



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΩΤΟΓΡΑΜΜΕΤΡΙΑΣ

## **Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων**

Διπλωματική εργασία

Άννα Μαρία Λιακοπούλου

Επιβλέπων καθηγητής

Ανδρέας Γεωργόπουλος

**ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2022**

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

### ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Γεωργόπουλο, για την υπομονή και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά τη διάρκεια της εργασίας.

Επιπλέον, ευχαριστώ όλους τους συγγενείς και φίλους που με στήριξαν, τόσο κατά τη διάρκεια της παρούσα εργασίας, αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια της φοίτησής μου.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, δημιουργήθηκε στο περιβάλλον της Python ένα πρόγραμμα εντοπισμού επιπέδων και ακμών ως τομής αυτών των επιπέδων. Βασική προϋπόθεση είναι να είναι γνωστός ο εξωτερικός προσανατολισμός τουλάχιστον δύο εικόνων.

Συγκεκριμένα, αρχικά εισάγονται στο AutoCad οι εικόνες με τις οποίες επιθυμεί να ασχοληθεί ο χρήστης και επιλέγονται πάνω σε κάθε εικόνα οι ακμές που πρόκειται να προσδιοριστούν, με τη βοήθεια δύο σημείων τους. Σε κάθε εικόνα, αντιστοιχεί και ένα .txt αρχείο, στο οποίο συμπληρώνονται οι εικονοσυντεταγμένες αυτές.

Ο αλγόριθμος διαβάζει ένα .txt αρχείο με τους προσανατολισμούς των εικόνων που χρησιμοποιεί ο χρήστης, καθώς επίσης και από ένα .txt αρχείο για κάθε εικόνα από αυτές, όπως αναφέρεται παραπάνω. Απαραίτητη προϋπόθεση για τη λειτουργία του αλγορίθμου, είναι η ζητούμενη ακμή να απεικονίζεται σε δύο τουλάχιστον εικόνες. Μέσω των κανόνων της αναλυτικής γεωμετρίας, προσδιορίζεται για την πρώτη εικόνα το επίπεδο στο οποίο ανήκει η ζητούμενη ακμή. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για την δεύτερη εικόνα, θα προκύψει και ένα δεύτερο επίπεδο. Ακολούθως η ακμή προκύπτει ως τομή των δύο (ή περισσότερων) επιπέδων. Ο αλγόριθμος είναι προγραμματισμένος να λειτουργεί με δύο έως τέσσερις εικόνες, συνεπώς θα προκύψουν δύο έως τέσσερα επίπεδα που θα περιέχουν την ακμή.

Κατά τη διαδικασία αυτή, είναι πιθανό οι παράμετροι που θα εισαχθούν στον αλγόριθμο να περιέχουν σφάλματα, είτε λόγω κακής ανάλυσης των εικόνων, είτε λόγω κακής παρατήρησης του χρήστη. Αυτό θα έχει αποτέλεσμα, η ακμή που υπολογίζεται από ένα ζεύγος επιπέδων, να μην ταυτίζεται με αυτή που θα προκύψει από κάποιο άλλο ζεύγος. Η καλύτερη ευθεία και συνεπώς η καλύτερη προσέγγιση της ζητούμενης ακμής, θα προκύψει τελικά εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο RANSAC στις γραμμές που προκύπτουν από την αλληλοτομία των παραπάνω επιπέδων μεταξύ τους.

## ABSTRACT

In the context of this thesis, a program was created in the Python environment to identify planes and edges as the intersection of these planes. The basic requirement is that the external orientation of at least two images must be known.

Specifically, first the images with which the user wishes to deal are imported into AutoCad and the edges to be identified are selected on each image, with the help of two of their points.

The algorithm reads a .txt file with the orientations of the images used by the user. As a prerequisite for the algorithm to work, the requested edge must be depicted in at least two images. Through the rules of analytic geometry, the plane to which the requested edge belongs is determined for the first image. By repeating the procedure for the second image, a second plane will be obtained. The edge is then obtained as the intersection of the two (or more) planes. The algorithm is programmed to work with two to four images, so two to four layers containing the edge will result.

During this process, it is possible that the parameters entered into the algorithm will contain errors, either due to poor image analysis or poor user observation. As a result, the edge calculated from one pair of layers will not be the same as the edge obtained from another pair. The best straight line, and therefore the best approximation of the requested edge, will eventually be obtained by applying the RANSAC algorithm to the lines resulting from the intersection of the above layers with each other.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	11
2.ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ .....	12
3.ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ.....	18
3.1.ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.....	18
3.1.1.ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ .....	18
3.1.2.ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ .....	18
3.1.3 ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ .....	23
3.1.4.ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΥΘΕΙΑΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ.....	24
3.1.5 ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.....	25
3.1.6.ΤΟΜΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ .....	25
3.2. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ .....	27
3.2.1. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ .....	27
3.2.2. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ .....	27
3.2.3. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΠΙΠΕΔΟ .....	28
3.3.ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΤΗΝ ΦΩΤΟΓΡΑΜΜΕΤΡΙΑ.....	29
3.3.1.ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ .....	29
3.3.2.ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ .....	29
3.3.3.Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΤΡΟΦΗΣ .....	30
3.3.4.Η ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ .....	31
3.3.5.Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ .....	32
4.ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ RANSAC .....	33
5.ΣΦΑΛΜΑΤΑ .....	38
5.1.ΕΙΔΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ .....	38
5.2 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕΛΕΤΗΣ .....	39
5.2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.....	39
5.2.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ.....	41
6.ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ .....	45
6.1. ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΕΙΣΟΔΟΥ .....	49
7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ .....	51
7.1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΑΠΟ ΔΥΟ ΕΙΚΟΝΕΣ.....	51
7.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΑΠΟ ΔΥΟ ΕΙΚΟΝΕΣ .....	54
8. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ .....	56

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

9.ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ..... 59

## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1: Πρακτική εφαρμογή του αλγορίθμου Bienert στην Frauenkirche.....	13
Εικόνα 2: Ανάλυση ιδιοτιμών για την εξαγωγή ακμών.....	14
Εικόνα 3:Επισκόπηση της μεθόδου των Lin Yangbin et. al.. (a) Αρχικό μη οργανωμένο νέφος σημείων. (b) Εικόνες από διαφορετική θέση με διακεκριμένες πληροφορίες ακμών. (c) Εξαγωγή 2D ευθυγράμμων τμημάτων από τις εικόνες. (d) Εφαρμογή LHSP αλγορίθμου. (e) Τα τελικά δεδομένα (Lin Yangbin et al).....	14
Εικόνα 4: (a) Νέφος σημείων. (b) Κατηγοριοποιημένο νέφος σημείων. (c) Ανίχνευση ακμών και ορίων. (d) Προσαρμογή γεωμετρικού μεγέθους. (e) Τελικό σημασιολογικό μοντέλο.....	15
Εικόνα 5: Αρχιτεκτονική του νευρωνικού δικτύου.....	16
Εικόνα 6: Απεικόνιση επιπέδου.....	19
Εικόνα 7: εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.....	21
Εικόνα 8: Απεικόνιση ευθείας.....	24
Εικόνα 9: Σύστημα συντεταγμένων σε επίγεια λήψη.....	29
Εικόνα 10: Κλίμακα εικόνας σε επίγεια λήψη με οριζόντιο άξονα.....	30
Εικόνα 11: Εικόνα με στροφές.....	31
Εικόνα 12:Επίλυση μοντέλου με Ransac.....	32
Εικόνα 13α: Εκτέλεση των βημάτων 1 και 2 του αλγορίθμου RANSAC για τον υπολογισμό του μαθηματικού μοντέλου ευθείας.....	34
Εικόνα 13β: Εκτέλεση του τρίτου βήματος του αλγορίθμου RANSAC για τον υπολογισμό του μαθηματικού μοντέλου ευθείας.....	35
Εικόνα 13γ: Εκτέλεση του τέταρτου βήματος του αλγορίθμου RANSAC για τον υπολογισμό του μαθηματικού μοντέλου ευθείας.....	35
Εικόνα 13δ: Εκτέλεση του τέταρτου βήματος του αλγορίθμου RANSAC για τον υπολογισμό του μαθηματικού μοντέλου ευθείας.....	36
Εικόνα 14: Σύνολο σημείων στο οποίο πρέπει να εφαρμοστεί μια γραμμή και υπολογισμός της βέλτιστης γραμμής με τη χρήση του αλγορίθμου RANSAC.....	36
Εικόνα 15: Αλγόριθμος RANSAC.....	37
Εικόνα 16: Διάγραμμα ροής RANSAC.....	38
Εικόνα 17: Απεικόνιση του επιπέδου $z=0$ .....	42
Εικόνα 18:Διαφορές γωνιών μεταξύ δυο επιπέδων.....	43
Εικόνα 19:Η γωνία στροφής ( $\epsilon$ ) είναι η γωνία με την οποία πρέπει να στραφούν δεξιόστροφα οι άξονες του συστήματος I για να γίνουν παράλληλοι με τους άξονες του συστήματος II.....	44
Εικόνα 20:Απεικόνιση του γραμμικού σφάλματος.....	45
Εικόνα 21: Εύρεση επιπέδου μέσω δύο σημείων της ακμής και του σημείου λήψης.....	46
Εικόνα 22: Αρχείο από το Photoscan με τα στοιχεία των εικόνων, συμβατό με το πρόγραμμα Bingo.....	50
Εικόνα 23: η εικόνα 4G0R6562.JPG με την ακμή που μελετάται και απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα.....	51
Εικόνα 24: η εικόνα 4G0R6561.JPG με την ακμή που μελετάται και απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα.....	52
Εικόνα 25: Γραφική απεικόνιση των γραμμών που προκύπτουν από δύο εικόνες.....	52
Εικόνα 26: Προσδιορισμός της 3D ακμής από δύο εικόνες.....	53
Εικόνα 27: Η ακμή που προκύπτει από δύο εικόνες (α) Αρχείο .txt της 3D ακμής (b) εικονική	

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

αναπαράσταση του αρχείου .dxf της ακμής.....	53
Εικόνα 28: η εικόνα 4G0R6560.JPG με την ακμή που μελετάται και απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα.....	54
Εικόνα 29: Γραφική απεικόνιση των γραμμών που προκύπτουν από τρεις εικόνες.....	55
Εικόνα 30:Αποτελέσματα εφαρμογής αλγορίθμου RANSAC, inliers και outliers σημεία.....	55
Εικόνα 31: Αποτελέσματα εφαρμογής αλγορίθμου RANSAC.....	56
Εικόνα 32: εικονική αναπαράσταση του αρχείου .dxf της ακμής που προκύπτει από τρία επίπεδα.....	56



**ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΑΚΡΩΝΥΜΙΩΝ**

Ε.Μ.Π.: Εθνικό μετσόβιο Πολυτεχνείο

URL: Uniform Resource Locator

MB: Mega Byte

GB: Giga Byte

RAM : Random Access Memory

DXF : Drawing Exchange Format

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα από τα ζητήματα τα οποία απασχολούν τη φωτογραμμετρία, είναι η γεωμετρική τεκμηρίωση αντικειμένων, κτηρίων και μνημείων πολιτιστικής κληρονομιάς. Αποτέλεσμα της γεωμετρικής τεκμηρίωσης, αποτελούν, μεταξύ άλλων, τα γραμμικά ή διανυσματικά δισδιάστατα σχέδια.

Το αντικείμενο που πραγματεύεται η παρούσα εργασία, είναι αρχικά ο υπολογισμός των παραμέτρων του επιπέδου που δημιουργείται από μια ακμή η οποία έχει προκύψει από παρατήρηση επί προσανατολισμένων εικόνων στο χώρο και το σημείο λήψης της εκάστοτε εικόνας. Απώτερος σκοπός της μελέτης, είναι η εξαγωγή της τρισδιάστατης ακμής σε μορφή τέτοια που να εξυπηρετεί την δημιουργία ενός γραμμικού σχεδίου ή τμήματος αυτού, που θα απεικονίζει το αντικείμενο που μελετάται κάθε φορά.

Για την επίλυση αυτού του προβλήματος, δημιουργήθηκε στο περιβάλλον της Python ένας αλγόριθμος, του οποίου τα δεδομένα εισόδου είναι οι εικονοσυντεταγμένες δύο σημείων που περιγράφουν μια ακμή σε τουλάχιστον δύο εικόνες και ο εξωτερικός προσανατολισμός των εικόνων στις οποίες παρατηρείται η ακμή. Βασική προϋπόθεση για τη λειτουργία του αλγορίθμου, είναι η ακμή να απεικονίζεται σε τουλάχιστον δύο εικόνες. Η ανίχνευση των ακμών γίνεται παρατηρώντας την εικόνα και ερμηνεύεται ως περιοχές αριστερά και δεξιά των οποίων παρατηρείται διαφορά στη φωτεινότητα ή την υφή. Παράγωγο της εργασίας είναι ένα αρχείο, το οποίο περιέχει τις παραμέτρους της ευθείας σε διανυσματική μορφή, έτσι ώστε να είναι δυνατή η εισαγωγή τους σε ένα σχεδιαστικό πρόγραμμα.

Αρχικά αναφέρονται προσπάθειες και εφαρμογές που έχουν γίνει από άλλους μελετητές πάνω στον προσδιορισμό διανυσματικών ακμών. Στη συνέχεια, περιγράφεται αναλυτικά το θεωρητικό υπόβαθρο που χρησιμοποιήθηκε για την εργασία, οι κανόνες της αναλυτικής γεωμετρίας, της φωτογραμμετρίας και τα απαραίτητα συστήματα αναφοράς. Κατόπιν, αναλύεται ο αλγόριθμος βήμα προς βήμα και παρουσιάζονται και αξιολογούνται τα αποτελέσματα.

## 2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Η μελέτη των εικόνων και των πληροφοριών που μπορούν να εξαχθούν από αυτές, αποτελεί σημαντικό και αναπόσπαστο τμήμα της όρασης υπολογιστών και η πρόοδος της τεχνολογίας και η αύξηση της υπολογιστικής ισχύος, βοηθούν σημαντικά στην ανάπτυξή της. Βασικό χαρακτηριστικό των εικόνων είναι οι ακμές, αφού αποτελούν τα όρια μεταξύ διάφορων περιοχών και αντικειμένων που αποτελούν την εικόνα. Η εξαγωγή ακμών από εικόνες και νέφη σημείων, είναι καίριας σημασίας εφαρμογή για την γεωμετρική τεκμηρίωση αντικειμένων και μνημείων πολιτιστικής κληρονομιάς. Συνεπώς, είναι σημαντικό η εφαρμογή αυτή να γίνει με ακρίβεια, καθώς από αυτήν εξαρτάται τόσο η ορθότητα του αποτελέσματος της εκάστοτε μελέτης, όσο και η ορθή ερμηνεία των στοιχείων που αποτελούν την εικόνα.

Για την ανίχνευση των ακμών και τη μελέτη τους ως διανύσματα, απαιτείται οι ακμές να είναι ορατές σε διάφορες εικόνες, ώστε να εντοπιστούν στο 2D επίπεδο της εικόνας και να αναχθούν στον 3D χώρο, διαφορετικά είναι απαραίτητη η χρήση ενός νέφους σημείων, του οποίου η λήψη γίνεται είτε μέσω κάποιου επίγειου σαρωτή, είτε με τη χρήση διαδικασιών SFM/MVS. Οι βασικές μέθοδοι ανίχνευσης ακμών, χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες: τις άμεσες και τις έμμεσες μεθόδους.

- Στις άμεσες μεθόδους, ανήκουν οι μέθοδοι που εφαρμόζονται σε περιπτώσεις που δεν υπάρχει διαθεσιμότητα εικόνων και οι υπολογισμοί γίνονται σε ένα νέφος σημείων
- Στις έμμεσες μεθόδους, αντίθετα, για να εξαχθεί μια 3D ακμή, θα πρέπει πρώτα να έχει εντοπιστεί σε τουλάχιστον μια εικόνα και έπειτα, από την δισδιάστατη ακμή να προκύψει το διάνυσμα της ακμής στο χώρο.

Η ύπαρξη διαφορετικών μεθόδων ανίχνευσης ακμών κατά τη μελέτη μη οργανωμένων νεφών σημείων και εικόνων ή οργανωμένων νεφών σημείων είναι αναγκαία, για διάφορους λόγους:

Αρχικά, μια εικόνα αποτελεί ένα οργανωμένο νέφος σημείων και θεωρείται ένας πίνακας σημείων, ενώ αντίθετα ένα νέφος σημείων είναι ένα διάσπαρτο σύνολο σημείων, χωρίς κάποια δομή και οργάνωση. Συνεπώς, δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν οι ίδιες τακτικές εξαγωγής ακμών σε ένα οργανωμένο και σε ένα μη οργανωμένο νέφος σημείων.

Επιπλέον, ένα νέφος σημείων παράγει διαφορετική πληροφορία από μια εικόνα. Παρατηρώντας μια εικόνα, μπορεί κανείς να δει εναλλαγές οι οποίες είναι εμφανείς στο μάτι και αλλαγές τις οποίες μαθαίνει να ερμηνεύει κανείς, ενώ οι εικόνες είναι ιδανικές για τη δημιουργία και ταξινόμηση κλάσεων. Αντίθετα ένα νέφος σημείων, παρέχει πολύ περισσότερη χωρική πληροφορία και ο χρήστης αποκτά μια σφαιρικότερη άποψη για τη γεωμετρία του χώρου που περιγράφει το 3D νέφος σημείων.

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

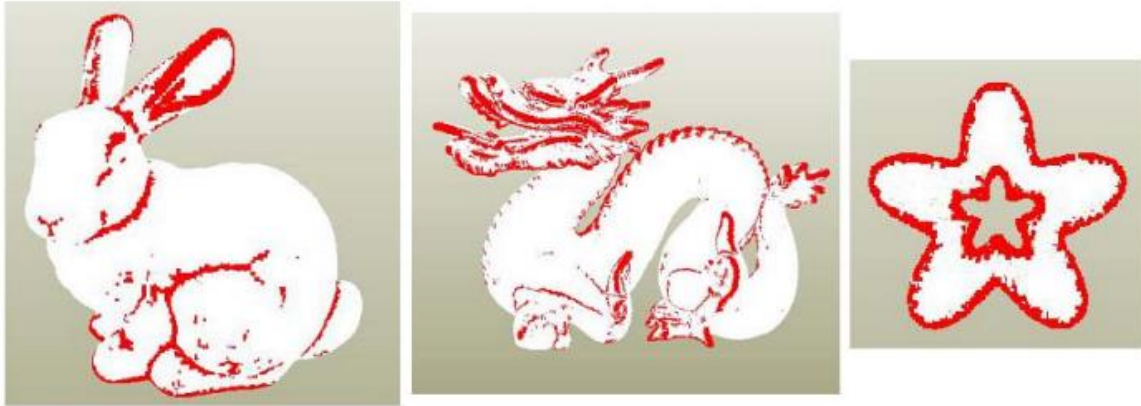
Σημαντικές έρευνες που αξίζει να μνημονευτούν και που σχετίζονται με την παρούσα εργασία, αναφέρονται στη συνέχεια με χρονολογική σειρά:

Η Bienert (2008), χρησιμοποίησε ένα νέφος σημείων το οποίο προέρχεται από laser scanner. Από το νέφος αυτό, απομακρύνεται ο θόρυβος και στη συνέχεια τέμνεται με διάφορα επίπεδα συγκεκριμένου πάχους- οριζόντια, κατακόρυφα ή και τυχαία. Στα σημεία της τομής, προσαρμόζεται μια γραμμή ή ένα τόξο και κατηγοριοποιούνται σε σημεία κλειδιά, γραμμές και τόξα.



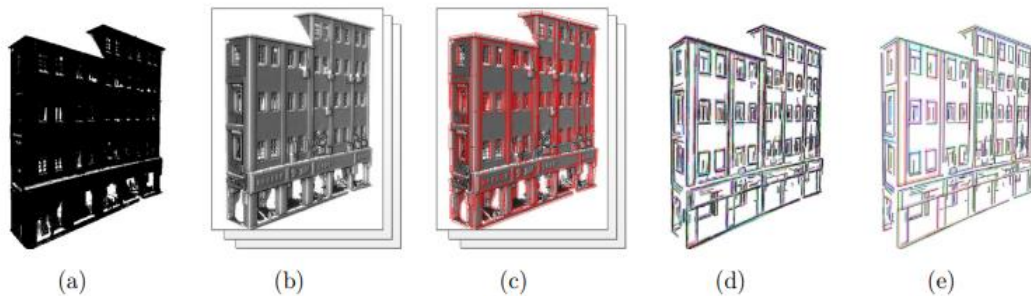
Εικόνα 1: Πρακτική εφαρμογή του αλγορίθμου στην Frauenkirche. Αριστερά το μνημείο στη Δρέσδη, δεξιά μια οριζόντια τομή (Bienert, 2008)

Οι Bazazian et al. (2015), παρουσίασαν μια άμεση μέθοδο ανίχνευσης ακμών, η οποία χρησιμοποιεί τον πίνακα μεταβλητότητας- συμμεταβλητότητας, τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές τους. Εφαρμόζεται πάνω στα νέφη σημείων και για κάθε σημείο «τρέχει» ο αλγόριθμος KNNs (K-Nearest-Neighbours). Με τη χρήση των ελαχίστων τετραγώνων, προσαρμόζεται στη «γειτονιά» που προκύπτει από τον αλγόριθμο KNNs ένα επίπεδο και το διάνυσμά του. Τέλος, με τη χρήση της συνάρτησης επιφανειακής μεταβολής, διαχωρίζονται τα σημεία που ανήκουν σε γραμμές από εκείνα που ανήκουν σε επίπεδα.



Εικόνα 2: Ανάλυση ιδιοτιμών για την εξαγωγή ακμών (Bazazian et. al.)

Οι Lin Yangbin et al. (2015), για την εξαγωγή των τρισδιάστατων ακμών αξιοποίησαν τις τομές επιπέδων. Η μέθοδός τους καλείται “Line-Segment-Half-Planes” (LSHP). Ως δεδομένα εισόδου χρησιμοποιείται ένα νέφος σημείων, που προβάλλεται σε διάφορα επίπεδα δημιουργώντας εικόνες από διαφορετική θέση. Στην συνέχεια εκτελείται ο αλγόριθμος LSD ο οποίος εντοπίζει ευθύγραμμα τμήματα πάνω στις παραχθείσες εικόνες. Έπειτα, ο αλγόριθμος LSHP απορρίπτει τις λανθασμένες ακμές και θέτει γεωμετρικούς περιορισμούς για κάθε ακμή. Κατόπιν τα ευθύγραμμα τμήματα προβάλλονται στον τρισδιάστατο χώρο σε σχήμα V και εντοπίζονται δύο μη παράλληλα επίπεδα στα οποία ανήκουν τα σημεία που προβάλλονται. Τέλος, η τομή των δύο αυτών επιπέδων, αποτελεί τα τελικά ευθύγραμμα τμήματα.



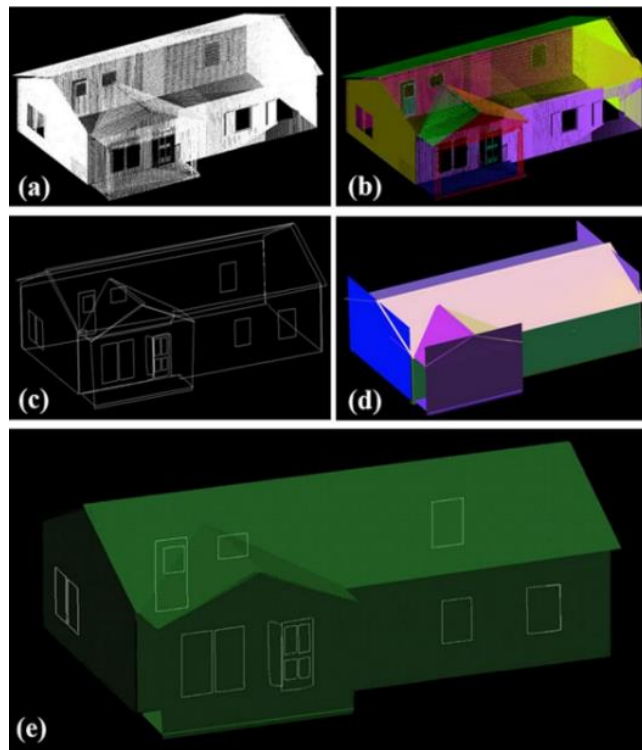
Εικόνα 3: Επισκόπηση της μεθόδου των Lin Yangbin et al. (a) Αρχικό μη οργανωμένο νέφος σημείων. (b) Εικόνες από διαφορετική θέση με διακεκριμένες πληροφορίες ακμών. (c) Εξαγωγή 2D ευθυγράμμων τμημάτων από τις εικόνες. (d) Εφαρμογή LHSP αλγορίθμου. (e) Τα τελικά δεδομένα (Lin Yangbin et al)

Οι Wang e. al. (2015) ανέπτυξαν μια αυτοματοποιημένη μέθοδο στην οποία δεδομένα εισόδου είναι νέφη σημείων από τα οποία απομακρύνεται ο θόρυβος. Σε αυτά τα νέφη σημείων, εφαρμόζεται ένας αλγόριθμος κατάτμησης και ανίχνευσης ορίων, με αποτέλεσμα τον διαχωρισμό του αρχικού νέφους σημείων σε μικρότερα κατηγοριοποιημένα νέφη, όπου πλέον

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

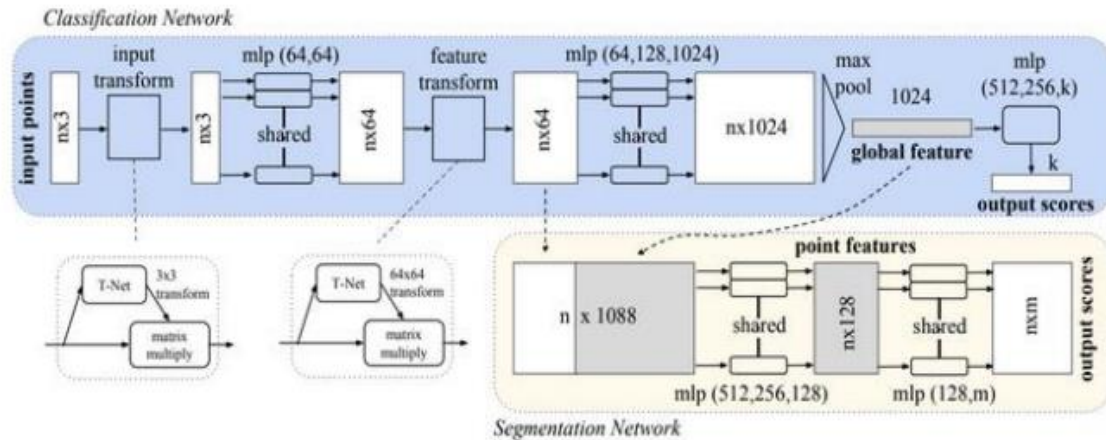
### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

τα στοιχεία αναγνωρίζονται ως μεμονωμένα αντικείμενα και απεικονίζονται ως πολύγωνα. Έπειτα αυτά χρησιμοποιούνται για την δημιουργία τρισδιάστατων γεωμετρικών μοντέλων, από τα οποία τελικά προκύπτουν οι ακμές στον 3D χώρο.



Εικόνα 4: (a) Νέφος σημείων. (b) Κατηγοριοποιημένο νέφος σημείων. (c) Ανίχνευση ακμών και ορίων. (d) Προσαρμογή γεωμετρικού μεγέθους. (e) Τελικό σημασιολογικό μοντέλο (Wang et al.)

Οι Qi et al. (2017) δημιούργησαν ένα νευρωνικό δίκτυο, στο οποίο εισάγεται ένα μη ταξινομημένο νέφος σημείων και το νευρωνικό δίκτυο το επιστρέφει ταξινομημένο σε ομάδες. Για να γίνει αυτό, για κάθε σημείο, προσδιορίζεται μια τιμή δείκτη και δημιουργείται ένα αραιό νέφος σημείων, το οποίο περιέχει τα κρίσιμα σημεία του μοντέλου, τα χαρακτηριστικά δηλαδή σημεία του νέφους που αποτελούν τον σκελετό του μοντέλου. Στη συνέχεια, το βασικό τμήμα του νευρωνικού δικτύου πραγματοποιεί ταξινόμηση του νέφους και ένα δεύτερο μέρος του πραγματοποιεί την κατάτμησή του, επιστρέφοντας έτσι ένα ταξινομημένο σε ομάδες νέφος σημείων.



Εικόνα 5: Αρχιτεκτονική του νευρωνικού δικτύου (Qi et al.)

Η Μητροπούλου (2017) και Mitropoulou & Georgoroulos (2019), έχοντας ως δεδομένα νέφη σημείων, ανέπτυξε έναν αλγόριθμο εντοπισμού επιπέδων στο νέφος, προσδιόρισε τις εξισώσεις των επιπέδων αυτών και μέσω της τομής των επιπέδων ανά δύο κατέληξε στον προσδιορισμό της τρισδιάστατης τομής τους και στην διανυσματοποίηση της ακμής.

Οι Χίασθη Lu et al. (2019) δημιούργησαν μια μέθοδο εξαγωγής 3D ακμών από μη οργανωμένα νέφη σημείων. Αρχικά το νέφος σημείων χωρίζεται σε μικρότερα νέφη χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο KNN. Στα σύνολα αυτά προσαρμόζεται ένα επίπεδο και υπολογίζεται το κάθετό του διάνυσμα. Έπειτα υπολογίζεται ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας καθώς και οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του, για κάθε υποσύνολο σημείων. Από αυτά υπολογίζονται τέσσερις χαρακτηριστικές τιμές για κάθε περιοχή. Στη συνέχεια, πραγματοποιείται μια επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία ξεκινώντας με ένα αρχικό σημείο και τη γειτονιά-περιοχή του, ελέγχονται τα σημεία που εντάσσονται σε αυτή, κατά πόσον ικανοποιούν κάποια κριτήρια. Στην περίπτωση που τα ικανοποιούν ενσωματώνονται στην εκάστοτε δημιουργούμενη περιοχή. Αν οι τελικές αναπτυγμένες περιοχές περιγράφουν το ίδιο επίπεδο, ενώνονται. Αφού τα επίπεδα συγχωνευτούν, όλα τα σημεία που ανήκουν σε κάποιο επίπεδο, προβάλλονται στο ίδιο το επίπεδο, δημιουργώντας έτσι μια 2D εικόνα, από όπου σε συνδυασμό με τις ιδιοτιμές που αναφέρονται παραπάνω προκύπτουν τα 2D ευθύγραμμα τμήματα που αντιπροσωπεύουν τις ακμές. Στη συνέχεια, αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα του 2D χώρου που προέκυψαν από την εικόνα, προβάλλονται εκ νέου στο 3D επίπεδο, ώστε να προκύψουν τα στοιχεία τους στο 3D χώρο. Τέλος, εφαρμόζεται εξαγωγή ακμών σε κάθε εικόνα και οι σωστές ακμές προβάλλονται στον τρισδιάστατο χώρο, ενώ μια διαδικασία φιλτραρίσματος αποκλείει κάποιες λανθασμένες ακμές και συγχωνεύει γειτονικά τμήματα ακμών που μπορεί να υπάρχουν.

Η Δολαψάκη (2020) και Dolapsaki & Georgoroulos (2021), ανέπτυξε έναν αλγόριθμο ο οποίος κάνει το εξής: μια ακμή παρατηρείται σε μια εικόνα μέσω δυο σημείων της. Μετά από την εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων, μέσω των εικονοσυντεταγμένων δυο σημείων της ακμής και τον εξωτερικό προσανατολισμό της εικόνας που μελετάται, τα δυο σημεία



μετασηματίζονται στον 3D χώρο και στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων με το νέφος σημείων, ενώ ο αλγόριθμος RANSAC προσαρμόζει στα σημεία αυτά μια γραμμή, η οποία περιγράφει την ακμή της εικόνας στο χώρο. Σε επόμενο βήμα, υπολογίζεται το επίπεδο που δημιουργεί η γραμμή αυτή με το σημείο λήψης της εικόνας και η απόσταση των σημείων από το επίπεδο αυτό, ώστε να αποφευχθεί η πιθανότητα εμπλοκής παράλληλων στην ευθεία που μελετάται γραμμών. Έπειτα, εφαρμόζεται για δεύτερη φορά ο αλγόριθμος RANSAC ώστε να αποκλειστεί το ενδεχόμενο της ύπαρξης τυχαίου θορύβου.

Ο Σκέντζος (2020), χρησιμοποίησε τον βελτιωμένο αλγόριθμο Canny για να εντοπίσει τις ακμές στις εικόνες και στη συνέχεια εισήγαγε τις ακμές αυτές απευθείας στο παραγόμενο νέφος σημείων.

Ο Alshawabkeh (2020) για την εξαγωγή ακμών, μετέτρεψε ένα νέφος σημείων που προέκυψε από LiDAR, σε εικόνα βάθους, η οποία προστέθηκε στην RGB εικόνα σαν τέταρτο κανάλι. Στη συνέχεια, με τον αλγόριθμο Canny για τον εντοπισμό των ακμών, βρήκε τις 2D ακμές, από τις οποίες σε συνδυασμό με το νέφος σημείων προσδιορίστηκαν οι τελικές ακμές στον 3D χώρο.

Ο Μπέτσας (2021), εισήγαγε στην εικόνα ένα τέταρτο κανάλι, πέραν των RGB, το οποίο ήταν στην ουσία ένας χάρτης ακμών της εικόνας. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας λογισμικό SfM/MVS, παρήγαγε το αραιό και κατόπιν το πυκνό νέφος σημείων, το οποίο περιέχει πλέον την πληροφορία των ακμών. Έτσι η πληροφορία των ακμών γίνεται σημειακή και τα σημεία τα οποία ανήκουν σε ακμές εξάγονται και ταξινομούνται σε ομάδες, ανάλογα σε ποια ακμή ανήκουν. Σε τελευταίο στάδιο, οι ομάδες αυτές διανυσματοποιούνται και έτσι προκύπτει ένα τρισδιάστατο σχέδιο των ευθειών της περιοχής στην οποία εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος.

Άλλες μέθοδοι προσδιορισμού ακμών, περιλαμβάνουν την τομή νεφών σημείων με τα επίπεδα, τη χρήση επιφανειακών μοντέλων ή ακόμα και τα νευρωνικά δίκτυα. Τέλος, υπάρχει και η εφαρμογή συνδυαστικών μεθόδων, δηλαδή η ταυτόχρονη χρήση εικόνων και μη οργανωμένων νεφών σημείων, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για παράδειγμα στον εντοπισμό ρηγμάτων.

Να σημειωθεί εδώ, πως είναι χρήσιμο το αποτέλεσμα αυτών των μεθόδων να είναι ένα διάνυσμα σε μορφή επεξεργάσιμη από προγράμματα CAD.

### 3.ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

#### 3.1.ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα αναλυθούν σε θεωρητικό επίπεδο τα στοιχεία της γεωμετρίας, στα οποία βασίστηκε η παρούσα εργασία. Θεωρούνται γνωστές οι έννοιες του σημείου, της ευθείας, του επιπέδου και του συνήθη χώρου.

Συνοπτικά τα βήματα της εργασίας, έχουν ως εξής:

- Επιλογή μιας ακμής μέσω των εικονοσυντεταγμένων της σε ήδη προσανατολισμένες εικόνες.
- Φωτογραμμετρική εμπροσθοτομία για τον προσδιορισμό του επιπέδου που δημιουργεί η τομή με το σημείο λήψης στο χώρο, για κάθε εικόνα στην οποία είναι ορατή η ακμή.
- Τομή των επιπέδων αυτών.
- Εύρεση της τελικής ακμής.

##### 3.1.1.ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο είναι ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων, το οποίο αποτελείται από δυο προσανατολισμένους άξονες, κάθετους μεταξύ τους και από το κέντρο του συστήματος που είναι η τομή των δύο αυτών αξόνων και καλείται αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Ένα σημείο εδώ, προσδιορίζεται από τις δυο συντεταγμένες  $x$ ,  $y$ , ή αλλιώς την τετμημένη και την τεταγμένη του σημείου, η τιμή των οποίων δηλώνει τη θέση του σημείου κατά την ορθή προβολή του στο επίπεδο. Με αυτή την παραδοχή, η αρχή του συστήματος συντεταγμένων θα είναι το σημείο  $O(0, 0)$ .

Την ίδια ακριβώς λογική, ακολουθεί και το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο χώρο, με τη διαφορά ότι εδώ προστίθεται ένας ακόμα άξονας  $z$  κάθετος στο επίπεδο  $xy$  που δημιουργούν οι δυο άξονες  $x$  και  $y$ . Εδώ κάθε σημείο περιγράφεται από τρεις συντεταγμένες  $(x, y, z)$  και η αρχή του συστήματος συντεταγμένων είναι το σημείο  $O(0,0,0)$ .

##### 3.1.2.ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Ένα επίπεδο ορίζεται από τρία σημεία  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ , μη συνευθειακά μεταξύ τους με αντίστοιχα διανύσματα  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ . Το σύνολο των διανυσμάτων  $r$ , τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση  $r(u, v) = r_1 + u \cdot (r_2 - r_1) + v \cdot (r_3 - r_1)$  όπου  $u, v \in \mathbb{R}$ , αποτελούν ένα επίπεδο.

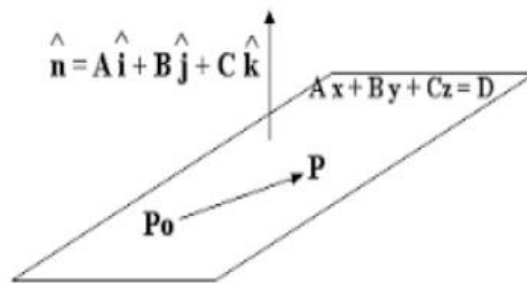
## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

Κάθε πρωτοβάθμια εξίσωση ως προς  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , παριστάνει στον χώρο των τριών διαστάσεων ένα επίπεδο. Με δεδομένα την κλίση του επιπέδου (τον προσανατολισμό του) και ένα σημείο του, είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η εξίσωση του επιπέδου στο χώρο. Ο προσανατολισμός του επιπέδου ορίζεται από το μοναδιαίο, κάθετο στο επίπεδο, διάνυσμα.

Άλλοι τρόποι για να οριστεί το επίπεδο, είναι:

1. Από ένα σημείο του και δύο μη συγγραμμικά διανύσματα παράλληλα προς αυτό.
2. Από δύο σημεία του και ένα διάνυσμα που είναι παράλληλο προς αυτό, αλλά όχι συγγραμμικό με το διάνυσμα που δημιουργούν τα δύο σημεία.
3. Από τρία σημεία του, μη συνευθειακά.



Εικόνα 6: Απεικόνιση επιπέδου (Μητροπούλου 2017)

Έστω επίπεδο που διέρχεται από το σημείο  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , το οποίο είναι το διάνυσμα θέσης και είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ . Στην περίπτωση αυτή, το επίπεδο θα είναι το σύνολο των σημείων  $P(x, y, z)$ , για τα οποία το διάνυσμα  $P_0\vec{P}$  είναι ορθογώνιο στο διάνυσμα  $\vec{n}$ , δηλαδή όταν το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{n} \cdot P_0\vec{P} = 0$ , αφού όπως αναφέρεται παραπάνω, όταν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ισούται με το μηδέν, τότε τα διανύσματα αυτά σχηματίζουν ορθή γωνία.

Για την κατανόηση της έννοιας του επιπέδου, ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή των εννοιών του διανύσματος και του προσδιορισμού των παραμέτρων της ευθείας στο χώρο.

#### 3.1.2.1. ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Παρακάτω αναλύονται οι έννοιες του διανύσματος και του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων.

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

1. **Διάνυσμα** καλείται κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. Ένα διάνυσμα με αρχή A και πέρας B, συμβολίζεται με (A,B) ή AB και γεωμετρικά παριστάνεται με το ευθύγραμμο τμήμα AB με ένα βέλος στο τέλος του B ( $\vec{AB}$ ).
2. **Μέτρο διανύσματος ( $\vec{AB}$ )** καλείται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, με κάποια μονάδα μέτρησης. Συμβολίζεται με  $|\vec{a}| = |AB|$  και αν  $\vec{AB} = (a_1, a_2, a_3)$ , τότε:  
 $|\vec{a}| = \sqrt{a * a} = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$ .
3. **Μοναδιαίο διάνυσμα:** αν το μέτρο του διανύσματος  $\vec{AB}$  ισούται με 1, τότε το διάνυσμα  $\vec{AB}$  καλείται μοναδιαίο.
4. **Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων:** Έστω τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$ . Τότε το εσωτερικό τους γινόμενο, το οποίο συμβολίζεται με  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , ορίζεται ως ο πραγματικός αριθμός:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos \theta, \text{ αν } \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$$

όπου  $\theta$  η εσωτερική γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$ .

Σχόλιο: Αν  $\vec{a} \neq 0$  ή αν  $\vec{b} \neq 0$ , τότε από την παραπάνω εξίσωση, για να ισχύει ότι το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων είναι μηδέν, τότε θα πρέπει το συνημίτονο της εσωτερικής τους γωνίας να ισούται με το μηδέν και άρα τα δύο διανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα ( $\theta = \pi / 2$ ).

Έστω διάνυσμα  $\vec{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ . Τότε αν  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα x,  $\phi$  η γωνία του με τον άξονα y και  $\psi$  η γωνία του με τον άξονα z, τότε για τον υπολογισμό των  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  θα ισχύει ότι:

$$\cos \theta = \frac{\alpha_1}{|\alpha|}$$

$$\cos \phi = \frac{\alpha_2}{|\alpha|}$$

$$\cos \psi = \frac{\alpha_3}{|\alpha|}$$

Για τα διανύσματα του χώρου, χρησιμοποιείται μια ειδική σημειογραφία, η ijk όπου:

$$\vec{i} = [1 \ 0 \ 0] \text{ το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα } x$$

$$\vec{j} = [0 \ 1 \ 0] \text{ το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα } y$$

$$\vec{k} = [0 \ 0 \ 1] \text{ το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα } z$$

Αν τα διανύσματα σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων εκφράζονται ως  $\vec{a} = a_1i + a_2j + a_3k$ , και  $\vec{b} = b_1i + b_2j + b_3k$ , τότε θα προκύψει:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

- 5. Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων:** Σε αντίθεση με το εσωτερικό γινόμενο, το εξωτερικό γινόμενο είναι διάνυσμα. Για τα παραπάνω διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$ , το εξωτερικό τους γινόμενο θα είναι ένα άλλο διάνυσμα  $\vec{c}$ . Το διάνυσμα αυτό, είναι κάθετο στα δύο διανύσματα και το μέτρο του ισούται με το εσωτερικό γινόμενό τους, πολλαπλασιασμένο με το ημίτονο της εσωτερικής γωνίας αυτών, δηλαδή:

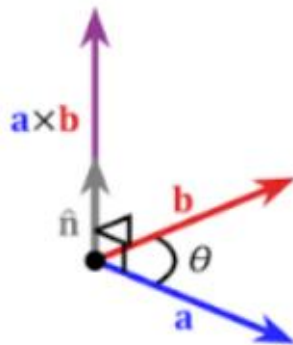
$$\vec{c} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \eta\mu\theta * \vec{n},$$

όπου  $\vec{n} = (i, j, k)$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα.

Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου των δύο διανυσμάτων, ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που έχει ως διαδοχικές πλευρές τις  $OA = \vec{a}$  και  $OB = \vec{b}$ . Συνεπώς, αν  $\vec{c} = 0$ , τότε συνεπάγεται από τη σχέση ότι  $\vec{a} = 0$  ή  $\vec{b} = 0$  ή  $\eta\mu\theta = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = 0 \Rightarrow \vec{a} // \vec{b}$

Αν όπως και παραπάνω  $\vec{a} = a_1i + a_2j + a_3k$ , και  $\vec{b} = b_1i + b_2j + b_3k$ , τότε:

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1i + a_2j + a_3k) \times (b_1i + b_2j + b_3k) \\ &= \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} i - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} j + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} k \\ &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Εικόνα 7: εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων (Μητροπούλου 2017)

Έστω τυχαίο σημείο  $M$  στο επίπεδο αυτό. Τότε, το διάνυσμα  $M_1M$ , θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων  $M_1M_2$  και  $M_2M_3$ , δηλαδή θα υπάρχουν αριθμοί  $s, t$  για τους οποίους θα ισχύει ότι:

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M} &= s\overrightarrow{M_1M_2} + t\overrightarrow{M_1M_3} \Rightarrow (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = s(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) + \\ &t(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \Rightarrow (x, y, z) = (1 - s - t) \cdot (x_1, y_1, z_1) + s(x_2, y_2, z_2) + \\ &t(x_3, y_3, z_3) \quad (1.1) \end{aligned}$$

Η εξίσωση (1.1), αποτελεί την **παραμετρική εξίσωση του επιπέδου**.

Εφόσον τα διανύσματα  $M_1M_2$  και  $M_1M_3$  είναι συνεπίπεδα, τότε το διάνυσμα που αναπαριστά το εξωτερικό τους γινόμενο είναι κάθετο στο επίπεδο, που με τη σειρά του σημαίνει πως το μικτό γινόμενο των διανυσμάτων και του επιπέδου θα ισούται με το μηδέν:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0$$

Αν στην τελευταία εξίσωση εισαχθούν οι συντεταγμένες του κάθε σημείου, θα προκύψει:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.2)$$

Δηλαδή ένα σημείο, ικανοποιεί την εξίσωση αν ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία  $M_1, M_2, M_3$  και αντίστροφα ένα σημείο ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα τρία σημεία, αν ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση. Αναλύοντας την (1.2), προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση (1.3):

$$(x - x_1) \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} - (y - y_1) \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} - (z - z_1) \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.3)$$

Θέτοντας τα παρακάτω στην εξίσωση (1.3), θα προκύψουν οι παράμετροι που ορίζουν ένα επίπεδο:

$$A = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

$$D = -x_1 \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} - z_1 \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \quad (1.4) \Rightarrow$$

$$A = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1)$$

$$B = (z_3 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1)$$

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$$

$$\text{Άρα } Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1.4)$$

Η εξίσωση (1.4), αποτελεί την **αναλυτική εξίσωση του επιπέδου**.

### 3.1.3 ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

Έστω δύο επίπεδα  $\vec{n}_1: A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1 = 0$  και  $\vec{n}_2: A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2 = 0$ . Εάν:

- $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

Τότε τα δύο επίπεδα συμπίπτουν και ικανοποιούνται από τα ίδια σημεία. Αντίστροφα, εάν οι εξισώσεις δυο επιπέδων ικανοποιούνται από τα ίδια σημεία, τότε τα επίπεδα συμπίπτουν.

- $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

Τότε τα δυο επίπεδα είναι μεταξύ τους παράλληλα και είναι κάθετα στο ίδιο διάνυσμα, ενώ ικανοποιούν τη σχέση

$$(A_1, B_1, C_1) = k(A_2, B_2, C_2)$$

- $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$  ή  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

Τότε τα δυο επίπεδα τέμνονται σε μια ευθεία. Το διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας είναι κάθετο στα  $(A_1, B_1, C_1)$  και  $(A_2, B_2, C_2)$ , οπότε είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα:

$$\vec{u} = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$$

**ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ:**

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

- Δύο επίπεδα είναι κάθετα μεταξύ τους, αν:

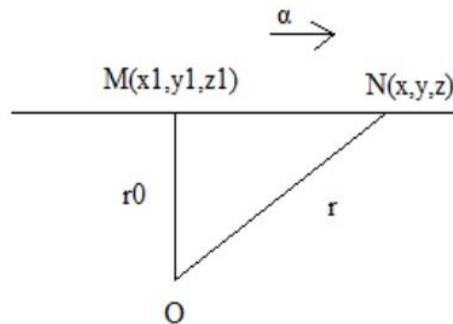
$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

- Η δίεδρη γωνία  $\theta$  μεταξύ δυο επιπέδων  $E_1$  και  $E_2$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\cos \theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (1.5)$$

### 3.1.4. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΥΘΕΙΑΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Μια ευθεία ορίζεται μονοσήμαντα είτε (i) από ένα σημείο της και μία διεύθυνση προς την οποία είναι παράλληλη είτε (ii) από δύο σημεία της.



Εικόνα 8: Απεικόνιση ευθείας (Μητροπούλου 2017)

Έστω μια ευθεία ( $\epsilon$ ), η οποία περνά από το σημείο  $M(x_1, y_1, z_1)$ , με διάνυσμα θέσης  $\vec{r}_0$  και είναι παράλληλη σε κάποιο διάνυσμα  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ . Αν  $O$  η αρχή του συστήματος συντεταγμένων,  $N(x, y, z)$  τυχαίο σημείο της ευθείας και  $\vec{r}, r_0$  τα διανύσματα θέσης των σημείων  $M, N$  από το οποίο περνά η ευθεία  $\epsilon$ , τότε ισχύει  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ , αλλά και  $MN = t \times \vec{a}$ , δηλαδή συνεπάγεται ότι υπάρχει  $t \in \mathfrak{R}$ , τέτοιο ώστε  $\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{a}$ ,  $t \in \mathfrak{R}$ . Η εξίσωση αυτή λέγεται **διανυσματική εξίσωση της ευθείας**.

Έστω, τώρα, σύστημα συντεταγμένων με αρχή το  $O$ , τότε ως προς αυτό θα ισχύει:



## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

$\vec{r} = xi + yj + zk$ ,  $\vec{r}_0 = x_0i + y_0j + z_0k$ ,  $\vec{a} = a_1i + a_2j + a_3k$ . Αντικαθιστώντας τα διανύσματα  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}_0$  και  $\vec{a}$  με τις συντεταγμένες τους στο παραπάνω σύστημα και απαλείφοντας το  $t$ , προκύπτουν οι **καρτεσιανές εξισώσεις της ευθείας**:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

### 3.1.5 ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

Έστω δύο ευθείες  $E1: \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$  και  $E2: \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}$ . Εάν:

- $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

Τότε οι ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες.

- $a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + a_3 \times b_3 = 0$

Τότε οι ευθείες είναι μεταξύ τους κάθετες, δηλαδή το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν.

- $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$  και  $X_1 = X_2, Y_1 = Y_2, Z_1 = Z_2$

Τότε οι ευθείες συμπίπτουν.

### 3.1.6.ΤΟΜΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

Δύο μη παράλληλα μεταξύ τους επίπεδα τέμνονται σε μια ευθεία. Όπως αναφέρεται παραπάνω, για τον ορισμό μιας ευθείας απαιτούνται ένα διάνυσμα παράλληλο σε αυτήν και ένα σημείο της. Αντίστοιχα ορίζεται και η ευθεία της τομής των δύο επιπέδων

Όσον αφορά στο διάνυσμα, αυτό υπολογίζεται από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων των δύο επιπέδων, το οποίο προκύπτει από την επίλυση της οριζουσας δύο διανυσμάτων κάθετων στα επίπεδα.

Το σημείο που ανήκει στην ευθεία και απαιτείται για τον ορισμό της, υπολογίζεται από τη **Μέθοδο των Πολλαπλασιαστών Lagrange με δύο συνθήκες**. Η μέθοδος αυτή, βρίσκει τα ακρότατα μιας συνάρτησης  $f$ , η οποία θα πρέπει να υπακούει σε δύο συνθήκες. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι συνθήκες αυτές είναι οι εξισώσεις των δύο επιπέδων (των οποίων ζητείται η τομή), τα οποία προφανώς θα πρέπει να μην είναι μεταξύ τους παράλληλα.

Σύμφωνα με τον Krumm (Krumm 2000), η επίλυση για την τομή των επιπέδων είναι η εξής:

Έστω επίπεδο με σημείο  $p_1 = (p_{1x}, p_{1y}, p_{1z})$  και διάνυσμα  $\vec{n}_1 = (n_{1x}, n_{1y}, n_{1z})$  και επίπεδο με σημείο  $p_2 = (p_{2x}, p_{2y}, p_{2z})$  και διάνυσμα  $\vec{n}_2 = (n_{2x}, n_{2y}, n_{2z})$ . Ζητείται η ευθεία τομής των επιπέδων, δηλαδή το σημείο  $p(p_x, p_y, p_z)$  και το παράλληλο στην ευθεία διάνυσμα  $n$ , για την οποία θα πρέπει να ισχύουν δύο περιοριστικές συνθήκες. Συγκεκριμένα, το σημείο της  $p$  θα πρέπει να είναι σημείο των δύο επιπέδων και θα πρέπει να απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων  $p_0 = (p_{0x}, p_{0y}, p_{0z})$ . Συνοψίζοντας:

1<sup>η</sup> συνθήκη: Το σημείο να ανήκει και στα δύο επίπεδα. Άρα οι εξισώσεις που αντιστοιχούν σε κάθε επίπεδο θα είναι:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \quad (2) \text{ για το πρώτο και } (\mathbf{r} - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (3) \text{ για το δεύτερο.}$$

2<sup>η</sup> συνθήκη: Το σημείο  $p$  να απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα σημεία της γραμμής που αποτελούν την τομή των επιπέδων:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{p}_0|^2 = (p_x - p_{0x})^2 + (p_y - p_{0y})^2 + (p_z - p_{0z})^2 \quad (4)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange στην εξίσωση (4), απαιτώντας να ισχύουν οι εξισώσεις (2) και (3), προκύπτει η εξίσωση  $w$ , η οποία εμπεριέχει και τις τρεις παραπάνω εξισώσεις, όπου  $\lambda$ ,  $\mu$  είναι οι δύο πολλαπλασιαστές Lagrange που απαιτούνται για τις δύο συνθήκες:

$$\begin{aligned} w &= |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2 + \lambda(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{n}_1 + \mu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{n}_2 \\ &= (p_x - p_{0x})^2 + (p_y - p_{0y})^2 + (p_z - p_{0z})^2 + \lambda p_x n_{1x} + \lambda p_y n_{1y} + \lambda p_z n_{1z} - \lambda p_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \\ &\quad \mu p_x n_{2x} + \mu p_y n_{2y} + \mu p_z n_{2z} - \mu p_2 \cdot \mathbf{n}_2 \quad (5) \end{aligned}$$

Κατόπιν, υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι ως προς τους πέντε αγνώστους  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  και τίθενται ίσες με το μηδέν, σύμφωνα με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial p_x} &= 2(p_x - p_{0x}) + \lambda n_{1x} + \lambda n_{2x} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial p_y} &= 2(p_y - p_{0y}) + \lambda n_{1y} + \lambda n_{2y} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial p_z} &= 2(p_z - p_{0z}) + \lambda n_{1z} + \lambda n_{2z} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda} = p_x n_{1x} + p_y n_{1y} + p_z n_{1z} - \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial \mu} = p_x n_{2x} + p_y n_{2y} + p_z n_{2z} - \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

(6)

Το παραπάνω σύστημα, αποτελείται από πέντε εξισώσεις και πέντε αγνώστους. Συνεπώς, η επίλυσή του θα δώσει το ζητούμενο σημείο  $p(p_x, p_y, p_z)$ , το οποίο βρίσκεται σε μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων  $\vec{p}_0 = (p_{0x}, p_{0y}, p_{0z})$  σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα σημεία της τομής των δύο επιπέδων. Δεν μας ενδιαφέρουν οι τιμές των δύο πολλαπλασιαστών Lagrange, αλλά πρέπει να τις υπολογίσουμε ούτως ή άλλως.

### 3.2. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ

Κατά την εκπόνηση της εργασίας, προέκυψε η ανάγκη για έλεγχο της απόστασης μεταξύ των τομών των επιπέδων. Ο έγχος αυτός, είναι μια πρώτη εκτίμηση της ποιότητας των παραμέτρων που υπεισέρχονται στον κώδικα. Ιδανικά οι αποστάσεις μεταξύ των ακμών θα πρέπει να είναι μικρές, της τάξεως των μερικών εκατοστών. Μεγαλύτερη απόσταση, μπορεί να σημαίνει εσφαλμένη μέτρηση ή καταγραφή των εικονοσυντεταγμένων ενός σημείου της ακμής από τον χρήστη, ή πολύ μικρή γωνία μεταξύ δύο εικόνων.

Στη βασική Γεωμετρία η έννοια της απόστασης ορίζεται ως το ελάχιστο μήκος ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει σημεία, ευθείες ή επίπεδα μεταξύ τους. Σε αυτή την παράγραφο, περιγράφονται οι έννοιες της απόστασης δυο σημείων μεταξύ τους, ενός σημείου από μια ευθεία και ενός σημείου από ένα επίπεδο.

#### 3.2.1. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ

Απόσταση μεταξύ δυο σημείων λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα δύο αυτά σημεία. Έστω δυο σημεία  $A(x_A, y_A, z_A)$  και  $B(x_B, y_B, z_B)$  και  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  το διάνυσμα  $\vec{AB}$ . Τότε η απόσταση μεταξύ των σημείων A και B θα ισούται με το μέτρο του διανύσματος  $\vec{a}$ :

$$d_{AB} = |\vec{a}| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}(7)$$

#### 3.2.2. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

Απόσταση σημείου από ευθεία λέγεται το κάθετο τμήμα που άγεται από το σημείο προς την ευθεία.

Έστω ευθεία ( $\epsilon$ ) που διέρχεται από σημείο  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  και είναι παράλληλη προς διάνυσμα  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  και  $M = (x, y, z)$  είναι σημείο εκτός της ευθείας ( $\epsilon$ ). Τότε αν σχηματίσουμε το παραλληλόγραμμο  $AM\Lambda K$  με πλευρές τα διανύσματα  $\vec{AM}$  και  $\vec{A\Lambda} = \vec{b}$  (θεωρούμε την  $\vec{A\Lambda}$  ως βάση του παραλληλογράμμου) μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση  $d$  από την ευθεία ( $\epsilon$ ) ως εξής: (Ατρέας, 2009)

$$E_{AM\Lambda K} = |\vec{AM} \times \vec{b}| = |\vec{b}| \cdot d \Rightarrow d = \frac{|\vec{AM} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|} \quad (8)$$

### 3.2.3. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Έστω επίπεδο  $E$  με εξίσωση  $Ax + By + Cz + D = 0$  και  $\vec{ON} = (A, B, C)$  το κανονικό διάνυσμα αυτού. Θεωρούμε σημείο  $M(x_0, y_0, z_0)$  εκτός του επιπέδου  $E$  και έστω  $M_0 = (x', y', z')$  είναι η προβολή του  $M$  πάνω στο  $E$ . Ορίζουμε  $d = |\vec{M_0M}|$  να είναι η απόσταση του σημείου  $M$  από το επίπεδο  $E$ . Τότε: (Ατρέας, 2009)

$$d = |\vec{M_0M}| = |t \cdot \vec{ON}| = |t| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Από την άλλη μεριά:

$$\begin{aligned} \vec{M_0M} &= t \cdot \vec{ON} \Rightarrow (x_0 - x', y_0 - y', z_0 - z') = t \cdot (A, B, C) \\ &\Rightarrow x' = x_0 - t \cdot A \\ &\quad y' = y_0 - t \cdot B \\ &\quad z' = z_0 - t \cdot C \end{aligned}$$

Εφόσον το σημείο  $M_0 = (x', y', z')$  είναι η ορθογώνια προβολή του  $M$  πάνω στο  $E$ , το  $M_0$  είναι σημείο του επιπέδου  $E$ , άρα οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση του επιπέδου  $E$ . Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (A) στην εξίσωση του επιπέδου και μετά από στοιχειώδεις πράξεις βρίσκουμε:

$$t = \frac{A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Άρα:

$$d = |t| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}$$

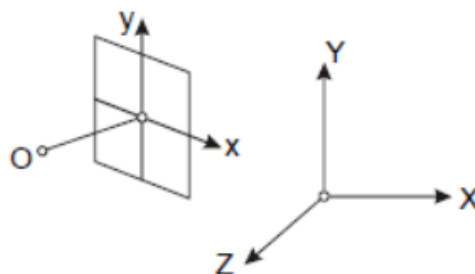
$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + \Gamma \cdot z_0 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}} \quad (9)$$

### 3.3.ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΤΗΝ ΦΩΤΟΓΡΑΜΜΕΤΡΙΑ

Σε αρχικό στάδιο, υπάρχουν τα εξής δύο συστήματα αναφοράς, τα οποία δεν συσχετίζονται μεταξύ τους: Το σύστημα συντεταγμένων της εικόνας και το τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων του χώρου.

#### 3.3.1.ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ

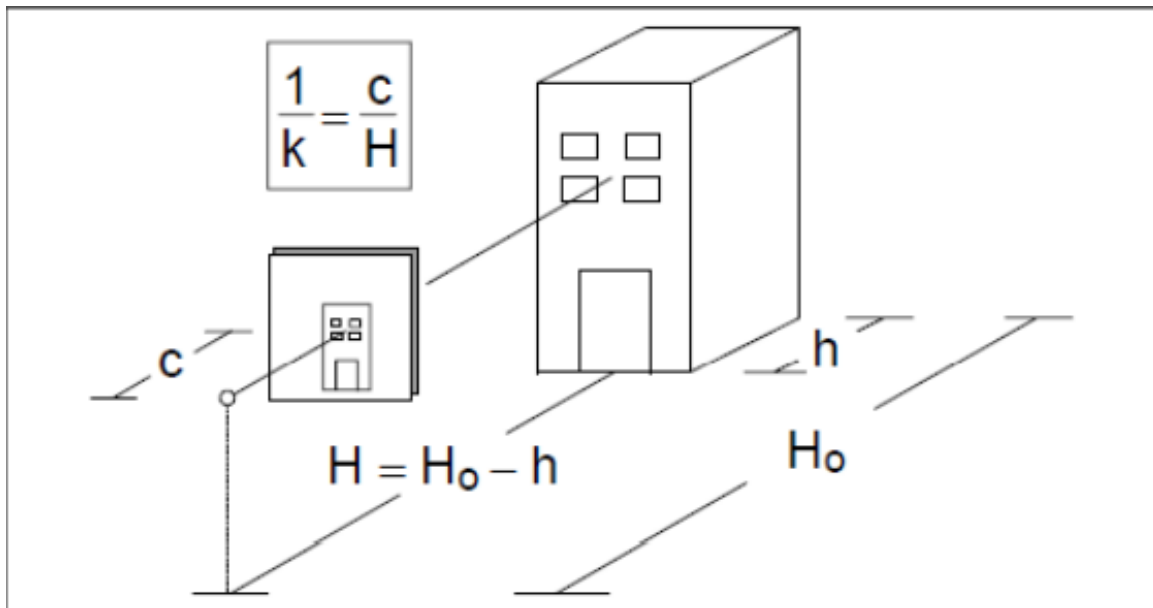
Το σύστημα αναφοράς της εικόνας, περιγράφει τη θέση των σημείων στην εικόνα σε ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων  $xy$ , με κέντρο το κέντρο της εικόνας  $o(0,0)$ . Μέσω των εικονοσυντεταγμένων, συνδέεται αυτό που φαίνεται στην εικόνα με το σύστημα συντεταγμένων στο χώρο.



Εικόνα 9: Σύστημα συντεταγμένων σε επίγεια λήψη (Πέτσα, 2000)

#### 3.3.2.ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Είναι απαραίτητο να έχει οριστεί ένα σύστημα αναφοράς του χώρου, δηλαδή ένα δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα XYZ. Γενικά, ιδιαίτερα στην περίπτωση της αεροφωτογραμμετρίας το σύστημα αυτό είναι το γεωδαιτικό σύστημα (κρατικό ή τοπικό) με κατακόρυφο άξονα Z. Στις περιπτώσεις επίγειων λήψεων, πάντως, αποδεικνύεται συχνά βολικότερη η χρήση στραμμένου συστήματος, με οριζόντιο άξονα Z περίπου παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα λήψης. (Πέτσα, 2000).



Εικόνα 10: Κλίμακα εικόνας σε επίγεια λήψη με οριζόντιο άξονα (Πέτσα, 2000)

Είναι σαφές, πως αφού τα δύο συστήματα αναφοράς δεν είναι συμβατά, τότε και τα επίπεδα που δημιουργούν αυτά δεν θα παρουσιάζουν κάποια ταύτιση επομένως κρίνεται αναγκαίος ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων που προκύπτουν από ένα από τα δύο συστήματα, ώστε αυτά να συσχετιστούν.

### 3.3.3.Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΤΡΟΦΗΣ

Ο πίνακας στροφής, εκφράζει τις στροφές γύρω από τους άξονες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  που παρουσιάζει η εικόνα κατά τη στιγμή της λήψης, ως προς το σύστημα συντεταγμένων του χώρου. Ο πίνακας αυτός, είναι αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού τριών επιμέρους πινάκων στροφής, ως προς τους τρεις άξονες στροφής, κατά τις γωνίες  $\omega$ ,  $\phi$  και  $\kappa$ :

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

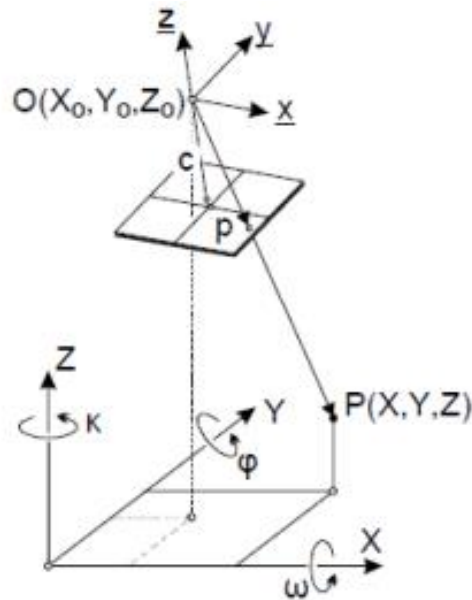
Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

$$R_{\omega=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}, \quad R_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad R_{\kappa} = \begin{pmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η σειρά των στροφών για δεξιόστροφα συστήματα αναφοράς, είναι  $\omega$ ,  $\varphi$  και  $\kappa$  και ο συνολικός πίνακας στροφής δίνεται από:

$$R = R_{\kappa}R_{\varphi}R_{\omega} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\kappa & \cos\omega \sin\kappa + \sin\omega \sin\varphi \cos\kappa & \sin\omega \sin\kappa - \cos\omega \sin\varphi \cos\kappa \\ -\cos\varphi \sin\kappa & \cos\omega \cos\kappa - \sin\omega \sin\varphi \sin\kappa & \sin\omega \cos\kappa + \cos\omega \sin\varphi \sin\kappa \\ \sin\varphi & -\sin\omega \cos\varphi & \cos\omega \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (10)$$

Ο πίνακας στροφής, εκφράζει την συνολική στροφή που ήδη έχει η εικόνα ως προς το σύστημα αναφοράς και όχι το αντίστροφο, το οποίο αποτελεί συχνή παρανόηση. Συνεπώς οι στροφές  $\omega$ ,  $\varphi$  και  $\kappa$  θα πρέπει να εφαρμόζονται στο γεωδαιτικό σύστημα και όχι στην εικόνα. Αν ο πίνακας στροφών πρόκειται να εφαρμοστεί στο σύστημα συντεταγμένων της εικόνας, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο ανάστροφος του πίνακα στροφής.



Εικόνα 11: Εικόνα με στροφές (Πέτσα, 2000)

### 3.3.4.Η ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

Η φωτογραμμετρία βασίζεται στο ότι ένα σημείο P του χώρου, η εικόνα του στη φωτογραφία p και το σημείο λήψης της φωτογραφίας, κείνται επ' ευθείας, είναι δηλαδή συνευθειακά. Αυτή η πρόταση, μαθηματικά μεταφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{1}{k} \cdot R \cdot (X - X_0) \\ y - y_0 &= \frac{1}{k} \cdot R \cdot (Y - Y_0) \\ -c &= \frac{1}{k} \cdot R \cdot (Z - Z_0) \end{aligned}$$

Όπου:

x,y: εικονοσυντεταγμένες του σημείου

x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>,c: εσωτερικός προσανατολισμός της εικόνας

k: συντελεστής κλίμακας της εικόνας

R: πίνακας στροφής

X,Y,Z: συντεταγμένες του σημείου στο γεωδαιτικό σύστημα

X<sub>0</sub>,Y<sub>0</sub>,Z<sub>0</sub>: συντεταγμένες του σημείου λήψης

### 3.3.5.Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Για να συνδεθούν τα δύο συστήματα συντεταγμένων που περιγράφονται παραπάνω, δηλαδή το σύστημα των εικονοσυντεταγμένων (x, y, -c) με κέντρο ο(0, 0) και το τρισσορθώνιο σύστημα συντεταγμένων του χώρου (X, Y, Z) με κέντρο την αρχή των αξόνων O(0, 0, 0), πραγματοποιείται ένας μετασχηματισμός στερεού σώματος, ο οποίος διατηρεί αναλλοίωτο το σχήμα του στερεού. Ο μετασχηματισμός αυτός μοιάζει με τη συνθήκη συγγραμμικότητας, δεν πρέπει όμως να ταυτίζεται, καθώς κατά την εφαρμογή της συνθήκης συγγραμμικότητας οι εικονοσυντεταγμένες ενός σημείου, συνδέονται με τις γεωδαιτικές του συντεταγμένες, οι οποίες στην παρούσα είναι άγνωστες. Μια επιπλέον διαφορά της συνθήκης συγγραμμικότητας από τον μετασχηματισμό στερεού σώματος, είναι πως στον μετασχηματισμό αυτό δεν υπεισέρχεται η κλίμακα της εικόνας, γεγονός που έχει σαν αποτέλεσμα να μην αποκαθίσταται πλήρως η δέσμη των ακτίνων στο χώρο. Η σχέση που θα χρησιμοποιηθεί για τη μετάβαση από το σύστημα των εικονοσυντεταγμένων στο τρισσορθώνιο σύστημα, είναι η εξής:

$$\begin{aligned} [x, y, -c]^T &= R_{\omega\phi\kappa} * [X - X_0, Y - Y_0, Z - Z_0]^T \Rightarrow \\ [x, y, -c]^T R_{\omega\phi\kappa}^{-1} &= [X - X_0, Y - Y_0, Z - Z_0]^T \Rightarrow \\ [x, y, -c]^T R_{\omega\phi\kappa}^{-1} &= [X, Y, Z]^T - [X_0, Y_0, Z_0]^T \Rightarrow \end{aligned}$$



$$[X, Y, Z]^T = [x, y, -c]^T R_{\omega\phi\kappa}^{-1} + [X_0, Y_0, Z_0]^T \quad (7)$$

Όπου:

$x, y$ : εικονοσυντεταγμένες του σημείου

$c$ : σταθερά μηχανής

$R_{\omega\phi\kappa}$ : πίνακας στροφής

$X, Y, Z$ : συντεταγμένες του σημείου στο γεωδαιτικό σύστημα

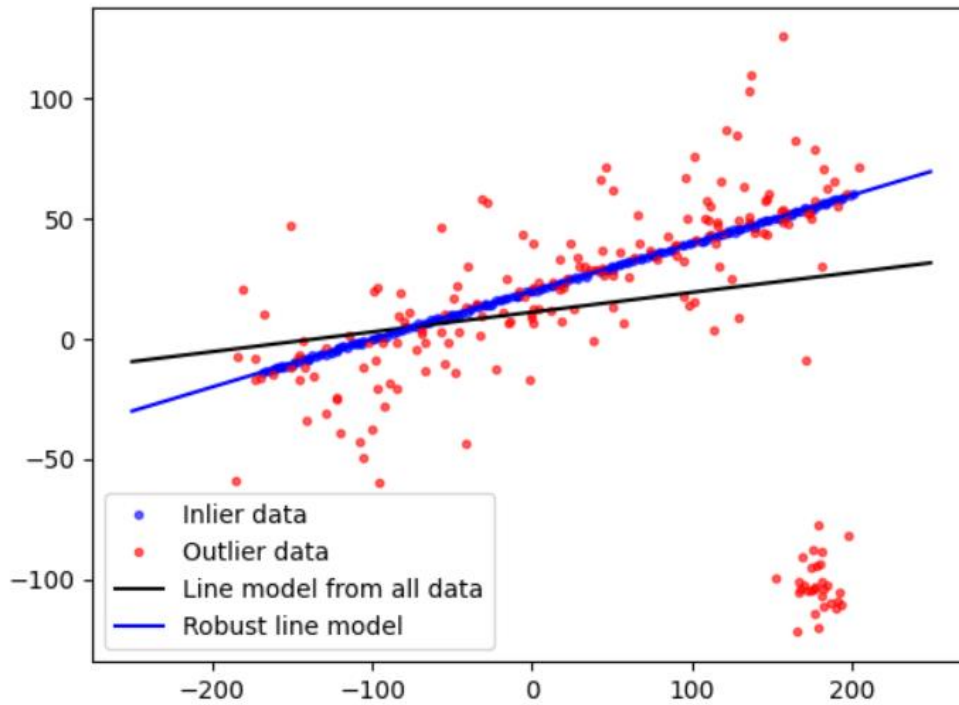
$X_0, Y_0, Z_0$ : συντεταγμένες του σημείου λήψης

#### 4. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ RANSAC

Κατά την πορεία της εργασίας, υπήρξε η σκέψη πως αν η ακμή είναι ορατή σε παραπάνω από δύο εικόνες, τότε θα προκύψει και αντίστοιχος αριθμός επιπέδων που θα την περιέχουν. Έτσι, θα προκύψουν περισσότερες τομές επιπέδων και κατά συνέπεια, θα προύψει ένα σύνολο σημείων, τα οποία θα απεικονίζουν την ίδια γραμμή στο χώρο. Για να προσδιοριστεί η καλύτερη προσέγγιση της γραμμής αυτής, αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος RANSAC.

Ο αλγόριθμος RANSAC (Fischler and Bolles, 1981) αποτελεί μια από τις δημοφιλέστερες τεχνικές εκτίμησης παραμέτρων ενός μοντέλου από ένα σύνολο παρατηρούμενων δεδομένων που περιέχει ακραίες τιμές (outliers), οι οποίες δεν θα πρέπει να έχουν καμία επίδραση στις τιμές των εκτιμήσεων. Οι ακραίες τιμές μπορεί να προκύψουν από θόρυβο ή από εσφαλμένες μετρήσεις ή εσφαλμένες υποθέσεις σχετικά με την ερμηνεία των δεδομένων. Ως εκ τούτου, επίσης, μπορεί να ερμηνευθεί ως μια μέθοδος ανίχνευσης ακραίων τιμών (outliers).

Μια βασική παραδοχή του αλγορίθμου RANSAC, είναι ότι τα δεδομένα αποτελούνται από inliers, δηλαδή από δεδομένα των οποίων η ύπαρξη μπορεί να εξηγηθεί μαθηματικά, αλλά τα οποία μπορεί να περιέχουν θόρυβο και από outliers τα οποία δεν ταιριάζουν στο μοντέλο. Έτσι, όταν χρησιμοποιηθούν τα outliers σημεία για την εύρεση του βέλτιστου αποτελέσματος, θα αυξήσουν το τελικό σφάλμα της πρόβλεψης του βέλτιστου μαθηματικού μοντέλου. Έτσι, ο RANSAC επιχειρεί να απομονώσει τα outliers σημεία και να εξάγει το κατάλληλο μοντέλο μόνο από τα inliers. Αυτή είναι και η κύρια διαφορά του RANSAC από άλλους αλγορίθμους. Έτσι, ο RANSAC επιχειρεί να εισάγει γραμμικά μοντέλα στο δείγμα και να επιστρέψει το μοντέλο με την καλύτερη εφαρμογή. Δεδομένου του ότι τα inliers σημεία τείνουν να συσχετίζονται γραμμικά καλύτερα από ένα σύνολο inliers και outliers τυχαίων σημείων, ένα τυχαίο σύνολο που αποτελείται αποκλειστικά από inliers σημεία, θα έχει καλύτερη εφαρμογή.

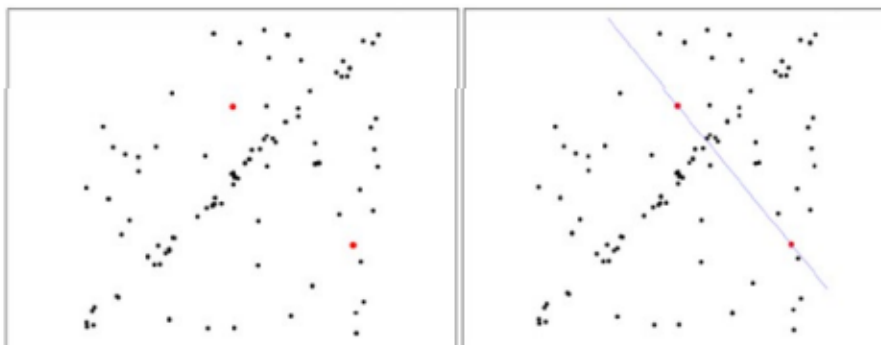


Εικόνα 12: Επίλυση μοντέλου με Ransac. Πηγή: [https://scikit-image.org/docs/dev/auto\\_examples/transform/plot\\_ransac.html](https://scikit-image.org/docs/dev/auto_examples/transform/plot_ransac.html)

Η πιθανότητα επιτυχίας του αλγορίθμου εξαρτάται από την ποιότητα των inliers και από την επιλογή ορισμένων παραμέτρων στον αλγόριθμο.

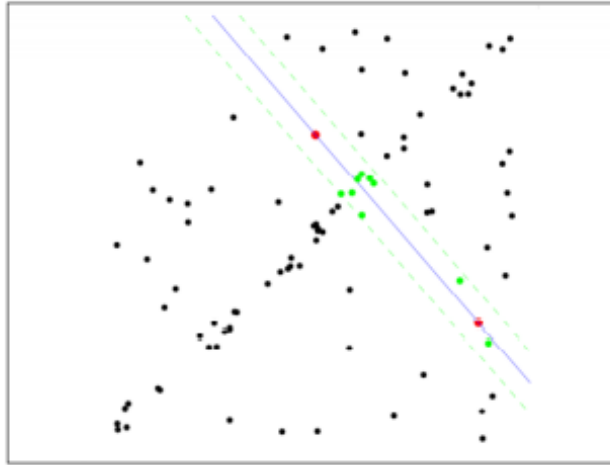
Η αρχή λειτουργίας του αλγορίθμου συνοψίζεται στα παρακάτω βήματα:

1. Επιλέγει τυχαία τον ελάχιστο αριθμό δεδομένων που απαιτούνται για τον υπολογισμό του μαθηματικού μοντέλου.
2. Υπολογίζει τις παραμέτρους του μοντέλου, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που είχε επιλέξει τυχαία στο πρώτο βήμα.



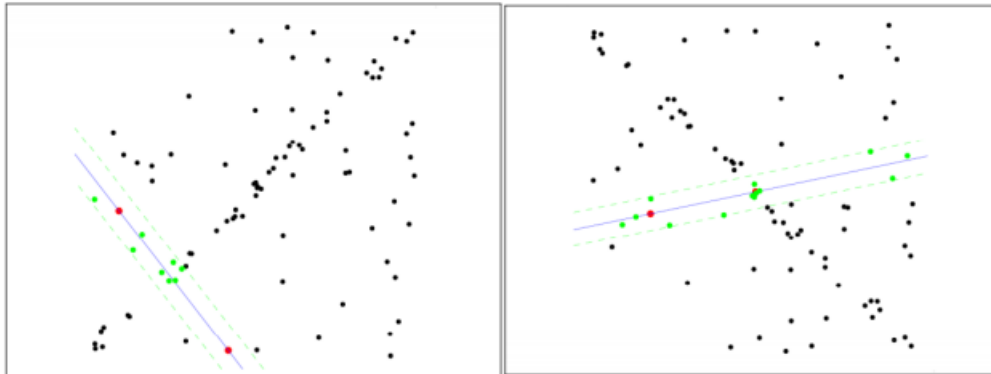
Εικόνα 13α: Εκτέλεση των βημάτων 1 και 2 του αλγορίθμου RANSAC για τον υπολογισμό του μαθηματικού μοντέλου ευθείας (Δολαψάκη, 2020)

3. Σημειώνει τον αριθμό των δεδομένων που μπορεί να συμπεριλάβει στο μοντέλο, βάσει μιας προκαθορισμένης τιμής (threshold).



Εικόνα 13β: Εκτέλεση του τρίτου βήματος του αλγορίθμου RANSAC για τον υπολογισμό του μαθηματικού μοντέλου ευθείας (Δολαψάκη, 2020)

4. Επαναλαμβάνει τη διαδικασία των τριών πρώτων βημάτων για όλα τα δεδομένα.

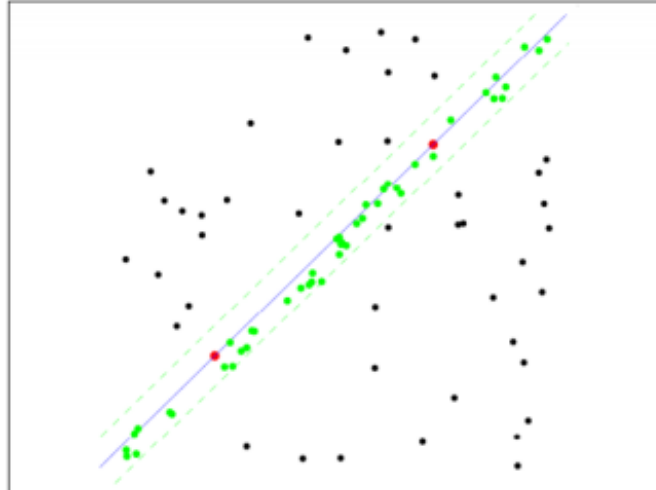


Εικόνα 13γ: Εκτέλεση του τέταρτου βήματος του αλγορίθμου RANSAC για τον υπολογισμό του μαθηματικού μοντέλου ευθείας (Δολαψάκη, 2020)

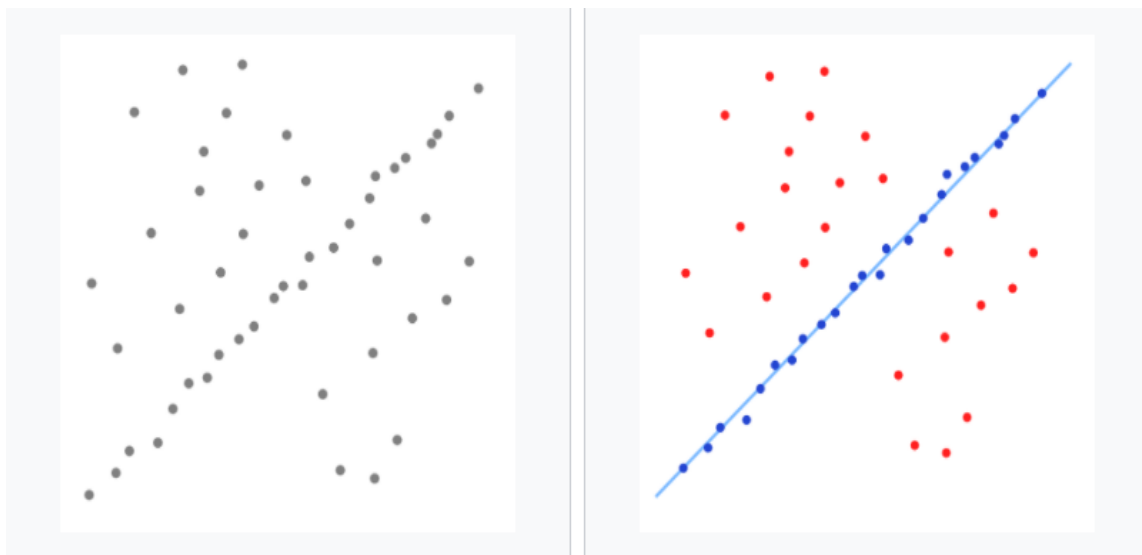
5. Το μοντέλο που έχει συμπεριλάβει στη λύση του τα περισσότερα δεδομένα είναι το επικρατέστερο.
6. Υπολογίζει το βέλτιστο μαθηματικό μοντέλο με τη βοήθεια των ελαχίστων τετραγώνων από τα δεδομένα του επικρατέστερου μοντέλου.

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων



Εικόνα 13δ: Εκτέλεση του τέταρτου βήματος του αλγορίθμου RANSAC για τον υπολογισμό του μαθηματικού μοντέλου ευθείας (Δολαψάκη, 2020)



Εικόνα 14: Σύνολο σημείων στο οποίο πρέπει να εφαρμοστεί μια γραμμή και υπολογισμός της βέλτιστης γραμμής με τη χρήση του αλγορίθμου RANSAC. (Πηγή: [Random sample consensus - Wikipedia](https://en.wikipedia.org/wiki/Random_sample_consensus))

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο προγραμματισμός του αλγορίθμου RANSAC:

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

Given:

```
data - A set of observations.  
model - A model to explain observed data points.  
n - Minimum number of data points required to estimate model parameters.  
k - Maximum number of iterations allowed in the algorithm.  
t - Threshold value to determine data points that are fit well by model.  
d - Number of close data points required to assert that a model fits well to data.
```

Return:

```
bestFit - model parameters which best fit the data (or null if no good model is found)
```

```
iterations = 0
```

```
bestFit = null
```

```
bestErr = something really large
```

```
while iterations < k do
```

```
  maybeInliers := n randomly selected values from data
```

```
  maybeModel := model parameters fitted to maybeInliers
```

```
  alsoInliers := empty set
```

```
  for every point in data not in maybeInliers do
```

```
    if point fits maybeModel with an error smaller than t
```

```
      add point to alsoInliers
```

```
    end if
```

```
  end for
```

```
  if the number of elements in alsoInliers is > d then
```

```
    // This implies that we may have found a good model
```

```
    // now test how good it is.
```

```
    betterModel := model parameters fitted to all points in maybeInliers and alsoInliers
```

```
    thisErr := a measure of how well betterModel fits these points
```

```
    if thisErr < bestErr then
```

```
      bestFit := betterModel
```

```
      bestErr := thisErr
```

```
    end if
```

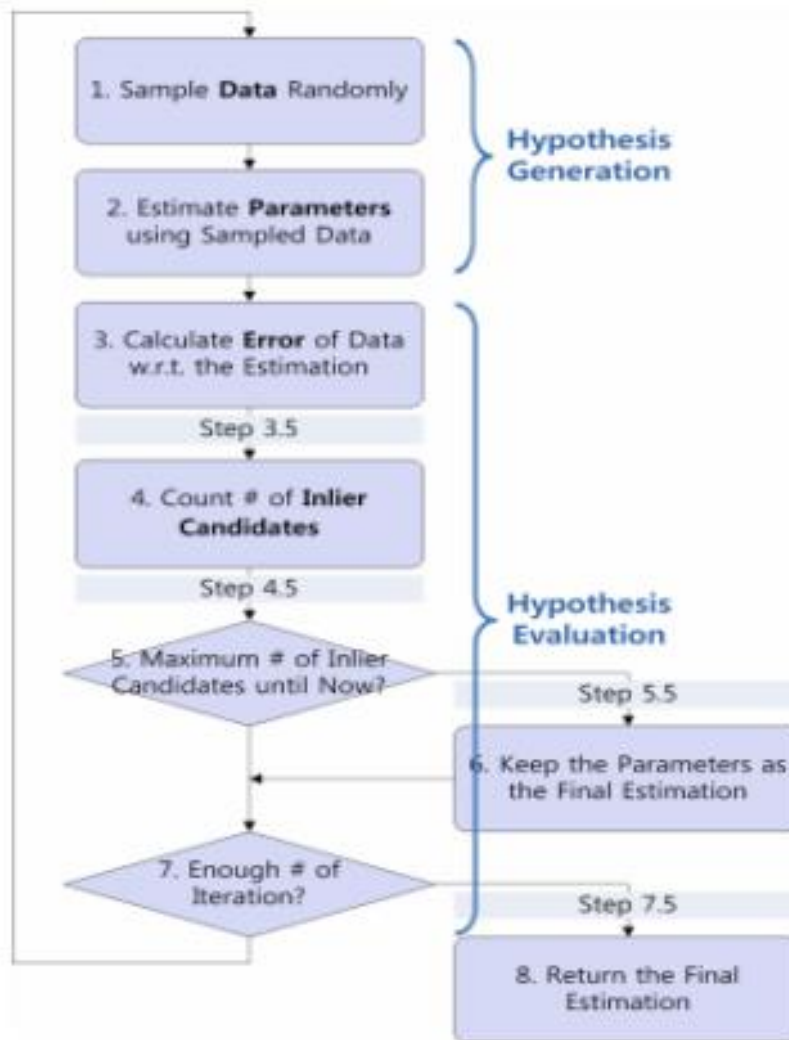
```
  end if
```

```
  increment iterations
```

```
end while
```

```
return bestFit
```

Εικόνα 15: Αλγόριθμος RANSAC. (Πηγή: [https://en.wikipedia.org/wiki/Random\\_sample\\_consensus](https://en.wikipedia.org/wiki/Random_sample_consensus))



Εικόνα 16: Διάγραμμα ροής RANSAC. (Δολαψάκη, 2020)

## 5. ΣΦΑΛΜΑΤΑ

### 5.1. ΕΙΔΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Το σφάλμα στη στατιστική, εκφράζει την απόκλιση της μετρούμενης ή υπολογισμένης τιμής από την πραγματική τιμή του μεγέθους. Οι δυο βασικές κατηγορίες σφαλμάτων, είναι οι εξής:

- **Συστηματικά σφάλματα** είναι τα σφάλματα τα οποία υπεισέρχονται σε κάθε μέτρηση και μοντελοποιούνται μαθηματικά. Τα συστηματικά σφάλματα επηρεάζουν την

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

ορθότητα του αποτελέσματος και μπορεί είτε να είναι σταθερά, όπως η σωστή οριζοντίωση ενός γεωδαιτικού σταθμού, είτε να μεταβάλλονται.

- **Τυχαία σφάλματα** είναι τα σφάλματα που οφείλονται σε απρόβλεπτους παράγοντες, τους οποίους ο χρήστης δεν μπορεί να προβλέψει, όπως για παράδειγμα η ευαισθησία των χρησιμοποιούμενων οργάνων. Τα τυχαία σφάλματα επίσης επηρεάζουν τη ορθότητα του αποτελέσματος.
- **Χονδροειδή σφάλματα** τα οποία ακούσια δημιουργεί ο παρατηρητής και η επίδρασή τους στο τελικό αποτέλεσμα είναι απρόβλεπτη. Παράδειγμα τέτοιου σφάλματος, είναι η λάθος καταγραφή της τιμής του μετρούμενου μεγέθους. Στη παρούσα, χονδροειδές σφάλμα αποτελεί η τιμή που θα καταχωρήσει ο χρήστης στον αλγόριθμο.

## 5.2 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕΛΕΤΗΣ

### 5.2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

Για να θεωρηθεί ολοκληρωμένος ο υπολογισμός των παραμέτρων του επιπέδου και συνεπώς ο προσδιορισμός του, απαιτείται να είναι γνωστό και το σφάλμα με το οποίο υπολογίστηκαν αυτές οι παράμετροι. Το κεφάλαιο αυτό, αναφέρεται στα σφάλματα του προσδιορισμού των παραμέτρων A, B, C, D του επιπέδου.

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Γενικά το σφάλμα στον προσδιορισμό του επιπέδου, εξαρτάται από την ανάλυση της εικόνας και τον προσδιορισμό της ακμής σε αυτή, από την επιλογή της ακμής που μελετάται και από το σφάλμα στις παραμέτρους του εξωτερικού προσανατολισμού. Τα σφάλματα αυτά, υπολογίζονται με δεδομένο πως έχει προηγηθεί πλήρης αποκατάσταση του εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων.

Με άλλα λόγια, θεωρείται πως στην τιμή των εικονοσυντεταγμένων, στην οποία βασίζεται η ακρίβεια του προγράμματος, είναι απαλλαγμένη από σφάλματα που επιφέρει ο εσωτερικός προσανατολισμός στις εικόνες. Έτσι, θεωρείται πως οι εικονοσυντεταγμένες έχουν μετρηθεί με την ίδια αβεβαιότητα και στους δύο άξονες, η οποία εκτιμήθηκε στα 7μm. Η τιμή αυτή επιλέχθηκε, διότι το μέγεθος του pixel των εικόνων, σύμφωνα με την φωτογραφική μηχανή από την οποία προέρχονται, είναι ίσο με 6,39μm. Αν διαφοροποιείται η μηχανή, θα πρέπει αντίστοιχα να επιλέγεται διαφορετική τιμή της αβεβαιότητας.

Όπως αναφέρεται και στο θεωρητικό κομμάτι της εργασίας, ένα επίπεδο μπορεί να οριστεί από τρία σημεία του, μη συνευθειακά μεταξύ τους. Σε αυτή την περίπτωση, το επίπεδο υπολογίστηκε από δύο σημεία τα οποία ανήκουν στην ακμή που μελετάται και το σημείο λήψης της εικόνας, σημεία τα οποία αφού ανήκουν στην ακμή, την ικανοποιούν πλήρως και χωρίς σφάλματα.

Από τις σχέσεις που περιγράφονται στο θεωρητικό υπόβαθρο, ισχύει ότι:

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

$$A = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1)$$

$$B = (z_3 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1)$$

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow$$

$$D = -(Ax + By + zC)$$

Εδώ θα πρέπει να γίνει μια αναφορά στον νόμο μετάδοσης σφαλμάτων. Εάν  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , τότε

$$\sigma_y = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2}$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο μετάδοσης σφαλμάτων στις παραμέτρους του επιπέδου, προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\sigma_A = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f_A}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f_A}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f_A}{\partial x_3}\right)^2 \sigma_{x_3}^2 + \left(\frac{\partial f_A}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial f_A}{\partial y_2}\right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial f_A}{\partial y_3}\right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \left(\frac{\partial f_A}{\partial z_1}\right)^2 \sigma_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial f_A}{\partial z_2}\right)^2 \sigma_{z_2}^2 + \left(\frac{\partial f_A}{\partial z_3}\right)^2 \sigma_{z_3}^2}$$

$$\sigma_B = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f_B}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f_B}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f_B}{\partial x_3}\right)^2 \sigma_{x_3}^2 + \left(\frac{\partial f_B}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial f_B}{\partial y_2}\right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial f_B}{\partial y_3}\right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \left(\frac{\partial f_B}{\partial z_1}\right)^2 \sigma_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial f_B}{\partial z_2}\right)^2 \sigma_{z_2}^2 + \left(\frac{\partial f_B}{\partial z_3}\right)^2 \sigma_{z_3}^2}$$

$$\sigma_C = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f_C}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f_C}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f_C}{\partial x_3}\right)^2 \sigma_{x_3}^2 + \left(\frac{\partial f_C}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial f_C}{\partial y_2}\right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial f_C}{\partial y_3}\right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \left(\frac{\partial f_C}{\partial z_1}\right)^2 \sigma_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial f_C}{\partial z_2}\right)^2 \sigma_{z_2}^2 + \left(\frac{\partial f_C}{\partial z_3}\right)^2 \sigma_{z_3}^2}$$



## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

Η παράμετρος D του επιπέδου, υπολογίζεται ως συνάρτηση των A, B, C, συνεπώς και το σφάλμα του προσδιορισμού της παραμέτρου αυτής θα προκύψει μέσω των σφαλμάτων των παραμέτρων A, B, C:

$$\sigma_D = \pm \sqrt{\sigma_{X_1}^2 \sigma_A^2 + \sigma_{Y_1}^2 \sigma_B^2 + \sigma_{Z_1}^2 \sigma_C^2}$$

Το συνολικό σφάλμα των παραμέτρων εξαρτάται από τα τέσσερα παραπάνω σφάλματα και υπολογίζεται ως εξής:

$$\sigma = \pm \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2 + \sigma_D^2}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, προκύπτει πως το σφάλμα στον προσδιορισμό του επιπέδου όταν προέρχεται από δύο εικόνες, είναι ίσο με 6.11373746708609e-05m για το επίπεδο που αποτελείται από την τελική τομή και το σημείο λήψης της πρώτης εικόνας και 5.9494599290132313e-05m για το επίπεδο που αποτελείται από την τελική τομή και το σημείο λήψης της δεύτερης εικόνας.

Αντίστοιχα, όταν ο προσδιορισμός της τομής γίνεται μέσω τριών επιπέδων, τα σφάλματα έχουν ως εξής:

- Σφάλμα στον προσδιορισμό του επιπέδου από την τελική τομή και το σημείο λήψης της πρώτης εικόνας: 0.0007192795731444711m = 0.72 χιλιοστά.
- Σφάλμα στον προσδιορισμό του επιπέδου από την τελική τομή και το σημείο λήψης της δεύτερης εικόνας: 0.0007205206687913261m = 0.72 χιλιοστά.
- Σφάλμα στον προσδιορισμό του επιπέδου από την τελική τομή και το σημείο λήψης της τρίτης εικόνας: 0.0007206038265260676 m = 0.72 χιλιοστά.

### 5.2.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Η ερμηνεία του γραμμικού σφάλματος στον προσδιορισμό των επιπέδων, γίνεται για να αποδειχθεί πως ο αλγόριθμος επιφέρει ικανοποιητικά αποτελέσματα και στον προσδιορισμό των επιπέδων που προκύπτουν από την ακμή στην εικόνα δεν υπάρχουν μεγάλα σφάλματα.

Στο θεωρητικό κομμάτι της εργασίας, αναφέρεται πως είναι αρκετή η κλίση ενός επιπέδου και ένα σημείο που να ανήκει στο επίπεδο, για τον προσδιορισμό του. Η κλίση αυτή, υπολογίζεται μέσω ενός διανύσματος n, το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο που μελετάται.

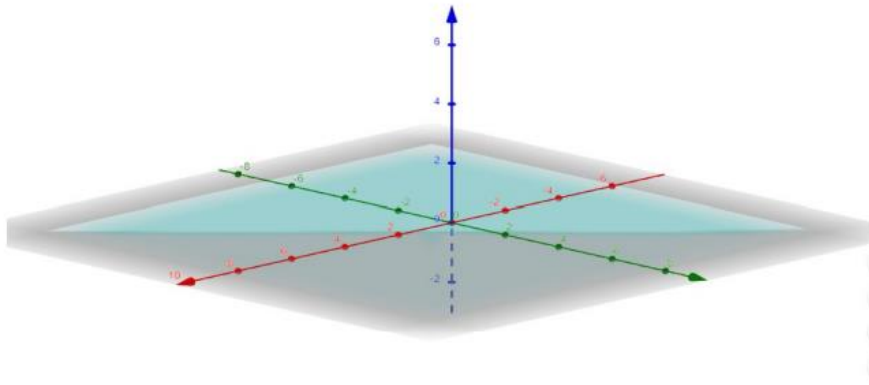
## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

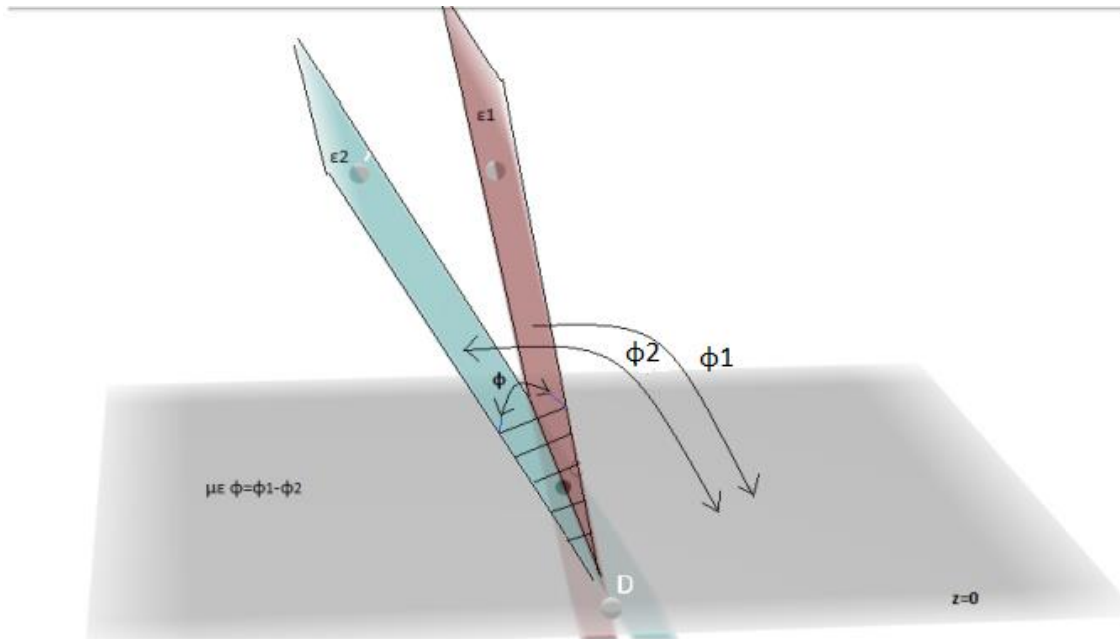
Η θέση ενός επιπέδου σε σχέση με ένα δεύτερο, είναι σαφής όταν είναι γνωστά το σημείο εφαρμογής του κάθε επιπέδου και η γωνία μεταξύ των δυο αυτών επιπέδων. Ο υπολογισμός της γωνίας αυτής, γίνεται μέσω της εξίσωσης (1.5) του θεωρητικού τμήματος της εργασίας.

Στόχος του κεφαλαίου αυτού, είναι η εύρεση της διαφοράς μεταξύ του επιπέδου που περιέχει την καλύτερη τιμή της τομής των επιπέδων, όπως αυτή υπολογίστηκε και περιγράφεται αναλυτικά παραπάνω, χωρίς τα σφάλματα που μετρήθηκαν και του ίδιου επιπέδου με την προσθήκη των σφαλμάτων, ούτως ώστε να βρεθεί η επιρροή του σφάλματος στο αποτέλεσμα.

Για την επίτευξη του στόχου αυτού, η σύγκριση των επιπέδων αυτών δεν γίνεται απευθείας, αλλά το κάθε επίπεδο συγκρίνεται με ένα τρίτο σταθερό επίπεδο, ώστε να είναι εμφανείς οι διαφορές τους. Το επίπεδο επιλέχθηκε να είναι το  $z=0$ , με κάθετο διάνυσμα  $\vec{n} = (0,0,1)$ .



Εικόνα 17: Απεικόνιση του επιπέδου  $z = 0$  (Δολαψάκη, 2020)



Εικόνα 18: Διαφορές γωνιών μεταξύ δυο επιπέδων (Δολαψάκη, 2020)

Στην εικόνα 19, δηλαδή, η γωνία  $\phi_2$  υποδηλώνει τη γωνία που σχηματίζει το επίπεδο  $z = 0$  με το επίπεδο που περιέχει την καλύτερη τιμή μιας τομής, έστω ότι αυτό είναι το επίπεδο  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ . Αντίστοιχα, η γωνία  $\phi_1$  συμβολίζει τη γωνία που σχηματίζει το επίπεδο  $z = 0$  με το επίπεδο  $\vec{n}_2$ , αν σε αυτό προστεθεί το σφάλμα προσδιορισμού των παραμέτρων του, δηλαδή το επίπεδο  $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 + \sigma_2$ .

Για να οριστεί το επίπεδο  $\vec{n}_1$ , επιλέγονται το πρώτο και το τελευταίο σημείο της τομής 12 και το σημείο λήψης της πρώτης φωτογραφίας. Αντίστοιχα, για να οριστεί το επίπεδο  $\vec{n}_2$  επιλέγονται το πρώτο και το τελευταίο σημείο της τομής 12 και το σημείο λήψης της δεύτερης φωτογραφίας. Τα ανάλογα ισχύουν για περισσότερες εικόνες, σε περίπτωση που η μελέτη γίνεται με πάνω από δύο επίπεδα.

Η διαφορά  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ , είναι το μέγεθος του γωνιακού σφάλματος που υπεισέρχεται στην εργασία. Για να γίνει αντιληπτή η επιρροή αυτού του σφάλματος, είναι αναγκαία η μετατροπή του σε γραμμικό. Η γωνία  $\Delta\phi$ , υπολογίστηκε να είναι  $2.271439^{cc}$  για το επίπεδο που προκύπτει από την πρώτη εικόνα και  $6.337004^{cc}$  για το επίπεδο που προκύπτει από τη δεύτερη εικόνα.

Για να γίνει αντιληπτό το μέγεθος του σφάλματος, στις εικόνες με απόσταση λήψης 4 μέτρα κατά τον άξονα  $y$  και φακό 24 χιλιοστών, ο συντελεστής κλίμακας είναι  $\frac{1}{167}$ .

- Για 4 μέτρα απόσταση λήψης, τα  $2.271439^{cc}$  μεταφράζονται σε  $2,271439 \cdot 4 = 1.426464e^{-5} = 14 \mu\text{m}$ . Τα 14  $\mu\text{m}$  σφάλμα πολλαπλασιασμένα με αυτόν τον συντελεστή κλίμακας, δίνουν σφάλμα 0,0023338 μέτρα, δηλαδή 2 χιλιοστά στο έδαφος.

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

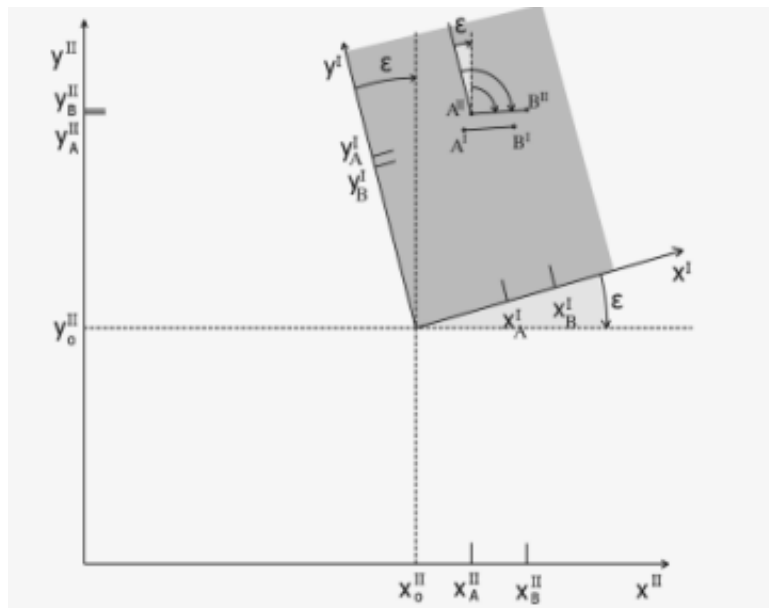
Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

- Για 4 μέτρα απόσταση λήψης, τα  $6.337004^{cc}$  μεταφράζονται σε  $6,337004 \cdot 4 = 3.847756e^{-5} = 38 \mu\text{m}$ . Τα 38  $\mu\text{m}$  σφάλμα, πολλαπλασιασμένα με τον συντελεστή κλίμακας, δίνουν σφάλμα 0,00641420925 μέτρα, δηλαδή 6 χιλιοστά στο έδαφος.

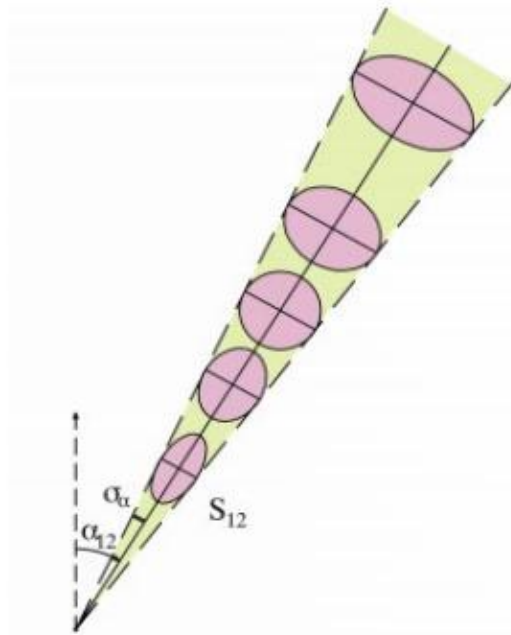
Όταν προστέθηκε και τρίτο επίπεδο στον υπολογισμό της ακμής, τα σφάλματα υπολογίστηκαν ως εξής:

- Για το επίπεδο που προκύπτει από την πρώτη εικόνα, η γωνία υπολογίστηκε ίση με  $\Delta\phi = 2,58811^{cc}$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω, αυτό το γωνιακό σφάλμα μεταφράζεται σε  $2,58811 \cdot 4 = 1.62533e^{-5} = 16 \mu\text{m}$ , το οποίο αν αναχθεί στο έδαφος σημαίνει μετατόπιση 0,0027143 μέτρα, δηλαδή 2,7 χιλιοστά.
- Για το επίπεδο που προκύπτει από τη δεύτερη εικόνα, η γωνία υπολογίστηκε ίση με  $\Delta\phi = 7,11843^{cc}$ . Δηλαδή, πρόκειται για σφάλμα 7,5 χιλιοστά στο έδαφος.
- Για το επίπεδο που προκύπτει από την τρίτη εικόνα, η γωνία  $\Delta\phi$  μεταξύ του σωστού επιπέδου και του επιπέδου που εμπεριέχει το σφάλμα, υπολογίστηκε ίση με  $\Delta\phi = 4,33464^{cc}$ , δηλαδή σφάλμα 4,5 χιλιοστά στο έδαφος.

Από τα παραπάνω, προκύπτει πως τα αποτελέσματα του αλγορίθμου είναι αληθή, καθώς η αβεβαιότητα των υπολογισμών είναι μικρή και δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.



Εικόνα 19: Η γωνία στροφής ( $\epsilon$ ) είναι η γωνία με την οποία πρέπει να στραφούν δεξιόστροφα οι άξονες του συστήματος I για να γίνουν παράλληλοι με τους άξονες του συστήματος II (Δολαψάκη, 2020)



Εικόνα 20:Απεικόνιση του γραμμικού σφάλματος (Δολαψάκη, 2020)

## 6. ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το πρόγραμμα, δεν έχει μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους και υπολογιστικές απαιτήσεις. Συγκεκριμένα, το λειτουργικό σύστημα του υπολογιστή στον οποίο δημιουργήθηκε το πρόγραμμα, είναι Processor Intel(R) Core(TM) i7-8750H CPU @ 2.20GHz, installed RAM memory 16 GB, 125 GB SSD σκληρό δίσκο και System Type 64-bit operating system.

Αρχικά τέθηκε το ζήτημα της εύρεσης του επιπέδου που ορίζεται από την εικόνα της ακμής που μελετάται και το σημείο λήψης της εικόνας στην οποία φαίνεται η ακμή. Βασική προϋπόθεση είναι η ακμή αυτή να απεικονίζεται σε δύο τουλάχιστον εικόνες. Για το σκοπό αυτό, ο χρήστης εισάγει τον επιθυμητό αριθμό εικόνων στο AutoCad. Σε κάθε εικόνα ξεχωριστά, επιλέγει δύο σημεία τα οποία ανήκουν στην ακμή και χειροκίνητα εισάγει τις εικονοσυντεταγμένες τους στον αλγόριθμο. Ο αλγόριθμος διαβάζει επίσης το .txt αρχείο με τους προσανατολισμούς όλων των εικόνων και κατευθύνεται στην επιθυμητή.

Έπειτα, μέσω του μετασχηματισμού στερεού σώματος, υπολογίζονται για κάθε σημείο που έχει επιλεγεί χωριστά οι συντεταγμένες του στο χώρο. Μέσω των δυο αυτών σημείων, υπολογίζονται οι παράμετροι της ζητούμενης ευθείας και κατά συνέπεια οι συντεταγμένες  $(X_i, Y_i, Z_i)$  κάθε

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

σημείου που ικανοποιεί την ευθεία. Οι συντεταγμένες αυτές, εισάγονται σε έναν πίνακα  $n \times 3$ , όπου  $n$  ο αριθμός των σημείων τα οποία αποτελούν τη γραμμή. Στη συνέχεια, επιλέγονται δυο οποιαδήποτε σημεία από τον πίνακα και εισάγοντας τις συντεταγμένες τους, καθώς επίσης και τις συντεταγμένες του σημείου λήψης στην εξίσωση (1.4), ο αλγόριθμος υπολογίζει τις παραμέτρους του επιπέδου που δημιουργεί η ακμή και το σημείο λήψης.

```
#υπολογισμος parametrwn A,B,C,D του epipedou Ax+By+Cz+D pou apoteleitai apo ta shmeia a,b kai shmeio lhpshs X0,Y0,Z0
A = np.array([[ (y2-y1)*(z2-z1) ], [ (y3-y1)*(z3-z1) ]])
A = np.linalg.det(A)
print("A = ", A)

B = np.array([[ (x2 - x1), (z2 - z1) ], [ (x3 - x1), (z3 - z1) ]])
B = np.linalg.det(B)
print("B = ", B)

C = np.array([[ (x2-x1), (y2-y1) ], [ (x3-x1), (y3-y1) ]])
C = np.linalg.det(C)
print("C = ", C)

D = (-x1*A + y1*B - z1*C)
print("D = ", D)

print("to epipedo pou prokuptei apo ta sugkekrimena shmeia einai to ekshs:\n", A,"x+", B,"y+", C,"z+", D,"=0")
```

Εικόνα 21: Εύρεση επιπέδου μέσω δύο σημείων της ακμής και του σημείου λήψης

Ιδανικά, εφόσον μελετάται η ίδια ακμή σε διαφορετικές εικόνες στις οποίες απεικονίζεται, κάθε εφαρμογή των εικονοσυντεταγμένων στην εξίσωση της εμπροσθοτομίας, θα έπρεπε να καταλήγει στην ίδια γραμμή-ακμή στο χώρο. Επειδή όμως, η επιλογή των σημείων τα οποία αποτελούν τη γραμμή, και κατά συνέπεια των εικονοσυντεταγμένων οι οποίες θα εισαχθούν στον αλγόριθμο, εξαρτάται τόσο από την ποιότητα των εικόνων, όσο και από την ακρίβεια με την οποία ο χρήστης επιλέγει το σημείο, η ακρίβεια του αποτελέσματος του αλγορίθμου εξαρτάται σημαντικά από τη σωστή και ακριβή επιλογή του εκάστοτε σημείου και κατά συνέπεια από αυτόν. Έτσι, εν γένει η επίλυση της εμπροσθοτομίας δεν καταλήγει στην ίδια γραμμή για διαφορετικούς συνδυασμούς ακμών/εικόνων.

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό στερεού σώματος, αυτή τη φορά με δεδομένα τον προσανατολισμό και το σημείο λήψης της δεύτερης εικόνας, καθώς επίσης και τις εικονοσυντεταγμένες δυο σημείων της ακμής, όπως αυτή παρατηρείται στη δεύτερη εικόνα, θα προκύψει αντίστοιχα μια δεύτερη γραμμή, η οποία θα περιγράφει την ακμή που παρατηρείται στο χώρο. Από την ακμή αυτή και το σημείο λήψης της δεύτερης εικόνας, προκύπτει ένα δεύτερο επίπεδο.

Η τομή των δυο επιπέδων, θα αποτελεί την καλύτερη από τις δυο παραπάνω εκτίμηση της γραμμής. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Krumm (Krumm 2000), υπολογίζεται το εξωτερικό

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

γινόμενο των διανυσμάτων των δυο επιπέδων, από το οποίο θα προκύψει ένα διάνυσμα το οποίο έχει διεύθυνση παράλληλη με αυτή της ζητούμενης ευθείας.

Για τον ορισμό της ευθείας, απαιτείται πέραν του παράλληλου σε αυτή διανύσματος και ένα σημείο της. Για τον υπολογισμό του σημείου της ευθείας, οι δύο συνθήκες που απαιτούνται είναι αυτό να ανήκει και στα δυο επίπεδα και να απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα σημεία της γραμμής που αποτελούν την τομή των επιπέδων. Το σημείο αυτό θα προκύψει από τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange με δυο συνθήκες, όπως αυτή περιγράφεται στο θεωρητικό μέρος της παρούσας και με στοιχεία εισαγωγής τις παραμέτρους των δυο επιπέδων και ένα σημείο του κάθε επιπέδου.

Αν η ακμή είναι ορατή και σε μια τρίτη εικόνα, θα προκύψει αντίστοιχα και μια τρίτη εξίσωση που θα περιγράφει τη γραμμή στο χώρο και ένα τρίτο επίπεδο, αποτελούμενο από την εξίσωση αυτή και το σημείο λήψης της τρίτης εικόνας.

Είναι λογικό θεωρητικά (ιδανικά) να αναμένεται ταύτιση των παραπάνω τομών, εφόσον περιγράφουν την ίδια ακμή στο χώρο, πράγμα που θα συνέβαινε αν δεν υπεισέρχονταν το σφάλμα του χρήστη που αναφέρεται παραπάνω. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού, χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος RANSAC.

Με τη εφαρμογή του αλγορίθμου RANSAC, προκύπτει ένας πίνακας  $n \times 3$ , όπου  $n$  το πλήθος των σημείων τα οποία σύμφωνα με τον αλγόριθμο και με βάση το `threshold` που έχει οριστεί, ανήκουν στην τελική ακμή. Η ακμή αυτή, αποτελεί την καλύτερη εκτίμηση της γραμμής που προέκυψε από τις τομές των επιπέδων.

Γνωρίζοντας την «καλύτερη ακμή», υπολογίζονται τώρα μέσω της εξίσωσης (1.4), οι καλύτερες τιμές των επιπέδων που προκύπτουν από την σωστή πια ακμή και το σημείο λήψης της εκάστοτε εικόνας.

Η παρούσα εργασία μελετά τη διαδικασία αυτή για δύο έως τρία επίπεδα από ισάριθμες εικόνες, όμως εννοείται πως με τον ίδιο τρόπο μπορεί να λειτουργήσει για οποιονδήποτε αριθμό επιπέδων, αρκεί αυτά να είναι περισσότερα ή ίσα με 2.

Έστω δύο σημεία της ακμής  $A(X_A, Y_A, Z_A)$  και  $B(X_B, Y_B, Z_B)$ , τα οποία παρατηρούνται στην εικόνα 1, με σημείο λήψης  $(X_{01}, Y_{01}, Z_{01})$  και έχουν εικονοσυντεταγμένες  $a_1(x_{a1}, y_{a1})$  και  $b_1(x_{b1}, y_{b1})$ , στην εικόνα 2, με σημείο λήψης  $(X_{02}, Y_{02}, Z_{02})$  και έχουν εικονοσυντεταγμένες  $a_2(x_{a2}, y_{a2})$  και  $b_2(x_{b2}, y_{b2})$ , στην εικόνα 3, με σημείο λήψης  $(X_{03}, Y_{03}, Z_{03})$  και στην εικόνα 4, με σημείο λήψης  $(X_{04}, Y_{04}, Z_{04})$  και έχουν εικονοσυντεταγμένες  $a_4(x_{a4}, y_{a4})$  και  $b_4(x_{b4}, y_{b4})$ .

Εφόσον υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές εικόνες και τέσσερα διαφορετικά σημεία λήψης, ένα για κάθε εικόνα, είναι λογικό να προκύπτουν και τέσσερα διαφορετικά επίπεδα, τα οποία περιέχουν το κάθε ένα την ακμή που προκύπτει από κάθε εικόνα, καθώς επίσης και το σημείο λήψης της κάθε εικόνας. Έτσι, συνοψίζοντας, προκύπτουν τα εξής:

- Επίπεδο  $\pi_1$ , το οποίο αποτελείται από την ακμή  $A_1B_1$  και το σημείο λήψης  $(X_{01}, Y_{01}, Z_{01})$  της εικόνας 1,

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

- επίπεδο  $n_2$ , το οποίο αποτελείται από την ακμή  $A_2B_2$  και το σημείο λήψης  $(X_{02}, Y_{02}, Z_{02})$  της εικόνας 2,
- επίπεδο  $n_3$ , το οποίο αποτελείται από την ακμή  $A_3B_3$  και το σημείο λήψης  $(X_{03}, Y_{03}, Z_{03})$  της εικόνας 3.

Εφαρμόζοντας την **Μέθοδο των Πολλαπλασιαστών Lagrange με δύο συνθήκες**, όπως αυτή περιγράφεται στο θεωρητικό κομμάτι της παρούσας εργασίας, προκύπτουν τρεις τομές επιπέδων:

- Τομή επιπέδων  $n_1$  και  $n_2$ , η οποία θα ονομάζεται τομή 12
- Τομή επιπέδων  $n_1$  και  $n_3$ , η οποία θα ονομάζεται τομή 13
- Τομή επιπέδων  $n_2$  και  $n_3$ , η οποία θα ονομάζεται τομή 23

Όπως αναφέρεται παραπάνω, η ποιότητα των εικόνων και η ακρίβεια με την οποία ο χρήστης στοχεύει τα σημεία ενδιαφέροντος πάνω στην εικόνα, αποτελούν πολύ σημαντικές παραμέτρους για την ακρίβεια της μελέτης. Ένας επιπλέον λόγος ο οποίος μπορεί να επιφέρει μεγάλα σφάλματα στην εργασία, είναι οι δυο εικόνες να έχουν κακή σχετική θέση και γωνία μεταξύ τους να είναι αρκετά μικρή.

Για τον έλεγχο αυτής της περίπτωσης, όταν η ακμή προσδιορίζεται από περισσότερες από δύο εικμετά το στάδιο της τομής δυο επιπέδων και την εξαγωγή της ως μια γραμμή στο χώρο, η εξαγωγή της τομής αυτής γίνεται σε δύο μορφές:

- Σε πίνακα των σημείων από τα οποία αποτελείται η ακμή. Ο πίνακας αυτός έχει διαστάσεις  $n \times 3$ , όπου  $n$  το πλήθος των σημείων που αποτελούν την ακμή και εξαρτάται από τον χρήστη. Οι τρεις στήλες περιγράφουν τις συντεταγμένες  $X, Y, Z$  των σημείων αυτών.
- Σε διανυσματική μορφή σε συνδυασμό με ένα σημείο της.

Στη συνέχεια, για κάθε συνδυασμό τομών, υπολογίζεται η απόσταση κάθε σημείου του πίνακα της μιας τομής, από το διάνυσμα της ευθείας μιας άλλης τομής και υπολογίζεται ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση της απόστασης μεταξύ των δύο ευθειών.

Είναι λογικό, η απόσταση αυτή μεταξύ των τομών να είναι λίγα εκατοστά. Υπάρχει, όμως, περίπτωση, η απόσταση αυτή να είναι μεγάλη. Αυτό μπορεί να συμβεί αν η γωνία μεταξύ δύο φωτογραφιών είναι μικρή, ή αν οι σκοπεύσεις του χρήστη σε μια φωτογραφία δεν ήταν αρκετά καλές, λόγω είτε εσφαλμένης παρατήρησής του, είτε λόγω κακής ποιότητας των εικόνων.

Παρακάτω τα βήματα της εργασίας:

1. Εισαγωγή της εικόνας στο Autocad και ορισμός του συστήματος αναφοράς της με κέντρο το κέντρο της εικόνας.



## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

2. Επιλογή δύο σημείων της εικόνας που να ανήκουν στην ίδια ακμή.
3. Εισαγωγή εικονοσυντεταγμένων δυο σημείων της ακμής στον αλγόριθμο.
4. Επανάληψη των βημάτων 1-3 για τον επιθυμητό αριθμό εικόνων.
5. Εισαγωγή αριθμού εικόνων στις οποίες φαίνεται η ακμή και άρα επιπέδων με τα οποία θα λειτουργήσει ο αλγόριθμος.
6. Μετατροπή σε συντεταγμένες στο τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων του χώρου με τη χρήση του μετασχηματισμού στερεού σώματος.
7. Υπολογισμός των παραμέτρων της ευθείας που δημιουργούν αυτά τα δυο σημεία.
8. Δημιουργία ενός  $n*3$  πίνακα που περιέχει τα σημεία που ικανοποιούν την ευθεία.
9. Υπολογισμός των παραμέτρων της ευθείας.
10. Επιλογή δύο σημείων από τον πίνακα.
11. Εύρεση του επιπέδου που δημιουργούν αυτά τα δύο σημεία, συνεπώς η γραμμή και το σημείο λήψης της εικόνας.
12. Επανάληψη της διαδικασίας με τη δεύτερη, τρίτη ή τέταρτη εικόνα, ανάλογα πόσες εικόνες έχουν εισαχθεί.
13. Εύρεση της τομής των επιπέδων ανά δύο.
14. Υπολογισμός της απόστασης του κάθε σημείου μιας τομής από τη γραμμή που περιγράφει μια άλλη τομή.
15. Υπολογισμός της μέσης απόστασης και της τυπικής απόκλισης των ευθειών.
16. Έλεγχο αν η απόσταση είναι μέσα στα όρια που έχει θέσει ο χρήστης και απόφαση αν θα συμμετέχει στον υπολογισμό της καλύτερης ευθείας ή αν θα απορριφθεί.
17. Υπολογισμός της «καλύτερης ευθείας» με χρήση του αλγορίθμου RANSAC.
18. Υπολογισμός των παραμέτρων της ευθείας.
19. Επιλογή δυο σημείων της ευθείας.
20. Υπολογισμός του επιπέδου που δημιουργούν τα δυο αυτά σημεία με το σημείο λήψης της κάθε εικόνας.
21. Υπολογισμός σφάλματος με το οποίο υπολογίστηκε το επίπεδο.
22. Εξαγωγή των αποτελεσμάτων.

Τα αποτελέσματα εξάγονται σε ένα αρχείο .dxf για εισαγωγή στο AutoCad και σε σε ένα αρχείο .txt που περιέχει τις συντεταγμένες της τελικής ακμής.

Αν ο χρήστης αποφασίσει να τρέξει τον κώδικα με δυο εικόνες, τότε δεν έχει νόημα η εφαρμογή του αλγορίθμου RANSAC, αφού από τις δύο εικόνες θα προκύψουν δύο επίπεδα, τα οποία θα τέμνονται σε μοναδική ευθεία στο χώρο.

### 6.1. ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΕΙΣΟΔΟΥ

Οι εικόνες που χρησιμοποιήθηκαν, είναι μέρος της αποτύπωσης του ναού της Δήμητρας στη Νάξο. Οι εικόνες είναι full frame, διαστάσεων  $0,036*0,024$  m<sup>2</sup> και συνοδεύονται από ένα .txt

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

αρχείο, το οποίο προέκυψε από το Photoscan (τώρα πλέον Metashape) και αναφέρει με τη σειρά τα εξής στοιχεία για την εικόνα: **όνομα εικόνας,  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$** .

Εδώ θα πρέπει να τονιστεί πως είναι σημαντικό να δοθεί προσοχή στη σειρά με την οποία το Photoscan κάνει την εξαγωγή των στροφών  $\omega$ ,  $\phi$  και  $\kappa$ . Το Photoscan εξάγει τις στροφές με σειρά  $\phi, \omega$  και  $\kappa$ , για να χρησιμοποιηθεί στο πρόγραμμα Bingo, το οποίο ακολουθεί αυτή τη σειρά. Είναι σημαντικό να εφαρμοστούν σωστά οι στροφές κατά τους άξονες  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , διότι λανθασμένη εφαρμογή στη σειρά των στροφών στον πίνακα στροφών  $R$ , θα επιφέρει και διαφορετικό συνδυασμό στροφών στο χώρο.

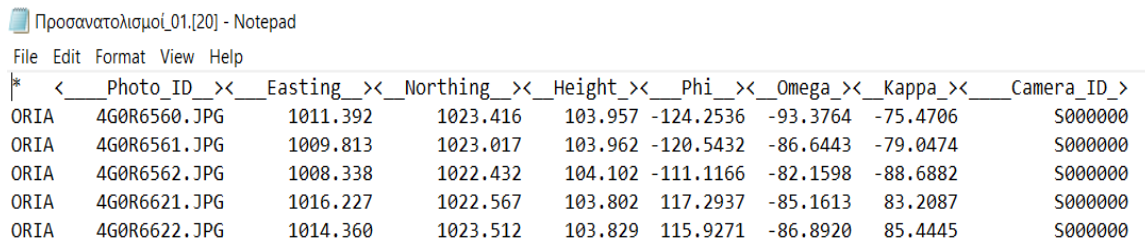
Επειδή έτυχε τα συγκεκριμένα αρχεία προσανατολισμών να έχουν παραχθεί από το συγκεκριμένο λογισμικό, επισημαίνεται ότι ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε προσαρμόστηκε σε αυτήν την μορφή αρχείου.

Εφόσον, δηλαδή, το αρχείο από το οποίο αντλήθηκαν οι προσανατολισμοί των εικόνων, αναφέρει με αυτή τη σειρά τα στοιχεία για τους προσανατολισμούς των εικόνων, αυτή είναι και η μορφή που θα πρέπει να έχει ο πίνακας στροφής. Συγκεκριμένα, το πρόγραμμα Bingo είναι προγραμματισμένο να λειτουργεί με μοίρες για μονάδα μέτρησης γωνιών και με σειρά στροφών:

$$R_{\varphi\omega\kappa} = R_{\kappa} \cdot R_{\varphi} \cdot R_{\omega}$$

Για να γίνουν, δηλαδή, οι εικονοσυντεταγμένες, παράλληλες με το γεωδαιτικό σύστημα και να περιγραφεί η στροφή τους, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο ανάστροφος πίνακας  $R_{\varphi\omega\kappa}^{-1}$  του  $R_{\varphi\omega\kappa}$  και όχι ο ανάστροφος  $R_{\omega\varphi\kappa}^{-1}$  του  $R_{\omega\varphi\kappa}$ , όπως αυτός περιγράφηκε στο θεωρητικό κομμάτι της εργασίας (Εξ. 10).

Σε περίπτωση που οι προσανατολισμοί των εικόνων έχουν υπολογιστεί με άλλο τρόπο θα πρέπει το αρχείο εισόδου στον αλγόριθμο να τροποποιηθεί αναλόγως (Εικ. 23).



* <	Photo_ID ><	Easting ><	Northing ><	Height ><	Phi ><	Omega ><	Kappa ><	Camera_ID >
ORIA	4G0R6560.JPG	1011.392	1023.416	103.957	-124.2536	-93.3764	-75.4706	S000000
ORIA	4G0R6561.JPG	1009.813	1023.017	103.962	-120.5432	-86.6443	-79.0474	S000000
ORIA	4G0R6562.JPG	1008.338	1022.432	104.102	-111.1166	-82.1598	-88.6882	S000000
ORIA	4G0R6621.JPG	1016.227	1022.567	103.802	117.2937	-85.1613	83.2087	S000000
ORIA	4G0R6622.JPG	1014.360	1023.512	103.829	115.9271	-86.8920	85.4445	S000000

Εικόνα 22: Αρχείο από το Photoscan με τα στοιχεία των εικόνων, συμβατό με το πρόγραμμα Bingo

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

Θα ήταν χρήσιμο να υπάρχει ένα .txt αρχείο, το οποίο θα εμπεριέχει εικονοσυντεταγμένες των ακμών που επιθυμεί ο χρήστης να μελετήσει μέσω του αλγορίθμου αυτού. Κάτι τέτοιο, όμως, δεν έγινε, λόγω έλλειψης διαθέσιμου χρόνου. Αξίζει, όμως, να γίνει σε κάποια μελλοντική εργασία.

## 7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ

### 7.1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΑΠΟ ΔΥΟ ΕΙΚΟΝΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μελέτης της παρούσας εργασίας, για την εξαγωγή της ακμής που προκύπτει από την τομή δύο μόνο επιπέδων. Αρχικά, προσδιορίζεται το επίπεδο που προκύπτει από τη μελέτη δύο μόνο εικόνων, συγκεκριμένα των εικόνων '4G0R6562.JPG' και '4G0R6561.JPG'. Σε αυτή την περίπτωση, όπως αναφέρεται και παραπάνω, δεν είναι δυνατή η εφαρμογή του αλγορίθμου Ransac, γι αυτό και η ζητούμενη ακμή προκύπτει μόνο ως η τομή δυο επιπέδων. Επιλέχθηκε για την έρευνα, μια κατακόρυφη ακμή η οποία παρουσιάζεται στις ακόλουθες εικόνες.

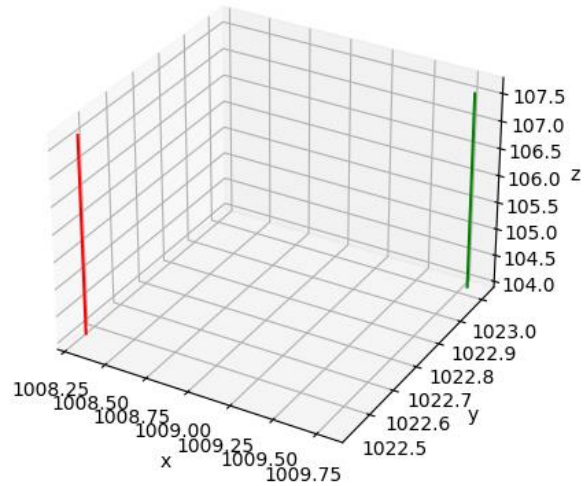


Εικόνα 23: η εικόνα 4G0R6562.JPG με την ακμή που μελετάται και απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων



Εικόνα 24: η εικόνα 4G0R6561.JPG με την ακμή που μελετάται και απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα

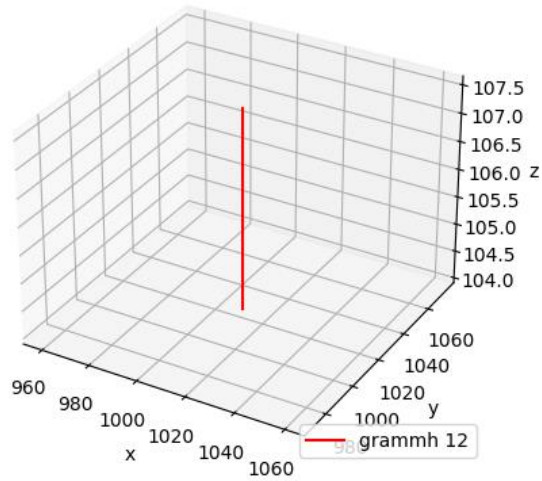


Εικόνα 25: Γραφική απεικόνιση των γραμμών που προκύπτουν από δύο εικόνες



## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων



Εικόνα 26: Προσδιορισμός της 3D ακμής από δύο εικόνες

final\_line\_of2 - Notepad

```
File Edit Format View Help
[[1009.72938037 1024.06181223 103.00576566]
[1009.72938037 1024.06181223 103.40576566]
[1009.72938037 1024.06181223 103.80576566]
[1009.72938037 1024.06181223 104.20576566]
[1009.72938037 1024.06181223 104.60576566]
[1009.72938037 1024.06181223 105.00576566]
[1009.72938037 1024.06181223 105.40576566]
[1009.72938037 1024.06181223 105.80576566]
[1009.72938037 1024.06181223 106.20576566]
[1009.72938037 1024.06181223 106.60576566]] (a)
```



Εικόνα 27: Η ακμή που προκύπτει από δύο εικόνες (α) Αρχείο .txt της 3D ακμής (b) εικονική αναπαράσταση του αρχείου .dxf της ακμής.

## 7.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΑΠΟ ΔΥΟ ΕΙΚΟΝΕΣ

Όπως αναφέρεται και στο κεφάλαιο 6, η ακρίβεια της μελέτης εξαρτάται από παράγοντες όπως η ποιότητα της εικόνας, η σκόπευση του χρήστη και η σχετική θέση δύο εικόνων. Στην περίπτωση που κάποια από τις παραπάνω συνθήκες δεν είναι ικανοποιητική, τότε και η κάθε τομή η οποία θα προκύψει από τη φωτογραφία αυτή, θα περιέχει σφάλματα και συνεπώς η απόστασή της από τις άλλες αντίστοιχες τομές θα είναι μεγάλη.

Για το αποτέλεσμα με την εφαρμογή του αλγορίθμου RANSAC, έχουν χρησιμοποιηθεί οι εικόνες '4G0R6562.JPG', '4G0R6561.JPG' και '4G0R6560.JPG'. Ισχύουν τα εξής:

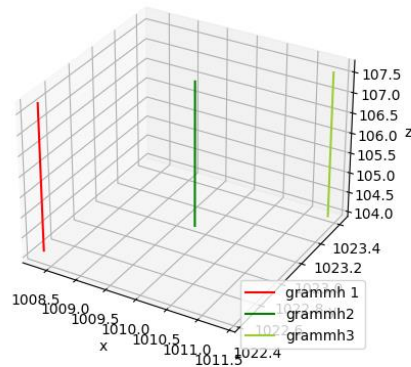
- **Τομή 12** θεωρείται η τομή των επιπέδων που προκύπτουν από τις εικόνες '4G0R6562.JPG' και '4G0R6561.JPG'
- **Τομή 13** θεωρείται η τομή των επιπέδων που προκύπτουν από τις εικόνες '4G0R6562.JPG' και '4G0R6560.JPG'
- **Τομή 23** θεωρείται η τομή των επιπέδων που προκύπτουν από τις εικόνες '4G0R6561.JPG' και '4G0R6560.JPG'



Εικόνα 28: η εικόνα 4G0R6560.JPG με την ακμή που μελετάται και απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων



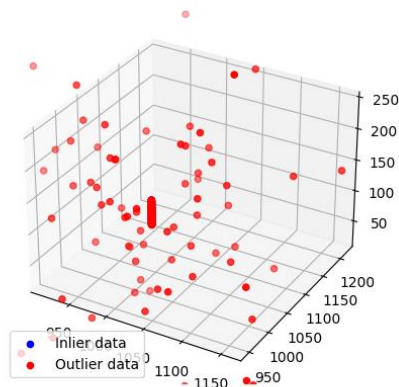
Εικόνα 29: Γραφική απεικόνιση των γραμμών που προκύπτουν από τρεις εικόνες

Για λόγους επιπλέον ελέγχου στην ορθότητα του αποτελέσματος, κρίθηκε σκόπιμο να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ των τομών. Για κάθε ζεύγος τομών, υπολογίζεται ανά σημείο η απόσταση μεταξύ τους, ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση των αποστάσεων αυτών. Έπειτα, εμφανίζεται η μέση απόσταση και η τυπική απόκλιση στο χρήστη και αυτός αποφασίζει αν θα επιτρέψει στον αλγόριθμο να συνεχίσει να τρέχει ή θα διακοπεί, ώστε να ελέγξει τις παραμέτρους του κώδικα και αν επιθυμεί να τις αλλάξει.

Υπολογίζοντας τις αποστάσεις των παραπάνω τομών μεταξύ τους, βρέθηκε το εξής:

- Μέση απόσταση της τομής 23 από την τομή 12: 0.02034641 m = 2 εκατοστά.
- Μέση απόσταση της τομής 23 από την τομή 13: 0.01705927 m = 1,7 εκατοστά.
- Μέση απόσταση της τομής 12 από την τομή 13: 0.02966544 m = 3 εκατοστά.

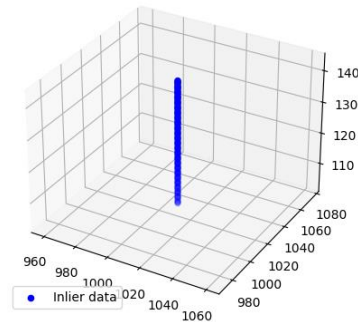
Έπειτα από πολλές προσπάθειες, αποφασίστηκε τελικά να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος RANSAC με threshold 0,006 m, έτσι ώστε η γραμμή που θα προκύψει τελικά να εξασφαλίζεται πως προσαρμόζεται ικανοποιητικά στα δεδομένα.



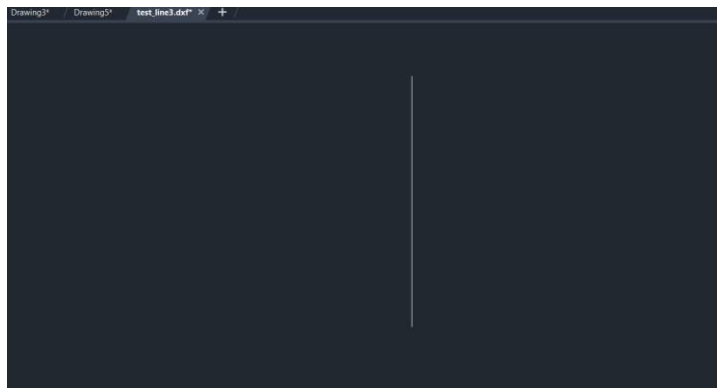
Εικόνα 30: Αποτελέσματα εφαρμογής αλγορίθμου RANSAC, inliers και outliers σημεία

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων



Εικόνα 31: Αποτελέσματα εφαρμογής αλγορίθμου RANSAC



Εικόνα 32: εικονική αναπαράσταση του αρχείου .dxf της ακμής που προκύπτει από τρία επίπεδα

## 8. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Με την ανάπτυξη της τεχνολογίας και την αύξηση των μέσων που παρέχονται ώστε να διεκπεραιωθεί μια εργασία, είναι λογικό να αυξάνεται ταυτόχρονα και η επιθυμία για μείωση του χρόνου διεκπεραίωσης της μελέτης. Παρακάτω ακολουθούν μερικές ιδέες, η εφαρμογή των οποίων αποσκοπεί στη μείωση της ανάγκης παρέμβασης του χρήστη στο πρόγραμμα και στη μείωση στο χρόνο που απαιτείται για την εφαρμογή του.

Δυστυχώς, λόγω έλλειψης χρόνου η εισαγωγή των εικονοσυντεταγμένων για τον υπολογισμό των ακμών δεν έγινε διαβάζοντας κάποιο .txt αρχείο, όπως ήταν η αρχική σκέψη αλλά χειροκίνητα. Μια χρήσιμη ιδέα για αντίστοιχη μελλοντική μελέτη, είναι η δημιουργία ενός .txt αρχείου, στο οποίο θα εισάγονται οι εικονοσυντεταγμένες και ο αλγόριθμος θα τις διαβάζει από εκεί. Έτσι, θα είναι δυνατή η ταυτόχρονη εξαγωγή περισσότερων από μία ακμών από τον αλγόριθμο.

Ένα ακόμα ζήτημα το οποίο θα μπορούσε αυτή την εργασία, είναι η εύρεση ομόλογων ακμών σε γειτονικές εικόνες. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού, εφόσον είναι γνωστές οι εικονοσυντεταγμένες δύο σημείων σε μια εικόνα και εφόσον είναι γνωστή η σχετική θέση μιας δεύτερης εικόνας ως προς την εικόνα αυτή, υπολογίζονται με τη χρήση της συνθήκης συνεπιπεδότητας οι εικονοσυντεταγμένες των ζητούμενων σημείων στη δεύτερη εικόνα. Να



## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

σημειωθεί πως η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει σε άπειρο πλήθος εικόνων οι οποίες περιέχουν την ακμή που μελετάται, με μόνη προϋπόθεση να είναι γνωστή η σχετική θέση των εικόνων ως προς μια εικόνα στην οποία έχουν εντοπιστεί τα ζητούμενα σημεία. Σύμφωνα με την επιπολική γεωμετρία, τα σημεία στη δεύτερη (στην τρίτη κλπ.) εικόνα, θα βρίσκονται στο επιπολικό επίπεδο που δημιουργούν τα σημεία λήψης των δύο εικόνων και το σημείο στο χώρο, του οποίου οι εικονοσυντεταγμένες αναζητούνται. Ενδιαφέρον για περαιτέρω ανάλυση, γεννά το ερώτημα αν είναι δυνατή η εύρεση ομόλογων ακμών σε γειτονικές εικόνες, χωρίς να είναι γνωστός ο προσανατολισμός τους.

Ακόμα περισσότερο ενδιαφέρον, θα είχε μια μελέτη κατά την οποία οι ακμές στις φωτογραφίες θα ανιχνεύονται αυτόματα, χωρίς την παρέμβαση του χρήστη. Μια τέτοια εργασία, θα αφαιρούσε τη δυνατότητα παρέμβασης του χρήστη και αλλοίωσης του αποτελέσματος από αυτόν, καθώς αποκλείει το ενδεχόμενο της λανθασμένης σκόπευσης ή πληκτρολόγησης των εικονοσυντεταγμένων από τον χειριστή του προγράμματος.

Επιπλέον, ενδιαφέρον θα είχε αν το περιεχόμενο της εργασίας αυτής, αλλά και όλες οι παραπάνω προτάσεις, εφαρμόζονταν σε πανοραμικές εικόνες, όπου οι ακμές που μελετώνται, δεν εμφανίζονται στη φωτογραφία ως ευθείες γραμμές, αλλά ως καμπύλες.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

## 9. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ατρέας Ν., 2009. Αναλυτική Γεωμετρία, Θεσσαλονίκη: ΑΠΘ Ατρέας Νικόλαος, Αναλυτική Γεωμετρία
- Γεωργούλα Ό., 2013. [Ενότητα #4 Μαθηματικά Μοντέλα Συγγραμμικότητας Συνεπιπεδότητας](#)
- Δολαψάκη Μ., 2020. Ανάπτυξη αλγορίθμου εντοπισμού ακμών σε νέφος σημείων από ψηφιακές εικόνες, Αθήνα: ΕΜΠ
- Καδιανάκης Ν. και Καρανάσιος Σ., 2014. Γραμμική άλγεβρα αναλυτική γεωμετρία και εφαρμογές, 6<sup>η</sup> έκδοση
- Κουρουνιώτη Κ., 2014. Επίπεδο και χώρος (Διαθέσιμο από: <http://users.math.uoc.gr/~chrisk/AGMA-Notes-2014.pdf>) [Τελευταία επίσκεψη: Μάρτιος 22]
- Μητροπούλου Α., 2017. Ανάπτυξη διαδικασίας εντοπισμού επιπέδων και ακμών σε μη οργανωμένα νέφη σημείων, Αθήνα: ΕΜΠ
- Μπέτσας Θ., 2021. Αυτοματοποιημένος Εντοπισμός Ακμών σε Νέφη Σημείων με την Βοήθεια Σημασιολογικής Πληροφορίας, Αθήνα: ΕΜΠ
- Πέτσα Έ., 2000. Θεμελιώδεις Έννοιες και Θεμελιώδη Προβλήματα της Φωτογραμμετρίας. Αθήνα: Τ.Ε.Ι. Αθήνας, Τμήμα Τοπογραφίας
- Σκέντζος Ο., 2020. Ανάπτυξη Αυτοματοποιημένου Αλγορίθμου για τον Εντοπισμό Ακμών σε Νέφη Σημείων, Αθήνα: ΕΜΠ
- Φελλούρης Α. 2011. Σημειώσεις: Διανυσματικού Λογισμού, 4ο Κεφάλαιο, Διανυσματικός Λογισμός. Αθήνα: ΕΜΠ.
- Alshwabkeh, Y., 2020. Linear feature extraction from point cloud using color information. Heritage Science
- Bazazian D., Casas J. and Ruiz-Hidalgo J., 2015. Fast and Robust Edge Extraction in Unorganized Point Clouds, Barcelona: Signal Theory and Communications Department, Universitat Politècnica de Catalunya
- Bienert, A., 2008. Vectorization, edge preserving smoothing and dimensioning of profiles in laser scanner point clouds. In Proceedings of XXIst ISPRS Congress, Beijing, China
- Dolapsaki and Georgopoulos, 2021. Edge Detection in 3D Point Clouds Using Digital Images. Athens, NTUA, Laboratory of Photogrammetry
- Fischler, M. and Bolles R., 1981, Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography
- Krumm J. (2000), Intersection of Two Planes, Redmond WA USA, (Διαθέσιμο από: <https://www.microsoft.com/en-us/research/publication/intersection-of-two-planes/>) [Τελευταία επίσκεψη: Οκτώβριος 22]

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη αλγορίθμου προσδιορισμού 3D ακμών με εμπροσθοτομία επιπέδων

- Lin Y., Wang C., Chend J., Chen B., Jia F., Chen Z. and Li J., 2015. Line segment extraction for large scale unorganized point clouds, ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing
- Mitropoulou & Georgopoulos, 2019. An automated process to detect edges in unorganized point clouds, Athens, NTUA, Laboratory of Photogrammetry
- Qi, C. R., Su, H., Mo, K., and Guibas, L. J. (2017) Pointnet: Deep learning on point sets for 3d classification and segmentation' in Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition
- Wang C., Cho Y., and Kim C. (2015). Automatic BIM Component Extraction from Point Clouds of Existing Buildings for Sustainability Applications.
- Xiaohu L., Yahui L. and Kai L., 2019, Fast 3D Line Segment Detection From Unorganized Point Cloud
- [Robust line model estimation using RANSAC](#)