυκλοφορίας μέσα στη χαράδρα, η κατεύθυνση της ροής στην πλευρά από την οποία έρχεται ο άνεμος (ανάντη) είναι προς τα πάνω, ενώ η αντίστοιχη στην απέναντι πλευρά (κατάντη) είναι προς τα κάτω. Οι παρατηρήσεις αυτές αργότερα επιβεβαιώθηκαν και από τους Hoydysh and Chiu, (1971), Hoydysh et al., (1974), Kennedy and Kent, (1977), Wedding et al., (1977).

1.4 Βασικά χαρακτηριστικά της ροής κανονικής οδικής χαράδρας

Τα κύρια χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τη ροή στις χαράδρες είναι η ταχύτητα του ελεύθερου ανέμου και η γεωμετρία των κτιρίων. Στην εικόνα 1.2 απεικονίζεται ο βροχός ανακυκλοφορίας που σχηματίζεται μέσα στη χαράδρα. Το κέντρο του βρίσκεται περίπου στο μέσο της χαράδρας όταν πρόκειται για κανονική χαράδρα ($H/W=1$). Όσο μεγαλώνει ο λόγος H/W το κέντρο μετατοπίζεται προς τα πάνω και πολλές φορές δημιουργείται και δεύτερος βρόχος, κάτω από τον αρχικό. Αντίστοιχα, όσο μικραίνει ο λόγος H/W , ο βρόχος τείνει να μετατοπίζεται προς το κατάντη κτίριο αρχικά, αλλά για πολύ μικρούς λόγους μετατοπίζεται στο ανάντη κτίριο, καθώς δεν μπορεί να φτάσει στο κατάντη κτίριο.

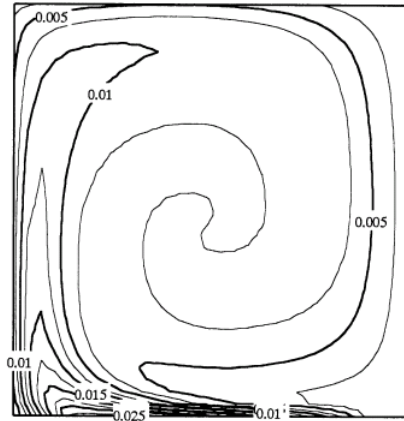


Εικόνα 1.2: Βρόχος ανακυκλοφορίας για $H/W=1$ (Chan et al., 2002).

Όσον αφορά την ταχύτητα του ανέμου, οι μελέτες έχουν δείξει (DePaul and Sheih, 1986, Hassan and Crowther, 1998, Xie et al., 2003) ότι για πολύ μικρές ταχύτητες ανέμου ενδέχεται να μην υπάρχει ανακυκλοφορία. Επιπλέον, σε κάποιες μελέτες εμφανίζεται ένας μικρός αντιπεριστροφόμενος βρόχος (Vardoulakis et al., 2003). Σύμφωνα με τους Nakamura and Oke (1988), μια τυπική ταχύτητα μέσα στη χαράδρα είναι τα $2/3$ της ταχύτητας στις στέγες. Τέλος, σύμφωνα με τους Vardoulakis et al. (2003), ο βρόχος ανακυκλοφορίας σχηματίζεται για γωνίες ανάμεσα στον άνεμο και την οδό περίπου 30° ως 90° . Το μεγαλύτερο μέρος των ερευνών ωστόσο αναφέρεται σε γωνίες 90° .

1.5 Διασπορά ρύπων στην αστική χαράδρα

Η διασπορά των ρύπων εξαρτάται πρωτίστως από δύο παράγοντες: τις εκπομπές και τη ροή. Μία από τις πρώτες και παράλληλα ικανοποιητική προσέγγιση είναι να θεωρηθεί ο ρύπος αδρανής (Venetsanos et al., 2002) και ανωστικά ουδέτερος (Sagrado et al. 2002). Σύμφωνα με τη μορφή της ροής που έχουμε δει παραπάνω, οι περισσότεροι ρύποι συγκεντρώνονται στην υπήνεμη πλευρά (Εικόνα 1.3). Έπειτα η ροή ανεβγαίνει προς τα πάνω και η συγκέντρωση ρύπων διαρκώς μειώνεται. Η συγκέντρωση στην κατάντη πλευρά είναι σαφώς λιγότερες. Τέλος, η διαφυγές ρύπων έξω από τη χαράδρα είναι ελάχιστες. Τα παραπάνω έχουν επιβεβαιωθεί από πληθώρα ερευνών (Hoydysh and Chiu, 1971, Hoydysh et al., 1974, Kennedy and Kent, 1977, Wedding et al., 1977, Georgii et al., 1967, Wang et al., 1972, Ludwig and Dabberdt, 1972, DePaul and Sheih, 1986).



Εικόνα 1.3: Τυπική κατανομή συγκεντρώσεων σε χαράδρα με $H/W=1$ (Huang et al., 2000).

Απο τους πρώτους που επιχειρήσαν να μοντελοποιήσουν οδική χαράδρα ήταν οι Hunter et al. (1992). Η εργασία τους αποτελεί μια καλή εισαγωγή στις αστικές χαράδρες καθώς και τη χρήση του μοντέλου τύρβης $k - \epsilon$. Μεταγενέστερα, οι Sini et al. (1996) μελέτησαν τη διασπορά ρύπων, θεωρώντας πως μεταφέρεται απο την ελεύθερη ροή και εξετάζεται το ποσοστό διείσδυσης του στην αστική χαράδρα. Το 1998, οι Hassan and Crowther (1998) χρησιμοποίησαν τον κώδικα PHOENICS για διάφορες γεωμετρίες και ταχύτητες ανέμου. Οι Chan et al. (2002), χρησιμοποιώντας τον κώδικα FLUENT συνέκριναν τα αποτελέσματα τους με τα πειραματικά δεδομένα των Meroney et al. (1996) με δοκιμές τριών μοντέλων τύρβης (του $k-\epsilon$, του $RNG k-\epsilon$ και του realizable $k-\epsilon$ των Shih et al. (1995). Τα πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα δόθηκαν απο το $RNG k-\epsilon$. Δυστυχώς, είναι ελάχιστες οι αναφορές που χρησιμοποιούνται μοντέλα τύρβης $k-\omega$, γι'αυτό το λόγο δεν αναφέρθηκε καμία.

Κεφάλαιο 2: Το μαθηματικό πρόβλημα

2.1 Οι Εξισώσεις Navier-Stokes

Οι εξισώσεις των Navier-Stokes οι οποίες χρησιμοποιούνται ευρώς στην υπολογιστική ρευστομηχανική, περιγράφουν με μεγάλη ακρίβεια τη ροή νευτώνειων ρευστών όπως το νερό και ο αέρας. Μια συνηθισμένη μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes που εκφράζουν την αρχή διατήρησης της ορμής, μαζί με την εξίσωση της συνέχειας που εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας, δίνεται παρακάτω.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \quad (2.2)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις έχει υιοθετηθεί ο τανυστικός συμβολισμός όπου αν σε κάποιο όρο υπάρχει επαναλαμβανόμενος δείκτης, θεωρείται άθροιση ως προς αυτό το δείκτη. Με F συμβολίζονται οι εξωτερικές δυνάμεις όπως η δύναμη της βαρύτητας και με μ η δυναμική συνεκτικότητα. Οι άγνωστες ποσότητες είναι οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας u_i , η πίεση p , η πυκνότητα ρ . Για να κλείσει το σύστημα στη γενικότητά του χρειάζεται ακόμη η εξίσωση διατήρησης ενέργειας που έχει μέσα εκτός από τις υπάρχουσες ποσότητες και τη θερμοκρασία T και μια καταστατική εξίσωση του ρευστού, όπως η καταστατική εξίσωση τελείων αερίων για τον αέρα, που συνδέει τις ποσότητες p , T , ρ . Έτσι έχουμε ένα σύστημα 6 εξισώσεων με 6 αγνώστους.

Στην παρούσα εργασία η ροή θεωρείται ισόθερμη και δε λύνεται καθόλου η θερμοκρασία. Ακόμη, ο αέρας θεωρείται ασυμπίεστος, παραδοχή που έχει καλή ακρίβεια για ροές χαμηλών ταχυτήτων όπως αυτή στις οδικές χαράδρες. Έτσι έχουμε αγνώστους μόνο τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας u_i και την πίεση p , οπότε οι εξ. (2.1) και (2.2) αρκούν για να λυθεί το πρόβλημα.

2.2 Οι εξισώσεις RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)

Στις εξισώσεις Navier-Stokes γράφοντας κάθε ποσότητα ως άθροισμα μιας μέσης τιμής κατά Reynolds (εξ. 2.5) και μιας διακύμανσης, μπορούμε μετά από πράξεις και απλουστευτικές παραδοχές να καταλήξουμε σε μια μορφή των εξισώσεων πιο πρακτική, που αφορά τις μέσες τιμές των μεταβλητών. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes). Στην περίπτωση ισόθερμης, ασυμπίεστης, μόνιμης ροής όπως αυτή που εξετάζουμε στην παρούσα εργασία, οι εξισώσεις αυτές παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3)$$

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (2.4)$$

Με ν συμβολίζεται η κινηματική συνεκτικότητα, με u'_i η τυρβώδης διακύμανση της ταχύτητας και με U_i η μέση ταχύτητα σύμφωνα με τον τύπο λήψης μέσων τιμών του Reynolds:

$$U_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i dt \quad (2.5)$$

$$u_i = U_i + u'_i \quad (2.6)$$

Οι εξ. (2.3) και (2.4) μοιάζουν πολύ με τις εξισώσεις Navier-Stokes, με τη διαφορά ότι αφορούν μέσες τιμές ποσοτήτων και έχουν και ένα επιπλέον όρο στο τέλος που λέγεται *τάσεις Reynolds* και εμπλέκει τις διακυμάνσεις των ταχυτήτων. Αυτός ο όρος είναι άγνωστος και πρέπει να βρούμε εκφράσεις να τον προσδιορίσουμε βάσει γνωστών ποσοτήτων της μέσης ροής. Αυτό είναι το πρόβλημα της μοντελοποίησης της τύρβης ή του κλεισίματος των εξισώσεων και είναι ένα από τα δυσκολότερα επιστημονικά προβλήματα που υπάρχουν, λόγω της περιπλοκότητας της τύρβης.

2.3 Το μοντέλο τύρβης k-ε

Τύρβη ονομάζεται η συνεχής αστάθειας της ροής, με χρονικά μεταβαλλόμενες τιμές ταχυτήτων και άλλων μεταβλητών του πεδίου ροής προς όλες τις κατευθύνσεις σε όλες

τις κλίμακες χώρου και χρόνου. Οι περισσότερες ροές πρακτικών εφαρμογών δε μπορούν να παραμείνουν στρωτές και γίνονται γρήγορα τυρβώδεις, οπότε έχουμε εμφάνιση δινών όλων των κλιμάκων και μεγαλύτερη ανάμιξη. Φαινομενικά παρατηρείται μια αύξηση των διατμητικών τάσεων του ρευστού.

Αυτή η παρατήρηση έκανε το Boussinesq (1877) να υποθέσει ότι προσεγγιστικά οι τάσεις Reynolds ή τυρβώδεις τάσεις που προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε, μπορούν να περιγραφούν μακροσκοπικά με τρόπο αντίστοιχο με τον τρόπο που περιγράφονται οι στρωτές τάσεις, σαν το γινόμενο μιας συνεκτικότητας, της τυρβώδους συνεκτικότητας ν_t και των κλίσεων των μέσων ταχυτήτων.

Έτσι σύμφωνα με την υπόθεση Boussinesq στη γενικευμένη της μορφή ισχύει:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (2.7)$$

Ο τελευταίος όρος, που μερικές φορές παραλείπεται, εξασφαλίζει ότι αθροίζοντας τις κύριες τάσεις θα πάρουμε την τυρβώδη κινητική ενέργεια k που ορίζεται από τον τύπο:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (2.8)$$

Τα μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούνται συνήθως κάνουν χρήση της υπόθεσης Boussinesq. Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό του ν_t .

Το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο για τον προσδιορισμό του ν_t είναι το μοντέλο τύρβης k - ε . Στις ροές σε αστικές χαράδρες οι περιπτώσεις μη χρησιμοποίησης αυτού του μοντέλου ή παραλλαγών του είναι πολύ σπάνιες. Στο μοντέλο αυτό επιλύονται διαφορικές εξισώσεις μεταφοράς για την τυρβώδη κινητική ενέργεια k και το ρυθμό καταστροφής της κινητικής ενέργειας της τύρβης ε και το ν_t προκύπτει ως εξής:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.9)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις για το k και το ε προκύπτουν με κατάλληλη επεξεργασία και μοντελοποίηση από τις εξισώσεις Navier-Stokes και είναι οι εξής, σύμφωνα με το κλασσικό μοντέλο των Launder and Spalding (1974):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G - \varepsilon \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} G - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} G - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (2.12)$$

Οι σταθερές έχουν τις τιμές: $C_\mu = 0.09$, $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$. G είναι ο ρυθμός παραγωγής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Οι όροι στις εξισώσεις μεταφοράς του k και του ε εκφράζουν αντίστοιχα ρυθμό αλλαγής (0 για μόνιμη ροή), μεταφορά με συναγωγή, μεταφορά με διάχυση, ρυθμό παραγωγής και ρυθμό καταστροφής ή απορρόφησης.

Μειονεκτήματα του μοντέλου αυτού είναι ότι θεωρεί σχεδόν ισότροπη τύρβη και ότι έχει ακρίβεια μόνο σε μεγάλους αριθμούς Re ($Re = U \cdot l / \nu$, όπου l χαρακτηριστικό μήκος), βάσει των παραδοχών που έγιναν και κατά την μοντελοποίηση των διαφορικών εξισώσεων. Το μοντέλο αυτό απαιτεί μόνο αρχικές και οριακές συνθήκες, είναι αρκετά μελετημένο και δίνει πολύ καλά αποτελέσματα για μοντέλο δύο εξισώσεων. Αδυνατεί όμως να κάνει σωστή πρόβλεψη σε αρκετές ειδικές περιπτώσεις όπως: μερικές ελεύθερες ροές, ροές με μεγάλες πρόσθετες παραμορφώσεις (π.χ. καμπύλα οριακά στρώματα, ροές περιδίνησης), περιστρεφόμενες ροές, πλήρως ανεπτυγμένες ροές σε μη κυκλικούς αγωγούς και άλλες. Τέλος το μοντέλο k - ε είναι γνωστό πως υπερεκτιμά το ρυθμό καταστροφής της τύρβης, δηλαδή σε περιπτώσεις ανακυκλοφορίας το τυρβώδες ιξώδες που υπολογίζει είναι πολύ υψηλό, καταπνίγοντας έτσι τις δίνες.

2.4 Το μοντέλο τύρβης RNG k - ε

Το μοντέλο αυτό είναι πιο σύγχρονο και θεωρείται ότι διορθώνει την ανεπάρκεια του κλασσικού k - ε να υπερεκτιμά τον ρυθμό καταστροφής της τύρβης, έχοντας ένα επιπλέον όρο παραγωγής στην εξίσωση μεταφοράς του ε και λίγο διαφορετικές σταθερές.

Το μοντέλο αυτό έχει προκύψει με τη βοήθεια μιας περίπλοκης και δυσνόητης μαθηματικής θεωρίας, της Renormalized Group Theory. Από την εφαρμογή αυτής της θεωρίας στις εξισώσεις Navier-Stokes μπορούν να προκύψουν μοντέλα τύρβης με διάφορες πολυπλοκότητες, με αυτό των δύο εξισώσεων να έχει βρει μια πιο ευρεία εφαρμογή. Με χρήση της θεωρίας αυτής προκύπτουν εξισώσεις για το k και το ε που συγκρινόμενες με αυτές του κλασσικού k - ε έχουν ένα επιπλέον όρο και οι σταθερές του δεν έχουν προκύψει από ανάλυση πειραμάτων, αλλά έχουν προκύψει αναλυτικά, βάσει της μαθηματικής θεωρίας.

Οι εξισώσεις που διέπουν το μοντέλο είναι:

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + U^m k_{,m} = \left[\alpha_k (\nu + \nu_t) \delta^{mn} k_{,n} \right]_{,m} + G - \varepsilon \quad (2.13)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U^m \varepsilon_{,m} = \left[\alpha_\varepsilon (\nu + \nu_t) \delta^{mn} \varepsilon_{,n} \right]_{,m} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} G - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} - R \quad (2.14)$$

$$R = \frac{\nu_t S^3 (1 - \eta / \eta_0)}{1 + \beta \eta^3}; \quad G = 2\nu_t S^2; \quad S^2 = 2\delta_{im} \delta_{jn} S^{ij} S^{mn} \quad (2.15)$$

$$\eta = \frac{Sk}{\varepsilon}; \quad \eta_0 = 4.38, \quad \beta = 0.012 \quad (2.16)$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.42, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.68, \quad C_\mu = 0.085, \quad \alpha_k = 1.39, \quad \alpha_\varepsilon = 1.39 \quad (2.17)$$

Οι α_k και α_ε είναι αντίστροφοι αριθμοί Prandtl που στη γενική περίπτωση που ο Re είναι χαμηλός υπολογίζονται βάσει απλών σχέσεων, ενώ όταν ο Re είναι υψηλός ανάγονται στις σταθερές που δίνονται παραπάνω. S είναι ο τανυστής των τάσεων.

Παρόλο τον διαφορετικό συμβολισμό που έχει υιοθετηθεί (το $,i$ σημαίνει παράγωγο ως προς x_i), οι εξισώσεις (2.13) και (2.14) είναι ακριβώς ίδιες με τις εξ. (2.10) και (2.11), με μόνη διαφορά τον όρο R . Στις περιπτώσεις ασθενών διατμητικών τάσεων η διαφορά που έχουν τα δύο μοντέλα εκφυλίζεται, ενώ γίνεται σημαντική όταν υπάρχουν περιοχές υψηλών/ μεταβαλλόμενων διατμητικών τάσεων, ή καμπυλωμένες γραμμές ροής όπου το RNG δίνει χαμηλότερη τυρβώδη συνεκτικότητα και πιστεύεται ότι δίνει καλύτερη ακρίβεια. Γενικά σε περίπτωση που έχουμε αποκολλήσεις και επανακολλήσεις της ροής, όπως στην περίπτωση της οδικής χαράδρας πρέπει να προτιμάται, ενώ αν έχουμε πίδακες και πλούμια πιστεύεται ότι μπορεί να δώσει και κατώτερα αποτελέσματα από το κλασικό $k-\varepsilon$. Να σημειωθεί τέλος ότι τα μοντέλα δύο εξισώσεων τύπου $k-\varepsilon$ που βασίζονται στην υπόθεση Boussinesq δε μπορούν να προβλέψουν τον διακοπτόμενο χαρακτήρα της τύρβης και θεωρούν γενικά διάχυση που προκαλείται από τις κλίσεις των μεταβλητών, ενώ υπάρχουν και άλλοι μηχανισμοί διάχυσης. Επίσης σε ροές με μεγάλη ανομοιογένεια και ανακυκλοφορίες ή ισχυρή αλληλεπίδραση με στερεά σώματα, όπου φεύγουμε αρκετά από ισότροπη τύρβη, τα αποτελέσματα μπορεί να μην είναι ικανοποιητικά.

Για το μοντέλο τύρβης RNG $k-\varepsilon$ ο αναγνώστης παραπέμπεται στις δημοσιεύσεις των Yakhot and Orszag (1986), Smith and Reynolds (1992), Yakhot and Smith (1992), Yakhot et al. (1992).

2.5 Το μοντέλο τύρβης Murakami k-ε

Το τυπικό μοντέλο k-ε είναι γνωστό ότι δεν δίνει ικανοποιητικές προβλέψεις όταν εφαρμόζεται στη ροή γύρω από "στρογγυλά" σώματα, όπως συμβαίνει για παράδειγμα σε εφαρμογές αιολικής μηχανικής. Το μοντέλο αποτυγχάνει να αναπαράγει καλά την κατανομή της επιφανειακής πίεσης γύρω από ένα σώμα λόγω της τάσης υπερεκτίμησης της παραγωγής τύρβης στην περιοχή πρόσκρουσης στη μετωπική περιοχή του σώματος.

Το αποτέλεσμα είναι να μεταφέρονται υπερβολικά επίπεδα τύρβης γύρω από το σώμα. Η ανεπάρκεια αυτή προκύπτει από την αδυναμία της έννοιας του τυρβώδους ιξώδους να αναπαραστήσει επαρκώς την ισχυρή καταπόνηση που εμφανίζεται στις περιοχές πρόσκρουσης και επαναπροσκόλλησης.

Το MMK (Murakami, Mochida, Kondo) k-ε μοντέλο διαφέρει από το τυπικό k-ε μοντέλο στον υπολογισμό της τυρβώδους κινηματικής συνεκτικότητας ως εξής:

$$v_t = F_\Omega C_\mu C_d \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.18)$$

$$F_\Omega = \min(1.0, \frac{\Omega}{S}) \quad (2.19)$$

Ωστε το τυπικό μοντέλο να εφαρμόζεται όταν $\Omega/S > 1$.

2.6 Το μοντέλο τύρβης realisable k-ε

Το realisable k-ε μοντέλο έχει γίνει όλο και πιο δημοφιλές στην κοινότητα του CFD λόγω της βελτιωμένης απόδοσής του σε σχέση με το τυπικό μοντέλο k-ε όταν εφαρμόζεται σε ροές που περιλαμβάνουν οριακά στρώματα σε ισχυρές κλίσεις πίεσης, διαχωρισμό και ζώνες ανακυκλοφορίας. Το μοντέλο είναι ένα μοντέλο τύρβης δύο εξισώσεων με υψηλό αριθμό Reynolds που διαφέρει από το τυπικό μοντέλο k-ε σε δύο σημεία. Πρώτον, το μοντέλο χρησιμοποιεί μια διαφορετική διατύπωση της εξίσωσης μεταφοράς για τον ρυθμό διάχυσης που προκύπτει από την εξίσωση μεταφοράς για τις διακυμάνσεις της μέσης τετραγωνικής στροβιλότητας. Δεύτερον, το μοντέλο χρησιμοποιεί μια διαφορετική διατύπωση του στροβιλώδους ιξώδους η οποία βασίζεται σε διάφορους περιορισμούς ρεαλιστικότητας για τις τυρβώδεις τάσεις Reynolds. Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι ο συντελεστής τυρβώδους ιξώδους C_μ είναι μια συνάρτηση των τοπικών παραμέτρων ροής και όχι μια σταθερά, όπως στο τυπικό μοντέλο k-ε.

Οι εξισώσεις του μοντέλου είναι :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + P_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \varepsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S_\varepsilon - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} C_{3\varepsilon} P_b + S_\varepsilon \quad (2.21)$$

Όπου

$$C_1 = \max \left[0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right] \quad (2.22)$$

$$\eta = S \frac{k}{\varepsilon} \quad (2.23)$$

$$S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} \quad (2.24)$$

όπου $\overline{\Omega_{ij}}$ είναι ο μέσος τανυστής ταχύτητας περιστροφής θεωρούμενος σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς με γωνιακή ταχύτητα Ω_{ij} . Οι σταθερές του μοντέλου A_0 και A_s δίνονται από:

$$A_0 = 4.04, A_s = \sqrt{6} \cos \varphi \quad (2.25)$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \cos^{-1}(\sqrt{6}W), W = \frac{S_{ij} S_{jk} S_{ki}}{\tilde{S}^3}, \tilde{S} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.26)$$

Σταθερές του μοντέλου:

$$C_{1\varepsilon} = 1.44, C_2 = 1.9, \sigma_k = 1, \sigma_\varepsilon = 1.2 \quad (2.27)$$

2.7 Το μοντέλο τύρβης k- ω

Το πρώτο μοντέλο τύρβης με δύο εξισώσεις ήταν το μοντέλο k- ω του Kolmogorov, το οποίο περιλαμβάνει την επίλυση εξισώσεων μεταφοράς για την τυρβώδη κινητική ενέργεια k και τη συχνότητα τύρβης ω . Πρέπει να αναφερθεί ότι το ω ορίζεται απο μερικούς ως τον ειδικό ρυθμό διάχυσης ε/k όπου ε είναι ο ρυθμός καταστροφής του k . Παρόλο που το μοντέλο k- ω δεν είναι τόσο δημοφιλές όσο το μοντέλο k- ε , έχει αρκετά πλεονεκτήματα, συγκεκριμένα ότι το μοντέλο αναφέρεται ότι αποδίδει καλύτερα σε μεταβατικές ροές και σε ροές με δυσμενείς κλίσεις πίεσης, το μοντέλο είναι αριθμητικά πολύ σταθερό, ιδίως η έκδοση με χαμηλό Re , καθώς τείνει να παράγει συγκλίνουσες λύσεις ταχύτερα από τα μοντέλα k- ε και η έκδοση low- Re είναι πιο οικονομική και

κομψή από τα μοντέλα k - ε low-Re, δεδομένου ότι δεν απαιτεί τον υπολογισμό αποστάσεων τοιχωμάτων, πρόσθετων όρων πηγής και συναρτήσεων απόσβεσης με βάση την ταχύτητα τριβής.

Οι εξισώσεις που το διέπουν είναι:

$$v_T = \frac{k}{\omega} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma^* v_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma v_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (2.30)$$

$$\alpha = \frac{5}{9}, \beta = \frac{3}{40}, \beta^* = \frac{9}{100}, \sigma = \frac{1}{2}, \sigma^* = \frac{1}{2}, \varepsilon = \beta^* \omega k \quad (2.31)$$

2.8 Το μοντέλο τύρβης k - ω sst

Το μοντέλο τύρβης SST k - ω είναι ένα μοντέλο δύο εξισώσεων που έχει γίνει πολύ δημοφιλές. Η χρήση μιας διατύπωσης k - ω στα εσωτερικά τμήματα του οριακού στρώματος καθιστά το μοντέλο άμεσα χρησιμοποιήσιμο μέχρι το τοίχωμα μέσω του ιξώδους υποστρώματος, επομένως το μοντέλο SST k - ω μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο τύρβης low-Re χωρίς πρόσθετες συναρτήσεις απόσβεσης. Η διατύπωση SST μεταβαίνει επίσης σε συμπεριφορά όπως στο k - ε στο ελεύθερο ρεύμα και έτσι αποφεύγεται το κοινό πρόβλημα του k - ω , ότι το μοντέλο είναι πολύ ευαίσθητο στις ιδιότητες τύρβης του ελεύθερου ρεύματος εισόδου.

Οι εξισώσεις του μοντέλου είναι:

$$v_T = \frac{\alpha_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma_k v_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma_\omega v_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (2.34)$$

$$F_2 = \tanh \left[\left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right] \right] \quad (2.35)$$

$$P_k = \min\left(\tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_j}, 10\beta^* k\omega\right) \quad (2.36)$$

$$F_2 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right\}^4 \right\} \quad (2.37)$$

$$\varphi = \varphi_1 F_1 + \varphi_2 (1 - F_1) \quad (2.38)$$

$$a_1 = \frac{5}{9}, a_2 = 0.44, \beta_1 = \frac{3}{40}, \beta_2 = 0.0828, \beta^* = \frac{9}{100}, \sigma_{k1} = 0.85, \sigma_{k2} = 1, \sigma_{\omega 1} = 0.5, \sigma_{\omega 2} = 0.856 \quad (2.39)$$

2.9 Η εξίσωση Διατήρησης της Μέσης Συγκέντρωσης

Το σύστημα των εξισώσεων (2.3)-(2.39), αρκούν για να μας προσδιορίσουν πλήρως το πεδίο ροής με ικανοποιητική ακρίβεια στο πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε.

Στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε και τη συγκέντρωση παθητικών ρύπων στο πεδίο ροής, προστίθεται ακόμη ένας άγνωστος, η μέση συγκέντρωση C , η οποία προκύπτει από την εξίσωση μεταφοράς της:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_j \frac{\partial C}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_C \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) + S_C \quad (2.40)$$

S_C είναι ο όρος πηγής, δηλαδή οι εκπομπές του ρύπου. Ο συντελεστής διάχυσης K_C συνδέεται με τον τυρβώδη αριθμό Schmidt:

$$Sc_t = \frac{V_t}{K_C} \quad (2.41)$$

Ο αριθμός Schmidt έχει φανεί από τα πειράματα ότι είναι περίπου σταθερός (π.χ. οι Sini et al. (1996) έχουν χρησιμοποιήσει $Sc_t=0.9$), οπότε προκύπτει ο συντελεστής διάχυσης.

Έτσι ο μόνος άγνωστος της εξ. (2.40) είναι η μέση συγκέντρωση C . Μάλιστα αυτή μπορεί να υπολογιστεί μετά την επίλυση του πεδίου ροής, αφού προκύπτει μονοσήμαντα από αυτό χωρίς να το επηρεάζει. Στη δική μας περίπτωση που εξετάζουμε μόνιμο πρόβλημα ο πρώτος όρος της χρονικής μεταβολής απαλείφεται.

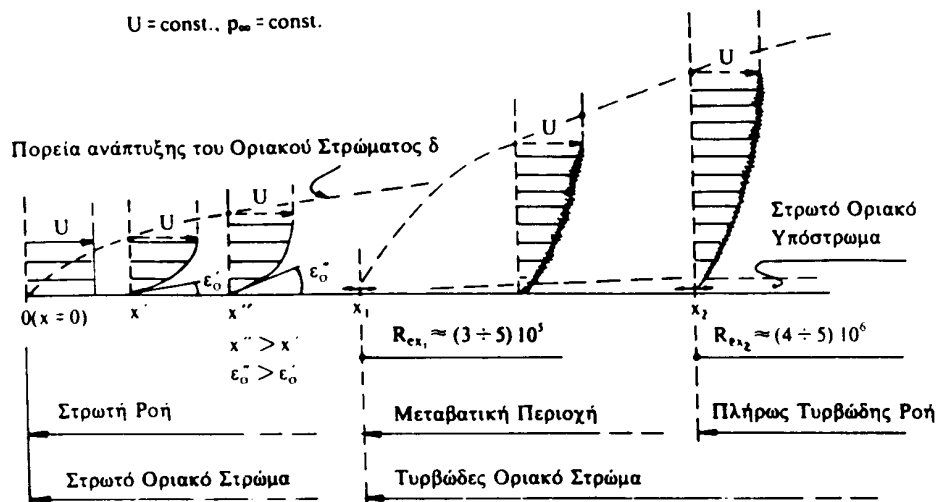
Με την εξίσωση (2.40) ολοκληρώνονται οι διαφορικές εξισώσεις που χρειάζονται για την επίλυση του πεδίου ροής και του πεδίου συγκεντρώσεων για μόνιμη ισόθερμη

ασυμπίεστη ροή σε οδική χαράδρα, αρκεί βέβαια να τις εφοδιάσουμε με τις κατάλληλες αρχικές και οριακές συνθήκες. Παρακάτω θα δοθούν οι λεγόμενες «συναρτήσεις τοίχου» για τα στερεά όρια.

2.10 Το οριακό στρώμα και οι συναρτήσεις Τοίχου

Ήδη ο Prandtl από το 1904 είχε δείξει ότι οι ροές ρευστών χαμηλής συνεκτικότητας όπως ο αέρας και το νερό, μπορούν να χωριστούν στο *οριακό στρώμα* κοντά στα στερεά όρια, που είναι περιοχή όπου η συνεκτικότητα του ρευστού παίζει μεγάλο ρόλο και στο εξωτερικό στρώμα, μακριά από τα στερεά όρια, όπου το ρευστό μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά μη συνεκτικό.

Έτσι σε μια επίπεδη πλάκα πάνω από την οποία ρέει ρευστό, θ' αρχίσει ν' αναπτύσσεται το οριακό στρώμα. Όσο πλησιάζουμε σ' αυτή η ταχύτητα θα μειώνεται με διαρκώς αυξανόμενο ρυθμό, ώσπου να μηδενιστεί πάνω της, ενώ έξω από το πάχος του οριακού στρώματος δ η ταχύτητα θα είναι σταθερή, ίση με την επ' άπειρον ταχύτητα (Εικόνα 2.1).



Εικόνα 2.1: Ανάπτυξη οριακού στρώματος σε επίπεδη πλάκα (Αθανασιάδης, 1989).

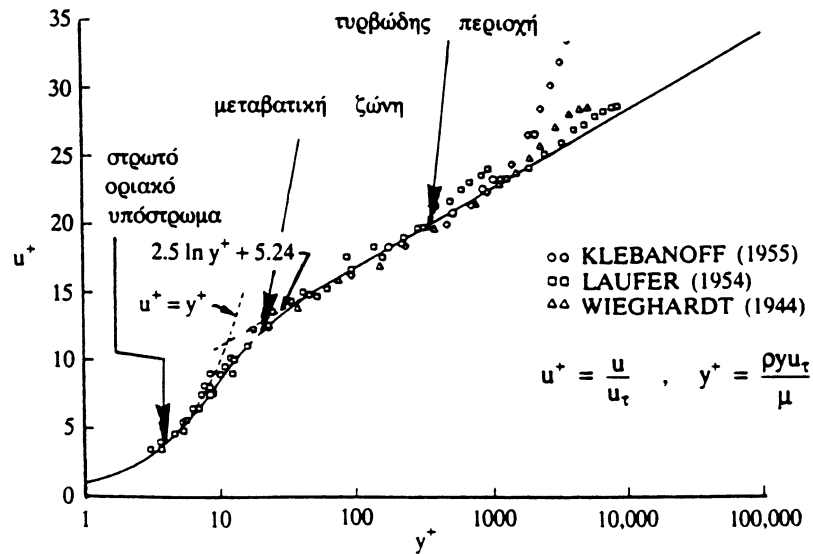
Για ροή πάνω από επίπεδη πλάκα, ορίζεται ο αριθμός Reynolds $Re_x = U \cdot x / \nu$, όπου για χαρακτηριστικό μήκος έχει ληφθεί η απόσταση x από την αρχή της πλάκας. Από κάποια απόσταση x και μετά έχουμε το *τυρβώδες οριακό στρώμα*, που είναι η συνηθέστερη περίπτωση στη φύση και στις τεχνικές εφαρμογές.

Στο τυρβώδες οριακό στρώμα διακρίνονται οι εξής περιοχές (Εικόνα 2.2):

1. Η εσωτερική περιοχή (τάξη μεγέθους του 10% του πάχους του τυρβώδους οριακού στρώματος δ). Αυτή αποτελείται από:
 - Το στρωτό οριακό υπόστρωμα.

- Τη μεταβατική περιοχή.
- Την πλήρως τυρβώδη περιοχή.

2. Η εξωτερική περιοχή (από το $y^+ = 500$ και πάνω στο παρακάτω σχήμα).



Εικόνα 2.2: Οι περιοχές του τυρβώδους οριακού στρώματος (Μπεργελές, 2006).

Όπως φαίνεται και από το παραπάνω σχήμα, στην εσωτερική περιοχή τα πολλά πειράματα έχουν δείξει να υπάρχει μια νομοτέλεια, η οποία μάλιστα προκύπτει και από διαστατική ανάλυση και είναι της μορφής:

$$U^+ = f(y^+) \quad (2.42)$$

Δηλαδή η αδιάστατη ταχύτητα U^+ είναι μονοσήμαντη συνάρτηση της αδιάστατης απόστασης από τον τοίχο (στερεό όριο) y^+ . Οι αδιάστατες αυτές ποσότητες ορίζονται ως εξής:

$$U^+ = \frac{U}{U_*} \quad (2.43)$$

$$y^+ = \frac{U_* y}{\nu} \quad (2.44)$$

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.45)$$

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.46)$$

Η ταχύτητα τριβής U_* μπορεί να συμβολίζεται και ως U_τ . Με τ_w συμβολίζεται η διατμητική τάση στον τοίχο.

Ανάλογα με την υποπεριοχή της εσωτερικής περιοχής ισχύει πιο συγκεκριμένα:

1. Στο στρωτό οριακό υπόστρωμα ($0 < y^+ < 5$):

$$U^+ = y^+ \quad (2.47)$$

Το στρωτό οριακό υπόστρωμα είναι μια πολύ λεπτή περιοχή κοντά στο στερεό όριο, με πάχος τάξης μεγέθους το ένα χιλιοστό του πάχους του οριακού στρώματος. Στην περιοχή αυτή οι διαταραχές ταχύτητας δε μπορούν ν' αποκτήσουν μεγάλα πλάτη, επειδή αποσβέννονται από την παρουσία του τοίχου. Έτσι οι τάσεις Reynolds μπορούν ν' αγνοηθούν και το ρευστό ελέγχεται από τις ιζώδεις τάσεις. Στο στρώμα αυτό η διατμητική τάση είναι σταθερή, ίση με την διατμητική τάση στον τοίχο τω.

2. Στη μεταβατική περιοχή ($5 < y^+ < 30$):

$$U^+ = \int_0^{y^+} \frac{2}{b + \sqrt{b^2 + 4a(y^+)}} dy^+ \quad (2.48)$$

$$a(y^+) = (\kappa y^+)^2 \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right)^2 \quad (2.49)$$

Όπου οι σταθερές έχουν τις τιμές: $b=1$, $A^+=26$, $\kappa=0.41$ (σταθερά Von Karman). Η ολοκλήρωση γίνεται με αρχική τιμή $U^+=0$ στο $y^+=0$. Η μεταβατική περιοχή είναι απλά μια περιοχή ομαλής μετάβασης από το στρωτό οριακό υπόστρωμα στην πλήρως τυρβώδη περιοχή, χωρίς περαιτέρω ενδιαφέρον.

3. Στην πλήρως τυρβώδη περιοχή ($30 < y^+ < 500$):

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (2.50)$$

Το E είναι μια σταθερά που εξαρτάται από την τραχύτητα του στερεού τοιχώματος και για λείο τοίχο έχει την τιμή 9.8. Ο Schlichting (1979) δίνει τιμές και για άλλες τραχύτητες.

Η σχέση αυτή της πλήρως τυρβώδους περιοχής είναι ο γνωστός λογαριθμικός νόμος που έχει μεγάλη σημασία καθώς αποτελεί τη βασική σχέση για τις λεγόμενες «συναρτήσεις τοίχου» που χρησιμοποιούνται ως οριακές συνθήκες για πολλούς κώδικες υπολογισμού της ροής.

Η βασική ιδέα πίσω από τη χρήση των συναρτήσεων τοίχου προκύπτει από το γεγονός ότι η επίλυση του πεδίου ροής πολύ κοντά στο στερεό όριο θα απαιτούσε πολύ πυκνό πλέγμα εκεί, αφού οι μεταβολές των ποσοτήτων είναι πολύ μεγάλες. Για ν' αποφευχθεί αυτό γίνεται χρήση του λογαριθμικού

νόμου και επιλύεται η ροή μέχρι την περιοχή που ισχύει αυτός και όχι πιο κοντά στον τοίχο. Αντίστοιχες συναρτήσεις τοίχου υπάρχουν και για τα k και ε στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε μοντέλο τύρβης k - ε :

$$k = \frac{U_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (2.51)$$

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{0.75} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (2.52)$$

Η διαδικασία υπολογισμού των μεταβλητών με χρήση των συναρτήσεων τοίχου έχει ως εξής:

- Η Ταχύτητα U υπολογίζεται από την αριθμητική επίλυση
- Η ταχύτητα τριβής U^* υπολογίζεται από το λογαριθμικό νόμο εξ. (2.50) με την εξής επαναληπτική διαδικασία:

$$U_* = s^{1/2} U \quad (2.53)$$

$$s = \left(\frac{\kappa}{\ln(E \operatorname{Re} s^{1/2})} \right)^2 \quad (2.54)$$

$$\operatorname{Re} = \frac{U y}{\nu} \quad (2.55)$$

- Υπολογίζεται το k από την εξ. (2.51)
- Υπολογίζεται το ε από την εξ. (2.52)

Για να είναι σωστή η εφαρμογή των συναρτήσεων τοίχου, πρέπει ο πρώτος κόμβος του πλέγματος να βρίσκεται σε απόσταση y τέτοια ώστε να ισχύει: $30 < y < 130$, ή τουλάχιστον $20 < y < 500$. Επίσης πρέπει να έχουμε υπόψη ότι όλα αυτά ισχύουν για επίπεδη πλάκα και σε άλλες περιπτώσεις εφαρμογής η χρήση γίνεται προσεγγιστικά επειδή δεν υπάρχει τίποτε καλύτερο που να μπορούμε να κάνουμε.

Κεφάλαιο 3: Αριθμητική Επίλυση

3.1 Εισαγωγή – Η Έννοια της Διακριτοποίησης

Σκοπός της αριθμητικής ανάλυσης γενικότερα είναι να βρίσκει εύχρηστες μεθόδους για την λύση προβλημάτων που μπορούν να εκφραστούν με μαθηματικές εξισώσεις. Στην παρούσα εργασία μας απασχολούν μόνο οι αλγόριθμοι επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων, από τους οποίους απαιτούμε κατά το δυνατόν συνέπεια (ακρίβεια), ευστάθεια και (γρήγορη) σύγκλιση.

Σε αντιστοιχία με τα φυσικά προβλήματα, ένα αριθμητικό πρόβλημα για να είναι καλά τοποθετημένο, πρέπει: α) Να υπάρχει αριθμητική λύση, β) να είναι μοναδική και γ) να εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τις προσεγγιστικές βοηθητικές σχέσεις.

Συνήθως οι μερικές διαφορικές εξισώσεις, όπως αυτές που μας ενδιαφέρουν, δεν είναι απλής μορφής και δεν είναι δυνατόν να επιλυθούν με απλές αριθμητικές μεθόδους. Απαιτούν *διακριτοποίηση* στο χώρο και το χρόνο στον οποίο μας ενδιαφέρει να ξέρουμε τη λύση τους.

Διακριτοποίηση είναι η διαδικασία σύμφωνα με την οποία οι μαθηματικές εξισώσεις που περιγράφουν τη συνεχή κατανομή κάποιων μεταβλητών σε ένα πεδίο, προσεγγίζονται με ανάλογες (αλλά διαφορετικές, συνήθως αλγεβρικές) εκφράσεις που καθορίζουν τιμές των μεταβλητών μόνο σε ένα πεπερασμένο αριθμό διακριτών σημείων του πεδίου.

Η διαδικασία διακριτοποίησης έχει συνοπτικά ως εξής:

1. Διακριτοποίηση χώρου. Το συνεχές χωροχρονικό πεδίο ορισμού του προβλήματος ροής καλύπτεται από το *πλέγμα επίλυσης* και αντικαθίσταται από ένα αριθμό διακριτών σημείων (σημεία του πλέγματος).
2. Διακριτοποίηση εξισώσεων. Η συνεχής συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) αναπαρίσταται με ένα αριθμό *διακριτών τιμών* στα σημεία του πλέγματος. Οι μερικές παράγωγοι προσεγγίζονται με αλγεβρικές εκφράσεις *πεπερασμένων διαφορών* των διακριτών τιμών. Οι εξισώσεις *πεπερασμένων διαφορών* προκύπτουν από τις εξισώσεις μερικών παραγώγων όταν κάθε παράγωγος, που εμφανίζεται σε αυτές, αντικατασταθεί από κάποια έκφραση *πεπερασμένων διαφορών*.

-
3. Αλγόριθμος επίλυσης. Η εξίσωση μερικών παραγώγων μετατρέπεται, τότε, σε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών, που μπορούν να λυθούν αριθμητικά. Η επίλυση του αλγεβρικού συστήματος επιτρέπει τον υπολογισμό των εξαρτημένων μεταβλητών του προβλήματος στα σημεία του πλέγματος.

Τρεις είναι οι κύριες μεθοδολογίες διακριτοποίησης: οι πεπερασμένες διαφορές, οι πεπερασμένοι όγκοι και τα πεπερασμένα στοιχεία. Η πρώτη είναι η αρχαιότερη και διακριτοποιεί τη διαφορική μορφή των μερικών διαφορικών εξισώσεων, η δεύτερη είναι η πιο συνηθισμένη στη ρευστομηχανική και διακριτοποιεί την εξίσωση που προκύπτει από ολοκλήρωση της εξίσωσης μεταφοράς πάνω σε ένα πεπερασμένο όγκο ελέγχου και η τρίτη έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε μη δομημένα πλέγματα, καλύπτοντας έτσι πιο εύκολα περίπλοκες γεωμετρίες. Μοιάζει με τη δεύτερη με κύρια διαφορά ότι οι εξισώσεις πριν ολοκληρωθούν πολλαπλασιάζονται με μια συνάρτηση βάρους. Συνήθως οι περισσότεροι ερευνητές ακολουθούν κάποια από τις μεθόδους αυτές χωρίς να έχουν πλήρη εικόνα των άλλων δύο.

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στην μέθοδο πεπερασμένων όγκων ελέγχου (Finite Volume Method) και μόνο αυτή θα περιγραφεί περιληπτικά σ' αυτό το κεφάλαιο, καθώς είναι η μεθοδολογία που ακολουθεί το πρόγραμμα PHOENICS που χρησιμοποιήθηκε για το υπολογιστικό κομμάτι της εργασίας αυτής. Κάθε μια από τις επόμενες παραγράφους εννοείται ότι αναφέρεται κυρίως στη μέθοδο πεπερασμένων όγκων ελέγχου, της οποίας αποτελεί μέρος.

3.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων Ελέγχου – Η ολοκλήρωση της Εξίσωσης Μεταφοράς

Η διαφορική εξίσωση που εκφράζει τη διατήρηση μιας οποιασδήποτε μεταβλητής ϕ σε ένα στοιχειώδη όγκο ελέγχου V , μπορεί να γραφεί στη γενική μορφή:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{u}\phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) + S_\phi \quad (3.1)$$

Ο πρώτος όρος είναι ο μεταβατικός όρος και δίνει το ρυθμό αύξησης της ϕ . Ο δεύτερος όρος είναι ο όρος συναγωγής και αντιστοιχεί στον καθαρό ρυθμό εκροής της ποσότητας ϕ από τον θεωρούμενο όγκο ελέγχου. Ο τρίτος όρος είναι ο όρος διάχυσης

που δίνει το ρυθμό αύξησης της ϕ λόγω διάχυσης. Γ είναι ο συντελεστής διάχυσης. Ο τέταρτος όρος είναι ο όρος παραγωγής και κατανάλωσης και δίνει το ρυθμό αύξησης της ϕ λόγω ύπαρξης πηγών ή καταβοθρών.

Το χαρακτηριστικό των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών είναι ότι ολοκληρώνουν την εξίσωση διατήρησης εξ. (3.1) σε κάθε όγκο ελέγχου V . Έτσι προκύπτει η εξίσωση:

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \iiint_V \text{div}(\rho\bar{u}\phi) dV = \iiint_V \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) dV + \iiint_V S_\phi dV \quad (3.2)$$

Με χρήση των μέσων τιμών στον όγκο ελέγχου, που συμβολίζονται με αγκύλες, προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\phi]\Delta V + \iiint_V \text{div}(\rho\bar{u}\phi) dV = \iiint_V \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) dV + [S_\phi]\Delta V \quad (3.3)$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss που μετατρέπει ένα ολοκλήρωμα όγκου σε επιφανειακό ολοκλήρωμα, έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\phi]\Delta V + \oiint_A \bar{n} \cdot (\rho\bar{u}\phi) dA = \oiint_A \bar{n} \cdot (\Gamma \text{grad}\phi) dA + [S_\phi]\Delta V \quad (3.4)$$

όπου \bar{n} το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια A .

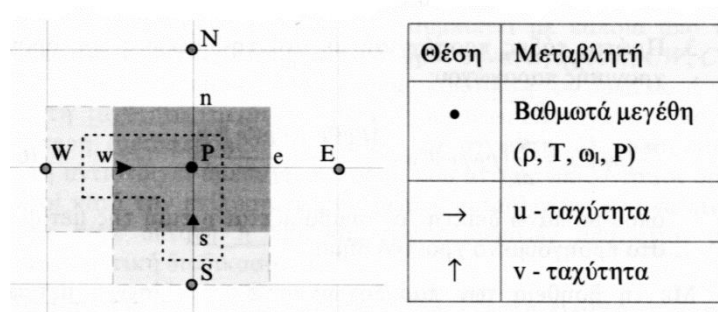
3.3 Πλέγμα – Όγκοι Ελέγχου

Για την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων ελέγχου, απαιτείται η διαίρεση του πεδίου σε επιμέρους όγκους ελέγχου, τυχαίου μεγέθους και τοπολογικά καρτεσιανού σχήματος. Στο εσωτερικό κάθε όγκου ελέγχου ορίζεται το σημείο P , στο οποίο αποθηκεύονται οι τιμές των βαθμωτών μεγεθών όπως ρ , T , p , ω_i (κλάσμα μάζας κάποιου συστατικού).

Για τη δημιουργία του πλέγματος σε ένα χώρο ορίζεται η θέση των κόμβων του πλέγματος P (σημεία αποθήκευσης βαθμωτών μεταβλητών). Συνήθως σε ένα χώρο όπου έχουν επιλεγεί οι άξονες x και y ώστε να είναι παράλληλοι με τα στερεά όρια και ο άξονας x να είναι παράλληλος με την κύρια κατεύθυνση της ροής, το πλέγμα δημιουργείται με i γραμμές σταθερού x και j γραμμές σταθερού y , οι τομές των οποίων είναι οι αριθμητικοί κόμβοι $P(i,j)$ που μπορεί πιο απλά να αναφέρονται και ως (i,j) . Οι γραμμές μπορεί και να μην ισαπέχουν μεταξύ τους, αν και ομοιόμορφη κατανομή

απλοποιεί τη μορφή των σχηματιζόμενων αλγεβρικών εξισώσεων και δίνει μεγαλύτερη ακρίβεια στα αριθμητικά σχήματα. Στη μέση της απόστασης των δύο κόμβων και κάθετα στη γραμμή που τους ενώνει, χαράσσονται τα μέτωπα των όγκων ελέγχου. Έτσι, όταν το πλέγμα είναι ανομοιόμορφο τα υπολογιστικά σημεία δε βρίσκονται στο κέντρο των όγκων ελέγχου.

Στην Εικόνα 3.1 φαίνεται τμήμα ενός πλέγματος όπου έχουν ονοματιστεί ο κόμβος P και οι 4 γειτονικοί του από δυτικά (W), ανατολικά (E), βόρεια (N) και νότια (S). Βαθιά σκιασμένος είναι ο όγκος ελέγχου του κόμβου P με σύνορα w , e , n , s .



Εικόνα 3.1: Πλέγμα και όγκοι ελέγχου (Μαρκάτος *et al.*, 1995).

Στη λεγόμενη τεχνική του μετατοπισμένου πλέγματος (staggered grid) οι τιμές των ταχυτήτων u , v αποθηκεύονται στα μέτωπα των όγκων ελέγχου (w , s στην Εικόνα 3.1), δηλαδή εκεί ακριβώς που τις χρειαζόμαστε. Οι όγκοι ελέγχου των ταχυτήτων είναι κατά συνέπεια μετατοπισμένοι προς τα πίσω σε σχέση με τους όγκους ελέγχου των βαθμωτών μεγεθών και φαίνονται με την αχνή σκίαση και τις διακεκομμένες γραμμές στην Εικόνα 3.1. Η τριάδα των σημείων P , w , s όμως έχει στον υπολογιστή την ίδια θέση αναφοράς. Το βασικό πλεονέκτημα της χρήσης του μετατοπισμένου πλέγματος είναι η ισχυρή σύνδεση μεταξύ των τιμών της πίεσης και των ταχυτήτων, πράγμα που βοηθάει στη σύγκλιση των αντίστοιχων μεταβλητών.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το πλέγμα δε χρειάζεται να είναι ομοιόμορφο. Πράγματι, στις περιοχές που οι μεταβολές των μεταβλητών είναι πολύ μεγάλες, όπως στο οριακό στρώμα, το πλέγμα είναι επιθυμητό να είναι πυκνό, ενώ σε περιοχές όπου οι κλίσεις των μεγεθών είναι μικρές, δεν έχει νόημα να έχουμε πυκνό πλέγμα που κοστίζει σε χρόνο και μνήμη υπολογιστή. Έτσι στην πράξη τα πλέγματα είναι σχεδόν πάντα ανομοιόμορφα και πυκναίνουν εκεί που περιμένουμε μεγάλες μεταβολές. Για να μη δημιουργηθούν όμως αριθμητικά προβλήματα και να μη χάνουμε πάρα πολύ σε

ακρίβεια, συνίσταται ο πρακτικός κανόνας ο λόγος του μήκους δύο διαδοχικών κελιών να μην υπερβαίνει το 1.2.

Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι με την επιλογή κάποιου πλέγματος, τη διακριτοποίηση των εξισώσεων σε αυτό και την επίλυσή τους, λαμβάνουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία όμως μπορεί να μην αποτελούν και τη διακριτή λύση των διαφορικών εξισώσεων. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν ο αριθμός των κόμβων που χρησιμοποιήθηκε για τη διακριτοποίηση της μερικής διαφορικής εξίσωσης δεν είναι επαρκής, οπότε το σύστημα των τελικών αλγεβρικών εξισώσεων δεν εκφράζει ακριβώς τις αρχικές διαφορικές εξισώσεις. Γι' αυτό απαιτείται πάντοτε να γίνεται έλεγχος της λύσης για ανεξαρτησία πλέγματος ώστε να διαπιστωθεί ότι πυκνώνοντας κατά κάποιες τάξεις μεγέθους το πλέγμα, η λύση δεν αλλάζει ή έχει πολύ μικρές μεταβολές. Αν δεν υπάρχουν αλλαγές, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η λύση μας αντιπροσωπεύει τη λύση των αρχικών διαφορικών εξισώσεων.

Στα επόμενα θα περιοριστούμε στις δύο διαστάσεις για συντομία, καθώς οι προέκταση σε τρεις διαστάσεις είναι άμεση και εύκολη.

3.4 Η Διακριτοποίηση της Εξίσωσης Μεταφοράς

Εφαρμόζοντας την εξ. (3.4) στον όγκο ελέγχου της Εικόνας 3.1 και θεωρώντας ότι οι ποσότητες κατανέμονται ομοιόμορφα, προκύπτει η διακριτοποιημένη σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{(\rho_P \phi_P - \rho_P^0 \phi_P^0) V_P}{\Delta t} + \left((\rho u)_e A_e \phi_e - \Gamma_e A_e \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_e \right) - \left((\rho u)_w A_w \phi_w - \Gamma_w A_w \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_w \right) + \\ + \left((\rho u)_n A_n \phi_n - \Gamma_n A_n \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n \right) - \left((\rho u)_s A_s \phi_s - \Gamma_s A_s \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s \right) = S_{\phi, P} V_P \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ο πάνω δείκτης θ συμβολίζει την τιμή της μεταβλητής στο προηγούμενο χρονικό βήμα. Κάθε ένας από τους υπόλοιπους όρους στις παρενθέσεις έχει ένα όρο συναγωγής και ένα όρο διάχυσης.

Στον υπολογισμό των ροών μέσω των επιφανειών του όγκου ελέγχου, γίνεται η προσπάθεια να ικανοποιείται η συντηρητική ιδιότητα, έτσι ώστε το ισοζύγιο της φυσικής ποσότητας να ισχύει γύρω από κάθε πεπερασμένη περιοχή και όχι σε ένα σημείο μόνο. Όταν η εξαρτημένη μεταβλητή ϕ συμπίπτει με κάποια από τις συνιστώσες της ταχύτητας (u, v), οι όροι συναγωγής είναι μη-γραμμικοί. Για τη γραμμικοποίηση των όρων αυτών, η πρώτη ταχύτητα (ταχύτητα συναγωγής) θεωρείται γνωστή, ενώ η

δεύτερη (μεταφερόμενη ποσότητα) ως άγνωστη. Για να είναι όμως τότε δυνατή η επίλυση των εξισώσεων, απαιτείται επαναληπτική διαδικασία. Οι τιμές της πυκνότητας ρ και του συντελεστή διάχυσης Γ στα μέτωπα των όγκων ελέγχου υπολογίζονται συνήθως με γραμμική παρεμβολή, π.χ. $\rho_e=0.5(\rho_E+\rho_P)$ και $\Gamma_e=0.5(\Gamma_E+\Gamma_P)$. Στη γενική περίπτωση ο όρος πηγής μπορεί να είναι συνάρτηση της εξαρτημένης μεταβλητής. Στην περίπτωση αυτή γραμμικοποιείται ώστε να ισχύει:

$$S_{\phi,P}V_P = SU + SP \cdot \phi_P \quad (3.6)$$

Δηλαδή αναλύεται σε ένα κομμάτι μη εμπλεκόμενο με την ϕ και σε ένα κομμάτι που πολλαπλασιάζει την εξαρτημένη μεταβλητή. Η γραμμικοποίηση του όρου πηγής γίνεται με αρνητική βαθμίδα. Η αρνητική βαθμίδα δεν είναι τόσο αυθαίρετη όσο φαίνεται, εφόσον οι πλείστες των φυσικών διεργασιών παρουσιάζουν σχέση αρνητικής κλίσης μεταξύ της μεταβλητής και του όρου πηγής. Για την περαιτέρω διακριτοποίηση της εξ. (3.5) όσον αφορά την ϕ και τις παραγώγους της, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν τα λεγόμενα αριθμητικά σχήματα διακριτοποίησης.

3.5 Αριθμητικά Σχήματα

Για την πλήρη διακριτοποίηση της εξίσωσης μεταφοράς, απαιτείται ο υπολογισμός των τιμών της μεταβλητής ϕ και των παραγώγων της, στα μέτωπα των όγκων ελέγχου e, w, n, s ως συνάρτηση των τιμών της στα υπολογιστικά σημεία E, W, N, S . Αυτό γίνεται με τη χρήση των αριθμητικών σχημάτων διακριτοποίησης. Τα κλασσικά σχήματα που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι αυτό των ανάντη διαφορών, των κεντρικών διαφορών καθώς και το υβριδικό σχήμα. Θα παρουσιαστούν εδώ σε συντομία ενδεικτικά για το μονοδιάστατο πρόβλημα ροής.

Σχήμα κεντρικών διαφορών

Η ποσότητα ϕ θεωρείται ότι κατανέμεται γραμμικά γύρω από τα μέτωπα των όγκων ελέγχου. Οι τιμές της ϕ και των παραγώγων της δίνονται από σχέσεις της μορφής:

$$\phi_w = 0.5(\phi_W - \phi_P) \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \quad (3.8)$$

Αντικαθιστώντας στην εξ. (3.5) προκύπτει, για μονοδιάστατη, μόνιμη ροή:

$$0.5C_e(\phi_E + \phi_P) - D_e(\phi_E - \phi_P) - 0.5C_w(\phi_W + \phi_P) - D_w(\phi_W - \phi_P) = S_{\phi,P}V_P \quad (3.9)$$

όπου οι όροι συναγωγής και διάχυσης C (Convection) και D (Diffusion) δίνονται από:

$$C_e = (\rho u)_e A_e; \quad C_w = (\rho u)_w A_w; \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{x_E - x_P} A_e; \quad D_w = \frac{\Gamma_w}{x_P - x_W} A_w \quad (3.10)$$

Μετά από πράξεις στην εξ. (3.9) και χρησιμοποιώντας και την εξ. (3.6) καταλήγουμε στην τελική μορφή του σχήματος κεντρικών διαφορών:

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + SU \quad (3.11)$$

$$A_P = A_E + A_W - SP \quad (3.12)$$

όπου:

$$A_E = D_e - 0.5C_e \quad (3.13)$$

$$A_W = D_w + 0.5C_w \quad (3.14)$$

Στην εξ. (3.12) έχει παραληφθεί ο όρος $(C_e - C_w)$, επειδή όταν συγκλίνει ο αλγόριθμος, αυτός θα έχει μηδενιστεί λόγω της εξίσωσης της συνέχειας. Οι εξισώσεις (3.11) και (3.12) παραμένουν ίδιες για όλα τα αριθμητικά σχήματα και το μόνο που αλλάζει είναι η έκφραση των συντελεστών A_γ , όπου γ είναι E ή W στη μονοδιάστατη περίπτωση. Από τη φυσική προκύπτει ότι οι συντελεστές της εξ. (3.11) πρέπει να έχουν όλοι το ίδιο πρόσημο, που υπολογίζεται εύκολα ότι συμβαίνει μόνο όταν η απόλυτη τιμή του τοπικού αριθμού Peclet είναι μικρότερη από δύο: $|Pe_C| \leq 2$.

Για να επιτευχθεί ο περιορισμός αυτός μπορεί να απαιτείται υπερβολική πύκνωση του πλέγματος. Ο τοπικός αριθμός Peclet (cell Peclet number) ή τοπικός αριθμός Reynolds ισούται με:

$$Pe_C = \frac{u \Delta x}{\alpha} = \frac{C}{D} \quad (3.15)$$

όπου α είναι συντελεστής διάχυσης και τα C, D προκύπτουν από την εξ. (3.10).

Σχήμα ανάντη διαφορών

Για να ξεπεραστεί η δυσκολία με τον αριθμό Peclet μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τους όρους συναγωγής το σχήμα των ανάντη διαφορών. Οι τιμές της ϕ και των παραγώγων της δίνονται από σχέσεις της μορφής:

$$\phi_w = \begin{cases} \phi_W, & u_w > 0 \\ \phi_P, & u_w < 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \quad (3.8)$$

Αντικαθιστώντας πάλι στην εξ. (3.5) και μετά από πράξεις, καταλήγουμε πάλι στις εξ. (3.11) και (3.12):

$$A_p \phi_p = A_E \phi_E + A_W \phi_W + SU \quad (3.11)$$

$$A_p = A_E + A_W - SP \quad (3.12)$$

όπου τώρα οι συντελεστές A_γ έχουν άλλη μορφή:

$$A_E = D_e + \max[-C_e, 0] \quad (3.17)$$

$$A_W = D_w + \max[C_w, 0] \quad (3.18)$$

Αυτό το σχήμα παρουσιάζει τα πλεονεκτήματα ότι όλοι οι συντελεστές A_γ είναι τώρα πλέον προφανώς θετικοί και επίσης λαμβάνεται υπόψη η κατεύθυνση μετάδοσης της πληροφορίας. Όμως ενώ οι κεντρικές διαφορές είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας, οι ανάντη διαφορές είναι πρώτης τάξης ακρίβειας.

Υβριδικό σχήμα

Το σχήμα αυτό βασίζεται σε συνδυασμό κεντρικών και ανάντη διαφορών, προσπαθώντας να συνδυάσει σε κάποιο βαθμό τα πλεονεκτήματα και των δύο μεθόδων.

Στο υβριδικό σχήμα η προσέγγιση των τιμών της ϕ στα μέτωπα του όγκου ελέγχου είναι συνάρτηση της απόλυτης τιμής του τοπικού αριθμού Peclet Pe_C . Έτσι:

1. Όταν $|Pe_C| \leq 2$ χρησιμοποιούνται κεντρικές διαφορές.
2. Όταν $|Pe_C| > 2$ χρησιμοποιούνται ανάντη διαφορές και αφαιρείται ο όρος διάχυσης.

Με την ίδια διαδικασία με πριν καταλήγουμε πάλι στις εξ. (3.12) και (3.13):

$$A_p \phi_p = A_E \phi_E + A_W \phi_W + SU \quad (3.11)$$

$$A_p = A_E + A_W - SP \quad (3.12)$$

όπου τώρα οι συντελεστές A_γ έχουν άλλη μορφή:

$$A_E = \max[|0.5C_e|, D_e] - 0.5C_e \quad (3.19)$$

$$A_W = \max[|0.5C_w|, D_w] + 0.5C_w \quad (3.20)$$

Το σχήμα εκμεταλλεύεται την δευτέρας τάξης ακρίβεια των κεντρικών διαφορών, αλλά όταν αυξάνει ο Peclet και υπάρχει κίνδυνος για ανακριβή αποτελέσματα χρησιμοποιούνται οι ανάντη διαφορές. Το σχήμα δίνει ρεαλιστικές λύσεις από φυσική άποψη και είναι πολύ σταθερό σε σύγκλιση. Στην παρούσα εργασία έχει χρησιμοποιηθεί υβριδικό σχήμα για τους υπολογισμούς.

Η τελική μορφή της διακριτοποιημένης εξίσωσης

Η τελική μορφή της διακριτοποιημένης εξίσωσης όπως έχει χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία προκύπτει από την προφανή επέκταση σε δύο διαστάσεις των εξ. (3.11), (3.12), (3.10), (3.19), (3.20):

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + SU = \sum_{\gamma} A_{\gamma} \phi_{\gamma} + SU \quad (3.21)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S - SP = \sum_{\gamma} A_{\gamma} - SP \quad (3.22)$$

$$A_E = \max[|0.5C_e|, D_e] - 0.5C_e \quad (3.19)$$

$$A_W = \max[|0.5C_w|, D_w] + 0.5C_w \quad (3.20)$$

$$A_N = \max[|0.5C_n|, D_n] - 0.5C_n \quad (3.23)$$

$$A_S = \max[|0.5C_s|, D_s] + 0.5C_s \quad (3.24)$$

Οι συντελεστές συναγωγής και διάχυσης C , D δίνονται από σχέσεις της μορφής εξ. (3.10). Το γ συμβολίζει τους γειτονικούς κόμβους.

Οι εξισώσεις αυτές γραμμένες για κάθε μεταβλητή (τη θέση του της ϕ παίρνει η μεταβλητή που μας ενδιαφέρει όπως συγκέντρωση C ή θερμοκρασία T , αν λύνεται) σε όλα τα σημεία του πλέγματος δημιουργούν ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που λύνεται με τη χρήση αλγόριθμου επίλυσης γραμμικών συστημάτων, όπως για παράδειγμα η μέθοδος Gauss ή η TDMA που θα παρουσιαστεί παρακάτω ή πιο σύγχρονες και γρήγορες μέθοδοι που δε θα αναφερθούν.

Στην περίπτωση που η μεταβλητή ϕ είναι συνιστώσα της ταχύτητας, υπάρχει η διαφορά ότι υπάρχει ως άγνωστος και η πίεση, η οποία είναι και αυτή μεταβλητή και πρέπει να υπολογιστεί, πράγμα που δημιουργεί την ανάγκη εισαγωγής μιας επαναληπτικής διαδικασίας η οποία θα περιγραφεί στην επόμενη παράγραφο.

Έτσι, για παράδειγμα, για τη συνιστώσα u , που ορίζεται πάνω στο δυτικό μέτωπο του όγκου ελέγχου του κόμβου P (Εικόνα 3.1), θα έχουμε την τελική μορφή της διακριτοποιημένης εξίσωσης:

$$A_P u_P = \sum_{\gamma} A_{\gamma} u_{\gamma} + A_w (P_w - P_P) - SU \quad (3.25)$$

όπου A_w είναι η επιφάνεια του δυτικού μετώπου και $A_w(P_w - P_P)$ η δύναμη από τη βαθμίδα πίεσης που δρα στον όγκο ελέγχου.

Αλγόριθμος SIMPLE

Όλες οι μεταβλητές που θέλουμε να υπολογίσουμε έχουν μια εξίσωση μεταφοράς που διακριτοποιείται όπως στην εξ. (3.21) (ή εξ. (3.25) για τις ταχύτητες) εκτός από την πίεση για την οποία δεν υπάρχει εξίσωση μεταφοράς. Υπάρχει μια επιπλέον εξίσωση, η εξίσωση της συνέχειας, στην οποία όμως δεν εμφανίζεται καθόλου η πίεση. Επιπλέον στην εξ. (3.25) για τον υπολογισμό των ταχυτήτων, η πίεση πρέπει να είναι γνωστή. Γίνεται φανερό λοιπόν ότι απαιτείται μια επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό της πίεσης και ακολούθως και των ταχυτήτων, όπου πιθανώς θα χρειάζεται να υποθέσει κανείς μια αρχική τιμή πίεσης και μετά να τη βελτιώσει προσπαθώντας να ικανοποιήσει τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής.

Πράγματι, έτσι γίνεται και η επαναληπτική διαδικασία που χρησιμοποιείται συνήθως είναι ο αλγόριθμος SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations). Ο αλγόριθμος στηρίζεται στην εκτίμηση ενός αρχικού πεδίου πίεσης P^* και στη διόρθωση αυτού μέχρι που οι ταχύτητες που προκύπτουν να ικανοποιούν τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής. Ο αλγόριθμος θα παρουσιαστεί για μονοδιάστατο μόνιμο πρόβλημα για να γίνει κατανοητός.

Από το αρχικά εκτιμημένο πεδίο πίεσης προκύπτει από την εξ. (3.25) ένα πεδίο ταχυτήτων u^* . Τότε, αν P , u οι ακριβείς τιμές της πίεσης και της ταχύτητας και P^δ , u^δ οι τιμές διόρθωσης της πίεσης και της ταχύτητας, ισχύει:

$$P = P^* + P^\delta \quad (3.26)$$

$$u = u^* + u^\delta \quad (3.27)$$

Εφαρμόζοντας την εξ. (3.25) για την u και την u^* και αφαιρώντας κατά μέλη, παίρνουμε την εξής εξίσωση για την u^δ :

$$A_p u_p^\delta = \sum_\gamma A_\gamma u_\gamma^\delta + A_w (P_w^\delta - P_p^\delta) \quad (3.28)$$

Εδώ γίνεται η απλουστευτική παραδοχή ότι:

$$\sum_\gamma A_\gamma u_\gamma^\delta = 0 \quad (3.29)$$

πράγμα που ισχύει μόνο όταν είμαστε κοντά στη σύγκλιση. Βάσει αυτού, υπολογίζεται η διόρθωση της ταχύτητας από την εξ. (3.28):

$$u_p^\delta = \frac{A_w}{A_p} (P_w^\delta - P_p^\delta) \quad (3.30)$$

οπότε προκύπτει εύκολα και η πρώτη προσέγγιση των σωστών ταχυτήτων u_p :

$$u_p = u_p^* + \frac{A_w}{A_p} (P_w^\delta - P_p^\delta) \quad (3.31)$$

Τώρα χρειάζεται μια εξίσωση για τη διόρθωση της πίεσης P^δ , που θα προκύψει από την εξίσωση της συνέχειας:

$$(\rho u)_e A_e = (\rho u)_w A_w \quad (3.32)$$

Αν σ' αυτή την εξίσωση αντικατασταθούν οι τιμές των ταχυτήτων από την εξ. (3.31), προκύπτει η εξίσωση διόρθωσης της πίεσης:

$$A_p P_p^\delta = A_e P_e^\delta + A_w P_w^\delta + S_m \quad (3.33)$$

Όπου:

$$A_e = \rho_e \frac{A_e}{A_p} A_e; \quad A_w = \rho_w \frac{A_w}{A_p} A_w \quad (3.34)$$

$$A_p = A_e + A_w \quad (3.35)$$

$$S_m = (\rho u)_w A_w - (\rho u)_e A_e \quad (3.36)$$

Η εξ. (3.36) μας θυμίζει την εξίσωση της συνέχειας, γραμμένη για τις εκτιμήσεις των ταχυτήτων u^* . Άρα, όταν $S_m=0$, η εξίσωση της συνέχειας θα ικανοποιείται από τις ταχύτητες u^* και η μέθοδος θα έχει συγκλίνει. Ο όρος πηγής S_m δρα σαν ένας όρος μάζας ο οποίος θα πρέπει να μηδενίζεται όταν το πρόβλημα συγκλίνει.

Συνοπτικά ο αλγόριθμος SIMPLE έχει ως εξής:

1. Εκτίμηση πεδίου πίεσης P^* .
2. Επίλυση πεδίου εκτιμώμενων ταχυτήτων u^* εξ. (3.25).
3. Υπολογισμός του όρου διόρθωσης πίεσης εξ. (3.33).
4. Διόρθωση της πίεσης από την εξ. (3.26).
5. Διόρθωση των ταχυτήτων από την εξ. (3.31).
6. Επίλυση της εξίσωσης θερμότητας, συγκέντρωσης και λοιπών βαθμωτών μεγεθών.
7. Επιστροφή στο βήμα 1, θέσε $P^* = P$ και επανέλαβε μέχρι να πραγματοποιηθεί σύγκλιση.

Ο αλγόριθμος αυτός έχει βρει ευρεία εφαρμογή. Έχει το πλεονέκτημα ότι ικανοποιεί ανά πάσα στιγμή την εξίσωση της συνέχειας. Το αδύνατό του σημείο είναι η παραδοχή της εξ. (3.29), που έχει σαν αποτέλεσμα την υπερεκτίμηση της διόρθωσης της πίεσης, πράγμα που επιβάλλει την χρήση υποχαλάρωσης. Τα μειονεκτήματα του SIMPLE έχουν προσπαθήσει να διορθώσουν διάφοροι νεότεροι αλγόριθμοι όπως οι SIMPLER, SIMPLEC, SIMPLEST.

Ο τελευταίος (SIMPLEST=SIMPLE ShorTened) είναι ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί ο κώδικας PHOENICS. Η διαφορά του είναι ότι έχει τους όρους συναγωγής της εξίσωσης μεταφοράς της ορμής σαν όρους πηγής. Δηλαδή στους συντελεστές A_T κρατιέται μόνο το κομμάτι που αφορά τη διάχυση D , ενώ αυτό που αφορά τη συναγωγή C μεταφέρεται μαζί με τους όρους πηγής SP και αποτελεί μέρος τους. Έτσι ο συντελεστής της διόρθωσης της ταχύτητας αποτελείται μόνο από το κομμάτι που αφορά τη διάχυση D . Ο διαχωρισμός αυτός εμπνεύστηκε από το γεγονός ότι η συναγωγή έχει προεξάρχουσα κατεύθυνση, ενώ η διάχυση κατευθύνεται παντού. Το αποτέλεσμα είναι μια πιο ομαλή σύγκλιση και με μικρότερους συντελεστές υποχαλάρωσης.

3.6 Οριακές συνθήκες

Στα όρια του πεδίου πρέπει να εφαρμοσθούν ειδικές τεχνικές ώστε να εισαχθεί στη διακριτοποιημένη εξίσωση μεταφοράς η πληροφορία που περιέχεται στις οριακές συνθήκες. Στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων ελέγχου οι οριακές συνθήκες εισάγονται ως ψευδοπηγές.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η φιλοσοφία αυτή, θεωρούμε πάλι τις εξ. (3.11) και (3.12).

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + SU \quad (3.11)$$

$$A_P = A_E + A_W - SP \quad (3.12)$$

Αν θεωρήσουμε για απλούστευση και καλύτερη κατανόηση της διαδικασίας τις πραγματικές πηγές ίσες με 0, προκύπτει:

$$A_E (\phi_P - \phi_E) + A_W (\phi_P - \phi_W) = 0 \quad (3.37)$$

Δηλαδή η ύπαρξη των γειτονικών σημείων του σημείου υπολογισμού P εμφανίζεται στην εξίσωση σαν ένα συντελεστή (συναγωγή και διάχυση μαζί) επί τη διαφορά των τιμών της μεταβλητής μεταξύ του σημείου P και του γείτονά του. Όμοια γίνεται και στο όριο. Πιο συγκεκριμένα, αν δυτικά του P υπάρχει σύνορο (τα όρια του πεδίου θεωρείται ότι συμπίπτουν με τα μέτωπα των όγκων ελέγχου εδώ), ο δεύτερος όρος της εξ. (3.37) δεν υπάρχει και στη θέση του υπάρχει ο ισοδύναμος όρος του ορίου, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$A_E (\phi_P - \phi_E) + A_{op} (\phi_P - \phi_{op}) = 0 \quad (3.38)$$

Ο συντελεστής A_{op} περιέχει όρους συναγωγής και διάχυσης ανάλογα με το πρόβλημά μας. Ο δεύτερος όρος της εξ. (3.38) μοντελοποιείται σαν όρος πηγής:

$$A_{op}(\phi_P - \phi_{op}) = SU_{op} + SP_{op}\phi_P \quad (3.39)$$

Άρα λοιπόν στο όριο α) μηδενίζεται η κατάλληλη σύνδεση κόμβου, δηλαδή αυτή που συνδέει με το όριο και β) Οι οριακές συνθήκες εισάγονται με τη βοήθεια ψευτοπηγής κατ' αναλογία με την εξ. (3.39), με τα SU_{op} και SP_{op} να συμμετάσχουν στην εξίσωση αποτελώντας αναπόσπαστο μέρος των όρων πηγής SU και SP αντίστοιχα. Η ακριβής έκφραση των SU_{op} και SP_{op} εξαρτάται από το πρόβλημα. Οι πιο συνηθισμένοι τύποι οριακών συνθηκών είναι:

Τύπου I ή Dirichlet: σταθερή τιμή της μεταβλητής ϕ στο όριο.

Τύπου II ή Neumann: σταθερή τιμή της ροής της μεταβλητής ϕ στο όριο.

Στην εξίσωση της ορμής, στο σύνορο εισόδου της ροής διατηρούνται συνέχεια οι τιμές που δίνονται, στο σύνορο εκροής ορίζονται οι κλίσεις των μεταβλητών κατά την κατεύθυνση της ροής να είναι μηδέν και στα στερεά όρια οι κάθετες ταχύτητες να είναι με μηδέν.

Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενη παράγραφο, για να μην αναγκάζομαστε να έχουμε πολύ πυκνό πλέγμα κοντά στο στερεό όριο που οι μεταβολές είναι πολύ μεγάλες, χρησιμοποιούμε τις λεγόμενες συναρτήσεις τοίχου, οι οποίες αποτελούν κατά κάποιο τρόπο οριακές συνθήκες για τις εξισώσεις της ορμής στα στερεά όρια. Εισάγοντας τις συναρτήσεις τοίχου σαν οριακές συνθήκες κατά τα προηγούμενα είναι σα να εισάγουμε ένα όρο πηγής με:

$$SU_{op} = 0 \quad (3.40)$$

$$SP_{op} = -\frac{\rho(C_\mu^{0.25} k^{0.5})\kappa(u_P - u_s)}{\ln(Ey^+)} A_n \quad (3.41)$$

Θυμίζεται ότι για να έχει εφαρμογή αυτή η σχέση, πρέπει το y^+ να είναι μεταξύ 20 και 500 και το u_s είναι η ταχύτητα τοιχώματος.

3.7 Αλγόριθμος TDMA Επίλυσης Αλγεβρικών Συστημάτων

Εφαρμόζοντας την διακριτοποιημένη εξ. (3.21) σε κάθε σημείο P του πλέγματος, προκύπτει τελικά ένα σύνολο από πολλές γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις με αγνώστους όσα σχεδόν τα σημεία του πλέγματος (εξαιρουμένων των οριακών), για κάθε μεταβλητή. Το σύστημα αυτό πρέπει να λυθεί με κάποια μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων, ώστε να μας δώσει τη λύση για κάθε επανάληψη. Λόγω του μεγάλου πλήθους των εξισώσεων και των πολλών φορών (λόγω των πολλών

επαναλήψεων ώστε να επιτευχθεί σύγκλιση) που θα χρειαστεί να γίνει η επίλυση, το βήμα αυτό είναι και το πιο χρονοβόρο στην όλη διαδικασία προσέγγισης της λύσης.

Το προς επίλυση σύστημα είναι της κλασσικής μορφής:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad (3.42)$$

όπου $\mathbf{A}=a_{ij}$ ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $\mathbf{X}=x_i$ το διάνυσμα των αγνώστων μεταβλητών και $\mathbf{B}=b_i$ το διάνυσμα των σταθερών όρων και i,j παίρνουν τιμές από 1 μέχρι N , όπου N ο αριθμός των αγνώστων (και των εξισώσεων).

Υπάρχουν δύο κατηγορίες μεθόδων επίλυσης συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, οι άμεσες, όπου η λύση επιτυγχάνεται μετά από σταθερό αριθμό συστηματικών βημάτων, και οι επαναληπτικές, που οδηγούν στη λύση ασυμπτωτικά, μέσω κάποιας επαναληπτικής διαδικασίας. Τα κριτήρια αξιολόγησης των χρησιμοποιούμενων μεθόδων είναι η ακρίβεια, η αποτελεσματικότητα, η γενικότητα και η απλότητα.

Ο αλγόριθμος Thomas ή αλγόριθμος TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm) είναι ένας ακριβής, σχετικά αποτελεσματικός, απλός, άμεσος αλγόριθμος που εφαρμόζεται μόνο σε τριδιαγώνια συστήματα, δηλαδή σε συστήματα όπου οι μη μηδενικοί όροι είναι μόνο αυτοί της διαγωνίου και των δύο γραμμών πάνω και κάτω από αυτή. Γενικά τα προβλήματα των πεπερασμένων όγκων ελέγχου καταλήγουν πάντα σε πίνακες που έχουν πολλά μηδενικά στοιχεία, με μη μηδενικά μόνο κάποιες γραμμές κοντά στη διαγώνιο, ανάλογα με τις επιλυόμενες διαστάσεις και το σχήμα διακριτοποίησης. Σε μονοδιάστατα προβλήματα και με σχήμα διακριτοποίησης κάποιο από αυτά που περιγράφηκαν προηγούμενα, το πρόβλημα καταλήγει πάντα σε τριδιαγώνιο πίνακα \mathbf{A} . Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό αν εφαρμόσουμε την εξ. (3.11) σε ένα πλέγμα όπου τα κελιά συμβολίζονται με i :

$$A_{P,i}\phi_i = A_{E,i}\phi_{i+1} + A_{W,i}\phi_{i-1} + B_i \quad (3.43)$$

όπου ο όρος πηγής έχει μεταφερθεί στο σταθερό όρο B_i .

Συνολικά υπάρχουν $N=NI-2$ τέτοιες εξισώσεις (όπου NI ο αριθμός των κόμβων), με αγνώστους τις τιμές της ϕ στα N εσωτερικά σημεία του πεδίου. Οι οριακές συνθήκες μπαίνουν τροποποιώντας τις ακριανές γραμμές του πίνακα \mathbf{A} . Βλέπουμε λοιπόν ότι σε κάθε γραμμή της εξίσωσης οι μόνοι μη μηδενικοί όροι είναι οι $\phi_i, \phi_{i+1}, \phi_{i-1}$, δηλαδή ο διαγώνιος όρος του μητρώου \mathbf{A} , ο επόμενός του και ο προηγούμενός του.

Το τελικό σύστημα που προκύπτει από την εξ. (3.43) έχει ως εξής:

Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με την εξ. (3.45) προκύπτουν οι σχέσεις υπολογισμού των συντελεστών P_i και Q_i , της διαδικασίας απαλοιφής:

$$P_i = \frac{A_{E,i}}{A_{P,i} - A_{W,i}P_{i-1}}; \quad Q_i = \frac{B_i + A_{W,i}Q_{i-1}}{A_{P,i} - A_{W,i}P_{i-1}} \quad (3.48)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι αναδρομικές. Για την έναρξη της διαδικασίας χρησιμοποιείται η οριακή συνθήκη $A_{W,2}=0$ η οποία όταν αντικατασταθεί στην εξ. (3.48) δίνει:

$$P_2 = \frac{A_{E,2}}{A_{P,2}}; \quad Q_2 = \frac{B_2}{A_{P,2}} \quad (3.49)$$

Ως εδώ είναι η διαδικασία απαλοιφής, που έχει ως αποτέλεσμα ένα άνω τριγωνικό πίνακα που ορίζεται από τις εξ. (3.45) και (3.48), (3.49).

B) Διαδικασία αντικατάστασης. Αντικαθιστώντας την οριακή συνθήκη $A_{E,NI-1}=0$ στην εξ. (3.48) προκύπτει ότι $P_{NI-1}=0$ και η εξ. (3.45) γίνεται:

$$\phi_{NI-1} = Q_{NI-1} \quad (3.50)$$

Η συνέχιση της διαδικασίας της πίσω αντικατάστασης γίνεται με χρήση της εξ. (3.45).

Συνοπτικά ο αλγόριθμος TDMA έχει τα ακόλουθα βήματα:

1. Υπολογισμός των P_2, Q_2 από την εξ. (3.49).
2. Υπολογισμός των P_i, Q_i για $i=3, \dots, NI-2$ από την εξ. (3.48).
3. Υπολογισμός του ϕ_{NI-1} από την εξ. (3.50).
4. Υπολογισμός των ϕ_i από την εξ. (3.45).

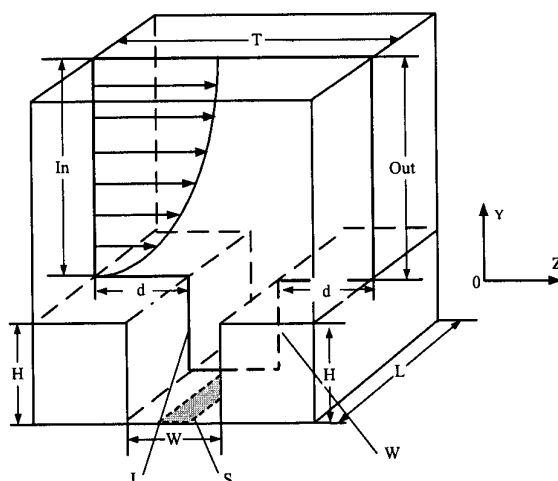
Με τον διακριτό υπολογισμό των ϕ_i σε κάθε σημείο του πλέγματος για κάθε μεταβλητή, ολοκληρώνεται η διαδικασία υπολογισμού της ροής και των μεταβλητών που μας ενδιαφέρουν στο χωρίο υπολογισμού.

Κεφάλαιο 4: Υπολογιστικό μέρος

Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε στη συγκεκριμένη εργασία είναι το PHOENICS. Το PHOENICS χρησιμοποιεί RANS κώδικα CFD πεπερασμένων όγκων ελέγχου, είναι γραμμένο σε FORTRAN και χρησιμοποιεί τις εξισώσεις καθώς και τις αριθμητικές μεθόδους που αναφέρθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Συνοπτικά, όλοι οι κώδικες υπολογιστικής ρευστομηχανικής μπορούν να χωριστούν σε τρία κομμάτια: α) Τους προκαταρκτικούς υπολογισμούς (pre-processing), όπου ορίζεται το πρόβλημα μας, β) Τον κύριο επιλύτη (solver) όπου πραγματοποιείται η διακριτοποίηση και η αριθμητική επίλυση του προβλήματος και γ) Την επεξεργασία των αποτελεσμάτων (post-processing). Όσον αφορά τους προκαταρκτικούς υπολογισμούς, όλα τα δεδομένα (πλέγμα, ιδιότητες ρευστού, οριακές συνθήκες κλπ.) δίδονται μέσω αρχείου εισόδου ASCII που ονομάζεται Q1. Εν συνεχεία, τρέχει το πρόγραμμα satellite (satexe) και δημιουργεί ένα αρχείο eardat το οποίο στην ουσία μετατρέπει τα δεδομένα του Q1 με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να διαβαστούν από τον κύριο επιλύτη earth. Το earth (earexe) επιλύει το πρόβλημα και γράφει τα αποτελέσματα σε δύο αρχεία, το result που είναι αρχείο ASCII και το phi, που είναι το κύριο αρχείο εξόδου και περιέχει για κάθε κόμβο την τιμή κάθε μεταβλητής. Επιπλέον, δημιουργείται ακόμη ένα αρχείο, το ratgeo, το οποίο περιέχει γεωμετρικές πληροφορίες. Τέλος, το αρχείο phi μπορεί να φορτωθεί σε οποιοδήποτε πρόγραμμα post-processing, όπως το photon (phoexe) του πακέτου του PHOENICS.

4.1 Γεωμετρία

Η γεωμετρία που επιλέχθηκε στην εν λόγω εργασία φαίνεται στην Εικόνα 4.1. Πρόκειται περί τετραγωνικής οδικής χαράδρας, με $H/W=1$, όπου $H=W=d=20$ m. Επίσης $L=1$ m (λύνουμε διδιάστατη ροή), $In=Out=100$ m. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $T=60$ m. Με S συμβολίζεται η πηγή των ρύπων, που είναι τοποθετημένη κοντά στο επίπεδο του δρόμου, σε ύψος περίπου $1/3$ του μέτρου. Τέλος, η πλευρά L είναι η ανάντη πλευρά και η πλευρά W η κατάντη.



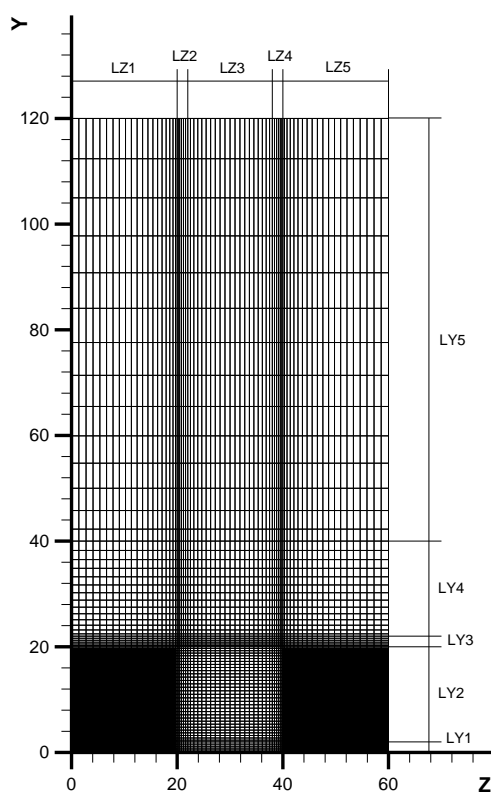
Εικόνα 4.1: Η γεωμετρία της περίπτωσης αναφοράς (Chan et al., 2002).

4.2 Πλέγμα

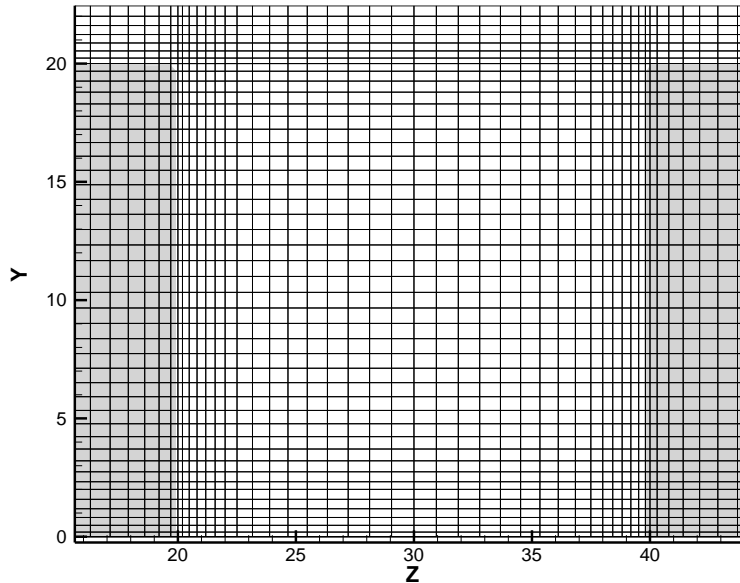
Το αρχικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε προέρχεται από προηγούμενη εργασία του μεταπτυχιακού φοιτητή Κουτσουράκη Νεκτάριου (2006). Δημιουργήθηκε σύμφωνα με τη φιλοσοφία του χωρισμού σε περιοχές. Συγκεκριμένα, κατά τον άξονα Z η πρώτη περιοχή φτάνει μέχρι εκεί που τελειώνει το πρώτο κτίριο, δηλαδή τα 20 m (LZ1). Η LZ2 έχει μήκος δύο μέτρα ούτως ώστε το πλέγμα εκεί να είναι πυκνό κοντά στα όρια του πρώτου κτιρίου (ανάτη). Αντίστοιχα δημιουργήθηκαν και οι υπόλοιπες περιοχές για το κατάντη κτίριο με LZ3=16 m, LZ4=2 m, LZ5=20 m. Ομοίως στον άξονα Y η LY1 είναι 2 m, κοντά δηλαδή στα όρια του δρόμου, η LY2 εκτείνεται μέχρι τις οροφές των κτιρίων, η LY3 ορίζεται 2 m, κοντά στις οροφές των κτιρίων, η LY4 είναι 20 μέτρα πάνω από τις οροφές και η LY5 φτάνει ως το τέλος του υπολογιστικού χωρίου. Ακολουθεί ο Πίνακας 4.1 που απεικονίζει τις περιοχές αυτές. Στον πίνακα, το $-$ σημαίνει αραιώση και το σ συμμετρική πύκνωση και από τις δύο μεριές. Λεπτομέρειες επίσης του πλέγματος φαίνονται στις Εικόνες 4.2 και 4.3.

Πίνακας 4.1: Παράμετροι πλέγματος.

| Τμήμα | LZ1 | LZ2 | LZ3 | LZ4 | LZ5 | LY1 | LY2 | LY3 | LY4 | LY5 |
|------------------|------|-----|-----------------|------|-----|-----|-----------------|-----|-----|------|
| Μήκος (m) | 20 | 2 | 16 | 2 | 20 | 2 | 18 | 2 | 18 | 80 |
| Αριθμός κελιών | 20 | 6 | 20 | 6 | 20 | 6 | 32 | 6 | 14 | 14 |
| Εκθέτης πύκνωσης | -1,4 | 1,3 | σ 1,2 | -1,3 | 1,4 | 1,3 | σ 1,2 | 1,2 | 1,4 | 1,35 |



Εικόνα 4.2: Το πλεγμα και οι υποπεριοχές του.



Εικόνα 4.3: Λεπτομέρειες του πλέγματος.

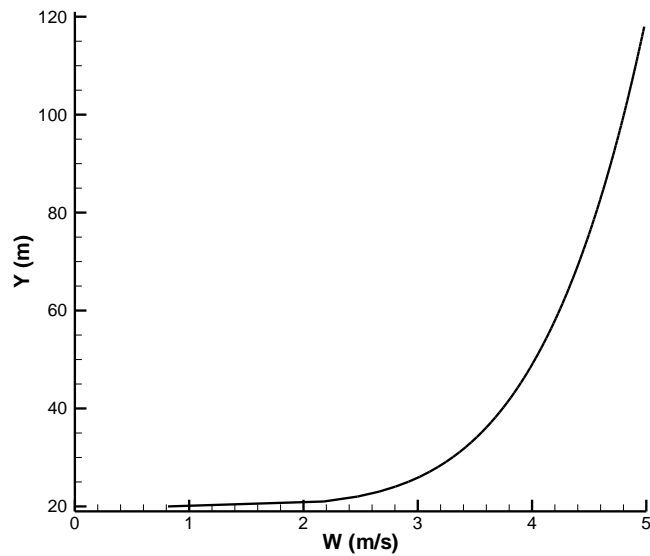
4.3 Οριακές Συνθήκες

Στην είσοδο του πεδίου ροής εισάγουμε το προφίλ της ταχύτητας στον άξονα Z (η V θεωρείται μηδέν) , καθώς και το προφίλ του k και του ϵ . Στην έξοδο επιβάλλεται συνθήκη σταθερής πίεσης ίση με μηδέν. Τέλος, στα στερεά τοιχώματα επιβάλλονται συναρτήσεις τοίχου.

Το προφίλ ταχύτητας στην είσοδο δίνεται απο τη σχέση :

$$W = W_0 \left(\frac{y}{\delta} \right)^a \quad (4.1)$$

Όπου W_0 είναι η ταχύτητα της ελεύθερης ροής, η οποία στην περίπτωση μας ισούται με 5 m/s. Το δ είναι το πάχος του οριακού στρώματος πάνω απο τις οροφές των κτιρίων, που ισούται με 100 μέτρα. Το a για αστικό οριακό στρώμα παίρνει τιμή 1.8. Το προφίλ της ταχύτητας απεικονίζεται στην Εικόνα 4.4. Η κινηματική συνεκτικότητα του αέρα είναι $1,54 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ και η πυκνότητα είναι ίση με $1,21 \text{ kgr}/\text{m}^3$. Όλα τα τοιχώματα θεωρούνται λεία.

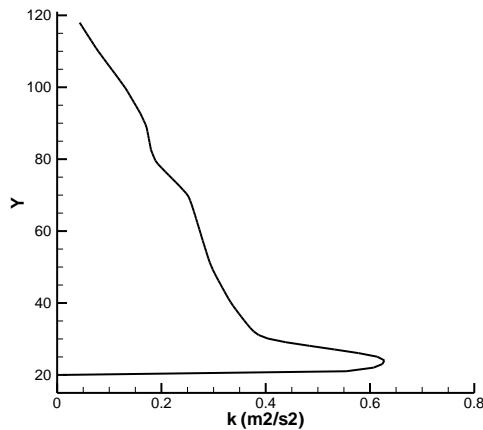


Εικόνα 4.4: Προφίλ ταχύτητας σε οριακό στρώμα πόλης.

Για το προφίλ του k επιλέχθηκαν πειραματικά δεδομένα απο πραγματικό οριακό στρώμα πόλεως , όπως και στην εργασία του Κουτσοράκη (2006). Ο πίνακας 4.2 απεικονίζει τις αδιάστατες διακυμάνσεις ταχυτήτων. Η ακριβής τιμή του k , ανάλογα με τη θέση y υπολογίστηκε με γραμμική παρεμβολή στις τιμές του k . Το προφίλ του k παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.5.

Πίνακας 4.2: Αδιάστατες διακυμάνσεις ταχυτήτων (Κουτσοράκης, 2006).

| y/δ | u' | w' | v' | $k=0.5u_i'w_i'W_0^2$ |
|------------|-------|-------|-------|----------------------|
| 0-0.05 | 0.175 | 0.11 | 0.098 | 0.6541125 |
| 0.1 | 0.135 | 0.085 | 0.075 | 0.3884375 |
| 0.2 | 0.117 | 0.09 | 0.07 | 0.3336125 |
| 0.3 | 0.107 | 0.087 | 0.068 | 0.295525 |
| 0.4 | 0.102 | 0.084 | 0.067 | 0.2743625 |
| 0.5 | 0.1 | 0.08 | 0.066 | 0.25945 |
| 0.6 | 0.078 | 0.072 | 0.058 | 0.1829 |
| 0.7 | 0.074 | 0.072 | 0.055 | 0.1710625 |
| 0.8 | 0.062 | 0.064 | 0.05 | 0.1305 |
| 0.9 | 0.046 | 0.049 | 0.042 | 0.0785125 |
| 1 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.03375 |



Εικόνα 4.5: Προφίλ κινητικής ενέργειας της τύρβης k .

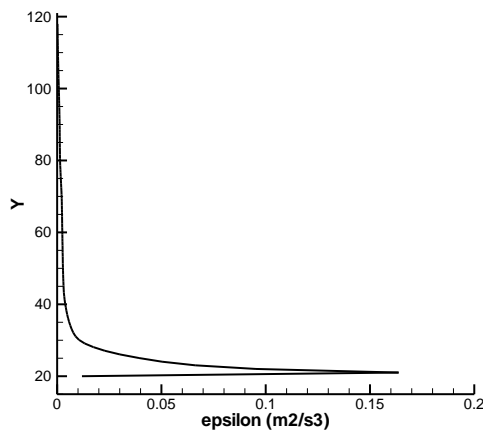
Για τον υπολογισμό του ε χρησιμοποιήθηκε ο τύπος:

$$\varepsilon = \frac{C_{\mu}^{0.75} k^{1.5}}{LM} \quad (4.2)$$

Όπου το μήκος ανάμιξης LM δίνεται από τη σχέση:

$$LM = \begin{cases} \kappa y & \kappa y \leq C_{\mu} \delta \\ C_{\mu} \delta & \kappa y > C_{\mu} \delta \end{cases} \quad (4.3)$$

Όπου οι σταθερές παίρνουν τις τιμές $\kappa=0.41$ και $C_{\mu}=0.09$. Το προφίλ του ε απεικονίζεται στην Εικόνα 4.6.



Εικόνα 4.6: Προφίλ ε .

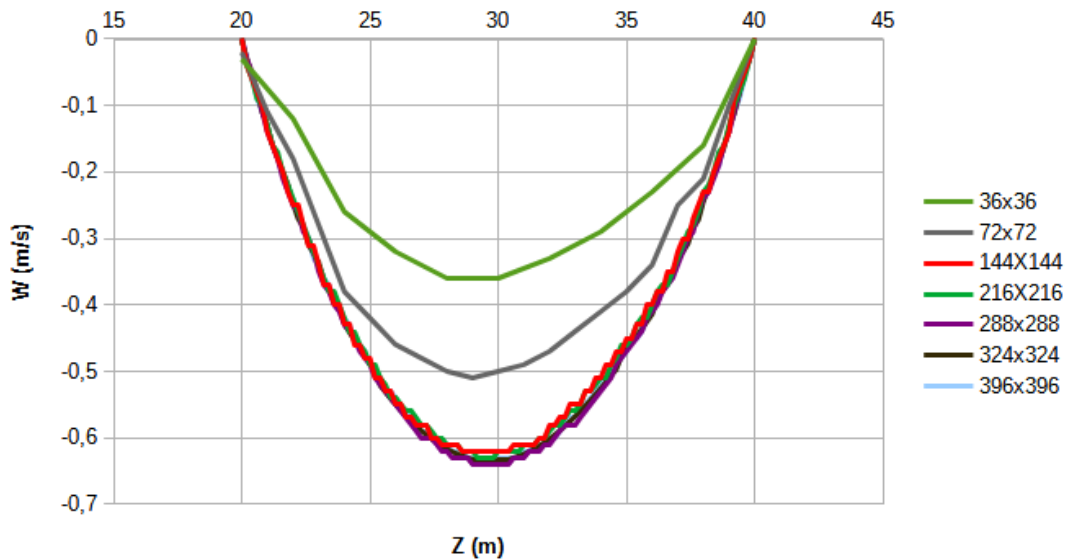
Για τη μελέτη ανεξαρτησία πλέγματος καθώς και για την περίπτωση αναφοράς ως μοντέλο τύρβης επιλέχθηκε το RNG k - ε . Στη συνέχεια δοκιμάστηκαν άλλα τέσσερα μοντέλα τύρβης: το MMK k - ε , το $realizable$ k - ε , το k - ω και το k - ω sst .

4.4 Πηγή Ρύπου

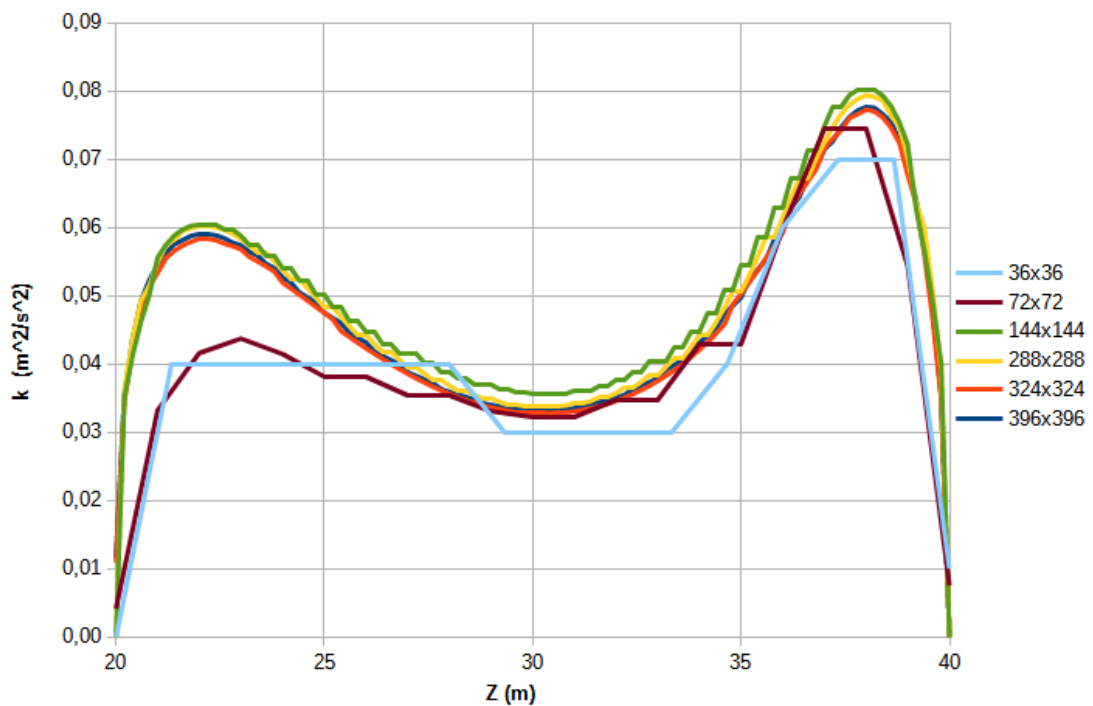
Ο ρύπος θεωρείται ότι προέρχεται από δεύτερο κατά άξονα y κελί που βρίσκεται στο μέσο της οδικής χαράδρας κατά άξονα z . Η παροχή ρύπου είναι 1 kg/s . Αυτό εξασφαλίζεται με τον τρόπο που δίνονται οι οριακές συνθήκες στον κώδικα, όπου για την πίεση P δίνεται οριακή συνθήκη κελιού σταθερής παροχής 10^{-3} kg/s αέρα, αρκετά μικρή ώστε να μην χαλάει το πεδίο ροής, και για την επίσης επιλυόμενη μεταβλητή C οριακή συνθήκη κελιού σταθερής ροής μάζας $1000 \text{ kg}_{\text{ρύπου}}/\text{kg}_{\text{αέρα}}$. Το αποτέλεσμα αυτών των δύο οριακών συνθηκών που εφαρμόζονται στο ίδιο κελί είναι η σταθερή παροχή μάζας ρύπου 1 kg/s . Η τιμή αυτή δεν είναι πραγματική, διευκολύνει όμως στην απεικόνιση των προγραμμάτων γραφικών. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως σε πυκνότερα πλέγματα προφανώς η απόλυτη θέση της πηγής δεν θα είναι η ίδια, έχει αποδειχθεί όμως και από την εργασία του Κουτσουράκη (2006) πως τόσο μικρή μετατόπιση θέσης έχει απειροελάχιστη επίδραση στα τελικά αποτελέσματα, γι' αυτό και δεν άλλαξε η συνθήκη για το δεύτερο κελί.

4.5 Ανεξαρτησία Πλέγματος

Τα πλέγματα κατασκευάστηκαν τηρούμενω των αναλογιών του Πίνακα 4.1. Συγκεκριμένα, δοκιμάστηκαν πλέγματα 36×36 , 72×72 , 144×144 , 288×288 , 324×324 και 396×396 . Για να διαπιστωθεί κατά πόσο η λύση είναι ανεξάρτητη του πλέγματος, έγινε σύγκριση των συνιστωσών της ταχύτητας W σε ύψος $Y=5 \text{ m}$. Το συγκεκριμένο σημείο επιλέχθηκε διότι είναι ένα δύσκολο σημείο, αρκετά κοντά στο βρόχο ανακυκλοφορίας. Όπως βλέπουμε στην Εικόνα 4.7, τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της ταχύτητας είναι ίδια σε όλα τα πλέγματα. Παρατηρούμε επίσης πως για πλέγματα πυκνότερα από το 144×144 , οι καμπύλες είναι σχεδόν πανομοιότυπες (απόκλιση μικρότερη από 3%), επομένως το τελικό πλέγμα που επιλέχθηκε είναι το 144×144 . Η ανεξαρτησία επιβεβαιώνεται και από την Εικόνα 4.8, όπου παρατηρείται πως το προφίλ του k σταθεροποιείται σε πλέγματα πυκνότερα από το 144×144 .



Εικόνα 4.7: Διάγραμμα ταχυτήτων για διαφορετικά πλέγματα στην περιοχή $Y=5$.



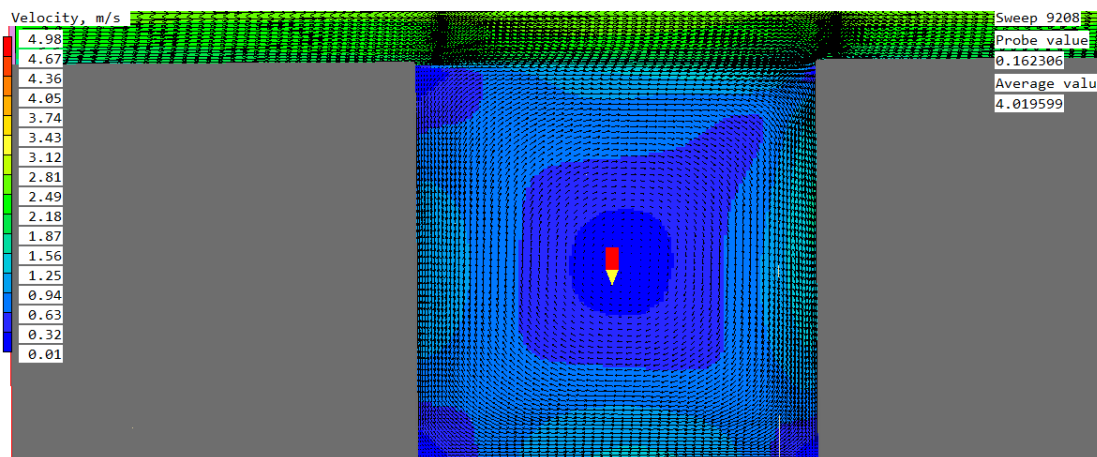
Εικόνα 4.8: Διάγραμμα k για διαφορετικά πλέγματα στην περιοχή $Y=5$.

4.6 Αποτελέσματα περίπτωσης αναφοράς

Στην περίπτωση αναφοράς υπενθυμίζεται πως χρησιμοποιήθηκε το πλέγμα 144x144 κελιών, με μοντέλο τύρβης το RNG k - ϵ . Ο λόγος που επιλέχθηκε το συγκεκριμένο μοντέλο είναι πως σύμφωνα με την εργασία του Κουτσοράκη (2006) εξάγει ρεαλιστικά αποτελέσματα, κοντά στα πραγματικά. Τα αποτελέσματα, καθώς και ο σχολιασμός τους περιγράφονται παρακάτω.

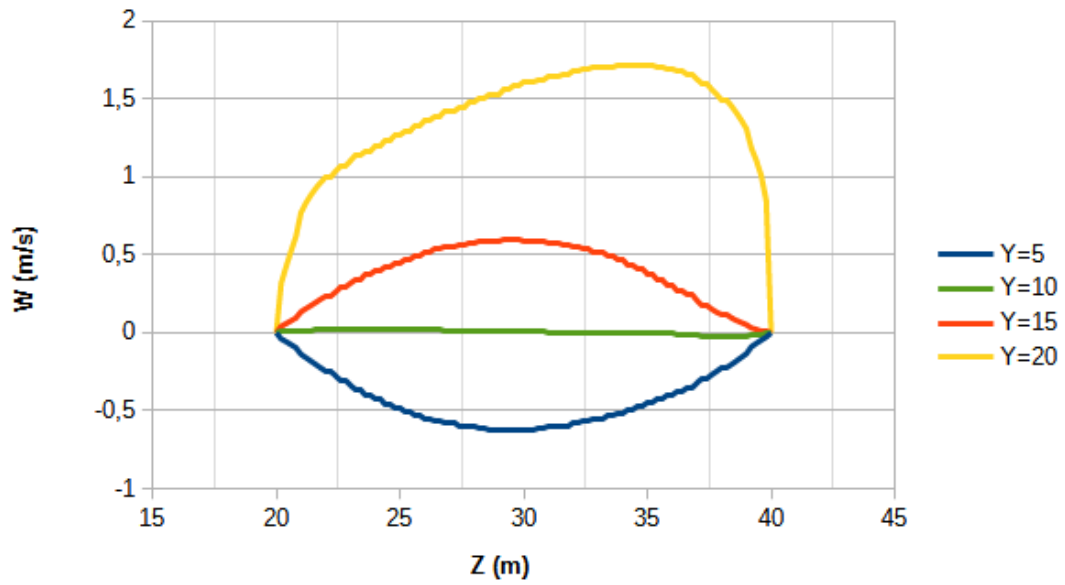
Πεδίο ταχύτητας

Στην Εικόνα 4.9 βλέπουμε τα contours του πεδίου ταχύτητας καθώς και τα διανύσματα της. Παρατηρείται πως ο βρόχος ανακυκλοφορίας δεν βρίσκεται ακριβώς στο κέντρο της χαράδρας, αλλά είναι μετατοπισμένως ελαφρώς προς τα δεξιά και πάνω. Επιπλέον, έχουν δημιουργηθεί δύο μικροί βρόχοι στην κάτω δεξιά και κάτω αριστερή γωνία. Οι ταχύτητες που επικρατούν στο εσωτερικό της χαράδρας κυμαίνονται από 0.5 έως 1 m/s.

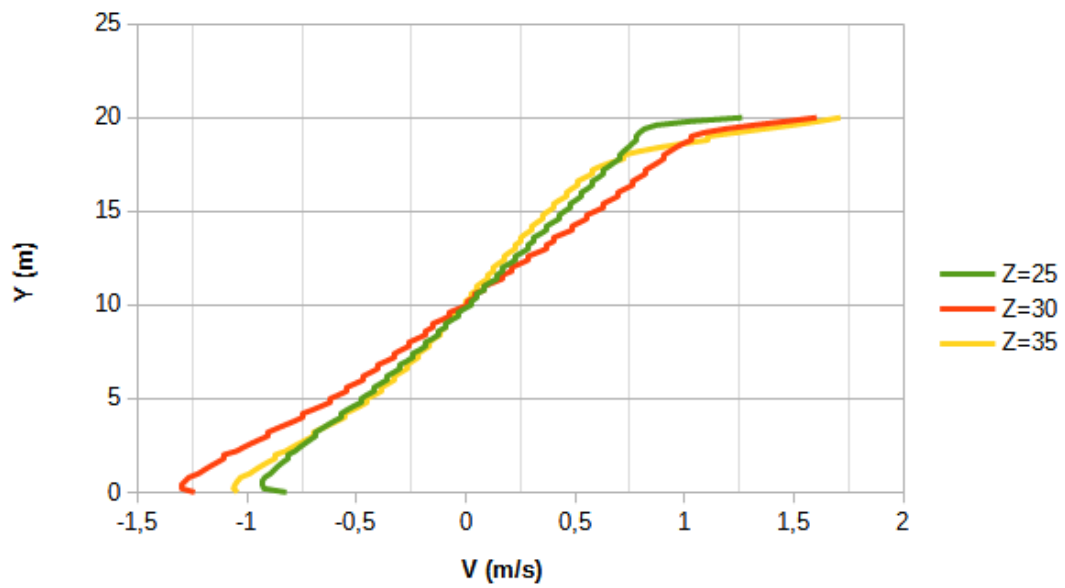


Εικόνα 4.9: Πεδίο ταχύτητας στην αστική χαράδρα.

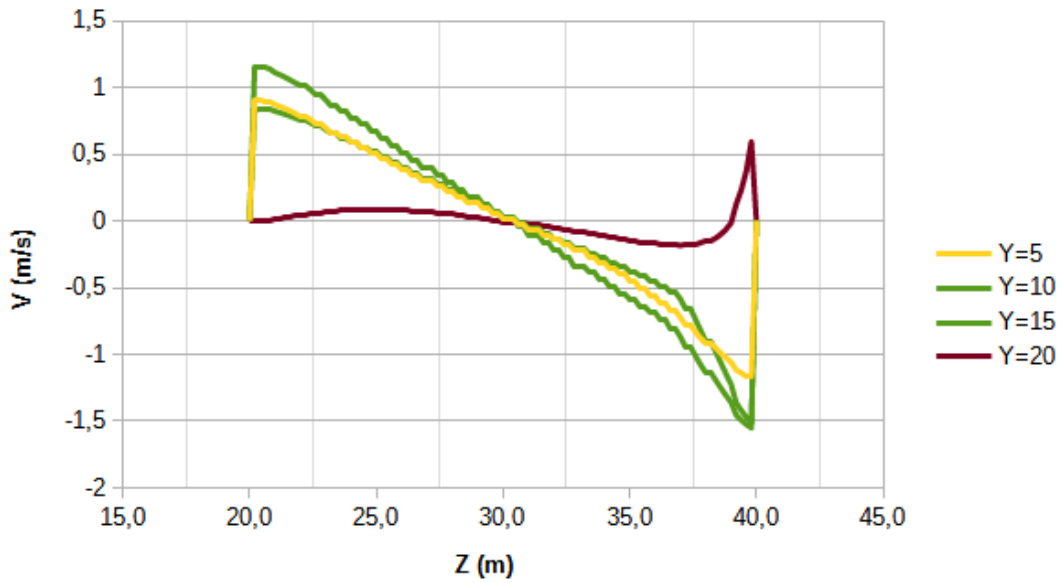
Απο τα διαγράμματα ταχυτήτων στις εικόνες 4.10 και 4.11 βλέπουμε ότι η ταχύτητα W από τη μέση και πάνω έχει φορά θετική, ενώ από τη μέση και κάτω φορά αρνητική. Στη μέση η ταχύτητα προσεγγίζει το μηδέν. Η ταχύτητα V (Εικόνες 4.12 και 4.13) στα διάφορα ύψη της χαράδρας επιβεβαιώνει την ύπαρξη του βρόχου ανακυκλοφορίας, όπου στο κέντρο παρατηρούνται χαμηλές ταχύτητες, ενώ στα άκρα αυξάνονται. Για τη W , οι μέγιστες ταχύτητες παρατηρούνται στο κέντρο, ενώ για τη V στα άκρα.



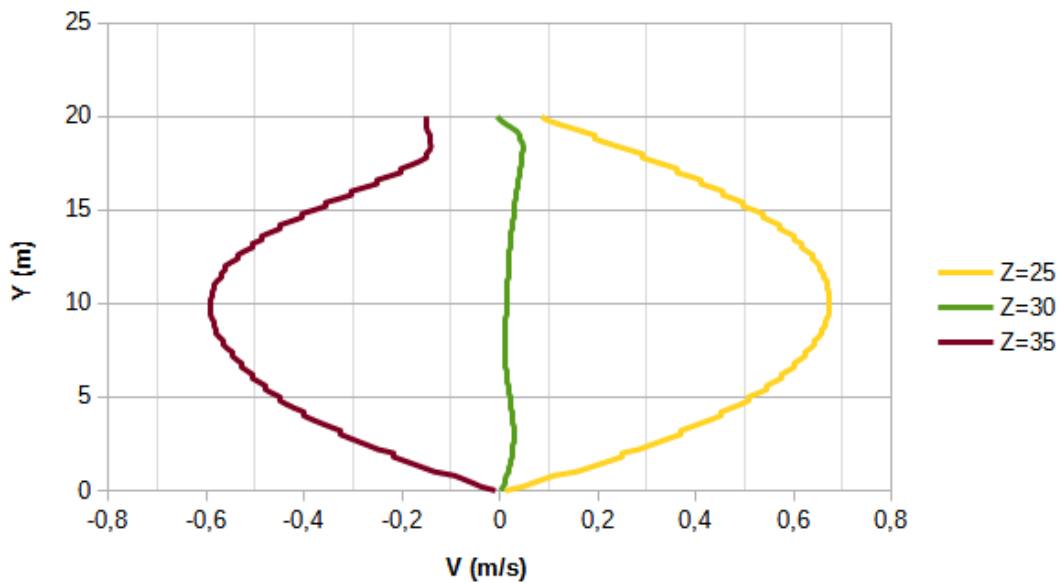
Εικόνα 4.10: Οριζόντια ταχύτητα W κατα πλάτος της οδικής χαράδρας.



Εικόνα 4.11: Οριζόντια ταχύτητα W καθ' ύψος της αστικής χαράδρας.



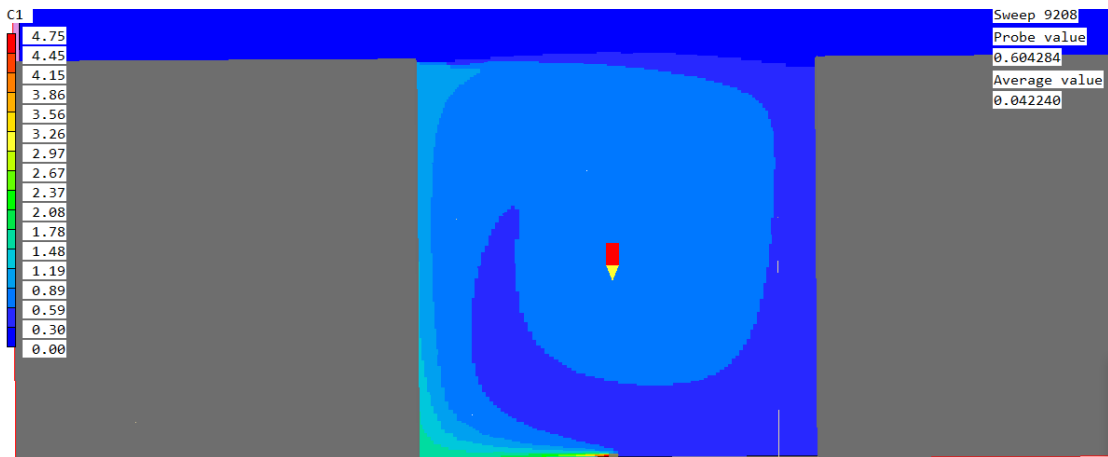
Εικόνα 4.12: Κάθετη ταχύτητα V κατά πλάτος της οδικής χαράδρας.



Εικόνα 4.13: Κάθετη ταχύτητα V καθ' ύψος της οδικής χαράδρας.

Συγκεντρώσεις ρύπων

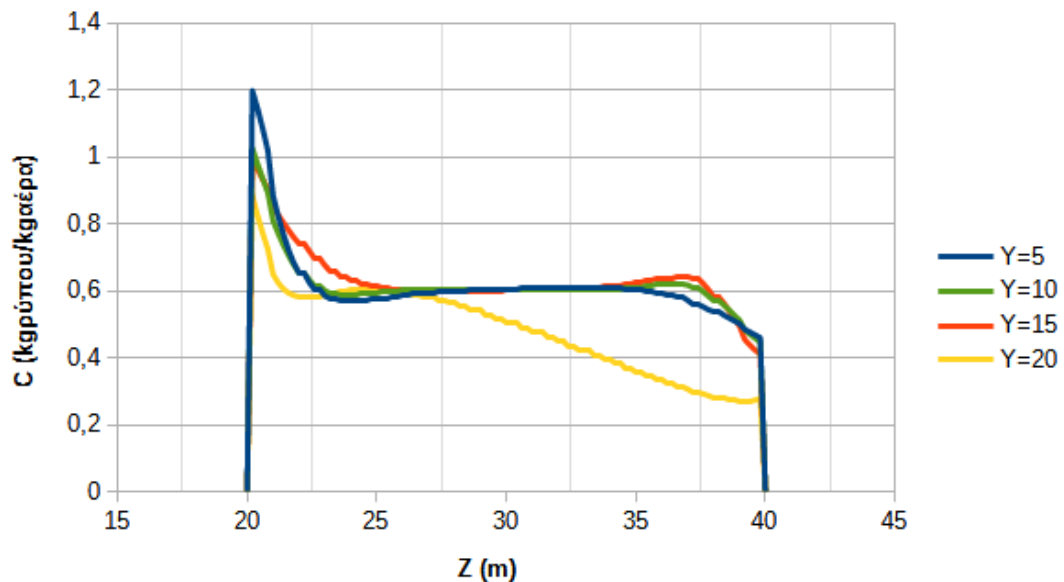
Όσον αφορά τα επίπεδα των συγκεντρώσεων ρύπων στην οδική χαράδρα, παρατηρείται πως ελάχιστη είναι η ποσότητα ρύπων που διαφεύγει από τη χαράδρα (Εικόνα 4.14). Επιπροσθέτως, παρατηρείται πως οι συγκεντρώσεις στην ανάντη πλευρά είναι πολύ μεγαλύτερες σε σχέση με την κατόντη. Στο κέντρο της χαράδρας παρατηρείται πως οι συγκεντρώσεις είναι σταθερές.



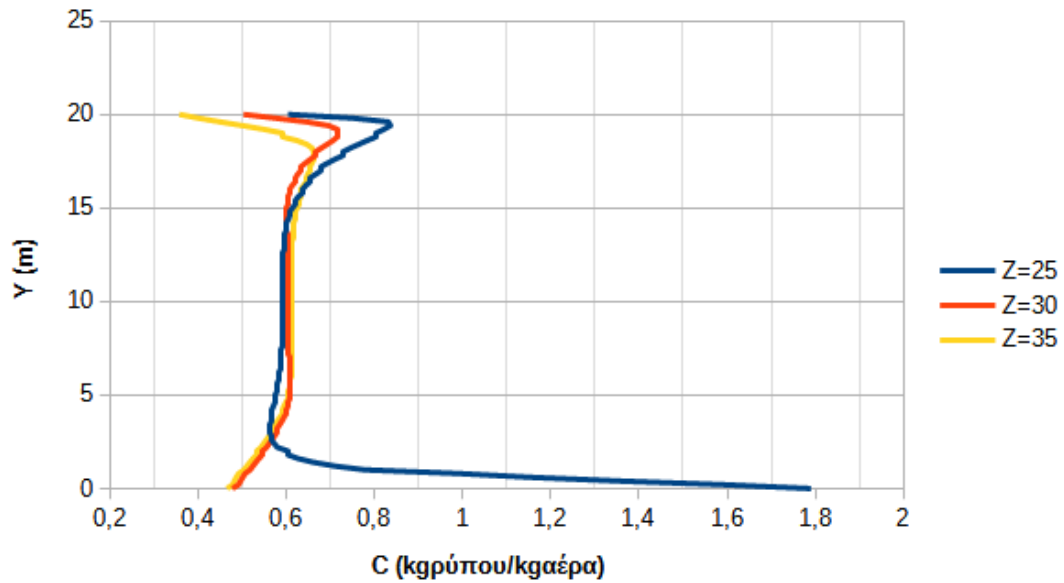
Εικόνα 4.14: Συγκεντρώσεις ρύπων στην αστική χαράδρα.

Σύμφωνα με τις Εικόνες 4.15 και 4.16, όπου απεικονίζονται τα διαγράμματα των συγκεντρώσεων κατα πλάτος και καθ' ύψος αντίστοιχα, παρατηρείται αρχικά ότι οι συγκεντρώσεις είναι σταθερές ανεξάρτητες του ύψους. Κοντά στα τοιχώματα παρουσιάζονται η μέγιστη (ανάτη πλευρά) και η ελάχιστη (κατάντη πλευρά) τιμή. Ακόμη, στην ανάτη πλευρά οι συγκεντρώσεις μειώνονται όσο αυξάνει το ύψος, ενώ το αντίθετο συμβαίνει στην κατάντη πλευρά.

Η κατανομή των συγκεντρώσεων καθ' ύψος επιβεβαιώνει την ύπαρξη καλής ανάμιξης στο κέντρο, αφού όπως και στο κατα πλάτος διάγραμμα, παρατηρούνται σταθερές τιμές.



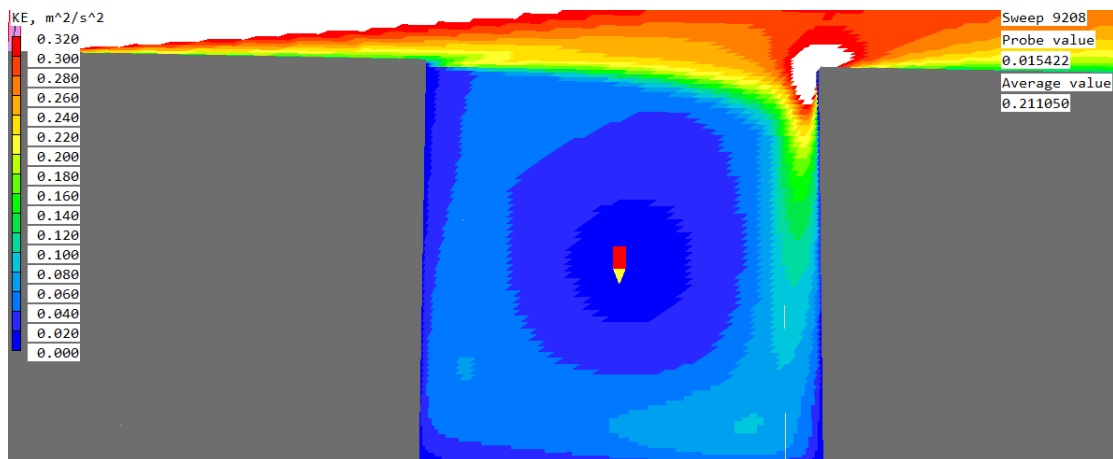
Εικόνα 4.15: Συγκεντρώσεις κατα πλάτος της οδικής χαράδρας.



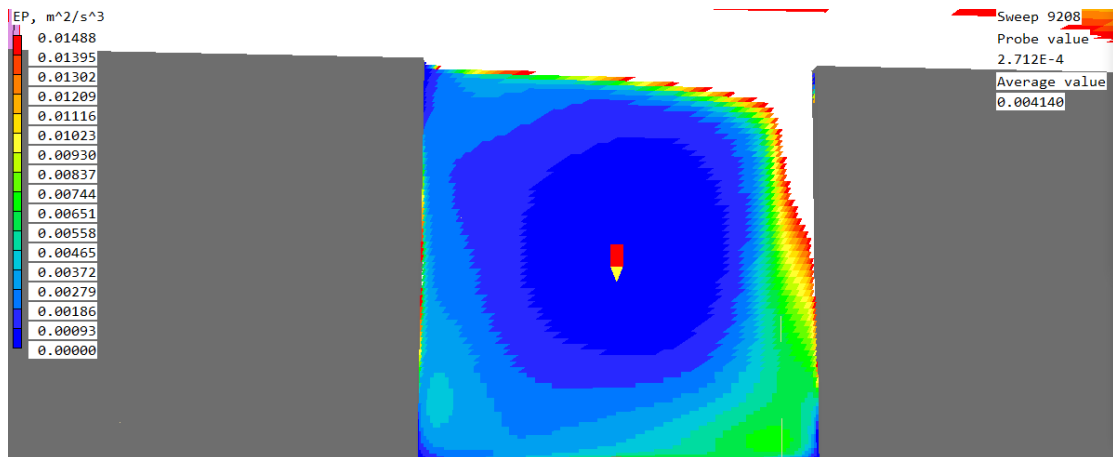
Εικόνα 4.16: Συγκεντρώσεις καθ' ύψος της οδικής χαράδρας.

Πεδίο k και ε

Η κινητική ενέργεια της τύρβης όπως παρατηρείται από την εικόνα 4.17, αντλεί ενέργεια από τη διάτμηση της ροής στο κατάντη κτίριο, ειδικά από την κορυφή. Επίσης, λόγω της αλλαγής κατεύθυνσης της ταχύτητας στη βάση του κατάντη κτιρίου αντλείται λίγη ακόμα ενέργεια. Αντιθέτως, στο ανάντη κτίριο εξασθενεί. Ο ρυθμός καταστροφής της τύρβης ακολουθεί μία αντίστοιχη πορεία με αυτήν του k (Εικόνα 4.18).



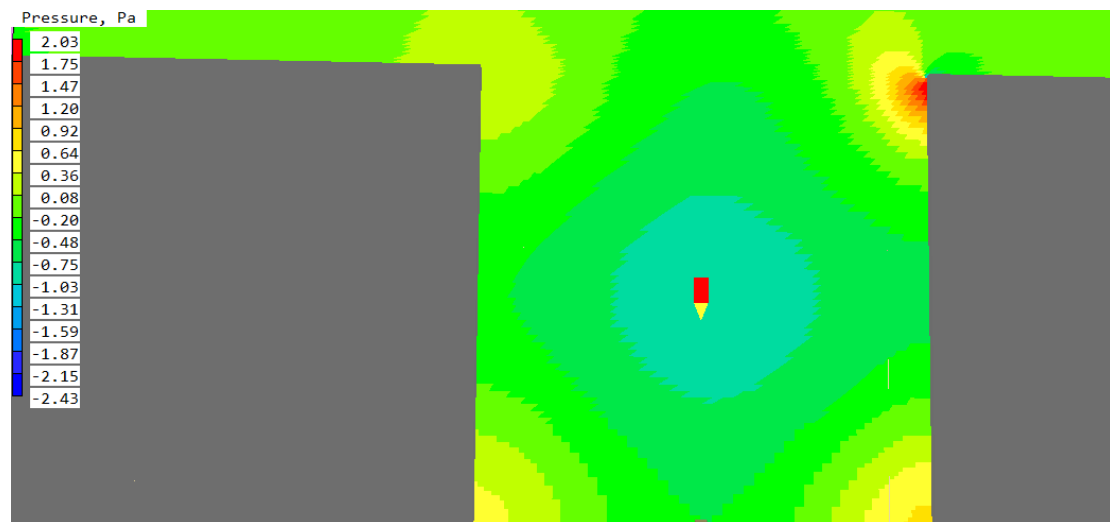
Εικόνα 4.17: Πεδίο k στην αστική χαράδρα.



Εικόνα 4.18: Πεδίο ϵ στην αστική χαράδρα.

Πεδίο πίεσης

Όσον αφορά το πεδίο πιέσεων, στο κέντρο υπάρχει περιοχή υποπίεσης ενώ οι γωνίες αποτελούν περιοχές υπερπίεσης. Αυτό που παρατηρείται εν γένει είναι πως οι πιέσεις στο ανάντη κτίριο είναι σαφώς μεγαλύτερες από τις πιέσεις στο κατόντη, πράγμα που δικαιολογείται και από τη δημιουργία του στροβίλου.



Εικόνα 4.19: Πεδίο πίεσης στην αστική χαράδρα.

4.7 Δοκιμή διαφορετικών μοντέλων τύρβης

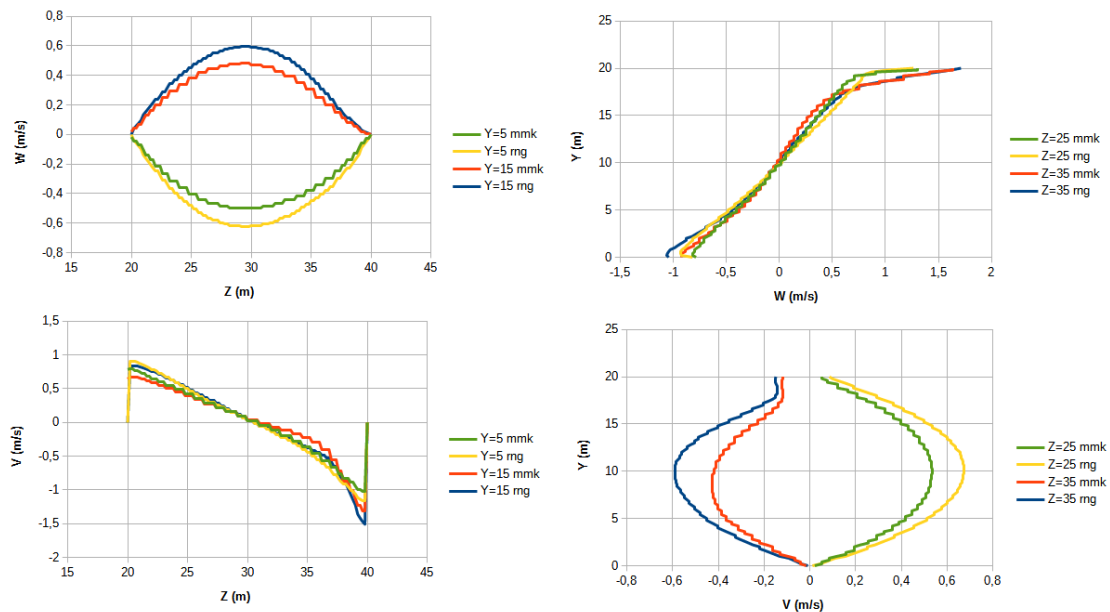
Στη συνέχεια της εργασίας, δοκιμάστηκαν διάφορα άλλα μοντέλα τύρβης και πραγματοποιήθηκε σύγκριση των αποτελεσμάτων με την περίπτωση αναφοράς

Μοντέλο Murakami $k-\epsilon$

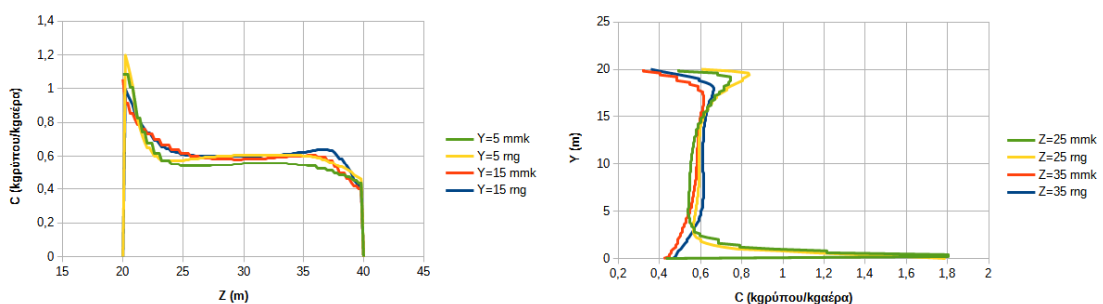
Το πεδίο ταχυτήτων του συγκεκριμένου μοντέλου απεικονίζεται στην Εικόνα 4.20. Όπως παρατηρείται, το σημείο που σχηματίζεται ο βρόχος ανακυκλοφορίας

μετατοπίζεται ελαφρώς προς τα δεξιά. Επίσης, η ταχύτητα (V και W) έχει μικρότερες τιμές, της τάξεως του 19,5 % για την W και 18.5 % για την V αντίστοιχα. Αυτό φανερώνεται από τα διαγράμματα της Εικόνας 4.20, όπου απεικονίζεται η σύγκριση των ταχυτήτων μεταξύ του RNG και του MMK μοντέλου σε διάφορα σημεία της χαράδρας. Όσον αφορά τα πεδία συγκεντρώσεων, παρατηρούνται τα ίδια φαινόμενα (οι συγκεντρώσεις στο κατόντη κτίριο είναι περισσότερες απ'ότι στο ανάντη) με τις συγκεντρώσεις του RNG μοντέλου εμφανίζονται αυξημένες κατά περίπου 18 % σε όλα τα σημεία μέτρησης (Εικόνες 4.20 και 4.21).

Διαγράμματα συγκεντρώσεων του MMK μοντέλου σε διάφορα σημεία.



Εικόνα 4.20: Διαγράμματα ταχυτήτων του MMK μοντέλου τύρβης σε διάφορες περιοχές.

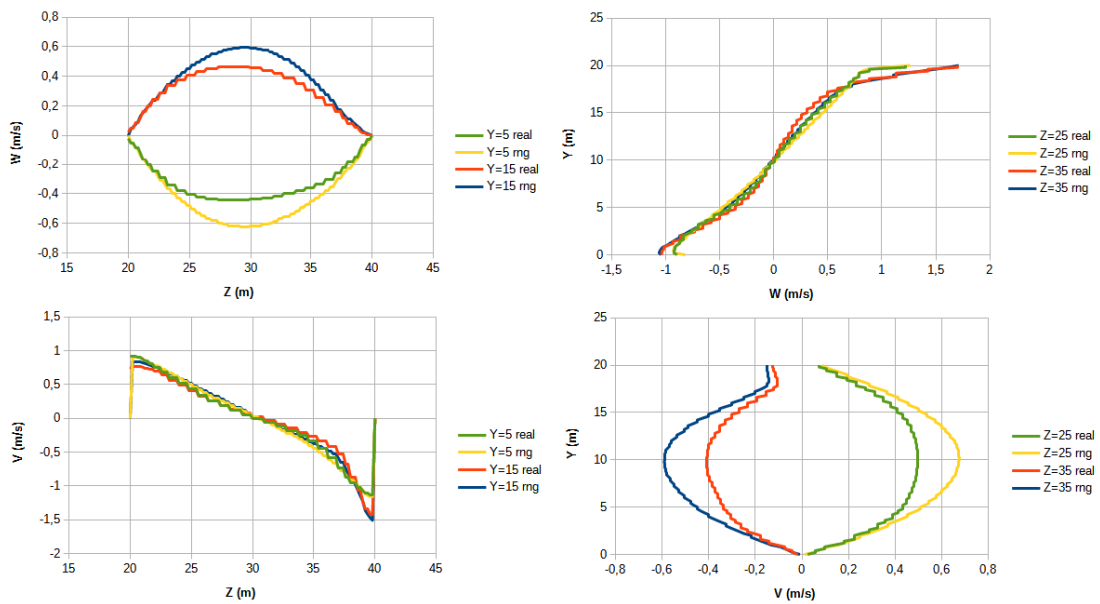


Εικόνα 4.21: Διαγράμματα συγκεντρώσεων του MMK μοντέλου σε διάφορες περιοχές.

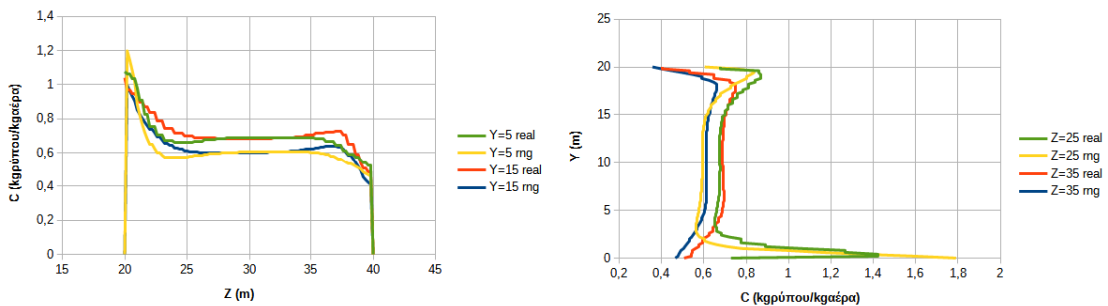
Μοντέλο τύρβης realisable k-ε

Στο συγκεκριμένο μοντέλο τύρβης οι τιμές του πεδίου ταχυτήτων παρουσιάζεται επίσης πιο μειωμένη σε σχέση με το RNG κατά περίπου 19 % (Εικόνα 4.22). Σχετικά

με το πεδίο συγκεντρώσεων, διαπιστώνεται πως οι υψηλές συγκεντρώσεις στο realizable $k-\epsilon$ βρίσκονται πιο μακριά από τους τοίχους των κατόντη και ανάντη κτιρίων σε σχέση με το RNG $k-\epsilon$ (Εικόνα 4.23).



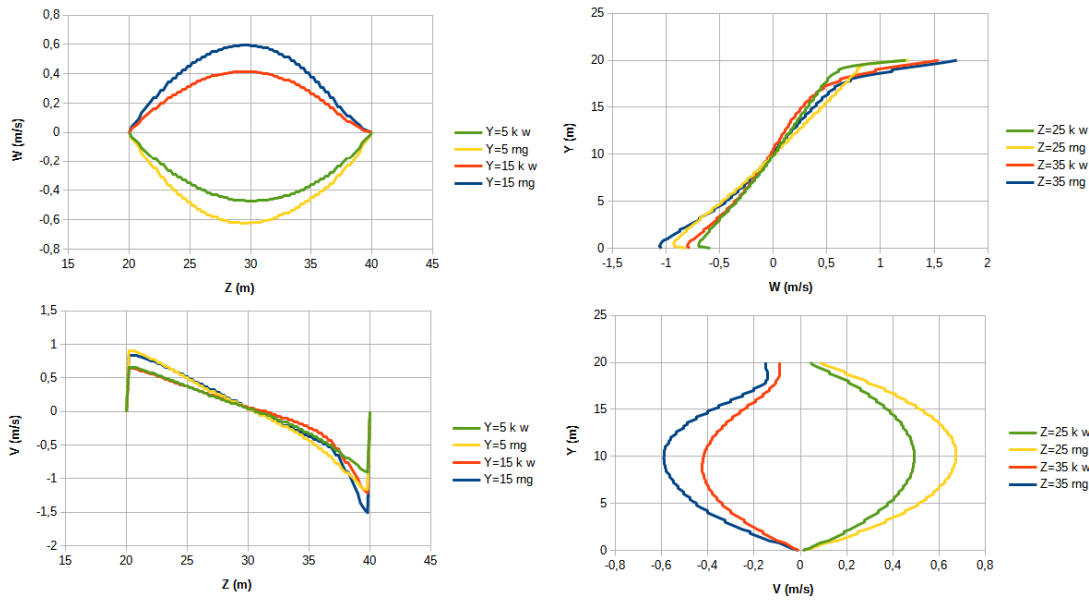
Εικόνα 4.22: Διαγράμματα σύγκρισης πεδίου ταχυτήτων RNG $k-\epsilon$ με realisable $k-\epsilon$ σε διάφορες περιοχές της οδικής χαράδρας.



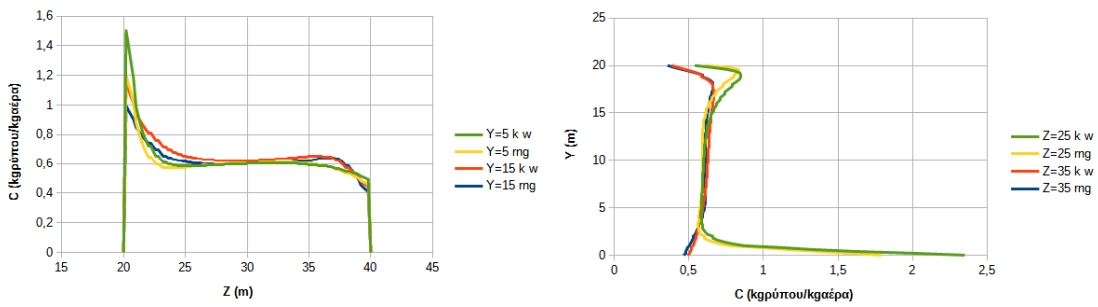
Εικόνα 4.23: Διαγράμματα σύγκρισης του πεδίου συγκεντρώσεων μεταξύ του RNG $k-\epsilon$ και του realizable $k-\epsilon$.

Μοντέλο τύρβης $k-\omega$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, πάλι η εκτίμηση του πεδίου ταχύτητας εμφανίζεται μειωμένη σε σχέση με το RNG $k-\epsilon$ κατά 23 % (Εικόνα 4.24). Στο πεδίο συγκεντρώσεων, εμφανίζεται έντονη συσσώρευση ρύπου κοντά στα τοιχώματα, ιδιαίτερα στην ανάντη πλευρά της αστικής χαράδρας (Εικόνα 4.25).



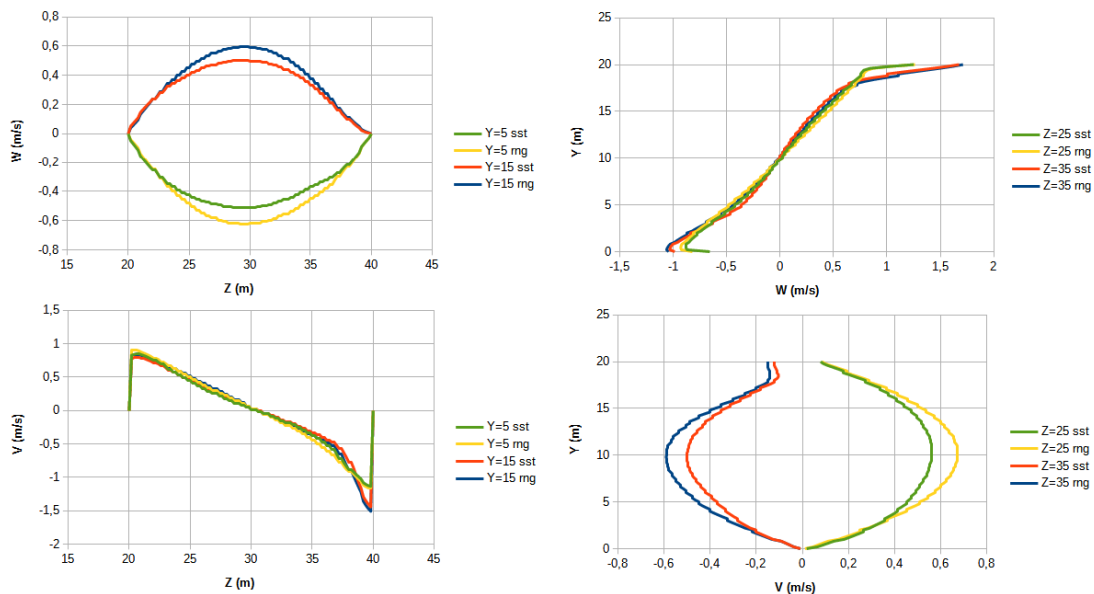
Εικόνα 4.24: Διαγράμματα σύγκρισης πεδίου ταχυτήτων RNG $k-\epsilon$ με realisable $k-\omega$ σε διάφορες περιοχές της οδικής χαράδρας.



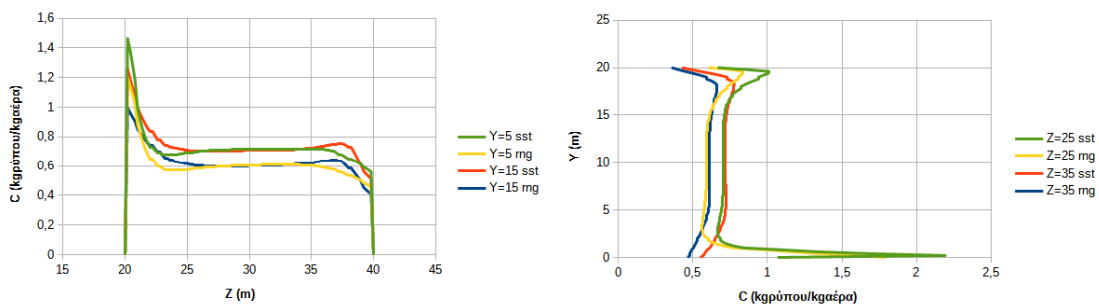
Εικόνα 4.25: Διαγράμματα σύγκρισης του πεδίου συγκεντρώσεων μεταξύ του RNG $k-\epsilon$ και του $k-\omega$.

Μοντέλο τύρβης $k-\omega$ sst

Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι αυτό στο οποίο οι τιμές των ταχυτήτων απέχουν λιγότερο από αυτές του RNG $k-\epsilon$ (12 % απόκλιση). Σχετικά με τις συγκεντρώσεις (Εικόνα 4.27), σε όλα τα σημεία εμφανίζονται αυξημένες κατά περίπου 17 %.



Εικόνα 4.26: Διαγράμματα σύγκρισης πεδίου ταχυτήτων RNG $k-\epsilon$ με $k-\omega$ sst σε διάφορες περιοχές της οδικής χαράδρας.

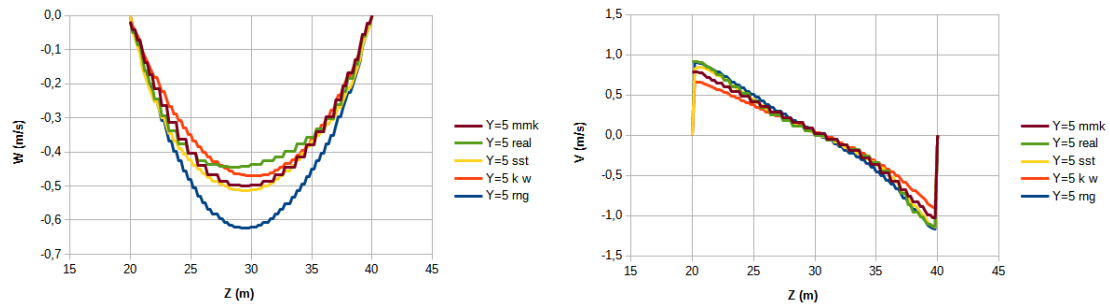


Εικόνα 4.27: Διαγράμματα σύγκρισης του πεδίου συγκεντρώσεων μεταξύ του RNG $k-\epsilon$ και του $k-\omega$ sst.

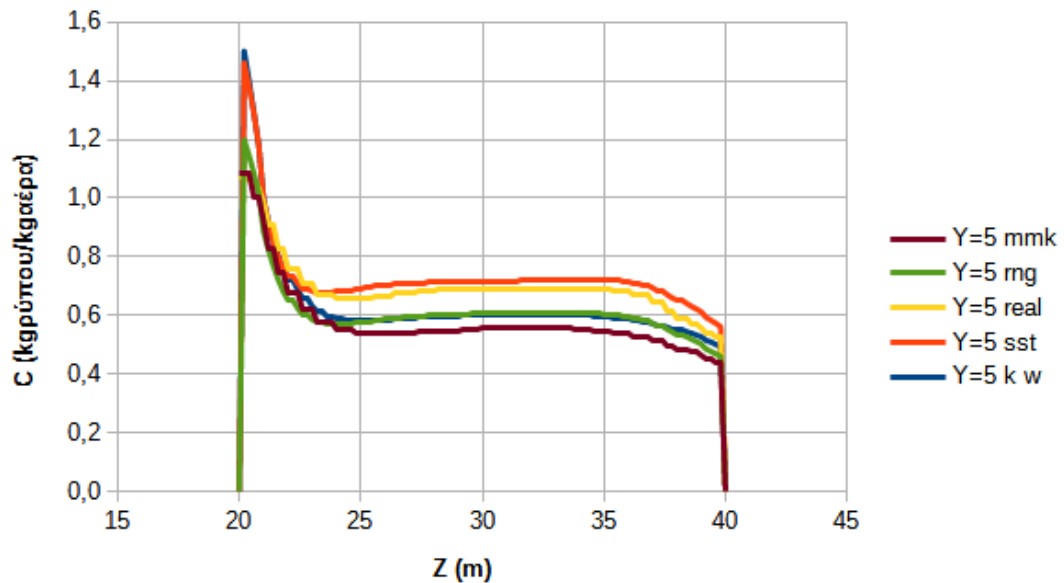
Σύγκριση όλων των μοντέλων τύρβης

Στο τελευταίο στάδιο, πραγματοποιήθηκε σύγκριση όλων των μοντέλων τύρβης στο επίπεδο $Y=5$. Όπως διαπιστώνεται και από την Εικόνα 4.28, υπάρχουν κάποιες διαφορές ως προς το ποιο σημείο σχηματίζεται το μέγιστο της κάθε καμπύλης (που υποδηλώνει ότι ο βρόχος ανακυκλοφορίας βρίσκεται σε διαφορετικό σημείο σε κάθε μοντέλο). Επιπροσθέτως, οι τιμές των ταχυτήτων διαφέρουν (ειδικά στο RNG $k-\epsilon$ μοντέλο) εκτός από αυτές των μοντέλων $k-\omega$ sst και Murakami $k-\epsilon$ των οποίων οι καμπύλες είναι σχεδόν πανομοιότυπες. Σχετικά με τις συγκεντρώσεις, προκύπτει το ίδιο μοτίβο (μέγιστες συγκεντρώσεις στο τοίχωμα του ανάντη κτιρίου), ωστόσο

ανάμεσα απο τα δύο κτίρια οι τιμές διαφέρουν, με τις μέγιστες τιμές να παρουσιάζονται στα μοντέλα $k-\omega$ sst και realizable $k-\varepsilon$ (Εικόνα 4.29).



Εικόνα 4.28: Διαγράμματα σύγκρισης πεδίου ταχυτήτων των μοντέλων τύρβης στο επίπεδο $Y=5$ της οδικής χαράδρας.



Εικόνα 4.29: Διάγραμμα σύγκρισης του πεδίου συγκεντρώσεων των μοντέλων τύρβης στο επίπεδο $Y=5$.

4.8 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε και αναλύθηκε η ροή καθώς και η διασπορά ρύπων που προκύπτουν απο τα αυτοκίνητα στο εσωτερικό μιας αστικής χαράδρας. Εν συνεχεία έγιναν δοκιμές με διαφορετικά μοντέλα τύρβης. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν δείχνουν πως με οποιοδήποτε μοντέλο τα φαινόμενα που προκύπτουν απο τις προσομοιώσεις είναι ποιοτικά παρόμοια. Ωστόσο, ανάλογα με το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται δημιουργούνται αποκλίσεις σχετικά με τις μέγιστες τιμές ρύπων, ταχύτητας κλπ. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως εάν ο σκοπός της έρευνας είναι η λεπτομερής, με ακριβή ποσοτικά στοιχεία μέτρηση των φαινομένων, τότε χρειάζεται

ιδιαίτερη προσοχή και λεπτομερή έλεγχο και σύγκριση των δεδομένων απο τη μεριά του ερευνητή καθώς υπάρχει ιδιαίτερος κίνδυνος τα δεδομένα αυτά να έχουν απόκλιση ενδεχομένως και μεγαλύτερη του 20 % απο τα πραγματικά δεδομένα.

Κεφάλαιο 5: Βιβλιογραφικές Αναφορές

Chan, T.L., Dong, G., Leung, C.W., Cheung, C.S., Hung, W.T., 2002. Validation of a two-dimensional pollutant dispersion model in an isolated street canyon. *Atmospheric Environment* 36, 861–872.

Chan, T.L., Dong, G., Leung, C.W., Cheung, C.S., Hung, W.T., 2002. Validation of a two-dimensional pollutant dispersion model in an isolated street canyon. *Atmospheric Environment* 36, 861–872.

Colvile, R.N., Hutchinson, E.J., Mindell, J.S., Warren, R.F., 2001. The transport sector as a source of air pollution. *Atmospheric Environment* 35, 1537–1565.

DePaul, F.T., Sheih, C.M., 1986. Measurements of wind velocities in a street canyon. *Atmospheric Environment* 20 (3), 455–459.

DePaul, F.T., Sheih, C.M., 1986. Measurements of wind velocities in a street canyon. *Atmospheric Environment* 20 (3), 455–459.

Garcia Sagrado, A.P., van Beeck, J., Rambaud, P., Olivari, D., 2002. Numerical and experimental modelling of pollutant dispersion in a street canyon. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 90, 321–339.

Georgii, H.W., Busch, E., Weber, E., 1967. Investigation of the temporal and spatial distribution of the emission concentration of carbon monoxide in Frankfurt. Main Report No. 11, Institute for Meteorology and Geophysics, University of Frankfurt (Translation No. 0477, NAPCA).

Hassan, A.A., Crowther, J.M., 1998b. Modelling of fluid flow and pollutant dispersion in a street canyon. *Environmental Monitoring and Assessment* 52, 281–297.

Hassan, A.A., Crowther, J.M., 1998b. Modelling of fluid flow and pollutant dispersion in a street canyon. *Environmental Monitoring and Assessment* 52, 281–297.

Hoydysh, W.G., Chiu H.H., 1971. An experimental and theoretical investigation of the dispersion of carbon monoxide in the urban complex. AIAA Paper No. 71-523, Urban Technology Conference, New York.

Hoydysh, W.G., Griffiths, R.A., Ogawa, Y., 1974. A scale model study of the dispersion of pollution in street canyons. APCA Paper No. 74-157, 67th Annual Meeting, Denver, Colorado.

-
- Huang, H., Akutsu, Y., Arai, M., Tamura, M., 2000. A two dimensional air quality model in an urban street canyon: evaluation and sensitivity analysis. *Atmospheric Environment* 34, 689–698.
- Hunter, L.J., Johnson, G.T., Watson, I.D., 1992. An investigation of three-dimensional characteristics of flow regimes within the urban canyon. *Atmospheric Environment* 26B, 425–432.
- Hunter, L.J., Johnson, G.T., Watson, I.D., 1992. An investigation of three-dimensional characteristics of flow regimes within the urban canyon. *Atmospheric Environment* 26B, 425–432.
- Kastner-Klein, P., Plate, E.J., 1999. Wind-tunnel study of concentration fields in street canyons. *Atmospheric Environment* 33, 3973–3979.
- Kennedy, I.M., Kent, J.H., 1977. Wind tunnel modelling of carbon monoxide dispersal in city streets. *Atmospheric Environment* 11, 541–547.
- Lauder, B.E., Spalding, D.B., 1974. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3, 269–289.
- Ludwig, F.L., Dabberdt, W.F., 1972. Evaluation of the APRAC–1A urban diffusion model for carbon monoxide. Final Report, Coordinating Research Council Contract CAPA–3–68 (1–69), Sunford Research Institute, California.
- Mayer, H., 1999. Air pollution in cities. *Atmospheric Environment* 33, 4029–4037.
- Nakamura, Y., Oke, T.R., 1988. Wind, temperature and stability conditions in an east–west oriented urban canyon. *Atmospheric Environment* 22, 2691–2700.
- Nakamura, Y., Oke, T.R., 1988. Wind, temperature and stability conditions in an east–west oriented urban canyon. *Atmospheric Environment* 22, 2691–2700.
- Nicholson, S.E., 1975. A pollution model for street-level air. *Atmospheric Environment* 9, 19–31.
- Oke, T.R., 1988. Street design and urban canopy layer climate. *Energy and Buildings* 11, 103–113.
- Schlichting, H., 1979. *Boundary–layer theory*. 7th edn, McGraw–Hill, New York.
- Shih, T.H., Liou, W.W., Shabbir, A., Zhu, J., 1995. A new eddy–viscosity model for high Reynolds numbers turbulent flows – model development and validation. *Computers Fluids* 24 (3), 227–238.
- Sini, J.–F., Anquetin, S., Mestayer, P.G., 1996. Pollutant dispersion and thermal effects in urban street canyons. *Atmospheric Environment* 30 (15), 2659–2677.

-
- Smith, L.M., Reynolds, W.C., 1992. On the Yakhot–Orszag renormalization group method for deriving turbulence statistics and models. *Physics of Fluids A* 4 (2), 364–390.
- Vardoulakis, S., Fisher, B.E.A., Pericleous, K., Gonzalez-Flesca, N., 2003. Modelling air quality in street canyons: a review. *Atmospheric Environment* 37, No. 2, 155–182.
- Venetsanos, A.G., Vlachogiannis, D., Papadopoulos, A., Andronopoulos, S., Bartzis, J.G., 2002. Studies of pollutant dispersion from moving vehicles. *Water Air and Soil Pollution: Focus* 2, 325–337.
- Wang, P.N., Chang, P.C., Lin, A., 1972. Circulation and diffusion of the separated flow in a rectangular trough. University of Utah Scientific Report for May 1970 to 30 April 1972, for US Environmental Protection Agency under grant AP 01126.
- Wedding, J.B., Lombardi, D.J., Cermak, J.E., 1977. A wind tunnel study of gaseous pollutants in city street canyons. *Journal of Air Pollution and Control Assessment* 27, 557–566.
- Wedding, J.B., Lombardi, D.J., Cermak, J.E., 1977. A wind tunnel study of gaseous pollutants in city street canyons. *Journal of Air Pollution and Control Assessment* 27, 557–566.
- Xie, S., Zhang, Y., Qi, L., Tang, X., 2003. Spatial distribution of traffic-related pollutant concentrations in street canyons. *Atmospheric Environment* 37, 3213–3224.
- Yakhot, V., Orszag, S.A., 1986. Renormalization Group Analysis of Turbulence. I. Basic Theory. *Journal of Scientific Computing* 1, No. 1, 3–51.
- Yakhot, V., Orszag, S.A., Thangam, S., Gatski, T.B., Speziale, C.G., 1992. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Physics of Fluids A* 4 (7), 1510–1520.
- Yakhot, V., Smith, L.M., 1992. The Renormalization Group, the ϵ -Expansion and Derivation of Turbulence Models. *Journal of Scientific Computing* 7, No. 1, 35–21.
- Αθανασιάδης, Ν. Μηχανική ρευστών. Εκδόσεις Συμεών, 1989.
- Βλαχονικολέας, Ι.-Κ., 2004. Υπολογιστική μελέτη της ροής ατμοσφαιρικού αέρα και της διασποράς αδρανών ρύπων σε οδική χαράδρα. Εφαρμογή του μοντέλου τύρβης RNG $k-\epsilon$. Διπλωματική εργασία Δ.Π.Μ.Σ. Υπολογιστικής Μηχανικής, Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.
- Γιαννάκογλου, Κ. Συνεκτικές ροές στις στροβιλομηχανές. Έκδοση ΕΜΠ, 1995.
- Κεφαλάς Δ. Εισαγωγή στον κώδικα PHOENICS. Μονάδα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής Ε.Μ.Π., Σχολή Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π. Αθήνα 2005.

Κουτσουνάκης Ν. Συμβολή στην εκτίμηση της επίδρασης της δύναμης Coriolis στην τύρβη για ροή μέσα από ακτινικές στροβιλομηχανές. Διπλωματική εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π. Αθήνα 1999.

Κουτσουνάκης Ν. Προσομοίωση Διασποράς Ρύπων σε δρόμο τύπου οδικής χαράδρας. Μεταπτυχιακή Εργασία. Σχολή Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π. Αθήνα 2006.

Μαρκάτος, Ν., Ασημακόπουλος, Δ. Υπολογιστική ρευστοδυναμική. Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1995.

Μαρκάτος, Ν. τυρβώδη φαινόμενα μεταφοράς και μαθηματικά πρότυπα προσομοίωσης τους. Ε.Μ.Π. Αθήνα 1998.

Μπεργελές, Γ. Υπολογιστική ρευστομηχανική. Εκδόσεις Συμεών.

Τσαγγάρης, Σ. Μηχανική των ρευστών. Εκδόσεις Συμεών, 2005.