



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Δ.Π.Μ.Σ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ &
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Προσαρμοστική Παραμόρφωση Πλέγματος με
Στάθμιση Αντιστρόφως Ανάλογη της Απόστασης και
την Τεχνική των Ολισθαινόντων Συνοριακών Κόμβων

Μεταπτυχιακή Εργασία

Ανδρέας Η. Παναγιωτόπουλος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής

Αθήνα, 2022



Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας αποτέλεσε ένα δύσκολο αλλά συνάμα επικερδές, σε προσωπικό επίπεδο, έργο. Χρειάστηκε ένας χρόνος για την ολοκλήρωσή της, ένας χρόνος μέσα στον οποίο κλήθηκα πολλές φορές να αντιμετωπίσω προβλήματα που απαιτούσαν δημιουργική σκέψη και σωστή καθοδήγηση. Για τη σωστή καθοδήγηση ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή κ. Γιαννάκογλου, ο οποίος πρόθυμα με βοήθησε κάθε φορά που χρειάστηκε. Επίσης, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την άψογη συνεργασία που είχαμε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Όσον αφορά τη δημιουργική σκέψη θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του Δ.Π.Μ.Σ. "Υπολογιστική Μηχανική" που είχα την τιμή να συνεργαστώ και μου μετέδωσαν τον τρόπο σκέψης που χρειάζεται για την επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω συγγενείς και φίλους, που με βοήθησαν και συνεχίζουν να με βοηθούν να ανταπεξέρχομαι στις προκλήσεις της ζωής που όλοι, κάθε τόσο, καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε.





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Δ.Π.Μ.Σ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ &
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Προσαρμοστική Παραμόρφωση Πλέγματος με Στάθμιση Αντιστρόφως Ανάλογη της Απόστασης και την Τεχνική των Ολισθαινόντων Συνοριακών Κόμβων

Μεταπτυχιακή Εργασία
του

Ανδρέα Η. Παναγιωτόπουλου

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής

Αθήνα, Οκτώβριος 2022

Περίληψη

Η προσαρμοστική παραμόρφωση υπολογιστικών πλεγμάτων είναι ένα θέμα μείζονος σημασίας στον χώρο της υπολογιστικής μηχανικής, λόγω του δυσβάσταχτου κόστους της επαναπλεγματοποίησης για μεγάλα τριδιάστατα πλέγματα. Η ταυτόχρονη απαίτηση η ποιότητα του αρχικού πλέγματος να παραμένει σχεδόν αναλλοίωτη και το κόστος των μεθόδων αυτών να παραμένει μικρό, καθιστά την προσαρμοστική παραμόρφωση ένα άκρως απαιτητικό πρόβλημα. Έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία πολλές μέθοδοι, οι οποίες προσπαθούν να ισορροπήσουν μεταξύ του υπολογιστικού κόστους και της στιβαρότητας, δύο στόχους αντικρουόμενους. Ένας μεγάλος κλάδος των μεθόδων αυτών είναι οι μέθοδοι παρεμβολής, οι οποίες είναι μέθοδοι μικρού υπολογιστικού κόστους που όμως υπολείπονται σε στιβαρότητα. Καταβάλλονται προσπάθειες τα τελευταία χρόνια ούτως ώστε να αυξηθεί η στιβαρότητα των μεθόδων αυτών.

Στο πλαίσιο αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας αναπτύσσεται η μέθοδος παρεμβολής, με στάθμιση αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης (Inverse Distance Weighting - IDW). Η απλή εκδοχή της μεθόδου ενισχύεται με τον διαχωρισμό της παρεμβαλλόμενης παραμόρφωσης, σε μία μετατόπιση και μία περιστροφή, οι οποίες παρεμβάλλονται μέσω της IDW ξεχωριστά, καθώς και με την τεχνική των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων. Η μέθοδος αξιολογείται σε δύο εφαρμογές, ένα διδιάστατο πλέγμα γύρω από μία αεροτομή NACA 9412 και σε ένα τριδιάστατο πλέγμα γύρω από ένα αεροπλάνο, για διάφορα σενάρια παραμόρφωσης. Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα της εργασίας, πρόκειται για μία μέθοδο που είναι σε θέση να παράξει πλέγματα υψηλής ποιότητας ακόμη και μετά από αρκετά μεγάλες παραμορφώσεις, με μικρό υπολογιστικό κόστος σε σχέση με άλλες μεθόδους.





**NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
MASTER IN COMPUTATIONAL MECHANICS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT**

**Adaptive Mesh Deformation using the Inverse Distance Weighting Interpolation Method
and the Sliding Nodes Technique**

Master Thesis by

Andreas I. Panagiotopoulos

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor

Athens, October 2022

Abstract

Adaptive mesh displacement is of huge importance in the field of computational mechanics, since a key problem in many simulation cases is the unbearable computational cost of grid remeshing, especially in very large 3D grids. Adaptive mesh displacement is not an easy problem to solve, since the need for efficient, in terms of computational cost, methods, yet robust, which are two contradictory goals, is hard to achieve. A promising category of methods are those based on interpolation, which are computationally efficient methods but lack in terms of robustness with respect to elements crossing and overlapping. In recent years, researchers are trying to construct interpolation methods, which has increased robustness in respect to previous methods.

In this master thesis, the Inverse Distance Weighting (IDW) method is being used in order to efficiently deform unstructured grids. The basic method, which interpolates the boundary nodes translation as a whole, is being enhanced by analyzing the boundary nodes translation in a rotation and a displacement, which are separately interpolated using IDW. Also, the technique of the sliding boundary nodes is being used in order to increase its effectiveness in large deformations of the boundary. The method is being assessed in a 2D grid around a NACA 9412 airfoil and in a 3D one around an airplane. The results suggest that this method is robust yet computationally efficient, being able to produce displaced grids with a quality, which is close to that of the initial grid, even after large deformations of the boundary.



Ακρωνύμια

2Δ	2 Διαστάσεων/Διδιάστατο
3Δ	3 Διαστάσεων/Τριδιάστατο
Δ.Π.Μ.Σ.	Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Μ.Δ.Ε.	Μερική Διαφορική Εξίσωση
IDW	Inverse Distance Weighting
CFD	Computational Fluid Dy- namics



Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Η σπουδαιότητα του υπολογιστικού πλέγματος στην υπολογιστική μηχανική	1
1.2	Η ανάγκη παραμόρφωσης του πλέγματος	1
1.3	Μέθοδοι παραμόρφωσης υπολογιστικού πλέγματος	2
1.4	Ποιότητα πλέγματος	3
1.5	Στόχος και δομή της εργασίας	4
2	Η μέθοδος Αντιστρόφως Ανάλογη της Απόστασης Στάθμιση (IDW) για την Παραμόρφωση Πλέγματος	5
2.1	Ιστορικό υπόβαθρο της IDW	5
2.2	Εφαρμογή της IDW στην παραμόρφωση υπολογιστικών πλεγμάτων	5
2.3	Ανάλυση της βαρυτικής συνάρτησης	7
2.4	Επιλογή παραμέτρων της βαρυτικής συνάρτησης	8
2.5	Παρεμβολή της συνολικής παραμόρφωσης στο εσωτερικό του πλέγματος	8
2.6	Παρεμβολή Στροφών στη μέθοδο IDW	9
2.7	Ανάλυση της παραμόρφωσης σε μία περιστροφή και μια μετατόπιση	10
2.8	Παρεμβολή της μετατόπισης και περιστροφής στο εσωτερικό του πλέγματος	16
2.9	Σύγκριση με την υπάρχουσα μέθοδο	16
2.10	Σύγκριση αποτελεσμάτων υπάρχουσας και νέας μεθόδου	18
2.11	Σύγκριση της απλής IDW με την IDW με περιστροφές	22
3	Η τεχνική των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων	27
3.1	Ανάλυση της μεθόδου	27
3.2	Αξιολόγηση της μεθόδου	29
4	Παρουσίαση Εφαρμογών & Αποτελέσματα	33
4.1	Εφαρμογές	33
4.1.1	2Δ εφαρμογή: Αεροτομή NACA 9412	33
4.1.2	3Δ εφαρμογή: Αεροπλάνο	35
4.2	Αποτελέσματα	39
4.2.1	2Δ εφαρμογή: Αεροτομή NACA 9412	39
4.2.2	3Δ εφαρμογή: Αεροπλάνο	46
5	Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα	51
5.1	Ανακεφαλαίωση	51
5.2	Συμπεράσματα	51
5.3	Προτάσεις για μελλοντική μελέτη	52
A	Μετρικές ποιότητας μη Δομημένων Πλεγμάτων	53

B Ημιτονοειδής παραμόρφωση NACA 9412: Αποτελέσματα χωρίς χρήση της τεχνικής των ολισθαινόντων κόμβων	55
---	-----------

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η σπουδαιότητα του υπολογιστικού πλέγματος στην υπολογιστική μηχανική

Απαραίτητο εργαλείο για την αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων (Μ.Δ.Ε.) μέσω πεπερασμένων διαφορών, στοιχείων ή όγκων είναι το υπολογιστικό πλέγμα. Το πλέγμα διακριτοποιεί τη γεωμετρία των σωμάτων και του χώρου γύρω από αυτά και αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία διακριτοποιούνται οι συνεχείς Μ.Δ.Ε. που διέπουν το εκάστοτε πρόβλημα. Λόγου χάρη, στη μηχανική των στερεών το υπολογιστικό πλέγμα αναπαριστά τις επιφάνειες και τους όγκους των σωμάτων, στη μηχανική των ρευστών ένα χωρίο όπου ρέει κάποιο ρευστό, ενώ σε εφαρμογές αλληλεπίδρασης στερεού-υγρού τόσο τις επιφάνειες και τους όγκους των στερεών σωμάτων όσο και μία περιοχή γύρω από αυτά.

Το πλέγμα παίζει σημαντικό ρόλο στην αξιοπιστία της αριθμητικής λύσης. Για να επιτευχθεί αυτό, η λύση οφείλει καταρχάς να είναι ακριβής, το οποίο επιτυγχάνεται μέσω πλεγμάτων που είναι πυκνά σε σημεία όπου η λύση παρουσιάζει απότομες κλίσεις, λ.χ. στην τυρβώδη περιοχή κοντά και πίσω από σώματα όπου γύρω τους ρέει ρευστό. Κατά δεύτερον, το πλέγμα οφείλει σε μεγάλο βαθμό να σέβεται τη γεωμετρία των αντικειμένων εντός του υπολογιστικού χωρίου. Εάν λ.χ. επιθυμείται η εύρεση της οπισθέλκουσας ενός αεροπλάνου, τότε έστω και μικρές ανακρίβειες στην επιφάνεια αυτού θα οδηγήσουν σε μεγάλες αποκλίσεις από την πραγματική λύση.

Ως το πρωταρχικό και κυριότερο εργαλείο στο πεδίο της υπολογιστικής μηχανικής, γρήγορα αναδείχθηκε σε ξεχωριστό κλάδο των μαθηματικών με τη δική του μεθοδολογία. Από τη δεκαετία του 1960 όπου άρχισαν οι πρώτες προσπάθειες για τη γένεση πλεγμάτων έως και σήμερα, έχει σημειωθεί σημαντική πρόοδος στον τομέα αυτό. Πλέον συναντά κανείς μία πληθώρα τεχνικών γένεσης πλεγμάτων όπως ελλειπτικές, υπερβολικές, παραβολικές, τριγωνοποίηση Delaunay, προελαύνον μέτωπο κ.α..

1.2 Η ανάγκη παραμόρφωσης του πλέγματος

Στην εποχή μας, η υπολογιστική μηχανική και τα υπολογιστικά πειράματα αποτελούν πυλώνα τόσο στη θεωρητική έρευνα φυσικών φαινομένων όσο και στην ανάπτυξη νέων τεχνολογικών προϊόντων ή στη βελτιστοποίηση ήδη υφιστάμενων. Τα φυσικά φαινόμενα που προσομοιώνονται υπολογιστικά, σχεδόν πάντοτε λαμβάνουν χώρα σε περίπλοκα τριδιάστατα (3D) χωρία, όπου οι μεγάλες απαιτήσεις σε ακρίβεια της λύσης καθιστούν απαραίτητη τη χρήση πυκνών πλεγμάτων. Λ.χ. σε εφαρμογές στον τομέα της αυτοκινητοβιομηχανίας πλέγματα εκατομμυρίων κόμβων είναι κάτι σύνηθες.

Η γένεση τόσο πυκνών πλεγμάτων σε περίπλοκα χωρία αποτελεί γενικά μία υπολογιστικά

κοστοβόρα διαδικασία. Σε χρονικά μεταβαλλόμενες εφαρμογές όπως συνήθως είναι τα προβλήματα στον τομέα της αλληλεπίδρασης στερεού-ρευστού, το στερεό μεταβάλλει τη θέση του και ίσως και το σχήμα του σε κάθε χρονικό βήμα, λόγω των δυνάμεων που ασκεί σε αυτό το ρέον ρευστό. Μέχρι το τέλος της προσομοίωσης, η γεωμετρία του χωρίου πιθανόν να έχει μεταβληθεί εκατοντάδες ή και χιλιάδες φορές, το οποίο συνεπάγεται και ισάριθμες ανάγκες επαναπλεγματοποίησης, κάτι που προφανώς είναι ασύμφορο.

Για τον λόγον αυτόν, έχει αναπτυχθεί πληθώρα μεθόδων, οι οποίες παραμορφώνουν το πλέγμα, μετακινώντας τους κόμβους του αρχικού, ούτως ώστε αυτό να προσαρμόζεται στις αλλαγές της γεωμετρίας. Έτσι, αποφεύγεται η δημιουργία νέου πλέγματος και το υπολογιστικό κόστος μειώνεται αισθητά. Βασική απαίτηση για τις μεθόδους αυτές αποτελεί, το προσαρμοσμένο πλέγμα να παρουσιάζει παρόμοια ποιότητα με το αρχικό ενώ ταυτόχρονα το υπολογιστικό κόστος να είναι σημαντικό μικρότερο από την επαναπλεγματοποίηση. Αυτό είναι εφικτό για μικρές παραμορφώσεις, όμως καθίσταται αδύνατο για ακραίες μεταβολές της γεωμετρίας του χωρίου, όπου η επαναπλεγματοποίηση είναι απαραίτητη. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν πολλές περιπτώσεις όπου η παραμόρφωση και μετακίνηση των σωμάτων είναι μικρή και οι μέθοδοι αυτές μειώνουν σημαντικά το υπολογιστικό κόστος. Πολλά τέτοια παραδείγματα προσφέρει ο προαναφερθείς τομέας της αλληλεπίδρασης στερεών-υγρών, όπως και αυτός της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης. Και στους δύο συνήθως σε κάθε χρονικό βήμα/κύκλο βελτιστοποίησης η μεταβολή της γεωμετρίας τους σώματος είναι μικρή και η ανάγκη επαναπλεγματοποίησης μπορεί να καθυστερήσει για πολλά βήματα/κύκλους.

1.3 Μέθοδοι παραμόρφωσης υπολογιστικού πλέγματος

Λόγω της μεγάλης ανάγκης για ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού κόστους προσομοιώσεων μεγάλων διαστάσεων, οι μέθοδοι παραμόρφωσης πλέγματος είναι ένας ενεργός επιστημονικός τομέας, έχοντας να παρουσιάσει μεγάλη ποικιλία μεθόδων και τεχνικών παραμόρφωσης τόσο δομημένων όσο και μη-δομημένων πλεγμάτων. Το ζητούμενο κάθε μεθόδου είναι να παραμορφώσει ένα πλέγμα κρατώντας την ποιότητα του όσο το δυνατόν αναλλοίωτη με όσο το δυνατόν χαμηλότερο κόστος. Γενικά οι μέθοδοι χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τις μεθόδους φυσικών αναλόγων και τις μεθόδους παρεμβολής.

Μέθοδοι φυσικών αναλόγων

Οι μέθοδοι φυσικών αναλόγων περιγράφουν την παραμόρφωση του πλέγματος ως μία φυσική διαδικασία την οποία περιγράφουν μέσω είτε Μ.Δ.Ε. είτε αλγεβρικών συστημάτων.

Η πιο γνωστή μέθοδος στην κατηγορία αυτή είναι η μέθοδος των ελατηρίων (spring based analogy) [1], η οποία αρχικά αναπτύχθηκε από τον Batina [2]. Στη μέθοδο αυτή κάθε ακμή του πλέγματος μοντελοποιείται ως ένα ελατήριο με συγκεκριμένη σταθερά ελατηρίου, ανάλογα με το μήκος της. Στην απαραμόρφωτη κατάσταση του πλέγματος, τα ελατήρια θεωρείται ότι βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος, οπότε το σύστημα βρίσκεται σε στατική ισορροπία. Εάν τώρα, κάποιο κόμβος του πλέγματος παραμορφωθούν, τότε τα ελατήρια που είναι συνδεδεμένα σε αυτούς παραμορφώνονται επίσης, και ασκούν δυνάμεις στους κόμβους που ενώνουν. Με τη σειρά τους αυτοί θα μετατοπισθούν και θα παραμορφώσουν τα ελατήρια με τα οποία είναι συνδεδεμένοι, τα οποία θα παραμορφωθούν και θα ασκήσουν δυνάμεις στους κόμβους που ενώνουν κ.ο.κ.. Για να επανέλθει το σύστημα σε στατική ισορροπία, πρέπει όλοι οι κόμβοι να μετακινήθούν με τέτοιο τρόπο ώστε η συνισταμένη δύναμη σε κάθε κόμβο να είναι μηδενική και έτσι επιτυγχάνεται η προσαρμοστική παραμόρφωση του πλέγματος. Επίσης, χρησιμοποιούνται παραλλαγές τις παραπάνω μεθόδου, όπως η εισαγωγή στρεπτικών ελατηρίων (torsional spring method) [3], [4], ball-vertex spring method [5] κ.α..

Μια άλλη μέθοδος στην κατηγορία αυτή είναι η μέθοδος της γραμμικής ελαστικότητας (linear elasticity) [6], όπου η προσαρμοστική παραμόρφωση επιτυγχάνεται μέσω επίλυσης των εξισώσεων της γραμμικής ελαστικότητας. Στη μέθοδο αυτή, οι ιδιότητες του υλικού (μέτρο ελαστικότητας, λόγος Poisson, κ.α.) συσχετίζονται με ιδιότητες του πλέγματος, όπως ο όγκος των κελιών. Η εύρεση της παραμόρφωσης ακολουθεί παρόμοια λογική με αυτήν στη μέθοδο των ελατηρίων.

Αν και οι μέθοδοι αυτές προσφέρουν πλέγματα υψηλής ποιότητας, έχουν μεγάλο υπολογιστικό κόστος, καθώς απαιτείται η επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων μεγάλων διαστάσεων. Επίσης, στα μειονεκτήματα τους συγκαταλέγονται και η ανάγκη να είναι γνωστή η τοπολογία του πλέγματος, το οποίο οδηγεί σε δυσκολίες κατά την παραλληλοποίηση αυτών.

Μέθοδοι παρεμβολής

Οι μέθοδοι παρεμβολής είναι αλγεβρικές μέθοδοι, οι οποίες χρησιμοποιούν κάποια συνάρτηση για να μεταφέρουν την παραμόρφωση των συνοριακών κόμβων στους εσωτερικούς.

Πολλές μέθοδοι της κατηγορίας αυτής ουσιαστικά μεταφέρουν την παραμόρφωση των συνοριακών κόμβων στους εσωτερικούς επί έναν συντελεστή βάρους, ο οποίος εξαρτάται από την απόσταση κάθε συνοριακού κόμβου από τον εκάστοτε εσωτερικό, του οποίου υπολογίζεται η παραμόρφωση. Σε αυτές τις μεθόδους ξεχωρίζουν η μέθοδος της αντιστρόφως ανάλογης της απόστασης στάθμισης (inverse distance weighting) [7], η οποία χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία και παρουσιάζεται αναλυτικά στην ενότητα 2, η μέθοδος αλγεβρικής απόσβεσης (algebraic damping) [8], κ.α..

Αλλές μέθοδοι στην κατηγορία αυτή, είναι η μέθοδος των συναρτήσεων ακτινικής βάσης (radial basis functions interpolation) και η μέθοδος των γράφων Delaunay (Delaunay graph method).

Η μέθοδος των συναρτήσεων ακτινικής βάσης [9], [4], [10] βασίζεται στην ιδέα ότι η παραμόρφωση των εσωτερικών κόμβων μπορεί να προσεγγιστεί από ένα άθροισμα συναρτήσεων βάσης, οι οποίες είναι συναρτήσεις της ευκλείδειας απόστασης μεταξύ των συνοριακών κόμβων και του κάθε εσωτερικού.

Η μέθοδος των γράφων Delaunay [11], [12] βασίζεται στη δημιουργία του Delaunay γράφου για το αρχικό πλέγμα, ο οποίος δημιουργείται χρησιμοποιώντας μόνο τους συνοριακούς κόμβους του. Εν συνεχεία, οι εσωτερικοί κόμβοι συσχετίζονται με τον γράφο και μετακινώντας τον για να προσαρμοστεί στην αλλαγή γεωμετρίας του πλέγματος, μετακινούνται και οι εσωτερικοί.

Γενικά στα μειονεκτήματα των μεθόδων αυτών συγκαταλέγεται ότι δεν παρέχουν κάποιο μηχανισμό αποφυγής δημιουργίας ανεστραμμένων κελιών. Προσφέρουν όμως σημαντικά πλεονεκτήματα, όπως μικρότερο υπολογιστικό κόστος από τις μεθόδους φυσικών αναλόγων και δυνατότητα χρήσης τους σε οποιοδήποτε τύπο πλέγματος, ακόμη και σε πλέγματα με μετέωρους κόμβους (hanging nodes). Επίσης η γνώση της τοπολογίας του πλέγματος για τις μεθόδους αυτές είναι περιττή, το οποίο διευκολύνει την παραλληλοποίησή τους.

1.4 Ποιότητα πλέγματος

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, τόσο κατά τη διαδικασία της γένεσης όσο και της προσαρμοστικής παραμόρφωσης ενός πλέγματος, απαραίτητη προϋπόθεση για να θεωρηθεί επιτυχής η έκβαση των διαδικασιών αυτών είναι, το προκύπτον πλέγμα να είναι υψηλής ποιότητας.

Ελάχιστη απαίτηση ποιότητας από ένα πλέγμα είναι να μην παρουσιάζει ανεστραμμένα κελιά, δηλαδή κελιά των οποίων ο όγκος ή το εμβαδόν είναι αρνητικός. Στην περίπτωση ύπαρξης αυτών, η επίλυση σταματά αμέσως καθώς μπορεί να οδηγήσουν σε αστάθεια και μη-σύγκλιση του επιλύτη.

Πέραν της παραπάνω απαίτησης, η οποία είναι ιδιαίτερα αυστηρή, υπάρχουν λιγότερο αυστηρές μετρικές που κρίνουν πόσο απέχει ένα πλέγμα από το ιδανικό. Οι μετρικές αυτές λαμβάνουν υπόψη τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των κελιών και μετρούν λ.χ. τη στρέβλωση, το μήκος της μέγιστης πλευράς ως προς το μήκος της ελάχιστης πλευράς κ.α.. Γενικά, επιθυμούνται κελιά που

παρουσιάζουν μικρή στρέβλωση, όπως τετράγωνα και κύβοι για δομημένα πλέγματα και ισόπλευρα τρίγωνα και κανονικά τετράεδρα για μη δομημένα πλέγματα. Βέβαια στα μη δομημένα πλέγματα χρησιμοποιούνται διάφορα είδη κελιών και κάθε ένα χαρακτηρίζεται από τις δικές του μετρικές ποιότητας. Η ποιότητα του όμως πάντα χαρακτηρίζεται με την ίδια λογική, η οποία είναι πόσο απέχει γεωμετρικά από ένα ιδεατό στοιχείο της ίδιας οικογένειας (π.χ. τρίγωνα, τετράπλευρα κ.ο.κ.).

Στο παράρτημα Α παρουσιάζονται αναλυτικά οι μετρικές ποιότητας που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία για 2Δ πλέγματα αποτελούμενα από τριγωνικά στοιχεία και 3Δ πλέγματα αποτελούμενα από τετράεδρα.

1.5 Στόχος και δομή της εργασίας

Η μεταπτυχιακή εργασία καταπιάνεται με τη μέθοδο IDW για την προσαρμοστική παραμόρφωση 2Δ και 3Δ πλεγμάτων. Η μέθοδος IDW ενισχύεται με την εισαγωγή παρεμβολής στρωφών και για τη βελτίωση της δυνατότητας χειρισμού μεγάλων παραμορφώσεων, προστίθεται σε αυτήν η τεχνική των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων. Οι δυνατότητες της μεθόδου στην προσαρμοστική παραμόρφωση πλεγμάτων αξιολογήθηκε σε μία 2Δ και μία 3Δ εφαρμογή.

Η δομή της εργασίας συνοπτικά αποτελείται από τα εξής κεφάλαια:

- **Κεφάλαιο 2:** Αναλυτική περιγραφή της μεθόδου IDW. Αναφορά στη θεωρία των τετραδονίων και επεξήγηση του τρόπου ανάλυσης της παραμόρφωσης σε μετακίνηση και περιστροφή και της παρεμβολής αυτών στους εσωτερικούς κόμβους του πλέγματος με χρήση της IDW με περιστροφές. Αναφορά στην υπάρχουσα μεθοδολογία και σύγκριση με τη νέα που αναπτύχθηκε.
- **Κεφάλαιο 3:** Περιγραφή της τεχνικής των ολισθαινόντων κόμβων και αξιολόγηση της μέσω σύγκρισης της IDW με περιστροφές χωρίς χρήση και με χρήση της εν λόγω τεχνικής.
- **Κεφάλαιο 4:** Παρουσίαση των 2Δ και 3Δ εφαρμογών και των αποτελεσμάτων από τα σενάρια παραμόρφωσης που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση της μεθόδου IDW με περιστροφές και με χρήση της τεχνικής των ολισθαινόντων κόμβων.
- **Κεφάλαιο 5:** Σύντομη ανακεφαλαίωση της εργασίας και παρουσίαση των πιο σημαντικών συμπερασμάτων που εξάγονται από αυτήν.
- **Παράρτημα Α:** Παρουσίαση των μετρικών ποιότητας που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία για την αξιολόγηση των 2Δ και 3Δ πλεγμάτων.
- **Παράρτημα Β:** Παρουσίαση 2Δ εφαρμογής χωρίς χρήση της τεχνικής των ολισθαινόντων κόμβων για σύγκριση με την αντίστοιχη εφαρμογή στην [13].

Κεφάλαιο 2

Η μέθοδος Αντιστρόφως Ανάλογη της Απόστασης Στάθμιση (IDW) για την Παραμόρφωση Πλέγματος

2.1 Ιστορικό υπόβαθρο της IDW

Το 1968 ο D. Shepard παρουσίασε για πρώτη φορά μία μέθοδο παρεμβολής διάσπαρτων σημείων [14]. Αποτελούσε μια αλγεβρική μέθοδο υπολογισμού της τιμής κάποιας ποσότητας u σε ένα σημείο ενός χωρίου, μέσω παρεμβολής των γνωστών τιμών αυτής σε διάφορα σημεία του. Ουσιαστικά η μέθοδος αυτή αποτελεί έναν σταθμισμένο μέσο όρο των γνωστών τιμών της u και έχει τη μορφή:

$$u(x) = \frac{\sum_{j=0}^N w_j(x)u_j}{\sum_{j=0}^N w_j(x)} \quad (2.1)$$

όπου N είναι ο αριθμός του συνόλου των σημείων όπου η ποσότητα u είναι γνωστή και $w_j(x)$ μία συνάρτηση βάρους.

Στη βασική μορφή της τα βάρη είναι αντιστρόφως ανάλογα της απόστασης μεταξύ του σημείου του χώρου όπου επιθυμείται ο υπολογισμός της u και των σημείων όπου η τιμή της u είναι γνωστή, εξ ου και η ονομασία της. Τα βάρη, δηλαδή, δίνονται από τη σχέση:

$$w_j(x) = \frac{1}{\|x - x_j\|^p} \quad (2.2)$$

όπου $\|\cdot\|$ είναι η ευκλείδεια απόσταση και p είναι ένας εκθέτης. Βάσει του εκθέτη αυτού ορίζεται η επιρροή που έχουν τα διάφορα σημεία στην παρεμβολή, όπου μεγάλες τιμές αυτού ελαχιστοποιούν την επιρροή που έχουν μακρινά σημεία. Ο μόνος περιορισμός είναι ότι ο p πρέπει να είναι μεγαλύτερος του 1, καθώς η συνάρτηση οφείλει να είναι διαφορίσιμη.

2.2 Εφαρμογή της IDW στην παραμόρφωση υπολογιστικών πλεγμάτων

Το 2009, περίπου 40 χρόνια μετά τη δημοσίευσή της, ο Witteveen [7] είχε την ιδέα, πως αν ως παρεμβαλλόμενη ποσότητα όριζε την παραμόρφωση στους οριακούς κόμβους ενός υπολογιστικού πλέγματος, τότε η μέθοδος αυτή ήταν εφικτό να χρησιμοποιηθεί για την παραμόρφωσή του. Η ιδέα του στέφθηκε με επιτυχία, προσθέτοντας μία ακόμη μέθοδο στις ήδη υπάρχουσες για την παραμόρφωση πλέγματος, η οποία συγκριτικά με αυτές είχε χαμηλό υπολογιστικό κόστος και ήταν

σε θέση να παραμορφώσει ικανοποιητικά πλέγματα με απαιτητικές τοπολογίες, όπως πλέγματα με μετέωρους κόμβους (hanging nodes).

Η πιο πλήρης μορφή της μεθόδου έως σήμερα προτάθηκε από τον Luke το 2012 [15], η οποία είναι και αυτή που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία. Αρχικά αναλύεται η μετακίνηση των συνοριακών κόμβων σε μία μετατόπιση και μία περιστροφή. Η περιστροφή τους υπολογίζεται βάσει της περιστροφής των ακμών και των καθέτων στις επιφάνειες διανυσμάτων, στις οποίες ανήκει ο εκάστοτε συνοριακός κόμβος. Εφόσον βρεθεί, η μετακίνηση \vec{s}_b του συνοριακού κόμβου μπορεί να γραφεί ως:

$$\vec{s}_b(\vec{r}) = \vec{u}_b + \mathbf{M}_b \vec{r}_b - \vec{r}_b \quad (2.3)$$

όπου \vec{u}_b είναι η μετατόπιση του συνοριακού κόμβου, \mathbf{M}_b το μητρώο στροφής του και \vec{r}_b το αρχικό διάνυσμα θέσης του. Στην περίπτωση της παραμόρφωσης πλέγματος που η ζητούμενη ποσότητα \vec{u} είναι η μετακίνηση των εσωτερικών κόμβων η εξίσωση 2.1 γράφεται ως:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{\sum_{b=1}^{n_b} w_b(\vec{r}) \vec{s}_b(\vec{r})}{\sum_{b=1}^{n_b} w_b(\vec{r})} \quad (2.4)$$

η οποία είναι μία διανυσματική εξίσωση.

Στην εξίσωση αυτή τα βάρη $w_b(\vec{r})$ δίνονται από τη σχέση:

$$W_b(\vec{r}) = A_b \left[\left(\frac{L_{def}}{\|\vec{r} - \vec{r}_b\|} \right)^a + \left(\frac{\alpha L_{def}}{\|\vec{r} - \vec{r}_b\|} \right)^b \right] \quad (2.5)$$

όπου A_b είναι ένας συντελεστής βάρους που ανατίθεται σε κάθε συνοριακό κόμβο, L_{def} είναι το εκτιμώμενο μέγιστο μήκος παραμόρφωσης, α είναι μία παράμετρος που καθορίζει πόσο εντονότερα θα επηρεάζονται οι κόμβοι από τους κοντινότερους σε αυτούς συνοριακούς κόμβους και a , b είναι εκθετικοί παράγοντες που εισάγονται από τον χρήστη. Οι προτεινόμενες τιμές των εκθετών (βάσει της [15]) είναι $a = 3$ και $b = 5$.

Όσον αφορά το L_{def} , αυτό υπολογίζεται ως η απόσταση του κεντρικού σημείου του πλέγματος από τον πιο απομακρυσμένο κόμβο. Εφόσον ο πιο απομακρυσμένος κόμβος θα ανήκει σίγουρα στο σύνολο του πλέγματος, το L_{def} δίνεται από τη σχέση:

$$L_{def} = \max_{b \in [1, n_b]} (\|\vec{r}_c - \vec{r}_b\|) \quad (2.6)$$

όπου \vec{r}_c το διάνυσμα θέσης του κεντρικού σημείου του πλέγματος, \vec{r}_b το διάνυσμα θέσης ενός συνοριακού κόμβου και n_b το πλήθος των συνοριακών κόμβων.

Ο συντελεστής βάρους A_b ονομάζεται συντελεστής επιφανειακού βάρους, καθώς θέτεται ίσος με το άθροισμα του εμβαδού των συνοριακών επιφανειών στις οποίες ανήκει ο συνοριακός κόμβος. Η εισαγωγή αυτού του συντελεστή στη συνάρτηση βάρους $W_b(\vec{r})$ πραγματοποιείται, ούτως ώστε περιοχές όπου το πλέγμα πυκνώνει και υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός συνοριακών κόμβων να μην επισκιάζουν άλλες, όπου το πλέγμα είναι πιο αραιό.

Η παράμετρος α καθορίζει πόσο επιπλέον βάρος πρέπει να δοθεί στους κοντινούς συνοριακούς κόμβους σε σχέση με τους πιο απομακρυσμένους. Συνήθως όσο μεγαλύτερη είναι η μεταβλητότητα της παραμόρφωσης του χωρίου τόσο μεγαλύτερο οφείλει να είναι και το α . Η μεταβλητότητα της παραμόρφωσης των συνοριακών κόμβων μπορεί να υπολογιστεί ως η διαφορά ανάμεσα στον συνοριακό κόμβο που υπέστη τη μεγαλύτερη παραμόρφωση και τη μέση τιμή της σε όλους τους συνοριακούς κόμβους του συνόρου το οποίο παραμορφώνεται. Το α ορίζεται ως ένα πολλαπλάσιο του λόγου της μεταβλητότητας της παραμόρφωσης δια του μέγιστου μήκους παραμόρφωσης L_{def} . Ορίζεται δηλαδή ως:

$$\alpha = \frac{\eta}{L_{def}} \max_{b=1}^{n_b} (\|\vec{s}_b(\vec{r}_b)\| - s_{mean}) \quad (2.7)$$

όπου η ένας αριθμός που καθορίζεται από τον χρήστη και s_{mean} η μέση τιμή της παραμόρφωσης στο παραμορφωμένο σύνορο και ορίζεται ως:

$$s_{mean} = \frac{1}{n_b} \sum_{b=1}^{n_b} (||\vec{s}_b(\vec{r}_b)||) \quad (2.8)$$

Όσο μεγαλύτερη η τιμή του η τόσο πιο διαδεδομένη σε όλο το χωρίο είναι η παραμόρφωση των συνοριακών κόμβων. Γενικά η προτεινόμενη τιμή είναι $\eta = 5$ [15].

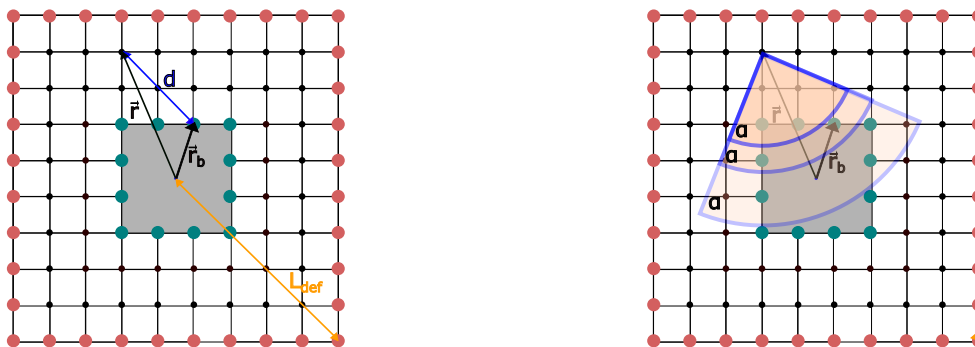
2.3 Ανάλυση της βαρυτικής συνάρτησης

Στο σχήμα 2.1 παρουσιάζεται, ως παράδειγμα, ένα απλοποιημένο δομημένο πλέγμα όπου στο εσωτερικό του υπάρχει ένα στερεό σώμα (γκρι τετράγωνο). Οι κόμβοι του πλέγματος μπορούν να χωριστούν σε 2 κατηγορίες, τους εσωτερικούς κόμβους (μαύροι κύκλοι) και τους συνοριακούς κόμβους (αποχρώσεις του κόκκινου και πράσινου). Οι συνοριακοί μπορούν να διακριθούν περαιτέρω σε εσωτερικούς συνοριακούς κόμβους (απόχρωση του πράσινου), οι οποίοι συνήθως αποτελούν την επιφάνεια του σώματος όπου γύρω του ρέει ρευστό και τους εξωτερικούς συνοριακούς κόμβους (απόχρωση του κόκκινου), οι οποίοι και αποτελούν το εξωτερικό όριο του χωρίου που διακριτοποιείται.

Στο σχήμα αυτό παρουσιάζονται οι προαναφερθείσες ποσότητες \vec{r} , \vec{r}_b , L_{def} . Το διάνυσμα \vec{r} αποτελεί το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου εσωτερικού κόμβου, του οποίου επιθυμείται να υπολογιστεί την παραμόρφωση μέσω της IDW. Το διάνυσμα \vec{r}_b είναι το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου συνοριακού κόμβου και $d = \vec{r} - \vec{r}_b < L_{def}$, η απόσταση αυτού από τον εσωτερικό κόμβο. Φυσικά στην IDW υπολογίζεται η απόσταση $d = ||\vec{d}||$ μεταξύ όλων των συνοριακών κόμβων και του τυχαίου εσωτερικού, αλλά για λόγους ευκρίνειας του σχήματος δείχνεται μόνο μία. Τέλος στο σχήμα παρουσιάζεται και η απόσταση L_{def} . Η απόσταση αυτή στο δοθέν σχήμα είναι η απόσταση του εξωτερικού συνοριακού κόμβου που βρίσκεται πάνω στη διαγώνιο από το κέντρο του χωρίου. Προφανώς και οι 4 κόμβοι που βρίσκονται στις ακμές του εξωτερικού τετραγώνου έχουν την ίδια απόσταση από το κέντρο, οπότε τυχαία δείχνεται η απόσταση του κάτω δεξιά.

Από το σχήμα γίνεται εμφανές ότι $d < L_{def}$, το οποίο συνεπάγεται ότι ο λόγος $\frac{L_{def}}{d} > 1$. Όσο μικραίνει η απόσταση d , τόσο μεγαλώνει ο λόγος αυτός, άρα και το βάρος $W_b(\vec{r})$ (εξίσωση 2.5). Ενώ αντίθετα όσο η απόσταση d μεγαλώνει, τόσο το βάρος μικραίνει. Αυτό συνεπάγεται ότι όσοι συνοριακοί κόμβοι είναι πιο κοντά στον τυχαίο εσωτερικό κόμβο ασκούν μεγαλύτερη επιρροή στην παραμόρφωσή του από ότι οι πιο απομακρυσμένοι. Όταν ο λόγος αυτός υψωθεί στη δύναμη α η οποία είναι πάντα μεγαλύτερη της μονάδας τότε η διαφορά ανάμεσα στα βάρη κοντινών συνοριακών κόμβων σε σχέση με μακρινούς αυξάνει ακόμα περισσότερο. Όσο μεγαλύτερο το α τόσο περισσότερο επισχιάζουν οι κοντινότεροι κόμβοι τους πιο απομακρυσμένους.

Προσθέτοντας τώρα στη βαρυτική συνάρτηση τον ίδιο όρο επί έναν συντελεστή α , είναι εφικτό να ενισχυθεί η βαρύτητα που δίνεται στους πιο κοντινούς συνοριακούς κόμβους. Αυτό είναι επιθυμητό μόνο σε περιπτώσεις όπου η παραμόρφωση του εσωτερικού συνόρου παρουσιάζει απότομες εναλλαγές και μεγάλη μεταβλητότητα. Για τον λόγο αυτό, το α υπολογίζεται από τη σχέση 2.7. Στην ακραία περίπτωση όπου η μεταβλητότητα της παραμόρφωσης του συνόρου είναι μηδενική, το α μηδενίζεται. Τότε η βαρυτική συνάρτηση αποτελείται μόνο από τον πρώτο όρο. Το ίδιο συμβαίνει σε περιπτώσεις όπου υπάρχει μικρή μεταβλητότητα και ισχύει ότι $\alpha \ll 1$. Εάν όμως η μεταβλητότητα είναι πολύ μεγάλη, τότε το α θα πάρει μεγάλες τιμές και ο δεύτερος όρος της βαρυτικής συνάρτησης θα επισχιάσει τον πρώτο. Στην περίπτωση αυτή η παραμόρφωση του εσωτερικού κόμβου καθορίζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό από τους πιο κοντινούς κόμβους. Μπορεί οπότε να θεωρηθεί ότι η παραμόρφωση των εσωτερικών κόμβων αποκτά περισσότερη "τοπικότητα". Στις ενδιάμεσες περιπτώσεις όπου η μεταβλητότητα υπάρχει αλλά δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλη, και πάλι ο δεύτερος όρος προσδίδει μεγαλύτερη σημασία στους κοντινότερους συνοριακούς κόμβους αλλά όχι



Σχήμα 2.1: Επίδειξη των χαρακτηριστικών μεγεθών της βαρυτικής συνάρτησης της IDW σε ένα απλοποιημένο πλέγμα.

$$\begin{aligned}
 & A_b = 1 \\
 & a = 3 \\
 & b = 5 \\
 & L_{def} = \max_{b \in [1, n_b]} (||\vec{r}_c - \vec{r}_b||) \\
 & \alpha = \frac{\eta}{L_{def}} \max_{b=1}^{n_b} (||\vec{s}_b(\vec{r}_b)|| - s_{mean})
 \end{aligned}$$

Πίνακας 2.1: Οι τιμές των παραμέτρων της βαρυτικής συνάρτησης (εξίσωση 2.5) που χρησιμοποιούνται στην εργασία. Τα σύμβολα των εξισώσεων για τον υπολογισμό των L_{def} και α αναλύονται στις εξισώσεις 2.6 και 2.7, αντίστοιχα.

τόση ώστε να επισκιαστούν όλοι οι άλλοι. Γενικά, στην περίπτωση ενός διδιάστατου (2Δ) πλέγματος το α μπορεί να θεωρηθεί ως μια παράμετρος που καθορίζει την ακτίνα ενός κύκλου με κέντρο τον εσωτερικό κόμβο που ζητάται να βρεθεί η παραμόρφωσή του, εντός του οποίου βρίσκονται οι συνοριακοί κόμβοι οι οποίοι θα την καθορίσουν κατά το μεγαλύτερο μέρος της. Όσο μεγαλώνει το α , τόσο μειώνεται η ακτίνα αυτού του κύκλου και όλο και περισσότερη βαρύτητα αποκτούν οι κοντινότεροι κόμβοι (σχήμα 2.1).

2.4 Επιλογή παραμέτρων της βαρυτικής συνάρτησης

Οι παράμετροι που επιλέγονται για τις παραμέτρους της βαρυτικής συνάρτησης είναι οι προτεινόμενες από την [15], εκτός από τον συντελεστή A_b ο οποίος θέτεται ίσος με 1, καθώς μετά από δοκιμές φαίνεται πως δίνουν τα καλύτερα αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, στους εκθέτες δίνονται οι τιμές $a = 3$ και $b = 5$. Για την παράμετρο α η τιμή της υπολογίζεται από την εξίσωση 2.7 ενώ η παράμετρος L_{def} υπολογίζεται ως η μέγιστη απόσταση του κεντρικού σημείου του υπολογιστικού χωρίου από τον πιο απομακρυσμένο κόμβο.

Θέτοντας το $A_b = 1$, ουσιαστικά παραλείπετε από την βαρυτική συνάρτηση. Με τον τρόπο αυτό δίνεται περισσότερο βάρος στις περιοχές όπου το πλέγμα είναι πυκνότερο, το οποίο σε προσομοιώσεις στερεού-ρευστού είναι επιθυμητό, καθώς αυτές είναι και οι πιο σημαντικές περιοχές στην προσομοίωση και ζητάται η όσο το δυνατόν μικρότερη παραμόρφωσή τους.

Συγκεντρωτικά, οι παράμετροι παρουσιάζονται στον πίνακα 2.1.

2.5 Παρεμβολή της συνολικής παραμόρφωσης στο εσωτερικό του πλέγματος

Στη βασική της εκδοχή η IDW δεν διαχωρίζει την περιστροφή από τη μετακίνηση των συνοριακών κόμβων, αλλά αντιμετωπίζει τη συνολική παραμόρφωση των συνοριακών κόμβων ως μία

μετατόπιση. Για να βρεθεί η νέα θέση των εσωτερικών κόμβων, αρχικά υπολογίζεται η παραμόρφωση τους μέσω της εξίσωσης 2.4, όπου n_b είναι ο αριθμός των συνοριακών κόμβων. Για κάθε έναν εσωτερικό κόμβο υπολογίζεται η εξίσωση 2.4 ξεχωριστά και βρίσκεται η παραμόρφωσή του. Η τελική του θέση βρίσκεται απλά προσθέτοντας διανυσματικά την υπολογισμένη παραμόρφωση στην αρχική του θέση.

2.6 Παρεμβολή Στροφών στη μέθοδο IDW

Γενικά δύο μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την περιστροφή διανυσμάτων, τα μητρώα στροφής και τα τετραδόνια.

Μητρώα στροφής

Τα μητρώα στροφής [16] αποτελούν την πιο διαδεδομένη μέθοδο περιστροφής διανυσμάτων, τα οποία κυρίως χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με τις γωνίες Euler. Αποδεικνύεται ότι οποιαδήποτε περιστροφή στον 3Δ χώρο μπορεί να αναλυθεί σε τρεις επιμέρους περιστροφές μία γύρω από κάθε κύριο άξονα, π.χ. σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων γύρω από τους x , y , z . Έτσι για κάθε επιμέρους περιστροφή δημιουργείται το μητρώο στροφής της και ο πολλαπλασιασμός αυτών καταλήγει στη ζητούμενη αρχική περιστροφή. Εδώ ας σημειωθεί ότι πρέπει να δοθεί προσοχή στη σειρά του πολλαπλασιασμού των μητρώων καθώς το τελικό αποτέλεσμα εξαρτάται από αυτήν. Επίσης, ένα συχνό πρόβλημα είναι το γυροσκοπικό κλείδωμα (Gimbal lock) [17], δηλαδή η απώλεια ενός βαθμού ελευθερίας. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν κάποιες αλληλουχίες περιστροφών όπου δύο από τις τρεις γωνίες Euler οδηγούν σε περιστροφή γύρω από τον ίδιο άξονα.

Ένας εναλλακτικός τρόπος ούτως ώστε να αποφευχθούν οι πολλαπλασιασμοί των μητρώων στροφής αλλά και το γυροσκοπικό κλείδωμα, είναι να χρησιμοποιηθούν οι γωνίες άξονα, οι οποίες ορίζουν μία γωνία περιστροφής γύρω από έναν μοναδιαίο άξονα περιστροφής.

Τετραδόνια

Αν και τα μητρώα στροφής αποτελούν ιστορικά την πιο διαδεδομένη μέθοδο περιστροφής διανυσμάτων, τα τετραδόνια (quaternions) [18], [17], κερδίζουν συνεχώς έδαφος, ειδικά σε πεδία όπως η αναπαράσταση γραφικών σε υπολογιστές. Ο βασικός λόγος είναι η καλύτερη απόδοση από άποψης υπολογιστικού κόστους, αφού αποφεύγονται οι κοστοβόροι πολλαπλασιασμοί πινάκων με διανύσματα. Γι' αυτό, στην εργασία επιλέγονται τα τετραδόνια για την αναπαράσταση στροφών.

Τα τετραδόνια, τα οποία επινοήθηκαν από τον Ιρλανδό μαθηματικό William Rowan Hamilton [19], είναι υπερμιγαδικοί αριθμοί αποτελούμενοι από τρεις φανταστικούς αριθμούς και έναν πραγματικό:

$$Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (2.9)$$

όπου

$$\begin{aligned} ii &= jj = kk = -1 \\ ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ki = j \end{aligned}$$

Το τετραδόνιο αναπαριστά έναν άξονα περιστροφής και μια γωνία περιστροφής περί τον άξονα αυτόν. Εάν θ η γωνία περιστροφής και $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ το μοναδιαίο διάνυσμα που αναπαριστά

τον άξονα περιστροφής, τότε το τετραδόνιο $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ q_1 &= u_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ q_2 &= u_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ q_3 &= u_3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Παρακάτω παρουσιάζονται μερικές χρήσιμες ιδιότητες τους:

$$\begin{aligned} \text{Προσεταιριστική: } & (Q_1 \cdot Q_2) \cdot Q_3 = Q_1 \cdot (Q_2 \cdot Q_3) \\ \text{Επιμεριστική: } & Q_1 \cdot (Q_2 + Q_3) = Q_1 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_3 \\ \text{Αντιμεταθετική: } & Q_1 \cdot Q_2 \neq Q_2 \cdot Q_1 \\ \text{Συζυγής: } & Q^* = q_0 - q_1 \cdot i - q_2 \cdot j - q_3 \cdot k \\ \text{Μέτρο: } & \|Q\| = \sqrt{Q \cdot Q^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\ \text{Αντίστροφος: } & Q^{-1} = \frac{Q^*}{Q \cdot Q^*} \\ \text{Μοναδιαίο τετραδόνιο: } & \|Q\| = 1 \\ \text{Για μοναδιαία τετραδόνια ισχύει: } & Q^{-1} = Q^* \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις 2.10 είναι εμφανές ότι τα τετραδόνια περιστροφής είναι πάντα μοναδιαία τετραδόνια. Απαραίτητη προϋπόθεση για αυτό, είναι ο άξονας περιστροφής να έχει αναπαρασταθεί με ένα μοναδιαίο διάνυσμα.

Εύρεση νέας θέσης διανύσματος μέσω περιστροφής με τετραδόνια

Έστω ένα σημείο p με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = (x, y, z)$, το οποίο υπόκειται σε μία τυχαία περιστροφή, η οποία περιγράφεται από το τετραδόνιο Q . Για την εύρεση της νέας θέσης του σημείου μετά την περιστροφή, είναι αναγκαίο να αναπαρασταθεί το διάνυσμα ως ένα τετραδόνιο. Αυτό είναι ιδιαίτερα απλό, καθώς τα διανύσματα αναπαριστώνται ως τετραδόνια με μηδενικό πραγματικό μέρος:

$$Q_r = (0, x, y, z) = xi + yj + zk \quad (2.11)$$

Εν συνεχεία, το νέο διάνυσμα θέσης του p βρίσκεται από τη σχέση:

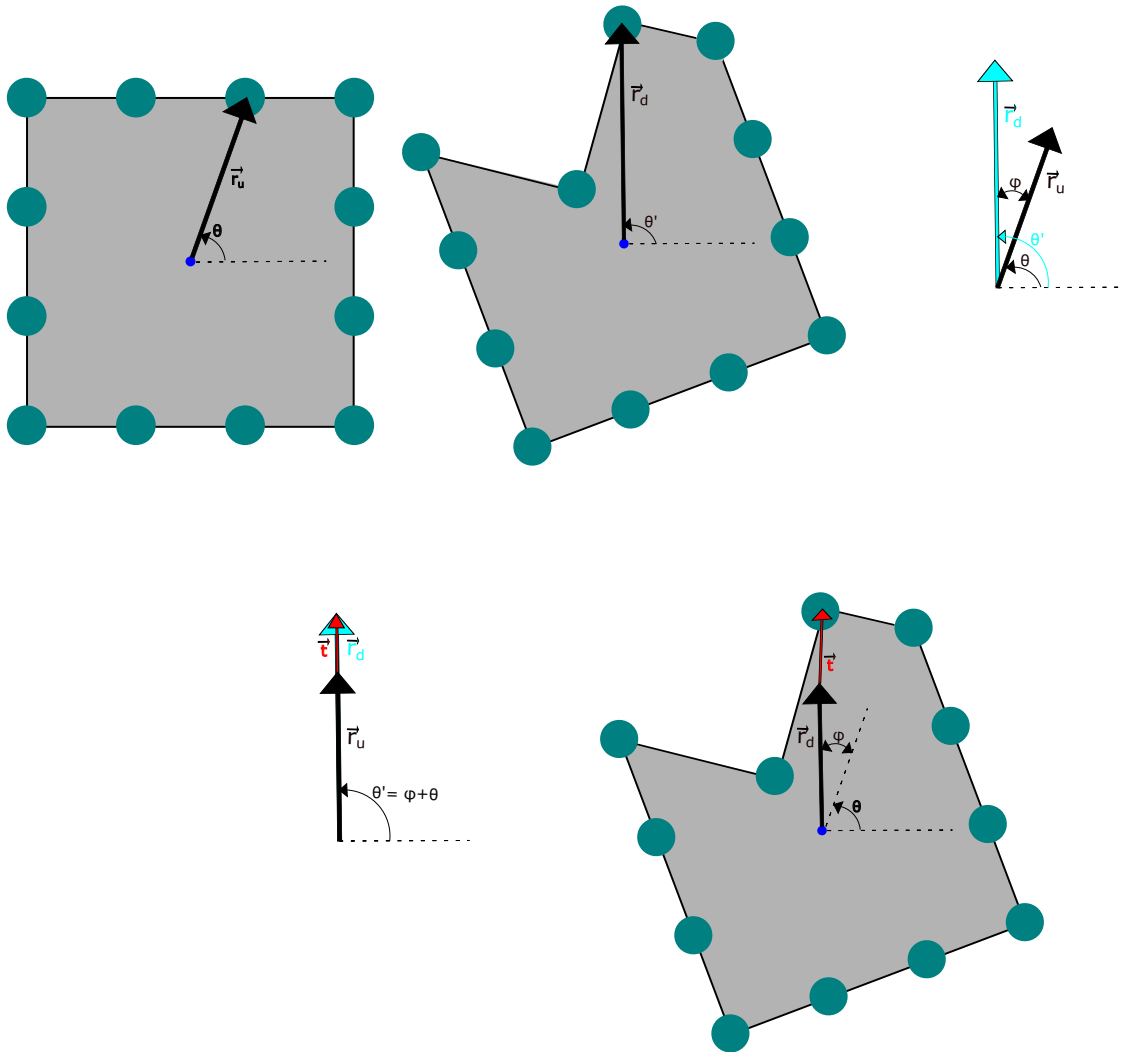
$$Q'_r = Q \cdot Q_r \cdot Q^{-1} = Q \cdot Q_r \cdot Q^* \quad (2.12)$$

Υπενθυμίζεται ότι η δεύτερη ισότητα ισχύει αφού τα τετραδόνια περιστροφής είναι μοναδιαία τετραδόνια. Το νέο διάνυσμα θέσης \vec{r}' αποτελεί το φανταστικό μέρος του

$$Q'_r = (0, \vec{r}') = (0, x', y', z') \quad (2.13)$$

2.7 Ανάλυση της παραμόρφωσης σε μία περιστροφή και μια μετατόπιση

Για κάθε συνοριακό κόμβο είναι γνωστά το αρχικό διάνυσμα θέσης του \vec{r}_u και το διάνυσμα που ορίζει την παραμόρφωση του \vec{u} . Προφανώς είναι γνωστό και το τελικό διάνυσμα θέσης του $\vec{r}_d = \vec{r}_u + \vec{u}$. Οι δείκτες d, u σημαίνουν deformed, undeformed αντίστοιχα.



Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση της μεθόδου ανάλυσης της συνολικής παραμόρφωσης των εσωτερικών συνοριακών κόμβων (κύκλοι σε απόχρωση του πράσινου) σε μία περιστροφή και μία μετακίνηση. Το γκριζο τετράγωνο αναπαριστά ένα σώμα όπου γύρω του θα δημιουργηθεί ένα πλέγμα (το οποίο παραλείπεται).

Για να συμπεριληφθούν περιστροφές στην IDW, είναι αναγκαίο να αναλυθεί το διάνυσμα \vec{u} σε ένα διάνυσμα μετατόπισης \vec{t} και ένα τετραδόνιο περιστροφής Q . Πρώτο βήμα είναι η απεικόνιση των διανυσμάτων ως τετραδονίων, το οποίο όπως αναφέρθηκε είναι πολύ απλό.

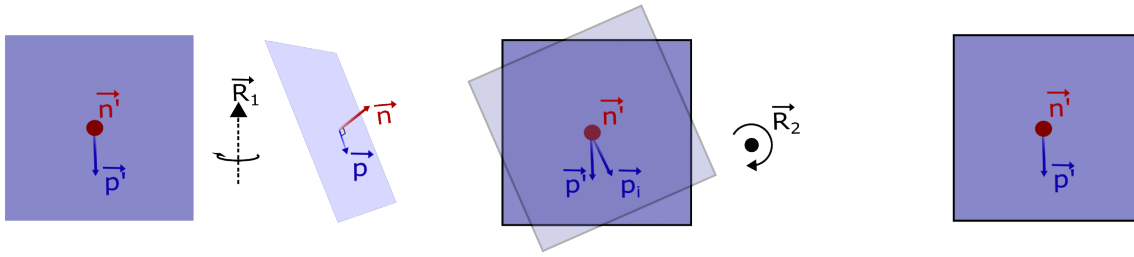
$$\begin{aligned} R_u &= (0, \vec{r}_u) \\ R_d &= (0, \vec{r}_u + \vec{u}) \\ T &= (0, \vec{t}) \end{aligned}$$

Το τελικό διάνυσμα θέσης του κόμβου μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα μίας περιστροφής του αρχικού διανύσματος θέσης του συν μία μετατόπιση:

$$R_d = Q \cdot R_u \cdot Q^* + T \quad (2.14)$$

Εύρεση Περιστροφών στον διδιάστατο χώρο

Ο υπολογισμός της περιστροφής του διανύσματος θέσης στη 2Δ περίπτωση είναι αρκετά απλός και απεικονίζεται στα σχήματα 2.2. Έστω ένας τυχαίος εσωτερικός συνοριακός κόμβος με \vec{r}_u το διάνυσμα θέσης του πριν την παραμόρφωση του και \vec{r}_d μετά από αυτήν. Έχοντας την αρχική και



Σχήμα 2.3: Απεικόνιση της περιστροφής μιας μη παραμορφώσιμης επιφάνειας στον χώρο μέσω διαδοχικών περιστροφών. Αριστερά παρουσιάζεται ο αρχικός και τελικός προσανατολισμός της επιφάνειας, καθώς και ο πρώτος άξονας περιστροφής και η φορά αυτής. Στη μέση παρουσιάζεται ο τελικός και ο ενδιάμεσος (μετά την πρώτη περιστροφή) προσανατολισμός της επιφάνειας. Δεξιά παρουσιάζεται ο τελικός προσανατολισμός της επιφάνειας μετά τις δύο περιστροφές.

τελική θέση του διανύσματος θέσης του είναι εφικτό μέσω του εσωτερικού τους γινομένου να βρεθεί η γωνία φ που σχηματίζουν μεταξύ τους:

$$\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{r}_u \cdot \vec{r}_d}{\|\vec{r}_u\| \cdot \|\vec{r}_d\|} \right) \quad (2.15)$$

Αφού βρεθεί η γωνία περιστροφής, πρέπει να βρεθεί και το μοναδιαίο διάνυσμα που αναπαριστά τον άξονα περιστροφής, έστω \vec{n} . Στη 2Δ περίπτωση αυτό το βήμα παραλείπεται, αφού ο άξονας περιστροφής είναι πάντα κάθετος στο επίπεδο του πλέγματος. Αν δηλαδή το πλέγμα βρίσκεται στο επίπεδο των αξόνων xy , τότε ο άξονας περιστροφής θα είναι πάντοτε ο $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Πλέον είναι δυνατόν να υπολογιστεί το τετραδόνιο περιστροφής Q και από τη σχέση 2.14 να βρεθεί το διάνυσμα \vec{t} .

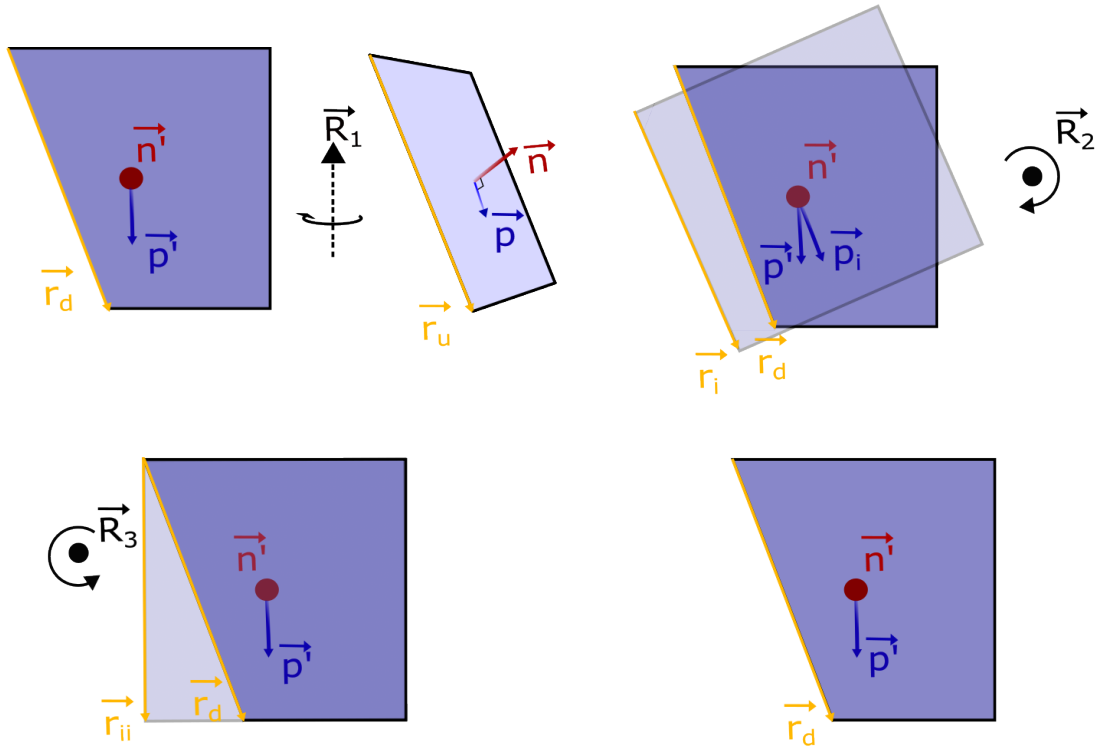
Εύρεση Περιστροφών στον τριδιάστατο χώρο

Στην 3Δ περίπτωση η εύρεση των περιστροφών αποτελεί ένα πιο περίπλοκο πρόβλημα. Εάν είναι γνωστός ο τελικός και αρχικός προσανατολισμός μιας επιφάνειας στον χώρο και το αρχικό της σχήμα παραμένει απαραμόρφωτο, τότε για να βρεθεί η περιστροφή που οδήγησε σε αυτόν, χρειάζεται να προσδιοριστεί ο άξονας και η γωνία περιστροφής δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων που είτε ορίζονται από αυτήν (π.χ. κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια) είτε ανήκουν σε αυτήν. Φυσικά, είναι δυνατόν να αντικατασταθούν από έναν ισοδύναμο άξονα περιστροφής, ο οποίος όμως για να προσδιοριστεί είναι αναγκαίο να είναι γνωστό κάποιο διάνυσμα το οποίο είναι κάθετο σε αυτόν. Προφανώς εάν κάτι τέτοιο ίσχυε, τότε θα ήταν εξ' αρχής γνωστός και δεν θα υπήρχε η ανάγκη προσδιορισμού του, όπως στη 2Δ περίπτωση.

Εάν αντιθέτως η εν λόγω επιφάνεια είναι ελεύθερη να παραμορφωθεί, δηλαδή να αλλάξει η σχετική θέση των πλευρών της, τότε χρειάζεται να προσδιοριστεί ένας επιπλέον άξονας περιστροφής, ένας για κάθε πλευρά. Ας τονιστεί εδώ ότι ο τελευταίος άξονας περιστροφής είναι μοναδικός για κάθε πλευρά και είναι αναγκαίο να προσδιοριστεί ένας για κάθε μία, εν αντιθέσει με τους προαναφερθέντες δύο, οι οποίοι είναι κοινοί για όλες.

Για καλύτερη κατανόηση των προαναφερθέντων παρουσιάζονται οι δύο περιπτώσεις περιστροφής επιφανειών, μίας παραμορφώσιμης και μίας μη, στον 3Δ χώρο, στα σχήματα 2.3 και 2.4. Αν και οι επιφάνειες που παρουσιάζονται είναι τετράπλευρα οι μεθοδολογίες που αναπτύσσονται παρακάτω ισχύουν γενικά για οποιαδήποτε επίπεδη (μη κυρτή) επιφάνεια.

Στην περίπτωση μη παραμορφώσιμων επιφανειών απαιτείται ο προσδιορισμός της περιστροφής δύο μη συγγραμμικών μεταξύ τους διανυσμάτων και ο μετέπειτα συνδυασμός τους, ώστε να βρεθεί ο ισοδύναμος άξονας και γωνία περιστροφής. Η εμφανής επιλογή είναι να επιλεγεί το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα, έστω \vec{n} (το οποίο άλλωστε την ορίζει) και ένα διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτό και βρίσκεται επάνω στην επιφάνεια, έστω \vec{p} . Αρχικά προσδιορίζεται ο άξονας



Σχήμα 2.4: Απεικόνιση της περιστροφής μιας παραμορφώσιμης επιφάνειας στον χώρο μέσω διαδοχικών περιστροφών. Αριστερά πάνω παρουσιάζεται ο αρχικός και τελικός προσανατολισμός της επιφάνειας, καθώς και ο πρώτος άξονας περιστροφής και η φορά αυτής. Δεξιά πάνω παρουσιάζεται ο τελικός και ο ενδιάμεσος (μετά την πρώτη περιστροφή) προσανατολισμός της επιφάνειας. Αριστερά κάτω παρουσιάζεται ο προσανατολισμός της επιφάνειας μετά τις δύο περιστροφές. Δεξιά κάτω παρουσιάζεται η επιφάνεια αφού εφαρμοστεί και η περιστροφή στην αριστερή πλευρά της.

και η γωνία περιστροφής μεταξύ του \vec{n} και του \vec{n}' , το οποίο είναι το κάθετο διάνυσμα στον τελικό προσανατολισμό της επιφάνειας. Ο άξονας περιστροφής υπολογίζεται απλώς βρίσκοντας το εξωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων θέσης και διαιρώντας με το μέτρο του:

$$\vec{R}_1 = \frac{\vec{n} \times \vec{n}'}{\|\vec{n} \times \vec{n}'\|} \quad (2.16)$$

Εξίσου εύκολα υπολογίζεται και η γωνία περιστροφής μέσω του εσωτερικού γινομένου των διανυσμάτων \vec{n} και \vec{n}' :

$$\theta_1 = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{n}'\|} \right) \quad (2.17)$$

Πλέον είναι εφικτό να υπολογιστεί το πρώτο τετραδόνιο περιστροφής Q_1 μέσω της σχέσης 2.10.

Εν συνεχεία η επιφάνεια περιστρέφεται κατά γωνία θ_1 περί τον άξονα \vec{R}_1 . Έτσι το διάνυσμα \vec{p} που αρχικά ήταν κάθετο στο \vec{n} έχει υποστεί την ίδια περιστροφή και πλέον συμβολίζεται ως \vec{p}_i . Τώρα πρέπει να βρεθεί η περιστροφή που χρειάζεται για να συμπέσει το \vec{p}_i στο \vec{p}' , που είναι ο τελικός προσανατολισμός του αρχικού διανύσματος \vec{p} . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν βρίσκεται ο άξονας και η γωνία περιστροφής:

$$\vec{R}_2 = \frac{\vec{p}_i \times \vec{p}'}{\|\vec{p}_i \times \vec{p}'\|} \quad (2.18)$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}'}{\|\vec{p}_i\| \cdot \|\vec{p}'\|} \right) \quad (2.19)$$

Πλέον είναι δυνατόν να προσδιοριστεί και το δεύτερο τετραδόνιο περιστροφής Q_2 .

Τέλος έχοντας και τα δύο τετραδόνια περιστροφής που χρειάζονται για να περιστραφεί η επιφάνεια από τον αρχικό στον τελικό προσανατολισμό της, είναι εφικτό συνδυάζοντας τα να υπολογιστεί ένα ισοδύναμο τετραδόνιο Q . Αυτό υπολογίζεται απλά μέσω πολλαπλασιασμού των Q_1 και Q_2 .

$$Q = Q_2 \cdot Q_1 \quad (2.20)$$

Προσοχή θέλει το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός τετραδονίων, όπως αναφέρθηκε και στις ιδιότητες αυτών (υποενότητα 2.6), δεν είναι αντιμεταθετικός και πρέπει πάντα να ακολουθείται η σειρά πολλαπλασιασμού. Δηλαδή ξεκινώντας την πράξη από δεξιά προς τα αριστερά, πρώτο τοποθετείται το τετραδόνιο που αναπαριστά την πρώτη περιστροφή που προσδιορίστηκε, ακολουθούμενη από τη δεύτερη και ούτω καθεξής, έως ότου τέρμα αριστερά τοποθετείται το τετραδόνιο που αναπαριστά την τελευταία περιστροφή.

Στην παραπάνω περίπτωση, όπου η επιφάνεια είναι μη παραμορφώσιμη, το τετραδόνιο Q που προσδιορίζεται εκφράζει τόσο την περιστροφή της επιφάνειας όσο και όλων των πλευρών της. Αυτό δεν ισχύει όμως στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι παραμορφώσιμη. Τότε αν και το τετραδόνιο Q , το οποίο προσδιορίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, εκφράζει την περιστροφή της επιφάνειας, δεν εκφράζει και την περιστροφή των πλευρών, για την οποία πρέπει να βρεθεί ακόμη ένα τετραδόνιο περιστροφής.

Ο παραπάνω ισχυρισμός γίνεται εμφανής μέσω του σχήματος 2.4, όπου η μία πλευρά της επιφάνειας έχει παραμορφωθεί ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Στην περίπτωση αυτή είναι αναγκαίο να βρεθεί ένα ακόμη τετραδόνιο, μοναδικό για αυτήν την πλευρά και το οποίο εφαρμόζεται σε αυτήν και μόνο. Αυτό υπολογίζεται ως εξής. Αρχικά, μέσω των υπολογισμένων περιστροφών, που εκφράζονται μέσω του τετραδονίου Q , η εν λόγω πλευρά, έστω \vec{r}_u , αποκτά έναν ενδιάμεσο προσανατολισμό στον χώρο, έστω \vec{r}_{ii} . Έστω ότι ο τελικός προσανατολισμός της πλευράς εκφράζεται μέσω του διανύσματος \vec{r}_d . Μέσω της διαδικασίας που έχει εφαρμοστεί για την εύρεση όλων των περιστροφών έως τώρα, υπολογίζονται ο άξονας και η γωνία περιστροφής που θα φέρει το διάνυσμα \vec{r}_{ii} στον τελικό του προσανατολισμό. Οπότε:

$$\vec{R}_3 = \frac{\vec{r}_{ii} \times \vec{r}_d}{\|\vec{r}_{ii} \times \vec{r}_d\|} \quad (2.21)$$

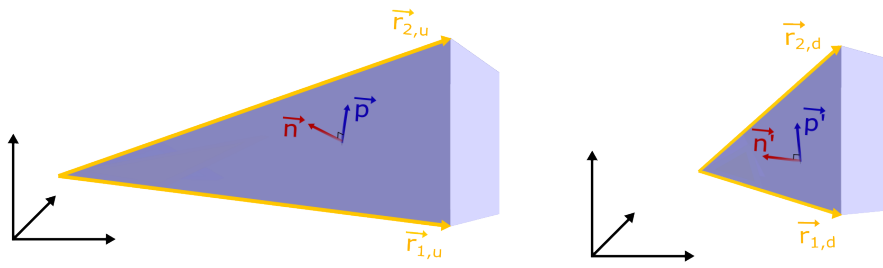
$$\theta_3 = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{r}_{ii} \cdot \vec{r}_d}{\|\vec{r}_{ii}\| \cdot \|\vec{r}_d\|} \right) \quad (2.22)$$

Βάσει αυτών ορίζεται και το τετραδόνιο Q_3 (2.10) που εκφράζει την παραπάνω περιστροφή. Οπότε το ισοδύναμο τετραδόνιο περιστροφής που περιστρέφει την εν λόγω πλευρά, \vec{r}_u , από το αρχικό στον τελικό της προσανατολισμό είναι το:

$$Q = Q_3 \cdot Q_2 \cdot Q_1 \quad (2.23)$$

Το τετραδόνιο Q ισχύει μόνο για την πλευρά \vec{r}_u για την οποία υπολογίστηκε και αντίστοιχα πρέπει να υπολογιστούν τα τετραδόνια για τις υπόλοιπες πλευρές. Βέβαια στο συγκεκριμένο παράδειγμα τα τετραδόνια στις πλευρές θα ισούνται με το $(1, 0, 0, 0)$, αφού τυχαίνει ο σχετικός τους προσανατολισμός να μένει αναλλοίωτος και η τελική τους κατεύθυνση να μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση 2.20 που δίνει τον προσανατολισμό της επιφάνειας.

Όσον αφορά τον προσδιορισμό της περιστροφής των διανυσμάτων θέσης των εσωτερικών συνοριακών κόμβων, η διαδικασία είναι αυτή που εξηγήθηκε παραπάνω και συγκεκριμένα αυτή που αφορά τις παραμορφώσιμες επιφάνειες, αφού όλοι οι κόμβοι είναι ελεύθεροι να μετακινούνται ο ένας ως προς τον άλλο. Για να εφαρμοστεί αυτή, πρέπει αρχικά να οριστεί ποια θα είναι η επιφάνεια που θα χρησιμοποιηθεί. Η πιο λογική επιλογή, μιας και διευκολύνει την εύρεση της περιστροφής των διανυσμάτων θέσης των κόμβων είναι η τριγωνική επιφάνεια που ορίζεται από αυτά, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5: Απεικόνιση επιφάνειας που σχηματίζεται από τέσσερις εσωτερικούς συνοριακούς κόμβους (ανοιχτό μπλε-γκρι), αριστερά ο αρχικός της προσανατολισμός και δεξιά ο τελικός. Με σκούρο μπλε-γκρι απεικονίζεται η επιφάνεια που σχηματίζεται από τα διανύσματα θέσης (κίτρινα βέλη) δύο εκ των κόμβων. Με κόκκινο βέλος παρουσιάζεται το κάθετο σε αυτήν διάνυσμα και με μπλε βέλος ένα διάνυσμα που βρίσκεται επάνω στην επιφάνεια.

Συνοπτικά τα βήματα που παρουσιάστηκαν πριν γενικά για μία παραμορφώσιμη επιφάνεια και εφαρμόζονται εδώ ειδικά για να βρεθεί η περιστροφή των διανυσμάτων θέσης των εσωτερικών συνοριακών κόμβων, είναι τα εξής:

1. Εύρεση του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος, έστω \vec{n} , στην επιφάνεια μεταξύ των διανυσμάτων θέσης των κόμβων, έστω \vec{r}_1 και \vec{r}_2 , πριν την παραμόρφωση αυτών. Προσδιορίζεται εύκολα μέσω του εξωτερικού γινομένου των δύο διανυσμάτων θέσης.
2. Εύρεση ενός μοναδιαίου διανύσματος, έστω \vec{p} , που εφάπτεται στην επιφάνεια μεταξύ των διανυσμάτων θέσης των κόμβων, πριν την παραμόρφωση αυτών. Μπορεί να προσδιοριστεί απλώς παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο του κάθετου διανύσματος \vec{n} και το διάνυσμα θέσης ενός από τους δύο κόμβους.
3. Εύρεση των τελικών προσανατολισμών των διανυσμάτων \vec{n} και \vec{p} , έστω \vec{n}' και \vec{p}' , αντίστοιχα. Ο προσδιορισμός τους είναι αντίστοιχος με πριν, απλώς τώρα παίρνοντας τα διανύσματα θέσης των κόμβων μετά την παραμόρφωση.
4. Εύρεση του άξονα και της γωνίας περιστροφής μεταξύ των \vec{n} και \vec{n}' και προσδιορισμός του τετραδονίου Q_1 .
5. Περιστροφή του \vec{p}_i στον ενδιάμεσο προσανατολισμό \vec{p}' μέσω εφαρμογής της περιστροφής που υπολογίστηκε. Υπολογίζεται μέσω της σχέσης 2.12.
6. Εύρεση του άξονα και της γωνίας περιστροφής μεταξύ των \vec{p}_i και \vec{p}' και προσδιορισμός του τετραδονίου Q_2 .
7. Εύρεση του ισοδύναμου τετραδονίου περιστροφής μέσω της σχέσης 2.20 και περιστροφή των αρχικών διανυσμάτων θέσης των δύο κόμβων σε ενδιάμεσες θέσεις, έστω \vec{r}_1' και \vec{r}_2' .
8. Εύρεση του άξονα και της γωνίας περιστροφής μεταξύ των \vec{r}_1 και \vec{r}_1' και των \vec{r}_2 και \vec{r}_2' και προσδιορισμός των τετραδονίων Q_{31} και Q_{32} , αντίστοιχα.
9. Προσδιορισμός των ισοδύναμων τετραδονίων παρεμβολής για κάθε κόμβο μέσω της σχέσης 2.23. Οπότε για τον κόμβο με αρχικό διάνυσμα θέσης \vec{r}_1 αντιστοιχεί το τετραδόνιο:

$$Q_{r_1} = Q_{31} \cdot Q_2 \cdot Q_1 \quad (2.24)$$

και γι αυτόν με το \vec{r}_2 το:

$$Q_{r_2} = Q_{32} \cdot Q_2 \cdot Q_1 \quad (2.25)$$

2.8 Παρεμβολή της μετατόπισης και περιστροφής στο εσωτερικό του πλέγματος

Έχοντας αναλύσει τη συνολική παραμόρφωση σε μία περιστροφή και μία μετατόπιση, μπορούν πλέον να παρεμβληθούν στους εσωτερικούς κόμβους χρησιμοποιώντας την IDW. Η μετατόπιση παρεμβάλλεται στο εσωτερικό όπως ακριβώς παρεμβάλλεται και η συνολική παραμόρφωση στην απλή IDW, δηλαδή:

$$\vec{t}(\vec{r}) = \frac{\sum_{b=1}^{n_b} w_b(\vec{r}) \vec{t}_b}{\sum_{b=1}^{n_b} w_b(\vec{r})} \quad (2.26)$$

όπου $\vec{t}(\vec{r})$ το διάνυσμα μετατόπισης ενός εσωτερικού κόμβου με διάνυσμα θέσης \vec{r} και \vec{t}_b το διάνυσμα μετατόπισης των οριακών κόμβων.

Όσον αφορά τις περιστροφές και αυτές παρεμβάλλονται στο εσωτερικό μέσω της IDW, αλλά υπάρχουν διάφορες μεθοδολογίες για την ποσότητα που θα παρεμβληθεί, όπως λόγου χάρη ο λογάριθμος των τετραδονίων [20]. Στην εργασία επιλέγεται να παρεμβληθούν απευθείας τα τετραδόνια, μία μέθοδος που αποκαλείται γραμμική παρεμβολή ή LERP (linear interpolation) [21]:

$$Q(\vec{r}) = \frac{\sum_{b=1}^{n_b} w_b(\vec{r}) Q_b}{\sum_{b=1}^{n_b} w_b(\vec{r})} \quad (2.27)$$

όπου $Q(\vec{r})$ το τετραδόνιο στον εσωτερικό κόμβο με διάνυσμα θέσης \vec{r} και Q_b τα τετραδόνια στους εσωτερικούς συνοριακούς κόμβους. Το τετραδόνιο που προκύπτει δεν είναι μοναδιαίο γι' αυτό είναι υποχρεωτικό να διαιρεθεί με το μέτρο του.

Τέλος, το νέο διάνυσμα θέσης ενός εσωτερικού κόμβου με αρχικό διάνυσμα θέσης \vec{r}_u υπολογίζεται ως

$$R_d = \hat{Q}(\vec{r}_u) R_u \hat{Q}^*(\vec{r}_u) + T(\vec{r}_u) \quad (2.28)$$

όπου $\hat{Q}(\vec{r}_u)$ το κανονικοποιημένο τετραδόνιο $Q(\vec{r}_u)$ στον εσωτερικό κόμβο με διάνυσμα θέσης \vec{r}_u . Τα υπόλοιπα μεγέθη είναι όπως ορίστηκαν στην εξίσωση 2.14.

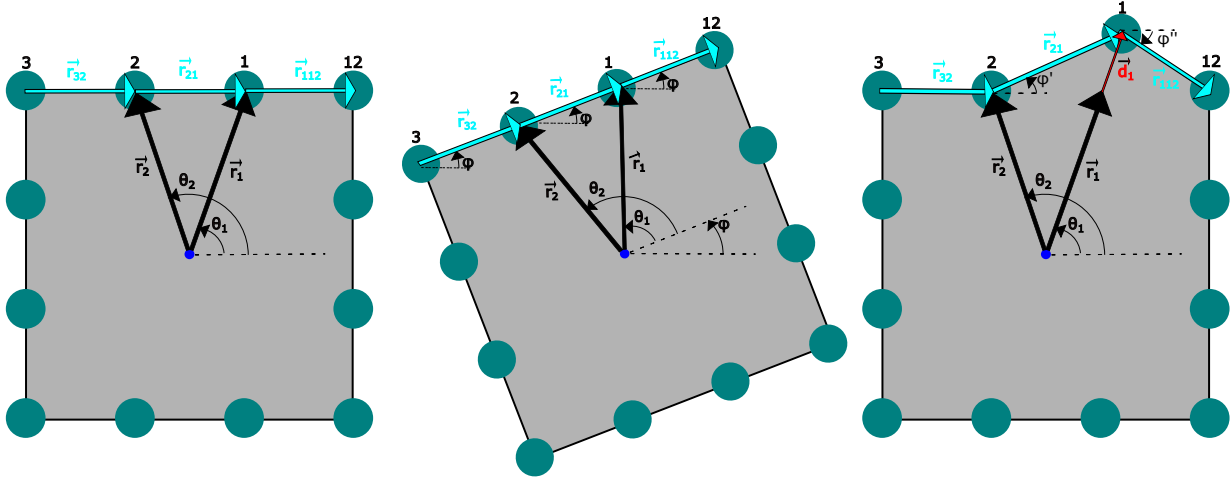
2.9 Σύγκριση με την υπάρχουσα μέθοδο

Η υπάρχουσα μέθοδος [22], [13] βασίζεται στην περιστροφή των συνοριακών πλευρών (2Δ πλέγματα) ή επιφανειών (3Δ πλέγματα) για την εύρεση της περιστροφής των διανυσμάτων θέσης των εσωτερικών συνοριακών κόμβων. Ως συνοριακές πλευρές/επιφάνειες νοούνται αυτές που εφάπτονται στο εσωτερικό σώμα γύρω από το οποίο έχει σχηματιστεί το υπολογιστικό πλέγμα. Αφού βρεθούν οι περιστροφές τους, παρεμβάλλονται στους συνοριακούς κόμβους, όπου σε κάθε κόμβο παρεμβάλλεται η τιμή από όσες πλευρές/ επιφάνειες ανήκει.

Η συγκεκριμένη μέθοδος περιορίζεται στις περιπτώσεις όπου το εσωτερικό σύνορο μετακινείται ως απόλυτο στερεό και δεν παραμορφώνεται, αφού μόνο τότε μπορεί να συσχετιστεί η μετακίνηση των συνοριακών πλευρών/επιφανειών με τις μετακινήσεις των διανυσμάτων θέσης των συνοριακών κόμβων.

Ας παρθεί για παράδειγμα το σχήμα 2.6. Έστω η γνωστή επιφάνεια, που έχει χρησιμοποιηθεί και παραπάνω, γύρω από την οποία έχει δημιουργηθεί ένα υπολογιστικό πλέγμα. Έστω δύο τυχαίοι εσωτερικοί συνοριακοί κόμβοι 1,2, με διανύσματα θέσης \vec{r}_1, \vec{r}_2 , τα οποία σχηματίζουν γωνίες με τον οριζόντιο άξονα, θ_1, θ_2 αντίστοιχα. Εάν η επιφάνεια περιστραφεί ως απόλυτο στερεό κατά γωνία ϕ , τότε όντως όλες οι πλευρές της επιφάνειας θα περιστραφούν και αυτές κατά γωνία ϕ , όπως και τα διανύσματα θέσης όλων των συνοριακών κόμβων. Επομένως σε αυτήν την ακραία περίπτωση η υπάρχουσα μέθοδος ισχύει.

Εάν τώρα θεωρηθεί μία άλλη ακραία περίπτωση, όπου η επιφάνεια δεν περιστρέφεται και όλοι οι συνοριακοί κόμβοι παραμένουν στις αρχικές τους θέσεις εκτός από τον κόμβο 1, ο οποίος



Σχήμα 2.6: Σχηματική αναπαράσταση δύο περιπτώσεων παραμόρφωσης των εσωτερικών συνοριακών κόμβων. Αριστερά παρουσιάζεται το σώμα πριν την παραμόρφωση, στο κέντρο παρουσιάζεται η περίπτωση της περιστροφής αυτού ως απόλυτο στερεό ενώ δεξιά παρουσιάζεται η περίπτωση όπου όλο το σώμα παραμένει στην αρχική του θέση πέραν του κόμβου 1 ο οποίος μετακινείται κατά μίαν απόσταση \vec{d}_1 στη διεύθυνση του διανύσματος θέσης του.

μετακινείται κατά ένα διάνυσμα \vec{d}_1 . Το διάνυσμα \vec{d}_1 είναι συγγραμμικό του \vec{r}_1 , οπότε η πρόσθεση τους δίνει ένα διάνυσμα με ίδια διεύθυνση με αυτά. Άρα όλα τα διανύσματα θέσης έχουν την αρχική τους διεύθυνση και η περιστροφή τους είναι μηδενική. Αντιθέτως όμως, παρατηρείται πως οι πλευρές που ενώνουν τον κόμβο 2 με τον 1 και τον 1 με τον 12 έχουν περιστραφεί από την αρχική τους θέση κατά μία γωνία ϕ' και ϕ'' , αντίστοιχα. Βάσει της υπάρχουσας μεθόδου, για να βρεθεί η περιστροφή του διανύσματος θέσης του κόμβου 1, έστω ϕ_1 , πρέπει να παρεμβληθεί η περιστροφή των πλευρών στις οποίες ανήκει, δηλαδή τις $\vec{r}_{21}, \vec{r}_{112}$. Η παρεμβολή γίνεται μέσω γραμμικής σφαιρικής παρεμβολής (SLERP - spherical linear interpolation) [23], η οποία για δύο τετραδόνια δίνεται από την εξής σχέση:

$$Q_{SLERP} = \frac{\sin[(1-w)\omega]}{\sin\omega} Q_1 + \frac{\sin[w\omega]}{\sin\omega} Q_2 \quad (2.29)$$

όπου $w \in [0, 1]$ είναι ένα βάρος που καθορίζει τη συνεισφορά κάθε τετραδονίου στην παρεμβολή και εν προκειμένω τίθεται ίσο με $w = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$, όπου n ο αριθμός των τετραδονίων που παίρνουν μέρος στην παρεμβολή. Όσον αφορά το ω αυτή είναι η γωνία μεταξύ των τετραδονίων και υπολογίζεται από το εσωτερικό τους γινόμενο:

$$\omega = \cos^{-1}(Q_1 \cdot Q_2) \quad (2.30)$$

Εν προκειμένω υπάρχουν δύο τετραδόνια, ένα για την πλευρά \vec{r}_{21} και ένα για την πλευρά \vec{r}_{112} , τα οποία εκφράζουν περιστροφές κατά γωνίες ϕ' και ϕ'' , αντίστοιχα. Ο άξονα περιστροφής για ένα 2Δ πλέγμα είναι πάντα ο $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Άρα τα τετραδόνια είναι τα:

$$Q_{12} = (\cos(\frac{\phi'}{2}), 0, 0, \sin(\frac{\phi'}{2}))$$

$$Q_{112} = (\cos(\frac{\phi''}{2}), 0, 0, \sin(\frac{\phi''}{2}))$$

Οπότε η γωνία ω υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} \omega &= \cos^{-1}(Q_1 \cdot Q_2) = \\ &= \cos^{-1}(\cos(\frac{\phi'}{2})\cos(\frac{\phi''}{2}) + \sin(\frac{\phi'}{2})\sin(\frac{\phi''}{2})) = \\ &= \cos^{-1}(\cos(\frac{\phi' - \phi''}{2})) = \\ &= \frac{\phi' - \phi''}{2} \end{aligned}$$

Η σχέση 2.29 για δύο τετραδόνια μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} Q_{SLERP} &= \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\sin\omega} (Q_1 + Q_2) = \\ &= \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{2\sin(\frac{\omega}{2})\cos(\frac{\omega}{2})} (Q_1 + Q_2) = \\ &= \frac{1}{2\cos(\frac{\omega}{2})} (Q_1 + Q_2) \end{aligned}$$

Τέλος, με αντικατάσταση των γνωστών τιμών για τη γωνία ω και τα τετραδόνια Q_1, Q_2 προκύπτει ότι:

$$Q_{SLERP} = \frac{1}{2\cos(\frac{\phi' - \phi''}{4})} (\cos\frac{\phi'}{2} + \cos\frac{\phi''}{2}, 0, 0, \sin\frac{\phi'}{2} + \sin\frac{\phi''}{2})$$

το οποίο ισοδύναμα κάνοντας τις πράξεις μπορεί να γραφεί ως:

$$Q_{SLERP} = \left(\cos\left(\frac{\phi' + \phi''}{4}\right), 0, 0, \sin\left(\frac{\phi' + \phi''}{4}\right) \right) \quad (2.31)$$

Ο μόνος τρόπος να προκύψει η σωστή περιστροφή για το διάνυσμα θέσης του κόμβου 1 είναι το άθροισμα $\phi' + \phi'' = 0$. Αυτό γενικά δεν ισχύει, αν και οι δύο αυτές γωνίες είναι ετερόσημες. Βέβαια υπό προϋποθέσεις το άθροισμα αυτό είναι αρκετά μικρό. Η προϋπόθεση είναι ότι το μήκος των πλευρών \vec{r}_{21} και \vec{r}_{112} να είναι αρκετά μεγαλύτερο από το μήκος της μετατόπισης του κόμβου 1, \vec{d} . Αυτό μπορεί εύκολα ναδειχθεί παίρνοντας τα ημίτονα των γωνιών.

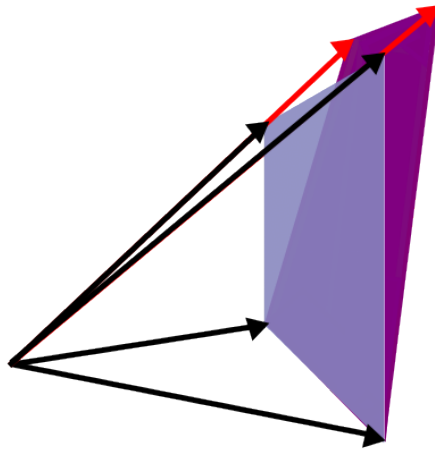
Επίσης αξίζει να παρατηρηθεί και τι συμβαίνει με το διάνυσμα θέσης του κόμβου 2 για να γίνει εμφανέστερο ότι η υπάρχουσα μέθοδος, στο εν λόγω παράδειγμα, δεν μπορεί να δώσει τις σωστές μηδενικές περιστροφές των διανυσμάτων θέσης.

Στον κόμβο 2 παρεμβάλλονται οι περιστροφές των πλευρών \vec{r}_{32} και \vec{r}_{21} . Έστω ότι η γωνία ϕ'' εκφράζει τώρα την περιστροφή της πλευράς \vec{r}_{32} ενώ η ϕ' συνεχίζει να εκφράζει την περιστροφή της πλευράς \vec{r}_{21} . Η ϕ'' είναι τώρα μηδέν αφού η πλευρά \vec{r}_{32} παρέμεινε στην αρχική της θέση. Άρα, από την εξίσωση 2.31 προκύπτει ότι $Q_{SLERP} = \left(\cos\frac{\phi'}{4}, 0, 0, \sin\frac{\phi'}{4} \right)$, το οποίο δεν χωρά καμία αμφιβολία πως δεν μπορεί ποτέ να δώσει τη σωστή μηδενική περιστροφή, αφού έχει παρθεί ως δεδομένο ότι $\phi' \neq 0$.

Ακριβώς η ίδια λογική επεκτείνεται και στα 3Δ πλέγματα. Ας θεωρηθεί για παράδειγμα το σχήμα 2.7, όπου έστω ότι απεικονίζεται μία επιφάνεια που σχηματίζεται από τέσσερις εσωτερικούς συνοριακούς κόμβους. Εάν δύο από αυτούς μετακινηθούν στην ίδια διεύθυνση όπου βρίσκονται αρχικά τα διανύσματα θέσης τους, τότε η περιστροφή των διανυσμάτων θέσης είναι μηδενική, όμως η περιστροφή της επιφάνειας (και κατ' επέκταση του κάθετου διανύσματος της) είναι μη μηδενική. Η απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού είναι ακριβώς η ίδια όπως και στη 2Δ περίπτωση και γι' αυτό παραλείπεται.

2.10 Σύγκριση αποτελεσμάτων υπάρχουσας και νέας μεθόδου

Η σύγκριση της υπάρχουσας και της νέας μεθόδου πραγματοποιείται σε ένα απλό, 2Δ, μη δομημένο πλέγμα, το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 2.8, το οποίο αποτελείται από ένα εσωτερικό τετράγωνο (εσωτερικό σύνορο) και ένα εξωτερικό τετράγωνο (εξωτερικό σύνορο). Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ποιότητάς του πλέγματος είναι 2.11 και 0.14, αντίστοιχα. Η πρώτη δοκιμή είναι να περιστραφεί το εσωτερικό τετράγωνο κατά 45 μοίρες αριστερόστροφα. Όπως δείχθηκε στην προηγούμενη ενότητα 2.9, κατά την περιστροφή του συνόρου ως απόλυτου στερεού, αναμένεται και οι δύο μεθοδολογίες να δώσουν τις σωστές περιστροφές των διανυσμάτων θέσης των εσωτερικών συνοριακών κόμβων και επομένως τα ίδια αποτελέσματα. Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.9, η θεωρία επιβεβαιώνεται και προκύπτει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα και για τις δύο μεθόδους.

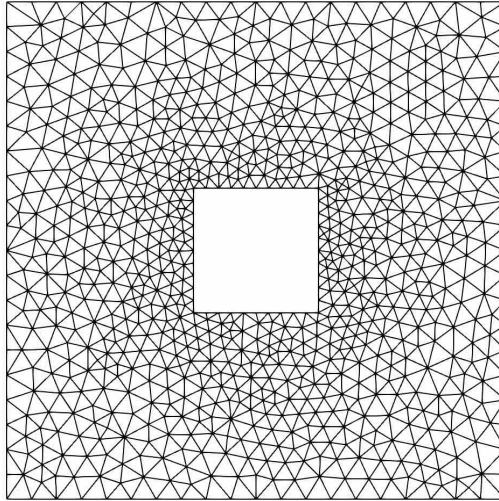


Σχήμα 2.7: Απεικόνιση επιφάνειας στον χώρο που σχηματίζεται από τέσσερις εσωτερικούς συνοριακούς κόμβους. Στο σχήμα δείχνεται η αρχική επιφάνεια (ανοιχτό μπλε-γκρι), τα αρχικά διανύσματα θέσης (μαύρα βέλη), τα τελικά διανύσματα θέσης (κόκκινα βέλη) και η τελική επιφάνεια μετά τη μετακίνηση των διανυσμάτων θέσης (μοβ).

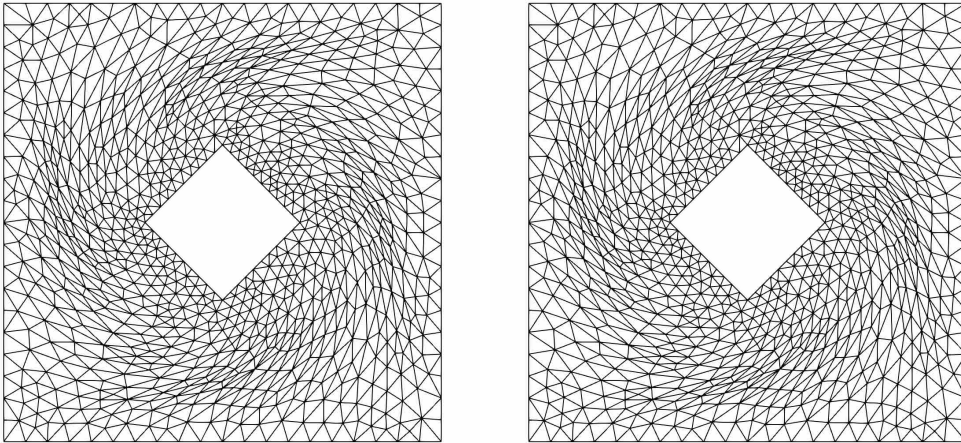
Εν συνεχεία, χρησιμοποιούνται τεστ, όπου το εσωτερικό σύνορο δεν συμπεριφέρεται πλέον ως απόλυτο στερεό, αλλά κάθε ακμή που ενώνει δύο συνοριακούς κόμβους μπορεί να παραμορφωθεί ανεξάρτητα από τις άλλες. Ένας απλός τρόπος να επιτευχθεί αυτό είναι η εναλλαγή τις θέσεις των κόμβων ανά κάποιες θέσεις. Έστω δηλαδή, ότι το εσωτερικό σύνορο ενός πλέγματος αποτελείται από 20 εσωτερικούς συνοριακούς κόμβους, αριθμημένους με συνεχή αρίθμηση από το 1 έως το 20. Εάν χρησιμοποιηθεί το τεστ με εναλλαγή των θέσεών τους ανά 5, τότε ο κόμβος 1 θα πάρει στη θέση του 6, ο 2 στο 7 κ.ο.κ.. Επίσης ας σημειωθεί ότι ο κόμβος 16 θα πάρει τη θέση του 1, ο 17 του 2 κ.ο.κ.. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται στις πλευρές περιστροφές 0 και 90 μοιρών, οι οποίες είναι διαφορετικές από τις περιστροφές των διανυσμάτων θέσης των κόμβων.

Το πρώτο τεστ αυτού του τύπου είναι η εναλλαγή της θέσης των κόμβων στο εσωτερικό σύνορο ανά 5, με φορά προς τα αριστερά (παρατηρώντας την πάνω πλευρά του εσωτερικού τετραγώνου). Με μία πρώτη ματιά στα αποτελέσματα (σχήμα 2.10) δεν παρατηρούνται έντονες διαφορές στα δύο πλέγματα. Είναι εμφανές βέβαια ότι αυτά έχουν παραμορφωθεί με διαφορετικό τρόπο, αλλά πέραν αυτού δεν είναι δυνατόν να εξαχθούν περισσότερα συμπεράσματα. Όσον αφορά την ποιότητα των κελιών στα δύο πλεγμάτων είναι σχεδόν όμοιες. Πιο συγκεκριμένα, για το πλέγμα που παραμορφώθηκε με τη νέα μέθοδο, ο μέσος όρος είναι 3.33 με τυπική απόκλιση 1.95, ενώ για το πλέγμα που παραμορφώθηκε με την υπάρχουσα, ο μέσος όρος είναι 3.69 με τυπική απόκλιση 2.20.

Το δεύτερο τεστ αυτού του τύπου και το τελευταίο γενικά είναι η εναλλαγή της θέσης των κόμβων στο εξωτερικό σύνορο ανά 5, με φορά προς τα αριστερά (παρατηρώντας την πάνω πλευρά του εξωτερικού συνόρου). Ένας επιπλέον λόγος, εκτός από τους προαναφερθέντες, που επιλέγεται αυτό το τεστ είναι ότι στο εξωτερικό σύνορο προσομοιώνει τη μέθοδο των ολισθαινόντων κόμβων, όπου οι κόμβοι αλλάζουν θέση αλλά παραμένουν πάντα πάνω στο σύνορο, η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα (κεφάλαιο 3). Όπως παρατηρείται στο σχήμα 2.10, πρόκειται μία παραμόρφωση η οποία δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλη και το πλέγμα είναι σε θέση να προσαρμοστεί εύκολα σε αυτήν, με σχεδόν μηδενική αλλοίωση στην ποιότητά του. Τουλάχιστον αυτό ισχύει για την νέα μέθοδο που εισήχθη στην παρούσα εργασία. Εάν το πλέγμα παραμορφωθεί χρησιμοποιώντας την υπάρχουσα μέθοδο, τότε αυτή αποτυγχάνει πλήρως και προκύπτει ένα μη αποδεκτό πλέγμα, όπου οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν μετακινηθεί εκτός του εξωτερικού συνόρου. Για να απορριφθεί η περίπτωση να ευθύνονται οι παράμετροι της IDW για τη συμπεριφορά αυτή, δοκιμάστηκαν αρκετά



Σχήμα 2.8: Ένα απλό 2D μη-δομημένο πλέγμα το οποίο οριοθετείται από δύο τετράγωνα σύνορα.

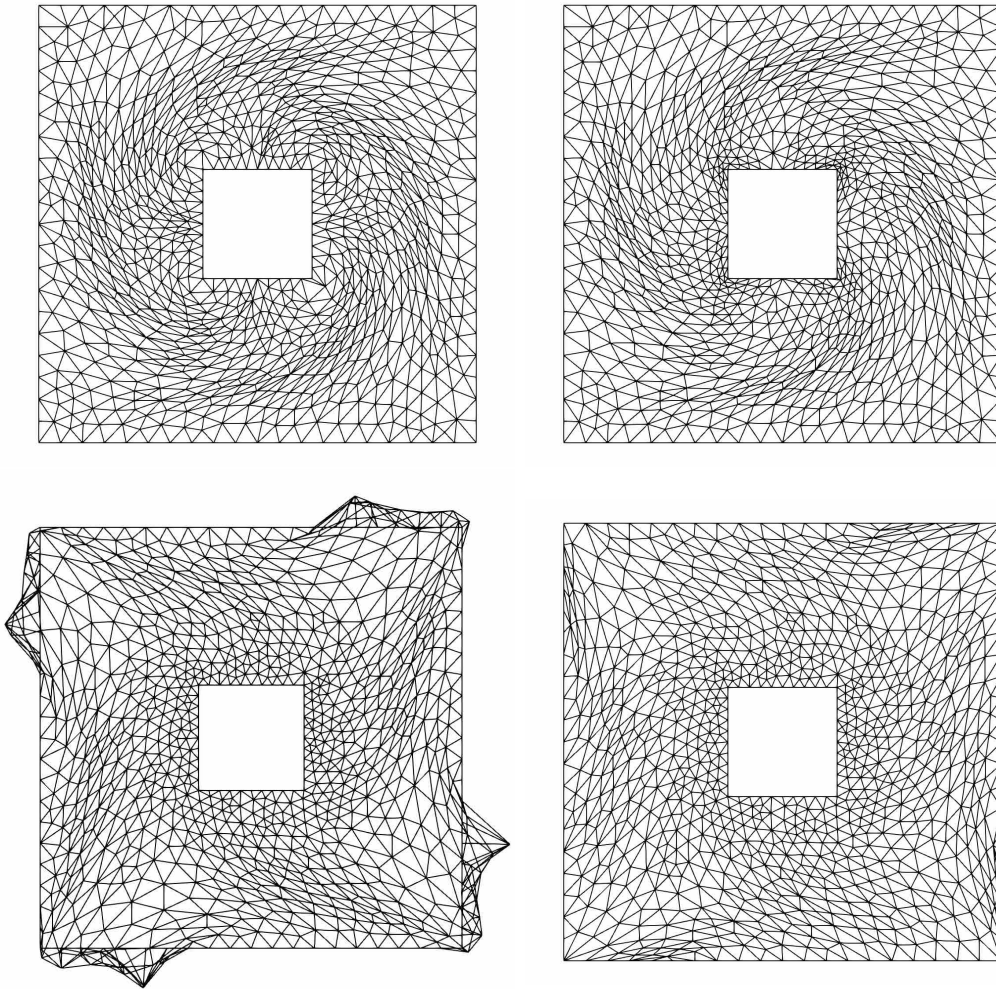


Σχήμα 2.9: Σύγκριση των δύο μεθοδολογιών στο απλό πλέγμα του 2.8. Το εσωτερικό τετράγωνο περιστρέφεται κατά 45 μοίρες αριστερόστροφα και χρησιμοποιείται η IDW με περιστροφές για να παρεμβληθεί η παραμόρφωση στο εσωτερικό του πλέγματος. Δεξιά παρουσιάζεται το πλέγμα που παραμορφώθηκε με τη νέα μέθοδο ενώ αριστερά με την υπάρχουσα.

διαφορετικά σεντ παραμέτρων. Πάρα τις όποιες προσπάθειες όμως το τελικό πλέγμα παρέμεινε μη αποδεκτό, με εσωτερικούς κόμβους να έχουν μετακινηθεί εκτός του εξωτερικού συνόρου, οπότε η υπόθεση αυτή απορρίφθηκε.

Γιατί όμως ενώ διεξάγεται το ίδιο τεστ, τόσο στους εσωτερικούς όσο και στους εξωτερικούς συνοριακούς κόμβους, προκύπτουν διαφορετικά αποτελέσματα; Γιατί στη μία περίπτωση το πλέγμα είναι σχεδόν όμοιο με αυτό που προκύπτει από τη νέα μέθοδο ενώ στη δεύτερη το τελικό πλέγμα είναι μη αποδεκτό;

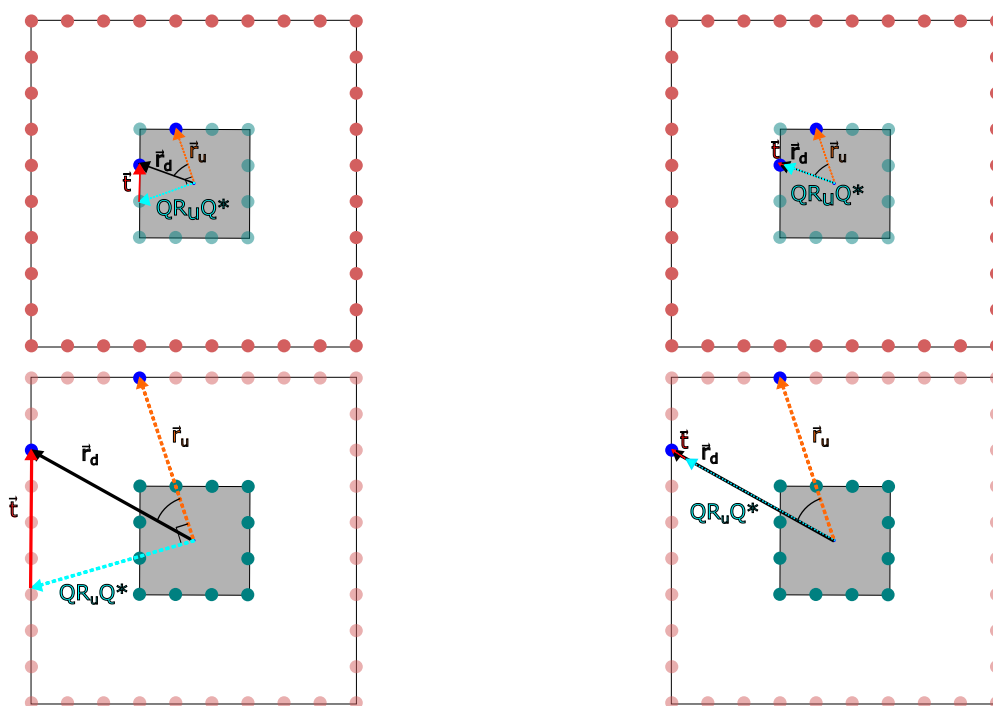
Ας εξηγηθεί αρχικά, πως είναι εφικτό παρά τις λάθος περιστροφές που δίνει η υπάρχουσα μέθοδος, τελικά να προκύπτει η σωστή συνολική παραμόρφωση. Ενθυμούμενοι την εξίσωση 2.14 ($R_d = Q \cdot R_u \cdot Q^* + T$) που χρησιμοποιείται για να αναλυθεί η συνολική παραμόρφωση σε μία περιστροφή και μια μετακίνηση, αφού υπολογιστεί η περιστροφή, βρίσκεται το διάνυσμα μετακίνησης \vec{t} . Όποτε ανεξάρτητα της περιστροφής που θα υπολογιστεί και θα χρησιμοποιηθεί στον παραπάνω τύπο, το διάνυσμα \vec{t} πάντα θα προσαρμόζεται κατάλληλα ώστε να προκύπτει το σωστό τελικό διάνυσμα θέσης \vec{r}_d .



Σχήμα 2.10: Εναλλαγή των εσωτερικών (πάνω σχήματα) και εξωτερικών (κάτω σχήματα) συνοριακών κόμβων ανά 5 με φορά προς τα αριστερά (όπως βλέπουμε την πάνω πλευρά του εσωτερικού τετραγώνου) για τη δημιουργία παραμόρφωσης σε αυτούς. Η παραμόρφωση παρεμβάλλεται στο εσωτερικό του πλέγματος μέσω της IDW με περιστροφές. Δεξιά παρουσιάζονται τα πλέγματα που παραμορφώθηκαν με τη νέα μέθοδο ενώ αριστερά με την υπάρχουσα.

Παρά όμως το σωστό τελικό αποτέλεσμα, εισάγονται στην IDW πολύ μεγάλες περιστροφές και μετακινήσεις. Η μεγάλη διαφορά στα δύο τεστ είναι ουσιαστικά αυτό, δηλαδή η διαφορά στο μέγεθος της μετατόπισης που παρεμβάλλεται στους εσωτερικούς κόμβους. Στο πρώτο τεστ με τους εσωτερικούς συνοριακούς κόμβους τα διανύσματα θέσης έχουν το υποτετραπλάσιο μήκος από ότι τα διανύσματα θέσης στους εξωτερικούς συνοριακούς κόμβους. Άρα και το διάνυσμα μετατόπισης \vec{t} που παρεμβάλλεται στους εσωτερικούς κόμβους έχει πολύ μικρότερο μήκος σε σχέση με αυτό του δεύτερου τεστ.

Επομένως η διαφορά στις δύο περιπτώσεις είναι το μέγεθος της παραμόρφωσης. Συγκεκριμένα στο δεύτερο τεστ δημιουργείται μία πολύ μεγάλη παραμόρφωση του πλέγματος, την οποία η IDW δεν μπορεί να διαχειριστεί. Αναλυτικά παρουσιάζεται πως εφαρμόζεται η υπάρχουσα μέθοδος αλλά και η νέα στα δύο τεστ στα σχήματα 2.11, όπου δείχνεται σε έναν κόμβο που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο πλευρές που περιστρέφονται κατά 90 μοίρες.



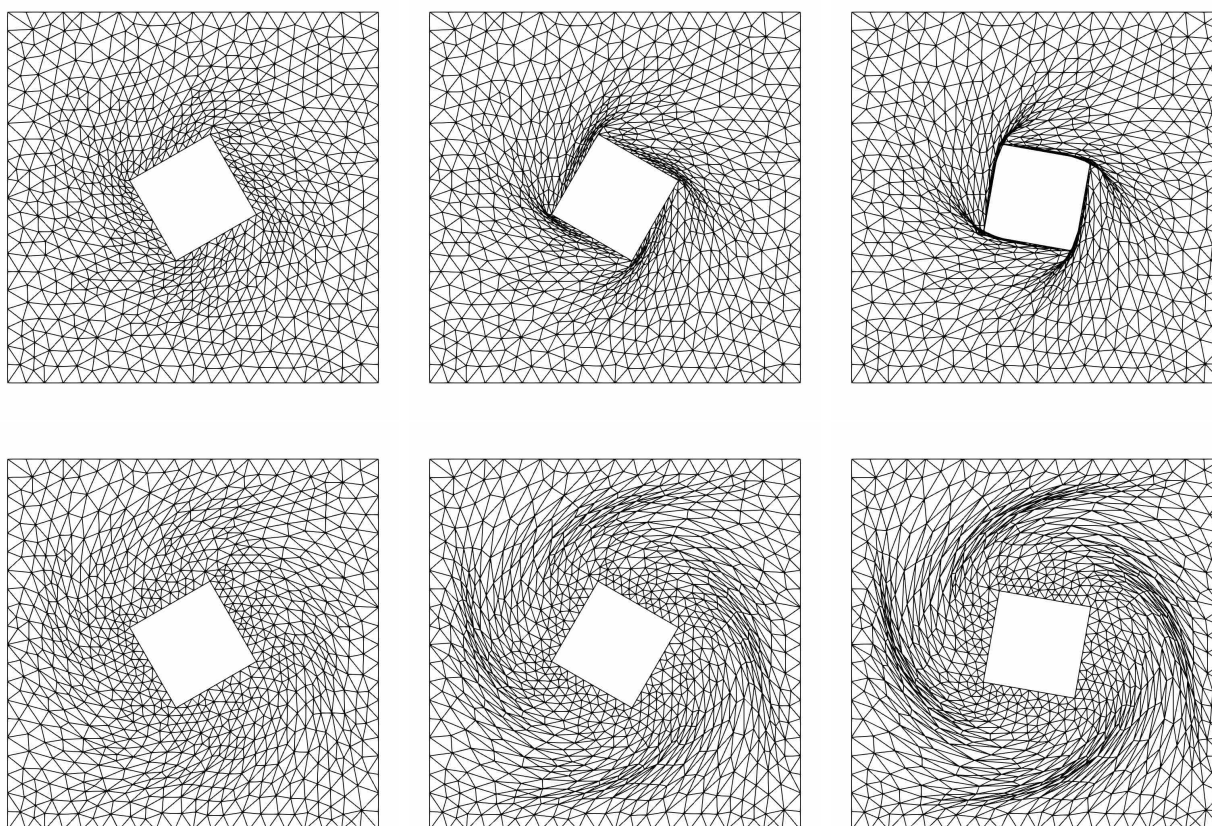
Σχήμα 2.11: Σχηματική αναπαράσταση των τεστ εναλλαγής κόμβων για έναν τυχαίο κόμβο (μπλε κύκλος) στο εσωτερικό σύνορο (πάνω) και στο εξωτερικό σύνορο (κάτω). Δεξιά παρουσιάζεται η νέα μέθοδος ενώ αριστερά η υπάρχουσα.

2.11 Σύγκριση της απλής IDW με την IDW με περιστροφές

Το ίδιο απλό πλέγμα (σχήμα 2.8) χρησιμοποιείται για τη σύγκριση της απλής IDW με την IDW με περιστροφές. Η σύγκρισή τους πραγματοποιείται μέσω τριών περιπτώσεων παραμόρφωσης. Πιο συγκεκριμένα μέσω περιστροφής του εσωτερικού τετραγώνου ως απόλυτου στερεού, μέσω απλής μετακίνησης του ως απόλυτο στερεό και μέσω συνδυασμού των δύο παραπάνω παραμορφώσεων.

Στην πρώτη περίπτωση παραμόρφωσης το εσωτερικό τετράγωνο περιστρέφεται κατά 30° , 60° , 80° . Τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων παρουσιάζονται στο σχήμα 2.12. Στην περίπτωση των 30° και οι δύο μέθοδοι παραμορφώνουν το πλέγμα επιτυχώς και οι διαφορές μεταξύ των δυο μεθόδων είναι μικρές. Η μόνη αξιοσημείωτη διαφορά είναι πως η IDW με περιστροφές έχει καταφέρει να διατηρήσει την ποιότητα των κελιών κοντά στο εσωτερικό σύνορο αναλλοίωτη ενώ η IDW έχει εισάγει μια μικρή στρέβλωση σε αυτές. Όσο μεγαλώνει η γωνία παραμόρφωσης, παρατηρείται πως αυτό το μοτίβο, δηλαδή η στρέβλωση των κελιών στη γειτονιά του εσωτερικού συνόρου, ενισχύεται για την IDW, όπου στις 80° έχουν στρεβλώσει τόσο πολύ, που πλευρές των πιο κοντινών κελιών έχουν περάσει εκτός του εσωτερικού τετραγώνου και πολλά από αυτά έχουν αναστραφεί. Ήδη από την περιστροφή των 60° παρουσιάζονται ανεστραμμένα τρίγωνα, αν και μόνο 2. Συνοπτικά τα βασικά στοιχεία για τα πλέγματα παρουσιάζονται στον πίνακα 2.2.

Γενικά, το μεγαλύτερο μέρος της παραμόρφωσης έχει απορροφηθεί σε αυτήν τη μικρή περιοχή, αφήνοντας το υπόλοιπο πλέγμα σχεδόν αναλλοίωτο. Εν αντιθέσει η IDW με περιστροφές διατηρεί αναλλοίωτη την ποιότητα των κελιών, ανεξαρτήτως του μεγέθους της περιστροφής. Η στρέβλωση των κελιών, η οποία σε μεγάλες παραμορφώσεις είναι αδύνατο να αποφευχθεί, μιας και οι εξωτερικοί συνοριακοί κόμβοι παραμένουν ακίνητοι επάνω στο σύνορο, παρατηρείται περίπου στο μέσο του πλέγματος και προς το εξωτερικό σύνορο. Η ποιότητα των κελιών όμως στη γειτονιά του εξωτερικού συνόρου παραμένει επίσης αναλλοίωτη. Εκτός αυτού, ακόμη και για μεγάλες περιστροφές, όπως π.χ. 80° , δεν παρατηρείται καμία αναστροφή τριγώνου. Βάσει όλων των παραπάνω, είναι εμ-

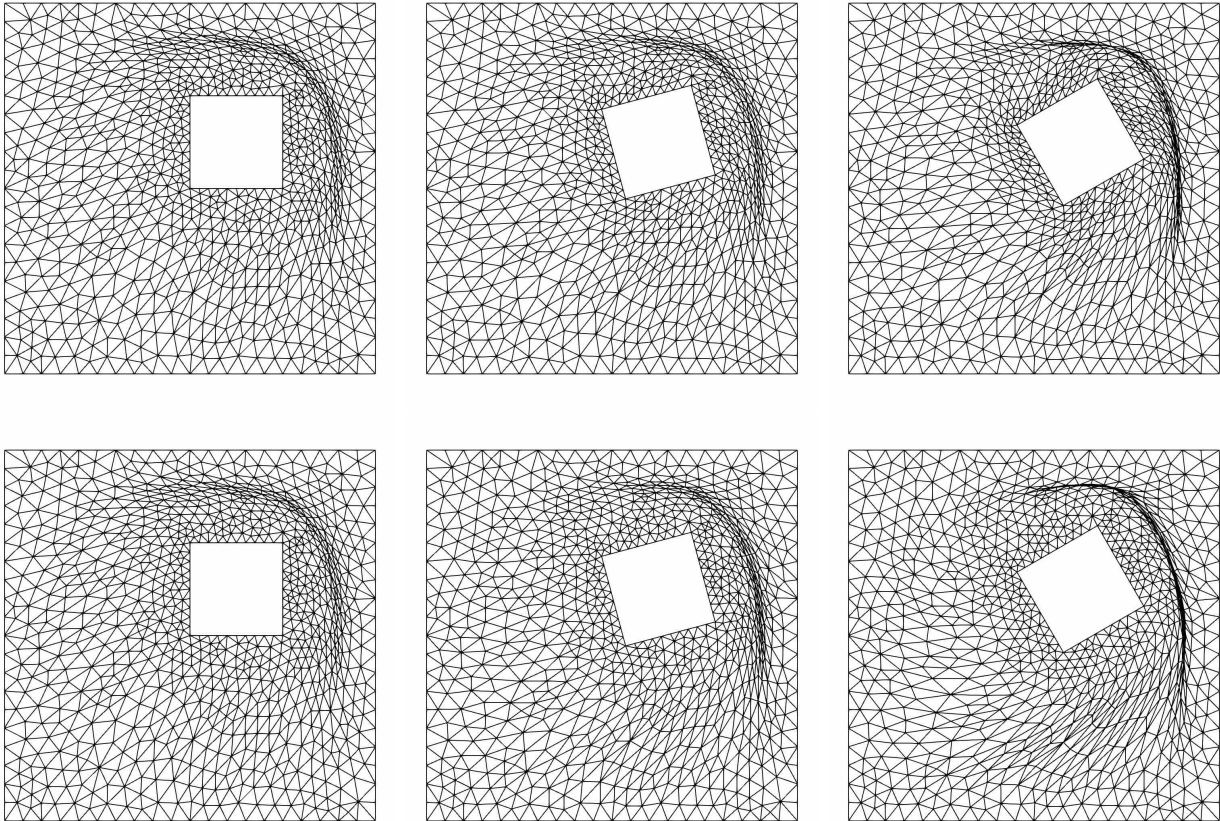


Σχήμα 2.12: Προσαρμοστική παραμόρφωση του πλέγματος για τις περιπτώσεις περιστροφής του εσωτερικού τετραγώνου κατά 30° (αριστερά πλέγματα), 60° (κεντρικά πλέγματα) και 80° (δεξιά πλέγματα). Στα πάνω πλέγματα εφαρμόστηκε η απλή IDW ενώ στα κάτω η IDW με περιστροφές.

φανές πως η IDW με περιστροφές είναι η καταλληλότερη μέθοδος προσαρμοστικής παραμόρφωσης του πλέγματος, όταν πρόκειται για παραμόρφωση που προκύπτει από καθαρή περιστροφή.

Στη δεύτερη περίπτωση παραμόρφωσης το εσωτερικό τετράγωνο μεταφέρεται ως απόλυτο στερεό κατά 0.5 μονάδες οριζόντια και κατακόρυφα. Όπως παρατηρείται στο σχήμα 2.13 τόσο η IDW όσο και η IDW με περιστροφές δίνουν το ίδιο παραμορφωμένο πλέγμα. Αυτό είναι λογικό αφού η ανάλυση της συνολικής παραμόρφωσης σε μία περιστροφή και μία μετακίνηση καταλήγει να δίνει μόνο μία μετακίνηση με μηδενική περιστροφή. Άρα στις περιπτώσεις καθαρής μετακίνησης οι δύο μέθοδοι συμπίπτουν. Όσον αφορά τα αποτελέσματα των μεθόδων παρατηρείται ότι πάνω δεξιά υπάρχει μια περιοχή, περίπου στο μέσο του εσωτερικού και εξωτερικού συνόρου όπου τα κελιά έχουν συμπιεστεί και η ποιότητα τους έχει χαλάσει (σε ανεκτά όμως επίπεδα). Αυτό είναι κάτι λογικό και αναμενόμενο αφού μετά την παραμόρφωση το ίδιο πλήθος κελιών που υπήρχε ανάμεσα στις πάνω-δεξιά πλευρές των συνόρων καλούνται να προσαρμοστούν σε μικρότερο χώρο. Αντίστοιχα στο κάτω-αριστερά μέρος ανάμεσα στα δύο σύνορα τα κελιά έχουν τεντωθεί ώστε να καλύψουν τον επιπλέον χώρο.

Τρίτη και τελευταία περίπτωση αποτελεί ο συνδυασμός των δύο παραπάνω παραμορφώσεων, όπου το εσωτερικό τετράγωνο μεταφέρεται κατά 0.5 μονάδες οριζόντια και κατακόρυφα αλλά και στρέφεται κατά 15° και κατά 30° . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 2.13. Όπως φαίνεται, τα αποτελέσματα είναι παρόμοια και για τις δύο παραμορφώσεις. Η περιοχή πάνω-δεξιά όπου τα κελιά είχαν συμπιεστεί συνεχίζει να υπάρχει και όσο μεγαλώνει η περιστροφή, τόσο μεγαλύτερη γίνεται. Γενικά πρόκειται ότι για μία ιδιαίτερα απαιτητική παραμόρφωση πέραν των 15° , ούτε η IDW ούτε η IDW με περιστροφές είναι σε θέση να παραμορφώσουν το πλέγμα ικανοποιητικά και παρουσιάζονται ανεστραμμένα τρίγωνα.



Σχήμα 2.13: Προσαρμοστική παραμόρφωση του πλέγματος για τις περιπτώσεις μετακίνησης του εσωτερικού τετραγώνου κατά 0.5 μονάδες τόσο στο οριζόντια όσο και στον κατακόρυφο άξονα και περιστροφής του κατά 0° (αριστερά πλέγματα), 15° (κεντρικά πλέγματα) και 30° (δεξιά πλέγματα). Στα πάνω πλέγματα εφαρμόστηκε η απλή IDW ενώ στα κάτω η IDW με περιστροφές.

Όσον αφορά τη σύγκριση μεταξύ τους, παρατηρείται και εδώ το μοτίβο της στρέβλωσης των κελιών στη γειτονιά του εσωτερικού συνόρου (όπως και στην περίπτωση της καθαρής περιστροφής) για την IDW αλλά λιγότερο έντονα μιας και οι περιστροφές είναι μικρότερες. Αντίστοιχα η IDW με περιστροφές διατηρεί αχέραιη την ποιότητα αυτών. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι η IDW παρουσιάζει καλύτερα αποτελέσματα από την IDW με περιστροφές στην περίπτωση της μετακίνησης και περιστροφής κατά 30° , τόσο στο μέσο όρο και τυπική απόκλιση της ποιότητας του πλέγματος, όσο και στον αριθμό των ανεστραμμένων τριγώνων (2.2). Αυτό συμβαίνει λόγω της ιδιότητας της IDW με περιστροφές να κρατά αναλλοίωτο το πλέγμα κοντά στο εσωτερικό σύνορο και το εξωτερικό και η παραμόρφωση να απορροφάται από ένα μικρό τμήμα περίπου στη μέση του πλέγματος. Εν προκειμένω λόγω της μετακίνησης του εσωτερικού τετραγώνου πάνω-δεξιά, ο διαθέσιμος χώρος ανάμεσα στα δύο σύνορα έχει μειωθεί σημαντικά και το πλέγμα στο σημείο αυτό έχει ήδη συμπιεστεί. Οπότε η απορρόφηση της παραμόρφωσης σε έναν τόσο μικρό χώρο, ο οποίος είναι ήδη παραμορφωμένος, οδηγεί σε χειρότερη ποιότητα του πλέγματος σε αυτήν την περιοχή. Αντιθέτως η IDW που απορροφά την παραμόρφωση στη γειτονιά του εσωτερικού συνόρου έχει περισσότερο χώρο να το κάνει και έτσι η συνολική ποιότητα του πλέγματος καταλήγει να είναι καλύτερη αν και η τοπική ποιότητα στη γειτονιά του εσωτερικού συνόρου είναι χειρότερη.

Καταλήγοντας, διαπιστώνεται ότι η IDW με περιστροφές αποτελεί σαφή βελτίωση της απλής IDW. Βασικό κριτήριο αποτελεί η ιδιότητά της να διατηρεί την ποιότητα των κελιών στη γειτονιά των συνόρων αναλλοίωτη, το οποίο ιδίως σε προσομοιώσεις ρευστοδυναμικής είναι ιδιαίτερα σημαντικό, μιας και οι περιοχές κοντά στα στερεά όρια σωμάτων είναι εκεί που αναπτύσσονται τα συνεχτικά στρώματα και η λύση παρουσιάζει απότομες κλίσεις. Απαιτείται οπότε, το πλέγμα σε αυτές τις περιοχές να έχει καλή ποιότητα για να παρθούν όσο το δυνατόν καλύτερα αποτελέσματα. Επίσης,

Παραμόρφωση	IDW	IDW με περιστροφές
Περιστροφή\dx\dy	mean\std\ \ανεστραμμένα κελιά	mean\std\ \ανεστραμμένα κελιά
30°\0.0\0.0	2.34\0.40\0	2.55\0.68\0
60°\0.0\0.0	8.65\161.28\2	4.89\5.73\0
80°\0.0\0.0	10493.24\379478.36\90	4092.57\163912.08\0
0°\0.5\0.5	2.71\1.37\0	2.71\1.37\0.40\0
15°\0.5\0.5	2.83\1.70\0	3.17\3.46\0
30°\0.5\0.5	486.62\18538.83\7	910.97\27992.01\41

Πίνακας 2.2: Ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση της ποιότητας των πλεγμάτων, καθώς και ο αριθμός των ανεστραμμένων τριγώνων για διάφορες περιπτώσεις παραμορφώσεων. Η προσαρμοστική παραμόρφωση των πλεγμάτων έγινε μέσω της IDW και της IDW με περιστροφές.

σημαντικός παράγοντας που την καθιστά καλύτερη μέθοδο, είναι η δυνατότητα της να χειρίζεται πολύ μεγαλύτερες περιστροφές από την απλή IDW. Ακόμη σε περιπτώσεις απλών μετακινήσεων παρατηρείται ότι, οι δύο μέθοδοι συμπίπτουν και η IDW με περιστροφές εκφυλίζεται στην απλή IDW. Λαμβάνοντας όλα αυτά υπόψη είναι δυνατόν να λεχθεί ότι, η IDW με περιστροφές αποτελεί προέκταση της απλής IDW, με σαφείς βελτιώσεις που την καθιστούν καλύτερη μέθοδο προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλεγμάτων.

Κεφάλαιο 3

Η τεχνική των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων

Η αδυναμία αλλαγής της θέσης των εξωτερικών συνοριακών κόμβων καθώς οι εσωτερικοί συνοριακοί κόμβοι μεταβάλλουν τη θέση τους αποτελεί σοβαρό περιορισμό για τις μεθόδους προσαρμοστικής παραμόρφωσης του πλέγματος. Αυτό οδηγεί ουσιαστικά στον περιορισμό χρήσης αυτών των μεθόδων σε μεγάλες παραμορφώσεις, αφού τα κελιά του πλέγματος στρεβλώνουν στην προσπάθεια των κόμβων που είναι κοντά στο εσωτερικό σύνορο να ακολουθήσουν την παραμόρφωση του, ενώ αυτοί που βρίσκονται κοντά στο ακίνητο εξωτερικό σύνορο τείνουν να παραμείνουν στις αρχικές τους θέσεις.

Για τον λόγο αυτό έχει αναπτυχθεί η τεχνική των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων, όπου οι εξωτερικοί συνοριακοί κόμβοι ουσιαστικά είναι ελεύθεροι να ακολουθήσουν την παραμόρφωση του εσωτερικού συνόρου, με τον μόνο περιορισμό ότι είναι υποχρεωμένοι να παραμείνουν πάνω στο εξωτερικό σύνορο. Επίσης αν αυτό περιέχει ακμές (σημεία όπου έχουμε απότομη αλλαγή της κλίσης), τότε πρέπει πάντα ένας κόμβος να τοποθετείται στη θέση αυτή ώστε το σχήμα του να μένει αναλλοίωτο.

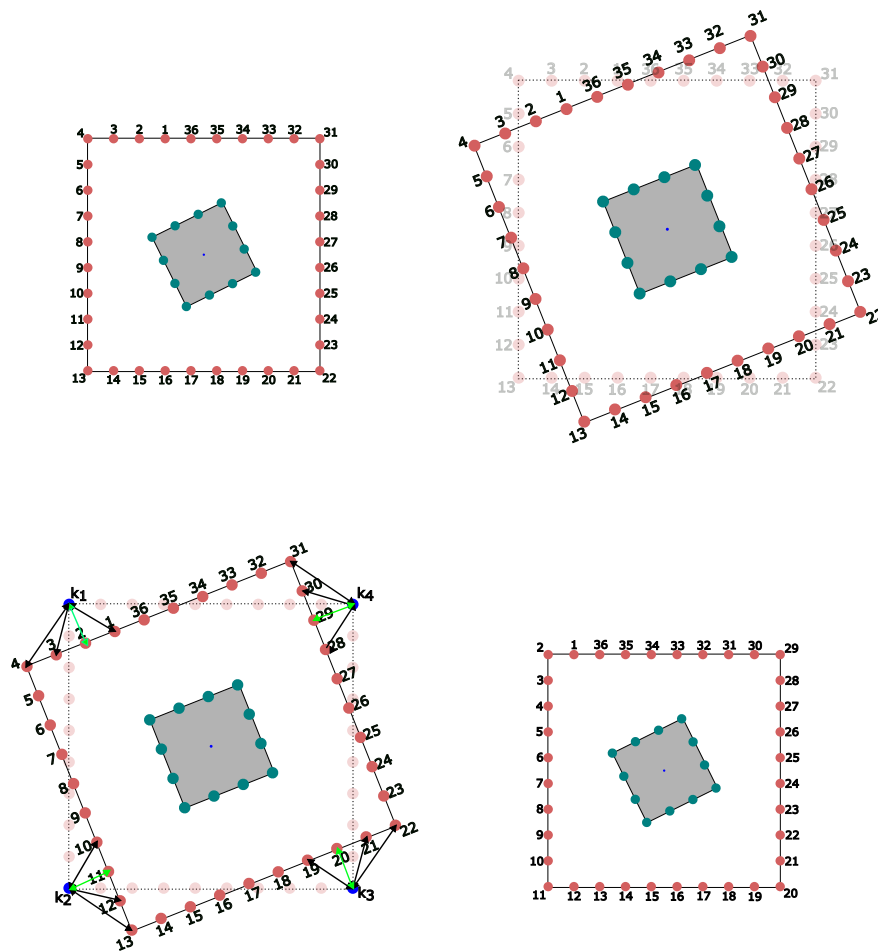
Γενικά, ανάλογα με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται για να παραμορφωθεί το πλέγμα, χρησιμοποιείται και ανάλογη μέθοδος για την υλοποίηση των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων. Λ.χ. σε μεθόδους φυσικών αναλόγων, χρησιμοποιούνται συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann στους συνοριακούς κόμβους [24], [25]. Στην παρούσα εργασία που χρησιμοποιείται η IDW, αυτή υλοποιείται όπως περιγράφεται παρακάτω. Η βασική ιδέα έχει βασιστεί στην εργασία [22].

3.1 Ανάλυση της μεθόδου

Διδιάστατα πλέγματα

Η μέθοδος μπορεί να εξηγηθεί εύκολα μέσω των σχημάτων 3.1. Ας σημειωθεί καταρχάς, ότι εάν χρησιμοποιηθεί, τότε αποτελεί το πρωταρχικό βήμα στη διαδικασία προσαρμοστικής παραμόρφωσης του πλέγματος. Έστω ότι το εσωτερικό σύνορο περιστρέφεται κατά μια τυχαία γωνία ω ως απόλυτο στερεό. Η παραμόρφωση θα μπορούσε να ήταν και τελείως τυχαία αλλά για διευκόλυνση της σχηματικής αναπαράστασης επιλέγεται μία περιστροφή απολύτως στερεού. Για την εύρεση της νέας θέσης των εξωτερικών συνοριακών κόμβων ακολουθούνται τα εξής βήματα:

1. Εφαρμογή της IDW σε αυτούς χρησιμοποιώντας ως γνωστά σημεία στην παρεμβολή μόνο τους εσωτερικούς συνοριακούς κόμβους. Οι εξωτερικοί συνοριακοί κόμβοι μετατοπίζονται σε θέσεις εκτός του συνόρου. Γενικά, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί είτε η απλή IDW είτε η IDW με περιστροφές, ανάλογα με το ποια χρησιμοποιείται στο εκάστοτε πρόβλημα.



Σχήμα 3.1: Παρουσίαση της μεθόδου των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων. Στα σχήματα παραλείπονται οι εσωτερικοί κόμβοι για καλύτερη ευκρίνεια ενώ δείχνονται το σώμα (γκρι τετράγωνο) με τους εσωτερικούς συνοριακούς κόμβους (κύκλοι σε απόχρωση του πράσινου) γύρω από το οποίο δημιουργείται το πλέγμα και οι εξωτερικοί συνοριακοί κόμβοι (κύκλοι σε απόχρωση του κόκκινου). Με μαύρα βέλη απεικονίζονται οι αποστάσεις των κόμβων από τις κορυφές του εξωτερικού συνόρου ενώ με πράσινο βέλος η ελάχιστη απόσταση από αυτές.

2. Υπολογισμός της απόστασης των νέων θέσεων των κόμβων από τις θέσεις όπου βρίσκονται οι ακμές του εξωτερικού συνόρου πριν αυτό παραμορφωθεί. Εντοπισμός των κόμβων που απέχουν λιγότερο από αυτές και τοποθέτηση τους σε αυτές. Στο σχήμα η ελάχιστη απόσταση από κάθε κορυφή συμβολίζεται με πράσινο βέλος.
3. Εύρεση των κόμβων που βρίσκονται ανάμεσα σε δύο κόμβους που τοποθετήθηκαν σε δύο διαδοχικές ακμές του, με στόχο την τοποθέτησή τους σε αυτήν την πλευρά του συνόρου.
4. Υπολογισμός του νέου μήκους της παραμορφωμένης πλευράς. Ως παραμορφωμένη πλευρά νοούνται οι κόμβοι που βρίσκονται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ακμές, οι οποίοι βρέθηκαν στο προηγούμενο βήμα.
5. Υπολογισμός της θέσης κάθε κόμβου (που ανήκει στην παραμορφωμένη πλευρά) ως ποσοστού του συνολικού μήκους της. Εάν δηλαδή το συνολικό μήκος της είναι l και η απόσταση ενός κόμβου από τη μία ακμή (που αυθαίρετα θεωρείται ως η αρχή της πλευράς) είναι d , τότε το ποσοστό υπολογίζεται ως:

$$perc = d/l$$

6. Οι κόμβοι τοποθετούνται στη μη παραμορφωμένη πλευρά που ανήκουν. Η τοποθέτησή τους

γίνεται στο αντίστοιχο ποσοστό αυτής, όπως υπολογίστηκε για κάθε κόμβο στο προηγούμενο βήμα.

Στην περίπτωση όπου το εξωτερικό σύνορο δεν έχει κορυφές, π.χ. το σχήμα του είναι κυκλικό, τότε η διαδικασία είναι πολύ πιο απλή. Απλώς επιλέγεται τυχαία ένας εξωτερικός συνοριακός κόμβος και προβάλλεται επάνω στην πλευρά του μη παραμορφωμένου εξωτερικού συνόρου που βρίσκεται κοντύτερα σε αυτόν. Εν συνεχεία οι υπόλοιποι συνοριακοί κόμβοι τοποθετούνται επάνω στο μη παραμορφωμένο εξωτερικό σύνορο στο αντίστοιχο ποσοστό.

Αφού οι εξωτερικοί συνοριακοί κόμβοι τοποθετηθούν στις νέες θέσεις τους επάνω στο σύνορο, υπολογίζεται η συνολική μετατόπιση τους από την αρχική τους θέση, η οποία και θα χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί η νέα θέση των εσωτερικών κόμβων. Η νέα θέση τους βρίσκεται με τη μέθοδο που ήδη εξηγήθηκε παραπάνω, είτε με την απλή IDW είτε με την IDW με περιστροφές. Η μόνη διαφορά είναι ότι πλέον οι εξωτερικοί συνοριακοί κόμβοι συνεισφέρουν και στον αριθμητή αφού η συνολική μετατόπισή τους s_b είναι διάφορη του μηδενός.

Τριδιάστατα πλέγματα.

Στην περίπτωση που το πλέγμα είναι 3Δ , η παραπάνω διαδικασία διαφοροποιείται ελαφρά. Αυτό συμβαίνει λόγω της δυσκολίας εύρεσης της θέσης των κόμβων ως ποσοστών επί της παραμορφωμένης επιφάνειας. Για τον λόγο αυτό οι κόμβοι απλώς προβάλλονται επάνω στην πιο κοντινή τους επιφάνεια.

Πιο συγκεκριμένα αρχικά εφαρμόζεται η μέθοδος IDW (ή η IDW με περιστροφές) για την εύρεση των νέων θέσεων των εξωτερικών συνοριακών κόμβων ακριβώς όπως και στη 2Δ περίπτωση. Στη συνέχεια, εντοπίζεται για κάθε έναν από αυτούς, η συνοριακή επιφάνεια που απέχει το ελάχιστο από αυτόν. Αφού βρεθεί, ο κόμβος προβάλλεται πάνω της.

Στην περίπτωση όπου το σχήμα δεν έχει ακμές, η διαδικασία έχει τελειώσει. Αν έχει τότε πρέπει σε κάθε ακμή να τοποθετηθεί ένας κόμβος. Ο κόμβος που τοποθετείται σε αυτήν είναι ο κόμβος που απέχει τη μικρότερη απόσταση από αυτήν και πληροί τις δύο παρακάτω προϋποθέσεις:

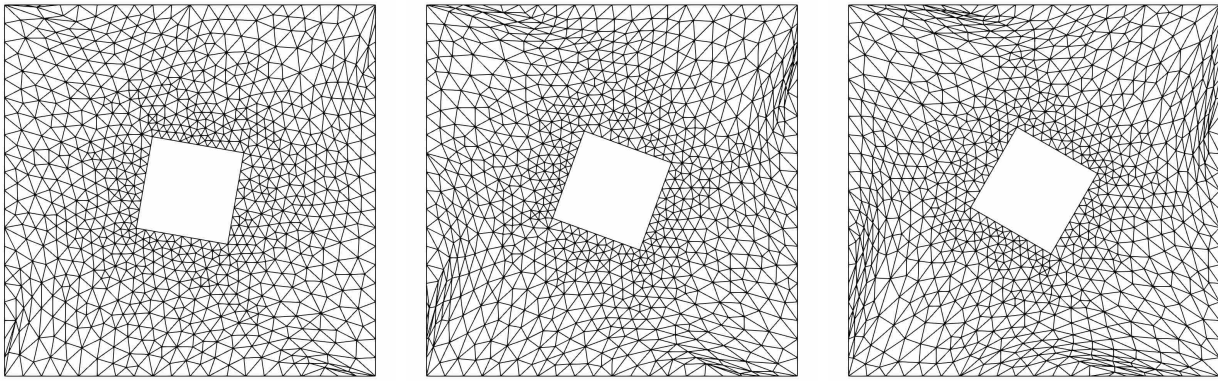
1. Όταν τοποθετηθεί στην ακμή, δεν παράγονται ανεστραμμένα κελιά.
2. Τα κάθετα διανύσματα των συνοριακών επιφανειών στις οποίες ανήκει ο κόμβος ταυτίζονται με τα κάθετα διανύσματα των συνοριακών επιφανειών που βρίσκονταν σε αυτές τις θέσεις πριν τη παραμόρφωση.

Εάν κάποια από αυτές δεν ισχύει, τότε επιλέγεται ο κόμβος με τη δεύτερη μικρότερη απόσταση από την ακμή κ.ο.κ. μέχρι να βρεθεί ο κατάλληλος κόμβος. Μόλις βρεθεί, η διαδικασία για αυτήν την ακμή έχει ολοκληρωθεί. Εάν το σύνορο έχει και άλλη ακμή, η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε μία.

3.2 Αξιολόγηση της μεθόδου

Η μέθοδος των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων αξιολογείται βάσει του ίδιου απλού πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο 2.8. Αυτή εφαρμόζεται μόνο στην IDW με περιστροφές, μιας και όπως δείχθηκε στην ενότητα 2.11 υπερέρχει της απλής IDW και είναι αυτή που χρησιμοποιείται στην υπόλοιπη εργασία.

Αρχικά δοκιμάζονται πολύ μεγάλες περιστροφές του πλέγματος αρχίζοντας από τις 80° και φτάνοντας έως και τις 240° . Η περίπτωση των 80° παρουσιάζει έντονο ενδιαφέρον, μιας και παρουσιάστηκε και στην ενότητα 2.11 (σχήμα 2.12) και είναι δυνατόν να εκτιμηθούν άμεσα τα οφέλη της εν λόγω μεθόδου. Όπως παρατηρείται στο σχήμα 3.2, εάν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων, τότε η περιστροφή των 80° είναι πολύ εύκολα διαχειρίσιμη



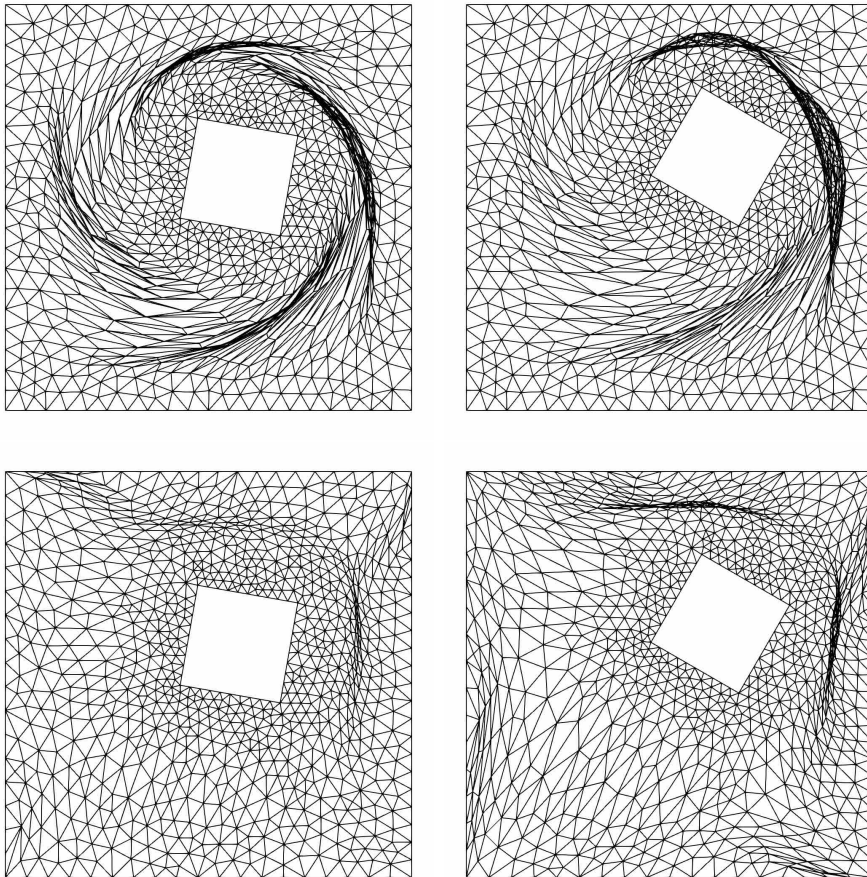
Σχήμα 3.2: Πλέγματα μετά την προσαρμοστική τους παραμόρφωση με χρήση της IDW με περιστροφές και με χρήση των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων. Η παραμόρφωση αποτελείται από περιστροφή του εσωτερικού τετραγώνου ως απόλυτου στερεού, κατά 80° (αριστερά), 160° (μεσαίο) και 240° (δεξιά).

Παραμόρφωση	IDW με περιστροφές
	mean \std \
Περιστροφή \dx \dy	\ανεστραμμένα κελιά
$80^\circ \backslash 0.0 \backslash 0.0$	2.45 \4.06 \0
$160^\circ \backslash 0.0 \backslash 0.0$	2.93 \4.10 \0
$240^\circ \backslash 0.0 \backslash 0.0$	3.13 \3.08 \0

Πίνακας 3.1: Παρουσίαση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της ποιότητας των παραμορφωμένων πλεγμάτων, καθώς και του αριθμού των ανεστραμμένων τριγώνων. Η παραμόρφωση αποτελείται από μία περιστροφή του εσωτερικού τετραγώνου ως απόλυτου στερεού. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για την παραμόρφωση των πλεγμάτων είναι η IDW με περιστροφές.

από την IDW με περιστροφές. Το τελικό πλέγμα έχει άριστη ποιότητα και σχεδόν όμοια με την αρχική (πίνακας 3.1), εν αντιθέσει με το πλέγμα που παραμορφώθηκε χωρίς χρήση της εν λόγω μεθόδου (σχήμα 2.12) και στρέβλωσε πέραν από αποδεκτά όρια, παρουσιάζοντας μέση τιμή ποιότητας πλέγματος ίση με 4092.57 και τυπική απόκλιση 163912.08 (πίνακας 2.2). Όσον αφορά τις υπόλοιπες περιστροφές, η μέθοδος δεν αντιμετωπίζει κανένα πρόβλημα και η παραμόρφωση του πλέγματος επιτυγχάνεται με ποιότητα σχεδόν όμοια με την αρχική.

Γενικά, η περιστροφή του εσωτερικού τετραγώνου επιτυγχάνεται με παρόμοια ποιότητα με την αρχική για οποιαδήποτε γωνία περιστροφής και το εσωτερικό τετράγωνο μπορεί να περιστρέφεται χωρίς κανένα θέμα από 0° έως και 360° . Παρά όμως αυτά τα ιδιαίτερα ενθαρρυντικά αποτελέσματα, η υπόθεση ότι η παρούσα μέθοδος είναι σε θέση να διαχειριστεί όλες τις παραμορφώσεις του εσωτερικού τετραγώνου δεν ισχύει. Για να καταρριφθεί η υπόθεση αυτή, χρησιμοποιούνται οι περιπτώσεις που παρουσιάζονται στο σχήμα 3.3. Εν προκειμένω, παρουσιάζονται δύο παραμορφώσεις όπου το εσωτερικό τετράγωνο μετακινείται και περιστρέφεται ως απόλυτο στερεό κατά 0.3 μονάδες οριζόντια και κατακόρυφα και 80° και 0.5 μονάδες οριζόντια και κατακόρυφα και 60° , αντίστοιχα. Η παραμόρφωση αυτή είναι ιδιαίτερα μεγάλη και η απλή IDW με περιστροφές δεν μπορεί να τις διαχειριστεί και στα τελικά πλέγματα υπάρχουν αρκετά ανεστραμμένα κελιά. Όταν σε αυτήν όμως εισαχθεί και η μέθοδος των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων, τότε είναι εμφανής η βελτίωση της ποιότητας των πλεγμάτων. Ειδικά στην πρώτη περίπτωση (0.5 μονάδες μετακίνηση και 80° περιστροφή) το πλέγμα καταλήγει να έχει παραπλήσια ποιότητα με την αρχική του και κανένα ανεστραμμένο κελί. Αντιθέτως όμως στη δεύτερη περίπτωση (0.5 μονάδες μετακίνηση και 80° περιστροφή), αν και υπάρχει σαφής βελτίωση της ποιότητας του πλέγματος και ο αριθμός των ανεστραμμένων τριγώνων είναι μειωμένος, είναι αδύνατον να προκύψει ένα έγκυρο πλέγμα με παρόμοια ποιότητα με την αρχική. Αυτό συμβαίνει λόγω της έλλειψης συμμετρίας στο παραμορφωμένο πλέγμα. Ουσιαστικά οι κόμβοι στην πάνω δεξιά γωνιά δεν έχουν αρκετό χώρο



Σχήμα 3.3: Πλέγματα μετά την προσαρμοστική τους παραμόρφωση με χρήση της IDW με περιστροφές, χωρίς (πάνω πλέγματα) και με (κάτω πλέγματα) χρήση των ολισθαίνοντων συνοριακών κόμβων. Η παραμόρφωση αποτελείται από περιστροφή και μετακίνηση του εσωτερικού τετραγώνου ως απόλυτου στερεού, κατά 80° και 0.3 μονάδες οριζόντια και κατακόρυφα (αριστερά πλέγματα) και κατά 60° και 0.5 μονάδες οριζόντια και κατακόρυφα, αντίστοιχα.

για να παραμορφωθούν και καταλήγουν ο ένας να πέφτει πάνω στον άλλον.

Παραμόρφωση	χωρίς	με
	ολισθαίνοντες κόμβους	ολισθαίνοντες κόμβους
	mean\std\ \ανεστραμμένα κελιά	mean\std\ \ανεστραμμένα κελιά
$80^\circ\backslash0.3\backslash0.3$	355.91\4902.85 \79	2.85\3.99 \0
$60^\circ\backslash0.5\backslash0.5$	635.36\19287.40 \90	23.40\430.82 \48

Πίνακας 3.2: Παρουσίαση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της ποιότητας των παραμορφωμένων πλεγμάτων, καθώς και του αριθμού των ανεστραμμένων τριγώνων. Η παραμόρφωση αποτελείται από μία περιστροφή του εσωτερικού τετραγώνου και μία μετακίνηση αυτού τόσο στον οριζόντιο όσο και στον κατακόρυφο άξονα. Το εσωτερικό τετράγωνο συμπεριφέρεται ως απόλυτο στερεό. Οι μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται για την παραμόρφωση των πλεγμάτων είναι η IDW με περιστροφές, με και χωρίς χρήση των ολισθαίνοντων συνοριακών κόμβων.

Κεφάλαιο 4

Παρουσίαση Εφαρμογών & Αποτελέσματα

4.1 Εφαρμογές

Οι εφαρμογές που χρησιμοποιούνται στην εργασία είναι δύο, μια 2Δ και μια 3Δ. Η 2Δ εφαρμογή είναι ένα πλέγμα γύρω από μια αεροτομή NACA και η 3Δ ένα πλέγμα γύρω από ένα αεροπλάνο. Αναλυτικά οι εφαρμογές παρουσιάζονται παρακάτω.

4.1.1 2Δ εφαρμογή: Αεροτομή NACA 9412

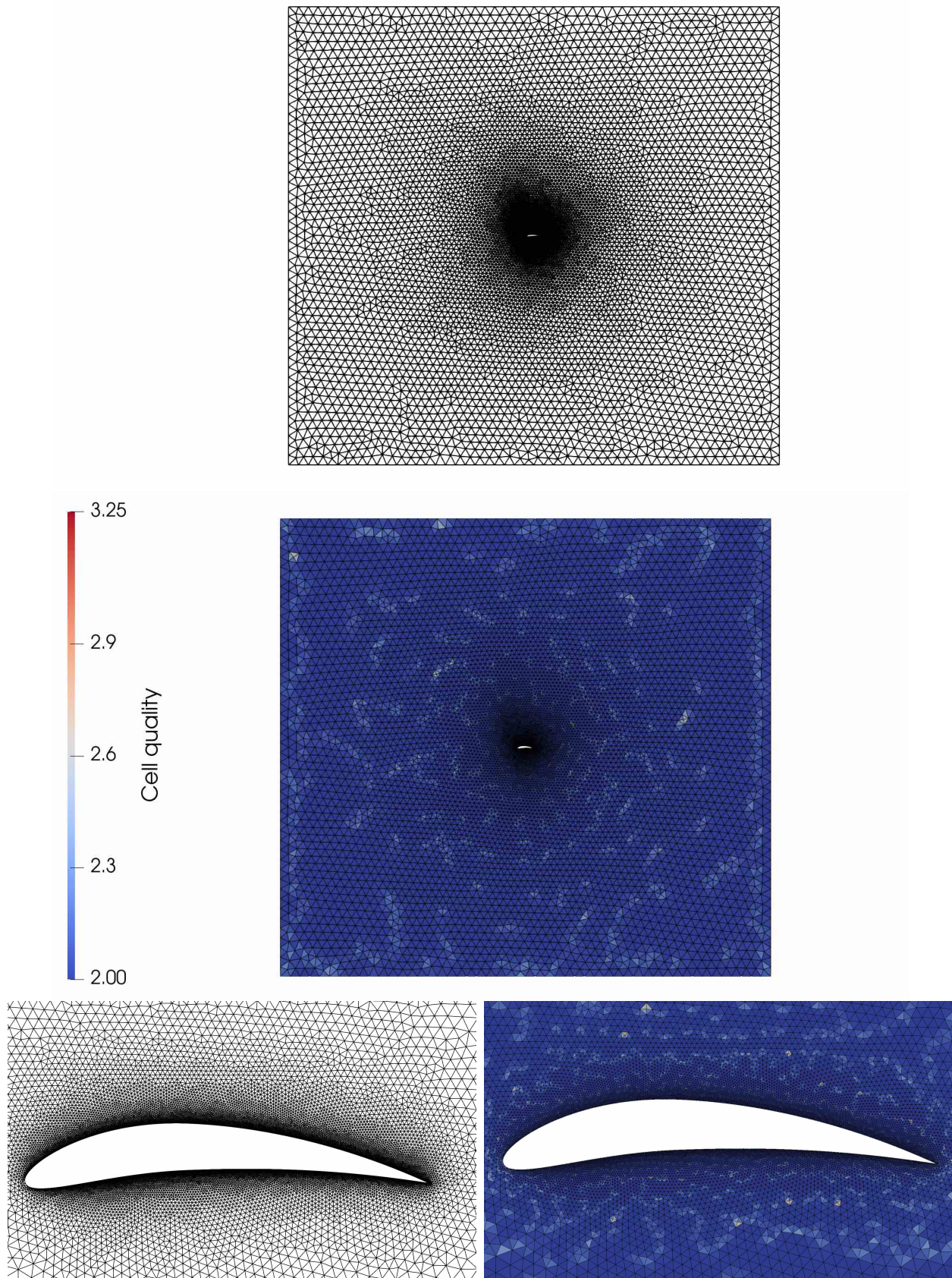
Η 2Δ εφαρμογή είναι ένα πλέγμα γύρω από μία αεροτομή NACA 9412, το εξωτερικό σύνορο του οποίου είναι ένα ορθογώνιο, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Το γεωμετρικό κέντρο της αεροτομής είναι τοποθετημένο στο κέντρο του παραλληλογράμμου και γύρω από αυτό έχει δημιουργηθεί το 2Δ πλέγμα. Το πλέγμα αποτελείται από 22330 κόμβους και 43468 κελιά (τρίγωνα) με μέση ποιότητα 2.0389 και τυπική απόκλιση 0.0706 (πίνακας 4.2). Πιο αναλυτικά η ποιότητα παρουσιάζεται στο σχήμα 4.1. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αεροτομής και του πλέγματος δίνονται στον πίνακα 4.1.

	Κόμβοι	Κελιά (τρίγωνα)	Μέγιστο μήκος	Μέγιστο πλάτος
NACA 9412	998	–	1000	100
Εξωτερικό σύνορο	194	–	30000	28000
Συνολικό πλέγμα	22330	43468	–	–

Πίνακας 4.1: Χαρακτηριστικά στοιχεία του πλέγματος γύρω από τη NACA 9412, καθώς και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλέγματος. Όλα τα μεγέθη μετρούνται σε mm.

Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέγιστο	Ελάχιστο	Ανεστραμμένα Κελιά
2.0389	0.0706	3.0442	2.0	0

Πίνακας 4.2: Χαρακτηριστικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος γύρω από τη NACA 9412. Στο Παράρτημα Α παρουσιάζεται αναλυτικά η σημασία των τιμών της μετρικής.



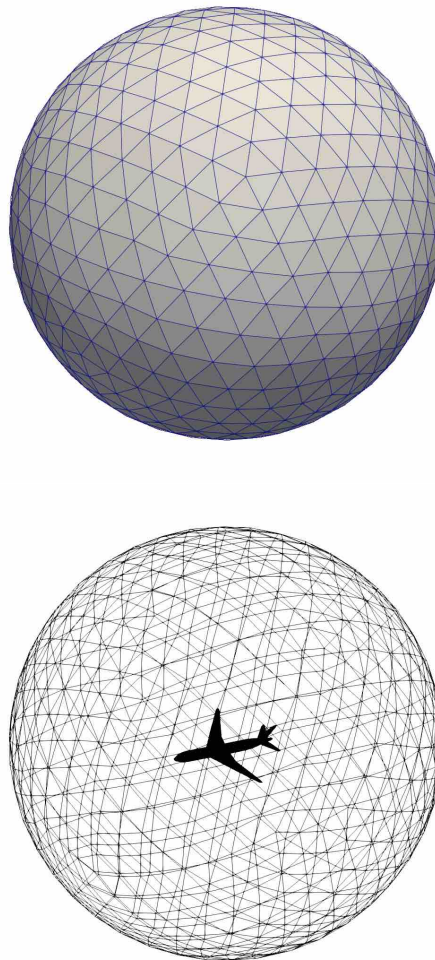
Σχήμα 4.1: Το πλέγμα γύρω από την αεροτομή NACA 9412 και η ποιότητά του.

4.1.2 3Δ εφαρμογή: Αεροπλάνο

Η 3Δ εφαρμογή είναι ένα πλέγμα γύρω από ένα απλοποιημένο μοντέλο αεροπλάνου, το οποίο παρουσιάζεται στο σχήμα 4.3. Το εξωτερικό σύνορο του πλέγματος είναι μία σφαίρα, η οποία παρουσιάζεται στο σχήμα 4.2. Το γεωμετρικό κέντρο του αεροπλάνου είναι τοποθετημένο στο κέντρο της σφαίρας και γύρω από την επιφάνεια του έχει σχεδιαστεί το ογκικό πλέγμα. Συνολικά αυτό αποτελείται από 21192 κόμβους και 101674 κελιά (τετράεδρα) με μέση ποιότητα 0.5415 και τυπική απόκλιση 0.1457. Η ποιότητα του πλέγματος παρουσιάζεται επίσης στο σχήμα 4.4. Στους πίνακες 4.3, 4.4 και 4.5 αναφέρονται τα χαρακτηριστικά του αεροπλάνου, της σφαίρας και του πλέγματος αναλυτικότερα.

	Μέγιστο μήκος	Μέγιστο πλάτος	Μέγιστο ύψος	Ακτίνα
Αεροπλάνο	62000	59000	16000	–
Εξωτερικό σύνορο	–	–	–	120000

Πίνακας 4.3: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αεροπλάνου (εσωτερικό σύνορο του πλέγματος) και της σφαίρας (εξωτερικό σύνορο του πλέγματος). Το μέγιστο μήκος μετρά την απόσταση από τη μύτη του αεροπλάνου έως την ουρά. Το μέγιστο πλάτος την απόσταση από την άκρη της μίας πτέρυγας έως την άκρη της άλλης. Το μέγιστο ύψος μετρά την απόσταση από το κατώτερο σημείο της ατράκτου έως το ανώτερο μέρος του πτερυγίου της ουράς. Όλα τα μεγέθη μετρούνται σε mm.



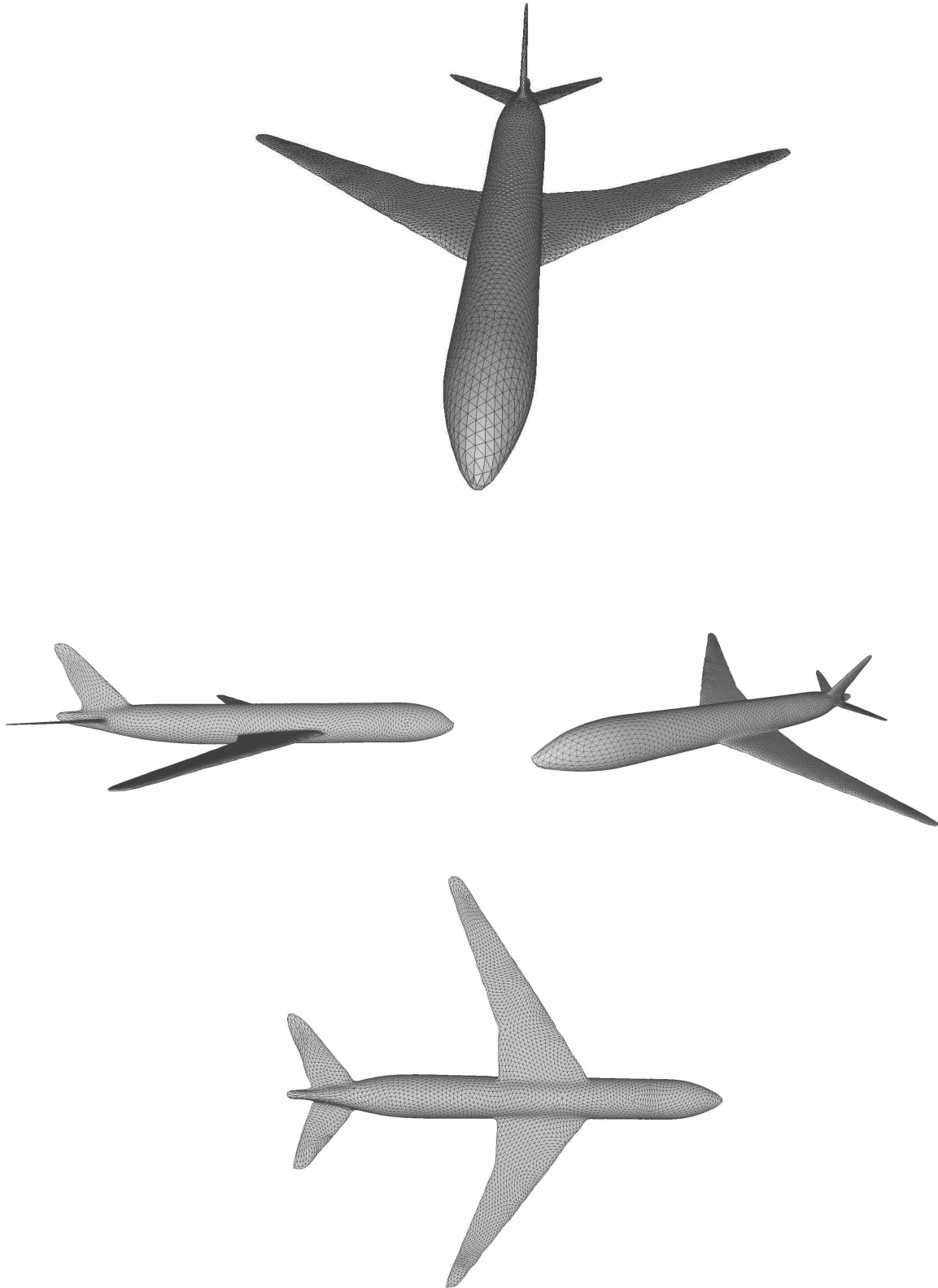
Σχήμα 4.2: Αριστερά παρουσιάζεται η επιφάνεια της σφαίρας και η πλεγματοποίηση της. Δεξιά παρουσιάζεται το αεροπλάνο τοποθετημένο εντός της σφαίρας.

	Κόμβοι	Επιφάνειες (τρίγωνα)	Κελιά (τετράεδρα)
Επιφάνεια αεροπλάνου	7502	15000	–
Επιφάνεια σφαίρας	642	1280	–
Συνολικό πλέγμα	21192	–	101674

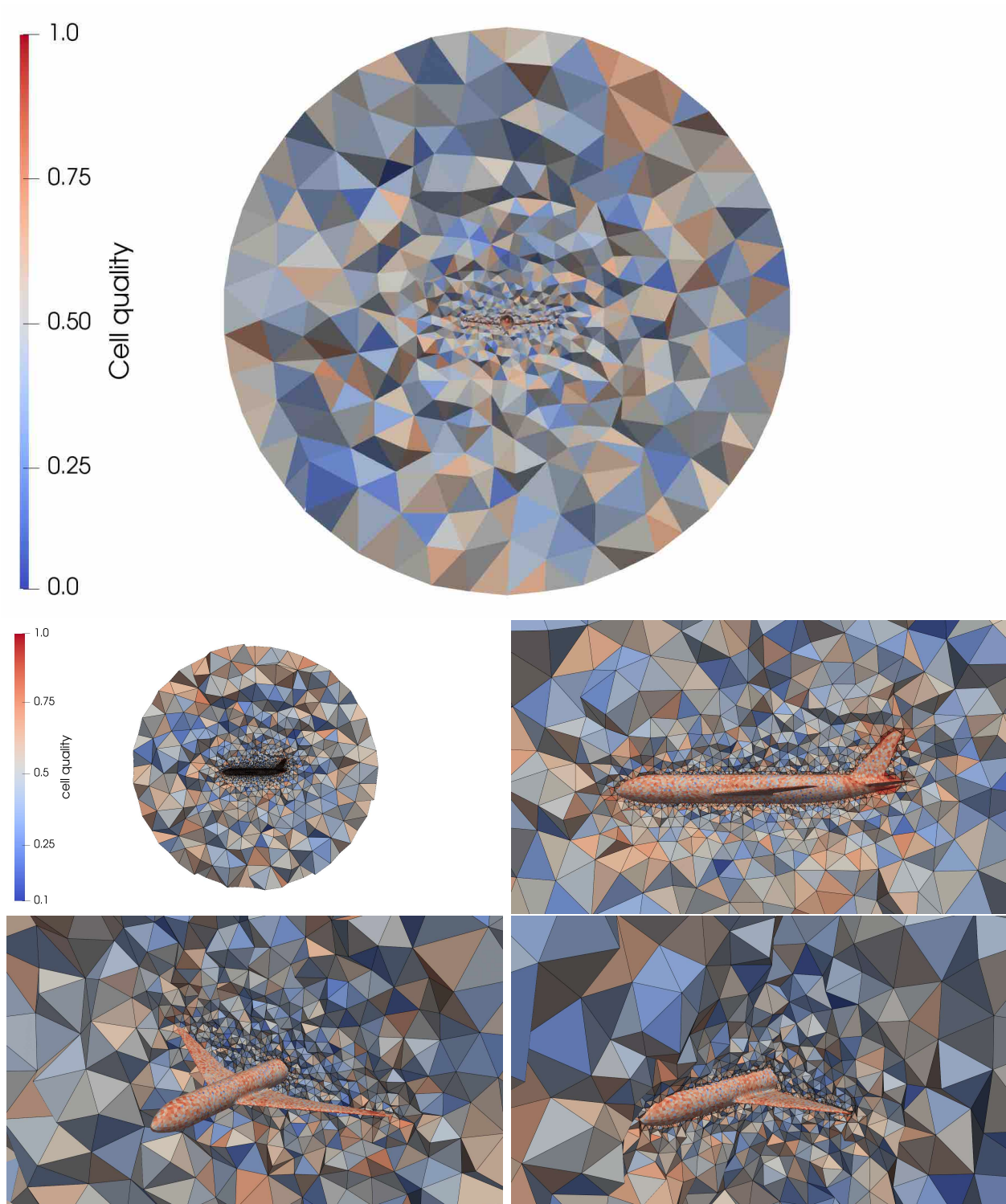
Πίνακας 4.4: Χαρακτηριστικά στοιχεία του πλέγματος γύρω από το αεροπλάνο.

Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέγιστο	Ελάχιστο	Ανεστραμμένα Κελιά
0.5415	0.1457	0.9897	0.053	0

Πίνακας 4.5: Χαρακτηριστικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος γύρω από το αεροπλάνο. Στο Παράρτημα Α παρουσιάζεται αναλυτικά η σημασία των τιμών της μετρικής.



Σχήμα 4.3: Διάφορες όψεις του αεροπλάνου όπου φαίνεται και η πλεγματοποίηση της επιφάνειάς του.



Σχήμα 4.4: Παρουσίαση διαφόρων τομών εντός του πλέγματος για οπτικοποίηση της ποιότητας του. Τα κελιά χρωματίζονται ανάλογα με την ποιότητα τους.

4.2 Αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου στις δύο εφαρμογές που παρουσιάστηκαν στη προηγούμενη ενότητα. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για την προσαρμοστική παραμόρφωση πλέγματος είναι η μέθοδος IDW με παρεμβολή στροφών και χρήση της τεχνικής των ολισθαινόντων κόμβων. Για συντομία, από εδώ και πέρα η μέθοδος θα αναφέρεται απλά ως IDW, μέθοδος παραμόρφωσης ή απλά ως μέθοδος και εκτός και αν δηλώνεται ρητά θα εννοείται πάντα η IDW με παρεμβολή στροφών και χρήση της τεχνικής των ολισθαινόντων κόμβων.

4.2.1 2Δ εφαρμογή: Αεροτομή NACA 9412

Μελετώνται τρεις διαφορετικές περιπτώσεις παραμόρφωσης για την αεροτομή NACA 9412. Η πρώτη είναι η περιστροφή της ως απόλυτο στερεό, η δεύτερη μία καμπτική παραμόρφωση και η τρίτη μια ημιτονοειδής παραμόρφωση. Επίσης, στο τέλος μελετάται και η συνδυαστική περίπτωση παραμόρφωσης, όπου η αεροτομή υπόκειται τόσο σε περιστροφή όσο και σε ημιτονοειδή παραμόρφωση.

Απλή περιστροφή

Στην περίπτωση της απλής περιστροφής η αεροτομή περιστρέφεται περί του γεωμετρικού της κέντρου, το οποίο είναι τοποθετημένο στο κέντρο των αξόνων. Η αεροτομή περιστρέφεται σε διάφορες γωνίες από 0 έως και 360 μοίρες χωρίς κανένα πρόβλημα με την ποιότητα του πλέγματος να παραμένει ουσιαστικά όμοια με την αρχική. Μόνη εξαίρεση αποτελούν οι περιστροφές για 90° και 270° όπου αν και η ποιότητα του πλέγματος είναι επίσης καλή, παρατηρείται μεγάλη στρέβλωση των κελιών στις γωνίες του εξωτερικού συνόρου, το οποίο οδηγεί και σε αναστροφή ορισμένων κελιών στην περιοχή αυτή, λ.χ. 1 στην περίπτωση των 90°. Η συμπεριφορά αυτή στις συγκεκριμένες γωνίες εξηγείται από το γεγονός ότι το υπολογιστικό χωρίο έχει μεγαλύτερο μήκος (άξονας x), από ότι πλάτος (άξονας y). Επομένως, καθώς περιστρέφονται οι εσωτερικοί κόμβοι, ο χώρος δεν επαρκεί για να "χωρέσουν" όλα τα κελιά, το οποίο οδηγεί σε στρέβλωση και σε ακραίες περιπτώσεις, σε αναστροφή τους. Το φαινόμενο αυτό είναι πιο έντονο στις γωνίες των 90° και 270°, γι' αυτό και εκεί παρατηρείται η χειρότερη ποιότητα πλέγματος. Όμως το φαινόμενο αυτό δεν παύει να ισχύει και για τις υπόλοιπες γωνίες περιστροφής όπου παρατηρείται κάποια στρέβλωση των κελιών, κοντά στο εξωτερικό σύνορο. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να παρατηρηθεί στο σχήμα 4.5, όπου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για περιστροφές κατά 90° και 135°. Επίσης, στον πίνακα 4.6 παρουσιάζονται αναλυτικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος για τις τρεις προαναφερθείσες περιπτώσεις περιστροφής.

Τέλος, όσον αφορά τη συμπεριφορά των κελιών κοντά στην αεροτομή, αυτά δεν υπόκεινται καμία μεταβολή στο σχήμα τους και η ποιότητα του πλέγματος στη γειτονιά της αεροτομής είναι ακριβώς όμοια με την αρχική, το οποίο είναι αξιοσημείωτο, μιας και το πλέγμα στην περιοχή αυτή είναι ιδιαίτερα πυκνό. Η εν λόγω περιοχή παρουσιάζεται υπό εστίαση στο σχήμα 4.5.

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέγιστο	Ελάχιστο	Ανεστραμμένα Κελιά
45°	2.2812	1.1393	28.8360	2.0	0
90°	4.5386	272.6691	40942.0913	2.0	1
135°	2.2848	1.2189	35.1672	2.0	0

Πίνακας 4.6: Χαρακτηριστικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 9412 μετά από περιστροφή της κατά 45°, 90° και 135°.

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέγιστο	Ελάχιστο	Ανεστραμμένα Κελιά
$\gamma = 0.001$	2.0410	0.00727	3.1496	2.0	0
$\gamma = 0.005$	2.1006	0.1342	4.2800	2.0	0
$\gamma = 0.009$	2.3100	0.4419	13.0373	2.0	0

Πίνακας 4.7: Χαρακτηριστικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 9412 μετά από κάμψη για γ 0.001, 0.005 και 0.009.

Κάμψη

Επόμενη περίπτωση παραμόρφωσης είναι η κάμψη της αεροτομής ως προς το γεωμετρικό της κέντρο. Η προσομοίωση της κάμψης επιχειρείται προσθέτοντας μια παραβολική μετατόπιση στην y -διεύθυνση. Η παραμόρφωση δηλαδή έχει τη μορφή:

$$y = y_0 + \gamma x^2 \quad (4.1)$$

όπου y και x οι συντεταγμένες ενός συγκεκριμένου σημείου της αεροτομής, y_0 η αρχική τιμή της συντεταγμένης y του εν λόγω σημείου και γ μία σταθερά που ελέγχει το πλάτος της παραμόρφωσης.

Η αεροτομή κάμπτεται για διάφορες τιμές μέχρι και για $\gamma = 0.01$, όπου και πλέον το πλέγμα κοντά στην περιοχή της αεροτομής παραμορφώνεται αρκετά, παρουσιάζοντας ανεστραμμένα κελιά. Για χαμηλότερες τιμές του γ , η μέθοδος IDW παραμορφώνει το πλέγμα κρατώντας την ποιότητα του ουσιαστικά όμοια με την αρχική και χωρίς να παρουσιαστούν ανεστραμμένα κελιά., ακόμη και για πολύ μεγάλη κάμψη της αεροτομής, λόγου χάρη για $\gamma = 0.009$, το οποίο συνεπάγεται μια μέγιστη μετατόπιση στα άκρα της αεροτομής κατά $y = 225mm$. Αυτή η μετατόπιση είναι αρκετά μεγάλη, αν κανείς αναλογιστεί πως το μέγιστο μήκος της είναι $1000mm$.

Στο σχήμα 4.6 παρουσιάζεται η αεροτομή για γ ίσο με 0, 009.Επίσης, στον πίνακα 4.7 παρουσιάζονται στοιχεία για την ποιότητα του πλέγματος για τις διάφορες περιπτώσεις.

Ημιτονοειδής παραμόρφωση

Τελευταία και πιο απαιτητική περίπτωση παραμόρφωσης αποτελεί η ημιτονοειδής παραμόρφωση της αεροτομής. Το είδος αυτής της παραμόρφωσης έχει εφαρμοστεί αρχικά στη μεταπτυχιακή εργασία [13], όπου παραμορφώνεται μία αεροτομή NACA 4412. Αν και οι αεροτομές που χρησιμοποιούνται είναι διαφορετικές, όπως και τα πλέγματα γύρω από αυτές (αν και παρόμοια από άποψη αριθμού κελιών και ποιότητας), αποτελεί μία καλή σύγκριση της υπάρχουσας μεθοδολογίας που χρησιμοποιείται στην [13] και [22] και της νέας που εισήχθη στην παρούσα εργασία. Αναλυτικά οι διαφορές ανάμεσα στις δύο μεθοδολογίες αναλύονται στην ενότητα 2.9.

Η ημιτονοειδής παραμόρφωση της αεροτομής επιτυγχάνεται μέσω πρόσθεσης στην αρχική θέση των σημείων της, της παραμόρφωσης:

$$y = y_0 + A \sin(k\pi x) \quad (4.2)$$

όπου y και x οι συντεταγμένες του εκάστοτε σημείου, A μια σταθερά που ελέγχει το πλάτος του ημίτονου και k μια σταθερά που ελέγχει τη συχνότητα του. Επιλέγονται δύο τιμές σταθερών ($k = 2$ και $k = 4$ και διάφορα A).

k=2

Η παραμόρφωση για $k = 2$ παρουσιάζει έντονο ενδιαφέρον μιας και είναι η ίδια συχνότητα που χρησιμοποιήθηκε και στην εργασία [13]. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 4.7. Όπως

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέγιστο	Ελάχιστο	Ανεστραμμένα Κελιά
$A = 0.10$	2.2995	1.5903	74.7920	2.0	0
$A = 0.15$	2.5627	1.4247	51.6720	2.0	0
$A = 0.20$	3.2359	2.8587	110.6179	2.0	0
$A = 0.22$	82.2871	1.027×10^4	1.765×10^6	2.0	2

Πίνακας 4.8: Χαρακτηριστικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 9412 μετά από ημιτονοειδή παραμόρφωση για συχνότητα k ίση με 2 και πλάτος A ίσο με 0.10, 0.15, 0.20 και 0.22.

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέγιστο	Ελάχιστο	Ανεστραμμένα Κελιά
$A = 0.10$	2.9345	2.8089	195.2326	2.0	0
$A = 0.12$	5.4786	23.6382	1097.7187	2.0	0
$A = 0.13$	5151.80	8.0×10^5	1.6×10^8	2.0	189

Πίνακας 4.9: Χαρακτηριστικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 9412 μετά από ημιτονοειδή παραμόρφωση για συχνότητα k ίση με 4 και πλάτος A ίσο με 0.10, 0.12 και 0.13.

φαίνεται σε αυτό οι παραμορφώσεις που υπεισέρχονται στην αεροτομή είναι ιδιαίτερα μεγάλες. Ωστόσο η IDW είναι σε θέση να τις διαχειριστεί μέχρι και για πλάτος A ίσο με 0.2, διατηρώντας την ποιότητα του πλέγματος οριακά αμετάβλητη. Για τιμές μεγαλύτερες του 0.2 το πλέγμα κοντά στην αεροτομή στρεβλώνει πολύ και αρχίζουν να εμφανίζονται ανεστραμμένα κελιά.

Σε σύγκριση με την [13] η δυνατότητα της μεθόδου να διαχειριστεί τόσο ακραίες μεταβολές στη γεωμετρία έχει ενισχυθεί σε τεράστιο βαθμό. Από A ίσο με 0.06 όπου εμφανίζονται τα πρώτα ανεστραμμένα κελιά, οι δυνατότητες της μεθόδου έχουν αυξηθεί σε βαθμό που να είναι σε θέση να παραμορφώσει αποδοτικά το πλέγμα μέχρι και για A ίσο με 0.2. Βέβαια αξ σημειωθεί εδώ ότι η μέθοδος υποβοηθάται και από τη τεχνική των ολισθαινόντων κόμβων που της χαρίζει μεγαλύτερη ευελιξία στην προσαρμογή σε ακραίες παραμορφώσεις της αεροτομής.

Για πιο δίκαιη σύγκριση των δύο μεθόδων, η μέθοδος IDW χρησιμοποιήθηκε και χωρίς τη τεχνική των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων. Όπως, φαίνεται από τα αποτελέσματα (που παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β), αν και οι δυνατότητες της μεθόδου μειώνονται, συνεχίζει να υπερισχύει, όντας σε θέση να παραμορφώσει αποδοτικά πλέγματα μέχρι και για A ίσο με 0.13. Αυτό συμβαίνει λόγω της διαφοράς των δύο μεθόδων στον υπολογισμό της περιστροφής των εσωτερικών συνοριακών κόμβων, όπως δείχθηκε αναλυτικά στην ενότητα 2.9.

$k=4$

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα είναι και η παραμόρφωση για $k = 4$, μιας και η συχνότητα του ημίτονου είναι αρκετά μεγάλη και ως αποτέλεσμα προκύπτει ένα άκρως παραμορφωμένο σχήμα της αεροτομής, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.8. Παρά την έντονη παραμόρφωση όμως, η μέθοδος IDW είναι σε θέση να τη διαχειριστεί και να παράξει πλέγματα όμοιας ποιότητας με το αρχικό μέχρι και για A ίσο με 0.12. Παρατηρείται πως το μέγεθος του A για το οποίο η παραμόρφωση είναι διαχειρίσιμη έχει μικρύνει σε σχέση με την προηγούμενη εφαρμογή για $k = 2$, το οποίο είναι αναμενόμενο αφού πρόκειται για πιο βίαια παραμόρφωση. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 4.8. Αναλυτικά στοιχεία για την ποιότητα των πλεγμάτων δίνονται στον πίνακα 4.9.

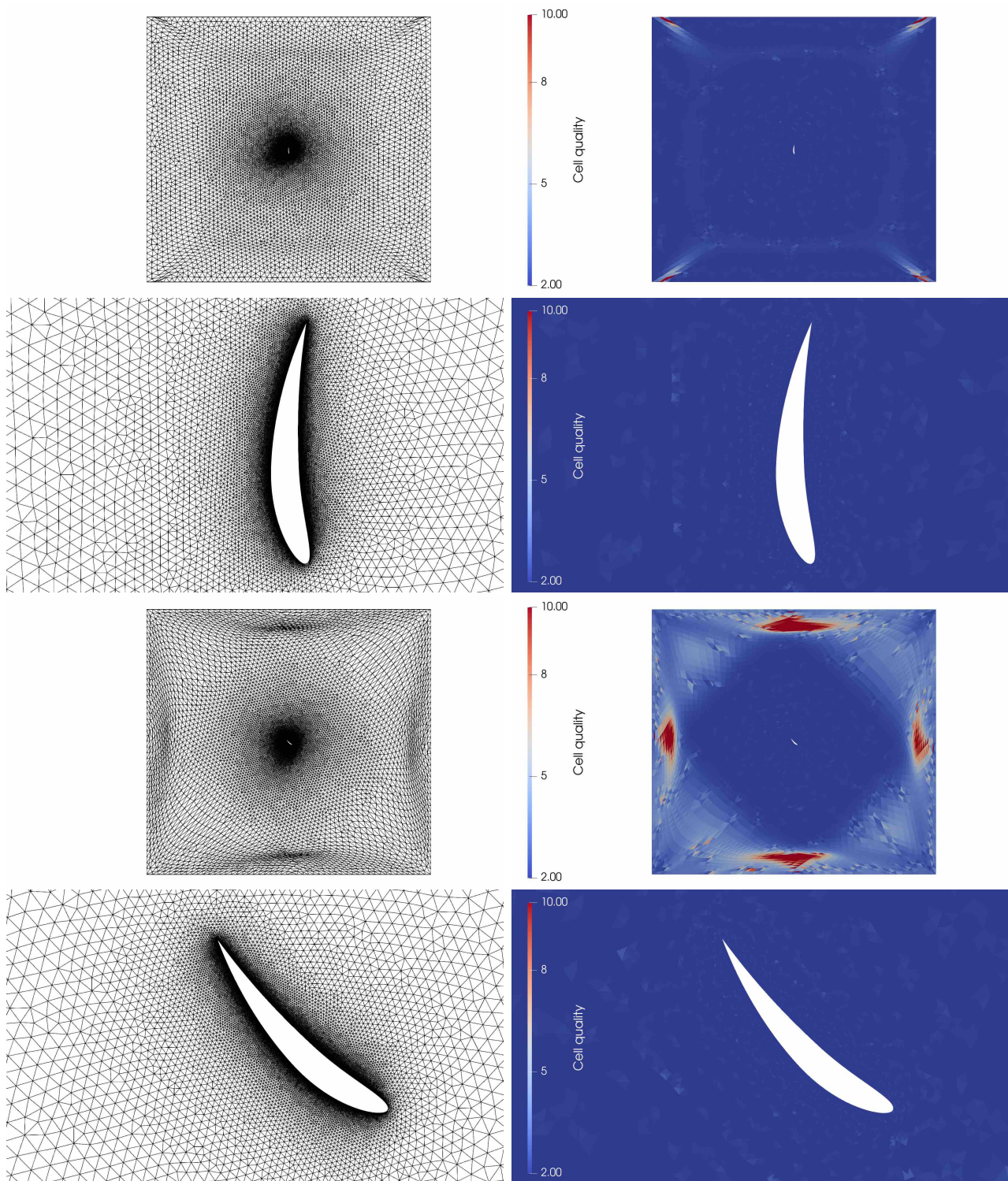
Συνδυαστική παραμόρφωση: Περιστροφή και ημιτονοειδής παραμόρφωση

Τέλος επιχειρείται μία σύνθετη παραμόρφωση, η οποία αποτελείται από συνδυασμό των δύο περιπτώσεων που ήδη έχουν αναφερθεί, δηλαδή μίας περιστροφής ως απόλυτο στερεό συν μίας ημιτο-

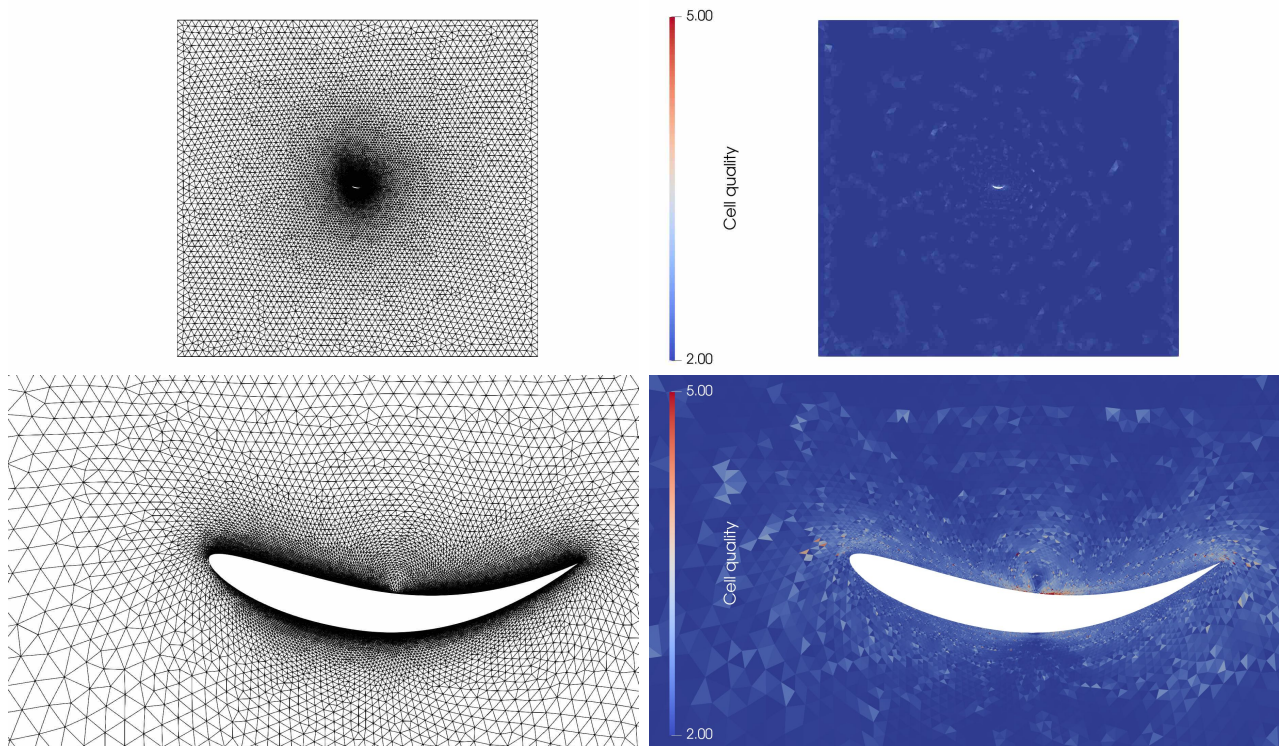
	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέγιστο	Ελάχιστο	Ανεστραμμένα Κελιά
45°, $k = 2$	2.4417	1.6167	53.3325	2.0	0
70°, $k = 2$	2.4195	8.2561	1306.4212	2.0	1
20°, $k = 4$	3.6047	5.7350	182.9563	2.0	0
30°, $k = 4$	6.48×10^5	1.35×10^8	2.82×10^{10}	2.0	32

Πίνακας 4.10: Χαρακτηριστικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 9412 μετά από περιστροφή και ημιτονοειδή παραμόρφωση. Η σταθερά A είναι για όλες τις περιπτώσεις ίση με 0.1. Η γωνία περιστροφής και η σταθερά k διαφέρουν για κάθε περίπτωση και αναφέρονται στον πίνακα.

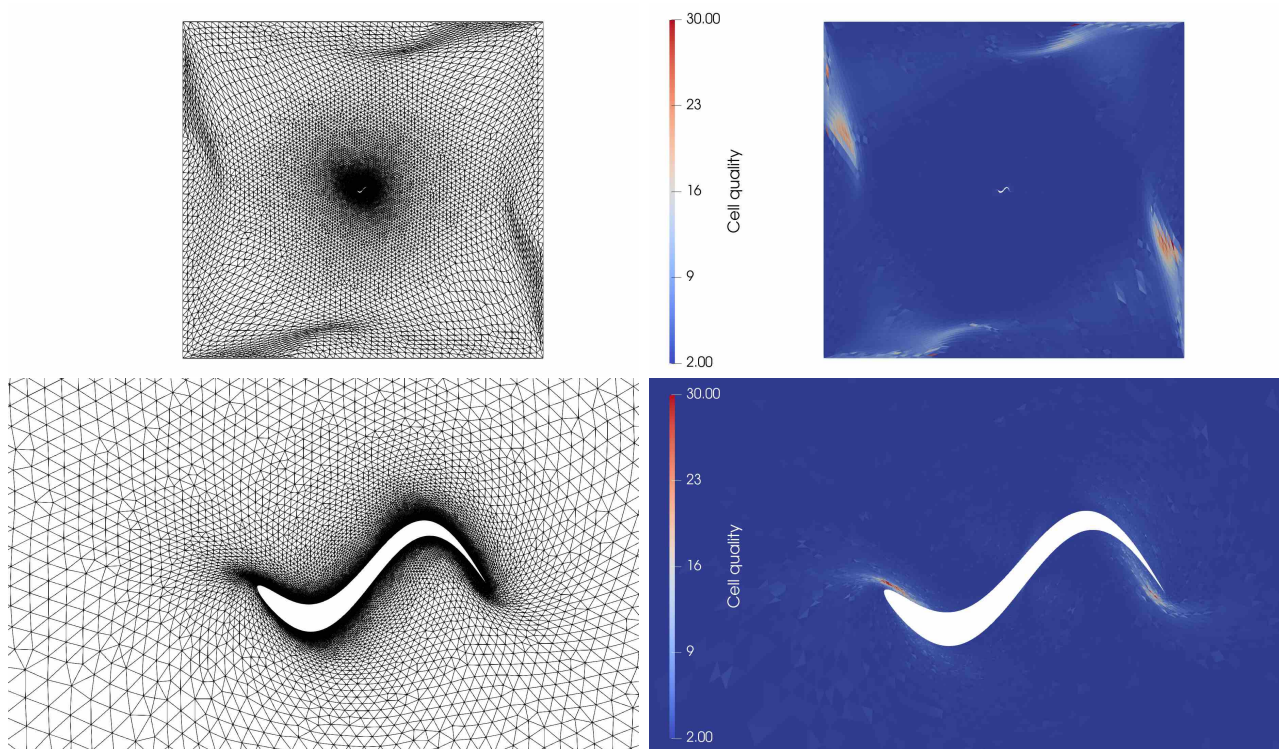
νοειδούς παραμόρφωσης. Η IDW και σε αυτήν την περίπτωση είναι σε θέση να παραμορφώσει το πλέγμα αποδοτικά, αν και όπως αναμένεται μειώνεται το μέγεθος κάθε επιμέρους παραμόρφωσης που μπορεί να διαχειριστεί. Λ.χ. όταν η ημιτονοειδής παραμόρφωση έχει συχνότητα k ίση με 4 και πλάτος A ίσο με 0.1, τότε μπορεί να "αντέξει" περιστροφές μόνο μέχρι και 20°. Αναλυτικά τα χαρακτηριστικά της ποιότητας του πλέγματος παρουσιάζονται για κάποιες περιπτώσεις στον πίνακα 4.9. Επίσης, στο σχήμα 4.10 παρουσιάζεται το πλέγμα για μία περίπτωση συνδυαστικής παραμόρφωσης.



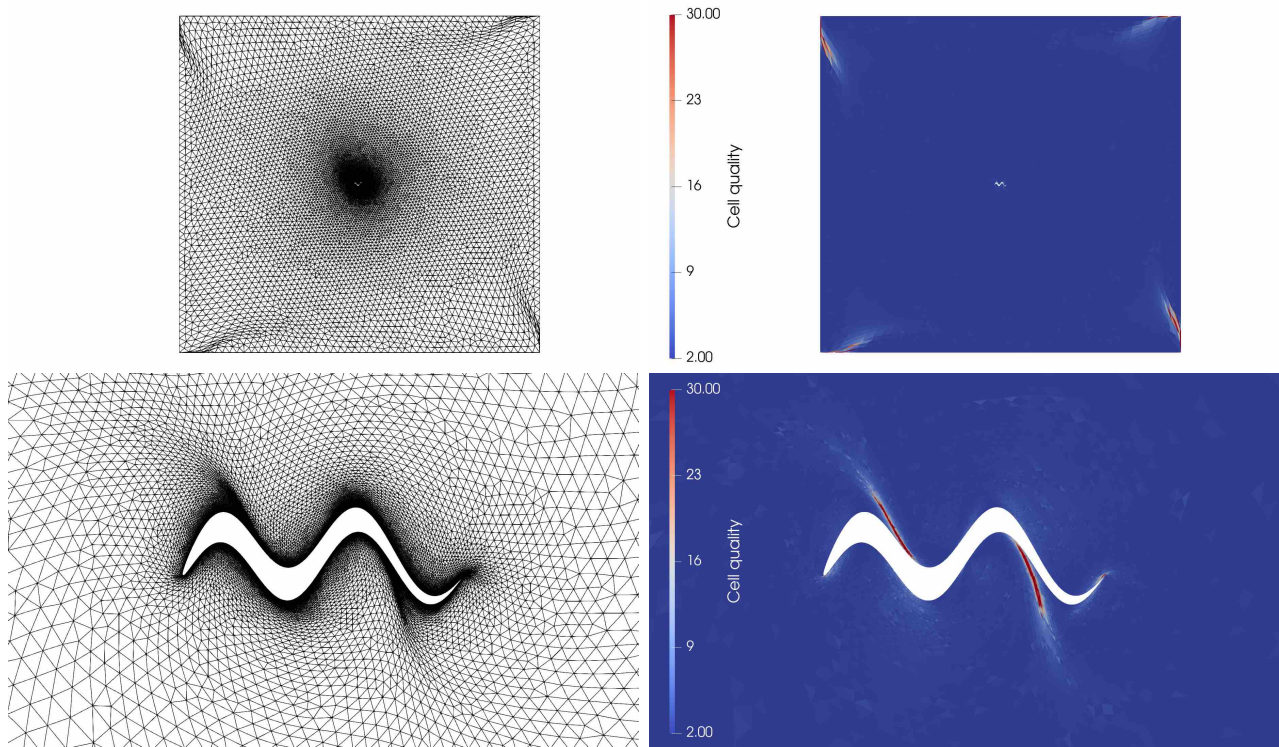
Σχήμα 4.5: Το πλέγμα γύρω από την αεροτομή NACA 9412, μετά από περιστροφή 90 μοιρών (δύο πάνω γραμμές) και 135 μοίρες (δύο τελευταίες γραμμές). Εκτός όλου του πλέγματος, παρουσιάζεται και μόνο το τμήμα του γύρω από την αεροτομή. Στη δεξιά στήλη παρουσιάζεται η ποιότητα των πλεγμάτων με χρήση χρωμάτων, όπου τα κελιά χρωματίζονται βάσει της ποιότητάς τους.



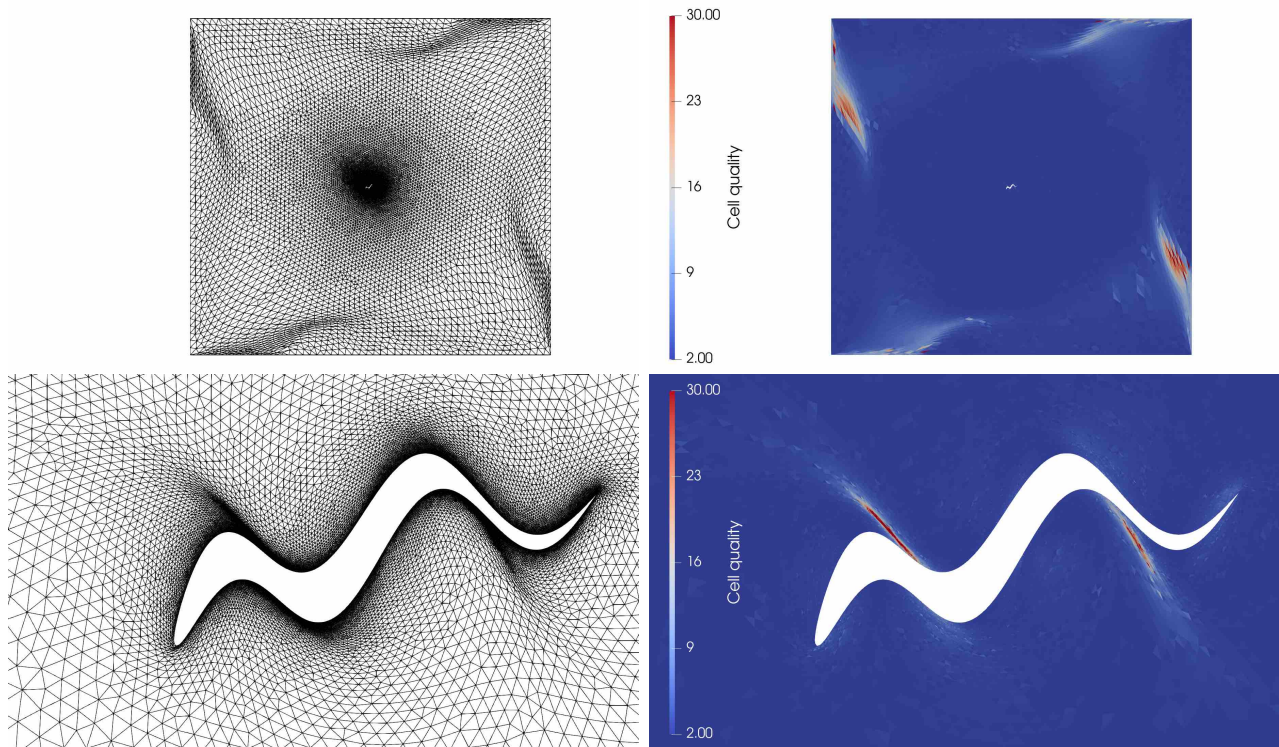
Σχήμα 4.6: Η ποιότητα του πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 9412, μετά από κάμψη για γ 0.009. Στα πάνω σχήματα παρουσιάζεται όλο το πλέγμα, ενώ στα κάτω μόνο το πλέγμα γύρω από την αεροτομή. Στη δεξιά στήλη παρουσιάζεται η ποιότητα των πλεγμάτων με χρήση χρωμάτων, όπου τα κελιά χρωματίζονται βάσει της ποιότητάς τους.



Σχήμα 4.7: Η ποιότητα του πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 9412, μετά από ημιτονοειδή παραμόρφωση της για συχνότητα k ίση με 2 και πλάτος A ίσο με 0.2. Στα πάνω σχήματα παρουσιάζεται το συνολικό πλέγμα, ενώ στα κάτω μόνο η περιοχή γύρω από την αεροτομή. Στη δεξιά στήλη παρουσιάζεται η ποιότητα του πλέγματος με χρήση χρωμάτων, όπου η χρωματική κλίμακα αποδίδει την ποιότητα κάθε κελιού.



Σχήμα 4.8: Η ποιότητα του πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 9412, μετά από ημιτονοειδή παραμόρφωση της για συχνότητα k ίση με 4 και πλάτος A ίσο με 0.12. Στα πάνω σχήματα παρουσιάζεται το συνολικό πλέγμα, ενώ στα κάτω μόνο η περιοχή γύρω από την αεροτομή. Στη δεξιά στήλη παρουσιάζεται η ποιότητα του πλέγματος με χρήση χρωμάτων, όπου η χρωματική κλίμακα αποδίδει την ποιότητα κάθε κελιού.



Σχήμα 4.9: Η ποιότητα του πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 9412, μετά από περιστροφή κατά 20° και ημιτονοειδή παραμόρφωση της για συχνότητα k ίση με 4 και πλάτος A ίσο με 0.10. Στα πάνω σχήματα παρουσιάζεται το συνολικό πλέγμα, ενώ στα κάτω μόνο η περιοχή γύρω από την αεροτομή. Στη δεξιά στήλη παρουσιάζεται η ποιότητα του πλέγματος με χρήση χρωμάτων, όπου η χρωματική κλίμακα αποδίδει την ποιότητα κάθε κελιού.

4.2.2 3Δ εφαρμογή: Αεροπλάνο

Στην περίπτωση του αεροπλάνου μελετώνται τρεις περιπτώσεις παραμόρφωσης. Η πρώτη είναι η περιστροφή του ως απόλυτο στερεό και η δεύτερη η καμπτική παραμόρφωση των πτερύγων του. Η τρίτη αποτελεί συνδυασμό των δύο παραπάνω παραμορφώσεων για να προκύψει μία πιο σύνθετη παραμόρφωση.

Περιστροφή

Στην περίπτωση αυτή, το αεροπλάνο περιστρέφεται σε διάφορες γωνίες ως προς τον άξονα που περνά από την ευθεία τομής των επιπέδων συμμετρίας της ατράκτου και διαπερνά τη μύτη και την ουρά του. Γενικά, το αεροπλάνο είναι δυνατόν να περιστρέφεται από 0° έως 360° με το πλέγμα να παραμένει όμοιο με το αρχικό, χωρίς καμία αλλοίωση στην ποιότητα του. Αυτό συμβαίνει μιας και το εξωτερικό σύνορο είναι μία σφαίρα, οπότε παρουσιάζει συμμετρία ως προς όλες τις κατευθύνσεις. Στο σχήμα 4.10 παρουσιάζεται μία τομή στο πλέγμα κάθετα στον άξονα περιστροφής για οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων για διάφορες γωνίες περιστροφής. Επίσης, στον πίνακα 4.11 παρουσιάζονται χαρακτηριστικά στοιχεία για την ποιότητα του πλέγματος για διάφορες γωνίες παραμόρφωσης.

Κάμψη πτερύγων

Επόμενη περίπτωση παραμόρφωσης αποτελεί η κάμψη των πτερύγων του αεροπλάνου. Η κάμψη αυτών προσομοιώνεται προσθέτοντας στην αρχική θέση των σημείων κάθε πτέρυγας μία παραβολική παραμόρφωση στη z -διεύθυνση, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$z = z_0 + \gamma x^2 \quad (4.3)$$

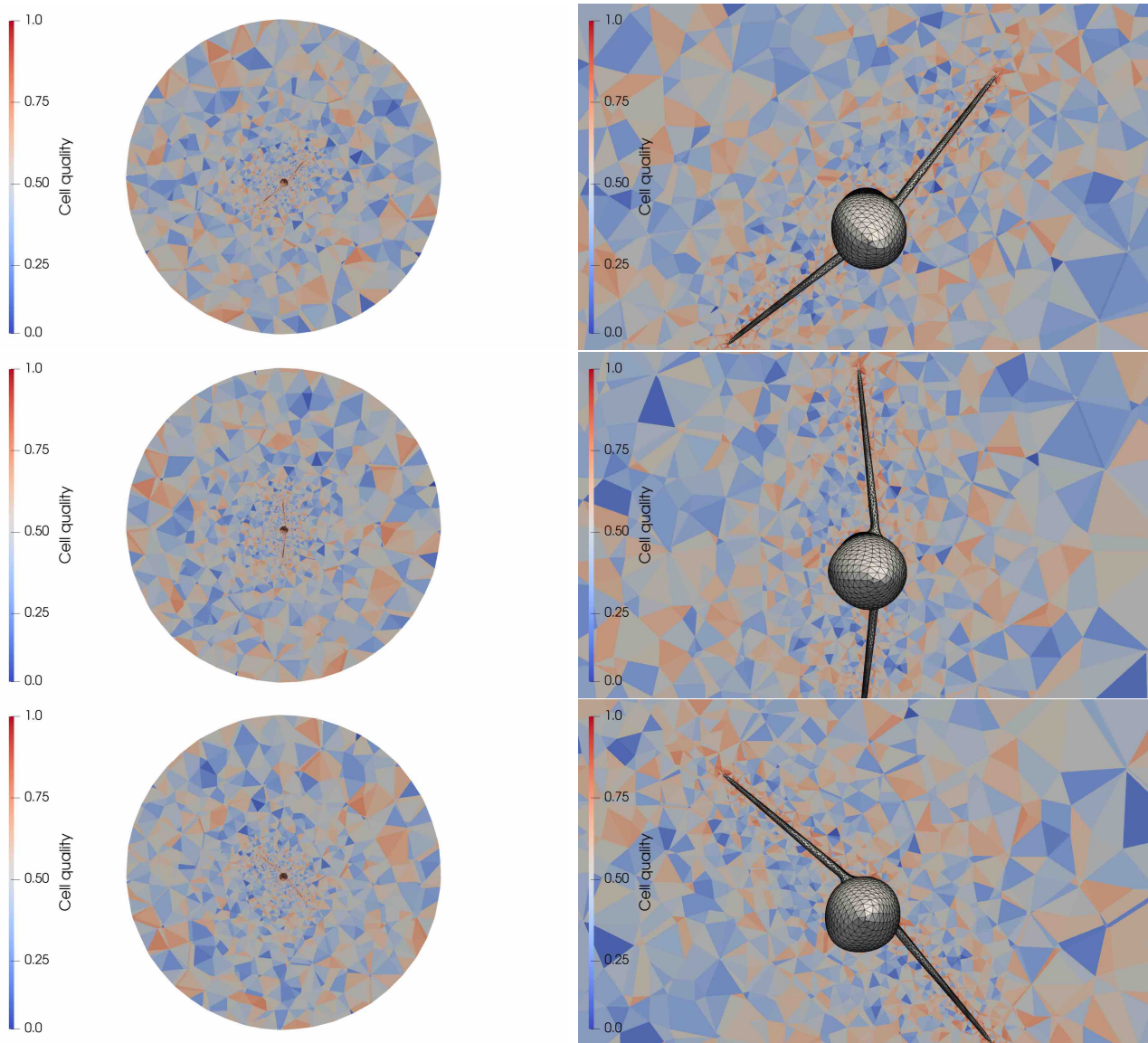
όπου y και x οι συντεταγμένες ενός συγκεκριμένου σημείου της αεροτομής, z_0 η αρχική τιμή της συντεταγμένης z του εν λόγω σημείου και γ μία σταθερά που ελέγχει το πλάτος της παραμόρφωσης. Ας σημειωθεί ότι ο x -άξονας είναι ο άξονας που βρίσκεται εντός του επιπέδου που ορίζουν οι πτέρυγες και περνά κάθετα από την άτρακτο.

Οι τιμές του συντελεστή γ είναι αρκετά μικρές, μιας και το μήκος x έχει μέγιστη τιμή περίπου στο 27000 (mm). Έτσι οι παραμορφώσεις που δοκιμάζονται είναι για τιμές του συντελεστή που κυμαίνονται από 10^{-6} έως 10^{-5} .

Η μέγιστη τιμή του συντελεστή γ που δοκιμάζεται είναι η 2.5×10^{-5} , για την οποία προκύπτει μέγιστο βέλος κάμψης ίσο με περίπου 18000 (mm). Πρόκειται για μία ιδιαίτερα μεγάλη παραμόρφωση, η οποία ξεφεύγει από τα πλαίσια του ρεαλισμού (μιας και σε σύγχρονα μεγάλα αεροπλάνα το μέγιστο βέλος κάμψης δεν ξεπερνά τα 10 m), εξυπηρετεί όμως στην επίδειξη της στιβαρότητας της μεθόδου. Από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αναλυτικά στον πίνακα 4.12 αλλά και από τις τομές στο πλέγμα για οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων στο σχήμα 4.11, προκύπτει ότι ακόμη και για τόσο μεγάλες παραμορφώσεις, η μέθοδος είναι σε θέση να παραμορφώσει το πλέγμα ικανοποιητικά, με τη δημιουργία μόλις τεσσάρων ανεστραμμένων κελιών. Για πιο φυσιολογικές παραμορφώσεις, όπως λόγου χάρη για γ ίσο με 5×10^{-6} (μέγιστο βέλος κάμψης ≈ 3500 mm), το πλέγμα παραμορφώνεται με ποιότητα σχεδόν όμοια με την αρχική και χωρίς αναστροφή κελιών.

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέγιστο	Ελάχιστο	Ανεστραμμένα Κελιά
45°	0.5415	0.1457	0.9897	0.0563	0
90°	0.5416	0.1457	0.9897	0.0563	0
135°	0.5417	0.1457	0.9897	0.0563	0

Πίνακας 4.11: Χαρακτηριστικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος γύρω από το αεροπλάνο μετά από περιστροφή του κατά 45° , 90° και 135° .



Σχήμα 4.10: Η ποιότητα του πλέγματος γύρω από το αεροπλάνο, μετά από περιστροφή του κατά 45° , 90° και 135° . Δεξιά παρουσιάζεται η περιοχή στη γειτονιά του αεροπλάνου υπό εστίαση. Τα κελιά χρωματίζονται βάσει της ποιότητάς τους.

Συνδυαστική παραμόρφωση

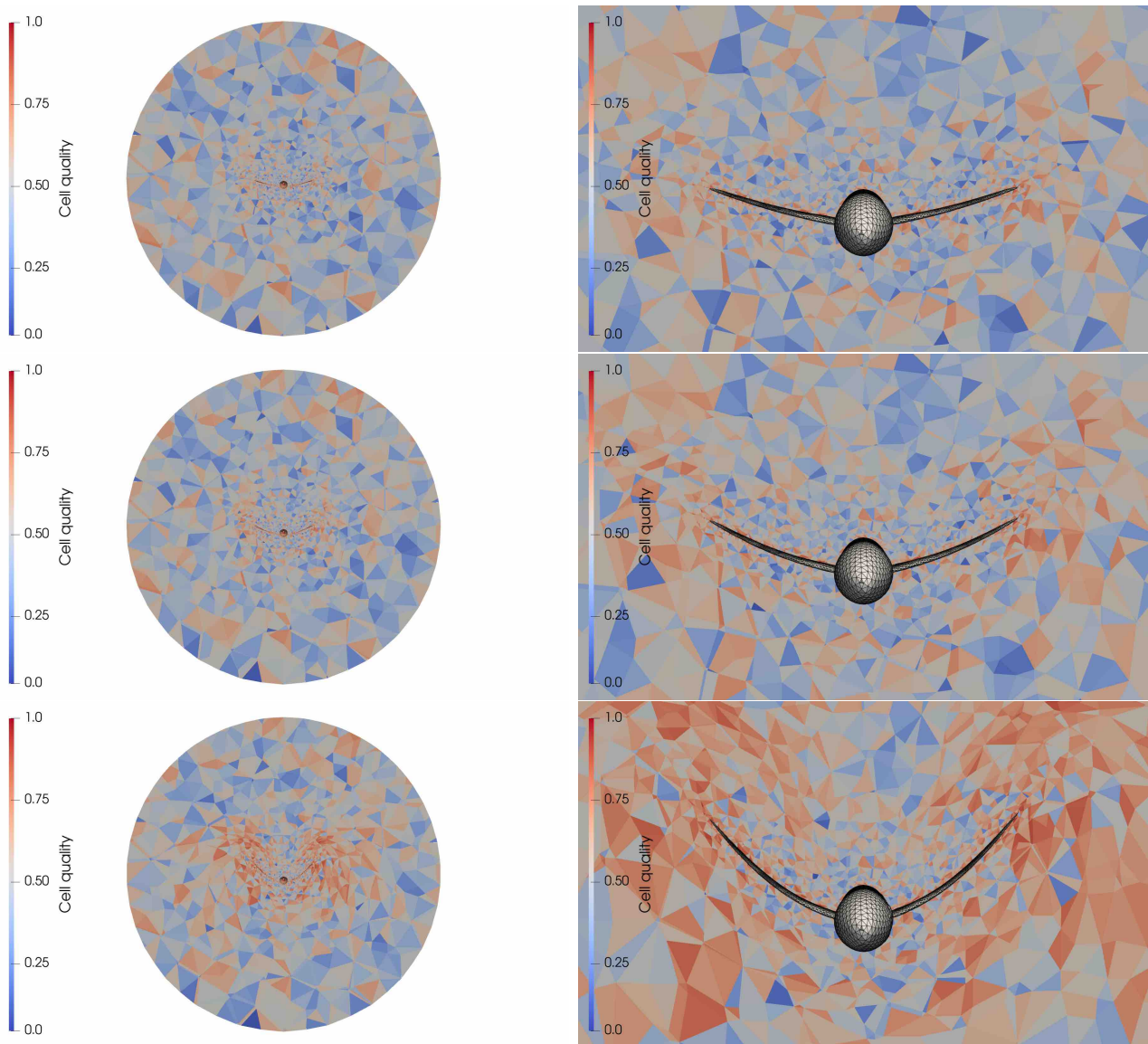
Ως τελευταία εφαρμογή παρουσιάζεται η συνδυαστική περιστροφή του αεροπλάνου και η ταυτόχρονη κάμψη των πτερύγων του. Πρόκειται για μία απαιτητική παραμόρφωση και όπως αναμενόταν η δυνατότητα αποδοτικής παραμόρφωσης του πλέγματος για μεγάλες καμπτικές παραμορφώσεις των πτερύγων μειώνεται. Παρ' όλα αυτά η μέθοδος είναι ακόμη σε θέση να διαχειριστεί αρκετά μεγάλες παραμορφώσεις όπως λόγω χάρη περιστροφές σε οποιαδήποτε γωνία και καμπτική παραμόρφωση των πτερύγων του για γ ίσο με 5×10^{-6} . Αναλυτικά παρέχονται στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος για την περίπτωση αυτή στον πίνακα 4.13. Επίσης, στο σχήμα 4.12 παρουσιάζεται μία οπτικοποίηση της ποιότητας του πλέγματος του.

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέγιστο	Ελάχιστο	Ανεστραμμένα Κελιά
5.0×10^{-6}	0.5436	0.1416	0.9897	0.0470	0
1.0×10^{-5}	0.5498	0.1469	0.9986	0.0434	1
2.5×10^{-5}	0.5816	0.1537	0.9999	0.0453	4

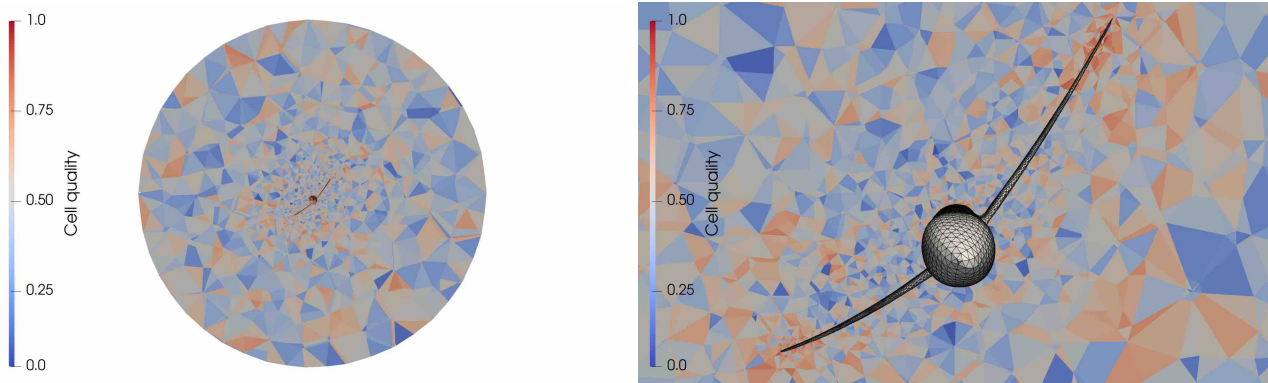
Πίνακας 4.12: Χαρακτηριστικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος γύρω από το αεροπλάνο μετά από κάμψη των πτερύγων του κατά γ ίσο με 5×10^{-6} , 10^{-5} και 2.5×10^{-5} .

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέγιστο	Ελάχιστο	Ανεστραμμένα Κελιά
$45^\circ, 5 \times 10^{-6}$	0.5452	0.1462	0.0396	0.9897	0

Πίνακας 4.13: Χαρακτηριστικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος γύρω από το αεροπλάνο μετά από περιστροφή του κατά 45° και ταυτόχρονη κάμψη των πτερύγων του κατά γ ίσο με 5×10^{-6} .



Σχήμα 4.11: Η ποιότητα του πλέγματος γύρω από το αεροπλάνο, μετά από κάμψη των πτερύγων του για γ ίσο με 5×10^{-6} (πρώτη γραμμή), 10^{-5} (δεύτερη γραμμή) και 2.5×10^{-5} (τρίτη γραμμή). Δεξιά παρουσιάζεται η περιοχή στη γειτονιά του αεροπλάνου υπό εστίαση. Τα κελιά χρωματίζονται βάσει της ποιότητάς τους.



Σχήμα 4.12: Η ποιότητα του πλέγματος γύρω από το αεροπλάνο, μετά από περιστροφή του κατά 45° και ταυτόχρονη κάμψη των περύγων του για γ ίσο με 5×10^{-6} . Δεξιά παρουσιάζεται η περιοχή στη γειτονιά του αεροπλάνου υπό εστίαση. Τα κελιά χρωματίζονται βάσει της ποιότητας του.

Κεφάλαιο 5

Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα

5.1 Ανακεφαλαίωση

Στην εργασία αναπτύσσεται και βελτιώνεται η μέθοδος IDW για προσαρμοστική παραμόρφωση 2Δ και 3Δ πλεγμάτων. Αρχικά, η απλή εκδοχή της η οποία παρεμβάλλει αυτούσια την παραμόρφωση των συνοριακών κόμβων, ενισχύθηκε αναλύοντας την παραμόρφωση σε μια περιστροφή και μία μετακίνηση, και παρεμβάλλοντας τις ξεχωριστά (χρησιμοποιώντας κάθε φορά την IDW). Αυτό οδηγεί σε σαφή βελτίωση της IDW, η οποία διαχειρίζεται καλύτερα μεγάλες παραμορφώσεις και διατηρεί αναλλοίωτη την ποιότητα των κελιών κοντά στα σύνορα. Η εύρεση της περιστροφής στους συνοριακούς κόμβους βελτιώθηκε, γενικεύοντας την υπάρχουσα μέθοδο, που ίσχυε μόνο για μετακινήσεις του συνόρου ως απόλυτο στερεό, ώστε να βρίσκει σωστή περιστροφή για οποιαδήποτε παραμόρφωση του συνόρου. Τέλος, στη μέθοδο IDW προστίθεται η τεχνική των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων, η οποία οδηγεί σε αυξημένη στιβαρότητα της μεθόδου και σε δυνατότητα χειρισμού πολύ μεγάλων παραμορφώσεων. Η αξιολόγηση της μεθόδου πραγματοποιείται μέσα από δύο ρεαλιστικές εφαρμογές, ένα 2Δ πλέγμα γύρω από μία αεροτομή NACA 9412 και ένα 3Δ πλέγμα γύρω από ένα αεροπλάνο.

Το λογισμικό της μεθόδου προγραμματίστηκε σε αντικειμενοστραφή τρόπο προγραμματισμού χρησιμοποιώντας τη γλώσσα C++. Για εκπαιδευτικούς λόγους, όλες οι κλάσεις, ακόμη και οι πιο βασικές όπως το διάνυσμα, και οι δομές δεδομένων, όπως η απλά συνδεδεμένη λίστα (linked list), προγραμματίστηκαν από το μηδέν. Κατά τον προγραμματισμό του λογισμικού χρησιμοποιήθηκαν πολλές δυνατότητες της C++, όπως πρότυπα κλάσεων, υπερφόρτωση τελεστών, κληρονομικότητα κ.α..

5.2 Συμπεράσματα

Όπως προκύπτει από την αξιολόγηση της, η IDW με παρεμβολή στροφών και χρήση της τεχνικής των ολισθαινόντων κόμβων είναι μια μέθοδος στιβαρή, που μπορεί να αντεπεξέλθει ακόμη και για μεγάλες παραμορφώσεις των συνοριακών κόμβων, ενώ παραμένει υπολογιστικά φθηνή σε σχέση με άλλες μεθόδους προσαρμοστικής παραμόρφωσης. Τα βασικά συμπεράσματα που εξάγονται από την εργασία, μπορούν να συνοψιστούν στα παρακάτω:

- Η μέθοδος είναι σε θέση να παραμορφώσει το πλέγμα κρατώντας την ποιότητα του αναλλοίωτη για περιστροφή σε οποιαδήποτε γωνία και για οποιοδήποτε άξονα που περνά από το γεωμετρικό του κέντρο, αρκεί το εξωτερικό σύνορο να παρουσιάζει επαρκή συμμετρία, όπως λόγου χάρη σφαίρες, κύκλοι, τετράγωνα κ.α.. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει επαρκής συμμετρία, τότε το πλέγμα μπορεί να στρεβλώσει και να εμφανιστούν ανεστραμμένα κελιά. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι σε διαφορετικές διευθύνσεις του πλέγματος υπάρχει διαφορετικός αριθμός κελιών, αφού και το μήκος διαφόρων διευθύνσεων είναι διαφορετικό.

- Η προσθήκη της παρεμβολής στροφών στη μέθοδο οδηγεί σε σαφή βελτίωση της, παράγοντας πλέγματα με υψηλή ποιότητα των κελιών κοντά στα σύνορα και παρέχοντας της τη δυνατότητα χειρισμού μεγαλύτερων παραμορφώσεων.
- Η αλλαγή του τρόπου εύρεσης της περιστροφής των συνοριακών κόμβων, ούτως ώστε να βρίσκει τη σωστή περιστροφή σε γενικές παραμορφώσεις και όχι μόνο σε παραμορφώσεις απολύτως στερεού οδηγεί σε σαφή βελτίωση της μεθόδου. Όταν το σώμα παραμορφώνεται ως απόλυτο στερεό, τότε η υπάρχουσα μέθοδος και η νέα δίνουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα.

5.3 Προτάσεις για μελλοντική μελέτη

Περαιτέρω θέματα που θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθούν ή να προγραμματισθούν είναι τα εξής:

- Η μέθοδος IDW είναι δυνατόν εύκολα να παραλληλοποιηθεί. Θα ήταν χρήσιμο να προγραμματισθεί παράλληλα καθώς αυτό θα μείωνε αισθητά τον χρόνο που απαιτείται για την προσαρμοστική παραμόρφωση μεγάλων πλεγμάτων.
- Στην εργασία τα τετραδόνια που περιγράφουν την περιστροφή των συνοριακών κόμβων παρεμβάλλονται μέσω γραμμικής παρεμβολής (LERP) στους εσωτερικούς κόμβους. Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί εάν αλλαγή του τρόπου παρεμβολής αυτών, λόγω χάρη μέσω σφαιρικής γραμμικής παρεμβολής (SLERP), αυξάνει τη στιβαρότητα της μεθόδου.
- Θα ήταν ενδιαφέρον η μέθοδος να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές βελτιστοποίησης, όπου συνήθως σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης οι αλλαγές στη γεωμετρία των σωμάτων είναι μικρές. Μιας και η παρούσα μέθοδος μπορεί να διαχειριστεί ακόμη και μεγάλες παραμορφώσεις και είναι υπολογιστικά φθηνή, θα μπορούσε να φανεί αρκετά χρήσιμη σε τέτοιες εφαρμογές.

Παράρτημα Α

Μετρικές ποιότητας μη Δομημένων Πλέγματων

Πέραν του αριθμού των ανεστραμμένων κελιών που αποτελεί σαφή ένδειξη της ποιότητας του πλέγματος, τόσο για τα 2Δ όσο και για τα 3Δ πλέγματα, χρησιμοποιείται μία μετρική ποιότητας που μετράει πόσο το κελί έχει στρεβλώσει από το ιδανικό του σχήμα.

2Δ Πλέγματα

Για 2Δ κελιά τριγωνικού σχήματος το ιδανικό κελί θεωρείται το ισόπλευρο τρίγωνο. Για να μετρηθεί πόσο ένα τρίγωνο έχει στρεβλώσει από το ιδανικό του σχήμα χρησιμοποιείται ο παρακάτω τύπος:

$$f_s = \frac{R_{out}}{R_{in}} \quad (\text{A.1})$$

όπου:

$$R_{in} = 2 \frac{A}{a+b+c}$$
$$R_{out} = \frac{abc}{4A}$$

Με A συμβολίζεται το εμβαδόν του τριγώνου και με a, b, c τα μήκη των πλευρών του.

Για ένα ισόπλευρο τρίγωνο, η τιμή του f_s ισούται με 2. Οπότε κάθε 2Δ μη δομημένο πλέγμα που αποτελείται από τρίγωνα οφείλει να προσεγγίζει στην τιμή αυτή για να θεωρηθεί υψηλής ποιότητας. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του f_s , τόσο χειρότερη είναι και η ποιότητα.

3Δ Πλέγματα

Για 3Δ κελιά σχήματος τετραέδρου το ιδανικό κελί θεωρείται το κανονικό τετράεδρο, δηλαδή μία τριγωνική πυραμίδα, όπου κάθε έδρα της είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Για να μετρηθεί πόσο μία τριγωνική πυραμίδα έχει στρεβλώσει από το ιδανικό του σχήμα χρησιμοποιείται ο παρακάτω τύπος:

$$f_s = \frac{V_{ideal} - V_{cell}}{V_{ideal}} \quad (\text{A.2})$$

όπου:

$$V_{ideal} = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$$
$$V_{cell} = \frac{(\vec{a} - \vec{d}) \cdot ((\vec{b} - \vec{d}) \times (\vec{c} - \vec{d}))}{6} = \frac{1}{3}A_0h$$

Με \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} συμβολίζονται τα διανύσματα θέσης των κορυφών του τετραέδρου, με A_0 το εμβαδόν μιας έδρας του και με h το ύψος του, το οποίο είναι κάθετο στην έδρα αυτή.

Ως R συμβολίζεται η ακτίνα της εγγεγραμμένης σφαίρας στο κανονικό τετράεδρο, δηλαδή η σφαίρα η οποία εφάπτεται και στις τέσσερις κορυφές του. Η ακτίνα R συσχετίζεται με το μήκος της πλευράς του κανονικού τετραέδρου μέσω της σχέσης:

$$R = \sqrt{\frac{3}{8}}L \quad (\text{A.3})$$

όπου με L συμβολίζεται το μήκος της πλευράς του.

Στην περίπτωση που επιθυμείται να υπολογιστεί ο ιδανικός όγκος που θα είχε ένα μη κανονικό τετράεδρο στην περίπτωση που ήταν κανονικό, τότε ως L παίρνεται το μήκος της μέγιστης πλευράς του.

Όπως είναι εμφανές από τον τύπο A.2, η μετρική ποιότητας f_s παίρνει τιμές από 0 για ένα άψογο τετράεδρο (δηλαδή κανονικό τετράεδρο) έως 1 όταν το τετράεδρο ουσιαστικά εκφυλιστεί και ο όγκος του γίνει μηδενικός. Όσο πιο κοντά στο 0 είναι οι τιμές της ποιότητας του πλέγματος, τόσο υψηλότερη ποιότητα έχει. Γενικά συνιστάται η μέση ποιότητα του πλέγματος να μένει μικρότερη από 0.33.

Παράρτημα Β

Ημιτονοειδής παραμόρφωση NACA 9412: Αποτελέσματα χωρίς χρήση της τεχνικής των ολισθαινόντων κόμβων

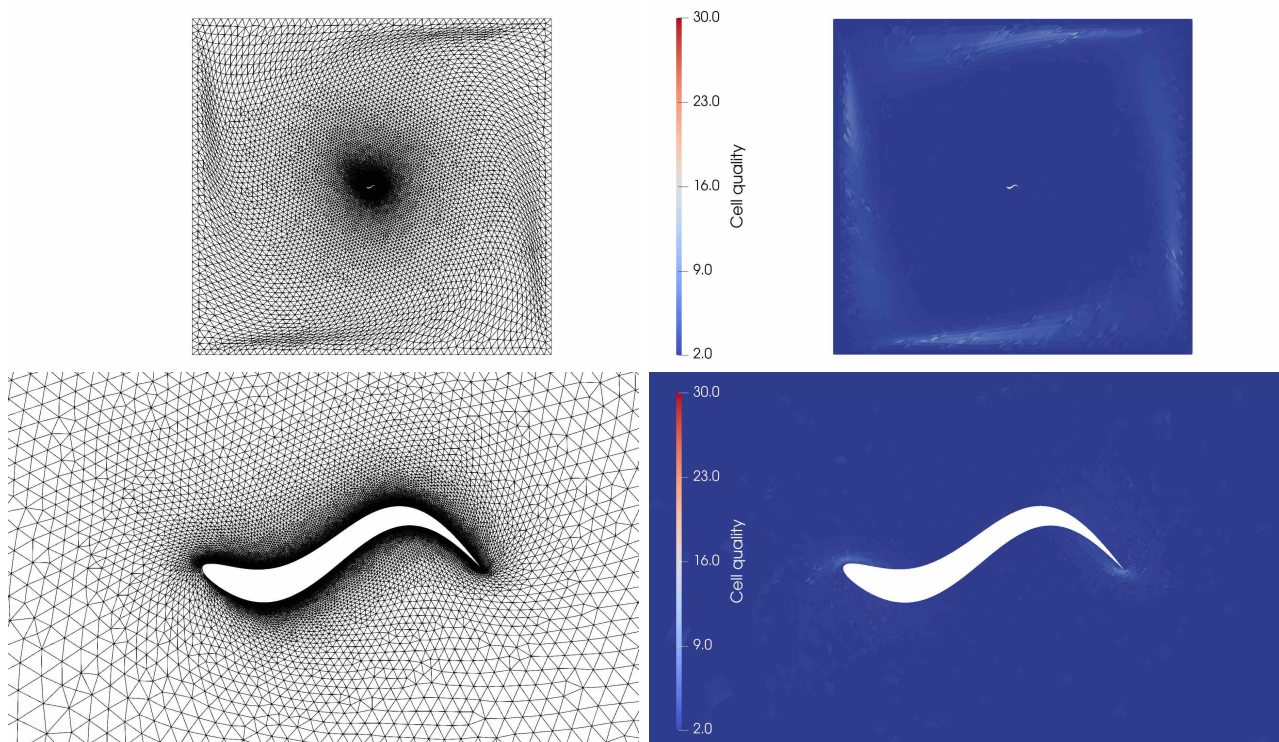
Στο παρών παράρτημα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου IDW όταν δεν χρησιμοποιείται η τεχνική των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων, με σκοπό την καλύτερη σύγκριση της νέας μεθόδου με την υπάρχουσα [13]. Η εφαρμογή που χρησιμοποιείται είναι η ημιτονοειδής παραμόρφωση της αεροτομής NACA 9412 με συχνότητα $k = 2$. Η εφαρμογή αυτή χρησιμοποιείται μιας και είναι η ίδια που χρησιμοποιείται και στην [13].

Ας σημειωθεί όμως ότι πρώτον οι αεροτομές που χρησιμοποιούνται δεν είναι ίδιες, αλλά στην [13] χρησιμοποιείται η NACA 4412. Επίσης τα πλέγματα που χρησιμοποιούνται δεν είναι όμοια, Στην [13] το εξωτερικό σύνορο είναι μία έλλειψη και το πλέγμα είναι λίγο πιο πυκνό από το παρών (22330 κόμβοι έναντι 28809). Στα θετικά όμως που επιτρέπουν τη σύγκριση των δύο εφαρμογών είναι ότι, πρώτον οι γεωμετρίες των δύο αεροτομών είναι αρκετά κοντινές, δεύτερον ο αριθμός των κόμβων στα δύο πλέγματα δεν διαφέρει πολύ και τέλος ότι το σχήμα του εξωτερικού συνόρου που διαφέρει δεν έχει και τόση σημασία μιας και η παραμόρφωση απορροφάται από τα κελιά κοντά στην αεροτομή. Άρα, αν και η σύγκριση δεν μπορεί να είναι ακριβής, παρέχεται μια πολύ καλή εικόνα για τις δυνατότητες της κάθε μεθόδου.

Η υπάρχουσα μέθοδος που χρησιμοποιείται στην [13] είναι σε θέση να παραμορφώσει το πλέγμα χωρίς να εμφανιστούν ανεστραμμένα κελιά μέχρι και για $A = 0.04$, ενώ για $A = 0.1$ έχουν εμφανιστεί αρκετά ανεστραμμένα κελιά. Εν αντιθέσει η νέα μέθοδος είναι σε θέση να παραμορφώσει αποδοτικά το πλέγμα ακόμη και για $A = 0.13$ χωρίς την παραγωγή κανενός ανεστραμμένου κελιού, δηλαδή παρατηρείται ένας υπερτριπλασιασμός των δυνατοτήτων της μεθόδου. Αυτό συμβαίνει μιας και όπως έχει ήδη αναφερθεί η υπάρχουσα μέθοδος υπολογίζει την περιστροφή των συνοριακών κόμβων, σαν το σώμα(εσωτερικό σύνορο) να κινείται ως απόλυτο στερεό, ενώ στην παρούσα εφαρμογή το σώμα κάθε άλλο παρά σαν απόλυτο στερεό παραμορφώνεται. Στην ενότητα 2.9 η διαφορά αυτή των μεθόδων εξηγείται αναλυτικότερα. Στον πίνακα Β.1 αναφέρονται χαρακτηριστικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές του A και στο σχήμα Β.1 παρουσιάζεται το παραμορφωμένο πλέγμα για τιμή του A ίση με 1.3.

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέγιστο	Ελάχιστο	Ανεστραμμένα Κελιά
$A = 0.1$	2.2295	0.3414	11.3753	2.0	0
$A = 0.13$	2.4196	0.9465	110.4839	2.0	0
$A = 0.15$	5.4677	509.9503	1.06×10^5	2.0	4

Πίνακας Β.1: Χαρακτηριστικά στοιχεία της ποιότητας του πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 9412 μετά από ημιτονοειδή παραμόρφωση για συχνότητα k ίση με 2 και πλάτος A ίσο με 0.1, 0.13 και 0.15. Η μέθοδος IDW χρησιμοποιείται χωρίς την τεχνική των ολισθαινόντων συνοριακών κόμβων.



Σχήμα Β.1: Η ποιότητα του πλέγματος γύρω από την αεροτομή NACA 9412, μετά από ημιτονοειδή παραμόρφωση της για συχνότητα k ίση με 2 και πλάτος A ίσο με 0.13. Στα πάνω σχήματα παρουσιάζεται το συνολικό πλέγμα, ενώ στα κάτω μόνο η περιοχή γύρω από την αεροτομή. Στη δεξιά στήλη παρουσιάζεται η ποιότητα του πλέγματος με χρήση χρωμάτων, όπου η χρωματική κλίμακα αποδίδει την ποιότητα κάθε κελιού.

Βιβλιογραφία

- [1] F. J. Blom, “Considerations on the spring analogy”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 32, no. 6, pp. 647–668, 2000.
- [2] J. T. Batina, “Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes”, *AIAA Journal*, vol. 28, no. 8, pp. 1381–1388, 1990.
- [3] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, and M. Lesoinne, “Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 163, no. 1-4, pp. 231–245, 1998.
- [4] P. Apostolou, “2d and 3d unstructured mesh displacement - adaptation using torsional springs”, M.S. thesis, National Technical University of Athens, Greece, 2021.
- [5] C. L. Bottasso, D. Detomi, and R. Serra, “The ball-vertex method: A new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, no. 39-41, pp. 4244–4264, 2005.
- [6] K. Stein, T. Tezduyar, and R. Benney, “Mesh moving techniques for fluid-structure interactions with large displacements”, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 70, no. 1, pp. 58–63, 2003.
- [7] J. Witteveen, “Explicit and robust inverse distance weighting mesh deformation for cfd”, in *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, 2010, p. 165.
- [8] Y. Zhao and A. Forhad, “A general method for simulation of fluid flows with moving and compliant boundaries on unstructured grids”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 192, no. 39-40, pp. 4439–4466, 2003.
- [9] A. de Boer, M. van der Schoot, and H. Bijl, “Mesh deformation based on radial basis function interpolation”, *Computers and Structures*, vol. 85, no. 11, pp. 784–795, 2007.
- [10] A. Liatsikouras, “Programming of a mesh displacement method using radial basis functions and a preconditioner for use in aerodynamic optimization”, M.S. thesis, National Technical University of Athens, Greece, 2021.
- [11] X. Liu, N. Qin, and H. Xia, “Fast dynamic grid deformation based on delaunay graph mapping”, *Journal of Computational Physics*, vol. 211, no. 2, pp. 405–423, 2006.
- [12] A. G. Tsolovikos, “Deformation of computational meshes using delaunay graph parameterization - applications in the adjoint-based aerodynamic shape optimization”, M.S. thesis, National Technical University of Athens, Greece, 2018.
- [13] A.-T. Naidi, “Adaptive mesh deformation using the inverse distance weighting interpolation method”, M.S. thesis, National Technical University of Athens, Greece, 2021.
- [14] D. Shepard, “A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data”, ser. ACM '68, New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 1968, pp. 517–524.

-
- [15] E. Luke, E. Collins, and E. Blades, “A fast mesh deformation method using explicit interpolation”, *Journal of Computational Physics*, vol. 231, no. 2, pp. 586–601, 2012.
- [16] H. Goldstein, “Classical mechanics”, in 3rd ed. Addison-Wesley Reading, 1980, ch. 4.4, pp. 150–154.
- [17] K. Shoemake, “Animating rotation with quaternion curves”, *SIGGRAPH Comput. Graph.*, vol. 19, no. 3, pp. 245–254, Jul. 1985.
- [18] R. Goldman, “Understanding quaternions”, *Graphical Models*, vol. 73, no. 2, pp. 21–49, 2011.
- [19] W. R. Hamilton, “Theory of quaternions”, *Proceedings of the Royal Irish Academy (1836-1869)*, vol. 3, pp. 1–16, 1844.
- [20] D. Maruyama, D. Bailly, and G. Carrier, “High-quality mesh deformation using quaternions for orthogonality preservation”, *AIAA journal*, vol. 52, no. 12, pp. 2712–2729, 2014.
- [21] E. B. Dam, M. Koch, and M. Lillholm, “Quaternions, interpolation and animation”, in Citeseer, 1998, vol. 2, ch. 6.1.3, pp. 40–41.
- [22] L. Uyttensprot, “Inverse distance weighting mesh deformation: A robust and efficient method for unstructured meshes”, M.S. thesis, Delft University of Technology, the Netherlands, 2014.
- [23] E. B. Dam, M. Koch, and M. Lillholm, “Quaternions, interpolation and animation”, in Citeseer, 1998, vol. 2, ch. 6.1.3, pp. 42–48.
- [24] B. T. Helenbrook, “Mesh deformation using the biharmonic operator”, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 56, no. 7, pp. 1007–1021, 2003.
- [25] A. A. Johnson and T. E. Tezduyar, “Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 119, no. 1-2, pp. 73–94, 1994.